

論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	最少乗算器構成による低感度デジタルフィルタ
Title(English)	Low-Sensitivity Digital Filters with a Minimal Number of Multipliers
著者(和文)	西原明法
Authors(English)	AKINORI NISHIHARA
出典(和文)	電子通信学会論文誌(A), Vol. 61-A, No. 9, pp. 911-918
Citation(English)	, Vol. 61-A, No. 9, pp. 911-918
発行日 / Pub. date	1978, 9
URL	http://search.ieice.org/
権利情報 / Copyright	本著作物の著作権は電子情報通信学会に帰属します。 Copyright (c) 1978 Institute of Electronics, Information and Communication Engineers.

最少乗算器構成による低感度ディジタルフィルタ

正 員 西原 明法†

Low-Sensitivity Digital Filters with a Minimal Number of Multipliers

Akinori NISHIHARA†, Regular Member

あらまし ディジタルフィルタの設計に際しての重要な問題の一つとして、与えられた伝達関数を最少素子数で実現し、語長制限の影響の小さな回路構造を求めることがある。係数語長については、伝達関数の変形により係数感度の低いものを見出せるが、演算語長については、多くの回路について丸め雑音を計算し、小さなものを選ぶのが現状である。このため、すべての等価回路の検討が必要である。本論文では、まず低感度ディジタルフィルタの伝達関数について考察し、これを実現する方法として帰還路付加法を提案する。乗算器係数が十分小さく無視できるとしたときの、単純化された回路を骨組として構成し、これに枝を補うことによって、乗算器数が最少の回路が、すべての等価回路と共に得られることを示した。この方法によって2次までの各種低感度ディジタルフィルタを構成し、その感度と丸め雑音についても考察している。

1. ま え が き

ディジタルフィルタの設計における問題点の一つに、与えられた伝達関数を実現するのに適した回路構造を求めることがある。回路はできる限り単純で、しかも安定であることが望ましい。最も単純な構成法は直接形で、2次までのフィルタにはよく用いられている。直接形構成では、乗算器係数が伝達関数の係数に一致しており、構成は容易であるが、狭帯域特性を実現する場合や、次数が高い場合には、語長制限による影響が大きく、不安定になることさえある⁽¹⁾。語長制限の影響を軽減するには、伝達関数を分解または変形して乗算器の係数感度を小さくし、高次のフィルタは、1次、2次の縦続接続によるという方法が多く用いられる。

低感度フィルタの構成法としては、抵抗終端リアクタンス回路をシミュレートする方法が種々提案されているが、構成の複雑さのためにあまり利用されず、実際によく用いられるのは縦続形構成である。縦続形構成では、伝達関数の各根を分離した部分回路で実現するため、特性変化の推定、安定性の判別などが容易であ

り、更にハードウェアを実現する場合に汎用性があり有利である。本論文では縦続形構成を念頭において、1次、2次のフィルタについてのみ考える。

2次ディジタルフィルタの低感度構成として結合形⁽¹⁾が有名であるが、必要な乗算器数が多くなるため、たとえ感度は低くても全体のハードウェア量が減少するか否かは疑わしい。そこで本論文では乗算器数が必要最少限であるものを考える。乗算器数を減らすために、フィルタの利得に関するパラメータを1(0 dB)に規格化しても一般性を失わないばかりか、信号レベルが上下せず、ダイナミックレンジの点で有利である。この規格化によって低域通過フィルタ(LPF)の直流利得や帯域通過フィルタ(BPF)の中心利得などは係数の変動に関係なく1となるから、これらの周波数では感度は完全に零であり、その近傍である通過域内では感度はそれほど高くないことが予想される。ところが、このような伝達関数では、乗算器係数が分母分子双方に関係するため、従来の構成法で最少乗算器数の回路を得るには、かなり煩雑な手数を要した。

丸め誤差の影響については、係数感度の低いフィルタでは丸め雑音は小さいことが知られているが⁽²⁾、係数感度の等しいフィルタでも、丸め雑音の大きさは一般に異なり、多くの等価回路の中から最適な構造を選ぶのが現状である。このため、回路構造の決定に際

†東京工業大学工学部電子物理工学科、東京都
Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology,
Tokyo, 152 Japan

論文番号: 昭 53-442[A-144]

