T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	多機能な曲面生成要素間の相互作用による適応的曲面構築に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	宇都有昭
Author(English)	Kuniaki Uto
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第4233号, 授与年月日:1999年9月30日, 学位の種別:課程博士, 審査員:小杉幸夫
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第4233号, Conferred date:1999/9/30, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

多機能な曲面生成要素間の相互作用による適応的曲面構築に関する研究

東京工業大学
大学院総合理工学研究科
精密機械システム専攻

宇都　有昭

目 次

第 1 章　序論 **3**
1.1　本研究の目的と背景 3
1.2　本論文の構成 7

第 2 章　離散モデルによる曲面表現 **10**
2.1　離散モデルによる数値解析 10
2.1.1　画像復元問題に対する MRF モデルの適用 10
2.1.2　弾性自己組織化ネットワークによる曲面近似 12
2.2　区分的多項式による近似曲面表現 18
2.3　シミュレーション 23
2.4　2 章のまとめ 23

第 3 章　分割表現による曲面構築 **26**
3.1　多様体と分割曲面 26
3.1.1　多様体と局所座標系 27
3.1.2　近似曲面の 3 角形分割 29
3.2　多項式表現による局所曲面の構築 30
3.2.1　定義域と入力空間の分割 30
3.2.2　同相写像の定義 36
3.3　3 章のまとめ 37

第 4 章　分割表現による曲面構築のためのアルゴリズムおよびネットワーク表現 **39**
4.1　区分的曲面構築のアルゴリズム 39
4.1.1　評価関数 39
4.1.2　最急降下法による評価関数の最小化 41
4.1.3　局所曲面間の相互作用 43
4.1.4　幾何学的特徴量 48
4.1.5　区分的曲面構築アルゴリズム 50
4.1.6　近傍系の定義 51
4.1.7　近接領域間の連続性強化に関する考察 52
4.2　ネットワーク表現 57
4.2.1　セル型ネットワークと局所並列計算 57
4.2.2　曲面構築アルゴリズムの統計力学的側面 58

4.2.3 ネットワークのモジュラー性 62
4.2.4 モジュラー構造を持つセル型ネットワーク 64
4.2.5 不連続部分を含む曲面構築と分割の階層化 66
4.3 多変数関数近似 71
4.3.1 光学式ナビゲーションシステムにおける非線形写像 71
4.3.2 高次元曲面近似への拡張 75
4.4 4 章のまとめ 76

第 5 章 区分的曲面構築法の基礎的特性 78
5.1 関数近似問題 78
5.1.1 1 変数関数近似 78
5.1.2 2 変数関数近似 95
5.1.3 3 変数関数近似 111
5.2 5 章のまとめ 115

第 6 章 ステレオ地理画像に基づく地形モデル生成 124
6.1 競合と協調による非線形写像 124
6.2 ステレオ地理画像に基づく地形モデル生成 127
6.2.1 協調操作 127
6.2.2 ステレオ画像に基づく地形モデル生成 130
6.3 山地画像に基づく地形モデル生成 133
6.4 6 章のまとめ 134

第 7 章 結論 138

参考文献 141

付 録 A 2 次元曲面に関する勾配値の導出 145
A.1 $\partial E_a^i/\partial c_j^i$ の導出 145
A.2 $\partial E_c^i/\partial c_j^i$ の導出 145
A.3 $\partial E_A^i/\partial c_j^i$ の導出 147

謝辞 149

第1章　序論

1.1　本研究の目的と背景

近年のコンピュータ処理技術の急速な発展にともない，数値解法は工学，理学，経済学などさまざまな分野において非常に重要な役割を果たしている．計算機による数値計算では，対象を細分化，離散化し，各要素に関する逐次計算の積み重ねにより系全体の解が獲得されており，高性能の計算機の出現は，非常に精度の高い解を与えるようになった．また，当初は模擬実験的位置づけであったシミュレーションを本格的な実験そのものに押し上げ，さらには未知の領域の探索のための先駆的な役割を果たすようになった．

自然科学分野においては，しばしば基本的な現象を微分方程式によりモデル化する方法がとられるが，その多くは解析的解法の適用が不可能である．特に，複数の非線形微分方程式でモデル化される力学系のような問題に対して一般には解析的な厳密解は得られない．さらに，過多の自由パラメータを持つために問題の定式化そのものが困難である現象も多く存在している．このように，ミクロでは予測可能でも，マクロでは予測不可能であるような現象に対して，計算機による数値解析は非常に強力な方法である．たとえば，流体分野における格子ガスオートマトン法では，非常に単純な決定論的衝突則および境界条件を適用することで，時間軸に対して複雑な連続流体の振る舞いが高い精度でモデル表現されている [7]．また，各個体の振る舞いは非常に簡単なルールに基づくが，マクロでは多様で複雑な振る舞いをする人工生命 [26] などのシミュレーション結果を，実世界の対象と比較することで，自然現象のより高度な観察をおこなうことが可能である．このように，数値計算法は，過多の自由パラメータを含む系の最適化を解析的手法で解けない場合に特に有効な方法である．しかしながら，機械工学や地理画像処理分野など広い分野で必要とされる基本的問題である離散データの補間曲面近似への離散化素子群の局所的相互作用による表現系の適用については必ずしも十分な議論，実験的検討が尽くされていない．

本論文では，離散化素子間の相互作用による曲面近似問題を目標とする．視覚の計算理論の分野では，視覚情報に基づく 3 次元モデル構築に関して視差変化に基づく物体表面復元 [19] などさまざまな研究がおこなわれている [29]．ステレオ画像に基づく立体モデル構築では，複数画像の対応点の獲得とともに，対応点より算出した離散的な 3 次元情報を滑

らかに補間する表現系およびその構築アルゴリズムの設定が重要である．

現在，曲面の補間問題に対しては，スプライン関数等解析的アルゴリズムが確立されている．スプライン関数は，与えられたデータを補間する区分的多項式であり，その解法は行列計算などの解析に帰着し，1 変数の場合については非常によく整備された解法である．特に，区分的多項式であるスプライン関数は，局所的に明確かつ単純な表現であり，高度の幾何学量の算出が容易であることから，大域的に滑らかな一意曲面を生成することが可能である．しかし，多変数スプライン（マルチスプライン）[4] については，従来からの解析的解法では困難を生じる場合がある．さらに，不連続部分を有する曲面近似を扱うことができないなど，問題に対して適応的な対応ができないため応用の範囲が限定されている．

他方，多層パーセプトロン (MLP) に代表されるニューラルネットワークは，非線形関数近似（補間）において代表的なツールとなっている．MLP は，その内部構造をブラックボックス化できるために，特に入力空間の次元が過多の場合に有効である．しかしながら，最急勾配法により獲得された解はネットワークの初期状態に依存する場合がある（局所解の存在），ネットワークの結合の複雑性により滑らかさなど正則化項の評価が困難である，探索の収束が漸近的であり，アルゴリズムのステップ数の上限を設定することが不可能である，学習係数が問題に大きく依存する，不連続部分を含む曲面近似に適さない，などの問題点があるため，曲面（3 次元モデル）生成に適した方法であるとは言えない．

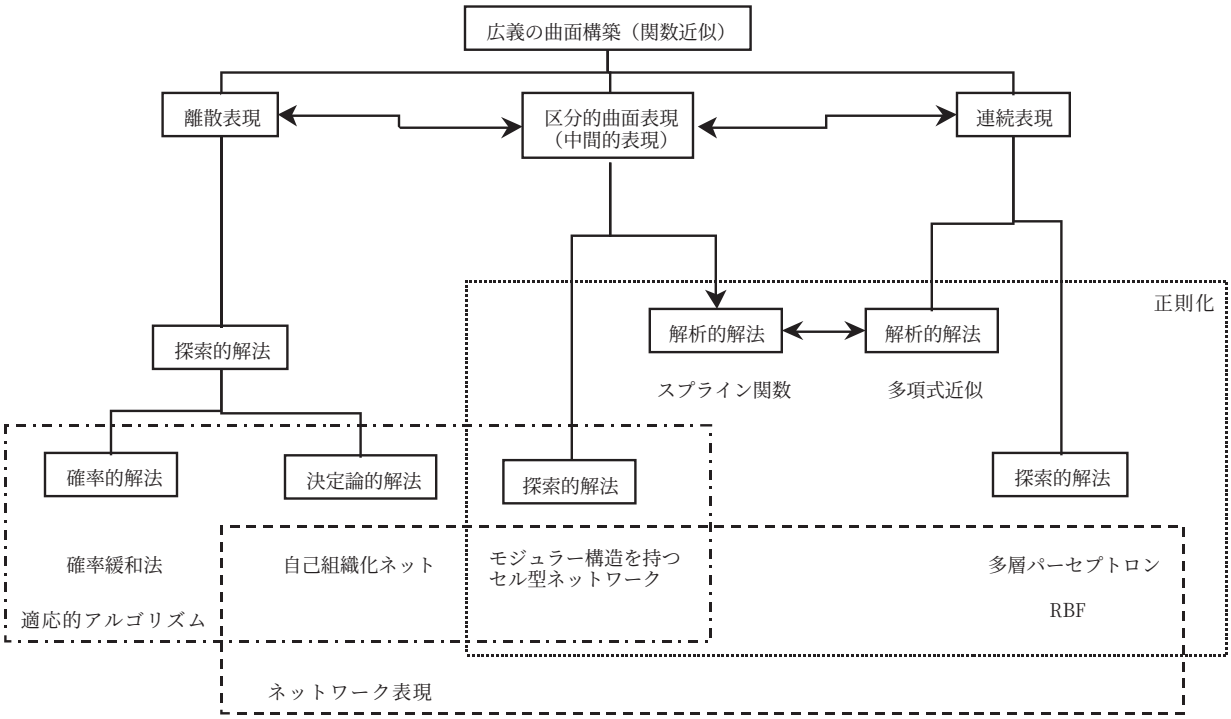
近年注目されている情報処理や制御の枠組みに自律分散系がある．自律分散系は複数の自律した構成要素が局所的な評価基準に従って並列に動作し，周囲との相互作用を通じて大域的な目標を実現するシステムであり，システム全体を統合する管理機構を持たないことから自己組織化系ととらえることができる．離散あるいは連続値の 1 次元情報（位置，色，濃淡等）を保持する素子の格子状配列により構成される位相保持自己組織化システムでは，与えられる信号パターンに関する競合および位相的近傍系に含まれる素子間の（1 次元情報の差分に基づく）位相保持作用により入力ベクトルの確率密度分布の位相保持マッピングがおこなわれる [23]．自己組織化系は距離の定義されたノルム空間における離散化素子の相互作用系ととらえることが可能であるが，この系は補間問題や境界値問題のように，局所的評価基準以外の評価（薄膜のポテンシャル，ラプラス方程式等）が要求される問題に対しては適用されていない．これは，離散化された素子の保持する情報が非常に低次であることに起因しており，例えば関数近似問題に自己組織化法を適用する場合，各素子の保持する情報（位置情報）のみから，曲面を特徴づける量（第 1,2 基本量など）を導出することは不可能である．このように，設定されたエネルギ（滑らかさの未達成度に関する評価値）を大域的に最小化する最適化問題においては，系全体を統合する管理機構を持たない自己組織化系によるアプローチは適当であるとはいえない．大域解の獲得のため

にはホップフィールドネットワークのように各要素の相互作用を全結合とするか，あるいは各素子に高度な幾何学的特徴量を与える必要がある．しかし，局所結合型のネットワークでは，素子数 N 個，局所結合 L 個の場合に LN 個の結合が存在することに対し，全結合型のネットワークを用いる場合，N 個の素子に対して N^N 個の結合が存在し，N の増大による計算コストの過多が問題となる．また，自由パラメータ数の過多により，ローカルミニマ，収束性の問題などが発生する．

本論文では，与えられたデータを滑らかに補間する曲面構築を局所曲面の貼り合わせにより実現する問題を扱う．まず上記の問題は各素子の保持する情報の低次性に起因すると考え，各素子に複数の情報を与える（多機能化）ことで各要素が曲面を特徴づける量を保持する系を提案し，区分的曲面を構成する局所曲面の多機能化により相互作用の階層化・多機能化がおこなわれ適応的な曲面構築をおこなうことを示す．さらに，提案した区分的曲面構築アルゴリズムを実現するモジュール構造を持つセル型ネットワーク表現することで相互作用の動作を明確にする．次に，曲面近似問題および境界値問題に関するシミュレーションにより本提案法の有効性を示す．最後に，区分的曲面構築アルゴリズムを 2 画像要素間の偏移を表わす移動ベクトルの協調操作に適用する．さらに，ステレオ画像における移動ベクトルは指向性を持つという幾何学的特性を利用することで，視差としての移動ベクトルに基づく内部モデル生成および移動ベクトルの協調操作の循環的多機能化操作により，信頼度の高い写像の獲得をおこなう．

以上を要するに，本研究の目的は，曲面生成要素群により近似曲面を分割表現する方法として複数の情報を保持する要素の多機能化の方法を提案し，曲面生成のために複数の評価関数を定義することにより滑らかな曲面の適応的な構築を実現するとともに，曲面要素に対応する多機能素子間の局所結合により構成されるモジュール構造を持ったセル型ネットワークを用いて曲面を再構成するアルゴリズムを実現する方法の確立にある．

本研究の位置づけを図 1.1 に示す．



（太線枠内が本論文で扱う範囲を表わす）

図 1.1: 本研究の位置づけ

1.2　本論文の構成

本論文は以下に示す全 7 章より構成される．

第 2 章「離散モデルによる曲面表現」では，まず離散化されたモデルの近傍系における相互作用のみにより大域的解を獲得するアルゴリズムを提案し，弾性自己組織化ネットを関数近似問題に適用し，その特長および問題点について論じる．さらに，自己組織化ネットワークの多機能化を実現するために，区分的多項式表現であるスプライン関数の概念を導入し近似曲面の高次の幾何学的特徴量を評価するアルゴリズムの有効性を確認する．

第 3 章「分割表現による曲面構築」では，与えられたデータを補間する滑らかな曲面を局所的に連続構造を持つ多機能化曲面の和集合として表現し，各局所曲面の貼り合わせにより全体の系を構成する形で数学的定式化をおこなう．次に曲面の分割と入力空間の分割の等価性を示し，表現系としてよりアルゴリズム化が容易である正方格子分割法に適用し，各局所定義域から入出力空間への 3 次多項式に基づく同相写像として表現することで各局所曲面への分割・再構成法の定式化をおこなう．

第 4 章「分割表現による曲面構築のためのアルゴリズムおよびネットワーク表現」では，近似曲面の構築を各局所同相写像の最適化に帰着させ，教師データに対する誤差評価関数，局所曲面の幾何学量評価関数，局所曲面間の連続性評価関数から構成される多機能化エネルギ表現に関して最急降下法を適用することで，同相写像のパラメータ修正をおこなうアルゴリズムを提案し，第 3 章で定式化した表現系およびそのネットワーク表現を実現する．また，一致強化（CE）の概念を提案し，隣接領域間の類似度を強化することで連続性を保証する方法を提案する．また，ネットワーク間の結合を自己結合を含む近傍結合に制限し，統計力学との関連付けにより，各局所同相写像を実現する高次ネットワークを格子状に配置したモジュール構造を持つセル型ネットワークにより区分的曲面構築アルゴリズムの実現が可能であることを示す．また，本提案法では，ネットワークの構築が近似曲面構築の際に定義された各評価関数に基づくパラメータ修正作用は，1) 教師データが割り当てられたセル内部での誤差修正作用，2) 各ネットワークにおいてモジュール構造で表現可能な自己結合に関する局所曲面の幾何学量を評価する相互作用，および 3) 各局所曲面間の連続性を強化する隣接セル間の相互作用，以上 3 つのフェーズの相互作用に分類され，ネットワークの階層化により，各フェーズごと機能が明示的に実行されることを明らかにする．

第 5 章「区分的曲面構築法の基礎的特性」では，第 4 章で示したアルゴリズムを関数近似問題へ適用する．まず，１変数関数近似問題に適用し，各評価関数に対する収束性に関して，学習の初期に誤差関数および連続関数が 0 に収束し，その条件の下で幾何学量の修正がおこなわれることを確認することで評価関数の妥当性を示す．次に，高次幾何学的特徴量を評価することで，分割数に依存しない滑らかな曲面の実現を確認する．さらに，学

習係数の選択により，補間問題のみでなくノイズを含むデータの平滑化をも実現できることを確認する．次に２変数関数近似問題へ本法を適用し，まず，種々の近傍系について近似曲面の形成および収束性を確認し，より局所的な近傍系を適用した場合でも，同等の近似結果が得られることを確認する．さらに，ＣＥを適用することで収束性には遅延が生じるものの単純なアルゴリズムで解析的方法と同等の近似曲面をより生成し得ることを確認する．さらには本法を３変数関数近似問題にも拡張し，２変数関数近似の際に得られた結果を適用して，３変数関数近似への展開が可能であることを確認する．

第６章「ステレオ地理画像に基づく地形モデル生成」では，航空写真などのステレオ地理画像に基づくモデル生成の際の２画像間の対応点獲得に関して，５章までに示した区分的曲面構築アルゴリズムによる３次元モデルの構築と CE の概念に基づいて得られる移動ベクトル場の生成を循環的におこなう多機能化処理により，より信頼度の高い高度分布を得るアルゴリズムを提案し，その効果を確認する．

第７章「結論」では，本論文で示された結果を総括する．

以上の構成を図 1.2 に示す．

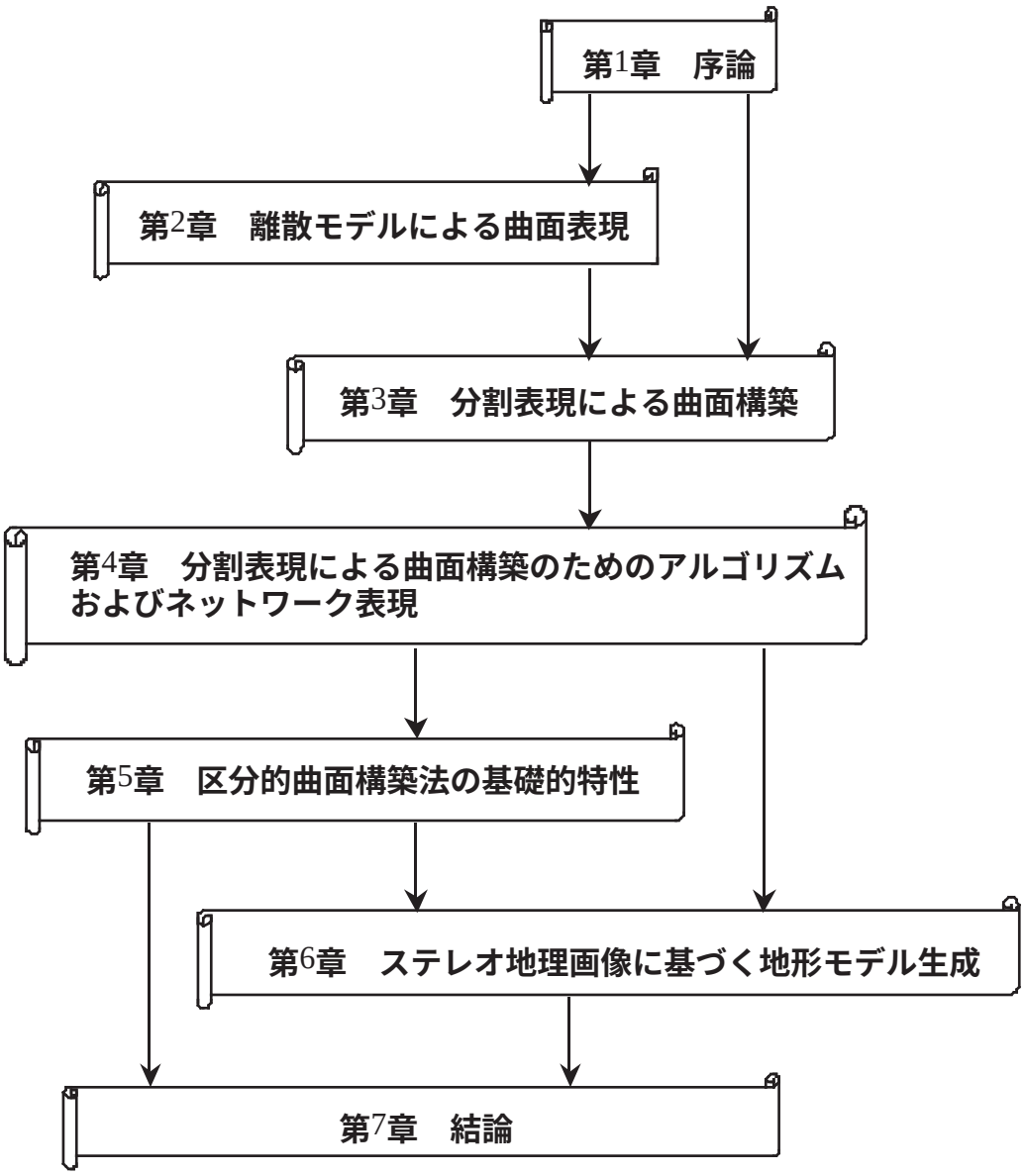

第1章　序論
第2章　離散モデルによる曲面表現
第3章　分割表現による曲面構築
第4章　分割表現による曲面構築のためのアルゴリズム
およびネットワーク表現
第5章　区分的曲面構築法の基礎的特性
第6章　ステレオ地理画像に基づく地形モデル生成
第7章　結論

図 1.2: 本論文の流れ

第2章　離散モデルによる曲面表現

前章で述べたように，計算機による数値解析の対象とする問題は多岐に渡っている．いずれの場合も，本来連続である系を離散化モデルにより記述することで，処理をおこなっている．本章では，まず離散化されたモデルにおいて，近傍系における相互作用のみにより大域的解を獲得するアルゴリズムを示す．次に，弾性自己組織化ネットを関数近似問題に適用し，その特徴および問題点について議論する．最後に，区分的多項式表現であるスプライン関数の概念を導入し，近似曲面の高度な幾何学量を評価するアルゴリズムのおよびその基本的な性質を確認する．

2.1　離散モデルによる数値解析

2.1.1　画像復元問題に対する MRF モデルの適用

数値解析では，本来連続である系を離散モデルで表現することで，計算機上での処理が容易になる．特に，離散化されたピクセルがそれぞれ離散値を表現しているデジタル画像は，計算機による処理対象として適当であり，非常に多くの適用例が存在する．ここでは，非線形ひずみやノイズなどの要因により画質の落ちた画像に対して各ピクセル間の局所相互作用によりもとの画像を復元する画像復元問題を取り上げる．この問題はノイズを含むデータの平滑化に帰着し，画像復元の際にはデータに対する精度と曲面の滑らかさの双方が評価される．

扱う全てのピクセルの集合を S，S の要素であるピクセル $s \in S$ における値を表現する確率変数 X_s 上の実際値を x_s，全ての s について可能な値の全体を $\Lambda \doteq \{0, 1, 2, \cdots, L-1\}, (X_s \in \Lambda)$ とすると，全ての可能な配置の全体 Ω は，以下で示される有限濃度の集合となる．ここで，N はピクセルの総数である．

$$\Omega = \{\omega = (x_{s_1}, \cdots, x_{s_N}) : x_{s_i} \in \Lambda, 1 \leq i \leq N\}. \tag{2.1}$$

上記の表現では，場合の数が有限であるためノイズを含むピクセル値集合から復元画像の値を導出する本問題は組み合わせ最適化問題 [16] へ帰着するが，配置 ω を変数とする画像

復元のための適当な評価エネルギ $E(\omega)$ を，全ての場合の配置 Ω に関して比較をおこなうことで，エネルギを最小化する配置 ω_o を獲得することができる．

$$\omega_o = \arg_{\omega\in\Omega} \min E(\omega) \tag{2.2}$$

しかしながら，ピクセル数が非常に大きい場合，すべてのピクセルに関する相関を考慮すると，与えられた配置に基づく全体のエネルギの算出は非常にコストの高いものとなる．さらに，可能な配置の総数はピクセルの数を M とした場合，L^M となり，実用的な計算量をはるかに超えたものとなる．

同様の問題は，統計物理学における簡単なモデルである Ising モデル（各要素はスピン変数と呼ばれる 2 値 $\{\pm 1\}$ のいずれかをとる）においても生じている [45]．この系では，特別な場合を除いて，理論計算で厳密解を獲得することは不可能であるが，モデルにいくつかの拘束条件を与えることで，計算機上でのシミュレーションによりよい精度で近似解を得ることができる．実際の Ising モデルにおける各要素間の相互作用の相関は，近傍のスピンの状態の影響は大きく，遠ざかるほど連続的に影響力は減少していると考えられるが，計算機上でのシミュレーションでは，近傍系のみの作用を考慮することにより計算量を大きく削減し，さらにアニーリングをおこなうことで，全ての場合の探索をおこなうことなくよい近似を得ることが確認されている．

この概念は画像処理に適用され，画像の各ピクセルの状態がその近傍の値のみに依存するというマルコフ性を仮定した Markov Random Fields(MRF) [37] に基づく画像復元アルゴリズムがよく知られている．ピクセル $s \in S$ の近傍系 $\mathcal{G}_s$ に関して，マルコフ性は次式で定式化される．

$$P(X = \omega) > 0 \quad \text{for all} \quad \omega \in \Omega;$$

$$P(X_s = x_s | X_r = x_r, r \neq s) = P(X_s = x_s | X_r = x_r, r \in \mathcal{G}_s) \tag{2.3}$$

文献 [9] では，近傍系として図 2.1 に示す (a)$C = 1$ および (b)$C = 2$ の近傍系を与え，それぞれにおいて考慮されている格子点の組であるクリークは (c)（(a) のクリーク），(d)（(b) のクリーク）で定義されている．

以上の性質より，系全体のエネルギはクリークと呼ばれる近傍系を構成する格子点の組 C とその集合 $\mathcal{C}$ を用いて，次式で定義される．

$$U(\omega) = \sum_{C\in\mathcal{C}} V_C(\omega) \tag{2.4}$$

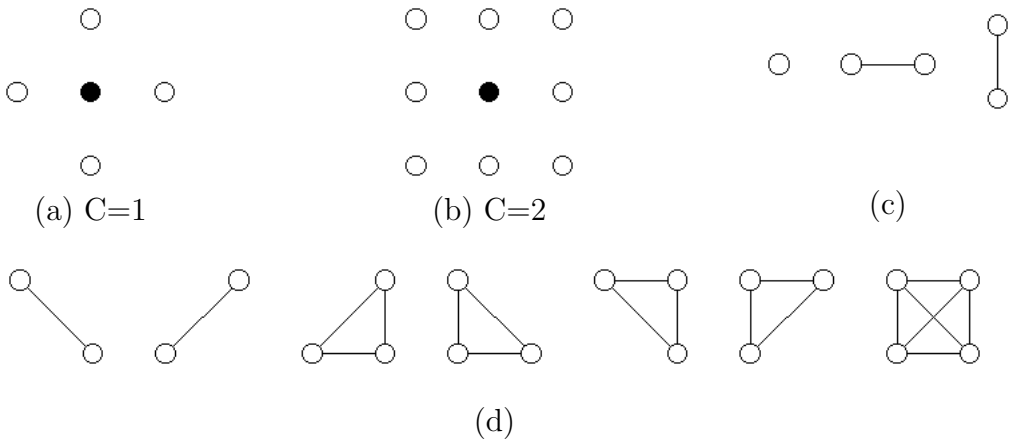


図 2.1: 近傍系とクリーク

各 V_C は Ω 上の関数であり，各ピクセル値と観測値の一致度を評価する項，隣接領域との連続性（隣接ピクセル値との差分）を評価する項および不連続性を適応的に評価する線過程の項で構成される．すなわち，V_c は各ピクセルにおいてその隣接素子のみを考慮したエネルギ表現となっている．エネルギ $U(\omega)$ に基づき，確率緩和アルゴリズムを適用することで，系全体のポテンシャルエネルギの最小化およびそれを実現する配置の獲得がおこなわれる．確率緩和アルゴリズムでは，各ピクセル値の逐次的更新量をその近傍系のみに限定し評価した事後確率を最大化する値を，離散化された状態の中から選択していく方法であるが，近傍系のみを評価したアルゴリズムであるにも関わらず，十分に更新を繰り返した場合，系が最適解を与えることが数学的に証明されている [9]．さらに，マルコフ性の適用により，各ピクセル値の逐次系全体のポテンシャルエネルギの導出が十分コストの小さな局所的計算の和として近似表現されるため，全体としての計算コストは大幅に削減され（全探索アルゴリズムの L^M に対し LM のオーダー），さらに並列計算機の使用により高速計算が可能である．

以上のアルゴリズムは，ピクセルの状態が離散値であることに基づく確率的アプローチであるが，連続値をパラメータとして持つニューラルネットワークによる決定論的アプローチにより結合 MRF モデルの平均場近似を与えることが示されている [22]．

2.1.2　弾性自己組織化ネットワークによる曲面近似

画像復元問題に対して適用された近傍要素間の局所的相互作用のみにより大域解を探索する概念は，組み合わせ的最適化問題である巡回セールスマン問題（TSP）に対して適用

される弾性自己組織化ネット [5] においても見られる．このネットワークは，競合学習による自己組織化を用いて，ユーグリッド空間における TSP に対して良好な近似解を与えるものである．本論文では，与えられたデータを補間する連続曲面の構築を目標としているため，TSP に対する弾性自己組織化ネットの構築のためのアルゴリズムを曲面近似のためのアルゴリズムに再定式化するとともに，従来法の問題点を指摘する．

関数近似と正則化

ここでは，連続関数から生成される有限個あるいは可算個のデータに基づく関数近似を考える．

データ生成の連続関数に関して全くアプリオリ情報が与えられていない場合，解の探索空間は無限次元のヒルベルト空間全体となり，高々可算個のデータに基づく一意解の獲得は不可能である．このように，逆問題に帰着する関数近似は一意性が失われているため，不適切問題であり，標準正則化理論に基づく評価関数（(2.5) 式）[42] の定義が要求される．ここで，z はデータを生成する真の関数，A は関数の順方向の作用（データ生成），$\|Pz\|$ は正則化項であり，近似関数に関するアプリオリ情報を評価することで，不適切性の緩和をおこなう作用がある．

$$\|Az - y\|^2 + \lambda\|Pz\|^2 \tag{2.5}$$

関数近似における正則化項として正則化項は以下に示されるような項がしばしば定義される．ここで，z', z'' はそれぞれ z の 1 階微分および 2 階微分である．

$$\|Pz\| = \|z\|^2 + \|z'\|^2 \equiv \|z\|_1^2 \tag{2.6}$$

$$\|Pz\| = \|z\|^2 + \|z'\|^2 + \|z''\|^2 \equiv \|z\|_2^2 \tag{2.7}$$

$$\|Pz\| = \|z'\|^2 \tag{2.8}$$

$$\|Pz\| = \|z''\|^2 \tag{2.9}$$

弾性自己組織化ネットワーク

ここで扱う自己組織化マップは，n 次空間中に n より小さな自由度 $m(< n)$ を持つ m 次曲面を実現するネットである．

以上で示した標準正則化理論を 1 次元連続曲面の構築に適用し，エネルギ最小化問題とし

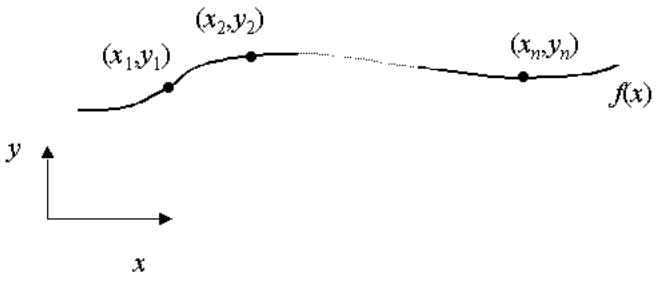


図 2.2: 複数データの補間

て定式化する．ここでは，図 2.2 に示すように，n 個のデータ点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ を補間する関数 $f(x)$ の構築が目標であるが，曲面の離散化により相互作用の概念を適用する．

画像処理の場合，各素子（ピクセル）に対してデータが与えられていることに対し，ここで扱う補間操作としての曲面近似は，データ点の補間という観点から，モデルの素子数は与えられたデータの総数よりはるかに多い値をとるため，ほとんどの素子が隣接領域との相互作用のみを曲面構築の際の評価に用いる．

近似の目標となる曲面は，連続であるというアプリオリ情報に基づき，エネルギ関数は (2.10) 式で定義される．

$$E(f) = \sum_i (f_i - y_i)^2 + \lambda \sum_i \sum_j (f_i - f_j)^2 \tag{2.10}$$

第 1 項は推定する曲面上の値 f_i と実際のデータ y_i が一致することを要請する項，第 2 項は隣接する点における曲面上の値 f_i, f_j が滑らかに変化することを要請し，連続性を保持する項であり，(2.5) 式における正則化項に対応する．

(2.10) 式の最小値を探索する弾性自己組織化ネットワークの構築のためのアルゴリズムを以下に示すとともに，ネットワークの動作機能を定性的に概略説明する．

曲面近似をおこなう弾性自己組織化ネットの構築アルゴリズム

1. **初期状態** $t = 0$

   以下のようなデータが与えられ，N 個の素子の配置がなされる．

   - 教師データ

   $$\{(x_i^t, y_i^t)\}_{i \in I}, \ \ I = \{1, \cdots, M\}$$

$$x_1^t < x_2^t < \cdots < x_M^t$$

- 素子

$$\{(x_j, y_j(t))\}_{j \in J},\ \ j = 1, \cdots, N$$

$$x_1^t = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = x_M^t \tag{2.11}$$

ここで，M はデータ数，N は素子数である．一般に $M < N$ であり，任意の x_i^t に対して $x_j = x_i^t$ となる素子が存在する．各 $y_j(t)$ は，時間 t における素子の値を示しており，変更可能なパラメータである．ここで，与えられた i について $x_j = x_i^t$ となる素子 j の値を $y_j \equiv y_i^e$ と定義する．

2. **停止判定**

   各素子の修正量が，与えられた基準値より小さくなった場合，学習を終了する．この条件が満たされない場合，以下 3 に進む．

3. **ニューラルネットの素子状態の更新**

   $x_i^t = x_j$ となる各素子に対して，

$$y_i^e(t+1) = y_i^e(t) + \eta_a\{y_i^t - y_i^e(t)\} + \eta_{ela}\{y_{j+1}(t) - 2y_i^e(t) + y_{j-1}(t)\} \tag{2.12}$$

   それ以外の素子に対しては，

$$y_j(t+1) = y_j(t) + \eta_{ela}\{y_{j+1}(t) - 2y_j(t) + y_{j-1}(t)\} \tag{2.13}$$

   という修正をおこなう．(2.12) 式の第 1 項は素子が教師データに一致することを要請する項，(2.12) 式の第 2 項および (2.13) 式の第 1 項は，対象となっている素子が両隣の素子を結んだ直線状に位置することを要請する弾性項（図 2.3）であり，この項により弾力をもったネットワークが実現される．ここで，η_a は学習率，η_{ela} は素子間結合係数である．

(2.12)，(2.13) 式で示した弾性項の作用は，素子の集合で表現される曲面の 1 階微分の 2 乗積分（ゴム膜を伸ばすエネルギに対応）に相当し，膜のポテンシャル（membrane potential）と呼ばれる．曲面の滑らかさという意味では，曲面の 2 階微分の 2 乗積分（薄板を曲げるエネルギに対応）で定義される薄板のポテンシャル（thin-plate potential）が自然であるが，各素子が位置情報のみを持つ弾性自己組織化ネットでは数値微分の高精度化が困難であるため実現が不可能である．自己組織化は入力ベクトルの分布を近似する位相保持マッピングとしての機能を持っており，自己組織化モデルの次元数とモデルが埋め込まれる空間の次元数が等しい場合は有効な方法であるが，一般的な曲面のようにモデル（曲面）の

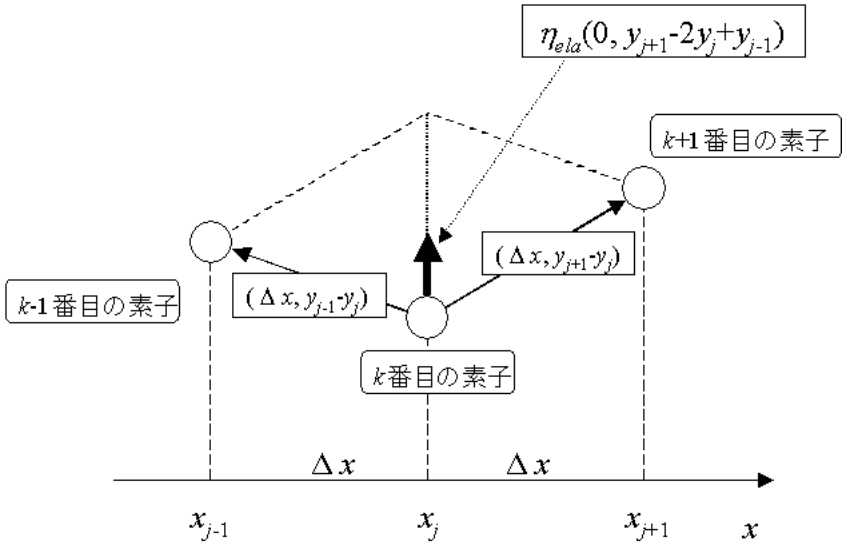


図 2.3: 弾性項の作用

表 2.1: 学習条件

学習の収束基準	分割数
学習回数	200
1.00×10^5	

学習係数

η_a	η_{ela}	初期係数値の定義領域
1.00×10^{-1}	1.00×10^{-2}	$[-0.5, 0.5]$

η_a：学習係数（誤差エネルギ項），η_{ela}：学習係数（素子間結合係数），

次元数が埋め込まれる空間の次元数より小さい場合は有効ではない．これは，離散化された素子の保持する情報の低次性に起因しており，例えば素子の保持する情報（位置情報）のみから曲面を特徴づける量（第 1,2 基本量など）を導出することは不可能であることに起因する．したがって，自己組織化ネットを疎に分布するデータ補間問題に適用する場合はホップフィールドのように各素子の全結合（相互作用の拡大）が要求され，局所的な相互作用により有効な解を獲得することは不可能である．

本アルゴリズムの近似特性を確認するために 1 変数関数近似に適用した．図 2.4 に示す 1 次元入力関数（(2.14) 式）から，教師データとして 10 点を抽出し，このデータ点に基づく自己組織化ネットを生成することで得られた近似曲線を図 2.5 に示す．学習条件を表 2.1 に示す．

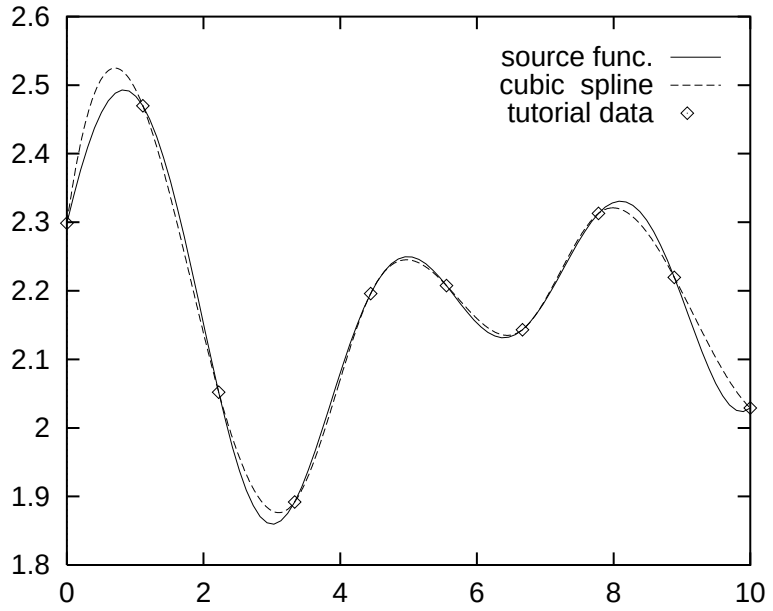


図 2.4: データのソースとなる関数と学習データに基づく補間曲線

$$y = \sqrt{\sin(0.7x) + \cos(0.9x + 5) + \sin(0.5x) \times \cos(0.3x + 0.3) + 5} \tag{2.14}$$

図 2.5 より，データが疎に与えられる場合，薄板のポテンシャルの最小化という意味で滑らかな曲線を獲得することは不可能である．これは，自己組織化ネットを構成する各素子は位置情報のみを保持するために，隣接領域との相互作用の際にその差分（1 階微分に相当）に基づく評価しかできないためである．より評価する素子数を増加する（素子 k に関して素子群 $k-i, k+i (i = 1, 2, \cdots, n)$ を考慮する）ことで高度な幾何学量の近似が可能であるが，上記のアルゴリズムにおいて，差分法による 2 階微分値の最小化をおこなったにもかかわらず，適当な解を獲得していないことから，有効な方法ではないと思われる．さらに，表現能力の低次性により，相互作用が広範囲に伝達しないために，大域的解への到達は困難である．

以上から，高度の幾何学量の解析を実現する場合，離散表現では精度に限界があるため，マルコフ性を仮定した隣接領域間の相互作用のみでは大域解としての滑らかな曲面構築は困難であることが示され，連続表現による表現の必要性が示唆される．

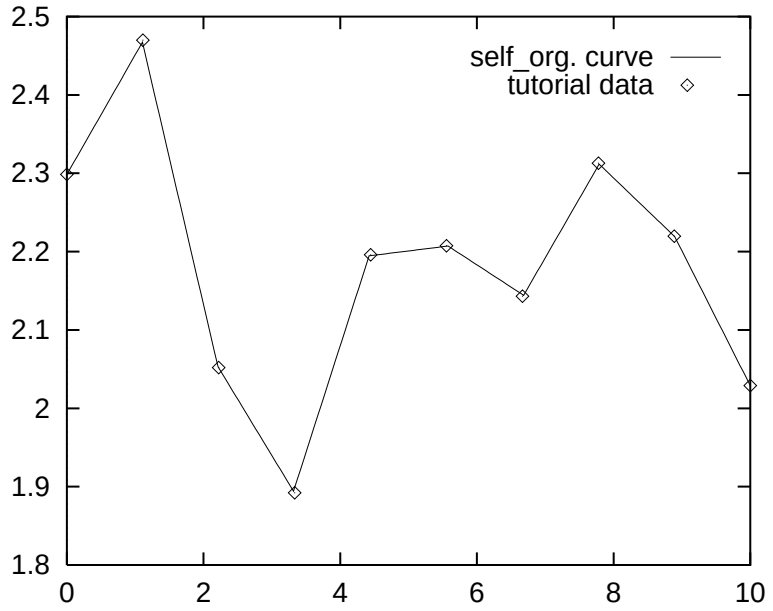


図 2.5: 自己組織化ネットによる補間

2.2　区分的多項式による近似曲面表現

多項式は非常に簡単な関数であって，その性質も良く知られており，取り扱いも容易であるため，他の関数を近似的に記述する方法として最も広く使用されている．特に，その微積分に関する記述の容易さは曲面解析に対して有効であり，前節で定義したさまざまな正則化項の定義が容易に導出可能である．ここでは，1 変数関数を有限次多項式により近似する場合について示す．

多項式による補間問題は，次に示す Lagrange の公式および Chebysheff の定理に基づいている．

定理 2.1 [**Lagrange の公式**] 異なる横座標 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(x_i \neq x_j, \text{if } i \neq j)$ をもつ n 個のデータ点 $\{(x_i, y_i)\}_{i \in I}$，$I = \{1, 2, \cdots, n\}$ があるとき，これらの点を補間する高々$n-1$ 次多項式は，次式で一意に与えられる．

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P_i(x_i)} y_i \tag{2.15}$$

ここで，

$$P_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - x_j)$$

である．

定理 2.2 [Chebysheff の定理] 区間 $[a, b]$ の与えられた連続関数 f_0 に対して，n 次以下の多項式の中に，f_0 を最も良く一様に近似する関数 f（最良近似多項式）が，一意に与えられる．

定理 2.1 および多項式の稠密性より，n 個のデータ点を補間する $m(> n-1)$ 次関数は無限に存在することを証明することは容易である（解の集合は $m-(n-1)$ 次元多様体を構成する）が，データ補間という拘束条件の下で曲面の表現能力として十分な自由度（$m-(n-1)$）を与えることで，より滑らかな曲面を求めることが可能である．滑らかさの基準としてしばしば近似関数の導関数の 2 乗積分 σ が用いられる．関数 $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$，k 階導関数の場合の定義式を以下に示す．

$$\sigma = \int_a^b [f^{(k)}(x)]^2 dx \tag{2.16}$$

σ は，$k = 1$ の場合は曲面の 1 階微分の 2 乗積分（ゴム膜を伸ばすエネルギに対応）で定義される膜のポテンシャル（membrane potential），$k = 2$ の場合は曲面の 2 階微分の 2 乗積分（薄板を曲げるエネルギに対応）で定義される薄板のポテンシャル（thin-plate potential）に相当し [12]，与えられたデータ点を補間する曲線族 $\mathcal{F}$ の中で σ を最小化する関数 f_o が最も滑らかな曲面となる（(2.17) 式）．

$$f_o = \arg_{f\in\mathcal{F}} \min \sigma \tag{2.17}$$

これは，画像復元モデルで示した最適配置の全探索に対応する概念である．ただし，画像復元の対象は有限離散モデルであったため，その場合の集合濃度も有限であったことに対し，ここで扱う関数モデルである多項式の係数はそれぞれ連続値をとる（多項式の稠密性）ため，解の探索は最急降下法など決定論的アプローチを適用する必要がある．多項式に基づく表現系では，q 変数 p 次多項式を適用した場合，自由パラメータ（係数）の数は ${}_{q+1}H_p = {}_{q+p}C_r$ となり，データおよび変数の増大にともない，解の探索空間は非常に大きくなる．

そこで，以上に示した困難に対して，画像復元の場合と同様の手法を適用する．そのた

めには，まず一つの多項式による表現として与えられた連続曲面を離散化する必要があるが，自己組織化ネットで示したように，それぞれが位置情報を保持する素子の集合として曲面を表現した場合，その表現能力の不十分性により高次の幾何学量の評価が困難であるため，上記の意味で滑らかな曲面を獲得することは不可能である．本論文では，各素子に位置情報だけでなくある程度の幾何学量情報を与える（多機能化）ことで高度な評価をおこない，より最適な解の探索をおこなうアルゴリズムを提案する．表現法としては，連続曲面の分割をおこなうことで得られる区分的局所曲面をそれぞれ素子として定義する．従来の手法における各素子は離散表現であるが，本手法では連続表現となる適当な分割がおこなわれた場合，各局所曲面は低次の多項式で十分な精度の近似が可能である．したがって，MRF の概念を適用して近接局所曲面間の相互作用による曲面構築をおこなう場合でも，計算コストを十分実現可能な量に削減可能である．

与えられたデータを区分的な曲面の集合により補間するアルゴリズムとしてスプライン関数がある．スプライン関数は，区分的多項式で表現されるであるため，複雑な関数を効率よく近似できるという優れた性質を持っており，解析的方法により導出されるよく整理された関数近似法である．1 変数スプライン関数の数学的定義を示す [38].

