

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	衝撃力の逆問題解析に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	井上裕嗣
Author(English)	HIROTSUGU INOUE
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第2515号, 授与年月日:1993年9月30日, 学位の種別:論文博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第2515号, Conferred date:1993/9/30, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

学位論文

衝撃力の逆問題解析に関する研究

井上裕嗣

目次

第1章 緒論	1
第2章 衝撃力の逆問題解析手法	13
2.1 緒言	13
2.2 一定方向衝撃力の逆問題解析	15
2.2.1 基礎関係式	15
2.2.2 逆問題における不適切性	17
2.2.3 最適逆システムによる逆問題解析	20
2.3 任意方向衝撃力の逆問題解析	24
2.3.1 基礎関係式	24
2.3.2 最適逆システムによる逆問題解析の拡張	26
2.3.3 任意方向衝撃力の逆問題における不適切性	27
2.3.4 特異値分解を利用した逆問題解析	30
2.4 逆問題解析における数値計算法	34
2.4.1 数値ラプラス変換・逆変換	34
2.4.2 複素行列の特異値分解	35
2.5 結言	38
第3章 高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換	41
3.1 緒言	41
3.2 離散ラプラス変換・逆変換	42
3.2.1 ラプラス変換	42
3.2.2 離散ラプラス変換	42

3.2.3	離散ラプラス逆変換	44
3.2.4	高速フーリエ変換の利用	45
3.3	数値ラプラス変換・逆変換の精度評価	48
3.3.1	試験関数	48
3.3.2	精度の評価法	48
3.3.3	数値計算例	49
3.3.4	定数 γ の影響	54
3.3.5	計算点数の影響	56
3.3.6	周波数成分の影響	58
3.3.7	精度評価結果の図式化	58
3.4	結言	62
第4章	衝撃力の逆問題解析の数値シミュレーション	63
4.1	緒言	63
4.2	解析のモデルと方法	64
4.3	数値解析結果	68
4.3.1	直接的逆問題解析	68
4.3.2	測定データの雑音の影響	71
4.3.3	最適逆システムによる逆問題解析	71
4.4	結言	79
第5章	構造要素に作用する衝撃力の測定	81
5.1	緒言	81
5.2	両端支持はりに作用する衝撃力の測定	83
5.2.1	実験方法	83
5.2.2	較正実験	88
5.2.3	棒による衝撃力の測定	90
5.2.4	球による衝撃力の測定	97
5.3	平板に作用する衝撃力の測定	105

5.3.1	実験方法	105
5.3.2	校正実験	107
5.3.3	棒による衝撃力の測定	108
5.3.4	球による衝撃力の測定	113
5.3.5	ハンマによる衝撃力の測定	117
5.4	片持はりに作用する衝撃力の測定	120
5.4.1	実験方法	120
5.4.2	校正実験	122
5.4.3	棒による衝撃力の測定	126
5.4.4	球による衝撃力の測定	133
5.5	異方性平板に作用する衝撃力の測定	140
5.5.1	実験方法	140
5.5.2	校正実験	143
5.5.3	棒による衝撃力の測定	146
5.5.4	球による衝撃力の測定	149
5.6	はりに作用する二次元的衝撃力の測定	154
5.6.1	実験方法	154
5.6.2	校正実験	158
5.6.3	棒による衝撃力の測定	160
5.6.4	球による衝撃力の測定	171
5.7	結言	182
第6章	計装化衝撃試験における衝撃力の測定	183
6.1	緒言	183
6.2	実験装置および方法	185
6.2.1	計装化シャルピー衝撃試験機	185
6.2.2	逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法	185
6.2.3	静的校正に基づく衝撃力の測定法	192
6.2.4	試験片の吸収エネルギーの算定法	194

6.2.5	試験片および測定装置	195
6.3	較正実験と伝達関数	197
6.3.1	較正実験の結果	197
6.3.2	伝達関数	201
6.3.3	弾性棒による衝撃力	206
6.4	衝撃試験結果	211
6.4.1	ひずみ応答	211
6.4.2	衝撃力	217
6.4.3	吸収エネルギー	229
6.5	結言	236
第7章	結論	237
	参考文献	241
付録A	ブリッジボックス	251

第 1 章

緒論

工業製品の破壊や損傷による故障や機能低下を防止し、かつ、要求される機能を必要最小限のコストで実現して資源を有効利用するためには、使用条件下における負荷および構造と材料の強度の正確な評価に基づいた設計・製作が要求される。このために、構造物の応力解析と材料の力学的性質の評価に関しては古くから多くの研究が行われている。構造物の応力解析および材料の力学的性質の評価の問題は、負荷の様式や材料の種類などに応じて分類されるが、その一つに衝撃問題、すなわち、負荷が短時間のうちに作用し、物体の応力や変形に対する慣性力の影響が無視できない問題がある。衝撃問題は、静的負荷の問題に比べて物体の変形が高速かつ局所的で、発生する応力も大きいという点に特徴があり、このために破壊や損傷に至る危険性が高い。例えば、自動車・鉄道車両・航空機などの高速度で運行される交通機関の衝突や、化学薬品・放射性物質などの危険物質を扱う機器あるいは宇宙構造物への衝撃は、重大な事故や多大な損害をもたらす。このような衝撃による事故や損害を未然に防止するためには、衝撃負荷を受ける構造物の応力解析と、高速変形する材料の力学的性質の評価とを正確に行うことが要求される。

構造物の応力解析を行うためには、まず、作用する負荷を明確にすることが重要である。衝撃問題においては、衝突する二物体の寸法、形状、材質、衝突速度などの多くの因子によって作用する負荷、すなわち、衝撃力が変化する。衝撃力は衝突する二物体の接触応力の合力であるから、衝撃力を解析的に求めるためには、衝突する二物体の接触を考慮して二体問題の応力解析を行わねばならない。衝撃力の解析法としては、以下に挙げる方法が従来より研究されている。棒と棒の縦衝撃における衝撃力は、一次元縦衝撃理論 [23, 55, 63] に基づいて解析的に求められる。また、棒によるはりの横衝撃におけ

る衝撃力は小高ら [6]，棒による板の横衝撃における衝撃力は中原 [20] によって解析された。これらの研究では二物体の接触点近傍の局部変形を無視しているが，Hertz の接触理論に基づいて局部変形を考慮した解析 [28, 55] も行われた。一方，球による棒，はり，板の衝撃における衝撃力についても，Hertz の接触理論に基づいて球と被衝撃体の接触点近傍の局部変形を考慮した解析 [28, 30, 52, 55, 65, 78, 80, 85, 90] が数多く行われた。しかしながら，任意の形状を有する物体が衝突する場合には，二体問題の応力解析は複雑となり多くの困難を伴うため，衝撃力の理論解析は容易でない。これに対し，実機やモデルを使用した実験を行って衝撃力を正確に測定しておけば，それに基づいて衝撃力を仮定することにより，衝突する二物体のそれぞれについて独立に衝撃応力解析を行うことができる。また，近年では，有限要素法などの数値解析法によって複雑な二体問題を解析することも可能になりつつあるが，それらの解析結果の妥当性を検証するためには，実験を行って衝撃力を正確に測定することが必要不可欠である。さらに，高速変形する材料の力学的性質を正確に把握するためには，各種の材料について衝撃試験を行ってデータを蓄積する必要があるが，衝撃試験において試験片に作用する衝撃力を正確に測定することの重要性は言うまでもない。

したがって，構造物の衝撃問題を取り扱う上で，衝撃力を正確に測定することは重要な課題である。

物体に衝撃力が作用する場合には，応力波が反射・透過を繰り返しながら内部を伝播するので，衝撃力を正確に測定するためには，応力波の伝播挙動を考慮に入れた測定法を適用する必要がある。従来研究された衝撃力の測定法は，以下に述べるように直接的方法と間接的方法に大別できる [27]。

直接的方法とは，圧電素子などを使用したトランスデューサを衝撃点に取り付けて衝撃力を測定する方法である。松本ら [27, 29, 30] は，円板状の圧電素子を軟鋼円板で挟んだトランスデューサを製作し，棒および球による棒の縦衝撃やはりの横衝撃における衝撃力を測定した。Sundin ら [83] は，鋼製の短円柱の側面にゲージ線を巻き付け，短円柱を圧縮したときのゲージ線の伸びによる抵抗変化を検出することにより衝撃力を測定するトランスデューサを開発した。これらの直接的方法は，トランスデューサの出力波形

が衝撃力波形に直接対応するため、簡便に測定ができるという利点がある。しかし、トランスデューサを取り付けたことによる衝撃点の接触状態の変化や、応力波伝播によってトランスデューサ自体に生じる振動などのために、衝撃力波形が正確に測定できない場合もあり、必ずしも任意の場合に適用できるとは限らないのが難点である。

一方、間接的方法とは、衝撃物体の適切な箇所にはずみゲージなどのセンサを取り付け、センサによる測定値と衝撃力との関係に基づいて衝撃力を求める方法である。弾性棒の縦衝撃では、応力波の一次元的な伝播の仮定に基づいて、棒の側面の軸方向はずみを測定することにより、棒の端面に作用する衝撃力が求められる [23, 55]。この方法は、最も基本的な測定法であり、各種の衝撃実験では弾性棒の縦衝撃により衝撃力を作用させ、この方法を適用して衝撃力を測定している場合が多く、また、他の衝撃力測定法の妥当性を判断する際に、この方法との比較を行っている場合が多い。衝撃時間が長い場合には、棒の衝撃端から直接入射する応力波と自由端で反射された応力波とが重畳した形でセンサで検出されるために、この方法では衝撃力が測定できないが、柳原ら [34, 35] および Lundberg ら [69] は、弾性棒の応力波の一次元伝播理論に基づいて、棒の 2 箇所におけるはずみの測定値から入射応力波と反射応力波を分離することにより、衝撃端に作用する衝撃力を求める方法を示した。また、棒と同様に基本的な構造要素の衝撃力測定に関して、渋谷ら [12, 13, 14] は、はり、板、円輪の衝撃点近傍の微小要素のせん断力と衝撃力との準静的な釣り合いに基づいて、衝撃点近傍の数箇所のはずみを測定して衝撃力を求める方法を示した。谷村ら [17] は、平板の衝撃点近傍の数箇所の小孔に微小なはずみゲージを接着し、任意の衝撃体の衝突による衝撃力を測定する検力板を開発した。これらの間接的測定法は、衝撃点の接触状態を変化させることなく衝撃力を測定できる点において、直接的方法より優れている。しかし、間接的測定法では、センサにより測定される物理量と衝撃力との関係があらかじめ知られていなければならないため、この関係を理論的に導出することができるような単純な形状の構造物、すなわち、棒、はり、板などに適用範囲が限られるのが難点である。

以上のように、従来知られている衝撃力の測定法は適用範囲に限界がある。そのため、実際に衝突物体の形状が複雑な場合には、物体内部の応力波の伝播挙動を正確に考慮していない測定法を適用する場合がある。しかし、このような場合には、応力波が物体内部

で複雑に反射を繰り返すことによって衝撃力の測定波形に振動が重畳し、衝撃力は正確に測定できないことが多い [8, 16, 21, 24, 39, 45, 61]。その対策として、従来、衝撃力の測定波形に重畳する振動を補正する方法が提案されている。沢田 [11] は、材料の高速引張試験において、負荷・計測系を低自由度のばね-ダンパ-質点系で近似したモデルに基づいて、衝撃力の測定波形に重畳する振動を除去する方法を示した。しかし、衝撃力の作用下では高次モードの振動も多く励起されるので、低自由度のばね-ダンパ-質点系では、応力波の伝播などによって生じる振動を正確にモデル化することは困難である。したがって、このようなモデルに基づいて衝撃力波形中の振動を除去する方法は、衝撃力を正確に測定するための方法として一般的に有効であるとは言えない。一方、計装化シャルピー衝撃試験において小林ら [7] は、移動平均法を適用して衝撃力の測定波形に重畳する振動を平滑化し除去する方法を示した。また、Cain [43] は、周波数フィルタを適用して同様の平滑化を行う方法を示した。しかし、例えば三点曲げ試験片を使用した衝撃試験では、試験片の曲げ振動のために真の衝撃力波形が振動的となる。このような場合に平滑化法を適用すると、応力波の伝播に起因する振動が除去されるだけでなく、真の衝撃力波形が歪められるため、衝撃力は必ずしも正確に測定できない。

以上に加えて、衝撃力はベクトル量であるから、衝撃力の方向が明らかでない場合や、方向が時間的に変化する場合などには、衝撃力の大きさだけでなく方向も測定することが必要である。例えば、粒子の衝突による材料 (特に、セラミックス材料) の損傷の研究は近年注目されているが、表面に対して斜め方向から粒子が衝突する場合における衝撃力の大きさと方向を正確に把握することは、損傷機構を解明して材料の強化を図る上で重要である。従来、衝撃力の方向の測定に関する研究としては、Lewis ら [68] が球による平板の衝撃において、二軸の圧電素子を使用して衝撃力の垂直成分と接線成分を同時に測定した例が挙げられる。Lewis らの方法は一種の直接的測定法であるから、既に述べた理由により必ずしも任意の場合に適用できるとは限らない。現在のところ、任意の物体に作用する衝撃力の方向を測定するための適切な方法は、未だ見当たらないようである。

以上に論じたように、任意形状の物体に作用する衝撃力の大きさと方向を正確に測定するために有効な方法は未だ確立されておらず、実際には十分な精度が保証されていない測定法を適用するために衝撃力が正確に測定されない場合もある。

さて、近年、物理現象の測定結果からその原因である物理量を推定する逆問題が活発に研究されている。逆問題の研究分野は数学、物理学、工学など広範で多岐にわたっており、材料力学の分野においても逆問題解析に関連する数多くの研究 [3, 4, 5, 22] が行われつつある。このような背景のもとで、最近、逆問題解析の手法を衝撃力の測定に適用することが試みられつつある。その基本的な考え方は次の通りである。物体に作用する衝撃力を入力とし、衝撃によって物体に生じるひずみ、変位、加速度などの過渡応答を出力とする線形系を考えれば、衝撃力と応答とは系のインパルス応答関数を用いて畳み込み積分により関係づけられる。したがって、インパルス応答関数(あるいは、そのフーリエ変換である伝達関数)をあらかじめ同定しておけば、出力、すなわち、応答の測定データをもとにして、畳み込みの逆演算である逆畳み込みを行うことにより任意の入力、すなわち、衝撃力が求められる。

逆問題解析手法を適用すれば、測定に使用するセンサを衝撃点に取り付ける必要はないので、従来の直接的測定法における難点が解決される。また、衝突する物体の形状が単純でないために応力波の伝播が複雑な場合にも、インパルス応答関数が数値的に同定できれば衝撃力は求められるので、従来の間接的測定法の難点も解決できる。さらに、逆問題解析において衝撃力と応答とをそれぞれベクトルとして考えれば、衝撃力ベクトルの各成分を求めることにより、衝撃力の大きさだけでなく衝撃力の方向の測定も実現できる [31]。

衝撃力の逆問題解析に関して現在までに行われた研究には以下に挙げるものがある。Holzer[59] は、材料の高速圧縮試験において、ロードセルの動的応答特性(伝達関数)を実験的に同定しておき、この伝達関数を用いてロードセルによる測定波形から逆問題解析を行って衝撃力を求めた。Thornhillら [76, 84] は、衝撃体と被衝撃体をそれぞれ質点とばね-質点系によってモデル化し、実験によって同定したモデルのパラメータを用いて、被衝撃体の衝撃点の応答から衝撃力を求める方法を示した。Whistonら [64, 88] は、はりの横衝撃において、はりの加速度応答と衝撃力との間の伝達関数を Timoshenko 理論に基づいて解析的に同定しておき、加速度応答の測定値から逆問題解析を行って衝撃力を求める方法を示した。Doyle は、はりの横衝撃 [47, 48] および平板の横衝撃 [49, 50] において、はりや平板のひずみ応答と衝撃力との間の伝達関数(または、インパルス応答関数)をは

り理論や板理論に基づいて解析的に同定しておき、ひずみ応答の測定値から逆問題解析を行って衝撃力を求めた。Michaelsら [70, 71] は、平板の表面に斜めに衝撃力が作用する場合について、平板の2点の変位応答と衝撃力との間のインパルス応答関数を解析的に同定しておき、変位の測定値から逆問題解析を行って衝撃力の大きさと方向を求める方法を示した。岸本ら [2] は、棒の縦衝撃を利用した落錘式衝撃三点曲げ試験における動的応力拡大係数の計測において、棒の衝撃端に作用する衝撃力と棒のひずみ応答との間の伝達関数を実験的に同定しておき、ひずみ応答の測定値から逆問題解析を行って衝撃力を求めた。中尾ら [18] は、床材用の木製平板の横衝撃において、平板の加速度応答と衝撃力との間の伝達関数を実験的に同定しておき、加速度応答の測定値から逆問題解析を行って衝撃力を求めた。放生ら [25] は、被衝撃体のひずみ応答と衝撃力との間の伝達関数を実験的に同定しておき、ひずみ応答の測定値から逆問題解析を行って衝撃力を求める方法を示し、弾性棒の先端に作用する衝撃力、および、シャルピー衝撃試験機のハンマによる試験片への衝撃力の測定にこの方法を適用して有効性を示した。Changら [44] は、繊維強化複合材料の平板の横衝撃において、平板のひずみ応答と衝撃力との間の伝達関数を実験的に同定しておき、ひずみ応答の測定値から逆問題解析を行って衝撃力を求めた。Buttleら [41, 42] は、粒子の衝突によって平板に発生するAE信号を検出し、解析的に同定したインパルス応答関数を用いて逆問題解析を行って、粒子の衝突における衝撃力の大きさと方向を求めた。Ödeenら [73] は、棒の縦衝撃において、棒の衝撃端の速度と衝撃力との間の伝達関数を解析的または実験的に同定しておき、2本の棒を衝突させたときの衝突速度のみから逆問題解析を行って衝撃力を求める方法を示した。Batemanら [36] は、使用済み核燃料キャスクの落下衝撃試験において、キャスクの数箇所での加速度応答と衝撃力との間の伝達関数を実験的に同定しておき、加速度応答の測定値から逆問題解析を行って衝撃力を求めた。なお、衝撃力の逆問題解析と類似の問題として、振動的な荷重の逆問題解析についても多くの研究が行われている [53, 56, 57, 58, 81, 82, 87]。

以上のように、従来の研究によれば、逆問題解析手法を適用した衝撃力測定法の基本的な妥当性は既に認められている。したがって、衝撃力の逆問題解析は、従来の衝撃力測定法の問題点を解決する新しい測定法の基礎として期待されるべき課題であると考えられる。しかしながら、逆問題解析手法を実際の衝撃力測定に適用し、衝撃力の大きさと方向を

Table 1.1: 衝撃力の逆問題解析に関する従来の研究の分類

	逆畳み込み演算		伝達関数の同定		衝撃力の方向の算定	
	時間領域	周波数領域	解析	実験	不可	可
Holzer [59]		○		○	○	
Thornhill ら [76, 84]		○		○	○	
Whiston ら [64, 88]		○	○		○	
Doyle [47]	○		○		○	
Doyle [48, 49, 50]		○	○		○	
Michaels ら [70, 71]	○		○			○
岸本ら [2]		○		○	○	
中尾ら [18]		○		○	○	
放生ら [25]	○	○	○	○	○	
Chang ら [44]	○			○	○	
Buttle ら [41, 42]	○		○			○
Ödeen ら [73]		○	○	○	○	
Bateman ら [36]		○		○	○	

正確に測定するためには、以下に論じるように、解決すべき問題点が多く残されている。

まず、物体の応答の測定データから衝撃力を求める際の逆畳み込み演算の手法には、

- 時間領域において畳み込み積分を離散化し、連立一次方程式に帰着させて解を求める方法
- フーリエ変換を用いて畳み込み積分を周波数領域における乗算に変換し、周波数領域において除算を行った後、フーリエ逆変換を行って解を求める方法

の二種類の方法が知られており、Table 1.1 に示すように、従来の研究ではこれらのいずれかの方法が採用されている。Doyle[48] は、高速フーリエ変換を利用することにより演算の効率が高められることから、後者の周波数領域の方法が有利であるとしている。これに対し、放生ら[25]、Chang ら[44] および Michaels ら[70] は、周波数領域の方法は数値フーリエ変換・逆変換における計算誤差が原因となって衝撃力の算定精度が低下するため、前者の時間領域の方法が適切であるとしている。しかし、周波数領域の方法を採用した従来の研究では、数値フーリエ変換・逆変換に際して高速フーリエ変換を単純に適

用しているに過ぎず、その計算精度を十分に検討した研究は見当たらない。したがって、衝撃力の逆問題解析における逆畳み込み演算の手法として、時間領域の方法と周波数領域の方法のどちらがより適切であるかを明らかにする必要がある。

そこで、本研究では、高速フーリエ変換による数値フーリエ変換・逆変換の計算精度を詳細に検討し、その精度の向上を図ることにより、衝撃力の逆問題解析における逆畳み込み演算を正確にかつ効率よく行う方法を示している。

次に、物体の応答から逆問題解析を行って衝撃力を求めるためには、被衝撃体の応答と衝撃力との間の伝達関数(あるいは、インパルス応答関数)をあらかじめ同定しておく必要があるが、従来の研究では、Table 1.1 に示すように、

- 被衝撃体の衝撃応力解析を行って伝達関数を求める方法
- 較正実験を行い、得られた測定データから伝達関数を同定する方法

の二種類の方法が採用されている。被衝撃体が棒、はり、平板のように単純な形状であれば、前者の理論解析による方法によって伝達関数は求められる。しかし、例えば Whiston の研究 [88] に見られるように、被衝撃体が一様断面はりの場合でさえも、はりの支持点における応力波の反射などの種々の要因を考慮に入れて伝達関数を正確に求めるためには、極めて複雑な解析を行わねばならない。これに対して、後者の実験による方法では、系が種々の複雑な要因を含む場合であっても、衝撃力と応答との関係が線形である限りは、これらの要因をすべて考慮に入れた形で伝達関数を同定することができる [25, 44]。したがって、任意形状の物体に作用する衝撃力の測定に逆問題解析手法を適用するためには、較正実験を行って伝達関数を同定するのが適切である。ところで、較正実験の測定データから伝達関数を同定する手法が適切でなければ、伝達関数の同定精度が不十分となり、その結果、逆問題解析による衝撃力の算定精度も低下する。従来は、伝達関数を同定する際にウインドウ処理による平滑化を採用する方法 [2] や最小二乗法を採用する方法 [25] が研究されている。しかし、逆問題解析により衝撃力を求める上で、伝達関数の最適な同定法は未だ明らかにされていない。

そこで、本研究では、逆問題解析手法を適用して衝撃力を正確に測定するために、較正実験を行って得られた測定データに基づく伝達関数の最適な同定法を示している。

また、前述したように、逆問題解析を適用した衝撃力の測定法の特徴の一つは、衝撃力をベクトルとして取り扱うことにより、衝撃力の大きさだけでなく方向も測定できる点にある。しかし、Table 1.1 に示すように、衝撃力の大きさと方向の両方を算定する逆問題解析手法はほとんど研究されておらず、Michaels ら [70, 71] および Buttle ら [41, 42] の研究以外には見当たらない。Michaels らの方法は、逆問題解析を容易にする目的で衝撃力の方向が時間的に変化しないという仮定を導入しているために、時間とともに衝撃力の方向が変化する場合には適用できない。一方、Buttle らの方法は、衝撃力ベクトルの各成分を独立に取り扱っており、時間とともに衝撃力の方向が変化する場合にも適用可能である。しかしながら、逆問題解析手法を実際に適用して衝撃力の方向を求めた例は示されておらず、この手法の有効性は検証されていない。

そこで、本研究では、逆問題解析手法を適用して任意の衝撃力の大きさと方向を正確に測定するために、衝撃力の大きさと方向の算定が可能な手法を確立するとともに、その手法の有効性を実験によって検証している。

さらに、衝撃力の逆問題解析に関しては、もう一点検討すべき重要な課題がある。数学において

- 解の存在性
- 解の唯一性
- 解の安定性, (または, 解の連続性)

の三条件の少なくとも一つが満足されない問題は不適切問題と呼ばれるが、一般に逆問題は不適切問題であることが多い [5, 37, 67]。不適切問題では単純に解析を行なっても有意な解を正確かつ安定に求めることは困難であり、いわゆる適切化処理を施して唯一解が安定に求められるように解析手法を工夫する必要がある。衝撃力の逆問題解析では測定データをもとにした逆畳み込み演算を行うが、実際の測定データには不可避免的に誤差が含まれる。このように誤差を含むデータをもとにした逆畳み込み演算は、不適切問題の一種であることが既に知られている [37]。ところが、衝撃力の逆問題解析に関する従来の研究では、逆問題の不適切性が考慮されていない。このため、従来の手法を実際

の衝撃力測定に適用しても、場合によっては解，すなわち，衝撃力が安定に求められない可能性がある。

そこで，本研究では，逆問題の不適切性をあらかじめ考慮して適切化処理を採用することにより，衝撃力を正確かつ安定に求める逆問題解析手法を示している。

以上を要するに，本論文では，任意形状の物体に作用する衝撃力の大きさと方向を物体の衝撃応答から求めるための逆問題解析手法を発展させ，従来は困難であった衝撃力の正確な測定を容易にすることを目的としている。まず，逆問題解析における不適切性を改善するための適切化処理，および，逆畳み込み演算を高効率かつ高精度で行うために高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換法を研究し，これらに基づいて衝撃力を安定かつ正確に求める逆問題解析手法を示し，従来の手法の問題点を解決している。そして，この逆問題解析手法の有効性を数値シミュレーションおよび単純な構造要素を対象とした実験によって検証するとともに，材料の計装化衝撃試験における衝撃荷重の測定に適用して工学的有用性を示している。本論文の概要を以下に示す。

第2章「衝撃力の逆問題解析手法」では，物体に作用する衝撃力を入力とし，それに対する応答を出力とする線形系を考え，衝撃力と応答とが系のインパルス応答を介して畳み込み積分で関係付けられることを基礎として，物体の応答から逆畳み込みを行って衝撃力を推定する逆問題解析の手法を論じている。初めに，物体の1点に一定方向から作用する衝撃力を推定する逆問題を取り上げ，この逆問題が有する不適切性を指摘するとともに，ウィーナフィルタ理論を利用した最適逆システムによる逆問題解析手法を導出している。次に，問題を一般化し，物体の1点に任意方向から作用する衝撃力を推定する逆問題を取り上げ，一定方向衝撃力の逆問題解析手法を重ね合わせによって拡張して，任意方向の衝撃力を推定する手法を示している。そして，この逆問題が有する不適切性を指摘するとともに，特異値分解を利用した最小二乗法によってこの不適切性を改善した逆問題解析手法を導出している。また，これらの逆問題解析手法を実際の衝撃力測定に適用するために必要となる数値計算の手法として，数値フーリエ変換・逆変換法および複素行列の特異値分解法について論じている。

第3章「高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換」では，本研究の衝

撃力の逆問題解析手法において、逆畳み込み演算を高効率かつ高精度で行うために、高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換法について論じている。まず、ラプラス変換・逆変換の積分を有限の級数和で近似して離散ラプラス変換・逆変換を定式化するとともに、近似による誤差を理論的に明らかにしている。次に、サンプリング定理に基づいて高速フーリエ変換のアルゴリズムを利用することにより、離散ラプラス変換・逆変換を効率よく数値計算する方法を示している。そして、基本的な関数の数値ラプラス変換・逆変換に本計算法を適用して計算精度を詳細に検討し、本計算法の有効性を検証している。

第4章「衝撃力の逆問題解析の数値シミュレーション」では、第2章で導出した衝撃力の逆問題解析手法、および、第3章で論じた数値ラプラス変換・逆変換法を適用して、衝撃力の逆問題解析の数値シミュレーションを行い、本研究の逆問題解析手法の有効性を検証するとともに、実際の衝撃力測定に対して逆問題解析手法を効果的に適用するための指針を示している。数値シミュレーションには、衝撃問題の中で最も基本的な問題として一様断面を有する弾性棒の一次元縦衝撃を取り上げ、数値ラプラス変換・逆変換に伴う誤差が衝撃力の推定結果に及ぼす影響、逆問題の不適切性のために測定データの雑音の結果に及ぼす影響、および、最適逆システムによる逆問題解析手法の有効性を論じている。

第5章「構造要素に作用する衝撃力の測定」では、基本的な構造要素である両端支持はり、片持はり、平板の衝撃実験を通じて、逆問題解析手法を適用した衝撃力の大きさと方向の測定法の有用性を検証している。すなわち、まず、直接的な逆問題解析手法を適用して衝撃力を測定し、逆問題解析に基づく衝撃力の測定法の基本的な妥当性、および、逆問題の不適切性に起因する問題点などを論じ、次いで、最適逆システム、および、特異値分解を利用した最小二乗法による適切化処理を採用した逆問題解析手法を適用し、これらの手法の有効性を検証している。

第6章「計装化衝撃試験における衝撃力の測定」では、衝撃力の逆問題解析手法を実際の工学問題における衝撃力の測定に適用した具体例として、計装化衝撃試験における衝撃力の測定法を論じ、逆問題解析手法に基づいて試験片に作用する衝撃力を測定する方法を示すとともに、従来の衝撃力測定法の問題点を明らかにしている。また、較正実験

の測定データから伝達関数を同定する際に5種類の方法を採用し、衝撃力の測定結果を比較して、最適逆システムによる逆問題解析手法の有効性を検証している。さらに、これらの衝撃力の測定結果をもとにして、材料の衝撃破断における吸収エネルギーを評価する方法についても論じている。

第 2 章

衝撃力の逆問題解析手法

2.1 緒言

機械や構造物の衝撃に対する強度や安全性を検討するためには，作用する負荷，すなわち，衝撃力を正確に把握する必要がある。したがって，実機やモデルの衝撃実験を行う場合には，衝撃力の正確な測定法が要求される。また，材料の衝撃試験においても，衝撃力を正確に測定することは重要である。しかし，衝撃力の測定には種々の困難が伴うために，任意形状の物体に作用する衝撃力の一般的な測定法は未だ確立されていない。一方，各種のセンサや測定機器の発展により，衝撃負荷を受ける物体に生じるひずみや加速度などは，比較的簡便にかつ精度よく測定できるようになってきている。そこで，物体の衝撃応答を測定し，それをもとに逆問題解析を行って衝撃力を推定する方法が近年注目されている。この方法を適用すれば，任意形状の物体に作用する衝撃力の測定も可能になると考えられる。しかし，物体の応答から衝撃力を推定する逆問題は，数学的に不適切であることが多いために，実際問題に単純に適用しても解，すなわち，衝撃力を精度よく推定することが困難な場合が多い。したがって，衝撃力の測定にこのような方法を適用するためには，問題の不適切性を考慮し，衝撃力を安定に推定するための解析手法を検討する必要がある。

そこで，本章では，任意形状の物体に作用する衝撃力の測定に適用することを目的として，物体の衝撃応答から衝撃力を推定する逆問題の解析手法を論じる。初めに，基本的問題として，物体の 1 点に一定方向から作用する衝撃力を衝撃応答から推定する逆問題の解析手法を論じる。すなわち，本研究において逆問題解析に用いる基礎関係式を示し，

この逆問題が有する不適切性を指摘するとともに、ウィーナフィルタ理論を利用して不適切性を改善し、衝撃力を安定に推定する手法を示す。次に、問題を一般化し、物体の1点に任意方向から作用する衝撃力を推定する逆問題の解析手法について論じる。すなわち、一定方向衝撃力の逆問題解析手法を重ね合わせによって拡張すれば、任意方向の衝撃力が推定できることを示す。そして、この逆問題が一定方向衝撃力の逆問題と同様の不適切性だけでなく、別の不適切性も有することを指摘するとともに、特異値分解を利用した最小二乗法によってこの不適切性を改善する手法を示す。最後に、これらの逆問題解析手法を実際の衝撃力測定に適用する際に必要な数値計算手法として、数値フーリエ変換・逆変換法および複素行列の特異値分解法について論じる。

2.2 一定方向衝撃力の逆問題解析

2.2.1 基礎関係式

Fig.2.1(a) に示すように、任意形状の物体の 1 点に一定方向から作用する衝撃力を、物体の応答から求める逆問題解析について考察する。物体に作用する衝撃力を $f(t)$ とし、衝撃力によって物体の任意の 1 点に生じるひずみ、変位、加速度などの応答を $e(t)$ とする。一般に、衝撃力に対する機械や構造物の応答は線形であることが多い。そこで、 $f(t)$ を入力、 $e(t)$ を出力とする線形システムを考え、時刻 $t < 0$ において $f(t) = 0$ であるとするれば、衝撃力と応答の関係は次式の畳み込み積分で表される。

$$e(t) = \int_0^t h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (2.1)$$

ここで、 $h(t)$ はシステムのインパルス応答関数であり、因果的かつ時不変であるとしている。式 (2.1) をフーリエ変換すれば、畳み込み則により次式を得る。

$$E(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (2.2)$$

ここで、 $E(\omega)$ 、 $F(\omega)$ 、 $H(\omega)$ はそれぞれ $e(t)$ 、 $f(t)$ 、 $h(t)$ のフーリエ変換を表し、

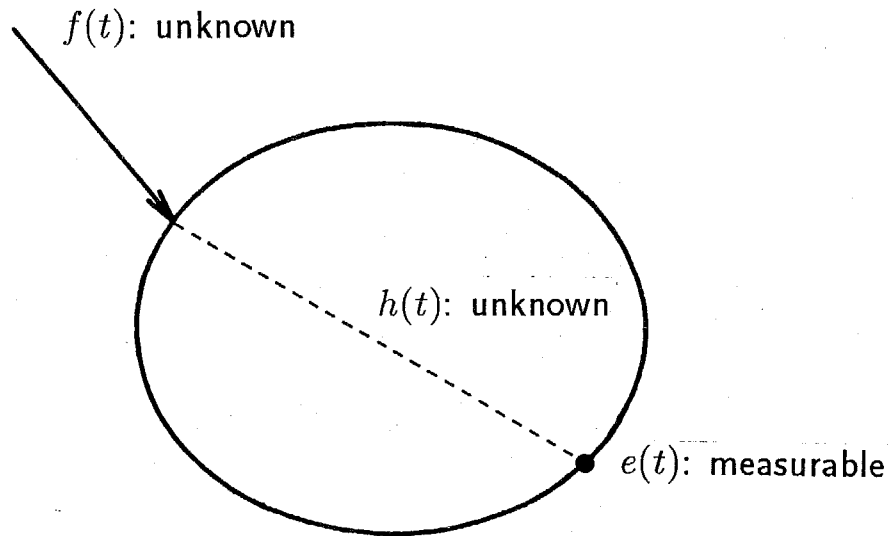
$$\left. \begin{array}{l} E(\omega) \\ F(\omega) \\ H(\omega) \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} e(t) \\ f(t) \\ h(t) \end{array} \right\} e^{-i\omega t} dt \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} e(t) \\ f(t) \\ h(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} E(\omega) \\ F(\omega) \\ H(\omega) \end{array} \right\} e^{i\omega t} d\omega \quad (2.4)$$

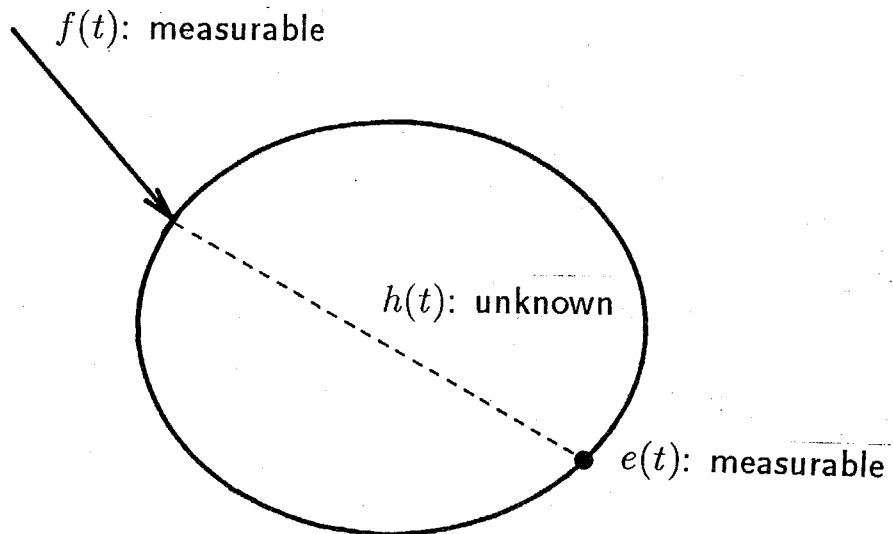
である。本研究では、 $H(\omega)$ を伝達関数と呼ぶ。

伝達関数 $H(\omega)$ が既知であれば、物体の応答 $e(t)$ を測定してフーリエ変換し、式 (2.2) により $F(\omega)$ を求め、これをフーリエ逆変換することにより、任意の一定方向衝撃力 $f(t)$ が求められる。

この方法により衝撃力を求めるためには、あらかじめ伝達関数 $H(\omega)$ を求めておく必要がある。伝達関数は、単純なシステムでは解析的に求めることも可能であるが、任意のシステム、すなわち、任意形状の物体では伝達関数を解析的に求めることは困難であることが多い。したがって、任意形状の物体に作用する衝撃力の一般的な測定法として



(a) 任意の衝撃力が作用する場合



(b) 測定可能な衝撃力が作用する場合 (較正実験)

Figure 2.1: 任意形状の物体に作用する一定方向衝撃力

逆問題解析手法を適用するためには、実験を行って伝達関数を同定するのが適切である。伝達関数を実験により同定するためには、図 2.1(b) に示すように、特別な方法で測定できる衝撃力を物体の衝撃点に作用させる較正実験を行えばよい。例えば、細長い弾性棒の縦衝撃によって物体を衝撃すれば、このときの衝撃力は棒の側面に接着したひずみゲージにより容易に測定できる。較正実験を行って衝撃力 $f(t)$ と物体の応答 $e(t)$ とを同時に測定すれば、両者をフーリエ変換することにより、式 (2.2) から伝達関数 $H(\omega)$ が同定できる。

以上のように、本研究では、

1. 較正実験を行って衝撃力と物体の応答を同時に測定し、これらの測定データをフーリエ変換して伝達関数を同定する。
2. 任意の衝撃力に対する物体の応答を測定し、この測定データのフーリエ変換を伝達関数で除し、フーリエ逆変換して衝撃力を算定する。

という二段階の逆畳み込みによって、衝撃力の逆問題解析を行う。

なお、逆畳み込みの計算方法としては、上述したフーリエ変換を利用する方法の他に、式 (2.1) の畳み込み積分を時間領域で離散化して連立一次方程式に帰着させ、ガウス・ザイデル法などの反復計算によってこの連立一次方程式を解く方法も知られている [32, 62]。しかし、本研究では、

1. 高速フーリエ変換のアルゴリズムを利用することにより、データの演算処理を効率よく行うことができる。
2. デジタル信号処理やスペクトル解析の分野において著しく発展している各種のデータ処理手法を利用することができる。

という二つの利点があるために、フーリエ変換を利用する方法を採用する。

2.2.2 逆問題における不適切性

逆問題解析手法を実際の衝撃力測定に適用する場合には、測定データを数値的に演算処理するが、通常、測定データには測定雑音などのわずかな誤差が不可避免的に含まれて

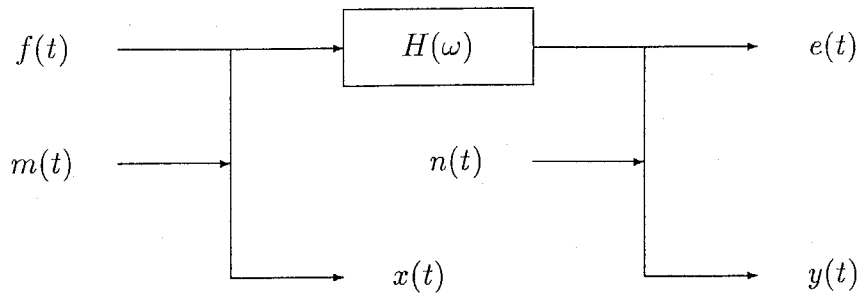


Figure 2.2: 測定誤差を考慮した線形システムの入出力と測定データのモデル

いる。ところが、一般に逆問題は数学的に不適切であることが多く、測定データに含まれるわずかな誤差が拡大され、結果が不安定になり易いことが知られている [4, 37]。そこで、本項では、一定方向衝撃力の逆問題解析において、測定データに含まれる誤差が解析結果に及ぼす影響について考察し、この逆問題における不適切性を明らかにする。

測定データに含まれる誤差の影響について考察するために、線形システムの入出力とそれらの測定データの関係を図2.2のようにモデル化する。真の衝撃力を $f(t)$ 、応答を $e(t)$ 、それらの測定データをそれぞれ $x(t)$ 、 $y(t)$ 、測定データに含まれる雑音をそれぞれ $m(t)$ 、 $n(t)$ で表し、これらのフーリエ変換をそれぞれ対応する大文字で表す。なお、測定誤差には電氣的雑音や量子化誤差などの種々の要因が考えられるが、本モデルではそれらをまとめて雑音として考えている。

まず、較正実験の測定データから伝達関数を同定する問題について考察する。測定データ $x(t)$ 、 $y(t)$ を真の信号 $f(t)$ 、 $e(t)$ の近似値と考え、フーリエ変換を行って、式(2.2)により伝達関数を直接的に同定すると、

$$\begin{aligned} \hat{H}(\omega) &= \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \\ &= \frac{E(\omega) + N(\omega)}{F(\omega) + M(\omega)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。ここで、 $\hat{H}(\omega)$ は伝達関数の同定値を表し、真の伝達関数 $H(\omega)$ と区別している。一般に、衝撃力や物体の応答などの信号は、 $|\omega| \rightarrow \infty$ のとき $|F(\omega)|, |E(\omega)| \rightarrow 0$ となるのに対し、 $|M(\omega)|, |N(\omega)|$ は白色雑音的であり、 $F(\omega)$ 、 $E(\omega)$ に比べて広い周波数範囲にわたってほぼ一定の値を有することが多い。したがって、信号に対してわずかな雑音しかない場合、すなわち、測定データの S/N 比が十分に大きい場合でも、測定データの

ある周波数以上の成分では雑音が支配的となる。このため、式(2.5)による伝達関数の同定では、高周波域において雑音の商 $N(\omega)/M(\omega)$ の成分が支配的となり、伝達関数の同定精度は極めて低下する。このような伝達関数の同定値を用いて衝撃力の逆問題解析を行うと、高周波域において衝撃力の算定値は不安定になる。

次に、応答の測定データから衝撃力を算定する問題について考察する。なお、ここでは、真の伝達関数 $H(\omega)$ は既知であるとして考える。応答の測定データ $y(t)$ を真の応答 $e(t)$ の近似値と考え、式(2.2)により衝撃力のフーリエ変換を直接的に算定すると、

$$\begin{aligned}\hat{F}(\omega) &= \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} \\ &= \frac{E(\omega)}{H(\omega)} + \frac{N(\omega)}{H(\omega)}\end{aligned}\quad (2.6)$$

となる。ここで、 $\hat{F}(\omega)$ は衝撃力のフーリエ変換の推定値を表す。物体の材質や形状などによっては、ある周波数において伝達関数の絶対値 $|H(\omega)|$ が極めて小さく、零に近い値になる場合があり得る。このような周波数においては、応答の絶対値 $|E(\omega)|$ も極めて小さな値となるから、式(2.6)の $E(\omega)/H(\omega)$ の項は極めて小さな値の除算となり、数値計算上の精度が低下し易い。また、同時に、 $N(\omega)/H(\omega)$ の項では雑音 $N(\omega)$ が除算によって拡大される。したがって、真の伝達関数が既知であっても、直接的な逆問題解析では衝撃力の算定値 $\hat{F}(\omega)$ は不安定になる場合がある。

以上のように、衝撃力の逆問題は、測定データに含まれる雑音成分の影響により解が不安定になるという不適切性を有している。したがって、衝撃力が可能な限り安定に得られるように、逆問題解析の手法を工夫する必要がある。なお、特定の周波数域において測定データに含まれる雑音の影響が問題となる場合には、帯域通過フィルタが利用されることが多い。帯域通過フィルタを用いる場合には、雑音を十分に除去し、かつ、真の信号がひずみを生じないようにするために、遮断周波数として適切な値を選択しなければならない。ところが、未知の伝達関数や衝撃力を求める問題では、測定データのどの周波数成分において雑音の影響が大きいかはわからないため、遮断周波数を客観的に適切な値に決定することは困難である。したがって、衝撃力の逆問題解析を行う場合には、帯域通過フィルタによる雑音の除去は適切な方法であるとは言えず、雑音の影響を抑制するような逆問題解析手法を採択する必要がある。

2.2.3 最適逆システムによる逆問題解析

本項では、信号処理の分野で知られているウィーナフィルタ理論を利用することにより、測定データに含まれる雑音の影響を抑制し、衝撃力を安定に求めるための逆問題解析手法について論じる。

Fig.2.2 に示したモデルにおいて、応答の測定データ $y(t)$ から真の衝撃力 $f(t)$ を求める逆問題について考察する。ここでは、雑音 $m(t)$, $n(t)$ は以下の性質を有すると仮定する。

- 平均値が零の定常不規則信号
- それぞれ他の信号成分とは無相関

このモデルにおいて、真の入力 $f(t)$ と出力の測定データ $y(t)$ との関係は、次式により表される。

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) f(t - \tau) d\tau + n(t) \quad (2.7)$$

実際問題に逆問題解析手法を適用しようとする場合、雑音 $n(t)$ は測定データ $y(t)$ に含まれた形で与えられ、 $n(t)$ だけを独立に測定することはできない。したがって、インパルス応答関数 $h(t)$ が既知であっても、応答の測定データ $y(t)$ から式 (2.7) によって衝撃力 $f(t)$ を算定することは不可能である。そこで、 $y(t)$ を入力とし、衝撃力の推定値 $\hat{f}(t)$ を出力とする線形の逆システムを考え、この逆システムにより衝撃力を推定する手法について考える。逆システムの入出力関係は畳み込み積分により次式のように表される。

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) y(t - \tau) d\tau \quad (2.8)$$

ここで、 $g(t)$ は逆システムのインパルス応答関数であり、時不変であるとしている。しかし、一般に衝撃力と応答の間には、衝撃点から応答の測定点まで応力波が伝播するのに必要な時間だけの時間的遅れがあるので、 $g(t)$ は因果的ではないとしている。

式 (2.8) において、衝撃力の推定精度はインパルス応答関数 $g(t)$ によって定まる。そこで、 \mathcal{E} を期待値演算子とすると、衝撃力の推定誤差の二乗平均値

$$J = \mathcal{E}\{[\hat{f}(t) - f(t)]^2\} \quad (2.9)$$

を最小にする逆システムのインパルス応答関数 $g(t)$ ，あるいは，そのフーリエ変換である伝達関数 $G(\omega)$ を求める．直交原理 [74] によれば， $y(t)$ と $[\hat{f}(t) - f(t)]$ が直交するとき，すなわち，任意の σ に対して

$$\mathcal{E}\{[\hat{f}(t) - f(t)]y(t - \sigma)\} = 0 \quad (2.10)$$

が満足されるとき，二乗平均誤差 J は最小となる．したがって，式 (2.10) を恒等的に満足するような $g(t)$ または $G(\omega)$ を求めればよい．式 (2.10) に式 (2.8) を代入すれば，

$$R_{yf}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) R_{yy}(\sigma - \tau) d\tau \quad (2.11)$$

となる．ここで， $R_{yf}(\sigma)$ ， $R_{yy}(\sigma)$ はそれぞれ

$$R_{yf}(\sigma) = \mathcal{E}[y(t)f(t + \sigma)] \quad (2.12)$$

$$R_{yy}(\sigma) = \mathcal{E}[y(t)y(t + \sigma)] \quad (2.13)$$

によって定義される相互相関関数および自己相関関数である．式 (2.11) は畳み込み積分であるから，フーリエ変換を行って $G(\omega)$ について解けば，二乗平均誤差を最小にする意味において最適な逆システムの伝達関数は

$$G(\omega) = \frac{S_{yf}(\omega)}{S_{yy}(\omega)} \quad (2.14)$$

と定められる．ここで， $S_{yf}(\omega)$ ， $S_{yy}(\omega)$ は，それぞれ $R_{yf}(\sigma)$ ， $R_{yy}(\sigma)$ のフーリエ変換，すなわち，それぞれ $y(t)$ と $f(t)$ の相互スペクトル密度関数および $y(t)$ の自己スペクトル密度関数である (以下でも同様の記号を使用する)．式 (2.14) の伝達関数 $G(\omega)$ は，非因果的ウィーナフィルタ [74] の伝達関数と同様である．本研究では，式 (2.14) の伝達関数を最適逆システムの伝達関数と呼ぶ．

次に，最適逆システムによる逆問題解析において，測定データに含まれる雑音が衝撃力の推定値に及ぼす影響について調べる．雑音 $m(t)$ ， $n(t)$ は平均値が零で，かつ，他の信号と無相関であることから， $S_{nf}(\omega) = 0$ ， $S_{en}(\omega) = 0$ ， $S_{ne}(\omega) = 0$ となるので，

$$\begin{aligned} S_{yf}(\omega) &= S_{ef}(\omega) + S_{nf}(\omega) \\ &= S_{ef}(\omega) \\ &= H^*(\omega)S_{ff}(\omega) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) &= S_{ee}(\omega) + S_{nn}(\omega) + S_{en}(\omega) + S_{ne}(\omega) \\
&= S_{ee}(\omega) + S_{nn}(\omega) \\
&= |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) + S_{nn}(\omega)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

が得られる。ここで、*は複素共役を表す。式(2.8)をフーリエ変換し、式(2.14)～(2.16)を用いて変形すれば、最適逆システムによる衝撃力の推定値のフーリエ変換は、

$$\hat{F}(\omega) = \frac{H^*(\omega)S_{ff}(\omega)[E(\omega) + N(\omega)]}{|H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) + S_{nn}(\omega)} \tag{2.17}$$

と表される。

式(2.17)より、以下のことが明らかになる。第一に、 $|N(\omega)| \rightarrow 0$ のとき、

$$\hat{F}(\omega) \rightarrow E(\omega)/H(\omega) \tag{2.18}$$

となるから、雑音 $N(\omega)$ が小さくなるにつれて推定値 $\hat{F}(\omega)$ は真の値 $F(\omega)$ に近づく。第二に、 $|N(\omega)| \rightarrow \infty$ のとき、

$$\hat{F}(\omega) \rightarrow 0 \tag{2.19}$$

となり衝撃力の推定値は消失するが、同時に雑音の影響も消失し、推定値の不安定性は生じない。第三に、雑音 $n(t)$ は一般に白色雑音的であるから、 $S_{nn}(\omega)$ はほぼ一定の正の値であり、式(2.17)の分母の絶対値は雑音を無視した場合に比べて大きくなる。したがって、真の伝達関数の絶対値 $|H(\omega)|$ が小さな値となる周波数においても、小さな値の除算による数値計算上の精度の低下が抑制できる。

以上のように、最適逆システムによる衝撃力の逆問題解析は、二乗平均誤差を最小にする意味において最適であるだけでなく、逆問題の不適切性を改善する効果、すなわち、適切化の効果を有している。なお、式(2.17)から明らかのように、最適逆システムによる逆問題解析では、衝撃力の推定値は雑音 $m(t)$ の影響を受けない。

ところで、本手法を実際の衝撃力測定に適用するためには、最適逆システムの伝達関数 $G(\omega)$ をあらかじめ較正実験の測定データから同定しておく必要がある。較正実験の場合と任意の衝撃力を推定する場合に同一の測定系を用いれば、測定データに含まれる雑音 $m(t)$ と $n(t)$ はいずれの場合においても同様であると見なすことができる。したがって、最適逆システムの伝達関数は以下の方法により同定できる。

較正実験を k 回行えば、 k 組の有限長 T の入出力の測定データ $x_j(t)$, $y_j(t)$, ($j = 1, \dots, k$) が得られる。なお、 k は十分大きな値とする。これらの測定データを用いれば、自己スペクトル密度関数 $S_{yy}(\omega)$ および相互スペクトル密度関数 $S_{yf}(\omega)$ の推定値 $\hat{S}_{yy}(\omega)$ および $\hat{S}_{yf}(\omega)$ は、それぞれ次のようなアンサンブル平均により求められる [38]。

$$\hat{S}_{yy}(\omega) = \frac{1}{T^k} \sum_{j=1}^k Y_j^*(\omega) Y_j(\omega) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{yf}(\omega) &= \hat{S}_{yx}(\omega) \\ &= \frac{1}{T^k} \sum_{j=1}^k Y_j^*(\omega) X_j(\omega) \end{aligned} \quad (2.21)$$

ここで、 $X_j(\omega)$, $Y_j(\omega)$ は区間 $0 \leq t \leq T$ での $x_j(t)$, $y_j(t)$ の有限フーリエ変換であり、高速フーリエ変換を利用すれば効率よく計算することができる。したがって、式 (2.14) に式 (2.20), (2.21) を代入すれば、最適逆システムの伝達関数の推定値 $\hat{G}(\omega)$ は

$$\hat{G}(\omega) = \frac{\sum_{j=1}^k Y_j^*(\omega) X_j(\omega)}{\sum_{j=1}^k Y_j^*(\omega) Y_j(\omega)} \quad (2.22)$$

によって求められる。

2.3 任意方向衝撃力の逆問題解析

2.3.1 基礎関係式

Fig.2.3(a) に示すように、任意形状の物体の1点に任意方向から作用する衝撃力を、物体の衝撃応答から推定する逆問題について考察する。衝撃力を任意の異なる3方向に分解した各成分を $f_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) とし、衝撃によって物体に生じるひずみ、変位、加速度などの応答の3成分を $e_j(t)$, ($j = 1, 2, 3$) とする。応答の3成分は、ある1点における応答の任意の3成分でもよく、また、任意の異なる3点における応答でもよい。衝撃力に対する物体の応答が線形であれば、一定方向衝撃力の場合の式(2.1)を各方向について重ね合わせるにより次式が得られる。

$$e_j(t) = \sum_{i=1}^3 \int_0^t h_{ji}(\tau) f_i(t-\tau) d\tau, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.23)$$

ここで、 $h_{ji}(t)$ はインパルス応答関数であり、単位インパルス状の衝撃力が i 方向に作用したときの応答の j 成分を表す。式(2.23)をフーリエ変換すれば次式を得る。

$$E_j(\omega) = \sum_{i=1}^3 H_{ji}(\omega) F_i(\omega), \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.24)$$

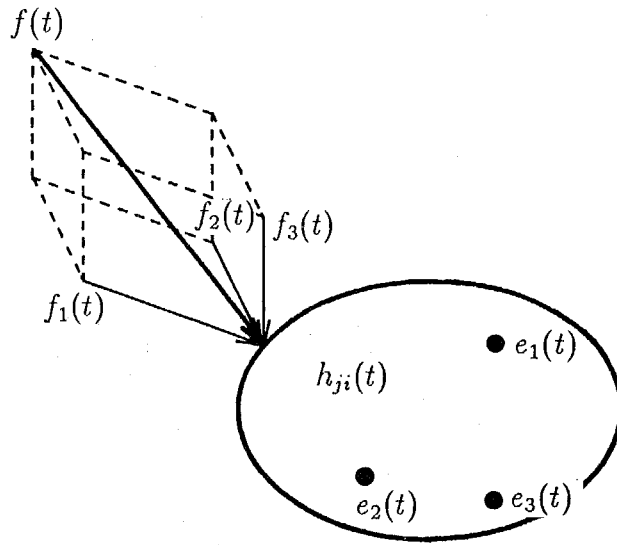
ここで、 $E_j(\omega)$, $F_i(\omega)$, $H_{ji}(\omega)$ はそれぞれ $e_j(t)$, $f_i(t)$, $h_{ji}(t)$ のフーリエ変換である。上式を行列を用いて表示すると

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}\mathbf{F} \quad (2.25)$$

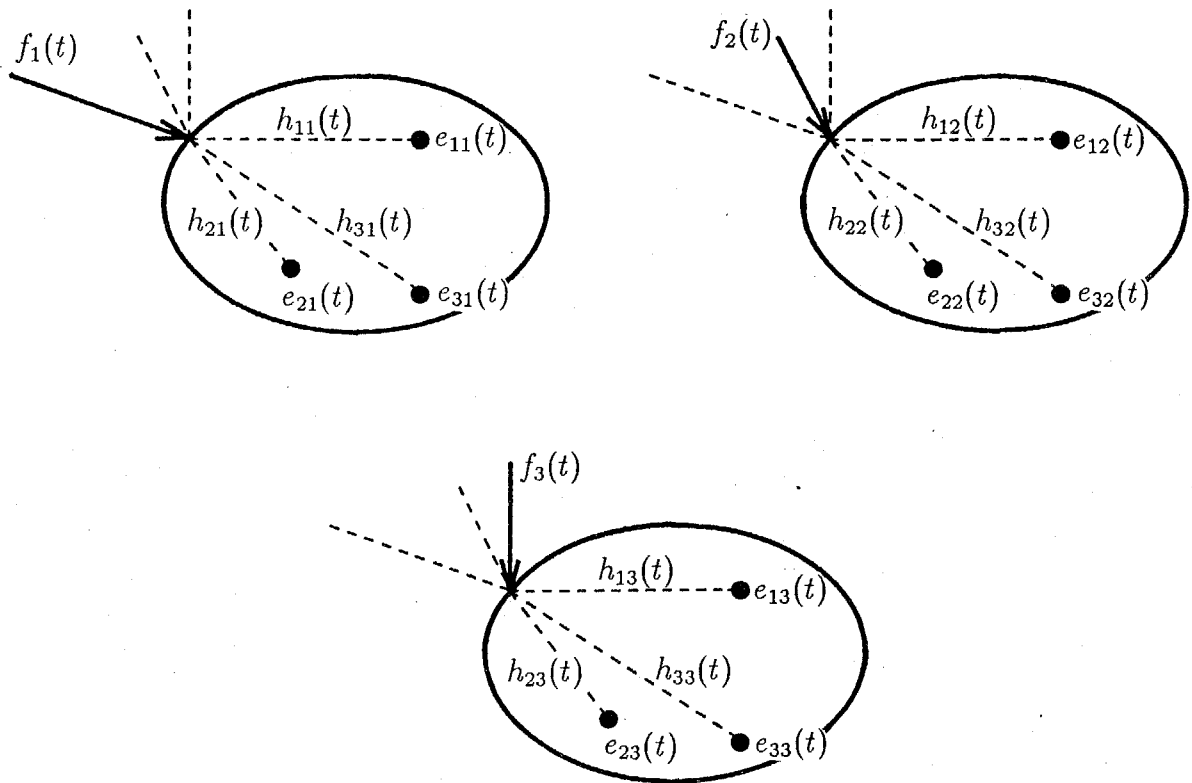
となる。ここで、

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} E_1(\omega) \\ E_2(\omega) \\ E_3(\omega) \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} \equiv \begin{bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & H_{13}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & H_{23}(\omega) \\ H_{31}(\omega) & H_{32}(\omega) & H_{33}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

である。伝達関数行列 \mathbf{H} が既知であれば、応答の測定データのフーリエ変換 \mathbf{E} を与えて連立方程式(2.25)を解くことにより衝撃力のフーリエ変換 \mathbf{F} が求められ、これをフーリエ逆変換すれば衝撃力の各方向成分が算定できる。



(a) 任意の衝撃力が作用する場合



(b) 測定可能な衝撃力が作用する場合 (較正実験)

Figure 2.3: 任意形状物体に作用する任意方向衝撃力

伝達関数は、一定方向衝撃力の逆問題解析の場合と同様の理由により、較正実験を行ってその測定データから同定するのが適切である。応答の3成分のそれぞれ $e_j(t)$, ($j = 1, 2, 3$) を、衝撃力の3方向成分のそれぞれ $f_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) に対する応答 $e_{ji}(t)$, ($i, j = 1, 2, 3$) に分解し、

$$E_j(\omega) \equiv \sum_{i=1}^3 E_{ji}(\omega), \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.27)$$

$$E_{ji}(\omega) \equiv H_{ji}(\omega)F_i(\omega), \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.28)$$

とする。図 2.3(b) に示すように、まず、 $i = 1$ 方向の衝撃力 $f_1(t)$ を弾性棒の縦衝撃などにより与え、それに対する応答 $e_{j1}(t)$, ($j = 1, 2, 3$) を衝撃力 $f_1(t)$ とともに測定すれば、式 (2.28) により伝達関数の9成分中の3成分 $H_{j1}(\omega)$, ($j = 1, 2, 3$) が同定できる。同様のことを $i = 2, 3$ の場合について行えば、伝達関数の全ての成分 $H_{ji}(\omega)$, ($i, j = 1, 2, 3$) が同定できる。

2.3.2 最適逆システムによる逆問題解析の拡張

任意方向の衝撃力の個々の成分の入出力関係式 (2.28) は、一定方向衝撃力の入出力関係式 (2.2) と同様である。したがって、任意方向衝撃力の逆問題においても、2.2.2 項において指摘した一定方向衝撃力の逆問題における不適切性が同様に生じる。そこで、衝撃力と応答の個々の成分の入出力関係のそれぞれに対して最適逆システムによる逆問題解析を適用し、この不適切性を改善する手法を示す。

まず、最適逆システムの伝達関数の推定法を示す。応答の3成分の測定データを $y_j(t)$, ($j = 1, 2, 3$) とし、それらを衝撃力の3方向成分 $f_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) のそれぞれによって生じた応答の測定データ $y_{ji}(t)$, ($i, j = 1, 2, 3$) に分解する。すなわち、

$$Y_j(\omega) \equiv \sum_{i=1}^3 Y_{ji}(\omega), \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.29)$$

とする。分解されたそれぞれの応答 $y_{ji}(t)$ を入力とし、衝撃力の3方向成分の推定値 $\hat{f}_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) を出力とする線形逆システムを考えると、この逆システムの入出力関係は

$$\hat{F}_i(\omega) = G_{ji}(\omega)Y_{ji}(\omega), \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.30)$$

と表される。ここで、 $G_{ji}(\omega)$ は逆システムの伝達関数である。衝撃力の3方向成分のそれぞれの推定値の二乗平均誤差を最小にする最適逆システムの伝達関数は、式(2.14)と同様に、

$$G_{ji}(\omega) = \frac{S_{y_j f_i}(\omega)}{S_{y_j y_j}(\omega)}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.31)$$

により定められる。較正実験を多数回行えば、衝撃力と応答の測定データの組が多数得られ、式(2.20)、(2.21)と同様にスペクトル密度関数 $S_{y_j y_j}(\omega)$ 、 $S_{y_j f_i}(\omega)$ が推定できる。したがって、式(2.31)により最適逆システムの伝達関数の各成分が同定できる。

次に、最適逆システムを用いて任意の衝撃力を推定する方法を示す。任意の衝撃力に対する応答の測定データは式(2.29)のように分解できないので、式(2.30)を直接用いて衝撃力を推定することはできない。式(2.30)を式(2.29)に代入すれば、

$$Y_j(\omega) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{G_{ji}(\omega)} \hat{F}_i(\omega), \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.32)$$

となり、この連立一次方程式を $\hat{F}_i(\omega)$ について解くことにより、衝撃力の3方向成分が推定できる。なお、式(2.32)を行列の形で表示すれば、

$$Y = G\hat{F} \quad (2.33)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \hat{F} &\equiv \begin{bmatrix} \hat{F}_1(\omega) \\ \hat{F}_2(\omega) \\ \hat{F}_3(\omega) \end{bmatrix} \\ Y &\equiv \begin{bmatrix} Y_1(\omega) \\ Y_2(\omega) \\ Y_3(\omega) \end{bmatrix} \\ G &\equiv \begin{bmatrix} 1/G_{11}(\omega) & 1/G_{12}(\omega) & 1/G_{13}(\omega) \\ 1/G_{21}(\omega) & 1/G_{22}(\omega) & 1/G_{23}(\omega) \\ 1/G_{31}(\omega) & 1/G_{32}(\omega) & 1/G_{33}(\omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

である。

2.3.3 任意方向衝撃力の逆問題における不適切性

任意方向衝撃力の逆問題解析においては、衝撃力の3方向成分をそれぞれ求めるために連立方程式を解く必要がある。連立方程式(2.25)において係数行列 H が正則であれば、理論的には