しては、すべての等価回路が得られることが必要である。

本論文では、低感度伝達関数を最少乗算器数で実現する方法として帰還路付加法を提案し、2次までの各種低感度フィルタを導く。

2. 低感度伝達関数

伝達関数 $H(Z)$ をもつデジタルフィルタの乗算器 x に対する振幅特性の感度 $S_x^{[H]}$ は、

$$S_x^{[H]} = \frac{x}{|H|} \frac{\partial |H|}{\partial x} \quad (1)$$

で定義される。狭帯域デジタルフィルタでは、伝達関数の係数は整数に近い値をとることが知られている⁽³⁾。今、 x が整数 n に近いとすれば、同じ語長で実現するとき、 x を $n-x'$ とし、小さな数 x' を実現する方が精度が高くなる。デジタルフィルタでは整数倍の乗算は正確に行われ、その感度は零である。新しい係数 x' に対する感度は、

$$S_{x'}^{[H]} = S_x^{[H]}, S_x^{[H]} = -\frac{x'}{x} S_x^{[H]} \quad (2)$$

となる。 x は整数 n に近く、 x' の絶対値は小さいから、

$$|S_{x'}^{[H]}| < |S_x^{[H]}| \quad (3)$$

となり、感度が低下している。係数の絶対値が大きい乗算器があれば、上述の方法で修正し、感度を下げることができるため、低感度デジタルフィルタには、絶対値が 0.5 を越える乗算器はない。しかしながら、乗算器係数が小さいだけで良いというものではなく、パラメータの選び方に自由度があり、それによって感度特性が異なる。

Avenhaus⁽⁴⁾ は、結合形と同様の考え方により、係数感度を、極、零点の存在し得る格子点の密度としてとらえている。低感度フィルタの格子点密度は高くなっており、以下でもそのような伝達関数を導く。

2.1 1次LPF

直流利得が1である1次LPFは、シャ断周波数を決めるパラメータ1個のみをもっており、これを a と置くと、伝達関数は次のように表せる。

$$H_{1L}(Z) = \frac{f_1(a)(1+Z^{-1})}{1-f_2(a)Z^{-1}} \quad (4)$$

但し、 $f_2(a)$ は a の1次式でなければ1個の乗算器による構成ができない。直流利得の条件より $2f_1(a)=1-f_2(a)$ が成立っており、 $Z=1$ と極との距離 R は

$$R=1-f_2(a)=2f_1(a) \quad (5)$$

で表される。狭帯域フィルタでは R は小さいから、2数の差で表されると精度が低下し、格子点密度も低下

するため避けねばならない⁽⁴⁾。今、1個の小さなパラメータ a により小さな R を表すには R が a を因数とする以外に、 $f_1(a)=a, f_2(a)=1-2a$ を得る。すなわち、

$$H_{1L}(Z) = \frac{a(1+Z^{-1})}{1-(1-2a)Z^{-1}} \quad (6)$$

但し、 $a=1/(1+\cot\theta_0 T/2)$ 、 θ_0 はシャ断角周波数、 T は標本化間隔である。

2.2 2次LPF, BPF

能動フィルタにおけるバイカッド (biquad) 回路のようにLPFとBPFは同一の回路で構成できる可能性がある。LPFの直流利得は $Z=1$ を代入して容易に計算できるが、BPFの中心利得は複雑な式となり、これが1となる条件式を得ることは容易でない。そこで、規格化したアナログフィルタの伝達関数

$$\tilde{H}_{2L}(s) = \frac{1}{s^2 + s/Q + 1} \quad (7a)$$

$$\tilde{H}_{2B}(s) = \frac{s/Q}{s^2 + s/Q + 1} \quad (7b)$$

に双1次Z変換

$$s \rightarrow k \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}, \quad k = \cot \frac{\theta_0 T}{2} \quad (8)$$

を施すと、

$$H_{2L}(Z) = \frac{Q}{Qk^2+k+Q} \frac{(1+Z^{-1})^2}{1 + \frac{2Q(1-k^2)}{Qk^2+k+Q} Z^{-1} + \frac{Qk^2-k+Q}{Qk^2+k+Q} Z^{-2}} \quad (9a)$$

$$H_{2B}(Z) = \frac{k}{Qk^2+k+Q} \frac{(1-Z^{-2})}{1 + \frac{2Q(1-k^2)}{Qk^2+k+Q} Z^{-1} + \frac{Qk^2-k+Q}{Qk^2+k+Q} Z^{-2}} \quad (9b)$$

となる。これを2個のパラメータ a, b で表すために

$$a = \frac{Q}{Qk^2+k+Q} \quad (10a)$$

$$b = \frac{k}{Qk^2+k+Q} \quad (10b)$$

と置けば、 a は極と $Z=1$ との距離を表し、 b は極と単位円との距離に関係するため、1次LPFの場合と同様に通過域付近での格子点密度が高くなる。式(10)により式(9)は、

$$H_{2L}(Z) = \frac{a(1+Z^{-1})^2}{1-2(1-b-2a)Z^{-1}+(1-2b)Z^{-2}}$$

(11a)

$$H_{2B}(Z) = \frac{b(1-Z^{-2})}{1-2(1-b-2a)Z^{-1}+(1-2b)Z^{-2}}$$

(11b)

