

論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	係数変換によるデジタルフィルタの感度の最小化
Title(English)	Minimization of Snsitivities in Digital Filters by Coefficient Conversion
著者(和文)	西原明法, 守山義明
Authors(English)	AKINORI NISHIHARA, Yohiaki Moriyama
出典(和文)	電子通信学会論文誌(A), Vol. 63-A, No. 8, pp. 498-505
Citation(English)	, Vol. 63-A, No. 8, pp. 498-505
発行日 / Pub. date	1980, 8
URL	http://search.ieice.org/
権利情報 / Copyright	本著作物の著作権は電子情報通信学会に帰属します。 Copyright (c) 1980 Institute of Electronics, Information and Communication Engineers.

係数変換によるディジタルフィルタの感度の最小化

正 員 西原 明法[†]正 員 守山 義明^{††}Minimization of Sensitivities in Digital Filters
by Coefficient ConversionAkinori NISHIHARA[†] and Yoshiaki MORIYAMA^{††}, Regular Members

あらまし ディジタルフィルタは、その係数語長が有限に制限されているために、応答に偏差を生じる。これは係数感度の問題として取り扱われ、低感度の伝達関数を導出することが望まれている。本論文では乗算器の数を必要最少限に留めた上で、 m_{ij} という定数を導入して、伝達関数の係数を乗算器係数の関数として一般的に表した。これを用いて振幅特性の乗算器係数に対する感度を実周波数の関数として求め、この感度が最小となるように定数 m_{ij} 及び乗算器係数の値を決定する方法を提案した。この方法により、幾つかの低感度伝達関数を導き、その実現回路例と共に示した。

1. ま え が き

ディジタルフィルタを実現する場合には、乗算器係数語長や演算語長など、内部のすべての数値の語長が有限値に制限されていることによる種々の誤差が無視できない。この誤差により、実際のディジタルフィルタは無限語長を仮定したものとは異なる動作をし、次のような現象が観測される⁽¹⁾。

- (1) 係数語長制限による応答の偏差
- (2) まるめ演算による雑音
- (3) オーバフロー発振
- (4) リミットサイクル発振

これらの語長制限の影響は一般に回路構造に大きく依存することが知られているが、与えられた仕様に対して、最小の次数、最小の語長で実現可能なディジタルフィルタの回路構造を決定する方法は知られていない。それどころか、語長制限の影響は複雑であるため統一的な取扱いはあまり行われず、一般に上記の現象は個別に解析されていて、個別の問題については最適化も行われている。

これらの中で(1)の問題だけは、回路構造とは無関係

に、伝達関数の中に乗算器係数がどのように含まれるかを問題とするのが自然である。係数語長制限の影響は普通、係数感度の問題として取り扱われ、係数感度は伝達関数により定義されており、回路構造との関連は少ないと考えられる。このような考え方をするためには、伝達関数の係数が定数あるいは一つの変数ではなく、乗算器係数の関数の形で表されていなければならない。このような伝達関数から回路構造を決定する方法として帰還路付加法⁽²⁾などがあり、最少乗算器数のすべての等価回路が得られるから、回路構造についての議論は全く別に考えてよく、本論文では、係数感度を、伝達関数と乗算器係数との関係としてとらえて低感度化を計り、回路構造については深くは取り扱わない。

低感度ディジタルフィルタとして、抵抗終端リアクタンス回路の動作をシミュレートする方法があり、この場合には回路構造が先に決定されるが、これは、LCフィルタの低感度性が回路構造の面から説明されている⁽³⁾ことと、シミュレーションには本質的に構造が重要であることによると考えられる。リアクタンス回路シミュレーション法は、優れた感度特性をもっているが、構成が複雑であり汎用LSI化に不向きであること、回路内部で信号レベルが大きく上昇するためダイナミックレンジが小さくなることなどの欠点をもち、実際にはあまり利用されていない。

ディジタルフィルタにおいても、能動フィルタと同様に、高次のフィルタは1次および2次の区間の縦続

[†] 東京工業大学工学部電子物理工学科、東京都
Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology,
Tokyo, 152 Japan

^{††} バイオニア株式会社技術研究所、所沢市
Electronic Engineering Research Laboratory, Pioneer
Electronics Corporation, Tokorozawa-shi, 359 Japan
論文番号: 昭 55-374[A-88]

接続によって得るのが、現状では最も実動的であると考えられる。本論文では縦統形構成を念頭において1次2次のフィルタのみを取り扱う。

2. 係数変換による低感度化

低感度構成は回路の規模を小さくするためのものであるから、使用乗算器数は必要最少限とするのが妥当である。このためにフィルタの利得に関するパラメータを1(0dB)に規格化する。これにより乗算器が少なくなるだけでなく、信号レベルが上下せず、ダイナミックレンジの点で有利となる。この規格化は、低域フィルタ(LPF)の直流利得や帯域フィルタ(BPF)の中心利得が、乗算器係数値とは無関係に常に1となるように行うため、これらの周波数では感度は完全に零で、その近傍である通過域内でも感度はそれ程高くないことが予想される。

