

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	最適画像復元に関する理論的研究
Title(English)	
著者(和文)	山下幸彦
Author(English)	YUKIHIKO YAMASHITA
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第2478号, 授与年月日:1993年4月30日, 学位の種別:論文博士, 審査員:小川 英光
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第2478号, Conferred date:1993/4/30, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

最適画像復元に関する理論的研究

情報工学専攻

山下幸彦

目次

1	序論	4
1.1	本研究の目的と意義	4
1.2	本研究の歴史的背景	6
1.3	本論文の構成	8
2	画像復元問題	11
2.1	まえがき	11
2.2	画像復元問題の定式化	11
2.3	数学的準備	12
2.4	既存の復元手法	13
2.4.1	線形画像復元フィルタ	14
2.4.2	非線形画像復元フィルタ	16
2.5	まとめ	17
3	平均射影フィルタ	18
3.1	まえがき	18
3.2	平均射影フィルタの定義	18
3.3	平均射影フィルタの一般形	19
3.4	分布の平均 2 乗的包含関係と作用素の平均 2 乗的同等性	21
3.5	半平均射影フィルタ	23
3.6	平均射影フィルタの雑音抑制	26
3.7	平均射影フィルタの諸表現	27
3.8	流れ画像の復元	28
3.9	まとめ	29
4	最適画像復元フィルタと空間の位相	33
4.1	まえがき	33
4.2	空間の同相な内積の変更	33
4.3	最適画像復元フィルタと空間の内積の変更	34
4.4	最適画像復元フィルタの内積不変性の意味	36
4.5	最適画像復元フィルタとマハラノビス空間	38
4.6	マハラノビス空間の内積不変性からみた最適画像復元フィルタの内積不変性	39
4.7	まとめ	39

5	最適画像復元フィルタと作用素の一般逆	41
5.1	まえがき	41
5.2	半射影作用素と2乗平均の最小性	41
5.3	最適画像復元と作用素の一般逆	43
5.3.1	作用素の1,2-逆	43
5.3.2	一般逆フィルタと一般逆	44
5.3.3	射影フィルタと一般逆	45
5.3.4	平均射影フィルタと一般逆	45
5.4	ウィーナーフィルタと一般逆	46
5.5	まとめ	47
6	各種最適画像復元フィルタの相互関係	48
6.1	まえがき	48
6.2	最適画像復元フィルタの一般形	48
6.3	最適復元フィルタの相互関係(その1)	50
6.4	最適復元フィルタの相互関係(その2:パラメトリック復元フィルタの極限)	53
6.5	定理6.2の復元実験	56
6.6	まとめ	56
7	画像復元における計算量の削減法	59
7.1	まえがき	59
7.2	Sherman-Morrison-Woddburyの公式	59
7.3	“作用素一般逆補題”	60
7.4	“拡張された作用素一般逆補題”	61
7.5	ウィーナーフィルタの復元画像の直接的実現法	63
7.6	まとめ	65
8	ウィーナーフィルタのプラズマ計測への応用	66
8.1	まえがき	66
8.2	プラズマ計測でのアーベル変換のモデル	66
8.3	計算機実験	68
8.4	ラインスペクトル空間分布計測への応用	70
8.5	まとめ	70
9	結論	72
	謝辞	
	参考文献	
A	補題, 命題, 系の証明	80

Chapter 1

序論

1.1 本研究の目的と意義

画像を観測する場合、いつでも得ようとしている原画像がそのまま観測されるとは限らない。現実には、原画像がブレやボケなどによって劣化したものだけが観測できる場合が多い。さらに、ほとんどの場合、このような劣化画像に雑音を加算される。このようにして得られた観測画像から、できるだけ忠実にもとの原画像を推定する画像処理の一分野を画像復元と呼ぶ。

画像復元の技術は、現在、医用 X 線画像のボケの復元 [56]、リモートセンシングにおける大気によるボケの復元 [33] をはじめとして様々な分野で応用されている。そして、それらは病気の診断や地球の観測に大きな進歩をもたらした。また最近では、宇宙に浮かぶハッブル望遠鏡の調整ミスによってボケてしまった写真を、地球上で画像復元することによって鮮明な画像に直すことを可能にした。そして、その写真が新しいクエーサや重力レンズ効果の発見に役立ったことは有名である。この画像復元の技術がさらに進歩すれば、上述のような応用における精度がさらに向上すると共に、監視テレビカメラ画像による犯人の割りだし、家庭での手ブレやピンボケの写真の復元など応用分野がさらに広がることになる。

また、画像復元の技術は、画像復元問題と同じ形に定式化できるコンピュータグラフィックやある種の物理計測に利用することができる [25], [37]。さらに、一見、画像復元とは無関係に見えるニューラルネットの学習問題も、標本点における値から関数を学習するという立場から見れば、画像復元問題と同じ形に定式化できる [48]。従って、画像復元の技術の進歩は、単に狭義の画像復元の分野ばかりでなく、広い範囲の技術の進歩に貢献できるのである。

画像復元の問題は、図 1.1 に示すように、段階に分けて考えることができる。まず、原画像および観測画像が属する集合とその集合の位相を定める。その結果、画像復元が数学的に取り扱えるようになる。この準備のもとで、復元フィルタの評価基準を定め、その復元フィルタの表現を求める。そして、この表現に使われる劣化、原画像、および雑音などの特性を求め、復元フィルタを具体的に設計する。最後に、この復元フィルタを観測画像に適用して、復元画像を求める。

本研究の目的は、画像復元におけるこのような基本的問題を解決することである。詳しく述べれば次のようになる。

まず、原画像が属する集合を、画像復元に適するように決めなくてはならない。本論文

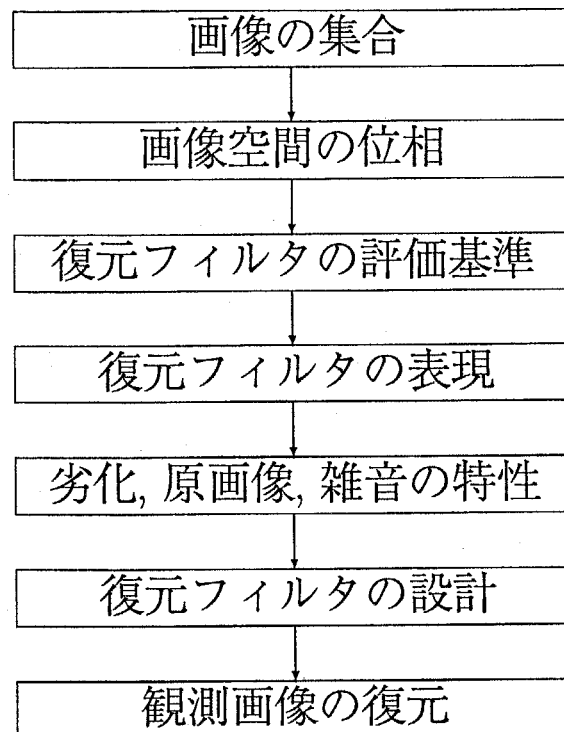


図 1.1 画像復元における基本的問題

では, 原画像が属する集合として線形空間を使う.

次に, この集合の位相を, 画像復元に適するように決めなくてはならない. しかしながら, そのような位相を求める作業は, 一般には困難である. そのため, ユークリッドの内積などが便宜的に用いられる. このような場合に, 復元フィルタがどのようなものになるのか, すなわち, 復元フィルタと空間の位相との関係を明らかにする.

画像復元フィルタの評価基準として, 今までにも, 一般逆フィルタ, ウィーナーフィルタ, 射影フィルタ, 凸射影フィルタをはじめとして, 様々な手法が考案されてきた [44], [45], [46], [32]. それらの復元手法の中には, 復元画像または復元フィルタを最小化問題または最大化問題の解として定式化する手法 [44], [45], [46] や, 最小化問題または最大化問題としてではなく, 原画像が属していると考えられるいくつかの部分集合の共通部分に属している画像の一つを復元画像として与える手法 [32], [47] がある. すなわち, 前者は最適化理論における最適解として与えられるものであり, 後者は可能解として与えられるものである. 前者の復元方法を最適画像復元フィルタと呼ぶ. 様々な最適化基準を課すことによって, 様々な最適画像復元フィルタが得られている. それぞれの最適復元フィルタには, 画像成分の復元精度, 雑音抑制の程度, および計算時間などに特徴があり, それらは, 画像復元を行なう実際的な目的や状況によって使い分けられている. しかしながら, 既存の最適画像復元フィルタの最適化基準の中には, 出現頻度が高い原画像ほど復元精度を高めたい場面において, 画像成分の復元精度を最優先したものが存在していない. 従って, 本論文では, このような評価基準を持った平均射影フィルタの概念を提案する. さらに, 平均射影フィルタの表現を求め, その性質を解明すると共に, 復元実験によってその有効性を確かめる.

また、各種最適画像復元フィルタとその表現に関して、様々な性質を明らかにし、それらの理解を深めることにする。具体的には、最適画像復元フィルタの雑音抑制機構や、各種最適復元フィルタの間の相互関係を解明する。

一般に、画像復元フィルタを設計するための計算量は膨大なものになる。従って、計算量の少なくなる画像復元フィルタの表現形式を求めることにする。具体的には、復元フィルタの表現形式を簡略化する方法、計算量の少なくなる表現形式へ変形する方法、および作用素に関する最適化問題を復元画像に関する最適化問題へ書き換える方法を示すことにする。

画像復元の考え方は他分野においても利用することができる。コンピュータトモグラフィやある種の物理計測などは、画像復元と同じ形式に定式化することができる [25], [44]。本論文では、画像復元手法の一つであるウィーナーフィルタをプラズマ計測へ応用することにする。

1.2 本研究の歴史的背景

初期の画像復元は焦点が合っていない写真の画質改善のために用いられた [53], [55]。当時は、まだ計算機の処理速度が遅かったために、計算機を画像処理に用いることは現実的ではなかった。そのため、この画像復元は、光学系を適切に配置することによって行なわれた。焦点が合っていない写真は、焦点が合っている写真にガウス関数との畳み込み積分を施したものと考えられる。よって、その写真にガウス関数に関する逆畳み込み積分を施せば、焦点が合っている写真が得られることになる。畳み込み積分や逆畳み込み積分は、フーリエ変換すれば単なる積で表される。ところで、ある特別な光学系では、ある場所での光の強度分布は、入力光の強度分布をフーリエ変換したものになる。そして、出力光の強度分布は、それを逆フーリエ変換したものになる。従って、ある写真の濃淡分布を光の強度分布に変換してこの光学系に入力し、そのフーリエ変換になっている場所に適切な減衰分布を持った光学的フィルタを挿入すれば、出力される光の強度分布が、その写真の濃淡分布のガウス関数に関する逆畳み込み積分を行なったものを表しているようにすることができる [53], [55]。

しかし、この方法では、復元できる劣化が移動不変の場合に限られるし、また光学系の設定に高い精度が要求される。従って、復元したい劣化に柔軟に対応することができないという欠点を持っている。そのために、現在では電子計算機による方法に取って代わられた。ただし、光学的に復元する方法では、計算時間がほとんどかからないという利点があるため、最近の光画像処理の進歩にともなって、この手法が見直される場合も考えられる。

電子計算機の計算速度が上昇するにつれて、画像復元も電子計算機上で行なわれるようになった [2]。初期の段階では、点広がり関数に関する逆畳み込み積分を、レンズ系の代わりに、電子計算機上で実行するだけのものだった。そして、この手法の復元精度は不十分なものであった。この点を改良するために、画像復元にフーリエ変換を用いたウィーナーフィルタが使われるようになった。ウィーナーフィルタは、原画像と復元画像の差の、画像と雑音の両方に関する2乗平均を最小にするものである [2]。このような、最適画像復元フィルタを用いることによって、単なる点広がり関数に関する逆畳み込み積分よりも良好な復元画像が得られるようになった [2], [22]。しかしながら、復元画像の計算にフーリエ変換を使っているため、画像の劣化や雑音が移動不変または巡回移動不変なものだけしか扱うことができなかった。

その後、作用素の一般逆 [1], [3], [4] の概念を用いることによって、ウィーナーフィルタが一般の線形の劣化に対して適用できるようになった [18]。また、一般逆の概念は一般逆フィルタを生み出した。一般逆フィルタは、復元画像を、同じ観測系で再び観測したものが、元の観測画像に最も近くなるものの中で、復元画像の大きさが最も小さいものを与えるものである [3]。

一般逆フィルタは雑音の影響を考慮していない。条件付き最小 2 乗フィルタは、この点を改良し、次のような考え方で雑音の影響を考慮したものである [27], [11], [34], [35]。雑音が存在するため、復元画像を再び観測したものと元の観測画像との距離の 2 乗を、雑音のノルムの 2 乗平均より小さくしても無意味である。従って、条件付き最小 2 乗フィルタは、この距離の 2 乗が雑音のノルムの 2 乗平均に等しいものの中で、復元画像だけに關するある汎関数が最小になるものを復元画像とするものである。しかしながら、雑音のノルムの 2 乗は、その平均より大きくなることがある。そのために、任意の復元画像に対して、それを再び観測したものと観測画像との距離が、雑音のノルムの 2 乗平均よりも大きくなることもある。従って、条件付き最小 2 乗フィルタは、その復元画像が存在し得ない場合があるという問題を抱えている。条件付き最小 2 乗フィルタは、復元の計算が非線形になる非線形復元フィルタになっている。

画像のエントロピーを基にした最大エントロピー法も考案されている [8]。最大エントロピー法は、復元画像を再び観測したものと元の観測画像との距離の 2 乗が、雑音のノルムの 2 乗平均に等しいものの中で、復元画像のエントロピーが最大になるものを復元画像とするものである。しかしながら、画像のエントロピーを最大にすることの本質的な意味が明確でない。

一般逆フィルタおよび条件付き最小 2 乗フィルタでは、原画像と復元画像との距離を観測画像空間で間接的に評価している。しかし、観測画像空間で両者が近いということは、原画像空間で両者が近いということを必ずしも意味しない。両者の近さを原画像空間で直接的に評価する方法として、射影フィルタが考案された [43], [54], [18], [16], [7]。射影フィルタは、個々の原画像に対して原画像と復元画像との差を最小にするものの中で、雑音の影響を最小にするものである。さらに、射影フィルタを拡張し、ある部分空間の個々の原画像に対してだけ、原画像と復元画像の差を最小にするものの中で、雑音の影響を最小にする部分射影フィルタが考案された [49], [50]。復元画像の画像成分の復元精度を少し犠牲にすることによって、雑音成分を大幅に抑制することができるパラメトリック射影フィルタおよびパラメトリック部分射影フィルタも考案されている [19], [51]。

一方、最適化基準を用いるのではなく、復元画像が満たすべき条件を経験的に求め、それらの条件を全て満たすものの中の一つを復元画像とする凸射影フィルタが考案されている [31], [32], [24], [28], [25]。

以上に述べた既存の各種復元手法を、図 1.2 にまとめて示す。

このように、今までの画像復元に関する研究は、復元フィルタの評価基準、表現、および計算方法に関するものが中心となっている。しかしながら、それらは、図 1.1 で示される画像復元の基本的問題の中の一部に関するものである。従って、基本的問題の各段階において、解決すべき問題が残されている。詳しく述べると次のようになる。

まず、空間の位相に関して、次のような問題が残されている。最適復元フィルタは、空間の位相を用いて定義されているため、一般には、空間の位相に依存するものになる。しかしながら、最適復元フィルタと空間の位相との関係が明らかでない。また、画像復元フィルタの評価基準に関して、次のような問題が残されている。出現頻度が高い原画像ほど復

画像復元手法

- 劣化関数に関する逆畳み込み積分 [53], [55], [2].
- ウィーナーフィルタ [2], [13].
 - パラメトリックウィーナーフィルタ [45].
- 一般逆フィルタ [1], [3], [4].
 - 条件付き最小 2 乗フィルタ [27], [11], [34], [35].
- 射影フィルタ [43], [54], [18], [16], [7].
 - パラメトリック射影フィルタ [19].
 - 部分射影フィルタ [49], [50].
 - パラメトリック部分射影フィルタ [51].
- 最大エントロピー法 [8].
- 凸射影フィルタ [31], [32], [24], [28], [25].

図 1.2 既存の各種復元手法

元精度を高めたい場面において、射影フィルタのように画像成分の復元精度を最優先した復元フィルタが存在していない。復元フィルタとその表現に関して、次のような問題が残されている。最適復元フィルタの雑音抑制機構が良く分かっていない。各種最適復元フィルタの相互関係も、部分的にしか分かっていない。さらに、復元フィルタの設計に関して、次のような問題が残されている。復元フィルタの設計のための計算が不安定になる。復元フィルタの設計のために、莫大な計算量が必要になる。

これらの問題を解決したものが本論文である。

1.3 本論文の構成

本論文は全体で 9 章から構成されている。

第 1 章では、本論文の目的と意義、本研究の歴史的背景、本論文の構成を述べる。

第 2 章では、はじめに画像復元問題を議論するための枠組を数学的に厳密に定式化する。この定式化により、様々なモデルの画像復元問題を統一的に扱うことができるようになる。また、この論文で用いられる数学的概念を準備する。この中には、作用素の一般逆や相関作用素など、画像復元にとって重要な概念が定義される。そして、これらの概念を用いて、今までに考えられてきた各種画像復元フィルタを再定式化し、その性質について議論する。

第 3 章では、新たな最適画像復元フィルタとして、平均射影フィルタを提案する。これは、出現頻度が高いものほど精度良く復元する場面に、射影フィルタの考え方を採り入れたものである。そして、平均射影フィルタの一般形および、ある条件下での簡単な表現形

式を与える。さらに、分布の平均2乗的包含関係および作用素の平均2乗的同等性という概念を導入し、平均射影フィルタの性質や雑音抑制機構について論じる。最後に、流れ画像の復元実験によって、平均射影フィルタの有効性を示す。

第4章では、最適画像復元フィルタと空間の位相の関係について論じる。最適復元フィルタの最適化基準には空間の位相が使われている。従って、最適復元フィルタの形は一般には空間の位相のとり方に依存することになる。しかしながら、最適復元フィルタの中には位相のとり方に依存しないものがあることを示す。本来、最適復元フィルタを使う場合には、問題に適した位相を定め、その位相をもった空間を使ってフィルタを設計しなくてはならない。しかしながら、位相のとり方によらない最適復元フィルタは、どんな位相を使って設計しても、問題に適した位相を使って設計した最適復元フィルタと同じものになっている。従って、位相のとり方に依存しない最適復元フィルタは、問題に適した空間の位相を決定する作業を省略しても、復元フィルタを実現できるという利点を持っているのである。また、マハラノビス空間を用いると、ある最適復元フィルタが他の最適復元フィルタと一致する場合があることなどについても論じる。

第5章では、最適画像復元フィルタの雑音抑制機構を調べるために、最適画像復元フィルタを劣化作用素のある一般逆として表現する。まず、平均2乗的に最適な半射影作用素を定義する。そして、この概念を用いて、いくつかの最適復元フィルタは、劣化作用素のある最適化基準を課した一般逆になっていることなどを論じる。このように、最適画像復元フィルタを劣化作用素の一般逆として捉えることにより、復元フィルタの雑音抑制機構などが明らかになる。

第6章では、各種最適画像復元フィルタの相互関係について論じる。まず、いくつかの非パラメトリック最適復元フィルタを、平均射影フィルタを使って、厳密に表すことができることを示す。また、いくつかのパラメトリック最適復元フィルタを、パラメトリックウィーナーフィルタを使って、厳密に表すことができることを示す。このように、評価基準の異なる2つの復元フィルタの表現が一致するならば、この2つの評価基準を同時に満たす復元フィルタが存在する。すなわち、このような場合、2つの意味で最適な復元フィルタが存在することになるのである。また、いくつかの非パラメトリック最適復元フィルタは、それに対応するパラメトリック最適復元フィルタの、パラメータを0にした極限で表すことができることを示す。この関係によって、最適復元フィルタの理解が深まると共に、この関係を使えば、復元フィルタを設計する時の計算が安定になると共に、計算量が削減できる場合があることを示す。

第7章では、“拡張された作用素一般逆補題”を用いて、画像復元に関する計算量を削減する手法について論じる。そのために、まず、いわゆる“作用素一般逆補題”の拡張について論じる。行列の数値計算法のために導入された Sherman-Morrison-Woodbury の公式 [10], [30], [29], [9] は、ある条件のもとに、いわゆる“作用素一般逆補題”に拡張されている [17]。本章では、これをさらに緩い条件の場合に拡張する。そして、これらの補題を用いて、復元フィルタの簡略な表現を与えると共に、復元フィルタを設計する時の計算量を削減することができる表現を与える。さらに、復元作用素を具体的に用いることなく、復元画像そのものを直接計算する方法も与える。

第8章では、画像復元フィルタの他分野への応用例として、プラズマ計測への応用について論じる。すなわち、プラズマ計測に用いるアーベル変換にウィーナーフィルタを用いることにより、プラズマの不純物挙動解析のためのデータを得ることが可能になることを示す。

第9章では, 本研究によって得られた成果をまとめると共に, 残された課題, および, 将来の展望を与える.

付録では, 本文中に現れる補題, 命題, および系の証明を与える.

Chapter 2

画像復元問題

2.1 まえがき

本章では、画像復元問題を数学的に取り扱うために、画像復元問題を厳密に定式化する。さらに、この定式化を用いて、既存の復元フィルタの定義とこれらの定義からわかる性質について説明する。また、これらの復元フィルタを数学的に取り扱うための準備も行うことにする。

2.2 画像復元問題の定式化

まず、画像復元問題を定式化する。原画像を f で表す。原画像の全体は、ヒルベルト空間 $\mathcal{X}$ に含まれるものとする。 $\mathcal{X}$ の位相は、原画像の間の距離を適切に表すものとする。観測画像を g で表す。観測画像の全体はヒルベルト空間 $\mathcal{Y}$ に含まれるものとする。 $\mathcal{X}$ および $\mathcal{Y}$ をそれぞれ、原画像空間および観測画像空間と呼ぶ。劣化作用素を $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への有界線形作用素 A で表す。すなわち、本論文では、劣化は与えられているものとする。原画像が劣化した劣化画像は、 Af で与えられる。しかし、一般には雑音が存在するため、この Af を直接得ることはできない。本論文では、雑音として加法性雑音 n を考えることにする。 n は観測画像空間 $\mathcal{Y}$ に属する。観測画像 g は $Af + n$ で与えられる。復元画像を f_0 で表す。 f_0 は原画像空間 $\mathcal{X}$ に属するものとする。復元画像 f_0 は、観測画像 g に復元作用素 B を作用させて得られるものとする。以上をまとめれば、画像復元問題は、

$$g = Af + n \quad (2.1)$$

$$f_0 = Bg \quad (2.2)$$

と定式化される。画像復元問題とは、 f にできるだけ近い f_0 を与える復元作用素 B を求めることである。 B を線形作用素に限った場合、

$$f_0 = BAf + Bn \quad (2.3)$$

と表される。 BAf および Bn をそれぞれ、復元画像の画像成分および雑音成分と呼び、 f_1 および f_2 で表す。

電子計算機による復元を考える場合、計算機は有限個のデータしか扱えないので、観測画像空間は、 M 次元の複素ベクトル空間 C^M となる。原画像は一般には連続領域で定義

された関数ある。この場合、劣化は積分変換で表される。そして標本化によって有限個のデータに変換される。劣化と標本化を併せて線形作用素 A で表す。このモデルは連続-離散モデルと呼ばれる。原画像が有限個の離散点上で定義された関数である場合、このモデルは離散-離散モデルと呼ばれ、 A は行列となる [2], [22], [44]。式 (2.1), (2.2) のように定式化すれば、両者を統一的に扱うことができる。さらに、コンピュータモグラフィや、プラズマ等の物理計測も、式 (2.1), (2.2) のように定式化でき、画像復元問題として統一的に取り扱うことができるのである。

2.3 数学的準備

ヒルベルト空間の内積を $(\cdot, \cdot)$ で表し、ノルムを $\|\cdot\|$ で表す。 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ を2つのヒルベルト空間とする。 $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への有界線形作用素の全体を、 $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ で表す。また、 $B(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ を $B(\mathcal{X})$ で表す。

$A \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ とおく。 $\mathcal{R}(A)$ を A の値域とし、 $\mathcal{N}(A)$ を $Af = 0$ となる f の全体、すなわち、 A の零空間とする。 $\mathcal{R}(A)$ および $\mathcal{N}(A)$ は、それぞれ、 $\mathcal{Y}$ および $\mathcal{X}$ の部分空間になっている。 A の共役作用素を A^* で表す。部分空間 S に対する閉包を $\bar{S}$ で表す。このとき、次の関係が成立する。

$$\mathcal{N}(A)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A^*)} \quad (2.4)$$

$$\mathcal{N}(A^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A)} \quad (2.5)$$

部分空間 S の元の、作用素 A による像の全体を AS で表す：

$$AS = \{Af | f \in S\} \quad (2.6)$$

自己共役作用素 $M \in B(\mathcal{X})$ が任意の $f \in \mathcal{X}$ に対して、 $(Mf, f) \geq 0$ を満たす場合、 M は半正值であるといい、 $M \geq 0$ と表す。この不等式で、 $f = 0$ のときだけ等号が成立する場合、 M は正值であるといい、 $M > 0$ と表す。

任意の $f \in \mathcal{X}$ と $g \in \mathcal{Y}$ のシャッテン積 $f \otimes \bar{g}$ は、 $h \in \mathcal{Y}$ に対し、次の式で定義される $\mathcal{Y}$ から $\mathcal{X}$ への作用素である [23]。

$$(f \otimes \bar{g})h = (h, g)f \quad (2.7)$$

$A \in B(\mathcal{X})$ に対して、 A のトレースを $tr(A)$ で表す [23]。

$A \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ に対して、次の一般逆を定義する [1], [3], [4]。

定義 2.1 (作用素の一般逆)

(i) 作用素 B が、

$$ABA = A \quad (2.8)$$

を満たす場合、 B を A の1-逆という。 A の1-逆の全体を $A\{1\}$ で表し、 $A\{1\}$ の元を $A^{(1)}$ または A^- で表す。

(ii) 作用素 B が、

$$BAB = B \quad (2.9)$$

を満たす場合、 B を A の2-逆という。 A の2-逆の全体を $A\{2\}$ で表し、 $A\{2\}$ の元を $A^{(2)}$ で表す。

(iii) 作用素 B が,

$$(AB)^* = AB \quad (2.10)$$

を満たす場合, B を A の 3-逆という. A の 3-逆の全体を $A\{3\}$ で表し, $A\{3\}$ の元を $A^{(3)}$ で表す.

(vi) 作用素 B が,

$$(BA)^* = BA \quad (2.11)$$

を満たす場合, B を A の 4-逆という. A の 4-逆の全体を $A\{4\}$ で表し, $A\{4\}$ の元を $A^{(4)}$ で表す.

例えば, B が 1-逆と 2-逆の条件を同時に満たす場合, B は A の 1,2-逆と呼び, その全体を $A\{1,2\}$ で表す. $A\{1,2\}$ の元を $A^{(1,2)}$ で表す.

A が正則ならば A の 1-逆は一意に定まり, 通常逆作用素 A^{-1} と一致する. 正則でないならば, 1-逆は存在すれば無数に存在する.

1,2,3,4-逆はムーアペンローズの一般逆作用素と呼ばれ, 存在すれば一意に定まる. それを $A^\dagger$ で表す. $A^\dagger$ を単に一般逆作用素と呼ぶこともある.

これらの一般逆作用素は, $\mathcal{R}(A)$ が閉部分空間であれば常に存在することがわかって

いる. X をヒルベルト空間 $\mathcal{X}$ に実現値を持つ確率変数とする. X の実現値を x で表す. X に関する平均を E_X で表す. 本論文では, すべての平均は有界とし, 作用素のトレースと交換するものとする.

X の相関作用素 R_X は,

$$R_X = E_X(x \otimes \bar{x}) \quad (2.12)$$

によって定義される. R_X は半正值作用素になる. 特に, E_f および E_n を, それぞれ, 原画像 f および雑音 n に関する平均とする. 原画像および雑音の相関作用素 R および Q は, それぞれ,

$$R = E_f(f \otimes \bar{f}) \quad (2.13)$$

$$Q = E_n(n \otimes \bar{n}) \quad (2.14)$$

によって定義される. 本論文では, 原画像と雑音が独立であり, 雑音の平均が0である場合だけを考える.

2.4 既存の復元手法

画像復元においては, 原画像 f と復元画像 f_0 の近さをどのように評価するかが重要な問題になる. また, 現実的問題としては計算量を十分に少なくしなくてはならない. これまでにも, 様々な画像復元フィルタが考案されている [27], [11], [31], [32], [15], [34], [35], [43], [54], [19], [49], [51], [38].

既存の復元フィルタを大まかに分類するために, 次の3つの観点をあげることができる. 第1点として, 頻繁に出現する画像ほどより精度良く復元する立場と, 稀にしか生じない画像も平等に復元する立場のどちらを取っているかで分類することができる. 前者の立場は, 復元画像をテレビで鑑賞したい場合などで利用できる. 後者の立場は, 画像を医療の診断に用いる場合に重要である. 注目しなくてはならない病巣の写真などは頻繁に

表 2.1 画像復元フィルタの特徴

フィルタ	出現頻度に独立	出現頻度に依存	最適復元	条件復元	線形	非線形
一般逆	○		○		○	
射影	○		○		○	
部分射影	○		○		○	
平均射影		○	○		○	
ウィーナー		○	○		○	
P 射影	○		○		○	
P 部分射影	○		○		○	
P ウィーナー		○	○		○	
条件付き最小 2 乗		△	○			○
最大エントロピー法		△	○			○
凸射影		◇		○		○

P : “パラメトリック” の意味.

△ : 評価基準としては考慮されていないが運用で対応している.

◇ : 運用で両者に対応できる.

生じることがないからである. 第 2 点として, 画像復元フィルタの定義に最適化基準を用いているか, あるいはそうでないかで分類することができる. 前者は最適画像復元フィルタと呼ばれる. 第 3 点として, 復元フィルタの線形性で分類することができる. すなわち, B が線形作用素であるか非線形作用素であるかで分類することができる. 非線形復元フィルタの場合は, 線形復元フィルタより多様性を持たせることができる. しかし, 復元画像を得るために, 現状では, 繰り返し法を用いて計算しなくてはならないので, 計算量が多くなるという欠点がある.

これから 2 章で説明するフィルタおよび 3 章で提案する平均射影フィルタを上で述べた観点から分類し, 表 2.1 にまとめる. 表 2.1 の中では, 復元フィルタの名前の “フィルタ” はすべて省略し, “パラメトリック” を P で略する.

2.4.1 線形画像復元フィルタ

初めに, 線形画像復元フィルタの例を挙げる. ここで挙げる線形復元フィルタは, すべて最適復元フィルタになっている. まず, 頻繁に出現する原画像ほどより精度良く復元する立場のものを紹介する.