を得る。式(11a)の形でバターワース特性を実現したときの係数感度 $S_a^{[H]}$, $S_b^{[H]}$ を、低感度で知られる Agarwal らの実現法Ⅱ⁽³⁾と比較してみると、図1のように式(11a)の形が優れていることが分かる。

BPF としては、中心周波数と帯域幅が独立に変変できる次のような関数も有用である。

$$H_{2B}(Z) = \frac{a(1-Z^{-2})}{1-2b(1-a)Z^{-1}+(1-2a)Z^{-2}} \quad (12)$$

但し、

$$a = 1/[1 + \cot\{(\beta_2 - \beta_1)T/2\}]$$

$$b = \cos\beta_0 T = \frac{\cos\{(\beta_1 + \beta_2)T/2\}}{\cos\{(\beta_1 - \beta_2)T/2\}}$$

β_1, β_2 はシャ断角周波数、 β_0 は中心角周波数である。式(12)は式(6)の1次LPFにLPF-BPF周波数変換⁽⁵⁾を施せば得られる。西村ら⁽⁶⁾も同様の性質をもつBPFを求めているが、帯域幅を決めるパラメータについては、もとの1次LPFの感度が保存されるため、式(12)の形の方が低感度である。 b に対する感度は西村らのものと等しく、中心周波数が低いときには感度が高い。このときには b を $1-b'$ で置換えるなどの対策がある。

2.3 ノッチフィルタ

LPF形ノッチフィルタで、シャ断周波数だけでなく、伝送零点も標準化周波数より十分小さいところにあると、LPFからの類推で、次のような式が考えられる。

$$H_{2N}(Z) = \frac{b\{1-(2-a)Z^{-1}+Z^{-2}\}}{1-\{2-a(b+c)\}Z^{-1}+(1-ac)Z^{-2}} \quad (13)$$

2.4 その他のフィルタ

高域通過フィルタ(HPF)はLPFの極と零点の位

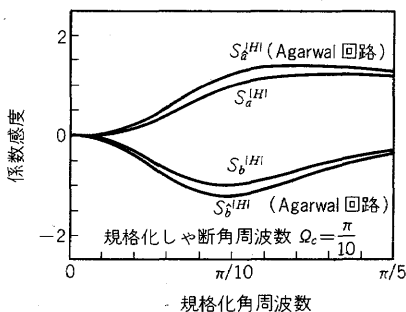


図1 係数感度の比較

Fig.1-Comparison of coefficient sensitivities.

置をZ平面の虚軸に関して対称に移動して得られる。すなわち、

$$Z^{-1} \rightarrow -Z^{-1} \quad (14)$$

という変換を施せばよい。この変換では回路構造に変化はなく、加算器の符号が変わるのみであるから、LPFの構造が知られていれば、HPFはすぐに得られる。1次、2次のHPF及びHPF形ノッチフィルタは、こうして得られるため、詳しく取扱わない。

全域通過フィルタ(APF)の振幅特性は周波数の全域にわたって直通になっており、振幅特性の感度はもとと零である。APFの構成については、Mitraら⁽⁷⁾が取扱っているため、ここでは省略する。

3. 回路構造の決定

係数感度を低くするのは、発振しにくく安定な回路を求めるだけでなく、ハードウェアの複雑さや価格を低減することも目的であるから、乗算器などの数を必要最小限に留めて実現することが重要である。整数倍の乗算器も少ないことが望まれる。2で求めた伝達関数は、パラメータ数の減少と低感度化のための制限が付いているため、従来の方法で最少乗算器数の回路を求めることは困難であった。

回路を記述する種々の方程式のうち、伝達関数は入出力関係を表しているが、内部構造に関する情報はほとんどもない。回路の内部構造に対応するものが節点方程式であるから、構造の決定に当たって節点方程式を利用する方法が考えられる。その一つとして抽出法を簡単に紹介し、これと対比しながら本論文で提案する方法を説明する。

3.1 抽出法

最終的に回路中に含まれる乗算器を規定する構成法として乗算器抽出法⁽⁷⁾があるが、この方法は、伝達関数の係数が乗算器係数そのままであるか、乗算器係数同志の積和の場合にのみ有効である。伝達関数の係数が整数項を含む低感度デジタルフィルタの構成には、乗算器のほかに遅延と節点を抽出する必要がある。

例えば、式(6)の1次LPFを考えてみる。乗算器 a の他に遅延と節点を1個抽出し、図2のようにする。このとき、回路 N を表す伝送行列は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

但し、遅延のないループ(DFL)が生じないように、

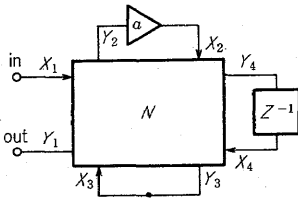


図2 外部条件を付けた4-pair回路
Fig.2-Constrained four-pair.