感度特性が問題になる狭帯域ディジタルフィルタでは、伝達関数の係数は整数に近いので、これから整数乗算器を分離して低感度構成を得る方法が提案されており、その際に感度の評価としては、極のとり得る格子点密度が用いられている^{(2),(5)}。ところが整数乗算器の分離の仕方には自由度が多く、同程度の格子点密度をもつ回路がある(例えば文献(2)、(4)、(5)の各回路)ため、これらの回路の感度の評価基準としては、格子点密度では不十分であり、実際に感度を算出して評価する必要がある。

本論文では、低感度の伝達関数を求めるために、最大限の自由度をもたせて伝達関数を一般的に表して、その感度を計算し、これを最小とするようにパラメータを決定する。まず、任意定数 m_{ij} を導入して伝達関数の係数を乗算器係数の関数として一般的に表す。但し、乗算器数を最少限とするには、伝達関数の係数が各乗算器係数に対して1次関数でなければならない。又、定数 m_{ij} は整数あるいは 2^n (n は整数)とする。整数乗算器はその値が小さければ、実際に乗算器を用いずに回路の結線によって実現できるし、 2^n 乗算器はシフトによって容易に実現でき、どちらも感度は零である。次に振幅特性の感度を実周波数の関数として計算し、これが通過域内で小さくなるように m_{ij} 及び乗算器係数の値を決定する。 m_{ij} の決定に際しては自由度が非常に大きい、必要最少限のものを除いて零にすれば回路を複雑にしないと考えられる。

フィルタの次数と、LPF、BPFなどの特性によって感度関数が異なり、最小化の方法も異なるため、ま

ず、それぞれについて一般的な指針を示し、その後、例題を用いて具体的な方法を示す。

本論文では高域フィルタは取り扱わないが、これはLPF中の z^{-1} を $-z^{-1}$ で置き換えれば得られる。

3. 低感度1次LPF

直流利得が1である1次LPFの伝達関数は一般に次式のように書ける。

$$H_{1L}(z) = \frac{2^{-1}(1+g)(1+zz^{-1})}{1+gz^{-1}} \quad (1)$$

このフィルタはシャ断角周波数を決めるパラメータ1個のみをもっている、1個の乗算器を用いて実現できるはずである。この乗算器を a と置き、更に任意定数 m_i を導入すれば、式(1)の係数 g は次のように一般に変換できる。

$$g = m_1 + m_2 a \quad (2)$$

但し m_i は整数または 2^n である。

ここで実周波数での評価を容易にするために次式の双1次の変数変換を施し、 p (s の規格化周波数)平面に写像する。

$$z^{-1} = \frac{k-p}{k+p}, \quad k = \cot \frac{\Omega_c}{2} \quad (3)$$

但し、 Ω_c はディジタル領域での規格化シャ断角周波数である。これにより伝達関数は次のようになる。

$$\tilde{H}_{1L}(p) = \frac{(1+g)k}{(1-g)p + (1+g)k} = \frac{1}{p+1} \quad (4)$$

式(4)より

$$1-g = (1+g)k \quad (5)$$

である。ここで $p=j\omega$ と置き、振幅特性 $|\tilde{H}_{1L}(j\omega)|$ の係数 a に対する感度 $S_a^{|H|}$ を求めるわけであるが、 a の項は式(2)、(5)を用いて消去し、 m_i 及び仕様で定まる k によって表すと、

$$\begin{aligned} S_a^{|H|} &= \frac{a}{|H|} \frac{\partial |H|}{\partial a} \\ &= \left(\frac{1-m_1}{k} - 1 - m_1 \right) \frac{(1+k)\omega^2}{2k^2(\omega^2+1)} \quad (6) \end{aligned}$$

が得られる。この関数は高域フィルタの形をしており、全体に変数 m_1 に関する項が掛かっている、低感度化にはこの因子を小さくする以外に方法はない。いま狭帯域フィルタを考えると k は大きいから、式(6)の値が小さくなるには $m_1 = -1$ となれば良いことが分かる。すなわち、 $k > 3$ ($\Omega_c < 0.205$)で最適な整数解は $m_1 = -1$ である。 m_2 は非零の任意の値をとり得る。最も単純に $m_2 = 1$ とすれば、伝達関数は

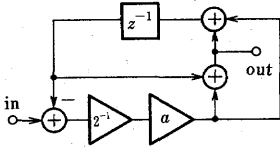


図1 1次低域フィルタ
Fig.1 - First-order low-pass filter.

$$H_{1L}(z) = \frac{2^{-1}a(1+z^{-1})}{1-(1-a)z^{-1}} \quad (7)$$

となり、その実現回路は帰還路付加法⁽²⁾を用いれば容易に得られ、図1の回路とその転置系となる。

図1の回路では2個の乗算器が縦続になっているから、これらを1個にまとめた方が回路が簡単になる。これは $m_2=2$ にした場合に相当し、伝達関数は、

$$H_{1L}(z) = \frac{a(1+z^{-1})}{1-(1-2a)z^{-1}} \quad (8)$$

となり、回路は図1で 2^{-1} 乗算器を取り除いたものとなる。その回路と式(8)の伝達関数は既に知られたものであるが⁽²⁾、狭帯域1次LPFとしてはこれが最適であることが確認された。