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{E} \quad (2.35)$$

によって衝撃力が求められる。しかし、逆問題解析手法を実際の衝撃力の測定に適用する場合には、 \mathbf{E} および \mathbf{H} は測定データをもとに数値的に与えられるので、測定や数値計算の際に生じた誤差を含んでいる。一般に、連立一次方程式の係数行列が悪条件である場合には、これらの誤差が拡大されて解が不安定になり易いことが知られている [60]。そこで、以下では、これらの誤差が連立方程式 (2.25) の解 \mathbf{F} に及ぼす影響について考察し、任意方向衝撃力の逆問題における不適切性を明らかにする。なお、最適逆システムによる逆問題解析手法を適用する場合には式 (2.33) について考察しなければならないが、式 (2.25) の \mathbf{E} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{H} をそれぞれ \mathbf{Y} 、 $\hat{\mathbf{F}}$ 、 \mathbf{G} に対応させれば以下の議論は全く同様となるので、記号を簡略にするために式 (2.25) について考察する。

まず、応答の測定値のフーリエ変換 \mathbf{E} に含まれる誤差が衝撃力のフーリエ変換 \mathbf{F} に及ぼす影響について考察する。なお、ここでは \mathbf{H} は正則であるとする。応答の誤差を $\Delta\mathbf{E}$ とし、この誤差により生じる衝撃力の誤差を $\Delta\mathbf{F}$ とすれば、式 (2.25) より、

$$\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}) \quad (2.36)$$

となり、

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1}\Delta\mathbf{E} \quad (2.37)$$

となる。式 (2.25) と (2.37) の両辺のノルムを求めれば、それぞれ、

$$\|\mathbf{E}\| \leq \|\mathbf{H}\|\|\mathbf{F}\| \quad (2.38)$$

$$\|\Delta\mathbf{F}\| \leq \|\mathbf{H}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{E}\| \quad (2.39)$$

が得られる。したがって、 $\mathbf{E} \neq \mathbf{o}$ (\mathbf{o} は零ベクトル) ならば、

$$\frac{\|\Delta\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{F}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{H}) \frac{\|\Delta\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{E}\|} \quad (2.40)$$

が成り立つ。ここで、 $\text{cond}(\mathbf{H})$ は行列 \mathbf{H} の条件数であり、次式により定義される [60]。

$$\text{cond}(\mathbf{H}) = \|\mathbf{H}\|\|\mathbf{H}^{-1}\| \quad (2.41)$$

式(2.40)によれば、係数行列(伝達関数行列)の条件数が大きいほど、定数項(応答)の相対誤差が連立方程式の解(衝撃力)の相対誤差に与える影響は大きくなる。実際問題では、衝撃を受ける物体の材質や形状、あるいは、応答の測定位置などによっては、伝達関数行列 H の条件数が大きくなる場合がある。このような場合には、応答の誤差が拡大されて衝撃力が不安定になるという不適切性が生じる。したがって、任意の衝撃力を逆問題解析によって安定に推定するためには、この不適切性を改善する必要がある。

次に、伝達関数行列 H に含まれる誤差が衝撃力のフーリエ変換 F に及ぼす影響について考察する。先と同様に H は正則であると仮定する。係数行列の誤差を ΔH とし、この誤差により生じる衝撃力の誤差を ΔF とすれば、式(2.25)より、

$$E = (H + \Delta H)(F + \Delta F) \quad (2.42)$$

となる。 $[H + \Delta H]^{-1}$ が存在するとすれば、

$$\begin{aligned} \Delta F &= [H + \Delta H]^{-1}E - H^{-1}E \\ &= H^{-1}(H - [H + \Delta H])[H + \Delta H]^{-1}E \\ &= -H^{-1}\Delta H[H + \Delta H]^{-1}E \\ &= -H^{-1}\Delta H[F + \Delta F] \end{aligned} \quad (2.43)$$

となるから、両辺のノルムを求めれば、

$$\|\Delta F\| \leq \|H^{-1}\| \|\Delta H\| \|F + \Delta F\| \quad (2.44)$$

が得られ、

$$\frac{\|\Delta F\|}{\|F + \Delta F\|} \leq \text{cond}(H) \frac{\|\Delta H\|}{\|H\|} \quad (2.45)$$

が成り立つ。上式によれば、条件数が大きいほど伝達関数行列の相対誤差が衝撃力の相対誤差に与える影響が大きくなる。したがって、衝撃力を逆問題解析によって安定に推定するためには、この不適切性を改善する必要がある。

以上では、伝達関数行列が正則、すなわち、 H^{-1} が存在すると仮定した。しかし、物体の材質、形状や応答の測定位置などによっては、 H が特異となる場合も考えられる。このような場合には、連立方程式の解である衝撃力が一意に定まらないという不適切性も

生じる。この不適切性を改善するためには、衝撃力の方向成分の数（一般には3）よりも多数の成分の応答を測定し、それらの測定データをもとにして最小二乗法により衝撃力を推定する方法が妥当であると考えられる。

2.3.4 特異値分解を利用した逆問題解析

前項で指摘した逆問題の不適切性を改善して、任意の場合に衝撃力を安定に推定するために、特異値分解を利用した逆問題解析手法を示す。

まず、係数行列が特異となる場合に、連立方程式の解すなわち衝撃力が一意的に定まらないという不適切性を解決するために、特異値分解を利用した最小二乗法により連立方程式を解く方法を示す。そのために、式(2.25)を拡張し、ベクトル E を n 個の成分の応答の測定データからなる n 行の列ベクトル、行列 H を伝達関数からなる n 行3列の行列として、連立方程式

$$E = HF \tag{2.46}$$

を取り扱う。

任意の n 行3列の行列 H の特異値分解は、

$$H = U\Sigma V^H \tag{2.47}$$

によって定義される[60]。ここで、 U は n 行 n 列のユニタリ行列、 V は3行3列のユニタリ行列であり、 H は行列の共役転置を表す。また、 $\Sigma \equiv [\sigma_{ji}]$ は n 行3列の行列であり、 H の階数を r とし、 $\min(3, n) = q$ とすると、その各成分は

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \dots \geq \sigma_{rr} > \sigma_{r+1, r+1} = \dots = \sigma_{qq} = 0$$

$$\sigma_{ji} = 0, (i \neq j)$$

を満たす。 $\sigma_i \equiv \sigma_{ii}, (i = 1, \dots, q)$ とすると、例えば、 $n > 3$ の場合は、

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

と表される。ここで、 σ_i , ($i = 1, \dots, q$) は行列 H の特異値であり、非負の実数である。

式 (2.47) の特異値分解を用いれば、連立方程式 (2.46) の最小二乗解は、

$$\tilde{F} = H^+ E \quad (2.49)$$

により得られる [60]。ここで、 H^+ はムーア・ペンローズの一般逆行列であり、

$$H^+ = V \Sigma^+ U^H \quad (2.50)$$

である。また、 $\Sigma^+ \equiv [\sigma_{ji}^+]$ は 3 行 n 列の行列であり、その各成分は、

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^+ &= \frac{1}{\sigma_i}, \quad (i = 1, \dots, r) \\ \sigma_{ii}^+ &= 0, \quad (i = r + 1, \dots, q) \\ \sigma_{ji}^+ &= 0, \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

である。すなわち、 $\sigma_i^+ \equiv \sigma_{ii}^+, (i = 1, \dots, q)$ とすると、例えば、 $n > 3$ の場合は、

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \sigma_1^+ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^+ & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^+ & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

と表される。式 (2.49) の最小二乗解 \tilde{F} は、 n, r の大小によってそれぞれ次のような意味を有している [9]。

$n = r = 3$ の場合 H は正則であるから、 $H^+ = H^{-1}$ であり、 \tilde{F} は唯一解である。

$n > r = 3$ の場合 H は最大階数であり、唯一解を持つか不能であるかのいずれかである。

唯一解を持つ場合には、 \tilde{F} はその唯一解である。一方、不能の場合には、 \tilde{F} は解の残差の二乗和 $\|E - HF\|$ が最小となる最小二乗解であり、この最小二乗解は一意である。

$n = r < 3$ の場合 連立方程式 (2.46) は条件不足であるから不定であり、 \tilde{F} は、無数の解の中で $\|F\|$ が最小、すなわち、衝撃力ベクトルの大きさが最小となる最小二乗解である。

$r < \min(3, n)$ の場合 係数行列が階数不足であるから連立方程式 (2.46) は不定か不能である。不定の場合には、 \tilde{F} は、無数の解の中で $\|F\|$ が最小となる最小二乗解である。

一方、不能の場合には、 \tilde{F} は、 $\|E - HF\|$ が最小となる無数の最小二乗解の中で、さらに $\|F\|$ が最小となる二重の意味での最小二乗解である。

以上のように、式(2.49)によれば、 n, r がいかなる場合にも衝撃力の最小二乗解は一意的に定められる。すなわち、伝達関数行列 H が特異となり、衝撃力が一意的に定まらないという不適切性は解決される。しかし、 $\|F\|$ を最小にするという拘束条件は、解の発散を防ぐ意味で数値的には有効であるが、物理的根拠が乏しい。したがって、実際に衝撃力を逆問題解析により推定する場合には、この拘束条件をできるだけ用いないようにすべきである。上記の分類のうちこの拘束条件が用いられていないのは、 $n \geq r = 3$ の場合であるから、衝撃力の逆問題では応答の成分の数 n を3以上のできるだけ大きな数にしておくべきである。

式(2.41)におけるノルムとしてスペクトルノルムを採用すれば、行列 H の条件数は、最大の特異値 σ_1 と零でない最小の特異値 σ_r を用いて、

$$\text{cond}(H) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r} \quad (2.52)$$

により得られる [60]。したがって、連立方程式の係数行列の特異値分解を行えば、容易に係数行列の条件数が得られ、問題の不適切性の程度が評価できる。

次に、伝達関数行列の条件数が大きい場合に誤差の拡大が生じ衝撃力が不安定になる不適切性を改善するために、適切化処理の手法について述べる。適切化の手法としては種々の方法 [37, 77] が知られているが、本研究では、これらの手法のうちで最も簡単な、ムーア・ペンローズの一般逆行列を有効一般逆行列に変形する手法 [9, 33] を採用する。

式(2.52)より、条件数が大きく誤差の拡大が生じ易い場合は、 σ_1 に比べて σ_r が小さい。そこで、小さな特異値 σ_i ($i = s + 1, \dots, r$) を零に置き換えることにより階数を r から s に低下させれば、条件数が小さくなって誤差の拡大が生じにくくなる。このような適切化を行った場合、ムーア・ペンローズの一般逆行列 H^+ は、

$$H_s^+ = V \Sigma_s^+ U^H \quad (2.53)$$

に置き換えられ、最小二乗解は、

$$\tilde{F} = H_s^+ E \quad (2.54)$$

により得られる。ここで、 s は H の有効階数、 H_s^+ は H の有効一般逆行列であり、 Σ_s^+ は Σ^+ の成分の中で $\sigma_i^+, (i = s + 1, \dots, r)$ を零に置き換えた行列である。

この適切化を行うことにより、連立方程式の解すなわち衝撃力は、誤差の拡大が発生しにくくなって安定になるが、 s の値を r に比べて小さくし過ぎると本来の解からは遠ざかる。したがって、有効階数 s には、解の残差を判断基準とする方法などにより、適切な値を採択する必要がある。

2.4 逆問題解析における数値計算法

2.4.1 数値ラプラス変換・逆変換

本研究では、逆畳み込み演算を行うために、時間領域での畳み込み積分をフーリエ変換により周波数領域での乗算に変換する方法を採用している。したがって、実際の演算処理において測定データをフーリエ変換し、周波数領域における演算結果をフーリエ逆変換するために、数値フーリエ変換および逆変換法を使用する必要がある。数値フーリエ変換・逆変換には、演算が高速でかつ計算機の記憶の利用効率がよいことから、高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform, FFT)[40] を用いることが多く、本研究においても FFT を採用する。

しかし、フーリエ変換は連続な無限積分で定義されるのに対し、FFT はこの積分を級数に離散化して有限項で打ち切って近似した離散フーリエ変換であるから、実際に FFT を適用する際には離散化と打ち切りによる誤差に十分注意する必要がある。理論的には、離散化における時間の分割幅 (サンプリング間隔) を小さくすれば離散化誤差は小さくなり、打ち切りまでの時間 (ウインドウ幅) を大きくすれば打ち切り誤差は小さくなるが、実用上は、測定機器および計算機の記憶容量や演算処理に要する時間などの制約から、サンプリング間隔やウインドウ幅には限界がある。そこで、打ち切り誤差を抑制するための一手法として、変換前の関数に適切な重み関数 (ウインドウ関数) を乗じるウインドウ処理 [40] が知られており、ウインドウ関数として各種の関数が用いられている。本研究では、ウインドウ関数として次の指数関数を採用する。

$$w(t) = e^{-\gamma t} \quad (2.55)$$

ここで、 γ は非負の定数である。

式 (2.55) のような指数関数を用いる理由は次の二点である。第一の理由は、時間領域の畳み込みと周波数領域の乗算が、ウインドウ関数を含めた形でフーリエ変換対を形成することである。すなわち、式 (2.1) の両辺を指数ウインドウ関数を用いてフーリエ変換すれば、

$$E_w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-\gamma \tau} e^{-i\omega \tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-\gamma s} e^{-i\omega s} ds \\
&= H_w(\omega) F_w(\omega)
\end{aligned} \tag{2.56}$$

となる。ここで、 $t < 0$ において $e(t) = f(t) = h(t) = 0$ であることを用いており、

$$\left. \begin{array}{l} E_w(\omega) \\ F_w(\omega) \\ H_w(\omega) \end{array} \right\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} e(t) \\ f(t) \\ h(t) \end{array} \right\} e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt \tag{2.57}$$

としている。なお、ウインドウ関数が

$$w(s+t) = w(s)w(t) \tag{2.58}$$

を満足していれば式 (2.56) と同様の関係が成立する。一般に広く用いられているハミング関数やハンニング関数などのウインドウ関数は式 (2.58) を満足しない。本研究における衝撃力の逆問題解析では時間領域の畳み込みと周波数領域の乗算との対応関係を基本として用いるため、式 (2.58) を満足する指数関数がウインドウ関数として適切であると言える。

第二の理由は、ウインドウ関数として指数関数を用いたフーリエ変換は、ラプラス変換に相当することである。一般に、ラプラス変換は構造物の衝撃問題の解析や線形システムの動特性解析などの過渡現象解析に広く用いられている数学的手法であり、衝撃力の逆問題解析に適した手法であると考えられる。

2.4.2 複素行列の特異値分解

行列の特異値分解の数値計算法としては、行列をハウスホルダー変換により二重対角行列に変換し、次に QR 法によって二重対角行列の特異値を計算する方法が広く用いられている [9, 33]。また、この算法に基づく数値計算用サブルーチンとしては、著名な EISPACK[54] に含まれるものを始めとして多くの信頼できる汎用サブルーチンがある [75]。特異値分解に用いられるハウスホルダー変換や QR 法のアルゴリズムは、代数的にはそれほど複雑ではないが、数値的には効率を高めかつ誤差を生じないように種々のテクニックが必要とされるため、特異値分解の数値計算にあたっては汎用サブルーチンを利用することが適切である。ところが、一般的に利用可能な汎用サブルーチンはいず

れも実行列の特異値分解を行うものであり、本研究で必要とする複素行列用の特異値分解のサブルーチンは見当たらないようである。そこで、本項では、実行列の特異値分解の汎用サブルーチンを利用して、複素行列の特異値分解を行う方法を示す。

式(2.46)の連立方程式を特異値分解により解く問題を考える。まず、各行列を実部と虚部に分解すれば、

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &\equiv \mathbf{H}_R + i\mathbf{H}_I \\
\mathbf{U} &\equiv \mathbf{U}_R + i\mathbf{U}_I \\
\mathbf{V} &\equiv \mathbf{V}_R + i\mathbf{V}_I \\
\mathbf{E} &\equiv \mathbf{E}_R + i\mathbf{E}_I \\
\mathbf{F} &\equiv \mathbf{F}_R + i\mathbf{F}_I
\end{aligned} \tag{2.59}$$

となる。ここで、 $\mathbf{H}_R, \mathbf{H}_I$ は n 行3列の実行列、 $\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_I$ は n 行 n 列の実行列、 $\mathbf{V}_R, \mathbf{V}_I$ は3行3列の実行列であり、 $\mathbf{E}_R, \mathbf{E}_I$ は n 行の実列ベクトル、 $\mathbf{F}_R, \mathbf{F}_I$ は3行の実列ベクトルである。

式(2.59)を用いて連立方程式(2.46)を書き直せば、

$$[\mathbf{E}_R + i\mathbf{E}_I] = [\mathbf{H}_R + i\mathbf{H}_I][\mathbf{F}_R + i\mathbf{F}_I] \tag{2.60}$$

となる。上式の実部と虚部をそれぞれ等置すれば、行列の形で、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_R \\ \mathbf{E}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_R & -\mathbf{H}_I \\ \mathbf{H}_I & \mathbf{H}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_R \\ \mathbf{F}_I \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

のように表示でき、複素連立一次方程式(2.46)は実連立一次方程式(2.61)に帰着される。

一方、式(2.59)を用いて式(2.47)を書き直せば、

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_R + i\mathbf{H}_I &= [\mathbf{U}_R + i\mathbf{U}_I]\boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{V}_R + i\mathbf{V}_I]^H \\
&= [\mathbf{U}_R + i\mathbf{U}_I]\boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{V}_R^T - i\mathbf{V}_I^T]
\end{aligned} \tag{2.62}$$

となるから、

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_R &= \mathbf{U}_R\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}_R^T + \mathbf{U}_I\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}_I^T \\
\mathbf{H}_I &= \mathbf{U}_I\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}_R^T - \mathbf{U}_R\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}_I^T
\end{aligned} \tag{2.63}$$

となる。ここで、 T は行列の転置を表す。上式を用いれば連立方程式(2.61)の係数行列は、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_R & -\mathbf{H}_I \\ \mathbf{H}_I & \mathbf{H}_R \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_R & -\mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_I & \mathbf{U}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R^T & \mathbf{V}_I^T \\ -\mathbf{V}_I^T & \mathbf{V}_R^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_R & -\mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_I & \mathbf{U}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R & -\mathbf{V}_I \\ \mathbf{V}_I & \mathbf{V}_R \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.64)$$

と表される。ここで、 \mathbf{O} は零行列である。 \mathbf{U} および \mathbf{V} はユニタリ行列であるから、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_R & -\mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_I & \mathbf{U}_R \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R & -\mathbf{V}_I \\ \mathbf{V}_I & \mathbf{V}_R \end{bmatrix}$$

はともに直交行列である。したがって、式(2.64)は連立方程式(2.61)の係数行列の特異値分解となっている。ただし、式(2.64)では特異値が値の大きい順に並んでいないが、行あるいは列を適切に並び替えれば、値の大きい順に特異値を並べることは可能である。式(2.61)の係数行列の特異値には、もとの係数行列 \mathbf{H} の特異値と等しいものが二つずつあるから、式(2.61)の係数行列の条件数ともとの係数行列 \mathbf{H} の条件数は等しい。

式(2.64)の特異値分解を用いれば、連立方程式(2.61)の最小二乗解は、

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_R \\ \tilde{\mathbf{F}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R & -\mathbf{V}_I \\ \mathbf{V}_I & \mathbf{V}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^+ & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Sigma}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_R & -\mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_I & \mathbf{U}_R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}_R \\ \mathbf{E}_I \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

となる。一方、式(2.59)を用いて式(2.49)を書き直せば、

$$\tilde{\mathbf{F}}_R + i\tilde{\mathbf{F}}_I = [\mathbf{V}_R + i\mathbf{V}_I]\boldsymbol{\Sigma}^+[\mathbf{U}_R + i\mathbf{U}_I]^H[\mathbf{E}_R + i\mathbf{E}_I] \quad (2.66)$$

となる。式(2.65)と(2.66)を比較すれば、これらの最小二乗解は等価であることが確認できる。

以上のことから、複素連立一次方程式(2.46)の特異値分解による最小二乗解は、式(2.59)のように実部と虚部に分解し、実連立一次方程式(2.61)の特異値分解による最小二乗解を求めれば得られることが示された。したがって、実行列の特異値分解の汎用サブルーチンを式(2.61)に適用すれば、複素連立一次方程式の特異値分解による最小二乗解が求められる。

2.5 結言

本章では、任意形状の物体に作用する衝撃力の逆問題解析手法を論じ、この逆問題が数学的に不適切であることを指摘するとともに、不適切性を改善して衝撃力を安定に推定する手法を明らかにした。また、逆問題解析手法を実際の衝撃力測定に適用する場合に必要となる数値計算法について論じた。得られた結論は以下の通りである。

1. 任意形状の物体に作用する一定方向衝撃力を入力、物体の衝撃応答を出力とする線形システムを考えれば、衝撃力と応答の関係は畳み込み積分によって表される。したがって、応答の測定データをフーリエ変換し、伝達関数で除してフーリエ逆変換することにより、任意の一定方向衝撃力が推定できる。衝撃力の方向が任意の場合には、衝撃力と応答をそれぞれ成分に分解すれば、衝撃力と応答の関係はフーリエ変換領域において伝達関数を係数行列とする連立一次方程式に帰着でき、これを解くことにより衝撃力の各方向成分が推定できる。
2. 逆問題解析によって衝撃力を求めるためには、あらかじめ衝撃力と応答との間の伝達関数を同定しておく必要がある。任意の場合に解析的に伝達関数を求めることは困難であるから、伝達関数は較正実験を行って同定するのが適切である。較正実験は、特別な方法によって測定可能な衝撃力(例えば、細長い弾性棒の縦衝撃による衝撃力)を衝撃点に作用させることにより実現できる。較正実験において、衝撃力と衝撃応答とを同時に測定すれば、それらの測定データのフーリエ変換より、伝達関数が同定できる。
3. 衝撃力の逆問題には以下の二つの不適切性が存在するため、雑音などの誤差を含む測定データをもとに逆問題解析を行う場合には、適切化処理を行う必要がある。一つは、衝撃力と応答の各々の成分の入出力関係に内在する不適切性で、伝達関数の絶対値が零に近い値となる周波数域において衝撃力の推定値が不安定になることである。非因果的ウィーナフィルタ理論を応用した最適逆システムによる逆問題解析手法を適用すればこの不適切性は改善され、衝撃力の推定値の二乗平均誤差は最小になる。もう一つは、任意方向の衝撃力を推定する場合のフーリエ変換領域における連立一次方程式に内在する不適切性であり、伝達関数を成分とする係数行列の条

件数が大きくなると衝撃力の推定値が不安定になることである。特異値分解を用いた最小二乗法によって連立一次方程式を解き、さらに、ムーア・ペンローズの一般逆行列を有効一般逆行列に置き換える操作を施せばこの不適切性は改善され、衝撃力の推定値およびその残差の L_2 ノルムは最小となる。

4. 逆畳み込みを数値的に行うためには、高速フーリエ変換 (FFT) を利用してフーリエ変換領域において除算を行う方法が、演算効率の面から有利である。また、本研究の逆問題解析のように時間領域の畳み込みと周波数領域の乗算との対応関係を利用する場合には、FFT のウィンドウ関数には指数関数を採用するのが適切である。複素行列の特異値分解は、行列を実部と虚部に分解し適切に配列した実行列の特異値分解と等価であり、実行列の特異値分解の汎用サブルーチンを用いて計算できる。

第 3 章

高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換

3.1 緒言

本研究では、衝撃力の逆問題解析手法を実験解析に適用するために高速フーリエ変換 (FFT) を利用して逆畳み込みを行う方法を採用しているが、指数関数を FFT のウィンドウ関数として用いているために、FFT によるフーリエ変換・逆変換は数値ラプラス変換・逆変換に相当している。この数値ラプラス変換・逆変換の計算精度が十分でなければ、実際問題に逆問題解析手法を有効に適用することはできない。従来、数値ラプラス変換・逆変換については種々の研究がなされている [26, 46] が、ラプラス変換・逆変換の両方を数値的に計算する方法については詳細な研究は十分になされていない。そこで、本章では、FFT を利用した数値ラプラス変換・逆変換法について論じる。まず、ラプラス変換・逆変換の積分を有限の級数和で近似して離散ラプラス変換・逆変換を定式化するとともに、その近似誤差について検討する。次に、サンプリング定理に基づいて FFT のアルゴリズムを利用することにより、離散ラプラス変換・逆変換が効率よく数値計算できることを示す。そして、正弦関数および単位ステップ関数の数値ラプラス変換・逆変換を計算して、本計算法の精度評価を行い有効性を検証する。

3.2 離散ラプラス変換・逆変換

3.2.1 ラプラス変換

ラプラス変換・逆変換は、それぞれ次式によって定義される。

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (3.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (3.2)$$

ここで、関数 $f(t)$ は、

$$f(t) = 0, \quad (t < 0) \quad (3.3)$$

であるとしている。式 (3.1), (3.2) の変数 p を $p = \gamma + i\omega$ によって変数 ω に置き換え、式 (3.3) を考慮すれば、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt \quad (3.4)$$

$$f(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (3.5)$$

となる。式 (3.4), (3.5) は時間領域の関数 $f(t)e^{-\gamma t}$ と周波数領域の関数 $F(\omega)$ のフーリエ変換対となっており、ラプラス変換はフーリエ変換の形で表示できる。

3.2.2 離散ラプラス変換

式 (3.4) の積分を離散化して無限級数和で表示し、これを有限項で打ち切ることによって、離散ラプラス変換として定式化する方法を示す。

まず、時間領域において積分を離散化する。離散化に用いるサンプリング関数として、次の等間隔インパルス列を用いる。

$$g_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \quad (3.6)$$

ここで、 $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数である。 $g_1(t)$ のフーリエ変換 $G_1(\omega)$ は、

$$G_1(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2n\pi}{\Delta t}) \quad (3.7)$$

である [40] から、畳み込み則より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \omega') G_1(\omega') d\omega' = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\gamma t} g_1(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.8)$$

となる。上式の両辺はそれぞれ、

$$(\text{左辺}) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2n\pi}{\Delta t}\right) \quad (3.9)$$

$$(\text{右辺}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) e^{-\gamma k\Delta t} e^{-i\omega k\Delta t} \quad (3.10)$$

となるから、式 (3.3) を考慮して整理すれば、

$$F(\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t) e^{-\gamma k\Delta t} e^{-i\omega k\Delta t} + E_1(\omega) \quad (3.11)$$

となる。ここで、 $E_1(\omega)$ は

$$E_1(\omega) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[F\left(\omega - \frac{2n\pi}{\Delta t}\right) + F\left(\omega + \frac{2n\pi}{\Delta t}\right) \right] \quad (3.12)$$

であり、ラプラス変換積分を無限級数和で近似したときの離散化誤差を表している。通常の工学問題で扱う関数 $f(t)$ では、 $|\omega| \rightarrow \infty$ のとき $|F(\omega)| \rightarrow 0$ となるから、サンプリング間隔 Δt が十分小さな値であれば $E_1(\omega)$ は無視できるほど小さくなる。

次に、式 (3.11) の無限級数和を初めの K 項で打ち切り、

$$\tilde{F}(\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{K-1} f(k\Delta t) e^{-\gamma k\Delta t} e^{-i\omega k\Delta t} \quad (3.13)$$

で近似すれば、

$$F(\omega) = \tilde{F}(\omega) + E_1(\omega) + E_2(\omega) \quad (3.14)$$

となる。ここで、 $E_2(\omega)$ は

$$E_2(\omega) = \Delta t \sum_{k=K}^{\infty} f(k\Delta t) e^{-\gamma k\Delta t} e^{-i\omega k\Delta t} \quad (3.15)$$

であり、式 (3.11) の無限級数和を有限級数和で近似したときの打ち切り誤差を表している。式 (3.15) の級数には $e^{-\gamma k\Delta t}$ なる因数があるので、 K および正の定数 γ が十分大きな値であれば $E_2(\omega)$ は極めて小さくなり無視できる。以上のことから、ラプラス変換積分は式 (3.13) の有限級数和によって近似できる。

3.2.3 離散ラプラス逆変換

式 (3.5) の積分を離散化して無限級数和で表示し、これを有限項で打ち切ることにより、離散ラプラス逆変換として定式化する方法を示す。

周波数領域におけるサンプリング関数を

$$G_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Delta\omega) \quad (3.16)$$

とすれば、 $G_2(\omega)$ のフーリエ逆変換 $g_2(t)$ は、

$$g_2(t) = \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2k\pi}{\Delta\omega}\right) \quad (3.17)$$

である [40] から、畳み込み則より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}g_2(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G_2(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (3.18)$$

となる。前項と同様の手順により整理すれば、

$$\tilde{f}(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \Delta\omega \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} F(n\Delta\omega)e^{in\Delta\omega t} \quad (3.19)$$

$$f(t) = \tilde{f}(t) + E_3(t) + E_4(t) \quad (3.20)$$

$$E_3(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left[f\left(t - \frac{2k\pi}{\Delta\omega}\right)e^{\gamma 2k\pi/\Delta\omega} + f\left(t + \frac{2k\pi}{\Delta\omega}\right)e^{-\gamma 2k\pi/\Delta\omega} \right] \quad (3.21)$$

$$E_4(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \Delta\omega \left[\sum_{n=-\infty}^{N/2-1} F(n\Delta\omega)e^{in\Delta\omega t} + \sum_{n=N/2}^{\infty} F(n\Delta\omega)e^{in\Delta\omega t} \right] \quad (3.22)$$

となる。 $E_3(t)$ はラプラス逆変換積分を無限級数和で近似したときの離散化誤差を表し、 $E_4(t)$ は無限級数和を有限級数和で近似したときの打ち切り誤差を表している。サンプリング間隔 $\Delta\omega$ が十分小さく、項数 N が十分大きければ、 $E_3(t)$ と $E_4(t)$ はともに小さくなる。また、正の定数 γ が大きくなるとともに、 $E_3(t)$ は小さくなる。しかし、 $E_4(t)$ には係数 $e^{\gamma t}$ が存在するために、 γ が大きくなるとともに $E_4(t)$ は大きくなる。したがって、ラプラス逆変換積分を式 (3.19) の有限級数和によって近似するには、 $E_3(t) + E_4(t)$ の値が十分に小さくなるように γ の値を適切に選択する必要がある。

ところが、任意の関数 $F(p)$ を数値逆変換しようとする場合、 $E_3(t)$ は逆変換の結果の関数 $f(t)$ に依存するため、数値逆変換の計算に先立って逆変換の誤差 $E_3(t) + E_4(t)$ を評

値することはできない。したがって、数値逆変換に先立って、適切な γ の値を定めることは困難である。そこで、逆変換が解析的に計算できる種々の関数について数値逆変換の精度の評価を行うことにより、適切な γ の値を推定しておくのが妥当であると考えられる。なお、本研究の方法と同様に、ラプラス逆変換を有限フーリエ級数の形に帰着させる数値ラプラス逆変換法についてはこれまでに数例の報告がある。それらの報告では、種々の関数の数値逆変換の精度を評価した結果に基づき、経験的に γ の値は以下のような値が適切であるとしている。

- $\gamma = 5/T \sim 10/T$ (Durbin[51])
- $\gamma = 2\pi/T$ (Wilcox[89])
- $\gamma = 3/T \sim 10/T$ (Klings and Waller[66])

ここで、 $T = N\Delta t$ であり、 γ_0 はラプラス逆変換される関数の収束座標である。

3.2.4 高速フーリエ変換の利用

サンプリング定理 [40] によれば、周波数領域において関数 $F(\omega)$ が

$$F(\omega) = 0, \quad (|\omega| \geq \frac{\Omega}{2}) \quad (3.23)$$

であれば、任意の時刻 t における関数 $f(t)e^{-\gamma t}$ の値は、時間間隔

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (3.24)$$

ごとの値 $f(k\Delta t)e^{-\gamma k\Delta t}$ のみから、

$$f(t)e^{-\gamma t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)e^{-\gamma k\Delta t} \frac{\sin \Omega(t - k\Delta t)/2}{\Omega(t - k\Delta t)/2} \quad (3.25)$$

によって完全に定められる。したがって、式 (3.23) が成立する場合には、時間のサンプリング間隔は式 (3.24) のようにしておけば十分である。

同様に、時間領域において関数 $f(t)e^{-\gamma t}$ が

$$f(t) = 0, \quad (t \leq 0, t \geq T) \quad (3.26)$$

であれば、任意の周波数 ω における関数 $F(\omega)$ の値は、周波数間隔

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.27)$$

ごとの値 $F(n\Delta\omega)$ のみから,

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta\omega) \frac{\sin T(\omega - n\Delta\omega)/2}{T(\omega - n\Delta\omega)/2} \quad (3.28)$$

によって完全に定められる。したがって、式 (3.26) が成立する場合には、周波数のサンプリング間隔は式 (3.27) のようにしておけば十分である。

式 (3.23) と (3.26) が同時に満足される場合には、 Δt と $\Delta\omega$ はそれぞれ式 (3.24) と (3.27) のようにしておけば十分である。このとき、

$$N = \frac{\Omega}{\Delta\omega} \quad (3.29)$$

$$K = \frac{T}{\Delta t} \quad (3.30)$$

とすれば、式 (3.12), (3.15) より、

$$E_1(\omega) = E_2(\omega) = 0, \quad (|\omega| \leq \Omega/2) \quad (3.31)$$

となり、また、式 (3.21), (3.22) より、

$$E_3(t) = E_4(t) = 0, \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.32)$$

となって、ラプラス変換・逆変換を離散ラプラス変換・逆変換で近似したときの誤差は全て消失する。

以上のように Δt , $\Delta\omega$, N , K を定めれば、 $K = N$ となり、式 (3.13) と (3.19) よりそれぞれ

$$\tilde{F}(n\Delta\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}(k\Delta t) e^{-\gamma k\Delta t} e^{-2\pi i k n / N}, \quad (n = -N/2, \dots, N/2 - 1) \quad (3.33)$$

$$\tilde{f}(k\Delta t) = \frac{e^{\gamma k\Delta t}}{2\pi} \Delta\omega \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \tilde{F}(n\Delta\omega) e^{2\pi i k n / N}, \quad (k = 0, \dots, N-1) \quad (3.34)$$

が得られる。式 (3.33) と (3.34) は、 $\tilde{f}(k\Delta t) e^{-\gamma k\Delta t}$ と $\tilde{F}(n\Delta\omega)$ の離散フーリエ変換対の形になっているので、FFT のアルゴリズムを利用することが可能であり、 N を 2 のべき乗

にすれば、極めて効率よく計算することができる。本研究では、式 (3.33), (3.34) を N 点の離散ラプラス変換対と呼ぶ。

一般に任意の関数では、式 (3.23) と (3.26) を同時に満足させることは不可能であるから、式 (3.31) と (3.32) は成立しない。しかし、式 (3.23) と (3.26) が近似的に満足されていれば、式 (3.31) と (3.32) は近似的に成立するので、 $0 \leq t \leq T$, $|\omega| \leq \Omega/2$ の区間においてラプラス変換対は離散ラプラス変換対によって近似できる。この場合にも FFT のアルゴリズムを適用して、式 (3.33), (3.34) を効率よく計算することができる。

測定データをもとに種々の解析を行う実験解析において、関数 $f(t)$ は一定の時間間隔でサンプリングされた数値データの形で与えられることが多い。式 (3.33) の離散ラプラス変換は、正の定数 γ を適切に定めれば、このようなデータから直接計算することができる。また、この離散ラプラス変換では、 p 平面上の虚軸に平行な直線 $p = \gamma$ 上の等間隔な有限個の点における関数値しか得られないが、式 (3.34) の離散ラプラス逆変換はこれらの点における関数値のみから計算することができる。さらに、FFT のアルゴリズムが適用できることから、一般に振動の実験解析などでよく用いられる FFT アナライザなどを利用すれば、ブラックボックス的にラプラス変換・逆変換の演算処理をすることもできる。以上の理由により、FFT を利用した数値ラプラス変換・逆変換法は、本研究のような実験解析に適用する方法として適切であると言える。

3.3 数値ラプラス変換・逆変換の精度評価

本節では、変換・逆変換の理論値が既知である関数(これを試験関数と呼ぶ)を対象として、数値ラプラス変換・逆変換を適用し、その精度を検討した結果について述べる。

3.3.1 試験関数

構造物の衝撃などの過渡的現象を取り扱う場合には、変換の対象となる関数は時間領域においてある時刻に零から立ち上がるような関数であることが多い。そこで、本研究では、過渡信号的でかつ簡略な形の関数として、正弦関数と単位ステップ関数を試験関数として採用した。これらの関数のラプラス変換は次式で表される。

$$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)] = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \quad (3.35)$$

$$\mathcal{L}[u(t - T/2)] = \frac{1}{pe^{pT/2}} \quad (3.36)$$

ここで、 $u(t)$ は単位ステップ関数であり、 \mathcal{L} はラプラス変換作用素を表している。なお、本計算においては、時間領域におけるウィンドウ幅 T は一定とした。

3.3.2 精度の評価法

近似誤差の表示式(3.12)、(3.15)、(3.21)および(3.22)から明らかなように、FFTを利用した数値ラプラス変換・逆変換法では、時間領域のウィンドウ幅 T が一定の場合、変換の対象とする関数、計算点数 N (または、サンプリング間隔 Δt)、および正の定数 γ の三つの因子によって精度が変化する。そこで、これらの三つの因子を種々変化させた場合の計算精度を互いに比較するために、 N 点の離散ラプラス変換対の N 個の計算点における理論値の自乗平均値に対する数値計算値の自乗平均誤差の比を求め、その平方根を計算して精度を評価した。すなわち、数値ラプラス変換については、

$$R_1 = \sqrt{\frac{\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |\tilde{F}(n\Delta\omega) - F(n\Delta\omega)|^2}{\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |F(n\Delta\omega)|^2}} \quad (3.37)$$

また、数値ラプラス逆変換については、

$$R_2 = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{f}(k\Delta t) - f(k\Delta t)|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} |f(k\Delta t)|^2}} \quad (3.38)$$

により精度を評価した。

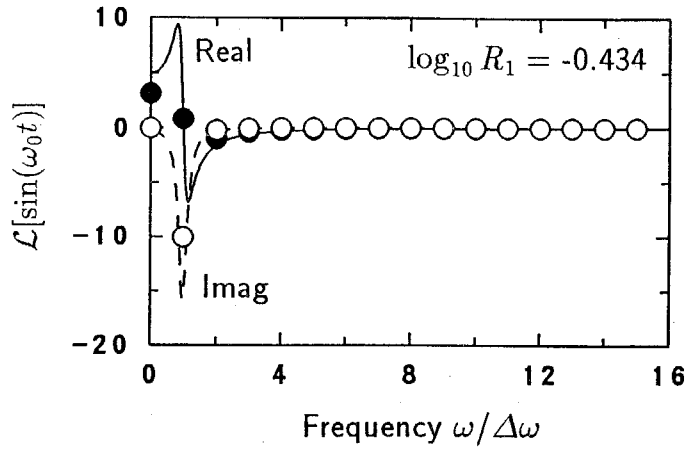
3.3.3 数値計算例

いくつかの典型的な条件の下で、試験関数の数値ラプラス変換・逆変換を計算した結果を示す。

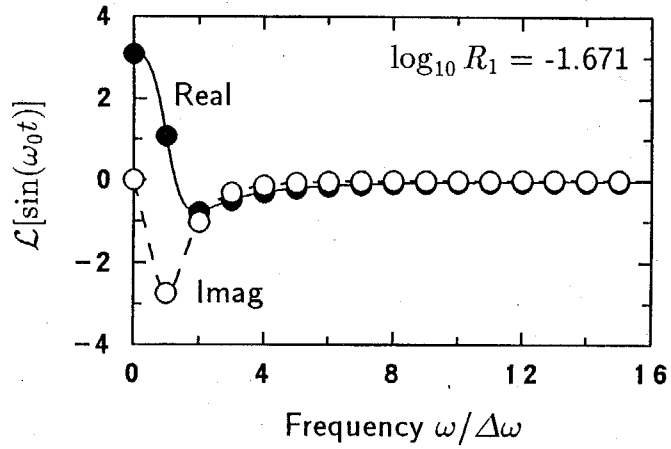
Fig.3.1 は、周期 T の正弦関数 ($\omega_0 = 2\pi/T$) について、 $N = 32$ とし、 γ の値を $1/T$ 、 $5/T$ 、 $10/T$ と変化させて、数値ラプラス変換を計算した結果を示している。同図では、数値変換結果の実部を●印、虚部を○印で示し、併せて理論値の実部を実線、虚部を破線で示している。なお、実関数のラプラス変換の実部は周波数 ω の偶関数、虚部は奇関数となるので、周波数が正の部分 ($\omega \geq 0$) のみについて図示している。Fig.3.1 によれば、 $\gamma = 1/T$ の場合は、周波数が小さい範囲において理論値は激しく変動するが、数値変換結果ではこのような変動が十分には表現されておらず、誤差は大きくなっている。しかし、 γ の値が $5/T$ 、 $10/T$ と大きくなるとともに理論値の変動はゆるやかになり、数値変換結果と理論値は次第に一致する傾向にある。

Fig.3.2 は、同様の正弦関数 ($\omega_0 = 2\pi/T$) について、 $N = 32$ とし、 γ の値を $1/T$ 、 $4/T$ 、 $8/T$ と変化させて、数値ラプラス逆変換を計算した結果を示している。図中の記号は数値ラプラス変換の場合 (Fig.3.1) と同様である。Fig.3.2 によれば、 $\gamma = 4/T$ の場合は数値逆変換の結果は理論値とほぼ一致している。しかし、 $\gamma = 1/T$ の場合には数値逆変換結果は時間領域全体にわたって理論値よりも振幅が大きくなっており、また、 $\gamma = 8/T$ の場合は数値逆変換結果は時間とともに発散する傾向を示しており、いずれも $\gamma = 4/T$ の場合に比べて精度が低下している。

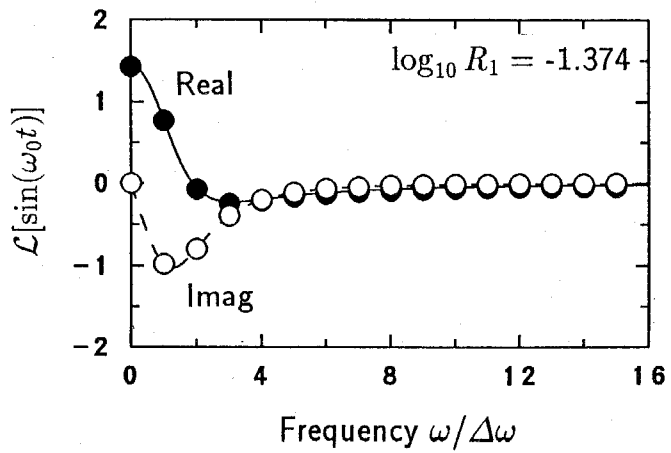
Fig.3.3, 3.4 は、それぞれ単位ステップ関数について、 $N = 32$ とし、 γ の値を変化させて数値ラプラス変換および逆変換を計算した結果を示している。数値変換の結果 (Fig.3.3) は、 $\gamma = 1/T$ の場合は周波数が小さい範囲において誤差が大きいが、 $\gamma = 7/T$ 、 $\gamma = 14/T$ の場合は全体にわたって理論値とよく一致している。一方、数値逆変換の結果 (Fig.3.4)



(a) $\gamma = 1/T$

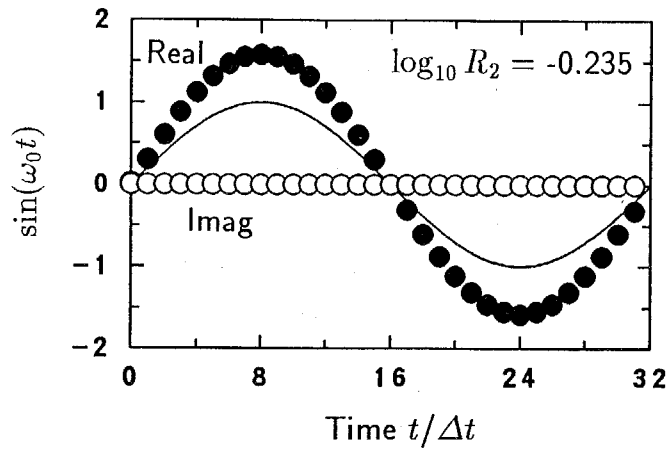


(b) $\gamma = 5/T$

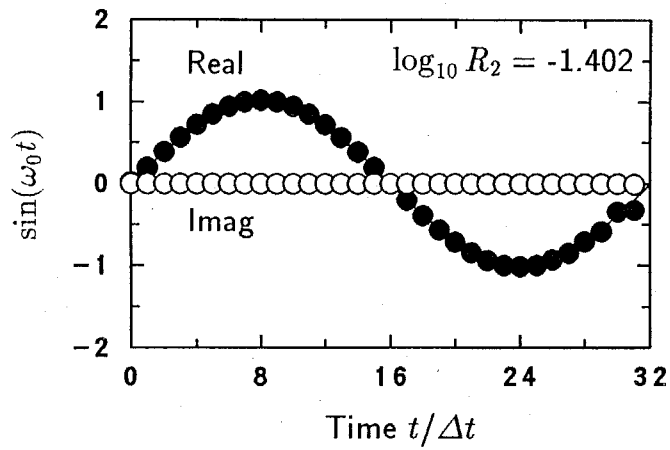


(c) $\gamma = 10/T$

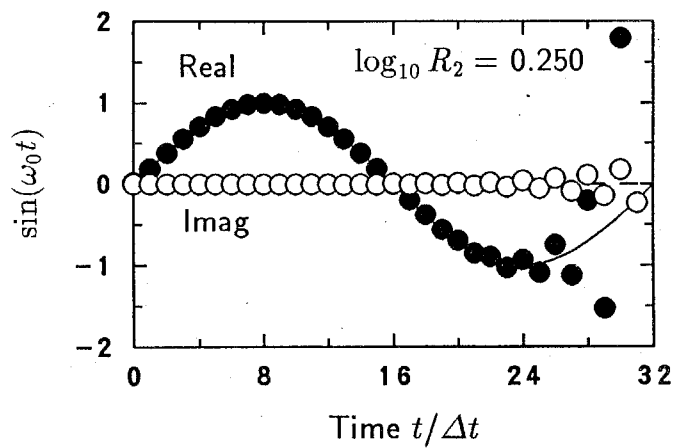
Figure 3.1: 正弦関数 ($\omega_0 = 2\pi/T$) の数値ラプラス変換例



(a) $\gamma = 1/T$

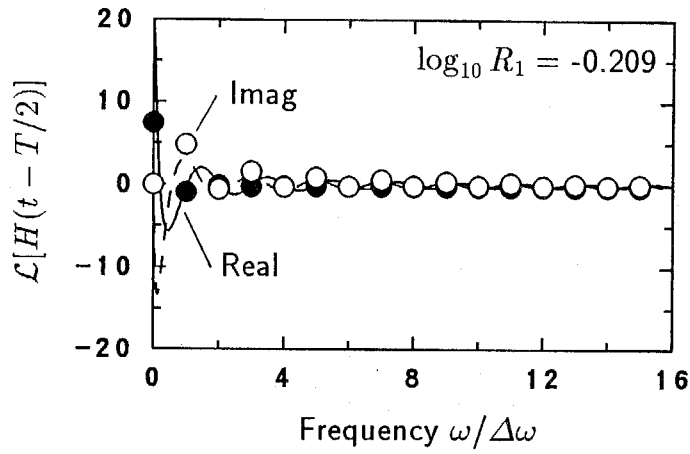


(b) $\gamma = 4/T$

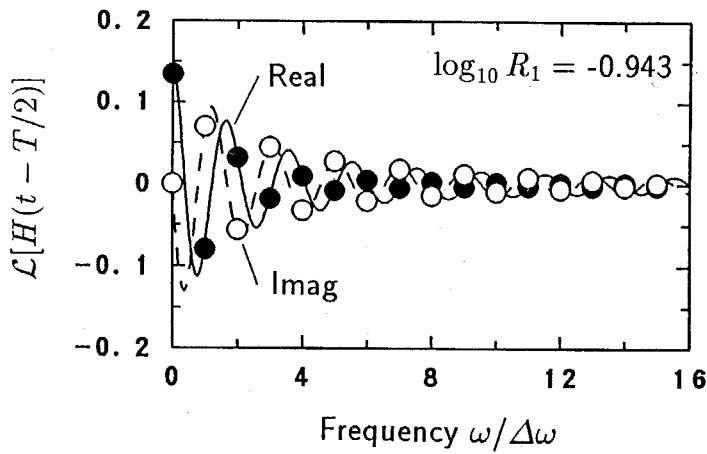


(c) $\gamma = 8/T$

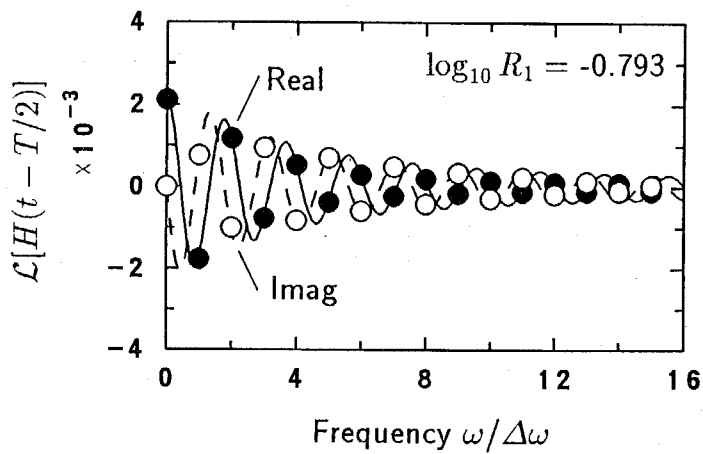
Figure 3.2: 正弦関数 ($\omega_0 = 2\pi/T$) の数値ラプラス逆変換例



(a) $\gamma = 1/T$

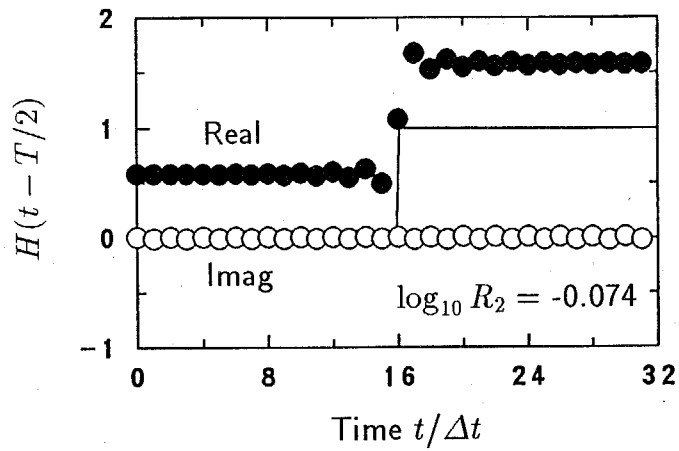


(b) $\gamma = 7/T$

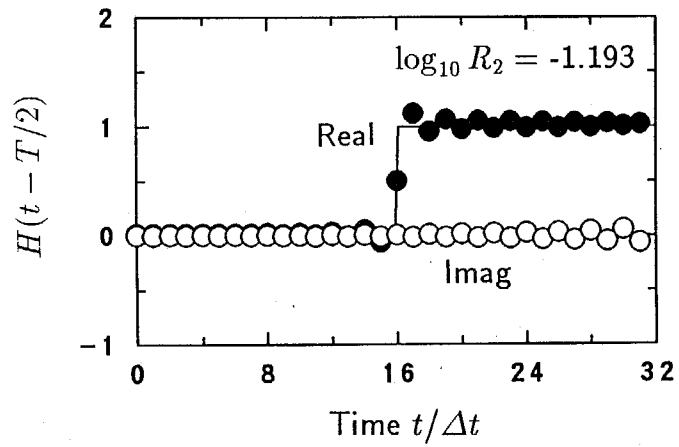


(c) $\gamma = 14/T$

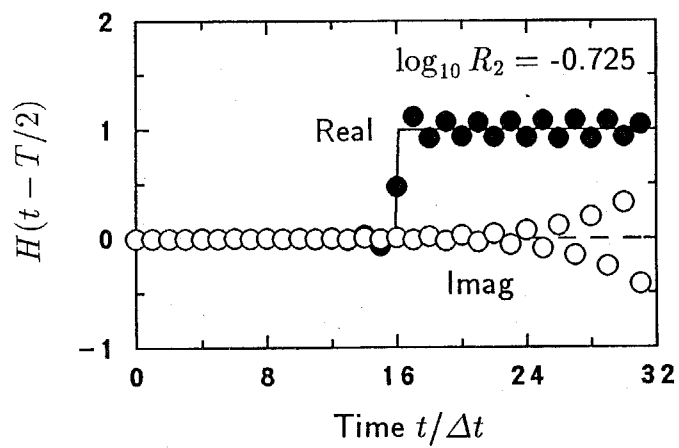
Figure 3.3: 単位ステップ関数の数値ラプラス変換例



(a) $\gamma = 1/T$



(b) $\gamma = 4/T$



(c) $\gamma = 8/T$

Figure 3.4: 単位ステップ関数の数値ラプラス逆変換例

は、 $\gamma = 4/T$ の場合は、 $t = T/2$ の不連続部においていわゆるギプスの現象がみられるものの、理論値とよく一致している。しかし、 $\gamma = 1/T$ の場合には数値逆変換結果の実部は全体に値が大きくなる方向にシフトしており、また、 $\gamma = 8/T$ の場合には数値逆変換結果の虚部は時間とともに発散する傾向を示しており、いずれも $\gamma = 4/T$ の場合に比べて精度が低下している。これらは、Fig.3.1, 3.2に示した正弦関数の数値ラプラス変換・逆変換の場合と同様の傾向である。

なお、以上の Fig.3.1 ~ 3.4 には式 (3.37), (3.38) により定義した R_1, R_2 の値を示しているが、これらによれば R_1, R_2 に基づく精度の評価法の妥当性が認められる。

3.3.4 定数 γ の影響

数値ラプラス変換・逆変換の精度に影響を及ぼす三つの因子のうち、まず初めに、定数 γ の値が精度 R_1, R_2 に及ぼす影響について述べる。

Fig.3.5 は、正弦関数 ($\omega_0 = 2\pi/T$) および単位ステップ関数について、 $\Delta t = T/N$, $N = 32$ として数値ラプラス変換を計算した場合の精度 R_1 をプロットしたグラフである。横軸は定数 γ を無次元化した γT の値を、縦軸は精度 R_1 の常用対数を示している。正弦関数の場合は γ が約 $4/T$ のとき、単位ステップ関数の場合には約 $7/T$ のときに R_1 の値は最小になっており、数値ラプラス変換の精度は最も高くなっている。また、 $\gamma = 0$ のときは数値ラプラス変換は数値フーリエ変換に相当するが、 γ の値が零に近づくとともに精度は低下しており、数値フーリエ変換では十分な精度が得られていない。図中の破線と一点鎖線は、式 (3.37) において、実際に生じた誤差 $\tilde{F}(n\Delta\omega) - F(n\Delta\omega)$ の代わりに、それぞれ近似誤差 $E_1(n\Delta\omega)$, $E_2(n\Delta\omega)$ を代入して R_1 を求め、その常用対数をプロットした曲線である。これらの曲線を実際の誤差の曲線 (実線) と比較すると、 γ の値が小さい範囲では打ち切り誤差 $E_2(\omega)$ 、大きい範囲では離散化誤差 $E_1(\omega)$ が支配的で、両者の和が数値ラプラス変換全体の誤差となっており、数値計算上の丸め誤差などの影響はほとんど無いことが示されている。

Fig.3.6 は、同様に、正弦関数と単位ステップ関数について、 $N = 32$ として数値ラプラス逆変換を計算した場合の精度 R_2 をプロットしたグラフである。正弦関数の場合は γ が約 $4/T$ 、単位ステップ関数の場合は約 $5/T$ のときに R_2 の値は最小になり、数値ラプラ

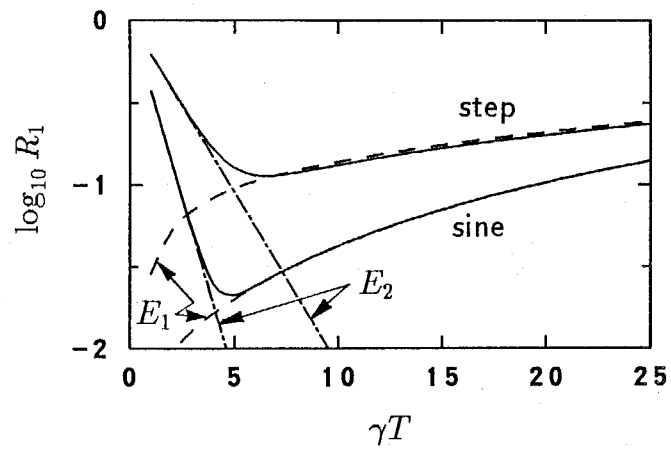


Figure 3.5: 定数 γ の値による数値ラプラス変換の精度の変化

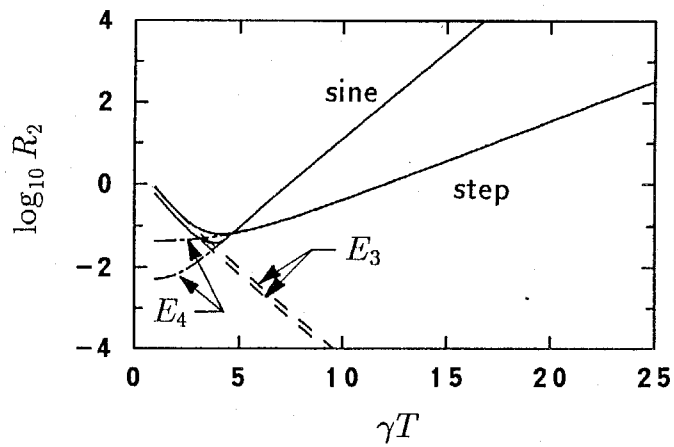


Figure 3.6: 定数 γ の値による数値ラプラス逆変換の精度の変化

ス逆変換の精度は最も高くなっている。数値変換の場合 (Fig.3.5) と比較すると、数値逆変換の場合には、 γ の値が大きくなるにつれて精度がより顕著に低下している。また、数値変換の場合と同様に、 $\gamma = 0$ の数値フーリエ逆変換では十分な精度が得られていない。図中の破線と一点鎖線は、式 (3.38) において、実際に生じた誤差 $\tilde{f}(k\Delta t) - f(k\Delta t)$ の代わりに、それぞれ近似誤差 $E_3(k\Delta t)$, $E_4(k\Delta t)$ を代入して R_2 を求め、その常用対数をプロットした曲線である。これらの曲線を実際の誤差の曲線 (実線) と比較すると、 γ の値が小さい範囲では離散化誤差 $E_3(t)$ 、大きい範囲では打ち切り誤差 $E_4(t)$ が支配的であり、両者の和が数値ラプラス逆変換全体の誤差となっていることが明らかである。また、数値逆変換において離散化誤差と打ち切り誤差が及ぼす影響は、数値変換においてそれらが及ぼす影響とは逆の傾向を示している。

3.3.5 計算点数の影響

計算点数 N が数値ラプラス変換・逆変換の精度に及ぼす影響について述べる。

Fig.3.7 は、正弦関数 ($\omega_0 = 2\pi/T$) について、数値ラプラス変換を計算した場合の精度 R_1 を計算点数 N をパラメータとしてプロットしたグラフである。この場合、時間領域のウィンドウ幅 T が一定であるから、計算点数 N が変化しても打ち切り誤差 E_2 は変化しないため、 γ の値が十分小さい範囲では、計算点数 N が変化しても精度 R_1 の変化は見られない。一方、離散化誤差 E_1 は計算点数 N が大きくなるとともに小さくなるため、 γ の値が大きくなると、計算点数 N の増加とともに精度は向上している。なお、精度が最高になるときの γT の値は一定ではなく、 N が増加するとともに大きくなっている。

同様に、Fig.3.8 は、数値ラプラス逆変換を計算したときの精度 R_2 をプロットしたグラフである。この場合、 T が一定であるから $\Delta\omega (= 2\pi/T)$ が一定になり、 N が変化しても離散化誤差 E_3 は変化しないため、 γ の値が十分小さい範囲では、計算点数 N が変化しても精度 R_2 は変化していない。一方、 N が大きくなるとともに打ち切り誤差 E_4 は小さくなるため、 γ の値が大きくなると、計算点数 N の増加とともに精度が向上している。なお、数値ラプラス変換の場合と同様に、精度が最高になるときの γT の値は一定ではなく、 N が増加するとともに大きくなっている。

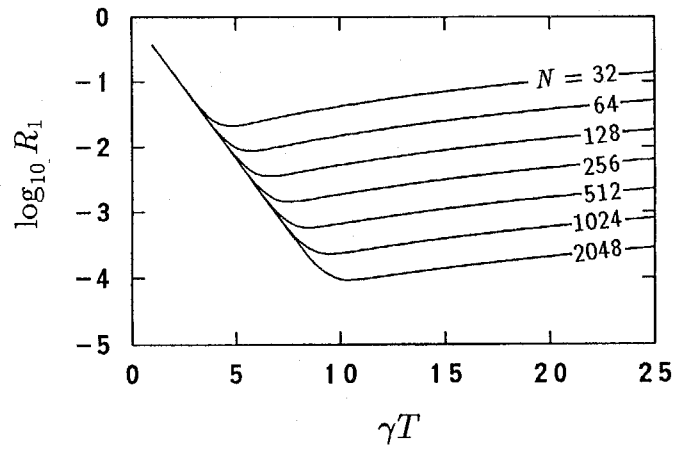


Figure 3.7: 計算点数 N の値による数値ラプラス変換の精度の変化

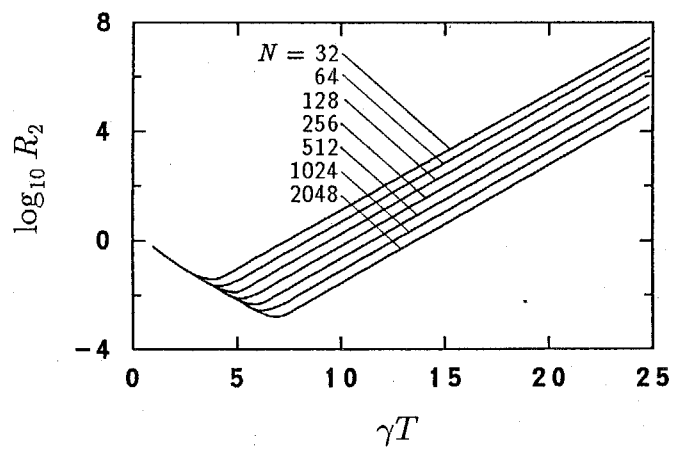


Figure 3.8: 計算点数 N の値による数値ラプラス逆変換の精度の変化

3.3.6 周波数成分の影響

変換の対象とする関数が精度に及ぼす影響を調べるために、計算点数 N を一定とし、正弦関数の周波数 ω_0 を変化させて数値計算を行った。

Fig.3.9, 3.10 は、計算点数が $N = 1024$ の場合について、それぞれ数値ラプラス変換・逆変換の精度 R_1, R_2 を、正弦関数の周波数 ω_0 をパラメータとしてプロットしたグラフである。これらの図によれば、数値ラプラス変換・逆変換の精度は、正弦関数の周波数 ω_0 が大きくなるとともに低下している。したがって、種々の周波数成分を含む任意の関数を数値変換・逆変換する際には、その関数の中の周波数の大きい成分ほど変換・逆変換の精度に及ぼす影響が大きくなると考えられる。また、精度が最も高くなる時の γT の値は、 ω_0 が大きくなるとともに小さくなっている。なお、この場合にも前節と同様に T および $\Delta\omega$ は一定であるから、正弦関数の周波数 ω_0 が変化しても、数値変換における打ち切り誤差 E_2 、および、数値逆変換における離散化誤差 E_3 は変化していない。

