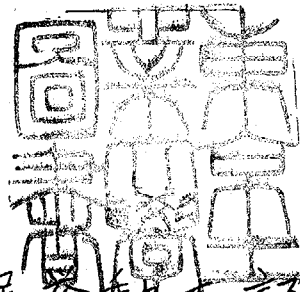


論文 / 著書情報
Article / Book Information

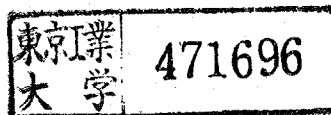
題目(和文)	き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータに関する研究
Title(English)	
著者(和文)	岸本喜久雄
Author(English)	KIKUO KISHIMOTO
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第1100号, 授与年月日:1982年1月31日, 学位の種別:論文博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: , Report number:乙第1100号, Conferred date:1982/1/31, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



き裂の進展挙動を記述するための

破壊力学パラメータに関する研究

岸本喜久雄



目次

第I章 序論	1
1.1. 緒言	1
1.2. 本論文の目的と構成	8
第II章 き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータ	11
2.1. 緒言	11
2.2. エネルギー解放率	11
2.2.1. 破壊進行領域の変形に伴うエネルギー解放率	11
2.2.2. エネルギー解放率の成分表示	15
2.3. $\oint, \oint, \text{および} \oint$ の積分経路に依存しない表示式	20
2.4. 破壊進行領域が小規模な場合	23
2.4.1. エネルギー解放率	23
2.4.2. $\oint$ 積分と他の破壊力学パラメータとの関係	25
2.4.3. $\oint$ 積分と特異応力場の強さとの関係	31
2.4.4. 破壊の条件式	34
2.5. 三次元問題への拡張	38
2.6. 結言	43
第III章 動的破壊問題への応用	45
3.1. 緒言	45
3.2. 衝撃荷重を受けるき裂の動的応力拡大係数	

およびエネルギー解放率	46
3.2.1. 弾性体および粘弾性体に対する基礎関係式	46
3.2.2. 特異要素を用いる有限要素法による	
動的応力拡大係数の解析	52
3.2.3. 積分を用いた動的応力拡大係数の	
有限要素解析	61
3.2.4. 三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の解析	71
3.3. 高速で進展するき裂の動的応力拡大係数	
およびエネルギー解放率	87
3.3.1. はじめに	87
3.3.2. 中央に集中荷重を受けて両側に進展するき裂	90
3.3.3. 動的応力拡大係数の有限要素解析	111
3.3.4. 高速き裂進展のシミュレーション	121
3.3.5. き裂の分岐に及ぼす負荷形式の影響について	126
3.4. 結言	138
第IV章 弾塑性破壊問題への応用	140
4.1. 緒言	140
4.2. 平面問題における積分	141
4.2.1. はじめに	141
4.2.2. 除荷過程を含む場合の積分	142
4.2.3. 温度場における積分	150

4.3. 三次元問題における有限要素法	164
4.3.1. はじめに	164
4.3.2. 有限要素法の三次元有限要素解析法	166
4.3.3. 有限要素法の三次元弾塑性解析(板厚効果について)	171
4.4. 結 言	181
第V章 結 論	183
参考文献	189
付 録	197

第I章 序 論

1.1. 緒 言

機械や構造物の設計においては、材料の降伏応力や引張り強さを適当な安全率で除した値である許容応力が強度の基準として用いられてきた。しかし、実際にはこのような強度基準以下で設計され十分安全と考えられていた機械や構造物にも破壊事故が発生している。これは、従来の設計法では部材中にあらかじめ存在していたか、稼働中に発生した欠陥やき裂の影響を考慮しなかったためである。破壊力学は、このような欠陥やき裂の成長現象を明らかにし、機械や構造物の安全な製作・使用条件を確立することを目的としており、最近の十数年間に急速に進歩してきた学問分野である。⁽¹⁻⁴⁾

材料の破壊は巨視的には、き裂の進展挙動として捉えるのが普通である。しかし、き裂の進展は、その先端近傍の破壊進行領域 (fracture process region または end region) と呼ばれる狭い領域において進行する微視き裂や空孔の発生・成長・合体の結果として引き起こされるので、単に弾性論や塑性論などの連続体の力学を適用するのでは問題を解決することは困難であり、き裂先端近傍の微視的な特性をなんらかの形で考慮した取扱いが必要である。

微視的な現象においても巨視的な現象においてもエネルギー保

存の法則は維持されなければならないので、き裂進展によって物体が解放するエネルギーとき裂面を形成するのに必要なエネルギーが等しいという巨視的關係が破壊の条件式として採用されている。この手法においては、き裂先端で生じる破壊の微視的な特性は破面形成に必要なエネルギーに置換されたことになる。このような取扱いは、Griffith⁽⁵⁾によって無限体中の一様引張りを受けるき裂について提唱され、Irwin⁽⁶⁾によって任意の寸法・形状のき裂の場合にまで拡張されたもので、破壊の条件式は

$$G = G_c \quad (I-1)$$

で表わされる。⁽⁷⁾ここで、左辺の G はエネルギー解放率と呼ばれ、き裂を含む物体を線形弾性体と考えると、き裂が単位長さ進展する際に物体が解放するエネルギーを弾性計算によって求めた値である。また、右辺の G_c は破壊靱性値と呼ばれ、破面形成の際に必要なエネルギーで、材料に固有の物性値と仮定される量である。

一方、線形弾性体中のき裂先端の応力場は、例えば、開口変位様式 (Mode I) の場合、応力拡大係数 K_I を用いて

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (I-2)$$

で表わされる。⁽⁷⁾ここで、 $f_{ij}(\theta)$ は応力 σ_{ij} の θ 方向分布を定める関数であり、材料、荷重、き裂の幾何学的形状などには依存しない。この式に見られるように、応力はき裂先端で $r^{1/2}$ の特

異性を持っており、応力拡大係数は特異性の強さを表わすパラメータとしての物理的な意味を有する。応力拡大係数は弾性体の幾何学的形状と負荷条件とによって定まる係数であり、応力拡大係数を与えればき裂先端の力場は一意的に決定されることになる。実際の材料では、き裂先端では高い応力となり塑性変形を生じる。しかし、塑性域の寸法がき裂や板厚などで表わされる試験片の代表寸法に比べて十分小さければ（小規模降伏状態ならば）塑性域近傍の弾性域では式（I-2）が成立している。したがって、き裂先端の塑性変形および塑性域内部の破壊進行領域内の破壊過程は応力拡大係数 K_I によって定められる特異応力場によって支配されていると考えることができる。このような特異応力場に基づく破壊条件式は

$$K_I = K_C \quad (\text{I-3})$$

で表現される。⁽⁷⁾ K_C は G_C と同様に破壊靱性値と呼ばれ、き裂先端の微視的な破壊機構によって定まる物性値と仮定される量である。弾性エネルギー解放率 G と応力拡大係数の間には次式のような一対一の関係が成立する。⁽⁷⁾

$$G = \frac{\kappa+1}{8\mu} K_I^2 \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{：平面ひずみ状態} \\ (3-\nu)/(1+\nu) & \text{：平面応力状態} \end{cases} \quad (\text{I-4})$$

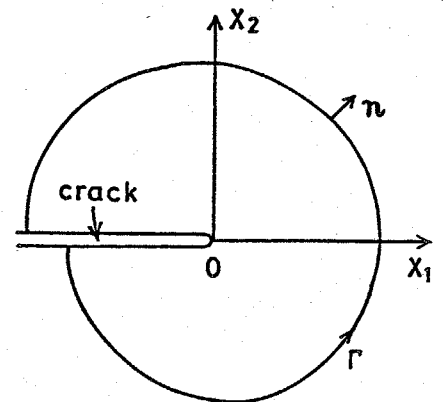
ただし、 μ は横弾性係数、 ν はポアソン比である。したがって、エネルギーの保存則の考えに基づく式（I-1）の破壊条件式と特異応力場の考えに基づく式（I-3）は等価な条件式であることが

わかる。GおよびKはいずれも弾性計算から求められるので、小規模降伏状態の場合に限って式(I-1)あるいは式(I-3)は破壊条件を表わし、GあるいはKは、き裂進展挙動を記述するための有効な破壊力学パラメータとしての意味を持つものと考えられる。線形破壊力学はこのような線形弾性体内のき裂モデルに基づいて破壊現象を取扱う分野であり、き裂の進展挙動を単一の力学パラメータで記述するという簡明さもあり、脆性破壊の問題をはじめとして、安定き裂の成長、疲労き裂の成長、環境破壊の問題等によく応用されている⁽⁷⁾。

実際の破壊では、塑性変形域はき裂先端近傍の微小領域に限定されず、き裂長さと比較して無視できない程度に広がっている場合も多い。このような場合には、式(I-1)あるいは式(I-3)を破壊の条件式と考えることは現実的でない。BegleyおよびLandes⁽⁸⁾は、き裂先端で大規模降伏を生じる場合の破壊にたいしては、J積分を用いて破壊の条件式を与えることを提案している。J積分はRiceによって平面問題として定式化され、図I-1に示すような経路Γに沿う線積分として

$$J = \int_{\Gamma} [W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma] \quad (I-5)$$

で定義されている⁽⁹⁾。ここで、Wはひずみエネルギー密度であり、応力σは



図I-1 J積分の積分経路

とひずみ ε_{ij} を用いて次式によって与えられる。

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (I-6)$$

また, u_i は変位であり, 表面力は

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (I-7)$$

で表わされる。ここで, n_j は曲線 Γ の外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の成分を表わす。J 積分は, 応力 σ_{ij} がひずみ ε_{ij} の一価関数として定義できる線形および非線形弾性体の場合には, エネルギー解放率という物理的な意味を持つ径路独立な線積分であり, 線形弾性体については, 弾性エネルギー解放率 G に一致する。したがって, J 積分を用いた破壊の条件式は, 弾性エネルギー解放率 G を用いた式 (I-1) の条件式 of 非線形弾性問題への拡張とみなすことができる。

また, 塑性変形に対する構成方程式が

$$\sigma / \sigma_Y = (E \varepsilon / \sigma_Y)^N \quad \sigma \geq \sigma_Y \quad (I-8)$$

で与えられる全ひずみ理論に従う弾塑性体が単調増加荷重を受ける場合 (非線形弾性体の問題と等価となる) のき裂先端近傍の応力・ひずみ場は J 積分を用いて

$$\sigma_{ij} = \sigma_Y \left[\frac{E J}{\sigma_Y^2 r} \right]^{N/(1+N)} \tilde{f}_{ij}(\theta; N) \quad (I-9a)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_Y}{E} \left[\frac{E J}{\sigma_Y^2 r} \right]^{1/(1+N)} \tilde{g}_{ij}(\theta; N) \quad (I-9b)$$

によって表わされる⁽¹⁰⁻¹²⁾。ただし, σ_Y は降伏応力, E は縦弾性係数である。したがって, 破壊進行領域の大きさは試験片の代

表寸法(き裂長さや板厚など)に比べて十分小さい場合には、式(I-9)で表わされる特異応力・ひずみ場(HRRの特異場)が破壊過程を支配すると考えれば、J積分による破壊条件式は特異場に基づく破壊条件式とみなすこととできる。さらに、き裂先端の開口変位 ϕ とJ積分の間には

$$\phi = m \sigma_Y J \quad (\text{I-10})$$

のような関係式が成立するので、J積分を用いた破壊条件式と開口変位 ϕ を用いた破壊条件式は等価であると考えられる。ただし、 m は定数であり材料やき裂モデルによって異なるが、おおよそ1~2の値をとる。⁽¹³⁾

なお、小規模降伏状態の場合には、HRRの特異場の周囲に式(I-2)で表わされる弾性応力特異場が存在するので、J積分の経路独立性と式(I-4)を組み合わせると

$$J = G = \frac{K+1}{8\mu} K_I^2 \quad (\text{I-11})$$

の関係式が成立する。⁽⁹⁾したがって、J積分を用いた破壊条件式は小規模降伏状態における G や K_I による条件式を特別な場合として含んでいる。

以上の観点から、J積分は小規模降伏状態から大規模降伏状態に至るまでのき裂の進展挙動を記述することのできる単一の破壊力学パラメータとして有望視され、小型試験片を用いた靱性評価^(8,14)をはじめとして、疲労き裂進展⁽¹⁵⁾、安定き裂の成長⁽¹⁶⁾

などのようなき裂進展挙動の予測にJ積分を応用することが試みられている。しかしながら、J積分は種々の仮定の下に定義されているので、以下に記すような適用上の制約がある。

(i) J積分は線形および非線形弾性体（除荷過程が存在しない場合には全ひずみ理論に従う弾塑性体と等価）に対して定義されているので、それ以外の構成関係に従う材料（例えば、ひずみ増分理論に従う弾塑性体、ひずみ速度に依存する材料、材料定数が温度に依存する材料、不均質体など）に対しては適用できない。

(ii) き裂進展には必ず除荷を伴うので、J積分は弾塑性体のエネルギー解放率と見なすことはできず、熱力学の法則に基づいた議論（例えば、き裂進展現象は非可逆過程であるといったような議論⁽¹⁷⁾）には適用できない。

(iii) 残留ひずみの存在する問題に適用できない。

(iv) 小規模破壊進行領域が仮定されているので、破壊進行領域の大きさが無視できないような延性破壊の問題には適用できない。

(v) 微小ひずみが仮定されているので大変形問題に適用できない。

上記の(i)~(v)は大規模降伏状態の場合にJ積分を適用する際の制約であるが、小規模降伏状態において弾性き裂モデルを取

扱う場合には以下のような制約がある。

(vi) 慣性力，物体力が存在する場合に適用できない。

(vii) 熱ひずみが存在する場合に適用できない。

(viii) き裂面に外力が作用する問題に適用できない。

(ix) J 積分は二次元問題に対して定義されているので，三次元問題の場合に適用できない。

したがって，破壊力学を単に材料の靱性評価の手段に留めず，複雑な負荷を受ける機械や構造物の安全性評価の手段として用いるためには，上述のような制約条件を取り除き，破壊力学の適用範囲を広げることが必要と思われる。

1. 2. 本論文の目的と構成

J 積分は小規模降伏状態から大規模降伏状態に至るまでのき裂の進展挙動を記述するための単一の破壊力学パラメータとして有望視されているが，前節で述べたように J 積分の適用が困難となる場合は少なくない。したがって，このような場合には適用できる破壊力学パラメータを求めることが必要である。本論文は以上の観点から，物体力，慣性力，固有ひずみ（熱ひずみや塑性ひずみなど）や破壊進行領域の大きさなどが無視できない場合の破壊力学パラメータをエネルギーの保存則に基づいて

導出し、その特徴についで検討することを目的とする。

第II章「き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータ」では、任意の構成関係式に従う物体中をき裂が進展する場合のエネルギーの平衡条件について考察し、破壊進行領域の変形に伴うエネルギー解放率の積分経路(領域)に独立な表示式を導出する。破壊進行領域が小規模な場合には、エネルギー解放率の定常成分(破壊進行領域の平行移動に伴うエネルギー解放率の成分)である J 積分は、特異応力・ひずみ場の強さの指標を与えると同時に、特別な場合として J 積分を含むので、き裂の進展挙動を記述するための単一の破壊力学パラメータとして J 積分を提案する。また、三次元き裂を有する物体の破壊問題にも J 積分が適用可能であることを示す。

第III章「動的破壊問題への応用」では、衝撃荷重による破壊や高速き裂のように慣性力の影響が無視できない場合の取扱いに関して、主に小規模降伏状態を仮定し弾性き裂モデルに基づいて検討する。弾性き裂モデルにおいては、 J 積分は動的弾性エネルギー解放率 G および動的応力拡大係数 K と一対一に対応するので、動的き裂問題の解析が動的応力拡大係数の解析に帰着されることを示し、動的応力拡大係数の有限要素解析法および三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の簡便評価法を提案し、具体的な問題について破壊力学パラメータが実際に決定できる

ことを例示する。さらに、高速き裂問題の理論解析結果および高速進展き裂のシミュレーションについて述べ、破壊力学パラメータを用いた分岐条件式を用いて高速き裂の枝分れ現象に関する実験結果が説明できることを示す。また、塑性変形の影響については Dugdale の仮定⁽¹⁸⁾ に基づいたき裂モデルにより若干の検討を行う。

第IV章「弾塑性破壊問題への応用」では、塑性変形の影響が無視できない大規模降伏状態における破壊問題に関して破壊力学パラメータとしての J 積分の有用性について検討する。まず、弾塑性有限要素解析により、単調増加荷重下では J 積分と $\int$ 積分はほぼ一致することを示し、 J 積分が適用困難となる除荷過程を含む場合および熱ひずみが存在する場合に対しても $\int$ 積分が破壊力学パラメータとしての意味を失わないことを具体的に示す。また、温度場における弾塑性体のき裂先端近傍の応力・ひずみ場の特異性と $\int$ 積分の関係を明確にする。つぎに、三次元の $\int$ 積分によって破壊靱性値に与える板厚の影響を検討し、実際の構造物の健全性評価に $\int$ 積分が利用できることを示す。

第V章「結論」では、本研究で得られた結果を総括する。

第II章 き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータ

2.1. 緒言

材料の破壊は一般に、き裂先端近傍の破壊進行領域と呼ばれる狭い領域において進行する微視き裂や空孔の発生・成長・合体などのような微視的挙動の結果として引き起こされる⁽¹⁾。破壊進行領域内では、破壊の微視的機構の複雑さのために、通常の連続体力学の適用が困難である。しかし、破壊問題を取扱うためには何らかの形でこの領域内の特性を表現する必要がある。

破壊の微視的機構がいかに複雑であっても破壊の進行過程において破壊進行領域を含む物体全体のエネルギーの平衡は常に成立していなければならないので、このことに着目して、エネルギーの平衡条件を基にして破壊力学パラメータを求めることが考えられる。本章では、物体中をき裂がわん曲しながら進展するような一般的な場合を考え、このときの破壊進行領域の変形に伴うエネルギー解放率を求め、このような場合におけるき裂進展挙動を記述するための破壊力学パラメータを求めることを目的としている。

2.2. エネルギー解放率

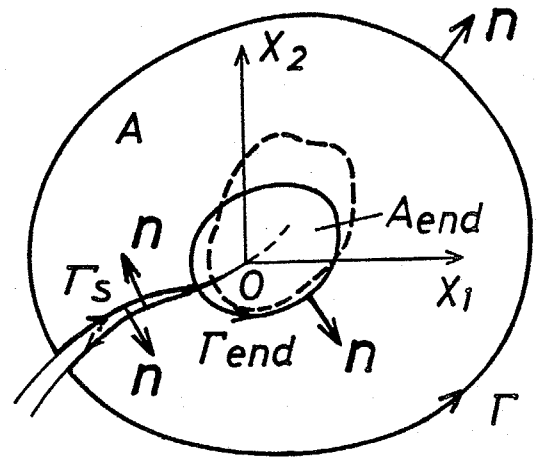
2.2.1. 破壊進行領域の変形に伴うエネルギー解放率

本節では、二次元き裂問題について考える。図II-1に示すように、き裂先端に原点を持つ固定直角座標系を $O-X_1, X_2$ とし、微小変形理論を適用する。き裂先端近傍の破壊進行領域を A_{end} とし、 A_{end} の境界を Γ_{end} とする。^(脚注) き裂の下面から出発し、曲線 Γ_{end} を囲みき裂の上面で終る任意の曲線を Γ ，き裂面に沿う曲線を Γ_s とし、曲線 Γ ， Γ_s および Γ_{end} で囲まれる領域を A とする。

図II-1の破線のように、仮想的にき裂がわん曲しながら微小進展しこれに伴って Γ_{end} が変形するとき、領域 $A+A_{end}$ 内の物質のエネルギーの平衡条件は次式のように表わされる。

$$P + Q = \frac{d}{dt}(K+U) + \text{重} \quad (\text{II-1})$$

ここで、 P は外力の仕事率であり、 Q は単位時間当りの熱量である。 $d(K+U)/dt$ は領域 A に



図II-1 き裂と破壊進行領域

(脚注) 径路 Γ_{end} 上で連続体の力学が適用できる必要があるので、 Γ_{end} から少し離れた内側で空孔の成長や微視き裂の発生が生じるように A_{end} を定める必要がある。したがって、厳密には、領域 A_{end} は、実際に破壊が進行する部分を包含するき裂先端近傍の領域である。

における運動エネルギー K と内部エネルギー U の和の時間的变化であり、 $\dot{E}$ は領域 A_{end} におけるエネルギーの変化率、すなわちエネルギーの解放率である。通常の連続体力学で用いられる物理量によって $\dot{E}$ を直接表わすことはできないが、系全体($A + A_{end}$)のエネルギーの平衡条件式(II-1)によって $\dot{E}$ を領域 A における応力 σ_{ij} や変位 u_i などの物理量と関連させることができる。

式(II-1)の左辺は次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} P + Q &= \left\{ \int_{\Gamma + \Gamma_S} T_{ij} \dot{u}_i d\Gamma + \iint_A F_i \dot{u}_i dA \right\} + \left\{ \int_{\Gamma + \Gamma_S} (-g_i n_i) d\Gamma + \iint_A \rho \dot{\theta} dA \right\} \\ &= \int_{\Gamma + \Gamma_S} (T_{ij} \dot{u}_i - g_i n_i) d\Gamma + \iint_A (F_i \dot{u}_i + \rho \dot{\theta}) dA \quad (\text{II-2}) \end{aligned}$$

ここで、 T_{ij} は表面力、 F_i は物体力、 g_i は熱流束、 θ は熱めき出し、 ρ は密度である。 n_i は単位法線であり、その方向は図II-1に示すとおりである。ドット($\cdot$)は物質時間導関数を表わす。領域 $A + A_{end}$ は曲線 $\Gamma + \Gamma_S$ で完全に囲まれているので、式(II-2)の線積分は $\Gamma + \Gamma_S$ の上で行なわれている(Γ_{end} は含まれていない)。また、領域 A_{end} 内のエネルギー変化は $\dot{E}$ の中に含まれるので、式(II-2)の面積積分は A の上で行なわれている(A_{end} は含まれていない)。

つぎに、式(II-1)の右辺第1項について考える。き裂の進展に伴って破壊進行領域 A_{end} が変形するので、 Γ_{end} および A は時間に依存する。したがって、領域 A における運動エネルギーの変化は、 A 内の運動エネルギー密度の変化と A 内に流入する運動エ

エネルギーの和に等しい⁽²⁾。すなわち、

$$\frac{d}{dt} K = \iint_A \rho \dot{k} dA + \int_{\Gamma_{\text{end}}} \rho k V_i (-n_i) d\Gamma \quad (\text{II-3})$$

ここで、 k は単位質量当りの運動エネルギーである。 n_i は Γ_{end} に対する単位法線であり、領域 A の内側を向いている。 V_i は Γ_{end} の速度であり、次節で詳しく説明する。内部エネルギーについても同様にして、次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} U = \iint_A \rho \dot{e} dA + \int_{\Gamma_{\text{end}}} \rho e V_i (-n_i) d\Gamma \quad (\text{II-4})$$

ここで、 e は単位質量当りの内部エネルギーである。

式(II-2) ~ (II-4) を式(II-1)に代入し、Gauss の発散定理を適用すると、次式が得られる。

$$\Phi = \int_{\Gamma_{\text{end}}} \{ \rho(k+e) V_i n_i + T_{ij} \dot{u}_i - \delta_{ij} n_j \} d\Gamma \quad (\text{II-5})$$

式(II-5)の誘導の際、運動方程式、変位とひずみ ε_{ij} の関係式、局所形で表わした熱力学の第1法則、 k の定義式、および応力と表面力の関係式を用いた。すなわち、

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad : A \text{ 内} \quad (\text{II-6a})$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2 \quad : A \text{ 内} \quad (\text{II-6b})$$

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \delta_{ij} \dot{u}_i + \rho \sigma \quad : A \text{ 内} \quad (\text{II-6c})$$

$$\rho \dot{k} = \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i \quad : A \text{ 内} \quad (\text{II-6d})$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad : \Gamma, \Gamma_{\text{end}} \text{ および } \Gamma_{\text{end}} \text{ 上} \quad (\text{II-6e})$$

ここで、コンマ j ($,j$) は $\partial/\partial x_j$ を表わす。

式(II-5)は領域 $A + A_{\text{end}}$ 内のエネルギーの平衡条件式(II-1)

から導びかれたものであるが、 A_{end} 内の局所的なエネルギーの平衡を表わしていると解釈することもできる。すなわち、時間に依存する領域 A_{end} 内のエネルギーの変化率すなわちエネルギー解放率 Φ は、 A_{end} の境界 Γ_{end} が変形することによって新たに A_{end} 内に流入する運動エネルギーと内部エネルギー、境界 Γ_{end} を通して A_{end} に流れ込む熱量の和に等しくなっている。

なお、式(II-1)、および式(II-6C)の式を用いれば次式のように変形できる。

$$P = \iint_A (\rho \dot{e} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) dA + \Phi \quad (\text{II-7})$$

ここで、

$$\Phi = \Phi - \int_{\Gamma_{end}} \{ \rho (\dot{e} + e) V_i - g_i \} n_i d\Gamma \quad (\text{II-8})$$

Φ のかわりに上式の Φ をエネルギー解放率と定義することもできる。^(脚注)本章では、 Φ について議論を進めるが、形式的に $\dot{e} = e = g_i = 0$ と置けば Φ に関する公式が得られる。

2.2.2. エネルギー解放率の成分表示

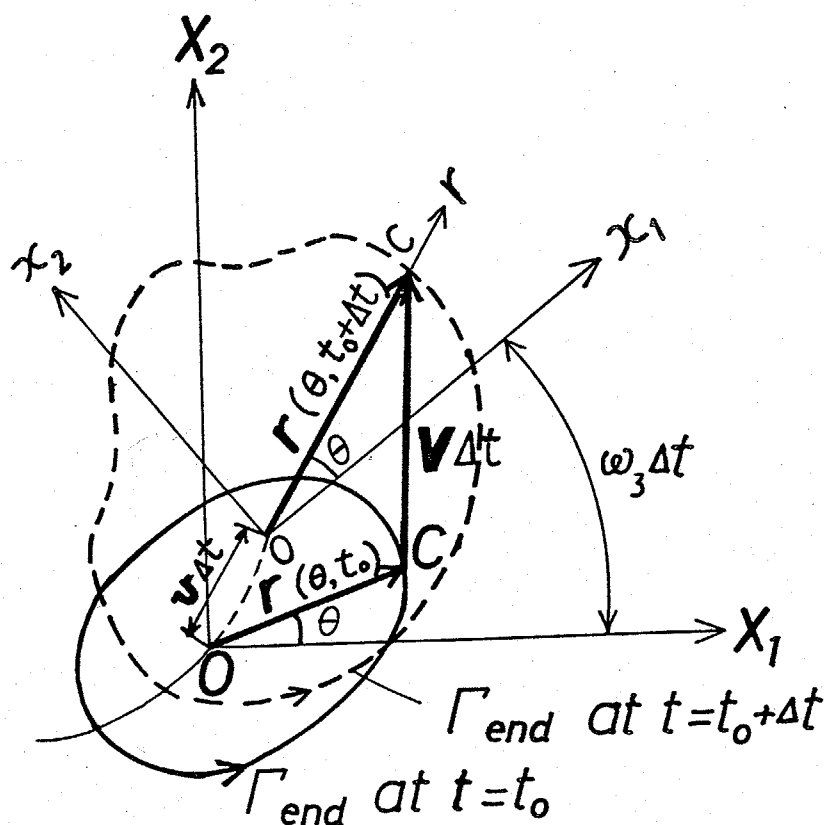
式(II-5)で与えられるエネルギー解放率を種々の成分に分解することを考える。まず、破壊進行領域 A_{end} の境界 Γ_{end} の速度 V_i

(脚注) 移動する領域 A_{end} 内のエネルギー変化に注目した場合のエネルギー解放率が Φ であるのに対し、 Φ は A_{end} を占める物質のエネルギー変化に注目した場合のエネルギー解放率である。

について考える。図II-2 に示すように、わん曲しながら進展しているき裂の先端に付着させた移動直角座標系 $O-x_1, x_2$ および移動極座標系 $O-r, \theta$ を導入する。これらの移動座標系はき裂先端と同じ速度 v_c および ω_3 を持っており、 $\theta=0$ の直線は x_1 軸と一致するものとする。また、時刻 $t=t_0$ において移動直角座標系 $O-x_1, x_2$ は固定直角座標系 $O-X_1, X_2$ と一致するものとする。

時刻 $t=t_0$ における Γ_{end} 上の任意の点を C とし、き裂先端 O と点 C を結ぶベクトルを $\mathbf{r}(\theta, t_0)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) で表わす。時間が微小時間 Δt だけ経過すると、き裂は $v_c \Delta t$ だけ進展し、 Γ_{end}

図II-2の破線のように変形するものとする。移動極座標の角度成分 θ が点 C の値と等しくなるように、変形後の Γ_{end} (破線) 上に点 C を選ぶ。点 C は図II-2に示すように、ベクトル $\mathbf{r}(\theta, t_0 + \Delta t)$ で表わされる。



図II-2 破壊進行領域の変形

Γ_{end} の速度 $\mathbf{V}(\theta, t_0)$ を次式のように定義する。

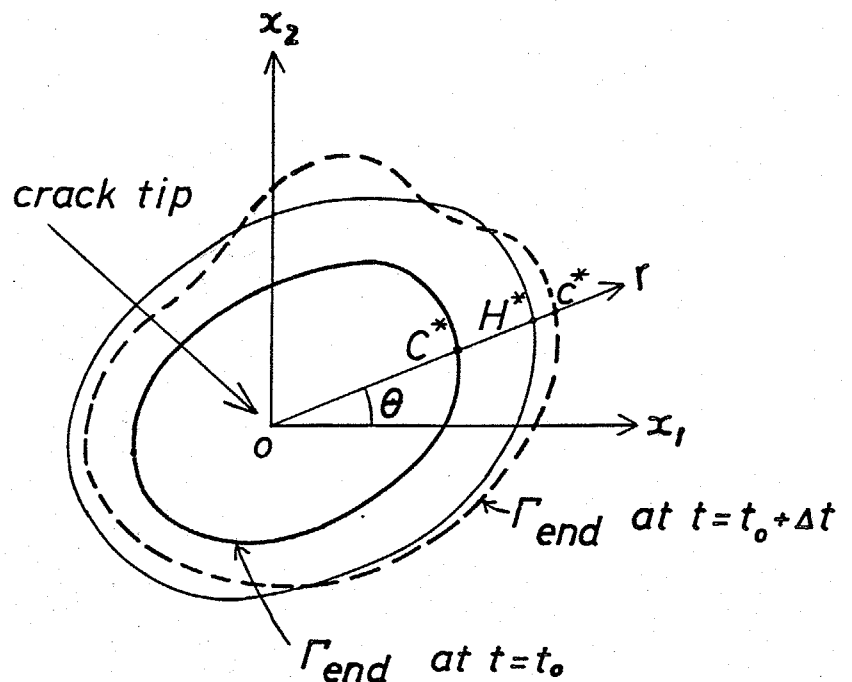
$$\mathbf{V}(\theta, t_0)\Delta t = \mathbf{v}\Delta t + \mathbf{r}(\theta, t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(\theta, t_0) \quad (\text{II-9})$$

すなわち, $\mathbf{V}\Delta t$ を点 C と点 C を結ぶベクトルと定義する。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では上式より

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \\ &= \mathbf{v} + \frac{\partial (r \mathbf{e}_r)}{\partial t} \\ &= \mathbf{v} + \frac{\partial r}{\partial t} \mathbf{e}_r + r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

となる。ここで, r はベクトル $\mathbf{r}$ の長さであり, $\mathbf{e}_r$ は $\mathbf{r}$ と同じ方向を持つ単位ベクトルである。

式(II-10)の $\partial r / \partial t$ について考えるために図II-3に移動座標系 $O-x_1, x_2$ から見た $t=t_0$ および $t=t_0+\Delta t$ における Γ_{end} の形状を示す。点 C と点 C の θ 座標は等しいので, 移動座標系から見れば, 点 O, C および C は一直線上にあるように見える。図II-3の点 C^* および C^* は図II-2の点 C および C に対応している。図II-3の中の細線は $t=t_0$ における Γ_{end} (実線) と相似



図II-3 移動座標系から見た破壊進行領域

形をしており、しかもその内側の面積が $t = t_0 + \Delta t$ における Γ_{end} (破線) 内の面積と等しいように描かれたものである。点 H^* はこの破線と直線 $\overline{OC^*}$ の交点である。

図 II-3 より、次式が成り立つ。

$$\overline{OC^*} - \overline{OC^*} = \overline{C^*H^*} + \overline{H^*C^*} \quad (\text{II-11})$$

直線 $\overline{OC^*}$ および $\overline{OC^*}$ はそれぞれ $r(\theta, t_0 + \Delta t)$ および $r(\theta, t_0)$ に等しいので、式 (II-11) は

$$r(\theta, t_0 + \Delta t) - r(\theta, t_0) = ar(\theta, t_0)\Delta t + h(\theta, t_0)\Delta t \quad (\text{II-12})$$

と書くことができる。ここで、 $ar(\theta, t_0)\Delta t$ は $\overline{C^*H^*}$ の長さである。定数 a は細線と破線の内側の面積が等しいことから次式により決定される。

$$\int_0^{2\pi} r^2(\theta, t_0 + \Delta t) d\theta = (1 + a\Delta t)^2 \int_0^{2\pi} r^2(\theta, t_0) d\theta \quad (\text{II-13})$$

式 (II-12) の $h(\theta, t_0)\Delta t$ は $\overline{H^*C^*}$ の長さである。 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、式 (II-12) および式 (II-13) より

$$\frac{\partial r}{\partial t} = ar + h \quad (\text{II-14})$$

$$a = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{\partial r^2}{\partial t} d\theta}{2 \int_0^{2\pi} r^2 d\theta} \quad (\text{II-15})$$

が得られる。

移動座標系は角速度 $\omega = (0, 0, \omega_3)$ で回転していることに注意すると、

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \omega \times \mathbf{e}_r \quad (\text{II-16})$$

が得られる。式(II-14) および (II-16) を式(II-10)に代入すると、

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + a\mathbf{r} + \mathbf{h} \quad (\text{II-17})$$

すなわち、

$$V_i = v_i + \epsilon_{i3l} \omega_3 x_l + a x_i + h_i \quad (\text{II-18})$$

となる。ここで、 $\mathbf{h} = h \mathbf{e}_r = (h_1, h_2, 0)$ であり、 ϵ_{i3l} は交代記号を表わす。式(II-18)より、 Γ_{end} の速度 V_i はき裂進展速度 v_i と同じ速度で平行移動する成分、角速度 ω_3 で回転する成分、自己相似的に膨張する成分および形状のゆがみによる成分に分解できることがわかる。

つぎに、速度 V_i で動いている曲線 Γ_{end} 上の変位の変化率 $\frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{\Gamma_{\text{end}}}$ とある瞬間 $t = t_0$ に Γ_{end} 上にあった物質点の変位速度すなわち粒子速度 $\dot{u}_i$ の関係について考える。 $\frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{\Gamma_{\text{end}}}$ は次式で表わされる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{\Gamma_{\text{end}}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_i(X_1 + V_1 \Delta t, X_2 + V_2 \Delta t, t_0 + \Delta t) - u_i(X_1, X_2, t_0)}{\Delta t} \quad (\text{II-19})$$

式(II-19)をTaylor展開することにより

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{\Gamma_{\text{end}}} = \frac{\partial u_i(X_1, X_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial u_i(X_1, X_2, t)}{\partial X_j} V_j \quad (\text{II-20})$$

が得られる。上式の右辺第1項目は $\dot{u}_i$ にほかならないので、

$$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{\Gamma_{\text{end}}} - \frac{\partial u_i}{\partial X_j} V_j \quad (\text{II-21})$$

となる。

式(II-5)に式(II-18)および(II-21)を代入し、考えている

瞬間 $t = t_0$ では $x_i = X_i$ であることを考慮すると、次式が得られる。

$$\Phi = v_\alpha \hat{J}_\alpha + \omega_3 \hat{L}_3 + a \hat{M} + \hat{I} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (\text{II-22})$$

ここで、

$$\hat{J}_\alpha = \int_{\Gamma_{\text{end}}} \left\{ \rho(k+e) n_\alpha - T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right\} d\Gamma \quad (\text{II-23})$$

$$\hat{L}_3 = \int_{\Gamma_{\text{end}}} e_{i3e} X_e \left\{ \rho(k+e) n_i - T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\} d\Gamma \quad (\text{II-24})$$

$$\hat{M} = \int_{\Gamma_{\text{end}}} X_i \left\{ \rho(k+e) n_i - T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\} d\Gamma \quad (\text{II-25})$$

$$\hat{I} = \int_{\Gamma_{\text{end}}} \left\{ \rho(k+e) h_i n_i + T_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{\Gamma_{\text{end}}} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} h_j \right) - f_i n_i \right\} d\Gamma \quad (\text{II-26})$$

式 (II-22) により、エネルギー解放率 Φ は、破壊進行領域の平行移動に関する成分 $\hat{J}_\alpha$ 、回転に関する成分 $\hat{L}_3$ 、自己相似的な膨張に関する成分 $\hat{M}$ 、および破壊進行領域の形状のゆがみ等に関する成分 $\hat{I}$ に分解できることがわかる。

2.3. $\hat{J}$, $\hat{L}$, および $\hat{M}$ の積分経路に依存しない表示式

本節では、 $\hat{J}_\alpha$, $\hat{L}_3$ および $\hat{M}$ の積分経路に依存しない表示式を導く。Gauss の発散定理により、次式が成り立つ。

$$\int_{\Gamma+\Gamma_S-\Gamma_{\text{end}}} T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} d\Gamma = \iint_A \left\{ (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_\alpha} \right\} dA \quad (\text{II-27})$$

$$\int_{\Gamma+\Gamma_S-\Gamma_{\text{end}}} e_{i3e} X_e T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\Gamma = \iint_A e_{i3e} \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + X_e (\rho \ddot{u}_j - F_j) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + X_e \sigma_{ijk} \frac{\partial \varepsilon_{ijk}}{\partial x_i} \right\} dA \quad (\text{II-28})$$

$$\int_{\Gamma+\Gamma_S-\Gamma_{\text{end}}} X_i T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\Gamma = \iint_A \left\{ X_j (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + X_e \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_e} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right\} dA \quad (\text{II-29})$$

ここで、 Γ_{end} の前の負号は Γ_{end} 上の積分を時計まわりに行なう

ことを意味している。

式(II-27)~(II-29)を式(II-23)~(II-25)に代入すると、次式が得られる。

$$\hat{J}_\alpha = - \int_{\Gamma \cup \Gamma_s} T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{end}}} p(k+e) n_\alpha d\Gamma + \iint_A \{ (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_\alpha} \} dA \quad (\text{II-30})$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_3 = & - \int_{\Gamma \cup \Gamma_s} e_{i3l} x_l T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{end}}} e_{i3l} x_l p(k+e) n_i d\Gamma \\ & + \iint_A e_{i3l} \{ \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + x_l (\rho \ddot{u}_j - F_j) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + x_l \sigma_{ijk} \frac{\partial \varepsilon_{ijk}}{\partial x_i} \} dA \quad (\text{II-31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{M} = & - \int_{\Gamma \cup \Gamma_s} x_i T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{end}}} x_i p(k+e) n_i d\Gamma \\ & + \iint_A \{ x_j (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + x_l \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_l} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \} dA \quad (\text{II-32}) \end{aligned}$$

式(II-30)~(II-32)は、任意の構成式をもつ材料(弾性体, 非弾性体, 均質体, 不均質体, 等方性体, 異方性体)に対して成立する。また, 式(II-30)~(II-32)の値は Γ_{end} に依存するか, Γ_{end} が指定されれば曲線 $\Gamma + \Gamma_s$ の選び方には依存しない(本論文ではこの意味で経路独立という言葉を用いることとする)。これらのことは, 式(II-27)~(II-29)が Γ_{end} を囲む任意の経路 $\Gamma + \Gamma_s$ に対して, また任意の構成式を持つ材料に対して成立することから証明できる。ただし, 曲線 $\Gamma + \Gamma_s$ と Γ_{end} が囲む領域内には式(II-27)~(II-29)の左辺の被積分関数は特異点を持たないとする。

つぎに, ひずみ ε_{ij} が次式のように弾性ひずみ ε_{ij}^e と固有ひずみ(eigen strain) ε_{ij}^* (次頁脚注参照) の和として表わされる場合について考える。

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^* \quad (\text{II-33})$$

ここで、弾性ひずみ成分 ε_{ij}^e に対しては

$$\partial W^e(\varepsilon_{ij}^e) / \partial \varepsilon_{ij}^e = \sigma_{ij} \quad (\text{II-34})$$

を満足する履歴によらない弾性ひずみエネルギー密度 W^e を定義することからできる。式(II-33)および(II-34)を式(II-30)に代入すると

$$\begin{aligned} \hat{J}_\alpha = & \int_{\Gamma \cap B_3} (W e n_\alpha - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{end}}} \{p(k+e) - W^e\} n_\alpha d\Gamma \\ & + \iint_A \{(\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial x_\alpha}\} dA \end{aligned} \quad (\text{II-35})$$

が得られる。材料が均質・等方ならば、 $e_{i3e} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e = 0$ となるので、式(II-33)、(II-34)および(II-31)より $\hat{L}_3$ は

$$\begin{aligned} \hat{L}_3 = & \int_{\Gamma \cap B_3} e_{i3e} \{X_e (W e n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + T_i u_e\} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{end}}} e_{i3e} \{p(k+e) - W^e\} X_e n_i - T_i u_e d\Gamma \\ & + \iint_A e_{i3e} \{2\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + u_e (\rho \ddot{u}_i - F_i) + X_e (\rho \ddot{u}_j - F_j) u_{j3} + X_e \sigma_{mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}^*}{\partial x_i}\} dA \end{aligned} \quad (\text{II-36})$$

となる。材料が均質でしかと応力-弾性ひずみ関係が線形ならば、式(II-33)、(II-34)および(II-32)より $\hat{M}$ は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \hat{M} = & \int_{\Gamma \cap B_3} (W e n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) X_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{end}}} \{p(k+e) - W^e\} X_i n_i d\Gamma \\ & + \iint_A \{(\rho \ddot{u}_i - F_i) u_{ij} X_j + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* X_e + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^*\} dA \end{aligned} \quad (\text{II-37})$$

なお、式(II-35)~(II-37)を導くときに課した均質・等方などの条件は若干緩めることが可能である。(4)

(脚注) 固有ひずみは、周囲の拘束がないときに均一に変形して応力が生じないような変形を記述するひずみである。熱膨張ひずみや塑性ひずみが固有ひずみの例である。(3)

式(II-35)~(II-37)において, A 内の ρu_i , F_i , ε_{ij}^* , および Γ_{end} 上の δ_{ij} , T_{ij} が無視できれば, 第1項のみが残り, $\hat{J}_\alpha$, $\hat{L}_3$ および $\hat{M}$ は, それぞれ J_α , L_3 および M 積分と一致する。 J_α , L_3 および M 積分は Knowles と Sternberg⁽⁵⁾ によって見いだされ, Budiansky と Rice⁽⁶⁾ によって弾性体中の空孔やき裂の平衡移動, 回転および自己相似的な膨張によるエネルギー解放率と関連づけられている。

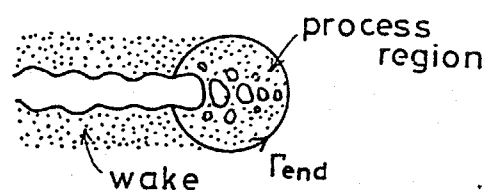
2.4. 破壊進行領域が小規模な場合

2.4.1. エネルギー解放率

破壊進行領域を考慮に入れたエネルギー解放率の一般的な表現が式(II-22)~(II-26)の形で得られたが, これを実際問題に適用するためには, さらに Γ_{end} 上における応力などの物理量を定めなければならない。そのためには, 実験結果の詳細な検討に基づいた適当な仮定, あるいは破壊進行領域内における破壊荷動のモデル化が必要と考えられる。破壊進行領域内のモデル化については様々な試みが発表されているが,⁽⁷⁻¹⁰⁾ 実際の破壊問題に適用できるようにするためには, さらに多くの研究が必要となるように思われる。

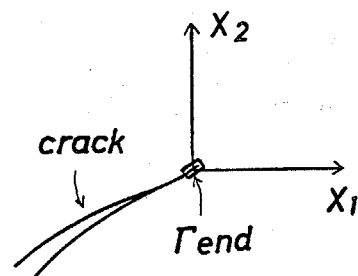
き裂が成長するに伴って空孔や微視き裂が発生した領域は図

II-4 のように破壊進行領域の跡 (wake) として表面層を形成する
と考えられる。破壊は、き裂先端
近傍の領域内で進行するので、こ



図II-4 破壊進行領域の跡

のような表面層のエネルギー変化は小さく
、き裂進展に伴うエネルギー収支を考える
場合には、その影響を無視してと十分良
い近似になっているものと思われる⁽¹⁾
たから、 Γ_{end} として、wake の部分まで
必ずしも含めた領域を考える必要はなく



図II-5 小規模破壊
進行領域

、微小き裂進展の際に空孔の成長や微視き裂の発生する領域を
含む図II-4のような領域を採りこむことができると考えられる。
さらに、破壊進行領域が小さい場合には、その大きさを無視し
て図II-5に示すような無限小厚さの凝集力領域 (cohesive
zone)⁽²⁾ としてモデル化できる。したがって、破壊進行領域が
小さい場合には、線形破壊力学における小規模降伏の取扱いと
同様に、いわば小規模破壊進行領域的な取扱いが可能となる。
すなわち、破壊進行領域の大きさを無視して物体全体を連続体
と仮定して応力、変位およびエネルギー解放率などを解析し、こ
れらの力学量が破壊進行領域内の挙動を支配すると考えるので
ある。以下では、この考え方に従って、物体全体を連続体と考

えることにする。

この場合には、径路 Γ_{end} 上では、 $X_i \equiv 0$ であるから、式 (II-23) ~ (II-25) からわかるように $\hat{u}_\alpha \gg \hat{L}_3, \hat{M}$ となる。したがって、エネルギー解放率は

$$\Phi \simeq v_\alpha \hat{u}_\alpha + \hat{L} \quad (\alpha=1, 2) \quad (\text{II-38})$$

で与えられる。図 II-5 に示されている径路 Γ_{end} 上では $v_\alpha n_\alpha = 0$ となるので、式 (II-30) または式 (II-35) において Γ_{end} 上の積分が省略できるので、 $\hat{u}_\alpha$ は次式のように表わされる。

$$\hat{u}_\alpha = -\int_{\Gamma_3} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha} d\Gamma + \iint_A \{ (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha} + \rho \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial X_\alpha} \} dA \quad (\text{II-39})$$

または、

$$\hat{u}_\alpha = \int_{\Gamma_3} (w e n_\alpha - T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha}) d\Gamma + \iint_A \{ (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha} + \rho \frac{\partial \varepsilon_i^*}{\partial X_\alpha} \} dA \quad (\text{II-40})$$

上式からわかるように $\hat{u}$ 積分は、考えている時点の応力とひずみなどの力学量から計算することができる。これに対して、 $\hat{L}$ 積分は一般にき裂を進めた後に式 (II-26) から求められる量なので計算が比較的面倒である。

2.4.2. $\hat{u}$ 積分と他の破壊力学パラメータとの関係

本節では、 $\hat{u}$ 積分と他の破壊力学パラメータとの関係について検討する。 X_1 軸を考えている瞬間のき裂進展方向に等しくなるように座標系を選べば、き裂進展速度は v_1 成分のみとなるので $\hat{u}_2$ としては $\hat{u}_1$ のみを考えれば十分である。以下では、

このような座標系を用いた場合の $\mathcal{J}$ を単に $\mathcal{J}$ と表記する。

(1) $\mathcal{J}$ 積分との関係

まず, $\mathcal{J}$ 積分と $\mathcal{J}$ 積分の関係について検討する。 $\mathcal{J}$ 積分は物体の全領域を連続体とするき裂モデルに対して定義された破壊力学パラメータであると考えることが出来る。

Rice の $\mathcal{J}$ 積分

Rice の $\mathcal{J}$ 積分は次式で定義されている。⁽¹³⁾

$$\mathcal{J} = \int_{\Gamma} [W n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_i}] d\Gamma \quad (\text{II-41})$$

ただし,

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (\text{II-42})$$

である。慣性力, 物体力, き裂面の表面力および固有ひずみが存在しない場合には, $\mathcal{J}$ 積分は式(II-40)より

$$\mathcal{J} = \int_{\Gamma} [W e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_i}] d\Gamma \quad (\text{II-43})$$

で表わされる。固有ひずみが存在しない場合は W^e は W に一致するので, 上式は Rice の $\mathcal{J}$ 積分の定義式に一致する。

物体力を考慮した $\mathcal{J}$ 積分

遠心力や電磁力を受ける場合のように物体力の影響が無視できない場合には, 式(II-40)より $\mathcal{J}$ は

$$\mathcal{J} = \int_{\Gamma} [W e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_i}] d\Gamma - \iint_A F_i \frac{\partial u_i}{\partial X_i} dA \quad (\text{II-44})$$

となり, 物体力を考慮した $\mathcal{J}$ 積分の表示式⁽¹⁴⁾ と一致している。

温度場におけるJ積分

温度場が存在する場合は、熱膨張率を α_{ij} とし、基準温度からの温度変化を Θ とすると

$$\varepsilon_{ij}^* = \alpha_{ij} \Theta \quad (\text{II-45})$$

であるので、式(II-40)より $\hat{J}$ は

$$\hat{J} = \int_{\Gamma} [w e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] d\Gamma + \iint_A \sigma_{ij} \alpha_{ij} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} dA \quad (\text{II-46})$$

となる。本式は、Ainsworthらの提案している温度場におけるJ積分の表示式 $J_{\Theta}^{(15)}$ と一致している。さらに、等方体の場合は $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ であるので

$$\hat{J} = \int_{\Gamma} [w e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] d\Gamma + \iint_A \alpha \sigma_{ii} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} dA \quad (\text{II-47})$$

となる。ただし、 δ_{ij} はKroneckerのデルタである。なお、一様温度場の場合には、上式は、

$$\hat{J} = \int_{\Gamma} [w e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] d\Gamma \quad (\text{II-48})$$

となる。しかし、基準温度からの温度変化がある場合には

$$w e = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e \neq \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = W \quad (\text{II-49})$$

であるので、 $\hat{J}$ 積分は一様温度場であつても式(II-41)で与えられるRiceのJ積分とは一致しない。

慣性力の影響を考慮したJ積分

慣性力の影響を無視できない場合には、 $\hat{J}$ 積分は

$$\hat{J} = \int_{\Gamma} [w e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] d\Gamma + \iint_A \rho \ddot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dA \quad (\text{II-50})$$

となる。上式において、経路 Γ の囲む領域 A を、き裂進展とと

もに移動する領域と考えると

$$\begin{aligned} \dot{J} = & \int_{\Gamma} [W e n_1 - T_i u_{i,1} - \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i n_1] d\Gamma \\ & + \frac{d}{dt} \int_A \rho \dot{u}_i u_{i,1} dA - \int_{\Gamma} \rho \dot{u}_i u_{i,1} v_1 d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II-51})$$

となり, Bui が求めている慣性力の影響を考慮した J 積分の表示式⁽¹⁶⁾に一致する。また,

$$\begin{aligned} \dot{J} = & \int_{\Gamma} [W e n_1 + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i n_1 - T_i u_{i,1}] d\Gamma \\ & + \int_A [\rho \ddot{u}_i u_{i,1} - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1}] dA \end{aligned} \quad (\text{II-52})$$

であり, き裂先端近傍では, $\dot{u}_i = -v_1 u_{i,1}$ が成立するので

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \lim_{r \rightarrow 0} v_1 \dot{J} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma} [\sigma_{ij} n_j \dot{u}_i + (W e + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i) v_1 n_1] d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II-53})$$

となり, エネルギー解放率に関する Freund の表示式⁽²⁾が得られる。

(2) Estlis らによるエネルギー解放率 $\mathcal{G}$ との関係

Estlis らは, 大規模降伏状態の破壊挙動を記述するための破壊力学パラメータとして

$$\mathcal{G} = \frac{\partial}{\partial l} [W' - (U' + U'')] \quad (\text{II-54})$$

を提案している。^(17,18) ここで, W' は自然状態から現在の状態に至るまでに外力のなした仕事であり, U' は弾性ひずみエネルギー, U'' は塑性変形に費いやされたエネルギーである。また, l はき裂長さである。したがって, $\mathcal{G}$ は弾塑性体中を単位長さき裂が進展する場合のエネルギー解放率であると解釈することができる。

$$\bar{\sigma} = v_1 \bar{\sigma}$$

(II-55)

が成立する。

ところで、式(II-40)において慣性力の影響を無視し、 ε_{ij} を塑性ひずみ ε_{ij}^p とすると

$$\dot{J} = \int_{\Gamma_2} [W n_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1}] d\Gamma + \iint_A [\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial X_1} - F_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1}] dA \quad (\text{II-56})$$

となる。この導出過程から明らかなように上式は、き裂の定常進展に対する $\dot{J}$ の成分の表示式を与える。

(3) Blackburn によるパラメータ J^* との関係

Blackburnは、き裂先端近傍の応力・変位場を特徴づけるためのパラメータとして

$$J^* = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0} [\frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} dx_2 - T_i u_{i,1} d\Gamma] \quad (\text{II-57})$$

を用いることを提案している⁽⁹⁾。なお、 r_0 は、き裂先端を中心とする半径 r_0 の径路である。さらに、上式の径路の採り方によらない表示式と導かれている。二次元問題に対しては、その表示式は

$$J^* = \oint [\frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} dx_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} d\Gamma] + \lim_{r_0 \rightarrow 0} \iint_A [\frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} - \frac{1}{2} \sigma_{ij,1} u_{i,j}] dA \quad (\text{II-58})$$

で与えられる。ただし、 $\oint$ は、き裂先端を囲む任意の径路に沿う線積分を表わす。ここで、

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{r_0} [\sigma_{ij} u_{i,j} - \sigma_{ij,1} u_{i,j}] r dr d\theta = 0 \quad (\text{II-59})$$

と仮定すれば、式(II-58)は、

$$J^* = - \int_{\Gamma \cup \Gamma_3} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} d\Gamma + \iint_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_1} dA \quad (\text{II-60})$$

となり、慣性力および物体力が存在しない場合の J の表示式 (II-39) に一致させることができる。しかし、式 (II-59) は一般に成立しているとは限らず、^(脚注) そのような場合に対しては、 J^* と J は等価とはならない。

(4) Strifors によるき裂進展力 f との関係

Strifors は、物体全域に連続体力学を適用できるものとして、有限変形問題に対するエネルギー解放率の表示式を導いている。⁽²⁰⁾ 基準座標系に固定された単位ベクトル $\mathbf{l}_R$ 方向にき裂が単位長さ進展する場合のエネルギー解放率は、き裂先端を含む任意の領域 $\mathcal{P}$ に関して

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{l}_R}(\mathcal{P}) = & \mathbf{l}_R \cdot \int_{\partial \mathcal{P}} ([\mathbf{T}_R] \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{H}^T (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \rho_R) dV_R \\ & - \mathbf{l}_R \cdot \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{H}^T \mathbf{t}_R dS_R \end{aligned} \quad (\text{II-61})$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{T}_R$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, ρ_R および $\mathbf{t}_R$ は、それぞれ、Piola-Kirchhoff の応力、変形勾配、変位勾配、物体力、加速度、密度および表面力である。また $\nabla \times = \partial / \partial X$ であり、 $\mathbf{T}$ は転置を表わす。二次元微小変形問題において、き裂が X 軸方向に進展する場合に関しては、上式は次式となる。

$$f_{\mathbf{l}_R}(A) = \iint_A [\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_1} - (F_i - \rho \ddot{u}_i) \frac{\partial u_i}{\partial X_1}] dA - \int_{\Gamma \cup \Gamma_3} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} d\Gamma \quad (\text{II-62})$$

