T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	無限領域を考慮した軸対称音源による放射音場の計算
Title	
著者(和文)	蜂屋 弘之, 大槻 茂雄, 奥島 基良
Author	hiroyuki hachiya, SHIGEO OHTSUKI, Motoyoshi Okujima
出典(和文)	日本音響学会誌, Vol. 45, No. 2, pp. 115-119
Journal/Book name	, Vol. 45, No. 2, pp. 115-119
発行日 / Issue date	1989, 2

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

論　　文　　43.30.Jx; 43.20.Rz

日本音響学会誌 45巻2号 (1989)

無限領域を考慮した軸対称音源による放射音場の計算*

蜂屋弘之・大槻茂雄・奥島基良**
(東京工業大学精密工学研究所)

(昭和63年7月22日受理)

内容梗概　水中で使用する各種の音響機器の性能を十分に発揮するためには，機器の送受波器の指向特性を把握することが重要である。本論文では，外部無限領域への音響放射のある軸対称音源からの音場を計算する手法と高音速材料を装着した円筒振動子への適用結果について述べている。まず，軸対称音場の計算法の定式化を行い，円板振動子の計算結果と理論解の比較から，計算精度について検討を加えた。次に，水中用機器に広く用いられている円筒振動子単体，及び，円筒振動子に高音速材料を装着した場合の指向特性と近距離音場の計算を行い，本計算法が十分な精度で音場・指向特性を予測することができ，複雑な条件も柔軟に扱えることを示した。

1. はじめに

水中で使用する各種の音響機器の性能を十分に発揮するためには，機器の送受波器の指向特性を把握することが重要である。この指向特性の計算には，無限空間に音を放射する定常問題を考えねばならない。しかし，水中音響機器に広く用いられている円筒振動子のように，内外面から音響放射がある場合には，指向特性や音場の解析的な扱いが困難で，そのため系統的な扱いが行われていない。更に，実際の使用状況を考慮し，振動子のモールドやバッキングの効果までも含めた送受波器の特性評価は，ほとんど行われていないのが現状である。

このような音場を数値的に計算する方法として，無限に広い音場空間を考慮した有限要素法が提案されている[1]。外部無限領域の処理の方法としては，無限要素を用いるもの[2]，境界要素法による定式化を用いるもの[3]，解析的な関数により定式化するもの[4]，ハイブリッド型無限要素を用いるもの[5]などが考えられている。Huntらは外部無限領域を球面調和波により展開し，仮想球面上の音圧と粒子速度の関係を球面調和波の各モードに対して求め有限要素法と接合を行っている[6]。この方法は，外部無限領域を解析的な関数により展開する手法に属し，各球面調和波に対して放射インピーダンスが単純な形で与えられ，外部音場が柔軟に扱える反面，各モードごとに計算を行うという複雑な計算過程と球ハンケル関数の計算が要求される。

しかし，水中で使用する各種音響機器に広く用いられている円筒振動子の指向特性などのように，軸対称な音響放射のみを考えればよい問題も多い。また，このような問題で必要とされるのは，外部無限領域の音場である場合が多く，外部音場を解析的に扱えることが有利である。本論文では，軸対称音場の場合について，外部無限領域の効果を球面調和関数展開を利用し，仮想境界面上の音響アドミタンスの形に定式化する。基本的な手法はHuntらの方法に沿っているが，軸対称な場合について定式化すると，音響アドミタンスが簡潔な形で表示でき，従来から広く用いられている軸対称有限要素に容易に接合できることを示す。この音響アドミタンス項を加えても，有限要素法の系行列を解くための計算時間・記憶容量も大きく変化はしない。本計算法では，仮想境界の内部は有限要素法によって記述されるので，振動子に高分子材料などの音響材料が装着されている場合などの複雑な状況に柔軟に対応できる。更に，外部音場が軸対称な球面調和波の和で解析的に表現されるので，外部自由音場の様子を容易に扱うことができ，また，任意の指向特性を設計しようとしたり，外部音場から音響放射体の振動状態を推定するような逆問題にも，比較的容易に対応できると考えられる。