定義 2.1 m 次のスプライン関数は，その m 階微分が階段関数で，$m-1$ 階以下の微分が連続であるような関数である．

節点 $x_1, x_2, ..., x_n$ を持つ m 次スプライン関数 $s(x)$ は，切断冪関数の線形和（(2.18) 式）で示される．

$$s(x) = p_m(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i (x - x_i)_+{}^m \tag{2.18}$$

$$\text{ここで，} x_+{}^m = \begin{cases} x^m & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

ここで，$p_m(x)$ は m 次の多項式，c は定数係数である．

定義 2.2 [**最小補間性**] $2k-1$ 次のスプライン関数 $s(x)$ は，n 個のデータ点 $\{(x_i, y_i)\}_{i \in I}$ が与えられたとき，$k(k < n)$ について，定義 2.1 を満たす切断冪関数 $f(x)$ のうちで，σ（(2.19) 式）を最小にする一意の区分的多項式である（(2.20) 式）．

$$\sigma = \int_a^b \left[f^{(k)}(x) \right]^2 dx \tag{2.19}$$

$$s(x) = \arg_f \min \sigma \tag{2.20}$$

通常 $k=2$ すなわち 3 次スプラインが広く用いられている．これは，乗用車を購入する顧客は表面の 1 次と 2 次の導関数の不連続には気づくが，3 次導関数の不連続には気づかないという自動車設計者の経験的な観察に基づいている．さらに，$k=2$ の場合，(2.19) 式で与えられる量は，曲面の 2 階微分の 2 乗積分値であり，前述の薄板のポテンシャルに一致する．

以上に示されたスプライン関数の特徴を自己組織化ネットの概念に適用し，複数の 3 次多項式の相互作用による 3 次スプライン関数の獲得をおこなう方法を論じる．

スプライン関数の獲得を目的とするアルゴリズム

スプライン関数の獲得を目的とするアルゴリズムを示す前に，評価関数の定義をおこなう．

1. **定義域の定義と分割**

   与えられたデータ $\{(x_i, y_i)\}_{i\in I}, x_1 < \cdots < x_n, I = \{1, \cdots, n\}$ に基づき，定義域 D および各局所関数の定義域 $D_j, (j = 1, \cdots, n-1)$ を以下で定義する．

$$D = [x_1, x_n] \tag{2.21}$$

$$D_j = [x_j, x_j + 1] \tag{2.22}$$

   各局所定義域 D_j 上で定義される 3 次多項式 $s_j(x)$ を次式で定義する．

$$s_j(x) = c_0^i(t)x^0 + c_1^i(t)x^1 + c_2^i(t)x^2 + c_3^i(t)x^3 \tag{2.23}$$

   各係数は，修正可能なパラメータであるため，時間 t における値を示すために $c_j^i(t)$ と表現する．

2. **評価関数の定義**

   弾性自己組織化ネットで定義した評価関数およびスプラインの性質に基づき局所関数 s_i に関して以下の評価関数を定義する．

$$E^i = \eta_a E_a^i + \eta_c E_c^i + \eta_g E_g^i \tag{2.24}$$

$$E_a^i = \sum_{j=i}^{i+1} (y_j - s(x_i))^2 \tag{2.25}$$

$$E_c^i = \Big\{ (s_i(x_i) - s_{i-1}(x_i))^2 + (s_i(x_{i+1}) - s_{i+1}(x_{i+1}))^2$$

$$+ \left(s_i'(x_i) - s_{i-1}'(x_i)\right)^2 + \left(s_i'(x_{i+1}) - s_{i+1}'(x_{i+1})\right)^2$$

$$+ \quad \left(s_i''(x_i) - s_{i-1}''(x_i)\right)^2 + \left(s_i''(x_{i+1}) - s_{i+1}''(x_{i+1})\right)^2 \Big\} \tag{2.26}$$

$$E_g^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (s_i'')^2 \, dx \tag{2.27}$$

E_a は各局所関数の両端を対応するデータに一致することを要請する項，E_c は隣接領域との 2 階微分までの連続性を要請する項，E_g は各局所曲面の 2 階微分の 2 乗積分を最小化することを要請する項である．本アルゴリズムでは，

$$\sum_{i=1}^{n-1} E^i \tag{2.28}$$

の最小化によりスプライン関数を獲得することを目標とする．

3. **各係数の更新**

局所関数 s_i に関して，(2.23) 式で定義した各係数 $c_1^i, \cdots, c_4^i$ の更新は，(2.24) 式で定義されるエネルギ項 E^i に基づく最急勾配法（(2.29) 式）によりおこなう．

$$c_j^i(t+1) = c_j^i(t) - \frac{\partial E^i}{\partial c_j^i} = c_j^i(t) - \eta_a \frac{\partial E_a^i}{\partial c_j^i} - \eta_c \frac{\partial E_j^i}{\partial c_j^i} - \eta_g \frac{\partial E_j^i}{\partial c_j^i} \tag{2.29}$$

$$j = 0, \cdots, 3$$

ここで，η_a は学習率，η_c は連続性係数，η_g は薄膜ポテンシャルに関する係数である．

以上の定義に従い，スプライン関数の獲得を目標とするアルゴリズムを以下に示す．

1. **定義域の定義と分割**

   与えられたデータ $\{(x_i, y_i)\}_{i \in I}, x_1 < \cdots < x_n, I = \{1, \cdots, n\}$ および (2.21),(2.22) 式に基づき，定義域 D および局所定義域 D_i，$i = 1, \cdots, n-1$ を定義する．

2. **局所関数の初期化** $t = 0$

   次に，(2.23) 式に基づき，各局所関数 $s_i(x)$ を定義する．各係数 $c_j^i(t=0)$ は，十分に小さな乱数で与える．

3. **停止判定**

   評価関数が与えた基準値より小さくなった場合，あるいは評価関数の変化量が与えた基準値より小さくなったときに，学習を終了する．この条件が満たされない場合，下記 4 に進む．

4. **各係数の更新**

   各係数の更新を (2.29) 式に基づき実行する．なお，本アルゴリズムでは，荷重更新を batch mode（全ての荷重を一括更新）でおこなった．

以上に示したアルゴリズムは，マルコフ性およびエネルギ関数 E を最小化する区分的関数がスプライン関数と一致することを仮定しているが，その正当性については言及していない．次節では，実際に提案したアルゴリズムが大域解としてのスプライン関数を獲得できることをシミュレーションにより確認する．

2.3　シミュレーション

前節では，スプライン関数の探索的獲得を目的とする高機能化自己組織化ネットの構成方法について論じた．ただし，マルコフ性すなわち隣接する局所曲面間の連続性の強化（隣接領域間の相互作用）により大域解としてのスプライン関数に到達できるとした仮定の正当性，エネルギ関数 E を最小化する区分的関数 f_m がスプライン関数 $S(x)$ と一致すること（(2.30) 式），さらに最急降下法を適用した探索法により大域解の獲得が可能か，局所解は存在するかなどの問題に対しては言及していない．

$$\text{if} \quad \forall f : E(f_m) \leq E(f) \quad \text{then} \quad E_a = E_c = 0 \tag{2.30}$$

本節では，実際に提案したアルゴリズムを簡単な補間問題に適用し，上述の仮定の正当性について確認をおこなった．

1 変数関数近似

まず，自己組織化ネットで用いた図 2.4 に示す 1 次元入力関数（(2.14) 式）上の 10 個のデータ点に基づく 3 次スプラインを解析的に求めた．最急勾配法によりエネルギが十分に収束した時点における近似曲面と 3 次スプラインとの比較を図 2.6，学習条件を表 2.2 に示す．

解の一意性を確認するために，それぞれ異なる初期係数値に基づき 5 回曲面構築をおこなった．図 2.6 より，提案したアルゴリズムは厳密に 3 次スプラインを近似しており，アルゴリズムの解の一意性と最適性がともに確認された．以上より，局所曲面の和集合としての近似曲面構築におけるマルコフ性の仮定の適用可能性が示された．

2.4　2 章のまとめ

本章では，まず 1 次元情報を持つ複数の素子により構成される離散モデルを示し，マルコフ性を仮定した局所的相互作用により連続曲面構築をおこなう際の問題点を示した．この問題点は，各素子の保持する情報が位置情報のみであるため，滑らかな曲面構築の際に要求される高度の数値解析が不可能であることから，区分的多項式による近似曲面構築法

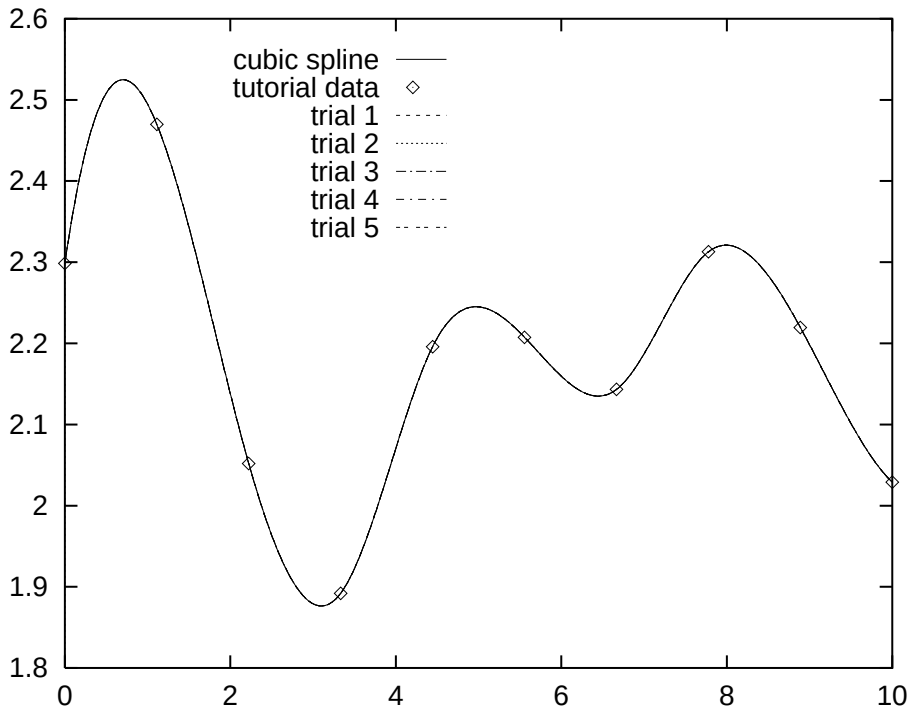


図 2.6: 3 次スプラインと近似曲面

表 2.2: 学習条件

学習の収束基準

学習回数	平均自乗誤差
1.00×10^5	1.00×10^{-4}

データ数

教師データ数	テストデータ数
5	100

冪素子を用いた領域分割型ネットワーク

η_e	η_0	η_1	η_2	η_g	初期係数値の定義領域
5.00×10^{-1}	1.00×10^{-2}	1.00×10^{-2}	1.00×10^{-2}	1.00×10^{-5}	$[-0.5, 0.5]$

η_a：学習係数（誤差エネルギ項），η_0：学習係数（学習点における関数の連続性），η_1：学習係数（学習点における関数の 1 階微分値の連続性），η_2：学習係数（学習点における関数の 2 階微分値の連続性），η_g：学習係数（各領域における関数の 2 階微分ノルム値）

を提案し，最急降下法の概念を適用することで，有効な近似結果が与えられることを確認した.

次章では，本章で提案した区分的曲面表現の数学的定式化をおこなう.

第3章　分割表現による曲面構築

本章では，前章で示した区分的曲面表現の数学的定式化をおこない，次章に示す曲面構築アルゴリズムの定式化のための基礎とする．

3.1　多様体と分割曲面

前章では，与えられたデータ $\{(\boldsymbol{x}_i^t, y_i^t)\}_{i\in I}$（$\boldsymbol{x}_i^t \in \Re^n, y_i^t \in \Re$）に基づく ”関数近似 ”，”補間 ”，”曲面構築 ”を等価的に記述した．本節では，まずそれらの等価性について示す．簡単のため，”関数近似 ”の関数は 1 価関数（データの $\{y_i^t\}_{i\in I}$ はスカラー）であるとし，また基本的に補間は内挿であるとする．本論文では，”関数近似 ”を以下のように定義する．

定義 3.1 [**関数近似**] 与えられたデータ $\{(\boldsymbol{x}_i^t, y_i^t)\}_{i\in I}$（$\boldsymbol{x}_i^t \in \Re^n, y_i^t \in \Re$）に基づく関数近似とは，

$$\{\boldsymbol{x}_i^t\}_{i\in I} \subset X \tag{3.1}$$

を満たす凸集合 X 上で定義された以下の条件を満たす写像 f の獲得である．

$$\forall i \in I \quad f(\boldsymbol{x}_i^t) = y_i^t \tag{3.2}$$

$$f : X \to Y \subset \Re \tag{3.3}$$

上記の近似関数 $f(\boldsymbol{x})$ に関して，定義域 $X \subset \Re^n$ から $\Re^{n+1}$ への同相写像 φ^{-1}（(3.4) 式）を与えると，写像先である M は $\Re^{n+1}$ における n 次曲面となる．

$$\begin{aligned} &\varphi^{-1} : X\,(= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X \subset \Re^n\} \in X) \\ &\quad \to \quad M\,(= \{\varphi(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, f(\mathbf{u}) = (z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}))\,|\mathbf{u} \in X\}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

このことは，各要素のパラメータ表示に関する Jacobi 行列（$n \times (n+1)$ 行列）

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & f_{x_1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & f_{x_2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & f_{x_n} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

が，X 上の至るところで階数 n であることから明らかである．

”補間 ”は，$\Re^{n+1}$ 空間中において

$$\{\boldsymbol{x}_i, y_i\}_{i \in I} \subset S \tag{3.6}$$

を満たす n 次元曲面 S の構築であり，S 上の任意の点を $s_i \in S$ であらわす．また，S から $\boldsymbol{x}$ 空間への射影作用素を P_x としたとき，以下の条件を満たすならば曲面 S は (3.4) 式で定義された n 次元曲面 M と等価である表現を実現可能である [9].

$$\text{if} \quad P_x s_i = P_x s_j \quad \text{then} \quad s_i = s_j \tag{3.7}$$

このとき，曲面 M は n 次曲面 S と同相であり，互いに等価であるものを実現可能である．以上より，”曲面構築 ”，”関数近似 ”，”補間 ”では等価であるものを構築可能であることが示された．

本論文では，与えられたデータを補間する曲面近似を目標とするが，一般性を損なうことなく，本章では，n 変数 1 価関数近似に関して議論をおこなう．すなわち，この入出力関係は，図 3.1 で示すように，$\Re^{n+1}$ 中の開曲面 M として表現される．

3.1.1　多様体と局所座標系

本章では，前章で示したように近似曲面を区分的曲面により表現することを議論するが，まず，本章で扱う関数の表現する曲面 M を多様体として定義する．

定義域を開集合 $X \subset \Re^n$ と定義すると，与えられたデータを補間する関数 $f : X \to R$ の構築が近似の目標となる関数である．ここで，関数の変数と出力の関係は $\Re^{n+1}$ 中の n 次元曲面 M（(3.4) 式）で示され，曲面 M から定義域 X への写像 φ は同相写像となる[1]．曲面 M は関数の入出力関係を示すことから φ は包含写像（式 (3.8)）であると仮定する．以上の定義より，本章の目標である未知の曲面 Mの近似はφ の近似に帰着する．次式におい

[1] 入出力関係から φ を X から M への写像と考えた方が自然であるが，多様体論の記述に従い，本論文では $\varphi : M \to X$ と定義する

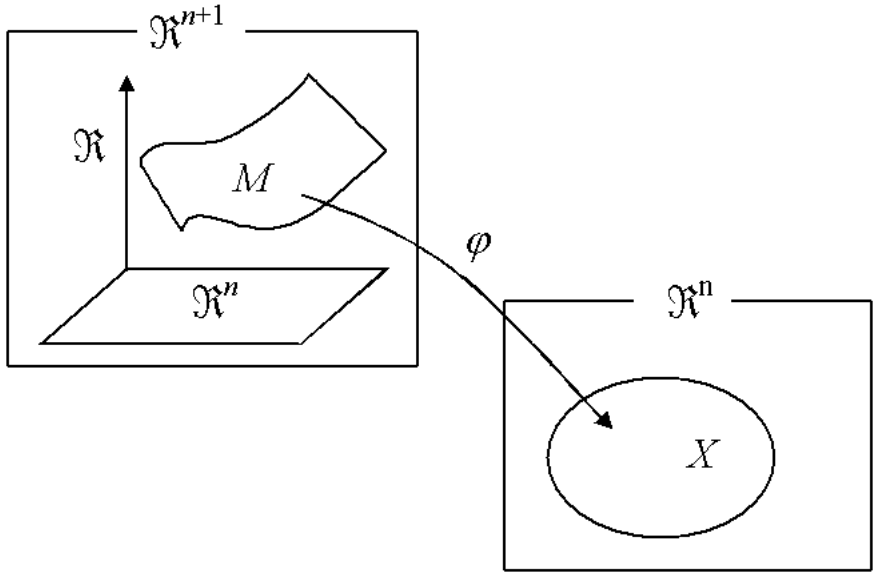


図 3.1: 曲面 M から定義域 X への同相写像 φ

て，$\phi(\cdot)$ は 1 価 n 変数 C^r 級関数であると仮定する．

$$M = \left\{\varphi^{-1}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \phi(\mathbf{u}))\,|\mathbf{u} \in X\right\} \tag{3.8}$$

多様体 M 上の局所座標近傍系 $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in I}$ を次式で定義する．

$$U_i = \left\{\varphi_i^{-1}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \phi_i(\mathbf{u}))\,|\mathbf{u} \in U_i'\right\} \tag{3.9}$$

$$M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \subset \Re^{n+1} \tag{3.10}$$

ここで，φ_i は同相写像，ϕ_i は 1 価 n 変数 C^∞ 級関数である．図 3.2 において，位相空間 X の開集合 U から，$(n+1)$ 次元数空間 $\Re^{n+1}$ のある開集合 U' への同相写像

$$\varphi_i : U_i \to U_i' \tag{3.11}$$

があるとき，U_i と φ_i との対 (U_i, φ_i) を $n+1$ 次元座標近傍，φ_i を U 上の局所座標系と定義する．

ここで，多様体 M は C^r 級微分可能多様体であると仮定する．すなわち，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

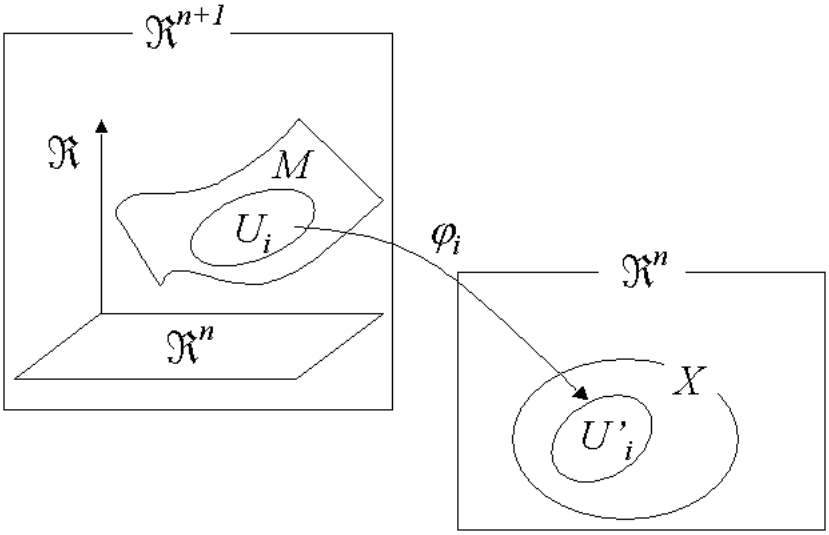


図 3.2: Surface M and the atlas $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in I}$

であるような任意の $\alpha, \beta \in A$ について，座標変換

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta) \tag{3.12}$$

は C^r 級写像である．

3.1.2　近似曲面の 3 角形分割

本節では，前節の概念に基づき，近似曲面を複数の局所曲面の集合として記述する表現系について考察する．多様体論は非常に整備された概念であるが，局所座標系は多様体の記述には不便な方法であり，通常は $\Re^n$ の部分を集めて貼り合わせたり，あるいはすでにある多様体を群で割るなどして新しい多様体が生成される [41].

ここで定義する表現系は，特に 2 次元曲面の場合は曲面の 3 角形分割により得られる各 3 角形曲面を局所曲面とする表現系である．本論文では，(2 次元）曲面近似に限らず関数近似という意味での高次元曲面近似を目標としているため，まず曲面の 3 角形分割の一般化について示す.

始めに，本節で用いる用語の説明をする．n 次元 ”貼り合わせ ”(n-dimensional gluing) とは，有限個の n 単体と，それらの単体の対の選択と，各対の切子面どうしを同一視するアフィン写像からなる．ここで，n 単体 (n-simplex)α とは，アフィン的に独立である $n+1$ 個の点の凸包で定義される．n 単体を構成するデータの部分集合の凸包は α の面，$n-1$ 次

元の面は切子面と呼ばれる．さらに，単体複体とは，単体の局所有限な集まり Σ で次の条件を満たすものである．

- Σ に属する単体の任意の面はまた Σ に属する．
- Σ に属する 2 つの単体の交わりは空かまたは双方に属する面である．

Σ の単体全ての和集合を Σ の多面体といい，$|\Sigma|$ と表記する．位相空間 X の 3 角形分割 (triangulation) とは，単体複体 Σ と同相写像 $\psi : |\Sigma| \to X$ のことである．

写像 ϕ が与えられると，3 角形分割された定義域から一意に 3 角形分割された曲面が導出可能であるが，本論文では対応する 3 角形要素間の同相写像をそれぞれ独立に定義することで区分的曲面表現を実現することを目標とする．次節では，実際の表現系について示す．

3.2　多項式表現による局所曲面の構築

本節では，与えられたデータに基づく区分的曲面表現のための具体的な表現系について述べる．

3.2.1　定義域と入力空間の分割

まず，定義域および局所定義域の獲得法について示す．1 変数関数近似の場合は，前章で示したように各局所定義域は線鎖となり非常に簡素な形式であるため，構築に際して困難は生じない．したがって，以下では，高次元空間の分割，特に $\Re^2$ の場合について議論をおこなう．

与えられた教師データを $\{(\boldsymbol{x}_i, y_i)\}_{i \in I}$ とする．前節の定義に従い，

$$\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}_i) = (\boldsymbol{x}_i, y_i) \tag{3.13}$$

$$\phi(\boldsymbol{x}_i) = y_i \tag{3.14}$$

の関係が成立する．ここで，データ数を m 個としたとき，$I = \{1, 2, ..., m\}$ である．定義域 $X(\in \Re^n)$ は，教師データの入力部分 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i \in I}$ に基づき $\Re^n$ 上で定義される．補間をデータ間の内挿とすると，データ $\{\boldsymbol{x}_j\}_{j \in I}$ に関する凸包が定義域として最も適当である．

前節で示したように，任意の凸包は 3 角形分割が可能であることから，ある単体複体により表現された凸包 $|\Sigma|$ が存在し，$\psi : |\Sigma| \to X$ である．ここで，定義域 X から曲面 M への写像 $\varphi^{-1} : X \to M$ が同相写像であることから，曲面の貼り合わせによる表現は定義域の 3 角形分割と等価である．

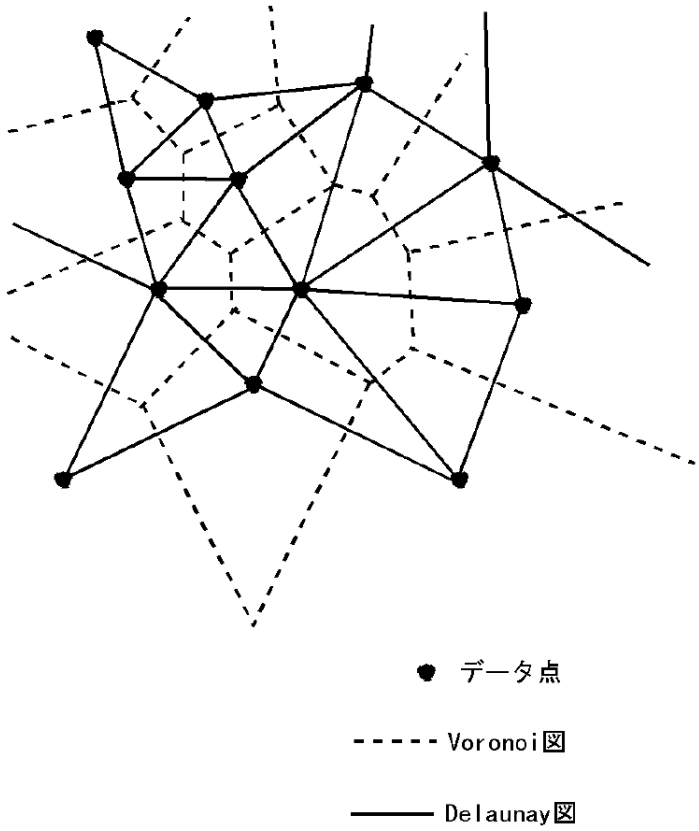


図 3.3: 2 次元空間における Voronoi 図と Delaunay 図

以上より，区分的曲面構築において，定義域は与えられたデータに関する凸包，局所定義域は定義域の 3 角形分割が適当であると思われる．

3 角形分割に関しては，2 種類の分割が存在する．一つはデータに基づく 3 角形分割であり，各要素の頂点はデータに対応する．他方は，データとは独立した分割であり，有限要素法で定義される分割法と等価である．データの補間と言う観点から，データに基づく 3 角形分割法が自然であるが，表現系として適当な分割がおこなわれない場合がある．

定義の一般化によって適用の範囲は大きくなる．しかし，本論文において目的とするのは，本アルゴリズムの実際の問題への適用である．したがって，簡単な例（低次元曲面）から始めて徐々にアルゴリズムの一般化をおこなう方が有効であると思われる．以下では，問題を扱いやすくするために，主に $\Re^2$ 上の定義域および分割について議論する．

$\Re^2$ における 3 角形分割は，データに基づく分割をおこなった場合，Delaunay 分割と等価である．Delaunay 図 [39] の生成により，獲得された Delaunay 多角形を定義域 X，X の要素である各 Delaunay 三角形を局所定義域 U' と定義することが可能である（図 3.3）．し

かしながら，Delaunay 図を用いた場合，次のような問題点が発生する．

- 入力空間の次元数が大きい（$n \geq 3$）場合，Delaunay 図の生成のための計算コストが大きくなる．
- データが偏在する場合，補間と言う観点から，不適当な分割をおこなう可能性がある．
- 次章で示すように近似曲面の構築は局所曲面の相互作用によりおこなわれるが，Delaunay 分割を用いた場合，各要素の隣接関係が不規則であり，アルゴリズム化が困難である．

したがって，以下では，データ分布に依存しない分割法，特に格子状分割により定義域 X および局所定義域 U_i を定義する．以下に，1，2，3 次元空間の格子状分割により得られる分割要素，図 3.4 に 2 次元格子を示す．

1 次元格子 線鎖（line chain）

2 次元格子 正方格子，三角格子，六角格子

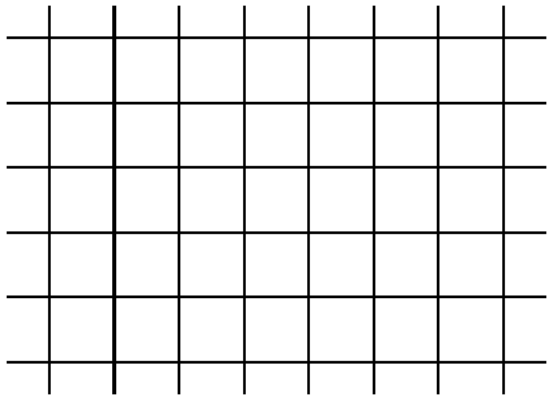
3 次元格子 立方格子，体心格子，面心格子，

図 3.4 で示されるように，各要素の隣接関係は規則的であり，また生成のアルゴリズム化も容易である．

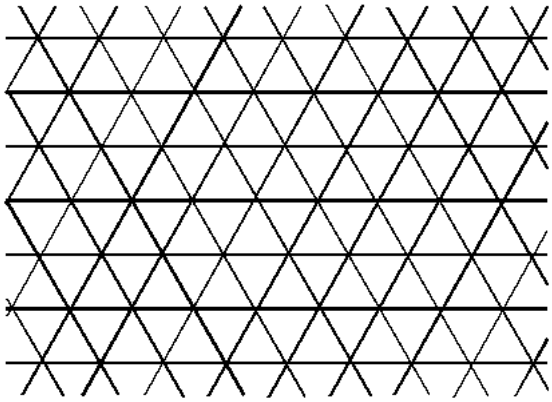
上述のように 3 角形分割に対応する分割は，図 3.4(b) で与えられる 3 角格子である．本論文では教師データを発生する確率密度関数が一様分布であると仮定するが，この場合の最適分割は，2 次元の場合正六角形である [10],[27]．しかしながら，多次元入力空間への拡張を考慮した場合，正方格子に基づく拡張（超立方体）が最も容易である．また，以下で示すように，本論文では，各局所写像 φ_i の定義域を正則化することで，曲面構築の際のアルゴリズムの一般化をおこなっている．さらに，隣接領域との相互作用のアルゴリズム化の容易さ，MRF やホップフィールドネットワークなどとの比較における類似性を考慮し，以下では正方格子を要素とする分割の場合について議論する．

次に，正方格子の和集合としての定義域について示す．定義域としてデータに基づく凸包が与えられた場合，定義域の細分として正方格子分割をおこなうことはほとんどの場合において不可能である．したがって，正方分割という枠組みから定義域を以下のように設定する．定義域の分割要素である正方格子の大きさが固定されている場合，内挿という側面を考慮すると，データに基づき生成された定義域（データの凸包）を被覆する和集合 $\bar{S}$ のなかで，面積が最小になるものが最も適当な定義域であると考えられる（図 3.5）[2]．定

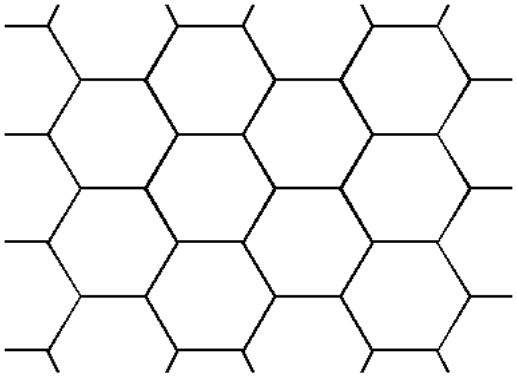
[2] このようにして求められた定義域の下限は Jordan 外測度 $|S|^*$ である．($|S|^* = \inf \bar{S}$)



(a)



(b)



(c)

図 3.4: 2 次元正規格子の例 (a) 正方格子，(b) 三角格子，(c) 六角格子

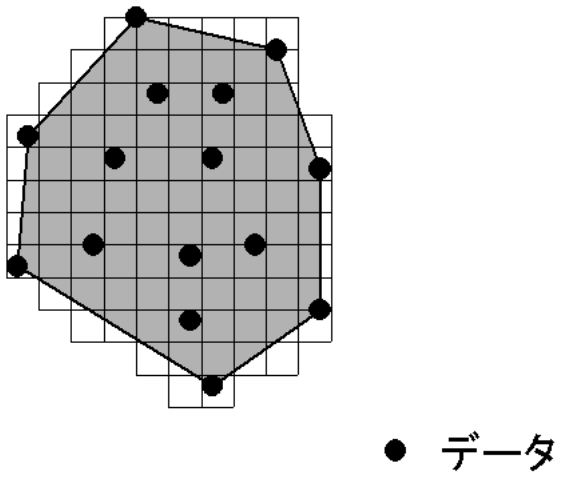


図 3.5: データに基づく凸包を被覆する正方格子集合

義域 X，データの凸包 $|\Sigma|$，各正方領域 I_i に関して次式が成立する．

$$X = \bigcup_i I_i \subseteq |\Sigma| \tag{3.15}$$

また，より簡素な定義域決定法として以下を示す．本論文では与えられたデータ $\{(\boldsymbol{x}_j^t, y_j^t)\}_{j \in I}$ に基づき，次式で定義される超立方体領域 X を定義域とする．

$$X = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\} \subset \Re^n$$

$$\boldsymbol{x}_j^t = (x_{j1}^t, x_{j2}^t, \cdots, x_{jn}^t)$$

$$\text{for } i = 1 \text{ to } n \qquad \min(x_i) = \min_j(x_{ji}^t), \qquad \max(x_i) = \max_j(x_{ji}^t) \tag{3.16}$$

すなわち，定義域 X は，内部に全てのデータを含む各軸（基底）に関して平行な (Axis-Parallel) 超直方体 [44] の集合の中で最も面積の小さな領域である．2 次元空間における定義域の例を図 3.6 に示す．このような定義域を採用する場合，分割により得られる局所曲面が超立方体になるとは限らないが，次章で述べるように各局所写像 ϕ の定義域を正規化することで一般性を保証する．

以上で示した定義域および局所定義域に基づき，マルコフ性を仮定した隣接領域間の相互作用は 2 次元空間分割の場合，次のように定式化される．

本論文では曲面生成素子の多機能化という観点から，各領域をそれぞれ対応する機能素子で表現する（図 3.7）．上述のように，局所領域 U_k' において連続性の評価（相互作用）を

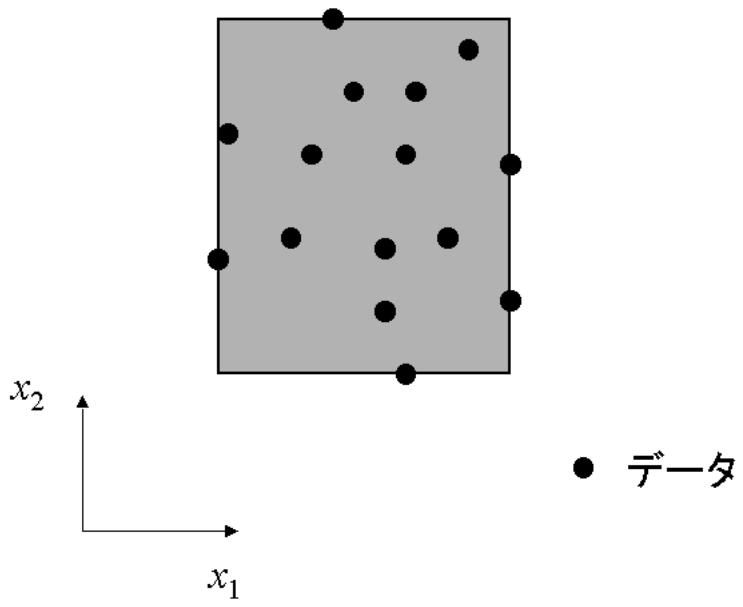


図 3.6: データと定義域の関係（2 次元空間）

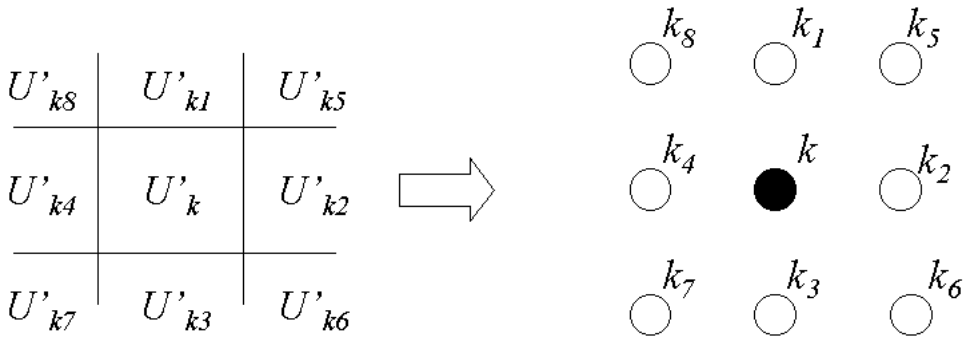


図 3.7: 分割領域の量子化

考慮する近傍領域は $\partial U'_k$ を共有する領域である．図 3.7 の場合，領域 $U'_{k1}, \cdots, U'_{k8}$ が近傍領域に対応する．前章で示したように，文献 [9] では，近傍系として図 2.1 に示す (a) および (b) の近傍系を与え，それぞれにおいて考慮されている格子点の組であるクリークが (c)；(a) のクリーク，(d)；(b) のクリークで定義されている．したがって，近傍系を定義するクリークを与えることで，各要素において連続性を考慮するべき隣接領域が決定される．図 2.1，図 3.7 より，採用するクリークは図 2.1(d) に対応するものになる．

一般に，n 次元において超立方格子による定義域分割を用いた場合，各局所超立方体の境界と接する近傍領域の数は $3^n - 1$ である．また，境界は $n-1$ 次元曲面となるため，次元数の増加にともない，連続性評価のための計算コストも大きくなる．したがって，連続性評価の対象となる近接領域数は，可能な限り削減する必要がある．4 章では，図 2.1(a) で示される近傍系において連続性が保証される場合，同図 (b) で定義される近傍系との連続性も保証されることを示す．第 5 章では，各近傍系に基づく曲面構築をおこなった場合の比較を実際に確認する．

3.2.2　同相写像の定義

本節では前節で定義した定義域に基づき，局所写像 φ_i^{-1} を定義する．

局所写像 φ_i^{-1} の定義域は U'_i であり，(3.9) 式で示される．ここで，ϕ_i は，次式で定義される 3 次多項式とする．

$$\phi_i(x_1, \cdots, x_n) = \sum c_{\nu_1 \cdots \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} \tag{3.17}$$

$$\nu_1, \cdots, \nu_n \geq 0, \quad 0 \leq \nu_1 + \cdots + \nu_n \leq 3$$

ここで，区分的曲面の局所曲面として 3 次多項式を用いる理由として以下を挙げる．

- スプライン関数（区分的多項式表現）に基づく．
- 微分，積分が代数的に非常に簡単な形式で表現され，幾何学量，連続性の評価が容易である．
- 次章に示す連続性などシンボリック計算により，評価関数および最急降下法のための勾配の導出が簡潔な表現で与えられ（数値積分が不要であるため），計算コストの削減が可能である．
- 近似の目標となる C^2 級曲面の条件を満たしながら，ある程度の自由度を保証する表現として適当である．

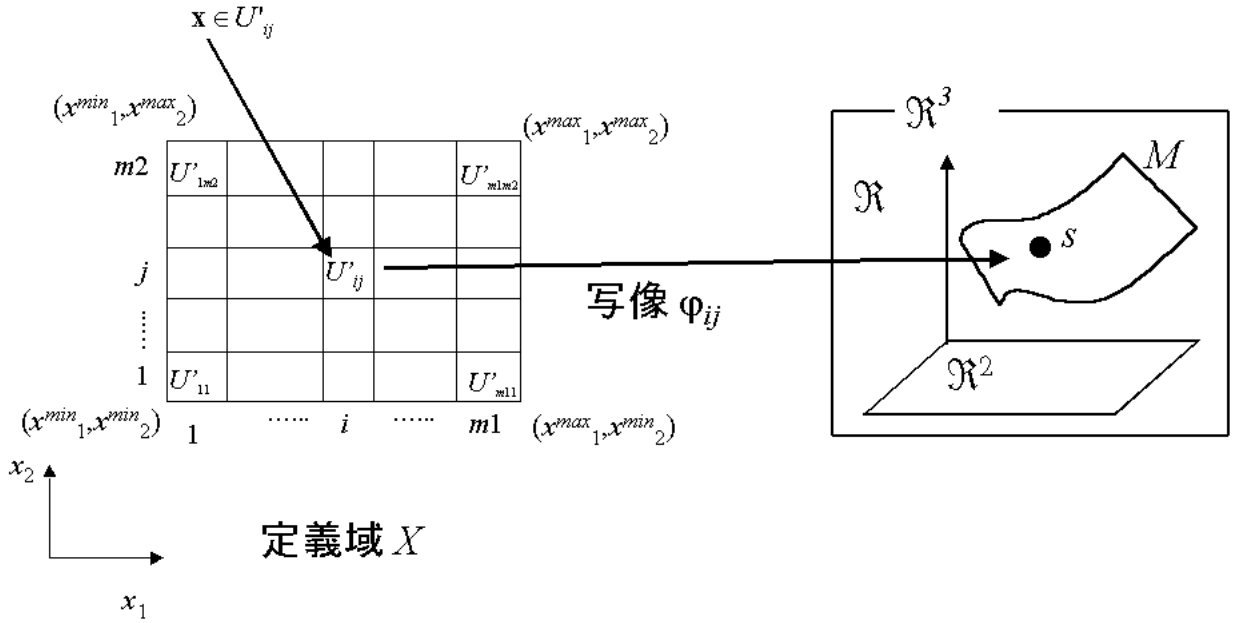


図 3.8: 局所写像と曲面算出

以下では，入力 $\boldsymbol{x}(\in U'_{ij} \subset X)$ が与えられた場合の，曲面上の対応点 $s \in M$ の導出過程を示す（図 3.8）.

1. 与えられた入力 $\boldsymbol{x}(\in U'_{ij} \subset X)$ に関して，$\boldsymbol{x}$ が含まれる局所定義域 U'_{ij} を決定する.
2. 1. で獲得した位置情報 ij に基づき同相写像 ϕ_{ij} を活性化する.
3. 2. で活性化された作用素 ϕ_{ij} に基づき，曲面 M 上の点 $s = \phi_{ij}\boldsymbol{x}$ を算出する.

以上を整理すると，$(x_1, x_2, y) \in U'_{ij} \subset X$ に関する局所写像 φ_{ij}^{-1} は次式で定義される.

$$U_{ij} = \left\{ \varphi_{ij}^{-1}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \phi_{ij}(\boldsymbol{u}) | \boldsymbol{u} \in U'_{ij} \right\} \tag{3.18}$$

3.3　3 章のまとめ

本章では，前章で示した区分的曲面表現の数学的定式化をおこなった.

まず，曲面の分割法として 3 角形分割法を採用し，任意次元の曲面構築のための一般化をおこなった．次に，曲面の分割と入力空間の分割の等価性を示し，表現系としてよりアルゴリズム化が容易である正方格子分割法を提案し，定義域および局所定義域の定式化をおこなった．さらに，前節で示したように，曲面の表現系として 3 次多項式を採用し，局所曲面および近似曲面の表現の定式化をおこなった.

