T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	「河川の流砂に関する基礎的研究」
Title(English)	
著者(和文)	石川忠晴
Author(English)	TADAHARU ISHIKAWA
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第1003号, 授与年月日:1978年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: , Report number:甲第1003号, Conferred date:1978/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

博士論文

河川の流砂に関する基礎的研究

指導教官　吉川秀夫教授

提出者　D5094　石川忠晴

東京工業大学　409928

目次

第一章	緒論	1
§1	序文	2
§2	既往の主要な研究	4
§3	本論文の構成と各章の概要	30
	引用文献	38
第二章	全流砂量の算定法に関する理論的考察	46
§1	砂粒子の運動の機構	47
§2	砂粒子運動のモデル	53
§3	掃流層の平衡関係	67
§4	全流砂量算定式	73
§5	検討	77
§6	まとめ	86
	付録	87
	図表	93
	引用文献	104

第三章　水路実験データーによる全流砂量算定式の検討　109
§1　平均濃度及び全流砂量　110
§2　鉛直濃度分布　114
§3　まとめ　118
・　図表　119
・　引用文献　135

第四章　河床波形状特性と抵抗係数　137
§1　形状抵抗と摩擦抵抗　138
§2　摩擦抵抗の算定法　142
§3　形状抵抗の算定法　175
§4　平均流速算定式　186
§5　まとめ　189
・　図表　190
・　引用文献　244

第五章　河床波の安定形状について　248
§.1　河床波の安定化に関する仮説と
それに基づく理論的考察　249
§.2　実験的検討　255
§.3　まとめ　260
・　図　表　261
・　引用文献　269

第六章　水位及び流砂量の予測　270
§.1　水位及び流砂量予測の方法　271
§.2　実験水路データーによる検討　274
§.3　実河川データーによる検討　277
§.4　Einstein 理論との比較　279
§.5　まとめ　281
・　図　表　282
・　引用文献　300

第七章　結　論　301
§.1　総　括　302
§.2　今後の課題　308
§.3　おわりに　311

第一章

緒論

§.1 序文 2

§.2 既往の主要な研究 4

§.3 本論文の構成と各章の概要 30

§1 序 文

河川は水の流路であると同時に土砂の流路でもあり，河床は上流から流送される砂礫で構成されている。砂礫の移動により河床が変形すると諸水理量間の関係も変わり，例えば洪水疎通能力にも影響する。したがって河道計画にあたっては流水と流送土砂の相互作用として生じる諸現象を解明しておく必要がある。

このような要請のもとに，水流と土砂の運動に関する学問（移動床水理学）が河川工学の主要な分野として発展してきた。特に1940年以降，系統的実験や流体力学に基づく理論解析が急速に押し進められている。

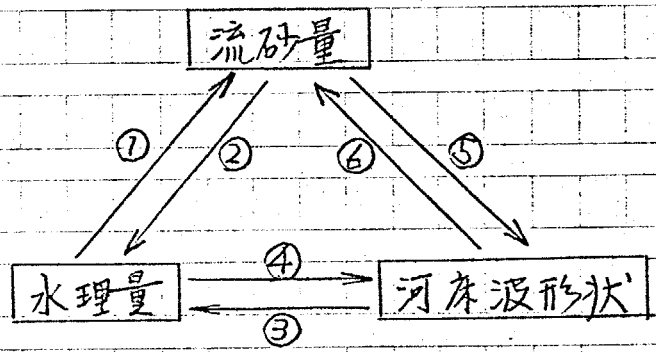
しかし河道内に生じる諸現象は極めて複雑多岐な因果関係によっている為，単純な基礎原理に基づいて力学的関係を数式で表現することが困難な場合が多い。したがって現象全体を統一的に記述することが難しく，現在のところ実験式や経験則に頼らざるを得ない面も多々ある。また学問体系自体が経験則を主体とする形になっており，数理解析を主体とする体系への改変が望まれている。

本研究は移動床水理学の最も基本的な問題，〃二次元移動床流における流砂量の予測〃を流体力学的見地から取り扱う

ものである。これに類する研究は既に数多くある。にもかかわらずここに取り上げる第一の理由は，従来の研究が実用性に主眼がおかれている反面，理論的には不明確な点を多々含んでいるということである。そこで本研究では，極めて基礎的な実験以外から得られた経験則や実験定数の類をできる限り排除するよう努めた。また第二の理由は，流砂現象のような複雑な問題を解明してゆくには種々の側面からのアプローチによって相互補完的に全体像を明らかにすることが必要だということである。そこで本研究では，研究の構成及び各部分の取り扱いにおいて，従来の研究とはかなり異なった方法を取った。第三の理由は，従来の研究には各論についてはかなり詳細な検討がなされているものもある反面，統合的な理論がほとんど無いということである。本研究では，一貫した理論体系の構築を念頭において各部分を取り扱い，それらを組み合わせた流砂量の予測法まで言及する。

§2 既往の主要な研究

流砂量は水理量に大きく依存する。一方，河床砂礫が移動すると河床波と呼ばれる凹凸が生成し，水理量間の関係が変化する。また，河床波の形状は一般的に水理量及び流砂量に依存すると考えられる．したがって流砂量の予測にあたっては右図に示す相互依存関係を定式化しなければならない。



①は水流の砂礫輸送能力に関する関係である。②は砂礫が混入することによる流れの性質の変化を表わす。例えば乱れの特性の変化，平均流速分布の変化，それらによる抵抗係数の変化である。③は河床波が形成されることによる抵抗係数の変化が水理量に及ぼす影響を示す。一方河床波の性質や大きさは水理条件によって著しく異なることが知られている．この関係を④で表わす。河床波の形状はまた流砂量にも規定されると考えられる．すなわち流砂量が大きければ河床波は速やかに発達又は減衰して，水理量から規定される平衡状態に達するが，流砂量が少ない場合には平衡状態に達し得ないと考え

られるからである。この関係を⑤で表わす。⑥は河床波形状が流砂量に及ぼす影響を示している。河床波が形成されると水流が河床に及ぼす応力のうち砂礫を移動させるに働く有効な応力の占める割合が減少する。この減少量は河床波形状に依存すると考えられる。

さて問題を完全に解決するにはもちろん①～⑥の関係をすべて明らかにしなければならない。

しかし従来の研究では必ずしもこのような問題の構造に従って取り扱いがなされているのではない。6個の関係のうち個別に理論的検討が行なわれているのは，主に①と②である。③，④，⑤は通常は明確に区別されずに，実験・実測結果に基づいた図表又は実験式によって一括して取り扱われる。⑥は①の関係の補正という形で形式的に考慮されている。

そこで既往の研究を次のように分類して概述する。

a. ①の流砂量式に関する研究（⑥も含む）

b. ③，④，⑤をまとめた移動床の抵抗則に関する研究

c. ②の混相流の抵抗に関する研究。

a. 流砂量算定法に関する研究

流砂はその運動様式の違いに基づき掃流砂と浮遊砂に大別される。掃流砂は河床上を滑動，転動又は小跳躍しながら流下するもので，一方浮遊砂は水流の乱れによって拡散され河床からかなり離れて流下するものである。もちろんこの分類は厳密なものではなく，実際には掃流砂的な運動状態から浮遊砂的な運動状態まで連続的に分布している。しかし粒子の運動を一般的に記述するのが困難であるので，このふたつの典型的な状態についてのみ考えるのである。このように分けることの妥当性を論じるのは難しいが，複雑な現象を解明する上でのひとつの有効な手段と言えるであろう。

さて，従来の研究では掃流砂又は浮遊砂のどちらか一方を対象としている場合が多い。そこで本節でもそれぞれについての代表的研究を概括し，その後に全流砂量に関する研究について述べる。

a-1 掃流砂量に関する研究

掃流運動と呼ばれるものは，滑動，転動，或いは小跳躍などいろいろな運動形態を含んでいる。加えて河床との衝突や水流の乱れによって砂粒子に加えられる外力は極めて複雑である。この為に掃流運動を力学的に厳密に記述することは，

かなり困難なことであると思われる。この為掃流砂に関する理論は各々の研究者の考察に基づく力学モデルから出発している。これらのモデルはいずれも掃流運動の力学的一側面を取り出したものであり，形式的にはそれぞれかなり異なってはいる．しかし必ずしも対立するというのではなく，おそらく相補的に現象を明らかにしてゆく上で役立つと思われる．そこで以下においては，単に代表的な研究を取り上げるだけではなく，その基本概念と特徴，さらにそれぞれの関係についても触れることにする．

この種の研究はDuBoys(2)に始まったと言われる。この理論はTractive Force（掃流力）という概念に基づいている。水流と砂粒子の間に働く応力は圧力とセン断力に分けられる．本来の定義からすれば，この分割は砂粒子表面の方向に関してなされるべきである。しかしそのような分割に基づいて応力を表示することは一般に困難である．そこでもう少し漠然と眺めてやって砂粒子の粒子性を無視し，河床も運動する粒子も連続体として考えてみる．このような見方によれば境界面は平らであるから，水流と砂粒子の間の応力はセン断力と見なせる。このセン断力をTractive Forceと呼ぶ。さてDuBoysは粒子の運動を“連続体が層状になって移動する”モデルで

表わし，固体どうしの滑り摩擦力と同型のセン断力表示式から掃流砂量式を導いている。この考え方は以後に大きな影響を与え，これを修正した形の関数が多くの研究者によって提案された。しかし実際には砂粒子の運動は離散的であり，また水流の乱れの作用のもとに確率的な性質を持っているので，DuBoysのモデルは現実とはかなり懸け離れたものであった。さらに次元を持った定数が含まれている等，形式的にも不十分な点があった。

DuBoysのTractive Forceの概念から離れて理論解析を行なった最初の人はH.A. Einstein[3][4][5]である。Einsteinはまず砂粒子の運動が離散的で且つ確率的な性質を持っていることを指摘した。さらに水流の乱れが河床粒子に及ぼす変動揚力に注目し，自ら行なった基礎実験の結果[4]に基づき粒子の移動確率を求め，掃流砂量式を導いた。この理論の最大の特長は粒子の移動を始めて確率的に表示したという点である。またEinsteinが用いたふたつの無次元量，$\Phi = g_B / [(\rho_s/\rho - 1) g D^3]^{1/2}$ と，$\psi = (\rho_s/\rho - 1) g D / u_*^2$，は流砂現象における最も重要なパラメーターであって，今日では理論も実験データーもこれらの量（又はその組み合わせ）について整理されるのが普通である。それまでの方法に較べると，Einsteinの理論は現象を巧みにとらえた画期的なものであった。しかし，粒子の移動確率を

詳細に検討している反面，粒子が置き換わるに要する時間（exchange time）や跳躍距離（step length）が水理量に依存しない粒子固有の定数であると仮定するなどアンバランスな面がある。また最終的にふたつの任意定数が残り，これを実験結果に合うように定めなければならなかったことにも問題があるように思われる。最近，林・高羽[47]はこれらの点に改良を試みている。

Einstein に少し遅れて Kalinske[6] も水流の乱れの作用に着目した理論を発表している。Einstein の理論と対照的に，この理論では運動する粒子の割合を一定とし，移動速度を確率変数としている。しかしこのモデルはかなり非現実的であると思われる。

佐藤・吉川・芦田[7]は Einstein と同様に揚力変動に着目した研究を行なっている。この理論の特長は，運動する粒子を群としてとらえ全体の力積の釣り合い式を導入している点にある。砂粒子ひとつひとつの運動を取り扱うと exchange time や step length のような理論的に扱いにくい変数を持ち込まねばならないのに対し，全体の釣り合いを取り扱う限りにおいてはそのような不明確さは無い。しかし力積の釣り合い式自体は仮定であって，物理的洞察によっているとは言え，その成立の具体的な裏付けは必ずしも無いのである。なおこの

掃流砂量式は，有効掃流力の如き曖昧な独立変数を用いずに全掃流力とマニング係数から計算できるようになっており，極めて実用的である。

ところで以上の理論では粒子の運動そのものを解析してはいない。Einstein や Kalinske の理論は運動の或る一段階における条件のみを解析し，他の部分は単純な仮定によっている。また DuBoys や佐藤・吉川・芦田は全体的な力の釣り合いに基づいて理論を展開している。しかし実際には個々の砂粒子の運動から現象が構成されているのであるから，不明確な点をすべて解決するには粒子の運動そのものを追って行くことが最終的には必要となるであろう。Yalin[8]は時間平均的な場力分布，時間平均的な流速分布から計算される平均的な Saltation 運動が砂粒子の運動全体を代表しうる，という考えのもとに解析を行ない掃流砂量式を導いている。岸・福岡も同様の考えに基づき理論を展開し，パラメーターを適当に定めれば実験結果を説明しうることを示している。しかし流砂の運動と外力の関係及び外力の性質は極めて非線形性の強いものと考えられるので，変動を無視した平均的な条件から定まる平均的な運動が全体を代表しうるかどうかは問題であると考えられる。

この他にも多くの掃流砂量式が発表されているが，基本的

な概念及び取り扱い方は，以上述べてきた理論のいずれかに準拠するものと思われる。

先に述べたように，掃流運動は極めて複雑であり力学的に明確にされていない部分が多々ある。上に概述した掃流砂理論はそれぞれ巧みなモデルによって砂粒子輸送の一側面をとらえてはいるものの理論上未定の部分を含んでいる。より精度の良い掃流砂量式を導くには，それら不明の箇所をひとつひとつ解明してゆく必要があることは言うまでもない。近年になってそれらの諸点についての基礎的な研究が盛んに行なわれるようになってきた。

単位時間，単位面積当りに移動を開始する粒子の体積（pick up rate）はその位置での水理量と粒子特性から定まるもので，流砂現象における重要な基本量である。Albert[9]らは種々の粒子及び流速での実験結果に基づきpick up rateの実験式を提案している。中岬・辻本[10]は理論的に関数形を導き実験結果と比較し，良好な結果を得ている。

また砂粒子の流下過程は解析の難しい部分であるが，土屋，河田[11]は飛砂について跳躍・着地・再跳躍の過程について力学的取り扱いを試みている。

一方個々の粒子の運動の不規則性に着目し，停止時間（rest time）や跳躍距離（step length）の確率的性質を検討し，これ

らを基本量として確率論的手法を用いて全体を表わそうとする試みもなされている。[12] しかし現在のところは力学的関係と結び付く段階に到っておらず，もっぱら数学的展開に終始している。

a-2 浮遊砂に関する研究

掃流砂についての理論は百家争鳴の感があるのに対し，浮遊砂についての理論はどれも大筋において余り変わるところが無い。通常次のふたつのプロセスから成る。

① 拡散方程式，エネルギー式などを解いて鉛直濃度分布形を求める。

② 何らかの方法で基準濃度を定め濃度の値の分布を決め，速度を乗じ積分することによって浮遊砂量を求める。

以下にそれぞれについての研究を概括する。

①濃度分布形；Rouse[13][14]は鉛直方向の渦動拡散係数 ε_s が渦動粘性係数 ε_m に等しいという仮定のもとに拡散方程式を解き，次の濃度分布関数形を誘導した。

$$\frac{C}{Ca}=\left[\left(\frac{d-y}{d-a}\right)\cdot\left(\frac{a}{y}\right)\right]^{Z} \qquad (1-3)$$

ここに Ca = 或る基準高さ a における濃度，$Z=w_0/\kappa u_*$ である。この分布関数形は特に Z の値が比較的小さい場合に実測

結果に良く一致することが知られている。Zが大きい場合，すなわち乱れ速度に較べて沈降速度が大きい場合について，Einstein & Chien[15][16]は濃度分布の強い歪や上下方向の輸送の非対称性の故に拡散方程式では十分な近似が得られないと考え補正を加えている。またHunt[17]は，濃度の高い場合には水中に占める砂粒子の体積の割合の拡散に及ぼす効果を無視できないとして，固相と液相についてのそれぞれの連続方程式と拡散方程式を連立させて濃度分布関数形を求め，Rouseの分布より精度の良いことを示している。

一方Velikanov[18][19]は砂粒子の浮遊をエネルギーの釣り合い関係から説明する理論（Gravitational Theory）を発表している。この理論によれば，砂粒子の占める体積分だけ水の体積が減少するのでエネルギーの　　釣り合い関係が変化し，余剰分が砂粒子を浮遊させるのに費される。この妥当性は不明であるが，結果的にRouseの分布とほぼ同じ関数形が得られ，測定値との対応も良いようである。

水流の乱れの為に浮遊粒子の運動は不規則であり，この不規則性が拡散現象の本質である。そこで確率統計的手法を用いて浮遊粒子の挙動を記述する試みもなされている。Tchen[20][21]は流体と粒子の相対運動による応力がStokes則で表わしうる条件下での浮遊粒子の運動方程式を基に解析し，拡散係数

と渦動粘性係数の関係などを論じている。また Yalin[22] は砂粒子の鉛直方向の移動量を確率変数とするモデルでの数値計算を行ない，粒子の沈降速度が摩擦速度に較べて大きい場合には，この方法による結果の方が拡散理論による結果よりも測定データーに良く一致することを示している。

②浮遊砂量；　上記の研究はいずれも濃度分布関数形についてのものであって，濃度の値そのものについては触れられていない。浮遊砂量を求めるには，まず或る高さでの濃度を何らかの方法で定める必要がある。この位置は数学的にはどこでも構わないが，砂粒子は河床から上がって来るのであるから，なるべく河床近傍に定めるべきである。

Lane & Kalinske[23][24] は濃度分布関数として指数関数を仮定し，次のような考察のもとに実測データーを用いて河床上の濃度を定める方法を提案している。"粒子が常に周囲の水塊に対し一定の速度で相対的に沈降すると仮定すれば，水粒子の鉛直方向速度が粒子の沈降速度を上回った時に粒子は浮上する。したがって単位時間に浮上する粒子の割合は，鉛直方向の乱れ速度の確率密度関数を $f(v)$ とすると $\int_{w_0}^{\infty} v' f(v') dv'$ となる。これが平均的沈降分 $C_B w_0$（C_B；河床濃度）と釣り合うことから C_B を求められる。" しかしこの考察では河床上での粒子の運動があまりに単純化されすぎており，実測結果に合わ

せるには，係数ばかりでなく関数形まで修正する必要があった。

Einstein[5]は濃度分布形としてRouseの分布式を用い，次の方法で河床近傍の濃度が定まるとしている。"掃流層の厚さを粒径の2倍に，掃流層内の粒子の平均移動速度を仮想的に算定される粘性底層外縁の流速に等しい，と仮定する。これから掃流層内の平均濃度を算定することができる。濃度基準点を河床から粒径の2倍の高さにとり，この点での浮遊砂濃度が前述の方法で得られる平均掃流砂濃度に等しいとする。"しかし掃流層厚及び掃流砂粒子の平均移動速度に関する仮定には物理的根拠が乏しい。

椿・平野・渡辺[25]は前記ふたつを折衷した方法を提案している。まず掃流層厚及び移動速度を仮定することにより掃流層内の平均濃度を求め，次に掃流層外縁においてLane & Kalinskeと類似の考察に基づき掃流層のすぐ外側の濃度を求め基準濃度とする。この理論はLane & Kalinskeの方法の難点をうまく解消しているが，Einsteinの理論におけると同じく，掃流層厚及び平均移動速度の置き方に不明確さが残る。

濃度の値が定まれば，速度分布を乗じて鉛直方向に積分し浮遊砂量を得ることができる。このプロセスには問題となるところは特に無い。

以上述べてきたように，①の濃度分布形についてはかなり詳細な議論がなされている反面，②の基準濃度についてはよくわかっていない。この為浮遊砂量の合理的な算定法は未だ確立されていない。

a-3 全流砂量に関する実験的研究

a-1及びa-2の研究結果を組み合わせれば，一応は全流砂量を算定する方法が得られる。代表的なものとしてEinstein[5]の理論がある。しかしa-2で述べたように浮遊砂量に関する理論が極めて不十分であるので，当然全流砂算定の精度も良くない。そこで全流砂量については実験的研究が主である。

Kalinske[26]は無次元流砂量（q_B/u_*D）と無次元掃流力（$u_*^2/(\rho_s/\rho-1)gD$）の関係を実験的に検討し次の式形を得ている。

$$q_B/u_*D = 10\left\{u_*^2/(\rho_s/\rho-1)gD\right\}^2 \qquad (1-4)$$

この式は通常Brownの式と呼ばれている。式形が簡単であるので概算に便利であり，また河床波などの解析の中途段階で流砂量を必要とする場合によく用いられる。

Laursen[27]は実験結果に物理的な考慮を入れた実験式が有用であると考え，水路実験資料を整理して次の関数形を得た。

$$\frac{\overline{C_T}}{\left(\frac{D}{d}\right)^{7/6}\left(\frac{\tau_0'}{\tau_c}-1\right)} = f\left(\frac{U_*}{w_0}\right) \qquad (1-5)$$

ここに $\overline{C_T}$ は平均濃度である。右辺の関数形はグラフで与えられている。これは実験式であるが，物理的意味は比較的明確である。後に詳述するが，掃流砂量はほぼ τ_0 によって既定され浮遊砂量は U_*/w_0 と掃流砂量に依存すると思われる。(1-5)式の左辺分母は全流砂量における前者の効果を表わし，右辺は後者の効果による割増し分を表わしていると考えられる。

Colby[28][29][30][31]は平均流速，水深，底面セン断力，Stream Power，粘性，温度，微細粒子濃度が流砂量に及ぼす影響を調べ，計算の為の一連の図表を与えている。

a-4 まとめ

以上述べてきたように，流砂に関する研究には極めて多様な取り扱い方がある。これは流砂現象の複雑さに起因している。流砂の系全体についての統一的な取り扱いは見られず，掃流砂或いは浮遊砂濃度分布に関して部分的に理論的取り扱いがあるものの，全流砂量ということになると結局実験式に頼らざるを得ないのが現状であると言えよう。

b 移動床の抵抗則に関する研究

移動床水路では河床波と呼ばれる波状河床形態が生じる。河床波のうち特に砂漣・砂堆と呼ばれるものは剥離領域を形成するので上流側と下流側に圧力の不均衡が起きる。この為砂漣・砂堆の生成・消滅に伴って抵抗係数が大きく変化するので，これと水理量との関係を明らかにすることが河川工学上の重要な問題となっている。以下にそれに関する主要な研究を概括する。

b－1 抵抗の分割――形状抵抗と摩擦抵抗

河床波上の流れの抵抗は形状抵抗と摩擦抵抗に分割される。形状抵抗とは河床波の上・下流面での圧力の不均衡によって生じるものであり，摩擦抵抗は河床面でのセン断によって生じるものである。移動床の抵抗則に関する理論的研究はEinstein & Barbarossa[32]が二種の抵抗の分離法を具体的に提案した時点に始まったと言ってよいであろう。彼らの方法は径深分離法と呼ばれている。すなわち，水流と河床との間に働く流れ方向の平均全応力をτ_0，そのうち形状抵抗の寄与分をτ_0''摩擦抵抗の寄与分をτ_0'とすると，

$$\tau_0 = \tau_0' + \tau_0'' \qquad (1\text{-}6)$$

と書けるが，これを形式的に次のように置く。

$$\tau_0 = \gamma R I \quad , \quad \tau_0' = \gamma R' I \quad , \quad \tau_0'' = \gamma R'' I \qquad (1\text{-}7)$$

$$R = R' + R'' \qquad (1\text{-}8)$$

ここにRは径深，R′，R″はそれぞれ摩擦抵抗，形状抵抗に対応する仮想的な径深である。彼らはさらに次式を提案している。

$$\frac{V}{\sqrt{gR'I}} = 5.75 \log_{10}(12.27 R'/D_{65}) \qquad (1\text{-}9)$$

(1-7)，(1-8)式は側壁と河床のように異なる面上に働く応力を分離する際に用いられるものと同形である。その場合にはゼロ応力の線による断面分割に基づいており，それぞれの径深の物理的意味は比較的明確である。しかし形状抵抗と摩擦抵抗は共に河床面上に働くものであるから，この場合のR′，R″は形式的なものであると考えられる。また(1-9)式の物理的根拠は明確でない。

そこでTaylor & Brooks[33]は勾配Iを分割する方法を提案した。

$$\tau_0 = \gamma R I \quad , \quad \tau_0' = \gamma R I' \quad , \quad \tau_0'' = \gamma R I'' \qquad (1\text{-}10)$$

$$I = I' + I'' \qquad (1\text{-}11)$$

ここにI′，I″はそれぞれ摩擦抵抗，形状抵抗に対応する仮想

的な勾配である。勾配Iは単位距離流下する間に位置エネルギーが乱れエネルギーに転換される率であるから，これを分割することは前述の径深を分割する方法よりも物理的により妥当であると思われる。

しかしどちらの方法も分割された応力そのものを取り扱ってはおらず，仮想的な量を取り扱っているという点には注意を要する。

b－2　抵抗予測法を取り扱った主な研究

摩擦抵抗は常に存在するものであるが形状抵抗は河床波の生成に伴って現われる。そこで多くの研究では後者と水理量との関係に焦点を合わせて解析がなされている。

Einstein & Barbarossa[32]は，河床波形状の変化は主に流砂量に依存するであろうという考えのもとに次式を提案した。

$$\frac{V}{U_*''} = f_{nc}(\Psi') \qquad (1\text{-}12)$$

ここにU_*''は径深分離法によって定義される形状抵抗についての摩擦速度であり，

$$U_*'' = \sqrt{gR''I} \qquad (1\text{-}13)$$

Ψ'はEinsteinの掃流砂理論に現われるeffective flow intensity

parameter で，彼の理論によれば無次元化された流砂量 Φ（intensity of bed load transport）は Ψ の一価関数で表わされる。Einsteinらは多くの自然河川のデーターを解析し(7-12)式の関係をグラフで表わした。

Shen[35]は砂粒子とは異なる密度の材料（プラステック・石炭粉）についても実験を行ない，その結果に基づき次式を提案した。

$$\frac{U_*''}{V} = f_{nc}\left(\Psi'/\lambda\ ,\ w_0 D/\nu\right) \qquad (7\text{-}14)$$

ここに，$\lambda = f \cdot w_0 D/\nu$ ，f = total friction coefficient

Alam & Kennedy[36]は次元解析法に河床波発生理論の結果などを加味して考察を行ない，次の関係が成立するとした。

$$f'' = f_{nc}\left(V/\sqrt{gD_{50}}\ ,\ D_{50}/4R\right) \qquad (7\text{-}15)$$

ここに f'' は勾配分離法で定義される形状抵抗についての friction coefficient で，

$$f'' = 8gRI''/V^2 \qquad (7\text{-}16)$$

彼らは膨大な量のデーター（実験水路，自然河川を含む）から(7-15)式の関係を conter map で与えている。

上に述べた研究は基本仮定や抵抗分離の手法は異なってい

るものの，いずれも形状抵抗を直接水理量に結び付けようとしている点で共通している。

これに対しEngelund(37)(38)は，まずふたつの異なる流れが抵抗関係において相似である為にはτ_0'/τ_0が共通でなければならないとし，このことから無次元掃流力τ_*と無次元有効掃流力τ_*'とが一義的な関係にあると推測し，その関数形を実測データーから求めている。彼の思考の過程は原論文では省略されているので明確ではないが，おそらく次のようなものであろうと思われる。"Einsteinらが主張するように流砂量が河床形状を決定し抵抗則を支配する主因子であるとすれば，無次元化された流砂量のひとつの値に対してひとつの状態が与えられると考えてよいであろう。無次元流砂量はτ_*'のみの関数と考えられるから，τ_*'のひとつの値に対してひとつの状態が決まる。先に述べたようにひとつの状態についてはτ_*/τ_*'の値が定まっているとすれば，結局τ_*はτ_*'のみの関数である。"彼は実測データーから砂堆領域について次式を得，

$$\tau_*' = 0.06 + 0.4\tau_*^{2} \qquad (1\text{-}17)$$

これからRio Grande Riverの水位—流量曲線の予測を行ない成功を収めている。岸，黒木(39)(40)はさらに多くの実測データーから上の関数形に修正を加えている。最も重要な修正点はR/D

の値によって τ_*～τ_*'の関係が変化するとしている点である。すなわちEngelundの相似仮設はR/D = const.の条件下でしか成立しない。このことは次に述べるGarde & Rajuの領域区分の結果から見ても妥当なものであると思われる。

Garde & Raju[47]は河床形態毎に抵抗法則がかなり異なることを指摘し，まず河床形態と水理パラメーター（I, R/D）との対応を付け，それぞれの河床形態についての抵抗係数から抵抗を求める方法を提案している。この方法はRegime Theoryと呼ばれており，杉尾[48]，芦田・道上[49]らによって発展せられている。

以上の研究は，河床形状がどのようになっているかということを介さずに，抵抗係数又は抵抗がそれが基づを直接マクロな水理量に結び付けようとするものである。そのような方法が確立されれば実用上極めて便利ではある。しかし現実には河床波が生成しその形状によって抵抗が変わるというものであるから，河床波の形状特性を介した理論展開がなされなければ真の解決にはならないと思われる。実際少数のマクロな水理量と抵抗係数の間の明確な関係を期待できるという保証はない。

河床波の形状特性を介して抵抗を予測するにはふたつの段

階を踏まねばならない。ひとつは抵抗を支配する形状特性量と抵抗係数との関係を明らかにすることであり，いまひとつは形状特性量が定まる過程を明らかにすることである。

b-3

b－3　河床波の形状特性と抵抗係数に関する研究

Knoroz(42X43)は抵抗係数と河床波の波長・波高との関係を次のように表わしている。

$$f = 0.205\frac{H}{L}\left(\frac{H}{R}\right)^{0.25} + f'\left(1-10\frac{H}{L}\right) \qquad (1\text{-}18)$$

ここにHは波高，Lは波長，f'は次式で定義される摩擦抵抗係数である。

$$f' = 4\log(R/D_{50}) + 4.25 \quad (\text{Zegzhda's equation}) \qquad (1\text{-}19)$$

Vanoni & Hwang(44)は，次式で定義されるexposure parameterと勾配分離法によるf"の関係を実験的に明らかにしている。

$$e = A_s/A \qquad (1\text{-}20)$$

ここにeはexposure parameter，Asは河床波の下流側の面の水平投影面積，Aは河床の全面積である。彼らの得た結果は次のようなものである。

$$\frac{1}{\sqrt{f''}} = 3.5 \log_{10} \frac{R}{e\bar{H}} - 2.3 \qquad (1\text{-}21)$$

ここに$\bar{H}$は平均波高である。この式は固定床の対数抵抗式と類似の形であり，$e\bar{H}$が粗度係数に対応する．

この他に形状抵抗を急拡ロスとして或いは段落ちロスとして取り扱った研究がある．これらについては第四章で詳しく述べる。

以上の研究は形状抵抗の算定に主眼が置かれている。摩擦抵抗についてはほとんど研究されていない。

b－4　形状特性量に関する研究

抵抗に影響を及ぼす形状特性量としては平均波長，平均波高，それらの分散，前述のexposure parameterなどがあげられる。

Yalin[45]は次元解析法に基づき砂漣及び砂堆の平均波長・平均波高の関数形を実験データーを用いて求めている。結果は一応関数形で与えられてはいるが，データーのバラツキが極めて大きく，さらに検討の余地があるものと思われる。

芦田・田中[46]は砂堆の波長・波高の分布を調べ，ともにRayleigh分布に従うこと，したがって平均量と標準偏差がほぼ一定の比率であること，を報告している。

b-5 まとめ

以上述べてきたように，従来の研究の主流は，河床波形状特性を介さずに抵抗係数又は抵抗そのものを直接マクロな水理量に結び付けようとするものである。その基礎として，径深分割法，勾配分割法のような応力の形式的分割法がある。

この方法はふたつの問題点を含んでいる。ひとつは応力の分割法である。二種の応力（摩擦抵抗と形状抵抗）が存在することは確かであるから，応力を分割すること自体には何ら問題はない。しかし分割された径深，分割された勾配は架空の量である。従来の研究の多くがこの架空の量を軸にしている為に，現実との対応が極めて不明確になっている。いまひとつの問題は，河床波形状特性を介さない，という点である。現実には河床波が生成してその形状によって抵抗が変わるというものである。したがってそれについての何らの考察無しに抵抗係数と少数のマクロな水理量の関係を実験・実測から求めてみても，結果に普遍性を期待することはできないと思われる。実際今までのこの種の研究結果は，その著者の集めたデーターでは良く一致するが，他の研究者の集めたデーターやその後に測定された結果によって書き変えられたり否定されたりすることが多い。

一方，河床波の形状特性に関する研究もすべて実験が主体

となっている。また現実の問題に用いられるような形に整理されているものはほとんど無いのが現状である。

C 混相流の抵抗に関する研究.

Vanoni[50]は, 土砂を浮遊した水流の流速分布が変化し抵抗が減少することを実験的に明らかにした。以後この問題は彼の整理した方法に従って「カルマン定数の減少」という観点から実験的・理論的に研究されるようになった。

Einstein & Chien[51]は, 砂粒子を浮遊させるに要するエネルギーと流れの失うエネルギーとの比がカルマン定数と一定の関係にあると予想して実験を行なっている.

志村[52]は, 同様の考えに立ち乱れのエネルギー方程式からカルマン定数の変化を与える理論式を導いている.

しかしErata & Ippen[53]は中立浮遊子を用いた実験を行ない, 上述の考察だけでは不十分であることを示した。

これに対し日野[54]は, 粒子による乱れの有効逸散体積の減少, 粒子の回転や粒子と水との相対運動による乱れの逸散の増加をも考えてエネルギー方程式を新らたに導き, これと乱れの加速度平衡方程式とからカルマン定数の変化, 乱れ強度の変化を表わす理論式を導いている。

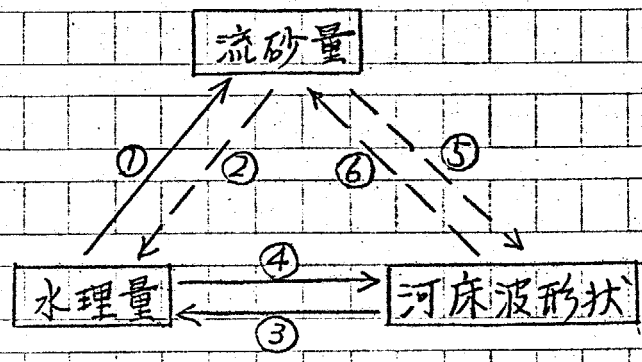
以上の研究は浮遊の効果をカルマン定数の変化を中心にしてとらえている。これに対し板倉, 岸, 中山[55]はMonin-Obukov lengthをパラメーターとして現象の解析を試みている。

このような理論的研究ではカルマン定数やMonin-Obukov length

のような断面平均値を用いて議論される。しかし流砂は河床の近傍に集中しており，断面平均的な取り扱いでどの程度現象を表わし得るかといった点に問題が残っていると思われる。

§.3 本論文の構成と各章の概要

前章の冒頭において，流砂量を予測するには流砂量・水理量・河床波形状特性の相互依存関係を明らかにする必要のあることを述べた。①は水流の砂礫輸送能力，②は砂礫の混入による流れの性質の変化，③は河床波の形成に伴う抵抗係数の変化が水理量に及ぼす影響，④は水理条件と河床波形状との関係，⑤は流砂量が河床波形状に及ぼす影響，⑥は河床波形成に伴う有効応力の減少の効果，を表わす。



さて問題を完全に解決するにはもちろん①～⑥の関係をすべて明らかにしなければならない。しかし六個の関係が等しく重要だと言うわけではなく，それぞれが結果に及ぼす影響の度合には自ずと軽重がある。研究の順序としては，流砂量の予測という見地から重要な関係を選んで，順に解決してゆくことが望ましいであろう。

流砂量を規定する関係は①と⑥であるが，流砂量は水理量に大きく依存することが知られているので，まず①の関係を明らかにすることが重要であろう。従来の研究においてもま

ずの関係が取り扱われ，後で⑥の効果を考慮した補正が加えられるのが普通である。そこで本論文では第二章，第三章においてこの関係を取り扱った。

次にの関係式のinputとなる水理量を規定する関係，②と③について考える。②は特に高濃度の場合には無視し得ないが，この効果が水理量に及ぼす影響は③の河床波が与える影響に較べれば二次的であると言える。特に水理量の間の関係を直接支配する抵抗係数は，②によっては数割程度せいぜい2倍程度にしか変化しないが，③によって10倍程度変化する。そこで本論文では第4章において③の関係を扱った。

次に③の関係式のinputとなる河床波形状特性を規定する関係，④と⑤について考える。河床波の発生及び発達した後の平衡状態は水理量に規定されると考えてよかろう。しかし発達段階では流砂量の影響があることは明らかである。すなわち，流砂量が大きい場合には河床波は速やかに発達又は減衰して水理量から規定される平衡状態に達すると思われるが，流砂量が少ない場合にはなかなかその状態に達しないと考えられるからである。しかし河床が変動するのは主に洪水時であるので，実用上はまず流砂量の十分大きい場合を想定して差し支えないものと思われる。そこで本論文では第5章において④の関係を取り扱った。

本論文では以上の三個の関係を取り扱っている。他の三個の関係が抜けているのでシステムとして完全ではないが，しかし流砂量，水理量，河床波形状をそれぞれ最も強く規定すると思われる関係を扱っているので，移動床流を近似的に同定することができるはずである。またここで取り扱わない関係についても，明らかになった時点で付け加えて理論をより完全にしてゆくことは容易である。

次に各部分の取り扱い方法を概述する。

a の，水理量 → 流砂量 の関係について

前節で述べたように，流砂の運動は極めて複雑な力学的因果関係に依っているので，理論的取り扱いにおいては一側面からとらえたかなり単純化されたモデルを用いることになる。この意味においてはどの理論も大なり小なり架空のものであって，それぞれの細かな問題点を指摘すれば際限が無いであろう。要はそれぞれのモデルで取り上げられているメカニズムが現象の基本的なメカニズムにどの程度合致しているかということであろう。そのモデルで省略されている部分或いは演繹的に明らかにできない部分は，実験や他のモデルで修正補完されれば良いと考える。

ところで基本メカニズムの把握とそれに即した砂粒子運動

のモデル化という点では，従来の理論はいずれも部分的であると言えよう。すなわち掃流砂・浮遊砂という部分についてのモデル化であり，その範囲内で意味を持つが，それぞれの解析法には必ずしも一貫性が無いのである。しかし掃流砂・浮遊砂という分類はいわば取り扱い上便宜的に為されたものであり，元来独立に存在するのではない。したがって，解析にあたってはまず流砂の系全体の基本メカニズムを把握して，個々の部分の取り扱いはこれと整合するような方向で為される必要があると考える。基準濃度の合理的な決定法が無いというのもこの辺に原因があるものと思われる。基準点とその濃度を定めるには掃流砂と浮遊砂の相互関係を定式化することが必要であるが，従来の理論では全体についての統一的把握が為されていないことと，それぞれの部分の取り扱い方に（形式的にも）整合性が無いことによって，相互関係を記述することが不可能となっているからである。

以上述べた事由に鑑み，本研究では流砂の系を統一的に記述し全流砂量の算定法を理論的に導くことを目的とした。

本論文では第二章において全流砂量の算定法に関する理論的考察を行なっている。§1では運動する砂粒子（掃流・浮遊を含めて）の定常濃度分布が形成されるメカニズムを考察し，§2において砂粒子運動のモデル化を行なう。§3，§4

東北大、水工学研究室

ではこのモデルから得られる結果と実現象との対応を明確にし，全流砂量の算定式を誘導する。第三章において水路実験データーと第二章の理論結果との比較を通じて，理論の妥当性・適用限界・改善すべき点などを検討する。

b ③，河床波形状 → 水理量

移動床流の抵抗予測に関する研究はふたつの流れに分けられる。ひとつは抵抗係数（又は抵抗そのもの）と少数のマクロな水理量との関係を実験データーから直接見い出そうとするもの，いまひとつは河床波の形状特性を介してその関係を見い出そうとするものである。既に記したように前者の方法で抵抗法則を見い出すことができれば実用上極めて便利である。しかしそのような方法では数式の導出が全く実測データーに依存するので，結果の普遍性が常に問題とされる。現象としては，河床波が生成してその形状によって抵抗が変わるというものであるから，河床波の形状特性を介した理論展開が為されるべきである。この理由により本研究では後者の道を選び，河床波上の流れの特性を流体力学的に解明し抵抗則を定式化することにした。

河床波にはいくつかのタイプがあるが，抵抗予測の上で実際上特に問題となるのは，主に常流下で生成する砂連及び砂

堆である。そこで本論文ではこれを対象とする。第四章において砂漣・砂堆の形状特性と抵抗係数の関係を理論的に検討する。まず§1において抵抗を形状抵抗と摩擦抵抗に分割すること及びそれぞれの抵抗の物理的意味を明確にする。続いて§2で摩擦抵抗，§3で形状抵抗を，流体力学的考察に基づいて理論的に検討する。§4では以上の結果を用いて，河床波の波長と波高が与えられた場合の平均流速算定式を誘導し，水路実験及び実河川での測定データーを使って検討を加える．

C ④，水理量 → 河床波形状

河床波の発達の具合は水理量のみならず流砂量にも依存すると考えられるから，一般的にはこの二つの要素を同時に考慮する必要がある。しかし，流砂量が十分大きい場合（十分大きいという程度は明確ではないが）には河床波は速やかに発達して，水理量から規定される或る成長限界状態に到達するものと思われる。河床変動が問題となるのは流砂量が大きい場合であるので，実用上はまず水理量によって規定される成長限界を定式化することが重要であると考える。

第五章でこの関係を取り扱った。§1では河床波の成長限界に関する仮説を示してそれに基づく理論を展開する。§2

では水路実験データーを用いてS.1の結果及び仮説を検討する。

d. 総合理論 —— 水理量及び流砂量の予測。

移動床流を同定するには流砂量，水理量，河床波形状の相互依存に関する六個の関係を定式化しなければならない．本論文ではそのうち三個の関係を取り扱っている．他の三個の関係が抜けているのでシステムとしては完全ではないが，しかし流砂量，水理量，河床波形状をそれぞれ最も強く規定すると思われる関係を扱っているので，移動床流を近似的に同定することは可能なはずである。

そこで第六章において，第二章から第五章の結果を組み合わせて水理量及び流砂量を予測する方法を提案し，水路実験及び実河川でのデーターを用いてその妥当性を検証する。

本研究で扱わない関係（②，⑤，⑥）についても従来いくつかの研究があり或る程度の事が明らかにされている。しかし本論文ではそれらの結果を組み合わせることはしていない。もちろん過去の成果を取り入れることが理論をより総合的にする上で有意義であることは疑いを入れない。しかしそれぞれの研究には固有の構造や背景となる思想があるので，単に結果だけを用いるとシステム全体としての整合性を失う恐れ

がある。本研究の成果と従来のそれとの関係を付けるにはさらに考察を必要とするので，これは今後の課題とした。

REFERENCE

(1) Parker,G. and Anderson,A.G.,"Basic Principles of River Hydraulics," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.103, No.HY9, June,1975, pp.665-678.

(2) DuBoys,M.P.," Le Rhone et les Rivers a Lit affouillable," Mem. Pront. et Chaussees, Ser.5, vol.18, 1879.

(3) Einstein,H.A.," Formulae for Transportation of Bed Load," Trans. ASCE, 107, 1942, pp561-577.

(4) Einstein,H.A. and El Samni,E.A.," Hydrodynamic Forces on a Rough Wall," Review of Modern Physics, vol.21, No.3,July,1949, pp.520-524.

(5) Einstein,H.A.," The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows," U.S.Dept. of Agric., Soil Conserv. Service, Tech. Bull., No.1026, Sept. 1950.

(6) Kalinske,A.A.," Movement of Sediment as Bed Load in Rivers," Trans., A.G.U., vol.28, No.4, August, 1947, pp.615-620.

(7) 佐藤清一，吉川秀夫，芦田和男，"河床砂礫の掃流運搬に関する研究（1），建設省土木研究所報告，第98号，1957，pp.13-30.

(8) Yalin,M.S.," An Expression for Bed-Load Transportation," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.89, No.HY3, May, 1963, pp.221-250.

(9) Albert,R.L., Hilmi,D.A. and Marion,R.C.," Sediment-Pickup Function," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.96, No.HY10, Oct., 1970,pp.2051-2063.

(10) 中川博次，辻本哲郎，"水流による砂礫の移動機構に関する研究，"土木学会論文報告集，第244号，1957，12月，pp.71-80.

(11) 土屋義人，河田恵昭，"砂粒のSaltationに基づく飛砂量について，"第19回水理講演会論文集，1975，pp.7-12.

(12) Hung,C.H. and Shen,H.W.," Stochastic Model of Sediment Motion on Flat Bed," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.102, No.HY12, Dec., 1976, pp.1745-1759.

(13) Rouse,H.," Modern Conceptions of the Mechanics of Fluid Turbulence," Trans. ASCE, vol.102, 1937, pp.463-543.

(14) 例えば Graf,W.H.," Hydraulics of Sediment Transport," McGraw-Hill, New York.

(15) Einstein,H.A. and Chien,N.," Second Approximation to the Solution of the Suspended Load Theory," M.R.D.Sediment Series, No.3, Corps of Engineers, Missouri River Division, Omaha, Nebraska, Jan., 1954.

(16) 例えば Raudkivi,A.J.," Loose Boundary Hydraulics 2nd Edition," Pergamon Press, New York.

(17) Hunt,J.N.," The Turbulent Transport of Suspended Sediment in Open Channels," Proc. Roy. Soc.A, 224, No.1158, 1954, pp.322-335.

(18) Velikanov,M.A.," Principle of the Gravitational Theory of the Movement of Sediments," Acad. of Sci. Bull., USSR, Geophs. Series, No.4, pp.349-359.

(19) 例えば前出論文(14)

(20) Tchen,C.M.," Mean Value and Correlation Problems Connected with the Motion of Small Particles Suspended in a Turbulent Fluid," Ph.D. thesis, Delft, 1947.

(21) Hinze,J.O.," Turbulence 2nd edition," McGraw Hill, New York.

(22) Yalin,M.S. and Krishappan,B.M.," A Probabilistic Method for Determining the Distribution of Suspended Solid in Open Channels, Int. Sympo. on River Mech., Sediment Trans. Proc., vol.1, 1973, pp.603-614.

(23) Lane,E.W. and Kalinske,A.A.," Engineering Calculations of Suspended Sediment," Trans. A.G.U., vol.22, 1941, pp.603-607.

東工大 水工学研究室

(24) 例えば 石原藤次郎，本間仁，"応用水理学中Ⅰ"，丸善

(25) 椿東一郎，平野宗夫，渡辺訓甫，"開水路・河川における流砂量について，"第15回水理講演会講演集，1971，pp. 7-12.

(26) 土木学会編，"水理公式集 昭和46年度改訂版

(27) Laursen,E.M.," The Total Sediment Load of Stream, Proc. ASCE, vol.84, HY1, Feb., 1958, pp.1530-1--1530-36.

(28) Colby,B.R.," Relationships of Unmeasured Sediment Discharge to Mean Velocity," Trans. A.G.U., 38, No.5, 1957, pp.708-717.

(29) Colby,B.R.," Discharge of Sands and Mean-Velocity RElationships in Sand-Bed Streams, U.S.Geological Survey, Prof. Paper 462-A, 1964.

(30) Colby,B.R.," Practical Computations of Bed Material Discharge," Proc.ASCE,90, HY2, 1964, pp.217-246.

(31) 前出論文(14)

東工大，水工学研究者

(32) Einstein,H.A. and Barbarossa,N.L.," River Channel Roughness," Trans. ASCE, vol.117, 1952, pp.1121-1146.

(33) Talor,R.H. and Brooks,N.H., Discussion of " Resistance to Flow in Alluvial Channels," by Simons,D.B. and Richardson,E.V., Trans. ASCE, vol.127, 1962, pp.982-992.

(34) Simons,D.B. and Richardson,E.V.," Resistance to Flow in Alluvial Channels," Trans. ASCE, vol.127, 1962, pp.927-954.

(35) Shen,H.W.," Development of Bed Roughness in Alluvial Channels," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.88, No.HY3, May, 1962, pp.45-58.

(36) Alam,M.Z. and Kennedy,J.F.," Friction Factors for Flow in Sand-Bed Channels," Journal of Hydraulics Division, ASCE, vol.95, No.HY6, Nov., 1969, pp.1973-1992.

(37) Engelund,F.," Hydraulic Resistance of Alluvial Streams," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.92, No.HY2, March, 1966, pp.315-326.

(38) Engelund,F., Closure to " Hydraulic Resistance of Alluvial Streams," Journal of the Hydraulic Division, ASCE, No.HY4,June, 1967, pp.287-296.

(39) 岸力，黒木幹雄，今泉正次，" 沖積地河川における水深－流量関係の予測，" 土木学会北海道支部研究発表論文集，1972，pp. 153－157.

(40) 岸力，" 移動床流れにおける粗度，" 水工学に関する夏期研修会講議集 A，1972.

(41) Garde,R.J. and Raju,K.G.R.," Resistance Relationships for Alluvial Channel Flow," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.92, No.HY4, July, 1966, pp.77-100.

(42) Knoroz,V.S.," The Effect of the Channel Macro-Roughness on its Hydraulic Resistance," Tzvestiya Gidrotekhniki, vol.62, 1959, pp.75-96.

(43) Task Force on Friction Factors in Open Channels of the Committee on Hydromechanics of the Hydraulics Division," Friction Factors in Open Channels," Journal of the Hydraulics Division,ASCE, vol.89, No.HY2, March, 1963, pp.97-143.

北大 水工学研究室

(44) Vanoni,V.A. and Hwang,L.S.," Relation between Bed Forms and Friction in Streams," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.93, No.HY3, May, 1967, pp.121-144.

(45) Yalin,M.S.," Geological Propaties of Sand Waves," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.90, No.HY5, Sept., 1964, pp.105-119.

(46) 芦田和男，田中祐一朗，"砂連に関する実験的研究(3)"，京大防災研究所年報第10号B，1967年3月．

(47) 林泰造，高羽秀紀，"掃流砂量の理論的研究，" 第21回水理講演会論文集，1977，pp.117-126.

(48) 杉尾捨三郎，"河川の平均流速公式と河床面形態との関係について，" 土木学会論文報告集，第171号，1969，pp.25-33

(49) 芦田和男，道上正規，"移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究，" 土木学会論文報告集，第206号，1972，pp.59-69

(50) Vanoni,V.A.," Transportation of Suspended Sediment by Water," Proc. A.S.C.E., 70, 1944.

(51) Einstein,H.A. and Chien,N.," Second Approximation of the Suspended Load Theory," Univ. Calif. Inst. Eng. Report, No.3, 1954.

(52) 志村博康，"浮遊砂を有する水流の諸特性について，" 土木学会論文集，第46号，1957

(53) Erata,C. and Ippen,A.T.," The dynamics of Open Channel Flow with Suspensions of Neutrally Buoyant Particles," Technical Report, No.45, Hydrodynamics Laboratory, M.I.T., 1961.

(54) 日野幹雄，"固体粒子を浮遊した流れの乱流構造変化，" 土木学会論文集，第92号，1963

(55) 岸力，板倉忠興，中山隆，"浮遊砂を含む流れの水理特性，" 第30回土木学会年講，1975，PP 318-320.

東工大 土工学研究室

第二章

全流砂量の算定法に関する理論的考察

§.1 砂粒子運動の機構 47

§.2 砂粒子運動のモデル 53

§.3 掃流層の平衡関係 67

§.4 全流砂量算定式 73

§.5 検討 77

§.6 まとめ 86

付録 87

§.1 砂粒子運動の機構

流砂は運動様式の違いに基づき掃流砂と浮遊砂に分けられる。掃流砂は河床上を滑動・転動又は小跳躍しながら流下するもの，浮遊砂は水流の乱れによって巻き上げられ河床からかなり離れて流下するものである。もちろんこの分類は厳密なものではなく，実際には掃流砂的な運動状態から浮遊砂的な運動状態まで連続的に分布しているのであろう。しかし流水中での砂粒子の運動を一般的に記述するのが困難であるので，このふたつの典型的な状態についてのみ考えるのである。

個々の砂粒子の運動をLagrange的に観察するのはかなり難しい。砂粒子の比重が2.65程度であるので識別できる大きさの砂粒子を浮遊させるには（実験室規模としては）かなりの流速を与えねばならないが，そのようにすると今度は粒子の移動速度も大きくなって追跡が困難となるからである。そこで比重の小さい（1.08程度）プラスチック粒子を比較的遅い流れの中に投入し，その運動状態を観察した。図2-1は8ミリカメラで追跡した結果である。ひとつの粒子が浮遊から掃流，掃流から浮遊と状態を変えながら流下して行くことがわかる。また少なくともこの結果に関する限りは掃流・浮遊両状態間の遷移はかなり明確であり，粒子運動をこの2種

類の運動の合成として記述することが可能であると考えられる。そこで本研究でもこの分類に基づいて議論を進める。

掃流状態と浮遊状態の運動様式の違いは，砂粒子に加わる外力の性質から説明される。まず浮遊状態について考える。河床面から或る程度離れた粒子に加わる鉛直方向の外力は次のように分類される。

① 水中重力。（重力から浮力を差し引いたもの）

② 周囲の流体が及ぼす圧力の合力の鉛直成分。

③ 周囲の流体が及ぼす粘性力の鉛直成分。

①は各々の砂粒子について一定値で下向きに働く。②及び③は河川流が一般に十分発達した乱流である為に不規則に変動する量である。その平均値は周囲の水塊に対する平均的な運動方向によって異なるが，砂粒子は水中重力のもとに平均的に沈降すると期待されるので，②及び③の平均値は上向きであると予想される。特に細かい砂粒子の場合は慣性が小さいので②及び③の合力の平均値は①とほぼ釣り合うものと思われる。(*) この結果粒子の鉛直方向速度は下向きの平均値のまわりに不規則に変動する。定常濃度分布が形成される原因のひ

(*) このことは砂粒子が中立的に漂うという意味ではない。②及び③が平均的に上向きであるのは，砂粒子が平均的に沈降している結果である。

とつはこの不規則変動である。この為に砂粒子が散らばることを「拡散される」と言う。一方河床の近くを運動する粒子及び河床上にあって流れにさらされている粒子に加わる鉛直方向の外力は次のように分類される。

① 水中重力

② 周囲の流体が及ぼす圧力の合力の鉛直成分

③ 周囲の流体が及ぼす粘性力の鉛直成分

④ 下層の粒子が及ぼす反力の鉛直成分

のは各々の砂粒子について下向きの一定値である。②は不規則に変動する量であるが，河床の近傍では浮遊の場合と異なり，沈降していない砂粒子についても平均的に上向きに作用する。その大きさは，河床に接している状態では抗力と同程度で，粒子が河床から離れるにつれて急速に減少し，粒径の2倍程度の高さでほぼゼロになる。(1) ③も変動する量であるが平均値はほぼゼロであろう。④は河床に静止する粒子については全外力が釣り合うように上向きに働いている。運動している粒子については河床に衝突する時のみ働く。ここで最も重要なことは，重力以外の外力の平均値が平均的に沈降していない粒子についても上向きに働くということである。すなわち河床近くでは粒子の沈降を妨げるように外力が作用する。

さて，従来砂粒子の鉛直濃度分布に関する解析にあたって

は，もっぱら外力の不規則性による拡散のメカニズムのみが注目されてきた。実際，前章で述べたように，拡散方程式を用いて実測の濃度分布に良く一致する関数形を得ることができる。しかし拡散作用は砂粒子を散らばすだけで平均的移動にはほとんど影響を与えないと考えられるから，それだけでは重力の作用のもとにいずれ砂粒子はすべて沈降してしまい，定常濃度分布は形成されない。定常状態を形成するもうひとつの重要な因子は河床付近の粒子に加わる上向き力である。この上向き力の為に，河床に落ちかけた砂粒子の一部は河床に静止せずに河床近傍をそのまま流下し，また静止した粒子の代わりに他の粒子が運動を起こすことになる。これらの粒子は河床付近を流下しながら上方に拡散される機会を待つことになる。従来の理論で拡散作用を考慮するだけで実測と良く一致する濃度分布関数形が得られたのは，上向き力の作用する範囲が河床近傍に限られているからである。すなわち河床から離れた領域での内的関係のみを議論するには拡散作用を考慮するだけでも十分なのであろう。しかし流砂の系全体を定量的に取り扱うには，この上向き力の効果も含めて定式化する必要がある。

外力のもたらすこの2種の作用は，砂粒子についての運動方程式を立てて外力項を正しく書き表わすことができれば，

東工大，水工学研究室

それに必然的に内包されているはずである。しかし現在までに得られている流体力学的知見では外力項を厳密に書き下すことは難しいし，仮りに書き下せたとしても，その解を数式の形で得るのはさらに困難であろう。そこで本研究では冒頭に述べた掃流・浮遊というふたつの運動様式に対応させて外力のもたらす効果を2種の作用に分け，それぞれについて現時点で得られている知見を十分に活用することにより，現象を解明してゆくことにする。

以上の考察により掃流状態と浮遊状態を次のように言い表わすことができよう。掃流状態は河床付近の上向き力に依存し，その作用のもとに流下しながら上方に拡散される機会を待っている状態である。一方浮遊状態とは掃流粒子の集っている掃流層という拡散源から上方に拡散された状態で，その運動は外力の不規則性に依存している。

そこで問題を図2-2のように分けて考えることができる。第一の問題は浮遊状態と掃流状態との関係を定式化することである。この関係は掃流層からの砂粒子の拡散としてとらえられよう。ただし掃流層の内部及び下部には拡散のメカニズムは存在せず，掃流層自体の定常性は河床付近の上向き力によって維持されている。したがって単純な拡散の問題と同様の方法で取り扱うことはできない。第二の問題は，掃流層の

定常状態を定式化し掃流層という拡散源の強度を決定することである。この為には河床付近の砂粒子の運動に関する力学的釣り合い条件を明らかにしなければならない。

§2 砂粒子運動のモデル[2][3]

a. 基礎方程式

前節で述べたように，砂粒子の鉛直濃度分布を定量的に求めるには拡散作用と河床付近の上向き力の作用とを考えねばならない。このふたつの作用はそれぞれ浮遊・掃流というふたつの運動様式と密接な関係にあると思われる。

さて，上向き力の作用は河床の極く近傍に限られているので，それのみでは砂粒子を上方へ舞い上がらせることはできないと思われる。上向き力が砂粒子に及ぼす効果は砂粒子が河床に落ち着くことを妨げるということであろう。このおかげで砂粒子は河床近傍で運動を持続し，再び上方へ拡散される機会を得ることができる。ところでこの力が効力を発揮する領域の厚さ，すなわち掃流層の厚さは水深に比較して極めて薄いと考えられる。そこで数学的な取り扱いの上ではこの厚さを無視するとすれば，上向き力の効果を次のように言い換えることができよう。「粒子が $y=0$ 以下に落ちようとする時これを阻止し，$y=0$ のレベルで運動を持続させる。」(*)

(*) ここでは砂粒子が静止することを考えていないが，或る割合の粒子が静止したとしても同じ割合の粒子が静止状態から掃流状態へ移行することが期待されるので，個々の粒子に着目しない限りは運動状態のみを考えればよい。

一方拡散作用は河床の極く近傍を除いてほぼ全域で作用する。既に述べたように拡散作用の原因は外力の不規則性による不規則運動である。問題とされるスケールにおいて時間的空間的相関がゼロとみなせるような運動をする粒子群の全体の変化を拡散方程式で記述できることはよく知られている。そこで拡散作用の効果を表わすには，砂粒子運動を確率的にとらえればよいであろう。

以上の考察に基づき砂粒子の運動を次のようにモデル化する。(図2-3)

① 砂粒子は時間ステップ Δt 毎に確率的に上昇又は沈降する。

② ワンステップの移動量 η は確率密度関数 $g(\eta)$ を持ち，$g(\eta)$ は時間及び空間に依存しないとする。

③ 砂粒子が河床($y=0$)に到達した場合は，上昇する条件($\eta>0$)が与えられるまで河床に留まる。

ここに①の Δt は粒子運動のタイムスケールで，水流の乱れのラグランジュ的タイムスケールに比例するものと思われる。この値の定め方については後述する。②の $g(\eta)$ の定常・一様性は数学的取り扱いを容易にする為のものである。開水路では乱れの性質が鉛直方向に変化するので，この条件は厳密には成り立たない。しかしそれ程大幅に変わるとも思えないの

で，断面平均的な値を持って表わせばよいであろうと考える。なお，この条件が結果に及ぼす影響については次章で検討する。③の河床に留まるというのは河床に静止するという意味ではなく，河床上を転がったり小跳躍しながら流下する状態（掃流状態）を意味するものである。もちろん現実には掃流層は或る厚さを持っているのであるが，このモデルではそれをひとつの状態とみなし，ゼロレベルに置くことによって表わす。すなわち $\zeta=0$ で掃流状態を $\zeta>0$ で浮遊状態を表わす。

以上の運動条件によれば，砂粒子の河床からの高さとワンステップの移動量を次のように結び付けることができる。

$$\zeta_{n+1} = max(\zeta_n + \xi_n, 0) \qquad (2\text{-}1)$$

ここに ζ_n, ζ_{n+1} はそれぞれ第nステップ前後の粒子高さ，ξ_n は第nステップの移動量である。ζ_n, ζ_{n+1} の確率密度関数を $h_n(\zeta)$, $h_{n+1}(\zeta)$ とすると次式が成立する。

$$h_{n+1}(\zeta) = \Pi\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\zeta-\xi)\cdot g(\xi)\,d\xi\right\} \qquad (2\text{-}2)$$

ここに $\Pi\{\ \}$ は密度関数の負の部分をゼロに掃き寄せる作用子で，任意の密度関数 $a(\zeta)$ について次の関係が成り立つ。（図2-4）参照）

$$\pi\{a(\xi)\} \equiv \begin{cases} \delta(\xi)\cdot\int_{-\infty}^{0} a(\eta)\,d\eta + a(\xi) & (\xi \geq 0) \\ 0 & (\xi < 0) \end{cases} \qquad (2\text{-}3)$$

$t\to\infty$ で定常状態が形成されたとし，この時の粒子高さの密度関数を $h(\chi)$ と書くと (2-2) 式は次式となる。

$$h(\chi) = \pi\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\chi-\eta)\cdot g(\eta)\,d\eta\right\} \qquad (2\text{-}4)$$

上式はワンステップの移動量の確率密度関数 $g(\eta)$ に対して粒子の存在確率密度関数 $h(\chi)$ が満たすべき関係を表わしており，本方法の基礎方程式である。

b 砂粒子の定常存在確率密度 $h(y)$

(2-4) 式を解くにあたって $g(\eta)$ を与えなければならない。後述するように $g(\eta)$ は水流の鉛直方向乱れ速度の確率密度に結び付けられる。しかしこの密度関数をどのように仮定するのが適当かは明らかではない。そこでまず幾種類かの $g(\eta)$ について (2-4) 式を解き，解の性質について検討する。

Case 1； $g(\eta)$ が Laplace 分布の場合

$$g(\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(-\sqrt{2}\,\dfrac{\eta+\eta_0}{\sigma}\right) & (\eta\geq-\eta_0)\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(\sqrt{2}\,\dfrac{\eta+\eta_0}{\sigma}\right) & (\eta<-\eta_0)\end{cases} \qquad (2-5)$$

ここに $-\eta_0=\eta$ の平均値，$\sigma=\eta$ の標準偏差である。これに対する $h(y)$ の解は次式で表わされる。(付録参照)[4]

$$h(y)=(1-\omega)\delta(y)+\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\omega(1-\omega)\cdot\exp\left\{-\sqrt{2}(1-\omega)\frac{y}{\sigma}\right\} \qquad (2-6)$$

ただし ω は次式の根である。

$$\omega(2-\omega)=\exp\left\{-\sqrt{2}(1-\omega)\frac{\eta_0}{\sigma}\right\} \qquad (2-7)$$

Case 2; $g(\gamma)$がErlang分布の場合.[5][6]

$$g(\gamma)=\frac{(\mu k)^k}{(k-1)!}\cdot\left(\gamma+\frac{1}{\lambda}\right)^{k-1}\cdot\exp\left\{-\mu k\left(\gamma+\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \tag{2-8}$$

ここにkは自然数，λとμはγの平均値と標準偏差を用いて次のように表わされる。

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{k}\,\sigma}\quad,\quad \lambda=\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sigma+\gamma_0} \tag{2-9}$$

(2-8)式はkの値を適当に変えることによって種々の分布形を表わすことができる。$k=1$の場合は指数分布，$k=2$の場合はχ二乗分布，$k\to\infty$とするとGauss分布となる。(2-8)式を(2-4)式に代入して$h(\gamma)$について解くと次のようになる。

$$h(\gamma)=\left(1+\sum_{i=1}^{k}C_i\right)\cdot\delta(\gamma)+\sum_{i=1}^{k}C_i\mu\gamma_i\exp(\mu\gamma_i\gamma) \tag{2-10}$$

ここにγ_iは次式の根のうち負の実数部を持つもの（kコ有る）であり，

$$\left(1+\frac{\gamma}{k}\right)^k=\exp\left(\frac{\mu}{\lambda}\gamma\right) \tag{2-11}$$

またC_iは次のk元一次連立方程式の解である。

$$1+\sum_{i=1}^{k}\frac{C_i}{\left(1+\frac{\gamma_i}{k}\right)^r}=0 \qquad r=1,2,\cdots,k \tag{2-12}$$

図2-5に(2-5),(2-8)式で表わされる$g(\eta)$のうち特徴的なものを示す。Laplace分布は尖度の大きな分布形，Erlang分布の$k=2$は歪度の大きな分布形，$k=20$はGauss分布とほぼ同じ形をした分布形である。これらの$g(\eta)$に対する$f(\gamma)$を図2-6に示す。これらの図から，ηの平均値($-\eta_0$)と標準偏差(σ)が同じであれば，$g(\eta)$の形がかなり異なっていても$f(\gamma)$はあまり変化しないことがわかる。$g(\eta)$の形が未知であるとは言ってもそれ程変わった形の分布形をしているとは考えられないので，図2-6に示す曲線のひとつで$f(\gamma)$を代表させても差し支えないものと思われる。そこで以後の取り扱いにおいては，$f(\gamma)$として比較的簡単な関数形をした(2-6)式の表示を用いることにする。

(2-6)式はふたつの部分から成っているが，第一項のデルタ関数が掃流状態に，第二項の指数関数が浮遊状態に対応する。したがって運動状態にある粒子全体を1とすれば$(1-\omega)$の割合の粒子が掃流状態にある。そこで河床単位面積当りの掃流状態にある粒子の体積をNとおくと，体積濃度分布は次式で表わされる。

$$C(\gamma)=N\left[\delta(\gamma)+\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\omega\cdot\exp\left\{-\sqrt{2}(1-\omega)\frac{\gamma}{\sigma}\right\}\right] \qquad (2\text{-}13)$$

掃流状態の濃度がデルタ関数で表わされるのは，運動条件の第三項で掃流層の厚さを無視した為である．(2-13)式の形を図2-7に示す．実際には掃流層は有限の幅を持ち且つその上限は明確でないから，図中の点線のようになるのであろう．その意味では(2-13)式は非現実的であり，Rouse分布等の関数形の方が優れていると言えるかも知れない．しかし(2-13)式は従来の理論結果には無い著しい特長を持っている．従来の関数形では境界条件として河床付近の或る高さにおける濃度を与える必要があった．しかし第一章で述べたようにこれは極めて定めにくい量である．一方(2-13)式では境界条件として掃流層内の粒子の全体積を与えればよい．次節で具体的に取り扱うが，この量は掃流砂のみの解析に従来用いられている方法で比較的容易に求めることができる．

(2-13)式中のパラメーターはN，σ及びωであるが，ωは(2-7)式の根であるので，結局N，σ，c_0を定めれば濃度分布を決定できる．Nについては次節(§.3)で考察することにし，次にσとc_0を求める．

C. ワンステップの移動量の平均値と標準偏差

粒子運動に関するパラメーターと水理量の対応をつけるには，粒子と水との相対運動を取り扱わなければならない。しかしこれを厳密に行なうのはそれ自体大変な問題である。例えば静水中を一個の粒子が沈降する問題においてすら，一般的には数値計算に依らざるを得ない。したがって乱流中の多粒子の挙動ということになると一般的には解析の外になる。ところで本理論のモデルは既にかなり単純化された条件に基づいている。そこでここでは次の仮定のもとに議論を進めることにする。"粒子はそれを含む水塊に対して一定の沈降速度で相対的に沈降する。" すなわち，

$$\zeta = (v - w_0)\Delta t \qquad (2\text{-}14)$$

ここに v は水の鉛直方向速度，w_0 は沈降速度である。

ここで沈降速度の値が問題となる。McNown & Malaika[7][9]は粒子の形が沈降速度に及ぼす影響を実験的に調べ，棒状及び盤状（共に縦横比 1:4）の場合には球形の場合に対して沈降速度がそれぞれ 1.2～1.4 倍，1.3～1.5 倍となると報告している。椿[8][17]は乱れ速度をフーリエ級数で表わして水の運動に追随して沈降する砂粒の運動を解析し，乱れが沈降速度に及ぼす影響を調べている。その結果 Stokes 則に従う範囲では静水中の

沈降速度と変わらないが，レイノルズ数が大きくなると沈降速度が減少することを明らかにしている。また文献(9)によると多粒子の沈降速度は単粒子の場合よりも小さくなる。このように個々の効果については或る程度明らかになっている。しかし一般的な表示を得るところまでは到っていない。そこで本論文では静水中の球形単粒子の沈降速度の値を用いることにする。

(2-14)式から次式を得る。

$$\zeta_0 = w_0 \Delta t \quad , \quad \sigma = \sqrt{D} \Delta t \qquad (2\text{-}15)$$

したがってΔtと水理量との対応をつければζ_0とσの値は定められる。

d. 粒子運動の時間スケール Δt について

Δt は乱流の Lagrange 的タイムスケールに比例するものと考えられる。したがって乱流理論から導くことができればそれに越したことはない。しかし乱流理論は諸特性量を定量的に求め得る段階には未だ至っていないようである。そこで以下のように現象論的な取り扱いから定める。

一度舞い上がった砂粒子がなかなか沈降しない場合，(2-1)式はほとんどの場合次式となる。

$$\eta_{n+1} = \eta_n + \eta_n \tag{2-16}$$

したがって近似的に

$$\eta_{n+i} = \eta_i + \eta_i + \cdots + \eta_{i+n-1} \tag{2-17}$$

ここで次のように置くと，

$$\xi = \sum_{j=i}^{i+n-1} \eta_i \tag{2-18}$$

中心極限定理から ξ は近似的に次の密度関数に従う．

$$g_\xi(\xi) \doteqdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{-\frac{(\xi + n\eta_0)^2}{2n\sigma^2}\right\} \tag{2-19}$$

時間 τ の間に $\tau/\Delta t$ 回の変移が加えられるから $n = \tau/\Delta t$ と置き換えると，時刻 t から $t+\tau$ の間の $h(\eta)$ の遷移確率密度は次

式で表わされる。

$$g_3(y, t+\tau \mid y_0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{v}^2 \Delta t \tau}} \exp\left\{ - \frac{(y - y_0 + w_0 \tau)^2}{2 \bar{v}^2 \Delta t \cdot \tau} \right\} \tag{2-20}$$

ここで Δt と τ の比を一定にとると次式を得る。

$$g_3(y, t+\tau \mid y_0, t) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \frac{-(y - y_0 + w_0 \tau)^2}{2\sigma_y^2} \right\} \tag{2-21}$$

Yalin は上式を用いて濃度分布形を数値的に求めている。ただし，$\sigma_y = \sqrt{\bar{v}^2 \Delta t \cdot \tau}$ である。(2-20) 式と鉛直存在確率密度とは次の関係にある。

$$h(y, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y, t+\tau \mid y_0, t)\, h(y_0, t)\, dy_0 \tag{2-22}$$

ここで $h(y_0, t)$ を展開して，

$$h(y_0, t) = h(y, t) + (y_0 - y) \frac{\partial h(y,t)}{\partial y} + \frac{(y_0 - y)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 h(y,t)}{\partial y^2} + \cdots\cdots \tag{2-23}$$

とし第二項までとって (2-22) 式に代入し積分すると次式となる。

$$h(y, t+\tau) = h(y, t) + w_0 \tau \cdot \frac{\partial h(y,t)}{\partial y} + \left\{ \tau^2 w_0^2 - \frac{\sigma_y^2}{2} \right\} \frac{\partial^2 h(y,t)}{\partial y^2} \tag{2-24}$$

両辺をΔtで除して極限操作すると

$$\frac{\partial h(y,t)}{\partial t} = w_0 \frac{\partial h(y,t)}{\partial y} + \frac{\overline{v'^2}\Delta t}{2} \frac{\partial^2 h(y,t)}{\partial y^2} \qquad (2\text{-}25)$$

上式は拡散方程式であり，拡散係数は次のように書かれる。

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}\overline{v'^2}\Delta t \qquad (2\text{-}26)$$

ところで拡散係数は渦動粘性係数の1.2倍程度であることが知られている。そこで次のように置く。

$$\varepsilon_s = 1.2\,\varepsilon_m \qquad (2\text{-}27)$$

さて本論文で取り扱っているような二次元定常等流では，流速分布は対数則で近似されるから

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{ky} \qquad (2\text{-}28)$$

ここに，k = カルマン定数。一方せん断力分布は，

$$\tau_0 = \rho u_*^2 \left(1 - \frac{y}{d}\right) \qquad (2\text{-}29)$$

であり，渦動粘性係数の定義から

$$\tau_0 = \rho \varepsilon_m \frac{du}{dy} \qquad (2\text{-}30)$$

であるから，(2-28)，(2-29) 式を (2-30) 式に代入し積分する

と次式を得る。

$$\varepsilon_m = k u_* d \cdot \eta(1-\eta) \qquad (2\text{-}31)$$

ここに $\eta = z/d$。dは開水路流であれば水深に，二平板間の流れであれば板間隔の1/2に当たる。本論文では鉛直方向に乱れの性質が一定であるという条件のもとに取り扱っているから，ε_m の値として断面平均値を用いる。(2-31)式から，

$$\bar{\varepsilon}_m = \int_0^1 \varepsilon_m d\eta = \frac{k}{6} u_* d \qquad (2\text{-}32)$$

(2-27)，(2-32)式から次式を得る。

$$\varepsilon_s = \frac{k}{5} u_* d \qquad (2\text{-}33)$$

(2-26)式と(2-33)式を対応させると

$$\Delta t = \frac{2}{5} k \frac{u_* d}{U^2} \qquad (2\text{-}34)$$

以上で(2-13)式中のN以外のパラメーターと水理量の関係をつけることができた。

§.3 掃流層の平衡関係

a. 力積方程式

(2-13) 式中の N (単位面積当りの掃流粒子体積) を求めれば鉛直濃度分布は定まる。その為には河床表層に静止する粒子と掃流状態にある粒子とを含む系の力学的平衡状態を定式化すればよい。しかし河床付近の粒子に加わる力の性質は複雑であるので，洞察に基づいた或る程度大胆な取り扱いをせざるを得ない。

佐藤・吉川・芦田[10]はこの力学的平衡関係について興味深い考察を行なっている。以下に抜粋する。

"p_c を粒子を浮き上げるに必要な限界揚圧力(*)，河床単位面積の中，揚圧力が効果的に働く面積を γ，δt 時間の中，揚圧力が効果的に働く時間を $\delta t'$ とすれば，δt 時間に流水が揚圧力により粒子に効果的に与えた力積は単位面積について

$$\delta t' \gamma \int_{p_c}^{\infty} p f_p(p)\, dp$$

となる。(**)

一方単位面積上の掃流層内の粒子の全体積を N とし，粒子の密度を ρ_s とすれば，重力が δt 時間内に鉛直下方に与える

(*) 揚圧力とは単位面積当りに換算された揚力。

(**) $f_p(p)$ = 揚圧力の確率密度関数。

力積は

$$N(\rho_s-\rho)g\cdot\delta t$$

である.

