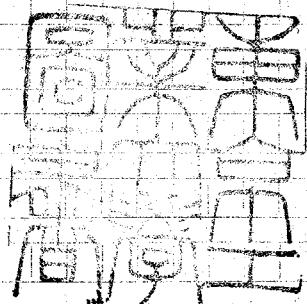


論文 / 著書情報  
Article / Book Information

題目(和文)	超伝導体のパラコンダクティビティに関する理論的研究
Title(English)	
著者(和文)	岡本清美
Author(English)	KIYOMI OKAMOTO
出典(和文)	学位:理学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第960号, 授与年月日:1978年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Science, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第960号, Conferred date:1978/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



博士論文

超伝導体のパラコンダクティビティに関する理論的研究

東京工業大学大学院

応用物理学専攻

岡本清美

東京工業  
大学

409885

# 目次

第1章 序論	1
--------	---

第2章 磁性不純物が存在する場合の <i>excess conductivity</i>	12
--	----

§ 2.1 ハミルトニアン <sup>1</sup> の設定	12
--------------------------------	----

§ 2.2 1電子グリーン関数	14
-----------------	----

§ 2.3 Cooper pair のグリーン関数	17
---------------------------	----

§ 2.4 不純物散乱によるバーテックスの補正	34
-------------------------	----

§ 2.5 電気伝導率を求めるための手法	45
----------------------	----

§ 2.6 Aslamazov-Larkin過程	47
--------------------------	----

§ 2.7 Maki過程	60
--------------	----

§ 2.8 第2章で得られた結果のまとめ	69
----------------------	----

第3章 磁場のある場合の議論	71
----------------	----

§ 3.1 磁場の導入	71
-------------	----

§ 3.2 Aslamazov-Larkin過程	74
--------------------------	----

§ 3.3 Maki過程	83
--------------	----

§ 3.4 磁場の存在する場合の議論の整理と ゼロ磁場極限	88
----------------------------------	----

第4章 議論	92
--------	----

§ 4.1 磁性不純物の役割に関する考察	92
----------------------	----

§ 4.2 第3項に関する議論	96
-----------------	----

§ 4.3 Gor'kov, Namの計算との関係	104
---------------------------	-----

§ 4.4	伝導率に対する磁場と磁性不純物の 影響の差異	106
-------	---------------------------	-----

§ 4.5	計算の有効性等について	109
-------	-------------	-----

第5章	結論	113
-----	----	-----

	謝辞	114
--	----	-----

Appendix A	<i>Dirty limit</i> と振動数和の順序の 問題	115
------------	------------------------------------	-----

Appendix B	ALダイアグラムとMakiダイア グラムにおける符号の問題	119
------------	----------------------------------	-----

	References	122
--	------------	-----

## 第1章 序論

超伝導状態の顕著な特徴の一つとして完全導電性が知られている。この性質は、温度を $T$ 、超伝導転移温度を $T_c$ としたとき、 $T < T_c$ で現われるものであるが、臨界現象という立場からは $T_c$ よりやや高い温度においても電気伝導率が正常状態より増加することが期待される。このような電気伝導率の増加分は "paraconductivity", "excess conductivity", "fluctuation-induced conductivity" などと呼ばれる。日本語の確定した術語はないようで、「ゆらぎ伝導率」という語が時折使われるが、上記の英語をそのまま用いることが多い。ここで "fluctuation", あるいは「ゆらぎ」という語は平均場近似からのずれを意味する。超伝導現象の本質を解明した Barden-Cooper-Schrieffer (BCS)<sup>1,2)</sup> の理論は一種の平均場近似を用いたものであるが、この理論によれば電気伝導率は $T > T_c$ では一定、 $T < T_c$ では無限大である。したがって臨界現象として電気伝導率を考える場合はBCSの平均場近似からのずれを考慮に入れなければならぬ。このずれの効果をゆらぎの効果と称する。

超伝導体の臨界現象の研究は Ginzburg<sup>3)</sup>, Thouless<sup>4)</sup> が $T_c$ 近傍での比熱を計算したことにはじまる。彼らの結果によると、超伝導体ではBCSの平均場近似が非常に良いことを反映して転移領域が非常に狭く、物理量へのゆらぎの効果は観測不可能であると思われた。1967年に Glover<sup>5)</sup> はビスマス薄膜の $T_c$ 近傍の電気抵抗を測定し、 $T > T_c$ において抵抗の正常値からの減少分が $(T - T_c) / T_c$ の逆数に比例することを示した。その後 Aulamazov and Larkin<sup>6,7)</sup> によって $T > T_c$ における電気伝導率が徹底的に計算され、Gloverの実験結果を非常に良く説明した。これらの研究を契機として超伝導臨界現象の研究は大きく発展し、電気伝導率以外に、帯磁率、核スピン-格子緩和時間、超音波減衰係数、熱伝導率、熱電係数など種々の応答係数が理論的、実験的研究の対象にされている。

超伝導状態にある体系の性質は磁場や磁性不純物に敏感であるので、それらの存在は *excess conductivity* にも影響を及ぼす。また非線型電気伝導の特性電場が比較的小さいため、容易に非線型電気伝導が観測される。このような事情を反映して、*excess conductivity* に対する磁場、磁性不純物、電場等の影響を追究することが、理論実験両面でおこなわれている。どのような要素が今までに考慮されているかを示したのが次の Tab. 1.1 である。この表では対象を薄膜に関する研究のみに絞った。*Excess conductivity* の研究では、薄膜に関するものが中心的位置を占めている。

次にBCSの平均場近似からのずれをどのように扱うかについて触れることにする。BCSのハミルトニアンは次のように書ける。<sup>\*</sup>

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_g, \quad (1.1)$$

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\sigma} \int d^3r \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left( \frac{p^2}{2m} - \epsilon_F \right) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}), \quad (1.2)$$

$$\mathcal{H}_g = -g \int d^3r \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

ただし、 $\psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r})$ ,  $\psi_{\sigma}(\mathbf{r})$  は電子場の演算子、 $\sigma$  はスピン指標、 $g$  は結合定数 ( $g > 0$ )、エネルギーはフェルミ面から測っている。問題にするのは低温であるのでフェルミエネルギー ( $\epsilon_F$ ) と化学ポテンシャルとの差は無視できる。BCSの平均場近似では相互作用項を

$$g \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) = \Delta^*(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) - \frac{1}{g} |\Delta(\mathbf{r})|^2, \quad (1.4)$$

$$\Delta^*(\mathbf{r}) = g \langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \rangle, \quad \Delta(\mathbf{r}) = g \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.5)$$

と近似して  $\Delta^*(\mathbf{r})$ ,  $\Delta(\mathbf{r})$  を自己無撞着に定める。この近似を採用すると  $T > T_c$  では  $\Delta^*(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r}) = 0$  であるので、相互作用  $\mathcal{H}_g$  の効果は全く

<sup>\*</sup> 本論文では  $\hbar = k_B = C = 1$  という単位系を採用する。また断りのない限り単位体積を考える。

Tab.1.1 Excess conductivity に関する研究の一覧表

○理論的なもの

以下の表で○印のついている欄は、研究が該当欄の方法によっている、あるいは該当欄の要素を考慮しているなどの意味である。各欄の意味は次のとおりである。

GL	GL方程式を使っている。
ミクロ	グリーン関数法等のミクロな理論による。
AL, MT, 3rd	計算した項。
E	電場依存性(非線型伝導)。
H <sub>  </sub> , H <sub>⊥</sub> , H <sub>0</sub>	磁場依存性。添字は薄膜面に対する方向。
Γ	バーテックスの不純物散乱補正にゆらぎの効果を含める。
ρ <sub>s</sub>	磁性不純物の効果。
ス軌	スピン軌道相互作用及びPauli 常磁性。
IBF	ゆらぎ間相互作用。
d	膜厚の効果。

表の対象は薄膜に関する研究に限定している。ただしMaki<sup>12,13)</sup>(1968)のみ例外である。この研究はMaki過程を最初に提唱したものであるため、特に表に加えた。

注1. ゆらぎについて高次のダイアグラムを考えている。

注2, 注4. 丸関数積分法を用いている。

注3. フォノンモデルで考えている。

	ST	ミ	A	M	3	E	H	H	H	Γ	ρ	ス	I	d	注
	L	ロ	L	T	rd	ヒ	ル	ロ	ル	ル	s	軌	F		
Aslamazov, Larkin <sup>6,7)</sup> (1968)		○	○				○								
Abrahams, Woo <sup>8)</sup> (1968)	○		○												
Schmidt <sup>9)</sup> (1968)	○		○												
Schmid <sup>10)</sup> (1968)	○		○			○									
Kadanoff, Laramore <sup>11)</sup> (1968)	○		○												
Maki <sup>12,13)</sup> (1968)		○		○											
Bergmann <sup>14)</sup> (1969)	○		○					○							
Hurault <sup>15)</sup> (1969)	○		○			○									
Maki <sup>16)</sup> (1969)		○	○					○							
Tsuzuki <sup>17)</sup> (1969)		○	○										○		
Usadel <sup>18)</sup> (1969)		○	○					○							
Ferrell <sup>19)</sup> (1969)															
Tsuzuki <sup>20~22)</sup> (1969, 1970)		○	○			○									
Clarke, Tilley <sup>23)</sup> (1970)	○		○					○							
Fulde, Maki <sup>24)</sup> (1970)	○		○			○	○								
Gor'kov <sup>25)</sup> (1970)	○		○			○					○				
Mikeska, Schmidt <sup>26)</sup> (1970)	○		○					○							
Nam <sup>27)</sup> (1970)	○		○								○				
Thompson <sup>28)</sup> (1970)		○	○	○										○	
Tilley, Parkinson <sup>29)</sup> (1970)	○		○					○							
Aoi <sup>30)</sup> (1971)		○	○						○			○			
Koyanagi, Tsuzuki <sup>31)</sup> (1971)		○	○					○							
Maki <sup>32)</sup> (1971)		○		○		○									
Patton <sup>33)</sup> (1971)		○		○						○					
Schmidt <sup>34)</sup> (1971)		○		○											
Thompson <sup>35)</sup> (1971)		○	○	○				○							
Takayama, Maki <sup>36)</sup> (1971)		○	○	○											!
Abrahams, Prange, Stephen <sup>37)</sup> (1971)	○		○					○							



	LT	ミ 石	A L	M T	3 I d	E	H <sub>2</sub>	H <sub>1</sub>	H <sub>0</sub>	Γ	p <sub>s</sub>	ス 軌	工 F	d	注
Keller, Korenman <sup>38,39</sup> (1971,1972)		○		○						○					
Takayama <sup>40</sup> (1972)			○	○									○		2
Aoi <sup>41</sup> (1973)		○	○					○						○	
Imai <sup>42</sup> (1973)		○	○	○											3
Koyanagi <sup>43</sup> (1973)		○		○		○									
Larkin, Ovchinikov <sup>44</sup> (1973)		○	○	○									○		
Cheishvili <sup>45</sup> (1974)		○	○			○		○							
Aoi, Meservey, Tedrow <sup>46</sup> (1974)		○	○	○					○	○		○			
Feat, Rickayzen <sup>47</sup> (1975)			○					○							4
Golub <sup>48</sup> (1975)		○	○						○						
Imamura, Okamoto, Saito, Ohtsuka <sup>49</sup> (1976)		○	○	○	○										
Okamoto <sup>50</sup> (1977)		○	○	○	○						○			○	
Okamoto <sup>51</sup> (1977)		○	○	○	○			○			○				

○ 実験的なもの

○印の意味は理論的なものの表と同様である。

MP - - - - - Maki 項に対して Patton<sup>33)</sup> の表式を用いた。

MKK - - - - - Maki 項に対して Keller and Korenman<sup>38,39)</sup> の表式を用いた。

注1. 磁性不純物として Er を添加。

注2. スピン-軌道相互作用と Pauli 常磁性を考慮して解析。

	Sample	A L	M T	M P	M K	M K	3 rd	E	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>0</sub>	P <sub>s</sub>	註
Glover <sup>5)</sup> (1967)	Bi (Tl)	○											
Strongin, Kammerer, Crow, Thompson <sup>52)</sup> (1968)	Al	○											
Naugle, Glover <sup>53)</sup> (1968)	Bi (Tl)	○											
Smith, Serin, Abrahams <sup>54)</sup> (1968)	Pb	○						○					
Masker, Marcelja, Parks <sup>55)</sup> (1969)	Al	○											
Thompson Strongin, Kammerer, Crow <sup>56)</sup> (1969)	Pb	○											
Testardi, Reed, Hohenberg, Haemmerle, Brennert <sup>57)</sup> (1969)	Pb	○											
Crow, Thompson, Klenin, Bhatnagar <sup>58)</sup> (1970)	Al	○	○						○				
Danner, Baumann <sup>59)</sup> (1970)	Ga	○							○				
Masker, Parks <sup>60)</sup> (1970)	Al	○											
Grassie, Green <sup>61)</sup> (1970)	Al	○											
Bhatnagar, Kahn, Zammit <sup>62)</sup> (1970)	Al	○											
Glover <sup>63)</sup> (1971)	Bi	○							○	○			
	Ga	○							○	○			
	Pb	○							○	○			
Goldman, Schaer, Toth, Zbasnik <sup>64)</sup> (1971)	Nb (Ti, N)	○											
Serin, Smith, Mizusaki <sup>65)</sup> (1971)	Pb	○								○			
Grassie, Green, Benyon <sup>66)</sup> (1971)	Al	○						○					
Thomas, Parks <sup>67)</sup> (1971)	Al	○						○					
Klenin, Jensen <sup>68)</sup> (1971)	Al	○	○					○	○				
Aoki, Kawaguti, Hatada, Kawamura <sup>69)</sup> (1971)	Ga	○											
Craven, Thomas, Parks <sup>70)</sup> (1971)	Al	○	○							○			



考慮されていないことになる。したがって  $T > T_c$  において臨界現象を考慮するには  $\lambda g$  の効果を取り入れることが必要である。このためには Cooper pair の遅延相関関数

$$D^R(r, t) = g^2 \theta(t) \langle [\Psi(r, t), \Psi(0, 0)] \rangle, \quad (1.6)$$

を計算してみるのがよい。ただし

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}, \quad (1.7)$$

$$\Psi(r, t) = e^{i\lambda t} \Psi(r) e^{-i\lambda t}, \quad (1.8)$$

$$\Psi(r) = \psi_{\downarrow}(r) \psi_{\uparrow}(r), \quad (1.9)$$

であり、 $\Psi(r)$ ,  $\Psi^{\dagger}(r)$  は Cooper 場の演算子である。計算の詳細は後に述べるが、結果は次のようになる。

$$D^R(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}r - i\omega t} D^R(\mathbf{q}, \omega), \quad (1.10)$$

$$D^R(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{N(0)} \frac{1}{\eta + \lambda g^2 - i\lambda_0 \omega}. \quad (1.11)$$

ここで、 $N(0)$  は自由電子のフェルミ面における状態密度、 $\mathcal{T} \equiv (T - T_c) / T_c$  は reduced temperature,  $\lambda = \pi D / 8T$ ,  $D = v_F^2 \tau / 3$  (拡散係数),  $v_F$  はフェルミ速度,  $\tau$  は不純物散乱の緩和時間,  $\lambda_0 = \pi / 8T$  である。上の式は不純物散乱のある場合を考え、 $T\tau \ll 1$  と仮定したのであるが、このような状況を *dirty limit* という。(1.11) で温度を下げてゆくと  $\mathbf{q} = \omega = 0$  のものが最初に発散するが、そのとき  $\mathcal{T} = 0$  であり、 $T = T_c$

である。したがってDRは体系が徐々に超伝導状態に近づいてゆく過程、換言すれば臨界現象、を記述していると考えられる。次に(1.11)の $D^R(q, \omega)$ は拡散型であることに注意したい。すなわちFourier変換で $D^R(q, t)$ の形にすると

$$D^R(q, t) \propto \exp\left[-\frac{\gamma + \lambda q^2}{\lambda_0} t\right], \quad (t > 0) \quad (1.12)$$

である。このモードは純粋な減衰型のモードであり、振動部分が存在しないため正確な意味での準粒子とは言えないが、準粒子に準ずるものとして取り扱うことができる。研究者によってはこのモードは"supron"という名前をつけられている。ここに述べた事情はパラマグノンの場合と全く同様である。

以上の状況から上述のような"supron"が存在するとして電気伝導率を求めれば臨界現象を考慮したことになる。(1.12)からわかるようにsupronの寿命は $T$ が $T_c$ に近づくにつれて長くなるので、伝導率に対する影響も大きくなると予想される。

本論文では以上のような立場から $T > T_c$ における電気伝導率を論ずる。本論文により明らかにされることは次の3点である。(1)従来Aplamezov-Larkin (AL)項とMaki-Thompson (MT)項との和で表わされていたexcess conductivityに対して、さらにもう一つの項(第3項)をつけ加えるべきであることが指摘される。(2)磁性不純物がexcess conductivityに及ぼす影響がAbrikosov-Gor'kov<sup>89)</sup> (AG)モデルで計算され、その影響が単にpair breaking parameterに絡り込まれた場合との差異が議論される。(3)磁性不純物及び磁場が共に存在する場合にAL項、MT項、第3項が計算される。その結果両者は超伝導転移温度に対しては同様な影響を与えるが、excess conductivityに与える影響は両者の間で大きな違いがあることが示される。

本論文の構成は以下のとおりである。第2章では磁性不純物が存在する場合

の *excess conductivity* が AG モデルで計算され、第3項の存在が指摘される。第3章では磁場と磁性不純物が共に存在する場合について *excess conductivity* が計算される。第4章では得られた結果に対する議論がなされる。第5章では研究成果の要約が述べられる。

## 第2章 磁性不純物が存在する場合の excess conductivity

### § 2.1 ハミルトニアンの設定

磁性不純物が存在する場合のハミルトニアンを Abrikosov-Gor'kov<sup>89)</sup> (AG) に従って設定する。AG は磁性不純物の性質は周囲の伝導電子には影響されず、また不純物間相互作用もないものと仮定したが、このようなモデルを AG モデルと呼ぶ。前者の仮定は近藤効果や不純物の磁性-非磁性転移を考慮しないことを意味するものである。

AG モデルのハミルトニアンは運動エネルギー項  $\mathcal{H}_0$ 、不純物散乱項  $\mathcal{H}_{imp}$  及び BCS 相互作用項  $\mathcal{H}_g$  の3項より成る。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{imp} + \mathcal{H}_g, \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \sum_{\mathbf{r}} \int d^3r \psi_0^\dagger(\mathbf{r}) \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \varepsilon_F \right) \psi_0(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

ここで  $\sigma$  は電子スピン指標、 $\psi_\uparrow(\mathbf{r}), \psi_\downarrow(\mathbf{r})$  は電子場の演算子、 $\mathbf{p}$  は運動量演算子、 $\varepsilon_F$  はフェルミエネルギー、 $\varepsilon(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2/2m - \varepsilon_F$ 、 $a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, a_{\mathbf{k}\sigma}$  は電子の生成及び消滅演算子である。本論文で問題にするのは超伝導転移温度付近の低温であるので、フェルミエネルギーと化学ポテンシャルの差は無視することが出来る。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{imp} &= \sum_i \int d^3r \left( \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}), \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \right) \hat{v}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(\mathbf{r}) \\ \psi_\downarrow(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \\ &= \sum_i \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \left( a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger, a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \right) \hat{v}(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}\uparrow} \\ a_{\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$



$$\begin{aligned}
\hat{U}(\mathbf{r}) &= u_1(\mathbf{r}) + u_2(\mathbf{r}) \mathcal{S} \hat{\sigma} \\
&= u_1(\mathbf{r}) + u_2(\mathbf{r}) \{ S_x \sigma_x + S_y \sigma_y + S_z \sigma_z \} \\
&= \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{r}) + S_z u_2(\mathbf{r}) & (S_x - i S_y) u_2(\mathbf{r}) \\ (S_x + i S_y) u_2(\mathbf{r}) & u_1(\mathbf{r}) - S_z u_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} v_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}) & v_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}) \\ v_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}) & v_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (2.1.4)
\end{aligned}$$

である。ここで  $u_1(\mathbf{r})$ ,  $u_2(\mathbf{r})$  はそれぞれ非磁性及び磁性散乱のポテンシャル,  $\mathcal{S}$  は不純物のスピン,  $\hat{\sigma}$  は電子スピン演算子,  $\mathbf{r}_i$  は  $i$  番目の不純物の位置である。AGモデルでは不純物スピンを古典的ベクトルとして取り扱い, 不純物の位置の分布及びそのスピンの方向の分布は全くランダムであると仮定をする。スピン方向の分布に関する平均をバーをつけて表わすことにする。

$$\overline{\mathcal{S}} = 0, \quad \overline{S_i S_j} = \frac{1}{3} S(S+1) \delta_{ij}, \quad (2.1.5)$$

である。ただし  $|\mathcal{S}|^2 = S(S+1)$  とした。

$$\mathcal{U}_g = -g \int d^3r \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}). \quad (2.1.6)$$

上式で  $g$  は BCS の相互作用定数で正の値をとっている。

## § 2.2 1電子グリーン関数

この節では  $N_g$  が無い場合の1電子グリーン関数を求める。時間及び空間に対して並進対称性があることを考慮して1電子温度グリーン関数を次のように定義する。

$$G_\alpha(r, \tau) = -\langle T_\tau \psi_\alpha(r, \tau) \psi_\alpha^\dagger(0, 0) \rangle_{\mathcal{N}_1} \quad (2.2.1)$$

ただし、 $\tau$  は温度時間、 $T_\tau$  は  $\tau$  に関する Wick の時間順序演算子、

$$\psi_\alpha(r, \tau) = e^{\mathcal{N}_1 \tau} \psi_\alpha(r) e^{-\mathcal{N}_1 \tau} \quad (2.2.2)$$

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_{imp} \quad (2.2.3)$$

であり、 $\langle \dots \rangle_{\mathcal{N}_1}$  はハミルトニアン  $\mathcal{N}_1$  における統計平均を意味する。通常の不純物散乱の取り扱い<sup>90)</sup> に準じて次のようなグリーン関数の方程式を立てる。

$$\begin{array}{c} G_\uparrow \\ \uparrow \end{array} = \begin{array}{c} G_\uparrow^0 \\ \uparrow \end{array} + \begin{array}{c} G_\uparrow^0 \\ \uparrow \end{array} \times \begin{array}{c} G_\uparrow \\ \uparrow \end{array} \times \begin{array}{c} G_\uparrow \\ \uparrow \end{array} + \begin{array}{c} G_\uparrow^0 \\ \uparrow \end{array} \times \begin{array}{c} G_\downarrow \\ \downarrow \end{array} \times \begin{array}{c} G_\uparrow \\ \uparrow \end{array} \quad (2.2.4)$$

$G^0$  はハミルトニアン  $\mathcal{N}_0$  における1電子グリーン関数で

$$\begin{aligned} G_\alpha^0(r, \tau) &= -\langle T_\tau \psi_\alpha(r, \tau) \psi_\alpha^\dagger(0, 0) \rangle_{\mathcal{N}_0} \\ &\equiv T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i p r - i \omega_n \tau} G_\alpha^0(p, i \omega_n) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$G_\alpha^0(p, i \omega_n) = \frac{1}{i \omega_n - \epsilon(p)} \quad (2.2.6)$$

である。また、 $\omega_n = (2n+1)\pi T$ 。(2.2.4)で $X$ は不純物散乱を表わし、破線は2度の不純物散乱が同一の不純物によるものであることを示している。同式右辺第2項の2つの $X$ には共に $v_{\uparrow}$ が付随し、第3項の左側の $X$ には $v_{\uparrow}$ が、右側の $X$ には $v_{\downarrow}$ がそれぞれ付随している。(2.2.4)を $p, i\omega_n$ 表示を用いて解析的表式で表わせは次のようになる。

$$\begin{aligned}
 G_{\uparrow}(p, i\omega_n) &= G_{\uparrow}^0(p, i\omega_n) \\
 &+ n_i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G_{\uparrow}^0(p, i\omega_n) G_{\uparrow}(k, i\omega_n) G_{\uparrow}(p, i\omega_n) v_{\uparrow}^2(k-p) \\
 &+ n_i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G_{\uparrow}^0(p, i\omega_n) G_{\downarrow}(k, i\omega_n) G_{\uparrow}(p, i\omega_n) v_{\uparrow}(k-p) v_{\downarrow}(p-k)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.7}$$

ただし $n_i$ は不純物濃度である。 $G_{\downarrow}$ についても同様な方程式が立てられるが、対称性から $G_{\uparrow} = G_{\downarrow}$ である。

$$\begin{aligned}
 v_{\uparrow}^2(k-p) &= \left\{ u_1(k-p) + S_2 u_2(k-p) \right\}^2 \\
 &= u_1^2(k-p) + 2S_2 u_1(k-p) u_2(k-p) + S_2^2 u_2^2(k-p), \tag{2.2.8}
 \end{aligned}$$

であるが、(2.1.5)を考慮に入れば右辺を

$$u_1^2(k-p) + \frac{S(S+1)}{3} u_2^2(k-p), \tag{2.2.9}$$

と置き換えてよい。同様に $v_{\downarrow}(k-p) v_{\downarrow}(p-k)$ は

$$\frac{2S(S+1)}{3} u_2^2(k-p), \tag{2.2.10}$$

と置き換えられる。ただし $u(p) = u(-p)$ を仮定した。(2.2.7)の積分で重要であるのはフェルミ面付近からの寄与であるので、ポテンシャルの効果に対して緩和時間近似をおこなう。すなわち

$$G(p, i\omega_n) = G^0(p, i\omega_n) \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi N(0)\tau_1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G(k, i\omega_n) G(p, i\omega_n) \right\}, \quad (2.2.11)$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{n_i N(0)}{2} \int d\Omega_F \{ u_1^2(\theta) + S(S+1) u_2^2(\theta) \}, \quad (2.2.12)$$

$$N(0) = \frac{m p_F}{2\pi^2}. \quad (2.2.13)$$

ただし (2.2.12) の積分はフェルミ面における立体角積分を意味する。また、 $N(0)$  はフェルミ面における電子の状態密度、 $p_F$  はフェルミ運動量である。方程式 (2.2.11) の解は

$$G(p, i\omega_n) = \frac{1}{i\tilde{\omega}_n - \epsilon(p)}, \quad (2.2.14)$$

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{1}{2\tau_1} \text{sign} \omega_n, \quad (2.2.15)$$

である。

以上より 1 電子グリーン関数は (2.2.14) である。

### § 2.3 Cooper pair のグリーン関数

この節では Cooper pair のグリーン関数を求める。Cooper pair のグリーン関数は次のように定義される。

$$D(r, \tau) = g^2 \langle T_\tau \Psi(r, \tau) \Psi^\dagger(0, 0) \rangle. \quad (2.3.1)$$

ここで

$$\Psi(r, \tau) = e^{i\mathcal{H}\tau} \Psi(r) e^{-i\mathcal{H}\tau}, \quad (2.3.2)$$

$$\Psi(r) = \psi_\downarrow(r) \psi_\uparrow(r), \quad (2.3.3)$$

であり、 $\Psi(r)$  は Cooper 場の演算子である。(2.3.1) を  $\mathcal{R}$  に関して Fourier 変換して次式を得る。

$$D(q, \tau) = g^2 \langle T_\tau C_q(\tau) C_q^\dagger(0) \rangle. \quad (2.3.4)$$

ただし

$$C_q(\tau) = e^{i\mathcal{H}\tau} C_q e^{-i\mathcal{H}\tau}, \quad (2.3.5)$$

$$C_q = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{q}-\mathbf{k}\uparrow}, \quad (2.3.6)$$

である。なお (2.3.1) の因子  $g^2$  は便宜上つけてある。

以下で  $\mathcal{H}_q$  を摂動として  $D$  を求めるのであるが、それには  $\mathcal{H}_q$  が無い場合の Cooper pair のグリーン関数が必要である。これを  $\Pi$  として次のように定義する。

$$\Pi(q, \tau) = \langle T_\tau C_q(\tau) C_q^\dagger(0) \rangle_{\mathcal{H}_q}. \quad (2.3.7)$$

(2.3.6) を用いれば

$$\begin{aligned} \Pi(q, \tau) &= \sum_{p, k} \langle T_\tau a_{p\downarrow}(\tau) a_{q-p\uparrow}(\tau) a_{q-k\uparrow}^\dagger(0) a_{k\downarrow}^\dagger(0) \rangle_N, \\ &= \sum_{p, k} \left\{ \overline{\langle T_\tau a_{p\downarrow}(\tau) a_{k\downarrow}^\dagger(0) \rangle_N, \langle T_\tau a_{q-p\uparrow}(\tau) a_{q-k\uparrow}^\dagger(0) \rangle_N} \right. \\ &\quad \left. - \overline{\langle T_\tau a_{p\downarrow}(\tau) a_{k\uparrow}^\dagger(0) \rangle_N, \langle T_\tau a_{q-p\uparrow}(\tau) a_{q-k\downarrow}^\dagger(0) \rangle_N} \right\} \\ &\equiv \sum_{p, k} \left\{ K_1(q; p, k; \tau) - K_2(q; p, k; \tau) \right\}. \quad (2.3.8) \end{aligned}$$

バーは不純物に関する平均を意味する。πは本質的には2電子グリーン関数である。ここで2個のグリーン関数の積を不純物に関して平均したものは、個々の平均の積には等しくないことに注意しなければならない。

このことは右図のダイアグラムでは(b),

(c)のタイプのものが著とされてゐることに

相当する。一オ、(a)のタイプのダイア

グラムはG<sub>0</sub>をGで置き換えることによ

り取り入れることができる。(c)のタイプ

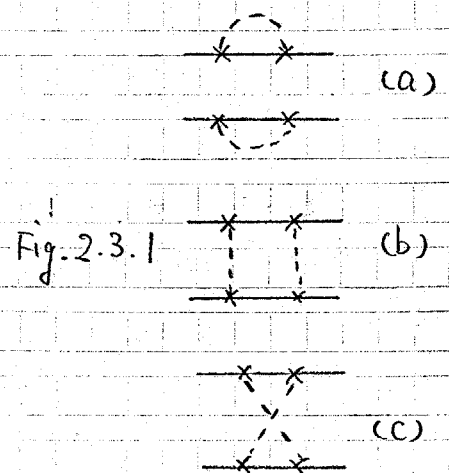
の破線が交差するダイアグラムはその寄与

が小さいことが知られてゐるので、<sup>90)</sup>

これを無視していわゆる梯子近似をおこな

う。この近似でグリーン関数の方程式は次

のダイアグラムで表わされる。



$$\begin{array}{c} p, i\nu_e \\ \uparrow \\ \downarrow \\ q-p, i(\omega_n - \nu_e) \end{array} \begin{array}{c} | \\ L_1 \\ | \end{array} \begin{array}{c} k, i\nu_e \\ \uparrow \\ \downarrow \\ q-k, i(\omega_n - \nu_e) \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \downarrow \downarrow \\ | \\ L_1 \\ | \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \downarrow \uparrow \\ | \\ L_2 \\ | \end{array} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \\ | \\ L_2 \\ | \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \uparrow \\ \uparrow \downarrow \\ | \\ L_1 \\ | \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \uparrow \uparrow \\ | \\ L_2 \\ | \end{array} \quad (2.3.10)$$