ウィーナーフィルタ (WF:Wiener filter) B_{WF} は,

$$E_f E_n \|f_0 - f\|^2 \quad (2.15)$$

を最小にする f_0 を与えるものである [2], [22], [18], [45]. ウィーナーフィルタは, 式 (2.15) に示すように, 原画像と復元画像との差のノルムの, 画像と雑音に関する 2 乗平均を最小にするものである. ウィーナーフィルタでは, 画像と雑音という構造の異なるものを同時に扱っているために, 経験的には復元画像にエッジのぼけ等が生じる. 本論文では, 画像と雑音が独立であると仮定しているから, 式 (2.15) は,

$$E_f \|BAf - f\|^2 + E_n \|Bn\|^2 \quad (2.16)$$

となる。

パラメトリックウィーナーフィルタ (PWF: parametric Wiener filter) $B_{PWF}(\gamma)$ は, パラメータ $\gamma > 0$ に対して,

$$E_f \|BAf - f\|^2 + \gamma E_n \|Bn\|^2 \quad (2.17)$$

を最小にするものである [45]. すなわち, ウィーナーフィルタ (2.16) の第 1 項 (画像成分) と第 2 項 (雑音成分) のどちらを重要視するかということを, パラメータ γ を用いて制御するものである. $\gamma < 1$ とすれば, 雑音の抑制よりも, 画像成分の保存を重視したものになる. 従って, 復元画像の画像成分の復元精度は良くなるが, 雑音成分が増加することになる. 逆に $\gamma > 1$ とすれば, 画像成分の保存よりも, 雑音成分の抑制を重視したものになる. 従って, 雑音成分が減少するが, 復元画像の画像成分の復元精度は悪くなることになる. $\gamma = 1$ にすれば, これはウィーナーフィルタになっている. パラメトリックウィーナーフィルタにおいても, エッジのぼけ等の欠点は残される. しかし, γ を経験的に調整することによって, ウィーナーフィルタより良好な復元画像を得ることができる [45].

次に, 稀にしか生じない画像も平等に扱う立場の線形最適復元フィルタについて説明する.

一般逆フィルタ (GIF: generalized inverse filter) B_{GIF} は, 個々の観測画像 g に対して,

$$\|Af_0 - g\|^2 \quad (2.18)$$

を最小にする f_0 の中で,

$$\|f_0\|^2 \quad (2.19)$$

を最小にする f_0 を与えるものである [2], [22], [45]. しかし, 式 (2.18) は画像の近さを観測画像空間で評価しており, 原画像と復元画像の近さを保証するものではない. さらに, 式 (2.19) の f_0 のノルム最小という条件も, 復元問題にとっては意味のない条件である.

射影フィルタ (PF: projection filter) B_{PF} は, 原画像空間に含まれる個々の原画像 f に対して, 原画像 f と復元画像の画像成分 BAf との距離

$$\|BAf - f\|^2 \quad (2.20)$$

を最小にするもののなかで, 雑音成分の 2 乗平均

$$E_n \|Bn\|^2 \quad (2.21)$$

を最小にするものである [43], [54], [18], [16], [7], [46]. $R(A^*)$ への正射影作用素を P_{A^*} とすれば, 第 1 の条件 (2.20) は,

$$BA = P_{A^*} \quad (2.22)$$

となる. 条件 (2.20) より, 射影フィルタは, 原画像と復元画像の画像成分との差を原画像空間で直接比較し, 個々の原画像に最も近い画像成分を与えることになる.

パラメトリック射影フィルタ (PPF: parametric projection filter) $B_{PPF}(\gamma)$ の最適化基準は, 次の通りである. 射影フィルタの第 1 条件 (2.20) は, 式 (2.22) より, $BA - P_{A^*} = 0$ となる. この条件を少し緩め, $BA - P_{A^*}$ のシュミットノルム [23] を小さくすることを考える. すなわち, パラメトリック射影フィルタとは, パラメータ $\gamma > 0$ に対して,

$$\|BA - P_{A^*}\|_2^2 + \gamma E_n \|Bn\|^2 \quad (2.23)$$

を最小にするものである [19]. ここで, $\|\cdot\|_2$ は, 作用素のシュミットノルムである. パラメトリック射影フィルタは, 画像成分に対して少しの誤差を許容する代わりに, 大幅に雑音が抑制できる場合に使われる. パラメトリック射影フィルタの画像成分の復元精度は射影フィルタに劣るが, 雑音成分は小さくなることになる.

部分射影フィルタ (PTPF: partial projection filter) B_{PTPF} は, $\mathcal{X}$ のある固定された部分空間 $\mathcal{S}_1$ に含まれる個々の f に対してだけ,

$$\|BAf - f\|^2 \quad (2.24)$$

を最小にするものの中で,

$$E_n \|Bn\|^2 \quad (2.25)$$

を最小にするものである [49], [50]. $\mathcal{S}_1 = \mathcal{X}$ の場合が射影フィルタである.

P_1 を $\mathcal{S}_1$ への正射影作用素とし, P_0 を $\mathcal{R}(P_1 A^*)$ への正射影作用素とする. 部分射影フィルタの第 1 条件 (2.24) は, $BAP_1 - P_0 = 0$ となる. パラメトリック部分射影フィルタ (PPTPF: parametric partial projection filter) $B_{PPTPF}(\gamma)$ は, パラメトリック射影フィルタと同様の考え方で導入されたものであり, $\gamma > 0$ に対して,

$$\|BAP_1 - P_0\|_2^2 + \gamma E_n \|Bn\|^2 \quad (2.26)$$

を最小にするものである [51].

2.4.2 非線形画像復元フィルタ

初めに, 最適復元フィルタとして定式されているものについて説明する. ここで挙げる 2 つのフィルタは, 経験的には出現頻度が高いものほど, 精度良く復元するものになっている.

条件付き最小 2 乗フィルタは,

$$\|g - Af_0\|^2 = E_n \|n\|^2 \quad (2.27)$$

の条件の下で, ある作用素 C に対して, $\|Cf_0\|$ を最小にするものである [2], [11], [34], [35]. 例えば, 滑らかな画像を復元したい場合には, C としてラプラシアンが採用される. しかし, 物理的に意味のある C は, 一般にはわからない.

最大エントロピー法について説明する. 原画像は, N 個の負でない実数値 f_i ($i = 1, 2, \dots, N$) で与えられているものとする. 画像エントロピー S を

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N f_j} \log \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N f_j} \quad (2.28)$$

によって定義する. 簡単のために,

$$S = \sum_{i=1}^N f_i \log f_i \quad (2.29)$$

と定義される場合もある. 最大エントロピー法は, 式 (2.27) を満たす f_0 の中で, 画像エントロピーが最大になる f_0 を復元画像とするものである [8]. 画像のエントロピーを最大にすることに物理的意味はない. しかし, エントロピーの性質から, 滑らかな復元画像が得

られる。さらに、復元画像の各画素が0以上になるという、線形復元では導入することができなかった条件を導入することができる。しかも、通常の画像において、各画素が0以上ということは物理的に意味がある条件である。最大エントロピー法の計算には、条件付きの共役勾配法が用いられる [52]。

つぎに、最適化基準を使わないで定式化されている復元フィルタを紹介する。Gerchberg [5] と Papoulis [20] は、帯域制限された信号の復元、すなわち、超解像 [26] のための繰り返し法を提案した。Youla [31] は、これを一般のヒルベルト空間の場合に適用し、交互射影法にまとめた。これは、原画像が存在することが予めわかっている空間に、交互に正射影することによって、その共通点を求めようとするものである。Youla と Webb [32] は、これを非線形に拡張した。これは、原画像が予めいくつかの閉凸集合 C_i に含まれることがわかっている場合、その境界に次々に射影することにより、それらの集合の共通部分の中の一つを求めるものである。これを凸射影フィルタと呼ぶ。Sezan と Stark [24]、Trussel と Civanlar [28] は、この方法を雑音が存在する場合に拡張した。これらの復元フィルタを用いるためには、原画像が属していると思われる空間や凸集合を定めなくてはならない。しかし、物理的に意味のある集合を定めるのは困難である。

2.5 まとめ

本章では、初めに、画像復元問題の定式化を行った。そして、既存の画像復元フィルタを分類するための3項目をもとに、ウィーナーフィルタ、パラメトリックウィーナーフィルタ、一般逆フィルタ、射影フィルタ、パラメトリック射影フィルタ、部分射影フィルタ、パラメトリック部分射影フィルタ、条件付き最小2乗フィルタ、最大エントロピー法、交互射影法、凸射影フィルタについて説明した。また、以上の議論のために数学的準備も行った。

以下、本論文では、計算量や理論的な取扱易さを考え、線形最適復元フィルタを中心に考えていくことにする。従って、復元作用素 B を観測画像空間 $\mathcal{Y}$ から原画像空間 $\mathcal{X}$ への有界線形作用素とする。

Chapter 3

平均射影フィルタ

3.1 まえがき

本章では、復元フィルタの評価基準に関する一つの問題を解決する。すなわち、稀にしか生じない画像の復元精度を犠牲にしても、頻繁に生じる画像の復元精度を良くしたい場面において、射影フィルタの考え方を適用できるようにするために、新たに、平均射影フィルタと名づけた復元フィルタの概念を提案する。平均射影フィルタは、復元画像の画像成分と原画像との平均2乗誤差を最小にするものの中で、雑音成分の2乗平均を最小にするものである。また、このように定義された平均射影フィルタの一般形を作用素の逆を用いて与える。そして、ある条件下での平均射影フィルタの簡潔な表現も与える。さらに、平均射影フィルタの性質として、復元画像と原画像との関係、平均射影フィルタの雑音抑制機構について論じる。最後に、流れ画像の復元実験によって、平均射影フィルタの有効性を確認する。

3.2 平均射影フィルタの定義

頻繁に生じる画像ほど、その復元精度を良くしたい場面を考える。このような場面对する既存の最適復元フィルタにはウィーナフィルタ (WF) がある。しかし、ウィーナフィルタの評価基準 (2.15) では、画像と雑音に関する平均を同時にとっているために、復元画像のエッジなどがぼけることがある。一方、射影フィルタを用いれば、エッジのぼけがない復元画像が得られる。しかし、射影フィルタは、個々の原画像に対してその出現頻度に依らず、精度良く復元しようとする。従って、出現頻度が高いものほど精度良く復元したい場面に、射影フィルタを用いることは、その定義より適切ではない。

これらの問題を解決するために、本章では次の復元フィルタを提案する。それは、射影フィルタの第一の条件 (2.20) を、画像に関する平均2乗誤差を最小にするという条件に換えたものである。すなわち、平均射影フィルタは、次のように定義される。

定義 3.1 汎関数

$$J_1[B] = E_f \|BAf - f\|^2 \quad (3.1)$$

を最小にする作用素 B の中で、汎関数

$$J_2[B] = E_n \|Bn\|^2 \quad (3.2)$$

を最小にする作用素 B を、平均射影フィルタ (APF : averaged projection filter) という。

射影フィルタは、個々の原画像の復元精度に対する評価を差別せずに最適に復元するものである。一方、平均射影フィルタではその定式化からわかるように、頻繁に表れる画像の復元精度に重きをおいて復元するものである。このことによって一部の画像に対しては、復元画像が原画像から遠ざかってしまうが、大多数の画像に対しては、射影フィルタの場合より原画像に近い画像を得ることができる。そして、平均射影フィルタでは、ウィーナフィルタと異なり、画像成分と雑音成分を同時に評価しないため、平均的に最も良い画像成分が得られ、復元画像にエッジのぼけなどが生じないことになる。

3.3 平均射影フィルタの一般形

平均射影フィルタの具体的な形を次に示す。

定理 3.1 平均射影フィルタは常に存在し、その一般形は、

$$B = RA^*V^-RA^*U^- + W(I - UU^-) \quad (3.3)$$

で与えられる。ここで、

$$R = E_f(f \otimes \bar{f}) \quad (3.4)$$

$$Q = E_n(n \otimes \bar{n}) \quad (3.5)$$

$$U = ARA^* + Q \quad (3.6)$$

$$V = RA^*U^-ARA^* \quad (3.7)$$

であり、 W は $\mathcal{Y}$ から $\mathcal{X}$ への任意の線形作用素である。このとき、 J_1 , J_2 の最小値 J_{10} , J_{20} は、

$$J_{10} = \text{tr}[R - RA^*(ARA^*)^-AR] \quad (3.8)$$

$$J_{20} = \text{tr}[(RA^*V^- - I)RA^*(ARA^*)^-AR] \quad (3.9)$$

で与えられる。

定理 3.1 の証明のために、まず最小化の条件 (3.1), (3.2) を作用素方程式の形に書き換える。なお、本論文の中の補題、命題、系の証明は、すべて付録にまわす。

補題 3.1 B が J_1 を最小にするための必要十分条件は、 B が作用素方程式

$$BARA^* = RA^* \quad (3.10)$$

を満たすことである。このとき、 J_1 の最小値は、

$$J_{10} = \text{tr}[(I - BA)R] \quad (3.11)$$

となる。

補題 3.2 B が平均射影フィルタになるための必要十分条件は、 $\mathcal{Y}$ から $\mathcal{X}$ へのある線形作用素 C と共に、 B が作用素方程式

$$BARA^* = RA^* \quad (3.12)$$

$$BQ = CARA^* \quad (3.13)$$

を満たすことである。このとき、 J_2 の最小値 J_{20} は、

$$J_{20} = \text{tr}(CAR) \quad (3.14)$$

となる。

以上の補題により、平均射影フィルタは連立作用素方程式 (3.12), (3.13) の解 B であることがわかる。

この連立作用素方程式を解くために、いくつかの補題を用意する。まず、一般の一次の作用素方程式は、次の補題を使って解くことができることがわかっている。[3], [49]

補題 3.3 X に関する作用素方程式

$$XB = C \quad (3.15)$$

が解を持つための必要十分条件は、

$$\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(C) \quad (3.16)$$

であり、その一般解は、

$$X = CB^- + Y(I - BB^-) \quad (3.17)$$

で与えられる。ここで Y は任意の作用素である。

連立作用素方程式 (3.12), (3.13) に現れる作用素について、以下の補題が成立する。

補題 3.4 次の関係が成立する。

$$\mathcal{N}(ARA^*) = \mathcal{N}(RA^*) \quad (3.18)$$

$$\mathcal{R}(ARA^*) = \mathcal{R}(AR) \quad (3.19)$$

補題 3.5 次の関係が成立する。

$$\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(RA^*) \cap \mathcal{N}(Q) \quad (3.20)$$

$$\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(AR) + \mathcal{R}(Q) \quad (3.21)$$

また、1-逆の選び方に対する作用素の不変性について、以下の補題が成立している (文献 [49] の補題 5)。

補題 3.6 一般の作用素 A, B, C に対して、

$$\mathcal{N}(B) \supset \mathcal{N}(A) \quad (3.22)$$

$$\mathcal{R}(C) \subset \mathcal{R}(A) \quad (3.23)$$

が成立すれば、

$$BA^-C \quad (3.24)$$

は、 A の 1-逆の選び方によらず一定である。

補題 3.6 と補題 3.5 より、次の補題が成立する。

補題 3.7 式 (3.7) の V は、 U の 1-逆の選び方によらず一定である。

補題 3.8 次の関係が成立する。

$$\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(RA^*) \quad (3.25)$$

$$\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(RA^*) \quad (3.26)$$

補題 3.9 次の関係が成立する.

$$(I - UU^-)AR = 0 \quad (3.27)$$

$$(I - VV^-)RA^* = 0 \quad (3.28)$$

以上の補題より, 補題 3.2 は次のように表現できる.

補題 3.10 B が平均射影フィルタになるための必要十分条件は, $\mathcal{X}$ から $\mathcal{X}$ へのある線形作用素 D と共に, B が連立作用素方程式

$$BARA^* = RA^* \quad (3.29)$$

$$BU = DRA^* \quad (3.30)$$

の解になることである. このとき, J_2 の最小値は,

$$J_{20} = \text{tr}[(D - I)RA^*(ARA^*)^-AR] \quad (3.31)$$

となる.

以上の補題を使って, 定理 3.1 を証明する.

定理 3.1 の証明

補題 3.10 より, 平均射影フィルタの一般形を求めるためには, 式 (3.29), (3.30) を解けばよい. $\mathcal{X}$ から $\mathcal{X}$ への任意に固定した作用素 D に対して, 式 (3.20) より,

$$\mathcal{N}(U) \subset \mathcal{N}(RA^*) \subset \mathcal{N}(DRA^*) \quad (3.32)$$

が成立する. よって補題 3.3 より, 式 (3.30) を B について解くことができる. このとき, その一般形は,

$$B = DRA^*U^- + W(I - UU^-) \quad (3.33)$$

で与えられる. W は $\mathcal{Y}$ から $\mathcal{X}$ への任意の作用素である. これを式 (3.29) に代入し, 式 (3.27), (3.7) を考慮すれば,

$$DV = RA^* \quad (3.34)$$

となる. 式 (3.25) と補題 3.3 より, 式 (3.34) は D について解くことができ, その一般形は

$$D = RA^*V^- + Y(I - VV^-) \quad (3.35)$$

で与えられる. Y は $\mathcal{X}$ から $\mathcal{X}$ への任意の作用素である. この D を式 (3.33) に代入し, 式 (3.28) を考慮すれば, 式 (3.3) を得る.

式 (3.29), (3.30) から式 (3.3) を得る変形はすべて同値であるので, 式 (3.29), (3.30) の一般解が式 (3.3) になる.

式 (3.18) が成立するから, 式 (3.10) を B について解き, それを式 (3.11) に代入すれば, 式 (3.8) を得る. 式 (3.31) に式 (3.35) を代入し, 式 (3.28) を考慮すれば式 (3.9) を得る. $\square$

3.4 分布の平均 2 乗的包含関係と作用素の平均 2 乗的同等性

平均射影フィルタの性質を論じるために, 分布の “平均 2 乗的包含関係” と, 作用素の “平均 2 乗的同等性” の概念を導入する.

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に値を持つある確率変数を X で表し, X のある実現値を x で表す.
 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{L}$ とその補空間 $\mathcal{K}$ に対して, $P_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ に沿った $\mathcal{K}$ への射影作用素とする.

定義 3.2 $\mathcal{H}$ に値を持つ確率変数 X の実現値が閉部分空間 $\mathcal{L}$ に平均 2 乗的に含まれるとは, $\mathcal{L}$ の任意の補空間 $\mathcal{L}^\perp$ に対して,

$$E_X \|P_{\mathcal{L}^\perp, \mathcal{L}} x\|^2 = 0 \quad (3.36)$$

が成立することである. また, これを単に, X は $\mathcal{L}$ に平均 2 乗的に含まれるという.

この概念が意味を持つためには, 式 (3.36) が $\mathcal{L}^\perp$ の選び方によらないことを示さなくてはならない. それは, 次の命題からわかる. R_X を式 (2.12) で定義される X の相関作用素であるとする.

命題 3.1 $\mathcal{H}$ に値を持つ確率変数 X が閉部分空間 $\mathcal{L}$ に平均 2 乗的に含まれるための必要十分条件は,

$$\overline{\mathcal{R}(R_X)} \subset \mathcal{L} \quad (3.37)$$

が成立することである.

式 (3.37) は, $\mathcal{L}^\perp$ の選び方には無関係な条件であるから, 定義 1 が $\mathcal{L}^\perp$ の選び方によらない意味のある概念であることがわかる.

$\overline{\mathcal{R}(R_X)}$ は閉部分空間であるから, 命題 3.1 より次の命題を得る.

命題 3.2 $\mathcal{H}$ に値を持つ確率変数 X を平均 2 乗的に含む最小の閉部分空間は, X の相関作用素の値域の閉包である.

定義 3.3 有界作用素 T に対して,

$$E_X \|Tx\|^2 = 0 \quad (3.38)$$

が成立するとき, T は X に関して平均 2 乗的に零作用素になるといい, $T \equiv 0$ と記す. また, $T - U \equiv 0$ が成立するとき, T は X に関して平均 2 乗的に U に等しいといい, $T \equiv U$ と記す.

命題 3.3 次の各条件は互いに同値である.

- (i) $T \equiv 0$
- (ii) $TR_X = 0$
- (iii) $\overline{\mathcal{R}(R_X)} \subset \mathcal{N}(T)$

命題 3.1 と命題 3.2 より, 次の命題が成立する.

命題 3.4 $T \equiv 0$ になるための必要十分条件は, $\mathcal{N}(T)$ が X を平均 2 乗的に含むことである.

系 3.1 次の各条件は互いに同値である.

- (i) $T \equiv U$
- (ii) $TR_X = UR_X$
- (iii) $\overline{\mathcal{R}(R_X)} \subset \mathcal{N}(T - U)$
- (iv) X は $\mathcal{N}(T - U)$ に平均 2 乗的に含まれる.

命題 3.3 の (ii) より, 次の命題が成立する.

命題 3.5 $T \equiv 0$ ならば, 任意の有界作用素 U に対して, $UT \equiv 0$ となる.

この命題より, X に関する平均 2 乗的零作用素は, 有界作用素をかけても平均 2 乗的零作用素となる. 同様に, 系 3.1 の (ii) より次の定理を得る.

系 3.2 $T \equiv U$ ならば, 任意の有界作用素 V に対して, $VT \equiv VU$ となる.

一般の半正值自己共役作用素に対して, 次の補題が成立する.

補題 3.11 M_1 および M_2 を半正值自己共役作用素とすれば,

$$\mathcal{N}(M_1 + M_2) = \mathcal{N}(M_1) \cap \mathcal{N}(M_2) \quad (3.39)$$

$$\overline{\mathcal{R}(M_1 + M_2)} = \overline{\mathcal{R}(M_1) + \mathcal{R}(M_2)} \quad (3.40)$$

が成立する.

$\mathcal{X}$ に値を持つ2つの確率変数 X, Y の相関作用素をそれぞれ R_X, R_Y とすれば, 次の命題が成立する.

命題 3.6 $X + Y$ は, 平均2乗的に $\overline{\mathcal{R}(R_X + R_Y)}$ に含まれる. 特に, X と Y が独立で X または Y の平均が0ならば, $\overline{\mathcal{R}(R_X + R_Y)}$ が $X + Y$ を平均2乗的に含む最小の閉部分空間になる.

命題 3.6 と式 (3.40) より, $X + Y$ は, X および Y を平均2乗的に含む部分空間の和の空間の閉包に平均2乗的に含まれることがわかる.

3.5 半平均射影フィルタ

本章では, 平均射影フィルタの二つの条件 (3.1), (3.2) のうち, 第1の条件 (3.1) だけから導かれる性質について論じる.

この第1の条件を満たす作用素を半平均射影フィルタ (Semi-APF) と呼ぶことにする. 当然のことながら, 平均射影フィルタは半平均射影フィルタであるから, 以下に述べる半平均射影フィルタの性質は, そのまま平均射影フィルタに対しても成立する.

定理 3.2 ある作用素 B が半平均射影フィルタになるための必要十分条件は, $f \in \mathcal{R}(RA^*)$ に対して,

$$BAf = f \quad (3.41)$$

が成立することである.

証明 補題 3.1 より, B が式 (3.1) を最小にするための必要十分条件は, B が式 (3.10) を満たすことである. 従って, 式 (3.10) と式 (3.41) が同値になることを示せばよい. まず, 式 (3.10) が成立したとする. $\mathcal{R}(RA^*)$ に含まれる任意の f に対して, $f = RA^*g$ を満たす g が存在する. よって, 式 (3.10) より,

$$BAf = BARA^*g = RA^*g = f \quad (3.42)$$

となり, 式 (3.41) が成立する. 逆に式 (3.41) が成立したとする. $\mathcal{X}$ に含まれる任意の f に対して RA^*f は $\mathcal{R}(RA^*)$ に含まれるから,

$$BARA^*f = BA(RA^*f) = RA^*f \quad (3.43)$$

となり, 式 (3.10) が成立する. $\square$

定理 3.2 より次のことが分かる. 半平均射影フィルタは, 雑音がない場合, 原画像空間の中の $\mathcal{R}(RA^*)$ の元を完全に復元することができる. また, 雑音がある場合にも, 原画像が $\mathcal{R}(RA^*)$ に含まれれば, 半平均射影フィルタによる復元画像の画像成分は, 原画像と完全に一致している. しかも, $\mathcal{R}(RA^*)$ の元に対してそのような性質を持つものは, 半平均射影フィルタだけである.

ところで, 命題 3.2 が示しているように, 平均 2 乗的な意味で, 原画像の全体は $\overline{\mathcal{R}(R)}$ であった. そして, 定理 3.2 で重要な働きをしていた $\mathcal{R}(RA^*)$ は $\overline{\mathcal{R}(R)}$ の部分空間である. では, $\overline{\mathcal{R}(R)}$ の残りの元に対して, 半平均射影フィルタはどのような振舞いをするのであろうか. 以下, この問題について論じる. 部分空間の直和を $\dot{+}$ で表す. このとき, 次の補題が成立する.

補題 3.12 任意の閉部分空間 $\mathcal{L}$ と半正值作用素 M に対して, 次の関係が成立する.

$$\overline{\mathcal{L} \dot{+} M \mathcal{L}^\perp} \supset \overline{\mathcal{R}(M)} \quad (3.44)$$

$\mathcal{R}(RA^*)$ は有限次元である. よって, 補題 3.12 で特に $M = R$, $\mathcal{L} = \mathcal{N}(A)$ とおけば, $R\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(RA^*)$ となり, $\mathcal{N}(A) \dot{+} \mathcal{R}(RA^*)$ も閉部分空間になる. よって,

$$\mathcal{N}(A) \dot{+} \mathcal{R}(RA^*) \supset \overline{\mathcal{R}(R)} \quad (3.45)$$

となる.

補題 3.13 次の関係が成立する.

$$\overline{\mathcal{R}(R)} = \mathcal{R}(RA^*) \dot{+} (\overline{\mathcal{R}(R)} \cap \mathcal{N}(A)) \quad (3.46)$$

式 (3.46) が示しているように, 平均 2 乗の意味での原画像の全体 $\mathcal{R}(R)$ の閉包は, 定理 3.1 に現れた部分空間 $\mathcal{R}(RA^*)$ と $\mathcal{R}(R) \cap \mathcal{N}(A)$ の直和に分解できる. そして, $\mathcal{R}(R) \cap \mathcal{N}(A)$ の元は A で変換すれば零になる. 従って, 線形作用素によるその復元画像も零になる. よって, 次の関係が成立する.

定理 3.3 ある作用素 B が半平均射影フィルタになるための必要十分条件は, $\mathcal{X}$ の部分空間 $\overline{\mathcal{R}(R)}$ の中で, BA が $\overline{\mathcal{R}(R)} \cap \mathcal{N}(A)$ に沿った $\mathcal{R}(RA^*)$ への斜射影作用素になることである.

定理 3.2, 定理 3.3 の様子を図 3.1 に示す.

上にも記したように, $\overline{\mathcal{R}(R)} \cap \mathcal{N}(A)$ の元は, 一般の線形作用素 B に対して, BA によって零に変換される. すなわち, この性質は, 半平均射影フィルタを特徴づけるものとはならない. 一方, $\mathcal{R}(R)$ における $\overline{\mathcal{R}(R)} \cap \mathcal{N}(A)$ の補空間は無限に存在する. その中で, $\mathcal{R}(RA^*)$ の元を BA が不変に保つことによって半平均射影フィルタが特徴づけられるのである.

定理 3.2, 定理 3.3 より, 半平均射影フィルタに対して, 部分空間 $\mathcal{R}(RA^*)$ が大切な意味を持つことがわかった. それでは, この $\mathcal{R}(RA^*)$ の元を A で変換したものはどうなっているのであろうか. 以下, この問題について論じる.

劣化作用素 A および半平均射影フィルタ B の定義域をそれぞれ, $\mathcal{R}(RA^*)$ および $\mathcal{R}(AR)$ に制限した作用素を A' および B' で表す. 次の定理が成立する.

定理 3.4 A' は $\mathcal{R}(RA^*)$ から $\mathcal{R}(AR)$ への全単射であり, B' は A' の逆作用素となる.

証明 $\mathcal{R}(A') = \mathcal{R}(ARA^*)$ となる. よって, 式 (3.19) より, A' は $\mathcal{R}(AR)$ への全射となる. また, $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(RA^*)$ に対して, $Af_1 = Af_2$ とすれば, 式 (3.41) より,

$$f_1 - f_2 = BA(f_1 - f_2) = B0 = 0 \quad (3.47)$$

が成立するから, A' は単射である. よって式 (3.41) より, B' は A' の逆作用素となる. $\square$

式 (3.45) より, 定理 3.3 はそれがもとにした部分空間 $\overline{\mathcal{R}(R)}$ を, $\mathcal{R}(RA^*) \dot{+} \mathcal{N}(A)$ まで拡張することができる. すなわち,

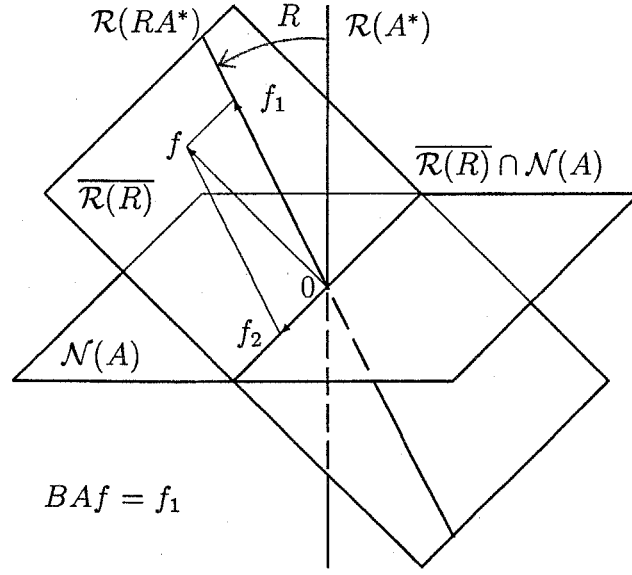


図 3.1 半平均射影フィルタ (Semi-APF) による画像復元の幾何学的説明

系 3.3 ある作用素 B が半平均射影フィルタになるための必要十分条件は、部分空間 $\mathcal{R}(RA^*) \dot{+} \mathcal{N}(A)$ の中で、 BA が $\mathcal{N}(A)$ に沿った $\mathcal{R}(RA^*)$ への斜射影作用素になることである。

$\mathcal{X}$ における $\mathcal{R}(RA^*) \dot{+} \mathcal{N}(A)$ の任意の補空間を $\mathcal{M}$ とすれば、

$$\mathcal{X} = \mathcal{R}(RA^*) \dot{+} \mathcal{N}(A) \dot{+} \mathcal{M} \quad (3.48)$$

となる。この直和分解に対して、 $\mathcal{N}(A) \dot{+} \mathcal{M}$ に沿った $\mathcal{R}(RA^*)$ への斜射影作用素を P とする。このとき、次の関係が成立する。

定理 3.5 ある作用素 B が半平均射影フィルタになるための必要十分条件は、作用素 BA が原画像に関して平均 2 乗的に斜射影作用素 P に等しくなることである。すなわち、 $BA \equiv P$ となることである。

証明 B を半平均射影フィルタとする。系 3.1 より、 $\mathcal{X}$ の任意の元 f に対して、

$$BARf = PRf \quad (3.49)$$

を示せばよい。 $Rf \in \mathcal{R}(R)$ であるから、式 (3.45) より Rf は、

$$Rf = f_a + f_b \quad (3.50)$$

と一意に分解できる。ここで、 $f_a \in \mathcal{R}(RA^*)$ および $f_b \in \mathcal{N}(A)$ である。定理 3.2 より $BAf_a = f_a$ であり、 $f_b \in \mathcal{N}(A)$ より $BAf_b = 0$ となる。また、 P の定義より、 $Pf_a = f_a$ 、 $Pf_b = 0$ が成立する。よって、 $(BA - P)Rf = 0$ となり、式 (3.49) が成立する。

逆に, $BA \equiv P$ とすれば, 系 3.1 より, $BAR = PR$ となる. しかも, $\mathcal{R}(RA^*)$ の任意の元 f に対して, $f = RA^*g$ となる g が存在するから,

$$BAf = BARA^*g = PRA^*g = Pf = f \quad (3.51)$$

となり, 式 (3.41) が成立する. よって, 定理 3.2 より, B は半平均射影フィルタになる. $\square$

定理 3.5 より, 半平均射影フィルタによって復元された画像の画像成分は, 原画像に関する平均 2 乗的意味で, 原画像の $\mathcal{N}(A) \dot{+} M$ に沿った $\mathcal{R}(RA^*)$ への斜射影になっている. ただし, 原画像 f を $\mathcal{X}$ の部分空間 $\mathcal{R}(RA^*) \dot{+} \mathcal{N}(A) (\cap \overline{\mathcal{R}(R)})$ に限れば, 平均的な意味でなく $\mathcal{R}(RA^*) \dot{+} \mathcal{N}(A)$ の個々の f に対して, BAf は $\mathcal{N}(A) \dot{+} M$ に沿った $\mathcal{R}(RA^*)$ への斜射影になるのである. すなわち, 個々の f に対して,

$$BAf = Pf : f \in \mathcal{R}(RA^*) \dot{+} \mathcal{N}(A) \quad (3.52)$$

となるのである.