しかるに掃流運動が平衡している場合を考えているから，揚圧力が鉛直上方に与える力積は重力が鉛直下方に与える力積に等しくなければならない。

$$\delta t'\cdot\gamma\int_{p_c}^{\infty}pf_p(p)dp=N(\rho_s-\rho)g\cdot\delta t$$

…… 中略 ……。しかるに河床にある全粒子に着目するならば，一つの粒子が浮き上がると，そこには新らたな粒子が現われ，流体の力を受けることになるから，河床表面にある全粒子は常に乱れを受ける場合におかれていると考えてよい。ゆえに $\delta t'=\delta t$ である。それ故，

$$N(\rho_s-\rho)\cdot g=\gamma\int_{p_c}^{\infty}pf_p(p)dp \quad 。" \qquad (2-35)$$

上式は力積方程式と呼ばれる。以上の考察では掃流層内の粒子に加わる力として粘性力や圧力の合力を考えていない。しかし掃流層内でのように粒子が短い距離を上下運動する場合は，平均的には粘性力は重要な影響を及ぼさないと推測される。また圧力の合力の平均値（揚力）は粒子が河床を離れると急激に減少し粒径の二倍程度のところでは無視しうるこ

とから，流砂の運動が活発で掃流層厚が揚力の有効範囲よりも厚い場合を考えれば(*)，結局重力だけを考えても十分な近似を得ることができよう。また河床上の粒子については周囲の粒子から受ける反発力鉛直成分を考慮していないが，この力は河床面上の粒子の配列具合に依存しているので，現在のところは明らかでない。この影響についてはもし考慮する必要が生ずれば後から補正を加えることにする。

本論文では掃流層の平衡関係を表わす基礎方程式として，(2-35)式を用いる。

(*) 本論文では浮遊砂と掃流砂が共存する場合を対象としているからSaltation運動の高さは揚力の有効に働く高さよりも十分大きいと推測される。このことは第一節での解釈（掃流運動は河床付近の上向き力に依存している）と矛盾はない。すなわち揚圧力は主にSaltation運動の初期条件として運動を支配していると考えているのである。

b. 揚圧力の確率密度関数 $f_P(P)$

Einstein & El-Samni[11] は水路床上に置かれた半球の頂点と底部の圧力差を測定し，その頻度分布が Gauss 分布で近似しうることを示している。また Chepil[12] は風洞内で同様の測定を行ない，その圧力差の標準偏差と平均値の比がほぼ一定で約0.5（彼の得た平均値は0.49）であると報告している。このふたつの実験で測定されている半球の頂部と底部の圧力差は揚圧力そのものではないが，揚圧力の頻度分布もこれと相似形であると考えてよいであろう。そこで次式を仮定する。

$$f_P(P)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\bar{P}}\exp\left\{-2\left(\frac{P}{\bar{P}}-1\right)^2\right\} \qquad (2\text{-}36)$$

ここに，$\bar{P}$ = 揚圧力の平均値。

Chepil[13] は風洞中におかれた種々の径の半球上の平均圧力分布を測定し，揚力と抗力の時間平均値の比を求めている。それによれば平均揚力の平均抗力に対する比はおよそ0.88である。抗力が有効に働く面積の率が揚力のそれに等しいとすれば，平均抗力は $\rho u_*^2/\gamma$ であるから，平均揚力は次式で表わされる。

$$\bar{P}=\frac{0.88}{\gamma}\rho u_*^2 \qquad (2\text{-}37)$$

C. 単位面積当りの掃流粒子体積 N.

粒子を球とみなせば限界揚圧力 P_c は，粒子の水中重量と揚力とを等置することによって，

$$P_c = \frac{2}{3}(\rho_s - \rho) g D \qquad (2\text{-}38)$$

(2-36), (2-37), (2-38) 式を (2-35) 式に代入して整理すると次の関係式を得る。

$$\frac{N}{D} = f(\tau_*)$$

$$= 0.88\tau_* \left[\Phi\left(\frac{1.52\gamma}{\tau_*} - 2\right) + 0.199 \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{1.52\gamma}{\tau_*} - 2\right)^2 \right\} \right] \qquad (2\text{-}39)$$

ここに，

$$\tau_* = \frac{1}{\Psi} = \frac{u_*^2}{(\rho_s/\rho - 1) g D}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

d. 揚圧力が有効に働く面積の率 γ。

以上の取り扱いの中でγが未知量として残されている。河床が完全に均らされている場合は$\gamma=1$であるが，実際には河床粒子の高さは均等でないのでγは1より小さい値をとるはずである。また必ずしも普遍的な定数である保証はなく，流れの条件や粒子の特性によって変化することも考えられる。ともかく現在のところγの値を具体的に定める方法は見い出せない。

図2-8はγをパラメーターとして(2-39)式の関係を表わしたものである。この図からτ_*が或る程度大きくなるとγの値が結果に影響を及ぼさなくなることがわかる。ところで本理論では浮遊砂と掃流砂が共存する場を取り扱っているが，そのような場合には当然τ_*も大きな値をとると考えられるので，γの値の違いはそれ程大きな影響を及ぼさないものと期待される。ここではひとまず$\gamma=1$としておく。

§.4 全流砂量算定式

a. 速度分布形

本論文では一貫して乱れの性質が鉛直方向に一様な条件下で解析を進め，その解をもって現実の現象を近似しようとしている。

渦動粘性係数 ε_m を一定として次式を積分すると，

$$\varepsilon_m \frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\rho} = u_*^2 \left(1 - \frac{y}{d}\right) \qquad (2\text{-}k0)$$

速度分布形として次式を得る。

$$u = \frac{u_*^2 d}{\varepsilon_m} \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} + C_0\right) \qquad (2\text{-}k1)$$

$$\eta = y/d$$

断面平均流速は

$$\bar{u} = \int_0^1 u \, d\eta = \frac{u_*^2 d}{\varepsilon_m} \left(\frac{1}{3} + C_0\right) \qquad (2\text{-}k2)$$

(2-k0)，(2-k2) 式から C_0 を消去し (2-32) 式を用いれば次式を得る。

$$\frac{u}{\bar{u}} = a\left(\eta - \frac{\eta^2}{2}\right) + b \qquad (2\text{-}k3)$$

ここに，

$$a = \frac{6}{\kappa} \frac{u_*}{\bar{u}} \quad , \quad b = 1 - \frac{2}{\kappa} \frac{u_*}{\bar{u}} \qquad (2\text{-}k4)$$

(2-43) 式を図2-9に示す. 比較の為に対数分布則を破線で示した. この図から, 乱れの性質が鉛直方向に一定として扱っても実際とそれ程大きく違わないことがわかる.

b. 平均濃度及び全流砂量

ほぼ二次元的な定常等流での測定データ[17][18][19]によれば，$\sqrt{f}/u_*$ の値は断面内であまり変化せず，その平均値は約0.8である．この関係を使って(2-15)，(2-34)式を変形すると次式を得る．

$$\Delta t = 0.625\kappa \frac{d}{u_*}$$

$$\gamma_0 = 0.625\kappa \frac{w_0}{u_*} d$$

$$\delta = 0.5\kappa d \qquad (2\text{-}45)$$

(2-13)式から濃度分布形は次式で表わされる．

$$c(\zeta) = \frac{D}{d} f(\tau_*) \{\alpha \exp(-\beta\zeta) + \delta(\zeta)\} \qquad (2\text{-}46)$$

ここに，$\alpha = 2.83w/\kappa$，$\beta = 2.83(1-w)/\kappa$ である．単位幅あたりの流砂量は次の積分から得られる．

$$q_T = \int_0^d u \cdot c\, d\eta \qquad (2\text{-}47)$$

これより平均濃度は，

$$\bar{c}_T = \frac{q_T}{\bar{u}d} = \int_0^1 \frac{u}{\bar{u}} \cdot c\, d\zeta \qquad (2\text{-}48)$$

(2-43),(2-46)式から次式を得る.

$$\overline{C_T} = \frac{D}{d} f(\tau_*)\left[a\alpha\left\{\frac{\beta-1}{\beta^3} + \frac{-\beta^2+\beta+1}{2\beta^3}\exp(-\beta)\right\} + \frac{\alpha b}{\beta}\left\{1-\exp(-\beta)\right\}+b\right] \tag{2-49}$$

無次元流砂量は,

$$q_* = \frac{q_T}{u_* d}$$

$$= \frac{\bar{u}}{u_*} f(\tau_*)\left[a\alpha\left\{\frac{\beta-1}{\beta^3} + \frac{-\beta^2+\beta+1}{2\beta^3}\exp(-\beta)\right\} + \frac{\alpha b}{\beta}\left\{1-\exp(-\beta)\right\}+b\right] \tag{2-50}$$

§.5 検討

本節では，前節までに述べた理論の特長，適用上の制約，従来の研究との関係について，主に定性的に述べる。なお，定量的な検討は次章において実測データーとの比較を通じて行なう。

a. 見掛けの拡散係数の変化

本理論の特長は底面の及ぼす影響を基礎方程式（(2-4)式）の中に含ませていることである。すなわち浮遊部分についての境界条件をあらかじめ考慮している。これにより掃流と浮遊の関係を数式的に記述することが可能となった。

ところで境界条件の取り扱い方が変われば当然内部の状態の結果にも変化を生ずるはずである。本理論では乱れの性質が鉛直方向に一定という条件下で取り扱い，浮遊部分の濃度分布として指数関数を用いた。これは拡散理論で拡散係数を一定とした場合の結果と類似している。しかし上に述べた理由で，必ずしも同じというわけではない。その違いを以下に述べる。

拡散方程式自体には境界の存在の効果は含まれていない，そこで境界がある場合には便宜的な境界条件を与えて解く。粒子拡散の問題における壁面の境界条件は，粒子が壁面を通り抜けないということである。これを表わすのに普通は壁面でのフラックスがゼロという条件式を用いる。しかしフラックスはプラス方向とマイナス方向の通過量の差し引きであるから，この条件式は粒子が壁面を通り抜けないという状況を表わしているのではない。事実、定常状態においてはこの関係はいたる所で満たされており，境界条件としての意味をな

京大、水工学研究室

さない。一方，本理論の方法では，粒子が壁を通り抜けないという条件をあらかじめ考慮しているから（図2-3），このことによる差が生じるものと考えられる。

拡散係数を一定として拡散方程式を解いて得られる定常濃度分布は，

$$C(y) = C(0) \cdot \exp\left(-\frac{w_0}{\varepsilon_s} y\right) \qquad (2\text{-}52)$$

一方，(2-66)式の浮遊部分は

$$C(y) = C(0) \cdot \exp\left\{-\sqrt{2}(1-\omega)\frac{y}{a}\right\} \qquad (2\text{-}53)$$

そこで(2-52)と(2-53)を対応させて次のように置くことにする。

$$\varepsilon_s' = \frac{a w_0}{\sqrt{2}(1-\omega)} \qquad (2\text{-}54)$$

このε_s'は(2-52)式のε_sとは異なる。拡散方程式は境界の無い無限流体中で成立するものである。したがってε_sは河床が存在しない場合に同じ乱れを持つ水流中で観測される拡散係数であり，(2-26)式で表わされる。

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}\overline{v'^2}\Delta t \qquad (2\text{-}26)$$

一方 ε_s' は河床が存在することにより変形した分布形について，河床の存在を無視した拡散理論が成立するとした場合に観測されるもので，見掛けの拡散係数である。(2-15)，(2-26)，(2-54)式から，

$$\frac{\varepsilon_s'}{\varepsilon_s} = \frac{\sqrt{2}}{1-\omega}\frac{w_0}{\sqrt{\overline{v^2}}} \tag{2-55}$$

水深に較べて幅の広い開水路流では $\sqrt{\overline{v^2}} \fallingdotseq 0.8u_*$ の関係から

$$\frac{\varepsilon_s'}{\varepsilon_s} = \frac{1.77}{1-\omega}\frac{w_0}{u_*} \tag{2-56}$$

ここに ω は (2-7) 式を変形した次式の解として求まる。

$$\omega(2-\omega) = \exp\left\{-1.77(1-\omega)\frac{w_0}{u_*}\right\} \tag{2-57}$$

(2-56) 式は次のことを意味している。すなわち，水流の乱れの状態が同じであっても粒子の沈降速度 w_0 の値の違いによって見掛け上拡散係数は異なる。

以上の結果は，乱れの性質が鉛直方向に変わらないという条件下で得られたものである。実際には乱れの性質が空間的に変化するので，ε_s は鉛直方向に変わる。しかしここでは，その場合でも (2-56) 式に従って見掛け上拡散係数が変化するものと仮定してみよう。

$\varepsilon_s \fallingdotseq 1.2\varepsilon_m$ より

$$\frac{\varepsilon_s'}{\varepsilon_m} = \frac{1.2\times 1.77}{1-w}\frac{w_0}{u_*} = \frac{2.12}{1-w}\frac{w_0}{u_*} = \beta \qquad (2\text{-}58)$$

ε_m は次式で表わされるから,

$$\varepsilon_m = \kappa u_* y\{1 - y/d\} \qquad (2\text{-}59)$$

次のようになる.

$$\varepsilon_s' = \beta\kappa u_* y\{1 - y/d\} \qquad (2\text{-}60)$$

ところで $\varepsilon_m = \varepsilon_s$ として拡散方程式を解くと次式の Rouse 分布が導かれる.

$$\frac{c}{c_a} = \left(\frac{d-y}{y}\cdot\frac{a}{d-a}\right)^Z \qquad (2\text{-}61)$$

ここに a は基準高さ, c_a はその点の濃度, Z は次式で表わされる.

$$Z = \frac{w_0}{\kappa u_*} \qquad (2\text{-}62)$$

しかし河床があると前述したように拡散係数が (2-60) 式のように見掛け上変化する. この時の濃度分布形は

$$\frac{c}{c_a} = \left(\frac{d-y}{y}\cdot\frac{a}{d-a}\right)^{Z_1} \qquad (2\text{-}63)$$

ただし

$$Z_1 = \frac{w_0}{\beta K u_*} \qquad (2\text{-}64)$$

すなわちRouse分布の指数のみに変化が生じる。言い換えれば，実測された濃度分布の指数(Z_1)は，Rouseの理論から求まる指数(Z)とは異なった値をとる。(2-62)，(2-64)式から，

$$Z_1 = \frac{Z}{\beta} = 1.78(1-\omega) \qquad (2\text{-}65)$$

ωはw_0/u_*のみの関数だからZのみの関数となる。

$$Z_1 = f_{nc}(Z) \qquad (2\text{-}66)$$

Zからw_0/u_*を求め，(2-57)(2-58)(2-64)から上の関形が求まる。

図2-10はEinstein & Chien[20]の実測結果である。Rouseの理論では$Z = Z_1$となるが，測定値は明らかに傾向を持ってズレている。一方，本理論の結果はZとZ_1の関係をかなり良く説明していることがわかる。

東北大，水工学研究室

b. 本理論式の適用範囲について

3.3において N の表示を求める際に $\gamma=1$ とおいた。すなわち，表層のどの粒子に対しても乱れの及ぼす力が統計的には同じ様に働くとした。しかし実際にはそれぞれの粒子の置かれている状態は違うので，突き出た粒子はより大きな流体力を受け，隠れた粒子は力を受けない。したがって γ は一般に1より小さな値をとる。だが既に述べたように z_0 が或る程度大きい場合には，結果は γ の値によらなくなる（図2-8）ので，その範囲については成立するはずである。$\gamma=1$ と固定したことによる適用範囲の制約は z_0 の項で表わされると思われる。

$f_p(p)$ の形を定める根拠とした Einstein[11] 及び Chepil[12][13] の実験は粗面上の流れについて行なわれたものであるので，河床砂が細かく水理学的に滑面となる条件には適用できない。このことによる制約は $Re_* = u_* D/\nu$ の項で表わされると思われる。

これらの限界値は，次章で実験データーと比較検討の上定める。

C. 掃流砂量について

本理論では掃流砂と浮遊砂とを一括して取り扱ってはいるものの，全く一般的に解析しているのではなく，あくまでもこのふたつの輸送形式に基づいて議論を進めている。したがって全流砂量が掃流砂量と浮遊砂量の和として表わされる点に変わりはない。第一章で述べたように従来の理論的研究は掃流砂について多く行なわれ，実測データーも豊富である。そこで本理論式の掃流砂に相当する部分を取り出し，従来の著名な掃流砂公式及び測定データーと比較しておくことは意味があるであろう。(2-50)式の掃流砂に相当する部分を抜き出すと次のようである。

$$q_{B*} = \frac{q_B}{u_* D} = \frac{\bar{u}}{u_*} f(\tau_*, \gamma) b \qquad (2\text{-}51)$$

ただし(2-39)式に戻ってγをパラメーターとして残している。(2-51)式は$\bar{u}/u_*$を係数として含んでいる。この値は平坦河床での実験では15~20程度になるので，図2-11に$\bar{u}/u_*=20$の場合を太い実線で示してある。比較に用いた諸公式は水理公式集昭和46年度版から写した。このうちEinstein式，佐藤吉川・芦田式は半理論式，他の三式は実験式である。また篠原・椿式，Brown式はτ_*が大きい範囲では浮遊砂の分も含んでいると言われている。図中の黒点はGilbert及び佐藤・吉

川・芦田の実験結果のうち平坦河床のデーターをプロットしたものである（文献(7)より）。ふたつの群に分かれているが，下の群は流砂量が少ない為に河床波が形成されない場合，上の群は河床波が吹き飛ばされて平坦となった場合（upper regime）と思われる。上の群では浮遊砂が相当量含まれているはずで，掃流砂自体はこれより少ないものと思われる。

平坦河床の場合，従来の式は佐藤・吉川・芦田式を除いては g_{B*}～τ_* 面でそれぞれ一本の曲線となる。一方本理論式は γ の値（$0<\gamma\leq 1$）によって異なる。測定データーはかなりの範囲に散らばっており，g_{B*} は τ_* のみの関数とは言えないようである。特に流砂量が少ない場合にはバラツキが大きく，γ に代表されるような河床上の粒子の配列具合が影響を及ぼしているものと推測される。本論文では γ の値を具体的に定める所までは到っていないが，このような形で整理することにより将来さらに精度を向上させる可能性を持っていると言える。

なお次章では γ の値の違いが結果に影響を及ぼさない領域について測定データーと比較し，理論の妥当性を検討する。

§.6 まとめ

本章では全流砂量について理論的に検討し算定式を誘導した。解析においては，従来別個に取り扱われていた掃流・浮遊というふたつの輸送形式を同時に扱い流砂の系全体を統一的に記述することを主眼とした。

その結果はβという未定パラメーターを含んでいるが，掃流力が大きい所ではこの値の違いによる影響は小さいことが示された。また，従来の掃流砂理論では平坦河床の場合でも τ_*～Re_*面でデーターが散らばることを説明できなかったが，本理論ではβの変化（すなわち河床粒子の配列具合）でこれを説明できる可能性のあることが示唆された。また従来の浮遊砂理論では拡散係数が(w_0/u_*)に依存して変化することを説明することができなかったが，本理論では河床の存在の及ぼす影響としてこの効果が表われ，実測データーと比較した結果，良く一致することが示された。

数学的取り扱いを容易にする為に，一貫して鉛直方向に乱れが一様である条件のもとで解析を行なった。また，河床粒子に働く揚力を定式化する際に限られた実験結果を基礎とした為に，τ_*，Re_*に関して適用上の制約があるものと思われる。これらについては次章で検討を加える。

東工大・水理学研究室

付　録　……(2-6)式の誘導

より一般的に次の分布形について取り扱う。ラプラス分布はこの特別な場合にあたる。

$$g(\eta)=\begin{cases} g(0)\exp(-\mu\eta) & (\eta\geq 0) \\ \text{任　意} & (\eta<0) \end{cases} \qquad (2\text{-}57)$$

次の密度関数を考える。

$$g_1(\eta)=\begin{cases} g(-\eta)-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{dg(\eta)}{d\eta} & (\eta\geq 0) \\ 0 & (\eta<0) \end{cases} \qquad (2\text{-}58)$$

上式の両辺に$\exp(-\mu\eta)$を乗じて$(-\gamma,\infty)$で積分すると，$\eta\geq 0$の時は

$$\int \exp(-\mu\eta)\left\{g(-\eta)-\frac{1}{\mu}\frac{dg(-\eta)}{d\eta}\right\}d\eta$$

$$=-\frac{1}{\mu}\exp(-\mu\eta)\cdot g(-\eta)$$

の関係から

$$\int_{-\gamma}^{\infty}\exp(-\mu\eta)\,g_1(\eta)\,d\eta=\left[-\exp(-\mu\eta)\cdot g(-\eta)\right]_{Z}^{\infty} \qquad (2\text{-}59)$$

ここに Z は，$y \geq 0$ の時 $Z=0$，　$y<0$ の時 $Z=-y$．

したがってそれぞれの場合について考えると (2-59) 式の右辺は

$y \geq 0$ について

$$\frac{1}{\mu} g(0) = \frac{1}{\mu} \exp(\mu y) \cdot g(0) \exp(-\mu y)$$

$$= \frac{1}{\mu} \exp(\mu y) \cdot g(y)$$

$y<0$ について

$$\frac{1}{\mu} \exp(\mu y) \cdot g(y)$$

したがって

$$\int_{-y}^{\infty} \exp(-\mu y) \cdot g_1(\eta) d\eta = \frac{1}{\mu} \exp(\mu y) \cdot g(y)$$

これより

$$g(y) = \mu \exp(-\mu y) \int_{-y}^{\infty} \exp(-\mu\eta) g_1(\eta) d\eta$$

$$= \mu \exp(-\mu y) \int_{-\infty}^{y} \exp(\mu\eta) g_1(-\eta) d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \mu \exp\{-\mu(y-\eta)\} g_1(-\eta) d\eta$$

ここで簡単の為に指数 μ の指数分布を e_μ と書く。すなわち

$$e_\mu(\gamma) = \begin{cases} \mu \exp(-\mu\gamma) & (\gamma \geq 0) \\ 0 & (\gamma < 0) \end{cases} \qquad (2\text{-}61)$$

$g_1(-\gamma)$ を $g_2(\gamma)$ とおくと，(2-61)式は e_μ と g_2 の convolution integral となっている。これを次のように書くことにする。

$$g = e_\mu * g_2 \qquad * \text{ convolution integral} \qquad (2\text{-}62)$$

一方(2-4)式は

$$f = \pi[f * g] = \pi[f * e_\mu * g_2] = \pi[g_2 * (f * e_\mu)] \qquad (2\text{-}63)$$

上式の解を次の形に仮定する。

$$f = \alpha \cdot \varepsilon + (1-\alpha) e_\theta \qquad (2\text{-}64)$$

ここに α は係数，ε はデルタ関数で表わされる密度分布，e_θ は指数が θ の指数分布である。これより

$$f * e_\mu = \alpha\varepsilon * e_\mu + (1-\alpha) e_\theta * e_\mu$$

$$= \frac{(\alpha\mu - \theta) e_\mu + (1-\alpha)\mu e_\theta}{\mu - \theta} \qquad (2\text{-}65)$$

以上の結果から

$$g_2 * f * e_\mu = \frac{\alpha\mu-\theta}{\mu-\theta} g_2 * e_\mu + \frac{(1-\alpha)\mu}{\mu-\theta} g_2 * e_\theta \qquad (2\text{-}66)$$

さて，任意の指数分布に対して

$$g_2 * e_\lambda = \int_{-\infty}^{y} \lambda \exp\{-\lambda(y-\eta)\} g_2(\eta) d\eta$$

$$= \lambda \exp(-\lambda y) \int_{-y}^{\infty} \exp(-\lambda\eta) g_1(\eta) d\eta \qquad (2\text{-}67)$$

$$\because g_2(\eta) = g_1(-\eta)$$

ここで $\eta<0$ では $g_1(\eta)=0$ であることを考えれば，$y>0$ の時積分範囲は $(0,\infty)$ となり，積分項は定数となる。したがって関数形は指数関数となる。また，

$$\int_0^\infty g_2 * e_\lambda dy = \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda y) dy \cdot \int_0^\infty \exp(-\lambda\eta) g_1(\eta) d\eta$$

$$= L_\lambda\{g_1\} \qquad (2\text{-}68)$$

ここに $L_\lambda\{\ \}$ は $\{\ \}$ 内の関数を λ について Laplace 変換することを意味する。このことから

$$\int_{-\infty}^{0} g_2 * e_\lambda dy = 1 - L_\lambda\{g_1\} \qquad (2\text{-}69)$$

(2-3) 式の $\pi\{\ \}$ の定義から

$$\pi[g_2 * e_\lambda] = [1 - L_\lambda\{g_1\}]\cdot\varepsilon + L_\lambda\{g_1\}\cdot e_\lambda \qquad (2\text{-}70)$$

(2-66) 式に π を作用させ上の関係を用いて整理すると次のようになる.

$$\pi[g_2 * f * e_\mu]$$

$$= \left[\frac{\alpha\mu-\theta}{\mu-\theta}[1 - L_\mu\{g_1\}] + \frac{(1-\alpha)\mu}{\mu-\theta}[1 - L_\theta\{g_1\}]\right]\cdot\varepsilon$$

$$+ \frac{\alpha\mu-\theta}{\mu-\theta}L_\mu\{g_1\}\cdot e_\mu + \frac{(1-\alpha)\mu}{\mu-\theta}L_\theta\{g_1\}\cdot e_\theta \qquad (2\text{-}71)$$

(2-64) 式と (2-71) 式が等しくなるには

$$\alpha = \frac{\theta}{\mu} \qquad (2\text{-}72)$$

$$1-\alpha = 1-\frac{\theta}{\mu} = L_\theta\{g_1\} \qquad (2\text{-}73)$$

(2-73) 式の根となる θ についての $L_\theta\{g_1\}$ を ω とおくと

$$\theta = \mu(1-\omega) \qquad (2\text{-}74)$$

これを代入すると

$$f = (1-\omega)\cdot\varepsilon + \omega\, e_{\mu(1-\omega)}$$

普遍に表記すると次頁のようになる.

$$f(y) = (1-\omega)\delta(y) + \omega(1-\omega)\mu \exp\{-\mu(1-\omega)y\} \qquad (2\text{-}75)$$

(2-5) 式の Laplace 分布の場合は $\mu = \sqrt{2}/\sigma$ なので (2-6) 式を得る。また多少の演算の後,

$$L_\theta\{g_1\} = \frac{1}{1+\frac{\theta}{\mu}} \exp(-\theta\gamma_0)$$

となるので (2-73) 式に代入して

$$\frac{1}{1+\frac{\theta}{\mu}} \exp(-\theta\gamma_0) = 1 - \frac{\theta}{\mu}$$

(2-74) 式を代入すれば

$$\omega(2-\omega) = \exp\left\{-\sqrt{2}(1-\omega)\frac{\gamma_0}{\sigma}\right\} \qquad (2\text{-}7)$$

Time
1 sec
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
y/D

Fig 2-1

Fig 2

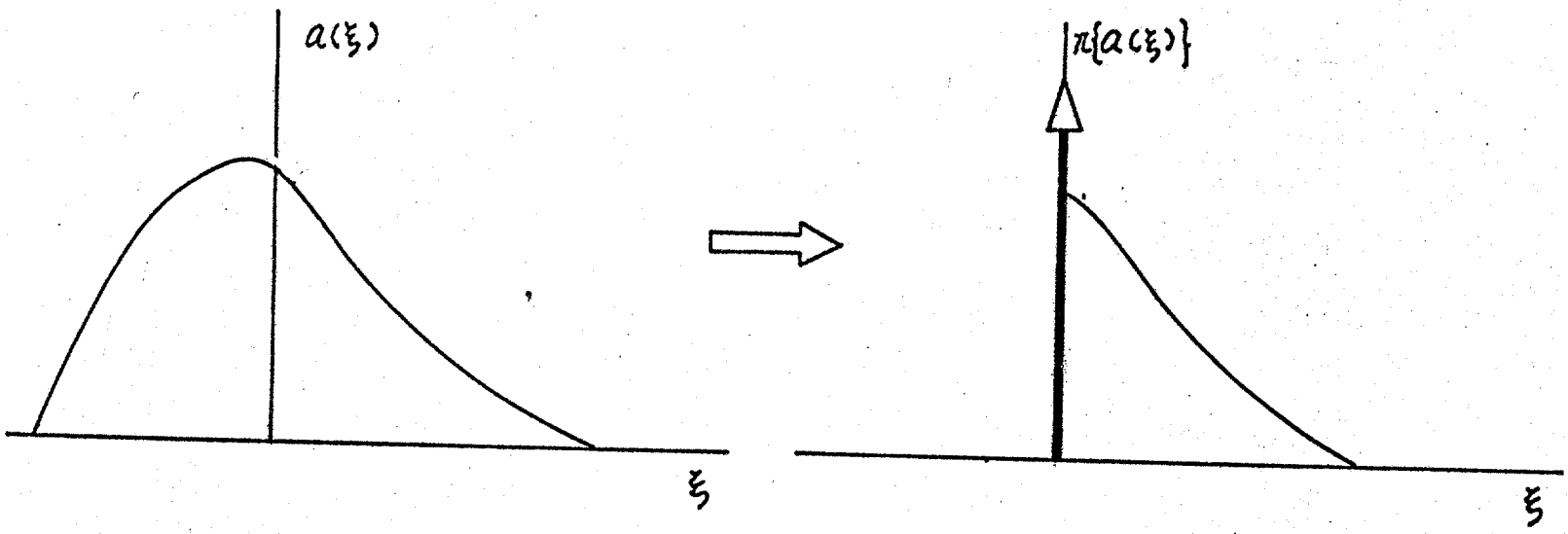


Fig 2-4

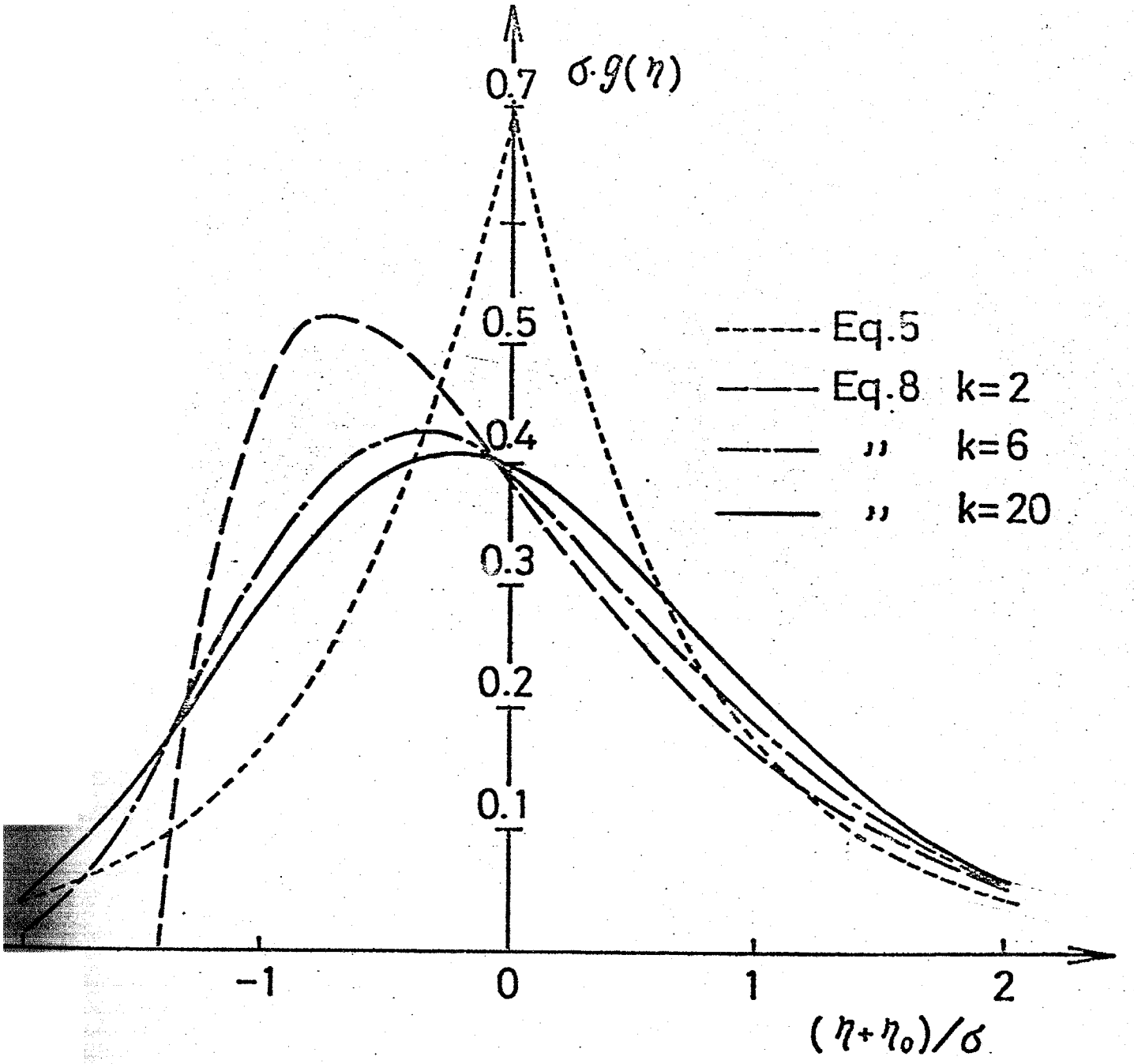


Fig 2-5

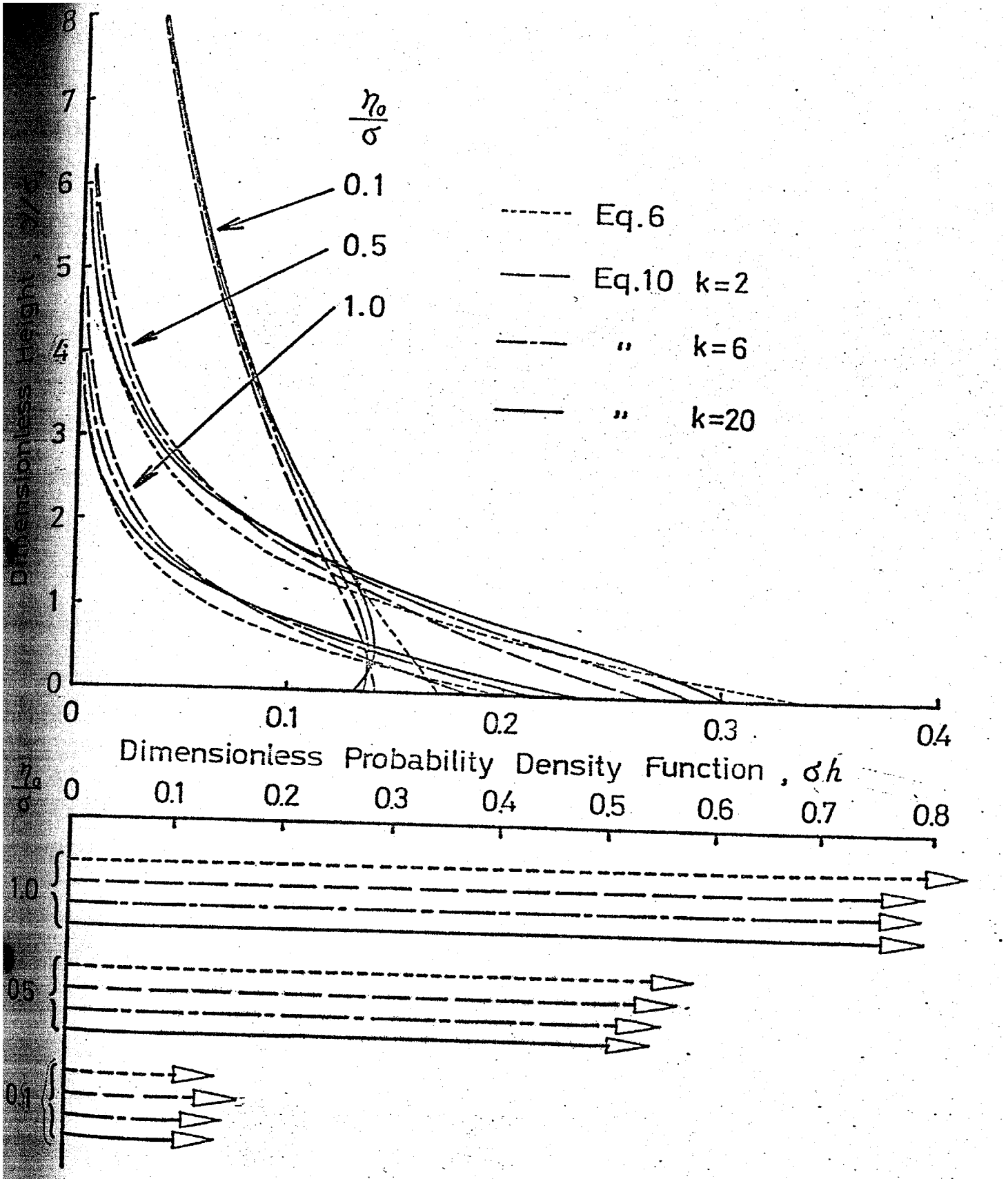

Dimensionless Probability Density Function , σh
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
1
2
3
4
5
6
7
8
η₀/σ
0.1
0.5
1.0
Eq.6
Eq.10 k=2
" k=6
" k=20

Fig 2-6

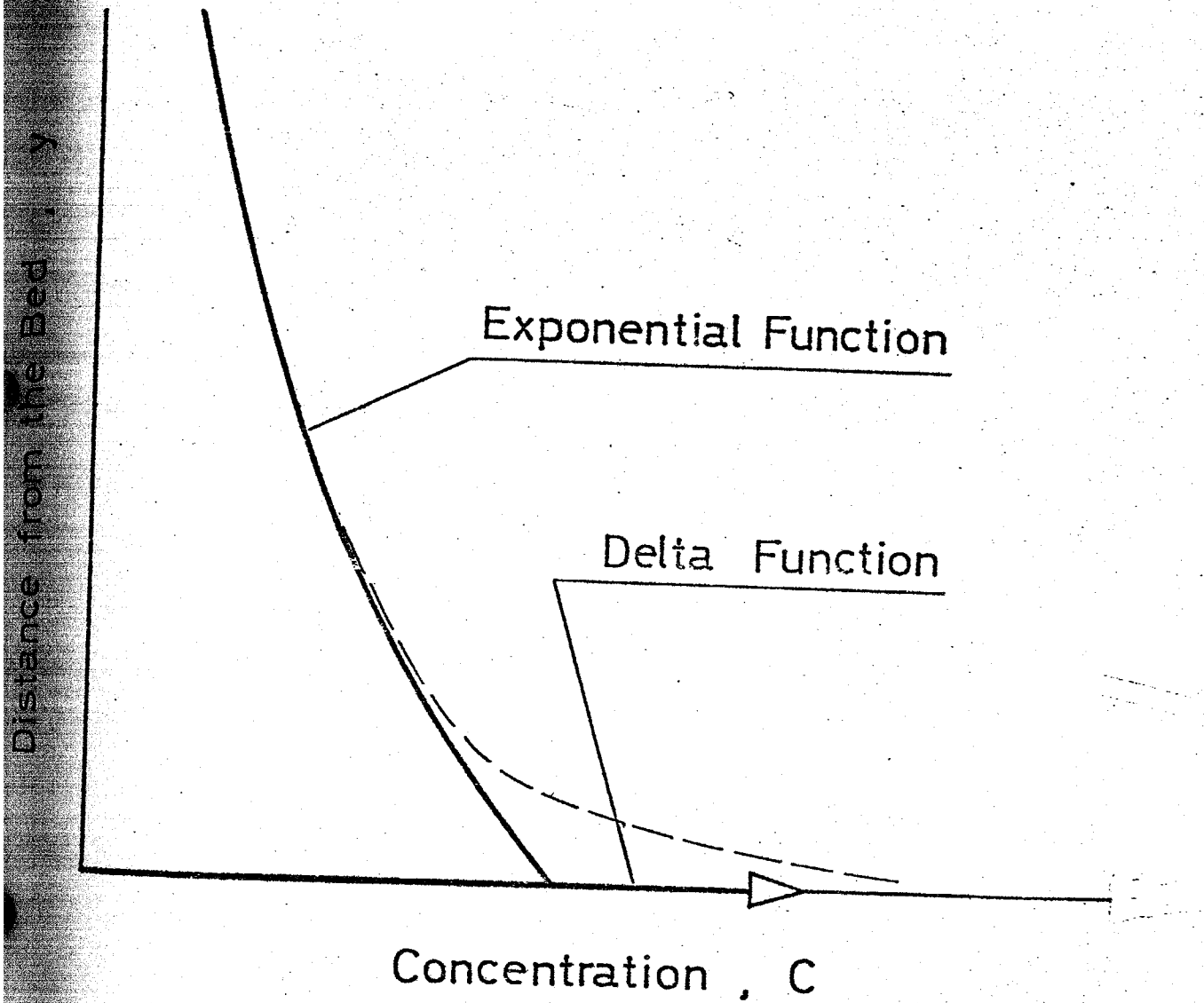

Distance from the Bed , y
Exponential Function
Delta Function
Concentration , C

Fig 2-7

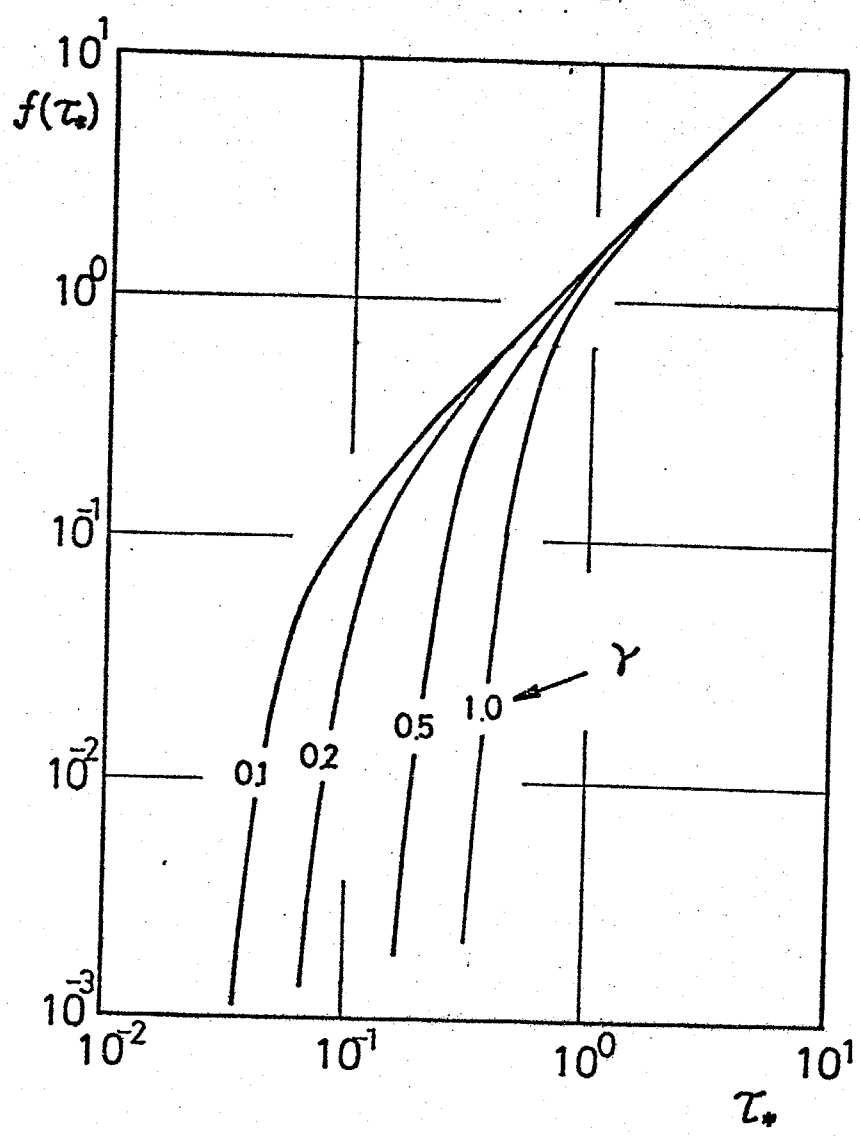


Fig 2-8

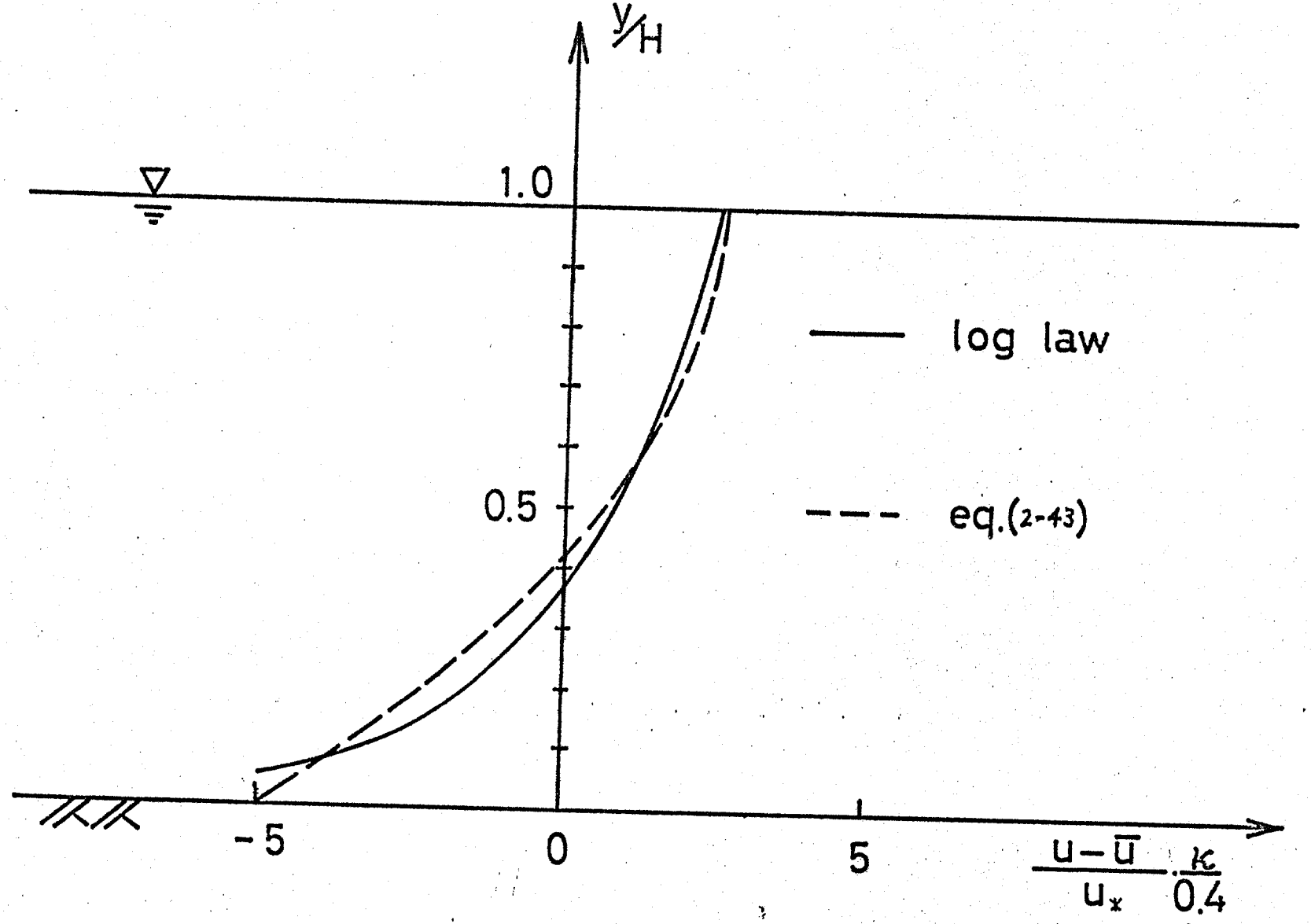


図 2-9

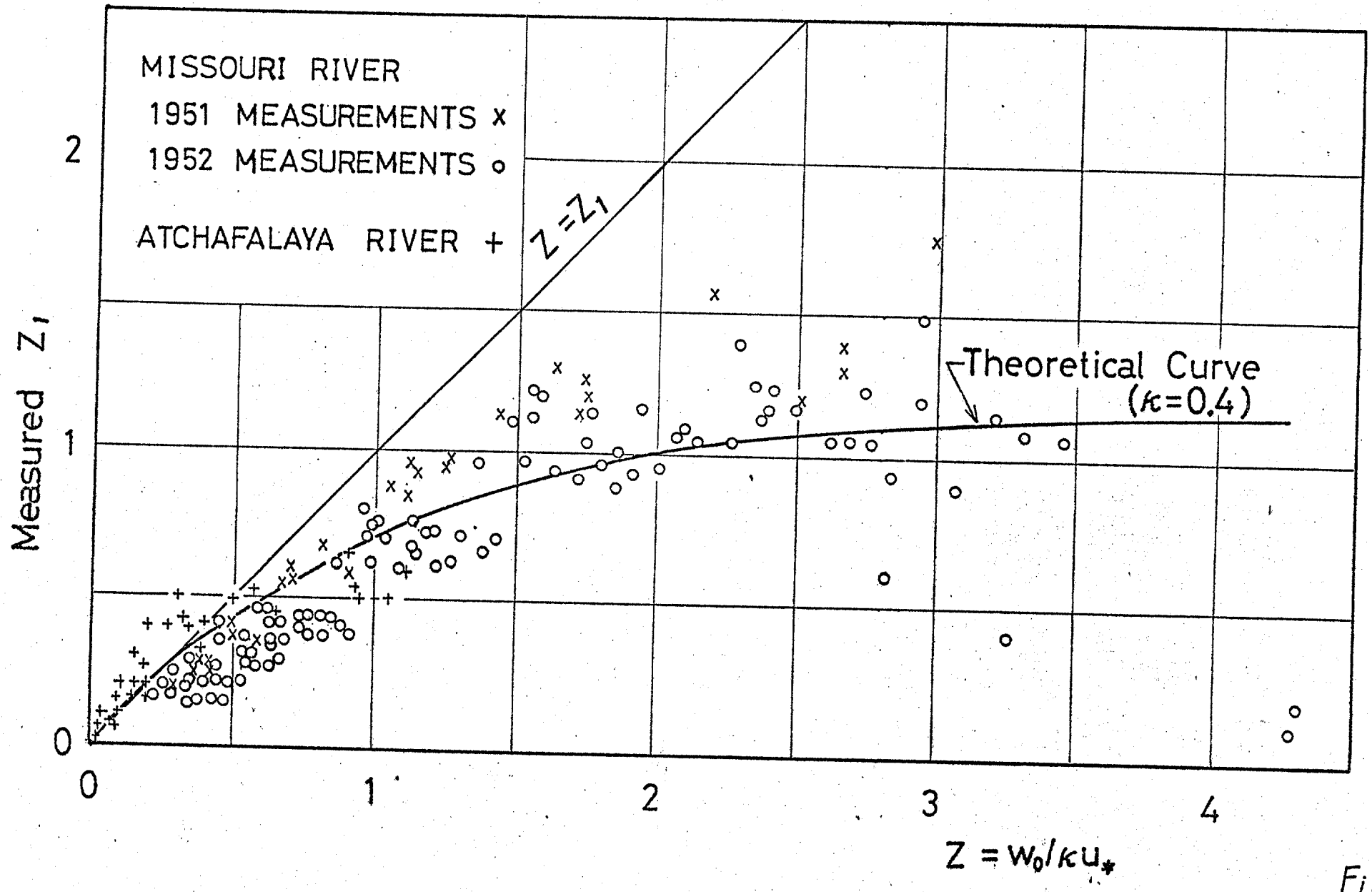

MISSOURI RIVER
1951 MEASUREMENTS x
1952 MEASUREMENTS o
ATCHAFALAYA RIVER +
Z=Z1
Theoretical Curve
(κ=0.4)
Measured Z1
Z = w0/κu*
0
1
2
3
4

Fig. 2-10

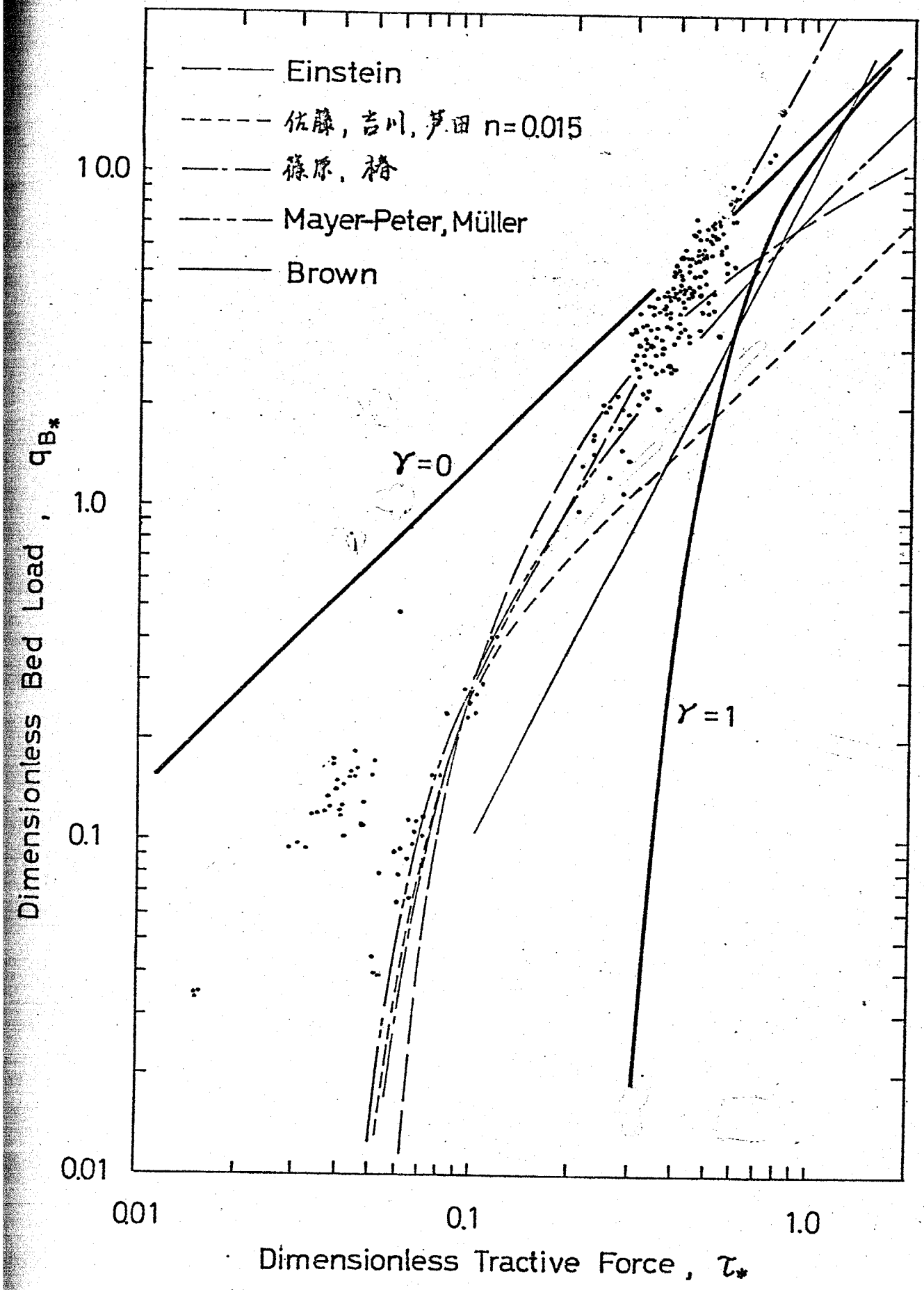

Einstein
佐藤，吉川，芦田 n=0.015
篠原，椿
Mayer-Peter, Müller
Brown
γ=0
γ=1
10.0
1.0
0.1
0.01
0.01
0.1
1.0
Dimensionless Bed Load , q_{B*}
Dimensionless Tractive Force , τ_*

Fig. 2-11

REFERENCE

(1) Chepil,W.S.," The Use of Spheres to Measure Lift and Drag on Wind-Eroded Soil Grains," Proc. Soil Science Society of American, vol. , 1961, pp.343-345.

(2) 吉川秀夫，石川忠晴，"浮遊砂濃度分布のラグランジュ的取り扱いについて——一様乱流の場合，"第20回水理講演会論文集，1976，pp.65-69.

(3) 吉川秀夫，石川忠晴，"流砂運動のモデル化とそれに基づく流砂量の算定法について，"土木学会論文報告集，第269号，1978年1月，pp.25-36.

(4) Kingman,J.F.," On the Algebra of Queues," Journal of Applied Probability, vol.3, No.2, Dec., 1966, pp.285-326.

(5) Lindley,D.V.," The Theory of Queues with Single Server," Proc. Cambridge Philosophical Society, vol.48, 1952, pp.272-289.

(6) 本間鶏子代，"待ち行列の理論，"理工学社.

東工大．水工学研究室

(7) McNown,J.S. and Malaika,J.," Effects of Particle Shape on Settling Velocity at Low Reynolds Number," Trans. A.G.U., vol.31, No.1, 1950 pp.74-82.

(8) 椿東一郎，"乱流中における砂泥の運動について，" 九大流体力学研究所報告，第7巻，第4号，1951，pp.39-50.

(9) 石原藤次郎，本間仁編，"応用水理学中II，" 丸善，pp.361-362

(10) 佐藤清一，吉川秀夫，芦田和男，"河床砂礫の掃流運搬に関する研究(1)，建設省土木研究所報告，第98号，1957，pp.13-30.

(11) Einstein,H.A. and El-Samni,E.A.," Hydrodynamic Forces on a Rough Wall," Review of Modern Physics, vol.21, No.3, July, 1949, pp.520-524.

(12) Chepil,W.S.," Equilibrium of Soil Grains at the Threshold of Movement by Wind," Proc. of Soil Science Society of American, vol.23, 1959, pp.422-428.

(13) Chepil,W.S.," The Use of Evenly Spaced Hemispheres to Evaluate Aerodynamic Forces on a Soil Surface," Trans. A.G.U., vol.39, 1958, pp.397-404.

(14) Lane,E.W. and Kalinske,A.A.," Engineering Calculations of Suspended Sediment, Trans. A.G.U., vol.22, 1941, pp.603-607.

(15) Coleman,N.L.," Flume Studies of the Sediment Transfer Coefficient," Water Resources Research, vol.6, No.3, 1970, pp.801-809.

(16) Einstein,H.A. and Chien,N.," Second Approximation to the Solution of the Suspended Load Theory," M.R.D. Sediment Series, No.3,Corps of Engineers, Missouri River Division, Omaha, Nebraska, Jan.,1954.

(17) Nakagawa,h. and Nezu,i.," On a New Eddy Model in Turbulent Shear Flow," J.S.C.E., No.231, Nov., 1974, pp.61-70.

(18) 板倉忠興，岸　力，中山隆，"開水路における乱れの測定"，第29回土木学会年講，1974，PP.388-389

(19) 渡辺訓甫，小松利光，古屋慶一，"開水路における乱れ特性量について(2)" 第29回土木学会年講，1974，pp. 378-379

(20) Einstein,H.A. and Chien,N.," Second Approximation of the Suspended Load Theory," Univ. Calif. Inst. Eng. Res., No.3, 1954.

第三章

水路実験データーによる全流砂量算定式の検討

§1　平均濃度及び全流砂量　110

§2　鉛直濃度分布　114

§3　まとめ　118

§.1 平均濃度分布及び全流砂量

1956年から61年にかけて米国のGeological Surveyで流砂量に関する大規模な実験が行なわれた。その結果を用いて理論の妥当性を検討する。実験はふたつの水路で行なわれた。一般的な実験は主に幅8feet, 深さ2feet, 長さ150feetの大型水路で行なわれた。また幅2feet, 深さ2.5feet, 長さ60feetの水路で, 粒度分布の相違, 温度の相違, wash loadの混入, などが流砂量に与える効果を調べる為の特殊な実験が行なわれた。河床材料は河川から採取され, 水洗, ふるい分けによって適当に粒度調整されたものである。339種の条件下で測定がなされているが, そのうち流砂量が少ないケースとwash loadの混入されたケースを除いた167ケースについて解析をした。使用された河床材料の特性と解析したケースの水理量の範囲を表3-1に示す。(1)

理論値を(2-49), (2-50)式から算定する際には, 粒度分布が流砂量に及ぼす影響を考慮して, 図3-1に示すように各材料を三つに区分し, それぞれの中央粒径(D_{16}, D_{50}, D_{84})を代表粒径として計算した後にたし合わせた。またカルマン定数は原論文に値が示されていないので, 0.4として計算した。

平均濃度の測定値と計算値を図3-2に比較する。白抜きの

記号は比較的小さい粒子を，黒塗りの記号は比較的大きい粒子を示している。全体的には広範囲の濃度について良く一致していると言える。しかし低濃度の部分で粒径による差が見られ，大きな粒子については過少に，小さな粒子については過大に見積もる傾向が見られる。これは前章の§5-aで述べた本理論適用上の制約に関係していると思われる。そこで今許容誤差を次のようにおき，

$$\frac{1}{2.5} < \frac{\text{計算値}}{\text{測定値}} < 2.5 \qquad (3-1)$$

この範囲に入らないケースをτ_*~Re_*面で識別すると図3-3のようになる。ここに(×)は計算値が過少の場合，(●)は過大の場合である。この図から(3-1)式の範囲では適用限界を次のように言くことができる。

$$Re_* \geq 7.5 \quad , \quad \tau_* > 0.3 \qquad (3-2)$$

図3-4は同じデーターを河床形態別にプロットしたものである。本理論は平坦河床について立てられたものであるので，河床波が在る場合には平坦河床に較べて点のバラツキが大きくなっている。特にDunesの場合は平均的に大きめに算定する傾向が見られる。しかし従来の掃流砂関数で問題とされるほどの誤差は生じていない。この点について検討する。図3-

なお図3-8はq_*とτ_*の関係をプロットしたものである。図中の記号は図3-4と同じく河床形態について分類してある。ただし(2-50)式は次のように三つの独立変数を含んでいるので，それぞれの砂粒子毎に三種の$\bar{u}/u_*$について理論曲線を引いてある。

$$q_* = f_{mc}(\tau_*, \bar{u}/u_*, w_0/(\rho_s/\rho-1)gD) \qquad (3-3)$$

また各Runの$\bar{u}/u_*$の値をlower regime(●×)とupper regime(◎,○,△,⊖,⊕)について平均した値を示してある。regimeが異なると抵抗係数が変化する為に，測定値が別の理論曲線に遷移することがわかる。遷移のしかた及び対応するτ_*の値は粒径によって異なっている。細かい砂(Sand A)では遷移が明瞭であるが，粗くなるにつれてregimeによる差が小さくなり，且つ遷移点に対応するτ_*の値が小さくなっている。

このようにregimeの違いによってq_*~τ_*面において実測データーが不連続的に変化することは既に良く知られている。従来はこのような不連続性を説明するのに有効掃流力(この算定法にはいろいろあるが)という概念が仮れられている。流砂量は(運動状態にある砂量)×(輸送速度)と表わされるが，有効掃流力を用いて整理すると，regimeの違いによる流砂量の変化を主に前者の変化としてとらえることになると思

れる。なぜならば多くの理論では輸送速度が摩擦速度の一乗に比例するとしているのに対し，遷動状態にある砂量はその二乗（実際には限界掃流力を差し引くからさらに高次数に相当するが）に比例するとされているからである。

ところで本理論では（平坦河床について立てられているから）輸送速度の変化のみが考慮されている。すなわち，抵抗係数が増えると流砂が集中している河床近傍の流速が減少する。この為輸送速度の摩擦速度に対する比が減少し，同じ掃流力が働いても流砂量は少ない。もちろん実際にはどちらのファクターも変化するのであるが，図3-5～図3-8を見る限りにおいては，輸送速度の変化を考慮すれば，従来有効掃流力を用いてなされているほどの大幅な補正は必要なくなると考えられる。

§.2 鉛直濃度分布.