3.3.7 精度評価結果の図式化

以上のように、正の定数 γ 、計算点数 N 、および関数に含まれる周波数成分の三つの因子のそれぞれが、数値ラプラス変換・逆変換の精度に及ぼす影響は明らかになった。しかしながら、式 (3.12), (3.15), (3.21), (3.22) から明らかなように、任意の関数を数値変換・逆変換する際に、あらかじめ近似誤差を予測することは困難であるから、要求された精度が得られるように γ, N の値を決定することは困難である。一方、任意の関数を数値変換・逆変換する際に、試行錯誤的に計算条件を変化させて、要求された精度の数値変換・逆変換結果を求めることも合理的ではない。

一般に、初期値が零の任意の過渡的信号は、種々の周波数の正弦関数の重ね合わせにより表すことが可能である。したがって、種々の周波数をもつ正弦関数の数値ラプラス変換・逆変換の精度を求めて整理しておけば、任意の関数を数値変換・逆変換する際に計算点数 N と正の定数 γ を適切な値にするための目安になると考えられる。そこで、正弦関数について ω_0, N, γ を種々変化させた場合の数値変換・逆変換の精度 R_1, R_2 を求め、それらを図式的に整理した。

Fig.3.11 は、正弦関数の周波数 ω_0 をパラメータとし、 $R_1 = R_2 = 0.05$ となるときの正

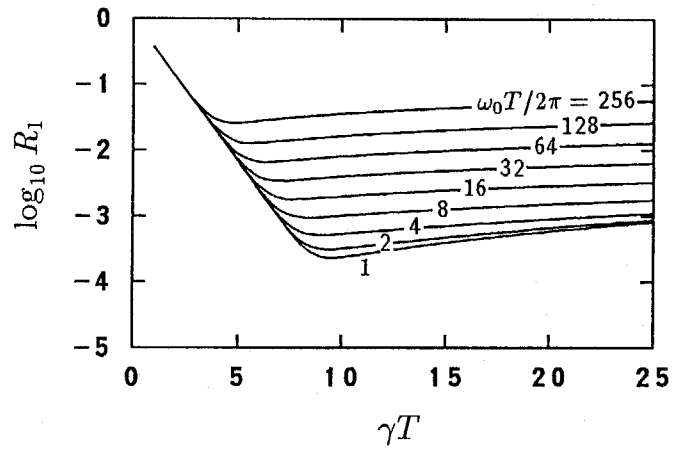


Figure 3.9: 周波数 ω_0 による正弦関数の数値ラプラス変換の精度の変化

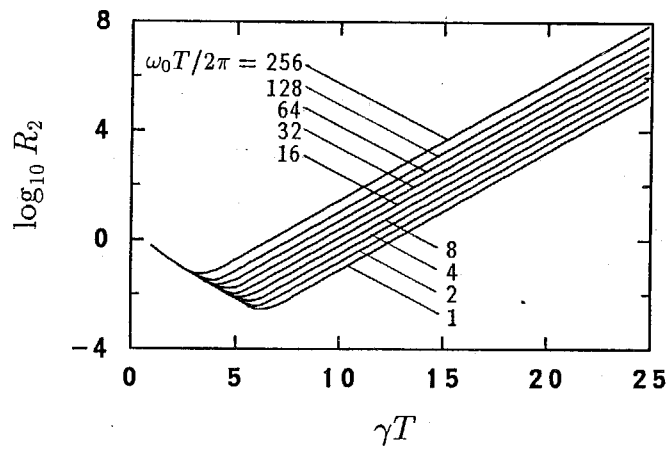


Figure 3.10: 周波数 ω_0 による正弦関数の数値ラプラス逆変換の精度の変化

の定数 γ および計算点数 N の値をプロットして折れ線で結んだものを示している。破線は数値変換の精度が $R_1 = 0.05$ となる条件、実線は数値逆変換の精度が $R_2 = 0.05$ となる条件を示しており、破線、実線の右上側がそれぞれ $R_1 < 0.05$, $R_2 < 0.05$ となる領域である。同図によれば、 ω_0 が一定の場合、数値変換と逆変換の両方で同じ精度を得るためには、変換の場合よりも逆変換の場合の方が計算点数 N を大きくする必要がある。また、変換の場合には γ がある値よりも大きければ N はほぼ一定の値のままでよいが、逆変換の場合には γ を大きくするにつれて N も大きくする必要がある。さらに、変換・逆変換のいずれにおいても、 γ が $3/T$ 以下では $R_1 = R_2 = 0.05$ の精度は得られない。結局、本研究の数値ラプラス変換・逆変換法によって $R_1 = R_2 = 0.05$ の精度を得るためには、 $\gamma = 4/T$ 程度とし、 ω_0 に応じて適切な N の値を採用すればよいことが明らかとなった。

Fig.3.12 は同様に、 $R_1 = R_2 = 0.01$ となる条件をプロットしたグラフである。この図によれば、 $R_1 = R_2 = 0.01$ の精度を得るためには $\gamma = 5/T$ 程度とし、 ω_0 に応じて適切な N の値を用いればよいことが示されている。

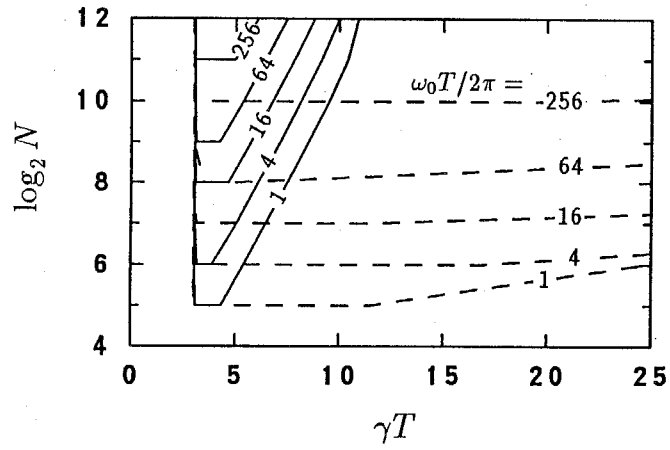


Figure 3.11: $R_1 = R_2 = 0.05$ となるときの数値ラプラス変換・逆変換の計算条件

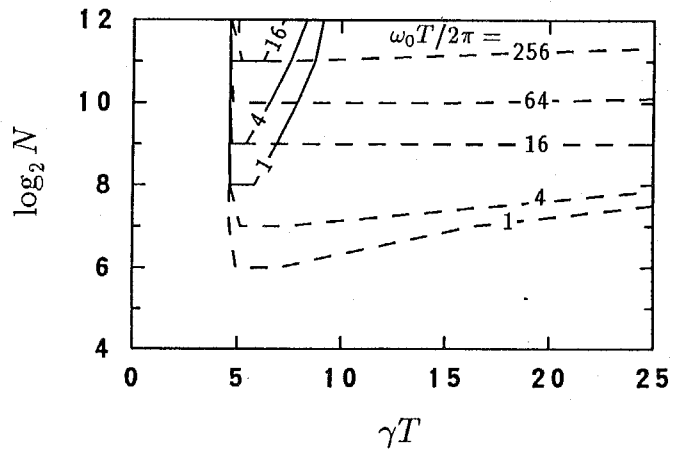


Figure 3.12: $R_1 = R_2 = 0.01$ となるときの数値ラプラス変換・逆変換の計算条件

3.4 結言

本章では、衝撃力の逆問題解析手法を実験解析に適用するために、FFT を利用した数値ラプラス変換・逆変換法を定式化し、その精度を検討した。得られた結論は以下の通りである。

1. 離散ラプラス変換・逆変換は、それぞれ、離散フーリエ変換・逆変換と同様に定式化でき、FFT を利用することにより効率よく数値計算できる。
2. 数値ラプラス変換の近似誤差は、ラプラス変換の積分を無限級数和で近似した誤差(離散化誤差)と、さらに無限級数和を有限級数和で近似した誤差(打ち切り誤差)の和で表される。時間領域のサンプリング間隔 Δt を十分小さくすれば離散化誤差は無視でき、計算点数 N 、および、定数 γ (ラプラス変換パラメータの実部)とともに十分大きくすれば打ち切り誤差は無視できる。
3. 数値ラプラス逆変換の近似誤差は、数値ラプラス変換の近似誤差と同様に離散化誤差と打ち切り誤差の和で表される。周波数領域のサンプリング間隔 $\Delta\omega$ を十分小さくすれば離散化誤差は無視でき、計算点数 N を十分大きくすれば打ち切り誤差は無視できるが、定数 γ を小さくすると離散化誤差が大きくなり、 γ を大きくすると打ち切り誤差が大きくなる。したがって、近似誤差が十分小さくなるように、定数 γ には適切な値を採択する必要がある。
4. 任意の関数の数値ラプラス変換・逆変換を計算する場合には、近似誤差を予測することは困難であるため、定数 γ の最適な値を求めることは困難である。そこで、適切な γ の値の目安が得られるように、種々の関数の数値ラプラス変換・逆変換の精度を評価しておき、その結果を整理して図式化しておくなどの工夫が必要である。
5. 正弦関数については、時間領域のウィンドウ幅が一定の場合、ある一定の精度で数値ラプラス変換・逆変換を計算するための γ の値には下限があり、数値逆変換がある一定の精度で計算できる条件のもとでは数値変換は同等以上の精度で計算できる。

第 4 章

衝撃力の逆問題解析の数値シミュレーション

4.1 緒言

衝撃力の逆問題解析の数値シミュレーションを行って、衝撃力が正確に評価できることをあらかじめ示しておけば、逆問題解析手法を実際問題に対して効果的に適用するための指針が得られる。例えば、任意の衝撃力波形を仮定した場合について物体の応答波形が解析的に求められる問題を考えれば、解析的に求めた応答波形から逆問題解析を行って得られる衝撃力波形と、初めに仮定した衝撃力波形とを比較することにより、逆問題解析手法の有効性は評価される。本章では、このような問題の具体例として一様断面を有する弾性棒の一次元縦衝撃を取り上げ、まず、数値シミュレーションの方法を説明し、続いて、数値ラプラス変換・逆変換に伴う誤差が衝撃力の推定結果に及ぼす影響、逆問題の不適切性のために測定データの雑音の結果に及ぼす影響、および、最適逆システムによる衝撃力の逆問題解析手法の有効性を論じる。

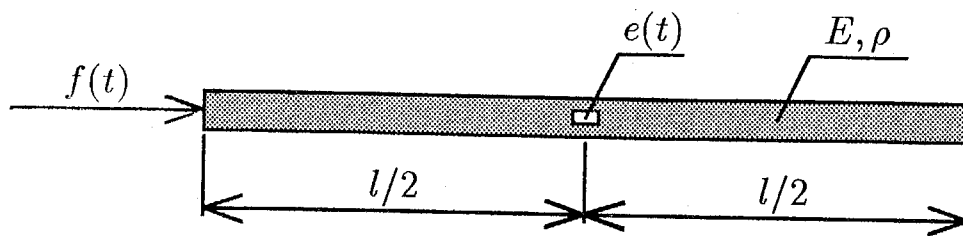


Figure 4.1: 一端に衝撃力を受ける一様断面弾性棒

4.2 解析のモデルと方法

Fig.4.1 に示すように、一様円形断面を有する弾性棒の一端に軸方向の衝撃力 $f(t)$ が作用するとする。このとき、棒の中央における長手方向ひずみの応答 $e(t)$ の測定データから衝撃力を推定する逆問題の数値シミュレーションを行った。棒の寸法および材料定数は、

- 直径 : $d = 10$ [mm]
- 長さ : $l = 1$ [m]
- 縦弾性係数: $E = 206$ [GPa]
- 密度 : $\rho = 7860$ [kg/m³]

とした。

本問題では、任意の衝撃力に対するひずみ応答は、一次元縦衝撃理論に基づいて解析的に容易に求めることができる。例えば、Fig.4.2(i) ~ (iii) の衝撃力波形に対するひずみ応答波形は、それぞれ Fig.4.3(i) ~ (iii) に示すようになる。そこで、Fig.4.2 の衝撃力と Fig.4.3 のひずみ応答のそれぞれの波形データを用いて、

1. Fig.4.2(i) と Fig.4.3(i), あるいは、Fig.4.2(ii) と Fig.4.3(ii) の波形データをそれぞれ較正実験における衝撃力とひずみ応答の測定データと仮定し、これらから伝達関数を同定する。
2. Fig.4.3(iii) の波形データをひずみ応答の測定データと仮定し、先に同定した伝達関数を用いて逆問題解析を行い、Fig.4.2(iii) の波形に対応する衝撃力を算定する。

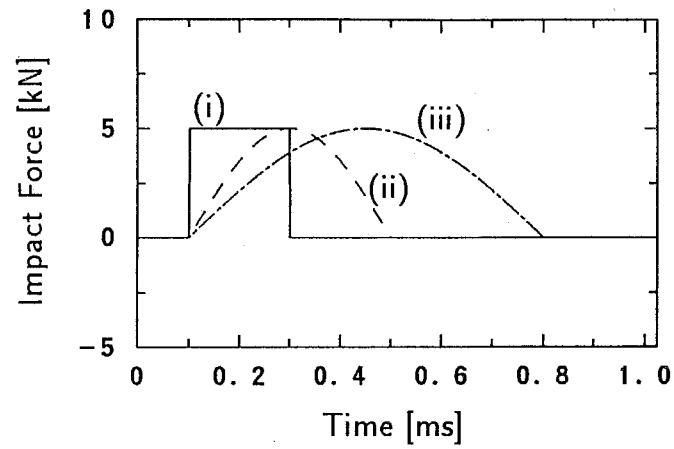


Figure 4.2: モデル衝撃力

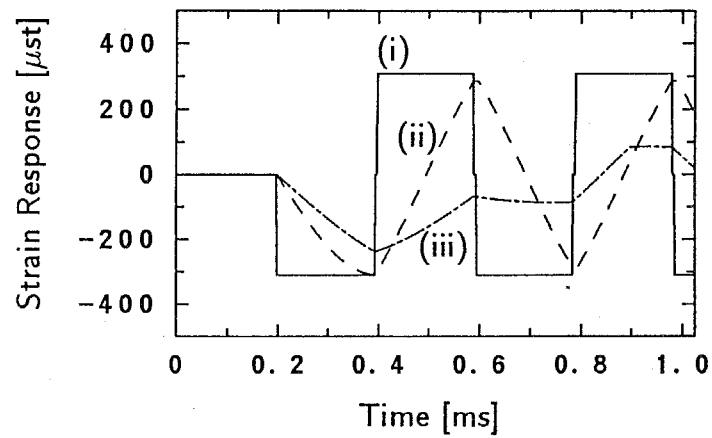


Figure 4.3: モデル衝撃力に対する弾性棒中央のひずみ応答

という手順で、衝撃力の逆問題解析の数値シミュレーションを行った。本数値シミュレーションにおいて、数値ラプラス変換・逆変換の計算条件のうち、ウインドウ幅 T 、サンプリング間隔 Δt 、計算点数 N については

- $T = 1024 \text{ } [\mu\text{s}]$

- $\Delta t = 1 \text{ } [\mu\text{s}]$

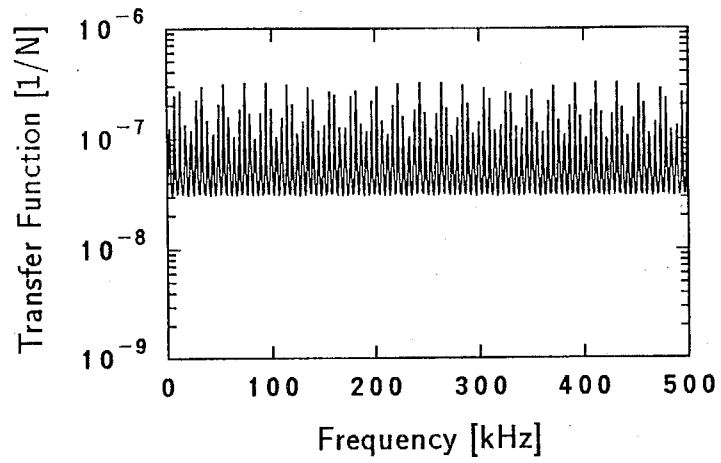
- $N = 1024$

とした。また、定数 γ の値については、第3章の結果に基づき、変換に伴う誤差が十分に小さいと考えられる値 $\gamma = 2\pi/T$ と、これより小さな値 $\gamma = 1/T$ 、および大きな値 $\gamma = 4\pi/T$ の三つを採用した。

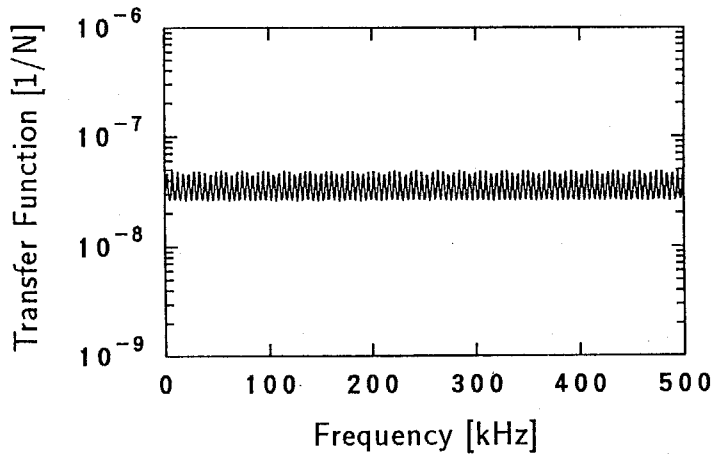
本問題における伝達関数は、一次元縦衝撃理論に基づいても容易に求めることができる。棒の断面積を $A(\equiv \pi d^2/4)$ 、一次元縦波の速度を $c(\equiv \sqrt{E/\rho})$ とすれば、伝達関数 $H(p)$ は、

$$H(p) = -\frac{1}{2EA} \frac{1}{\cosh\left(\frac{lp}{2c}\right)} \quad (4.1)$$

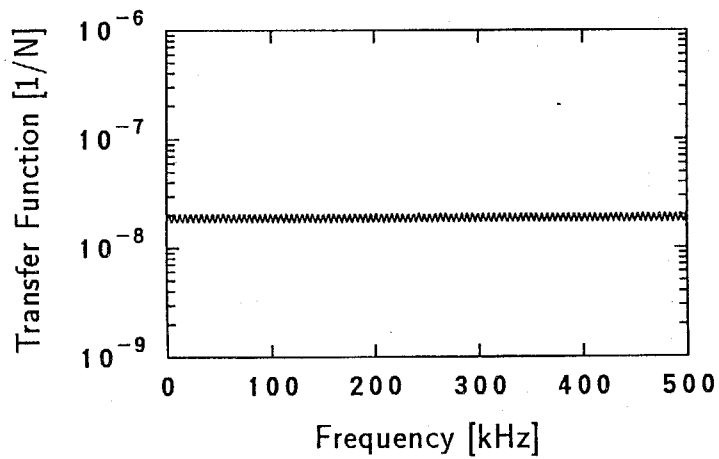
と表される。数値シミュレーションによる伝達関数の同定結果と比較するために、上式に各数値を代入して計算した伝達関数の理論値を Fig.4.4 に示す。伝達関数の実部は周波数 ω の偶関数、虚部は奇関数であるから、Fig.4.4 では周波数が正の範囲のみを図示しており、また、縦軸は伝達関数の絶対値を対数目盛で示している。なお、伝達関数については以下でも同様の表示をすることとする。



(a) $\gamma = 1/T$ の場合



(b) $\gamma = 2\pi/T$ の場合



(c) $\gamma = 4\pi/T$ の場合

Figure 4.4: 伝達関数の理論値

4.3 数値解析結果

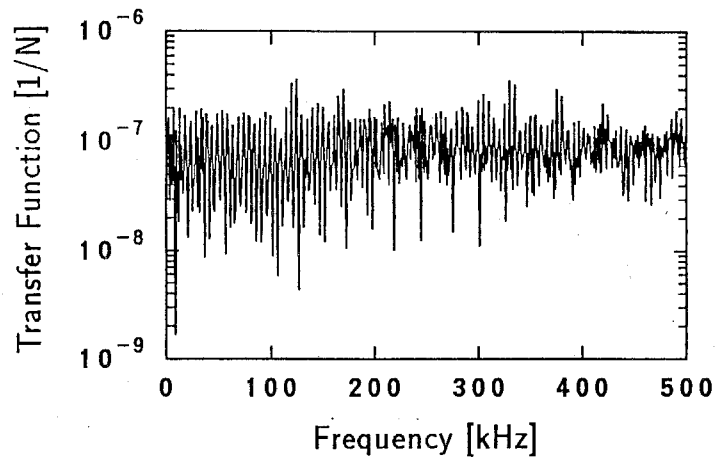
4.3.1 直接的逆問題解析

本研究における逆問題解析手法では数値ラプラス変換・逆変換法を用いているが、第3章で述べたように、この数値計算法では定数 γ の値を適切に選択する必要がある。そこで、数値ラプラス変換・逆変換に伴う誤差が逆問題解析の結果に及ぼす影響を調べるために、測定データに雑音が含まれない場合について、直接的な逆問題解析の数値シミュレーションを行った。

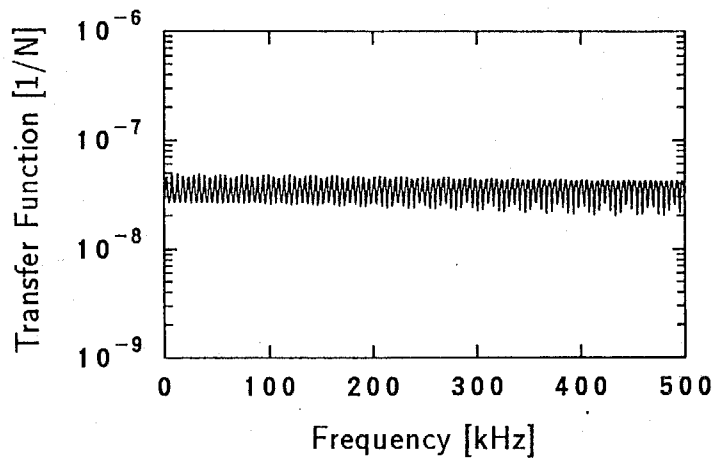
Fig.4.2(i) と、Fig.4.3(i) の波形データをそれぞれ数値ラプラス変換し、式(2.5)に基づいて伝達関数を同定した結果を Fig.4.5 に示す。Fig.4.5(a)～(c) は、それぞれ、数値ラプラス変換において定数 γ の値を $1/T$ 、 $2\pi/T$ 、 $4\pi/T$ とした場合の結果を示している。Fig.4.5 の同定結果を Fig.4.4 に示した理論値と比較すると、 $\gamma = 1/T$ の場合には数値ラプラス変換に伴う誤差が大きいため同定精度は低いが、 $\gamma = 2\pi/T$ 、 $4\pi/T$ の場合には同定結果は理論値にほぼ一致しており、計算した周波数範囲の全体にわたって滑らかに求められている。

次に、Fig.4.3(iii) の波形データを数値ラプラス変換し、先の伝達関数の同定結果を用いて式(2.6)に基づいて衝撃力を推定した結果を Fig.4.6 に示す。Fig.4.6 の推定結果を初めに仮定した Fig.4.2(iii) と比較すると、 $\gamma = 1/T$ の場合には推定結果は大きな振動を生じているのに対し、 $\gamma = 2\pi/T$ 、 $4\pi/T$ の場合には推定結果は理論値とよく一致している。なお、衝撃力の作用位置とひずみ応答の測定位置との間を応力波が伝播するためにはある一定の時間を要するので、有限長 T のひずみ応答の測定データからでは衝撃力波形の最後の一定時間の領域は推定できない。Fig.4.6 において影を付けた部分は、本問題において衝撃力が推定できない領域を示している(以下の図でも同様)。

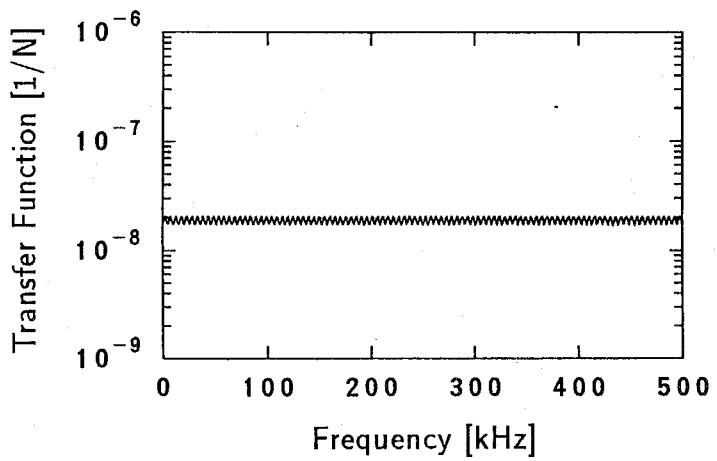
以上の結果から、測定データに雑音が含まれない場合には、数値ラプラス変換・逆変換の定数 γ を十分大きな値にとれば、数値ラプラス変換・逆変換に伴う誤差は無視することができ、直接的な逆問題解析によって衝撃力が精度良く推定できることが示された。また、このことは、 $\gamma = 0$ とした数値フーリエ変換を採用した場合には、衝撃力を精度よく推定することが困難であることを示唆している。



(a) $\gamma = 1/T$

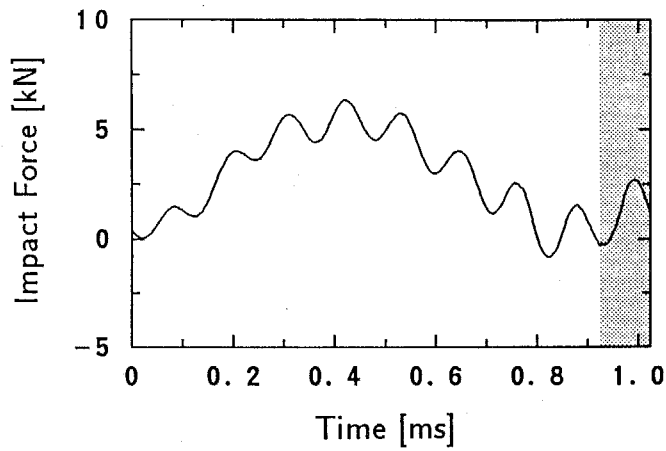


(b) $\gamma = 2\pi/T$

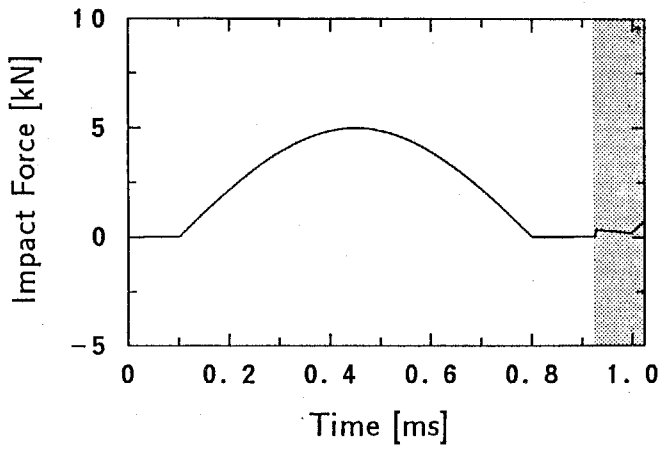


(c) $\gamma = 4\pi/T$

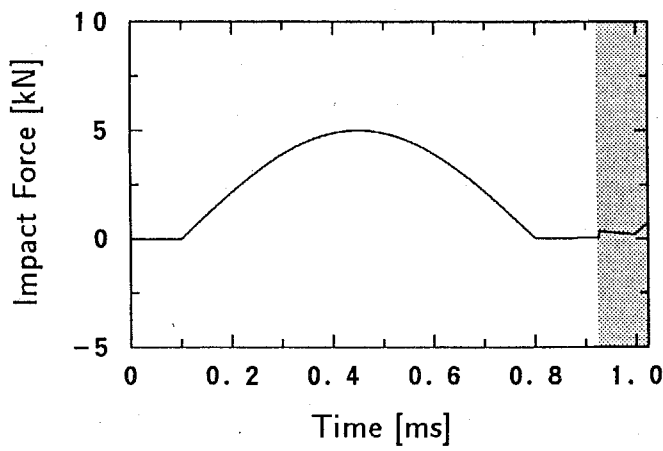
Figure 4.5: 伝達関数の同定結果 (雑音なし)



(a) $\gamma = 1/T$



(b) $\gamma = 2\pi/T$



(c) $\gamma = 4\pi/T$

Figure 4.6: 衝撃力の推定結果 (雑音なし)

4.3.2 測定データの雑音の影響

逆問題解析では、測定データに含まれる雑音などの誤差が拡大され、満足な結果が得られない場合が多い。そこで、このような雑音が結果に及ぼす影響を調べるために、Fig.4.2(i) および Fig.4.3(i), (iii) の波形データにそれぞれ雑音を重畳させ、前項と同様の数値シミュレーションを行った。実際の測定における雑音は一般に白色雑音的であるので、計算機のプログラムにより発生させた一様乱数によって雑音をシミュレートした。なお、雑音の最大値と最小値の差は、それぞれの波形データの最大値と最小値の差の1%とした。

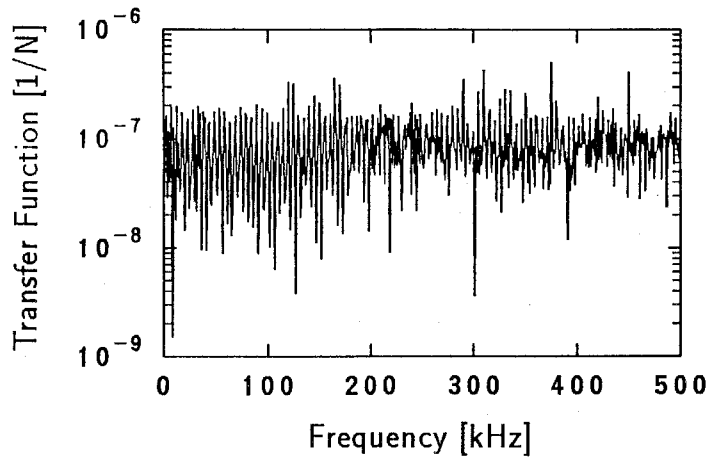
伝達関数の同定結果を Fig.4.7 に示す。雑音が含まれない場合の結果 (Fig.4.5) と比較すると、いずれの γ の値においても同定精度は低下しており、特に、高周波域において精度の低下が顕著になっている。

これらの伝達関数の同定結果を用いて、衝撃力を推定した結果を Fig.4.8 に示す。この結果を雑音が含まれない場合の結果 (Fig.4.6) と比較すると、以下のことがわかる。 $\gamma = 1/T$ の場合には、雑音を重畳したことによる影響はほとんど生じていないが、雑音が含まれない場合と同様に大きな振動を生じており、満足な結果は得られていない。一方、 γ の値が大きくなるにつれて、雑音はより顕著に拡大されて結果に影響を及ぼすようになり、特に、 $\gamma = 4\pi/T$ の場合には衝撃力波形は雑音のためにほとんど判別できなくなっている。

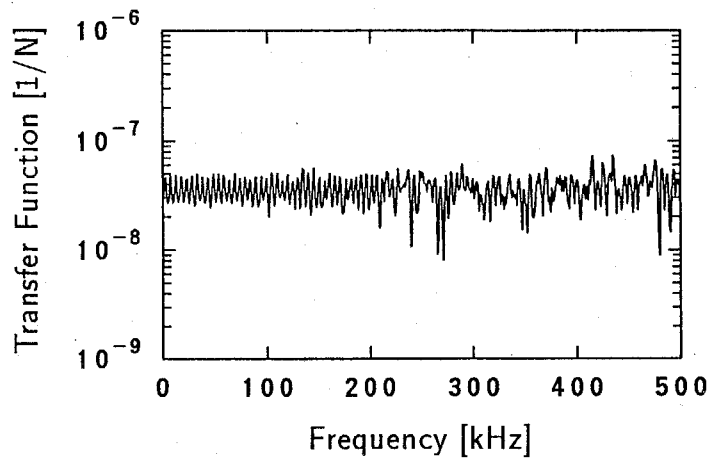
以上の結果より、式 (2.5), (2.6) に基づく直接的な逆問題解析では、測定データに含まれるわずかな雑音が拡大されて結果に大きな影響を及ぼすために、衝撃力を十分な精度で推定することは困難であることが示された。この問題は、2.2.2 項において指摘した逆問題の不適切性に起因する問題であり、逆問題解析において適切化処理が必要であることを示唆している。

4.3.3 最適逆システムによる逆問題解析

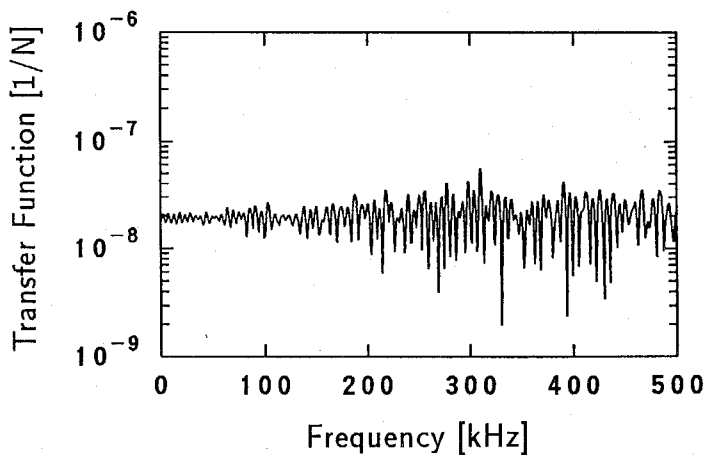
第2章では、逆問題の不適切性を改善するために、ウィーナフィルタ理論を応用した最適逆システムによる逆問題解析手法を提案している。しかし、この手法を実際問題に適用した場合の有効性については、これまでのところ確証が得られていない。そこで、数値シミュレーションによって、最適逆システムによる逆問題解析手法の有効性を検討することを試みた。



(a) $\gamma = 1/T$

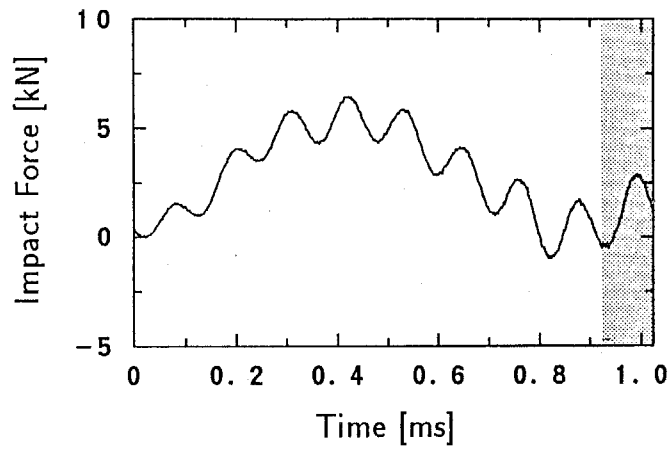


(b) $\gamma = 2\pi/T$

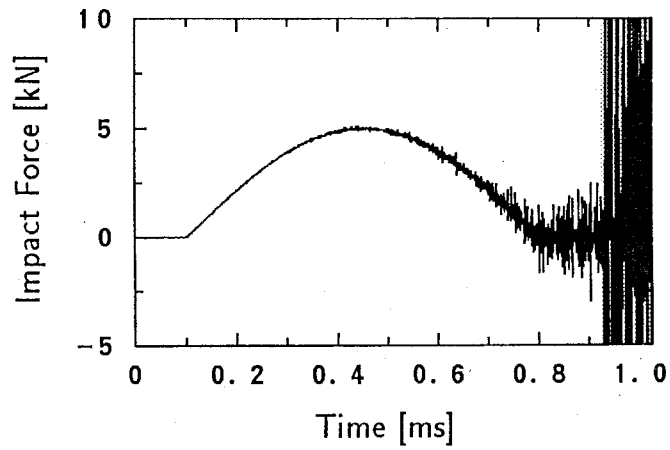


(c) $\gamma = 4\pi/T$

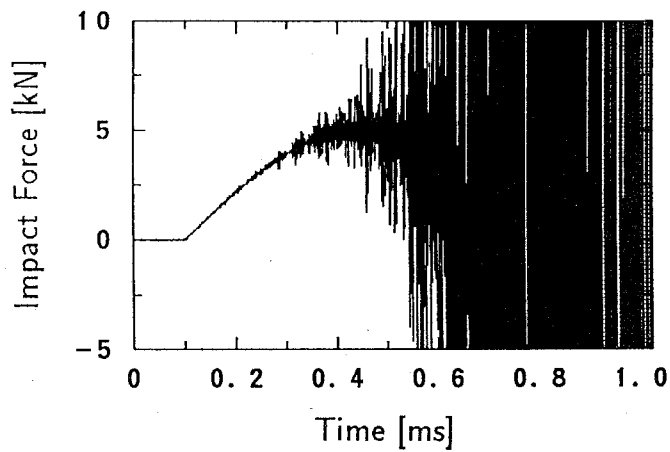
Figure 4.7: 伝達関数の同定結果 (雑音 1%, 直接的方法)



(a) $\gamma = 1/T$



(b) $\gamma = 2\pi/T$



(c) $\gamma = 4\pi/T$

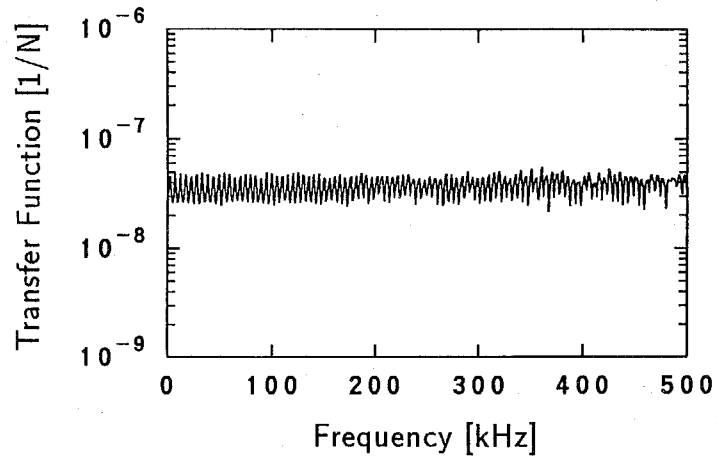
Figure 4.8: 衝撃力の推定結果 (雑音 1%, 直接的方法)

Fig.4.2(i), Fig.4.3(i) の波形データに, それぞれ異なる雑音を重畳したデータを k 組作成し (k 回の較正実験を行ったことに相当する), 式 (2.22) に基づいて最適逆システムの伝達関数を同定した. 雑音は, 一様乱数によって前項と同様にしてシミュレートした. $\gamma = 2\pi/T$ の場合に, $k = 10$, および, $k = 100$ としたときの結果を Fig.4.9 に示す. なお, Fig.4.9 では, Fig.4.4(b), 4.5(b), 4.7(b) と比較するために, 最適逆システムの伝達関数の絶対値の逆数をプロットしている. この結果によれば, 伝達関数の同定結果は, k の値が大きくなるにつれて, $k = 1$ の場合 (Fig.4.7(b)) に比べて次第に滑らかになり, 雑音が含まれない場合 (Fig.4.5(b)) の同定結果, および, 理論値 (Fig.4.4) に近づいている.

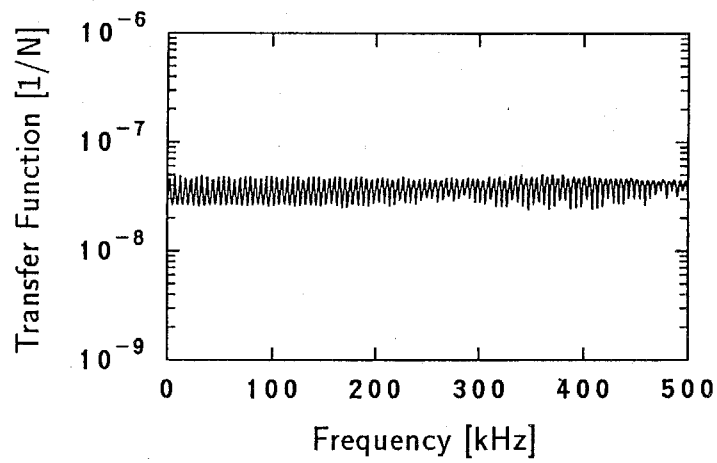
これらの伝達関数の同定結果を用いて, Fig.4.3(iii) の波形データに雑音を重畳したデータから, 式 (2.17) に基づいて衝撃力を推定した結果を Fig.4.10 に示す. この推定結果を直接的な逆問題解析による推定結果 (Fig.4.8(b)) と比較すると, k の値が大きくなるにつれて雑音の拡大は抑制され, 推定結果は理論値 (Fig.4.2(iii)) に近づいている. したがって, 以上の条件のもとでは, 最適逆システムによる逆問題解析手法が有効であることが確認された. なお, Fig.4.10(a), (b) の両結果の間には大きな差異は生じていないため, 雑音の大きさが本数値シミュレーションで導入した程度の範囲内であれば, $k = 10$ 程度でほぼ満足できる結果が得られると考えられる.

次に, 最適逆システムによる逆問題解析手法を適用した際に, 数値ラプラス変換・逆変換の定数 γ が, 結果に及ぼす影響を調べた. Fig.4.11 は, $\gamma = 4\pi/T$, $k = 100$ として, 同様の数値シミュレーションを行った結果である. この結果を Fig.4.8(c) の直接的な逆問題解析の結果と比較すると, 雑音の拡大はわずかに抑制されているが十分ではない. したがって, 最適逆システムによる逆問題解析を行う際にも, 数値ラプラス変換・逆変換の定数 γ には適切な値 ($\gamma = 2\pi/T$ 程度) を用いる必要があることが明らかにされた.

最後に, 較正実験の波形が異なる場合についても同様の数値シミュレーションを行った. すなわち, Fig.4.2(ii), 4.3(ii) の波形データに上述の場合と同様な雑音を重畳し, 直接的な逆問題解析および最適逆システム ($k = 10$) による逆問題解析の数値シミュレーションを行い, 衝撃力を推定した. なお, ここでは $\gamma = 2\pi/T$ と置いた. これらの結果を Fig.4.12 に示す. Fig.4.12(a) は直接的な逆問題解析による衝撃力の推定結果であり, Fig.4.8(b) と

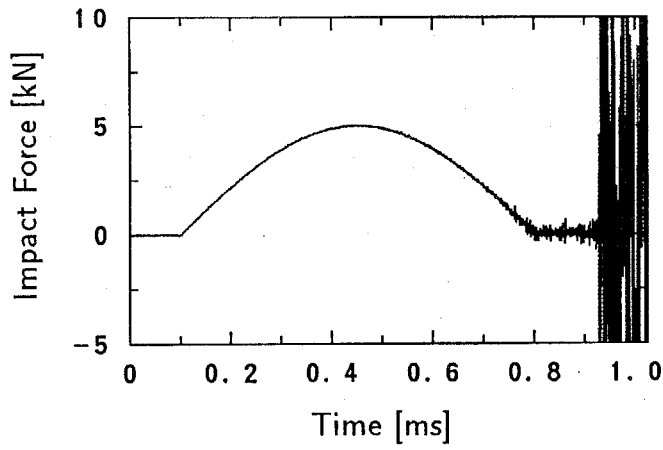


(a) $k = 10$

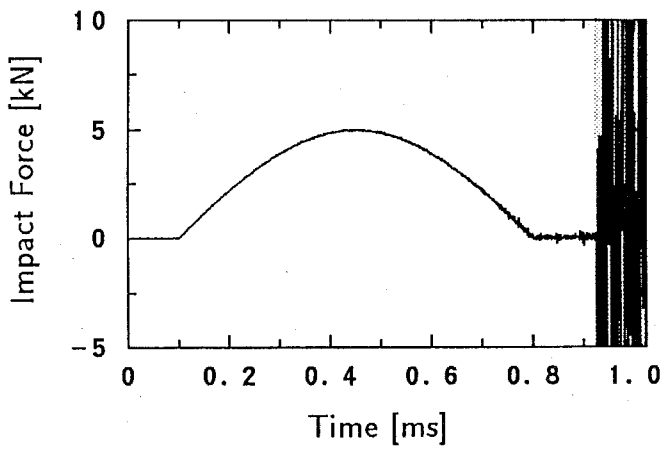


(b) $k = 100$

Figure 4.9: 伝達関数の同定結果 (雑音 1%, 最適逆システム, $\gamma = 2\pi/T$)



(a) $k = 10$



(b) $k = 100$

Figure 4.10: 衝撃力の推定結果 (雑音 1%, 最適逆システム, $\gamma = 2\pi/T$)

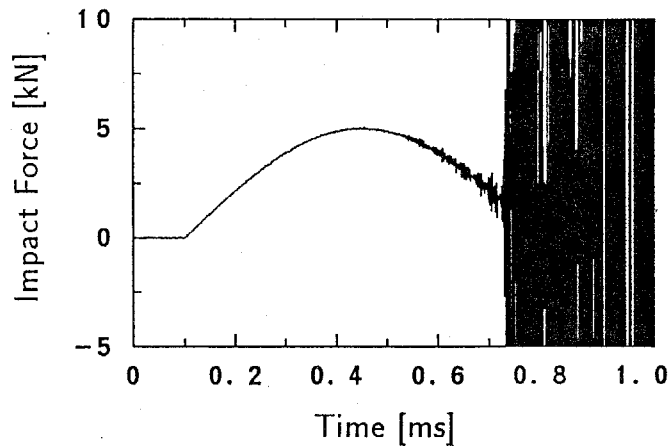
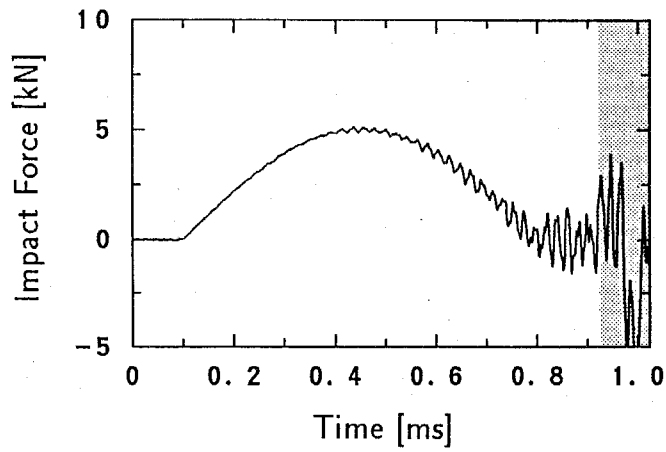


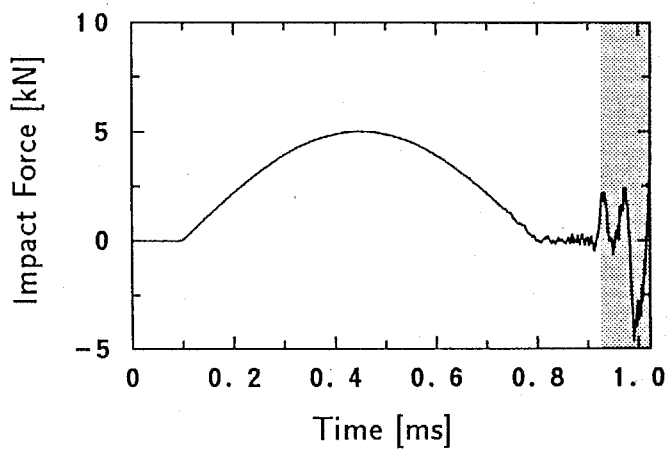
Figure 4.11: 衝撃力の推定結果 (雑音 1%, 最適逆システム, $\gamma = 4\pi/T$, $k = 100$)

比較すると拡大されている成分の周波数が異なっているが、十分な結果は得られていない。一方、Fig.4.12(b) の最適逆システムによる推定結果では、雑音の拡大が抑制されており、較正実験の波形が異なる場合にも最適逆システムによる逆問題解析手法が有効であることが示されている。

以上の結果から、ウィーナフィルタ理論を応用した最適逆システムによる逆問題解析手法は、逆問題の適切化処理の手法として有効であることが明らかにされた。



(a) 直接的方法



(b) 最適逆システム ($k = 10$)

Figure 4.12: 衝撃力の推定結果 (校正実験の波形が異なる場合; 雑音 1%, $\gamma = 2\pi/T$)

4.4 結言

本章では、弾性棒の一次元縦衝撃問題に関する数値シミュレーションによって、衝撃力の逆問題解析手法の有効性を論じた。その結果、雑音を含む測定データをもとにして逆問題解析により衝撃力を推定する場合、直接的な手法を適用すると雑音が拡大され、満足な推定結果は得られないことを示した。すなわち、衝撃力の逆問題は不適切性を有しており、逆問題解析において適切化処理を適用する必要があることを明らかにした。さらに、この不適切性を改善するためには、ウィーナフィルタ理論を応用した最適逆システムによる逆問題解析手法が有効であることを示した。なお、この手法を適用する際には、数値ラプラス変換・逆変換に伴う誤差の影響が小さくなるように、ラプラス変換パラメータの実部である定数 γ として適切な値 ($\gamma = 2\pi/T$ 程度) を採択する必要がある。

第 5 章

構造要素に作用する衝撃力の測定

5.1 緒言

機械や構造物の衝撃問題を論じるためには、棒、はり、板などの基本的な構造要素の衝撃下における挙動に関する知識が必要である。特に、衝撃によってこれらの構造要素に生じる応力や変形の解析を行うためには、作用する衝撃力の時間的変動を正確に評価することが重要である。ところが、従来は、限られた場合にしか衝撃力を測定する方法がなかったために、基本的な構造要素の衝撃実験を行っても、衝撃力を十分正確に評価できない場合があった。逆問題解析に基づく衝撃力の推定法は、衝撃物体の形状に関係なく適用することができるので、各種の構造要素に作用する衝撃力を測定するための方法として有望である。

そこで、本章では、はりおよび板の衝撃実験を通じて、逆問題解析に基づく衝撃力の推定法の有用性を検証する。具体的には、

1. 両端支持はり、および、周辺支持円板の衝撃実験を行い、直接的な逆問題解析手法を適用して衝撃力を推定し、逆問題解析に基づく衝撃力の測定法の基本的な妥当性、および、逆問題の不適切性に起因する問題点などを論じる。
2. 片持はりに作用する衝撃力を測定し、最適逆システムによる衝撃力の逆問題解析手法を適用した場合の衝撃力の推定精度の変化を調べ、この手法の有効性を論じる。
3. 異方性を有する板に作用する衝撃力を測定し、特異値分解を利用した逆問題解析手法を適用した場合の衝撃力の推定精度の変化を調べ、この手法の有効性を論じる。

4. 両端支持はりを任意の方向から衝撃する実験を行い，衝撃力の大きさと方向を推定して任意方向の衝撃力の逆問題解析手法の妥当性を検証するとともに，特異値分解を利用した逆問題解析手法における適切化処理の有効性を論じる.

という手順により，各種の構造要素に作用する衝撃力の測定法として，逆問題解析手法が有効であることを検証する.

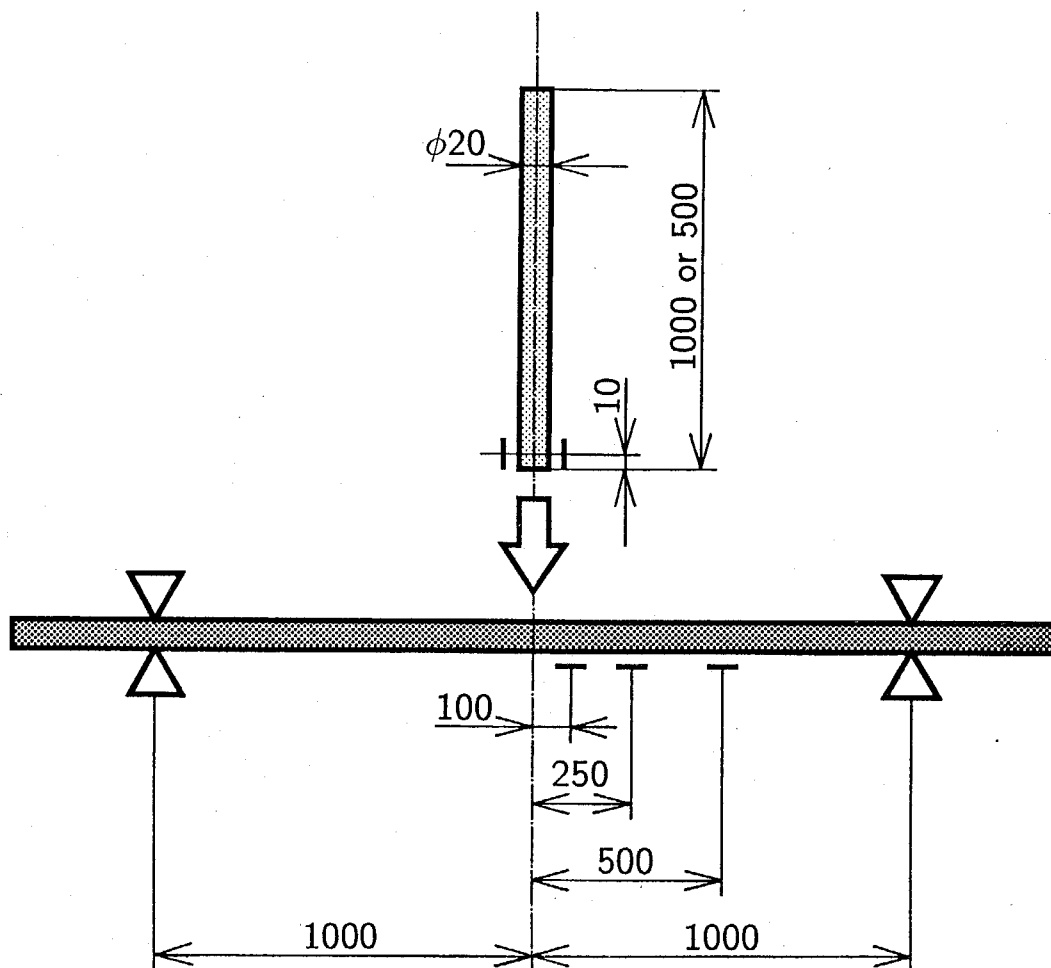


Figure 5.1: 両端支持はりのスパン中央への衝撃

5.2 両端支持はりに作用する衝撃力の測定

5.2.1 実験方法

Fig.5.1 に示すように、両端支持はりのスパン中央に衝撃体を衝突させる実験を行い、はりに生じるひずみ応答を測定し、この測定データから逆問題解析を行って衝撃力を推定した。

実験に使用したはりは、幅 25 mm、高さ 16 mm、長さ 2760 mm の長方形断面の軟鋼棒を、スパンが 2000 mm となるように両端支持したものである。支持点では、はりを上下から直径 12 mm のボルトではさみつけて回転自由となるように支持し、衝撃の反動で

Table 5.1: はりおよび衝撃体の材料の機械的性質 [19]

材料	縦弾性係数 [GPa]	密度 [kg/m ³]	一次元縦波伝播速度 [m/s]
軟鋼	206	7860	5120
黄銅	98.1	8650	3370

はりが支持点から跳ね上がらないようにした。衝撃力は、衝撃体を円筒ガイドの中を通して自由落下させ、はりに衝突させて与えた。衝撃体には次に挙げる3種類の棒と2種類の球を使用した。

- 衝撃体 A: $\phi 20 \times 1000$ mm, 黄銅棒
- 衝撃体 B: $\phi 20 \times 500$ mm, 軟鋼棒
- 衝撃体 C: $\phi 20 \times 1000$ mm, 軟鋼棒
- 衝撃体 D: $\phi 30$ mm, 0.11 kg, 軟鋼球
- 衝撃体 E: $\phi 70$ mm, 1.45 kg, 軟鋼球

なお、棒(衝撃体 A, B, C)の衝撃端には、はりとの衝突の際の片当たりを防ぐために、R20 mm 程度の丸みをつけた。はりおよび衝撃体の材料の機械的性質を Table 5.1 に示す。

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定手順は次の通りである。

1. はりを細長い棒で衝撃し、このとき棒に生じる衝撃力およびはりのひずみ応答を測定する(較正実験)。
2. 1で得た測定データをもとに、伝達関数を同定する。
3. 任意の衝撃体ではりを衝撃し、このときのはりのひずみ応答を測定する。
4. 2で得た伝達関数と、3で得たひずみ応答から衝撃力を推定する。

較正実験における衝撃力は、棒の衝撃端から 10 mm の位置の側面に、棒の長手方向にひずみゲージを接着して測定した。なお、棒の曲げ変形による測定誤差を防ぐために、棒

の軸に関して対称な位置にひずみゲージを1枚ずつ接着し、これらを直列に接続した。このようにひずみゲージの接着位置が棒の衝撃端に近い場合には、応力が棒の断面に様に分布しないために、ゲージによって測定されるひずみに縦弾性係数と断面積を乗じても衝撃力の大きさが正確に測定されないおそれがある。そこで、本実験では、棒の衝撃端に作用する荷重とブリッジボックスの出力電圧との間で較正を行っておき、ブリッジボックスの出力電圧を衝撃力に直接換算した。

一方、はりのひずみ応答は、衝撃点から距離 $d = 100, 250, 500$ mm の3箇所で、はりの下面の長手方向にひずみゲージを接着して測定した。

測定および解析処理に使用した装置の構成は、Fig.5.2 に示す通りである。ひずみゲージ、ブリッジボックス、波形記憶装置について以下に説明する。

ひずみゲージ

本実験では、ひずみゲージによる測定データを逆問題解析に使用するので、測定データにはできるだけ雑音が含まれないように配慮する必要がある。そこで、通常の箔ゲージに比べて約60倍感度の高い半導体ひずみゲージ(共和電業、KSP-2-E4)を採用した。主な仕様は次の通りである。

- 抵抗値 : 約 120Ω
- ゲージ率: 約 120
- ゲージ長: 2 mm
- ゲージ幅: 0.25 mm

ブリッジボックス

ひずみゲージによる衝撃ひずみの測定では、高速で、かつ、微小な信号を取り扱うために、周波数特性が優れ、かつ、雑音の小さいブリッジ回路および増幅器を使用することが重要である。本研究では、付録Aに示すような直流ブリッジ回路と差動増幅回路からなるブリッジボックスを製作し使用した。主な仕様は次の通りである。

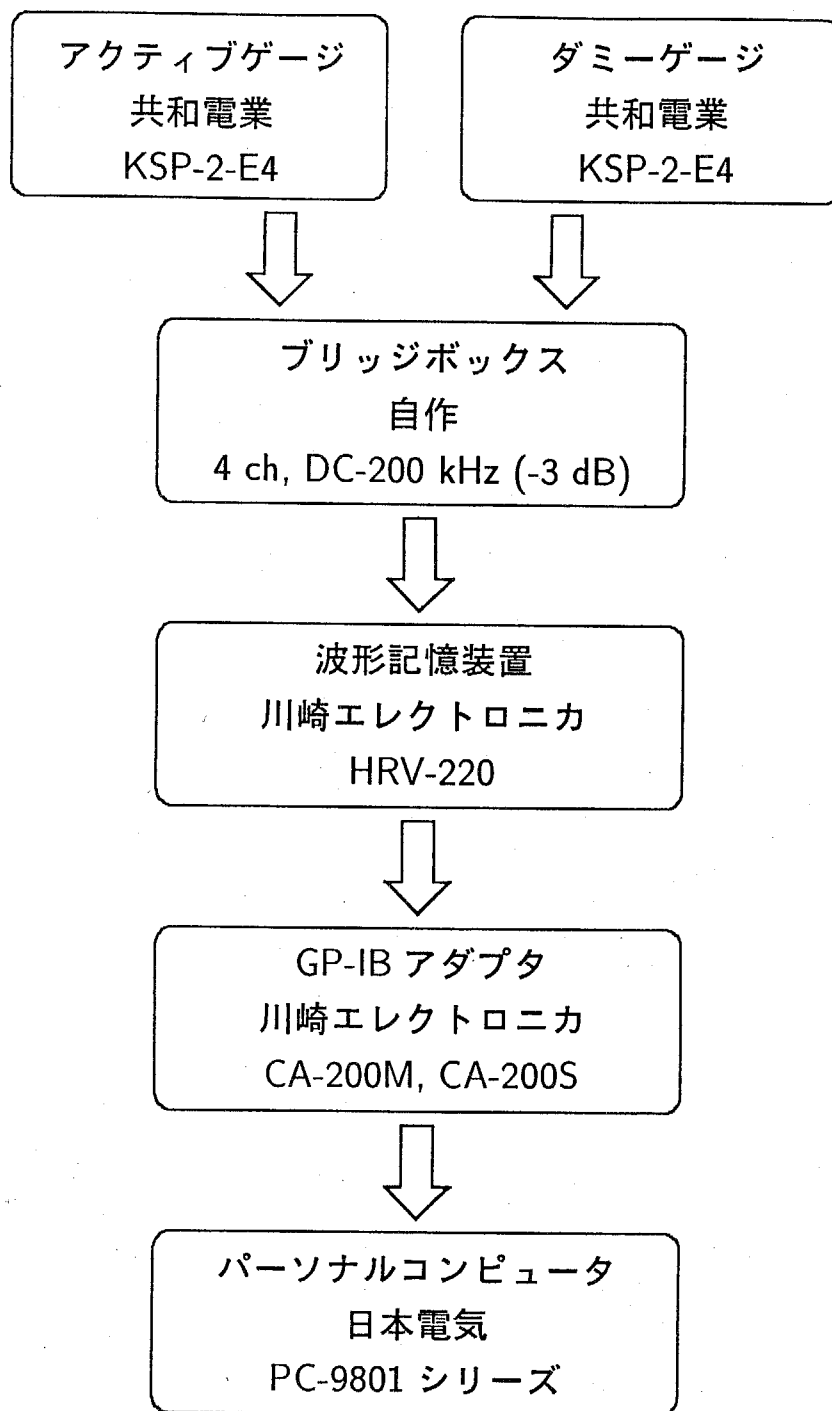


Figure 5.2: 測定装置および解析処理装置の構成

- チャンネル数: 4
- ゲイン : 1, 10, 100, 1000
- 周波数特性 : DC ~ 200 kHz (-3 dB, ゲイン 100 の場合)

波形記憶装置

本実験では、ひずみゲージにより測定したデータをコンピュータで解析処理する。そこで、ブリッジボックスの出力電圧を A/D 変換して記録し、パーソナルコンピュータに転送するために、波形記憶装置 (川崎エレクトロニカ, HRV-220) および GP-IB アダプタ (川崎エレクトロニカ, CA200M, CA200S) を使用した。波形記憶装置の主な仕様は次の通りである。

- チャンネル数 : 2
- 感度 : 0.5, 1, 2, 5, 10, 20 V
- 周波数特性 : DC ~ 100 kHz (-3 dB)
- 分解能 : 12 bit
- 記憶容量 : 4096 words/ch
- 最高書き込み速度: 2 μ s/word

本実験における測定および解析処理には次の値を用いた。

- $\Delta t = 2$ [μ s]
- $N = 4096$ ($T = 8.192$ [ms])
- $\gamma = 0, 5/T, 10/T$

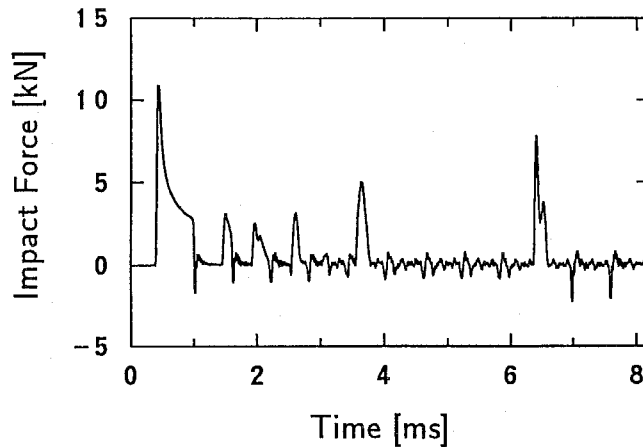
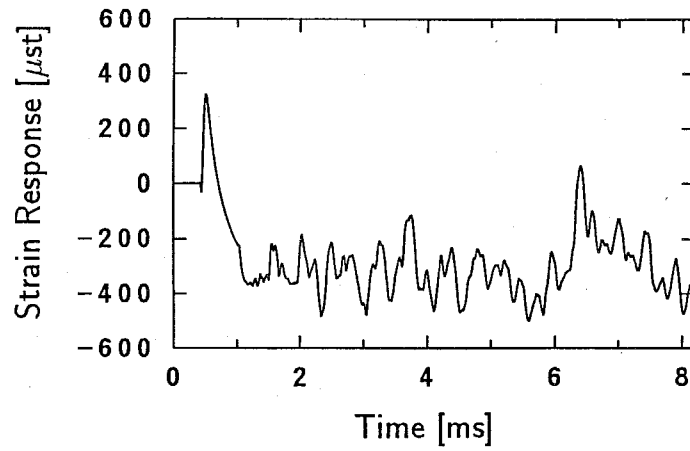


Figure 5.3: 衝撃体 A を使用した較正実験における両端支持はりの衝撃力の測定結果

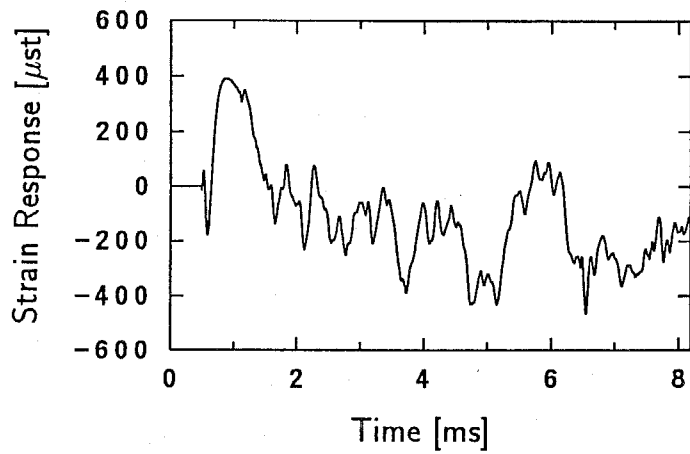
5.2.2 較正実験

まず、衝撃体 A を高さ 400 mm から落下衝突させて較正実験を行った。このときの衝突速度は 2.80 m/s である。棒のひずみゲージによる衝撃力の測定結果を Fig.5.3 に、はりの 3 箇所ひずみゲージによるひずみ応答の測定結果をそれぞれ Fig.5.4(a) ~ (c) に示す。

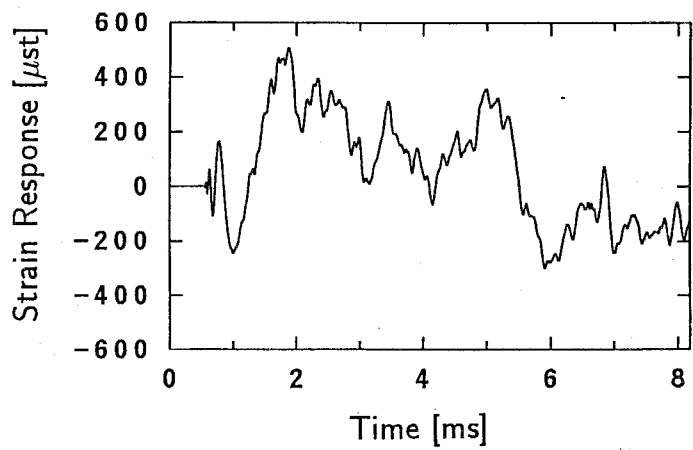
Fig.5.3 によれば、測定した時間範囲内において衝撃力波形には 6 回のピークがあり、そのうちの、最初のピークの最大値が最も大きい。このピークの持続時間は約 $600 \mu\text{s}$ であり、衝撃体 A の 1 次の固有振動周期、すなわち、衝撃体 A の内部を一次元の縦波が 1 往復する時間に等しい。なお、Fig.5.3 の衝撃力の測定結果には、周期 $600 \mu\text{s}$ のパルス状の振動が現れている。この振動は、衝撃端から 10 mm だけ離れた位置にひずみゲージを接着したために、衝撃体 A の残留振動成分が測定されたものであり、真の衝撃力波形にはこのような振動は存在しない。しかし、この振動成分の大きさは衝撃力に比べて小さく、パルスの幅も衝撃力の持続時間に比べて十分小さい。また、衝突の瞬間から $600 \mu\text{s}$ までの間は、衝撃体 A の自由端からの反射応力波がひずみゲージの位置に到達しないので、真の衝撃力波形が十分な精度で測定されると考えてよい。以上の理由により、本実験では、真の衝撃力波形は Fig.5.3 の測定結果によって十分に近似できると考え、この測定結果を較正実験における衝撃力の測定データとして採用した。



(a) $d = 100$ mm



(b) $d = 250$ mm



(c) $d = 500$ mm

Figure 5.4: 衝撃体 A を使用した較正実験における両端支持はりのひずみ応答の測定結果

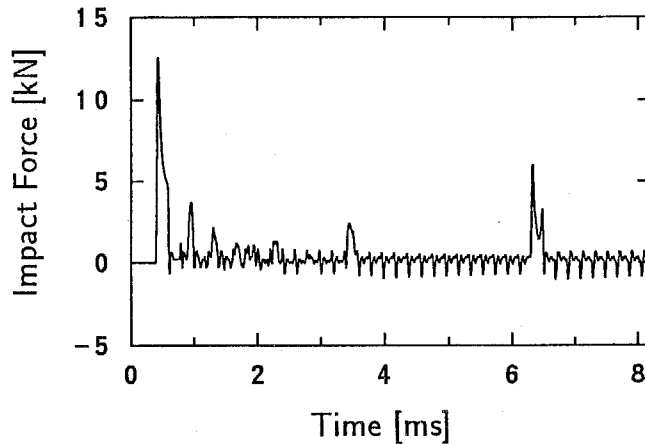


Figure 5.5: 衝撃体 B を使用した較正実験における両端支持はりの衝撃力の測定結果

一方, Fig.5.4 によれば, ひずみ応答波形の立ち上がる時刻は, 衝撃点からの距離 d が大きくなるにつれて次第に遅くなる. ひずみ応答波形は衝撃点からの距離 d によって大きく異なる. これは, はりを伝播するたわみ波の分散性により, 波動の群速度が周波数に依存するためである.