次章では，以上で示した曲面の分割表現を構築するアルゴリズムについて議論する．

第4章　分割表現による曲面構築のためのアルゴリズムおよびネットワーク表現

本章では，前章で示した区分的曲面表現の数学的定式化に基づき，区分的曲面の適応的な構築アルゴリズムについて議論する．さらに，アルゴリズムのネットワーク表現をおこなう．

4.1　区分的曲面構築のアルゴリズム

本節では，前章までの定式化に基づき，次に示す条件を満たす区分的曲面構築のためのアルゴリズムを示す．ここで，区分的曲面は，$n+1$ 次元空間中の n 次元曲面の集合であるとする．

1. 区分的曲面は与えられたデータを補間する．
2. 互いに接触する局所曲面は，接触部分（$n-1$ 次元以下の面）において 2 階以下の微分値が連続である．
3. 最適曲面とは，1,2 の条件を満たす区分的曲面のうちで，幾何学的ポテンシャル $g(f_i)$ を最小にする曲面である．

4.1.1　評価関数

3 章の (3.9) 式で定義された ϕ_i は関数 f の区分的多項式による近似関数 $\hat{f}$ の i 成分に対応する．ここで $\hat{f}$ は，次式で定義される．$J=(1,2,\cdots,m)$ は区分的多項式のインデックスである．

$$\hat{f}=\{\phi_j\}_{j\in J} \tag{4.1}$$

まず，目標となる曲面は与えられたデータ $\{(\boldsymbol{x}_i^t, y_i^t)\}_{i\in I}$ の補間であるということから，各

局所写像 φ_i の近似関数の成分に対応する ϕ_i に関して次式が成立する．

$$E_a^i = \sum_{\mathbf{x}_j^t \in U_i'} \left[\phi_i(\mathbf{x}_j^t) - y_j^t\right]^2 = 0 \tag{4.2}$$

次に，隣接曲面間の連続性に関する条件式を示す．各局所曲面 (U_i) は隣接曲面 (U_j) との接触部分 $(U_i \cap U_j (\neq \emptyset))$ において以下の条件が成立する．

$$\text{if} \quad U_i \cap U_j \neq \emptyset \quad \text{then} \quad U_i \cap U_j = \partial U_i \cap \partial U_j \tag{4.3}$$

したがって，接する部分において 2 階微分までの連続性を保証する関係式は次式で示される．

$$E_c^i = \sum_n^2 \sum_k \int_{\partial U_i' \cap \partial U_k'} \left[\phi_i^{(n)}(\mathbf{x}_j) - \phi_k^{(n)}(\mathbf{x}_j)\right]^2 d\mathbf{x} = 0 \tag{4.4}$$

さらに，スプライン関数の概念を導入すると，(4.3),(4.4) 式の拘束条件に基づき，曲面のポテンシャルを最小化することにより最適解を一意に獲得する可能性が考えられる．曲面のポテンシャルは，前章で示した膜のポテンシャル，薄板のポテンシャルなどに対応するものであるが，ここではこれらのポテンシャルを幾何学量と考え $E_g^i(f_i)$ と定義する．薄板のポテンシャルを適用した場合，次式が成立する．

$$E_g^i = g(f_i) = \int_{U_i'} \left[f^{(2)}(\boldsymbol{x})\right]^2 d\boldsymbol{x} \tag{4.5}$$

以上の拘束条件（(4.2),(4.4) 式）および最小化が要請されるポテンシャル（$g(f_i)$）に関して，次式を定義する．

$$\begin{aligned} E^i(f_i) &= \eta_a E_a^i + \eta_c E_c^i + \eta_g E_g^i \\ &= \eta_a \sum_{\mathbf{x}_j^t \in U_i'} \left[\phi_i(\mathbf{x}_j^t) - y_j^t\right]^2 \\ &+ \eta_c \sum_n^2 \sum_k \int_{\partial U_i' \cap \partial U_k'} \left[\phi_i^{(n)}(\mathbf{x}_j) - \phi_k^{(n)}(\mathbf{x}_j)\right]^2 d\mathbf{x} \\ &+ \eta_g \sum_i g(f_i) \end{aligned} \tag{4.6}$$

ここで，η_a, η_c, η_g はそれぞれ誤差係数，連続性係数，幾何学量係数である．

各局所曲面の自由パラメータはそれぞれ独立であるため，(4.6) 式より，区分的曲面全体

$\hat{f}$ に関する評価関数 $E(\hat{f})$ は次式で定義できる．

$$E(\hat{f}) = \sum_i E^i(f_i) \tag{4.7}$$

以下では，(4.6) 式で定義される評価関数 E の最小化により，上述の条件 1,2,3 を満たす区分的曲面表現の獲得をおこなうアルゴリズムを示す．

まず，評価関数 $E(\hat{f})$ を最小化する区分的関数集合を f_{opt} とすると，条件 1.2.3. を満たすには次の関係式が成立する必要がある．

$$\text{if} \quad \forall f : E(f_{opt}) \leq E(f) \quad \text{then} \quad E_e = E_c = 0 \tag{4.8}$$

すなわち，f_{opt} に関して次式が成立する．

$$E(f_{opt}) = \sum_i g(f_i) \tag{4.9}$$

4.1.2　最急降下法による評価関数の最小化

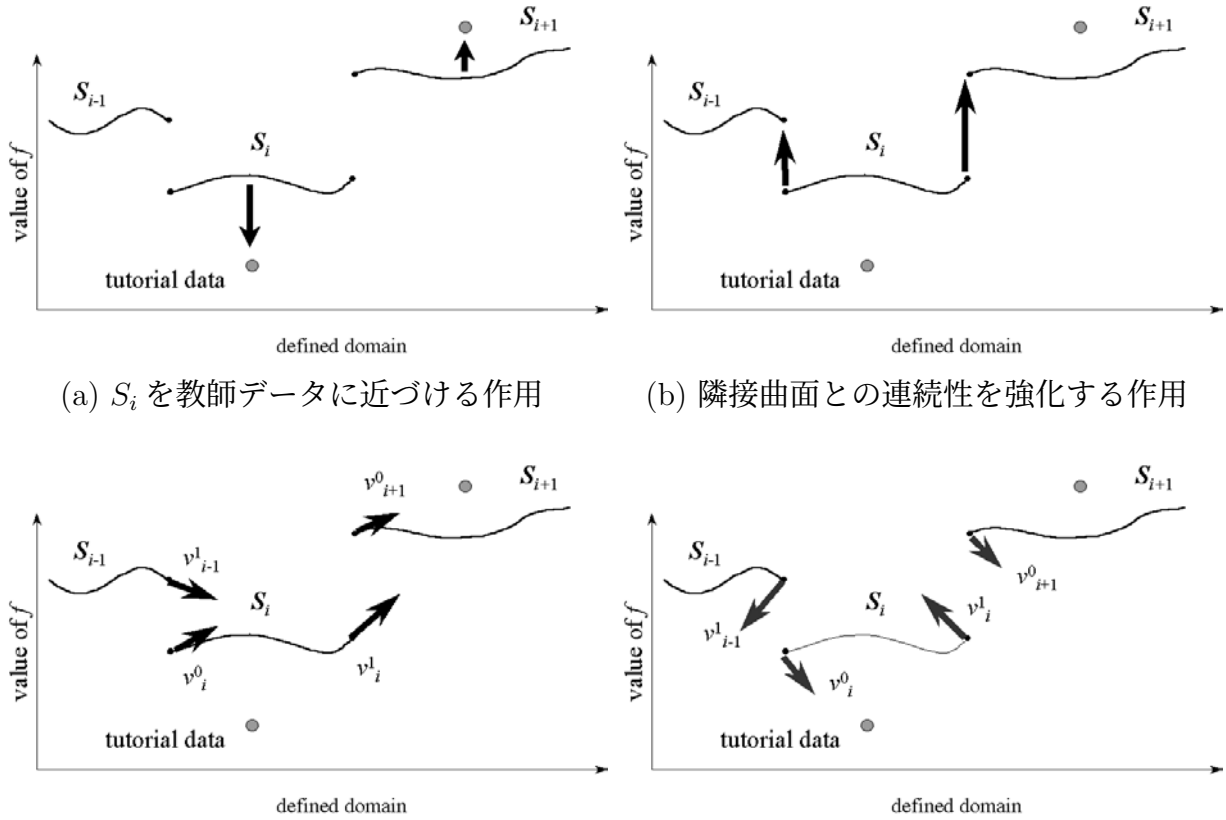
(4.6) 式で定義した評価関数を最小化する分割曲面の探索を最急降下法によりおこなう．

1 次元関数近似の場合の各局所曲面の修正作用を図 4.1 に示す．(a) では S_i を教師データに近づける作用，(b) では区分的曲面の連続性を保証するため隣接曲面との接触部分を一致させる作用，(c) では隣接領域との接触部分において 1 階微分値（勾配）の連続性を強化する（v_i^0 を v_{i-1}^1 に，v_i^1 を v_{i+1}^0 に近づける）作用を，(d) では隣接領域との接触部分において 2 階微分値（曲率）の連続性を強化する（v_i^0 を v_{i-1}^1 に，v_i^1 を v_{i+1}^0 に近づける）作用が示されている．

以上の修正量を，最急降下法（(4.10) 式）に基づき次式で定義される勾配より導出し，各局所曲面の自由パラメータ（(3.18) 式の $c_{\mu_1 \cdots \mu_n}$）を逐次的に修正する．ここで修正量は，(4.10) 式の λ および (4.6) 式の各 η に依存する．ここで，$\boldsymbol{c}(t)$ は時間 t における S_i を特徴づける多項式の係数全体をベクトル $\boldsymbol{c}^i(t)$ で定義したとき，全ての i に関する $\boldsymbol{c}^i(t)$ を要素とするベクトルである．

$$\boldsymbol{c}(t+1) = \boldsymbol{c}(t) - \lambda \nabla E(\boldsymbol{c}) \tag{4.10}$$

$\hat{f}$ を決定するパラメータが $E(\boldsymbol{c})$ であることから，(4.10) 式の $E(\boldsymbol{c})$ は前節で定義した $E(\hat{f})$ と等価である．表記上の簡潔さのために，曲面 S_i を特徴づける自由パラメータを c_j^i とす



(a) S_i を教師データに近づける作用

(b) 隣接曲面との連続性を強化する作用

(c) 隣接曲面との 1 階微分値の連続性を強化する作用

(d) 隣接曲面との 2 階微分値の連続性を強化する作用

図 4.1: 1 次元曲面における拘束条件強化

ると，係数の更新式が次式で示される．

$$c_j^i(t+1) = c_j^i(t) - \lambda \frac{\partial E(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} = \eta_a \frac{\partial E_a(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} + \eta_c \frac{\partial E_c(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} + \eta_g \frac{\partial E_g(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} \tag{4.12}$$

(4.7) 式で示すように，評価関数の構成要素であるエネルギ E_a, E_c, E_g は各領域 i に関して独立したエネルギの総和として示すことが可能であり，次式が成立する．

$$\frac{\partial E_a(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} = \frac{\partial E_a^i(\boldsymbol{c}_i)}{\partial c_j^i} \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial E_c(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} = \frac{\partial E_c^i(\boldsymbol{c}_i)}{\partial c_j^i} \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial E_g(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} = \frac{\partial E_g^i(\boldsymbol{c}_i)}{\partial c_j^i} \tag{4.15}$$

4.1.3　局所曲面間の相互作用

本節では，(4.12) 式における $\partial E_c/\partial c$ の項，すなわち隣接領域間の連続性の強化作用について議論する．前章で示したように，各局所曲面間の相互作用としての連続性強化作用はマルコフ性を持つ．以下では，2 次元曲面の場合を示す．

2 次元曲面の定義域（2 次元空間）の分割は，3 章で示したように正方格子を要素とする正規分割である．この分割表現は次のように示すことが可能である．

図 4.2 で示すラベル (a, b) がつけられた正方形を与える．1 個の正方形からはじめて 1 枚ずつ正方形付け加え，新しい正方形の辺が，すでにある正方形の同じラベルのついた辺と同一視されるようにする．このような操作により，ユーグリッド平面 $\Re^2$ はトーラスの被覆平面であることが示されるが，同様の操作に簡単な制限を付加することで，前章の図 3.5, 図 3.6 で定義された定義域の被覆が可能である．以上の概念に基づいて，各分割要素は同一視が可能である．ここでは，各局所定義域 U_i' を正規化し，$U_i' = [0,1]^2$ とする．したがって，各局所写像 φ_i は $[0,1]^2$ 上の関数である．同様に，与えられたデータ $\{(x_{j1}^t, x_{j2}^t, y_j^t)\}_{j \in I}$ の値域成分 y_j^t を正規化することで，近似関数の値域をおおよそ $[0,1]$ に収まるように設定する．以上の正規化がおこなわれると，本アルゴリズムの生成する近似曲面は正規化空間 $[0,1]^3$ 中で表現される．正規化空間から実空間への写像は線形であり，容易に変換が可能である．以上の正規化により，アルゴリズムのロバスト性およびアルゴリズムの簡素化が

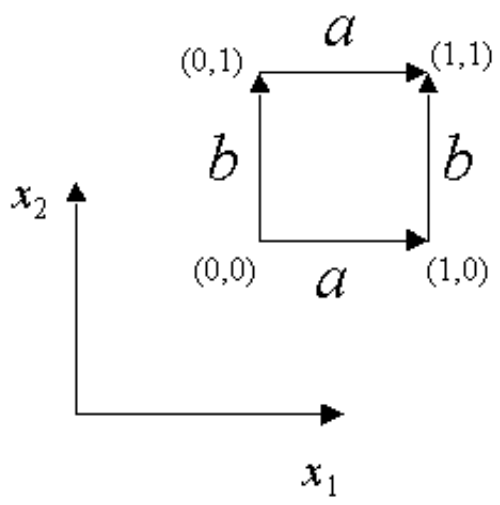


図 4.2: 正方形トーラス

期待される．正規化に関する算出を以下に示す．

本論文では，各局所定義域 U'_i および値域 y の正規化をおこなうことで，各局所写像 φ_i^{-1} 構築の一般化をおこなう．簡単のために，以下では (3.16) 式で定義した超直方体を定義域とし，2 次元空間の場合について示す．

定義域を $[x_1^{min}, x_1^{max}] \times [x_2^{min}, x_2^{max}]$，与えられたデータ $\{(x_{j1}^t, x_{j2}^t, y_j^t)\}_{j \in I}$ に関して $x_1^{min}, x_1^{max}, x_2^{min}, x_2^{max}, y^{min}, y^{max}$ を次式で定義する．

$$x_1^{min} = \min_j(x_{j1}^t), \qquad y_1^{max} = \max_j(y_{j1}^t) \tag{4.16}$$

$$x_1^{min} = \min_j(x_{j2}^t), \qquad y_1^{max} = \max_j(y_{j2}^t) \tag{4.17}$$

$$y^{min} = \min_j(y_j^t), \qquad y^{max} = \max_j(y_j^t) \tag{4.18}$$

定義域の分割を x_1 軸に平行な辺に関して m_1 分割，x_2 軸に平行な辺に関して m_2 分割（図 4.3）すると，局所定義域 U'_{ij} は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} U'_{ij} = & [x_1^{min} + \frac{(i-1)(x_1^{max} - x_1^{min})}{m_1}, x_1^{min} + \frac{i(x_1^{max} - x_1^{min})}{m_1}] \\ \times & \quad [x_2^{min} + \frac{(j-1)(x_2^{max} - x_2^{min})}{m_2}, x_2^{min} + \frac{j(x_2^{max} - x_2^{min})}{m_2}] \end{aligned} \tag{4.19}$$

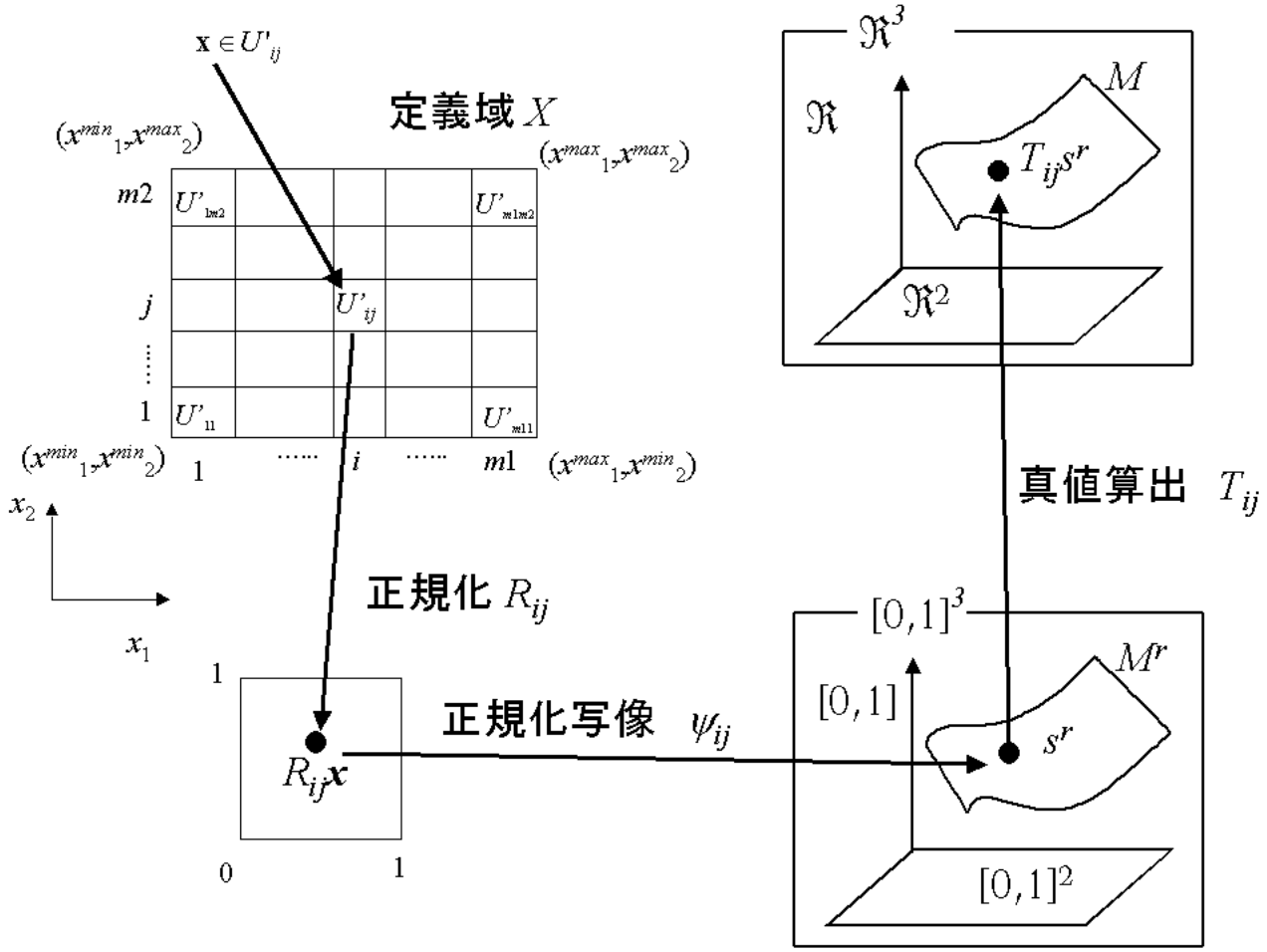


図 4.3: 正規化と曲面算出

この領域の正規化をおこなう正規化作用素 R_{ij} は，次式で与えられる．

$$R_{ij}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_1^{min}}{x_1^{max} - d_1^{min}} m_1 - i + 1 \\ \\ \frac{x_2 - x_2^{min}}{x_2^{max} - d_2^{min}} m_2 - j + 1 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

さらに，(4.18),(4.20),(4.21) 式に基づき，与えられたデータ $\{(\boldsymbol{x}_j^t, y_j^t)\}_{j \in I}$ の正規化をおこない，得られた正規化データ $\{(\boldsymbol{x}_j^{tr}, y_j^{tr})\}_{j \in I}$ を新たに教師データとして定義し，このデータを教師データとする正規化写像 ψ の構築をおこなうことで，問題に依存しない一般化をおこなうことが可能である．

$$R_y y = \frac{y - y^{min}}{y^{max} - y^{min}} \tag{4.21}$$

正規化された値 $s^r (= (x_1^r, x_2^r, y^r))$ を真値へ変換する作用素 T_{ij} は次式で示される．

$$T_{ij}\begin{pmatrix} x_1^r \\ x_2^r \\ y^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{min} + \frac{(i-1+x_1^r)(x_1^{max} - x_1^{min})}{m_1} \\ x_2^{min} + \frac{(j-1+x_2^r)(x_2^{max} - x_2^{min})}{m_2} \\ y^{min} + (y^{max} - y^{min}) y^r \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

以下では，入力 $\boldsymbol{x} (\in U'_{ij} \subset X)$ が与えられた場合の，曲面上の対応点 $s \in M$ の導出過程を次に示す (図 4.3)．

1. 与えられた入力 $\boldsymbol{x} (\in U'_{ij} \subset X)$ に関して，$\boldsymbol{x}$ が含まれる局所定義域 U'_{ij} を決定する．
2. 1. で獲得した位置情報 ij に基づき正規化作用素 R_{ij} および正規化写像 ψ_{ij} を活性化する．
3. 2. で活性化された作用素に基づき，正規化曲面 M^r 上の点 $s^r = \psi_{ij} R_{ij} \boldsymbol{x}$ を算出する．
4. 3. で算出された正規化出力 s^r に基づき真値 $T_{ij} s^r$ を算出する．

以上を整理すると，$(x_1, x_2, y) \in U'_{ij} \subset X$ に関する局所写像 φ_{ij}^{-1} は次式で定義される．

$$U_{ij} = \left\{ \varphi_{ij}^{-1}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, T_{ij} \phi_{ij}(R_{ij}(\boldsymbol{u})) | \boldsymbol{u} \in U'_{ij} \right\} \tag{4.23}$$

以上の正規化により，区分的 2 次元曲面を実現する写像 φ_i の局所定義域は $U'_i = [0,1]^2$ である．したがって，各局所正方形定義域の関係は図 4.4 に示される関係で与えられる．ここで，p は被覆写像である．次節における表記法と同様に，以下では定義域は図 3.6（(3.16 式）

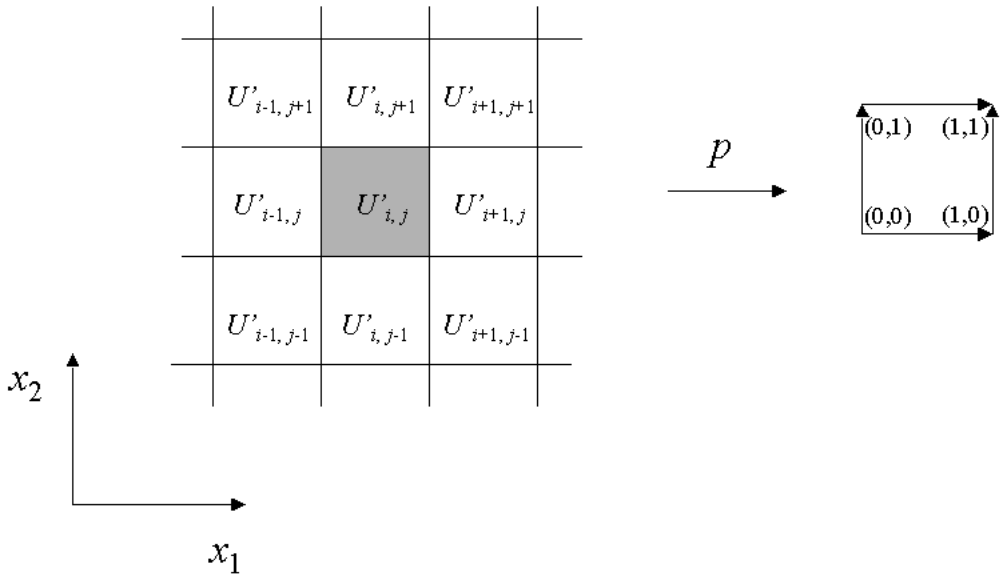


図 4.4: 正規化トーラスによる平面のタイル貼り

で定義される辺が基底に対して平行である長方形）で定義し，分割は各軸方向に $M \times N$，各局所曲面を $C(i,j)$ で表記する．

以上の関係より，局所定義域 $C(i,j)$ における隣接領域間の辺上の連続性評価関数 E^i_{c-edge}，頂点上の連続評価関数 E^i_{c-vert} はそれぞれ次式で示される．ここで，$\phi_{i,j}(x_1,x_2)$ は $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ を定義域とする 3 次多項式である．

$$
\begin{aligned}
E^i_{c-edge} = \sum_n^2 \Bigg\{ & \int_0^1 \left[\phi^{(n)}_{i,j}(x_1,0) - \phi^{(n)}_{i,j-1}(x_1,1)\right]^2 dx_1 \\
+ & \int_0^1 \left[\phi^{(n)}_{i,j}(1,x_2) - \phi^{(n)}_{i+1,j}(0,x_2)\right]^2 dx_2 \\
+ & \int_0^1 \left[\phi^{(n)}_{i,j}(x_1,1) - \phi^{(n)}_{i,j+1}(x_1,0)\right]^2 dx_1 \\
+ & \int_0^1 \left[\phi^{(n)}_{i,j}(0,x_2) - \phi^{(n)}_{i-1,j}(1,x_2)\right]^2 dx_2 \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

$$
\begin{aligned}
E^i_{c-vert} = \sum_n^2 \Bigg\{ & \left[\phi^{(n)}_{i,j}(0,0) - \phi^{(n)}_{i-1,j-1}(1,1)\right]^2 + \left[\phi^{(n)}_{i,j}(1,0) - \phi^{(n)}_{i+1,j-1}(0,1)\right]^2 \\
+ & \left[\phi^{(n)}_{i,j}(1,1) - \phi^{(n)}_{i+1,j+1}(0,0)\right]^2 + \left[\phi^{(n)}_{i,j}(0,1) - \phi^{(n)}_{i-1,j+1}(1,0)\right]^2 \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

(4.24),(4.25) 式の評価は各局所写像に関して独立しており，局所並列計算が可能である．各局所曲面に関して前章で示した近傍系を定義するクリークを与えることで，高次元空間への拡張が可能である．

2 次元曲面（$n = 2$）の場合の $\partial E_a^i(\boldsymbol{c}_i)/\partial c_j^i$（(4.13) 式），$\partial E_c^i(\boldsymbol{c}_i)/\partial c_j^i$（(4.14) 式）の導出計算を Appendix A1,A2 に示す.

4.1.4　幾何学的特徴量

各局所曲面の構築は，上記のようにデータの補間条件（E_a の最小化），連続性評価（E_c の最小化，境界値問題）で与えられる拘束条件に従う．各局所曲面は隣接曲面との相互作用によりその形状を逐次的に修正していくことから，各局所曲面の構築は ”動的 ”境界値問題と捕らえることが可能である．3 次多項式に基づく曲面は境界値問題探索のための表現系としては非常に自由度の制限された形式であるが，定義域の十分な分割がおこなわれた場合，各分割曲面の形状は簡素な表現となるため，3 次多項式を用いた本表現系は境界条件に対して十分な自由度を持ち，一意解の獲得は保証されない．したがって，曲面の幾何学的特徴の評価により最適な一意解の獲得をおこなう．このことは，また，より滑らかな曲面構築のため，表現に自由度を与え，その中から最適解を探索すると捕らえることもできる．

1 変数関数近似の場合，滑らかさの基準として定義されるポテンシャルには ”薄板のポテンシャル ”((4.5 式)）の他に ”膜のポテンシャル ”(E_m,(4.26) 式)，長さ（E_l,(4.27) 式)，全曲率（E_{tc},(4.28) 式）などを定義することが可能である．

$$E_m = \sum_i \int_0^1 \left[\phi_i^{(1)}(x)\right]^2 dx \tag{4.26}$$

$$E_l = \int_0^1 \sqrt{1 + (d\phi_i/dx)^2} dx \tag{4.27}$$

$$E_{tc} = \sum_i \int_0^1 |K_i(x)| dx \tag{4.28}$$

$$K_i(x) = \frac{d^2\phi_i/dx^2}{(1 + (d\phi_i/dx)^2)^{3/2}} \tag{4.29}$$

局所関数 ϕ_i により定義された曲面 $M_i = \{(x, \phi_i(x)) | x \in [0, 1]\}$ を幾何学的曲面とみなした場合，薄板のポテンシャルや膜のポテンシャルは，与えられた基底によりその値が変化するため，曲面固有の幾何学量とすることはできない．以下では薄板のポテンシャルに一

般性を持たせた曲率の 2 乗積分（(4.30) 式）を定義する．

$$E_{tsqc} = \sum_i \int_0^1 |K_i(x)|^2 dx \tag{4.30}$$

次に 2 次元曲面の幾何学量を示す．まず，2 次元曲面における幾何学量として曲面積 E_A（(4.31) 式）を与える．

$$E_A = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + (\partial\phi_i/\partial x_1)^2 + (\partial\phi_i/\partial x_2)^2} dx_1 dx_2 \tag{4.31}$$

2 次元曲面の曲率を特徴づける量は，Gauss 曲率 G および平均曲率 H より導出される主曲率 κ_1, κ_2 であるが，最も滑らかな曲面の構築をおこなうための評価関数 E_κ としては，主曲率のうち絶対値の大きい方 $\kappa_{amax}(= \max(|\kappa_1|, |\kappa_2|))$ の 2 乗積分 E_{2tsqc} が適当であると予想される．以下に各量を示す [21].

$$G = \kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \tag{4.32}$$

$$E = 1 + \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_1}\right)^2, \qquad G = \frac{\partial\phi_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial\phi_i}{\partial x_2}, \qquad F = 1 + \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_2}\right)^2$$

$$L = \frac{1}{C}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x_1^2}, \qquad M = \frac{1}{C}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x_1 \partial x_2}, \qquad L = \frac{1}{C}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x_2^2}$$

$$C = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_2}\right)^2 + 1}$$

$$E_{2tsqc} = \sum_i \int_0^1 \int_0^1 \max(|\kappa_1|, |\kappa_2|)^2 dx_1 dx_2 \tag{4.33}$$

上式より，最急降下法に基づくパラメータの修正量 $\partial E_{2tsqc}(\boldsymbol{c}_i)/\partial c_j$ の導出のためには，κ_1, κ_2 の計算が不可欠であり，求められた κ_{amax} に関して定義域 $[0, 1]^2$ 上で数値積分をおこなうことで最終的な修正量が与えられる．ところが，この演算は，(4.31) 式と比較した場合，計算コストが非常に大きく，実用に適さないと思われる．そこで，本アルゴリズムでは E_A（(4.31) 式）を幾何学量として適用する．したがって，各局所曲面では，動的境界条件に関して極小曲面を構築する作用を受ける[1]．

2 次元曲面（$n = 2$）の場合の $\partial E_A^i(\boldsymbol{c}_i)/\partial c_j^i$ の導出計算を Appendix A3 に示す．

[1] 定義域において単純閉曲面 ∂R で囲まれた領域を $R \subset \Re^2$ とする．R から，$\Re^3$ への同相写像 φ により得られる曲面 $M = \{\varphi(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in R\}$ に関して，その境界 $B = \{\varphi(\boldsymbol{x}) | x \in \partial R\}$ を固定したとき，最も曲面の面積を小さくする曲面が極小曲面であり，平均曲率 $H = 0$ を満たす．

3 次元以上の曲面においても，同様にさまざまな幾何学量の定義が可能であるが，一般に幾何学量は数値積分計算で与えられるために，次元数の増大にともない計算コストは非常に大きくなる．

4.1.5　区分的曲面構築アルゴリズム

1. **定義域の定義と分割**
   与えられたデータに基づく凸包を，データ数に関して導出した大きさあるいは与えられた大きさのトーラスにより被覆するタイル貼りをおこない，得られたタイル貼り領域を定義域，各要素（トーラス）を局所定義域とする．あるいは，与えられたデータに基づく超直方体領域（(3.16) 式）を定義域とする．
2. **局所関数の初期化** $t = 0$
   教師データ $\{(\boldsymbol{x}_i^t, y_i^t)\}_{i \in I}$ の値域 y_i^t を $[0, 1]$ に正規化したことにより，区分的多項式 $\hat{f} = \{\phi_j\}_{j \in J}$ の値域はおおよそ $[0, 1]$ となると予想される．したがって，初期曲面として $[0, 1]$ を定義域とする実数係数の 3 次多項式の中でその値域が $[0, 1]$ から大きく外れないように制限を与えたランダムな係数に基づく 3 次多項式により得られる曲面を初期曲面とする．ここでは，係数の生成のための確率密度関数を $[-0.5, 0.5]$ の一様分布とした．1 変数 3 次多項式の場合，値域は $[-2, 2]$ となる．
   初期化により定義された各局所係数を $\boldsymbol{c}_i(0)$，それに対応する局所関数を $\phi_i(0)$，曲面表現への同相写像を $\varphi_i(0)$ とする．
3. **停止判定**
   評価関数が与えた基準値より小さくなった場合，あるいは評価関数の変化量が与えた基準値より小さくなったときに，学習を終了する．この条件が満たされない場合，下記 4 に進む．
4. **各係数の更新**
   各係数を (4.34)∼(4.38) 式に基づき更新する．なお，本アルゴリズムでは，荷重更新を batch mode（全ての荷重を一括更新）でおこなった．

$$c_j^i(t+1) = c_j^i(t) - \lambda \frac{\partial E(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} = \eta_a \frac{\partial E_a(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} + \eta_c \frac{\partial E_c(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} + \eta_g \frac{\partial E_g(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial E_a(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} = \frac{\partial E_a^i(\boldsymbol{c}_i)}{\partial c_j^i} \tag{4.36}$$

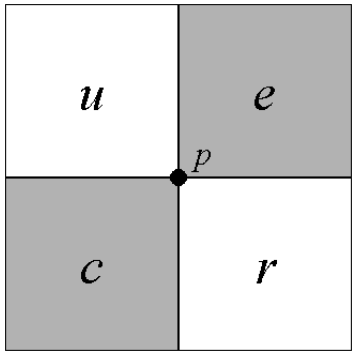


図 4.5: 領域 i, u, r, e の位相関係

$$\frac{\partial E_c(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} = \frac{\partial E_c^i(\boldsymbol{c}_i)}{\partial c_j^i} \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial E_g(\boldsymbol{c})}{\partial c_j^i} = \frac{\partial E_g^i(\boldsymbol{c}_i)}{\partial c_j^i} \tag{4.38}$$

4.1.6　近傍系の定義

(4.24),(4.25) 式で示すように，各局所曲面において連続性を考慮する近傍系は図 2.1 の (b) で示される $C = 2$ 近傍である．しかし，本アルゴリズムでは，$C = 1$ を近傍系として適用した場合においても $C = 2$ と同様の連続性が保証される．この証明は以下のように簡単に示される．

> ここでは，図 4.5 で示す領域 c に関して，領域 e との p における連続性を領域 r および u との連続性により実現されることを示す．近傍系として $C = 1$ が適用される場合，領域 c の近傍系は領域 r および u である．したがって，評価関数 (4.25) 式に関する係数修正により，$\partial c \cap \partial r$ および $\partial c \cap \partial u$ において領域 c と r および c と u は 2 階微分値までの連続性が保証される．同様に，近傍系として $C = 1$ を適用した場合，領域 e の近傍系は領域 r および u であり，$\partial e \cap \partial r$ および $\partial e \cap \partial u$ において領域 e と r および e と u は 2 階微分値までの連続性が保証される．$p \in (\partial c \cap \partial r) \cap (\partial e \cap \partial r)$ あるいは $p \in (\partial c \cap \partial u) \cap (\partial e \cap \partial u)$ から，領域 i と e の p における 2 階微分値までの連続性は明らかである．

以上により，近傍系 $C = 1$ の評価のみにより $C = 2$ の連続性が保証されることの証明が示されたが，系を構成するパラメータが過多である場合にはエネルギ関数にローカルミ

ニマが存在することが予想され，必ずしも同等の近似曲面が得られるとは限らない．また，近傍 $C = 1$ を採用することで，計算コストの低減が期待されるが，相互作用がより局所的になるため，収束の遅延などの問題が予想され，いずれの近傍系を適用するかは ”計算コスト ”および ”収束性 ”のトレードオフの問題である．評価する近傍系の違いによる近似曲面および収束性に関して次章でシミュレーションにより実際に確認する．

4.1.7　近接領域間の連続性強化に関する考察

本アルゴリズムにおける曲面表現は，超立方体上で定義された局所曲面の貼り合わせにより定義されている．この表現系では，隣接領域との連続性を有限階（2 階）微分値までに制限することで，各局所曲面の表現の自由度を与えることを期待している．前章で示したように，n 次元曲面を近似する区分的曲面表現は，各局所曲面 U_i（n 次元曲面）の貼り合わせにより構成され，区分的曲面に属する二つの局所曲面 U_i, U_j の交わりは空かまたは双方に属する面（$\partial U_i \cup \partial U_j{:}l(< n)$ 次元曲面）である．

実際，次の点を確認する必要がある．

[**問**] m 次多項式 $\phi(\cdot)$ で定義される n 次元曲面を以下で定義する．

$$\varphi : U' \subset \Re^n \to U \subset \Re^{n+1}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = (\phi_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \phi_{n+1}(\boldsymbol{x})) \qquad \boldsymbol{x} \in X$$

このとき，$l(1 < l < n)$ 次元曲面 L を共有し，1,2 階微分までの連続性が保証される互いに異なる曲面対 U_i, U_j は存在するか？

ここでは，m 次多項式群 $\{\phi_i\}_{i \in I}$ で定義される写像に基づく $\Re^3$ 中の 2 次元曲面構築の場合を考える．2 次元曲面 U 上のある与えられた 1 次元曲面 L は次式で与えられる（図 4.6）．

$$U = \{(\phi_1(x_1, x_2), \phi_2(x_1, x_2), \phi_3(x_1, x_2) | (x_1, x_2) \in U' \subset \Re^2\}$$

$$L = \{\phi_1(x_1(t), x_2(t)), \phi_2(x_1(t), x_2(t)), \phi_3(x_1(t), x_2(t)) | t \in I \subset \Re\}$$

ここで，$x_1(t), x_2(t)$ は 1 変数関数であり，$\Re^2$ 中における曲線を与える．本論文で与えた局所定義域の表記に従い，$x_1(t), x_2(t)$ はそれぞれ 1 次式であるとする．3 次多項式 $\phi_i(x_1, x_2)$ を (3.18) 式に従い次式のように定義する．

$$\phi_i(x_1, \cdots, x_n) = \sum c^i_{\nu_1 \nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \tag{4.39}$$

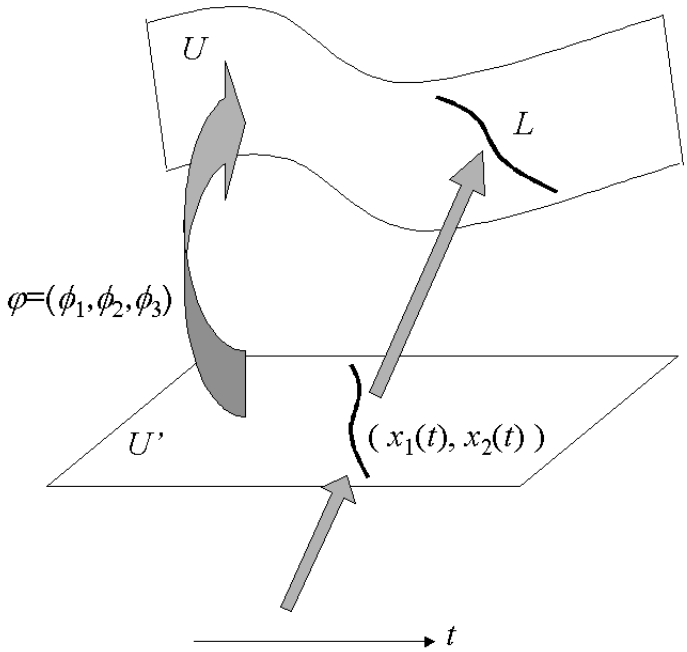


図 4.6: 曲面 U 上の 1 次元曲面 L

$$\nu_1, \nu_2 \geq 0, \quad 0 \leq \nu_1 + \nu_2 \leq 3$$

このとき，互いに異なる曲面 U_i, U_j 上の 1 次元曲面 L_i, L_j を与える写像 $\phi_k^i(x_1(t), x_2(t)), \phi_k^j(x_1(t), x_2(t))$ は次式で示される（図 4.7）．ここで，各 c_ν^{ik} は $c_{\nu_1\nu_2}^i$ に関する 1 次式である．

$$\phi_k^i(x_1(t), x_2(t)) = \sum_\nu^3 c_\nu^{ik} t^\nu \tag{4.40}$$

$$\phi_k^j(x_1(t), x_2(t)) = \sum_\nu^3 c_\nu^{jk} t^\nu \tag{4.41}$$

上記の [**問**] を定式化すると，次式の成立が問われている．

$$\forall t \in I \qquad \phi_k^i(x_1(t), x_2(t)) = \phi_k^j(x_1(t), x_2(t)) \tag{4.42}$$

$$\phi_k^{i\,\prime}(x_1(t), x_2(t)) = \phi_k^{j\,\prime}(x_1(t), x_2(t)) \tag{4.43}$$

$$\phi_k^{i\,\prime\prime}(x_1(t), x_2(t)) = \phi_k^{j\,\prime\prime}(x_1(t), x_2(t)) \tag{4.44}$$

ここで，(4.42) 式は連続性，(4.43) 式は 1 階微分の連続性，(4.44) 式は 2 階微分の連続性を

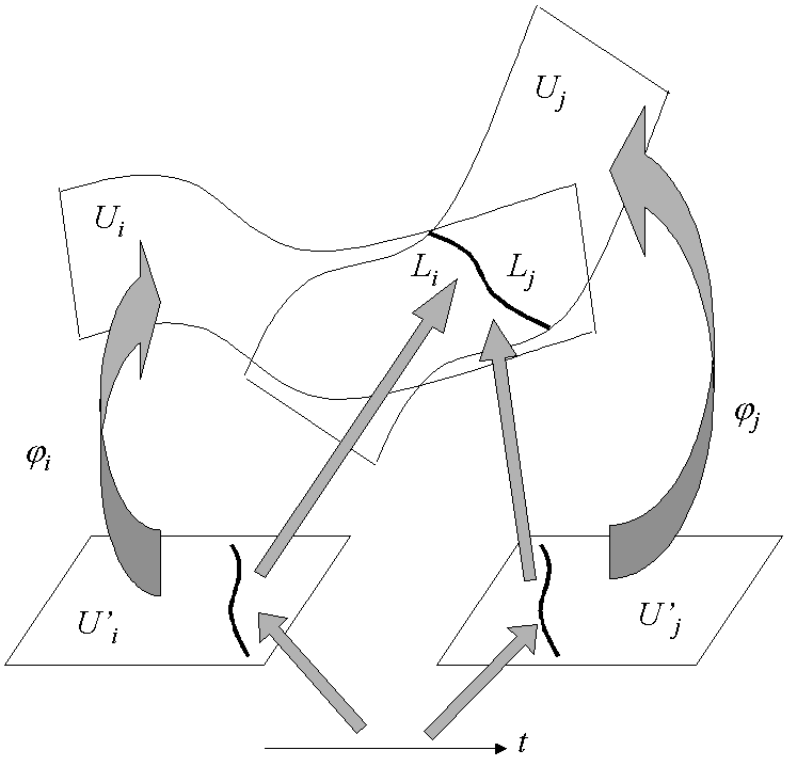


図 4.7: 互いに異なる曲面 U_i, U_j 上の 1 次曲面 L_i, L_j

保証する式である．t の定義域は連続であるため，上式が成立する条件は,

$$\forall k, \nu \qquad c_\nu^{ik} = c_\nu^{ik} \tag{4.45}$$

となる．各 i に関して c_ν^{ik} の個数が ${}_2H_3 = 4$，$c_{\nu_1\nu_2}^{i}$ の個数が ${}_3H_3 = 10$ であることから，上式は 10 個の変数に対して 4 個の 1 次方程式を与えている．同様に，微分値の連続性に関して，1 階微分値では 6 個の 1 次方程式，2 階微分値では 6 個の 1 次方程式が与えられる．したがって，10 個の変数に対して 16 個の独立した 1 次方程式が与えられ, 有限次数の多項式に基づく曲面表現系において，二つの n 次元曲面 U_i, U_j が，互いに $l(1 < l < n)$ 次元曲面を共有するとき，U_i, U_j は一致することが示された．なお，0 次元曲面（点）を共有する場合，10 個の係数に対して 3 つの 1 次方程式が与えられ，自由度 7 の解（7 次元多様体）が存在する．

以上の考察より，連続性に関する評価関数（(4.4) 式）の最小化は隣接領域間の類似度（同一性）の強化と等価であることが確認された．生物の両眼視による立体認識では，左右両画像の連続的な接続が不可欠であり，認識の際に一致強化 (coincidnece enhancement:CE) が

おこなわれていると考えられ，類似度の強化は連続性の獲得に関してより自然なアプローチである．

(4.11),(4.12) 式に基づく連続性強化のアルゴリズムでは，表現系として多項式を適用することで微積分をシンボリックに処理した場合に計算量の大幅な削減が可能であるが，係数と曲面の関係を捕らえにくいという問題点がある．上記の考察により得られた連続性と類似度の関係より，評価の対象となる局所曲面に関して，その隣接領域の状態（係数）に基づく更新が可能である．この概念は，隣接領域における値との conflict を最小化する結合マルコフ確率場モデルの確率的更新と概念のうえで類似する部分であり，不連続部分を含む曲面近似などへの拡張性が期待される．

隣接領域との類似度を強化する方法として，次に示すアルゴリズムを新たに提案する．

曲面の拡張と複数の離散データの一致

本論文で提案した区分的曲面の表現系は有限次元の多項式で与えれるため，自由パラメータ（係数）の数は有限である．n 変数 r 次多項式の係数の数は ${}_{n+1}H_r$ で与えられ，任意の 2 つの局所曲面が ${}_{n+1}H_r$ 個以上の点で一致する場合は，各曲面は互いに等価である．

本アルゴリズムでは，各局所定義域は有界閉集合として定義されているが，多項式を表現系として用いているため，その拡大は可能である．この拡大部分を隣接曲面に対する予測 (prediction) とみなす．図 4.8 では，局所曲面 S_i における隣接曲面 S_{i+1} の予測を示している．前節までの連続性評価の概念に基づく場合，このように与えられた離散データに関して，数値微分計算により得られた値に基づく連続性評価が適用される．1 変数 3 次多項式の場合自由パラメータ（係数）数は 4 であるため，2 つの曲面が少なくとも異なる 4 つのデータにおいて一致するように作用するとその一致強化がおこなわれる．ここでは，隣接領域間の接触部分における対称性を考慮して，図 4.8 において，$y^i_{j-2}, y^i_{j-1}, y^i_j, y^i_{j+1}, y^i_{j+2}$ をそれぞれ $y^{i+1}_{j-2}, y^{i+1}_{j-1}, y^{i+1}_j, y^{i+1}_{j+1}, y^{i+1}_{j+2}$, へ近づける作用をおこなうことで曲面 S_i, S_j 間の一致強化，等価的に連続性の強化をおこなう．ここで，各 y^i_j は局所定義域 U'_i 上の x_j に関する y の値であり，曲面 $S_i = \{(x, \phi_i(x)) | x \in U'_i\}$ が定義されたとき $y^i_j = \phi_i(x_j)$ が成立する．また，各 x_j は教師データである必要はなく，任意の点であるとする．

1 変数関数近似に関する局所曲面 S_i, S_{i+1} の評価関数 E^i_{CE1} および最急降下法に関する勾配 $\partial E^i_{CE1}/\partial c$ を以下に示す．

$$E^i_{CE1} = \frac{1}{2} \sum_{k=j-1}^{j+1} (y^i_k - y^{i+1}_k)^2 \tag{4.46}$$

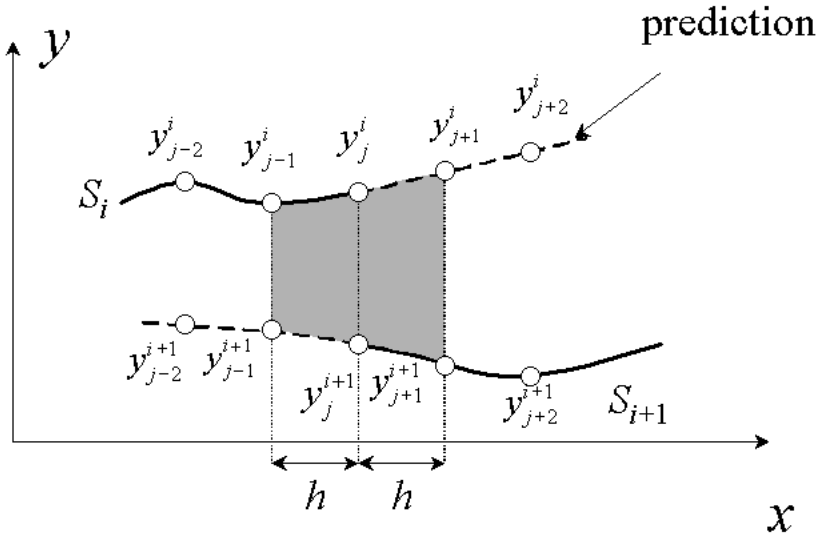


図 4.8: 一致強化の適用

$$\frac{\partial E^i_{CE1}}{\partial c} = \sum_{k=j-1}^{j+1} (y^i_k - y^{i+1}_k)\frac{\partial \phi_i}{\partial c}(x_k) \tag{4.47}$$

数値微分では，刻み幅 (step-size)h を小さくすることで，近似解の高精度化がおこなわれる．しかしながら，曲面の類似度を上述の方法により強化する場合，刻み幅はある程度の大きさを与える必要がある．これは，曲面の大域的特徴を局所情報のみから推定することは困難であるためである．2 次元定義域上の一致強化のための評価点としては，図 4.9 に示すものを定義することが出来る．ここで，評価点は 15 点であり，自由パラメータ 10 に対して，十分な強化が可能である．

次章では，刻み幅と近似曲面の関係をシミュレーションにより確認する．

多項式の係数に関する一致強化

前節で示したように，1 次以上の曲面を共有する隣接領域の組が共有部分において連続であるためには，各曲面が等価である必要がある．ここで，隣接する曲面の等価性とは，次のように定義できる．今,U'_i 上で定義された ϕ_i により表現される局所曲面を U_i とすると，U_i は多項式表現であることから，U'_i の拡張は可能である．このとき，U_i も同時に拡張されこれを S_i とする．$U'_i(U_i)$ に隣接する $U'_j(U_j)$ が ”等価である ”とは，S_i から X への投影が U'_j と重なる部分 U'_{i_a} において定義された曲面 U_{i_a} と U_j が等価であることを示す．

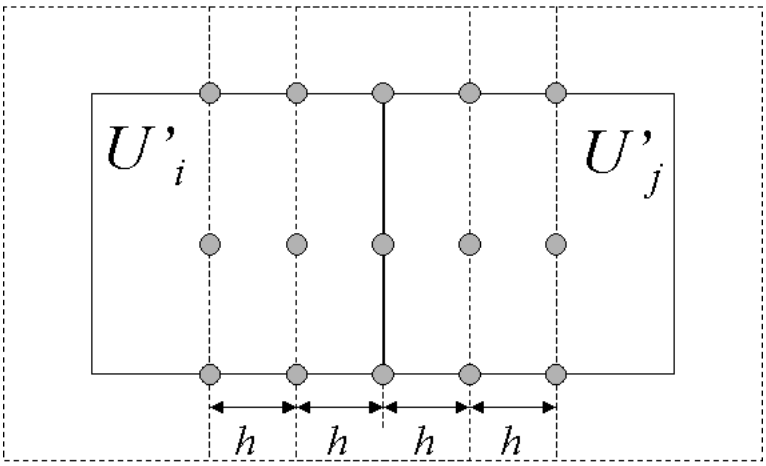


図 4.9: 2 次元定義域上の一致強化のための評価点

このことは，各局所曲面が正規化されていない場合，局所曲面 U_i を定義する多項式の係数と，局所曲面 U_j を定義する多項式の係数が一致していることを示している．したがって，局所曲面 U_i の更新をおこなう際に曲面を特徴づけるパラメータである多項式の係数を隣接曲面 U_j の係数に近づけることで得られる（(4.49) 式）．

$$E^i_{CE2} = \frac{1}{2}\{c^i_{\nu_1\cdots\nu_n} - c^j_{\nu_1\cdots\nu_n}\}^2 \tag{4.48}$$

$$\frac{\partial E^i_{CE2}}{\partial c^i_{\nu_1\cdots\nu_n}} = \{c^i_{\nu_1\cdots\nu_n} - c^j_{\nu_1\cdots\nu_n}\} \tag{4.49}$$