(脚注) 線形弾性体の場合には、 $\sigma_{ij,1} u_{i,j} = \sigma_{ij,1} \varepsilon_j = \sigma_{ij} \varepsilon_{j,1} = \sigma_{ij} u_{i,1j}$ であるので式 (II-59) が成立する。

式(II-62)は式(II-39)に等しい。したがって、微小変形問題において領域 A_{end} を考えない場合は f_{LR} と $\hat{J}$ とは等価であることがわかる。

2.4.3. $\hat{J}$ 積分と特異応力場の強さとの関係

前節において、 $\hat{J}$ 積分が特別な場合な場合として、Rice の $\hat{J}$ 積分、Eftis らの提案する $\tilde{G}$ 、Blackburn の $\hat{J}^*$ や Stritors の $\hat{J}$ を含むことを示した。本節においては、小規模破壊進行領域の考え方に従い、き裂先端近傍における特異応力場を考え、この強さと $\hat{J}$ 積分の関係について調べる。

$\hat{J}$ 積分の経路独立性により図 II-6 に示すような長方形の経路を考え $\delta \rightarrow 0$ としさらに $\varepsilon \rightarrow 0$ としても、 $\hat{J}$ の値は任意の形状の経路による値と同一である。ここでは、 X_1 軸方向にき裂が進展する開口形変形の場合について考える。 $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ の極限では、式(II-39)あるいは式(II-40)の面積積分はゼロとなるので、

$$\begin{aligned}\hat{J} &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} T_2 \frac{\partial u_2}{\partial X_1} d\Gamma \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma_{22} \left\{ \frac{\partial u_2(X_1, -0)}{\partial X_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u_2(X_1, +0)}{\partial X_1} \right\} dX_1 \quad (\text{II-63})\end{aligned}$$

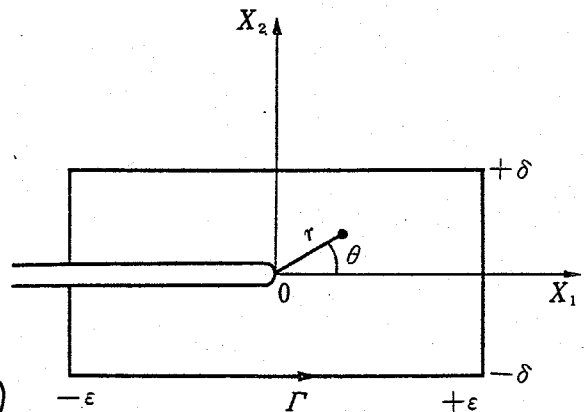


図 II-6 き裂先端を囲む長方形の積分経路

となる。なお、 Γ_5 は $\varepsilon \rightarrow 0$ の極

限における $X_1 \leq -\varepsilon$ のき裂面上の経路として定義されているので、式(II-63)には Γ_s 上の線積分の寄与が入っていない。

任意の構成関係を持つ材料に対しては特異応力場の性質は明らかにされていないが、もし、き裂先端近傍で

$$\sigma_{22} = \begin{cases} \alpha X_1^\lambda & : X_1 > 0 \\ 0 & : X_1 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II-64a})$$

$$\left\{ \frac{\partial u_2(X_1, -0)}{\partial X_1} - \frac{\partial u_2(X_1, +0)}{\partial X_1} \right\} = \begin{cases} 0 & : X_1 \geq 0 \\ \beta |X_1|^{-1-\lambda} & : X_1 < 0 \end{cases} \quad (\text{II-64b})$$

ただし、 $-1 < \lambda < 0$; α, β : 定数

が成立すると仮定する(弾性体中のき裂モデルやHRRモデル^(21, 22)ではこの仮定が成立している)と、Fisherの公式⁽²³⁾

$$y_+^\lambda y_-^{1-\lambda} = -\frac{\pi}{2} \delta(y) \operatorname{cosec}(\pi\lambda) \quad (\text{II-65})$$

$$\text{ただし} \quad \left. \begin{aligned} y_+^\lambda &= \begin{cases} y^\lambda & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \\ y_-^\lambda &= \begin{cases} 0 & y > 0 \\ |y|^\lambda & y \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

δ は Dirac のデルタ関数

より、式(II-63)は

$$\oint = -\frac{\pi}{2} \alpha \beta \operatorname{cosec}(\pi\lambda) \quad (\text{II-66})$$

に変形される。 α と β の間に何らかの関数関係があれば、式(II-66)を α または β について解くことができ、 α および β を $\oint$ の関数として表わすことができる。

線形弾性体の場合には、式(II-64)において $\lambda = -\frac{1}{2}$ となり

、 α と β は応力拡大係数 K_I によって表わされるので式(II-67)次の関係式を得る。

$$\hat{J} = \frac{\kappa+1}{8\mu} K_I^2 = G \quad K = \begin{cases} 3-4\nu & \text{平面ひずみ状態} \\ (3-\nu)/(1+\nu) & \text{平面応力状態} \end{cases} \quad (\text{II-67})$$

ここで、 ν はポアソン比であり、 μ は横弾性係数である。また、 G は弾性エネルギー解放率⁽²⁴⁾である。^(脚注1)

塑性域の応力-ひずみ関係が

$$\frac{\sigma}{\sigma_Y} = \left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_Y} \right)^N \quad (\text{II-68})$$

で与えられる全ひずみ理論に従う材料については、静止き裂先端近傍の応力・ひずみは、HRRの特異性を持つ^(21,22)。ここで、 σ_Y は降伏応力、 E は縦弾性係数、 N は加工硬化指数である。除荷がなければ、全ひずみ理論に従う弾塑性体は非線形弾性体と見なすことができる。式(II-43)より $\hat{J} = J$ となるので、式(I-9)より、き裂先端近傍の応力・ひずみは次式のように表わすことができる。^(脚注2)

$$\sigma_{ij} = \sigma_Y \left[\frac{E\hat{J}}{\sigma_Y^2 r} \right]^{1/(N+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{II-69a})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_Y}{E} \left[\frac{E\hat{J}}{\sigma_Y^2 r} \right]^{1/(N+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{II-69b})$$

(脚注1) 衝撃荷重下のき裂や高速で進展するき裂の場合については、3.2.1節および3.3.1節を参照。

(脚注2) 熱ひずみに特異性があれば温度場における静止き裂先端近傍の応力・ひずみ場はHRRの特異性を用いて式(II-69)が成立することか証明できる(4.2.3(1)節参照)。

ここで、 $\tilde{\sigma}_j$, $\tilde{\varepsilon}_j$ は σ と N の既知関数である。比例負荷の下では全ひずみ理論とひずみ増分理論とは等価となるので、ひずみ増分理論に従う材料に対しても単調増加荷重下では式(II-69)が良い近似になっていると考えられる。大規模な降荷を含む場合のき裂先端近傍の応力・ひずみの特異性および特異性とひずみ増分の関係については未だ明らかでなく、これを解明することは今後の課題である。

2.4.4. 破壊の条件式

破壊進行領域内の破壊過程が物質によって固有のどのであり、き裂長さや負荷条件に無関係であり自律的 (autonomous)^(1,25) であると過程すると破壊の条件式は

$$\dot{W} = \dot{W}_c \quad (\text{II-70})$$

と書くことができる。ここで、 $\dot{W}_c$ はき裂が進展する際の破壊進行領域における単位時間当りのエネルギー変化率を表わし、物質に固有な値を持つと考えられる量である。破壊進行領域が小規模な場合には $\dot{W}$ は式(II-38)で与えられるので、上式は

$$v_1 \dot{\sigma} + \dot{\varepsilon} \approx \dot{W}_c \quad (\text{II-71})$$

となる。ただし、 x_1 軸がき裂進展方向と等しくなるように座標軸を選んでいる。

前節までの結果からひずみ増分はエネルギー解放率の定常成分(き

裂面形状の平行移動に伴う成分)としての物理的な意味を持ち、積分経路に依存しない形で表現されるという性質を持っている。また、 $\int$ 積分は考えている時点の応力・ひずみ場から計算することかでき、き裂先端近傍における特異性の強さとも関係づけられるので、上式を書き換えて

$$\begin{aligned}\int &\approx (\sigma_c - \sigma) / \psi_1 \\ &= \int_c\end{aligned}\quad (\text{II-72})$$

を破壊の条件式として採用することが考えられる。この条件式では、微視的な破壊挙動に関するエネルギー解放率とき裂の非定常進展等に関するエネルギー解放率の成分(脚注1)をひとまとめにして $\int_c$ の内へ繰り込み、 $\int$ 積分を単一の破壊力学パラメータとして取扱うことになる。破壊進行領域が小規模となるような負荷条件下(脚注2)でき裂進展試験を行い、式(II-39)または式(II-40)によって、そのときの $\int$ を計算すれば $\int_c$ の値を決定することかできる。物体力、慣性力および固有ひずみが無い

(脚注1) $\int$ 積分は破壊進行領域を囲む経路に関する線積分として与えられるので、破壊過程が自律的であれば、この値も物質に固有の値となると考えられる。

(脚注2) 具体的な条件については不明であるが、少なくとも JIC試験⁽²⁶⁾が行える範囲内であれば、小規模破壊進行領域の仮定による取扱いが可能と考えられる。

場合には式(II-40) で与えられる $\hat{J}$ は J と一致するので, コンパルト試験片または三点曲げ試験片などを用いて単調増加荷重下で通常の JIC 試験⁽²⁶⁾を行えば, き裂が成長を開始するときの $\hat{J}_c$ の値は $\hat{J} = \hat{J}_c$ として求められる。一般の構造物に式(II-72)を適用する場合に問題となる物体力, 慣性力および固有ひずみの影響は左辺の $\hat{J}$ の中に含まれている。

つぎに, 式(II-72)の破壊条件式と小規模降伏状態のときに通常用いられる破壊条件式⁽²⁷⁾

$$G = G_c \quad \text{または} \quad K_I = K_c \quad (\text{II-73})$$

との関係について検討する。ここで, G_c または K_c は いずれも破壊靱性値と呼ばれている。小規模降伏状態の場合には, 通常は弾性き裂モデルを考えるが, 実際には降伏域が存在するので, ここでは, その影響を無視しないで弾塑性体中のき裂モデルを考える。

単調増加荷重下では, 全ひずみ理論に従う弾塑性体の $\hat{J}$ 積分は式(II-41) で与えられる J 積分に一致し, 線積分のみによって表わされる。いま, 塑性変形域を囲むき裂先端近傍の弾性域内に積分経路を採ると式(II-43)で表わされる。き裂先端近傍では応力拡大係数 K_I によって表わされる特異応力場が支配的となっていると考えられるので, 式(II-67)より

$$\hat{J} = G = \frac{K_I^2}{8\mu} K_I^2 \quad (\text{II-74})$$

が成立する。ひずみ増分理論に従う弾塑性体に対しても上式が近似的に成立していると考えられる。したがって、破壊開始のように除荷の影響が問題とならない場合については、式(II-72)と式(II-73)とは等価な条件式となり $\int_C$ と G_C は等しくなる。

これに対し、き裂の進展挙動を問題にする場合には破壊に伴って必然的に除荷が生じるので $\int_C$ と G とは必ずしも等しくはならない。いま、簡単のために物体力、慣性力および熱ひずみの影響がない場合について考えると、式(II-40)より $\int_C$ は

$$\int_C = \int_{\Gamma+I_3} (W e - T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) d\Gamma + \iint_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^P}{\partial x_j} dA \quad (\text{II-75})$$

で与えられる。積分経路 $\Gamma+I_3$ として弾性域内を通る経路を考える。このとき

$$\int_{\Gamma+I_3} (W e - T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) d\Gamma \simeq \frac{\kappa+1}{8\mu} K_I^2 = G \quad (\text{II-76})$$

となるので、式(II-75)は

$$\int_C \simeq G + \iint_{A^*} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^P}{\partial x_j} dA \quad (\text{II-77})$$

となる。ここで、弾性域では $\varepsilon_{ij}^P = 0$ であるので、上式の第2項は塑性域 A^* に関する面積積分になっている。塑性変形の影響を考慮すると $\int_C$ と G には上式のような違いがあることがわかる。小規模降伏状態では弾性特異応力場によって塑性変形挙動が支配されていると考えられるので、上式の面積積分の値は、き裂進展に際して G から決まるある値をとると考えられる。した

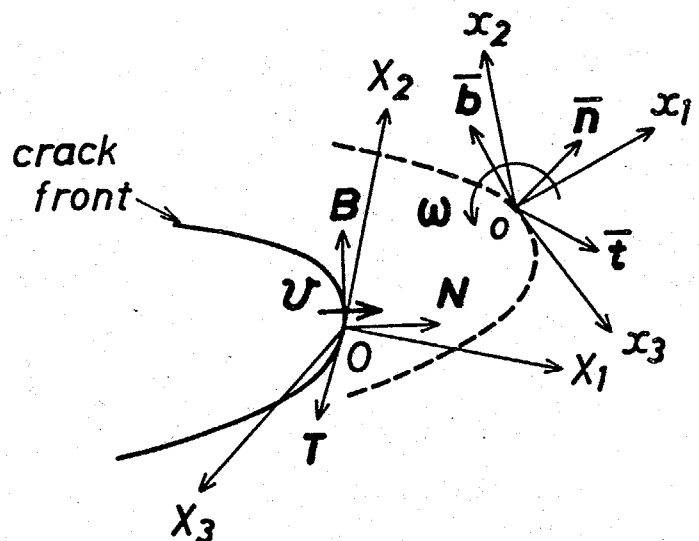
がって、式 (II-72), (II-73) および (II-77) より, G_c と $\dot{J}_c$ との間には

$$G_c \simeq \dot{J}_c - \iint_{A^*} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^P}{\partial x_i} dA \quad (\text{II-78})$$

の関係があることがわかる。なお、小規模降伏状態の場合には、通常は弾性き裂モデルを取扱うので、 $\dot{J}$ 積分としては塑性ひずみ ε_{ij}^P を無視した式を用いるが、このときにき裂進展試験によってき裂進展抵抗値として求められる値は、小規模破壊進行領域的な取扱いによって得られる上式の右辺の $\dot{J}_c$ でなく、 G_c の値であることを注意する必要がある。

2.5. 三次元問題への拡張

前節までに得られた結果の三次元問題への拡張を考える。図 II-7 に示すような三次元き裂を考える。実線は時刻 $t=t_0$ におけるき裂前縁を表わし、破線は微小時間後の時刻 $t=t_0+\Delta t$ におけるき裂前縁を表わすものとする。き裂前縁上の任意の一点 O を原点、図 II-7 三次元き裂問題における座標系



とする固定直角座標系を $O-X_1, X_2, X_3$ とし, O 点における実線の主法線, 陪法線および接線方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ および $\mathbf{T}$ とする。

$\mathbf{N}$ と $\mathbf{B}$ を含む平面と破線の交点を O とし, O 点における破線の主法線, 陪法線および接線方向の単位ベクトルをそれぞれ $\bar{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ および $\bar{\mathbf{t}}$ とする。 $\bar{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ および $\bar{\mathbf{t}}$ は $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ および $\mathbf{T}$ を平行移動し, 回転させることにより得られる。この平行移動および回転の量をそれぞれ $\mathbf{v}\Delta t$ および $\boldsymbol{\omega}\Delta t$ とする。 $O-X_1, X_2, X_3$ を $\mathbf{v}\Delta t$ だけ平行移動させ, $\boldsymbol{\omega}\Delta t$ だけ回転させて得られる移動直角座標系を $O-x_1, x_2, x_3$ とする。

時刻 $t=t_0$ における破壊進行領域は図 II-8 に示すような形状をしていると考えられる。破壊進行領域を $\mathbf{N}$ と $\mathbf{B}$ で決定される平面に平行な 2 枚の面で切ったときに得られる薄い円板 (断面は必ずしも円形とは限らないが, ここでは円板と呼ぶこととする) を考える。円板の占めている領域, 厚さおよび外周をそれぞれ ΔV_{end} , $\Delta\lambda$ および Γ_{end} とする。

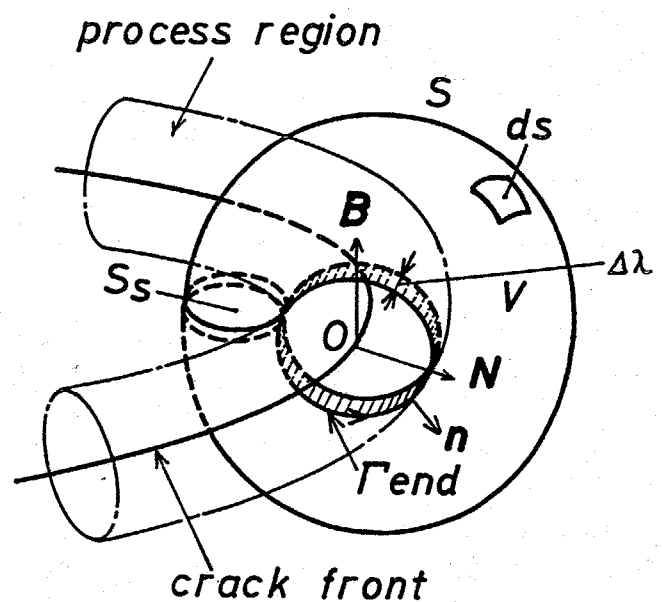


図 II-8 三次元き裂問題における破壊進行領域と積分領域 ($\Delta\lambda \rightarrow 0$)

この円板の外周部に接するようなドーナツ状の領域を V とし、 V の外表面を S 、き裂面が V と交わる部分を S_s とする。領域 $V + \Delta V_{\text{end}}$ 内の物質のエネルギーの平衡を考え、 $\Delta \lambda \rightarrow 0$ とすると、点 O における局所的なエネルギー解放率として

$$\dot{W} = v_{\alpha} \hat{J}_{\alpha} + \omega_{\alpha} \hat{L}_{\alpha} + \alpha \dot{M} + I \quad (\alpha=1, 2, 3) \quad (\text{II-79})$$

が得られる。ただし、破壊進行領域の円板 ΔV_{end} の側面からのエネルギーの流れは無視した。式(II-79)において、 $\hat{J}_{\alpha}$ 、 $\dot{M}$ および I はそれぞれ式(II-23)、(II-25)および式(II-26)によって与えられ、 $\hat{L}_{\alpha}$ は次式で与えられる。

$$\hat{L}_{\alpha} = \int_{\Gamma_{\text{end}}} e_{i\alpha l} X_l \left\{ p(k+e) n_i - T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right\} d\Gamma \quad (\text{II-80})$$

三次元の $\hat{J}_{\alpha}$ 、 $\hat{L}_{\alpha}$ および $\dot{M}$ の積分経路に依存しない表示式は、式(II-30)~(II-32)を一般化して

$$\hat{J}_{\alpha} = \int_{\Gamma_{\text{end}}} p(k+e) n_{\alpha} d\Gamma - \iint_{S+S_s} T_{i\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_{\alpha}} dS + \iiint_V \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_{\alpha}} + (p \ddot{u}_{\alpha} - F_{\alpha}) \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial X_{\alpha}} \right\} dV \quad (\text{II-81})$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\alpha} = & \int_{\Gamma_{\text{end}}} e_{i\alpha l} p(k+e) X_l n_i d\Gamma - \iint_{S+S_s} e_{i\alpha l} X_l T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_i} dS \\ & + \iiint_V e_{i\alpha l} \left\{ \sigma_{jl} \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + X_l (p \ddot{u}_{\alpha} - F_{\alpha}) \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial X_i} + X_l \sigma_{jkl} \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial X_i} \right\} dV \end{aligned} \quad (\text{II-82})$$

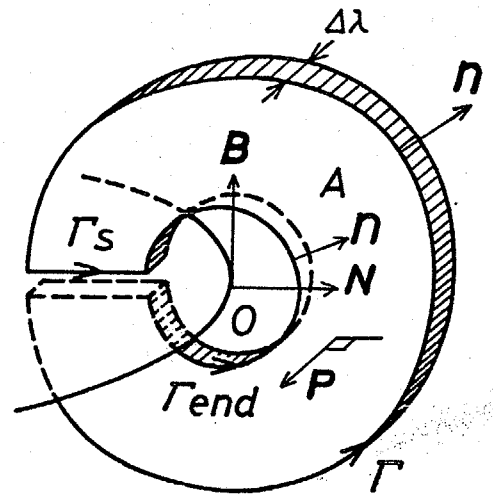
$$\begin{aligned} \dot{M} = & \int_{\Gamma_{\text{end}}} \{ p(k+e) n_i X_i \} d\Gamma - \iint_{S+S_s} (X_i T_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_i}) dS \\ & + \iiint_V \left\{ \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_e} X_e + (p \ddot{u}_{\alpha} - F_{\alpha}) \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial X_i} X_i \right\} dV \end{aligned} \quad (\text{II-83})$$

となる。

均質な材料に対しては、式(II-81)~式(II-83)はさらに変形できる。図II-9に示すように無限に薄い($\Delta \lambda \rightarrow 0$)板を考える。この板の内周は破壊進行領域の外周 Γ_{end} に等しく指定されて

いるが、板の外周 Γ は任意である。
板の側面の外向き単位法線ベクトル
を P_i とすると、 $\hat{\alpha}$, $\hat{L}_\alpha$ および $\hat{M}$ は
次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} = & \int_{\Gamma \cup \Gamma_s} (w e n_\alpha - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{end}} \{ p(k+e) - w e \} n_\alpha d\Gamma \\ & + \iint_A \{ (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \sigma_{ij}^* \frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial x_\alpha} \\ & + (w e p_\alpha - \sigma_{ij} P_j u_{i,\alpha})_{,l} P_l \} dA \quad (II-84)\end{aligned}$$



図II-9 均質体に対する積分経路

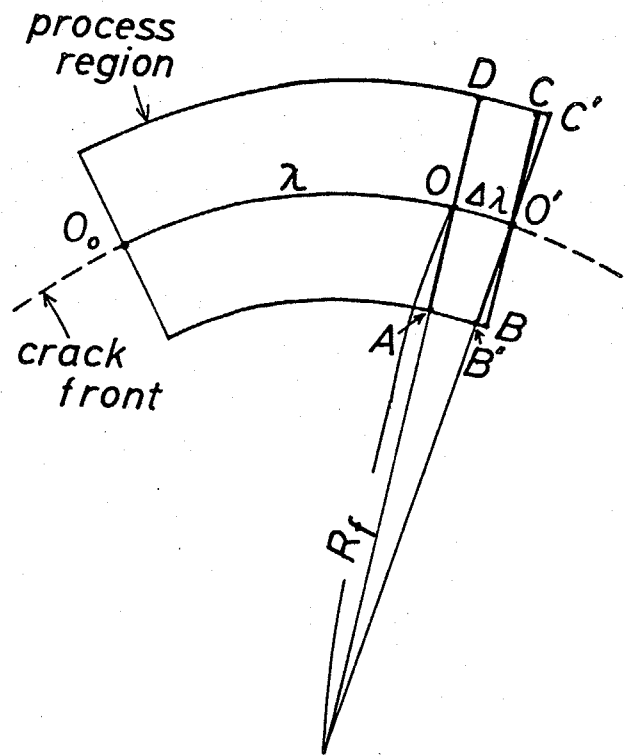
$$\begin{aligned}\hat{L}_\alpha = & \int_{\Gamma \cup \Gamma_s} e_{i\alpha l} \{ X_l (w e n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + T_i u_e \} d\Gamma + \int_{\Gamma_{end}} e_{i\alpha l} [X_l \{ p(k+e) - w e \} n_i - T_i u_e] d\Gamma \\ & + \iint_A e_{i\alpha l} \{ (\rho \ddot{u}_i - F_i) u_e + 2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + X_l (\rho \ddot{u}_j - F_j) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + X_l \sigma_{mj} \frac{\partial \varepsilon_{mj}^*}{\partial x_i} \\ & + (X_l w e p_i - X_l \sigma_{ij} P_j u_{r,i} + \sigma_{ij} P_j u_e)_{,m} P_m \} dA \quad (II-85)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{M} = & \int_{\Gamma \cup \Gamma_s} (w e x_i n_i - T_i u_{ij} x_j - \frac{1}{2} T_i u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_{end}} [X_i \{ p(k+e) - w e \} n_i + \frac{1}{2} T_i u_i] d\Gamma \\ & + \iint_A \{ (\rho \ddot{u}_j - F_j) (\frac{1}{2} u_j + u_{j,i} x_i) + \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij,l}^* X_l + \frac{3}{2} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* \\ & + (w e p_i x_i - X_l \sigma_{ij} P_j u_{i,l} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} P_j u_i)_{,m} P_m \} dA \quad (II-86)\end{aligned}$$

ここで、 $\hat{L}_\alpha$ および $\hat{M}$ が式(II-85)および(II-86)の形に表わされる
ために課せられる条件は、それぞれ式(II-36) および (II-37)
の場合と同様である。

最後に、局所的なエネルギー解放率と有限な厚さの破壊進行
領域に関するエネルギー解放率（これを全体的なエネルギー解放率
と呼び E で表わす）との関係について考える。図II-10に破壊
進行領域の縦断面を模式的に示す。この図では、簡単のために

、き裂前縁が一つの平面上にあるように描かれている。き裂前縁上の一点を O_0 とし、き裂前縁の曲率半径を R_f とする。



図II-10 には重を定義するために用いた破壊進行領域の内板の断面が長方形 $ABCD$ で表わされている。

また、点 O から $\Delta\lambda$ だけ離れた点 O' におけるき裂前縁

図II-10 破壊進行領域の縦断面図($\Delta\lambda \rightarrow 0$)

に垂直な平面が破壊進行領域を切った切り口が直線 $B'C'$ で表わされている。断面が $AB'C'D$ で表わされる破壊進行領域に関するエネルギー解放率を ΔE とすれば、全体的なエネルギー解放率 E は次式で表わされる。

(II-87)

$$E = \int_0^\lambda \Psi^* d\lambda$$

ここで、

$$\Psi^* = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta\lambda} = \frac{dE}{d\lambda} \quad (\text{II-88})$$

重は一般には Ψ^* とは等しくないが、通常の工業材料のようにき裂前縁の曲率半径 R_f が破壊進行領域の寸法 $\overline{AD}$ に比べて十分大きい場合には $\overline{B'B} \ll \overline{AB'}$, $\overline{CC'} \ll \overline{DC'}$ となり、重は近似的

に Ψ^* と一致する。 $AD/R_f \rightarrow 0$ の極限(例えば直線状貫通き裂など)では, Ψ は完全に Ψ^* と一致する。 AD/R_f の大きな値に対して Ψ^* を定式化することと可能と考えられるが,数式が複雑になるものと予想される。

なお,破壊進行領域が小規模で,き裂が X_1 軸方向に進展する場合には,前節と同様の考察から

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c \quad (\text{II-89})$$

を局所的な破壊条件として採用することが考えられる。

2.6. 結言

き裂が進展する際のエネルギー解放率を破壊進行領域の変形を考慮に入れて定式化した。その結果,エネルギー解放率 Ψ (または Ψ^*)は破壊進行領域の平行移動による成分 $\dot{\gamma}_\alpha$,回転による成分 $\dot{\gamma}_\beta$,自己相似的な膨張による成分 $\dot{\gamma}_\gamma$ および形状のゆがみ等による成分 $\dot{\gamma}_\delta$ の和として表わされることわかった。また, $\dot{\gamma}_\alpha$, $\dot{\gamma}_\beta$ および $\dot{\gamma}_\gamma$ の積分経路によらない表示式を導いた。つぎに,破壊進行領域が小さい場合には, $\dot{\gamma}_\alpha \gg \dot{\gamma}_\beta, \dot{\gamma}_\gamma$ となり, $\dot{\gamma}$ 積分は,き裂先端近傍における特異場の強さとも関係づけられるので, Ψ (または Ψ^*)と $\dot{\gamma}$ とをひとまとめにして破壊靱性値として取扱えば, $\dot{\gamma}$ 積分がこのような場合の単一の破壊力学パラメータ

となり得ることを示した。最後に、上述の結果を三次元問題にも拡張できることを示した。

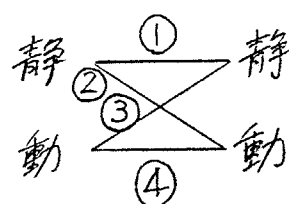
第Ⅲ章 動的破壊問題への応用

3.1. 緒言

静的な負荷の下での材料の破壊挙動に関しては従来から多くの研究が行われている。しかし、動的な負荷を受ける材料の破壊や高速で進展するき裂の挙動のように物体の慣性力の影響を考慮した動力学的な取扱いを取扱いを必要とする問題はまた十分に研究されていないのが現状である。このような問題を解明することは衝撃荷重を受ける部材の強度設計やクラックアレスターの設計に有用と考えられる。

一般に、き裂を有する物体に荷重が加わるとき、き裂進展速度と物体の慣性力を考慮する必要があるか否かによって表Ⅲ-1のように破壊問題の取扱い法を分類することが可能である⁽¹⁾。ここで、破壊力

(き裂) (荷重)



表Ⅲ-1 き裂と荷重の分類

学的解析において物体の慣性力を考慮する必要があるのは、荷重が変化する時間が物体の最低次の自由振動の固有周期と同じオーダーかそれ以下の場合、および、き裂の進展速度が弾性波の伝播速度に比べて無視できない場合である。表Ⅲ-1において①は静的な破壊問題であり従来の破壊力学が主に取扱ってきた分野である。②が上述の衝撃問題、③④が高速き裂問題である。3.2節では②の問題を、3.3節では③④の問題について

検討する。なお、本章では、特にことわらなげんり静的な線形破壊力学の場合と同様に小規模降伏状態を仮定し、弾性き裂モデルを取扱う。この場合、前節で導出した破壊力学パラメータ J は式(II-39) または (II-40) より

$$J = - \int_{\Gamma+R} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} d\Gamma + \iint_A \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_1} + (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial X_1} \right\} dA \quad (\text{III-1a})$$

または、

$$J = \int_{\Gamma+R} (W e n_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1}) d\Gamma + \iint_A (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial X_1} dA \quad (\text{III-1b})$$

で与えられる。なお、式(III-1a)の表示式は構成方程式のいかんによらず積分経路(領域)独立である。

3.2. 衝撃荷重を受けるき裂の動的応力拡大係数

およびエネルギー解放率

3.2.1. 弾性体および粘弾性体に対する基礎関係式

多くの機械や構造物は変動する負荷の下で使用されており、衝撃的に加わる荷重が破壊事故の原因となる場合も少なくない。

したがって、衝撃荷重を受ける部材の安全性の評価をすることは重要な問題である。本節では、き裂材に衝撃力が作用する場合について検討する。 J 積分は前章での導出過程から明らかのように仕様の構成関係に従う材料に適用可能である。しかし、衝撃荷重下では、ぜい性破壊することが多いこと、および静的

な問題ほど破壊現象が十分に解明されていないことから、本節では小規模降伏状態の問題に限定して議論する。

一般に静止しているき裂に応力波が入射すると、き裂先端近傍には、次式のように表わされるき裂に固有な応力・変位場が生じる⁽²⁾。

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) \quad (\text{III-2a})$$

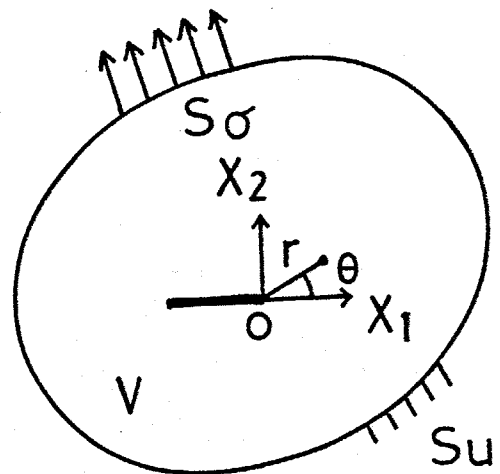
$$u_i(t) = \frac{K_I(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^I(\theta, \nu) + \frac{K_{II}(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{II}(\theta, \nu) + \frac{K_{III}(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{III}(\theta) \quad (\text{III-2b})$$

ただし、物体は線形弾性体とし、図III-1に示す座標系を用いる。ここで、 $K_I(t)$ 、 $K_{II}(t)$ および $K_{III}(t)$ は、それぞれ、面内開口変形 (Mode I)、面内せん断変形 (Mode II) および面外せん断変形 (Mode III) に対する動的応力拡大係数である。また、 ν はポアソン比、 μ は横弾性係数である。 $f_{ij}^I(\theta)$ 、 $g_i^I(\theta, \nu)$ 等は応力・変位場の角度依存性を表わす関数で静的な場合と同一の関数である。動的応力拡大係数と積分の関係は、式(II-67)を得たときと同様に(2, 式(II-1)より

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \frac{K+1}{8\mu} [K_I^2(t) + K_{II}^2(t)] + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2(t) \\ &= G \end{aligned}$$

$$\text{ただし } K = \begin{cases} 3-4\nu & \text{平面応力状態} \\ (3-\nu)/(1+\nu) & \text{平面応力状態} \end{cases}$$

(III-3)



図III-1 き裂と座標系

で求められ、 $\dot{J}$ は動的弾性エネルギー

に一致する。したがって、動的応力拡大係数が決定されると、き裂先端近傍の応力・変位場およびエネルギー解放率が一意的に定められることになる。このことは、き裂に応力波が入射する問題の解析が動的応力拡大係数を解析することに帰着されることを意味している。

衝撃荷重下の破壊条件式として開口形モードの場合について

$$K_I(t) = K_d \quad (\text{III-4})$$

が多く採用されている⁽³⁾。ここで、 K_d は衝撃破壊靱性値と呼ばれ、一般に $K_I(t)$ に依存するがき裂長さや物体の形状には依存しない物性値と考えられている。 $K_I(t) \rightarrow 0$ のとき K_d は K_{IC} に一致する。式(III-3)より式(III-4)の破壊条件式は $\dot{J}$ を用いた条件式と等価であることがわかる。なお、混合モードの破壊に関しては実験データも少なく、この問題は今後の研究課題であるが、動的応力拡大係数を評価することが問題解明の基本になると思われる。

以上の弾性体に対する基礎関係式を線形粘弾性体の場合に拡張する。時間 t に関して

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (\text{III-5})$$

で定義されるラプラス変換を導入すると線形粘弾性体の基本方程式は次式で与えられる⁽⁴⁾。

$$\bar{\sigma}_{ij,j} = s^2 \rho \bar{u}_i \quad (\text{III-6a})$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (\text{III-6b})$$

$$\bar{s}_{ij} = 2S\bar{\mu} \bar{e}_{ij} \quad (\text{III-6c})$$

$$\bar{\sigma}_{kk} = 3S\bar{K} \bar{\varepsilon}_{kk} \quad (\text{III-6d})$$

ここで、式(III-6a)は釣合方程式、式(III-6b)はひずみの定義式、式(III-6c,d)は構成方程式である。 ρ は密度、 s_{ij} , e_{ij} は、それぞれ、偏差応力および偏差ひずみである。また、 $\bar{\mu}$, $\bar{K}$ は、それぞれ単純せん断および等方圧縮に対応する緩和関数のラプラス変換である。境界条件は、

$$\bar{\sigma}_{ij}n_j = \bar{T}_i \quad \text{So 上} \quad (\text{III-7a})$$

$$\bar{u}_i = \bar{\Delta}_i \quad \text{Su 上} \quad (\text{III-7b})$$

で与えられる。ここで、 n_j は物体表面の外向き単位法線ベクトルの成分である。また、 S_o は表面力 T_i が与えられた境界であり、 S_u は変位 Δ_i が与えられた境界である。ここでは、領域 S_o , S_u は時間的に変化しないものとする。式(III-6)と(III-7)で与えられる方程式は、 $S\bar{\mu}(s)$ および $S\bar{K}(s)$ を弾性定数 μ , K で置き換えると弾性体の場合に得られた式に一致する。したがって、ラプラス空間における線形粘弾性問題の解は、ラプラス変換によって表示された線形弾性問題の解に含まれる $\bar{\mu}$ と $\bar{K}$ を、それぞれ $S\bar{\mu}(s)$ と $S\bar{K}(s)$ に置き換えることによって求められる。線形弾性体のき裂先端近傍の応力・変位場の解は、式(II-1)で与えられるので、これらの式をラプラス変換し、 $\bar{\mu}$

を $S\mu(s)$ で置き換えた式は, ポアソン比 ν を時間に関して一定値と仮定するようアラス空間における線形粘弾性体の解となる。それを逆変換することにより,

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) \quad (\text{III-8a})$$

$$u_i(t) = T_I(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^I(\theta, \nu) + T_{II}(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{II}(\theta, \nu) + T_{III}(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{III}(\theta) \quad (\text{III-8b})$$

が得られる。ここで,

$$K_M(t) = \int_0^t \mu(t-\tau) \frac{\partial T_M(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (M=I, II, III) \quad (\text{III-9})$$

が成立する。式(III-8b)を座標で偏微分することによりひずみが求められるので, $T_M(t)$ は ひずみの特異性の強さを表わすパラメータと考えられる。そこで, $T_M(t)$ を ひずみ拡大係数と呼ぶことにする。

式(II-66)より $\dot{\sigma}$ と $K_M(t)$, $T_M(t)$ の間には

$$\dot{\sigma} = \frac{n+1}{4} [K_I(t) T_I(t) + K_{II}(t) T_{II}(t)] + K_{III}(t) T_{III}(t) \quad (\text{III-10})$$

の関係があることがわかる。なお, 線形弾性体の場合には

$$K_M(t) = 2\mu T_M(t) \quad (M=I, II, III) \quad (\text{III-11})$$

となるので式(III-10)は式(III-3)に帰着する。

式(III-10)より粘弾性体の場合には弾性体の場合とは異なり, $\dot{\sigma}$ と動的応力拡大係数とは一対一に対応せず ひずみ拡大係数にも関係することかわかる。しかし, 動的応力拡大係数が求められれば, 式(III-9)(III-10)を利用して ひずみ拡大係数あるいは $\dot{\sigma}$ 積分の値を決定できるので, 粘弾性体の場合にも弾性体の場

合と同様に，き裂に応力波が入射する問題の解析は動的応力拡大係数を解析することに帰着される。

動的応力拡大係数については，現在までに種々の場合について解析が試みられている^(1-3, 5, 6)が現象が時間に依存するので数学的取扱いが困難である。解析的な解が求められているのは無限体中のき裂のような特殊な場合に限られている。したがって，き裂を含む有限物体の動的応力解析に有効な数値計算法の開発が必要である。き裂先端には応力の特異性が存在するので通常の有限要素法でき裂先端付近の応力・変位場を精度良く求めるためには細かい要素分割を必要とし，動的問題の解析では，計算時間が長大になるという問題点がある。

そこで，本節では，このような難点を解決するために，き裂先端近傍の解析解を変位関数とする特異要素を用いる有限要素法⁽⁷⁾を動的問題の解析に適用できるように拡張することを試みる。しかし，この方法では性質の異なる要素が用いられるので汎用のプログラムがそのままの形では使用できないという不便さがある。このため，J積分の積分経路独立な表示式を利用した動的応力拡大係数の有限要素解析について検討する。本手法は Rice の J 積分を用いる応力拡大係数の解析法⁽⁷⁾の動的問題への拡張と考えられる。最後に，衝撃破壊靱性値の測定に広く使用されている三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の評価法に

ついて検討する。

3.2.2. 特異要素を用いる有限要素法による

動的応力拡大係数の解析

(1) 有限要素法の定式化

図Ⅲ-1 に示したようなき裂を含む線形粘弾性体^(脚注)にたいし仮想仕事の原理を適用し, さらに時刻 $t=t_0$ から $t_0+\Delta t$ の間で積分すると

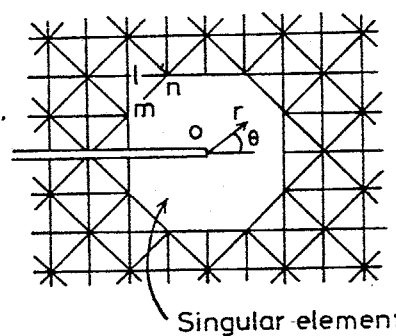
$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left\{ \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV - \int_S T_i \delta u_i ds \right\} dt = 0 \quad (\text{Ⅲ-12})$$

が得られる。ここでは, 取扱いが比較的容易な面外せん断変形 (Mode III) の場合について考える。

図Ⅲ-2 のように要素分割し, き裂先端では特異要素を用い, 各要素内の変位場を次式のように近似する。

$$u_3 = [N(x_1, x_2)]^e \{ \phi(t) \}^e \quad (\text{Ⅲ-13})$$

ここで, $[N(x_1, x_2)]^e$ は変位関数マトリックスであり, $\{ \phi(t) \}^e$ は未知パラメータのベクトルである。三角形要素は定ひずみ要素とし $[N(x_1, x_2)]^e$ と $\{ \phi(t) \}^e$



図Ⅲ-2 特異要素法を用いた要素分割

(脚注) 線形弾性体は線形粘弾性体の特別な場合と考えられる。

を、それぞれ通常の変位関数と節点ベクトルとする。き裂先端近傍の動的変位は式(Ⅲ-8b)より

$$u_3 = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta) T_{\text{III}}(t) \quad (\text{Ⅲ-14})$$

によって表わすことができるので、特異要素では $T_{\text{III}}(t)$ を変数 $\{\phi(t)\}^e$ とし $\sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta)$ を変位関数 $[N(x_1, x_2)]^e$ として採用する。特異要素に接している三角形要素では、図Ⅲ-2に示す三角形 nmn を例にとると、

$$\begin{aligned} u_3 &= [N(x_1, x_2)]^e \{\phi(t)\}^e \\ &= [N_n, N_m, N_r]^e \left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_n(t)}{\sqrt{r_n/2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta_n) T_{\text{III}}(t) \\ \frac{\phi_m(t)}{\sqrt{r_m/2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta_m) T_{\text{III}}(t) \end{array} \right\}^e \\ &= [N_n, N_m \sqrt{\frac{r_m}{2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta_m), N_r \sqrt{\frac{r_r}{2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta_r)]^e \left\{ \begin{array}{l} \phi_n(t) \\ T_{\text{III}}(t) \\ T_{\text{III}}(t) \end{array} \right\}^e \\ &= [N(x_1, x_2)^*]^e \{\phi(t)^*\}^e \quad (\text{Ⅲ-15}) \end{aligned}$$

となるので、 $[N(x_1, x_2)^*]^e$ および $\{\phi(t)^*\}^e$ をそれぞれ変位関数と節点変位とする。(脚注)

式(Ⅲ-13)を式(Ⅲ-12)に代入し $t=t_0$ において平衡が成り立っているとするとき次式が得られる。

$$\sum_e \left\{ \iint_{A_e} [B]^e T \{\Delta \sigma\} dx_1 dx_2 + \iint_{A_e} \rho [N]^e T [N]^e \{\Delta \phi\} dx_1 dx_2 \right\}$$

(脚注) 特異要素と三角形要素の境界線上で節点以外で変位が不連続になるという欠点がある。この問題に関しては、あらためて3.3.3節で検討する。

$$-\int_{\partial A_e} [N]^e T \{ \Delta T_3 \} d\Gamma = \{ 0 \} \quad (\text{III-16})$$

ここで、 A_e は考えている領域、 ∂A_e は表面力の与えられた領域である。また、

$$\{ \Delta \sigma \} = \{ \Delta \sigma_{13}, \Delta \sigma_{23} \}^T \quad (\text{III-17a})$$

$$[B] = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}^T [N(x_1, x_2)]^e \quad (\text{III-17b})$$

であり、 Σ は各要素からの寄与分を総和することを表わし、 Δ は時刻 t_0 から $t_0 + \Delta t$ の間の増分を表わし、 T は転置を表わす。

つぎに、式(III-16)に含まれる応力増分を節点変位で表わすことを考える。構成方程式が

$$\dot{\sigma}_{ij} + \beta \sigma_{ij} = 2\mu' (\dot{\epsilon}_{ij} + \alpha \epsilon_{ij}) \quad (\text{III-18a})$$

$$\dot{\sigma}_{kk} + \beta \sigma_{kk} = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \mu' (\dot{\epsilon}_{kk} + \alpha \epsilon_{kk}) \quad (\text{III-18b})$$

で与えられる標準線形固体について考える。ここで、 μ' 、 α 、 β は材料定数である。 $\alpha = 0$ の場合には上式はマクスウェル固体の構成方程式を $\alpha = \beta = 0$ の場合には弾性体の構成方程式を表わす。式(III-9)と(III-18)より動的応力拡大係数とひずみ拡大係数の関係は

$$K_{III}(t) + \beta K_{III}(t) = 2\mu' (\dot{T}_{III}(t) + \alpha T_{III}(t)) \quad (\text{III-19})$$

で与えられる。式(III-18)、(III-19)において微小時間 Δt 内では $\dot{\sigma}_{ij}$ 、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ が線形に変化すると仮定すると⁽⁸⁾、次式が成り立つ。

$$\left(\frac{2}{\Delta t} + \beta \right) \Delta \sigma_{ij} = 2\mu' \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} + \alpha \right) \Delta \epsilon_{ij} + 2\alpha \epsilon_{ij}(t_0) \right\} - 2\beta \sigma_{ij}(t_0) \quad (\text{III-20a})$$

$$\left(\frac{2}{\Delta t} + \beta \right) \Delta \sigma_{kk} = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \mu' \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} + \alpha \right) \Delta \epsilon_{kk} + 2\alpha \epsilon_{kk}(t_0) \right\} - 2\beta \sigma_{kk}(t_0) \quad (\text{III-20b})$$

$$\left(\frac{2}{\Delta t} + \beta\right) \Delta K_{III} = 2\mu' \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} + \alpha\right) \Delta T_{III} + 2\alpha T_{III}(t_0) \right\} - 2\beta K_{III}(t_0) \quad (\text{III-20c})$$

き裂先端近傍の応力は $K_{III}(t)$ によって決定されることに注意し、式(III-20)を用いて式(III-16)の $\Delta \sigma$ を消去すると

$$\sum_e [k]^e \{\Delta \phi\}^e + \sum_e [m]^e \{\Delta \dot{\phi}\}^e = \sum_e \{\Delta f\}^e + \sum_e \{\Delta f_{vis}\}^e \quad (\text{III-21})$$

が得られる。ここで、

$$[k]^e = \frac{2+\alpha\Delta t}{2+\beta\Delta t} \iint_{Ae} [B]^e{}^T [D] [B]^e dx_1 dx_2 \quad (\text{III-22a})$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \mu' \end{bmatrix} \quad (\text{III-22b})$$

$$[m]^e = \iint_{Ae} \rho [N]^e{}^T [N]^e dx_1 dx_2 \quad (\text{III-22c})$$

$$\{\Delta f\}^e = \int_{\Gamma_{oe}} [N]^e{}^T \{\Delta T_3\} d\Gamma \quad (\text{III-22d})$$

$$\{\Delta f_{vis}\}^e = \frac{2\Delta t}{2+\beta\Delta t} \iint_{Ae} \left\{ \beta [B]^e{}^T \{\sigma(t_0)\} - \alpha [B]^e{}^T [D] \{\varepsilon(t_0)\} \right\} dx_1 dx_2 \quad (\text{III-22e})$$

$$\{\sigma(t_0)\} = \{\sigma_{13}(t_0), \sigma_{23}(t_0)\}^T \quad (\text{III-22f})$$

$$\{\varepsilon(t_0)\} = \{2\varepsilon_{13}(t_0), 2\varepsilon_{23}(t_0)\}^T \quad (\text{III-22g})$$

であり、特異要素に対しては、上式は

$$[k]^e = \frac{2+\alpha\Delta t}{2+\beta\Delta t} \mu' \iint_{Ae} \frac{2}{\pi} dr d\theta \quad (\text{III-23a})$$

$$[m]^e = \iint_{Ae} 4\rho(1-\cos\theta) r^2 dr d\theta \quad (\text{III-23b})$$

$$\{\Delta f\}^e = \int_{\Gamma_{oe}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_3^{III}(\theta) \Delta T_3 \quad (\text{III-23c})$$

$$\{\Delta f_{vis}\}^e = \frac{\Delta t}{2+\beta\Delta t} \iint_{Ae} \frac{2}{\pi} dr d\theta \left\{ \beta K_{III}(t_0) - 2\alpha\mu' T_{III}(t_0) \right\} \quad (\text{III-23d})$$

となる。したがって、式(III-21)を逐次積分することにより、

$T_{III}(t)$ が求められるので式(III-20c)から動的応力拡大係数を定め

ることができ、なお、Mode I と Mode II の場合にも同様にし

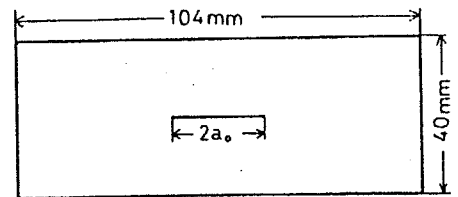
て、式(Ⅲ-21)と同様の式を得ることができる^(脚注)(付録Ⅰ参照)。

(2) 計算例

上述の手法による数値計算例を示す。なお、式(Ⅲ-21)の逐次積分では Newmark の $\beta = 1/6$ 法⁽¹¹⁾を用い、 $\Delta t = 0.2 \mu s$ とした。

単一モードの場合

図Ⅲ-3 に示すような長方形板の上下面に面外せん断力または引張力 σ が時間に関して階段関数状に作用するときのモードⅢまたはモードⅠ変形の計算例を示す。問題の対称性から板の1/4を考図Ⅲ-4のように要素分割し、斜線の部分を特異要素とした。



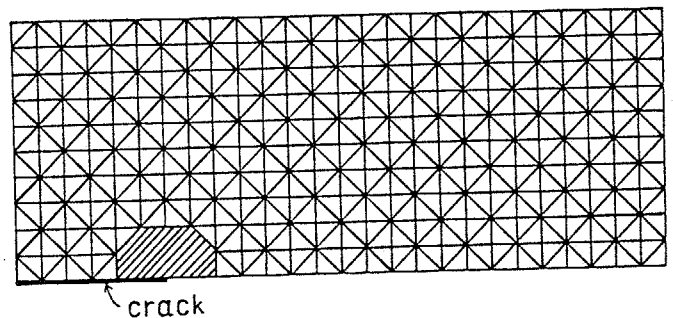
図Ⅲ-3 中央にき裂を有する長方形板

$$\rho = 2.45 \text{ Mg/m}^3$$

$$2a_0 = 24 \text{ mm}$$

$$\nu = 0.286$$

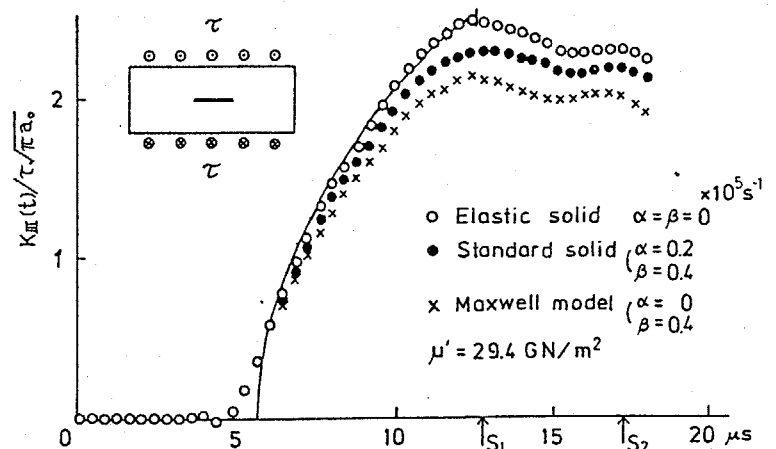
緩和弾性率を図Ⅲ-6に示す。



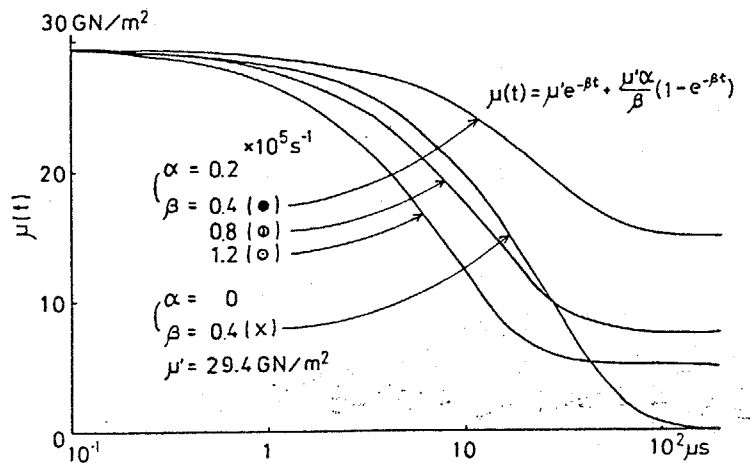
図Ⅲ-4 特異要素(斜線部)を用いた要素分割
(291節点, 507要素)

(脚注) 特異要素の変位関数にはき裂面に作用する表面力の影響が考慮されていないので内圧を及ぼすき裂問題では誤差が生じると考えられる^(9,10)。このような問題については、重ね合せの原理を利用してき裂面に表面力が作用しない問題に置き換えて解析する必要がある⁽¹⁰⁾。

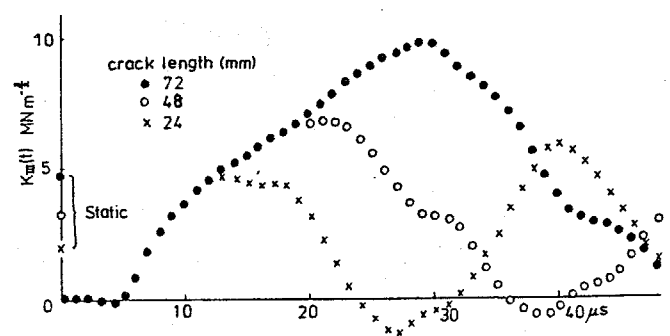
面外せん断力 τ が作用する場合の計算結果を図Ⅲ-5に示す。縦軸は無
限体中の静的応力拡大係
数 $\sqrt{\pi a_0}$ で無次元化した
動的応力拡大係数であり
、横軸は荷重が作用し始
めてからの時間である。
実線は弾性体中の半無限
き裂に対する解析解⁽¹²⁾で
ある。また、横軸上の S_1
、 S_2 は、それぞれ他のき
裂端で回折された応力波
および境界からの反射波
が考えているき裂端に入
射する時刻である。反射
波の影響が表われるま
では弾性体についての計算
結果と解析解は良く一致
している。図Ⅲ-6に、粘
弾性問題の計算に用いた



図Ⅲ-5 動的応力拡大係数の時間的变化 (ModeⅢ)