4. 低感度2次フィルタ

4.1 2次LPF

直流利得が1の2次LPFの伝達関数は一般に次式で表される。

$$H_{2L}(z) = \frac{2^{-2}(1+g_1+g_2)(1+z^{-1})^2}{1+g_1z^{-1}+g_2z^{-2}} \quad (9)$$

このフィルタは2個の乗算器により構成可能で、それらを a 、 b と置けば、式(9)の g_1, g_2 は

$$g_1 = m_{11} + m_{12}a + m_{13}b + m_{14}ab \quad (10a)$$

$$g_2 = m_{21} + m_{22}a + m_{23}b + m_{24}ab \quad (10b)$$

と表される。 m_{ij} は整数または 2^n である。

式(9)に式(3)の双1次変換を施すと

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{2L}(p) &= \frac{k^2(1+g_1+g_2)}{(1-g_1+g_2)p^2+2k(1-g_2)p}^* \\ &\quad * \frac{1}{1+k^2(1+g_1+g_2)} \\ &= \frac{1}{p^2+p/Q+1} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。式(11)より

$$\begin{aligned} 1-g_1+g_2 &= 2kQ(1-g_2) \\ &= k^2(1+g_1+g_2) \end{aligned} \quad (12)$$

が成り立ち、 g_1, g_2 は、仕様によって決まる k, Q によって次のように表される。

$$g_1 = \frac{2Q(1-k^2)}{k^2Q+k+Q} \quad (13a)$$

$$g_2 = \frac{k^2Q-k+Q}{k^2Q+k+Q} \quad (13b)$$

$|\tilde{H}(j\omega)|$ の a に対する感度を求め、式(10)、(12)により a に関する項 $m_{12}a, m_{14}ab, m_{22}a, m_{24}ab$ を消去し、又、式(13)を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} S_a^{|\tilde{H}|} &= \frac{(k^2Q+k+Q)\omega^2}{4k^2Q\left\{(1-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{Q^2}\right\}} \\ &\quad \cdot \left[(\omega^2-1)\{1-m_{11}+m_{21}-k^2(1+m_{11}+m_{21})\} - \{(1+k^2)m_{13}+(k^2-1)m_{23}\}b \right] \\ &\quad - \frac{k^2}{Q^2}\{1+m_{11}+m_{21}+(m_{13}+m_{23})b\} \\ &\quad + \frac{2k}{Q}(1-m_{21}-m_{23}b) \end{aligned} \quad (14)$$

狭帯域の場合 k は大きな値となるから、低感度であるためには、上式で k あるいは k^2 の掛かっている項なるべく零にしたい。そこで $m_{21}=1, m_{11}=-2$ と置く。これは、 g_1 が -2 に近く、 g_2 が1に近いので、これらから整数乗算器 $-2, 1$ を分離することに対応している。このとき、 a, b の値は小さくなっている。

$m_{21}=1, m_{11}=-2$ を代入すると式(14)は

$$\begin{aligned} S_a^{|\tilde{H}|} &= \frac{(k^2Q+k+Q)\omega^2}{4k^2Q\left\{(1-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{Q^2}\right\}} \left\{ (\omega^2-1) \right. \\ &\quad \cdot [4 - \{(k^2+1)m_{13}+(k^2-1)m_{23}\}b] \\ &\quad \left. - \frac{k^2}{Q^2}(m_{13}+m_{23})b - \frac{2k}{Q}m_{23}b \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。 $S_b^{|\tilde{H}|}$ についても同様であり、感度は式(15)において、 b を a 、添字3を2でそれぞれ置き換えたものとなる。

感度の式は a, b について対称であるため、どちらから最小化をはじめても良いが、いま b の感度から最小化を行うものとして、 $S_b^{|\tilde{H}|} \approx 0$ とすると次の条件を得る。

$$\{(k^2+1)m_{12}+(k^2-1)m_{22}\}a \approx 4 \quad (16a)$$

$$\frac{k^2}{Q^2}(m_{12}+m_{22})a + \frac{2k}{Q}m_{22}a \approx 0 \quad (16b)$$

式(16b)より

$$\frac{m_{22}}{m_{12}+m_{22}} \approx -\frac{k}{2Q} \quad (17)$$

となるので、式(17)がなるべく誤差なく成り立つように

m_{12}, m_{22} を決定する。式(16a), (17)より a の値を決定するわけであるが、式(17)が近似式であるため、一意的には決まらず、次の3とおりの解き方が可能である。

$$m_{12} a = \frac{2k+4Q}{k^2 Q + k + Q} \quad (18a)$$

$$m_{22} a = \frac{-2k}{k^2 Q + k + Q} \quad (18b)$$

$$(m_{12} + m_{22}) a = \frac{4Q}{k^2 Q + k + Q} \quad (18c)$$

この場合には式(18c)を用いるのが適当である。すなわち、式(18c)の右辺は $1+g_1+g_2$ になっているので、式(10)より

$$\left. \begin{aligned} m_{13} + m_{23} &= 0 \\ m_{14} + m_{24} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