前節では流砂総量について定量的に検討し，前章の理論結果が妥当な値を与えることを明らかにした．次に理論が総量だけでなく内部についても適切に表わしているかどうかを調べる為に，浮遊部分の鉛直濃度分布について実測値と比較し検討を加える．

a 乱れ強度分布が一様に近い場合

前章では乱れの性質が鉛直方向に一様な条件のもとで解析を行なった。そこでそれに近い条件で実験を行ない理論結果との比較を行なった。

i) 実験装置

図3-9に実験装置を示す。鉛直方向に乱れを一様にする為に，水深に対して水路幅を小さくとりさらに側壁に粗度を塗り付けた。水路全体を大型水路に水没させ，周囲の水を小型ポンプで汲み上げて循環させた。入口の乱れで粒子が過度に舞い上がらないように，ビニール屑をつめた領域（上流側斜線部）に水を落とした。観測部は十分平衡に達していると思われる下流端に近い部分に設けた。

水路床材料は発泡スチロールの原料である白色のプラスチックビーズを用いた。この粒子の特性を表3-2に示す。

ii) 測定方法

水流の平均流速及び乱れ強度を，水路中心面内の上下方向四点について，羽の径2.5mmの小型プロペラ流速計を用いて測定した。

ガラス製の観測窓の側方から写真撮影し，その粒子個数を数えて濃度分布を算定した。濃度は変動するので各Runについて数枚撮映した。

流速測定と写真撮映を併行して行ない，終了後に水面勾配をポイントゲージで測定した。

(ii) 実験結果

測定された諸量及びそれから算定された諸量を表3-3に示す。

図3-10はプロペラ流速計によって測定された平均流速，図3-11は乱れ強度分布である。幅の広い開水路に較べて鉛直方向に一様な状態がつくられていることがわかる。

図3-12，図3-13は写真から判読された濃度分布である。各写真から求めたので同一測点について複数の値がある。図中の実線は(2-13)式である。ただし(2-34)式のdはこの場合水路幅の½となる。また$\sqrt{v^2}$は実測された乱れ強度の平均値を用いた。カルマン定数κはこの場合横断方向の流速分布から決定されるはずのものであるが，横断方向の流速分布は測定が困難であるので行なわなかった。横断方向には重力が働かないから粒子を中立浮遊子としてカルマン定数の変化を考えると，Erata & Ippenの実験結果からみて本実験での濃度では0.4として差し支えないと考えられる。

測定値と理論値はどちらのRunについても良く一致しており，本理論の妥当性が示された。

b. 二次元開水路流

図3-14はFukuoka & Kikkawa[2]の実験結果と(2-46)式とを比較したものである。河床面近くを除いて理論値と測定値は良く一致していると言える。河床付近で理論値が測定値を下まわるのは理論式の表示法に原因があるものと思われる。すなわち，本理論では掃流状態の砂粒子濃度をデルタ関数で表わしているが，実際には或る範囲に広がっているはずであり，実験ではこれを浮遊分として測定するものと推測される。これを確めるには全流砂量又は平均濃度について比較してみればよい。図3-9には平均濃度$\bar{C}_T$を示してあるが，理論値と測定値はかなり良く一致している。このことから河床近傍の高濃度の部分は本理論のデルタ関数に対応していると考えられる。

図3-15，図3-16はVanoni[3][4]の測定した濃度分布形（河床から0.05dの高さの濃度で基準化してある）と本理論の分布形を比較したものである。この図はもともとRouseの分布形の妥当性の検証として発表されたものであるが，本理論の関数形でも底付近を除けば極めて良く一致することがわかる。

以上の結果から，乱れの性質が鉛直方向に一様であるとして導いた本理論の濃度分布式は，開水路流においても十分適用し得ると考えられる。

§3 まとめ

本章では水路実験データーを用いて第二章の理論結果を定量的に検討した。その結果，従来の理論ではあまり検討されていなかった $\tau_* > 1.0$ の範囲まで良く算定し得ることが示された。また，見積もり誤差を2.5倍まで許容するとすれば，全流砂量算定式の適用範囲は次式で表わされる。

$$\tau_* > 0.3 \quad , \quad Re_* > 7.5$$

lower regime での流砂量の減少は従来は有効掃流という概念を用いて説明されてきた。しかし有効掃流力の算定法が便宜的な式である為に，それを用いた補正の物理的意味は明確ではない。本算定式では有効掃流力を用いなくても lower regime における流砂量の減少を表わすことができる。このことは本式が単に実用的であるというばかりでなく，lower regime の流砂量の減少の原因のひとつとして輸送速度の変化が重要であることを示していると思われる。

乱れが鉛直方向にほぼ一様な条件下で実験を行ない濃度分布について理論と比較したところ良く一致し，理論の妥当性が示された。また，ほぼ二次元的な開水路流での濃度分布のデーターとも比較したところ，この場合にも理論が良く適用し得ることが示された。

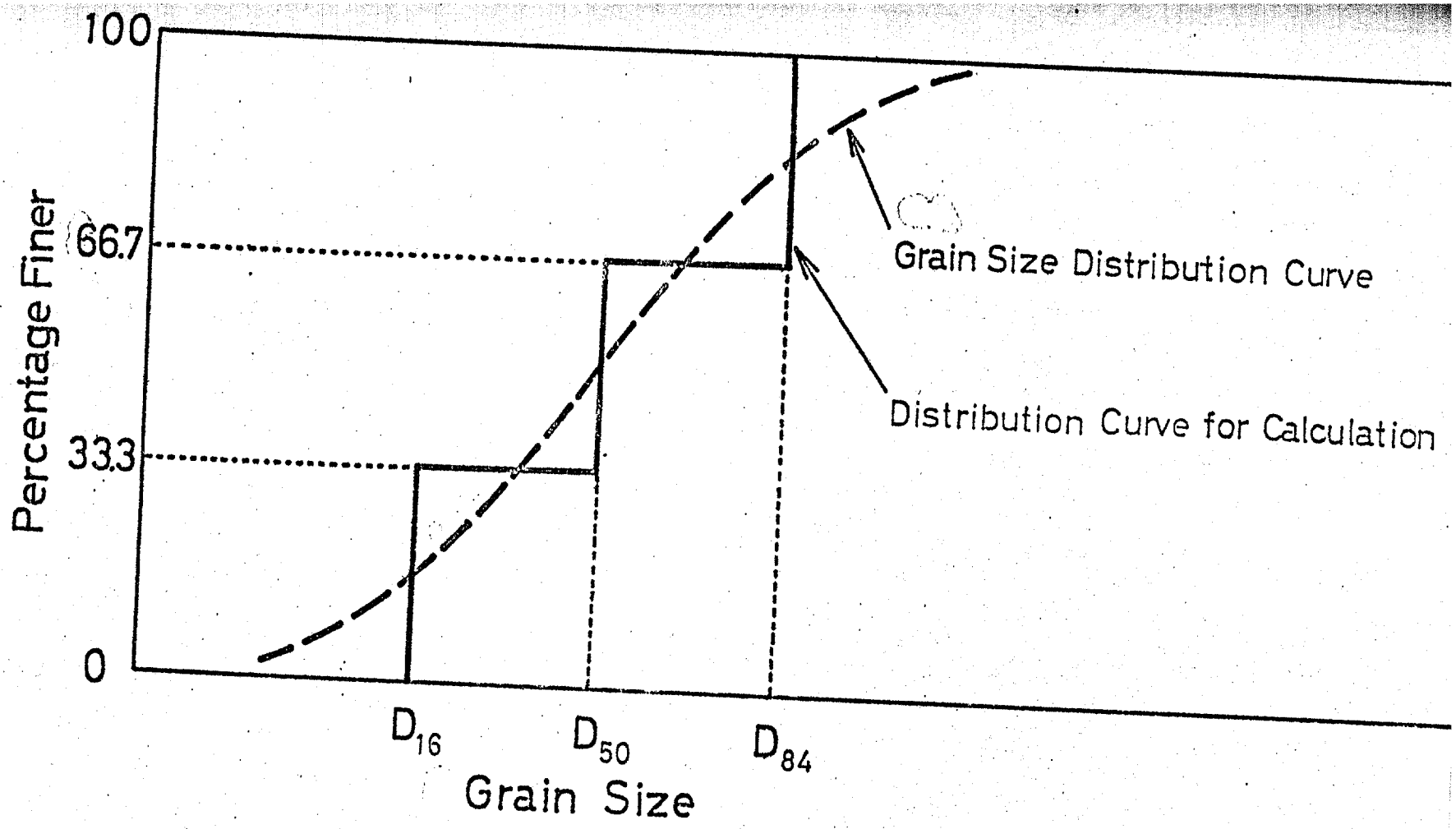

100
66.7
33.3
0
Percentage Finer
D_{16}
D_{50}
D_{84}
Grain Size
Grain Size Distribution Curve
Distribution Curve for Calculation

Fig 3-

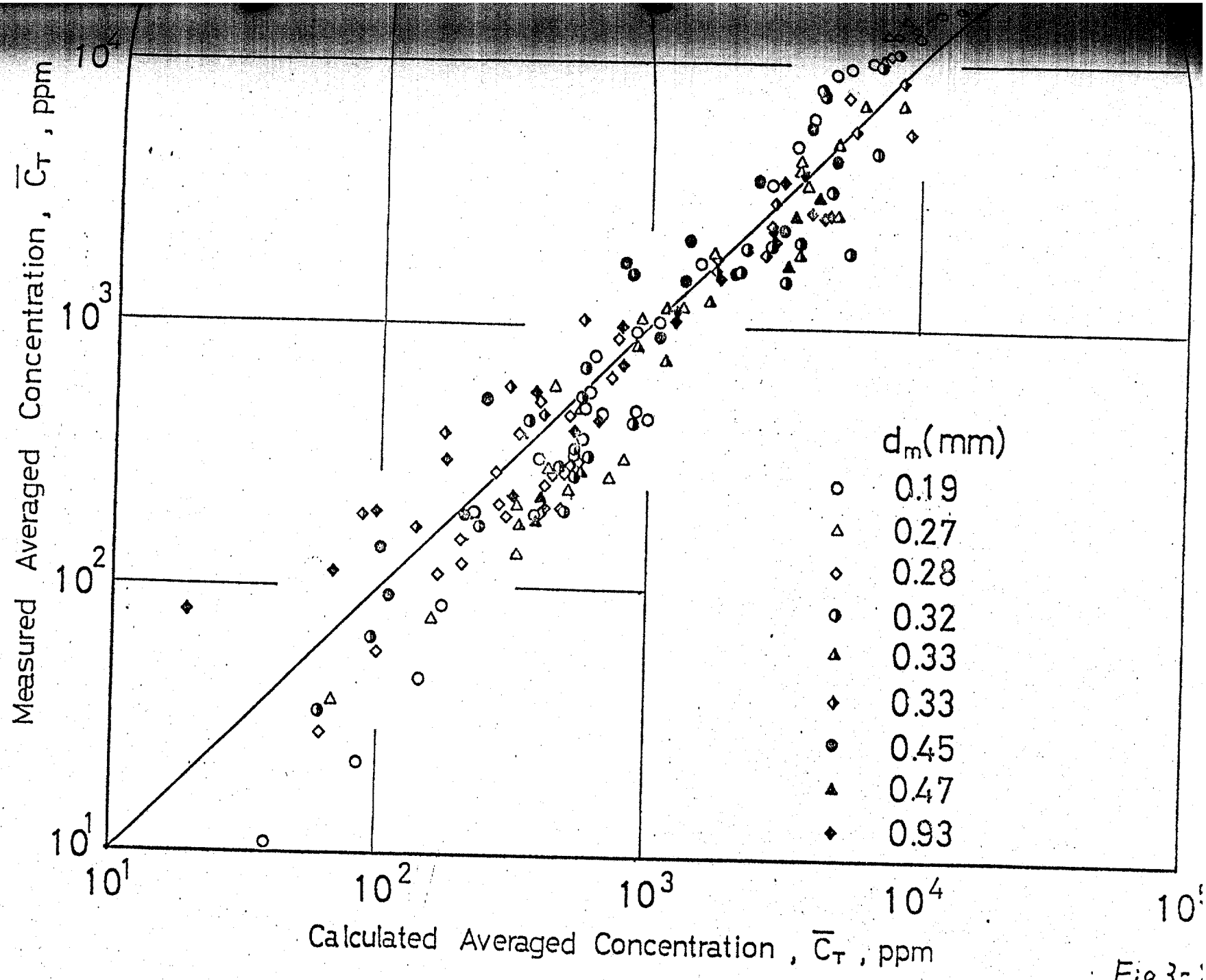
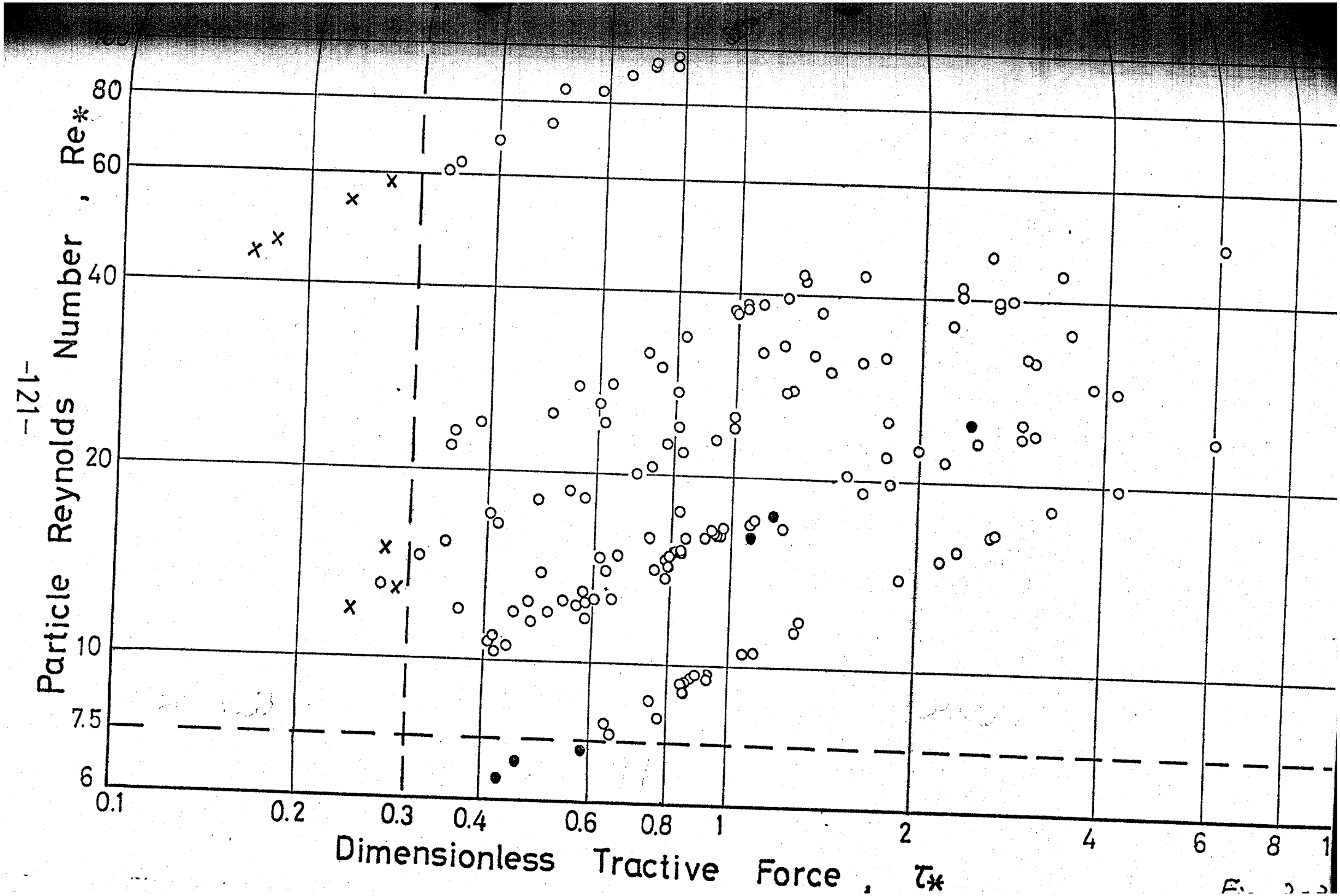

Measured Averaged Concentration , $\overline{C}_T$, ppm
10^4
10^3
10^2
10^1
10^1
10^2
10^3
10^4
Calculated Averaged Concentration , $\overline{C}_T$, ppm
d_m(mm)
0.19
0.27
0.28
0.32
0.33
0.33
0.45
0.47
0.93

Fig 3-


Particle Reynolds Number , Re*
80
60
40
20
10
7.5
6
0.1
0.2
0.3
0.4
0.6
0.8
1
2
4
6
8
Dimensionless Tractive Force , τ*

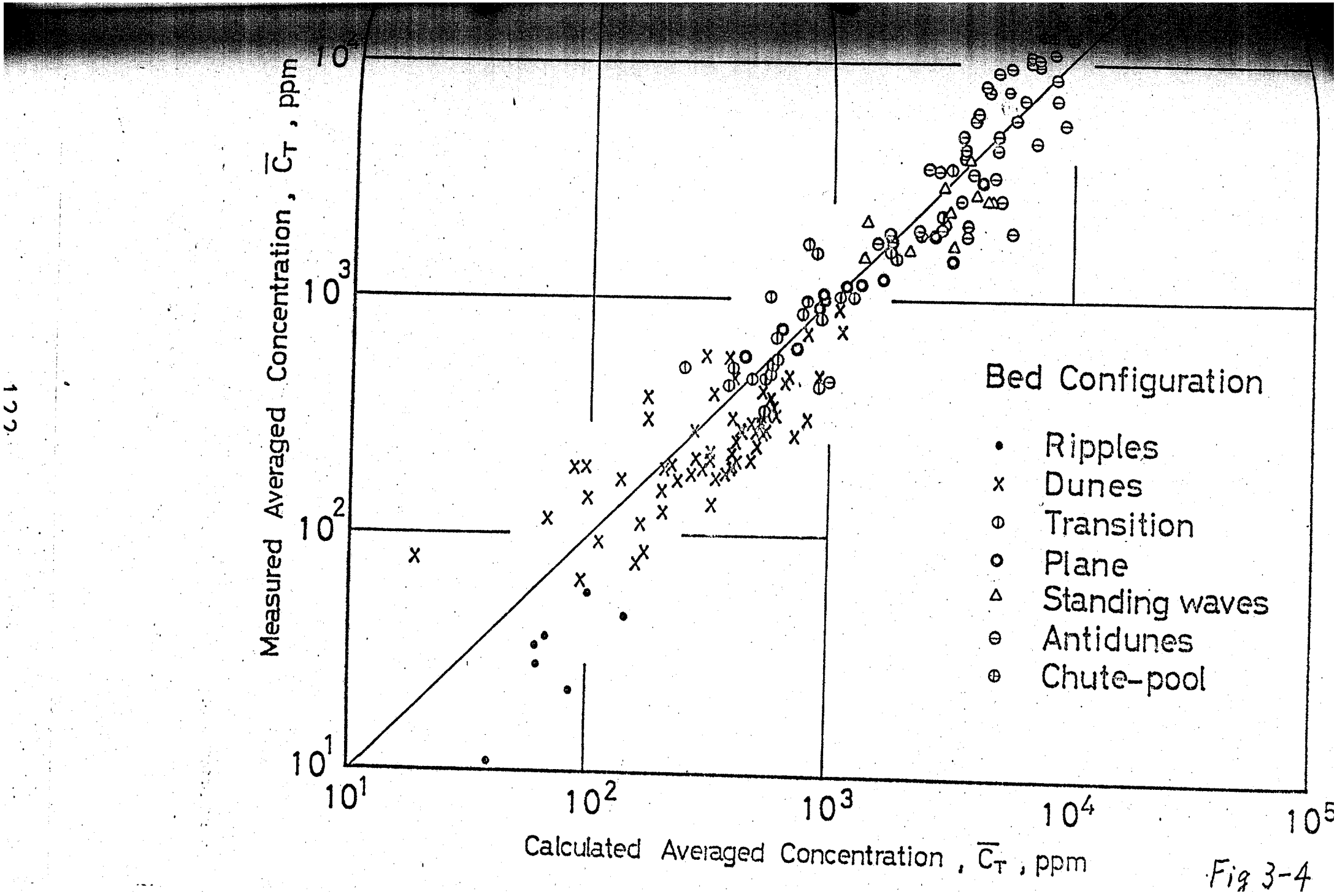

Measured Averaged Concentration , $\overline{C}_T$, ppm
10^4
10^3
10^2
10^1
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
Calculated Averaged Concentration , $\overline{C}_T$, ppm
Bed Configuration
Ripples
Dunes
Transition
Plane
Standing waves
Antidunes
Chute-pool

Fig 3-4

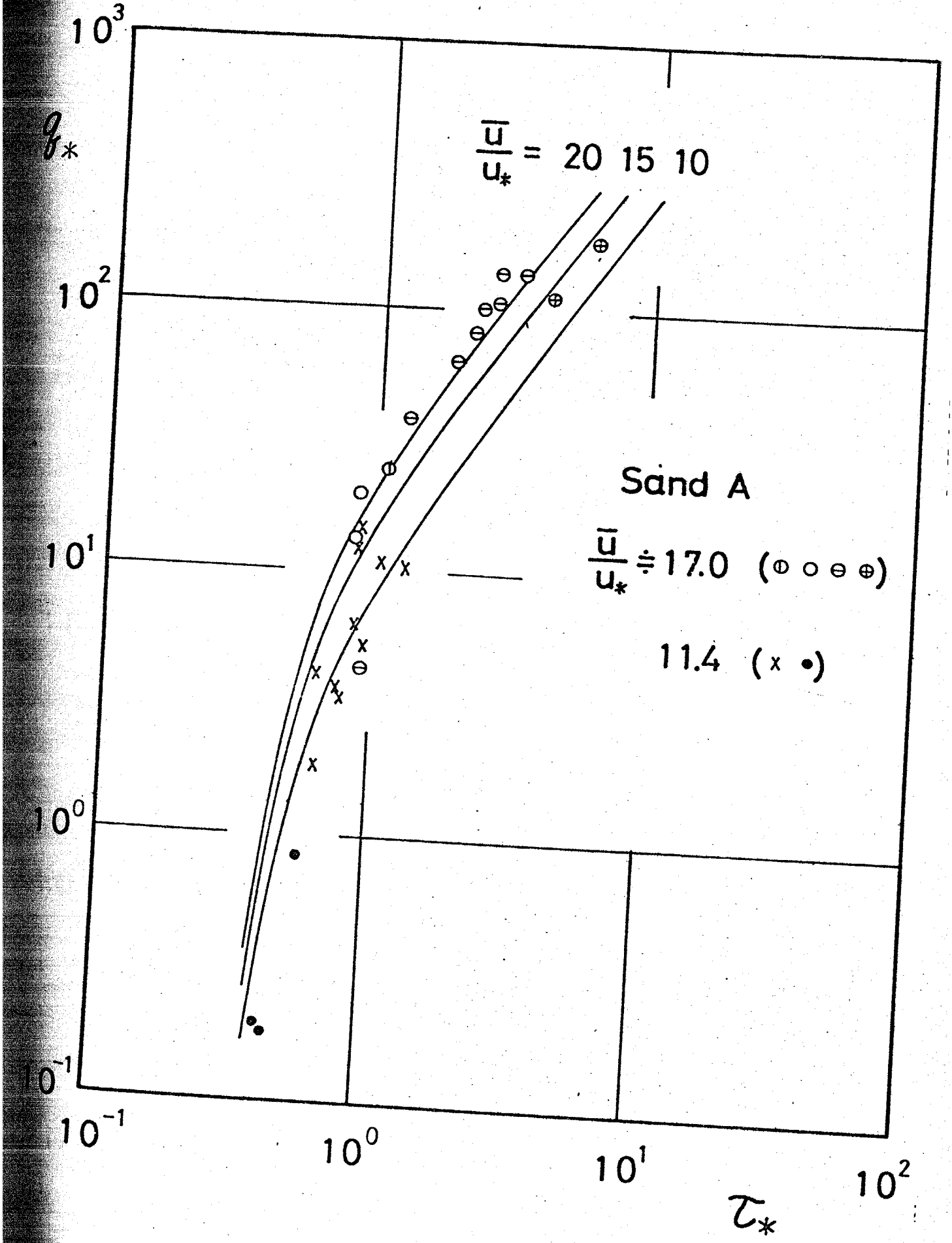

10^3
q_*
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
τ_*
$\frac{\bar{u}}{u_*}$ = 20 15 10
Sand A
$\frac{\bar{u}}{u_*} \fallingdotseq 17.0$ (⊕ ○ ⊖ ⊕)
11.4 (× •)

Fig. 3-5

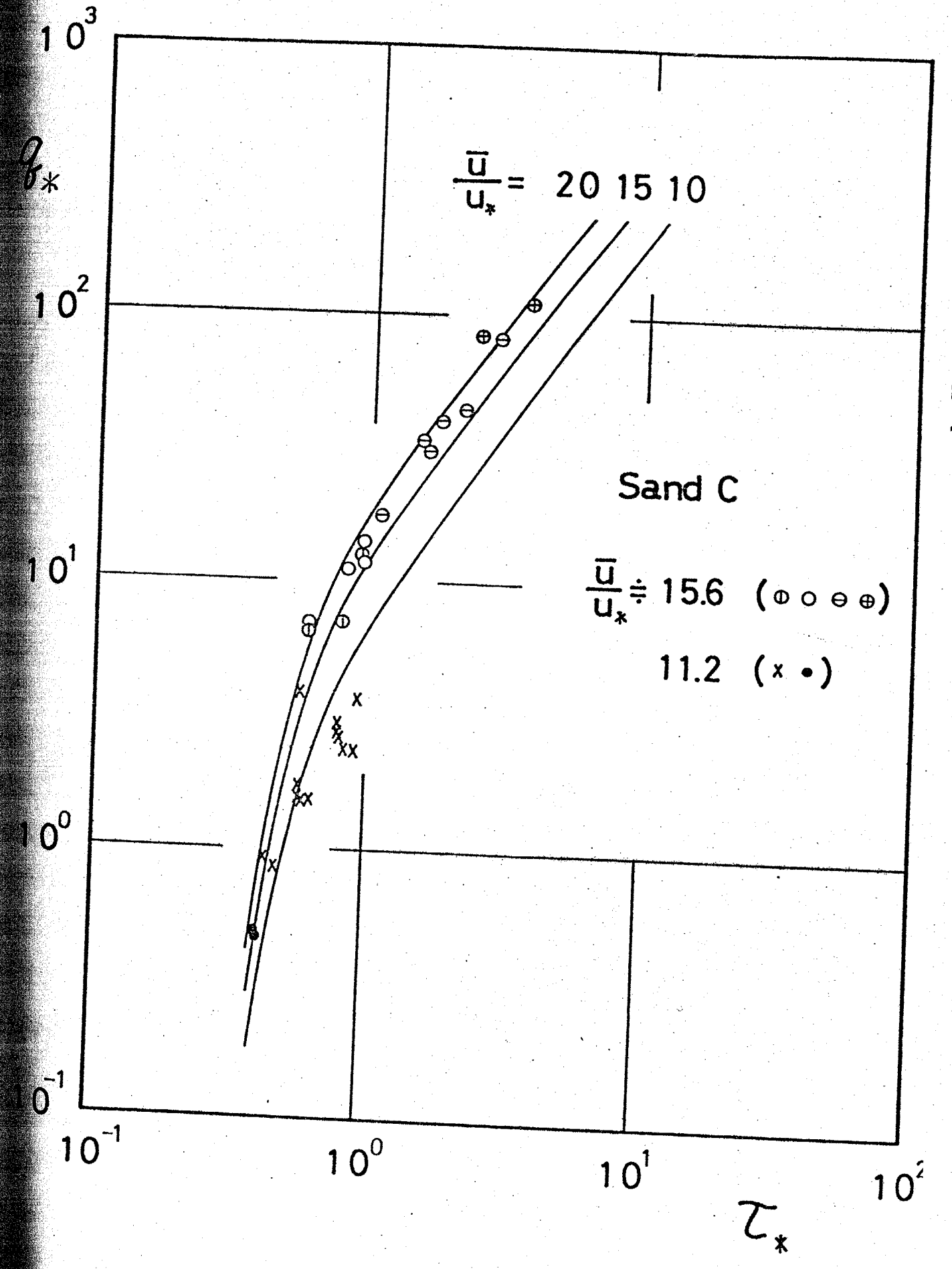

10^3
q_*
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
$\frac{\bar{u}}{u_*}$ = 20 15 10
Sand C
$\frac{\bar{u}}{u_*}$ ≒ 15.6 (⊕ ○ ⊖ ⊕)
11.2 (× •)
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
τ_*

Fig 3-6

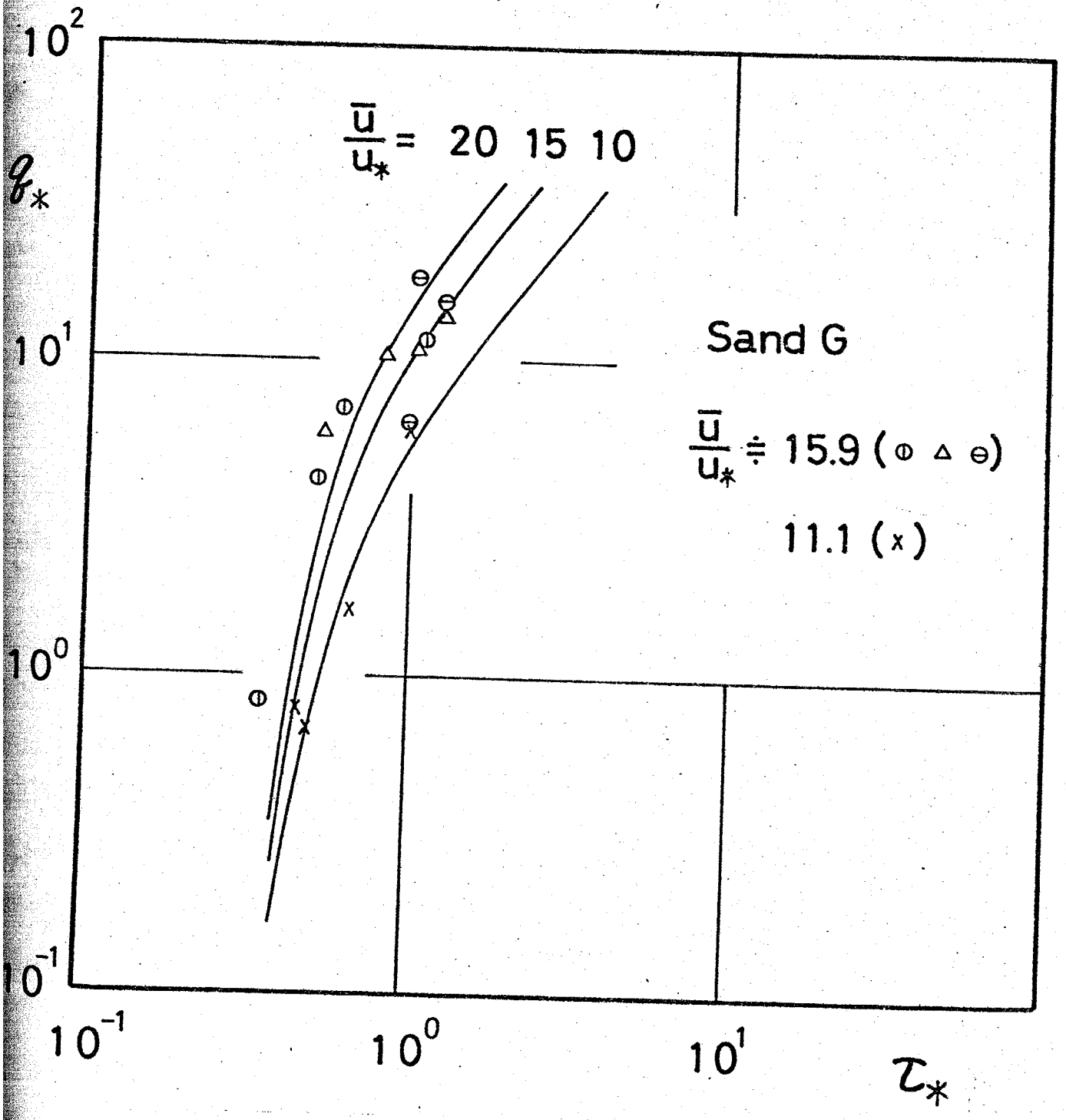

10^2
q_*
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-1}
10^0
10^1
τ_*
$\frac{\bar{u}}{u_*}$ = 20 15 10
Sand G
$\frac{\bar{u}}{u_*}$ ≒ 15.9 (⊕ △ ⊖)
11.1 (×)

Fig. 3-7

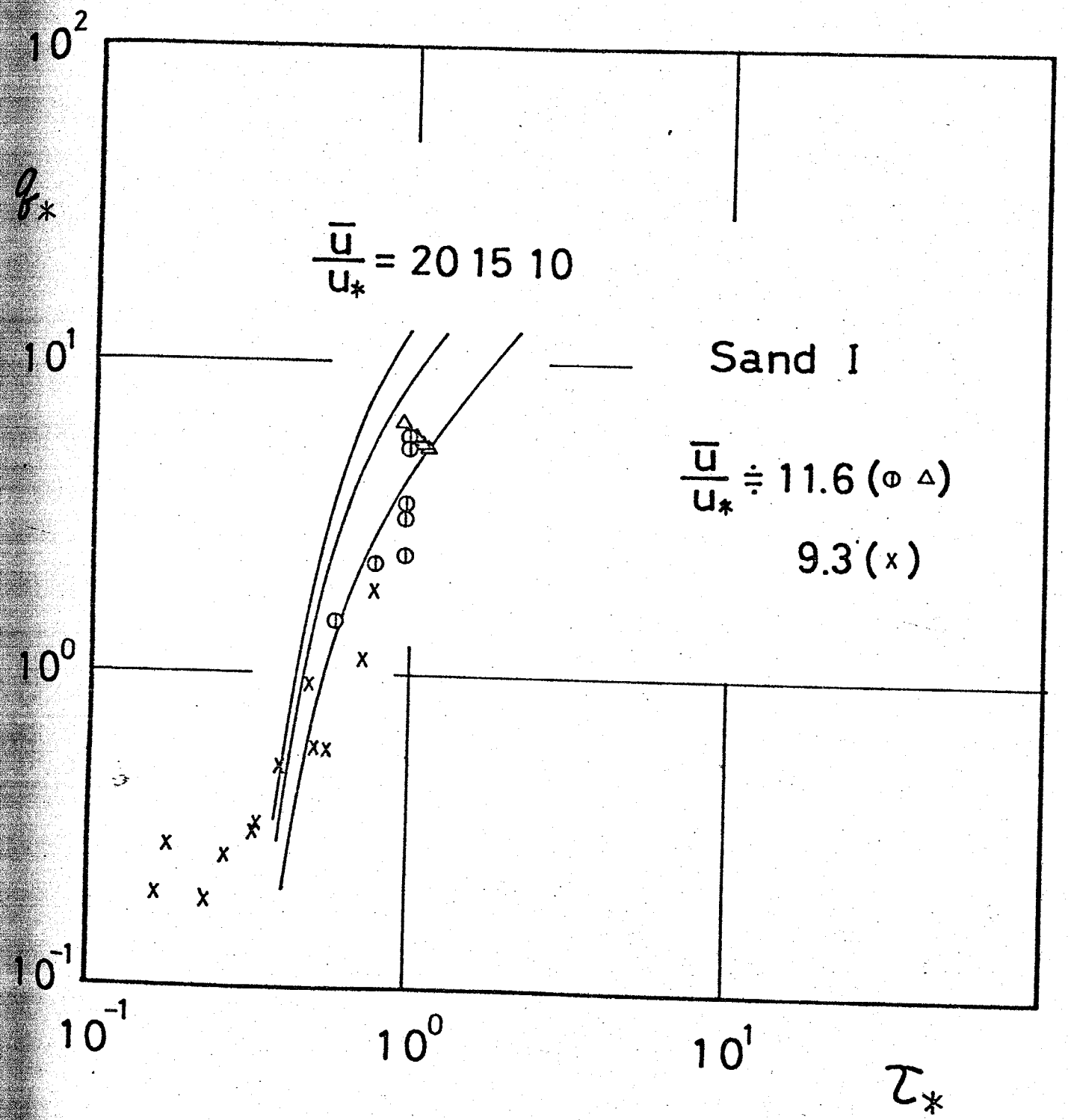
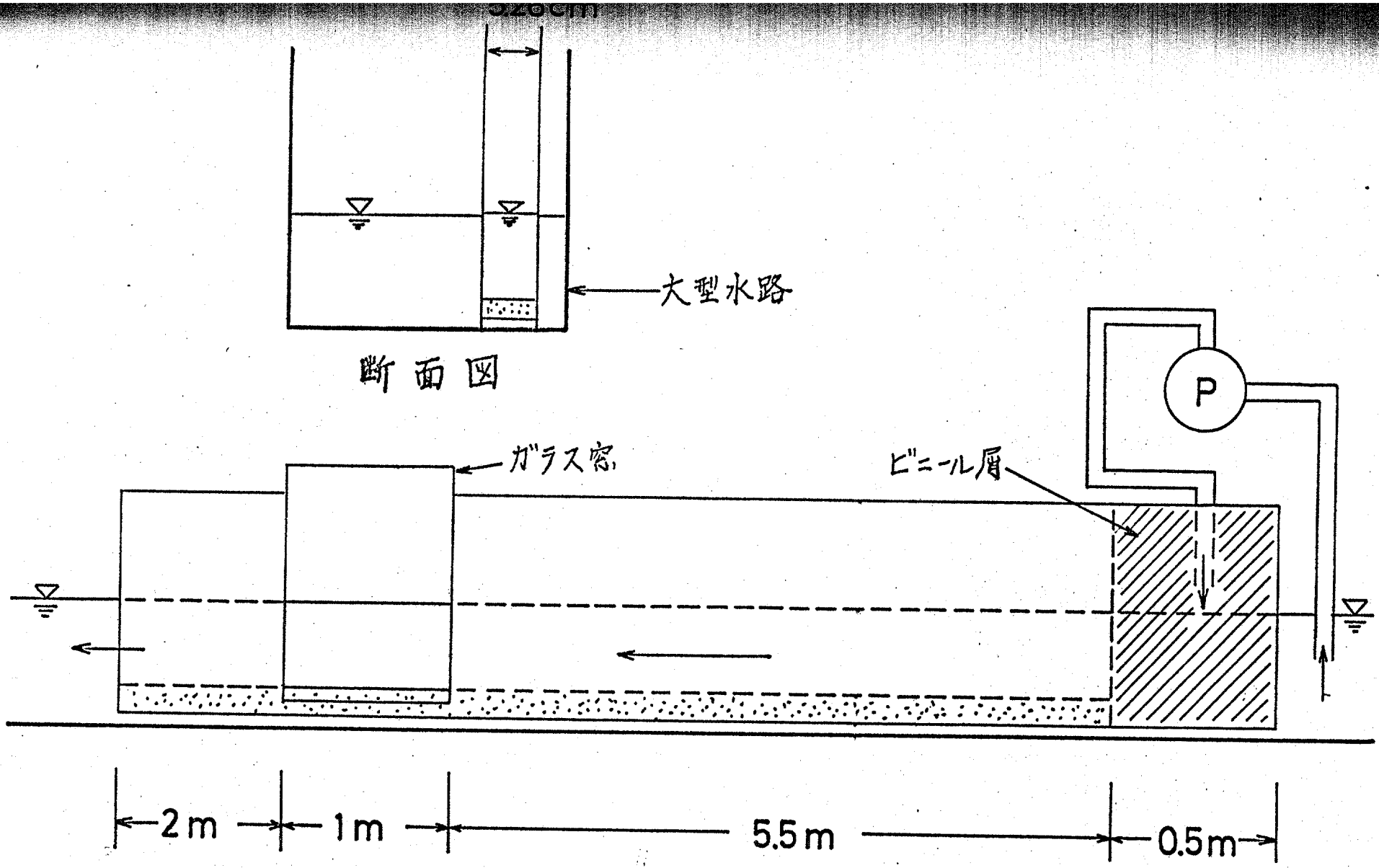

10^2
q_*
$\frac{\bar{u}}{u_*}$ = 20 15 10
10^1
Sand I
$\frac{\bar{u}}{u_*}$ ≒ 11.6 (Φ △)
9.3 (x)
10^0
10^{-1}
10^{-1}
10^0
10^1
τ_*

Fig. 3-8



断面図

側面図

Fig. 3-9

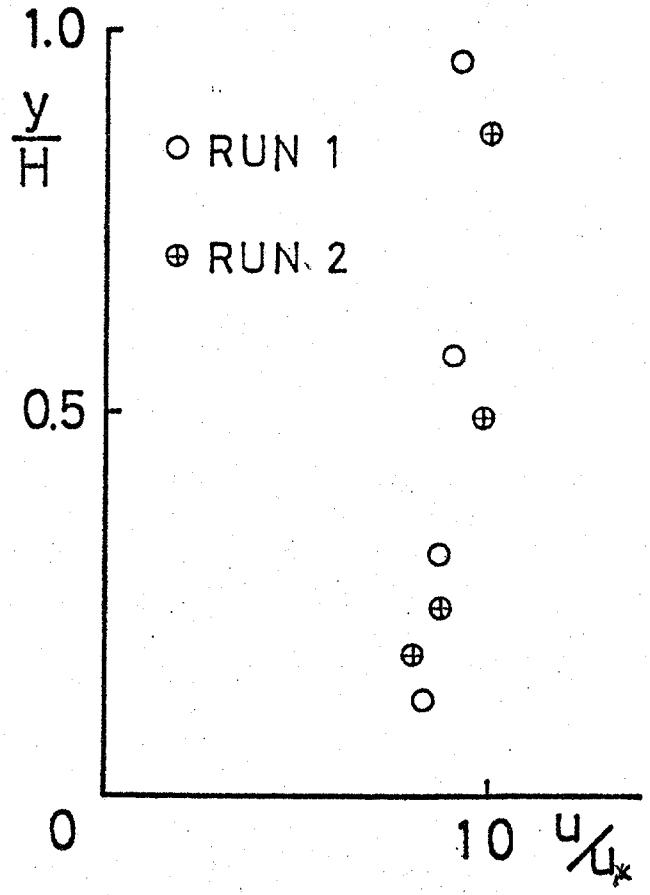


Fig 3-10

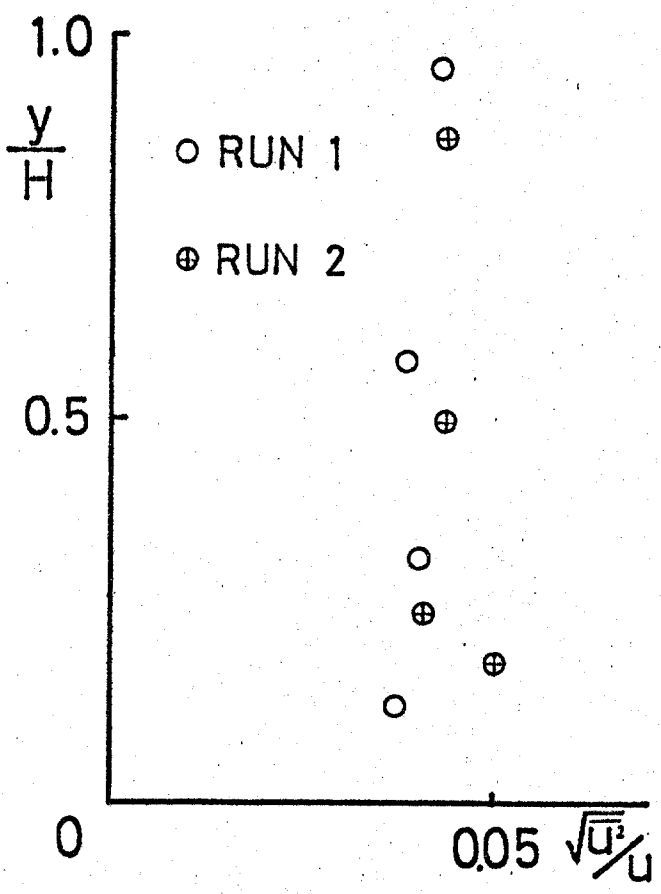


Fig 3-11

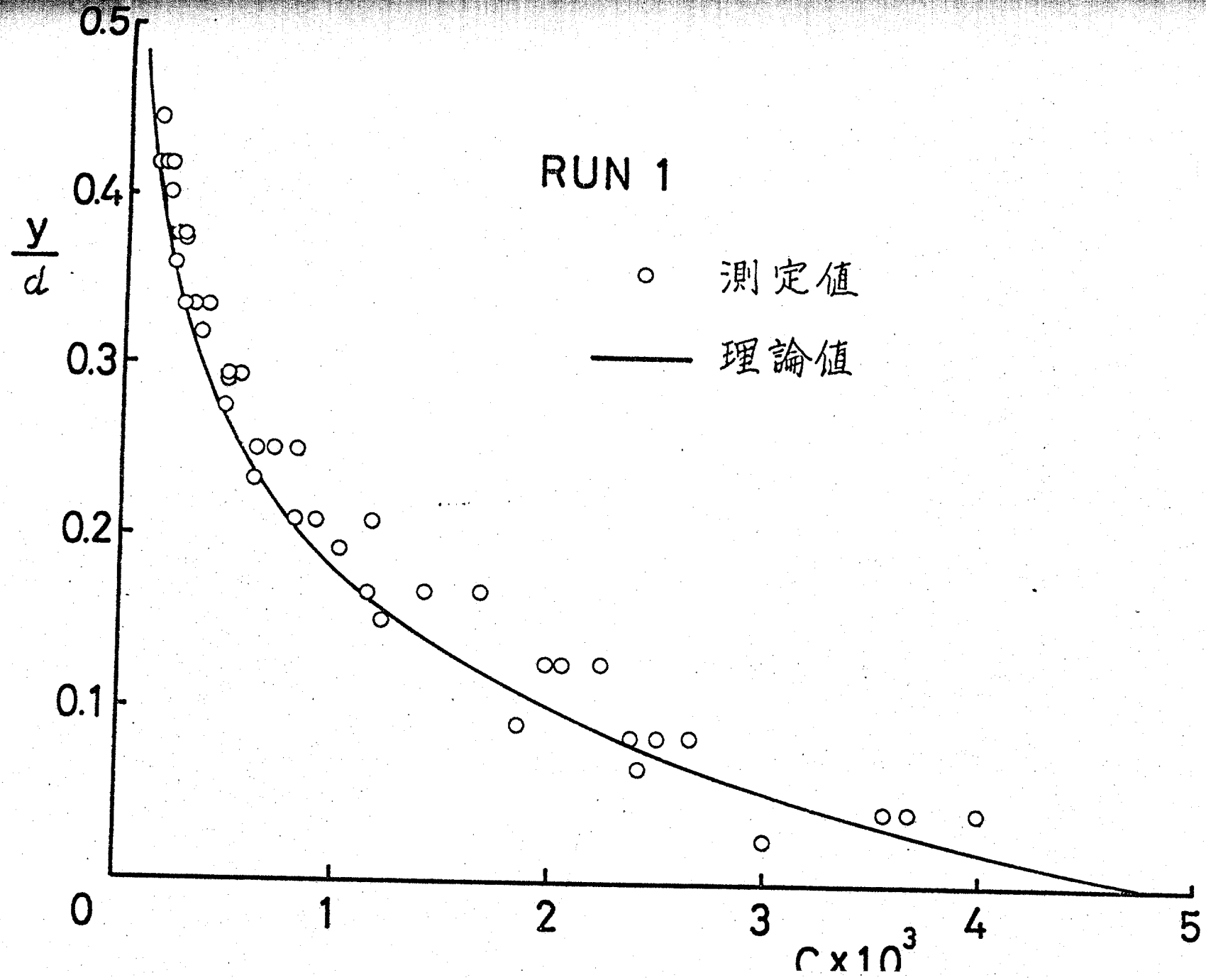


Fig. 3-12

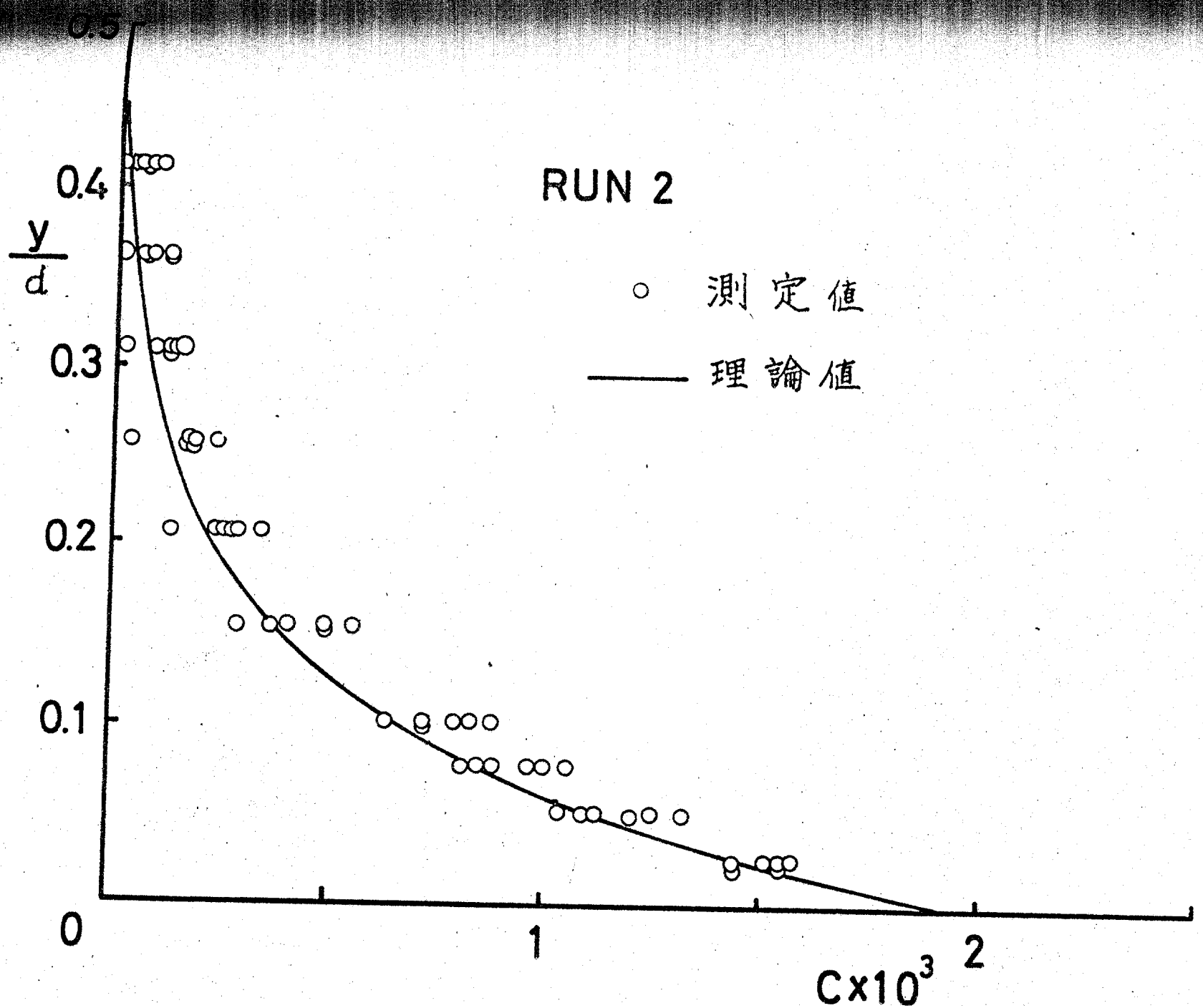


Fig. 3-13

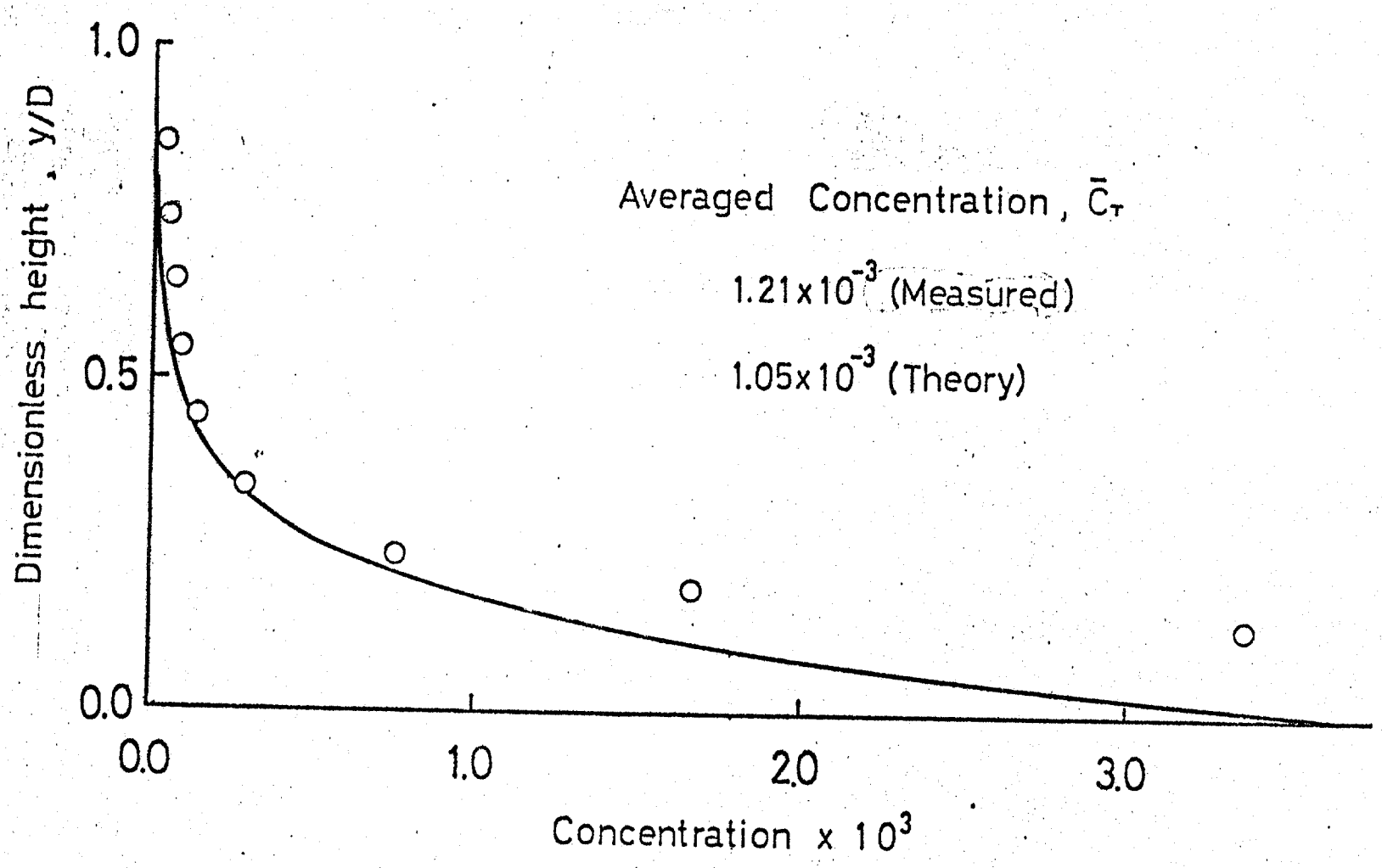

1.0
0.5
0.0
Dimensionless height , y/D
Averaged Concentration , $\bar{C}_T$
1.21×10^{-3} (Measured)
1.05×10^{-3} (Theory)
0.0
1.0
2.0
3.0
Concentration x 10^3

Fig 3-14

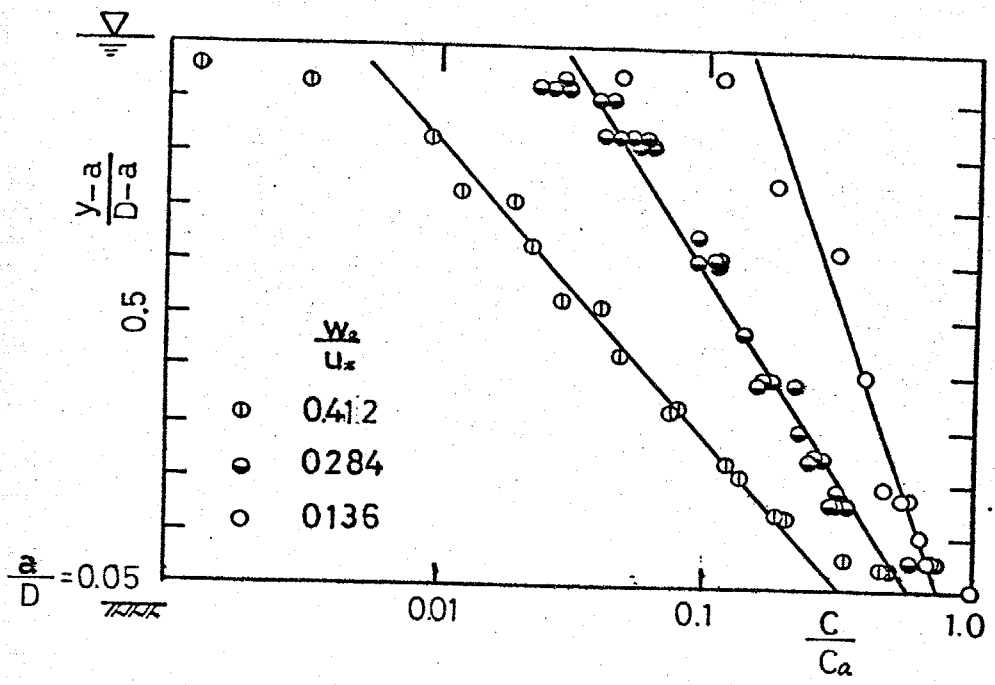


Fig. 3-15

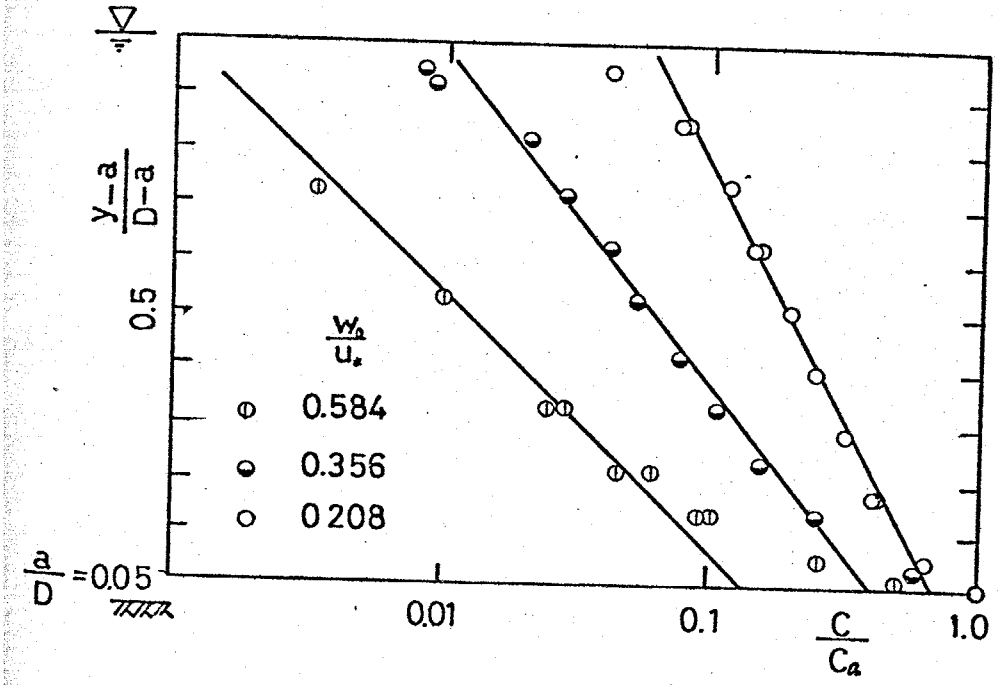


Fig 3-16

D_{50} (mm)	1.077
$\sqrt{D_{84}/D_{16}}$	1.18
w_0 (cm/s)	1.82
$\rho_s/\rho - 1$	0.0815

Table 3-1

	RUN 1	RUN 2
d (cm)	7.84	8.06
V (cm/s)	25.3	21.8
$\sqrt{u'^2}$ (cm/s)	1.00	0.963
I $\times 10^{-3}$	4.36	2.95
u_* (cm/s)	2.90	2.39

Table 3-2

	D_{50} (mm)	σ	データ数	F_r	τ_*	$I \times 10^{-3}$	q (l/cm)	H (cm)	B (cm)
A	0.19	1.30	26	0.23 ~1.10	0.43 ~6.02	0.43 ~9.50	18.0 ~79.2	15.6 ~33.2	244
B	0.27	1.56	16	0.30 ~1.17	0.42 ~4.17	0.65 ~10.2	23.9 ~77.5	14.0 ~34.5	244
C	0.28	1.67	30	0.30 ~1.33	0.41 ~3.79	0.63 ~10.1	25.5 ~78.0	12.2 ~32.6	244
D	0.32	1.57	26	0.32 ~1.29	0.36 ~6.05	1.10 ~16.2	22.1 ~96.8	16.8 ~22.6	61
E	0.33	1.25	12	0.29 ~1.45	0.24 ~3.31	0.88 ~11.4	15.9 ~85.7	14.9 ~15.9	61
F	033	207	12	0.46 ~1.55	0.27 ~2.79	0.97 ~9.80	24.0 ~91.7	14.6 ~16.2	61
G	045	160	15	0.28 ~1.70	0.45 ~1.26	1.14 ~10.1	11.2 ~76.7	5.80 ~29.3	244
H	047	154	6	0.34 1.30	0.18 1.59	0.72 7.90	25.5 76.0	12.5 27.8	244
I	093	154	24	0.35 ~1.63	0.24 ~1.11	1.12 ~12.8	24.5 ~80.5	13.1 ~33.9	244

Table 3-3

REFERENCE

(1) Guy,H.P., Simons,D.B. and Richardson,E.V.," Summary of Alluvial Channel Data from Flume Experiments 1956-61," Geological Survey Prof. Paper 462-1, U.S.Government Printing Office, Washington, 1966.

(2) Fukuoka,S. and Kikkawa,H.," Characteristics of Open Channel Flow with Sediment," Technical Report, No.10, Depertment of Civil Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-Ku, Tokyo, June, 1971.

(3) Vanoni,V.," Transportation of Suspended Sediment by Water, Trans. ASCE, vol.111,1946, pp.67-

(4) Graf,W.H.," Hydraulics of Sediment Transport," McGraw Hill, New York.

(5) Elata,C. and Ippen,A.t.," The Dynamics of Open Channel Flow with Suspensions of Neutrally Buoyant Particles," Technical Report No.45, Hydrodynamics Laboratory, M.I.T., 1961.

(6) 日野幹雄，"固体粒子を浮遊した流れの乱流構造変化"，土木学会論文報告集，第92号，1963，pp.11-20.

東工大、水工学研究室

(7) 林泰造，高羽秀紀，"掃流砂量の理論的研究，"第21回水理講演会論文集，1977，pp.117-126.

第四章

河床波形状特性と抵抗係数

§.1 形状抵抗と摩擦抵抗 138

§.2 摩擦抵抗の算定法 142

§.3 形状抵抗の算定法 175

§.4 平均流速算定式 186

§.5 まとめ 189

§.1 形状抵抗と摩擦抵抗

平均的な流れと逆方向に河床が流体に及ぼす応力を底面セン断力と呼ぶ。しかし河床が完全に滑面である場合を除くと，厳密には連続体の力学において定義されるセン断力とは異なるものである。すなわち厳密な意味でのセン断力（粘性力）の他に，河床の凹凸の上下流面での圧力不均衡により生じる力も含めたものを指している。ここに言う凹凸とは河床波及び個々の粒子による凹凸である。このように二種の応力を一括して表現する理由は，①個々の凹凸を境界として流れを解き応力関係を求めることが困難であること，②外部から観測する場合には粘性力と圧力不均衡の効果が複合された結果を見るのであり，また実際それのみが必要とされる場合が多いこと，③均質な粗面上の流れについては，凹凸による圧力不均衡の効果を壁面特性（粗度係数）と結び付けることによって，滑面における粘性力と同じ様に扱うことに成功していること，等である。

河床波上の流れでの底面セン断力は三つのランクに分けられる。第一に粘性による応力，第二に粒子規模の凹凸での圧力不均衡による応力，第三に河床波の上下流面での圧力不均衡による応力である。前述したように第二種の応力は粗度係

状という指標をとることによって第一種の応力と合わせて扱うことができる。そこでこのふたつを合わせて摩擦抵抗と呼んでいる。第三種の応力は本質的には第二種の応力と同じであるが，河床波が変形することと流れのスケールと同オーダーの大きさを持つことの為に，粗度係数というような固定された単一の指標で整理することができない。そこでこれを形状抵抗と呼び前二者と分けて取り扱うのが普通である。そこで次のように書く。

$$\tau_0 = \tau_0' + \tau_0'' \qquad (4\text{-}1)$$

ここに τ_0 = 底面セン断力，τ_0' = 摩擦抵抗による底面セン断力，τ_0'' = 形状抵抗による底面セン断力である。

第一章で述べたように，(4-1) 式の右辺を水理量に結び付ける手段としてふたつの方法がある。ひとつは Einstein & Barbarrosa[1] の径深分割法((1-7, 8, 9) 式)，いまひとつは Taylor & Brooks[2] の勾配分割法((1-10, 11) 式)である。従来の研究のほとんどすべてがこのいずれかの分割法に基づいている。しかしここで注意すべきことは，(4-1) 式は厳密な式であるのに対し，(1-7, 8, 9, 10, 11) 式はもはや形式的な表示式となっているという点である。すなわち分割された応力は実のものであるが，分割された径深，分割された勾配は共に

実体の無いものである。

抵抗の分割は移動床の抵抗則を議論する上で基本となるものである。そこで本章では従来の形式的な分割によらずに，摩擦抵抗，形状抵抗そのものについて流体力学的に考察する。(*)

河床波の頂上で水流は剥離し，波高の5~6倍下流で再び河床にぶつかる。この点を再付着点と呼ぶ。剥離領域内では逆流が生じるがその流速は一般に平均流速に較べて小さいので，摩擦抵抗は主に再付着点から次の頂上までの区間で生じると考えてよい。この区間では再付着点から新らたな境界層が発達しており，摩擦抵抗はこの境界層の発達と密接な関係があると思われる。したがってこの境界層の解析を通じて摩擦抵抗を算定することができると思われる。

形状抵抗は一波長当りの圧力の合力として得られる。一般に河床波背面の境界層は水深や河床波の波高及び再付着点か

(*) とはいっても摩擦抵抗と形状抵抗に分けて別々に算定する以上は，それぞれが現実のものと多少異なることは免れ得ない。なぜならば両者は互いに影響を及ぼし合っているからである。以下の取り扱いもその意味において架空のものを対象としていることをあらかじめ断わっておく。要はそれぞれの基本的性質を壊さずに，個別の物理モデルを創造するという点にある。

の流下距離に比較して十分薄いと考えられる。またそのような場合，壁に垂直方向の境界層内の圧力変化は小さいとみなせる。したがって摩擦抵抗及び境界層の存在を無視した流れの解析から近似的に形状抵抗を算定できると思われる。

本章では§2において摩擦抵抗を，§3において形状抵抗を取り扱う。これから得られた結果を用いて，§4で河床波形状が与えられた場合の平均流速算定式を導き，水路実験データー，実河川での測定データーを用いて検討する。

§.2 摩擦抵抗の算定法

a. 剥離領域下流部の流れと摩擦抵抗(3)

摩擦抵抗の生じる河床波上流面では，剥離流線上で生成した強い乱れが拡散しており，境界層の発達及び摩擦抵抗はこのwakeに規定されていると考えられる。そこでまずそのような性質を持つ流れの中の比較的簡単な場合として剥離領域を持つ半無限平行流を取り上げ，再付着点より下流部の流れと摩擦抵抗について考察する。

半無限平行流（ポテンシャル流）下に直角段落ちがあり，この為に剥離が生じ下流部の流れが歪む場合を考える。この部分の流れ及び摩擦抵抗力を解析する。なお，剥離部の上流側では流速分布は鉛直方向に一様であるとする。

a-1 理論的考察

a-1-1 領域区分

乱流場の平均流を解析するにはいくつかの方法が考えられるが，問題となるのは時間平均セン断力の取り扱い方である。これは速度の変動分を用いて $\tau_{xy} = -\rho\overline{u'v'}$ などと表わされるが，この右辺と他の時間平均量（$\bar{u}\,d\bar{u}/dy$ など）との関係は乱れの性質によって異なる。したがって乱流場の平均流の解析は，その対象によって方法を使い分けることが必要となる。

再付着点より下流の乱れの性質はふたつの異なるセン断の影響を受けている。ひとつは剥離流線付近の急な速度勾配によるものであり，いまひとつは底面でのセン断である。したがって平均量に関してのひとつの基礎方程式だけで全体を解析することには本質的に無理があるように思われる。そこで図4-1に示すように流れをふたつの領域に分けて取り扱う。領域1では剥離流線付近でつくられた乱れが支配的であり，自由乱流的な性質を持っていると考えられる。領域2は境界層領域で，この中の平均流速分布，乱れ強度，平均底面セン断力などは互いに関係付けられているものと思われる。すなわち Inner law が成立すると考えられる。また領域2の厚さは流下距離に較べて十分薄い。

以上の考察のもとに通常の境界層を取り扱うのと同様の方

法を用いる。すなわち領域1の流れの解析においては領域2の存在を無視し，且つ底面の摩擦の影響を無視する。また領域1の解析において得られた底面付近の解を境界層外縁での境界条件として用いる。

4-1-2 領域1の流れの解析

座標系を図4-2のようにとる。先に述べたように考えると領域1の流れの性質は物体背後の流れ（後流）と同じである。後流の解は，断面一定の混合距離又は一定の渦動粘性係数と欠損速度分布の相似性を仮定し，線形化された運動方程式を解くことによって得られている。その結果，物体径の数十倍程度下流以降では実測と非常に良く一致することが知られている。そこで本研究でも断面一定の渦動粘性係数を仮定して断力を表示することにする。また再付着点近くでの近似度を上げる目的で，摂動法によって非線形項の効果を取り込んで行くことにする。

基礎方程式は次のようにとる。

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \qquad (4\text{-}1)$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \qquad (4\text{-}2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad (4-3)$$

ここにU, Vはそれぞれx方向, y方向の時間平均流速, ρは流体密度, εは渦動粘性係数である。剥離領域より十分下流では欠損流速分布が相似性を持つと思われるので, y→∞でのx方向流速をu_∞とし, $u = u_\infty - U$, $v = -V$とおく。式(4-1)~(4-3)は次のように変形される。

$$u_\infty \frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (4-4)$$

$$1 \qquad \delta \qquad \delta \qquad \delta^2 \qquad \delta^2 \qquad 1$$

$$u_\infty \frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (4-5)$$

$$\delta \qquad \delta^2 \qquad \delta^2 \qquad \delta \qquad \delta^3 \qquad \delta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (4-6)$$

$$1 \qquad 1$$

(4-4)式の左辺第一項と右辺第二項が卓越するとし他の項を無視した結果得られるのがいわゆる後流の解であり, 剥離領域より十分下流では良い近似を与えると思われる。そこでこのことを手掛りにして摂動法を用い, 剥離領域の近くでの近似度を高めてゆくことにする。すなわち左辺第一項と第三項

が多項に比較して大きい範囲において他項の影響を取り込んでゆこうとするものである。

(4-4)式の左辺第一項と右辺第三項が卓越し，且つ諸量が空間的になめらかに変化すると仮定すれば次の関係が成り立つ。

$$X \sim Y^2$$

ここにX＝流下距離，Y＝領域1の厚さ，である。欠損運動量Mは，左辺第一項が第三項に較べて卓越しているとすれば，

$$M \sim u_\infty \tilde{u} Y \sim const \times u_\infty^2 H$$

ここにH＝段差量，$\tilde{u}$＝その断面での欠損流速の代表値である。以上より

$$\frac{\tilde{u}}{u_\infty} \sim \frac{Y}{X} \sim X^{-1/2}$$

(4-6)式から

$$\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}} \sim \frac{Y}{X} \sim X^{-1/2}$$

したがって左辺第二項の第一項に対する比は$X^{-1/2}$に比例する。そこで$X^{-1/2}$に比例する量δを摂動パラメーターに取ることにする。(4-4)式の左辺第一項と右辺第三項を規準にして各項のオーダーを求めると，(4-4)，(4-5)，(4-6)式の下に書かれて

あるようになる。

次に u, v についての流関数を導入する。

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{4-7}$$

Ψ, u, v 及び P が次のように展開されるとする。

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \cdots$$

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots \tag{4-8}$$

ただし $u_n = \partial \Psi_n / \partial y$, $v_n = -\partial \Psi_n / \partial x$ で $u_2/u_1 \sim u_3/u_2 \sim \delta$ となると仮定する。(4-7), (4-8)式を(4-4)式に代入して各オーダーについてまとめると次式を得る。

〈第一近似〉

$$u_\infty \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y} = \varepsilon \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial y^3} \tag{4-9}$$

境界条件は次頁のようになる。

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y}=0 \quad (y\to\infty),\quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}=0 \quad (y=0),\quad \psi_1=\text{const.} \quad (x\to\infty)$$

＜第二近似＞

$$u_\infty \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = \varepsilon \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y^3} \qquad (4\text{-}10)$$

境界条件は

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y}=0 \quad (y\to\infty),\quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}=0 \quad (y\to 0),\quad \psi_2=\text{const.} \quad (x\to\infty)$$

1) 第一近似解

第一近似解は後流の解として既に知られているものである。(4)
次のようにおく。

$$\psi_1(x,y)=f_1(x)\,\phi_1(\eta)$$

$$\eta=\frac{y}{b_1(x)},\quad f_1(x)=x^p,\quad b_1(x)=\sigma_1 x^m \qquad (4\text{-}11)$$

これを (4-9) 式に代入して整理すると $p=0$, $m=1/2$ となる。
ここで $\sigma_1=\sqrt{\varepsilon/u_\infty}$ とおけば $\phi_1(\eta)$ について次の常微分方程式が得られる。

$$\phi_1''' + \frac{\eta}{2}\phi_1'' + \frac{1}{2}\phi_1' = 0 \qquad (4\text{-}12)$$

境界条件は,

$$\phi_1'' = 0 \quad (\eta = 0) \quad , \quad \phi_1' = 0 \quad (\eta \to \infty)$$

上式の解は

$$\phi_1' = \frac{C_D H u_\infty}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)$$

$$C_D = (\text{欠損運動量}) / \frac{\rho}{2} u_\infty^2 H \qquad (4\text{-}13)$$

$$\frac{u_1}{u_\infty} = C \left(\frac{x}{H}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)$$

$$C = \frac{C_D}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{u_\infty H}{\varepsilon}} \qquad (4\text{-}14)$$

ii) 第二近似解

次のようにおく。

$$\psi_2(x, y) = f_2(x) \phi_2(\zeta)$$

$$\zeta = \frac{y}{b_2(x)} \quad , \quad f_2(x) = x^g \quad , \quad b_2(x) = \sigma_2 x^n \qquad (4\text{-}15)$$

これを (4-10) 式に代入すると次式を得る。

$$u_\infty \{(g-n)\phi_2' - n\zeta\phi_2''\} \frac{x^{g-n-1}}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon}{\sigma_2^3} x^{g-3n} \phi_2''' = -\frac{A^2}{2\sigma_1^2} x^{-2} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \qquad (4\text{-}16)$$

ここに, $A = C_D H u_\infty / 2\sqrt{\pi}$。

(4-16)式の両辺のベキ数が等しくならねばならないから，$n=-1/2$，$g=-1/2$となる．$n=m$であるので$\sigma=\sigma_1+\sigma_2$ととると$\eta=\zeta$となり，ϕ_2について次の常微分方程式が得られる．

$$\phi_2''' + \frac{\eta}{2}\phi_2'' + \phi_2' = \frac{\sigma A^2}{2\varepsilon}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \qquad (4\text{-}17)$$

境界条件は

$$\phi_2''' = 0 \quad (\eta = 0) \quad , \quad \phi_2' = 0 \quad (\eta \to \infty)$$

ここで$\psi_2 = \frac{2\varepsilon}{\sigma A^2}\phi_2'$と置き換えると次のようになる。

$$\psi_2'' + \frac{\eta}{2}\psi_2' + \psi_2 = \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \qquad (4\text{-}18)$$

境界条件は

$$\psi_2' = 0 \quad (\eta = 0) \quad , \quad \psi_2 = 0 \quad (\eta \to \infty)$$

$\eta = \sqrt{2}\xi$，$\psi_2 = g(\xi)\exp(-\xi^2/2)$として上式に代入すると次式を得る．

$$g'' - \xi g' + g = 2\exp(-\xi^2/2) \qquad (4\text{-}19)$$

境界条件は

$$g' = 0 \quad (\xi = 0) \qquad \lim g(\xi)\exp(-\xi^2/2)$$

$g(\xi)$ をエルミート多項式(※)で展開する。

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\xi) \qquad (4\text{-}20)$$

$\xi = 0$ での境界条件から，n は偶数のみをとる。またエルミート多項式の性質から係数 A_n が $n \to \infty$ でゼロに収束すれば $\xi \to \infty$ の境界条件は自動的に満たされている。(4-20) 式を

(※) エルミート多項式には二種類の定義があるが，ここでは次の定義に従う。

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n} \{\exp(-x^2/2)\}$$

次の直交関係が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2) H_n(x) \cdot H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ n!\sqrt{2\pi} & (m = n) \end{cases}$$

$H_n(x)$ は次の微分方程式の解である。

$$y'' - xy' + ny = 0$$

次の漸化関係がある。

$$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$$

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x)$$

(4-19)式に代入しエルミート多項式の性質を利用して整理すると次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-n)A_n H_n(\xi) = 2\exp(-\xi^2/2) \qquad (4\text{-}21)$$

両辺に $\exp(-\xi^2/2)\,H_n(\xi)$ を乗じ $(-\infty, +\infty)$ で積分すると A_n が求まる。

$$A_n = \frac{-B_n}{\sqrt{2\pi}\,n!\,(n-1)} \qquad (4\text{-}22)$$

ここに

$$B_n = \int_{-\infty}^{\infty} 2H_n(\xi)\exp(-\xi^2)\,d\xi \qquad (4\text{-}23)$$

B_n は次のようにして求まる。エルミート多項式は次の関係式を満たすが,

$$H_{n+1}(\xi) - 2\xi H_n(\xi) + 2n H_{n-1}(\xi) = 0 \qquad (4\text{-}\cdots)$$

この両辺に $\exp(-\xi^2)$ を乗じ $(-\infty, +\infty)$ で積分すれば次の関係が得られる。

$$B_n = \frac{n-1}{2} B_{n-2} \qquad (4\text{-}24)$$

一方,

$$B_0 = \int_{-\infty}^{\infty} 2\exp(-\xi^2)\,d\xi = 2\sqrt{\pi} \qquad (4\text{-}25)$$

であるから結局,

$$A_n = \frac{-(n-3)}{n(n-1)} A_{n-2} \quad , \quad A_0 = \sqrt{2} \qquad (4-26)$$

ϕ_2を図4-3に示す. 第二近似による欠損流速は,

$$\frac{u_2}{u_\infty} = \frac{1}{2} C^2 \left(\frac{x}{H}\right)^{-1} \phi_2(\eta) \qquad (4-27)$$

(iii) 高次の解の性質

同様の操作をすれば順に高次の解が得られるはずであるが, 実際には式が複雑になって容易には求まらない。ここではそれらの解の性質を述べるにとどめる.