図Ⅲ-6 計算に使用した緩和弾性率



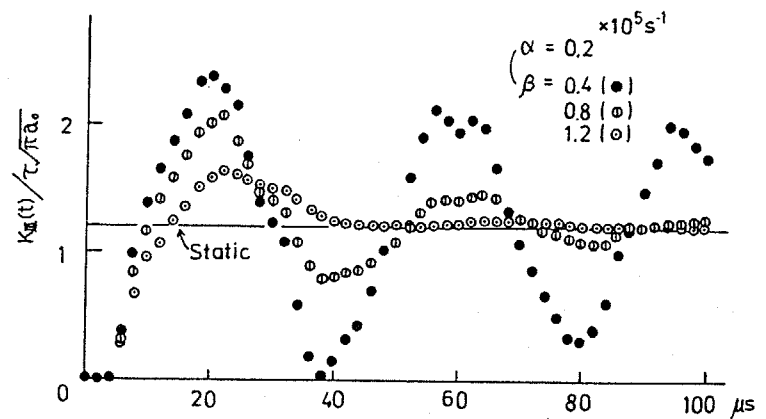
図Ⅲ-7 種々の裂長さに対する動的応力拡大係数の時間的变化 (線形弾性体, ModeⅢ)

$$\tau = 9.8 \text{ MPa}$$

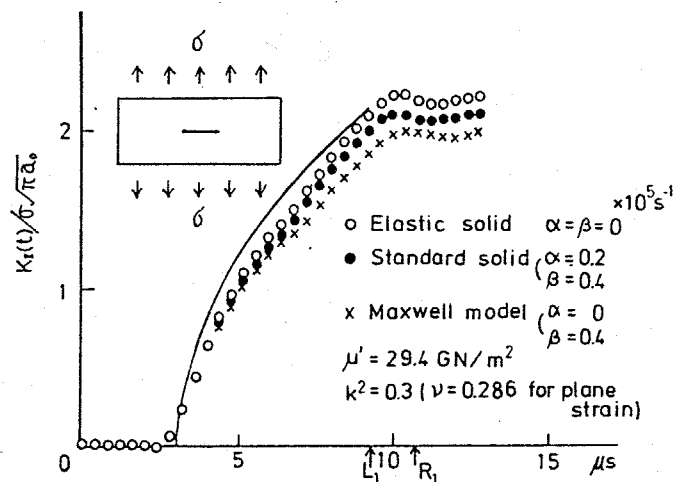
緩和弾性率を示す。粘弾性体の場合には粘性効果のために動的応力拡大係数が弾性体の場合に比べて小さくなっている。図Ⅲ-7に種々のき裂長さに対する弾性体の場合の $K_{II}(t)$ の時間的变化を示す。初期の間は $K_{II}(t)$ はき裂長さによらず同じように増加しているが、やがてき裂の短い順に(き裂の他端からの応力波がき裂先端に達する順に) $K_{II}(t)$ は増加しなくなり、いったん減少して静的な値

を中心に上下に振動している。図Ⅲ-8に標準線形固体についで α を一定値に保ち β を変えて計算した場合の結果を示す。ただし、 $2a_0 = 24\text{mm}$ である。 β の変化により振巾は変化するが周期はほとんど影響を受けていない。 β の大きい、どのほど振動かはやく減衰し静的解に収束している。

開口変位様式の場合

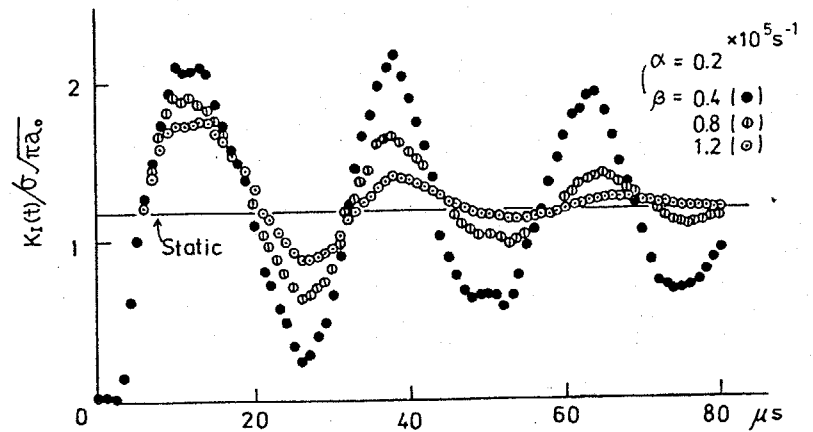


図Ⅲ-8 標準線形固体の動的応力拡大係数，実線は静的解を表わす
 $2a_0 = 24\text{mm}$



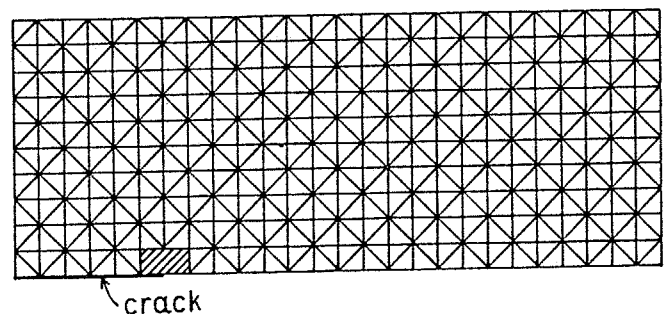
図Ⅲ-9 動的応力拡大係数の時間的变化 (Mode I), 実線は弾性体中の半無限き裂に対する解析解⁽⁷⁾

の動的応力拡大係数の時間的变化に対する計算結果を図Ⅲ-9, 図Ⅲ-10 に示す。ここで, き裂長さは $2a_0 = 24\text{mm}$ である。図Ⅲ-9 はせん断様式の場合の図Ⅲ-5, 図Ⅲ-8 と同様の結果が得られている。なお, 図Ⅲ-9 の横軸上の L, R は, それぞれ境界からの反射波および他のき裂端で発生した Rayleigh 波が考えているき裂先端に入射する時刻である。

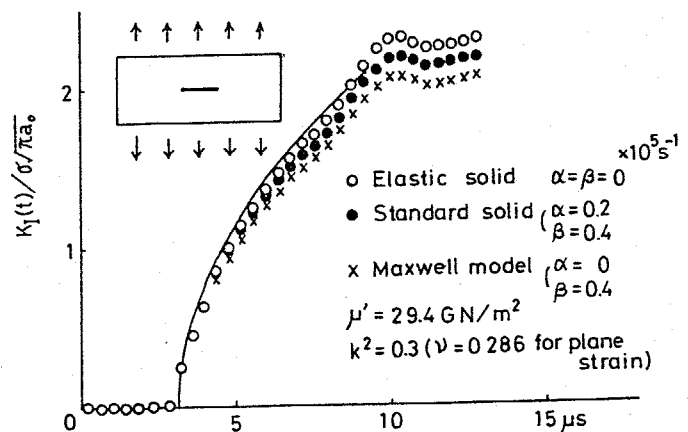


図Ⅲ-10 標準線形固体の動的応力拡大係数 (Mode I)

特異要素の大きさの影響を調べるために図Ⅲ-11 に示すような形状の特異要素を用いて計算した結果を図Ⅲ-12 に示す。図Ⅲ-9 の結果と比較して大きな差は生じていないが, 精度がやや改善され



図Ⅲ-11 斜線部のような形状の特異要素を用いた要素分割, 296節点, 577要素

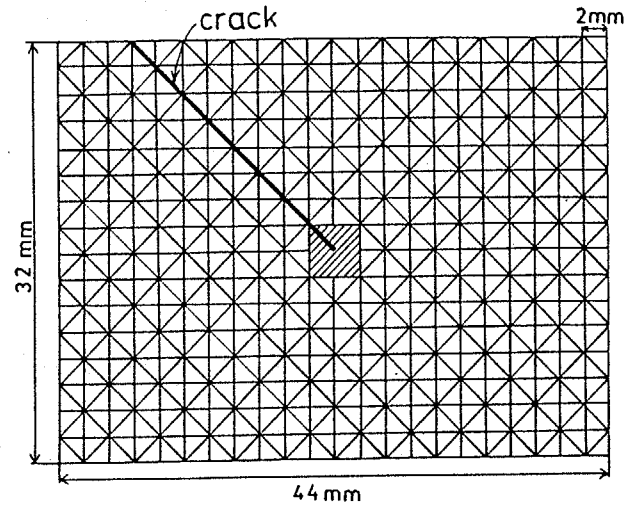


図Ⅲ-12 動的応力拡大係数の時間的变化 (図Ⅲ-11の要素分割を使用)

ている。

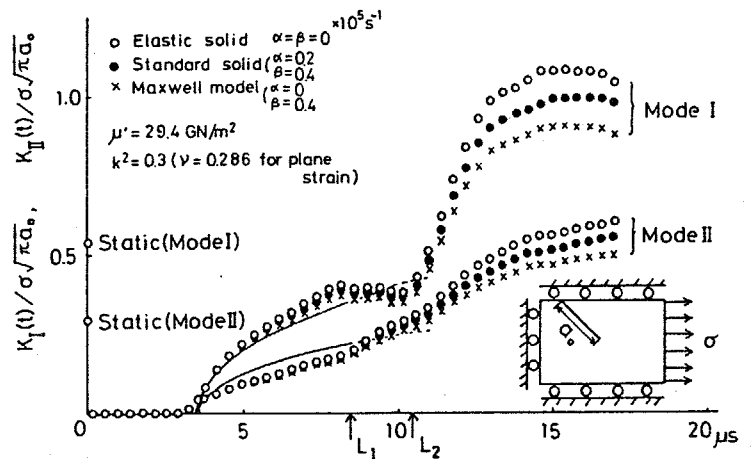
混合モードの場合

き裂が荷重の作用方向に対して 45° 傾斜した混合モードの場合 (図Ⅲ-14 参照) の計算結果を示す。計算に用いた有限要素法の要素分割および特異要素の形状を図Ⅲ-13 に示す。図Ⅲ-14



図Ⅲ-13 要素分割 (398節点, 697要素)
斜線部は特異要素の形状を表わす。

に無次元化されたモードⅠおよびモードⅡの動的応力拡大係数の時間的变化を示す。実線は無限体中の有限き裂に対する T_{max} と L_1 の弾性解⁽¹³⁾である。反射波の影響を受けるま



図Ⅲ-14 動的応力拡大係数の時間的变化 (混合モードの場合)

では弾性計算結果と解析解が良く一致していることは単一モードの場合と同様である。板の上下面で反射された応力波が時刻 L_1 に、左右の面で反射された応力波が時刻 L_2 にき裂面に入射する。混合モードの場合にも粘弾性体の動的応力拡大係数は弾性体と比べて小さく、粘性の影響が表われていることがわかる。

3.2.3. 積分を用いた動的応力拡大係数の有限要素解析

(1) 動的応力拡大係数の計算法

前節では、き裂先端近傍の解析解を変位関数とする特異要素を用いた有限要素法について述べた。この手法には、動的応力拡大係数が有限要素計算によって直接求められるという利点があるが、性質の異った要素を用いるので汎用のプログラムをそのまま利用できないという不便さがある。一方、静的な問題では、径路独立な Rice の積分を用いると要素分割の精粗にあまり影響されずに応力拡大係数を求められることが報告されている⁽⁷⁾。そこで、本節では、物体の慣性の影響を考慮したエネルギー解放率の積分径路(領域)独立な表示式を用いて動的応力拡大係数を評価する方法について検討する。

弾性問題の場合については、積分と動的応力拡大係数の間に式(Ⅲ-3)の関係式が成立する。したがって、単一モードの場合には式(Ⅲ-1a) または式(Ⅲ-1b) によって $\dot{J}$ を評価することにより動的応力拡大係数を求めることができる。粘弾性問題の場合には、式(Ⅲ-10) より明らかなように $\dot{J}$ は $T_M(t)$ ($M=I, II, III$) に依存する。式(Ⅲ-9)を利用して $\dot{J}$ を $K_M(t)$ だけで表わそうとすると $K_M(t)$ の履歴積分を含むようになり、後述するように弾性体の場合に比較して取扱いが幾分複雑になる。なお、粘弾性問題に対しては式(Ⅲ-1a) によって積分を評価す

ることかできる。

混合モードの場合には， $\int$ 積分の値から動的応力拡大係数を一意的に定めることはできない。そこで， $\int$ を

$$\int = \int^I + \int^{II} + \int^{III} \quad (\text{III-24})$$

のように各モード成分に分離する。面外せん変形に関する応力、変位成分は他のモードの成分と独立なので，モードIIIの分離は容易に行うことができ， $\int^{III}$ は

$$\begin{aligned} \int^{III} = & \iint_A [2\sigma_{3i} \varepsilon_{3i,1} + (\rho \ddot{u}_3 - F_3) u_{3,1}] dA \\ & - \int_P \sigma_{3i} n_i u_{3,1} dP \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (\text{III-25a})$$

または

$$\begin{aligned} \int^{III} = & \int_{\Gamma \cup \beta} [w e^{III} n_1 - \sigma_{3i} n_i u_{3,1}] dP \\ & + \iint_A (\rho \ddot{u}_3 - F_3) u_{3,1} dA \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (\text{III-25b})$$

で与えられる。ただし，

$$w e^{III} = \sigma_{31} \varepsilon_{31} + \sigma_{32} \varepsilon_{32} \quad (\text{III-26})$$

である。モードI成分およびモードII成分の分離に関しては，石川ら⁽¹⁴⁾がRiceの $\int$ 積分に対して試みているように x_1 軸（き裂面の接線方向にとっている）に関する応力および変位の対称性および反対称性を考慮することにより $\int^I$ と $\int^{II}$ とに分離することかできる。すなわち， x_1 軸に関して対称な点における値（肩にダッシュを付けて表わす）を用いて，応力，変位，ひずみおよび物体力に対して，

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^I \\ \sigma_{22}^I \\ \sigma_{12}^I \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} + \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} - \sigma_{12}' \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^{II} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} + \sigma_{12}' \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^I \\ \varepsilon_{22}^I \\ \varepsilon_{12}^I \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}' \\ \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}' \\ \varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}' \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{II} \\ \varepsilon_{22}^{II} \\ \varepsilon_{12}^{II} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}' \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}' \\ \varepsilon_{12} + \varepsilon_{12}' \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} F_1^I \\ F_2^I \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} F_1 + F_1' \\ F_2 - F_2' \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} F_1^{II} \\ F_2^{II} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} F_1 - F_1' \\ F_2 + F_2' \end{Bmatrix} \quad (\text{III-27})
\end{aligned}$$

のようにモードI成分とモードII成分とを定義すれば、 $\hat{J}^I$ と $\hat{J}^{II}$ は

$$\begin{aligned}
\hat{J}^M &= \iint_A [\sigma_{ij}^M \varepsilon_{ij,1}^M + (\rho \ddot{u}_i^M - F_i^M) u_{i,1}^M] dA \\
&\quad - \int_{\Gamma} T_i^M u_{i,1}^M d\Gamma \quad (i=1,2; M=I,II) \quad (\text{III-28a})
\end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}
\hat{J}^M &= \int_{\Gamma+\Gamma_3} [W e^M n_1 - T_i^M u_{i,1}^M] d\Gamma + \iint_A (\rho \ddot{u}_i^M - F_i^M) u_{i,1}^M dA \\
&\quad (i=1,2, M=I,II) \quad (\text{III-28b})
\end{aligned}$$

で与えられる。ただし、

$$W e^M = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^M \varepsilon_{ij}^M \quad (i=1,2, M=I,II) \quad (\text{III-29})$$

である。ここで、上添字Mについては総和規約を適用しない。
式(III-25), (III-28)は、いずれも経路独立な積分であり、式
(III-3)または(III-10)を求めたのと同様にして次式が得られ
る。弾性問題については、

$$\left. \begin{aligned} \dot{J}^I &= \frac{\kappa+1}{8\mu} K_I^2(t) \\ \dot{J}^{II} &= \frac{\kappa+1}{8\mu} K_{II}^2(t) \\ \dot{J}^{III} &= \frac{1}{2\mu} K_{III}^2(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-30a})$$

粘弾性問題に対しては,

$$\left. \begin{aligned} \dot{J}^I &= \frac{\kappa+1}{4} K_I(t) T_I(t) \\ \dot{J}^{II} &= \frac{\kappa+1}{4} K_{II}(t) T_{II}(t) \\ \dot{J}^{III} &= K_{III}(t) T_{III}(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-30b})$$

となる。したがって、混合モードの場合には、弾性問題に対しては、式(III-25a), (III-28a) によって $\dot{J}^M$ を評価することにより動的応力拡大係数を求めることができる。

粘弾性問題の場合には、 $\dot{J}$, $\dot{J}^M$ は $T_M(t)$ にも依存するので、式(III-9)の関係式を用いて $K_M(t)$ だけで表わそうとすると、 $K_M(t)$ の履歴積分を含み計算が複雑になる。そこで、 $\dot{J}$ の増分 $\Delta \dot{J}$ と $t=t_0$ における $K_M(t_0)$ と $T_M(t_0)$ の値から ΔK_M , ΔT_M を求める。

まず、モードIの場合について考える。式(III-10)より $t=t_0$ から $t_0+\Delta t$ の間の $\dot{J}$ の増分 $\Delta \dot{J}$ は、

$$\Delta \dot{J} = \frac{\kappa+1}{4} [T_I(t_0) \Delta K_I + K_I(t_0) \Delta T_I + \Delta K_I \Delta T_I] \quad (\text{III-31})$$

となる。構成方程式が、式(III-18)で与えられる場合には、 $K_I(t)$ と $T_I(t)$ との関係は、

$$\dot{K}_I(t) + \beta K_I(t) = 2\mu' [\dot{T}_I(t) + \alpha T_I(t)] \quad (\text{III-32})$$

となる。式(Ⅲ-20)を導いたのと同様に(2, 微小時間 Δt 内では K_I , T_I が線形に変化すると仮定すると

$$\left(\frac{2}{\Delta t} + \beta\right) \Delta K_I = 2\mu' \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} + \alpha\right) \Delta T_I + 2\alpha T_I(t_0) \right\} - 2\beta K_I(t_0) \quad (\text{Ⅲ-33})$$

が得られる。上式と式(Ⅲ-31)から ΔT_I を消去し ΔK_I について解くと次式が得られる。

$$\Delta K_I = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \quad (\text{Ⅲ-34})$$

ただし,

$$A = \frac{2\mu' \left(\frac{2}{\Delta t} - \alpha\right) T_I(t_0) + \left(\frac{2}{\Delta t} + 3\beta\right) K_I(t_0)}{\frac{2}{\Delta t} + \beta} \quad (\text{Ⅲ-35a})$$

$$B = \frac{2\beta K_I^2(t_0) - 4\alpha\mu' K_I(t_0) T_I(t_0) - 2\mu' \left(\frac{2}{\Delta t} + \alpha\right) \frac{4}{K+1} \Delta J}{\frac{2}{\Delta t} + \beta} \quad (\text{Ⅲ-35b})$$

である。式(Ⅲ-34)の根号の符号は ΔJ と ΔK_I とが同符号になるように定めた。 ΔT_I の値は, ΔK_I の値を用いて, 式(Ⅲ-33)から求められる。なお, 他の場合につり2と同様な手続によって式(Ⅲ-34)と同様の式を得ることができる。したがって, 有限要素法による計算結果を用いて全積分の値を評価すれば, 式(Ⅲ-34)から動的応力拡大係数が求められる。

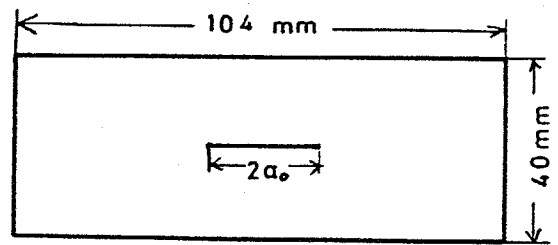
(2) 計算例

上述の手法を用いて行った数値計算例を示す。要素としては三角形定ひずみ要素を用いた。式(Ⅲ-1a), (Ⅲ-28a) の中の $\varepsilon_{ij,1}$, $\varepsilon_{ij,1}^M$ は, つぎのようにして計算した。まず, 定ひずみ

要素を用いて計算された各要素のひずみ ε_{ij} , ε_{ij}^M を各節点に振り分ける。この際、ある節点に連なる要素のひずみを各要素の面積を重みとして平均し、その値をその節点のひずみとする。つぎに、一次の内挿関数を用いて要素内の任意の点のひずみ、 ε_{ij}^M を表わし、これから $\varepsilon_{ij,1}$, $\varepsilon_{ij,1}^M$ を求めた。なお、有限要素計算における逐次積分には Newmark の $\beta = 1/6$ 法⁽¹⁾を用い、時間増分は $\Delta t = 0.2 \mu s$ とした。

単一モードの場合

図Ⅲ-15 に示すような長方形板(前節で取扱った図Ⅲ-3 の長方形板と同一形状)の上下面に引張力または面内せん断力などが時間に関して階段関数状に作用するときのモードⅠまたはモードⅡ変形の場合の計算例を示す。問題の対称性から板の 1/4 を考え、図Ⅲ-16 のように要素分割を行った。図中の斜線部は、比較のために行った特異要素法による計算の際に用いた特異要



図Ⅲ-15 中央にき裂を有する長方形板

$$\rho = 2.45 \text{ Mg/m}^3, \nu = 0.25$$

$$\mu' = 2.94 \text{ GN/m}^2, 2a_0 = 24 \text{ mm}$$

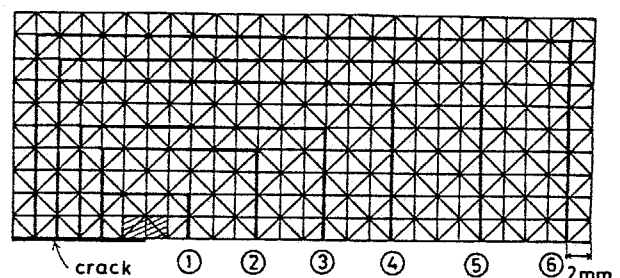
$$\text{弾性体 } \alpha = \beta = 0 \text{ (○, □)}$$

$$\text{標準線形固体 (●, ■)}$$

$$\alpha = 0.2 \times 10^5 \text{ s}^{-1}, \beta = 0.4 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{マックスウェルモデル (×, +)}$$

$$\alpha = 0, \beta = 0.4 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$$



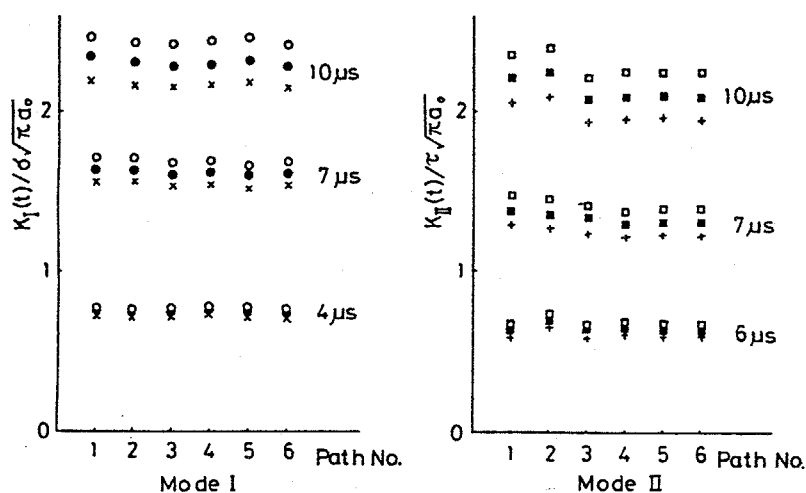
図Ⅲ-16 要素分割と積分経路

(単一モード)

297 節点, 520 要素

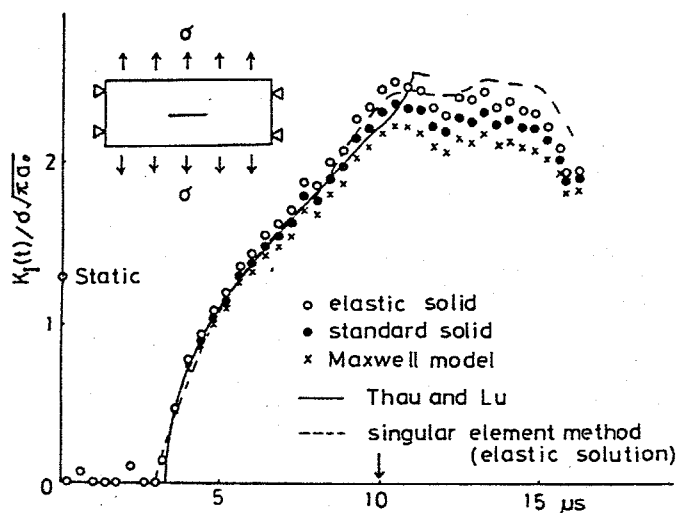
素の形状を表わす。今によって $K_{II}(t)$ を求めるときには、斜線の部分と他の部分と同様の要素分割を行っている。図中に記入されている①～⑥は、 $\int$ を計算するための経路を表わしている。 $\int$ 積分は式(Ⅲ-1a)によって評価した。なお、弾性問題に対しては式(Ⅲ-1b)による計算も試みたが、ほぼ同様の結果が得られた。

図Ⅲ-17は、各経路に対する動的応力拡大係数の計算結果を荷重が作用し始めてからの時間をパラメータとして示した。



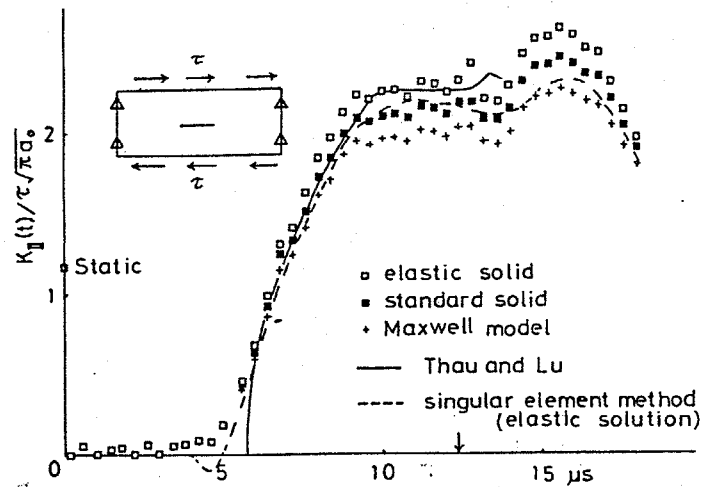
図Ⅲ-17 経路独立性(単モード)

のである。 $K_{I}(t)$, $K_{II}(t)$ の両者とも経路によらずほぼ一定値となっている。図Ⅲ-18, Ⅲ-19は、経路5に対する計算結果である。比較のために特異要素法による弾性計算の結果を破線で示した。また、実線は無限体中の有

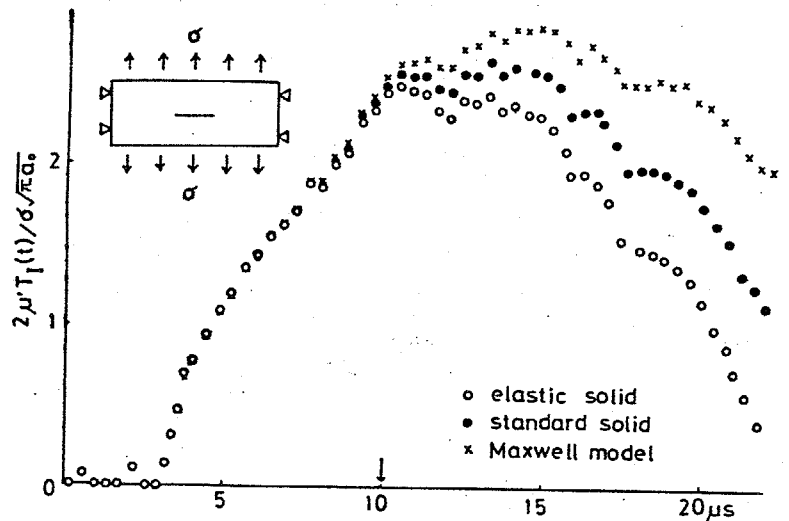


図Ⅲ-18 モードⅠの動的応力拡大係数の時間的变化 (経路 No. 5)

限き裂に対する Thau と Lu の解析解 (13) を表わす。図中の ↓印は板の上下面で反射された応力波が考慮しているき裂端に再び入射し有限板であることの影響が現われる時刻である。比較的粗い要素分割により、積分を評価することにより精度良く動的応力拡大係数が求められることがわかる。なお、本手法に求めた静的応力拡大係数の値を図中に Static として示した。



図Ⅲ-19 モードⅡの動的応力拡大係数の時間的变化(径路No.5)



図Ⅲ-20 モードⅠのひずみ拡大係数の時間的变化(径路No.5)

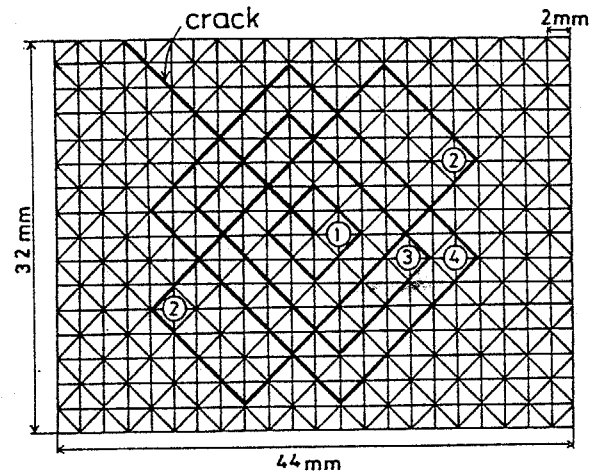
図Ⅲ-20 に、モードⅠの場合のひずみ拡大係数の時間的变化を示す。弾性体においては、式(Ⅲ-32)より $K_I(t) = 2\mu'T_I(t)$, ($\alpha = \beta = 0$) が成り立つ。粘弾性体の場合は粘性効果のために動的応力拡大係数の最大値は弾性体に対して小さくなっているが、ひずみ拡大係数については大きくなっている。従来の研究においては、粘弾性体の破壊に対して線形破壊力学を適用し、応力拡大

係数を破壊条件式を表わそうとする試みが多く行われている。
 しかし、複雑な負荷条件に対しては応力拡大係数だけでは統一的な整理ができず、むしろ、荷重履歴および温度によらずひずみ拡大係数が一定値に達したときに、き裂が進展を開始するといふ実験結果が(限定された条件下ではあるが)得られている。⁽¹⁵⁾したがって、高分子材料の破壊については、今後は粘性挙動を考慮したより詳細な検討が必要であろう。

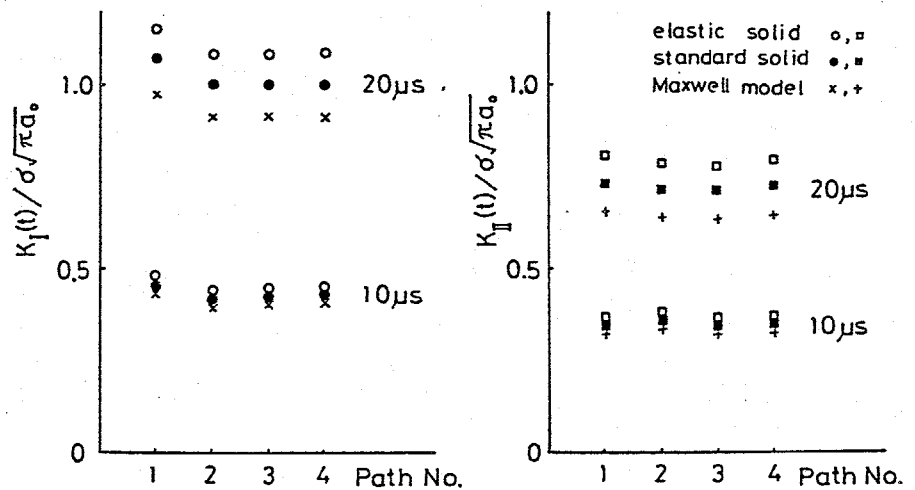
混合モードの場合

き裂が荷重方向に対して 45° 傾斜した混合モードの場合の計算結果を示す(図Ⅲ-23参照, 荷重は時間に関して階段関数状に作用する)。計算を行った有限要素法の要素分割および $\int_I$, $\int_{II}$ の積分経路を図Ⅲ-21に示す。

以下では、式(Ⅲ-28a)によって $\int_I$, $\int_{II}$ を評価した場合の結果を示す。弾性問題につ

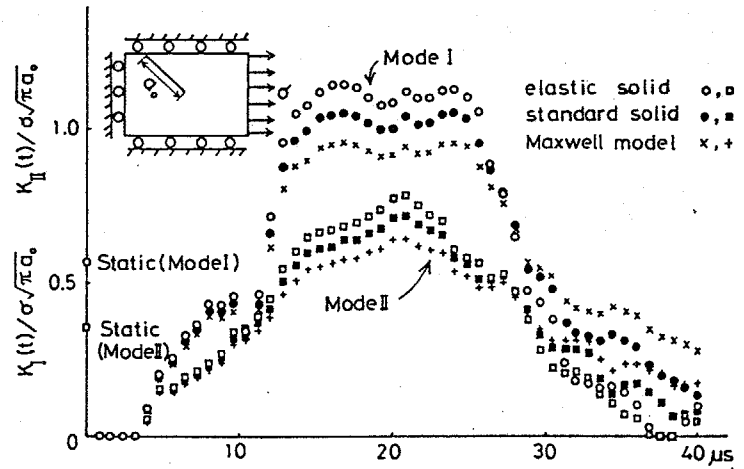


図Ⅲ-21 要素分割と積分経路
(混合モード)
き裂長さ $2a_0 = 22.63 \text{ mm}$

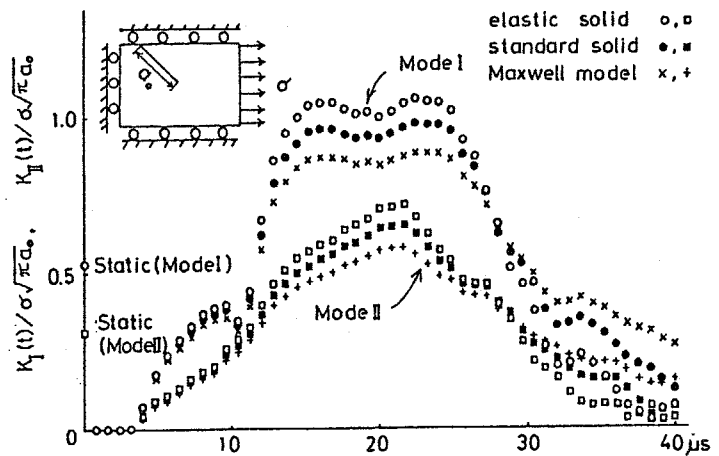


図Ⅲ-22 経路独立性(混合モード)

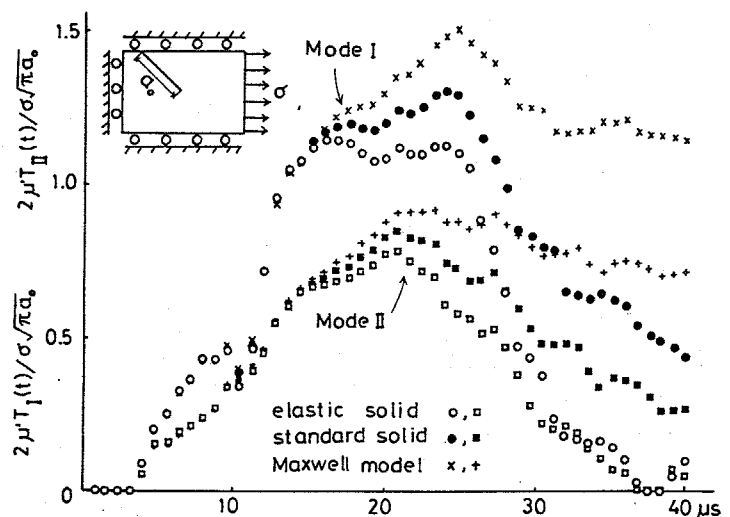
112は式(Ⅲ-28b)による計算と試みたが、ほぼ同様の結果が得られた。図Ⅲ-22は、各時刻における動的応力拡大係数の値を各々の経路に対してプロットしたものである。単一モードの場合と同様に経路によらずほぼ等しい値が得られている。図Ⅲ-23に経路3によって求めた動的応力拡大係数の時間的变化を示す。また、比較のために図Ⅲ-13の要素分割を用いた特異要素法による結果を図Ⅲ-24に示す。両手法により、ほぼ等しい結果が得られていることがわかる。図Ⅲ-25にひずみ拡大係数の時間的变化を



図Ⅲ-23 混合モードの動的応力拡大係数(経路No.3)



図Ⅲ-24 混合モードの動的応力拡大係数(特異要素法による結果)



図Ⅲ-25 ひずみ拡大係数(経路No.3)

示す。 $K_M(t)$ と $T_M(t)$ に対して単一モードと同様の傾向がみられる。

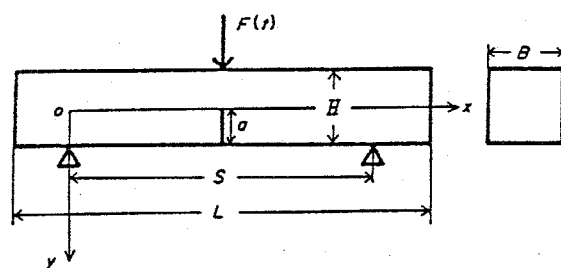
3.2.4. 三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の解析

動的破壊靱性値 K_d を得るために、油圧式の引張試験機⁽¹⁶⁾、落錐式試験機⁽¹⁷⁾、計装化シャルピー試験機⁽¹⁸⁾、ホプキンソンバー式の衝撃試験装置⁽¹⁹⁾などを用いた方法が試みられているが、静的荷重下における平面ひずみ破壊靱性試験法のような標準的な試験法は未だ確立されていない。静的破壊靱性試験に対して動的破壊靱性試験で特に問題となることは、動的応力拡大係数の正確な算定である。前節の計算例からも推定されるように、慣性力の影響により動的応力拡大係数は静的な解析から得られるものとは異った値となる。そこで、本節では落錐試験やシャルピー試験などで広く使用されている三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の解析法について検討する。

(1) 動的応力拡大係数の簡便式

簡便式の導出

前節で示したように任意形状の物体の動的応力拡大係数は有限要素法によって解析することができ。しかしながら、常に



図Ⅲ-26 三点曲げ試験

有限要素計算にたよることは経済的でない。そこで、三点曲げ試験片の動的応力拡大係数を求めるための簡便式を導出する。

図Ⅲ-26 に示すような三点曲げ試験片を考え、解析においては小規模降伏状態を仮定し材料を線形弾性体と仮定する。図において $O-x, y$ は直角座標系である。試験片中央に集中荷重 $F(t)$ が作用する場合の y 軸方向のたわみ u_y は Nash⁽²⁰⁾ により求められており、次式で与えられる。

$$u_y(\xi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sin \omega_m t + B_m \cos \omega_m t) Y_m(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y(\xi) Y(1/2)}{\omega_m W_m S} \int_0^t F(\eta) \sin \omega_m (t-\eta) d\eta \quad (\text{Ⅲ-36})$$

ただし、

$$A_m = \frac{\rho A}{\omega_m W_m} \int_0^1 \dot{u}_y(\xi, 0) Y_m(\xi) d\xi \quad (\text{Ⅲ-37a})$$

$$B_m = \frac{\rho A}{W_m} \int_0^1 u_y(\xi, 0) Y_m(\xi) d\xi \quad (\text{Ⅲ-37b})$$

$$W_m = \rho A \int_0^1 Y_m^2(\xi) d\xi \quad (\xi = x/S) \quad (\text{Ⅲ-37c})$$

であり、 ξ はスパン長さ S で無次元化された x 座標、 ρ は密度

、 A は試験片の全断面積 ($B \times H$) である。固有関数 $Y_m(\xi)$ は

$$Y_m(\xi) = 2D n_m^2 I \left[\frac{\sin n_m \sinh(n_m/2) \sinh n_m \xi + \sin(n_m/2) \sinh n_m \sinh n_m \xi}{D I n_m \{ \sinh(n_m/2) \sinh n_m - \sinh(n_m/2) \sin n_m \} - (4S/n_m) \sin(n_m/2) \sinh n_m} \right]$$

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \quad (\text{Ⅲ-38})$$

で与えられる。ここで、

$$I = \frac{BH^3}{12} \quad (\text{Ⅲ-39a})$$

$$D = \frac{H}{6I} I \quad (\text{Ⅲ-39b})$$

$$I = I\left(\frac{a}{H}\right) = 65\left(\frac{a}{H}\right)^2 - 87.3\left(\frac{a}{H}\right)^3 + 205\left(\frac{a}{H}\right)^4 \quad (\text{Ⅲ-39c})$$

である。また、固有角振動数 ω_m は

$$\omega_m^2 = \left(\frac{n_m}{S}\right)^4 \frac{EI}{\rho A} \quad (\text{III-40})$$

で与えられる。ここで、 $n_m (m=1, 2, 3, \dots)$ は方程式

$$\tan \frac{n_m}{2} = \frac{2S}{DI(n_m/2)} + \tanh \frac{n_m}{2} \quad (\text{III-41})$$

の第 m 番目の根である。

動的応力拡大係数は、き裂先端近傍の変位に比例するので、

$$K_I(t) = k_0 u_y(\frac{1}{2}, t) \quad (\text{III-42})$$

と置くことができる。ここで、 k_0 は比例定数である。き裂先端の動的変位場は動的応力拡大が時間的に変化することを除けば静的な場合と同形であり、静的解を用いて k_0 を決定することができる。

荷重が静的に作用する場合の試験片中央のたわみは式(III-36)より

$$u_{ys}(\frac{1}{2}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2(\frac{1}{2})}{\omega_m^2 W_m S} F(t) \quad (\text{III-43})$$

で表わされる。また、静的応力拡大係数 K_S は

$$K_S = \frac{6SF(t)}{4BH^2} \sqrt{\pi a} \bar{\Psi}_s \quad (\text{III-44})$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_s = \bar{\Psi}_s\left(\frac{a}{H}\right) = & 1.090 - 1.735\left(\frac{a}{H}\right) + 8.20\left(\frac{a}{H}\right)^2 \\ & - 14.18\left(\frac{a}{H}\right)^3 + 14.57\left(\frac{a}{H}\right)^4 \end{aligned}$$

で与えられる⁽²⁾。したがって、式(III-42)~(III-44)より、 k_0 は、

$$k_0 = K_s / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^2(1/2)}{\omega_n^2 W_n S} F(t) \quad (\text{III-45})$$

したがって、動的応力拡大係数と静的応力拡大係数（静的な公式（III-44）を用いて求めた値）の比は

$$\frac{K_I(t)}{K_s} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^2(1/2)}{\omega_n^2 W_n}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^2(1/2)}{\omega_n^2 W_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau}{F(t)} \quad (\text{III-46})$$

で表わされる。ただし、 $u_y, \dot{u}_y$ の初期値はゼロと仮定されている。

つぎに、衝撃破壊試験で実現される荷重波形に近い鋸切り波状パルス荷重の場合について考える。この場合、 $F(t)$ は

$$F(t) = \frac{t}{t_f} F_{\max} \quad t \leq t_f \quad (\text{III-47})$$

によって表わすことができる。ここで、 t_f は $F(t)$ が最大値 $F_{\max}$ に達するまでの時間である。式（III-47）を式（III-46）に代入すると

$$\frac{K_I(t)}{K_{s\max}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{t_f} \left[t - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t \right] \quad t \leq t_f \quad (\text{III-48})$$

ここで、

$$C_n = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^2(1/2)}{\omega_n^2 W_n}} \frac{Y_n^2(1/2)}{\omega_n^2 W_n}$$

であり、 $K_{s\max}$ は式（III-44）に $F(t) = F_{\max}$ を代入して得られる静的応力拡大係数の値である。疲労き裂入り標準シャルピ試験片（ $H=B=10\text{mm}$, $S=40\text{mm}$, $L=55\text{mm}$ ）に対し、 C_m/C_1

($m=2\sim 5$) の値を求めると表Ⅲ-2 のようになる(数値は%で表示されている)。この結果から、試験片に基本振動モード以外を無視して良い近似が得られていることが推察される。したがって、動的応力拡大係数の簡便式として式(Ⅲ-46)より

$$\frac{K(t)}{K_s} = \frac{\omega_1}{F(t)} \int_0^t F(\eta) \sin \omega_1(t-\eta) d\eta \quad (\text{Ⅲ-49})$$

が得られる。

有限要素計算結果との比較

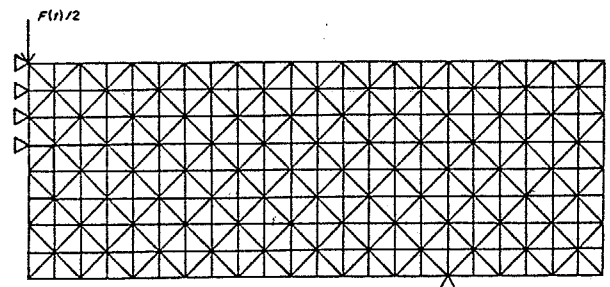
式(Ⅲ-49)の精度を確かめるために、3.2.2 節で述べた特異要素を用いた有限要素法による計算を行った。試験片は

疲労き裂入り標準シャルピー試験片とし、材料定数は横せん断係数 $\mu = 79.4 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.286$ 、密度 $\rho = 7.84 \text{ Mg/m}^3$ を採用した。問題の対称性から試験片の半分を考え、図Ⅲ-27 のように要素分割(要素分割様式 M-1, 207 節点, 352 要素)とした。さらに、442 節点,

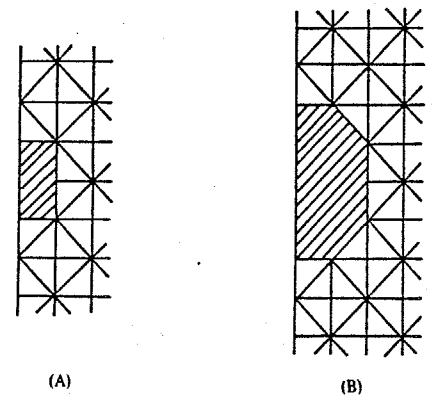
a/H	c_2/c_1	c_3/c_1	c_4/c_1	c_5/c_1
0.1	1.32	0.18	0.06	0.02
0.2	1.46	0.21	0.06	0.02
0.3	1.50	0.21	0.05	0.02
0.4	1.37	0.17	0.04	0.02
0.5	1.12	0.13	0.03	0.01
0.6	0.84	0.09	0.02	0.01

(%)

表Ⅲ-2 シャルピー試験片に対する c_m/c_1 の値



図Ⅲ-27 要素分割 (M-I)
207 節点, 352 要素



図Ⅲ-28 計算に採用した特異要素の形状(斜線部)

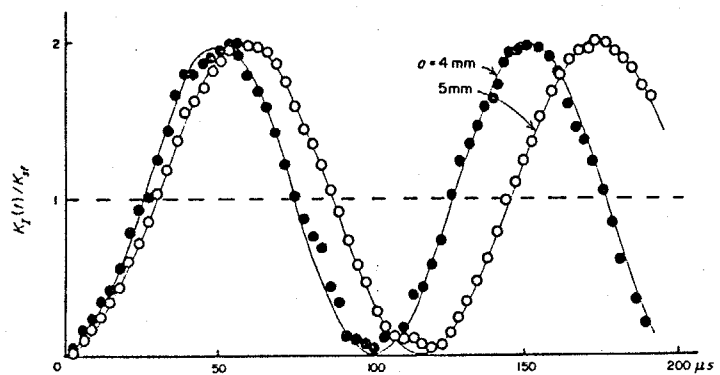
792 要素 (M-2) および 765 節点, 1408 要素 (M-3) の要素分割を行った。また, 特異要素の形状としては図Ⅲ-28 に示すような A, B の二種類を採用した。平面ひずみ状態を仮定してすべての計算を行った。

Mesh	Singular element	a=5 mm	a=4 mm	a=3 mm
M-1	A	0.96	1.02	0.98
M-2	A	0.96	0.98	0.96
	B	0.99	0.95	0.99
M-3	B	0.94	0.90	0.93

まず, 外荷重が静的に作用する場合の計算結果を表Ⅲ-3 に示す。表には, 有限要素計算によ

表Ⅲ-3 無次元化された静的応力拡大係数の値 K_{sf}/K_s

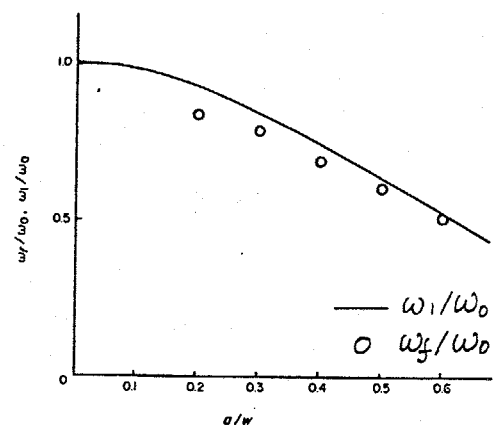
り得られた値 K_{sf} を式(Ⅲ-44) によって求められた値 K_s で無次元化した値が示されている。



一番粗い要素分割 M-1 (特異要素 A) で十分な精度が得られていることが

図Ⅲ-29 荷重 $F(t)$ が時間に関して階段関数状に作用する場合の無次元化された動的応力拡大係数の時間的变化。--- 静的解 --- 式(Ⅲ-50)

わかる。そこで, 以後の動的計算はこの要素分割を用いて行った。有限要素法の時間積分には Newmark の $\beta=1/6$ 法を用い時間増分は $\Delta t=0.15 \mu s$ とした。



図Ⅲ-29 に荷重 $F(t)$ が時間に関して階段関数状に作用する場合の結

図Ⅲ-30 式(Ⅲ-40) により求めた値 ω_1 と有限要素計算により求めた値 ω_2 の比較

果を示す。縦軸は有限要素計算によって求められた静的解で無次元化された動的応力拡大係数を表わし、横軸は荷重が作用し始めてからの時間を表わす。動的応力拡大係数は静的解(破線)を中心に上下に振動しており図中の細線のように

$$\frac{K_I(t)}{K_{sf}} = 1 - \cos \omega_d t \quad (\text{III-50})$$

による近似が可能である。また、簡便式(III-49)による動的応力拡大係数は

$$\frac{K_I(t)}{K_s} = 1 - \cos \omega_1 t \quad (\text{III-51})$$

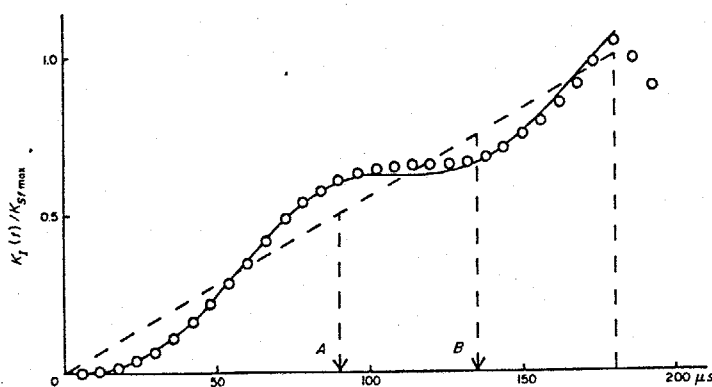
で与えられる。そこで、有限要素計算による値 ω_d と式(III-40)によって求められた値 ω_1 を比較すると図III-30のようになる。ただし、図には次式で与えられる単純はりの固有振動数 ω_0 で無次元化された値が示されている。

$$\omega_0 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{III-52})$$

実線は式(III-40)による結果であり、丸印は有限要素計算による結果である。両者は良く一致している。

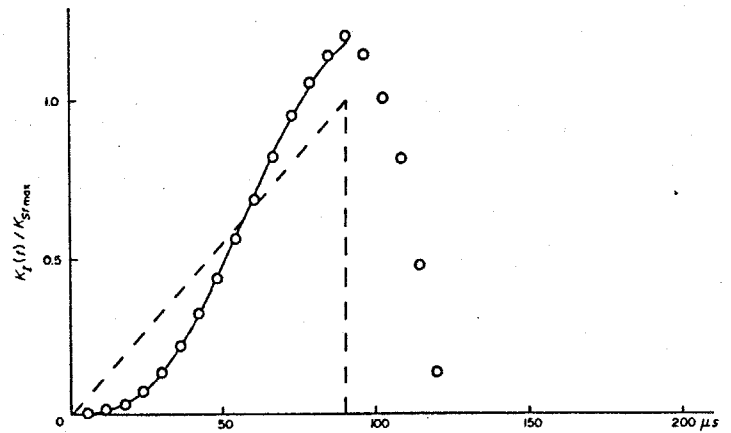
つぎに、鋸切り歯状パルス波荷重に対する結果を図III-31から図III-33

に示す。最大荷重における静的応力拡大係数の値

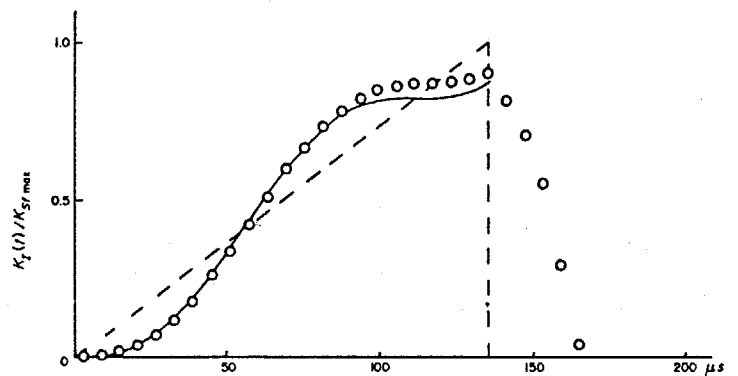


図III-31 鋸切り歯状パルス荷重に対する動的応力拡大係数の時間的变化
—— 簡便式(III-53)による結果
--- 静的解

K_{stmax} で無次元化された動的応力拡大係数をとっている。図中の丸印は有限要素法による計算結果を示す。また、破壊は静的な解析により得られた動的応力拡大係数の値を示している。動的応力拡大係数の値は静的解のまわりを振動しながら増加していくことがわかる。図Ⅲ-31のA, B点で除荷した場合の結果を図Ⅲ-32と図Ⅲ-33に示す。



図Ⅲ-32 動的応力拡大係数の時間的变化
図Ⅲ-31のA点で除荷した場合の結果



図Ⅲ-33 動的応力拡大係数の時間的变化
図Ⅲ-31のB点で除荷した場合の結果

す。図Ⅲ-32では動的応力拡大係数は静的解析で得られる値の約1.2倍になっており、図Ⅲ-33では約0.9倍になっている。したがって、衝撃破壊試験において慣性力の影響を無視すると応力拡大係数の値に誤差を生じることが予想される。

鋸切り波状パルス荷重に対しては、式(Ⅲ-49)は

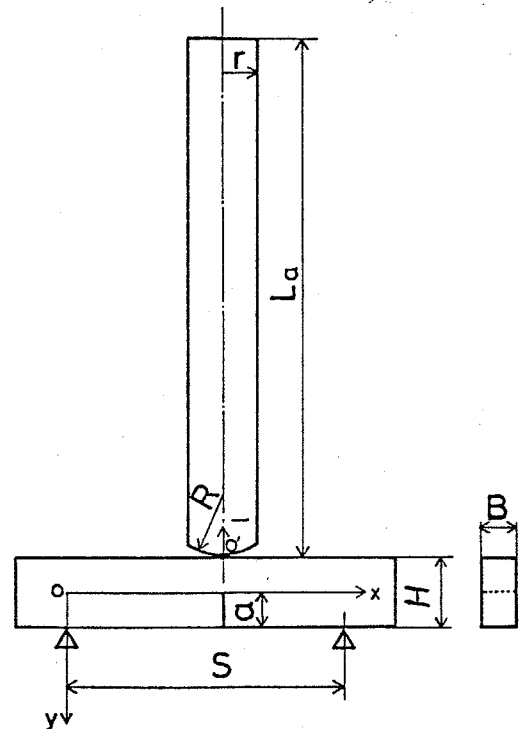
$$\frac{K_I(t)}{K_{stmax}} = \frac{1}{t_f} \left[t - \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \quad t \leq t_f \quad (\text{Ⅲ-53})$$

