

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	非白色性励振を受ける非線形系の非定常不規則振動に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	木村康治
Author(English)	KOJI KIMURA
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲1265号, 授与年月日:1981年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲1265号, Conferred date:1981/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



昭和55年度 博士論文

非白色性励振をうける非線形系の
非定常不規則振動に関する研究

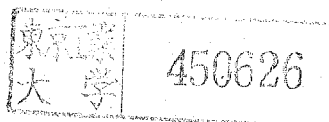
指導教官

坂田 勝 教授

機械物理工学専攻

大博 8050

木村 康治



目 次

I 章 緒論	1
I-1 緒言	1
I-2 従来の研究	1
I-3 本論文の目的と構成	5
II 章 線形系の応答解析	7
II-1 緒言	7
II-2 解析	7
II-3 1自由度系	10
II-4 2自由度系	16
II-5 結言	22
III 章 非線形1自由度系の応答解析	31
III-1 緒言	31
III-2 解析	31
III-3 具体的な系への応用	37
III-4 シミュレーション	41
III-5 計算結果と考察	43
III-6 結言	45
IV 章 非対称非線形ばね特性を有する1自由度系の応答解析	55
IV-1 緒言	55
IV-2 カ学系のモデルとその非対称非線形ばね特性	55

IV-3	解析	57
IV-4	計算結果と考察	66
IV-5	結言	69
V章	非対称非線形ばね特性を有する多自由度系の応答解析	82
V-1	緒言	82
V-2	解析	82
V-3	2自由度系	89
V-4	結言	93
VI章	連続体への応用 — 液面の不規則揺動 —	99
VI-1	緒言	99
VI-2	非線形液面揺動の基礎方程式	100
VI-3	液面揺動の不規則応答解析	104
VI-4	計算結果と考察	110
VI-5	結言	112
VII章	結論	116
	参考文献	
	付録	

記号

[II, III, IV, V 章]

a_{1e} : 等価すね係数ベクトル

$A^{(i)} = A^{(i)}(t_i, t) = E[Y_1(t_i) f^T(t)]$

$B^{(i)} = B^{(i)}(t_i, t) = E[Y_2(t_i) f^T(t)]$

C : 減衰係数行列

$D(t)$: 確定包絡関数行列

$f(t)$: 不規則外力ベクトル

$f_e(t)$: 等価外力ベクトル

$g(x)$: 非対称非線形関数ベクトル

$H(t)$: 衝撃応答関数行列

$H^{(i)}(t)$: $[t_{i-1}, t_i)$ における衝撃応答関数行列

I : 単位行列

K : 剛性係数行列

K_e : 等価線形剛性係数行列

$K_e^{(i)}$: $[t_{i-1}, t_i)$ における K_e の値

$n(t)$: 平均値 0 のガウス性定常非白色性雑音ベクトル

$P^{(i)}(t), Q^{(i)}(t), R^{(i)}(t), S^{(i)}(t)$:

$[t_{i-1}, t_i)$ における自由振動の解を表わす関数行列

$R(\omega)$: $n(t)$ の共分散行列

$[\cdot]^T$: \cdot の転置演算

- $U(x, \dot{x})$: 線形関数ベクトル
 W : 誤差ベクトル
 x, y_1, y_2, z : 状態変数ベクトル
 a, b : 指数包絡関数の減衰定数
 a_e : 等価すべり係数
 a_{ei} : $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ における等価すべり係数の値
 $A = \alpha/\xi$
 $A_i = A_i(\tau_i, \tau) = E[y_1(\tau_i) f(\tau)]$
 $B = \rho/\sqrt{1-\xi^2}$
 $B_i = B_i(\tau_i, \tau) = E[y_2(\tau_i) f(\tau)]$
 $e(\tau)$: 確定包絡関数
 $E[\cdot]$: \cdot の期待値演算
 $f(\tau)$: 不規則外力
 $f_e(\tau)$: 等価外力
 $g(x, \dot{x})$: 非線形関数
 $h(\tau)$: 衝撃応答関数
 $h_i(\tau)$: $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ における衝撃応答関数
 k_e : 等価線形剛性係数
 k_{ei} : $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ における等価線形剛性係数の値
 m, m_1, m_2 : 質量
 $n(\tau)$: 平均値 0 のガウス性定常非白色性雑音

$P_i(\tau), \varphi_i(\tau), r_i(\tau), S_i(\tau) :$

$[\tau_{i-1}, \tau_i)$ における自由振動の解を表わす関数

$P(y_1, y_2) :$ 定常確率密度関数

$R_0 :$ $n(\tau)$ の自乗平均値

$R(\nu) :$ $n(\tau)$ の自己相関関数

$S(\omega) :$ $n(\tau)$ のパワースペクトル

$U(\tau) :$ 単位ステップ関数

$W_\tau :$ ウィーナー過程

$W = \omega_1/\omega_2$

$\chi, \chi_1, \chi_2 :$ 絶対変位

$X_1, X_2 :$ 相対変位

$y_1, y_2, y_3, y_4 :$ 状態変数

$t_0, t_1, t_2, \dots :$ 時刻列

$\alpha :$ 相関関数 $R(\nu)$ の指数減衰定数

$\delta :$ 乾性摩擦力を表わすパラメータ

$\varepsilon :$ 3次非線形パラメータ

$\zeta, \zeta_1, \zeta_2 :$ 減衰比

$\zeta_e :$ 等価線形減衰係数

$\zeta_{ei} :$ $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ における等価減衰係数の値

$\eta :$ 2次非線形パラメータ

$\kappa_3 :$ 歪度

K_4 : 尖度

$$\mu = m_2/m_1$$

ρ : 不規則外力の卓越振動数

τ : 無次元化時間

$\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$: 時刻列

$\omega_0, \omega_1, \omega_2$: 不減衰固有振動数

$$\omega_{ei} = \sqrt{k_{ei} - \zeta_{ei}^2}$$

(以上 II, III, IV, V 章)

[VI 章]

$\bar{x} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)$: 円筒タンクに固定された移動座標

U_0 : 円筒タンク移動速度

a_0 : 円筒タンクの半径

$A_{mn}(t), B_{mn}(t)$: 速度ポテンシャル ϕ の一般化座標

$C_{mn}(t), D_{mn}(t)$: 液位 η の一般化座標

h : 液体の深さ

\mathcal{L} : ラグランジアン平面密度

m : 周方向波数

n : 半径方向モード次数

$p(\bar{x}, t)$: 圧力

$P_{11} \sim P_{16}, P_{01}, P_{02}, P_{21}, P_{22}$:

液体の深さ h に依存するパラメータ

$$S_1 = 2/(\lambda_{11}^2 - 1)J_1(\lambda_{11})$$

η : 液位

λ_{mn} : $\frac{d}{dr} J_m(\lambda r) \Big|_{r=a_0} = 0$ の n 番目の正根

μ : 液位の平均値

σ : 液位の標準偏差

ϕ : 相對運動の速度ポテンシャル

ϕ_c : 円筒タンク移動の速度ポテンシャル

Ψ_{mn} : $\lambda_{mn} \tau a^k (\lambda_{mn} h)$

ω_{mn} : (m, n) 次モードの固有振動数

特に断らない記号は前章までと同様である。

(以上 VI 章)

I章 緒論

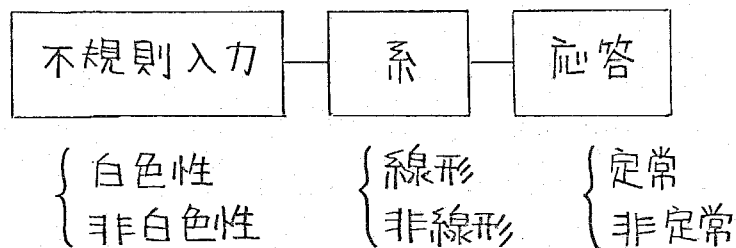
I-1 緒言

不規則振動論は、航空宇宙工学におけるジェットエンジンやロケットエンジンの雑音解析を契機として発展し、多方面にわたって精力的な研究がなされてきた。不規則振動論の目的は、系に作用する外力が時間と共に不規則に変動するとき、これを確率過程としてとらえ系の動的挙動を明らかにすることにある。上記以外で不規則振動に関する実際的問題としては、地震動に対する液体貯槽や建物の応答、突風・風負荷に対する架線や構造物の振動、乱気流中の飛行機や航海中の船舶、不規則路面上の車両の運動などが挙げられる。現在までに、不規則応答解析のための種々の手法が提案されているが、入力あるいは対象とする系の性質によっては未だ解析の困難な問題も多い。本章では、不規則応答解析の諸手法に関して従来の研究を概括し、問題点を指摘して、本論文の目的を明らかにする。

I-2 従来の研究

不規則入力がデルタ相関を有する白色性励振の場合には、集中系の運動方程式が確率微分方程式^(1,2)として定式化されるので、マルコフ過程^(1,2)としての数学的取り扱いが可能である。しかし、デルタ相関以外の任意の相関関数を有する非白色性励振の場合

には、一般にそのような取り扱いをすることができない。したがって、応答解析手法に着目するときは、不規則入力を白色性励振と非白色性励振とに分けて考えることができる。応答特性については、定常応答解析と非定常応答解析が考えられる。特に地震や突風、乱気流などの突变的入力の場合には、非定常応答を求めることが重要である。さらに、対象とする系が線形であるか非線形であるかを考慮すると、不規則振動論の問題は次のように分類される。



(i) 線形系の応答解析

線形系の応答解析では、任意の相関関数を有する一般の不規則励振に対して、衝撃応答関数手法とスペクトル密度手法⁽³⁾が確立されており、種々の応答計算例が報告されている⁽⁴⁻⁸⁾。1自由度系の非定常応答については、確定包絡関数とガウス性定常雑音との積で表わされる振幅変調不規則入力に対する応答計算法が示されており、指数減衰調和相関関数を有する非白色性雑音と、単位ステップ及び方形波パルス包絡関数の場合に、厳密解が得られている⁽⁵⁾。また、半波正弦パルス包絡関数の場合も解析され

(6) ている。これらの結果は、級数展開法あるいはモード重ね合わせ法を用いることにより、連続体の応答解析にも応用されて^(9,10)いる。しかしながら、両手法とも、複雑な二重積分の計算をしなければならぬ。多自由度系の場合には、上記の二重積分の計算が⁽¹¹⁾、そう複雑になり、非定常応答の厳密解を得ることが困難になる。非定常不規則励振をうける多自由度系の共分散応答を計算する近似手法が提案されて⁽¹¹⁾いる。また、多自由度系の定常応答については、非白色性励振に対して簡単な手法が報告されて⁽¹²⁾いる。

白色性励振については、非線形系に対して提案されて⁽¹³⁾いる応答解析手法はそのまま線形系に対しても有効である。最近では、一般化された累積率に関する微分方程式を利用する手法も提案されて⁽¹⁴⁾いる。そのほか、不規則パルスや非定常ショットノイズを入力とする場合の応答解析も行なわれて^(15,16)いる。

(ii) 非線形系の応答解析

白色性励振に対する非線形系の応答解析では、応答がマルコフ過程となることを利用する解析手法が有効であり、従来広範囲にわたって多くの問題が解明されてきた。

定常問題では最初、ばね非線形系の問題にフッカー・プランク方程式が⁽¹⁷⁾応用された。ばね特性と減衰特性の両方に非線形性が含まれる場合のフッカー・プランク方程式の近似解が、エル

ミート多項式による級数展開とガラーキン法を用いて求められている⁽¹⁸⁾。また、非線形1自由度系に対して、変位と速度に関する2次元のフォッカー・プランク方程式が、応答のエネルギー包絡関数についての1次元の同方程式に変換されている⁽¹⁹⁾。

非定常問題では、ランダムウォークのモデルを用いて、非定常応答確率が求められている⁽²⁰⁾。また、確率平均法を用いることにより、応答振幅に対するフォッカー・プランク方程式が導出されている⁽²²⁾。さらに、非定常自乗平均応答を求めるために有効なモーメント方程式が、フォッカー・プランク方程式を通じて導かれている⁽²³⁾。モーメント方程式はまた、確率微分方程式からも直接求めることができる^(24, 25)。一般に無限系となる非線形系のモーメント方程式を、近似的な有限系に置き換えるために、モーメント打ち切り法が適用されている⁽²⁶⁾。⁽²⁷⁻²⁹⁾

卓越振動数を有するような一般の非白色性励振をうける非線形系の応答解析では、摂動法と等価線形化法が確立された手法になっている⁽³⁰⁾。しかしながら、摂動法には、対象とする系の非線形性が小さい時のみ適用可能であるという制限がある。また、等価線形化法は、主に定常応答解析に適用されており、非定常応答の問題に应用することには困難が伴う^(32, 33)。非白色性励振をうける非線形系の非定常応答に関する一般的な解析手法は、未だ確立されていないようである。ただし、定常問題について

は最近、等価線形化法よりも一般的な手法としてガウスクロー
 ジャー手法が提案されている。⁽³⁴⁾

(iii) 振動系の特徴について

非線形系に関する従来の研究では、デュフィニング系や乾性摩擦
 力を含む系などで代表される対称非線形特性を有する系を取
 り扱う場合が大部分であった。実際、多くの工学的問題に対し
 て、対称非線形特性を有する系としてのモデル化が有効である。
 しかし、がたのある振動系や風圧をうける架線系などの問題で
 は、非対称非線形特性を有する系の応答解析が必要である。古
 くは、McLachlan⁽³⁵⁾によって、二次非線形項をもつ常微分方程式の
 周期解の性質が調べられている。最近になって、調和入力に対
 する非対称非線形系の応答解析が行なわれはじめた。⁽³⁶⁾しかし、
 一般の不規則励振に対する応答は、未だ十分に研究されておら
 ず、特に非白色性励振に対する応答解析は少なく、白色性励振
 に対して最近、等価線形化法を応用した応答計算例が報告され
 ている程度である。⁽³⁷⁾なお、非線形推定理論では、一般的な非線
 形系と白色性励振に対して、統計的線形化法と同様の解析手法
 (CADET)⁽³⁸⁾が提案されている。

I-3 本論文の目的と構成

本論文は、振幅変調非白色性励振をうける非線形系の非定常

不規則応答解析を目的としたものであり、一般的な解析手法の提案とその有効性の検証、及び連続体への応用から成る。

II章では、線形多自由度系に着目して、モーメント方程式手法による応答解析を行ない、本手法が一般の非白色性励振に対して有効であることを明らかにする。

III章では、非線形1自由度系に対して、基礎方程式の等価線形化とそのモーメント方程式の適用からなる近似解析手法を提案し、具体的な応答計算の手順を明らかにする。さらに、シミュレーションの結果と比較・検討することによって、本手法の有効性を確かめる。

IV章では、非対称非線形ばね特性を有する1自由度系をとりあげ、等価外力を考慮した等価線形化法を提案し、III章と同様の解析手法を適用して応答計算を行ない、シミュレーションの結果と比較・検討する。

V章では、非対称非線形ばね特性を有する多自由度系に対して、III、IV章で提案した近似解析手法を拡張し、その定式化を行なう。

VI章では、本論文の手法の連続体への応用例として、円筒タンク内液体の非線形液面揺動をとりあげ、非定常不規則応答解析を行なう。

VII章では結論を述べている。

II章 線形系の応答解析

II-1 緒言

本章では、振幅変調非白色性励振をうける線形多自由度系の非定常応答を解析するために、従来白色性励振に対して適用されてきたモーメント方程式手法を拡張して定式化し、本手法が一般の非白色性励振をうける系の応答解析に有効であることを確かめる。

具体的な応答計算例として、1及び2自由度系のrms応答を求める。前者の目的は、本手法の精度を確認することにある。後者の目的は、多自由度系に対して本手法の適用可能性を示すことにある。地震工学的見地からみれば、この問題は地盤・構造物系モデルとなっているので、指数減衰調和相関関数を有する雑音が単位ステップ包絡関数及び地震を模擬するのに有効な指数包絡関数によって振幅変調される入力に対して解析を行なった。

II-2 解析

次の運動方程式によって記述される線形多自由度系を考える。

$$\ddot{x} = U(x, \dot{x}) + f \quad (\text{II-1})$$

ここで、 x , U , f は、それぞれ、 n 次元状態変数、線形関数、

及び不規則励振力である。不規則励振力 f は、次のように表わされるものと仮定する。

$$f(t) = ID(t)n(t), \quad E[n(t)] = 0, \quad E[n(t_1)n^T(t_2)] = IR(t_2 - t_1) \quad (\text{II-2})$$

$t_1 < t_2$

ここで、 ID は、確定包絡関数の $(n \times m)$ 行列であり、その要素を e_{ij} とする。また、 n は、 m 次元ガウス性定常雑音、 IR は、この雑音の $(m \times m)$ 共分散行列であり、その要素を R_{ij} とする。記号 E 及び上添字 T は、それぞれ、期待値演算及び転置演算を表わす。系は、初期状態が静止しているものと仮定する。

変位と速度を状態変数として、

$$y_1 = (y_1, \dots, y_n)^T = X, \quad y_2 = (y_{1+n}, \dots, y_{2n})^T = \dot{X} \quad (\text{II-3})$$

とすると、方程式(II-1)は、

$$\dot{Z} = WZ + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad (\text{II-4})$$

ここで

$$Z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} y_2 \\ u \end{pmatrix} \quad (\text{II-5})$$

式(II-4)(II-5) から次式が得られる。

$$\frac{d}{dt}(ZZ^T) = Z\dot{Z}^T + \dot{Z}Z^T = ZW^T + WZ^T + \begin{pmatrix} 0 & y_1 f^T \\ f y_1^T & y_2 f^T + f y_2^T \end{pmatrix} \quad (\text{II-6})$$

2次モーメント方程式は、式(II-6)の両辺の期待値をとることに
よ、2次のように表わされる。

$$\dot{E}[ZZ^T] = E[ZW^T] + E[ZW^T] + \begin{pmatrix} 0 & E[\Psi_1 f^T] \\ E[f \Psi_1^T] & E[\Psi_2 f^T] + E[f \Psi_2^T] \end{pmatrix} \quad (\text{II-7})$$

この方程式を解くためには、右辺第3項を評価する必要がある。
 Ψ_1 と Ψ_2 は、次の積分によって表わされる。

$$\Psi_1(t) = \int_0^t H(t-v) f(v) dv, \quad \Psi_2(t) = \int_0^t \dot{H}(t-v) f(v) dv \quad (\text{II-8})$$

ここで、 H は、方程式(II-1)の基本解の行列である。これは、機
械系では、衝撃応答関数行列となる。式(II-7)右辺第3項に現わ
れる応答と励振力の相互相関は、式(II-8)の両辺に $f^T(t)$ を乗じて
期待値をとることにより、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} E[\Psi_1 f^T] &= \int_0^t H(t-v) E[f(v) f^T(t)] dv \\ &= \int_0^t H(t-v) ID(v) E[\dot{m}(v) \dot{m}^T(t)] ID^T(t) dv \\ &= \int_0^t H(t-v) ID(v) IR(t-v) ID^T(t) dv \\ &= \int_0^t H(u) ID(t-u) IR(u) ID^T(t) du \\ E[\Psi_2 f^T] &= \int_0^t \dot{H}(u) ID(t-u) IR(u) ID^T(t) du \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

ここで、式の変形に際して、 $u=t-v$ を用いている。式(II-9)は
解析的に評価できるので、これを式(II-7)に代入することによ

で解析的に解くことのできるモーメント方程式が得られる。ルンゲ・クッタ・ジル法などによる数値解析法により、系の自乗平均応答が求められる。

II-3 1自由度系

II-3-1 解析

前節で定式化したモーメント方程式手法を、非白色性励振をうける1自由度系に適用して rms 応答を求める。系の運動方程式は、次式によって表わされる。

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f_0(t)/m \quad (\text{II-10})$$

無次元化時間 $\tau = \omega_0 t$ を導入すると、式(II-10)は、

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = f(\tau) \quad (\text{II-11})$$

ここで、 $f(\tau) = f_0(\tau/\omega_0)/m\omega_0^2$ であり、 \dot{x} は、無次元化時間 τ による x の微分を表わす (以降、この表現を用いる)。

不規則励振力 $f(\tau)$ は、式(II-2)と同様に、次のように表わされる。

$$f(\tau) = e(\tau)n(\tau), \quad E[n(\tau)] = 0, \quad E[n(\tau)n(\tau+v)] = R(v) \quad (\text{II-12})$$

以下の計算では、包絡関数 $e(\tau)$ として、単位ステップ関数と次

に示す形の指数関数を考える。

$$e(t) = U(t) \quad (\text{II-13})$$

$$e(t) = (e^{-at} - e^{-bt}) / \max(e^{-at} - e^{-bt}) \quad (\text{II-14})$$

式(II-14)は、地震入力を模擬するのに適している。また、その最大値を1に設定してある。次に、非白色性雑音 $n(t)$ の例として、相関関数が次のような指数減衰調和関数となる雑音を考える。

$$R(v) = R_0 e^{-\alpha|v|} \cos \rho v \quad (\text{II-15})$$

この雑音のパワースペクトルは、次のように表わされる。

$$S(\omega) = \frac{R_0}{\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + \rho^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \rho^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (\text{II-16})$$

系の衝撃応答関数 $h(t)$ とその導関数 $\dot{h}(t)$ は、次のとおりである。

$$\begin{aligned} h(t) &= (1/\sqrt{1-\zeta^2}) e^{-\zeta t} \sin \sqrt{1-\zeta^2} t \\ \dot{h}(t) &= e^{-\zeta t} \left(\omega \sqrt{1-\zeta^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \sqrt{1-\zeta^2} t \right) \end{aligned} \quad (\text{II-17})$$

状態変数 $y_1 = x$ と $y_2 = \dot{x}$ を、式(II-7)に代入することにより、モメント方程式は次のようになる。

$$\dot{E}[y_1^2] = 2E[y_1 y_2]$$

$$\dot{E}[y_1 y_2] = E[y_2^2] - 2\zeta E[y_1 y_2] - E[y_1^2] + E[y_1 f]$$

$$\dot{E}[y_2^2] = -4\zeta E[y_2^2] - 2E[y_1 y_2] + 2E[y_2 f] \quad (\text{II-18})$$

式(II-18)中の項 $E[y_1 f]$ と $E[y_2 f]$ は、式(II-9)にしたがって次のように書くことができる。

$$E[y_1 f] = e(\tau) \int_0^\tau e(\tau-u) \dot{h}(u) R(u) du$$

$$E[y_2 f] = e(\tau) \int_0^\tau e(\tau-u) \dot{h}(u) R(u) du \quad (\text{II-19})$$

式(II-19)を評価する前に、2つのパラメータ A と B を導入しておくのが便利である。

$$A = \alpha/\zeta, \quad B = \rho/\sqrt{1-\zeta^2} \quad (\text{II-20})$$

A は、相関関数 $R(u)$ の減衰定数と、衝撃応答関数 $h(u)$ の減衰比との比を表わす。周波数領域では、系の周波数応答関数の共振の強さと、入力のパワースペクトルの共振の強さとの比を示すものである。 B は、 $R(u)$ の卓越振動数と $h(u)$ の減衰固有振動数との比である。 A は、Barnosky & Maurer⁽⁵⁾ によって与えられたパラメータと一致するが、 B については、その逆数になっている。

式(II-19)の積分を実行すると、結果は次のようになる。

(i) 単位ステップ^o包絡関数の場合

$$E[y_1 f] = G_1(A, B, 0) + G_1(A, -B, 0)$$

$$E[y_2 f] = G_2(A, B, 0) + G_2(A, -B, 0) \quad (\text{II-21})$$

(ii) 指数包絡関数の場合

$$E[y_1f] = (e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) \left[\left\{ G_1(A, B, a) + G_1(A, -B, a) \right\} - \left\{ G_1(A, B, b) + G_1(A, -B, b) \right\} \right] / M^2$$

$$E[y_2f] = (e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) \left[\left\{ G_2(A, B, a) + G_2(A, -B, a) \right\} - \left\{ G_2(A, B, b) + G_2(A, -B, b) \right\} \right] / M^2 \quad (\text{II-22})$$

式 (III-21) (III-22) 中の M , $G_1(A, B, a)$, $G_2(A, B, a)$ は次のとおりである。

$$M = \max(e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) \quad (\text{II-23})$$

$$G_1(A, B, a) = \frac{R_0}{z\sqrt{1-s^2} \left\{ (a-s-sA)^2 + (1-s^2)(1+B)^2 \right\}} \\ \times \left[e^{-s(1+A)\tau} \left\{ (a-s-sA) \sin \sqrt{1-s^2}(1+B)\tau - \sqrt{1-s^2}(1+B) \cos \sqrt{1-s^2}(1+B)\tau \right\} + \sqrt{1-s^2}(1+B) e^{-a\tau} \right] \quad (\text{II-24})$$

$$G_2(A, B, a) = \frac{R_0}{z \left\{ (a-s-sA)^2 + (1-s^2)(1+B)^2 \right\}} \\ \times \left[e^{-s(1+A)\tau} \left\{ \left(\frac{s^2A-sa+1}{\sqrt{1-s^2}} + \sqrt{1-s^2}B \right) \sin \sqrt{1-s^2}(1+B)\tau + (sB-sA+a) \cos \sqrt{1-s^2}(1+B)\tau \right\} - (sB-sA+a) e^{-a\tau} \right] \quad (\text{II-25})$$

単位ステップ包絡関数に対する変位と速度の定常応答値 σ_x^2 , $\sigma_{\dot{x}}^2$ は、式 (II-18) の時間微分項を 0 とし、 $\tau \rightarrow \infty$ における $E[y_1f]$ と $E[y_2f]$ の極限值をとることにより、次のように得られる。

$$\sigma_x^2 = \frac{R_0}{4} \left\{ \frac{A+B+2}{\zeta^2(1+A)^2 + (1-\zeta^2)(1+B)^2} + \frac{A-B+2}{\zeta^2(1+A)^2 + (1-\zeta^2)(1-B)^2} \right\}$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{R_0}{4} \left\{ \frac{A-B}{\zeta^2(1+A)^2 + (1-\zeta^2)(1+B)^2} + \frac{A+B}{\zeta^2(1+A)^2 + (1-\zeta^2)(1-B)^2} \right\} \quad (\text{II-26})$$

最後に、式(II-15)の中 ζ 、 $\rho=0$ とする特別の場合には、相関関数が単に指数状に減衰する雑音となり、その極限過程は白色雑音になる。⁽¹⁾ パワースペクトル ζ を示すと、次のようになる。

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{R_0 \alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \quad (\alpha, R_0 \rightarrow \infty, \frac{R_0}{\alpha} = \frac{1}{2}) \quad (\text{II-27})$$

II-3-2 計算結果と考察

応答計算の結果を以下に示す。図II-1は、計算に用いた入力雑音のパワースペクトルを示す。図II-2は、指数包絡関数の形状を示す。図II-3は、単位ステップ及び指数包絡関数に対する変位のrms応答を示す。図II-3(a)は、Barnosky & Maurer によって得られた厳密解⁽⁵⁾と一致している。図中のかっこ内の数字は、定常応答値 σ_x/R_0 を表わしている。過渡応答がその定常応答値を越えるという意味でのオーバーシュート現象が、図中の $B=0.1$ と $B=2$ の応答曲線に見られる。また、図II-3(b)の指数包絡関数の場合にも、 $B=0.1$ と $B=2$ の過渡応答が、単位ステップ包絡関数に対する定常応答値を越えていることが分かる。指数包絡関

数の最大値を1に設定している(式(II-14))ことから考えて、これらの結果を指数包絡関数に対するオーバーシュート現象と考えることができる。B=1に対する応答曲線は、他の場合に比べて大きな値を示すが、オーバーシュート現象は見られない。

図II-4は、定常応答のパワースペクトルを示す。一般に、図中の曲線は2つのピークを有する。1つは、周波数が系の固有振動数の値をとる点($\omega=1$)にあり、他の1つは、周波数が入力の卓越振動数の値をとる点($\omega=B$)にある。さらに、 $B=0.1$ と $B=2$ に対する応答曲線は、 $\omega=1$ ではなくて、 $\omega=B$ で最大ピークを有している。一方、系の固有振動数と入力の卓越振動数が一致する特別な場合、 $B=1$ に対する応答曲線は、ただ1つの強いピークを $\omega=1$ にもつ。白色雑音のパワースペクトルが全周波数帯域にわたって一定値をとることから、 $B=1$ に対する本応答は、白色雑音を元の系($\zeta=0.1$)よりもさらに強い狭帯域のフィルタに通すことにより得られる応答と同様であると考えられる。以上の考察と、白色雑音入力に対するrms応答がその定常値を越えないという事実[付録A]により、 $B=1$ に対するrms応答曲線がオーバーシュートを示さない理由を説明することができる。

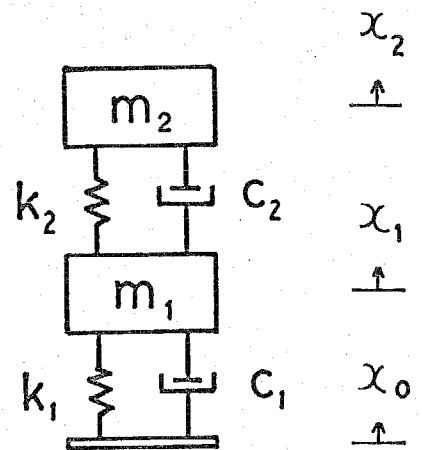
図II-5は、指数減衰相関関数(式(II-15)中、 $\rho=0$ とした場合)を有する入力に対する変位のrms応答を示す。式(II-27)を考慮

して、 R_0/SA の値は一定としておく。Aの値が大きい励振に対する応答 ($A=100$)は、白色雑音入力に対する応答と殆ど同様であることが分かる。比較のために、白色雑音入力に対する応答を、破線で示してある。入力の相関が強くなる程、即ち、Aの値が小さい程、応答のオーバーシュート現象はより顕著である。

II-4 2自由度系

II-4-1 解析

多自由度系の衝撃応答関数行列を解析的に得ることは、一般には容易でない。モーメント方程式手法の適用に際しては、これを数値計算によって求める。具体的な適用例として、図II-6に示す系が、基礎部に非白色性励振を受ける場合のrms応答を求める。地震工学的見地から、本系を地盤・構造物系のモデルと考えるもよい。



図II-6 2自由度系

相対変位 $X_1 = x_1 - x_0$ と $X_2 = x_2 - x_1$ に関する運動方程式は、次のように表わされる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\zeta_1 W & -2\mu\zeta_2 \\ -2\zeta_1 W & 2(1+\mu)\zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W^2 & -\mu \\ -W^2 & 1+\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ddot{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-28})$$

ここで、 $k_1/m_1 = \omega_1^2$, $k_2/m_2 = \omega_2^2$, $c_1/m_1 = 2\zeta_1\omega_1$, $c_2/m_2 = 2\zeta_2\omega_2$,
 $m_2/m_1 = \mu$, $\omega_1/\omega_2 = W$, 及び無次元化時間 $\tau = \omega_2 t$ を用いている。
 不規則励振力 f は、基礎部の加速度入力とし、次式で与えられるものとする。

$$f(\tau) = -\ddot{x}_0 = e(\tau)n(\tau) \quad (\text{II-29})$$

ここで、 $e(\tau)$ と $n(\tau)$ は、前節と同様の包絡関数及び非白色性雑音である。

式(II-28)にラプラス変換を施すと、係数行列 Q が次のように得られる。

$$Q(s) = \begin{pmatrix} s^2 + 2\zeta_1 W s + W^2 & -2\mu\zeta_2 s - \mu \\ -2\zeta_1 W s - W^2 & s^2 + 2(1+\mu)\zeta_2 s + 1 + \mu \end{pmatrix} \quad (\text{II-30})$$

衝撃応答関数行列 H は、伝達行列 $Q^{-1}(s)$ に逆ラプラス変換を施すことにより得られる。⁽¹²⁾

$$H(\tau) = 2 \sum_{\ell=1}^2 (S_{\ell} \cos p_{\ell} \tau - T_{\ell} \sin p_{\ell} \tau) e^{-p_{\ell} \tau} \quad (\text{II-31})$$

ここで、 S_{ℓ} と T_{ℓ} は定数行列であり、 $-p_{\ell} \pm i q_{\ell}$ ($q_{\ell} > 0$) は $\det Q(s) = 0$ の根である。これらの値は、数値計算によって求められる。

本系は結局、式(II-2)の中で、 $f_1 = f$, $f_2 = 0$, $e_{11} = e$, $e_{12} = e_{21} = e_{22} = 0$,
 $R_{11} = R$, $R_{12} = R_{21} = R_{22} = 0$ とした場合に帰着する。前節と同じ相関関数 $R(v)$ を考える。状態変数を $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = \dot{x}_1$, $y_4 = \dot{x}_2$ とす

れば、式(II-7)から10個の連立2次モーメント方程式が、また、式(II-9)から応答と励振力の相互相関が得られる。後者をその成分ごとに表現すると次のようになる。

(i) 単位ステップ包絡関数の場合

$$\begin{aligned} E[y_{i1}f] &= e(\tau) \int_0^\tau e(\tau-u) h_{i1}(u) R(u) du \\ &= 2R_0 \sum_{\ell=1}^2 \left\{ -T_{\ell i1} J_{1\ell}(0, \rho) + S_{\ell i1} J_{2\ell}(0, \rho) \right\} \quad i=1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[y_{i+2}f] &= e(\tau) \int_0^\tau e(\tau-u) \dot{h}_{i1}(u) R(u) du \\ &= 2R_0 \sum_{\ell=1}^2 \left\{ (T_{\ell i1} p_\ell - S_{\ell i1} q_\ell) J_{1\ell}(0, \rho) \right. \\ &\quad \left. - (T_{\ell i1} q_\ell + S_{\ell i1} p_\ell) J_{2\ell}(0, \rho) \right\} \quad i=1, 2 \quad (\text{II-32}) \end{aligned}$$

(ii) 指数包絡関数の場合

$$\begin{aligned} E[y_{i1}f] &= \frac{2R_0(e^{-a\tau} - e^{-b\tau})}{M^2} \sum_{\ell=1}^2 \left[-T_{\ell i1} \{ J_{1\ell}(a, \rho) - J_{1\ell}(b, \rho) \} \right. \\ &\quad \left. + S_{\ell i1} \{ J_{2\ell}(a, \rho) - J_{2\ell}(b, \rho) \} \right] \quad i=1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[y_{i+2}f] &= \frac{2R_0(e^{-a\tau} - e^{-b\tau})}{M^2} \sum_{\ell=1}^2 \left[(T_{\ell i1} p_\ell - S_{\ell i1} q_\ell) \{ J_{1\ell}(a, \rho) - J_{1\ell}(b, \rho) \} \right. \\ &\quad \left. - (T_{\ell i1} q_\ell + S_{\ell i1} p_\ell) \{ J_{2\ell}(a, \rho) - J_{2\ell}(b, \rho) \} \right] \quad i=1, 2 \\ &\hspace{15em} (\text{II-33}) \end{aligned}$$

式(II-32)(II-33)の中で、 h_{ij} は、衝撃応答関数行列Hの(i, j)成分。

T_{lij}, S_{lij} は、定数行列 T_l, S_l の (i, j) 成分である。また、 M は、式 (II-23) に与えられている。さらに、 J_{1l} と J_{2l} は、

$$\begin{aligned} J_{1l}(a, p) &= G_{3l}(a, p) + G_{3l}(a, -p) \\ J_{2l}(a, p) &= G_{4l}(a, p) + G_{4l}(a, -p) \end{aligned} \quad (\text{II-34})$$

である。ここに、

$$\begin{aligned} G_{3l}(a, p) &= \frac{1}{z[\{a - (\alpha + p_l)\}^2 + (\varrho_l + p)^2]} \\ &\times \left[e^{-(\alpha + p_l)\tau} \{ (a - \alpha - p_l) \sin(\varrho_l + p)\tau \right. \\ &\quad \left. - (\varrho_l + p) \cos(\varrho_l + p)\tau \} + (\varrho_l + p) e^{-a\tau} \right] \end{aligned} \quad (\text{II-35})$$

$$\begin{aligned} G_{4l}(a, p) &= \frac{1}{z[\{a - (\alpha + p_l)\}^2 + (\varrho_l + p)^2]} \\ &\times \left[e^{-(\alpha + p_l)\tau} \{ (a - \alpha - p_l) \cos(\varrho_l + p)\tau \right. \\ &\quad \left. + (\varrho_l + p) \sin(\varrho_l + p)\tau \} + (\alpha + p_l - a) e^{-a\tau} \right] \end{aligned} \quad (\text{II-36})$$

次に、単位ステップ包絡関数の場合の定常応答値を求める。こゝからは、式 (II-7) の微分項を 0 とし、 $\tau \rightarrow \infty$ における $E[Y_1^T]$ と $E[Y_2^T]$ の極限值をとることによって導かれる代数方程式の解として得られる。極限值をとるときに必要とされる式は、次のとおりである。