次のようにおく。

$$\psi_n(x, y) = f_n(x)\, \phi_n(\eta_n)$$

$$\eta_n = \frac{y}{b_n(x)} \quad , \quad f_n(x) = x^{p_n} \quad , \quad b_n(x) = \sigma_n x^{m_n} \qquad (4-28)$$

$(n-1)$次までの解が求まり, $p_\ell = \frac{1-\ell}{2}$, $m_\ell = \frac{1}{2}$ $(\ell = 1, 2, \cdots n-1)$ だったとする。これを第n次近似の方程式に代入すると次のようになる。

$$u_\infty \{(\varphi_n - m_n)\phi_n' - m_n \eta_n \phi_n''\} \frac{x_n^{p_n - m_{n-1}}}{\sigma_n} - \phi_n''' \frac{\varepsilon}{\sigma_n^3} x^{p_n - 3m_n} = x^{-1-n/2} F(\eta) \qquad (4-29)$$

ここで左辺は(4-4)式の左辺第一項と右辺第三項に相当する項から出てくる。右辺は他の項に相当する項から出てくるものをまとめたものである。また圧力項は(4-5)式に相当する式から得られるが，これも右辺に含められている。(4-27)式のxのべき数を比較すると次の関係を得る。

$$p_n = \frac{1-n}{2} \quad , \quad m_n = \frac{1}{2}$$

$n=2$ではこの関係が満たされているので，結局すべてのnについて成り立つ。広がり幅についてのべき数m_nがnによらないので$\sigma=\sigma_n$ととれば$\eta=\eta_n$となり各オーダーの解のy方向のスケールは$x^{1/2}$に比例する。一方欠損流速のxについてのべき数は，$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{n}{2}$となるから，

$$\frac{u}{u_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\eta)\left(\frac{x}{H}\right)^{-n/2} \qquad (4-30)$$

となる。したがって高次の解ほど下流に向って急速に減衰するが，再付着点の近くでは逆に大きな影響を与えると考えられる。

(iv) 未定係数の決定

前述したようにこの流れは本質的に後流と同じである。Reichart，Schlichting[4]は各種の円柱の後流の半値半幅につい・

て次の実験式が成立することを示している。[5]

$$b_{1/2} = \frac{1}{4}\sqrt{2C_D R}\, z^{1/2} \qquad (4\text{-}31)$$

ここに、R = 円柱の半径である。段差量Hの2倍が後流における物体幅に対応するから上式のRをHに置き換えて若干変形すると次式を得る。

$$\frac{b_{1/2}}{H} = 0.354\sqrt{C_D}\left(\frac{z}{H}\right)^{1/2} \qquad (4\text{-}32)$$

これから渦動粘性係数は,

$$\varepsilon = 0.0444\,(C_D H U_\infty) \qquad (4\text{-}33)$$

(4-14)式のCは,

$$C = 1.34\sqrt{C_D} \qquad (4\text{-}34)$$

となる。z方向の流速分布は上式のCを用いて次のように表わされる。(等=近似まで)

$$\frac{U}{U_\infty} = 1 - C\left(\frac{z}{H}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{4}\eta^2\right) - \frac{C^2}{2}\left(\frac{z}{H}\right)^{-1} \psi_{1/2}(\eta) \qquad (4\text{-}35)$$

底面上の流速は

$$\frac{U_b}{U_\infty} = 1 - C\left(\frac{z}{H}\right)^{-1/2} - \frac{C^2}{2}\left(\frac{z}{H}\right)^{-1} \qquad (4\text{-}36)$$

4-1-3 領域2の流れの解析

座標系を図4-4のようにとる。

a) 底面が滑面の場合。

次の仮定をおく。

1) x方向の速度分布は次式で表わされるものとする。(*)

$$\frac{u}{u_*} = \begin{cases} 5.5 \log \dfrac{u_* y}{\nu} + 5.45 & \left(y \geq 11.22 \dfrac{\nu}{u_*}\right) \\ \dfrac{u_* y}{\nu} & \left(0 < y < 11.22 \dfrac{\nu}{u_*}\right) \end{cases} \qquad (4\text{-}37)$$

2) 領域2の厚さは流下距離に比較して十分薄く，領域内の圧力はy方向に一定とみなせる。

x方向の運動方程式は，

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad (4\text{-}38)$$

ここに u，v はx方向，y方向の流速である。境界層厚を δ_b とし，上式を $(0, \delta_b)$ で積分すれば次式となる。

(4-37)式の係数（5.5，5.45）は Patel[6] のキャリブレーション結果に従った。

$$\int_0^{\delta_0}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\delta_b+\frac{\tau_\delta-\tau_0}{\rho} \qquad (4\text{-}39)$$

ここにτ_δは境界層外縁のせん断力である。境界層の外側では底面摩擦の影響を受けていないから，τ_δは$y=\delta_b$で領域1の流れがつくるせん断力で近似できよう。領域1の流れを底まで延長して考えると底面上のせん断力はゼロであることから，次のように表わされる。

$$\tau_\delta \fallingdotseq \left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0}\cdot\delta_b \qquad (4\text{-}40)$$

一方領域1の流れは$y=0$で$v=0$，$du/dy=0$であるから，

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}\fallingdotseq u\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}=u_b\frac{du_b}{dx} \qquad (4\text{-}41)$$

ここにu_bは領域1の流れの解の底面上流速である。(4-40)，(4-41)式を(4-39)式に代入すると次式を得る。

$$\int_0^{\delta_b}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy=u_b\frac{du_b}{dx}\cdot\delta_b-u_*^2 \qquad (4\text{-}42)$$

代表速度としてu_∞，代表長さとして段落ち量Hをとり無次元化すると(4-37)式は

$$u'=\begin{cases} a u_*' \ln(b\,Re\,u_*'\,y') & (y'\geq c/Re\,u_*') \\ Re\,u_*'^2\,y' & (0<y'<c/Re\,u_*') \end{cases} \qquad (4\text{-}43)$$

となり，(2-42) 式は次式となる。

$$\int_0^{\delta_b'} \left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) dy' = u_b'\frac{du_b'}{dx'}\delta_b' - u_*'^2 \qquad (4\text{-}44)$$

′は無次元量であることを示す。また，$a=2.39$，$b=9.80$，$c=11.22$，$Re = u_0 H/\nu$ である。(4-44) 式の左辺各項は次のように求まる。(4-43) 式の中で u_*' のみが x' の関数であるから，

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \begin{cases} a\dfrac{du_*'}{dx'}\ln(bRe\,u_*'y') + a\dfrac{du_*'}{dx'} & (y' \geq c/Re\,u_*') \\ 2Re\,u_*'\dfrac{du_*'}{dx'}y' & (0 < y' < c/Re\,u_*') \end{cases}$$

連続条件から

$$v' = -\int \frac{\partial u'}{\partial x'}dy'$$

$$= \begin{cases} -a\dfrac{du_*'}{dx'}y'\ln(bRe\,u_*'y') & (y' \geq c/Re\,u_*') \\ -Re\,u_*'\dfrac{du_*'}{dx'}y'^2 & (0 < y' < c/Re\,u_*') \end{cases}$$

$$\frac{du'}{dy'} = \begin{cases} \dfrac{a\,u_*'}{y'} & (y' \geq c/Re\,u_*') \\ Re\,u_*'^2 & (0 < y' < c/Re\,u_*') \end{cases}$$

上を (4-44) 式に代入し u_*' について整理すると次式を得る。

$$\frac{du_*'}{dx'} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{a}\left(\frac{u_b'}{au_*'}\right)\exp\left(\frac{u_b'}{au_*'}\right)\frac{du_b'}{dx'} - \frac{b}{a^2}Re\,u_*'^2}{\exp\left(\frac{u_b'}{au_*'}\right)\left\{\left(\frac{u_b'}{au_*'}\right)^2 - 2\left(\frac{u_b'}{au_*'}\right)+2\right\} - bc\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)+2\right\}} & (\delta_b' \geq c/Re\,u_*') \\ & (4\text{-}45\text{-}a) \\ 3\left(\dfrac{u_*'}{u_b'}\dfrac{du_b'}{dx'} - \dfrac{u_*'^5}{u_b'^3}Re\right) & (0 < \delta_b' < c/Re\,u_*') \end{cases}$$

$(4\text{-}45\text{-}b)$

$x' \to 0$ では $u_b' \to 0$, $u_*' \to 0$ となり特異点である。$(4\text{-}45\text{-}b)$ 式の両辺に $2u_*'$ を乗じ $u_*'^2 = Z$ とすると

$$\frac{dZ}{dx'} = 6\left\{\frac{Z}{u_b'}\frac{du_b'}{dx'} - \left(\frac{Z}{u_b'}\right)^3 Re\right\}$$

$x' \to 0$ で $Z/u_b' \to const. = C_0$ とすると

$$C_0 = 6\left\{C_0 - C_0^3 Re \Big/ \frac{du_b'}{dx'}\right\} = \sqrt{\frac{5}{6}\frac{u_b'^2}{Re}\frac{du_b'}{dx'}}$$

これから $x' \to 0$ では次式が近似的に成立する。

$$u_*' = 4\sqrt{\frac{5}{6}\frac{u_b'^2}{Re}\frac{du_b'}{dx'}} \qquad (4\text{-}46)$$

1) 底面が粗面の場合

x方向の流速分布が対数分布式で近似できるとする。

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln(y/y_0 + 1) \quad (*) \qquad (4\text{-}47)$$

上式より

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\kappa}\frac{du_*}{dx}\ln(y/y_0 + 1)$$

$$v = -\frac{1}{\kappa}\frac{du_*}{dx} y_0 (y/y_0+1)\{\ln(y/y_0+1) - 1\} - \frac{1}{\kappa}\frac{du_*}{dx} y_0$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa y_0}\frac{1}{y/y_0+1}$$

以上を (4-44) 式に代入して整理すると次式を得る。

$$\frac{du_*}{dx} = \frac{\kappa^2\left[\frac{u_b}{u_*}\frac{du_b}{dx}\frac{\delta}{y_0} - \frac{u_*}{y_0}\right]}{(\delta/y_0+1)\ln^2(\delta/y_0+1) - (3\delta/y_0+4)\ln(\delta/y_0+1) + 4\delta/y_0} \qquad (4\text{-}48)$$

一方速度の連続条件から

$$u_b = \frac{u_*}{\kappa}\ln(\delta/y_0 + 1) \qquad (4\text{-}49)$$

(4-48), (4-49) から δ_b/y_0 を消去すれば

$$\frac{du_*}{dx} = \frac{\kappa\left[\left(\frac{\kappa u_b}{u_*}\right)\left\{\exp\left(\frac{\kappa u_b}{u_*}\right) - 1\right\}\frac{du_b}{dx} - \frac{\kappa u_*}{y_0}\right]}{\left\{\left(\frac{\kappa u_b}{u_*}\right)^2 - 3\left(\frac{\kappa u_b}{u_*}\right) + 4\right\}\exp\left(\frac{\kappa u_b}{u_*}\right) - \left(\frac{\kappa u_b}{u_*}\right) - 4} \qquad (4\text{-}50)$$

(*) $y = 0$ で $u = 0$ となるように 1 を加えてあるが，その影響は無視しうる。

代表流速u_∞，代表長さHで無次元化して

$$\frac{du_*'}{dx'}=\frac{k\left[\left(\frac{Ku_b'}{u_*'}\right)\left\{\exp\left(\frac{Ku_b'}{u_*'}\right)-1\right\}\frac{du_b'}{dx'}-\frac{Ku_*'}{y_0'}\right]}{\left\{\left(\frac{Ku_b'}{u_*'}\right)^2-3\left(\frac{Ku_b'}{u_*'}\right)+4\right\}\exp\left(\frac{Ku_b'}{u_*'}\right)-\left(\frac{Ku_b'}{u_*'}\right)-4} \tag{4-51}$$

上式は$x'\to 0$で$u_b'\to 0$，$u_*'\to 0$となり特異点である。そこで次のようにして近似式を求めた。まず$Ku_b'/u_*'=\alpha\to 0$（$x'\to 0$）と仮定し，(4-51)式の分子及び分母をαで展開し多項式で表わす。

$$\text{分子}=k\left[\alpha\left\{\alpha+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{6}+\cdots\right\}\frac{du_b'}{dx'}-\frac{Ku_*'}{y_0'}\right]$$

$$\fallingdotseq k\left\{\alpha^2\frac{du_b'}{dx'}-\frac{Ku_*'}{y_0'}\right\}$$

$$\text{分母}=(\alpha^2-3\alpha+4)\exp(\alpha)-\alpha-4$$

$$=(\alpha^2-3\alpha+4)\cdot\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{6}+\cdots\right)-\alpha-4$$

$$=\frac{\alpha^3}{6}+\cdots$$

$$\fallingdotseq\frac{\alpha^3}{6}$$

以上を整理すると，$x'\to 0$の極限において

$$\frac{du_*'}{dx'}\fallingdotseq\frac{k\left\{\left(\frac{Ku_b'}{u_*'}\right)^2\frac{du_b'}{dx'}-\frac{Ku_*'}{y_0'}\right\}}{\frac{1}{6}\left(\frac{Ku_b'}{u_*'}\right)^3}=6\frac{u_*'}{u_b'}\frac{du_b'}{dx'}-\frac{6}{ky_0'}\frac{u_*'^4}{u_b'^3} \tag{4-52}$$

(2-52) 式の左辺と右辺第一項は x' について同じべキを持っている。$x' \to 0$ で dU_b'/dx' が有限の値を持つとすれば，右辺第二項が他項と同じべキを持つには $U_*' \sim U_b'^{2/3}$ であればよい。そこで次のようにおく。

$$U_*' = C_1 U_b'^{2/3}$$

(4-52) 式に代入すると

$$\frac{2}{3} C_1 \frac{1}{U_b'^{2/3}} \frac{dU_b'}{dx'} = 6 C_1 \frac{1}{U_b'^{1/3}} \frac{dU_b'}{dx'} - \frac{6}{\kappa^2 y_0'} C_1^4 \frac{1}{U_b'^{1/3}}$$

C_1 について整理すると

$$C_1 = \left(\frac{8}{9} \kappa y_0' \frac{dU_b'}{dx'} \right)^{1/3}$$

これより $x' \to 0$ で次の近似式を得る．

$$U_*' = \sqrt[3]{\frac{8}{9} \kappa^2 y_0' U_b'^2 \frac{dU_b'}{dx'}} \qquad (4\text{-}53)$$

a-2 実験による検討

a-2-1 滑面の場合.

i) 実験装置及び測定方法

25cm×25cmの吹き出し口を有するエッフル型風洞中に図4-5のような小型風洞を入れて実験を行なった。実験条件を表4-1に示す。風洞の中心線上の表4-2に示す位置で，外径1.3mmのピトー管を用いて，底面摩擦力と x 方向流速を測定した．底面摩擦力の算定にあたってはPatel[6]のキャリブレーション結果を用いた。

ii) 測定結果

ii-i) 領域1の流れ

測定された速度分布形は図4-6のようである。これを領域1とIIに分離し，それぞれの理論結果と比較する。領域1の解析では欠損流速分布が第一近似解でGauss関数に，第二近似解でもそれに近い形になっている。そこで測定された欠損流速を図4-7のように対数目盛グラフにプロットすると，底面近傍を除いてほぼ直線となる。この部分が領域1に対応する。この図から u_b と $b_{1/2}$ が求まる。図4-8はこのようにして求めた u_b と $b_{1/2}$ を用いて無次元化した欠損流速分布である。図中の実線はGauss関数である。図4-9は u_b と $b_{1/2}$ の測定値

と理論解を比較したものである。なお $b_{1/2}$ の第二近似解（一点鎖線）は(4-27)式の分布形から数値的に求めた。また C_0 は本来無限遠点における欠損運動量から決まるのであるが，ここでは最下流断面の速度分布形から求めた。

(ii-ii) 領域2の流れと底面せん断力

図4-10は底面付近の流速分布の一例である。図中の領域1の曲線は前頁の方法で求められたGauss関数であり，領域2の曲線は測定された底面摩擦力を(4-37)式に代入したものである。図4-11は測定された底面摩擦力を用いて無次元化した底面付近の流速分布であり，図中の実線は(4-37)式である。図の上に書かれた矢印はその断面の境界層外縁を示している。図4-12は次式で定義される摩擦係数を示したものである。

$$C_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2}U_0^2} = 2\left(\frac{U_*}{U_0}\right)^2 = 2U_*'^2 \qquad (4\text{-}54)$$

図中の曲線(A)は(4-45)，(4-46)式の U_*' に(4-36)式を代入して得られるものである。しかし図4-9からわかるように(4-36)式は再付着点の位置に大きなズレを生じ，このことの与える誤差が大きいものと思われる。そこで領域2の解析の妥当性を調べる為に次に示す実験式を用いて同様の計算を行なった。この結果が図中の曲線(B)である。

$$U_b' = \frac{U_b}{U_\infty} = 1 - \frac{C}{\sqrt{(x-5.9)+C^2}} \qquad (4-55)$$

ここにCは(4-36)式のCと同じである。上式と測定されたU_bとの一致の具合を図4-13に示す。図4-14は境界層厚δ(*)についての比較である。図中の実線は図4-12の(B)に対応する理論曲線である。

iii) 考察

iii-i) 基本仮定について

本節での流れの取り扱い方の前提となる基本仮定は次の二点である。

1. 流れを自由乱流的領域と境界層領域に分けられること。
2. 前者は後者の影響を受けず，後者の発達は前者に支配されていること。

まず項目1について考える。図4-10ではX/Hが大きくなるにつれて領域の境界が不明瞭になってはくるが，それぞれの領域のふたつの理論曲線で速度分布形が近似されることからみて，1の仮定はほぼ妥当なものであると考えられる。次に項目2についてであるが，境界層領域の発達が自由乱流領域の底面付近の流速に支配されていることは，U_bを正しく与え

(*) δの測定値とは，図4-9に示したようにそれぞれの領域で引かれた曲線の交点として得られたものである。

てやると底面摩擦力や境界層厚がかなり正確に計算されるこ
とから，妥当な仮定であったと言える。一方自由乱流的領域
の流れが底面摩擦の影響をどの程度受けているかということ
は，領域1の解析自体が十分でないので直接には確められな
い。しかし底面摩擦に関する理論式の誘導過程で用いた(4-40)
式は，領域1の流れの応力分布が領域2の存在によって変わら
ないという仮定の上に成り立つものなので，底面摩擦力が或
る程度正しく見積もれるということは，項目2の仮定の妥当
性を裏付けていると考えて良いであろう。このことは実験式
(4-55)式に多少の意味を与える。すなわち領域1の自由乱流
的領域の流れが底面摩擦の影響を受けないとすれば，u_bにつ
いて次の関数関係が期待される。

$$\frac{u_b}{u_\infty} = f_{mc}(C_D, x/H) \qquad (4\text{-}55')$$

(4-55)式はこの形で書かれているので普遍性を有する可能性
がある。これについては次の粗面についての実験の項でも再
び触れる。

(iii-ii) 領域1の流れについて

再付着点付近では解析結果と測定値（特にu_b）が大きくず
れている。この原因は摂動法における展開方法にある。後流
解を第一近似として用いようとすると必然的にこのように

なるのであるが，この展開法は再付着点の近くでは明らかに意味を持たない。摂動パラメーターδは十分下流では微小量となるが，再付着点の近くでは微小でなく摂動パラメーターとして適切とは言えない。再付着点付近では $u/u_\infty \sim \delta \sim 1$ となるので何らかの簡略化や線形化によって解析を行なうこと自体無理であると思われる。さらにこの形では上流側の条件の入る余地が無いという難点が有る。Wakeが或る程度広がった下流部では流れは上流側の条件によらず（C_Dを除いて）に決まると思われるが，再付着点の近くでは上流側の条件，例えば剥離領域の大きさ，剥離領域内の圧力分布，剥離点での飛び出し角度などに左右されると思われる。

図4-15は各測定断面における流速分布から求めた欠損運動量係数C_Dを示している。$X/H < 12$においてはかなり変化しており，圧力勾配が流速分布に大きな影響を与えていることがわかる。一方前述の展開法では圧力勾配の効果は第三近似以降で入ってくる為，前述の解析結果（第二近似まで）にはその影響が取り込まれておらず，この点においても不十分であると言える。

また各オーダーの流関数及び広がり幅を流下距離のベキ乗とおいたが，このように剥離領域の近くを取り扱う場合は，原点をどこに取るかについても検討を要すると思われる。

(iii-iii) 領域2の流れについて

x方向に変化する流れではinner lawは厳密には成立しないのであるが，本理論では近似として用いた．図4-11では，境界層先端部では測定値がはずれているが，全体的には十分な近似と言える．

領域2の流れは領域1の底面付近の流速変化の影響を強く受ける．したがって(4-45)，(4-46)式を使って底面摩擦力を計算するにはU_b'を正しく与える必要がある．しかし領域1の流れの解析が不十分であったので，ここでは実験式(4-55)式を用いて計算した．その結果底面摩擦力，境界層厚とも実測値とかなり良く一致した．このことから領域2の解析法は妥当なものであると思われる．

a-2-2 粗面の場合

i) 実験装置及び測定方法

25cm×25cmの吹き出し口を有するエッフル型風洞に図4-16に示すような段上がり部を入れ，下流部で測定を行なった。実験条件を表4-3に示す。平均粒径1.83mmの鉛玉を底面粗度として用いた。粒度分布を図4-17に示す。風洞の中心線上の表4-4に示す位置で外径1.3mmのピトー管を用いて底面摩擦力と之方向流速分布を測定した。底面摩擦力の算定にあたっては，Hwang & Laursen[7]のキャリブレーション結果を用いた。

ii) 粗度係数

Nikuradse[8]は砂粒子を一様に塗り付けた面の粗度係数k_sを砂の粒径にとって整理しており，この場合(4-47)式のy_0は粒径の1/30となる。しかし本実験で用いる鉛玉は砂粒子に較べて粒度が均一であり，また球形であるので，かなり一様且つ密に配列される。この為粗度係数は粒径より小さくなると予想される。そこで粗度係数を調べる為の予備実験を行なった。図4-18は段上がり部を取り除き普通に境界層を発達させ，十分下流で測定した流速分布形である。図中(○)は鉛玉上面を鉛直座標の原点にとった場合の流速分布形である。(×)は座標原点を鉛玉上面から0.9mm下げた場合の流速分布形で，このようにすると片対数紙上で直線関係が得られ，且つy_0の値

が流速によらない。図中の直線は，ピトー管をプレストン管として使用した時の値を用いて $y_0 = 0.003$ cm として計算される速度分布形であり，(×) と極めて良く一致している。そこで以下の実験結果を整理する際には，鉛直座標原点を鉛玉上面から 0.9mm 下にとり，$y_0 = 0.03$ mm，粗度係数 $k_s = 30 \times y_0 = 0.9$ mm とした。

(iii) 測定結果及び考察

(iii-i) 領域1の流れ

滑面の場合と同様に整理した。欠損流速分布を図4-19に示す。滑面の場合と同様 Gauss 関数と非常に良く一致している。図4-20に u_b と $b_{1/2}$ を比較する。前と同様に u_b の対応は良くない。図4-21は滑面の実験で得られた u_b' の実験式 (4-55) 式と本実験の u_b' とを比較したものである。段落ち量，平均流速，欠損運動量が違うにもかかわらずこの場合にも非常に良く一致している。このことは (4-55') 式での考察の妥当性を示していると思われる。図4-22に欠損運動量の流下方向の変化を示す。滑面の場合と同様の傾向を示しており，再付着点付近の流れの解析では圧力勾配の影響が無視できないことがわかる。

(iii-ii) 領域2の流れ

図4-23は底面付近の流速分布である。領域1の曲線は Gauss 関数，領域2の曲線は測定された底面摩擦力を (4-47) 式に代

入して得られた速度分布形である。滑面の場合と同様速度分布形は前記のふたつの曲線の合成として表し得ることがわかる。図4-24は摩擦係数の理論値と測定値を比較したものである。ただし理論値の計算にあたってはU_0として(4-55)式を用いた。図4-25は境界層厚について比較したものである。摩擦係数も境界層厚も，滑面の場合に較べて誤差が大きくなっている。この原因として，鉛直座標の原点補正や粗度係数の見積もりのもたらす誤差が考えられる。特に原点をずらすと境界層の実質の厚さが減少するので，運動量関係に多少の誤差を生じる。この誤差は境界層の薄い再付着点付近で特に大きい。しかし或る程度下流($X/H > 10$)では摩擦係数の理論値と測定値の対応は良いと言える。

b　三角波上の流れの摩擦抵抗

b－1　算定法

ここまでは水深無限大で且つ段落ち後の底面が水平である条件のもとで解析を進めてきた。河床波上の摩擦抵抗は剥離流が再付着して生ずる新らたな境界層の発達によってほぼ規定されていると考えられるので，前述の取り扱いでだいたいのところは表わし得ると考えられる。しかし実際には水深が有限で且つ再付着点後の底面が傾いているので，河床波背面では縮流が生じ，このことが摩擦抵抗に副次的に影響を及ぼすと考えられる。そこで河床波を三角形状とみなし前の結果に多少の補正を加える。

境界の形状が変われば本来はまたその形状について運動方程式を解きなおさねばならない。しかし今度の場合は流れを解くのはかなり困難である。また前に取り扱った再付着点後の境界層の発達によって摩擦抵抗の値はだいたい定まっていると思われる。そこで流れの縮流効果を，直角段落ち流での u_∞ の変化として考慮することにする。

段落ち量に対して水深を u_∞ とみなせない場合には u_∞ に相当するものが無い。そこでこれを断面平均流速 $\bar{u}$ で近似的に表わす。無次元底面摩擦速度の変化は粗面の場合は次式で表わされる。

$$\frac{du_*'}{dx'} = \frac{K\left[\left(\frac{Ku_b}{u_*'}\right)\left\{\exp\left(\frac{Ku_b}{u_*'}\right)-1\right\}\frac{du_b'}{dx'} - \frac{Ku_*'}{y_0}\right]}{\left\{\left(\frac{Ku_b}{u_*'}\right)^2-3\left(\frac{Ku_b}{u_*'}\right)+4\right\}\exp\left(\frac{Ku_b}{u_*'}\right)-\left(\frac{Ku_b}{u_*'}\right)-4} \qquad (4\text{-}56)$$

ただし(4-51)式とは異なり速度に関しては平均流速Vで無次元化してある．したがってu_b'は

$$u_b' = \frac{u_b}{V} = \frac{u_b}{\bar{u}}\frac{\bar{u}}{V}$$

$$= \left\{1-\frac{c}{\sqrt{(x'-5.9)+c^2}}\right\} \times \frac{d'-\frac{1}{2}}{d'-y'}$$

$$= \left\{1-\frac{c}{\sqrt{(x'-5.9)+c^2}}\right\} \times \frac{d'-1/2}{d'-\frac{1}{\alpha}x'} \qquad (4\text{-}57)$$

となる。ここに$\alpha = L/H$，L＝河床波の波長。摩擦係数を次のように定義しなおす．

$$C_f' = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2}V^2} = 2\left(\frac{u_*}{V}\right)^2 = 2u_*'^2 \qquad (4\text{-}58)$$

b-2 実験的検討

1) 実験装置及び測定方法．

25cm×25cmの吹き出し口を有するエッフル型風洞中に，図4-26に示すようにベニヤ製の三角形波を置き，直角段落ち流の実験で用いたと同じ鉛玉を敷いた。風洞の中心線上で底

面付近の速度分布と底面摩擦力を外径1.3mmのピトー管を用いて測定した。

ii) 測定結果

底面付近の速度分布を図4-27に示す。図中の実線は測定された底面摩擦力を(4-47)式に代入して得られる速度分布形である。両者は良く一致している。図4-28は摩擦係数の測定値と理論値の比較である。実線は(4-57)式を用いて得られる理論曲線，破線は直角段落ちとして計算された結果である。立ち上がり部で大きめに算定するが，全体的な値の対応は良いと言える。

§.3 形状抵抗の算定法

a. 急拡損失から算定する方法及びそれに準ずる方法.

従来の研究では形状抵抗によるエネルギー損失を急拡による損失或いは段落ちによる損失とみなし,[9] これから形状抵抗を求めている場合が多い。この中最も基本的で且つ簡単な取り扱いは Carnot's Formula に基づくものである. 図4-29のように急拡部での圧力を主流部でのそれに等しいと仮定して運動量式を解くとエネルギー損失 Δh は次式となる.

$$\Delta h = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \quad \cdots\cdots \text{Carnot's Formula} \tag{4-59}$$

a図とb図を対応させると

$$\Delta h = \frac{g^2}{2g}\left(\frac{1}{d-H/2} - \frac{1}{d+H/2}\right)^2$$

$$= \frac{g^2}{2g}\left\{\frac{H}{d^2-H^2/4}\right\}^2 = \frac{V^2}{2g}\left\{\frac{\eta}{1-\eta^2/4}\right\}^2 \tag{4-60}$$

となる。ここに, $\eta = H/d$。

河床波一波長のもたらす抗力は

$$F = \rho g d I L = \rho g d \Delta h$$

$$= \frac{\rho}{2}\left\{\frac{\eta}{1-\eta^2/4}\right\}^2 d \cdot V^2 = \frac{\rho}{2}\frac{\eta}{(1-\eta^2/4)^2} V^2 \cdot H \tag{4-61}$$

一方，抗力係数の定義から

$$F = \frac{\rho}{2} C_D V^2 H \qquad (4\text{-}62)$$

(4-61)式と(4-62)式を対応させると次式を得る。

$$C_D = \frac{\gamma}{(1-\gamma/4)^2} \qquad (4\text{-}63)$$

次に図4-30のように上流側で極めてゆっくり縮流し急に拡げる場合を考える。運動量式は，

$$F = P_1 d_1 + \rho V_1^2 d_1 - \{P_2 d_1 + \rho V_2^2 (d_1 - H)\} \qquad (4\text{-}64)$$

断面Ⅰ～Ⅱ間で摩擦によるロスは無いとしているから，

$$P_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 = P_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2 \qquad (4\text{-}65)$$

(4-64)と(4-65)式を連立しFを求め同様の整理を行うと次式を得る。

$$C_D = \frac{\gamma}{(1-\gamma/2)(1-\gamma/4)} \qquad (4\text{-}66)$$

(4-63)と(4-66)式はほとんど同形で，共に $\gamma \to 0$ で $C_D \to 0$ となる。しかしこの結果は大きな矛盾を含んでいる。上の取り扱いでは孤立した突起を対象としているが，孤立した突起の場合，$\gamma \to 0$ となっても $C_D \to 0$ とはならないことが実験

的に知られている。上の解析法は共に次の点において不備である。

1. 上流側での流れの局所的な歪を全く考慮していないこと。
2. 剥離領域内の圧力を主流部のそれと等しいとすること。

そこで本節ではこの二点を重視した解析を行なう。

なお，河床波は流下方向に連らなっているのだが，ここでは従来の理論と同じく一波だけが孤立している場合を取り扱う。

b　半無限流中の楕円形突起の抗力

前述の難点を除くには，河床変動による局所的な流速の変化を考慮すればよい．その為には河床波のまわりの流れを解析的に求めることが必要である．しかし任意の形状の物体のまわりの流れを解析することはできない．そこで，この後の応用のことを考えて，河床波に似た形状で且つ解が比較的簡単な数式で表わせる場合を取り扱うことにした．

図4-31に示す楕円形突起について流れの局所的変化を取り入れて解析し，波形勾配がC_Dに及ぼす影響を明らかにする．

まず楕円形突起の上流側の流れを図の点線のように前後対称の突起のまわりの流れで近似する．楕円座標を用いて，

$$x = c\cosh\xi\cos\eta \qquad y = c\sinh\xi\sin\eta \qquad (4\text{-}67)$$

ここにc＝定数．これより，

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\sinh\xi\cdot\cos\eta}{c\{(\cosh\xi)^2-(\cos\eta)^2\}}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{-\cosh\xi\cdot\cos\eta}{c\{(\cosh\xi)^2-(\cos\eta)^2\}}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\cosh\xi\cdot\sin\eta}{c\{(\cosh\xi)^2-(\cos\eta)^2\}}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\sinh\xi\cdot\cos\eta}{c\{(\cosh\xi)^2-(\cos\eta)^2\}} \qquad (4\text{-}68)$$

となり，若干の計算の後，

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{c^2\{(\cosh\xi)^2-(\cos\eta)^2\}}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2\right\} \qquad (4\text{-}69)$$

楕円を通過する流れの流関数は次のように書かれる。

$$\psi = -Ub\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{1/2} e^{-\xi}\sin\eta + U(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}\sinh\xi\cdot\sin\eta \qquad (4\text{-}70)$$

ここにψは流関数，Uは無限遠点でのx方向流速，aは長半径，bは短半径，である。(4-67)式のcは次のように書かれる。

$$c = (a+b)^{1/2}\cdot(a-b)^{1/2} \qquad (4\text{-}71)$$

(4-70)式が境界条件を満たしていることは次のように示される。まず楕円体から十分離れたところでは$\xi\to\infty$となるから第一項が消え，さらに第二項に(4-67)式を適用すれば，

$$\psi = Uy \qquad (4\text{-}72)$$

となり流速Uの一様流を表わす。したがって無限遠点での境界条件を満たしている。また，(4-67)からηを消去し(4-71)式の関係を使うと，

$$\frac{x^2}{(a+b)(a-b)(\cosh\xi)^2} + \frac{y^2}{(a+b)(a-b)(\sinh\xi)^2} = 1 \qquad (4\text{-}73)$$

ここで $b\exp(-\xi_0) = (a-b)\sinh\xi_0$ となるξ_0については

$$\sinh\xi_0 = \frac{b}{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}}, \quad \cosh\xi_0 = \frac{a}{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}}$$

となるから (4-73)式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4\text{-}74)$$

一方同じ ξ_0 を(4-80)式に代入すると $\psi\equiv 0$ となる。したがって楕円体が流線を形づくっている。以上から(4-70)式が楕円体を通過する流れを表わすことがわかる。

さて，(4-69)式から運動エネルギーは次のようにあらわされる。

$$\frac{\rho(u^2+v^2)}{2}=\frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{\rho}{2}\,\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2}{(a+b)(a-b)\{(\cosh\xi)^2-(\cos\eta)^2\}}$$

楕円体上では $\xi=\xi_0=\text{const.}$，また $\psi\equiv 0$ だから $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0$。ゆえに，

$$\frac{\rho(u^2+v^2)}{2}=\frac{\rho}{2}\,\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2\Big|_{\xi=\xi_0}}{(a+b)(a-b)\{(\cosh\xi_0)^2-(\cos\eta)^2\}}$$

$$=\frac{\rho U^2}{2}\,\frac{a+b}{a-b}\,\frac{(\sin\eta)^2}{(\cosh\xi_0)^2-(\cos\eta)^2} \qquad (4\text{-}75)$$

したがって楕円上の圧力分布は次式で表わされる。

$$P-P_\infty=\frac{1}{2}\rho U^2-\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2)$$

$$=\frac{1}{2}\rho U^2\left\{1-\frac{a+b}{a-b}\,\frac{(\sin\eta)^2}{(\cosh\xi_0)^2-(\cos\eta)^2}\right\} \qquad (4\text{-}76)$$

圧力係数を次のように定義すると

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{a+b}{a-b}\frac{(\sin\eta)^2}{(\cosh\xi_0)^2 - (\cos\eta)^2} \qquad (4\text{-}77)$$

抗力係数 C_D は次式から求まる。

$$C_D = \frac{1}{b}\int C_p \, dy = \frac{1}{b}\int C_p \frac{dy}{d\eta} d\eta$$

$$= 1 - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\alpha^2-1}\right\} - C_{p0} \qquad (4\text{-}78)$$

ここに，$\alpha = a/b$ ，C_{p0} =剥離領域内の圧力係数，である。
Tani[10]の測定によれば，水平に剥離する場合の剥離領域内の圧力係数は，剥離点のすぐ上流側の C_p に較べて 0.07 程小さい。そこで次のようにおく。

$$C_{p0} = C_p' - 0.07 \qquad (4\text{-}79)$$

ここに C_p' は剥離直前の点の圧力係数で，(4-77) 式から

$$C_p' = 1 - \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{a^2} = -\frac{1+2\alpha}{\alpha^2} \qquad (4\text{-}80)$$

ゆえに抗力係数は次式で表わされる。

$$C_D = 1 - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\alpha^2-1}\right\} + \frac{1+2\alpha}{\alpha^2} + 0.07$$

(4-81)

c. 縮流による効果を考慮した C_D の補正

bでは半無限流中の楕円形突起の抗力係数を求めた。しかし実際には水深が有限であるので河床波上流面で縮流が生じ、C_D に影響を及ぼすものと思われる。

Kirshmer[11] は同形の桟を並べたスクリーンの損失係数を実験的に調べている（図4-32）。流れの対称性から次のように置き換えれば C_D に対しての縮流の効果をみることができる。

$$\frac{S}{b} \longrightarrow \frac{H}{d-H/2}$$

ここに S は桟の厚さ，b は桟の間隔である。Kirshmer の測定結果を図4-32に示す。図中の実線はKirshmerが定めた実験式（矩型断面の場合）

$$h_w = \beta\left(\frac{S}{b}\right)^{3/4}\frac{v^2}{2g} \qquad (4\text{-}82)$$

を変形して求めたもので，次式で表わされる。

$$C_D = \beta\left\{\left(\frac{S}{b}\right)^{1/3} + \left(\frac{S}{b}\right)^{4/3}\right\} \qquad (4\text{-}83)$$

ただし β は桟の形状によって異なり，矩形断面では $\beta = 2.42$ である。上式では $S/b \to 0$ とすると $C_D \to 0$ となって不合理である。ところで Hoerner[12] の測定によれば $S/b \to 0$ での矩形断面を持つ柱の抗力係数は0.89である。（図中の△）したがって図の破線のように結ぶのが正しいと考えられる。この関係は

次のように表わされる。

$$C_D = C_{D0}\left(1 + 4.4\frac{S}{b}\right) \qquad (4\text{-}84)$$

ここに C_{D0} は $S/b \to 0$ の時の抗力係数である。(4-84) 式を河床波に対応させ，代表流速として平均流速をとれば，

$$\frac{S}{b} \longrightarrow \frac{H}{d - H/2}$$

$$C_{D0} \longrightarrow C_{D0}\frac{d^2}{(d+H/2)^2}$$

と置き換えればよい。C_{D0} に (4-81) 式を代入し次式を得る。

$$C_D = \left[1 - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\tan^{-1}\sqrt{\alpha^2-1}\right\} + \frac{1+2\alpha}{\alpha^2} + 0.07\right] \times \frac{1+3.9\eta}{(1+0.5\eta)^2(1-0.5\eta)} \qquad (4\text{-}85)$$

ここに $\alpha = L/H$，$\eta = H/d$ である。

d. 実験データーによる検討

i) 半無限流れの中の突起の抗力

Hoermer[12]は sheet metal の接合部の抗力を調べる目的で、図4-33-aの形状の抗力係数を測定し $C_D=0.2$ という結果を得ている。一方(4-81)式によると $C_D=0.17$ となりほぼ一致している。

Bearman[13]は図4-33-bのように楕円柱の後に種々の長さの隔壁を付けて Base Pressure ((4-79)式の C_{p_0})を測定している。このうち剥離領域が完全に二分される場合が本研究のモデルに対応するが、$C_{p_0}=-0.215$ という結果が得られている。一方(4-79), (4-80)式から理論値は $C_{p_0}=-0.244$ となりほぼ一致している。

以上の結果から、半無限流中の楕円形突起の抗力算定式は、ほぼ妥当なものと思われる。

ii) 三角形波状底面の抗力。

25cm×25cm の吹き出し口を有するエッフル型風洞中に、図4-34のように三角形波状底面を敷設し、第五波の表面圧力分布を測定し、これを積分して抗力係数を求めた。実験条件を表4-5に示す。図4-35は測定された圧力分布である。これから得られた抗力係数 C_D と(4-85)式とを図4-36に比較する。実験値は理論値に較べて多少小さめである。この原因として、

理論では一波だけを取り出して扱っているのに対し，実際には連なっているのでSheltering効果が副次的に働くこと，が考えられる。Sheltering効果については現在のところあまり良くわかっていないので，これについての補正は今後の課題として，ここでは特に行なわない。

§.4 平均流速算定式

a. 平均流速算定式

前章の結果で摩擦抵抗，形状抵抗を算定できるものとする．全抵抗係数を次式で定義する．

$$\tau_0 = \frac{\rho}{2} C_f V^2 \qquad (4\text{-}86)$$

ここに τ_0 = 底面セン断力，V = 平均流速，C_f = 全抵抗係数である．摩擦抵抗と形状抵抗について摩擦抵抗係数と形状抵抗係数を次式で定義する．

$$\tau_0' = \frac{\rho}{2} C_f' V^2 \qquad (4\text{-}87)$$

$$\tau_0'' = \frac{\rho}{2} C_f'' V^2 \qquad (4\text{-}88)$$

ここに τ_0' は底面セン断力に対する摩擦抵抗の寄与分，τ_0'' は形状抵抗の寄与分であり，C_f' を摩擦抵抗係数，C_f'' を形状抵抗係数と呼ぶことにする．定義により次の関係がある．

$$\tau_0 = \tau_0' + \tau_0'' \qquad (4\text{-}89)$$

$$C_f = C_f' + C_f'' \qquad (4\text{-}90)$$

摩擦抵抗係数は (4-55) 式の C_f を用いて次のように書かれる．

$$C_f' = \frac{1}{\alpha - 5.9} \int_0^{\alpha-5.9} C_f \, dx' \qquad (4\text{-}91)$$

ここに，$\alpha = L/H$，L = 河床波の波長，H = 河床波の波高。形状抵抗係数は以下のようにして抗力係数と結び付けられる。一波長当りの抗力と底面せん断力の関係は，

$$F = \tau_0 L = \rho g d I L \qquad (4\text{-}92)$$

したがって

$$\frac{\rho}{2} C_D V^2 H = \frac{\rho}{2} C_f'' V^2 L \qquad (4\text{-}93)$$

これから

$$C_f'' = \frac{H}{L} C_D \qquad (4\text{-}94)$$

(5-6) 式を図5-1～図5-7に，(5-9) 式を図5-8に示す。平均流速は次のように表わされる。

$$V = \sqrt{\frac{2gdI}{C_f' + C_f''}} = \sqrt[3]{\frac{2gqI}{C_f' + C_f''}} \qquad (4\text{-}95)$$

ここに q = 単位幅流量である。本式は流量，河床勾配，河床波波高，河床波波長から平均流速を求める式である。

b. 水路実験データーによる算定式の検討.

第三章§.1で用いたGeological Survey[14]の実験データー及び禅原・椿[15]の斐伊川での測定データーを用いて検討する. なお前者については河床形態の欄にRipples, Dunesと記載されたケースのみを解析した.

(5-10)式から計算された平均流速と測定された平均流速とを図5-9～図5-12に比較する. 見積もり誤差は最大2割程度までであり, 必ずしも十分な精度とは言えない. この原因としては, 理論では二次元的な河床波を扱っているので三次元性の強い場合には誤差を生じる恐れのあること, 形状抵抗で考慮しなかったSheltering効果などが考えられる. 特に図5-10の2 foot wide flumeでのデーターのバラツキが大きいが, これは水路幅に対する水深の比がそれ程小さくないので(d/H～1/3), おそらく流れの三次元性が強い為であろうと思われる.

しかし同じ対象を扱った従来の理論[16][17]に較べるとかなり精度が良くなっており, 本論文に述べた方法を拡張・補正することにより, より適用性のある理論式を導くことができると思われる。

§5 まとめ

本章では河床波の波長，波高と河床波が流水に与える抵抗との関係について考察した。

§2では，摩擦抵抗が再付着からの境界層の発達に支配されていると考え，直角段落ち下流部の流れの解析を基礎にして摩擦抵抗の算定法を導いた。

§3では，河床波に似た形状で且つ解が比較的簡単な数式で表わせる楕円形突起の抗力を基礎に，これに縮流の効果の補正を加えて形状抵抗の算定法を求めた。

§4では，§2と§3の結果から河床波の波長と波高が与えられた場合の平均流速算定式を導き，水路実験データー及び河川での実測データーを用いて検討を加えた。その結果，本算定法では見積もり誤差は最大2割程度までであった。しかし同じ対象を扱った従来の理論[16][17]に較べると精度はかなり良くなっており，本論文の方法を拡張，補正してゆくことにより，さらに適用性の高い算定式を導くことができると思われる。

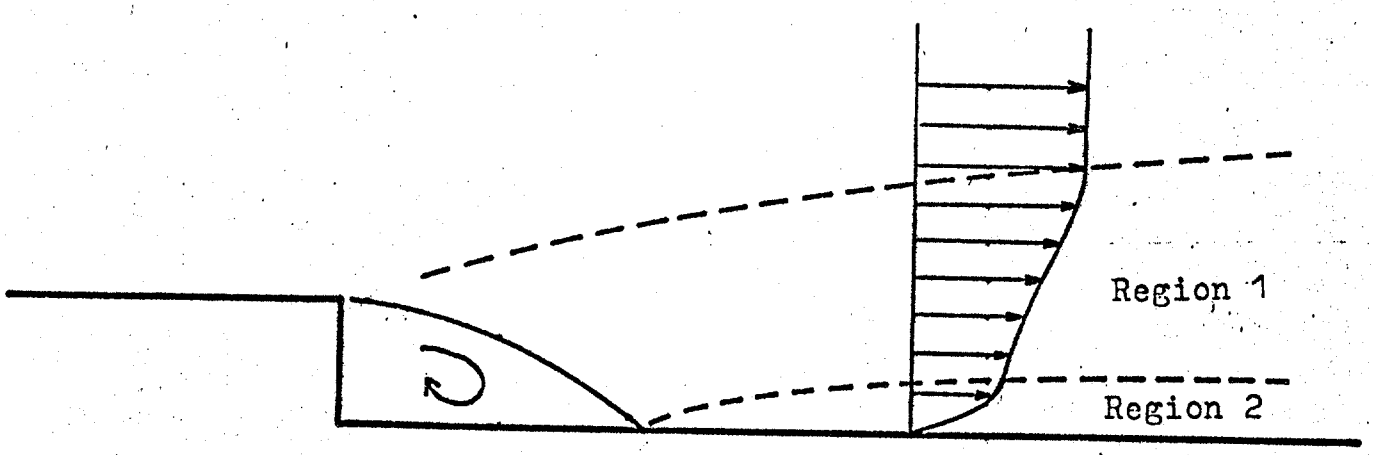


Fig 4-1

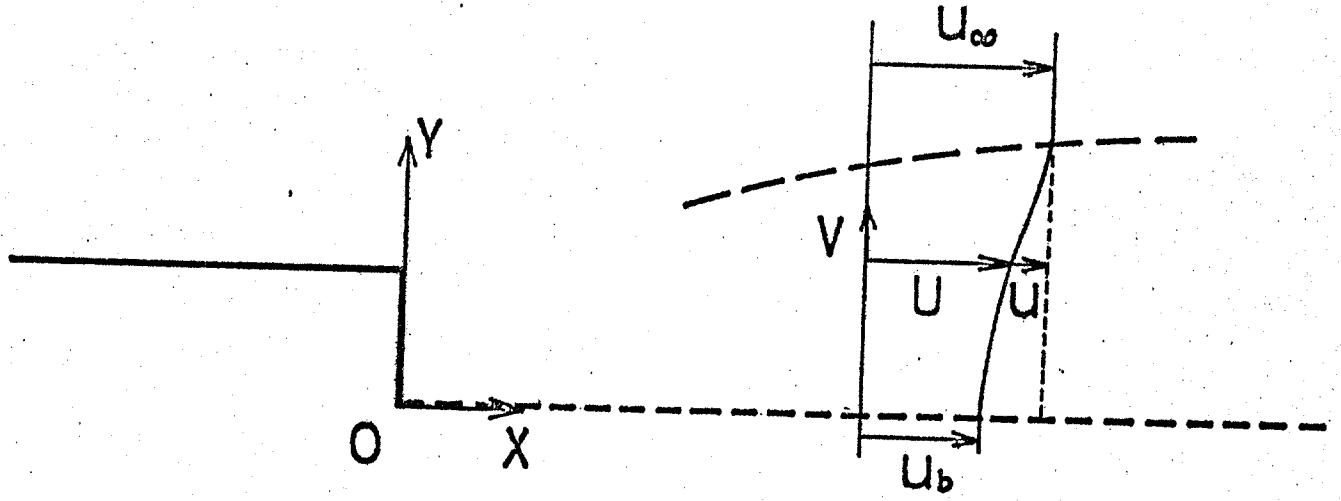


Fig 4-2

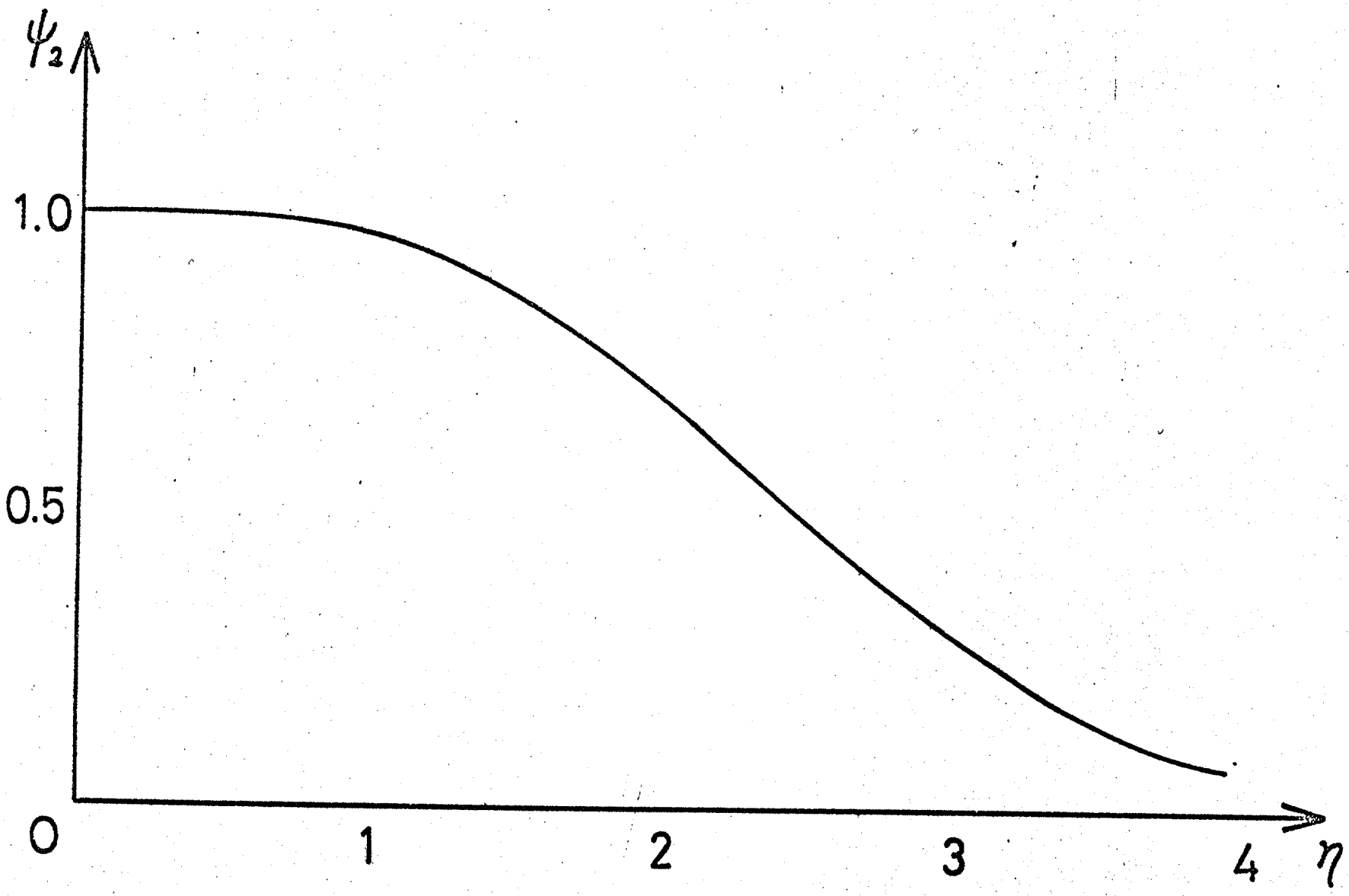


Fig 4.3

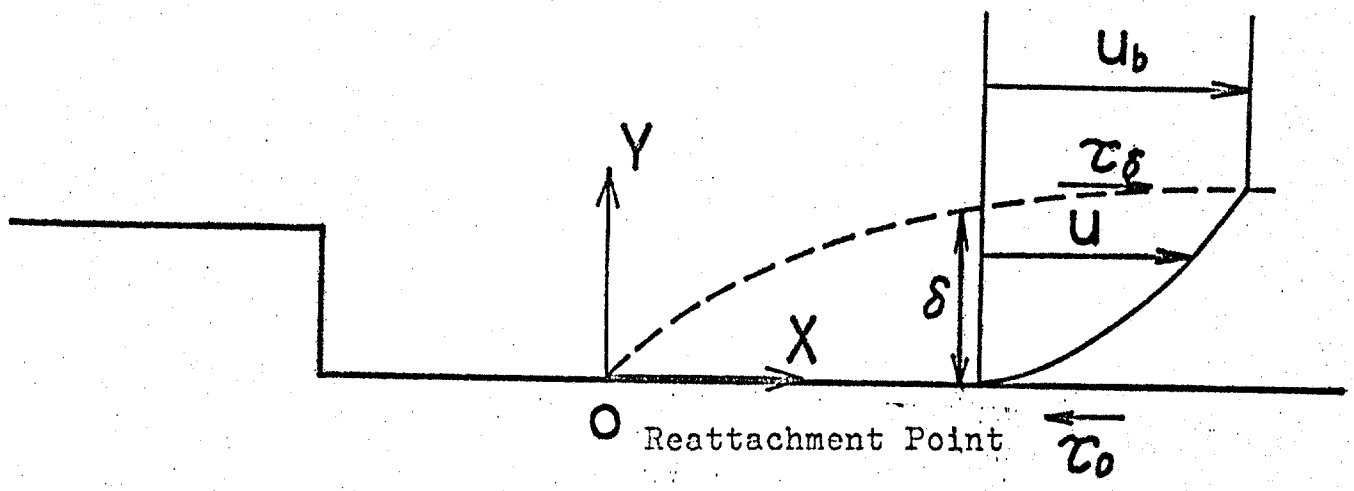


Fig. 4-4

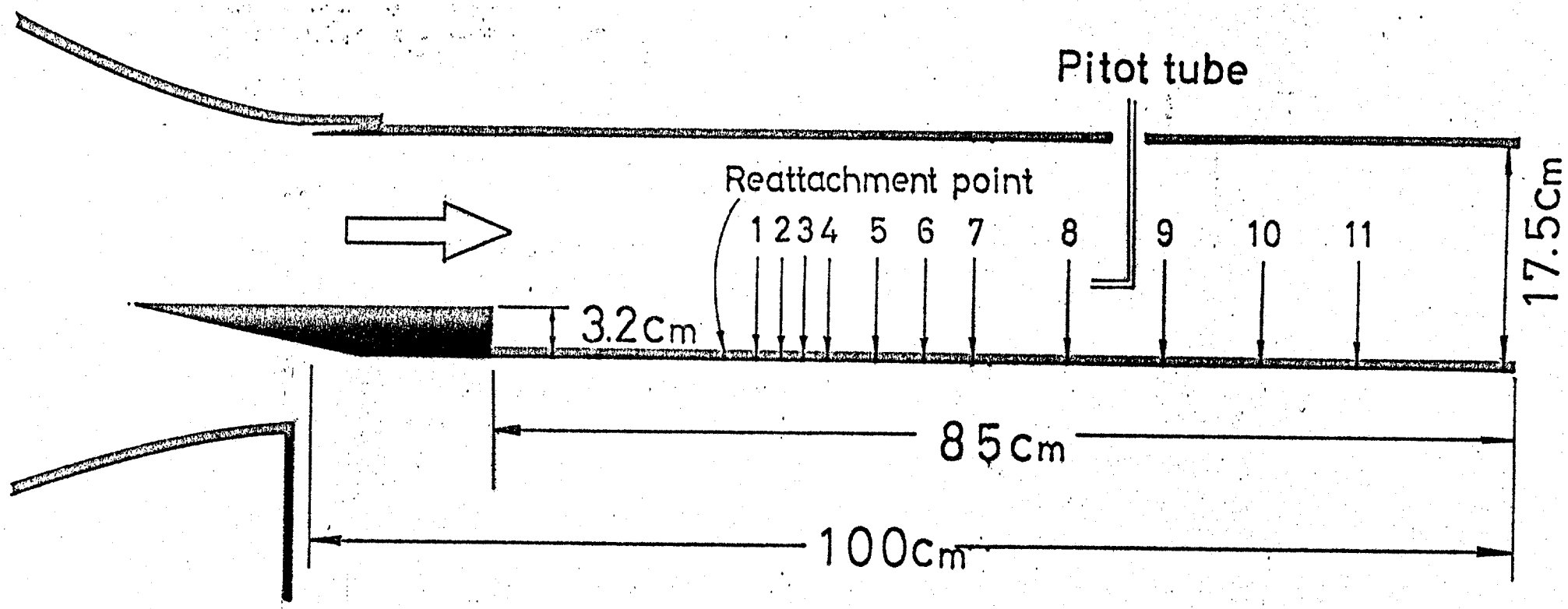

Pitot tube
Reattachment point
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
17.5cm
3.2cm
85cm
100cm

Fig. 4-5

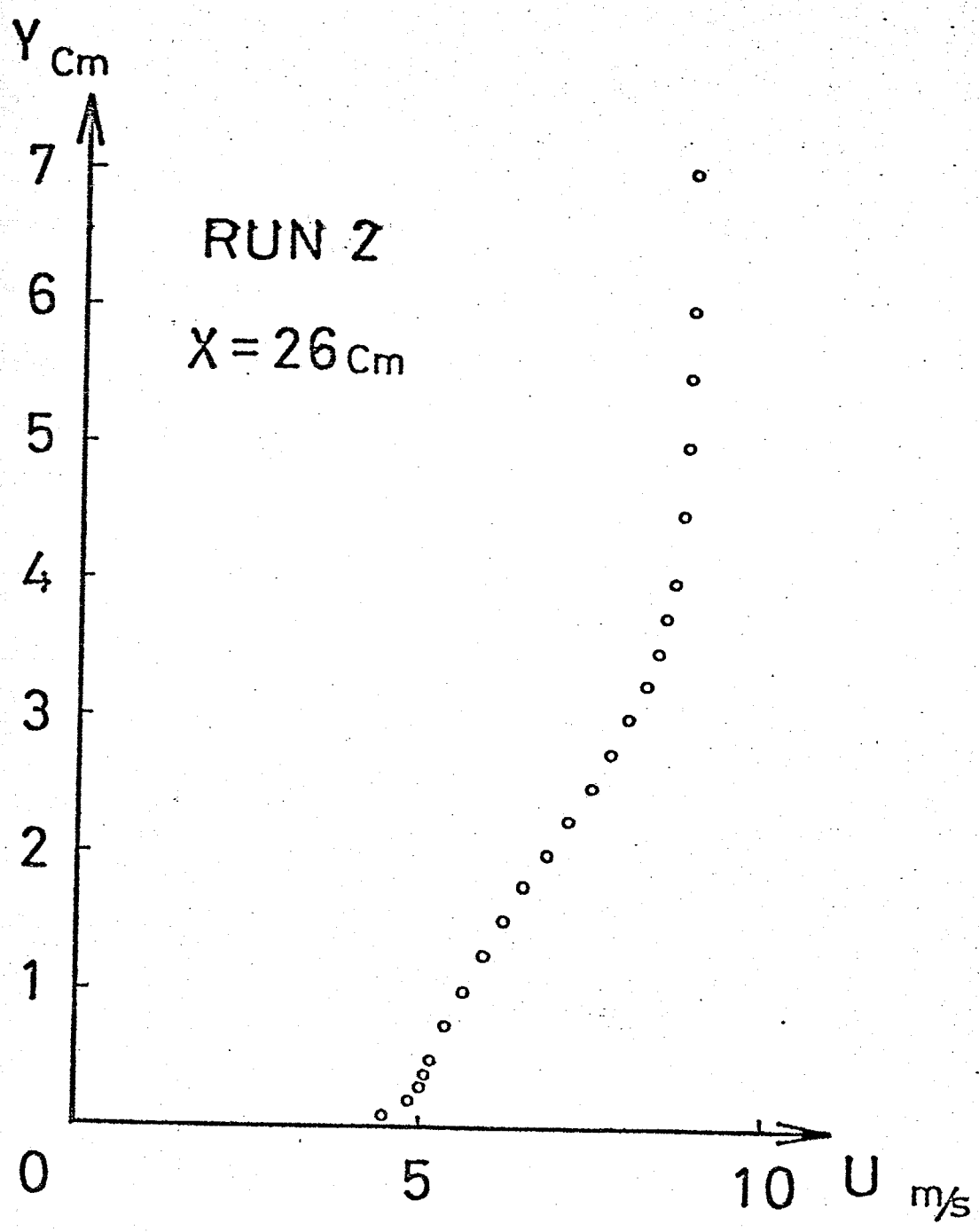


Fig. 4-6

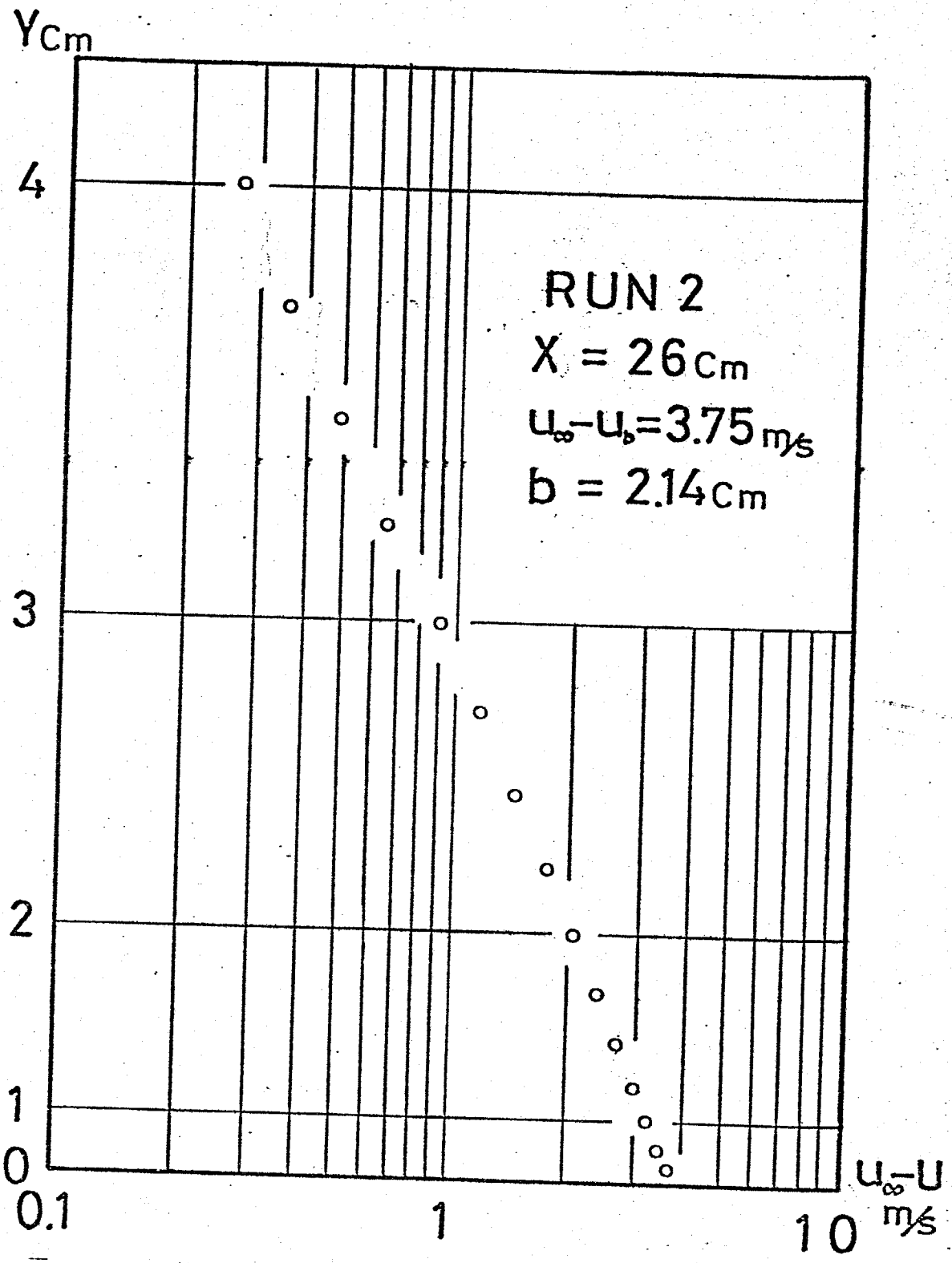

Ycm
4
3
2
1
0
0.1
1
10
$u_\infty - u$ m/s
RUN 2
X = 26cm
$u_\infty - u_b = 3.75$ m/s
b = 2.14cm

Fig. 4-7

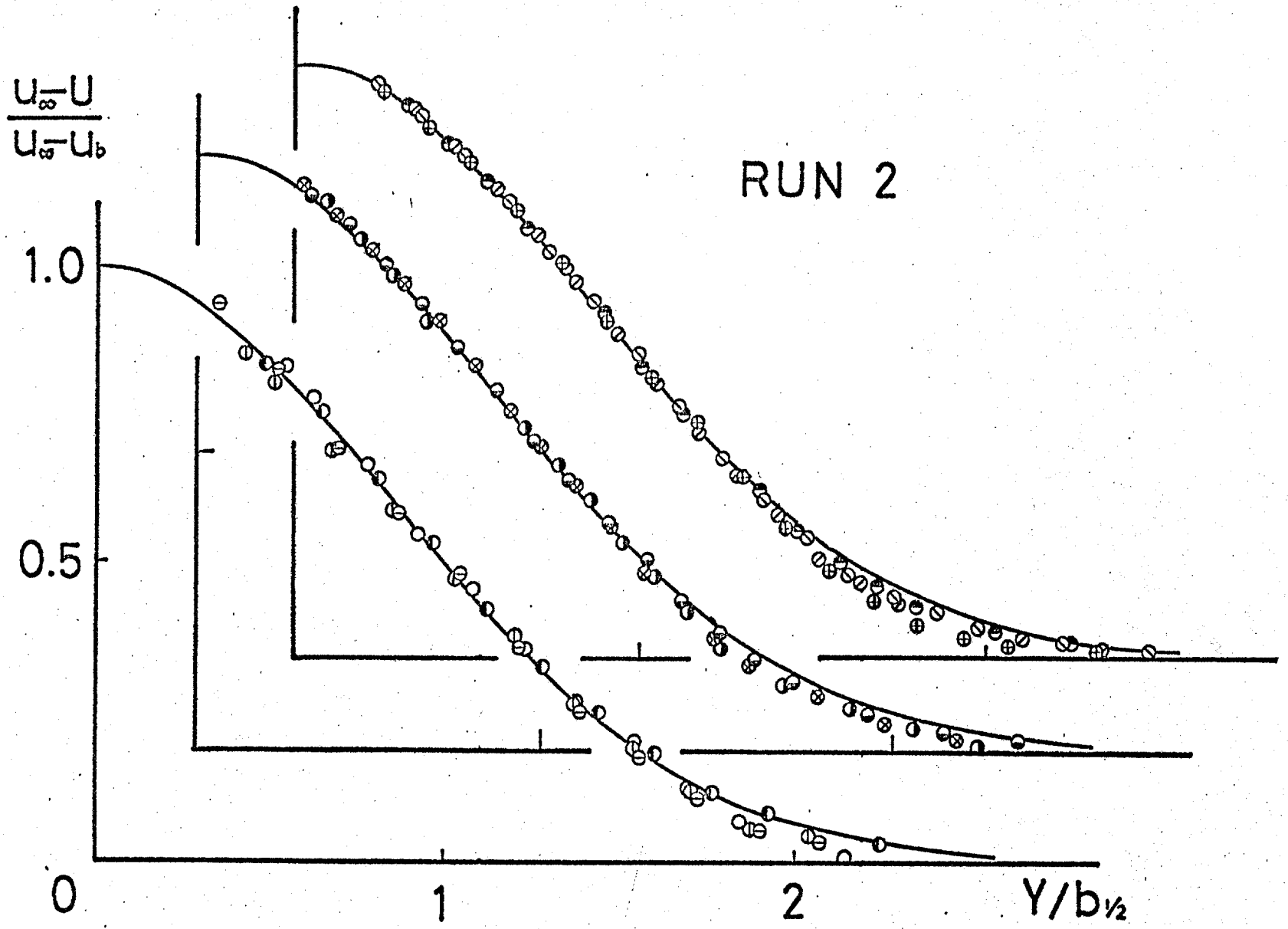


Fig. 4-8

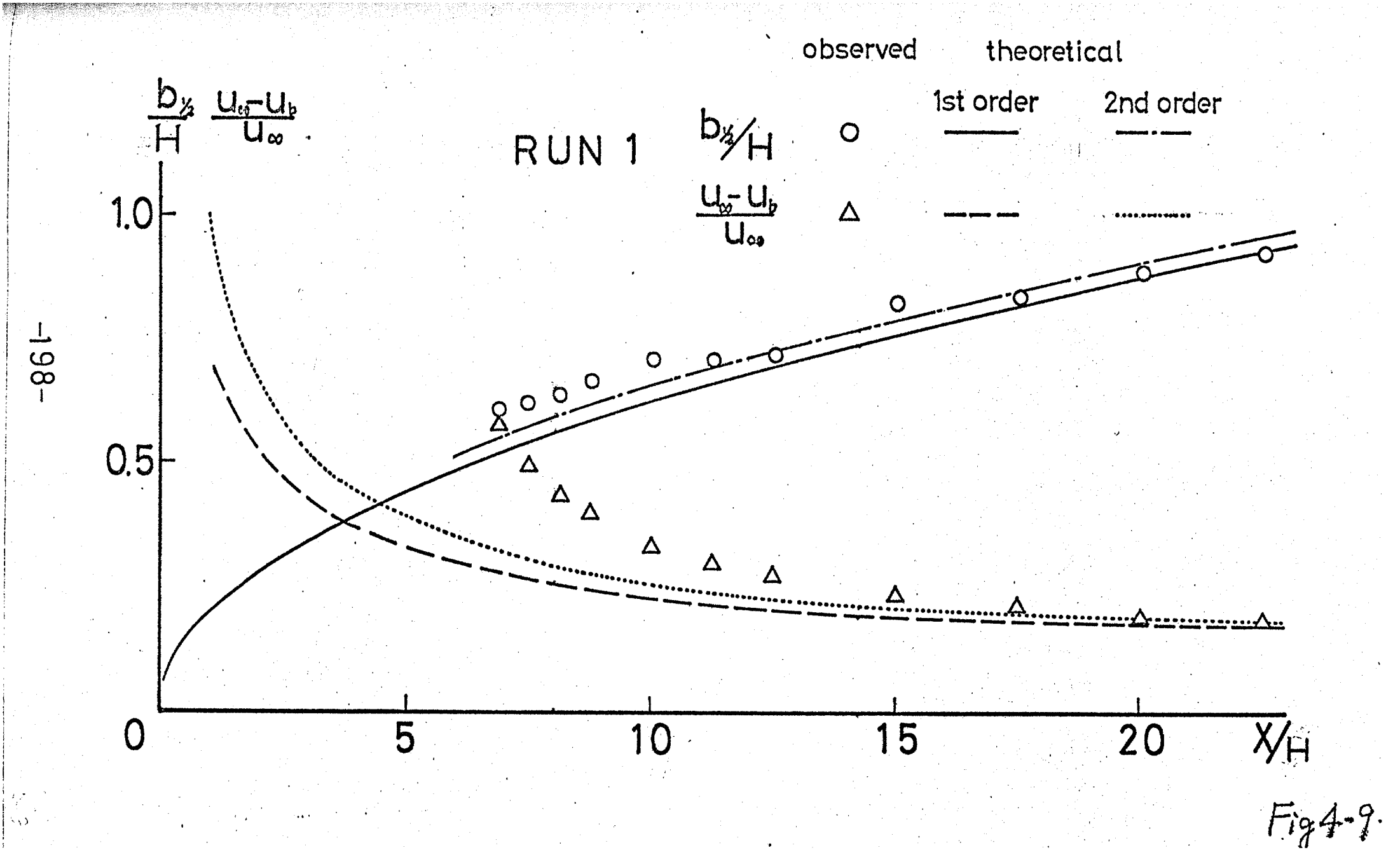

observed
theoretical
1st order
2nd order
RUN 1
$b_{1/2}/H$
$\frac{u_\infty - u_b}{u_\infty}$
$\frac{b_{1/2}}{H}$ $\frac{u_\infty - u_b}{u_\infty}$
1.0
0.5
0
5
10
15
20
X/H

Fig 4-9.