3.6 平均射影フィルタの雑音抑制

本節では, 観測画像空間の中で, 平均射影フィルタの性質を論じることにする. 観測画像空間の次元は有限であるから, 全ての部分空間は閉部分空間になる. 劣化画像 Af の相関作用素は,

$$E_f(Af \otimes \overline{Af}) = ARA^* \quad (3.53)$$

となる. よって, 命題 3.1 と式 (3.53), (3.19) より, 劣化画像は $\mathcal{R}(AR)$ に平均 2 乗的に含まれる. また, 式 (3.21), (3.53) と命題 3.6 より, 次の命題が成立する.

命題 3.7 $\mathcal{R}(U)$ は, 劣化画像と雑音の和を平均 2 乗的に含む部分空間である.

この性質が, 平均射影フィルタの一般形 (3.3) の不定項となっている第 2 項に現れている. 1-逆の性質により, $W(I - UU^-)U = 0$ となるから, 不定項 $W(I - UU^-)$ は観測画像に関して平均 2 乗的零作用素となってしまうのである. W をどのように選んでも, 平均射影フィルタの性質に本質的影響を与えないのはこのためである.

次に, 平均射影フィルタの雑音抑制に関して論じる. 命題 3.7 の議論から, 平均射影フィルタ B の画像復元に関する性質を $\mathcal{R}(U)$ の中に制限して考えることにする. このとき, 次の補題と定理が成立する.

補題 3.14 次の関係が成立する.

$$\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(AR) \dot{+} Q\mathcal{R}(AR)^\perp \quad (3.54)$$

式 (3.54) より, 観測画像空間を $\mathcal{R}(U)$ に制限すれば, $\mathcal{R}(AR)$ と $Q\mathcal{R}(AR)^\perp$ とは互いに補空間の関係になることがわかる. この直和分解に対して, 次の定理が成立する.

定理 3.6 平均射影フィルタ B に対して次の関係が成立する.

$$\mathcal{N}(B) \supset Q\mathcal{R}(AR)^\perp \quad (3.55)$$

証明 式 (3.13) が, C について解を持つための必要十分条件は, 補題 3.3 と式 (3.18) より,

$$\mathcal{N}(RA^*) \subset \mathcal{N}(BQ) \quad (3.56)$$

となる。よって、式 (3.56) が式 (3.55) と同値になることを示す。まず、式 (3.56) が成立したとする。任意の $f \in QR(AR)^\perp = QN(RA^*)$ に対して、 $f = Qg$ となる $g \in N(RA^*)$ が存在する。よって、式 (3.56) より、

$$Bf = BQg = 0 \quad (3.57)$$

となり、式 (3.55) が成立する。逆に、式 (3.55) が成立したとする。このとき、任意の $f \in N(RA^*) = R(AR)^\perp$ に対して、

$$BQf = B(Qf) = 0 \quad (3.58)$$

となり、式 (3.56) が成立する。□

定理 3.7 ある作用素 B が平均射影フィルタになるための必要十分条件は、式 (3.41) と式 (3.55) が成立することである。

証明 必要性は、定理 3.2 と定理 3.6 に示した通りである。よって、十分性を証明する。定理 3.2 の証明の中で示したように、式 (3.41) が成立すれば、式 (3.12) が成立する。また、式 (3.55) が成立すれば、定理 3.6 の証明より、ある C に対して式 (3.13) が成立し、 B は平均射影フィルタになる。□

定理 3.2 で示したように、ある作用素 B が半正值作用素になるための必要十分条件は、式 (3.41) で与えられた。そして、半平均射影フィルタが平均射影フィルタになるための必要十分条件、すなわち、復元画像の雑音成分の 2 乗平均が最小になる条件 (3.2) と、式 (3.55) が同値であることを、定理 3.7 は示しているのである。

そして式 (3.55) は、次のように解釈することができる。劣化画像 Af は $R(AR)$ に平均 2 乗的に含まれる。観測画像 g は劣化画像に雑音 n が加算されることによって、 $R(AR)$ からみ出ることがある。平均射影フィルタ B は、このみ出た成分を $N(B)$ によって抑制している。 g_0 を g の $QR(AR)^\perp$ に沿った $R(AR)$ への斜射影とすれば、平均射影フィルタは、劣化画像 Af を g_0 とみなして復元していることになっている。この様子を図 3.2 に示す。

このように、平均射影フィルタの雑音抑制は、観測画像が観測画像空間の部分空間 $R(AR)$ に平均 2 乗的に含まれるという、観測画像空間の冗長性によっている。 $QR(AR)^\perp$ は、観測画像空間の冗長性を用いる雑音抑制のための最適な空間となっている。

3.7 平均射影フィルタの諸表現

平均射影フィルタは、一般に式 (3.3) で与えられる。本章では、 $R(AR) \subset R(Q)$ が成立すれば、式 (3.3) の U を Q に置き換えることができることを示す。

定理 3.8 関係

$$R(AR) \subset R(Q) \quad (3.59)$$

が成立すれば、平均射影フィルタは、

$$B = RA^*V^-RA^*Q^- + W(I - QQ^-) \quad (3.60)$$

$$V = RA^*Q^-ARA^* \quad (3.61)$$

と表すことができる。ここで、 W は $\mathcal{Y}$ から $\mathcal{X}$ への任意の作用素である。

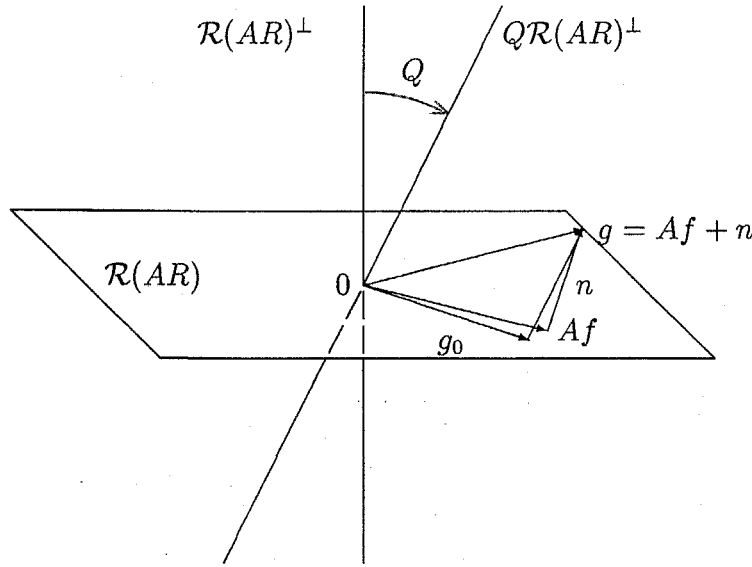


図 3.2 平均射影フィルタの雑音抑制機構

証明 補題 3.2 と式 (3.18) より, 平均射影フィルタ B は, ある作用素 F と共に連立作用素方程式

$$BARA^* = RA^* \quad (3.62)$$

$$BQ = FRA^* \quad (3.63)$$

の解となる. 式 (3.59) が成立すれば, 式 (3.62), (3.63) から出発し, 定理 3.1 の証明と同様にして, 式 (3.60) を得ることができる. $\square$

3.8 流れ画像の復元

平均射影フィルタの有効性を確認するために, ぶれによって劣化した流れ画像のウィーナーフィルタ, 平均射影フィルタによる復元実験を行った.

原画像 f は, 大きさが 128×128 画素で, 1 画素あたり 8bit の濃淡で表現されている. 流れ画像 Af は, x 方向に 16 画素の巡回平均をとることによって作成する. 雑音 n は, 0 から 1 までの正規乱数を 12 回足して 6 を引いて, 平均が 0, 分散が 1 の疑似正規分布を作り, それを元に画素 (x, y) での分散 σ_x が, y に無関係に,

$$\sigma_x = \begin{cases} 0.1 + (32 - x)/16 & (0 \leq x \leq 32) \\ 0.1 + (x - 96)/16 & (96 \leq x \leq 127) \\ 0.1 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (3.64)$$

となるように作成する. この例では, 雑音の大きさが場所によって異なっており, フーリエ変換の技術が適用できない例になっている.

劣化も雑音も x 方向だけの関数であるから、画像の各行ごとに独立に処理することができる。よって、 $\mathcal{R}$ として 128 次元のユークリッド空間を採用することにする。観測画像空間も 128 次元のユークリッド空間とする。劣化作用素 A は、第 i, j 成分が、

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1/16 & (i \leq j \leq i+15 \text{ または } j \leq i-113) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (3.65)$$

で与えられる対角行列として表現できる。同様に、雑音の相関作用素 Q は、第 i, j 成分が、

$$(Q)_{ij} = \sigma_i^2 \delta_{ij} \quad (3.66)$$

で与えられる。 Q は明らかに正則であるから、平均射影フィルタは、式 (3.60) より、

$$B = RA^*V^{-1}RA^*Q^{-1} \quad (3.67)$$

$$V = RA^*Q^{-1}ARA^* \quad (3.68)$$

によって計算することができる。式 (3.67) にあるべき不定項は、 Q が正則であるから消滅する。

画像の真の相関作用素 R はわからない。本実験では、次のように仮定した。

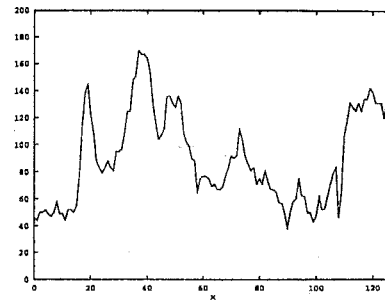
$$(R)_{ij} = 10000(1/2)^{|i-j|} \quad (3.69)$$

実験結果を図 3.3 に示す。また、観測画像の詳細を、図 3.4 に示す。図 3.3 と図 3.4 において、右側の図は復元画像の $y = 64$ における断面である。図 3.3(a) が原画像である。図 3.3(b) が観測画像である。観測画像は、図 3.4(a) の劣化画像と、図 3.4(b) の雑音が加算されたものである。ここで、図 3.4(b) の左側の雑音の画像は、様子を分かりやすくするために、雑音を 20 倍し、その絶対値を取ったものである。また、図 3.4(b) の右側の雑音のグラフの縦軸のスケールも、他のグラフの 20 分の 1 倍になっている。

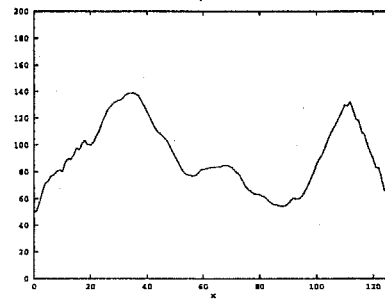
これらの図から次のことがわかる。図 3.3(c) のウィーナーフィルタによる復元画像は少しぼけている。特に、画像のエッジの所でそれがわかる。そして、この傾向は、雑音の大きな所で顕著である。これに対して、図 3.3(d) の平均射影フィルタによる復元画像には、エッジのぼけが生じていないため、良好な復元画像が得られている。しかし、復元画像の雑音成分に関しては、ウィーナーフィルタの方が、平均射影フィルタよりも抑制され目立たないものになっている。

3.9 まとめ

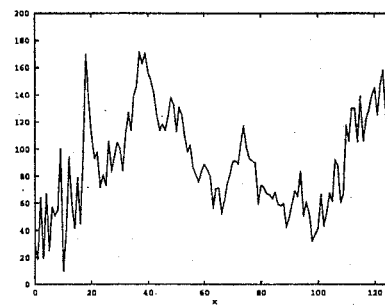
本章では、復元フィルタの評価基準に関する一つの問題を解決した。頻繁に生じる原画像ほどより精度良く復元したい場面に、射影フィルタの考え方を採り入れた平均射影フィルタの概念を提案した。すなわち、平均射影フィルタとは、(i) 原画像と、復元画像の画像成分との原画像に関する平均 2 乗誤差を最小にするものの中で、(ii) 復元画像の雑音成分の 2 乗平均を最小にするものである。さらに、作用素の 1-逆を用いて、平均射影フィルタの一般形を求めた (定理 3.1)。また、平均射影フィルタの性質を調べるために、まず、“分布の平均 2 乗的包含関係”と“作用素の平均 2 乗的同等性”の概念を導入し、その数学的性質を明らかにした。そして、平均射影フィルタの概念を少しゆるめた半平均射影フィル



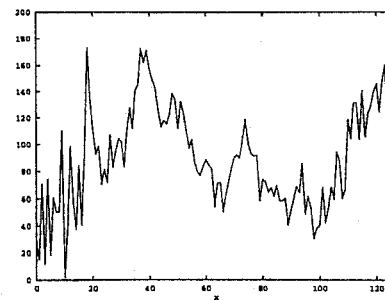
(a) 原画像



(b) 観測画像

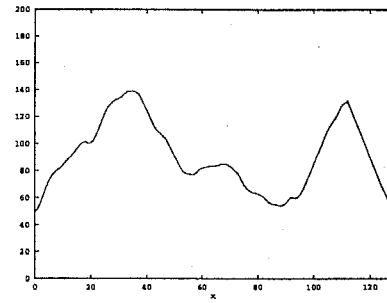


(c) ウィーナーフィルタ

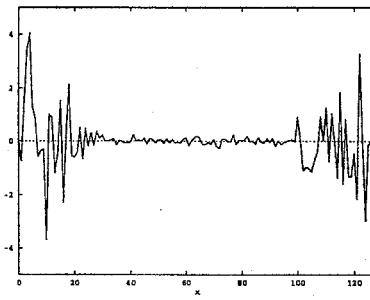
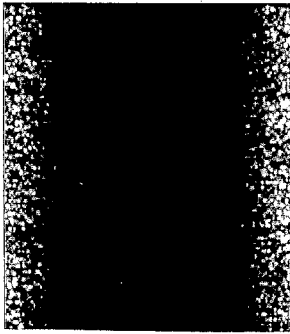


(e) 平均射影フィルタ

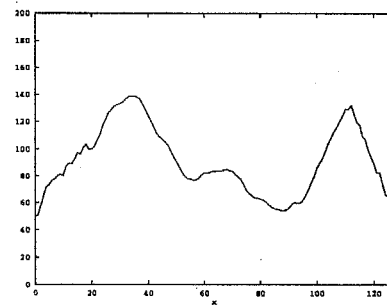
図 3.3 流れ画像の復元およびその断面図



(a) 劣化画像



(b) 雑音



(c) 観測画像

図 3.4 観測画像およびその断面図

タの概念を導入した。これらの概念を用いることにより、次の性質を明らかにした。平均射影フィルタの復元画像の画像成分は、原画像が $\mathcal{R}(RA^*)$ に含まれれば、正確に原画像に一致する (定理 3.2)。また $\mathcal{R}(RA^*)$ に含まれていない原画像に対して、その復元画像の画像成分は、原画像の $\mathcal{R}(RA^*)$ への斜射影に平均 2 乗的に等しい (定理 3.3-3.5)。復元画像の雑音成分を最小にするために、平均射影フィルタの零空間は、 $Q\mathcal{R}(AR)^\perp$ を含んでいる (定理 3.6)。定理 3.2 と定理 3.6 の性質は、平均射影フィルタになるための必要十分条件になっている (定理 3.7)。

最後に、ある条件下での平均射影フィルタの簡潔な表現を与え (定理 3.8)、この表現に基づいて、復元実験によりその有効性を示した。

Chapter 4

最適画像復元フィルタと空間の位相

4.1 まえがき

本章では、復元フィルタと空間の位相に関する一つの問題を解決する。最適画像復元フィルタとは、ある最適化基準を満たす画像復元フィルタのことである。この最適化基準は空間の距離、すなわち、位相で与えられる。従って、最適復元フィルタは、空間の位相の定義によって、一般には異なったものになる。従来の最適画像復元の研究では、あらかじめ位相は与えられているものとして議論を進めていた。よって、位相の定義と最適画像復元との関係について、詳しく論じられることはなかった。本章の目的は、この両者の関係を明確にすることである。

一般逆フィルタ、射影フィルタ、部分射影フィルタ、平均射影フィルタ、ウィーナーフィルタの5個の最適復元フィルタの定義には、原画像空間または観測画像空間のノルムが使われている。本章では、位相の変更をヒルベルト空間の同相な内積の変更に限ることにする。この変更によって、これら5個の最適復元フィルタが受ける影響について論じる。そして特に、マハラノビス空間を用いた場合の復元フィルタの性質を論じる。

4.2 空間の同相な内積の変更

ヒルベルト空間 $\mathcal{X}$ に別の内積 $(\cdot, \cdot)'$ を導入してできるヒルベルト空間を $\mathcal{X}'$ で表す [13]。 $\|\cdot\|$ を、この内積によって定まるノルムとする。 $\mathcal{X}'$ と $\mathcal{X}$ の内積が同相であるとは、ある正数 α, β が存在し、任意の $f \in \mathcal{X}$ に対して $f \in \mathcal{X}'$ と見なすとき、

$$\alpha \|f\| \leq \|f\|' \leq \beta \|f\| \quad (4.1)$$

が成立することである。また、同相作用素とは、逆が存在し、それ自身と逆とが連続になる作用素のことである。

同相な内積と正值同相作用素の間に、次の命題が成立する。

命題 4.1 $\mathcal{X}$ をヒルベルト空間とする。正值同相作用素 $M \in B(\mathcal{X})$ を用いて、 $(\cdot, \cdot)_{(M)}$ を $f, g \in \mathcal{X}$ に対して、

$$(f, g)_{(M)} = (Mf, g) \quad (4.2)$$

によって定義する。 $(\cdot, \cdot)_{(M)}$ は内積になる。この内積によって定まる空間 $\mathcal{X}_{(M)}$ は、 $\mathcal{X}$ と同相な内積を持つヒルベルト空間になる。逆に、 $\mathcal{X}$ と同相な内積を持つ任意のヒルベルト空間の内積は、式 (4.2) によって表すことができる。

$\mathcal{X}_{(M)}$ のノルム $\|\cdot\|_{(M)}$ は,

$$\|f\|_{(M)} = \sqrt{(Mf, f)} \quad (4.3)$$

となる.

$\mathcal{Y}_{(N)}$ を, ヒルベルト空間 $\mathcal{Y}$ の内積を正値同相作用素 N で変更したヒルベルト空間とする. $f \in \mathcal{X}$ と $g \in \mathcal{Y}_{(N)}$ に対するシャッテン積 $(f \otimes \bar{g})_{(N)}$ は, 次の関係を満たす.

$$(f \otimes \bar{g})_{(N)} = (f \otimes \bar{g})N \quad (4.4)$$

実際, シャッテン積の定義より, $h \in \mathcal{Y}_{(N)}$ に対して,

$$(f \otimes \bar{g})_{(N)}h = (h, g)_{(N)}f = (Nh, g)f = (f \otimes \bar{g})Nh \quad (4.5)$$

となり, 式 (4.4) が成立する. 式 (2.7) より, このシャッテン積は, $\mathcal{X}$ の内積の定義にはよらない.

$\mathcal{X}_{(M)}$ における確率変数 X に関する相関作用素 $R_{X(M)}$ は, 式 (4.4) より, 次の式で表される.

$$R_{X(M)} = R_X M \quad (4.6)$$

内積を変更した空間の共役作用素について, 次の補題が成立する.

補題 4.1 $A \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ を $B(\mathcal{X}_{(M)}, \mathcal{Y}_{(N)})$ の元と見なした場合の A の共役作用素 $A^{*(M)(N)}$ は, A^* を使って次のように表される.

$$A^{*(M)(N)} = M^{-1}A^*N \quad (4.7)$$

$\mathcal{X}$ の部分空間 $\mathcal{L}$ の $\mathcal{X}_{(M)}$ での直交補空間 $\mathcal{L}^{\perp(M)}$ は,

$$\mathcal{L}^{\perp(M)} = M^{-1}\mathcal{L}^{\perp} \quad (4.8)$$

となる. 実際, 任意の $f \in \mathcal{L}^{\perp}$ と $g \in \mathcal{L}$ に対して,

$$(M^{-1}f, g)_{(M)} = (f, g) = 0 \quad (4.9)$$

となるから, $M^{-1}\mathcal{L}^{\perp} \subset \mathcal{L}^{\perp(M)}$ となる. 同様にして逆も証明できるので, 式 (4.8) が成立する.

$A \in B(\mathcal{X})$ のトレースを $tr(A)$ で表す. トレースと内積の変更に対して, 次の補題が成立する.

補題 4.2 トレースは同相な内積のとり方によらない. すなわち, $A \in B(\mathcal{X})$ を $A \in B(\mathcal{X}_{(M)})$ と見なした場合のトレースを $tr(A)_{(M)}$ で表せば, 次の関係が成立する.

$$tr(A)_{(M)} = tr(A) \quad (4.10)$$

4.3 最適画像復元フィルタと空間の内積の変更

最適画像復元フィルタは, 定義 (2.15)–(2.26), (3.1), (3.2) を一見したところ, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の内積の定義に依存するよう見える. そこで本章では, 原画像空間および観測画像空間の同相な内積の変更によって, それらの復元フィルタが受ける影響を, それぞれの作用素方程式を用いて厳密に調べる.

平均射影フィルタは、補題 3.2 のように、作用素方程式 (3.12), (3.13) の解として特徴づけることができた。本章で論じる最適復元フィルタもすべて、同様の作用素方程式の解として特徴づけることができる。それらをまとめて、次の補題に示す。

補題 4.3 一般逆フィルタ B_{GIF} は、ある作用素 C と共に連立作用素方程式

$$B_{GIF}AA^* = A^* \quad (4.11)$$

$$B_{GIF} = CAA^* \quad (4.12)$$

の解として与えられる。

射影フィルタ B_{PF} は、ある作用素 C と共に連立作用素方程式

$$B_{PF}AA^* = A^* \quad (4.13)$$

$$B_{PF}Q = CAA^* \quad (4.14)$$

の解として与えられる。

S_1 を、部分射影フィルタが個々の原画像に最も近い画像成分を与える部分空間とする。 $S_2 = (S_1 \cap \mathcal{N}(A))^\perp$ とおく。 P_1 および P_2 を、それぞれ、 S_1 および S_2 への正射影作用素とする。部分射影フィルタ B_{PTPF} は、ある作用素 C と共に連立作用素方程式

$$B_{PTPF}AP_1 = P_2P_1 \quad (4.15)$$

$$B_{PTPF}Q = CP_1A^* \quad (4.16)$$

の解として与えられる。

平均射影フィルタ B_{APF} は、ある作用素 C と共に連立作用素方程式

$$B_{APF}ARA^* = RA^* \quad (4.17)$$

$$B_{APF}Q = CARA^* \quad (4.18)$$

の解として与えられる。

ウィーナーフィルタ B_{WF} は、

$$B_{WF}(ARA^* + Q) = RA^* \quad (4.19)$$

の解として与えられる。

原画像空間および観測画像空間の同相な内積の変更によって、復元フィルタの作用素方程式が受ける影響に関し、次の命題が成立する。

命題 4.2 $\mathcal{X}$ および $\mathcal{Y}$ の内積をそれぞれ、正值同相作用素 M および N によって変更する。変更した空間における作用素を “'” を用いて表す。このとき、以下の関係が成立する。一般逆フィルタ B'_{GIF} は、ある作用素 C' と共に、連立作用素方程式

$$B'_{GIF}AM^{-1}A^* = M^{-1}A^* \quad (4.20)$$

$$B'_{GIF}N^{-1} = C'AM^{-1}A^* \quad (4.21)$$

の解として与えられる。射影フィルタ B'_{PF} は、ある作用素 C' とともに、連立作用素方程式

$$B'_{PF}AM^{-1}A^* = M^{-1}A^* \quad (4.22)$$

$$B'_{PF}Q = C'AM^{-1}A^* \quad (4.23)$$

表 4.1 最適画像復元フィルタの内積不変性

	原画像空間の内積	観測画像空間の内積
一般逆フィルタ	依存	依存
射影フィルタ	依存	不変
部分射影フィルタ	依存	不変
平均射影フィルタ	不変	不変
ウィーナーフィルタ	不変	不変

の解として与えられる. 部分射影フィルタ B'_{PTPF} は, ある作用素 C' と共に, 連立作用素方程式

$$B'_{PTPF}AP_1 = P'_2P_1 \quad (4.24)$$

$$B'_{PTPF}Q = C'P_1A^* \quad (4.25)$$

の解として与えられる. ここで, P'_2 を $\mathcal{X}$ でみれば, $\mathcal{S}_2^\perp$ に沿った $M^{-1}\mathcal{S}_2$ への射影作用素になっている. 平均射影フィルタ B'_{APF} は, ある作用素 C' と共に, 連立作用素方程式

$$B'_{APF}ARA^* = RA^* \quad (4.26)$$

$$B'_{APF}Q = C'ARA^* \quad (4.27)$$

の解として与えられる. ウィーナーフィルタ B'_{WF} は,

$$B'_{WF}(ARA^* + Q) = RA^* \quad (4.28)$$

の解として与えられる.

復元フィルタがある空間の同相な内積の変更に対して不変であるとは, その空間と同相な内積をもつ任意の空間のもとで構成したその復元フィルタの全体が, その内積によらず同じものになっていることである.

補題 4.3 と命題 4.2 より, 次の定理が成立する.

定理 4.1 一般逆フィルタは, $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の同相な内積の変更に対して, 一般には不変にならない. 射影フィルタと部分射影フィルタは, $\mathcal{Y}$ の同相な内積の変更に対して不変になるが, $\mathcal{X}$ の同相な内積の変更に対しては, 一般には不変にならない. 平均射影フィルタとウィーナーフィルタは $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の同相な内積の変更に対して不変になる.

定理 4.1 の結果を表 4.1 に示す. 定理 4.1 によって, 最適画像復元フィルタの中には, 内積の変更によらないものがあることがわかる.

4.4 最適画像復元フィルタの内積不変性の意味

画像復元問題における内積は本来個々の問題に応じて決定されるべきものである. しかし, 実際にはこの作業は難しく, ユークリッドの内積などが便宜的に用いられることが多い. ところが, 定理 4.1 で明らかにしたように, 内積の変更に対して, 復元フィルタの形

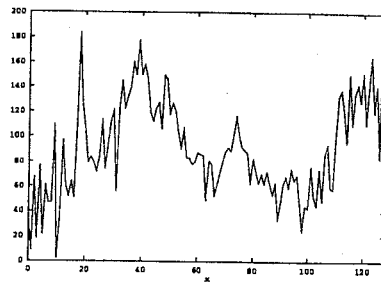


図 4.1 一般逆フィルタによる復元画像およびその断面図

が不変に保たれる場合がある。このような復元フィルタは、例えばユークリッドの内積を使って設計しても、個々の問題に適した内積を使った最適化基準をも、同時に満たしている。従って、その復元フィルタを個々の問題に適した内積を持つ空間の最適復元フィルタとして用いることができるのである。逆に、復元フィルタが内積の定義に依存するときに、個々の問題に適した内積を用いなければ、その復元フィルタのその問題に対する最適性は保証されなくなってしまう。従って、復元画像も良いものが得られなくなる。

このことを示したものが、図 4.1 である。この復元画像は、図 3.3 と同じ条件のもとで、一般逆フィルタによって復元したものである。図 4.1 の復元画像には縦縞の様なものが現れているため、一般的には良い復元画像ではない。しかしながら、次の節で述べるように、平均射影フィルタはマハラノビス空間での一般逆フィルタであるから、内積のとり方によっては、縦縞が生じていない復元画像が得られる。しかしながら、ここでは、ユークリッドノルムを用いたために、縦縞が生じたものと考えられる。

次に、内積のとり方に依存しない復元フィルタが、それを設計する時に持つ利点に関して説明する。原画像が関数として表される場合を考える。関数の座標系のとり方を決めると、関数を表すために都合の良い正規直交基底は、内積と共にある程度決まってしまう。例えば、原画像が 2 つの変数に対する関数の場合でも、正規直交基底は 1 つの変数に対する関数の 2 つの積になり、関数の計算が簡単になる場合が存在する。そこで、内積の変更によらない復元フィルタの一つであるウィナーフィルタの設計は、次のようにすれば良い。まず、上記の都合の良い基底の中から、適当なもの 1 種類を選び出す。劣化作用素は、この選ばれた基底を使って、行列で表現される。この劣化行列を求める計算には、この基底が用いられる。同様に、原画像の相関作用素も行列で表される。基底の選び方によっては、これらの行列が簡単な形になる場合がある。雑音の相関作用素も、行列として表されている。従って、行列計算によってウィナーフィルタを設計することができる。そして、復元画像は、その正規直交基底の線形和で表されるのである。

しかしながら、内積の変更に依存する復元フィルタを設計する場合、まず、問題に適切な内積を求めなくてはならない。この作業は一般に困難である。さらに、求めた内積から正規直交基底を求めなくてはならない。しかも、この基底は 1 つの変数に対する関数の 2 つの積の形になるとは限らない。従って、劣化行列の計算をはじめ、復元フィルタを設計するための計算量が大きく増大する可能性がある。

このように、内積の変更に依存しない復元フィルタは、問題に適切な内積がわからない場合でも、設計することが可能である。さらに、計算に都合の良い基底を用いることができるため、復元フィルタの設計のための計算量を削減することが可能である。

4.5 最適画像復元フィルタとマハラノビス空間

ある確率変数 X の相関作用素 R_X が、正值同相作用素であるとする。空間の内積を R_X^{-1} で変更した空間の距離を、マハラノビス距離 [14] と呼ぶ。本論文では、この内積を使っている空間を X に関するマハラノビス空間と呼び、 $\mathcal{X}^X$ で表すことにする。以下、原画像および雑音の相関作用素 R および Q が正值同相作用素である場合だけを考える。原画像空間 $\mathcal{X}$ および観測画像空間 $\mathcal{Y}$ の原画像および雑音に関するマハラノビス空間を、それぞれ、 $\mathcal{X}^f$ および $\mathcal{Y}^n$ で表す。原画像空間 $\mathcal{X}$ と観測画像空間 $\mathcal{Y}$ に関する復元フィルタ B を $B[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ で表す。命題 4.2 より、次の定理が成立する。

定理 4.2 次の関係が成立する。

- (i) 原画像空間として、原画像に関するマハラノビス空間を用いれば、射影フィルタと平均射影フィルタとが一致する。すなわち、次の式が成立する。

$$B_{PF}[\mathcal{X}^f, \mathcal{Y}] = B_{APF}[\mathcal{X}^f, \mathcal{Y}] \quad (4.29)$$

- (ii) 観測画像空間として、雑音に関するマハラノビス空間を用いれば、一般逆フィルタと射影フィルタとが一致する。すなわち、次の式が成立する。

$$B_{GIF}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}^n] = B_{PF}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}^n] \quad (4.30)$$

- (iii) 原画像空間および観測画像空間として、それぞれ、原画像および雑音に関するマハラノビス空間を用いれば、一般逆フィルタと射影フィルタと平均射影フィルタとが一致する。すなわち、次の式が成立する。

$$B_{GIF}[\mathcal{X}^f, \mathcal{Y}^n] = B_{PF}[\mathcal{X}^f, \mathcal{Y}^n] = B_{APF}[\mathcal{X}^f, \mathcal{Y}^n] \quad (4.31)$$

この定理を理解するために、マハラノビス空間の性質に関する命題を示す。

命題 4.3 $\mathcal{X}$ の確率変数 X の相関作用素を R_X とする。 $R_{X(M)}$ を $\mathcal{X}_{(M)}$ における X に関する相関作用素とする。

$$R_{X(M)} = I \quad (4.32)$$

が成立するための必要十分条件は、 R_X が同相作用素であり、 $M = R_X^{-1}$ となることである。

マハラノビス空間では、命題 4.3 より、相関作用素が恒等作用素になる。よって、補題 4.3 より、定理 4.2 が成立することがわかる。

同様に命題 4.3 と補題 4.3 より、次の定理が成立する。

定理 4.3 次の関係が成立する。

- (i) 射影フィルタは、観測画像空間に雑音に関するマハラノビス空間を用いたときの一般逆フィルタに等しい。すなわち、次の式が成立する。

$$B_{PF}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = B_{GIF}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}^n] \quad (4.33)$$

- (ii) 平均射影フィルタは、原画像空間および観測画像空間に、それぞれ、原画像および雑音に関するマハラノビス空間を用いたときの一般逆フィルタに等しい。すなわち、次の式が成立する。

$$B_{APF}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = B_{GIF}[\mathcal{X}^f, \mathcal{Y}^n] \quad (4.34)$$

4.6 マハラノビス空間の内積不変性からみた最適画像復元フィルタの内積不変性

本節では, 定理 4.1 で示した最適復元フィルタの内積不変性を, マハラノビス空間の内積不変性を使って解釈する. マハラノビス空間の内積不変性に関して, 次の命題が成立する.