この論文では，まず，軸対称音場の計算法の定式化を行い，よく知られている円板振動子の指向特性と放射インピーダンスの計算を行い，計算精度について検討を加えた。次に，水中用機器に広く用いられている円筒振動子の指向特性と近距離音場の解析を行い，測定結果と比較した。また，音響材料を装着した例として，円筒振動子に高音速材料を装着した場合の指向特性と近距離音場の計算も行い，本計算法の有効性について考察した。

---

* Calculation of the sound field of an axisymmetric sound projector considering an infinite space.

** Hiroyuki Hachiya, Shigeo Ohtsuki and Motoyoshi Okujima (Research Laboratory of Precision Machinery and Electronics, Tokyo Institute of Technology, Yokohama, 227)

2. 計算方法

軸対称な任意形状を持つ音源の指向特性を計算するため，外部無限領域の音場を球面調和波により展開し，仮想境界球面上の音響アドミタンスとして定式化する。

まず，**Fig. 1** のような半径 a の仮想境界球面上の音圧 p と粒子速度 v をそれぞれ球面調和波で展開する。ここで，軸対称の場合を考えているので，

$$p(\boldsymbol{r})=p(a,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}p_l(a)Y_l^0(\theta) \tag{1}$$

$$v(\boldsymbol{r})=v(a,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}v_l(a)Y_l^0(\theta) \tag{2}$$

ここで，$p_l(a)$, $v_l(a)$ は l, 0次の球面調和波成分の振幅である。また，Y_l^0 は l, 0次の球面調和関数で次式で表される。

$$Y_l^0(\theta)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$$

$P_l(\cos\theta)$ はルジャンドル多項式である。

l 次の球面調和波の音圧振幅と粒子速度振幅に関して次の関係がある[6]。

$$p_l(a)=j\omega\rho a\lambda_l(ka)v_l(a) \tag{3}$$

ここで，

$$1/\lambda_l(ka)=l+1-ka[h_{l-1}^{(2)}(ka)/h_l^{(2)}(ka)]$$

$h_l^{(2)}(ka)$: l 次の第2種球ハンケル関数

ω: 角速度，ρ: 密度，k: 波数

半径 a の仮想境界球面を L 個の点で離散化したとすると，角度 θ の点上の音圧と粒子速度は L 個の球面調和関数の和として，次のように表現できる（以下では，$p(a,\theta)$, $v(a,\theta)$ を $p(\theta)$, $v(\theta)$ と省略して表記する）。

$$p(\theta)=\sum_{l=0}^{L}p_l(a)Y_l^0(\theta) \tag{4}$$

$$v(\theta)=\sum_{l=0}^{L}v_l(a)Y_l^0(\theta) \tag{5}$$

(3)式の関係を用いると，軸対称音場の L 個に離散化した仮想球面上の各点の音圧 ($p(\theta_l)$, $l=1\sim L$) と粒子速度 ($v(\theta_l)$, $l=1\sim L$) の関係は，次のようなマトリクスで表現できる。

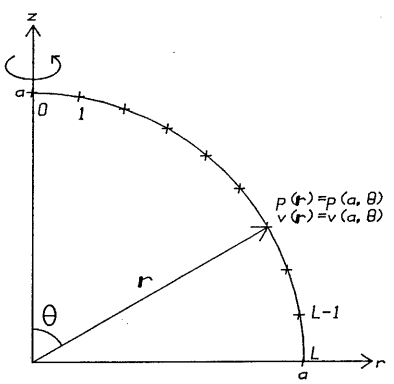

Fig. 1 Axisymmetric sound field and boundary to be considered.

$$\begin{bmatrix}v(\theta_0)\\ \vdots \\ v(\theta_L)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\\ \boldsymbol{y} \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}p(\theta_0)\\ \vdots \\ p(\theta_L)\end{bmatrix} \tag{6}$$