4.2　ネットワーク表現

離散化素子（局所曲面）間の相互作用により大域解としての近似曲面を構築する区分的曲面構築アルゴリズムは，統計力学における相互作用系との対比によりホップフィールドネットワーク等で実現されているネットワーク表現が可能である．本節では，前節までに示した区分的曲面の適応的構築アルゴリズムの統計力学的側面に関する考察をおこない，ネットワーク表現の実現について議論する．

4.2.1　セル型ネットワークと局所並列計算

結合マルコフ確率場モデルで実現される確率緩和アルゴリズムは，決定論的ニューラルネットワークで平均場近似できることが示されている [22]．決定論的相互作用をおこなう

ホップフィールドネットワークでは，2 値（$\{\pm 1\}$）をとる素子 S_i が格子上に配置されており，それぞれ結合荷重 w_{ij} を介した相互作用により安定解へ到達する．素子 S_i の状態の遷移は，全素子の荷重を介した線形和にしきい値 θ_i を加えた値 h_i に関して，ホップフィールドネットワークでは階段関数の出力値 $\mathrm{sgn}(h_i)$ を新たな値とし，ボルツマンマシンではその線形和より算出される確率密度関数 $g(h_i)$ にしたがって状態遷移をおこなう．

$$h_i = \sum_j w_{ij} S_j \tag{4.50}$$

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad ;\text{ホップフィールドネットワーク} \tag{4.51}$$

$$g(x) = \frac{1}{1 + \exp(-2x/k_B T)} \qquad ;\text{ボルツマンマシン} \tag{4.52}$$

これらの完全結合型ニューラルネットワークに対して，近傍要素間のみに結合の存在を許すことによりマルコフ性を実現したセル型神経回路網 (Artificial Cellular Neural Network : ACNN)[2, 3] では，その解の表現系の自由パラメータ数を大幅に削減可能であり，さらに局所並列計算による高速計算が可能である．ただし，セル型ネットワークはマルコフ性が存在する問題にのみ適用可能であるという制限がある．

前節で示したように，教師データに対する強化作用 $\partial E_a/\partial c$ および幾何学量に関する作用 $\partial E_g/\partial c$ は，各局所曲面に対して閉じた作用であり，さらに局所曲面間の相互作用として隣接領域間の連続性を与えることでマルコフ性を与えたため，セル型ネットワーク表現が適用可能である．ここで，前章における考察より近傍系として図 2.1(b) が定義されることから，セル型ネットワークの結合は（図 4.10）で与えられる．ここでは，簡単のために定義域は 3.6 で定義される辺が基底に対して平行である長方形である $M \times N$ セル型ニューラルネットワークを考え，i 行 j 列のセルを $C(i, j)$ で示す．

4.2.2　曲面構築アルゴリズムの統計力学的側面

前節までに示した区分的曲面構築アルゴリズムは，各局所曲面が格子状に配置されており，また評価関数を構成する各項の機能が明確であるため，統計力学における相互作用系の概念の導入が可能である．本節では，まず統計力学における Ising モデルを示す．

2 次元 Ising モデルでは，2 次元格子の各格子点 i に対して，$S_i = \pm 1$ という 2 つの値をとる変数（スピン）S_i が配置されている（図 4.11 [14]）．各スピン (S_i) はその位置に作用す

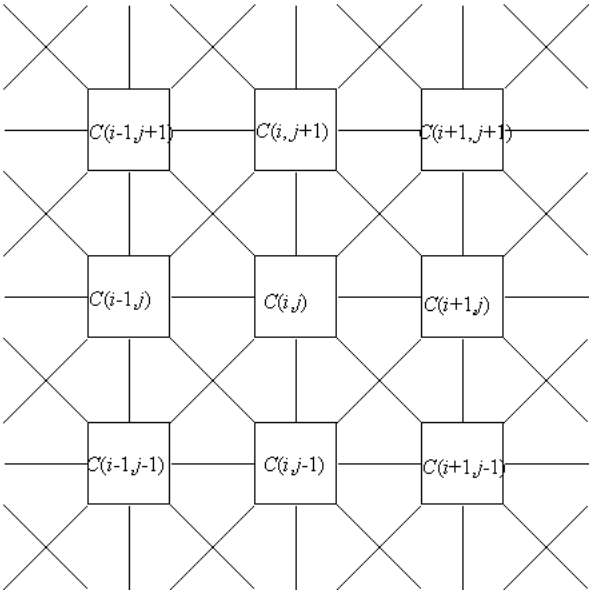


図 4.10: セル型ニューラルネットワーク

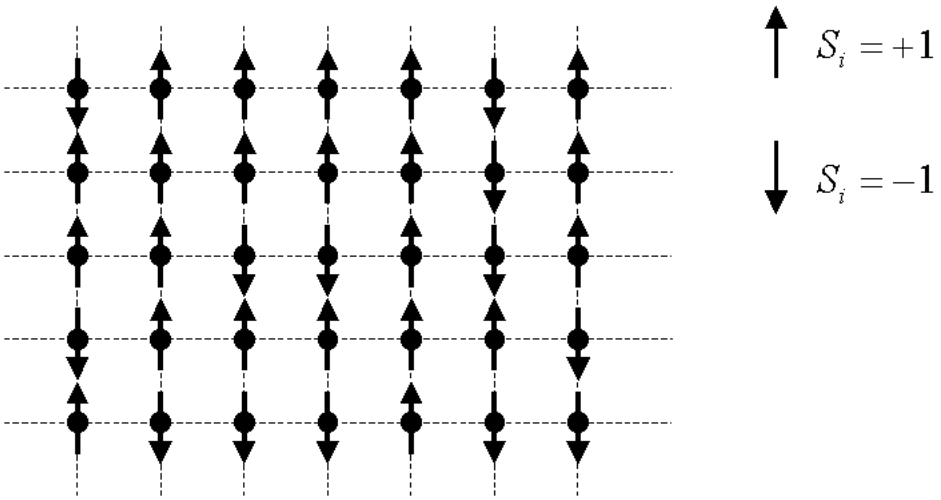


図 4.11: 2 次元 Ising モデル

る磁場 h_i(4.53) の影響を受ける．

$$h_i = \sum_j w_{ij} S_j + h^{ext} \tag{4.53}$$

ここで h^{ext} は外場，w_{ij} は S_i に対する S_j の影響の強さを示している．(4.53) 式の各項は，それぞれ第 1 項が系を構成する素子間の影響，第 2 項が系とは独立した作用素である外場の影響を示している．各スピン S_i は，磁場 h_i に関して次式で算出される確率で与えられる．

$$S_i = \begin{cases} +1 & g(h_i) \text{ の確率} \\ -1 & 1 - g(h_i) \text{ の確率} \end{cases} \tag{4.54}$$

$$g(h) = \frac{1}{1 + \exp(-2h/k_B T)} \tag{4.55}$$

ここで，k_B はボルツマン定数，T は温度である．また，(4.53) 式より，次式で示されるエネルギが定義される．

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} S_i S_j - h^{ext} \sum_i S_i \tag{4.56}$$

次に各成分と区分的曲面構築アルゴリズムで定義された評価関数（(4.57) 式）の各項との対応づけをおこなう．

$$\begin{aligned} E^i(f_i) &= \eta_a E_a^i + \eta_c E_c^i + \eta_g E_g^i \\ &= \eta_a \sum_{\mathbf{x}_j^t \in U_i'} \left[\phi_i(\mathbf{x}_j^t) - y_j^t \right]^2 \\ &+ \eta_c \sum_n^2 \sum_k \int_{\partial U_i' \cap \partial U_k'} \left[\phi_i^{(n)}(\mathbf{x}_j) - \phi_k^{(n)}(\mathbf{x}_j) \right]^2 d\mathbf{x} \\ &+ \eta_g \sum_i g(f_i) \end{aligned} \tag{4.57}$$

外場 h^{ext}

(4.57) 式において，外場 h^{ext} に相当する項は，教師データに関する誤差評価項 E_a である．ただし，h^{ext} が，モデルを形成する各素子に一様に作用することに対し，E_a の作用は各素子（局所曲面）に対してそれぞれ独立した作用を与える．したがって，E_a を h^{ext} と対応づけるためには，$h^{ext} \to h^{ext}(i)$ とし，素子の位置を変数とする作用素を定義する必要が

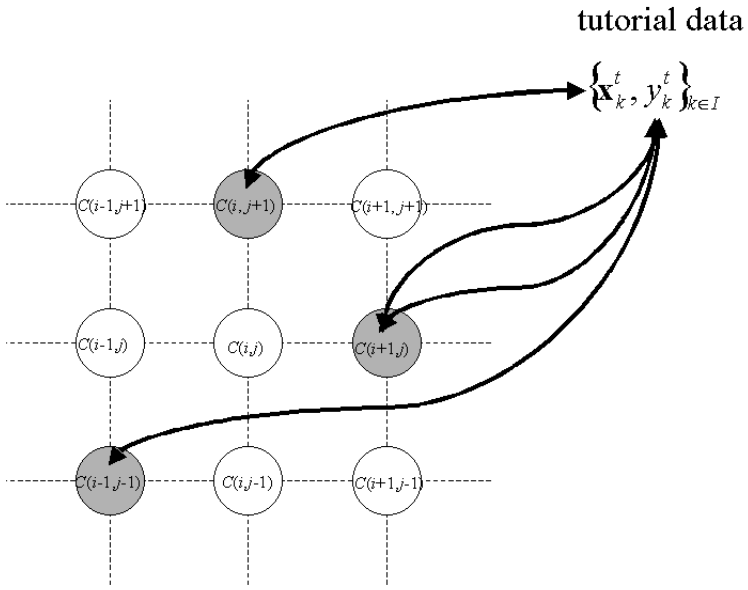


図 4.12: 誤差評価項 E_a の作用

ある．外場に対応する E_a の作用の概念図を図 4.12 に示す．ここで，表記上の簡素化と処理系のネットワーク表現のため，各局所定義域を素子化した．図に示されるように，E_a が各素子に与える作用は一様でなく，教師データを含まない素子，複数のデータに関する評価をおこなう素子等が存在する．したがって，パラメータの更新のための学習係数 η_a は各局所領域に一様に設定された場合，(4.2),(4.12) 式より，データを多数与えられた領域では，$\partial E_a/\partial c$ の作用が他の作用 $\partial E_c/\partial c, \partial E_g/\partial c$ と比較して大きくなり，アルゴリズムが破綻する危険性が発生する．したがって，局所定義域 U_i' に含まれるデータ数を $m(>0)$ とするとき，ある適当な値 η_a^{opt} に関して，η_a^{opt}/m で定義される学習係数を採用する必要がある．

相互作用 $\sum_j w_{ij}S_j$

Ising モデルでは，Ising モデルを構成する各素子間の相互作用は (4.53) 式の第 1 項で示されるように，

$$\sum_j w_{ij}S_j \tag{4.58}$$

である．上式は，各素子の状態がモデルの全ての素子の状態に依存することを示している．

区分的曲面構築アルゴリズムのモデルにおいて Ising モデルの素子に対応するものは，各局所写像 ϕ_i の係数 c_j^i（i は局所曲面のインデックス，j は ϕ_i を形成する係数ベクトル $\boldsymbol{c}^i$ の

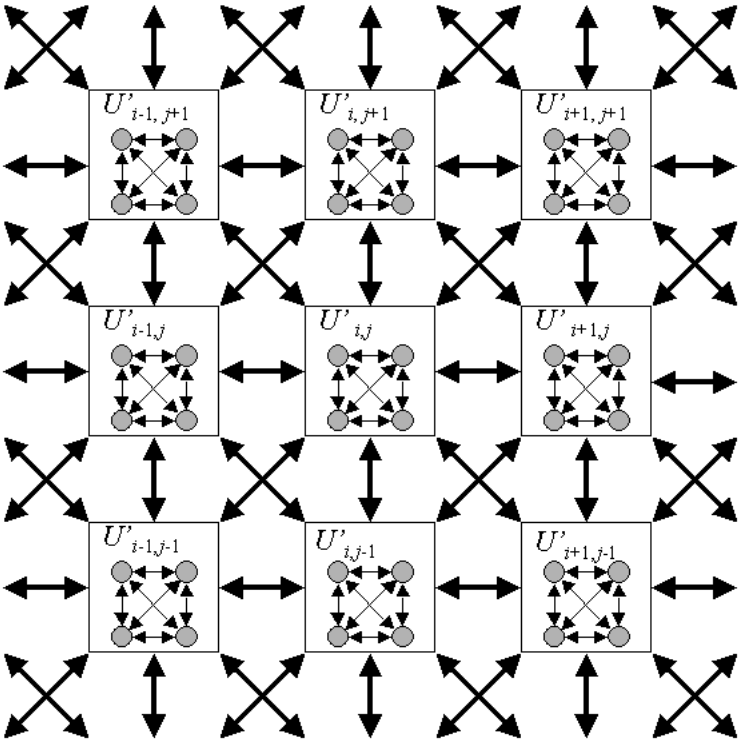


図 4.13: 素子間の相互作用

第 j 成分）であり，各係数の相互作用は $\boldsymbol{c}^i$ 内部における相互作用（幾何学量修正）および隣接領域間の相互作用（連続性修正）の 2 種類が与えられる．また，素子 i における隣接領域間の相互作用に関する結合荷重を形式的に w_{ij} で与えると，図 2.1 で示される近傍系 $C = 2$ に対応する素子群への結合のみが正（連続性強化の作用）であり，それ以外の結合は 0 となる．この結合は次節で示すようにセル型ネットワークにより実現される．素子間の相互作用の概念図を図 4.13 に示す．ここで，各局所定義域 $U'_{i,j}$ 内の素子間の相互作用は $\partial E_g^i/\partial c$，各局所定義域間の相互作用は $\partial E_g^i/\partial c$ に対応する．なお，2 次元配列（2 変数 3 次多項式）の場合，各局所写像の自由パラメータ数は 10 であるが，図 4.13 では表記上の簡素化のため省略している．

4.2.3　ネットワークのモジュラー性

前章で議論したように，連続曲面をより簡潔な表現で表現するためには，区分的表現系が最適である．そのような観点から，提案法は離散化表現であるととらえることができる．一方，前節までで提案した表現系を実現するネットワークを考える場合，従来のセル型ネッ

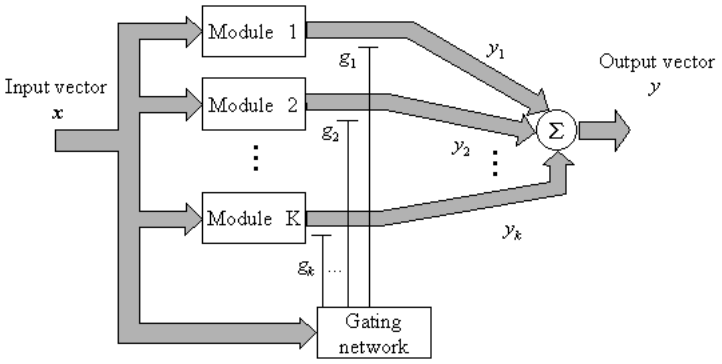


図 4.14: モジュラーネットワーク

トワークと決定的に異なる部分が存在する．すなわち，従来のネットワークにおける各素子が，離散あるいは連続量の 1 次元情報（位置，色，濃淡等）を示すことに対し，提案法では曲面生成要素の多機能化を実現するために複数の情報（複数の自由パラメータベクトル $\boldsymbol{c}^i$）を保持する点である．これは，図 4.13 からも明らかなように，各素子自体が局所的な相互作用系を形成していることを示している．このことにより，各要素は連続表現が可能であり，また各素子自体が曲面を特徴づける量（第 1,2 基本量）を保持するため，隣接領域との相互作用により大域解の獲得が可能となる．以上の点から，本アルゴリズムを実現するセル型ネットワークは連続性と離散性の 2 面性を保持している．

各セルが複数の自由パラメータを保持することで，さらに高度の情報が算出可能であり，前節で示したセル内における動的境界値問題の解法によりネットワーク全体における任意のエネルギ関数の大域的最小解の探索が可能となる．すなわち，各セル自身が表現系としての特性を持つ独立したネットワークと捕らえることが可能であり，ネットワーク全体は，モジュラー構造を持つセル型ネットワークとなる．モジュラーネットワーク [13, 17, 18, 32] は，以下のように定義される．

> ニューラルネットワークは，そのネットワークにおいておこなわれる演算が，互いに情報伝達をおこなうことなく個々で入力に対して演算をおこなう 2 あるいはそれ以上のモジュールに分解できる場合，”モジュラー性 ”を持つと呼ぶ．モジュールの出力は，それ自身は各モジュールに対して情報をフィードバックすることのない統合ユニット (integrating unit) により制御される（図 4.14）．
>
> 特に，統括ユニットは，(1) システムの最終出力を生成するために各モジュールの出力をどのように組み合わせるかを決定し，(2) どのモジュールがどの教師データを学習するべきかを決定する．

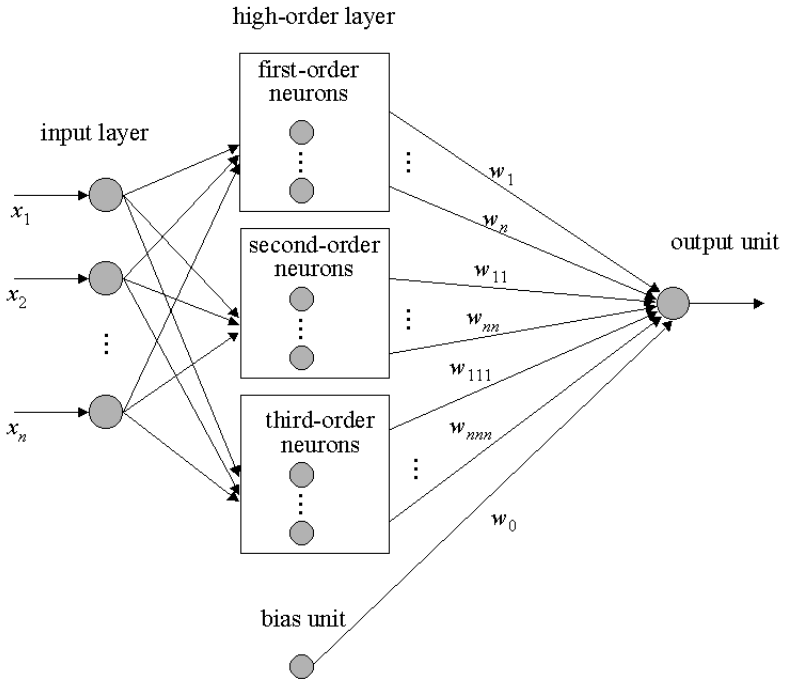


図 4.15: 局所写像 ϕ を実現する高次ネットワーク

前節で定義したように，セル型ネットワークでは，並列計算への適用を考慮して各セルの独立性を強調した構造を持っている．次節では，区分的曲面表現を実現するモジュラー構造を持ったセル型ネットワークを示す．

4.2.4　モジュラー構造を持つセル型ネットワーク

本節では，区分的曲面構築アルゴリズムのネットワーク表現について示す．ここで，ネットワークの表現する区分的曲面は，前節で定義した正規化曲面である．ネットワークへの正規化入力を与える前処理，および出力を真値に復元する後処理は前章で与えられた変換式を適用する．

図 4.13 で示したように，本アルゴリズムでは，各モジュールとしての各局所曲面はそれぞれ独立したパラメータを持っており，また，他の局所曲面との相互作用は近傍領域間に制限されている．したがって，前節で示したモジュラーネットワークのように統合ユニットを適用する必要はなく，自律分散型の表現系群となっている．

各局所定義域 U'_{ij} 上で定義される局所写像 ϕ_{ij}（n 変数 3 次多項式）は，図 4.15 で示される高次ネットワーク C_{ij}[11] により実現される．このネットワークにおいて，入力層を構成

する素子数は，入力ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_N)$ の次元数 N と一致しており，入力ベクトルを高次層へ伝達する．高次層における各素子では次に示す演算がおこなわれる．

1. **1 次ニューロン群**
   入力ベクトルの各成分に関する 1 次形式の出力 $q^{(1)}$ を算出する．

$$q_i^{(1)} = x_i \;\; i = 1, \cdots, N \tag{4.59}$$

   なお，$q_i^{(1)}$ の形式で与えられる 1 次形式の総数は N である．
2. **2 次ニューロン群**
   入力ベクトルの各成分に関する 2 次形式の出力 $q^{(2)}$ を算出する．

$$q_{ij}^{(2)} = x_i x_j \;\; i, j = 1, \cdots, N \tag{4.60}$$

   $q_{ij}^{(2)}$ の形式で与えられる 2 次形式の総数は ${}_N H_2$ である．
3. **3 次ニューロン群**
   入力ベクトルの各成分に関する 3 次形式の出力 $q^{(3)}$ を算出する．

$$q_{ijk}^{(3)} = x_i x_j x_k \;\; i, j, k = 1, \cdots, N \tag{4.61}$$

   $q_{ijk}^{(3)}$ の形式で与えられる 2 次形式の総数は ${}_N H_3$ である．

上述の高次層において導出された出力 $q_i^{(1)}, q_{ij}^{(2)}, q_{ijk}^{(3)}$ に基づき，線形出力素子において以下で示される演算がおこなわれる．

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^{N} w_i q_i^{(1)} + \sum_{i,j=1, i \le j}^{N} w_{ij} q_{ij}^{(2)} + \sum_{i,j,k=1, i \le j \le k}^{N} w_{ijk} q_{ijk}^{(3)} \tag{4.62}$$

系全体は，各高次ネットワークの格子状配列で構成され，その構築は次に示す 3 つのフェーズより成立する．

ここでは，高次ネットワークにおけるパラメータ修正の動作および相互作用系としてのネットワークの動作に関して 2 つの視点から示すことで，その構築アルゴリズムをより明確にする．

1. **教師データに関する誤差修正作用**
   本アルゴリズムを実現するモジュラー構造を持つセル型ネットワークに対して，教師データは図 4.16 のように与えられる．図で示されるように，データは全てのセルに与えられるとは限らず，また 1 つのセルに複数のデータが与えられる場合もある．
   教師データが与えられた高次ネットワーク（セル）は，図 4.17 に示されるように，(4.2) 式に関する勾配 $\partial E_a / \partial c$ を導出し，パラメータを修正することでデータの入出力関係

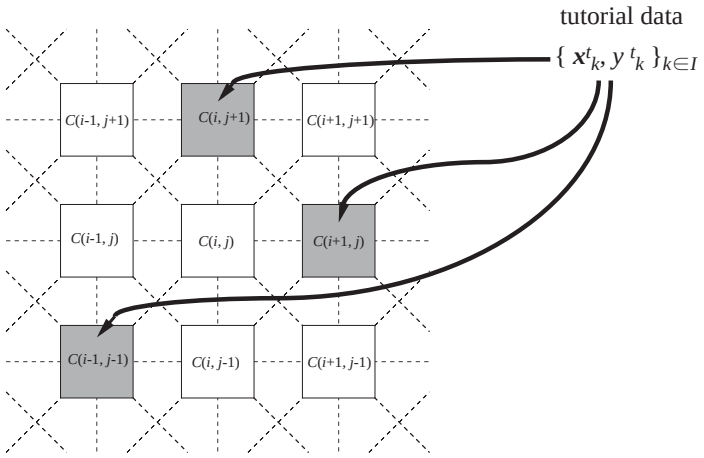


図 4.16: セル型ネットワークにおける教師データに関する誤差修正作用

を実現する．

2. **幾何学量修正作用**

   各セルは局所相互作用によりパラメータ修正がおこなわれるが，ここでは図 4.18 で示されるように自己結合で表現されるネットワーク内のパラメータ修正について示す．一般的なネットワークでは，自己結合の作用はその他の結合と同等の作用を与えるが，本ネットワークでは次に示す隣接領域との相互作用とは異なった作用を与えている．自己結合による相互作用はネットワーク内で閉じた形式となっており，その修正量は，前節で定義した幾何学量修正に対応している．

   各セルは，図 4.19 に示されるように，幾何学量 E_g に関する勾配 $\partial E_g/\partial c$ を導出し，パラメータを修正することでデータの入出力関係を実現する．パラメータ修正（相互作用）は図のグレーの部分内でおこなわれる．

3. **連続性修正作用**

   各セルは図 4.20 で示されるように，局所的相互作用により隣接領域間の連続性を強化する．

   各高次ネットワーク間の相互作用は，図 4.21 に示されるように隣接ネットワークの係数 w_{ij} 間でおこなわれる．係数の更新は (4.24),(4.25) 式によりおこなわれる．なお，表記上の簡素化のため，ここでは 1 次元の格子配列で示されている．

4.2.5　不連続部分を含む曲面構築と分割の階層化

本アルゴリズムは与えられたデータを滑らかに補間する区分的曲面構築の具体的方法を与えている．また，与えられるデータが疎に分布している場合を仮定しているため，ソー

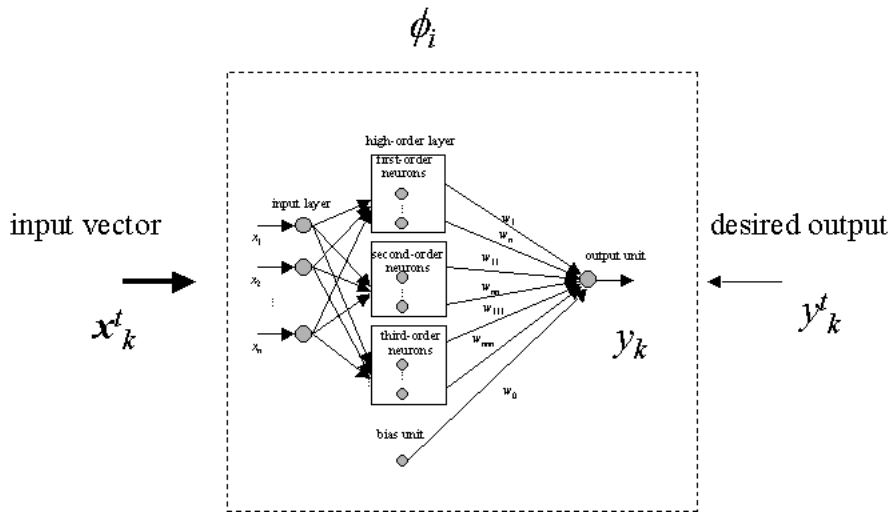


図 4.17: 高次ネットワークにおける教師データに関する誤差修正作用

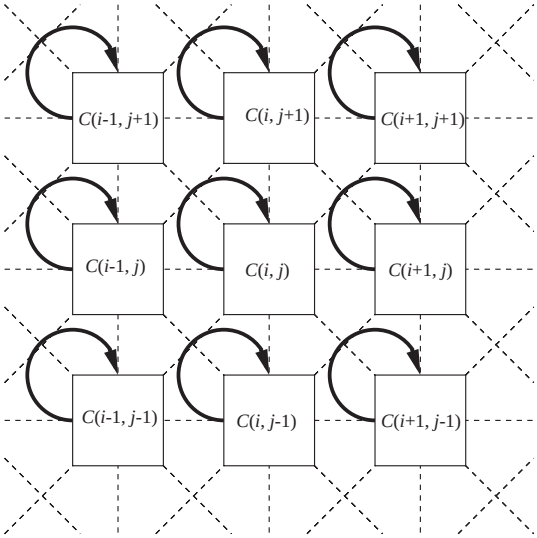


図 4.18: セル型ネットワークにおける幾何学量修正作用

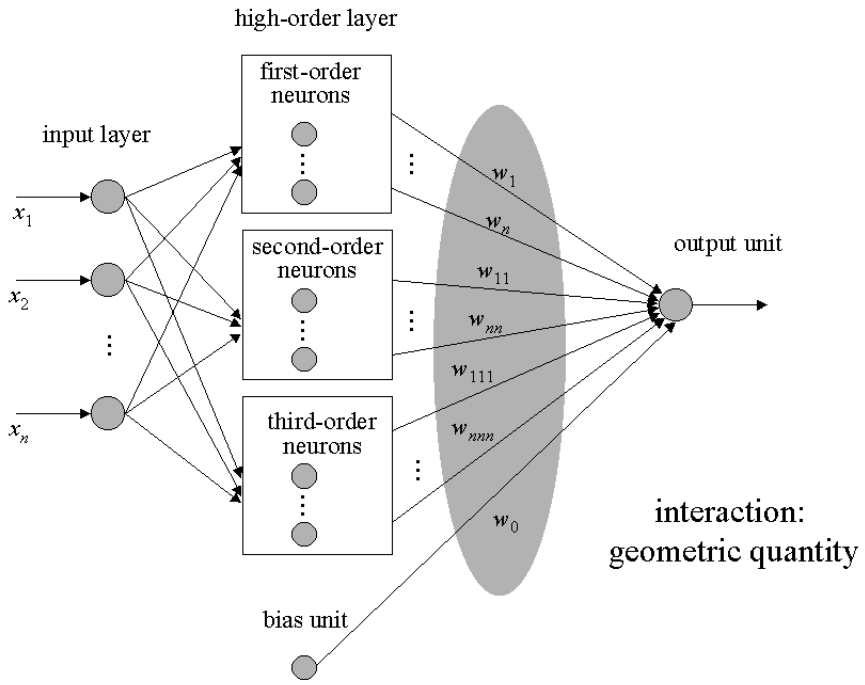


図 4.19: 高次ネットワークにおける幾何学量修正作用

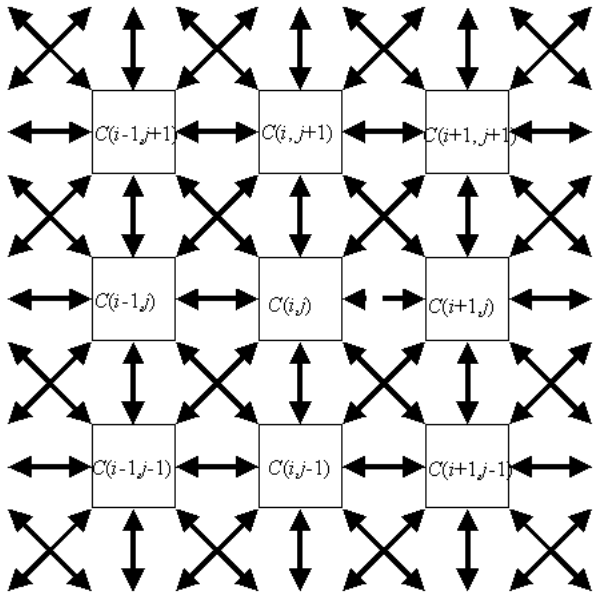


図 4.20: セル型ネットワークにおける連続性修正作用

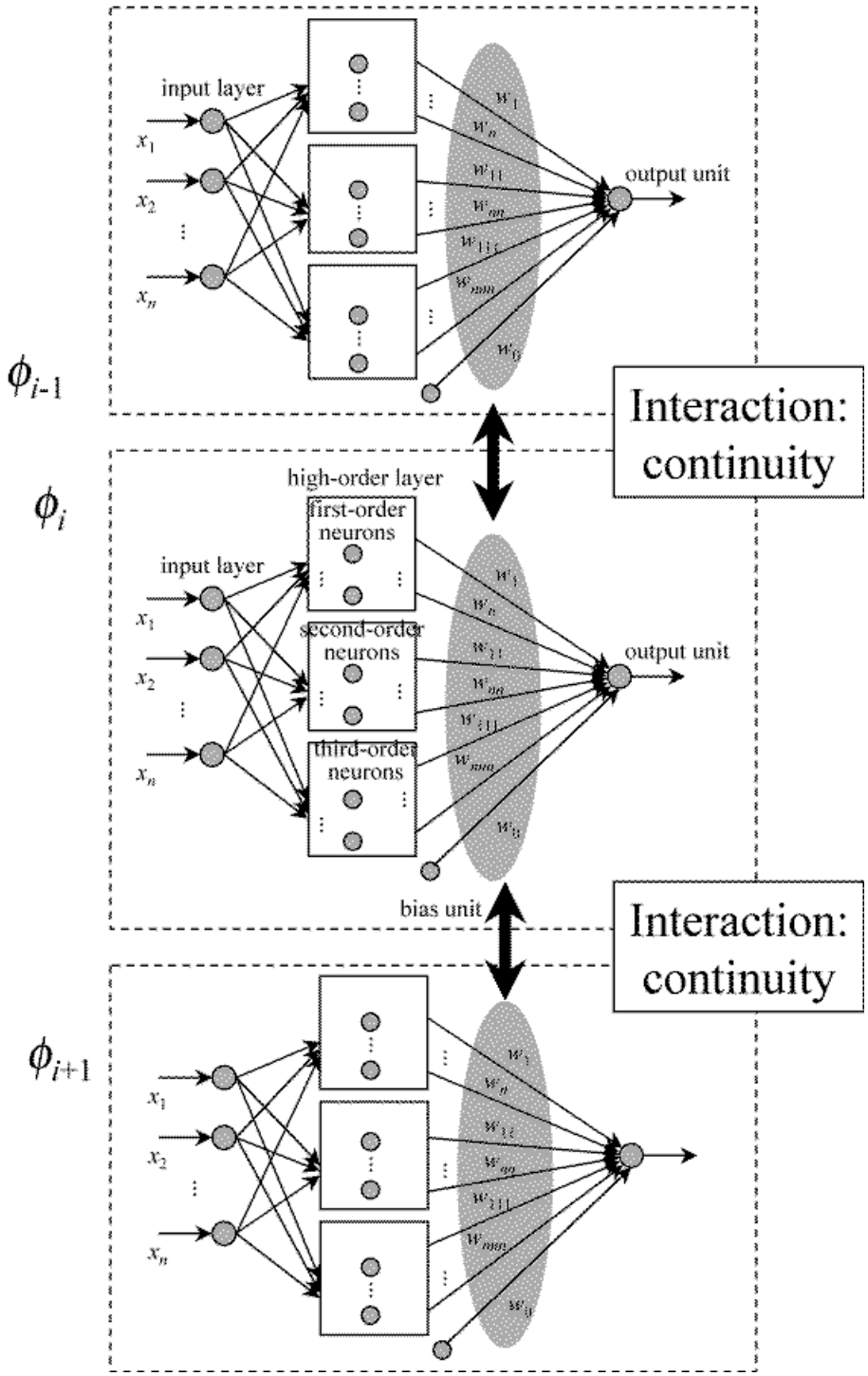


図 4.21: 高次ネットワークにおける連続性修正作用

ス関数が不連続部分を含む場合においても平滑化がおこなわれる．また，画像データのようにデータが密に与えられる場合，滑らかさの基準となる幾何学量は薄板のポテンシャルのように 2 次形式で与えられているため，不連続部分を含む曲面より生成されたデータ補間をおこなうと Gibbs 振動と呼ばれる振動が生じる．第 5 章で示すように，ポテンシャルの定義を 1 次形式にすることで，ある程度振動を押さえることが可能であるが，連続部分の大域的滑らかさを犠牲にしてしまう．

現在，視覚の計算理論では，視覚情報処理モデルとして結合マルコフ確率場 (MRF) モデルが適当であると考えられており，錯視に関する観察から，視覚情報に基づく曲面再構築の際には，まず曲面の不連続部分の探索がおこなわれ，線過程によりクラスタ化された各領域の ”充填 (filling-in) ”がおこなわれているとされている．したがって，不連続部分を含む曲面の構築の際には，不連続部分を感知し，その部分における連続性の評価を不活性にする評価関数の定義が要求される．画像復元問題における結合 MRF モデルでは，線過程と呼ばれる不連続部分探索をおこなうことでそれらの問題に対処している．1 次元データに基づく曲面再構築のための評価関数を以下に示す．ここで評価関数は，与えられたデータと一致することを要請する項，隣接領域との連続性を要請する項および線過程と呼ばれる不連続部分を検知する項で構成され，確率的アプローチにより，不連続部分を含む曲面を適応的に処理することが可能である．

$$E(f,l) = \sum_i (f_i - d_i)^2 + \lambda \sum_i \sum_j (f_i - f_j)^2 (1 - l_{ij}) + \sum_i \sum_j V_c(l_{ij}) \tag{4.63}$$

不連続部分を含む曲面構築をおこなうネットワークは次のように構築される．

本アルゴリズムは，曲面の構成要素である局所曲面で表現される要素およびエネルギ関数の大域解を求める各要素の和集合の二層の階層で構成される．ここでは，全体としての振る舞いを制御する部分は存在せず，各要素の相互作用のみにより大域解への収束を実現する．すなわち，各要素間の相互作用により大域的最適化をおこなう．この特性は，アプリオリ情報として連続関数の条件が利用可能な場合にのみ有効である．

一方，近似の目標となる曲面に不連続部分が含まれる場合，各要素間の一様な相互作用だけでは，最適解を獲得することは不可能である．これは，本アルゴリズムでは上式のように 2 次関数で与えられるために，境界の不連続性が平滑化されるためである．

ここで不連続部分を含む曲面とは，曲面に複数のクラスタが存在し，同一のクラスタ内では連続であるが，異なるクラスタ間は不連続である曲面と定義する．このような問題に対して，上記のアルゴリズムによる解法の適用は不可能であるが，クラスタを生成する中間的階層構造を新たに取り入れることで，不連続性を扱うことが可能である．

ネットワーク構造を以下に示す三層構造とする．

- 曲面の構成要素である局所曲面で表現される要素
- 連続であるクラスタ
- エネルギ関数の大域解を求める各要素の和集合の二層の階層で構成される．

すなわち，各クラスタ内で相互作用は閉じた系となっている．

実際は，格子上に配置された各セルに関してクラスタを定義する統合ネットワークが存在する．

線過程が活性化する部分は，クラスタ $C \in \mathcal{C}$ の境界 ∂C すなわちクラスタを構成する局所定義域 $\{I_i\}_{i \in I} \in C$ の集合 $\bigcup_{i \in I} I_i (\supset C)$ の境界 $\partial(\bigcup_{i \in I} I_i)$ である．

4.3　多変数関数近似

前節までは，主に 1 次元曲面および 2 次元曲面近似問題を扱ってきたが，本アルゴリズムは定義域，局所定義域，局所曲面の表記に関する一般化を 3 章で与えており任意次元入力の関数近似を扱うことが可能である．本節では，多変数関数近似への拡張について考察する．

4.3.1　光学式ナビゲーションシステムにおける非線形写像

近年のコンピュータ処理技術の発達や，CT や MRI 技術の開発にともなう脳外科を中心とする外科診断学の発展の中で，コンピュータ支援に基づく手術支援システムが実用化されつつある．実際の脳外科手術では，CT や MRI などの断層画像と実際の患部との正確な対応関係を得るシステムの開発に効果が期待される．現在臨床の場で使用されている多間接アーム先端位置を各関節角をもとに算出するナビゲーションシステム [24] では，機械的ひずみ，ぶれ，ポテンショメータの非線型性，手術環境下での操作性の問題などにより精密なナビゲーションは困難である．本研究室では，患者に近接した複数の CCD カメラにより撮影されたプローブ上の輝点の画像内 2 次元座標から，輝点の 3 次元座標を獲得する光学式ナビゲーションシステム（図 4.22）を提案している．

従来の方法 [1] では，広角カメラの収差による画像のひずみなど系の非線形性に起因する画像内座標系から 3 次元実空間座標系への写像の非線形性の影響を低減するために，患者とカメラとの距離を大きくとる必要があった．このため，カメラと患者の間に障害物が入り込む場合を想定する必要性があり，操作上の拘束などの問題が生じる．この問題はカメラを患部に近接させることで解決されるが，この場合非線形性やカメラ保持部可動機構に

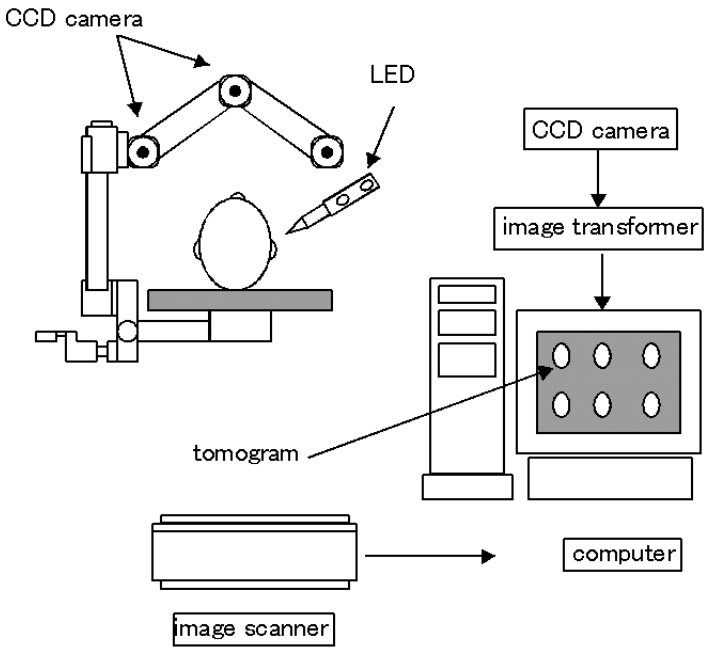


図 4.22: 光学式ナビゲーションシステムの構成図

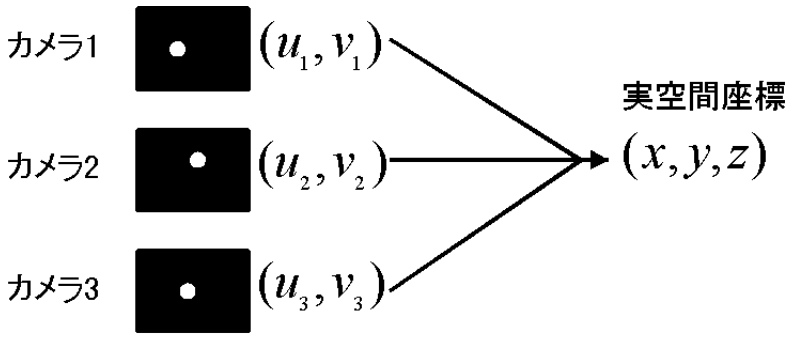
ともなう誤差の適応的な補正方法を考える必要がある．このような非線形変換を学習的に実現する方法として区分的多項式表現を適用する．

本システムでは，3 台のカメラを用いているため，輝点に関して与えられる情報は 6 次元ベクトルである（図 4.23）．したがって，複数のデータに基づき関数近似をおこなう場合，6 入力 3 出力の関数近似が要求される．この入出力関係は，$\Re^9$ 中の 6 次元曲面として表現可能であるが，前節までの表現法に従い，$\Re^7$ 中の 6 次元曲面を 3 つ生成することを考える．

前節で示した 2 次元曲面は実世界に存在する曲面であり，その扱いも容易である．曲面の多次元化は局所定義域を超立方体としたため，定義は比較的容易であるが，曲面構築に関して 2 次元から 6 次元曲面への拡張は困難である．したがって，ここでは問題を 3 次元曲面構築問題へ帰着させることで展開を容易にする．

画像にひずみが存在しない場合，線形計算により 3 次元座標が算出される．このシステムの 2 眼視画像測定モデルを図 4.24 に示す．ここで，a は両カメラの原点 O からの距離，f はカメラの焦点距離，$(u_L, v_L), (u_R, v_R)$ はそれぞれ左，右カメラにより得られた画像内輝点座標である．ひずみが存在しない場合，実空間座標における輝点の 3 次元座標値は次式で与えられる．

$$x = \frac{a(u_L + u_R)}{u_L - u_R}$$



$$(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) \xrightarrow{f} (x, y, z)$$

図 4.23: 画像内輝点座標から実空間 3 次元座標への写像

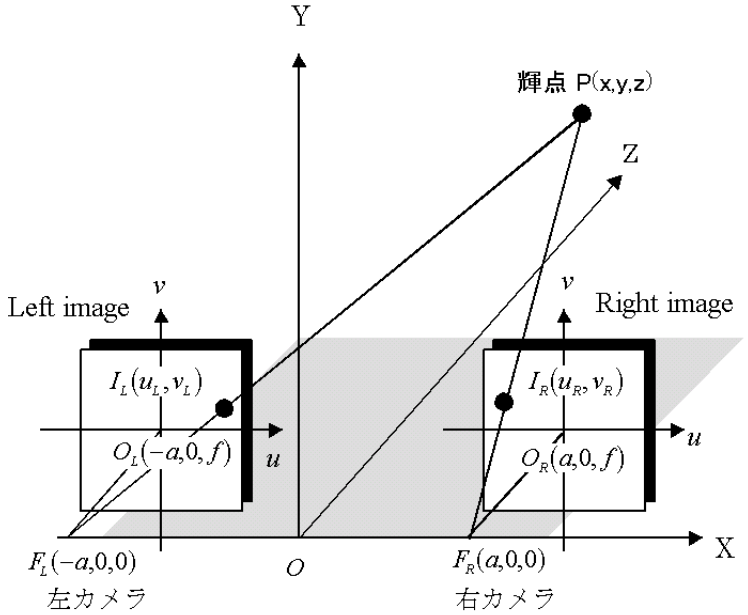


図 4.24: 2 眼視画像測定モデル

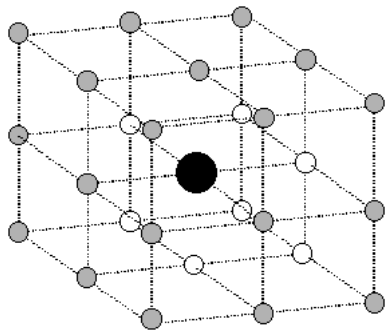


図 4.25: 3 次元格子上の要素の配置

$$y = \frac{a(v_L + v_R)}{u_L - u_R} \tag{4.64}$$

$$z = \frac{2af}{u_L - u_R}$$

これらの結果をもとに 3 画像による最尤推定をおこなうことで，より信頼度の高い算出が可能である．

実際の系では，非線形性により上式で得られた値と真値に非線形の誤差が存在する．ここでは，$\Re^3$ から $\Re^3$ へ非線形写像を学習的に獲得するアルゴリズムについて考察する．(4.64) 式で示される演算を，

$$L\boldsymbol{w}_c = L \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

と定義し，近似目標とする真の関数を $f(\cdot)$，非線形写像を $\phi(\cdot)$ としたとき，次式が成立する．

$$f(\boldsymbol{w}_c) = \phi(L\boldsymbol{w}_c) \tag{4.66}$$

3 次元曲面を構築するために，$\Re^3$ の格子分割をおこなう．このとき得られる各局所定義域を素子化表現すると，図 4.25 に示される隣接関係が得られる．中央の黒丸で示された素子について，連続性の相互作用を考慮する隣接素子は，2 次元曲面（面）を共有する素子が 6 個，1 次元曲面（辺）を共有する素子が 12 個，0 次元曲面（頂点）を共有する素子が 8 個