という簡単な条件が得られる。又、式(10), (18c)より、

$$m_{13} b + m_{14} a b = \frac{2k + \frac{4m_{22}}{m_{12} + m_{22}} Q}{k^2 Q + k + Q} \quad (20)$$

となる。以上により a, b の感度は次のようになる。

$$S_a^{|H|} = \frac{(k^2 Q + k + Q) \omega^2}{2k^2 Q \left\{ (1-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right\}} \left\{ (\omega^2 - 1) \cdot (2 - m_{13} b) + \frac{k}{Q} m_{13} b \right\} \quad (21a)$$

$$S_b^{|H|} = \frac{(k^2 Q + k + Q) \omega^2}{2k^2 Q \left\{ (1-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right\}} \left(\omega^2 - 1 - \frac{k}{Q} \right) \cdot (m_{13} b + m_{14} a b) \quad (21b)$$

これらの曲線の概形を図2に示す。

$S_a^{|H|}$ は2次の高域通過関数と有極関数の積となっており、 $m_{13} b$ の値により図中の零点 ω_1 が移動し、 $m_{13} = 0$ では $\omega_1 = 1$ となる。従って、 $m_{13} b$ の値を変化させることにより $S_a^{|H|}$ を直流から与えられたある周波数までの範囲において最小化することができる。

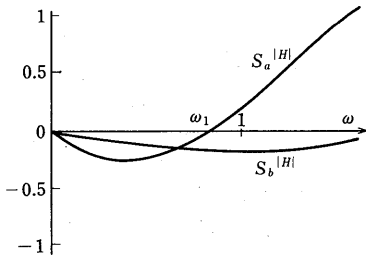


図2 感度曲線の概形
Fig.2 - Sensitivity curves.

最小化には、感度の最大値を最小にする方法、感度の2乗の積分値を最小にする方法など種々あるが、状況に応じて使い分けることが必要であると考えられる。

$S_b^{|H|}$ の大きさは式(17)の近似の良さに比例し、 $\omega=1$ で極大値

$$\begin{aligned} & \frac{(k^2 Q + k + Q)(m_{13} b + m_{14} a b)}{2k} \\ &= 1 + \frac{2m_{22}}{m_{12} + m_{22}} \frac{Q}{k} \end{aligned} \quad (22)$$

をもち、 $\omega = (1+k/Q)^{1/2}$ に零点をもつ。

m_{13}, m_{14}, b の値は、 $m_{13} b$ の値が式(21a)の最適値に最も近くなるように式(20)から決める。式(17)の近似がそれ程悪くなければ $S_b^{|H|}$ は $S_a^{|H|}$ よりも十分小さいので、粗い近似により $m_{14} = 0$ として式(20)による $m_{13} b$ の値が式(21a)の最適値に近くなるように、 m_{12}, m_{22} を決めてもよい。 $m_{13} b$ の最適値は小さいため、この方法でも式(17)の近似はあまり悪くならない。

4.2 2次BPF

中心周波数での利得が係数値と無関係に常に1である2次BPFの伝達関数は次式で表される。

$$H_{2B}(z) = \frac{2^{-1}(1-g_2)(1-z^{-2})}{1+g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}} \quad (23)$$

g_1, g_2 は式(10)で表されるものとし、式(13)を満たす。式(3)の双1次変換を施すと次式となる。

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_{2B}(p) \\ &= \frac{2k(1-g_2)p}{(1-g_1+g_2)p^2 + 2k(1-g_2)p + k^2(1+g_1+g_2)} \\ &= \frac{p/Q}{p^2 + p/Q + 1} \end{aligned} \quad (24)$$

前節と同様に $S_a^{|H|}$ を求め、 $m_{11} = -2, m_{21} = 1$ とすると、

$$\begin{aligned} S_a^{|H|} &= \frac{(k^2 Q + k + Q)(\omega^2 - 1)}{4k^2 Q \left\{ (1-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right\}} \\ &\quad \cdot \left[(4 + \{(1+2kQ)m_{23} - m_{13}\}b)\omega^2 \right. \\ &\quad \left. - \{km_{13} + (k+2Q)m_{23}\}kb \right] \end{aligned} \quad (25)$$

となる。 $S_b^{|H|}$ は式(25)において、 b を a 、添字3を2で置き換えたものとなる。 $S_b^{|H|} \approx 0$ とすると次の条件を得る。

$$\left. \begin{aligned} 4 + \{(1+2kQ)m_{22} - m_{12}\}a &\approx 0 \\ km_{12} + (k+2Q)m_{22} &\approx 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式(26)より式(17), (18)の各式が得られる。従って、 a の値の決め方はやはり3とおりのあるが、BPFの場合には