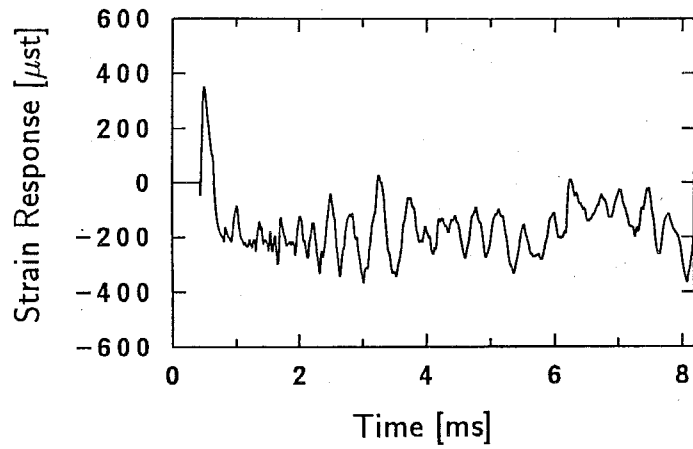
次に, 衝撃体 B を高さ 400 mm から落下衝突させることにより同様に較正実験を行った. 衝撃力とひずみ応答の測定結果をそれぞれ Fig.5.5, 5.6 に示す. Fig.5.5, 5.6 の測定結果はそれぞれ Fig.5.3, 5.4 の結果と類似の傾向にある. ただし, 衝撃体 B の 1 次の固有振動周期は約 $200 \mu\text{s}$ であるので, 衝撃力波形の最初のピークの持続時間が約 $200 \mu\text{s}$ となっており, また, 周期 $200 \mu\text{s}$ の残留振動成分がパルス状の振動として衝撃力波形に混入している. なお, この周期は衝撃体 A を使用した場合の $1/3$ である.

本実験では, Fig.5.3 と 5.4, あるいは, Fig.5.5 と 5.6 に示した測定データをそれぞれ数値ラプラス変換し, 式 (2.5) に基づいて直接的に伝達関数を同定した.

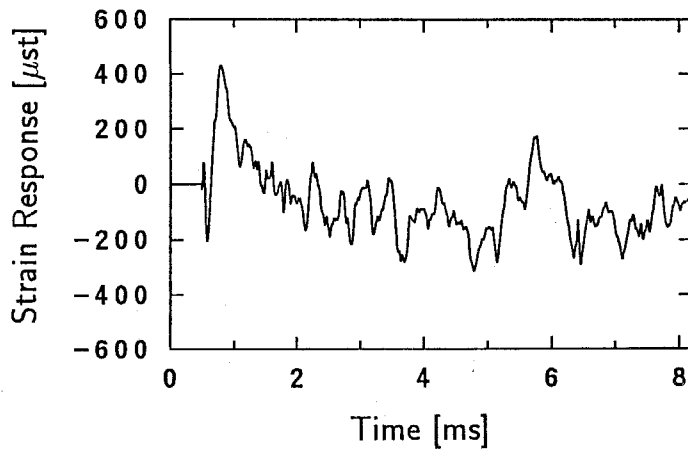
5.2.3 棒による衝撃力の測定

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第一の適用例として, 棒 (衝撃体 C) を落下衝突させる実験を行い, このときの衝撃力をはりのひずみ応答から推定した.

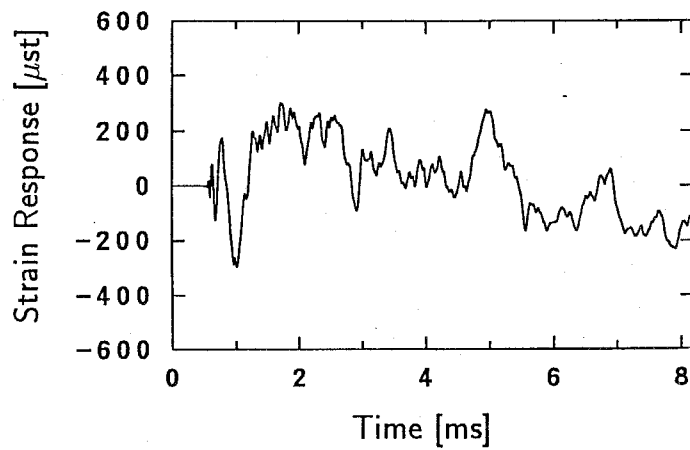
衝撃体 C を高さ 400 mm から落下衝突させて, はりのひずみ応答を測定した. また,



(a) $d = 100$ mm



(b) $d = 250$ mm



(c) $d = 500$ mm

Figure 5.6: 衝撃体 B を使用した較正実験における両端支持はりのひずみ応答の測定結果

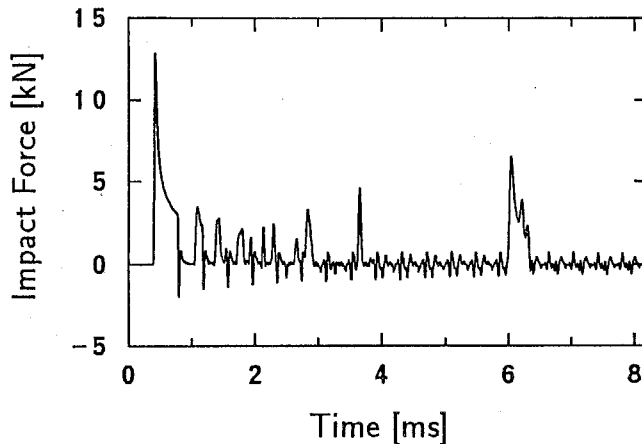
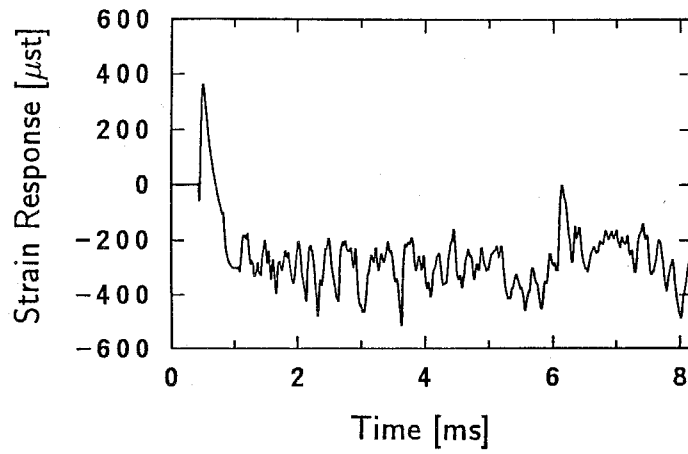


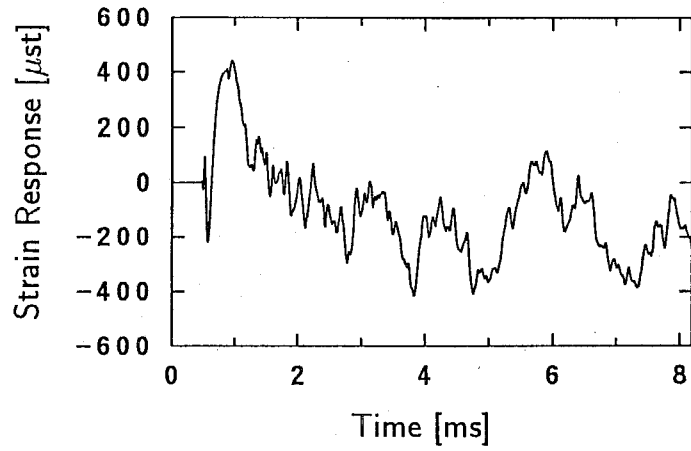
Figure 5.7: 衝撃体 C による両端支持はりの衝撃力の測定結果 (棒のひずみゲージによる直接測定)

逆問題解析手法に基づく衝撃力の推定結果と比較するために、棒に接着したひずみゲージを用いてこのときの衝撃力をはりのひずみ応答と同時に測定した。衝撃力の測定結果を Fig.5.7 に、はりのひずみ応答の測定結果を Fig.5.8(a) ~ (c) に示す。Fig.5.7, 5.8 の測定結果は、先に示した較正実験の結果と類似の傾向にある。以下では、Fig.5.8 のひずみ応答の測定データから式 (2.6) に基づく直接的な逆問題解析を行って衝撃力を推定した結果と、Fig.5.7 の直接測定の結果とを比較することにより、逆問題解析による衝撃力の推定について論じる。

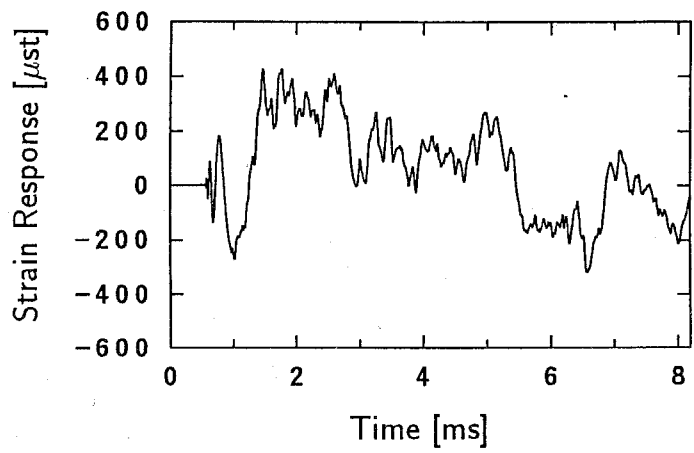
まず、較正実験に衝撃体 A を使用した場合の伝達関数の同定結果を用いて、 $d = 250$ mm の位置のひずみ応答から衝撃力を推定した。推定結果を Fig.5.9 に示す。Fig.5.9(a) ~ (c) は、それぞれ数値ラプラス変換の定数を $\gamma = 0, 5/T, 10/T$ とした場合の結果である。Fig.5.9 の各推定結果を Fig.5.7 の直接測定の結果と比較すると、 $\gamma = 0$ の場合には、推定結果全体に振動が生じ、直接測定の結果と一致する結果は得られないことがわかる。また、 $\gamma = 5/T, 10/T$ の場合には、時間とともに指数関数的に拡大する雑音が生じ、推定結果に重畳しているため、データの後半部では正確な推定結果は得られないことがわかる。これらの結果は、Fig.4.8 に示した直接的な逆問題解析の数値シミュレーションの結果と同様の傾向にある。したがって、数値ラプラス変換の定数 γ には適切な値を採用する必要があること、ならびに、衝撃力の逆問題解析においては適切化処理が必要であることが確



(a) $d = 100$ mm

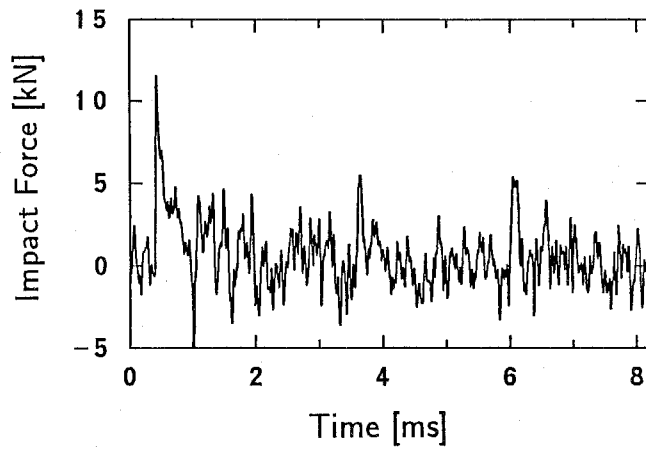


(b) $d = 250$ mm

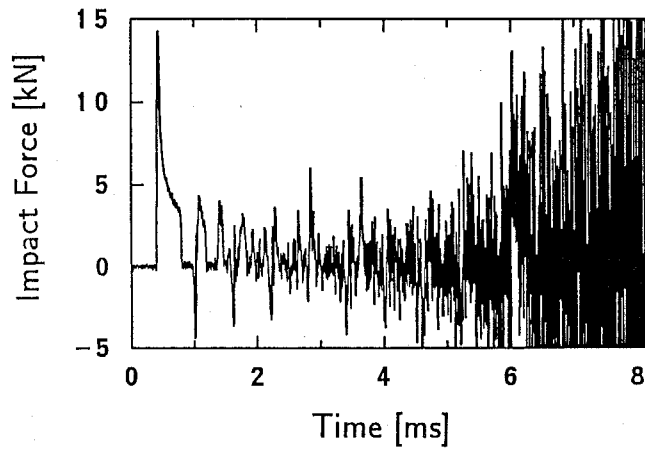


(c) $d = 500$ mm

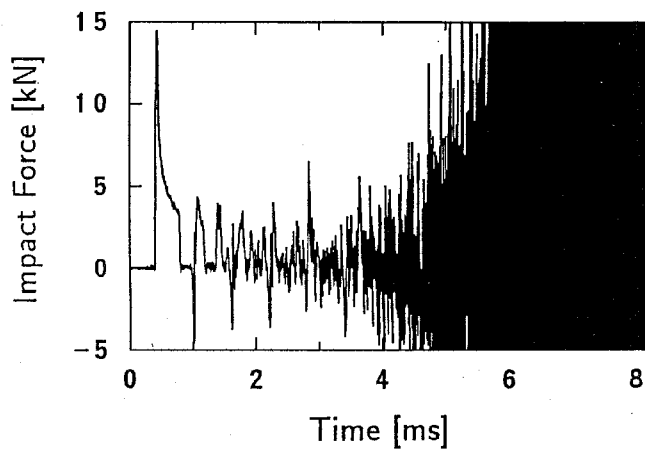
Figure 5.8: 衝撃体 C の衝突により両端支持はりに生じたひずみ応答の測定結果



(a) $\gamma = 0$



(b) $\gamma = 5/T$



(c) $\gamma = 10/T$

Figure 5.9: 衝撃体 C による両端支持はりの衝撃力の推定結果 (較正実験に衝撃体 A を使用した場合, $d = 250$ mm)

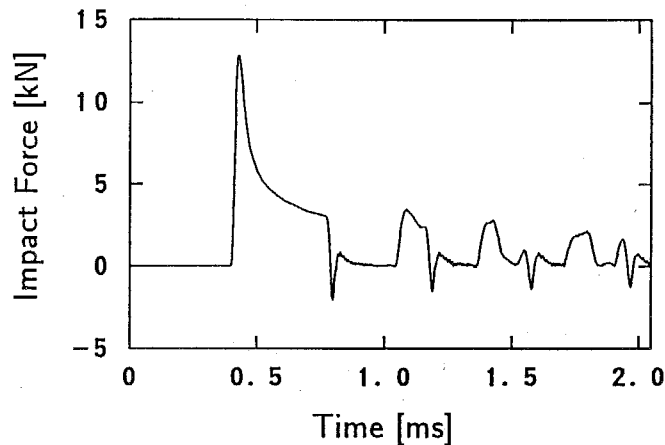


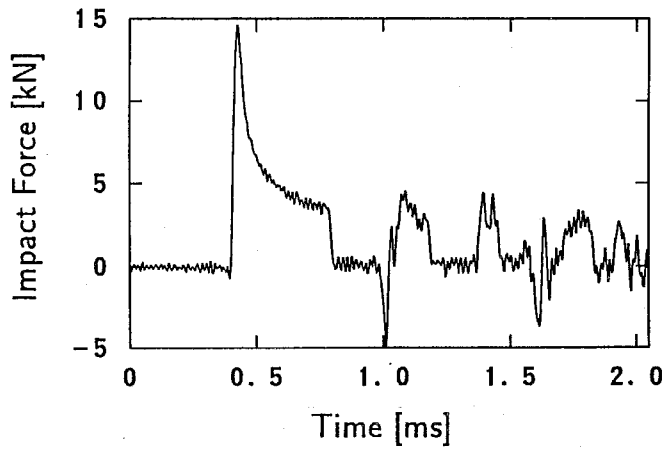
Figure 5.10: 衝撃体 C による両端支持はりの衝撃力の測定結果 (棒のひずみゲージによる直接測定)

認される。

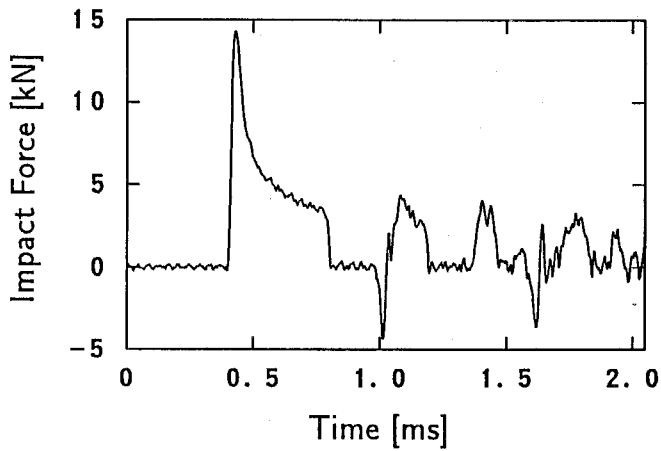
Fig.5.9(b) の $0 \leq t \leq T/4$ の部分では、結果に重畳している雑音の振幅は小さく、推定結果は直接測定の結果とほぼ一致している。そこで、以下では、 $\gamma = 5/T$ として衝撃力を推定し、その結果の $0 \leq t \leq T/4$ の部分に注目して、ひずみ応答の測定位置や較正実験に使用する衝撃体の違いなどの因子が衝撃力の推定結果に及ぼす影響を調べる。なお、後に示す推定結果との比較を行うために、Fig.5.7 の直接測定結果の $0 \leq t \leq T/4$ の部分を拡大した図を Fig.5.10 に示す。

ひずみ応答の測定位置による衝撃力の推定結果の変化を調べるために、 $d = 100, 250, 500$ mm の位置のひずみ応答の測定データから、衝撃体 C による衝撃力を推定した。逆問題解析においては、較正実験に衝撃体 A を使用して同定した伝達関数を用い、 $\gamma = 5/T$ とした。推定結果の $0 \leq t \leq T/4$ の部分を Fig.5.11(a) ~ (c) に示す。この結果によれば、衝撃点からひずみ応答の測定位置までの距離 d が 500 mm の場合には、衝撃力波形の最初のピーク以降の部分で振動が現れており、他の場合に比べて推定精度が低い。このように、ひずみ応答の測定位置が衝撃点から離れると衝撃力の推定精度が低下する原因は、

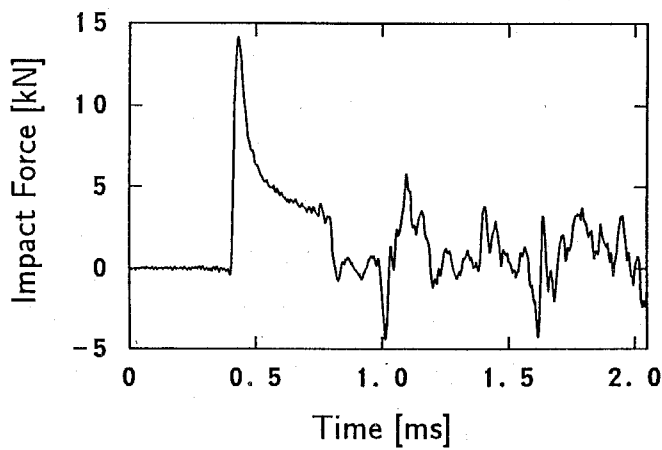
1. はりの支持点における摩擦などの非線形な現象の影響がひずみ応答の測定データに現れる。



(a) $d = 100$ mm



(b) $d = 250$ mm



(c) $d = 500$ mm

Figure 5.11: 衝撃体 C による両端支持はりの衝撃力の推定結果 (較正実験に衝撃体 A を使用した場合, $\gamma = 5/T$)

2. はりを伝播するたわみ波は分散性を有し、低周波成分ほど伝播速度が小さいため、有限長 T の測定データでは衝撃力の低周波数成分に対するひずみ応答が検出されなくなる。

などが考えられる。したがって、精度の高い推定結果を得るためには、衝撃点に十分近い位置でひずみ応答を測定するのが適切である。

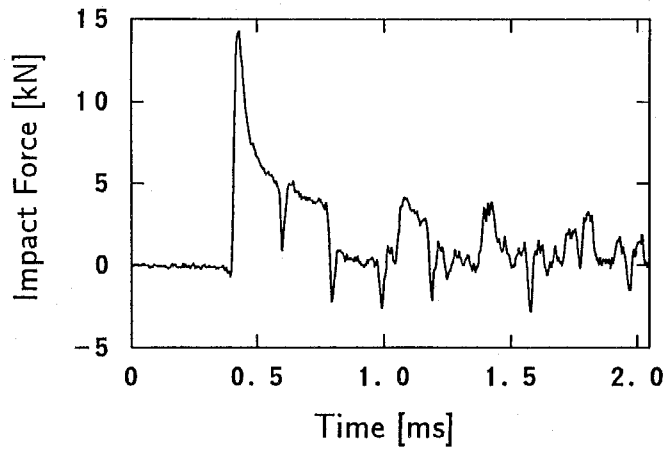
次に、較正実験に使用した衝撃体が異なる場合にも同様な推定結果が得られるかを検討するために、較正実験に衝撃体 B を使用した場合の伝達関数の同定結果を用いて、先と同様に衝撃力を推定した。推定結果の $0 \leq t \leq T/4$ の部分を Fig.5.12 に示す。較正実験に衝撃体 A を使用した場合の結果 (Fig.5.11) と比較すると、この結果では衝撃力波形の最初のピーク (持続時間 $400 \mu\text{s}$) にパルス状の振動が重畳しており、正確な推定結果は得られていない。この振動は、較正実験における衝撃力の測定データ (Fig.5.5) に混入した棒の残留振動成分が現れたものである。したがって、この問題を解決するためには、逆問題解析に基づく方法を適用することなどにより、較正実験における衝撃力の測定方法を改善する必要がある。

ところで、Fig.5.11 に示したように、較正実験に衝撃体 A を使用した場合にも、同様の残留振動成分が推定結果に現れている。しかし、衝撃体 C による衝撃力波形の最初のピークの持続時間が $400 \mu\text{s}$ であるのに対して、残留振動成分の周期は $600 \mu\text{s}$ であるために、衝撃力波形の最初のピークにはその影響が現れていない。すなわち、逆問題解析によって推定しようとする衝撃力の持続時間に比べて、較正実験に使用する棒の固有振動周期が大きければ、衝撃力波形のピークの部分には残留振動成分の影響が現れない。したがって、推定しようとする衝撃力の持続時間があらかじめ予測できる場合には、その持続時間よりも大きい固有振動周期を有する棒を較正実験に使用すれば、較正実験における衝撃力の測定を本実験のように簡便に行ってよい。

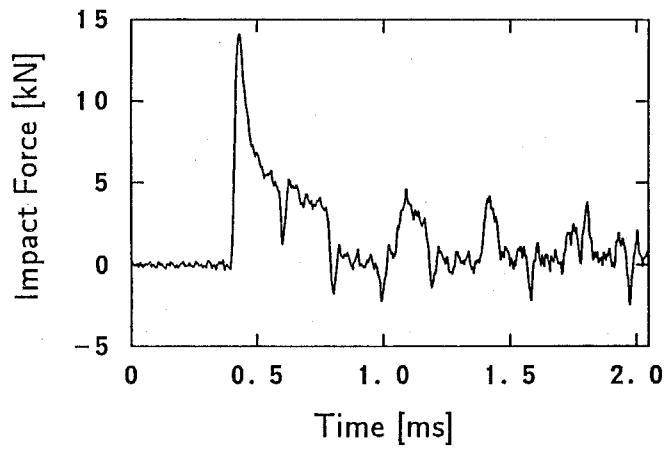
5.2.4 球による衝撃力の測定

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第二の適用例として、球 (衝撃体 D, E) をはりに落下衝突させた場合の衝撃力を、はりのひずみ応答から推定する実験を行った。

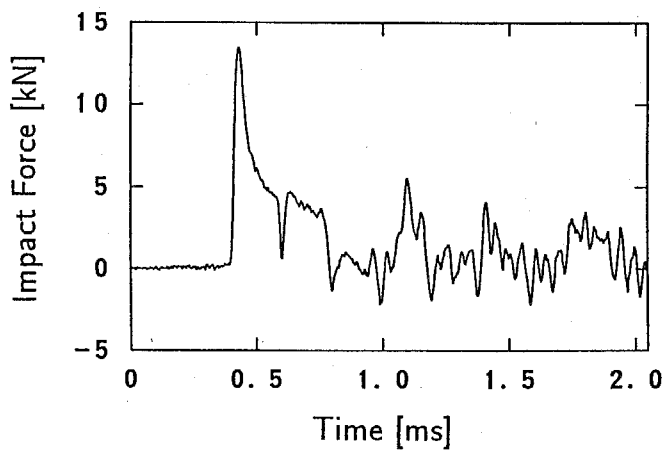
衝撃体 D を高さ 200, 400, 600 mm から落下衝突させた場合 (衝突速度 1.98, 2.80,



(a) $d = 100$ mm



(b) $d = 250$ mm



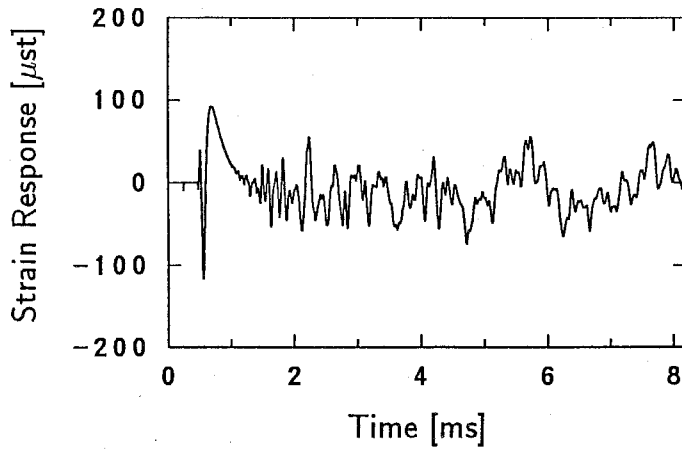
(c) $d = 500$ mm

Figure 5.12: 衝撃体 C による両端支持はりの衝撃力の推定結果 (較正実験に衝撃体 B を使用した場合, $\gamma = 5/T$)

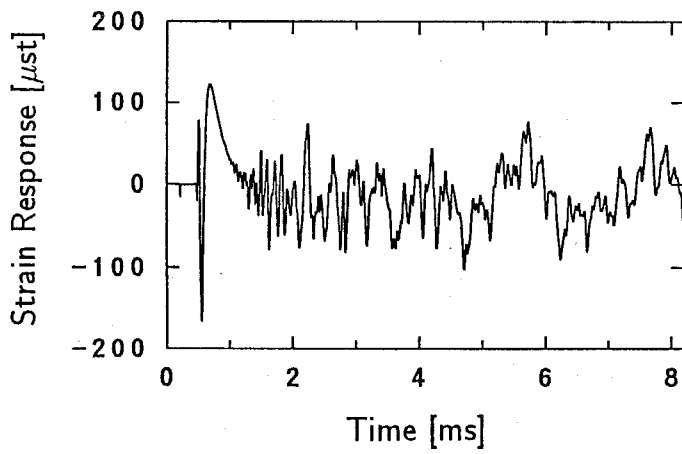
3.43 m/s) の, $d=250$ mm の位置におけるひずみ応答の測定結果をそれぞれ Fig.5.13(a) ~ (c) に示す. この結果によれば, ひずみ応答は衝撃体の落下高さ, すなわち, 衝突速度が大きくなるにつれて振幅が大きくなるが, 波形は同じである.

これらのひずみ応答の測定データから, 式(2.6)に基づく直接的な逆問題解析を行って, 衝撃体 D による衝撃力を推定した. 解析処理においては, 較正実験に衝撃体 A を使用して同定した伝達関数を用い, $\gamma=5/T$ とした. 推定結果の $0 \leq t \leq T/4$ の部分を Fig.5.14 に示す. 衝撃体 D による衝撃力の持続時間は落下高さ, すなわち, 衝突速度によらず約 $80 \mu\text{s}$ であり, 衝撃力の最大値は衝突速度にほぼ比例して増大する. ところで, 球による両端支持はりの衝撃力は, Timoshenko[85, 86] の方法により解析的に求められる. 特に, はりが十分に長く, はりの支持点からの反射応力波が衝撃力波形に及ぼす影響を無視できる場合には, はりを無限長と仮定して解析を容易にする方法 [78] も知られており, これによる解析結果の妥当性も実験により確認されている [55, 79]. そこで, この方法に基づいて本実験における衝撃力を解析的に求めた結果を Fig.5.14 に破線で示す. 推定結果と解析結果は良く一致していることから, 逆問題解析に基づく方法によって衝撃力が正確に測定されたと判断できる. なお, 逆問題解析による推定結果には, 較正実験における衝撃力の測定データに混入した残留振動成分 (周期 $600 \mu\text{s}$) が現れているが, 衝撃体 D による衝撃力の持続時間はこの振動の周期に比べて小さいため, 衝撃力波形には影響が及んでいない.

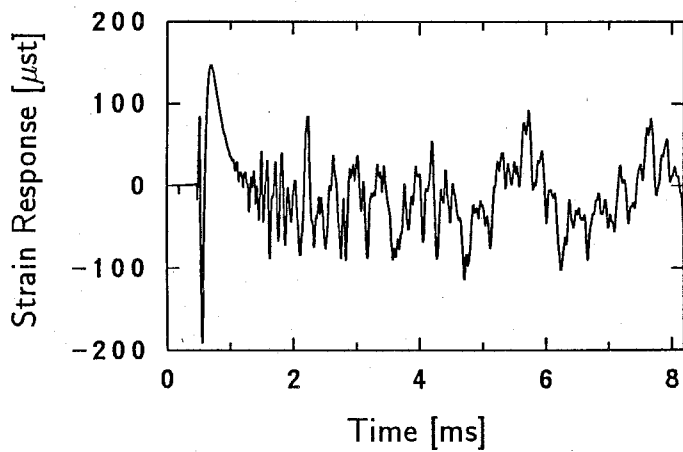
次に, 衝撃体 E を使用して同様の実験を行った. ひずみ応答の測定結果を Fig.5.15 に, 逆問題解析による衝撃力の推定結果の $0 \leq t \leq T/4$ の部分を Fig.5.16 に示す. Fig.5.16 によれば, 衝撃体 E による衝撃力は衝突直後に最大値に達し急激に減少した後, 再びわずかに増大して極大値を示し, その後ゆるやかに減少している. これは, 衝突直後は球の剛体変位の速度が急激に減少するが, その後, 球の剛体変位の速度とはりのたわみ速度がほぼ等しくなり, 球とはりとの接触が維持されることを示している. 破線は衝撃体 D の場合と同様の方法で求めた衝撃力の理論解析結果を示している. 推定結果は解析結果とほぼ一致しており, この場合にも逆問題解析に基づく方法によって衝撃力が正確に測定されたと判断できる. ただし, 較正実験における衝撃力の測定データに混入した残留振動成分の周期 ($600 \mu\text{s}$) に比べて, 衝撃力の持続時間が大きいために, 推定結果の後



(a) 落下高さ 200 mm (衝突速度 1.98 m/s)

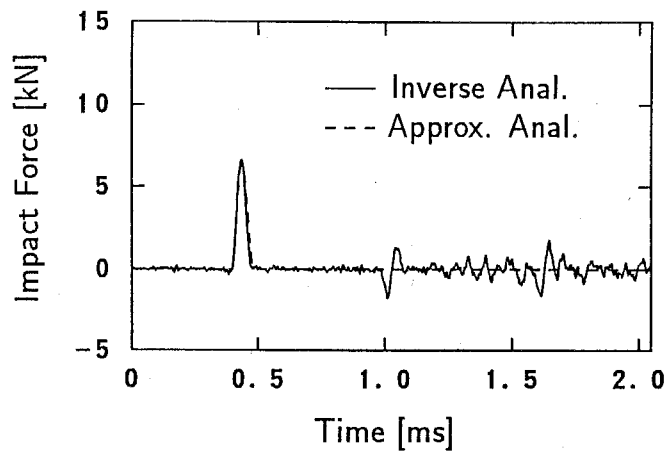


(b) 落下高さ 400 mm (衝突速度 2.80 m/s)

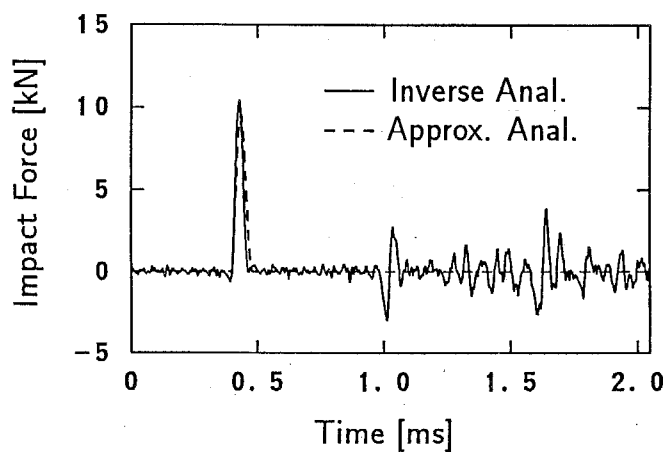


(c) 落下高さ 600 mm (衝突速度 3.43 m/s)

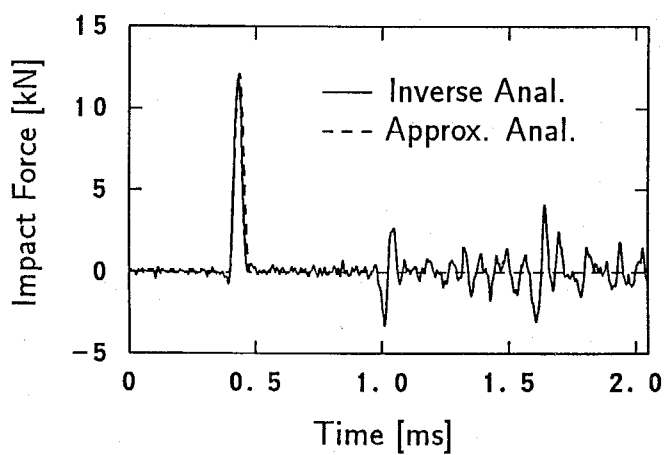
Figure 5.13: 衝撃体 D の衝突により両端支持はりに生じたひずみ応答の測定結果 ($d = 250$ mm)



(a) 落下高さ 200 mm (衝突速度 1.98 m/s)

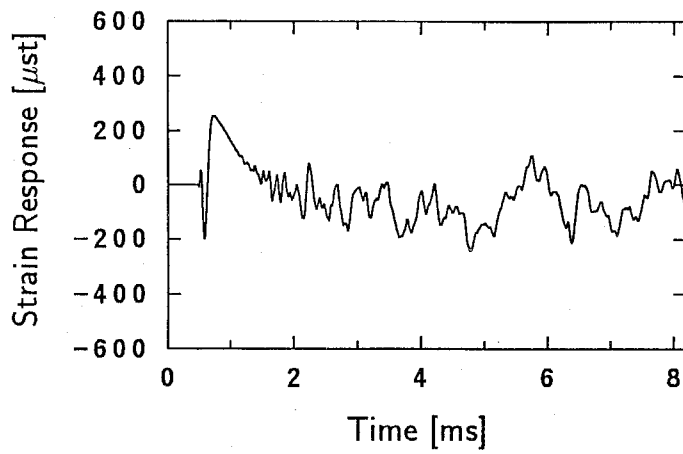


(b) 落下高さ 400 mm (衝突速度 2.80 m/s)

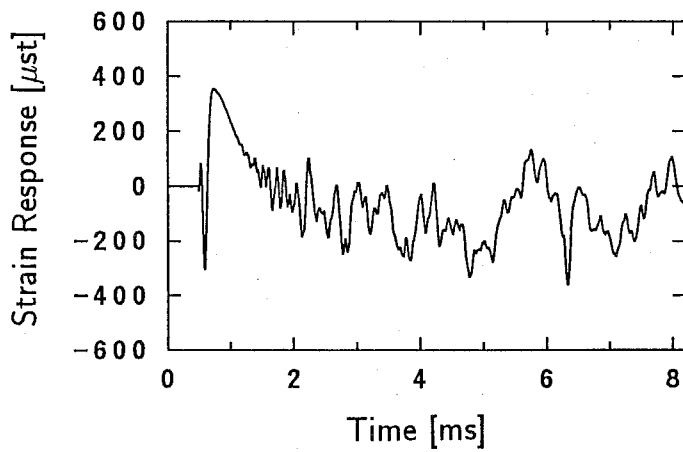


(c) 落下高さ 600 mm (衝突速度 3.43 m/s)

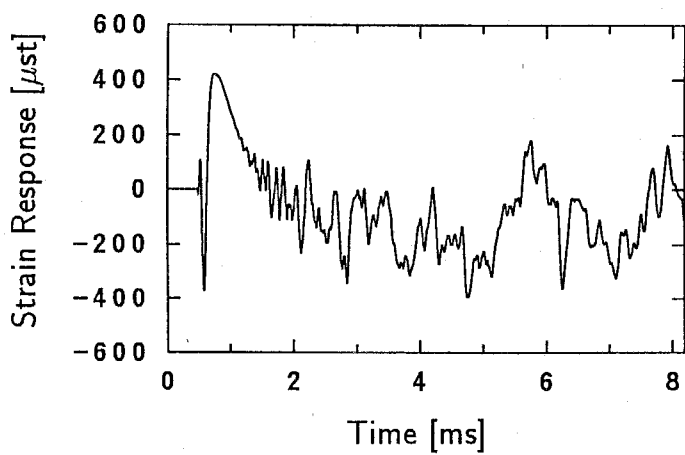
Figure 5.14: 衝撃体 D による両端支持はりの衝撃力の推定結果



(a) 落下高さ 200 mm (衝突速度 1.98 m/s)

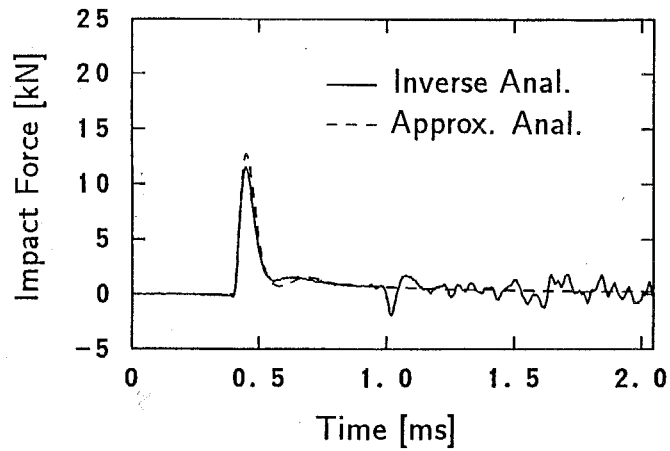


(b) 落下高さ 400 mm (衝突速度 2.80 m/s)

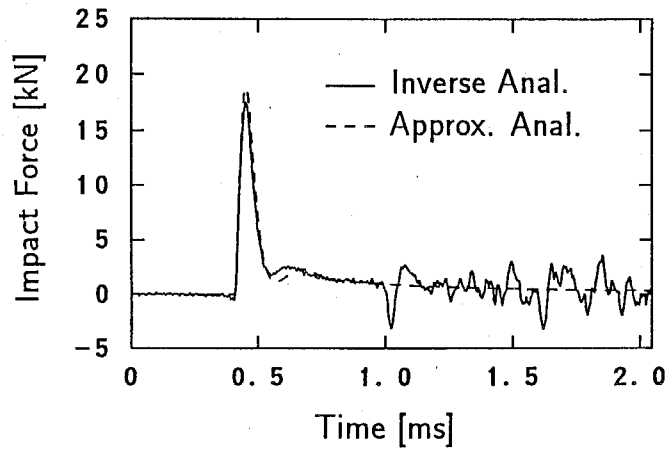


(c) 落下高さ 600 mm (衝突速度 3.43 m/s)

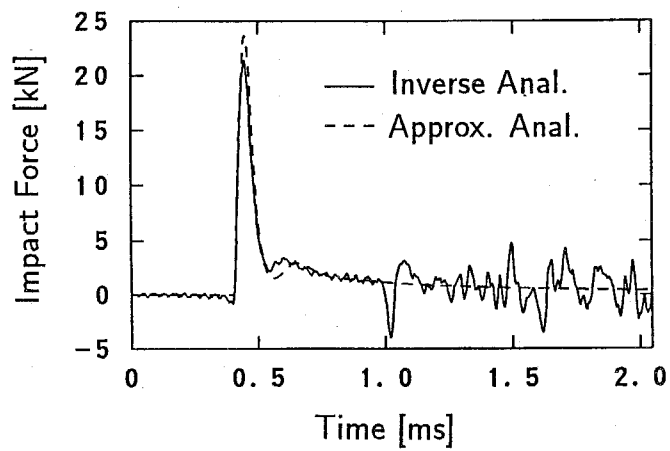
Figure 5.15: 衝撃体 E の衝突により両端支持はりに生じたひずみ応答の測定結果 ($d = 250$ mm)



(a) 落下高さ 200 mm (衝突速度 1.98 m/s)



(b) 落下高さ 400 mm (衝突速度 2.80 m/s)



(c) 落下高さ 600 mm (衝突速度 3.43 m/s)

Figure 5.16: 衝撃体 E による両端支持はりの衝撃力の推定結果

半部ではその影響が現れている。

5.3 平板に作用する衝撃力の測定

5.3.1 実験方法

Fig.5.17 に示すように、周辺を支持した円板の中央に衝撃体を衝突させる実験を行い、円板に生じるひずみ応答の測定データから逆問題解析を行って衝撃力を推定した。

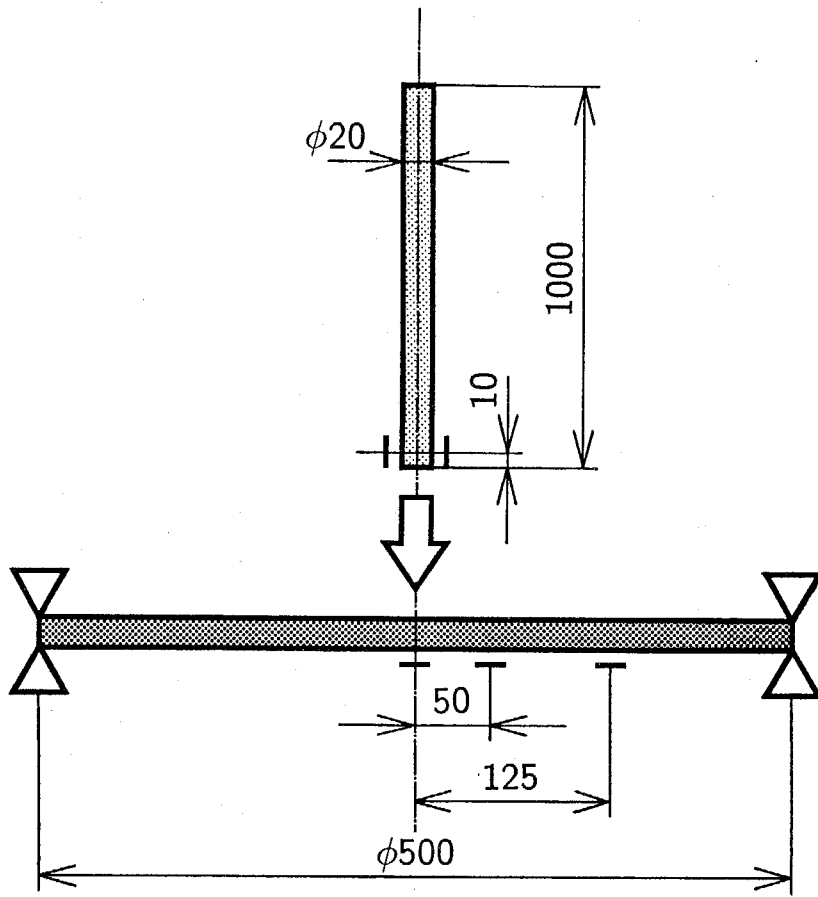
本実験に使用した円板は、直径 500 mm、厚さ 14 mm の軟鋼板であり、これを外径 500 mm、肉厚 9 mm、幅 21 mm の鋼製円輪の上に載せて支持した。なお、衝撃の反動で円板の周辺が跳ね上がらないようにするために、周辺の 4 点で万力を用いて円板と円輪を締め付けた。この場合、円板の周辺における境界条件は回転自由と固定の間の中間的な条件となり、万力の締め付け力に依存して変化する。本実験では、一旦締め付けた万力を弛めることなく使用し、すべての実験を通じて境界条件が一定となるよう留意した。円板に衝撃力を作用させるために使用した衝撃体は、

- 衝撃体 F: $\phi 20 \times 1000$ mm, 黄銅棒
- 衝撃体 G: $\phi 20 \times 1000$ mm, 軟鋼棒
- 衝撃体 H: $\phi 70$ mm, 1.45 kg, 軟鋼球
- 衝撃体 I: JIS B4613, 片手ハンマ #1 $\frac{1}{2}$

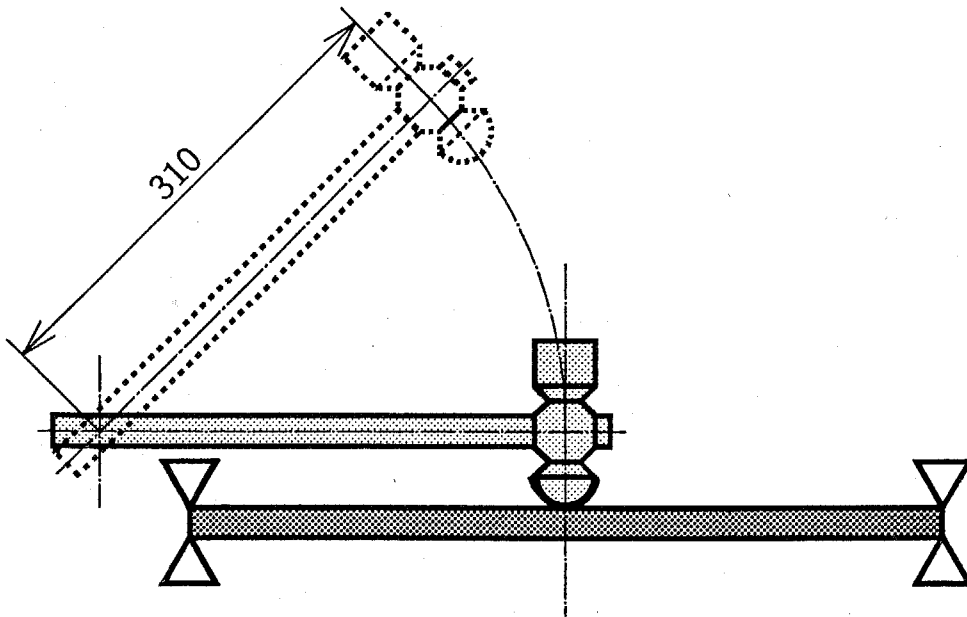
である。衝撃体 F ~ H を使用した場合には、Fig.5.17(a) に示すように、円筒ガイドの内側にこれらの衝撃体を通して種々の高さから自由落下させて、円板の中央に衝撃を与えた。なお、棒(衝撃体 F, G) の衝撃端には、円板との衝突の際の片当たりを防ぐために、R20 mm 程度の丸みをつけた。また、衝撃体 I のハンマを使用した場合には、Fig.5.17(b) に示すように、頭部より 310 mm の位置を中心に自由に回転するようにハンマを固定し、頭部の半球状の部分(曲率半径 15 mm) の先端が円板の中心に衝突するようにした。円板および衝撃体の材料の機械的性質を Table 5.2 に示す。

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定手順は次の通りである。

1. 円板を細長い棒で衝撃し、このときの衝撃力および円板のひずみ応答を測定する(較正実験)。



(a) 棒による衝撃



(b) ハンマによる衝撃

Figure 5.17: 中央に衝撃を受ける周辺支持円板

Table 5.2: 円板および衝撃体の材料の機械的性質 [19]

材料	縦弾性係数 [GPa]	密度 [kg/m ³]	一次元縦波伝播速度 [m/s]
軟鋼	206	7860	5120
黄銅	98.1	8650	3370

2. 1 で得た測定データをもとに，伝達関数を同定する．
3. 任意の衝撃体で円板を衝撃し，このときの円板のひずみ応答を測定する．
4. 2 で得た伝達関数と，3 で得たひずみ応答から衝撃力を推定する．

較正実験における衝撃力は，前節の両端支持はりの衝撃実験の場合と同様に，棒の衝撃端から 10 mm の位置に接着したひずみゲージを用いて測定した．一方，円板のひずみ応答は，衝撃点から距離 $d = 0, 50, 125$ mm の 3 箇所 で円板の下面において，半径方向にひずみゲージを接着して測定した．測定および解析処理に使用した装置の構成は，Fig.5.2 に示した通りである．本実験における測定および解析処理には次の値を用いた．

- $\Delta t = 2$ [μ s]
- $N = 1024$ ($T = 2.048$ [ms])
- $\gamma = 0, 5/T, 10/T$

5.3.2 較正実験

衝撃体 F を高さ 200 mm から落下衝突させて較正実験を行った．このときの衝突速度は 1.98 m/s である．棒のひずみゲージによる衝撃力の測定結果を Fig.5.18 に，円板の 3 箇所のひずみゲージによるひずみ応答の測定結果をそれぞれ Fig.5.19(a) ~ (c) に示す．Fig.5.18 によれば，衝撃力の持続時間は約 600 μ s である．この時間は，衝撃体 F の 1 次の固有振動周期，すなわち，衝撃体 F の内部を一次元の縦波が 1 往復する時間に等しい．また，衝撃力波形は立ち上がりから約 160 μ s 後から振動を生じる．この時刻は円板を伝播するたわみ波が円板の周辺で反射されて衝撃点に戻ってくる時刻に等しいことから，この衝撃力波形の振動は円板のたわみ振動によって生じたと考えられる．

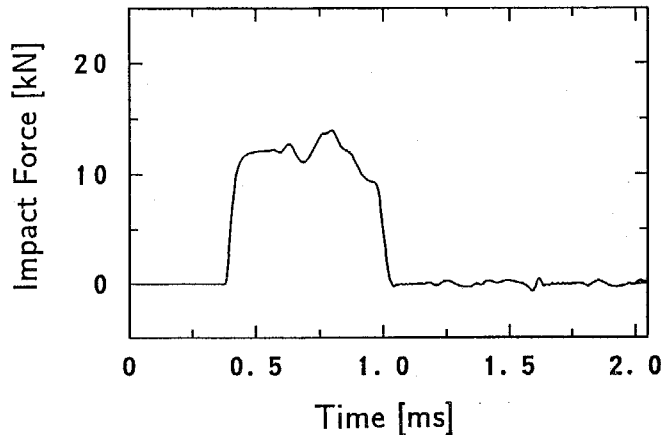


Figure 5.18: 衝撃体 F を使用した較正実験における円板の衝撃力の測定結果

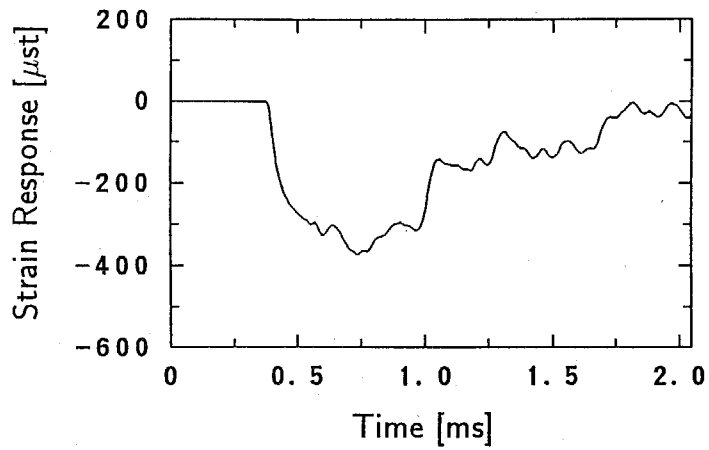
一方, Fig.5.19 によれば, ひずみ応答波形の立ち上がる時刻は, 衝撃点からの距離 d が大きくなるにつれて次第に遅くなる. また, ひずみ応答波形は衝撃点からの距離 d によって大きく異なる. これは, 円板を伝播するたわみ波の分散性により, 波動の群速度が周波数に依存するためである.

なお, Fig.5.18 の衝撃力の測定結果には, 前節の較正実験の測定結果と同様に, 周期 $600 \mu\text{s}$ の衝撃体 F の残留振動成分が重畳しており, 図の横軸の 1.6 ms の位置にあらわれている. しかし, 本実験では, 前節と同様の理由により, Fig.5.18 の衝撃力の測定結果を較正実験における衝撃力の測定データとして採用した. そして, Fig.5.18 と 5.19 の測定データをそれぞれ数値ラプラス変換し, 式 (2.5) に基づいて直接的に伝達関数を同定した.

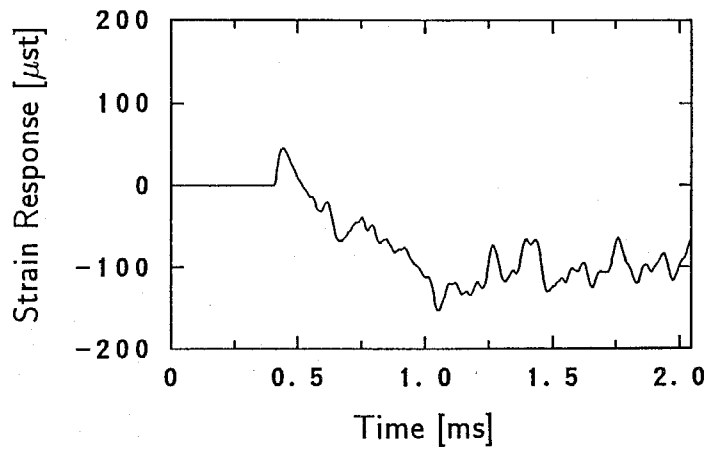
5.3.3 棒による衝撃力の測定

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第一の適用例として, 棒 (衝撃体 G) を円板に落下衝突させた場合の衝撃力を, 円板のひずみ応答から推定した.