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} J_{1e}(a, \rho) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho_e + \rho}{(\alpha + \rho_e)^2 + (\rho_e + \rho)^2} + \frac{\rho_e - \rho}{(\alpha + \rho_e)^2 + (\rho_e - \rho)^2} \right\}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} J_{2e}(a, \rho) = \frac{\alpha + \rho_e}{2} \left\{ \frac{1}{(\alpha + \rho_e)^2 + (\rho_e + \rho)^2} + \frac{1}{(\alpha + \rho_e)^2 + (\rho_e - \rho)^2} \right\} \quad (\text{II-37})$$

最後に、本2自由度系では、各質量の絶対加速度の自乗平均応答を求めることが、地震工学的見地から有用と考えられる。各質量の絶対加速度 \ddot{x}_1, \ddot{x}_2 は、運動方程式より次のように表わされる。

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 + \mu x_2 - 2\zeta_1 \omega \dot{x}_1 + 2\mu \zeta_2 \dot{x}_2$$

$$\ddot{x}_2 = -x_2 - 2\zeta_2 \dot{x}_2 \quad (\text{II-38})$$

絶対加速度の自乗平均応答は、両辺を自乗して期待値をとることにより、相対変位及び相対速度に関する2次モーメントの関数となるので、それらの計算結果を代入することによって求められる。

II-4-2 計算結果と考察

図II-7は、相対変位 x_1 及び絶対加速度 \ddot{x}_1 の定常応答と、入力の卓越振動数 ρ との関係を示す。これらの図から、相関関数の減衰定数 α が小さい程、共振特性が顕著になることが分かる。

また、応答曲線は一般に、入力の卓越振動数 ρ と系の固有振動

数 ($\omega_{n1}=0.617, \omega_{n2}=1.597$) が等しい点にピークを有し、低次の共振点におけるピークは、高次の共振点におけるピークと比較して、はるかに高いことが分かる。

図 II-8 は、単位ステップ及び指数包絡関数に対する相対変位 x_1 の rms 応答を示す。また、図 II-9 は、絶対加速度 \ddot{x}_1 の同様の応答を示す。相関関数の減衰定数の値は、図 II-7 で最も共振特性の顕著であった $\alpha=0.01$ を選んでいる。図から明らかのように、1自由度系の応答結果と同じく、 $\rho=0.1$ と $\rho=1$ の場合の応答曲線は、どちらの包絡関数に対してもオーバーシュートを示している。一方、 $\rho=0.6$ の場合の応答曲線は、オーバーシュートを示していない。これらの結果は、前節と同じく、定常応答のパワースペクトルを考察することにより説明し得る。

図 II-10 は、相対変位 x_1 及び絶対加速度 \ddot{x}_1 の定常応答のパワースペクトルを示す。これらの図中、 $\rho=0.1$ と $\rho=1$ の場合の応答曲線は、 $\omega=\omega_{n1}$ (ω_{n1} : 系の低次の固有振動数) の点ではなくて、 $\omega=\rho$ の点に最大のピークを有する。一方、 $\rho=0.6$ の場合の応答曲線は、 $\omega=\rho \doteq \omega_{n1}$ 、即ち、系の低次固有振動数と入力の卓越振動数がほぼ一致する点に、1つの強いピークを有している。このような傾向は、図 II-4 で示された 1自由度系の応答特性と本質的に同じである。

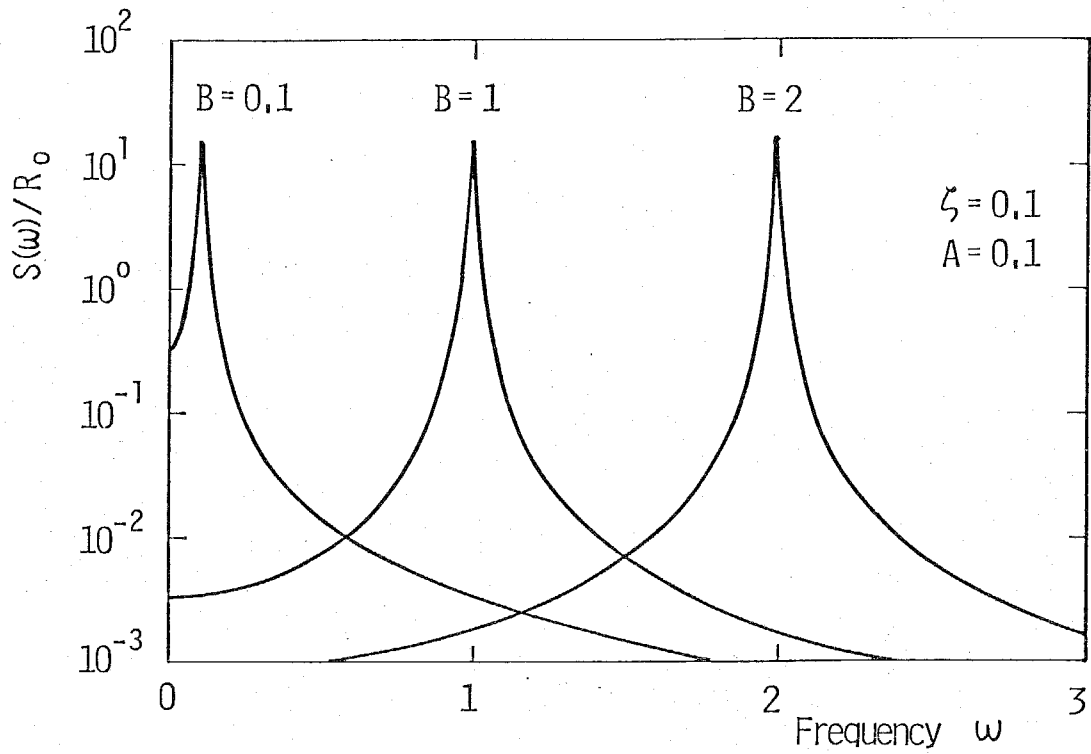
図 II-8(b) と図 II-9(b) の中で、 $\rho=0.6$ の場合の応答曲線の最大

値は、それぞれ、対応する定常応答値の約40%である。

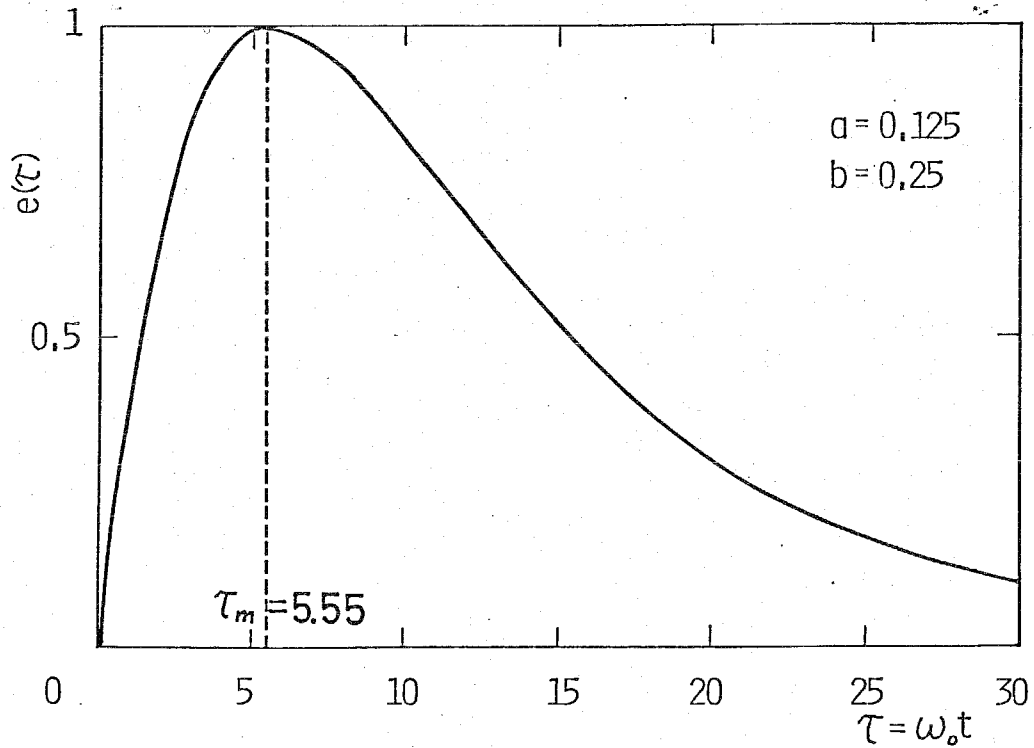
II-5 結言

振幅変調非白色性励振をうける線形系の自乗平均応答を解析するために、モーメント方程式手法による定式化を行なった。モーメント方程式は、数値計算によって解かれる。本手法は、従来解析の困難であった非白色性励振に対する多自由度系の非定常応答計算に有効である。

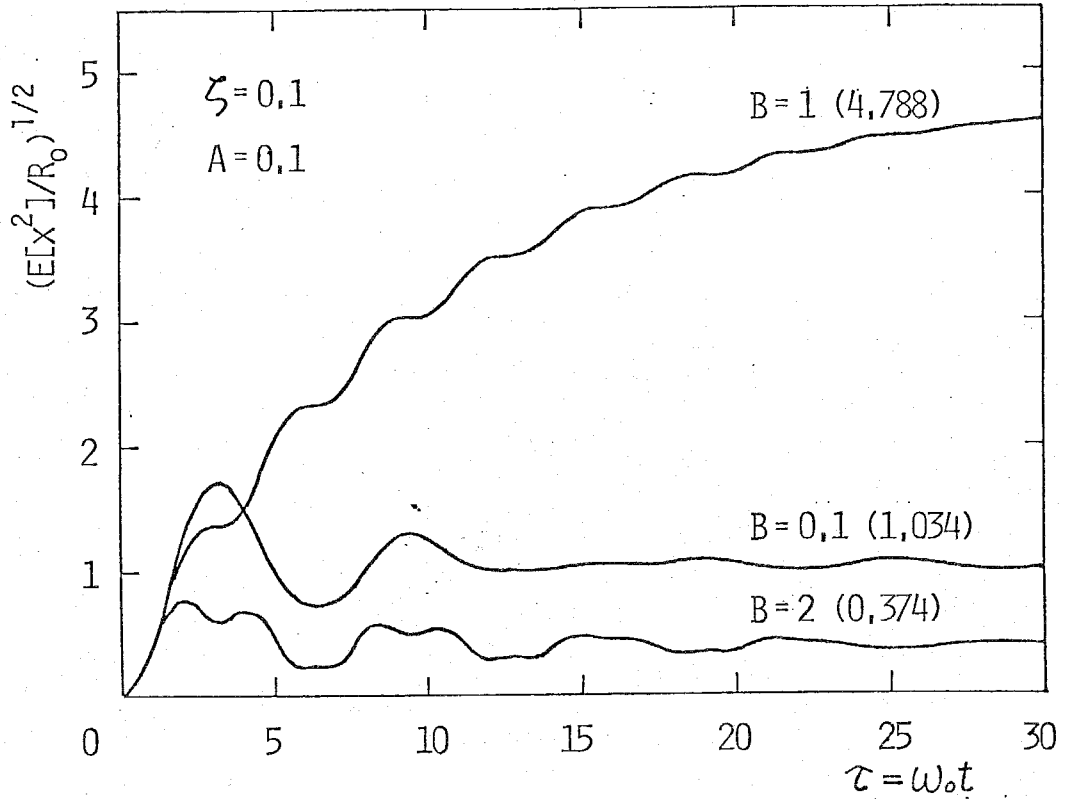
具体的な計算例として、指数減衰調和相関関数を有する雑音を取りあげ、1及び2自由度系のrms応答を求めた。過渡応答が定常応答値を越えるという意味でのオーバーシュート現象が、単位ステップ包絡関数の場合だけでなく、指数包絡関数の場合にも起こり得ること、及び、系の固有振動数が入力の卓越振動数にほぼ等しい場合には、共振によって大きな応答値となるがオーバーシュート現象は見られないことを示した。



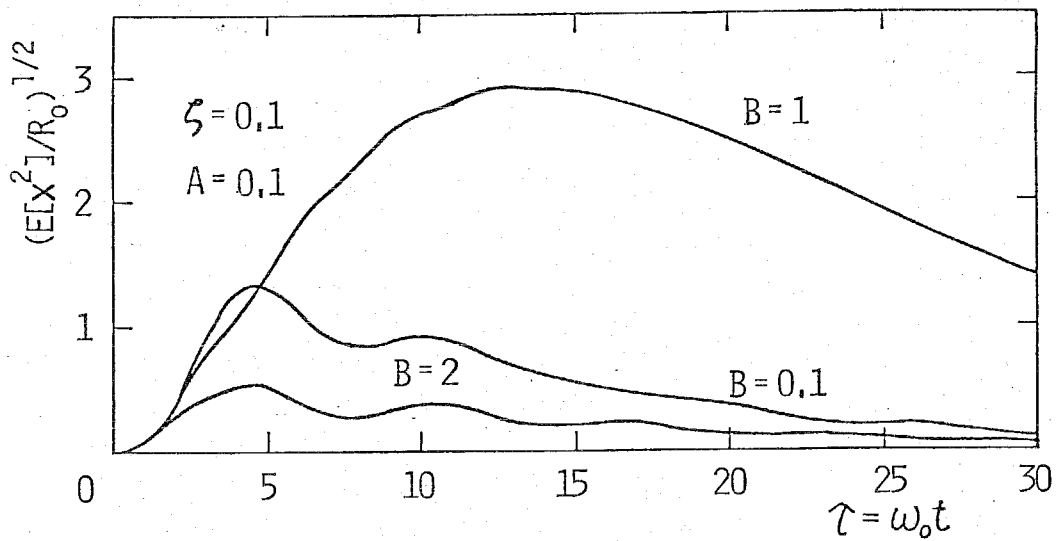
図Ⅱ-1 入力雑音のパワースペクトル



図Ⅱ-2 指数包絡関数

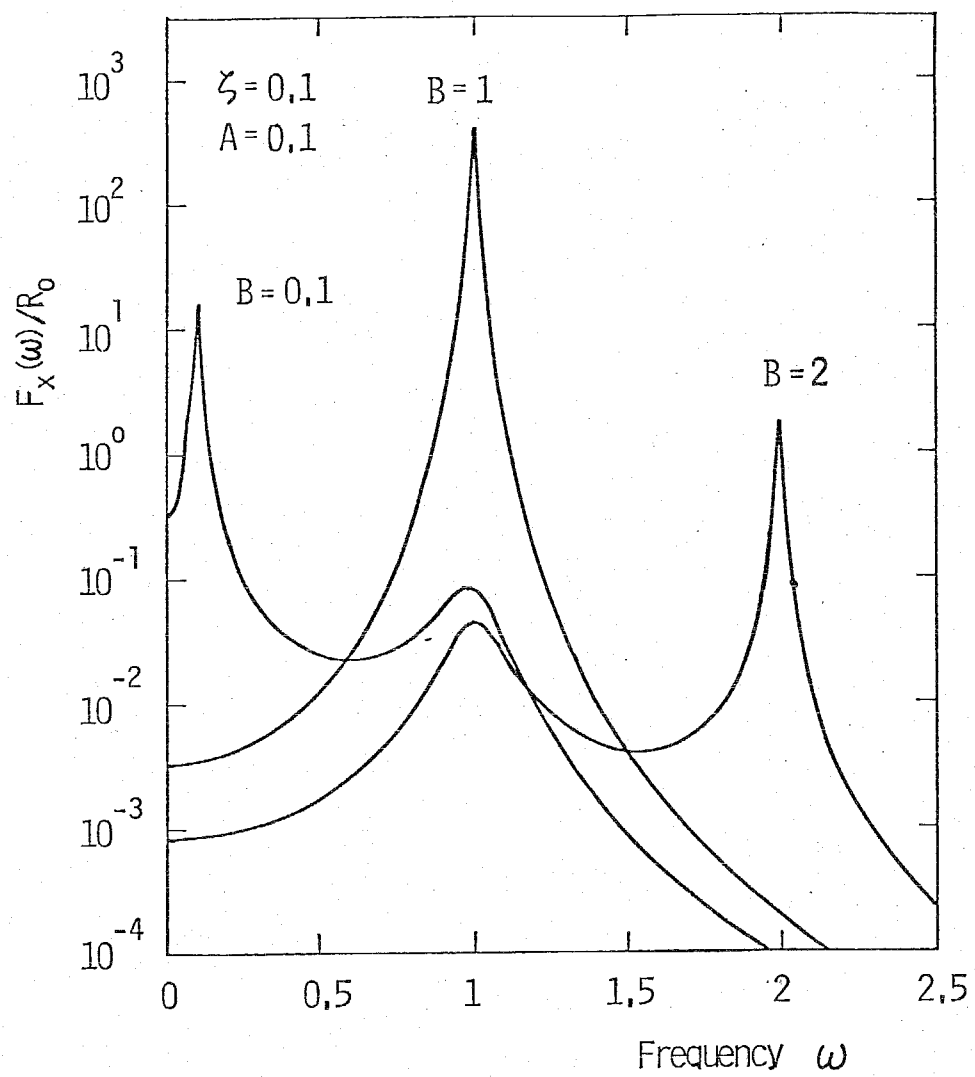


(a) 単位ステップ包絡関数の場合

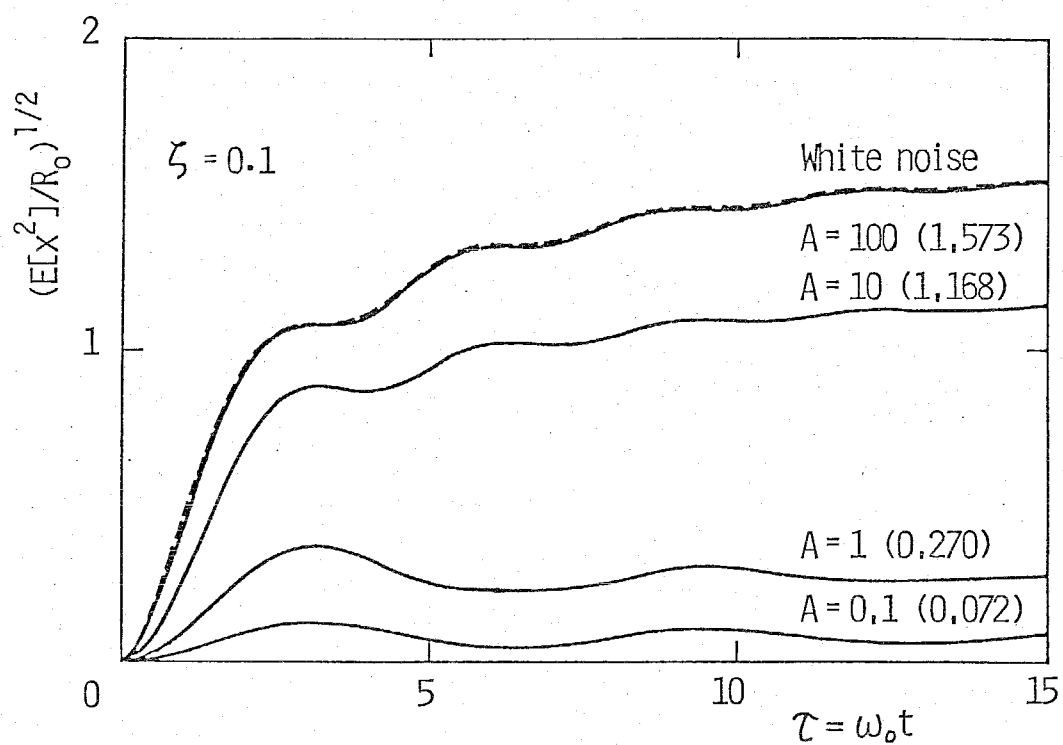


(b) 指数包絡関数の場合

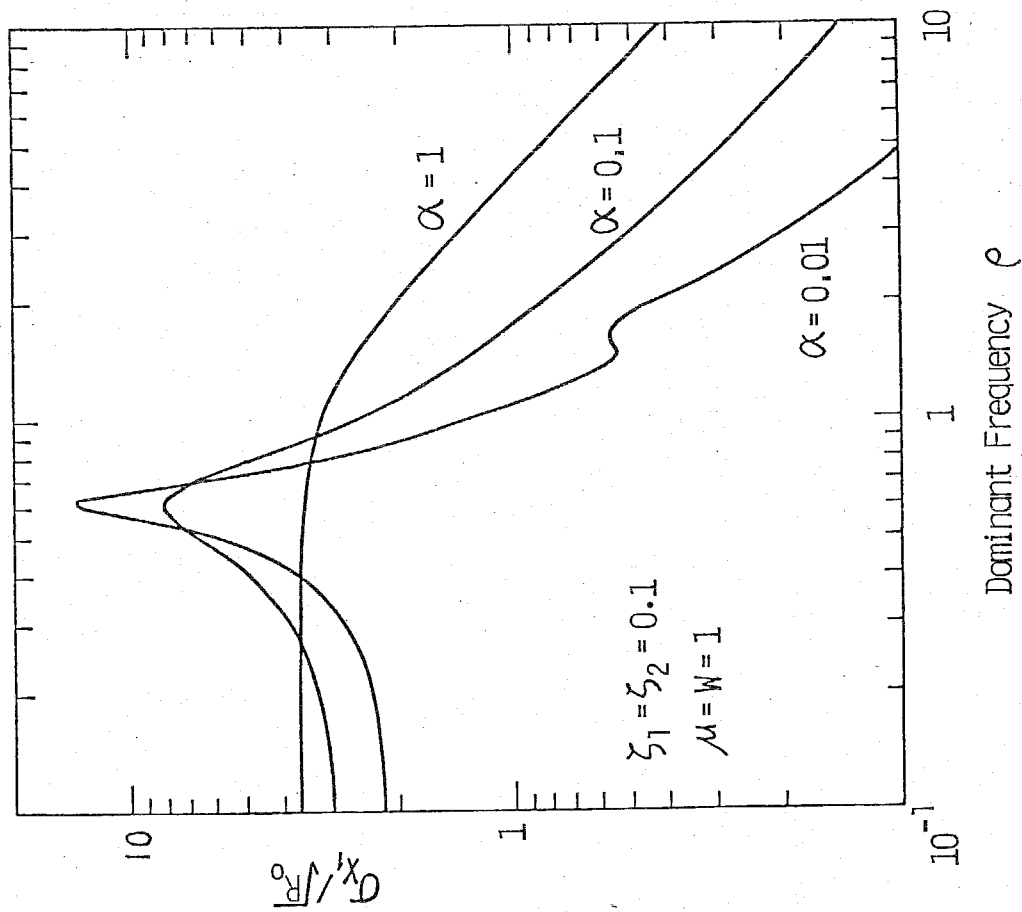
図II-3 変位のrms応答



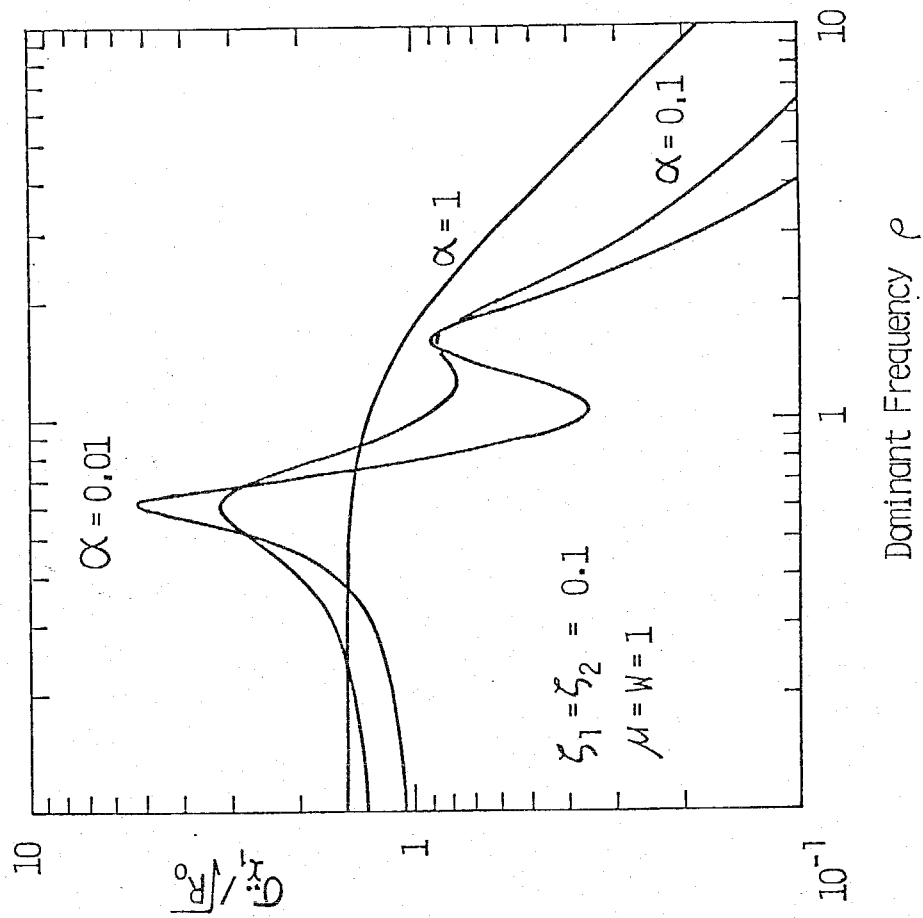
図II-4 定常応答のパワースペクトル



図II-5 変位の rms 応答
(単位ステップ包絡関数, 指数減衰相関雑音)

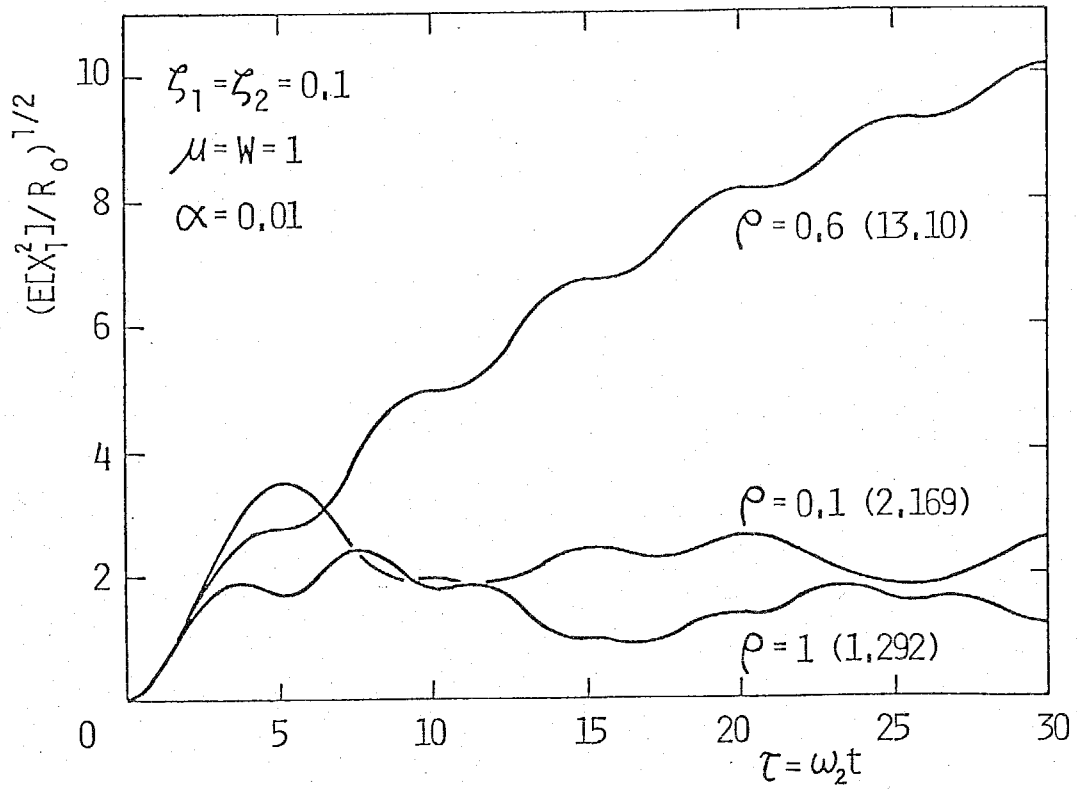


(a) 相对変位 X_1

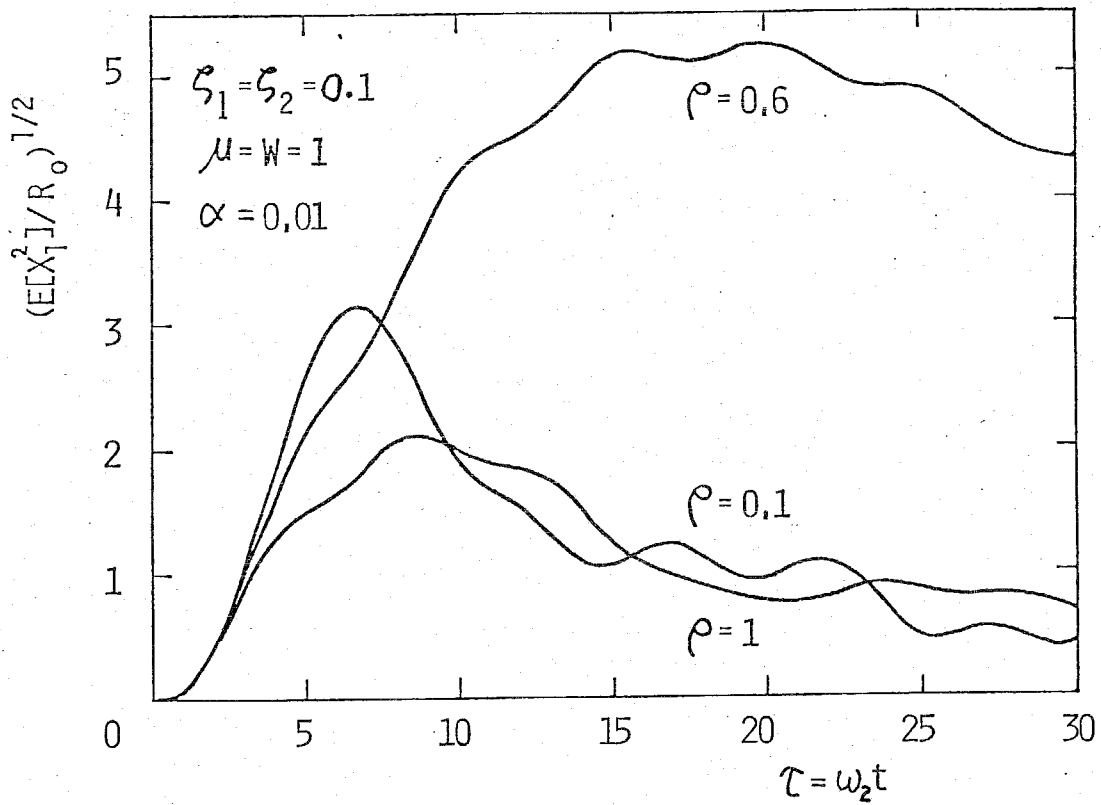


(b) 絶対加速度 \ddot{X}_1

図II-7 定常応答と入力の卓越振動数 ρ との関係

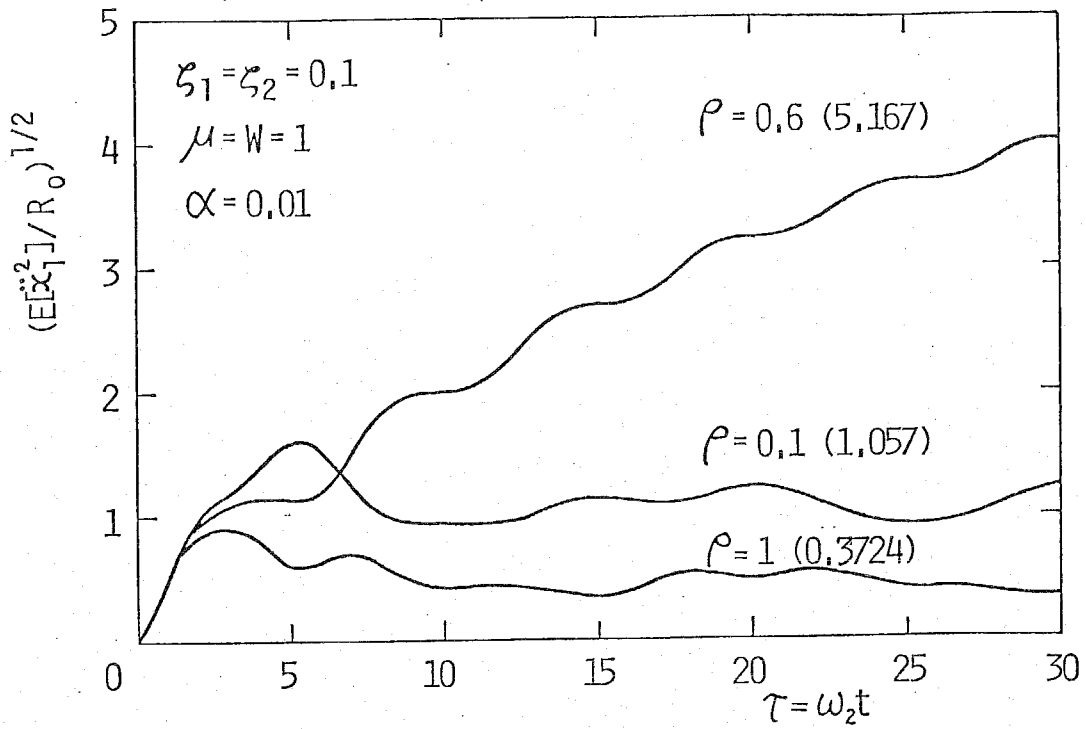


(a) 単位ステップ包絡関数の場合

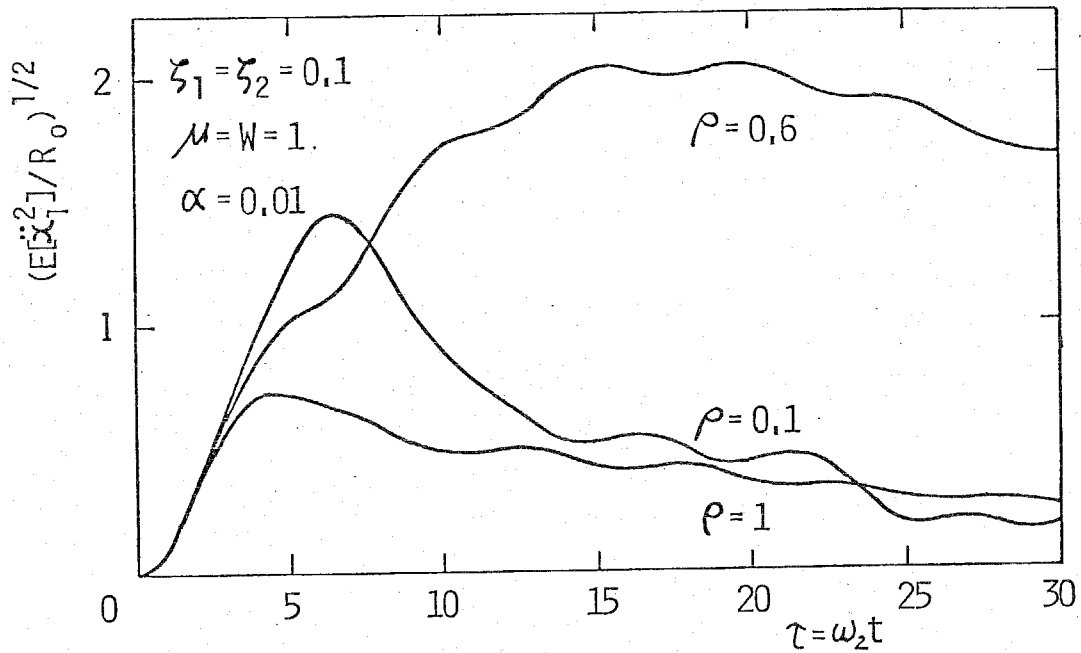


(b) 指数包絡関数の場合

図 II-8 相対変位 x_1 の rms 応答

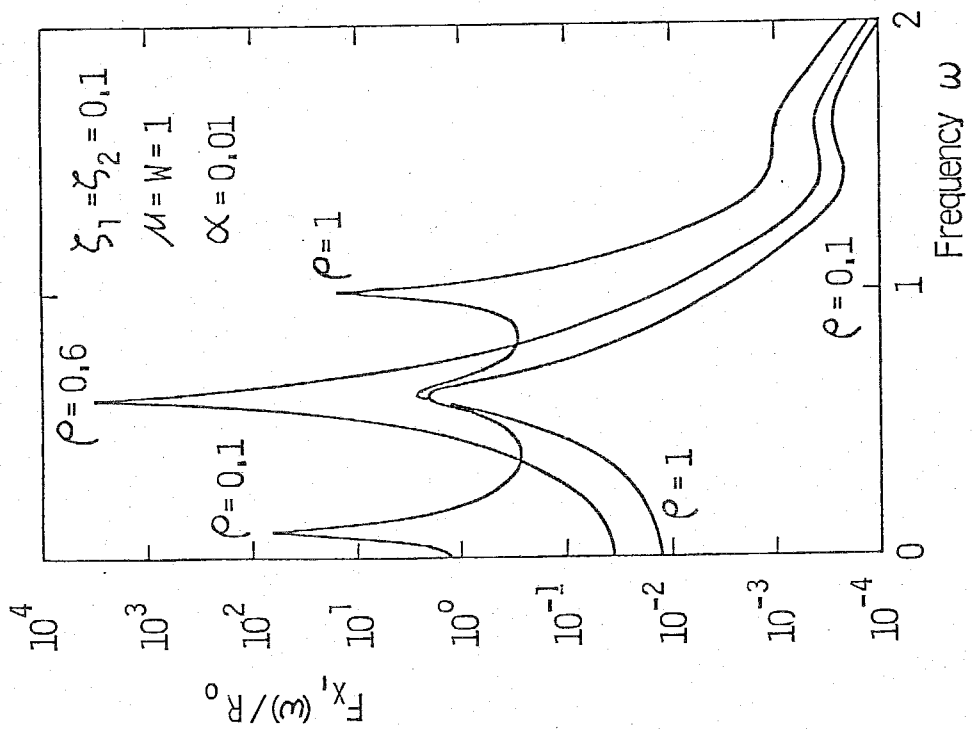


(a) 単位ステップ包絡関数の場合

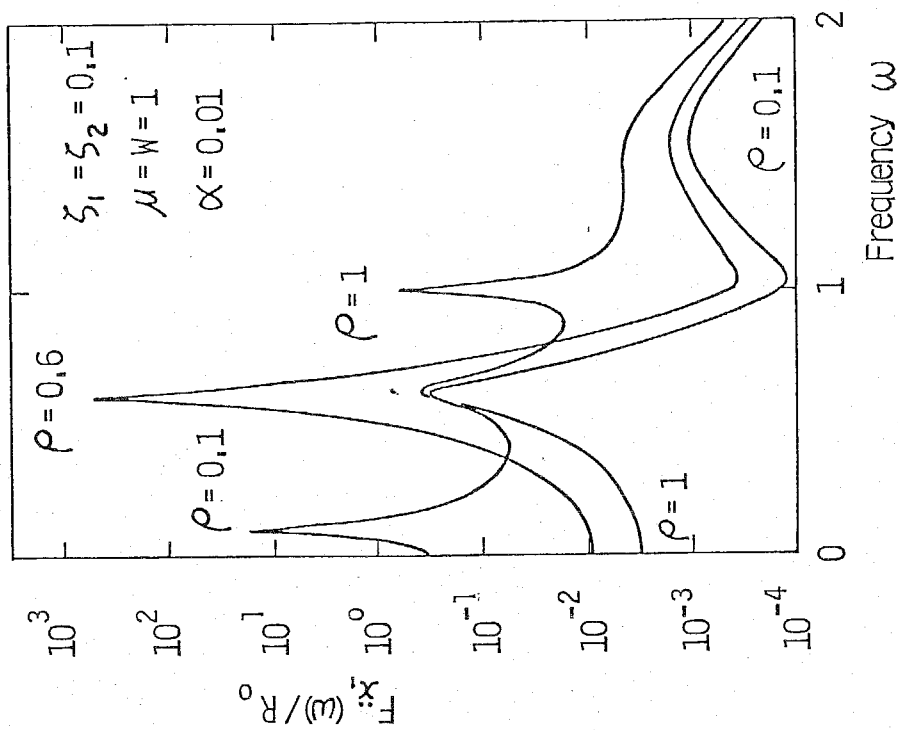


(b) 指数包絡関数の場合

図II-9 絶対加速度 \ddot{x}_1 のrms応答



(a) 相対変位 X_1



(b) 絶対加速度 \ddot{X}_1

図II-10 定常応答のパワースペクトル

III章 非線形1自由度系の応答解析

III-1 緒言

本章では、振幅変調非白色性励振をうける非線形1自由度系の非定常応答を解析するために、基礎方程式の等価線形化とそのモーメント方程式の適用からなる近似手法を提案する。本手法では、等価線形係数が、時刻列の各区間内で一定値をとるものと仮定している。また、モーメント方程式の非斉次項となる応答と外力の相互相関を評価するために漸化式を用いる。