ダイアグラムの実線は今度 \$G\$ を表わしている。また \$L\_1\$ は \$L\_1(q; p, k; i\omega\_n, i\nu\_l)\$ の意味で

$$K_1(q; p, k; i\omega_n) = T \sum_{\nu_l} L_1(q; p, k; i\omega_n, i\nu_l), \quad (2.3.11)$$

となるものである。\$K\_1(q; p, k; i\omega\_n)\$ は \$K\_1(q; p, k; \tau)\$ の \$\tau\$ に関する Fourier 変換で \$\omega\_n = 2n\pi T\$, また \$\nu\_l = (2l+1)\pi T\$ である。\$\omega\_n\$ がボゾン振動数をもっているのは Cooper pair がボゾンであることによる。\$L\_2\$ についても \$L\_1\$ の場合と全く同様である。不純物散乱では振動数は変化しないから、しばらく \$L\_1, L\_2\$ の振動数変数を省略することにとすると、(2.3.9), (2.3.10) に対応する解析的表式は次のように書ける。

$$L_1(q; p, k) = G(p, i\nu_l) G(q-p, i(\omega_n - \nu_l))$$

$$\times \left\{ \delta(p-k) + n_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} v_{\uparrow\uparrow}(k'-p) v_{\downarrow\downarrow}(p-k') L_1(q; k', k) + n_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} v_{\uparrow\downarrow}(k'-p) v_{\downarrow\uparrow}(p-k') L_2(q; k', k) \right\}, \quad (2.3.12)$$

$$L_2(q; p, k) = G(p, i\nu_l) G(q-p, i(\omega_n - \nu_l))$$

$$\times \left\{ n_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} v_{\uparrow\downarrow}(k'-p) v_{\downarrow\uparrow}(p-k') L_1(q; k', k) + n_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} v_{\uparrow\uparrow}(k'-p) v_{\downarrow\downarrow}(p-k') L_2(q; k', k) \right\}. \quad (2.3.13)$$

(2.2.8) ~ (2.2.13) の場合と同様にして

$$v_{\uparrow\uparrow}(k'-p) v_{\downarrow\downarrow}(p-k') = \left\{ u_1(k'-p) + S_2 u_2(k'-p) \right\} \left\{ u_1(p-k') - S_2 u_2(p-k') \right\}$$

$$= u_1^2(k' - p) - S_x^2 u_2^2(k' - p)$$

$$\Rightarrow u_1^2(k' - p) - \frac{S(S+1)}{3} u_2^2(k' - p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi N^{(0)} n_i \tau_3}, \quad (2.3.14)$$

$$v_{\uparrow\downarrow}(k' - p) v_{\uparrow\downarrow}(p - k') = (S_x - iS_y) u_2(k' - p) (S_x + iS_y) u_2(p - k')$$

$$= (S_x^2 + S_y^2) u_2^2(k' - p)$$

$$\Rightarrow \frac{2S(S+1)}{3} u_2^2(k' - p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi N^{(0)} n_i \tau_4}. \quad (2.3.15)$$

これより

$$\frac{1}{\tau_3} = \frac{n_i N^{(0)}}{2} \int d\Omega_F \left\{ u_1^2(\Omega) - \frac{S(S+1)}{3} u_2^2(\Omega) \right\}, \quad (2.3.16)$$

$$\frac{1}{\tau_4} = \frac{n_i N^{(0)}}{2} \int d\Omega_F \frac{2S(S+1)}{3} u_2^2(\Omega), \quad (2.3.17)$$

である。この緩和時間近似で (2.3.12), (2.3.13) は次のように書ける。

$$L_1(\Omega; p, k) = G(p, i\nu_0) G(\Omega - p, i(\omega_n - \nu_0))$$

$$\times \left\{ \delta(p - k) + A_3 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} L_1(\Omega; k', k) + A_4 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} L_2(\Omega; k', k) \right\}. \quad (2.3.18)$$



$$L_2(\mathbf{q}; \mathbf{p}, k) = G(\mathbf{p}, i\nu_2) G(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i(\omega_4 - \nu_2))$$

$$\times \left\{ A_4 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} L_1(\mathbf{q}; \mathbf{k}', k) + A_3 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} L_2(\mathbf{q}; \mathbf{k}', k) \right\}, \quad (2.3.19)$$

$$A_3 = \frac{1}{2\pi N^{(0)} \tau_3}, \quad A_4 = \frac{1}{2\pi N^{(0)} \tau_4}. \quad (2.3.20)$$

(2.3.8) からわかるように  $\Pi$  を求めるために必要であるのは  $L_1 - L_2$  である。

(2.3.18) から (2.3.19) を辺々引けば

$$L(\mathbf{q}; \mathbf{p}, k) = G(\mathbf{p}, i\nu_2) G(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i(\omega_4 - \nu_2))$$

$$\times \left\{ \delta(\mathbf{p} - k) + A_2 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} L(\mathbf{q}; \mathbf{k}', k) \right\}, \quad (2.3.21)$$

を得る。これを

$$L(\mathbf{q}; \mathbf{p}, k) = L_1(\mathbf{q}; \mathbf{p}, k) - L_2(\mathbf{q}; \mathbf{p}, k), \quad (2.3.22)$$

$$A_2 = A_3 - A_4$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi N^{(0)} \tau_2}, \quad (2.3.23)$$

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{n; N^{(0)}}{2} \int d\Omega_F \left\{ u_1^2(\mathbf{q}) - S(S+1) u_2^2(\mathbf{q}) \right\}, \quad (2.3.24)$$

である。(2.3.21) を  $k$  で積分すれば

$$L(\mathbf{q}; \mathbf{p}) = G(\mathbf{p}, i\nu_2) G(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i(\omega_4 - \nu_2))$$

$$\times \left\{ 1 + A_2 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} L(\mathbf{q}; \mathbf{k}') \right\}, \quad (2.3.25)$$

$$L(q; p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} L(q; p, k). \quad (2.3.26)$$

さらに (2.3.26) を  $p$  について積分して

$$L(q) = L_0(q) \{ 1 + A_2 L(q) \} \quad (2.3.27)$$

これより

$$L(q) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} L(q; p), \quad (2.3.28)$$

$$L_0(q) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} G(p, i\nu_e) G(q-p, i(\omega_n - \nu_e)). \quad (2.3.29)$$

(2.3.27) より

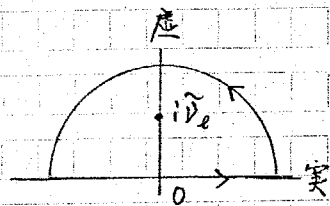
$$L(q; i\omega_n, i\nu_e) = \frac{L_0(q; i\omega_n, i\nu_e)}{1 - A_2 L_0(q; i\omega_n, i\nu_e)}, \quad (2.3.30)$$

を得る。(2.3.30) では振動数変数をあらわに書いた。この表式で  $\nu_e$  和をとれば  $\Pi(q, i\omega_n)$  が求められる。

まず  $L_0$  を計算する。  $\nu_e' = \omega_n - \nu_e$  とおいて

$$\begin{aligned} L_0(q; i\omega_n, i\nu_e) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\tilde{\nu}_e - \varepsilon(p)} \frac{1}{i\tilde{\nu}_e' - \varepsilon(q-p)} \\ &\approx \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\tilde{\nu}_e - \varepsilon(p)} \frac{1}{i\tilde{\nu}_e' - \varepsilon(p) + v_F q \cos\theta} \\ &\approx \frac{N(0)}{2} \int_{-1}^1 d\cos\theta \int d\varepsilon \frac{1}{i\tilde{\nu}_e - \varepsilon} \frac{1}{i\tilde{\nu}_e' - \varepsilon + v_F q \cos\theta}. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

$\varepsilon$ に関する積分は複素積分を応用して求められ、  
 $\tilde{\nu}_e$  と  $\tilde{\nu}'_e$  の正負が同じ場合は極の「内側」で積分路を  
 閉じればわかるように積分はゼロである。 $\tilde{\nu}_e \tilde{\nu}'_e < 0$   
 の場合には計算の結果



$$L_0(q; i\omega_n, i\nu_e) = 2\pi N(10) \frac{1}{v_F q} \tan^{-1} \left( \frac{v_F q}{|\tilde{\nu}_e - \tilde{\nu}'_e|} \right)$$

$$\simeq 2\pi N(10) \frac{1}{v_F q} \left\{ \frac{v_F q}{|\tilde{\nu}_e - \tilde{\nu}'_e|} - \frac{1}{3} \left( \frac{v_F q}{|\tilde{\nu}_e - \tilde{\nu}'_e|} \right)^3 \right\}, \quad (2.3.32)$$

を得る。これを(2.3.30)に代入して

$$L(q; i\omega_n, i\nu_e) = 2\pi N(10) \left[ |\tilde{\nu}'_e - \tilde{\nu}_e| - \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{3} \frac{v_F^2 q^2}{|\tilde{\nu}'_e - \tilde{\nu}_e|} \right]^{-1} \quad (2.3.33)$$

ここでいわゆる *dirty limit* を考える。*Dirty limit* とは不純物散乱が強く  
 散乱緩和時間  $\tau_1$  は非常に短い状態であり、具体的表式では  $\tau_1 \ll 1$   
 である。このとき(2.3.33)の[ ]内の第3項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{v_F^2 q^2}{|\tilde{\nu}'_e - \tilde{\nu}_e|} &= \frac{1}{3} \frac{v_F^2 q^2}{|\nu'_e - \nu_e| + \tau_1^{-1}} \\ &\simeq \frac{1}{3} v_F^2 \tau_1 q^2 \\ &= D q^2, \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

と近似できる。ただし  $D$  は拡散係数で

$$D = \frac{1}{3} v_F^2 \tau_1, \quad (2.3.35)$$

である。この近似を用いて

$$\begin{aligned}
 L(\beta, i\omega_n, i\nu_e) &= 2\pi N^{(0)} \left[ |\nu_e' - \nu_e| + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} + D\beta^2 \right]^{-1} \\
 &= 2\pi N^{(0)} \left[ |\nu_e' - \nu_e| + \frac{2}{\tau_s} + D\beta^2 \right]^{-1}, \quad (2.3.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tau_s} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right) \\
 &= \frac{n_i N^{(0)}}{2} \int dR_F S(S+1) u_i^2(\beta). \quad (2.3.37)
 \end{aligned}$$

$\tau_s$  は電子のスピン緩和時間である。  $\omega_n > 0$  の場合を考えると、  
 $\nu_e' = \omega_n - \nu_e$  であるから  $\nu_e \nu_e' < 0$  であるためには  $\nu_e < 0$  または  
 $\nu_e > \omega_n$  である。

$$\begin{aligned}
 \therefore \Pi(\beta, i\omega_n) &= T \sum_{\nu_e} L(\beta, i\omega_n, i\nu_e) \\
 &= 2\pi N^{(0)} T \left\{ \sum_{\nu_e < 0} \frac{1}{\omega_n - 2\nu_e + 2\tau_s^{-1} + D\beta^2} + \sum_{\nu_e > \omega_n} \frac{1}{2\nu_e - \omega_n + 2\tau_s^{-1} + D\beta^2} \right\} \\
 &= 4\pi N^{(0)} T \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu_e + \omega_n + 2\tau_s^{-1} + D\beta^2} \\
 &= N^{(0)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l + \frac{1}{2} + \frac{\omega_n}{4\pi T} + \beta_s + \frac{D\beta^2}{4\pi T}} \\
 &= N^{(0)} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{l + \frac{1}{2} + \frac{\omega_n}{4\pi T} + \beta_s + \frac{D\beta^2}{4\pi T}} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right\} \\
 &\quad + N^{(0)} \sum_{\substack{\nu_e < \omega_n \\ l=0}} \frac{1}{l + \frac{1}{2}}, \quad (2.3.38)
 \end{aligned}$$

$$\rho_s = \frac{1}{2\pi T c_s} \quad (2.3.39)$$

(2.3.38) の第2の和は  $l = \omega$  までとると発散するのでBCS理論に従って Debye 振動数  $\omega_D$  で和を切断した。和の上限を  $N = \omega_D / 2\pi T - \frac{1}{2}$  とすると

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \frac{1}{l + \frac{1}{2}} &= 2\psi(2N+3) - 4(N+2) + \gamma' \\ &\approx 2\ln(2N+3) - \ln(N+1) + \gamma' \\ &= \ln\{4(N+1)\} + \gamma' \\ &\approx \ln \frac{2\omega_D \gamma}{\pi T} \quad (2.3.40) \end{aligned}$$

ただし

$$\gamma' = 0.5772 \dots \quad (\text{Euler の定数}), \quad (2.3.41)$$

$$\gamma = e^{\gamma'} = 1.781 \dots, \quad (2.3.42)$$

であり、 $N$  が十分大きいときの漸近形をとった。また (2) は digamma 関数である。BCS理論による転移温度の表式

$$gN(0) \ln \left( \frac{2\omega_D \gamma}{\pi T c_0} \right) = 1, \quad (2.3.43)$$

を使えば(2.3.38)の第2の和は

$$N(0) \sum_{l=0}^{v_0 < \omega_D} \frac{1}{l + \frac{1}{2}} = N(0) \ln \frac{2\omega_D \gamma}{\pi T}$$

$$= \frac{1}{g} - N(0) \eta_0, \quad (2.3.44)$$

と書ける。ただし

$$\eta_0 = \ln \frac{T}{T_{c0}}, \quad (2.3.45)$$

であり、 $T_{c0}$  は磁性不純物が存在しないとき仮定したときの転移温度である。

次に (2.3.38) の第 2 の項は digamma 関数を用いて

$$N(0) \left\{ \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_s + \frac{\omega_n}{4\pi T} + \frac{Dg^2}{4\pi T}\right) \right\}, \quad (2.3.46)$$

と書き表わされる。以上より

$$\begin{aligned} \Pi(\beta, i\omega_n) = \frac{1}{g} - N(0) \left\{ \eta_0 + \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_s + \frac{\omega_n}{4\pi T} + \frac{Dg^2}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \\ \text{for } \omega_n > 0, \quad (2.3.47) \end{aligned}$$

を得る。 $\omega_n < 0$  の場合も同様に計算でき、その結果 (2.3.47) の  $\omega_n$  を  $|\omega_n|$  と書き換えればよいことがわかる。

$$\Pi(\beta, i\omega_n) = \frac{1}{g} - N(0) \left\{ \eta_0 + \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_s + \frac{|\omega_n|}{4\pi T} + \frac{Dg^2}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \quad (2.3.48)$$

以上で  $\Pi$  が求められたので擾動項  $\chi_g$  について考察する。

$$\chi_g = -g \int d^3r \psi_{\uparrow}^{\dagger}(r) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) \psi_{\downarrow}(r) \psi_{\uparrow}(r)$$

$$= -g \sum_{\mathbf{q}} C_{\mathbf{q}}^{\dagger} C_{\mathbf{q}}, \quad (2.3.49)$$

であるから  $\chi_g$  は Cooper pair に対する一様定外場の形をしている。ただし、Cooper pair 間の相互作用はその濃度が薄いとして無視している。したがって

$$D = g^2 \left\{ \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right\} \quad (2.3.50)$$

なるダイアグラム方程式が得られる。解析的表式では

$$\begin{aligned} D(q, i\omega_n) &= g^2 \left\{ \Pi(q, i\omega_n) + (-1)(-g)\Pi(q, i\omega_n) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^2(-g)^2\Pi^2(q, i\omega_n) + \dots \right\} \\ &= \frac{g^2 \Pi(q, i\omega_n)}{1 - g \Pi(q, i\omega_n)}, \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

である。D を考慮に入れて物理量を計算する際には、当然直接の BCS 相互作用の効果も考えに入れなければならないから、これも D に含めてしまうのが便利である。そのように D を再定義すると

$$\begin{aligned} D(q, i\omega_n) &= \frac{g^2 \Pi(q, i\omega_n)}{1 - g \Pi(q, i\omega_n)} + g \\ &= \frac{1}{g^{-1} - \Pi(q, i\omega_n)} \\ &= \frac{1}{N^{(0)} \left[ \gamma_0 + 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{|\omega_n|}{4\pi T} + \frac{Dg^2}{4\pi T} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right) \right]}, \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

を得る。上記の再定義をしたので  $D$  は *renormalized interaction* であると考えられる。ともできる。そのような立場から見れば  $D$  のダイアグラムは次のようになるであろう。

$$D = g + \text{---} \circ \pi \text{---} + \text{---} \circ \pi \text{---} \circ \pi \text{---} + \dots \quad (2.3.53)$$

(2.3.52) で  $T$  を下げてゆく場合に最も早く発散するのは  $\delta = \omega_n = 0$  のものである。 $D$  の発散は正常状態を出発点にした摂動論が使えなくなることを意味するので、そのときの  $T$  が転移温度  $T_c$  であると考えられる。よって

$$\ln \frac{T_c}{T_{c0}} + 4 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi T_c \tau_s} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right) = 0, \quad (2.3.54)$$

の根として  $T_c$  が与えられるが、これは *Abrikosov-Gor'kov*<sup>89)</sup> が求めた式と全く同一のものである。(2.3.54) で、磁性散乱が弱く転移温度の降下が小さい場合 ( $T_{c0} - T_c \ll T_{c0}$ ) 及びそれが強く転移温度がゼロに近くなる場合の両極限について考えてみよう。前者の場合は

$$\frac{1}{2\pi T_c \tau_s} \ll 1 \quad (2.3.55)$$

であるから digamma 関数を展開して

$$\ln \frac{T_{c0}}{T_c} = \psi \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2\pi T_c \tau_s}. \quad (2.3.56)$$

左辺の対数を展開し、 $\psi \left( \frac{1}{2} \right) = \pi^2/2$  を使、て

$$T_{c0} - T_c = \frac{\pi}{4\tau_s}, \quad (2.3.57)$$



あるいは

$$\frac{T_c}{T_{c0}} = 1 - \frac{\pi^2}{2} \rho_{s0} \quad (2.3.58)$$

を得る。ここで  $\rho_{s0}$  は  $T = T_{c0}$  のときの  $\rho_s$  で

$$\rho_{s0} = \frac{1}{2\pi T_{c0} T_s} \quad (2.3.59)$$

であり、磁性散乱の強さを表わす無次元のパラメタである。

次に後者の場合を考えると

$$\frac{1}{2\pi T_c T_s} \gg 1 \quad (2.3.60)$$

である。z が大きいとき z での digamma 関数の漸近形は

$$\psi(z) \sim \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12} \frac{1}{z^2} + O(z^{-3}) \quad (2.3.61)$$

であるので

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{2} + z\right) &\sim \ln\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2\left(z + \frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{12} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} + O(z^{-3}) \\ &= \ln z + \frac{1}{24} \frac{1}{z^2} + O(z^{-3}) \end{aligned} \quad (2.3.61a)$$

また

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 4 - \gamma' \quad \gamma' = 0.5772 \dots \quad (2.3.62)$$

である。

$$\begin{aligned} \therefore \ln \frac{T_{co}}{T_c} &= \ln \frac{1}{2\pi T_c \tau_s} + \ln 4 + \ln \gamma + \frac{1}{24} 4\pi^2 T_c^2 \tau_s^2 + O(T_c^3 \tau_s^3) \\ &= \ln \frac{T_{co}}{T_c} + \ln \frac{2\gamma}{\pi T_{co} \tau_s} + \frac{1}{6} \pi^2 T_c^2 \tau_s^2 + O(T_c^3 \tau_s^3), \quad (2.3.63) \end{aligned}$$

$$\therefore T_c = \frac{\sqrt{6}}{\pi \tau_s} \sqrt{\ln \frac{\pi T_{co} \tau_s}{2\gamma}}, \quad (2.3.64)$$

あるいは

$$\frac{T_c}{T_{co}} = 2\sqrt{6} \rho_{so} \sqrt{\ln \frac{1}{4\gamma \rho_{so}}}. \quad (2.3.65)$$

$T_c = 0$  とするとは

$$4\gamma \rho_{so} = 1, \quad (2.3.66)$$

すなわち

$$\rho_{so} = \frac{1}{4\gamma} \approx 0.14, \quad (2.3.66a)$$

である。  $\rho_{so}$  がこの値より大きくなると超伝導が実現しなくなってしまうのである。 (2.3.66a) を満たす  $\tau_s$  の値を  $\tau_s^c$  と書けば

$$\tau_s^c = \frac{2\gamma}{\pi T_{co}} \left( = \frac{2\gamma h}{\pi k_B T_{co}} \right), \quad (2.3.67)$$

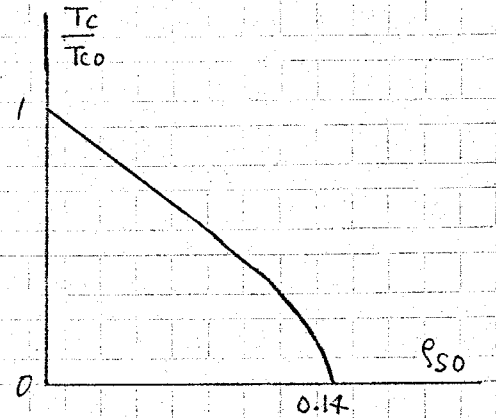
である。( )内では通常単位に直し、  $k_B$  と  $h$  をあらわに書いた。  $T_{co} = 1\text{K}$  とすれば

$$\tau_s^c = 1.73 \times 10^{-11} \text{ sec} \quad (2.3.68)$$

である。

Fig. 2.3.1 は (2.3.54) を数値的に解いたものである。

(2.3.52) にもとって  $\rho^2, |\omega_n|$  が小さいとして分母の digamma 関数を展開すると次のようになる。



$$D(\rho, i\omega_n) = \frac{1}{N(0)} \frac{1}{d + \lambda \rho^2 + \lambda_0 |\omega_n|}, \quad (2.3.69)$$

Fig. 2.3.1

$$d = \ln \frac{T}{T_{c0}} + \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_s\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right), \quad (2.3.70)$$

$$\lambda = \frac{D}{4\pi T} \psi''\left(\frac{1}{2} + \rho_s\right), \quad (2.3.71)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{4\pi T} \psi''\left(\frac{1}{2} + \rho_s\right). \quad (2.3.72)$$

$D(0, 0)$  が発散するのは  $d = 0$  のときであるが、これは (2.3.54) を再現する。  $T - T_c \ll T_c$  の場合には

$$d = \ln \frac{T_c}{T_{c0}} + \ln \frac{T}{T_c} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi T_c \tau_s} \frac{1}{T_c + (T - T_c)}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\approx \left\{ \ln \frac{T_c}{T_{c0}} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi T_c \tau_s}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$+ \ln \frac{T}{T_c} - \frac{T - T_c}{2\pi T_c^2 \tau_s} \psi''\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi T_c \tau_s}\right)$$

$$\approx \frac{T - T_c}{T_c} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi T_c \tau_s} \psi''\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi T_c \tau_s}\right) \right\}, \quad (2.3.73)$$

を得る。変形の途中で2行目の  $\{ \}$  は  $T_c$  を定める式(2.3.54) からゼロである。 $(T - T_c) / T_c$  は通常 *reduced temperature* と呼ばれる量であるが、 $\alpha$  もそれに近い量である。そのような理由からこの論文では  $\alpha$  を *renormalized reduced temperature* と名づけることにする。 $T_c T_s \gg 1$  及び  $T_c T_s \ll 1$  の両極限の場合には(2.3.73)は次のようになる。

$$\alpha \approx \frac{T - T_c}{T_c} \left\{ 1 - \frac{\pi}{4 T_c T_s} \right\}, \quad \text{for } T_c T_s \gg 1 \quad (2.3.74)$$

$$\alpha \approx \frac{T - T_c}{T_c} \cdot \frac{1}{12} (2\pi T_c T_s)^2, \quad \text{for } T_c T_s \ll 1 \quad (2.3.75)$$

$T_c T_s \ll 1$  の場合は *renormalize* の効果が大きいことがわかる。

表式(2.3.69)で  $\alpha$  として(2.3.73)を用いたものは Fulde and Strässler<sup>91)</sup> によって求められている。彼らはこの式を用いてスピニ相関関数からスピニ帯磁率を計算した。

この節で  $\Pi$  を求める過程で共に *dirty limit* をとってから振動数に関する和を実行したが、この2つの手続きの順序を逆にすると結果が多少異なる。後者では因子  $\tau_2 / \tau_1$  が数箇所に現われ、例えば(2.3.71)の  $\lambda$  にこの因子がはかかると。(か)

$$T \tau_1 \ll 1 \quad (\text{dirty limit}) \quad (2.3.76)$$

$$\frac{1}{\tau_s} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right) \quad (2.3.77)$$

$$\frac{1}{2\pi T_c \tau_s} < 0.14 \quad (\text{超伝導の実現する条件}) \quad (2.3.78)$$

の3式から  $\tau_2 / \tau_1 = 1$  とおいてさしつかえないことがわかるから、この差異は重要ではない。ここに述べた2つの手続きの順序に関する問題は Appendix A で議論してある。

なお、磁性不純物の存在しない場合には  $T_5 = 0$  とおけばよく、(2.3.52) は既知の式に帰着する。

§2.4 不純物散乱によるバーテックスの補正

前節で Cooper pair のグリーン関数と求めた。輸送係数を求めるためにダイアグラムを描くとき、Cooper pair と正常電子との相互作用が現われる。 $N_g$  の Cooper pair の演算子の片方を電子演算子で書いてみればわかるように、両者間の相互作用定数は  $-g$  である。ところが (2.3.1) の  $\mathcal{D}$  の定義式には  $g^2$  がかかっているから、 $\mathcal{D}$  を用いるときにはバーテックスに 1 を対応させればよい。ここで  $\mathcal{D}$  一つに対して必ず 2 個のバーテックスがあることに注意した。

上述のバーテックスは右図の (a) の形をしているが、不純物に関する平均の順序の関係から (b) のようなダイアグラムは考慮されないことになる。(b) のタイプのダイアグラムの効果を取り入れるためバーテックスに不純物散乱を繰り込んで関数  $\Gamma$  と対応させる。不純物散乱に対して前の場合と同様に梯子近似を用いて、 $\Gamma$  の方程式は次のように書ける。

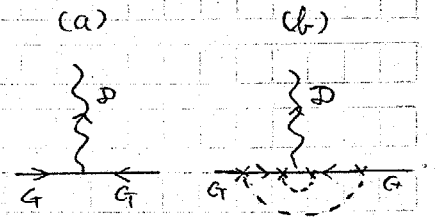


Fig. 2.4.1

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram (a)} = \text{Diagram (b)} + \text{Diagram (c)} - \text{Diagram (d)} \\
 & \text{Diagram (a): } \text{wavy line } g \text{ with } i\omega_n \text{ above it, connecting } \uparrow p, i\nu_e \text{ and } \downarrow q-p, i\nu_{e'} \\
 & \text{Diagram (b): } \text{wavy line } g \text{ connecting } \uparrow \text{ and } \downarrow \\
 & \text{Diagram (c): } \text{wavy line } g \text{ connecting } \uparrow \uparrow \text{ and } \downarrow \downarrow \\
 & \text{Diagram (d): } \text{wavy line } g \text{ connecting } \uparrow \downarrow \text{ and } \downarrow \uparrow \\
 & \text{(2.4.1)}
 \end{aligned}$$

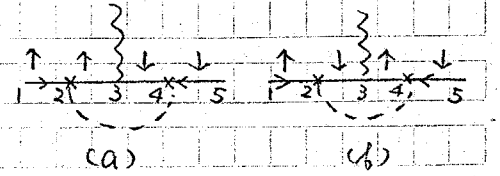
解析的表式では

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p, q-p; i\nu_e, i\nu_{e'}) &= 1 + n_i \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} G(p', i\nu_e) G(q-p', i\nu_{e'}) \Gamma(p', q-p'; i\nu_e, i\nu_{e'}) \\
 & \quad \times v_{\uparrow\uparrow}(p-p') v_{\downarrow\downarrow}(p'-p) \\
 & - n_i \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} G(p', i\nu_e) G(q-p, i\nu_{e'}) \Gamma(p', q-p'; i\nu_e, i\nu_{e'}) \\
 & \quad \times v_{\downarrow\downarrow}(p-p') v_{\uparrow\uparrow}(p'-p) \quad \text{(2.4.2)}
 \end{aligned}$$

(2.4.1) は前節の (2.3.9), (2.3.10) と同様な方程式である。ここで (2.4.1) の右辺第3項の符号が負になることについて説明をする。簡単なダイアグラム

(a), (b) について S 行列の展開式の演算子の部分を取り出し、ダイアグラムに従ってコントラクションを作ってみる

りがわかりやすい。<sup>92)</sup> 右図 (a), (b) で



1 ~ 5 は温度時間を表わし、この順に大

きくなるものとする。(a) の場合、電子

Fig. 2.4.2

演算子の積の平均として

$$\langle a_{\downarrow}^{\dagger}(5) a_{\downarrow}^{\dagger}(4) a_{\downarrow}(4) a_{\downarrow}(3) a_{\uparrow}(3) a_{\uparrow}^{\dagger}(2) a_{\uparrow}(2) a_{\uparrow}^{\dagger}(1) \rangle \quad (2.4.3)$$

が現われる。ただし運動量を表わす添字は現在の議論に関係がないので省略した。(2.4.3) をダイアグラム (a) に対応するようにコントラクションを作って書き換えると

$$\begin{aligned} & - \langle a_{\downarrow}^{\dagger}(5) a_{\downarrow}(4) \rangle \langle a_{\downarrow}^{\dagger}(4) a_{\downarrow}(3) \rangle \langle a_{\uparrow}(3) a_{\uparrow}^{\dagger}(2) \rangle \langle a_{\uparrow}(2) a_{\uparrow}^{\dagger}(1) \rangle \\ & = - \{ \langle T_{\tau} a_{\downarrow}(4) a_{\downarrow}^{\dagger}(5) \rangle \} \{ \langle T_{\tau} a_{\downarrow}(3) a_{\downarrow}^{\dagger}(4) \rangle \} \langle T_{\tau} a_{\uparrow}(3) a_{\uparrow}^{\dagger}(2) \rangle \langle T_{\tau} a_{\uparrow}(2) a_{\uparrow}^{\dagger}(1) \rangle \\ & = - G_{\downarrow}(4,5) G_{\downarrow}(3,4) G_{\uparrow}(3,2) G_{\uparrow}(2,1), \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