命題 4.4 任意の同相な内積を持つヒルベルト空間から構成されたマハラノビス空間の内積は等しい. すなわち, $\mathcal{X}$ に分布する X の相関作用素 R_X が同相作用素であるとすれば, 任意の正值同相作用素 M に対して,

$$(\mathcal{X}_{(M)})^X = \mathcal{X}^X \quad (4.35)$$

が成立する. ここで, 式 (4.35) の等号は空間の内積も等しいことを意味している.

命題 4.4 より, マハラノビス空間は, それを構成するもとの内積に依らず一定になる. 従って, マハラノビス空間を用いる場合, それを構成するもとのヒルベルト空間の内積は, 例えば計算に都合の良い内積を用いて良いのである.

初めに, 命題 4.4 を使って, 平均射影フィルタの内積不変性を説明する. M および N を任意の正值同相作用素とする. 式 (4.34), (4.35) より,

$$B_{APF}[\mathcal{X}_{(M)}, \mathcal{Y}_{(N)}] = B_{GIF}[(\mathcal{X}_{(M)})^f, (\mathcal{Y}_{(N)})^n] = B_{GIF}[\mathcal{X}^f, \mathcal{Y}^n] = B_{APF}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \quad (4.36)$$

となり,

$$B_{APF}[\mathcal{X}_{(M)}, \mathcal{Y}_{(N)}] = B_{APF}[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \quad (4.37)$$

となる. よって, 平均射影フィルタは内積に対して不変になることが理解できる.

次に, ウィーナーフィルタに関して説明する. 7 章で詳しく述べるように, $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ におけるウィーナーフィルタは, $\mathcal{X}^f$ と $\mathcal{Y}^n$ において,

$$\|f_0\|_{(R^{-1})}^2 + \|Af_0 - g\|_{(Q^{-1})}^2 \quad (4.38)$$

を最小にする f_0 を与えるものになる. 命題 4.4 より, 式 (4.38) の値は, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の代わりに, $\mathcal{X}_{(M)}, \mathcal{Y}_{(N)}$ を使っても同じ値になっている. よって, ウィーナーフィルタの内積不変性が理解できる.

4.7 まとめ

本章では, 復元フィルタと空間の位相に関する一つの問題を解決した. すなわち, 最適復元フィルタとヒルベルト空間の同相な内積の変更について, 次のことを明らかにした. 平均射影フィルタとウィーナーフィルタは, 原画像空間と観測画像空間の内積の変更によらないこと. 射影フィルタと部分射影フィルタは, 観測画像空間の内積の変更によらないこと. 原画像空間および観測画像空間として, それぞれ, 原画像および雑音に関するマハラノビス空間を用いれば, 一般逆フィルタ, 射影フィルタ, 平均射影フィルタはすべて一致すること.

また, マハラノビス空間の同相な内積の変更に対する不変性を用いて, 復元フィルタ同相な内積の変更に対する不変性の解釈を与えた.

画像復元問題における内積は、復元フィルタを適用する具体的問題に応じて定められるべきものである。内積の定義によってその形が変化する復元フィルタは、当然のことながら、そのような適切な内積を使って設計して初めて、その威力を発揮することになる。しかし、復元フィルタが内積の定義に対して不変ならば、どのような内積を用いても良いことになり、適切な内積を求めるという困難な作業を遂行することなく、容易に復元フィルタを構成することができるのである。

Chapter 5

最適画像復元フィルタと作用素の一般逆

5.1 まえがき

本章では、一般逆の立場から、復元フィルタの表現を与える。最適画像復元フィルタと一般逆の間には密接な関係があり、今までにも様々な関係が調べられてきた [50], [39]。一般逆による復元フィルタの別表現を与えることによって、復元フィルタの雑音抑制機構を明らかになる。さらに、復元フィルタを設計するための計算量を削減することができることを示す。

5.2 半射影作用素と 2 乗平均の最小性

ヒルベルト空間 $\mathcal{X}$ の互いに素な閉部分空間 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ に対して、作用素 $P_{\mathcal{S}, \mathcal{T}}$ を、

$$P_{\mathcal{S}, \mathcal{T}} f = \begin{cases} f & : (f \in \mathcal{S}) \\ 0 & : (f \in \mathcal{T}) \end{cases} \quad (5.1)$$

によって定義する。 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ の直和 $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ に含まれない元は、 $P_{\mathcal{S}, \mathcal{T}}$ が有界線形であればどんな元に写像してもよいことにする。 $P_{\mathcal{S}, \mathcal{T}}$ を、 $\mathcal{T}$ に沿った $\mathcal{S}$ への半射影作用素と呼ぶ [21]。

射影する空間が定められた半射影作用素と、確率変数 X に関する 2 乗平均に関して、次の定理が成立する。定理 5.1 は、系 5.1 と同時に証明する。

定理 5.1 $\mathcal{X}$ の確率変数 X の相関作用素を R_X とし、 $\mathcal{L}$ を $\mathcal{X}$ の閉部分空間とする。 $\mathcal{L} + R_X \mathcal{L}^\perp$ は閉部分空間になっているとする。 $\mathcal{L}_r$ を、 $\mathcal{L}$ と素で、 $R_X \mathcal{L}^\perp$ を含む任意の閉部分空間とする。 $\mathcal{L}$ への半射影作用素を X に作用させたものの 2 乗平均が最小になるための必要十分条件は、その半射影作用素が $\mathcal{L}_r$ に沿うことである。すなわち、 $\mathcal{W}$ を $\mathcal{L}$ と素な任意の閉部分空間とすれば、

$$E_X \|P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} x\|^2 \geq E_X \|P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} x\|^2 \quad (5.2)$$

が成立する。等号が成立するための必要十分条件は、 $\mathcal{N}(P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}})$ が、 $R_X \mathcal{L}^\perp$ を含むことである。

定理 5.1 の記号のもとで、次の 3 つの系が成立する。

系 5.1 任意の有界な半正值作用素 G に対して、

$$E_X \|GP_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} x\|^2 \geq E_X \|GP_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} f\|^2 \quad (5.3)$$

が成立する. G が正值作用素ならば, 等号が成立する条件は, 定理 5.1 と同じものになる.

定理 5.1 と系 5.1 の証明 式 (5.3) において $G = I$ とおけば式 (5.2) になるので, 式 (5.3) を証明する. 式 (3.44) より, $\mathcal{L}$ と $R_X \mathcal{L}^\perp$ は互いに素である. よって, 定理 5.1 の条件を満たす $\mathcal{L}_r$ が確かに存在する. 汎関数

$$J = E_X \|GP_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} x\|^2 - E_X \|GP_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} x\|^2$$

を考える.

$$\begin{aligned} E_X \|GP_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} x\|^2 &= E_X \text{tr}((GP_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} x) \otimes \overline{(GP_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} x)}) \\ &= \text{tr}(GP_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} E_X(x \otimes \bar{x}) P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}^* G) \\ &= \text{tr}(GP_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}^* G) \end{aligned}$$

となる. よって,

$$J = \text{tr}(GP_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}^* G) - \text{tr}(GP_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}^* G)$$

となる. $\mathcal{N}(P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} - P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}) \supset \mathcal{L}$ であるから,

$$\mathcal{R}(P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}^* - P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}^*) \subset \mathcal{L}^\perp$$

となる. $\mathcal{L}_r$ は $R_X \mathcal{L}^\perp$ を含むから,

$$P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}^* - P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}^* = P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} R_X (P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}^* - P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}^*) = 0$$

となる. よって,

$$P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}^* = P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}^*$$

となる. 上式の共役を取れば, 次の式が成立する.

$$P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}^* = P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}^*$$

また, $R_X \geq 0$ であるから, $R_X^{1/2}$ が存在する. よって,

$$\begin{aligned} J &= \text{tr}(GP_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}^* G) - \text{tr}(GP_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}^* G) - \text{tr}(GP_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}^* G) + \text{tr}(GP_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} R_X P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}^* G) \\ &= \text{tr}(G(P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} - P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}) R_X^{1/2} [G(P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} - P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}) R_X^{1/2}]^*) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となり, 式 (5.3) が成立する.

$G > 0$ のとき, 等号が成立するための必要十分条件は,

$$(P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}} - P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r}) R_X^{1/2} = 0$$

である. 式 (3.16) より,

$$\mathcal{L} \dot{+} R_X \mathcal{L}^\perp \supset \overline{\mathcal{R}(R_X)} = \overline{\mathcal{R}(R_X^{1/2})} \supset \mathcal{R}(R_X^{1/2})$$

となる. よって, $\mathcal{R}(R_X^{1/2})$ の元は $\mathcal{L}$ と $R_X \mathcal{L}$ の元に一意に分解され, $f \in R_X \mathcal{L}^\perp$ に対して, $P_{\mathcal{L}, \mathcal{L}_r} f = 0$ となる. よって, 式 (5.3) の等号が成立する必要十分条件は, $\mathcal{N}(P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}) \supset R_X \mathcal{L}^\perp$ となる. $\square$

系 5.1 は, 定理 5.1 の最小性が任意の重み G を乗じても成立することを示している.

系 5.2 任意の有界な半正值作用素 G に対して,

$$E_X \|P_{W, \mathcal{L}} x - x\|^2 \geq E_X \|P_{\mathcal{L}_r, \mathcal{L}} x - x\|^2 \quad (5.4)$$

$$E_X \|G(P_{W, \mathcal{L}} x - x)\|^2 \geq E_X \|G(P_{\mathcal{L}_r, \mathcal{L}} x - x)\|^2 \quad (5.5)$$

が成立する. G が正值作用素ならば, 両式の等号が成立する条件は, $\mathcal{N}(I - P_{W, \mathcal{L}})$ が $R_X \mathcal{L}^\perp$ を含むことである.

空間の内積の変更に対して次の系が成立する.

系 5.3 定理 5.1 と系 5.1, 5.2 の結果は, $\mathcal{X}$ の同相な内積の変更によらない. すなわち, 任意の正值同相作用素 $M \in B(\mathcal{X})$ に対して, $\mathcal{X}_{(M)}$ においても, 式 (5.2)-(5.5) が, $\mathcal{X}$ の場合と同じ $\mathcal{L}_r$ に対して成立する.

5.3 最適画像復元と作用素の一般逆

5.3.1 作用素の 1,2-逆

B を A の 1-逆とする. このとき, A は $\mathcal{N}(A)$ に沿った, $\mathcal{R}(BA)$ への射影作用素になる. よって, 画像復元フィルタ B が劣化作用素 A の 1-逆になっているとすれば, 復元画像の画像成分 $f_1 = BAf$ は, 原画像 f の $\mathcal{N}(A)$ に沿った $\mathcal{R}(BA)$ への射影になる.

1, 2-逆に関して, 次の命題が成立している [3].

命題 5.1 B を A の 1, 2-逆とすれば, 次の関係が成立する.

(i) $\mathcal{R}(B)$ の元と $\mathcal{R}(A)$ の元は, A によって 1 対 1 に対応し, それらの元に対して B は A の逆作用素になっている.

(ii) 次の関係が成立する.

$$BA = P_{\mathcal{R}(B), \mathcal{N}(A)} \quad (5.6)$$

(iii) 次の関係が成立する.

$$AB = P_{\mathcal{R}(A), \mathcal{N}(B)} \quad (5.7)$$

復元フィルタ B が劣化作用素 A の 1,2-逆になっているとする. 雑音がない場合, $g = Af$ は, 命題 5.1 の (i) によって, 対応する $\mathcal{R}(B)$ の画像に復元される. 雑音がある場合, g は Af に雑音 n が加算されることによって, $\mathcal{R}(A)$ からはみ出す. g_0 を,

$$g_0 = P_{\mathcal{R}(A), \mathcal{N}(B)} g \quad (5.8)$$

によって定義すれば, 命題 5.1 の (iii) と式 (2.9) より, $Bg_0 = Bg$ となる. すなわち, g と g_0 に対する復元画像は等しい. g_0 は $\mathcal{R}(A)$ の元であるから, その復元画像は雑音がない場合と同様に, 命題 5.1 の (i) によって対応する $\mathcal{R}(B)$ の画像に復元される. 従って, 復元フィルタ B は, g の中で雑音によって $\mathcal{R}(A)$ からはみ出した成分を, $\mathcal{R}(A)$ への射影によって取り除いて復元している. すなわち, B は, g_0 を雑音を加算される前の Af の推定値として復元していると考えることができる.

Y を $\mathcal{X}$ に実現値 y を持つ確率変数とする. S を $\mathcal{X}$ の部分空間とし, $a \in S$ とする. $X = Y + a$ は $\mathcal{X}$ の確率変数になる. 任意の $a \in S$ に対して X が部分空間 $\mathcal{T}$ に平均 2 乗的に含

表 5.1 最適画像復元フィルタと一般逆

復元フィルタ	一般逆	原画像空間 X	観測画像空間 Y
一般逆フィルタ	1, 2, 3, 4		
射影フィルタ	1, 2, 4		
平均射影フィルタ	1, 2		

まれることを, 単に X が T に平均 2 乗的に含まれると拡張して呼ぶことにする. Y の相関作用素を R_Y とする. 式 (3.37) より, X は, $\overline{\mathcal{R}(R_Y) + \mathcal{S}}$ に平均 2 乗的に含まれる.

作用素の Y に関する平均 2 乗的同等性に対しても同様に拡張する. すなわち, $A, B \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が, Y に関して平均 2 乗的に等しいとは, 任意の $a \in \mathcal{S}$ に対して,

$$E_Y \|(A - B)(y + a)\|^2 = 0 \quad (5.9)$$

が成立することと定義する.

作用素 U_{PF} , U_{APF} を, それぞれ,

$$U_{PF} = AA^* + Q \quad (5.10)$$

$$U_{APF} = ARA^* + Q \quad (5.11)$$

によって定義する. 以下, $A, R, Q, AR, U_{PF}, U_{APF}$ の値域が閉空間になっているとする.

以上の概念をもとにして, 最適画像復元フィルタと一般逆の関係を論じる. 結果を表 5.1 にまとめて示す.

5.3.2 一般逆フィルタと一般逆

一般逆フィルタ B_{GIF} は, A の 1,2,3,4-逆になっている. 従って, B_{GIF} は A の 1,4-逆にもなっているので, f_1 は f の $\mathcal{R}(A^*)$ への正射影になる. よって, f_1 は個々の f に対して, $\|f_1 - f\|$ を最小にするものになっている.

一方, B_{GIF} は, A の 1,2,3-逆にもなっている. 従って, Af の推定値 g_0 は, g の $\mathcal{R}(A)$ への正射影になっている. すなわち, g_0 は, 個々の g に対して, $\|g_0 - g\|$ を最小にするものになっている.

5.3.3 射影フィルタと一般逆

射影フィルタでは、その定義から明らかなように、画像成分 f_1 は、個々の f に対して、 $\|f_1 - f\|$ を最小にするものである。すなわち、 B_{PF} は A の 1,4-逆になっている。

観測画像は $\mathcal{R}(U_{PF})$ に平均 2 乗的に含まれている。この $\mathcal{R}(U_{PF})$ に関して、次の補題が成立する。

補題 5.1 観測画像空間を $\mathcal{R}(U_{PF})$ に制限すれば、 B_{PF} は、劣化作用素 A の 1,2,4-逆になっている。

A の 1,2,4-逆の中で、 g_0 を Af の推定値として採用するとき、雑音による平均 2 乗誤差が最小になるものを考える。すなわち、 $E_n \|g_0 - Af\|^2$ が最小になる A の 1,2,4-逆を考える。 g から g_0 を求める射影作用素を P_A とすれば、 $g_0 - Af = P_A n$ が成立する。よって、定理 5.1 より、この 2 乗平均が最小になるのは、 $\mathcal{N}(P_A)$ が $QR(A)^\perp$ を含む場合である。射影フィルタの零空間 $\mathcal{N}(B_{PF})$ は、この $QR(A)^\perp$ を含んでいる [16]。従って、次の定理と系が成立する。

定理 5.2 観測画像空間を $\mathcal{R}(U_{PF})$ に制限すれば、射影フィルタは、劣化作用素の 1,2,4-逆の中で、雑音による平均 2 乗誤差を最小にするものになっている。

系 5.4 $A_n^{(1,2,4)}$ を A の 1,2,4-逆の中で、雑音による平均 2 乗誤差を最小にするものとする。射影フィルタは、 $A_n^{(1,2,4)}$ に観測画像に関して平均 2 乗的に等しい。すなわち、任意の原画像 f に関して、

$$E_n \|(B_{PF} - A_n^{(1,2,4)})g\|^2 = 0 \quad (5.12)$$

が成立する。

雑音による誤差の評価は、射影フィルタの式 (2.20) のように、原画像空間で評価すべきである。しかし、上記の雑音による誤差の評価は観測画像空間で行われている。従って、一般には、復元画像に現れる雑音成分の 2 乗平均が最小になるとは限らない。 B を A の 1,2-逆とする。 $n_0 = g_0 - Af$ が抑制できなかった雑音であり、 Bn_0 が原画像空間に現れる雑音成分になる。このとき、

$$\|Bn_0\| = \|(B^*B)^{1/2}n_0\| \quad (5.13)$$

となるから、原画像空間での評価は、観測画像空間において重み $(B^*B)^{1/2}$ をかけて評価したものに等しくなる。さらに、系 5.1 で示したように、最適になる条件はノルムに付加した重み G によらない。よって、復元フィルタを 1,2-逆の中で探すことにすれば、観測画像空間および原画像空間のどちらで評価しても同じ結果を与えることになる。従って、観測画像空間を $\mathcal{R}(U_{PF})$ に制限すれば、命題 5.1 と定理 5.2 より、射影フィルタは、劣化作用素の任意の 1,2,4-逆に観測画像空間だけで雑音の抑制を評価した斜射影作用素を掛けたものである。従って、例えば、劣化が等しく、雑音の性質だけが異なる場合の射影フィルタを設計する場合、復元フィルタ全体を再設計せずに、斜射影作用素の部分だけを設計すれば良い。従って、このような射影フィルタを設計するための計算量が節約できる場合があると考えられる。

5.3.4 平均射影フィルタと一般逆

平均射影フィルタを考える。3 章で論じたように、原画像および観測画像は、それぞれ、 $\mathcal{R}(R)$ および $\mathcal{R}(U_{APF})$ に平均 2 乗的に含まれている。この 2 つの空間に関して次の補題が成立する。

補題 5.2 原画像空間および観測画像空間をそれぞれ, $\mathcal{R}(R)$ および $\mathcal{R}(U_{APF})$ に制限すれば, B_{APF} は A の 1,2-逆になっている.

f と f_1 との平均 2 乗誤差 $E_f \|f_1 - f\|^2$ が最小になる 1,2-逆を考える. 命題 5.1 より, $f_1 = B_{APF} f$ は, f の $\mathcal{N}(A)$ に沿った射影になる. よって, 系 5.2 よりこの 2 乗誤差が最小になるのは, f_1 が f の $\mathcal{N}(A)$ に沿った $\mathcal{RN}(A)^\perp$ を含む空間への射影になるときである. 平均射影フィルタはこの条件を満たしている.

さらに, 劣化画像 Af が $\mathcal{R}(AR)$ に平均 2 乗的に存在することに注意すれば, 射影フィルタと同様に, 次の定理と系が成立する.

定理 5.3 原画像空間および観測画像空間を, それぞれ, $\mathcal{R}(R)$ および $\mathcal{R}(U_{APF})$ に制限すれば, 平均射影フィルタは, 劣化作用素の 1,2-逆の中で, 原画像に関する平均 2 乗誤差と雑音による平均 2 乗誤差を共に最小にするものになっている.

系 5.5 A' を, A と原画像に関して平均 2 乗的に等しいある作用素とする. $A'_{fn}^{(1,2)}$ を, A' の 1,2-逆の中で, 原画像に関する平均 2 乗誤差と雑音による平均 2 乗誤差を共に最小にするものとする. 平均射影フィルタは, $A'_{fn}^{(1,2)}$ に観測画像に関して平均 2 乗的に等しい. すなわち,

$$E_f \|(A' - A)f\|^2 = 0 \quad (5.14)$$

を満たすある A' に対して,

$$E_f E_n \|(B_{APF} - A'_{fn}^{(1,2)})g\|^2 = 0 \quad (5.15)$$

が成立する.

5.4 ウィーナーフィルタと一般逆

ウィーナーフィルタの一般形は,

$$B_{WF} = RA^*U_{WF}^\dagger + W(I - U_{WF}U_{WF}^\dagger) \quad (5.16)$$

で与えられる [18]. ここで,

$$U_{WF} = ARA^* + Q \quad (5.17)$$

であり, W は $\mathcal{Y}$ から $\mathcal{X}$ への任意の作用素である.

文献 [18] では, $Q > 0$ のとき, ウィーナーフィルタは一般逆の性質を持たないことを示している. しかし, 一般の場合に関して, 次の定理が成立する.

定理 5.4 $\mathcal{R}(AR)$, $\mathcal{R}(ARA^* + Q)$, $\mathcal{R}(Q)$ は閉空間とする. $f \in \mathcal{R}(R)$ が,

$$B_{WF}Af = f \quad (5.18)$$

となるための必要十分条件は, $f \in RA^*\mathcal{N}(Q)$ となることである. また, $g \in \mathcal{R}(U_{WF})$ が,

$$AB_{WF}g = g \quad (5.19)$$

となるための必要十分条件は, $g \in ARA^*\mathcal{N}(Q)$ となることである.

定理 5.4 の証明には, 次の補題を使う.

補題 5.3 A をある線形作用素とし, M を半正値作用素とする. $\mathcal{R}(M)$ は閉空間とする.

$$\mathcal{N}(M) \subset \mathcal{N}(A) \quad (5.20)$$

ならば、任意に固定した M の 1-逆 M^- に対して、

$$\mathcal{N}(AM^-) = M\mathcal{N}(A) \dot{+} \mathcal{N}(MM^-) \quad (5.21)$$

となる。

定理 5.4 の証明 まず、定理の後半を証明する。作用素 $I - U_{WF}U_{WF}^\dagger$ は、 $\mathcal{R}(U_{WF})$ に沿った正射影作用素である。よって、 $g \in \mathcal{R}(U_{WF})$ に対しては、式 (5.16) の不定項は 0 になる。従って、

$$AB_{WF}g = ARA^*U_{WF}^\dagger g = g - QU_{WF}^\dagger g \quad (5.22)$$

となる。よって、 g が式 (5.19) を満たすための必要十分条件は、 $g \in \mathcal{N}(QU_{WF}^\dagger)$ となることである。補題 5.3 を用いる。 $Q\mathcal{N}(Q) = \{0\}$ となるから、補題 5.3 の A および M を、それぞれ、 Q および U_{WF} とおけば、

$$\mathcal{N}(QU_{WF}^\dagger) = ARA^*\mathcal{N}(Q) \dot{+} \mathcal{N}(U_{WF}^\dagger) \quad (5.23)$$

となる。 $g \in \mathcal{R}(U_{WF}) = \mathcal{N}(U_{WF})^\perp = \mathcal{N}(U_{WF}^\dagger)^\perp$ であるから、定理 5.4 の後半が成立する。

次に、定理 5.4 の前半を証明する。 f が式 (5.18) を満たすとすれば、 $(Af) = AB_{WF}(Af)$ となる。 $Af \in \mathcal{R}(AR) \subset \mathcal{R}(U_{WF})$ であるから、定理後半部より、次の式が成立する。

$$Af \in ARA^*\mathcal{N}(Q) \quad (5.24)$$

また、 $f = B_{WF}Af$ の不定項の部分は 0 になるから、

$$f \in \mathcal{R}(RA^*) \quad (5.25)$$

となる。 $\mathcal{R}(RA^*)$ と $\mathcal{N}(A)$ とは互いに素であるから、式 (5.24), (5.25) より、 $f \in RA^*\mathcal{N}(A)$ となり、定理 5.4 の前半が成立する。□

5.5 まとめ

本章では初めに準備として、半射影作用素の概念を導入し、空間に分布する元を半射影したときに、その 2 乗平均が最小になるための必要十分条件を明らかにした。

この準備のもとで、一般逆による復元フィルタの別表現を与えた。すなわち、次の事柄を明らかにした。適当な空間の制限のもとで、射影フィルタは 1,2,4-逆の中で、雑音による平均 2 乗誤差を最小にするものであること。同様に、平均射影フィルタは 1,2-逆の中で、原画像に関する平均 2 乗誤差と、雑音による平均 2 乗誤差を共に最小にするものであること。雑音による平均 2 乗誤差の最小化は、本来、原画像空間で行なうべきものであるが、ある条件のもとでは、観測画像空間で厳密に代行できること。そして、射影フィルタおよび平均射影フィルタは、雑音を考慮していない劣化作用素のある一般逆の前に、観測画像空間だけで雑音の抑制を評価した斜射影作用素を掛けたものであることを示した。例えば、劣化が等しく、雑音の性質だけが異なる場合の射影フィルタを設計する場合、復元フィルタ全体を再設計せずに、斜射影作用素の部分だけを設計すれば良い。従って、このような射影フィルタを設計するための計算量が節約できる場合があると考えられる。そして最後に、ウィーナーフィルタが、一般逆の性質を満たすような元の全体を明らかにした。こうして、最適画像復元フィルタの雑音抑制機構などの性質の理解が深まると共に、作用素の一般逆に対する理解も深まった。

Chapter 6

各種最適画像復元フィルタの相互関係

6.1 まえがき

本章では、各種最適復元フィルタの関係を明らかにする。最適画像復元フィルタとは、ある最適化基準を満たす画像復元フィルタのことである。最適化基準のとり方によって、様々な最適復元フィルタが存在することになる。これらの最適画像復元フィルタの間には、密接な関係がある。このような関係によって、個々の最適復元フィルタの理解が深まると共に、復元フィルタの別表現が求まることによって、ある最適復元フィルタを、厳密にまたは近似的に、他の最適復元フィルタを使って求めることができるようになる。このことによって、復元フィルタを実現するための計算が安定になると共に、計算量を削減することができる。今までにも、個別にいくつかの最適復元フィルタの関係が [18], [50], [51], [39] 調べられてきた。

本章では、はじめに、最適復元フィルタの相互関係をわかりやすくするために、パラメトリック一般逆フィルタの概念を導入する。さらに、このパラメトリック一般逆フィルタ、一般逆フィルタ、射影フィルタ、部分射影フィルタ、平均射影フィルタ、ウィーナーフィルタ、パラメトリック射影フィルタ、パラメトリック部分射影フィルタ、およびパラメトリックウィーナーフィルタの相互関係を系統的に調べることにする。また、平均射影フィルタがパラメトリックウィーナーフィルタによって十分良い精度で近似できることを、画像復元実験によって確認する。

6.2 最適画像復元フィルタの一般形

はじめに、各種最適復元フィルタの相互関係をわかりやすくするために、パラメトリック一般逆フィルタ (PGIF : parametric generalized inverse filter) $B_{PGIF}(\gamma)$ を次のように定義する。補題 4.3 より、 $\|BA - P_A\|_2^2$ を最小にするものの中で、 $\|B\|_2^2$ を最小にする B は、式 (2.18), (2.19) で定義された一般逆フィルタになることがわる。そこで、 $B_{PGIF}(\gamma)$ を

$$\|BA - P_A\|_2^2 + \gamma \|B\|_2^2 \quad (6.1)$$

を最小にするものとして定義する。

式 (2.15)-(2.26), (3.1), (3.2) で定義された各種最適復元フィルタは、従来、観測画像空間 $\mathcal{Y}$ が有限次元の場合について求められていた。本章では、 $\mathcal{Y}$ が一般のヒルベルト空間の

場合について、その一般形を与えることにする。 $\mathcal{Y}$ が無限次元の空間になることによって新たに生じる問題は、各種作用素の値域が閉集合になっているかどうかということである。もし、閉集合でなければ、作用素の一般逆が存在しなくなるからである。そこで次の命題 6.1 では、一般逆が存在する条件と共に、上記の 9 種類の最適画像復元フィルタの一般形を与えることにする。なお、本来は作用素 U, V は各復元フィルタによって異なっている。しかし、各復元フィルタの相互関係の見通しをよくするために、 U と V につけるべき添え字を省略することにする。

命題 6.1 $\gamma > 0$ とし、 $W \in B(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ を任意の作用素とする。各種最適復元フィルタの一般形は、フィルタの名前の後の $[]$ の中に示した空間がすべて閉部分空間ならば存在し、次の式で与えられる。

(i) 一般逆フィルタ $[\mathcal{R}(A)]$

$$B_{GIF} = A^\dagger \quad (6.2)$$

(ii) 射影フィルタ $[\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(U)]$

$$B_{PF} = V^\dagger A^* U^\dagger + W(I - UU^\dagger) \quad (6.3)$$

$$U = AA^* + Q \quad (6.4)$$

$$V = A^* U^\dagger A \quad (6.5)$$

(iii) 部分射影フィルタ $[\mathcal{R}(AP_1), \mathcal{R}(U)]$

$$B_{PTPF} = V^\dagger A^* U^\dagger + W(I - UU^\dagger) \quad (6.6)$$

$$U = AP_1 A^* + Q \quad (6.7)$$

$$V = P_1 A^* U^\dagger AP_1 \quad (6.8)$$

(iv) 平均射影フィルタ $[\mathcal{R}(AR), \mathcal{R}(U)]$

$$B_{APF} = RA^* V^\dagger RA^* U^\dagger + W(I - UU^\dagger) \quad (6.9)$$

$$U = ARA^* + Q \quad (6.10)$$

$$V = RA^* U^\dagger ARA^* \quad (6.11)$$

(v) ウィーナーフィルタ $[\mathcal{R}(U)]$

$$B_{WF} = RA^* U^\dagger + W(I - UU^\dagger) \quad (6.12)$$

$$U = ARA^* + Q \quad (6.13)$$

(vi) パラメトリック一般逆フィルタ $[\mathcal{R}(U)]$

$$B_{PGIF}(\gamma) = A^* U^{-1} \quad (6.14)$$

$$U = AA^* + \gamma I \quad (6.15)$$

(vii) パラメトリック射影フィルタ $[\mathcal{R}(U)]$

$$B_{PPF}(\gamma) = A^* U^\dagger + W(I - UU^\dagger) \quad (6.16)$$

$$U = AA^* + \gamma Q \quad (6.17)$$

(viii) パラメトリック部分射影フィルタ $[\mathcal{R}(U)]$

$$B_{PPTPF}(\gamma) = P_1 A^* U^\dagger + W(I - U U^\dagger) \quad (6.18)$$

$$U = A P_1 A^* + \gamma Q \quad (6.19)$$

(ix) パラメトリックウィーナーフィルタ $[\mathcal{R}(U)]$

$$B_{PWF}(\gamma) = R A^* U^\dagger + W(I - U U^\dagger) \quad (6.20)$$

$$U = A R A^* + \gamma Q \quad (6.21)$$

命題 6.1 の証明に, 次の補題を使う.