具体的な計算例として、デュフイング系及び乾性摩擦力を含む系のrms応答を求め、シミュレーションの結果と比較・検討することにより本手法の有効性を確かめる。

III-2 解析

III-2-1 等価線形系のモーメント方程式

次の運動方程式で記述される非線形1自由度系を考える。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x + g(x, \dot{x}) = f(\tau) \quad (\text{III-1})$$

ここで、 \cdot は、無次元化時間 τ に関する微分、 $g(x, \dot{x})$ は変数 x , \dot{x} について対称な非線形関数、 $f(\tau)$ は非白色性不規則外力である。系の減衰及び非線形性は小さく、また、系は初期状態で静止しているものと仮定する。

等価線形化法を施すと、式(Ⅲ-1)の近似解は、次の式から得られる。

$$\ddot{x} + 2\zeta_e \dot{x} + k_e x = f(\tau) \quad (\text{Ⅲ-2})$$

状態変数 $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ を用いて表わすと、

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -2\zeta_e y_2 - k_e y_1 + f \quad (\text{Ⅲ-3})$$

ここで、 ζ_e と k_e は、それぞれ、等価線形減衰係数及び剛性係数である。これらは、時間と共に変化して、一般に応答の関数として表わされる。⁽³⁹⁾

$$\zeta_e(\tau) = \zeta + \frac{E[y_1^2]E[y_2 \dot{g}] - E[y_1 y_2]E[y_1 \dot{g}]}{2\{E[y_1^2]E[y_2^2] - (E[y_1 y_2])^2\}} \quad (\text{Ⅲ-4})$$

$$k_e(\tau) = 1 + \frac{E[y_2^2]E[y_1 \dot{g}] - E[y_1 y_2]E[y_2 \dot{g}]}{E[y_1^2]E[y_2^2] - (E[y_1 y_2])^2} \quad (\text{Ⅲ-5})$$

非線形性は小さいので、応答のガウス性を仮定すると、等価線形係数 $\zeta_e(\tau)$ と $k_e(\tau)$ は、応答の2次モーメントによって表わすことができる。線形化方程式(Ⅲ-3)より、次のモーメント方程式が得られる。

$$\dot{E}[y_1^2] = 2E[y_1 y_2]$$

$$\dot{E}[y_1 y_2] = E[y_2^2] - 2\zeta_e E[y_1 y_2] - k_e E[y_1^2] + E[y_1 f]$$

$$\dot{E}[y_2^2] = -4\zeta_e E[y_2^2] - 2k_e E[y_1 y_2] + 2E[y_2 f] \quad (\text{III-6})$$

経過時間に対して、等間隔の時刻列 $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ を考える。等価線形係数 $\zeta_e(\tau)$ と $k_e(\tau)$ は、各区間 $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ で一定値として $\zeta_e(\tau_{i-1})$ と $k_e(\tau_{i-1})$ をとるものと仮定する。最初の区間 $[\tau_0, \tau_1)$ では、 $\zeta_e(\tau) = \zeta$, $k_e(\tau) = 1$ とする。

さて、 i 番目の区間 $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ に着目すると、時刻 $\tau = \tau_{i-1}$ における応答の2次モーメントの値を、式(III-4)(III-5)に代入することによって、一定値 $\zeta_e(\tau_{i-1})$ と $k_e(\tau_{i-1})$ が定まる。次に、モーメント方程式(III-6)を解くことができれば、時刻 $\tau = \tau_i$ における応答の2次モーメントを求めることができる。与えられた初期条件のもとで、この手順にしたがって応答計算をすすめる。

ところで、モーメント方程式を解くためには、その右辺に現われる、応答と外力の相互相関 $E[y_1 f]$ と $E[y_2 f]$ を評価する必要がある。これらの項は、デルタ相関を有する白色性励振の場合を除いて、一般に、過去の全履歴に依存する。さらに、系の性質が時間的に不変である線形系の場合とは異なり、等価線形係数が時間と共に変化するのど、この点を考慮した計算方法を考えねばならない。以下に、一般の非白色性励振に対する $E[y_1 f]$ と $E[y_2 f]$ の計算方法を説明する。

Ⅲ-2-2 応答と外力の相互相関

以下の解析のために、微小時間間隔内で一定と見なした等価線形係数の値を、次のように表わすことにする。

$$\begin{aligned} \zeta_{ei} &= \zeta_e(\tau) = \zeta_e(\tau_{i-1}) \\ k_{ei} &= k_e(\tau) = k_e(\tau_{i-1}) \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i) \end{aligned} \quad (\text{Ⅲ-7})$$

時刻 $\tau = \tau_i$ における変位と速度は、時刻 $\tau = \tau_{i-1}$ における変位と速度によって、次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} y_1(\tau_i) &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h_i(\tau_i - \nu) f(\nu) d\nu + y_1(\tau_{i-1}) p_i(\Delta\tau) + y_2(\tau_{i-1}) q_i(\Delta\tau) \\ y_2(\tau_i) &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \dot{h}_i(\tau_i - \nu) f(\nu) d\nu + y_1(\tau_{i-1}) r_i(\Delta\tau) + y_2(\tau_{i-1}) s_i(\Delta\tau) \end{aligned} \quad (\text{Ⅲ-8})$$

ここで、 $\Delta\tau = \tau_i - \tau_{i-1}$ 、 h_i は、区間 $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ における衝撃応答関数、 p_i, q_i, r_i, s_i は、同じ区間における自由振動の解を表わす関数である (図Ⅲ-1参照)。この区間の系の性質が、不足減衰であるか、臨界減衰であるか、あるいは、超過減衰であるかによって、 h_i, p_i, q_i, r_i, s_i は、それぞれ異なる関数形をもつ。実際の振動問題の中で、特に重要と考えられる不足減衰、即ち、 $\zeta_{ei} - k_{ei} < 0$ の場合について、これらの関数形を以下に示す。

$$h_i(\nu) = \frac{1}{\omega_{ei}} e^{-\zeta_{ei}\nu} \sin \omega_{ei}\nu, \quad \omega_{ei} = \sqrt{k_{ei} - \zeta_{ei}^2}, \quad \nu \in [\tau_{i-1}, \tau_i) \quad (\text{Ⅲ-9})$$

$$P_i(v) = e^{-\zeta_{ei}v} \left(\frac{\zeta_{ei}}{\omega_{ei}} \sin \omega_{ei}v + \cos \omega_{ei}v \right)$$

$$Q_i(v) = \frac{1}{\omega_{ei}} e^{-\zeta_{ei}v} \sin \omega_{ei}v$$

$$r_i(v) = -\frac{k_{ei}}{\omega_{ei}} e^{-\zeta_{ei}v} \sin \omega_{ei}v$$

$$S_i(v) = e^{-\zeta_{ei}v} \left(\cos \omega_{ei}v - \frac{\zeta_{ei}}{\omega_{ei}} \sin \omega_{ei}v \right) \quad v \in [\tau_{i-1}, \tau_i] \quad (\text{III-10})$$

今、着目時刻 τ が、 n 番目の区間内にあるものとする。即ち $\tau \in [\tau_{n-1}, \tau_n)$ である。この時、初期条件 $y_1(\tau_0)$ と $y_2(\tau_0)$ が与えられると、式(III-8)を繰り返して評価することによって、まず、 $y_1(\tau_{n-1})$ と $y_2(\tau_{n-1})$ が求められる。続いて、応答 $y_1(\tau)$ と $y_2(\tau)$ は $y_1(\tau_{n-1})$ と $y_2(\tau_{n-1})$ によって次式のように表わされる。

$$y_1(\tau) = \int_{\tau_{n-1}}^{\tau} h_n(\tau-v) f(v) dv + y_1(\tau_{n-1}) p_n(\tau-\tau_{n-1}) + y_2(\tau_{n-1}) q_n(\tau-\tau_{n-1})$$

$$y_2(\tau) = \int_{\tau_{n-1}}^{\tau} \dot{h}_n(\tau-v) f(v) dv + y_1(\tau_{n-1}) r_n(\tau-\tau_{n-1}) + y_2(\tau_{n-1}) s_n(\tau-\tau_{n-1}) \quad (\text{III-11})$$

次に、式(III-8)(III-11)の両辺に $f(\tau)$ を乗じ、期待値をとることによって、着目時刻 $\tau \in [\tau_{n-1}, \tau_n)$ における $E[y_1 f]$ と $E[y_2 f]$ を評価する漸化式が得られる。

式(III-8)より、

$$\begin{aligned}
 A_i &= \Phi_i + A_{i-1} P_i(\Delta\tau) + B_{i-1} \mathcal{G}_i(\Delta\tau) \\
 B_i &= \Psi_i + A_{i-1} r_i(\Delta\tau) + B_{i-1} S_i(\Delta\tau)
 \end{aligned}
 \tag{III-12}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 A_i &= A_i(\tau_i, \tau) = E[y_1(\tau_i) f(\tau)] \\
 B_i &= B_i(\tau_i, \tau) = E[y_2(\tau_i) f(\tau)]
 \end{aligned}
 \tag{III-13}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h_i(\tau_i - v) E[f(v) f(\tau)] dv \\
 \Psi_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \dot{h}_i(\tau_i - v) E[f(v) f(\tau)] dv
 \end{aligned}
 \tag{III-14}$$

式(III-11)より、

$$\begin{aligned}
 E[y_1(\tau) f(\tau)] &= \int_{\tau_{n-1}}^{\tau} h_n(\tau - v) E[f(v) f(\tau)] dv \\
 &\quad + A_{n-1} P_n(\tau - \tau_{n-1}) + B_{n-1} \mathcal{G}_n(\tau - \tau_{n-1}) \\
 E[y_2(\tau) f(\tau)] &= \int_{\tau_{n-1}}^{\tau} \dot{h}_n(\tau - v) E[f(v) f(\tau)] dv \\
 &\quad + A_{n-1} r_n(\tau - \tau_{n-1}) + B_{n-1} S_n(\tau - \tau_{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{III-15}$$

初期条件 A_0 と B_0 が与えられると、式(III-12)を繰り返して計算することによって、 A_{n-1} と B_{n-1} が得られる。その後、これらを式(III-15)に代入することによって、 $E[y_1(\tau) f(\tau)]$ と $E[y_2(\tau) f(\tau)]$ が求

められる。

式(Ⅲ-13)より明らかのように、 A_i と B_i は、それぞれ、過去のある時刻 τ_i における変位及び速度と、着目する一定時刻 τ における外力との相互相関を表わす。これらは、時刻 τ_i を介して漸化式(Ⅲ-12)(Ⅲ-15)を構成しているが、 i の値にかかわらず一定時刻 τ の関数でもある。即ち、漸化式のどの段階においても、式(Ⅲ-14)(Ⅲ-15)から明らかのように、被積分関数が $E[f(\omega)f(\tau)]$ を含んでいる。図Ⅲ-2に、 $f(\omega)$ と $f(\tau)$ の関係を示す。以上のことから、本漸化式は、 $E[y_j(\tau')f(\tau)]$ と $E[y_j(\tau'')f(\tau'')]$ ($\tau \neq \tau'$, $j=1,2$)との関係を直接示すものではないことに注意しなければならない。

したがって、異なる着目時刻に対しては、その都度、初期時刻から着目時刻までの全区間にわたって、漸化式(Ⅲ-12)(Ⅲ-15)の計算手順を繰り返さなければならない。この手順の必要性は、応答がマルコフ過程にならない非白色性励振の基本的性質に起因するものと考えられる。白色性励振の場合にこれらの漸化式を考えると、式(Ⅲ-12)中の A_i と B_i はデルタ相関関数のために0となり、結局、常に式(Ⅲ-15)中の積分項のみを評価すれば良いことになる。

Ⅲ-3 具体的な系への応用

本手法の適用例として、デュフィング系及び乾性摩擦系の応

答解析を行なう。各系の等価線形係数は、応答のがウス性の仮定により、応答の2次モーメントによつて次のように表わされる。

$$\text{デュフイング系} : \varphi(y_1, y_2) = \varepsilon y_1^3 \quad (\text{III-16})$$

$$\zeta_e = \zeta$$

$$k_e = 1 + 3\varepsilon E[y_1^2] \quad (\text{III-17})$$

$$\text{乾性摩擦系} : \varphi(y_1, y_2) = r \operatorname{sgn}(y_2) \quad (\text{III-18})$$

$$\zeta_e = \zeta + r / \sqrt{2\pi E[y_2^2]}$$

$$k_e = 1 \quad (\text{III-19})$$

不規則外力 $f(\tau)$ は、前節で仮定したように、次の形をとるものとする。

$$f(\tau) = e(\tau)n(\tau) \quad (\text{III-20})$$

ここで、 $e(\tau)$ は、確定包絡関数であり、 $n(\tau)$ は、平均値が0で相関関数 $R(v) = E[n(\tau)n(\tau+v)]$ を有するがウス性定常非白色性雑音である。包絡関数として、単位ステップ関数と下記の形の指数関数を考える。

$$e(\tau) = U(\tau) \quad (\text{III-21})$$

$$e(\tau) = (e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) / \max(e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) \quad (\text{III-22})$$

また、相関関数として、指数減衰調和関数を考える。

$$R(v) = R_0 e^{-\alpha|v|} \cos \rho v \quad (\text{III-23})$$

指数減衰定数 α と卓越振動数 ρ とを、それぞれ、線形系の減衰比 ζ と減衰固有振動数 $\sqrt{1-\zeta^2}$ に対する比として表わす。

$$A = \alpha/\zeta, \quad B = \rho/\sqrt{1-\zeta^2} \quad (\text{III-24})$$

式(III-20)を式(III-14)に代入して、式を変形すると、

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h_i(\tau_i - v) E[f(v)f(\tau)] dv \\ &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h_i(\tau_i - v) e(v)e(\tau) E[n(v)n(\tau)] dv \\ &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h_i(\tau_i - v) e(v)e(\tau) R(\tau - v) dv \\ &= e(\tau) \int_0^{\Delta\tau} h_i(u) e(\tau_i - u) R(\tau - \tau_i + u) du \\ \Psi_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \dot{h}_i(\tau_i - v) E[f(v)f(\tau)] dv \\ &= e(\tau) \int_0^{\Delta\tau} \dot{h}_i(u) e(\tau_i - u) R(\tau - \tau_i + u) du \end{aligned} \quad (\text{III-25})$$

ここで、 $u = \tau_i - v$ を用いている。式(III-15)中の積分項は、 $\Delta\tau = \tau - \tau_{n-1}$, $\tau_i = \tau$ 及び $h_i = h_n$ を式(III-25)に代入することによって評価される。

式(Ⅲ-9)、式(Ⅲ-21)または式(Ⅲ-22)、及び式(Ⅲ-23)を式(Ⅲ-25)に代入して積分演算を実行することにより、 Φ_i と Ψ_i は解析的に表現される。

(i) 単位ステップ包絡関数の場合

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \frac{R_0}{\omega_{ei}} e^{-\alpha(\tau-\tau_i)} \left\{ \cos \rho(\tau-\tau_i) I_1(-\alpha-\zeta_{ei}) \right. \\ &\quad \left. - \sin \rho(\tau-\tau_i) I_2(-\alpha-\zeta_{ei}) \right\} \\ \Psi_i &= R_0 e^{-\alpha(\tau-\tau_i)} \left\{ \cos \rho(\tau-\tau_i) I_3(-\alpha-\zeta_{ei}) \right. \\ &\quad \left. - \sin \rho(\tau-\tau_i) I_4(-\alpha-\zeta_{ei}) \right\} - \zeta_{ei} \Phi_i \quad (\text{Ⅲ-26})\end{aligned}$$

(ii) 指数包絡関数の場合

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \frac{R_0(e^{-a\tau} - e^{-b\tau})}{M^2 \omega_{ei}} e^{-\alpha(\tau-\tau_i)} \\ &\quad \times \left[e^{-a\tau_i} \left\{ \cos \rho(\tau-\tau_i) I_1(a-\alpha-\zeta_{ei}) - \sin \rho(\tau-\tau_i) I_2(a-\alpha-\zeta_{ei}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-b\tau_i} \left\{ \cos \rho(\tau-\tau_i) I_1(b-\alpha-\zeta_{ei}) - \sin \rho(\tau-\tau_i) I_2(b-\alpha-\zeta_{ei}) \right\} \right] \\ \Psi_i &= \frac{R_0(e^{-a\tau} - e^{-b\tau})}{M^2} e^{-\alpha(\tau-\tau_i)} \\ &\quad \times \left[e^{-a\tau_i} \left\{ \cos \rho(\tau-\tau_i) I_3(a-\alpha-\zeta_{ei}) - \sin \rho(\tau-\tau_i) I_4(a-\alpha-\zeta_{ei}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-b\tau_i} \left\{ \cos \rho(\tau-\tau_i) I_3(b-\alpha-\zeta_{ei}) - \sin \rho(\tau-\tau_i) I_4(b-\alpha-\zeta_{ei}) \right\} \right] \\ &\quad - \zeta_{ei} \Phi_i \quad (\text{Ⅲ-27})\end{aligned}$$

ここで、

$$M = \max(e^{-a\tau} - e^{-b\tau}), \quad \alpha = \zeta A, \quad \rho = \sqrt{1 - \zeta^2} B \quad (\text{III-28})$$

$$I_1(x) = \int_0^{\Delta\tau} e^{xu} \sin \omega_{ei} u \cos \rho u \, du$$

$$I_2(x) = \int_0^{\Delta\tau} e^{xu} \sin \omega_{ei} u \sin \rho u \, du$$

$$I_3(x) = \int_0^{\Delta\tau} e^{xu} \cos \omega_{ei} u \cos \rho u \, du$$

$$I_4(x) = \int_0^{\Delta\tau} e^{xu} \cos \omega_{ei} u \sin \rho u \, du \quad (\text{III-29})$$

式(III-29)の定積分は、解析的に表現することができる。その結果を付録Bに示す。

モーメント方程式の数値解析に際しては、ルンゲ・クッタ・ジル法を用いる。時刻列 t_0, t_1, t_2, \dots の時間間隔は、ルンゲ・クッタ・ジル法の時間きざみに等しく選ぶことにする。

III-4 シミュレーション

計算手法の有効性を明らかにするために、デジタル・シミュレーションによって系の応答を求める。シミュレーションの手順を以下に記述する。

式(III-23)によって表わされる相関関数をもつ雑音のパワースペクトルは、

$$S(\omega) = \frac{R_0}{\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + \rho^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \rho^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (\text{III-30})$$

である。この時、次のような、振幅に重みをつけた余弦関数の和によって、この雑音を生じさせることができる。⁽⁴⁰⁾

$$n(\tau) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(\omega_k \tau + \phi_k) \quad (\text{III-31})$$

ここで、 $a_k^2 = 4S(\omega_k)\Delta\omega$, $\Delta\omega = (\omega_u - \omega_l)/N$, $0 \leq \omega_l < \omega_u < \infty$, $\omega_k = \omega_l + (k - \frac{1}{2})\Delta\omega$, 及び ϕ_k は 0 と 2π の間で一様分布する独立な確率変数である。式(III-20)の形をした不規則外力の標本関数は、この雑音の標本関数と包絡関数の積によって形成した。発生雑音の標本間隔は、ルンゲ・クッタ・ジル法の時間きざみ $\Delta\tau = 0.1$ と等しくとった。また、 $B=1$ に対しては、 $\omega_l = 0$, $\omega_u = 2$, $N=200$, $B=2$ に対しては、 $\omega_l = 0$, $\omega_u = 4$, $N=400$ とした。

(41-44)

J. P. Burg によって提案された最大エントロピー法 (MEM) によって、発生雑音のスペクトル検定を行なった。パワースペクトルは、次式によって表わされる。

$$S(\omega) = \frac{\Delta\tau P_m}{\left| 1 + \sum_{n=1}^m \beta_n e^{i\omega n \Delta\tau} \right|^2} \quad (\text{III-32})$$

ここで、 β_n は予測誤差フィルタ、 P_m はフィルタの平均出力パワーである。

図Ⅲ-3は、発生雑音のスペクトル検定の結果を示す。周波数分解能を高めるために、 $B=1$ 及び $B=2$ に対して、それぞれ、 $\Delta\tau=1$ 及び $\Delta\tau=0.5$ とした。どちらの場合も、予測誤差フィルタの項数は35、データの数は1000である。MEMによって発生雑音から得られたスペクトル曲線と、理論的なスペクトル曲線が良く一致していることが分かる。

次に、応答解析におけるシミュレーション手法自体の精度を確かめるために、線形系の応答を求めた。図Ⅲ-4は、単位ステップ包絡関数に対する線形系のrms応答を示す。 $B=1$ の応答曲線は、外力の卓越振動数が系の減衰固有振動数に等しい場合、 $B=2$ の応答曲線は、2倍の場合に相当している。シミュレーションの結果は、厳密解と良く一致しており、本シミュレーションによる応答解析の有効性は明らかである。

Ⅲ-5 計算結果と考察

図Ⅲ-5及び図Ⅲ-6は、それぞれ、単位ステップ包絡関数に対するデュフイング系、及び乾性摩擦系のrms応答を示す。縦軸は、線形系の定常応答値 σ_{x0} によって無次元化してある。計算結果とシミュレーションによる結果は、良く一致を示しており、本手法の有効性は明らかである。破線で示した線形系の応答と比較すると、図Ⅲ-5では、時間の経過にしたがって、両者の間

に位相のずれが見られる。これは、非線形ばね特性のために、系の等価的な固有振動数が時間と共に変化するためと考えられる。図Ⅲ-6では、全体的に線形系の応答値よりも小さくなっているが、両者の位相関係はほぼ同様である。これは、乾性摩擦力のために、系の等価的な減衰比が増大したことによると考えられる。また、図Ⅲ-5(b)では、非線形系の応答が線形系の応答よりも大きくなる時間領域の存在していることが分かる。次に、どちらの系の場合にも、 $B=2$ に対する応答曲線は、過渡応答が定常応答値を越えるという意味でのオーバーシュート現象を顕著に示している。

図Ⅲ-7及び図Ⅲ-8は、それぞれ、指数包絡関数に対するデュフィング系、及び乾性摩擦系のrms応答を示す。指数包絡関数の最大値を1にしてあるので、ここでも、縦軸は、単位ステップ包絡関数の場合と同様に、 σ_{x_0} によって無次元化してある。指数包絡関数の具体的形状は、図Ⅲ-2と同じである。乾性摩擦系の場合には、初期の短い時間が経過する間、その等価線形系の性質が超過減衰となるので、それに対応する衝撃応答関数及び自由振動を表わす関数を用いて計算をすすめた。本手法による計算結果と、シミュレーションによる結果は、良好一致を示している。また、図Ⅲ-7(b)では、硬性ばね系である $\varepsilon=0.3$ の場合の応答が、線形系の応答よりも明らかに大きな値を示してい

ることが分かる。

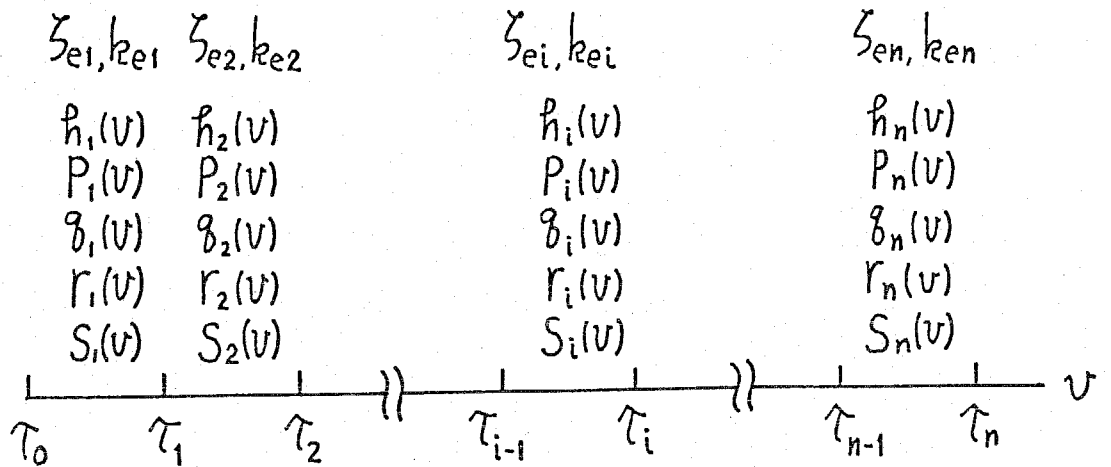
硬性ばね非線形系の応答特性を調べるために、定常応答値を検討することが有効と考えられる。定常応答値は、繰り返し演算⁽³⁹⁾を用いることにより計算される。図Ⅲ-9は、単位ステップ包絡関数に対するデュフィング系の定常応答と、3次非線形パラメータ ε との関係を示す。縦軸は、 B の値に対してそれぞれ、対応する線形系($\varepsilon=0$)の定常応答値 σ_{x_0} によって無次元化されている。 ε の増加に伴って漸減する $B=1$ の場合を除いて、 $\varepsilon=0$ 以外の点でピークをもち、硬性ばね系の応答が線形系の応答よりも大きくなることがあることを示している。このピークは、系の等価的な固有振動数が、外力の卓越振動数とほぼ等しくなるような ε の値で実現される。

Ⅲ-6 結言

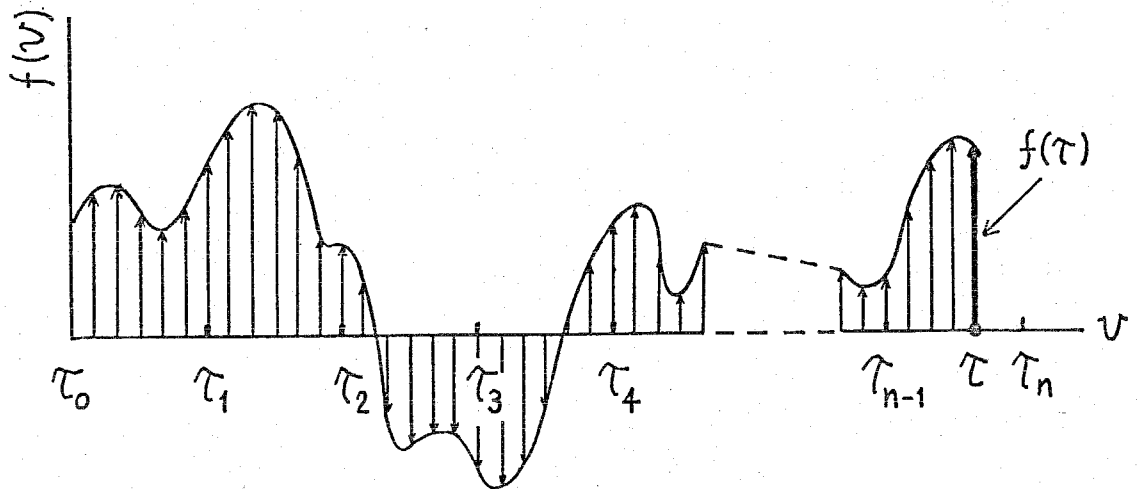
振幅変調非白色性励振をうける非線形1自由度系の非定常不規則応答を解析するために、基礎方程式の等価線形化とモーメント方程式の適用からなる近似手法を提案した。本手法では、等価線形係数が、時刻列の各区間内で一定値をとるものと仮定している。また、モーメント方程式の非斉次項となる応答と外力の相互関係は、漸化式を用いて評価される。

本手法の適用例として、デュフィング系及び乾性摩擦系の

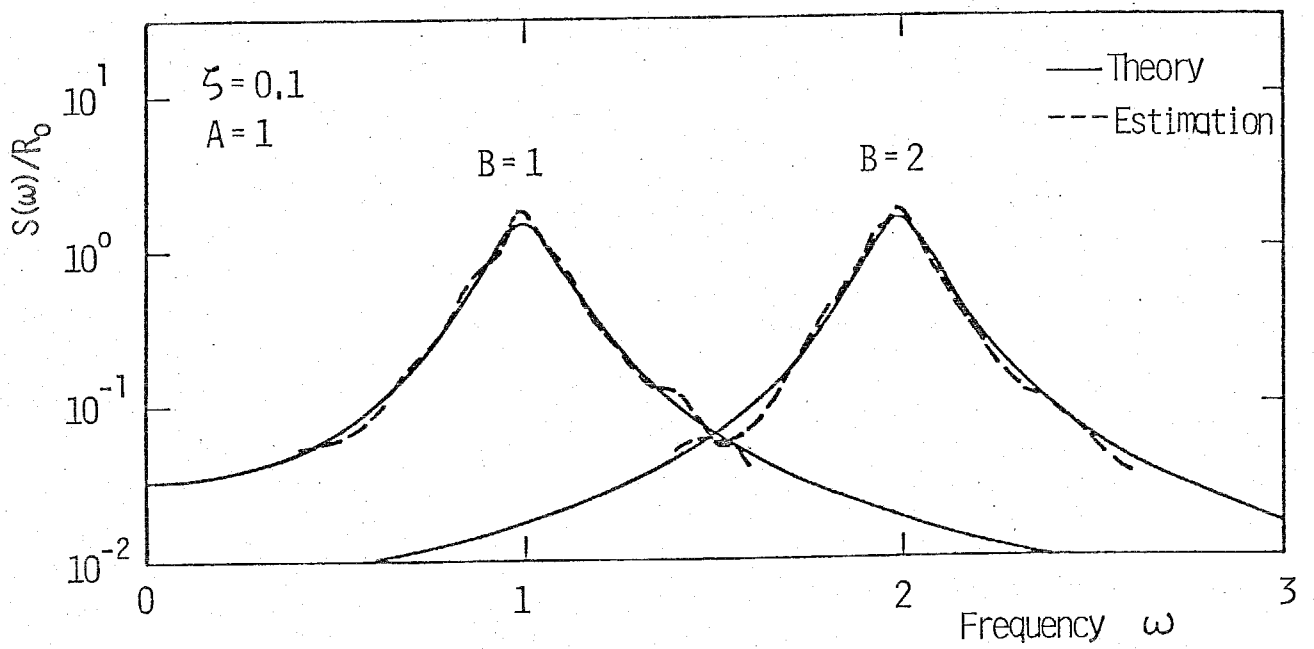
rms 応答を求めた。計算結果とシミュレーションの結果を比較することにより、本手法の有効性を明らかにした。また、硬性ばね非線形系の応答が、線形系の応答よりも大きくなることがあることを示した。