$t_{22}=t_{33}=0$ としてあるほか、 $t_{23}t_{32}=0$ も成立っていないなければならない。又、外部条件として、

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= aY_2 \\ X_3 &= Y_3 \\ X_4 &= Z^{-1}Y_4 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

がある。これから内部変数を消去して、 Y_1/X_1 を導き、 t_{ij} のうちなるべく多くが零となり、非零のものは±1になるように決める。その結果、図3に示す互いに転置系(transposed system)である二つの回路が得られる。

この例において、乗算器と遅延のみを抽出した場合にも解は存在するが、得られる回路は図3の回路より2倍の乗算器1個だけ余分に必要となる。

抽出法では、1次を越える回路では、未知数の数が膨大となり、内部変数の消去過程も相当複雑で実際のでない。又、それ以前に節点数が確定していないため、抽出すべき節点数を増加させながら試行錯誤によって最適な回路を求めねばならない。

3.2 帰還路付加法

デジタルフィルタの回路構造の決定においては、分母多項式のみ先を考え、後からfeedforward pathを付加して分子多項式を得る方法がよく用いられるが、本論文では、分母多項式を最後に実現する形で段階的に構成する。基本的には抽出法と同様に、接続が不明な部分を未知数として含む節点方程式をつくり、これより伝達関数を算出し、与えられたものと等置して未知数を決定するものであるが、節点方程式を行列でな

く信号流れ線図で表現することが異なる。図式表現によれば、節点数の増減も容易である上、伝達関数の導出にMasonの規則を用いると、行列式の計算より単純である。但し、計算機向きの方法ではない。

今、与えられた伝達関数を最少乗算器数で実現する回路があるとする。すべての乗算器係数を1に比べて十分小さいとして無視すると、伝達関数中の幾つかの項が消え単純な形となる。これは回路構造の上でも、幾つかの枝が切離されて縮小されたことに相当する。この縮小回路はパラメータが少なく、容易に構成でき、構造の種類もそれほど多くない。この回路を骨組として、切断された枝を探して補えば良い。何種類かある骨組回路のどれかに適当に枝を付加すれば、最少乗算器数の回路が復元されると考えられる。枝の切断時に節点が消滅している場合もあるが、乗算器数最少となるように枝を付加すれば、消滅節点も再生できる。

一般によく用いられるフィルタの伝達関数では、分子多項式は単純な形をしていることが多く、まず適当な枝を付加して分子多項式を構成することは容易である。次に分子多項式が変化しないように帰還路を付加して分母多項式を実現する。このとき、DFLが生じるような帰還路を付加してはならない。付加可能なすべての帰還路を列挙しても、2次以下のフィルタではそれほどの手数ではない。分子多項式に影響を与えずに、帰還を掛けて分母多項式を変形する方法として状態帰還がある。遅延を含む帰還ループをつくることは同じであるが、状態帰還のように、状態変数を入力にもどすだけでなく、ここでは、任意の場所から任意の場所への帰還を許す。

この方法によって、2.で求めた伝達関数をもつ回路を求めてみよう。

3.2.1 1次LPF

式(6)の伝達関数で $1 \gg a$ とすると

$$H_{1L}(Z) = \frac{a(1+Z^{-1})}{1-Z^{-1}} \quad (17)$$

となる。 H_{1L} の構成は図4のように4種類ある。

H_{1L} の分子は H_{1L} の分子と既に等しい。分子多項式に影響を与えず、DFLを生じない帰還路は図5に示すように、それぞれ3本ある。

帰還路付加後の分母多項式 D_{1L} をMasonの規則によって求めると、(a)と(d)の回路では

$$D_{1L}(Z) = 1 - Z^{-1} - t_1 Z^{-1} - 2t_2 Z^{-1} - 2at_3 Z^{-1} \quad (18a)$$

又、(b), (c)の回路では、

$$D_{1L}(Z) = 1 - Z^{-1} - at_1 Z^{-1} - t_2 Z^{-1} - 2t_3 Z^{-1} \quad (18b)$$

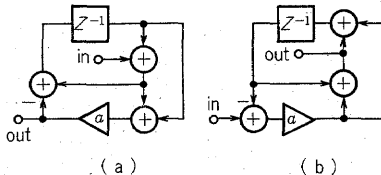


図3 1次LPF

Fig.3-First-order LPF.