ここで，

$$\begin{bmatrix}\\ \boldsymbol{y} \\ \\ \end{bmatrix}=(1/j\omega\rho a)\begin{bmatrix}Y_0^0(\theta_0) & \cdots & Y_L^0(\theta_0)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_0^0(\theta_L) & \cdots & Y_L^0(\theta_L)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\lambda_0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_0^0(\theta_0) & \cdots & Y_L^0(\theta_0)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_0^0(\theta_L) & \cdots & Y_L^0(\theta_L)\end{bmatrix}^{-1} \tag{7}$$

これにより，軸対称な外部無限領域の効果は，式(7)で表される仮想球面上の音響アドミタンスの形に定式化される。ここで，外部無限音場の球面調和波展開を，有限個の L 次で打ち切っていることによる誤差が考えられるが，仮想境界球面を適当な個数で分割してやれば，球面調和関数の高次の項の影響は十分小さくなり，必要な精度で計算が可能と考えられる。なお，音場が上下面対称の場合には，偶数次の球面調和関数のみを考慮すればよく，$l=0,2,4,\cdots,2L$ と置き換えて音響アドミタンスマトリクスを求めればよい。

外部無限領域を考慮した音響問題の有限要素法は，従来の有限要素法に無限領域の効果を示す音響アドミタンス項 $[\boldsymbol{y}]$ を加えることにより，次のように表される。

$$\begin{bmatrix}[\boldsymbol{Y}]_{vv} & [\boldsymbol{Y}]_{vF} & [\boldsymbol{Y}]_{vC}\\ [\boldsymbol{Y}]_{Fv} & [\boldsymbol{Y}]_{FF} & [\boldsymbol{Y}]_{FC}\\ [\boldsymbol{Y}]_{Cv} & [\boldsymbol{Y}]_{CF} & [\boldsymbol{Y}]_{CC}-[\boldsymbol{y}]_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{\boldsymbol{p}\}_v\\ \{\boldsymbol{p}\}_F\\ \{\boldsymbol{p}\}_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\{\boldsymbol{v}\}_v\\ \{\boldsymbol{0}\}_F\\ \{\boldsymbol{0}\}_C\end{bmatrix} \tag{8}$$

ここで，

$$[\boldsymbol{Y}]=j\left(\frac{1}{\rho\omega}[\boldsymbol{M}]-\frac{\omega}{\rho}[\boldsymbol{K}]\right)$$

$[\boldsymbol{M}]$: イナータンスマトリクス

$[\boldsymbol{K}]$: エラスタンスマトリクス

$\{\boldsymbol{p}\}$: 音圧ベクトル

$\{\boldsymbol{v}\}$: 体積速度ベクトル

添字 v は駆動面を，C は境界面を，F は内部を示す。

本論文では，軸対称問題を考えているので，軸対称環状要素を用いて，イナータンスマトリクス，エラスタンスマトリクスを求める[7]。音源の形状と振幅に応じて体積速度ベクトルを与え，式(8)の1次方程式を解けば内部領域の各点の音圧が求まる。更に，外部無限領域の任意の点の音場 $p(r,\theta)$ は，境界面上の球面調和波展開係数 $p_l(a)$ を用いて次式で求まる。

$$p(r,\theta)=\sum_{l=0}^{L}p_l(a)[h_l^{(2)}(kr)/h_l^{(2)}(ka)]Y_l^0(\theta) \tag{9}$$

ここで，$h_l^{(2)}(ka)$ は l 次の第2種球ハンケル関数である。なお，境界面上の球面調和波展開係数 $p_l(a)$ は，境界面上の音圧 $p(a,\theta)$ から，次式で求められる。

$$\begin{bmatrix} p_0(a) \\ \vdots \\ p_L(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0^0(\theta_0) & & Y_L^0(\theta_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_L^0(\theta_0) & & Y_L^0(\theta_L) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p(\theta_0) \\ \vdots \\ p(\theta_L) \end{bmatrix} \qquad (10)$$