である。注意すべきことは、コントラクションを作るために隣り合った電子演算子を1回入れ替えるたびに因子(-1)がかかることである。(b) の場合には

$$\begin{aligned} & \langle a_{\downarrow}^{\dagger}(5) a_{\uparrow}^{\dagger}(4) a_{\downarrow}(4) a_{\downarrow}(3) a_{\uparrow}(3) a_{\downarrow}^{\dagger}(2) a_{\uparrow}(2) a_{\uparrow}^{\dagger}(1) \rangle \\ & = \langle a_{\downarrow}^{\dagger}(5) a_{\downarrow}(4) \rangle \langle a_{\uparrow}^{\dagger}(4) a_{\uparrow}(3) \rangle \langle a_{\downarrow}(3) a_{\downarrow}^{\dagger}(2) \rangle \langle a_{\uparrow}(2) a_{\uparrow}^{\dagger}(1) \rangle \\ & = G_{\downarrow}(4,5) G_{\uparrow}(3,4) G_{\downarrow}(3,2) G_{\uparrow}(2,1) \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

を得る。符号の違いは4位  $t_2$  における演算子のスピンの違いによる。すなわち (a) では  $a_{\downarrow}^{\dagger}(4)$  となっているためコントラクションを作る相手は  $a_{\downarrow}(3)$

であるが、(b)では  $a_{\uparrow}^{\dagger}(4)$  であるから相手は  $a_{\uparrow}(3)$  である。コントラクションを作る際に両者間では電子演算子の入れ替えの回数が1回違うために符号が異なるのである。右図のダイアグラムが

$$\begin{aligned} & \langle a_{\downarrow}^{\dagger}(5) a_{\downarrow}(3) a_{\uparrow}(2) a_{\uparrow}^{\dagger}(1) \rangle \\ & = -G(3,1) G(3,5), \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

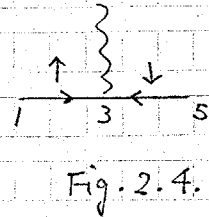


Fig. 2.4.3

となることに注意すれば (2.4.1) が得られる。

前節と同様に緩和時間近似をすると (2.4.2) は  $A_2 = (2\pi N(1_0)\tau_2)^{-1}$  を用いて

$$\begin{aligned} \Gamma(p, q-p; i\nu_e, i\nu_e') & = 1 + A_2 \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} G(p', i\nu_e) G(q-p', i\nu_e') \\ & \quad \times \Gamma(p', q-p'; i\nu_e, i\nu_e'), \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

となる。両辺に  $G(p, i\nu_e) G(q-p, i\nu_e')$  を乗じて積分すると

$$M(q; i\nu_e, i\nu_e') = L_0(q; i\nu_e, i\nu_e') \left\{ 1 + A_2 M(q; i\nu_e, i\nu_e') \right\}, \quad (2.4.8)$$

が得られる。  $L_0$  は (2.3.29) で定義したものと同一で

$$L_0(q; i\nu_e, i\nu_e') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} G(p, i\nu_e) G(q-p, i\nu_e'), \quad (2.4.9)$$

である。(2.4.7) の第2項は  $A_2 M$  であるから (2.4.8) から  $M$  を求めれば  $\Gamma$  が求められる。

$$\Gamma(q; i\nu_e, i\nu_e') = \frac{1}{1 - A_2 L_0(q; i\nu_e, i\nu_e')}. \quad (2.4.10)$$

$\nu_e \nu_e' > 0$  のときは  $L_0(q; i\nu_e, i\nu_e') = 0$  であるから



$$\Gamma(q, i\nu_e, i\nu_e') = 1, \quad \text{for } \nu_e \nu_e' > 0. \quad (2.4.11)$$

$\nu_e \nu_e' < 0$  のときは

$$\begin{aligned} \Gamma(q, i\nu_e, i\nu_e') &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\tau_2} \frac{1}{v_F \bar{q}} \tan^{-1} \left( \frac{v_F \bar{q}}{|\tilde{\nu}_e - \tilde{\nu}_e'|} \right)} \\ &\approx \frac{|\tilde{\nu}_e - \tilde{\nu}_e'|}{|\nu_e - \nu_e'| + \frac{2}{\tau_s} + \frac{1}{3} \frac{1}{\tau_2} \frac{v_F^2 \bar{q}^2}{(|\nu_e - \nu_e'| + \frac{1}{\tau_1})^2}} \\ &\approx \frac{|\tilde{\nu}_e - \tilde{\nu}_e'|}{|\nu_e - \nu_e'| + 2\tau_s^{-1} + D\bar{q}^2} \quad \text{for } \nu_e \nu_e' < 0. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

ただし最後のときは dirty limit を考え、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{1}{\tau_2} \frac{v_F^2 \bar{q}^2}{(|\nu_e - \nu_e'| + \tau_1^{-1})^2} &\approx \frac{1}{3} \frac{\tau_1^2}{\tau_2} v_F^2 \bar{q}^2 \\ &= \frac{\tau_1}{\tau_2} D \bar{q}^2 \\ &\approx D \bar{q}^2, \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

とした。

ここで不純物散乱を緩和時間で近似するときの規則についてまとめておく。この節の議論からわかるように、不純物散乱の破線が異なるスピンの場合、関数を結ぶときはその破線に対応する緩和時間は  $\tau_2$  であり、破線が同じスピンの場合、関数を結ぶときは緩和時間は  $\tau_1$  である。図示すれば次の図のようになる。

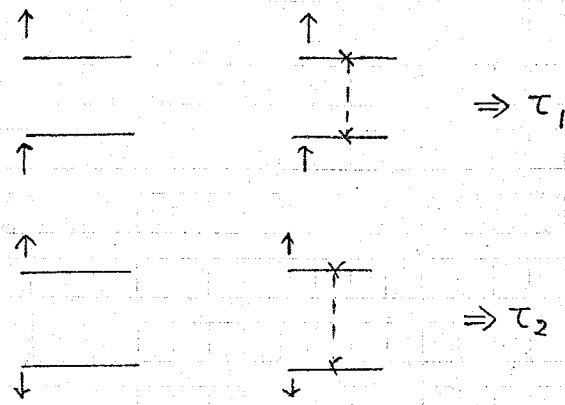


Fig. 2.4.4

次に電流バーテックスに対する不純物散乱の補正を求める。これはのちに電流-電流相関関数を求めて電気伝導率を知る際に必要である。電流演算子はよく知られておる通りに次のような形をしている。

$$\begin{aligned} \hat{j}(r) &= -\frac{e}{2m\hbar} \sum_{\alpha} \left\{ \psi_{\alpha}^{\dagger}(r) \nabla \psi_{\alpha}(r) - (\nabla \psi_{\alpha}^{\dagger}(r)) \psi_{\alpha}(r) \right\} \\ &= \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \hat{j}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

$$\hat{j}(\mathbf{q}) = -\frac{e}{m} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} - \frac{e}{2\sigma} a_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2},\sigma}. \quad (2.4.15)$$

ただし電子電荷は  $-e$  ( $e > 0$ ) としてある。不純物散乱に対して前と同じく梯子近似を用いると、電流バーテックスに対するダイアグラム方程式は次のようになる。

$$\circ = \bullet + \text{triangle diagram} \quad (2.4.16)$$

ただし  $\circ$  は不純物散乱を繰り込んだ電流バーテックスであり、これを  $\hat{J}(\mathbf{q})$  とあらわす。また  $\bullet$  は裸の電流バーテックス (2.4.15) であり、

$$\mathbf{k}^{\dagger} = \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \quad (2.4.17)$$

$$|k^-| = |k| - \frac{\beta}{2}, \quad (2.4.18)$$

$$\varepsilon_m = (2m+1)\pi T, \quad (2.4.19)$$

$$\varepsilon'_m = \varepsilon_m + \omega_n, \quad (2.4.20)$$

$$\omega_n = 2n\pi T \quad (n > 0), \quad (2.4.21)$$

で  $\omega_n$  は外部振動数である。(2.4.16) の解析的表式で

$$\begin{aligned} J(k^+, k^-; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) &= -\frac{e}{m} k + \frac{1}{2\pi N(\omega) \tau_1} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} J(p^+, p^-; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) \\ &\quad \times G(p^+, i\varepsilon'_m) G(p^-, i\varepsilon_m) \\ &= -\frac{e}{m} k + \frac{1}{2\pi N(\omega) \tau_1} \Pi(q; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m). \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

と表わされる。ただし(緩和時間)近似を用いた。ここで

$$\Pi(q; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} J(p^+, p^-; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) G(p^+, i\varepsilon'_m) G(p^-, i\varepsilon_m) \quad (2.4.23)$$

である。(2.4.22) の両辺に  $G(k^+, i\varepsilon'_m) G(k^-, i\varepsilon_m)$  を乗じて  $k$  で積分すると

$$\Pi(q; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) = \left( \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \right) \left\{ -\frac{e}{m} k + \frac{\Pi(q; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m)}{2\pi N(\omega) \tau_1} \right\} G(k^+, i\varepsilon'_m) G(k^-, i\varepsilon_m), \quad (2.4.24)$$

を得る。最初に  $\{ \}$  の第1項に関する積分を計算する。

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k G(k^+, i\varepsilon_m') G(k^-, i\varepsilon_m) \\
& \approx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k \frac{1}{\xi + \frac{k^2}{2m} - i\varepsilon_m'} \frac{1}{\xi - \frac{k^2}{2m} - i\varepsilon_m} \\
& \approx \frac{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} N(0)}{2} \int_{-L}^L d\xi \frac{1}{\xi + \frac{1}{2} v_F \xi \omega_0 - i\varepsilon_m'} \frac{1}{\xi - \frac{1}{2} v_F \xi \omega_0 - i\varepsilon_m} \\
& = \frac{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 2\pi N(0) P_F}{i v_F \xi} \left\{ 1 - \frac{\omega_n + \tau^{-1}}{v_F \xi} \tan^{-1} \frac{v_F \xi}{\omega_n + \tau^{-1}} \right\} \\
& \approx \frac{2\pi N(0) P_F v_F}{3i} \frac{1}{(\omega_n + \tau^{-1})^2} \int \quad \begin{matrix} \tau^{-1} \\ \varepsilon_m' > 0 \\ \varepsilon_m < 0 \end{matrix} \quad (2.4.25)
\end{aligned}$$

ただし  $\xi$  は小さいとし, *dirty limit* を考えた。(2.4.24) の  $\xi$  1 項の第 2 項に関連する部分は

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G(k^+, i\varepsilon_m') G(k^-, i\varepsilon_m) \\
& \approx 2\pi N(0) \frac{1 - \tau_1 D \xi^2}{\omega_n + \tau_1^{-1}} \quad \text{for } \begin{matrix} \varepsilon_m' > 0 \\ \varepsilon_m < 0 \end{matrix}, \quad (2.4.26)
\end{aligned}$$

を用いればよい。この積分の計算は  $L_0$  の計算とほぼ同様である。 $\varepsilon_m' > 0$ ,  $\varepsilon_m < 0$  以外の場合は (2.4.25), (2.4.26) 共にゼロである。以上より

$$\text{II}(\xi; i\varepsilon_m', i\varepsilon_m) = -\frac{e}{m} \frac{2\pi N(0) P_F v_F}{3i} \frac{1}{\omega_n + \tau_1^{-1}} \frac{1}{\omega_n + D \xi^2} \int, \quad (2.4.27)$$

が得られ, さらに

$$\text{J}(k^+, k^-; i\varepsilon_m', i\varepsilon_m) = -\frac{e}{m} \left\{ k + \frac{1}{\omega_n + D \xi^2} \frac{P_F v_F}{3i} \frac{1}{1 + \tau_1 \omega_n} \right\}$$

$$= -\frac{e}{m} \left\{ k + \frac{1}{\omega_n + p q^2} \frac{p V_F}{3i} \right\}$$

$$\text{for } \varepsilon_n' > 0, \varepsilon_n < 0, \quad (2.4.28)$$

が得られる。また

$$J(k^+, k^-; i\varepsilon_n', i\varepsilon_n) = -\frac{e}{m} k \quad \text{for } \varepsilon_n' < 0 \text{ or } \varepsilon_n > 0 \quad (2.4.29)$$

である。ただしこの計算では散乱緩和時間 $\tau_s$ と輸送緩和時間 $\tau_{tr}$ は等しいと仮定した。この仮定は散乱が等方的であることを意味する。

ベクトルポテンシャル $A$ と電子系との相互作用は $A$ の1次で $jA$ であり、スカラーポテンシャル $\phi$ と電子系との相互作用は $-e\phi\rho$ である。ただし $\rho$ は電子密度、 $-e\rho$ は電荷密度である。今度は電荷密度のバーテックスに対する不純物散乱の補正を考えよう。相互作用は

$$-e\phi(r)\psi^\dagger(r)\psi(r) = -e \sum_{\mathbf{q}} \phi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}^\dagger a_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}}, \quad (2.4.30)$$

である。不純物散乱を絡り込んだバーテックス $J_0$ の方程式は(2.4.16)と同じである。解析的表式では

$$J_0(k^+, k^-; i\varepsilon_n', i\varepsilon_n) = -e + \frac{1}{2\pi N^{(0)}\tau_1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} J_0(p^+ p^-; i\varepsilon_n', i\varepsilon_n)$$

$$\times G(p^+, i\varepsilon_n') G(p^-, i\varepsilon_n)$$

$$\equiv -e + \frac{1}{2\pi N^{(0)}\tau_1} I_0(\mathbf{q}; i\varepsilon_n', i\varepsilon_n). \quad (2.4.31)$$

ただし

$$I_0(\mathbf{q}; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} J_0(\mathbf{p}^+, \mathbf{p}^-; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) G(\mathbf{p}^+, i\varepsilon'_m) G(\mathbf{p}^-, i\varepsilon_m), \quad (2.3.42)$$

であり, 緩和時間近似を用いた. (2.3.41) の両辺に  $G(\mathbf{k}^+, i\varepsilon'_m) G(\mathbf{k}^-, i\varepsilon_m)$  を乗じて  $\mathbf{k}$  の積分すれば  $I_0$  に関する方程式

$$I_0(\mathbf{q}; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) = \left(1 + \frac{I_0(\mathbf{q}; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m)}{2\pi N(0)\tau_1}\right) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G(\mathbf{k}^+, i\varepsilon'_m) G(\mathbf{k}^-, i\varepsilon_m), \quad (2.3.43)$$

が得られる. (2.4.33) に現われる積分は既に (2.4.26) で求めた.

$$I_0(\mathbf{q}; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) = 2\pi N(0) \frac{1 - \tau_1 D q^2}{\omega_n + D q^2} \quad \text{for } \varepsilon_m \varepsilon'_m < 0. \quad (2.3.44)$$

$$\therefore J_0(\mathbf{q}; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) = -e \frac{\omega_n + \tau_1^{-1}}{\omega_n + D q^2} \quad \text{for } \varepsilon_m \varepsilon'_m < 0. \quad (2.3.45)$$

$\varepsilon_m \varepsilon'_m > 0$  のときは  $J_0 = -e$  である.

以上, 電流バーテックスと電荷バーテックスをまとめて次のように書ける.

$$J(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^-; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) = \begin{cases} -\frac{e}{m} \mathbf{k} & \varepsilon_m \varepsilon'_m > 0 \\ -\frac{e}{m} \left\{ \mathbf{k} + \frac{P_F V_F}{3i} \frac{\mathbf{q}}{\omega_n + D q^2} \right\} & \varepsilon_m \varepsilon'_m < 0 \end{cases}, \quad (2.4.36)$$

$$J_0(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^-; i\varepsilon'_m, i\varepsilon_m) = \begin{cases} -e & \varepsilon_m \varepsilon'_m > 0 \\ -e \frac{\omega_n + \tau_1^{-1}}{\omega_n + D q^2} & \varepsilon_m \varepsilon'_m < 0 \end{cases}. \quad (2.4.37)$$

ただし計算の途中で  $\mathcal{P}, \omega_n$  の高次項を無視しているのど、上式は  $\mathcal{P} \rightarrow 0$ ,  $\omega_n \rightarrow 0$  の漸近形とみるべきである。

次に (2.4.36), (2.4.37) で与えられる不純物散乱と絡り込んだ電流及び電荷バーテックスが *generalized Ward identity* (GWI)<sup>93,94</sup> を満足することを確認する。GWI が成立すれば、グリーン関数の自己エネルギーに対する近似とバーテックスに対するそれとがコンシステントであることが知られる。GWI は次の形をしている。

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^3 g_{\nu} J_{\nu}(k^+, k^-; i\varepsilon_m', i\varepsilon_m) - i\omega_n J_0(k^+, k^-; i\varepsilon_m', i\varepsilon_m) \\ = -e \left\{ G^{-1}(k^-, i\varepsilon_m) - G^{-1}(k^+, i\varepsilon_m') \right\} \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

ここで  $g_{\nu}, J_{\nu}$  はそれぞれ  $\mathcal{P}, \mathcal{J}$  の第  $\nu$  成分である。

2つの場合に分けて調べよう。

(i)  $\varepsilon_m' / \varepsilon_m > 0$  の場合

$$\left\{ (2.4.38) \text{ の左辺} \right\} = -e \left( \frac{k^{\mathcal{P}}}{m} - i\omega_n \right). \quad (2.4.39)$$

$$\begin{aligned} \left\{ (2.4.38) \text{ の右辺} \right\} &= -e \left\{ i\tilde{\varepsilon}_m - \frac{(k - \frac{\mathcal{P}}{2})^2}{2m} - i\tilde{\varepsilon}_m' + \frac{(k + \frac{\mathcal{P}}{2})^2}{2m} \right\} \\ &= -e \left( \frac{k^{\mathcal{P}}}{m} - i\omega_n \right). \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

よって GWI は成立している。

(ii)  $\varepsilon_m' / \varepsilon_m < 0$  の場合

$$\begin{aligned} \left\{ (2.4.38) \text{ の右辺} \right\} &= -e \left( \frac{k^{\mathcal{P}}}{m} + \frac{\mathcal{P}V_F}{3mi} \frac{1}{\omega_n + \mathcal{P}q^2} - i\omega_n \frac{\omega_n + \tau_1^{-1}}{\omega_n + \mathcal{P}q^2} \right) \\ &= -e \left\{ \frac{k^{\mathcal{P}}}{m} - i(\omega_n + \frac{1}{\tau_1}) + i\mathcal{P}q^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

$$\begin{aligned}
 \{(2.4.38) \text{の右辺}\} &= -e \left\{ i\tilde{\varepsilon}_m - \frac{(k-\frac{\beta}{2})^2}{2m} - i\tilde{\varepsilon}_m' + \frac{(k+\frac{\beta}{2})^2}{2m} \right\} \\
 &= -e \left\{ \frac{k\beta}{m} - i\left(\omega_n + \frac{1}{\tau_1}\right) \right\} \quad (2.4.42)
 \end{aligned}$$

よって  $\beta \rightarrow 0$  の極限での WI が成立している。

(i), (ii) より空間的に一様な場に対する応答を問題にするときは不純物散乱を繰り込んだバーテックスとして (2.4.36), (2.4.37) を用いればよいことが示された。



## §2.5 電気伝導率を求めるための方法

ミクロな立場から電気伝導率を求めるには Kubo<sup>95)</sup>による線型応答の理論を応用するがよい。線型応答の理論によれば電気伝導率  $\sigma_{\mu\nu}(\omega)$  は次のように表わされる。

$$\sigma_{\mu\nu}(\omega) = - \frac{Q_{\mu\nu}^R(\omega) - Q_{\mu\nu}^R(0)}{i\omega}, \quad (2.5.1)$$

$$Q_{\mu\nu}^R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt Q_{\mu\nu}^R(t) \exp(i\omega t - \delta t), \quad (2.5.2)$$

$$Q_{\mu\nu}^R(t) = -i\theta(t) \langle [j_{\mu}(t), j_{\nu}(0)] \rangle, \quad (2.5.3)$$

$$j_{\nu}(t) = \exp(i\mathcal{H}t) j_{\nu} \exp(-i\mathcal{H}t). \quad (2.5.4)$$

ただし、 $\theta(t)$  は階段関数で

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad (2.5.5)$$

$\delta$  は計算ののちに  $\delta \rightarrow +0$  とするパラメータで、無限の過去に系が熱平衡状態にあったことを保証するものである。また  $j_{\nu}$  は  $j_{\nu}(\mathbf{r})$  の  $\mathbf{r} = 0$  の成分である。上の公式は電場をベクトルポテンシャルで導入したときに得られる式であるが、伝導率とは、通常の場合、空間的に一様な電場に対するものを指すから、最初からベクトルポテンシャルは空間的に一様としてよい。これに対して電場をスカラーポテンシャルで導入した場合には、伝導率は  $j_{\nu}$  と  $-e\psi$  との遅延相関関数の  $\mathbf{r}$  の 1 次の係数で  $\omega \rightarrow 0$  としたものから求められる。すぐ後に述べるように遅延相関関数は対応する温度グリーン関数から解析接続で求められるが、温度グリーン関数の振動数は離散的な値をとるので、最初から振動数をゼロとすることはできない。不純物散乱と絡り込んだ電流及び電荷パーテックスの式 (2.4.36), (2.4.37) を参照すれば最初から  $\mathbf{r} = 0$  とおけるベクトルポテンシ

ヌル法が計算を簡単にする：とわかる。以下ではベクトルポテンシャル法を用いる。

超伝導体の電場に対する応答を調べるときに、電場をスカラーポテンシャルと導入すると、いわゆる Gor'kov - Eliashberg singularity<sup>96)</sup> (28, 97~100) に関する面倒な問題が生ずることがある。

今までの議論により、電気伝導率を知るには  $Q^R(\omega)$  を求めればよいことがわかった。 $Q^R(\omega)$  は対応する温度グリーン関数

$$Q(\tau) = -\langle T_\tau \hat{j}(\tau) \hat{j}(0) \rangle \quad (2.5.6)$$

の Fourier 変換  $Q(i\omega_n)$  から

$$Q^R(\omega) = Q(\omega + i\delta) \quad \delta \rightarrow +0 \quad (2.5.7)$$

なる解析接続で求めることができる。(Abrikosov-Gor'kov-Dzyaloshinskii-Fradkin の定理<sup>101, 102</sup>)。次節以降で  $Q(i\omega_n)$  を計算する。

§2.6 Aslamazov-Larkin 過程

前節の議論により Cooper pair (そのグリーン関数は  $D$  である。) が存在することを考慮に入れて  $Q(i\omega_n)$  を求めればよいことがわかった。ゆらぎ伝導率の議論では  $D$  を最低個数含むものを考慮するのがふつうである。これは超伝導体では平均場近似が非常に良いので、ゆらぎを考慮に入れる場合でもその最低次だけを取り入れれば十分であると考えられることによる。

$Q(i\omega_n)$  のダイアグラムには2つのタイプがある。(a)のタイプのもは Aslamazov-Larkin<sup>6,7)</sup> (AL) ダイアグラム, (b), (c), (d)のタイプのもは Maki<sup>12,13)</sup> ダイアグラムと呼ばれる。図で実線は  $G$ , 波線は  $D$  をあらわす。

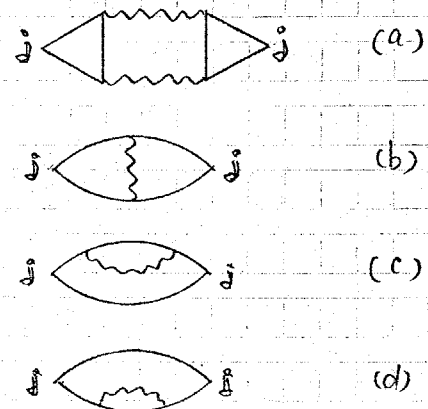


Fig. 2.6.1

この節では AL ダイアグラムによる伝導率を計算する。(a)のダイアグラムを詳しく書くと次のようになる。

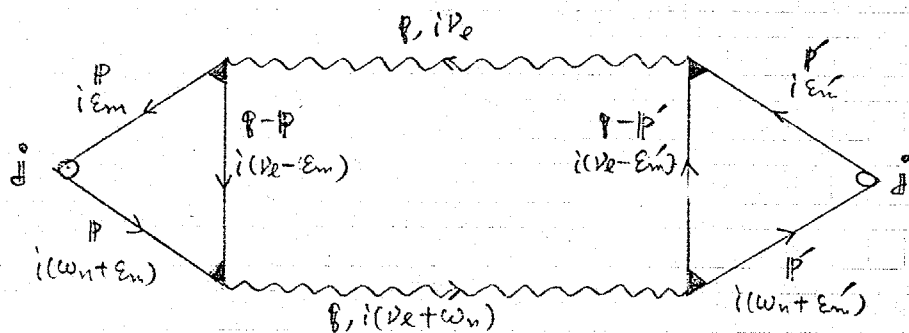


Fig. 2.6.2

図のダイアグラムで白丸は不純物散乱を繰り込んだ電流バーテックス (2.4.36), 黒い三角形は不純物散乱を繰り込んだ相互作用バーテックス (2.4.12) である。このダイアグラムの  $Q(i\omega_n)$  への寄与を  $Q_{AL}(i\omega_n)$  と書くと

$$Q_{AL, \alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{4e^2}{m^2} T^3 \sum_{\epsilon_m, \epsilon_m'} \sum_{\nu, \nu'} \rho_{\alpha} \rho'_{\beta} GGG\Gamma\Gamma DDGGGPP \quad (2.6.1)$$

である。見やすくするためのグリーン関数やパーテックス関数の変数を省略した。係数4は電子のスピンを考慮したものである。(下図参照)

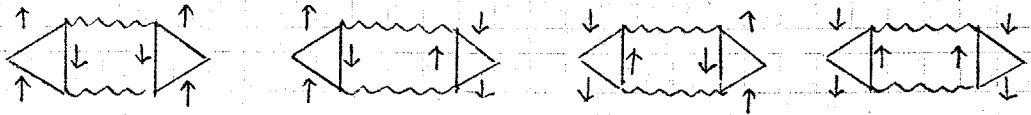


Fig. 2.6.3

また表頭の負号はS行列を展開する際に現れるものである。(Appendix B)

左側の三角形の部分と  $\mathbb{C}$  と書くことにする。

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(q; i\omega_n, i\nu_e) &= \int \text{triangle diagram} \\ &= T \sum_{\epsilon_m} \sum_{\mathbf{p}} \rho G(\mathbf{p}, i\epsilon_m) G(\mathbf{p}, i(\omega_n + \epsilon_m)) G(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i(\nu_e - \omega_n)) \\ &\quad \times \Gamma(\mathbf{q}; i\epsilon_m, i(\nu_e - \epsilon_m)) \Gamma(\mathbf{q}; i(\omega_n + \epsilon_m), i(\nu_e - \epsilon_m)) \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

$\mathbb{C}(q; i\omega_n, i\nu_e)$  を  $\mathbb{C}(q; 0, 0)$  に近似し、 $\mathbb{C}(q)$  と書くと

$$\mathbb{C}(q) = T \sum_{\epsilon_m} \sum_{\mathbf{p}} \rho G^2(\mathbf{p}, i\epsilon_m) G(\mathbf{q} - \mathbf{p}, -i\epsilon_m) \Gamma^2(\mathbf{q}; i\epsilon_m, -i\epsilon_m) \quad (2.6.3)$$

まず  $\rho$  項を計算するが、小さな  $\beta$  が重要である。

$$G(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\epsilon_m) \approx -\frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}) + i\tilde{\epsilon}_m} - \frac{\frac{1}{m} \rho \mathbf{q} \cos\theta}{(\epsilon(\mathbf{q}) + i\tilde{\epsilon}_m)^2} \quad (2.6.4)$$

$$\begin{aligned}
& \therefore \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p G^2(p, i\epsilon_m) G(q-p, -i\epsilon_m) \\
& \approx -\frac{N(0)}{m} \oint \int d\xi \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{1}{(\xi - i\tilde{\epsilon}_m)^2} \frac{1}{(\xi + i\tilde{\epsilon}_m)^2} p^2 \cos^2\theta \\
& \approx -\frac{N(0) p_F^2}{3m} \oint \int d\xi \frac{1}{(\xi - i\tilde{\epsilon}_m)^2} \frac{1}{(\xi + i\tilde{\epsilon}_m)^2} \quad (2.6.5)
\end{aligned}$$

この式に含まれる積分は被積分関数を部分分数に分解し、複素積分を応用して求められる。

$$\int d\xi \frac{1}{(\xi - i\tilde{\epsilon}_m)^2} \frac{1}{(\xi + i\tilde{\epsilon}_m)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{|\tilde{\epsilon}_m|^3} \quad (2.6.6)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathcal{E}(q) &= -\frac{N(0) p_F^2}{3m} \frac{\pi}{2} \oint T \sum_{\epsilon_m} \frac{1}{|\tilde{\epsilon}_m|^3} \left( \frac{|2\tilde{\epsilon}_m|}{|2\tilde{\epsilon}_m + Dq^2 + 2\tau_s^{-1}|} \right)^2 \\
&= -\frac{N(0) p_F^2}{24\pi^2 T^2 m} \oint \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2} + \frac{Dq^2}{4\pi T} + \rho_s\right)} \frac{1}{m + \frac{1}{2} + \rho_1} \\
&= -\frac{N(0) p_F^2}{24\pi^2 T^2 m} \oint \left[ \frac{1}{\rho_1 - \rho_s - \frac{Dq^2}{4\pi T}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{Dq^2}{4\pi T}\right)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\left(\rho_1 - \rho_s - \frac{Dq^2}{4\pi T}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m + \frac{1}{2} + \rho_1} - \frac{1}{m + \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{Dq^2}{4\pi T}} \right\} \right] \\
&= -\frac{N(0) p_F^2}{24\pi^2 T^2 m} \oint \frac{1}{\rho_1 - \rho_s - \frac{Dq^2}{4\pi T}} \left[ 4^{(1)} \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{Dq^2}{4\pi T} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{\rho_1 - \rho_s - \frac{Dq^2}{4\pi T}} \left\{ 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{Dq^2}{4\pi T} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_1 \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\approx -\frac{N(0) p_F^2}{24\pi^2 T^2 m} \frac{1}{p_1} \chi^{(1)} \left( \frac{1}{2} + p_s + \frac{Dg^2}{4\pi T} \right) g \quad (2.6.7)$$