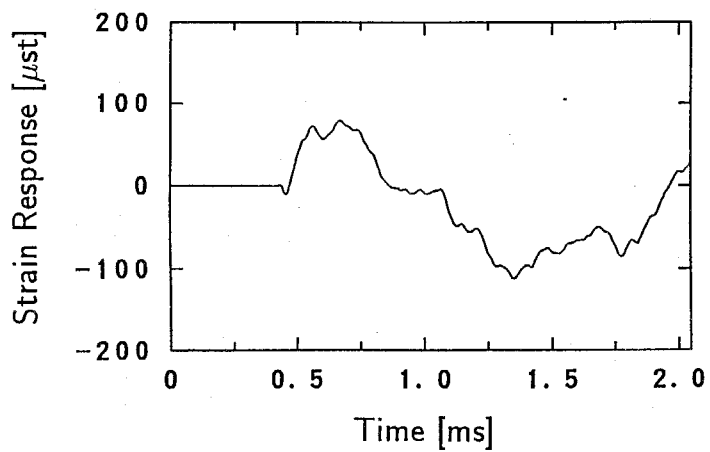
衝撃体 G を高さ 200 mm から落下衝突させて, 円板のひずみ応答を測定した. また, 逆問題解析手法に基づく衝撃力の推定結果と比較するために, 棒に接着したひずみゲージを用いてこのときの衝撃力も同時に測定した. 衝撃力の測定結果を Fig.5.20 に, 円板のひずみ応答の測定結果を Fig.5.21(a) ~ (c) に示す. Fig.5.20, 5.21 の測定結果は, 先



(a) $d = 0$



(b) $d = 50$ mm



(c) $d = 125$ mm

Figure 5.19: 衝撃体 F を使用した校正実験における円板のひずみ応答の測定結果

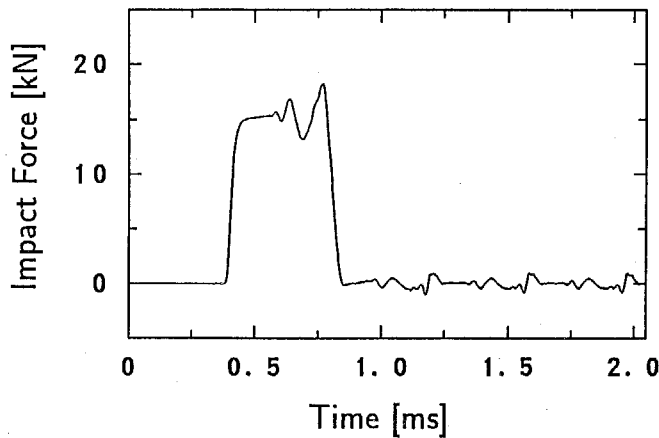
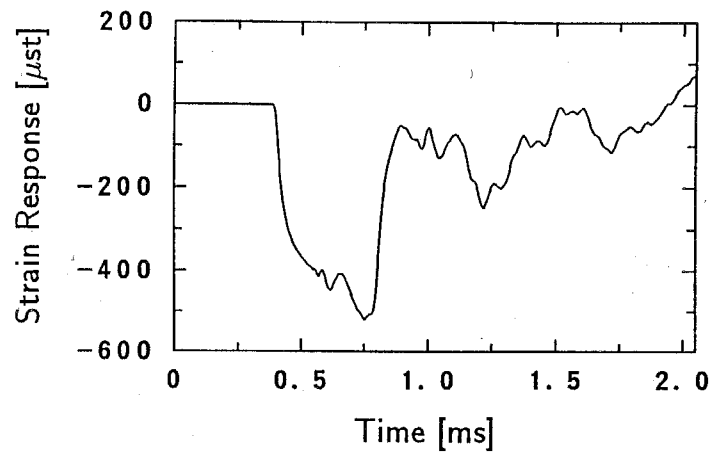


Figure 5.20: 衝撃体 G による円板の衝撃力の測定結果 (棒のひずみゲージによる直接測定)

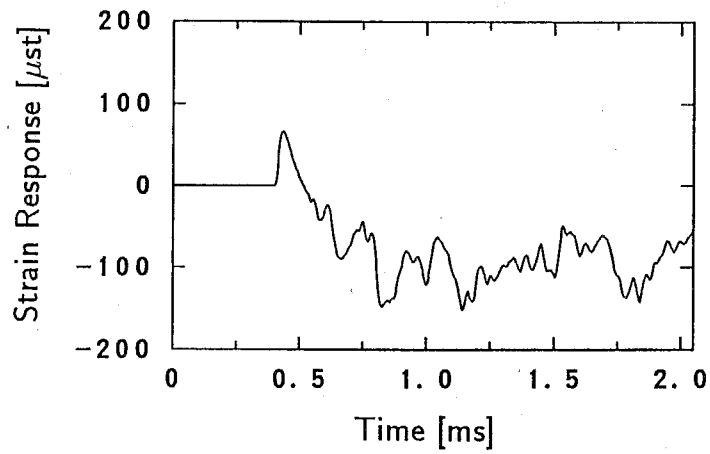
に示した較正実験の結果と類似の傾向を示している。以下では、Fig.5.21 に示したひずみ応答の測定データから式 (2.6) に基づく直接的な逆問題解析を行って衝撃体 G による衝撃力を推定し、その結果と Fig.5.20 の直接測定の結果とを比較して、逆問題解析による衝撃力の推定精度について論じる。

まず、 $d=0$ の位置のひずみ応答から逆問題解析を行って衝撃力を推定した。推定結果を Fig.5.22 に示す。ここで、Fig.5.22(a) ~ (c) は、それぞれ $\gamma=0$, $5/T$, $10/T$ とした場合の結果である。Fig.5.22 の推定結果を Fig.5.20 の直接測定の結果と比較すると、 $\gamma=0$ の場合には推定結果全体に振動が生じ、直接測定の結果と一致する結果は得られていない。また、 $\gamma=5/T$, $10/T$ の場合には、時間とともに指数関数的に拡大する雑音を重ねるために衝撃力波形が後半において不明瞭になり、特に $\gamma=10/T$ の場合には満足な推定結果は得られていない。これらの傾向は、Fig.4.8 に示した直接的な逆問題解析の数値シミュレーションの結果、および、Fig.5.9 に示した両端支持はりに関する実験の結果に見られた傾向と同様である。したがって、本実験の結果からも、数値ラプラス変換の定数 γ には適切な値を採用する必要があること、ならびに、衝撃力の逆問題解析においては適切化処理が必要であることが確認される。ただし、本実験では、 $\gamma=5/T$ の場合には雑音の拡大が顕著ではなく、直接測定の結果とほぼ一致する推定結果が得られている。

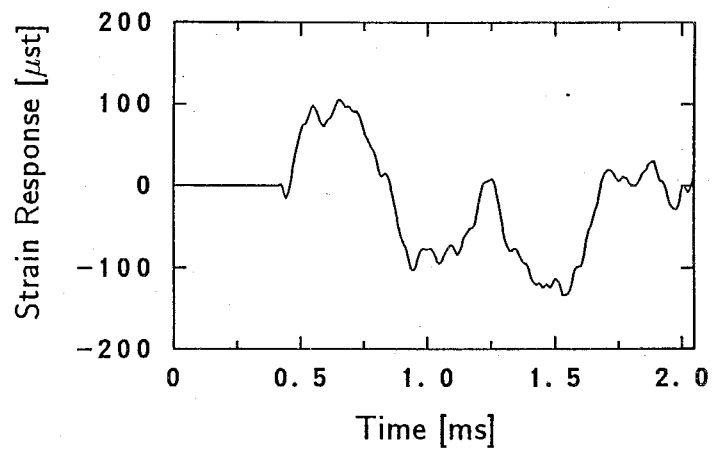
次に、 $\gamma=5/T$ として逆問題解析を行い、ひずみ応答の測定位置による衝撃力の推定精



(a) $d = 0$

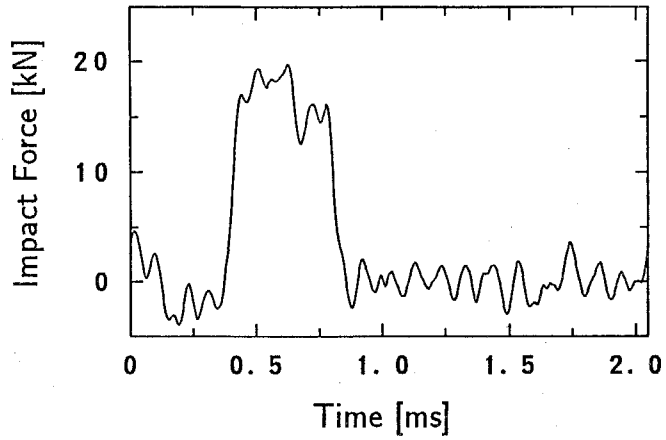


(b) $d = 50$ mm

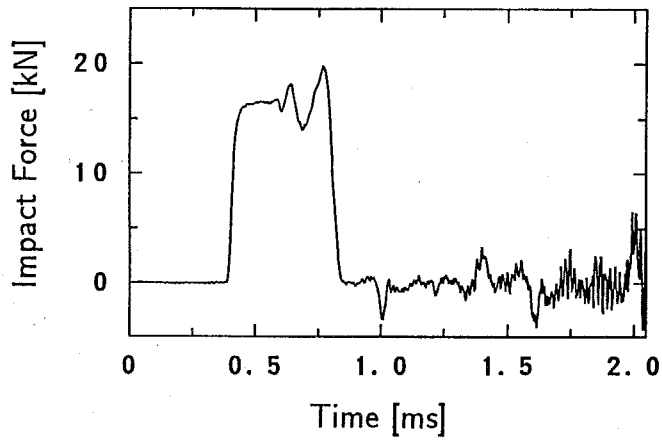


(c) $d = 125$ mm

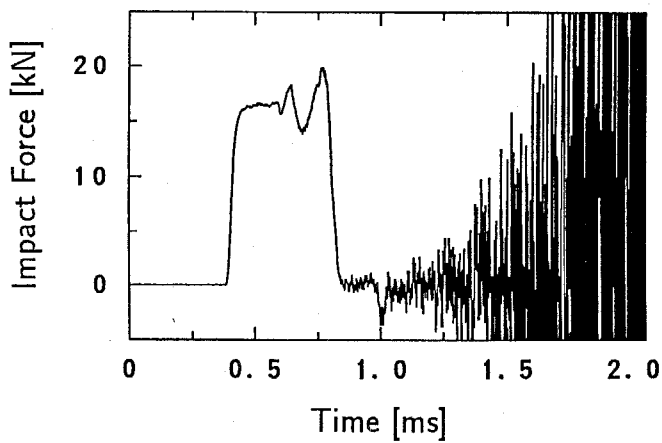
Figure 5.21: 衝撃体 G の衝突により円板に生じたひずみ応答の測定結果



(a) $\gamma = 0$



(b) $\gamma = 5/T$



(c) $\gamma = 10/T$

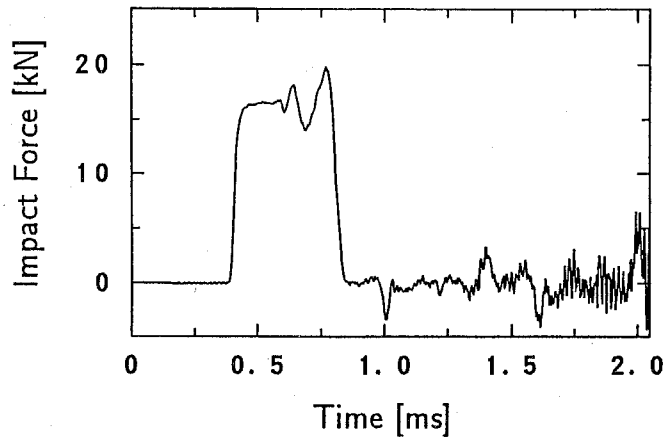
Figure 5.22: 衝撃体 G による円板の衝撃力の推定結果 ($d = 0$)

度の変化を調べた。 $d = 0, 50, 125$ mm の位置のひずみ応答の測定データから、逆問題解析を行って衝撃体 G による衝撃力を推定した結果をそれぞれ Fig.5.23(a) ~ (c) に示す。この結果によれば、衝撃点からひずみ応答の測定位置までの距離 d が大きくなるにつれて、推定結果全体の波形が乱れて、推定精度が低下する。これは、Fig.5.11 に示した両端支持はりについての実験結果と同様の傾向であり、円板の支持部分における摩擦や跳ね上がりなどの非線形な現象や、円板中を伝播するせん断応力波の分散性が原因であると推測される。この結果より、円板に作用する衝撃力を正確に推定するためには、衝撃点に十分近い位置でひずみ応答を測定するのが適切である。

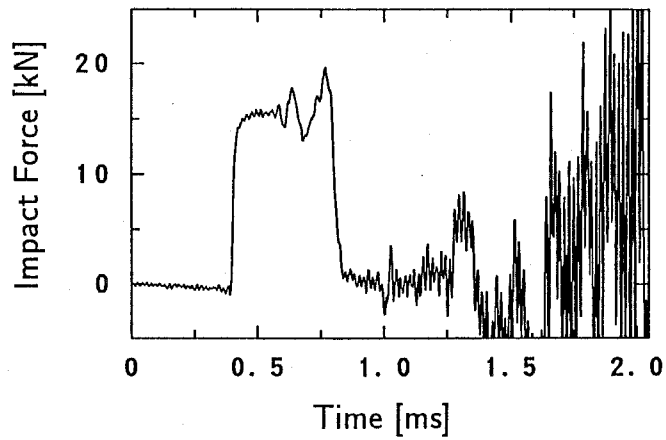
5.3.4 球による衝撃力の測定

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第二の適用例として、球 (衝撃体 H) を落下衝突させた場合の衝撃力を、円板のひずみ応答から推定した。

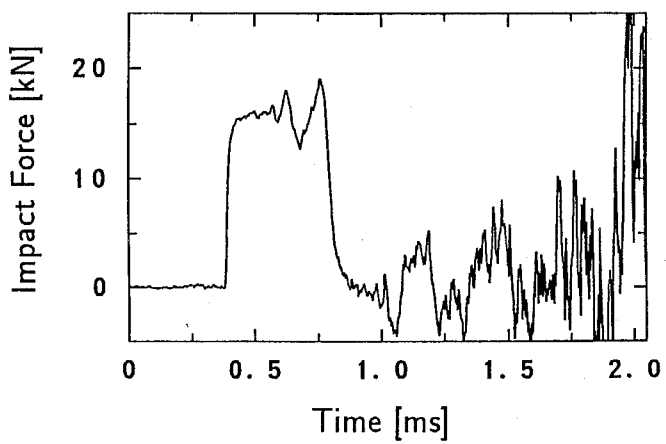
衝撃体 H を高さ 100, 200, 400 mm から落下衝突させた場合 (衝突速度 1.40, 1.98, 2.80 m/s) の、 $d = 0$ の位置におけるひずみ応答の測定結果をそれぞれ Fig.5.24(a) ~ (c) に示す。これらのひずみ応答の測定データから、式 (2.6) に基づく直接的な逆問題解析を行って、衝撃体 H による衝撃力を推定した。なお、前述の棒 (衝撃体 G) についての実験結果に基づいて、 $\gamma = 5/T$ として解析処理を行った。推定結果を Fig.5.25 に示す。この結果によれば、本実験の衝突速度の範囲では、衝撃体 F による衝撃力の持続時間は落下高さ、すなわち、衝突速度によらず約 $300 \mu\text{s}$ であり、衝撃力の最大値は衝突速度にほぼ比例して増大する。ところで、球による周辺支持平板の衝撃力は、Karas[65] の方法により解析的に求められる。特に、平板が十分に大きく、平板の周辺からの反射応力波が衝撃力波形に及ぼす影響を無視できる場合には、平板が無限に大きいと仮定して解析を容易にする方法 [90] が知られており、これによる解析結果の妥当性も実験により確認されている [1, 15, 16, 55, 80]。そこで、この方法に基づいて本実験における衝撃力を解析的に求めた結果を Fig.5.25 に破線で示す。推定結果は解析結果と良く一致している。したがって、球による衝撃実験においても、逆問題解析に基づく方法によって衝撃力が正確に測定されたと判断できる。



(a) $d = 0$

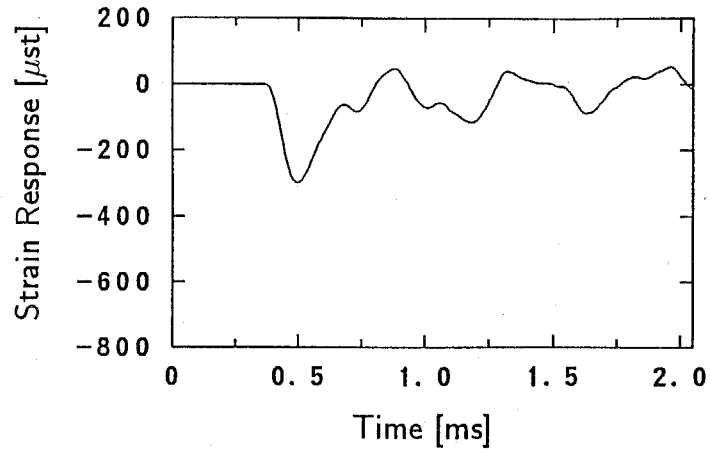


(b) $d = 50$ mm

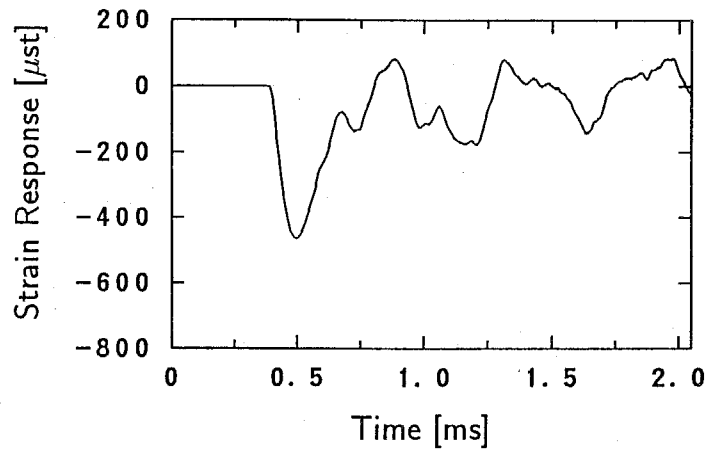


(c) $d = 125$ mm

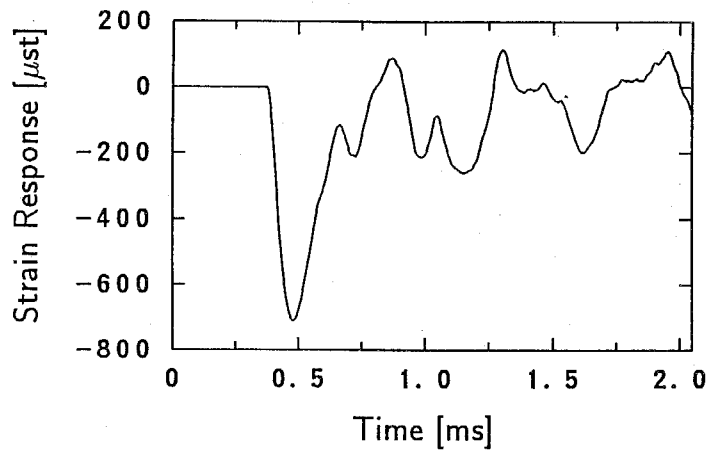
Figure 5.23: 衝撃体 G による円板の衝撃力の推定結果 ($\gamma = 5/T$)



(a) 落下高さ 100 mm (衝突速度 1.40 m/s)

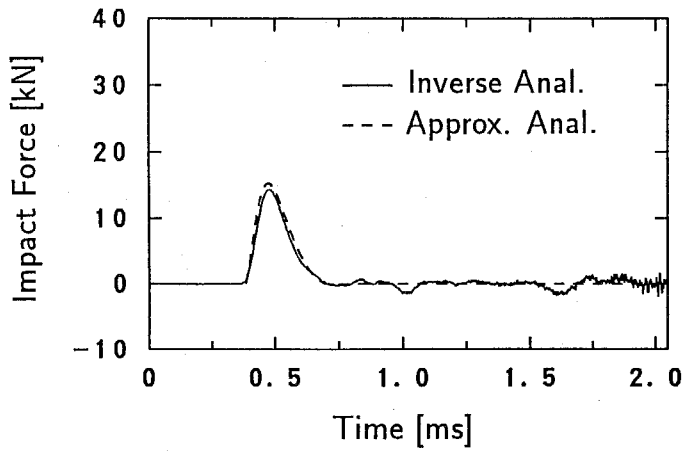


(b) 落下高さ 200 mm (衝突速度 1.98 m/s)

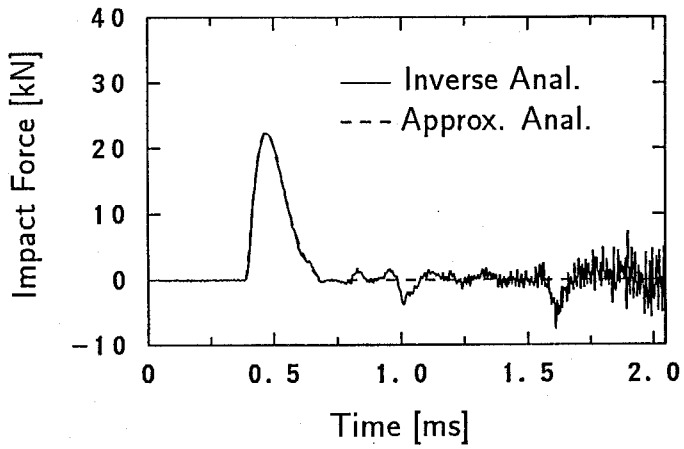


(c) 落下高さ 400 mm (衝突速度 2.80 m/s)

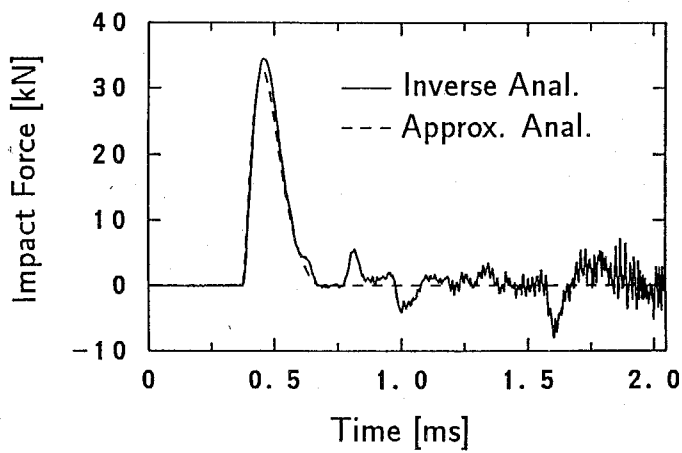
Figure 5.24: 衝撃体 H の衝突により円板に生じたひずみ応答の測定結果 ($d = 0$)



(a) 落下高さ 100 mm (衝突速度 1.40 m/s)



(b) 落下高さ 200 mm (衝突速度 1.98 m/s)



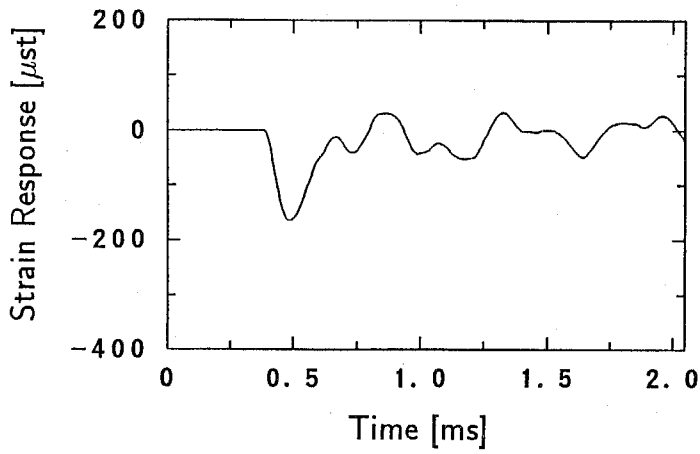
(c) 落下高さ 400 mm (衝突速度 2.80 m/s)

Figure 5.25: 衝撃体 H による円板の衝撃力の推定結果

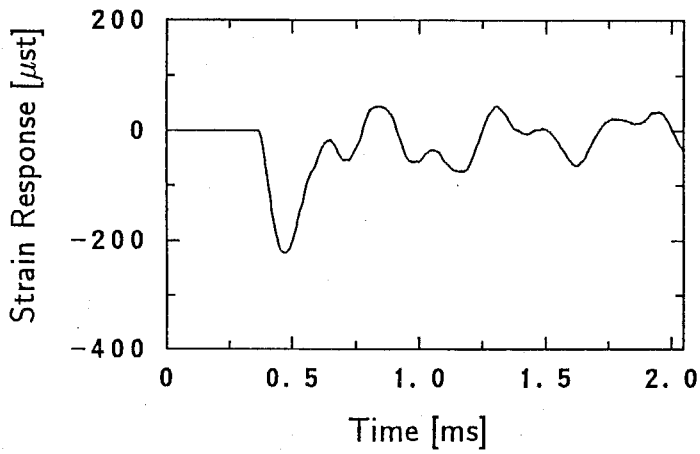
5.3.5 ハンマによる衝撃力の測定

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第三の適用例として、ハンマ(衝撃体 I) を衝突させた場合の衝撃力を、円板のひずみ応答から推定した。

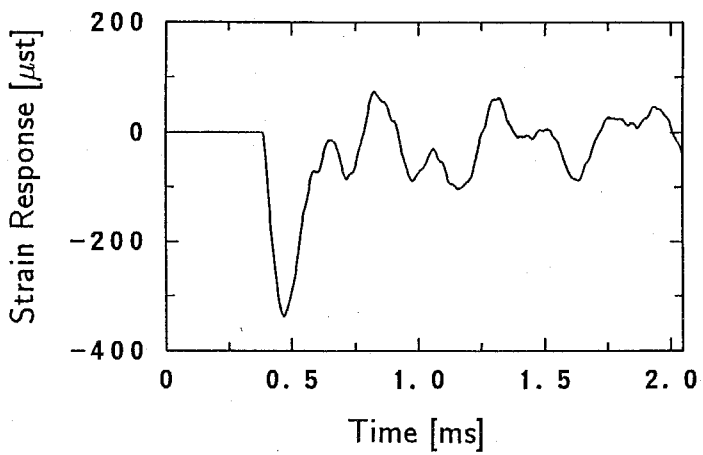
衝撃体 I を高さ 50, 100, 150 mm から落下衝突させた場合(衝突速度 0.99, 1.40, 1.72 m/s) の, $d = 0$ の位置におけるひずみ応答の測定結果をそれぞれ Fig.5.26(a) ~ (c) に示す。これらのひずみ応答の測定データから, 式(2.6)に基づく直接的な逆問題解析を行って, 衝撃体 I による衝撃力を推定した。なお, $\gamma = 5/T$ とした。結果を Fig.5.27 に示す。この結果によれば, 衝撃体 I のハンマによる衝撃力波形は, Fig.5.25 に示した球による衝撃力の波形と類似している。



(a) 落下高さ 50 mm (衝突速度 0.99 m/s)

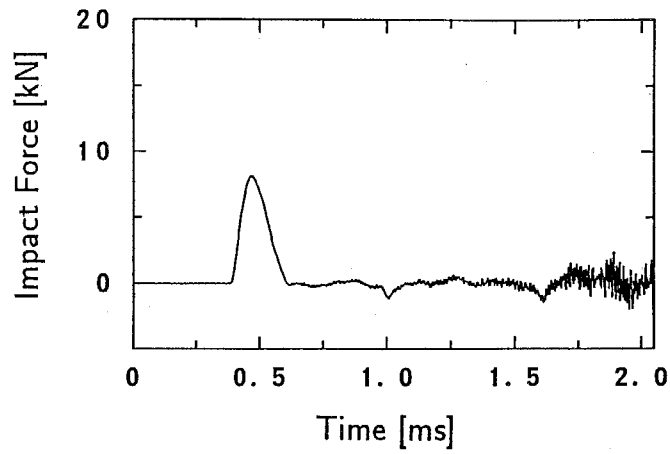


(b) 落下高さ 100 mm (衝突速度 1.40 m/s)

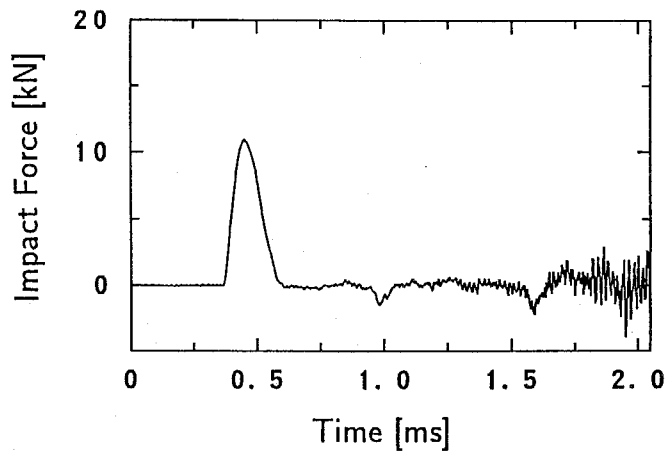


(c) 落下高さ 150 mm (衝突速度 1.72 m/s)

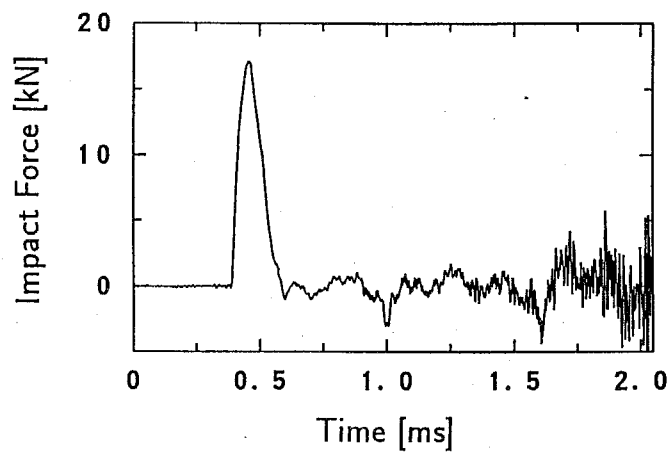
Figure 5.26: 衝撃体 I の衝突により円板に生じたひずみ応答の測定結果 ($d=0$)



(a) 落下高さ 50 mm (衝突速度 0.99 m/s)



(b) 落下高さ 100 mm (衝突速度 1.40 m/s)



(c) 落下高さ 150 mm (衝突速度 1.72 m/s)

Figure 5.27: 衝撃体 I による円板の衝撃力の推定結果

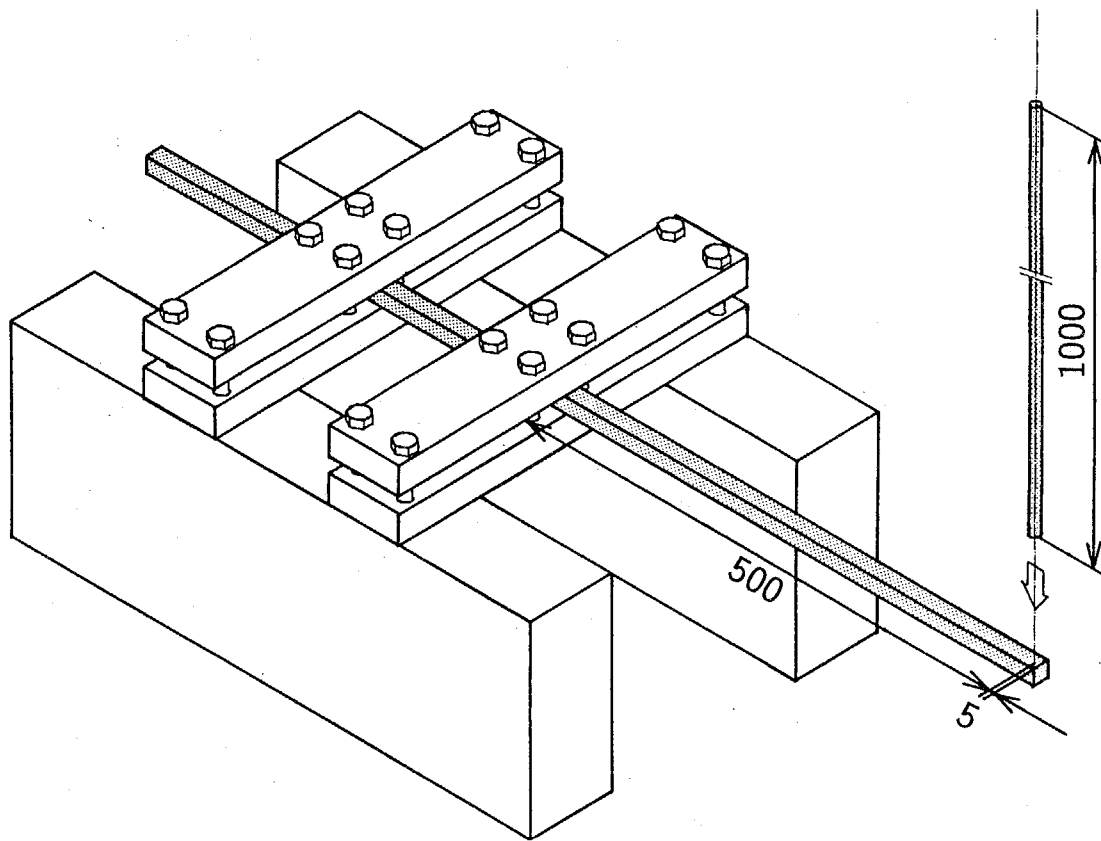


Figure 5.28: 先端に衝撃を受ける片持はり

5.4 片持はりに作用する衝撃力の測定

5.4.1 実験方法

片持はりの先端近傍に衝撃体を落下衝突させる実験を行い、はりに生じるひずみの測定値から逆問題解析を行って衝撃力を推定した。

Fig.5.28 に示すように、幅 16 mm，高さ 16 mm，長さ 1 m の正方形断面の軟鋼材を、先端から 505 mm の位置で固定支持して片持はりとした。固定点では、幅 75 mm，厚さ 25 mm の鋼製帯板を 2 枚使用して、はりを上下から締め付けた。衝撃点は、はりの先端から 5 mm の位置である。衝撃体には次に挙げる棒および 6 種類の球を使用した。

- 衝撃体 J: $\phi 10 \times 1000$ mm，軟鋼棒

Table 5.3: はりおよび衝撃体の材料の機械的性質 [10, 19]

材料	縦弾性係数 [GPa]	密度 [kg/m^3]	一次元縦波伝播速度 [m/s]
軟鋼	206	7860	5120
銅	123	8650	3770
黄銅	98.1	8650	3370
アルミニウム	68.6	2700	5040
PMMA	3	1200	1580

- 衝撃体 K: $\phi 30$ mm, 110 g, 鋼球
- 衝撃体 L: $\phi 30$ mm, 126 g, 銅球
- 衝撃体 M: $\phi 30$ mm, 119 g, 黄銅球
- 衝撃体 N: $\phi 30$ mm, 37.6 g, アルミニウム球
- 衝撃体 O: $\phi 30$ mm, 16.8 g, PMMA 球
- 衝撃体 P: $\phi 30$ mm, 9.35 g, 木材球

これらの衝撃体を円筒ガイドの内側に通し、種々の高さから自由落下させて、はりに衝撃力を与えた。なお、棒（衝撃体 J）の衝撃端には、はりとの衝突の際の片当たりを防ぐために、R20 mm 程度の丸みをつけた。はりおよび衝撃体の材料の機械的性質を Table 5.3 に示す。なお、衝撃体 P の木材については機械的性質に関する資料がなく、また、実験に使用した球の材料試験も困難であるために、機械的性質は不明である。

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定手順は次の通りである。

1. はりを細長い棒で衝撃し、このときの衝撃力およびはりのひずみ応答を測定する（校正実験）。
2. 1 で得た測定データをもとに、伝達関数を同定する。
3. 任意の衝撃体ではりを衝撃し、このときのはりのひずみ応答を測定する。
4. 2 で得た伝達関数と、3 で得たひずみ応答から衝撃力を推定する。

較正実験における衝撃力は、棒の衝撃端から 10 mm の位置にひずみゲージを接着して、前節までと同様の方法により測定した。一方、はりのひずみ応答は、衝撃点から距離 $d = 95, 250, 400$ mm の 3 箇所で、はりの下面の長手方向にひずみゲージを接着して測定した。

測定および解析処理に使用した装置の構成は、Fig.5.29 に示す通りである。これらの装置のうち、波形記憶装置以外については既に 5.2 節において説明した通りである。波形記憶装置 (オートニクス, APC-204) の主な仕様を次に示す。

- チャンネル数 : 4
- 感度 : 0.1 ~ 25.6 V
- 周波数特性 : DC ~ 100 kHz (感度 0.1 ~ 0.4 V の場合)
- : DC ~ 300 kHz (感度 0.8 ~ 25.6 V の場合)
- 分解能 : 12 bit
- 記憶容量 : 64 kwords/ch
- 最高書き込み速度: 1 μ s/word

なお、この波形記憶装置を使用すれば、A/D 変換して記録された測定データをパーソナルコンピュータに直接転送することができる。

本実験における測定および解析処理には次の値を用いた。

- $\Delta t = 1$ [μ s]
- $N = 2048$ ($T = 2.048$ [ms]), または, $N = 4096$ ($T = 4.096$ [ms])
- $\gamma = 2\pi/T$

5.4.2 較正実験

衝撃体 J を高さ 100, 300 mm から落下衝突させて較正実験を行った。このときの衝突速度はそれぞれ 1.40, 2.43 m/s である。本実験では、最適逆システムによる逆問題解

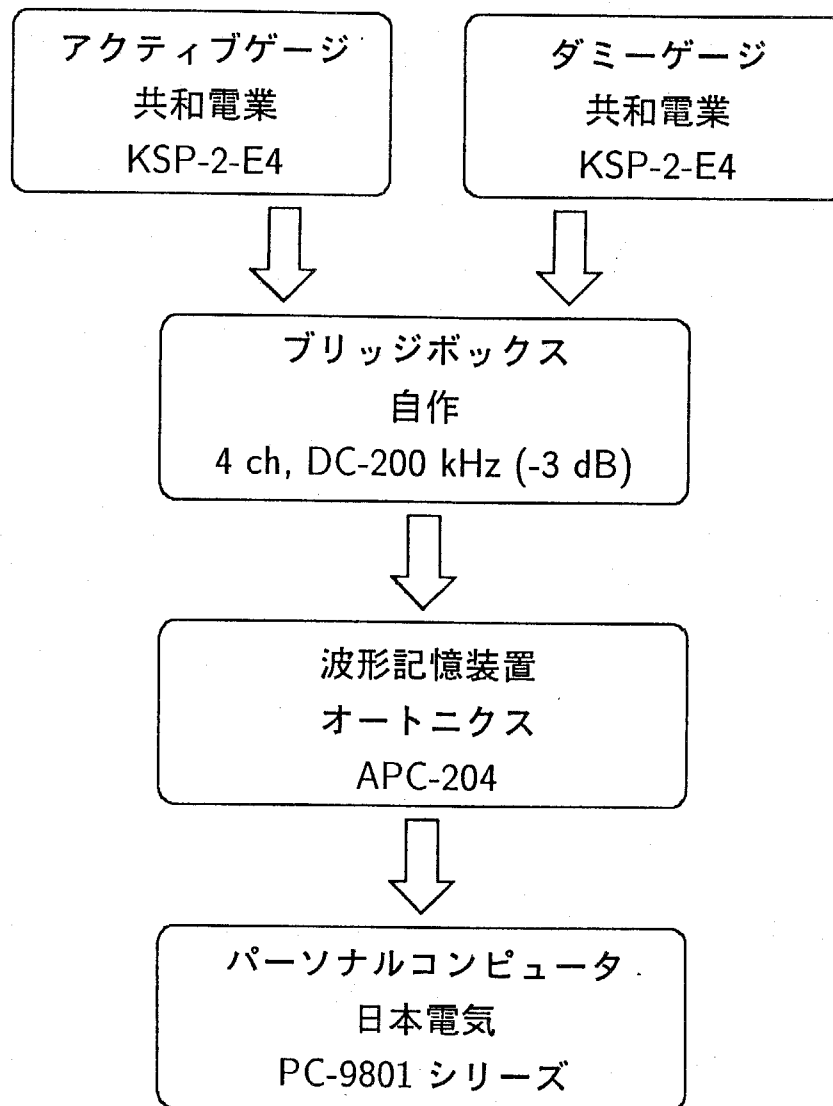


Figure 5.29: 測定装置および解析処理装置の構成

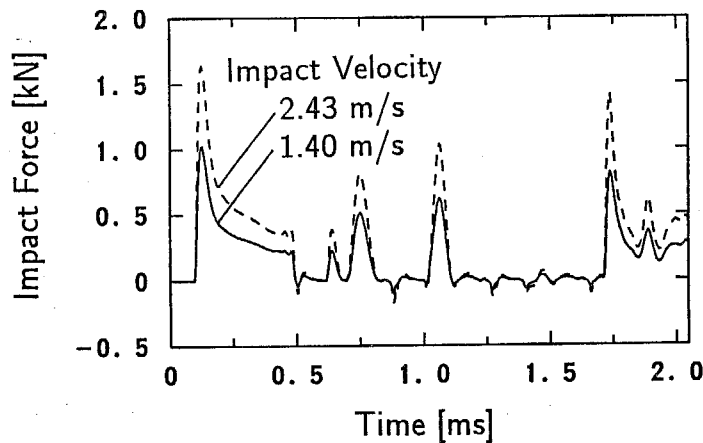
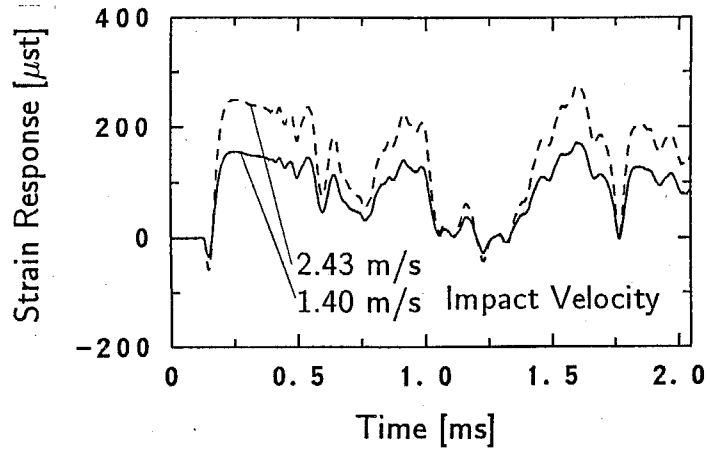


Figure 5.30: 較正実験における片持はりの衝撃力の測定結果

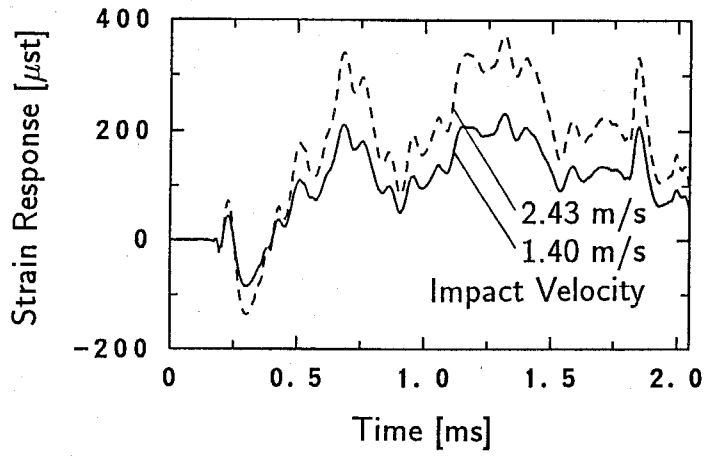
析を行うために、同じ条件で $k = 10$ 回の較正実験を行った。この較正実験の回数は、第4章の数値シミュレーションの結果に基づいて決定している。棒のひずみゲージによる衝撃力の測定結果の例を Fig.5.30 に、はりの3箇所ひずみゲージによるひずみ応答の測定結果の例をそれぞれ Fig.5.31(a) ~ (c) に示す。実線は衝撃体の落下高さを 100 mm (衝突速度 1.40 m/s) とした場合、破線は 300 mm (衝突速度 2.43 m/s) とした場合の結果である。

Fig.5.30 によれば、衝撃力波形には測定した時間範囲内において5回のピークがあり、棒とはりが5回衝突したことがわかる。これらのピークのうち、最初のピークの最大値が最も大きい。また、最初のピークの持続時間は約 $400 \mu\text{s}$ であり、衝撃体 J の1次の固有振動周期に等しい。なお、Fig.5.30 の衝撃力の測定結果には、前節までの較正実験の測定結果と同様に、真の衝撃力波形には存在しない周期 $400 \mu\text{s}$ の残留振動成分が重畳しているが、これまでと同様の理由により、Fig.5.30 の測定結果を較正実験における衝撃力の測定データとして採用した。

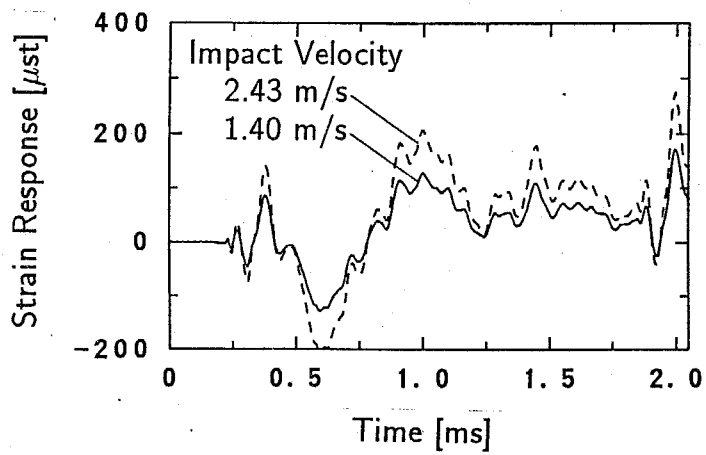
一方、Fig.5.31 によれば、ひずみ応答波形の立ち上がる時刻は、衝撃点からの距離 d が大きくなるにつれて次第に遅くなる。また、ひずみ応答波形は衝撃点からの距離 d によって大きく変化する。これは、はりを伝播するたわみ波が分散性を有することに起因している。



(a) $d = 95$ mm



(b) $d = 250$ mm



(c) $d = 400$ mm

Figure 5.31: 較正実験における片持はりのひずみ応答の測定結果

Fig.5.30 と 5.31 によれば、落下高さが異なる場合の衝撃力およびひずみ応答の波形は、大きさが異なるのみで、時間的な変動には差異がない。そこで、落下高さを 100 mm とした場合の較正実験の測定データをもとにして、伝達関数を同定した。本実験では、直接的な逆問題解析と最適逆システムによる逆問題解析の両方を行うために、次の二通りの方法で伝達関数を同定した。

方法 a: 1 回の較正実験の測定データから式 (2.5) に基づいて直接的に同定する方法。

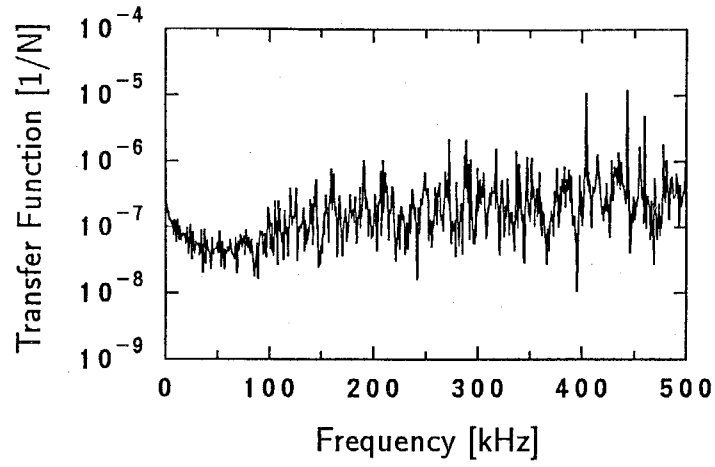
方法 b: 10 回の較正実験の測定データから、式 (2.22) に基づいて最適逆システムの伝達関数を同定し、その逆数を求める方法。

まず、方法 a による伝達関数の同定結果を Fig.5.32 に示す。Fig.5.32(a) ~ (c) は、それぞれ $d = 95, 250, 400$ mm の位置のひずみ応答と衝撃力との間の伝達関数の同定結果である。伝達関数の実部は周波数の偶関数、虚部は奇関数であるから、周波数 $\omega/2\pi$ が正の範囲のみを図示しており、縦軸は伝達関数の絶対値を表示している。この結果によれば、直接的方法によって同定した伝達関数は、幾つかの周波数において絶対値が誤差のために極端に小さな値になる。このような伝達関数の同定結果を用いて逆問題解析を行えば、小さな値による除算のために誤差が拡大され、衝撃力の推定誤差は大きくなることが予想される。

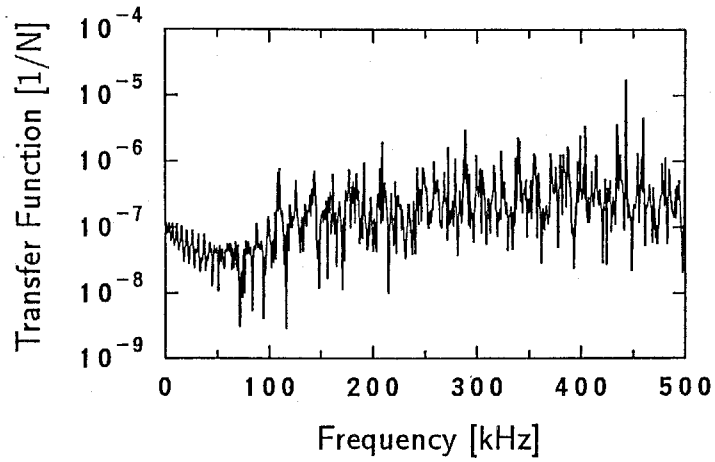
次に、方法 b による伝達関数の同定結果を Fig.5.33 に示す。この同定結果を、Fig.5.32 の方法 a による同定結果と比較すると、50 kHz 以下の周波数の範囲では両者はほぼ一致しているが、それ以上の周波数では方法 b による同定結果の方が絶対値が大きい。また、方法 b による同定結果では、どの周波数においても伝達関数の絶対値が極端に小さな値になることはない。このことから、方法 b によって同定した伝達関数を用いれば、方法 a によって同定した伝達関数を用いる場合と比較して、逆問題解析における誤差の拡大が抑制され、衝撃力の推定精度は高くなることが予想される。

5.4.3 棒による衝撃力の測定

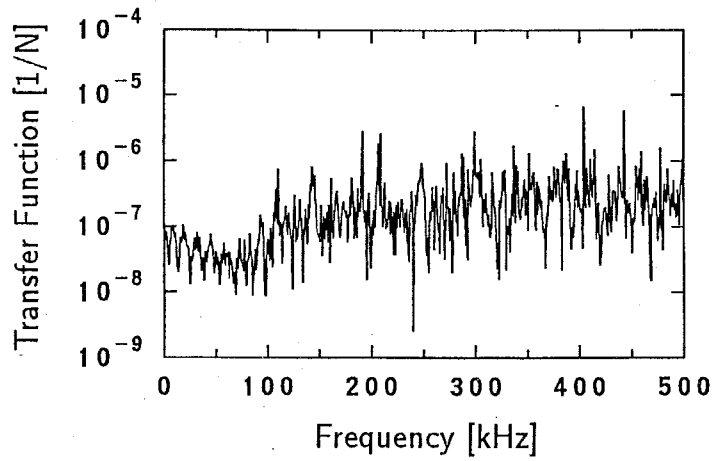
逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第一の適用例として、棒 (衝撃体 J) を高さ 300 mm から落下衝突させた場合の衝撃力を、Fig.5.31 に破線で示したはりのひずみ応答の測定データから推定した。なお、測定データの長さは $N = 2048$ ($T = 2048 \mu\text{s}$) とした。



(a) $d = 95$ mm

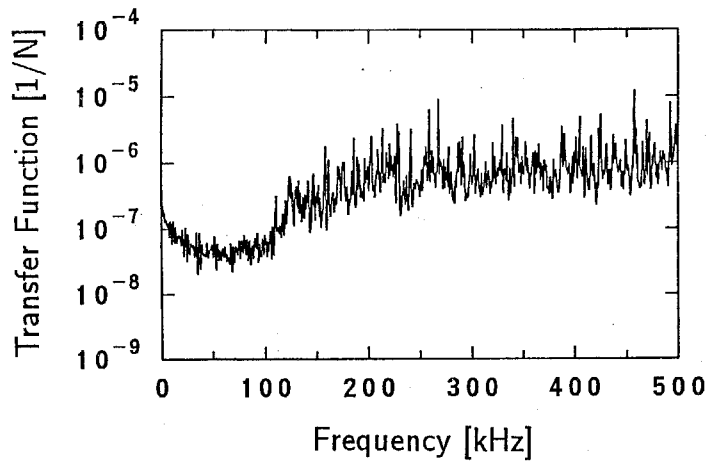


(b) $d = 250$ mm

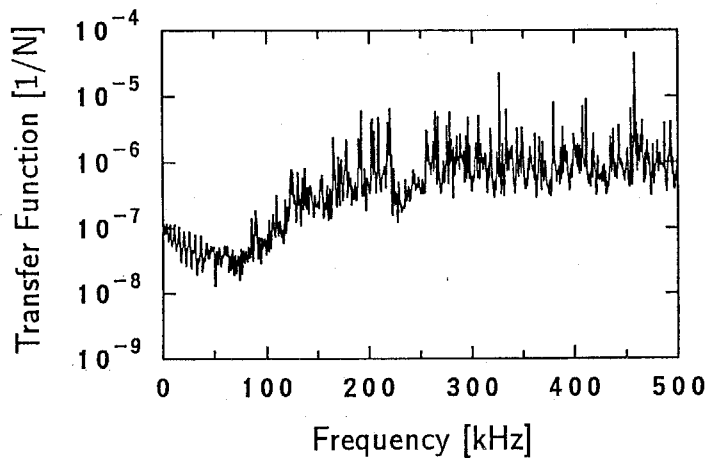


(c) $d = 400$ mm

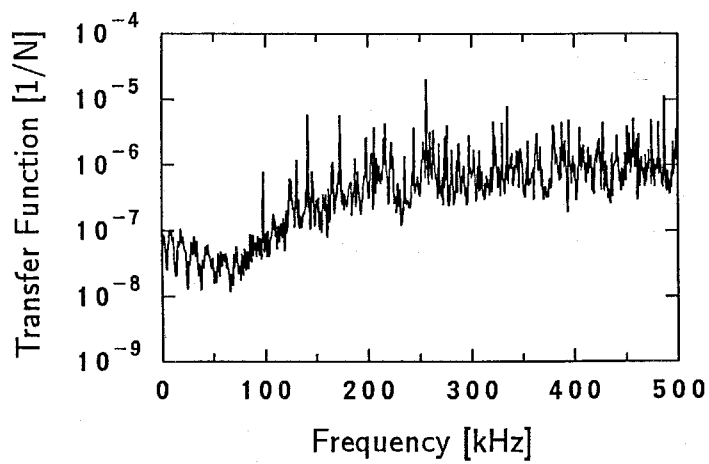
Figure 5.32: 方法 a による伝達関数の同定結果



(a) $d = 95$ mm



(b) $d = 250$ mm



(c) $d = 400$ mm

Figure 5.33: 方法 b による伝達関数の同定結果

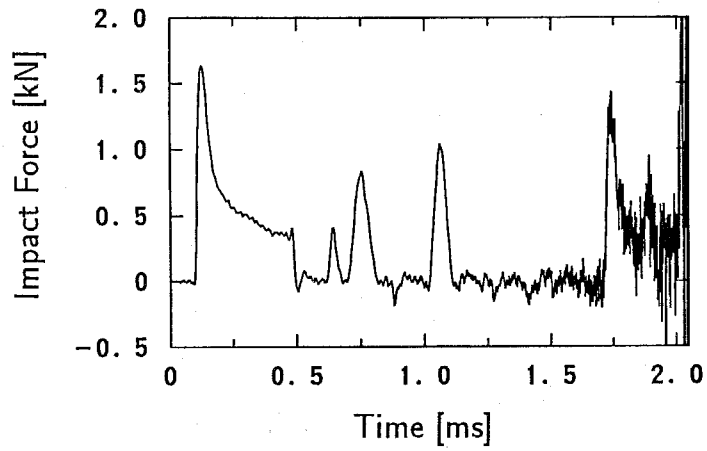
まず、方法 a により同定した伝達関数を用い、直接的な逆問題解析を行って衝撃力を推定した結果を Fig.5.34 に示す。Fig.5.34(a) ~ (c) は、それぞれ $d = 95, 250, 400$ mm の位置のひずみ応答から衝撃力を推定した結果である。この結果によれば、 $d = 95, 250, 400$ mm のいずれの場合にも、推定結果は Fig.5.30 に破線で示した直接測定の結果とほぼ一致する。しかし、推定結果には時間とともに指数関数的に拡大する雑音が重畳しており、後半部において波形が不明瞭である。

次に、方法 b により同定した伝達関数を用いて、最適逆システムによる逆問題解析を行って衝撃力を推定した結果を Fig.5.35 に示す。この結果によれば、 $d = 95, 250, 400$ mm のいずれの場合にも、Fig.5.34 の直接的な逆問題解析の結果に比べて推定結果に重畳する雑音の振幅が小さくなり、Fig.5.30 に破線で示した直接測定の結果により近い推定結果が得られている。このことから、最適逆システムによって逆問題解析を行えば、衝撃力の推定結果に重畳する雑音が低減され、推定精度が向上することが示された。

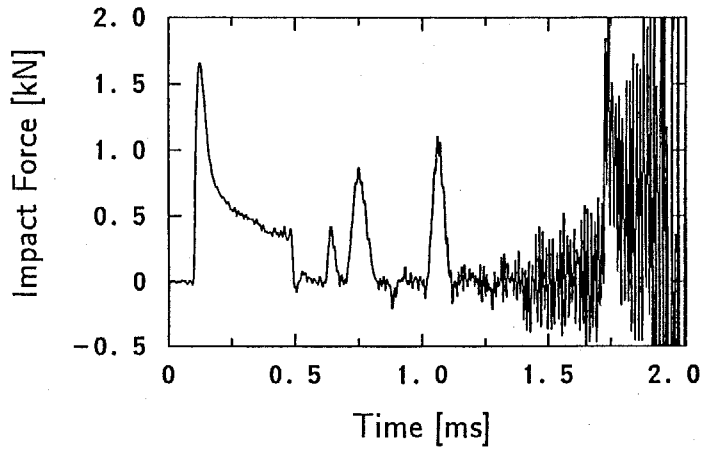
ところで、Fig.5.35(a) ~ (c) を互いに比較すると、ひずみ応答の測定位置が衝撃点から遠ざかるにつれて、推定結果の零点が時間とともにずれて発散する傾向が強くなっている。この原因としては、前節までの実験と同様に次のことが考えられる。

1. はりを伝播するたわみ波の分散性
2. はりの固定端における摩擦などの非線形的な現象

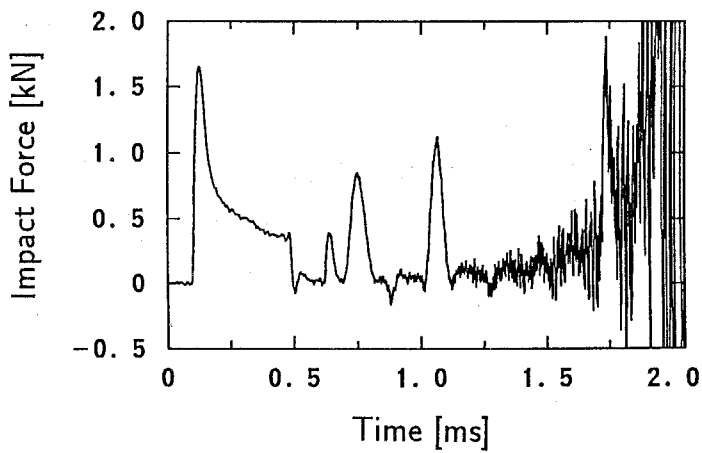
そこで、測定データの長さを 2 倍の $N = 4096$ ($T = 4096 \mu\text{s}$) として同様の逆問題解析を行い、衝撃力を推定した。Fig.5.36 に結果を示す。この結果によれば、 $N = 4096$ とした場合にも、ひずみ応答の測定位置が衝撃点から遠ざかるにつれて、推定結果の零点が時間とともにずれて発散する傾向が強くなっている。しかし、推定結果が発散し始める時刻は、Fig.5.35 に示した $N = 2048$ の場合に比較して遅くなっている。例えば、 $d = 400$ mm の場合では、 $N = 2048$ のときには時刻 $t = 0.5$ ms 付近から発散し始めているのに対し、 $N = 4096$ のときには時刻 $t = 2.5$ ms 付近から発散し始めている。すなわち、 $d = 400$ mm の場合には、推定結果が発散するのはデータの最後の約 1.5 ms の範囲であり、 N の値には無関係である。また、同様に $d = 250$ mm の場合には、推定結果が発散するのはデータの最後の約 0.5 ms の範囲であり、 N の値には無関係である。このことから、この



(a) $d = 95$ mm

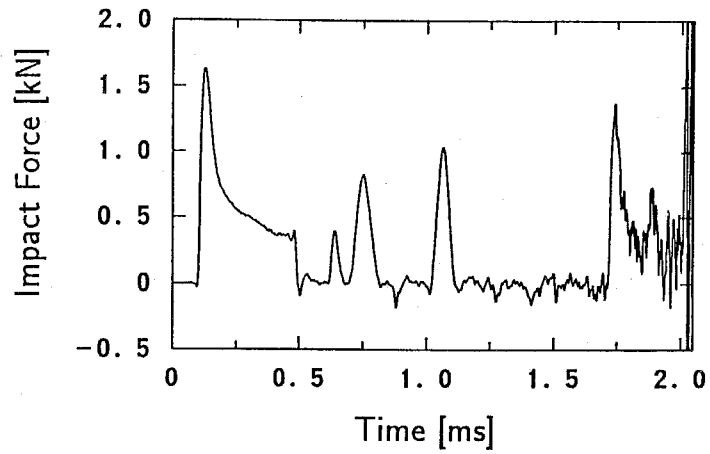


(b) $d = 250$ mm

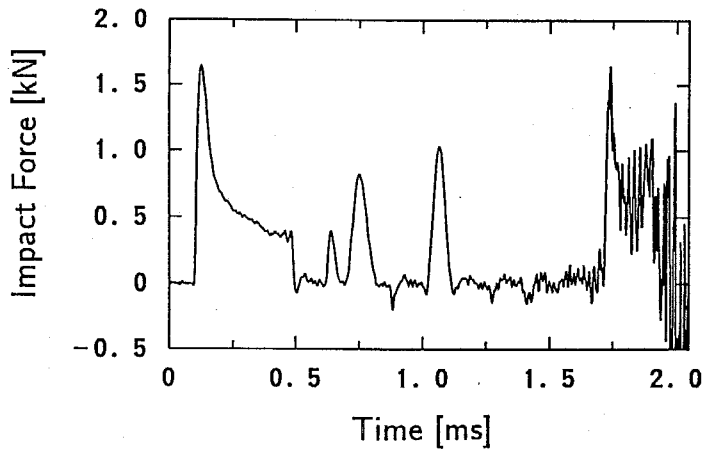


(c) $d = 400$ mm

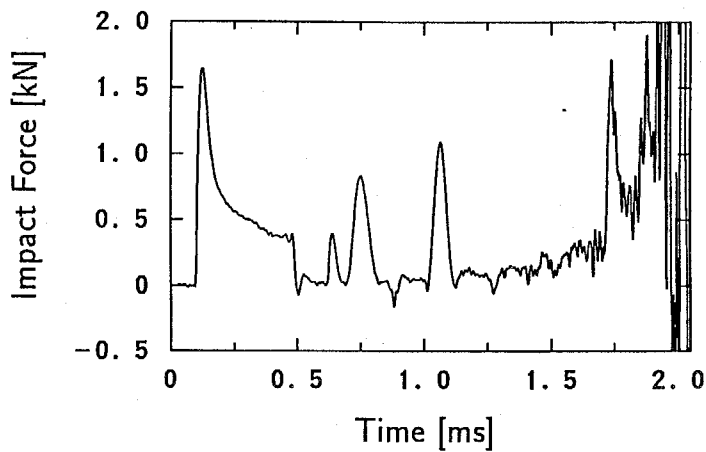
Figure 5.34: 直接的逆問題解析により推定した衝撃体 J による片持りの衝撃力



(a) $d = 95$ mm

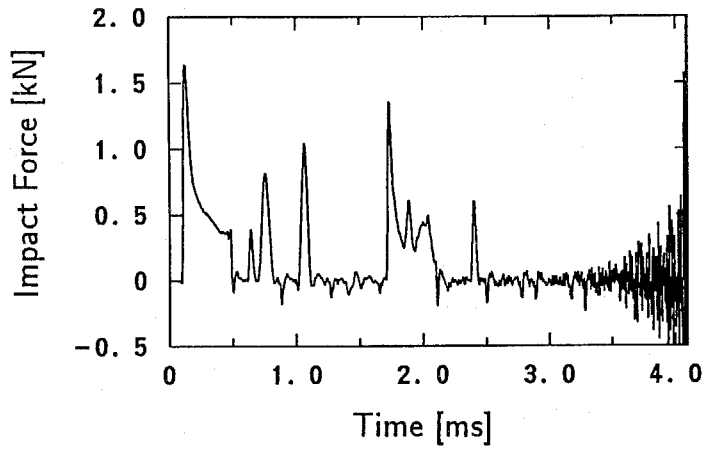


(b) $d = 250$ mm

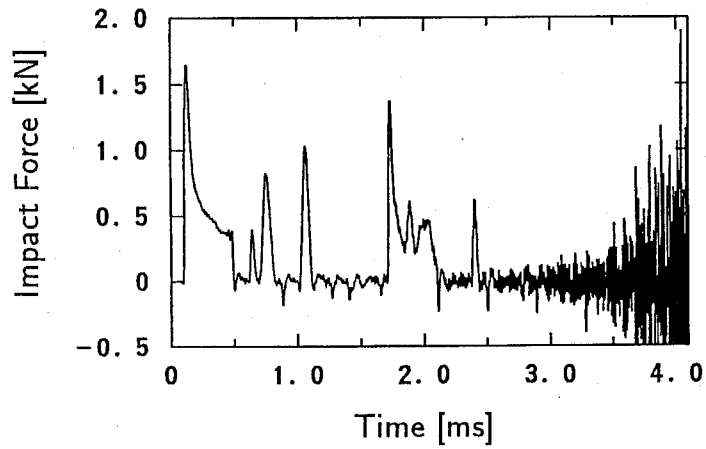


(c) $d = 400$ mm

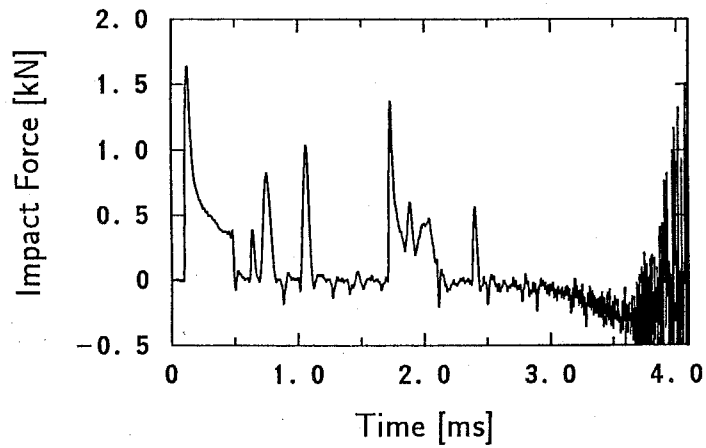
Figure 5.35: 最適逆システムにより推定した衝撃体 J による片持りの衝撃力 ($N = 2048$ の場合)