このように本計算法では，外部無限領域を球面調和関数で展開することで，仮想境界面上で解析的に記述される音響アドミタンスを従来より広く用いられている有限要素法の系マトリクスに加えるだけで，無限領域を考慮した軸対称音場を計算することができる。更に外部無限領域の音場も球面調和波展開の形で記述され，容易に指向特性や振動子近傍の音場を求めることができる。また，音響アドミタンスを表す行列 [$\boldsymbol{y}$] は密行列であるが，計算される全体のマトリクスのバンド幅はほとんど変化しないので，(8)式の連立方程式を解くための計算量もほとんど変わらない。

3. 円板振動子の特性の計算

無限大バッフル上に取りつけられた円形振動子の放射インピーダンスと指向特性を本計算法で計算し，この結果と理論解を比較し，本計算法の精度等について検討した。**Fig. 2** に計算に用いた要素分割を示す。分割は，1次試験関数による軸対称要素により行った。節点数は82個，要素数は129個である。円板振動子表面は一様なピストン振動をしているものとした。円板振動子の半径を100 mm 一定とし，周波数を変化させ音響放射インピーダンスと指向特性を求めた。**Fig. 3** に音響放射インピーダンスの計算結果と理論解の比較を示す。実線と点線が本計算法による音響放射インピーダンスの実部と虚部を，破線と一点鎖線が理論解による実部と虚部を示す。実部・虚部ともに $ka=4$ 程度までは非常によく一致しており，$ka=4$ のときの誤差は虚部において絶対値の約4.2% である。$ka=4$ のとき，一つの要素の大きさは水中の音波の波長の 1/10 程度にあたる。

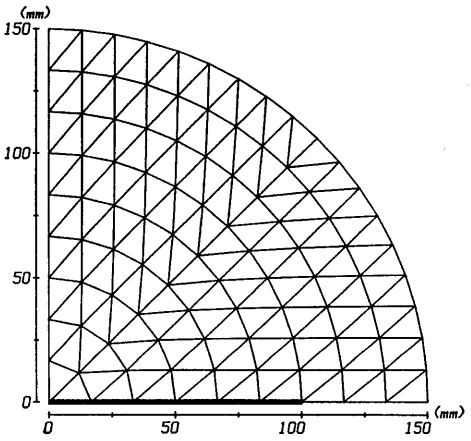

Fig. 2 Cross-section of sound field divided into elements for a circular piston.

Fig. 4 に指向性の計算結果と理論解の比較を示す。実線が有限要素法による計算値，点線が理論解を示す。$ka=2$ では，両者は非常によく一致している。$ka=4$ では指向特性に感度ゼロとなる方向があり，感度最小になる方向については計算値と理論解が一致している。この方向での感度の計算値は −25 dB であり，最大感度方向の振幅値の約5.5% の誤差と見積もられる。感度ゼロとなる角度付近は感度の変化が大きく，最も誤差が大きくなる場合と考えられるが，このときでも数パーセントの誤差で感度を計算できる。

周波数が高くなるにつれ，一つの要素の大きさが，音波の波長 λ に対して相対的に大きくなり，要素内部の音場を1次関数で表現することと，外部無限音場を有限個の球面調和関数の和で表現することによる誤差が大きくなってくる。しかし，円板振動子の放射インピーダンスと指向特性の計算値と理論解の比較から，本計算法で

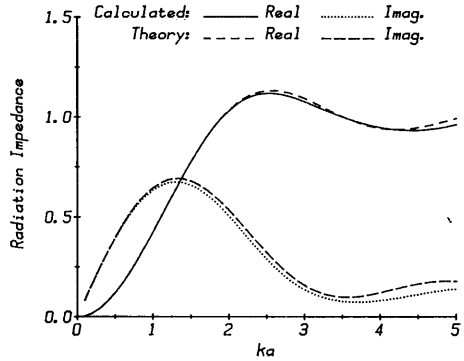

Fig. 3 Radiation impedance of a circular piston.