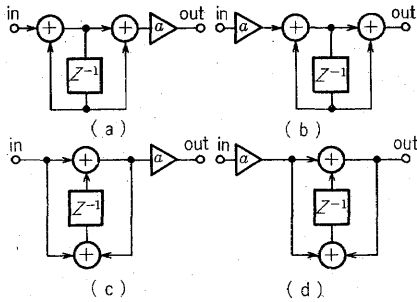


図4 1次LPFの骨組

Fig.4-Frame networks of first-order LPF.

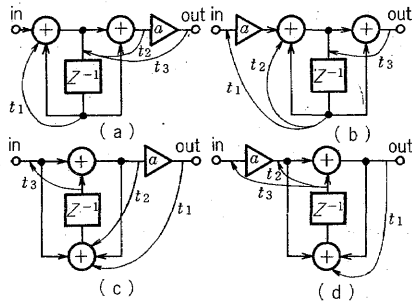


図5 帰還路の付加

Fig.5-Supplement of feedback paths.

となる。式(6)と比較すると、(a), (d)の回路では $t_1 = t_2 = 0, t_3 = -1$, (b), (c)では $t_1 = -2, t_2 = t_3 = 0$ が得られるが、前者の方が2倍の乗算器がないだけ有利である。これは図3の回路と全く等しい。抽出法より格段に容易に回路構造が得られることが分かる。

3.2.2 バイカッド回路

まず、式(11a)のLPFで、 $1 \gg a, b$ とすると、

$$H'_{2L}(Z) = \frac{a(1+Z^{-1})^2}{1-2Z^{-1}+Z^{-2}} = a \left(\frac{1+Z^{-1}}{1-Z^{-1}} \right)^2 \quad (19)$$

が得られる。これを最少素子数で実現するには縦続形がよく、12とおりの構成が可能である。その中で例えば図6のものを考える。

分子多項式は既に式(11a)と一致しているので、これに影響を与えず、DFLを生じない帰還路を考えると、図7に示す11本がある。

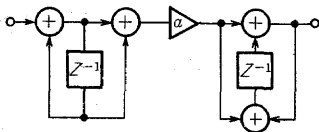


図6 2次LPFの骨組

Fig.6-Frame network of second-order LPF.

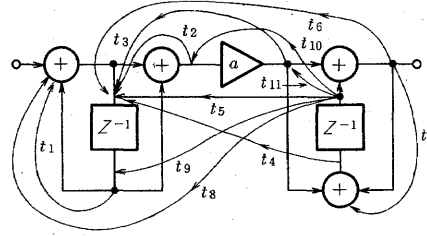


図7 帰還路の付加

Fig.7-Supplement of feedback paths.

伝達関数の分母多項式 $D_{2L}(Z)$ を求めると、

$$D_{2L}(Z) = 1 - [2 + t_1 + t_2(2 + t_1) + t_7(1 + t_{11}) + 2t_{11} + a\{t_3(2 + t_1) + t_4(2 + t_1)(2 + t_7) + t_6(2 + t_1) + t_8(2 + t_7) + t_9(2 + t_1)(2 + t_7) + t_{10}(2 + t_7)\}]Z^{-1} + [1 + t_1(1 + t_7) + t_2(2 + t_1)(1 + t_7) + t_7 + (1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_7)t_{11} - a\{t_5(2 + t_1)(2 + t_7) + t_6(2 + t_1) + t_8(2 + t_7) - t_3(2 + t_1)(1 + t_7) - t_{10}(1 + t_1)(1 + t_7)\}]Z^{-2} \quad (20)$$

が得られる。式(11)の分母と等置して、なるべく多くの t_i が零になるようにすると、

$$t_2 \text{ or } t_{11} = -b, \quad t_4 \text{ or } t_9 = -1$$

となり、全部で4種類の回路となる。それらを整理して描くと図8のとおりである。

図8で(a)と(c), (b)と(d)は互いに転置系である。それぞれに、式(11b)で表されるBPF用の入出力端子があり、バイカッド回路とも呼ぶべきものであろう。この回路は、2個の乗算器のみでLPFとBPFが同時に得られるため、LSI化にも適している。骨組に図6のもの以外を使うと、2倍の乗算器などが余分に必要になる。

次にBPFの方から構成を考えてみる。式(11b)で $1 \gg a, b$ とすると、

$$H'_{2B}(Z) = \frac{b(1-Z^{-2})}{1-2Z^{-1}+Z^{-2}} = b \frac{1+Z^{-1}}{1-Z^{-1}} \quad (21)$$