(a) $d = 95$ mm



(b) $d = 250$ mm



(c) $d = 400$ mm

Figure 5.36: 最適逆システムにより推定した衝撃体 J による片持りの衝撃力 ($N = 4096$ の場合)

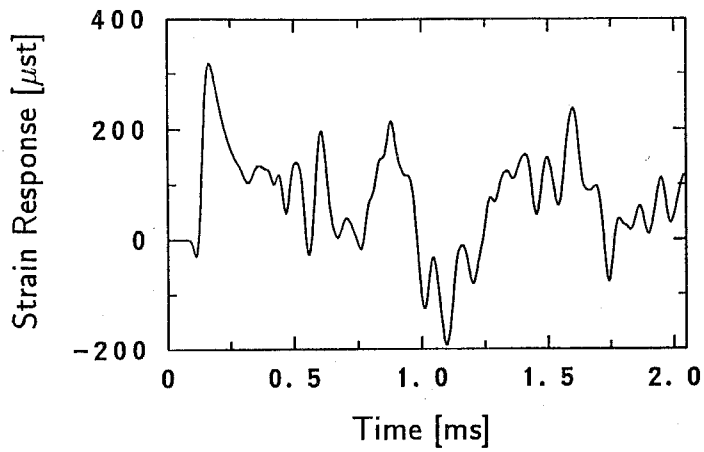
発散が生じる原因は、主にはりを伝播するたわみ波の分散性であることが知られる。すなわち、ひずみ応答の測定位置が衝撃点から遠ざかるにつれて、有限長さ T の測定データには衝撃力の低周波成分によるひずみ応答が含まれにくくなるために、衝撃力の低周波成分の推定精度が低下し、その結果、衝撃力波形が発散する傾向を生じたと考えられる。この問題を解決するためには、ひずみ応答の測定位置をできるだけ衝撃点に近づけること、あるいは、測定データの長さをできるだけ大きくすることが必要である。しかし、実際問題では、測定上の制約で、ひずみの測定位置を十分に衝撃点に近づけたり、測定データの長さを十分に大きくしたりすることが困難な場合もある。そのような場合には、多数の位置でのひずみ応答の測定データから最小二乗法によって衝撃力を推定するなどの対策も有効であると考えられる。本実験では、Fig.5.35(a) に示したように、 $d = 95$ mm の位置でひずみ応答を測定した場合には十分に精度の高い推定結果が得られたので、最小二乗法による対策については次節以降において論じる。

5.4.4 球による衝撃力の測定

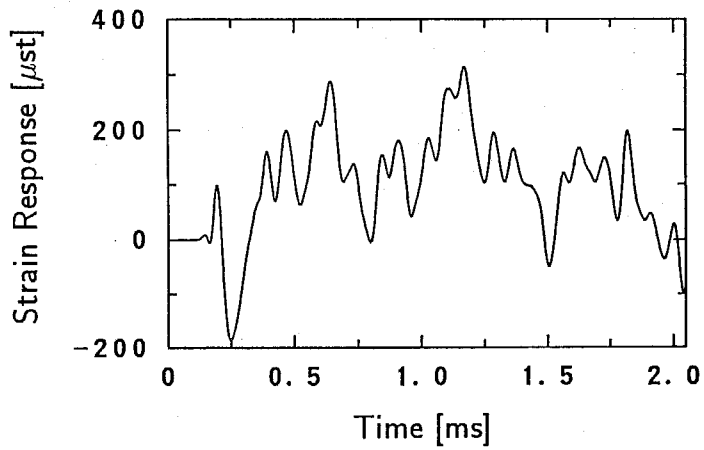
逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第二の適用例として、球（衝撃体 K ~ P）を落下衝突させた場合の衝撃力を、はりのひずみ応答から推定した。

軟鋼球（衝撃体 K）を高さ 300 mm から落下衝突させた場合（衝突速度 2.43 m/s）の、 $d = 95, 250, 400$ mm の位置におけるひずみ応答の測定結果をそれぞれ Fig.5.37(a) ~ (c) に示す。ひずみ応答波形は測定位置によって大きく異なり、波形が立ち上がる時刻は衝撃点からの距離が大きくなるにつれて遅くなっている。

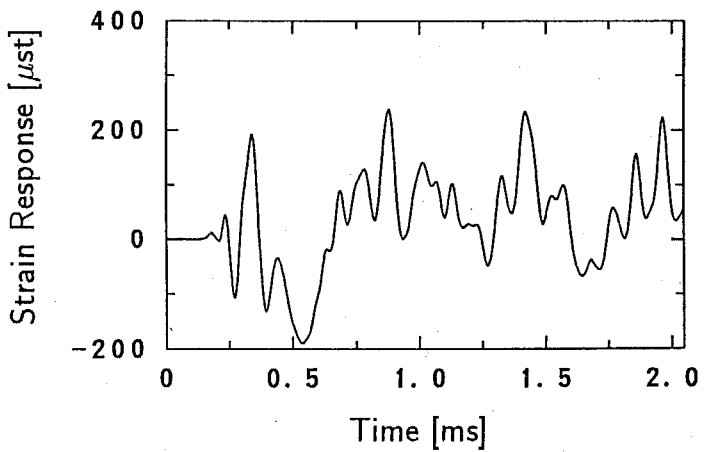
方法 b により同定した伝達関数を用いて、これらのひずみ応答の測定データから最適逆システムによる逆問題解析を行って、衝撃体 K による衝撃力を推定した。結果を Fig.5.38 に示す。この結果によれば、ひずみ応答の測定位置が衝撃点から遠ざかるにつれて、推定結果の後半部が発散する傾向が強くなる。これは、既に棒（衝撃体 J）による衝撃力の推定結果について論じたように、主にはりを伝播するたわみ波の分散性のために、衝撃力の低周波成分の推定精度が低下したことが原因であると考えられる。しかし、衝撃力波形の最初のピークの部分に注目すると、衝撃点からひずみ応答測定位置までの距離 d に関係なく、最大値も持続時間も同じ推定結果が得られている。したがって、少なくとも



(a) $d = 95$ mm

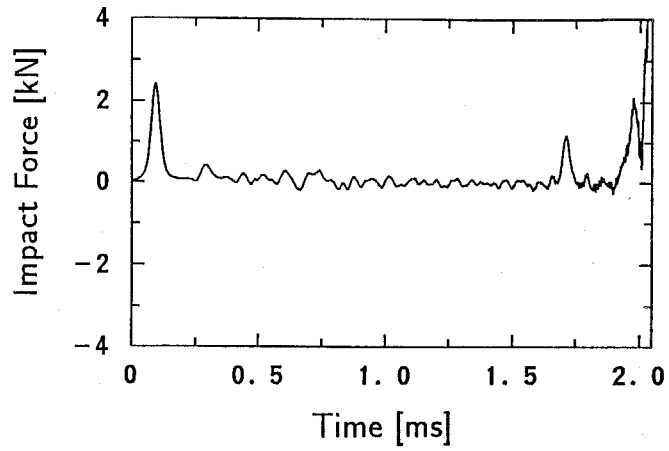


(b) $d = 250$ mm

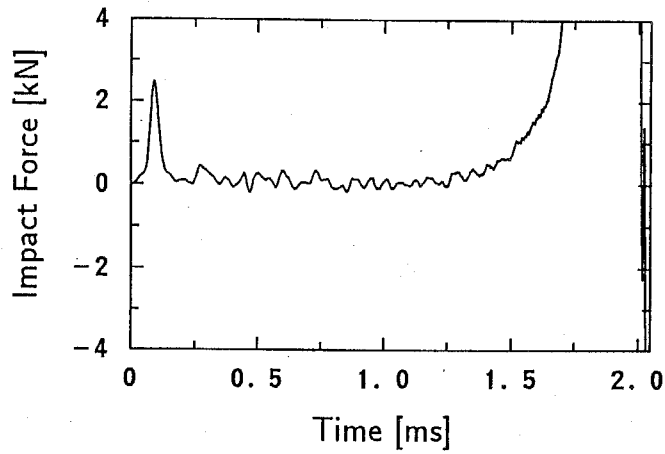


(c) $d = 400$ mm

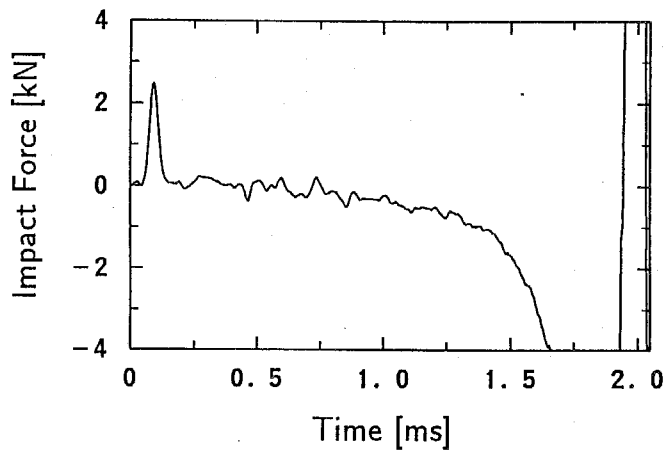
Figure 5.37: 衝撃体 K の衝突により片持はりに生じたひずみ応答の測定結果



(a) $d = 95$ mm



(b) $d = 250$ mm

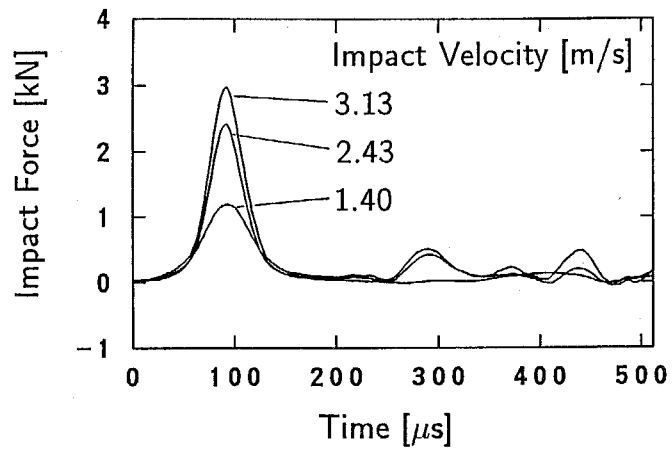


(c) $d = 400$ mm

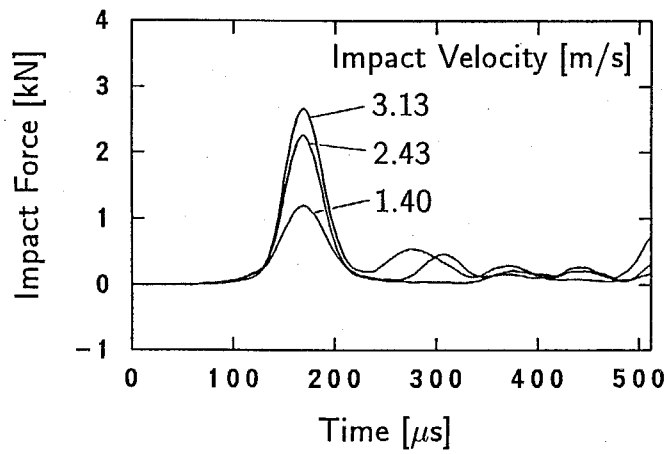
Figure 5.38: 衝撃体 K による片持りの衝撃力の推定結果

衝撃力波形の初期のピークの部分については、逆問題解析によって十分正確に衝撃力が推定されたと判断できる。

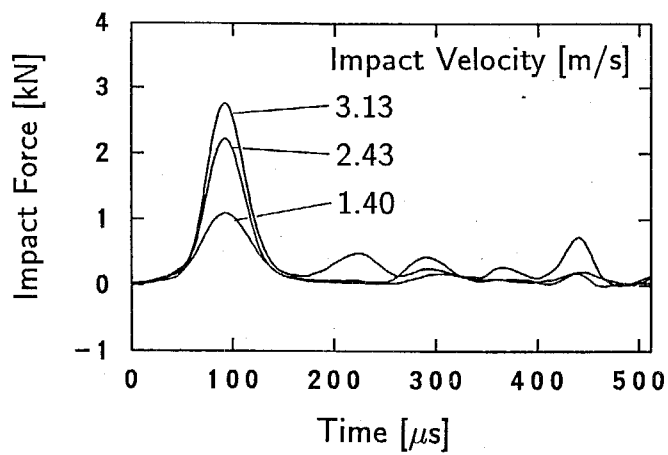
以上の結果に基づき、逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の応用例として、種々の材質の球による片持はりの衝撃力波形について調べた。衝撃体 K ~ P を高さ 100, 300, 500 mm からはりに落下衝突させ(このとき、衝突速度はそれぞれ 1.40, 2.43, 3.13 m/s), $d = 95$ mm の位置のひずみ応答の測定データから最適逆システムによる逆問題解析を行って、それぞれの衝撃力を推定した。これらの推定結果を Fig.5.39(a) ~ (f) に示す。これらの図では、衝撃力波形の初期のピークに注目するために、推定結果の $0 \leq t \leq T/4$ の部分のみを示している。また、落下高さ、すなわち、衝突速度による衝撃力波形の変化を明らかにするために、衝撃力が最大となる時刻が一致するように波形を時間軸方向に揃えて示している。この結果によれば、本実験における落下高さ、すなわち、衝突速度の範囲では、衝撃力の持続時間は衝突速度に関係なくそれぞれの衝撃体についてほぼ一定であるが、衝撃力の最大値は衝突速度が大きくなるにつれて大きくなる。衝撃力の最大値と衝突速度との関係をプロットしたグラフを Fig.5.40 に示す。Fig.5.40 によれば、いずれの衝撃体についても、衝撃力の最大値は衝突速度にほぼ比例する傾向が認められる。



(a) 鋼球 (衝撃体 K)

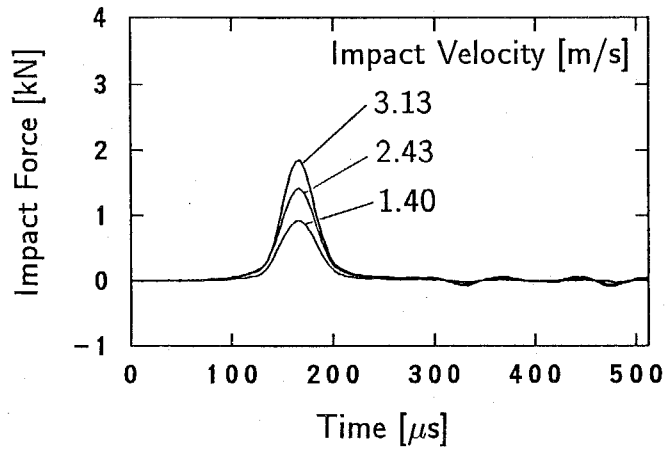


(b) 銅球 (衝撃体 L)

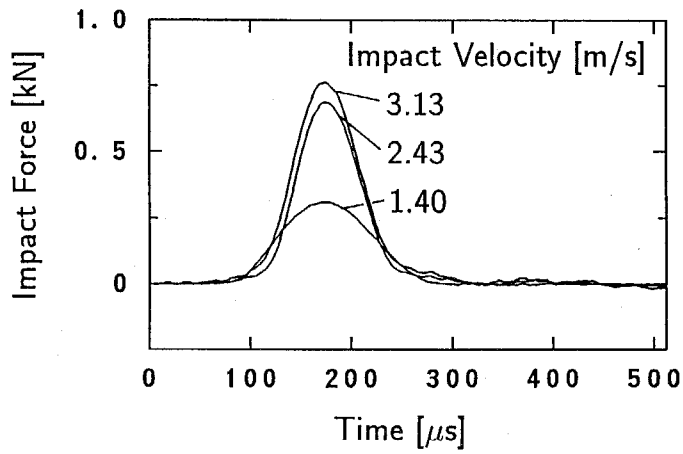


(c) 黄銅球 (衝撃体 M)

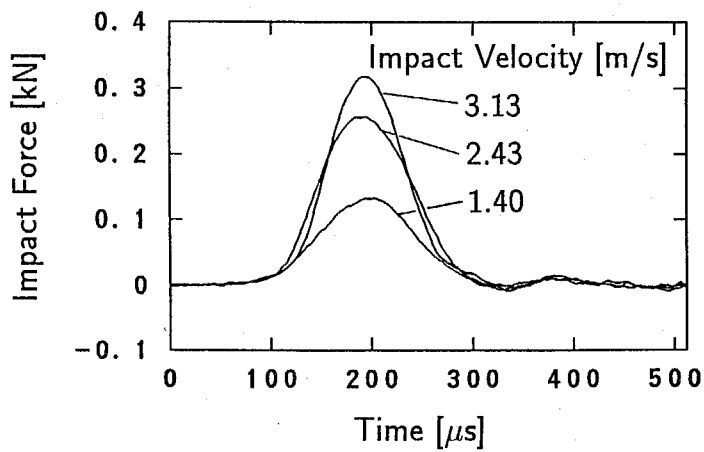
Figure 5.39: 各種の球による片持はりの衝撃力の推定結果



(d) アルミニウム球 (衝撃体 N)



(e) PMMA 球 (衝撃体 O)



(f) 木材球 (衝撃体 P)

Figure 5.39: 各種の球による片持はりの衝撃力の推定結果 (続き)

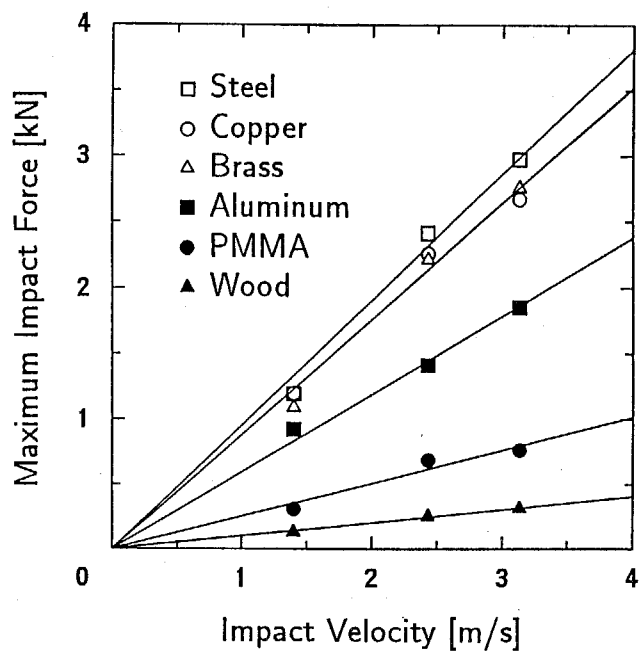


Figure 5.40: 各種の球による片持はりの最大衝撃力

Table 5.4: 衝撃体の材料の機械的性質 [19, 10]

材料	縦弾性係数 [GPa]	密度 [kg/m ³]	一次元縦波伝播速度 [m/s]
黄銅	98.1	8650	3370
PMMA	3	1200	1580

5.5 異方性平板に作用する衝撃力の測定

5.5.1 実験方法

異方性を有する平板の中央に衝撃体を衝突させる実験を行い、平板に生じるひずみの測定データから逆問題解析を行って衝撃力を推定した。

本実験では、母材にビニルエステル系エポキシ樹脂 (昭和高分子, リポキシ R-802), 強化繊維にガラスロービングクロス (日東紡績, WR570C-100CS) を 4 枚使用し, ハンドレイアップ法によって積層して, Fig.5.41 に示すようなガラス繊維強化プラスチック (GFRP) 平板を作成した. 平板の寸法は, 165 × 165 × 1.8 mm である. 平板は, Fig.5.42 に示すように, 水平に張ったポリプロピレン製のひもの上に載せて支持した. この場合, 平板を支持しているひもの剛性は平板の剛性に比べて十分小さいので, 平板は近似的に自由支持の状態にある. 衝撃体には次の棒および球を使用した.

- 衝撃体 Q: $\phi 10 \times 1000$ mm, 黄銅棒
- 衝撃体 R: $\phi 30$ mm, 16.8 g, PMMA 球

これらの衝撃体を円筒ガイドの内側を通して種々の高さから自由落下させて, 平板の中央に衝撃を与えた. なお, 棒 (衝撃体 Q) の衝撃端には, 平板との衝突の際の片当たりを防ぐために, R20 mm 程度の丸みをつけた. 衝撃体の材料の機械的性質を Table 5.4 に示す.

逆問題解析手法に基づく衝撃力の推定手順は次の通りである.

1. 平板を細長い棒で衝撃し, このときの衝撃力および平板のひずみ応答を測定する (較正実験).
2. 1 で得た測定データをもとに, 伝達関数を同定する.

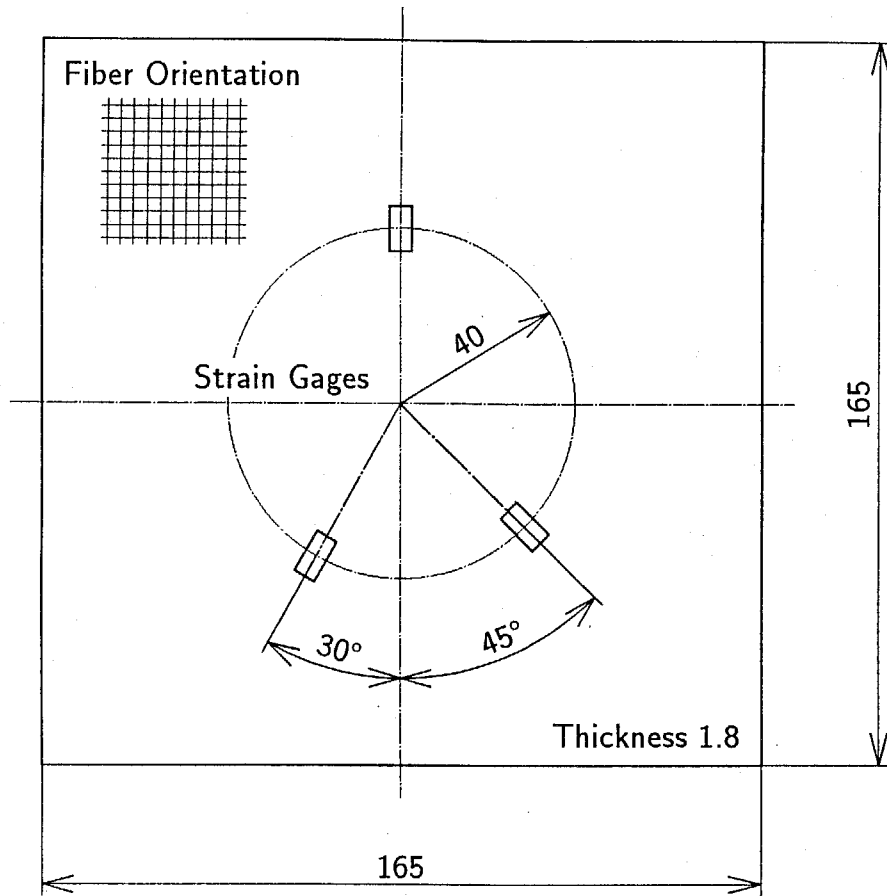


Figure 5.41: GFRP 平板

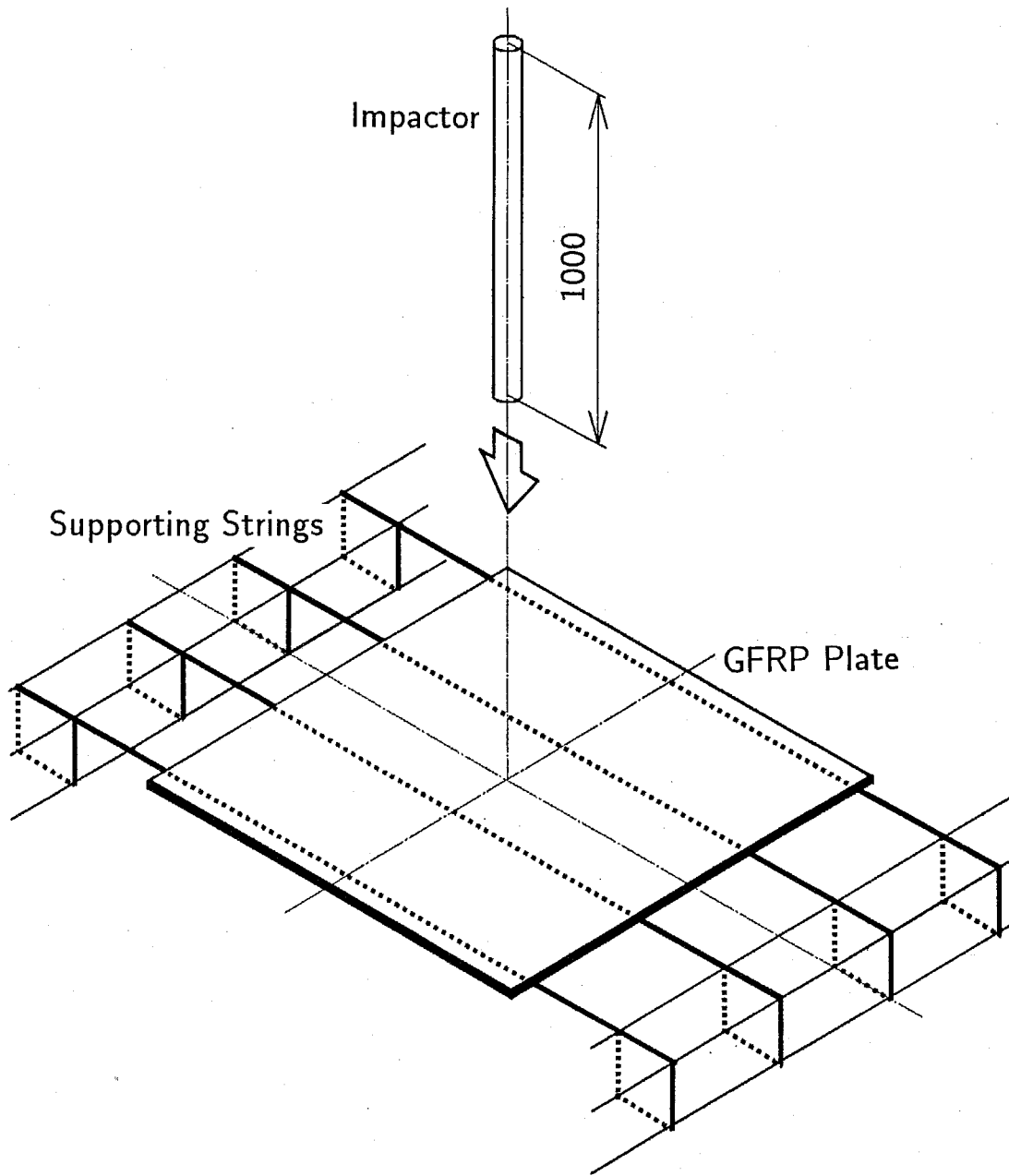


Figure 5.42: 平板の支持方法

3. 任意の衝撃体で平板を衝撃し、このときの平板のひずみ応答を測定する。
4. 2 で得た伝達関数と、3 で得たひずみ応答から衝撃力を推定する。

較正実験における衝撃力は、棒の衝撃端から 10 mm の位置にひずみゲージを接着して、前節までと同様の方法により測定した。一方、平板のひずみ応答は、Fig.5.41 に示すように、平板の上面で衝撃点から距離 $d = 40$ mm の位置において、 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ の 3 方向にひずみゲージを接着して測定した。

測定および解析処理に使用した装置の構成は、既に Fig.5.29 に示した通りである。ただし、GFRP 平板のひずみ応答測定には、プラスチック製複合材料用のひずみゲージ (共和電業, KFRP-2-120-C1-3) を使用した。このひずみゲージの主な仕様は次の通りである。

- 抵抗値 : 119.8 Ω
- ゲージ率: 1.97
- ゲージ長: 2 mm
- ゲージ幅: 1.2 mm

本実験における測定および解析処理には次の値を用いた。

- $\Delta t = 5$ [μs]
- $N = 2048$ ($T = 10.24$ [ms])
- $\gamma = 5/T$

5.5.2 較正実験

衝撃体 Q を高さ 50 mm から落下衝突させて較正実験を行った。このときの衝突速度は 0.99 m/s である。この衝突速度では、GFRP 平板の損傷は観察されなかった。本実験では、最適逆システムによる逆問題解析を行うために、同じ条件で $k = 10$ 回の較正実験を行った。この較正実験の回数は、第 4 章の数値シミュレーションの結果に基づいて決定している。棒のひずみゲージによる衝撃力の測定結果の例を Fig.5.43 に、平板の 3 箇所のひずみゲージによるひずみ応答の測定結果の例をそれぞれ Fig.5.44(a) ~ (c) に示す。

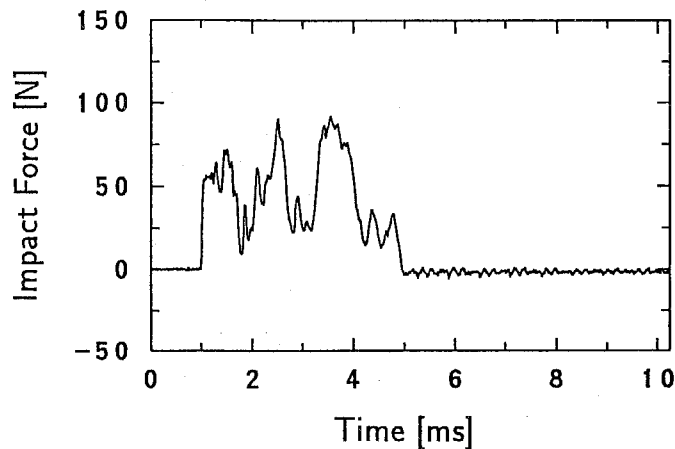


Figure 5.43: 較正実験における GFRP 平板の衝撃力の測定結果

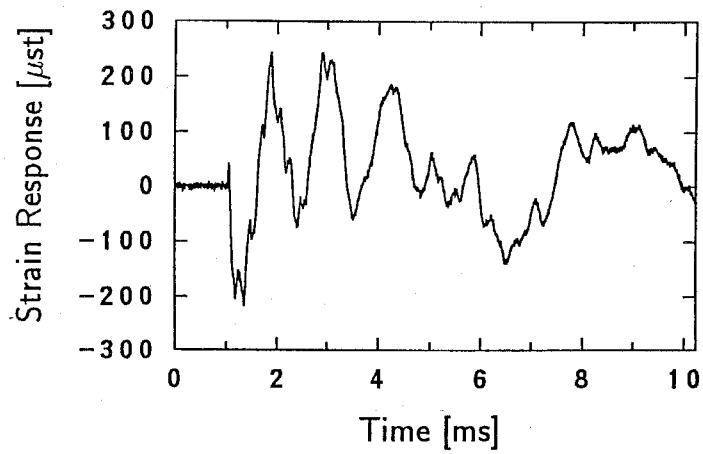
Fig.5.43 によれば，衝撃力波形は複雑な挙動を示すが，衝撃体 Q の 1 次の固有振動周期と等しい $600 \mu\text{s}$ の幅を有するピークが 3 回みられる．また，立ち上がり部分の波形は，周辺支持した軟鋼板に作用する衝撃力の波形 Fig.5.20 と類似している．

一方，Fig.5.44 によれば，ひずみ応答波形は平板の異方性のために測定方向によってそれぞれ異なる．特に， $\theta = 0^\circ$ 方向のひずみ応答波形は，他の 2 方向の波形とはピークが異なる．なお，これらのひずみ応答の測定データには，これまでに示してきた各種の測定データに比べて大きな雑音が重畳している．これは，本実験におけるひずみ応答の測定に使用したひずみゲージのゲージ率が，他の測定に使用した半導体ひずみゲージに比べて約 $1/60$ しかないために，測定に際して信号をより大きく増幅したためである．

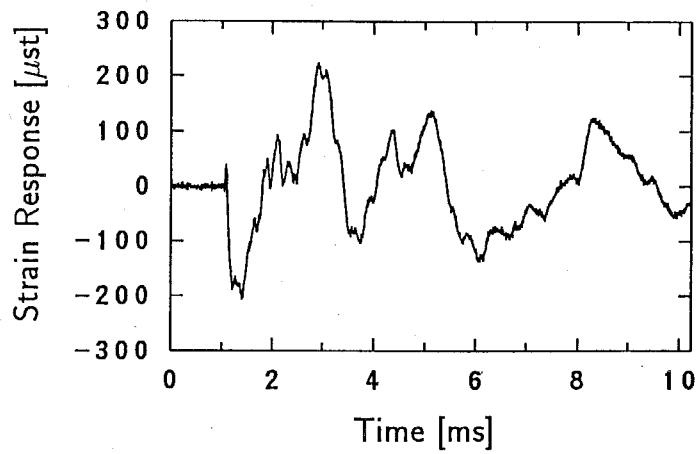
以上の較正実験の測定データをもとにして，伝達関数を同定した．なお，本実験においても，直接的な逆問題解析と最適逆システムによる逆問題解析の両方を行うために，次の二通りの方法で伝達関数を同定した．

方法 a: 1 回の較正実験の測定データから式 (2.5) に基づいて直接的に同定する方法．

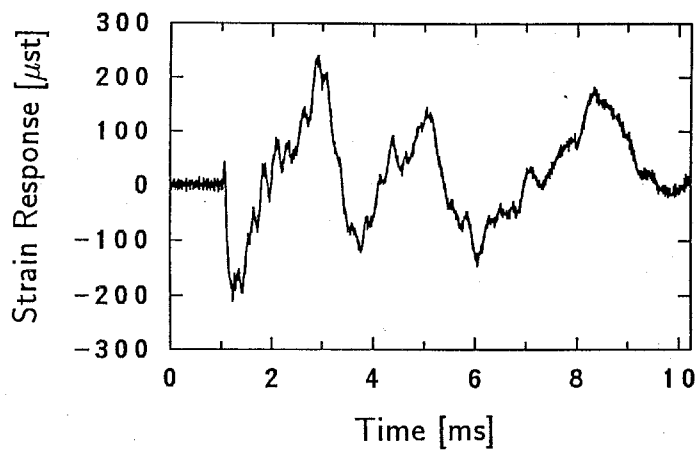
方法 b: 10 回の較正実験の測定データから，式 (2.22) に基づいて最適逆システムの伝達関数を同定し，その逆数を求める方法．



(a) $\theta = 0^\circ$



(b) $\theta = 30^\circ$



(c) $\theta = 45^\circ$

Figure 5.44: 較正実験における GFRP 平板のひずみ応答の測定結果

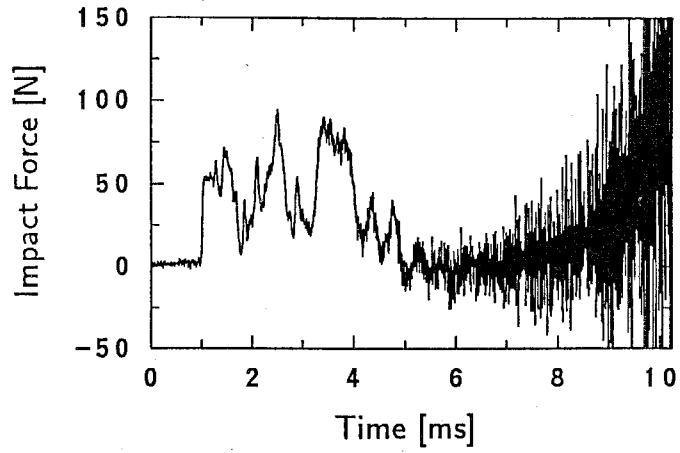
5.5.3 棒による衝撃力の測定

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第一の適用例として、較正実験と同じ条件の下で棒(衝撃体 Q)による衝撃を行い、そのときの平板のひずみ応答の測定データから衝撃力を推定した。

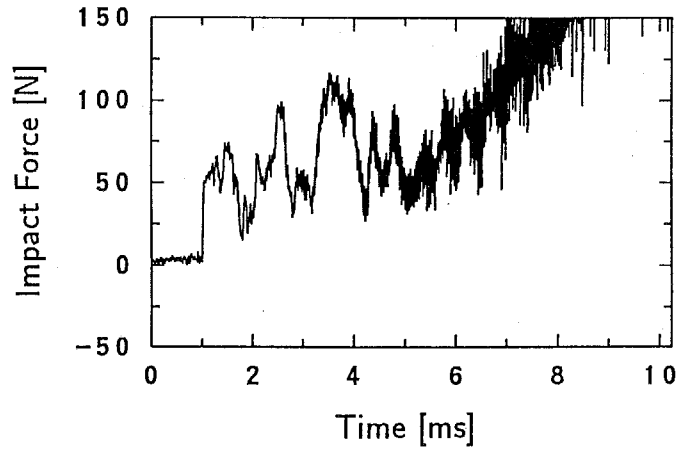
まず、方法 a により同定した伝達関数を用い、直接的な逆問題解析を行って衝撃力を推定した結果を Fig.5.45 に示す。Fig.5.45(a) ~ (c) は、それぞれ $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ の 3 方向のひずみ応答から衝撃力を推定した結果である。この結果によれば、 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ のいずれの場合にも、時間とともに指数関数的に拡大する雑音が重畳し、また、波形の零点がずれて発散しており、Fig.5.43 に示した直接測定の結果と一致する推定結果は得られていない。

次に、方法 b により同定した伝達関数を用いて、最適逆システムによる逆問題解析を行って衝撃力を推定した結果を Fig.5.46 に示す。この結果によれば、 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ のいずれの場合にも、Fig.5.45 に示した直接的な逆問題解析の結果に比べて推定結果に重畳する雑音の振幅が小さくなり、Fig.5.43 に示した直接測定の結果により近い推定結果が得られている。このことから、最適逆システムによって逆問題解析を行えば、衝撃力の推定結果に重畳する雑音が低減され、推定精度が向上することが示された。しかし、 $\theta = 30^\circ, 45^\circ$ の場合には、波形の零点が時間とともにずれて発散しており、未だ満足できる推定結果は得られていない。このように推定結果が発散する傾向は、前節の Fig.5.35 に示した片持りの衝撃力の推定結果と同様であり、平板を伝播するたわみ波の分散性が原因であると推測される。

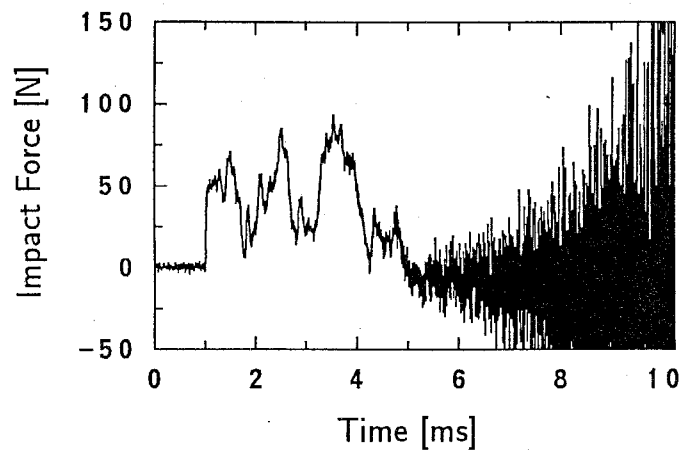
そこで、特異値分解を利用した最小二乗法による逆問題解析手法を適用し、推定精度の改善を試みた。 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ の方向のひずみ応答をそれぞれ $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ とし、衝撃力を $f_1(t)$ として、式(2.49)の最小二乗解を計算して、衝撃力を推定した。なお、行列 H の各成分 $H_{ji}(\omega)$ 、 $j = 1, 2, 3$ には、先に同定した最適逆システムの伝達関数の逆数を用いた。この方法による衝撃力の推定結果を Fig.5.47 に示す。この結果は、Fig.5.46(b), (c) と比較すると、波形の零点が時間とともにずれて発散する傾向が小さくなっており、Fig.5.43 に示した直接測定の結果とよく一致している。また、Fig.5.46(a) と比較しても、重畳する雑音がさらに小さくなっている。このことから、特異値分解を利用した最小二



(a) $\theta = 0^\circ$

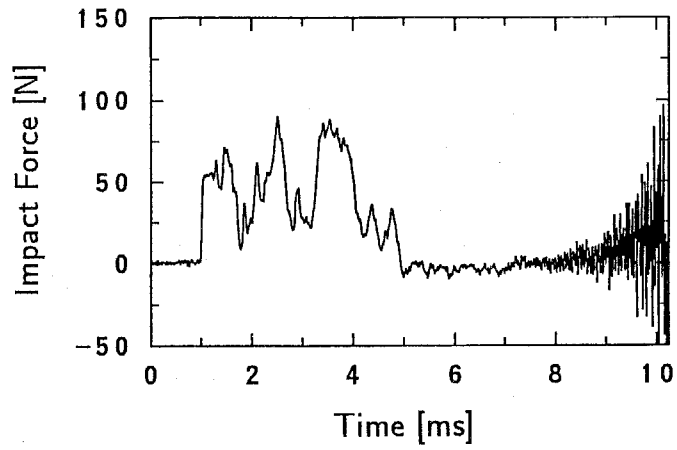


(b) $\theta = 30^\circ$

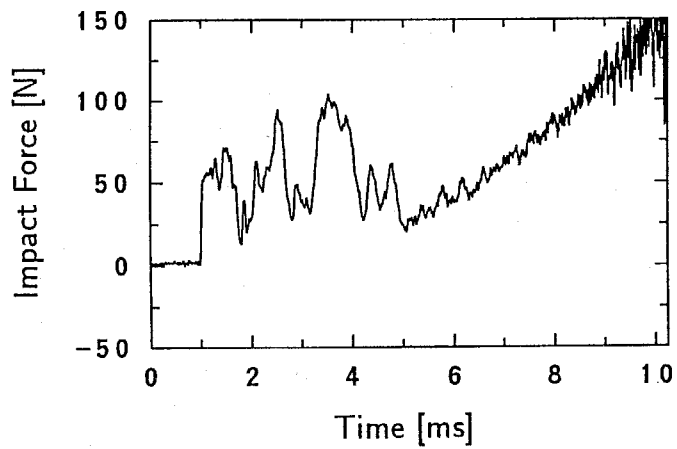


(c) $\theta = 45^\circ$

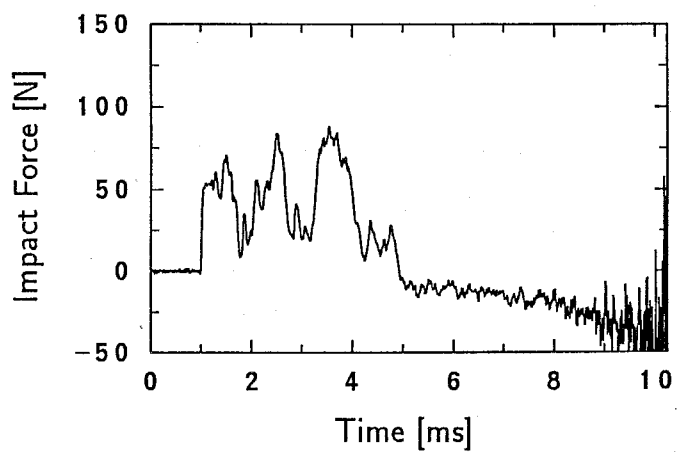
Figure 5.45: 直接的逆問題解析により推定した衝撃体 Q による GFRP 平板の衝撃力



(a) $\theta = 0^\circ$



(b) $\theta = 30^\circ$



(c) $\theta = 45^\circ$

Figure 5.46: 最適逆システムにより推定した衝撃体 Q による GFRP 平板の衝撃力

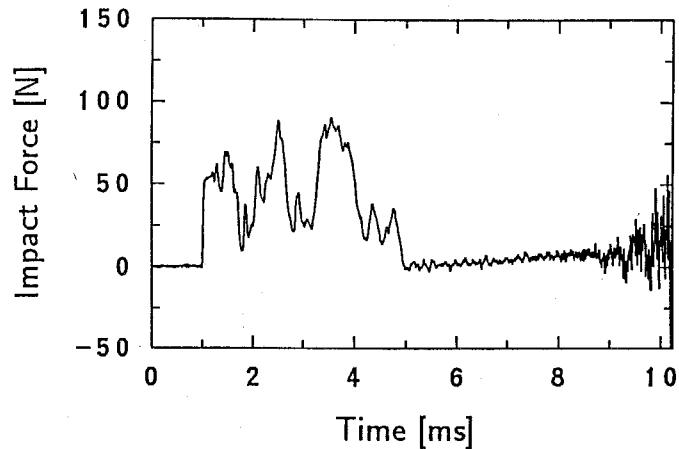


Figure 5.47: 特異値分解を利用した最小二乗法により推定した衝撃体 Q による GFRP 平板の衝撃力

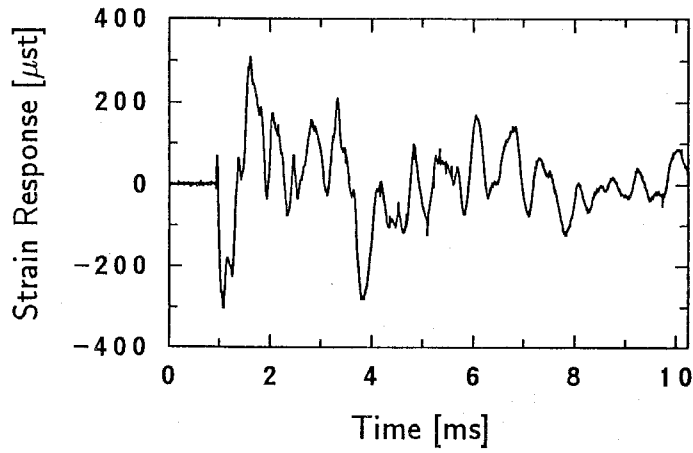
乗法は、逆問題解析による衝撃力の推定精度を向上させるのに有効であることが検証された。

なお、Fig.5.47 の推定結果は、Fig.5.46(a) の推定結果よりもわずかではあるが波形の零点がずれる傾向が強い。したがって、本実験では、 $\theta = 0^\circ$ のみのひずみ応答から衝撃力を推定すれば十分であることが結果的に示されている。しかし、任意形状の物体の衝撃力の測定に逆問題解析手法を適用する場合には、衝撃力の推定精度が最も高くなるようにひずみ応答の測定位置を定めることは困難である。特異値分解を利用した最小二乗法による逆問題解析は、そのような測定位置を定めなくとも、多数の位置でひずみ応答を測定することにより、衝撃力の推定精度の向上を図ることができる点で有利である。

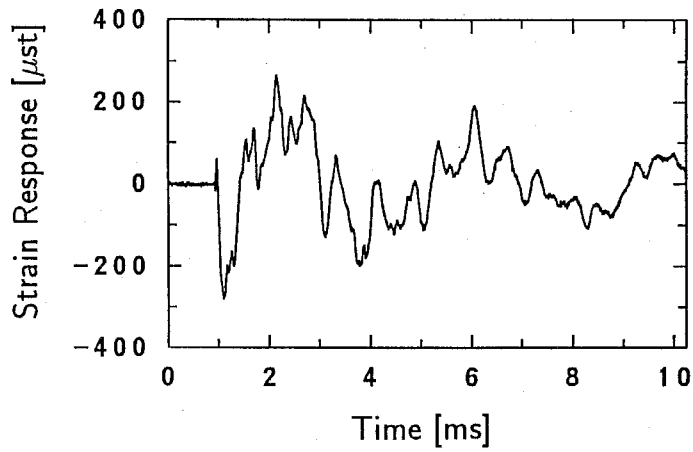
5.5.4 球による衝撃力の測定

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第二の適用例として、球（衝撃体 R）を落下衝突させた場合の衝撃力を、平板のひずみ応答から推定した。

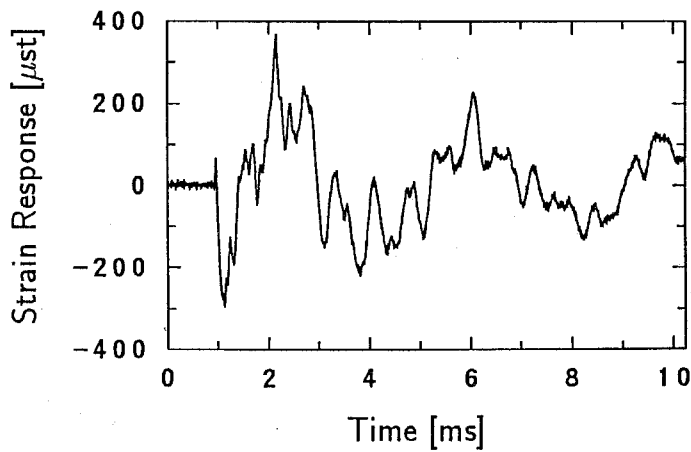
PMMA 球（衝撃体 R）を高さ 150 mm から落下衝突させた場合（衝突速度 1.72 m/s）の、 $\theta = 0^\circ$, 30° , 45° の方向のひずみ応答の測定結果をそれぞれ Fig.5.48(a) ~ (c) に示す。球による衝撃の場合にも、平板の異方性のためにひずみ応答波形は測定方向によって著しく異なることがわかる。



(a) $\theta = 0^\circ$



(b) $\theta = 30^\circ$

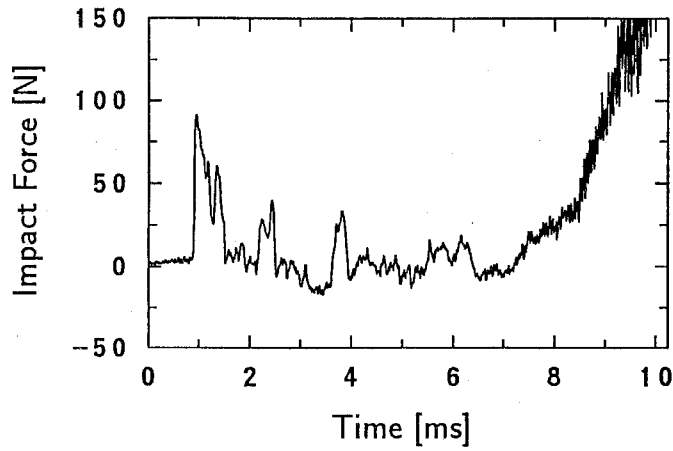


(c) $\theta = 45^\circ$

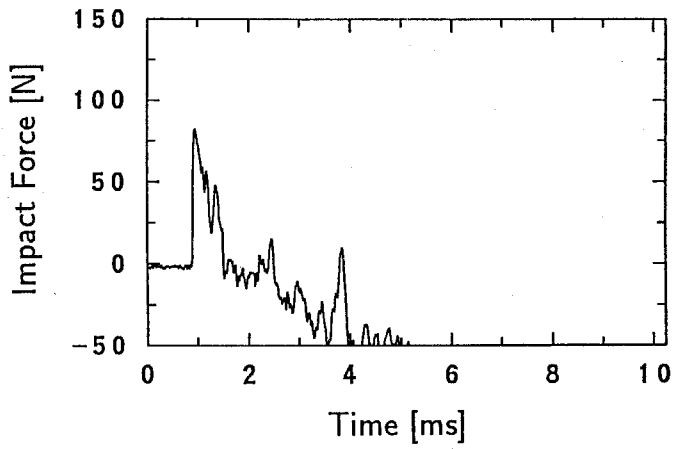
Figure 5.48: 衝撃体 R の衝突により GFRP 平板に生じたひずみ応答の測定結果

方法bにより同定した伝達関数を用いて、3方向のひずみ応答のそれぞれから最適逆システムによる逆問題解析を行って、衝撃体Rによる衝撃力を推定した。結果を Fig.5.49 に示す。この結果によれば、どの方向のひずみ応答から衝撃力を推定した場合にも、推定結果は零点が不安定であり、時間とともに発散する傾向が強い。このような発散が生じるのは、既に説明したように、平板を伝播するたわみ波が分散性を有することが主な原因であると推測される。

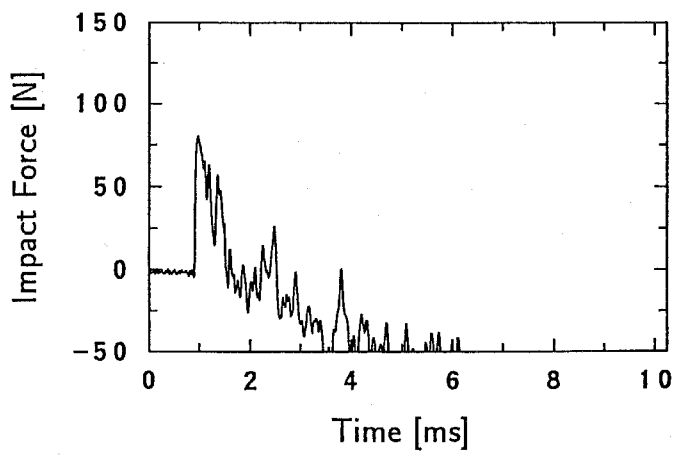
次に、特異値分解を利用した最小二乗法による逆問題解析手法を適用し、3方向のひずみ応答のすべてから衝撃力を推定した。結果を Fig.5.50 に示す。この結果によれば、本実験で解析処理を行った時間範囲では、球と平板は3回ないし4回衝突しており、そのうちの最初の衝突による衝撃力が最も大きいことがわかる。しかし、特異値分解を利用した最小二乗法を適用したのにもかかわらず、衝撃力波形の推定結果の零点がずれて時間とともに発散する傾向は改善されておらず、Fig.5.49(a)の $\theta = 0^\circ$ のひずみ応答のみから推定した結果とほぼ同程度の精度しか得られていない。衝撃力の推定精度を高めるためには、ひずみ応答の測定位置を衝撃点に近づけたり、より多くの位置でひずみ応答を測定したりするなどの対策が必要であると考えられる。



(a) $\theta = 0^\circ$



(b) $\theta = 30^\circ$



(c) $\theta = 45^\circ$

Figure 5.49: 最適逆システムにより推定した衝撃体 R による GFRP 平板の衝撃力

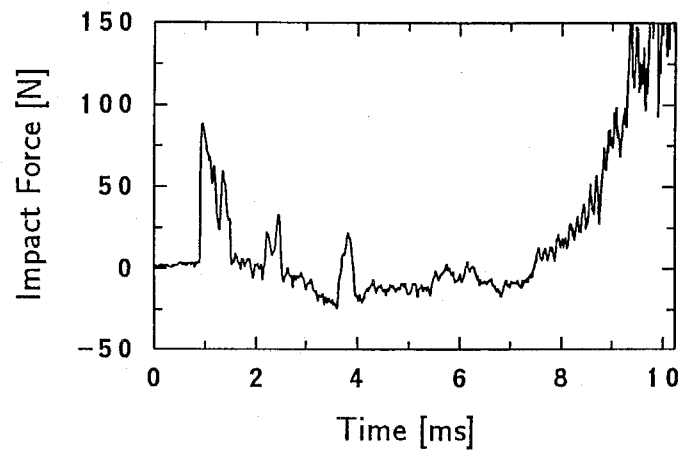


Figure 5.50: 特異値分解を利用した最小二乗法により推定した衝撃体 R による GFRP 平板の衝撃力

Table 5.5: はりおよび衝撃体の材料の機械的性質 [19]

材料	縦弾性係数 [GPa]	密度 [kg/m ³]	一次元縦波伝播速度 [m/s]
軟鋼	206	7860	5120
黄銅	98.1	8650	3370

5.6 はりに作用する二次元的衝撃力の測定

5.6.1 実験方法

Fig.5.51 に示すように、両端支持はりのスパン中央に、はりの軸に垂直な面内の任意の方向から衝撃体を衝突させる実験を行い、はりに生じるひずみの測定データから逆問題解析を行って、衝撃力の大きさと方向を推定した。

本実験に使用したはりは、直径 20 mm、長さ 2000 mm の円形断面の黄銅棒を、スパンが 1500 mm となるように両端支持したものである。支持点では、はりを上下から直径 12 mm のボルトではさみつけて、衝撃の反動ではりが支持点から跳ね上がらないように回転自由支持した。

衝撃体は、円筒ガイドの内側を通して種々の高さから自由落下させ、はりの中央に衝突させた。衝撃の方向を変える場合には、はりを所定の角度だけ軸回りに回転し、はりの衝撃点が常にはりの上側になるようにした。使用した衝撃体は次の 2 種類である。

- 衝撃体 S: $\phi 10 \times 500$ mm, 軟鋼棒
- 衝撃体 T: $\phi 25$ mm, 鋼球

なお、衝撃体 S の衝撃端には、はりとの衝突の際の片当たりを防ぐために、R20 mm 程度の丸みをつけた。はりおよび衝撃体の材料の機械的性質を Table 5.5 に示す。

はりのひずみ応答は、衝撃点から 100 mm 離れた側面の 3 箇所において、Fig.5.51 に示すように、はりの軸方向にひずみゲージを接着して測定した。Fig.5.52 は、はりを軸方向から見た場合の、ひずみ応答の測定箇所の位置関係を表している。本実験では、衝撃力の方向成分 $f_1(t)$, $f_2(t)$, および、ひずみ応答の成分 $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ を Fig.5.52 に示すように定義した。

逆問題解析手法に基づく衝撃力の推定手順は次の通りである。

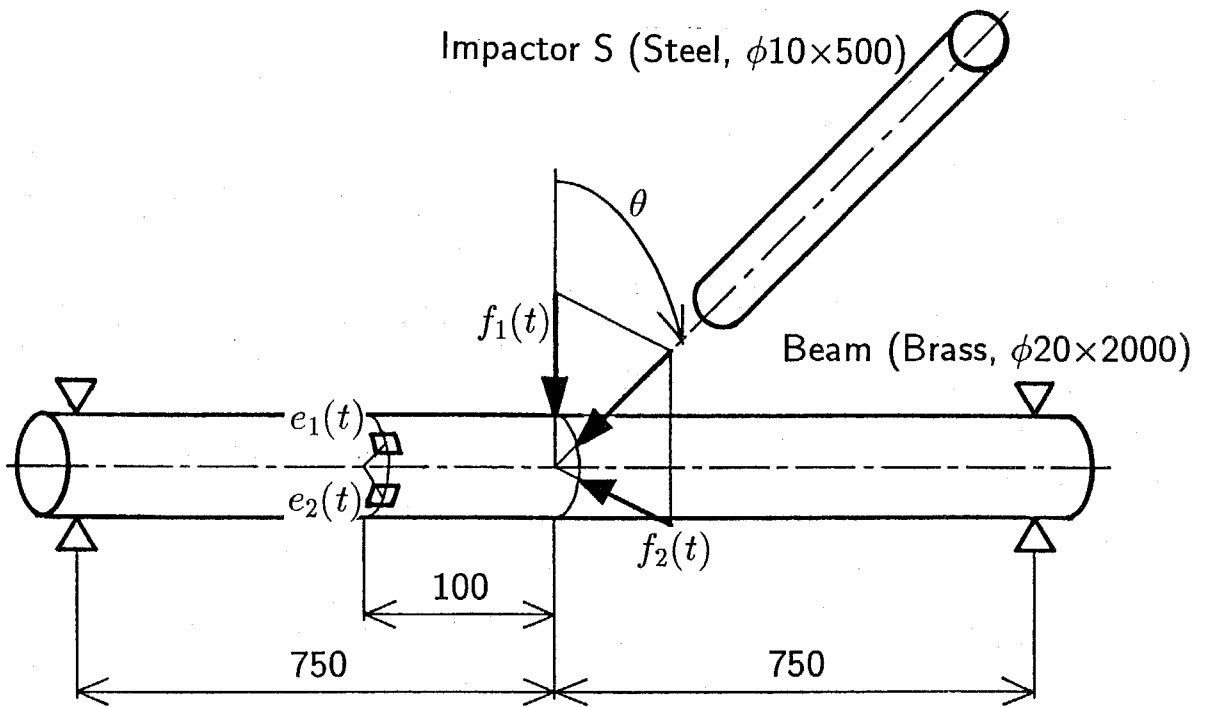


Figure 5.51: 任意方向からの両端支持はりの衝撃

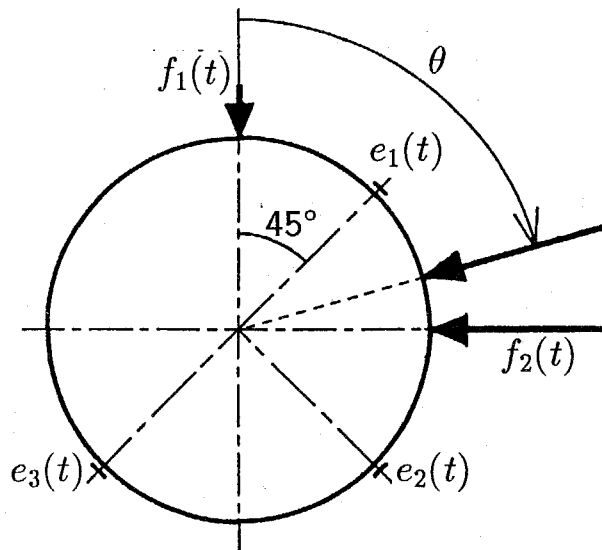


Figure 5.52: 衝撃力の方向とひずみ応答の測定位置の関係

1. $i = 1$ の方向から衝撃体 S を衝突させ、このときの衝撃力 $f_1(t)$ およびはりのひずみ応答 $e_{j1}(t)$, ($j = 1, 2, 3$) を測定する (較正実験).
2. 1 で得た測定データをもとに、伝達関数 $H_{j1}(\omega)$, ($j = 1, 2, 3$) を同定する.
3. $i = 2$ の方向から衝撃体 S を衝突させ、このときの衝撃力 $f_2(t)$ およびはりのひずみ応答 $e_{j2}(t)$, ($j = 1, 2, 3$) を測定する (較正実験).
4. 3 で得た測定データをもとに、伝達関数 $H_{j2}(\omega)$, ($j = 1, 2, 3$) を同定する.
5. 任意の方向 θ から衝撃体 S または衝撃体 T を衝突させ、このときのはりのひずみ応答 $e_j(t)$, ($j = 1, 2, 3$) を測定する.
6. 2, 4 で同定した伝達関数を用いて、5 で測定したひずみ応答から逆問題解析を行って衝撃力の各方向成分 $f_i(t)$, ($i = 1, 2$) を推定し、さらに、衝撃力の大きさと方向の時間的な変化を求める.

本実験では最適逆システムによる逆問題解析を適用するために、較正実験を 10 回行って得られた 10 組の衝撃力とひずみ応答の測定データから式 (2.22) に基づいて最適逆システムの伝達関数を同定し、その逆数を求めて伝達関数 $H_{ji}(\omega)$ とした.