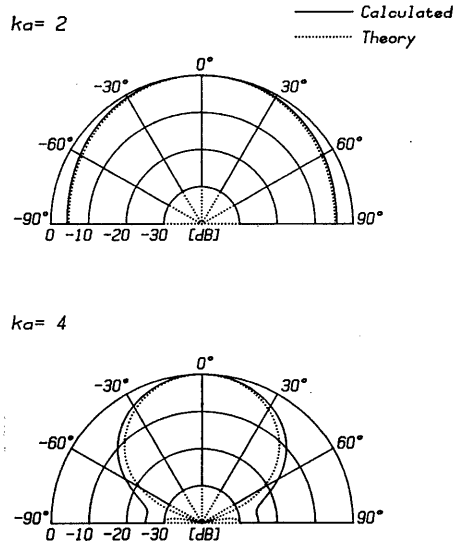

Fig. 4 Directivity pattern of a circular piston.

は，1次試験関数を用いた場合，一つの要素の大きさを1/10波長程度に分割すれば，サイドローブレベルを論じるような場合を除けば，十分な精度で音場や指向性を予測できると考えられる。

4. 円筒振動子の放射音場の計算

4.1 円筒振動子単体の指向特性と近距離音場

内外面より音響放射のある円筒振動子の指向特性と振動子近傍の音場を本計算法を用いて計算し，測定結果と比較した。内外面より音響放射のある円筒振動子の指向特性や近距離音場は，これまで系統的にはほとんど検討されていない。計算に用いた振動子は内径 46 mm・外径 62 mm・高さ 30 mm の PZT 円筒振動子である。**Fig. 5** に計算に用いた要素分割を示す。ここでは，円筒振動子の内面と外面が一様な振幅で振動する呼吸振動モードを考えているので，指向特性の計算には対称性を考慮して図のように円筒振動子断面の 1/4 の領域を考えればよい。節点数は 240 個，要素数は 415 個とした。要素は1次試験関数による軸対称三角要素であり，その寸法は 21 kHz における水中波長の約 1/14 である。また，円筒振動子の内面と外面は，一様に等振幅・逆位相で振動しているものとした。

水中で円筒振動子が 21 kHz で送波したときの指向特性の計算結果を **Fig. 6** の実線で示す。水中の音速は

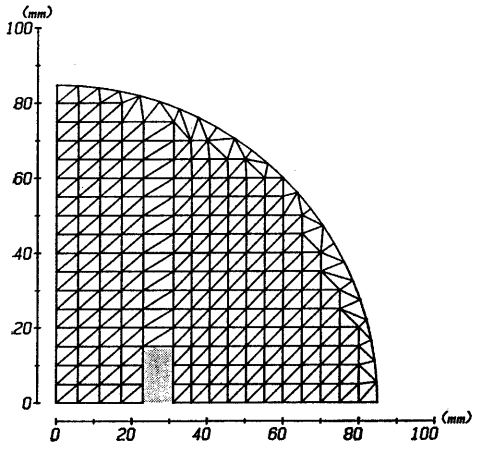

Fig. 5 Cross-section of sound field and cylindrical transducer divided into elements.

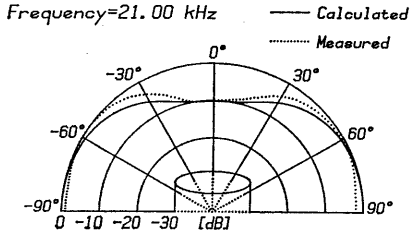

Fig. 6 Calculated and measured directivity patterns of the cylindrical transducer element.