ただし

$$p_1 = \frac{1}{4\pi T \tau_1} \quad (2.6.8)$$

$$p_s = \frac{1}{2\pi T \tau_s} \quad (2.6.9)$$

であり、最後の $\tau$ は3で *dirty limit* をとった。

Fig. 2.6.2 の右側の三角形も左側のそれと同じく  $\mathcal{C}(q)$  の値をもつことは明らかである。これを用いれば (2.7.1) は次のように書き換えられる。

$$Q_{AL,d\beta}(i\omega_n) = -T \sum_{\nu\ell} \sum_q \left\{ -\frac{2e}{m} \mathcal{C}_\alpha(q) \right\} \left\{ -\frac{2e}{m} \mathcal{C}_\beta(q) \right\} \\ \times \mathcal{D}(q, i\nu\ell) \mathcal{D}(q, i(\nu\ell + \omega_n)) \quad (2.6.10)$$

この式から  $(-2e/m) \mathcal{C}(q)$  は Cooper pair の電流バーテックスと見なすことができる。この Cooper pair の電流バーテックスが Cooper pair のグリーン関数とコンシステントであることを、GWI (generalized Ward identity) を調べることにより確かめよう。GWI は (2.4.38) に記したが、運動量の記号を現在の議論に合うように書き換えて再記する。

$$pJ(q^+, q^-) = -e \left\{ G^-(q^-, i\nu\ell) - G^-(q^+, i\nu\ell) \right\} \quad (2.6.11)$$

$p$  は外部運動量である。電流バーテックスは考慮していないので、これを省き、外部振動数をゼロにした。  $\mathcal{C}(q)$  の表式は外部運動量がゼロの場合のものであることを考慮して、(2.6.11) の右辺を  $|p| \rightarrow 0$  で展開する。

$$\langle \Psi | J(\varphi^+, \varphi^-) = e \frac{\partial G^{-1}(\varphi, 0)}{\partial \varphi} | \Psi \rangle \quad (2.6.12)$$

$$\therefore J(\varphi) = e \frac{\partial G^{-1}(\varphi, 0)}{\partial \varphi} \quad (2.6.13)$$

(2.6.13) は Cooper pair の場合に即して言えば、電荷が  $-2e$  であることに注意して

$$-\frac{2e}{m} D(\varphi) = 2e \frac{\partial D^{-1}(\varphi, 0)}{\partial \varphi} \quad (2.6.14)$$

である。

$$\begin{aligned} \left\{ (2.6.14) \text{の左辺} \right\} &= -\frac{2e}{m} \left\{ -\frac{N(0) \rho_F^2}{24\pi^2 m} \frac{1}{\rho_1} \psi^{(4)} \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D\varphi^2}{4\pi T} \right) \varphi \right\} \\ &= \frac{N(0)eD}{\pi T} \psi^{(4)} \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D\varphi^2}{4\pi T} \right) \varphi \quad (2.6.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ (2.6.14) \text{の右辺} \right\} &= 2eN(0) \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D\varphi^2}{4\pi T} \right) \\ &= \frac{N(0)eD}{\pi T} \psi^{(4)} \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D\varphi^2}{4\pi T} \right) \varphi \quad (2.6.16) \end{aligned}$$

よって (2.6.14) が成り立つことが示され、Cooper pair の電流バーテックスとグリーン関数とが一致していることが検証された。ただし、ここでは  $D(\varphi, i\nu_2)$  として (2.3.52) の形

$$D(\varphi, i\nu_2) = \frac{1}{N(0)} \frac{1}{\eta_0 + \psi \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D\varphi^2}{4\pi T} + \frac{i\nu_2}{4\pi T} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right)} \quad (2.6.17)$$

を用いた。この式の分母を小さな  $q^2$ ,  $\nu_e$  について展開した (2.3.69) の形

$$D(q, \nu_e) = \frac{1}{N(\nu_e)} \frac{1}{\alpha + \lambda q^2 + \lambda_0 |\nu_e|} \quad (2.6.18)$$

に対しては

$$-\frac{2e}{m} \mathcal{C}(q) = \frac{N(\nu_e) D}{\pi T} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \beta_s\right) q \quad (2.6.19)$$

が GWI を満足する電流バーテックスになる。(2.6.19) は (2.6.7) を小さな  $q$  について展開し,  $q$  の 1 次の項のみを残したものに他ならない。以下の計算では (2.6.18) と (2.6.19) の組み合わせを用いる。これは  $Q$  を求める際に小さな  $q$  からの寄与が主要部分であるためである。

$Q$  は (2.6.10) から計算すればよく,  $\nu_e$  に関する和から実行する。この和は

$$S \equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\nu_e| + \chi} \frac{1}{|\nu_e + \omega_n| + \chi} \quad (2.6.20)$$

の形をしている。ただし  $\nu_e = 2l\pi T$ ,  $\omega_n = 2n\pi T$ ,

$$\chi = \frac{\alpha + \lambda q^2}{\lambda_0} \quad (2.6.21)$$

である。絶対値が含まれているので和の範囲を3つに分ける。 $\omega_n$  は計算の都合に  $i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta$  ( $\delta \rightarrow +0$ ) と解析接続するので、 $\omega_n > 0$  と考えておけばよい。

	① $l \geq 1$	② $-n \leq l \leq 0$	$l \leq n-1$
$ \nu_e $	$\nu_e$	$-\nu_e$	$-\nu_e$
$ \nu_e + \omega_n $	$\nu_e + \omega_n$	$\nu_e + \omega_n$	$-\nu_e - \omega_n$

Tab. 2.6.1



$$\begin{aligned}
 S_1 &\equiv \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_l + \alpha} \frac{1}{\nu_l + \omega_n + \alpha} \\
 &= \frac{1}{2\pi T \omega_n} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{l + \frac{\alpha}{2\pi T}} - \frac{1}{l + \frac{\omega_n + \alpha}{2\pi T}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi T \omega_n} \left\{ \psi\left(1 + \frac{\omega_n + \alpha}{2\pi T}\right) - \psi\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi T}\right) \right\} \quad (2.6.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 &\equiv \sum_{l=-n}^0 \frac{1}{-\nu_l + \alpha} \frac{1}{\nu_l + \omega_n + \alpha} \\
 &= \frac{1}{\omega_n + 2\alpha} \sum_{m=0}^n \left\{ \frac{1}{\nu_m + \alpha} + \frac{1}{-\nu_m + \omega_n + \alpha} \right\} \\
 &= \frac{2}{\omega_n + 2\alpha} \frac{1}{2T} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m + \frac{\alpha}{2\pi T}} \\
 &= \frac{2}{\omega_n + 2\alpha} \frac{1}{2T} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m + \frac{\alpha}{2\pi T}} - \frac{1}{m+1 + \frac{\omega_n + \alpha}{2\pi T}} \right\} \\
 &= \frac{2}{\omega_n + 2\alpha} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\omega_n + 2\alpha} \frac{1}{\pi T} \left\{ \psi\left(1 + \frac{\omega_n + \alpha}{2\pi T}\right) - \psi\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi T}\right) \right\} \\
 &\quad (2.6.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_3 &\equiv \sum_{l=-\infty}^{-n-1} \frac{1}{-\nu_l + \alpha} \frac{1}{-\nu_l - \omega_n + \alpha} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_m + \omega_n + \alpha} \frac{1}{\nu_m + \alpha} = S_1 \quad (2.6.34)
 \end{aligned}$$

$$\therefore S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$= \frac{2}{(\omega_n + 2\alpha)\alpha} + \frac{1}{\pi T} \left\{ \frac{1}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n + 2\alpha} \right\} \left\{ 4 \left( 1 + \frac{\omega_n + \alpha}{2\pi T} \right) - 4 \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi T} \right) \right\} \quad (2.6.25)$$

伝導率を求めるために必要であるのは  $\omega_n$  の 1 次の項である。S 以外に  $\omega_n$  を含む部分はないから S を  $\omega_n$  に関して展開すると

$$S = \text{const.} + \left[ -\frac{1}{2\alpha^3} + \frac{\psi^{(1)}(1)}{4\pi^2 T^2} \frac{1}{\alpha} + \frac{\psi^{(2)}(1)}{8\pi^3 T^3} \right] \omega_n + O(\omega_n^2) \quad (2.6.26)$$

を得る。[ ] 内の第 3 項は  $\alpha$  を含まないので、この項からの寄与は renormalized reduced temperature  $\alpha$  を含まず、臨界異常を示すことはない。[ ] 内の第 1 項と第 2 項とは当然前者の方が臨界異常性が強いと予想される。

次に  $\beta$  に関する和をとるのであるが、この際に超伝導体の次元数に注意する必要がある。Cooper pair の振がりの程度を表わすコヒーレンスの長さは  $10^{-4}$  cm のオーダーであるから、これより薄い厚さをもつ超伝導体は 2 次元であると見なさなければならぬ。一方、電子の振がりは  $10^{-8}$  cm のオーダーであるから、電子に関しては 3 次元であり、Cooper pair に関しては 2 次元であるというような薄膜が存在する。同様にワイヤー状の 1 次元超伝導体も考えることができる。以下で単に次元と言えば、Cooper pair に対する次元を指すものとする。なお、今までの計算では電子に関してはすべて 3 次元であるとして扱ってきた。

各次元の場合について  $Q$  を計算し、伝導率を求めよう。  $Q$  は対角成分のみがゼロではないので  $Q_{\alpha\beta} = Q\delta_{\alpha\beta}$  である。

$$\begin{aligned}
Q_{AL}(i\omega_n) &= Q_{AL}(0) + \omega_n \left\{ \frac{N(0)eD}{\pi T} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_s\right) \right\}^2 T \frac{1}{N(0)^2} \frac{1}{\lambda_0^2} \\
&\times \sum_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left\{ \frac{\delta x^2}{2x^3} - \frac{\psi^{(1)}(1)}{4\pi^2 T^2} \sum_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{\delta x^2}{x} - \frac{\psi^{(2)}(1)}{8\pi^3 T^3} \sum_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \delta x^2 \right\} + O(\omega_n^2) \\
&= Q_{AL}(0) + \omega_n \cdot 16e^2 D^2 T \left[ \sum_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{\delta x^2}{2x^3} - \frac{\psi^{(1)}(1)}{4\pi^2 T^2} \sum_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{\delta x^2}{x} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\psi^{(2)}(1)}{8\pi^3 T^3} \sum_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \delta x^2 \right] + O(\omega_n^2) \quad (2.6.27)
\end{aligned}$$

解析接続の手續きと (2.5.1) とを考えると (2.6.27) の  $\omega_n$  の係数が伝導率であることがわかる。まず [ ] 内の第1項を考え、この項からの伝導率への寄与を  $Q_{AL}$  と書く。

3次元の場合

$$\begin{aligned}
(3) \quad Q_{AL} &= 16e^2 D^2 T \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{6} \frac{\lambda_0^3 \mathbf{p}^2}{(d + \lambda \mathbf{p}^2)^3} \\
&= 16e^2 D^2 T \cdot \frac{1}{64\pi} \frac{\lambda_0^3}{\lambda^{5/2}} \frac{1}{\sqrt{d}} \\
&= \frac{e^2 \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_s\right)}{16\pi^2 \xi(0)} \frac{1}{\sqrt{d}} \quad (2.6.28)
\end{aligned}$$

[ = ]

$$\xi(0) = \sqrt{\lambda} \quad (2.6.29)$$

である。

2次元の場合

$$\begin{aligned}
 \rho_{AL}^{(2)} &= 16e^2 D^2 T \frac{1}{d} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{4} \frac{\lambda_0^3 q^2}{(d + \lambda q^2)^3} \\
 &= 16e^2 D^2 T \frac{1}{32\pi d} \frac{\lambda_0^3}{\lambda^2} \frac{1}{d} \\
 &= \frac{e^2 \chi^{(4)}(\frac{1}{2} + \rho_s)}{8\pi^2 d} \frac{1}{d} \quad (2.6.29)
 \end{aligned}$$

ただし  $d$  は薄膜の厚さである。

1次元の場合

$$\begin{aligned}
 \rho_{AL}^{(1)} &= 16e^2 D^2 T \frac{1}{S} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\lambda_0^3 q^2}{(d + \lambda q^2)^3} \\
 &= 16e^2 D^2 T \frac{\lambda_0^3}{32S \lambda^{3/2}} \frac{1}{d^{3/2}} \\
 &= \frac{e^2 \chi^{(4)}(\frac{1}{2} + \rho_s)}{8\pi S} \frac{1}{d^{3/2}} \quad (2.6.30)
 \end{aligned}$$

次に厚さ  $d$  が大きい「厚い薄膜」について考える。このとき、厚さ方向 ( $z$  方向とする) の運動量については離散的な和をとらなければならぬ。ここで注意すべきことは波動関数の境界条件である。通常はサイクリックな境界条件を採用するので

$$q_z = \frac{2n\pi}{d} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.6.31)$$

であるが、ここで採るべき境界条件は薄膜の表面で波動関数がゼロであるとい

うものである。この状況は、無限に深い井戸型ポテンシャルの場の中にある1次元粒子の運動の場合と全く同じであって、

$$g_z = \frac{n\pi}{d} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2.6.32)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \sigma_{AL}^{(2,3)} &= 16e^2 D^2 T \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{\lambda_0^3 g_z^2}{(\alpha + \lambda g^2 + \lambda g_z^2)^3} \\ &= 16e^2 D^2 T \frac{\lambda_0^3}{16\pi d \lambda^3} \frac{d^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{d^2 \alpha}{\pi^2 \lambda}} \\ &= 16e^2 D^2 T \frac{\lambda_0^3}{16\pi d \lambda^3} \frac{d^2}{\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2 \sqrt{\lambda}}{2d\sqrt{\alpha}} \coth \frac{d\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\pi^2 \lambda}{2d^2 \alpha} \right\} \\ &= \sigma_{AL}^{(2)} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\sqrt{\alpha}}{\xi(0)} \coth \frac{d\sqrt{\alpha}}{\xi(0)} + 1 \right\} \quad (2.6.33) \end{aligned}$$

を得る。変形の途中で和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \coth \pi\alpha + \frac{1}{2\alpha^2} \quad (2.6.34)$$

を用いた。

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \coth \alpha = 1 \quad (2.6.35)$$

$$\alpha \coth \alpha \sim \alpha \quad (\alpha \rightarrow \infty) \quad (2.6.36)$$

を考慮すれば (2.6.30) は  $d\sqrt{\alpha}/\xi(0) \rightarrow 0$  での  $\sigma_{AL}^{(2)}$  に, また  $d\sqrt{\alpha}/\xi(0) \rightarrow \infty$  での  $\sigma_{AL}^{(3)}$  にそれぞれ帰着することが容易に確かめられる. (したがって AL 層に関する限りは, 体系が 2 次元的であるか, 3 次元的であるかの区別は膜の厚さ  $d$  と, 温度依存性をもつコヒーレンスの長さ  $\xi(T) = \xi(0)/\sqrt{\alpha}$  の 2 つの量の大小で判定すべきである.

以上で (2.6.27) の [ ] 内の第 1 項からの伝導率への寄与の計算が終わった. 次に同式の [ ] 内第 2 項からの寄与を計算する. この寄与を  $\sigma_a$  と書くことにする.

$$\begin{aligned} \sigma_a^{(3)} &= -16e^2 D^2 T \frac{\psi^{(4)}(1)}{4\pi^2 T^2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{3} \frac{\lambda_0 q^2}{d + \lambda q^2} \\ &= -16e^2 D^2 T \frac{\psi^{(4)}(1)}{4\pi^2 T^2} \frac{\lambda_0}{12\pi^2 \lambda} \left\{ \frac{1}{3} Q_c^2 - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} \right\}. \quad (2.6.37) \end{aligned}$$

ただし  $Q_c$  は多量種の発散を防ぐ upper cut off で,  $\xi(0)$  よりも短い長さでの状態の変化はありえないと考えて

$$Q_c = \frac{1}{\xi(0)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.6.38)$$

とするのが適当であろう. (2.6.37) は明らかに臨界異常性をもたない.

2次元の場合は

$$\begin{aligned} \sigma_a^{(2)} &= -16e^2 D^2 T \frac{\psi^{(4)}(1)}{4\pi^2 T^2} \frac{1}{d} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \frac{\lambda_0 q^2}{d + \lambda q^2} \\ &= -16e^2 D^2 T \frac{\psi^{(4)}(1)}{32\pi^3 T^2 d} \frac{\lambda_0}{\lambda^2} d \ln \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad (2.6.39) \end{aligned}$$

となり, やはり臨界異常性はない.

1次元の場合は

$$\begin{aligned}\sigma_a^{(1)} &= -16e^2 D^2 T \frac{\psi''(1)}{4\pi^2 T^2} \frac{1}{S} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\lambda_0 \varphi^2}{\alpha + \lambda \varphi^2} \\ &= -16e^2 D^2 T \frac{\psi''(1)}{4\pi^2 T^2} \frac{1}{2\pi S} \frac{\lambda_0}{\lambda} \left\{ Q_c - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} \right\}, \quad (2.8.40)\end{aligned}$$

が得られ、この場合も臨界異常性はない。

以上より AL 過程からの伝導率への寄与は  $\sigma_{AL}$  である。もう一度各次元の場合について  $\sigma_{AL}$  の表式を書いておこう。

$$\sigma_{AL}^{(3)} = \frac{e^2 \psi''(\frac{1}{2} + p_s)}{16\pi^2 \xi(0)} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \quad (2.6.41)$$

$$\sigma_{AL}^{(2)} = \frac{e^2 \psi''(\frac{1}{2} + p_s)}{8\pi^2 d} \frac{1}{\alpha}. \quad (2.6.42)$$

$$\sigma_{AL}^{(1)} = \frac{e^2 \xi(0) \psi''(\frac{1}{2} + p_s)}{8\pi S} \frac{1}{\alpha^{3/2}}. \quad (2.6.43)$$

$$\sigma_{AL}^{(2,3)} = \sigma_{AL}^{(2)} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\sqrt{\alpha}}{\xi(0)} \coth \frac{d\sqrt{\alpha}}{\xi(0)} + 1 \right\} \quad (2.6.44)$$

## § 2.7 Maki 過程

Fig. 2.6.1 の (b), (c), (d) のダイアグラムに対応するものが Maki 過程である。もう一度 Maki 過程のダイアグラムを描いておくが、(a), (b), (c) 3種のダイアグラムに加えて、(d), (e) のような不純物散乱の入ったダイアグラムが存在する。

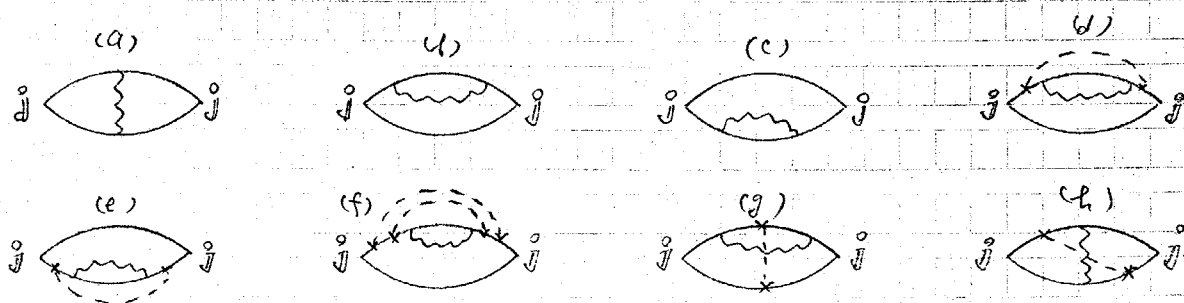


Fig. 2.7.1

(d), (e) のような不純物散乱は、電子グリーン関数、相互作用バーテックス及び電流バーテックスへの不純物散乱の線り込みに含まれていないことは明らかである。(d), (e) と同様な状況をもつダイアグラムに (f), (g), (h) があるが、これらからの伝導率への寄与は近似的にゼロになる。(f), (g), (h) のダイアグラムについては (a) ~ (e) のダイアグラムを計算した後に触れることにしよう。

まず (a) のダイアグラムからの  $\Omega$  への寄与を計算する。(a) のダイアグラムを詳しく描くと次のようになる。

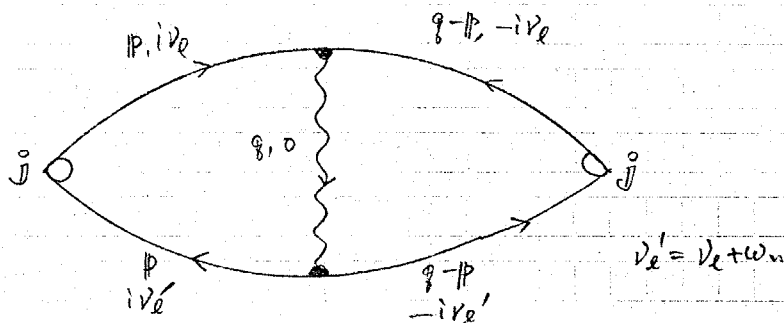


Fig. 2.7.2



ただし, 上の図では  $D$  の振動数はゼロのもののみとした. その理由は  $D$  の関数形から振動数がゼロのものが最も強い臨界異常性を与えると思われるためである. このことについては後に §4.5 で議論する.

このダイアグラムからの  $Q$  の寄与を  $Q_M^a$  と書くと

$$Q_M^a(i\omega_n) = -\frac{2e^2}{m^2} T^2 \sum_{\nu_e} \sum_{\mathbb{P}\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}-\mathbb{P})_\alpha (\mathbb{P})_\beta \Gamma(\mathbb{P}, i\nu_e) \Gamma(\mathbb{P}, i\nu_e')$$

$$\times \Gamma(\mathbb{Q}-\mathbb{P}, -i\nu_e) \Gamma(\mathbb{Q}-\mathbb{P}, -i\nu_e') \Gamma(\mathbb{Q}; i\nu_e, -i\nu_e)$$

$$\times \Gamma(\mathbb{Q}; i\nu_e', -i\nu_e') D(\mathbb{Q}, 0) \quad (2.7.3)$$

である. 係数中で負号は  $S$  行列の展開からダイアグラムにつくもの<sup>\*</sup>, 2 は電子スピンを考慮したものである. (下図参照)

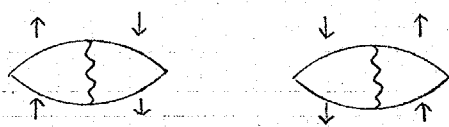


Fig. 2.7.3

最初  $\mathbb{P}$  和を計算するが,  $\mathbb{P}$  を含んでいるものは4つの  $\Gamma$  と  $(\mathbb{Q}-\mathbb{P})_\alpha (\mathbb{P})_\beta$  である. 小さい  $\mathbb{Q}$  が重要であることと  $D$ ,  $\Gamma$  の各依存性の形を考慮して,  $\mathbb{P}$  和を計算する際には  $\mathbb{Q}$  の中で  $\mathbb{Q} = 0$  とおく. 実際, 小さな  $\mathbb{Q}$  に対して  $\Gamma(\mathbb{Q}-\mathbb{P}, i\nu_e)$  等を展開して  $\mathbb{P}$  和を実行すれば,  $(\mathbb{Q}^0$  の項) +  $(\mathbb{Q}^2$  の項) + ... の形になり  $\mathbb{Q}^2$  の項以下の寄与は小さい. 2つの  $\Gamma$  の中で  $\mathbb{Q} = 0$  とおくと,  $\Gamma$  は4つとも  $\mathbb{P}$  に関して球対称になるから

$$(\mathbb{Q}-\mathbb{P})_\alpha (\mathbb{P})_\beta \Rightarrow -\frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \mathbb{P}^2 \quad (2.7.4)$$

と置き換えられる.  $Q_{M, \alpha\beta}^a(i\omega_n)$  は対角成分のみがゼロでなくなるから, この対角成分を添字  $\alpha, \beta$  と省略して書くと

\* Appendix B

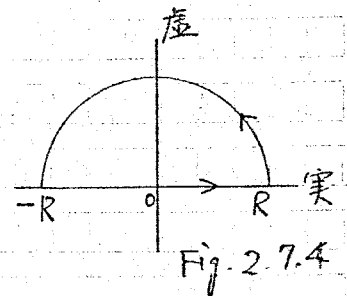
$$\begin{aligned} Q_M^a(i\omega_n) &= \frac{2e^2 p_F^2}{3m^2} T \sum_q \left[ D(q, 0) T^2 \sum_{\nu_e} \Gamma(q; i\nu_e, i\nu_e) \Gamma(q; i\nu_e', -i\nu_e') \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \sum_P G(p, i\nu_e) G(p, i\nu_e') G(-p, -i\nu_e) G(-p, -i\nu_e') \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

上式の  $P$  積分を  $A$  とかく。すなわち

$$\begin{aligned} A &\equiv \sum_P G(p, i\nu_e) G(p, i\nu_e') G(-p, -i\nu_e) G(-p, -i\nu_e') \\ &= N(0) \int d\xi \frac{1}{i\tilde{\nu}_e - \xi} \frac{1}{i\tilde{\nu}_e' - \xi} \frac{1}{-i\tilde{\nu}_e - \xi} \frac{1}{-i\tilde{\nu}_e' - \xi}. \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

$\nu_e' = \nu_e + \omega_n$  であり、 $\omega_n > 0$  としておいてよいから、 $\nu_e' > \nu_e$  である。

$A$  は Fig. 2.7.4 で表わされる積分路を通る複素積分を用いて求められる。円周に沿う積分は  $R \rightarrow \infty$  でゼロになる。半円内には1次の極が2つあるが、それは  $\nu_e$  と  $\nu_e'$  の正負によって異なる。



場合分け	半円内の1次の極
① $\nu_e < 0, \nu_e' > 0$	$i\tilde{\nu}_e', -i\tilde{\nu}_e$
② $\nu_e > 0, \nu_e' > 0$	$i\tilde{\nu}_e', i\tilde{\nu}_e$
③ $\nu_e < 0, \nu_e' < 0$	$-i\tilde{\nu}_e', -i\tilde{\nu}_e$

Tab. 2.7.1

①の場合の  $A$  を  $A_1$  などと書くことにすると

$$A_1 = -\frac{\pi N(0)}{\omega_n + \tau_i^{-1}} \frac{1}{\tilde{\nu}_e' \tilde{\nu}_e} \quad (2.7.7)$$

$$A_2 = \pi N(10) \frac{1}{\tilde{\nu}_e + \tilde{\nu}_e'} \frac{1}{\tilde{\nu}_e' \tilde{\nu}_e} \quad (2.7.8)$$

$$A_3 = \pi N(10) \frac{1}{\tilde{\nu}_e + \tilde{\nu}_e'} \frac{1}{\tilde{\nu}_e' \tilde{\nu}_e} \quad (2.7.9)$$

次に  $\nu_e$  和を計算しよう。

$$B \equiv T^2 \sum_{\nu_e} A \Gamma(\nu_e; i\nu_e, -i\nu_e) \Gamma(\nu_e; i\nu_e', -i\nu_e') \quad (2.7.10)$$

A として  $A_1, A_2, A_3$  を用いたものをそれぞれ  $B_1, B_2, B_3$  と書くことにする。

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\pi N(10) T^2}{\omega_n + \tau_1^{-1}} \sum_{\nu_e} \frac{1}{(\nu_e' + \frac{1}{2\tau_1})(\nu_e - \frac{1}{2\tau_1})} \frac{-2\nu_e + \tau_1^{-1}}{-2\nu_e + D_f^2 + 2\tau_s^{-1}} \frac{2\nu_e' + \tau_1^{-1}}{2\nu_e + D_f^2 + 2\tau_s^{-1}} \\ &= \frac{N(10) T}{\omega_n + \tau_1^{-1}} \frac{1}{\omega_n + D_f^2 + 2\tau_s^{-1}} \left\{ 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D_f^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D_f^2}{4\pi T} \right) \right\} \\ &\approx \frac{N(10) T \tau}{\omega_n + D_f^2 + 2\tau_s^{-1}} \left\{ 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D_f^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D_f^2}{4\pi T} \right) \right\} \quad (2.7.11) \end{aligned}$$

最後の  $\tau$  は dirty limit より  $\tau \omega_n \ll 1$  と考慮した。

$$\begin{aligned} B_2 &= \pi N(10) T^2 \sum_{\nu_e} \frac{1}{\tilde{\nu}_e + \tilde{\nu}_e'} \frac{1}{\tilde{\nu}_e \tilde{\nu}_e'} \frac{2\tilde{\nu}_e}{2\nu_e + D_f^2 + 2\tau_s^{-1}} \frac{2\tilde{\nu}_e'}{2\nu_e' + D_f^2 + 2\tau_s^{-1}} \\ &= \frac{N(10) T}{2} \frac{1}{(\omega_n + \tau_1^{-1} - D_f^2 - 2\tau_s^{-1}) \omega_n (\omega_n - \tau_1^{-1} + D_f^2 + 2\tau_s^{-1})} \\ &\quad \times \left[ (D_f^2 + 2\tau_s^{-1} - \tau_1^{-1}) \left\{ 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D_f^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D_f^2}{4\pi T} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \omega_n \left\{ 2\psi\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{\omega_n}{4\pi T}\right) - 4\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{D_F^2}{4\pi T}\right) - 4\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{D_F^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T}\right) \right\} \Bigg] \\
& \approx \frac{N(0)T}{2} \frac{\tau_2}{\omega_n} \left\{ 4\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{D_F^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T}\right) - 4\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{D_F^2}{4\pi T}\right) \right\} \\
& - \frac{N(0)T}{2} \tau_2^2 \left\{ 2\psi\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{\omega_n}{4\pi T}\right) - 4\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{D_F^2}{4\pi T}\right) - 4\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{D_F^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T}\right) \right\} \Bigg]
\end{aligned} \tag{2.7.12}$$

(2.7.12) の第1項及び第2項を  $\omega_n$  について展開してその1次の係数を比べると,  $T^{-1} : \tau_1$  によって, *dirty limit* では第2項は無視できる.

$$\therefore B_2 = \frac{N(0)T}{2} \frac{\tau_2}{\omega_n} \left\{ 4\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{D_F^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T}\right) - 4\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{D_F^2}{4\pi T}\right) \right\} \tag{2.7.13}$$

同様に計算して

$$B_3 = B_2 \tag{2.7.14}$$

であることがわかる.

$$\frac{2e^2}{m} \frac{p_F^2}{3} N(0) = \frac{ne^2}{m} \tag{2.7.15}$$

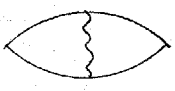




$$\frac{ne^2 \tau_1}{m} = \sigma_n \tag{2.7.16}$$

であることを考慮すれば ( $n$  は電子密度,  $\sigma_n$  は正常伝導率),  $B_1$  から  $a$  の寄与は

$$\begin{aligned}
Q_{M,1}^a(i\omega_n) &= \sigma_n T \int \frac{1}{\omega_n + D_F^2 + 2\tau_s^{-1}} \left\{ 4\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{D_F^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T}\right) \right. \\
&\quad \left. - 4\left(\frac{1}{2} + p_s + \frac{D_F^2}{4\pi T}\right) \right\} D(\mathbf{q}, 0) \tag{2.7.17}
\end{aligned}$$