$S_a^{[H]}$ の最小化において $\omega=1$ 以外の零点が LPF の場合に比較して大きく動かされるため、式(18b)により決めるのがよい。このとき、式(10)、(13)より

$$\left. \begin{aligned} m_{23} &= m_{24} = 0 \\ m_{13}b + m_{14}ab &= \frac{m_{12} + m_{22}}{m_{22}} \frac{2k + \frac{4m_{22}}{m_{12} + m_{22}}Q}{k^2Q + k + Q} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となる。以上より $S_a^{[H]}$ 、 $S_b^{[H]}$ は次式となる。

$$S_a^{[H]} = \frac{(k^2Q + k + Q)(\omega^2 - 1)}{4k^2Q \left\{ (1 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right\}} \cdot \{(4 - m_{13}b)\omega^2 - k^2m_{13}b\} \quad (28a)$$

$$S_b^{[H]} = \frac{(k^2Q + k + Q)(\omega^2 - 1)}{4k^2Q \left\{ (1 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right\}} \cdot (m_{13}b + m_{14}ab) \quad (28b)$$

$S_a^{[H]}$ の曲線の概形を図3に示す。図3中の $|D|$ は式(28)の分母の平方根を表している。

$S_a^{[H]}$ の最小化は図3より、 $m_{13}b$ の値によって $\omega=1$ 以外の零点を動かして、与えられた周波数範囲 ω_1 から ω_2 において感度が最小となるように行う(縦続形構成では一般に各区間の中心周波数はフィルタ全体の中心周波数とは異なっている)。又、 $\omega_1\omega_2=1$ の場合は、 $\omega=1$ で2重の零点をもつようにする。

BPF でも式(17)の近似が悪くなければ、 $S_b^{[H]}$ は $S_a^{[H]}$ より小さいので、 m_{13} 、 m_{14} 及び b の値は前節と同様に決めればよい。

4.3 有極LPF

直流における利得が1の有極LPFの伝達関数は次式で表される。

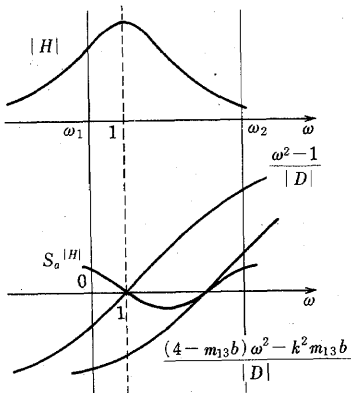


図3 帯域フィルタの $S_a^{[H]}$ の概形
Fig.3 - Curve of $S_a^{[H]}$ in a band-pass filter.

$$H_{2N}(z) = \frac{2^{-1}(1+g_1+g_2-g_3)(1+z^{-2})+g_3z^{-1}}{1+g_1z^{-1}+g_2z^{-2}} \quad (29)$$

乗算器を3個使用すれば構成できるので、 g_1, g_2, g_3 を次式で表す。

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1j} \end{bmatrix} [1, a, b, c, ab, bc, ca, abc]^T \quad (30)$$

式(3)の双1次変換により、伝達関数は

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{2N}(p) &= \frac{(1+g_1+g_2-2g_3)p^2+k^2(1+g_1+g_2)}{(1-g_1+g_2)p^2+2k(1-g_2)p+k^2(1+g_1+g_2)} \\ &= \frac{(1+g_1+g_2-2g_3)(p^2+\omega_N^2)}{(1-g_1+g_2)(p^2+p/Q+1)} \triangleq \frac{N}{D} \quad (31) \end{aligned}$$

と表される。 g_1, g_2 は式(33)を満たし、 g_3 は次式で表される。

$$g_3 = \frac{2Q \left(1 - \frac{k^2}{\omega_N^2} \right)}{k^2Q + k + Q} \quad (32)$$

但し、 ω_N は減衰極の角周波数である。

有極フィルタの場合には、減衰極を規定するのに用いられる乗算器に関する感度は $\omega=\omega_N$ で無限大となる。減衰極を正確に実現するには、このような乗算器が1個は必要である。この乗算器の分子感度の $\omega=\omega_N$ 近傍での上昇は、分母感度により打ち消すようにする。打ち消しには、曲線の形から式(21a)よりも式(21b)の方が適している。分母感度が式(21b)になるようにする。他の2個の乗算器は、一方が式(21b)の感度をもつようにすると、他方は式(21a)の感度をもち、式(21a)は分子感度が1であり、式(21b)は分子感度が零である。以上より、3個の乗算器の分子感度は次のようにすればよい。

$$S_a^{[N]}=0, S_b^{[N]}=1, S_c^{[N]}|_{\omega=\omega_N}=\infty \quad (33)$$

又、 $S_c^{[D]}$ が式(21b)の形になるようにすると

$$\left. \begin{aligned} m_{12} + m_{22} &= 0, & m_{14} + m_{24} &= 0 \\ m_{15} + m_{25} &= 0, & m_{16} + m_{26} &= 0 \\ m_{17} + m_{27} &= 0, & m_{18} + m_{28} &= 0 \\ 1 + m_{11} + m_{21} &= 0 \\ m_{31} = m_{32} = m_{34} = m_{35} = m_{37} = m_{38} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