補題 6.1 $\mathcal{R}(A)$ が閉空間ならば, $\mathcal{R}(A^*)$ も閉空間になる.

補題 6.2 $\mathcal{R}(C) \supset \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ ならば,

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AC) \quad (6.22)$$

となる.

補題 6.3 半正值作用素 $M_1, M_2 \in B(\mathcal{X})$ と任意の正数 γ に対して, 次の関係が成立する.

$$\mathcal{N}(M_1 + \gamma M_2) = \mathcal{N}(M_1) \cap \mathcal{N}(M_2) \quad (6.23)$$

$$\overline{\mathcal{R}(M_1 + \gamma M_2)} = \overline{\mathcal{R}(M_1) + \mathcal{R}(M_2)} \quad (6.24)$$

補題 6.4 $\mathcal{R}(AR)$ または $\mathcal{R}(AR^{1/2})$ が閉部分空間ならば, 次の関係が成立する.

$$\mathcal{R}(AR) = \mathcal{R}(AR^{1/2}) = \mathcal{R}(ARA^*) \quad (6.25)$$

補題 6.5 $\mathcal{R}(AR)$ が閉部分空間で, $\mathcal{R}(ARA^*C) = \mathcal{R}(AR)$ が成立するならば,

$$\mathcal{R}(RA^*C) = \mathcal{R}(RA^*) \quad (6.26)$$

となる.

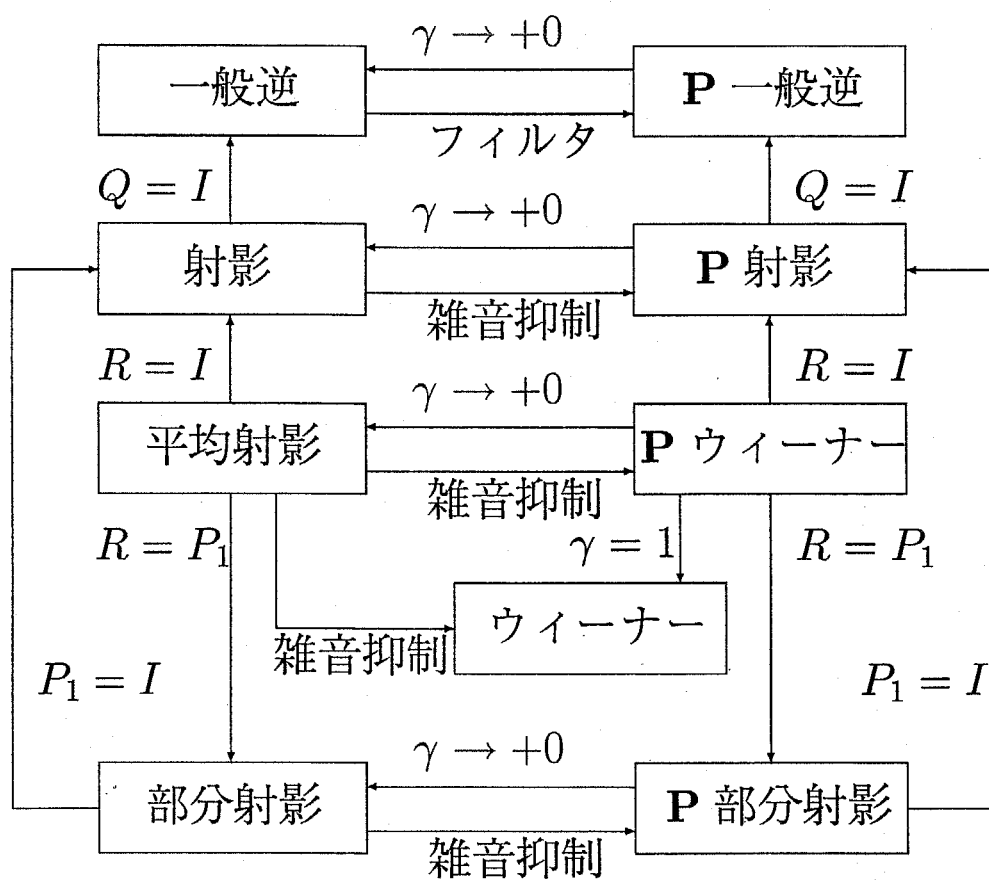
以下の議論では, 命題 6.1 で述べた十分条件はすべて成立しているものとする.

6.3 最適復元フィルタの相互関係 (その 1)

前章で述べた最適復元フィルタの間には, 次の関係が成立する (図 6.1).

定理 6.1 次の関係が成立する.

- (i) 平均射影フィルタ (APF) の一般形において, 原画像に関する相関作用素 R を S_1 への正射影作用素 P_1 に置き換えると, 部分射影フィルタ (PTPF) の一般形になる.
- (ii) 平均射影フィルタ (APF) の一般形において, R を恒等作用素 I に置き換えると, 射影フィルタ (PF) の一般形になる.
- (iii) 部分射影フィルタ (PTPF) の一般形において, P_1 を恒等作用素 I に置き換えると, 射影フィルタ (PF) の一般形になる.
- (iv) 射影フィルタ (PF) の一般形において, 雑音に関する相関作用素 Q を I に置き換えると, 一般逆フィルタ (GIF) の一般形になる.
- (v) パラメトリックウィーナーフィルタ (PWF) の一般形において, R を P_1 に置き換えると, パラメトリック部分射影フィルタ (PPTPF) の一般形になる.



P : “パラメトリック” の意味.

図 6.1 各種最適画像復元フィルタの相互関係

- (vi) パラメトリックウィーナーフィルタ (PWF) の一般形において, R を I に置き換えると, パラメトリック射影フィルタ (PPF) の一般形になる.
- (vii) パラメトリック部分射影フィルタ (PPTPF) の一般形において, P_1 を I に置き換えると, パラメトリック射影フィルタ (PPF) の一般形になる.
- (viii) パラメトリック射影フィルタ (PPF) の一般形において, Q を I に置き換えると, パラメトリック一般逆フィルタ (PGIF) の一般形になる.

証明を与える前に, 定理 6.1 の持つ意味について説明する.

(i) と (v) より, 原画像空間 $\mathcal{X}$ の中で, 部分空間 S_1 の元だけが一様に現れる場合は, 平均射影フィルタと部分射影フィルタが一致し, パラメトリックウィーナーフィルタとパラメトリック部分射影フィルタが一致することがわかる.

(ii) と (vi) より, 原画像空間 $\mathcal{X}$ の元がすべて一様に現れる場合は, 平均射影フィルタと射影フィルタが一致し, パラメトリックウィーナーフィルタとパラメトリック射影フィルタが一致することがわかる.

(iii) と (vii) より, 部分空間 S_1 が原画像空間 $\mathcal{X}$ そのものの場合には, 部分射影フィルタと射影フィルタが一致し, パラメトリック部分射影フィルタとパラメトリック射影フィルタが一致することがわかる.

(iv) と (viii) より, 雑音が観測空間 $\mathcal{Y}$ で一様に分布している場合には, 射影フィルタと一般逆フィルタが一致し, パラメトリック射影フィルタとパラメトリック一般逆フィルタが一致することがわかる.

評価基準が異なる 2 種類の復元フィルタの表現が一致するならば, 2 つの評価基準を同時に満す復元フィルタが存在する. さらに, この復元フィルタは, もとの両方の復元フィルタの表現で与えられるのである. 例えば, 射影フィルタと平均射影フィルタが一致する時は, その復元画像の画像成分は, 個々の原画像との誤差が最小になると共に, 原画像との平均 2 乗誤差も最小になっている.

定理 6.1 の証明 (iii), (v)-(viii) については, 式 (6.3)-(6.21) より明かである. (iv) も補題 4.3 より明かである.

(i) を証明する. P_0 を $\mathcal{R}(P_1 A^*)$ への正射影作用素とする. まず, 部分射影フィルタ B は, 文献 [49], [50] より, ある作用素 C と共に, 連立作用素方程式

$$B A P_1 = P_0 \quad (6.27)$$

$$B Q = C P_1 A^* \quad (6.28)$$

によって与えられる. $R = P_1$ とした平均射影フィルタ B は, 補題 3.2 より, ある作用素 D と共に, 連立作用素方程式

$$B A P_1 A^* = P_1 A^* \quad (6.29)$$

$$B Q = D A P_1 A^* \quad (6.30)$$

によって与えられる. 2 つの連立作用素方程式が B に関して同値な解を与えることを示す.

式 (6.27) が成立するとする. 式 (6.27) の両辺に, $P_1 A^*$ を右からかければ, 式 (6.29) になる. 逆に, 式 (6.29) が成立するとする. 式 (6.29) より,

$$(B A - I) P_1 A^* = 0 \quad (6.31)$$

が成立する. よって, $BAP_0 = P_0$ となる. さらに, $AP_0 = AP_1P_0 = AP_1$ より, 式 (6.27) が成立する. また, 式 (3.18) と $P_1 \geq 0$ より,

$$\mathcal{N}(AP_1A^*) = \mathcal{N}(P_1A^*)$$

となる. よって, 補題 4.3 の証明と同様にして, 式 (6.28) と (6.30) が, B について同値な解を与えることが証明できる.

(ii) は, P_1 として I を用いれば, (i) と同様にして証明することができる. $\square$

6.4 最適復元フィルタの相互関係 (その 2: パラメトリック復元フィルタの極限)

4 種類のパラメトリック復元フィルタの $\gamma \rightarrow +0$ 極限について論じる.

定理 6.2 命題 6.1 のパラメトリック復元フィルタの一般形の不定項の W を同じにすれば, $\gamma \rightarrow +0$ で次の 4 つの関係が成立する.

$$(i) \quad \|B_{PWF}(\gamma) - B_{APF}\| \rightarrow 0 \quad (6.32)$$

$$(ii) \quad \|B_{PPTPF}(\gamma) - B_{PTPF}\| \rightarrow 0 \quad (6.33)$$

$$(iii) \quad \|B_{PPF}(\gamma) - B_{PF}\| \rightarrow 0 \quad (6.34)$$

$$(vi) \quad \|B_{PGIF}(\gamma) - B_{GIF}\| \rightarrow 0 \quad (6.35)$$

証明を与える前に, 定理 6.2 の持つ意味について説明する.

定理 6.2 は, パラメトリックウィナーフィルタ, パラメトリック部分射影フィルタ, パラメトリック射影フィルタ, パラメトリック一般逆フィルタが, $\gamma \rightarrow +0$ で, それぞれ, 平均射影フィルタ, 部分射影フィルタ, 射影フィルタ, 一般逆フィルタに作用素ノルムの意味で収束することを示している.

S を観測画像空間 $\mathcal{Y}$ の有界部分集合とする. S の元に対して, 定理 6.2 の収束は一様収束になる. 通常の収束は強収束と呼ばれるものであって, 次のように定義される. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ と任意の $u \in S$ に対して, $\delta > 0$ が定まり, $0 < \gamma < \delta$ を満たす任意の γ に対して,

$$\|B(\gamma)u - Bu\| \leq \epsilon \quad (6.36)$$

が成立するとき, $B(\gamma)$ は B に強収束するという. あるいは, 単に収束するという. 強収束と一様収束の違いは, 正数 δ が強収束では, ϵ と u の両方によって定まるのに対して, 一様収束では u に無関係に, ϵ だけによって定まることである. 従って, 一様収束すれば強収束するが, 逆は必ずしも成立しない. 強収束するけれども一様収束しない場合には, $B(\gamma)$ と B との差を式 (6.36) の意味で ϵ 以下におさえたいとき, 個々の u に応じて γ の値を決めなければいけない. 従って, ある ϵ の値に対して γ の値を固定してしまえば, 式 (6.36) の誤差が ϵ よりも大きくなる u が必ず S の中に存在してしまうことになるのである. これに対して, 一様収束の場合には, S のどんな u に対しても, 式 (6.36) の誤差が ϵ 以下になる γ の値が存在することになる. 定理 6.2 はこのことを主張している.

また, 定理 6.2 の (iv) は, 命題 6.1 の (i), (vi) からわかるように, チコノフの正則化 [6] そのものである. 従来, チコノフの正則化では, $B_{PGIF}(\gamma)$ の持つ意味が明確でなかったが,

定理 6.2 により, それが式 (6.1) の意味で最適なパラメトリック一般逆フィルタとして解釈できることがわかる.

画像復元フィルタを実現する際の計算量の大部分は, 作用素の一般逆の計算で占められる. 平均射影フィルタ (6.9) では, U と V の 2 つの作用素の一般逆の計算が必要であるのに対して, パラメトリックウィーナーフィルタ (6.20) では, U の一般逆の計算だけで済む. 従って, 定理 6.2 の (i) より, パラメトリックウィーナーフィルタの γ を十分小さくにとって, 近似的に平均射影フィルタを実現すれば, 計算量を削減することができる. 同様に, 射影フィルタと部分射影フィルタも, それぞれ, パラメトリック射影フィルタとパラメトリック部分射影フィルタにより近似することによって, 計算量を削減することができる. さらに, この定理 6.2 の関係は, チコノフの正則化を拡張したものになっている. 従って, 非パラメトリック復元フィルタの一般逆の計算よりも, 近似したパラメトリック復元フィルタの一般逆の計算の方が, 安定になっていると考えられる.

定理 6.2 の証明のために, 次の補題を用意する.

補題 6.6 半正值作用素 $M_1, M_2 \in B(\mathcal{X})$ に対して, $\mathcal{R}(M_1 + M_2)$ が閉空間になっているとする. 任意の $\gamma > 0$ に対して, $\mathcal{R}(M_1 + \gamma M_2)$ は閉空間になり,

$$\mathcal{R}(M_1 + \gamma M_2) = \mathcal{R}(M_1 + M_2) \quad (6.37)$$

となる. また, 任意の γ ($0 < \gamma \leq 1$) に対して,

$$\|(M_1 + \gamma M_2)^\dagger\| \leq \|(M_1 + M_2)^\dagger\|/\gamma \quad (6.38)$$

が成立する.

補題 6.7 $C \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $D \in B(\mathcal{X})$ および半正值作用素 $M \in B(\mathcal{Y})$ に対して, $\mathcal{R}(CC^* + M)$ および $\mathcal{R}(C)$ が閉部分空間になっているとする. P を $\mathcal{N}(C^*(CC^* + M))$ に沿った $\mathcal{R}(C)$ への射影作用素とする. $\gamma \rightarrow +0$ で, 次の関係が成立する.

$$\|DC^*(CC^* + \gamma M)^\dagger - DC^\dagger P\| \rightarrow 0 \quad (6.39)$$

定理 6.2 の証明 (i) を証明する. $B_{PWF0}(\gamma)$ をパラメトリックウィーナーフィルタの一般形 (6.20) の第一項とする. 次に, 補題 6.7 で C および D を, それぞれ, $AR^{1/2}$ および $R^{1/2}$ とおいて使う. 式 (6.25) より, P を $\mathcal{N}(R^{1/2}A^*U_{APF}^\dagger)$ に沿った $\mathcal{R}(AR)$ への射影作用素とすれば, $\gamma \rightarrow +0$ で $B_{PWF0}(\gamma)$ は $R^{1/2}(AR^{1/2})^\dagger P$ に作用素のノルムで収束する. この $R^{1/2}(AR^{1/2})^\dagger P$ を B とおく.

平均射影フィルタ B_{APF} の一般形 (6.9) の第一項を B_{APF0} とおく. B と B_{APF0} が等しいことを証明する.

$$\mathcal{N}(B_{APF0}) \supset \mathcal{N}(R^{1/2}A^*U_{APF}^\dagger) = \mathcal{N}(P)$$

が成立する. また, 明らかに, $\mathcal{N}(B) \supset \mathcal{N}(P)$ となっている. 従って, $\mathcal{N}(P)$ の補空間 $\mathcal{R}(AR)$ の元に対して, B と B_{APF0} が等しいことを証明すれば, $B = B_{APF0}$ となる. $A^\dagger = A^*(AA^*)^\dagger$ であるから,

$$BARA^* = R^{1/2}(AR^{1/2})^\dagger PARA^* = RA^*(ARA^*)^\dagger ARA^* = RA^* \quad (6.40)$$

となる. 式 (3.12) より, $B_{APF0}ARA^* = RA^*$ となり, 式 (6.40) より, $BAR = B_{APF0}AR$ となる.

(i) を示すためには、後は式 (6.9), (6.20) の第 2 項が等しいことを言えばよい。式 (6.37) より、 $\mathcal{R}(U_{APF}) = \mathcal{R}(U_{PWF}(\gamma))$ となる。よって、両式の第 2 項は、 $\mathcal{R}(U_{APF})^\perp$ への正射影作用素に、左から W をかけたものであるから確かに等しくなっている。

(ii)-(iv) は、(i) と定理 6.1 より明かである。□

命題 6.1 の各最適復元フィルタの一般形の第 1 項を、例えば、

$$B_{WF0} = RA^*U^\dagger \quad (6.41)$$

のように、下付の 0 を添えて表す。

定理 6.3 次の関係が成立する。

$$B_{WF0} = (B_{WF0}B_{APF0}^\dagger)B_{APF0} \quad (6.42)$$

$$B_{PWF0} = (B_{PWF0}B_{APF0}^\dagger)B_{APF0} \quad (6.43)$$

$$B_{PPTPF0} = (B_{PPTPF0}B_{PTPF0}^\dagger)B_{PTPF0} \quad (6.44)$$

$$B_{PPF0} = (B_{PPF0}B_{PF0}^\dagger)B_{PF0} \quad (6.45)$$

$$B_{PGIF0} = (B_{PGIF0}B_{GIF0}^\dagger)B_{GIF0} \quad (6.46)$$

定理 6.3 の証明のために、次の補題を用意する。

補題 6.8 次の関係が成立する。

$$\mathcal{N}(B_{APF0}) = \mathcal{N}(B_{PWF0}) = Q\mathcal{R}(AR)^\perp + \mathcal{N}(U_{APF}) \quad (6.47)$$

定理 6.3 の証明 まず (ii) を示す。式 (6.47) より、

$$\mathcal{R}(B_{PWF0}^*) = \mathcal{R}(B_{APF0}^*)$$

となる。よって、

$$B_{PWF0}^\dagger B_{PWF0} = B_{APF0}^\dagger B_{APF0}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} B_{PWF0} &= B_{PWF0}B_{PWF0}^\dagger B_{PWF0} \\ &= B_{PWF0}B_{APF0}^\dagger B_{APF0} \\ &= (B_{PWF0}B_{APF0}^\dagger)B_{APF0} \end{aligned}$$

となり、(ii) が成立する。(i) と (iii)-(v) は、(ii) と定理 6.1 より明かである。□

定理 6.3 は、各フィルタの第 1 項に関する関係を示したものである。各フィルタの全体に対しては、例えば、 $B_{PWF}U = B_{PWF0}U$ となるから、次のような関係が成立する。ウィーナーフィルタとパラメトリックウィーナーフィルタ、パラメトリック部分射影フィルタ、パラメトリック射影フィルタ、パラメトリック一般逆フィルタによる復元結果は、それぞれ、平均射影フィルタ、部分射影フィルタ、射影フィルタ、一般逆フィルタによる復元結果に線形フィルタを施したものに、観測画像に関して平均 2 乗的に等しい。

ウィーナーフィルタは式 (2.16) より、式 (3.1), (3.2) の J_1 と J_2 を使って、 $J_1 + J_2$ を最小にするものであることがわかる。一方、平均射影フィルタは、 J_1 最小という条件のもとで J_2 を最小にするものである。従って、平均射影フィルタに対する J_1 の値はウィーナーフィルタより小さくなるけれども、 J_2 の値は大きくなる。すなわち、復元画像の画像成分は、平

均射影フィルタの方がより原画像に近くなる一方、雑音成分の広がり、ウィーナーフィルタの方がより小さくなる。この効果が経験的には、平均射影フィルタに対してウィーナーフィルタによる復元画像が滑らかになり、雑音の影響が少なくなる一方で、エッジがぼける等の劣化現象として現れる。

同様に、パラメトリックウィーナーフィルタ、パラメトリック部分射影フィルタ、パラメトリック射影フィルタになるために平均射影フィルタ、部分射影フィルタ、射影フィルタに施された線形フィルタは、それぞれの評価基準で、画像成分に対する最適性を損なわせるが雑音を抑制するものになっている。

パラメトリック一般逆フィルタになるための線形フィルタは、雑音抑制になっているとは言えない。

これまでに得られた結果をまとめたものが、図 6.1 である。この図から、パラメトリックウィーナーフィルタが計算できれば、他の全ての最適画像復元フィルタを、厳密に、あるいは近似的に計算できることがわかる。

6.5 定理 6.2 の復元実験

定理 6.2 の (i) で示した平均射影フィルタがパラメトリックウィーナーフィルタで精度良く近似できることを、復元実験によって確かめた。図 6.2 の (a) の原画像は、大きさが 128×128 画素で、1 画素あたり 8bit の濃淡で表現されている。(b) の観測画像は、流れ画像に雑音が加算されたものである。流れ画像 Af は、水平方向に 16 画素の巡回平均をとったものである。雑音および画像と雑音の相関作用素は、3 章の実験と同じものである。(c) は平均射影フィルタによる復元結果であり、(d) は $\gamma = 0.01$ としたパラメトリックウィーナーフィルタによる復元結果である。図 6.2 の右の図は、それぞれの画像の $y = 64$ における断面図である。

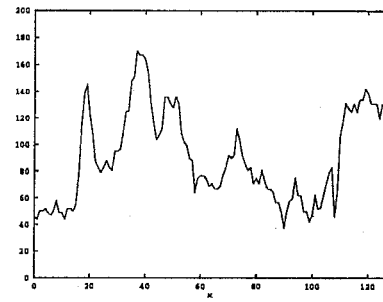
(c) と (d) との差のノルムを (c) のノルムで割ったものは 0.00025 である。よって、(d) は (c) を十分よく近似していると考えることができる。

6.6 まとめ

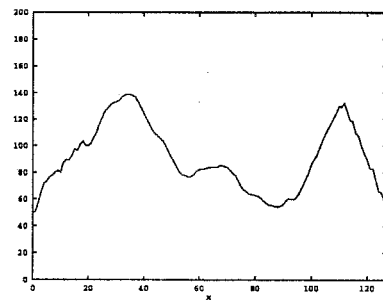
本論文では、初めに準備として、観測画像空間が一般のヒルベルト空間である場合に、各種最適画像復元フィルタが存在する十分条件と、それらの一般形を与えた (命題 6.1)。

この準備のもとで、各種最適復元フィルタの関係に関して、次の事柄を明らかにした。一般逆フィルタ、射影フィルタ、および部分射影フィルタを、平均射影フィルタを使って、厳密に表すことができる (定理 6.1)。また、ウィーナーフィルタ、パラメトリック一般逆フィルタ、パラメトリック射影フィルタ、パラメトリック部分射影フィルタを、パラメトリックウィーナーフィルタを使って、厳密に表すことができる (定理 6.1)。評価基準が異なる 2 種類の復元フィルタの表現が一致するならば、2 つの評価基準を同時に満す復元フィルタが存在する。さらに、この復元フィルタは、もとの両方の復元フィルタの表現で与えられるのである。例えば、射影フィルタと平均射影フィルタが一致する時は、その復元画像の画像成分は、個々の原画像との誤差が最小になると共に、原画像との平均 2 乗誤差も最小になっている。

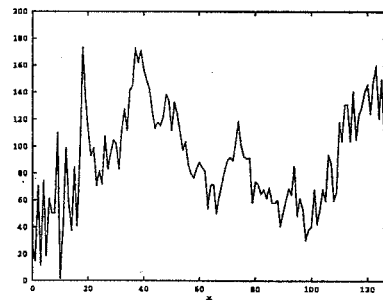
一般逆フィルタ、射影フィルタ、部分射影フィルタ、平均射影フィルタは、それぞれ、パラメトリック一般逆フィルタ、パラメトリック射影フィルタ、パラメトリック部分射影フィ



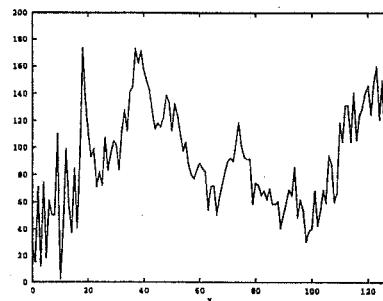
(a) 原画像



(b) 観測画像



(c) 平均射影フィルタ



(d) $\gamma = 0.01$ としたパラメトリックウィーナーフィルタ

図 6.2 定理 6.2 の復元実験およびその断面図

ルタ, パラメトリックウィーナーフィルタのパラメータを0にした極限として表すことができる (定理 6.2). この収束は作用素のノルムに関する収束である. 従って, パラメータを0に近い正数に固定した場合, 非パラメトリックフィルタとそれに対応するパラメトリックフィルタによる復元画像の差のノルムを観測画像のノルムで割った値の上限は, 観測画像には依らず, パラメータだけで決まる. さらに, このパラメトリック復元フィルタと非パラメトリック復元フィルタとの関係は, チコノフの正則化を拡張したものになっている. 従って, 非パラメトリック復元フィルタの一般逆の計算よりも, 近似したパラメトリック復元フィルタの一般逆の計算の方が, 安定になっていると考えられる. しかも例えば, 平均射影フィルタをパラメトリックウィーナーフィルタを使って近似的に実現すれば, 平均射影フィルタを設計するための計算量が削減できることを示した. また, 流れ画像の復元実験を行ない, この近似が十分な精度を持っていることを示した. パラメトリック復元フィルタは, 射影フィルタ族または一般逆フィルタの復元結果にある線形フィルタを施したものであり, 射影フィルタ族の場合には, この線形フィルタが雑音抑制作用を持つことを明らかにした (定理 6.3). また, パラメトリックウィーナーフィルタによって, 他の全ての最適復元フィルタを, 厳密にまたは近似的に計算できることを示した.

Chapter 7

画像復元における計算量の削減法

7.1 まえがき

本章では、画像復元に関する計算量を削減する方法について論じる。すなわち、復元フィルタの表現を工夫することによって、復元フィルタを設計するための計算量を削減する方法、および復元フィルタを設計せずに、直接、復元画像を計算する方法を示す。そのために、まず、“拡張された作用素一般逆補題”を示す。行列の数値計算法のために Sherman-Morrison-Woodbury の公式 [10], [30], [29], [9] が使われている。この公式はある条件のもとに、いわゆる“作用素一般逆補題”に拡張された [17]。本章では、これをさらに拡張する。そして、この“拡張された作用素一般逆補題”を用いて、具体的には、ウィーナーフィルタを設計するための計算量を軽減するための方法、およびウィーナーフィルタを復元装置に組み込むことなく、復元画像そのものを直接計算するための方法を論じる。

本章では、すべての作用素の値域を閉部分空間とする。

7.2 Sherman-Morrison-Woodbury の公式

Sherman-Morrison-Woodbury の公式は次の式で与えられる。

$$(Q + FRG)^{-1} = Q^{-1} - Q^{-1}F(R^{-1} + GQ^{-1}F)^{-1}GQ^{-1}, \quad (7.1)$$

ここで F, G, Q, R は行列であり、 $Q, R, Q + FRG, R^{-1} + GQ^{-1}F$ は正則であるものとする。

式 (7.1) は線形作用素式へ拡張できる。すなわち、 F, G, Q, R が線形作用素である場合でも、 $Q, R, Q + FRG, R^{-1} + GQ^{-1}F$ が正則ならば、式 (7.1) が成立する。

式 (7.1) は、次のように画像復元の問題へ応用することができる。雑音の相関作用素 Q が正則である場合、ウィーナーフィルタは、式 (6.12), (6.13) で示したように、次の式で表すことができる。

$$B_{WF} = RA^*(ARA^* + Q)^{-1} \quad (7.2)$$

式 (7.1) を用いれば、画像の相関作用素 R も正則である場合、ウィーナーフィルタは次の式で表すことができる。簡単に証明できる。

$$B_{WF} = (A^*Q^{-1}A + R^{-1})^{-1}A^*Q^{-1} \quad (7.3)$$

原画像空間を N 次元ベクトル空間とし、観測画像空間を M 次元ベクトル空間とする。このとき、 A, B, Q, R は、それぞれ、 $M \times N, N \times M, M \times M, N \times N$ 行列で表される。さらに、 Q^{-1} の計算は容易であるものとする。このような状況は、例えば、雑音に相関がない場合に生じる。この場合、 Q は対角行列になり、逆行列の計算は容易にできる。

ウィーナーフィルタを得るために式(7.2)を使えば、 $M \times M$ -行列 $ARA^* + Q$ の逆行列の計算が必要になる。他方、式(7.3)を使えば、2つの $N \times N$ -行列 R と $A^*Q^{-1}A + R^{-1}$ の逆行列の計算が必要になる。従って、 $N \ll M$ ならば、式(7.3)を用いた方が(7.2)を用いるより計算量が少なくなるのである。

7.3 “作用素一般逆補題”

式(7.1)は、 R と Q が共に正則の場合に成立する関係式であった。本節では、 R または Q が正則でない場合を考えることにする。小川によって式(7.1)は、次に示す“作用素一般逆補題”に拡張された[17]。

$Q \geq 0$ かつ $R > 0$ のとき、

$$(Q + FRF^*)^\dagger = Q^\dagger - Q^\dagger F(R^{-1} + F^*QF)^{-1}F^*Q^\dagger \quad (7.4)$$

が成立するための必要十分条件は、

$$\mathcal{R}(Q) \supset \mathcal{R}(F) \quad (7.5)$$

である。

これは、 $G = F^*, Q \geq 0, R > 0$ という条件つきながら、(7.1)を Q が正則でない場合に拡張したものである。

式(7.4)を使えば、 $\mathcal{R}(Q) \supset \mathcal{R}(A)$ かつ R が正則という条件のもとで、式(7.3)の Q^{-1} を $Q^\dagger$ に変換した式

$$B_{WF} = (A^*Q^\dagger A + R^{-1})^{-1}A^*Q^\dagger \quad (7.6)$$

が成立することが証明できる。

また、式(7.4)から射影フィルタの簡単な形を導出することができる。射影フィルタ B_{PF} は、

$$B_{PF} = (A^*U_{PF}^\dagger A)^\dagger A^*U_{PF}^\dagger + W(I - U_{PF}U_{PF}^\dagger), \quad (7.7)$$

によって与えられた。ここで

$$U_{PF} = AA^* + Q \quad (7.8)$$

であり、 W は任意の作用素である。

式(7.4)を使えば、 $\mathcal{R}(Q) \supset \mathcal{R}(A)$ という仮定のもとで、式(7.7)の U は Q に置き換えることができることが証明できる。すなわち、

$$B_{PF} = (A^*Q^\dagger A)^\dagger A^*Q^\dagger + W(I - QQ^\dagger). \quad (7.9)$$

が成立する[16]。 $Q^\dagger$ の計算が $U^\dagger$ の計算より簡単な場合、 B_{PF} として(7.7)の代わりに(7.9)を使うことができる。

7.4 “拡張された作用素一般逆補題”

本節では, R と Q が共に正則とは限らず, G が F^* に一致するとは限らない場合に, “作用素一般逆補題” を拡張する.