であることがわかる。ただし因子  $\tau_2/\tau_1$  は *dirty limit* を考えて1とした。

Fig. 2.7.1の(b)~(e)のダイアグラムについても同様な方針で計算ができる。計算の過程は省略して結果だけを示そう。表は各ダイアグラムからの寄与を書いたもので、 $Q$ への寄与を問題にするときは、表の各式に  $D(\beta, 0)$  を乗じ、 $\beta$  和をとればよい。

ダイアグラム	$\nu_e < 0, \nu_e' > 0$	$\nu_e > 0, \nu_e' > 0$	$\nu_e < 0, \nu_e' < 0$
(a) 	$\sigma_n T \frac{x-y}{\omega_n + Dg^2 + 2\tau_s^{-1}}$	$\frac{\sigma_n T}{2} \frac{x-y}{\omega_n}$	$\frac{\sigma_n T}{2} \frac{x-y}{\omega_n}$
(b) 	$\frac{\sigma_n}{4\pi} (z-u)$	$\frac{\sigma_n}{8\pi} u$	$\frac{\sigma_n}{8\pi} z$
(c) 	$\frac{\sigma_n}{4\pi} (z-u)$	$\frac{\sigma_n}{8\pi} z$	$\frac{\sigma_n}{8\pi} u$
(d) 	$-\frac{\sigma_n}{8\pi} (z-u)$	0	0
(e) 	$-\frac{\sigma_n}{8\pi} (z-u)$	0	0

Tab. 2.7.2

ただし、この表で

$$x \equiv 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{Dg^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T} \right) \quad (2.7.18)$$

$$y \equiv 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{Dg^2}{4\pi T} \right) \quad (2.7.19)$$

$$z \equiv 4^{(1)} \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{Dg^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T} \right) \quad (2.7.20)$$

$$u \equiv 4^{(1)} \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{Dg^2}{4\pi T} \right) \quad (2.7.21)$$

である。

Maki過程全体からの  $Q$  への寄与は表の各式を総和すればよく、

$$\begin{aligned}
 Q_M(i\omega_n) &= \sigma_n T \sum_{\mathcal{P}} \left( \frac{1}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n + D\mathcal{P}^2 + 2T_S^{-1}} \right) \left\{ 4 \left( \frac{1}{2} + P_S + \frac{D\mathcal{P}^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 4 \left( \frac{1}{2} + P_S + \frac{D\mathcal{P}^2}{4\pi T} \right) \right\} \mathcal{D}(\mathcal{P}, 0) \\
 &\quad + \frac{\sigma_n}{2\pi} \sum_{\mathcal{P}} \psi''' \left( \frac{1}{2} + P_S + \frac{D\mathcal{P}^2}{4\pi T} + \frac{\omega_n}{2\pi T} \right) \mathcal{D}(\mathcal{P}, 0) \\
 &= Q_M(0) + \frac{\sigma_n}{2\pi} \omega_n \sum_{\mathcal{P}} \left\{ \psi''' \left( \frac{1}{2} + P_S \right) \frac{\mathcal{D}(\mathcal{P}, 0)}{D\mathcal{P}^2 + 2T_S^{-1}} + \frac{3\psi^{(2)} \left( \frac{1}{2} + P_S \right)}{4} \right. \\
 &\quad \left. \times \mathcal{D}(\mathcal{P}, 0) \right\} + O(\omega_n^2). \tag{2.7.22}
 \end{aligned}$$

$\omega_n$  の 1 次の係数が伝導率である。{ } 内第 1 項からの寄与を  $\sigma_{MT}$  と書くと

$$\sigma_{MT} = \frac{\sigma_n}{2\pi} \psi''' \left( \frac{1}{2} + P_S \right) \sum_{\mathcal{P}} \frac{1}{D\mathcal{P}^2 + 2T_S^{-1}} \mathcal{D}(\mathcal{P}, 0), \tag{2.7.23}$$

である。AL項の場合と同じく各次元に分けて計算すると、

$$\sigma_{MT}^{(3)} = \frac{e^2 \psi''' \left( \frac{1}{2} + P_S \right)}{4\pi^2 \xi(0)} \frac{1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\delta}}, \tag{2.7.24}$$

$$\sigma_{MT}^{(2)} = \frac{e^2 \psi''' \left( \frac{1}{2} + P_S \right)}{4\pi^2 d} \frac{1}{\alpha - \delta} \ln \frac{\alpha}{\delta}, \tag{2.7.25}$$

$$\sigma_{MT}^{(1)} = \frac{e^2 \xi(0) \psi''' \left( \frac{1}{2} + P_S \right)}{2\pi S} \frac{1}{\alpha - \delta} \left( \frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right), \tag{2.7.26}$$

$$\sigma_{MT}^{(2-3)} = \frac{e^2 \psi^{(1)}(\frac{1}{2} + \rho_s)}{4\pi^2 d} \frac{1}{d - \delta} \left\{ \ln \frac{\sinh(d\sqrt{\alpha}/\xi(0))}{\sinh(d\sqrt{\delta}/\xi(0))} + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\delta} \right\}, \quad (2.7.27)$$

$$\delta = \rho_s \psi^{(1)}(\frac{1}{2} + \rho_s), \quad (2.7.28)$$

を得る。

次に(2.7.22)の右辺内の第2項からの寄与を  $\sigma_3$  と書くと

$$\sigma_3^{(3)} : \text{臨界異常のみ} \quad (2.7.29)$$

$$\sigma_3^{(2)} = -\frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{\psi^{(2)}(\frac{1}{2} + \rho_s)}{\psi^{(1)}(\frac{1}{2} + \rho_s)} \ln \alpha \quad (2.7.30)$$

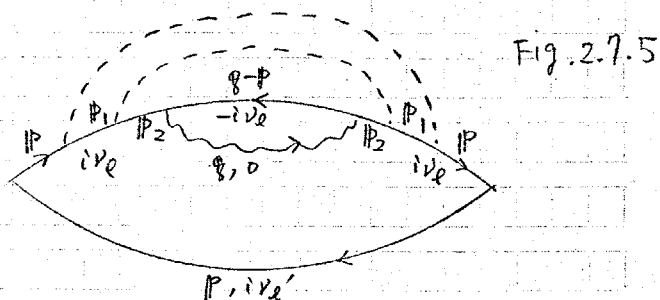
$$\sigma_3^{(1)} = \frac{3e^2 \xi(0)}{2\pi \rho} \frac{\psi^{(2)}(\frac{1}{2} + \rho_s)}{\psi^{(1)}(\frac{1}{2} + \rho_s)} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (2.7.31)$$

$$\sigma_3^{(2-3)} = -\frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{\psi^{(2)}(\frac{1}{2} + \rho_s)}{\psi^{(1)}(\frac{1}{2} + \rho_s)} \ln \left\{ \frac{\sqrt{\alpha} \sinh'(d\sqrt{\alpha}/\xi(0))}{\sinh(d/\xi(0))} \right\} \quad (2.7.32)$$

計算の途中で積分の発散を防ぐため(2.6.35)の upper cut off を使い、また臨界異常性のない項を落とす。  $\sigma_3$  はいずれの場合も負であり、伝導率を減らす方向に働く。

この節の最後に Fig. 2.7.1 の (f), (g), (h) のダイアグラムについて触れておく。 (f) のダイアグラムは詳しく描くと Fig. 2.7.5 である。このダイアグラムに対応する解析的表式には

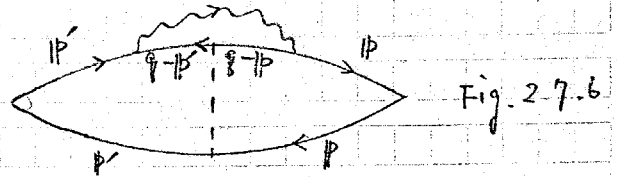
$$\left( \frac{d^3 \rho}{(2\pi)^3} \right)^2 G^2(\rho, i\nu_e) \quad (2.7.33)$$



が含まれるが、  $G^2(\rho, i\nu_e)$  は1次の

極値にもないので積分はゼロになり, したがって伝導率への寄与はない. 破線  
が3本以上入っても同様である. 次に (g) のダイアグラムは詳しく描くと

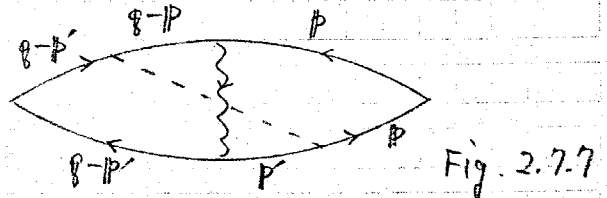
Fig. 2.7.6 である. 対応する式  
中に因子



$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_\alpha G(p, i\nu_e) G(p, i\nu_e') G(q-p, i\nu_e)$$

$$\approx \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_\alpha G^2(p, i\nu_e) G(p, i\nu_e') = 0 \quad (2.7.34)$$

が含まれるので伝導率への寄与はない. 最後に (h) のダイアグラム (Fig. 2.7.7)  
も因子



$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_\alpha G(p, i\nu_e) G(p, i\nu_e') G(q-p, i\nu_e)$$

$$\approx \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_\alpha G^2(p, i\nu_e) G(p, i\nu_e') = 0 \quad (2.7.35)$$

が含まれるので事情は (g) のダイアグラムと同様である.

以上より Fig. 2.7.1 のダイアグラムのうち伝導率への寄与のあるものは  
(a) ~ (e) であり, Maki過程による伝導率は  $\rho_{MT} + \rho_3$  で表わされる.



§ 2.8 第2章で得られた結果のまとめ

第2章では磁性不純物の存在する場合について, excess conductivity を計算した. 以下の最低次をとると, excess conductivity はAL項, MT項, 第3項の和で表わされる.

$$\sigma_{AL}^{(3)} = \frac{e^2 4^{(3)} (\frac{1}{2} + P_S)}{16 \pi^2 \xi(0) \sqrt{d}} \quad (2.8.1)$$

$$\sigma_{AL}^{(2)} = \frac{e^2 4^{(2)} (\frac{1}{2} + P_S)}{8 \pi^2 d} \frac{1}{\alpha} \quad (2.8.2)$$

$$\sigma_{AL}^{(1)} = \frac{e^2 \xi(0) 4^{(1)} (\frac{1}{2} + P_S)}{8 \pi S} \frac{1}{\alpha^{3/2}} \quad (2.8.3)$$

$$\sigma_{AL}^{(2,3)} = \sigma_{AL}^{(2)} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\sqrt{\alpha}}{\xi(0)} \coth \frac{d\sqrt{\alpha}}{\xi(0)} + 1 \right\} \quad (2.8.4)$$

$$\sigma_{MT}^{(3)} = \frac{e^2 4^{(3)} (\frac{1}{2} + P_S)}{4 \pi^2 \xi(0)} \frac{1}{\sqrt{d} + \sqrt{\delta}} \quad (2.8.5)$$

$$\sigma_{MT}^{(2)} = \frac{e^2 4^{(2)} (\frac{1}{2} + P_S)}{4 \pi^2 d} \frac{1}{\alpha - \delta} \ln \frac{\alpha}{\delta} \quad (2.8.6)$$

$$\sigma_{MT}^{(1)} = \frac{e^2 \xi(0) 4^{(1)} (\frac{1}{2} + P_S)}{2 \pi S} \frac{1}{\alpha - \delta} \left( \frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad (2.8.7)$$

$$\sigma_{MT}^{(2,3)} = \frac{e^2 4^{(2,3)} (\frac{1}{2} + P_S)}{4 \pi^2 d} \frac{1}{\alpha - \delta} \left\{ \ln \frac{\sinh(d\sqrt{\alpha}/\xi(0))}{\sinh(d\sqrt{\delta}/\xi(0))} + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\delta} \right\} \quad (2.8.8)$$

$$\sigma_3^{(3)} = 0 \quad (2.8.9)$$

$$\sigma_3^{(2)} = -\frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{4^{(2)}(\frac{1}{2} + \rho_s)}{4^{(1)}(\frac{1}{2} + \rho_s)} \ln d \quad (2.8.10)$$

$$\sigma_3^{(1)} = \frac{3e^2 \xi(0)}{2\pi \xi} \frac{4^{(2)}(\frac{1}{2} + \rho_s)}{4^{(1)}(\frac{1}{2} + \rho_s)} \frac{1}{\sqrt{d}} \quad (2.8.11)$$

$$\sigma_3^{(2-3)} = -\frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{4^{(2)}(\frac{1}{2} + \rho_s)}{4^{(1)}(\frac{1}{2} + \rho_s)} \ln \left\{ \frac{\sqrt{d} \operatorname{sinh}(d\sqrt{\alpha}/\xi(0))}{\operatorname{sinh}(d/\xi(0))} \right\} \quad (2.8.12)$$

$\sigma_3^{(3)}$  は臨界異常がないのでゼロとした。

磁性不純物を考慮した excess conductivity の計算としては筆者以前に, Gor'kov<sup>25)</sup>, Nam<sup>27)</sup> のものがあるがそれらとの関連は §4.3 で議論する。

## 第3章 垂直磁場が存在する場合

この章では、磁性不純物を含む超伝導薄膜に垂直磁場がかかっている場合の *excess conductivity* を計算する。

## § 3.1 磁場の導入

超伝導体の第2臨界磁場  $H_{c2}$  は電子に対しては弱磁場 (Landau 半径  $\gg$  平均自由行程) であるが, Cooper pair に対しては強磁場である。すなわち, ゆらぎを Landau 波動関数で記述したとき, エネルギー準位の間隔は  $4eH_{c2}\lambda$  であるが, これはゆらぎのエネルギーの目安である *reduced temperature* より大きいのがふつうである。以上の状況より電子に関しては Landau 準位を考慮せず, Cooper pair に関してはそれを考慮することにする。

最初に Cooper pair に対する磁場の効果を考える。Dirty limit では Cooper pair に対する磁場の効果は, 電磁気学的関係が局所的であるため,

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P} \pm 2eA \quad (3.1.1)$$

という置換で得られる。<sup>103)</sup> 複号は  $\mathcal{P}$  が  $\Psi$  に関係するか  $\Psi^+$  に関係するかによって異なる。体系が dirty limit でない場合には電磁気学的関係が非局所的になるため, 事情が複雑になる。この非局所性は clean な超伝導体の  $T_c$  付近の帯磁率の議論の際には重要であるが,<sup>104~107)</sup> 薄膜は dirty limit の状態にあると見なしてよいから, 現在の議論には関係がない。垂直磁場がある場合に Cooper pair のグリーン関数  $\mathcal{D}$  を対角化する固有関数は電荷  $-2e$  の粒子に対する Landau の波動関数である。磁場は  $z$  方向の一様定磁場とし

$$A = (-Hy, 0, 0) \quad (3.1.2)$$

とベクトルポテンシアルを選んできく。(3.1.1) を使って

$$\mathcal{D}(r, r'; i\nu_2) = \sum_a \mathcal{D}(m_a, q_{2a}, i\nu_2) \varphi_a(r) \varphi_a^*(r') \quad (3.1.3)$$

$$D(m_a, \gamma_{za}, i\nu_e) = \frac{1}{N(0)} \frac{1}{\gamma_0 + 4\left(\frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D}{4\pi T}\left\{4eH\left(m_a + \frac{1}{2}\right) + \gamma_{za}^2\right\} + \frac{|\nu_e|}{4\pi T}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (3.1.4)$$

を得る。ここで  $\varphi_a(r)$  は  $(\partial + 2eA)^2$  の固有関数であることに注意した。また

$$\gamma_0 = \ln \frac{T}{T_{co}}, \quad (3.1.5)$$

であり、 $a$  は量子数を代表的に書いたもので

$$a = (m_a, k_{xa}, \gamma_{za}), \quad (3.1.6)$$

である。  $\varphi_a(r)$  は電荷  $-2e$  の粒子に対する Landau 波動関数で

$$\varphi_a(r) = \frac{1}{2\pi} e^{i(k_{xa}x + \gamma_{za}z)} A_a \exp\left\{-\frac{\gamma}{2}(y + y_a)^2\right\} H_{m_a}(\sqrt{\gamma}(y + y_a)) \quad (3.1.7)$$

$$A_a = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2^{m_a} m_a!}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1.8)$$

$$\gamma = 2eH,$$

$$y_a = \frac{k_{xa}}{2eH},$$

$$H_m(t) = (-1)^m e^{t^2} \frac{d^m e^{-t^2}}{dt^m} \quad (\text{Hermite 多項式}), \quad (3.1.9)$$

である。

電子グリーン関数に対しては磁場の効果は位相因子で取り入れ、

$$G_A(r, r'; i\varepsilon_m) = G(r, r'; i\varepsilon_m) \exp\left(-ie \int_r^{r'} A dr\right) \\ \simeq G(r, r'; i\varepsilon_m) \exp(-ieA(r-r')) \quad (3.1.12)$$

とする。ここで  $A$  の空間的变化は  $G$  のそれと比べてゆるやかであるとした。

$G_A$  は  $A$  の効果を含んだグリーン関数という意味である。

不純物散乱を繰り込んだ相互作用バーテックスにおいても同様に

$$g^2 \rightarrow 4eH\left(m_a + \frac{1}{2}\right) + \delta g_a^2 \quad (3.1.13)$$

と置換すればよい。

§ 3.2 Aslamazov - Larkin 過程

Usadel<sup>18)</sup> の方法に準じて座標表示で AL ダイアグラムを計算する。

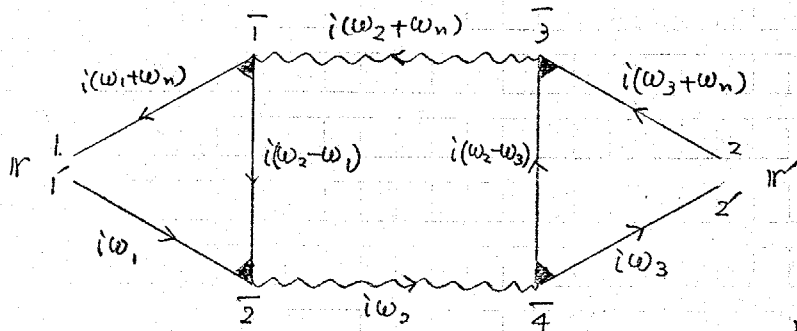


Fig. 3.2.1

$$Q_{AL, \alpha\beta}(r, r'; i\omega_n) = -4 \left( \frac{e}{2m} \right)^2 (\bar{\partial}_1 - \bar{\partial}_{1'})_\alpha (\bar{\partial}_2 - \bar{\partial}_{2'})_\beta$$

$$\times T \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \int d\bar{1} d\bar{2} d\bar{3} d\bar{4} \overline{G_A(\bar{1}, \bar{1}'; i(\omega_1 + \omega_n)) G_A(\bar{2}, \bar{1}'; i(\omega_2 - \omega_1))}$$

$$\times G_A(\bar{2}, \bar{1}', i\omega_1) \times \mathbb{D}(\bar{1}, \bar{3}; i(\omega_2 + \omega_n)) \mathbb{D}(\bar{4}, \bar{2}; i\omega_2)$$

$$\times G_A(\bar{3}, \bar{2}; i(\omega_3 + \omega_n)) G_A(\bar{3}, \bar{4}; i(\omega_2 - \omega_3)) G_A(\bar{2}', \bar{4}; i\omega_3) \Big|_{\substack{\bar{1} = \bar{1}' = r \\ \bar{2} = \bar{2}' = r'}}$$

(3.2.1)

ただし、 $\bar{\partial}_r$  はベクトルポテンシャルの存在するときの電流演算子に含まれる微分演算子で

$$\bar{\partial}_r = \frac{\partial}{\partial r} + ieA(r), \tag{3.2.2}$$

上にバーのついた数字は積分すべき座標を示し、グリーン関数の上のバーは不純物平均をとることを意味する。左側の三角形の部分からの寄与を  $\nu_{ab}$  で表わす。すなわち

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{ab}(r, i\omega_1, i\omega_2) &= (\bar{\partial}_1 - \bar{\partial}_1^\dagger) T \sum_{\omega_1} \int d\bar{T} d\bar{z} \\
 &\times \overline{G_A(1, \bar{T}; i(\omega_1 + \omega_2)) G_A(2, \bar{T}; i(\omega_2 - \omega_1)) G_A(2, \bar{r}', i\omega_1)} \\
 &\times \varphi_a^*(\bar{z}) \varphi_b(\bar{T}) \Big|_{|1|=|r'} \quad (3.2.3)
 \end{aligned}$$

と定義する。この  $\mathcal{D}$  を用いるには

$$\begin{aligned}
 Q_{AL, \alpha\beta}(r, r'; i\omega_n) &= -\left(\frac{e}{2m}\right)^2 4T \sum_{\omega_2} \sum_{ab} \left\{ \mathcal{D}_{ab}(r, i\omega_n, i\omega_2) \Big|_\alpha \right. \\
 &\times \left. \mathcal{D}_{ab}(r', -i\omega_n, i(\omega_2 + \omega_n)) \Big|_\beta \times \mathcal{D}(b; i\omega_2) \mathcal{D}(a; i(\omega_2 + \omega_n)) \right\} \\
 &\quad (3.2.4)
 \end{aligned}$$

と書ける。ただし (3.1.4) の  $\mathcal{D}(ma, \beta a; i\omega_2)$  と  $\mathcal{D}(a; i\omega_2)$  と略記した。

§ 2.6 の場合と同様に  $\mathcal{D}$  の中では  $\omega_n = \omega_2 = 0$  とおいた。

$$\begin{aligned}
 \therefore \mathcal{D}_{ab}(r) &= (\bar{\partial}_1 - \bar{\partial}_1^\dagger) T \sum_{\omega_1} \int d\bar{T} d\bar{z} \overline{G_A(1, \bar{T}; i\omega_1) G_A(2, \bar{r}'; i\omega_1) G_A(2, \bar{T}, -i\omega_1)} \\
 &\times \varphi_a^*(\bar{z}) \varphi_b(\bar{T}) \Big|_{|1|=|r'} \quad (3.2.5)
 \end{aligned}$$

よって

$$G_A(1, \bar{T}, i\omega_1) = G(1, \bar{T}, i\omega_1) e^{-ieA(1-\bar{r}')} \quad A=A(r) \quad (3.2.6)$$

よびを代入すると

$$X \equiv (\bar{\partial}_1 - \bar{\partial}_1^\dagger) \overline{G_A(1, \bar{r}'; i\omega_1) G_A(2, \bar{r}'; i\omega_1) G_A(2, \bar{T}, -i\omega_1)} \Big|_{|1|=|r'}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\partial_1 - \partial_1' + 2ieA) \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} e^{i(p-eA)(1-i') + i(q-eA)(\bar{2}-\bar{1}) + i(q-p-eA)(\bar{2}-\bar{1})} \\
 &\quad \times \overline{G^2(p; i\omega_1) G(q-p, -i\omega_1)} \Big|_{1=i'=r} \\
 &= 2i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i(q-2eA)(\bar{2}-\bar{1})} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \overline{G^2(p; i\omega_1) G(q-p, -i\omega_1)} \\
 &= 2i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i(q-2eA)(\bar{2}-\bar{1})} \left\{ -\frac{4\pi m N(0) D q}{(2|\omega_1| + Dq^2)^2} \right\}, \quad (3.2.7)
 \end{aligned}$$

と得る。最後の行に移ると、3でp積分に対し(3.2.7)の結果を使った。

$$\begin{aligned}
 \therefore D_{ab}(r) &= T \sum_{\omega_1} \int d\bar{1} d\bar{2} \times \varphi_a^*(\bar{2}) \varphi_b(\bar{1}) \\
 &= -4\pi i m N(0) D T \sum_{\omega_1} \frac{1}{2|\omega_1| + D\varepsilon_a} \frac{1}{2|\omega_1| + D\varepsilon_b} \\
 &\quad \times \int d\bar{1} d\bar{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i(q-2eA)} \varphi_a^*(\bar{2}) \varphi_b(\bar{1}) \\
 &= -4\pi i m N(0) D T \sum_{\omega_1} \frac{1}{2|\omega_1| + D\varepsilon_a} \frac{1}{2|\omega_1| + D\varepsilon_b} \\
 &\quad \times \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (2q + 4eA) \varphi_a^*(q) \varphi_b(q) \\
 &= -2m N(0) D A_{ab} (\tilde{\partial}_1 - \tilde{\partial}_1') \varphi_a^*(1) \varphi_b(1) \Big|_{1=i'=r} \quad (3.2.8)
 \end{aligned}$$

f = f(1)

$$\varepsilon_a = 4eH(ma + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} q_a^2 \quad (3.2.9)$$



$$\tilde{\partial}_1 = \partial_1 + 2ieA \quad (3.2.10)$$

$$A_{ab} = 2\pi T \sum_{\omega_1} \frac{1}{2|\omega_1| + D\varepsilon_a} \frac{1}{2|\omega_1| + D\varepsilon_b} \\ = \frac{1}{D(\varepsilon_b - \varepsilon_a)} \left\{ \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{D\varepsilon_b}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{D\varepsilon_a}{4\pi T}\right) \right\} \quad (3.2.11)$$

である。(3.2.4), (3.2.8) より

$$Q_{AL, \alpha\beta}(r, r'; i\omega_n) = -4T^2 e^2 N_{(0)}^2 D^2 \sum_{ab} \sum_{\nu_2} A_{ab}^2 D(b, i\nu_2) D(a, i(\omega_n + \nu_2)) \\ \times \left[ (\tilde{\partial}_1 - \tilde{\partial}_1^+) \varphi_a^*(1) \varphi_b(1) \right]_a \Big|_{1=1'=r} \left[ (\tilde{\partial}_2 - \tilde{\partial}_2^+) \varphi_b^*(2) \varphi_a(2') \right]_b \Big|_{2=2'=r'} \quad (3.2.12)$$

$$Q_{AL, \alpha\beta}(r, i\omega_n) = \int d^3r' Q_{AL, \alpha\beta}(r, r'; i\omega_n) \quad (3.2.13)$$

$$Q_{AL, \alpha\beta}(r, i\omega_n) = Q_{AL, \alpha\beta}(r, 0) + \omega_n \rho_{AL, \alpha\beta}(r) + O(\omega_n^2) \quad (3.2.14)$$

から伝導率  $\rho_{AL, \alpha\beta}(r)$  を求めらる。磁場は空間的に一様であるので、 $\rho_{AL, \alpha\beta}(r)$  は  $r$  に依存しないはずである。

磁場と垂直な方向の伝導率を計算する。対称性から  $\rho_{AL, xx} = \rho_{AL, yy}$  となるはずであるが、ここでは  $\rho_{AL, yy}$  を計算する。まず、

$$\int d^3r' (\tilde{\partial}_2 - \tilde{\partial}_2^+)_y \varphi_b^*(2) \varphi_a(2') \Big|_{2=2'=r'} \\ = \delta(k_{xa} - k_{xb}) \delta(q_{za} - q_{zb}) \sqrt{\gamma} \left\{ \sqrt{2m_a} \delta_{m_a-1, m_b} - \sqrt{2m_b} \delta_{m_a, m_b-1} \right\} \quad (3.2.15)$$

また,

$$\int dk_{xa} dk_{xb} \delta(k_{xa} - k_{xb}) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_1^\dagger) \varphi_a^*(1) \varphi_b(1) \Big|_{l=l'=r}$$

$$= \frac{\gamma \sqrt{\gamma}}{4\pi^2} \left\{ \sqrt{2m_b} \delta_{m_b-1, m_a} - \sqrt{2m_a} \delta_{m_b, m_a-1} \right\} \quad (3.2.16)$$

$$\therefore \int dk_{xa} dk_{xb} d^3r' (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_1^\dagger)_y (\tilde{\alpha}_2' - \tilde{\alpha}_2'^\dagger)_y \varphi_b(1) \varphi_b^*(2) \varphi_a(1) \varphi_a^*(2') \Big|_{\substack{l=l'=r \\ 2=2'=r'}}$$

$$= -\frac{2e^2 H^2}{\pi^2} \delta(z_a - z_b) \left\{ m_a \delta_{m_a-1, m_b} + m_b \delta_{m_b-1, m_a} \right\} \quad (3.2.17)$$

次に  $\nu_e$  和の計算をおこなうが、 $\mathcal{D}$  の分母を振動数について展開し、1次のみとる。すなわち

$$\mathcal{D}(b, i\nu_e) = N(1_0)^{-1} \left\{ \gamma_0 + \psi_b + \psi_b' \frac{|\nu_e|}{4\pi T} \right\} \quad (3.2.18)$$

ただし

$$\psi_b = 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D}{4\pi T} \left\{ 4eH(m_b + \frac{1}{2}) + \gamma_{z_b}^2 \right\} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right), \quad (3.2.19)$$

$$\psi_b' = 4''' \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{D}{4\pi T} \left\{ 4eH(m_b + \frac{1}{2}) + \gamma_{z_b}^2 \right\} \right), \quad (3.2.20)$$

(3.2.18) ~ (3.2.20) を用いて

$$\sum_{\nu_e} \mathcal{D}(b, i\nu_e) \mathcal{D}(a, i(\omega_n + \nu_e))$$

$$= \text{const.} - \omega_n \frac{1}{N(1_0)} \frac{2}{\pi T} \frac{1}{\psi_a' \psi_b'} \frac{1}{(\chi_a + \chi_b) \chi_a \chi_b}, \quad (3.2.21)$$

を得る。ただし

$$\chi_a = \frac{2(\eta_0 + \psi_a)}{\psi_a'} \quad (3.2.22)$$

であり、 $\nu$  和の実行は § 2.7 のときと同様におこなった。

$B(m_a, m_b) = B(m_b, m_a)$  のとき成り立つ公式

$$\begin{aligned} & \sum_{m_a, m_b \geq 0} \left\{ m_a \delta_{m_a-1, m_b} + m_b \delta_{m_b-1, m_a} \right\} B(m_a, m_b) \\ &= 2 \sum_{m_a=0}^{\infty} (m_a + 1) B(m_a + 1, m_a) \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

を用い  $\psi$  は (3.2.12), (3.2.13), (3.2.14), (3.2.17), (3.2.21) より磁場のある場合の薄膜の AL 項の  $\sigma_{AL}(T, H)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{AL}^{(2)}(T, H) &= \frac{4e^2}{\pi^2 d} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(\psi_m - \psi_{m+1})^2}{\psi_m' \psi_{m+1}' (\chi_m + \chi_{m+1}) \chi_m \chi_{m+1}} \\ &= \frac{e^2}{2\pi^2 d} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(\psi_m - \psi_{m+1})^2 \psi_m' \psi_{m+1}'}{(\eta_0 + \psi_m)(\eta_0 + \psi_{m+1}) \{ (\eta_0 + \psi_m) \psi_{m+1}' + (\eta_0 + \psi_{m+1}) \psi_m' \}} \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

この式の  $m$  和は実行がむずかしい。以下で磁場が強い場合と弱い場合とに分けて計算をする。

最初に磁場の弱い場合を考える。磁場が弱いとは

$$\rho_H \equiv \frac{DeH}{2\pi T} \ll 1 \quad (3.2.25)$$

を意味し、この領域はしばしば Ginzburg-Landau 領域と呼ばれる。この場

合には(3.2.24)の中の $\psi_m, \psi_{m+1}$ を $m$ で展開し, また $\psi'_m, \psi'_{m+1}$ を $\psi'_0$ と置き換える. 後者の置換の理由は次のようなものである.  $\psi'_m$ の起源は

$$D(m, i\nu_e) = N_{10}^{-1} \left\{ \eta_0 + 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \frac{DeH}{\pi T} \left( m + \frac{1}{2} \right) + \rho_s^2 + \frac{|\nu_e|}{4\pi T} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1} \quad (3.2.26)$$

の分母を小さな $\nu_e$ について展開した際に出て来たものであるが, この分母を $m$ で展開する時には $DeHm/\pi T$ も $|\nu_e|/4\pi T$ も共に小さいとすべきである. したがって両者の1次までとする展開では $|\nu_e|/4\pi T$ の係数中では $m=0$ とおくべきである.

$$\psi'_0 = 4'' \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \rho_H \right) \equiv f, \quad (3.2.27)$$

$$\psi_m = 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \rho_H \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{fDeH}{\pi T} m, \quad (3.2.28)$$

$$\eta_0 + \psi_m = \alpha + \frac{fDeH}{\pi T}, \quad (3.2.29)$$

$$\alpha = \ln \frac{T}{T_{c0}} + 4 \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \rho_H \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right), \quad (3.2.30)$$

と使って

$$\sigma_{AL}^{(2)}(T, H) = \frac{e^2 f}{8\pi^2 d} \frac{2}{h} \left[ -1 + \frac{2h}{\alpha} + \left( \frac{\alpha}{h} - 1 \right) \left\{ 4 \left( 1 + \frac{\alpha}{2h} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2h} \right) \right\} \right], \quad (3.2.31)$$

$$h = \frac{DeHf}{2\pi T} = \rho_H 4'' \left( \frac{1}{2} + \rho_s + \rho_H \right), \quad (3.2.32)$$

を得る.