となる。この場合の計算結果を図Ⅲ-31～Ⅲ-33 に実線で示した。簡便式による結果は有限要素計算結果と良く一致している。

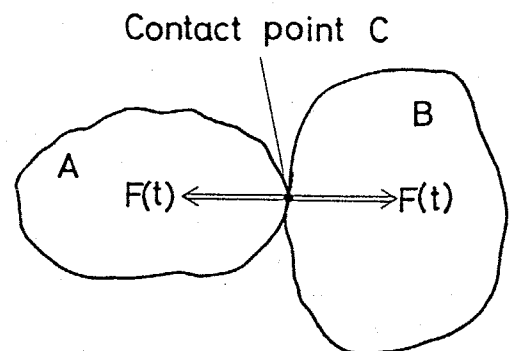
(2) 衝撃荷重の評価

Hertzの接触理論を利用した衝撃力の解析

実際の衝撃試験に際して、式(Ⅲ-49)を用いて動的応力拡大係数を定めるためには、衝撃力 $F(t)$ を測定することが必要である。しかし、衝撃力は衝撃体と試験片との二体接触によって定まるので衝撃力を厳密に求めることは一般に困難な問題である。そこで、本節では、図Ⅲ-34 のように試験片が落下円柱によって衝撃される場合を想定し、落下円柱と試験片の接触点近傍の局所変形に対して Hertz の接触理論を利用した近似的な解法⁽²²⁾によって衝撃力を解析する。



図Ⅲ-34 撓を有するはり先端面に曲率を有する円柱の衝撃モデル



図Ⅲ-35 衝突モデル

図Ⅲ-35 に示すように2物体 A, B が相対速度 v で衝突する場合を考

え, C点で A, B それぞれに作用する力を $F(t)$ とする。衝撃速度が固体内の波動伝播速度に比較して十分小さいことを仮定すると $F(t)$ は,

$$F(t) = k_c [v_0 t - \eta_A(t) - \eta_B(t)]^{3/2} \quad (\text{III-54})$$

で与えられる。⁽²³⁾ ここで,

$$\eta_A(t) = \int_0^t F(\tau) h_A(t-\tau) d\tau \quad (\text{III-55a})$$

$$\eta_B(t) = \int_0^t F(\tau) h_B(t-\tau) d\tau \quad (\text{III-55b})$$

であり, $h_A(t)$, $h_B(t)$ は, それぞれ C点における固体 A, B の変位に関する衝撃応答関数である。また, k_c は材料定数ならびに接触部の形状によって決定される Hertz の接触ばね定数である。式 (III-54) を $F(0)=0$ の初期条件のもとで解くことによって任意時刻の $F(t)$ を求めることができる。

図 IV-34 のような自由円柱の端面の中心 O' に単位インパルス力か加わる場合を考え, 端面からわずかに入った円柱の断面では, 応力および変位が一様に分布すると仮定すると, 任意位置における縦変位の衝撃応答関数 $h_A(l, t)$ は次式で与えられる⁽²²⁾

$$h_A(l, t) = \frac{C_a}{A_a E_a} \left(\frac{C_a}{L_a} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L_a} l \sin \frac{n\pi C_a}{L_a} t \right) \quad (\text{III-56})$$

ただし,

$$C_a = \sqrt{\frac{E_a}{\rho_a}} \quad (\text{III-57})$$

であり, ρ_a , E_a , L_a , C_a は, それぞれ円柱の密度, 縦弾性係数

、断面積、長さおよび縦波の伝播速度である。これより、衝撃力 $F(t)$ を受けるときの衝撃端面 ($l=0$) の変位は

$$\eta_A(t) = \frac{Ca^2}{A_A E_A L_A} \int_0^t F(\tau) (t-\tau) d\tau + \frac{Ca}{A_A E_A} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t F(\tau) \sin\left\{\frac{n\pi Ca}{L_A}(t-\tau)\right\} d\tau. \quad (\text{III-58})$$

で与えられる。試験片の衝撃応答関数 $h_B(\xi, t)$ は、式(III-36)より $F(t) = \delta(t)$ のときの $u_y(\xi, t)$ を計算することにより

$$h_B(\xi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m(\xi) Y_m(1/2)}{\omega_m W_m S} \sin \omega_m t \quad (\text{III-59})$$

で表わされる。したがって、衝撃荷重 $F(t)$ が作用する場合の $\xi = \frac{1}{2}$ における変位 $\eta_B(t)$ は

$$\eta_B(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2(1/2)}{\omega_m W_m S} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_m (t-\tau) d\tau \quad (\text{III-60})$$

によって求められる。円柱は、衝突端面に曲率を有し、その半径を R とすれば Hertz の接触係数 k_c は

$$k_c = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{R}}{\frac{1-\nu_A^2}{E_A} + \frac{1-\nu^2}{E}} \quad (\text{III-61})$$

で与えられる。⁽²²⁾

式(III-58), (III-60), (III-61) を式(III-54) に代入して得られる積分方程式を解くことにより、接触力 $F(t)$ を求めることができる。このようにして得られた $F(t)$ を式(III-49) に代入し計算することにより動的応力拡大係数を求めることができる。したがって、落下円柱の衝突速度 v_0 が与えられていれば、動的応力拡大係数の時間的变化を求めることができる。

数値計算例

非線形積分方程式(Ⅲ-54)を解析的に解くことは困難であるので、数値解法を用いた。すなわち、時間軸を微小幅 Δt に分割して、一般に $F(i\Delta t)$ [$i=0 \sim n, F(0)=0$] が既知とすれば $F\{(n+1)\Delta t\}$ は適当な初期値から出発して方程式の両辺がほぼ等しくなるまで逐次近似して求めることができる⁽²³⁾。他の諸式の値はこのようにして求めた $F(i\Delta t)$ を用いて計算することができ。

計算に用いた諸定数を表Ⅲ-4に示す。 $L_a=1.5\text{m}$ の場合について、式(Ⅲ-58)、(Ⅲ-60)の総和項の項数 n, m および時間きざみ Δt を変化させた場合の接触力 $F(t)$ の計算結果を図Ⅲ-36に示す。また、衝撃力は通常、円柱に貼付したひずみゲージの出力波形から推定されるので、円柱の先端より 0.1m の位置におけるひ

○円柱(材質 S45C)

$$E_a = 206 \text{ GN/m}^2$$

$$\rho_a = 7.8 \text{ Mg/m}^3$$

$$\nu_a = 0.3$$

$$R = 0.1 \text{ m}$$

$$L_a = 1.5 \text{ m} \text{ または } 0.75 \text{ m}$$

○試験片(材質 S45C)

$$S = 80 \text{ mm}$$

$$B = 10 \text{ mm}$$

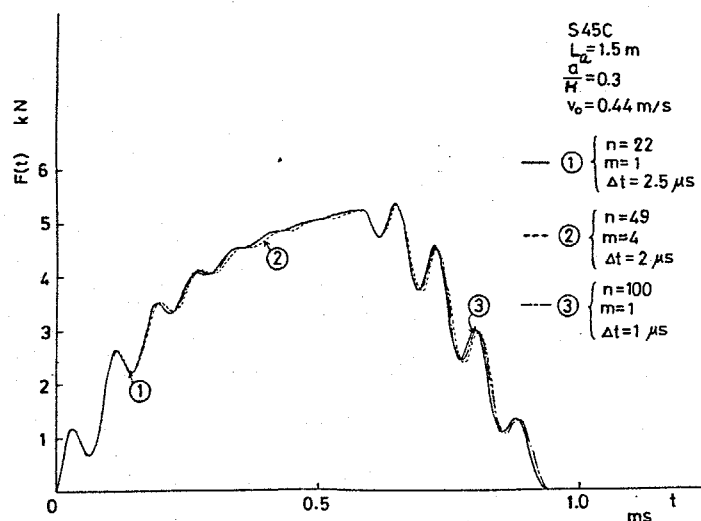
$$H = 20 \text{ mm}$$

$$E = 206 \text{ GN/m}^2$$

$$\rho = 7.8 \text{ Mg/m}^3$$

$$\nu = 0.3$$

表Ⅲ-4 計算に用いた諸定数



図Ⅲ-36 接触力 $F(t)$ の収束性

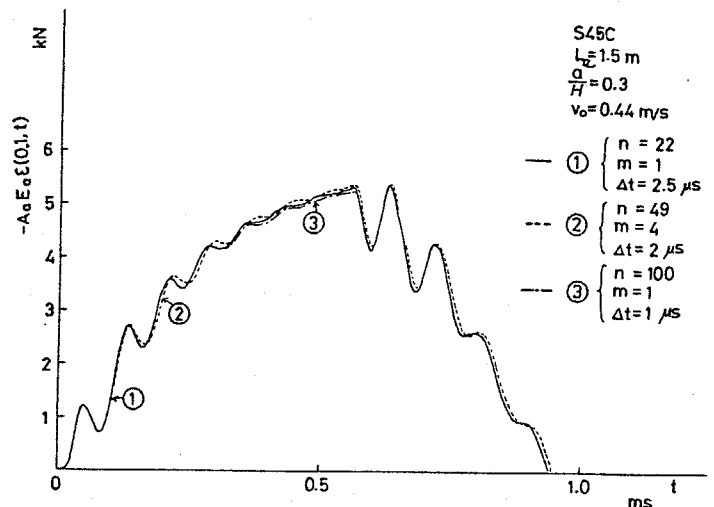
ずみ $\varepsilon(0.1, t)$ を計算した結果を図Ⅲ-37 に示す。円柱棒の任意位置におけるひずみは式(Ⅲ-56)より

$$\varepsilon(l, t) = -\frac{2Ca}{A_a E_a L_a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L_a} l \int_0^t F(\tau) \sin \frac{n\pi Ca}{L_a} (t-\tau) d\tau \quad (\text{Ⅲ-62})$$

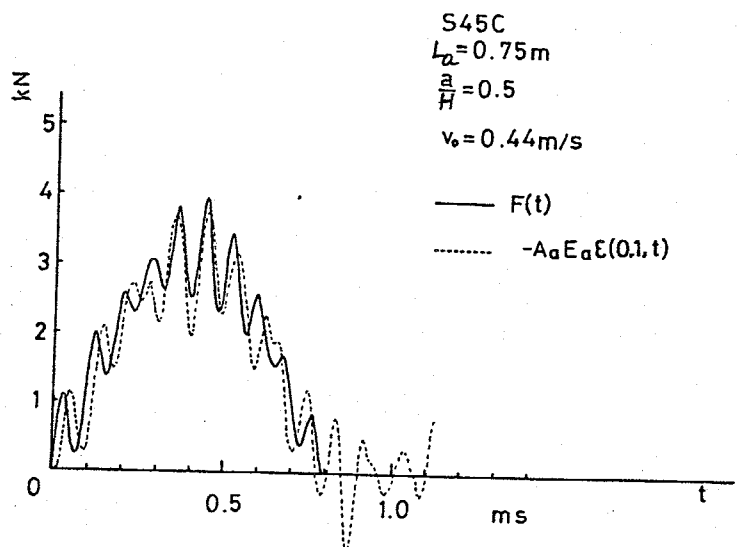
図には、ひずみに断面積および縦弾性係数を乗じて力の次元とし、さらに圧縮ひずみであるために負号をつけた値を描いて接触力 $F(t)$ と比較できるようにしてある。これらの図より落下円柱の長さが 1.5m の場合

合には、 $n=22$, $m=1$, $\Delta t=2.5\mu\text{s}$ を用いて計算すれば十分な精度が得られることがわかる。同様な検討により $L_a=0.75\text{m}$ の場合には、 $\Delta t=1.25\mu\text{s}$ を用いて計算した。

円柱の長さが 0.75m と 1.5m の 2 種類の場合について、接触力 $F(t)$ および衝撃端面から 0.1m の位置におけるひずみの値より換算された圧縮力 $-A_a E_a \varepsilon(0.1, t)$ の計算結果

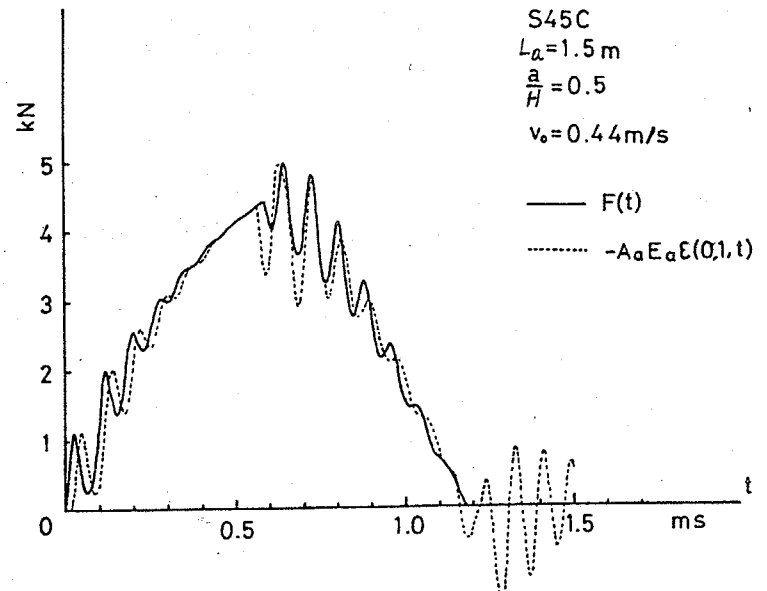


図Ⅲ-37 円柱のひずみ $\varepsilon(0.1, t)$ の収束性

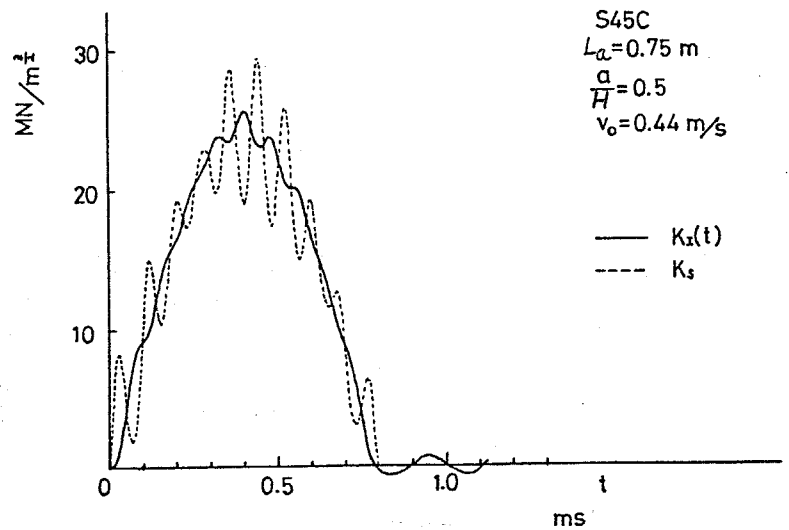


図Ⅲ-38 接触力と円柱の圧縮力 ($x=0.1\text{m}$) の比較

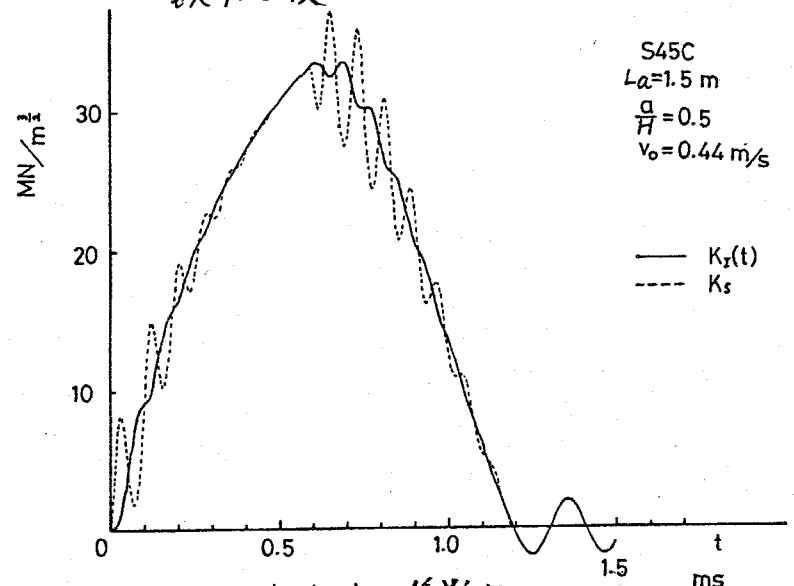
を図Ⅲ-38, Ⅲ-39 に示す。なお、計算においては無次元化されたき裂長さ $a/H = 0.5$ が用いられている。これらの図において、円柱の $z = 0.1m$ 位置の圧縮力は振動波形の谷の部分で接触力と若干の差はあるが、両者はほぼ一致してゐるとみなすことができる。したがって、接触点近傍に貼付されたひずみゲージの出力波形から接触力を十分な精度で決定することができる。なお、接触力がゼロになった後も端面における応力波の反射が繰り返されるので、円柱内には



図Ⅲ-39 接触力と円柱の圧縮力 ($z=0.1m$) の比較



図Ⅲ-40 動的応力拡大係数と静的応力拡大係数の比較



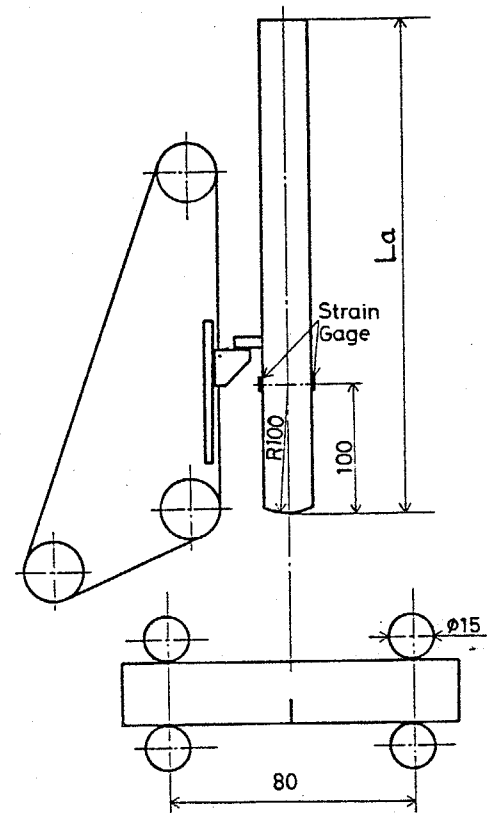
図Ⅲ-41 動的応力拡大係数と静的応力拡大係数の比較

圧縮力が存在している。また、落下棒の長短によって接触時間が変化することがわかる。

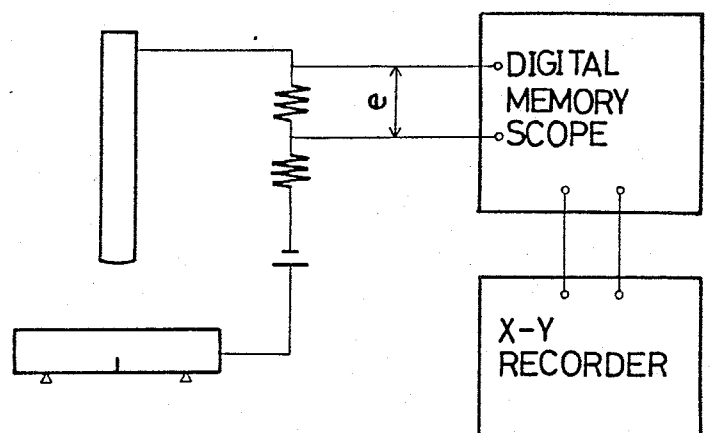
式(Ⅲ-49) で求められる動的応力拡大係数 $K_E(t)$ と式(Ⅲ-44) の静的な公式から求められる応力拡大係数 K_S の相違を図Ⅲ-40, Ⅲ-41 において比較している。両者の間には最大値において約16%の差が生じている。

(3) 実測結果との比較

前節までの解析結果の精度を確かめるために圧縮力および動的応力拡大係数の測定を行った。使用した実験装置の概略を図Ⅲ-42に示す。モータを駆動してスプロケット・チェーン系を回転させ、フックによって円柱を持ち上げる。設定高さになるとフックが解放されて円柱が落下するようになっている。なお、本試験機は衝撃疲労試験を行うために試作されたもので、今回の測定においては、手動により円柱を落下させた。試験



図Ⅲ-42 衝撃試験装置概略図

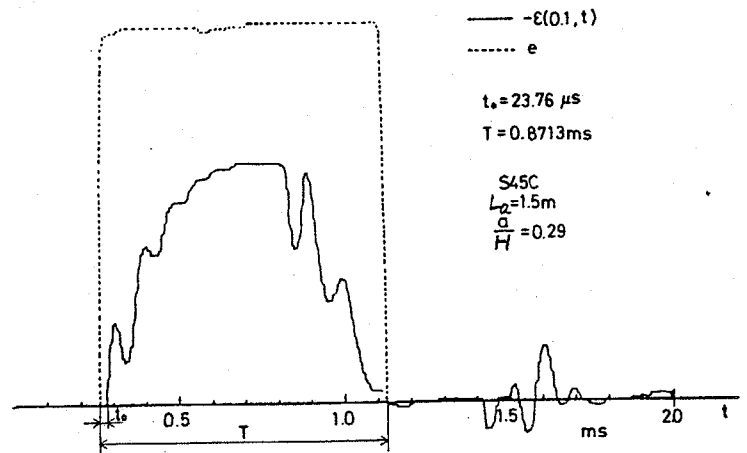


図Ⅲ-43 接触回路

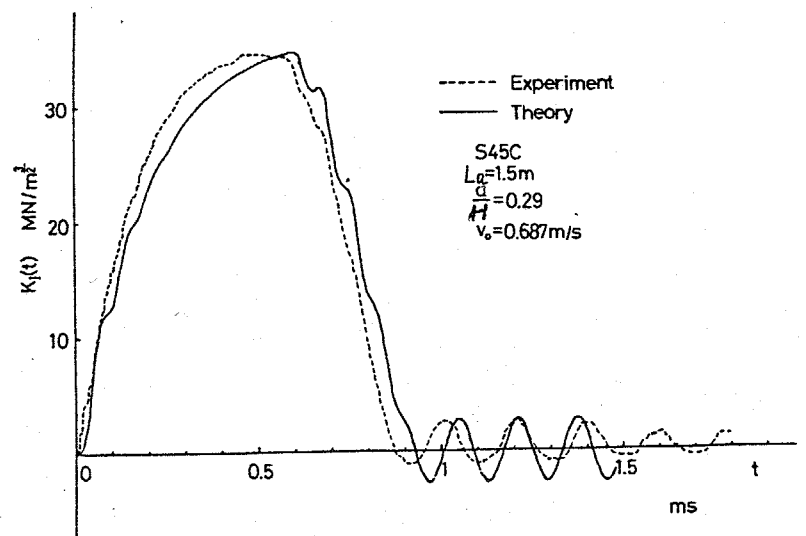
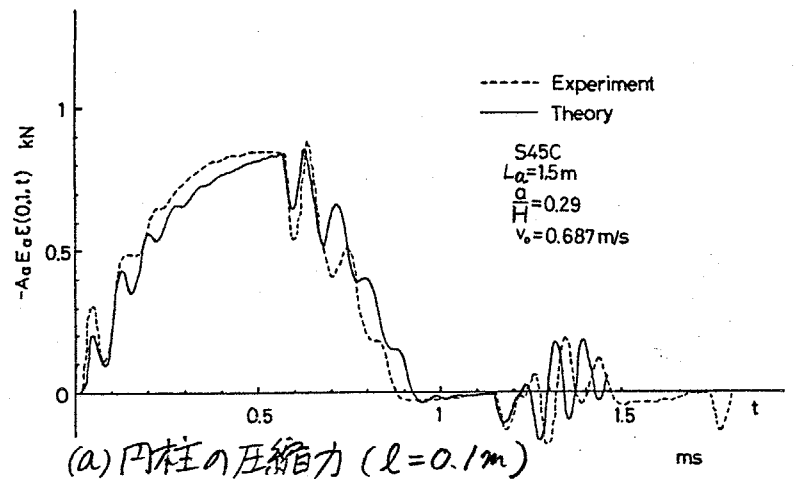
片の形状, 材質等は表Ⅲ-4 に示されている。

図Ⅲ-43 に示す接触回路によって, 接触開始からひずみゲージ出力開始までの時間 t_0 および接触時間 T を測定した。これ

らの測定結果を出力波形とともに図Ⅲ-44 に示す。図Ⅲ-42 に示す位置に貼布されたひずみゲージの出力波形から換算された圧縮力と, 式(Ⅲ-62)で与えられるひずみより換算された圧縮力を図Ⅲ-45(a) に示す。実測波形は立ち上がりを原点からただけずらして描かれている。また, 式(Ⅲ-54)の計算に際しては光電



図Ⅲ-44 接触開始点および接触時間の測定結果



図Ⅲ-45 実測波形と解析結果の比較

式ピックアップを用いて測定した衝突速度 v_0 を用いた。両者の結果は良く一致している。

図3-45(b)に動的応力拡大係数の実測波形と式(Ⅲ-49)により求めた解析結果を示す。き裂先端近傍のひずみと動的応力拡大係数は比例関係にあり、その比例定数は静的な場合と等しいと考えられる。そこで、静的試験によって得られた校正関係を用いて、き裂先端近傍に貼布したひずみゲージの出力波形から応力拡大係数に換算した結果が実測波形として示されている。実測波形と解析結果は良く一致しており、前節における解析法が有効であることを示している。

本節では、円柱による衝撃について検討したが、衝撃体の衝撃応答関数が既知であれば式(Ⅲ-54)を解くことができるので、球による衝撃等、他の場合にと本手法を適用することが可能である。

3.3. 高速で進展するき裂の動的応力拡大係数

およびエネルギー解放率

3.3.1. はじめに

ぜい性破壊において、き裂の分岐、わん曲、停止などの現象がしばしば観察されている。この様な進展中のき裂の動的挙動

に関する研究は近年利用度の高まっているぜい性材料の加工や大形構造物のぜい性破壊と関連するき裂停止の問題を研究するための基礎になるものと考えられる。本節では、実用上最も重要と思われる開口形変形 (Mode I 変形) の場合を中心に高速き裂進展問題の検討を行う。

図Ⅲ-46 に示すように線形弾性体中を速度 v で進展するき裂の先端近傍の応力・変位場は次式で与えられる。⁽²⁴⁻²⁶⁾ ただし、き裂進展速度 v は表面波の伝播速度 C_R よりも小さいとする。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_I(t, v)}{2(\pi r)^{1/2} R(\beta_0)} \begin{Bmatrix} (2-\beta_0^2)(2-2k^2\beta_0^2+\beta_0^2)X_+ - 4(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2}Y_+ \\ -(2-\beta_0^2)^2X_+ + 4(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2}Y_+ \\ 2(2-\beta_0^2)(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(X_- - Y_-) \end{Bmatrix} \quad (\text{Ⅲ-63a})$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_I(t, v)}{\mu R(\beta_0)} \left(\frac{r}{\pi} \right)^{1/2} \begin{Bmatrix} (2-\beta_0^2)V_+ - 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2}W_+ \\ -(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(2-\beta_0^2)V_- + 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}W_- \end{Bmatrix} \quad (\text{Ⅲ-63b})$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

ここで、

$$\beta_0 = v/C_2 \quad (\text{Ⅲ-64a})$$

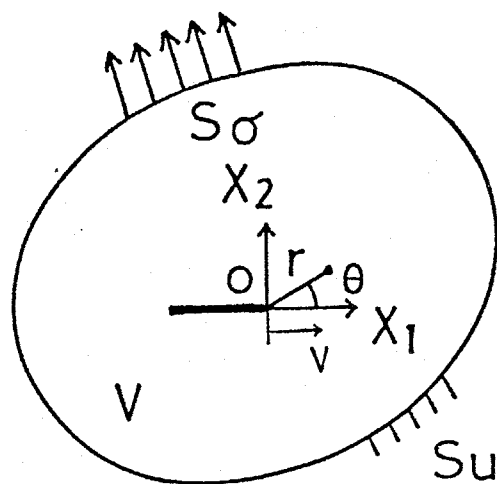
$$k^2 = C_2^2/C_1^2 = \begin{cases} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \text{平面ひずみ状態} \\ \frac{1-\nu}{2} & \text{平面応力状態} \end{cases} \quad (\text{Ⅲ-64b})$$

$$V_{\pm} = [(1-k^2\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \pm \cos \theta]^{1/2} \quad (\text{Ⅲ-64c})$$

$$W_{\pm} = [(1-\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \pm \cos \theta]^{1/2} \quad (\text{Ⅲ-64d})$$

$$X_{\pm} = \frac{[(1-k^2\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \pm \cos \theta]^{1/2}}{(1-k^2\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (\text{Ⅲ-64e})$$

$$Y_{\pm} = \frac{[(1-\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \pm \cos \theta]^{1/2}}{(1-\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (\text{Ⅲ-64f})$$



図Ⅲ-46 速度 v で進展するき裂

$$R(\beta_0) = 4(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2} - (2-\beta_0^2)^2 \quad (\text{III-64g})$$

であり, C_1, C_2 は, それぞれ縦波および横波の伝播速度である。高速き裂において応力は $1/\sqrt{r}$ の特異性を持つことは, 静止き裂の場合と同様であるが, 動的応力拡大係数 $K_I(t, v)$ および応力・変位場の分布形はき裂進展速度にも依存している。なお, $\beta_0 \rightarrow 0$ とすると式(III-63)は静的な解析によって得られた結果と一致する。き裂先端の応力・変位場は式(III-63)のように求められているので, 積分は式(II-66)より

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \frac{1}{4\pi(1-k^2)} A_I(v) K_I^2(t, v) \\ &= G \end{aligned} \quad (\text{III-65})$$

で表わされる。ここで,

$$A_I(v) = \frac{2(1-k^2)\beta_0^2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}}{R(\beta_0)} \quad (\text{III-66})$$

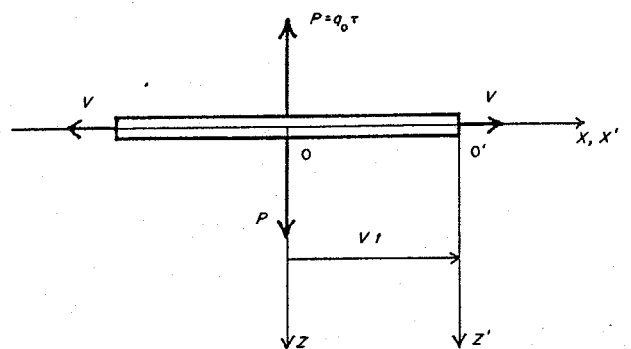
であり, G は動的エネルギー解放率⁽¹⁾である。 $v \rightarrow 0$ とすると, $A_I(v) \rightarrow 1$ となり, 式(III-65)の関係式は式(II-3)と一致する。式(III-65)より, $\dot{J}, K_I(t, v)$ および G は一対一に対応していることがわかる。したがって, 弾性き裂モデルを用いて破壊現象を論じる場合には, $\dot{J}, K_I(t, v)$ および G を用いた破壊の条件式は互に等価である。そこで, 本節では特に問題が生じない限り今までの習慣に従い, $K_I(t, v)$ および G を用いて議論する。

動的な破壊の問題に関して静的な場合と同様に, き裂を含む物体の応力解析を行い, 動的応力拡大係数 $K_I(t, v)$ や動的エ

エネルギー解放率 G を具体的な形で求めることが必要である。そこで、本節ではまず、無限体中に発生したき裂が集中荷重を受け両側に一定速度で進展する二次元き裂モデルの解析を行う。無限体中を進展するき裂に関しては、このほかに種々の場合について解析されている^(1-3, 5, 6)が、数学的取扱いの複雑さのために有限体の問題については数値計算に頼らざるを得ない。そこで、前節で述べた特異要素を用いる有限要素法を有限体中を高速で進展するき裂の動的応力拡大係数の解析に適用できるように拡張する。また、本手法を用いた高速き裂進展のシミュレーションの手法を提案し、計算例を示す。最後に、き裂の分岐に及ぼす負荷形式の影響について破壊力学的に検討する。

3.3.2. 中央に集中荷重を受けて両側に進展するき裂

物体へのくさびの打込みや、小物体が衝突することによって生じるき裂を想定して、図Ⅲ-44に示すような二次元き裂モデルの解析を行う。すなわち、無限体中に発生したき裂が中央に時間とともに増大する集中荷重を受けながら両側に一定速度 v で進展するき裂モデルの解析を行う。



図Ⅲ-47 中央に集中荷重を受け
て進展する二次元き裂
モデル

まず、物体が均質等弾性の線形弾性体である場合について解析を行い、動的応力拡大係数および動的エネルギー解放率を求め、一様引張力が働いている無限体中を両側に一定速度で進展する場合の Broberg⁽²⁷⁾ の解と比較する。

つぎに、現実の材料では、脆性破壊をする際にとき裂が進展するとき、その先端に塑性変形を伴う場合があると考えられるので、塑性変形を考慮した解析を行う。その際、Dugdale⁽²⁸⁾ が提案し、Goodier と Field ら⁽²⁹⁾⁻⁽³¹⁾ が動的なき裂の問題に拡張した仮定を用いる。すなわち、図Ⅲ-48 に示すように降伏域の幅は狭く、その中の物質は一様引張応力 σ_y を受け、降伏域先端で応力の特異性がないという条件から降伏域の長さが決定できるとするものである。

最後に、これらの結果を用いて、実際にき裂が進展する際の挙動について定性的な考察を行う。

(1) 記号

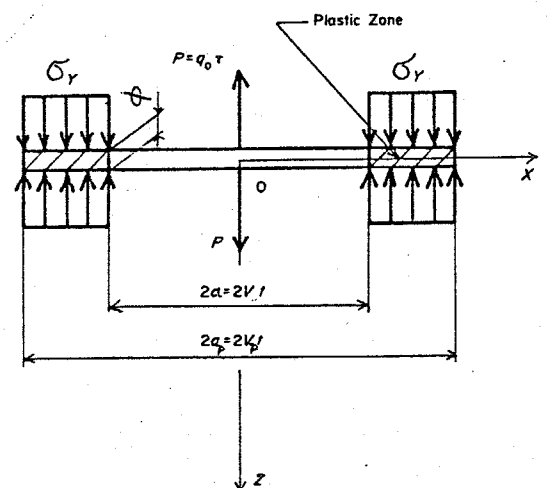
本節で用いるおもな記号をつぎに示す。

$O-xyz$: 静止直角座標系

$O'-x'y'z'$: き裂先端に原点を持つ

移動座標系

ρ : 物体の密度



図Ⅲ-48 Dugdaleの仮定を用いた二次元き裂モデル

λ, μ : ラメ定数

ν : ポアソン比

E : 縦弾性係数

C_1 : 縦波の伝播速度 $= [(\lambda + 3\mu)/\rho]^{1/2}$

C_2 : 横波の伝播速度 $= [\mu/\rho]^{1/2}$

κ : 横波と縦波の伝播速度の比 $= C_2/C_1$

t : 時間

τ : 等価的な時間 $= C_1 t$

v : き裂進展速度

β_1 : き裂進展速度と縦波の伝播速度の比
 $= v/C_1$

$2a$: き裂長さ $= 2vt = 2\beta_1 \tau$

v_p : 降伏域の進展速度

β_p : 降伏域の進展速度と

縦波の伝播速度の比 $= v_p/C_1$

$2a_p$: 降伏先端間の長さ

$= 2v_p \tau = 2\beta_p \tau$

P : 荷重 $= \rho_0 \tau$

σ_Y : 降伏応力

ϕ : き裂先端の開口変位

$U(t)$: 単位階段関数

$\delta(x)$: デルタ関数

(2) 線形弾性体モデルの解析

き裂面上の応力 σ_z と変位 u_z の導出

動的エネルギー解放率はき裂面上の応力と変位から求めることができるので、まず、応力と変位について解析する。平面ひずみ状態について考えるが、平面応力状態の場合の変位は、ポアソン比 ν を $\nu/(1+\nu)$ で置き換えることにより求められる。

本モデルは、 $z=0$ に関する対称性から $z \geq 0$ の半無限体の混合境界値問題に帰着され、き裂面上 ($z=0$) の応力 σ_z と変位 u_z は次の手順で求めることができる。

(A) $z \geq 0$ の半無限体を考え、 $x=z=0$ に $t=0$ から時間と

とともに増大する集中力 $\sigma = q_0 \tau U(\tau) \delta(x) n_z$
 $\delta(x) n_z$ (n_z : z 軸方向の単位ベク
 トル) が働く場合の z 軸方向の変
 位 u_z^A を求める (図Ⅲ-49 参照).

(B) (A) の解と種々の進展速度 v'
 を持つ異なった圧力 q による変位
 u_z^B (図Ⅲ-50 参照) を重ね合わせる
 ことにより $z=0$, $|x| > vt$ では u_z
 $= 0$ で, $x=z=0$ では応力が $-q_0 \tau$
 $U(\tau) \delta(x)$ となるようにする。この
 ときの $|x| > vt$ の応力が求める
 解である (図Ⅲ-51 参照)。

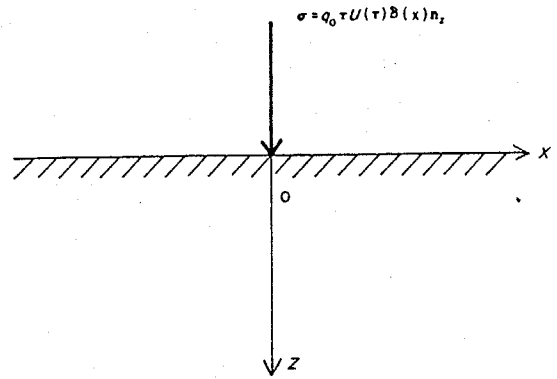
(C) (B) で求めた応力 σ_z の解を用
 いて, $z=0$, $|x| < vt$ の変位
 u_z を求める。

以上の具体的な手続きを順
 に示す。

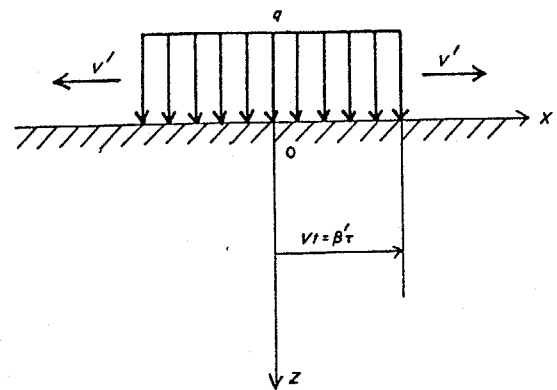
(A) 図Ⅲ-49 の u_z^A は, ポテン
 シアル関数として

$$\phi = \text{div } u \quad (\text{Ⅲ-67a})$$

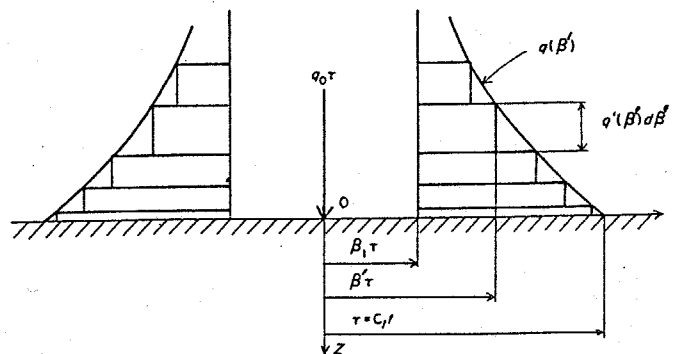
$$\psi = \text{rot } u \quad (\text{Ⅲ-67b})$$



図Ⅲ-49 時間とともに増大する集
 中荷重を受ける半無限体



図Ⅲ-50 両側に速度 v' で広がる
 圧力 q を受ける半無
 限体



図Ⅲ-51 集中荷重を受ける二次元き
 裂モデルに相当する半無限
 体表面の応力分布

を用いて表わした釣合い方程式 (u : 変位ベクトル)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \text{grad } \phi - k^2 \text{rot } \psi \quad (\text{III-68})$$

を境界条件

$$\sigma = g_0 \tau U(\tau) \delta(x) n_z : z = 0 \quad (\text{III-69})$$

の下で解くことにより,

$$\frac{\partial^2 u_z^A}{\partial \tau^2} = - \frac{g_0}{4\pi k^2 \rho c_1^2 |x|} \text{Re } F\left(\frac{\tau^2}{x^2}\right) : z = 0 \quad (\text{III-70})$$

と求められる。ここで

$$F\left(\frac{\tau^2}{x^2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{\tau^2}{x^2} - 1}}{\left(\frac{1}{2k^2} - \frac{\tau^2}{x^2}\right)^2 + \frac{\tau^2}{x^2} \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{x^2}} \sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{\tau^2}{x^2}}} \quad (\text{III-71})$$

である。 u_z^A は式 (III-70) を τ で 2 回積分することにより求められるが, 以下の解析のためには, その必要はない。

(B) 表面 $z = 0$ 上に圧力 $d\phi(\beta') = \phi'(\beta') d\beta'$ が次式 (ここで β' については図 III-50 参照)

$$d\sigma_z = \begin{cases} 0 & : |x| < \beta_1 \tau \\ -\phi'(\beta') d\beta' & : \beta_1 \tau < |x| < \beta' \tau \\ 0 & : \beta' \tau < |x| \end{cases} \quad (\text{III-72})$$

で表わされるような分布で作用するときの $z = 0$ 上の変位 u_z の 2 階微分 $\partial^2 u_z / \partial \tau^2$ は, Broberg⁽²⁷⁾ によって図 III-50 の解 $\partial^2 u_z^B / \partial \tau^2$ を重ね合わせることにより, 次のように求められている。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} = & - \frac{\phi'(\beta') d\beta'}{2\pi k^4 \rho c_1^2 |x|} \left[\left\{ \frac{\beta'}{1 - \beta'^2 (\tau^2/x^2)} - \frac{\beta_1}{1 - \beta_1^2 (\tau^2/x^2)} \right\} \text{Re } F\left(\frac{\tau^2}{x^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\pi |x|}{2\tau} \left\{ \delta\left(\beta' - \frac{|x|}{\tau}\right) \beta' \text{Im } F\left(\frac{1}{\beta'^2}\right) - \delta\left(\beta_1 - \frac{|x|}{\tau}\right) \beta_1 \text{Im } F\left(\frac{1}{\beta_1^2}\right) \right\} \right] : z = 0 \quad (\text{III-73}) \end{aligned}$$

したがって，式(III-72)の $d\sigma_z$ と集中力 $g_0 \tau U(\tau) \delta(x) \tau_z$ を
重ね合わせたとき $z=0$ ， $|x| > \beta_1 \tau$ で $\partial^2 u_z / \partial \tau^2 = 0$ となるための
条件として， $x^2 / \tau^2 = r$ ， $\beta_1^2 = S$ ， $g'(\beta_1) = g(S)$ と置くことにより
，つぎの特異積分方程式

$$a(r)g(r) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1^2}^1 \frac{b(s)g(s)}{s-r} ds = g(r) : \beta_1^2 < r < 1 \quad (\text{III-74})$$

が得られる。ただし，

$$\left. \begin{aligned} a(r) &= -\frac{\text{Im } F(1/r)}{\text{Re } F(1/r)} (r - \beta_1^2), \quad b(r) = r - \beta_1^2 \\ g(r) &= \frac{g_0}{\pi} \left(1 - \frac{\beta_1^2}{r}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1^2}^1 \frac{\sqrt{s - \beta_1}}{\sqrt{s}} g(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-75})$$

である。

式(III-75)の積分方程式は，Muskhelishvili⁽³²⁾を参照して，

$$g(r) = \begin{cases} \left[A(\beta_1) - \frac{g_0 \beta_1^3}{2\pi k^2(1-k^2)r} \right] \frac{(r-2k^2)^2 - 4k^3 \sqrt{(1-r)(k^2-r)}}{r \sqrt{(1-r)(r-\beta_1^2)^3}} : \beta_1^2 < r < k^2 \\ \left[A(\beta_1) - \frac{g_0 \beta_1^3}{2\pi k^2(1-k^2)r} \right] \frac{(r-2k^2)^2}{r \sqrt{(1-r)(r-\beta_1^2)^3}} : k^2 < r < 1 \end{cases} \quad (\text{III-76})$$

で求められる。ここで，

$$A(\beta_1) = \frac{g_0 \beta_1}{2\pi k^2(1-k^2)} \left[1 + \frac{Z_2(\beta_1)}{Z_1(\beta_1)} \right] \quad (\text{III-77a})$$

$$\begin{aligned} Z_1(\beta_1) &= \frac{2[(1-4k^2)\beta_1^2 + 4k^4]}{\beta_1(1-\beta_1^2)} K(\sqrt{1-\beta_1^2}) + \frac{2[\beta_1^4 - 4k^2(1+k^2)\beta_1^2 + 8k^4]}{\beta_1^3(1-\beta_1^2)} E(\sqrt{1-\beta_1^2}) \\ &\quad - \frac{8k^2}{\beta_1} K(\sqrt{1-\beta_1^2/k^2}) + \frac{16k^4}{\beta_1^3} E(\sqrt{1-\beta_1^2/k^2}) \end{aligned} \quad (\text{III-77b})$$

$$Z_2(\beta_1) = \left(\frac{8k^4}{3\beta_1} - 2\beta_1 \right) K(\sqrt{1-\beta_1^2}) - \left(\frac{16k^4}{3\beta_1^3} + \frac{16k^4}{3\beta_1} - \frac{8k^2}{\beta_1} \right) E(\sqrt{1-\beta_1^2})$$

$$-\frac{8k^2}{3\beta_1} K\sqrt{1-\beta_1^2/k^2} + \left(\frac{16k^4}{3\beta_1^3} - \frac{8k^2}{3\beta_1}\right) E(\sqrt{1-\beta_1^2/k^2}) \quad (\text{III-77c})$$

$$K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{第一種の完全楕円積分} \quad (\text{III-77d})$$

$$E(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad \text{第二種の完全楕円積分} \quad (\text{III-77e})$$

である。

$z=0$ における z 軸方向の応力 σ_z は、式(III-72)より

$$\sigma_z(x) = - \int_{|x|/\tau}^1 g'(\beta') d\beta' = - \frac{1}{2} \int_{x^2/\tau^2}^1 \frac{g(r)}{\sqrt{r}} dr : |x| > \beta_1 \quad (\text{III-78})$$

であるから、式(III-76)を代入して $|x|/\tau = \xi$ と置くと

$$\begin{aligned} \sigma_z(\xi) = & -\frac{1}{2} A(\beta_1) \left[\int_{\xi^2}^1 \frac{(r-2k^2)^2}{r\sqrt{r(1-r)(1-\beta_1^2)^3}} dr - 4k^3 \int_{\xi^2}^{k^2} \frac{\sqrt{k^2-r}}{r\sqrt{r(1-\beta_1^2)^3}} dr \right] \\ & + \frac{g_0 \beta_1^3}{4\pi k^2 (1-k^2)} \left[\int_{\xi^2}^1 \frac{(r-2k^2)^2}{r^2 \sqrt{r(1-r)(1-\beta_1^2)^3}} dr - 4k^3 \int_{\xi^2}^{k^2} \frac{\sqrt{k^2-r}}{r^2 \sqrt{r(1-\beta_1^2)^3}} dr \right] \end{aligned}$$

$$\xi > \beta_1, z=0 \quad (\text{III-79})$$

となる。ただし、 $k < \xi$ のときは $4k^3$ のかかってゐる積分はゼロとなる。上式は、楕円積分

$$F(\varphi, \alpha) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{第一種の楕円積分} \quad (\text{III-80a})$$

$$E(\varphi, \alpha) = \int_0^\varphi \sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad \text{第二種の楕円積分} \quad (\text{III-80b})$$

を用いて次のように表わすことができる。

$\beta_1 < \xi < k$ のとき

$$\sigma_z(\xi) = \frac{-g_0 \beta_1}{4\pi k^2 (1-k^2)} \frac{Z_2(\beta_1)}{Z_1(\beta_1)} \left\{ \frac{2[(1-4k^2)\beta_1^2 + 4k^4]}{\beta_1^2 (1-\beta_1^2)} F(\sin^{-1} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2[\beta_1^4 - 4k^2(1+k^2)\beta_1^2 + 8k^4]}{\beta_1^4(1-\beta_1^2)} E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \\
& - \frac{8k^2}{\beta_1^2} F(\sin^{-1}\sqrt{\frac{k^2-\xi^2}{k^2-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\frac{\beta_1^2}{k^2}}) + \frac{16k^4}{\beta_1^4} E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{k^2-\xi^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\frac{\beta_1^2}{k^2}}) \\
& + \frac{2(\beta_1^2-2k^2)^2}{\beta_1^4(1-\beta_1^2)} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2-\beta_1^2}} \xi + \frac{8k^4}{\beta_1^4} \frac{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-\beta_1^2)}}{\xi} - \frac{8k^3}{\beta_1^4} \sqrt{\frac{k^2-\xi^2}{\xi^2-\beta_1^2}} \xi \\
& - \frac{8k^3}{\beta_1^4} \frac{\sqrt{(k^2-\xi^2)(\xi^2-\beta_1^2)}}{\xi} \left\} + \frac{g_0\beta_1}{4\pi k^2(1-k^2)} \left\{ \left(\frac{8k^2}{3\beta_1^2} - 2 \right) F(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \right. \right. \\
& - \left(\frac{16k^4}{3\beta_1^4} + \frac{16k^4}{3\beta_1^2} - \frac{8k^2}{\beta_1^2} \right) E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) - \frac{8k^2}{3\beta_1^2} F(\sin^{-1}\sqrt{\frac{k^2-\xi^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\frac{\beta_1^2}{k^2}}) \\
& + \left(\frac{16k^4}{3\beta_1^4} - \frac{8k^2}{3\beta_1^2} \right) E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{k^2-\xi^2}{k^2-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\frac{\beta_1^2}{k^2}}) + \left(\frac{16k^4}{3\beta_1^4} + \frac{16k^4}{3\beta_1^2} - \frac{8k^2}{\beta_1^2} \right) \frac{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-\beta_1^2)}}{\xi} \\
& + \frac{8k^4}{3\beta_1^2} \frac{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-\beta_1^2)}}{\xi^3} - \frac{8k^3}{\beta_1^2} \left[\frac{2(k^2+\beta_1^2)}{3k^2\beta_1^2} - \frac{1}{k^2} \right] \frac{\sqrt{(k^2-\xi^2)(\xi^2-\beta_1^2)}}{\xi} \\
& \left. - \frac{8k^3}{3\beta_1^4} \frac{\sqrt{(k^2-\xi^2)(\xi^2-\beta_1^2)}}{\xi^3} \right\} : Z=0 \quad (\text{III-81a})
\end{aligned}$$

$k < \xi < 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\sigma_Z(\xi) &= \frac{-g_0\beta_1}{4\pi k^2(1-k^2)} \frac{Z_2(\beta_1)}{Z_1(\beta_1)} \left\{ \frac{2[(1-4k^2)\beta_1^2 + 4k^4]}{\beta_1^2(1-\beta_1^2)} F(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \right. \\
& - \frac{2[\beta_1^4 - 4k^2(1+k^2)\beta_1^2 + 8k^4]}{\beta_1^4(1-\beta_1^2)} E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \\
& + \frac{2(\beta_1^2-2k^2)^2}{\beta_1^4(1-\beta_1^2)} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2-\beta_1^2}} \xi + \frac{8k^4}{\beta_1^4} \frac{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-\beta_1^2)}}{\xi} \\
& + \frac{g_0\beta_1}{4\pi k^2(1-k^2)} \left\{ \left(\frac{8k^4}{3\beta_1^2} - 2 \right) F(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \right. \\
& - \left(\frac{16k^4}{3\beta_1^4} + \frac{16k^4}{3\beta_1^2} - \frac{8k^2}{\beta_1^2} \right) E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \\
& + \left(\frac{16k^4}{3\beta_1^4} + \frac{16k^4}{3\beta_1^2} - \frac{8k^2}{\beta_1^2} \right) \frac{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-\beta_1^2)}}{\xi^2} + \frac{8k^4}{3\beta_1^2} \frac{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-\beta_1^2)}}{\xi^3} \left. \right\} \\
& : Z=0 \quad (\text{III-81b})
\end{aligned}$$

(C) $|x|/c < \beta_1$ の z 方向の変位の 2 階微分 $\partial^2 u_z / \partial z^2$ を求めるために, 式(Ⅲ-70)と式(Ⅲ-73)を β' で積分したものを加え合せて整理すると,

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = -\frac{r \operatorname{Re} F(1/r)}{2\pi k^4 \rho c_1^2 |x| (r - \beta_1^2)} \left\{ \frac{\pi}{2} A(\beta_1) - \frac{\beta_0 \beta_1^2}{2r} - \frac{1}{2} \int_{\beta_1^2}^r \frac{s - \beta_1^2}{\beta_1^2 s - r} \varphi(s) ds \right\}$$

$$r < \beta_1^2 \quad (\text{Ⅲ-82})$$

となる。さらに, 式(Ⅲ-76)の $\varphi(r)$ を上式に代入して z で 2 回積分を行えば

$$u_z = \frac{|x| \sqrt{\beta_1^2 - r}}{\rho c_1^2 \beta_1^2 \sqrt{r}} \left[A(\beta_1) - \frac{\beta_0 \beta_1}{\pi k^2 (1 - k^2)} \right] + \frac{\beta_0 |x|}{4\pi k^2 (1 - k^2) \rho c_1^2 \sqrt{r}} \ln \left| \frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - r}}{\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 - r}} \right|$$

$$r < \beta_1^2 \quad (\text{Ⅲ-83})$$

が求められる。(脚注)

動的応力拡大係数および動的エネルギー解放率

き裂先端付近の応力 σ_z の特異性を求めるために式(Ⅲ-81)から有限項を省略すると

$$\sigma_z = D_1 K_I^* / \sqrt{2\pi x'} U(x') : z = 0 \quad (\text{Ⅲ-84})$$

となる。ただし,

(脚注) Afanas'ev ら⁽³³⁾が同じ問題を別な方法で解析している。しかし, その解によると u_z が静的き裂と同一となる。これは, 本文の式(Ⅲ-83)の $A(\beta_1)$ に相当する項が文献(33)では欠落しているためと思われる。

$$D_1 = \frac{Z_2(\beta_1)}{2k^2(1-k^2)\beta_1^2 Z_1(\beta_1)} \left[4k^3\sqrt{k^2-\beta_1^2} - \frac{(\beta_1^2-2k^2)^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \right] \quad (\text{III-85})$$

であり, K_I^* は本モデルに相当する静的な場合の応力拡大係数で

$$K_I^* = P/\sqrt{\pi a} = g_0 \tau / \sqrt{\pi \nu \tau} \quad (\text{III-86})$$

である。したがって, 動的応力拡大係数と静的応力拡大係数との比は

$$K_I/K_I^* = D_1 \quad (\text{III-87})$$

となる。き裂先端付近の変位 u_z は式(III-83)より

$$u_z = D_2 K_I^* \sqrt{-2\pi x'} U(-x') : z=0 \quad (\text{III-88})$$

である。ただし,

$$D_2 = \frac{Z_2(\beta_1)}{2\pi \rho G^2 k^2(1-k^2) Z_1(\beta_1)} \quad (\text{III-89})$$

である。したがって, 式(II-66)より

$$G = \pi D_1 D_2 K_I^{*2} / 2 \quad (\text{III-90})$$

と求められる。相当する静的エネルギー解放率を G^* とすると,

K_I^* とは

$$G^* = \begin{cases} K_I^{*2}(1-\nu^2)/E & \text{平面ひずみ状態} \\ K_I^{*2}/E & \text{平面応力状態} \end{cases} \quad (\text{III-91})$$