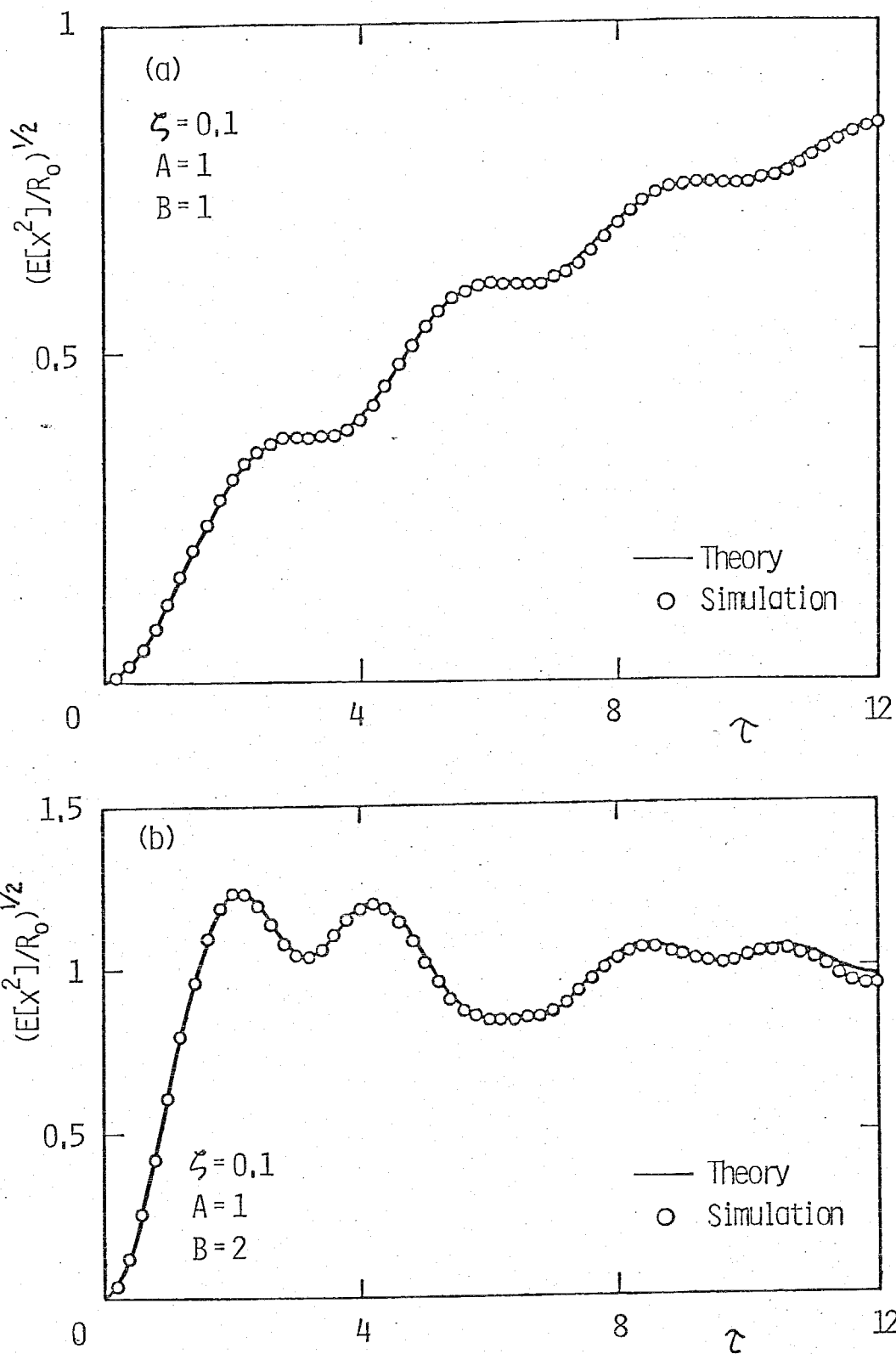
図Ⅲ-1 時刻列、等価線形係数、衝撃応答関数、
及び自由振動の解を表わす関数



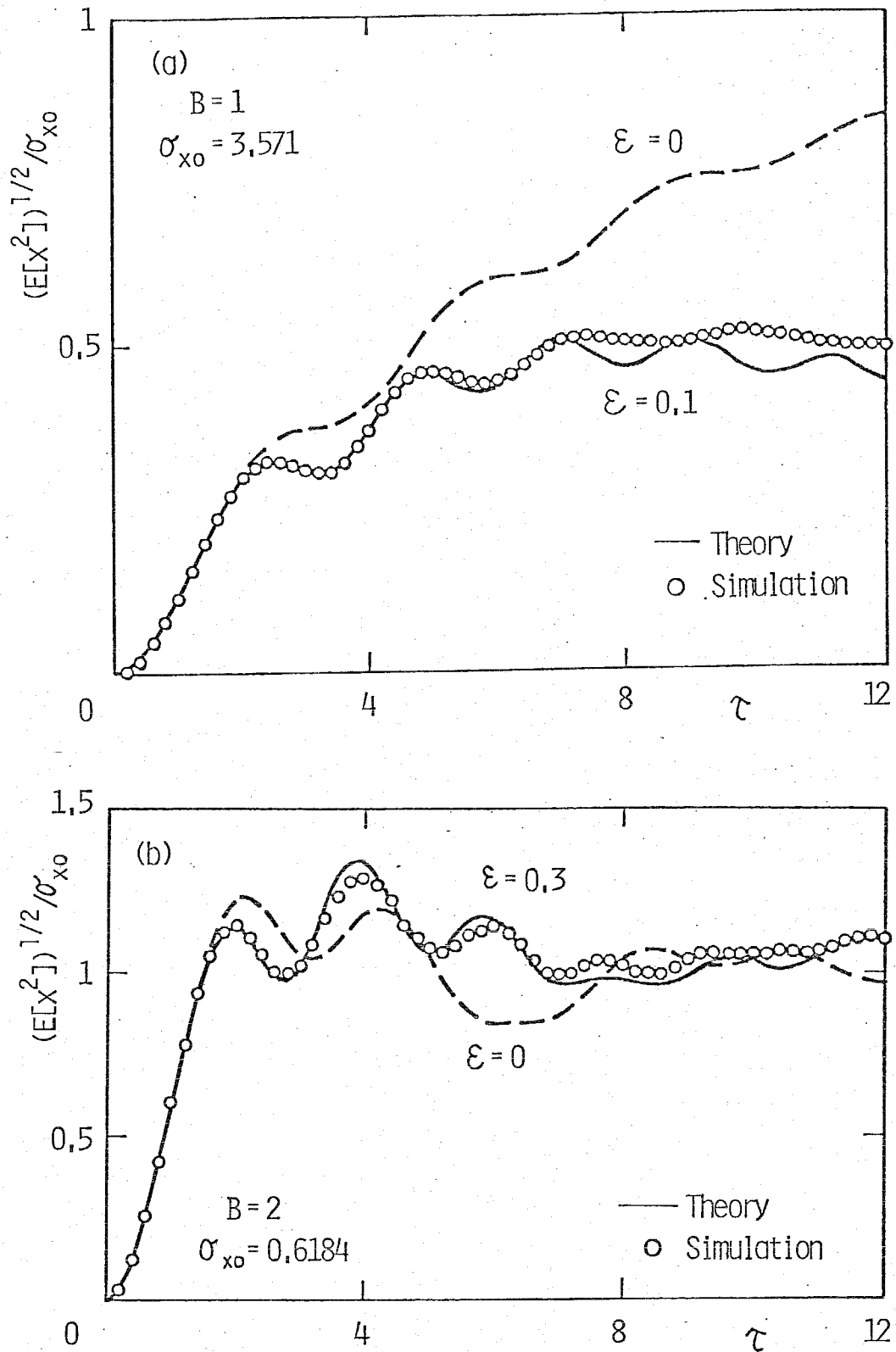
図Ⅲ-2 $f(v)$ 及 $v'' f(\tau)$



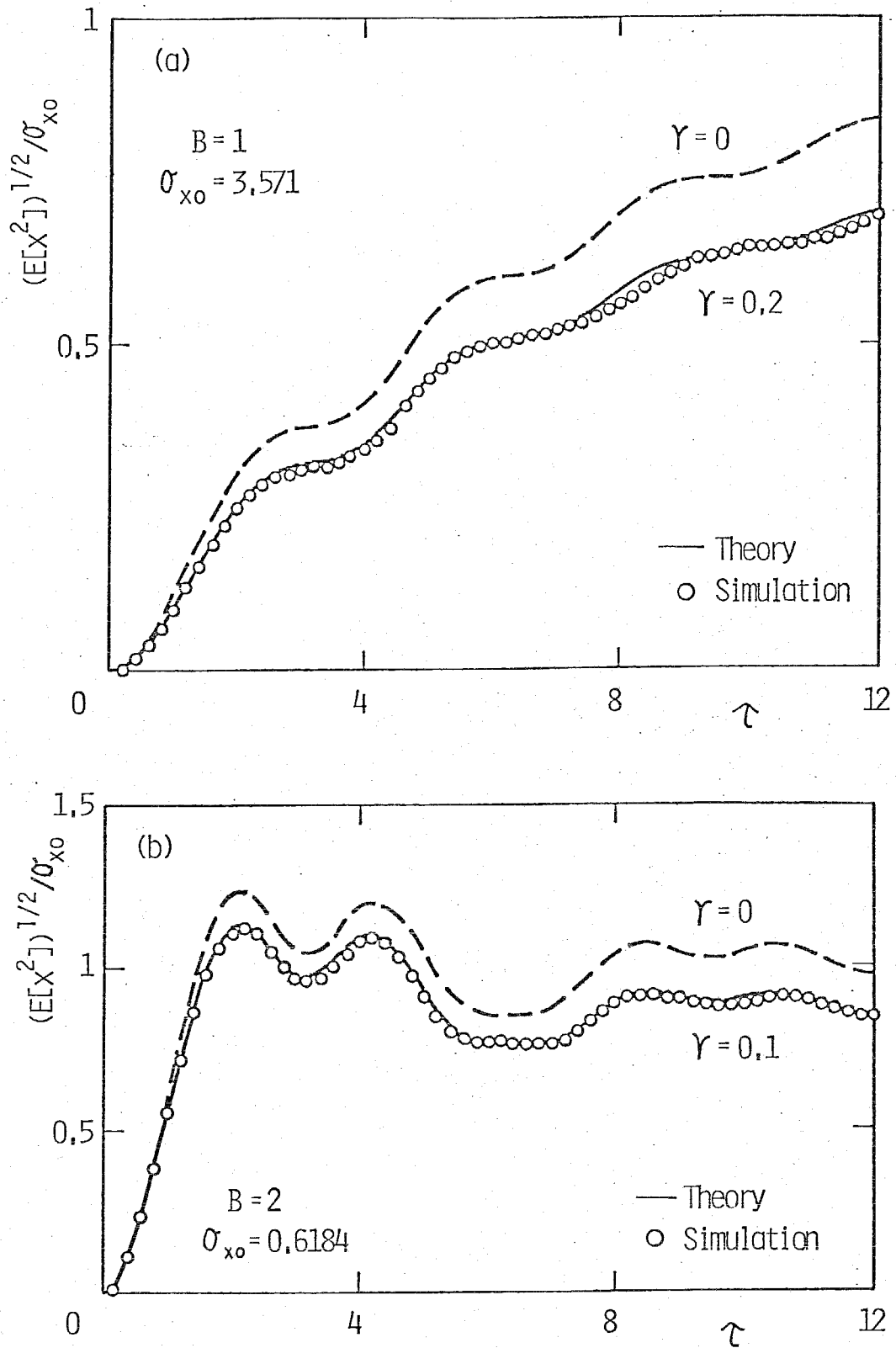
図III-3 発生雑音のパワースペクトルの検定



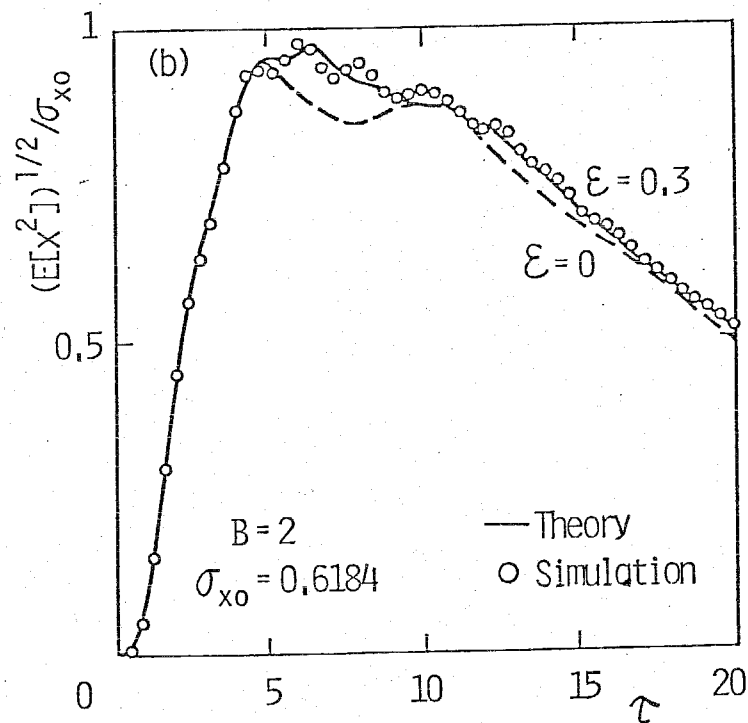
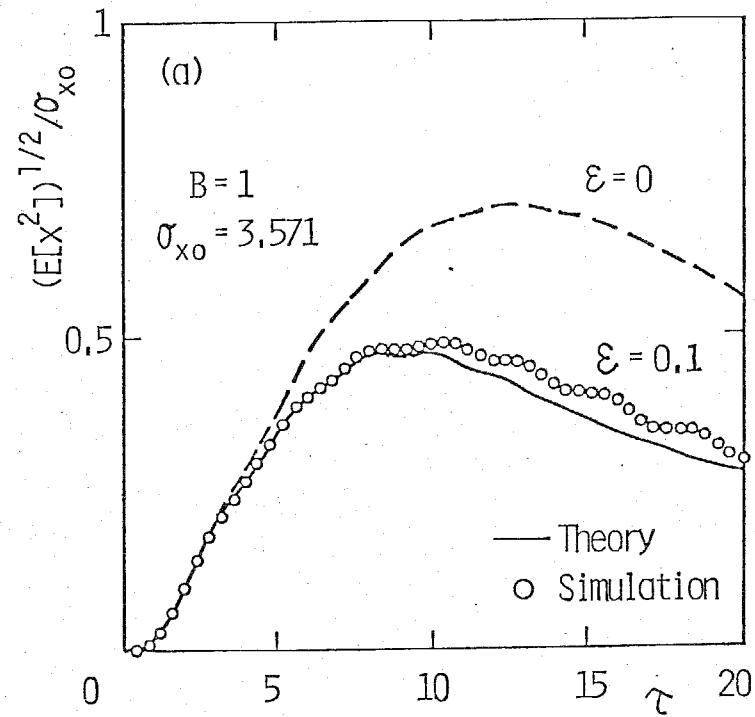
図Ⅲ-4 線形系の変位のrms応答
 (単位ステップ包絡関数)



図III-5 デュフィング系の変位のrms応答
 (単位ステップ包絡関数)
 $\zeta=0.1, R_0=1, A=1$



図Ⅲ-6 乾性摩擦系の変位のrms応答
(単位ステップ包絡関数)
 $\zeta=0.1, R_0=1, A=1$



図Ⅲ-7 デュフィング系の変位のrms応答
(指数包絡関数)
 $\zeta=0.1, R_0=1, A=1$

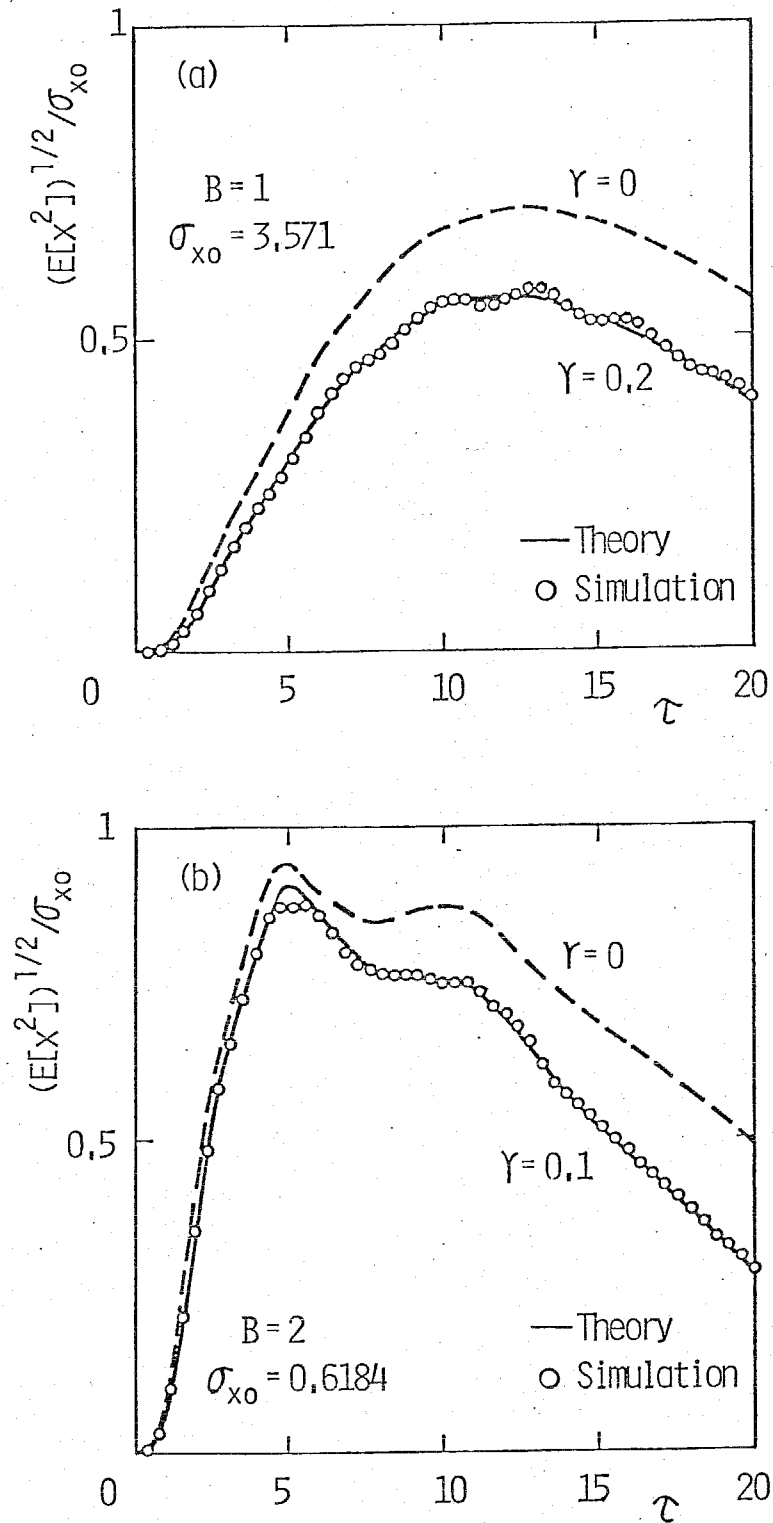
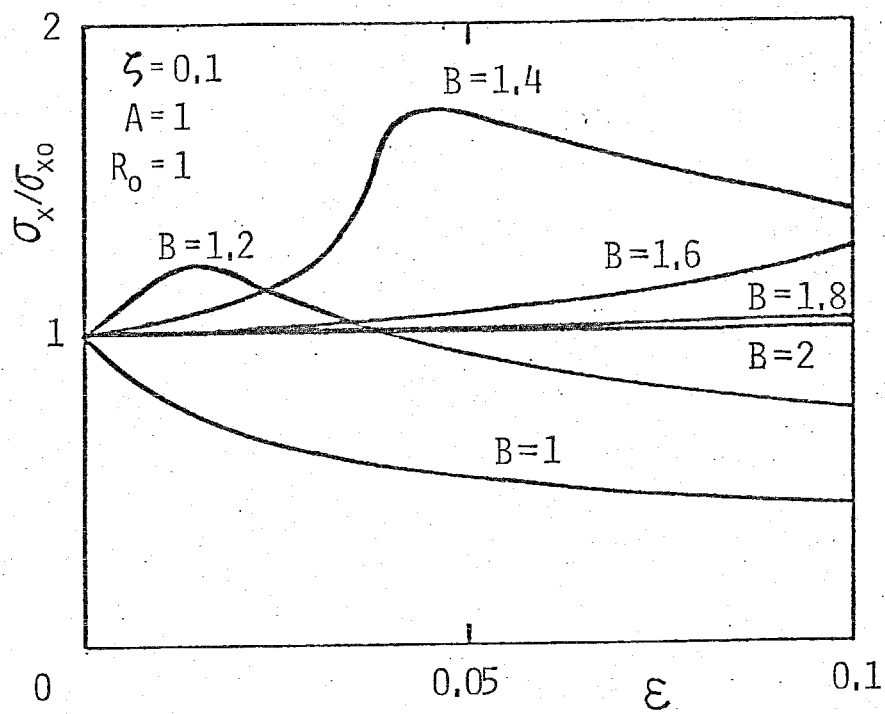


図 III-8 乾性摩擦系の変位の rms 応答
(指数包絡関数)
 $\zeta=0.1, R_0=1, A=1$



図Ⅲ-9 デュフィング系の定常応答と
3次非線形パラメータ ε との関係
(単位ステップ包絡関数)

IV章 非対称非線形ばね特性を有する1自由度系の応答解析

IV-1 緒言

本章では、非対称非線形ばね特性を有する1自由度系をとりあげ、非定常不規則応答解析を行なう。非対称非線形特性を有する系は、平均値が0のガウス性不規則入力をうける場合でも、その応答の平均値が0にならないという性質によって、特徴づけることができる。非白色性励振の場合には、応答平均値のずれを、平均値が変動する等価外力から評価する等価線形化法を提案し、III章で詳述した近似解析手法を適用して非定常応答を求める。本手法の有効性を確かめるために、解析結果とシミュレーションの結果とを比較・検討する。白色性励振の場合にも同じ手法を用いることが可能であるが、この場合には応答のマルコフ性を利用する別の手法を適用するのが便利である。

IV-2 カ学系のモデルとその非対称非線形特性

次の運動方程式で記述される非対称非線形1自由度系を考える。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \chi + \eta x^2 + \varepsilon x^3 = f(\tau) \quad (\text{IV-1})$$

ここで、 \cdot は無次元化時間 τ に関する微分、 η 及び ε は、それぞれ、2次及び3次非線形パラメータ、 $f(\tau)$ は不規則外力であ

る。不規則外力の具体的な形は、次式で表わされるものとする。

$$f(\tau) = e(\tau)n(\tau) \quad (\text{IV-2})$$

ここで、 $e(\tau)$ は確定包絡関数であり、 $n(\tau)$ は平均値が0で相関関数 $R(\nu) = E[n(\tau)n(\tau+\nu)]$ を有するガウス性定常雑音である。包絡関数として、単位ステップ関数と下記の形の指数関数を考える。

$$e(\tau) = U(\tau) \quad (\text{IV-3})$$

$$e(\tau) = (e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) / \max(e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) \quad (\text{IV-4})$$

非白色性励振を考える場合には、雑音の自乗平均値 $R(0)$ を、単位ステップ包絡関数に対する線形系の変位応答の定常分散を1とするように定める。白色性励振の場合には、雑音の強度を、同様にして定める。系の減衰及び非線形性は小さく、また、系は初期状態で静止しているものとする。

非対称非線形ばね特性を図IV-1に示す。3次非線形パラメータ ε を0.03とし、2次非線形パラメータ η について3通りの曲線を図示した。この場合、 η は非対称性を表わすパラメータになっており、 η の値の絶対値が大きいく程、強い非対称性を示している。 η の値が0の場合は、デュフィング系に帰着する。白色性励振の場合の定常変位応答の平均値 m と標準偏差 σ が、

変位、速度に関する定常確率密度関数の厳密解(後述 IV-3-2)を用いて得られることを利用して、図中の各曲線は、各々の値に対して $(m-3\sigma, m+3\sigma)$ の範囲を表わしている。したがって、定常変位応答の標本関数の殆どが、この範囲の値をとるものと考えられる。

IV-3 解析

IV-3-1 非白色性励振に対する解析

(i) 等価外力を含む等価線形化法

応答の平均値が 0 にならないうことに着目して、運動方程式(IV-1)の代わりに、次のように等価線形化された運動方程式を考える。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + k_e(x - x_e) = f \quad (\text{IV-5})$$

ここで、 k_e は、等価線形剛性係数であり、積 $k_e x_e$ は、等価的な復元力のずれを表わす。この $k_e x_e$ を、1つの等価係数 a_e とみなすと、式(IV-5)は次のように表わされる。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + k_e x = f_e, \quad f_e = f + a_e, \quad a_e = k_e x_e \quad (\text{IV-6})$$

ここで、 f_e は、元の外力 f と等価的な復元力のずれ a_e との和で表わされる等価外力である。その性質は次のとおりである。

$$E[f_e(\tau)] = a_e(\tau) \quad (\text{IV-7})$$

$$E[f_e(\tau)f_e(\tau+v)] = e(\tau)e(\tau+v)R(v) + a_e(\tau)a_e(\tau+v) \quad (\text{IV-8})$$

したがって、式(IV-6)は、時間と共に変動する平均値をもつ等価外力を考慮した等価線形化法を、直接原方程式(IV-1)に施して得られたものと考えることができ。以下では、状態変数 $y_1 = x$ 、 $y_2 = \dot{x}$ を用いて、式(IV-6)に基づいた解析をすすめる。

等価係数 k_e と a_e を、式(IV-1)と式(IV-6)の間の自乗平均誤差を最小にするように決める。応答のガウス性を仮定すると、状態変数の高次モーメントは、1次と2次のモーメントによって表わすことができる。⁽³⁹⁾ たとえば、3次と4次のモーメントに着目すると次のようになる。

$$E[y_j y_k y_l] = -2E[y_j]E[y_k]E[y_l] + \sum E[y_j]E[y_k y_l]$$

$$E[y_j y_k y_l y_m] = -2E[y_j]E[y_k]E[y_l]E[y_m] + \sum E[y_j y_k]E[y_l y_m] \quad (\text{IV-9})$$

等価係数 k_e と a_e は、式(IV-9)を用いることによって、応答の1次及び2次モーメントの関数として表わされる。

$$k_e = 1 + 2\eta E[y_1] + 3\varepsilon E[y_1^2]$$

$$a_e = \eta \{ 2(E[y_1])^2 - E[y_1^2] \} + 2\varepsilon (E[y_1])^3 \quad (\text{IV-10})$$

線形化方程式(IV-6)より、次の1次及び2次モーメント方程式

が得られる。

$$\dot{E}[y_1] = E[y_2]$$

$$\dot{E}[y_2] = -2\zeta E[y_2] - k_e E[y_1] + E[fe] \quad (\text{IV-11})$$

及び

$$\dot{E}[y_1^2] = 2E[y_1 y_2]$$

$$\dot{E}[y_1 y_2] = E[y_2^2] - 2\zeta E[y_1 y_2] - k_e E[y_1^2] + E[y_1 fe]$$

$$\dot{E}[y_2^2] = -4\zeta E[y_2^2] - 2k_e E[y_1 y_2] + 2E[y_2 fe] \quad (\text{IV-12})$$

このモーメント方程式を解く時には、応答と等価外力の相互相関 $E[y_1 fe]$ と $E[y_2 fe]$ を評価する必要がある。この時、これらの項が初期時刻から着目時刻までの履歴に依存すること、及び等価係数が時間と共に変動することを考慮して計算しなければならない。

(ii) 応答計算の手順

平均値が時間と共に変動する等価外力の性質を十分に考慮しつつ、三章で提案した非定常応答を求めるための近似解析手法を適用して、応答計算をすすめる。以下に、応答の1次及び2次モーメントを求める手順を具体的に述べる。計算手順の簡単なフローチャートを図IV-2に示す。

経過時間に対して、時刻列 t_0, t_1, t_2, \dots をとる時、等価係数

k_e と a_e は、各時間区間 $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ の中で次のように一定値をとるものとする。

$$\begin{aligned} k_{ei} &= k_e(\tau) = k_e(\tau_{i-1}) \\ a_{ei} &= a_e(\tau) = a_e(\tau_{i-1}), \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i) \end{aligned} \quad (\text{IV-13})$$

これは、この区間における k_e と a_e の値が、時刻 $\tau = \tau_{i-1}$ における変位応答の1次及び2次モーメントの値を式(IV-10)に代入することによって得られることを意味している。

時刻 $\tau = \tau_i$ における変位と速度の平均応答は、式(IV-11)を解くことによって、時刻 $\tau = \tau_{i-1}$ における応答から求めることができる。本1自由度系では、式(IV-13)の仮定のもとで、式(IV-11)を容易に解くことができ、次のようになる。

$$\begin{aligned} E[y_1(\tau_i)] &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h_i(\tau_i - \nu) E[f_e(\nu)] d\nu + E[y_1(\tau_{i-1})] p_i(\Delta\tau) + E[y_2(\tau_{i-1})] g_i(\Delta\tau) \\ &= a_{ei} \int_0^{\Delta\tau} h_i(u) du + E[y_1(\tau_{i-1})] p_i(\Delta\tau) + E[y_2(\tau_{i-1})] g_i(\Delta\tau) \\ E[y_2(\tau_i)] &= a_{ei} \int_0^{\Delta\tau} \dot{h}_i(u) du + E[y_1(\tau_{i-1})] r_i(\Delta\tau) + E[y_2(\tau_{i-1})] s_i(\Delta\tau) \end{aligned} \quad (\text{IV-14})$$

ここで、式の変形のために、式(IV-7)と新しい変数 $u = \tau_i - \nu$ を用いた。また、 $\Delta\tau = \tau_i - \tau_{i-1}$ 、 h_i は区間 $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ における衝撃応答関数、 p_i, g_i, r_i, s_i は同じ区間における自由振動の解を表す関数である。具体的な関数形は、式(III-9)(III-10)に示されている。

式(IV-14)の中の積分項は次のように計算される。

$$\int_0^{\Delta\tau} h_i(u) du = \frac{1}{k_{ei}} \left\{ 1 - e^{-\zeta\Delta\tau} \left(\frac{\zeta}{\omega_{ei}} \sin\omega_{ei}\Delta\tau + \cos\omega_{ei}\Delta\tau \right) \right\}$$

$$\int_0^{\Delta\tau} h_i(u) du = \frac{1}{\omega_{ei}} e^{-\zeta\Delta\tau} \sin\omega_{ei}\Delta\tau, \quad \omega_{ei} = \sqrt{k_{ei} - \zeta^2} \quad (\text{IV-15})$$

次に、時刻 $\tau = \tau_i$ における応答の2次モーメントは、式(IV-12)をルンゲ・クッタ・ジル法を用いて数値計算することにより、時刻 $\tau = \tau_{i-1}$ における応答の2次モーメントから求めることができる。モーメント方程式(IV-12)の非斉次項となる $E[y_1 f_e]$ と $E[y_2 f_e]$ は、III章と同様に、漸化式を用いて計算される。ただし、本章では、元の外力 f の代わりに等価外力 f_e を考慮する必要がある。したがって、 $E[y_1 f_e]$ と $E[y_2 f_e]$ を評価する漸化式は、式(III-12) ~ (III-15) の中の $f(\tau)$ を $f_e(\tau)$ に置換することによって得られる。等価外力 $f_e(\tau)$ の相関関数は式(IV-8)で表わされるので、式(III-14)に相当する積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h_i(\tau_i - v) E[f_e(v) f_e(\tau)] dv \\ &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h_i(\tau_i - v) E[f(v) f(\tau)] dv + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h_i(\tau_i - v) a_e(v) a_e(\tau) dv \\ &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} h_i(\tau_i - v) E[f(v) f(\tau)] dv + a_{ei} a_{en} \int_0^{\Delta\tau} h_i(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \dot{h}_i(\tau_i - \nu) E[f_e(\nu) f_e(\tau)] d\nu \\ &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \dot{h}_i(\tau_i - \nu) E[f(\nu) f(\tau)] d\nu + \Delta e_i \Delta e_n \int_0^{\Delta \tau} \dot{h}_i(u) du \end{aligned} \quad (IV-16)$$

ここで、式の変形のために $u = \tau_i - \nu$ を用いている。式(IV-16)右辺第1項は、式(III-25)に等しく、計算結果が式(III-26)(III-27)に示されている。等価外力の性質に起因して現われた式(IV-16)右辺第2項の積分は、式(IV-15)によって評価される。こうして、本漸化式による計算をすすめることができる。ルンゲ・クッタ・ジル法の1つの時間きざみに含まれる4つのサブステップも含めて、異なる着目時刻に対しては常に、初期時刻から着目時刻まで本漸化式の計算を繰り返す必要のあることを、ここでも指摘しておきたい。

時刻 $\tau = \tau_0$ における初期条件が与えられると、図IV-2に示した手順にしたがって、応答の1次及び2次モーメントを求めることができる。

(iii) 定常応答値

応答の1次及び2次モーメントの定常応答値は、以下の手順にしたがって求められる。まず、モーメント方程式(IV-11)(IV-12)の微分項を0とし、 $\tau \rightarrow \infty$ における $E[y_1 f_e]$ と $E[y_2 f_e]$ の値を求めることによって代数方程式が得られる。この方程式は、応答に

依存する等価係数 k_e と a_e を含んでいるので、式(IV-10)を含めた連立方程式を、繰り返し演算⁽³⁹⁾を用いて解くことにより、定常応答値が求められる。

IV-3-2 白色性励振に対する解析

白色性励振に対する応答解析では、IV-3-1で記述した手法を用いるよりも、応答のマルコフ性を利用する手法を用いる方が便利である。運動方程式(IV-1)は、確率微分方程式^(1,2)として次のように表わされる。

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt \\ dy_2 &= A(y_1, y_2) dt + e(t) dW_t \end{aligned} \quad (\text{IV-17})$$

ここで、 $A(y_1, y_2) = -2\zeta y_2 - (y_1 + \eta y_1^2 + \varepsilon y_1^3)$ 、また、 W_t は 1 次元ウィーナー過程を表わし、次の性質を有する。

$$\begin{aligned} E[dW_t] &= 0 \\ E[(dW_t)^2] &= 4\zeta dt \end{aligned} \quad (\text{IV-18})$$

ここで、 4ζ は、IV-2で述べたように、線形系の変位応答の定常分散を 1 とするように決めた雑音の強度である。方程式(IV-17)の解に関連した任意次数のモーメントに関する微分方程式は、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \dot{E}[y_1^n y_2^m] &= n E[y_1^{n-1} y_2^{m+1}] + m E[y_1^n y_2^{m-1} A(y_1, y_2)] \\ &\quad + 2m(m-1) \zeta \{e(\tau)\}^2 E[y_1^n y_2^{m-2}] \end{aligned} \quad (\text{IV-19})$$

ここで、 y_1 あるいは y_2 のべき指数が負になるモーメントの項は0とする。

応答のガウス性を仮定すると、式(IV-9)を用いることによつて、方程式(IV-19)は、応答の1次及び2次モーメントに関する閉じた微分方程式系を与える。これらは次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \dot{E}[y_1] &= E[y_2] \\ \dot{E}[y_2] &= -E[y_1] - 2\zeta E[y_2] - \eta E[y_1^2] - \varepsilon \{3 E[y_1] E[y_1^2] - 2(E[y_1])^3\} \\ \dot{E}[y_1^2] &= 2E[y_1 y_2] \\ \dot{E}[y_1 y_2] &= E[y_2^2] - E[y_1^2] - 2\zeta E[y_1 y_2] - \eta \{3 E[y_1] E[y_1^2] - 2(E[y_1])^3\} \\ &\quad - \varepsilon \{3(E[y_1^2])^2 - 2(E[y_1])^4\} \\ \dot{E}[y_2^2] &= -2E[y_1 y_2] - 4\zeta E[y_2^2] \\ &\quad - 2\eta \{2 E[y_1] E[y_1 y_2] + E[y_1^2] E[y_2] - 2(E[y_1])^2 E[y_2]\} \\ &\quad - 2\varepsilon \{3 E[y_1^2] E[y_1 y_2] - 2(E[y_1])^3 E[y_2]\} + 4\zeta \{e(\tau)\}^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-20})$$

これらをガウスモーメント方程式と呼ぶことにする。応答の1次及び2次モーメントは、式(IV-20)をルンゲ・クッタ・ジル法を用いて数値計算することにより求められる。式(IV-20)は、白色性励振に対する線形化方程式(IV-6)から、上記の方法でまず

1次及び2次モーメントに関する微分方程式を導き、次に式(IV-10)を代入して整理することによつても得られる。

応答のガウス性を仮定しない場合には、関数 $A(y_1, y_2)$ が非線形であるために、式(IV-19)右辺は、常に左辺のモーメントの次数よりも高次のモーメントを含むことになる。したがつて、式(IV-19)は微分方程式の無限系を構成する。計算に際しては、閉じた方程式系を得るために、適当なモーメント打ち切り法⁽²⁷⁻²⁹⁾を施す必要がある。

定常応答値は、モーメント方程式の微分項を0として得られる非線形代数方程式を解くことにより簡単に得られる。非白色性励振の場合と異なり、繰り返し計算をする必要はない。

ところで、系の非線形性が剛性力のみに含まれている場合は、変位・速度に関する定常確率密度関数の厳密解が、フッカー・プランク方程式⁽¹⁷⁾を解くことによつて得られる。そこで、この定常確率密度関数を用いて期待値演算を行なうことにより、定常応答値を求めることができる。本章の非対称非線形ばね系に対する定常確率密度関数は、次のようになる。

$$P(y_1, y_2) = C \exp \left\{ - \left(\frac{y_1^2}{2} + \frac{\eta y_1^3}{3} + \frac{\varepsilon y_1^4}{4} \right) - \frac{y_2^2}{2} \right\} \quad (\text{IV-21})$$

ここで、 C は正規化定数である。

IV-4 計算結果と考察

IV-4-1 非白色性励振に対する応答

非白色性雑音の例として、次のような指数減衰調和相関関数を有する雑音を取りあげる。

$$R(\omega) = R_0 e^{-\alpha|\omega|} \cos p\omega \quad (\text{IV-22})$$

ここで、 R_0 は、IV-2で述べたように、線形系の変位応答の定常分散(式(II-26))を1とするように定める。また、III章と同様にして、指数減衰定数 α と卓越振動数 p とを、無次元数 $A = \alpha/\zeta$ と $B = p/\sqrt{1-\zeta^2}$ として表わすことにする。図IV-3は、計算に用いた入力雑音のパワースペクトルを示す。 $B=1$ 及び $B=2$ は、入力の卓越振動数が線形系の減衰固有振動数に等しい場合、及び2倍の場合に相当している。