である．

3 次多項式に基づく近似曲面に関して，4.1.7 の概念を適用すると，係数は ${}_4H_3 = 20$ であり，1 次式で定義される 1 次元曲面が与えられると，2 階微分値までの連続性に関して 25 個の 20 変数連立方程式が成立し，2 次元の場合と同様に連続性の保証は隣接領域との一致強化が適当であると思われる．幾何学量としては，2 次元曲面の曲面積（(4.31) 式）に対応する量 E_A^3 を次式に定義する．

$$E_A^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + (\partial\phi_i/\partial x_1)^2 + (\partial\phi_i/\partial x_2)^2 + (\partial\phi_i/\partial x_3)^2} dx_1 dx_2 dx_3 \tag{4.67}$$

次章では，2 次元曲面構築の概念を 3 次元曲面へ拡張し，関数近似をおこなう．

4.3.2　高次元曲面近似への拡張

物理学の分野（相転移，臨界現象等）では，格子上に配置された多数の要素の相互作用による大域的振る舞いに関して平均場理論，スケーリング理論，くり込み群理論などさまざまな解析法が用いられ議論が重ねられている．工学で対象となるものは，2 次元の格子上に配置された画像および格子ガスオートマトン法などのように 3 次元格子上に配置された流体などの離散化モデルである．以上のように，現実の相互作用系という観点からは，扱う対象は 3 次元までの配置である．

しかしながら，本論文のように多変数関数近似を扱う場合，多次元曲面の構築のために多次元空間の分割が要求されるが，空間の分割法として超立方体は必ずしも適当ではない．3 章で示した格子分割法では，データ生成の確率密度関数は一様であると仮定した．このような場合，最も適当な要素は超球であるが，有限次の多項式を用いて連続性を保持するために，互いに重なることなくしかも定義域を完全被覆する分割要素という意味で生成のアルゴリズムが単純である超立方体を選択した．n 次元ユークリッド空間において，半径 r の超球の体積と面積をそれぞれ $V_s(n,r), A_s(n,r)$，辺の長さ l の超立方体の体積と面積をそれぞれ $V_c(n,l), A_c(n,l)$ とすると，各量は次式で与えられる [31],[23]．

$$V_s(n,r) = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} r^n & n \text{ が偶数のとき} \\ \frac{2^n \pi^{(n-1)/2} ([n-1]/2)!}{n!} r^n & n \text{ が奇数のとき} \end{cases} \tag{4.68}$$

$$A_s(n,r) = \begin{cases} \frac{n\pi^{n/2}}{(n/2)!} r^{n-1} & n \text{ が偶数のとき} \\ \frac{2^n \pi^{(n-1)/2} ([n-1]/2)!}{(n-1)!} r^{n-1} & n \text{ が奇数のとき} \end{cases} \tag{4.69}$$

$$V_c(n,l) = l^n \tag{4.70}$$

$$A_c(n,l) \quad = \quad 2nl^{n-1} \tag{4.71}$$

上式より，単位体積超立方体の表面上で中心から最も近い点（超立方体の内接球の接する点）は中心から 1/2 の距離にあるが，中心から頂点の距離は $\sqrt{n/2}$ となり，次元の増大にともない最適要素である超球と全く異なる形態となるため，分割要素として適当ではないと思われる．また，超立方体を要素とする場合，境界を共有する隣接領域の数は $3^n - 1$ であるため，次元数の増大にともない，相互作用の評価のコストが非常に大きくなる．このような点から，格子状領域分割は高次元空間への拡張に適さない．

Radial Basis Function(RBF[35]) では，入力空間を境界がぼやけた超楕円（Gauss 関数）により分割することにより多次元空間への拡張を容易におこなうことが可能である．RBF では各領域上で定義された関数の線形和により曲面を表現しているため，区分的曲面表現に直接適用することはできないが，同相写像による変形を適用して超楕円で空間を埋めることが可能であれば高次元空間への拡張は可能であろう．

以上，本節では，分割表現による曲面構築方法を具体的に利用する際の問題点およびいくつかの潜在的な可能性について言及した．

4.4　4 章のまとめ

本章では，3 章で定式化した曲面の分割表現の構築のためのアルゴリズムを示し，ネットワーク表現をおこなった．以下にその内容を示す．

1. **区分的曲面構築のアルゴリズム**
   - 3 章で示した区分的曲面構築のための評価関数を定義し，最急降下法によるパラメータ修正則を示した．
   - 各局所写像の自律性を強化するために，各局所定義域および値域の正規化をおこない，アルゴリズムの簡素化を実現した．
   - 一致強化 (CE) の概念を提案し，隣接領域との一致度を強化することで連続性を強化する方法を提案した．
2. **ネットワーク表現**
   - 区分的曲面構築アルゴリズムを統計力学における相互作用系と比較することで，その類似点および相違点を示した．

- 統計力学モデルとの比較により，モジュラー構造をもつセル型ネットワークを提案し，アルゴリズムのネットワーク化を実現した．

3. **多変数関数近似**

- 光学式ナビゲーションシステムを提案し，その非線形写像近似問題への適用について議論し，曲面近似の一般化による関数近似問題への展開について議論をおこなった．

第5章　区分的曲面構築法の基礎的特性

前章で提案した区分的曲面構築アルゴリズムの基礎的な特性を評価するために，関数近似（補間）問題の解法について検討をおこなった．

本章では，次の性質を確認する．

1. 前章で定義した評価関数の正当性（条件 (4.8) の成立）．
2. 幾何学量と分割数の関係.
3. 学習係数と生成曲面の関係.
4. 解の収束性.
5. 解析的連続性強化と CE の適用
6. 近傍系と近似曲面
7. 平滑化
8. 学習係数のロバスト性
9. 不連続関数近似

5.1　関数近似問題

基礎的な曲面近似に関する検討という観点から，本節では低次元曲面の構築をおこなう．

5.1.1　1 変数関数近似

1 変数関数近似の場合の入力空間の最適分割は非常に簡単に定義される．すなわち，与えられたデータ $\{(x_i, y_i)\}_{i\in I}, x_1 < \cdots < x_n (i = 1, \cdots, n)$ に関して，定義域 D および各局所関数の定義域 $D_j, (j = 1, \cdots, n-1)$ は以下で定義される．

$$D = [x_1, x_n] \tag{5.1}$$

$$D_j = [x_j, x_{j+1}] \tag{5.2}$$

しかしながら，前章で示したように曲面の 3 角形分割の概念に基づくこの分割法を多変

表 5.1: 学習条件

学習の収束基準

学習回数
1.00×10^5

学習係数

η_a	η_0	η_1	η_2	η_g	初期係数値の定義領域
1.00×10^{-1}	1.00×10^{-1}	1.00×10^{-2}	1.00×10^{-2}	1.00×10^{-4}	$[-0.5, 0.5]$

η_a：学習係数（誤差エネルギ項），η_0：学習係数（学習点における関数の連続性），η_1：学習係数（学習点における関数の 1 階微分値の連続性），η_2：学習係数（学習点における関数の 2 階微分値の連続性），η_g：学習係数（各領域における関数の曲率の 2 乗積分値）

数関数近似へ拡張することは困難である．また，データに基づく 3 角形分割は，データが偏在する場合などは適当な分割がおこなわれず，さらに隣接関係の不規則性により，アルゴリズム化が困難である．したがって，アルゴリズムの一般化および簡素化のために格子状分割を採用し，その特性を確認する．

曲面構築の推移

本節では，曲面構築の推移を見ることにより，本アルゴリズムの特徴づけをおこない，さらに (4.8) 式の成立を確認する．

まず，図 2.4 で与えられる 1 次元入力関数（(2.14) 式）から，10 点を一様に抽出し，このデータ点に基づく曲面構築をおこなった．曲面構築の推移を図 5.1，学習条件を表 5.1 に示す．さらに，収束の一般性を比較するために，異なるデータに基づく曲面構築の推移を図 5.2 に示す．なお，データ点数 N に対し，それぞれ分割数を $2N$ とした．

一般に，1 変数関数近似の場合，格子状分割法に基づく一様分割数は，データ生成の確率密度関数が一様であると仮定した場合，ソース関数に関するアプリオリ情報（低次の多項式で示される等）が与えられない限り，データ数と同等数あるいはそれ以上の分割が適当であると思われるが，幾何学量評価の効果を確認するため，データ数の 2 倍の分割（図 5.1:20, 図 5.2:10）をおこなった．評価幾何学量は (4.30) 式で定義される曲率の 2 乗積分を適用した．図 5.2, 図 5.1 の (a)〜(j) 中の点線で示される曲線は学習終了後の曲面であり，実線で示される曲線はそれぞれ (a) は初期曲面，(b) から (j) では曲面構築の推移が時系列で示されている．各曲面は，(a)epoch $= 0$,(b)epoch $= 1.0 \times 10^4$,(c)epoch $= 2.0 \times 10^4$,(d)epoch $= 3.0 \times 10^4$,(e)epoch $= 4.0 \times 10^4$,(f)epoch $= 5.0 \times 10^4$,(g)epoch $= 6.0 \times 10^4$,(h)epoch $=$

7.0×10^4,(i)epoch $= 8.0 \times 10^4$,(j)epoch $= 9.0 \times 10^4$ である．(k) は幾何学量（曲率の 2 乗積分値）の推移，(l) は接続面における連続性を示す量の推移曲線である．

図 5.2, 図 5.1 より，区分的曲面構築は 2 つのフェーズで構成されることが確認された．すなわち，

1. データ補間をおこなう連続曲面（C^2 級曲面）構築
2. 幾何学量の最小化

である．1. の連続曲面の構築は，図 5.2, 図 5.1 の (l) で示される連続性推移曲線から確認されるように，学習の非常に早い段階で獲得されている．これに対し，2. の幾何学量の最小化は，1. の条件を保持しながら徐々に獲得されることが確認された．図 5.3 に関数空間における解の探索経路の概念図を示す．

以上より，適当な学習係数を設定し，2. の段階で得られる曲面が最小解であるならば，(4.8) 式で示される条件が成立し，(4.6) 式の最小化を最急降下法によりおこなうことで，区分的曲面構築が可能であることが示された．

幾何学量と分割数

前節では，区分的曲面構築アルゴリズムの評価の第一段階として曲面構築の推移を確認した．本節では，評価幾何学量と獲得される曲面の関係および分割数の関係を確認する．

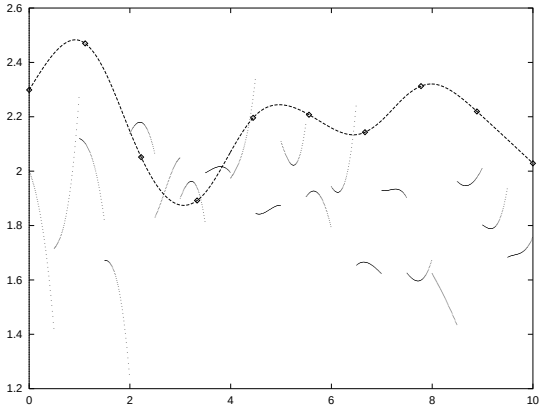
ここでは，幾何学量として，(1) 曲線の長さ（(4.27) 式），(2) 全曲率（(4.28) 式），(3) 曲率の 2 乗積分（(4.30) 式）を定義した場合の比較をおこなう．本節では，ほぼ一様に分布したデータに基づく曲面近似問題を扱うため, 分割数の最適値はデータ数と同等数であると予想されるが，分割数を増加した場合に得られる近似曲面および学習の収束性を確認するため，データ数を N 個とした場合，分割数として $(a)N, (b)2N, (c)5N$ で曲面構築をおこなった．

まず，前節と同様に，図 2.4 に示す 1 次元入力関数（(2.14) 式）から，10 点を抽出し，このデータ点に基づく曲面構築をおこなった．以下では，それぞれの幾何学量の評価に基づく曲面構築を分割数をパラメータとして構築をおこなう．ここで，学習係数は表 5.1 で与えられ，全ての構築に関して一定とした．

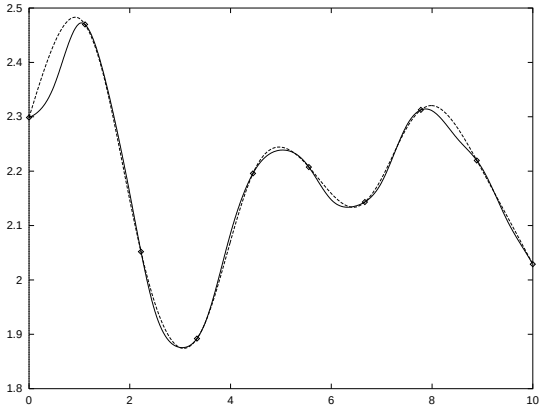
1. <u>長さ</u>

   (4.27) 式で定義される曲面の長さを評価幾何学量として定義し，区分的曲面構築をおこなった．結果を図 5.4，学習条件を表 5.2 に示す．

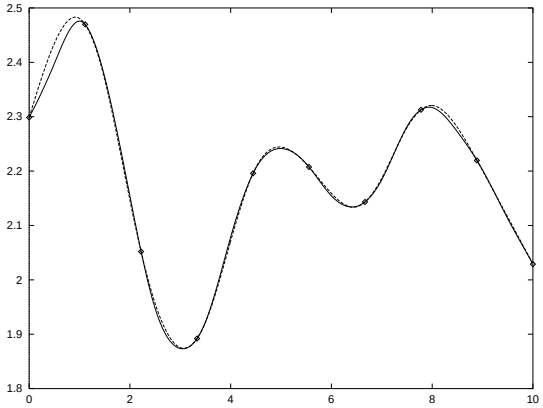
   曲面の長さを最小化する作用は，弾性膜のポテンシャルと等価であり，十分な自由パ



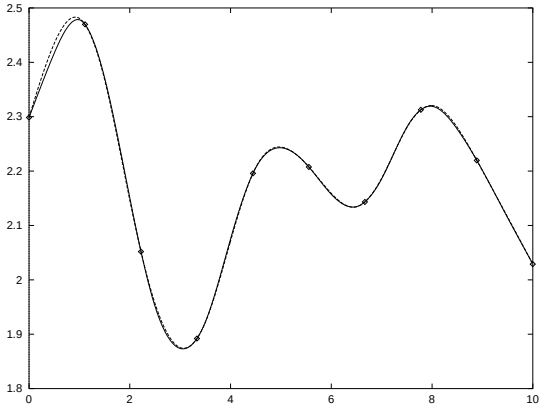
(a) 初期曲面 (epoch = 0)



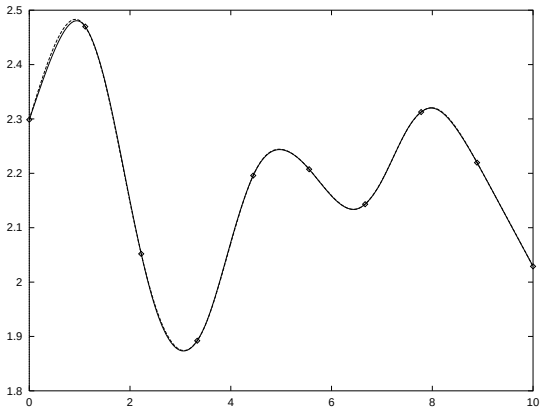
(b) epoch = 10000



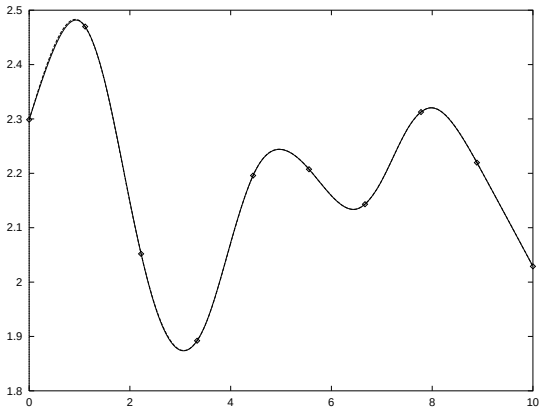
(c) epoch = 20000



(d) epoch = 30000

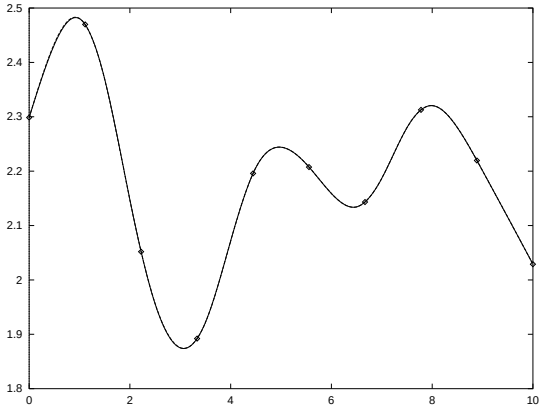


(e) epoch = 40000

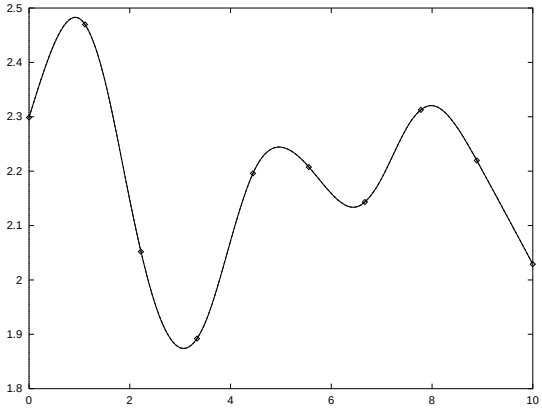


(f) epoch = 50000

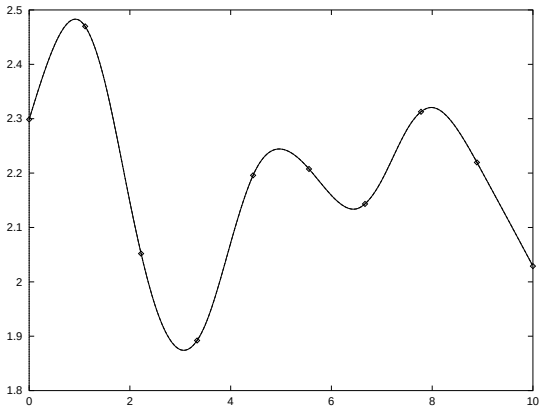
図 5.1: 区分的曲面構築の推移



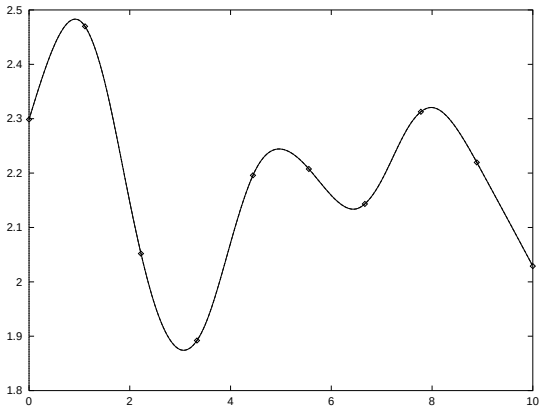
(g) epoch = 60000



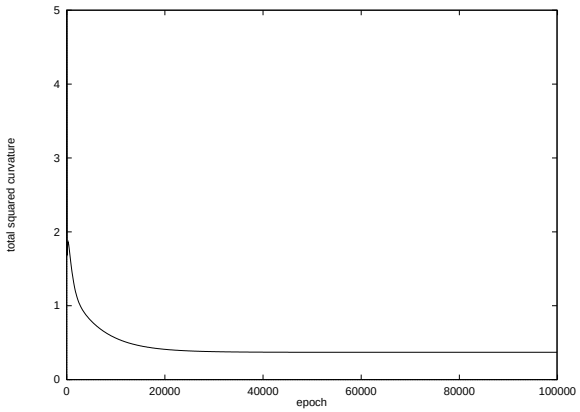
(h) epoch = 70000



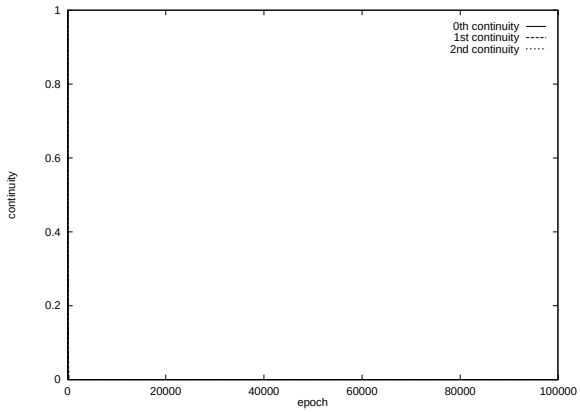
(i) epoch = 80000



(j) epoch = 90000

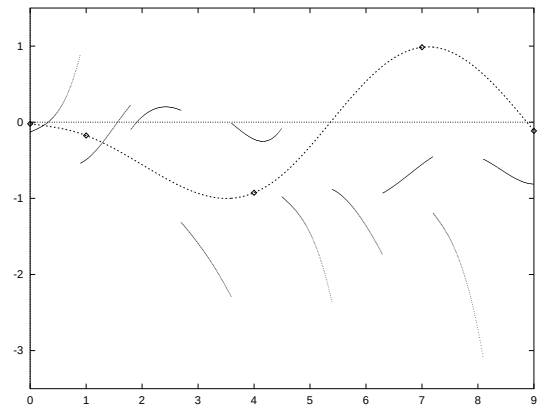


(k) 曲率の 2 乗積分値の推移曲線

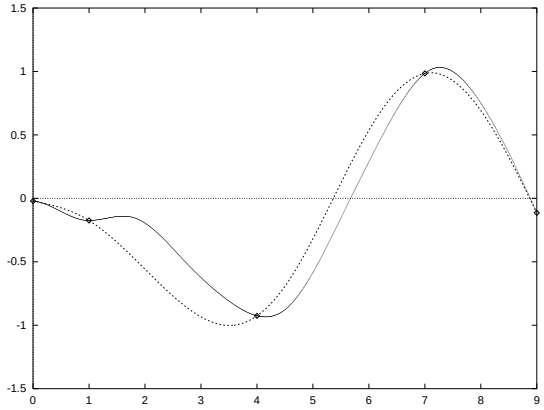


(l) 連続性を示す値の推移曲線

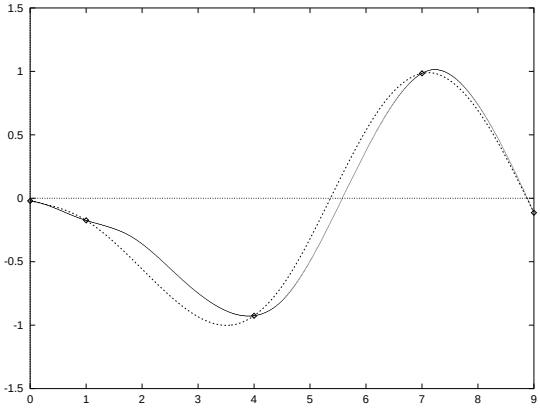
図 5.1: 区分的曲面構築の推移



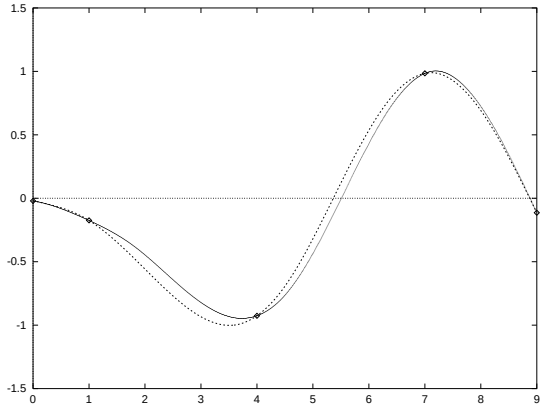
(a) 初期曲面 (epoch = 0)



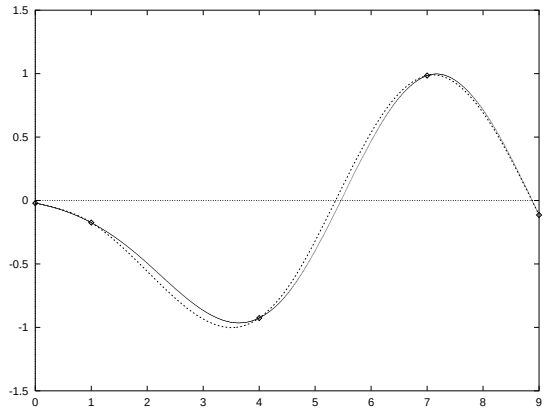
(b) epoch = 10000



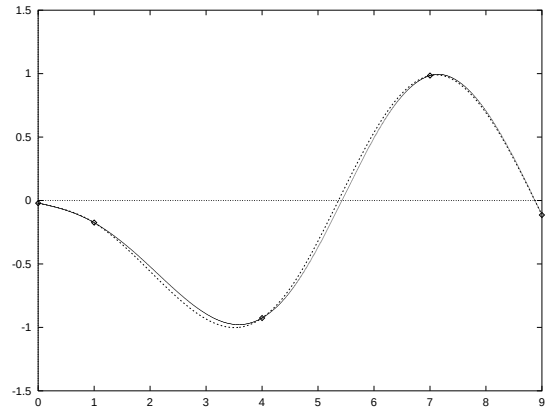
(c) epoch = 20000



(d) epoch = 30000

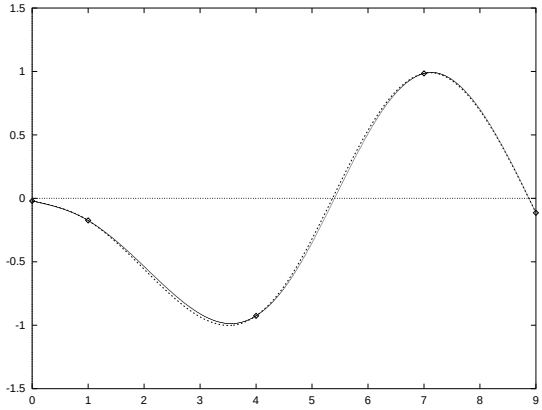


(e) epoch = 40000

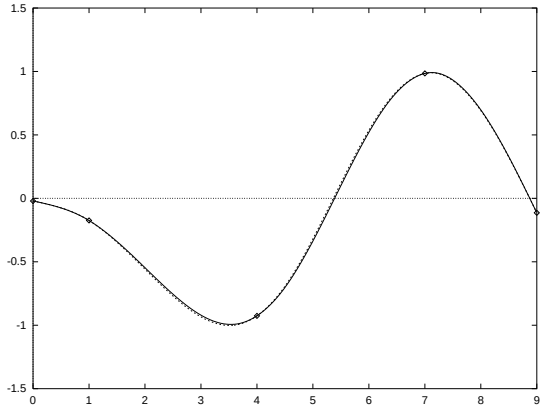


(f) epoch = 50000

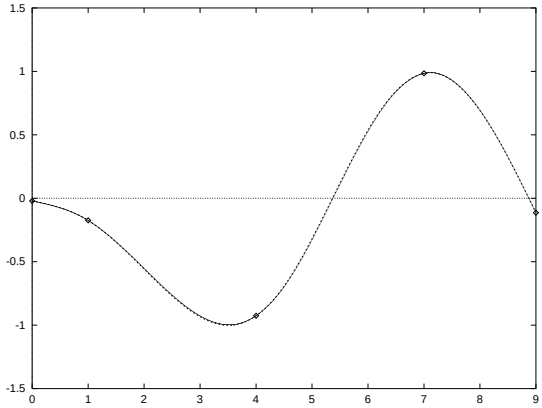
図 5.2: 区分的曲面構築の推移



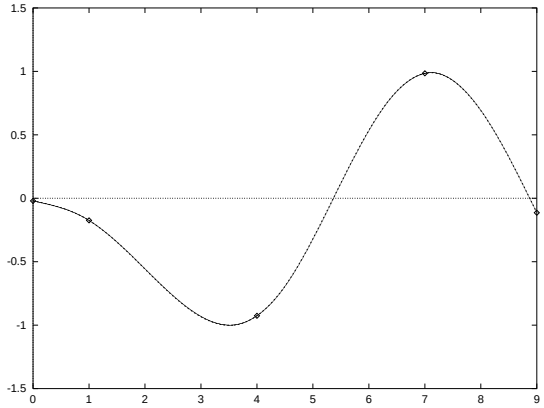
(g) epoch = 60000



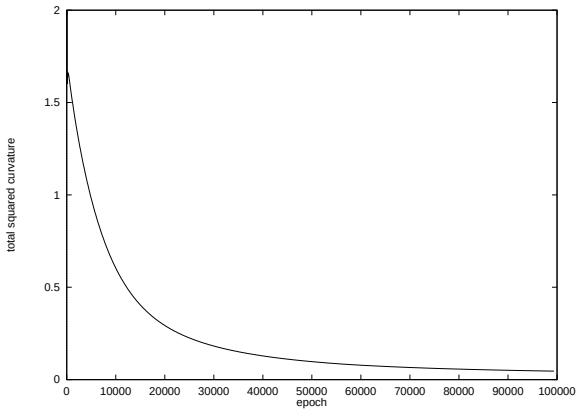
(h) epoch = 70000



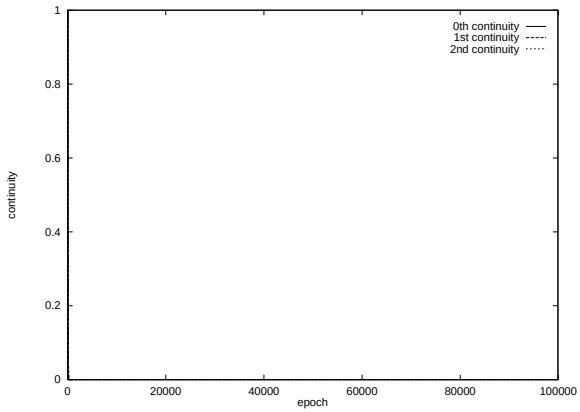
(i) epoch = 80000



(j) epoch = 90000



(k) 曲率の 2 乗積分値の推移曲線



(l) 連続性を示す値の推移曲線

図 5.2: 区分的曲面構築の推移

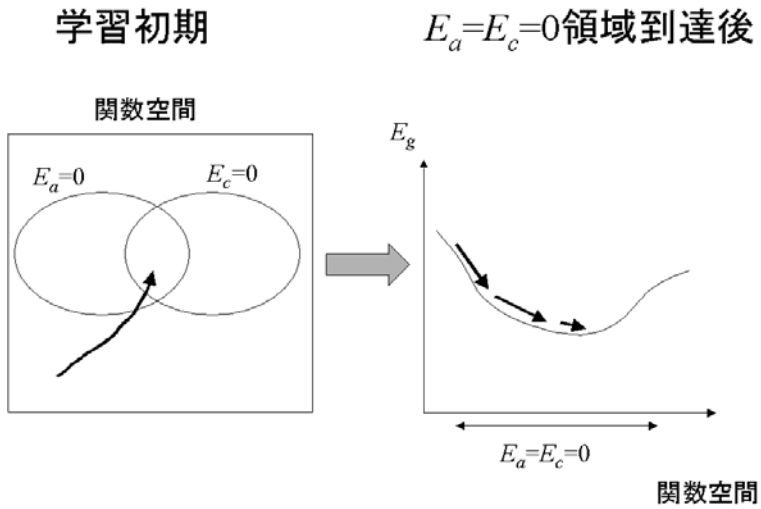


図 5.3: 関数空間における解の探索経路

表 5.2: 学習条件

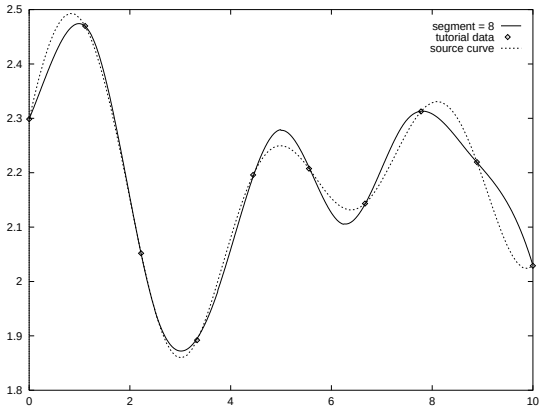
学習の収束基準

学習回数	幾何学量の変化
1.00×10^5	1.00×10^{-5}

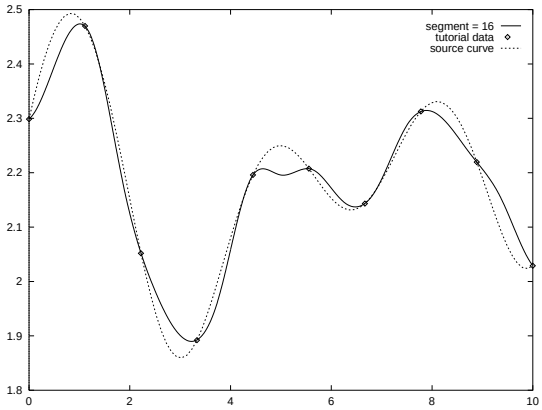
学習係数

η_a	η_0	η_1	η_2	η_g	初期係数値の定義領域
1.00×10^{-1}	1.00×10^{-1}	1.00×10^{-2}	1.00×10^{-2}	1.00×10^{-4}	$[-0.5, 0.5]$

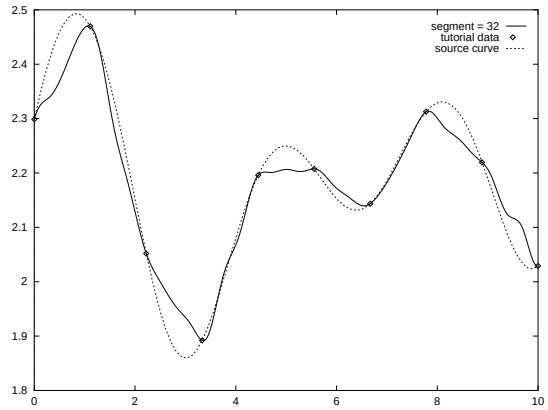
η_a：学習係数（誤差エネルギ項），η_0：学習係数（学習点における関数の連続性），η_1：学習係数（学習点における関数の 1 階微分値の連続性），η_2：学習係数（学習点における関数の 2 階微分値の連続性），η_g：学習係数（各領域における関数の生成する曲面の長さ）



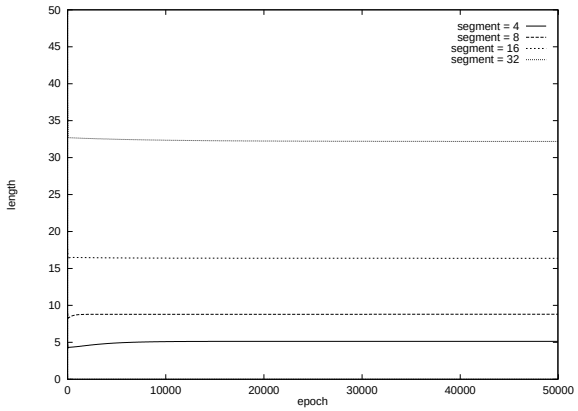
(a) 分割数 = 8



(b) 分割数 = 16



(a) 分割数 = 32



(b) 長さの推移曲線

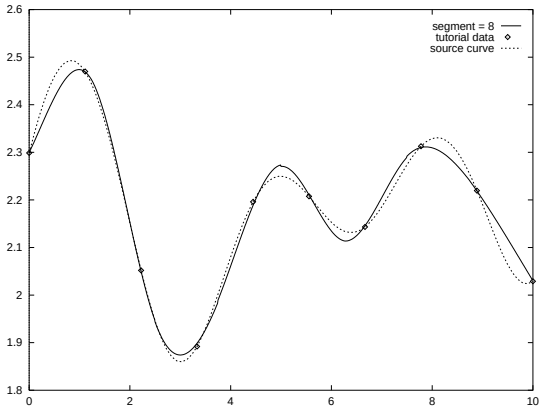
図 5.4: 曲線の長さを評価幾何学量とした近似曲面

ラメータ数を持つ表現は，2 章の弾性自己組織化ネットワークで示したようにデータの線形補間に近い近似曲面を生成することが予想される．しかし，分割数を適当な量に制限することで滑らかな曲面を構築可能である．

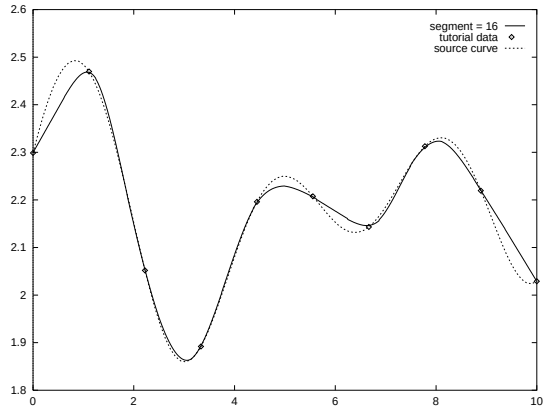
2. <u>全曲率</u>

微分幾何学において，曲線の大域的性質を示す量として全曲率が定義されている．ここでは，(4.28) 式で定義される曲面の全曲率を評価幾何学量として定義し，区分的曲面構築をおこなった．結果を図 5.5 に示す．なお，学習条件は表 5.2 と同様である．ただし，η_g は全曲率に関する学習係数である．

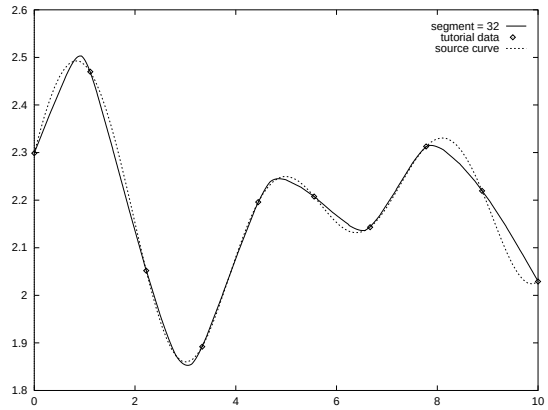
全曲率は，曲線の曲率の絶対値の積分値で与えられているため，大域的に滑らかな曲面の構築が可能である．しかし，評価関数が 1 次形式で与えられるため，分割数が増加し，表現系の容量が大きくなると，曲率の分布がほとんどいたるところで 0 となり，局所的に非常に大きな値を取るようになる（図 5.5(c)）．したがって，分割数が過多に



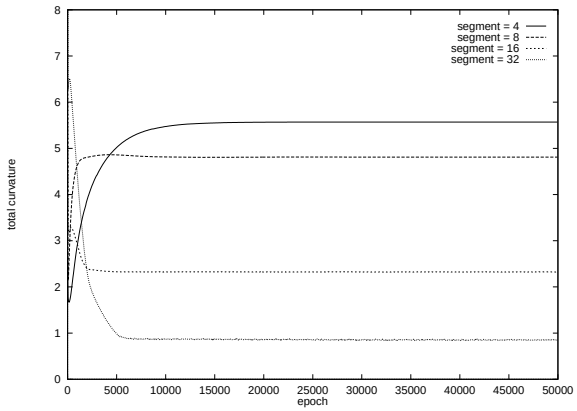
(a) 分割数 = 8



(b) 分割数 = 16



(c) 分割数 = 32



(d) 全曲率の推移曲線

図 5.5: 全曲率を評価幾何学量とした近似曲面

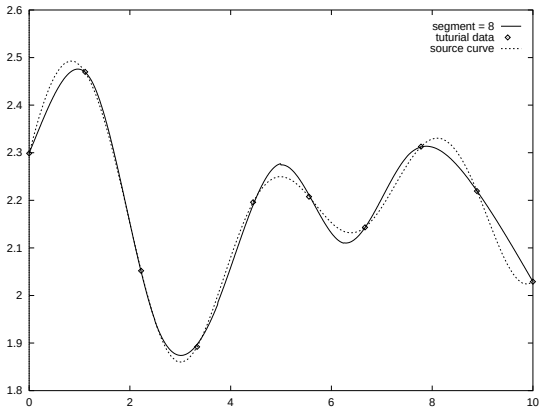
なると，ほとんど線形補間と等しくなる．

3. 曲率の 2 乗積分値

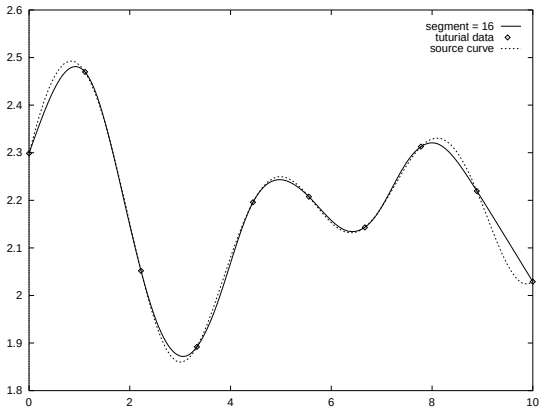
全曲率を評価した近似曲面は，分割数がデータ数と同等の場合，大域的に滑らかな曲面の構築が可能であったが，評価関数が 1 次形式で与えられるため，分割数が過多になると局所的に非常に大きな値を取るようになり，ほとんど線形補間と等しくなることが確認された．

ここでは，曲率に関する 2 次形式を評価することにする．(4.30) 式で定義される曲面の全曲率を評価幾何学量として定義し，区分的曲面構築をおこなった．結果を図 5.6 に示す．なお，学習条件は表 5.2 と同様である．ただし，η_g は曲率の 2 乗積分値に関する学習係数である．

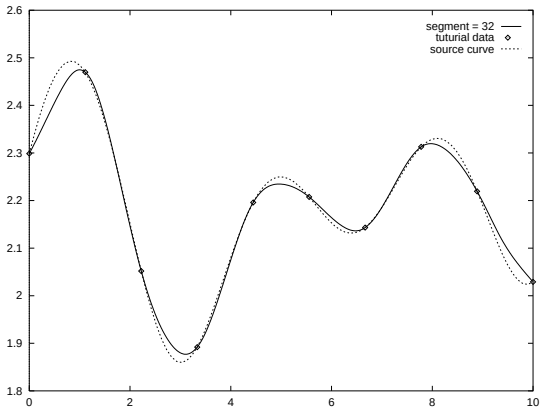
分割数の変化に対して生成曲面がほとんど変化しないことが確認され，アルゴリズムのロバスト性が示された．



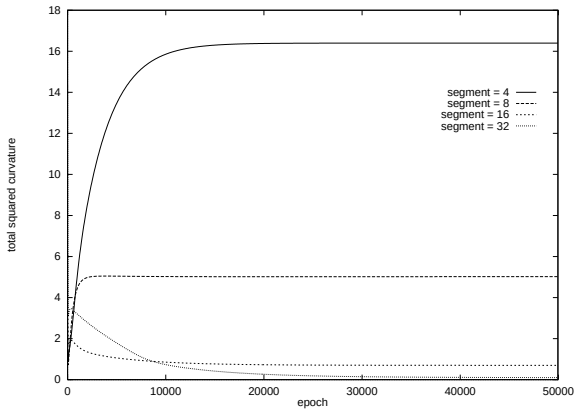
(a) 分割数 = 8



(b) 分割数 = 16



(c) 分割数 = 32



(d) 曲率の 2 乗積分値の推移曲線

図 5.6: 曲率の 2 乗積分値を評価幾何学量とした近似曲面

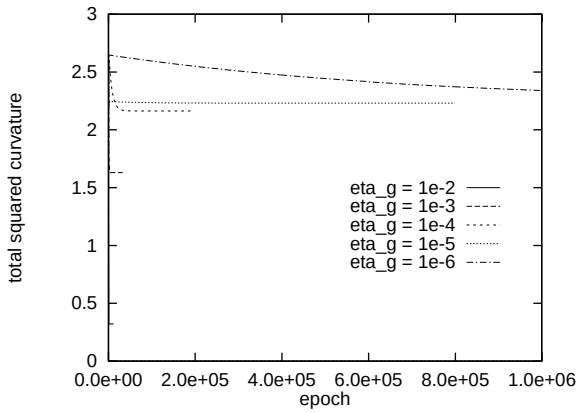


図 5.7: η_g に関する幾何学量の推移

学習係数，収束，データ数，分割数

前節で示したように，本アルゴリズムの学習係数は，データ数に対して十分な分割がおこなわれる場合，分割数，学習データ数，評価幾何学量の定義に依存することなく連続曲面を構築することが確認され，ロバスト性が示された．これは，第 4 章で示したように，パラメータ更新は，(4.11),(4.12) 式で与えられるため，ある局所曲面の含む教師データ数 N に対して誤差修正項に関する学習係数を η_a/N で与えたこと，および各局所定義域と値域の正規化することでアルゴリズムの一般化がおこなわれたためと思われる．

しかしながら，収束性を見た場合，必ずしも有効な学習速度が実現されているとは言えない．連続性および教師データの補間性は学習の早い段階で実現されているが，幾何学量の修正は，非常に滑らかな学習曲線を描いている．これは，連続性および補間性の拘束条件として，η_g の値を $\eta_a, \eta_0, \eta_1, \eta_2$ と比較して相対的に小さな値にしたためであり，幾何学量の修正が非常に大きな拘束条件の下でおこなわれていることを示している．

しかし，与えられた問題によっては，より最適な値が存在すると思われる．例えば，分割数の増大にともない，教師データの影響が全体に及びにくくなる．また，分割数の増大により表現系の容量が大きくなるため各要素間の相互作用の影響が広範囲に及びにくくなり，最適解の獲得は困難となる．このような場合，幾何学量に関する学習係数を増大した場合でも，曲面構築において連続性を保持することが可能であると予想される．

データ数を一定に保った条件下で，幾何学量に関する学習係数を自由パラメータとした近似曲面構築の際の幾何学量の推移曲線を図 5.7 に示す．ここで，$\eta_g = 1 \times 10^{-2}$ の推移曲線は epoch=12000 において 3.22×10^{-1} で収束している．図より，曲率の 2 乗積分値はほぼ等しい値に収束しており，η_g の増減により η_a, η_c との比率が変化しているにも関わらず，

等しい解に収束していることが示された．この結果より，前節で示したように解の探索は学習の初期において実現された $E_a = E_c = 0$ に基づく E_g の最小化問題に帰着し，η_g の増減が収束速度のみに影響を与えていると推測できる．

連続性評価

前章で示した CE の概念は，1 変数関数近似においては適用されない．これは，1 次元曲面の接触面は 0 次元曲面であるため，連続性の強化がおこなわれた場合においても，表現の自由度が保証されるためである．

しかしながら，接触面付近における等価性を強化することで，表現の自由度を保持しながら連続性の強化が可能であると考え，前章の ”面の拡張と複数の離散データの一致 ”で示した方法により曲面近似をおこなった．

(4.47) 式を連続性評価に適用して得られた区分的近似曲面を図 5.8 に示す．ここで，(a) はシンボリック計算に基づく近似曲面，(b) は (4.47) 式を適用した近似曲面，(c),(d) はそれぞれ (a),(b) に関する連続性の推移曲線である．ここで，(c) の連続性の評価値および (d) の 0,1 階微分値は学習の初期に収束している．