較正実験における衝撃力は、衝撃体 S の衝撃端から 10 mm の位置にひずみゲージを接着してひずみ応答を測定し、逆問題解析を行って衝撃体 S の衝撃端に作用する衝撃力を推定する方法により測定した. この逆問題解析に使用するための伝達関数は、Fig.5.53 に示すように、衝撃体 S と同径、同材質の棒 (長さ 1 m) との縦衝撃実験を行って同定した. 一次元波動伝播理論に従えば、衝撃体 S を別の棒 (これを衝撃体 U とする) に衝突させたときの衝撃力波形、応力波の伝播、および、ひずみ応答は Fig.5.53 に示すようになる. Fig.5.53 より明らかなように、衝撃体 U の衝撃端から 250 mm 離れた位置におけるひずみ波形の初期の部分は、衝撃端に作用する衝撃力波形を時間的にずらしたものに等しいので、この位置にひずみゲージを接着すれば衝撃体 S の衝撃端に作用する衝撃力が測定できる. このようにして測定した衝撃力と、衝撃体 S のひずみゲージにより測定したひずみ応答とを用いれば、較正実験における衝撃力を推定するための伝達関数は同定できる. 本実験では、このような棒の縦衝撃実験を 10 回行い、その測定データから式 (2.22)

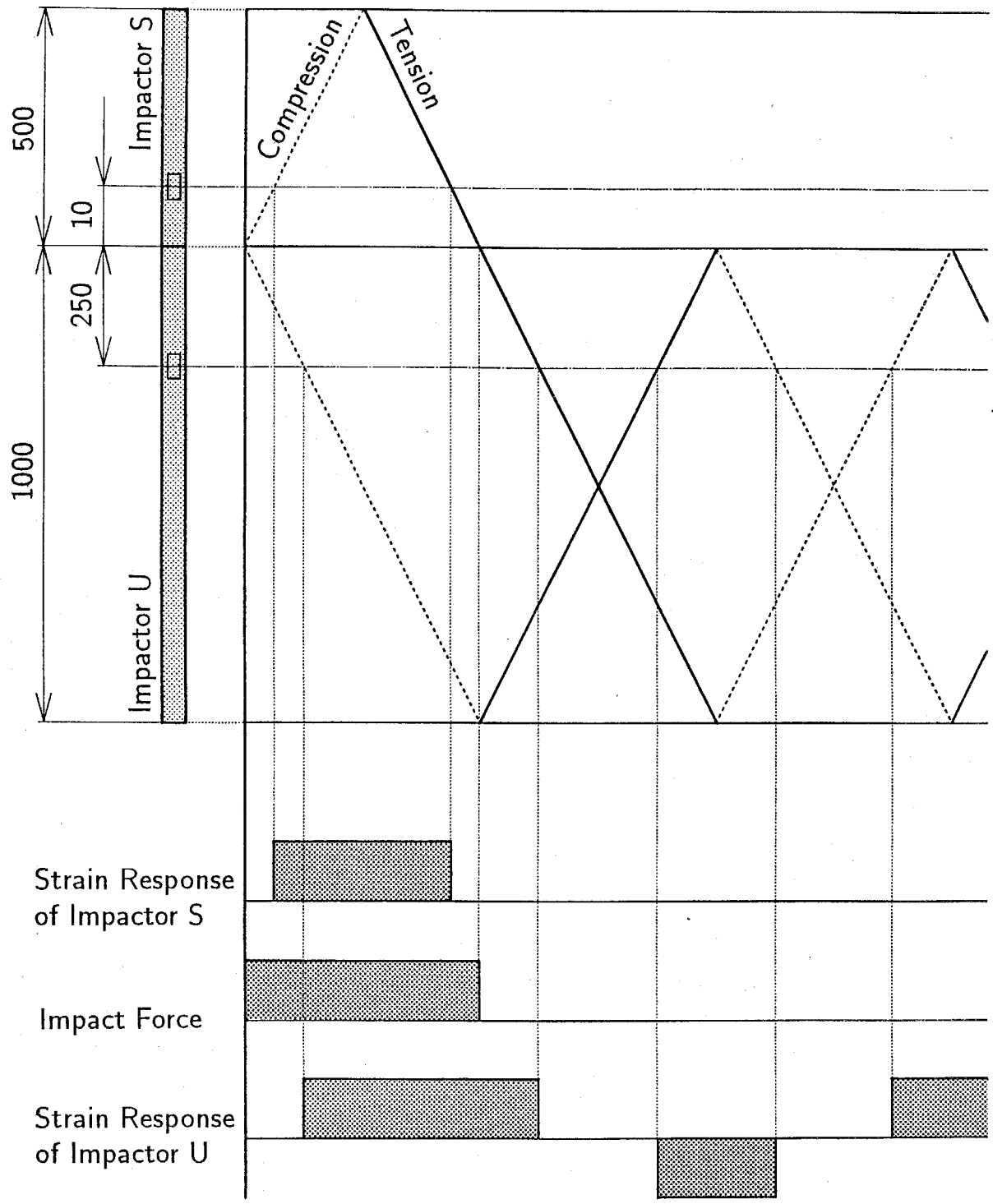


Figure 5.53: 衝撃体 S の較正実験

に基づいて最適逆システムの伝達関数を同定し、その逆数を求めて、衝撃体 S の衝撃力とひずみ応答との間の伝達関数を同定した。なお、棒のひずみ測定においては、曲げ変形による測定誤差を防ぐために、棒の軸に関して対称な位置にひずみゲージを 1 枚ずつ接着し、これらを直列に接続した。

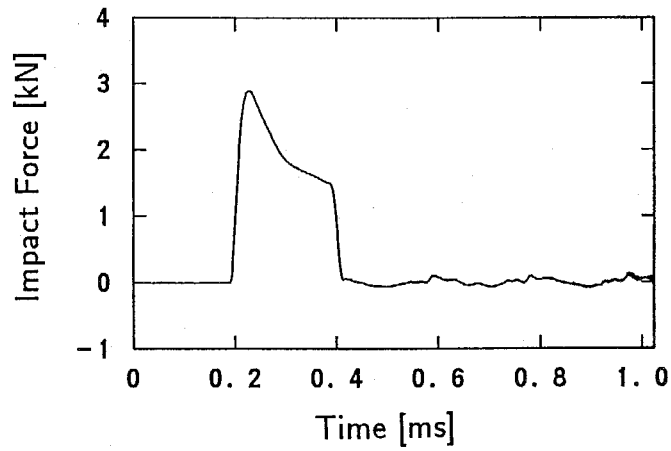
測定および解析処理に使用した装置の構成は、Fig.5.29 に示した通りである。また、測定および解析処理には次の値を用いた。

- $\Delta t = 1 [\mu\text{s}]$
- $N = 1024 (T = 1.024 [\text{ms}])$
- $\gamma = 5/T$

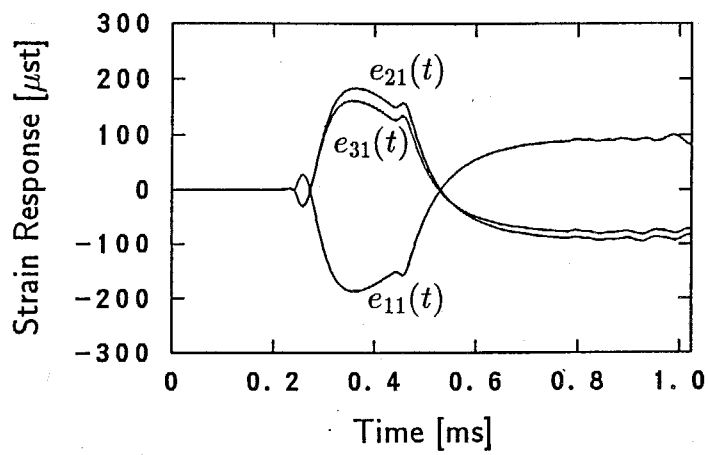
5.6.2 較正実験

衝撃体 S を高さ 200 mm から落下衝突させて較正実験を行った。このときの衝突速度は 1.98 m/s である。較正実験の測定データの例として、 $i = 1$ の方向から衝撃した場合の衝撃力 $f_1(t)$ 、および、ひずみ応答 $e_{j1}(t)$ 、($j = 1, 2, 3$) の測定結果をそれぞれ Fig.5.54(a), (b) に示す。衝撃力の持続時間は約 200 μs であり、衝撃体 S の 1 次の固有振動周期に等しい。前節までの較正実験における衝撃力の測定結果 (例えば、第 5.2 節の Fig.5.3 など) では、真の衝撃力波形の上に衝撃体の残留振動成分が重畳していたが、Fig.5.54(a) の結果にはこのような振動は重畳していない。これは、衝撃体 S のひずみ応答から逆問題解析を行って衝撃力を推定する方法を採用したことにより、較正実験における衝撃力の測定精度が向上したことを意味している。ひずみ応答波形は、衝撃力波形よりもわずかに遅れて立ち上がるが、これは衝撃点で発生した応力波がひずみ応答の測定位置まで伝播するのに要する時間である。ひずみ応答の測定位置の対称性により、初等はり理論では $e_{11}(t) = -e_{21}(t) = -e_{31}(t)$ となるが、Fig.5.54(b) の測定結果はほぼこの関係を満足している。

Fig.5.54 と同様な 10 組の衝撃力、および、ひずみ応答の測定データから伝達関数 $H_{j1}(\omega)$ 、($j = 1, 2, 3$) を同定した。また、 $i = 2$ の方向についても、同様に較正実験の測定データから伝達関数 $H_{j2}(\omega)$ 、($j = 1, 2, 3$) を同定した。

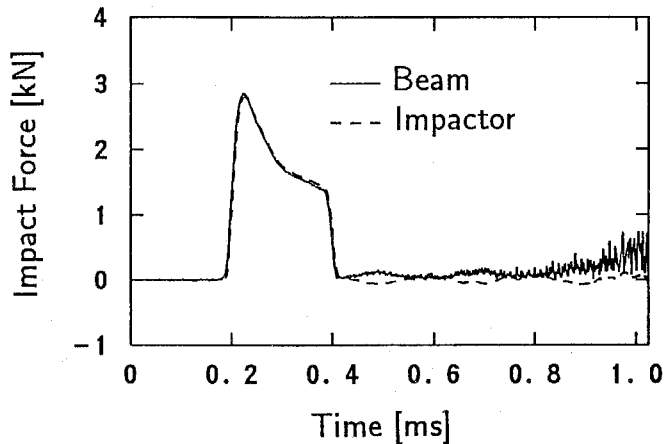


(a) 衝撃力 $f_1(t)$

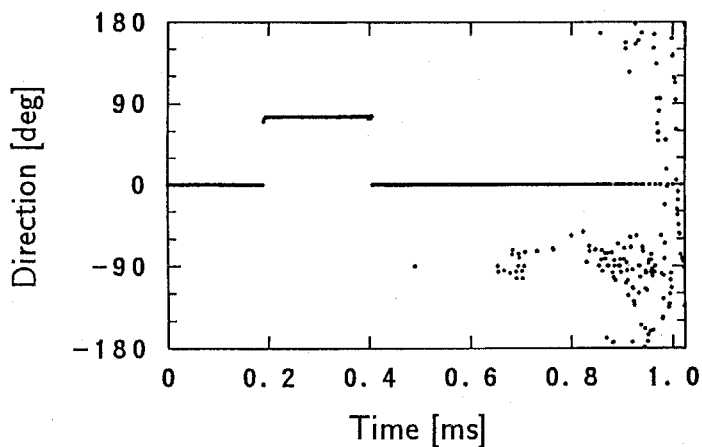


(b) ひずみ応答 $e_{11}(t)$, $e_{21}(t)$, $e_{31}(t)$

Figure 5.54: $i = 1$ の方向の較正実験における測定結果



(a) 衝撃力の大きさの推定結果



(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.55: 衝撃体 S による両端支持はりの衝撃力の推定結果 ($j = 1, 2$ の場合)

5.6.3 棒による衝撃力の測定

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第一の適用例として、高さ 200 mm から $\theta = 75^\circ$ に衝撃体 S を落下衝突させる実験を行い、はりのひずみ応答の測定データから衝撃力の大きさと方向を推定した。

初めに、 $j = 1, 2$ のひずみ応答 $e_1(t)$, $e_2(t)$ のみから、先に同定した伝達関数 $H_{ji}(\omega)$, ($i = 1, 2; j = 1, 2$) を用いて、衝撃力の各成分 $f_1(t)$, $f_2(t)$ を推定し、これを大きさと方向に換算した。衝撃力の大きさの推定結果を Fig.5.55(a) に示す。Fig.5.55(a) では、はりのひずみ応答から推定した本結果と比較するために、較正実験における衝撃力の測定と同

様の方法を適用して、衝撃体 S のひずみ応答から逆問題解析を行って衝撃力を推定した結果を破線で示している (以下の図においても同様の表示をする)。はりのひずみ応答から推定した本結果は、時間とともに指数関数的に拡大する雑音がわずかに重畳しているものの、衝撃体 S のひずみ応答から推定した結果とよく一致している。一方、Fig.5.55(b) は、衝撃力の方向の推定結果である。Fig.5.55(b) においては、衝撃力の大きさが最大値の 5% 以下の場合には $\theta = 0^\circ$ として表示している (以下の図においても同様の表示をする)。衝撃力が作用している間では、衝撃力の方向は約 $\theta = 75^\circ$ と推定され、正しい結果が得られている。したがって、 $j = 1, 2$ の場合には、衝撃力の大きさと方向はともに十分な精度で推定される。

次に、 $j = 1, 3$ のひずみ応答 $e_1(t)$ 、 $e_3(t)$ のみから、先に同定した伝達関数 $H_{ji}(\omega)$ ($i = 1, 2; j = 1, 3$) を用いて、同様に衝撃力の大きさと方向を推定した。衝撃力の大きさの推定結果を Fig.5.56(a) に示す。はりのひずみ応答から推定した本結果は、時間とともに指数関数的に振動が激しくなり、衝撃体 S のひずみ応答から推定した結果とは一致していない。Fig.5.56(b) は、衝撃力の方向の推定結果である。方向の推定結果は、衝撃力が作用する間において正解の $\theta = 75^\circ$ を中心に振動しており、一定値は得られていない。以上のように、 $j = 1, 3$ の場合には、先に示した $j = 1, 2$ の場合に比べて衝撃力の大きさと方向の推定精度は著しく低い。

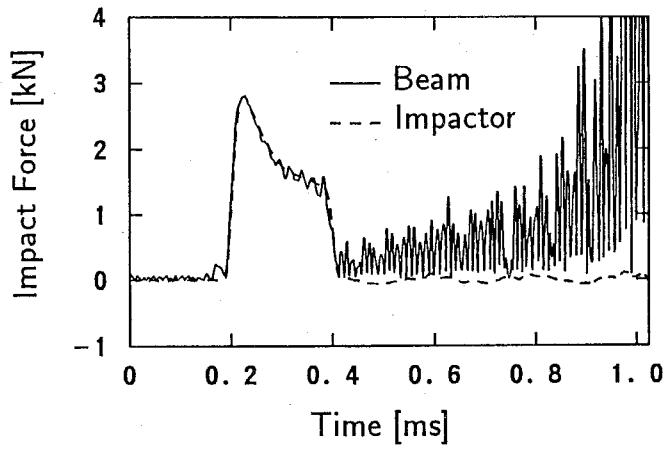
以上の二つの場合における衝撃力の推定精度の違いと逆問題の悪条件性との関連を明らかにするために、それぞれの場合の行列 \mathbf{H} の条件数を計算した。なお、行列 \mathbf{H} は、 $j = 1, 2$ の場合には、

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix}$$

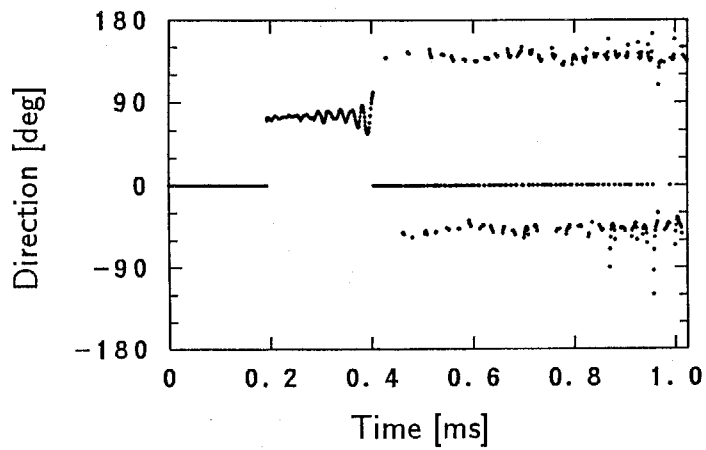
であり、 $j = 1, 3$ の場合には、

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{31}(\omega) & H_{32}(\omega) \end{bmatrix}$$

である。Fig.5.57(a), (b) は、それぞれ $j = 1, 2$ および $j = 1, 3$ の場合の各周波数における条件数を示している。なお、伝達関数の実部は周波数 ω の偶関数、虚部は奇関数であるから、条件数は周波数の偶関数であるので、Fig.5.57 では周波数が正の範囲のみを示している。この図によれば、100 kHz 以下の周波数域において、 $j = 1, 3$ の場合の方が $j = 1, 2$

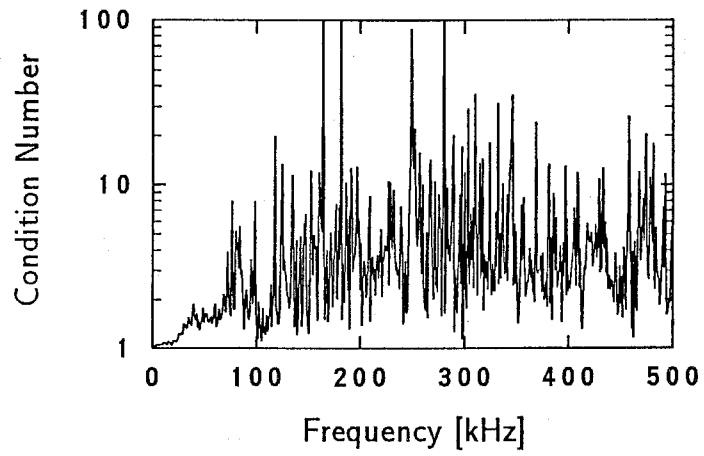


(a) 衝撃力の大きさの推定結果

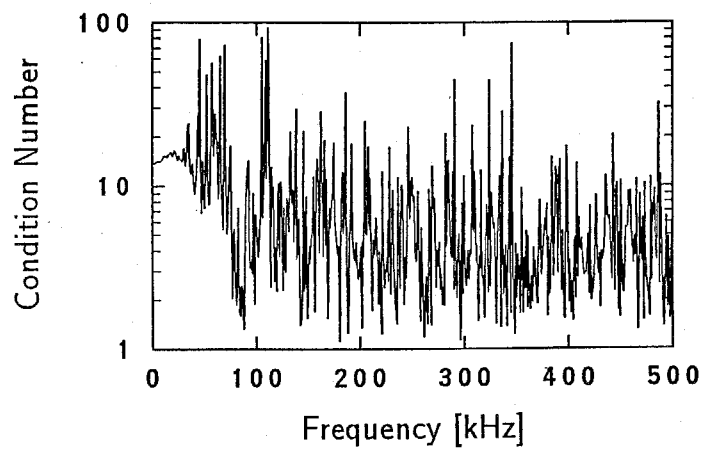


(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.56: 衝撃体 S による両端支持はりの衝撃力の推定結果 ($j = 1, 3$ の場合)



(a) $j = 1, 2$ の場合



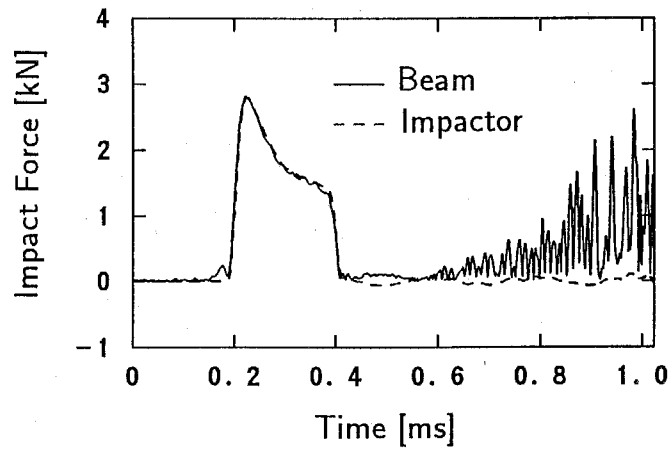
(b) $j = 1, 3$ の場合

Figure 5.57: 行列 H の条件数

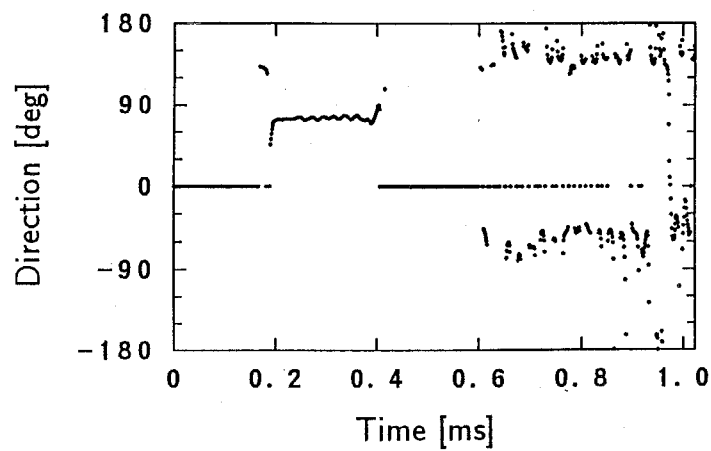
の場合に比べて条件数が大きい。特に、20 kHz 以下の範囲では、 $j = 1, 2$ の場合には条件数はほぼ1であるのに対して、 $j = 1, 3$ の場合には10以上である。したがって、 $j = 1, 3$ の場合は、特に低周波域において行列 H が悪条件であり、このために逆問題解析による衝撃力の推定精度が低下したと判断できる。

そこで、 $j = 1, 3$ の場合の悪条件性を改善するために、ムーア・ペンローズの一般逆行列を有効一般逆行列に変形する手法に基づき、最小の特異値を零に置き換える適切化処理を施した。計算を行ったそれぞれの周波数において、行列 H の条件数が20, 16, 13を越える場合に、条件数がそれぞれ20, 16, 13以下となるように適切化処理を施した場合の衝撃力の推定結果をそれぞれ Fig.5.58, 5.59, 5.60 に示す。Fig.5.58 ~ 5.60 を Fig.5.56 と比較すると、適切化処理を施したことによって、衝撃力の大きさおよび方向の推定結果に生じる振動は抑制される傾向にあり、条件数の上界を20, 16, 13と次第に小さくするにつれてより平滑な推定値が得られることがわかる。そして、条件数の上界を20および16とした場合には、衝撃力の大きさは衝撃体Sのひずみ応答から推定した結果とよく一致しており、衝撃力の方向も正解の $\theta = 75^\circ$ に近い値が得られている。しかし、条件数の上界を13とした場合には、衝撃力の大きさは破線の結果に比べて小さくなっており、衝撃力の方向もほぼ一定値ではあるものの正解の $\theta = 75^\circ$ よりも小さな値となっている。すなわち、条件数の上界を13とした場合には、過度の適切化によって衝撃力の推定精度が低下している。衝撃力の大きさが過小評価されることは、強度評価などにおける危険側の評価につながるため、適切化処理は適度に行わなければならない。そのためには、適切化処理のパラメータ(本研究の適切化処理では条件数の上界)として適切な値を採択するための指標が必要である。

そこで、各周波数における連立方程式の残差ベクトルの大きさを計算し、さらに全周波数にわたってその平均値を計算して、適切化処理のパラメータ、すなわち、条件数の上界との関係を調べた。Fig.5.61はその結果であり、横軸は条件数の上界、縦軸は残差ベクトルの大きさの全周波数にわたる平均値を示している。なお、適切化処理を施さない場合、すなわち、条件数の上界を ∞ とした場合には残差は零である。Fig.5.61によれば、条件数の上界を次第に小さくしてゆくと、条件数の上界が20から16までの間では残差は小さくほぼ一定であるが、16から13までの間で残差が急激に増大し、13以下では再び

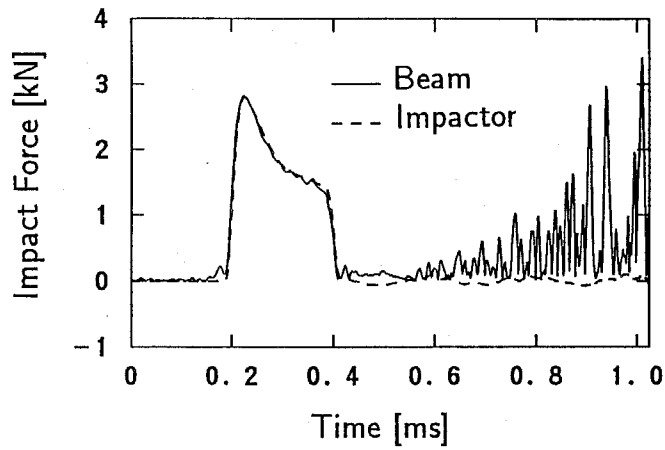


(a) 衝撃力の大きさの推定結果

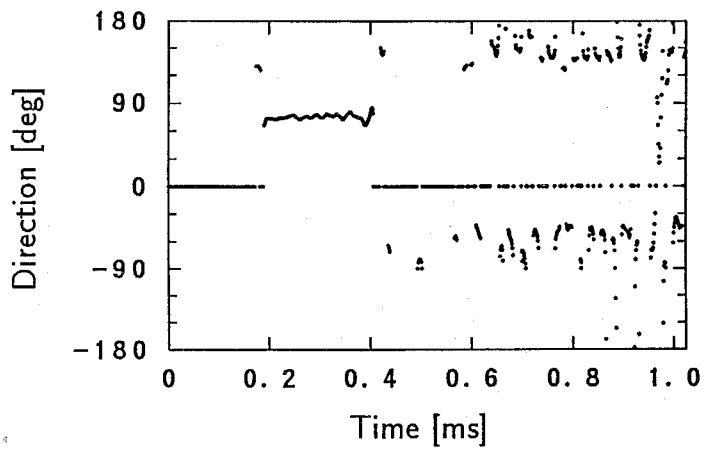


(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.58: 適切化処理 ($\text{cond}(\mathbf{H}) \leq 20$) を適用した場合の衝撃体 S による両端支持はりの衝撃力の推定結果 ($j = 1, 3$ の場合)

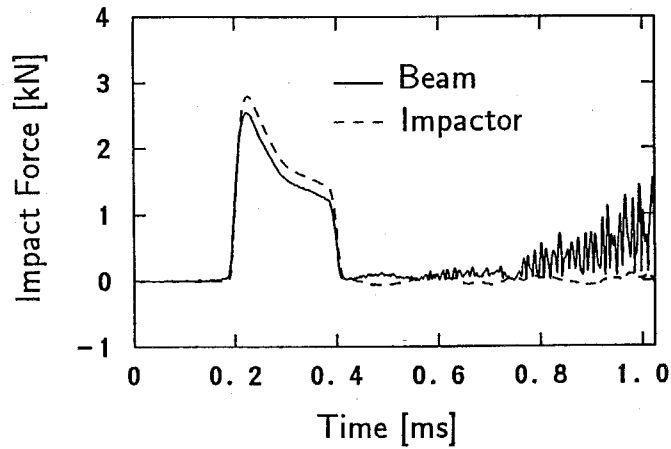


(a) 衝撃力の大きさの推定結果

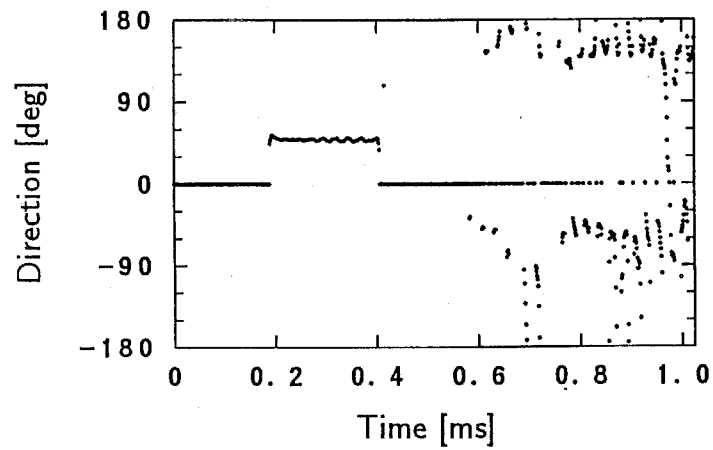


(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.59: 適切化処理 ($\text{cond}(\mathbf{H}) \leq 16$) を適用した場合の衝撃体 S による衝撃力の推定結果 ($j = 1, 3$ の場合)



(a) 衝撃力の大きさの推定結果



(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.60: 適切化処理 ($\text{cond}(\mathbf{H}) \leq 13$) を適用した場合の衝撃体 S による衝撃力の推定結果 ($j = 1, 3$ の場合)

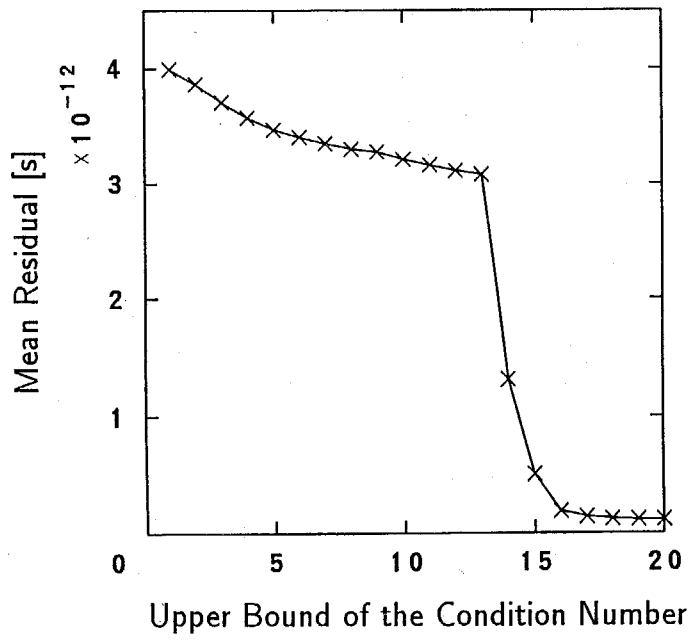


Figure 5.61: 衝撃体 S による衝撃力の推定における適切化処理のパラメータと連立方程式の残差の関係

ほぼ一定となる。このことから、条件数の上界を16よりも小さくすると、過度の適切化によって連立方程式の残差が大きくなり、その結果、衝撃力の推定精度が低下すると判断できる。したがって、本問題では適切化処理のパラメータ、すなわち、条件数の上界の値として16が適切であることがわかる。

以上のように、ムーア・ペンローズの一般逆行列を有効一般逆行列に変形する適切化処理は、適切化処理のパラメータを適切に選択すれば、衝撃力の逆問題解析において問題の悪条件性を改善する上で有効であることが示された。

最後に、衝撃力の方向成分の数(本実験の場合は2)よりも多数のひずみ応答の測定データをもとに衝撃力を推定した場合の精度の向上について調べるために、 $j = 1, 2, 3$ の位置で測定した三つのひずみ応答 $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ を全部用いて同じ衝撃力を推定した。なお、この場合の行列 H は

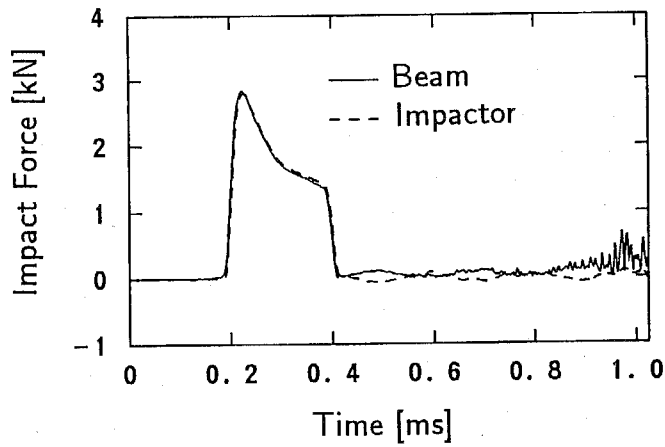
$$H = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \\ H_{31}(\omega) & H_{32}(\omega) \end{bmatrix}$$

である。Fig.5.62(a), (b) に、それぞれ衝撃力の大きさと方向の推定結果を示す。

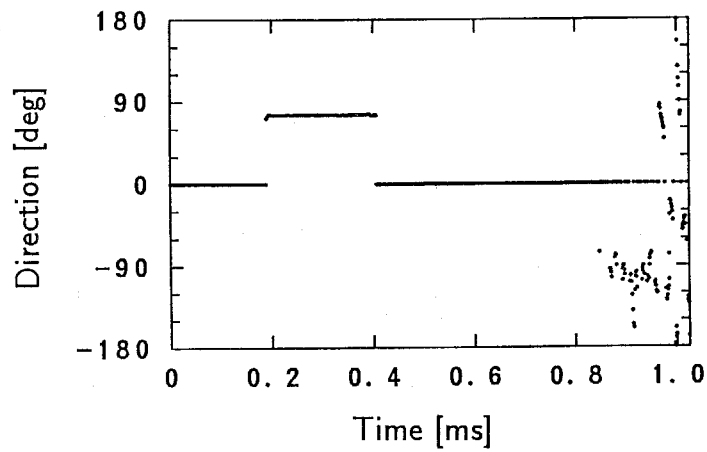
この結果によれば、衝撃力の大きさの推定結果は、衝撃体 S のひずみ応答から推定した結果とよく一致しており、衝撃力の方向も $\theta = 75^\circ$ の一定値が得られている。また、この推定結果を $j = 1, 2$ の場合の推定結果 (Fig.5.55) と比較すると、ひずみ応答の測定位置の数を増加させたことにより、衝撃力の推定精度が若干ではあるが向上したことがわかる。

$j = 1, 2, 3$ の場合の、各周波数における条件数を Fig.5.63 に示す。Fig.5.63 を $j = 1, 2$ の場合の Fig.5.57(a) と比較すると、50 kHz 以下の低周波域では、 $j = 1, 2, 3$ の場合の方が $j = 1, 2$ の場合よりもわずかに条件数が大きい。しかし、 $j = 1, 2, 3$ の場合にも条件数は十分小さいため、逆問題の不適切性はほとんど問題にならないと考えられる。一方、100 kHz 以上の周波数では、 $j = 1, 2, 3$ の場合の方が条件数が小さい。このことから、ひずみ応答の測定位置の数を増加させたことにより、高周波域において行列 H の条件数が減少し、その結果、Fig.5.62 に示したように衝撃力の推定精度がわずかながらも向上したと考えられる。

以上のように、衝撃力の方向成分の数よりも多数のひずみ応答の測定データをもとに



(a) 衝撃力の大きさの推定結果



(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.62: 衝撃体 S による両端支持はりの衝撃力の推定結果 ($j = 1, 2, 3$ の場合)

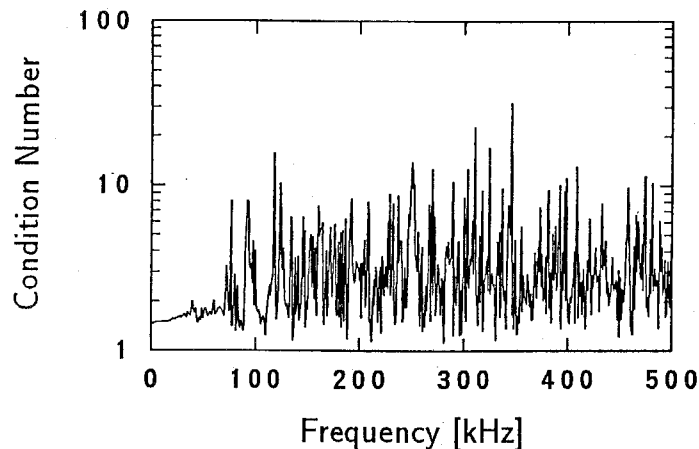


Figure 5.63: $j = 1, 2, 3$ の場合の行列 H の条件数

して最小二乗法により衝撃力を推定すれば，適切化処理を施さなくとも衝撃力の推定精度を向上できることが知られた。

5.6.4 球による衝撃力の測定

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の第二の適用例として，球を落下衝突させた場合の衝撃力の大きさと方向を，はりのひずみ応答から推定した。

鋼球（衝撃体 T）を高さ 500 mm から $\theta = 75^\circ$ の方向に落下衝突（衝突速度 3.13 m/s）させた場合の，はりのひずみ応答 $e_1(t)$ ， $e_2(t)$ ， $e_3(t)$ の測定結果を Fig.5.64 に示す。これらの測定データから，先に同定した伝達関数を用いて逆問題解析を行い，衝撃力を推定した。

まず， $j = 1, 2$ の位置で測定した二つのひずみ応答から，衝撃力の大きさと方向を推定した結果を Fig.5.65 に示す。また，この推定結果と比較するために，5.2.4 節と同様の方法により衝撃力の理論解析も行った。Fig.5.65(a) には理論解析結果を破線で示している（以下の図においても同様）。この結果によれば，衝撃力の大きさの推定結果は，後半部でわずかに雑音が重畳しているが，理論解析の結果とほぼ一致している。また，衝撃力の方向は，衝撃力が作用している間はほぼ一定で，正解の $\theta = 75^\circ$ が得られている。したがって，前述した棒（衝撃体 T）による衝撃の場合と同様に， $j = 1, 2$ の場合には，衝撃

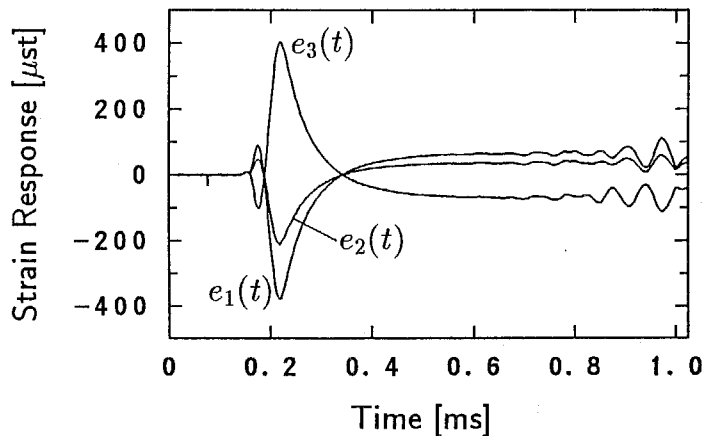
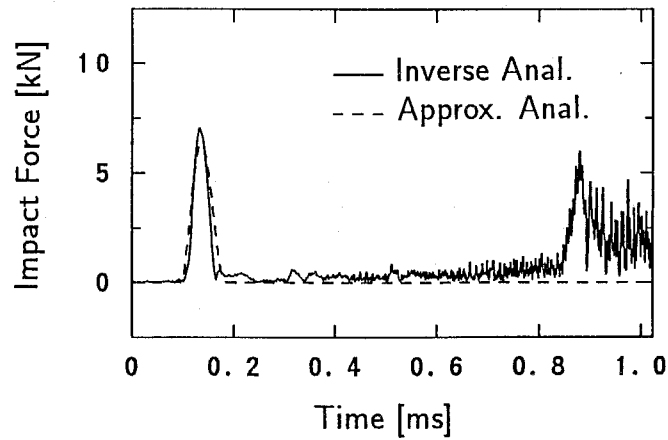


Figure 5.64: 衝撃体 T の衝突により両端支持はりに生じたひずみ応答の測定結果

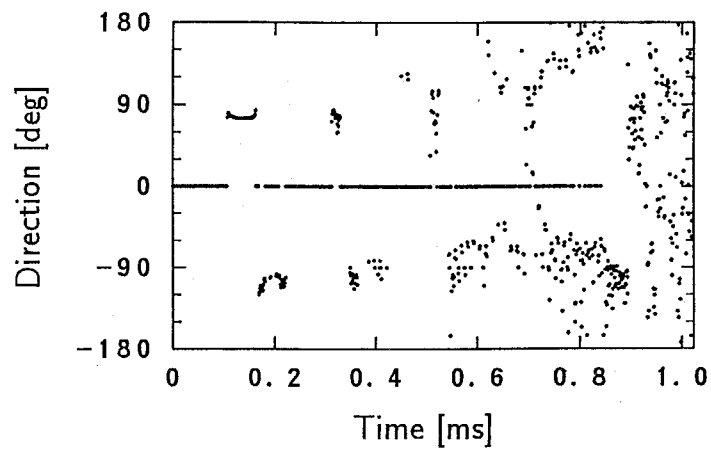
力は十分な精度で推定されたと判断できる。

次に、 $j = 1, 3$ の位置で測定した二つのひずみ応答から、同じ衝撃力を推定した結果を Fig.5.66 に示す。衝撃力の大きさの推定結果は、時間とともに振動が激しくなり、理論解析の結果と一致していない。また、方向の推定結果は、衝撃力が作用している間に $\theta = -32^\circ$ から $\theta = 113^\circ$ に変化しており、正解の 75° は得られていない。同条件で衝撃体 S の棒による衝撃力を推定した場合 (Fig.5.56) には、衝撃力の方向は正解の 75° を中心に振動を生じたが、それと比較すると本結果ではより推定精度が低下している。

そこで、 $j = 1, 3$ の場合について、最小の特異値を零に置き換える適切化処理を施し、推定精度の向上を図った。適切化処理を行うにあたり、最適な適切化パラメータを求めするために、先の衝撃体 S の場合と同様に、連立方程式の残差ベクトルの大きさの全周波数にわたる平均値を計算した。Fig.5.67 にその結果を示す。Fig.5.67 によれば、条件数の上界を次第に小さくしてゆくと、条件数の上界が 20 から 16 までの間では残差は小さくほぼ一定であるが、16 から 13 までの間で残差が急激に増大し、13 以下ではさらに残差が漸増する。なお、この結果を Fig.5.61 の衝撃体 S の場合と比較すると、定性的には同様の傾向を示しているが、残差の大きさは一桁大きい。この結果より、最適な適切化処理のパラメータ、すなわち、条件数の上界の値は、残差が急激に増大する直前の 16 とすればよいと判断できる。

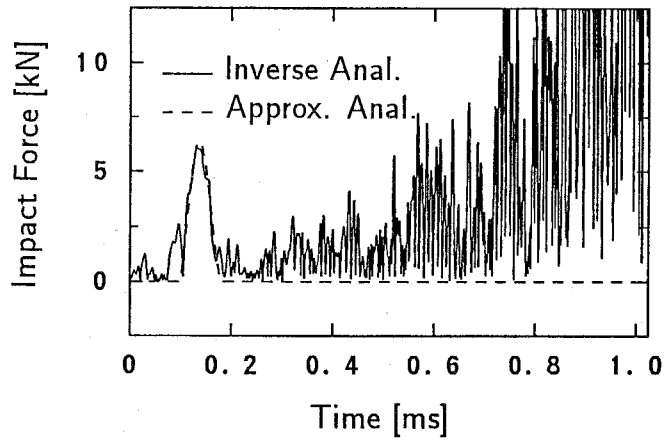


(a) 衝撃力の大きさの推定結果

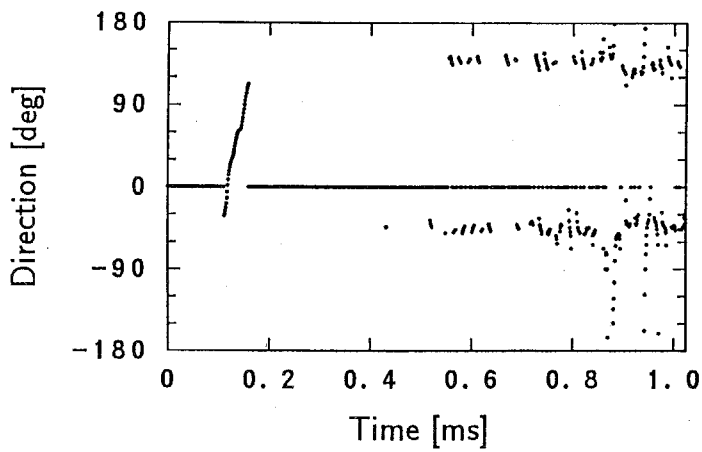


(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.65: 衝撃体 T による両端支持はりの衝撃力の推定結果 ($j = 1, 2$ の場合)



(a) 衝撃力の大きさの推定結果



(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.66: 衝撃体 T による両端支持はりの衝撃力の推定結果 ($j = 1, 3$ の場合)

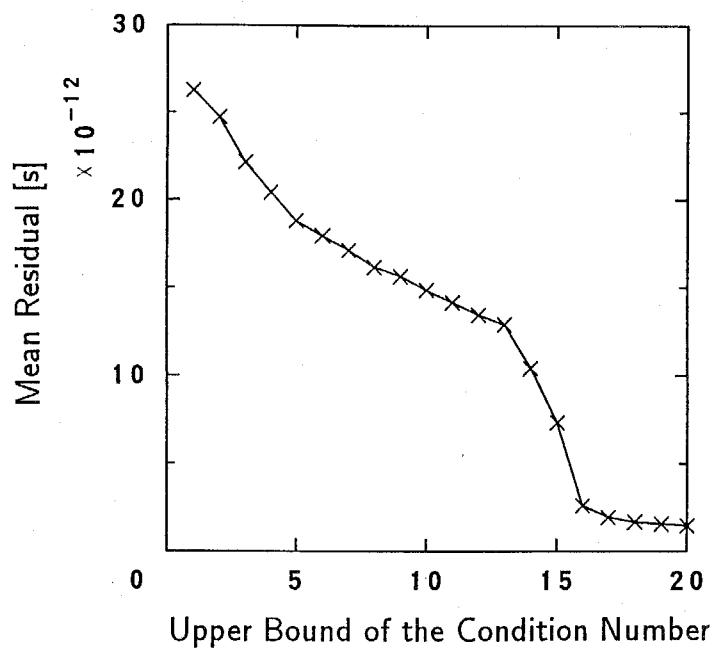


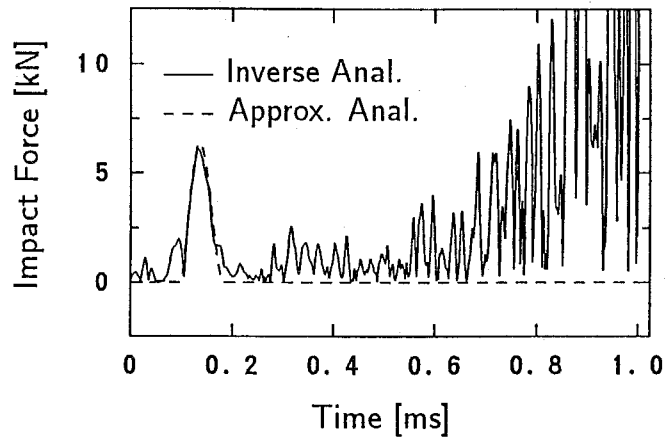
Figure 5.67: 衝撃体 T による衝撃力の推定における適切化処理のパラメータと連立方程式の残差の関係

Fig.5.68 は、行列 H の条件数が16以上である周波数において適切化処理を施した場合の、衝撃力の推定結果である。衝撃力の大きさについては、適切化処理を行わない場合の Fig.5.66(a) と比較すると推定結果に重畳する振動が若干抑制されているが、未だ十分ではなく、条件のよい場合の Fig.5.65(a) の推定結果と比較すると推定精度は低い。また、方向の推定結果については、適切化処理を行わない場合の Fig.5.66(b) とほとんど同程度の推定結果しか得られていない。したがって、本問題では、残差に基づいて最適と考えられる値を適切化処理のパラメータとして採用したにもかかわらず、問題の悪条件性の改善が十分でない。

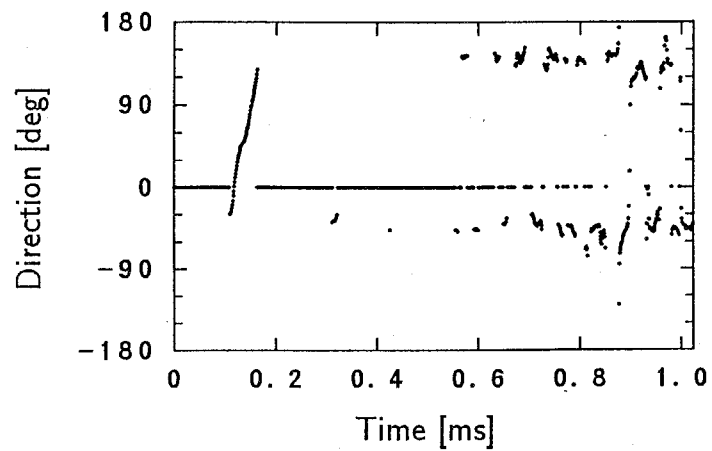
そこで、適切化処理のパラメータをさらに小さな値に変えて同様の適切化処理を施し、衝撃力の推定精度の変化について調べた。行列 H の条件数の上界を13, 10とした場合の衝撃力の推定結果をそれぞれ Fig.5.69, 5.70 に示す。Fig.5.69, 5.70 によれば、衝撃力の大きさについては、適切化処理によって推定結果に重畳する振動は十分に抑制されているが、最大値は適切化処理を行わない場合の Fig.5.65(a) の結果に比べてわずかに小さくなっている。この傾向は、先の衝撃体Sによる衝撃力の測定結果にもみられた傾向であり、過度の適切化処理のために衝撃力が過小評価されたことを示している。また、衝撃力の方向の推定結果については、衝撃力が作用している間においてほぼ一定であるものの、その値は約 50° であり正解の 75° とは大きく異なっている。

以上に述べたように、 $j = 1, 3$ の場合には、最小の特異値を零に置き換える適切化処理を施しても、衝撃体Tの球による衝撃力を十分な精度で推定することは困難であることが知られた。この原因は、主に、行列 H の条件が極端に悪いことによると考えられる。すなわち、はり理論によれば、 $j = 1, 3$ の場合は行列 H は特異となるので、理論的には逆問題解析によって衝撃力の大きさと方向を求めることはできないからである。しかし、別の原因として、本研究で採用した適切化処理が次に挙げる理由で必ずしも十分ではない点も考慮する必要がある。

- 本実験では、衝撃力の方向成分の数が2であるので、行列 H の特異値が σ_1 と σ_2 の二つしかない。したがって、最小の特異値、すなわち、 σ_2 を零に置き換える適切化処理を施すと推定結果が必要以上に变化する可能性がある。
- 本研究では、全ての周波数について適切化処理の条件を等しくしたために、ある周

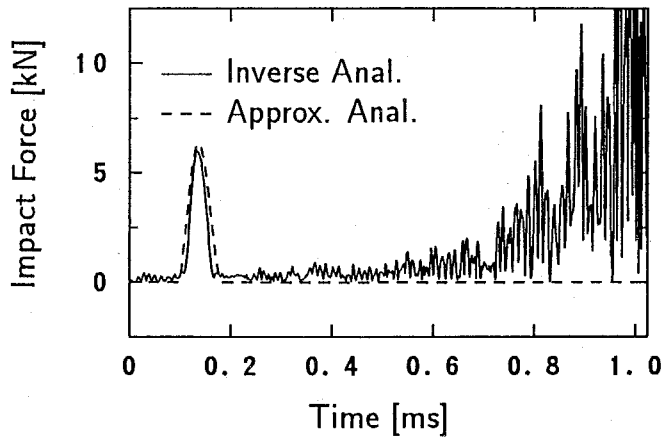


(a) 衝撃力の大きさの推定結果

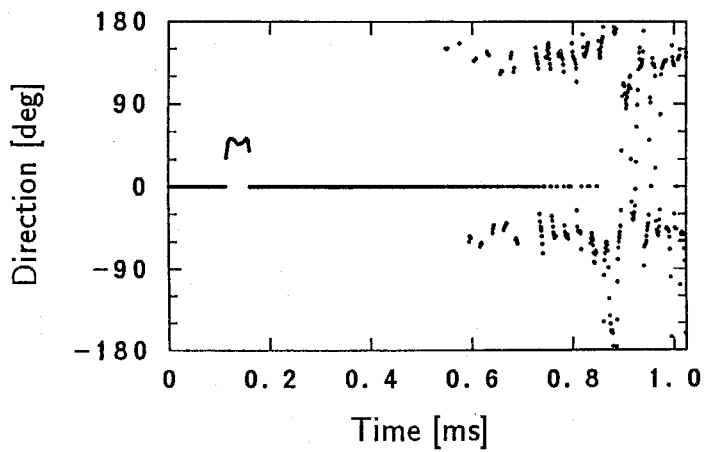


(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.68: 適切化処理 ($\text{cond}(\mathbf{H}) \leq 16$) を適用した場合の衝撃体 T による両端支持はりの衝撃力の推定結果 ($j = 1, 3$ の場合)

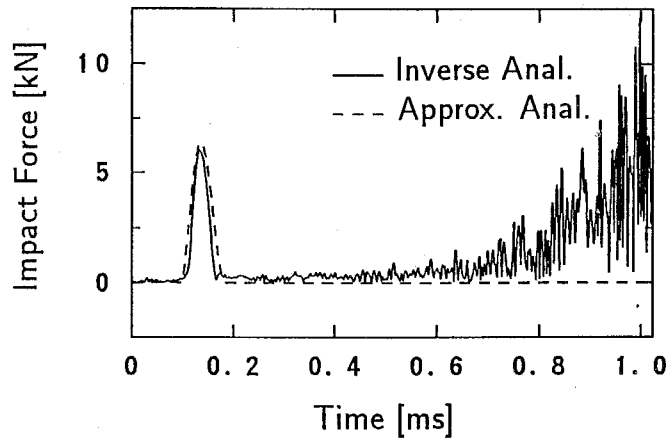


(a) 衝撃力の大きさの推定結果

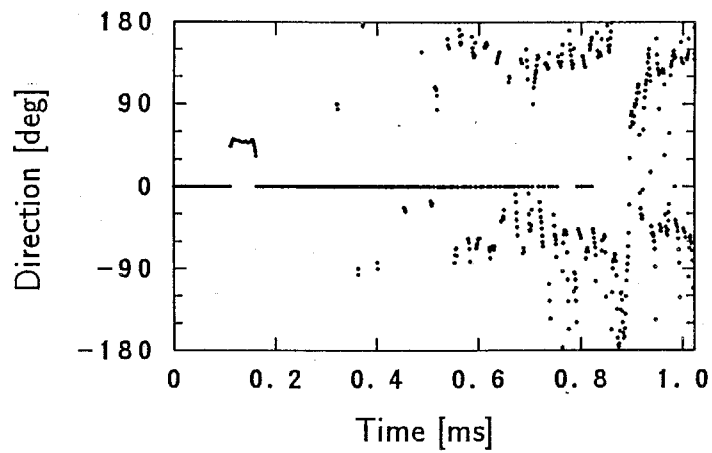


(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.69: 適切化処理 ($\text{cond}(\mathbf{H}) \leq 13$) を適用した場合の衝撃体 T による両端支持はりの衝撃力の推定結果 ($j = 1, 3$ の場合)

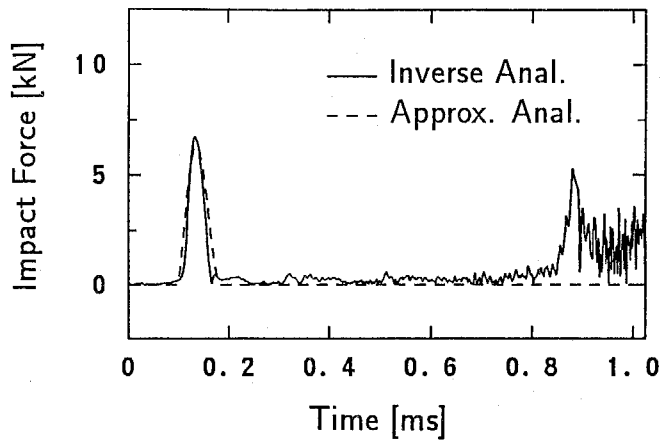


(a) 衝撃力の大きさの推定結果

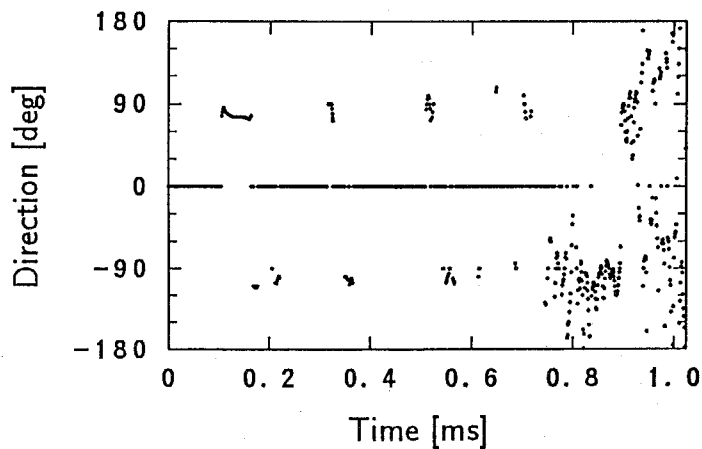


(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.70: 適切化処理 ($\text{cond}(\mathbf{H}) \leq 10$) を適用した場合の衝撃体 T による両端支持はりの衝撃力の推定結果 ($j = 1, 3$ の場合)



(a) 衝撃力の大きさの推定結果



(b) 衝撃力の方向の推定結果

Figure 5.71: 衝撃体 T による両端支持はりの衝撃力の推定結果 ($j = 1, 2, 3$ の場合)

波数では適切化が過剰となり、他の周波数では適切化が不十分となる可能性がある。

したがって、適切化処理の手法については、今後さらに検討の余地があると考えられる。

最後に、 $j = 1, 2, 3$ の位置で測定した三つのひずみ応答 $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ を全部用いて同じ衝撃力を推定した。Fig.5.71 に結果を示す。この結果によれば、衝撃力の大きさの推定結果は理論解析の結果とよく一致しており、衝撃力の方向も正解の 75° の値が得られている。また、この推定結果を Fig.5.65 の $j = 1, 2$ の場合の推定結果と比較すると、ひずみ応答の測定位置の数を増加させたことにより、衝撃力の推定精度が若干ではあるが向上したことがわかる。したがって、ひずみ応答の測定位置の数を増加させる方法は、逆問

題解析による衝撃力の推定精度を向上させる上で有効であることが知られた。特に、前述の $j = 1, 3$ の場合のように、適切化処理を施しても衝撃力の推定精度が改善できない場合などについては、この方法が有効であると考えられる。

5.7 結言

本章では、基本的な構造要素の衝撃実験を通じて、逆問題解析に基づく衝撃力の推定法の有用性を論じた。その結果、逆問題解析手法は、任意形状の物体に作用する衝撃力の大きさと方向の時間的変動を測定する方法として有効であることが検証された。直接的な逆問題解析手法を適用すると、逆問題が有する不適切性のために測定データに含まれる雑音や測定誤差が拡大されて衝撃力の推定結果に重畳するため、精度の高い推定結果を得ることが困難な場合がある。このような場合にも高精度で衝撃力の推定値を得るためには、最適逆システムによる逆問題解析手法、および、特異値分解を利用した最小二乗法による逆問題解析手法が有効であることを示した。また、伝達関数行列の条件数が大きい場合には、ムーア・ペンローズの一般逆行列を有効一般逆行列に置き換える適切化処理を適用すれば、衝撃力の推定精度は向上することを示した。ただし、適切化処理が過剰な場合には、衝撃力の大きさが過小評価される傾向があるため、周波数領域における連立方程式の解の残差に注目して、適切化処理のパラメータを適切に選択する必要がある。さらに、このような適切化処理を適用しても衝撃力が十分な精度で推定できない場合には、衝撃力の方向成分の数よりも多数のひずみ応答の測定データをもとにして逆問題解析を行えば、十分な精度の推定値が得られることを示した。その他、はりや板の横衝撃のように、被衝撃体の内部を伝播する応力波が分散性を有する場合には、ひずみ応答の測定位置を衝撃点に近づければ、衝撃力の推定精度が向上することが知られた。

第 6 章

計装化衝撃試験における衝撃力の測定

6.1 緒言

一般に、衝撃負荷を受ける材料の力学的性質は静的負荷を受ける場合とは異なるため、衝撃を受ける構造物や機器の設計および運用に際しては、材料の衝撃負荷下の力学的性質を正確に評価することが必要である。材料の衝撃試験法としては、古くから知られているシャルピー、アイゾット試験法をはじめとして、各種の方法が規格化されている。しかしながら、これらの試験法のほとんどでは、材料の衝撃強度を衝撃値によって評価しているために、衝撃強度の相対的な比較しかできない点が問題とされている。そこで、近年、衝撃試験機に各種のセンサを取り付け、試験片に作用する衝撃力や試験片の変形などを測定し、試験片に発生する応力などに基づいて衝撃強度を評価しようとする計装化衝撃試験法が広く研究されている。このような計装化衝撃試験において、試験片に作用する衝撃力を正確に測定することは極めて重要である。しかし、古くから規格化され、利用されてきた衝撃試験法では、あらかじめ衝撃力の測定を配慮していなかったために、衝撃力測定の観点からは複雑な形状を有する試験機が多く採用されている。したがって、現在のところ、衝撃力の測定には多くの困難が伴い、衝撃力は必ずしも正確に評価されていない場合が多い。

そこで、本章では、衝撃力の逆問題解析手法を実際の工学問題における衝撃力の測定に適用した具体例として、計装化衝撃試験における衝撃力の測定法を論じ、逆問題解析手法に基づいて試験片に作用する衝撃力を測定する方法を示すとともに、従来の衝撃力測定法の問題点を明らかにする。また、較正実験の測定データから伝達関数を同定する

際に5種類の方法を採用し、衝撃力の測定結果を比較して、最適逆システムによる逆問題解析手法の有効性を検証する。さらに、これらの衝撃力の測定結果をもとにして、材料の衝撃破断における吸収エネルギーを評価する方法についても論じる。

6.2 実験装置および方法

6.2.1 計装化シャルピー衝撃試験機

シャルピー衝撃試験法は古くから JIS, ASTM, DIN など規格化され、現在でも世界各国で広く採用されている試験法であり、最近では、この試験機に計装化を施した例も数多く報告されている。そこで、本研究では計装化シャルピー衝撃試験を取り上げた。本研究で使用したシャルピー衝撃試験機は、Fig.6.1 に示す JIS B 7722 に準拠した試験機(東京試験機製作所)であり、その主な仕様は以下の通りである。

- 秤量 : 30 [kgm] (294 [J])
- ハンマの質量 : $W = 26.64$ [kg]
- ハンマ衝撃点の回転半径: $L_1 = 0.7500$ [m]
- ハンマ重心の回転半径 : $L_2 = 0.6340$ [m]

この試験機は計装化用に製作されており、Fig.6.2 に示すように、衝撃刃の衝撃点後方に衝撃力測定用のひずみゲージを接着するための溝が設けられている。また、ハンマの回転軸にはポテンショメータが取り付けられており、ハンマの回転角を測定することにより試験片の衝撃点の変位を測定できる。

6.2.2 逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法

シャルピー衝撃試験では、試験機の衝撃刃を両端支持された試験片の中央部に衝突させ、三点曲げによって試験片を衝撃破断させる。このとき、衝撃刃に発生する衝撃応答を測定し、この測定データから衝撃刃に作用する衝撃力を逆問題解析手法に基づいて求めれば、試験片に作用する衝撃力が測定できる。計装化シャルピー衝撃試験における逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定手順は次の通りである。

1. 細長い弾性棒(以下ではこの棒を基準棒と呼ぶ)と衝撃刃を衝突させる較正実験を行い、棒および衝撃刃に接着したひずみゲージを使用して衝撃力 $f(t)$ およびひずみ応答 $e(t)$ をそれぞれ測定する (Fig.6.3(a) 参照)。

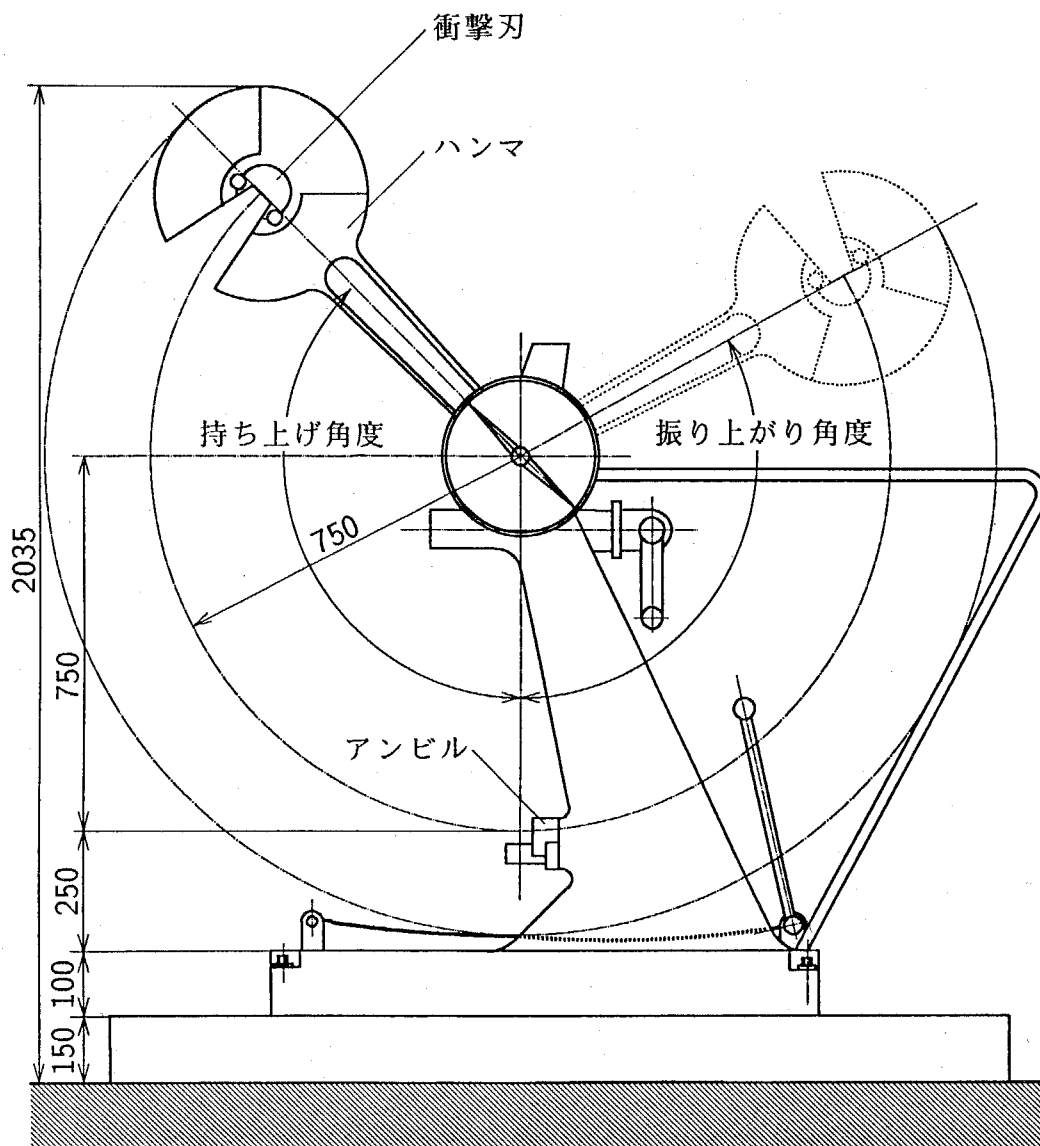


Figure 6.1: シャルピー衝撃試験機

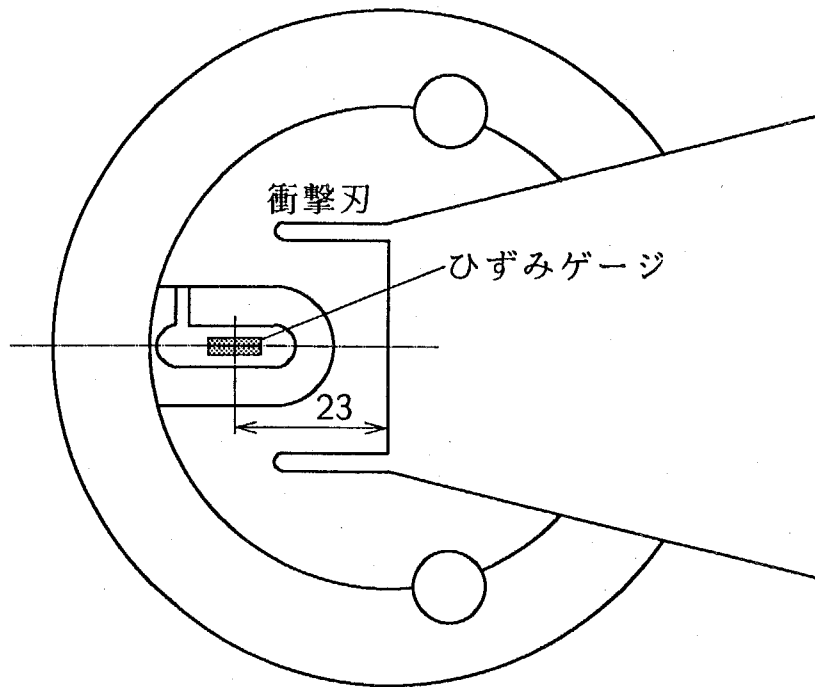


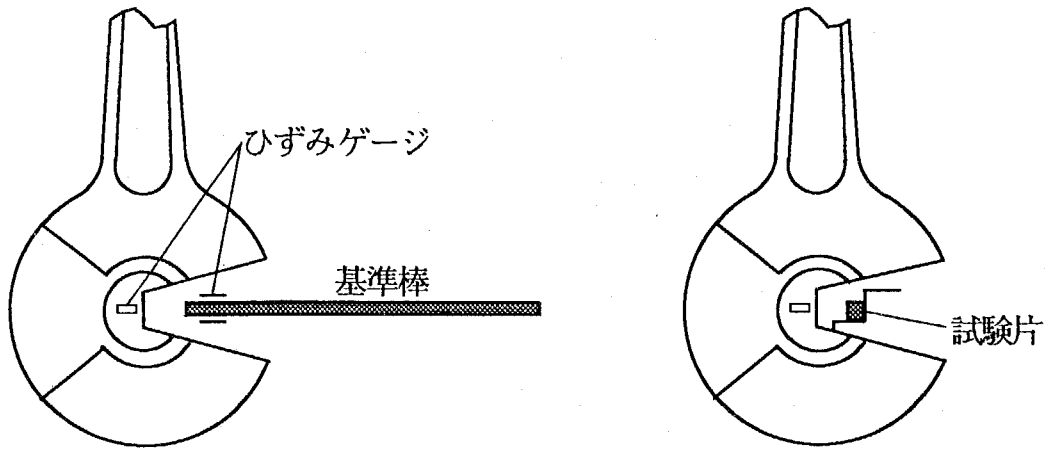
Figure 6.2: 衝撃刃の近傍

2. 1 で得られた測定データをもとに伝達関数を同定する.
3. 衝撃試験を行い, 衝撃刃のひずみ応答 $e(t)$ を測定する (Fig.6.3(b) 参照).
4. 2 で得られた伝達関数と 3 で得られたひずみ応答をもとに, 試験片に作用した衝撃力を算定する.