となる。更に、前と同様に $m_{11}=-2, m_{21}=1$ とすれば、

$$\begin{aligned} S_a^{[H]} &= \frac{(k^2Q + k + Q)\omega^2}{2k^2Q \left\{ (1 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right\}} \left(\omega^2 - 1 - \frac{k}{Q} \right) \\ &\quad \cdot (m_{12}a + m_{15}ab + m_{17}ac + m_{18}abc) \quad (35a) \end{aligned}$$

$$S_b^{[H]} = \frac{(k^2 Q + k + Q) \omega^2}{2k^2 Q \left\{ (1 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right\}} \cdot \left\{ (2 - m_{12}a - m_{14}c - m_{17}ac)(\omega^2 - 1) + \frac{k}{Q} (m_{12}a + m_{14}c + m_{17}ac) \right\} \quad (35b)$$

$$S_c^{[H]} = \frac{-2m_{36}c\omega^2}{(m_{13} + m_{23} - 2m_{33} - 2m_{36})\omega^2} \cdot \frac{-k^2(m_{13} + m_{23})}{(k^2 Q + k + Q) \omega^2} \left(\omega^2 - 1 - \frac{k}{Q} \right) \cdot \frac{(k^2 Q + k + Q) \omega^2}{2k^2 Q \left\{ (1 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2} \right\}} \cdot (m_{14}c + m_{16}bc + m_{17}ac + m_{18}abc) \quad (35c)$$

となる。ここで式(12), (13), (32), (34)より次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} (m_{13} + m_{23})b &= \frac{4Q}{k^2 Q + k + Q} \\ (m_{33} + m_{36}c)b &= \frac{2Q(1 - k^2/\omega_N^2)}{k^2 Q + k + Q} \\ m_{12}a + m_{14}c + m_{15}ab + m_{16}bc + m_{17}ca \\ &+ m_{18}abc = \frac{2k + \frac{4m_{23}}{m_{13} + m_{23}}Q}{k^2 Q + k + Q} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$S_a^{[H]}, S_b^{[H]}, S_c^{[H]}$ が小さくなるためには、次の近似が成り立たねばならない。

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_{23}}{m_{13} + m_{23}} &\simeq -\frac{k}{2Q} \\ \frac{2m_{33}}{m_{13} + m_{23}} &\simeq 1 - \frac{k^2}{\omega_N^2} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式(36), (37)より, $m_{13}, m_{23}, m_{33}, b$ 及び $m_{36}c$ の値を定める。他の m_{ij}, a, c の値は式(36)及び次の式を満たすように決める。

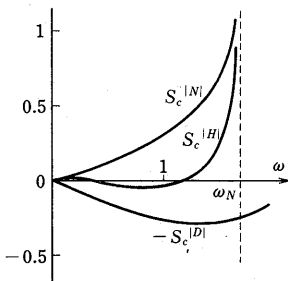


図4 有極低域フィルタの $S_c^{[H]}$ の概形
Fig.4 - Curve of $S_c^{[H]}$ in a low-pass notch filter.

$$\left. \begin{aligned} S_c^{[H]} \text{ の最小化より} \\ m_{14}c + m_{16}bc + m_{17}ca + m_{18}abc &\simeq K_1 \\ S_b^{[H]} \text{ の最小化より} \\ m_{12}a + m_{14}c + m_{17}ca &\simeq K_2 \\ S_a^{[H]} \text{ の最小化より} \\ m_{12}a + m_{15}ab + m_{17}ca + m_{18}abc &\simeq 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

但し, K_1, K_2 は最適値を表し, 最小化の意味によって異なる値をとる。式(38)の近似式は式の順に優先とする。 $S_c^{[H]}$ の概形を図4に示す。 K_1 は, 分母感度が分子感度とうまく打ち消すような値となっている。

5. 低感度伝達関数の導出例

5.1 低感度2次LPFの構成例

前章までのいずれの場合にも, 近似式の近似の程度により, 感度の最適値からのずれが生じる。近似を良くするには, 大きな整数値あるいは複数列の 2^n の組合せにより m_{ij} を実現しなければならないが, これは同時に回路の複雑化を意味し, 初期の目的に反する。従って, 実際の構成では, 厳密な最適化は行わず, 感度と回路の複雑さとの妥協で回路が決定される。

例として $\omega_c = \pi/10, Q = 1/\sqrt{2}$ のLPFを構成してみよう。 $k/2Q = 4.4645$ となっているので, これを4で近似すれば, 式(17)より例えば $m_{12} = 5, m_{22} = -4$ となる。 a の値は式(18c)より決まる。**4.1**で述べたように $m_{14} = 0$ とすれば式(20)より $m_{13}b$ の値が決定される。 m_{13} の値には制限がないので最も簡単に1とする。結局, 伝達関数は,

$$H_2L(z) = \frac{2^{-2}a(1+z^{-1})^2}{1 - (2-5a-b)z^{-1} + (1-4a-b)z^{-2}} \quad (39a)$$

となる。但し $a = 0.0803, b = 0.0373$ である。あるいは $m_{12} = 1+2^{-1}, m_{22} = -1$ とすると, 同様に

$$H_2L(z) = \frac{2^{-4}a(1+z^{-1})^2}{1 - \{2 - (1+2^{-1})a - b\}z^{-1} + (1-a-b)z^{-1}} \quad (39b)$$