作用素 S と T を次のように定義する.

$$S = Q + FRG \quad (7.10)$$

$$T = R^\dagger + GQ^\dagger F \quad (7.11)$$

次の定理で, “拡張された作用素一般逆補題” を示す.

定理 7.1

$$S^\dagger = Q^\dagger - Q^\dagger FT^\dagger GQ^\dagger \quad (7.12)$$

$$T^\dagger = R - RGS^\dagger FR \quad (7.13)$$

が成立するための必要十分条件は,

$$\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(Q) \quad (7.14)$$

$$\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(Q) \quad (7.15)$$

$$\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(R^*) \quad (7.16)$$

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(R^*) \quad (7.17)$$

である.

証明 作用素 A に対して, P_A を $\mathcal{R}(A)$ への正射影作用素とする. 明らかに, 次の式が成立する.

$$P_B A = A : \mathcal{R}(B) \supset \mathcal{R}(A) \quad (7.18)$$

$$A P_B = A : \mathcal{R}(B)^\perp \subset \mathcal{N}(A) \quad (7.19)$$

まず, 式 (7.14)-(7.17) が成立する場合に, 式 (7.12) が成立することを示す. 式 (7.10) より,

$$P_{Q^*} = Q^\dagger Q = Q^\dagger S - Q^\dagger FRG. \quad (7.20)$$

となる. 式 (7.14), (7.15), (7.20) より,

$$\begin{aligned} S^\dagger &= P_{Q^*} S^\dagger \\ &= Q^\dagger S S^\dagger - Q^\dagger FRG S^\dagger \\ &= Q^\dagger P_Q - Q^\dagger FRG S^\dagger \\ &= Q^\dagger - Q^\dagger FRG S^\dagger \end{aligned} \quad (7.21)$$

となる. 式 (7.10), (7.15) より, $\mathcal{N}(FRG) \supset \mathcal{N}(Q) = \mathcal{R}(Q^*)^\perp$ となるから,

$$FRG P_{Q^*} = FRG. \quad (7.22)$$

が成立する. 同様に, 式 (7.11), (7.16) より, $\mathcal{R}(GQ^\dagger F) \subset \mathcal{R}(R^*)$ となるから,

$$P_{R^*} GQ^\dagger F = GQ^\dagger F \quad (7.23)$$

となる.

式 (7.10), (7.11), (7.22), (7.23) より,

$$\begin{aligned} TRGP_{Q^*} - P_{R^*}GQ^\dagger S &= R^\dagger RGP_{Q^*} + GQ^\dagger FRGP_{Q^*} - P_{R^*}GQ^\dagger Q - P_{R^*}GQ^\dagger FRG \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

となるから,

$$TRGP_{Q^*} = P_{R^*}GQ^\dagger S \quad (7.25)$$

となる. 従って, 式 (7.18), (7.17), (7.25) より,

$$\begin{aligned} RGS^\dagger &= P_R RGS^\dagger, \\ &= T^\dagger TRGP_{Q^*} S^\dagger, \\ &= T^\dagger P_{R^*} GQ^\dagger S S^\dagger, \\ &= T^\dagger GQ^\dagger P_Q, \\ &= T^\dagger GQ^\dagger \end{aligned} \quad (7.26)$$

となるから,

$$RGS^\dagger = T^\dagger GQ^\dagger \quad (7.27)$$

が成立する. 式 (7.21), (7.27) より式 (7.12) が導かれる. 式 (7.13) も同様に証明できる.

逆に, (7.12), (7.13) が成立したとする. 明らかに, $\mathcal{R}(S^*) \subset \mathcal{R}(Q^*)$, $\mathcal{N}(S^*) \supset \mathcal{N}(Q^*)$, $\mathcal{R}(T^*) \subset \mathcal{R}(R)$, $\mathcal{N}(T^*) \supset \mathcal{N}(R)$ が成立する. 従って, $\mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}(Q)$, $\mathcal{N}(S) \supset \mathcal{N}(Q)$, $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}(R^*)$, $\mathcal{N}(T) \supset \mathcal{N}(R^*)$ が成立する. よって,

$$\begin{aligned} S^\dagger - Q^\dagger &= -Q^\dagger FT^\dagger GQ^\dagger, \\ &= -Q^\dagger F(R - RGS^\dagger FR)GQ^\dagger, \\ &= -Q^\dagger (S - Q)Q^\dagger + Q^\dagger (S - Q)S^\dagger (S - Q)Q^\dagger \\ &= -Q^\dagger SQ^\dagger + Q^\dagger + Q^\dagger SQ^\dagger + Q^\dagger QS^\dagger QQ^\dagger \\ &\quad - Q^\dagger SS^\dagger QQ^\dagger - Q^\dagger QS^\dagger SQ^\dagger \\ &= Q^\dagger + S^\dagger - Q^\dagger P_S - P_{S^*} Q^\dagger \end{aligned} \quad (7.28)$$

となるから,

$$2Q^\dagger = P_{S^*} Q^\dagger + Q^\dagger P_S \quad (7.29)$$

となる.

背理法を用いて式 (7.14) を証明する. そのために, $\mathcal{R}(S) \neq \mathcal{R}(Q)$ と仮定する. $\mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}(Q)$ であるから, 非零のベクトル $f \in \mathcal{R}(Q) \cap \mathcal{R}(S)^\perp$ が存在する. 従って, 式 (7.29) より,

$$0 < 2\|Q^\dagger f\| = \|P_{S^*} Q^\dagger f\| \leq \|Q^\dagger f\| \quad (7.30)$$

となり, 矛盾が生じる. 従って, 式 (7.14) が成立する. 同様に, 式 (7.29) から式 (7.15) を導びくことができる. 式 (7.16) と (7.17) も同様に証明できる. $\square$

この“拡張された作用素一般逆補題”を用いて, ウィーナーフィルタの表現式 (7.3) を R と Q が共に正則でない場合に拡張する. 作用素 U および V を, 次のように定義する.

$$U = ARA^* + Q \quad (7.31)$$

$$V = A^* Q^\dagger A + R^\dagger \quad (7.32)$$

ウィーナーフィルタの一般形は, W を任意の作用素とすれば, 式 (6.12), (6.13) より,

$$B_{WF} = RA^*U^\dagger + W(I - UU^\dagger) \quad (7.33)$$

で与えられる.

ここで, 定理 7.1 を使えば, 次のようなウィーナーフィルタの表現が得られる.

定理 7.2

$$R(AR) \subset R(Q) \quad (7.34)$$

$$R(A^*Q) \subset R(R) \quad (7.35)$$

が成立すれば, ウィーナーフィルタ B_{WF} の一般形は, W を任意の作用素とすれば,

$$B_{WF} = V^\dagger A^*Q^\dagger + W(I - UU^\dagger), \quad (7.36)$$

で与えられる.

証明 $R^* = R \geq 0$, $Q^* = Q \geq 0$ であるから, 補題 3.5 と式 (7.34), (7.35) より,

$$\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(Q) \quad (7.37)$$

$$\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(Q) \quad (7.38)$$

$$\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(R^*) \quad (7.39)$$

$$\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(R^*) \quad (7.40)$$

となる. 従って, 定理 7.1 より,

$$\begin{aligned} RA^*U^\dagger &= RA^*(Q^\dagger - Q^\dagger AV^\dagger A^*Q^\dagger) \\ &= RVV^\dagger A^*Q^\dagger - RA^*Q^\dagger AV^\dagger A^*Q^\dagger \\ &= RR^\dagger V^\dagger A^*Q^\dagger \\ &= V^\dagger A^*Q^\dagger \end{aligned} \quad (7.41)$$

となり,

$$RA^*U^\dagger = V^\dagger A^*Q^\dagger \quad (7.42)$$

が成立する. 式 (7.42) より, 式 (7.36) が導かれる. $\square$

7.2 節で論じたように, $N \ll M$ ならば, $B_{WF} = V^\dagger A^*Q^\dagger$ を使うことにより, $B_{WF} = RA^*U^\dagger$ を使う場合よりも行列の計算量を節約することができる. この $V^\dagger A^*Q^\dagger$ のように, もとの作用素 $RA^*U^\dagger$ の R, Q に, それぞれ, $Q^\dagger, R^\dagger$ を代入し, 積の順番を全て入れ換えてできる作用素を, もとの作用素の双対形と呼ぶことにする.

7.5 ウィーナーフィルタの復元画像の直接的実現法

本節では, “拡張された作用素一般逆補題” を用いて, ウィーナーフィルタによる復元画像が, 復元画像に関するある最適化問題の解として与えられることを示す. このことによって, ウィーナーフィルタによる復元画像を, ウィーナーフィルタを具体的に設計することなく, 直接復元画像が得られるようになる.

作用素 $V^\dagger A^* Q^\dagger$ について、次の定理が成立する。

定理 7.3 任意の $g \in \mathcal{Y}$ に対して、汎関数

$$J[f] = (Q^\dagger(Af - g), Af - g) + (R^\dagger f, f) \quad (7.43)$$

を最小にする f_0 が存在する。 B を任意の作用素 W と共に、次の式で定義する。

$$B = V^\dagger A^* Q^\dagger + (I - V^\dagger V)W \quad (7.44)$$

このとき、 $g \neq 0$ ならば、 J を最小にする全ての f_0 は、 $f_0 = Bg$ によって与えられる。

証明 $J[f]$ の f に関する変分を零とおけば

$$Vf = A^* Q^\dagger g \quad (7.45)$$

となる。逆に、 f_0 が式 (7.45) を満たすならば、任意の $f \in \mathcal{X}$ に対して、

$$J[f] - J[f_0] = (V(f - f_0), f - f_0) \quad (7.46)$$

が成立する。 $V \geq 0$ であるから、 f が J を最小にするための必要十分条件は、 f が式 (7.45) を満たすことである。

式 (7.45) の一般解は、任意のベクトル $f_w \in \mathcal{X}$ と共に、

$$f_0 = V^\dagger A^* Q^\dagger g + (I - V^\dagger V)f_w. \quad (7.47)$$

によって与えられる。式 (7.47) より、式 (7.44) が導かれる。□

式 (7.42) より、式 (7.33) の第 1 項と式 (7.44) の第 1 項は一致する。他方、第 2 項は一致しない。従って、式 (7.44) の B は、必ずしもウィーナーフィルタになるとは限らない。しかしながら、例えば $W = 0$ とすればわかるように、式 (7.44) の W の選び方によっては、 B がウィーナーフィルタになることがある。これに関して次の 2 つの系が成立する。

系 7.1 式 (7.34) と式 (7.35) が成立しているとする。任意の観測画像 $g \in \mathcal{Y}$ に対して、 $f \in \mathcal{R}(R)$ の中で、式 (7.43) の J を最小にする f_0 がただ一つ存在する。しかも、 $f_0 = V^\dagger A^* Q^\dagger g$ となり、 g のウィーナーフィルタによる復元画像になっている。

証明 式 (7.40) より、 $\mathcal{R}(V^\dagger) = \mathcal{R}(R)$ となる。 $I - V^\dagger V$ は $\mathcal{R}(R)^\perp$ への正射影作用素である。従って、式 (7.44) より、 $f_0 = V^\dagger A^* Q^\dagger g$ となる。式 (7.42) より、 $V^\dagger A^* Q^\dagger$ はウィーナーフィルタになっている。従って、 f_0 はウィーナーフィルタによる復元画像になっている。□

系 7.2 式 (7.34) が成立しているとする。任意の観測画像 $g \in \mathcal{Y}$ に対して、 $f \in \mathcal{R}(R)$ の中で、式 (7.43) の J を最小にする f_0 がただ一つ存在する。しかも、 $f_0 = V^\dagger A^* Q^\dagger g$ となり、 g のウィーナーフィルタによる復元画像になっている。

証明 系 7.1 の中の A を AP_R とおいて、系 7.1 を使えば明らかである。

系 7.1 の J の最小化の計算のためには、画像の計算だけで済む。しかしながら、式 (7.33) を使い、装置に組み込むウィーナーフィルタの表現を求めるためには、作用素の計算が必要になる。一般に、画像の計算は作用素の計算よりもかなり容易である。従って、画像に関する最小化問題を解いて復元画像を求める方式は、装置を組み込むウィーナーフィルタの表現を求めた後に復元画像を求める方式よりも、計算量を削減することができる。

7.6 まとめ

本章では、まず、“作用素一般逆補題”を拡張し、その厳密な証明を与えた。そして、この補題を利用することによって、ある条件のもとでは画像復元フィルタの一般形を簡単な形に書き直すことができること、また、双対形に書き直すことができることを示した。画像復元フィルタの双対形は、原画像空間より観測画像空間の次元が大きい場合、容易に復元フィルタを実現することを可能にすると共に、最適画像復元フィルタに対する最適化基準を、復元画像に対する最適化基準に書き替えることを可能にする。画像に関する計算は、フィルタ自体に関する計算よりも簡単であるから、これにより、復元画像を容易に得ることが可能になる。

Chapter 8

ウィーナーフィルタのプラズマ計測への応用

8.1 まえがき

本章では、画像復元フィルタを画像復元以外の工業分野へ応用した例として、ウィーナーフィルタのプラズマ計測への応用について論じる。

核融合発電のためには、1億度のプラズマのエネルギーを1秒程度閉じ込めておく必要がある。トカマク装置は、現在最有力と考えられているプラズマ閉じ込め装置である。プラズマの外側から、X線を含めた光を計測する場合、プラズマ内の発光強度の線積分だけが観測できることになる。トカマク装置のように、磁気面を形成し、磁気面上では様々な物理量がほぼ一定とみなせる場合、そこでのX線を含めた光の発光強度はほぼ一定と考えることができる。このとき、空間的にいくつかの線積分のデータを取ることができれば、アーベル変換によって、もとの光の発光強度の空間分布を求めることができる。この光の発光強度の空間分布は、トカマク装置のプラズマ診断に重要な情報を与える。例えば、不純物のラインスペクトル強度分布から不純物の密度分布を求めることができるし、制動放射光分布から実効電荷密度分布を求めることができる。また、フィルタ法を使えば、X線の強度分布から電子温度分布を求めることができる。

しかし、今までのアーベル変換の手法では、楕円度、中心のずれ、観測視野の広がりによる劣化を厳密に扱うことができなかった。また、近似的に扱ったとしても、計算時間がかかり、雑音に弱いという欠点があった。

これらの欠点を解決するために、画像復元法の一つであるウィーナーフィルタを用いて、アーベル変換を行なうことにする。それによって、楕円度、中心のずれ、観測視野による劣化を同時に扱うことが可能となり、計算時間がかからず、雑音にも強い変換方法が得られる。以下では、画像復元手法のアーベル変換への適用方法を示すと共に、各手法を比べた計算機実験と、実際に測定されたデータを紹介する。

8.2 プラズマ計測でのアーベル変換のモデル

プラズマのトーラス断面を、中心をずらした N 個の楕円によって分割する。それぞれの楕円は交わらないとする。 $j = 1, 2, \dots, N$ とし、 j 番目の楕円の半径を r_j 、 x 軸方向の中心からのずれを c_j 、楕円度を e_j とする。 r_j は、 j と共に単調に大きくなるものとする。 j 番

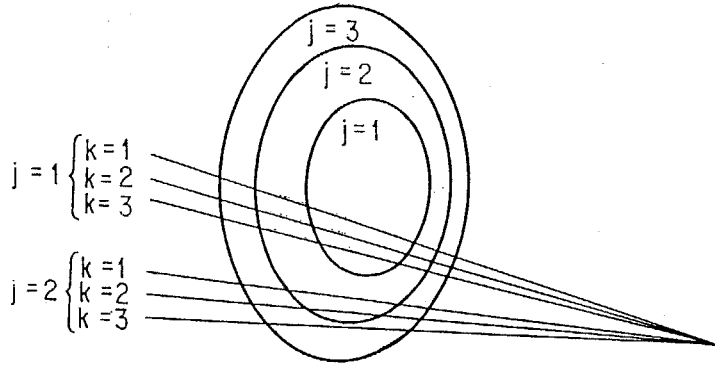


図 8.1 プラズマ観測モデル

目の楕円は,

$$\frac{(x - c_j)^2}{a_j^2} + \frac{y^2}{a_j^2 e_j^2} = 1 \quad (8.1)$$

によって表される. $j \neq 1$ のときは, $j-1$ 番目の楕円と j 番目の楕円の中の発光強度は一定であるとし, その発光強度を f_j で表す. $j=1$ のときは, 1 番目の楕円の中の発光強度が一定であるとし, その発光強度を f_1 で表す. この f_j を並べたベクトル f が, 画像復元における原画像になる. 従って, 原画像空間は N 次元実ベクトル空間 R^N になる.

M 個のデータを観測する. g_i ($i=1, 2, \dots, M$) を, i 番目の観測データとし, これを並べたものが観測画像 g となる. 従って, 観測画像空間は M 次元実ベクトル空間 R^M になる.

観測視野の広がりを表すために, 図 8.1 のように, 1 つの観測データあたりの観測視野を K 個の視線に分割する. i 番目の観測データの k 番目の分割された視線の重みを $\rho_{i,k}$ とする. 重みの正規化のために, 任意の i に対して,

$$\sum_{k=1}^K \rho_{i,k} = 1 \quad (8.2)$$

が成立するものとする.

分割された視線 (i, k) が, $j-1$ 番目の楕円と j 番目の楕円の間にある長さを $l_{i,k,j}$ とする. 劣化作用素 A は行列で表される. その第 i, j 成分 $(A)_{i,j}$ は,

$$(A)_{i,j} = \sum_{k=1}^K \rho_{i,k} l_{i,k,j} \quad (8.3)$$

となる.

雑音 n は, 各データで分散 σ が等しく, 他のデータとの相関はないものとする. この場合, 雑音の相関作用素 Q は行列で表現され, その第 i, m 成分 $(Q)_{i,m}$ は,

$$(Q)_{i,m} = \begin{cases} \sigma^2 & (i = m) \\ 0 & (i \neq m) \end{cases} \quad (8.4)$$

となる. もとの空間分布の相関作用素 R も行列で表される. その第 j, n 成分 $(R)_{j,n}$ は, 定数 r, r_j ($j=1, 2, \dots, M$) と共に,

$$(R)_{j,n} = r_j r_n r^{|j-n|} \quad (8.5)$$

によって表されるものとする.

8.3 計算機実験

ここでは、計算機実験によって、ウィーナーフィルタによるアーベル変換の有効性を確かめる。

プラズマ領域の大きさを1とし、 $N = 256$, $M = 17$, $K = 200$ とする。また、 $a_j = j/256$, $c_j = 0$, $e_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$)とする。視野および視線は x 軸に並行とする。視野の中心が $y = 0$ と $y = 1$ を等間隔に分割するように、視野を設定する。視野の広がり、 y 座標で0.05とし、その視線に対する重み $\rho_{j,k}$ は、正弦関数の半周期になるようにする。すなわち、

$$\rho_{j,k} = \{\sin(\pi k/(K+1))\} / \sum_{l=1}^K \{\sin(\pi l/(K+1))\} \quad (8.6)$$

とする。劣化作用素 A は、式(8.3)によって得られる。また、視野の広がりを考慮せず、視線がすべて視野の中心に集まっているとして計算した劣化作用素を A_1 とする。視野の広がりを考慮しない復元とは、復元フィルタの計算に用いる劣化作用素として A_1 を用いた復元フィルタによる復元のことである。

図8.2(a)が、画像復元では原画像に相当するもとの空間分布であり、ここでは

$$f_j = \exp\{-0.002(j-128)^2\} \quad (8.7)$$

とする。

はじめに、雑音がない場合を考える。すなわち、 Af を復元してみる。これによって得られる空間分布を、信号成分と呼ぶことにする。これは、画像復元における復元画像の画像成分に相当する。図8.2(b)が視野の広がりを考慮しない一般逆フィルタによって復元したものである。図を見れば明らかなように、この方法で復元した空間分布は、もとの空間の分布と大きくかけ離れたものになる。

ウィーナーフィルタを用いるために、もとの空間分布の相関作用素を定める。式(8.5)において、 $r = 0.95$, $r_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, 256$)とする。図8.2(c)は、このもとの空間分布の相関作用素を使い、 $Q = 0$ とした視野の広がりを考慮しないウィーナーフィルタによって復元したものである。視野の広がりを考慮していないため、多少復元結果が左右に膨らんだものになっている。

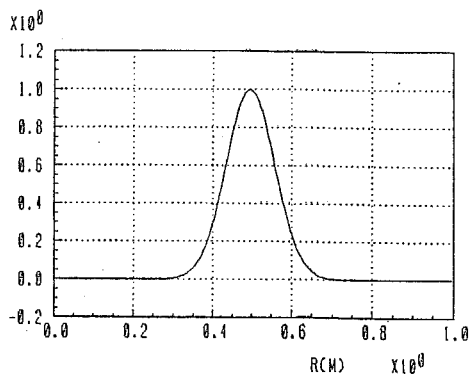
図8.2(d)は、図8.2(c)と同じ R , Q を使い、視野の広がりを考慮したウィーナーフィルタによって復元したものである。これは雑音がない場合であるので、ほとんどもとの空間分布に一致している。

次に、雑音の影響を見るために、 Af に雑音を加えたものを復元する。具体的には、雑音として7番目のデータの値に0.01を加えた。

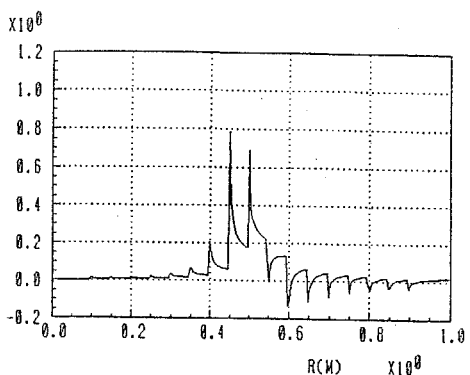
図8.2(e)は、図8.2(d)と同じフィルタを用いたものであるが、雑音に大きく影響され、実用に用いることはできない。

図8.2(g)は、上記の R の他に、式(8.4)において $\sigma = 0.002$ とした Q を用いた視野の広がりを考慮したウィーナーフィルタによって復元したものである。雑音の影響が少なく、良い復元結果が得られている。

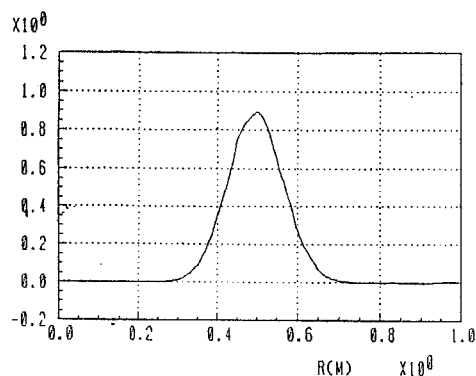
図8.2(f)は、図8.2(g)のフィルタによって復元した信号成分である。図8.2(d)と比べると、若干復元精度が悪くなっているが、実用上十分な結果が得られていると考えられる。



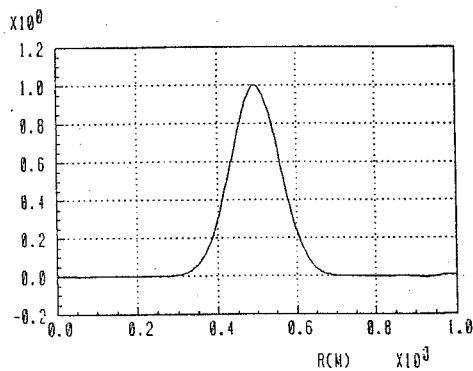
(a) もとの空間分布



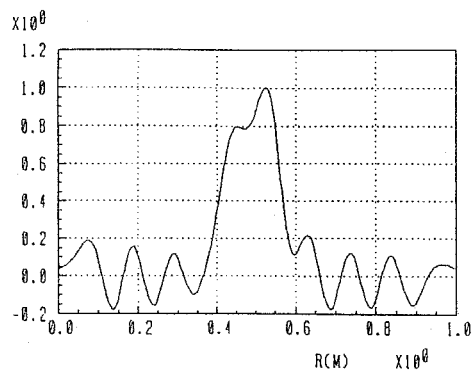
(b) 視野の広がりを考慮しない
一般逆フィルタの信号成分



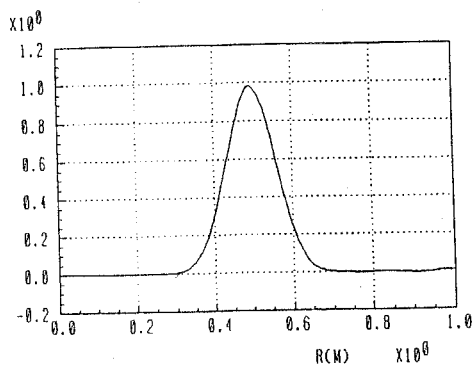
(c) 視野の広がりを考慮しない $Q = 0$ の
ウィーナーフィルタの信号成分



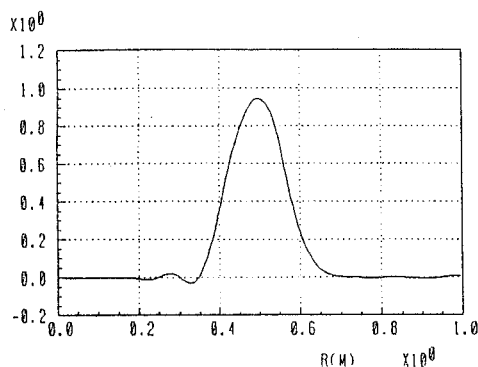
(d) $Q = 0$ のウィーナーフィルタの信号成分



(e) $Q = 0$ のウィーナーフィルタ



(f) ウィーナーフィルタの信号成分



(g) ウィーナーフィルタ

図 8.2 アーベル変換の計算機実験

8.4 ラインスペクトル空間分布計測への応用

ここでは、計算機実験によって有効性を確かめられたウィーナーフィルタによるアーベル変換を用いて、JT-60 のラインスペクトルの空間分布を計測する。計測には、周辺プラズマ空間分解サブシステムの近紫外分光器を用いる [37]。本分光器の観測視野を、図 8.3 に示す。視野の広がり、ロータリーミラーの掃引速度と、光電子増倍管の電流電圧変換器の周波数特性で定まり、本装置では 3cm 程度となる。視野の間隔は y 軸上で、4.5cm 程度である。

計測したラインスペクトルは、TiXVII の禁制線 (383.44nm) である。図 8.4(a) は、ジュールプラズマでの空間分布であり、図 8.4(b) は、イオンサイクロトロン周波数帯加熱 (ICRF) 時の空間分布である。ICRF 加熱時には、電子温度分布が中心へピーキングするために、発光強度の分布が中心へ移動していることがわかる。

その他にも、中性粒子加熱、低域混成波加熱時の発光強度の空間分布を得ており、不純物の輸送現象の解析に用いられている [12], [36]。

8.5 まとめ

画像復元法をプラズマ計測に応用するために、ウィーナーフィルタを用いたアーベル変換を提案した。この手法は、プラズマ磁気面の楕円度、中心のずれ、観測視野の広がりによる劣化を同時に扱うことが可能であり、計算時間もかからず、雑音にも強いという特徴を持っている。本章では、この手法の利点を計算機実験で確認すると共に、実際のプラズマ計測に利用した例を示した。

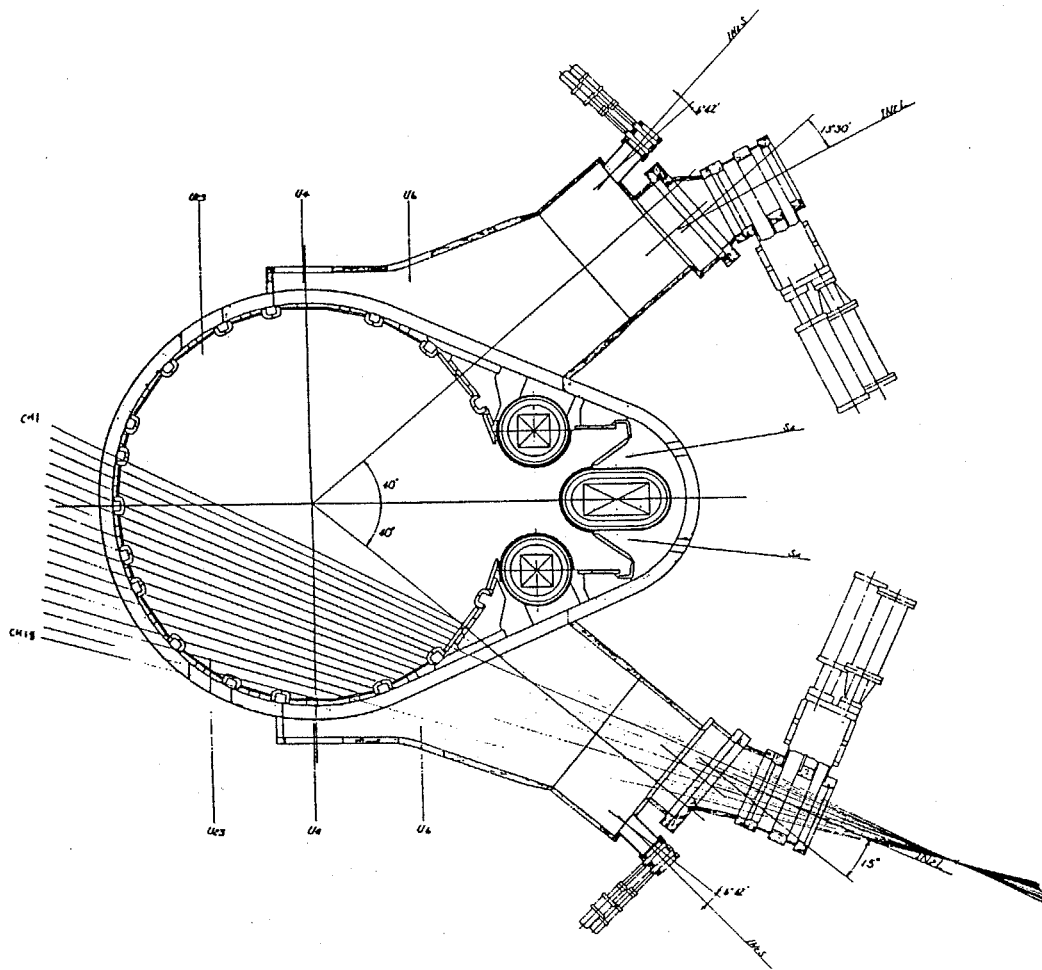
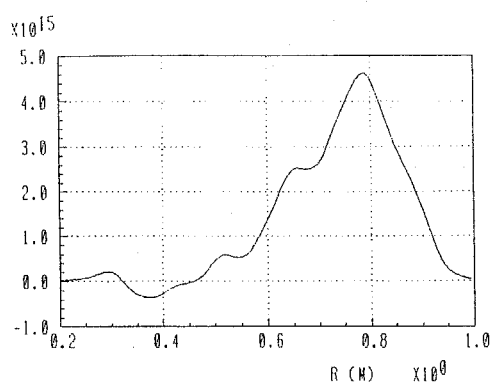
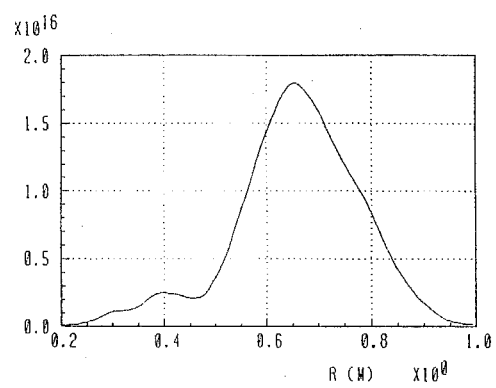