1,500 m/s，水の密度は 1 g/cm³ としている。点線は実験による測定結果である。両者は±約 2 dB 以内の誤差でよく一致しており，本計算法が，内外面から同時に音波が放射される円筒振動子の指向特性を精度よく求めていることが分かる。図に見られる円筒軸方向での感度の低下は，振動子の内側と外側から放射される音波が逆位相で干渉するためと考えられる。

水中で円筒振動子が 21 kHz で送波したときの振動子近傍の音圧分布を **Fig. 7** に示す。Fig. 7(a) が実験による測定結果，Fig. 7(b) が計算結果である。測定は超小型ハイドロフォン (B & K 8103 直径 9.5 mm 長さ 50 mm) を用いて行った。振動子内側の音圧は変化が急激で正確に測定するのが困難なため，測定結果からは除いてある。音圧は，それぞれの結果の最大音圧の点での値が 0 dB となるように規格化してある。計算では，要素の大きさを水中の音波の波長の 1/14 程度としており，また円筒振動子近傍の音場の変化は比較的緩やかであるので，円板振動子の検討結果から考えて，この場合十分な精度での計算が可能と予想できる。測定結果と計算結果を比較しても，両者はよく一致しており，本計算法を用いれば，円筒振動子の近距離音場を十分な精度で予測できる。

4.2 高音速材料を装着したときの円筒振動子の指向特性と近距離音場

次に，振動子に音響材料を装着した場合の例として，円筒振動子に高音速材料シンタクチックフォームを装着したときの指向特性と近距離音場の変化を予測できるか検討した。シンタクチックフォームは本来，深海用浮力材として使用する目的で開発されたもので，中空微小ガラス球をエポキシ樹脂で固めたものである。シンタクチックフォームの音速は 2,500 m/s で，水の音速 1,500 m/s よりも大きいので，シンタクチックフォームを振動子に装着した場合，音速の違いにより振動子から放射される音波の位相が変化し，そのため指向特性が変化すると考えられる。なお，シンタクチックフォームの密度は 0.57 g/cm³ であり，音響インピーダンスが水のそれとほぼ等しい。シンタクチックフォームは固体であるから厳

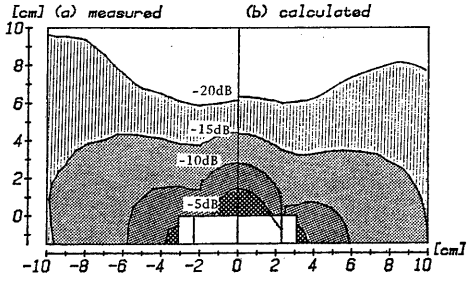

Fig. 7 Calculated (right) and measured (left) sound field near the cylindrical transducer element.

密には剛性を考慮しなければならないが，シンタクチックフォームの寸法が波長よりも小さいので，その影響はわずかであると考え，流体として取り扱って計算を行った。

Fig. 8 に示すように，円筒振動子の内側に円筒振動子の内側と同じ直径と高さを持つシンタクチックフォーム円筒をぴったりと装着した場合について計算と測定を行った。**Fig. 9** に周波数が 21 kHz のときの指向特性の計算結果と実験結果を示す。実線が計算結果，点線が測定結果である。シンタクチックフォームの挿入により，Fig. 6 と比較して円筒軸方向の感度が大きくなっているが，これは振動子内面から放射される音波の位相が変化したためと考えられる。横（±90°）方向に近づくにつれて測定結果の方が感度が小さくなる傾向があり，真横方向では約 4 dB の低下となるが，円筒軸方向に近い ±40° 以内の方向では ±2 dB 以内で比較的よく一致している。

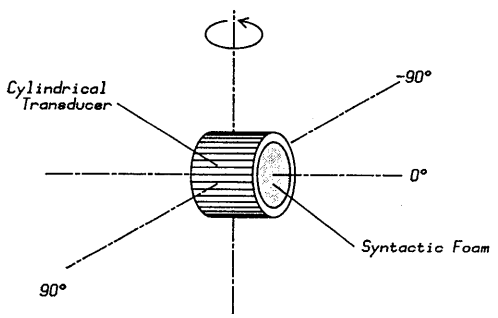

Fig. 8 Configuration of the cylindrical transducer with syntactic foam.