が得られる。但し, この場合には $a = 0.321, b = 0.0373$ である。実現回路は帰還路付加法などによっ

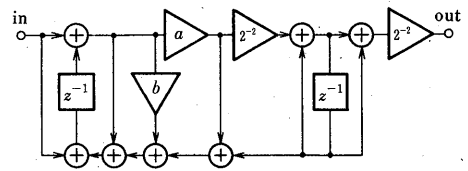
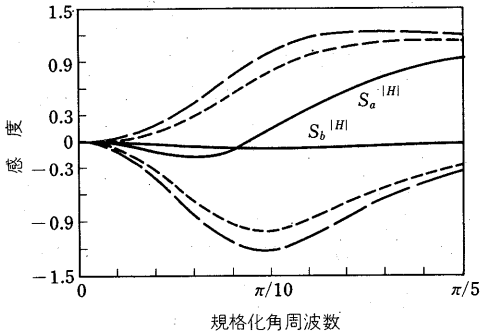


図5 式(39b)の実現回路
Fig.5 - Circuit corresponding to Eq.(39b).



実線:本回路, 点線:バイカッド回路, 破線:Agarwalの回路

図6 係数感度の比較

Fig.6-Comparison of sensitivities.

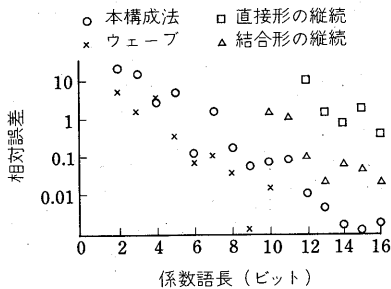


図7 相対誤差の比較

Fig.7-Comparison of relative errors.

て求められるが, 例えば図5のようになる。

式(39)の両式の係数感度は等しく, 通過域付近では図6の実線のようにになっており, 非常に低感度である。図6には比較のために, 先に提案したバイカッド⁽²⁾とAgarwalらの実現法Ⅱ⁽⁴⁾で同じ特性を実現したときの感度を描いている。本論文では $k/2Q=4.4645$ を4で近似しているが, これをバイカッドでは0で,

Agarwalらの回路では-1で近似したことに対応する。

実際に2次区間を縦続に接続して高次のフィルタを構成する場合には, 各区間が同一の回路構造であることが望ましい。2次区間として式(39b)を修正した

$$H_{2L}(z) = \frac{2^{-(2+n)} a (1+z^{-1})^2}{1 - \{2 - (1+2^{-n})a - b\} z^{-1} + (1-a-b) z^{-2}} \quad (40)$$

という伝達関数, すなわち, 図5の回路で a に縦続されている 2^{-2} を 2^{-n} で置き換えた回路で実現し, 1次区間を式(8)で表される回路で構成した, 通過域リプル0.1dBの7次チェビシェフLPFにおいて, 浮動小数点数で表した乗算器係数の仮数部を指定した語長にまらめたとときの振幅特性の劣化をCrochiereの相対誤

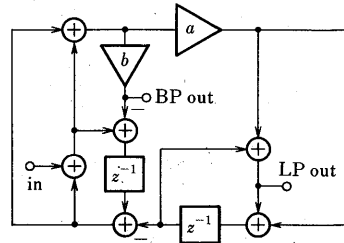


図8 デジタルバイカッド回路
Fig.8-Digital biquad circuit.

差⁽⁶⁾で評価し, 他の構成法と比較した結果を図7に示す。 $Q_c = \pi/100$ と非常に狭帯域にしたにもかかわらず, ウェーブデジタルフィルタに近い低感度特性である。

なお, Crochiereの相対誤差は次式で定義される⁽⁶⁾。

$$\text{相対誤差} = \begin{cases} \frac{H_{\max} - H_{\min} - A_M}{A_M} & H_{\max} - H_{\min} > A_M \\ 0 & H_{\max} - H_{\min} < A_M \end{cases}$$

但し, $H_{\max}$, $H_{\min}$ はそれぞれ通過域内の最大振幅, 最小振幅 (dB), A_M は与えられた通過域リプル (dB) である。

5.2 粗い近似による簡単な回路

次に近似の良さを緩和した簡単な回路を求めてみよう。 m_{ij} に0, ± 1 の値のみを許し, 更に回路が簡単になるように, 1次LPFの場合に行ったと同様にして修正するものとする。

5.2.1 LPF

LPFで, この条件下で最も低感度となるのは $m_{12}=1$, $m_{22}=0$, 他の m_{ij} は前節と同様に決めた場合で,

$$H_{2L}(z) = \frac{2^{-2} a (1+z^{-1})^2}{1 - (2-a-b) z^{-1} + (1-b) z^{-2}} \quad (41)$$

という伝達関数となる。これはデジタルバイカッド回路⁽²⁾のLPFと同じ感度関数をもっている。

5.2.2 BPF

簡単な回路で最も低感度となるのは次の二つの場合である。

$$H_{2B}(z) = \frac{2^{-1} b (1-z^{-2})}{1 - (2-a-b) z^{-1} + (1-b) z^{-2}} \quad (42)$$