の関係にあるので, エネルギー解放率の比

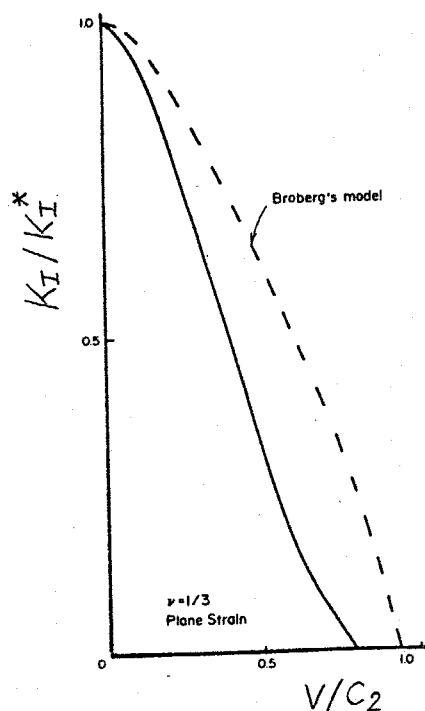
$$G/G^* = D_1 Z_2(\beta_1)/Z_1(\beta_1) \quad (\text{III-92})$$

が得られる。

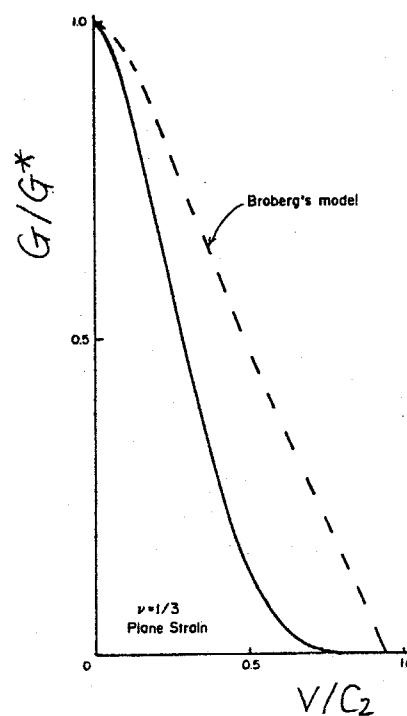
計算結果

応力拡大係数の比 K_I/K_I^* および エネルギー解放率の比 G/G^*

とき裂進展速度 v/C_2 の関係を図示すると、それぞれ図Ⅲ-52、図Ⅲ-53 のようになる。 $v/C_2 \rightarrow 0$ では、 $K_I/K_I^* \rightarrow 1$ 、 $G/G^* \rightarrow 1$ となり時刻 t における K_I および G の値は $P = \rho_0 c_2 (= \rho_0 C_1 t)$ 、 $a = vt$ としたときに静的な解析によって得られる値 K_I^* 、 G^* にそれぞれ近づくことがわかる。また、 v が増加するにつれて、 K_I/K_I^* および G/G^* は減少している。これを無限遠で一樣引張応力を受ける場合の Broberg モデル⁽²⁷⁾の結果と比較すると、本モデルのほうが K_I/K_I^* および G/G^* の減少の仕方が顕著であることがわかる。



図Ⅲ-52 動的応力拡大係数と
き裂進展速度の関係



図Ⅲ-53 動的エネルギー解放率
とき裂進展速度の関係

(3) 動的 Dugdale モデルの解析

静的解

はじめに動的解と比較するために、き裂が静止している場合の解析を行う。(2)節と同様に、半無限体の混合境界値問題を解くことによってき裂問題の解析を行う。

半無限体の境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \begin{cases} -P\delta(x) & : |x| < a \\ \sigma_r & : a < |x| < a_p \\ u_z = 0 & : a_p < |x| \end{cases} : z=0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-93})$$

と表される。ただし、 $z=0$ 上で $|x| < a$ がき裂に相当し、 $a < |x| < a_p$ が降伏域に相当している(図III-48参照)。

半無限体の境界で境界条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\sigma(x) : |x| < a_p \\ u_z &= 0 : |x| > a_p \end{aligned} \right\} : z=0 \quad (\text{III-94})$$

が与えられたときの $|x| < a_p$ の変位 u_z を求める式は Tsai⁽³⁴⁾ の結果により

$$u_z = -\frac{2}{\pi\mu(1+\nu)} \int_0^{a_p} \frac{\xi d\xi}{x\sqrt{\xi^2-x^2}} \int_0^\xi \frac{\sigma(\eta)d\eta}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} : z=0 \text{ (平面応力状態)} \quad (\text{III-95})$$

となる。したがって、上式の $\sigma(\eta)$ に式(III-93)を代入することにより

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1}{\pi\mu(1+\nu)} \left[P \ln \left| \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 - x^2}}{x} \right| - 2\sigma_r \sqrt{a_p^2 - x^2} \cos^{-1} \left(\frac{a}{a_p} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma_r a \int_x^{a_p} \frac{\sqrt{\xi^2 - x^2}}{\xi \sqrt{\xi^2 - a^2}} d\xi \right] : z=0, a < |x| < a_p \end{aligned} \quad (\text{III-96})$$

が得られる。ここで、 $|x| = a_p$ で応力が特異性を持たない条件は、

$$\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)_{|x|=a_p} = 0 \quad (\text{III-97})$$

であるから，式(Ⅲ-96)より降伏域の長さを決める条件

$$\frac{P}{2\sigma_Y} = \frac{a_p}{a} \cos^{-1}\left(\frac{a}{a_p}\right) \quad (\text{Ⅲ-98})$$

が得られる。したがって，式(Ⅲ-98)の条件を満足するき裂面上の変位 u_{zs} は，式(Ⅲ-96)より次のように求められる。

$$u_{zs}(x, a) = \frac{1}{\pi\mu(H\nu)} \left[P \ln \left| \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 - x^2}}{x} \right| - P \frac{\sqrt{a_p^2 - x^2}}{a_p} + 2\sigma_Y a \int_x^{a_p} \frac{\sqrt{\xi^2 - x^2}}{\xi \sqrt{\xi^2 - a^2}} d\xi \right] : x=0, a < |x| < a_p \quad (\text{Ⅲ-99})$$

同様にして， $|x| < a$ の変位 u_{zs} も求めることができる。

つぎに，き裂が単位長さ進むことによってき裂先端の塑性域に流入する力学的エネルギー G_{PS} を求める。二次の微小量を省略することにより

$$G_{PS} = 2\sigma_Y \int_a^{a_p} \frac{\partial u_{zs}(x, a)}{\partial a} dx \quad (\text{Ⅲ-100})$$

が得られる。(脚注1) いま， $P/2\sigma_Y = \text{一定のとき}$ (脚注2) を考える。この場合には，式(Ⅲ-99)，(Ⅲ-100)より

$$G_{PS} = \frac{2\sigma_Y}{\pi\mu(H\nu)} \left[P \frac{a_p}{a} \cos^{-1}\left(\frac{a}{a_p}\right) - P \ln \left| \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 - a^2}}{a} \right| + 2\sigma_Y \sqrt{a_p^2 - a^2} \cos^{-1}\left(\frac{a}{a_p}\right) - 2\sigma_Y a \ln \left| \frac{a}{a_p} \right| \right] \quad (\text{Ⅲ-101})$$

(脚注1) G_{PD} は塑性変形域を破壊進行領域とみなし $\lim_{v \rightarrow 0} \dot{W} = \lim_{v \rightarrow 0} (\dot{W} + \dot{W}/v)$ を求めて いることに相当している。

(脚注2) $\dot{W}$ はき裂の進展履歴に依存するので外荷重をこのように指定する必要がある。

が得られる。

動的解

本節では、き裂がその先端に降伏域を伴いながら両側に一定速度で進展する場合の解析を行う。

まず、半無限体の表面 ($z=0$) で境界条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \begin{cases} -\gamma_0 \tau U(\tau) \delta(x) : |x| < v\tau \\ \sigma_y : v\tau < |x| < v_p\tau \\ u_z = 0 : v_p\tau < |x| \end{cases} : z=0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-102})$$

が与えられたときの $z=0$, $|x| < v_p\tau$ の範囲の変位 u_z を求める。ただし、 $|x| < v\tau$ がき裂に相当し、 $v\tau < |x| < v_p\tau$ が降伏域に相当している (図 III-48 参照)。

式 (III-102) の境界条件を満足する $|x| < v_p\tau$ の変位 u_z は、境界条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\gamma_0 \tau U(\tau) \delta(x) : |x| < v_p\tau \\ u_z &= 0 : |x| > v_p\tau \end{aligned} \right\} : z=0 \quad (\text{III-103})$$

を満足する解 u_{z1} と、境界条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \begin{cases} 0 : |x| < v\tau \\ \sigma_y : v\tau < |x| < v_p\tau \\ u_z = 0 : |x| > v_p\tau \end{cases} : z=0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-104})$$

を満足する解 u_{z2} の重ね合わせによって得られる。 u_{z1} は、(2) 節ですでに求められており [式 (III-83) の β_1 を β_p で置き換えればよい]、また、 u_{z2} は u_{z1} を求めるのと同様にして求められる。

したがって，式(Ⅲ-102)の境界条件を満足する $z=0$ ， $|x| < \rho_p$ の変位

$$\begin{aligned}
 u_z &= u_{z1} + u_{z2} \\
 &= \frac{|x| \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\rho C_1^2 \beta_p^2 \sqrt{r}} \left[A(\beta_p) + B - \frac{\gamma_0 \beta_p}{\pi k^2 (1-k^2)} - \frac{C}{(\beta_p^2 - \beta_1^2)} \right] \\
 &\quad + \frac{\gamma_0 |x|}{4\pi k^2 (1-k^2) \rho C_1^2 \sqrt{r}} \ln \left| \frac{\beta_p + \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\beta_p - \sqrt{\beta_p^2 - r}} \right| \\
 &\quad - \frac{C |x|}{2\rho C_1^2 (\beta_p^2 - \beta_1^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} \ln \left| \frac{\sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} - \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\sqrt{\beta_p^2 - r} + \sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2}} \right| \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\beta_1} \ln \left| \frac{\sqrt{r} \sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} + \beta_1 \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\sqrt{r} \sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} + \beta_1 \sqrt{\beta_p^2 - r}} \right| \right] : r < \beta_p^2, z=0 \quad (\text{Ⅲ-105})
 \end{aligned}$$

が得られる。ただし， $A(\beta_p)$ は，式(Ⅲ-77)の $A(\beta)$ において $\beta_1 = \beta_p$ と置いたものであり，

$$B = - \frac{2\gamma_0 \beta_p}{Z_1(\beta_p)} - \frac{C Z_3(\beta_p, \beta_1)}{\beta_1^2 Z_1(\beta_p)} \quad (\text{Ⅲ-106a})$$

$$C = \frac{2\gamma_0 \beta_1^3 \sqrt{(1-\beta_1^2)(\beta_p^2 - \beta_1^2)^3}}{\pi [4k^3 \sqrt{(1-\beta_1^2)(k^2 - \beta_1^2)} - (\beta_1^2 - 2k^2)^2]} \quad (\text{Ⅲ-106b})$$

$$\begin{aligned}
 Z_3(\beta_p, \beta_1) &= - \frac{2\beta_1^2 (\beta_p^2 - 2k^2)^2}{\beta_p (\beta_p^2 - \beta_1^2) (1-\beta_p^2)} K(\sqrt{1-\beta_p^2}) \\
 &\quad + \frac{2\beta_1^2 (\beta_p^2 - 2k^2)^2 - 8k^4 (\beta_p^2 - \beta_1^2) (1-\beta_p^2)}{\beta_p^3 (\beta_p^2 - \beta_1^2) (1-\beta_p^2)} E(\sqrt{1-\beta_p^2}) \\
 &\quad + \frac{8k^2 \beta_1^2}{\beta_p (\beta_p^2 - \beta_1^2)} K\sqrt{1-\beta_p^2/k^2} + \frac{8k^4 (\beta_p^2 - 2\beta_1^2)}{\beta_p^3 (\beta_p^2 - \beta_1^2)} E(\sqrt{1-\beta_p^2/k^2}) \\
 &\quad + \frac{2\beta_p (\beta_1^2 - 2k^2)^2}{(1-\beta_1^2) (\beta_p^2 - \beta_1^2)} \Pi\left(-\frac{1-\beta_p^2}{1-\beta_1^2}, \sqrt{1-\beta_p^2}\right) \\
 &\quad - \frac{8k^2 \beta_p^2}{(\beta_p^2 - \beta_1^2)} \Pi\left(-\frac{1-\beta_p^2/k^2}{1-\beta_1^2/k^2}, \sqrt{1-\beta_p^2/k^2}\right) \quad (\text{Ⅲ-106c})
 \end{aligned}$$

$$\Pi(\alpha, \beta) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + \alpha \sin^2 \theta) \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}} : \text{第三種の完全楕円積分 (Ⅲ-106d)}$$

である。

降伏域先端で応力の特異性が失われる条件は

$$\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_{|x|=\beta_p \tau} = 0 \quad (\text{III-107})$$

であるから，式(III-105)より降伏域の長さを決める条件

$$\frac{\sigma_0}{2\beta_1\sigma_Y} = \frac{2\pi k^2(1-k^2)}{Z_2(\beta_p)\beta_1} \left[1 + \frac{C}{\sigma_Y} Z_4(\beta_p, \beta_1)\right] \quad (\text{III-108})$$

が得られる。ただし，

$$\begin{aligned} Z_4(\beta_p, \beta_1) = & \frac{1}{(\beta_p^2 - \beta_1^2)} \left[K(\sqrt{1-\beta_p^2}) - \frac{4k^2}{\beta_p^2\beta_1^2} E(\sqrt{1-\beta_p^2}) + \frac{4k^2}{\beta_p^2\beta_1^2} E(\sqrt{1-\beta_p^2/k^2}) \right. \\ & + \frac{(\beta_1^2 - 2k^2)^2}{\beta_1^2(1-\beta_1^2)} \Pi\left(-\frac{1-\beta_p^2}{1-\beta_1^2}, \sqrt{1-\beta_p^2}\right) \\ & \left. - \frac{4k^2}{\beta_1^2} \Pi\left(-\frac{1-\beta_p^2/k^2}{1-\beta_1^2/k^2}, \sqrt{1-\beta_p^2/k^2}\right) \right] \quad (\text{III-109}) \end{aligned}$$

である。

き裂先端に降伏域を伴いながら両側に一定速度で進展するときの変位 u_z は，式(III-105)，(III-108)より

$$\begin{aligned} u_{zD}(r, \beta_1) = & \frac{\sigma_0 |x|}{2\pi k^2(1-k^2)\rho C^2 \sqrt{r}} \left[-\frac{\sqrt{\beta_p^2 - r}}{\beta_p} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\beta_p + \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\beta_p - \sqrt{\beta_p^2 - r}} \right| \right] \\ & - \frac{C|x|}{2\rho C^2(\beta_p^2 - \beta_1^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} \ln \left| \frac{\sqrt{\beta_1^2 - \beta_1^2} - \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\sqrt{\beta_p^2 - r} + \sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2}} \right| \right. \\ & \left. + \frac{1}{\beta_1} \ln \left| \frac{\sqrt{r}\sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} + \beta_1\sqrt{\beta_p^2 - r}}{\sqrt{r}\sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} - \beta_1\sqrt{\beta_p^2 - r}} \right| \right] : r < \beta_p^2, z=0 \quad (\text{III-110}) \end{aligned}$$

によって与えられる。ただし， $r = x^2/\tau^2$ である。

つぎに，き裂が単位長さ進むことによってき裂の先端の塑性域に流入する力学的エネルギー GPD を求める。二次の微小量を省略することにより

$$G_{PD} = \frac{2\sigma_Y}{\beta_1} \int_{\beta_1 \tau}^{\beta_P \tau} \frac{\partial u_{2D}(r, \beta_1)}{\partial \tau} dx \quad (\text{III-111})$$

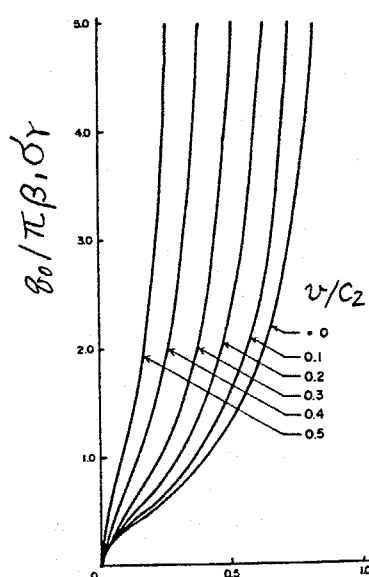
となるので、式(III-110)より

$$G_{PD} = \frac{\sigma_Y \beta_0 \tau}{\pi k^2 (1-k^2) \rho C_1^2} \left[\left(\frac{\beta_P}{\beta_1} \right) \cos^{-1} \left(\frac{\beta_1}{\beta_P} \right) - \ln \left| \frac{\beta_P + \sqrt{\beta_P^2 - \beta_1^2}}{\beta_1} \right| \right] \\ + \frac{2\sigma_Y C_1 \tau}{\rho C_1^2 (\beta_P^2 - \beta_1^2)^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{\beta_P^2 - \beta_1^2}}{\beta_1} \cos^{-1} \left(\frac{\beta_1}{\beta_P} \right) - \ln \left| \frac{\beta_P}{\beta_1} \right| \right] \quad (\text{III-112})$$

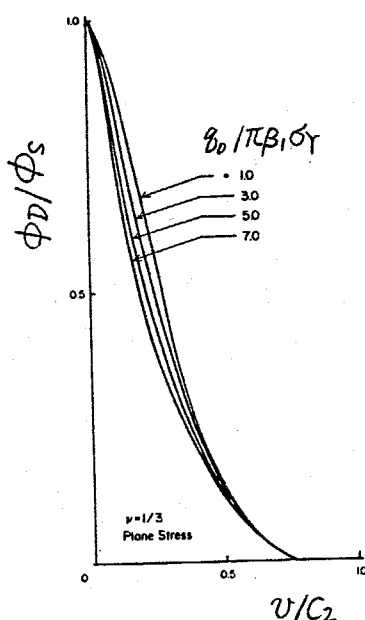
が得られる。

計算結果

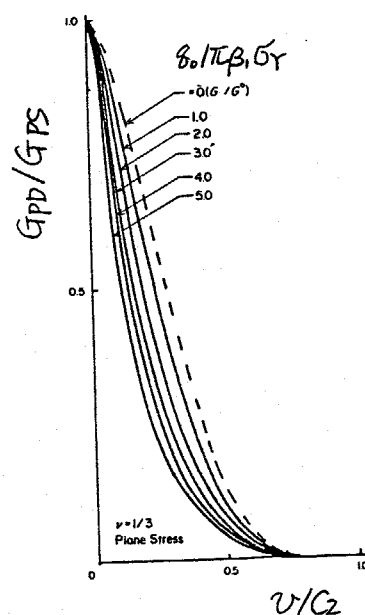
図III-54は、き裂進展速度 v を $\rho a \times \tau$ として、相対的塑性域の長さ $(\beta_P - \beta_1)\tau / \beta_P \tau$ と瞬間の荷重 $\beta_0 \tau$ をそのときのき裂の長さの半分に $\pi \sigma_Y$ をかけたもので除した値 $\beta_0 / \pi \beta_1 \sigma_Y$ （以下無次元化された荷重という）の関係を式(III-98)と式(III-108)から求めた結果である。この図から、一定荷重のもとではき裂進



図III-54 無次元化された荷重と相対的降伏域の長さの関係（平面応力）



図III-55 き裂先端の開口変位とき裂進展速度の関係（平面応力）



図III-56 き裂進展により塑性域に流入する力学的エネルギー（平面応力）

展速度が大きくなるにしたがって、降伏域の長さは減少することがわかる。この傾向は、Atkinson⁽³⁰⁾およびEmbley-Sih⁽³¹⁾がBrobergモデル⁽²⁷⁾について求めた結果と一致している。

図Ⅲ-55は、無次元化された荷重をパラメータとして、き裂進展速度と動的き裂先端の開口変位 $\phi_D [= 2u_{zD}(\beta_1^2, \beta_1)]$ 、式(Ⅲ-110)参照]を相当する静止き裂(長さ $2a$)の開口変位 $\phi_S [2u_{zs}(a, a)]$ 、式(Ⅲ-99)参照]で無次元化した量との関係を示したものである(速度 v で進展しているき裂と、荷重の大きさおよびき裂長さが等しい静止き裂とを比較している)。この図から、 $v \rightarrow 0$ では $\phi_D / \phi_S \rightarrow 1$ となり動的解は静的解に近づき、 v の増加とともに ϕ_D は減少すること、すなわち、き裂先端の開口変位は小さくなることかわかる。

図Ⅲ-55は、無次元化された荷重をパラメータとして、き裂進展速度とき裂進展によって塑性域に流入する力学的エネルギー G_{PD} / G_{PS} との関係を示したものである。ここで、 $\beta_0 / \pi \beta_1 \sigma_Y = 0$ は $\sigma_Y \rightarrow \infty$ を意味し線形弾性体に相当している。この図から、無次元化された荷重がゼロに近づくにつれて弾性解に近づくこと、および無次元化された荷重が増大するにつれて G_{PD} の減少が著しくなることかわかる。

(4) き裂の進展に関する考察

無限体中に存在するき裂が、その中央に時間とともに増大す

る集中荷重を受けながら進展するときの二次元モデルについて解析した。この結果を用いて、実際にき裂が進展する際の挙動について定性的な考察を行うことにする。

線形弾性体モデル

式(III-65)を考慮して、き裂進展中のエネルギーの平衡条件を次式のように表わすことにする。^(脚注)

$$G(v) = G_c(v) \quad (\text{III-113})$$

ここで、 $G_c(v)$ は き裂進展の際に費やされる単位面積あたりのエネルギー、すなわち動的破壊靱性値であり、き裂進展速度 v の増加関数であると仮定する。⁽³⁹⁾ この式は、荷重の大きさおよびき裂長さが与えられたときに実際に起こるき裂の進展速度を決

(脚注) き裂進展中の破壊条件をこのように表わすことは、き裂進展中の速度変化の影響を無視することに相当している。

無限体中の半無限き裂については、き裂進展の加速度による影響が無い^(35~38)ことから、有限き裂先端付近の応力変位場が受ける加速度の影響は、他のき裂端によって反射された応力波によると考えられる。したがって、他のき裂端によって反射された応力波が考えているき裂端に達するまでは加速度の影響を受けないことや、一定加速度をもつ二次元き裂に関する Tsai⁽³⁴⁾の解析などから、加速中のき裂先端付近の応力変位場についてはき裂進展の加速度の影響は小さいと考えられる。

める条件式と解釈することかできる。式(Ⅲ-91)を用いると式(Ⅲ-113)は、

$$\frac{G(v)/G^*}{G_c(v)} = \begin{cases} \frac{E}{(1-v^2)K_I^{*2}} & : \text{平面ひずみ状態} \\ \frac{E}{K_I^{*2}} & : \text{平面応力状態} \end{cases} \quad (\text{Ⅲ-114})$$

となる。ここで、右辺は変数としてき裂進展速度を含んでいないので静的な解析により求められる量である。

本モデルの場合の静的解は、

$$K_I^* = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} = \text{const.} \times \sqrt{a} \quad (\text{Ⅲ-115})$$

となる。 K_I^* はき裂長さ $2a$ とともに増大するので、式(Ⅲ-114)の右辺はき裂が長くなるにしたがって減少する。式(Ⅲ-114)の左辺は図Ⅲ-53よりわかるように v の減少関数であることから、き裂速度はき裂進展とともに増加することかわかる。さらに、 β_0 の値が大きければ K_I^* の増加率が大きいので、き裂進展速度はやく増加することかわかる。また、無限遠で一樣引張応力 σ を受ける Broberg モデル⁽²⁷⁾では、静的応力拡大係数は、

$$K_I^* = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (\text{Ⅲ-116})$$

となり、この場合も K_I^* はき裂の長さとともに増大するので、やはりき裂速度は増加することかわかる。

図Ⅲ-53によれば、Broberg モデルよりも本モデルのほうが動的エネルギー解放率 $G(v)$ の減少が著しいので、静的には同一の応力拡大係数であっても、き裂進展速度はBroberg モデルより

本モデルのほうが小さくなることがわかる。

動的 Dugdale モデル

動的 Dugdale モデルを用いて破壊を論ずるとき，き裂進展の条件を，エネルギー解放率とき裂先端の開口変位によって表わすことが考えられる。

(A) エネルギー解放率による条件

線形弾性体モデルの場合と同様に，き裂進展により解放される力学的エネルギーはき裂面を作るのに必要なエネルギー G_{pc} に等しいとする。この条件は，進展するき裂について

$$G_{pd}(v) = G_{pc}(v) \quad (\text{III-117})$$

によって表わされる。

上式は，

$$\frac{1}{G_{ps}} = \frac{G_{pd}(v)/G_{ps}}{G_{pc}(v)} \quad (\text{III-118})$$

と変形できる。 $G_{pc}(v)$ をき裂進展速度 v の増加関数と仮定すると，上式の右边は，図 III-56 より v の減少関数である。また，式 (III-101) より $P/2a\sigma_Y$ が一定のとき G_{ps} はき裂長さの増加関数であるから，上式の左边はき裂進展とともに減少する。したがって，き裂進展速度は，き裂進展とともに増加すると考えられる。また，降伏応力 σ_Y が小さいほど G_{pd}/G_{ps} の減少が大きいため，降伏応力の低い材料ほどき裂はゆるやかに進展することが予想される。

(B) き裂先端の開口変位による条件

進展するき裂の先端の開口変位 ϕ_D が材料によって定まる ϕ_c をとると考える。この値 ϕ_c は、き裂進展速度の関数と考えることができる。この条件は、

$$\phi_D(v) = \phi_c(v) \quad (\text{III-119})$$

によって表わされる。

上式は、

$$\frac{1}{\phi_s} = \frac{\phi_D(v)/\phi_s}{\phi_c(v)} \quad (\text{III-120})$$

と変形できる。この破壊条件を用いる場合も (A) のときと同様に $\phi_c(v)$ が v の増加関数であると仮定すると、図 III-55 より定性的には、(A) の破壊条件を用いるときと現象が予想される。

なお、定量的関係については、今後実験によって検討する必要があるものと考えられる。

3.3.3. 動的応力拡大係数の有限要素解析

前節では無限体中を進展するき裂モデルの解析を行った。有限体の中を進展するき裂の問題は、境界が時間とともに変化するもので、材料が線形弾性体である場合でも、一定速度で進展するき裂の問題を重ね合わせることで、任意に進展速度が変化するき裂の問題の解を得ることができないという非線形性を有し、極めて解析の困難な問題である。このような複雑な問題に対

しては、差分法や有限要素法などの数値計算を適用することが考えられ、現在までにいくつかの試みが行われている（例えば、文献(40)、(41)）。しかし、き裂先端には応力の特異性が存在するので細かい分割を必要とすることや、節点の拘束条件を順次変化させることによってき裂を進展させるので、き裂進展がなめらかでないなどの難点がある。このような難点を解決するために本節では3.2.2節で述べた特異要素を用いる有限要素法を高速進展するき裂の動的応力拡大係数の解析に適用できるように拡張する。

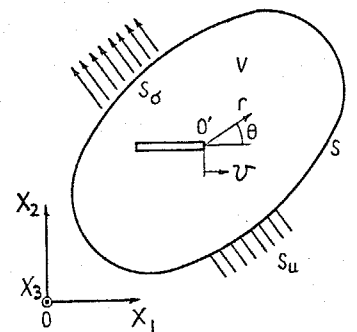
(1) 特異要素を用いる有限要素法の定式化

基礎式

図Ⅲ-57に示すような、き裂を含む弾性体 V を考える。ここで S_u は弾性体の境界 S のうち変位の与えられた領域を表わし、 S_σ は応力の与えられた領域を表わす。 $O-X_1, X_2, X_3$ を静止直角座標系とし、 $O'-r, \theta$ を着目するき裂先端を原点とする移動座標系とする。また、 v はき裂進展速度を表わす。

d'Alembertの原理を用い仮想仕事の原理を適用した式を、時刻 $t=t_0$ と $t=t_0+\Delta t$ の間で積分すると

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left\{ \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} T_i \delta u_i dS \right\} dt = 0 \quad (\text{Ⅲ-121})$$

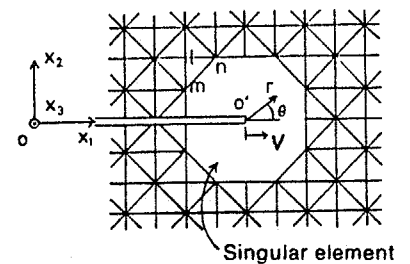


図Ⅲ-57 き裂を含む弾性体

が得られる。ここで、 $\rho, \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ および T_i は、それぞれ、物体の密度、応力、ひずみ、および表面力である。ドット(・)は時間微分を表わす。なお、簡単のために物体力は働いていないとした。

図Ⅲ-57 のように要素分割し、き裂先端付近の要素を特異要素とする。特異要素と三角形要素の境界線 S^* 上では節点以外の場所では変位が不連続になるので(3.2.2 節参照)、 S^* における変位の連続条件をラグランジエの未定乗数 λ_i を用いて付帯条件として導入する。すなわち、

$$\int_{t_0}^{t_{tot}} \left\{ \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV - \int_{S_r} T_i \delta u_i ds - \int_{S^*} \delta [\lambda_i (u_i^{(1)} - u_i^{(0)})] ds \right\} dt = 0 \quad (\text{Ⅲ-122})$$



図Ⅲ-58 特異要素を用いた要素分割

ここで、上添字(1)および(0)は、それぞれ三角形要素および特異要素に関する量を

表わす。 λ_i は平衡状態において境界面に働く面力 T_i に等しいという物理的な意味を持つので、上式は

$$\int_{t_0}^{t_{tot}} \left\{ \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV - \int_{S_r} T_i \delta u_i dV - \int_{S^*} \delta [T_i^{(1)} (u_i^{(1)} - u_i^{(0)})] ds \right\} dt = 0 \quad (\text{Ⅲ-123})$$

の形に書ける。ただし、

$$T_i^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} n_j^{(1)} \quad (\text{Ⅲ-124})$$

であり、 $n_j^{(1)}$ は S^* 上にありて三角形要素から外向きに引いた単位法線方向余弦である。(脚注)

(脚注) 式(Ⅲ-123)において $T_i^{(1)} = -T_i^{(0)} = -\sigma_{ij}^{(0)} n_j^{(0)}$ であるから、(次頁へ)

面外せん断変形 (モードⅢ)

まず、取扱いか比較的容易な面外せん断変形 (モードⅢ) の場合について考える。式(Ⅲ-123)を変位を用いて表わすと

$$\int_{t_0}^{t_{\text{tot}}} \left[\iint_A \mu \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial (\delta u_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial (\delta u_3)}{\partial x_2} \right\} dx_1 dx_2 + \iint_A \rho \ddot{u}_3 \delta u_3 dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma_0} T_3 \delta u_3 d\Gamma - \int_{\Gamma^*} \delta \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_1} n_1^{(1)} + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2} n_2^{(1)} \right) (u_3^{(1)} - u_3^{(0)}) \right\} d\Gamma \right] dt = 0 \quad (\text{Ⅲ-125})$$

となる。ここで、 μ は横弾性係数、 A は考えている領域、 Γ_0 は表面力 T_3 が与えられた境界、 Γ^* は特異要素と三角形要素の境界である。

各要素内の変位が次式で表わせると仮定する。

$$u_3 = [N]^e \{\phi\}^e \quad (\text{Ⅲ-126})$$

ここで、 $[N]^e$ は要素内の変位分布の形状を定める変位関数で、 $\{\phi\}^e$ は未知パラメータである。通常の三角形要素(たとえば、図Ⅲ-58の三角形(ふた))については、 $[N]^e$ を定むずみ要素の変位関数とし、 $\{\phi\}^e$ を節点変位とする。

特異要素については、速度 v で進展するき裂の先端付近の変位場は、一般に動的応力拡大係数 $K_{\text{Ⅲ}}(t)$ を用いて

$$u_3 = \frac{K_{\text{Ⅲ}}(t)}{\mu} \left\{ \frac{r}{\pi(1-\beta_0^2)} \right\}^{1/2} \left\{ (1-\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta \right\}^{1/2}$$

(前頁から) 最後の項の代わりに $\int_{\Gamma^*} \delta [T_3^{(0)} (u_3^{(0)} - u_3^{(1)})] d\Gamma$ を用いることと考えられる。しかし、三角形定むずみ要素を用いると要素内で応力が一定値となるので、式(Ⅲ-123)のように境界面に作用する面力を三角形要素側で評価した方が計算が容易である。

$$= f_{III}(r, \theta, v) K_{III}(t) \quad : \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (III-127)$$

の形に表わすことができる⁽²⁶⁾ ので ($\beta_0 = v/C_2$), $f_{III}(r, \theta, v)$ を変位関数とし, $K_{III}(t)$ を有限要素法によって求められる未知パラメータとする。ただし, 進展するき裂の場合には

$$f_{III}(r, \theta, v) = f_{III}(r(x_1, x_2, t), \theta(x_1, x_2, t), v) \quad (III-128)$$

であるから, 特異要素の変位関数は時間の関数になることに注意する必要がある。すなわち,

$$[N]^e = f_{III}(r, \theta, v) = [N(x_1, x_2, t)]^e \quad (III-129a)$$

$$\{\phi\}^e = K_{III}(t) \quad (III-129b)$$

である。また, 微小時間 Δt の間き裂は等速 v で x_1 軸方向に進展するものと仮定し, 特異要素内の加速度 $\ddot{u}_3$ を

$$\ddot{u}_3 = \frac{d^2}{dt^2} (f_{III} K_{III}) = f_{III} \ddot{K}_{III} - 2v \frac{\partial f_{III}}{\partial x_1} \dot{K}_{III} + v^2 \frac{\partial^2 f_{III}}{\partial x_1^2} K_{III} \quad (III-130)$$

で表わす。

特異要素に接している三角形要素については, 図III-58の三角形 l, m, n を例にとると

$$\begin{aligned} u_3 &= [N_l, N_m, N_n]^e \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix}^e = [N_l, N_m, N_n]^e \begin{Bmatrix} \phi_l \\ f_{III m} K_{III} \\ f_{III n} K_{III} \end{Bmatrix}^e \\ &= [N_l, N_m f_{III m}, N_n f_{III n}]^e \begin{Bmatrix} \phi_l \\ K_{III} \\ K_{III} \end{Bmatrix}^e \\ &= [N(x_1, x_2, t)]^e \{\phi(t)\}^e \end{aligned} \quad (III-131)$$

となるので, $[N(x_1, x_2, t)]^e$ を変位関数とし, $\{\phi(t)\}^e$ を有限要素法によって求められる未知パラメータとする。ただし, $f_{III m}$

$f_{III n}$ は, それぞれ, 点 m, n における $f_{III}(r, \theta, \psi)$ の値である。また, 特異要素に接する要素は, き裂先端から離れているので, 変位関数の時間的变化は小さいと考えられる。したがって, このような要素内の加速度 $\ddot{u}_3$ は

$$\ddot{u}_3 = [N(x_1, x_2, t)]^e \{\dot{\phi}(t)\}^e \quad (\text{III-132})$$

で表わされるものとする。

以上の近似式, 式 (III-126), (III-129) ~ (III-132) を式 (III-125) へ代入することにより, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left[\sum_e \left\{ \mu \iint_{A_e} \{\delta\phi\}^e T [B]^e T [B]^e \{\phi\}^e dx_1 dx_2 + \rho \iint_{A_e} \{\delta\phi\}^e [N]^e T [N]^e \{\dot{\phi}\}^e dx_1 dx_2 \right. \right. \\ & - \int_{\Gamma_{0e}} T_3 \{\delta\phi\}^e T [N]^e d\Gamma + \iint_{A_e} \mu \left\{ \left(\frac{\partial f_{III}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_{III}}{\partial x_2} \right)^2 \right\} K_{III} \delta K_{III} dx_1 dx_2 \\ & + \iint_{A_e} \rho \left\{ f_{III} \ddot{K}_{III} - 2v \frac{\partial f_{III}}{\partial x_1} \dot{K}_{III} + v^2 \frac{\partial^2 f_{III}}{\partial x_1^2} K_{III} \right\} f_{III} \delta K_{III} dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma_{0e}} T_3 f_{III} \delta K_{III} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma^*} \{\delta\phi\}^e T \mu [B]^e T [n]^e T ([N]^e \{\phi\}^e - f_{III} K_{III}) d\Gamma \\ & \left. - \int_{\Gamma^*} (\{\delta\phi\}^e T [N]^e T - f_{III} \delta K_{III}) \mu [n]^e [B]^e \{\phi\}^e d\Gamma \right] dt = 0 \quad (\text{III-133}) \end{aligned}$$

ここで, $\sum_e$ は三角形要素からの寄与の総和を表わし, T は転置を表わす。また,

$$[B]^e = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}^T [N]^e \quad (\text{III-134a})$$

$$[n]^e = [n_1^{(1)}, n_2^{(1)}] \quad (\text{III-134b})$$

である。

仮想仕事の原理より $\{\delta\phi\} = \{\delta\phi^e, \delta K_{III}\}^T$ は任意に与えられるので, 上式より

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left\{ [K(t)] \{\phi(t)\} + [V(t)] \{\dot{\phi}(t)\} + [M(t)] \{\ddot{\phi}(t)\} - \{F(t)\} \right\} dt$$

$$= \{0\}$$

(III-135)

が得られる。ここで, $[K(t)]$, $[M(t)]$ は, それぞれ, 拡張された剛性マトリックスおよび質量マトリックスであり, $[V(t)]$ は式(III-133)の K_{III} の項から生じるマトリックスである。各マトリックスが時間の関数になっているのは, き裂進展によって特異要素の変位関数が増えるからである。また, $\{F(t)\}$ は等価節点力である(付録II参照)。

$t=t_0$ において平衡が成り立っているとし, $t=t_0$ から $t_0+\Delta t$ の間の増分に Δ をつけて表わすものとすれば, 式(III-135)から

$$\begin{aligned} & [K(t_0+\Delta t)]\{\Delta\phi\} + [V(t_0+\Delta t)]\{\Delta\dot{\phi}\} + [M(t_0+\Delta t)]\{\Delta\ddot{\phi}\} \\ & = \{\Delta F\} - [\Delta K]\{\phi(t_0)\} - [\Delta V]\{\dot{\phi}(t_0)\} - [\Delta M]\{\ddot{\phi}(t_0)\} \end{aligned} \quad (\text{III-136})$$

が得られる。さらに, 微小時間 Δt の間に加速度が線形に変化すると仮定する Newmark の $\beta = 1/6$ 法⁽¹⁾を用いると上式は

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(\Delta t)^2}{6} [K(t_0+\Delta t)] + \frac{\Delta t}{2} [V(t_0+\Delta t)] + [M(t_0+\Delta t)] \right] \{\Delta\ddot{\phi}\} \\ & = \{\Delta F\} - [\Delta K]\{\phi(t_0)\} - [\Delta V]\{\dot{\phi}(t_0)\} - [\Delta M]\{\ddot{\phi}(t_0)\} \\ & \quad - [K(t_0+\Delta t)]\{\Delta t \dot{\phi}(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\phi}(t_0)\} - [V(t_0+\Delta t)]\{\Delta t \dot{\phi}(t_0)\} \end{aligned} \quad (\text{III-137})$$

となり, $\Delta\ddot{\phi}$ に関する前進形の連立差分方程式が得られる。他の $\{\phi\}$, $\{\dot{\phi}\}$, $\{\ddot{\phi}\}$ などの諸量は $\Delta\ddot{\phi}$ から求められる。動的応力拡大係数 $K_{III}(t)$ は未知パラメータ $\{\phi\}$ のなかに含まれているので, 実際の計算では, 式(III-137)を時刻 Δt ごとに解くことが主な作業になる。き裂が静止している場合は, $[K]$, $[M]$ は一定

値となり, $[V]$ はゼロとなるので, 式(Ⅲ-137)は次式のようになる。

$$\left[\frac{(\Delta t)^2}{6} [K] + [M] \right] \{\Delta \ddot{\phi}\} = \{\Delta F\} - [K] \left\{ \Delta t \dot{\phi}(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\phi}(t_0) \right\} \quad (\text{Ⅲ-138})$$

なお, 特異要素と三角形要素の境界での変位の連続性を付帯条件としなり場合には, 式(Ⅲ-133)において境界 Γ^* 上の線積分を省略することにより, 式(Ⅲ-137), (Ⅲ-138)に相当する式が得られる。

開口形変形 (モードⅠ)

き裂先端付近の動的変位場は, 一般に動的応力拡大係数 $K_I(t)$ を用いて式(Ⅲ-63b)に示したように

$$u_1 = f_1^I(r, \theta, v) K_I(t, v) \quad (\text{Ⅲ-139a})$$

$$u_2 = f_2^I(r, \theta, v) K_I(t, v) \quad (\text{Ⅲ-139b})$$

と表わすことができる。そこで, 特異要素内の変位は, 式(Ⅲ-139)で表わされる変位と特異要素全体の変位 $u_0(t)$ の和になっているものとし

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^I(r, \theta, v), 1 \\ f_2^I(r, \theta, v), 0 \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} K_I(t) \\ u_0(t) \end{Bmatrix}^e \quad (\text{Ⅲ-140})$$

で近似する。(脚注) 以下, 面外せん断形変形 (モードⅢ) の場合

(脚注) き裂が静止している場合については, $f_1^I(r, \theta, 0) = \lim_{v \rightarrow 0} f_1^I(r, \theta, v)$ および $f_2^I(r, \theta, 0) = \lim_{v \rightarrow 0} f_2^I(r, \theta, v)$ を用いる。なお, これらは静的な解析によって得られるものと一致する。

と同様にして，式(Ⅲ-137)または式(Ⅲ-138)と同様の式を得ることかできる(付録Ⅱ参照)。

(2) 計算例

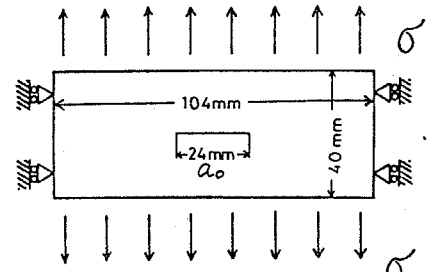
図Ⅲ-59 に示すような中央にき裂を有する長方形板の上下面に引張り荷重が時間に関して階段関数状に作用する場合[開口形変形(モードⅠ)]について，計算例を示す。要素分割を図Ⅲ-60

に示す。問題の対称性によって板の1/4について計算を行えばよい。

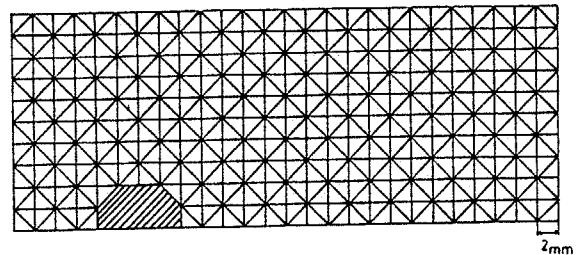
図中の斜線の部分は特異要素の形状を表わす。き裂が進展する場合には，き裂先端が特異要素からはみ出さないように，図Ⅲ-61 のように，き裂先端が点aまで進展したときに特異要素を移動させて計算を続けた。このとき新しく生じる節点の諸量は，式(Ⅲ-140)から計算し，消える節点については無視した。なお，時間増分 $\Delta t = 0.2 \mu$ とした。

変位関数の不連続性に関する検討

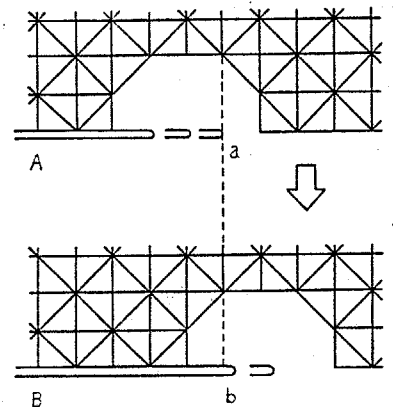
静止き裂およびき裂進展速度が図Ⅲ-



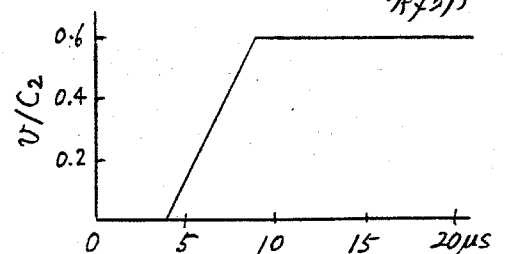
図Ⅲ-59 中央にき裂を有する長方形板
 $\rho = 2.45 \text{ Mg/m}^3$
 $\mu = 29.4 \text{ GPa}$
 $\nu = 1/3$ ($\nu = 0.25$ 平面ひずみ)



図Ⅲ-60 要素分割
 291 節点，507 要素

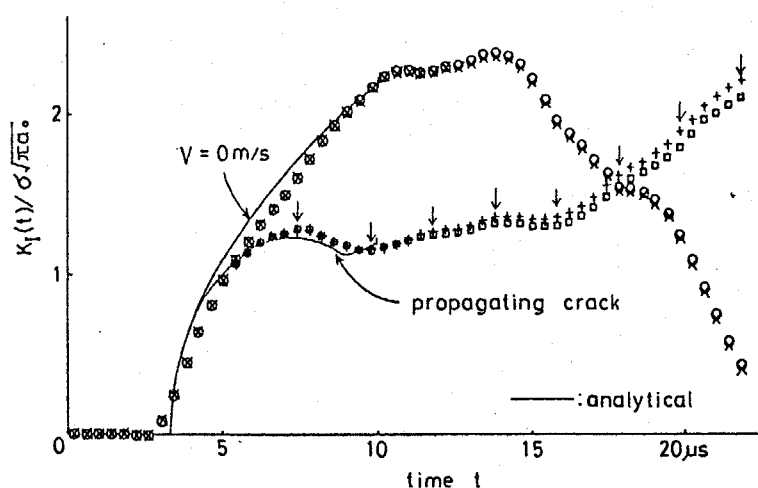


図Ⅲ-61 特異要素の移動



図Ⅲ-62 き裂進展速度の時間的变化

62 のように変化するとき裂に対する計算結果を図Ⅲ-63 に示す。無限板に対する静的応力拡大係数で無次元化された動的応力拡大係数を縦軸にとり、板の上下面に引張応力 σ が作



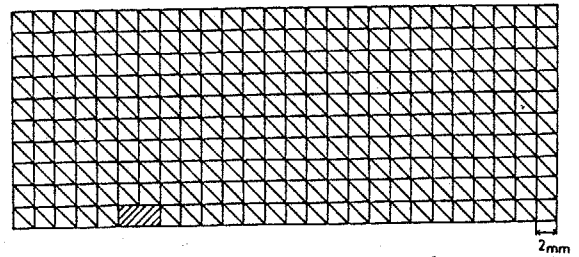
図Ⅲ-63 動的応力拡大係数の時間的变化
○, □ 式(Ⅲ-121)を基礎式とする場合
×, + 式(Ⅲ-123)を基礎式とする場合

用し始めてからの時間を横軸にとっている。○, □印は式(Ⅲ-121)を基礎式とした場合の計算結果であり, ×, +印は特異要素と三角形要素の境界での変位の連続性を付帯条件として考慮した基礎式(Ⅲ-123)による計算結果である。両者の結果はほぼ等しく, 特異要素と三角形要素の間での変位の連続性を付帯条件として導入しなくても導入した場合と同程度の解が得られることがわかる。図中の実線は無限体中の半無限き裂に関する解析解⁽³⁶⁾を示す。数値解は有限体中のき裂に対するものであるが, 板の上下面で反射された応力波がき裂先端に到達する時刻 $t = 10\mu\text{s}$ までは無限板の解と一致するはずである。計算結果と解析解は良く一致しており, 本手法が動的応力拡大係数の解析に有効であることを示している。なお, 図中の↓印は特異要素を移動した時点を表わしている。特異要素を移動することは計算に

悪影響を及ぼしてゐないように思われる。

特異要素の形状に関する検討

図Ⅲ-64 に示すような形状の特異要素（図中斜線部）を用いて上と同様の計算を行った。図Ⅲ-65 に計算結果を示す。図Ⅲ-63 と同等の結果が得られている。

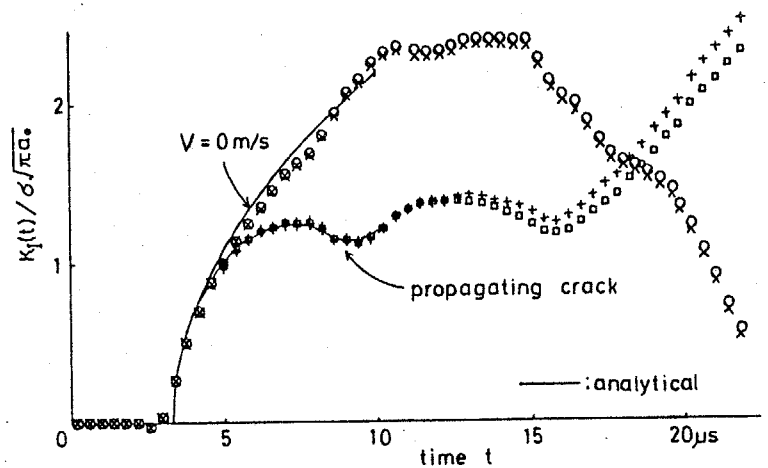


図Ⅲ-64 要素分割
296節点, 517要素

3.3.4. 高速き裂進展の シミュレーション

(1) シミュレーションの方法

本節では、き裂進展のシミュレーションについて考察する。前節の計算



図Ⅲ-65 動的応力拡大係数の時間的变化
(図Ⅲ-63の要素分割を用いた場合)
○, □ 式(Ⅲ-121)を基礎式とした場合
×, + 式(Ⅲ-123)を基礎式とした場合

例では、き裂進展速度を既知としたが、シミュレーションを行うためには物体の物性値にもとづいてき裂進展速度が定まるようにする必要がある。ここでは、式(Ⅲ-113)と同様にき裂進展の条件としてエネルギー収支にもとづく次式を採用する。

$$G (= \dot{G}) = G_c(v) \quad (\text{Ⅲ-141})$$

$G_c(v)$ は破面形成に必要な広義の表面エネルギーである。これは材料の物性値で、ここでは、き裂進展速度の関数と仮定する。

式(Ⅲ-141)は式(Ⅲ-65)を用いると

$$\frac{1}{4\mu(1-k^2)} A_I(v) K_I^2(t, v) = G_C(v) \quad (\text{Ⅲ-142})$$

となる。上式が成立するような速度でき裂を進展させることにより、き裂進展のシミュレーションを行うことができる。特異要素の変位関数のなかには、き裂進展速度が含まれているので、式(Ⅲ-137)の計算をするためには、時刻 $t=t_0+\Delta t$ におけるき裂進展速度がわかっていなければならない。ここでは、 $K_I(t_0, v(t_0))$, $K_{II}(t_0, v(t_0))$, $\dot{K}_I(t_0, v(t_0))$ の値が既知であることに着目して、 $t=t_0+\Delta t$ におけるき裂進展速度を式(Ⅲ-142)から決定することにする。速度 $v(t_0)$ のき裂の $t=t_0+\Delta t$ における応力拡大係数の値を

$$K_I(t_0+\Delta t, v(t_0)) = K_I(t_0, v(t_0)) + \Delta t \dot{K}_I(t_0, v(t_0)) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{K}_I(t_0, v(t_0)) \quad (\text{Ⅲ-143})$$

で近似する。つぎに、時刻 t に進展速度が v であるき裂の動的応力拡大係数は

$$K_I(t, v) = k_I(v) K_I(t, 0) \quad (\text{Ⅲ-144})$$

のように、き裂進展速度の関数 $k_I(v)$ と、その瞬間にき裂先端が同じ位置にある静止したき裂に対する応力拡大係数との積で表わされるので、^{(35-38), (42)} この式を用いて、次式のように

$$K_I(t_0+\Delta t, 0) = K_I(t_0+\Delta t, v(t_0)) / k_I(v(t_0)) \quad (\text{Ⅲ-145})$$

を求める。ただし、

$$k_I(v) = \frac{(1-\delta_0)}{(1-k\beta_0)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_a^b \tan^{-1} \left[\frac{4x^2(x^2-a^2)^{1/2}(b^2-x^2)^{1/2}}{(b^2-2x^2)^2} \right] \frac{dx}{x-(1/v)} \right]$$

ここで, $a = 1/c_1$, $b = 1/c_2$, $\beta_0 = v/c_2$, $\delta_0 = v/c_R$

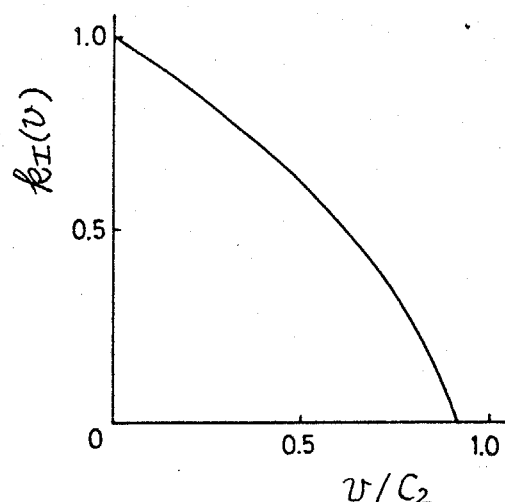
c_R : Rayleigh 波の伝播速度 (Ⅲ-146)

である (図Ⅲ-66 参照)。さらに,
式 (Ⅲ-144) を式 (Ⅲ-142) へ代入する
と

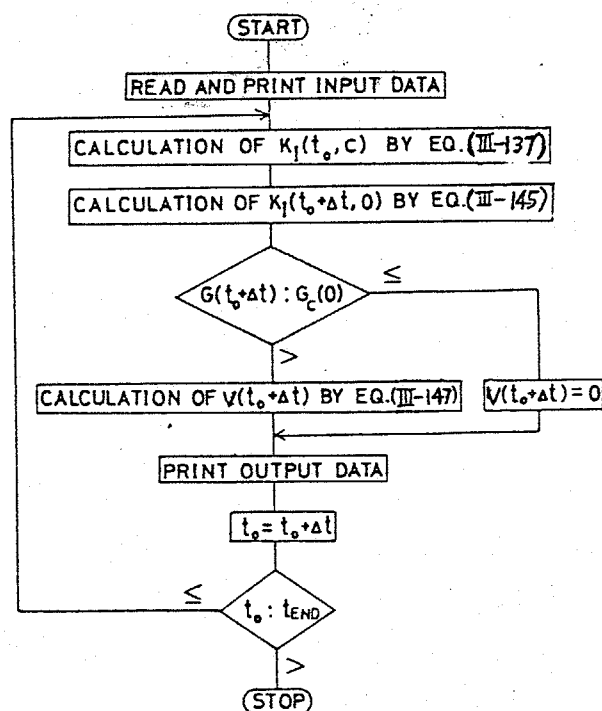
$$\frac{1}{4\mu(1-k^2)} A_I(v) k_I^2(v) K_I^2(t, 0) - G_c(v) = 0 \quad (\text{Ⅲ-147})$$

が得られる。これに式 (Ⅲ-145) から
求められる値を代入すると, き裂進
展速度 $v(t_0 + \Delta t)$ を求めることのでき
る方程式が得られる。 $v(t_0 + \Delta t)$

が定まれば, 式 (Ⅲ-137) の計算
を続行することかできる。図Ⅲ
-67 にシミュレーションのフロ
ーチャートを示す。さらに精度
を向上させる必要があれば, 上
のようにして求められた $K_I(t_0 + \Delta t, v(t_0 + \Delta t))$ を用い, さらに
式 (Ⅲ-147) で $t = t_0 + \Delta t$ としたも
のを解き, この解を $v(t_0 + \Delta t)$ と
おいて再び式 (Ⅲ-137) の計算を