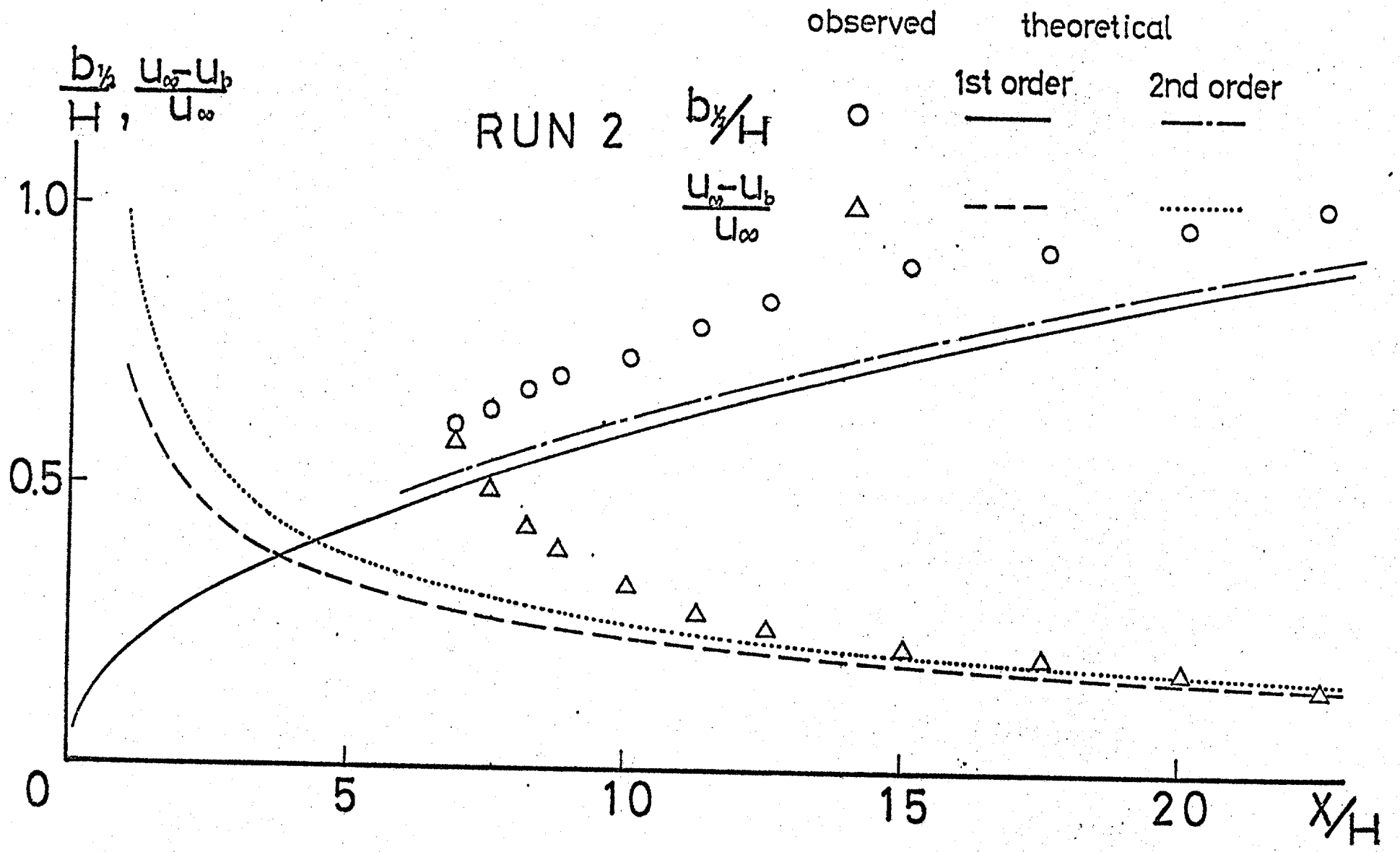

observed
theoretical
1st order
2nd order
$\frac{b_{1/2}}{H}$, $\frac{U_\infty - U_b}{U_\infty}$
RUN 2
$b_{1/2}/H$
$\frac{U_\infty - U_b}{U_\infty}$
1.0
0.5
0
5
10
15
20
X/H

Fig 4-9

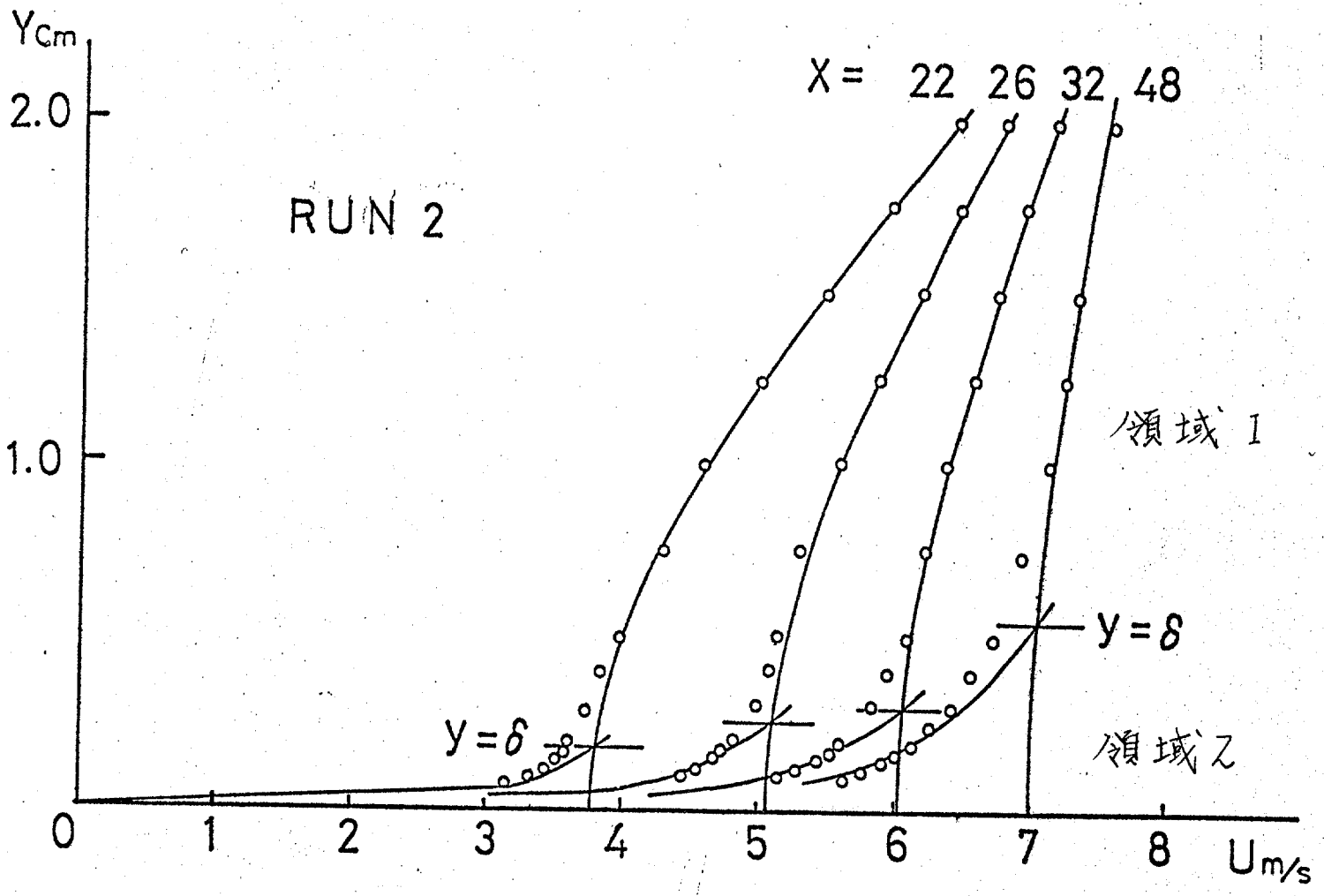


Fig 4-10

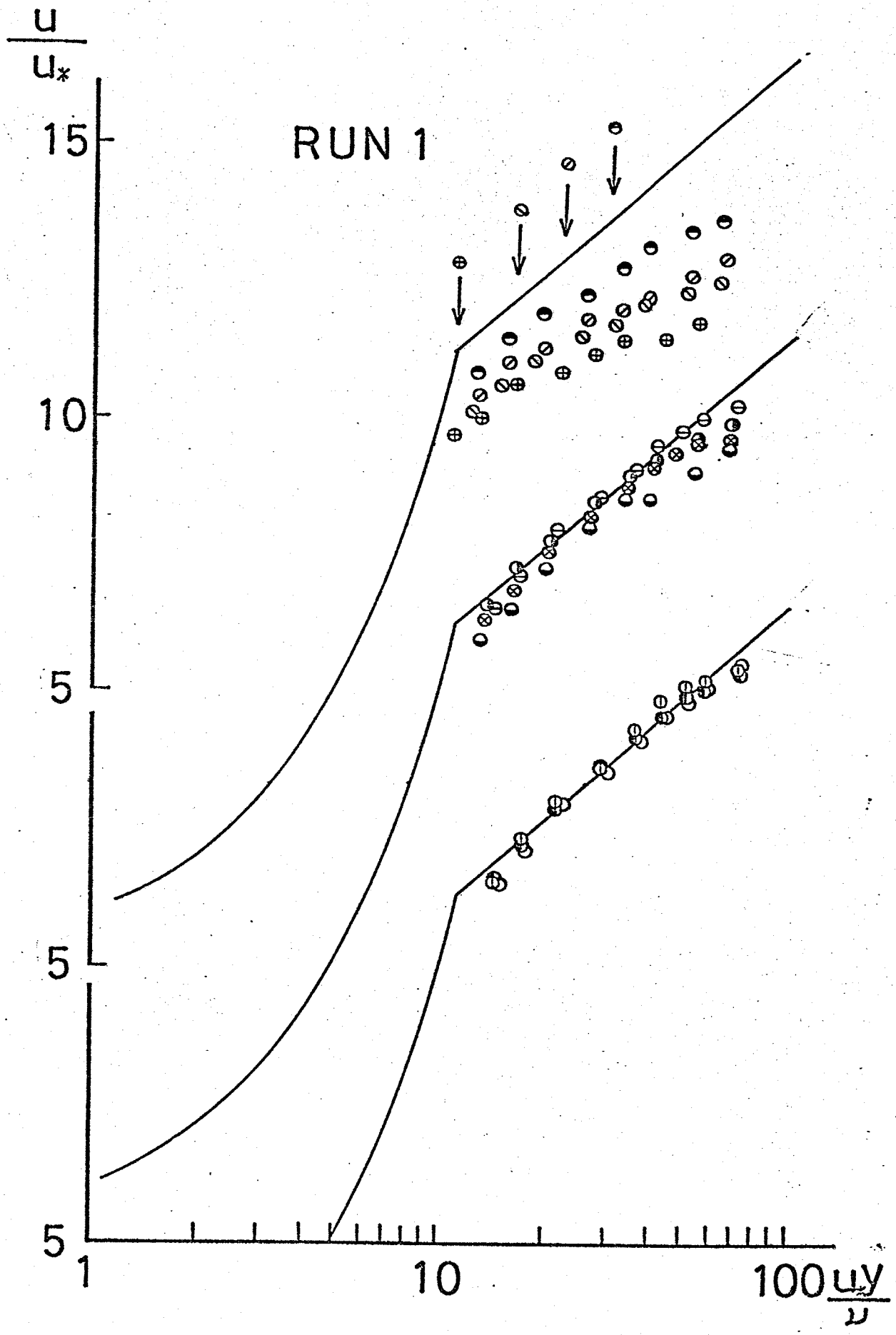


Fig 4-11

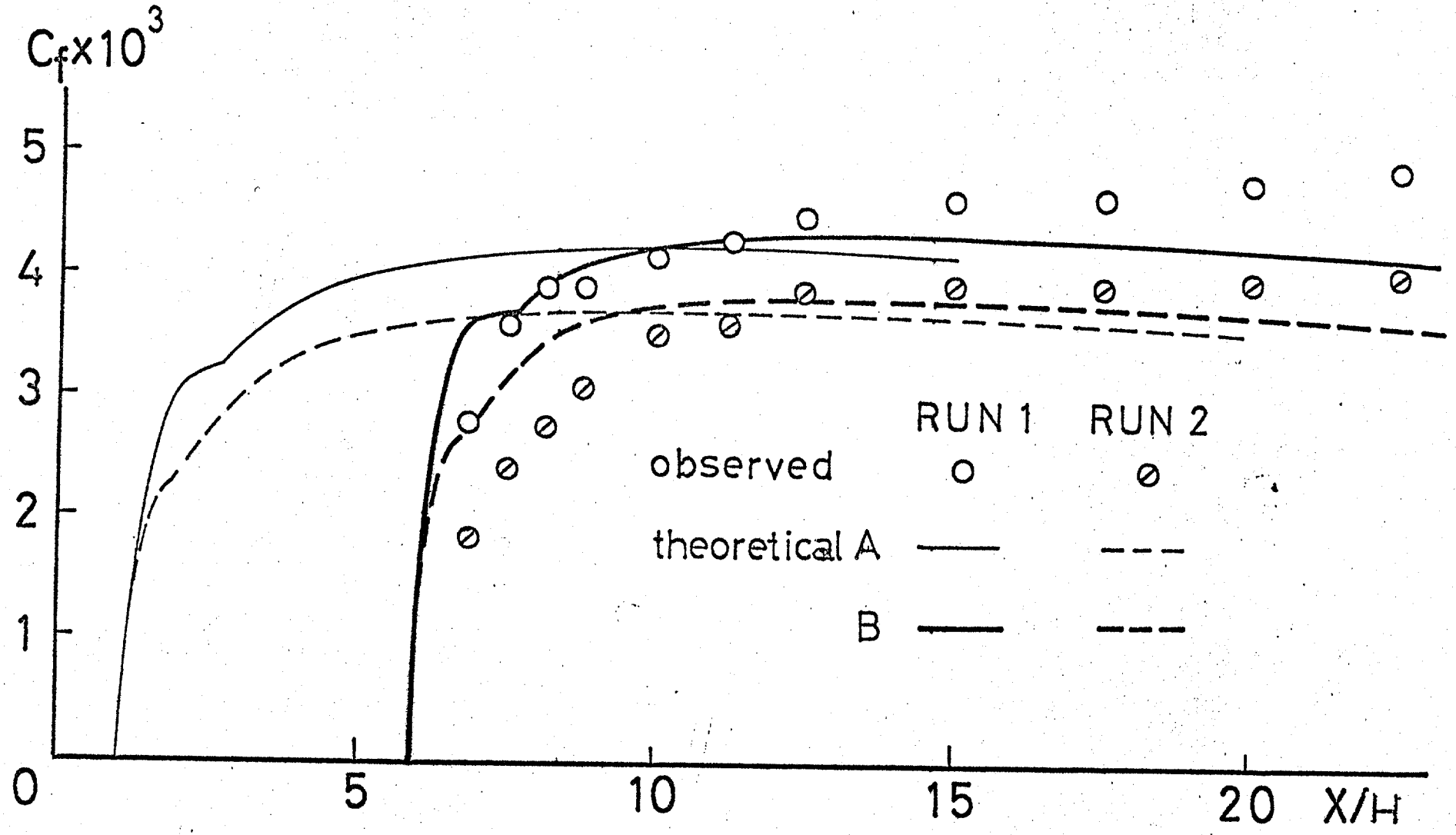

$C_f \times 10^3$
5
4
3
2
1
0
5
10
15
20
X/H
RUN 1
RUN 2
observed
theoretical A
B

Fig. 4-1

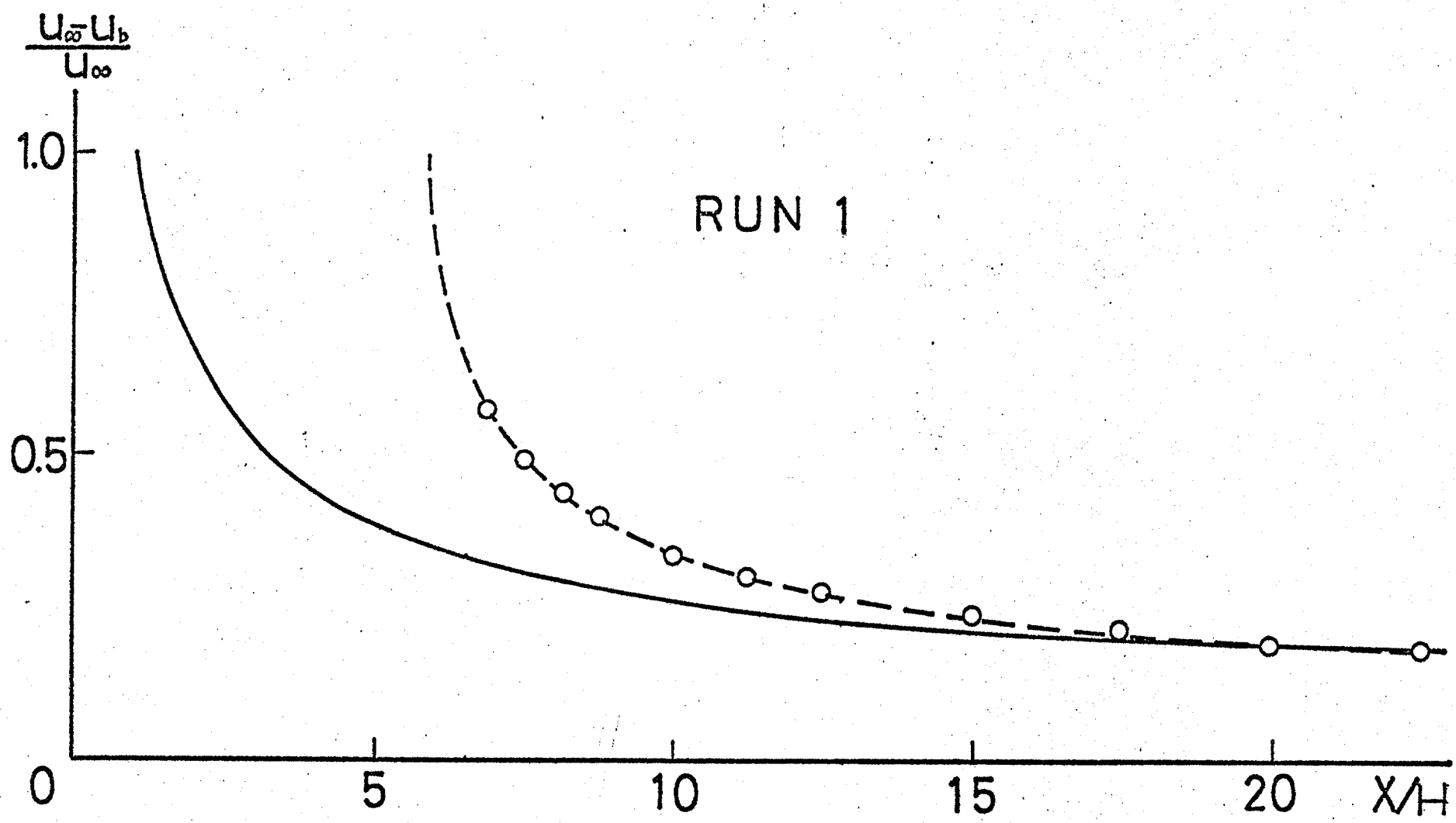
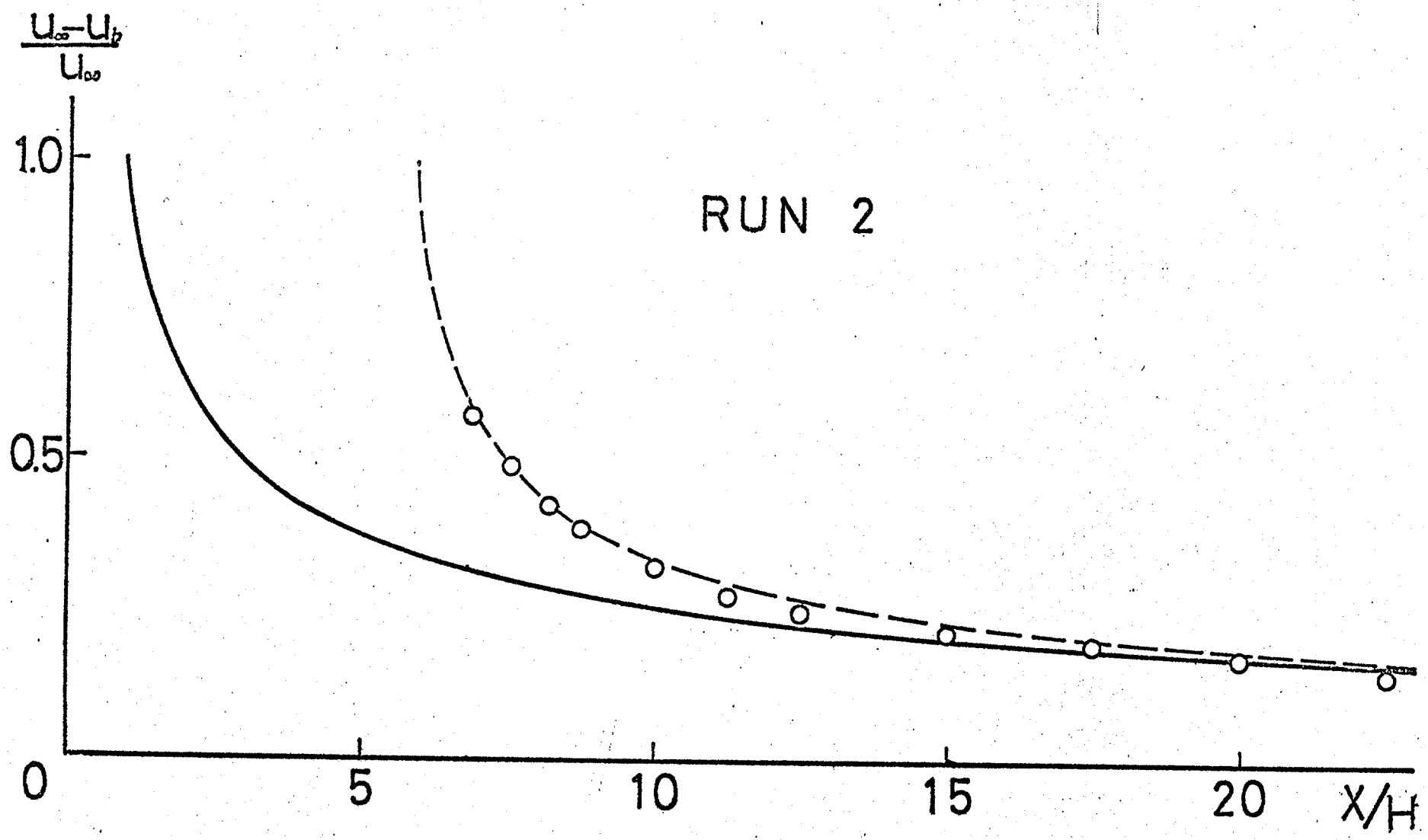


Fig. II-12-a


$\frac{U_\infty - U_b}{U_\infty}$
1.0
0.5
0
RUN 2
5
10
15
20
X/H

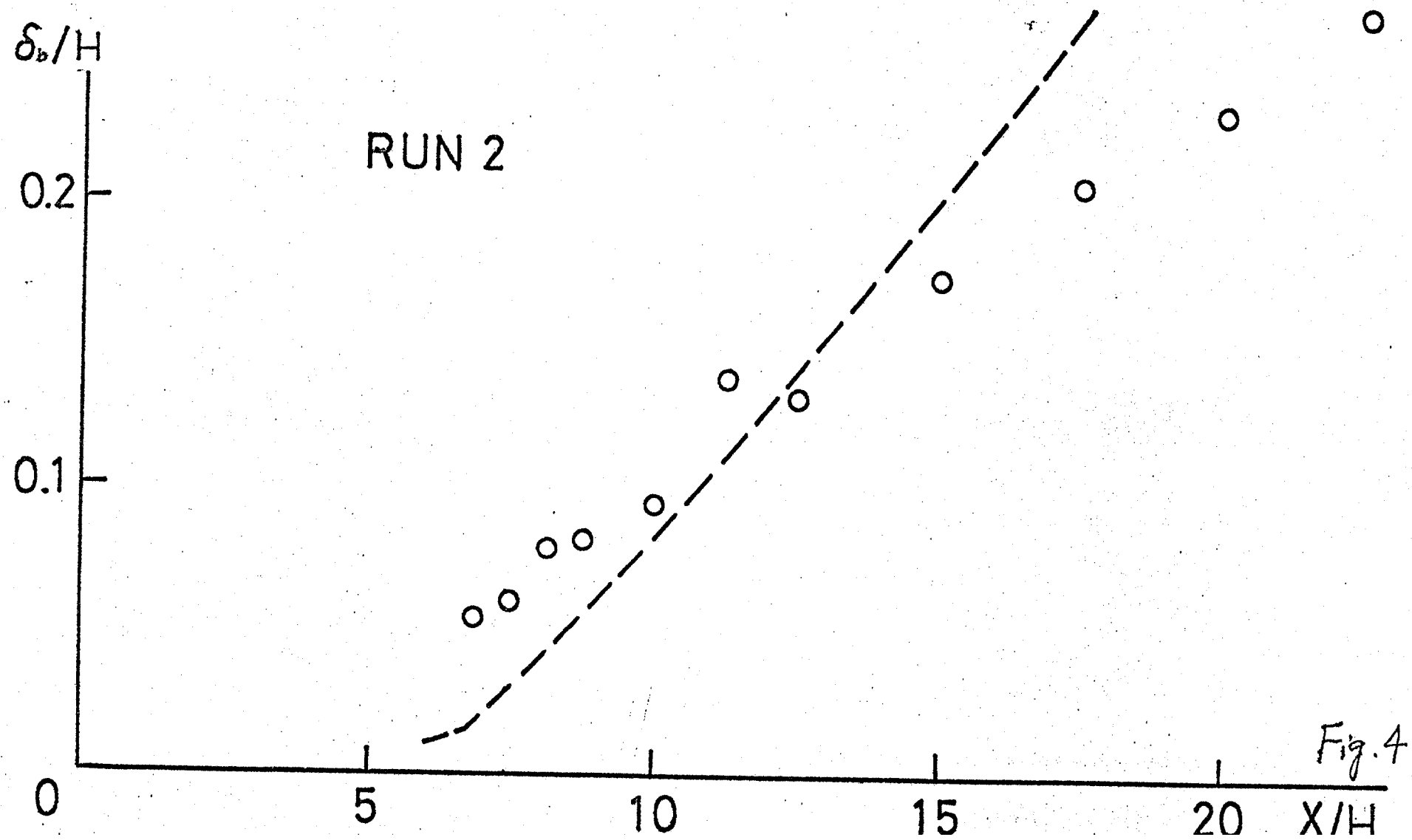


Fig. 4-14

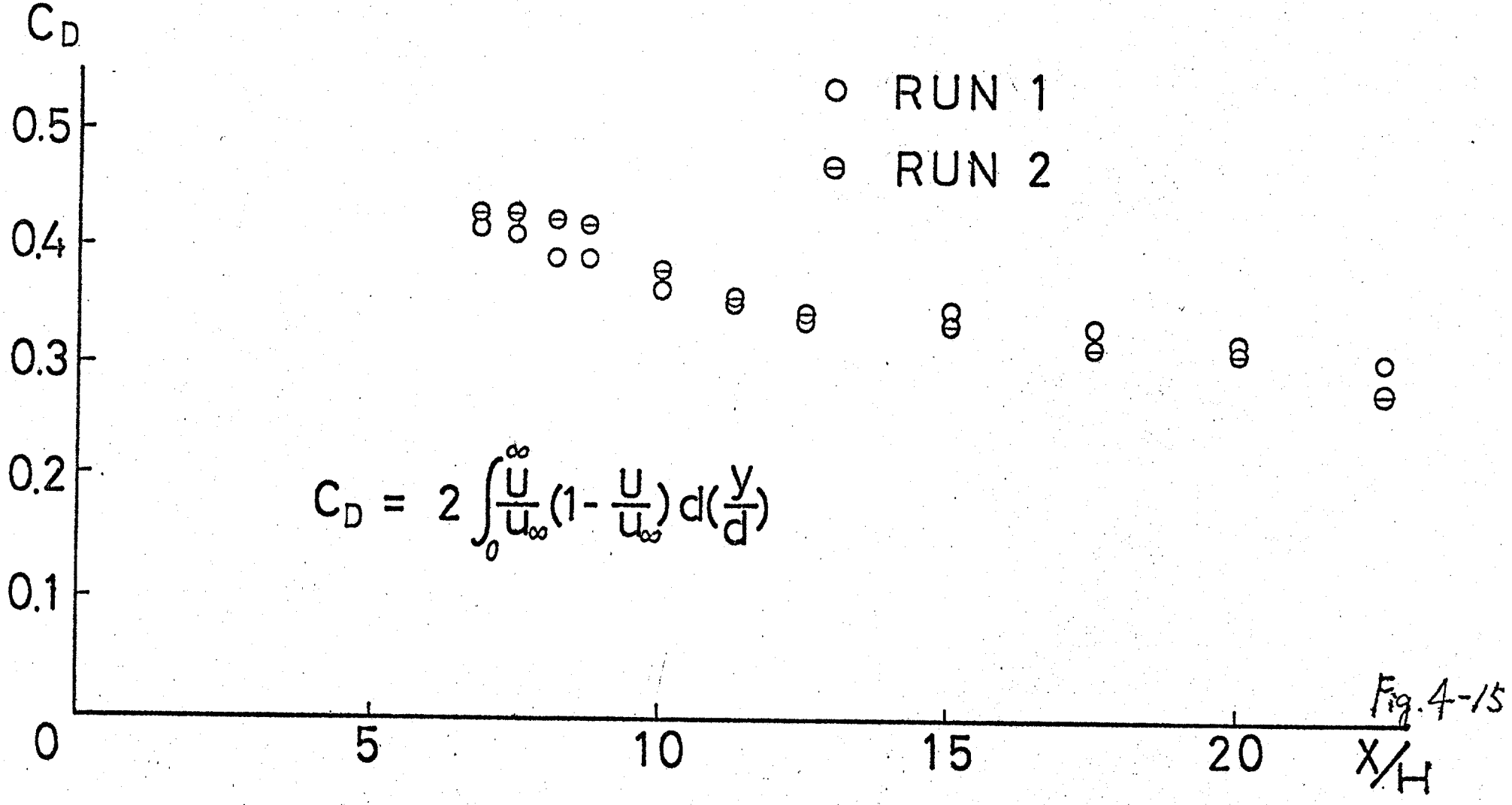

C_D
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
5
10
15
20
X/H
RUN 1
RUN 2
$C_D = 2\int_0^\infty \frac{u}{u_\infty}(1-\frac{u}{u_\infty})\,d(\frac{y}{d})$

Fig. 4-15

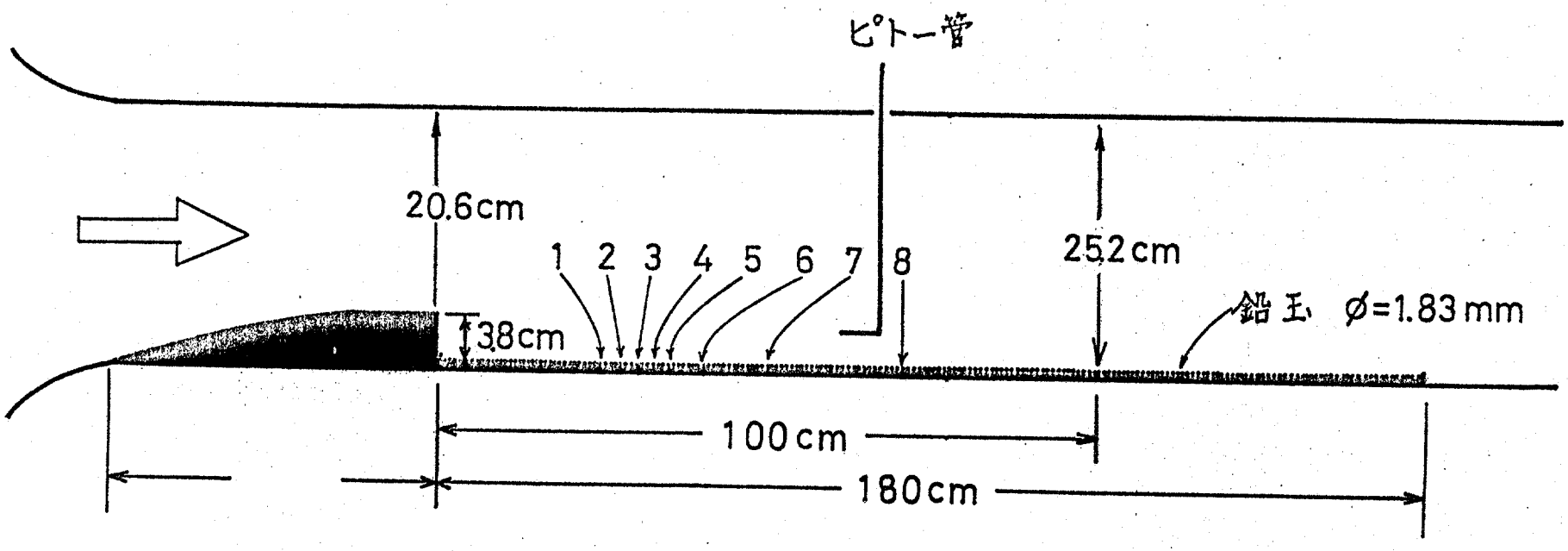


Fig. 4-16

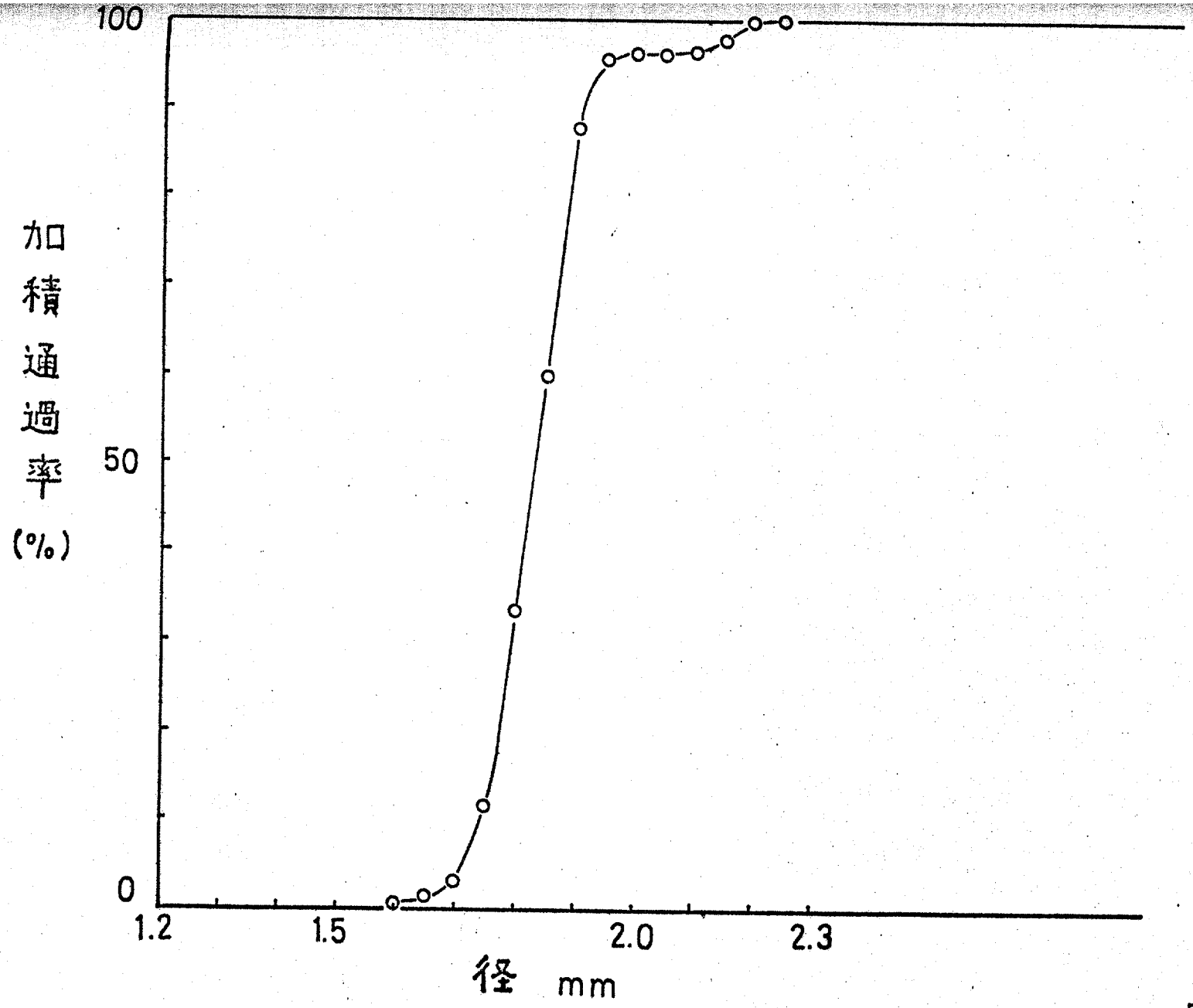


Fig.4-17

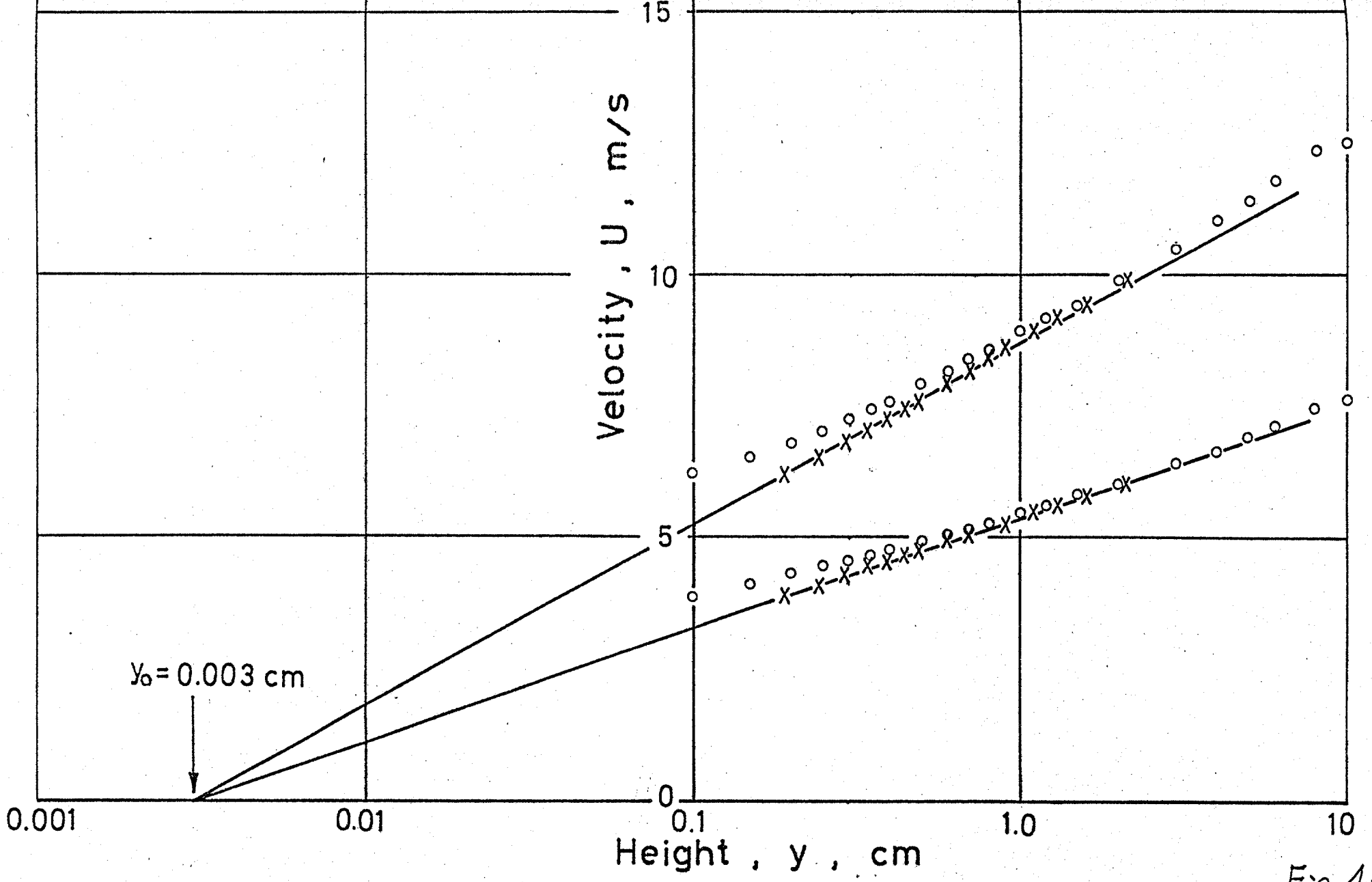


Fig. 4-18

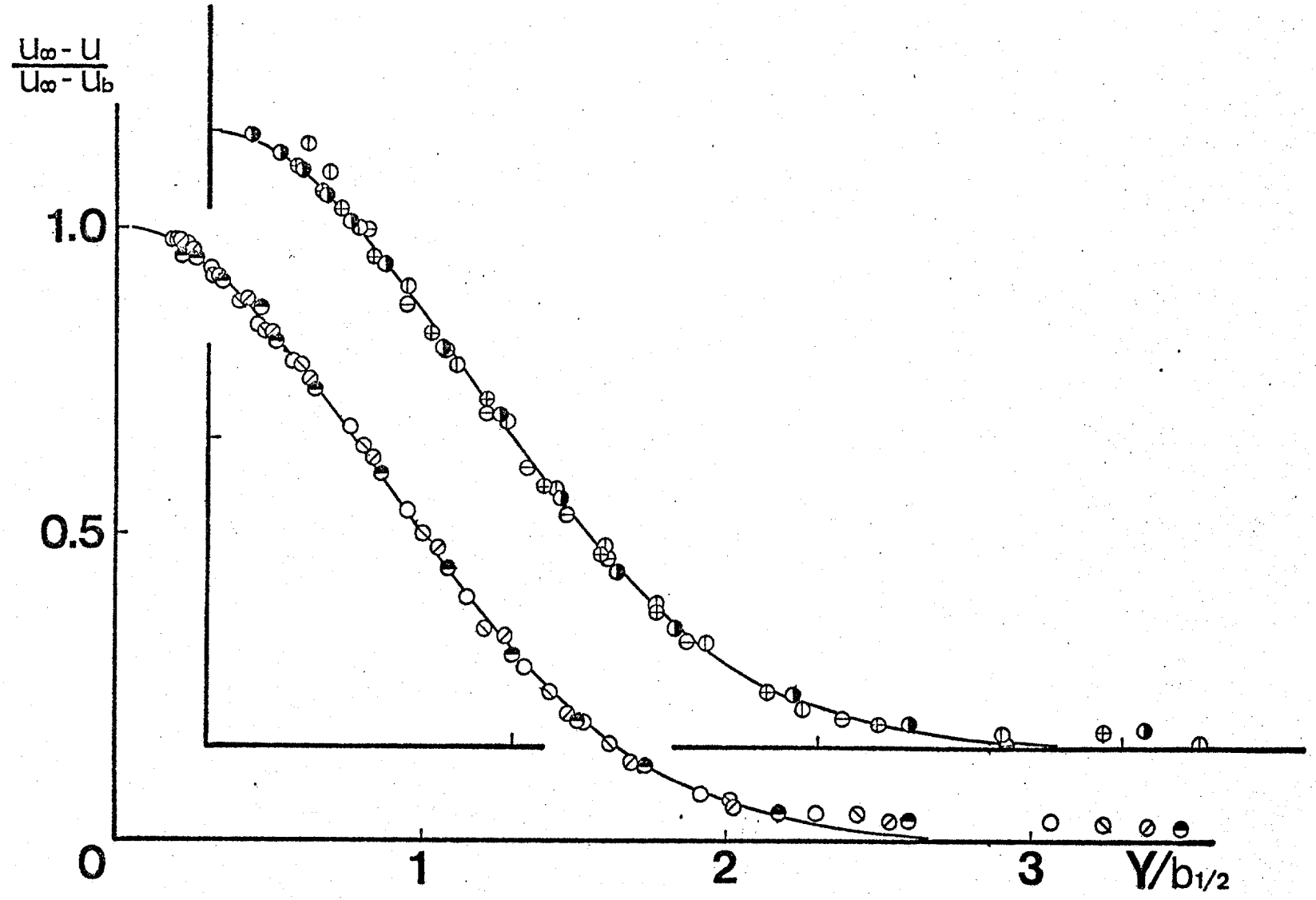


Fig 4-19

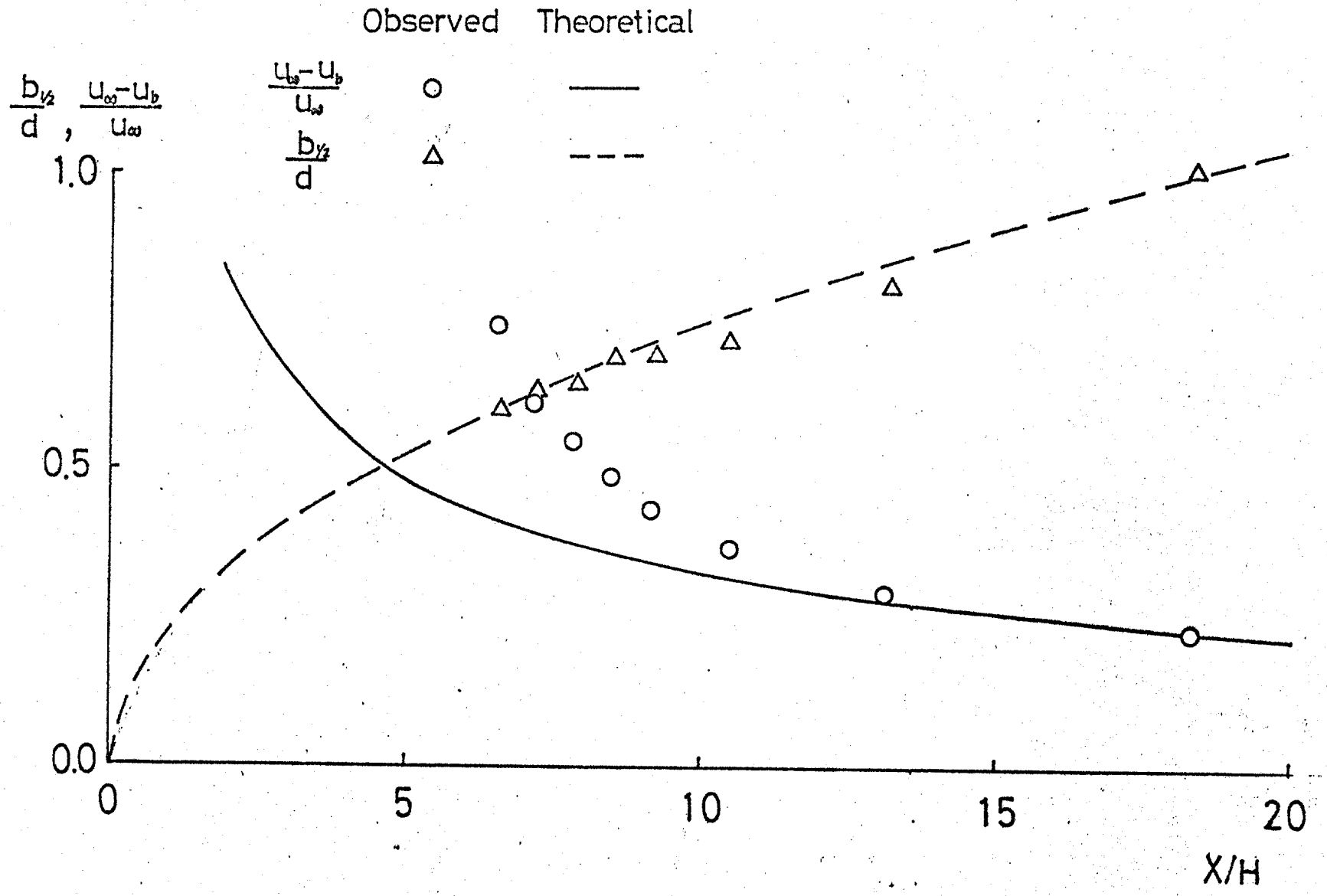

Observed
Theoretical
$\frac{b_{1/2}}{d}$, $\frac{U_\infty - U_b}{U_\infty}$
$\frac{U_\infty - U_b}{U_\infty}$
$\frac{b_{1/2}}{d}$
1.0
0.5
0.0
0
5
10
15
20
X/H

Fig 4-20

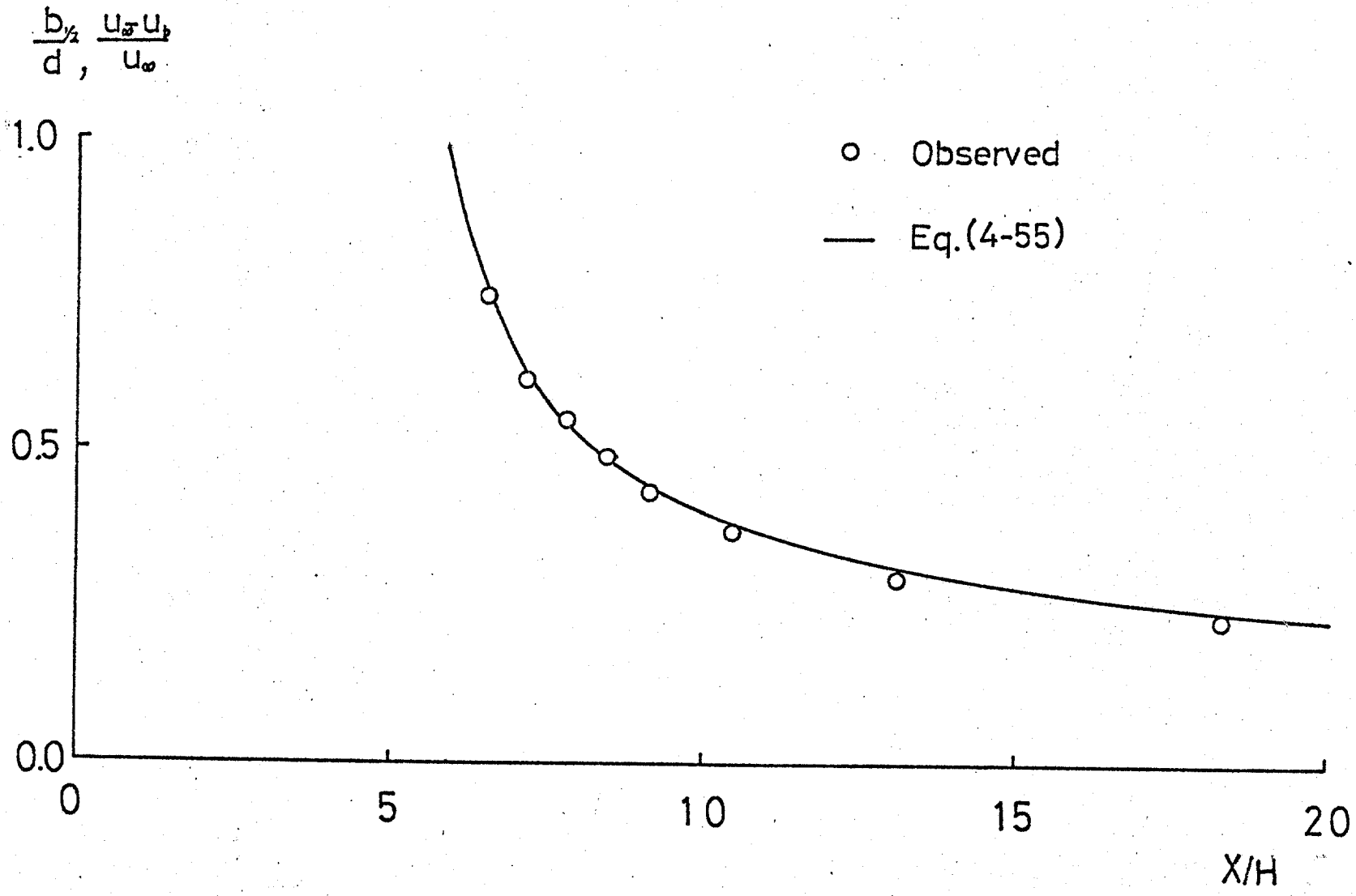

$\frac{b_{1/2}}{d}$, $\frac{u_\infty - u_b}{u_\infty}$
1.0
0.5
0.0
0
5
10
15
20
X/H
Observed
Eq.(4-55)