図IV-4及び図IV-5は、それぞれ、単位ステップ包絡関数及び指数包絡関数に対する平均応答と分散応答を示す。指数包絡関数の具体的形状は、図II-2と同じである。線形系の変位応答の定常分散 $\sigma_{x_0}^2$ を1としていることから、縦軸の平均値及び分散は、それぞれ、 σ_{x_0} 及び $\sigma_{x_0}^2$ によって無次元化されていることになる。本手法による計算結果とシミュレーション(III章参照)による結果は、良好一致を示している。図から明らかのように、平均応答の現われることが、本非対称非線形系の重要な特徴で

ある。図IV-4(b)の $B=2$ に対する応答曲線は、オーバーシュートを示している。しかし、図IV-4(a)の $B=1$ に対する応答曲線はこれを示していない。この理由は次のように考えられる。線形系の応答を扱ったII章の考察において、系の固有振動数と入力の卓越振動数がほぼ等しい場合には、系の応答曲線がオーバーシュート現象を示さないことが明らかにされている。このことを考慮すると、図IV-4(a)の場合には、系の非線形性のために時間と共に変化している系の等価的な固有振動数と、入力の卓越振動数との差が、オーバーシュートを起こす程大きくなることはないものと考えられる。

図IV-6は、単位ステップ包絡関数の場合の定常平均値及び定常分散と、2次非線形パラメータ η との関係を示す。定常分散については、 B をパラメータにして応答曲線を描いた。いずれの場合にも、 $\eta = -0.222$ の点で1となることを、計算によって確かめた。定常平均値については、 $B=1$ から $B=2$ の範囲で、 B の値によらず殆ど同様の応答曲線となるので一例を示した。2次非線形パラメータ η の値の絶対値が大きくなる程、即ち非対称性が大きくなる程、応答平均値も大きくなることが分かる。

IV-4-2 白色性励振に対する応答

図IV-7及び図IV-8は、それぞれ、単位ステップ包絡関数及び

指数包絡関数に対する平均応答と分散応答を示す。(a)図と(b)図は、それぞれ、二次非線形パラメータ η の小さい場合($\eta=-0.1$)と大きい場合($\eta=-0.2$)に相当する。ガウスモーメント方程式による計算結果と、シミュレーションによる結果は、図IV-7(b)の分散応答では少し差が見られるが、他の場合には良い一致を示している。

図IV-9は、単位ステップ包絡関数の場合の定常平均値及び定常分散と、二次非線形パラメータ η との関係を示す。図の中で、定常確率密度関数の厳密解(式(IV-21))を用いて得られた結果と、ガウスモーメント方程式から得られた結果を比較している。以上の結果より、二次非線形パラメータ η が過大にならない限り、本計算手法は、平均及び分散応答に対して有効であると考えられる。

図IV-10は、シミュレーションの標本関数から得られた単位ステップ包絡関数に対する変位応答のヒストグラムを示す。図中、 m と σ の値は平均値と標準偏差を表わす。分布の非対称性と、平均値の原点からのずれが、明らかに示されている。そこで、応答のガウス分布からのずれを調べるために、歪度 K_3 と尖度 K_4 を求めることにする。

$$K_3 = \frac{E[(X-E[X])^3]}{\{E[(X-E[X])^2]\}^{3/2}}, \quad K_4 = \frac{E[(X-E[X])^4]}{\{E[(X-E[X])^2]\}^2} \quad (IV-23)$$

ガウス分布に対しては、常に $k_3=0$, $k_4=3$ となる。図IV-11は、定常状態における歪度 k_3 と尖度 k_4 を示す。式(IV-19)を利用した6次モーメント法では、最も単純なモーメント打ち切り法として、不可避免的に現われる7次及び8次モーメントを0とした。ガウスモーメント法では、応答のガウス性の仮定により、2次非線形パラメータの値によらず常に、 $k_3=0$, $k_4=3$ である。定常確率密度関数の厳密解を用いて計算した結果と比較すると、特に非対称性を表わす尺度である歪度に関して、6次モーメント法による解が比較的良い近似を与えることを示している。

IV-5 結言

非対称非線形ばね特性を有する1自由度系の非定常不規則応答解析を行なった。

非白色性励振の場合には、時間と共に変動する平均値をもつ等価外力を考慮した等価線形化法を提案し、III章と同様の近似解析手法を適用した。系の応答平均値のずれは、等価外力の変動平均値から評価することができる。平均応答と分散応答について、計算結果とシミュレーションの結果を比較することにより、本手法の有効性を明らかにした。また、系の非対称性の度合いが強い程、応答平均値が大きくなることを示した。

白色性励振の場合、平均応答と分散応答については、非対称

性が過大にならない限り、ガウスモーメント法によって十分な精度が得られる。応答の歪度・尖度については、高次モーメント法によって比較的良い結果が得られる。

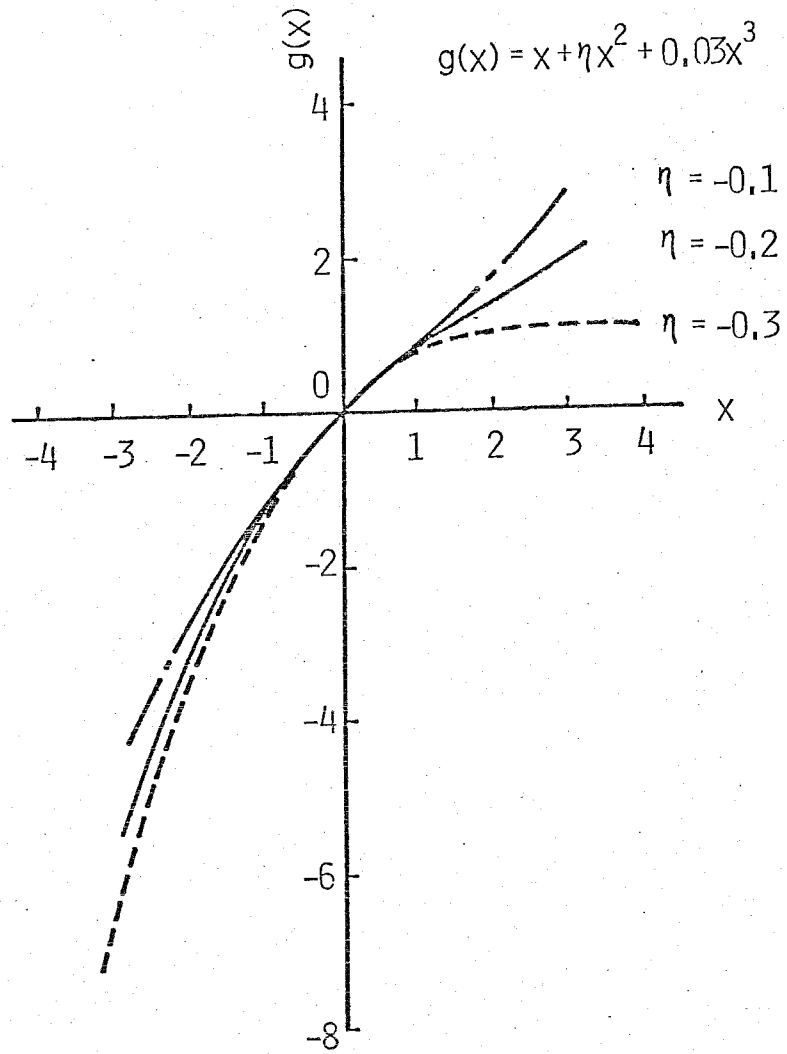


図 IV-1 非対称非線形ばね特性

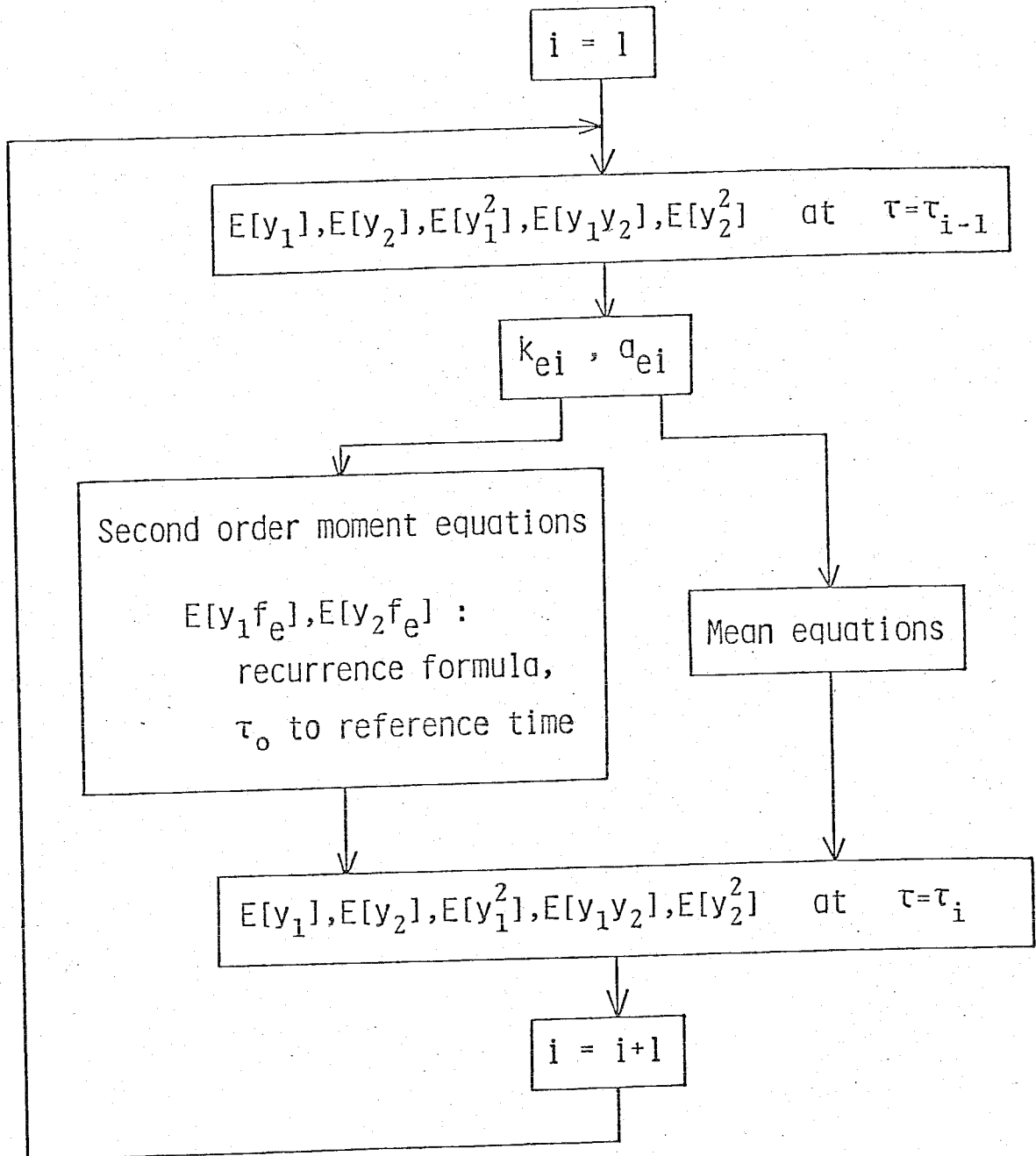
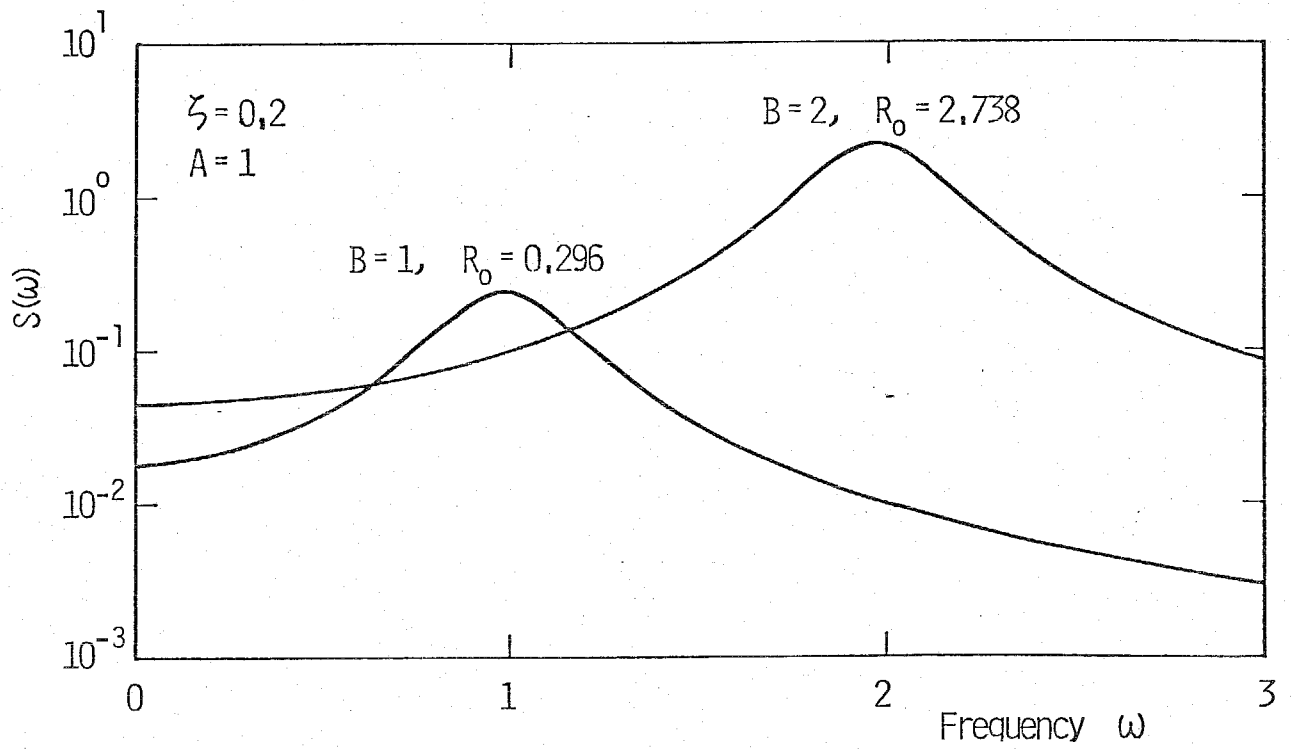
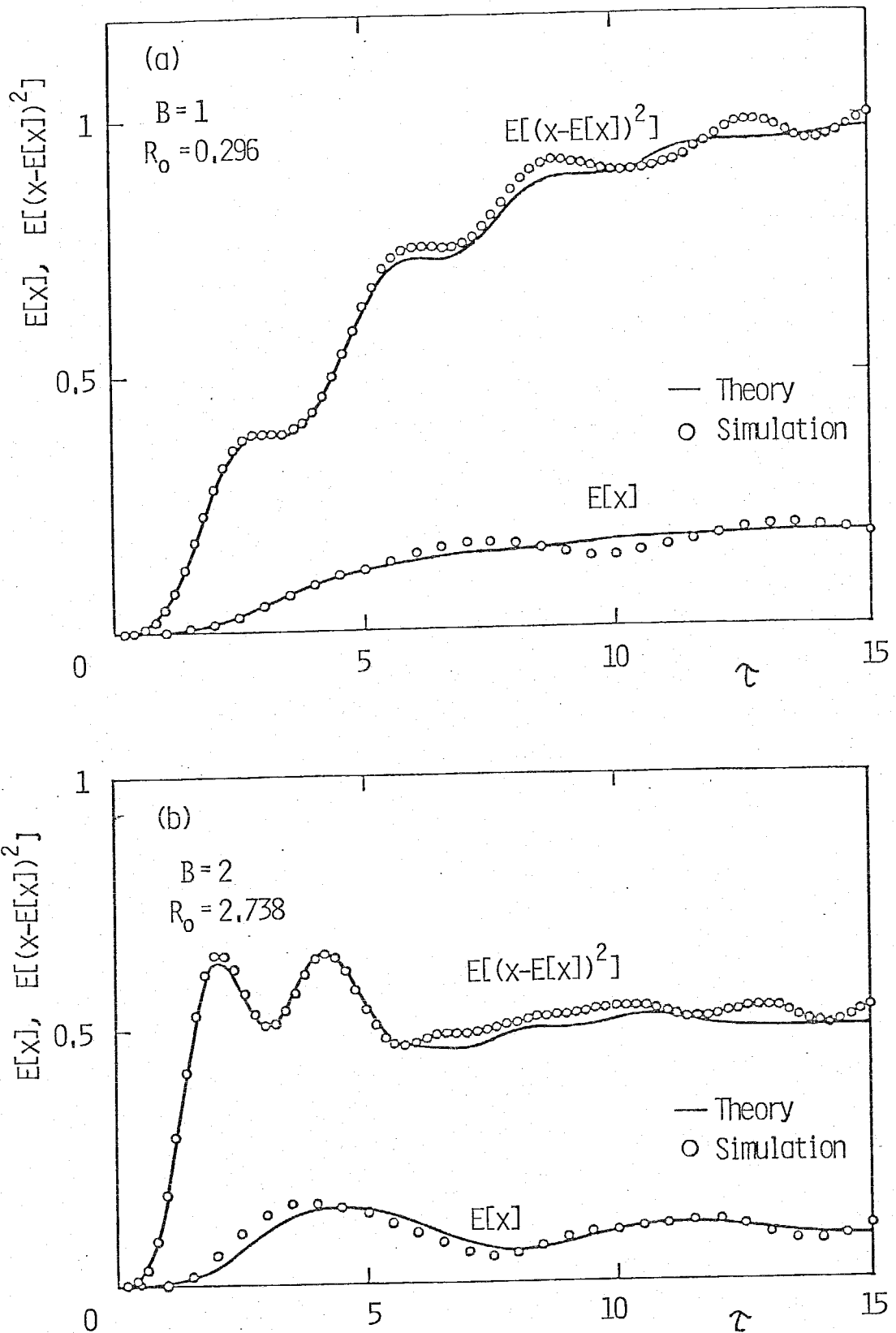


図 IV-2 応答計算のフローチャート



図IV-3 入力雑音のパワースペクトル



図IV-4 変位の平均応答と分散応答
 (非白色性励振, 単位ステップ包絡関数)
 $\zeta=0.2$, $\eta=-0.2$, $\varepsilon=0.03$, $A=1$

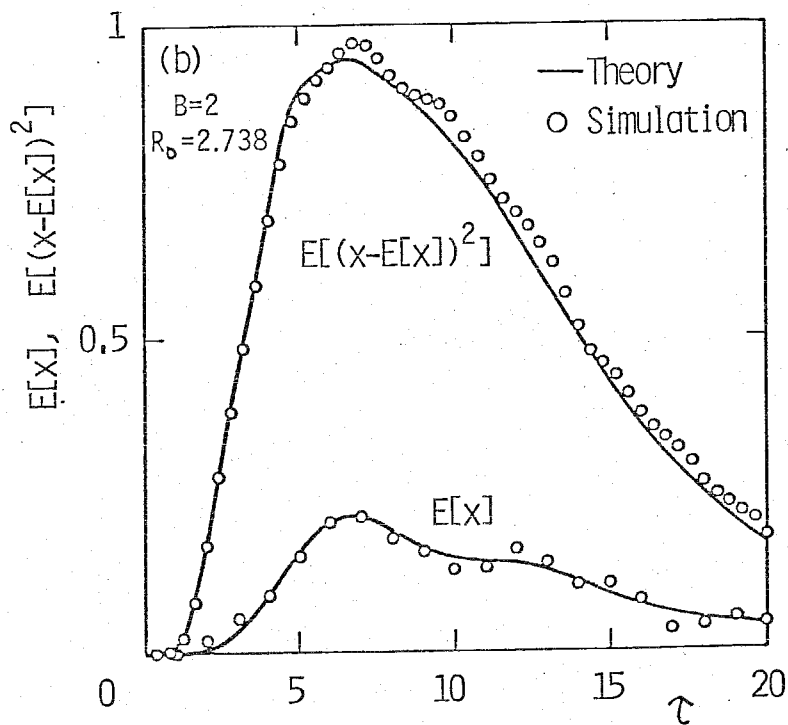
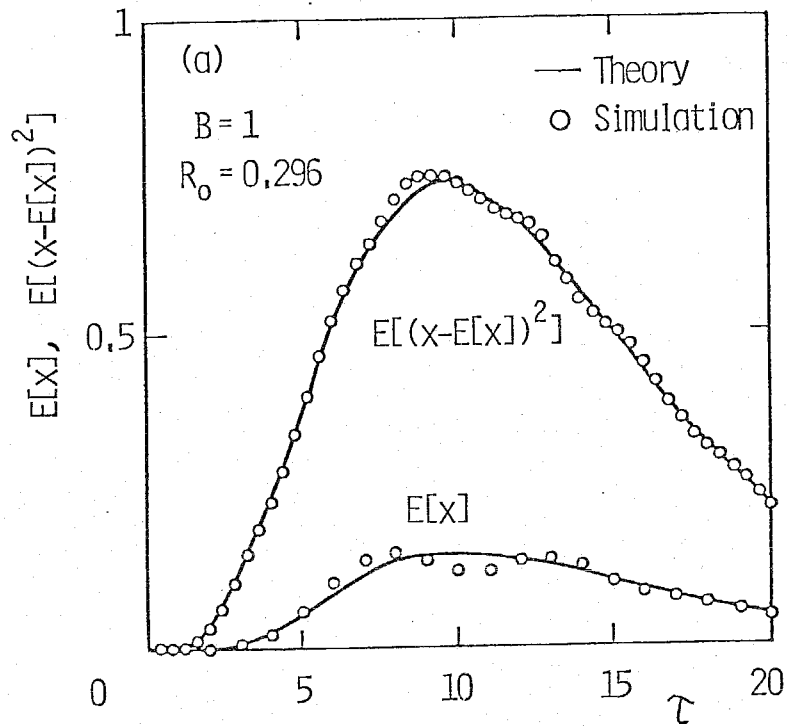
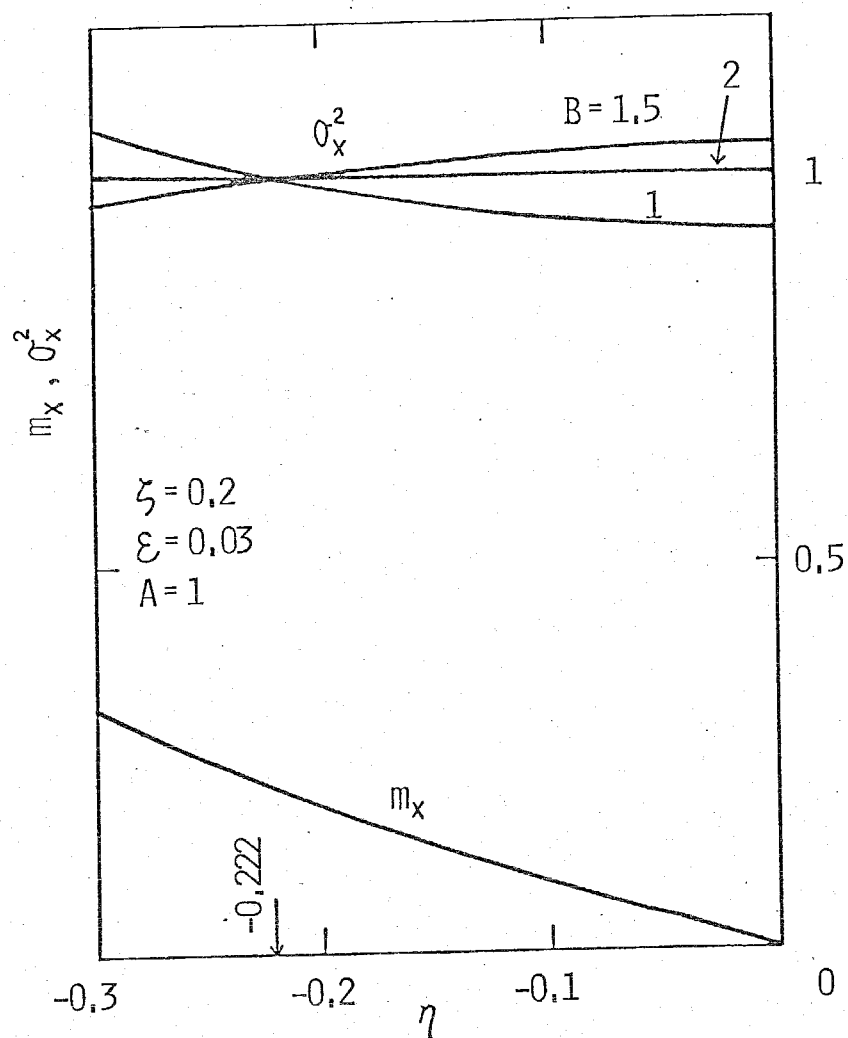
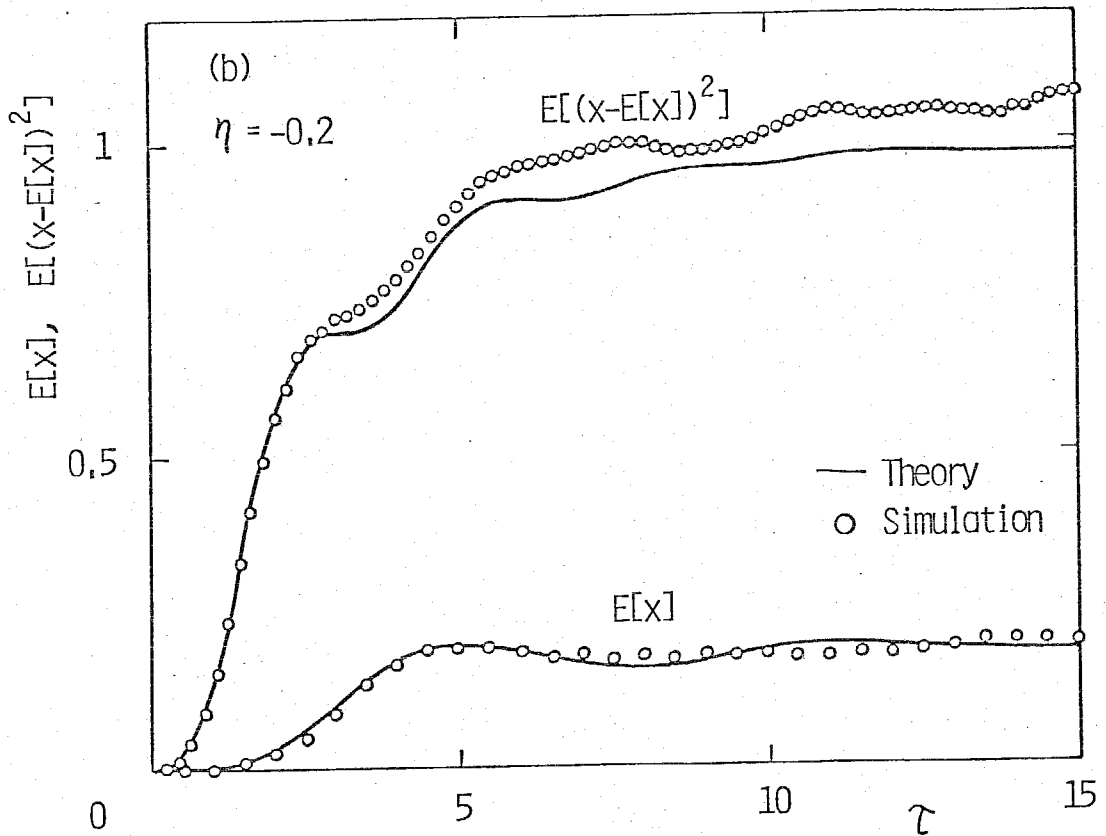
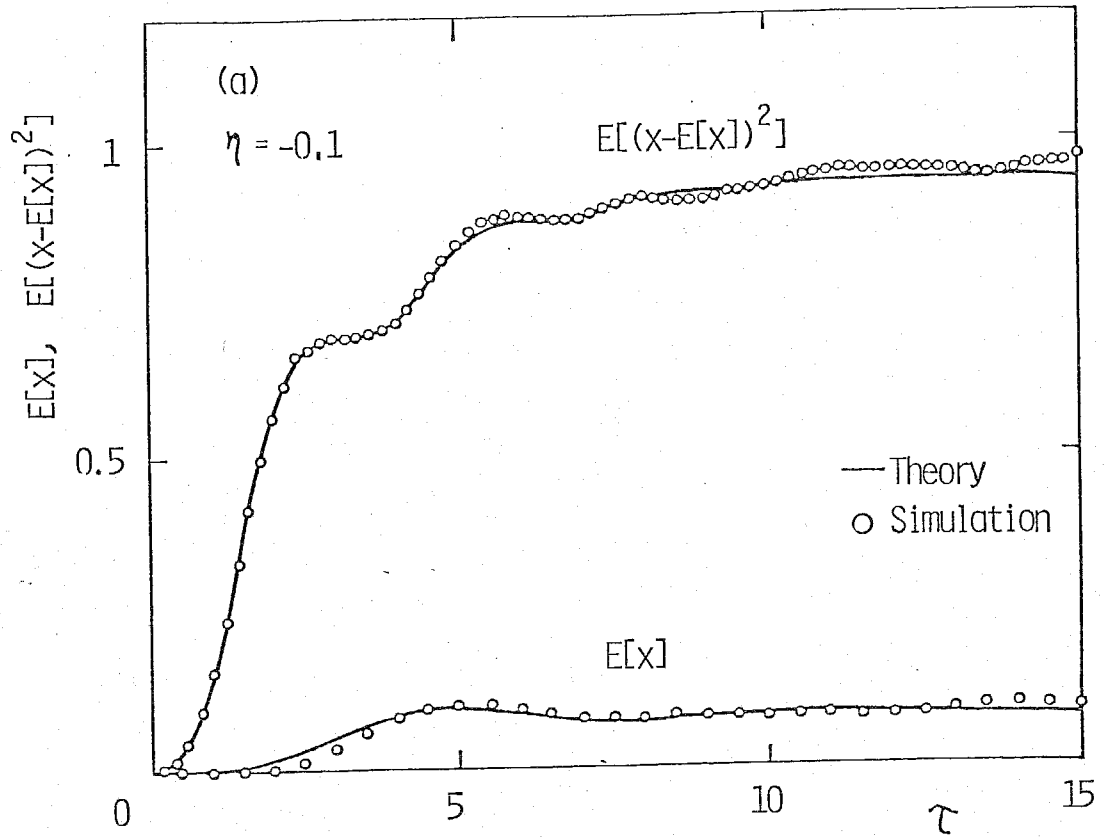


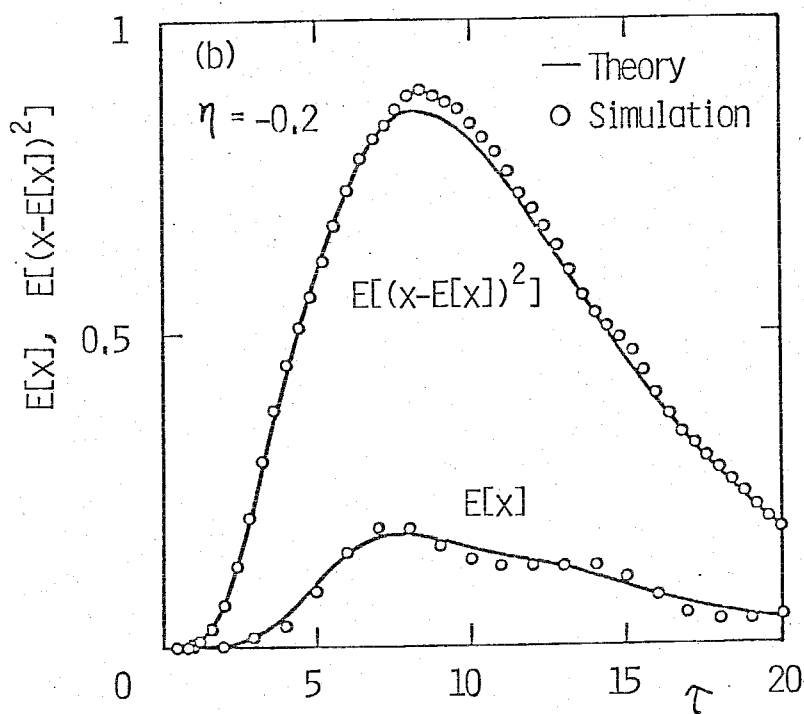
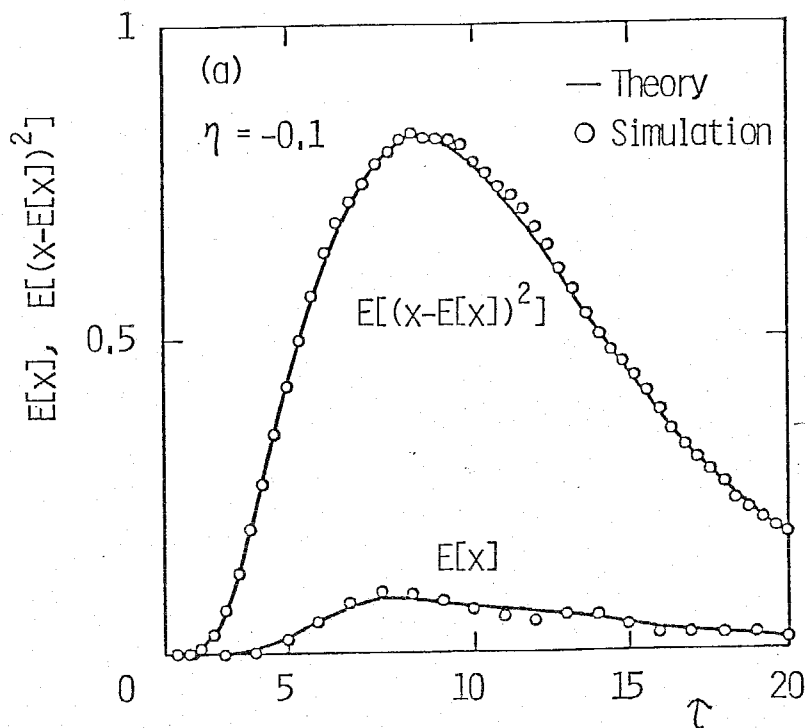
図 IV-5 変位の平均応答と分散応答
(非白色性励振, 指数包絡関数)
 $\zeta=0.2, \eta=-0.2, \varepsilon=0.03, A=1$



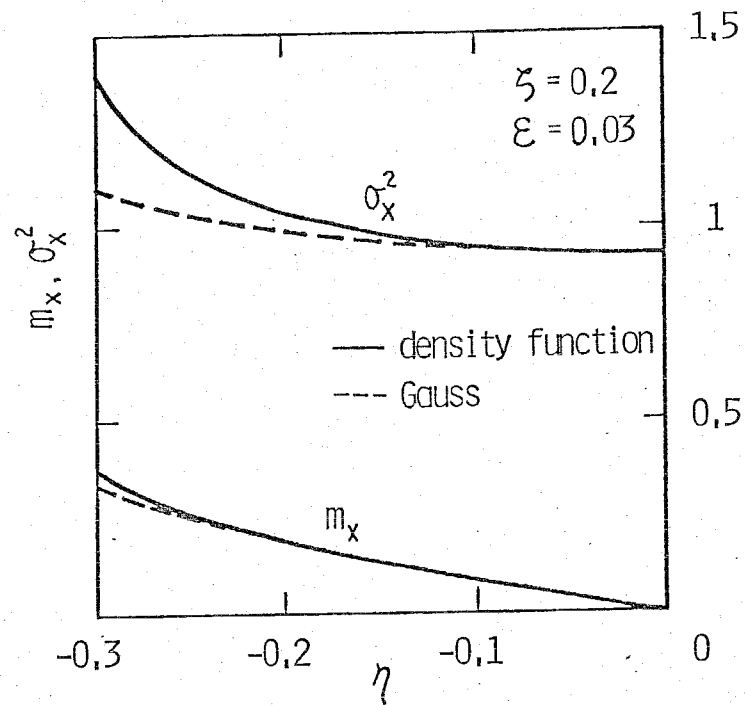
図IV-6 定常応答と2次非線形パラメータとの関係 (非白色性励振, 単位ステップ包絡関数)



図IV-7 変位の平均応答と分散応答
 (白色性励振, 単位ステップ包絡関数)
 $\zeta=0.2, \epsilon=0.03$



図IV-8 変位の平均応答と分散応答
(白色性励振, 指数包絡関数)
 $\zeta=0.2, \varepsilon=0.03$



図IV-9 定常応答と2次非線形
パラメータ η との関係
(白色性励振, 単位ステップ
包絡関数)