次に強磁場の場合

$$P_H = \frac{DeH}{2\pi T} \gg 1 \quad (3.2.33)$$

を考える。この場合には(3.2.24)の和は  $m=0$  の項からの寄与が主要部分であるので、その項のみとると、

$$\sigma_{AL}^{(2)}(T, H) = \frac{e^2}{2\pi^2 d} \frac{(y_0 - y_1)^2 y_0' y_1'}{(\eta_0 + y_0)(\eta_0 + y_1) \{(\eta_0 + y_0)y_1' + (\eta_0 + y_1)y_0'\}} \quad (3.2.34)$$

である。(3.2.33)のもとで漸近形を考えると

$$\eta_0 + y_0 = d, \quad (3.2.35)$$

$$\begin{aligned} \eta_0 + y_1 &= \eta_0 + y \left( \frac{1}{2} + P_S + P_H + \frac{DeH}{\pi T} \right) - y \left( \frac{1}{2} \right) \\ &= d + y \left( \frac{1}{2} + P_S + P_H + \frac{DeH}{\pi T} \right) - y \left( \frac{1}{2} + P_S + P_H \right) \\ &\approx d + \ln \frac{P_S + 3P_H}{P_S + P_H}, \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

$$y_1' \approx \frac{1}{P_S + 3P_H}, \quad (3.2.37)$$

$$y_0' \approx \frac{1}{P_S + P_H}, \quad (3.2.38)$$

$$\begin{aligned} &\{(\eta_0 + y_0)y_1' + (\eta_0 + y_1)y_0'\} \\ &\approx \frac{2(P_S + 2P_H)}{(P_S + 3P_H)(P_S + P_H)} d + \frac{1}{P_S + P_H} \ln \frac{P_S + 3P_H}{P_S + P_H}, \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

$$(\varphi_0 - \varphi_1)^2 \approx \left\{ \ln \frac{\rho_S + 3\rho_H}{\rho_S + \rho_H} \right\}^2 \quad (3.2.40)$$

(3.2.35) ~ (3.2.40) を (3.2.34) に代入して主要部分をとりと

$$\sigma_{AL}^{(2)}(T, H) = \frac{e^2}{2\pi^2 d} \frac{1}{\rho_S + 3\rho_H} \frac{1}{\alpha} \quad (3.2.41)$$

## § 3.3 Maki 過程

Maki 過程では AL 過程と違ってダイアグラムに  $D$  が一つしか含まれていないので、薄膜に対しては (2.7.22) で

$$q^2 \Rightarrow 4eH(m + \frac{1}{2}) \quad (3.3.1)$$

と置き換え、 $q$  和の代わりに  $m$  和をとればよい。ただし、 $D$  としては (2.3.52) の形を使う必要がある。なお、AL 過程と同じような精神で計算をすることもできるが、得られる結果はここで述べるものと一致する。

$$\begin{aligned} Q_H(i\omega_n) &= \sigma_n T \frac{1}{d} \frac{eH}{\pi} \sum_m \left( \frac{1}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n + 2\tau_s^{-1} + 4eHD(m + \frac{1}{2})} \right) \\ &\times \left\{ 4 \left( \frac{1}{2} + p_s + p_H + \frac{DeH}{\pi T} m + \frac{\omega_n}{2\pi T} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} + p_s + p_H + \frac{DeH}{\pi T} m \right) \right\} D(m, 0) \\ &+ \frac{\sigma_n}{2\pi} \frac{1}{d} \frac{eH}{\pi} \sum_m 4'' \left( \frac{1}{2} + p_s + p_H + \frac{DeH}{\pi T} m + \frac{\omega_n}{2\pi T} \right) D(m, 0) \\ &= Q_H(0) + \omega_n \left[ \frac{\sigma_n}{2\pi} \frac{eH}{\pi} \frac{1}{d} \sum_m \frac{4'_m}{2\tau_s^{-1} + 2eHD + 4eHDm} D(m, 0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\sigma_n}{8\pi^2 T} \frac{eH}{\pi} \frac{1}{d} \sum_m 4''_m D(m, 0) \right] + O(\omega_n^2) \quad (3.3.2) \end{aligned}$$

ただし因子  $eH/\pi$  は Landau 準位の縮退度、また

$$4''_m = 4^{(2)} \left( \frac{1}{2} + p_s + p_H + \frac{DeH}{\pi T} m \right) \quad (3.3.3)$$

である。

最初には (3.3.2) の [ ] 内第1項からの寄与の  $M_T^{(2)}(T, H)$  を考える。

$$\sigma_{MT}^{(2)}(T, H) = \frac{\sigma_n e H}{8\pi^3 d T} \frac{1}{N(0)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m'}{\rho_s + \rho_H + \frac{DeH}{\pi T} m} \frac{1}{\eta_0 + \psi_m - 4\left(\frac{1}{2}\right)}. \quad (3.3.4)$$

A L項の場合と同様に弱磁場, 強磁場の場合に分ける。

弱磁場の場合はDの分母をmで展開し,

$$\sigma_{MT}^{(2)}(T, H) = \frac{e^2 \psi^{(4)}\left(\frac{1}{2} + \rho_s + \rho_H\right)}{4\pi^2 d} \frac{1}{\alpha - \delta - \epsilon} \left\{ 4\left(\frac{\alpha}{2\epsilon}\right) - 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\rho_s}{2\rho_H}\right) \right\}, \quad (3.3.5)$$

を得る。ただし

$$\delta = \rho_s \psi^{(4)}\left(\frac{1}{2} + \rho_s + \rho_H\right), \quad (3.3.6)$$

$$\epsilon = \rho_H \psi^{(4)}\left(\frac{1}{2} + \rho_s + \rho_H\right), \quad (3.3.7)$$

である。強磁場の場合は  $m=0$  の項のみをとりはさく。

$$\sigma_{MT}^{(2)}(T, H) = \frac{e^2}{2\pi^2 d} \frac{\rho_H}{(\rho_s + \rho_H)^2} \frac{1}{\alpha}. \quad (3.3.8)$$

次に(3.3.2)の[ ]内の第2項からの寄与の $\sigma_3^{(2)}(T, H)$ を求める。

$$\sigma_3^{(2)}(T, H) = \frac{3\sigma_n e H}{8\pi^3 T d} \frac{1}{N(0)} \sum_m \frac{\psi_m''}{\eta_0 + \psi_m - 4\left(\frac{1}{2}\right)}. \quad (3.3.9)$$

弱磁場の場合には分母の $\psi_m$ をmで展開し, 分子の $\psi_m''$ を $\psi_0''$ とおけばよい。

$m=0$ まで和の範囲をのばすと発散するので,  $m=M$ で和を打ち切る。このようにすれば



$$\sigma_3^{(2)}(T, H) = \frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H\right)}{\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H\right)} \left\{ \psi\left(M + 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{h}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} \frac{\alpha}{h}\right) \right\} \quad (3.3.10)$$

$M$  は (2.6.38) の  $q$  の upper cut  $\eta_0$  と同様な意味をもつように定めることにする。 $q$  の upper cut  $\eta_0$   $D$  の分母の  $\lambda q^2$  の項が 1 になるところで積分を打ち切ることを意味している。

$$\eta_0 + 4m - 4\left(\frac{1}{2}\right) = d + 2h_m + O(m^2) \quad (3.3.11)$$

であるから

$$M = \frac{1}{2h} \quad (3.3.12)$$

と定めるのが適当であろう。これを代入して

$$\begin{aligned} \sigma_3^{(2)}(T, H) &= \frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H\right)}{\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H\right)} \left\{ \psi\left(1 + \frac{1+\alpha}{2h}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} \frac{\alpha}{h}\right) \right\} \\ &\approx \frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H\right)}{\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H\right)} \left\{ \psi\left(1 + \frac{1}{2h}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} \frac{\alpha}{h}\right) \right\} \quad (3.3.13) \end{aligned}$$

を得る。 $M$  の定め方としては

$$D^{-1}(q, 0) = N^{(1)^{-1}} \left\{ d + \lambda q^2 \right\}^{-1} \quad (3.3.14)$$

の  $q^2$  を  $q^2 \rightarrow 4eH(m + \frac{1}{2})$  として

$$4eH\lambda\left(M + \frac{1}{2}\right) = 1 \quad (3.3.15)$$

のようにすること考えられる。このように  $M$  を定めると (3.3.13) の  $\left\{ \right\}$  の第 1 項は

$$4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\hbar}\right) \quad (3.3.16)$$

となる。しかし、 $\hbar$  が小さいとして計算をしたのであるから、digamma 関数の性質を考えると、両者間に大きな違いはないことがわかる。

次に強磁場の場合を考える。前の場合と同じく  $m=0$  の項だけ取り入れればよく、

$$\begin{aligned} \sigma_3^{(2)}(T, H) &= -\frac{3e^2}{2\pi^2 d} \frac{\rho_H}{(\rho_S + \rho_H)^2} \frac{1}{\alpha} \\ &= -3\sigma_{HT}^{(2)}(T, H) \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

が得られる。しかし表式 (3.3.17) には具合の悪いところがある。

$$\sigma_{AL}^{(2)}(T, H) = \frac{e^2}{2\pi^2 d} \frac{1}{\rho_S + 3\rho_H} \frac{1}{\alpha} \quad (\rho_H \gg 1) \quad (3.3.18)$$

であるから、 $\rho_S = 0$  とおくと全体の excess conductivity は

$$\sigma_{AL}^{(2)}(T, H) + \sigma_{HT}^{(2)}(T, H) + \sigma_3^{(2)}(T, H) < 0 \quad (3.3.19)$$

となる。この原因は  $\sigma_3^{(2)}(T, H)$  を求める際に積分範囲は  $m$  和の upper cut off に相当する操作が抜けているために、 $\sigma_3^{(2)}(T, H)$  の絶対値を過大評価したためと思われる。  $H=0$  の場合に、ゆらぎによって生じた Cooper pair の数を  $N_c$  とすると、static なもののみとして

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{1}{g^2} \int d^3r D(0, 0) \\ &= \frac{1}{g^2 d} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{N(0)} \frac{1}{\alpha + \lambda q^2} \end{aligned}$$

$$= - \frac{N(10)}{4\pi d (N(10)g)^2} \frac{4\pi T}{4^{1/2}(\frac{1}{2} + \rho_s)} \frac{1}{D} \ln \alpha. \quad (3.3.20)$$

積分の上限を $\infty$ にすると発散する。強磁場の場合は $m=0$ の項だけ取り出した  
 ということは、Cooper pairが全部 $m=0$ の状態にあると考えていることには  
 なる。したがってCooper pairの数が(3.3.20)になるようにするには、縮退  
 度を変える必要がある。強磁場極限での縮退度を $A$ とすると、

$$N_c = \frac{A}{d} \frac{1}{g^2 N(10)} \frac{1}{\alpha} \quad (3.3.21)$$

であるから、(3.3.20)と比較して

$$A = - \frac{1}{4^{1/2}(\frac{1}{2} + \rho_s)} \frac{T}{D} \ln \alpha \quad (3.3.22)$$

を得る。縮退度として $eH/\pi$ の代わりに $A$ を用いて(3.3.17)の計算を繰り返す  
 と

$$\sigma_3^{(2)}(T, H) = \frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{1}{4^{1/2}(\frac{1}{2} + \rho_s)} \frac{1}{(\rho_s + \rho_H)^2} \ln \alpha \quad (3.3.23)$$

が求められる。(3.3.23)を用いしは一応、excess conductivityが負になる  
 状況は解消される。しかし、AL項やMT項の計算の際にも縮退度として  
 (3.3.22)の $A$ を用いると、全体のexcess conductivityは再び負になっ  
 てしまう。今のところこの難点をうまく避ける方法は見つからない。ここは一応  
 の処置として、 $\sigma_3^{(2)}(T, H)$ を計算する場合にのみ縮退度の変更としておく。

## § 3.4 磁場の存在する場合の議論の整理とゼロ磁場極限

最初にこの章で得られた伝導率の表式を再記する。

弱磁場 ( $\rho_H \ll 1$ ) の場合

$$\sigma_{AL}^{(2)}(T, H) = \frac{e^2 \psi^{(4)}(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H)}{8\pi^2 d} \frac{2}{\rho_H} \left[ -1 + \frac{2\rho_H}{\alpha} + \left(\frac{\alpha}{\rho_H} - 1\right) \left\{ \psi\left(1 + \frac{\alpha}{2\rho_H}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\rho_H}\right) \right\} \right] \quad (3.4.1)$$

$$\sigma_{MT}^{(2)}(T, H) = \frac{e^2 \psi^{(4)}(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H)}{4\pi^2 d} \frac{1}{\alpha - \rho_H - \delta} \left\{ \psi\left(\frac{\alpha}{2\rho_H}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2\rho_H}\right) \right\} \quad (3.4.2)$$

$$\sigma_3^{(2)}(T, H) = \frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{\psi^{(2)}(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H)}{\psi^{(4)}(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H)} \left\{ \psi\left(1 + \frac{1}{2\rho_H}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\rho_H}\right) \right\} \quad (3.4.3)$$

ただし

$$\rho_H = \frac{DeH}{2\pi T} \quad (3.4.4)$$

$$\rho_S = \frac{1}{2\pi T \tau_s} \quad (3.4.5)$$

$$\rho_H = \rho_H \psi^{(4)}\left(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H\right) \quad (3.4.6)$$

$$\delta = \rho_S \psi^{(4)}\left(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H\right) \quad (3.4.7)$$

$$\alpha = \ln \frac{T}{T_{co}} + \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_S + \rho_H\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3.4.8)$$

である

強磁場 ( $\rho_H \gg 1$ ) の場合

$$\sigma_{AL}^{(2)}(T, H) = \frac{e^2}{2\pi^2 d} \frac{1}{\rho_S + 3\rho_H} \frac{1}{\alpha} \quad (3.4.9)$$

$$\sigma_{MT}^{(2)}(T, H) = \frac{e^2}{2\pi^2 d} \frac{\rho_H}{(\rho_S + \rho_H)^2} \frac{1}{\alpha} \quad (3.4.10)$$

$$\sigma_3^{(2)}(T, H) = \frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{1}{4^{(1/2 + \rho_S)}} \frac{1}{(\rho_S + \rho_H)^2} \ln \alpha \quad (3.4.11)$$

いずれの場合も3つの項を加えたものが全体の excess conductivity である。

次に  $\rho_H \rightarrow 0$  の極限を考える。このとき  $\hbar \rightarrow 0$  である。

最初に AL 項を考える。

$$4\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\hbar}\right) \sim \ln \frac{\alpha}{2\hbar} + \frac{1}{6} \left(\frac{\hbar}{\alpha}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\hbar}{\alpha}\right)^3\right) \quad (\hbar \rightarrow 0) \quad (3.4.12)$$

$$4\left(1 + \frac{\alpha}{2\hbar}\right) \sim \ln \frac{\alpha}{2\hbar} + \frac{\hbar}{\alpha} - \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar}{\alpha}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\hbar}{\alpha}\right)^3\right) \quad (\hbar \rightarrow 0) \quad (3.4.13)$$

この2式は (2.3.61) から求めらる。

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_{AL}^{(2)}(T, H) &\sim \frac{e^2 4^{(1/2 + \rho_S)}}{8\pi^2 d} \frac{2}{\hbar} \left[ -1 + \frac{2\hbar}{\alpha} + \left(\frac{\alpha}{\hbar} - 1\right) \left\{ \frac{\hbar}{\alpha} - \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{\alpha}\right)^2 \right\} \right] \\ &\sim \frac{e^2 4^{(1/2 + \rho_S)}}{8\pi^2 d} \frac{1}{\alpha} \quad (\hbar \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

これは磁場のない場合の式 (2.8.2) と一致する。

MT 項については

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{\alpha}{2\hbar}\right) - 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2\hbar}\right) &\sim \ln \frac{\alpha}{2\hbar} - \ln \frac{\delta}{2\hbar} \\ &= \ln \frac{\alpha}{\delta} \quad (\hbar \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

\*)

$$\sigma_{\text{MT}}^{(2)}(T, H) \sim \frac{e^2 4^{(2)} \left(\frac{1}{2} + \beta_S\right)}{4\pi^2 d} \frac{1}{d - \delta} \ln \frac{\alpha}{\delta} \quad (h \rightarrow 0) \quad (3.4.16)$$

となり (2.8.6) と一致する。

最後に第3項については

$$\begin{aligned} \sigma_3^{(2)}(T, H) &\sim \frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{4^{(2)} \left(\frac{1}{2} + \beta_S\right)}{4^{(2)} \left(\frac{1}{2} + \beta_S\right)} \left( \ln \frac{1}{2h} - \ln \frac{\alpha}{2h} \right) \\ &= \frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{4^{(2)} \left(\frac{1}{2} + \beta_S\right)}{4^{(2)} \left(\frac{1}{2} + \beta_S\right)} \ln \alpha \quad (h \rightarrow 0) \quad (3.4.17) \end{aligned}$$

が得られ、(2.8.10) と一致する。以上のゼロ磁場極限では当然

$$\alpha = \ln \frac{T}{T_{c0}} + 4 \left( \frac{1}{2} + \beta_S \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right) \quad (3.4.18)$$

とみなすべきである。

最後に磁場の導入法について触れておく。この章の計算では

$$\eta^2 \rightarrow 4eH \left( m + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \quad (3.4.19)$$

という置き換えを使ったが、Cooper pair のグリーン関数中の  $\eta^2$  に対する置き換えは

$$D^{-1}(q, i\nu_e) = N(i\nu_e) \left\{ \eta_0 + 4 \left( \frac{1}{2} + \beta_S + \frac{Dq^2}{4\pi T} + \frac{|\nu_e|}{4\pi T} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1} \quad (3.4.20)$$

の式から実行した。一方、(3.4.20) の分母を先に  $\eta^2$  で展開してから (3.4.19) の置き換えとする方法もある。GL理論を使って計算をすると必然的に後者に相当する方法を用いることになる。またミクロな理論を用いた場合には後者の

方法で磁場を導入している研究者も多い。さて、前者の方法で置き換えを実行すると (3.4.20) の  $\{ \}$  は

$$\eta_0 + 4 \left( \frac{1}{2} + p_s + p_H + 2p_H^m + \frac{|v_e|}{4\pi T} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right) \quad (3.4.21)$$

となるが、温度を下げてゆく場合には  $m=0$ ,  $|v_e|=0$  のものが、最初にゼロになる。そこで超伝導状態への転移がおこると考えて、

$$\ln \frac{T}{T_{c0}} + 4 \left( \frac{1}{2} + p_s + \frac{DeH}{2\pi T} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (3.4.22)$$

の根として、第2臨界磁場  $H_{c2}(T)$ , あるいは第2臨界温度  $T_{c2}(H)$  が決まる。 $p_s=0$  の場合には (3.4.22) は良く知られた式である。一方、後者の方法で置き換えを実行すると (3.4.23) の第2項を  $H$  について展開したものが得られる。すなわち後者の方法では転移点を求める正しい式 (3.4.22) が得られない。以上の状況から、本論文で用いた前者の方法がより正確であると結論できる。

## 第4章 講義

## §4.1 磁性不純物の役割に関する考察

磁場のない場合の excess conductivity の式を再記する。

$$\sigma_{AL}^{(2)} = \frac{e^2 \psi^{(0)}(\frac{1}{2} + p_s)}{p \pi^2 d} \frac{1}{\alpha}, \quad (4.1.1)$$

$$\sigma_{MT}^{(2)} = \frac{e^2 \psi^{(0)}(\frac{1}{2} + p_s)}{4 \pi^2 d} \frac{1}{\alpha - \delta} \ln \frac{\alpha}{\delta}, \quad (4.1.2)$$

$$\sigma_3^{(2)} = - \frac{3e^2}{4 \pi^2 d} \frac{\psi^{(2)}(\frac{1}{2} + p_s)}{\psi^{(0)}(\frac{1}{2} + p_s)} \ln \alpha. \quad (4.1.3)$$

ただし 2次元の場合のみを記した。

最初に  $p_s \rightarrow 0$  の極限を考えよう。

$$\lim_{p_s \rightarrow 0} \psi^{(0)}(\frac{1}{2} + p_s) = \psi^{(0)}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{2}, \quad (4.1.4)$$

$$\lim_{p_s \rightarrow 0} \psi^{(2)}(\frac{1}{2} + p_s) = \psi^{(2)}(\frac{1}{2}) = -14.5(3), \quad (4.1.5)$$

$$\lim_{p_s \rightarrow 0} T_c = T_{c0}, \quad (4.1.6)$$

$$\lim_{p_s \rightarrow 0} \alpha = \alpha_0, \quad (4.1.7)$$

$$\lim_{p_s \rightarrow 0} \delta = 0, \quad (4.1.8)$$

である。これらの式を (4.1.1) ~ (4.1.3) に代入すれば磁性不純物のない場合の式が得られる。



$$\sigma_{AL}^{(2)} = \frac{e^2}{16d} \frac{1}{\eta_0} \quad (4.1.9)$$

$$\sigma_{MT}^{(2)} = \frac{e^2}{8d} \frac{1}{\eta_0 - \delta} \ln \frac{\eta_0}{\delta} \quad (4.1.10)$$

$$\sigma_3^{(2)} = \frac{215(3)e^2}{\pi 4d} \ln \eta_0 \quad (4.1.11)$$

ただし、 $\delta = 0$  とおくと  $\sigma_{MT}^{(2)}$  が発散するのでお残しておいた。(4.1.9), (4.1.10) は良く知られた通常の AL 項, MT 項の式である。(4.1.11) の第3項は筆者が提唱したものであり、次節で詳しく述べる。

(4.1.10) の  $\sigma_{MT}^{(2)}$  の表式で  $\delta \rightarrow 0$  とすると発散するか、これは最初に Thompson<sup>28)</sup> により指摘されたことである。(2.7.23) で  $\tau_s \rightarrow \infty$  とおいた式

$$\begin{aligned} \sigma_{MT}^{(2)} &= \frac{\pi \sigma_n}{4} \sum_{\mathcal{B}} \frac{1}{D \mathcal{B}^2} \mathcal{D}(\mathcal{B}, 0) \\ &\Rightarrow \frac{\pi \sigma_n}{4d} \int \frac{d^2 \mathcal{B}}{(2\pi)^2} \frac{1}{D \mathcal{B}^2} \mathcal{D}(\mathcal{B}, 0) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

にもどって調べると発散の起源は  $\mathcal{B}$  積分の下限にあることがわかる。計算はすべて小さな  $\mathcal{B}$  に対して正しいようにおこなってきたのであるから、この発散は非常に具合の悪いことである。Thompson<sup>28)</sup> は  $\mathcal{B}$  積分の下限を

$$q_c = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda}} \quad (4.1.13)$$

として発散を止めた。この場合には  $\delta$  は現象論的なパラメータとみなすべきであろう。(4.1.13) の lower cut  $q_c$  を導入することは、(4.1.12) の被積分関

散の表現を

$$\begin{aligned} \frac{1}{D\eta^2} D(\eta, 0) &= \frac{1}{N(0)} \frac{1}{D\eta^2} \frac{1}{\eta_0 + \lambda\eta^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{N(0)} \frac{1}{D(\eta^2 + \eta_c^2)} \frac{1}{\eta_0 + \delta + \lambda\eta^2} \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

と変更することにより、また  $D(\eta, 0)$  に注目すれば、(4.1.14) の因子  $1/(\eta_0 + \delta + \lambda\eta^2)$  は reduced temperature が  $\eta_0$  から  $\eta_0 + \delta$  に変わったことを意味し、したがって転移温度が変化したと解釈できる。

$$\eta = \eta_0 + \delta \quad (4.1.15)$$

とおき、 $\eta$  を新しい reduced temperature

$$\eta = \ln \frac{T}{T_c} \quad (4.1.16)$$

とすると

$$\delta = \ln \frac{T_{c0}}{T_c} \approx \frac{T_{c0} - T_c}{T_c} \quad (4.1.17)$$

が得られる。転移温度の変化の原因としては、磁場、磁性不純物、電子-フォノン相互作用などが考えられる。なお  $\delta$  は pair breaking parameter あるいは Thompson parameter と呼ばれる。

以上のように Thompson は  $\delta$  を導入して、 $\delta$  は転移温度の変化に由来すると解釈したが、本論文の計算では磁性不純物を考慮することにより  $\delta$  が自動的に結果に現われ、発散は解消した。磁性散乱が非常に弱いときには (2.3.58) からわかるように

$$\delta = P_s 4^{(1)} \left( \frac{1}{2} + P_s \right) \sim \frac{T_{co} - T_c}{T_{co}} \sim \frac{T_{co} - T_c}{T_c}, \quad (4.1.8)$$

また (2.3.74) から

$$d \approx \frac{T - T_c}{T_c} = \eta \quad (4.1.9)$$

であるので、筆者の計算に式(1)は Thompson の式に帰着する。

なお、Thompson より後に Patton<sup>33)</sup>, Keller and Korenman<sup>38,39)</sup> が相互作用バーテックスにゆらぎの効果を含ませることにより、この<sup>(2)</sup>MT の発散を正しい計算を発表した。

## §4.2 第3項に関する議論

第3項は筆者の提唱したものである。この節ではその役割について述べることにする。

最初に第3項の大きさを見つめてみよう。  $\rho_s = 0$  の場合と考えると

$$\sigma^{(2)} = \frac{e^2}{16d} \left( \frac{1}{\eta} + \frac{2}{\eta - \delta} \ln \frac{\eta}{\delta} + 4.1464 \ln \eta \right) \quad (4.2.1)$$

である。  $\sigma^{(2)}$  は2次元の *total excess conductivity* の意味である。MT項は  $\sigma$  の大きさに依存するから、AL項と第3項の大きさを比べてみよう。

$\eta$	$\eta^{-1}$	$4.1464 \ln \eta$	$\sigma_3^{(2)} / \sigma_{AL}^{(2)}$
0.3	3.33	-4.99	-1.50
0.2	5.00	-6.67	-1.33
0.1	10.00	-9.55	-0.95
0.05	20.00	-12.42	-0.62
0.01	100.00	-19.09	-0.19

Tab. 4.2.1

表からわかるように  $\eta = 0.1$  でも  $\sigma_3^{(2)}$  を無視することはできない。従来の実験では  $\sigma_{AL}^{(2)}$  と  $\sigma_{MT}^{(2)}$  のみを考え、 $T_c$  と  $\delta$  とをパラメータとして解析がおこなってきた。これらの論文のほとんどすべてにおいて、 $\eta$  が大きくなるにつれて理論値と実験値との系統的な差が現われているが、その原因は主に第3項を無視したためと思われる。Fig. 4.2.1はTR薄膜に関する実験データ<sup>49,108)</sup>を解析したもので、実線は第3項を考慮しないもの、破線はそれを考慮したものである。矢印はそれより低温側のデータのみを解析に用いたことを示している。このグラフから第3項の必要性は明らかである。Kajimura<sup>71)</sup>はAL薄膜において、Fig. 4.2.1の実線とデータの間に見られるものと同様の実験値と理論値との差違を見出し、理論の *break down* によるものであると推測し