Fig. 4-21

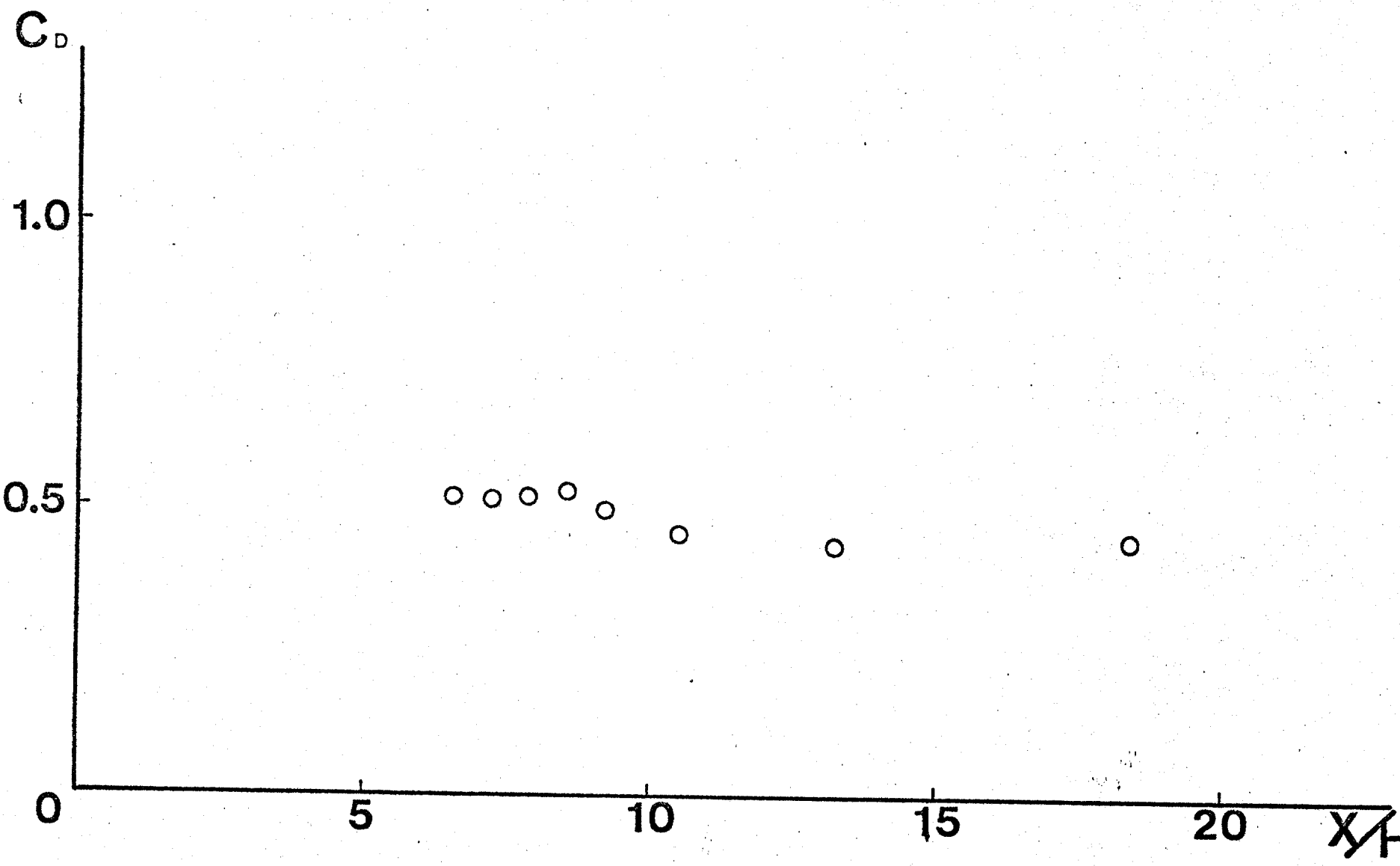


Fig. 4-22

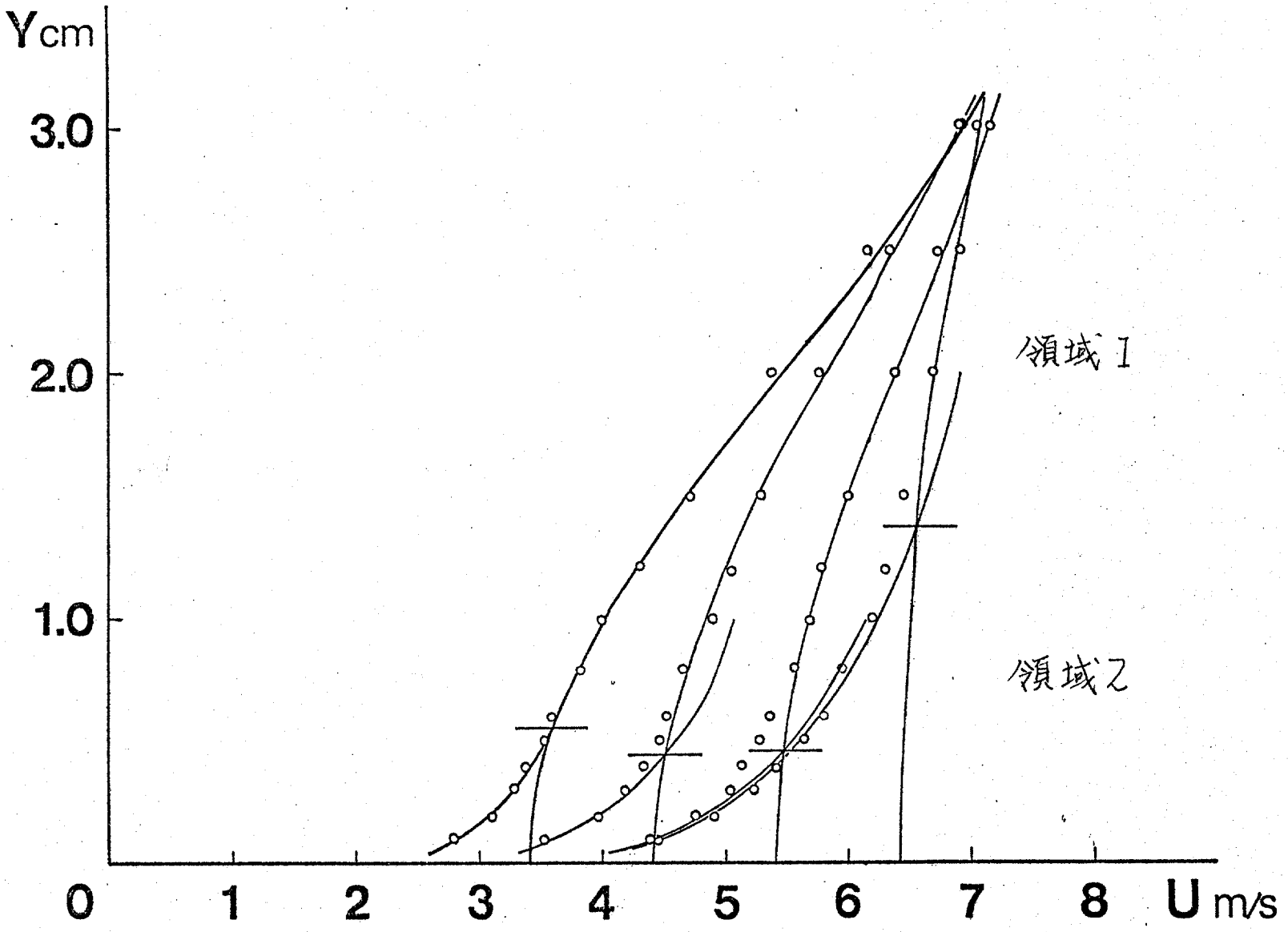


Fig. 4-23

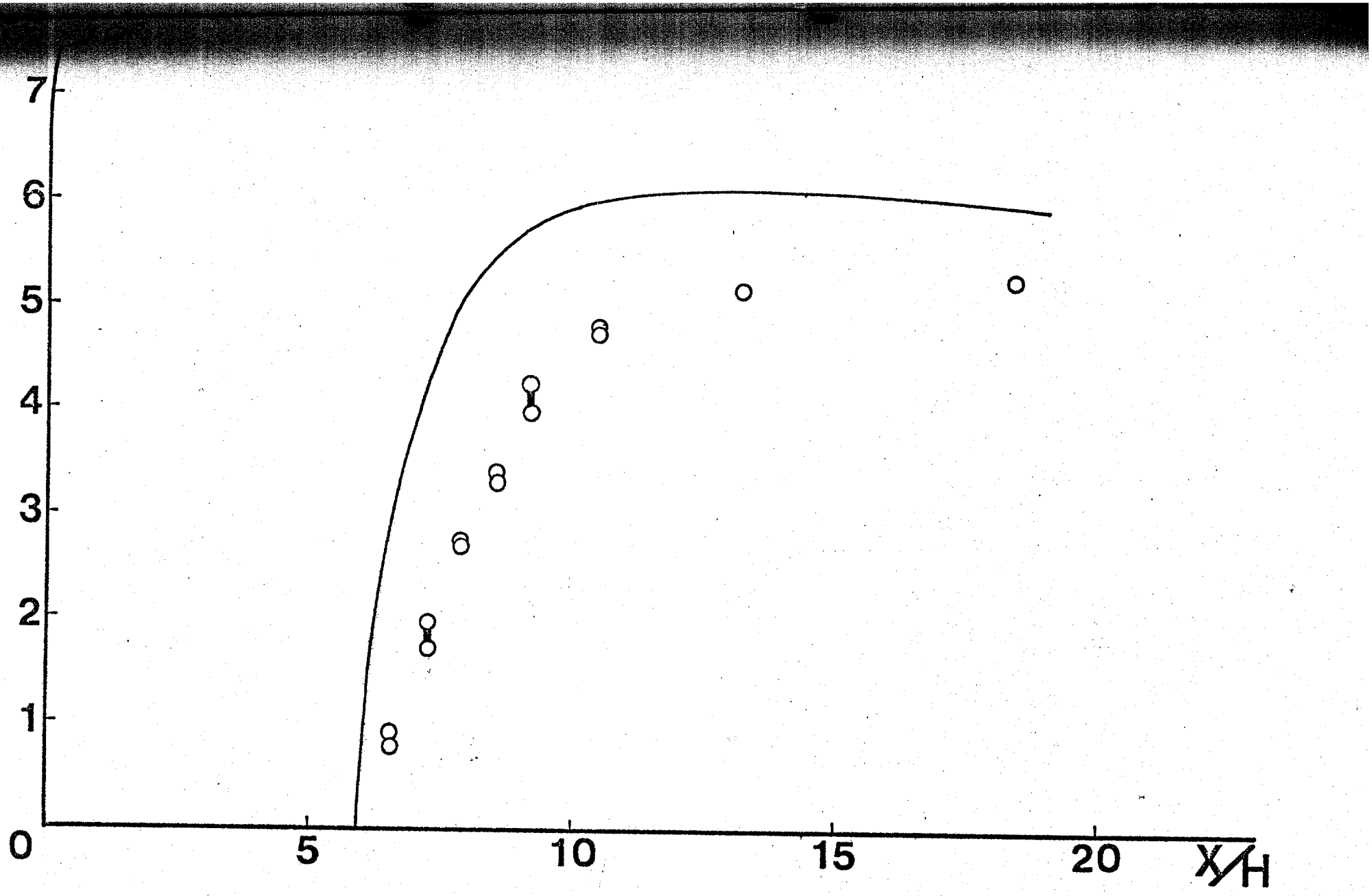


Fig 4-24

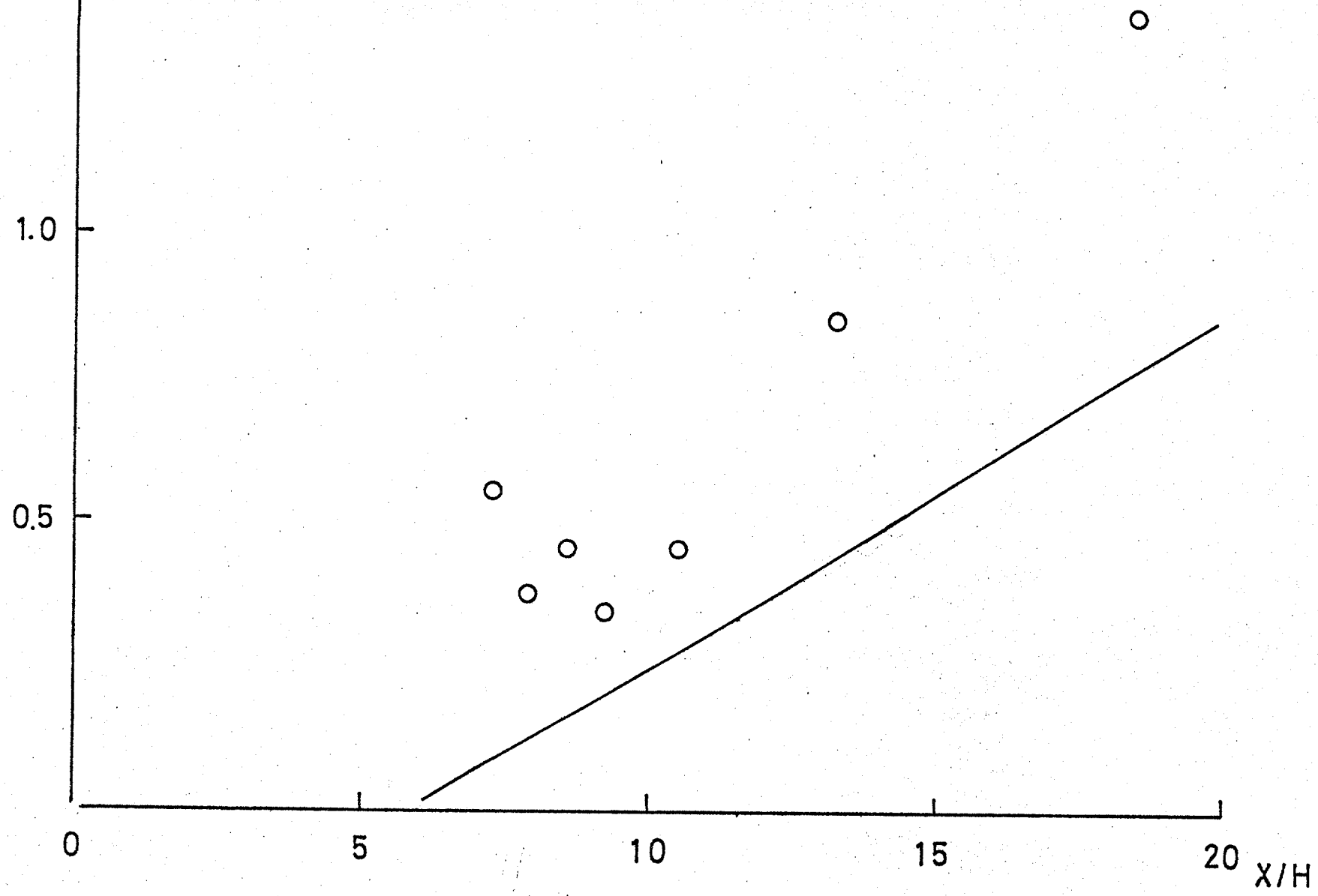


Fig. 4-25

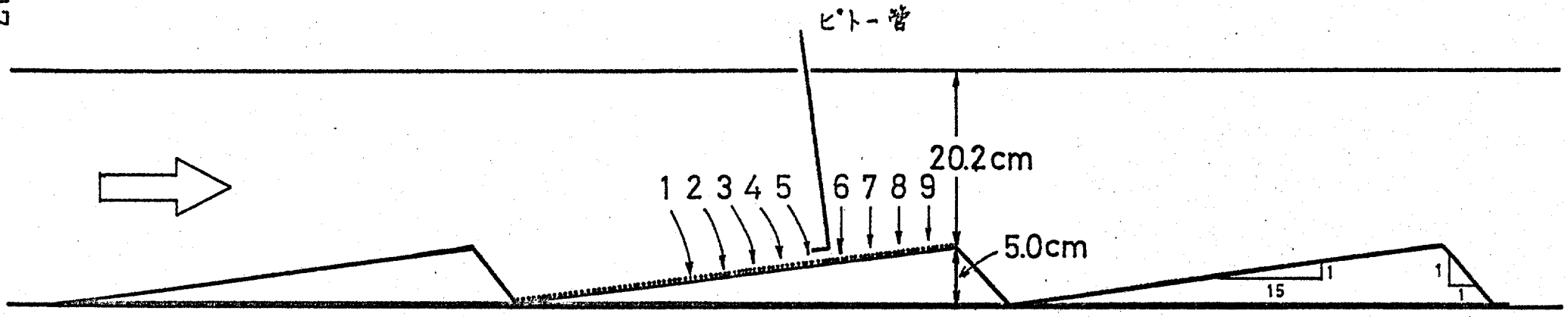


Fig. 4-26

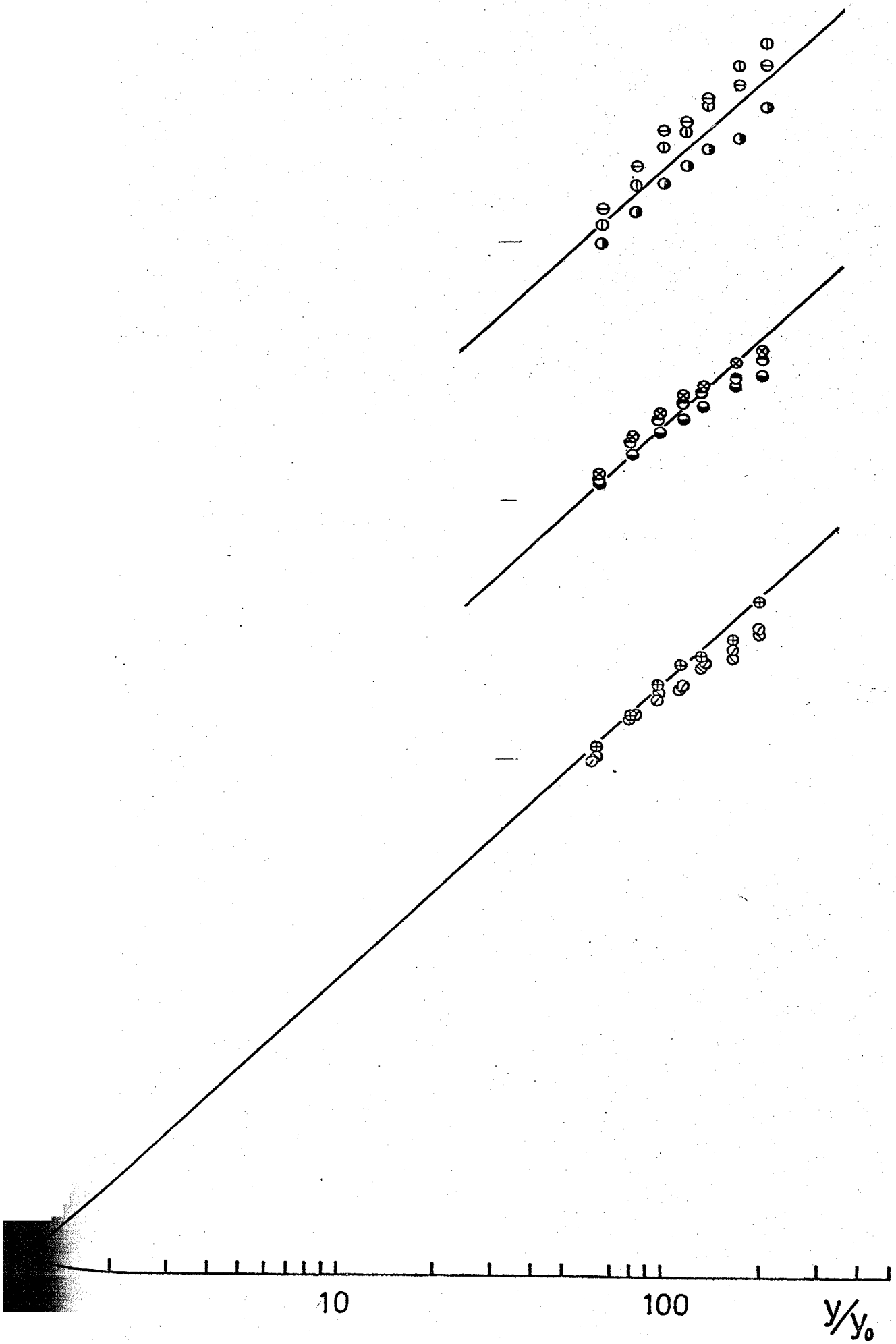


Fig.4-2

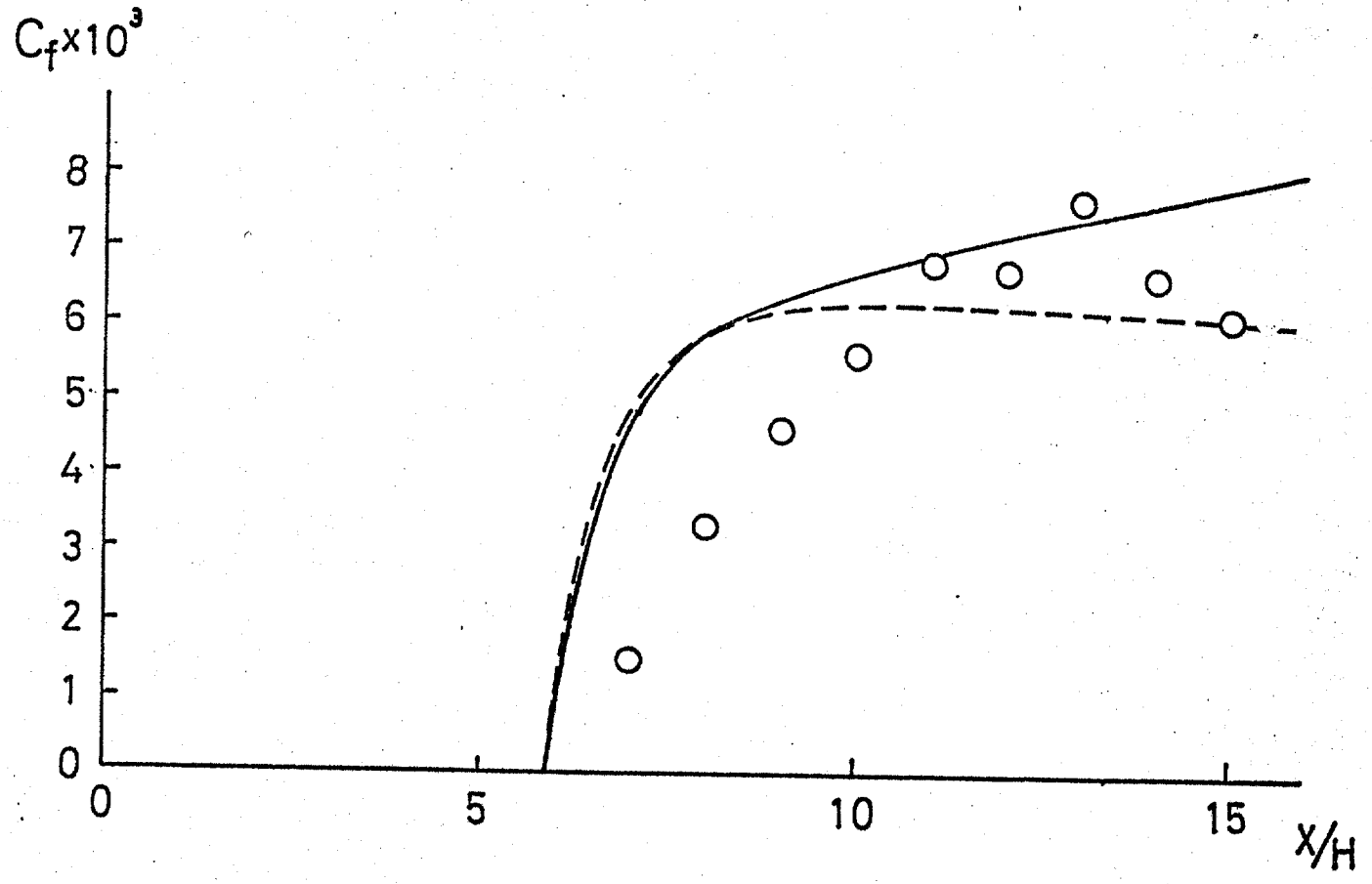


Fig 4-28

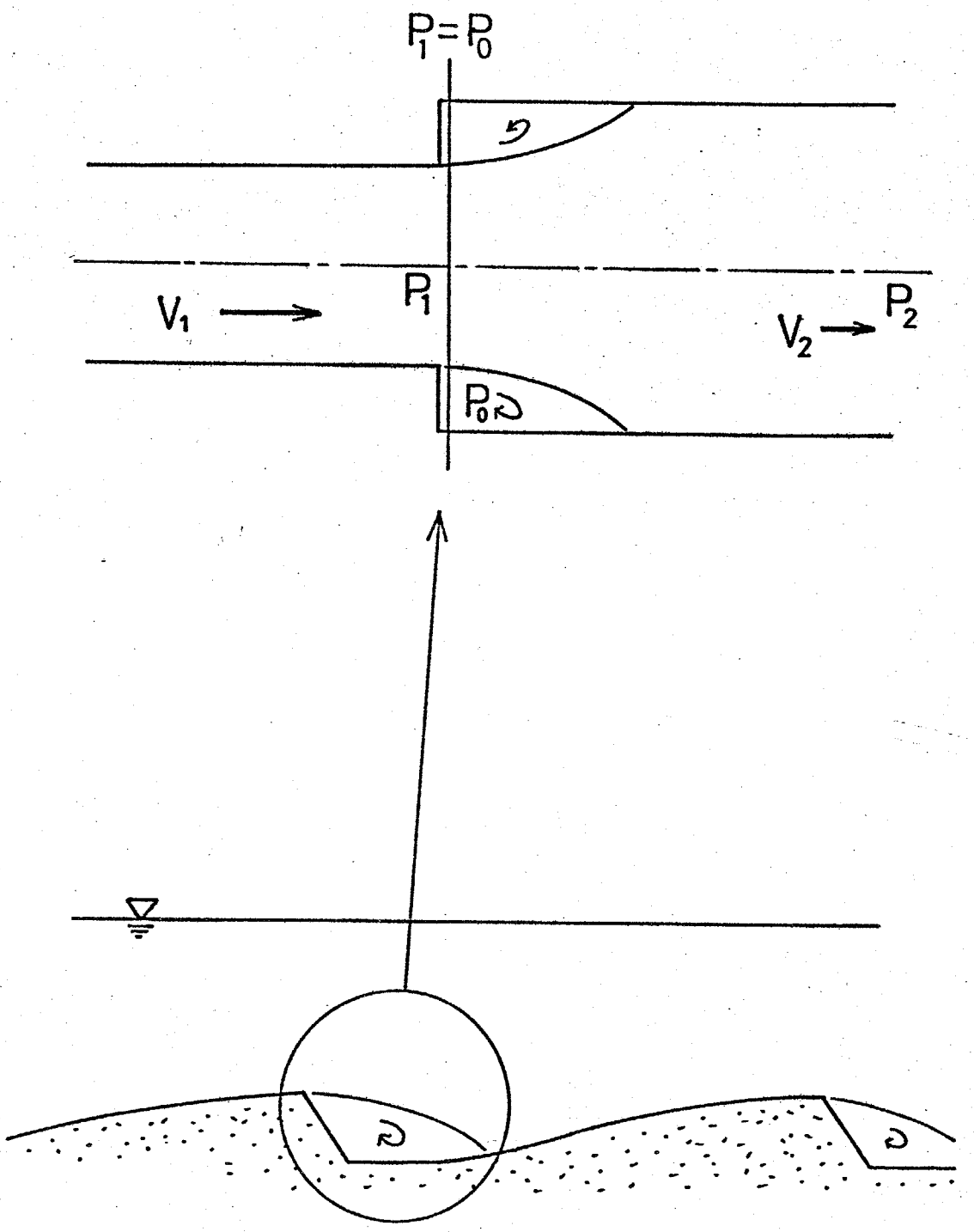


Fig. 4-29

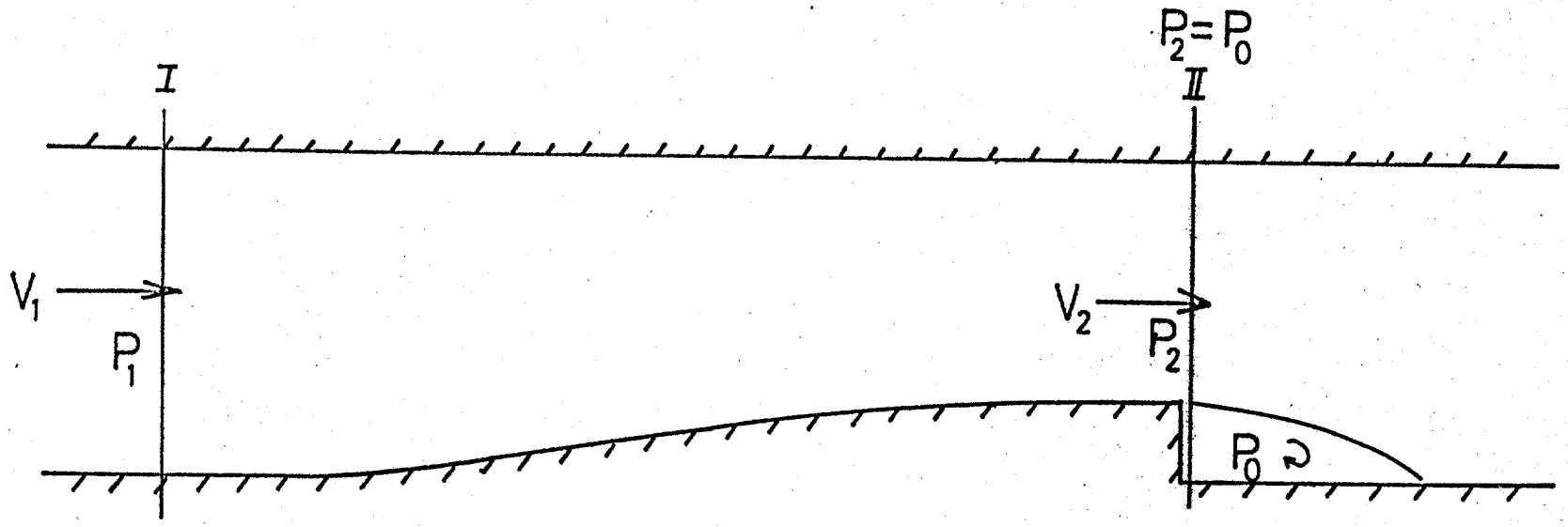


Fig. 4-30

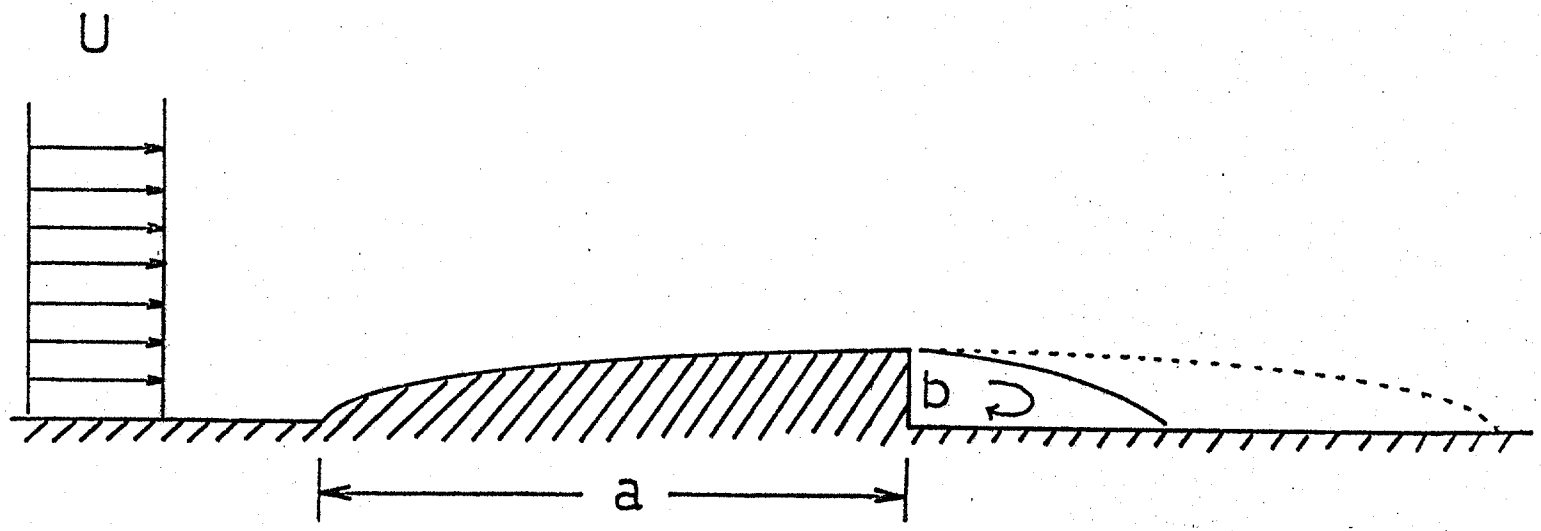


Fig. 4-31

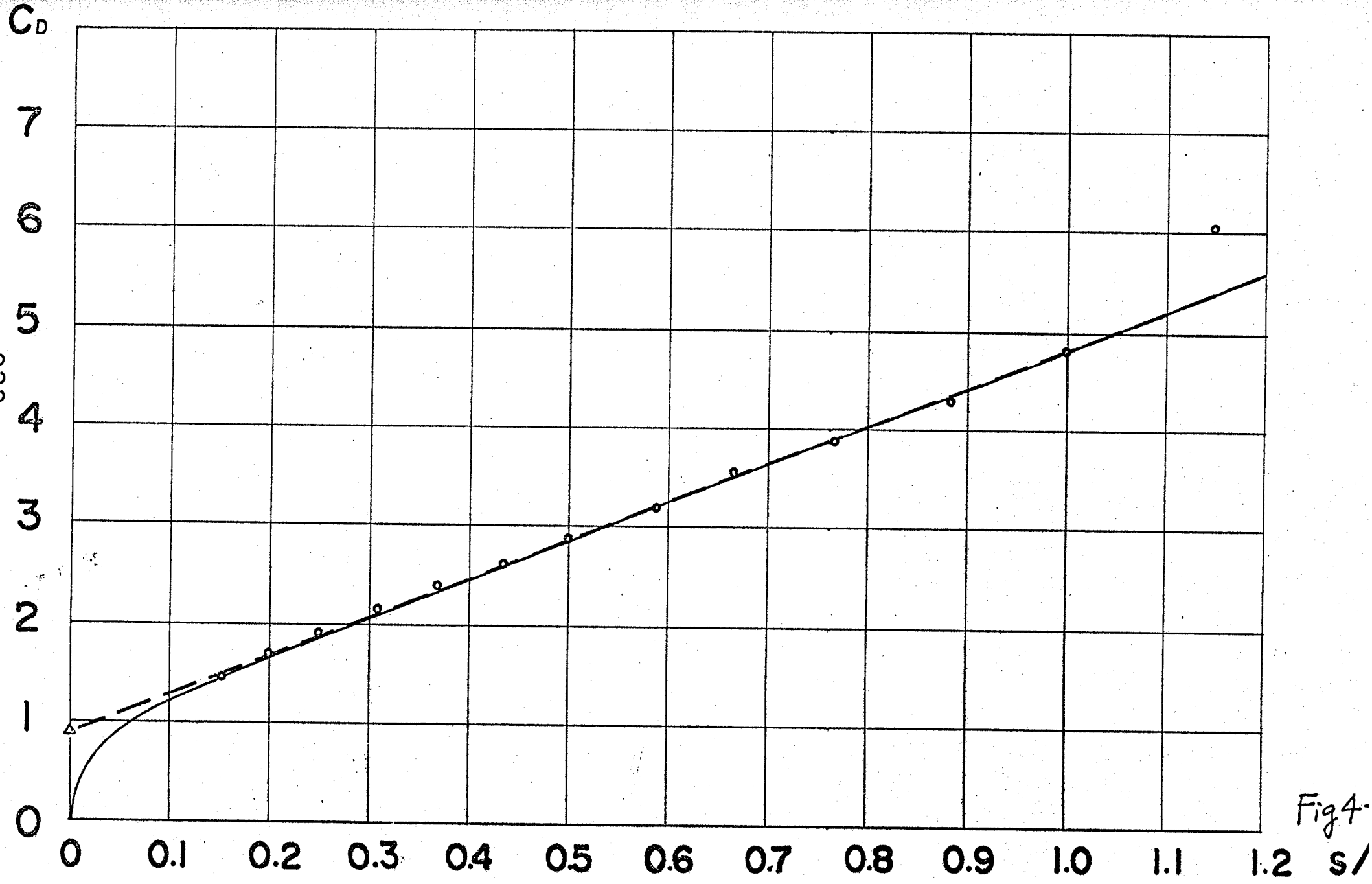
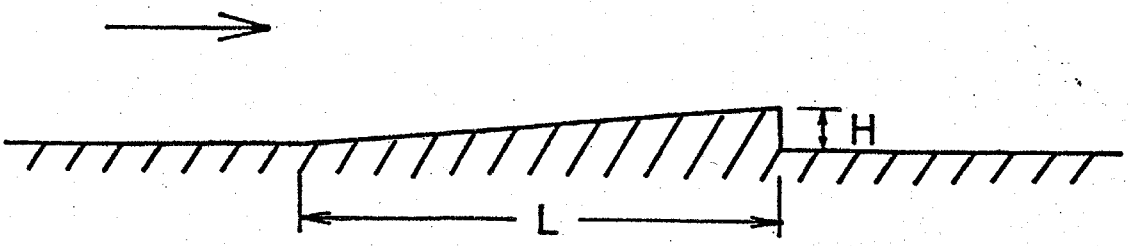
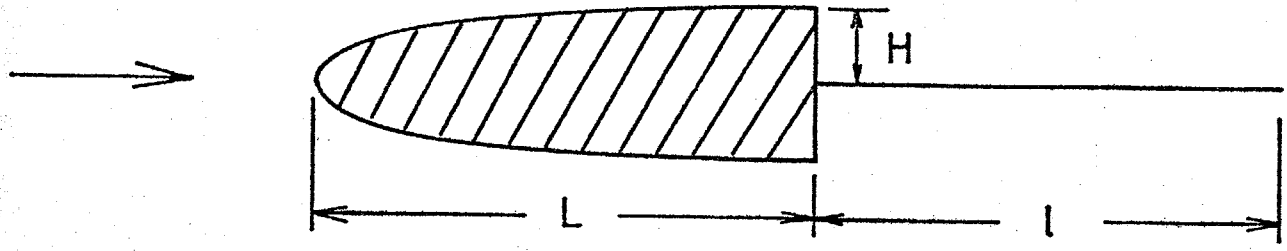


Fig 4.



Hoermer の実験　　$L/H = 16.7$

Fig. 4-33-a



Bearman の実験　　$L/H = 12.0$

$l/H = 8.0$

Fig. 4-33-b

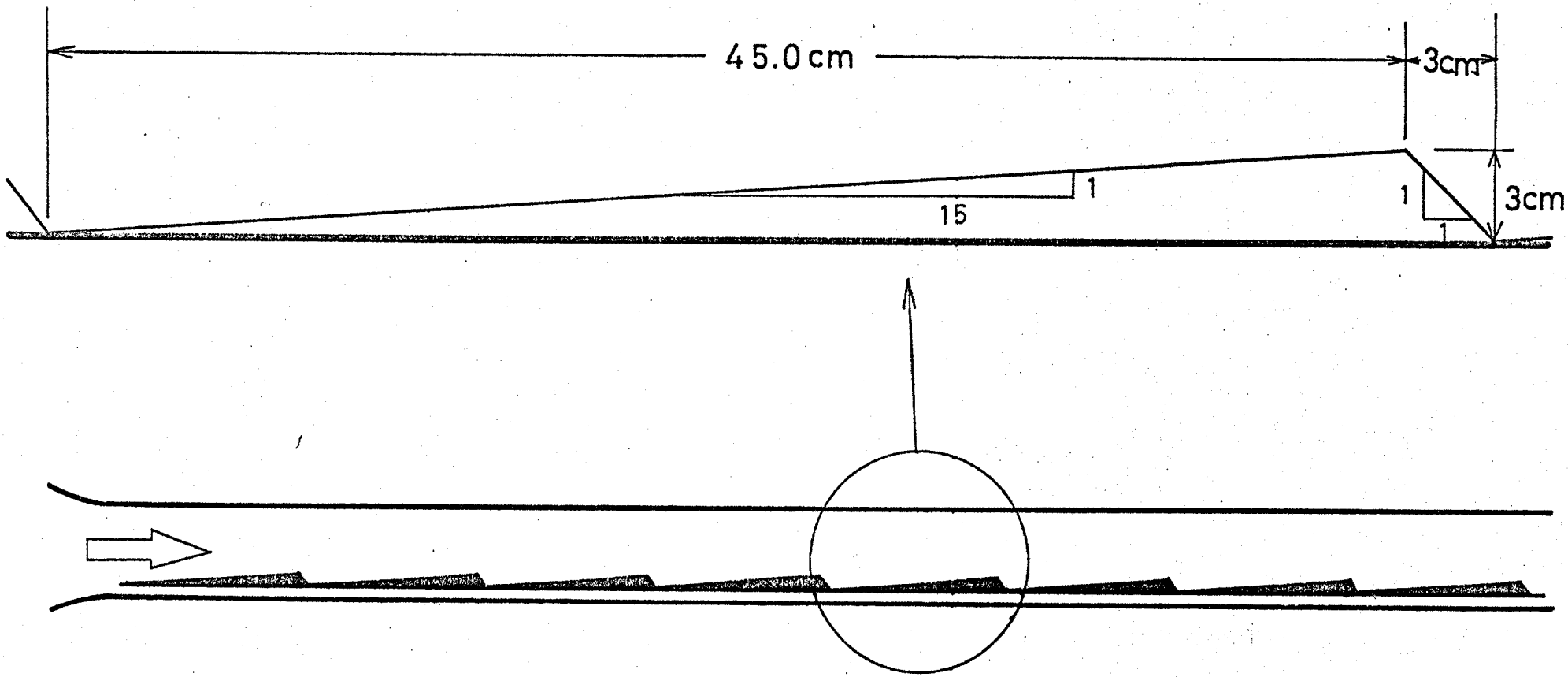


Fig.4-34

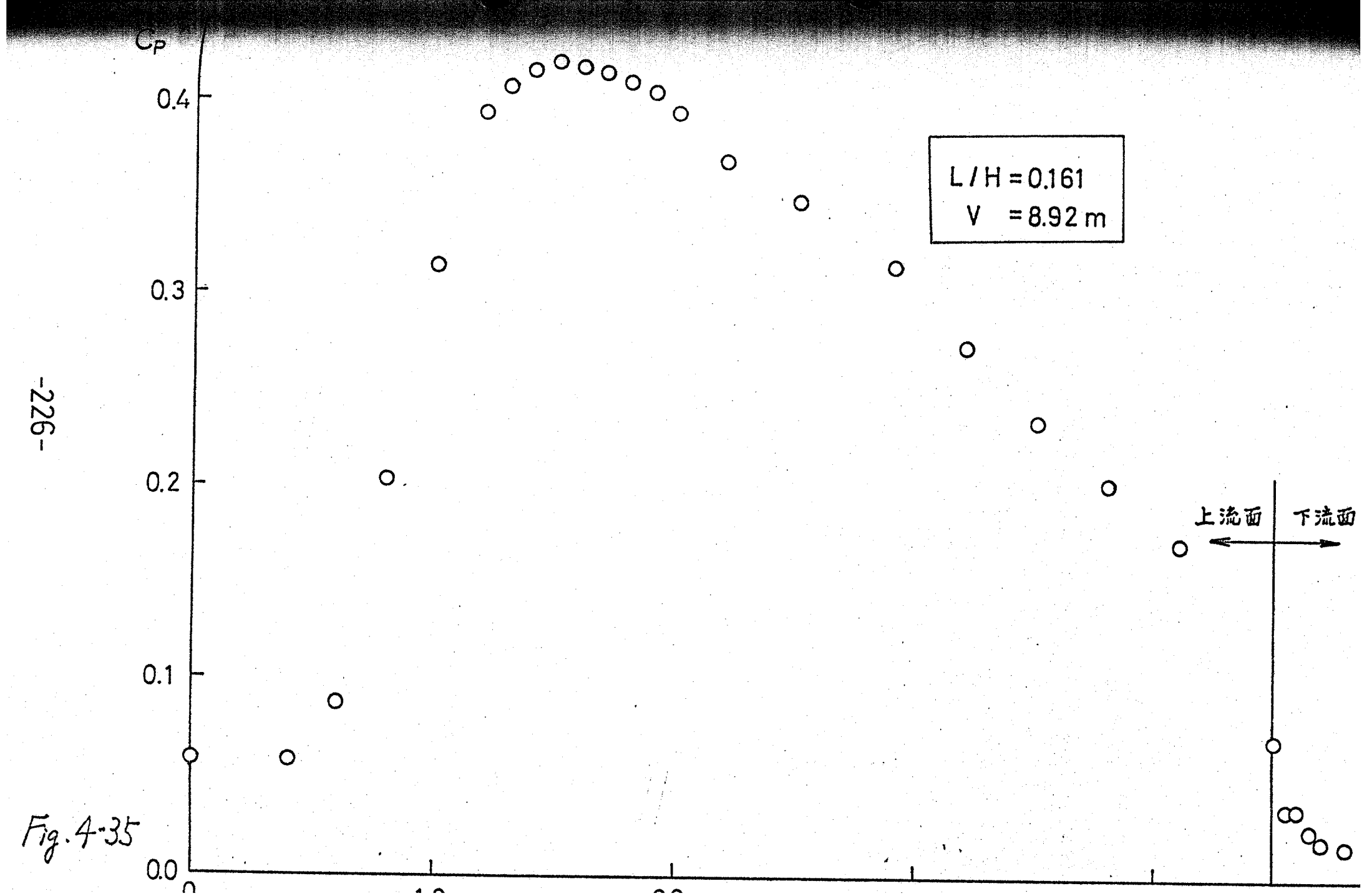


Fig. 4-35

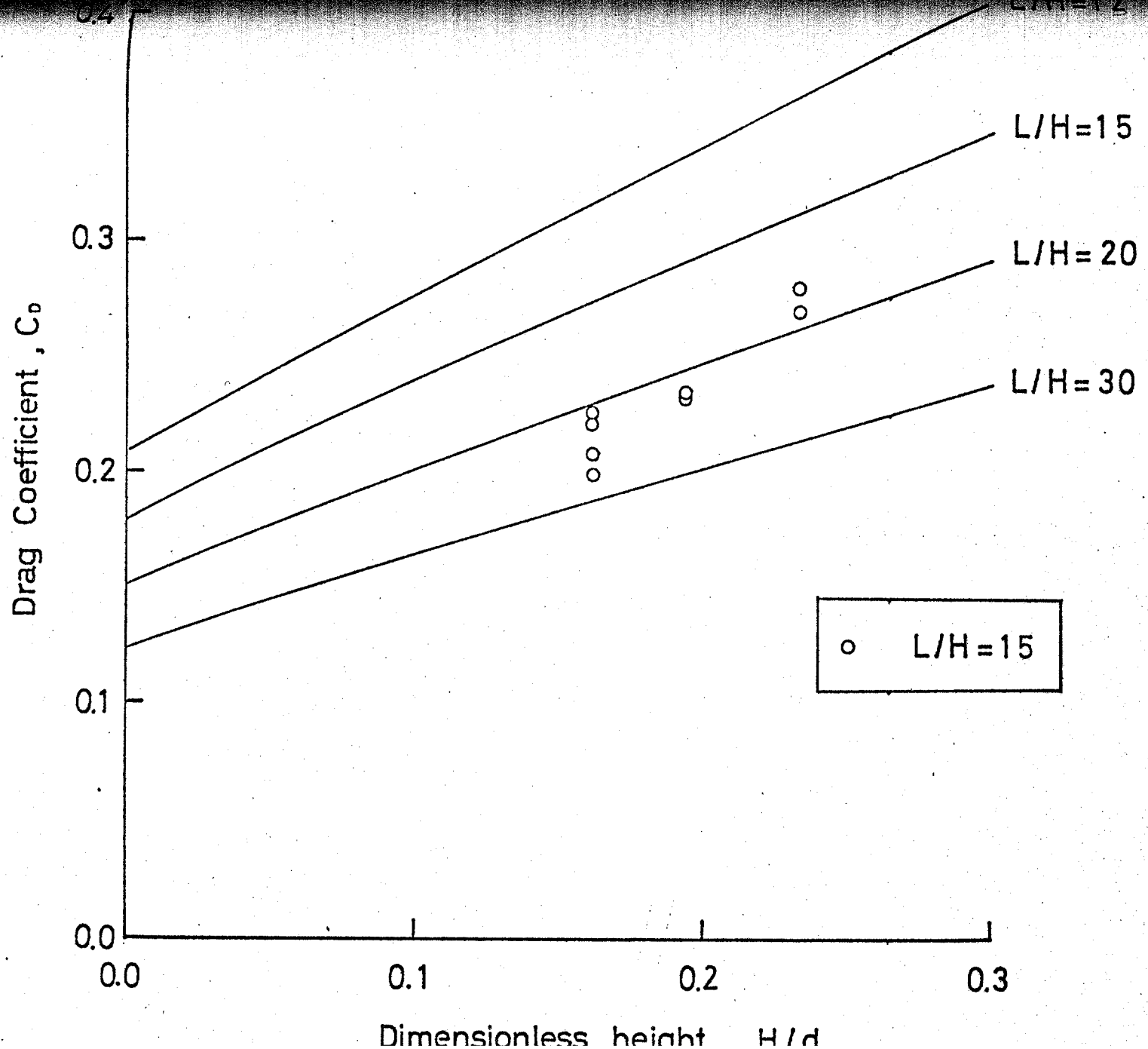
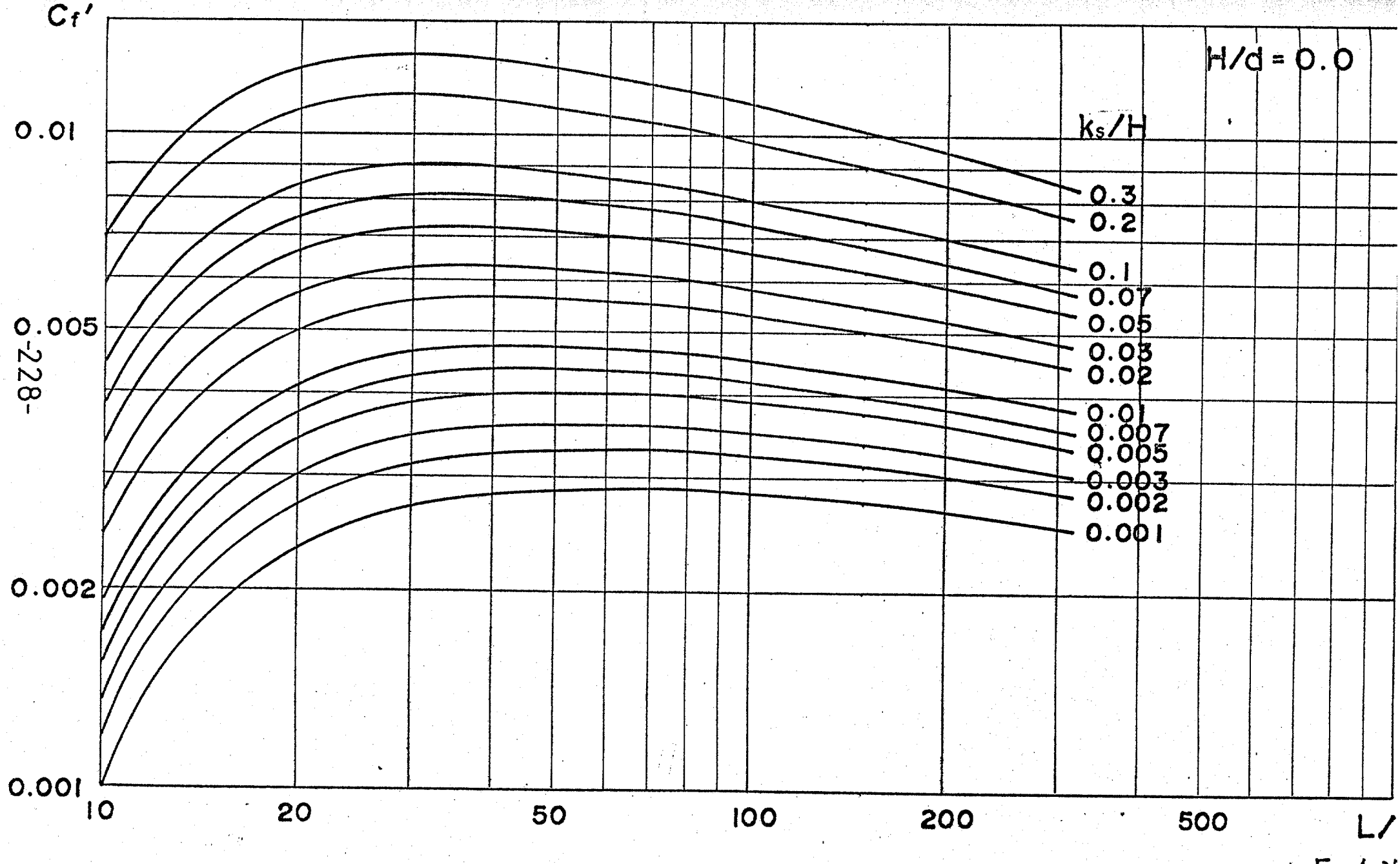

L/H=15
L/H=20
L/H=30
L/H=15
Drag Coefficient , C_D
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.0
0.1
0.2
0.3
Dimensionless height H/d

Fig 4-36


C_f'
H/d = 0.0
k_s/H
0.3
0.2
0.1
0.07
0.05
0.03
0.02
0.01
0.007
0.005
0.003
0.002
0.001
0.01
0.005
0.002
0.001
10
20
50
100
200
500
L/

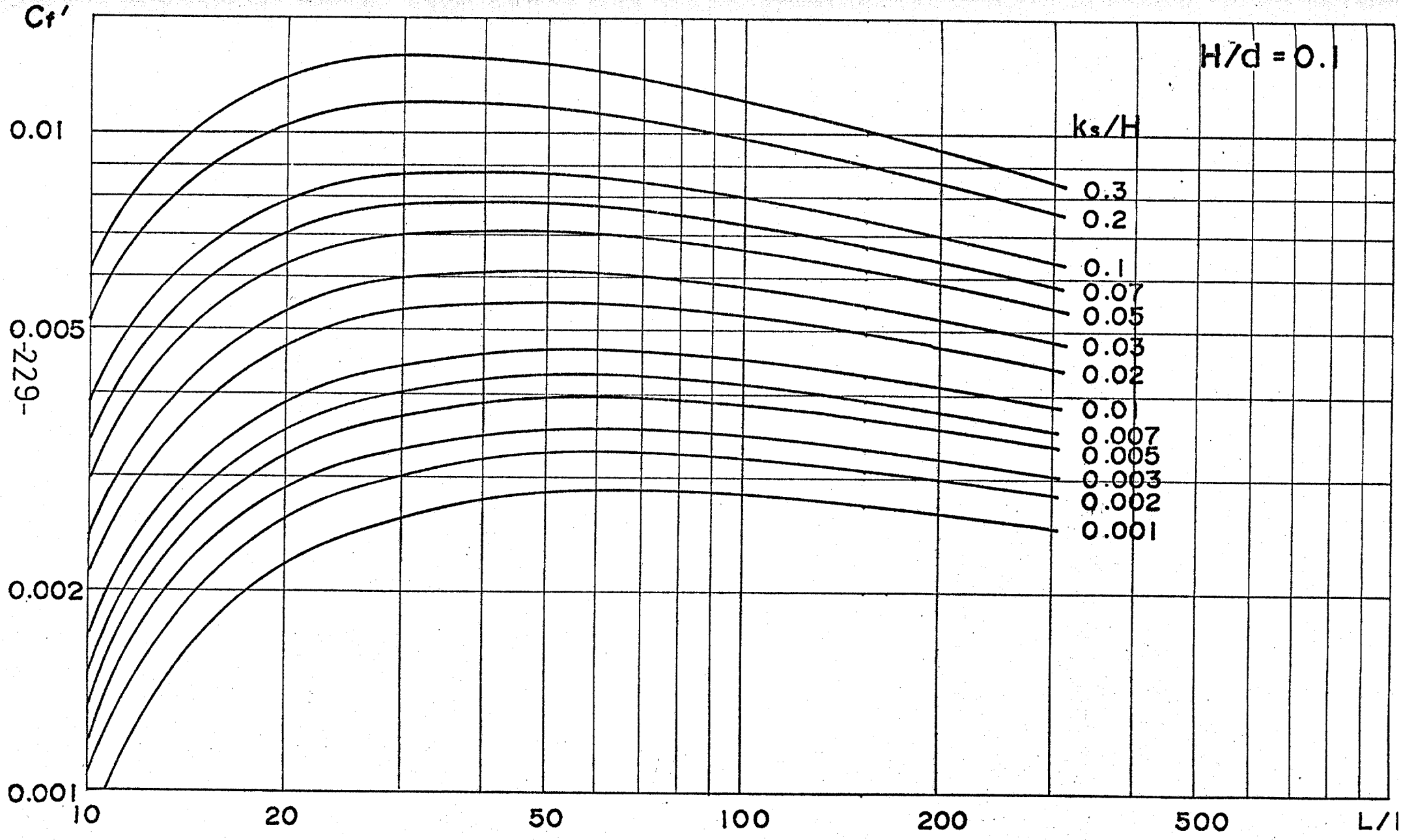

C_f'
H/d = 0.1
Ks/H
0.3
0.2
0.1
0.07
0.05
0.03
0.02
0.01
0.007
0.005
0.003
0.002
0.001
0.01
0.005
0.002
0.001
10
20
50
100
200
500
L/l

Fig 4-38

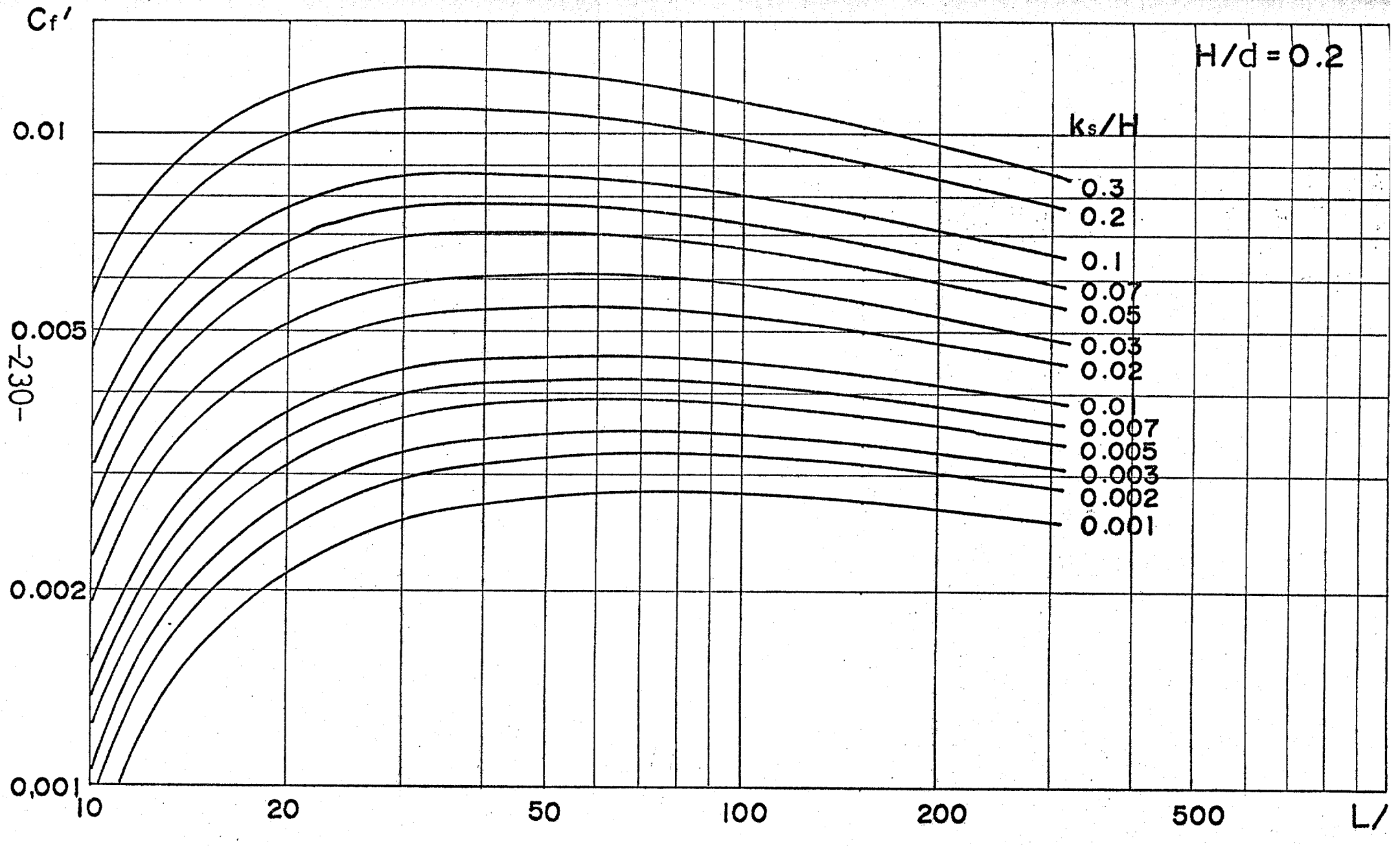
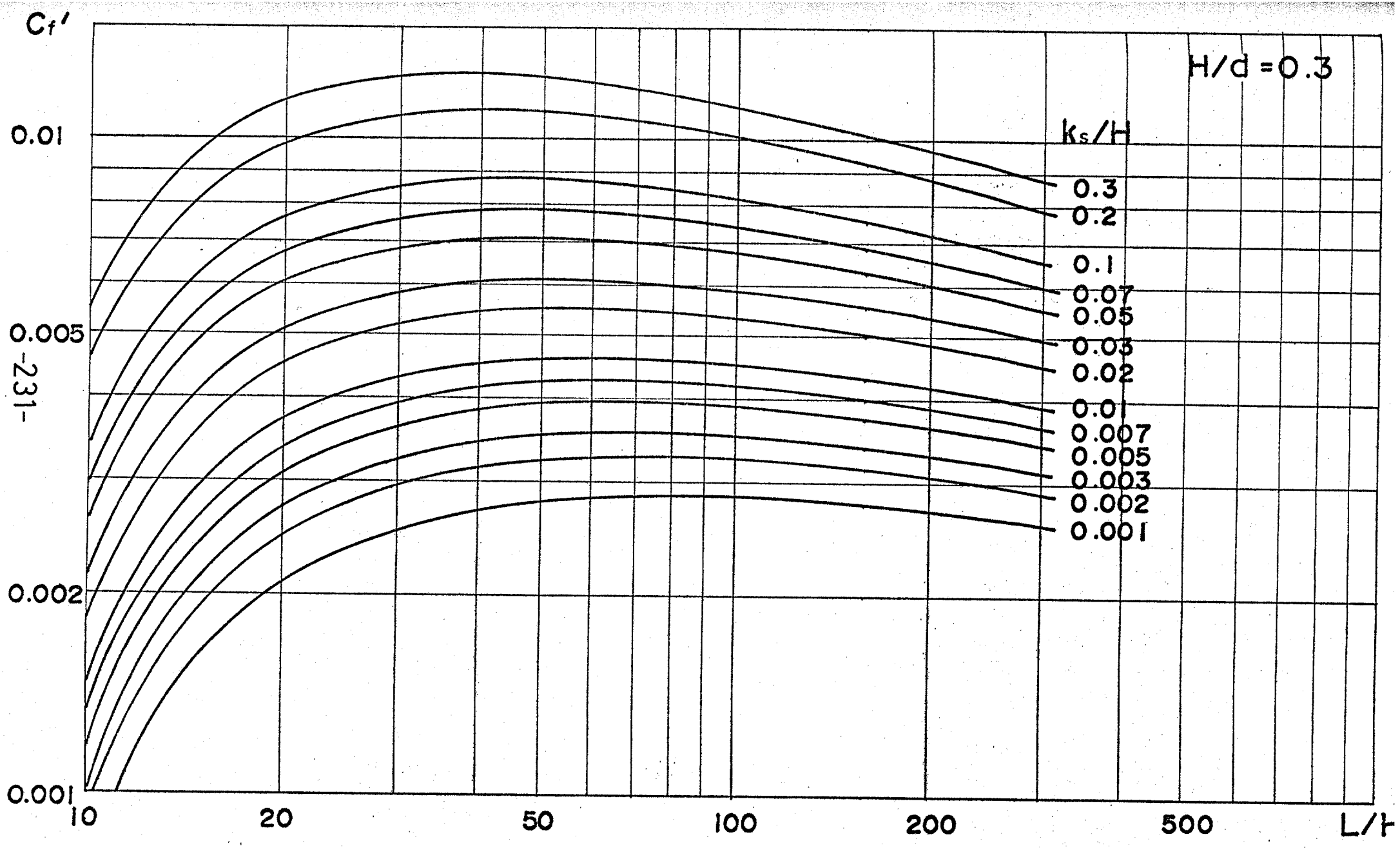

Cf'
H/d = 0.2
ks/H
0.3
0.2
0.1
0.07
0.05
0.03
0.02
0.01
0.007
0.005
0.003
0.002
0.001
0.01
0.005
0.002
0.001
10
20
50
100
200
500
L/

Fig 4.


C_f'
H/d = 0.3
k_s/H
0.3
0.2
0.1
0.07
0.05
0.03
0.02
0.01
0.007
0.005
0.003
0.002
0.001
0.01
0.005
0.002
0.001
10
20
50
100
200
500
L/h

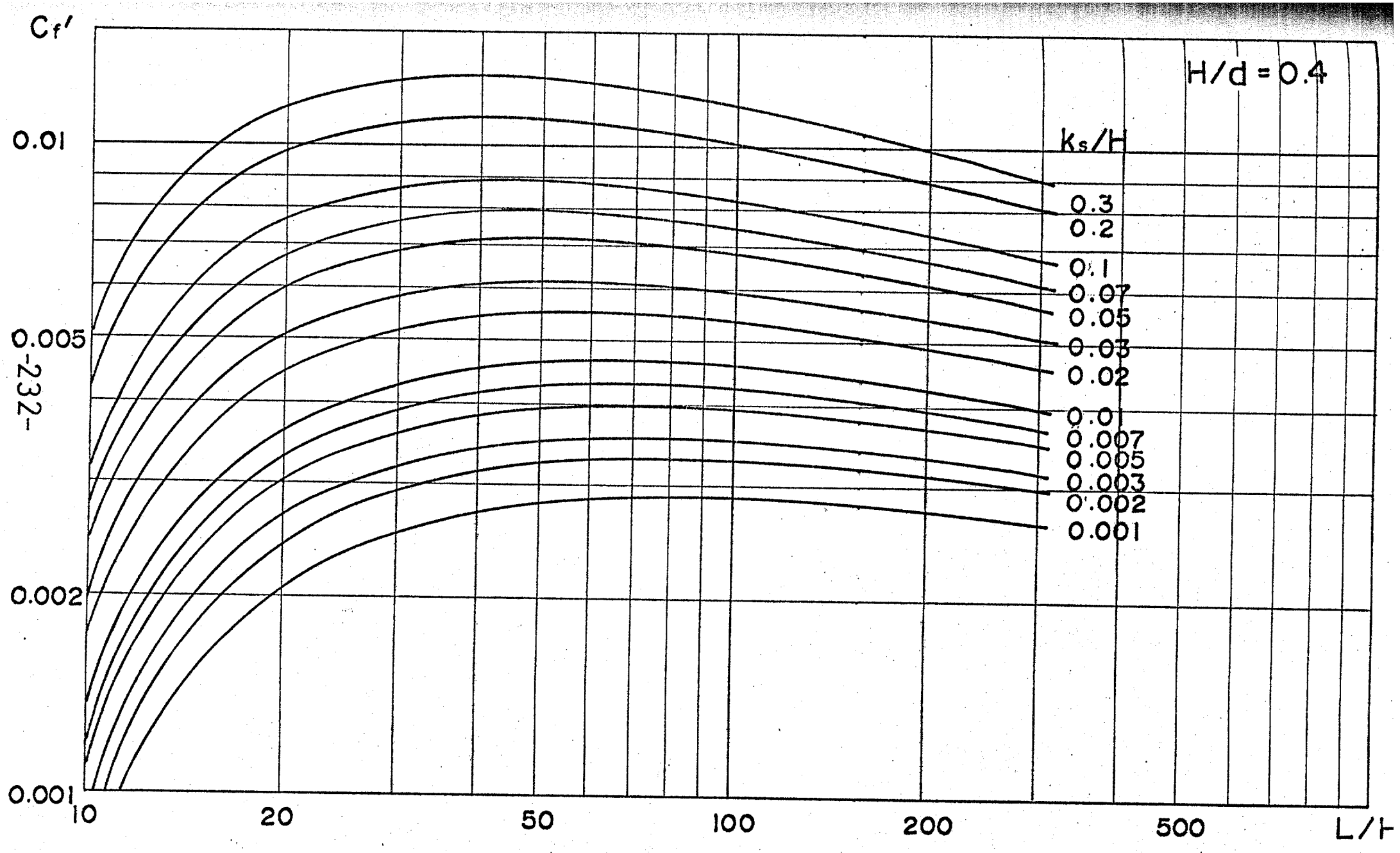

C_f'
H/d = 0.4
k_s/H
0.3
0.2
0.1
0.07
0.05
0.03
0.02
0.01
0.007
0.005
0.003
0.002
0.001
0.01
0.005
0.002
0.001
10
20
50
100
200
500
L/H

Fig 4-41

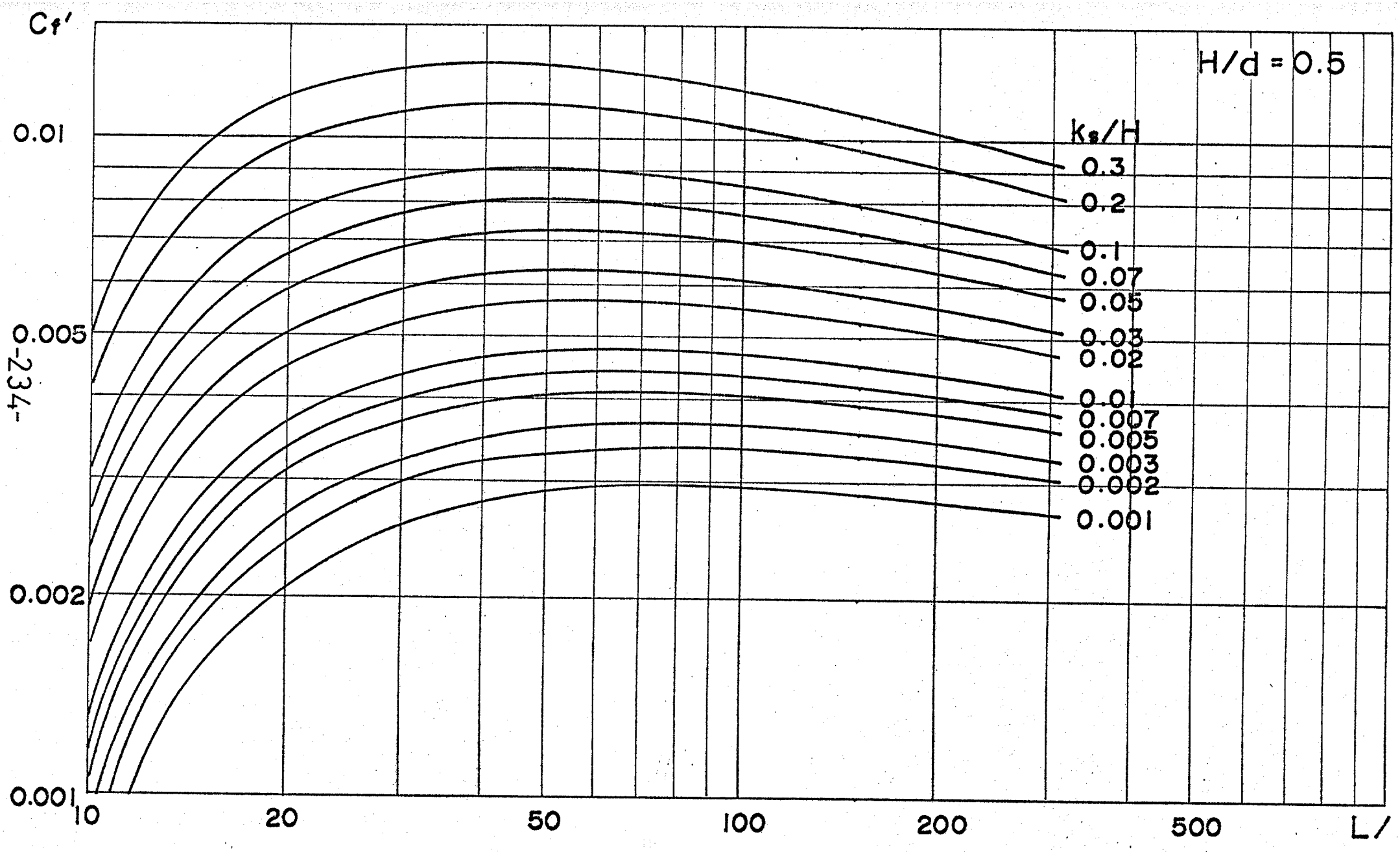
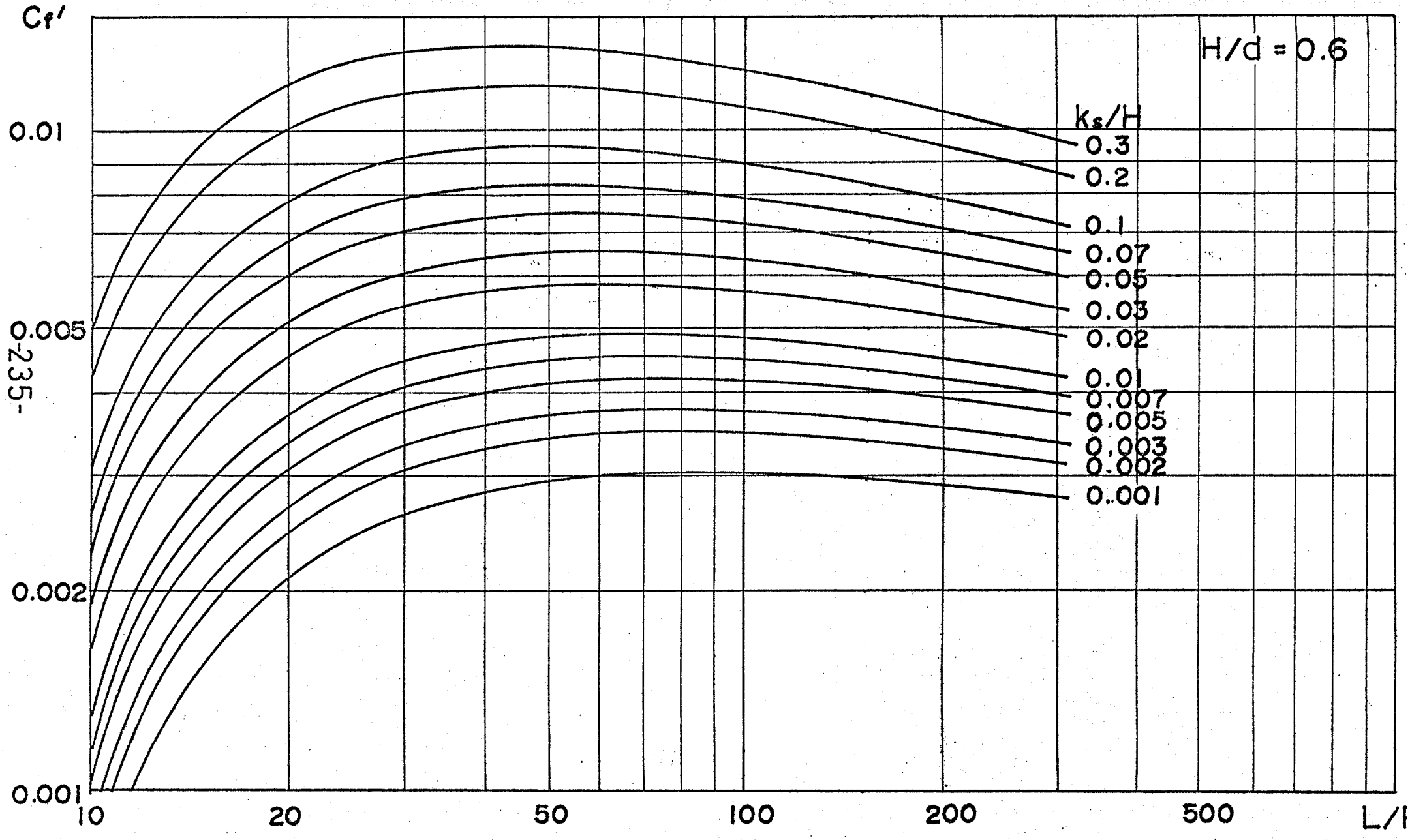

C_f'
H/d = 0.5
k_s/H
0.3
0.2
0.1
0.07
0.05
0.03
0.02
0.01
0.007
0.005
0.003
0.002
0.001
0.01
0.005
0.002
0.001
10
20
50
100
200
500
L/

Fig 1-12


Cf'
H/d = 0.6
Ks/H
0.3
0.2
0.1
0.07
0.05
0.03
0.02
0.01
0.007
0.005
0.003
0.002
0.001
0.01
0.005
0.002
0.001
10
20
50
100
200
500
L/l

-235-

Fig 4-43

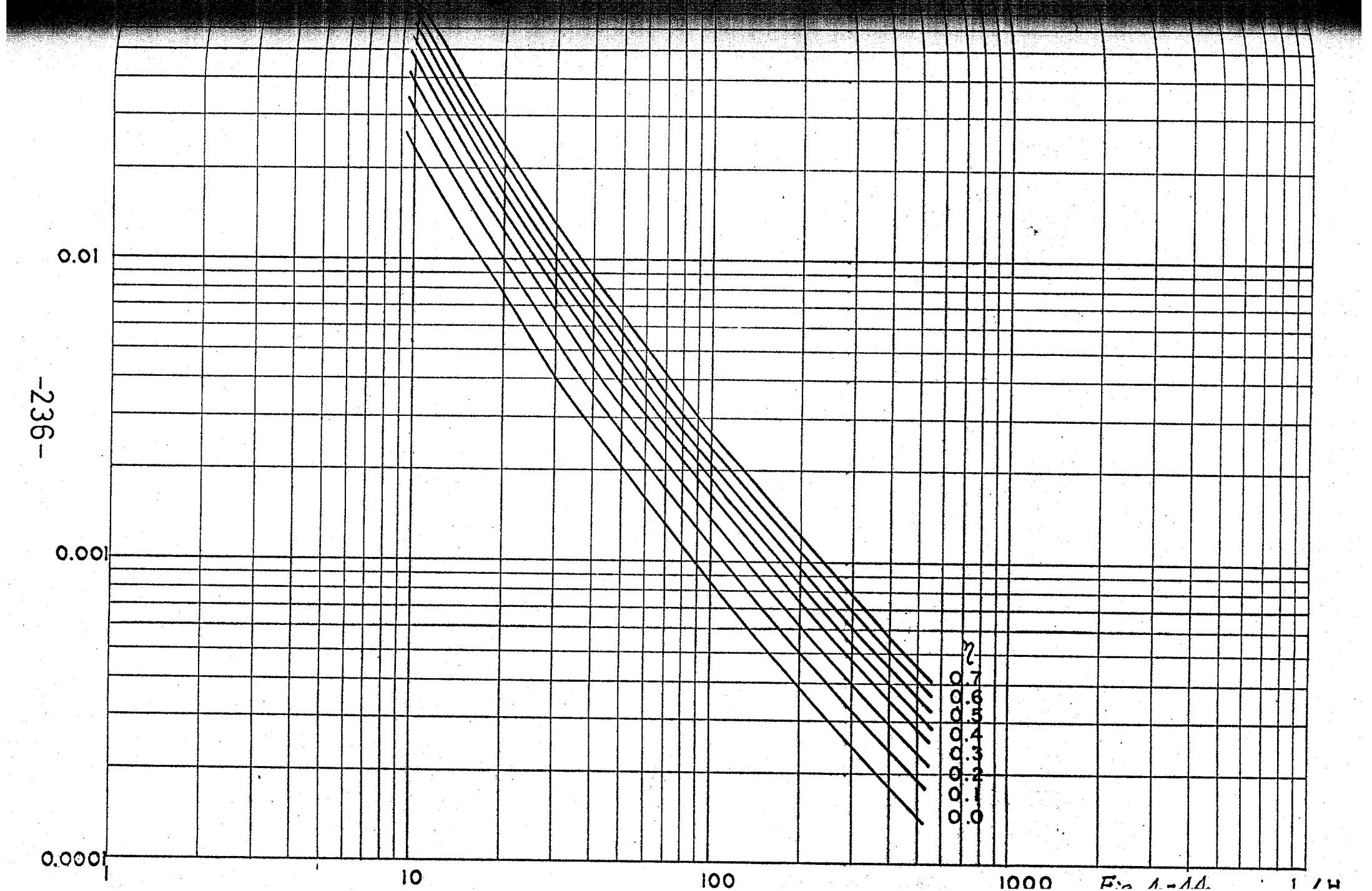


Fig. A-44.