図Ⅲ-66 式 (Ⅲ-146) の $k_I(v)$
と無次元化されたき裂
進展速度の関係
($k^2 = 1/3$)

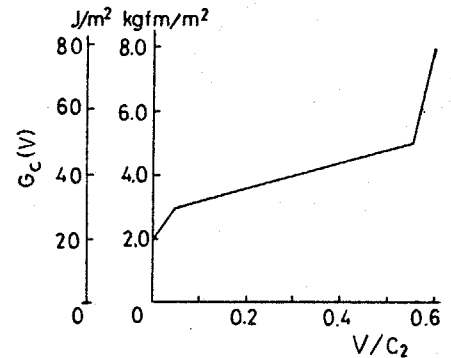


図Ⅲ-67 高速き裂進展のシミュ
レーションのフローチャート

を行い、逐次近似法によって解を精密化することができると。

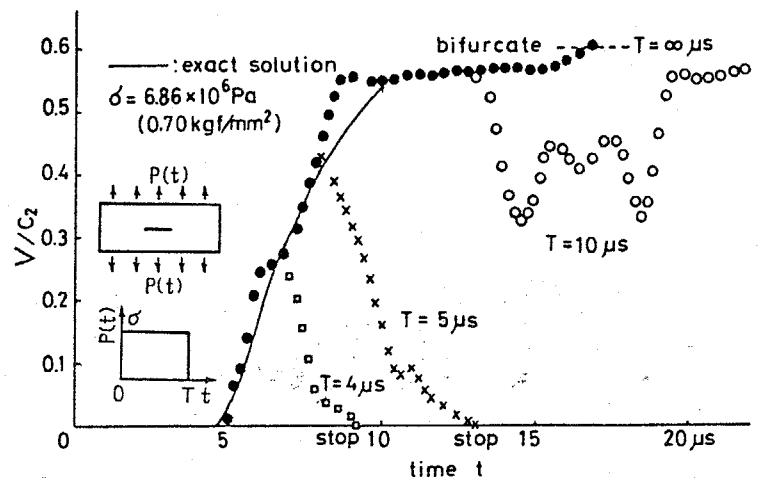
(2) 計算例

図Ⅲ-59 に示した長方形板の上下面に引張力が作用する場合についてシミュレーションを行った。動的破壊靱性値 $G_c(v)$ はガラスについての実験結果⁽³⁹⁾を参照して図Ⅲ-68で与えられ



図Ⅲ-68 シミュレーションに用いた動的破壊靱性値

のとした。また、き裂進展速度 v が横波の伝播速度 c_2 の約 0.6 倍を越えるとき裂先端近くの θ 方向応力 σ_θ の最大値がき裂の延長上でなくき裂面とある角度をとつ面上に生じるので $v=0.6c_2$ をき裂分岐の



図Ⅲ-69 高速き裂進展のシミュレーション(無次元化されたき裂進展速度の時間的变化)。加える荷重の持続時間を変えた場合

条件⁽⁴³⁾とする。動的応力拡大係数の計算は、式(Ⅲ-121)を基礎式とする特異要素を用いた有限要素によって行い、初期き裂長さを $2a_0 = 24\text{mm}$ とした。

加える荷重の大きさ σ を 6.86 MPa の一定値とし持続時間を変えた場合の計算結果を図Ⅲ-69 に示す。縦軸は横波の伝播速度

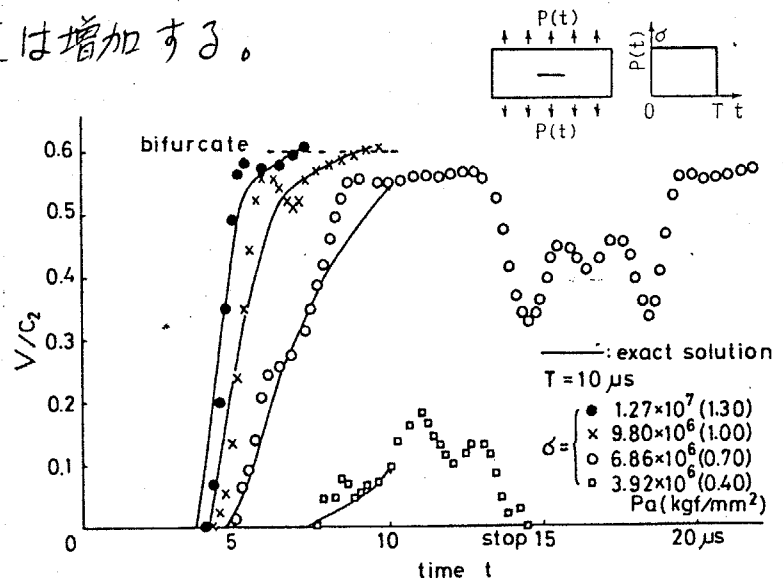
で無次元化されたき裂進展速度を表わし、横軸は荷重を加え始めてからの時間を表わす。まず、荷重を加え続ける場合に注目する(図中●印)。板の上下面に加えた荷重による応力波がき裂面に到達すると動的応力拡大係数が増加し始める。動的応力拡大係数の値が、

$$K_I^2(t, 0) = 4\mu(1-\nu^2)G_c(0) \quad (\text{III-148})$$

に達するとき裂は進展を開始する。その後動的応力拡大係数は増加するので、き裂進展速度も増加して分岐速度 $0.6C_2$ に達する。図中の実線は半無限き裂に対する $K_I(t, v)$ の解析解⁽³⁴⁻³⁶⁾を用いて式(III-142)よりき裂速度を求めたものを表わす。これは境界からの反射波の影響を受ける時刻までの厳密解を表わしている。数値解と厳密解が良く一致していることから、逐次近似法による精度の向上をはからなくても実用的には十分な精度でき裂進展速度が求められることが推定される。荷重が単一パルス波状の場合は時刻 T で除荷されるので除荷波(圧縮波)が生じる。荷重の持続時間 T が $4\mu s$ と $5\mu s$ の場合には、それぞれ、 $7.3\mu s$ および $8.3\mu s$ に圧縮波がき裂面に入射し、き裂進展速度は減少しき裂は停止する。 $T=10\mu s$ の場合には、時刻 $t=13.3\mu s$ にき裂面に入射し、き裂進展速度はいったん減少する。しかし、この場合には、 $T=4\mu s$ および $5\mu s$ の場合に比較して除荷波がき裂先端に到達するまでにき裂進展によって

応力の解放された範囲が広いので，自由境界で反射されて引張波となって入射する応力波の作用する時間も長く，その影響を受けて再びき裂進展速度は増加する。

荷重の持続時間を一定として荷重の大きさを変えた場合の結果を図Ⅲ-70に示す。図中の実線は半無限き裂に対する $K_I(t, v)$ の解析解⁽³⁵⁻³⁸⁾を用いて式(Ⅲ-142)より求めた計算結果を表わす。荷重の大きさを変化することによって，き裂の分岐や停止が生じることが示されている。



図Ⅲ-70 高速き裂進展のシミュレーション
(無次元化されたき裂進展速度の時間的变化) 加える荷重の大きさを変えた場合

3.3.5. き裂の分岐に及ぼす負荷形式の影響について

脆性材料の破面形態とき裂進展速度との間には密接な関係があることが知られている。たとえば，ガラスの破面は，き裂進展速度が増加するに伴って，鏡面状のミラー (Mirror) から細かい凹凸を有するミス (mist)，さらに凹凸の激しいハックル (hackle) へと変化する。そして，ハックルが出現し始める点が

き裂の分岐点にほぼ対応する。

破壊時の応力 σ_f とミラーの半径 r_m , または分岐するまでのき裂の進展量 a_b との間には, 実験的に次式が成立することが数多くの研究者らによって報告されている。⁽⁴⁴⁾

$$\sigma_f r_m^{1/2} = A = \text{const.} \quad (\text{III-149a})$$

または,

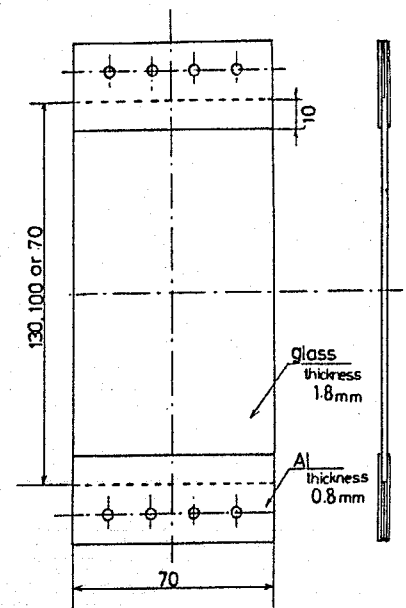
$$\sigma_f a_b^{1/2} = K_b = \text{const.} \quad (\text{III-149b})$$

ここで, A はミラー定数と呼ばれ, 応力拡大係数と同じ次元を持つので A の値から破壊靱性値 G_c を求める試みがある。⁽⁴⁵⁾ また, 式(III-149)を利用して残留応力の測定⁽⁴⁶⁾や初期欠陥の大きさを推定する試み⁽⁴⁷⁾もある。しかしながら, 引張りや曲げなどの負荷形式の違いによって A の値が異なるという事実が Abdel-Latif ら⁽⁴⁸⁾によって指摘されており, き裂が高速で進展する際に重要となる運動エネルギーの影響を考慮したエネルギーバウンスの式に基づく考察が加えられている。しかし, 静的な応力・変位場からの類推によって運動エネルギーが評価されていること, および, 丸棒の試験片が用いられているのでき裂が半楕円形状をしているにもかかわらず二次元的な取扱いがされているなどの問題点がある。

そこで, 本節では, 平板試験片を用いて行ったき裂の分岐実験の結果について検討する。

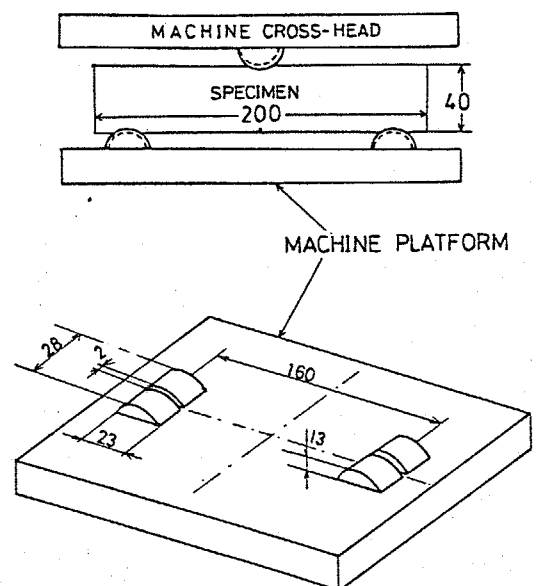
(1) 実験方法および実験結果

同一ロットの板厚 1.8mm の窓ガラス用ソーダライムガラスを供試材とし、中央切欠き試験片(CN)と片側切欠き試験片(SEN)による引張破壊試験及び三点曲げ破壊試験(3PB)を行った。引張破壊試験に用いた試験片の形状を図Ⅲ-71に示す。幅は 70mm で一定とし、長さを 130 , 100 , 70mm の3種類に変化させた。試験片の両端の幅 10mm の部分に厚さ 0.8



図Ⅲ-71 中央切欠き試験片(CN)と片側切欠き試験片(SEN)の形状

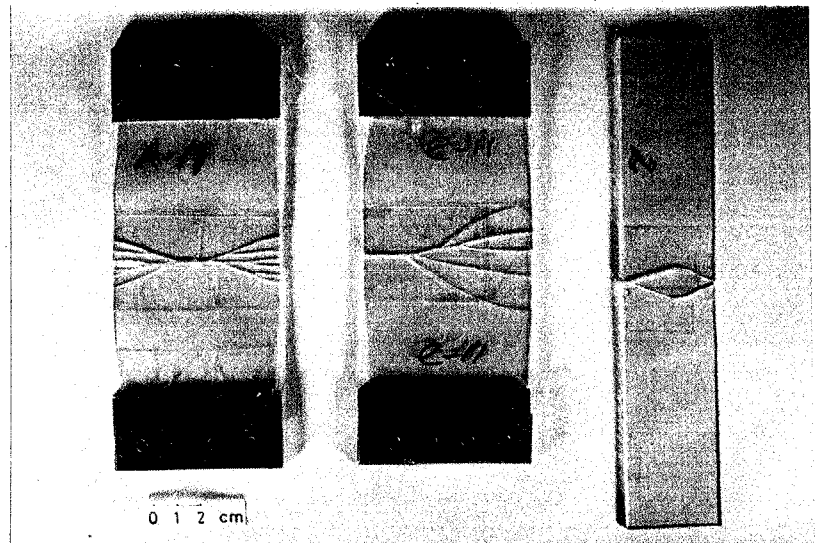
mm のアルミ板を工業用エポキシ系接着剤により接着し、銅製のチャックを介し負荷した。片側切欠き試験片に対しては厚さ 0.5mm のファインカッターで初期切欠きを作成し、中央切欠き試験片に対してはガラス切りによって中央にきずを設けた。また、三点曲げ試験片の形状は、図Ⅲ-72に示すように幅 40mm 、長さ 200mm とし、支持点間距離を 160mm に定めた。負荷用エッチは半円柱形とし試験片を荷重方向と垂直に保持するための案内溝を設けた。実験には、手動の



図Ⅲ-72 三点曲げ試験片(3PB)の形状と負荷方法

小型万能試験機を用いた。なお、破片を保存するために、き裂が進展すると予想される部分にあらかじめセロテープを貼布した。

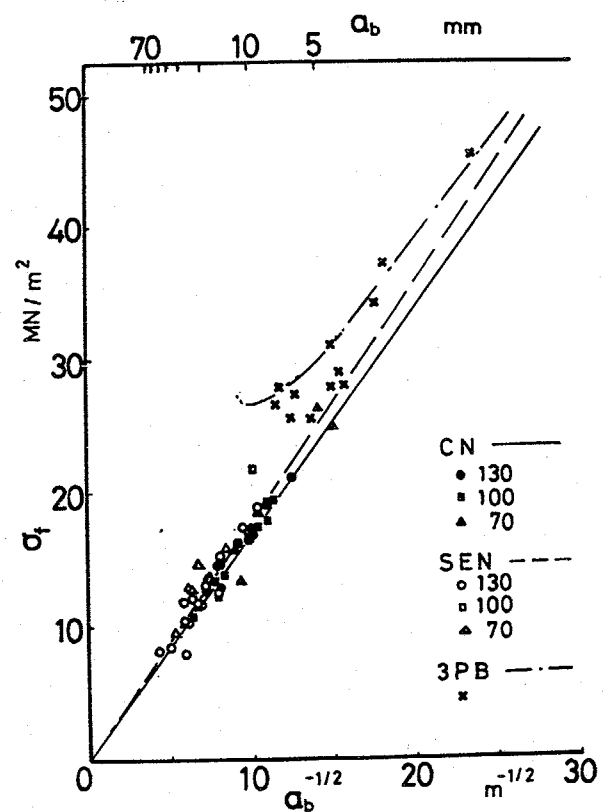
き裂の分岐例を図Ⅲ-73に示す。左から、中央切欠き試験片、片側切欠き試験片、三点曲げ試験片の順である。



図Ⅲ-73 き裂の分岐例

。引張試験片では、第二次、第三次の分岐が起こり、き裂が広がっているのに対し、三点曲げ試験片では第一次分岐の後に中央を過ぎたあたりで荷重点の方向にき裂が進展方向を変えているのが観察される。

破壊応力 σ_t と第一次分岐までのき裂の進展量 a_b について、 σ_t を縦軸に $a_b^{-1/2}$ を横軸にとって整理すると図Ⅲ-74 のようになる。引張試験片に対しては、破壊



図Ⅲ-74 破壊応力 σ_t と分岐するまでのき裂の進展量 a_b の関係

荷重を断面積で除した値を σ_f とし三点曲げ試験片に対しては

$$\sigma_f = \frac{3SP_f}{2BH^2} \quad (\text{III-150})$$

としている。ここで、 S はスパン幅、 P_f は破壊荷重、 B は板厚、 H は試験片の幅である。負荷形式の違いによって実験結果の傾向は異なり、式(III-149)の K_b は材料定数とはならないことがわかる。しかし、試験片の長さが増えることによる影響は小さいようである。

(2) 検討

破壊応力 σ_f と分岐するまでのき裂進展量 a_b の関係について

き裂の分岐条件としては、き裂進展速度条件⁽⁴³⁾、エネルギー条件⁽⁴⁹⁾、応力拡大係数条件⁽⁵⁰⁾、ひずみエネルギー密度条件⁽⁵¹⁾および、ひずみ拡大係数条件⁽⁵²⁾が提案されている。カラス管を用いた実験に関して、き裂先端付近の周方向応力 σ_θ がき裂面上でなくき裂面と対称な位置で最大となるき裂進展速度(横波の伝播速度 C_2 の約60%)でき裂が分岐すること、 σ_f と a_b の関係が動的エネルギー解放率を用いることによって良く説明できることが報告されている。^{(39)(53,54)} 本節では、分岐条件として、き裂進展速度条件とエネルギー解放率条件を採用して実験結果を考察することにする。なお、き裂は高速になってから分岐するので、Petchenら⁽⁵⁰⁾やKirchner⁽⁵²⁾らの静的な応力場に基づいた議論には問題があると考えられる。

き裂進展の条件は、式(Ⅲ-113)と同様に動的エネルギー解放率 G を用いて

$$G = G_c(v) \quad (\text{Ⅲ-151})$$

によって表わされる。ここで、 G_c は破面形成に必要な広義の表面エネルギーであり、一般に、き裂進展速度の関数と考えられる。動的エネルギー解放率と動的応力拡大係数 K_I の間には、式(Ⅲ-65)によって一対一の関係が成立する。したがって、以下の議論では動的応力拡大係数 K_I を用いる。

動的応力拡大係数は変数分離によって

$$K_I = f(v) K^* \quad (\text{Ⅲ-152})$$

の形で表わすことができる〔例えば文献(42)〕。ここで、 $f(v)$ は、き裂進展速度の関数であり、 K^* は、その瞬間のき裂速度には依存しない“静的”応力拡大係数である。ただし、き裂進展によって発生した応力波が境界で反射されて再びき裂先端に入射するときは、その影響を受けてき裂先端の応力・変位場は変化するのので、 K^* は一般にき裂進展履歴に依存する量である。分岐するときのき裂進展速度を v_b とすると式(Ⅲ-65), (Ⅲ-151), (Ⅲ-152) より分岐時には

$$K_b = f(v_b) K_b^* = C \quad (\text{Ⅲ-153})$$

が成立する。ここで、 C は $G_c(v_b)$ と $A_I(v_b)$ の値から決まる定数である。

(i) 中央切欠き試験片：中央切欠き試験片に対して有限境界の影響がないものとして，無限体中を一定速度で両側に進展するき裂に対する Broberg の解⁽²⁷⁾を用いると， K_b^* は，き裂進展履歴に無関係に

$$K_b^* = \sigma_f \sqrt{\pi a b} \quad (\text{III-154})$$

で与えられる。この式から得られる分岐条件式は

$$\sigma_f a b^{1/2} = \text{const.} \quad (\text{III-155})$$

となり形式的に式(III-149)と一致する。したがって， σ_f と $a b^{1/2}$ のグラフ(図III-74)では実験点は直線となるはずである。そこで，最小自乗法を用いて実験結果から $\sigma_f a b^{1/2} = 1.68 \text{ MN/m}^{3/2}$ の結果を得た。この結果を図III-74に実線で示した。また，き裂先端の周方向応力 σ_θ がき裂面の延長上で

$$\frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{III-156})$$

を満足したときに，き裂が分岐するものとする。分岐時のき裂進展速度は $v_b = 0.623 C_2$ で与えられる(平面ひずみ状態を仮定)⁽⁵³⁾。このとき， $k(v_b) = 0.470$ となる。したがって，式(III-153)，(III-154)より

$$C = 1.40 \text{ MN/m}^{3/2} \quad (\text{III-157})$$

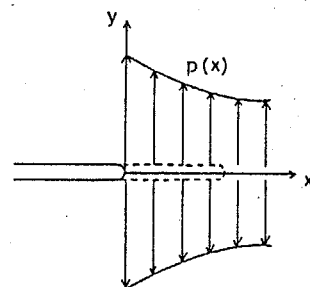
の結果が得られる。

(ii) 片側切欠き試験片：中央切欠き試験片によって得られた値を用いて片側切欠き試験片のき裂の分岐について考察する。有

境界の影響がないものとするれば、片側切欠き試験片に対しては半無限き裂に対する Freund の解^(35,36)を適用することかできる。この場合 K_b^* は

$$K_b^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{a_b} \frac{p(x)}{\sqrt{a_b - x}} dx \quad (\text{III-158})$$

で与えられる。ここで、 $p(x)$ は、将来き裂面となるところに進展前に作用している



応力である（図 III-75 参照）。初期切欠き長の 7~12 倍の長さなき裂が成長した後に分

図 III-75 応力 $p(x)$ の分布

岐が起っているので、切欠きの存在することによる応力集中が K_b^* に及ぼす影響は小さいと考えられる（切欠きを楕円孔で近似して応力集中の影響を調べたところ K_b^* に対する誤差は 2~4% であった）。そこで、 $p(x) = \sigma_f$ とすると式 (III-158) より

$$K_b^* = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_f \sqrt{a_b} \quad (\text{III-159})$$

となる。なお、Freund の解に対しては、 $\tau(v_b) = 0.496$ である。したがって、式 (III-153), (III-157), (III-159) より

$$\sigma_f a_b^{1/2} = 1.77 \text{ MN/m}^{3/2} \quad (\text{III-160})$$

が得られる。この結果を図 III-74 に破綻で示した。中央切欠き試験片と片側切欠き試験片の実験結果の違いは理論的に説明された。片側切欠き試験片のデータより最小自乗法により決定した結果は $\sigma_f a_b^{1/2} = 1.81 \text{ MN/m}^{3/2}$ となり、定数に対する誤差は 2.3% であった。

(iii) 三点曲げ試験片：三点曲げの場合には式(Ⅲ-158)における関数は

$$P(x) = \sigma_f \left(1 - \frac{x}{H/2}\right) \quad (\text{Ⅲ-161})$$

となる。ここで、 σ_f は式(Ⅲ-150)で与えられる。上式を、式(Ⅲ-158)に代入すると

$$K_b^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_f \sqrt{a_b} \left(2 - \frac{8a_b}{3H}\right) \quad (\text{Ⅲ-162})$$

となる。したがって、式(Ⅲ-153), (Ⅲ-157), (Ⅲ-162) より

$$\sigma_f a_b^{1/2} = 1.77 / \left(1 - \frac{4a_b}{3H}\right) \quad (\text{Ⅲ-163})$$

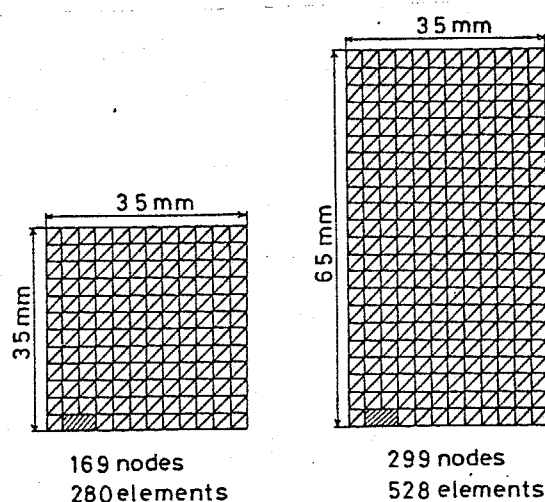
が得られる。この結果は、先の引張試験の結果とは異なり $\sigma_f a_b^{1/2}$ は一定とはならない。式(Ⅲ-163)の結果を図Ⅲ-74 に一点鎖線で示す。実験結果と良く一致していることがわかる。なお、式(Ⅲ-162)で与えられる K_b^* は $a_b = H/4$ で最大となり $a_b > H/4$ では減少する。したがって、試験片幅の $1/4$ を越えてき裂が進展する場合には動的応力拡大係数の値は減少するので、 $0 \sim H/4$ で分岐しないき裂は最後まで分岐しないことになる。実験においても、 $a_b > H/4$ となる結果は得られなかった。

以上より、破壊応力 σ_f と分岐するまでのき裂の進展量との関係は、無限体中を進展するき裂に対する解析解を用いて破壊動力学的に説明できることが判明した。すなわち、分岐するまでのき裂の進展量は、進展開始時の初期応力分布に強く影響されることかわかる。

なお、物体へのくさびの打ち込みによって生じるき裂の場合などのように、き裂面に集中荷重を受けてき裂が進展する場合については、3.2.2.節で述べたように一様応力を受けるBrobergの解に比べて $\kappa(b)$ の値が小さくなるので、式(Ⅲ-153)よりき裂の分岐が起こりにくいことが予想される。

境界からの反射波の影響について

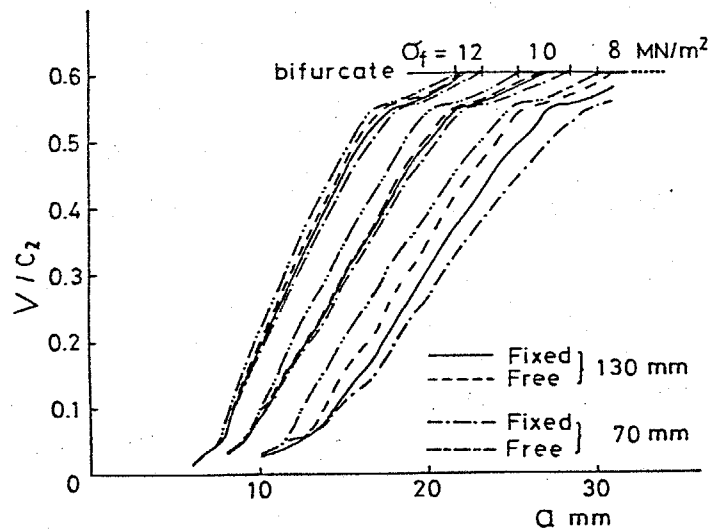
き裂が進展することによって発生する応力波は境界で反射されて再び、き裂面に入射し、き裂進展挙動に影響を及ぼすと考えられる。そこで、3.3.4.節で述べた手法によりき裂進展のシミュレーションを行い有限境界の影響について検討する。シミュレーションにおいては式(Ⅲ-151)の破壊条件を満足するようにき裂を進展させた。動的破壊靱性値 $G_c(u)$ には図Ⅲ-68で与えられるパイレックスガラスに対する測定結果を用い、 $E=62.4 \text{ GN/m}^2$, $\nu=0.2$, $\rho=2.23 \text{ Mg/m}^3$ とした。長さ130mmと70mmの二種類の長さの中央切欠き試験片について計算を行った。問題の対称性から板の1/4について図Ⅲ-76に示すような要素分割を行った。図の斜線部は特異要素の形状を表わす。



図Ⅲ-76 要素分割
(斜線部は特異要素)

シミュレーションにおいては、

荷重を静的に負荷し、板の上下面の変位は上下方向には固定または自由とし、水平方向には自由とした。図Ⅲ-77に計算結果を示す。縦軸は横波の伝播速度で無次元化され



図Ⅲ-77 き裂長さとき裂進展速度の関係

たき裂の進展速度を、横軸はき裂先端の位置を表わす。実線および破線は試験長さが130mmの場合の結果を表わし、一点鎖線および二点鎖線は70mmの結果を表わす。図において、Fixedは上下面を固定端とした場合の計算結果を表わし、Freeは自由端とした場合の計算結果を表わす。計算結果では、破壊応力 σ_t が高くなるに従って、分岐するまでのき裂の進展量が減少している。これは実験結果と傾向的に一致している。き裂の進展に伴って生じる降荷波(圧縮波)は、固定端では圧縮波として、自由端では引張波として反射し、再びき裂面に入射する。したがって、上下面の支持条件の違いによってき裂の進展速度および分岐するときのき裂長さに差が表われている。短い試験片の場合には反射波が早くき裂面に到達するので、この差が大きく表われている。

シミュレーションにおいては、切欠きの先端からき裂が発生

するのではなく、最初からき裂が進展するモデルを考えていること、および、パイレックスガラスの物性値を用いているので、実験結果と計算結果を定量的に比較することには問題があるが、図Ⅲ-74の実験結果に有限境界の影響が顕著に表われていない理由として下記の点がシミュレーションの結果から推定できる。

(i) 試験片の上下面が完全な固定端あるいは自由端ではなく実際には半固定端であるので、反射波の影響が明確に表われない（き裂進展速度曲線が固定端と自由端の場合の中間になり、有限境界の影響を受けない場合に近い）。

(ii) 横軸を $a_b^{-1/2}$ としているので、進展量の大きい場合（有限境界の影響を強く受けると考えられる場合）に対してバラツキを小さくする整理の方法をとっている。

なお、き裂の高速進展現象に関しては、本節で取扱ったような、き裂の分岐の問題のほかに、き裂進展阻止（crack arrest）の問題⁽⁵⁵⁾がある。この場合に、構造物の境界で反射する応力波がき裂の進展を促すように作用するのか、妨げるように作用するのかを評価することは重要である。したがって、境界の拘束条件の評価についてより詳細に検討することが今後の課題と考えられる。

3.4. 結言

衝撃荷重を受ける部材の破壊あるいは高速で進展するき裂のように、物体の慣性力の影響を考慮した動力学的な取扱いを必要とする問題について、主に、小規模降伏状態を仮定し弾性き裂モデルに基づいて検討を行った。弾性き裂モデルにおいては、前章において導出された $\int$ 積分と、弾性エネルギー解放率 G および動的応力拡大係数 K とが一対一に対応するので、動的き裂問題の解析は動的応力拡大係数の解析に帰着されることを示した。

つぎに、静止き裂に応力波が入射する場合について、き裂先端近傍の解析解を変位関数とする特異要素を用いた有限要素法および $\int$ 積分の積分経路(領域)独立な表示式を用いた動的応力拡大係数の有限要素解析法を提案し、いずれの方法によっても動的応力拡大係数を精度良く求められることを示した。また、三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の簡便評価式を導き、本式によって求められる値は実験結果と良く一致すること示した。

高速き裂問題に関しては、まず、無限体中にありき裂が、その中央に時間とともに増大する集中荷重を受けて両側に一定速度で進展する場合について解析を行い、動的応力拡大係数はき裂進展速度の増加とともに減少すること示し、き裂進展率 v と

について定性的な考察を行った。つぎに、任意形状の物体中を進展するき裂の動的応力拡大係数の解析に適用できるように上述の特異要素を用いる有限要素法を拡張し、高速き裂進展を精度良くシミュレートする方法を提案し、若干の計算例を示した。また、ガラスの平板試験片を用いて引張りおよび曲げ荷重によるき裂の分岐実験を行い、破壊応力と分岐するまでのき裂の進展量との関係が動的応力拡大係数を用いたき裂分岐条件式によって説明できることを示した。

塑性変形の影響については、集中荷重を受けて両側に進展するき裂の場合に関して、Dugdaleの仮定に基づいて近似的な解析を行い、き裂進展速度の増加に伴って塑性変形域の大きさやき裂先端の開口変位が減くことを示した。任意のき裂に関する一般論は今後の重要な研究課題であると考えられる。

第IV章 弾塑性破壊問題への応用

4.1. 緒言

高靱性材料で製作される原子炉圧力容器やタービンロータなどの構造健全性を評価するために、これらの構造物中に内存するか稼働中に発生するき裂の成長開始、安定成長、および不安定成長への遷移などの挙動を予測しようとする研究が活発に行われている。⁽¹⁻³⁾ き裂のこのような挙動を記述するためのパラメータとして、Rice が提案したJ積分⁽⁴⁾が利用されることが多い。しかし、第I章でも述べたようにJ積分は非線形弾性体の二次元問題に対して定義されているので、弾塑性問題においてJ積分が、き裂先端近傍の応力・ひずみ場を特徴づける積分経路独立な破壊力学パラメータとしての物理的な意味を持つのは、全ひずみ理論に従う弾塑性体が単調増加荷重を受ける場合に限られている。さらに、機械的な荷重のほかに熱による荷重が作用する場合には、小規模降伏状態においてもJ積分を破壊力学パラメータとして用いることが不合理となる。

第II章において、任意の物体中をき裂が進展する際のエネルギーの平衡について考察し、破壊進行領域の大きさがき裂長さに比較して無視できる場合には、J積分がき裂の進展挙動を記述するための単一の破壊力学パラメータとして有望であることを述べた。また、J積分は三次元き裂問題に対しても拡張できる

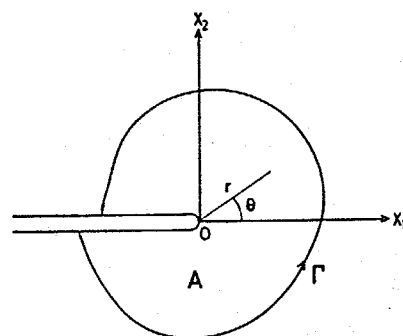
ことを示した。

本章では， J 積分を適用することが困難な場合，すなわち，除荷過程を含む場合，熱ひずみが存在する場合および三次元貫通き裂の場合について有限要素解析を行い，弾塑性破壊力学パラメータとしての J 積分の有用性について検討する。なお，本章では準静的過程を取扱い慣性力の影響は無視する。

4.2. 平面問題における J 積分

4.2.1. はじめに

本節では，除荷過程を含む場合および熱ひずみが存在する場合の二次元き裂問題に関して検討する。図IV-1に示すような二次元き裂問題を考え，き裂先端を原点 O とし，き裂面を X_1 軸とする固定座標系 $O-X_1, X_2$ を採用し， Γ をき裂下面から出発しき裂先端を囲みき裂上面で終る任意の曲線とし， A を曲線 Γ とき裂面が囲む領域とする。物体力，慣性力，き裂面の表面力および破壊の進行領域を無視すると，熱ひずみ ε_{ij}^t ，塑性ひずみ ε_{ij}^p が存在する場合の J 積分は，式(II-39)より



図IV-1 き裂および座標系

$$J = - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} + \iint_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_1} dA \quad (\text{IV-1})$$

で与えられる。ここで、 ε_{ij} は全ひずみであり、

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^t + \varepsilon_{ij}^p \quad (\text{IV-2})$$

である。式(IV-1)のJ積分は材料が均質等方でもなくとも、エネルギー解放率としての物理的意味を持ち、積分経路 Γ (したがって、領域 A)の選び方によらない。もし、弾性ひずみエネルギー密度 W^e が X_1 を陽に含まなければ、すなわち、材料が X_1 軸方向に均質ならば、式(IV-1)は次式のように変形できる。

$$\hat{J} = \int_{\Gamma} W^e dx_2 - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma + \iint_A \sigma_{ij} \frac{\partial (\varepsilon_{ij}^t + \varepsilon_{ij}^p)}{\partial x_1} dA \quad (\text{IV-3})$$

ただし、

$$W^e = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e \quad (\text{IV-4})$$

である。一方、RiceのJ積分は次式で定義される⁽⁴⁾。

$$J = \int_{\Gamma} W dX_2 - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \quad (\text{IV-5})$$

ただし、

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (\text{IV-6})$$

である。ただし、 $\varepsilon_{ij}^t = \varepsilon_{ij}^p = 0$ のときは、式(IV-3)と(IV-5)は一致する。線形弾性体では開口形(モードI)変形に対して、

$$\hat{J} = J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (\text{平面ひずみ状態}) \quad (\text{IV-7})$$

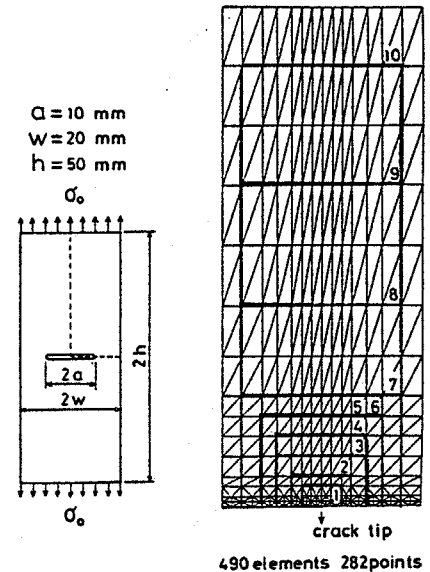
が成立する。ここで、 K_I は応力拡大係数、 E は縦弾性係数、および ν はポアソン比である。

4.2.2. 除荷過程を含む場合のJ積分

本節では，除荷過程を含む場合のひず積分を有限要素解析し，前荷重がひず積分に与える影響およびひず積分とき裂先端の開口変位 CTOD の関係などについて考察する。

(1) ひず積分の有限要素解析法

ひずみ増分理論に基づいて式 (IV-1) および (IV-3) より除荷を含む場合のひず積分の有限要素解析を行った。図 IV-2 (a) に解析の対象とした中央き裂を有する平板の形状と寸法を示す。平板の上下面に一様応力 σ_0 が作用するとし，平面ひずみ状態を仮定した。図 IV-2 (b) に要素分割およびひず積分の積分経路を示す。要素としては汎用の三角



(a) 形状 (b) 要素分割およびひず積分経路

図 IV-2 中央き裂を有する平板

形定ひずみ要素を用いた。ただし，式 (IV-1) の第二項および式 (IV-3) の第三項の $\partial \varepsilon_{ij} / \partial x_i$ および $\partial \varepsilon_{ij}^p / \partial x_i$ はつぎのようにして計算した。まず，定ひずみ要素を用いて計算した各要素のひずみ ε_{ij} および ε_{ij}^p を各節点に振り分ける。この際，考えている節点に連なるすべての要素のひずみを各要素の面積を重みとして平均し，その値をその節点のひずみとする。つぎに，一次の内挿関数を用いて要素内の任意の点の ε_{ij} および ε_{ij}^p を表わし，これから $\partial \varepsilon_{ij} / \partial x_i$ および $\partial \varepsilon_{ij}^p / \partial x_i$ を求めた。

材料としては鋼を想定し、縦弾性係数 $E = 206 \text{ GPa}$, ポアソン比 $\nu = 0.3$, 降伏応力 $\sigma_Y = 481 \text{ MPa}$ とした。また, 直線硬化則を採用し, 加工硬化率 H' を $E/100$ とした。ただし,

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}^P}, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'} , \quad d\bar{\epsilon}^P = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P} \quad (\text{IV-8})$$

である。ここで, σ_{ij}' は偏差応力である。計算プログラムの作成にあたっては文献(5)を参照した。

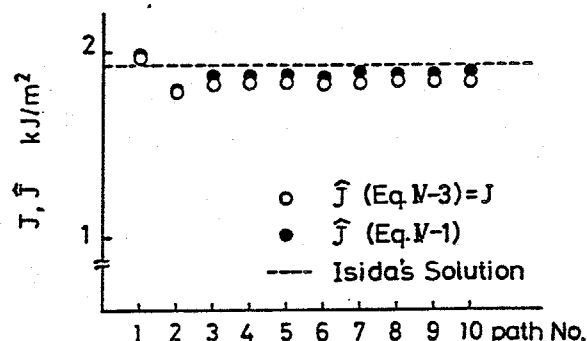
参考のために, 上述の有限要素解析によって得られる応力・変位場から式(IV-5)の J の値も計算した。また, 単位厚さ当りの荷重 $P = \sigma_0 \times 2w$ と平板上面の変位(板幅にわたってほぼ一定値が得られた)の平均値 δ を計算して $P-\delta$ 曲線を作り, Rice ら⁽⁶⁾ の簡便式

$$J_A = G + \frac{2}{b} \left[\int_0^\delta P d\delta - \frac{1}{2} P \delta \right] \quad (\text{IV-9})$$

による J_A の値も求めた。式(IV-9)で G は線形弾性体のエネルギー解放率, b はリガメント長さを示す。

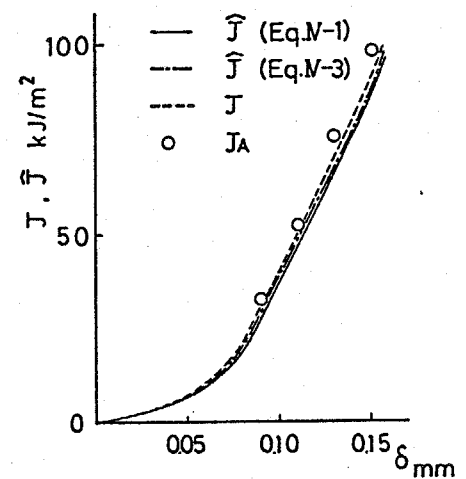
(2) 単調増加荷重に対する積分

図IV-3に弾性状態における積分の計算結果を示す。前述のように, この場合には式(IV-3)の $\hat{J}$ と式(IV-5)の J は一致する。式(IV-1)による $\hat{J}$ (●印) は式(IV-3)の $\hat{J}$ (○印)



図IV-3 弾性状態における $\hat{J}$
($\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$)

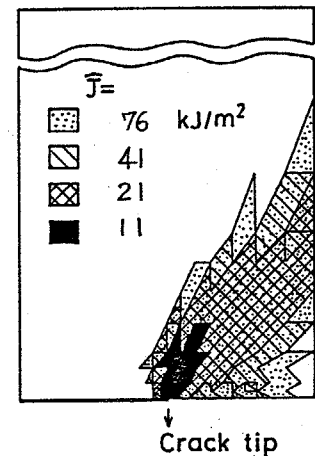
より若干高めの値を示しているが差は小さい。この差異は数値計算上の誤差によるものと考えられる。破線は石田による応力拡大係数の解⁽⁷⁾を式(IV-7)によって $\bar{J}$ に換算した値である。理論的に予想されるように、式(IV-1)および(IV-3)の $\bar{J}$ の値はほぼ経路独立性を示し、石田の解とよく一致している。



図IV-4 単調増加荷重の下での $\bar{J}$ - δ 曲線

図IV-4に単調増加荷重下の弾塑性状態における $\bar{J}$ 、 J 、 J_A 対 δ の計算結果を示す。 $\bar{J}$ および J の値は10個の経路に対する計算値の平均値を採っている。

Riceらの簡便式(IV-9)による J_A (○印)は式(IV-5)の J (破線)とよく一致している。式(IV-1)および(IV-3)



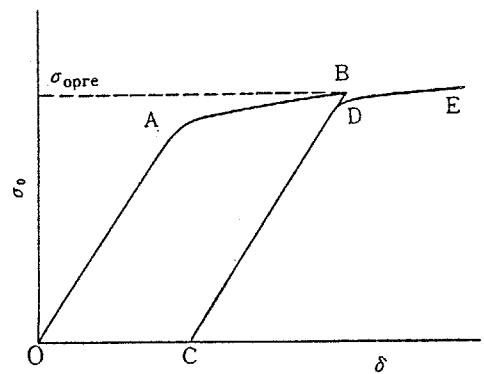
図IV-5 塑性域の形状

の $\bar{J}$ (実線および一点鎖線)は J よりわずかに低目の値を示しているが、その差は小さく単調増加荷重の $\bar{J}$ は J と実質的には一致することかわかる。図IV-5は種々の $\bar{J}$ の値に対する塑性域の計算結果である。

(3) 降荷を含む場合の $\bar{J}$ 積分

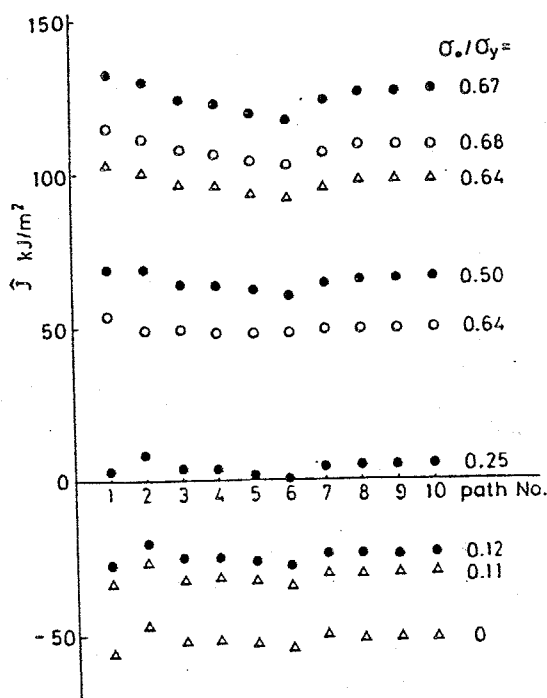
図IV-6に示すように、 σ_0 - δ 曲線上の点OからO→A→B

のように負荷した後除荷し，再びC
 $\rightarrow D \rightarrow E$ のように負荷する場合の
 積分を式(IV-1)によって解析した。
 除荷を開始する点Bにおける外応力
 σ_0 を σ_{opre} とし， $\sigma_{opre}/\sigma_y = 0, 0.4,$
 $0.5, 0.6, 0.65, 0.68$ の6種類に対し
 て計算を行った。



図IV-6 荷重履歴

除荷過程が存在するのでRiceのJ積分は定義できないが，参
 考のために，除荷が終了した点Cを基準として点Cからの変位
 およびひずみの変化から再負荷時における式(IV-5)のJの値も
 計算した。すなわち，点Cを基準とした点Eにおける変位 u_i^{EC}



図IV-7 Jの経路独立性

(○ 負荷, △ 除荷, ● 再負荷)

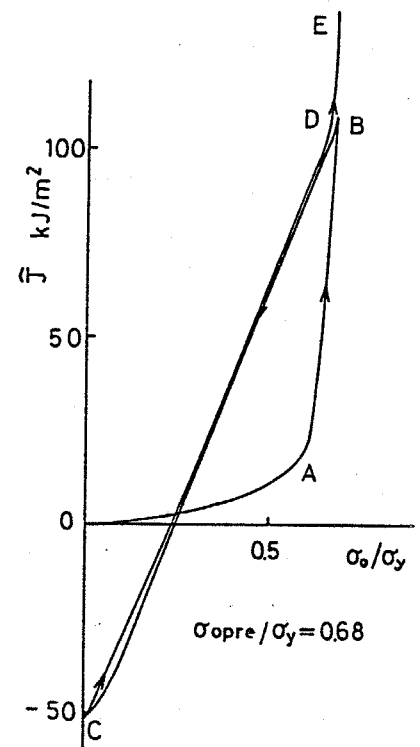
およびひずみ ε_{ij}^{EC} [$u_i^{EC} = u_i^E - u_i^C$,
 $\varepsilon_{ij}^{EC} = (\partial u_i^{EC} / \partial x_j + \partial u_j^{EC} / \partial x_i) / 2$, u_i^E :
 点Eにおける変位, u_i^C : 点Cにあ
 ける変位]を式(IV-5)に代入して
 Jの値を求めた。また， $B \rightarrow C \rightarrow D$
 の過程を無視して曲線OABDE
 から式(IV-9)の簡便式によつて
 ，点Eにおける J_A の値も計算した。

図IV-7は $\sigma_{opre}/\sigma_y = 0.68$ の

場合の各積分経路に対するJの計

算結果である。理論的に予期したように、除荷時 (Δ 印) においても、負荷時 (○印) および再負荷時 (●印) と同様に寸の経路独立性が成立していることを確認することができる。以下では寸の値として各経路に対する値の平均値をとることとする。

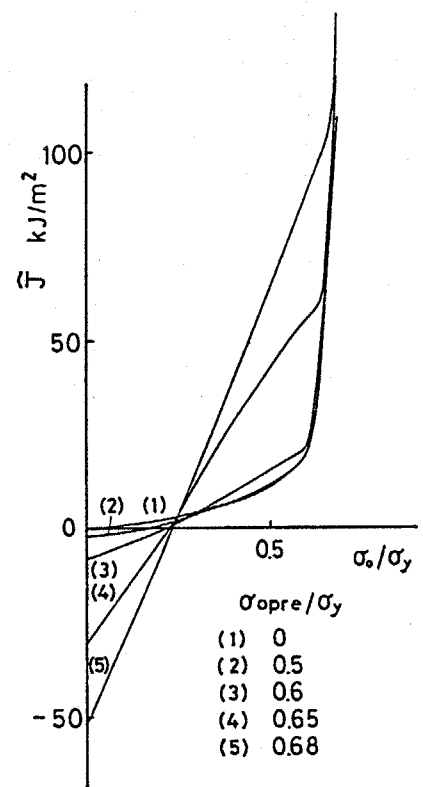
図IV-8は寸積分の変化を示す。図中の点A, B, C, D, Eは、それぞれ、図IV-6の同じ記号の点における状態に対応している。寸の値は点A付近で急激に増大し、点Bから除荷が始まるとほぼ直線的に減少し、除荷の途中で負の値となり、除荷の終了点ではかなり大きな負の値になっている。再負荷すると寸は除荷時の変化をほぼ逆にたどり点Dに達し、その後はほぼA-Bの延長線に沿って急上昇している。



図IV-8 寸の履歴曲線

き裂は、後述するように、除荷の終了点Cにおいても残留ひずみのために開口しているのに対して、き裂先端付近の応力 σ_{zz} は除荷の途中で正から負の値に転じ、点Cではき裂先端付近の要素において圧縮側の再降伏が生じている。また、き裂先端付近の応力 σ_{zz} が負になると、これに応じて寸の値も負の値となっている。(次頁脚注)

図IV-9は種々の前荷重に対する再負荷時の $\int$ の変化を示す。前荷重が大きい程、除荷の終了点では負の大きな残留応力が生じるため、 $\int$ も負の大きな値となっている。また、前荷重よりと大きな荷重まで再負荷すると前荷重の影響がうすれていくことがわかる。



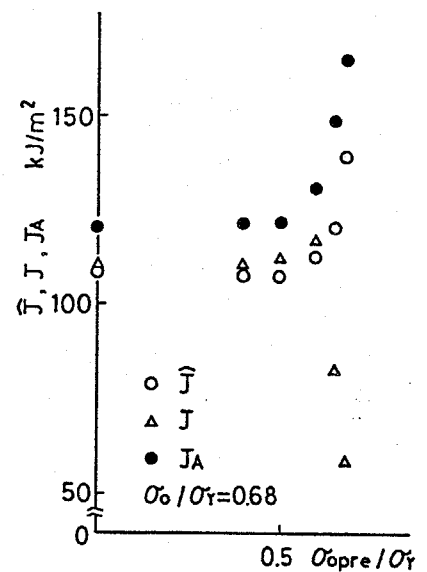
図IV-9 再負荷時の $\int$ - σ_0/σ_y 曲線

図IV-10は種々の前荷重を与えた後除荷し、一定荷重($\sigma_0/\sigma_y = 0.68$)まで再負荷したときの $\int$, J および J_A の値を前荷重の大きさに対して

プロットしたものである。 $\int$ 積分の値(0印)は簡便式による

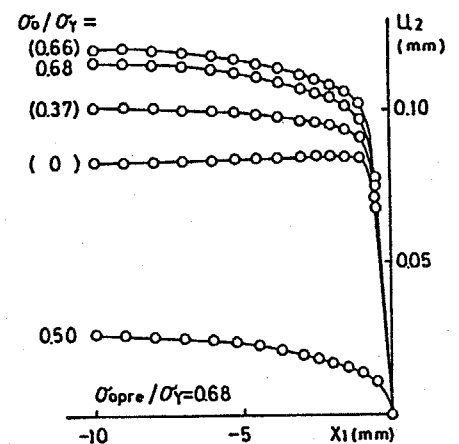
(脚注) 式(II-66)において $-1 < \lambda < 0$ であるから、 $\int$ と α , β の符号が一致することがわかる。き裂が開口していれば、 $\partial u_z(x_1, -0)/\partial x_1$ は正、 $\partial u_z(x_1, +0)/\partial x_1$ は負となるので、式(II-64b)より β は正となる。したがって、 $\int$ の符号は α の符号、すなわち、き裂先端近傍の σ_{22} の符号(式(II-64a)参照)と一致することがわかる。図IV-11に示すように全過程を通じて、き裂は開口しているので、き裂先端付近の応力 σ_{22} が負になるとこれに応じて $\int$ の値も負になることがわかる。

丁の値すなわち J_A (●印) と絶対値は若干異なるが、定性的にほぼ同様の傾向を示している。いっぽう除荷の終了点を基準とした変位およびひずみを式(IV-5)の総積分に代入して求めた丁の値(△印)は、比較的大きな前荷重に対して、今積分とは異った傾向を示すことがわかる。



図IV-10 予に与える前荷重の影響 ($\sigma_0/\sigma_Y=0.68$ まで再負荷した場合)

図IV-11はき裂の開口状態を示す。すなわち、縦軸はき裂面の変位 u_2 を示し、横軸はき裂面上の位置 x_1 を示している。負荷の増大とともに徐々に開口量が増大していき、除荷が始まると開口量は減少するが、除荷の終了点でも残留ひずみのためにき裂は閉じていないことがわかる。再負荷時には、荷重が前荷重の大きさに達するまでは開口量の増大は比較的少ない。開口量を表わす尺度として、き裂端に最も近い節点を除いて(この点の変位は他の点の変位と明確に連続し難いので除いた)、き裂面の変位を $x_1=0$ まで外挿してき裂端開口変位 CTOD を求めた。



図IV-11 き裂の開口状態 (括弧は再負荷時)

このようにして求めた CTOD は電子顕微鏡による測定値とは定量的に異なると思われるが、き裂の開口状態の定性的傾向を議論するためには役立つものと考えられる。

図 IV-12 は種々の前荷重を負荷した後に除荷し、一定の CTOD ($CTOD = 0.18 \text{ mm}$) になるまで再負荷したときの J , J および JA の値を示す。 J 積分値 ($\circ$ 印) は簡便式による J の値すなわち JA ($\bullet$ 印) とともに、前荷重の大小によらずほぼ一定の値を示している。すなわち、前荷重の大小によらず、CTOD が一定になっていれば、 J と一定になっていることがわかる。

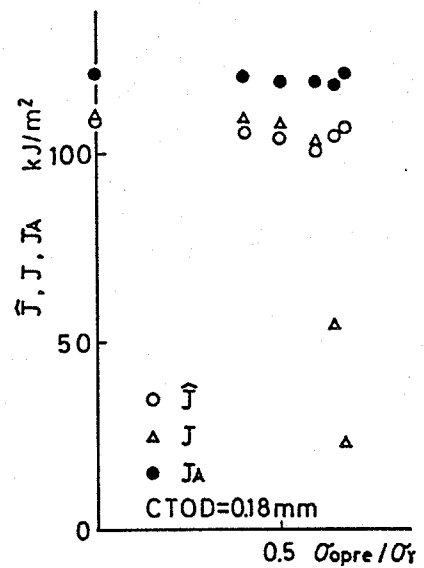


図 IV-12 J 積分値と前荷重の影響 ($CTOD = 0.18 \text{ mm}$ まで再負荷した場合)

4.2.3. 温度場における J 積分

4.1 節において述べたように、機械的な荷重のほか熱による荷重が作用する場合には、 J 積分は経路独立性およびエネルギー解放率としての物理的意味を失う。また、このような場合の応力・ひずみの特異性と J 積分の関係も明らかではない。このために、 J 積分の種々の拡張が試みられている。線形弾性体に対しては、Wilson⁽⁸⁾ は熱ひずみが存在しても積分経路 (領域

を含む)に依存しない積分を導き, これを利用して応力拡大係数を求める方法を提案し, Gurtin⁽⁹⁾は温度場においても積分経路に独立な線積分が存在することを見いだしている。また, 弾塑性体に対しては Blackburn ら⁽¹⁰⁾および Ainsworth ら⁽¹¹⁾はそれぞれ熱ひずみが存在しても積分経路(領域)に依存しないJ積分およびJ₀積分を導いている。しかし, それらの物理的意味が十分明らかにされていないように思われる。^(脚注)