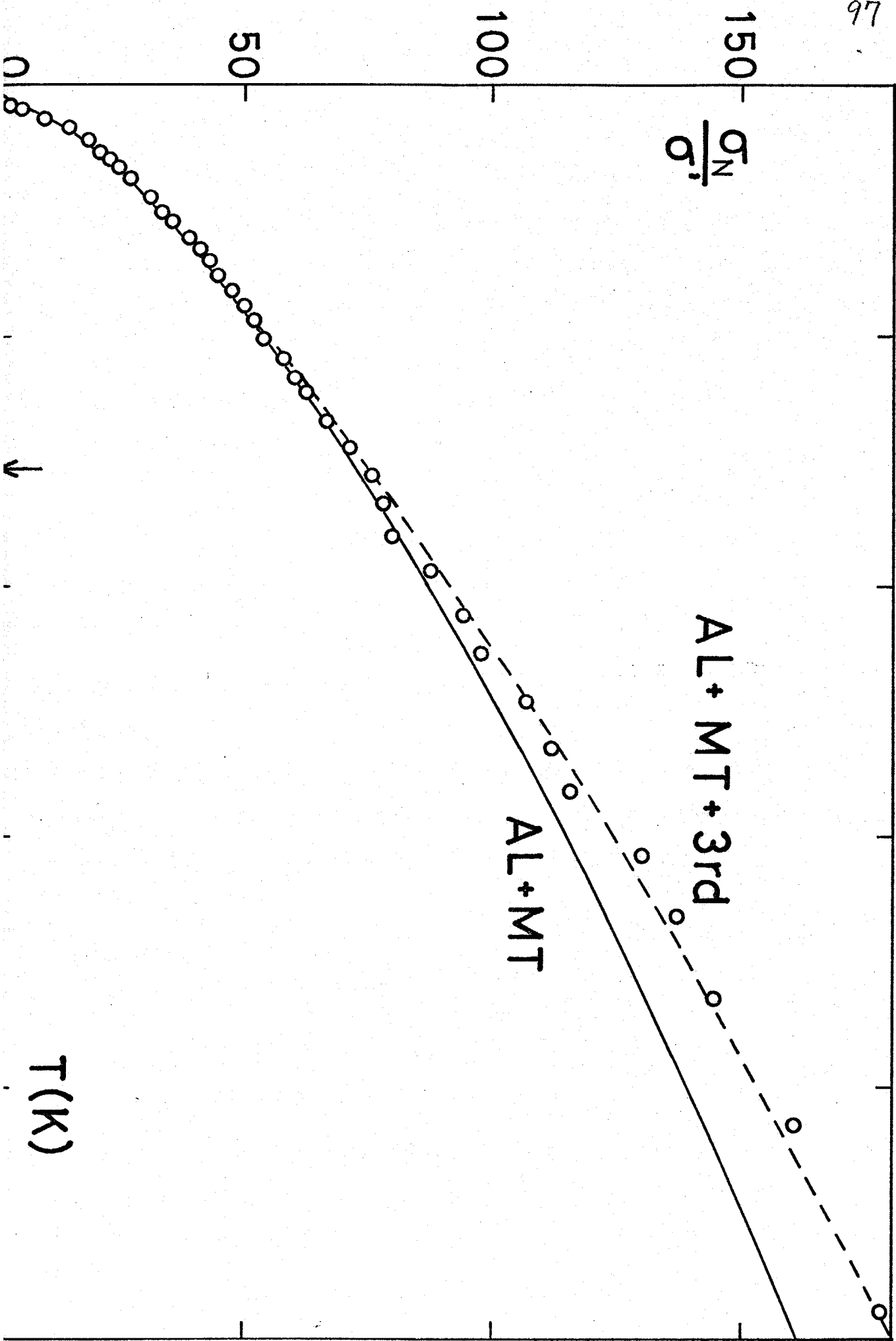


Fig. 4.2.1

ている。Kajimura の推論は次のとおりである。Cooper pair の寿命はD の表式からわかるように、 $\beta=0$  のものに対して  $\lambda_0/\alpha$  である。したがって不確定性原理からエネルギーのゆらぎの幅は  $\alpha/\lambda_0$  程度である。<sup>\*</sup> 一方、熱エネルギーが  $T$  であるから<sup>\*</sup>、Cooper pair が粒子的な意味をもちには、

$$T > \frac{\alpha}{\lambda_0} \quad (4.2.2)$$

でなければならぬ。  $\beta_s=0$  として  $\lambda_0=\pi/\beta T$ 、 $\alpha=\eta$  だから

$$\eta < \frac{\pi}{\beta} \quad (4.2.3)$$

である。  $T$  で表現すれば

$$\frac{T}{T_c} < 1.48 \quad (4.2.4)$$

$T/T_c$  が 1.48 に近づくと理論が *break down* するというのが Kajimura の主張である。

しかし、 $T/T_c = 1.48$  という温度はかなり高い温度であり、実験の報告のほとんどのものにおいては  $T/T_c = 1.1$  程度から理論値と実験値とのずれがはじまっている。このことと Tab. 4.2.1 を合わせて考えれば、上記のずれは主に第3項を無視したためと解釈してよいであろう。

Fig. 4.2.2 は (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) を用いて  $\sigma'$  (total excess conductivity) と計算したものである。ただし

$$\rho_{s0} = \frac{1}{2\pi T_c \tau_s} \quad (4.2.5)$$

をパラメータとした。各曲線に対する  $\rho_{s0}$  の値は次のとおりである。

\* )  $\hbar = k_B = 1$  としている。

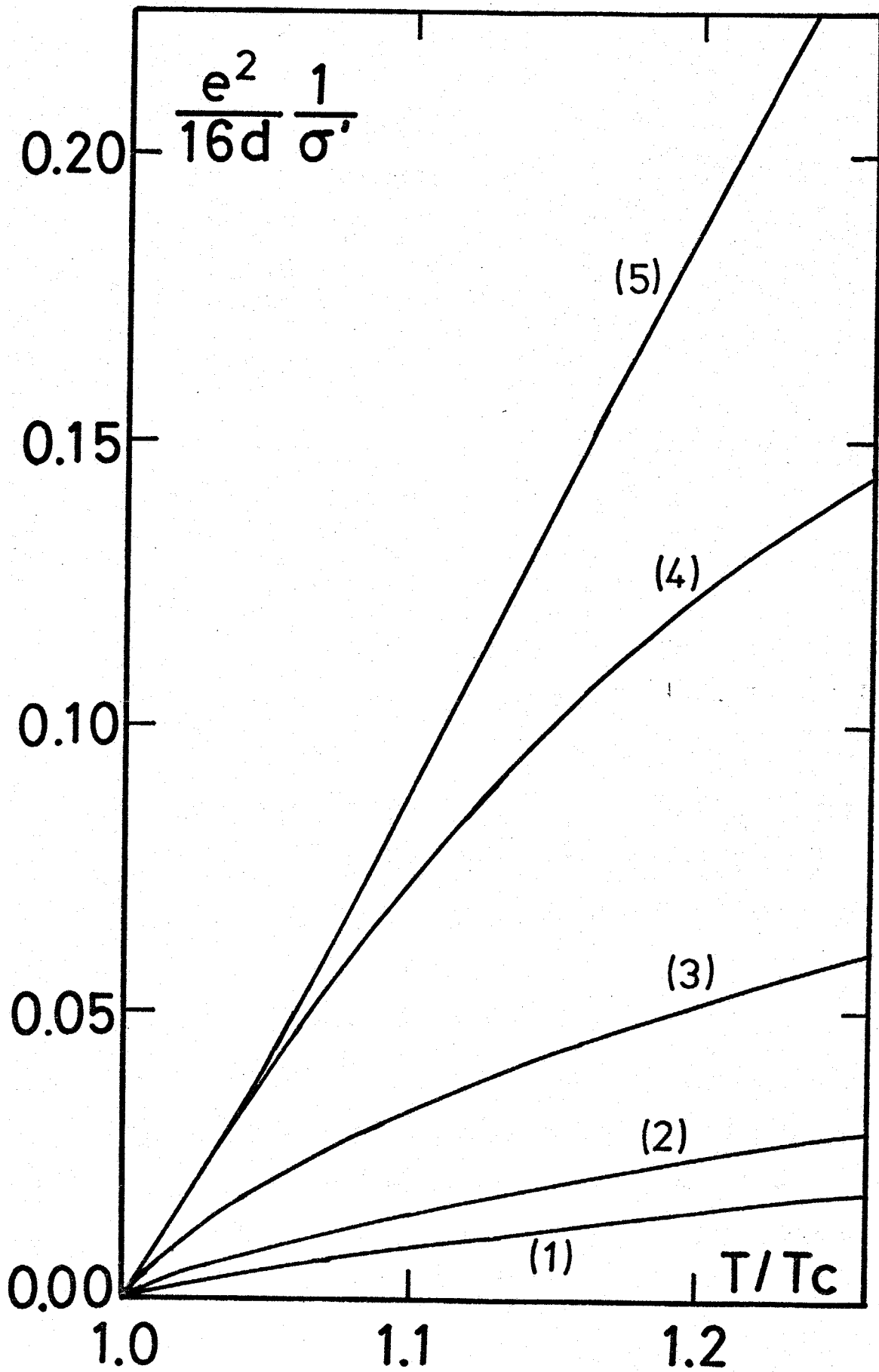


Fig.4.2.2

	$P_{SO}$	$T_c/T_{c0}$
(1)	$1 \times 10^{-4}$	0.9995
(2)	$1 \times 10^{-3}$	0.9951
(3)	$1 \times 10^{-2}$	0.9521
(4)	$5 \times 10^{-1}$	0.7417
(5)	$1 \times 10^{-1}$	0.4428

Tab. 4.2.2

$P_{SO}$  が大きくなる程、転移が鋭くなるが、それは主に  $MT$  項が抑えらるるためである。

Fig. 4.2.3 は  $P_{SO} = 0.01$  として  $\alpha'$  に対する 4 つの表現の差異をあらわしたものである。4 つの表現は次のとおりである。

$$(1) \alpha' = \frac{e^2 \psi^{(1)}(\frac{1}{2} + P_S)}{8\pi^2 d} \left\{ \frac{1}{d} + \frac{2}{d-\delta} \ln \frac{d}{\delta} \right\} \quad (4.2.6)$$

$$(2) \alpha' = \frac{e^2}{16d} \left\{ \frac{1}{\eta} + \frac{2}{\eta-\delta} \ln \frac{\eta}{\delta} \right\} \quad (4.2.7)$$

$$(3) \alpha' = \frac{e^2 \psi^{(1)}(\frac{1}{2} + P_S)}{8\pi^2 d} \left\{ \frac{1}{d} + \frac{2}{d-\delta} \ln \frac{d}{\delta} \right\} - \frac{3e^2}{4\pi^2 d} \frac{\psi^{(2)}(\frac{1}{2} + P_S)}{\psi^{(1)}(\frac{1}{2} + P_S)} \ln d \quad (4.2.8)$$

$$(4) \alpha' = \frac{e^2}{16d} \left\{ \frac{1}{\eta} + \frac{2}{\eta-\delta} \ln \frac{\eta}{\delta} + 4.1464 \ln \eta \right\} \quad (4.2.9)$$

ただし、(4.2.7)、(4.2.9) において  $\delta$  は  $T = T_c$  のときの値を用いて定数とした。これは Thompson 理論で  $\delta$  が温度依存性のない定数になっているためである。このグラフから第 3 項の効果は reduced temperature や係数  $\eta$  の renormalization の効果よりも大きいことがわかる。 $P_{SO}$  を変えて同じ計算をしたところ、 $P_{SO}$  が大きくなるにつれて各曲線間の開きが大きくなる傾向



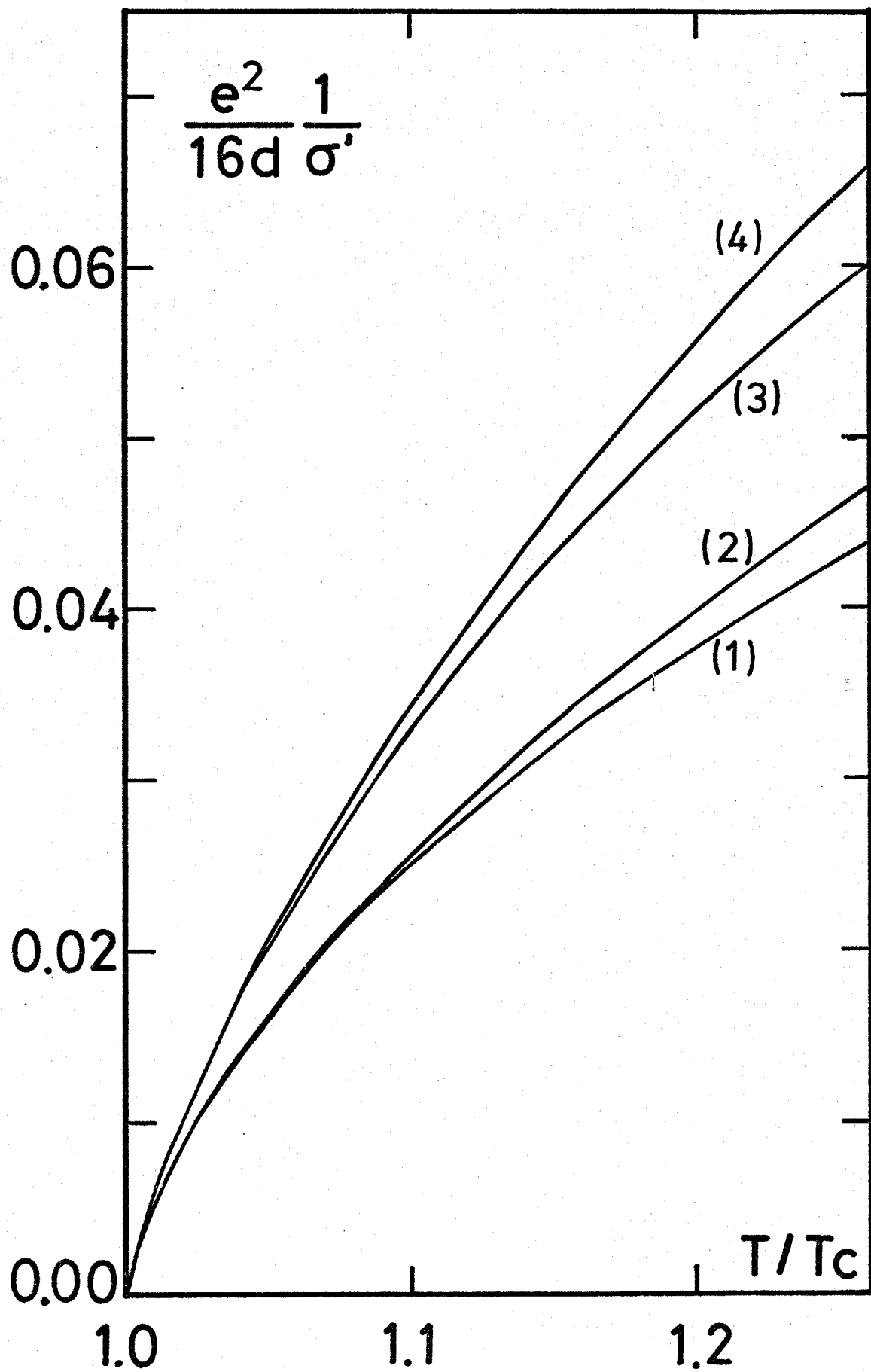


Fig.4.2.3

にあった。

磁性不純物を含む超伝導薄膜について *excess conductivity* を測定した報告は Craven, Thomas and Parks<sup>76)</sup> (CTP) のものだけである。CTP は Al を母体とし、磁性不純物として Fe を加えて実験を行ない、(4.2.7) を用いて解析した。その結果、Fe の濃度を増加させると  $\delta$  の値が大きくなることを見出されたが、このことは本論文及び Thompson の主張と一致している。CTP の結果をよく見ると  $T$  が  $T_c$  から多少離れたところで、実験値と理論値とのずれが見られるが、それは主に第3項を無視したためと推測される。

この節の最後に第3項の有用性を示している実験結果のグラフともう1例のせておく。Fig. 4.2.4 は In 薄膜に関する実験結果で<sup>108)</sup>、実線は Al, M, T 西壇のみを考慮して解析し、破線はさらに第3項を考慮に入れて解析をしたものである。グラフより第3項が重要であることは明らかである。

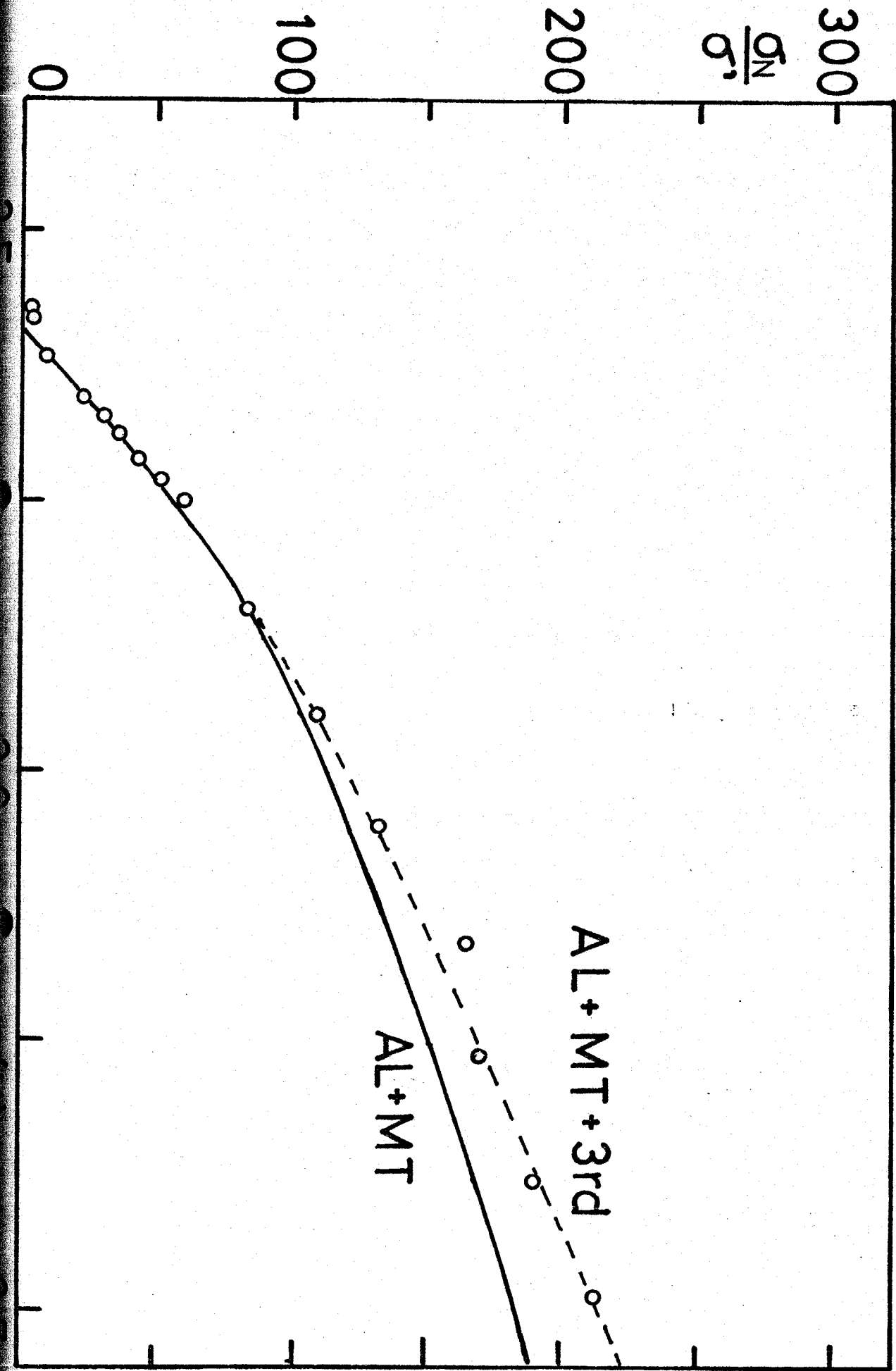


Fig.4.2.4

### §4.3 Gor'kov, Nam の計算との関係

筆者以前に磁性不純物を考慮して *excess conductivity* を計算したものと  
して Gor'kov<sup>25)</sup>, Nam<sup>26)</sup> の論文がある。この節では本論文とそれらの論文との  
関係について述べよう。

Gor'kov 及び Nam の論文は磁性不純物を含む場 TDGL (Time Dependent  
Ginzburg-Landau) 方程式から *excess conductivity* を求めたものであ  
る。磁性不純物を含む場合の TDGL 方程式は Gor'kov and Eliashberg<sup>96)</sup> に  
よって導かれたものであるが、 $\tau_s \tau_c \ll 1$  という場合に限定されている。したが  
って Gor'kov, Nam の結果も当然  $\tau_s \tau_c \ll 1$  の場合の表式と解釈すべきであ  
る。TDGL 方程式を使った計算では AL 項のみが得られるが、その理由は M  
T 項及び第 3 項は正常電流が Cooper pair の存在により、影響を受け、正常伝  
導率が変化したものであると解釈できるからである。

Gor'kov と Nam の結果は次のようなものである。

$$\sigma_{AL}^{(2)} = \frac{3e^2}{4\pi^3 \tau_c \tau_s} \frac{\tau_c}{T - \tau_c} \quad (4.3.1)$$

Gor'kov は非線型の電気伝導率を計算しているが、ここでは線型のものに話  
を限る。(4.3.1) が筆者の結果

$$\sigma_{AL}^{(2)} = \frac{e^2 \gamma^{(1/2 + \rho_s)} 1}{8\pi^2 d} \frac{1}{\alpha} \quad (4.3.2)$$

から導かれることを示そう。

$$\rho_s = \frac{1}{2\pi T \tau_s} \quad (4.3.3)$$

であるから  $\tau_s \tau_c \ll 1$  は  $\rho_s \gg 1$  を意味する。Trigamma 関数の漸近形

$$\psi^{(4)}\left(\frac{1}{2}+z\right) \sim \frac{1}{z} - \frac{1}{12} \frac{1}{z^3} + O(z^{-4}), \quad (z \rightarrow \infty) \quad (4.3.4)$$

から

$$\psi^{(4)}\left(\frac{1}{2}+p_s\right) \sim 2\pi T \tau_s - 2\pi T_c \tau_s, \quad (4.3.5)$$

が得られる。また  $\tau_s T \ll 1$  のときの  $\alpha$  は (2.3.75) に述べたように

$$\alpha = \frac{T - T_c}{T_c} \frac{1}{3} \pi^2 T_c^2 \tau_s. \quad (4.3.6)$$

(4.3.5), (4.3.6) を (4.3.2) に代入すると

$$\alpha_{AL}^{(2)} = \frac{3e^2}{4\pi^3 d T_c \tau_s} \frac{T_c}{T - T_c} \quad (4.3.7)$$

が得られ、Gor'kov, Nam の結果と一致する。

前節の議論と合わせて、筆者の表式はパラメタ  $T_c \tau_s$  の全領域をカバーするものであり、 $T_c \tau_s \gg 1$ ,  $T_c \tau_s \ll 1$  の両極限において既に知られている結果を再現するものであると結論できる。

§ 4.4 伝導率に対する磁場と磁性不純物の影響の差異

(3.1.4) からわかるように、磁場と磁性不純物が共に存在する場合に転移温度は

$$\ln \frac{T_c}{T_{c0}} + 4 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi T_c \tau_s} + \frac{DeH}{2\pi T_c} \right) - 4 \left( \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (4.4.1)$$

から定められる。パラメータ  $P_{S0}$  と  $P_{H0}$  を

$$P_{S0} = \frac{1}{2\pi T_{c0} \tau_s} \quad (4.4.2)$$

$$P_{H0} = \frac{DeH}{2\pi T_{c0}} \quad (4.4.3)$$

で定義すれば、 $T_c$  は  $P_{S0} + P_{H0}$  により依存し、個々の値にはよらない。すなわち  $P_{S0} = 0.010$ 、 $P_{H0} = 0.001$  の場合と  $P_{S0} = 0.001$ 、 $P_{H0} = 0.010$  の場合とでは  $T_c$  は同一である。これは equivalence theorem<sup>110)</sup> と呼ばれるものの一種である。しかし、§ 3.4 にまとめた excess conductivity の表式では  $T_c$  に対する場合のような事情はない。これを明らかにするために数値計算をしたのが Fig. 4.4.1 で、伝導率の表式として (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3) を用いている。曲線 (1) は  $P_{S0} = 0.001$ 、 $P_{H0} = 0.010$  の場合、曲線 (2) は  $P_{S0} = 0.010$ 、 $P_{H0} = 0.001$  の場合で、両者の場合とも  $P_{S0} + P_{H0} = 0.011$  であるから  $T_c$  は等しく、 $T_c/T_{c0} = 0.9452$  である。グラフは同じ  $P_{S0} + P_{H0}$  の値をもつ場合には  $P_{H0}$  が大きい方が excess conductivity が大きいことを示している。その物理的理由は次のようなものである。Excess conductivity の計算の過程からわかるように、伝導率に大きく寄与するのはエネルギーの低い (D の分母の小さい) Cooper pair である。  $P_{H0} = 0$

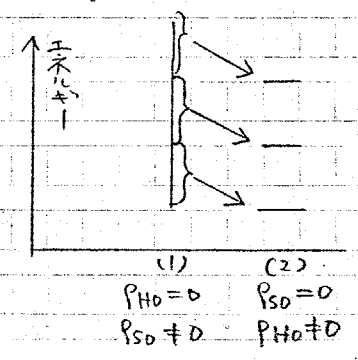


Fig. 4.4.2

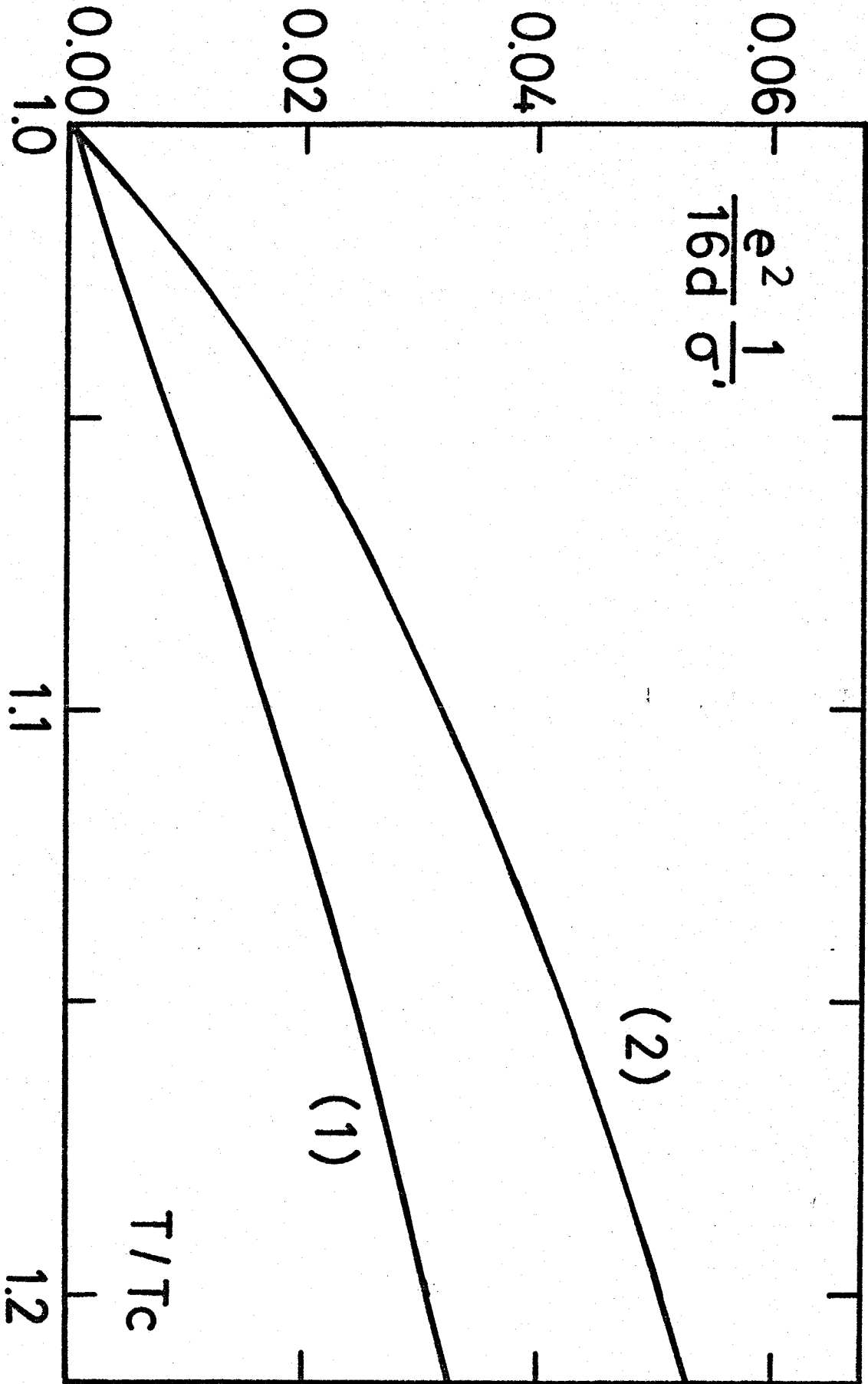


Fig.4.4.1

の場合と  $P_{50} = 0$  の場合のエネルギーを示したのが Fig. 4.4.2 である。エネルギーの最低の部分から  $T_c$  が決まるから (1) の  $P_{50}$  と (2) の  $P_{H0}$  が等しい限りは  $T_c$  は同一である。  $P_H \neq 0$  の場合には Cooper pair のエネルギーは Landau 準位に量子化されて (2) のようになり、準位の縮退度は  $eH/\pi$  である。因からわかるように (2) の場合は量子化によってエネルギー準位が (1) に比べて低い方にまとめられるので、エネルギーの低い Cooper pair の割合が多くなり、したがって伝導率も大きくなる。



## § 4.5 計算の有効性等について

本論文の計算に用いた仮定や近似について議論する。

## (1) 磁性不純物に関するもの

§ 2.1 で述べたハミルトニアンは *Abrikosov-Gorkov*<sup>79)</sup> に基づくもので、磁性不純物の性質は温度や伝導電子の状態とは全く無関係であると仮定している。この仮定によって不純物の磁性—非磁性転移や近藤効果が無視されることになる。超伝導体中の磁性不純物は2つのグループに分類するのが便利である。

(a) 鉄属不純物,  $La, Ce$ (b)  $La, Ce$  以外の希土類金属

(b) のグループのものについては  $T < T_c$  での性質がおおむね AG 理論で説明されているが、(a) のグループのものでは AG 理論がうわずいが見られる。そのような状況から、本論文の結果も (a) グループについては疑問があるが、比較すべき実験の報告はまだない。なお、§ 5.2 で述べた *Craven, Thomas and Parkes*<sup>76)</sup> の実験における磁性不純物  $Er$  は希土類金属でグループ (b) に属する。

グループ (a) に属する磁性不純物を取り扱うには *Anderson model*, あるいは *sd model* を用いるのが適当と思われるが、そのようなモデルを用いた計算は将来の問題である。