となる。 H' は式の上で H から導かれるばかりでなく、回路構造の上でも、 a, b が小さいときには H は H' となる。今、式(21)のように、 H' を求めたときに約分されて消えてしまう項があるが、これは、 a, b が小さいときには、この項を表す部分が構造的に分離されていることを示す。この場合の骨組となる回路の例と、それに付加し得る帰還路を図9に示す。

伝達関数が式(11b)と一致するためには、

$$\begin{cases} t_3 = -1 \\ t_4 t_8 \text{ or } t_7 t_8 = -2a \end{cases}$$

であれば良い。これに対応する回路は図8(a), (d)とほ

とんと同じであるが, LPF 用の入出力は直接得られない. 又, 図9の転置系による回路が, 図8(b), (c)に対応する.

3.2.3 2次BPF

式(12)のBPF についても同様に $1 \gg a, b$ とすると,

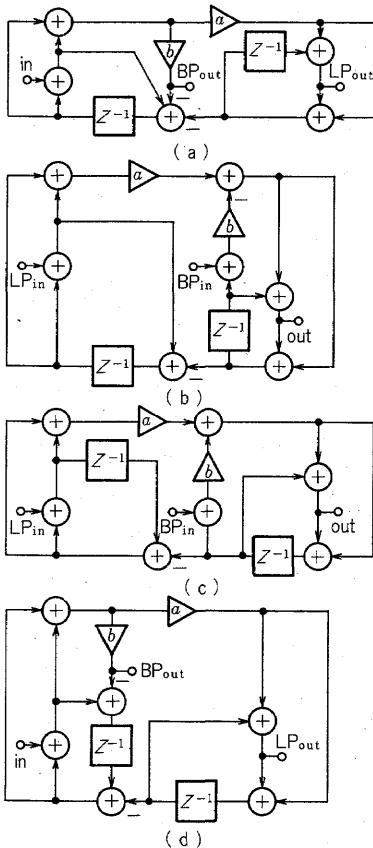


図8 デジタルバイカッド回路
Fig.8-Digital biquad circuits.

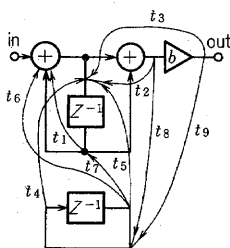


図9 2次BPFの骨組と帰還路の付加
Fig.9-Frame network of second-order BPF and supplement of feedback paths.

$$H'_{2B}(Z) = \frac{a(1-Z^{-2})}{1+Z^{-2}} \quad (22)$$

となる. 骨組と付加し得る帰還路を図10(a)に, 最終的な回路を図10(b)に示す. 式(12)のBPFの伝達関数を最少乗算器数で実現する回路は図10(b)とその転置系の二とおりである.

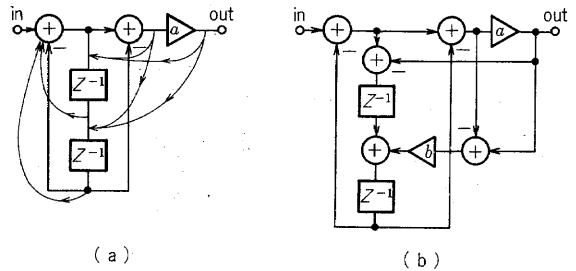


図10 (a) 2次BPFの骨組と帰還路の付加, (b) 2次BPF
Fig.10-(a)Frame network of second-order BPF and supplement of feedback paths, (b)Second-order BPF.

3.2.4 ノッチフィルタ

式(13)のノッチフィルタで, $1 \gg a, b, c$ とすれば,

$$H'_{2N}(Z) = \frac{b(1-2Z^{-1}+Z^{-2})}{1-2Z^{-1}+Z^{-2}} = b \quad (23)$$

であるから, 骨組は図11のようになる. 図11の回路をもとにして, 式(13)の分子多項式を構成する方法は12とおりある. その中で例えば図12のものを用いて, 前と同様に帰還路を付加して, 分母多項式を計算する. 式(13)の分母と比較して,

$$t_3 = -c, \quad t_5 = -1$$

が解となる. この回路を図13(a)に示す. 図12 以外

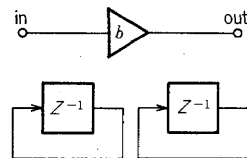


図11 ノッチフィルタの骨組
Fig.11-Frame network of notch filter.

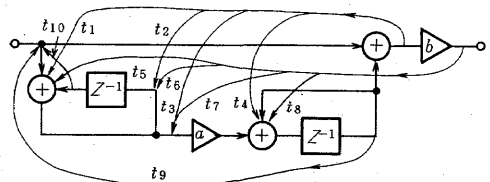


図12 分子の構成と帰還路の付加
Fig.12-Realization of numerator and supplement of feedback paths.