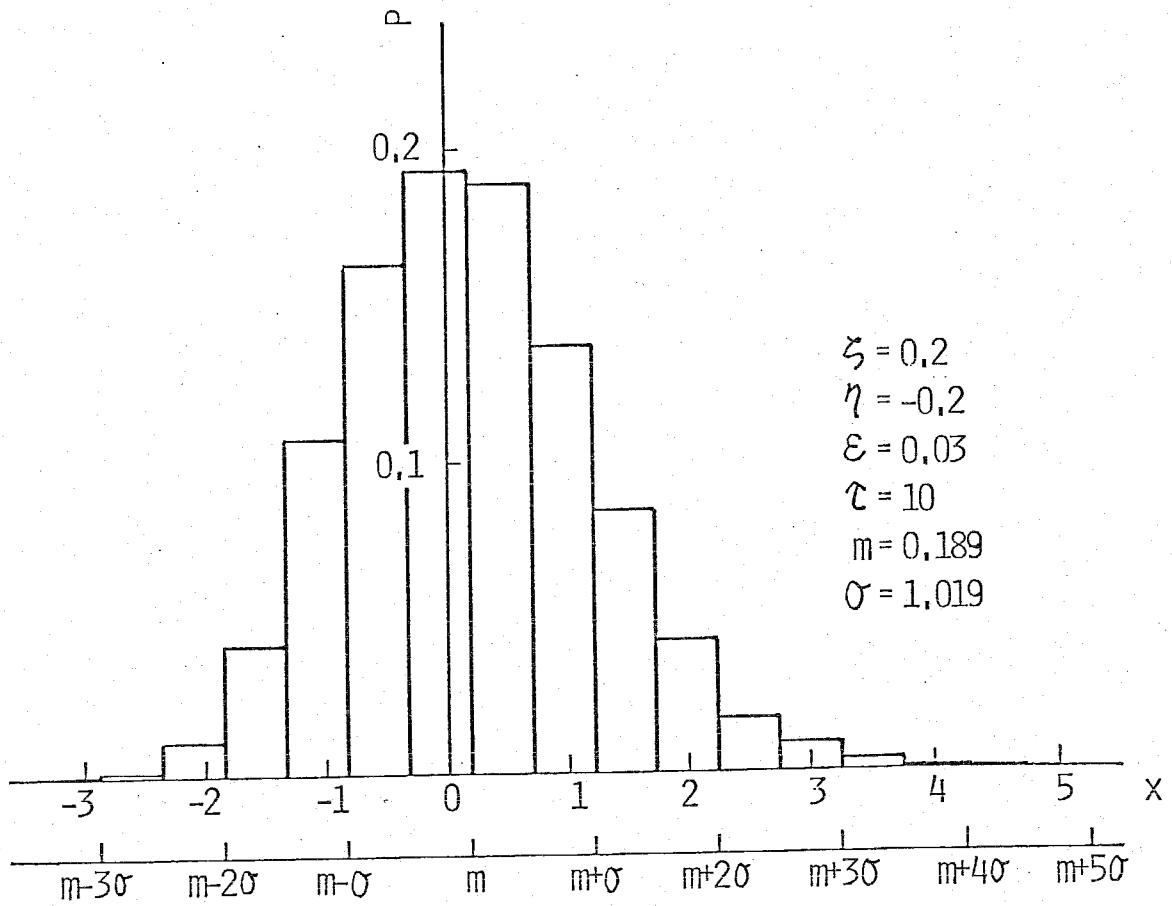
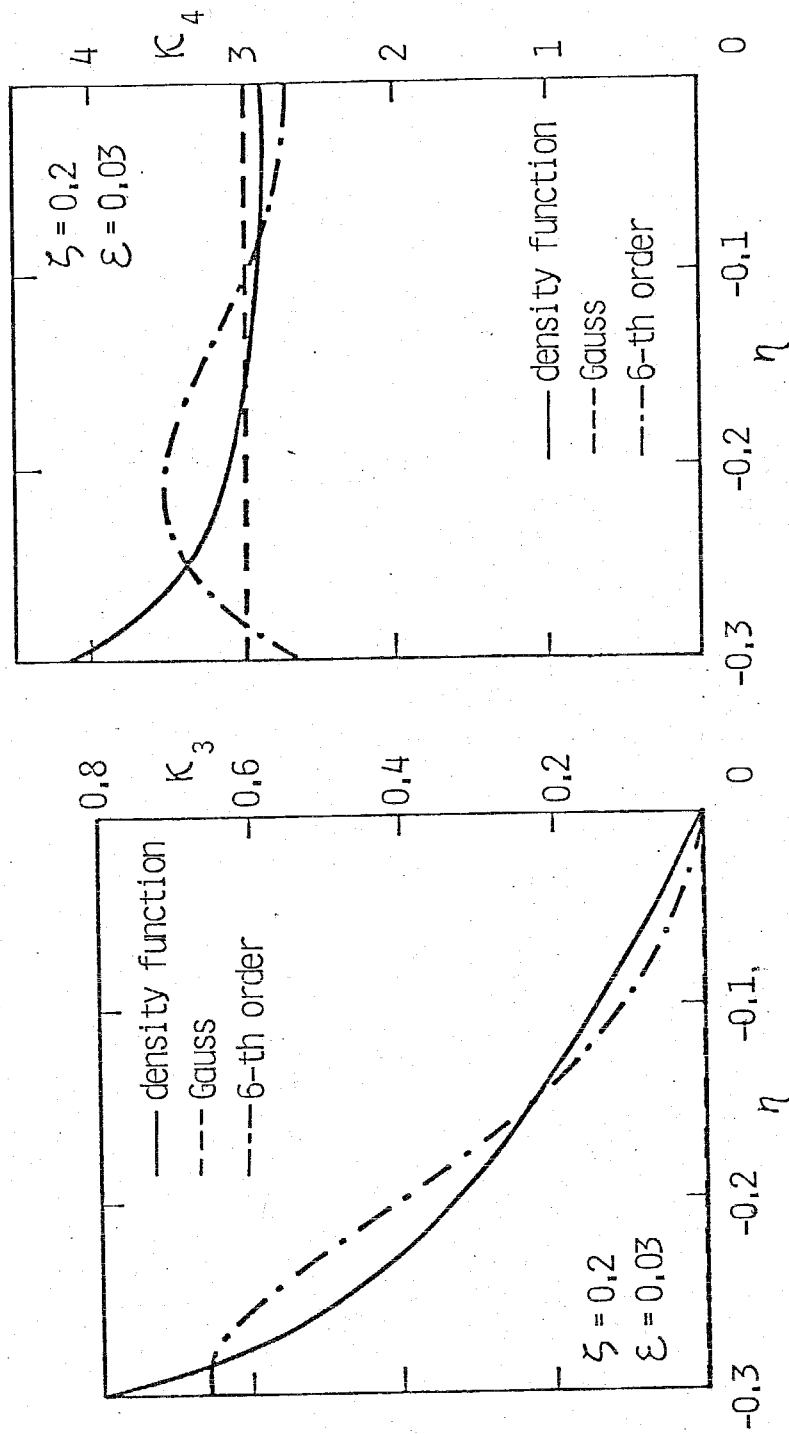


図 IV-10 定常応答のヒストグラム
 (白色性励振, 単位ステップ包絡関数)



(a) 歪度 (b) 尖度

図IV-11 定常応答の歪度と尖度 (白色性励振, 単位ステップ包絡関数)

V章 非対称非線形ばね特性を有する多自由度系の応答解析

V-1 緒言

実際の構造物系や連続体の問題の中には、不規則励振をうける非線形多自由度系としてモデル化される場合がしばしばあるので、非線形多自由度系の非定常不規則応答解析の重要性はきわめて大きい。

本章では、非線形1自由度系(Ⅲ,Ⅳ章)について有効性を明らかにした近似解析手法を、振幅変調非白色性励振下の非対称非線形ばね特性を有する多自由度系に対して拡張し、その定式化を行なう。本手法による具体的な計算例として、非対称非線形2自由度系の平均応答と分散応答を求める。

V-2 解析

V-2-1 等価外力を含む等価線形化法

次の運動方程式で記述される非対称非線形多自由度系を考える。

$$\ddot{X} + C \dot{X} + KX + g(X) = f \quad (V-1)$$

ここで、 X 、 g 、 f は、それぞれ、 n 次元状態変数、非対称非線形関数、及び不規則励振力である。また、 C 、 K は、 $(n \times n)$ 減衰係数行列及び剛性係数行列である。不規則励振力 f は、次

のように表わされるものと仮定する。

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{m}(t), \quad E[\mathbf{m}(t)] = 0, \quad E[\mathbf{m}(t_1)\mathbf{m}^T(t_2)] = \mathbf{R}(t_2 - t_1), \quad t_1 < t_2 \quad (\text{V-2})$$

ここで、 \mathbf{D} は $(n \times m)$ 確定包絡関数行列、 \mathbf{m} は m 次元ガウス性定常非白色性雑音、 \mathbf{R} は $(m \times m)$ 共分散行列である。

等価外力を含む等価線形化法を施すと、式(V-1)は次のように表わされる。

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e\mathbf{x} = \mathbf{f}_e \quad (\text{V-3})$$

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{f} + \mathbf{a}_e \quad (\text{V-4})$$

ここで、 \mathbf{K}_e は $(n \times n)$ 等価線形剛性係数行列であり、その要素を K_{eij} とする。また、 \mathbf{a}_e は n 次元等価ずれ係数であり、その要素を a_{ei} とする。等価外力 \mathbf{f}_e の性質は、式(V-2)(V-4)を用いることにより次のようになる。

$$E[\mathbf{f}_e(t)] = \mathbf{a}_e(t) \quad (\text{V-5})$$

$$E[\mathbf{f}_e(t_1)\mathbf{f}_e^T(t_2)] = \mathbf{D}(t_1)\mathbf{R}(t_2 - t_1)\mathbf{D}^T(t_2) + \mathbf{a}_e(t_1)\mathbf{a}_e^T(t_2) \quad (\text{V-6})$$

式(V-1)と式(V-3)の間の誤差 \mathbf{W} は次のようになる。

$$\mathbf{W} = (\mathbf{K} - \mathbf{K}_e)\mathbf{x} + \mathbf{g} + \mathbf{a}_e \quad (\text{V-7})$$

等価係数 \mathbf{K}_e と \mathbf{a}_e は、それぞれの各要素に対して自乗平均誤

差を最小とるように決められる。⁽³²⁾

$$\frac{\partial E[\mathbf{W}^T \mathbf{W}]}{\partial K_{e_{ij}}} = 0, \quad \frac{\partial E[\mathbf{W}^T \mathbf{W}]}{\partial a_{e_i}} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (\text{V-8})$$

式(V-8)は、行列表示をすると次のようになる。

$$\begin{aligned} E[\mathbf{W} \mathbf{X}^T] &= (\mathbf{I}K - \mathbf{I}K_e) E[\mathbf{X} \mathbf{X}^T] + E[\mathcal{H} \mathbf{X}^T] + a_{1e} E[\mathbf{X}^T] = 0 \\ E[\mathbf{W}] &= (\mathbf{I}K - \mathbf{I}K_e) E[\mathbf{X}] + E[\mathcal{H}] + a_{1e} = 0 \end{aligned} \quad (\text{V-9})$$

式(V-9)を解くことにより、 K_e と a_{1e} は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \mathbf{I}K_e &= \mathbf{I}K + (E[\mathcal{H} \mathbf{X}^T] - E[\mathcal{H}] E[\mathbf{X}^T]) (E[\mathbf{X} \mathbf{X}^T] - E[\mathbf{X}] E[\mathbf{X}^T])^{-1} \\ a_{1e} &= (E[\mathcal{H} \mathbf{X}^T] - E[\mathcal{H}] E[\mathbf{X}^T]) (E[\mathbf{X} \mathbf{X}^T] - E[\mathbf{X}] E[\mathbf{X}^T])^{-1} E[\mathbf{X}] - E[\mathcal{H}] \end{aligned} \quad (\text{V-10})$$

こゝらは応答の関数であり、時間と共に変化する。扱う系の非線形性は小さいものとして、応答のガウス性を仮定すれば、式(V-10)は応答の1次及び2次モーメントのみの関数となる。

V-2-2 等価線形系のモーメント方程式

変位と速度を状態変数として、

$$\mathbf{Y}_1 = (y_1, \dots, y_n)^T = \mathbf{x}, \quad \mathbf{Y}_2 = (y_{1+n}, \dots, y_{2n})^T = \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{V-11})$$

とすると、等価線形化された方程式(V-3)は、次のように表わされる。

$$\dot{Z} = U_e Z + \begin{pmatrix} 0 \\ f_e \end{pmatrix} \quad (\text{V-12})$$

ここで、

$$Z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad U_e = \begin{pmatrix} 0 & \text{II} \\ -K_e & -C \end{pmatrix} \quad (\text{V-13})$$

式中、IIは単位行列である。

応答の1次及び2次モーメントに関する方程式は、式(V-12)より次のように表わされる(II章の手順と同様)。

$$\dot{E}[Z] = U_e E[Z] + \begin{pmatrix} 0 \\ E[f_e] \end{pmatrix} \quad (\text{V-14})$$

$$\dot{E}[ZZ^T] = U_e E[ZZ^T] + E[ZZ^T]U_e^T + \begin{pmatrix} 0 & E[y_1 f_e^T] \\ E[f_e y_1^T] & E[y_2 f_e^T] + E[f_e y_2^T] \end{pmatrix} \quad (\text{V-15})$$

さらに、式(V-14)(V-15)に式(V-4)を代入して整理すると、結局次のような方程式が得られる。

$$\dot{E}[Z] = U_e E[Z] + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{1e} \end{pmatrix} \quad (\text{V-16})$$

$$\begin{aligned} \dot{E}[ZZ^T] = U_e E[ZZ^T] + E[ZZ^T]U_e^T + & \begin{pmatrix} 0 & E[y_1]a_{1e}^T \\ a_{1e}E[y_1^T] & E[y_2]a_{1e}^T + a_{1e}E[y_2^T] \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 & E[y_1 f_e^T] \\ E[f_e y_1^T] & E[y_2 f_e^T] + E[f_e y_2^T] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V-17})$$

V-2-3 応答と外力の相互相関

式(V-16)(V-17)のモーメント方程式系を解くために、ルンゲ・クッタ・ジル法による数値解法を適用する。その際、式(V-17)右辺第4項の応答と外力の相互相関 $E[\dot{y}_1 \dot{f}^T]$ と $E[\dot{y}_2 \dot{f}^T]$ を評価する必要がある。これらの項は、一般の非白色性励振に対しては過去の全履歴に依存する。さらに、等価線形系では、系の性質が時間と共に変動するので、両者を考慮しなければならない。

経過時間に対して、等間隔の時刻列 t_0, t_1, t_2, \dots をとり、等価係数 k_e と a_e が各時間区間内で次のように一定値をとるものと仮定する。

$$\begin{aligned} k_e^{(i)} &= k_e(t) = k_e(t_{i-1}) \\ a_e^{(i)} &= a_e(t) = a_e(t_{i-1}) \quad t \in [t_{i-1}, t_i) \end{aligned} \quad (V-18)$$

ここで、上添字(i)はi番目の時間区間を表わす。これは、行列あるいはベクトルの要素との混同を避けるためのもので、以下必要に応じて、諸行列・ベクトルに対してこの表記法を用いることにする。

応答と外力の相互相関を評価する準備として、最初に変位応答と速度応答を求める。任意の着目時刻 $t \in [t_{n-1}, t_n)$ におけるこれらの応答は、初期条件 $y_1(t_0), y_2(t_0)$ が与えられると、次の漸化式によって求められる。

$$\begin{aligned}
Y_1(t_i) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} H^{(i)}(t_i - v) f_e(v) dv + P^{(i)}(\Delta t) Y_1(t_{i-1}) + Q^{(i)}(\Delta t) Y_2(t_{i-1}) \\
Y_2(t_i) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{H}^{(i)}(t_i - v) f_e(v) dv + R^{(i)}(\Delta t) Y_1(t_{i-1}) + S^{(i)}(\Delta t) Y_2(t_{i-1}) \\
& \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{V-19})
\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}
Y_1(t) &= \int_{t_{n-1}}^t H^{(n)}(t-v) f_e(v) dv + P^{(n)}(t-t_{n-1}) Y_1(t_{n-1}) + Q^{(n)}(t-t_{n-1}) Y_2(t_{n-1}) \\
Y_2(t) &= \int_{t_{n-1}}^t \dot{H}^{(n)}(t-v) f_e(v) dv + R^{(n)}(t-t_{n-1}) Y_1(t_{n-1}) + S^{(n)}(t-t_{n-1}) Y_2(t_{n-1}) \\
& \quad (\text{V-20})
\end{aligned}$$

ここで、 $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ 、 $H^{(i)}$ は区間 $[t_{i-1}, t_i)$ における衝撃応答関数行列、 $P^{(i)}, Q^{(i)}, R^{(i)}, S^{(i)}$ は同じ区間における自由振動の解を表す関数行列である。1自由度系の場合 (III章) を除いて、 $H^{(i)}, P^{(i)}, Q^{(i)}, R^{(i)}, S^{(i)}$ を解析的に求めることは一般に容易ではない。そこで、各時間区間ごとに、II章において線形2自由度系の衝撃応答関数を求めた手順と同様の手順にしたがって、数値計算によりこれらの関数を求める。

次に、式 (V-19) (V-20) の両辺に $f^T(t)$ を乗じて期待値をとり、関係式 $E[f_e(v) f^T(t)] = E[f(v) f^T(t)]$ を代入すると、応答と外力の相互相関を評価する漸化式が次のように得られる。

式 (V-19) より、

$$\begin{aligned}
 A^{(i)} &= \Phi^{(i)} + P^{(i)}(\Delta t)A^{(i-1)} + Q^{(i)}(\Delta t)B^{(i-1)} \\
 B^{(i)} &= \Psi^{(i)} + R^{(i)}(\Delta t)A^{(i-1)} + S^{(i)}(\Delta t)B^{(i-1)} \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (V-21)
 \end{aligned}$$

∴ Z",

$$\begin{aligned}
 A^{(i)} &= A^{(i)}(t_i, t) = E[Y_1(t_i) f^T(t)] \\
 B^{(i)} &= B^{(i)}(t_i, t) = E[Y_2(t_i) f^T(t)] \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (V-22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi^{(i)} &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} H^{(i)}(t_i - v) E[f(v) f^T(t)] dv \\
 &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} H^{(i)}(t_i - v) D(v) R(t-v) D^T(t) dv \\
 &= \int_0^{\Delta t} H^{(i)}(u) D(t_i - u) R(t - t_i + u) D^T(t) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi^{(i)} &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{H}^{(i)}(t_i - v) E[f(v) f^T(t)] dv \\
 &= \int_0^{\Delta t} \dot{H}^{(i)}(u) D(t_i - u) R(t - t_i + u) D^T(t) du \quad i=1,2,\dots,n-1 \\
 &\hspace{15em} (V-23)
 \end{aligned}$$

式 (V-20) より、

$$\begin{aligned}
 E[Y_1(t) f^T(t)] &= \int_{t_{n-1}}^t H^{(n)}(t-v) E[f(v) f^T(t)] dv \\
 &\quad + P^{(n)}(t-t_{n-1})A^{(n-1)} + Q^{(n)}(t-t_{n-1})B^{(n-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[Y_2(t) f^T(t)] &= \int_{t_{n-1}}^t \dot{H}^{(n)}(t-v) E[f(v) f^T(t)] dv \\
 &\quad + R^{(n)}(t-t_{n-1})A^{(n-1)} + S^{(n)}(t-t_{n-1})B^{(n-1)} \quad (V-24)
 \end{aligned}$$

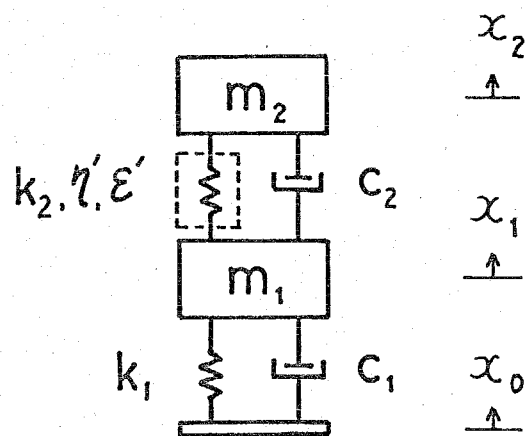
ここで、右辺第1項の積分は、式(V-23)に $\Delta t = t - t_{n-1}$, $t_i = t$, $H^{(i)} = H^{(n)}$ を代入することによって評価される。

初期条件 $A^{(0)}$ と $B^{(0)}$ が与えられると、本漸化式 (V-21) (V-24) を計算することによって、 $E[Y_1(t) f^T(t)]$ と $E[Y_2(t) f^T(t)]$ を求めることができる。Ⅲ章で詳しく述べたように、応答がマルコフ過程にならない一般の非白色性励振に対しては、着目時刻が異なるとその都度、初期時刻から着目時刻までの全区間にわたって本漸化式の計算を繰り返す必要がある。

V-3 2自由度系

V-3-1 解析

本手法による非対称非線形多自由度系の応答計算例として、図V-1に示す2自由度系が基礎部に非白色性励振をうける場合を考える。質量 m_1 と質量 m_2 の間には回復原力が、Ⅳ章と同様、2次と3次の非線形性を有するものとする。 ζ' と ε' はそれぞれ、2次及び3次の非線形パラメータである。



図V-1 非対称非線形ばね特性を有する2自由度系

相対変位 $X_1 = x_1 - x_0$ と $X_2 = x_2 - x_1$ に関する運動方程式を、式

(V-1)と同じ形で表わすと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & -2\mu\zeta_2 \\ -2\zeta_1\omega_1 & 2(1+\mu)\zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & -\mu \\ -\omega_1^2 & 1+\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \mu\eta X_2^2 - \mu\varepsilon X_2^3 \\ (1-\mu)\zeta X_2^2 + (1+\mu)\varepsilon X_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ddot{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V-25})$$

ここで、 $k_1/m_1 = \omega_1^2$, $k_2/m_2 = \omega_2^2$, $c_1/m_1 = 2\zeta_1\omega_1$, $c_2/m_2 = 2\zeta_2\omega_2$,
 $m_2/m_1 = \mu$, $\omega_1/\omega_2 = \omega$, $\eta = \eta'/m_2\omega_2^2$, $\varepsilon = \varepsilon'/m_2\omega_2^2$ 、及び無次元
 化時間 $\tau = \omega_2 t$ を用いている。

式(V-25)に等価外力を含む等価線形化法を施すと、式(V-3)に
 対応する式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & -2\mu\zeta_2 \\ -2\zeta_1\omega_1 & 2(1+\mu)\zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} + K_e \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \underline{f}_e = \begin{pmatrix} -\ddot{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{1e} \quad (\text{V-26})$$

等価係数 K_e と a_{1e} を式(V-10)にしたがって求め、応答のガウス
 性を仮定すると、次のように表わされる。

$$K_e = \begin{pmatrix} K_{e11} & K_{e12} \\ K_{e21} & K_{e22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 & -\mu + 2\mu\eta E[X_2] - 3\mu\varepsilon E[X_2^2] \\ -\omega^2 & 1 + \mu + 2(1-\mu)\zeta E[X_2] + 3(1+\mu)\varepsilon E[X_2^2] \end{pmatrix} \\ a_{1e} = \begin{pmatrix} a_{e1} \\ a_{e2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\eta \{2(E[X_2])^2 - E[X_2^2]\} - 2\mu\varepsilon (E[X_2])^3 \\ (1-\mu)\zeta \{2(E[X_2])^2 - E[X_2^2]\} + 2(1+\mu)\varepsilon (E[X_2])^3 \end{pmatrix} \quad (\text{V-27})$$

状態変数を $y_1 = X_1$, $y_2 = X_2$, $y_3 = \dot{X}_1$, $y_4 = \dot{X}_2$ とすれば、式(V-16)
 (V-17) を成分表示することにより、4個の1次モーメント方程

式と10個の2次モーメント方程式からなる連立方程式が得られる。前節の手順にしたがってこれらの方程式を解くことにより、相対変位及び相対速度に関する諸応答を求めることができる。

地震工学的見地から有用と考えられる各質量の絶対加速度に関する応答は、II章の線形2自由度系の場合と同様にして求められる。式(II-38)に対応する式は、次のとおりである。

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega^2 x_1 - K_{e12} x_2 - 2\zeta_1 \omega \dot{x}_1 + 2\mu \zeta_2 \dot{x}_2 + a_{e1} \\ \ddot{x}_2 &= -(K_{e12} + K_{e22}) x_2 - 2\zeta_2 \dot{x}_2 + a_{e1} + a_{e2}\end{aligned}\quad (V-28)$$

両辺の期待値をとることにより絶対加速度の1次モーメントが、また、両辺を自乗して期待値をとることにより2次モーメントが、相対変位及び相対速度に関するモーメントの関数として求められる。

V-3-2 計算結果と考察

本系に対応する線形2自由度系の応答計算を行なったII章と同様に、不規則励振力が基礎部の加速度入力として式(II-29)で表わされるものとする。具体的には、単位ステップ包絡関数あるいは指数包絡関数(式(II-14))と、指数減衰調和相関関数(式(II-25))を有する非白色性雑音との積である。本系の応答計算に際しては、これらの関数の形状を決める諸定数の値を、II章の

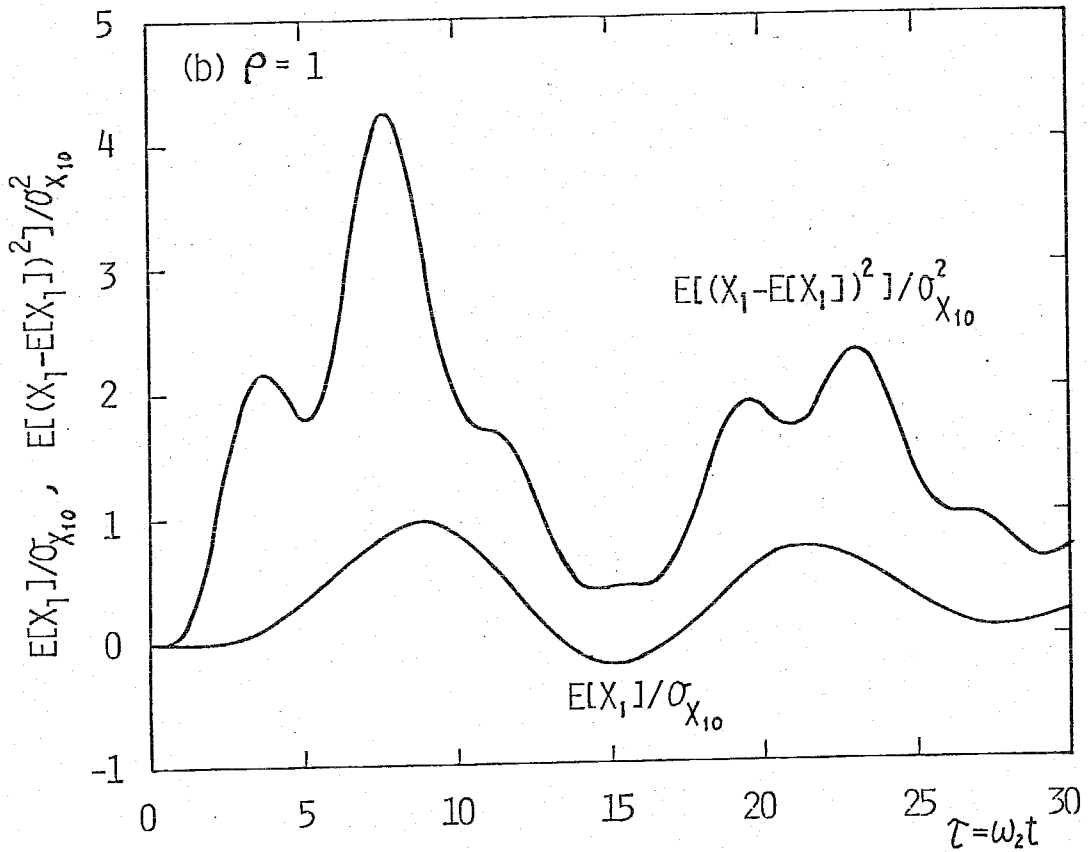
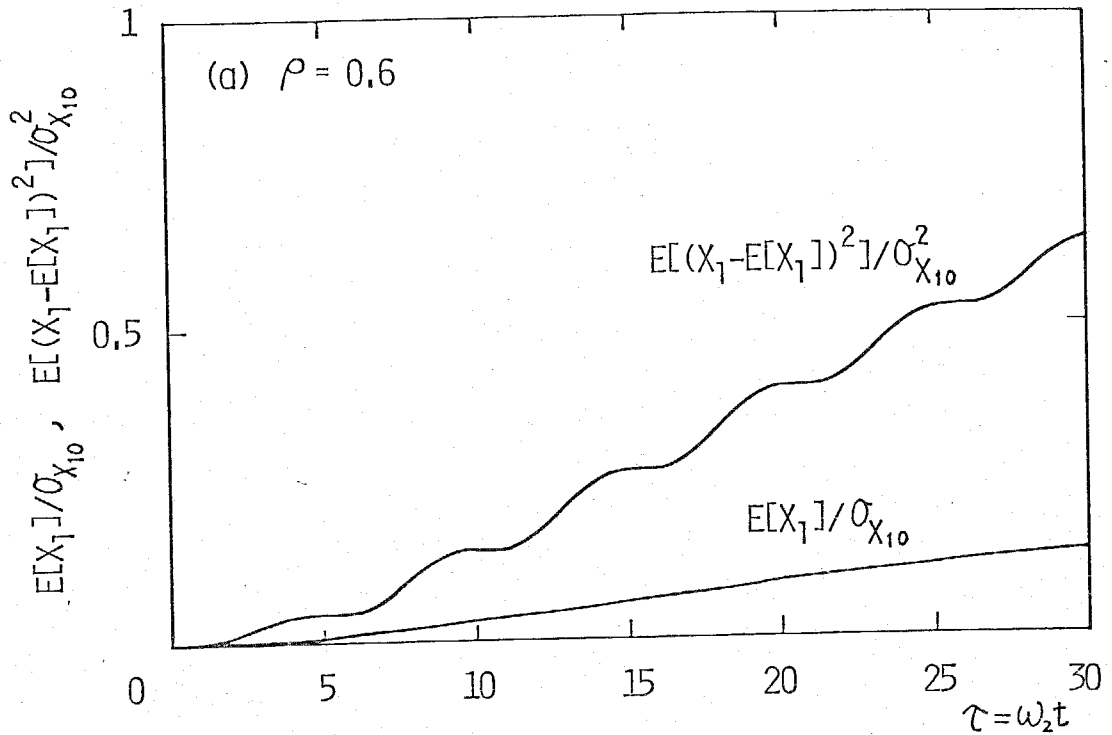
計算で用いた諸定数の値と等しく選ぶ。ただし、非白色性雑音の大きさ（自乗平均値）は、非対称非線形ばねの位置に着目して、相対変位 X_2 の線形定常分散が 1 となるように予め定めておく。

図 V-2 及び図 V-3 は、それぞれ、単位ステップ及び指数包絡関数に対する相対変位 X_1 の平均応答と分散応答を示す。図 V-4 及び図 V-5 は、絶対加速度 \ddot{x}_1 に対する同様の応答を示す。各図の平均応答と分散応答は、それぞれ、単位ステップ包絡関数に対する線形系の定常標準偏差と定常分散によって無次元化されている。II 章の線形系の計算結果と同じように、 $\rho=1$ の場合の応答曲線には、オーバーシュートが見られるが、 $\rho=0.6$ の場合の応答曲線はオーバーシュートを示していない。

図 V-6 は、単位ステップ包絡関数に対する相対変位 X_1 及び絶対加速度 \ddot{x}_1 の定常応答と、2 次非線形パラメータ ϵ との関係を示す。定常応答は、IV 章で述べた手順と同様の手順を用いて計算した。絶対加速度 \ddot{x}_1 の定常平均値は常に 0 である。相対変位 X_1 の応答に着目すると、2 次非線形パラメータ ϵ の値の絶対値が大きくなる程、即ち非対称性の度合いが強くなる程、応答平均値が大きくなっていくことが分かる。

V-4 結言

前章までに有効性を明らかにした等価外力を含む等価線形化法と非定常不規則応答を求めるための近似解析手法を、振幅変調非白色性励振下の非対称非線形ばね特性を有する多自由度系に対して拡張し、その定式化を行なった。本手法の適用例として、非対称非線形2自由度系の平均応答と分散応答を求めた。



図V-2 相対変位 X_1 の平均応答と分散応答
(単位ステップ包絡関数)

$\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1, \mu = \omega = 1, \varepsilon = 0.03, \alpha = 0.01$