## (2) 磁場に関するもの

磁場の効果は § 3.1 に述べたように  $\varphi \rightarrow \varphi \pm 2eA$  の変換で取り入れた。この取り入れ方は  $l/\xi_0$  ( $l$  は電子の平均自由行程,  $\xi_0$  は *Pippard* の長さ) のオーダーの項を無視する限り正しく、<sup>(103)</sup> *dirty limit* ではこの取り入れ方で十分である。問題は  $A$  として外部磁場のポテンシャルを用いたことである。第2種超伝導体では  $T_{c1} < T < T_{c2}$  の領域で磁束が格子をつくらせて侵入した *Abrikosov* 状態<sup>(111)</sup> が実現されている。ただし  $T_{c1}, T_{c2}$  はそれぞれ第1,

第2臨界温度である。この状態を反映してTが上から $T_c$ に近づくとき磁場が一様に侵入している状態から、徐々に磁束をつくって侵入している状態に変化していくと推察される。本論文ではそのような状況を無視し、磁場は一様に薄膜に侵入しているとして計算を実行した。

また本論文では、磁場と電子スピン及び磁性不純物との相互作用を無視した。

### (3) Cooper pair 間の相互作用について

Cooper pair 間の相互作用を無視する近似はTが $T_c$ に近づくにつれて悪くなると思われ。Fig. 4.5.1 は Cooper pair 間の相互作用をあらわすダイアグラムの1例である。Cooper pair 間の相互作用が excess conductivity に及ぼす影響は数人の研究者により、理論的に検討され、相互作用を無視したときよりも伝導率の増大がゆるやかになることが示されている。Tazuzuki<sup>17)</sup> はそのような効果が現われる領域は高々

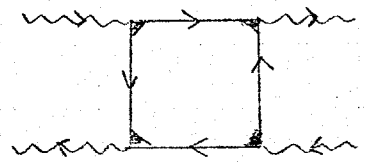


Fig. 4.5.1

$$\eta \lesssim 10^{-2}$$

(4.5.1)

にとどまると見つけている。

### (4) Maki 過程における Cooper pair の振動数について

Maki過程に含まれる Cooper pair のグリーン関数 $\mathcal{D}$ では振動数がゼロのもののみを近似とした。この近似の性質を調べるために、磁性不純物がないとして、Maki過程の $\mathcal{D}$ として $\mathcal{D}(Q, \pm 2\pi T)$ を用いて計算を実行してみた。詳細は省くが、 $Q$ の中で reduced temperature  $\eta_0$  が常に  $\eta_0 + \frac{\pi}{4}$  という形で現われることがわかった。したがってこのような $Q$ から得られる伝導率は発散するとしてもその発散点は  $\eta_0 + \frac{\pi}{4} = 0$  のところであり、 $T_c$  では発散しない。し

したがって Maki 過程では  $D$  の有限振動数部分からの寄与は重要ではないと推測できる。

### (5) 非線型電気伝導について

本論文では線型応答の理論を用いたので、非線型の電気伝導は全く考慮していない。ここでは物理的考察によって非線型伝導の目安となる特性電場と見つめてみよう。簡単のため磁場と磁性不純物はないものとしておく。

ゆらぎによって生じた Cooper pair はその寿命の間は電場中で無抵抗に加速されると考えられるが、あまり速度が速くなると分解する。Cooper pair の空間的広がり  $\xi(T) = \xi(0)/\sqrt{\eta}$  程度であるから、不確定性原理を援用して運動量の広がり  $1/\xi(T)$ 。したがって速度の臨界値は  $1/2m\xi(T)$  程度と考えるよいであろう。一方、Cooper pair に作用する力は  $2eE$  であるから、時刻  $t$  における Cooper pair の速度  $v(t)$  は

$$v(t) = 2eEt \quad (4.5.2)$$

である。ただし  $t=0$  で  $v=0$  とした。  $v=0$  の Cooper pair の寿命  $\tau_c$  は

$$\tau_c = \frac{\lambda_0}{\eta_0} = \frac{\pi}{8T} \frac{1}{\eta_0} \quad (4.5.3)$$

であるから、 $t=\tau_c$  のときの速度と求めると

$$v(\tau_c) = 2eE \frac{\pi}{8T} \frac{1}{\eta_0} \quad (4.5.4)$$

この  $\tau_c$  が臨界速度に等しくなるような  $E$  が非線型伝導の目安となる特性電場  $E_c$  であると考えよう。

$$\therefore 2eE_c \frac{\pi}{8T} \frac{1}{\eta_0} = \frac{1}{2m\xi(T)} \quad (4.5.5)$$

$$\therefore E_c = \frac{2T}{\pi e \xi(0)} \eta_0^{3/2} \quad (4.5.6)$$

与る電場  $E$  が強電場であるか弱電場であるかは  $E/E_c$  と 1 との大小で判定することになる。  $E_c$  の  $T$  依存性から転移点に近づくにつれて  $E_c$  は小さくなる。すなわち、同じ電場をかけていても、温度を  $T_c$  に近づけてゆくと弱電場から強電場へと状況が変化してゆく。

非線型の excess conductivity の理論は数人の研究者により発表されているが、それらによれば特性電場  $E_c$  は

$$E_c = \frac{16\sqrt{3}T}{\pi e \xi(0)} \eta_0^{3/2} \quad (4.5.7)$$

であり、(4.5.6) とは数係数が異なるのみである。

## 第5章 結論

本研究で得られた結果を要約すると以下のとおりである。

(1) 磁性不純物を含む超伝導体の *excess conductivity* を計算し、従来の Arlamazov-Larkin 理論, Maki-Thompson 理論, Gor'kov 理論, Nam 理論との関係を明らかにした。

(2) 従来より知られていた AL 項, MT 項以外に第3項を提案し,  $T_L$ ,  $T_N$  における実験結果の解析から, 第3項の存在を立証した。

(3) 磁性不純物と磁場が共に存在する場合の *excess conductivity* を計算した。その結果, 両者の転移温度に与える影響は同様であるが, それらの *excess conductivity* に与える影響の間には大きな違いがあることが示された。

## 謝辞

本論文を完成するにあたり、指導教官の栗野満教授、及び大塚美枝子助手に厚く感謝する次第であります。栗野研究室に在籍された今村健氏、伊藤雅幸氏ならびに現在在籍中の中川敦氏からは実験データを提供していただいた。物理学科の市村・三宅研究室の方々には、ゼミに参加させていただき、得るところが多かった。特に三宅哲助教授には投稿原稿を見ていただいた。また若田光延氏の注意によって計算がうまく行った個所がある。東北大学の都築俊夫教授には有益なコメントをいただいた。

以上のの方々、及び間接的に御助力をいただいた方々に深く感謝いたします。

## Appendix A Dirty limit と振動数和の順序の問題

§ 2.3 で  $\Pi$  を求めるときに, dirty limit の条件下で計算をおこなった. Dirty limit は (2.3.33) で考慮した. すなわち

$$L(q; i\omega_n, i\nu_l) = 2\pi N(0) \left[ |\tilde{\nu}_l' - \nu_l| - \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{3} \frac{v_F^2 q^2}{|\tilde{\nu}_l' - \nu_l|} \right]^{-1} \quad (\text{A.1})$$

の [ ] 内第 3 項を  $Dq^2$  と近似したのである.

$$\Pi(q, i\omega_n) = T \sum_{\nu_l} L(q; i\omega_n, i\nu_l) \quad (\text{A.2})$$

であるから, § 2.3 の計算は先に dirty limit をとって, 後に  $\nu_l$  和を実行したことになる. ここでは順序を逆にして先に  $\nu_l$  和を実行してみよう. このためには  $L(q; i\omega_n, i\nu_l)$  を展開すればよい.

$$L(q; i\omega_n, i\nu_l) \approx 2\pi N(0) \left\{ \frac{1}{|\tilde{\nu}_l' - \nu_l| - \tau_2^{-1}} - \frac{v_F^2 q^2}{3} \frac{1}{|\tilde{\nu}_l' - \nu_l|} \frac{1}{(|\tilde{\nu}_l' - \nu_l| - \tau_2^{-1})^2} \right\} \quad (\text{A.3})$$

(A.3) を用いて  $\nu_l$  和を計算すると次の式を得る.

$$\Pi(q, i\omega_n) = \frac{1}{g} - N(0) \left[ \left\{ \eta_0 + 4\left(\frac{1}{2} + p_s\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right) \right\} + \frac{v_F^2}{48\pi^2 T^2} \chi(p_1, p_2) q^2 + \lambda_0 |\omega_n| \right]. \quad (\text{A.4})$$

ただし

$$\chi(p_1, p_2) = \frac{1}{p_1 - p_s} \left[ 4^{1/2} \left(\frac{1}{2} + p_s\right) + \frac{1}{p_1 - p_s} \left\{ 4\left(\frac{1}{2} + p_s\right) - 4\left(\frac{1}{2} + p_s\right) \right\} \right]. \quad (\text{A.5})$$

$$\rho_1 = \frac{1}{4\pi T \tau_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2\pi T \tau_2}, \quad (A.6)$$

$\rho_1$  に関するものは  $\rho^2$  の係数の  $\chi(\rho_1, \rho_2)$  だけである。

$$\begin{aligned} \rho_1 - \rho_2 &= \frac{1}{4\pi T} \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{2}{\tau_2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi T \tau_2} \equiv \rho_2 \quad (\because (2.3.37)) \end{aligned} \quad (A.7)$$

Dirty limit では  $\rho_1, \rho_2 \rightarrow \infty$  であるから

$$\begin{aligned} \chi(\rho_1, \rho_2) &\sim \frac{1}{\rho_2} \chi''\left(\frac{1}{2} + \rho_2\right) \\ &= 4\pi T \tau_2 \chi''\left(\frac{1}{2} + \rho_2\right) \end{aligned} \quad (A.8)$$

よって (A.4) の  $\rho^2$  の項は

$$\frac{1}{48\pi^2 T^2} 4\pi T \tau_2 \chi''\left(\frac{1}{2} + \rho_2\right) = \frac{\chi''\left(\frac{1}{2} + \rho_2\right) \tau_2}{4\pi T \tau_1} \rho \rho^2 \quad (A.9)$$

となる。こゝから

$$\mathcal{D}^{-1}(\rho, i\omega_n) = N(i\omega_n) \left\{ \alpha + \frac{\tau_2}{\tau_1} \lambda \rho^2 + \lambda_0 |\omega_n| \right\}^{-1} \quad (A.10)$$

が得られる。(A.10) を (2.3.69) と比べると、因子  $\tau_2/\tau_1$  が余分に入っていることがわかるが、§2.3の終りに述べたようにこの因子は1とみなしてもよいため、§2.3より後の議論には影響を与えない。

$\Pi$  の計算は §2.4 の  $\Gamma$  を用いてもできるが、ここでも dirty limit の問題が



ある。

$$\Gamma(\mathbf{q}; i\nu_e, i\nu_e') = \begin{cases} \frac{|\tilde{\nu}_e - \tilde{\nu}_e'|}{|\nu_e - \nu_e'| + 2\tau_s^{-1} + D'\mathbf{q}^2} & \nu_e \nu_e' < 0 \\ 1 & \nu_e \nu_e' > 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

$$D' = \frac{\tau_1}{\tau_2} D \quad (\text{A.12})$$

に注意し、因子  $\tau_1/\tau_2$  を残しておいた。(2.4.13) 参照。) : この  $\Gamma$  を用いて

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{q}, i\omega_n) &= T \sum_{\nu_e} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} G(\mathbf{p}, i\nu_e) G(\mathbf{q}-\mathbf{p}, i(\omega_n - \nu_e)) \Gamma(\mathbf{q}; i\nu_e, i(\omega_n - \nu_e)) \\ &= 2\pi N(10) T \sum_{\nu_e \nu_e' < 0} \frac{1}{|\nu_e - \nu_e'| + 2\tau_s^{-1} + D'\mathbf{q}^2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{v_F^2 \mathbf{q}^2}{\{|\nu_e - \nu_e'| + \tau_1^{-1}\}^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

(A.13) で *dirty limit* をとって [ ] 内の第2項は  $\sim \tau_1^{-2}$  として  $\tau_1^2 v_F^2 \mathbf{q}^2$  と評価し、 $D\mathbf{q}^2$  に比べて  $\tau_1$  が1つ余分にかかっているのだから、この *limit* で無視できると考えると Baba and Maki<sup>(12)</sup> の式になる。すなわち

$$\Pi(\mathbf{q}, i\omega_n) = \frac{1}{g} N(10) \left[ \alpha + \frac{\tau_1}{\tau_2} \lambda \mathbf{q}^2 + \lambda_0 |\omega_n| \right] \quad (\text{A.14})$$

が得られる。(A.10) では  $\mathbf{q}^2$  の項が  $(\tau_2/\tau_1) \lambda \mathbf{q}^2$  であったから  $\lambda \mathbf{q}^2$  の前の因子が異なっている。その原因は (A.13) で [ ] 内の第2項を無視したことにある。(A.13) において右辺と  $\mathbf{q}^2$  で展開して  $\nu_e$  和をとれば再び (A.10) が得られる。

以上のような状況の起こる原因は *dirty limit* を考慮する時期の違いによる。Dirty limit とは  $\rho_1 \rightarrow \infty$  を意味するのであって、 $\rho_s$  は適当な値に固

定されているのである。したがって *dirty limit* をとった後では  $P_1$ ,  $P_1 - P_2$ ,  $P_1 + P_2$  等の差は見えなくなってしまうのである。すなわち先に *dirty limit* をとった場合は和の実行の際に  $\tau_2/\tau_1$  などの因子を残しておくことは無意味である。もしそのような因子を残しておきたいのであれば、すべての計算を先におこなひ、一番最後に *dirty limit* をとるべきである。後者の手続きを正確に実行した結果が (A.10) である。Baba and Maki の表式 (A.14) は先に *dirty limit* をとりながら、因子  $\tau_1/\tau_2$  を残したため、(A.10) と因子の違いを生じたものである。

## Appendix B ALダイアグラムとMakiダイアグラムにおける符号の問題

AL, Maki のダイアグラムに対応する解析的表式で負号が現われたか, それについて説明する.

Q の定義は次のとおりである.

$$Q_{\alpha\beta}(r, \tau) = -\langle T_{\tau} j_{\alpha}(r, \tau) j_{\beta}(0, 0) \rangle \quad (\text{B.1})$$

Fourier 変換して

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}(\tau) &= \sum_{k, k'} -\langle T_{\tau} j_{\alpha}(k, \tau) j_{\beta}(k', 0) \rangle \\ &= \frac{e^2}{m^2} \sum_{k, k'} k_{\alpha} k'_{\beta} \mathcal{K}(k, k', \tau) \end{aligned}$$

$$\mathcal{K}(k, k', \tau) = -\langle T_{\tau} a_{k\uparrow}^{\dagger}(\tau) a_{k\uparrow}(\tau) a_{k'\uparrow}^{\dagger}(0) a_{k'\uparrow}(0) \rangle \quad (\text{B.2})$$

である. また, 相互作用は

$$-g a_{-p+\uparrow}^{\dagger} a_{p\downarrow}^{\dagger} C_{\uparrow} \quad \varepsilon \quad -g C_{\uparrow}^{\dagger} a_{p\downarrow} a_{-p+\uparrow} \quad (\text{B.3})$$

である. 虚時間の S 行列は

$$S(\beta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\beta} T [N'(1) N'(2) \dots N'(n)] d_1 d_2 \dots d_n \quad (\text{B.4})$$

である.

最初に AL ダイアグラムを考えよう.

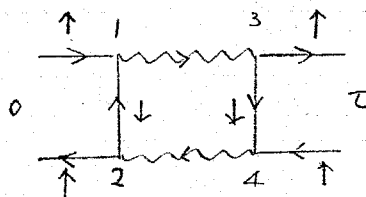


Fig. B.1

座時間の順序は  $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \tau$  としておく。ℳへのこのダイアグラムで表わされる補正は

$$\begin{aligned}
 & -g^4 \langle a_{\uparrow}^{\dagger}(\tau) a_{\uparrow}(\tau) C^{\dagger}(4) a_{\downarrow}(4) a_{\uparrow}(4) a_{\uparrow}^{\dagger}(3) a_{\downarrow}^{\dagger}(3) C(3) \\
 & \quad \times a_{\uparrow}^{\dagger}(2) a_{\downarrow}^{\dagger}(2) C(2) C^{\dagger}(1) a_{\downarrow}(1) a_{\uparrow}(1) a_{\uparrow}^{\dagger}(0) a_{\uparrow}(0) \rangle \\
 & = \langle a_{\uparrow}^{\dagger}(\tau) a_{\uparrow}(4) \rangle \langle a_{\uparrow}^{\dagger}(\tau) a_{\uparrow}^{\dagger}(3) \rangle \langle a_{\downarrow}(4) a_{\downarrow}^{\dagger}(3) \rangle \langle a_{\downarrow}^{\dagger}(2) a_{\downarrow}(1) \rangle \\
 & \quad \times \langle a_{\uparrow}^{\dagger}(2) a_{\uparrow}(0) \rangle \langle a_{\uparrow}(1) a_{\uparrow}^{\dagger}(0) \rangle g^2 \langle C^{\dagger}(4) C(2) \rangle g^2 \langle C(3) C^{\dagger}(1) \rangle \\
 & = -G(4, \tau) G(\tau, 3) G(4, 3) G(1, 2) G(0, 2) G(1, 0) \\
 & \quad \times \mathcal{D}(2, 4) \mathcal{D}(3, 1) \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

である。ただし運動量の添字を省いた。1に於てALダイアグラムの解析的表式には負号をつける必要がある。

次にMakiダイアグラムについて調べる。Makiダイアグラムは5種類あるが、ここでは1つだけについて記す。

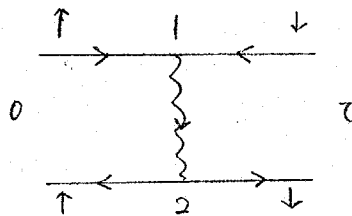


Fig. B.2

ℳへの補正は

$$\begin{aligned}
 & -g^2 \langle a_{\downarrow}^{\dagger}(\tau) a_{\downarrow}(\tau) a_{\uparrow}^{\dagger}(2) a_{\downarrow}^{\dagger}(2) C(2) C^{\dagger}(1) a_{\downarrow}(1) a_{\uparrow}(1) a_{\uparrow}^{\dagger}(0) a_{\uparrow}(0) \rangle \\
 & = -\langle a_{\downarrow}^{\dagger}(\tau) a_{\downarrow}(1) \rangle \langle a_{\downarrow}(\tau) a_{\downarrow}^{\dagger}(2) \rangle \langle a_{\uparrow}^{\dagger}(2) a_{\uparrow}(0) \rangle \langle a_{\uparrow}(1) a_{\uparrow}^{\dagger}(0) \rangle g^2 \langle C^{\dagger}(1) C(2) \rangle \\
 & = -G(1, \tau) G(\tau, 2) G(0, 2) G(1, 0) \mathcal{D}(2, 1)
 \end{aligned}$$

であり、やはり負号が現われる。

## References

- 1) J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer: Phys. Rev. 106 (1957) 162.
- 2) J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer: Phys. Rev. 108 (1957) 1175.
- 3) V. L. Ginzburg: Fiz. tverdogo Tela 2 (1960) 2031.
- 4) D. J. Thouless: Ann. Phys. 10 (1960) 553.
- 5) R. E. Glover: Phys. Letters 25A (1967) 542.
- 6) L. G. Aslamazov and A. I. Larkin: Phys. Letters 26A (1968) 238.
- 7) L. G. Aslamazov and A. I. Larkin: Fiz. tverdogo Tela 10 (1968) 1104. translation: Soviet Phys.-Solid State 10 (1968) 875.
- 8) E. A. Abrahams and J. W. F. Woo: Phys. Letters 27A (1968) 117.
- 9) H. Schmidt: Z. Phys. 216 (1968) 336.
- 0) A. Schmid: Z. Phys. 215 (1968) 210.
- 1) L. P. Kadanoff and G. Laramore: Phys. Rev. 175 (1968) 579.
- 2) K. Maki: Progr. theor. Phys. 39 (1968) 897.
- 3) K. Maki: Progr. theor. Phys. 40 (1968) 193.
- 4) G. Bergmann: Z. Phys. 225 (1969) 430.
- 5) J. P. Hurault: Phys. Rev. 179 (1969) 494.
- 6) K. Maki: J. low. Temp. Phys. 1 (1969) 513.
- 7) T. Tsuzuki: Progr. theor. Phys. 41 (1969) 296.
- 8) K. -D. Usadel: Z. Phys. 227 (1969) 260.
- 9) R. A. Ferrell: J. low Temp. Phys. 1 (1969) 241.
- 0) T. Tsuzuki: Progr. theor. Phys. 42 (1969) 1020.
- 1) T. Tsuzuki: Progr. theor. Phys. 42 (1969) 1030.
- 2) T. Tsuzuki: Progr. theor. Phys. 43 (1970) 286.
- 3) G. E. Clarke and D. R. Tilley: J. Phys. C3 (1970) 2448.
- 4) P. Fulde and K. Maki: Z. Phys. 238 (1970) 233.
- 5) L. P. Gor'kov: Zh. eksper. teor. Fiz. Pis. Red. 11 (1970) 52. translation: JETP Letters 11 (1970) 32.

- 6) H. J. Mikeska and H. Schmidt: Z. Phys. 230 (1970) 239.
- 7) S. B. Nam: Phys. Letters 31A (1970) 218.
- 8) R. S. Thompson: Phys. Rev. B1 (1970) 327.
- 9) D. R. Tilley and J. B. Parkinson: J. Phys. C2 (1970) 2175.
- 0) K. Aoi: Z. Phys. 246 (1971) 71.
- 1) M. Koyanagi and T. Tsuzuki; Progr. theor. Phys. 45 (1971) 997.
- 2) K. Maki: Progr. theor. Phys. 45 (1971) 1016.
- 3) B. R. Patton: Phys. Rev. Letters 27 (1971) 1273.
- 4) A. Schmid: Z. Phys. 243 (1971) 346.
- 5) R. S. Thompson: Physica 55 (1971) 296.
- 6) H. Takayama and K. Maki: Progr. theor. Phys. 46 (1971) 42.
- 7) E. Abrahams, R. E. Prange and M. J. Stephen: Physica 55 (1971) 230.
- 8) J. Keller and V. Korenman: Phys. Rev. Letters 27 (1971) 1270.
- 9) J. Keller and V. Korenman: Phys. Rev. B5 (1972) 4367.
- 0) H. Takayama: Progr. theor. Phys. 48 (1972) 382.
- 1) K. Aoi: Phys. Letters 44A (1973) 267.
- 2) S. Imai: Progr. theor. Phys. 50 (1973) 1087.
- 3) M. Koyanagi: Progr. theor. Phys. 50 (1973) 740.
- 4) A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov: J. low Temp. Phys. 10 (1973) 407.
- 5) O. D. Cheishvili: Zh. eksper. teor. Fiz. 66 (1974) 1862.  
translation: Soviet Phys.-JETP 39 (1974) 916.
- 6) K. Aoi, R. Meservey and M. Tedrow: Phys. Rev. B9 (1974) 875.
- 7) G. R. Feat and G. Rickayzen: J. Phys. F5 (1975) 307.
- 8) A. A. Golub: Zh. eksper. teor. Fiz. 67 (1974) 706. translation:  
Soviet Phys.-JETP 40 (1974) 349.
- 9) T. Imamura, K. Okamoto, M. Saito and M. Ohtsuka: J. Phys. Soc.  
Japan 40 (1976) 1256.
- 0) K. Okamoto: J. Phys. Soc. Japan 42 (1977) 1136.

- 1) K. Okamoto: J. Phys. Soc. Japan 43 (1977) 1089.
- 2) M. Strongin, O. F. Kammerer, J. Crow, R. S. Thompson and H. L. Fine: Phys. Rev. Letters 20 (1968) 922.
- 3) D. C. Naugle and R. E. Glover: Phys. Letters 28A (1968) 110.
- 4) R. O. Smith, B. Serin and E. Abrahams; Phys. Letters 28A (1968) 224.
- 5) W. E. Masker, S. Marcelja and R. D. Parks: Phys. Rev. 188 (1969) 745.
- 6) R. S. Thompson, M. Strongin, O. F. Kammerer and J. E. Crow: Phys. Letters 29A (1969) 194.
- 7) L. R. Testardi, W. A. Reed, P. C. Hohenberg W. H. Haemmerle and G. F. Brennert: Phys. Rev. 181 (1969) 800.
- 8) J. E. Crow, R. S. Thompson, M. A. Klenin and A. K. Bhatnagar: Phys. Rev. Letters 24 (1970) 371.
- 9) S. Danner and F. Baumann: Phys. Letters 33A (1970) 82.
- 0) W. E. Masker, and R. D. Parks: Phys. Rev. B1 (1970) 2164.
- 1) A. D. C. Grassie and D. B. Green: J. Phys. C3 (1970) 1575.
- 2) A. K. Bhatnagar, P. Kahn and T. J. Zammit: Solid State Commun. 8 (1970) 79.
- 3) R. E. Glover: Physics 55 (1971) 3.
- 4) A. M. Goldman, F. M. Schaer, L. E. Toth and J. Zbzsniak: Physica 55 (1971) 234.
- 5) B. Serin, R. O. Smith and T. Mizusaki: Physica 55 (1971) 224.
- 6) A. D. C. Grassie, D. B. Green and A. Benyon: Physica 55 (1971) 243.
- 7) G. A. Thomas and R. D. Parks: Physica 55 (1971) 215.
- 8) M. A. Klenin and M. A. Jensen: Physica 55 (1971) 279.
- 9) R. Aoki, T. Kawaguti, K. Hatada and N. Kawamura: Proc. 12th Int. Conf. Low Temp. Phys. (Keigaku, Tokyo, 1971) p.649
- 0) R. A. Craven, G. A. Thomas and R. D. Parks: Phys. Rev. B4 (1971) 2185.



- 71) K. Kajimura: Res. Electrotechnical Lab. No.720. (1971).
- 72) A. M. Goldman, F. M. Schaer and L. Toth: Solid State Commun. 9 (1971) 557.
- 73) J. E. Crow, A. K. Bhatnagar and T. Mihalsin: Phys. Rev. Letters 28 (1972) 25.
- 74) T. Aomine and L. Rinderer: J. low Temp. Phys. 6 (1972) 323.
- 75) T. Aomine and L. Rinderer: J. low Temp. Phys. 10 (1973) 157.
- 76) R. A. Craven, G. A. Thomas and R. D. Parks: Phys. Rev. B7 (1973) 157.
- 77) T. Magome, T. Imamura and M. Ohtsuka: J. Phys. Soc. Japan 35 (1973) 1555.
- 78) A. K. Bhatnagar and B. Gallardo: Phys. Letters 44A (1973) 357.
- 79) A. K. Bhatnagar and B. Gallardo: Proc. 13th Int. Conf. Low Temp. Phys. (Plenum, New York, 1974) Vol.3, p.654.
- 80) T. Kawaguti and Y. Shibuya: Phys. Letters 45A (1973) 395.
- 81) T. Kawaguti and Y. Shibuya: J. low Temp. Phys. 17 (1974) 143.
- 82) M. K. Chien and R. E. Glover: Proc. 13th Int. Conf. Low Temp. Phys. (Plenum, New York, 1974) Vol.3, p.649.
- 83) A. K. Saxena and A. K. Bhatnagar: Proc. 14th Int. Conf. Low Temp. Phys. (North-Holland, Amsterdam, 1975) Vol.2, p.368.
- 84) V. P. Duggal and P. K. Ashwini Kumar: Phys. Letters 53A (1975) 241.
- 85) C. G. Granqvist and T. Claeson: Solid State Commun. 16 (1975) 123.
- 86) C. G. Granqvist and T. Claeson: Z. Phys. B20 (1975) 241.
- 87) P. K. Ashwini Kumar: Thin Solid Films 32 (1976) L1.
- 88) C. G. Granqvist and T. Claeson: Solid State Commun. 19 (1976) 913.
- 89) A. A. Abrikosov and L. P. Gor'kov: Zh. eksper. teor. Fiz. 39 (1960) 1781. translation: Soviet Phys.-JETP 12 (1961) 1243.

- 90) A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov and I. E. Dzyaloshinskii:  
Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics  
 (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964) §39.  
 『統計物理学における場の量子論の方法』(東京図書, 1970)
- 91) P. Fulde and S. Strässler: Phys. Rev. B1 (1970) 3017.
- 92) A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov and I. E. Dzyaloshinskii:  
Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics  
 (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964) §8.  
 『統計物理学における場の量子論の方法』(東京図書, 1970)
- 93) Y. Nambu: Phys. Rev. 117 (1960) 648.
- 94) J. R. Schrieffer: Theory of Superconductivity (Benjamin,  
 New York, 1964).
- 95) R. Kubo: J. Phys. Soc. Japan 12 (1957) 570.
- 96) L. P. Gor'kov and G. M. Eliashberg: Zh. eksper. teor. Fiz.  
55 (1968) 2443. translation: Soviet Phys.-JETP 28 (1969) 1298.
- 97) C. Caroli and K. Maki; Phys. Rev. 164 (1967) 591.
- 98) H. Ebisawa and H. Takayama: Progr. theor. Phys. 42 (1969) 1481.
- 99) A. Houghton and K. Maki: Phys. Rev. B3 (1971) 1625.
- 100) S. Imai: Progr. theor. Phys. 51 (1974) 1647.
- 101) A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov and I. E. Dzyaloshinskii:  
 Zh. eksper. teor. Fiz. 36 (1959) 900. translation: Soviet  
 Phys.-JETP 9 (1959) 636.
- 102) E. S. Fradkin: Zh. eksper. teor. Fiz. 36 (1959) 1286.  
 translation; Soviet Phys.-JETP 9 (1959) 912.
- 103) K. Maki: Physics 1 (1964) 21.
- 104) P. A. Lee and M. G. Payne: Phys. Rev. Letters 26 (1971) 1537.
- 105) P. A. Lee and M. G. Payne: Phys. Rev. B5 (1972) 923.
- 106) J. Kurkijärvi, V. Ambegaokar and G. Eilenberger: Phys. Rev.  
B5 (1972) 868.

- 107) R. R. Gerhardt: Phys. Rev. B 9 (1974) 2945.
- 108) 今村 健: 東京工業大学修士論文 (1975)
- 109) 伊藤雅幸: 東京工業大学修士論文 (1977)
- 110) K. Maki: Superconductivity, ed. by R. D. Parks (Marcel Dekker, New York, 1969).
- 111) A. A. Abrikosov: Zh. eksper. teor. Fiz. 32 (1957) 1442.  
translation: Soviet Phys.-JETP 5 (1957) 1174.
- 112) Y. Baba and K. Maki: Progr. theor. Phys. 44 (1970) 1431.