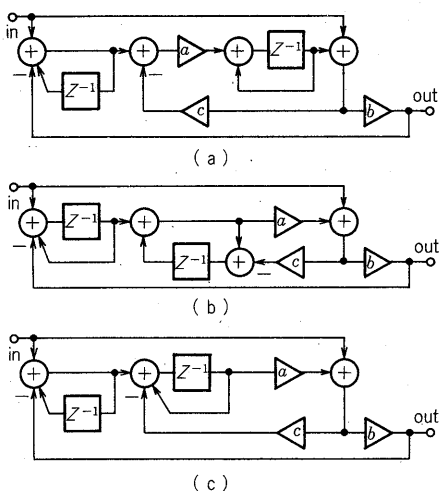


図13 ノッチフィルタ
Fig.13-Notch filters.

から出発したときに得られる回路を図13(b),(c)に示す。結局、式(13)の伝達関数を最少乗算器数で構成する回路は、図13とその転置系で合計6種類ある。

4. 係数感度と丸め雑音

本論文で得られた回路について、係数感度と丸め雑音を調べてみる。

4.1 係数感度の比較

フィルタの乗算器係数は2進浮動小数点数で表し、その仮部数のみを指定された語長に丸めるものとする。固定小数点演算を用いるフィルタにおいても、乗算器係数が定数であれば、これをスケールリングしておき、演算には適当なシフトを組合せれば、有限な語長が有効に利用でき、精度の低下が防止できる。それ故この場合にも乗算器係数は浮動小数点数であると考えて良い。信号の語長は十分長いと仮定し、すべての係数を同じ語長に丸めたときのフィルタの特性の劣化をChrochière⁽⁸⁾の相対誤差で評価する。すなわち、

$$\text{相対誤差} = \begin{cases} \frac{H_{\max} - H_{\min} - A_M}{A_M} & H_{\max} - H_{\min} > A_M \\ 0 & H_{\max} - H_{\min} < A_M \end{cases}$$

但し、 $H_{\max}$: 通過域内での最大振幅 (dB)
 $H_{\min}$: 通過域内での最小振幅 (dB)
 A_M : 仕様で与えられた通過域リプル (dB)
一例として、通過域リプル 0.1 dB の 7 次 チェビシェフ LPF を用いる。フィルタは図 3 の 1 次 LPF 1 段と図 8 の 2 次 LPF 3 段を縦続に接続して実現する。

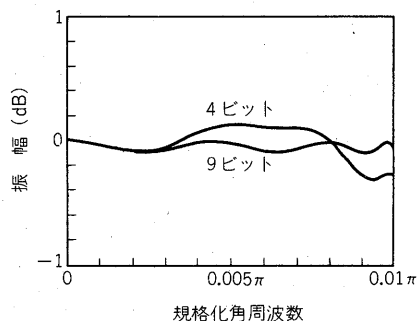


図 14 7 次チェビシェフ LPF の通過域特性
Fig.14-Passband amplitude characteristics of 7th-order chedyshev LPF.

通過域内の振幅特性を図14に、相対誤差を図15に示す。規格化しや断角周波数を $\pi/100$ と小さく選んだにもかかわらず、LCシミュレーション法に近い優れた感度特性を示している。

4.2 丸め雑音の比較

浮動小数点演算では、乗算と加算の後で丸めの操作が行われ、誤差が生ずる。この誤差が信号の大きさに比べて十分小さい場合には、各演算および時刻について統計的に独立であると仮定することができ、正確な演算に白色雑音が重ね合される図16のようなモデルを考えることができる。

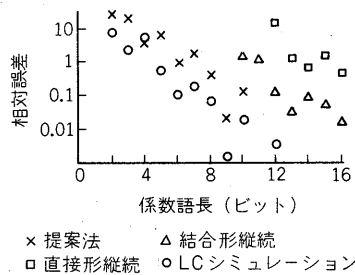


図 15 相対誤差
Fig.15-Relative errors.

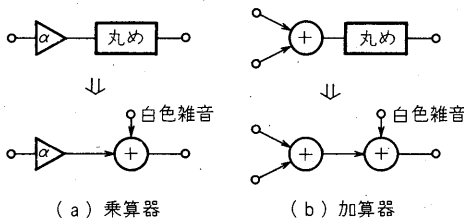


図 16 丸めの白色雑音源モデル
Fig.16-White noise models for rounding.