図 8.3 計測装置の視野



(a) ジュール加熱時



(b) ICRF 加熱時

図 8.4 TiXVII の発光強度分布

Chapter 9

結論

画像復元の問題は、次のような段階に分けて考えることができる。まず、原画像および観測画像が属する集合とその集合の位相を定める。その結果、画像復元が数学的に取り扱えるようになる。この準備のもとで、復元フィルタの評価基準を定め、その復元フィルタの表現を求める。そして、この表現に使われる劣化、原画像、および雑音などの特性を求め、復元フィルタを具体的に設計する。最後に、この復元フィルタを観測画像に適用して復元画像を求める。本研究では、画像復元におけるこのような基本的問題を解決した。本研究の成果を以下にまとめる。

第2章では、まず、画像復元問題を議論するための枠組を、数学的に厳密に定式化した。この定式化により、画像復元問題を統一的に扱えるようになることと共に、画像復元の考え方が他の分野へも応用できるようになることを示した。さらに、本論文で必要となる数学的準備を行なった。これらの枠組のもとで、これまでに提案されてきた各種画像復元フィルタの再定式化を行ない、画像復元問題における位置付けを行なうと共に、その問題点を洗い出した。

第3章では、出現頻度が高い画像ほど精度良く復元したい場面のために、射影フィルタの考え方を採り入れた平均射影フィルタの概念を提案した。これは、復元画像の画像成分と原画像との差の、原画像に関する2乗平均を最小にするものの中で、復元画像の雑音成分の、雑音に関する2乗平均を最小にするものである。そして、平均射影フィルタの一般形を求め、ある条件下での簡単な表現形式を与えた。さらに、平均射影フィルタの性質を調べるために、半平均射影フィルタ、分布の平均2乗的包含関係、および作用素の平均2乗的同等性の概念を導入した。これらの概念を使って、平均射影フィルタの復元画像の画像成分と原画像との関係、および平均射影フィルタの雑音抑制機構を解明した。そして、流れ画像の復元実験によって、平均射影フィルタの有効性を確かめた。

第4章では、最適画像復元フィルタと空間の位相との関係を論じた。最適復元フィルタの最適化基準には空間の位相が使われているために、最適復元フィルタは一般には空間の位相のとり方に依存することになる。本章では、空間の位相の変更をヒルベルト空間の内積の変更の範囲に限定して、次のようなことを明らかにした。最適復元フィルタの中には、ウィナーフィルタや平均射影フィルタのように、空間の内積のとり方に依存しないものがある。一般に、画像復元を行なう場合、まず、その問題に適した空間の内積を定めなくてはならない。しかし、内積のとり方に依存しない最適復元フィルタは、問題に適した内積を用いて設計しても、他のどんな内積を用いて設計しても、同じものが得られる。従って、内積のとり方に依存しない最適復元フィルタは、問題に適した内積を求める作業を省

略できるという大きな利点を持っている。また、原画像空間と観測画像空間として、それぞれ、原画像と雑音に関するマハラノビス空間を用いると、一般逆フィルタ、射影フィルタ、平均射影フィルタが一致することなどを示した。この関係によって、もし空間がマハラノビス空間になっていれば、例えば、平均射影フィルタは一般逆フィルタで代用できるので、復元フィルタを設計する計算量が削減できることが分かる。

第5章では、最適画像復元フィルタの雑音抑制機構を調べるために、最適画像復元フィルタを劣化作用素のある一般逆として表現した。そのために、まず、平均2乗的に最適な半射影の概念を導入した。そして、これを用いて、射影フィルタは、劣化作用素の1,2,4-逆の中で、雑音による平均2乗誤差を最小にするものになっていることを示した。また、平均射影フィルタは、劣化作用素の1,2-逆の中で、原画像に関する平均2乗誤差と雑音による平均2乗誤差を共に最小にするものになっていることを示した。さらに、これらの雑音に関する最適性の評価は、それを原画像空間でなく観測画像空間で代行することができることを示した。これらの関係により、最適画像復元フィルタの雑音抑制機構が明らかになった。そして、射影フィルタおよび平均射影フィルタは、雑音を考慮していない劣化作用素のある一般逆の前に、観測画像空間だけで雑音の抑制を評価した斜射影作用素を掛けたものであることを示した。その結果、例えば、劣化特性が等しく、雑音の性質だけが異なる場合の射影フィルタを設計する場合、復元フィルタ全体を再設計せずに、斜射影作用素の部分だけを設計すれば良ことになり、このような射影フィルタを設計するための計算量が節約できることになるのである。

第6章では、各種最適復元フィルタの相互関係について論じ、次の事柄を明らかにした。一般逆フィルタ、射影フィルタ、および部分射影フィルタを、平均射影フィルタを使って、厳密に表すことができる。また、ウィーナーフィルタ、パラメトリック一般逆フィルタ、パラメトリック射影フィルタ、パラメトリック部分射影フィルタを、パラメトリックウィーナーフィルタを使って、厳密に表すことができる。このように、評価基準が異なる2種類の復元フィルタの表現が一致するならば、2つの評価基準を同時に満す復元フィルタが存在する。例えば、射影フィルタと平均射影フィルタが一致する時は、その復元画像の画像成分は、個々の原画像との誤差が最小になると共に、原画像との平均2乗誤差も最小になっているのである。

一般逆フィルタ、射影フィルタ、部分射影フィルタ、平均射影フィルタは、それぞれ、パラメトリック一般逆フィルタ、パラメトリック射影フィルタ、パラメトリック部分射影フィルタ、パラメトリックウィーナーフィルタのパラメータを0にした極限として表すことができる。この収束は一樣収束、すなわち、作用素のノルムに関する収束である。従って、パラメータを0に近い正数に固定した場合、非パラメトリックフィルタとそれに対応するパラメトリックフィルタによる復元画像の差のノルムを観測画像のノルムで割った値の上限は、観測画像には依らず、パラメータだけで決まるのである。さらに、このパラメトリック復元フィルタと非パラメトリック復元フィルタとの関係は、チコノフの正則化の概念を拡張したものになっている。従って、非パラメトリック復元フィルタの一般逆の計算よりも、近似したパラメトリック復元フィルタの一般逆の計算の方が、安定になっていると考えられる。これらの結果をもとに、例えば、平均射影フィルタをパラメトリックウィーナーフィルタを使って近似的に実現すれば、平均射影フィルタを設計するための計算が安定になり、しかも、その計算量が削減できることを示した。また、流れ画像の復元実験を行ない、この近似が十分な精度を持っていることを示した。

第7章では、“拡張された作用素一般逆補題”を用いて、画像復元に関する計算量を削

減する手法について論じた。そのために、まず、いわゆる“作用素一般逆補題”の拡張について論じた。行列の数値計算のために、Sherman-Morrison-Woodburyの公式が使われている。この公式はある条件のもとに、いわゆる“作用素一般逆補題”に拡張されている。本章では、この“作用素一般逆補題”を、さらに緩い条件の場合へ拡張した。そして、これらの補題を使って次のような結果を得た。復元フィルタの形が簡単になる。ウィーナーフィルタを具体的に設計するための計算量が削減できる。ウィーナーフィルタによる復元画像の計算を、画像に関する最小化問題に書き換えることができる。その結果、ウィーナーフィルタを具体的に設計する必要がなくなる。ウィーナーフィルタを設計するための計算量は膨大になるため、現実的には実行不可能になる場合がある。しかしながら、画像に関する最小化問題に書き換えることにより、このような場合にも、復元画像を求めることができるのである。

第8章では、画像復元フィルタを他の工業分野へ応用した例として、ウィーナーフィルタのプラズマ計測への応用について論じた。その結果、プラズマの不純物の空間分布等を正確に計測することが可能になった。

なお、今後、次のような問題を解決する必要がある。画像復元において実行しなければいけないことは、図1.1にも示したように、原画像および観測画像が属する集合とその位相を決めること、復元フィルタの評価基準を決めること、復元フィルタの表現を求めること、その表現に必要となる劣化、原画像、および雑音の特性を求めること、そして最後に、復元フィルタを具体的に設計することである。原画像が属する集合としては、現在まで、線形空間または線形空間の中の閉凸集合が用いられている。しかし、状況によっては、例えば2値画像のように、原画像が属する集合をもっと小さくできる場合がある。そのような場合の画像復元について考える必要がある。また、画像復元に適した空間の位相を決定することは、現在のところ、非常に困難である。しかし、空間の位相に依存する復元フィルタの場合、問題に適した位相がわからないと、その復元フィルタの最適性が保証されなくなる。従って、この位相を決定する方法を確立する必要がある。復元フィルタの評価基準に関する問題点は、今までに考案された画像復元フィルタの中で、画像復元問題の本質を捉えたものは、ウィーナーフィルタ、射影フィルタ、平均射影フィルタなど線形復元フィルタに限られていることである。すなわち、今までに考案された非線形復元フィルタには、復元問題の定式化の仕方に本質的な問題がある。しかしながら、非線形画像復元フィルタには、例えば画素値が負にならないなどの条件が導入できるため、その復元能力は、線形復元フィルタの復元能力を上回る可能性がある。従って、画像復元問題の本質を捉えた非線形復元フィルタを考案する必要がある。本論文では、劣化作用素は与えられているものとし、画像復元における劣化作用素に関する問題については論じなかった。劣化に関しては、観測画像から劣化特性を推定する問題、および復元した時に良好な復元画像が得られる観測系(劣化作用素)を設計する問題が残されている。また、復元フィルタの表現と設計に関しては、画像復元に関する計算量をさらに削減する表現形式、および計算時間を短縮するために、復元フィルタの並列計算に適した表現形式を求める必要がある。

画像復元は本質的には逆問題である。それは、CT、物理計測、ニューラルネットの学習問題など、広い分野で利用できるものである。従って、画像復元の技術を他分野へ積極的に利用していく必要がある。

謝辞

本研究を進めるにあたり、暖かく御指導していただいた東京工業大学工学部小川英光教授に心から感謝する。そして、様々な助言と示唆をいただいた東京工業大学工学部熊沢逸夫助教授に深く感謝する。また、色々とお世話になった高山京子事務官をはじめ、小川・熊沢研究室の諸氏に感謝する。

日本原子力研究所在籍中に、御指導、御示唆をいただいた臨界プラズマ研究部鈴木康夫部長、舟橋昭昌主任、前田彦助主任、荻原徳男副主任、吉成洋次様に深く感謝する。また、実験にあたり様々に御協力して下さった、臨界プラズマ計測室をはじめとする JT-60 グループの方々に感謝する。

Bibliography

- [1] A. Albert. *Regression and the Moore-Penrose Pseudo-inverse*. Academic Press, London, 1972.
- [2] H. C. Andrews and B. R. Hunt. *Digital Image Restoration*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977.
- [3] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [4] S. L. Campbell and Jr. C. D. Meyer. *Generalized Inverse of Linear Transformations*. Pitman, Londonm, San Francisco, 1979.
- [5] R. W. Gerschberg. Super-resolution through error energy reduction. *Optica Acta*, Vol. 21, No. 9, pp. 709-720, Sept. 1974.
- [6] C. W. Groetsch. *The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind*. Pitman, Boston, 1984.
- [7] E. Oja H. Ogawa and J. Lampinen. Projection filters for image and signal restoration. In *Proc. IEEE Int. Conf. Syst. Eng. Dayton U.S.A.*, pp. 93-97, Aug. 1989.
- [8] ed. H. Stark. *Image Recovery*. Academic Press, New York, 1987.
- [9] W. W. Hager. Updating the inverse of a matrix. *SIAM Review*, Vol. 31, No. 2, pp. 221-239, June 1989.
- [10] H. V. Henderson and S. R. Searle. On deriving the inverse of a sum of matrices. *SIAM Review*, Vol. 23, No. 1, pp. 53-60, Jan. 1981.
- [11] B. R. Hunt. The application of constrained least squares estimation to image reconstruction by digital computer. *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-22, No. 9, pp. 805-812, Sept. 1973.
- [12] JT-60 チーム. JT-60 昭和 62 年 1-3 月期実験結果のレビュー. JAERI-M 87-113, 日本原子力研究所, Aug. 1987.
- [13] D. G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons, New York, 1969.

- [14] P. C. Mahalanobis. Normalization of statistical variates and the use of rectangular co-ordinates in the theory of sampling distributions. *Sankhay*, Vol. 3, No. 1, pp. 1-40, Jan. 1937.
- [15] J. Olmstead N. N. Abdelmalek, T. Kasvand and M. M. Tremblay. Direct algorithm for digital image restoration. *Appl. Opt.*, Vol. 20, No. 24, pp. 4227-4233, Dec. 1981.
- [16] H. Ogawa. Projection filter regularization of ill-conditioned problem. In *Proc. SPIE*, Vol. 808 : Inverse Problem in Optics, pp. 189-196, March-April 1987.
- [17] H. Ogawa. An operator pseudo-inversion lemma. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 48, No. 6, pp. 1527-1531, Dec. 1988.
- [18] H. Ogawa and E. Oja. Projection filter, Wiener filter and Karhunen-loeve subspace in digital image restoration. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 114, No. 1, pp. 37-51, Feb. 1986.
- [19] E. Oja and H. Ogawa. Parametric projection filter for image and signal restoration. *IEEE Trans. Acoustics, Speech & Signal Processing*, Vol. ASSP-34, No. 6, pp. 1643-1653, Dec. 1986.
- [20] A. Papulis. A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Vol. CAS-22, No. 9, pp. 735-742, Sept. 1975.
- [21] C. R. Rao. Projectors, generalized inverses and the blues. *J. Roy. Statist. Soc. B*, Vol. 36, No. 3, pp. 442-448, July 1974.
- [22] A. Rosenfeld and A. C. Kak. *Digital Picture Processing*, 2nd ed. Academic Press, London, 1982.
- [23] R. Schatten. *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [24] M. I. Sezan and H. Stark. Image restoration by convex projections in the presence of noise. *Appl. Opt.*, Vol. 22, No. 18, pp. 2781-2789, Sept. 1983.
- [25] M. I. Sezan and H. Stark. Tomographic image reconstruction from incomplete view data by convex projections and direct fourier inversion. *IEEE Trans. Med. Imag.*, Vol. MI-3, No. 2, pp. 91-98, June 1984.
- [26] D. Slepian and H. O. Pollak. Prolate spheroidal wave functions - fourier analysis and uncertainty-1. *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 40, pp. 43-64, Jan. 1961.
- [27] H. A. Smith. Improvement of the resolution of a liner scanning device. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1, pp. 23-40, Jan. 1966.
- [28] H. J. Trusell and M. R. Civanlar. The feasible solution in signal restoration. *IEEE Trans. Acoustics, Speech & Signal Processing*, Vol. ASSP-32, No. 2, pp. 201-212, Apr. 1984.

- [29] D. J. Tylavsky and G. R. L. Sohie. Generalization of the matrix inversion lemma. *Proc. IEEE*, Vol. 74, No. 2, pp. 1050–1052, July 1986.
- [30] E. L. Yip. A note on the stability of solving a rank- p modification of a linear system by the sherman-morrison-woodbury formula. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, No. 2, pp. 507–513, April 1986.
- [31] D. C. Youla. Generalized image restoration by the method of alternating orthogonal projections. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, Vol. CAS-25, No. 9, pp. 694–702, Sept. 1978.
- [32] D. C. Youla and H. Webb. Image restoration by the method of convex projections, part 1-theory. *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol. MI-1, No. 2, pp. 81–94, Oct. 1982.
- [33] キヤノンイメージ編集室編. *REMOTE SENSING*. キヤノン株式会社, 東京, 1974.
- [34] 近藤正三, 熱田清明. 新しい拘束条件付き最小2乗フィルタによるデジタル画像復元法. 信学論 (D), Vol. J68-D, No. 4, pp. 496–501, April 1985.
- [35] 近藤正三, 熱田清明. 付加雑音を考慮した拘束条件付き最小2乗フィルタによるデジタル画像復元法. 信学論 (D), Vol. J68-D, No. 4, pp. 502–507, April 1985.
- [36] 山下幸彦. ウィーナーフィルタ法によるアーベル変換. JAERI-M 87-206, 日本原子力研究所, Dec. 1987.
- [37] 山下幸彦, 荻原徳男. JT-60 の周辺プラズマ監視システム. 核融合研究, 59 別冊, pp. 289–302, March 1988.
- [38] 山下幸彦, 小川英光. 平均射影フィルタによる画像復元. 信学論 (D-II), Vol. J74-D-II, No. 2, pp. 150–157, Feb. 1991.
- [39] 山下幸彦, 小川英光. 平均射影フィルタの諸性質. 信学論 (D-II), Vol. J74-D-II, No. 2, pp. 142–149, Feb. 1991.
- [40] 山下幸彦, 小川英光. 画像空間の位相と最適画像復元フィルタ. 信学論 (D-II), Vol. J75-D-II, No. 2, pp. 306–313, Feb. 1992.
- [41] 山下幸彦, 小川英光. 最適画像復元フィルタと一般逆. 信学論 (D-II), Vol. J75-D-II, No. 5, pp. 883–889, May 1992.
- [42] 山下幸彦, 小川英光. 各種最適画像復元フィルタの相互関係. 信学論 (D-II), Vol. J75-D-II, No. 5, pp. 890–898, May 1992.
- [43] 小川英光. 電子計算機による画像復元問題の原理的考察. 信学論 (D), Vol. J64-D, No. 7, pp. 570–576, July 1981.
- [44] 小川英光. 信号と画像の復元 [i]-復元問題の普遍性-. 信学誌, Vol. 71, No. 5, pp. 491–497, May 1988.

- [45] 小川英光. 信号と画像の復元 [ii]-古典的最適フィルタ-. 信学誌, Vol. 71, No. 6, pp. 593-601, June 1988.
- [46] 小川英光. 信号と画像の復元 [iii]-最適復元のための射影フィルタ族-. 信学誌, Vol. 71, No. 7, pp. 739-748, July 1988.
- [47] 小川英光. 信号と画像の復元 [iv]-非線形復元-. 信学誌, Vol. 71, No. 8, pp. 828-835, Oct. 1988.
- [48] 小川英光. 逆問題としてのニューラルネットワーク. 信学誌, Vol. 73, No. 7, pp. 690-695, July 1990.
- [49] 小川英光, 原昌司. 部分射影フィルタによる画像復元. 信学論 (A), Vol. J71-A, No. 2, pp. 519-526, Feb. 1988.
- [50] 小川英光, 原昌司. 部分射影フィルタの諸性質. 信学論 (A), Vol. J71-A, No. 2, pp. 527-534, Feb. 1988.
- [51] 杉山博史, 小川英光. パラメトリック部分射影フィルタによる画像復元. 信学論 (D-II), Vol. J72-D-II, No. 10, pp. 1618-1626, Feb. 1989.
- [52] 相吉英太郎, 志水清孝. 数理計画法演習. 朝倉書店, 東京, 1985.
- [53] 滝保夫, 青木昌治, 樋渡涓二. 画像工学. コロナ社, 東京, 1972.
- [54] 中村伸隆, 小川英光. 加法性ノイズを考慮した最適画像復元. 信学論 (D), Vol. J67-D, No. 5, pp. 563-570, May 1984.
- [55] 辻内順平, 村田和美. 光学情報処理. 朝倉書店, 東京, 1974.
- [56] 田村秀行. コンピュータ画像処理入門. 朝倉書店, 東京, 1985.

Appendix A

補題, 命題, 系の証明

補題 3.1 の証明

式 (3.1) は,

$$\begin{aligned} J_1 &= E_f \|BAf - f\|^2 \\ &= E_f \text{tr}[(BA - I)f \otimes \overline{(BA - I)f}] \\ &= \text{tr}[(BA - I)R(BA - I)^*] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

と表現できる. 式 (A.1) を B について変分したものを δJ_1 とおけば,

$$\delta J_1 = 2\Re[\text{tr}(BARA^* - RA^*)\delta B]$$

となる. B が J_1 を最小にするならば, $\delta J_1 = 0$ となり, 式 (3.10) を得る.

逆に, 式 (3.10) を満たす B を B_0 とおけば, 任意の B に対して,

$$J_1(B) - J_1(B_0) = \text{tr}[(B - B_0)ARA^*(B - B_0)^*] \geq 0$$

となる. よって, 式 (3.10) の解は J_1 の最小値を与える. 式 (A.1) に式 (3.10) を代入すれば式 (3.11) になる. $\square$

補題 3.2 の証明

補題 3.1 と同様にして, 式 (3.2) は,

$$J_2 = \text{tr}(BQB^*) \quad (\text{A.2})$$

と表現できる. B が平均射影フィルタになるならば, $\mathcal{Y}$ から $\mathcal{X}$ へのラグランジュ未定作用素 C を用いた関数

$$J = J_2 + 2\Re[\text{tr}\{(RA^* - BARA^*)C^*\}]$$

が, B と C の変分に対して 0 になる. この条件から, 式 (3.12), (3.13) が得られる.

十分性を示す. 式 (3.12), (3.13) を満たす作用素を B_0 とおく. 式 (3.10) を満たす任意の B に対して,

$$J_2(B) - J_2(B_0) = \text{tr}[(B - B_0)Q(B - B_0)^*] \geq 0$$

となる. よって, B_0 は平均射影フィルタになっている. 式 (A.2) に式 (3.12), (3.13) を代入すれば, 式 (3.14) になる. $\square$

補題 3.4 の証明

任意の $g \in \mathcal{N}(ARA^*)$ に対して,

$$(RA^*g, A^*g) = (ARA^*g, g) = 0$$

となる. よって, $R \geq 0$ であるから, $RA^*g = 0$ となり, $\mathcal{N}(ARA^*) \subset \mathcal{N}(RA^*)$ となる. 逆は明かであるから, 式 (3.18) が成立する. 式 (3.18) の直交補空間をとれば式 (3.19) になる. $\square$

補題 3.5 の証明

任意の $g \in \mathcal{N}(ARA^* + Q)$ に対して,

$$(RA^*g, A^*g) + (Qg, g) = ((ARA^* + Q)g, g) = 0$$

となり, $R \geq 0, Q \geq 0$ より, $RA^*g = Qg = 0$ となる. よって,

$$\mathcal{N}(ARA^* + Q) \subset \mathcal{N}(ARA^*) \cap \mathcal{N}(Q)$$

となる. 逆は明かであるから式 (3.20) が成立する. U は自己共役であるから, 式 (3.20) の直交補空間をとれば, 式 (3.21) になる. $\square$

補題 3.8 の証明

任意の $g \in \mathcal{N}(V)$ に対して $AVg = 0$ である. また式 (3.19), (3.21) より, $R(ARA^*) \subset R(U)$ が成立するから, $ARA^*g = Uh$ を満たす h が存在する. 従って, $U^* = U$ より,

$$\begin{aligned} (Uh, h) &= (UU^{-1}Uh, h) \\ &= (U^{-1}Uh, Uh) \\ &= (U^{-1}ARA^*g, ARA^*g) \\ &= (ARA^*U^{-1}ARA^*g, g) \\ &= (AVg, g) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. さらに $U \geq 0$ を考慮すれば,

$$ARA^*g = Uh = 0$$

となるから, 式 (3.18) より,

$$\mathcal{N}(V) \subset \mathcal{N}(AV) = \mathcal{N}(ARA^*) = \mathcal{N}(RA^*)$$

となる. 逆は明らかであるから, 式 (3.25) および,

$$\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(AV) = \mathcal{N}(ARA^*) \tag{A.3}$$

が成立する.

次に, 式 (3.26) を証明する. まず初めに, 任意の $f \in \mathcal{N}(ARA^*U^{-1}AR)$ に対して, 式 (3.19) より, $ARf = ARA^*g$ を満たす g が存在する. この g に対して,

$$AVg = ARA^*U^{-1}ARf = 0$$

となり, $g \in \mathcal{N}(AV)$ となる. よって, 式 (A.3) より $g \in \mathcal{N}(ARA^*)$ となり,

$$ARf = ARA^*g = 0$$

となる, よって, $\mathcal{N}(ARA^*U^-AR) \subset \mathcal{N}(AR)$ となる. 逆は明かであるから,

$$\mathcal{N}(ARA^*U^-AR) = \mathcal{N}(AR) \quad (\text{A.4})$$

が成立する. 式 (A.4) の直交補空間をとれば,

$$\mathcal{R}(RA^*(U^-)^*ARA^*) = \mathcal{R}(RA^*) \quad (\text{A.5})$$

となる. ところで, $U^* = U$ であるから $(U^-)^*$ も U の 1-逆の一つである. しかも, 補題 3.7 より, V は U の 1-逆の選び方によらないから, 式 (A.5) より式 (3.26) を得る. $\square$

補題 3.9 の証明

式 (3.21) より, $\mathcal{R}(AR) \subset \mathcal{R}(U)$ であるから, $AR = UX$ を満たす作用素 X が存在する [3]. よって,

$$(I - UU^-)AR = (I - UU^-)UX = (U - UU^-U)X = 0$$

となり, 式 (3.27) が成立する. 式 (3.26) を使い, 同様にして式 (3.28) を証明することができる. $\square$

補題 3.10 の証明

作用素方程式

$$CARA^* = (D - I)RA^* \quad (\text{A.6})$$

は, 補題 3.3 と式 (3.18) より, 任意の C に対して解 D を持ち, 逆に任意の D に対して解 C を持つ. よって, 連立作用素方程式 (3.12), (3.13) と, 連立作用素方程式 (3.12),

$$BA = (D - I)RA^* \quad (\text{A.7})$$

は, B に関して同値な解を与える.

また, この式 (A.7) に式 (3.12) を加えても, 連立作用素方程式は変わらない. よって式 (3.29), (3.30) を得る.

式 (3.31) は, 式 (A.6) を C について解き, それを式 (3.14) に代入すれば得られる. $\square$

補題 3.11 の証明

$f \in \mathcal{N}(M_1 + M_2)$ とすれば,

$$(M_1f, f) + (M_2f, f) = ((M_1 + M_2)f, f) = 0$$

となる. よって, $M_1f = M_2f = 0$ となり,

$$\mathcal{N}(M_1 + M_2) \subset \mathcal{N}(M_1) \cap \mathcal{N}(M_2)$$

となる. 逆は明かであるから, 式 (3.39) が成立する. 式 (3.39) の直交補空間を取れば, 式 (3.40) になる. $\square$

補題 3.12 の証明

$g \in \mathcal{L}^\perp \cap (M\mathcal{L}^\perp)^\perp$ とおけば,

$$(Mg, g) = 0$$

が成立する. 更に $M \geq 0$ を考慮すれば, $Mg = 0$ となるから, $\mathcal{L}^\perp \cap (M\mathcal{L}^\perp)^\perp \subset \mathcal{N}(M)$ となる. この直交補空間を取り, 文献 [49] の補題 3.4 を考慮すれば, 式 (3.44) が成立する. $\square$

補題 3.13 の証明

式 (3.45) より, 任意の $f \in \overline{\mathcal{R}(R)}$ は, $f_0 \in \mathcal{R}(RA^*)$ と $f_1 \in \mathcal{N}(A)$ によって,

$$f = f_0 + f_1$$

と一意に分解できる. $\mathcal{R}(RA^*) \subset \overline{\mathcal{R}(R)}$ より f_0 も $\overline{\mathcal{R}(R)}$ に含まれる. また, $f_1 = f - f_0$ であるから, f_1 も $\overline{\mathcal{R}(R)}$ に含まれ,

$$\overline{\mathcal{R}(R)} \subset \mathcal{R}(RA^*) + (\overline{\mathcal{R}(R)} \cap \mathcal{N}(A))$$

となる. 上式の逆の包含関係は明かである. よって, 式 (3.46) が成立する. $\square$

補題 3.14 の証明

$\mathcal{L} = \mathcal{R}(AR) + Q\mathcal{R}(AR)^\perp$ とおく. 明らかに, $\mathcal{L} \supset \mathcal{R}(AR)$ となる. 式 (3.45) より, $\mathcal{L} \supset \mathcal{R}(Q)$ となる. よって,

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{R}(AR) + \mathcal{R}(Q)$$

が成立する. 一方, $Q\mathcal{R}(AR)^\perp \subset \mathcal{R}(Q)$ より,

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{R}(AR) + \mathcal{R}(Q)$$

となるから, $\mathcal{L} = \mathcal{R}(AR) + \mathcal{R}(Q)$ となる. よって, 式 (3.21) より, 式 (3.54) が成立する. $\square$

補題 4.1 の証明

任意の $f \in \mathcal{X}$, $g \in \mathcal{Y}$ に対して,

$$(A^{*(M)(N)}g, f)_{(M)} = (g, Af)_{(N)}$$

が成立する. よって,

$$(MA^{*(M)(N)}g, f) = (Ng, Af) = (A^*Ng, f)$$

となり, $MA^{*(M)(N)} = A^*N$ となる. 左から両辺に M^{-1} をかけて, $A^{*(M)(N)} = M^{-1}A^*N$ となる. $\square$

補題 4.2 の証明

$S = M^{-1/2}$ とし, $\{u_i\}$ を $\mathcal{X}$ のある正規直交基底とする. $\{Su_i\}$ は $\mathcal{X}_{(M)}$ の正規直交基底となる. よって,

$$\text{tr}(A)_{(M)} = \sum_i (MASu_i, Su_i) = \sum_i (S^{-1}ASu_i, u_i) = \text{tr}(S^{-1}AS) = \text{tr}(A)$$

となる. $\square$

補題 4.3 の証明 部分射影フィルタ, ウィーナーフィルタ, 平均射影フィルタの証明は, それぞれ, 文献 [50], [18], 補題 3.2 に既に与えられている.