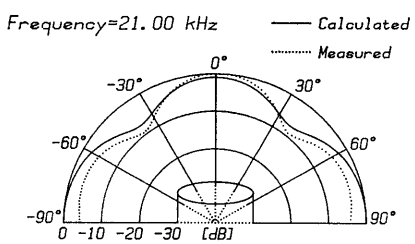

Fig. 9 Calculated and measured directivity patterns of the cylindrical transducer with syntactic foam.

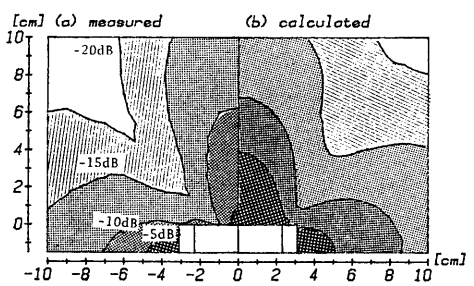

Fig. 10 Calculated (right) and measured (left) sound field near the cylindrical transducer with syntactic foam.

る。振動子近傍の音場の計算結果と測定結果の比較を **Fig. 10** に示す。音圧の弱い 40° 方向と振動子の正面近傍で両者にやや差が目立つものの，その他の部分，全体の傾向はよく一致している。

指向特性・近距離音場とも測定結果と計算結果は可成りよく一致しており，本計算法により，異なった伝搬媒質を装着した場合にも十分な精度で指向特性や近距離音場を予測できることが分かった。

5. おわりに

本論文では，無限領域へ音響放射のある軸対称音源からの音場を計算する手法と高音速材料を装着した円筒振動子への適用結果について述べた。まず，外部無限領域の音場を球面調和波により展開し，その効果を境界面上の音響アドミタンスの形に定式化した。この音響アドミタンスマトリクスは有限要素法マトリクスと容易に接合できる。無限領域への音響放射の効果を示すこの音響アドミタンスマトリクスを考慮した有限要素法で円板振動子の放射インピーダンスと指向特性を計算し，理論解と比較したところ，要素の大きさが波長の 1/10 程度の分割をすれば，十分な精度で音場や指向特性を予測できることが分かった。

更に，内外面から音響放射のある円筒振動子の指向特性と振動子近傍の音場を計算し，測定結果と比較したところ，両者はよく一致した。本計算法は外部音場が解析的な形で与えられるので指向特性や音場を求めるのが容易である。また，円筒振動子の内側に高音速材料シンタクチックフォームを装着した場合にも，十分な精度で音場・指向特性を予測することができ，複雑な条件も柔軟に扱えることが示された。以上より，本計算法を用いれば，軸対称音源の指向特性や音場を精度よく予測できることが分かった。

文　献

1) 加川幸雄，開領域問題のための有限／境界要素法（サイエンス社，東京，1983）.
2) 加川幸雄，山淵龍夫，川上勝己，“無限要素を用いたポアソン，ヘルムホルツ開領域問題の解析，”信学論 **J65-A**, 1262-1269 (1982).
3) 高田寛太郎，“無限大バフルに取り付けられたピストンコーンの放射インピーダンス，”音響学会誌 **38**, 71-75 (1982).
4) 山淵龍夫，加川幸雄，大家左門，進藤武男，“放射を伴う音響伝送系の有限要素シミュレーション，”信学論 **J61-A**, 706-713 (1978).
5) 山淵龍夫，加川幸雄，“ハイブリッド型無限要素を用いたポアソンヘルムホルツ開領域問題の解析，”信学論 **J68-A**, 239-246 (1985).
6) J.T. Hunt, M.R. Knittel and D. Barach, “Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures,” J. Acoust. Soc. Am. **55**, 269-280 (1974).
7) 加川幸雄，有限要素法による振動・音響工学／基礎と応用（培風館，東京，1981），p. 160.