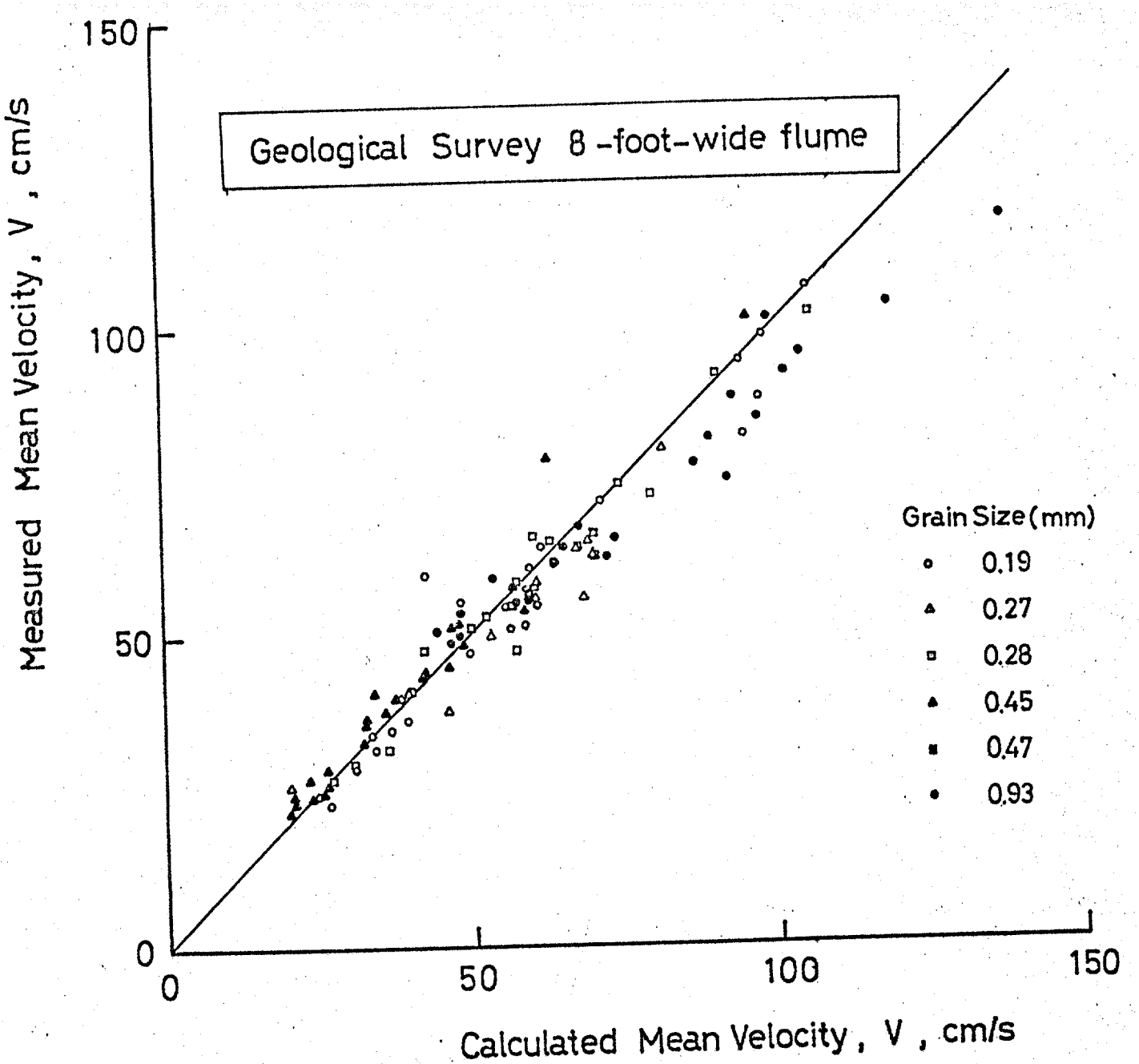

Geological Survey 8-foot-wide flume
Measured Mean Velocity, V, cm/s
Calculated Mean Velocity, V, cm/s
0
50
100
150
Grain Size (mm)
0.19
0.27
0.28
0.45
0.47
0.93

Fig. 4-45

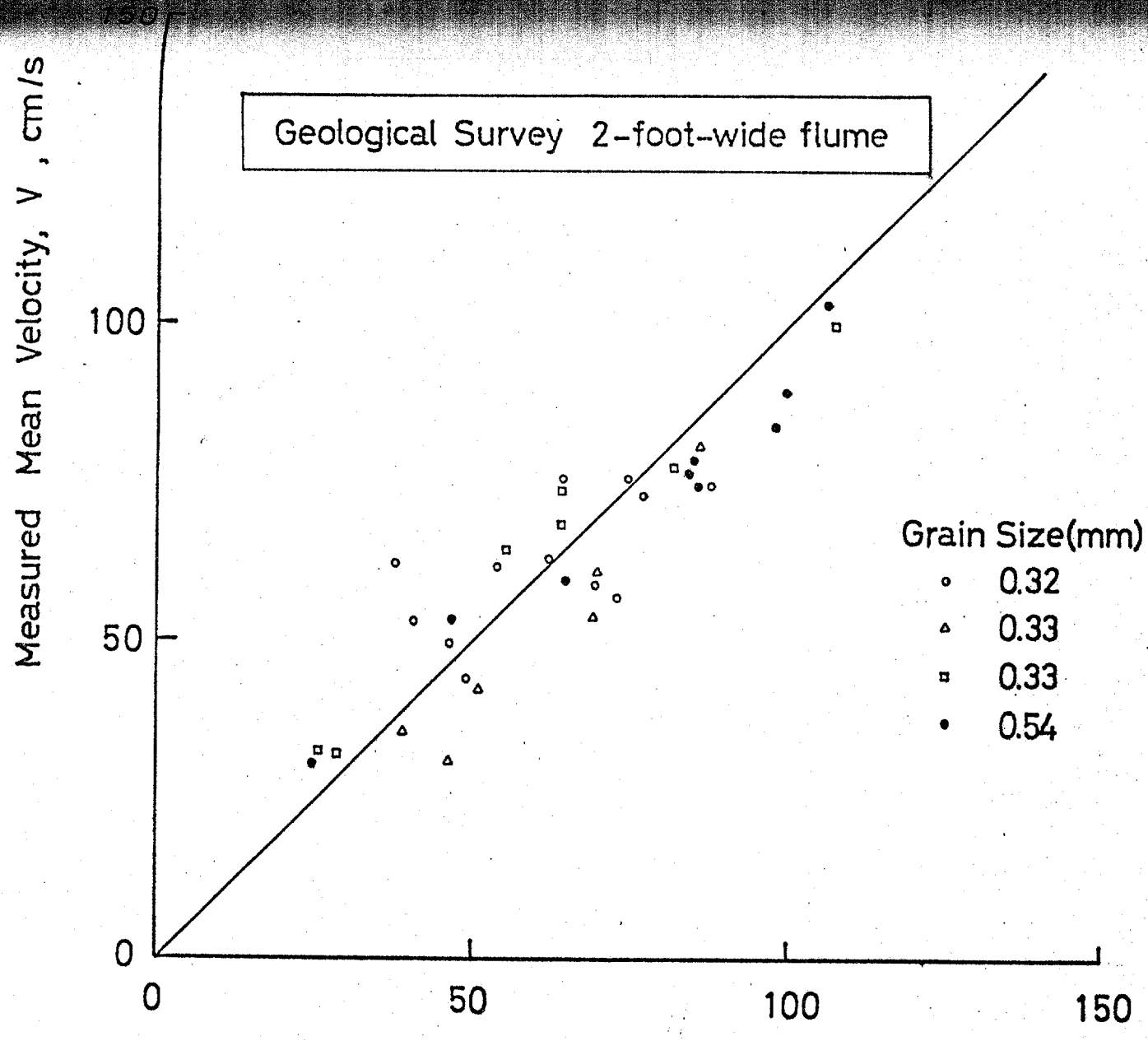

Geological Survey 2-foot-wide flume
Measured Mean Velocity, V , cm/s
Calculated Mean Velocity , V , cm/s
0
50
100
150
Grain Size(mm)
0.32
0.33
0.33
0.54

Fig. 4-46

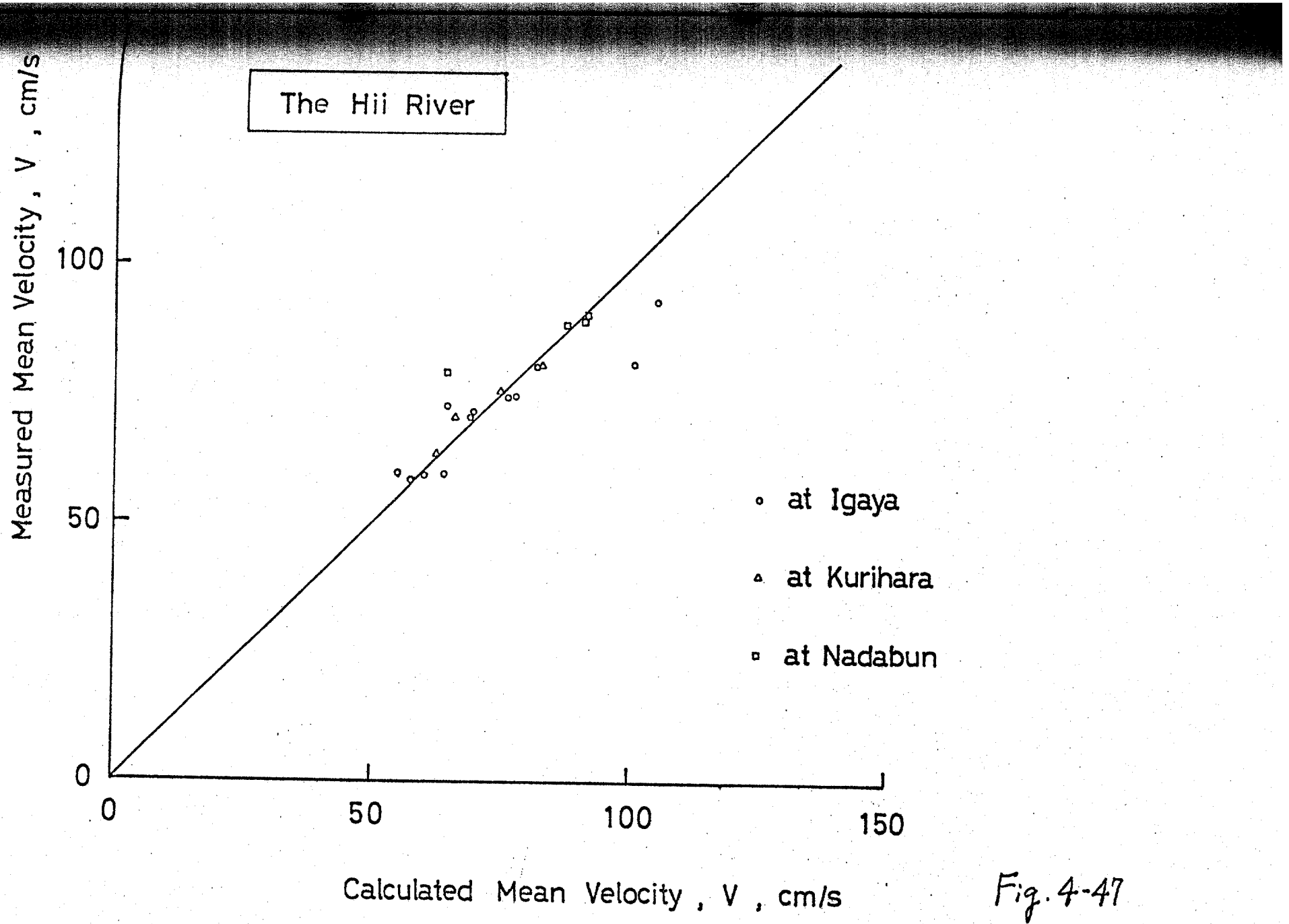

The Hii River
Measured Mean Velocity , V , cm/s
Calculated Mean Velocity , V , cm/s
0
50
100
150
at Igaya
at Kurihara
at Nadabun

Fig. 4-47

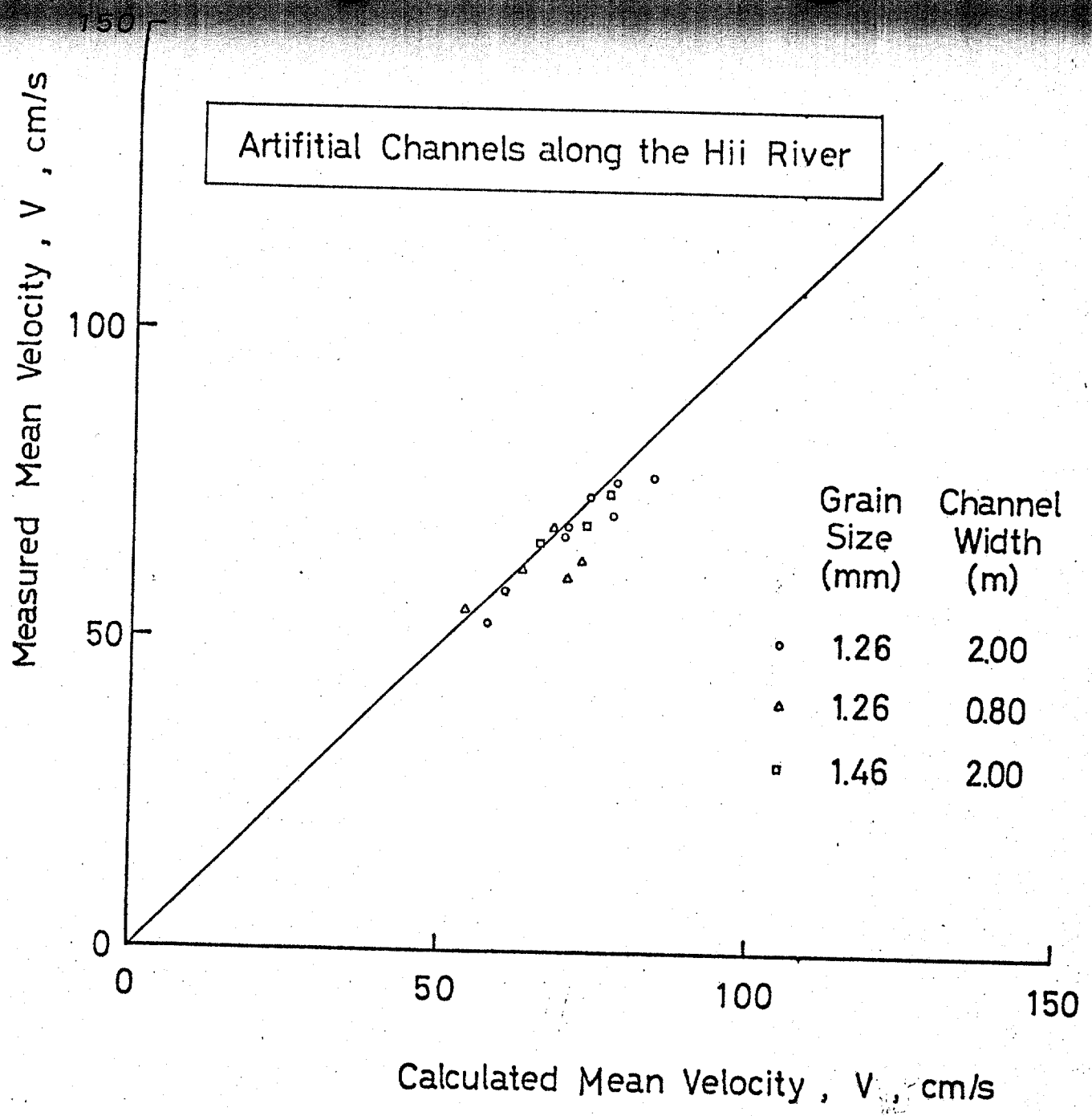

Artifitial Channels along the Hii River
Measured Mean Velocity , V , cm/s
Calculated Mean Velocity , V , cm/s
0
50
100
150
Grain Size (mm)
Channel Width (m)
1.26
2.00
1.26
0.80
1.46
2.00

Fig. 4-48

	RUN 1	RUN 2
U_∞	4.25m/s	8.85m/s
Re	9380	19530

Table 4-1

	Xcm	X/H	
1	22	6.88	⊕
2	24	7.50	⊗
3	26	8.18	⊘
4	28	8.75	⊖
5	32	10.00	⊜
6	36	11.25	⊗
7	40	12.50	⊙
8	48	15.00	⊖
9	56	17.50	⊙
10	64	20.00	⊙
11	72	22.50	○

Table 4-2

H (cm)	3.8
u_∞(m/s)	8.83 ~ 8.33

Table 4-3

	X(cm)	X/H	
1	25.0	6.58	◓
2	27.5	7.24	⊘
3	30.0	7.89	⊗
4	32.5	8.55	○
5	35.0	9.21	◑
6	40.0	10.5	⊕
7	50.0	13.2	◐
8	70.0	18.4	⊖

Table 4-4

H (cm)	5.0
L (cm)	80.0
V (m/s)	7.12

Table 4-5

	X(cm)	X/H	
1	35.0	7.0	⊖
2	40.0	8.0	⊘
3	45.0	9.0	⊘
4	50.0	10.0	◓
5	55.0	11.0	◒
6	60.0	12.0	⊗
7	65.0	13.0	◑
8	70.0	14.0	⊖
9	75.0	15.0	⊕

Table 4-6

REFERENCE

(1) Einstein,H.A. and Barbarossa,N.L., " River Channel Roughness," Trans. ASCE, vol.117, 1952, pp.1121-1146.

(2) Talor,R.H. and Brooks,N.H., Discussion of " Resistance to Flow in Alluvial Channels," by Simons,D.B. and Richardson,E.V., Trans. ASCE, vol.127, 1962, pp.982-992.

(3) 石川忠晴，"断面急変に伴う剥離領域の下流部の流れと底面せん断力について，" 土木学会論文報告集，第257号，1977年1月，pp.21-29.

(4) 例えば Schilichting,H.," Boundary Layer Theory," McGraw Hill, p.694.

(5) 前出論文(4)，p.693

(6) Patel,V.C.," Calibration of the Preston Tube and Limutation on its Use in Pressure Gradient, J.F.M. vol.23, Part 1, 1965.

(7) Hwang,L.S. and Laursen,E.M.," Shear Measurement Technique for Rough Surface," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.89, No.HY2, March, 1963, pp.19-37.

(8) 例えば，日野幹雄，"流体力学"，朝倉書店，P.167.

(9) 例えば Engelund,F.," Hydraulic Resistance of Alluvial Streams," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.92, No.HY2, March, 1966, pp.315-326.

(10) Tani,I." Experimental Investigation of Flow Separation over a Step," Boundary Layer Research, Editor, Gortler,H., IUTAM Sympo., Freiburg, 1958.

(11) Kirschmer,O.," Untersuchungen Uber den Gefallsverlust an Rechen," Mitteilungen des Hydraulishen Instituts der Technishen Hochshule Munchen, No.1, 1926.

(12) Hoerner,S.F.," Fluid-Dynamic Drag,"

(13) Bearman,P.W.," Investigation of the Flow behind a Two-Dimensional Model with a Blunt Trailing Edge and Fitted with Splitter Plates, J.F.M., vol.21, pp.241-255.

(14) Guy,H.P., Simons,D.B. and Richardson,E.V.," Summary of Alluvial Channel Data from Flum Experiments 1956-61," Geological Survey Prof. (15) Paper 462-1, U.S.Government Printing Office, Washington, 1966.

(15) Shinohara,K. and Tsubaki,T.," On the Characteristics of Sand Waves Formed Upon the Beds of the Open Channels and Rivers," Reports of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, vol.7, No.25, 1959, pp.15-45.

(16) Yalin,S.," On the Average Velocity of Flow over a Movable Bed," La Houille Blanche, No.1. 1964.

(17) Okabe,T. and Sugio,S.," Resistance to Flow on Sand Waves," Bulletin of Faculty of Engineering Tokushima University, vol.12, 1975, pp.1-15.

第五章

河床波の安定形状について

§.1 河床波の安定化に関する仮説と
それに基づく理論的考察 249

§.2 実験的検討 255

§3 ま と め 260

§1 河床波の安定化に関する仮説と それに基づく理論的考察

十分成長した河床波はあまり変形せずに伝播してゆく。したがって各時点での水流，流砂量，河床波形状の間には何らかの釣り合い関係があるものと推測される。本章ではこの釣り合い関係を考察し，十分発達して平衡状態に達した河床波の波高について論じる。

a 河床波の安定化に関する仮説

河床波に関する理論としては微小擾乱についての線形安定理論[(1)(2)]が著名である。この種の理論は河床波の発生を説明するものであるが，現実の河床波との対応として，最も大きな増幅速度を持つ擾乱の波長が卓越波長に等しいという解釈がなされている。しかしこの擾乱が基本的性質として非定常性を内包しているのに対し（しかも最も非定常性の強いものを取り上げるのだが），比較される対象は定常状態の河床波である。さらに，河床波上の流れが剥離を伴う極めて非線形性の強い流れであること，実験水路で現観測では河床波が合体を繰り返しながら成長すること等を考えると，最終的な河床波の形状（卓越波長，卓越波高など）はその発生因子よりも成長を抑制する因子に支配されていると考えるのが適当であろう。

河床波が成長を止める限界状態では，河床波頂部がそれ以上高まることを抑制する要素があるはずである。河床波頂部の砂の運動はその付近の底面摩擦力に支配されていると考えられるので，この抑制条件は局所的な底面摩擦力によっていると推測される。そこで次のような仮説を立てる。

1) 発達限界に達した河床波頂部では無次元底面摩擦力 τ_*' が或る定まった値をとる。

2) この値は平坦河床領域と砂堆河床領域の境界を与える関係式を満足する。

この仮説のもとに河床波の安定形状について考察する。

b 限界無次元底面摩擦力 τ_{*c}'

仮説2の条件を満足する無次元底面摩擦力を τ_{*c}' と表わすことにする。

Garde & Raju[3] は豊富な水路実験データーと実河川の測定データーから，砂堆河床領域の上限として次の関係を得た。(*)

$$\frac{I}{(\rho_s/\rho-1)} = 0.0147\left(\frac{R}{D}\right)^{-0.468} \qquad (5-1)$$

今は二次元流れを扱っているから径深 R を水深 d で置き換え，$\tau_* = u_*^2/(\rho_s/\rho-1)gD = dI/(\rho_s/\rho-1)D$ の関係を用いて整理すると

(*) Garde らはこの関係をグラフで与えている。(6-1) 式はこれを読みとって式に書き下したものである。

次式を得る。

$$\tau_{*c}' = 0.0147\left(\frac{d}{D}\right)^{0.532} \qquad (5\text{-}2)$$

仮説に従ってこの関係が河床波頂部で成立するとする。河床波形状は三角形で近似できるので，河床波頂部の水深は$(d-H/2)$となり，これを(5-2)式のdに置き換え次式を得る。

$$\tau_{*c}' = 0.0147\left(\frac{d-H/2}{D}\right)^{0.532} \qquad (5\text{-}3)$$

C　加速流下の摩擦速度の近似解法

第四章§2において底面摩擦力の算定法について考察し，(4-56)，(4-57)式を導いた。しかしこの式から結果を得るには数値積分をしなければならない。第四章ではそれ自体を求めることが目的であったが，本章ではその結果と(5-3)式を連立して解析を進めようとするので，微分方程式の形では著しく不便である。そこで河床波頂部付近を対象に以下のような近似解法を考えた。

(4-42)式の右辺オ一項は境界層内の流れを加速する力である。この外力によって左辺が変化するが，加速されるに従って右辺オ二項がこれを抑制するようになる。或る程度流下すると右辺のふたつの項の大きさは同程度となり，以後境界層内の運動量の変化はゆるやかになる。右辺オ二項の変化の具

合を図5-1に定性的に示す。

右辺オ二項の値を右辺オ一項の値で近似するとしてその相対誤差を考えると，加速度がゼロの流れでは100%，減速流では100%以上である。しかし加速流の場合は或る程度流下した所では十分な近似を与える可能性があるものと推測される。河床波上の流れは加速流であり，また本章では頂部付近を問題としているので，丁度この条件にあてはまるものと思われる。そこで(4-42)式の右辺の二項を等置して次のようにおく。

$$u_b \frac{du_b}{dx} \cdot \delta_b - u_*^2 = 0 \qquad (5-4)$$

河床波頂部付近では流速が一様化しているので底面上流速u_bを断面平均流速$\bar{u}$で近似する。

$$\bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} \cdot \delta_b - u_*^2 = 0 \qquad (5-5)$$

境界層内の流速分布が対数則で表わし得るとすれば，

$$\delta \simeq \gamma_0 \exp\left(\kappa \frac{\bar{u}}{u_*}\right) \qquad (5-6)$$

ゆえに摩擦速度について次の方程式を得る。

$$\bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} \cdot \exp\left(\kappa \frac{\bar{u}}{u_*}\right) - \frac{u_*^2}{\gamma_0} = 0 \qquad (5-7)$$

東北大・水工学研究室

d 河床波波高の算定式

平均河床面からの河床高を η, $\eta/d = \zeta$ と書くと断面平均流速 $\bar{u}$ は平均流速 V を用いて次のように書かれる。

$$\bar{u} = \frac{V}{1-\zeta} \tag{5-8}$$

(5-8) 式を (5-7) 式に代入すると,

$$\frac{d\zeta}{dz}(1-\zeta)^3 \exp\left(\frac{\kappa}{1-\zeta}\frac{V}{u_*}\right) - \frac{d}{y_0}\frac{u_*^2}{V^2} = 0 \tag{5-9}$$

河床波波形を三角形で近似し次式を得る。

$$\frac{H/L}{(1-\frac{1}{2}\frac{H}{d})} \cdot \exp\left(\frac{\kappa}{1-\frac{1}{2}\frac{H}{d}} \cdot \frac{F_1}{\sqrt{\tau_{*c}'}}\right) - \frac{d}{y_0}\frac{\tau_{*c}'}{F_1^2} \fallingdotseq 0 \tag{5-10}$$

ここに, $F_1 = V/\sqrt{(\sigma/\rho - 1)gD}$ 。

前章と同じく砂が移動している場合の粗度係数を次のようにおく。

$$k_s = 2D_{65} \tag{5-11}$$

したがって

$$y_0 = k_s/30 = D_{65}/15 \tag{5-12}$$

(5-12) を (5-10) 式に代入して,

$$\frac{H/L}{(1-\frac{1}{2}\frac{H}{d})^3}\cdot\exp\left(\frac{k}{1-\frac{1}{2}\frac{H}{d}}\cdot\frac{F_1}{\sqrt{\tau_{*c}'}}\right)-15\frac{d}{D_{15}}\frac{\tau_{*c}'}{F_1^2}\fallingdotseq 0 \qquad (5\text{-}13)$$

波長Lと水理量の関係が与えられれば，上式と(5-3)式を連立させて波高Hを求めることができる。

§.2 実験的検討

a 加速流下の摩擦速度の近似解法について。

25cm×25cmの吹き出し口を有するエッフル型風洞に，図5-2に示す縮流部を設け，表面に径1.83mmの鉛玉を敷きつめた。粗度係数は0.9mmである。風路中心線上に沿って底面摩擦力と底面付近の流速分布を外径1.3mmのピトー管を用いて測定した。底面摩擦力の算定にあたってはHwang & Laursenのキャリブレーション結果を用いた。

図5-3に結果を示す。図中実線は(5-7)式の関係を示している。測定値と理論値は良く一致していると言えよう。測定値が理論値を下回るのは，図6-1で説明した理由で，近似解法の性質上避けられない。しかし河床波の波高の変化を大体予測するには，これでも十分であろうと思われる。

b. 矩形管路内の河床波の発達限界について

i) 実験水路

長さ8m, 幅4cm, 深さ20cm, 勾配ゼロのアクリル製循環式水路に内ぶたを取り付け, 矩形管路として使用した。(図5-9) 矩形管路で実験を行なった理由は, ①理論解析と条件を同じにする為, ②定常一様流を形成しやすいこと, ③水面変動のもたらす副次的な効果でデーターが乱れないようにする為である。

ii) 水路床材料

豊浦産標準砂を用いた。特性を表6-1に示す。

iii) 測定方法

・流量及び平均流速

上流の吐き出し口(A)であらかじめ容積を計ってあるポリバケツで水を受け, 満杯になる時間をストップウォッチで計測し流量を算出した。算出された流量を平均断面積(通水前に測定してある。)で除し平均流速をもとめた。

・動水勾配

中ぶたの上の自由表面の位置をものさしで計測しもとめた。

・河床波の波高・波長

実験水路と平行している造波水路の台車に, 鏡と写真機を取り付け撮影し(図5-5), 後にネガをスライド映写機で拡

大投影し定規で計測した。

・河床波頂部の掃流砂量

図5-5に示す二台の写真機の視野が順々に重複するように一定時間間隔で撮映を行ない，河床波の位置のズレから波速 c を算出した。掃流砂量は流砂の連続式，

$$q_B = (1-\lambda) cH \qquad (5\text{-}14)$$

から求めた。上式は流砂が剥離領域を飛び越える場合には成立しないが，目視観測の結果では流砂はほとんど河床波下流面に堆積していた。

iv) 限界無次元底面摩擦力 τ_{*c}'

まず(5-2)式の妥当性を確める為に次のような予備実験を行なった。水深5cmで水路床を平坦に均らした後通水し，徐々に流量を上げて一旦河床波を形成させる。さらに流量を上げてゆくと河床波が吹き飛ばされて平坦河床となる。この時の流量とエネルギー勾配を測定し，径深分割法により底面摩擦力を算定した。この結果 $\tau_{*c}'=0.23$ が得られた。一方(5-2)式から算定すると $\tau_{*c}'=0.236$ となり良く一致する。これから(5-2)式は矩形管路においても成立するものと思われる。

v) 測定結果

図5-6は $F/\sqrt{\tau_{*c}}$ に関して H/d を整理したものである。測定

値の横に記してある数字はd/D_{65}の値である。(*) d/D_{65}の値が100～200の間に入っているので，これに対応させて$d/D_{65}=100$, 150, 200について理論曲線を引いてある。ただし波形勾配は本実験での平均的な値（0.075）を与えた。(**)

頂部の底面摩擦力を直接調べることができないので，次のようにして間接的に求めた。河床波頂部ではEinsteinの掃流砂関数(4)の関係が成り立つものとし，iii）で述べた方法で求めた掃流砂量から底面摩擦力を逆算する。この値と(5-2)式から求めた値とを図5-7に比較する。

vi）考察

図5-7では(5-3)式による算定値が多少大き目になってはいるがほぼ一致していると考えてよかろう。河床波上では流砂の非平衡性がありEinsteinの掃流砂関数が厳密には適用できないけれども，おおよその値を知ることはできよう。この図から見る限りにおいては，前述の仮説はほぼ成立していると

(*) 矩形管路では水深が一定なので，F_rとd/D_{65}が独立変数であり，(5-3)，(5-13)式からτ_c'とh/dを求める形になる。

(**) 本研究では河床波の波長（or 勾配）と水理量の関係を取り扱っていない。ここでは(5-13)式の妥当性を確める為に波形勾配についての実験結果を用いた。

思われる。

本節で行なった理論的考察は"存在し得る河床波の最大波高"に関するものである。したがってV=0の条件下では、H/d=2（河床波頂部が水面に一致する）という結果が得られる。流れの無い状態ではいかなる形の河床波も崩れずに存在し得るからである。しかしそのような場合には砂の移動が無いから、実際には平坦河床から河床波は生じない。現実に観測される河床波の波高は図5-6の枠内に書かれてあるように変化すると推測されるが、本章の考察は図の太線部分に相当すると考えられる。そこで図5-6を見ると比較的良い結果が得られていると考えられる。しかし全体的に多少波高を大きく算定する傾向が見られる。これは底面摩擦力の近似算定法のもたらす誤差と考えられるので、仮説そのものの検証と合わせて今後さらに検討の余地があるものと思われる。

§3 まとめ

本章では河床波形状特性量のうち波高について考察した。従来の研究では次元解析法に基づいて実験結果を整理する程度に留まっていた。本研究ではより積極的に，§1の仮説に基づいた数理解析的アプローチを試み，水路実験結果と照合することにより以下の結果を得た。

"河床波頂部の掃流力が同水深での平坦河床領域の下限を与える掃流力に等しい"という仮説自体の検証は厳密には行えなかったけれども，河床波頂部での掃流砂量から予測した限りにおいてはほぼ成立するものと推測される。

河床波波高の測定値と計算値の対応は比較的良く，前述の解析の方針の妥当性が裏付けられた。しかし精度的にまだ十分とは言えず，仮説自体の厳密な検証，摩擦速度の算定法の改良などにさらに検討の余地があるものと思われる。

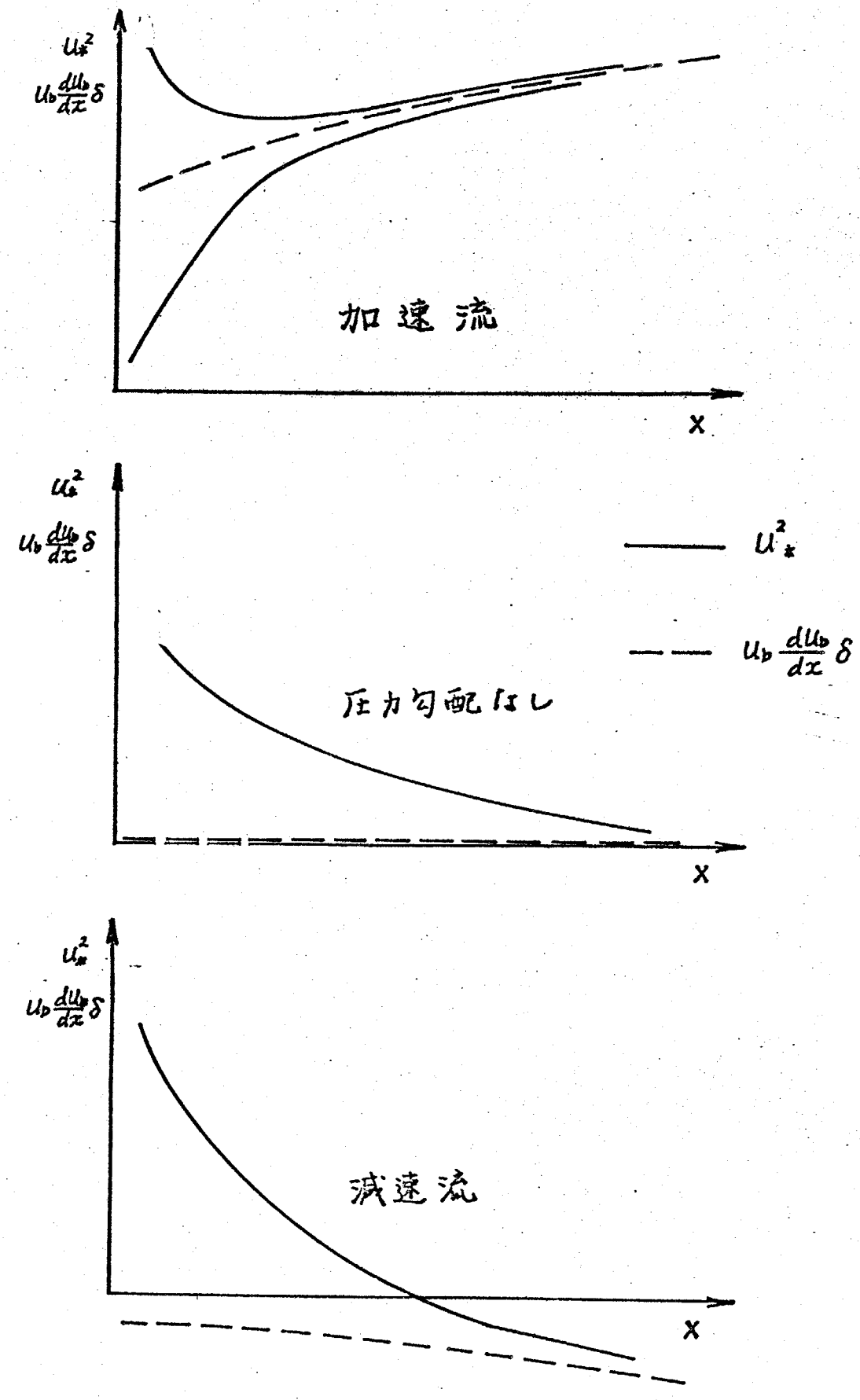

u_*^2
$u_b \frac{du_b}{dx} \delta$
加速流
x
u_*^2
$u_b \frac{du_b}{dx} \delta$
u_*^2
$u_b \frac{du_b}{dx} \delta$
圧力勾配なし
x
u_*^2
$u_b \frac{du_b}{dx} \delta$
減速流
x

Fig.5-1

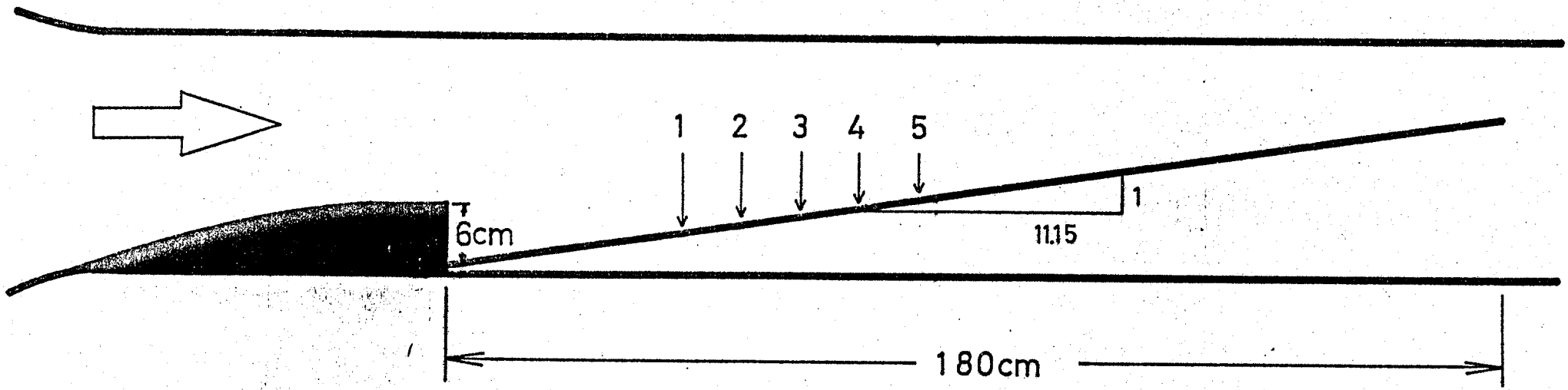


Fig. 5-2

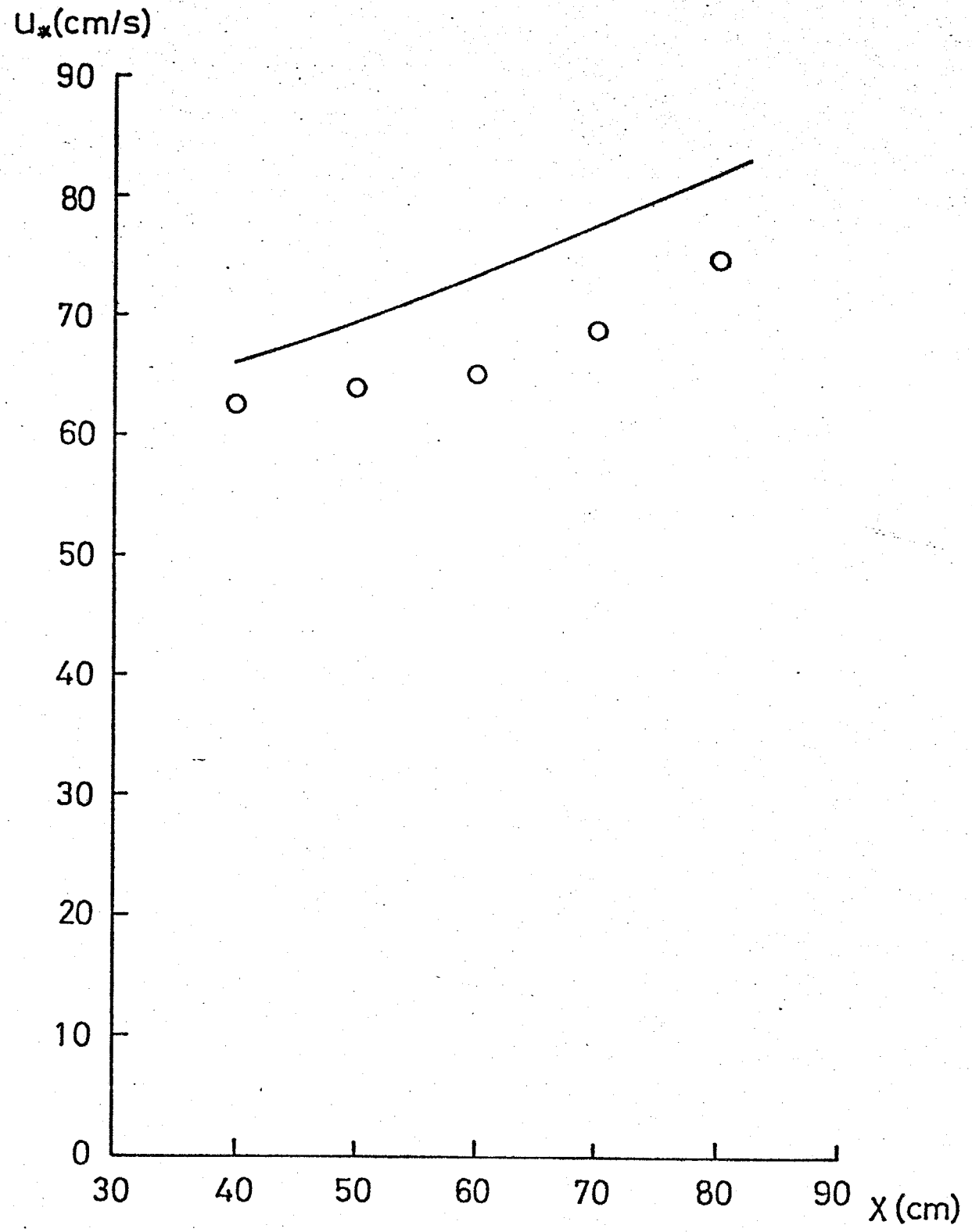


Fig. 5-3

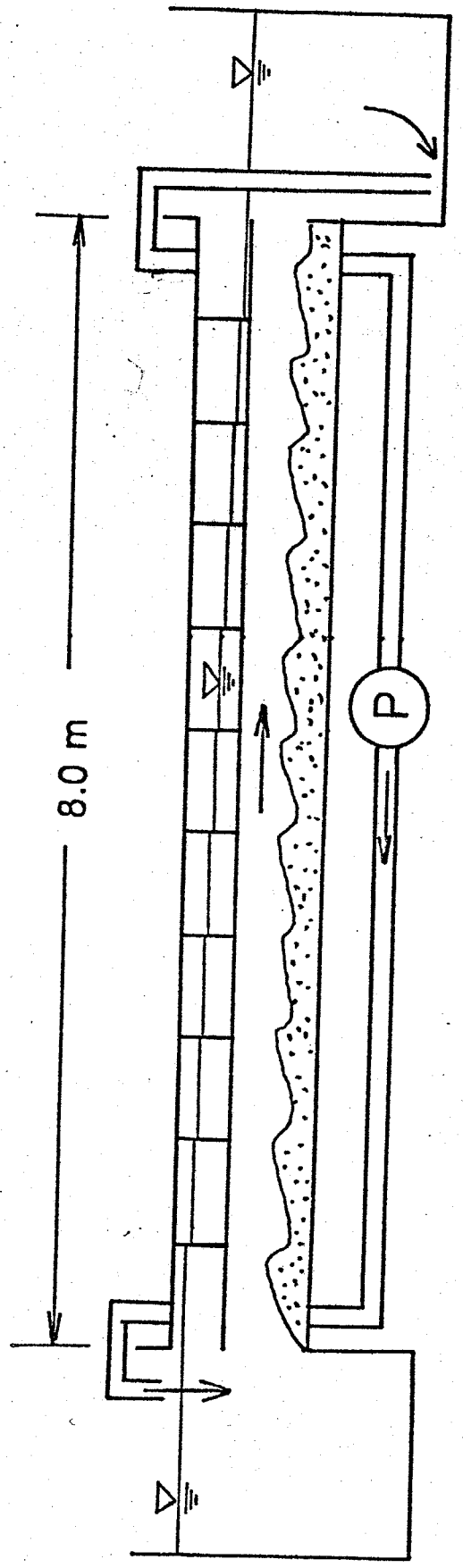


Fig.5-4

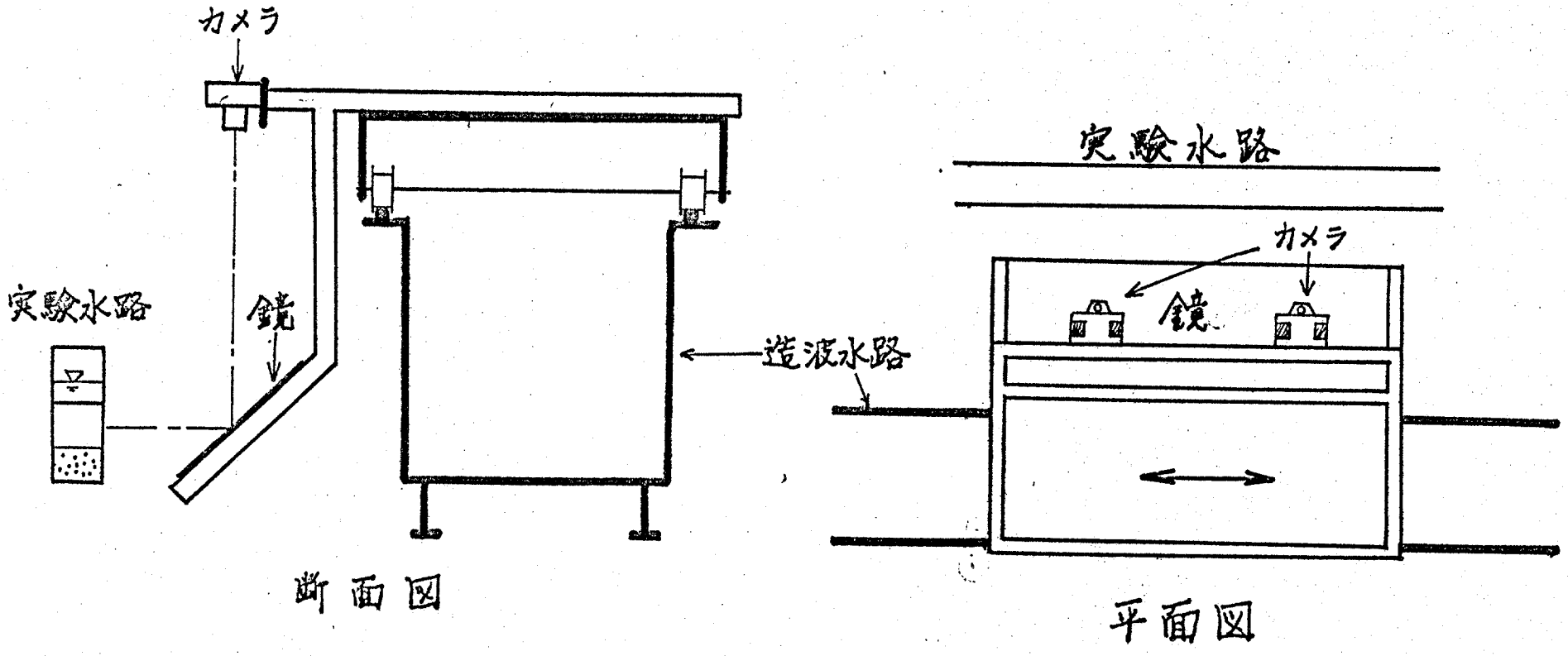


Fig. 5-5

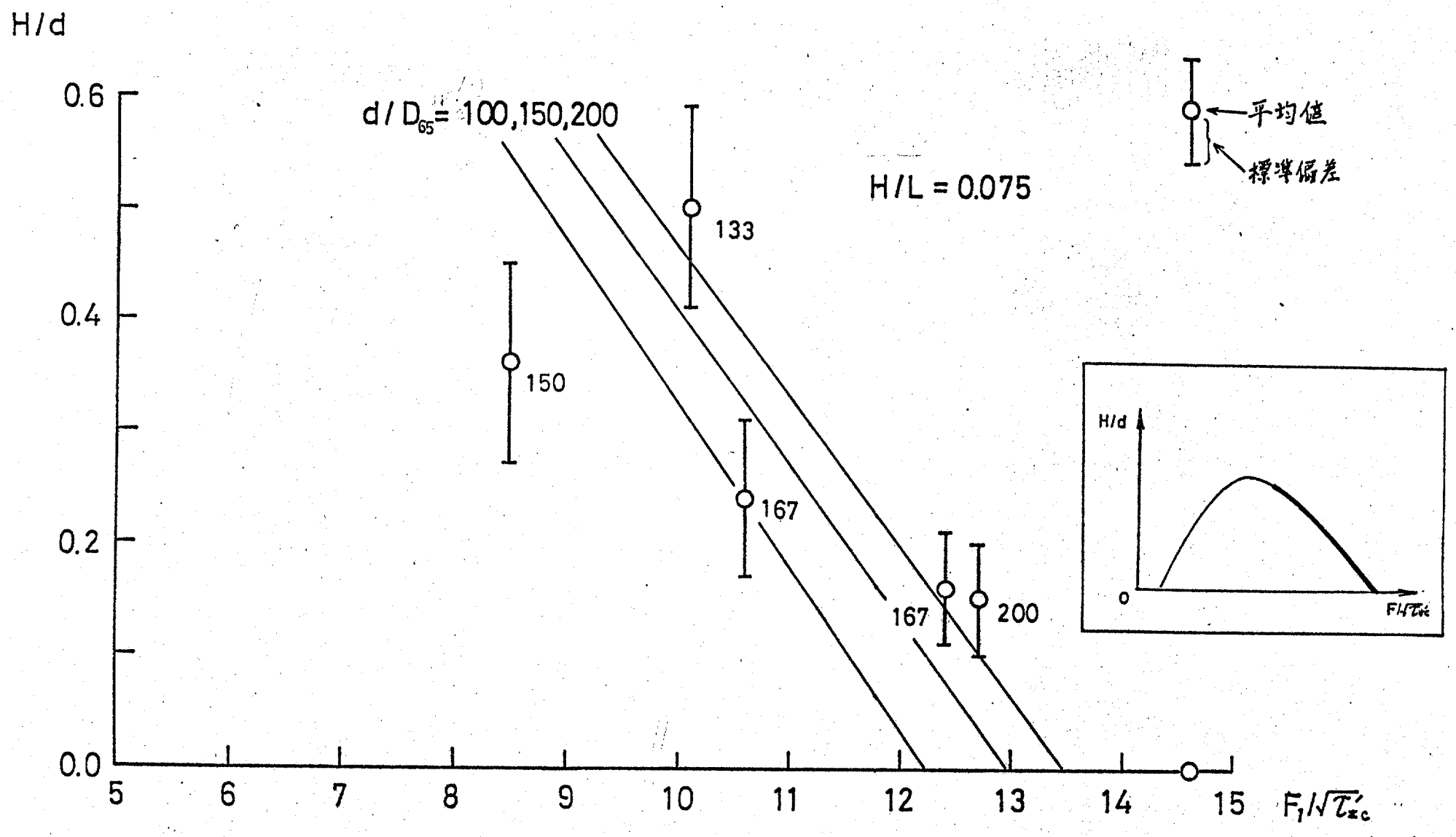

H/d
0.6
0.4
0.2
0.0
d / D65 = 100,150,200
H/L = 0.075
平均値
標準偏差
133
150
167
167
200
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
F1/√τ*c
H/d
0
F1/√τ*c

Fig. 5-6

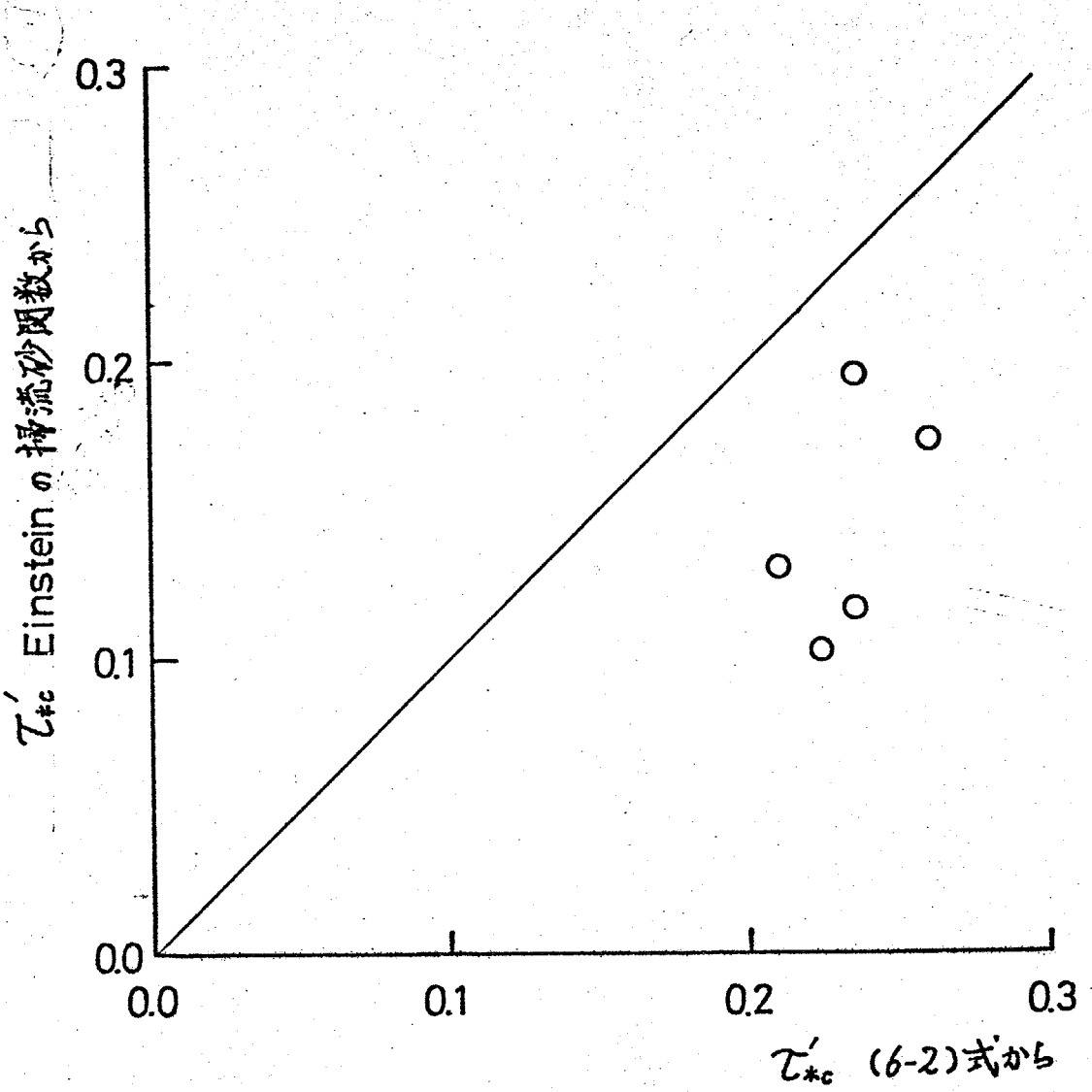


Fig.5-7

γ_s (g/cm^3)	2.64
λ	0.31
D_{50} (mm)	0.27
D_{65} (mm)	0.30

Table 5-1

	d(cm)	V(cm/s)
1	4.5	26.4
2	4.0	30.6
3	5.0	34.0
4	5.0	39.5
5	6.0	42.5

Table 5-2.

REFERENCE

(1) Kennedy,J.F.," The Mechanics of Dunes and Antidunes in Errodible-Bed Channels," J.F.M., vol.16, Part.4, 1963, pp.521-554.

(2) Hayashi,T.," Formation of Dunes and Antidunes in Open Channels," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.96, No.HY2, Feb., 1970, pp.357-366.

(3) Garde,R.J.and Raju,K.G.R.," Resistance Relationships for Alluvial Channel Flow," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol.92, No.HY4, July, 1966, pp.77-100.

(4) 石原藤次郎，本間仁編，"応用水理学中I"，丸善，P.30.

第六章

水位及び流砂量の予測

§.1 水位及び流砂量予測の方法 271

§.2 実験水路データーによる検討 274

§.3 実河川データーによる検討 277

§.4 Einstein 理論との比較 279

§.5 まとめ 281

京工大、水工学研究室

§.1 水位及び流砂量予測の方法.

本章では，前章までに得られた結果を用いて，水位及び流砂量の予測法を呈示する．

第二章から第五章までに得られた結果を要約すると次のとおりである．まず第二章・第三章では水理量が与えられた場合の流砂量の算定法を示した．次に第四章では河床波形状特性（波長と波高）が定まった場合の水理量の算定法を示した．最後に第五章において河床波形状特性のうち波高Hと水理量の関係について考察した．以上の結果に波長と水理量の関係式が加われば，必要な条件式がそろう．

河川で特に重要である砂堆の波長は水深に比例すると言われているので，[1][2] ここではその関係を用いて計算を行なう．

$$L = const. \times d \qquad (6-1)$$

Yalin[1]によれば比例係数は5であるが，条件（砂粒子の粒径など）によって変わるようで，後に用いるU.S.G.S.のデータ[3]ではほぼ10となっている．そこで本章ではU.S.G.S.のデーターについては10，他のデーターについては5と10のふた通りについて計算を行なった．

次に算定手順を示す．（図6-1）

① 水深dを仮定する。

② (6-1)式から波長Lを求める。

③ (5-3)式でHを仮定して τ_{*c}' を求める。

④ (5-13)式を満足する波高Hを求める。

⑤ ④で得られたHと③で仮定したHが等しくなるまで③~④を繰り返す。

⑥ 図4-37~図4-43を用いて C_f' を，図4-44から C_f'' を求め全抵抗係数 $C_f = C_f' + C_f''$ を求める。

⑦ 一方全抵抗係数の定義式から $C_f = 2gd^3I/g^2$ と書けるので，これから全抵抗係数 C_f を求める。

⑧ ⑥と⑦で得られた C_f が一致すれば，①で仮定した水深の流れが存在し得る。一致しない場合は①に戻る。

以上で水理量が定まったので次に流砂量を求める。

⑨ $u_* = \sqrt{gdI}$ から u_* を，$\tau_* = u_*^2/(\rho_s/\rho - 1)gD$ から τ_* を求める。

⑩ 図6-2から ω を求める。

⑪ 図6-3から $f(\tau_*)$ を求める。

⑫ (2-46) 式の下の式と (2-44) 式から α, β および a, b を求める。

⑬ (2-49) 又は (2-50) 式から全流砂量 g_T が求まる。

§.2 実験水路データーによる検討

U.S. Geological Survey の実験データー[3]の一部を用いて検討する。この実験は種々の河床形態を生成させる為に勾配を次々に変えて行なわれている。その中同一の砂についてほぼ同じ河床勾配で行なわれたケースを選んだ。(表6-1) 図6-4は生成した河床波(砂堆)の波長Lと水深dの関係を見たものであるが、Lはdのほぼ10倍となっている。そこで波長と水深の関係を次式で表わす。

$$L = 10\,d \qquad (6\text{-}2)$$

それぞれの流量qについて、種々の水深dを仮定し②~⑥の手順で得られるC_fを水深に対してプロットすると図6-5の実線を得る。一方抵抗係数の定義式から破線を得る。この交点からその流量に対しての水深が求まる。図からわかるように、一般にひとつの流量についてふたつの状態が存在する。水深が小さい方の流れは全抵抗のうち摩擦抵抗の占める割合が大きく、水深の大きい方の流れでは形状抵抗の占める割合が大きい。領域区分で言うと、前者は遷移領域(Transition)に、後者は砂堆領域(Dunes)に対応すると考えられる。以下それぞれを状態Ⅰ、状態Ⅱと呼ぶ。

図6-5のようなグラフを種々の流量について書くことにより，流量と水位の関係を得る．結果を図6-6に示す．図中破線は状態Iに実線は状態IIに対応する．図中の点は測定結果で，黒く塗りつぶした点が実線に，白抜きの点が破線に対応する．

固定床水路では，水深は流量の一価関数であり，流量の増大に伴って単調に増加する．一方移動床では図6-6のプロットに見られるように，流量の増加によって水深が減少する場合がある．これは流量と水深の関係の多価性ということで説明される．このようにひとつの流量についてふたつの状態が存在し得ることについては，Yanoni[4]が実験的に明らかにして以来多くの論議を呼んでいるが，本研究では河床波の形状特性を介して定量的に取り扱うことに成功した．なお，ふたつの状態のうちどちらが現われるかは，それぞれの状態の安定度と下流端の境界条件に依存するものと考えられる．したがって不等流計算のシステムの中に本研究の成果を組み込むことによって明らかにされるものと思われる．

図6-7は流量と流砂量の関係を示したものである．流砂量式自体の持っている誤差の為に，予測値と測定値の対応が多少悪くなっている．第三章で述べたように，(2-49)，(2-50)式は砂堆領域（状態II）で大き目に算定する傾向が見られる．

この差は有効掃流力という概念を用いて従来行なわれている大幅な補正に較べればわずかである。しかしより精度を何よさせるには，河床波上の砂の移動機構の考察に基づく何らかの補正が必要であろう。

§3 実河川データーによる検討

文献(4)に記載されているRio Grande Riverでの1952年4月～7月の測定記録を用いて検討する。(表6-2)

図6-8は測定データーをGarde & Raju[5]の領域区分図にプロットしたものである。これからどのデーターもTransition(状態I)にあると推測される。

図6-9はL=10d, 図6-10はL=5dとした水位の予測曲線(*)と測定された水位を比較したものである。測定値は破線(状態I)に対応する。状態Iでは摩擦抵抗の占める割合が大きいので, 河床波の波長の違いは結果にほとんど影響を及ぼしていない。測定値と理論値の対応は良い。測定値で水位が二価性を持っているのは, 恐らく河床形態区分の違いではなく非定常・不等流の効果であると考えられる。

図6-11、図6-12は流砂量と流量の関係を表わしている。測定値が全体的に理論値を上回っているが, これは不等流効果

(*) 実河川は非定常不等流である為, 水面勾配が底勾配と一致せず時間的にも変化する。ここでは水面勾配の平均値0.0009を底勾配とする水路の定常・等流を計算した。また河床材料の粒径も時間的に変化するが, これも平均値を用いた。

によると推測される。すなわち浮遊砂が相当に多い為に、上流側の流れの状態の影響を受けていると思われる。本研究では定常・等流のみを扱っているのでこの点については現段階では考慮できない。将来不等流に理論を拡張する際には、流砂の非平衡性を考慮する必要が生じるものと思われる。

§.4 Einstein 理論との比較.(5)

本理論のように流量を与えるだけで流速、水深、流砂量などを直接計算する方法を呈示したものとしてはEinsteinの理論が有る。以下にその計算結果を示し、本理論の結果と比較する。

Einstein 理論は径深分割法に基づいている。径深分割法により分離された形状抵抗と35%粒径砂の無次元掃流力が一義的な関係にあるとして、実河川のデーターから逆算して、この関係をグラフで与えている。平均流速と水深の算定にあたってはこのグラフを用いて繰り返し計算をする。また、流砂量は掃流砂量と浮遊砂量を別々に算定する。掃流砂量については平坦河床についてのEinsteinの掃流砂関数に、径深分割法で求められた摩擦抵抗力を代入して得る。浮遊砂量はRouse分布の境界値として、河床から粒径の2倍の高さで掃流層の濃度（この定め方は第一章で述べた）を与え、対数則の流速分布を乗じて積分し求める。

以下に計算結果を示す。

図6-13はU.S.G.S.(3)のデーターと水位に関して比較したものである。Einsteinの理論では解の2価性は出ずに、測定値のほぼ中央を通る一本の線が現れる。図6-6と比較すると、

明らかに本理論の方が優れていることがわかる。図6-14は流砂量に関して比較したものである。誤差は2倍程度であり，本理論の優越性はそれ程明確ではない。しかし，領域の違いによる流砂量の不連続性（2～3倍/cm·sあたり）をEinsteinの理論では説明できないが，本理論（図6-7）では流砂量式の改良によって表わし得る可能性がある。

図6-15はRio Grande Riverの流量と水位の関係を示している。図6-9，図6-10と比較すると本理論の結果の方が測定値と良く一致していることがわかる。

図6-16は流砂量についての比較である。図6-11，図6-12を見ると本理論の方が若干精度良く算定されていることがわかる。

§5. まとめ

本章では、§1において第二章から第五章までに得られた結果を組み合わせて水理量及び流砂量の予測法を呈示した。次に§2, §3においてふたつの条件について計算例を示し、測定データーと計算値を比較することにより本方法の妥当性を検討した。最後に§4において、既存の研究の中で唯一の総合的な研究であるEinsteinの理論を用いて計算した例を示し、本理論の結果と比較した。その結果以下の諸点が明らかになった。

ひとつの流量についてふたつの水理状態が存在し得ることは従来実験的に知られており、また定性的に論じられていたが、本理論ではそれを定量的に明らかにすることができる。

流砂量予測の精度はEinstein理論に較べると良いものの、水理量予測の精度よりも落ちる。さらに精度を向上させるには、河床波上の流砂の機構、流砂の非平衡性などの考察に基づいて流砂量式を改良してゆく必要があると思われる。

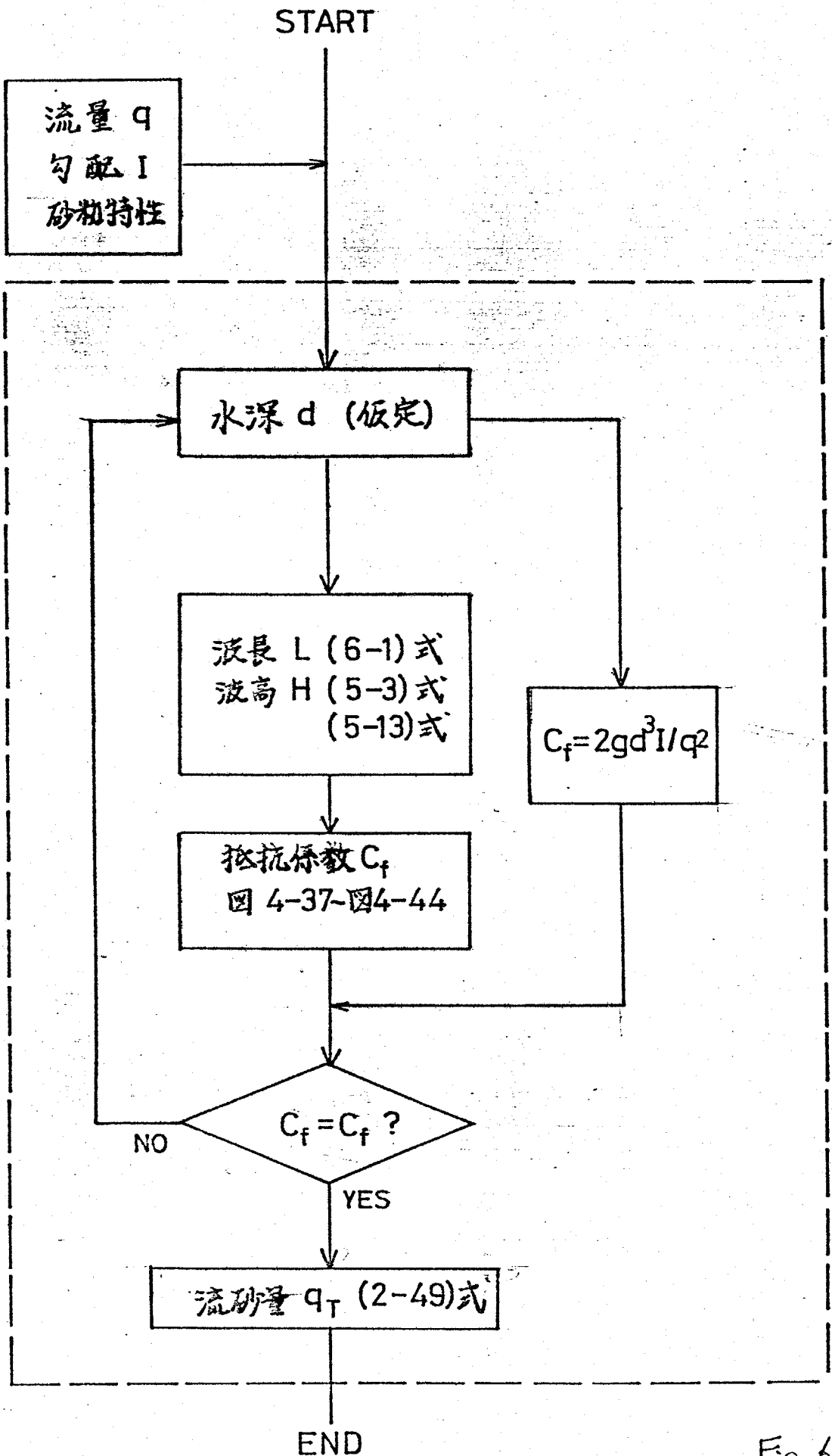
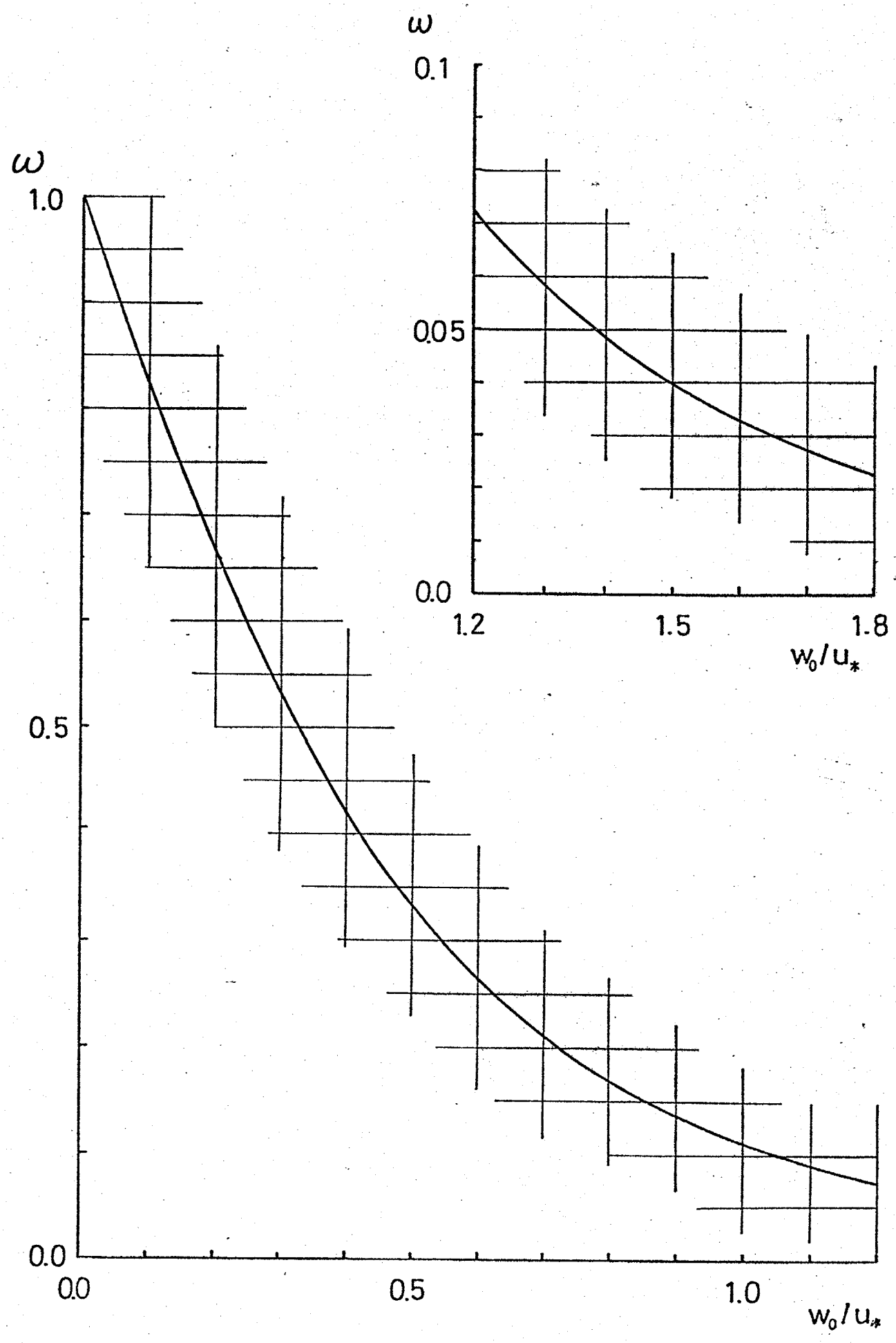