本節では, まず, 温度場における弾塑性体のき裂先端近傍の応力・ひずみの特異性とJ積分の関係について調べ, 温度場における弾塑性破壊力学パラメータとしてのJ積分の有効性について検討する。つぎに, 非定常温度場における弾塑性体のJ積分を, 材料定数の温度依存性を考慮して有限要素解析し, 実際の構造物の健全性評価にJ積分が利用できることを示す。

(1) 温度場における応力・ひずみの特異性とJ積分の関係

いま, J積分の積分経路 Γ としてき裂先端に中心を持つ半径 ρ の円を選び, $\rho \rightarrow 0$ とする場合を考える。熱ひずみ ε_{ij}^t の存在は弾性ひずみ ε_{ij}^e (したがって, 応力 σ_{ij})および塑性ひずみ ε_{ij}^p の特異性に影響を与えるが, 一般に ε_{ij}^t 自身はき裂先端近傍で特異性を持たない。ただし, ここでは高速き裂のように,

(脚注) 2.4.2.節において, J積分が特別な場合にはJ₀積分と一致することを示した。

き裂先端で発熱などが存在し、き裂先端が温度場の特異点となる場合については考えないこととする。したがって、 $\rho \rightarrow 0$ の極限では ε_{ij}^t は他のひずみ ε_{ij}^e や ε_{ij}^p に比べて無視できる。ゆえに、もし材料が全ひずみ塑性論に従う弾塑性体であり除荷がなければ、非線形弾性体と見なすことができるので、式(IV-1)および式(IV-3)は次式のように書き直すことができる。ただし、 $\rho \rightarrow 0$ の極限では材料はX軸方向に均質とする。

$$\hat{J} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{\rho} W dX_2 - \int_{\rho} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} d\Gamma \right] \quad (\text{IV-10})$$

ここで、 W はひずみエネルギー密度であり、式(IV-6)で与えられる。したがって、温度場では次式が成立する。

$$\hat{J} = \lim_{\rho \rightarrow 0} J \quad (\text{IV-11})$$

ここで、 J はRiceのJ積分である。また、 $\rho \rightarrow 0$ の極限では、 ε_{ij}^t が他のひずみに比べて無視できることから、温度場においてき裂先端近傍の応力・ひずみはHRRの特異性⁽¹²⁾⁽¹³⁾を持つことがわかる。したがって

$$\sigma_{ij} = \sigma_Y \left(\frac{E \lim_{\rho \rightarrow 0} J}{\sigma_Y^2 r} \right)^{N/(N+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{IV-12a})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_Y}{E} \left(\frac{E \lim_{\rho \rightarrow 0} J}{\sigma_Y^2 r} \right)^{N/(N+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{IV-12b})$$

ただし、 r , θ はき裂先端に原点をとった極座標(図IV-1参照)

、 $\tilde{\sigma}_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ は θ と加工硬化指数 N の既知関数である。式(IV-11)

を式(IV-12)に代入すると、

$$\sigma_{ij} = \sigma_Y \left(\frac{E \hat{J}}{\sigma_Y^2 r} \right)^{N/(N+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{IV-13a})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_r}{E} \left(\frac{E \dot{\gamma}}{\sigma_r^2 r} \right)^{1/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{IV-13b})$$

が得られ、温度場における応力・ひずみの特異性の強さは積分によって表わされることがわかる。

物性値が温度によって変化することにより材料が不均質になる場合にと $\rho \rightarrow 0$ 極限では均質と見なすことができるので上式はそのまま成立する。上式中の積分は、式(IV-1)を用いれば不均質な材料に対しても径路(領域)独立性が成り立つので、任意の径路(領域)を用いて評価することができる。ひずみ増分塑性論に従う材料に対しても、単調増加荷重下ではき裂先端のごく近傍を除けば、き裂先端付近の応力・ひずみ場は式(IV-13)でよく近似できると考えられる。大規模な除荷を含む場合のき裂先端近傍の応力・ひずみの特異性および特異性と積分の関係については未だ明らかではなく、今後の課題である。なお、もし材料が等方線形弾性体ならば、式(IV-10)の右辺における各量は応力拡大係数 K を用いて記述できる。平面ひずみ状態を仮定して計算を実行すると開口形変形(モードI)に対して

$$\dot{\gamma} = \frac{1-\nu^2}{E} K^2 \quad (\text{IV-14})$$

が得られる。

以上により、積分は温度場におけるき裂先端近傍の応力・ひずみの特異性の強さを表わすことが明らかになったので、積

分経路(領域)独立性およびエネルギー解放率としての物理的意味を考え合わせると、 J 積分は温度場における弾塑性体中のき裂の挙動を記述するための破壊力学パラメータとして有望と考えられる。

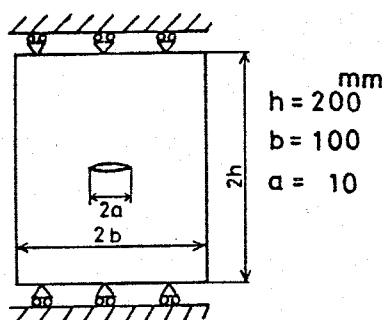
(2) 温度場における J 積分の有限要素解析

J 積分を実際の構造物に適用するためには数値計算が必要となる。本節では、まず、等方線形弾性体に対する J 積分を有限要素法によって解析し、結果を式(IV-14)を介して解析解と比較し、計算精度の確認などを行う。つぎに、材料定数に温度依存性がある弾塑性体について有限要素解析し、 J 積分の積分経路(領域)独立性などを確かめ、実際の構造物に対して J 積分が比較的容易に計算できることを示す。

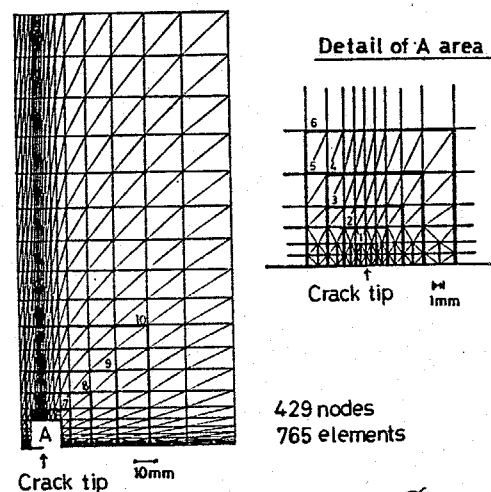
弾性問題

等方線形弾性体を考え、基準温度からの温度差を Θ とし、 α を線膨張係数とすれば、 $\varepsilon_{ij}^p = 0$, $\varepsilon_{ij}^t = \alpha \Theta \delta_{ij}$ (δ_{ij} Kronecker のデルタ) であるから

式(IV-3)は次式のような簡単な形となる[式(II-47)参照]。



(a) 形状と寸法



(b) 要素分割と積分経路

図IV-13 中央き裂を有する平板(左右面を冷却)

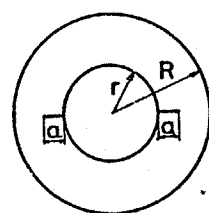
$$\dot{U} = \int_V \rho W e dx_2 - \int_V T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dV + \alpha \iint_A \sigma_{ii} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} dA \quad (IV-15)$$

図IV-13(a)に示すような中央き裂を有する長方形板の左右面を基準温度から $\theta = -100^\circ\text{C}$ まで急冷する場合、および図IV-14(a)に示すような外面を断熱した円筒の内面を $\theta = -100^\circ\text{C}$ まで急冷する場合について、式(IV-15)

により積分を有限要素解析した。ただし、平面ひずみ状態を仮定し非連成静的熱弾性理論を採用した。温度場および応力変位場の解析に用いた要素分割および積分の積分経路を図IV-13

(b)および図IV-14(b)に示す。平板、円筒ともに三角形一次要素を用い、節点数429、要素数765とした。非定常温度場の計算法は文献(14)、(15)に従った。弾性問題では低炭素鋼を想定し、材料定数(表IV-1参照)は温度によらず一定とした。

図IV-15に平板の定常温度場($t \rightarrow \infty$ に相当)における積分の種々の積分経路に対する計算値を○印で示す。図中の実線は平

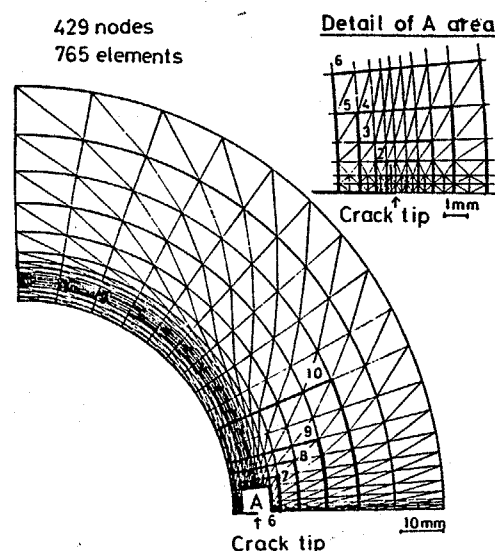


$$R = 100 \text{ mm}$$

$$r = 50 \text{ mm}$$

$$a = 5 \text{ mm}$$

(a) 形状と寸法

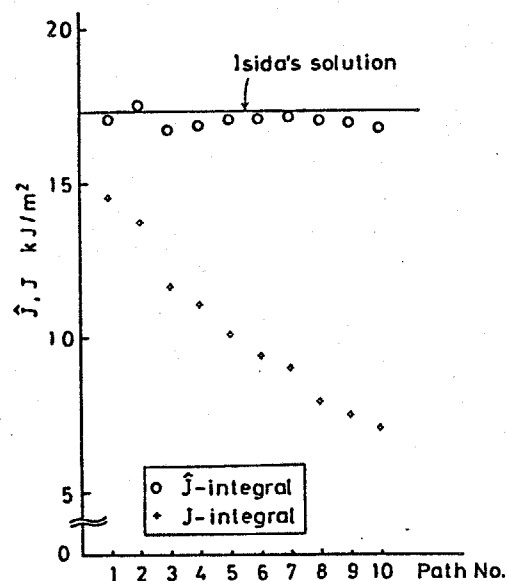


(b) 要素分割と積分経路
図IV-14 き裂を有する円筒
(内面を冷却, 外面は断熱)

縦弾性係数	E	206 MPa
ポアソン比	ν	0.3
線膨張係数	α	$1.2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$
温度伝導率	K	$4.58 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{h}$

表IV-1 弾性問題の
材料定数

板の上下方向変位を拘束した状態で、裂表面に圧力 P [$P = -E\alpha\theta / (1-\nu)$, $\theta = -100^\circ\text{C}$] を加えた場合の応力拡大係数の石田の解⁽⁶⁾を式(IV-14)に代入して求めた J 積分の値を示す。 J 積分値 (○印) はほぼ径路 (領域) 独立性を示し、石田の解から得られる値とよく一致している。



図IV-15 平板の定常温度場の J 積分と J 積分 (弾性計算)

同図中の+印は式(IV-5)で定義される Rice の J 積分の計算値を示す。この値は径路に依存していることがわかる。一様な温度場であるから式(IV-15)の第三項がゼロとなるにもかかわらず、 J 積分と J 積分の間にこのような差異が生じるのは、式(IV-4)の

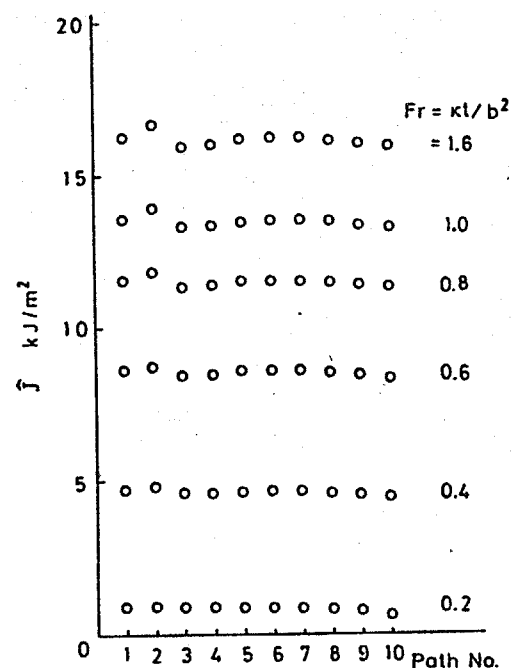
$$W^e = \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^t) / 2 \quad (\text{IV-16})$$

と式(IV-6)の

$$W = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} / 2 \quad (\text{IV-17})$$

の値が異なることに起因している。図IV-15で小さな径路に対して J 積分値は J 積分値に近づいているが、式(IV-11)が成立するためには、径路はさらに小さくしなければならないことがわかる。

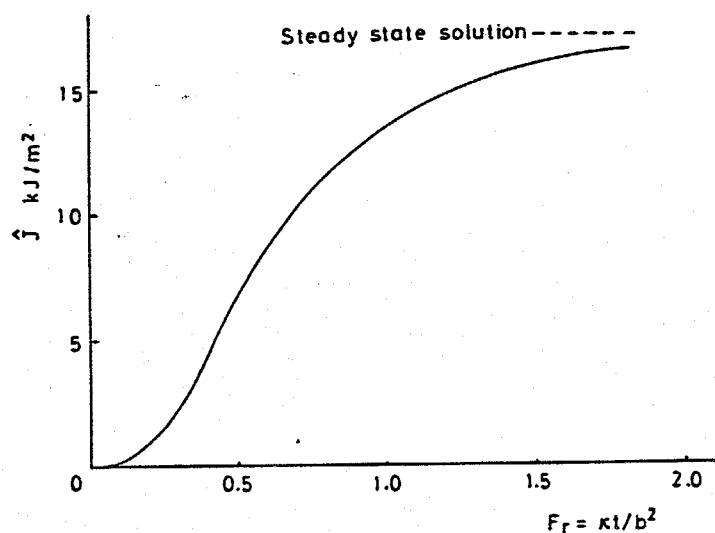
図IV-16に平板の非定常温度場における $\dot{q}$ 積分の各経路に対する計算結果を示す。一様でない温度場に対しては各時間の $\dot{q}$ 積分値はほぼ経路(領域)独立性を示している。



図IV-16 平板の非定常温度場の $\dot{q}$ 積分の経路独立性(弾性計算)

図IV-17に平板の $\dot{q}$ 積分値の時間的变化を示す。 $\dot{q}$ 積分値は、経路(領域)独立性が成り立っているため、経路5に対する値を採用した。以下も同様である。

図中の破線は図IV-15の実線と同じ値であり、定常解を示す。 $\dot{q}$ 積分値はゼロから次第に増大し、定常解に漸近している。

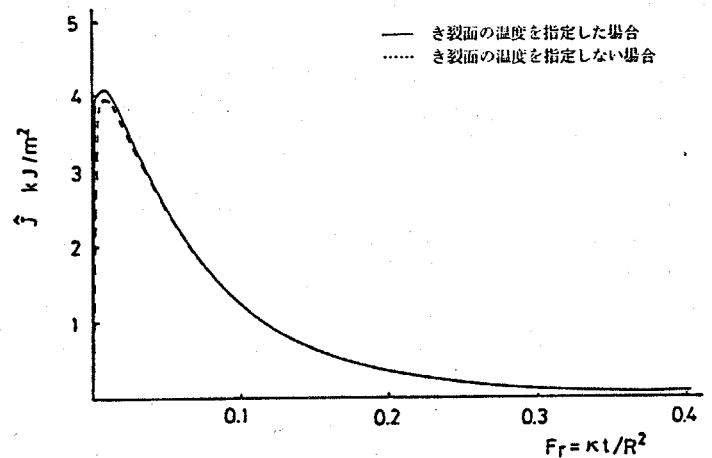


図IV-17 平板の $\dot{q}$ 積分の時間的变化(弾性計算)

図IV-18は円筒における $\dot{q}$ 積分値の時間的变化である。実線は円筒内面

ばかりでなく、き裂面上でも $\theta = -100^\circ\text{C}$ の温度を指定した場合であり、破線は円筒内面のみに同じ温度を指定した場合である。

いずれの場合もひず積分値は冷却開始後、急激に上昇し最大値を経た後減少しゼロに漸近しているが、き裂面でも温度を指定した才(実線)が立ち上がりか速く、最大値が大きいかかわかる。なお



図IV-18 円筒のひず積分の温度変化(弾性計算)

、実線、破線の別を問わず、ひず積分の経路(領域)独立性は図IV-16と同程度に成立していることが確かめられた。

図IV-17 および図IV-18の結果は式(IV-14)より容易に応力拡大係数に換算できるので、ひず積分は非定熱弾性き裂問題の応力拡大係数の計算法としても利用できることがわかる。

弾塑性問題

材料定数が温度に依存する弾塑性体を考え、ひずみ増分理論に基づいて、式(IV-1)または式(IV-3)のひず積分を有限要素解析した。降伏曲面としては次式を用いた。

$$f(\sigma_{ij}, T, \bar{\epsilon}^P) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - \frac{1}{3} Y^2(T, \bar{\epsilon}^P) = 0 \quad (\text{IV-18})$$

ここで、 T は温度であり、 σ'_{ij} は偏差応力である。 $\bar{\epsilon}^P$ は次式で定義される相当塑性ひずみである。

$$\bar{\epsilon}^P = \int d\bar{\epsilon}^P, \quad d\bar{\epsilon}^P = \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P \quad (\text{IV-19})$$

ただし, $d\varepsilon_j^p$ は塑性ひずみ増分を表わす。 $Y(T, \bar{\varepsilon}^p)$ の関数形として

$$Y(T, \bar{\varepsilon}^p) = \sigma_Y(T) + H' \bar{\varepsilon}^p \quad (\text{IV-20})$$

を仮定した。降伏応力 σ_Y はかりでなく, 縦弾性係数 E および線膨張係数 α の温度依存性も考慮した。計算プログラムの作成にあたっては文献 (5), (17), (18) を参照し, 要素としては汎用の三角形一次要素を用いた。

材料としては, 原子炉配管に用いられるステンレス鋼 SUS304 を想定し, 文献 (19) の資料を参照して

$$E(T) = 2.06 \times 10^5 - 95.3 T \quad (\text{IV-21})$$

$$\sigma_Y(T) = 193 - 0.11 T \quad (\text{IV-22})$$

$$\alpha(T) = 1.62 \times 10^{-5} - 8.0 \times 10^{-9} T \quad (\text{IV-23})$$

とした。単位およびその他の材料定数を表 IV-2 に示す。

図 IV-13 (a) および IV-14 (a) の平板および円筒について解析した。要素分割および積分経路は

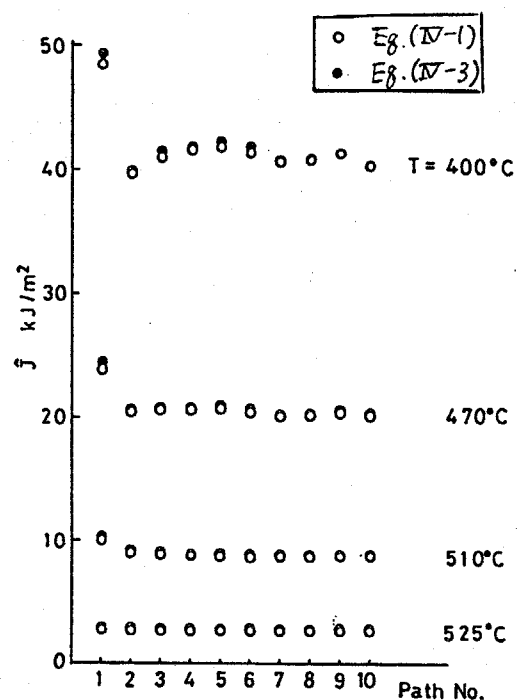
縦弾性係数 E	式 (IV-21) MPa
ポアソン比 ν	0.3
降伏応力 σ_Y	式 (IV-22) MPa
ひずみ硬化係数 H'	2.45×10^3 MPa
線膨張係数 α	式 (IV-23) $1/^\circ\text{C}$
温度伝導率 K	1.70×10^{-2} m ² /h

表 IV-2 弾塑性問題の材料定数

は弾性問題と同様に図 IV-13 (b) および図 IV-14 (b) のものを用いた。平板については $T = 550^\circ\text{C}$ から徐冷するときの定常温度

場における予積分を解析し，円筒では外面を断熱とし内面を550°Cから400°Cまで急冷するときの非定常温度場における予積分を解析した。ただし，平面ひずみ状態を仮定した。

図IV-19は平板における式(IV-1)および(IV-3)の予積分値を種々の径路について計算した結果である。この場合には，温度が一定であるから E ， σ_y および α が温度によって変化しても， X_1 軸方向に不均質になることはないので，式(IV-3)によっても予積分が計算できる。式(IV-1)による値(○印)と式(IV-3)による値(●印)とともに，き裂に最も近い径路



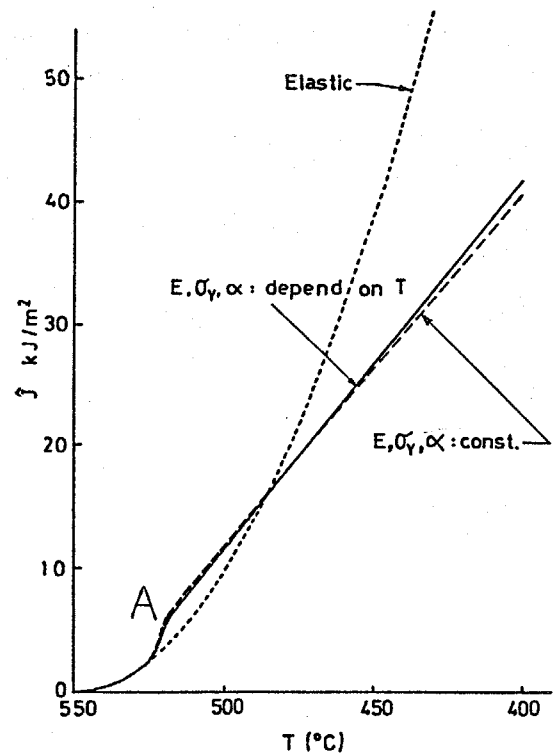
図IV-19 平板の予積分の径路独立性(E ， σ_y ， α の温度依存性を考慮)

1を除けば，径路(領域)独立性を示していることが確認できる。また，式(IV-1)による方が式(IV-3)よりも，予積分の値をやや高めに評価しているが，その差異は小さい。この差異は数値計算上の誤差によるものと考えられる。

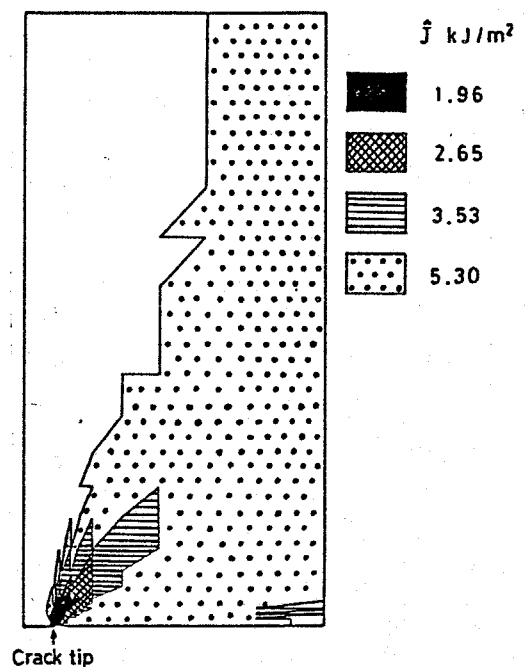
図IV-20に平板の温度と予積分の関係を示す。実線は， E ， σ_y および α の温度依存性を考慮した結果であり，破線はそれらの値を一定($T=550^\circ\text{C}$)とした結果である。参考のために弾性

計算を行、た結果を点線で示す。
 弾性計算では材料定数を一定とし、
 550°Cの値を用いた。実線は温度
 T が減少すると、最初は弾性解
 の点線とともに上昇するかやかと
 急激に上昇し始める。さらに温度
 を下げると、A点付近で変曲点を
 持ちそれ以後はほぼ直線的にゆる
 やかに上昇し、点線の弾性解と交
 差する。A点は試験片の大半が降
 伏する時点に対応する(図IV-21
 の $\bar{j} = 5.30 \text{ kJ/m}^2$ の場合参照)。

図IV-22は、 E 、 σ_y 、 α のうち
 一つだけの温度依存性を考慮し、
 他の二つを一定とし、 $T = 550^\circ\text{C}$
 における値を用いた場合の平板の
 温度と $\bar{j}$ 積分の関係の計算結果で
 ある。比較のために、材料定数を
 すべて一定とし、 550°C における
 値を用いた結果(図IV-20の破線
)も破線で示している。この図か



図IV-20 平板の温度と $\bar{j}$ 積分
 の関係



図IV-21 平板の塑性域(E 、 σ_y 、 α の温度依存性を考慮)

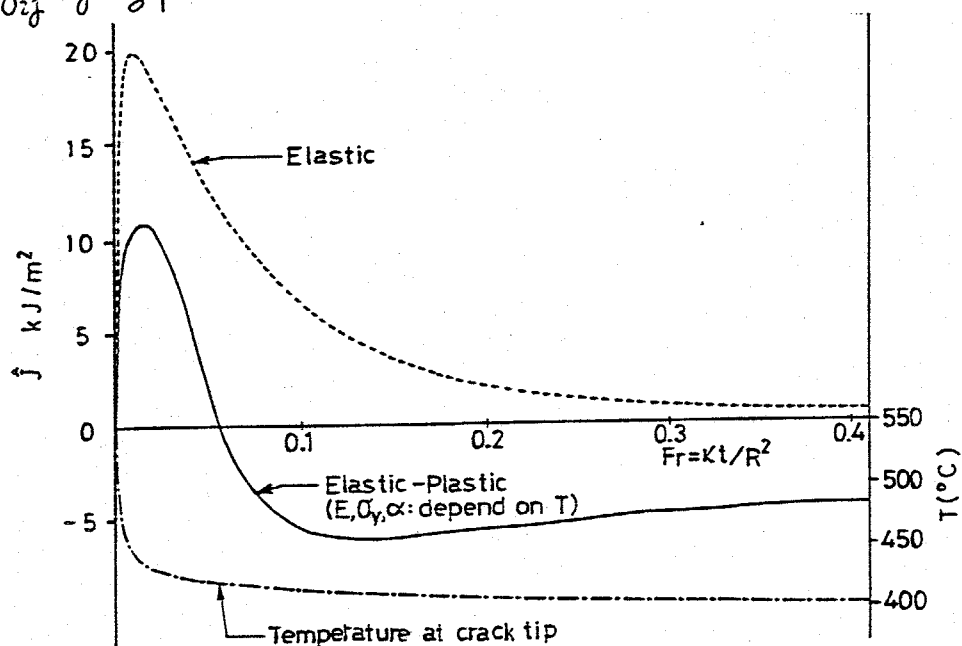
ら、降伏力 σ_Y の温度依存性は、 J 積分を増大させ、逆に線膨張係数 α の温度依存性は J 積分を低下させることかわかる。また、縦弾性係数 E の温度依存性は J 積分にはほとんど影響を与えていない。

図IV-23は円筒内面を急冷した場合の J 積分の時間的变化を、 E 、 σ_Y 、 α の温度依存性を考慮して式(IV-1)により解析した結果である。 J 積分は最大値を経た後減少

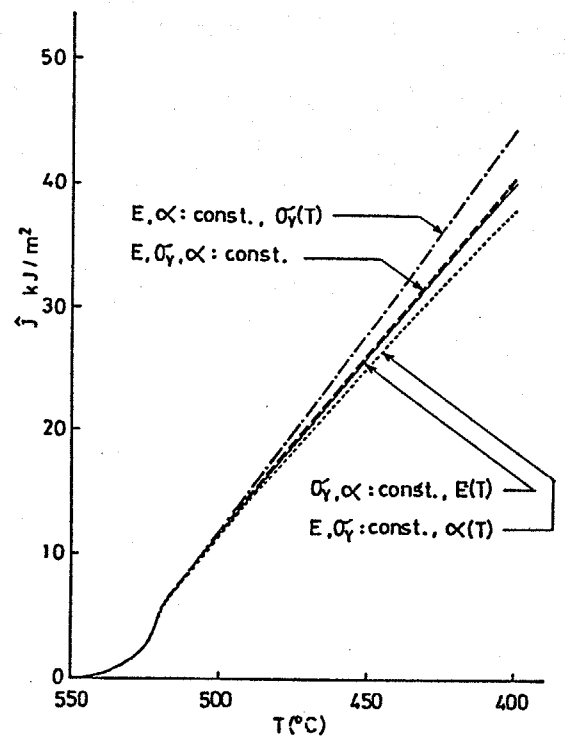
し負の値となり、一定の値に漸近している。 J 積分の最大値付近から

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} < 0$$

(IV-24)

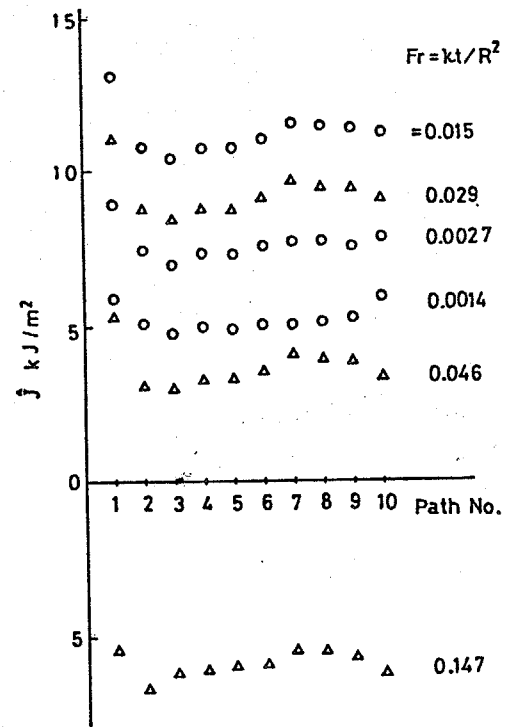


図IV-23 円筒の J 積分の時間的变化



図IV-22 平板の温度と J 積分の関係

となる要素が現われ(塑性学的な)除荷が生じている。ただし、 $\cdot$ (ドット)は時間微分を表わす。き裂先端近傍の要素の応力が圧縮になると、これに対応してひずみの値が負になっており、時間 t の大きいところでは圧縮の残留応力が生じている。これは前節において示した平板を引張って塑性変形させた後、除荷した場合にき裂先端近傍に圧縮の残留応力が生じ、ひずみの値が負になることに類似している。点線は比較のために弾性計算結果(材料定数一定)を示したものである。弾性計算ではひずみの値を高め評価することがわかる。なお、参考のためにき裂先端の温度変化を一点鎖線で示した。



図IV-24 円筒のひずみの経路独立性(E, σ_y, α の温度依存性を考慮)

図IV-24は円筒内面を急冷する場合のひずみ値とひずみ経路の関係であり、図IV-23の実線と対応している。○印は負荷時のひずみを示し、△印は除荷を含む時のものである。き裂に最も近い経路1のひずみ値は他の経路のものよりやや高めの値となっている。これを除けば、非定常温度場において、材料定数が変化してもまた除荷が存在しても、理論的に予想されるよう

にJ積分の経路(領域)独立性が成り立っていることが確かめられる。

以上の結果から、例えば原子炉圧力容器のように機械的な荷重のほか熱による荷重を受ける実際の構造物の健全性評価にJ積分が有効に適用できると考えられる。

4.3. 三次元問題におけるJ積分

4.3.1. はじめに

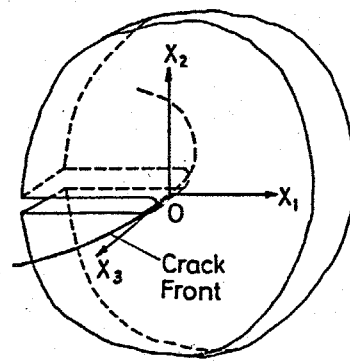
航空機や圧力容器などの実際の構造物中に生じるき裂の多くは三次元き裂である。したがって、構造物の健全性をより精密に評価しようとする場合、平面応力や平面ひずみ状態で代表されるような二次元解析が常に有効であるとは限らない。このような観点から、近年多くの研究者らによって、き裂の三次元弾性解析がなされてきている⁽²⁰⁾。しかし、破壊に際して顕著な塑性変形を伴うような高靱性材料に対しては、弾性解析によって十分な強度評価を行うことは期待できない。しかも、一般の構造材として高靱性材料が多用されているので、き裂材の三次元弾塑性応答を明らかにすることは、破壊力学の精密化のうえで重要と考えられる。

大規模降伏状態の下での破壊に対しては、RiceのJ積分を用

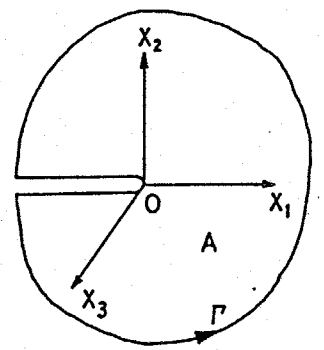
いて破壊の条件式を与えることが提案されており、J積分の三次元問題への拡張もいくつか試みられている。⁽²¹⁻²⁶⁾しかし、J積分は、先にも述べたように、非線形弾性体に対して定義されているので、弾塑性問題においてJ積分が、き裂先端近傍の応力・ひずみ場を特徴づける積分経路独立な破壊力学パラメータとしての物理的な意味を持つのは、全ひずみ理論に従う弾塑性体が単調増加荷重を受ける場合に限られている。そこで、本節では、大規模降伏を伴う貫通き裂について有限要素法により三次元弾塑性解析を行い、塑性変形がJ積分に与える影響について調べる。

図IV-25(a)に示すような弾塑性体中の三次元き裂を考え、 $O-X_1X_2X_3$ をき裂前縁の任意の点Oを原点とする直角座標系とし、 X_1, X_2, X_3 軸を、それぞれ、点Oにおけるき裂前縁の主法線、陪法線および接線方向とすると、三次元弾塑性体における積分経路(領域)に独立なJ積分の表示式は、式(II-81)より、次式のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 J &= J_1 \\
 &= \iint_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_1} dA - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} d\Gamma \\
 &\quad - \iint_A (\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial X_1})_{,3} dA
 \end{aligned}
 \tag{IV-25}$$



(a)



(b)

図IV-25 弾塑性体中の三次元き裂

ここでは、簡単のために、

物体力，慣性力，き裂面の圧力，および，破壊進行領域の大きさを無視しており，き裂前縁の点 O が X_1 軸方向に進展する場合について考えている（この場合， $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1$ が成立する）。 Γ は，図 IV-25(b) に示すようにき裂下面から出発してき裂先端を囲みき裂上面で終る任意の径路であり， A はき裂面と Γ が囲む領域である（ただし，領域 A は $O-X_1, X_2$ 平面上にあるものとする）。なお，全ひずみ ε_{ij} が

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (\text{IV-26})$$

のように弾性ひずみ ε_{ij}^e と塑性ひずみ ε_{ij}^p の和として表わすことができ，弾性ひずみ ε_{ij}^e に対して，

$$\partial w^e(\varepsilon_{ij}^e) / \partial \varepsilon_{ij}^e = \sigma_{ij} \quad (\text{IV-27})$$

を満足する弾性ひずみエネルギー密度 w^e が定義できるならば，式 (IV-25) は，Gauss の発散定理によって，次式のように変形することとできる。

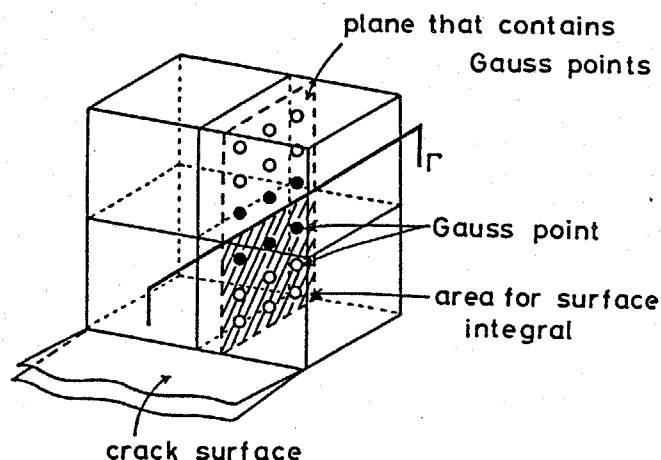
$$\dot{\gamma} = \int_{\Gamma} w^e dx_2 - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} d\Gamma + \iint_A [\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial X_1} + (\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial X_1})_{,3}] dA \quad (\text{IV-28})$$

4.3.2. $\dot{\gamma}$ 積分の三次元有限要素解析法

(1) 計算手法

有限要素法を用いて，式 (IV-25) により $\dot{\gamma}$ 積分の計算を行った。要素には 6 面体 20 節点アイソパラメトリック適合要素を用いた。要素剛性マトリックスや荷重ベクトルの作成および $\dot{\gamma}$

積分の計算における積分
計算には、ガウス・ルジャ
ヤンドルの求積分法⁽²⁾を用
い、1要素内のガウス点
の数は27個とした。



図IV-26 点積分の計算法

本解析では、図IV-26
に示すようにガウス点を
含む面と要素の境界との交線を積分経路に選び、経路に最も近
いガウス点(図中黒丸点)における値の相加平均を用いて式(
IV-25)の線積分を求めた。また、面積積分の値はガウス点にお
ける値を用いて評価した。その際、 $\varepsilon_{ij,1}$, $\sigma_{ij,3}$, $u_{i,13}$ などの
値は、つぎのようにして求めた。まず、節点における応力・ひ
ずみの値をその節点に連なる要素における値の平均値として求
め、この節点応力・節点ひずみと形状関数によって要素内の任
意の点の応力、ひずみを表わし、これから、 $\varepsilon_{ij,1}$, $\sigma_{ij,3}$, $u_{i,13}$
を求めた。

(2) 計算精度の検討

二次元問題における点積分

計算精度を調べるために、まず、二次元弾塑性問題を三次元
有限要素法によって計算した。図IV-27に計算の対象とした中
央き裂を有する平板の形状、要素分割、積分経路を示す。ただ

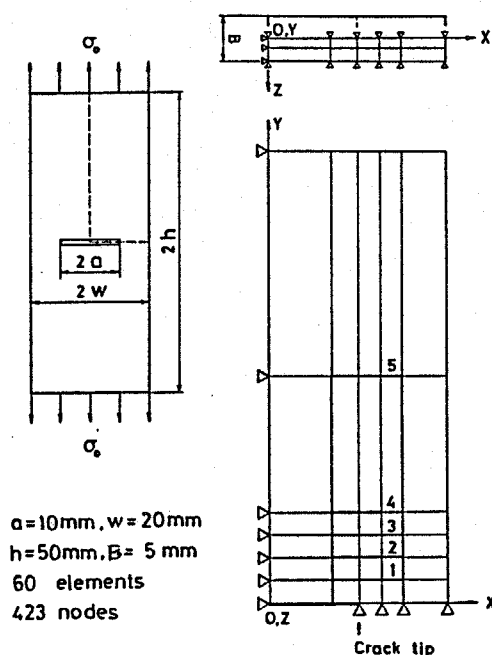
し、板厚方向にガウス点が6点あるので、それらを含む面内に、それぞれ、図IV-27に示すような径路を設けた。平板の上下面が一様応力 σ_0 となるように荷重を作用させ、平面ひずみ状態となるように側面の節点を拘束した。材料は構造用炭素鋼を想定し、 $E = 206 \text{ GPa}$ 、 $\nu = 0$ 、降伏応力 $\sigma_Y = 480 \text{ MPa}$ とし加工硬化率

$$H' = d\bar{\sigma} / d\bar{\epsilon}^P$$

を $E/100$ とした。ただし、 $\bar{\sigma}$ および $d\bar{\epsilon}^P$ は、それぞれ、ミセスの相当応力および相当ひずみ増分である。

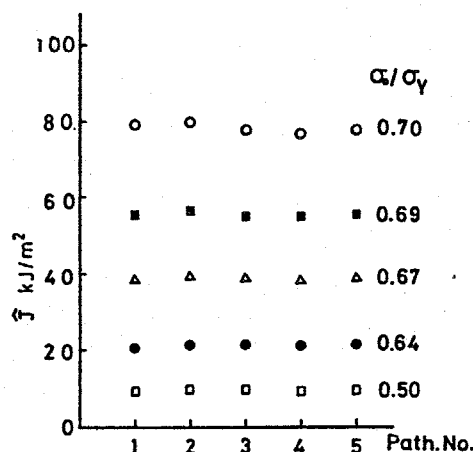
図IV-28に計算結果を示す。

図IV-28(a)は、各負荷段階における J 積分の径路ごとの値を示している。板厚方向には、それぞれの大きさの

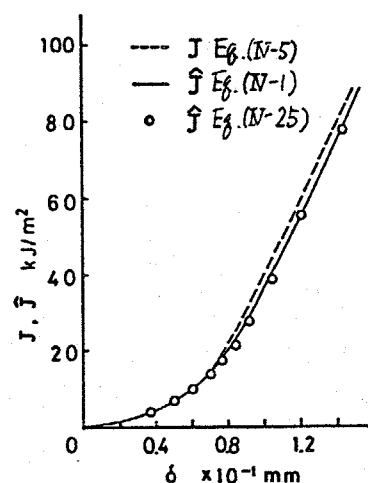


図IV-27 二次元中央き裂試験片

(IV-29)



(a) J 積分の径路独立性



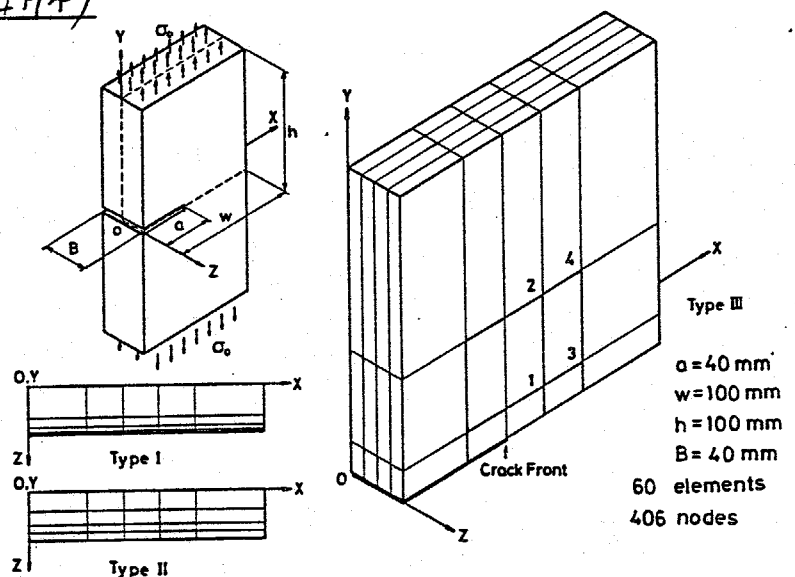
(b) J , J - δ 曲線
 (三角形要素を用いた
 結果との比較)

図IV-28 二次元弾塑性問題における J 積分

径路に対して等しい値が得られている。図から、径路の大きさにかかわらず、ほぼ等しい値積分の値が得られており、有限要素計算においても径路独立性が良く成立していることがわかる。図IV-28(b)は、荷重点変位 δ と $\oint$ 積分との関係を示したものである。白丸印が本解析で求めた $\oint$ の値であり、各径路によって得られた値の平均値である。また、点線はRiceの $\oint$ 積分、実線は、 $\oint$ 積分であり、これらは三角形定ひずみ要素を用いた二次元解析により求められた図IV-4に示した計算結果である。本解析結果と三角形定ひずみ要素を用いた二次元解析によって得られた $\oint$ の値とが良く一致していることがわかる。なお、本解析において、式(IV-25)の第三項(三次元問題であるために生じる項)は、他の項に比較して十分小さい値(0.1mN/m程度のオーダー)であった。

積分の三次元線形弾性解析

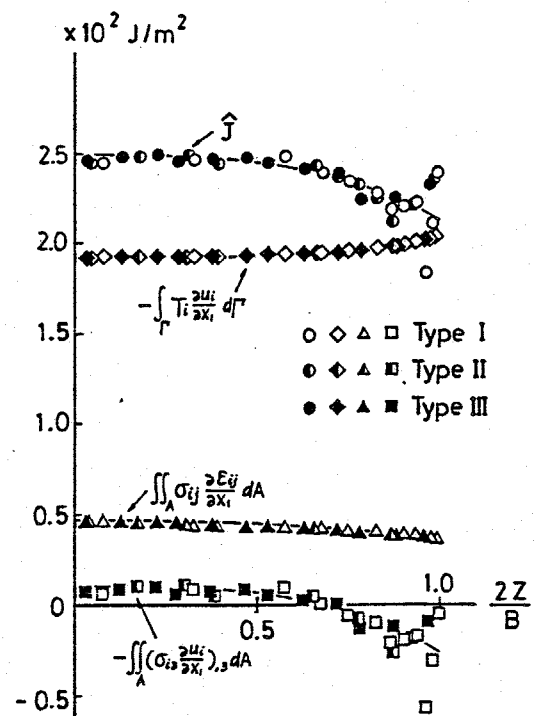
つぎに、三次元問題における $\oint$ 積分の計算精度を調べるために、図IV-29に示すような一様引張荷重を受ける片側貫通き裂試験片に対して弾性計算を行



図IV-29 片側貫通き裂試験片

た。同様の形状の試験片にたいして、矢川・西岡は重ね合せ法を用い応力拡大係数の三次元解析を行っている⁽²⁸⁾。問題の対称性から試験片の1/4を図に示すように要素分割した。予積分を計算するための積分経路としては、ガウス点を含む面内に図に示すような4経路を採用した。したがって、経路総数は48である(8方向に4要素, 1要素内にガウス点を含む3面)。また, 予積分に対する板厚方向分割法の影響を調べるために, 図中に示すような, Type I, Type II, Type III の3種類の分割に対して計算を行った。試験片の上下面には, 一様引張荷重($\sigma_0 = 10 \text{ MPa}$)が作用するものとし, $E = 206 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ とした。

図IV-30に, 弾性問題における予積分とその各項別の板厚方向の分布(各面内4経路の平均値)を示す。この図から, 予積分が板厚の中央で最大となり自由表面に近づくにつれて減少するような上に凸の分布となること, および, この分布に式(IV-25)の第三項の三次元的効果が大きく影響していることがわかる。表面付近で J の値のばらつきが大きくなっているの



図IV-30 三次元弾性問題における予積分と各項別の板厚方向分布

は要素分割の粗さに帰因すると考えられるが、要素中央がウズ点では3種類のいずれの分割に対しても、ほぼ同様の値となっている。なお、板の中央では平面ひずみ状態となっているものと考えられるので、式(IV-7)を用いて今の値から換算した応力拡大係数は矢川・西岡の計算結果⁽²⁸⁾よりも約6%低い値となった。

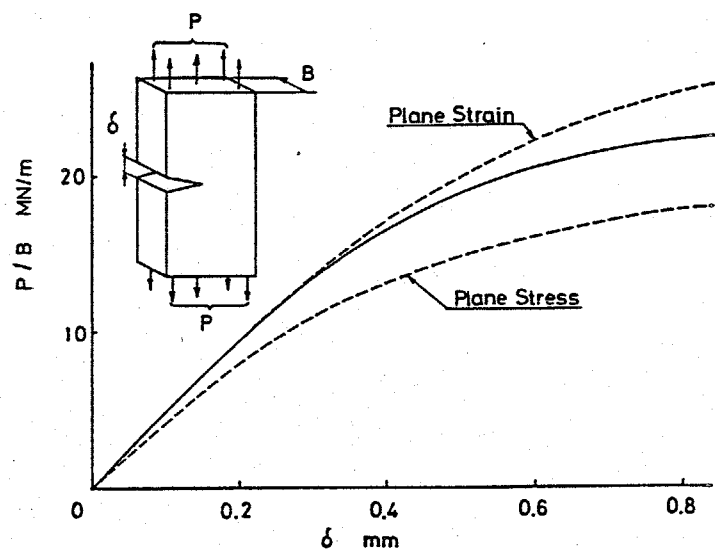
4.3.3. 予積分の三次元弾塑性解析(板厚効果について)

(1) 一様引張荷重を受ける片側貫通き裂試験片

前節と同じ試験片(図IV-29, TypeⅢ)について弾塑性計算を行った。試験片には単調に増加する一様引張荷重が作用するものとし、前節と同じ材料定数を用いて計算した。

図IV-31に計算結果を示す。縦軸は、試験片単位板厚当りの荷重 P/B であり、横軸

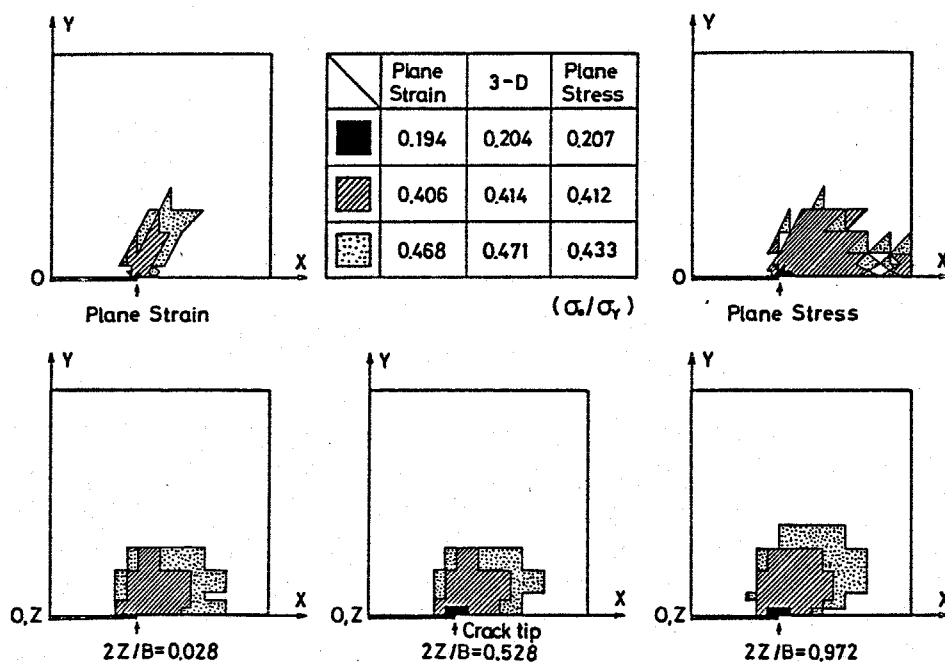
は、き裂底開口変位 δ である。また、図中には、平面応力および平面ひずみ状態における二次元有限要素解析の結果(三角形定ひずみ要素, 406要素, 237節点)と破線



図IV-31 荷重-開口変位曲線
(片側貫通き裂試験片)

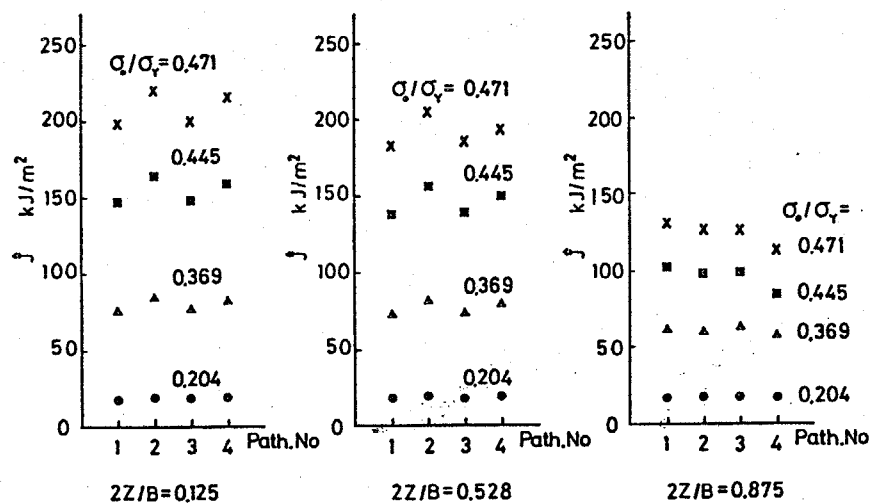
で示されている。この図から三次元弾塑性解は、変形が小さい間は平面ひずみ状態の曲線にほぼ一致しているが、変形が大きくなるにしたがって、平面ひずみと平面応力の中間的な状況になっていくことがわかる。このことは、つぎに示す図IV-32からと推察できる。

図IV-32の下側の3図は、三次元解析による板厚方向の各面における塑性域の形状を示している。初期変形段階（黒塗りの部）では板厚中央部と自由表面付近で明確な差が生じているが、変形が進むと両者の差は減少している。また、上側の2図は二次元解析による塑性域である。三次元解析による塑性域が平面応力と平面ひずみの中間的傾向を示していることがわかる。



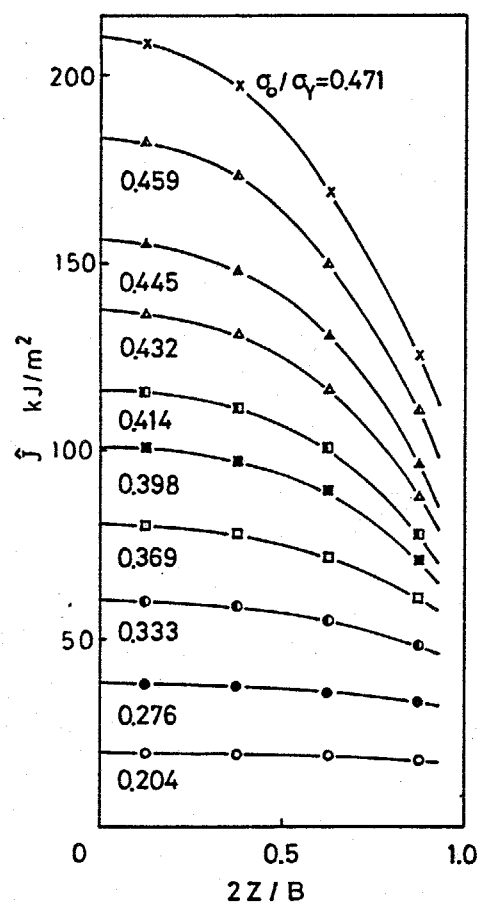
図IV-32 板厚方向塑性域分布

つぎに、図IV-29
に示すような積分経
路によって計算した
積分値の値を図IV-
33 に示す。この図
から有限要素計算に
おいても経路独立性
が比較的良く成立し
ていることがわかる。



図IV-33 積分値の経路独立性
(片側貫通き裂試験片)

図IV-34は、負荷を増加させた
ときの板厚方向の積分値の分布を
示す。積分値の値としては、要素
分割の影響が少なかった要素中央
のガウス点を含む面における値を
用いた。図より J の値は、負荷の
増加とともに表面付近よりも板厚
中央部において増大する傾向が著
しい。このことは、実験で観察さ
れるように、板厚中央でき裂が進
展を開始することに対応している
ものと考えられる。ただし、自由



図IV-34 積分値の板厚方向
分布(片側貫通き
裂試験片)

表面付近では、 J 積分にかなりばらつきが生じるため、 J 積分を精度良く求めるために要素分割などについて今後改良する必要があると思われる。

き裂底開口変位 δ と J 積分の関係を図 IV-35 に、単位厚さ当りの荷重 P/B と J 積分の関係を図 IV-36 に示す。ただし、 J 積分の値は板厚中央の値である。また、比較のために、二次元解析によって求めた J 積分の値を破線で示した。板厚中央部は、通常は、平面ひずみ状態となることが予想される領域であるが、本解析結果によると荷重が小さいときには J 積分の値は平面ひずみ状態の値と等しいが、荷重が大きくなるとしたから平面応力と平面ひずみとの中間の値となることがわかる。