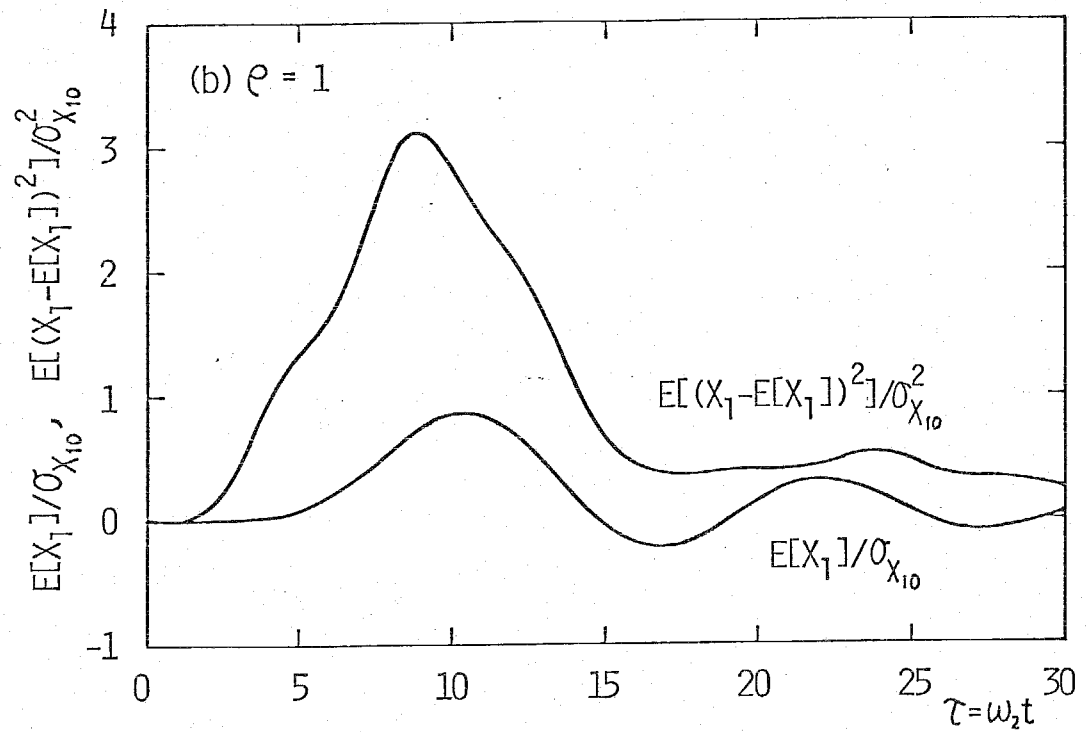
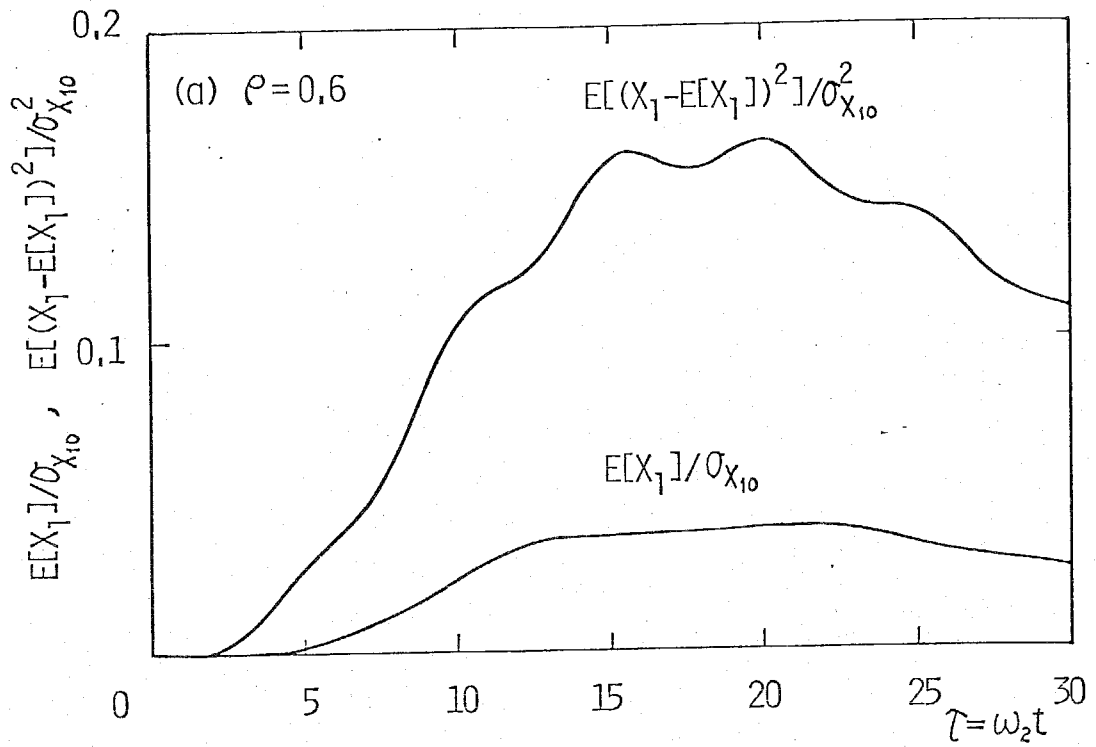
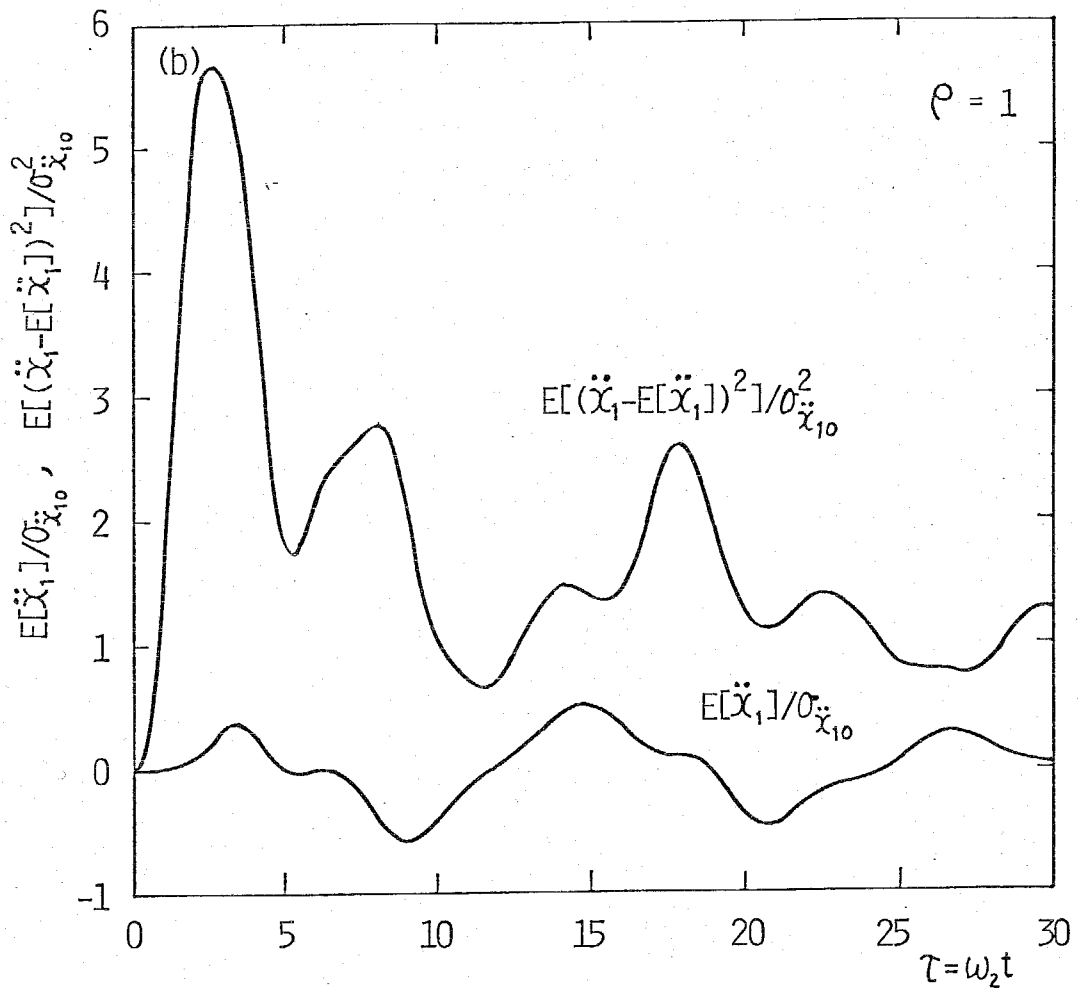
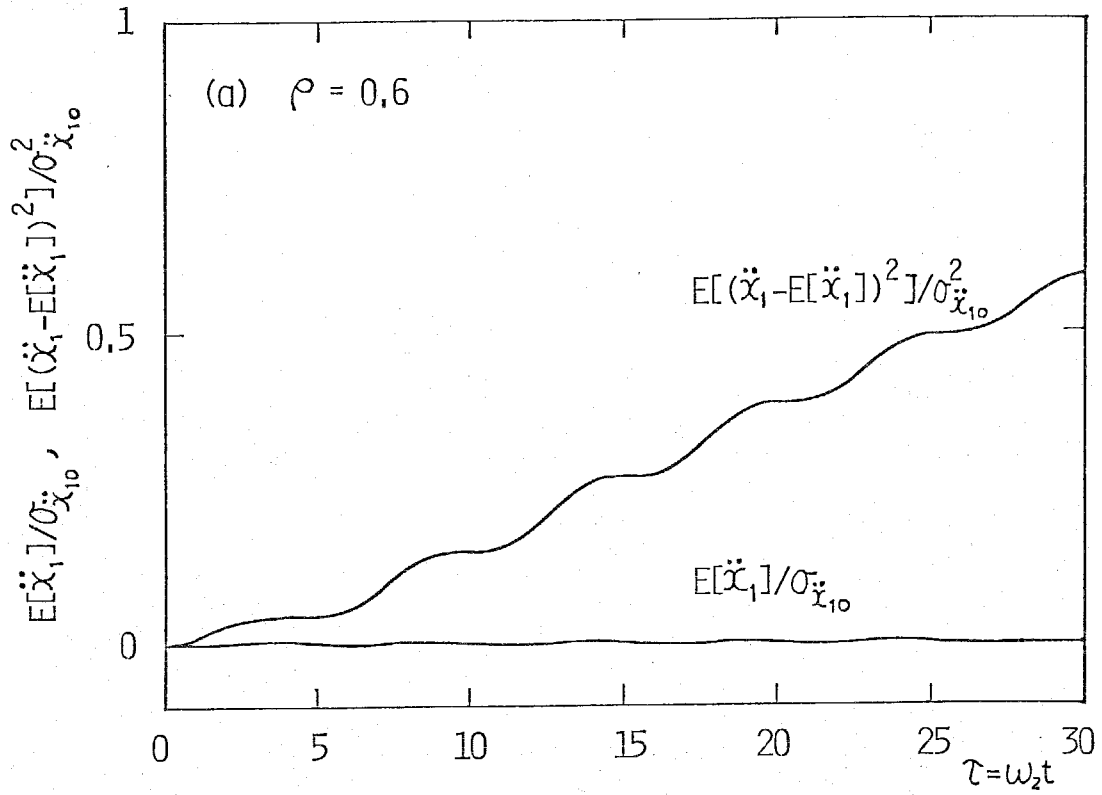
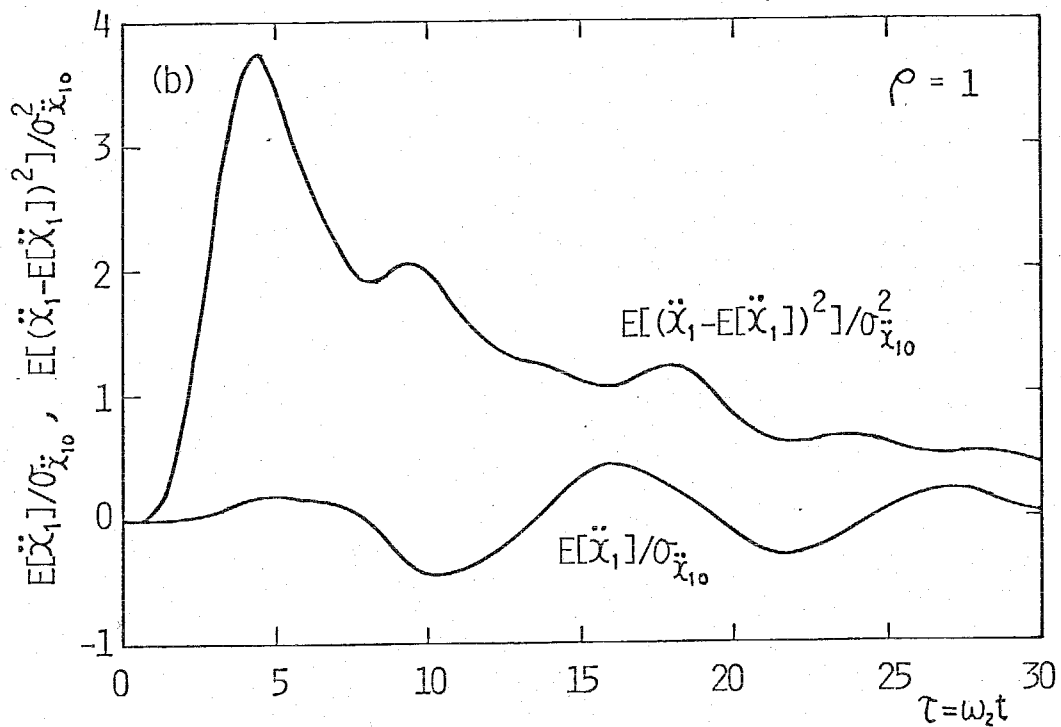
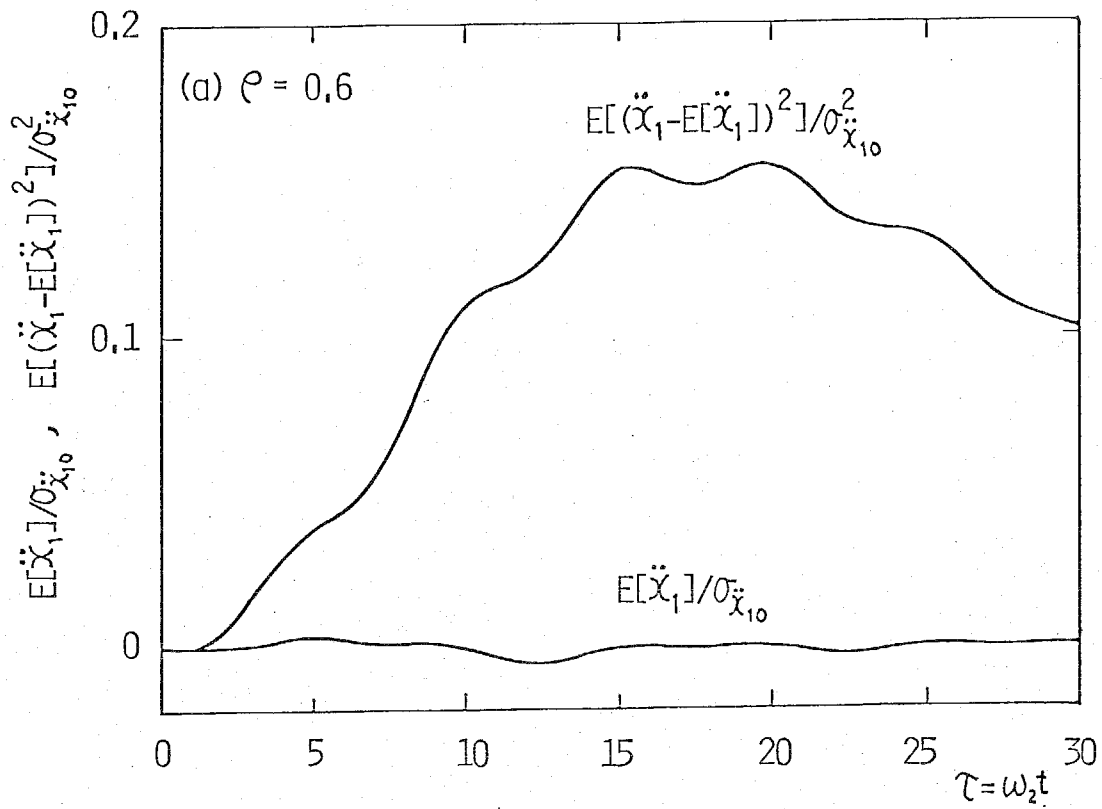


図 V-3 相対変位 X_1 の平均応答と分散応答
(指数包絡関数)

$\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1, \mu = \omega = 1, \varepsilon = 0.03, \alpha = 0.01$

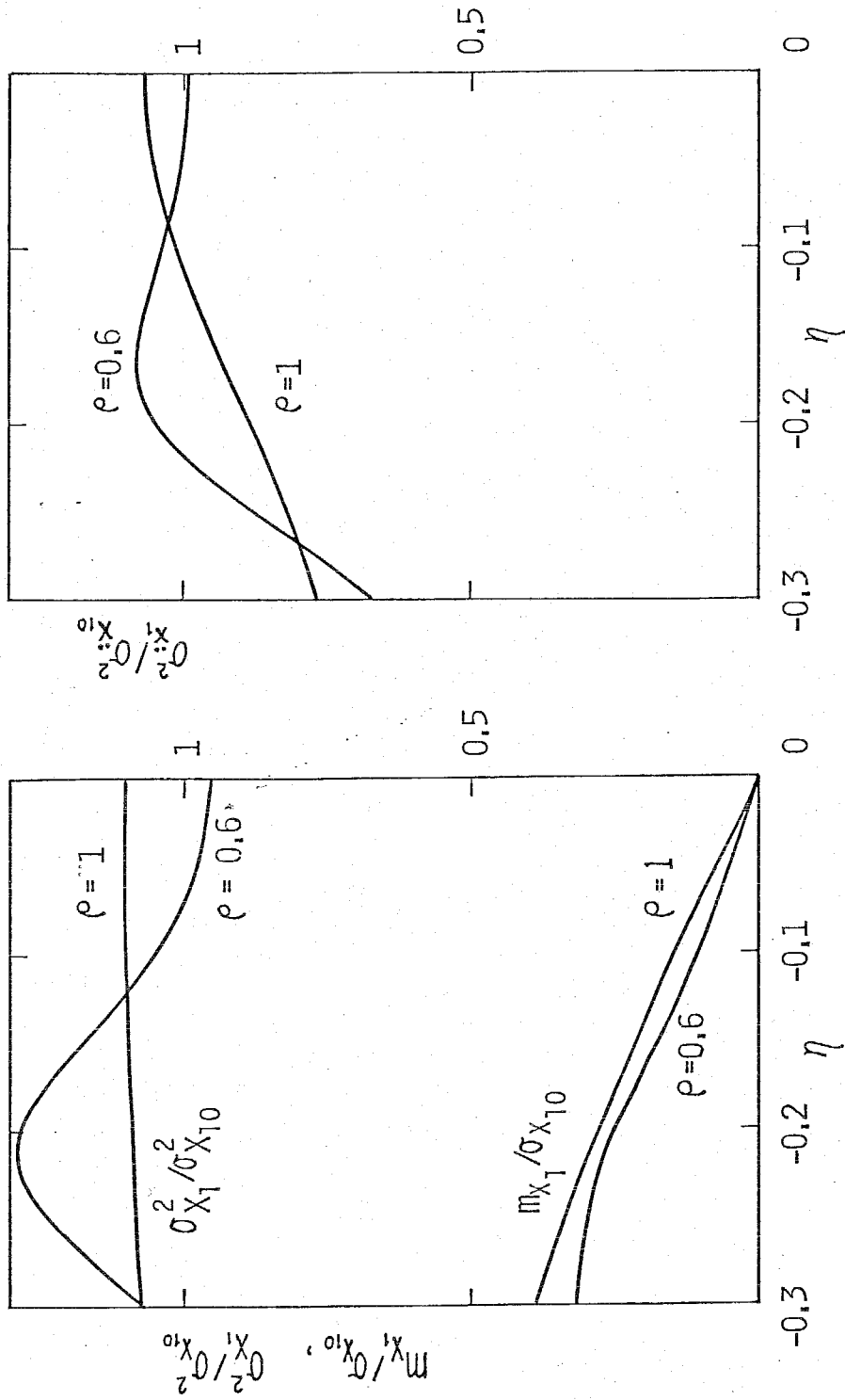


図V-4 絶対加速度 \ddot{x}_1 の平均応答と分散応答
(単位ステップ包絡関数)



図V-5 絶対加速度 \ddot{x}_1 の平均応答と分散応答 (指数包絡関数)

$\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1, \mu = W = 1, \varepsilon = 0.03, \alpha = 0.01$



(a) 相対変位 X_1 (b) 絶対加速度 \ddot{x}_1

図V-6 定常応答と2次非線形パラメータとの関係
 (単位ステップ包絡関数) $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1, \mu = W = 1, \xi = 0.03, \alpha = 0.01$

Ⅵ章 連続体への応用 — 液面の不規則揺動 —

Ⅵ-1 緒言

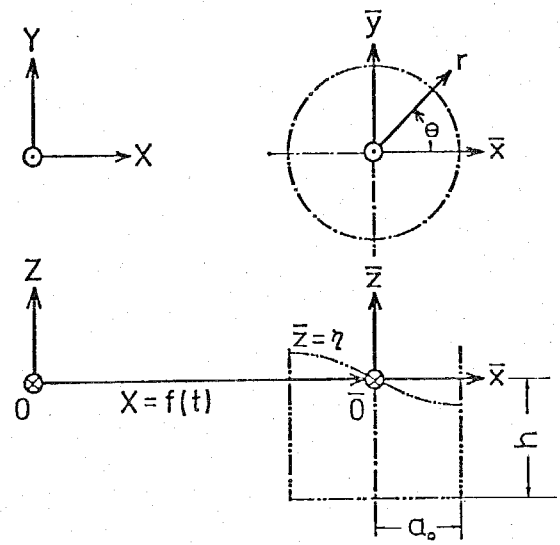
Ⅲ章で提案した近似解析手法の連続体への応用として、円筒タンク内液体の液面揺動をとりあげる。

従来、液面揺動に関して、有限振幅波に基づく液面の非線形性を考慮した種々の確定論的研究がなされており、非線形液面揺動の諸性質が明らかにされている。しかし、近年特に重要性を増している液体貯槽の耐震設計⁽⁴⁸⁾に対しては、地震の非定常かつ不規則な性質に留意した、確率論的立場からの応答解析も必要と考えられる。しかしながら、実地震波を入力とする応答解析はなされているが、地震動を一つの確率過程とみなした場合⁽⁴⁹⁾の確率論的な応答解析はあまりなされていないようである。

本章では、卓越振動数を有する地震入力を、振幅変調非白色性励振としてモデル化し、非線形液面揺動の非定常応答解析を行なう。Ⅲ章で提案した近似解析手法と高次モーメントを組み合わせることによって閉じたモーメント方程式系を導き、数値計算によって液位の平均応答と標準偏差応答を求める。

VI-2 非線形液面揺動の基礎方程式

図VI-1に示すように、半径 a_0 の剛体円筒タンクが、水平方向に励振をうける場合を考える。 h は静止時の液体の深さである。液体は非圧縮性完全流体とし、渦なし流れを仮定する。



図VI-1 円筒タンクと座標系

本系におけるタンク内液体の非線形液面揺動は、既に変分原理に基づいて定式化されている。⁽⁴⁷⁾ 完全流体のオイラー表示による変分原理は、ラグランジアン密度が圧力 p に等しいことから、次のように表わされる。⁽⁵⁰⁾

$$\delta \int_t \int_V p(\bar{x}, t) d\bar{x} dt = 0 \quad (\text{VI-1})$$

ここで、 V はタンク内液体の占める領域、 $\bar{x} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)$ はタンクに固定された移動座標系である。さらに、非圧縮、渦なし、及びタンクの非回転運動の仮定から、式(VI-1)は次のように表わされる。

$$\delta \int_t \int_H \mathcal{L} dH dt = 0 \quad (\text{VI-2})$$

$$\mathcal{L} = \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} - \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \bar{\phi} + \frac{1}{2} (\nabla \bar{\phi})^2 + g \bar{z} \right\} d\bar{z} \quad (\text{VI-3})$$

ここで、 F は $\bar{z}=0$ 平面、 γ はラグランジアン平面密度、 $\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)$ は速度ポテンシャル、 $\eta(\bar{x}, \bar{y}, t)$ は液位、 U_0 はタンク移動速度、 $\bar{\nabla}$ は \bar{x} に関するナブラ記号を表わす。式(Ⅶ-2)に対して $\bar{\phi}$ と η の変分をとることにより、次のようなタンク内液体の支配方程式を得る。

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\phi} = 0 \quad \text{--- 液体中} \quad (\text{Ⅶ-4})$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = 0 \quad \text{--- 壁面} \quad (\text{Ⅶ-5})$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_c}{\partial t} - \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \phi_c)^2 + \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \bar{\phi})^2 + g\eta = 0 \quad \text{--- } \bar{z}=\eta \quad (\text{Ⅶ-6})$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{\nabla} \bar{\phi} \cdot \bar{\nabla}(\bar{z} - \eta) = 0 \quad \text{--- } \bar{z}=\eta \quad (\text{Ⅶ-7})$$

ここで、 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)$ は液体のタンクに対する相対運動の速度ポテンシャル、 ϕ_c はタンク移動の速度ポテンシャルであり、 $\bar{\nabla} \phi_c = U_0$ 、 $\partial \bar{\phi} / \partial n = \partial \phi / \partial n + U_{0\perp}$ (\perp : タンク壁面に垂直な成分) の関係がある。式(Ⅶ-4) はラプラスの方程式、式(Ⅶ-5) は壁面での境界条件、式(Ⅶ-6)(Ⅶ-7) は自由表面での非線形境界条件を表わす。

さらに、変分直接法によって、速度ポテンシャル ϕ 及び液位 η の一般化座標に関する 1 階の非線形常微分方程式が導かれ⁽⁴⁷⁾ ている。その際、式(Ⅶ-4)(Ⅶ-5) を満足する速度ポテンシャル ϕ の一般解、及び非圧縮性条件を満足する液位 η の許容関数は、次のように与えられている。

$$\phi = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \left\{ A_{mn}(t) \cos m\theta + B_{mn}(t) \sin m\theta \right\} J_m(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh\{\lambda_{mn}(\bar{z}+h)\}}{\cosh(\lambda_{mn} h)} \quad (\text{VI-8})$$

$$\eta = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \left\{ C_{mn}(t) \cos m\theta + D_{mn}(t) \sin m\theta \right\} J_m(\lambda_{mn} r) \quad (\text{VI-9})$$

ここで、 A_{mn}, C_{mn} は面内揺動成分の一般化座標、 B_{mn}, D_{mn} は回転揺動成分の一般化座標、 $J_m(\lambda_{mn} r)$ は第1種ベッセル関数であり、 λ_{mn} は $\frac{d}{dr} J_m(\lambda r)|_{r=a_0} = 0$ を満たす n 番目の正根である。また、 m, n は、それぞれ、周方向波数及び半径方向モード次数を表わす。

上記非線形常微分方程式中の諸変数に対して、タンク半径 a_0 と最低次の固有振動数 ω_{11} による無次元化を施す。これまで用いた有次元量に*印を付し、対応する無次元量を無印で表わすことにすると次のようになる。

$$\begin{aligned} r &= r^*/a_0^*, \quad \bar{z} = \bar{z}^*/a_0^*, \quad h = h^*/a_0^*, \quad \lambda_{mn} = a_0^* \lambda_{mn}^*, \quad t = \omega_{11}^* t^*, \\ \omega_{mn} &= \omega_{mn}^*/\omega_{11}^* = \sqrt{\psi_{mn}/\psi_{11}}, \quad A_{mn} = A_{mn}^*/a_0^{*2} \omega_{11}^*, \quad B_{mn} = B_{mn}^*/a_0^{*2} \omega_{11}^* \\ C_{mn} &= C_{mn}^*/a_0^*, \quad D_{mn} = D_{mn}^*/a_0^*, \quad f(t) = f^*(t^*)/a_0^*, \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{d^2 f^*(t^*)}{dt^{*2}} / a_0^{*2} \omega_{11}^{*2} \end{aligned} \quad (\text{VI-10})$$

ここで、 $\omega_{mn}^{*2} = g^* \lambda_{mn}^* \tanh(\lambda_{mn}^* h^*)$ 、 g^* は重力加速度、 $\psi_{mn} = \lambda_{mn}^* \tanh(\lambda_{mn}^* h^*)$ である。以後、式(VI-10)の無次元量を用いて解析をすすめる。

さて、最低次モードの共振点近傍の周波数で連続的に調和加

振した場合に回転揺動が発達するのに対して、周波数及び位相が常に変動している不規則入力に対しては回転揺動が生じ難いことが液面揺動実験により確かめられている⁽⁵¹⁾。そこで、不規則励振を対象とする本研究では、面内揺動に着目することにする。

解析で考慮するモードは、周方向については $m=0, 1, 2$ 、半径方向については最低次の $n=1$ のみとする。このとき、非線形面内揺動を支配する基礎方程式を、液位の一般化座標に関する振動方程式の形で表わし、各モードに等価的減衰項を導入すると次のようになる。

$$\ddot{C}_1 + 2\zeta_1 \dot{C}_1 + C_1 = -\psi_1 S_1 \ddot{f}(t) + C_1 \dot{C}_1^2 P_{11} + C_1^3 P_{12} + \dot{C}_1 \dot{C}_0 P_{13} + C_1 C_0 P_{14} + \dot{C}_1 \dot{C}_2 P_{15} + C_1 C_2 P_{16} \quad (\text{VI-11})$$

$$\ddot{C}_0 + 2\zeta_0 \omega_0 \dot{C}_0 + \omega_0^2 C_0 = C_1^2 P_{01} + \dot{C}_1^2 P_{02} \quad (\text{VI-12})$$

$$\ddot{C}_2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{C}_2 + \omega_2^2 C_2 = C_1^2 P_{21} + \dot{C}_1^2 P_{22} \quad (\text{VI-13})$$

ここで、 $S_1 = 2/(\lambda_{11}^2 - 1) J_1(\lambda_{11})$ 、 $P_{11} \sim P_{16}$ 、 P_{01} 、 P_{02} 、 P_{21} 、 P_{22} は、無次元深さ h のみに依存するパラメータであり、 C 、 ω 、 ψ の添字は m の値を表わす ($n=1$ は省略してある)。状態変数 C_m 、 \dot{C}_m のオーダーは、 $\ddot{f}(t) \sim O(\varepsilon)$ と仮定すると $C_1, \dot{C}_1 \sim O(\varepsilon^{1/3})$ 、 $C_0, \dot{C}_0, C_2, \dot{C}_2 \sim O(\varepsilon^{2/3})$ である⁽⁴⁷⁾。なお、線形近似解析では、式(VI-11)で非線形項を0とした周方向波数 $m=1$ のモードに関する線形方程式だけを考慮すればよい。

式(VI-11)~(VI-13)によって記述される非線形系は、 $m=1$ のモー

ドのみが外力による励振を直接うけており、 $m=1$ のモードと $m=0, 2$ のモード間が純粋な非線形項のみを介して連成しているという特徴をもつ。したがって、 $m=1$ のモードと $m=0, 2$ のモードは、それぞれ異なる性質を有すると考えられるので、各モードの性質にしたがって解析をすすめる必要がある。

VI-3 液面揺動の不規則応答解析

VI-3-1 入力と考慮するモーメント

地震動は、卓越振動数を有する非定常不規則入力と考えられる。このような地震動を振幅変調非白色性励振としてモデル化すると、タンクの非定常加速度は次のように表わされる。

$$\ddot{f}(t) = e(t)n(t), \quad E[n(t)] = 0, \quad E[n(t)n(t+\nu)] = R(\nu) \quad (\text{VI-14})$$

ここで、 $e(t)$ は確定包絡関数、 $n(t)$ はガウス性定常非白色性雑音、 $R(\nu)$ はこの雑音の自己相関関数である。

応答解析では、 $O(\varepsilon^{4/3})$ までの諸モーメントを考慮し、これより高次の微小項を無視することにする。前節で述べた系の特徴に留意して、諸モーメントを分類し列挙すると次のようになる。

(i) 周方向波数 $m=1$ のモードに関するモーメント

$$E[C_1], E[\dot{C}_1] \sim O(\varepsilon^{1/3}) \quad (\text{VI-15a})$$

$$E[C_1^2], E[C_1\dot{C}_1], E[\dot{C}_1^2] \sim O(\varepsilon^{2/3}) \quad (\text{VI-15b})$$

$$E[C_1^3], E[C_1^2 \dot{C}_1], E[C_1 \dot{C}_1^2], E[\dot{C}_1^3] \sim O(\varepsilon^{3/3}) \quad (\text{VI-15c})$$

$$E[C_1^4], E[C_1^3 \dot{C}_1], E[C_1^2 \dot{C}_1^2], E[C_1 \dot{C}_1^3], E[\dot{C}_1^4] \sim O(\varepsilon^{4/3}) \quad (\text{VI-15d})$$

(ii) 周方向波数 $m=0, 2$ のモードに関するモーメント ($j=0, 2$)

$$E[C_j], E[\dot{C}_j] \sim O(\varepsilon^{7/3}) \quad (\text{VI-16a})$$

$$E[C_j^2], E[C_j \dot{C}_j], E[\dot{C}_j^2], E[C_0 C_2], E[C_0 \dot{C}_2], E[\dot{C}_0 C_2], E[\dot{C}_0 \dot{C}_2] \sim O(\varepsilon^{4/3}) \quad (\text{VI-16b})$$

(iii) 周方向波数 $m=1$ のモードと周方向波数 $m=0, 2$ のモード間の連成モーメント ($j=0, 2$)

$$E[C_j C_1], E[C_j \dot{C}_1], E[\dot{C}_j C_1], E[\dot{C}_j \dot{C}_1] \sim O(\varepsilon^{3/3}) \quad (\text{VI-17a})$$

$$E[C_j C_1^2], E[C_j C_1 \dot{C}_1], E[C_j \dot{C}_1^2], E[\dot{C}_j C_1^2], E[\dot{C}_j C_1 \dot{C}_1], E[\dot{C}_j \dot{C}_1^2] \sim O(\varepsilon^{4/3}) \quad (\text{VI-17b})$$

がウス性励振をうける $m=1$ のモードに関する式 (VI-11) では、非線形項 $[O(\varepsilon^{3/3})]$ が線形項 $[O(\varepsilon^{1/3})]$ に比して小さいので、応答 C_1, \dot{C}_1 のがウス性を仮定することにする。一方、 $m=0, 2$ のモードは、式 (VI-12) (VI-13) から明らかのように、 $m=1$ のモードに関する非線形項を介して励起される。これらの非線形項は非がウス性であるから、応答 $C_0, \dot{C}_0, C_2, \dot{C}_2$ についてはがウス性を仮定しないことにする。

これらの条件にしたがって (i) ~ (iii) のモーメントをまとめると次のようになる。式 (VI-11) の非線形項の C_1, \dot{C}_1 に関する対称

性と外力の平均値が0であることから、式(Ⅶ-15a)の1次モーメントは0である。さらに、 c_1, \dot{c}_1 のガウス性の仮定により、式(Ⅶ-15c)の3次モーメントは0となり、式(Ⅶ-15d)の4次モーメントは式(Ⅶ-15b)の2次モーメントの関数として表わされる。次に、 $\ddot{f}(t), \dot{c}_1, \dot{c}_1$ のガウス性から、式(Ⅶ-17a)の連成2次モーメントが0になることが示される。したがって、以後の解析では、式(Ⅶ-15b)(Ⅶ-16a)(Ⅶ-16b)(Ⅶ-17b)のモーメントを扱えばよい。不規則応答解析では一般に、1次及び2次モーメントが考慮される場合が多いが、本研究では扱う系の特質のために、式(Ⅶ-17b)の連成3次モーメントを考慮する必要がある。

Ⅶ-3-2 モーメント方程式

周方向波数 $m=1$ のモードに関する式(Ⅶ-11)は、非白色性励振をうける非線形1自由度系の方程式とみなすことができるので、Ⅲ章で提案した非定常応答を求めるための近似解析手法を適用する。等価線形化法を施すと式(Ⅶ-11)は次のようになる。

$$\ddot{c}_1 + 2\zeta_e \dot{c}_1 + k_e c_1 = -\psi_1 S_1 \ddot{f}(t) \quad (\text{Ⅶ-18})$$

等価線形係数 ζ_e と k_e は、応答 c_1, \dot{c}_1 のガウス性の仮定を用いることにより次のように表わされる。

$$\zeta_e = \zeta_1 - E[C_1 \dot{C}_1] P_{11} + \frac{1}{2D} \left\{ (E[C_1 \dot{C}_1] E[\dot{C}_0 C_1 \dot{C}_1] - E[C_1^2] E[\dot{C}_0 \dot{C}_1^2]) P_{13} \right. \\ + (E[C_1 \dot{C}_1] E[C_0 C_1^2] - E[C_1^2] E[C_0 C_1 \dot{C}_1]) P_{14} \\ + (E[C_1 \dot{C}_1] E[\dot{C}_2 C_1 \dot{C}_1] - E[C_1^2] E[\dot{C}_2 \dot{C}_1^2]) P_{15} \\ \left. + (E[C_1 \dot{C}_1] E[C_2 C_1^2] - E[C_1^2] E[C_2 C_1 \dot{C}_1]) P_{16} \right\}$$

$$k_e = 1 - E[\dot{C}_1^2] P_{11} - 3E[C_1^2] P_{12} \\ + \frac{1}{D} \left\{ (E[C_1 \dot{C}_1] E[\dot{C}_0 \dot{C}_1^2] - E[\dot{C}_1^2] E[\dot{C}_0 C_1 \dot{C}_1]) P_{13} \right. \\ + (E[C_1 \dot{C}_1] E[C_0 C_1 \dot{C}_1] - E[\dot{C}_1^2] E[C_0 C_1^2]) P_{14} \\ + (E[C_1 \dot{C}_1] E[\dot{C}_2 \dot{C}_1^2] - E[\dot{C}_1^2] E[\dot{C}_2 C_1 \dot{C}_1]) P_{15} \\ \left. + (E[C_1 \dot{C}_1] E[C_2 C_1 \dot{C}_1] - E[\dot{C}_1^2] E[C_2 C_1^2]) P_{16} \right\} \quad (\text{VI-19})$$

ここで、 $D = E[C_1^2] E[\dot{C}_1^2] - (E[C_1 \dot{C}_1])^2$ である。等価線形係数 ζ_e と k_e は、 C_1, \dot{C}_1 に関する 2 次モーメントと式 (VI-17b) の連成 3 次モーメントの関数である。

式 (VI-15b) の 2 次モーメントに関する方程式は、式 (VI-18) より次のように得られる。

$$\dot{E}[C_1^2] = 2E[C_1 \dot{C}_1]$$

$$\dot{E}[C_1 \dot{C}_1] = E[\dot{C}_1^2] - 2\zeta_e E[C_1 \dot{C}_1] - k_e E[C_1^2] - \Psi_1 S_1 E[C_1 \ddot{f}(t)]$$

$$\dot{E}[\dot{C}_1^2] = -4\zeta_e E[\dot{C}_1^2] - 2k_e E[C_1 \dot{C}_1] - 2\Psi_1 S_1 E[\dot{C}_1 \ddot{f}(t)] \quad (\text{VI-20})$$

式 (VI-16a) の 1 次モーメント及び式 (VI-16b) の 2 次モーメントに関する方程式は、式 (VI-12) (VI-13) より次のように得られる。

$$\dot{E}[C_j] = E[\dot{C}_j]$$

$$\dot{E}[\dot{C}_j] = -2\zeta_j \omega_j E[\dot{C}_j] - \omega_j^2 E[C_j] + E[C_1^2] P_{j1} + E[\dot{C}_1^2] P_{j2}, \quad j=0, 2 \quad (\text{VI-21})$$

及 \mathcal{W}

$$\dot{E}[C_j^2] = 2E[C_j \dot{C}_j]$$

$$\dot{E}[C_j \dot{C}_j] = E[\dot{C}_j^2] - 2\zeta_j \omega_j E[C_j \dot{C}_j] - \omega_j^2 E[C_j^2] + E[C_j \dot{C}_1^2] P_{j1} + E[C_j \dot{C}_1^2] P_{j2}$$

$$\dot{E}[\dot{C}_j^2] = -4\zeta_j \omega_j E[\dot{C}_j^2] - 2\omega_j^2 E[C_j \dot{C}_j] + 2E[\dot{C}_j C_1^2] P_{j1} + 2E[\dot{C}_j C_1^2] P_{j2}$$

$$\dot{E}[C_0 C_2] = E[\dot{C}_0 C_2] + E[C_0 \dot{C}_2]$$

$$\dot{E}[\dot{C}_0 C_2] = -2\zeta_0 \omega_0 E[\dot{C}_0 C_2] - \omega_0^2 E[C_0 C_2] + E[\dot{C}_0 \dot{C}_2] + E[C_2 C_1^2] P_{01} + E[C_2 \dot{C}_1^2] P_{02}$$

$$\dot{E}[C_0 \dot{C}_2] = -2\zeta_2 \omega_2 E[C_0 \dot{C}_2] - \omega_2^2 E[C_0 C_2] + E[\dot{C}_0 \dot{C}_2] + E[C_0 C_1^2] P_{21} + E[C_0 \dot{C}_1^2] P_{22}$$

$$\dot{E}[\dot{C}_0 \dot{C}_2] = -2(\zeta_0 \omega_0 + \zeta_2 \omega_2) E[\dot{C}_0 \dot{C}_2] - \omega_0^2 E[C_0 \dot{C}_2] - \omega_2^2 E[\dot{C}_0 C_2]$$

$$+ E[\dot{C}_2 C_1^2] P_{01} + E[\dot{C}_2 \dot{C}_1^2] P_{02} + E[\dot{C}_0 C_1^2] P_{21} + E[\dot{C}_0 \dot{C}_1^2] P_{22}, \quad j=0, 2 \quad (\text{VI-22})$$