START
流量 q
勾配 I
砂粒特性
水深 d (仮定)
波長 L (6-1)式
波高 H (5-3)式
(5-13)式
$C_f=2gd^3I/q^2$
抵抗係数 C_f
図 4-37~図4-44
$C_f=C_f$?
NO
YES
流砂量 q_T (2-49)式
END

Fig. 6-1


ω
1.0
0.5
0.0
0.0
0.5
1.0
w_0/u_*
ω
0.1
0.05
0.0
1.2
1.5
1.8
w_0/u_*

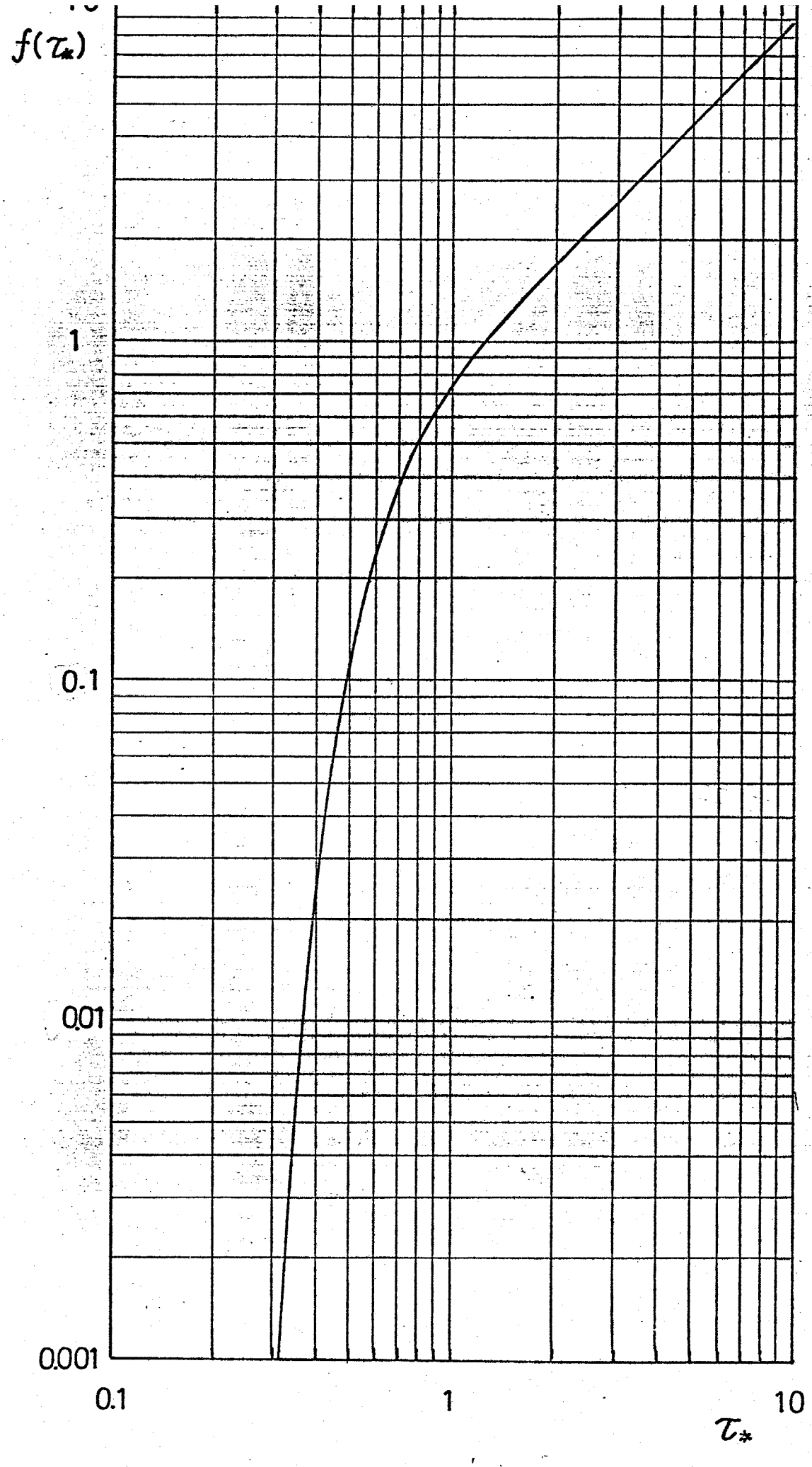


Fig. 6-3

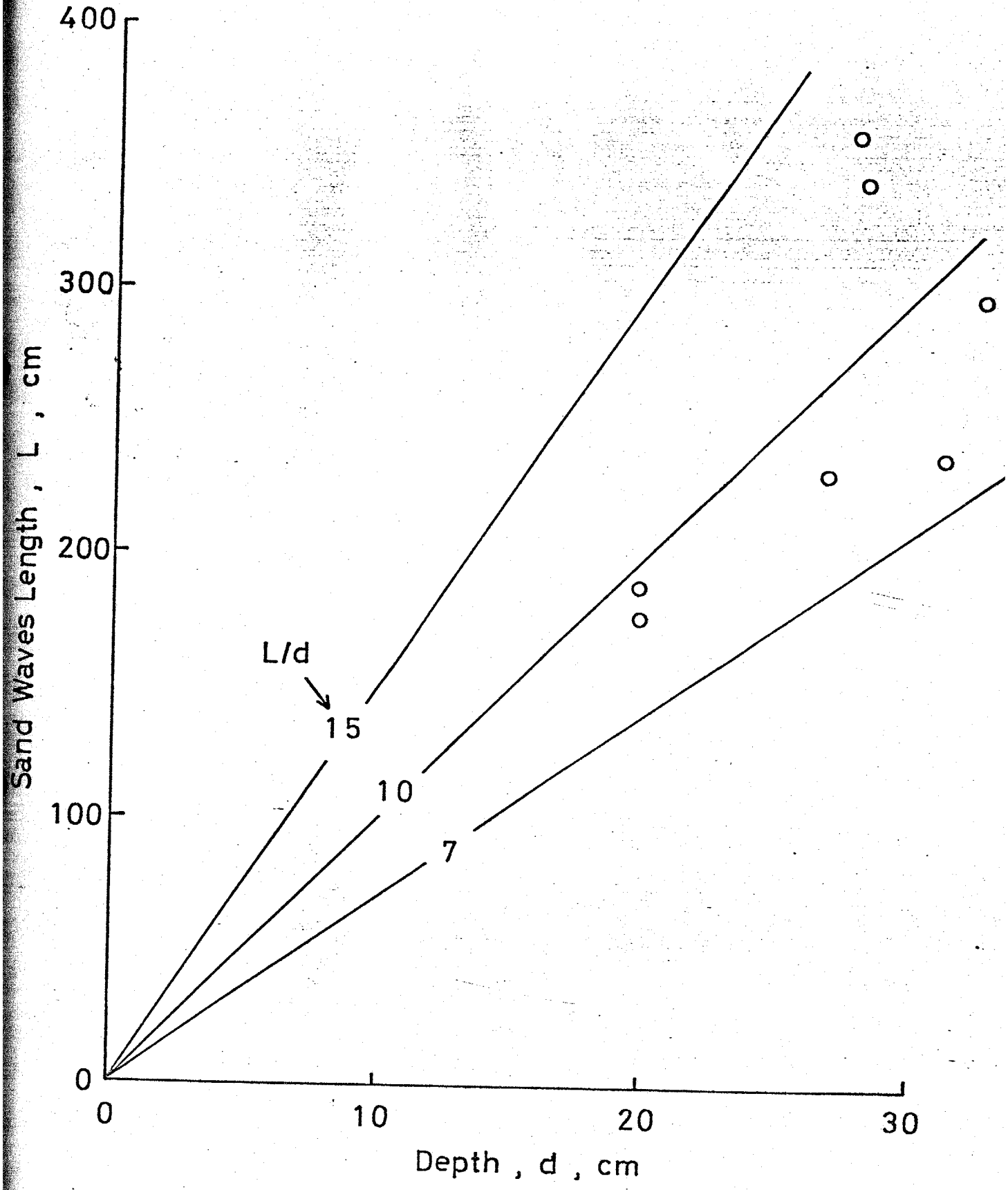

400
300
200
100
0
Sand Waves Length , L , cm
L/d
15
10
7
0
10
20
30
Depth , d , cm

Fig. 6-4

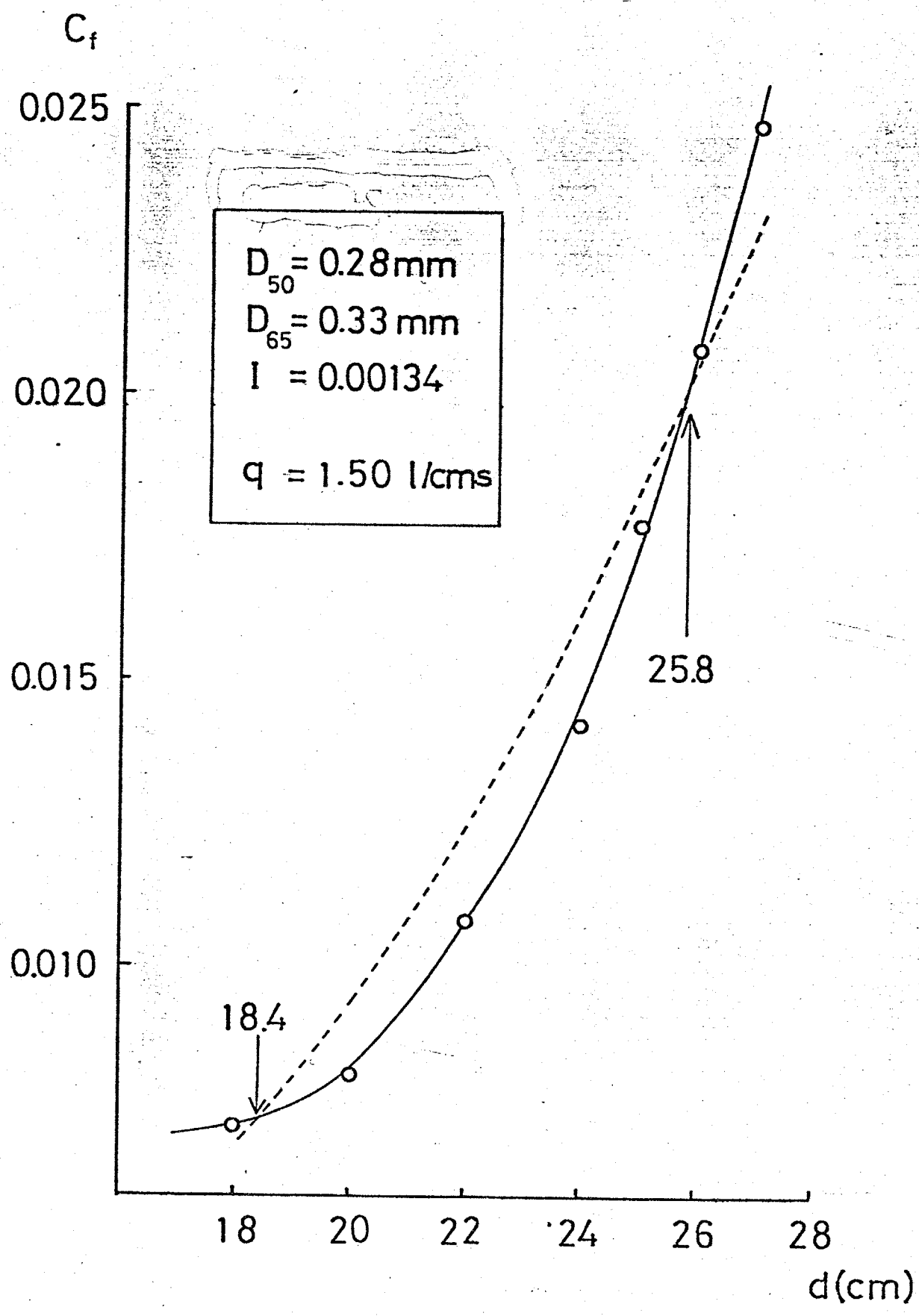

C_f
0.025
0.020
0.015
0.010
D_{50} = 0.28 mm
D_{65} = 0.33 mm
I = 0.00134
q = 1.50 l/cms
18.4
25.8
18
20
22
24
26
28
d(cm)

Fig.6-5

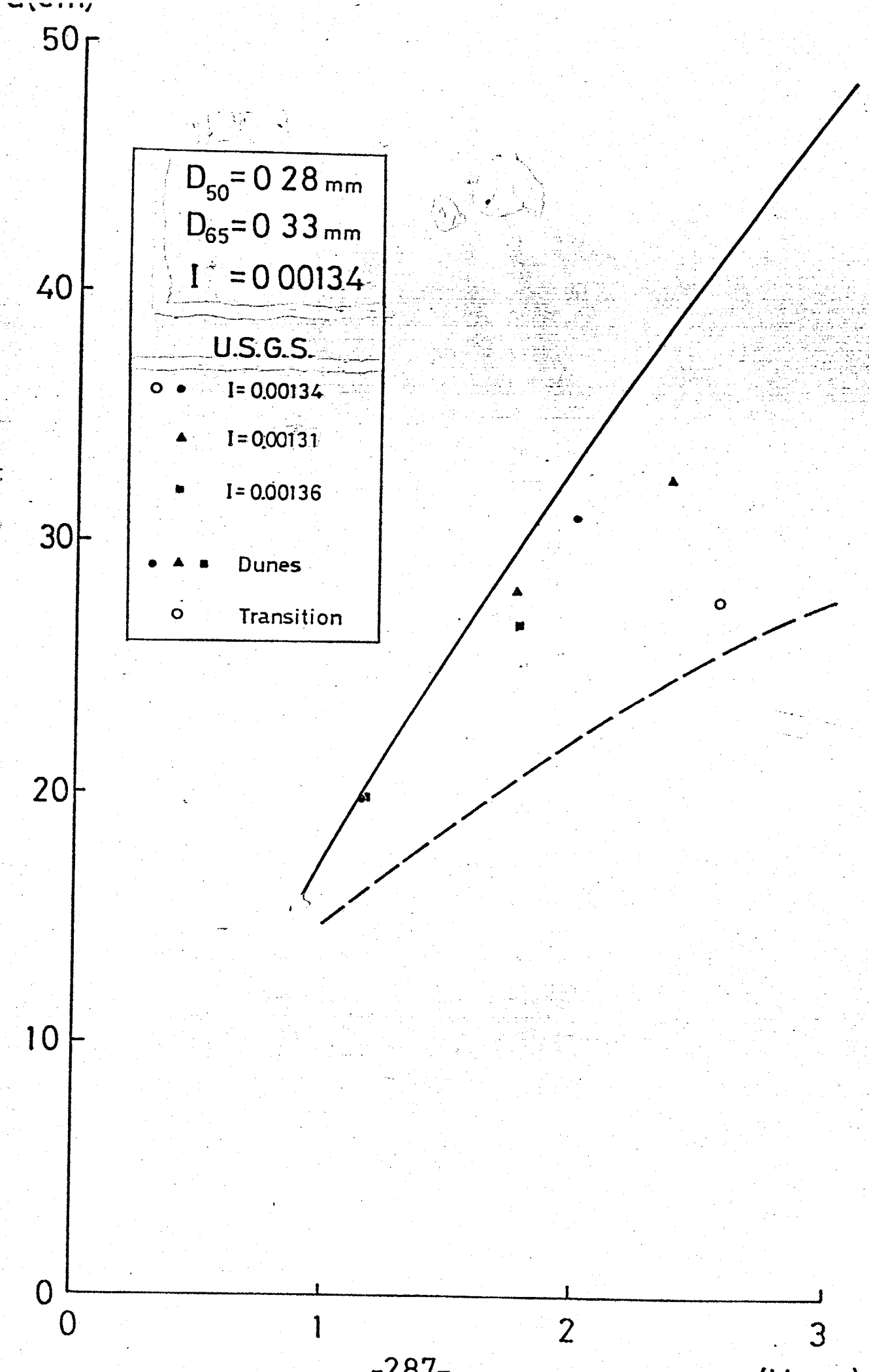

50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
D_{50}= 0 28 mm
D_{65}= 0 33 mm
I = 0 00134
U.S.G.S.
I= 0.00134
I= 0.00131
I= 0.00136
Dunes
Transition

Fig 6-6 q (l/cms)

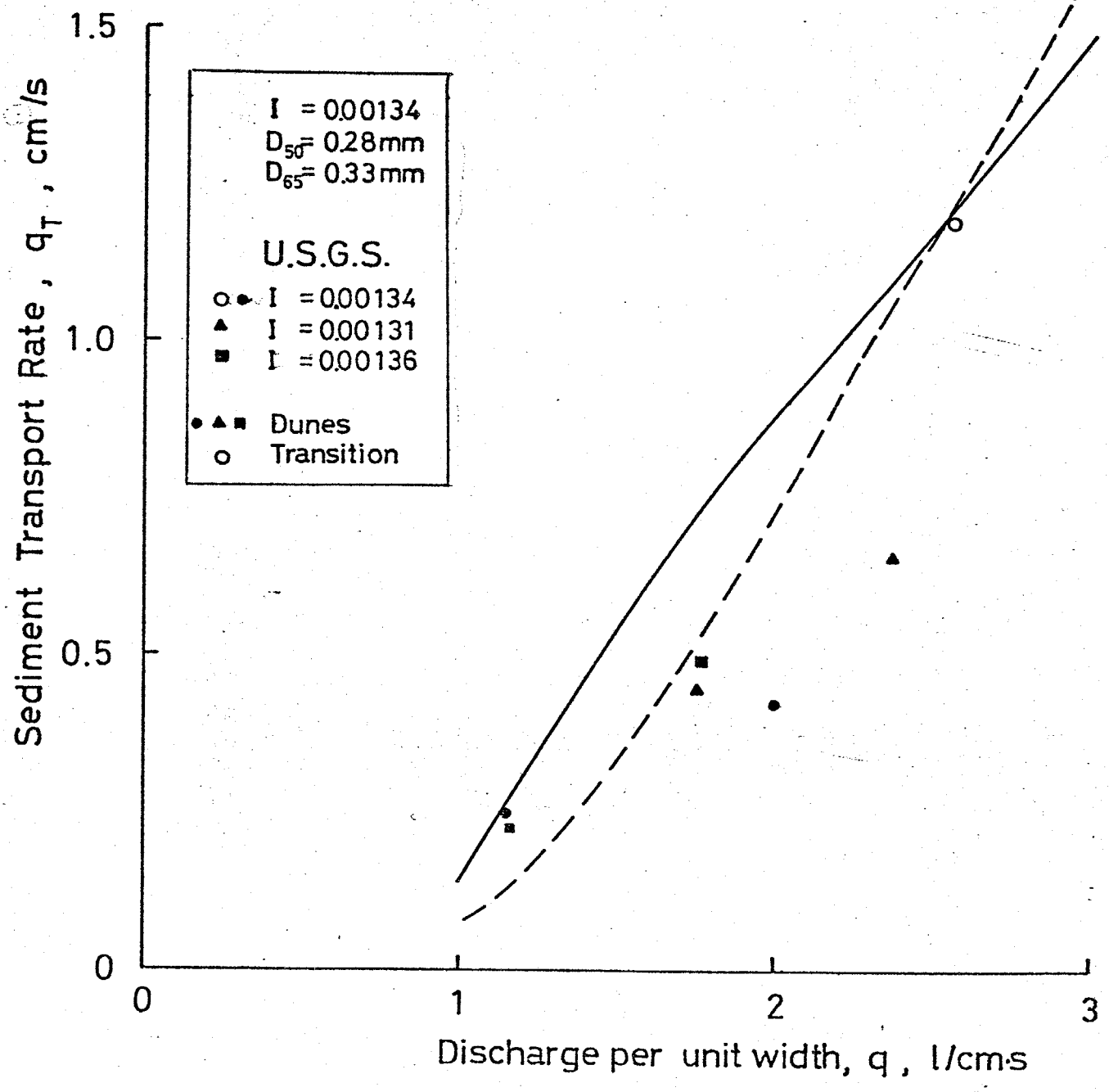

I = 0.00134
D50= 0.28mm
D65= 0.33mm
U.S.G.S.
I = 0.00134
I = 0.00131
I = 0.00136
Dunes
Transition
Sediment Transport Rate , qT , cm²/s
Discharge per unit width, q , l/cm·s
0
0.5
1.0
1.5
1
2
3

Fig 6-7

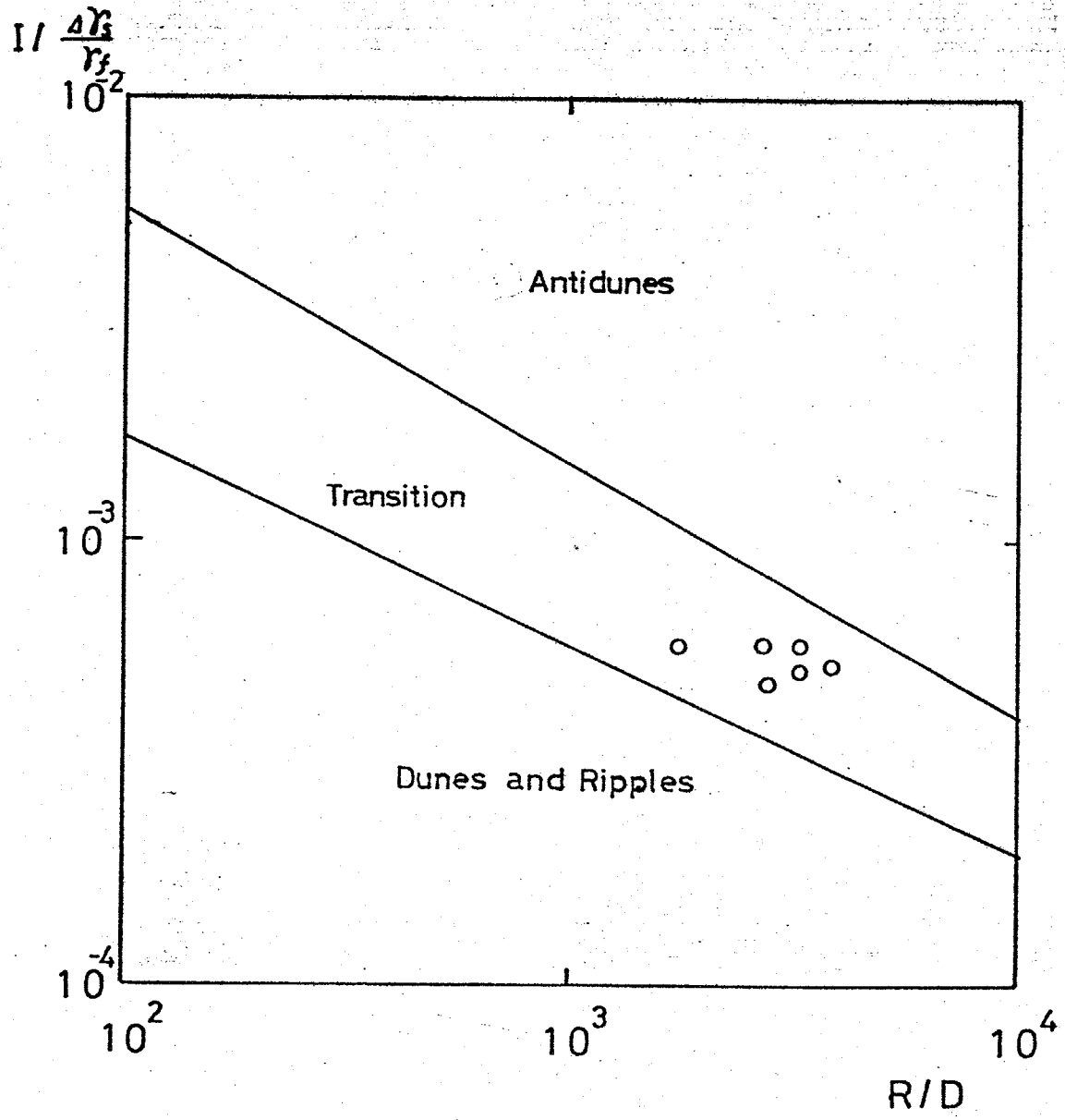

I/ Δγs/γf
10^-2
10^-3
10^-4
Antidunes
Transition
Dunes and Ripples
10^2
10^3
10^4
R/D

Fig. 6-8

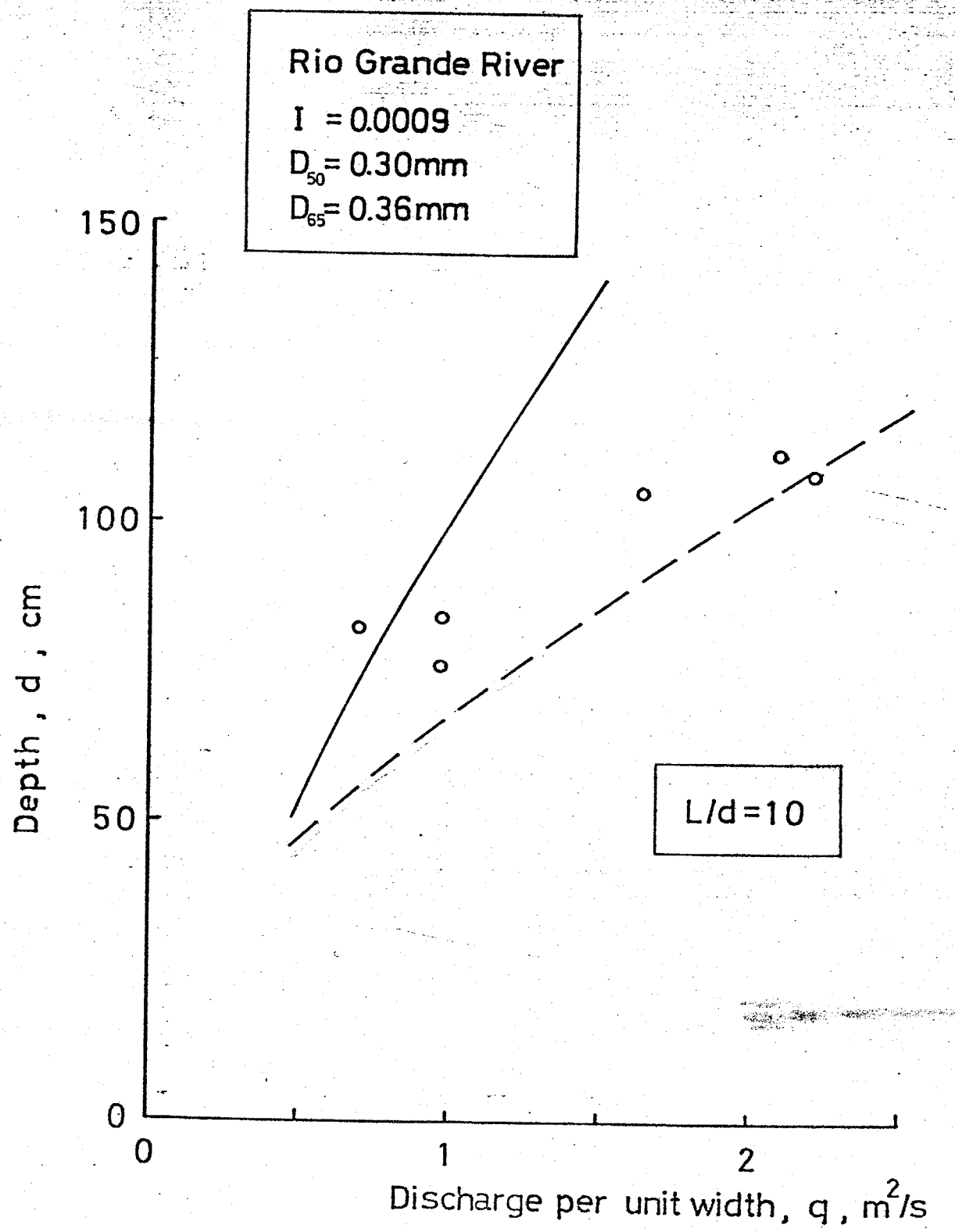

Rio Grande River
I = 0.0009
D50 = 0.30mm
D65 = 0.36mm
L/d = 10
Depth, d, cm
150
100
50
0
0
1
2
Discharge per unit width, q, m²/s

Fig. 6-9

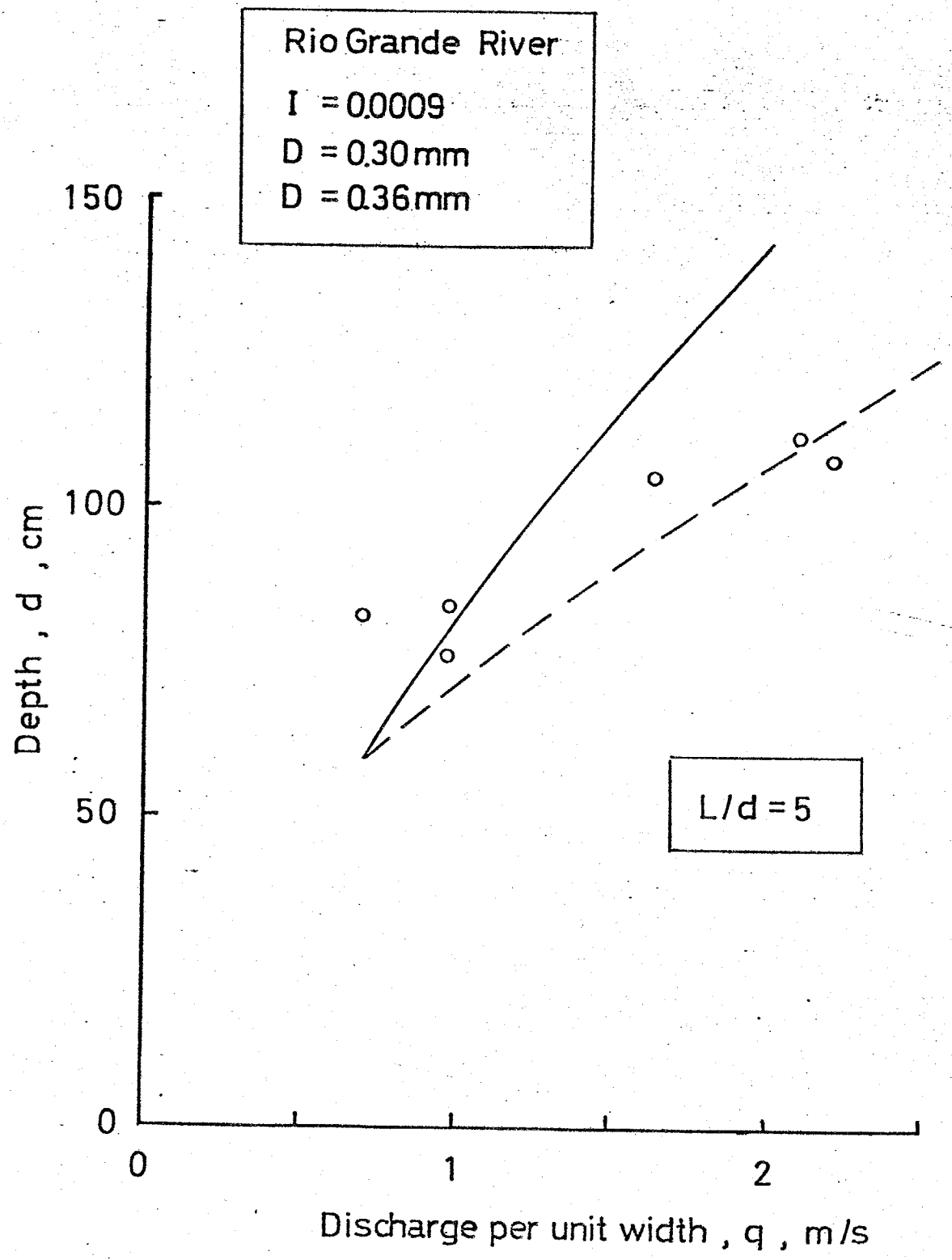

Rio Grande River
I = 0.0009
D = 0.30 mm
D = 0.36 mm
150
100
50
0
Depth , d , cm
0
1
2
Discharge per unit width , q , m/s
L/d = 5

Fig.6-10

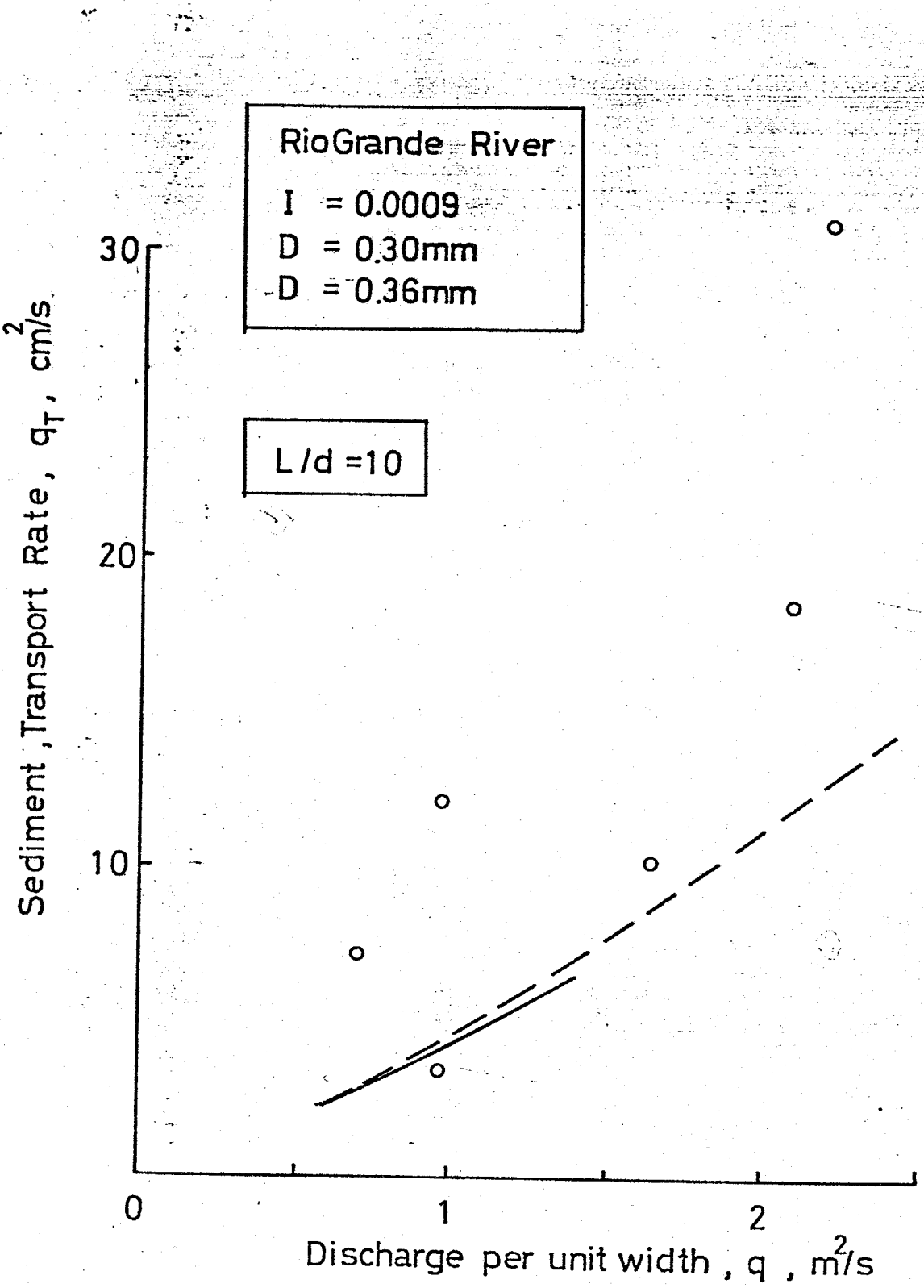

RioGrande River
I = 0.0009
D = 0.30mm
D = 0.36mm
L/d =10
Sediment, Transport Rate, q_T, cm^2/s
30
20
10
0
1
2
Discharge per unit width, q, m^2/s

Fig. 6-11

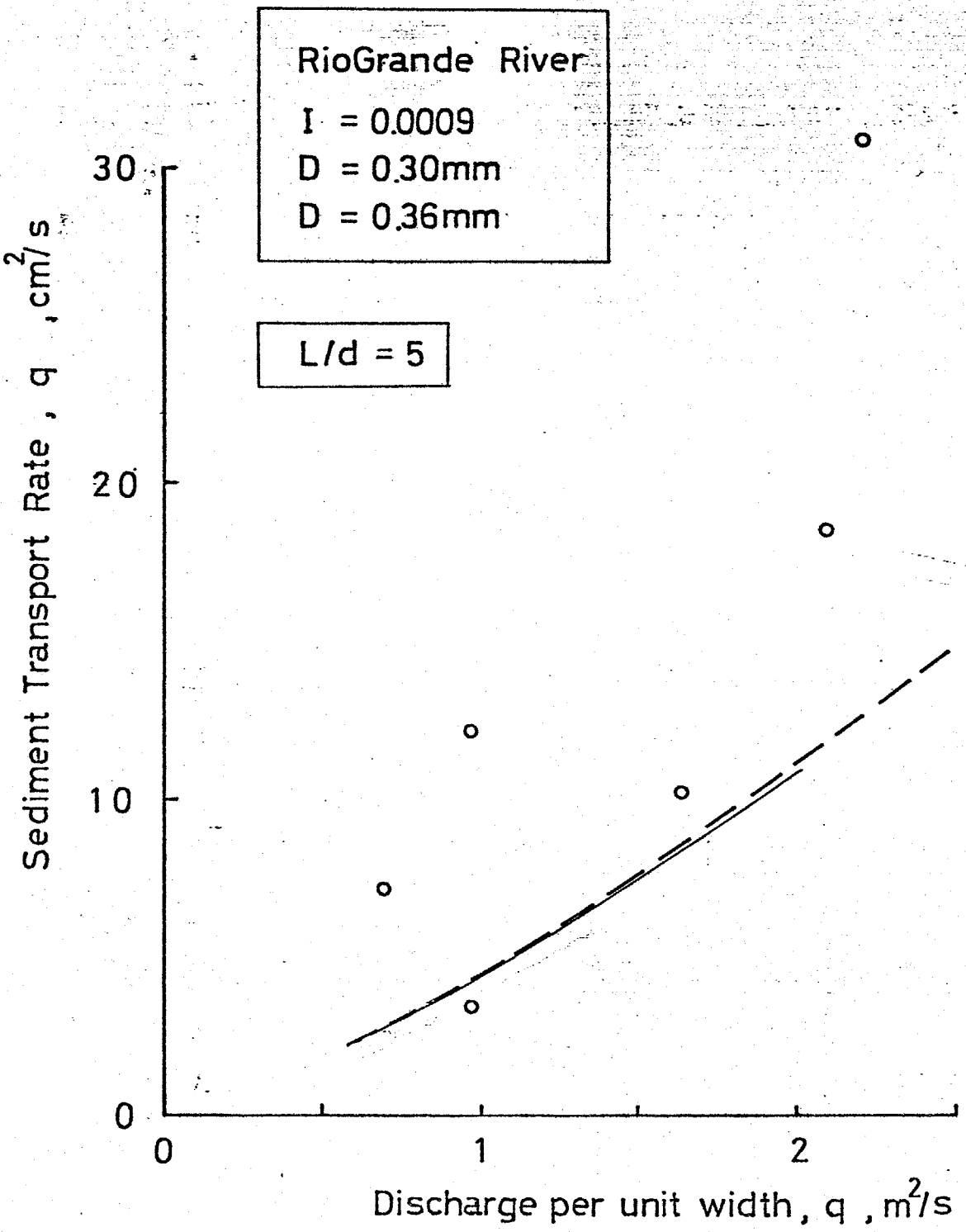

RioGrande River
I = 0.0009
D = 0.30mm
D = 0.36mm
L/d = 5
Sediment Transport Rate , q , cm²/s
30
20
10
0
0
1
2
Discharge per unit width , q , m²/s

Fig.6-12

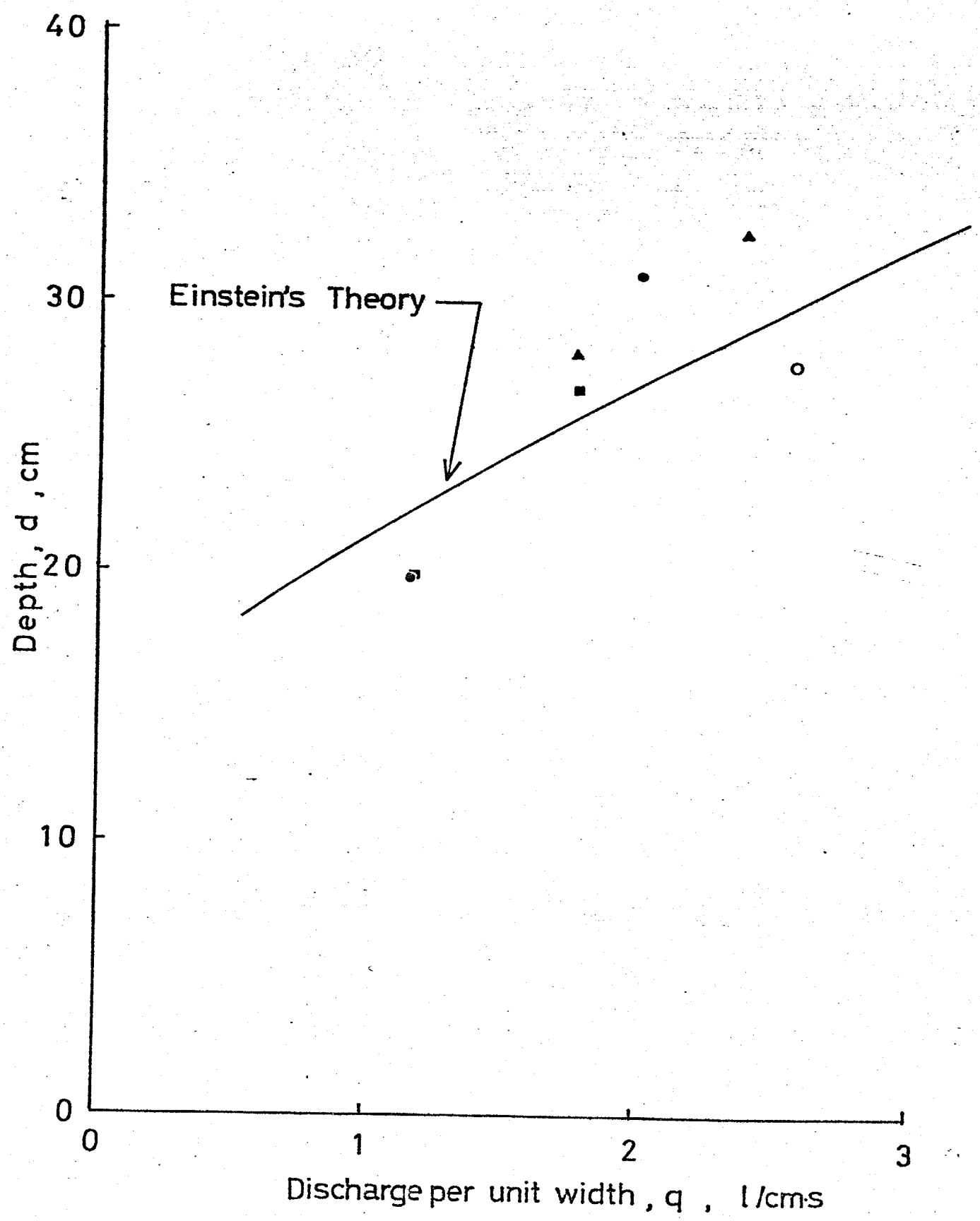

40
30
20
10
0
0
1
2
3
Einstein's Theory
Depth, d , cm
Discharge per unit width , q , l /cm·s

Fig. 6-13

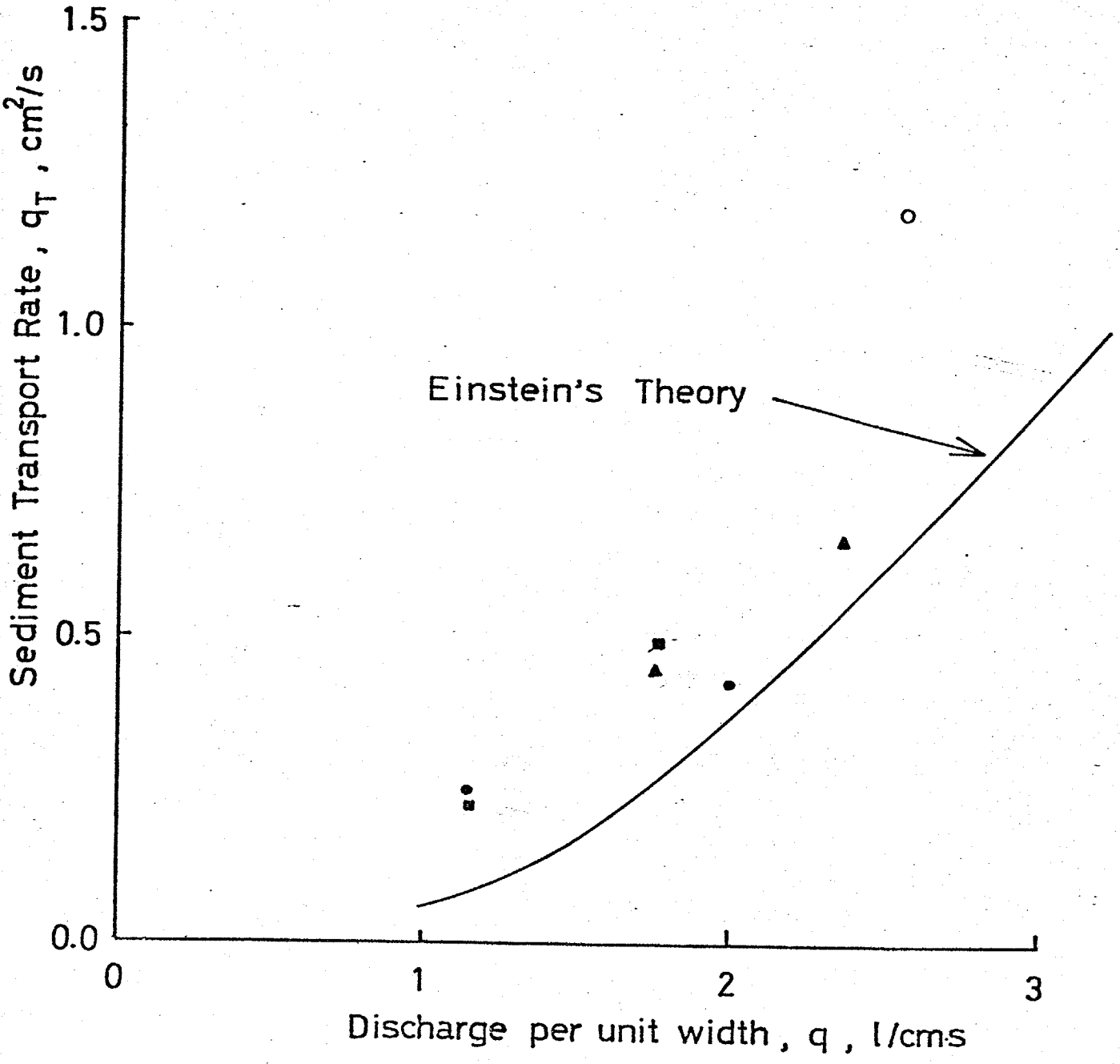

1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
Sediment Transport Rate , q_T , cm^2/s
Einstein's Theory
Discharge per unit width , q , l/cms

Fig.6-14

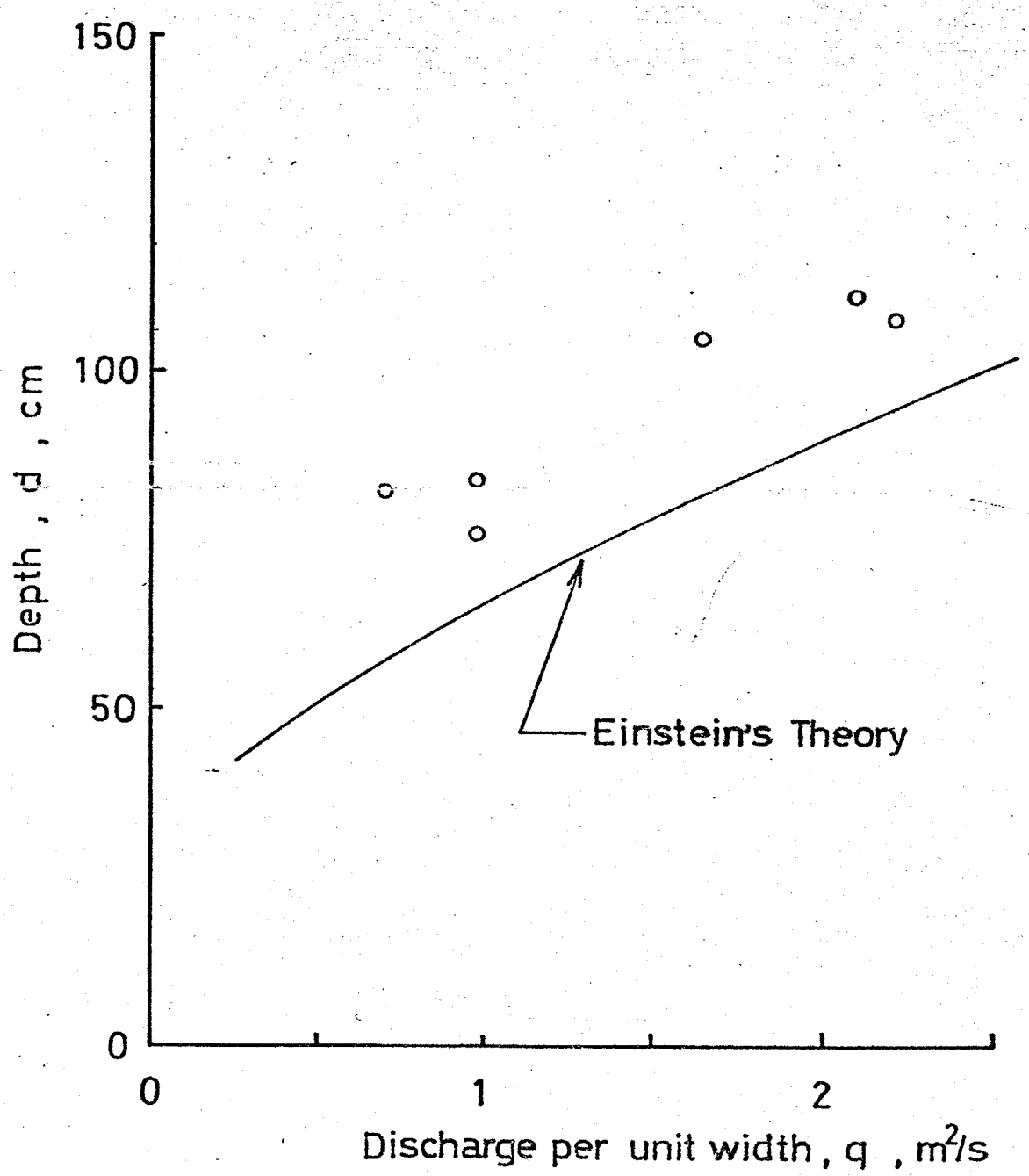

150
100
50
0
Depth , d , cm
0
1
2
Discharge per unit width , q , m²/s
Einstein's Theory

Fig. 6-15

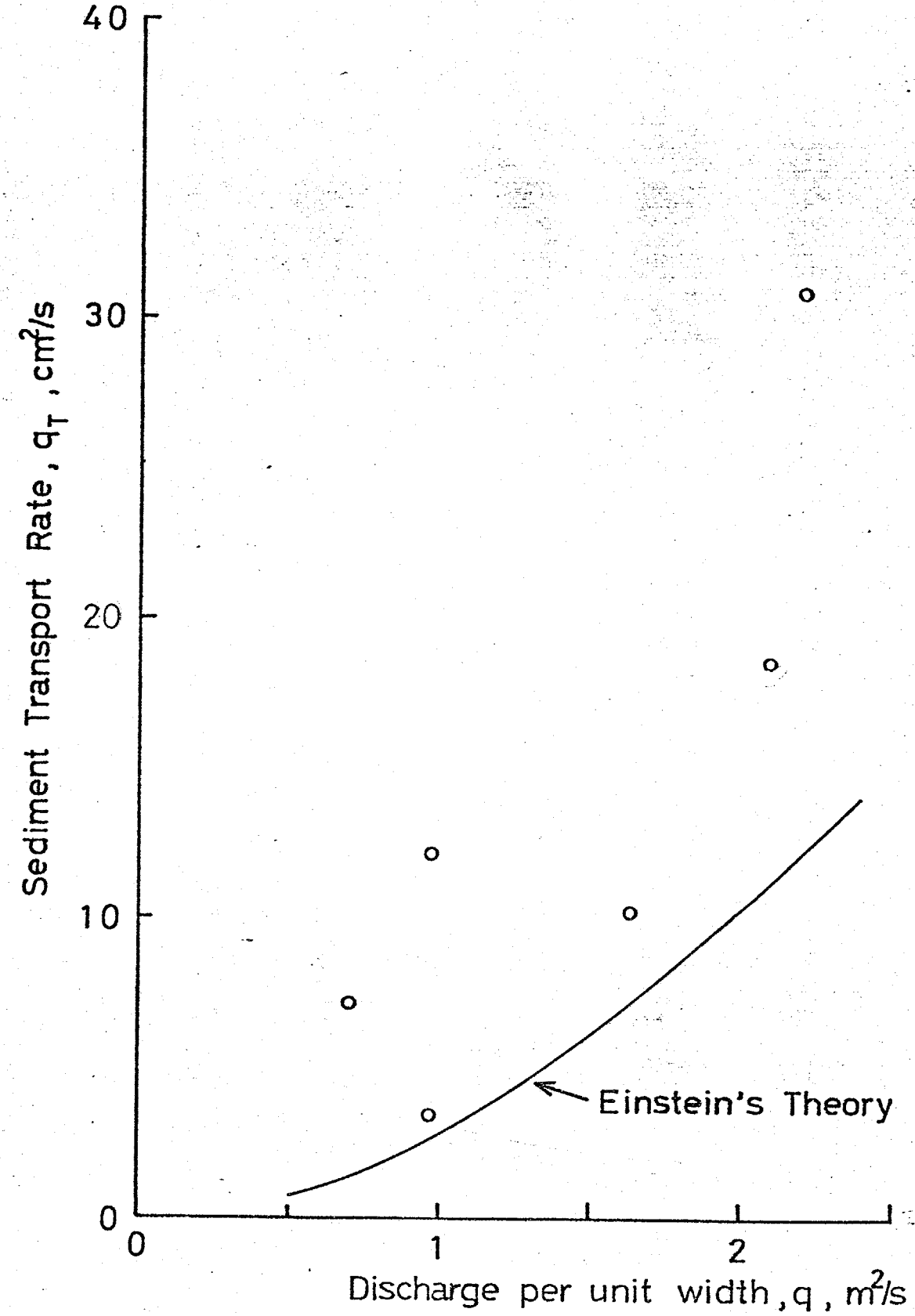

40
30
20
10
0
0
1
2
Sediment Transport Rate, q_T, cm^2/s
Discharge per unit width, q, m^2/s
Einstein's Theory

Fig. 6-16

D_{50} (mm)	D_{65} (mm)	$I \times 10^3$	q_B (l/cm s)	d (cm)	q (cm^2/s)	Bed Configuration
0.28	0.33	1.31	1.16	28.1	0.442	Dunes
"	"	"	2.37	32.6	0.654	"
"	"	1.34	1.15	19.8	0.245	"
"	"	"	2.00	31.1	0.420	"
"	"	"	2.56	27.8	1.19	Transition
"	"	1.36	1.16	19.8	0.222	"
"	"	"	1.77	26.8	0.490	"

Table 6-I

D_{50} (mm)	D_{65} (mm)	$I \times 10^3$	q (m^2/s)	d (cm)	q_B (cm^2/s)
0.23	0.28	0.96	0.966	75.9	12.1
0.39	0.47	0.96	2.20	108.	30.9
0.29	0.33	0.86	2.09	113.	18.5
0.32	0.37	0.84	1.64	105.	10.2
0.30	0.36	0.79	0.966	83.9	3.43
0.27	0.33	0.96	0.699	82.0	7.17
0.30	0.36	0.90			

最下段は計算の際の代表値

Table 6-2

REFERENCE

(1) Yalin,m.s.,"Geometrical Properties of Sand Waves," Journal of the Hydraulic Division, ASCE, vol.90, No.HY5, Sept., pp.105-119.

(2) 水理委員会移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会, "移動床流れにおける河床形態と粗度," 土木学会論文報告集, 第210号, 1973年2月, pp.65-77.

(3) Guy,H.P., Simons,D.B. and Richardson,E.V.," Summary of Alluvial Channel Data from Flume Experiments 1956-61," Geological Survey Prof. Paper, 462-1, U.S.Government Printing Office, Washington, 1966.

(4) Vanoni,V.A., and Brooks,N.H.," Laboratory Studies of the Roughness and Suspended Load of Alluvial Streams," Report No.E-68, Sedimentation Laboratory, California Institute of Technology, December, 1957.

(5) Einstein,H.A.," The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows," U.S.Dep. of Agric., Soil Consev. Service, Tech. Bull., No.1026, Sept., 1950.

第七章

結　論

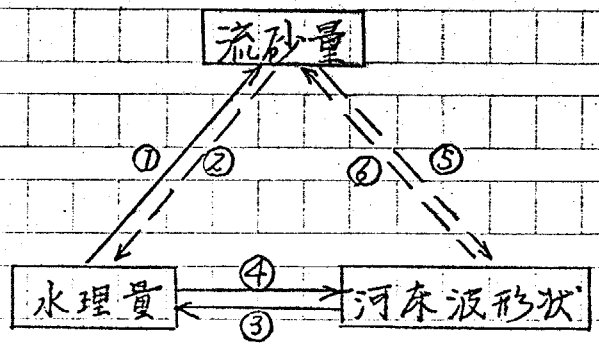
§.1　総　括　302

§.2　今後の課題　308

§.3　おわりに　311

§.1 総　括

流砂量を算定するにあたっては，流砂量，水理量，河床波形状の相互依存関係を明らかにしなければならない。（右図）本論文ではこのうち三個の関係（①，②，④）を取り扱った。問題を完全に解決するにはもちろん六個の関係をすべて定式化しなければならない。しかしここで取り扱った三個の関係は流砂量，水理量，河床波形状をそれぞれ最も強く規定すると思われるので，これらについての結果だけからでも，移動床流をほぼ間違いなく同定することができるものと思われる。



以下にそれぞれの内容と結果を要約する。

a　の　水理量 → 流砂量　の関係について

河床変動の原因となる大規模な土砂の移動は主に洪水時に起きる。この時河床砂礫は河床上を滑動・転動（掃流）するのみならず，水流の乱れに巻き上げられて（浮遊）一気に流下する。したがって現実の問題に対処するには掃流と浮遊が

同時に存在するような条件下での流砂量の算定法を確立することが重要である。従来の理論的研究では掃流砂のみの場合についてはかなり詳細に検討されているものの，浮遊砂も含めた全流砂量については不明の点が多かった。この原因は浮遊と掃流の関係について十分な考察がなされていなかった為である。

そこで第二章においては，まず砂粒子に働く外力の性質と砂粒子の運動様式との対応を定性的に説明し，それに基づく砂粒子運動のモデルから全流砂量の算定式を誘導した。この理論の最大の特長は，掃流・浮遊というふたつの運動様式をひとつのモデルで表わし，流砂運動を統一的に説明していることである。その結果はτ_*，Re_*の値について適用上の制約があるものの，従来の理論では説明できなかった見掛けの拡散係数の変化が導かれること，パラメーター（揚圧力が有効に働く面積の率）の値の違いとしてg_{B*}～τ_*間の多価性を説明できること，などの特長を有していることが明らかにされた。

第三章では水路実験データーを用いて第二章の理論結果を定量的に検討した。その結果，かなり広範囲の条件下での測定データーと良く一致することが示された。また上述の適用範囲は，見積もり誤差を2.5倍まで許容するとすれば，次式

で表わされることが示された。

$$\tau_* > 0.3 \quad , \quad Re_* > 7.5$$

河床波がある場合、従来の理論では（摩擦抵抗）＝（有効掃流力）という考え方のもとに便宜的な式を用いて大幅な補正を加える必要があった。一方本式ではそのような補正を行なわなくてもregimeによる流砂量の変化を見積もれることが示された。このことは実用上便利であるというばかりでなく、本論文では取り扱っていない 河床波形状 → 流砂量 の関係を扱う上にも重要な意味を持つものと思われる。

濃度分布についても実測データーとの比較を行なった。その結果、理論で仮定しているような条件下（乱れが鉛直方向に一様）ばかりでなく、乱れの性質が鉛直方向に変化する幅広の開水路流についても、かなり一致することが示された。このことから、本理論は全流砂量のみならず、流砂の分布状態を把握する上にも極めて有効であることが明らかとされた。

b ③ 河床波形状 → 水理量 の関係について

第四章では従来曖昧なまま用いられていた形状抵抗と摩擦抵抗の概念を明確化し、それぞれについて流体力学的に考察した。

摩擦抵抗は再付着点からの境界層の発達と密接に関係している。そこでまず境界の形が比較的単純な直角段落ち流について再付着点からの境界層の発達を解析し摩擦抵抗の算定法を導いた。この結果を実験的に検討したところ，理論値と測定値は非常に良く一致し，摩擦抵抗の算定法として極めて妥当なものであることが明らかにされた。次に河床波上流面での縮流効果を考慮して補正を加え，摩擦抵抗係数算定の為のグラフを与えた。この結果を風洞実験データーと比較したところ良い一致を見た。従来の摩擦抵抗算定式は理論的背景に乏しく便宜的なものであったが，本算定法は流体力学的考察に基づいて導かれている。したがって平均摩擦抵抗のみならず分布形をも論じることができ，例えば河床波の発生，変形，消滅などの議論にも応用できるものと思われる。

形状抵抗に関する従来の理論では，流線のまがりによる局所的な圧力変化が考慮されていない。この効果を取り入れる目的で、まず半無限流体中の楕円形突起の圧力分布を求め，河床波の波形勾配が抗力係数に及ぼす影響を調べた。この式の妥当性は Hoerner と Bearman の実験結果と比較することによりチェックされた。次にこの式に，Kirshmer の実験結果を参考にして河床波上流面の縮流がもたらす効果を取り入れた。このようにして得られた抗力係数算定式を風洞実験により検

討したところ，ほぼ妥当な値を与えることが明らかとされた。

以上の取り扱いにより，河床波の形状が流れに及ぼす抵抗の特性を理論的に明らかにすることができた。そこで次に上述の結果に基づいて，河床波の波長と波高が与えられた場合の平均流速算定式を誘導した。水路実験データー及び河川での実測データーを用いて検討したところ，従来の理論に較べてかなり精度良く見積もれることが明らかになった。

C ④ 水理量 ⟶ 河床波形状

第五章では河床波形状特性量のうち波高について考察した。十分に発達した河床波の頂部には，それ以上の発達を抑制する力が働いていると考えられる。砂粒子の移動を支配する第一の因子が底面摩擦力であることから，〝河床波頂部でのこの値が砂堆領域と平坦河床領域の境界を与える関係式を満足する〟という仮説のもとに解析を行なった。この結果を水路実験データーと比較したところ，河床波の波高と水理量の関係を或る程度説明し得ることがわかった。

d. 総合理論 —— 水理量及び流砂量の予測

第六章では第五章までに得られた結果を用いて，水理量及び流砂量の予測法を呈示した。河床波の波高については本研

究では取り扱っていないので，砂堆について従来経験的に言われている関係を用いた。

この方法で具体的に計算を行なったところ，ひとつの流量についてふたつの状態が存在可能であるという結果を得た。ひとつは抵抗の中で形状抵抗の占める割合が大きい場合，いまひとつは摩擦抵抗の占める割合が大きい場合である。領域区分で言うと，前者は砂堆領域に，後者は遷移領域に対応すると考えられ，従来の実験事実を良く説明している。また，水路実験データーと実河川での測定データーを用いて検討したところ，定量的にも極めて妥当な結果を与えることが確認された。流砂量予測の精度は水理量のそれに較べて多少落ちるが，従来の代表的な理論であるEinsteinの理論よりも精度良く見積もられることが示された。

§2 今後の課題

a. の [水理量] → [流砂量] の関係について

本理論では，取り扱いの便宜上，鉛直方向に乱れが一様という条件のもとで議論が進められたが，それでも現実の状態を良く近似し得ることが明らかとなった．これに乱れの非一様性の効果を取り入れることができれば，さらに精度を向上させられるものと思われる．

本理論は平坦河床の場合について立てられたものであるが，本論文ではその結果を他の河床形態の場合にもそのまま用いた．この為河床波が存在する場合には平坦河床におけるよりも計算結果の精度が悪い．さらに精度を向上させるには，河床波上の流れの中における粒子運動の性質の変化を考慮する必要があろう．(③の関係)

掃流力が小さい場合（$u_*/w_0 < 0.3$）では $\tau_*/\cos\theta$（揚圧力が有効に働く面積の率）の値が結果に及ぼす影響が大きいと考えられる．洪水時の大規模な河床変動を扱う場合には，掃流力が十分大きいので実用上は特に問題になるとは思われないが，しかし全領域にわたる普遍的な関数表示を得るには，この点に関する基礎的な研究が必要であろう．

b. ③ 河床波形状 → 水理量 の関係について

形状抵抗を求める際にはひとつの突起の抗力を求めているのに対し，実際には連なっているのでSheltering効果が働くものと思われる．この為，理論値は実験値より若干大き目の値をとっている．この点についてはさらに改良の余地があると考える．

理論では二次元的な河床波を扱っているので，三次元性の強い河床波については誤差を生じる恐れがある．平均流速式の検討に用いた図におけるデーターのバラツキは，主にこのことが原因と考えられる．三次元的な河床波上の流れを解析するのは極めて困難なことである．しかし二次元的な河床波に関する理論結果でもかなり妥当な結果を与えることから考えて，これを拡張・補正することにより三次元的な河床波の場合も表わし得るものと思われる．

c ④ 水理量 → 河床波形状

仮説に基づいた理論で河床波の波高と水理量の関係を或る程度説明し得た．しかし値自体の対応は必ずしも十分とは言えず，仮説の検証，より精度の高い底面摩擦力の算定法などが今後の課題として残されている．

また河床波の波長に関しては本論文では十分な考察を行な

っていない。波長は波高と共に抵抗に大きな影響を及ぼすので今後検討してゆくことが必要である。従来，砂漣については波長と粒径の間に相関があり，砂堆については波長と水深の間に相関があることが実験事実として報告されている。本論文では砂漣，砂堆を特に区別せずに取り扱っているが，さらに議論を進めるには河床波の種類毎の取り扱いが必要になるかも知れないと考える。

d 総合理論——水理量及び流砂量の予測

本論文では必要とされる六個の関係のうち三個しか取り扱っていない。残りの三個の関係は結果に対する影響力が小さいと考えられるが，システムを完全にするには定式化してゆかなければならないことは明らかである。流砂量算定の誤差は主に⑥の関係（河床波形状が流砂量に及ぼす影響）を考慮していない為であると考えられ，次のステップとして特にこの効果を取り込んでゆくことが必要である。

§3 おわりに

移動床水理学には未だ経験則や便宜的な算定式に頼らざるを得ない部分が多々有る。また体系自体がそれらを主体として構成されている。本論文では，現在までに得られている流体力学的知見を活用し今まで不明確であった諸点をできるだけ現象に合った取り扱いをすることを目的とした。と同時に数理解析的な取り扱いのみからなる理論体系の構成を念頭に置きながら各部分を取り扱った。

本論文に記した新らしい視点からの取り扱いが，移動床水理学の進歩に寄与するものと確信する。

謝辞

本研究を行なうにあたり，終始高い視点から懇切に御指導下さった東京工業大学土木工学科教授吉川秀夫先生に深く感謝の意を表する。

また多くの適切な助言をいただいた東京工業大学教授日野幹雄先生，同助教授福岡捷二先生，筑波大学教授椎貝博美先生，東京工業大学助手沢本正樹先生に謝意を表する次第である。

東京工業大学土木工学科水工研究室の諸氏からは直接・間接の助力をいただいた。特に本論文に収録された実験データーの多くは，同研究室に卒論生として在籍した内田多久實氏（現北海道大学医学部），四方弘章氏（現清水建設），実川和氏（現三井建設），及び現在修士課程1年在籍中の菊地健治氏，学部4年在籍中の大島明氏の助力のもとに得られた。ここに記して謝意を表する。

東工大，水工学研究室