一般逆フィルタについて証明する. $B_{GIF} = A^\dagger$, $C = (A^*A)^\dagger A^\dagger$ が, 式 (4.11), (4.12) を満たすことは明かである. 逆に, 式 (4.11), (4.12) が成立していたとする. B_{GIF} を B と略記する. 式 (4.11) に左から A をかければ,

$$(AB - I)AA^* = 0$$

となり, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*)$ より,

$$ABA = A \quad (\text{A.8})$$

となる. よって, B は A の 1-逆になる. 式 (A.8) に左から B をかければ,

$$(BA - I)BA = 0$$

となる. 従って, 式 (4.12) と $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^*A)$ より,

$$(BA - I)CAA^* = 0$$

となる. よって, 再び式 (4.12) より,

$$BAB = B \quad (\text{A.9})$$

が成立する. よって, B は A の 2-逆になる. また, 式 (4.11), (4.12) より,

$$(CAA^*A - I)A^* = 0$$

となる. 上式に左から A^*A をかけ, 両辺の共役をとり, $\mathcal{N}(AA^*A) = \mathcal{N}(A)$ を使えば,

$$A(A^*C^*A^*A - I) = 0$$

となる. よって, 式 (4.12) より,

$$(AB)^*AB - AB = (AA^*C^*A^* - I)ACAA^* = A(A^*C^*A^*A - I)CAA^* = 0$$

となる. これは, AB が正射影作用素であることを意味しているから,

$$(AB)^* = AB \quad (\text{A.10})$$

となり, B は A の 3-逆になる. 式 (4.11) に右から B^* をかければ,

$$BA(BA)^* = (BA)^*$$

となる. これは, BA が正射影作用素であることを意味しているから,

$$(BA)^* = BA \quad (\text{A.11})$$

となり, B は A の 4-逆になる. よって, 式 (A.8)–(A.11) より, B は A の一般逆フィルタになる.

次に, 射影フィルタの場合について証明する. 文献 [54] より, P_{A^*} を $\mathcal{R}(A^*)$ への正射影作用素とすれば, 射影フィルタ B_{PF} はある作用素 D とともに, 連立作用素方程式

$$B_{PF}A = P_{A^*} \quad (\text{A.12})$$

$$B_{PF}Q = DA^* \quad (\text{A.13})$$

の解として与えられる. まず,

$$CAA^* = DA^* \quad (\text{A.14})$$

を考える. $\mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*)$ と文献 [49] の補題 4.1 より, 任意に与えた C に対して, 式 (A.14) を成立させる D が存在し, 逆に, 任意に与えた D に対して, 式 (A.14) を成立させる C が存在する. よって, 式 (A.12), (A.13) および式 (A.12), (4.14) は, B_{PF} に関して同値な解を与える.

後は, 式 (4.13) と式 (A.12) とが同値であることを示せばよい. 式 (A.12) の両辺に右から A^* をかければ, 式 (4.13) になる. 逆に,

$$\begin{aligned} A^*(A^*)^\dagger &= P_{A^*} \\ AP_{A^*} &= AA^\dagger A = A \end{aligned}$$

より, 式 (4.13) の両辺に右から $(A^*)^\dagger$ をかければ, 式 (A.12) になる. よって, 式 (A.12) と (4.13) は同値になる. $\square$

補題 5.1 と 5.2 の証明

初めに補題 5.2 を証明する. 平均射影フィルタ B_{APF} を B と略記する. このとき, $A\mathcal{R}(R) \subset \mathcal{R}(U_{APF})$ および $B\mathcal{R}(U_{APF}) \subset \mathcal{R}(R)$ が成立する. よって, 原画像空間および観測画像空間を, それぞれ, $\mathcal{R}(R)$ および $\mathcal{R}(U_{APF})$ に制限することができる. このように制限すれば明らかに, R および U_{APF} は正則になる. (3.29) より,

$$(AB - I)ARA^* = 0 \quad (\text{A.15})$$

となる. 空間を上述のように制限することによって, $R > 0$ となるから, $\mathcal{R}(ARA^*) = \mathcal{R}(A)$ が成立する. よって, $ABA = A$ となり, B は A の 1-逆になる. また, U_{APF} は正則になるから, 式 (3.30) より, B はある作用素 D と共に,

$$B = DRA^*U_{APF}^{-1}$$

と表すことができる. 式 (A.15) より,

$$(BA - I)DRA^*U_{APF}^{-1}A = B(ABA - A) = 0 \quad (\text{A.16})$$

となる. さらに, U_{APF}^{-1} は半正值作用素であるから, $\mathcal{R}(A^*U_{APF}^{-1}A) = \mathcal{R}(A^*U_{APF}^{-1})$ となる. よって, 式 (A.16) より, $(BA - I)DRA^*U_{APF}^{-1} = 0$ となり, $BAB = B$ となる. 従って, B は A の 2-逆になる.

平均射影フィルタで $R = I$ とおけば射影フィルタになるので (定理 6.1), この証明から直ちに補題 5.1 が成立することがわかる. $\square$

補題 5.3 の証明

MM^- は $\mathcal{R}(M)$ への $\mathcal{N}(MM^-)$ に沿った射影作用素である. 従って, 任意の g は,

$$g = g_1 + g_2 \quad : \quad g_1 \in \mathcal{R}(M), \quad g_2 \in \mathcal{N}(MM^-) \quad (\text{A.17})$$

と一意に分解できる. まず, $g \in \mathcal{N}(AM^-)$ のとき, $g_1 \in MN(A)$ となることを示す. $AM^-g = 0$ となるから, $M^-g \in \mathcal{N}(A)$ となり, $MM^-g \in MN(A)$ となる. よって, 式 (A.17) より,

$$\mathcal{N}(AM^-) \subset MN(A) + \mathcal{N}(MM^-) \quad (\text{A.18})$$

となる. ところで, $\mathcal{R}(M)$ と $\mathcal{N}(MM^-)$ は互いに素である. しかも, $MN(A) \subset \mathcal{R}(M)$ が成立するから, $MN(A)$ と $\mathcal{N}(MM^-)$ も互いに素である. よって, 式 (A.18) は,

$$\mathcal{N}(AM^-) \subset MN(A) + \mathcal{N}(MM^-)$$

となる.

逆を証明する. $g \in MN(A)$ とすれば, $g = Mf$, $Af = 0$ を満たす f が存在する. $\mathcal{N}(M) \subset \mathcal{N}(A)$ より, $A = BM$ を満たす B が存在する. よって,

$$AM^-g = BMM^-Mf = Af = 0$$

が成立し, $g \in \mathcal{N}(AM^-)$ となる. 従って,

$$MN(A) \subset \mathcal{N}(AM^-) \quad (\text{A.19})$$

となる. また, $g \in \mathcal{N}(MM^-)$ とすれば,

$$M(M^-g) = 0$$

となる. しかも, $\mathcal{N}(M) \subset \mathcal{N}(A)$ であるから,

$$A(M^-g) = 0$$

となり, $g \in \mathcal{N}(AM^-)$ となる. よって,

$$\mathcal{N}(MM^-) \subset \mathcal{N}(AM^-) \quad (\text{A.20})$$

となる. 式 (A.19), (A.20) より,

$$\mathcal{N}(AM^-) \supset MN(A) + \mathcal{N}(MM^-)$$

が成立する. $\square$

補題 6.1 の証明

$\mathcal{R}(A)$ が閉部分空間ならば, A は, $\mathcal{R}(A^*)$ から $\mathcal{R}(A)$ への同相写像になる. よって, $\mathcal{R}(A^*)$ は閉部分空間になる. $\square$

補題 6.2 の証明

式 (2.4) より明かである. $\square$

補題 6.3 の証明

$f \in \mathcal{N}(M_1 + \gamma M_2)$ とする.

$$(M_1f, f) + \gamma(M_2f, f) = ((M_1 + \gamma M_2)f, f) = 0$$

となる. $M_1 \geq 0$, $M_2 \geq 0$, $\gamma > 0$ となっているから, $M_1f = M_2f = 0$ となり, 次の関係が成立する.

$$\mathcal{N}(M_1 + \gamma M_2) \subset \mathcal{N}(M_1) \cap \mathcal{N}(M_2)$$

逆は明かであるから, 式 (6.23) が成立する. また, 式 (6.23) の直交補空間をとれば, 式 (6.24) になる. $\square$

補題 6.4 の証明

$\mathcal{R}(AR^{1/2})$ が閉部分空間のとき, 補題 6.1, 6.2 より,

$$\mathcal{R}(AR^{1/2}) = \mathcal{R}(ARA^*) \subset \mathcal{R}(AR) \subset \mathcal{R}(AR^{1/2})$$

となり, 式 (6.25) が成立する. $\mathcal{R}(AR)$ が閉部分空間のときは, 補題 3.4 より,

$$\mathcal{N}(RA^*) = \mathcal{N}(ARA^*) = \mathcal{N}(R^{1/2}A^*)$$

となる。よって、上式の直交補空間を考えれば、

$$\mathcal{R}(AR) \subset \mathcal{R}(AR^{1/2}) \subset \overline{\mathcal{R}(AR^{1/2})} = \overline{\mathcal{R}(AR)} = \mathcal{R}(AR)$$

となる。従って、式(6.25)が成立する。□

補題 6.5 の証明

まず、 A が $\mathcal{R}(RA^*)$ から $\mathcal{R}(AR)$ への全単射になることを示す。式(6.25)より、全写になることがわかる。また、 $f \in \mathcal{R}(RA^*) \cap \mathcal{N}(A)$ とすれば、 $f = RA^*g$ かつ $ARA^*g = 0$ となる g が存在する。よって、 $f = R^{1/2}(R^{1/2}A^*g) = 0$ となり、 A は単射になる。従って、 $\mathcal{R}(RA^*C) = \mathcal{R}(RA^*)$ でないとすれば、 $\mathcal{R}(ARA^*C) = \mathcal{R}(AR)$ とならない。よって、補題 6.5 が成立する。□

補題 6.6 の証明

$0 < \gamma \leq 1$ とする。 S を $\mathcal{R}(M_1 + M_2)$ とおく。まず、 $\mathcal{X}$ を S に制限して考える。この制限のもとで、 $M_1 + M_2$ は S から S への作用素になる。また、 $M_1 + \gamma M_2$ は、 S から $\mathcal{R}(M_1 + \gamma M_2)$ への作用素になる。補題 6.1 より、

$$\mathcal{N}(M_1 + \gamma M_2) = \mathcal{N}(M_1) \cap \mathcal{N}(M_2) = \mathcal{R}(M_1 + M_2)^\perp = 0$$

となる。よって、 $M_1 + M_2$, $M_1 + \gamma M_2$ は正值作用素となる。よって、それらの固有値は正の実数である。 $M_1 + M_2$ の固有値の下限を λ_1 とおく。 $\lambda_1 = 0$ とすれば、 $\mathcal{R}(M_1 + M_2)$ が閉空間にならない。よって、 $\lambda_1 > 0$ となる。また、任意の $f \in S$ に対して、

$$((M_1 + M_2)f, f) \geq \lambda_1 \|f\|^2 \quad (\text{A.21})$$

となる。 $M_1 + \gamma M_2$ の固有値の下限を λ_2 とおく。任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $\lambda_2 + \epsilon$ より小さい固有値を持つノルム 1 の固有ベクトル ϕ が存在する。よって、

$$\lambda_2 + \epsilon > ((M_1 + \gamma M_2)\phi, \phi) = \gamma((M_1 + M_2)\phi, \phi) + (1 - \gamma)(M_1\phi, \phi) \geq \gamma\lambda_1 \quad (\text{A.22})$$

となる。 ϵ は任意であるから、 $\lambda_2 \geq \gamma\lambda_1$ が成立する。

また式(A.21)と同様に、任意の $f \in S$ に対して、

$$((M_1 + \gamma M_2)f, f) \geq \lambda_2 \|f\|^2$$

となるから、

$$\|(M_1 + \gamma M_2)f\| \geq \lambda_2 \|f\| \quad (\text{A.23})$$

となる。 g に収束する $\mathcal{R}(M_1 + \gamma M_2)$ の点列 g_n に対して、 $(M_1 + \gamma M_2)f_n = g_n$ となる f_n が存在する。 g_n はコーシー列でもあるから、式(A.23)より f_n は S のコーシー列となる。 S は $\mathcal{X}$ の閉部分空間であるから、完備空間となる。よって、 f_n はある f に収束し、 $M_1 + \gamma M_2$ は有界であるから、 $g = (M_1 + \gamma M_2)f$ となる。よって、 $\mathcal{R}(M_1 + \gamma M_2)$ は閉空間となる。

また、 $0 < \gamma \leq 1$ としているから、次の式が成立する。

$$\|(M_1 + \gamma M_2)^{-1}\| = 1/\lambda_2 \leq 1/\gamma\lambda_1 = \|(M_1 + M_2)^{-1}\|/\gamma$$

空間を $\mathcal{X}$ に戻して考える。 $M_1 + M_2$, $M_1 + \gamma M_2$, $(M_1 + M_2)^\dagger$, $(M_1 + \gamma M_2)^\dagger$ を $\mathcal{X}$ の元に作用させたものは、それぞれ、初めにその $\mathcal{X}$ の元を部分空間 S へ正射影して、 S に制限した場合の $M_1 + M_2$, $M_1 + \gamma M_2$, $(M_1 + M_2)^{-1}$, $(M_1 + \gamma M_2)^{-1}$ を作用させ、その結果を $\mathcal{X}$ の元と

見なしたものに等しい. 補題 6.3 より, $\mathcal{N}(M_1 + \gamma M_2)^\perp = S$ となる. よって, $\mathcal{R}(M_1 + \gamma M_2)$ は, $M_1 + \gamma M_2$ の定義域を S に制限した場合と等しくなる. 従って, $\mathcal{R}(M_1 + \gamma M_2)$ は閉部分空間になる. 式 (6.24) より, $\mathcal{R}(M_1 + \gamma M_2)$ と $\mathcal{R}(M_1 + M_2)$ の閉包は等しい. さらに, 両空間は閉部分空間であるから, 式 (6.37) が成立する. また, 上記の 4 つの作用素の作用素ノルムは, それらの定義域を S へ制限した場合と等しい. 従って, 式 (6.38) が成立する.

$\gamma > 1$ の場合に, $\mathcal{R}(M_1 + \gamma M_2)$ が閉空間になり, 式 (6.37) が成立することも, 同様に証明できる. $\square$

補題 6.7 の証明

$U = CC^* + M, U(\gamma) = CC^* + \gamma M$ とおく. 補題 6.2, 6.3 より, $\mathcal{R}(C^*U^\dagger) = \mathcal{R}(C^*)$ となる. 命題 6.1 の証明と同様にして, $(C^*U^\dagger C)^\dagger$ は, $\mathcal{R}(C^*)$ から $\mathcal{R}(C^*)$ への同相作用素になることがわかる. よって, 補題 6.7 の P は, $P = C(C^*U^\dagger C)^\dagger C^*U^\dagger$ によって与えられ, 確かに存在する. 次に,

$$\mathcal{N}(C^*U(\gamma)^\dagger) = \mathcal{N}(C^*U^\dagger) \quad (\text{A.24})$$

を示す. まず, 補題 5.3 において, M および A を, それぞれ, $CC^* + \gamma M$ および C^* とおけば, $(CC^* + \gamma M)\mathcal{N}(C^*) = M\mathcal{N}(C^*)$ となるから,

$$\mathcal{N}(C^*U(\gamma)^\dagger) = M\mathcal{N}(C^*) + \mathcal{N}(U(\gamma))$$

となる. 式 (6.23) より, $\mathcal{N}(U(\gamma)) = \mathcal{N}(U)$ となり, 式 (A.24) が成立する. よって, $I - P$ は $\mathcal{N}(C^*U^\dagger(\gamma))$ への射影作用素であるから,

$$\begin{aligned} C^*U(\gamma)^\dagger &= C^*U(\gamma)^\dagger[P + (I - P)] \\ &= C^\dagger CC^*U(\gamma)^\dagger P \\ &= C^\dagger U(\gamma)U(\gamma)^\dagger P - \gamma MU(\gamma)^\dagger CC^*(CC^*)^\dagger P \\ &= C^\dagger P - \gamma MU(\gamma)^\dagger U(\gamma)(CC^*)^\dagger P + \gamma^2 MU(\gamma)^\dagger M(CC^*)^\dagger P \\ &= C^\dagger P - \gamma M(CC^*)^\dagger P + \gamma^2 MU(\gamma)^\dagger M(CC^*)^\dagger P \end{aligned}$$

となる. $\mathcal{R}(C)$ および $\mathcal{R}(U)$ は閉空間であるから, $C^\dagger, (CC^*)^\dagger, U^\dagger, P$ は, 有界作用素になる. よって, 式 (6.38) より,

$$\begin{aligned} \|DC^*(CC^* + \gamma M)^\dagger - DC^\dagger P\| &= \|-\gamma DM(CC^*)^\dagger P + \gamma^2 DMU(\gamma)^\dagger M(CC^*)^\dagger P\| \\ &\leq \gamma \|D\| \|(CC^*)^\dagger\| \|M\| \|P\| (1 + \|M\| \|U^\dagger\|) \end{aligned}$$

となり, 式 (6.39) が成立する. $\square$

補題 6.8 の証明

補題 6.3 より, $\mathcal{N}(U_{PWF}) = \mathcal{N}(U_{APF})$ となる. また, 補題 6.3 と補題 3.4 より,

$$\mathcal{N}(U_{PWF}) \subset \mathcal{N}(RA^*)$$

となる. 従って, 補題 5.3 より,

$$\mathcal{N}(B_{PWF0}) = U_{PWF}\mathcal{N}(RA^*) + \mathcal{N}(U_{PWF}U_{PWF}^\dagger) = Q\mathcal{R}(AR)^\perp + \mathcal{N}(U_{APF})$$

となる. 上式で, $\mathcal{N}(B_{PWF0})$ は γ の値に依存しない. よって, $\gamma = 1$ とすれば, $\mathcal{N}(B_{PWF0}) = \mathcal{N}(B_{WF0})$ となる. また, B_{APF0} 中の $RA^*V^\dagger$ は, $\mathcal{R}(RA^*)$ から $\mathcal{R}(RA^*)$ への正則な作用

素となる。よって、式 (6.9) と式 (6.12) を見比べれば、 $\mathcal{N}(B_{APF0}) = \mathcal{N}(B_{WF0})$ となることがわかる。従って、式 (6.47) が成立する。□

命題 3.1 の証明

$P_{\mathcal{L}^\perp, \mathcal{L}}$ を P と略記する。 R_X は半正值自己共役作用素であるから、 $R_1 = R_X^{1/2}$ とおけば、

$$E_X \|Px\|^2 = \text{tr}(PR_X P^*) = \text{tr}(PR_1(PR_1)^*) = \text{tr}(R_1 P^*(R_1 P^*)^*) \quad (\text{A.25})$$

となる。まず式 (3.37) が成立したとする。 $\overline{\mathcal{R}(R_1)} = \overline{\mathcal{R}(R_X)}$ より、 $PR_1 = 0$ となるから、式 (A.25) が 0 となり、 $E_X \|Px\|^2 = 0$ となる。

逆に、式 (A.25) が 0 とすれば、 $R_1 P^* = 0$ となる。しかも、 P^* は $(\mathcal{L}^\perp)^\perp$ に沿った $\mathcal{L}^\perp$ への射影作用素となるから、 $\mathcal{L}^\perp \subset \mathcal{N}(R_1) = \mathcal{N}(R_X)$ となり、

$$\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}^\perp)^\perp \supset \mathcal{N}(R_X)^\perp = \overline{\mathcal{R}(R_X)}$$

となる。よって、式 (3.37) が成立する。□

命題 3.3 の証明

$R_1 = R_X^{1/2}$ とおけば、命題 3.1 の証明と同様にして、

$$E_X \|Tx\|^2 = \text{tr}(TR_1(TR_1)^*)$$

となる。よって、(i) $\leftrightarrow$ (ii) が成立する。また、 $\mathcal{N}(T)$ は閉部分空間であるから、(ii) $\leftrightarrow$ (iii) も明かである。□

命題 3.6 の証明

$X + Y$ の相関作用素を R_{X+Y} とおく。 X と Y に関するアンサンブル平均を $E_{X,Y}$ で表す。 X の任意の元 f に対して、

$$\begin{aligned} 2(R_X f, f) + 2(R_Y f, f) &= 2E_{X,Y}[|(x, f)|^2 + |(y, f)|^2] \\ &\geq E_{X,Y}|(x + y, f)|^2 \\ &= (R_{X+Y} f, f) \geq 0 \end{aligned}$$

となり、 $\mathcal{N}(R_{X+Y}) \supset \mathcal{N}(R_X) \cap \mathcal{N}(R_Y)$ となる。この直交補空間をとれば、

$$\overline{\mathcal{R}(R_{X+Y})} \subset \overline{\mathcal{R}(R_X) + \mathcal{R}(R_Y)}$$

となる。よって、式 (3.40) と命題 3.1 より、命題 3.6 の前半が成立する。命題 3.2 より、明らかに $X + Y$ を含む最小の閉部分空間は、 $\overline{\mathcal{R}(R_{X+Y})}$ である。そこで、 X と Y が独立で X または Y の平均が 0 であれば、

$$\overline{\mathcal{R}(R_{X+Y})} = \overline{\mathcal{R}(R_X) + \mathcal{R}(R_Y)} \quad (\text{A.26})$$

が成立することを示せばよい。

X および Y の平均を、それぞれ x_a および y_a とおき、 $E_X(x - x_a \otimes \overline{x - x_a}) = R_X - (x_a \otimes \overline{x_a})$ を R'_X とおく。 f が張る部分空間を $[f]$ で表せば、式 (3.40) より、

$$\overline{\mathcal{R}(R_X)} = \overline{\mathcal{R}(R'_X) + [x_a]}$$

となる。同様に $R'_Y = E_Y(y - y_a \otimes \overline{y - y_a})$ とおく。 $X + Y$ の相関作用素 R_{X+Y} は、 X と Y が独立な場合、

$$R_{X+Y} = R'_X + R'_Y + (x_a + y_a) \otimes \overline{(x_a + y_a)}$$

となる。よって、式 (A.26) は、

$$\overline{\mathcal{R}(R'_X) + \mathcal{R}(R'_Y) + [x_a + y_a]} = \overline{\mathcal{R}(R'_X) + \mathcal{R}(R'_Y) + [x_a] + [y_a]}$$

となる。よって、 $x_a = 0$ または $y_a = 0$ ならば、上式が成立し、命題 3.6 の後半が成立する。

□

命題 4.1 の証明

式 (4.2) が内積の定義を満たし、 $\mathcal{X}_{(M)}$ が $\mathcal{X}$ と同相な内積を持つヒルベルト空間になることは明かである。よって、逆を示す。 $\mathcal{X}'$ を任意に固定した $\mathcal{X}$ に同相な内積を持つヒルベルト空間とする。 g を固定すれば、 $(f, g)'$ は内積の定義により、 f に対する線形汎関数になる。二つの内積は同相であるから、ある正数 β に対して、

$$|(f, g)'| \leq \|f\|' \|g\|' \leq \beta^2 \|f\| \|g\|$$

となり、 $(f, g)'$ は $\mathcal{X}$ の有界線形汎関数になる。よって、 $(f, g)' = (f, h)$ となる $h \in \mathcal{X}$ が存在する。内積の定義から h は g に対して線形でなければならない。よって、線形作用素 M を用いて $h = Mg$ で表される。よって、 $(f, g)' = (f, Mg)$ となる。 $f \neq 0$ ならば、 $(f, f)' > 0$ である。よって、 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}_{(M)}$ が複素空間であるならば、 M は正值自己共役作用素になる。また、 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}_{(M)}$ が実空間の場合には、 $(f, g)' = (g, f)'$ と $(f, g) = (g, f)$ が成立する。よって、 M を $(M + M^*)/2$ と置き換えても、内積の値は変わらない。従って、式 (4.2) を満たす自己共役作用素 M が存在する。このとき、 M は正值作用素になる。よって、実空間または複素空間のどちらの場合においても、 M を正值自己共役作用素とすることができる。 M が自己共役作用素であるから、 $(f, g)' = (Mf, g)$ となる。また、二つの内積が同相であるから、 M は同相作用素となる。□

命題 4.2 の証明

初めに、平均射影フィルタの場合について証明する。補題 4.3 より、 B'_{APF} はある作用素 C' と共に、連立作用素方程式

$$B'_{APF} A R' A^{*'} = R' A^{*'} \quad (\text{A.27})$$

$$B'_{APF} Q' = C' A R' A^{*'} \quad (\text{A.28})$$

の解として与えられる。式 (4.6) より、 $R' = RM$ 、 $Q' = QN$ となる。補題 4.1 より、 $A^{*'} = M^{-1} A^* N$ となる。これらの関係を式 (A.27)、(A.28) に適用すれば、

$$B'_{APF} A R M M^{-1} A^* N = R M M^{-1} A^* N$$

$$B'_{APF} Q N = C' A R M M^{-1} A^* N$$

となり、

$$B'_{APF} A R A^* = R A^*$$

$$B'_{APF} Q = C' A R A^*$$

となる。よって、式 (4.26)、(4.27) が成立する。

一般逆フィルタ、射影フィルタ、ウィーナーフィルタに対しても、同様に証明することができる。

次に、部分射影フィルタについて証明する。まず、 P'_2 について考える。 S_1 および $\mathcal{N}(A)$ は内積の変更によらないから、 $(S'_2)^{\perp'} = S_2^{\perp}$ となる。よって、式 (4.8) より、 $S'_2 = M^{-1} S_2$ と

なる. 同様に, P'_1 は $M^{-1}S_1^\perp$ に沿った S_1 への射影作用素になる. よって, 補題 4.1, 4.3, 式 (4.6) より, B'_{PTPF} はある作用素 D' と共に, 連立作用素方程式

$$B'_{PTPF}AP'_1 = P'_2P'_1 \quad (\text{A.29})$$

$$B'_{PTPF}QN = D'P'_1M^{-1}A^*N \quad (\text{A.30})$$

の解として与えられる. 式 (A.30) は, その両辺に右から N^{-1} をかけた次式と同値になる.

$$B'_{PTPF}Q = D'P'_1M^{-1}A^* \quad (\text{A.31})$$

よって, 連立作用素方程式 (A.29), (A.30) と (A.29), (A.31) は, 同値な解を与える.

また, 任意の $f \in \mathcal{N}(P'_1M^{-1}A)$ に対して,

$$M^{-1}Af \in \mathcal{N}(P'_1) = M^{-1}S_1^\perp$$

となり, $Af \in S_1^\perp$ となる. よって,

$$\mathcal{N}(P'_1M^{-1}A) \subset \mathcal{N}(P_1A)$$

となる. 逆も同様に証明できるから,

$$\mathcal{N}(P'_1M^{-1}A) = \mathcal{N}(P_1A)$$

となる. よって,

$$C'P_1A^* = D'P'_1M^{-1}A^*$$

を考えれば, 補題 4.3 の射影フィルタの証明と同様にして, 連立作用素方程式 (A.29), (A.31) と (A.29), (4.25) は, B'_{PTPF} に関して同値な解を与えることを示すことができる.

最後に, 式 (A.29) と式 (4.24) が同値であることを示す. $\mathcal{R}(P_1) = \mathcal{R}(P'_1)$ であるから,

$$P'_1P_1 = P_1$$

$$P_1P'_1 = P'_1$$

となる. よって, 式 (A.29) の両辺に右から P_1 をかければ, 式 (4.24) になる. 逆に, 式 (4.24) の両辺に, 右から P'_1 をかければ, 式 (A.29) になる. 従って, 式 (4.24) および (A.29) は同値になる. これは, 連立作用素方程式 (A.29), (4.25) と (4.24), (4.25) が同値な解を与えることを意味している.

以上の議論により, 連立作用素方程式 (A.29), (A.30) と (4.24), (4.25) は, B'_{PTPF} に関して同値な解を与えることが分かる. すなわち, $\mathcal{X}_{(M)}$, $\mathcal{Y}_{(N)}$ における部分射影フィルタは, 式 (4.24), (4.25) で与えられる B'_{PTPF} になる. $\square$

命題 4.3 の証明

$R_{X(M)} = I$ とする. 式 (4.6) より, $R_{X(M)} = R_X M$ であるから, $R_X M = I$ となり, $R_X = M^{-1}$ となる. よって, R_X も同相作用素となり, $M = R_X^{-1}$ となる.

逆に, R_X が同相作用素で, $M = R_X^{-1}$ であるならば, 式 (4.6) より, $R_{X(M)} = I$ となる.

$\square$

命題 4.4 の証明

$\mathcal{X}$ の内積を正值同相作用素 M で変更した $\mathcal{X}_{(M)}$ からマハラノビス空間を構成する.

$$R_{X(M)} = R_X M$$

となるから,

$$((R_{X(M)})^{-1}\cdot, \cdot)_{(M)} = (M(R_X M)^{-1}\cdot, \cdot) = (MM^{-1}R_X^{-1}\cdot, \cdot) = (R_X^{-1}\cdot, \cdot)$$

となる. よって, $\mathcal{X}$ から構成したマハラノビス空間と同じ内積が得られる. $\square$

命題 6.1 の証明

まず, 平均射影フィルタについて証明する. $\mathcal{R}(U)$, $\mathcal{R}(V)$ が閉部分空間になっていれば, 明らかに平均射影フィルタが存在する. 従って, $\mathcal{R}(AR)$, $\mathcal{R}(U)$ が閉部分空間になっているとき, $\mathcal{R}(V)$ が閉部分空間になることを示せばよい. まず, $ARA^* \geq 0$ となるから, 式 (6.24) より,

$$\overline{\mathcal{R}(ARA^*) + \mathcal{R}(Q)} \subset \mathcal{R}(U)$$

となる. よって,

$$\mathcal{R}(ARA^*) \subset \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}((U^\dagger)^{1/2})$$

となる. よって, 補題 6.1, 6.2, 6.3 より,

$$\mathcal{R}(ARA^*U^\dagger ARA^*) = \mathcal{R}(ARA^*(U^\dagger)^{1/2}) = \mathcal{R}(AR)$$

となり, 補題 6.5 より, $\mathcal{R}(V)$ は閉部分空間となる.

射影フィルタ, 部分射影フィルタについては, 平均射影フィルタと同様に証明できる. その他のフィルタについては, 明かである. $\square$

系 5.2 の証明

$\mathcal{L}$ を任意の閉部分空間とし, $\mathcal{W}$ を $\mathcal{L}$ と素な任意の閉部分空間とする. 任意の半射影作用素 $P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}$ に対して, $P_{\mathcal{W}, \mathcal{L}} = I - P_{\mathcal{L}, \mathcal{W}}$ を満たす $P_{\mathcal{W}, \mathcal{L}}$ が存在する. よって, 定理 5.1 と系 5.1 より, 系 5.2 が成立する. $\square$

系 5.3 の証明

M を任意の正值同相作用素とする. $\mathcal{L}_{r(M)}$ が $\mathcal{X}_{(M)}$ において, $\mathcal{X}$ での定理 5.1 の $\mathcal{L}_r$ に相当する空間になるための必要十分条件は, $\mathcal{L}_{r(M)}$ が $\mathcal{L}$ と素で, $R_{X(M)}\mathcal{L}_{(M)}^\perp$ を含むことである. 式 (4.6), (4.8) より,

$$R_{X(M)}\mathcal{L}^{\perp(M)} = R_X M M^{-1} \mathcal{L}^\perp = R_X \mathcal{L}^\perp$$

となる. よって, 系 5.3 が成立する. $\square$

系 5.4 の証明

式 (5.12) が成立するための必要十分条件は,

$$(B_{PF} - A_n^{(1,2,4)})U_{PF} = 0$$

となる. よって, 定理 5.2 より系 5.4 が成立する. $\square$

系 5.5 の証明

P を $\mathcal{R}(R) + \mathcal{N}(A)$ への正射影作用素とする. $A' = AP$ とすれば, 定理 5.3 より, 系 5.4 と同様にして, 系 5.5 が成立することがわかる. $\square$