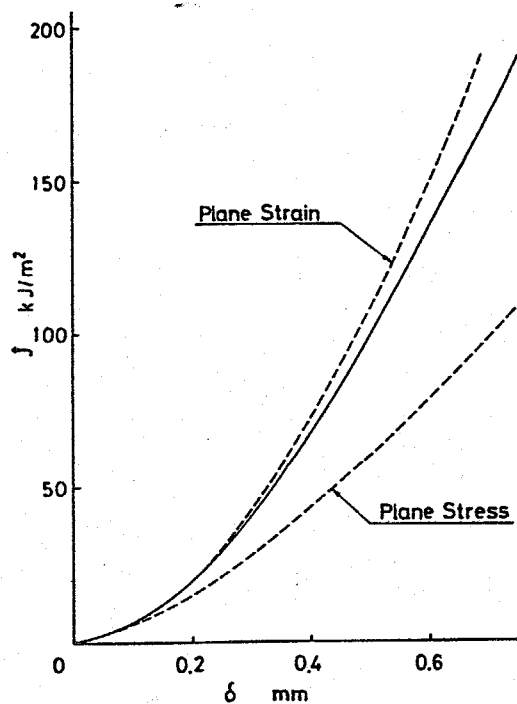


図 IV-35 J - δ 曲線
(片側貫通き裂試験片)

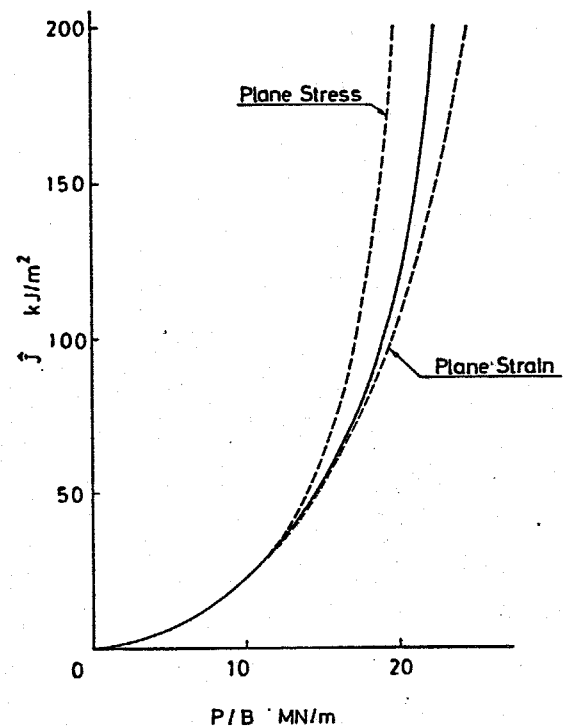


図 IV-36 J - P/B 曲線
(片側貫通き裂試験片)

(2) コンパクト試験片

前節の計算によって、三次元弾塑性解析結果は大規模降伏状態においては、平面応力状態と平面ひずみ状態の中間的な傾向を示すことが明らかになった。そこで、本節では、破壊靱性試験に通常使用されているコンパクト (CT) 試験片について三次元弾塑性解析を行い、今後分に及ぼす板厚の影響について検討を行う。

計算を行った試験片の形状を図 IV-37 に示す。問題の対称性を考慮して図のように要素分割した。板厚の影響を調べるために、断面の形状は同一とし、板厚だけを2倍または $1/2$ 倍としたときの計算を行った。その際、板厚方向の要素分割数は4のまま一定としている。材料としては、SNCM8鋼を想定し、 $E = 206 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_Y = 637 \text{ MPa}$, $H' = 2.45 \text{ GPa}$ とした。

平面ひずみとなるように試験片の側面の節点を拘束して計算したときの単位厚さ当りの荷重 P/B と荷重線

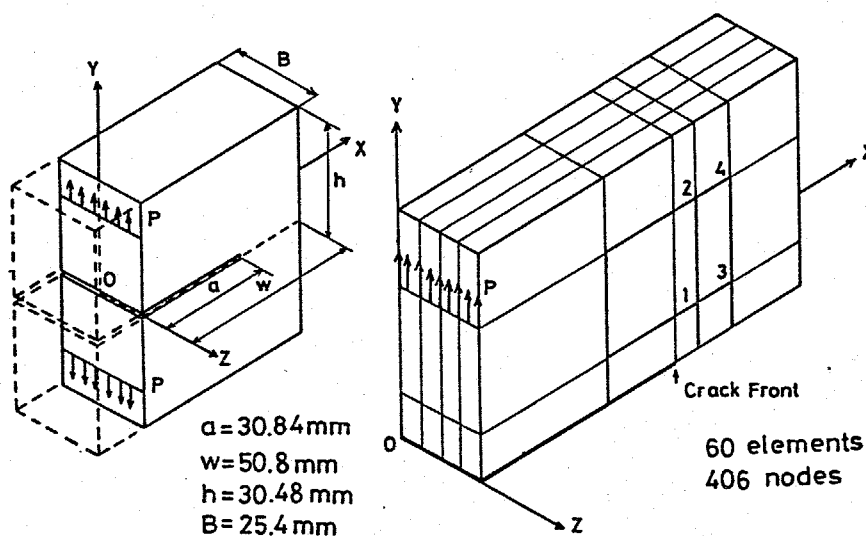
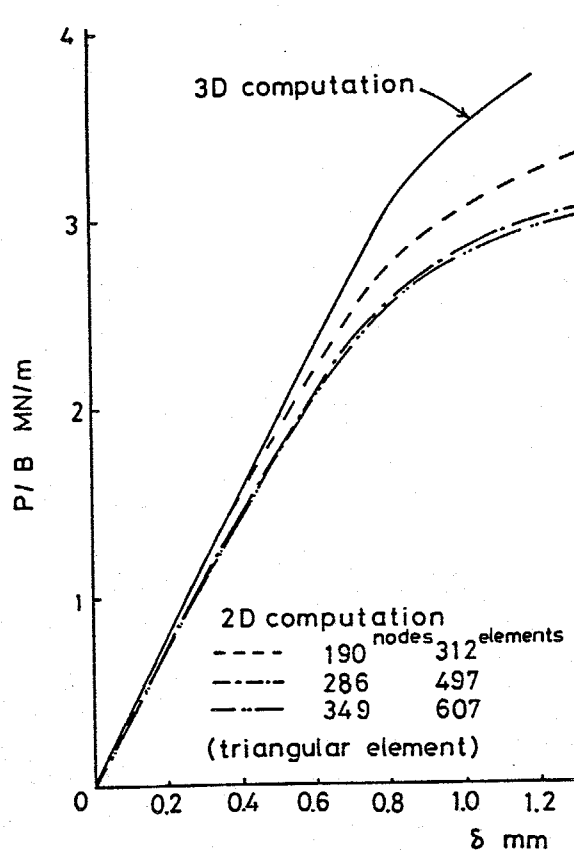
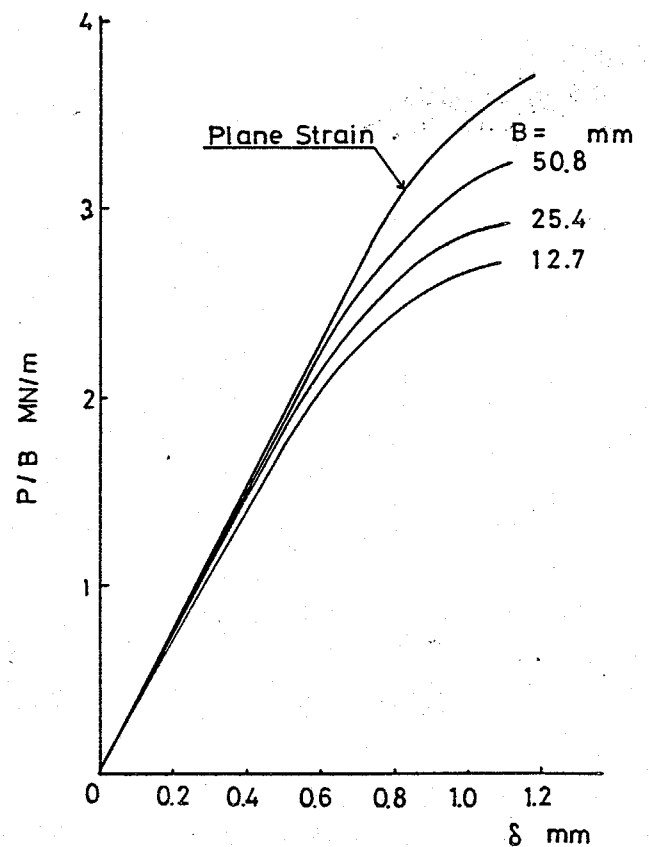


図 IV-37 コンパクト (CT) 試験片

変位 δ の関係を図IV-38に示す。図には比較のために、三角形定ひずみ要素を用いて要素分割数を変えることによつて得られた結果も示した。この図から分割数が少ない場合には $P/B-\delta$ 曲線は高目になる傾向を生じることがわかる。したがって、図IV-37に示したような要素分割による計算結果と実験的に得られた $P/B-\delta$ 曲線を定量的に比較するためには、さらに細かい要素分割が必要と考えられる。しかし、三次元弾塑性解析において、要素数を大幅に増加させることは、計算機の記憶容量、演算時間の点から現段階では困難である。図IV-39は板厚のみが変化する場合の $P/B-\delta$ の計算結果である。これは、実験に



図IV-38 $P/B-\delta$ 曲線
(平面ひずみ状態)



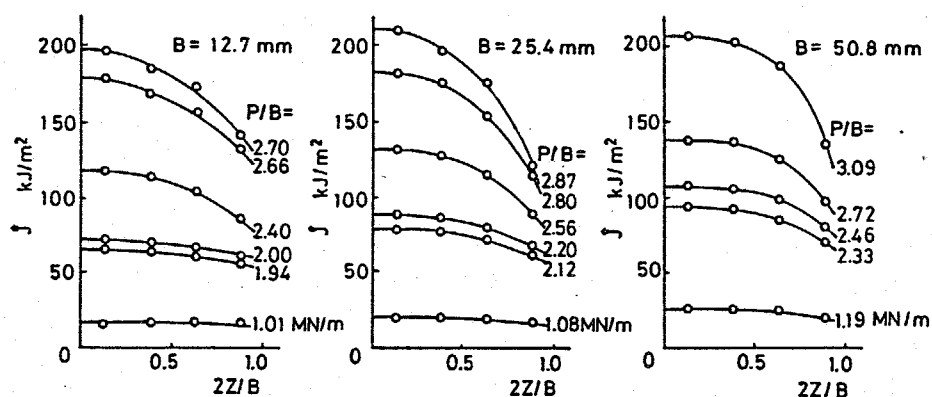
図IV-39 $P/B-\delta$ 曲線
(板厚の影響)

よって求められた $P/B-\delta$ 曲線⁽²⁹⁾と傾向的に一致している。以上の点を考慮して、ここでは、図IV-37に示す要素分割を用いた解析によって定性的な検討を行うことにする。なお、今後は特異要素を用いるなどの計算精度を向上させるための検討が必要であろう。

図IV-39に示した $P/B-\delta$ 曲線は、板厚が増加するにつれて平面ひずみ状態の解に近づく傾向があり、この傾向は、上述したように実験結果と一致している。また、最も厚い $B=50.8\text{mm}$ の場合においても、 $P/B-\delta$ 曲線は平面ひずみ状態を仮定して得られる解に一致せず、変形状態は平面応力状態と平面ひずみ状態の中間にあることがわかる。

図IV-40に、それぞれの板厚に対する寸積分の分布を示す。寸積分の値は4径路の平均値である。板厚 B が 25.4mm の場合に比べて 50.8mm の場合には、板厚の中央部において寸積分の値が平坦になる領域が広がっており、試験片全体の变形が平面ひずみ状態に

近づいている
ことに対応し
ている。また、
逆に、板厚
が薄くなると



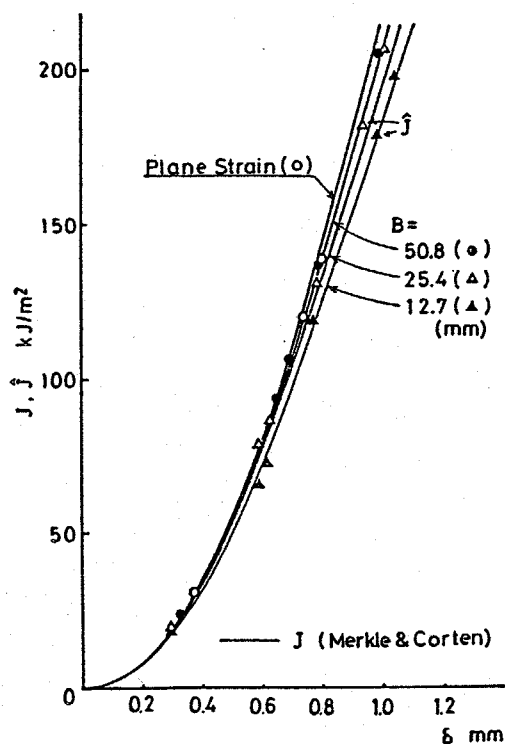
図IV-40 CT試験片の寸積分の分布(板厚の影響)

($B=12.7\text{mm}$) 表面付近での J 積分の急激な減少は見られなくなる。このことは、試験片全体の变形挙動が平面応力状態に近づいていることと対応していると考えられる。

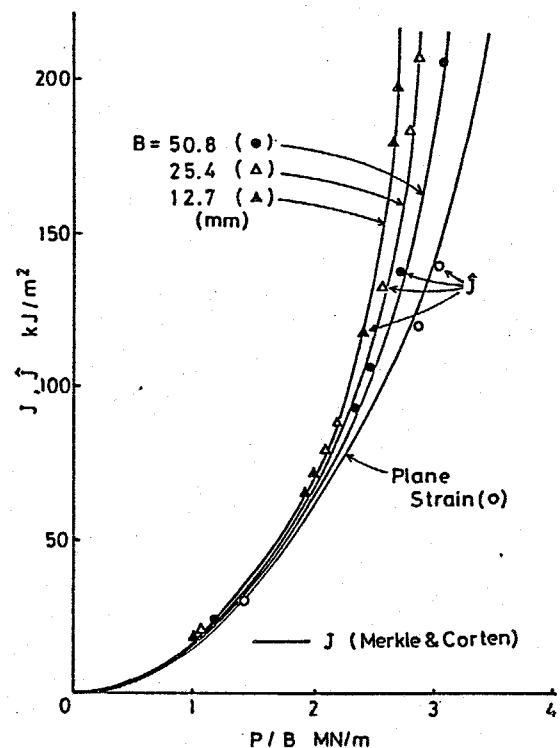
CT試験片を用いた破壊靱性試験においては、荷重-変位曲線から次式のような Merkle-Corten の簡便式⁽³⁰⁾を用いて J 積分の値を評価することが通常行われている。

$$J = \alpha_1 \frac{2A}{Bb} + \alpha_2 \frac{2P\delta}{Bb} \quad (\text{IV-30})$$

ただし、 A は荷重-変位曲線の下面積、 b は試験片のリガメント長さ、 α_1, α_2 は試験片の形状に依存する係数である。計算によって得られた $P/B-\delta$ 曲線(図IV-39)を用いて式(IV-30)によって評価した J 積分の値を図IV-41, IV-42に実線で



図IV-41 板厚中央における J 積分と荷重線変位 δ との関係
(簡便式によって求めた J 積分との比較)



図IV-42 板厚中央における J 積分と荷重線変位 δ との関係
(簡便式によって求めた J 積分との比較)

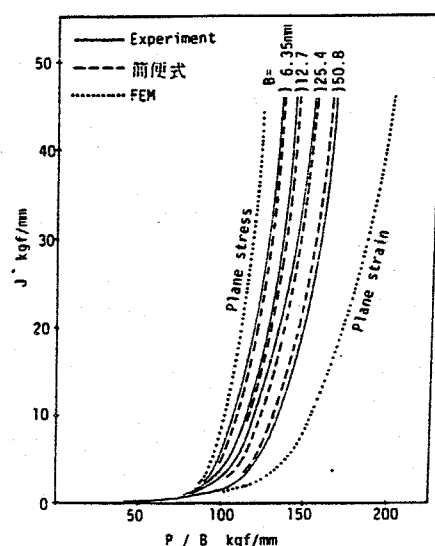
示した。また、図中の丸印や三角印は、径路積分によって求めた寸積分の板厚中央における値をプロットしたものである。この図から、両者の結果が良く一致していることがわかる。なお、ここで計算を行った板厚は、すべて有効な靱性値を得るための板厚の推奨値⁽³¹⁾以上である。

(3) 考察

前節の計算結果より $P/B-\delta$ 曲線が平面ひずみ状態のものより低いにもかかわらず、Merkle-Cortenの簡便式を用いると平面ひずみ破壊靱性値が得られる理由として次のことが考えられる。一般に、破壊はき裂先端近傍の破壊進行領域の中で進行するので、板厚中央におけるき裂先端近傍の狭い領域で平面ひずみ状態が成立していれば、巨視的破壊の平坦な平面ひずみ状態の破壊がその領域で実現されると考えられる。これに対して $P/B-\delta$ 曲線は試験片全体の変形に依存するので、板厚中央部のき裂先端近傍の狭い領域が平面ひずみ状態であっても、き裂先端から離れた領域または試験片の表面付近における非平面ひずみ状態の影響を受ける。このために P/B 曲線は平面ひずみの計算より低目になると考えられる。また、図IV-41, IV-42の三次元解析結果から、板厚中央の寸の値は $P/B-\delta$ 曲線にMerkle-Cortenの簡便式を適用して得られる寸の値にほぼ一致する。したがって、寸積分の板厚中央の局所的な値が限界値に達した

ときにその部分の破壊が生い起こると考えると、板厚が異なることにより三次元的な変形状態が異なるにもかかわらず、簡便式を用いて実験的に評価された破壊靱性値が板厚の影響を受けていないことが理解できる。

図IV-43⁽²⁹⁾の実線は、板厚のみが異なる SUS304コンパクト試験片（断面形状は1インチコンパクト試験片と同一）の P/B - J 関係の実験結果から Menkle-Corten の簡便式 (IV-30) によって求めた J - P/B 関係である。この実線は、上に述べた結果より板厚中央の J と P/B の関係と見なすことができる。図中の点線は二次元有限要素法により線積分から求めた J 値であり（単調増加荷重下なので J 積分の値とほぼ一致する）、破綻は点線の結果から有限厚さの構造物の J の値（板厚中央における J の値）を簡便法⁽²⁹⁾により推定した結果である。この図から、板厚中央の J の値は板厚の影響を顕著に受けるので単なる二次元解析では評価できないが、二次元解析結果を利用した簡便法を用いれば比較的容易に推定できることがわかる。なお、この手法は回転円板のき裂成長開始などの破壊挙動の予測に適用されている。



図IV-43 SUS304コンパクト試験片の J - P/B 曲線⁽²⁹⁾
(1 kgf/mm = 9.807 kN/m)

したがって、以上の結果より有限の板厚を持つ実際の構造物の健全性評価に J 積分を利用することができるものと考えられる。

4.4. 結 言

き裂先端部における塑性変形の影響が無視できない大規模降伏状態の破壊問題に関して弾塑性有限要素解析を行い、 J 積分が破壊力学パラメータとして有用であることを示した。

単調増加荷重の下では J 積分はRiceの J 積分とほぼ等しい値となることを示した。降荷過程や熱ひずみが存在する場合には J 積分は適用が困難となるのに対し、 J 積分においては理論的に予想される経路(領域)独立性が有限要素計算において成立するので、複雑な負荷を受ける場合の破壊問題に対しても J 積分の適用が可能であることを示した。最後に、三次元問題における J 積分を考えることにより、破壊に与える板厚の効果を説明し、構造物の健全性評価をするための破壊力学パラメータとして J 積分が有効であることを示した。

なお、本章の計算結果はすべて静止き裂に対するものであるが、今後は進展するき裂についても解析を行い、例えば、安定き裂成長や低サイクル疲労などの破壊現象に J 積分を適用する

ための研究が必要と考えられる。

第V章 結 論

複雑な負荷を受ける機械や構造物の安全性評価に破壊力学的手法を適用するための基礎的研究として、本論文は、弾性エネルギー解放率 G 、応力拡大係数 K 、およびRiceのJ積分などをエネルギー保存則に基づいて拡張し、物体力、慣性力、固有ひずみ（熱ひずみや塑性ひずみなど）や破壊進行領域の存在を考慮した破壊力学パラメータを提案することを目的としており、以下の結果が得られた。

第II章では、き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータについてエネルギー保存則に基づいて検討し、以下の結果が得られた。

- (1) 任意の構成関係式に従う物体中をき裂が進展する際のエネルギー解放率を破壊進行領域の変形を考慮に入れて定式化し、その結果、エネルギー解放率は破壊進行領域の平行移動による成分 $\hat{J}_\alpha$ 、回転による成分 $\hat{L}_3$ 、自己相似的な膨張による成分 $\hat{M}$ および形状のゆがみによる成分 $\hat{L}$ の和として表わされた。
- (2) $\hat{J}_\alpha$, $\hat{L}_3$, $\hat{M}$ の積分経路（領域）に依存しない表示式を導いた。
- (3) 破壊進行領域が小さい場合には $\hat{J}_\alpha \gg \hat{M}, \hat{L}_3$ となる。

- (4) $\int$ 積分の表示式は，特別な場合には他の破壊力学パラメータ（Riceの J ，Ainsworthの J_0 ，Eftisらの $\tilde{G}$ ，Blackburnの J^* ，Striforceの f ）の表示式に一致する。
- (5) $\int$ 積分はき裂先端近傍の特異場の強さと関係づけられる。
- (6) 小規模破壊進行領域を伴うような破壊に対して，

$$\int = \int_c$$

を破壊条件式として採用することが考えられ， $\int$ 積分はき裂の進展挙動を記述するための単一の破壊力学パラメータとなると考えられる。なお，この条件式では， $\int$ は材料の抵抗値として $\int_c$ のなかに繰り込まれている。

- (7) 以上の結果は三次元問題の場合へ拡張することができる。

第Ⅲ章では，具体的な応用例として衝撃荷重下の破壊や高速き裂進展問題のように物体の慣性力の影響を考慮する必要のある動的破壊問題の場合について検討した。

- (8) 小規模降伏条件下では， $\int$ 積分は動的弾性エネルギー解放率 G および動的応力拡大係数 K と一対一に対応するので，このような場合の動的き裂問題の解析は動的応力拡大係数の解析に帰着される。

- (9) き裂先端近傍の解析解を変位関数とする特異要素を用いる方法によっても， $\int$ 積分の積分経路（領域）独立な表示式

を利用する方法によつて静止き裂に応力波が入射する場合の動的応力拡大係数を精度良く有限要素解析することができる。

(10) 三点曲げ試験片の動的応力拡大係数は簡便式によつて評価することができる。

(11) 時間とともに増大する集中荷重を受けて両側に一定速度で進展するき裂の動的応力拡大係数および動的弾性エネルギー解放率はき裂進展速度の減少関数である。また, Dugdaleの仮定を用いた近似的な解析によると, き裂進展速度の増加にともなつて降伏域の長さ, き裂先端の開口変位およびき裂進展によつて解放されるエネルギーは減少する。

(12) 有限体中を高速で進展するき裂の動的応力拡大係数は, 特異要素を用いた有限要素法により精度良く求められる。

(13) 特異要素を用いた有限要素法による高速き裂進展のシミュレーション手法により, 中央き裂を持つ平板の上下面にパルス状の引張荷重が作用する場合について解析を行ったところ, 荷重の持続時間および大きさの変化に応じてき裂の加速, 分岐, 停止などの結果が得られた。

(14) ガラスの平板試験片の破壊応力と分岐するまでのき裂の進展量との関係に及ぼす負荷形式の影響は動的応力拡大係数を用いた分岐条件式によつて説明される。

第IV章では、塑性変形の影響が無視できない大規模降伏状態の破壊問題に関して有限要素解析を行い、破壊力学パラメータとしての J 積分の有効性について検討を加えた。

(15) 単調増加荷重下では J 積分と J 積分はほぼ一致する。

(16) 前荷重よりも大きな荷重まで再負荷した場合は J と Riceらの簡便式による J はほぼ同様の前荷重依存性を示す。

(17) 前荷重の大小によらずき裂先端の開口変位が一定であれば J も一定となった。

(18) 温度場における弾塑性体のき裂先端近傍の応力・ひずみの特異性は J 積分によって表わされる。

(19) 非定常温度場の問題においても有限要素計算で求められた J 積分の値は理論的に予測されたように積分経路(領域)独立となった。

(20) 三次元弾塑性有限要素法により、単調増加荷重を受ける貫通き裂試験片の J 積分の板厚方向の分布を求めたところ、 J 積分の値は負荷の増加とともに板厚中央部で著しく増大すること、および、変形が進むにつれて平面応力と平面ひずみ状態を仮定した二次元解析によって求められる値の中間の値となる結果が得られた。

(21) 板厚中央の J 積分の値と荷重-変位曲線から Merkle-Cortenの簡便式によって評価した J の値がほぼ一致した。

(22) 板厚が異なることによつて三次元的な変形状態が異なるにもかかわらず、簡便式を用いて実験的に評価された破壊靱性値が板厚の影響を受けていないのは上記(21)がその理由として考えられる。

(23) 板厚中央の σ の値は二次元解析結果を利用した簡便式を用いれば比較的容易に推定できるので、有限の板厚を持つ構造物に対して σ 積分を適用することかできる。

以上の結果より、本論文で提案した σ 積分はき裂進展挙動を記述するための破壊力学パラメータとして有用であると考えられる。

なお、今後の研究課題としては以下のことが考えられる。

(1) 第Ⅲ、Ⅳ章で示した応用例は、すべて破壊進行領域の大きさを無視したものであるもので、破壊の微視的挙動を適当にモデル化し、有限な破壊進行領域を考慮した取り扱いについて検討する。

(2) 本論文では微小ひずみを仮定しているが、有限変形を考慮した取り扱いについて検討する。

(3) 環境破壊の問題に適用するために化学的作用の影響を考慮した取り扱いについて検討する。

謝 辞

筆を置くにあたり、終始貴重な御助言と御指導を賜わった東京工業大学 坂田 勝教授、青木 繁助教授に深く感謝致します。また研究に協力していただいた、東京工業大学機械物理工学科卒業生、近藤博史氏、和泉原芽一氏、大里豊彦氏、高木礼史氏、松本功氏、加東重明氏、鍋田正明氏、若林勤氏ならびに大学院生立原昌義氏に厚くお礼申し上げます。さらに、研究に際して多大の便宜を与えられた坂田研究室はじめ多くの研究室の皆様には心から感謝致します。

なお、有限要素解析等の数値計算は、東京工業大学総合情報処理センターならびに東京大学大型計算機センターにおいて行った。

参考文献

第I章

- (1) Tetelman, A. S. and McEvily, A. J., *Fracture of Structural Material*, (1977) Jon Wiley; 官本博訳「破壊力学の基礎」(1977) 培風館.
- (2) Liebowitz, H. ed. *Fracture Vol.1~7*, (1968~1972) Academic Press.
- (3) Knott, J. F., *Fundamentals of Fracture Mechanics*, (1973) Butterworths; 官本博訳「構造材料の強度と破壊 1, 2」, (1960) 培風館.
- (4) 横堀 武夫 「材料強度学 第2版」(1974) 岩波.
- (5) Griffith, A. A., *The phenomena of rupture and flow in solids*, Phil. Trans. Roy. Soc. 221 (1920) 163-198.
- (6) Irwin, G. R., *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, J. Appl. Mech. 24 (1957) 361-364.
- (7) 例えは 岡村弘之 「線形破壊力学入門」(1976) 培風館; 中沢一・小林英男 「固体の強度」(1976) 共立出版; 村上裕則・大南正瑛「破壊力学入門」(1979) オーム社.
- (8) Begley, J. A. and Landes, J. D., *The J integral as a fracture criterion*, ASTM STP 514 (1972) 1-20
- (9) Rice, J. R., *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*, J. Appl. Mech. 35 (1968) 379-386.
- (10) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., *Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material*, J. Mech.Phys. Solids 16 (1968) 1-12.
- (11) Hutchinson, J. W., *Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material*, J. Mech. Phys. Solids 16 (1968) 13-31.
- (12) Hutchinson, J. W., *Plastic stress and strain fields at a crack tip*, J. Mech. Phys. Solids 16 (1969) 337-347.
- (13) Paranjpe, S. A. and Banerjee, S., *Interrelation of crack opening displacement and J-integral*, Engng. Fract. Mech. 11 (1979) 43-53.
- (14) Clarke, G. A., Andrews, W. R., Begley, J. A., Donald, J. K., Embley, G. T., Landes, J. D., McCabe, D. E., and Underwood, J. H., *A procedure for the determination of ductile fracture toughness values using J integral techniques*, J. Test. Eval. 7 (1979) 49-56.
- (15) 例えは Dowling, N. E. and Begley, J. A., *Fatigue crack growth during gross plasticity and the J-integral*, ASTM STP 590 (1976) 82-103.
- (16) 例えは Landes, J. D., Begley, J. A. and Clarke, G. A. eds. *Elastic- Plastic Fracture*, ASTM STP 668 (1979) ASTM.

- (17) Rice, J. R., *Thermodynamics of the quasi-static growth of Griffith cracks*, J. Mech. Phys. Solids 26 (1978) 61-78.
- (18) Dugdale, D. S., *Yielding of steel sheets containing slits*, J. Mech. Phys. Solids 8 (1960) 100-104.

第II章

- (1) Broberg, K. B., *Crack-growth criteria and non-linear fracture mechanics*, J. Mech. Phys. Solids 19 (1971) 407-418.
- (2) Freund, L. B., *Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid*, J. Elasticity 2 (1972) 341-349.
- (3) 村外志雄・森 勲 「マイクロメカニクス = 転位と介在物」 (1976) 培風館.
- (4) Eshelby, J. D., *The calculation of energy release rates*, Prospects of Fracture Mechanics (Sih, G. C., van Elst, H. C. and Broek, D. ed.) 69-84 (1974) Noordhoff.
- (5) Knowles, J. K. and Sternberg, E., *On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatic*, Arch. Rat. Mech. Anal. 44 (1972) 187-211.
- (6) Budiansky, B. and Rice, J. R., *Conservation laws and energy-release rates*, J. Appl. Mech. 40 (1973) 201-203.
- (7) 第I章文献 (4)
- (8) Thomason, P. F., *A theoretical relation between K_{Ic} and basic material properties in ductile metal*, Int. J. Fract. Mech. 7 (1971) 409-419.
- (9) Andersson, H., *Analysis of a model for void growth and coalescence ahead of a moving crack tip*, J. Mech. Phys. Solids 25 (1977) 217-233.
- (10) Kfoury, A. P. and Rice, J. R., *Elastic/plastic separation energy rate for crack advance in finite growth steps*, Proc. ICF4 Vol.1 (Taplin, D. M. R. ed.) 43-59 (1977) Univ. Waterloo Press.
- (11) Eftis, J. and Liebowitz, H., *On surface energy and the continuum thermodynamics of brittle fracture*, Engng. Fract. Mech. 8 (1976) 459-485.
- (12) Barenblatt, G. I., *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*, Advan. Appl. Mech 7 (1962) 55-129.
- (13) 第I章文献 (9)
- (14) 坂田 勝・青木 繁・石井 潔, 回転円板における丁継ぎの解析, 機論 45-383 (1978) 2238-2243.
- (15) Ainsworth, R. A., Neale, B. K. and Price, R. H., *Fracture behavior in the presence of thermal strains*, Inst. Mech. Engrs., London (1978) 197-204.
- (16) Bui, H. D., *Stress and crack-displacement intensity factors in elastodynamics*,

- Proc. ICF4 Vol.3 (Taplin, D. M. R. ed.) 91-95 (1977) Univ. Waterloo Press.
- (17) Eftis, J and Liebowitz, H., *On fracture toughness evaluation for semi-brittle fracture*, Engng. Fract. Mech. 7 (1975) 101-135.
 - (18) Eftis, J Jones, D. L. and Liebowitz, H., *On fracture toughness in the non-linear range*, Engng. Fract. Mech. 7 (1975) 491-503.
 - (19) Blackburn, W. S., *Path independent integrals to predict onset of crack instability in an elastic plastic material*, Int. J. Fract. 8 (1972) 343-346.
 - (20) Strifors, H. C., *A generalized force measure of conditions at crack tips*, Int. J. Solids Struct. 10 (1974) 1389-1404.
 - (21) 第I章 文献 (10)
 - (22) 第I章 文献 (11), (12)
 - (23) Fisher, B., *The product of distributions*, Quart. J. Math. 22 (1971) 291-298.
 - (24) 第I章 文献 (6)
 - (25) Broberg, K. B., *Energy methods in statics and dynamics of fracture*, 材料強度誌 10 (1975) 33-45.
 - (26) 第I章 文献 (14)
 - (27) 第I章 文献 (7)

第III章

- (1) 坂田 勝・青木 繁・岸本 喜久雄, *破壊の動力学的取扱について*, 機械学会分科会報告書 No.294 (主査 中原 一郎) (1981) 64-77.
- (2) Sih, G. C. ed., *Elastodynamic Crack Problems*, (1977) Noordhoff.
- (3) 青木 繁, *動的破壊力学の研究動向*, 日本機械学会誌 84 748 (1981) 243-249.
- (4) Christensen, R. M., *Theory of Viscoelasticity*, (1971) Academic Press.
- (5) Achenbach, J. D., *Dynamic effects in brittle fracture*, *Mechanics Today*, Vol.1, (Nasser, S. N. ed.) 1-57 (1972) Pergamon Press.
- (6) Freund, L. B., *The analysis of elastodynamic crack tip stress fields*, *Mechanics Today*, Vol.3 (Nasser, S. N. ed) 55-91. (1976) Pergamon Press.
- (7) Wilson, W. K., *Finite element methods for elastic bodies containing cracks*, *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems* (Sih, G. C. ed.) 484-515 (1973) Noordhoff.
- (8) 山田 嘉昭・永井 吉彦, *Analysis of one-dimensional stress wave by the finite element method*, 生産研究 23 (1971) 16-19.
- (9) Bažant, Z. P., Glazik, J. L. Jr., and Achenbach, J. D., *Finite element*

- analysis of wave diffraction by a crack, J. Engng. Mech. Div. ASCE 102-EM3, (1976) 479-496.
- (10) King, W. W. and Malluck, J. F., Wave diffraction by a crack: Finite element simulations, J. Engng. Mech. Div. ASCE 103-EM3 (1976) 479-496.
- (11) Newmark, N. M., A method of computation for structural dynamics, Trans. ASCE 127 (1962) 1406-1435.
- (12) Kostrov, B. V., Unsteady propagation of longitudinal shear cracks, Appl. Math. Mech. (English translation PMM) 30 (1966) 1241-1248.
- (13) Thau, S. A. and Lu, T. H., Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave, Int. J. Solids Struct.
- (14) 石川 晴雄, 丁種分による応力拡大係数の有限要素解析 (モードIおよび混合モードのき裂について), 機論(A) 46-401 (1980) 67-76; Ishikawa, H., Kitagawa, H. and Okamura, H., J-integral of a mixed mode crack and its application, ICM3 (Miller, K. J. and Smith, R. F., ed.) Vol.3 447-456 (1979) Pergamon.
- (15) 岸本 喜久雄・青木 繁・和泉原 芳一・坂田 勝, 粘弾性体のき裂進展開始条件について, 機論 790-12 (1979) 244-246.
- (16) 例えは Bush, A. J., Dynamic fracture toughness tests on A302-B steel, ASTM STP 466 (1970) 259-280.
- (17) 例えは Shoemaker, A. K. and Rolfe, S. T., Static and dynamic low-temperature K_{Ic} behavior of steels, J. Basic Engng. 91 (1969) 512-518.
- (18) 例えは Turner, C. F., Measurement of fracture toughness by instrumented impact test, ASTM STP 466 (1970) 93-114.
- (19) 例えは Costin, L. S., Duffy, J. and Freund, L. B., Fracture initiation in Metals under stress wave loading conditions, ASTM STP 627 (1977) 301-318.
- (20) Nash, G. E., An analysis of the forces and bending moments generated during the notched beam impact test, Int. J. Fract. Mech. 5 (1969) 269-286.
- (21) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., The Stress Analysis of Cracks Handbook (1973) Del Research Corporation.
- (22) Goldsmith, W., Impact (1960) Edward Arnold.
- (23) 遠藤 満・西成人・中川正紀・坂田勝, 球による円柱の衝撃音, 機論 44-377 (1978) 38-46.
- (24) Nilsson, F., A note on the stress singularity at non-uniformly moving crack tip, J. Elasticity 4 (1974) 73-75.
- (25) Freund, L. B. and Clifton, R. J., On the uniqueness of plane elastodynamic solutions for running cracks, J. Elasticity 4 (1974) 293-299.
- (26) Achenbach, J. D. and Bažant, Z. P., Elastodynamic near-tip stress and displacement fields for rapidly propagating cracks in orthotropic materials, J. Appl. Mech. 42 (1975) 183-189.

- (27) Broberg, K. B., *The propagation of a brittle crack*, Arkiv for Fysic 18 (1960) 159-192.
- (28) 第I章の文献(18)
- (29) Goodier, J. N. and Field, F. A., *Plastic energy dissipation in crack propagation*, *Fracture of Solid* (Drucker, D. L. and Gilman, J. J., ed.) 103-118 (1963) Interscience.
- (30) Atkinson, C., *A simple model of relaxed expanding crack*, Arkiv for Fysik 35 (1968) 469-476.
- (31) Embley, G. T. and Sih, G. C., *Plastic flow around an expanding crack*, Engng. Fract. Mech. 4 (1972) 431-442.
- (32) Mushkelishvili, N. J., *Singular Integral Equations* (1953) Noordhoff.
- (33) Afanas'ev, E. F. and Cherepanov, G. P., *Some dynamic problems of the theory of elasticity*, Appl. Math. Mech. (English translation PMM) 37 (1973) 584-606.
- (34) Tsai, Y. M., *Propagation of a brittle crack at constant and accelerating speeds*, Int. J. Solids Struct. 9 (1973) 625-642.
- (35) Freund, L. B., *Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-I. constant rate of extension*, J. Mech. Phys. Solids 20 (1972) 129-140.
- (36) Freund, L. B., *Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-II. non-uniform rate of extension*, J. Mech. Phys. Solids 20 (1972) 141-152.
- (37) Freund, L. B., *Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-III. stress wave loading*, J. Mech. Phys. Solids 21 (1973) 47-61.
- (38) Freund, L. B., *Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-IV. obliquely incident stress pulse*, J. Mech. Phys. Solids 22 (1974) 137-146.
- (39) 青木繁・加古卓也・坂田勝, ぜい性材料におけるき裂進展の破壊動力学的研究(第3報, き裂進展速度および動的破壊じん性) 機論 41-352 (1975) 3348-3355.
- (40) Shmueli, M. and Alterman, Z. S., *Crack propagation analysis by finite differences*, J. Appl. Mech. 40 (1973) 903-908.
- (41) Kobayashi, A. S., Emery, A. F. and Mall, S., *Dynamic-finite-element and dynamic-photoelastic analyses of two fracturing Homalite-100 plates*, Exp. Mech. 16 (1976) 321-328.
- (42) Rose, L. R. F., *Recent theoretical and experimental results on fast brittle fracture*, Int. J. Fract. 12 (1976) 321-328.
- (43) Yoffe, E. H., *The moving Griffith crack*, Phil. Mag. 42 (1951) 739-750.
- (44) 例は" Mecholsky, J. J., Freiman, S. W. and Rice, R. W., *Fractographic*

- analysis of ceramic, ASTM STP 645 (1978) 363-379.
- (45) Mecholsky, J. J., Rice, R. W. and Freiman, S. W., *Prediction of fracture energy and flaw size in glasses from measurements of mirror size*, J. Am. Ceram. Soc. 57 (1974) 440-443.
 - (46) Kirchner, H. P. and Gruver, R. M., *Fracture mirror in alumina ceramics*, Phil. Mag. 27 (1973) 1433-1466.
 - (47) Mecholsky, J. J., Freiman, S. W. and Rice, R. W., *Fracture surface analysis of ceramics*, J. Mater. Sci. 11 (1976) 1310-1319.
 - (48) Abdel-Latif, A. I. A., Bradd, R. C. and Tressler, R. E., *Dynamics of fracture mirror boundary formation in glass*, Int. J. Fract. 13 (1977) 349-359.
 - (49) Johnson, J. W. and Holloway, D. G., *On the shape and size of fracture zones on glass fracture surfaces*, Phil. Mag. 14 (1966) 731-743.
 - (50) Congreton, J. and Petch, N. J., *Crack-branching*, Phil. Mag. 16 (1967) 749-760.
 - (51) Sih, G. C., 文献(2)の XVII - VLVII.
 - (52) Kirchner, H. P., *The strain intensity criterion for crack branching in ceramics*, Engng. Fract. Mech. 10 (1978) 283-288.
 - (53) 青木繁・下川正樹・平野昌宏・坂田勝, *脆性材料におけるき裂進展の破壊動力学的研究(第1報, き裂の分岐) 機論* 41-347 (1975) 1942-1948.
 - (54) 青木繁・下川正樹・坂田勝, *脆性材料におけるき裂進展の破壊動力学的研究(第2報, 静水圧下におけるき裂の分岐) 機論* 41-352 (1975) 3341-3347.
 - (55) 例えば Harn, G. T. and Kanninen, M. F. ed., *Fast Fracture and Crack Arrest*, ASTM STP 627 (1977) ASTM.

第IV章

- (1) 第I章文献(16)
- (2) Latzko, D. G. H. ed., *Post-Yield Fracture Mechanics* (1979) Applied Science Publishers.
- (3) Larsson, L. H. ed., *Advances in Elasto-plastic Fracture Mechanics* (1979) Applied Science Publishers.
- (4) 第I章文献(9)
- (5) 山田嘉昭, *塑性・粘弾性* (1972) 培風館.
- (6) Rice, J. R., Paris, P. C. and Merkle, J. G., *Some further results of J-integral analysis and estimates*, ASTM STP 536 (1973) 231-245.
- (7) 第III章文献(21)
- (8) Wilson, W. K. and Yu, I.-W., *The use of the J-integral in thermal stress*

- crack problems, *Int. J. Fract.* 15 (1979) 377-387.
- (9) Gurtin, M., *On a path-independent integral for thermoelasticity*, *Int. J. Fract.* 15 (1979) R169-R170.
- (10) Blackburn, W. S., Hellen, T. K. and Jackson, A. D., *An integral associated with the state of a crack tip in a non-elastic material*, *Int. J. Fract.* 13 (1977) 183-200.
- (11) 第II章文献(15)
- (12) 第II章文献(10)
- (13) 第II章文献(11), (12)
- (14) Segerlind, L. J., *Applied Finite Element Analysis* (1976) John Wiley & Sons; 川井忠彦 監訳「応用有限要素解析」(1978) 丸善.
- (15) 矢川元基・宮崎則幸・安藤良夫, 有限要素法による軸対称厚肉構造物の非定常温度場での弾塑性クリープ解析, *圧力技術* 12 (1974) 293-300.
- (16) Isida, M., *Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions*, *Int. J. Fract. Mech.* 7 (1971) 301-316.
- (17) 井上達雄・田中喜久昭・青木正人, ひずみ履歴を考慮した弾塑性熱応力の解析, *機論* 38-314 (1972) 2490-2496.
- (18) 藤田譲・野本敏治, 熱弾塑性問題に関する研究(初1), *造船論* 130 (1971) 183-191.
- (19) 非弾性構造解析法の実用化に関する研究分科会報告(II) (主査 山田嘉昭) (1979) 297 日本機械学会.
- (20) 例えば, Kassir, M. K. and Sih, G. C., *Three-dimensional Crack Problems* (1975) Noordhoff.
- (21) 第II章文献(6)
- (22) 第II章文献(20)
- (23) Bergkvist, H. and Huong, G. L., *J-integral related quantities in axisymmetric cases*, *Int. J. Fract.* 13 (1977) 556-558.
- (24) Astiz, M. A., Elices, M and Galves, V. S., *On energy release rates in axisymmetric problems*, *Proc. ICF4 Vol.3* (Taplin, D. M. R. ed.) 396-400 (1977) Univ. Waterloo Press.
- (25) 宮本博・菊池正紀・石田克己, 3次元のJ積分に関する研究(第1報) - 貫通き裂のJ積分, *機論* 790-12 (1979) 197-199.
- (26) 北川英夫・結城良治・木須博行, 表面き裂材の延性破壊へのJ積分の適用に関する研究 - 三次元き裂のJ積分と表面き裂材のJIC, *機論* 800-1 (1980) 46-48.
- (27) Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science* (1971) McGraw-Hill; 吉識雅夫・山田嘉昭 監訳「マトリックス有限要素法」(1975) 培風館.

- (28) Yagawa, G. and Nishioka, T., *Three-dimensional finite element analysis for through-wall crack in thick plate*, Int. J. Num. Meth. Engng. 12 (1978) 1295-1310.
- (29) 坂田勝・青木繁・岩本喜久雄・神沢守仁・小樽直明, 丁継分解析における板厚効果, 機謙論 804-7 (1980) 25-32.
- (30) 第I章文献(14)

付録 I 面内問題に対する特異要素法 (静止き裂の場合)

式(III-8b)を参照し, 特異要素内の変位場を次式のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_1^I(\theta, \nu), \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_1^{II}(\theta, \nu), 1, 0 \\ \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_2^I(\theta, \nu), \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_2^{II}(\theta, \nu), 0, 1 \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} T_{II}(t) \\ T_{III}(t) \\ u_0(t) \\ v_0(t) \end{Bmatrix}^e \quad (\text{AI-1})$$

ここで, $u_0(t)$, $v_0(t)$ は, それぞれ, x_1 軸方向および x_2 軸方向の特異要素全体の変位である。以下, 面外せん断変形 (モード III) の場合と同様にして式(III-21)を得ることができる。ただし, 式(III-17)と(III-22)は次式のようになる。

$$\{\Delta\sigma\}^e = \{\Delta\sigma_{11}, \Delta\sigma_{22}, \Delta\sigma_{12}\}^T \quad (\text{AI-2a})$$

$$[B]^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}, 0, \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \end{Bmatrix}^T [N(x_1, x_2)]^T \quad (\text{AI-2b})$$

$$[k]^e = \frac{2+\alpha\Delta t}{2+\beta\Delta t} \iint_{Ae} [B]^e{}^T [D] [B]^e dx_1 dx_2 \quad (\text{AI-2c})$$

$$[D] = \mu' \begin{bmatrix} 1/k^2 & (1-2k^2)/k^2 & 0 \\ (1-2k^2)/k^2 & 1/k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AI-2d})$$

$$[m]^e = \iint_{Ae} \rho [N]^e{}^T [N]^e dx_1 dx_2 \quad (\text{AI-2e})$$

$$\{\Delta f\}^e = \int_{\partial Ae} [N]^e{}^T \{\Delta T_1, \Delta T_2\}^T d\Gamma \quad (\text{AI-2f})$$

$$\{\Delta f_{vis}\} = \frac{2\Delta t}{2+\beta\Delta t} \iint_{Ae} \{\beta [B]^e{}^T \{\sigma(t_0)\} - \alpha [B]^e{}^T [D] \{\varepsilon(t_0)\}\} dx_1 dx_2 \quad (\text{AI-2g})$$

$$\{\sigma(t_0)\} = \{\sigma_{11}(t_0), \sigma_{22}(t_0), \sigma_{12}(t_0)\} \quad (\text{AI-2h})$$

$$\{\varepsilon(t_0)\} = \{\varepsilon_{11}(t_0), \varepsilon_{22}(t_0), 2\varepsilon_{12}(t_0)\} \quad (\text{AI-2i})$$

また, き裂面に関して対称な形状の特異要素に対して, 式(III-23)は次式のようになる。

$$[k]^e = \frac{2+\alpha\Delta t}{2+\beta\Delta t} \mu' \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^e \quad (\text{AI-3a})$$

$$[m]^e = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & m_{24} \\ m_{13} & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & m_{42} & 0 & m_{44} \end{bmatrix}^e \quad (\text{AI-3b})$$

$$\{\Delta f\}^e = \left\{ \int_{\Gamma_{oe}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \{g_1^I(\theta, \nu) \Delta T_1 + g_2^I(\theta, \nu) \Delta T_2\} d\Gamma, \right. \\ \left. \int_{\Gamma_{oe}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \{g_1^{II}(\theta, \nu) \Delta T_1 + g_2^{II}(\theta, \nu) \Delta T_2\} d\Gamma, \int_{\Gamma_{oe}} \Delta T_1 d\Gamma, \int_{\Gamma_{oe}} \Delta T_2 d\Gamma \right\}^T \quad (\text{AI-3c})$$

$$\{\Delta f_{vis}\} = \frac{\Delta t}{2+\alpha\Delta t} \frac{1}{\mu'} [k]^e (\beta \{K_I(t_0), K_{II}(t_0), 0, 0\}^T - 2\alpha\mu' \{T_{II}(t_0), T_{II}(t_0), 0, 0\}^T) \quad (\text{AI-3d})$$

ただし,

$$k_{11} = \frac{1}{2\pi} \iint_{Ae} \left[\frac{2k^2}{1-k^2} (1+\cos\theta) + \sin^2\theta \right] dr d\theta \quad (\text{AI-4a})$$

$$k_{22} = \frac{1}{2\pi} \iint_{Ae} \left[\frac{1+k^2}{1-k^2} - \frac{2k^2}{1-k^2} \cos\theta + 3\cos^2\theta \right] dr d\theta \quad (\text{AI-4b})$$

$$m_{11} = \iint_{Ae} \frac{\rho}{2\pi} \left[\frac{1+k^2}{1-k^2} - \cos\theta \right]^2 r^2 dr d\theta \quad (\text{AI-4c})$$

$$m_{13} = m_{31} = \iint_{Ae} \frac{\rho}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1+3k^2}{1-k^2} \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \right] r^{3/2} dr d\theta \quad (\text{AI-4d})$$

$$m_{22} = \iint_{Ae} \frac{\rho}{2\pi} \left[\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} \right) \cos\theta + 4 - 3\cos^2\theta \right] r^2 dr d\theta \quad (\text{AI-4e})$$

$$m_{24} = m_{42} = - \iint_{Ae} \frac{\rho}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{5k^2-1}{1-k^2} \cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \right] r^{3/2} dr d\theta \quad (\text{AI-4f})$$

$$m_{33} = m_{44} = \iint_{Ae} \rho h dr d\theta \quad (\text{AI-4g})$$

である。

付録 II 特異要素のマトリックス (高速き裂の場合)

式(III-137)において特異要素の各マトリックスは, つぎのようになえられる。

(1) 面外せん断変形 (モード III)

$$[M(t)]^e = [m]^e \quad (\text{AII-1a})$$

$$[V(t)]^e = [v]^e \quad (\text{AII-1b})$$

$$[K(t)]^e = [k]^e \quad (\text{AII-1c})$$

$$\{F(t)\}^e = \{f\}^e \quad (\text{AII-1d})$$

ここで,

$$m = \rho \iint_{Ae} f_{\text{III}}^2 dx_1 dx_2 \quad (\text{AII-2a})$$

$$\begin{aligned} v &= -2\rho v \iint_{Ae} f_{\text{III}} \frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ &= -\rho v \int_{\Gamma_e} f_{\text{III}}^2 dx_2 \end{aligned} \quad (\text{AII-2b})$$

$$\begin{aligned} k &= \mu \iint_{Ae} \left[\left(\frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 - \rho v^2 \iint_{Ae} \left(\frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx_2 \\ &\quad + \rho v^2 \int_{\Gamma_e} f_{\text{III}} \frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial x_1} dx_2 \end{aligned} \quad (\text{AII-2c})$$

$$f = \int_{\Gamma_{oe}} T_3 f_{\text{III}} d\Gamma \quad (\text{AII-2d})$$

ただし

$$\frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial x_1} = - \frac{Y_-}{2\mu [\pi r (1 - \beta_0^2)]^{1/2}} \quad (\text{AII-3a})$$

$$\frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial x_2} = \frac{Y_+}{2\mu (\pi r)^{1/2}} \quad (\text{AII-3b})$$

(2) 開口変形 (モード I)

$$[M(t)]^e = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^e \quad (\text{AII-4a})$$

$$[V(t)]^e = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}^e \quad (\text{AII-4b})$$

$$[K(t)]^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^e \quad (\text{AII-4c})$$

$$\{F(t)\}^e = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}^e \quad (\text{AII-4d})$$

ここに,

$$m_{11} = \rho \iint_{Ae} (f_1^{I^2} + f_2^{I^2}) dX_1 dX_2 \quad (\text{AII-5a})$$

$$m_{12} = m_{21} = \rho \iint_{Ae} f_1^I dX_1 dX_2 \quad (\text{AII-5b})$$

$$m_{22} = \rho \iint_{Ae} dX_1 dX_2 \quad (\text{AII-5c})$$

$$v_{11} = -\rho v \int_{\Gamma_e} (f_1^{I^2} + f_2^{I^2}) dX_2 \quad (\text{AII-5d})$$

$$v_{12} = v_{22} = 0 \quad (\text{AII-5e})$$

$$v_{21} = -2\rho v \int_{\Gamma_e} f_1^I dX_2 \quad (\text{AII-5f})$$

$$k_{11} = 2\mu \iint_{Ae} \left[\frac{1}{2k^2} \left(\frac{\partial f_1^I}{\partial X_1} + \frac{\partial f_2^I}{\partial X_2} \right)^2 - 2 \frac{\partial f_1^I}{\partial X_1} \frac{\partial f_2^I}{\partial X_2} + 2 \frac{\partial f_1^I}{\partial X_2} \frac{\partial f_2^I}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1^I}{\partial X_2} - \frac{\partial f_2^I}{\partial X_1} \right)^2 \right] dX_1 dX_2$$

$$+ \rho v^2 \int_{\Gamma_e} \left(f_1^I \frac{\partial f_1^I}{\partial X_1} + f_2^I \frac{\partial f_2^I}{\partial X_1} \right) dX_2 - \rho v^2 \iint_{Ae} \left\{ \left(\frac{\partial f_1^I}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2^I}{\partial X_1} \right)^2 \right\} dX_1 dX_2 \quad (\text{AII-5g})$$

$$k_{12} = k_{22} = 0 \quad (\text{AII-5h})$$

$$k_{21} = \rho v^2 \int_{\Gamma_e} \frac{\partial f_1^I}{\partial X_1} dX_2 \quad (\text{AII-5i})$$

$$f_1 = \int_{\Gamma_{oe}} (f_1^I T_1 + f_2^I T_2) d\Gamma \quad (\text{AII-5j})$$

$$f_2 = \int_{\Gamma_{oe}} T_1 d\Gamma \quad (\text{AII-5k})$$

ただし,

$$\frac{\partial f_1^I}{\partial x_1} = \frac{(2-\beta_0^2)X_+ - 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2}Y_+}{2\mu(\pi r)^{1/2} R(\beta_0)} \quad (\text{AII-6a})$$

$$\frac{\partial f_1^I}{\partial x_2} = \frac{(2-\beta_0^2)(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}X_- - 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)Y_-}{2\mu(\pi r)^{1/2} R(\beta_0)} \quad (\text{AII-6b})$$

$$\frac{\partial f_2^I}{\partial x_1} = \frac{(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(2-\beta_0^2)X_- - 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}Y_-}{2\mu(\pi r)^{1/2} R(\beta_0)} \quad (\text{AII-6c})$$

$$\frac{\partial f_2^I}{\partial x_2} = \frac{-(1-k^2\beta_0^2)(2-\beta_0^2)X_+ + 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2}Y_+}{2\mu(\pi r)^{1/2} R(\beta_0)} \quad (\text{AII-6d})$$

なお, $\beta_0=0$ の場合は $\beta_0 \rightarrow 0$ の極限を用いる。これは静的な解析によつて得られるものと一致する。