式(VI-17b)の連成3次モーメントに関する方程式は、応答 C_1, \dot{C}_1 のガウス性の仮定を用いかつ $O(\varepsilon^{6/3})$ 以上の高次微小項を無視することにより、式(VI-12)(VI-13)(VI-18)から次のように得られる。

$$\dot{E}[C_j C_1^2] = E[\dot{C}_j C_1^2] + 2E[C_j C_1 \dot{C}_1]$$

$$\dot{E}[C_j C_1 \dot{C}_1] = E[\dot{C}_j C_1 \dot{C}_1] + E[C_j \dot{C}_1^2] - 2\zeta_e E[C_j C_1 \dot{C}_1] - k_e E[C_j C_1^2]$$

$$\dot{E}[C_j \dot{C}_1^2] = E[\dot{C}_j \dot{C}_1^2] - 4\zeta_e E[C_j \dot{C}_1^2] - 2k_e E[C_j C_1 \dot{C}_1]$$

$$\dot{E}[\dot{C}_j C_1^2] = -2\zeta_j \omega_j E[\dot{C}_j C_1^2] - \omega_j^2 E[C_j C_1^2] + 2E[\dot{C}_j C_1 \dot{C}_1]$$

$$+ 3(E[C_1^2])^2 P_{j1} + \{E[C_1^2] E[\dot{C}_1^2] + 2(E[C_1 \dot{C}_1])^2\} P_{j2}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}[\dot{C}_j C_1 \dot{C}_1] &= -2(\zeta_j \omega_j + \zeta_e) E[\dot{C}_j C_1 \dot{C}_1] - \omega_j^2 E[C_j C_1 \dot{C}_1] + E[\dot{C}_j \dot{C}_1^2] - k_e E[\dot{C}_j C_1^2] \\ &\quad + 3 E[C_1 \dot{C}_1] \{ E[C_1^2] P_{j1} + E[\dot{C}_1^2] P_{j2} \} \\ \dot{E}[\dot{C}_j \dot{C}_1^2] &= -2(\zeta_j \omega_j + 2\zeta_e) E[\dot{C}_j \dot{C}_1^2] - \omega_j^2 E[C_j \dot{C}_1^2] - 2k_e E[\dot{C}_j C_1 \dot{C}_1] \\ &\quad + \{ E[C_1^2] E[\dot{C}_1^2] + 2(E[C_1 \dot{C}_1])^2 \} P_{j1} + 3(E[\dot{C}_1^2])^2 P_{j2}, \quad j=0,2 \quad (\text{VI-23}) \end{aligned}$$

式(VI-20)~(VI-23)は閉じたモーメント方程式系を構成するので、ルンゲ・クッタ・ギル法を用いて数値計算を行なう。計算をすすめるとき、等価線形係数 ζ_e, k_e と式(VI-20)右辺末項の $E[C_1 \ddot{f}(t)]$, $E[\dot{C}_1 \ddot{f}(t)]$ は、III章と同様の手順を用いて評価される。

液位 η の平均値 μ と分散 σ^2 は、式(VI-9)を用いることにより次式で与えられる。

$$\mu = E[\eta] = E[C_0] J_0(\lambda_0 r) + E[C_2] J_2(\lambda_2 r) \omega^2 \theta \quad (\text{VI-24})$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[\eta^2] - \mu^2 \\ &= \{ E[C_0^2] - (E[C_0])^2 \} J_0^2(\lambda_0 r) + E[C_1^2] J_1^2(\lambda_1 r) \omega^2 \theta \\ &\quad + \{ E[C_2^2] - (E[C_2])^2 \} J_2^2(\lambda_2 r) \omega^2 \theta \\ &\quad + 2 \{ E[C_0 C_2] - E[C_0] E[C_2] \} J_0(\lambda_0 r) J_2(\lambda_2 r) \omega^2 \theta \quad (\text{VI-25}) \end{aligned}$$

モーメント方程式の計算結果を、式(VI-24)(VI-25)に代入することにより、液位の平均応答と分散応答を得ることが出来る。なお、線形近似解析による液位の平均値は常に $\mu=0$ であり、分散は、 $\sigma^2 = E[C_1^2] J_1^2(\lambda_1 r) \omega^2 \theta$ で与えられる。

VI-4 計算結果と考察

非白色性雑音 $n(t)$ の例として、前章までと同様、指数減衰調和相関関数 $R(v)$ を有する雑音を考える。

$$R(v) = R_0 e^{-\alpha|v|} \cos \rho v \quad (\text{VI-26})$$

指数減衰定数 α と卓越振動数 ρ とを、それぞれ、線形系の減衰比 ζ_1 と減衰固有振動数 $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ に対する比 $A = \alpha/\zeta_1$ と $B = \rho/\sqrt{1-\zeta_1^2}$ として表わすことにする。雑音の rms 値 $\sqrt{R_0}$ と、対応する有次元量 $\sqrt{R_0^*}$ (単位: gal) との間には、 $\sqrt{R_0} = \sqrt{R_0^*}/a_0^* \omega_{11}^{*2}$ の関係がある。

包絡関数 $e(t)$ についても、前章までと同様、単位ステップ関数と下記の形の指数関数を考える。

$$e(t) = U(t) \quad (\text{VI-27})$$

$$e(t) = (e^{-at} - e^{-bt}) / \max(e^{-at} - e^{-bt}) \quad (\text{VI-28})$$

応答計算に用いた指数包絡関数の具体的形状を図 VI-2 に示す。短時間で最大値に達したあと、比較的緩やかに減衰しながら継続する地震動に相当すると考えられる。

以下に、壁面 $r=1, \theta=0$ における液位応答の計算例を示す。

図 VI-3 及び図 VI-4 は、それぞれ、単位ステップ包絡関数及び指数包絡関数に対する液位の平均応答と標準偏差応答を示す。線形近似解析による計算結果を、比較のために破線で示した。線

形近似解析では平均応答は常に0である。減衰比の値は、 $\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_0 = \zeta_2 = 0.02$, 液体の深さは $h = 0.4$ である。表 VI-1 に、繰り返し演算によって求めた単位ステップ包絡関数に対する定常応答値を、入力の大きさと共に示した。

$B=1$ の場合は、入力の卓越振動数と液面揺動の線形固有振動数とが等しい場合に相当する。現実の地震及びタンクに着目すると、入力の卓越振動数が液面揺動の線形固有振動数に比して大きい場合が一般に多いようであるが、地盤の液状化などの特別な状況によっては、 $B=1$ に近い場合が起こり得ると考えられる。このとき、小さな入力に対しても非常に大きな応答となり危険であることが、図 VI-3(a), 図 VI-4(a), 及び表 VI-1 から分かる。

$B=2$ の場合は、入力の卓越振動数が液面揺動の線形固有振動数の2倍の場合に相当しており、上に述べたような両振動数の間に距たりのある一般の場合を表わす例として計算を行なった。図 VI-3(b) 及び図 VI-4(b) から明らかなように、線形・非線形両解析による標準偏差応答には、大きな差異が認められない。しかしながら、非線形性を考慮することによって現われた平均応答が正の値をとるため、非線形解析の場合の $\sigma + \mu$ は、線形解析の場合の σ よりも大きくなる。したがって、液位応答の標本関数のとる値に着目すると、非線形の場合の方が線形の場合より

も大きな値をとることになるので、線形近似解析による安全評価では必ずしも十分ではないと考えられる。

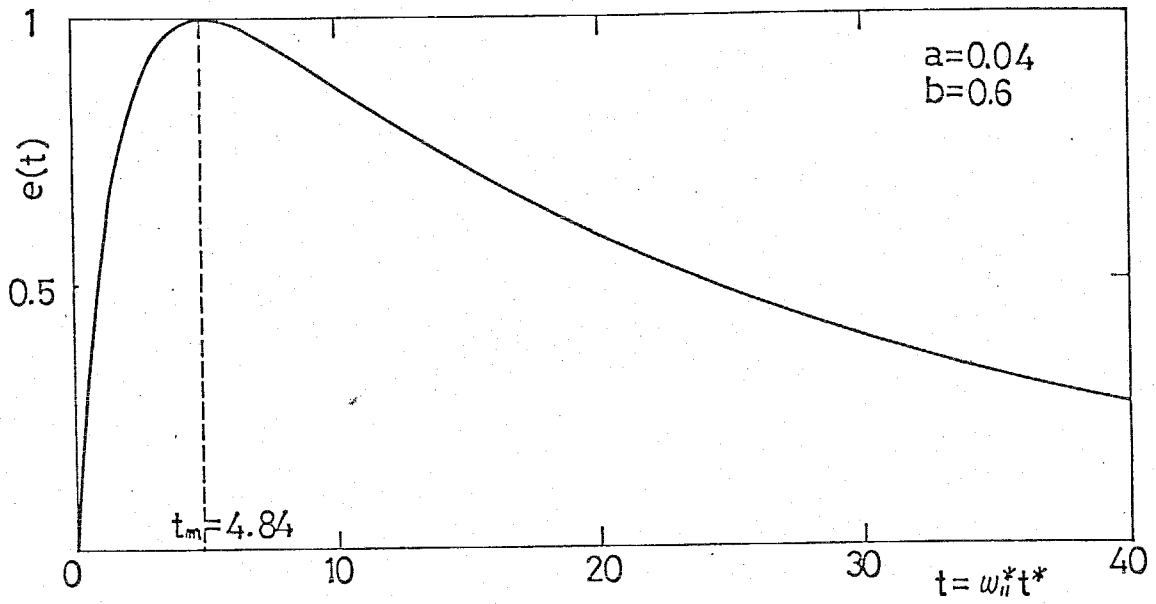
表 VI-1

	入力		線形	非線形	
	$\sqrt{R_0^*}$ (gal)	$\sqrt{R_0}$	標準偏差 σ	平均値 μ	標準偏差 σ
B=1	50	4.42×10^{-2}	6.45×10^{-1}	5.55×10^{-2}	3.24×10^{-1}
B=2	100	8.84×10^{-2}	1.44×10^{-1}	1.54×10^{-2}	1.23×10^{-1}

VI-5 結言

卓越振動数を有する地震入力を、振幅変調非白色性励振としてモデル化し、円筒タンク内液体の非線形液面揺動の非定常不規則応答解析を行なった。

考慮するモードの性質に応じて、第三章で提案した近似解析手法と、連成高次モーメントに関する方程式とを組み合わせて閉じた方程式系を構成し、数値計算によって壁面における液位の平均応答と標準偏差応答を求めた。非線形液面揺動では、液位の平均応答が正の値をとるので、平均値が常に0となる線形近似解析による安全評価では必ずしも十分ではないことを明らかにした。



图VI-2 指数包络函数

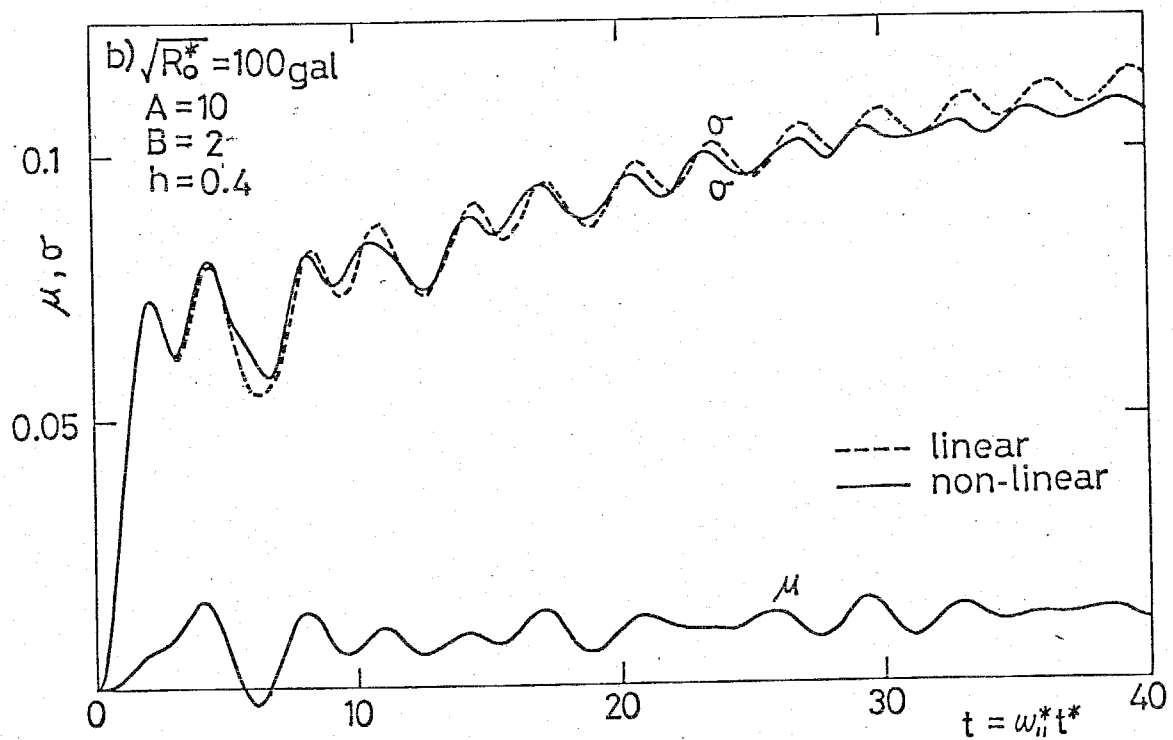
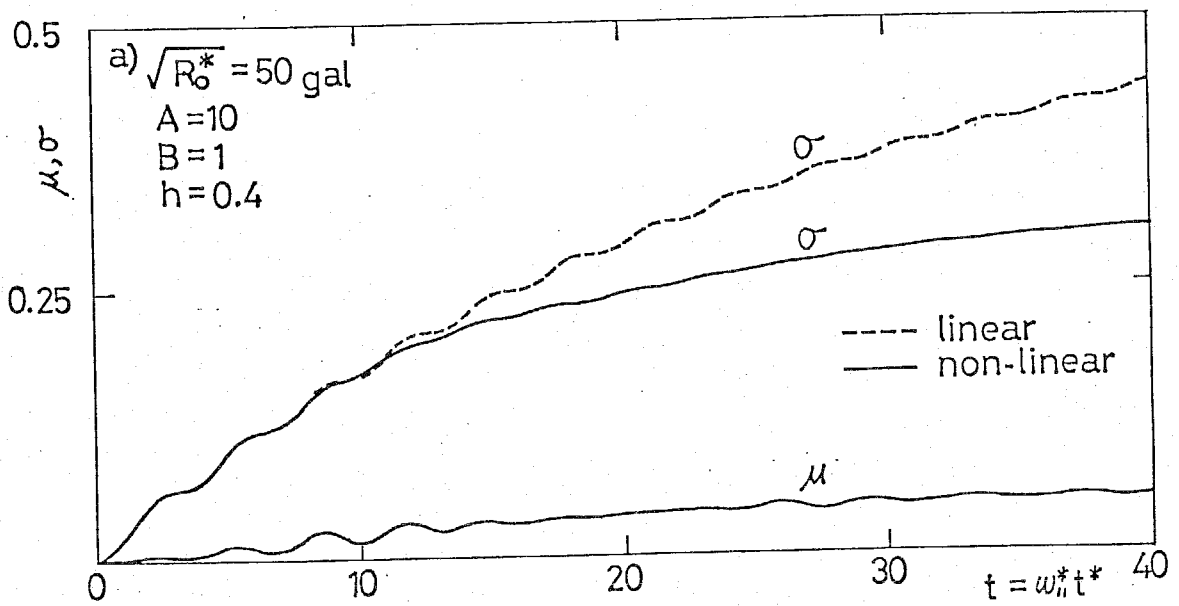


図 7-3 円筒タンクの半径 a_0^* で無次元化された液位の平均応答と標準偏差応答 (単位ステップ包絡関数)

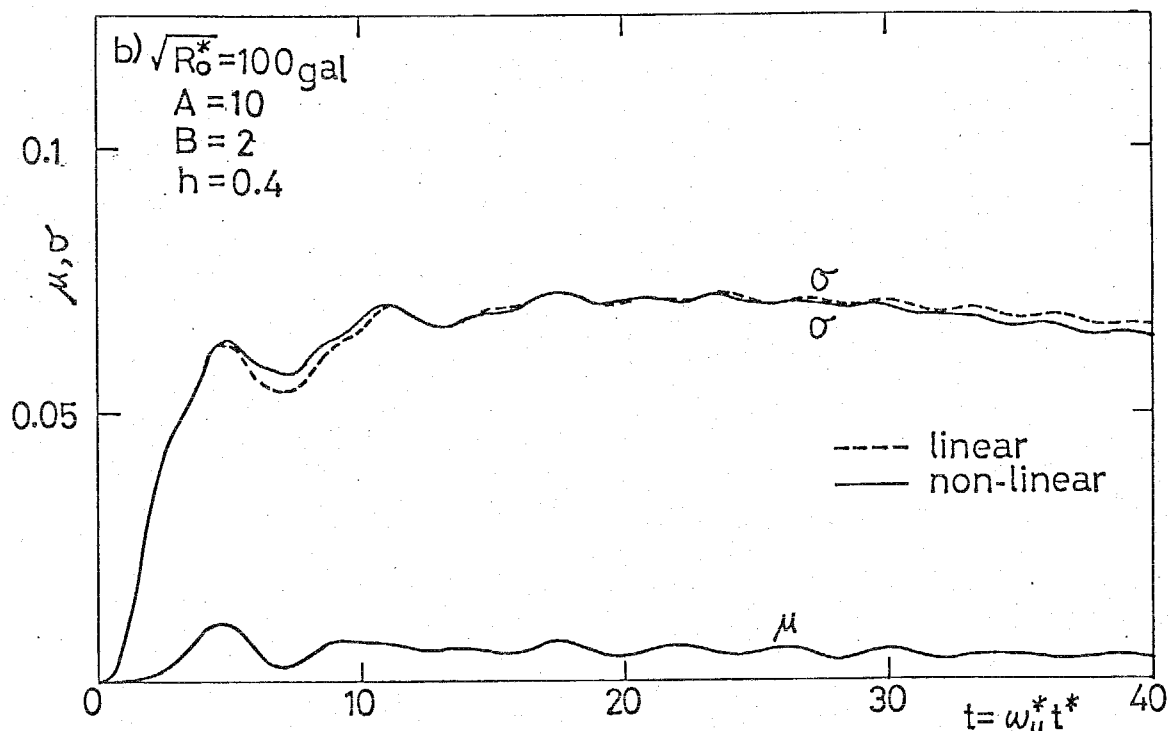
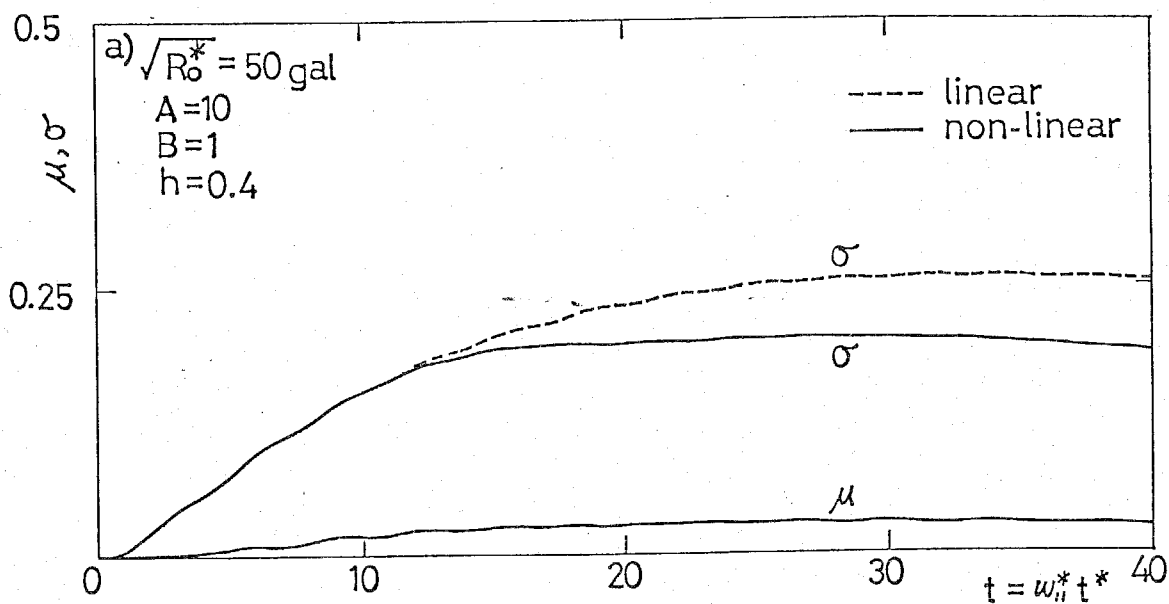


図 VI-4 円筒タンクの半径 a_0^* で無次元化された液位の平均応答と標準偏差応答 (指数包絡関数)

IV章 結論

本論文は、非白色性励振をうける非線形系の非定常不規則応答解析を行なったものである。

II章では、振幅変調非白色性励振下の線形多自由度系に対して、モーメント方程式手法による非定常不規則応答解析を行なった。従来白色性励振に対して適用されてきたモーメント方程式手法が、非白色性励振をうける系の応答解析に対しても有効であることが明らかになった。1及び2自由度系のrms応答を求め、過渡応答が定常応答値を越えるという意味でのオーバーシュート現象が、単位ステップ包絡関数の場合だけでなく、指数包絡関数の場合にも起こり得ることを示した。

III章では、振幅変調非白色性励振をうける非線形1自由度系の非定常不規則応答を解析するために、基礎方程式の等価線形化とそのモーメント方程式の適用からなる近似手法を提案した。モーメント方程式の非斉次項となる応答と外力の相互関係を、漸化式によって評価することにより非白色性励振に対する応答解析を行なった点に、本論文の手法の特色がある。本手法の有効性を明らかにするために、デュフィング系及び乾性摩擦系を例にとってrms応答を求め、シミュレーションの結果と比較し

た。デュフイング系の応答については、硬性ばね非線形系の応答が、線形系の応答よりも大きくなることを示した。

IV章では、非対称非線形ばね特性を有する1自由度系に対して、平均値が時間と共に変動する等価外力を考慮した等価線形化法を提案し、III章と同様の近似解析手法を適用して非定常不規則応答解析を行なった。平均応答と分散応答を求め、シミュレーションの結果と比較することにより、本手法の有効性を明らかにした。また、系の非対称性の度合いが強い程、応答平均値のずれが大きくなることを示した。

V章では、非対称非線形ばね特性を有する多自由度系に対して、III, IV章で提案した近似解析手法を拡張し、その定式化を行なった。本手法の適用例として、非対称非線形2自由度系の平均応答と分散応答を求めた。

VI章では、卓越振動数を有する地震入力を、振幅変調非白色性励振としてモデル化し、円筒タンク内液体の非線形液面揺動の非定常応答解析を行なった。考慮するモードの性質に応じて、III章で提案した近似解析手法と、連成高次モーメントに関する方程式とを組み合わせて閉じた方程式系を構成し、数値計算に

よって壁面における液位の平均応答と標準偏差応答を求めた。
非線形液面揺動では、液位の平均応答が正の値をとるので、平均値が常に0となる線形近似解析による安全評価では必ずしも十分ではないことを指摘した。

謝 辞

本研究を行なうにあたり、終始変わらぬ御指導を賜りました坂田勝教授に、心から御礼申し上げます。また、貴重な御討論をいただいた遠藤満助教授、青木繁助教授に深く感謝いたします。さらに、数値計算に際して御協力を得た内海雅彦君をはじめ、研究室の皆様にも厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- (1) L.Arnold 1974 *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*.
New York: John Wiley.
- (2) A.Friedman 1975 *Stochastic Differential Equations and Applications, volume 1*.
New York: Academic Press.
- (3) S.O.Rice, *Bell System Tech. J.* 23, 282-332(1944); 24, 46-156(1945).
Mathematical analysis of random noise. Reprinted in N.Wax (Editor) 1954
Selected Papers on Noise and Stochastic Processes. 133-294. New York: Dover.
- (4) T.K.Caughey and H.J.Stumpf 1961 *Journal of Applied Mechanics* 28, 563-566.
Transient response of a dynamic system under random excitation.
- (5) R.L.Barnosky and L.R.Maurer 1969 *Journal of Applied Mechanics* 36, 221-227.
Mean square response of simple mechanical system to nonstationary random
excitation.
- (6) L.L.Bucciarelli, Jr. and C.Kuo 1970 *Journal of Applied Mechanics* 37, 612-616.
Mean-square response of a second-order system to nonstationary random
excitation.
- (7) J.Lee 1974 *Journal of Sound and Vibration* 35, 47-53. A new formulation of the
linear dynamic response to random excitation.
- (8) S.F.Masri 1978 *Journal of Applied Mechanics* 45, 649-656. Response of a
multidegree-of-freedom system to nonstationary random excitation.
- (9) Y.K.Lin 1963 *Journal of the Acoustical Society of America* 35, 222-227.
Nonstationary response of continuous structures to random loading.
- (10) S.F.Masri and F.Udwadia 1977 *Journal of Applied Mechanics* 44, 487-491.
Transient response of a shear beam to correlated random boundary excitation.
- (11) J.B.Roberts 1971 *Journal of Sound and Vibration* 14, 385-400. The covariance
response of linear systems to non-stationary random excitation.
- (12) I-Min Yang and W.D.Iwan 1972 *Journal of Applied Mechanics* 39, 559-562.
Calculation of correlation matrices for linear system subjected to nonwhite
excitation.

- (13) P.-T.D.Spanos 1978 *International Journal of Solids and Structures* 14, 861-867. Non-stationary random vibration of a linear structure.
- (14) A.Mayer 1977 *Journal of Dynamic Systems, measurement and Control* 99, 103-108. Generalized cumulants representing a transient random process in a linear system.
- (15) J.B.Roberts 1965 *Journal of Sound and Vibration* 2, 375-390. The response of linear vibratory systems to random impulses.
- (16) Y.K.Lin 1963 *Journal of Applied Mechanics* 30, 555-558. Application of nonstationary shot noise in the study of system response to a class of nonstationary excitations.
- (17) T.K.Caughey 1963 *Journal of the Acoustical Society of America* 35, 1683-1692. Derivation and application of the Fokker-Planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subjected to white random excitation.
- (18) R.G.Bhandari 1966 *Ph.D.Thesis, University of Washington*. Random vibrations in discrete nonlinear dynamic systems.
- (19) J.B.Roberts 1977 *Journal of Sound and Vibration* 50, 145-156. Stationary response of oscillator with non-linear damping to random excitation.
- (20) R.H.Toland, C.Y.Yang and C.K.-C.Hsu 1972 *International Journal of Nonlinear Mechanics* 7, 395-406. Non-stationary random vibration of non-linear structures.
- (21) R.L.Stratonovitch 1963 *Topics in the Theory of Random Noise, volume 1*. New York: Gordon and Breach.
- (22) W.D.Iwan and P.-T.Spanos 1978 *Journal of Applied Mechanics* 45, 170-174. Response envelope statistics for nonlinear oscillators with random excitation.
- (23) J.L.Bogdanoff and F.Kozin 1962 *Journal of the Acoustical Society of America* 34, 1063-1066. Moments of the output of linear random systems.
- (24) I.G.Cumming 1967 *International Journal of Control* 5, 85-90. Derivation of the moments of a continuous stochastic system.
- (25) T.T.Soong 1973 *Random Differential Equations in Science and Engineering*. New York and London: Academic Press.

- (26) N.G.F.Sancho 1970 *Journal of Mathematical Physics* 11, 771-774. Techniques for finding the moment equations of a nonstationary stochastic system.
- (27) R.Bellman and J.M.Richardson 1968 *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 23, 639-644. Closure and preservation of moment properties.
- (28) N.G.F.Sancho 1970 *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 29, 384-391. On the approximate moment equations of a nonlinear stochastic differential equation.
- (29) R.M.Wilcox 1970 *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 32, 532-542. Truncation and preservation of moment properties for Fokker-Planck moment equations.
- (30) S.H.Crandall 1963 *Journal of the Acoustical Society of America* 35, 1700-1705. Perturbation techniques for random vibration of nonlinear systems.
- (31) T.K.Caughey 1963 *Journal of the Acoustical Society of America* 35, 1706-1711. Equivalent linearization techniques.
- (32) E.T.Foster, Jr. 1968 *Journal of Applied Mechanics* 35, 560-564. Semilinear random vibrations in discrete systems.
- (33) W.D.Iwan and I-Min Yang 1972 *Journal of Applied Mechanics* 39, 545-550. Application of statistical linearization techniques to nonlinear multidegree-of-freedom systems.
- (34) R.M.Iyengar and P.K.Dash 1978 *Journal of Applied Mechanics* 45, 393-399. Study of the random vibration of nonlinear systems by the Gaussian closure techniques.
- (35) N.W.McLachlan 1958 *Ordinary Non-linear Differential Equations in Engineering and Sciences*. Oxford: Clarendon Press.
- (36) P-T.D.Spanos and W.D.Iwan 1979 *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 101, 31-36. Harmonic Analysis of dynamic systems with nonsymmetric nonlinearities.
- (37) P-T.D.Spanos 1980 *Journal of Applied Mechanics* 47, 209-211. Formulation of stochastic linearization for symmetric or asymmetric M.D.O.F. nonlinear systems.

- (38) A.Gelb (Editor) 1974 *Applied Optimal Estimation*. Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology Press.
- (39) Y.K.Lin 1967 *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*. New York: McGraw-Hill.
- (40) M.Shinozuka and C.-M.Jan 1972 *Journal of Sound and Vibration* 25, 111-128.
Digital simulation of random processes and its applications.
- (41) T.J.Ulrych 1972 *Journal of Geophysical Research* 77, 1396-1400. Maximum entropy power spectrum of truncated sinusoids.
- (42) W.Y.Chen and G.R.Stegen 1974 *Journal of Geophysical Research* 79, 3019-3022. Experiments with maximum entropy power spectra of sinusoids.
- (43) H.R.Radoski, P.F.Fougere and E.J.Zawalick 1975 *Journal of Geophysical Research* 80, 619-625. A comparison of power spectral estimates and applications of the maximum entropy method.
- (44) 日野幹雄 1977 "スペクトル解析" 朝倉書店
- (45) R.E.Hutton 1963 *NASA TN D-1870* An investigation of resonant, nonlinear, nonplanar free surface oscillations of a fluid.
- (46) 木村憲明・大橋弘隆: "軸対称容器におけるスロッシング"の非線形応答(第1報, 支配方程式の導出と解の性質)". 日本機械学会論文集(第1部) 44巻385号(昭53-9) 3024-3033.
- (47) 小林正生・坂田勝・遠藤満: "横方向加振による円筒容器内流体の液位応答解析" 日本機械学会講演論文集 No.770-12 ('77-10) 48-50
- (48) 資料 "高圧ガス製造施設等耐震設計基準について" 高圧ガス. Vol.17 No.9 (1980) 462-474
- (49) M.Aslam, W.G.Godden and D.T.Scalise 1979 *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* 105, EM3 371-389. Earthquake sloshing in annular and cylindrical tanks.
- (50) R.L.Seliger and G.B.Whitham 1968 *Proceedings of the Royal Society of London*. A. 305, 1-25. Variational principles in continuum mechanics.
- (51) 田中良雄 昭和53年度 東京工業大学修士論文 "液面の不規則揺動に関する研究"
- (52) 小林啓美・長橋純男: "地表で観測された地震動の周期特性から求めた地盤の増幅特性と地震基盤における地震動の性質". 日本建築学会論文報告集 第240号, 昭和51年2月, 79-92

付録 A

白色雑音入力を受ける線形系の変位の自乗平均応答が、オーバーシュートを示さないことを説明する。

平均値0、パワースペクトル S_0 の白色雑音入力、単位ステップ状に加わる場合を考える。運動方程式は次のとおりである。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = n(\tau), \quad E[n(\tau)] = 0, \quad E[n(\tau)n(\tau+\nu)] = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad (A-1)$$

本系の変位の自乗平均応答の厳密解は既に求められており、次のとおりである。^(*)

$$E[x^2] = \frac{\pi S_0}{2\zeta} \left\{ 1 - e^{-2\zeta\tau} \left(1 + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin 2\sqrt{1-\zeta^2}\tau + \frac{2\zeta^2}{1-\zeta^2} \sin^2 \sqrt{1-\zeta^2}\tau \right) \right\} \quad (A-2)$$

式(A-2)の導関数を求めると、

$$\frac{d}{d\tau} E[x^2] = \frac{2\pi S_0}{1-\zeta^2} e^{-2\zeta\tau} \sin^2 \sqrt{1-\zeta^2} \tau \geq 0 \quad (A-3)$$

したがって、変位の自乗平均応答は、時間に関して単調増加関数となるので、過渡応答が定常応答値を越えることはない。

(*) G.E.Uhlenbeck and L.S.Ornstein 1930 *Physical Review* 36, 823-841.

On the theory of the Brownian motion. Reprinted in N.Wax (Editor) 1954

Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, 93-111. New York: Dover.

付録 B

式(III-29) の定積分の結果を以下に示す。

$$\begin{aligned}
 I_1(x) &= \int_0^{\Delta\tau} e^{xu} \sin \omega_{ei} u \cos \rho u du \\
 &= \frac{1}{2\{\chi^2 + (\omega_{ei} + \rho)^2\}} [e^{x\Delta\tau} \{ \chi \sin(\omega_{ei} + \rho)\Delta\tau - (\omega_{ei} + \rho) \cos(\omega_{ei} + \rho)\Delta\tau \} + \omega_{ei} + \rho] \\
 &\quad + \frac{1}{2\{\chi^2 + (\omega_{ei} - \rho)^2\}} [e^{x\Delta\tau} \{ \chi \sin(\omega_{ei} - \rho)\Delta\tau - (\omega_{ei} - \rho) \cos(\omega_{ei} - \rho)\Delta\tau \} + \omega_{ei} - \rho]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(x) &= \int_0^{\Delta\tau} e^{xu} \sin \omega_{ei} u \sin \rho u du \\
 &= -\frac{1}{2\{\chi^2 + (\omega_{ei} + \rho)^2\}} [e^{x\Delta\tau} \{ \chi \cos(\omega_{ei} + \rho)\Delta\tau + (\omega_{ei} + \rho) \sin(\omega_{ei} + \rho)\Delta\tau \} - \chi] \\
 &\quad + \frac{1}{2\{\chi^2 + (\omega_{ei} - \rho)^2\}} [e^{x\Delta\tau} \{ \chi \cos(\omega_{ei} - \rho)\Delta\tau + (\omega_{ei} - \rho) \sin(\omega_{ei} - \rho)\Delta\tau \} - \chi]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(x) &= \int_0^{\Delta\tau} e^{xu} \cos \omega_{ei} u \cos \rho u du \\
 &= \frac{1}{2\{\chi^2 + (\omega_{ei} + \rho)^2\}} [e^{x\Delta\tau} \{ \chi \cos(\omega_{ei} + \rho)\Delta\tau + (\omega_{ei} + \rho) \sin(\omega_{ei} + \rho)\Delta\tau \} - \chi] \\
 &\quad + \frac{1}{2\{\chi^2 + (\omega_{ei} - \rho)^2\}} [e^{x\Delta\tau} \{ \chi \cos(\omega_{ei} - \rho)\Delta\tau + (\omega_{ei} - \rho) \sin(\omega_{ei} - \rho)\Delta\tau \} - \chi]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4(x) &= \int_0^{\Delta\tau} e^{xu} \cos \omega_{ei} u \sin \rho u du \\
 &= \frac{1}{2\{\chi^2 + (\omega_{ei} + \rho)^2\}} [e^{x\Delta\tau} \{ \chi \sin(\omega_{ei} + \rho)\Delta\tau - (\omega_{ei} + \rho) \cos(\omega_{ei} + \rho)\Delta\tau \} + \omega_{ei} + \rho] \\
 &\quad - \frac{1}{2\{\chi^2 + (\omega_{ei} - \rho)^2\}} [e^{x\Delta\tau} \{ \chi \sin(\omega_{ei} - \rho)\Delta\tau - (\omega_{ei} - \rho) \cos(\omega_{ei} - \rho)\Delta\tau \} + \omega_{ei} - \rho]
 \end{aligned}$$