収束性において多少の遅延が見られるが，良好な近似を獲得していることが確認された．

平滑化

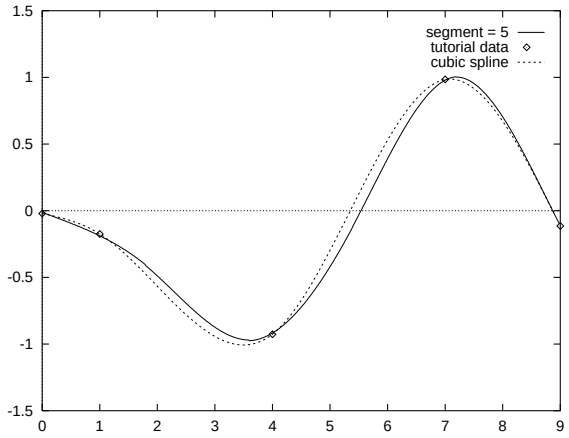
前節まででは，与えられたデータの補間問題を扱ってきた．本節では，本アルゴリズムをノイズを含む曲面の平滑化問題に適用する．平滑化はノイズを含むデータの滑らかな補間曲面構築問題であるが，現在までに人工ノイズを用いた適切化法やネットワークのパラメータ数の削減による解の探索空間の制限による方法などが提案されている [28]．

本アルゴリズムを平滑化問題に適用する場合には，前節までの条件を以下のように変更する必要がある．すなわち，データの補間問題では条件 ($E_a = E_c = 0$) に基づく E_g の最小化問題に帰着したが，平滑化の場合には条件 $E_c = 0$ における次式の最小化問題に帰着する．

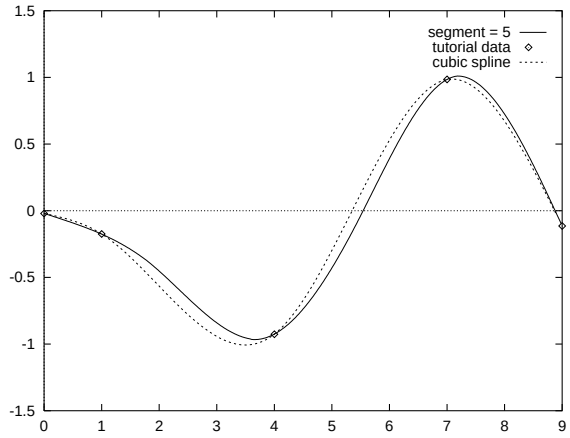
$$E = \alpha E_a + \beta E_g \tag{5.3}$$

係数 α, β はそれぞれ教師データに対する精度強化に関する量および滑らかさの強化に関する量であり，どちらに重点を置くかにより決定される．

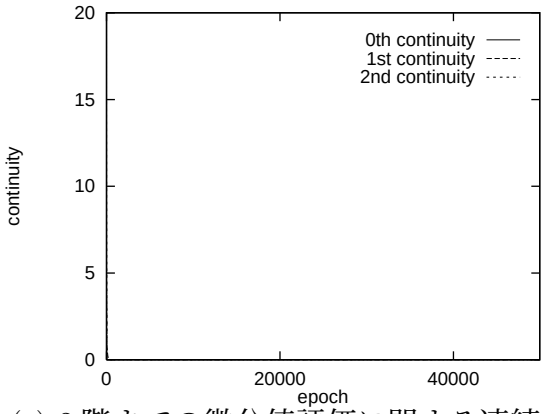
ここでは，以上の条件を踏まえ，ネットワークのパラメータ数を削減することなく平滑化をおこなう．(5.3) 式の係数 α, β はそれぞれ本アルゴリズムにおける η_a, η_g に対応する量



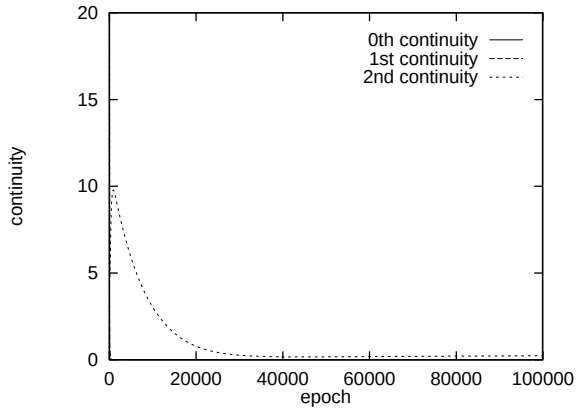
(a) 2 階までの微分値を評価



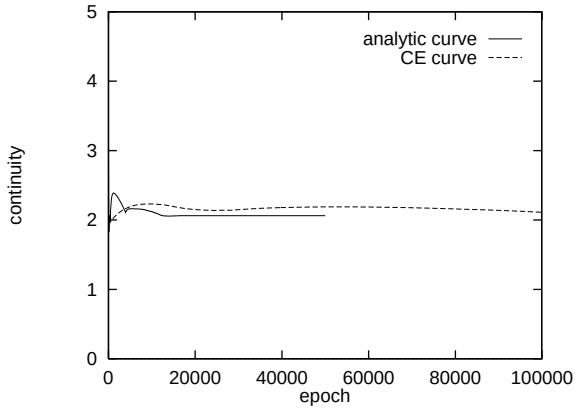
(b) CE を適用



(c) 2 階までの微分値評価に関する連続性の推移曲線（学習初期に収束）



(d) CE に関する連続性の推移曲線



(e) 幾何学量（全曲率）の推移曲線

図 5.8: 一致強化の適用

である．したがって，一般に η_a を削減し，η_g を増大することで平滑化が期待される．

連続曲面から生成されるデータにガウスノイズを付加したデータに基づく近似曲面を図 5.9(a)∼(d)，推移曲線を (e),(f) に示す．ここで，学習係数は表 5.2 に関して，$\eta_a\eta_g = 1.0\times10^{-5}$ を一定として (a)($(\eta_a,\eta_g) = (1.0\times^{-1}, 1.0\times^{-4})$)，(b)($(\eta_a,\eta_g) = (1.0\times^{-2}, 1.0\times^{-3})$)，(c)($(\eta_a,\eta_g) = (1.0\times^{-3}, 1.0\times^{-2})$)，(d)($(\eta_a,\eta_g) = (1.0\times^{-4}, 1.0\times^{-1})$) の 4 条件で近似をおこなった．なお，曲面構築は $\eta_a \geq 1.0$ 付近，$\eta_g \geq 1.0\times10^{-1}$ 付近で連続性が破綻した．$\eta_a = 1.0\times10^{-2}, \eta_g = 1.0\times10^{-2}$ とした．また，分割数はデータ数と同等 (20 個）とした．(e),(f) における condition 1∼4 はそれぞれ条件 (a)∼(d) である．図より，適当な学習係数の設定（ここでは $\eta_a = 1.0\times10^{-3}, \eta_g = 1.0\times10^{-2}$ 付近）によりパラメータ数を削減することなく平滑化が可能であることを確認した．この平滑化処理は条件 $E_c = 0$ のもとでの解の探索であり，この場合は，$\eta_g : \eta_g \simeq 10 : 1$ を満たす係数を設定すると，η_0, η_1, η_2 との比に関わらず，一定解に収束すると思われる．したがって，破綻の起こらない範囲内で最適な比率を実現する係数の中で最も大きな組め合わせを与えることで収束の高速化が期待される．

不連続部分を含む関数近似

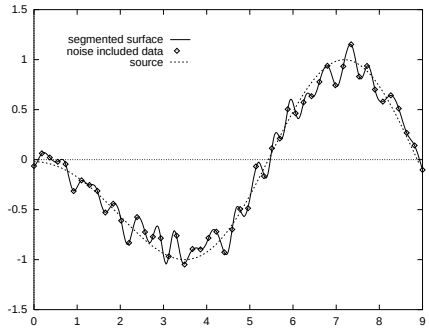
本アルゴリズムでは，連続関数すなわち定義域上の至るところで微分可能である関数系の近似問題を扱ってきた．前節で示したように，本アルゴリズムを不連続部分を含む関数系から生成されたデータに基づく曲面再構築問題に適用すると，不連続部分に対応する部分付近において特有の振る舞いを生じる．

次式で与えられる不連続関数より得られたデータに基づき，区分的曲面構築アルゴリズムにより関数近似をおこなった結果を図 5.10 に示す．なお学習条件は表 5.2 と同様であり，分割数はデータ数と同数とした．

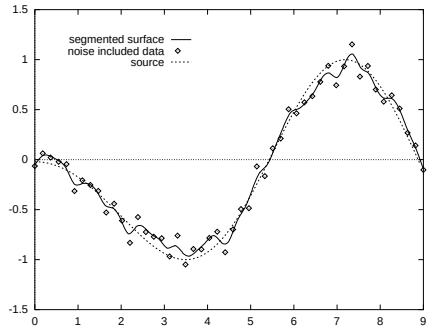
$$y = \begin{cases} 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 1, x > 2 \end{cases} \tag{5.4}$$

(a) は長さを評価関数とした近似曲面，(b) は全曲率を評価関数とした近似曲面，(c) は曲率の 2 乗積分を評価関数とした近似曲面を示している．

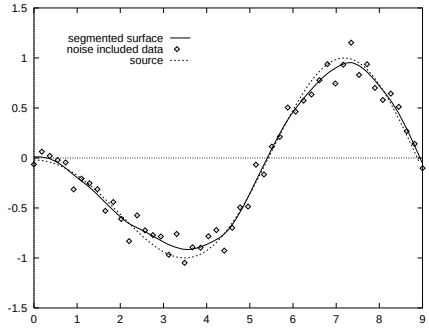
曲率の 2 乗積分を評価した近似曲面では Gibbs 振動と呼ばれる振動が発生していることが確認された．この問題は長さや全曲率を評価することで緩和されることが確認できた．



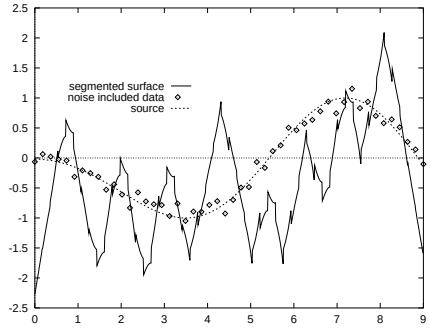
(a) $\eta_a = 1.0 \times 10^{-1}, \eta_g = 1.0 \times 10^{-4}$



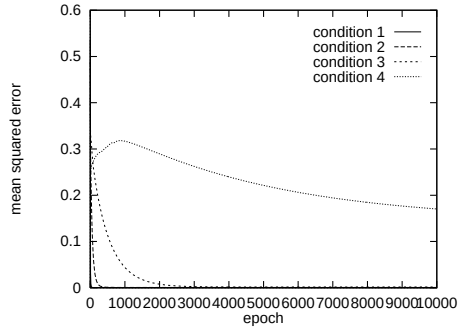
(b) $\eta_a = 1.0 \times 10^{-2}, \eta_g = 1.0 \times 10^{-3}$



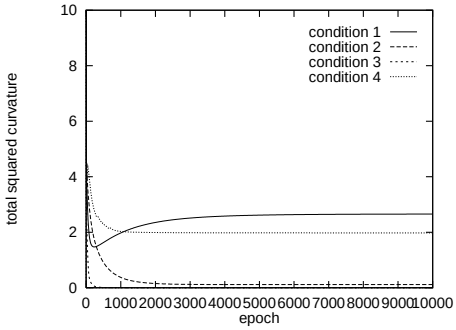
(c) $\eta_a = 1.0 \times 10^{-3}, \eta_g = 1.0 \times 10^{-2}$



(d) $\eta_a = 1.0 \times 10^{-4}, \eta_g = 1.0 \times 10^{-1}$

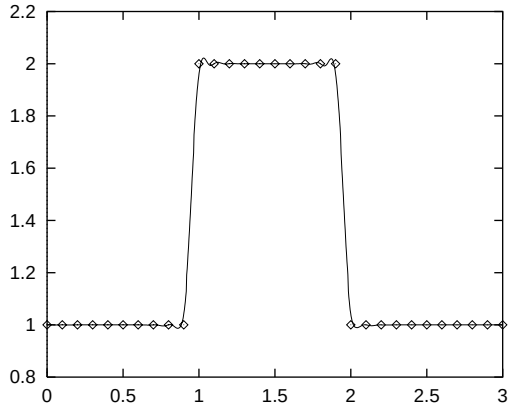


(e) 平均 2 乗誤差の推移

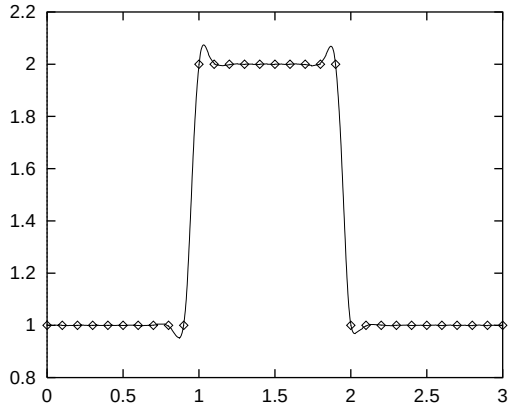


(f) 曲率の 2 乗積分値の推移

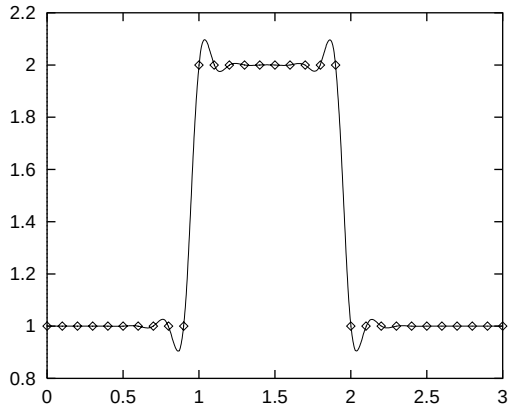
図 5.9: ノイズを含むデータの平滑化



(a) 長さを評価



(b) 全曲率を評価



(c) 曲率の 2 乗積分値を評価

図 5.10: 各種幾何学量を評価した近似曲面と Gibbs 振動

表 5.3: 学習条件（図 5.11 について）

学習の収束基準

学習回数	幾何学量の変化
1.00×10^5	1.00×10^{-5}

分割数

10×10

学習係数

η_a	η_0	η_1	η_2	η_g	初期係数値の定義領域
1.00×10^{-1}	1.00×10^{-1}	1.00×10^{-3}	1.00×10^{-3}	1.00×10^{-4}	$[-0.5, 0.5]$

η_a：学習係数（誤差エネルギ項），η_0：学習係数（学習点における関数の連続性），η_1：学習係数（学習点における関数の 1 階微分値の連続性），η_2：学習係数（学習点における関数の 2 階微分値の連続性），η_g：学習係数（各領域における曲面積）

5.1.2　2 変数関数近似

前節では，いくつかのパラメータを変えて 1 変数関数近似をおこなうことで区分的曲面構築アルゴリズムの基礎的特性を確認した．本節では，2 変数関数（曲面）近似をおこなうことで，多次元化への考察をおこなう．

また，ここでは幾何学量として曲面積 E_A（(4.31) 式）を評価した．

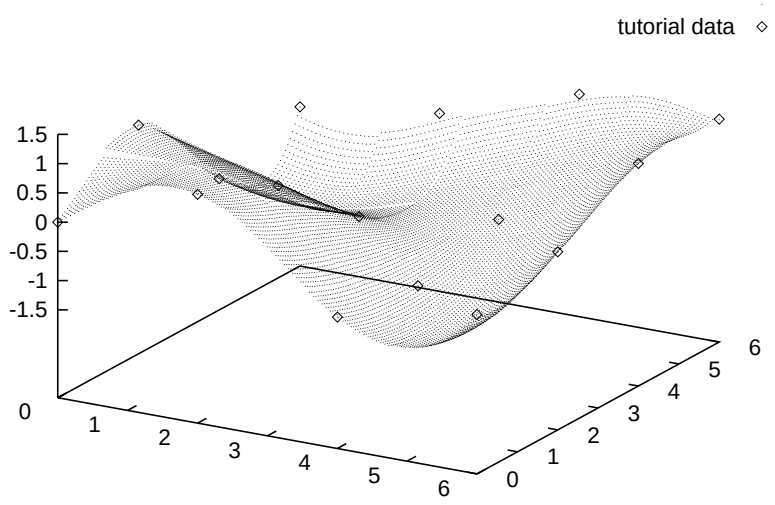
近傍系

前章で示したように，正方形を要素とする 2 次元空間の分割をおこなった場合，各要素における近傍系は，図 2.1 における (b) である．しかしながら，前章における連続性に関する考察から，各要素に対して 0 次元の面で接する隣接領域の影響は 1 次元以上の面を共有する領域と比較して非常に小さな量となっている．したがって，ここでは図 2.1 における (a) の近傍系を採用し，(b) の場合との比較をおこなう．

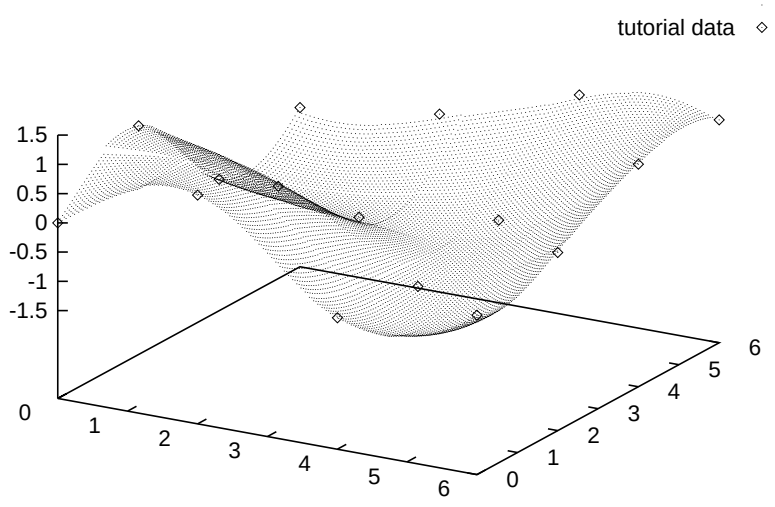
ここでは，次式で示す 2 次元入力関数の定義域 $\{(x, y)|0 \leq x, y \leq 6\}$ の各軸を 3 等分して得られる 16 点の格子点および各点における z の組を教師データとしてあたえ，曲面構築をおこなった．

$$z = \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad 0 \leq x, y \leq 6 \tag{5.5}$$

図 2.1(a) の近傍系 $C = 2$ を適用した結果を図 5.11(a)，図 2.1(b) の近傍系 $C = 1$ を適用した結果を図 5.11(b) に，(a),(b) 構築の際の連続性に関する量の推移曲線をそれぞれ (c),(d) に示す．またそれぞれの学習条件を共に表 5.3 に示す．

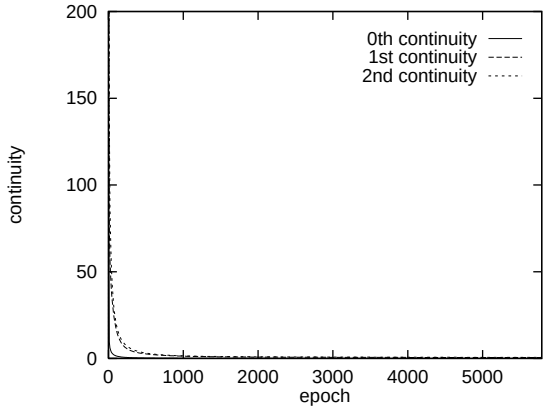


(a) 近傍系 $C = 2$
教師データに関する平均二乗誤差 $= 2.94 \times 10^{-5}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 8.09 \times 10^{-3}$

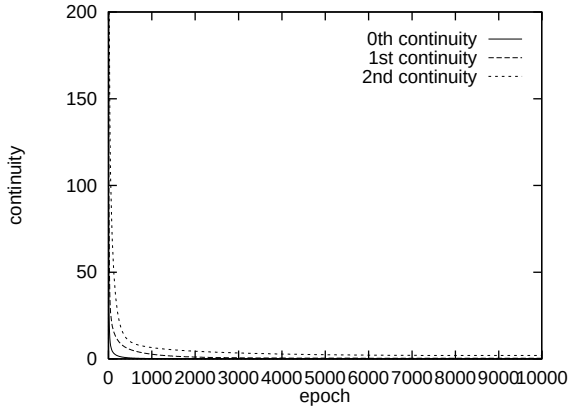


(b) 近傍系 $C = 1$
教師データに関する平均二乗誤差 $= 4.27 \times 10^{-6}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 1.97 \times 10^{-3}$

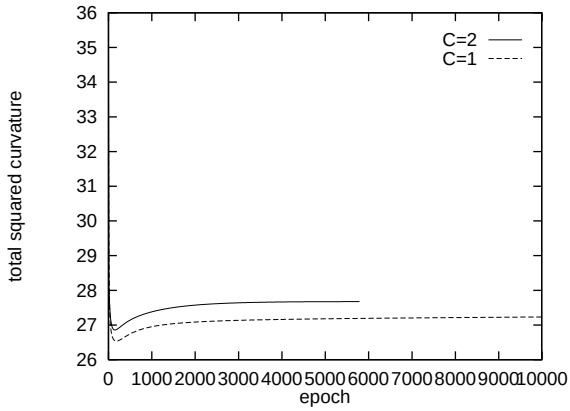
図 5.11: 近傍系と近似曲面



(c) 近傍系 $C = 2$ に関する連続性の推移曲線



(d) 近傍系 $C = 1$ に関する連続性の推移曲線



(e) 幾何学量（曲面積）の推移曲線

図 5.11: 近傍系と推移曲線

表 5.4: 学習条件（図 5.12 について）

学習の収束基準		刻み幅	分割数
学習回数	幾何学量の変化		
1.00×10^5	1.00×10^{-5}	5×10^{-1}	10×10

学習係数

η_a	η_0	η_1	η_2	η_g	初期係数値の定義領域
1.00×10^{-1}	1.00×10^{-2}	1.00×10^{-4}	1.00×10^{-4}	1.00×10^{-4}	$[-0.5, 0.5]$

η_a：学習係数（誤差エネルギ項），η_0：学習係数（図 4.9 の定義域の接触辺上の連続性），η_1：学習係数（図 4.9 の接触辺から h の連続性），η_2：学習係数（図 4.9 の接触辺から $2h$ の連続性），η_g：学習係数（各領域における曲面積）

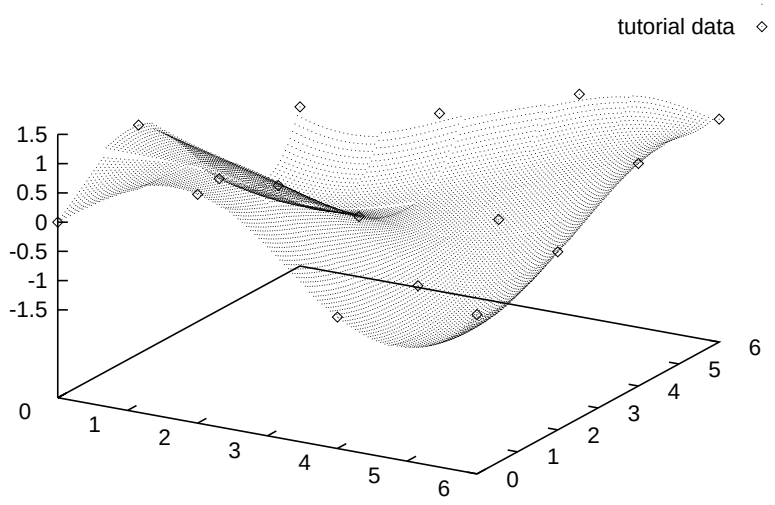
図 5.12 より，(a) では近傍系に制限を与えたにも関わらず連続性を保証していることが確認できる．また，テストデータに関する平均二乗誤差の比較により，$C = 1$ を適用した場合でも $C = 2$ と同等の近似精度を得ることが示された．

連続性

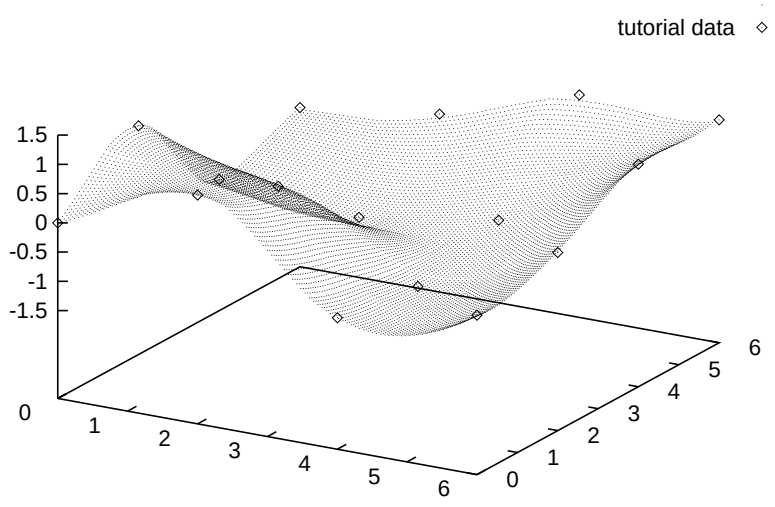
図 4.9 で示される一致強化点に関する CE を適用した結果を図 5.12，学習条件を表 5.4 に示す． ここで，(a) はシンボリック計算に基づく通常の方法，(b) は CE を用いた結果を示している．また，(c),(d) はそれぞれ (a),(b) 生成に関する連続性の推移曲線を示している． 図より CE を用いた場合，収束性に遅延が見られるが，CE を適用した場合でも連続曲面を実現していることが確認された．また，テストデータに関する平均二乗誤差の比較により，CE を適用した場合でも解析的連続性強化と同等の近似精度を得ることが示された．前節で示したように，CE の適用によりアルゴリズムの簡素化が可能であるため，本アルゴリズムの拡張性が期待出来る．

次に，CE において一致度を比較するデータ発生の刻み幅の差異による近似曲面の違いを確認する．前章で示したように，連続性の強化は曲面の類似度の強化と等価である．したがって，刻み幅が小さい場合，良好な類似度強化をおこなうことができない．ここでは，刻み幅を局所定義域 $[0, 1]^2$ に関して，(a);$h = 0.2$ とした場合と，(b);$h = 0.5$ とした場合について比較をおこなった結果を図 5.13 に示す．学習条件は表 5.4 と同様である． 図より $h = 0.5$（隣接領域の全体との類似性を評価）を用いることにより．良好な連続性を実現することが確認された．

さらに，CE に関して近傍系による近似曲面および収束性の相違を確認した結果を図 5.14

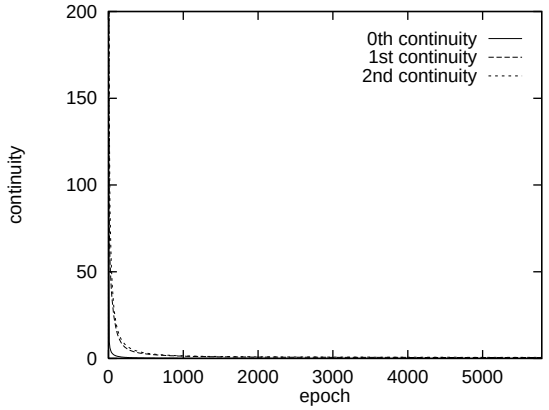


(a) 2 階までの微分値を評価
教師データに関する平均二乗誤差 $= 2.94 \times 10^{-5}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 8.09 \times 10^{-3}$

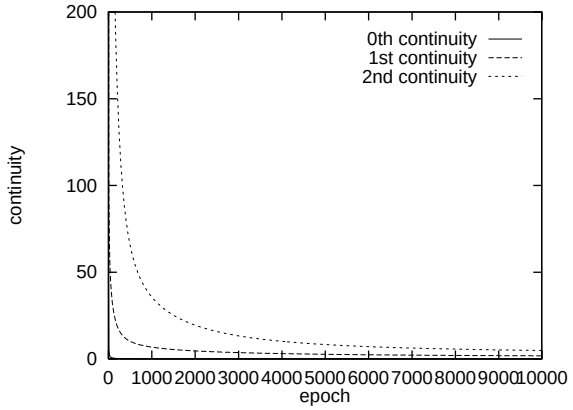


(b) CE を適用
教師データに関する平均二乗誤差 $= 2.55 \times 10^{-6}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 7.22 \times 10^{-3}$

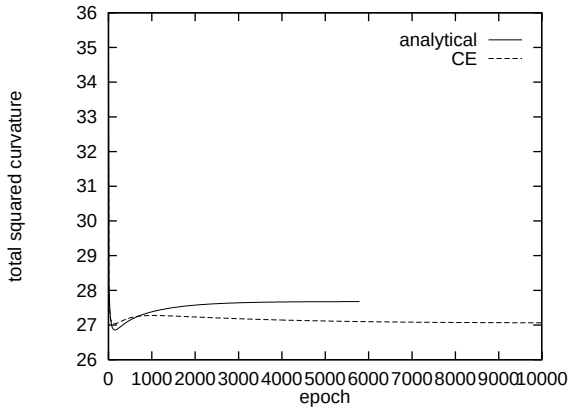
図 5.12: 一致強化の適用と近似曲面



(c) 2 階までの微分値評価に関する連続性の推移曲線

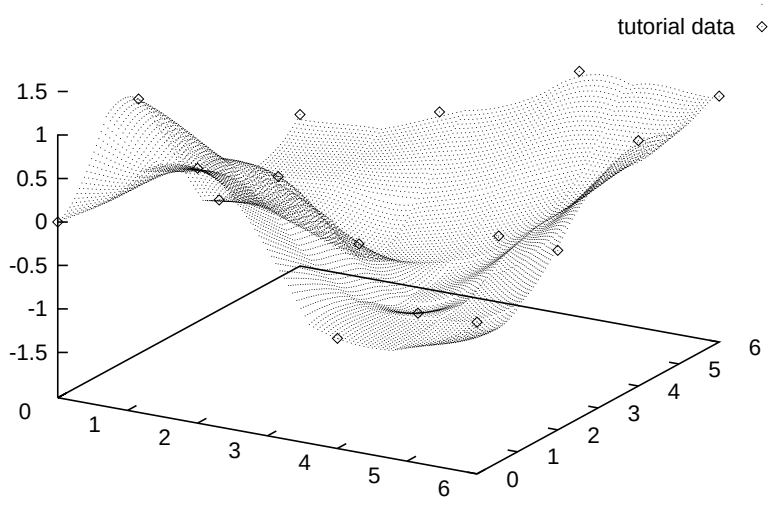


(d) CE に関する連続性の推移曲線

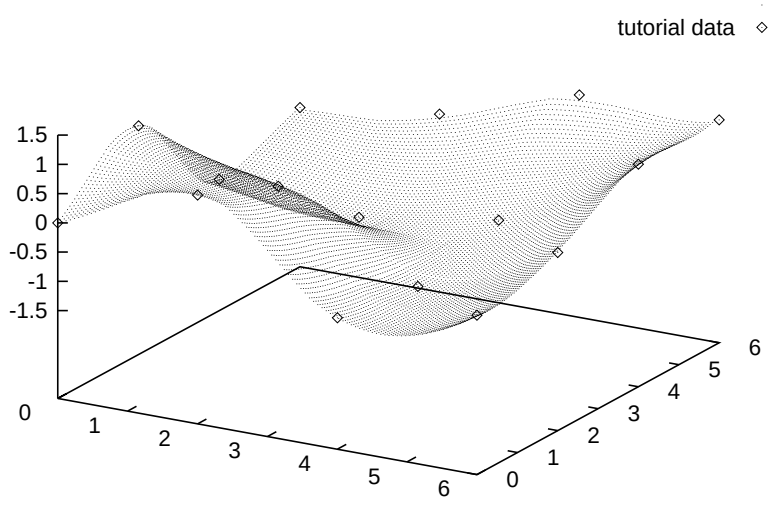


(e) 幾何学量（曲面積）の推移曲線

図 5.12: 一致強化の適用と推移曲線

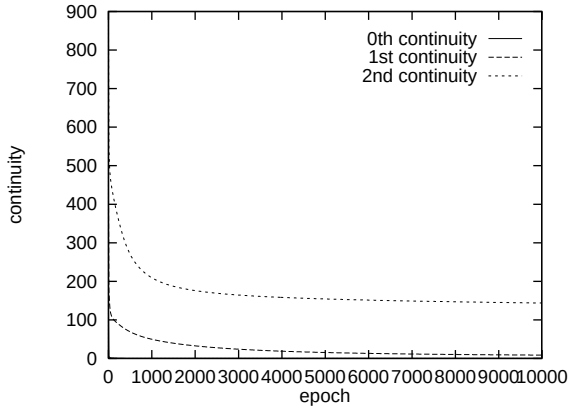


(a) Step-size $= 1.0 \times 10^{-1}$
教師データに関する平均二乗誤差 $= 1.21 \times 10^{-6}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 1.24 \times 10^{-2}$

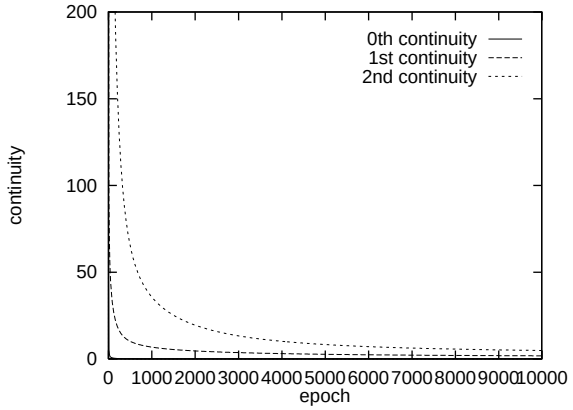


(b) Step-size $= 5.0 \times 10^{-1}$
教師データに関する平均二乗誤差 $= 2.55 \times 10^{-6}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 7.22 \times 10^{-3}$

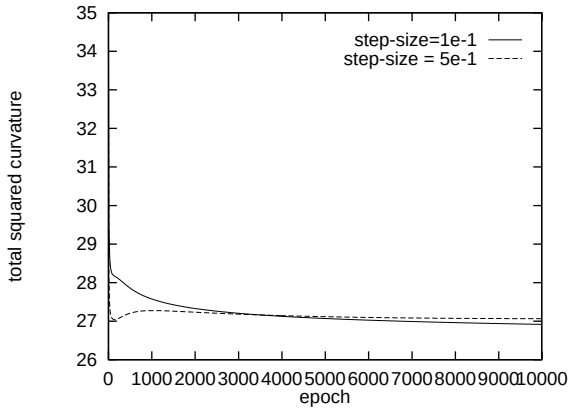
図 5.13: 刻み幅の相違による近似曲面の違い



(c) Step-size $= 1.0 \times 10^{-1}$ の連続性推移曲線



(d) Step-size $= 5.0 \times 10^{-1}$ の連続性推移曲線



(e) 幾何学量（曲面積）の推移曲線

図 5.13: 刻み幅と推移曲線

に示す．なお，学習条件は表 5.4 と同様である． 図より，CE および近傍系 $C = 1$ を併用した場合に収束性の遅延があるが，滑らかな曲面を実現することが確認された．

多種曲面の近似

前節まででは，(5.5) 式で示される比較的簡潔な形状の曲面の近似をおこなってきた．本節では，多種の曲面近似問題へ本アルゴリズムを適用することでアルゴリズムのロバスト性を評価する．

次式で示される曲面の近似を 2 階までの微分値の連続性評価および CE を適用しておこなった．なお，共に近傍系 $C = 2$ を採用した．

$$z = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \qquad -5 \leq x, y \leq 5 \tag{5.6}$$

ソース曲面を図 5.15(a)，近似曲面をそれぞれ (b),(c) に示す．また，推移曲線を図 5.16 に示す．学習条件はそれぞれ表 5.3,5.4 で与えられる．

次に，次式で示される曲面の近似を CE を適用しておこなった．ここでは，近傍系 $C = 2$ を採用した．

$$z = \sin x \cos y \qquad 0 \leq x, y \leq 3\pi \tag{5.7}$$

ソース曲面を図 5.17(a)，近似曲面を (b) に示す．学習条件は表 5.4 で与えられる．

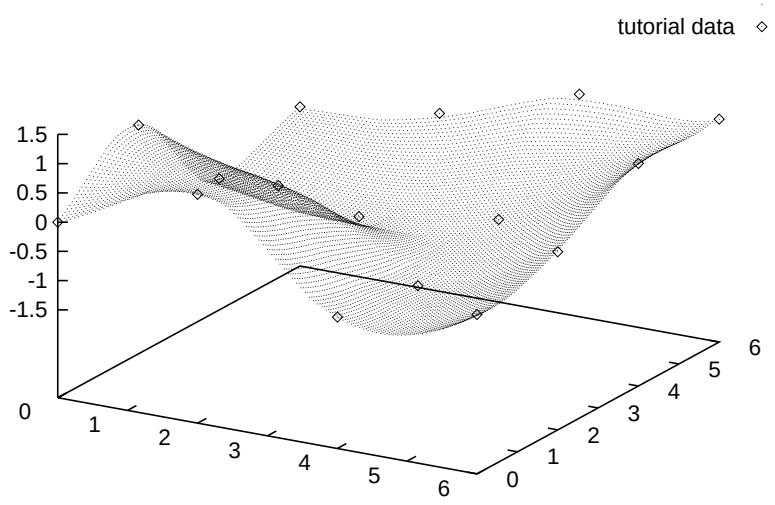
不連続部分を含む関数近似

次式で与えられる不連続関数より得られたデータに基づき，区分的曲面構築アルゴリズムにより関数近似をおこなった結果を図 5.18 に示す．学習条件は表 5.3 と同様である．

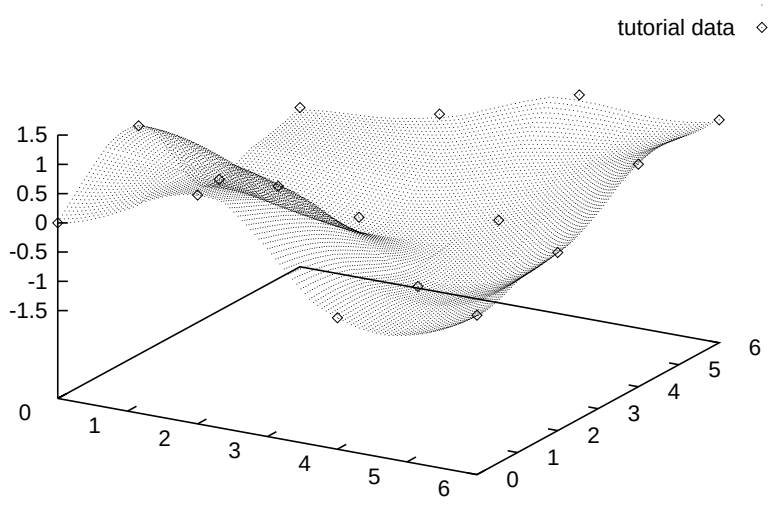
$$z = \begin{cases} 1 & -2.5 \leq x, y \leq 2.5 \\ 0 & \text{otherwise} \quad -5 \leq x, y \leq 5 \end{cases} \tag{5.8}$$

図より，本来不連続である場所の周辺で振動が生じていることが確認される．

以上に示した多種の曲面近似は，一定の学習条件のもとでおこなわれ，アルゴリズムのロバスト性を確認することが出来る．

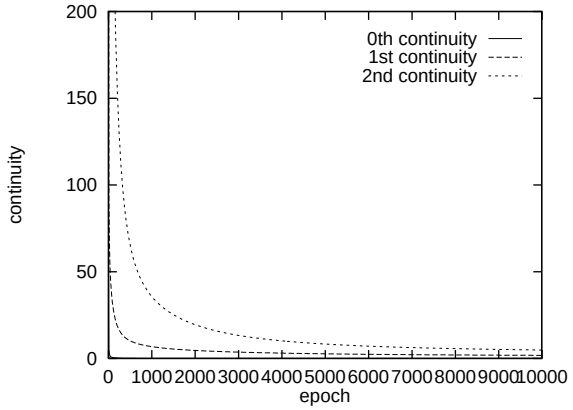


(a) 近傍系 $C = 2$
教師データに関する平均二乗誤差 $= 2.55 \times 10^{-6}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 7.22 \times 10^{-3}$

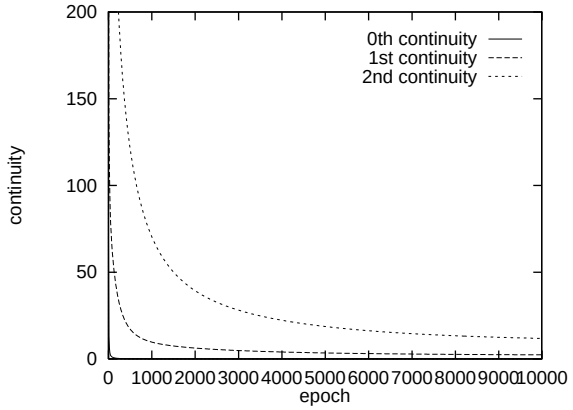


(b) 近傍系 $C = 1$
教師データに関する平均二乗誤差 $= 1.80 \times 10^{-6}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 9.01 \times 10^{-3}$

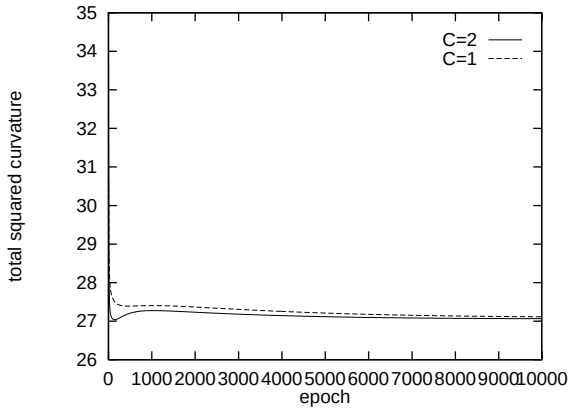
図 5.14: CE における近傍系と曲面



(c) 近傍系 $C = 2$ に関する連続性の推移曲線

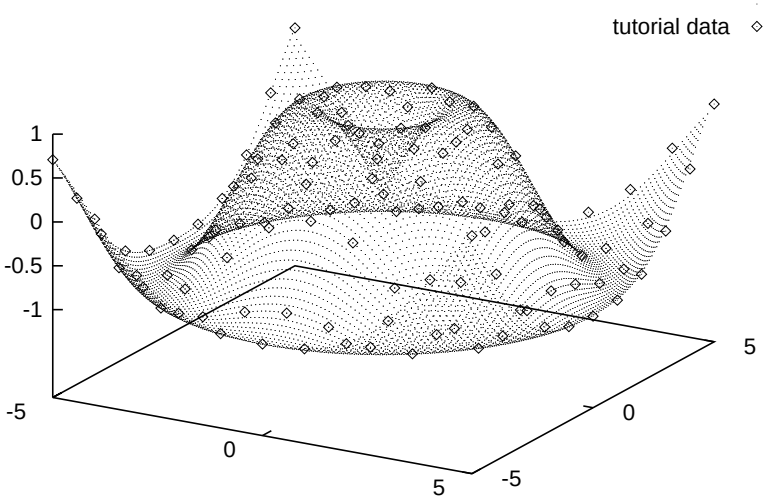


(d) 近傍系 $C = 1$ に関する連続性の推移曲線

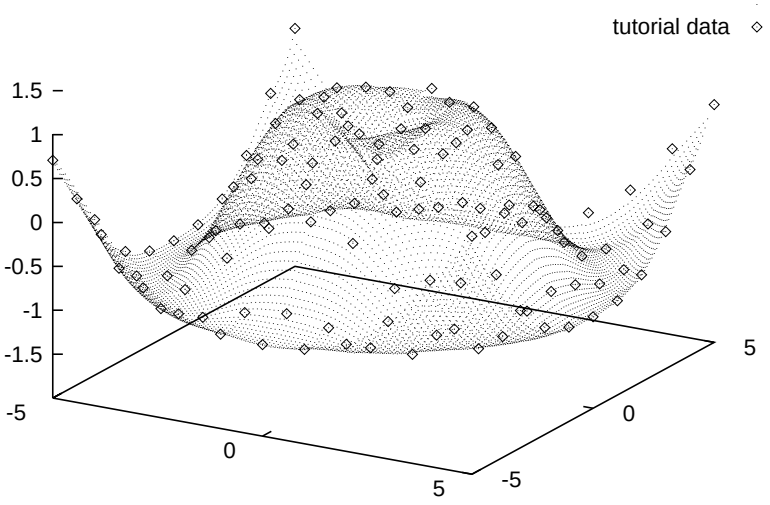


(e) 幾何学量（曲面積）の推移曲線

図 5.14: CE における近傍系と推移曲線

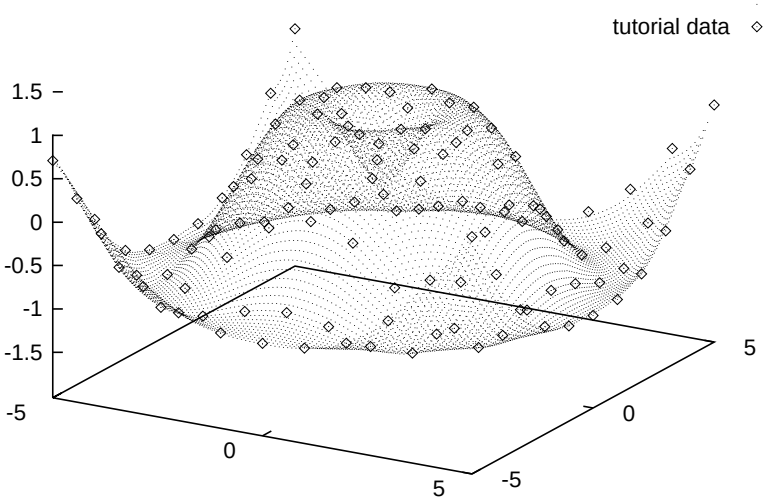


(a) ソース曲面と教師データ



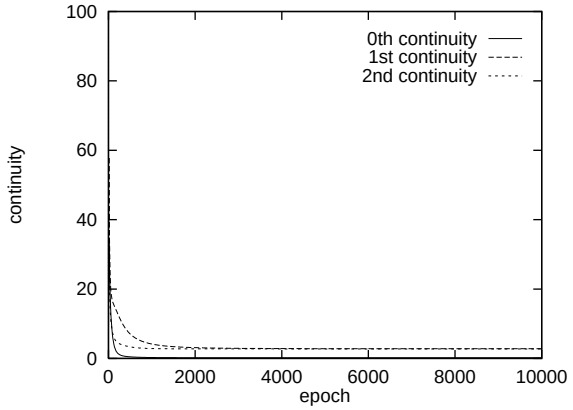
(b) 2 階までの連続性評価に基づく近似曲面
教師データに関する平均二乗誤差 $= 3.10 \times 10^{-5}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 5.20 \times 10^{-3}$