又は,

$$H_{2B}(z) = \frac{2^{-1} b (1-z^{-2})}{1 - (2-a) z^{-1} + (1-b) z^{-2}} \quad (43)$$

式(42)はバイカッド回路のBPF部と同じ感度関数もち, 式(43)はAgarwalらの実現法Ⅰ⁽⁴⁾である。式(43)では周波数が低いところで $S_a^{|H|}$ が大きくなるため, 中心周

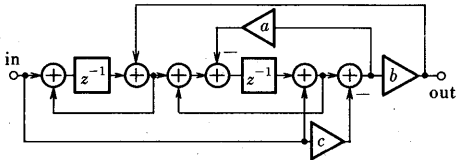


図9 有極低域フィルタの回路

Fig.9 -Circuit of a low-pass notch filter.

波数が低い場合には式(42)を用いる。中心周波数が高い場合にはどちらも大差ない。

デジタルバイカッド回路⁽²⁾は式(41)と式(42)が同一の回路で実現できるように変形したものと考えられる。その伝達関数を次式に、回路例を図8に示す。

$$H_{2L}(z) = \frac{a(1+z^{-1})^2}{1-2(1-2a-b)z^{-1}+(1-2b)z^{-2}} \quad (44a)$$

$$H_{2B}(z) = \frac{b(1-z^{-2})}{1-2(1-2a-b)z^{-1}+(1-2b)z^{-2}} \quad (44b)$$

5.2.3 有極LPF

減衰極をもつフィルタで最も簡単なのは

$$H_{2N}(z) = \frac{b\{(1-c)(1+z^{-2})+(2c-1)z^{-1}\}}{1-(2-a-b)z^{-1}+(1-a)z^{-2}} \quad (45)$$

という場合で、回路例を図9に示す。

5.3 2^n のみを使用する回路

式(40)のように、 2^n のみを使用して最も低感度となるものを求めてみよう。

5.3.1 BPF

$$H_{2B}(z) = \frac{2^{-1}a(1-z^{-2})}{1-\{2-(1+2^{-n})a-b\}z^{-1}+(1-a)z^{-2}} \quad (46)$$

$$H_{2B}(z) = \frac{2^{-1}(a+b)(1-z^{-2})}{1-\{2-(1+2^{-n})a\}z^{-1}+(1-a-b)z^{-2}} \quad (47)$$

中心周波数より低い周波数では式(46)、高い周波数では式(47)が有利であり、縦続形構成においては通過域との関係により使い分ける必要がある。

5.3.2 有極LPF

$$H_{2N}(z) = \frac{2^{-1}b\{(2^n+1-c)(1+z^{-2})^*}{1-\{2-(1+2^n)b-a\}z^{-1}}^* \\ + 2(c-2^n)z^{-1}\}^*}{+ (1-2^n b-a)z^{-2}} \quad (48)$$

この場合には近似式が二つあるので、 2^n と 2^m を許している。

6. む す び

デジタルフィルタの伝達関数の係数を乗算器係数の関数として一般的に表した上で、乗算器係数感度を実際に算出し、これが小さくなるように変換の定数 m_i 及び乗算器係数の値を決定する方法を提案した。この方法を使用して、非常に低感度な伝達関数が導かれることを示し、その実現回路例も与えた。又、近似を粗くして比較的簡単な回路を求めると、バイカッド回路やAgarwalらの回路など、これまで低感度として知られていた回路が得られることを示した。

本論文では感度のみ注目して取り扱ったが、実際のデジタルフィルタでは、まるめ演算による雑音も大きな問題であり、低感度性と低雑音性の関係の解析や、これらを同時に得る回路を求めることなどが今後に残された課題であろう。

謝辞 日ごろから御指導頂き、本研究にも有益な御助言を頂いた東京工業大学柳沢健教授、小野田真穂樹教授、藤井信生助教授に深く感謝します。

文 献

- (1) Oppenheim, A. V. and Schaffer, R. W.: "Digital signal processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1975).
- (2) 西原明法: "最少乗算器構成による低感度デジタルフィルタ", 信学論(A), J61-A, 9, pp. 911-918 (昭53-09).
- (3) Orchard, H. J.: "Inductorless filters", Electronics Lett., 2, pp. 224-225 (June 1966).
- (4) Agarwal, R. C. and Burrus, C. S.: "New recursive digital filter structures having very low sensitivity and roundoff noise", IEEE Trans. Circuits & Syst., CAS-22, pp. 921-927 (Dec. 1975).
- (5) Avenhaus, E.: "A proposal to find suitable structures for the implementation of digital filters with small coefficient wordlength", Nachrichtentech. Z., 25, 8, pp. 377-382 (Aug. 1972).
- (6) Crochiere, R. E.: "Digital ladder structures and coefficient sensitivity", IEEE Trans. Audio & Electroacoust., AU-20, pp. 240-246 (Oct. 1972).

(昭和54年12月8日受付, 55年3月6日再受付)