数が浮動小数点で表されている場合には、丸めは仮数部のみに行われるため、信号レベルに比例した白色雑音を加えられることになる。

伝達関数 $H(Z)$ のフィルタに白色雑音を入力したときの、丸め雑音による出力の分散 σ_n^2 と信号出力の分散 σ_s^2 との比、すなわち NS 比は、次式で与えられる。

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2} = \frac{\sum_k \frac{F_k(Z)F_k(Z^{-1})Z^{-1}dZ G_k(Z)G_k(Z^{-1})Z^{-1}dZ}{\oint H(Z)H(Z^{-1})Z^{-1}dZ}}{2\pi j}$$

但し、 $F_k(Z)$ は入力から k 番目の雑音発生点までの伝達関数、 $G_k(Z)$ は k 番目の雑音源から出力までの伝達関数である。又、語長が b ビットするとき、 $\sigma_e^2 = 2^{-2b}/3$ である。

一例として、2次バターワースLPFを各種回路で構成し、NS比を計算する。仮数部9ビットの語長とし、しゃ断角周波数を変化させたときのNS比を図17に示す。語長1ビットの変化に対してNS比は6dB変る。図8の四つの等価回路について、NS比は1dB以下の差しかないため、最良の(d)の回路で代表した。直接形はJacksonの1D形と2D形⁽⁹⁾をとりあげた。図17から、狭帯域になるほど差が大きいことが分かる。図8の回路は、直接形よりはかなり優れているが、Agarwalの回路より少し劣る。しかしながら、図8の回路は感度においてAgarwalの回路より優れてお

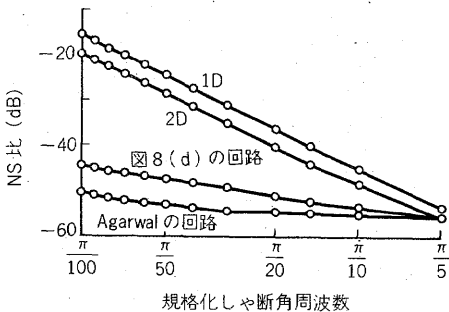


図17 丸め雑音の比較
Fig.17-Comparison of roundoff noise.

り(図1)、乗算器数も少ない(Agarwalの回路では分子の構成のために乗算器が2個余分に必要)。更に、構造を変えずにBPFが同時に得られるなどの利点をもっている。

5. む す び

係数感度の低いデジタルフィルタを最少乗算器数

で構成する方法として帰還路付加法を提案した。この方法によれば、従来、経験的に求めていた回路が組織的に得られる。しかも、すべての等価回路を求めることができる。この方法によって、1次と2次の各種低感度フィルタを構成した。2次のLPFとBPFは同一の回路で入力端子または出力端子を分けるだけで実現できる。これらの回路の係数感度と丸め雑音を調べ、従来のものより改善されていることを確認した。より高次のフィルタも、パラメータの数が多く複雑ではあるが、同様に構成可能である。

謝辞 終始御指導頂いている東京工業大学柳沢健教授に深く感謝する。又、本研究に有益な御教示を頂いた小野田真穂樹助教授ならびに藤井信生助教授に深く感謝する。

文 献

- (1) Gold, B. and Rader, C.M.: "Digital processing of signals", McGraw-Hill, New York (1969).
- (2) Fettweis, A.: "On the connection between multiplier word length limitation and round-off noise in digital filters", IEEE Trans. Circuits Theory, CT-19, p.486 (Sept. 1972).
- (3) Agarwal, R.C. and Burrus, C.S.: "New recursive digital filter structures having very low sensitivity and roundoff noise", IEEE Trans. Circuits & Syst., CAS-22, p.921 (Dec. 1975).
- (4) Avenhaus, E.: "A proposal to find suitable structures for the implementation of digital filters with small coefficient wordlength", NTZ, 25, 8, p.377 (Aug. 1972).
- (5) Constantinides, A.G.: "Spectral transformations for digital filters", Proc. Inst. Electr. Eng., 117, 8, p.1585 (Aug. 1970).
- (6) 西村, 平野, ミットラ: "特性可変デジタルフィルタの構成", 信学技報, CST75-99 (1976-01).
- (7) Mitra, S.K. and Hirano, K.: "Digital all-pass networks", IEEE Trans. Circuits & Syst., CAS-21, p.688 (Sept. 1974).
- (8) Chrochière, R.E.: "Digital ladder structures and coefficient sensitivity", IEEE Trans. Audio & Electroacoustics, AU-20, p.240 (Oct. 1972).
- (9) Jackson, L.B.: "Roundoff-noise analysis for fixedpoint digital filters realized in cascade or parallel form", IEEE Trans. Audio & Electroacoustics, AU-18, p.107 (June 1970).

(昭和52年12月23日受付, 53年4月17日再受付)