図 5.15: 近似曲面

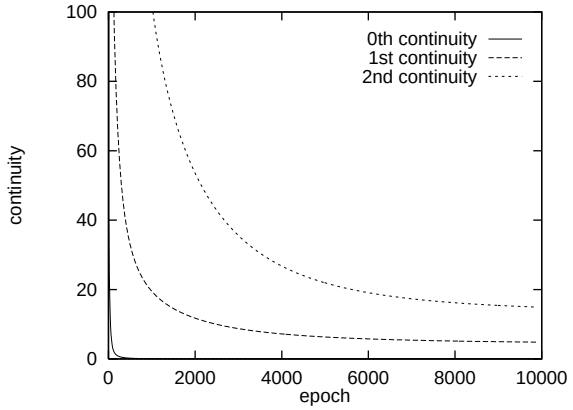


(c) CE による近似曲面
教師データに関する平均二乗誤差 $= 2.06 \times 10^{-6}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 5.15 \times 10^{-3}$

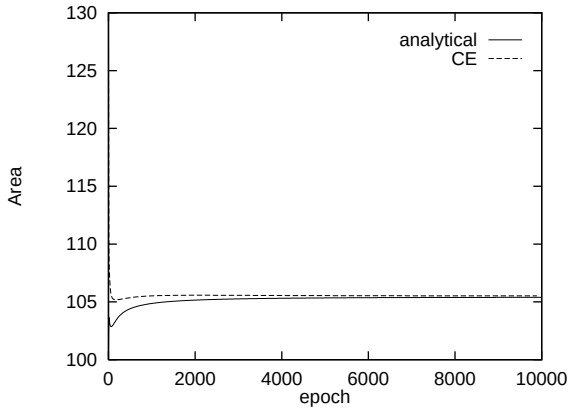
図 5.15: 近似曲面



(a) 連続性の推移曲線 (2 階までの微分値評価)

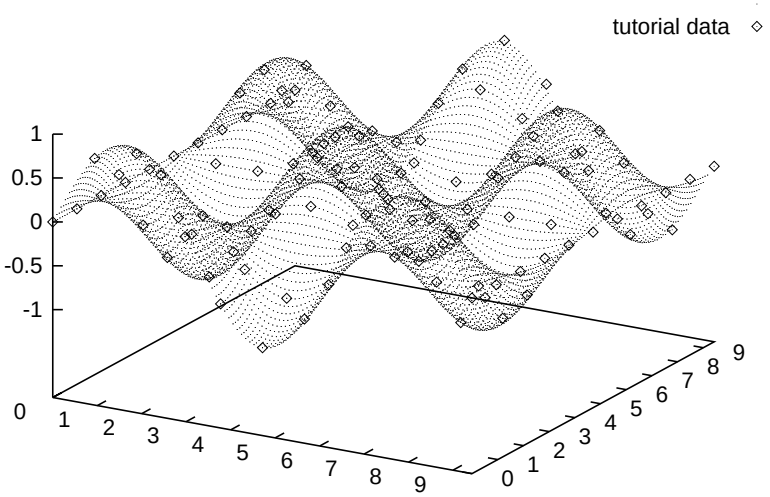


(b) 連続性の推移曲線 (CE)

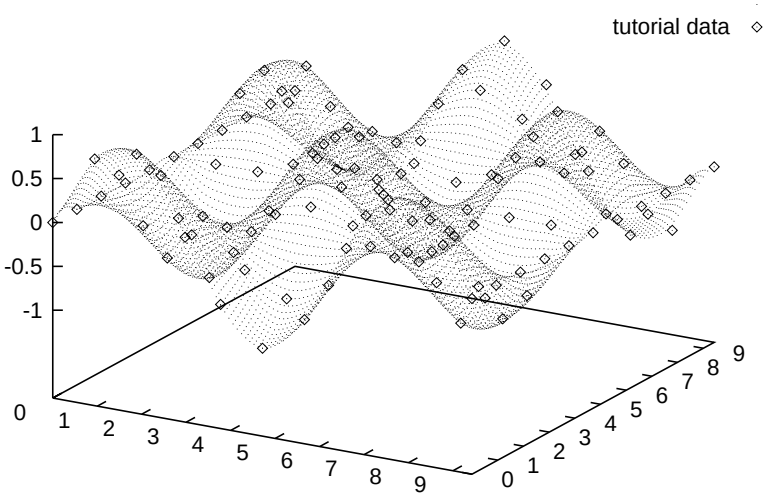


(c) 曲面積の推移曲線

図 5.16: 推移曲線

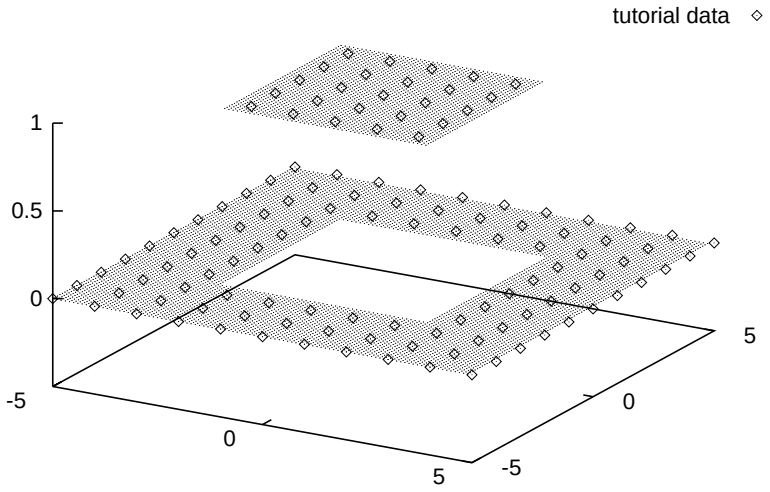


(a) ソース曲面と教師データ

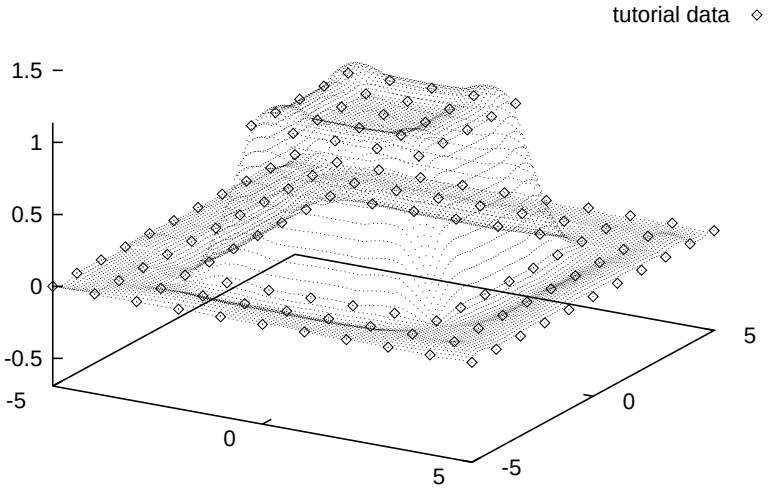


(b) 近似曲面
教師データに関する平均二乗誤差 $= 2.78 \times 10^{-7}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 1.38 \times 10^{-4}$

図 5.17: 近似曲面



(a) ソース曲面



(b) 曲面積を評価した近似曲面
教師データに関する平均二乗誤差 $= 1.59 \times 10^{-5}$
テストデータに関する平均二乗誤差 $= 4.80 \times 10^{-2}$

図 5.18: ソース曲面および近似曲面

5.1.3　3 変数関数近似

第 4 章で示したように，現実の相互作用系で扱う対象は 3 次元までの配置であるが，多変数関数近似を扱う場合，多次元曲面の構築のために多次元空間の分割が要求される．本節では，前節で扱った 2 次元曲面近似の概念を適用することで 3 次元曲面近似をおこない，多次元空間への拡張性を示す．

現実の曲面近似では，2 次元曲面モデルの構築がが主要な課題であるが，多変数（n 次元）関数近似問題のように $\Re^{n+1}$ 中の n 次元曲面構築問題や，次章に示すように 2 次元空間中の 2 次元ベクトル場等のように $\Re^m$ 中の n 次元曲面 $(m > n)$ を構築する場合には，高次元空間中の超立方体の相互作用を扱う必要がある．

3 次元空間を立方格子により分割した場合，ある局所定義域と接する隣接領域は 26 個与えられる．それらのうち，0 次元面（頂点）を共有する領域は 8 個，1 次元面（辺）を共有する領域は 12 個，2 次元面（切子面）を共有する領域は 6 個である．近似曲面が C^2 級曲面であるという要請より，それらすべてとの連続性が保証される必要があるが，前章で示したように切子面を共有する領域との連続性を保証することにより，全ての領域との連続性を強化可能である．

3 変数 3 次多項式を構成する自由パラメータ数は，${}_4H_3 = 20$ であることより，切子面を共有する領域間において 20 以上の点に関して CE をおこなうことで連続性強化が可能である．与えられたデータに基づく超直方体領域（(3.16) 式）を定義域とし，$[x^{min}, x^{max}] \times [y^{min}, y^{max}] \times [z^{min}, z^{max}]$ で与える．さらに，領域の分割を $L \times M \times N$ とし，各局所定義域を図 5.19 で示すように配置すると，局所定義域 $U'_{i,j,k}$，$(i = 1, \cdots, L,\ j = 1, \cdots, M,\ k = 1, \cdots, N)$ と切子面を共有する隣接領域はそれぞれ，$U'_{i\pm1,j,k}, U'_{i,j\pm1,k}, U'_{i,j,k\pm1}$ である．ここで，境界面を有する領域（$i \neq 1, \cdots, L,\ j \neq 1, \cdots, M,\ k \neq 1, \cdots, N$ となる領域）については，隣接する領域のみを考慮する．

隣接領域との連続性強化は，前節において 2 次元曲面構築の際に用いた CE を適用する．

領域 $U'_{i,j,k}$ の切子面を含む平面により定義域を切断する．切子面を含む平面は (4.19) 式より次式で与えられる．

$$x = x^{min} + \frac{(i-1)(x^{max} - x^{min})}{L} \tag{5.9}$$

$$x = x^{min} + \frac{i(x^{max} - x^{min})}{L} \tag{5.10}$$

$$y = y^{min} + \frac{(j-1)(y^{max} - y^{min})}{M} \tag{5.11}$$

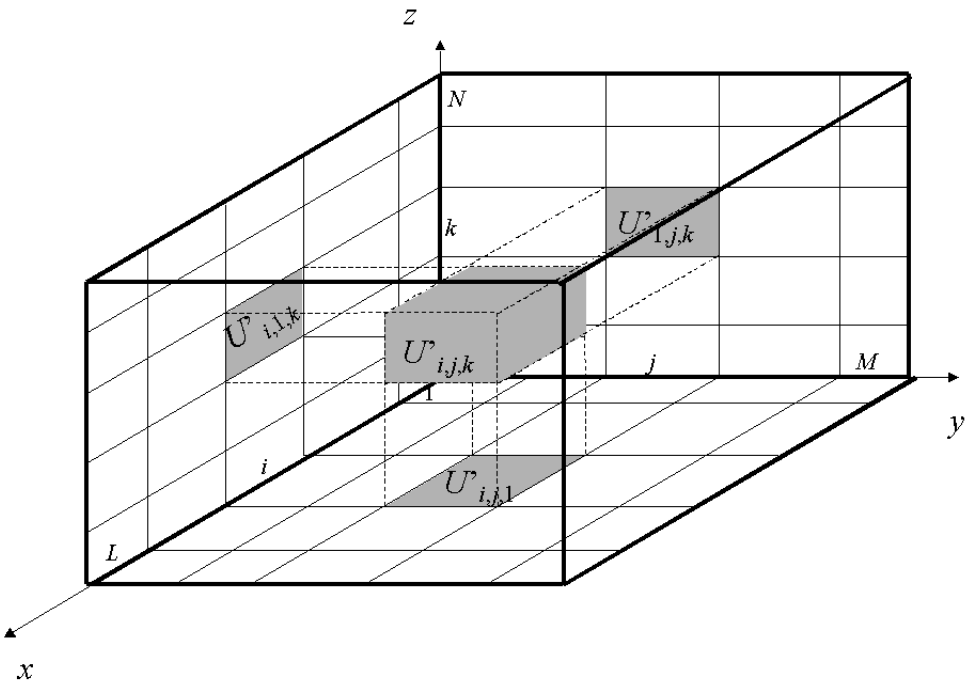


図 5.19: 定義域の分割

$$y = y^{min} + \frac{j(y^{max} - y^{min})}{M} \tag{5.12}$$

$$z = z^{min} + \frac{(k-1)(z^{max} - z^{min})}{N} \tag{5.13}$$

$$z = z^{min} + \frac{k(z^{max} - z^{min})}{N} \tag{5.14}$$

ここでは，(5.9) 式で示される平面による切断面について考察する．切断面（(5.9) 式）における $U'_{i,j,k}$ 近傍を図 5.20 に示す．図 5.20 で示される近傍領域の中で，局所定義域 $U'_{i,j,k}$ と切子面を共有する領域は，$U'_{i,j\pm1,k}, U'_{i,j,k\pm1}$ である．したがって，切断面で与えられる近傍系において連続性を考慮する領域は第 3 章で示した近傍系 $C = 1$ である．領域間の連続性の評価関数 $E_c^{(i,j,k),(i,j+1,k)}$ は，局所定義域 $U'_{i,j,k}$ と $U'_{i,j+1,k}$ 間の場合，次式で与えられる．

$$E_c^{(i,j,k),(i,j+1,k)} = \sum_n^2 \int_0^1 \int_0^1 \left[\phi_{i,j,k}^{(n)}(x,y,1) - \phi_{i,j+1,k}^{(n)}(x,y,0)\right]^2 dxdy \tag{5.15}$$

ここで，$\phi_{i,j,k}, \phi_{i,j+1,k}$ はそれぞれ局所定義域 $U'_{i,j,k}$ および $U'_{i,j+1,k}$ 上で定義された 3 変数 3 次多項式である．(5.15) 式は多項式に関する定積分であり，シンボリック計算が可能である

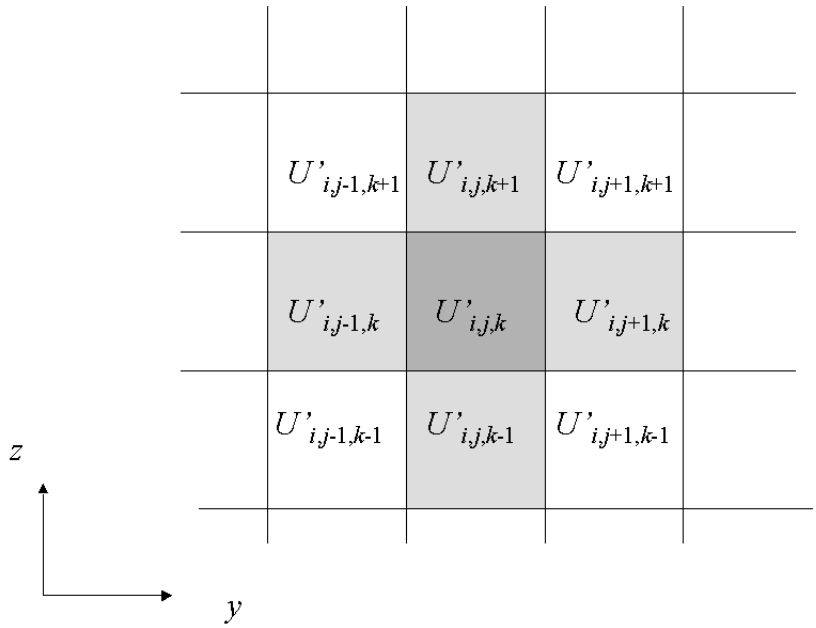


図 5.20: 切断面（$U'_{i,j,k}$ 近傍）

ため，勾配 $\partial E_c^{(i,j,k),(i,j+1,k)}/\partial c$ は簡潔な形式で表現可能であるが，同様の操作を多次元空間へ拡張する際には，シンボリック計算は必ずしも適当であるとは限らないことから CE の概念を適用する．2 次元曲面構築において確認されたように，CE を近傍系 $C = 1$（図 2.1）に適用した場合，解析的連続性強化を近傍系 $C = 2$ に適用した場合と同様の近似曲面を構築することが可能である（図 5.14）．図 5.20 で示される切断面上において，局所定義域 $U'_{i,j,k}$ に対して，グレーで示される $C = 1$ 近傍領域間の連続性を CE の概念に基づき強化する．(5.9)∼(5.14) 式で示される $U'_{i,j,k}$ の全ての切子面を含む切断面上において同様の CE を適用すると，図 5.21 で示されるように，$C = 1$ の近傍間において 40 点における一致強化が与えられ，20 個のパラメータにより表現される局所曲面間の一致度は強化される．

3 次元曲面構築アルゴリズムを以下に示す．

3 次元曲面構築アルゴリズム

1. **<u>定義域の定義と分割</u>**
   与えられたデータに基づく超直方体領域（(3.16) 式）を定義域とする．
2. **<u>局所関数の初期化 $t = 0$</u>**
   初期曲面として $[0, 1]$ を定義域とする実数係数の 3 次多項式の中でその値域が $[0, 1]$ から大きく外れないように制限を与えたランダムな係数に基づく 3 次多項式により得ら

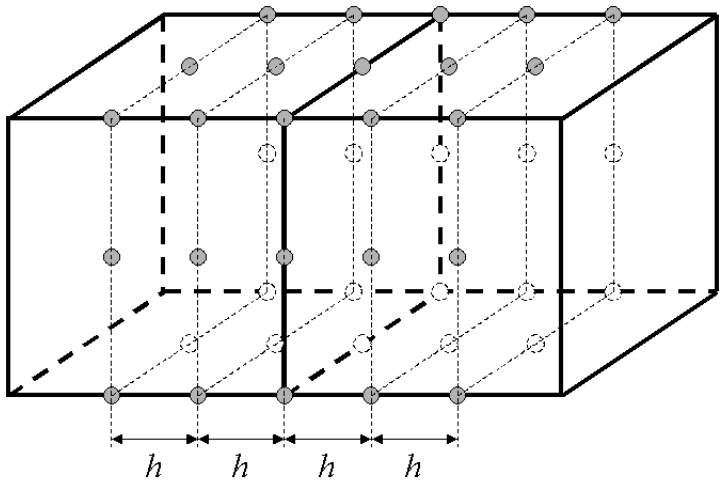


図 5.21: 切断面上における CE

れる曲面を初期曲面とする．初期化により定義された各局所係数を $\boldsymbol{c}_i(0)$，それに対応する局所関数を $\phi_i(0)$，曲面表現への同相写像を $\varphi_i(0)$ とする．

3. **停止判定**

   評価関数が与えた基準値より小さくなった場合，あるいは評価関数の変化量が与えた基準値より小さくなったときに，学習を終了する．この条件が満たされない場合，下記 4 に進む．

4. **各係数の更新**

   教師データの補間性

   (4.2) 式で定義される評価関数に関して (4.13) 式より係数修正のための勾配値 $\partial E_a^i(\boldsymbol{c}_i)/\partial c_j^i$ を求める．

   幾何学量

   (4.67) 式で定義される超曲面積に関して (4.15) 式より係数修正のための勾配値 $\partial E_g^i(\boldsymbol{c}_i)/\partial c_j^i$ を求める．

   連続性

   (5.9)∼(5.14) 式で示される定義域 X の全ての切断面上において 2 次元曲面構築の際に適用した連続性強化をおこなう．

次式で与えられる 3 変数関数より得られたデータ（125 点) に基づき，区分的曲面構築アルゴリズムにより関数近似をおこなった結果を図 5.22，学習条件を表 5.5 に示す．

表 5.5: 学習条件（図 5.22 について）

学習の収束基準

学習回数	幾何学量の変化
1.00×10^4	1.00×10^{-5}

学習係数

η_a	η_0	η_1	η_2	η_g	初期係数値の定義領域
1.00×10^{-3}	1.00×10^{-3}	1.00×10^{-5}	1.00×10^{-5}	1.00×10^{-6}	$[-0.5, 0.5]$

η_a：学習係数（誤差エネルギ項），η_0：学習係数（学習点における関数の連続性），η_1：学習係数（学習点における関数の 1 階微分値の連続性），η_2：学習係数（学習点における関数の 2 階微分値の連続性），η_g：学習係数（各領域における関数の生成する曲面の長さ）

$$f(x, y, z) = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \qquad 0 \leq x, y, z \leq 6 \tag{5.16}$$

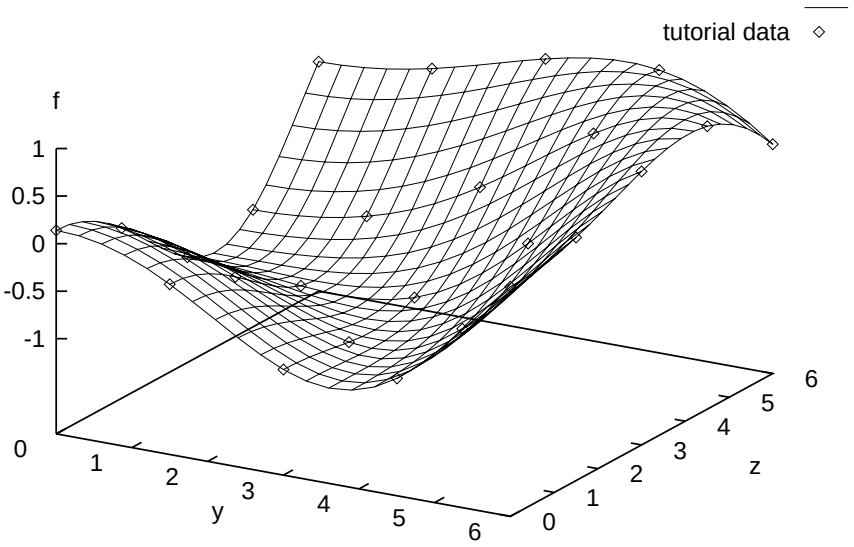
ここで，定義域は $[0, 6]^3$，分割は $5 \times 5 \times 5$ とした．

図で示されるように，本拡張アルゴリズムは，与えらたれたデータを滑らかに補間することが確認できる．

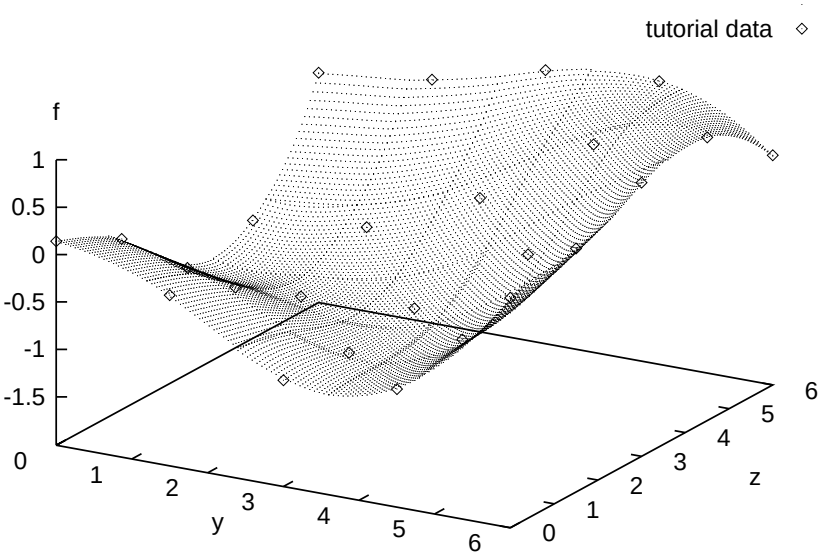
5.2　5 章のまとめ

本章では，前章で示した区分的曲面構築アルゴリズムを曲面近似問題に適用し，その基礎的な特性を評価した．以下にその内容を示す．

1. **1 変数関数近似問題**
   - 本アルゴリズムを 1 変数関数近似問題へ適用することで条件 (4.8) の成立を実験的に確認した．
   - 適当な幾何学量（曲率の 2 乗積分値）を採用することで，分割数に依存しない滑らかな曲面の実現を確認した．
   - CE の適用により解析的方法と同等の近似曲面を獲得することを確認した．
   - 分割数，データ数の違いによらない学習係数のロバスト性を確認した．
   - 本アルゴリズムは適当な学習係数の設定により，補間問題だけでなく，ノイズを含むデータの平滑化を実現することを確認した．

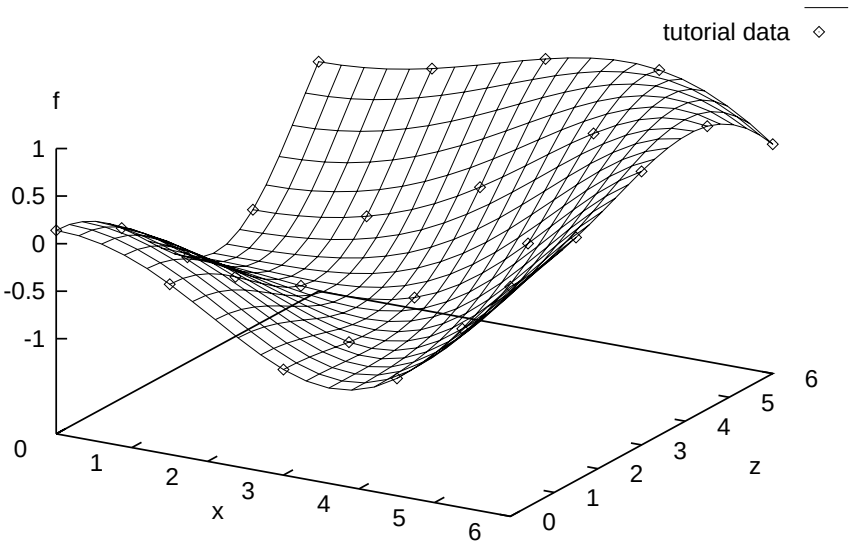


(a) 切断面 $x = 3$ 上のソース曲面

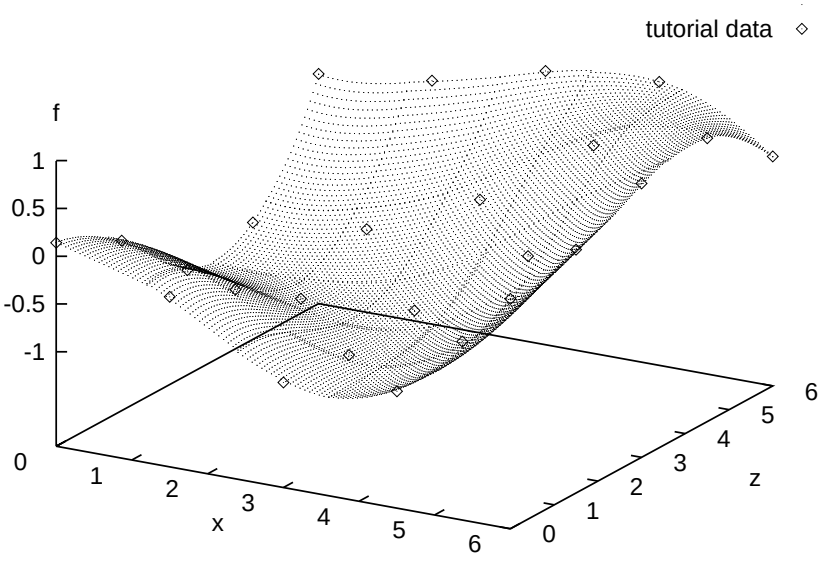


(b) 切断面 $x = 3$ 上の近似曲面

図 5.22: ソース曲面および近似曲面

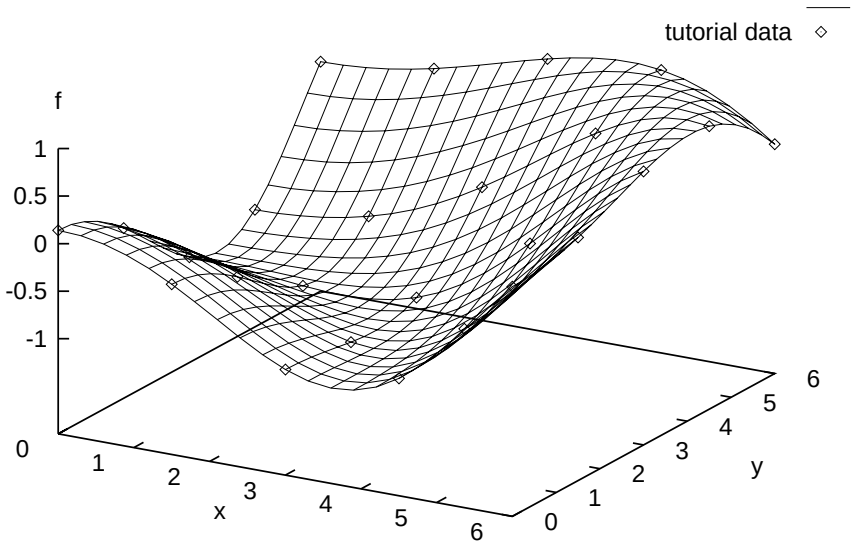


(c) 切断面 $y = 3$ 上のソース曲面

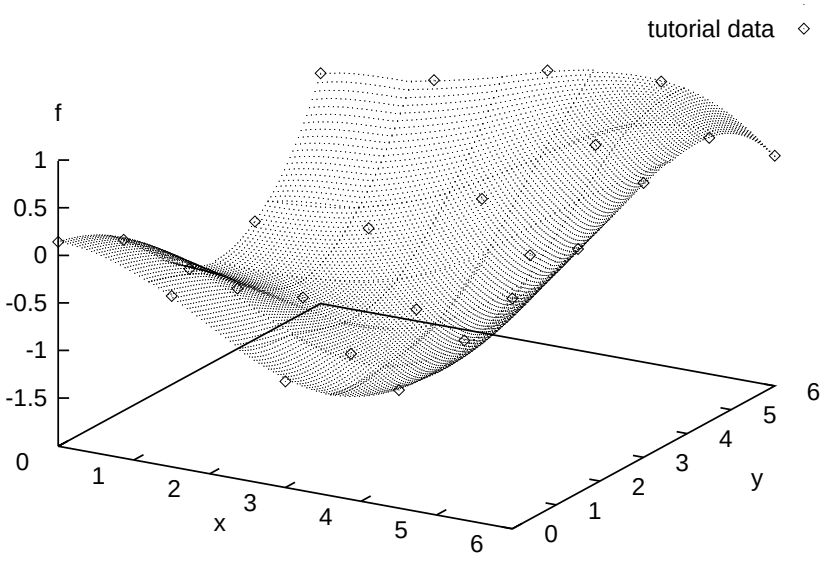


(d) 切断面 $y = 3$ 上の近似曲面

図 5.22: ソース曲面および近似曲面



(e) 切断面 $z = 3$ 上のソース曲面



(f) 切断面 $z = 3$ 上の近似曲面

図 5.22: ソース曲面および近似曲面

2. **2 変数関数近似問題**

- 図 2.1 における (a) および (b) の近傍系の違いによる近似曲面および収束性を確認し，収束性に多少の遅延が生じるが同様の近似曲面が生成されることが確認された.
- CE の適用により，収束性に遅延が生じるが解析的方法と同等の近似曲面を獲得することを確認した．CE の適用によりアルゴリズムの簡素化が可能であるため，本アルゴリズムの拡張性が期待出来る.
- CE の刻み幅を変化させることにより，隣接領域との連続性の強化は隣接領域との一致度の強化であることを確認した.
- CE による連続性強化に関して，近傍系の違いによる近似曲面および収束性を確認した.
- 複雑な各種曲面の近似をおこなうことで学習係数のロバスト性を確認した.

3. **3 変数関数近似問題**

- 2 変数関数近似における結果を適用して，3 変数関数近似への展開が可能であることを確認した.

補遺

区分的曲面構築アルゴリズムは，特に教師データが割り当てられていない局所領域において，時系列で連続変化する境界条件値問題の解の探索をおこなっている．これは，有限要素法のように区分的線形多様体により近似されている各種境界値問題に対して有効である．以下では，基本的な境界値問題に適用する．

Dirichlet 問題

区分的曲面構築アルゴリズムを次式で示される Dirichlet 問題に適用した．

$$D = \{0 < x, y < 1\}; \tag{5.17}$$

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \ (x, y) \in D \tag{5.18}$$

$$u = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \pi x, & (x, y)_{y=0} \in \partial D \\ 0, & (x, y)_{y \neq 0} \in \partial D \end{cases} \tag{5.19}$$

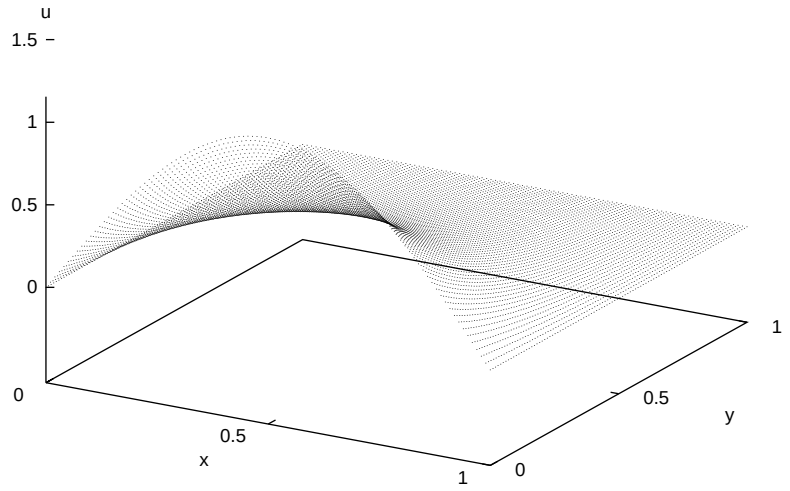
定義域 D の 5×5 分割に基づくネットワークに関して (5.18) 式で示されるラプラス方程式を幾何学的特徴量 E_g^i に設定した．また，教師データとして (5.19) 式で示される境界条件を離散化したデータ（80 点）を与えた．次式で示される理論解に対する誤差の平均二乗誤差を表 5.6，理論曲面および近似曲面をそれぞれ図 5.2(a),(b) に示す．

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin \pi x \sinh \pi (1 - y)}{\sinh \pi} \tag{5.20}$$

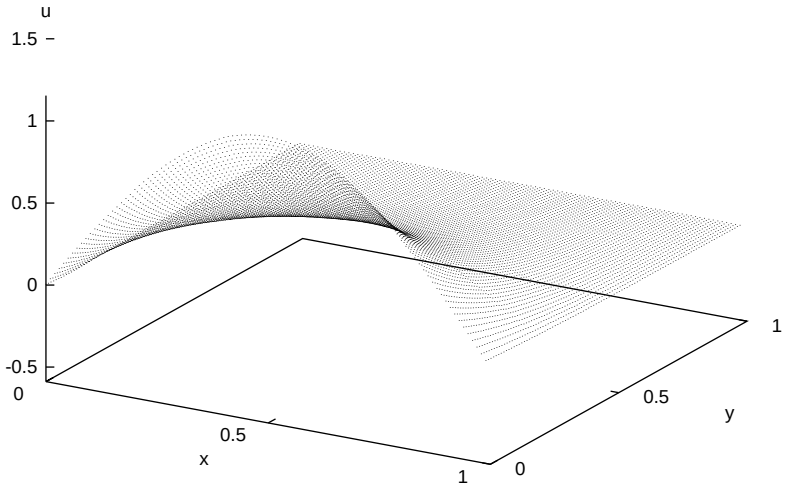
表より $5 \times 5 = 25$ 分割という分割数の少なさにも関わらず良い近似結果を与えていることが確認できる．

表 5.6: 理論解に対する誤差の平均二乗誤差

	教師データ	テストデータ
Dirichlet	3.47×10^{-6}	3.60×10^{-4}
Neumann	3.87×10^{-9}	1.23×10^{-3}



(a) 理論曲面



(b) 近似曲面

図 5.23: 理論曲面および近似曲面

Neumann 問題

区分的曲面構築アルゴリズムを次式で示される Neumann 問題に適用した．

$$D = \{0 < x < 1, 0 < y < \frac{1}{2}\}; \tag{5.21}$$

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \ (x, y) \in D \tag{5.22}$$

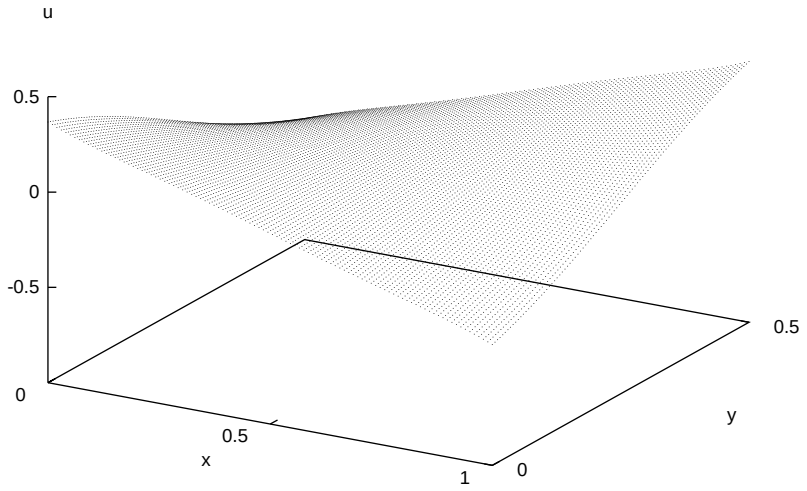
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \begin{cases} \cos \pi x, & (x, y)_{y=0} \in \partial D \\ -\cos 2\pi y, & (x, y)_{x=1} \in \partial D \\ -\cos \pi x, & (x, y)_{y=\frac{1}{2}} \in \partial D \\ \cos 2\pi y, & (x, y)_{x=0} \in \partial D \end{cases} \tag{5.23}$$

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 0 \tag{5.24}$$

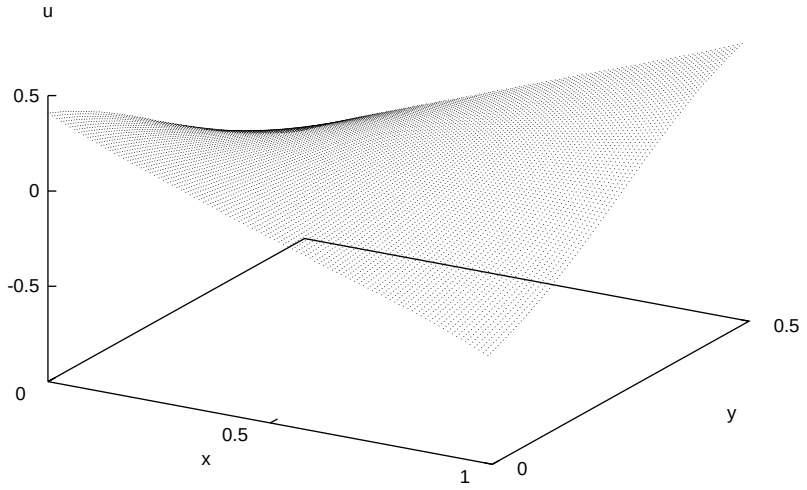
定義域 D の 5×5 分割に基づくネットワークに関して Dirichlet 問題の場合と同様にラプラス方程式を幾何学的特徴量 E_g^i に設定した．(5.24) 式で示される正規化条件を教師データとして与えた．また，(5.23) 式で示される境界条件に関する評価関数 E_{bc}^i を新たに設定し，離散化（80 点）された境界条件（外法線方向ベクトル n を含む）に関して評価をおこなった．次式で示される理論解に対する誤差の平均二乗誤差を表 5.6，理論曲面および近似曲面をそれぞれ図 5.2(a),(b) に示す．

$$u = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos \pi x \sinh \frac{\pi(1-4y)}{4}}{\cosh \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos 2\pi y \sinh \pi(1-2x)}{\cosh \pi} \tag{5.25}$$

Dirichlet 問題の場合と同様に，表より 25 分割という分割数の少なさにも関わらず良い近似結果を与えていることが確認できる．



(a) 理論曲面



(b) 近似曲面

図 5.24: 理論曲面および近似曲面

第6章　ステレオ地理画像に基づく地形モデル生成

近年，地理情報システム（GIS）の普及にともない，航空写真，衛星画像などをもとに，地上の建造物の分布や土地利用形態などの情報を分析する作業が重要となってきた [36]．このような作業では，しばしば撮影条件，撮影時点の異なる複数の画像の対応点の獲得が要求される．異なる複数画像間の差異はレンズの収差や地表の高度変化等さまざまな非線形要因が存在するため，対応点間マッチングの際に必要な画像要素間の移動ベクトルの分布は非線形であり，さらに砂漠の平原や雪の積もった地表，山地などテクスチャ変化の乏しい部分の対応点の獲得は困難なものになっている．本章では，前章までで示した区分的曲面構築アルゴリズムを，撮影地点の異なる 2 つの航空画像に基づく 3 次元地理画像構築に適用する．

6.1　競合と協調による非線形写像

現在，3 次元自動計測システムにおいて使用されている画像では，ひずみなどの非線形性は高精度で修正されており，2 画像の対応点が与えられると，その差異より厳密な地表の 3 次元モデルの構築が可能である．対応点獲得のアルゴリズムとしては，2 枚の航空画像から，濃度値の相関関係，共分散，絶対差の和など，類似度が最大になる点を求めるパターンマッチングの手法を使う方法が使用されている．

2 画像の対応点の探索は，一方の画像から他方の画像への対応点の非線形写像であり，その非線形変換による各ピクセルの移動ベクトルは画像上のベクトル場とみることが可能である．このようなベクトル場の生成には，ニューラルネットワーク等の自己組織化に重要な「競合と協調」の原理を用いることが出来る [25]．図 6.1 はこの原理に基づいて滑らかな写像を実現する機構のネットワークの概要を示すもので，画像 A の小領域を画像 B に合わせるための移動ベクトルが複数生成され，移動先の画像とのマッチングスコアを評価基準としたベクトル間の「競合」がおこなわれ，各微小領域ごとに勝ち残った勝者ベクトルは近傍同士ほぼ連続した動きをするよう「協調」をおこなう．このようにして得られたベクトルにしたがって画像を変形し，再びより良いマッチングを求めて移動ベクトル群の探索

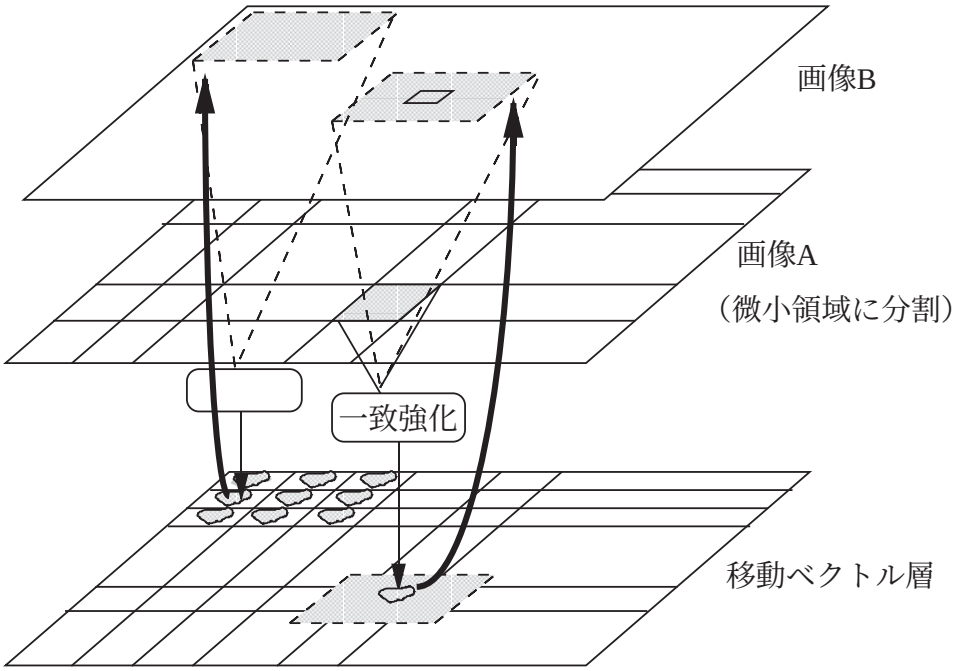


図 6.1: 競合と協調による CE 写像ネットワーク

がおこなわれる．この競合・協調・移動のループは複数回繰り返され，2 画像間の対応点の獲得（一致強化）がおこなわれる．

ニューラルネットワークによる対応点探索アルゴリズムの詳細を以下に示す（図 6.2）．なお，ここでは与えられた 2 画像 (A,B) に関して，画像 A から画像 B 写像ベクトルの獲得を目標とする．

1. **画像 A の分割**

   画像 A を小領域に分割する．これら分割領域について，左から i 番目，上から j 番目の小領域を D_{ij} とする．

2. **画像 A の小領域ベクトルの生成（競合）**

   小領域 D_{ij} をその小領域移動ベクトル $DV_{ij}(t)$ の先端を中心として一定の範囲内でスライドさせ，その範囲内で最も相関が高い位置までの移動量を求めそれを $dV_{ij}(t)$ とする．ニューラルネット処理では，小領域 D_{ij} と画像 B 上で小領域の重なる部分とのピクセル値の 2 乗誤差をマッチングスコアとして，それが小さいほど相関が高いと判断する．

   $dV_{ij}(t)$ を小領域移動ベクトル $DV_{ij}(t)$ に加え，小領域 D_{ij} の新たな小領域移動ベクト

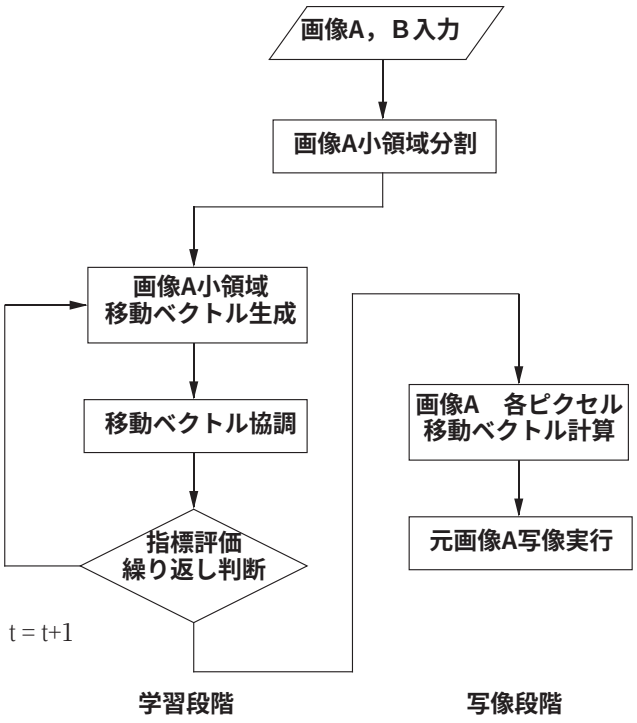


図 6.2: 協調と競合によるニューラルネット処理の動作フロー

ルとする．なお，t は学習の回数を表す．

$$DV_{ij}(t+1) = DV_{ij}(t) + dV_{ij}(t) \tag{6.1}$$

この操作を画像 A の全ての小領域 D_{ij} についておこなう．

3. **移動ベクトルの協調**
   得られた小領域移動ベクトルに矛盾がないように協調操作を施す．協調操作は学習操作 1 回につき 1 回おこなわれる．この操作によって，近傍の移動ベクトル同士が大きく異なるという状態を回避することが出来る．
4. **指標評価，学習繰り返し判断**
   小領域の移動ベクトルの変化が 0 に収束したと認められる場合は，写像段階に移行する．収束していない場合は，学習操作を再度繰り返す．
5. **移動ベクトルの計算，写像の実行**
   写像は最終的に得られた移動ベクトルにしたがっておこなう．その際，ピクセル同士が完全に 1 対 1 対応にはならないので，欠落部分を補間して写像を実行する．

本章では，前章までで示した区分的曲面構築法を用いて，2 画像間の対応点獲得の協調

操作と 3 次元画像を同時に獲得する CE 動作アルゴリズムを提案する．

6.2　ステレオ地理画像に基づく地形モデル生成

6.2.1　協調操作

本節では，移動ベクトル場の連続性を保証するための協調操作について示す．

2 画像の対応点の写像は，2 次元空間中の 2 次元ベクトル群で示される．撮影時期の異なる 2 画像（図 6.3）に関する対応点写像ベクトルの例を図 6.4 に示す [40]．ここで，画像 B には 40%の球面ひずみを与えている．

対象が連続曲面であり，近接画像のように物体の幾何学的位相の逆転がない場合，移動ベクトル場は連続である．しかしながら，マッチングスコアのみを評価基準とした場合には，パターン変化の乏しい部分などにおいて，誤った対応点を与えてしまう恐れがある．アプリオリ情報としてベクトルの連続変化という条件が与えられる場合には，協調操作によりそのような不適切性の緩和が可能である．

連続性を強化するための協調の方法として，重み付け平均による協調，メディアンによる協調，突然変異による協調などさまざまな方法が与えられている．重み付け平均法およびメディアン法を概略説明する．

重み付け平均による協調操作

重み付け平均による協調操作では，対象とするベクトルの近傍領域において距離に対応した重みを係数として与え，その係数を各ベクトルに乗じて重み付け平均を求めて新たなベクトルとして定義する操作である．対象とするベクトルの位置を (i, j) とし，その 5×5 領域を近傍領域と定義した場合のベクトル更新式を次式に与える．

$$DV_{ij}^{new} = \frac{1}{c + 8 + 16 \times r} \begin{bmatrix} r & r & r & r & r \\ r & l & l & l & r \\ r & l & c & l & r \\ r & l & l & l & r \\ r & r & r & r & r \end{bmatrix} DV_{ij}^{old} \tag{6.2}$$

$$c = M - (M - 1) \times \exp(-\alpha t)$$

$$r = \exp(-\beta t)$$

$$M, \alpha, \beta \ : \ \text{constant}$$

画像 A

画像 B（40%の球面ひずみ）

図 6.3: 撮影時期の異なる 2 画像

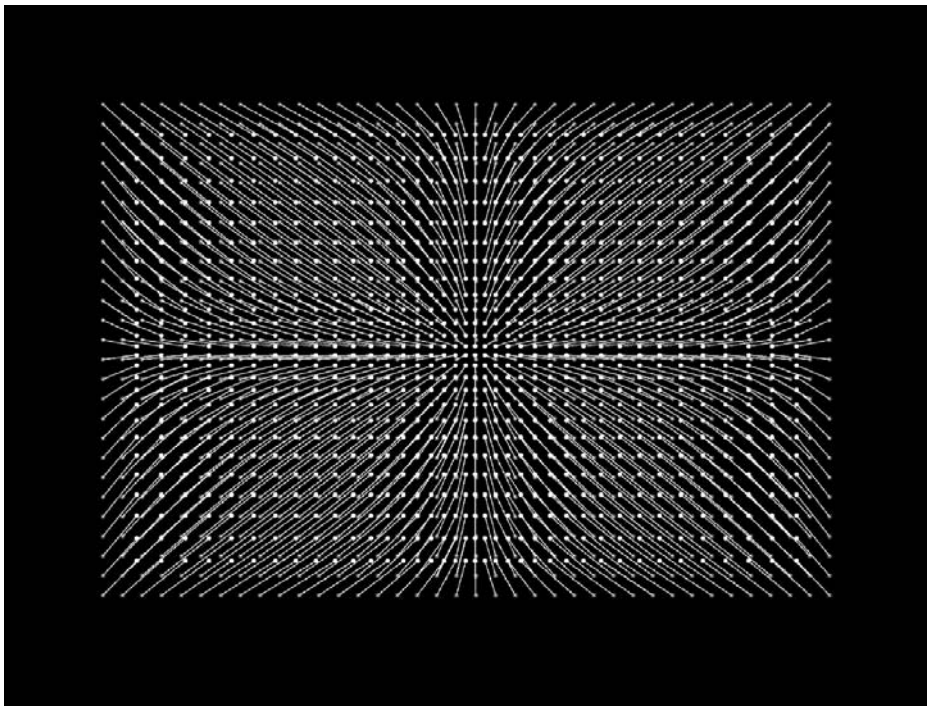


図 6.4: 2 次元空間中の 2 次元ベクトル群

ここでパラメータ c は学習回数 t に関して単調増加し，$t \to \infty$ で定数 M となる．r は学習回数 t に関して単調減少し，$t \to \infty$ で 0 となる．また，初期値はともに 1 である．

メディアンによる協調操作

上述の重み付け平均法を用いた場合，2 画像間の一致度の指標である 1 ピクセルあたりの平均誤差は小さくなる．しかし，たとえ 1 つでも大きく方向性のことなるベクトルが生成されてしまうと，その影響により周辺の正しい移動ベクトルまでが変化させられてしまうという問題点がある．

メディアン法では，対象とするベクトルの近傍領域のメディアンを新たなベクトルとして与える操作であり，より正解に近づくことが出来るだけでなく，すでにほぼ正しいと思われる方向に収束している移動ベクトルを変化させることなく，誤った移動ベクトルのみを修正することが可能である．協調範囲内の移動ベクトルの多数が正しいという前提のもとでは，少数の大きな誤りを持つ移動ベクトルの影響を受けることなく良好な結果が得られる（図 6.5）．

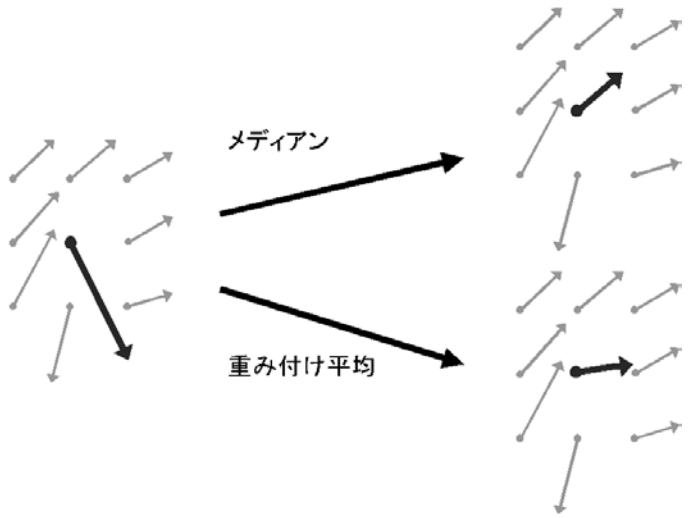


図 6.5: メディアンの効果

以上に示した協調操作は 2 次元空間中における 2 次元ベクトルの協調であるが，2 次元情報を保持する素子間の局所的相互作用であり，近接領域間の相互作用のみで大域的滑らかさを実現することは困難であるため，必ずしも最適解が得られるとは限らない．

本節では，x-y 平面上に配置された移動ベクトル群 $\{(v_x(x^i, y^i), v_y(x^i, y^i))\}_{i \in I}$ に基づく 3 次元データ $\{(x^i, y^i, v_x^i)\}, \{(x^i, y^i, v_y^i)\}$ より，比較的少数の分割数の区分的局面構築アルゴリズムを用いて 2 つの 2 次元近似局面を生成する．ここで，I はピクセル集合，(x^i, y^i) は i 番目ピクセル，$v_x^i = v_x(x^i, y^i), v_x^i = v_x(x^i, y^i)$ はそれぞれ (x^i, y^i) 上の移動ベクトルの x, y 方向成分である．この操作により，分割の少数化による平滑化すなわち協調および任意の幾何学的特徴量の評価による適応的最適化が期待できる．また高石らが提案するように [40]，幾何学的特徴量に基づく大域的探索により得られる大域的対応関係を獲得後，局所的探索により精度を向上させる多段探索をおこなうアニーリング効果により，最適解の探索をおこなう方法がある．この概念を区分的局面構築アルゴリズムに適用し，モデル構築および協調を少数の分割に基づきおこない，徐々に分割数を大きくしていく（細分化）ことで同等の効果が期待できる．

6.2.2　ステレオ画像に基づく地形モデル生成

3 次元地形モデル生成のために使用される航空写真のステレオ画像は，ある一定方向に飛行する航空機から比較的短時間の間に撮影されたものであり，現在では対応点獲得のため 60 パーセント程度重なる画像が使用されている．2 画像の対応点の差異から 3 次元モデ

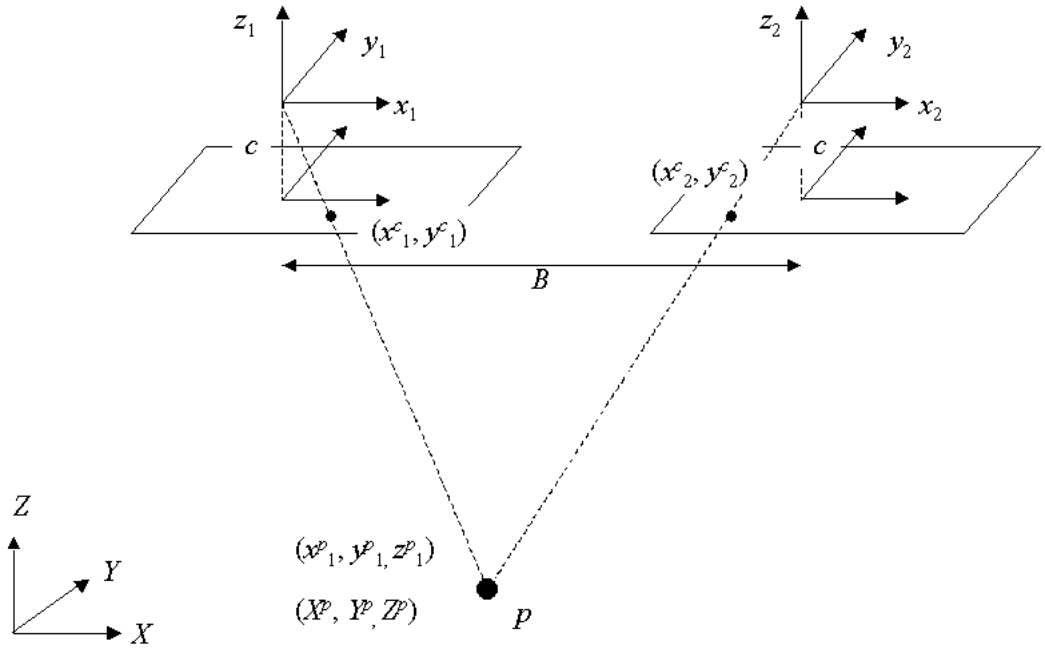


図 6.6: カメラ座標系とモデル座標系

ルを生成する方法の基本的な概念を以下に示す.

ここでは簡単のため，2 つのカメラ座標系 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ とモデル座標系 (X, Y, Z) の各軸は平行であり，各カメラとも焦点距離は c，航空機の飛行方向は X（等価的に x_1, x_2）方向であるとする．また，2 座標間の距離を B とする．このとき，各画像座標系（カメラ座標系における x_i-y_i 平面 $(i = 1, 2)$）における対応点をそれぞれ $(x_1^c, y_1^c), (x_2^c, y_2^c)$ とすると，対応点のカメラ座標系 (x_1, y_1, z_1) における位置 (x_1^p, y_1^p, z_1^p) は次式で与えられる（図 6.6）．ここで $y^c = y_1^c = y_2^c$ とする．

$$x_1^p = \frac{x_1^c}{x_1^c - x_2^c} B$$

$$y_1^p = \frac{y^c}{x_1^c - x_2^c} B$$

$$z_1^p = -\frac{c}{x_1^c - x_2^c} B$$

モデル座標系におけるカメラ座標系 (x_1, y_1, z_1) の原点の座標を (X_0, Y_0, Z_0) とすると，モ

デル座標系における位置 (X^p, Y^p, Z^p) は次式で与えられる．

$$X^p = X_0 + \frac{x_1^c}{x_1^c - x_2^c} B \tag{6.3}$$

$$Y^p = Y_0 + \frac{y^c}{x_1^c - x_2^c} B \tag{6.4}$$

$$Z^p = Z_0 - \frac{c}{x_1^c - x_2^c} B \tag{6.5}$$

(6.5) 式より，対応点のモデル座標系における Z 座標値（高度）は，移動ベクトルの大きさ $|\boldsymbol{v}^c|$（(6.6) 式）に関する連続関数であり，$|\boldsymbol{v}^c|$ が大きいほど，大きな値をとることが確認できる．

$$|\boldsymbol{v}^c| = \sqrt{(x_1^c - x_2^c)^2 + (y_1^c - y_2^c)^2} \tag{6.6}$$

また，条件で与えたように，航空機の飛行方向は X 座標方向であるため，理論的には画像内座標系において移動ベクトルの y_1（等価的に y_2）方向成分は発生しないはずである $(y_1 = y_2 = 0)$．したがって，移動ベクトルは (6.7) 式で示されるように，x_1, x_2 のみに依存し，対応点のモデル座標系における Z 座標値（高度）は移動ベクトルの x 成分の大きさに対応するものとなる．

$$|\boldsymbol{v}^c| = \sqrt{(x_1^c - x_2^c)^2} \tag{6.7}$$

したがって，$|v^c|$ を z 値とする曲面は，実際の地形に関する内部モデルととらえることが可能である．さらに，y 方向ベクトル v_y に関して $(x, y, v_y) = (x, y, 0)$ より，曲面 $M_y = \{(x, y, v_y)\}$ は平面 $v_y = 0$ となり，幾何学的特徴量として曲率に関する積分値，曲面積などさまざまな量を適用可能であるが，ここでは次式で与えられる量を評価量とした．

$$\int_X |v_y|^2 dxdy \tag{6.8}$$

ここで，X は (x, y) の定義域である．

x 方向ベクトル v_x に関する曲面 $M_x = \{(x, y, v_x)\}$ の近似曲面生成は平滑化（協調）を目的とし，幾何学的量は評価せず (4.2),(4.4) 式で与えられる誤差，連続性評価のみをおこなう．

6.3　山地画像に基づく地形モデル生成

本節では，不連続部分を含まないステレオ山地画像に基づく地形モデル生成をおこなう．

不連続部分を含まないという側面は本アルゴリズムに適しているが，図 6.7 で確認できるように，山地画像ではテクスチャ変化の乏しい部分が多く存在し，ステレオ画像の対応点獲得が困難である．したがって，両画像の対応点獲得にはステレオ画像に関するアプリオリ情報の評価が要求される．ステレオ画像の対応点を与える移動ベクトルでは，視点が異なるために発生する大域的な平行移動ベクトルおよび対象物の高度差より生じる移動ベクトルが存在する．視点の差異に基づく大域的平行ベクトルは，画像にひずみが存在しない場合には画像内で一様となる．このベクトルに関しては，大域的マッチングをとることで獲得が可能である．一方，高度差に起因する移動ベクトル群は対象物の高度に関係するため, 非線形の分布となる．アプリオリ情報として連続性が与えられている山地画像では，移動ベクトルの変化も連続となる．このようなベクトルの獲得は，前節で示したように「協調」の操作によりおこなうことが可能であるが，2 次元の情報（ベクトル情報）を保持する各ピクセルが隣接領域との協調をおこなう場合，曲面を特徴づける量の導出が不可能であるため，大域的な滑らかさの実現は困難である．ここでは，区分的曲面構築アルゴリズムを協調操作に適用することで 3 次元モデル構築と協調の操作を循環的におこなう方法を提案する．

区分的曲面表現を用いたステレオ画像に基づく 3 次元モデルの構築アルゴリズムの概要を以下に示す．ここでは，与えられた 2 枚のステレオ画像 A,B に関して，A から B への対応点を与えるベクトル場の生成を目的とする．

1. **大域的移動ベクトルの導出**
   与えられた 2 枚のステレオ画像の大域的マッチングスコアを算出し，最も相関が高い位置までの移動ベクトルを大域的移動ベクトル $\boldsymbol{v}$ とする．
2. **画像 A の写像**
   大域的移動ベクトルに基づき，画像 A の写像をおこなう (coincidence enhancement).
3. **画像 A の小領域ベクトルの生成（競合）**
   画像 A を分割し，各小領域に関して与えられた近傍系内で最も相関の高い位置までの移動量を求め，移動ベクトルの候補とする．算出された移動ベクトルの候補を $\boldsymbol{h}$ とする．
4. **移動ベクトルの協調，モデル生成**
   得られた値 $\boldsymbol{h}$ に関して，6.2.2 で与えた拘束条件に基づき，比較的小さな分割数で，x, y 方向ベクトル v_x, v_y に関する 3 次元モデル $M_x = \{(x, y, v_x)\}, M_y = \{(x, y, v_y)\}$ を構築

表 6.1: 学習条件

学習の収束基準

学習回数	幾何学量の変化
1.00×10^5	1.00×10^{-5}

分割数
10×10

学習係数

η_a	η_0	η_1	η_2	η_g	初期係数値の定義領域
1.00×10^{-1}	1.00×10^{-1}	1.00×10^{-3}	1.00×10^{-3}	1.00×10^{-4}	$[-0.5, 0.5]$

η_a：学習係数（誤差エネルギ項），η_0：学習係数（学習点における関数の連続性），η_1：学習係数（学習点における関数の 1 階微分値の連続性），η_2：学習係数（学習点における関数の 2 階微分値の連続性），η_g：学習係数（各領域における曲面積）

し，内部モデル構築および協調の操作をおこなう．

5. **指標評価，学習繰り返し判断**
   小領域の移動ベクトルの変化が 0 に収束したと認められる場合は，写像段階に移行する．収束していない場合は分割の細分化をおこない学習操作 3,4 を繰り返す．
6. **写像の実行，実 3 次元モデル構築**
   得られた移動ベクトルに基づき画像 A の写像をおこなう．また，得られた 3 次元内部モデルを (6.5) 式に基づき変形し，真の 3 次元モデルを獲得する．

図 6.7 で与えられるテクスチャ変化が乏しいステレオ山地画像 (a)（左画像），(b)（右画像）に対して，上述の対応点獲得アルゴリズムを適用することで得られた対応点の関係を図 6.7(c),(d) に示す．なお分割数は $5 \times 5 \rightarrow 10 \times 10$ とした．図 6.7(c),(d) より，テクスチャ変化が乏しいにもかかわらず対応点の位相関係および移動ベクトルの指向性が保持されていることが確認できた．

図 6.8 に実際の 3 次元モデルの区分的曲面構築アルゴリズムによる近似曲面 (a) および内部モデルより算出された地形モデル (b) を示す．両形状の比較により，図 6.7(c),(d) で与えられる対応関係がおおよそ正しいことが確認できる．ここで，(a),(b) ともに 10×10 分割の区分的曲面，(b) のモデルは相対値である．使用したパラメータの値を表 6.1 に示す．

6.4　6 章のまとめ

本章では，区分的曲面構築アルゴリズムに基づき，視差に基づく 3 次元地形モデル構築と移動ベクトル群の協調の操作を循環的におこなうことでステレオ地理画像間の対応点獲

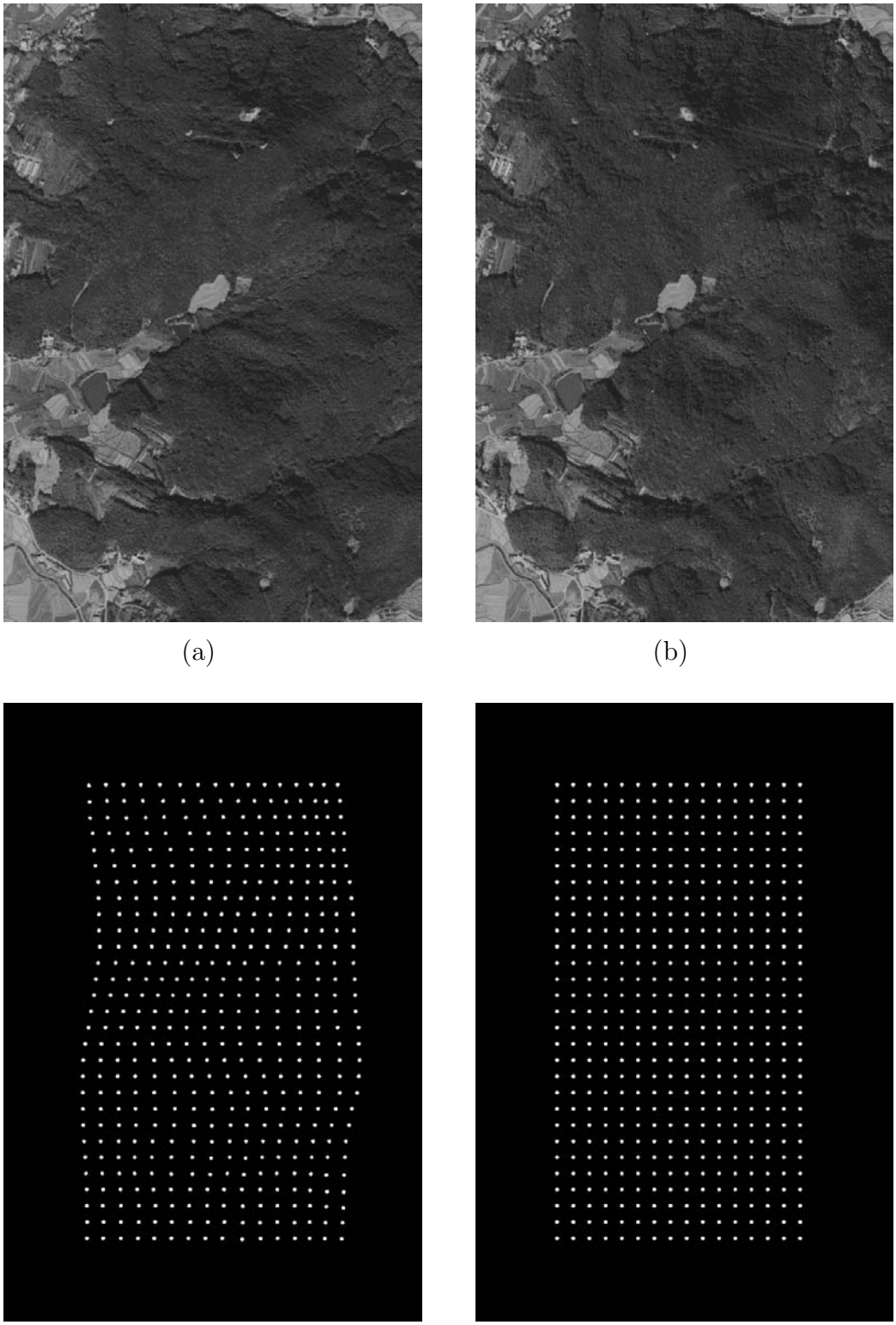
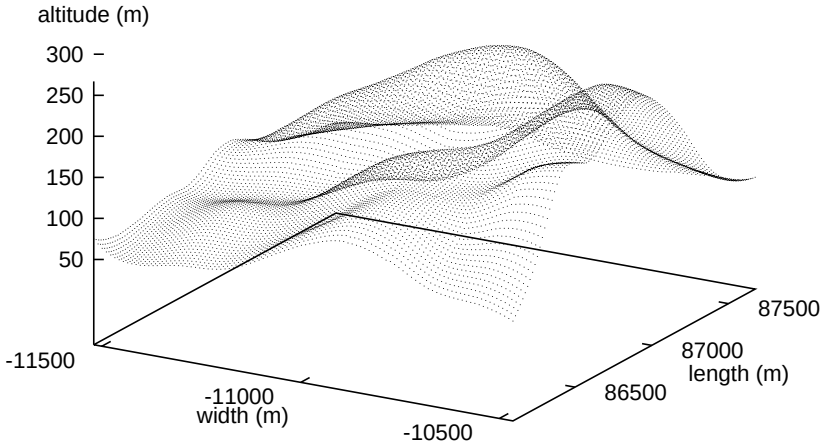
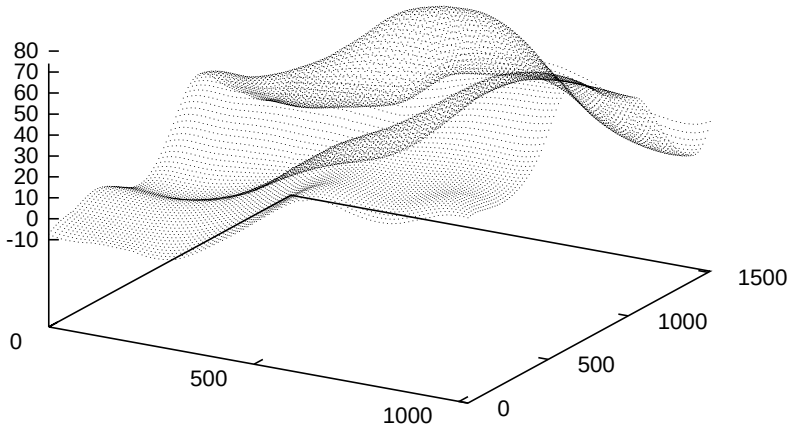


図 6.7: ステレオ航空画像 (a),(b) と対応点 (c),(d)



(a)　実際の地表形状の近似曲面



(b)　ベクトル場より生成した地表モデル

図 6.8: 実際の地表形状の近似曲面 (a) とベクトル場より生成した 3 次元地表モデル (b)

得をより高い信頼度で得る方法を提案した．対応点獲得のために使用したステレオ地理画像はテクスチャ変化の乏しい山地画像であるにも関わらず，区分的曲面生成アルゴリズムの適応性により信頼度の高い対応関係を獲得することを確認した．本研究で使用したステレオ画像は，移動ベクトルの指向性および地形高度との関連性より協調とモデル構築のための評価基準を明示的に設定可能であったが，より一般的な非線形写像に関してもレンズの収差など系の特徴が与えられている場合は，区分的曲面構築アルゴリズムの局所計算性より，適応的に評価可能であると思われる．

本章では，ほぼ同領域を撮影したステレオ画像間を用いたため，ほとんどの部分において移動ベクトルの真値は探索範囲内に存在したが，非線形性の増大および共有領域の縮小がおこなわれると移動ベクトルの絶対値は大きくなり，必ずしも探索領域内に真の解が存在するとは限らない．高石ら [40] の提案するように画像中の幾何学的特徴量（大きな街路や建造物などの形状）に基づく大域的探索により与えられる大域的対応関係を獲得後，局所的探索により精度を向上させる多段探索をおこなうことで，アニーリング効果による最適写像の獲得および計算コストの改善が期待される．大域的探索により得られる候補ベクトルは画像内に散在するため，それら以外の部分における移動ベクトルを区分的曲面構築アルゴリズムにより補間することで，アプリオリ情報として与えられる曲面の幾何学的特徴量の適応的評価が期待できる．

本章では，滑らかな地表のモデル形成のためのアルゴリズムを示したが，実際の地理情報システムでは，撮影時期の異なる都市画像に関する対応点を獲得することでその経時的変化域の抽出などをおこなう必要がある．都市部は，ほとんどの部分が人工物で構成されており，不連続部分が非常に広く分布しており，本アルゴリズムのように近似曲面の滑らかさを仮定したアルゴリズムを適用した場合は，過度の平滑化がおこなわれる恐れがある．このように不連続部分を含むモデル生成のためには第 4 章で議論したように，高度に階層化されたネットワークを構築することで実現が可能であると思われる．

第7章　結論

本論文では，複数の情報を保持する多機能化された局所曲面素子群により近似曲面を分割表現する方法を提案した．以下に各章で示したことをまとめる．

第2章「離散モデルによる曲面表現」では，マルコフ性を仮定した局所相互作用により大域解を獲得する確率緩和モデルおよび離散表現による曲面構築法の概念から，区分的曲面表現を局所並列計算により実現する方法を提案した．

第3章「分割表現による曲面構築」では，多様体の概念を導入し，局所曲面の貼り合わせにより表現される区分的曲面表現の定式化をおこなった．

第4章「分割表現による曲面構築のためのアルゴリズムおよびネットワーク表現」では，3章で定式化された区分的曲面表現の実現のために，複数の評価関数を設定することで局所並列計算により滑らかな曲面を適応的に構築する方法について議論をおこなった．また，本アルゴリズムを，位置情報のみでなく曲面を特徴づける複数の情報を保持する多機能化素子間の局所結合により構成されるモジュラー構造もつセル型ネットワークを提案した．さらに不連続部分を含む曲面構築および多変数関数近似への展開について議論した．

第5章「区分的曲面構築法の基礎的特性」では，提案したアルゴリズムの基礎的特性を関数近似問題に適用することで確認した．

第6章「ステレオ地理画像に基づく地形モデル生成」では，本アルゴリズムを複数地理画像から地形の3次元モデルを構築する問題に適用し，モデル曲面の構築と対応点獲得のための操作を循環的におこなう方法を提案し，実問題に適用することでその効果を確認した．

本研究に関する論文（学会誌等）

1. 宇都有昭，小杉幸夫：画像誘導ナビゲーションにおける不適切性とスプライン補間に基づくネットワークの検討，電子情報通信学会論文誌，*D*-**II**,Vol.J81-D-**II**, No2, pp.361–369 (1998).

1'. Kuniaki Uto, Yukio Kosugi : Ill-Posed Problems Arising in Image-Guided Navigation Systems and a Network Realization Based on Spline Interpolation, Systems and Computers in Japan, Vol.29, No.10, pp.36–45 (1998).

2. 宇都有昭，小杉幸夫：モジュール構造を持つセル型ネットワークによる区分的曲面構築，電子情報通信学会論文誌, *A*,（投稿中）.

3. 宇都有昭，小杉幸夫，土居原健：ステレオ地理画像に基づく地形モデル生成のための曲面分割表現，電子情報通信学会論文誌，*D*-**II**,（投稿中）.

国際会議における発表

1. Kuniaki Uto, Yukio Kosugi:Acquisition of the Unique Solution Based on Spline Network, 1998 International Joint Conference on Neural Networks (Proc. IJCNN'98, pp.349–352), Anchorage, Alaska (1998).
2. Kuniaki Uto, Yukio Kosugi:Segmented Representation of Approximation Surface, The Fifth International Conference on Neural Information Processing (Proc. ICONIP'98, pp.75-78), Kitakyushu, Japan (1998).

国内学会

1. 宇都有昭，小杉幸夫：光学式ナビゲーションシステムにおける輝点情報獲得と不適切性の緩和に関する研究（信学技法，No.BME96-112，pp.87–94），電子情報通信学会，

ME とバイオサイバネティックス研究会，鹿児島市 (1997).
2. 宇都有昭，小杉幸夫：光学式ナビゲーションシステムにおける輝点獲得の適応的非線形変換（第 5 回コンピュータ外科学会大会論文集，pp.45-46），コンピュータ外科学会，名古屋市 (1996).
3. 宇都有昭，小杉幸夫：光学式ナビゲーションシステムにおける適応的非線形補正（信学技法，No.NC98-95，pp.133–139，電子情報通信学会，ニューロコンピューティング研究会，札幌市 (1999).

関連図書

[1] L.Adams, A.Knepper, W.Krybus, D.Meyer-Ebrecht, G.Pfeifer, R.Rüger, and M.Witte, "Orientation aid for head and neck surgeons," *Innov. Tech. Biol. Med.*, Vol.13, No.4, 1992.

[2] L.O.Chua, L.Yang, "Cellular Neural Networks : Theory," *IEEE Trans. CS*, Vol.35, No.10, pp.1257–1272, 1988.

[3] L.O.Chua, L.Yang, "Cellular Neural Networks : Applications," *IEEE Trans. CS*, Vol.35, No.10, pp.1273–1290, 1988.

[4] C.K.Chui, "Multivariate Splines," Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa, 1988.

[5] R. Durbin, D. Willshaw, "An Analogue Approach to the Travelling Salesman Problem Using an Elastic Net Method," *Nature*, 326, pp.689–691, 1987.

[6] O.Faugeras, "Three-Dimensional Computer Vision : *A Geometric Viewpoint*," The MIT Press, Cambridge, Ma, 1993.

[7] U.Frisch, D.d'Humiéres, B.Hasslacher, P.Lallemand, Y.Pomeau, J.-P.Rivet, "Lattice Gas Hydrodynamics in Two and Three Dimensions," *Complex Systems*, 1, pp.649–707, 1987.

[8] K. Funahashi, "On the Approximate Realization of Continuous Mappings by Neural Networks," *Neural Networks*, Vol.2, pp.183–192, 1989.

[9] S.Geman, D.Geman, "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images," *IEEE Trans. PAMI*, Vol.6, pp.721–741, 1984.

[10] A.Gersho, "Asymptotically Optical Block in PCM," *IEEE Trans. IT*, Vol.25, No.4, pp.373–380, 1979.

[11] C.L.Giles, T.Maxwell, "Learning, invariance, and generalization in high-order neural networks," *Applied Optics*, Vol.26, No.23, pp.4972–4978, 1987.

[12] W.E.L.Grimson, "From Images to Surfaces: A computational Study of the Early Visual System," MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1981.

[13] S.Haykin, "Neural Networks : A Comprehensive Foundation," Maxwell Macmillan, 1994.

[14] J.Hertz, A.Krogh, R.G.Palmer, "Introduction to the Theory of Neural Computation," Addison-Wesley Publishing Company, CA, 1991.

[15] K. Hornik, "Multilayer Feedforward Networks are Universal Approximators," *Neural Networks*, Vol.2, pp.359–366, 1989.

[16] 茨城俊秀, " 組み合わせ最適化の理論," 電子情報通信学会, 1979.

[17] R.A.Jacobs, M.I.Jordan, "A competitive modular connectionist architecture," *Advances in Neural Information Processing System 3*, pp.767–773, Morgan Kaufmann, 1991.

[18] M.I.Jordan, R.A.Jacobs, "Hierarchies of adaptive experts," *Advances in Neural Information Processing System 4*, pp.985–992, Morgan Kaufmann, 1992.

[19] B.Julesz, "Fundations of Cyclopean Perception," University of Chicago Press, Chicago, 1971.

[20] 川人光男, " 脳の計算理論," 産業図書, 1996.

[21] 小林昭七, " 曲線と曲面の微分幾何（改訂版）," 裳華房, 1995.

[22] C.Koch, J.Marroquin, A.Yuille, "Analog "neuronal" networks in early vision," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol.83, pp.4263–4267, 1986.

[23] T.Kohonen, "Self-Organization and Associative Memory," Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[24] Y. Kosugi, E. Watanabe, J. Goto, et al., "An Articulated Neurosurgical Navigation System Using MRI and CT Images," *IEEE Trans. BME*, Vol.35, pp.147–152, 1988.

[25] 桑谷，佐瀬，小杉 他, ”移動ベクトル間の競合と協調による医用画像の滑らかな変形,” 電子情報通信学会論文誌, Vol.J76-D-II, No.2, pp.296–303, 1993.

[26] S.Levy, ”Artificial life : the quest for a new creation,” Pantheon Books, New York, 1992.

[27] S.P.Lloyd, ”Least Squares Quantization in PCM,” *IEEE Trans. IT*, Vol.28, No.2, pp.129–139, 1982.

[28] 松岡俊文，” インバージョンにおける数値解法 —最小二乗法を中心として—,” 物理探査, 39-6, pp.340–356 (1986).

[29] 茂木学, ”複数画像から立体モデルを生成する自己組織化ニューラルネット,” 平成 8 年度東京工業大学修士論文.

[30] John von Neumann, ”Theory of self-reproducing automata,” University of Illinois Press , 1966

[31] R. Hecht-Nielsen , ”Neurocomputing,” Addison Wesley Publishing Company, 1992.

[32] S.J.Nowlan, G.E.Hinton, “Evaluation of Adaptive Mixtures of Competing Experts,” *Advances in Neural Information Processing System 3*, pp.774–780, Morgan Kaufmann, 1991.

[33] 小川英光，” ニューラルネットワークと汎化能力,” 信学技報, No.NC95-8, pp.57–64 (1995-05).

[34] D. C. Plaut, S. J. Nowlan, G. E. Hinton, ”Experiments on learning by back propagation,” Technical Report, CMU-CS-86-126, Carnegie-Mellon Univ., 1986.

[35] T. Poggio, F. Girosi, ”Networks for Approximation and Learning,” *Proc. of the IEEE*, Vol.78, No.9, pp.1481–1497, 1990.

[36] 魯偉, 土居原健, ”2 期間の航空写真を用いた建物変化の抽出手法,” 第 9 回機能図形情報システムシンポジウム講演論文集, pp.25–30, 1998.

[37] Y.A.Rozanov, ”Markov Random Fields,” Springer-Verlag, New York, 1982.

[38] 桜井明 編訳，” スプライン関数入門,” 東京電機大学出版社, 1981.

[39] 杉原厚吉，” 計算幾何工学,” 培風館, 1994.

[40] 高石秀樹，”幾何学的特徴量に基づく地理画像の適応的写像,” 平成10年度東京工業大学修士論文.

[41] W.P.Thurston, edited by S.Levy, ”Three-Dimensional Geometry and Topology,” Princeton mathematical series, Princeton, N.J. : Princeton University Press , 1997.

[42] A.N.Tikhonov, V.Y.Arsenin，”Solutions of Ill-Posed Problems,” John Wiley & Sons., 1977.

[43] 上坂吉則，”ニューロコンピューティングの数学的基礎,” 近代科学社, 1993.

[44] M.Vidyasagar，”A Theory of Learning and Generalization,” Springer-Verlag, London, 1997.

[45] J.M.Yeomans，”Statistical Mechanics of Phase Transitions,” Oxford Science Publications, 1992.

[46] M.Zak, ”Terminal Attractors in Neural Networks,” *Neural Networks*, Vol.2, pp.259–274, 1989.

付 録A　2次元曲面に関する勾配値の導出

A.1　$\partial E_a^i/\partial c_j^i$ の導出

図 4.3 に従い，局所曲面 U_{ij} 中に教師データ $\{(\boldsymbol{x}_k^t, y_k^t)\}$ が含まれているとする．この時，局所曲面 U_{ij} の定義域 U'_{ij} 中には教師データの入力成分 $\{\boldsymbol{x}_k^t\}$ が含まれる．$\{(\boldsymbol{x}_k^t, y_k^t)\}$ を正規化式 (4.20),(4.21) に従い $\{(X_1^k, X_2^k, Y^k)\}$ を得る．(3.18) 式より，

$$\phi_{ij}(x_1, x_2) = \sum c_{\nu_1\nu_2}^{ij} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \tag{A.1}$$

とすると，(4.2) 式より，

$$E_a^{ij} = \sum_{\{(X_1^k, X_2^k)\}} \left[\phi_{ij}(X_1^k, X_2^k) - Y^k\right]^2 \tag{A.2}$$

従って，

$$\frac{\partial E_a^{ij}}{\partial c} = 2 \sum_{\{(X_1^k, X_2^k)\}} \left[\phi_{ij}(X_1^k, X_2^k) - Y^k\right] \frac{\partial}{\partial c}\phi_{ij}(X_1^k, X_2^k) \tag{A.3}$$

ここで (A.1) 式より，次式が成立する．

$$\frac{\partial \phi_{ij}(x_1, x_2)}{\partial c_{\nu_1\nu_2}^{ij}} = (x_1)^{\nu_1}(x_2)^{\nu_2} \tag{A.4}$$

A.2　$\partial E_c^i/\partial c_j^i$ の導出

(4.24) 式より，U_{ij} に関する辺上の連続性評価関数 E_{c-edge}^{ij} は次式で与えられる．

$$E_{c-edge}^i = \sum_n^2 \left\{ \int_0^1 \left[\phi_{i,j}^{(n)}(x_1, 0) - \phi_{i,j-1}^{(n)}(x_1, 1)\right]^2 dx_1 \right.$$

$$+ \int_0^1 \left[\phi_{i,j}^{(n)}(1, x_2) - \phi_{i+1,j}^{(n)}(0, x_2)\right]^2 dx_2$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_0^1 \left[\phi_{i,j}^{(n)}(x_1,1) - \phi_{i,j+1}^{(n)}(x_1,0)\right]^2 dx_1 \\
&+ \int_0^1 \left[\phi_{i,j}^{(n)}(0,x_2) - \phi_{i-1,j}^{(n)}(1,x_2)\right]^2 dx_2 \Bigg\}
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

従って，勾配値 $\partial E^i_{c-edge}/\partial c$ は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E^i_{c-edge}}{\partial c} = 2\sum_n^2 \Bigg\{ &\int_0^1 \left[\phi_{i,j}^{(n)}(x_1,0) - \phi_{i,j-1}^{(n)}(x_1,1)\right] dx_1 \times \frac{\partial}{\partial c}\phi_{i,j}^{(n)}(x_1,0) \\
&+ \int_0^1 \left[\phi_{i,j}^{(n)}(1,x_2) - \phi_{i+1,j}^{(n)}(0,x_2)\right] dx_2 \times \frac{\partial}{\partial c}\phi_{i,j}^{(n)}(1,x_2) \\
&+ \int_0^1 \left[\phi_{i,j}^{(n)}(x_1,1) - \phi_{i,j+1}^{(n)}(x_1,0)\right] dx_1 \times \frac{\partial}{\partial c}\phi_{i,j}^{(n)}(x_1,1) \\
&+ \int_0^1 \left[\phi_{i,j}^{(n)}(0,x_2) - \phi_{i-1,j}^{(n)}(1,x_2)\right] dx_2 \times \frac{\partial}{\partial c}\phi_{i,j}^{(n)}(0,x_2) \Bigg\}
\end{aligned} \tag{A.6}
$$

ここで (A.1) 式より，次式が成立する．

$$
\frac{\partial \phi_{i,j}(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \sum \nu_1 c^{ij}_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1-1} x_2^{\nu_2}
$$

$$
\frac{\partial \phi_{i,j}(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \sum \nu_2 c^{ij}_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2-1}
$$

$$
\frac{\partial^2 \phi_{i,j}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = \sum \nu_1(\nu_1-1) c^{ij}_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1-2} x_2^{\nu_2}
$$

$$
\frac{\partial^2 \phi_{i,j}(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = \sum \nu_2(\nu_2-1) c^{ij}_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2-2}
$$

$$
\frac{\partial^2 \phi_{i,j}(x_1,x_2)}{\partial x_1 x_2} = \sum \nu_1\nu_2 c^{ij}_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1-2} x_2^{\nu_2-1}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial c^{ij}_{\nu_1\nu_2}} \left(frac\partial \phi_{i,j}(x_1,x_2)\partial x_1\right) = \sum \nu_1 x_1^{\nu_1-1} x_2^{\nu_2}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial c^{ij}_{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\partial \phi_{i,j}(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right) = \sum \nu_2 x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2-1}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial c^{ij}_{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\partial^2 \phi_{i,j}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\right) = \sum \nu_1(\nu_1-1) x_1^{\nu_1-2} x_2^{\nu_2}
$$

$$\frac{\partial}{\partial c^{ij}_{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{\partial^2\phi_{i,j}(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\right)=\sum\nu_2(\nu_2-1)x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial c^{ij}_{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{\partial^2\phi_{i,j}(x_1,x_2)}{\partial x_1x_2}\right)=\sum\nu_1\nu_2x_1^{\nu_1-2}x_2^{\nu_2-1}$$

(4.25) 式より，U_{ij} に関する辺上の連続性評価関数 E^{ij}_{c-vert} は次式で与えられる．

$$E^{ij}_{c-vert}=\sum_n^2\Bigg\{\left[\phi^{(n)}_{i,j}(0,0)-\phi^{(n)}_{i-1,j-1}(1,1)\right]^2+\left[\phi^{(n)}_{i,j}(1,0)-\phi^{(n)}_{i+1,j-1}(0,1)\right]^2$$

$$+\quad\left[\phi^{(n)}_{i,j}(1,1)-\phi^{(n)}_{i+1,j+1}(0,0)\right]^2+\left[\phi^{(n)}_{i,j}(0,1)-\phi^{(n)}_{i-1,j+1}(1,0)\right]^2\Bigg\}\tag{A.7}$$

従って，勾配値 $\partial E^i_{c-vert}/\partial c$ は次式で与えられる．

$$\frac{E^{ij}_{c-vert}}{\partial c}=2\sum_n^2\Bigg\{\left[\phi^{(n)}_{i,j}(0,0)-\phi^{(n)}_{i-1,j-1}(1,1)\right]\frac{\partial}{\partial c}\phi^{(n)}_{i,j}(0,0)$$

$$+\quad\left[\phi^{(n)}_{i,j}(1,0)-\phi^{(n)}_{i+1,j-1}(0,1)\right]\frac{\partial}{\partial c}\phi^{(n)}_{i,j}(1,0)$$

$$+\quad\left[\phi^{(n)}_{i,j}(1,1)-\phi^{(n)}_{i+1,j+1}(0,0)\right]\frac{\partial}{\partial c}\phi^{(n)}_{i,j}(1,1)$$

$$+\quad\left[\phi^{(n)}_{i,j}(0,1)-\phi^{(n)}_{i-1,j+1}(1,0)\right]\frac{\partial}{\partial c}\phi^{(n)}_{i,j}(0,1)\Bigg\}\tag{A.8}$$

A.3 $\partial E^i_A/\partial c^i_j$ の導出

(4.31) 式より，局所曲面 U_{ij} の曲面積 E^{ij}_A は次式で与えられる．

$$E^{ij}_A=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+(\partial\phi_{ij}/\partial x_1)^2+(\partial\phi_{ij}/\partial x_2)^2}dx_1dx_2\tag{A.9}$$

表記上の簡素化のために

$$\frac{\partial\phi_{ij}}{\partial x_1}=\phi_1$$

$$\frac{\partial\phi_{ij}}{\partial x_2}=\phi_2$$

とすると，(A.9) 式は,

$$E_A^{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2} dx_1 dx_2 \tag{A.10}$$

となる．このとき，$\partial E_A^{ij} / \partial c_j^i$ は次式で示される．

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_A^{ij}}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2} dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(1 + \phi_1^2 + \phi_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial c} + \phi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial c}\right) dx_1 dx_2 \end{aligned} \tag{A.11}$$

謝辞

研究におけるさまざまな場面で適切な御指導を下さり，正しい方向づけを示していただきました小杉幸夫教授に心から感謝致します.

本論文をまとめるにあたり，有意義なご意見を賜った東京工業大学総合理工学研究科　横山正明教授，北條春夫教授，香川利春教授，精密工学研究所　横田眞一教授の諸先生方に感謝の意を表します.

また，本研究をおこなうにあたって，画像データを御提供いただいたアジア航測（株）総合研究所研究部　土居原健部長に感謝いたします.

亀山啓輔助手からは，研究のみでなく研究室における生活において適切な御助言をいただきました.

5年間に及ぶ研究室の同僚との交流は非常に印象深いものでした．これからの財産になっていくと思います.

最後に，研究において精神的な支えとなってくれた家族に感謝します.