較正実験は, 次の二つの方法により基準棒と衝撃刃を衝突させて行った.

方法 I: Fig.6.4 に示すように, ハンマを振上がり側に水平 (90°) に持ち上げ, 衝撃刃に基準棒を自由落下衝突させる.

方法 II: Fig.6.5(a) に示すように, アクリル製の治具と V ブロックにより基準棒の衝撃端と自由端をそれぞれ支持し, 試験片を衝撃する場合と同様の方法で基準棒に衝撃を加える. Fig.6.5(b) に示すように, アクリル製治具の中央部はくさび状になっており, 衝撃の際には基準棒とともに飛散するようになっている.



(a) 較正実験 (弾性棒の縦衝撃)

(b) 衝撃試験 (試験片の衝撃)

Figure 6.3: 逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法

前章までに示しているように、逆問題解析において測定データに含まれる雑音の拡大を抑制するためには、ウィーナフィルタ理論に基づく最適逆システムによる逆問題解析を行えばよい。本実験では、最適逆システムによる逆問題解析の有効性を確認するために、以下の5種類の方法によって伝達関数を同定し、それぞれを用いて衝撃力の逆問題解析を行った結果を比較した。

方法 a: 1回の較正実験の測定データから式(2.5)に基づいて直接的に求める方法。

$$\hat{H}(\omega) \equiv \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (6.1)$$

方法 b: k 回の較正実験の測定データの積算平均から求める方法。

$$\hat{H}(\omega) \equiv \frac{\sum_{j=1}^k Y_j(\omega)}{\sum_{j=1}^k X_j(\omega)} \quad (6.2)$$

方法 c: 線形システムの入出力関係 ($H(\omega) = S_{fe}(\omega)/S_{ff}(\omega)$) を利用する方法。

$$\hat{H}(\omega) \equiv \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

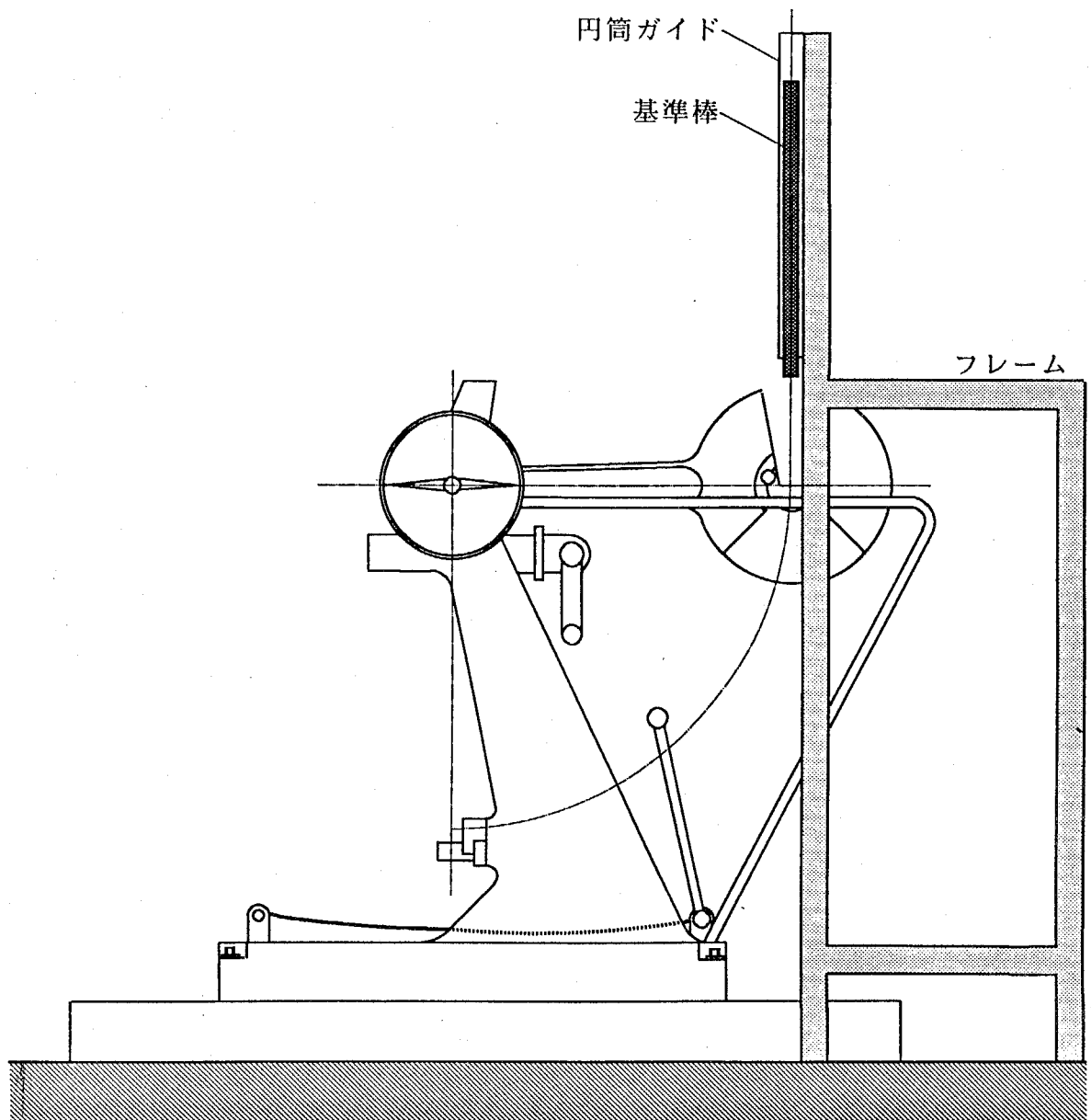
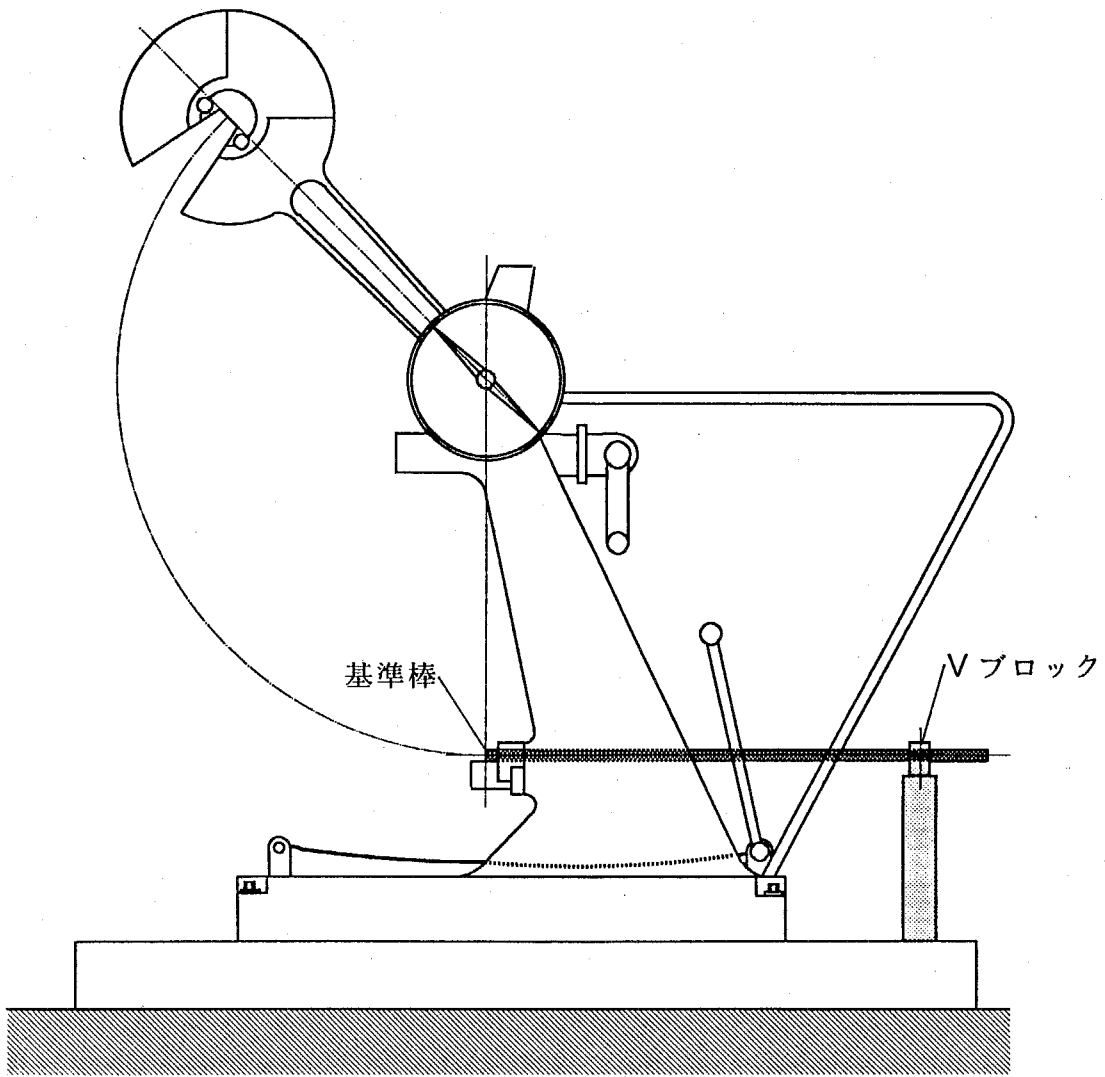
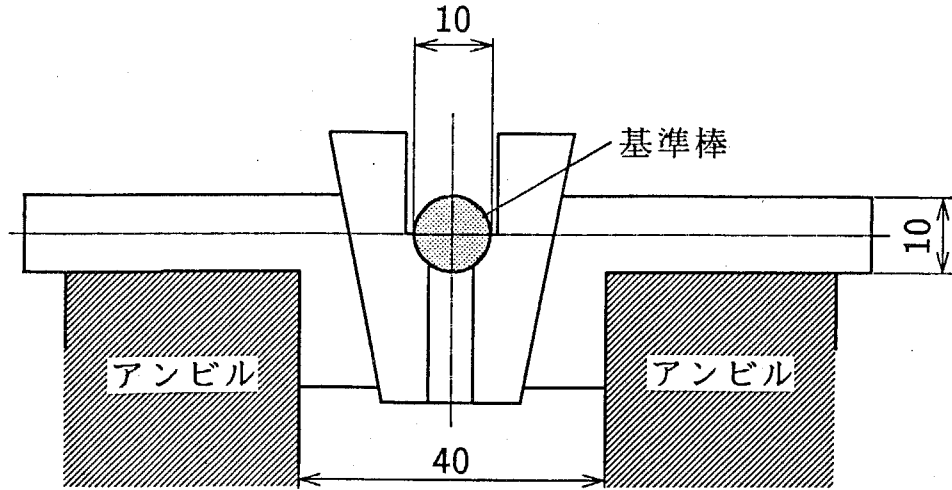


Figure 6.4: 較正実験の方法 I



(a) 基準棒の支持方法

Figure 6.5: 較正実験の方法 II



(b) アンビル部の基準棒支持治具 (厚さ 10 mm)

Figure 6.5: 較正実験の方法 II(続き)

$$\begin{aligned}
 &\approx \frac{\hat{S}_{xy}(\omega)}{\hat{S}_{xx}(\omega)} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^k X_j^*(\omega) Y_j(\omega)}{\sum_{j=1}^k X_j^*(\omega) X_j(\omega)}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

方法 d: 最適逆システムの伝達関数の逆数を求める方法.

$$\begin{aligned}
 \hat{H}(\omega) &\equiv \frac{S_{yy}(\omega)}{S_{yx}(\omega)} \\
 &= \frac{1}{G(\omega)} \\
 &\approx \frac{\sum_{j=1}^k Y_j^*(\omega) Y_j(\omega)}{\sum_{j=1}^k Y_j^*(\omega) X_j(\omega)}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

方法 e: 方法 c と方法 d の平均値を計算する方法 [72].

$$\hat{H}(\omega) \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} + \frac{S_{yy}(\omega)}{S_{yx}(\omega)} \right]$$

$$\approx \frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{j=1}^k X_j^*(\omega) Y_j(\omega)}{\sum_{j=1}^k X_j^*(\omega) X_j(\omega)} + \frac{\sum_{j=1}^k Y_j^*(\omega) Y_j(\omega)}{\sum_{j=1}^k Y_j^*(\omega) X_j(\omega)} \right] \quad (6.5)$$

なお、本実験では、方法 b ~ d において $k = 10$ とした。

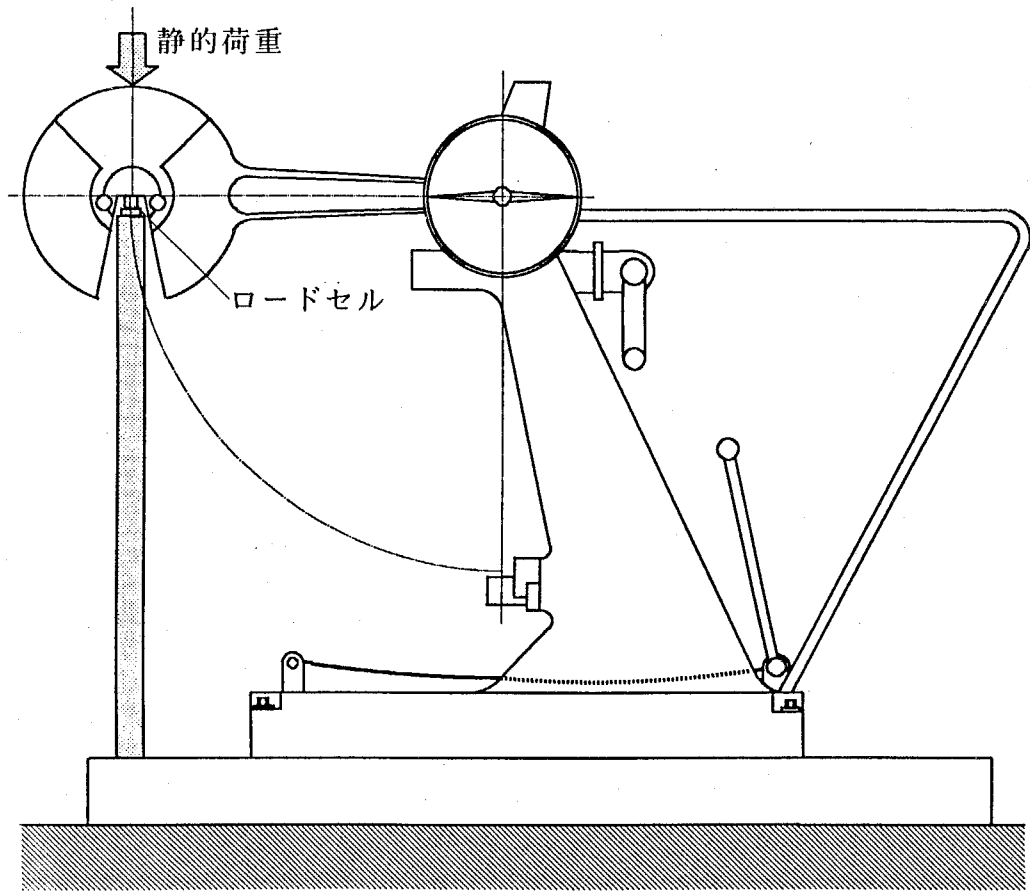
本実験における測定および計算の条件は以下の通りである。

- $T = 2048 [\mu\text{s}]$
- $\Delta t = 2 [\mu\text{s}]$
- $N = 1024$
- $\gamma = 2\pi/T$

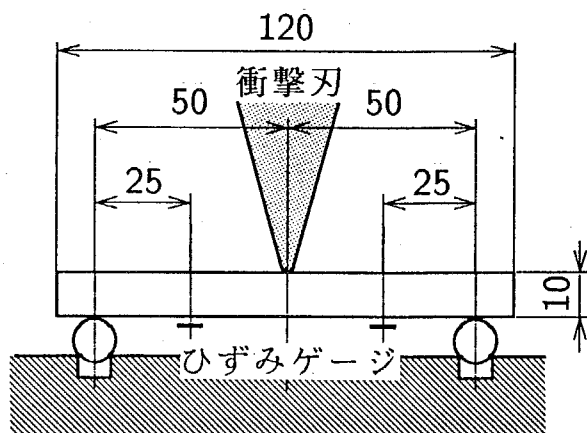
6.2.3 静的較正に基づく衝撃力の測定法

本実験で使用したシャルピー衝撃試験機では、これまで、衝撃刃の溝部に接着したひずみゲージによって試験片衝撃時に衝撃刃に生じるひずみを測定し、これに較正係数を乗じて衝撃力に換算している。この時に用いる較正係数の値は、衝撃刃に静的荷重を負荷したときの溝部におけるひずみを測定することにより決定している。しかし、衝撃刃およびハンマの形状は極めて複雑であり、衝撃力によって発生する応力波は複雑に反射・透過を繰り返して伝播すると考えられる。したがって、衝撃刃の溝部に生じるひずみの時間的変動は、作用した衝撃力の時間的変動と必ずしも一致しない。この理由により、静的負荷のもとでの較正に基づく従来の方法では、衝撃力が正確に測定できないおそれがある。本実験では、この問題を究明するために、逆問題解析手法に基づく方法の他に、静的較正に基づく衝撃力の測定も併せて行った。

静的負荷による較正は、Fig.6.6 に示す方法により行った。すなわち、両端支持はり状のロードセルの中央に衝撃刃を接触させて静的負荷を加え、このときの荷重と衝撃刃溝部のひずみとを測定し、その結果からひずみを荷重(衝撃力)に換算する係数を決定した。本実験の静的較正の結果より得られた換算係数は、 $5.16 \times 10^7 [\text{N}]$ である。



(a) 静的負荷の方法



(b) ロードセル

Figure 6.6: 静的負荷による較正

6.2.4 試験片の吸収エネルギーの算定法

シャルピー衝撃試験では、試験片の破断前後のハンマの角度から位置エネルギーの変化を求め、これが試験片を破断するのに要したエネルギー(吸収エネルギー)に等しいとして衝撃値を算出し、材料の耐衝撃性を評価している。しかし、ハンマの位置エネルギーの変化は、試験片の破断エネルギーだけでなく、衝撃によりハンマおよび試験機本体に発生する振動のエネルギー、試験片が飛散する運動エネルギーなどの多くの要因を含んでいる。これに対し、計装化衝撃試験によって試験片に作用する衝撃力および試験片の荷重点の変位を正確に評価すれば、試験片に対してハンマがなす仕事を求めることにより、ハンマの振動エネルギーを除いた試験片の吸収エネルギーを求めることができる。そこで、本実験では、以下の三つの方法によって試験片の吸収エネルギーを求めた。

方法 A: 静的較正に基づいて測定される衝撃力からハンマの剛体運動に関する方程式に基づいて荷重点変位を求め、これらから試験片に対してハンマがなす仕事を求める方法。

方法 B: 逆問題解析手法に基づいて測定される衝撃力をもとにして、方法 A と同様に試験片に対してハンマがなす仕事を求める方法。

方法 C: ハンマの回転軸に取り付けられたポテンショメータを用いて測定される荷重点変位と、逆問題解析手法に基づいて測定される衝撃力から、試験片に対してハンマがなす仕事を求める方法。

方法 A, B において、衝撃力 $f(t)$ から荷重点変位を求める方法は以下の通りである。ハンマを剛体振子と考え、ハンマの打撃中心が衝撃点(すなわち荷重点)に一致すると仮定すれば、荷重点の変位 $u(t)$ は、

$$u(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (6.6)$$

$$v(t) = v_0 - \frac{L_1}{WL_2} \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (6.7)$$

$$v_0 = \sqrt{2gL_1(1 - \cos \alpha)} \quad (6.8)$$

により求められる。ここで、時刻 $t=0$ はハンマと試験片の衝突の瞬間であり、

- $v(t)$: 荷重点の速度
- v_0 : ハンマと試験片の衝突速度
- W : ハンマの質量
- L_1 : ハンマの打撃中心の回転半径 (\approx ハンマの衝撃点の回転半径)
- L_2 : ハンマの重心の回転半径
- α : ハンマの持ち上げ角度

である。衝撃力 $f(t)$ と荷重点変位 $u(t)$ が得られれば、吸収エネルギー E は次式により得られる。

$$E = \int_0^{t_e} f(t) d\{u(t)\} \quad (6.9)$$

ここで、 t_e は試験片が完全に破断し、衝撃力が零になる時刻である。

6.2.5 試験片および測定装置

試験片

本実験では、次の3種類の材料について衝撃試験を行った。

- PMMA 樹脂: 協和ガス化学工業(株), パラグラス PG P310
- エポキシ樹脂 (アラルダイト B)
- 窒化珪素セラミックス (Si_3N_4): 日本ガイシ(株), SN-84

試験片の寸法、形状は、Fig.6.7 に示す JIS Z 2202 の4号試験片 (V ノッチ) に準拠した。PMMA 樹脂およびエポキシ樹脂試験片は、厚さ 10mm の板材からそれぞれ切削加工を行って製作した。また、窒化珪素セラミックス試験片は日本ガイシ(株)より提供された。

基準棒

基準棒は、較正実験の方法 I においては直径 10mm、長さ 1m の黄銅棒を、方法 II においては同じ寸法の軟鋼棒をそれぞれ使用した。基準棒の材料の機械的性質を Table 6.1 に示す。

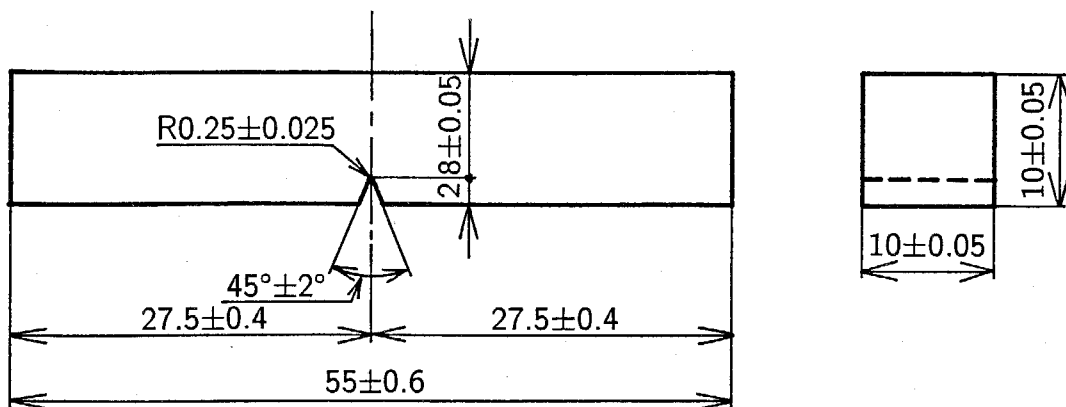


Figure 6.7: 試験片の寸法形状

Table 6.1: 基準棒の材料の機械的性質 [19]

材料	縦弾性係数 [GPa]	密度 [kg/m ³]	一次元縦波伝播速度 [m/s]
軟鋼	206	7860	5120
黄銅	98.1	8650	3370

ひずみゲージ

較正実験においては、基準棒の衝撃端から 10mm の位置に半導体ひずみゲージ (共和電業 KSP-2-E4, ゲージ長さ 2mm, ゲージ率 127) を接着し、弾性棒の一次元縦衝撃理論に基づいて近似的に衝撃力を測定した。なお、棒の曲げ変形によって生じるひずみを相殺させるために、棒の軸に関して対称な位置にひずみゲージを 1 枚ずつ接着して、直列に接続した。

一方、試験機の衝撃刃先端から 23mm 後方の位置の溝部にも同様のひずみゲージを接着し (Fig.6.2 参照)、衝撃刃のひずみ応答を測定した。なお、衝撃刃の曲げ変形によって生じるひずみを相殺させるために、刃の両側にそれぞれ 1 枚ずつひずみゲージを接着して、直列に接続した。

測定システム

本実験の測定システムは、Fig.5.2 に示した通りである。

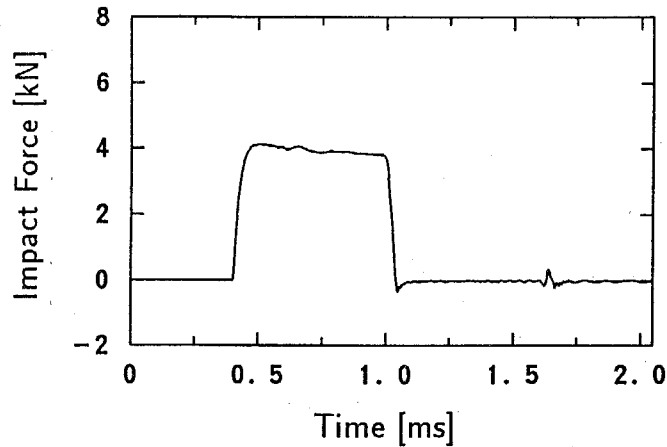


Figure 6.8: 較正実験における衝撃力の測定結果 (方法 I)

6.3 較正実験と伝達関数

6.3.1 較正実験の結果

まず初めに、較正実験を行って、基準棒による衝撃力と衝撃刃のひずみ応答を測定した。Fig.6.8 は、較正実験の方法 I によって基準棒を高さ 200mm から落下衝突させた場合の衝撃力の測定結果である。衝撃力波形はほぼ矩形状であり、衝撃時間は基準棒 (黄銅) を 1 次元の縦波が 1 往復する時間 (約 600ms) に等しい。時刻 1.7ms 付近に生じているわずかな振動は、基準棒のひずみゲージが衝撃端からわずかに離れた位置に接着されているために、基準棒の残留振動成分が検出されたことによる振動であり、真の衝撃力ではない。しかし、この振動成分は矩形状の衝撃力の成分に比べて十分に小さいため、本実験では Fig.6.8 の波形をそのまま衝撃力波形として採用した。この衝撃力波形に対する衝撃刃のひずみ応答の測定結果を Fig.6.9 に示す。ひずみ応答波形は、衝撃力波形と同様の矩形状の波形の上に正弦波状の波形が重畳され、値が急激に増加・減少した直後には細かな振動も生じる。この正弦波状の振動と細かな振動は、衝撃により発生した応力波がハンマ内部で反射を繰り返すために生じると考えられる。

方法 II の較正実験を行った場合の衝撃力の測定結果を Fig.6.10 に示す。Fig.6.10(a) は $\alpha = 30^\circ$ 、(b) は $\alpha = 45^\circ$ の場合の結果である。衝撃力波形はほぼ矩形状であり、衝撃時間は基準棒 (軟鋼) を 1 次元の縦波が 1 往復する時間 (約 400ms) に等しい。これらの衝撃

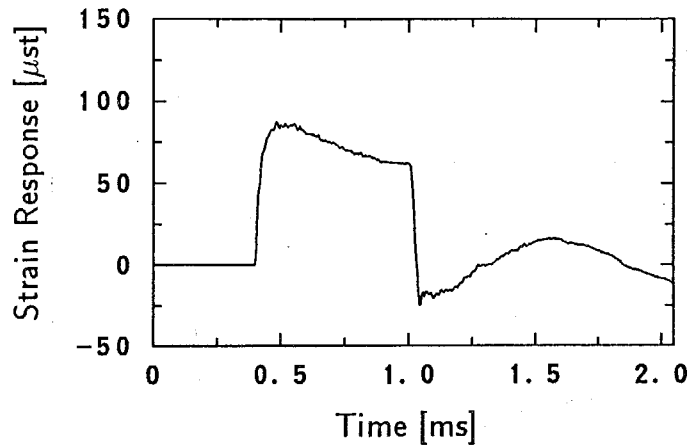
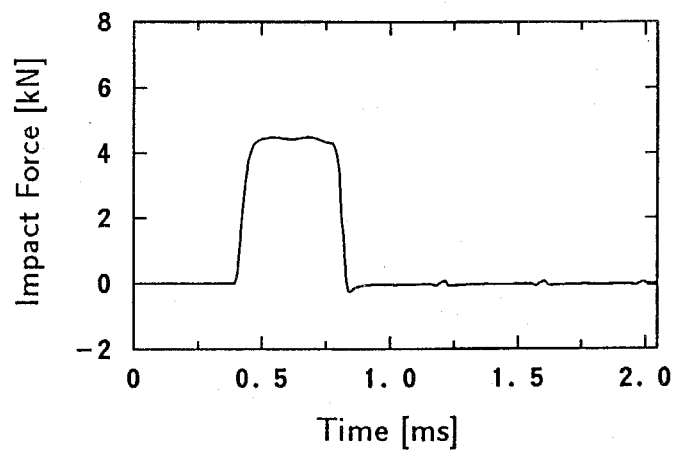
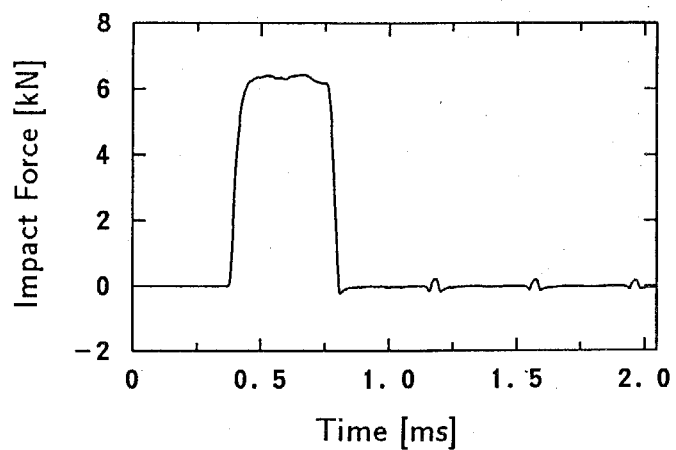


Figure 6.9: 較正実験における衝撃刃のひずみ応答の測定結果 (方法 I)

力波形に対する衝撃刃のひずみ応答の測定結果をそれぞれ Fig.6.11(a), (b) に示す. ひずみ応答は, 衝撃力波形と同様の矩形状の波形の上に正弦波状の波形が重畳された波形である. これらの衝撃力およびひずみ応答の測定結果は, 方法 I の較正実験の測定結果 (Fig.6.8, Fig.6.9) とは大きさおよび衝撃時間が異なるものの, 定性的には類似の波形である.

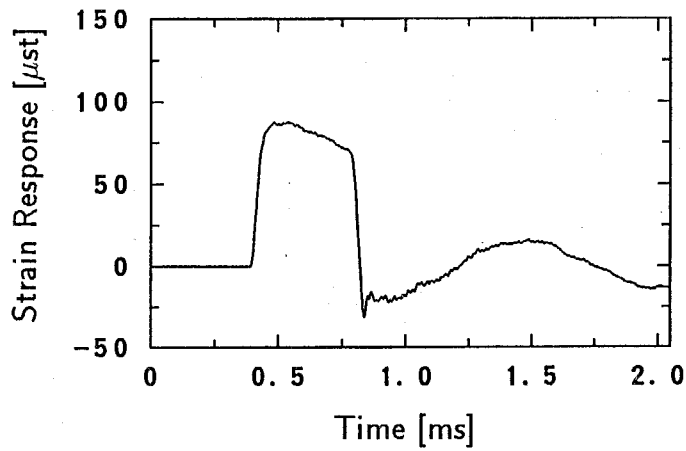


(a) $\alpha = 30^\circ$

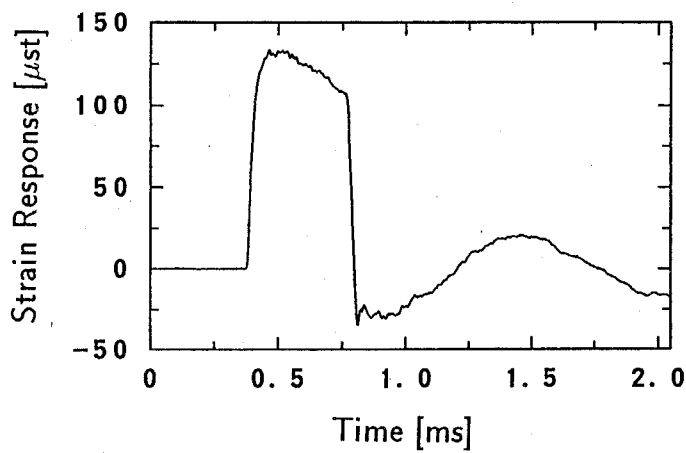


(b) $\alpha = 45^\circ$

Figure 6.10: 較正実験における衝撃力の測定結果 (方法 II)



(a) $\alpha = 30^\circ$



(b) $\alpha = 45^\circ$

Figure 6.11: 較正実験におけるひずみ応答の測定結果 (方法 II)

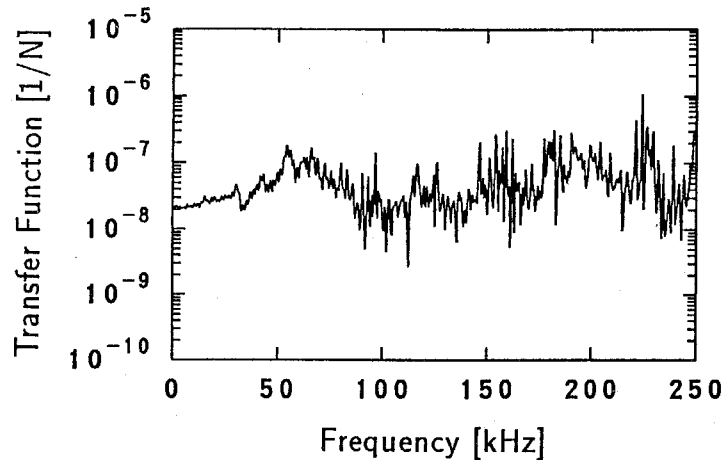


Figure 6.12: 伝達関数の同定結果 (較正実験の方法 I, 同定方法 a)

6.3.2 伝達関数

較正実験の方法 I により得られた衝撃力と衝撃刃のひずみ応答の測定データ (Fig.6.8, Fig.6.9) から, 方法 a によって伝達関数を同定した結果を Fig.6.12 に示す. Fig.6.12 では対称性のために周波数 $\omega/2\pi$ が正の範囲のみについて示し, 縦軸は伝達関数の絶対値を対数目盛で表している (伝達関数については以下でも同様の表示をする). Fig.6.12 によれば, 同定結果は 0 ~ 50kHz 程度の低周波域においては比較的滑らかであるが, それ以上の周波数域では激しく振動し, 幾つかの周波数において同定結果は極端に小さな値となる. このことから, この同定結果を使用して衝撃力の逆問題解析を行うと, 雑音の拡大が生じやすいことが予想される.

Fig.6.13(a) は, 較正実験の方法 II($\alpha = 30^\circ$) により得られた衝撃力とひずみ応答の測定データ (Fig.6.10(a), Fig.6.11(a)) から, 方法 a によって伝達関数を同定した結果である. 0 ~ 25kHz 程度の低周波域においては伝達関数は滑らかに同定され, Fig.6.12 の結果とほぼ一致する. 一方, 25kHz 以上の周波数域では激しい振動を生じ, Fig.6.12 の結果とは大きく異なる. しかし, 幾つかの周波数において同定結果が極端に小さな値となる傾向は Fig.6.12 の結果と同様であり, この同定結果を使用しても雑音の拡大が生じやすいことが予想される.

Fig.6.13(b) は, 較正実験の方法 II($\alpha = 30^\circ$) により得られた 10 組のデータ (Fig.6.10(a),

Fig.6.11(a)と同様の10組のデータから、方法bによって伝達関数を同定した結果である。Fig.6.13(a)とFig.6.13(b)を比較すると、方法bでは測定データの積算平均を行うために、方法aよりも雑音の影響が小さくなり、計算した全周波数において伝達関数がより滑らかに同定されることがわかる。しかしながら、Fig.6.13(b)からわかるように、この場合にも同定結果が極端に小さくなる部分は存在する。

Fig.6.13(c), (d)は、先程と同じ10組のデータからそれぞれ方法c, dによって伝達関数を同定した結果である。両者を比較すると、0～50kHzの低周波域においては両結果は一致しているが、それ以上の周波数域においてはFig.6.13(c)では値が小さくなるのに対し、Fig.6.13(d)では逆に値が大きくなる。Mitchell[72]によれば、方法cでは、

$$\begin{aligned}
 H_c(\omega) &\equiv \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} \\
 &= \frac{S_{fe}(\omega)}{S_{ff}(\omega) + S_{mm}(\omega)} \\
 &= \frac{H(\omega)}{1 + S_{mm}/S_{ff}}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

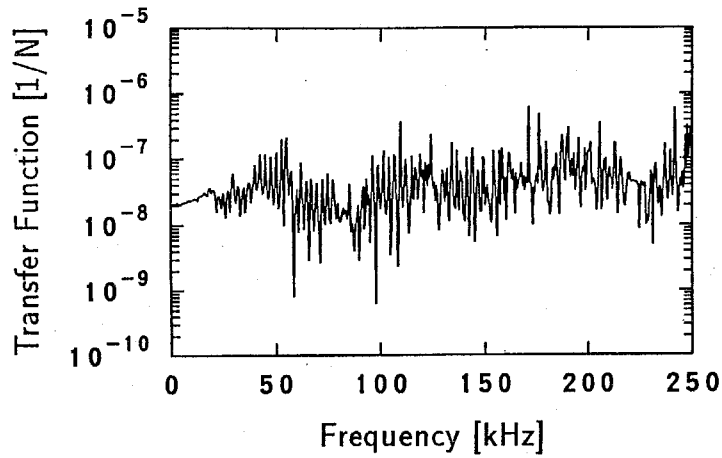
となり、 $S_{mm}/S_{ff} \geq 0$ であるから、 $H_c(\omega)$ は測定データに含まれる雑音 $m(t)$ のために真の伝達関数 $H(\omega)$ よりも絶対値が小さくなる。一方、方法dでは、

$$\begin{aligned}
 H_d(\omega) &\equiv \frac{S_{yy}(\omega)}{S_{yx}(\omega)} \\
 &= \frac{S_{ee}(\omega) + S_{nn}(\omega)}{S_{ef}(\omega)} \\
 &= H(\omega)[1 + S_{nn}/S_{ee}]
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

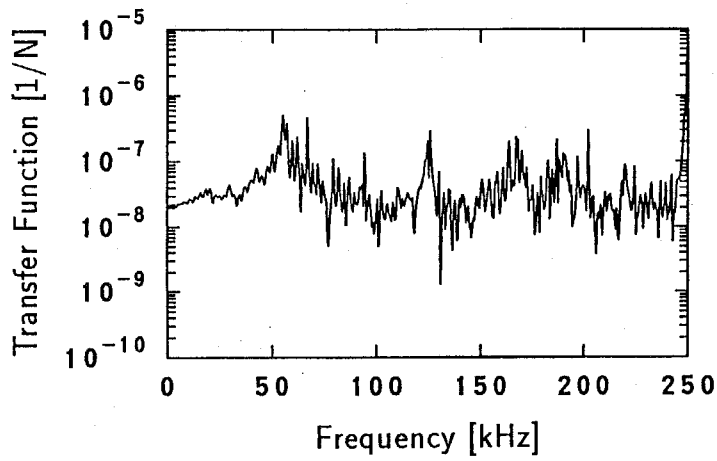
となり、 $S_{nn}/S_{ee} \geq 0$ であるから、 $H_d(\omega)$ は測定データに含まれる雑音 $n(t)$ のために真の伝達関数 $H(\omega)$ よりも絶対値が大きくなる。したがって、本較正実験で得られた測定データでは、50kHz以上の周波数において雑音が支配的であることが示されている。また、Fig.6.13(d)によれば方法dでは同定結果が極端に小さな値となることがなく、このことは衝撃力の逆問題解析において雑音の拡大が発生しにくいことを示している。

Fig.6.13(e)は、方法eに基づいてFig.6.13(c), (d)の結果の平均値を計算して伝達関数を同定した結果である。Mitchell[72]によれば、方法c, 方法dのどちらよりも方法eの方が伝達関数そのものの同定精度は高いことが知られている。したがって、Fig.6.13(e)

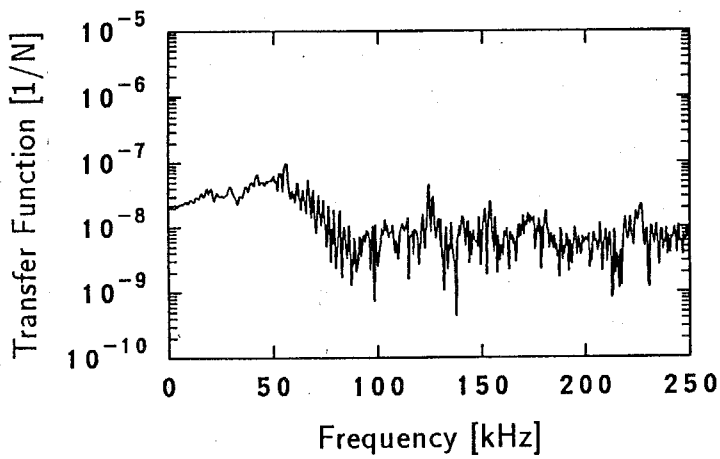
に示す同定結果は、これまでに示したどの同定結果よりも真の伝達関数に近い結果になっていると考えられる。



(a) 方法 a による同定結果

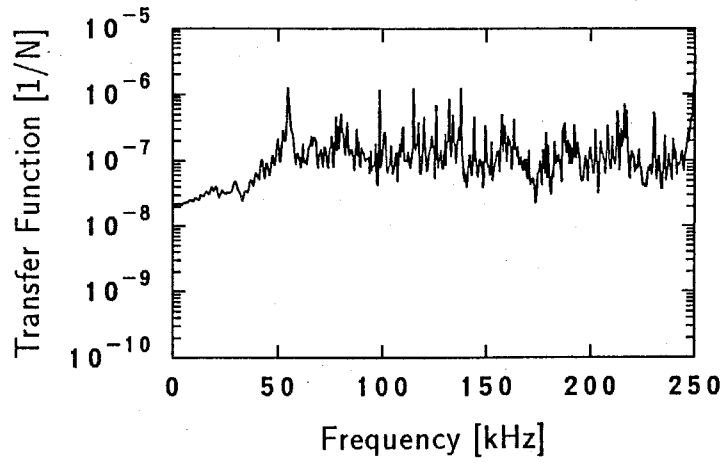


(b) 方法 b による同定結果

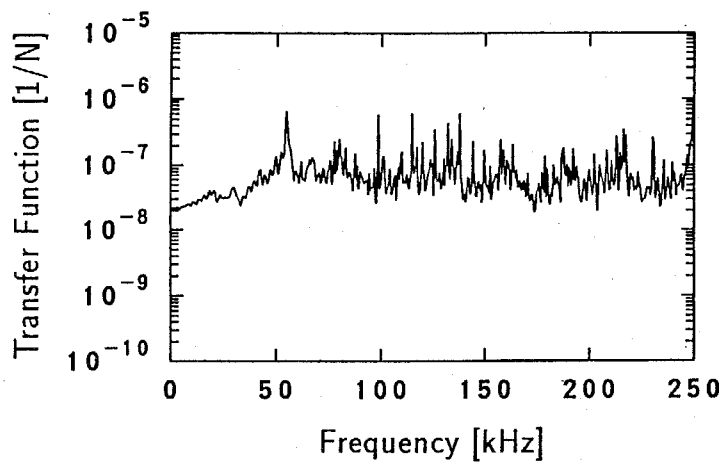


(c) 方法 c による同定結果

Figure 6.13: 伝達関数の同定結果 (校正実験の方法 II, $\alpha = 30^\circ$)



(d) 方法 d による同定結果



(e) 方法 e による同定結果

Figure 6.13: 伝達関数の同定結果 (較正実験の方法 II, $\alpha = 30^\circ$, 続き)

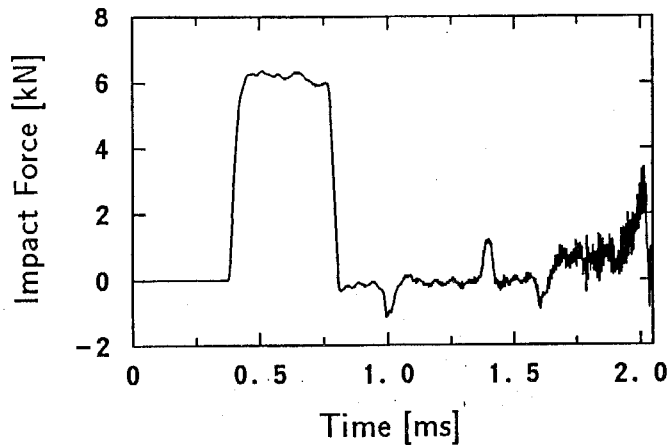


Figure 6.14: 逆問題解析手法に基づく基準棒の衝撃力の測定結果 ($\alpha = 45^\circ$, 較正実験—方法 I, 伝達関数の同定—方法 a)

6.3.3 弾性棒による衝撃力

逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法の有効性を確認するために、較正実験におけるひずみ応答の測定データから逆問題解析を行って基準棒による衝撃力を算定し、基準棒のひずみゲージにより衝撃力を直接測定した結果と比較した。

Fig.6.14 は、較正実験の方法 II において $\alpha = 45^\circ$ とした場合のひずみ応答の測定データ (Fig.6.11(b)) から、Fig.6.12 に示した伝達関数の同定結果を用いて逆問題解析を行い、衝撃力を算定した結果である。基準棒のひずみゲージによりこの衝撃力を直接測定した結果 (Fig.6.10(b)) と本結果とを比較すると、両結果の衝撃力波形の矩形状の部分は良く一致している。逆問題解析の結果には直接測定の結果には見られない 3 箇所小さなピークが現れるが、これは、6.3.1 で述べたように較正実験の衝撃力波形 (Fig.6.8) に基準棒の残留振動成分が混入していたため、それに相当する成分が現れたと考えられ、真の衝撃力を示すものではない。この小さなピーク以外については、逆問題解析の結果は直接測定の結果とほぼ一致しており、逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法が有効であることが示されている。

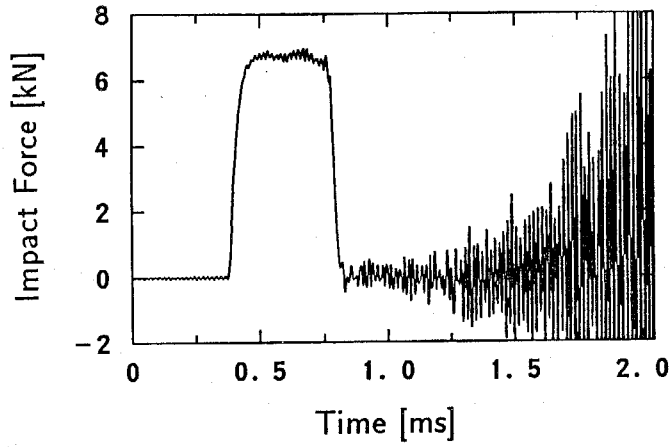
Fig.6.15(a) ~ (e) は、それぞれ Fig.6.13(a) ~ (e) に示した伝達関数の同定結果を用いて逆問題解析を行い、同様の衝撃力を算定した結果である。方法 a に基づいて直接的に

同定した伝達関数を用いる場合には、Fig.6.15(a)に示すように、雑音が著しく拡大されて衝撃力波形は不明瞭となり、満足な結果が得られない。方法bにより較正実験の測定データを積算平均して同定した伝達関数を用いる場合には、Fig.6.15(b)に示すように、方法aに基づく場合に比べて雑音の拡大が抑制されるが未だ十分ではなく、衝撃力波形は後半部分において不明瞭である。方法cによって同定した伝達関数を用いる場合には、Fig.6.15(c)に示すように、10組の較正実験の測定データを使用するにもかかわらず、1組の較正実験の測定データしか使用しない方法aによる場合とほぼ同程度の雑音の拡大が発生し、満足な結果は得られない。これら三つの場合に対し、最適逆システムの手法に基づく方法dによって同定した伝達関数を用いる場合には、Fig.6.15(d)に示すように、雑音の拡大がほとんど発生せず、Fig.6.10(b)に示した基準棒のひずみゲージにより直接測定した結果と良く一致する結果が得られる。すなわち、最適逆システムによる衝撃力の逆問題解析手法は、本実験においても有効であることが示されている。最後に、方法eによって同定した伝達関数を用いる場合にも、Fig.6.15(e)に示すように、Fig.6.10(b)の直接測定の結果と良く一致する結果が得られるが、方法dに基づく場合の結果と比較すると雑音拡大の傾向がわずかではあるが大きくなる。

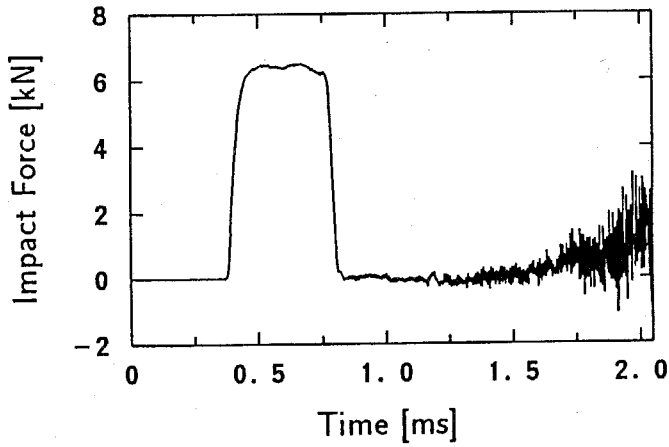
以上の結果より、最適逆システムによる衝撃力の逆問題解析手法は、計装化衝撃試験における衝撃力の測定において有効であることが明らかになった。そこで、以下に示す衝撃試験においては、最適逆システムに基づく方法dにより同定した伝達関数 Fig.6.13(d)を用いて、試験片に作用する衝撃力を算定することにする。

なお、Fig.6.14とFig.6.15の両結果によれば、方法Iによる較正実験を行った場合と方法IIによる較正実験を行った場合との間には、衝撃力の逆問題解析の結果は大きな違いは見られない。したがって、較正実験の方法としては、衝撃試験と同様の操作によって簡便に実験を行うことができる方法IIの方が、方法Iに比べて実用性が高いと考えられる。

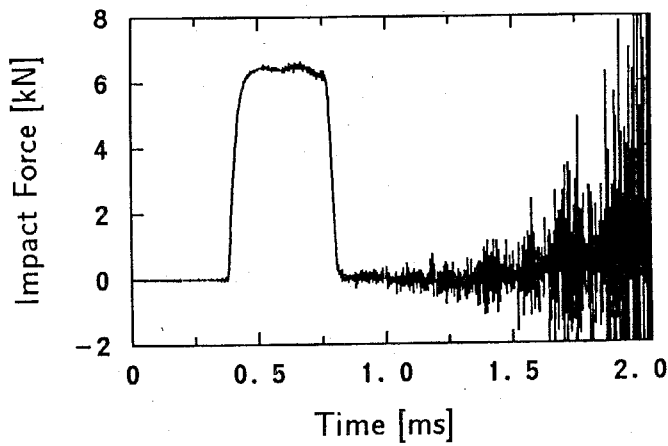
最後に、静的較正に基づく測定法により同様の衝撃力を算定した結果を Fig.6.16に示す。この結果を Fig.6.10(b)に示した直接測定の結果と比較すると、衝撃力波形の矩形の部分の大きさはある程度一致しているが、正弦波状の振動が重畳しているために全体的な波形は真の衝撃力波形とは大きく異なる。したがって、本実験のような場合には、静的較正に基づく衝撃力の測定法では衝撃力が正確に測定できないことが明らかになった。



(a) 伝達関数の同定方法 a の場合

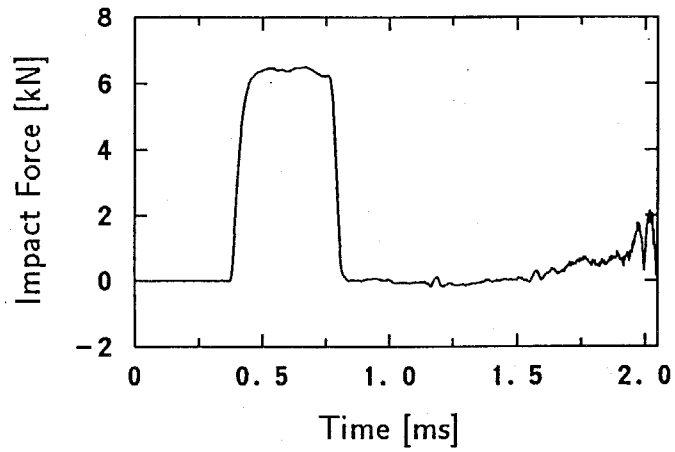


(b) 伝達関数の同定方法 b の場合

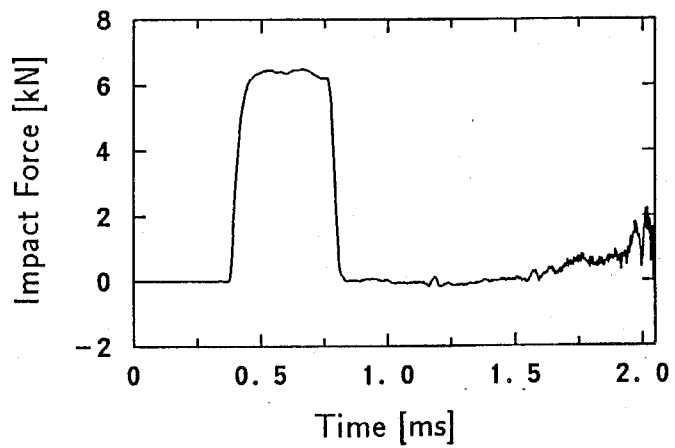


(c) 伝達関数の同定方法 c の場合

Figure 6.15: 逆問題解析手法に基づく基準棒の衝撃力の測定結果 ($\alpha = 45^\circ$, 較正実験—方法 II)



(d) 伝達関数の同定方法 d の場合



(e) 伝達関数の同定方法 e の場合

Figure 6.15: 逆問題解析手法に基づく基準棒の衝撃力の測定結果 ($\alpha = 45^\circ$, 較正実験—方法 II, 続き)

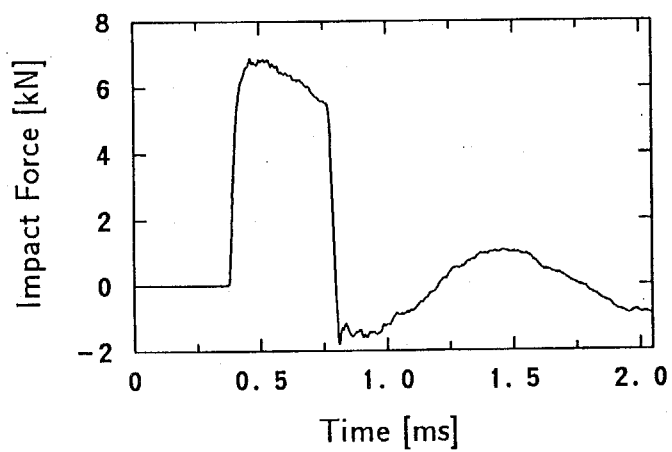


Figure 6.16: 静的較正に基づく基準棒の衝撃力の測定結果 ($\alpha = 45^\circ$)

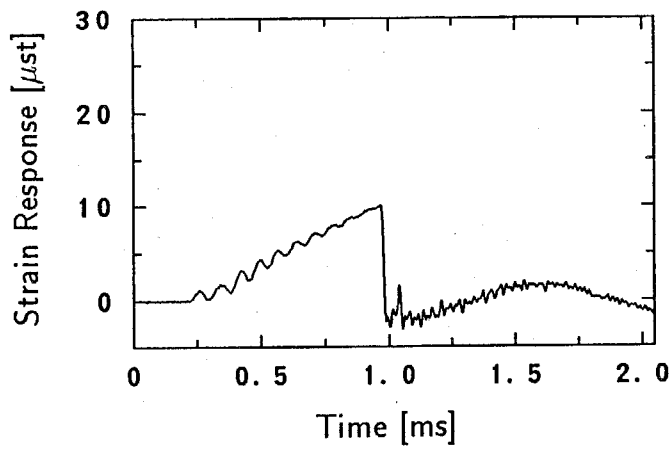
6.4 衝撃試験結果

6.4.1 ひずみ応答

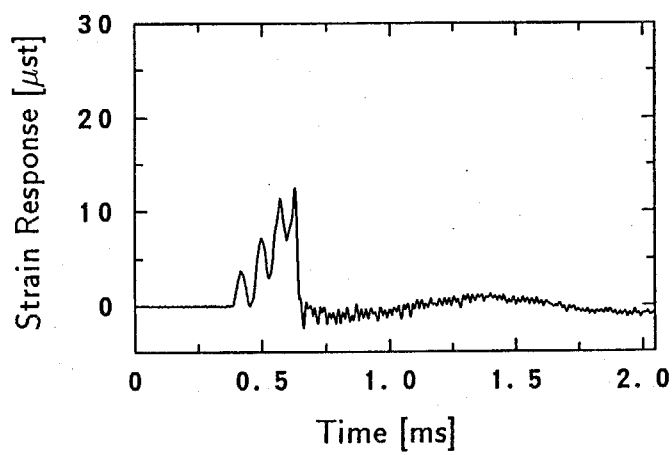
PMMA 樹脂, エポキシ樹脂, セラミックスのそれぞれの試験片について衝撃試験を実施し, 試験機のハンマのひずみ応答を測定した. Fig.6.17 は PMMA 樹脂の試験を行った場合のハンマのひずみ応答の測定結果であり, Fig.6.17(a) ~ (d) はハンマの持ち上げ角度をそれぞれ $\alpha = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ とした場合の測定結果を示している. $\alpha = 10^\circ$ の場合には, ひずみ応答波形は振動しながら立ち上がり, 約 0.75ms 後に急激に減少した後, 細かな振動を伴いながら正弦波状に振動する. この細かな振動と正弦波状の振動は, 較正実験におけるひずみ応答の測定結果 (Fig.6.9, Fig.6.11) に見られた振動に対応するものである. $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の場合のひずみ応答波形も同様の傾向にあるが, 持ち上げ角度が大きくなるにつれて, すなわち, 試験片の衝撃速度が大きくなるにつれて, 波形の立ち上がり部分の振動の振幅は大きくなり, 波形の立ち上がりから値が急激に減少するまでの時間は逆に短くなる.

Fig.6.18 はエポキシ樹脂試験片の衝撃試験を行った場合のひずみ応答の測定結果であり, Fig.6.18(a) ~ (d) はそれぞれ $\alpha = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の場合の測定結果を示している. PMMA 樹脂の場合 (Fig.6.17) と比較すると, 本結果は波形の大きさや時間的スケールが異なるものの, 定性的には類似の傾向にある.

Fig.6.19 はセラミックス試験片の衝撃試験時のひずみ応答の測定結果であり, Fig.6.19(a) ~ (d) はそれぞれ $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の場合の測定結果を示している. PMMA 樹脂, エポキシ樹脂の場合と異なり, 波形は極めて短い時間に大きな値をとり, その後は激しく振動する. PMMA 樹脂, エポキシ樹脂の場合に見られた正弦波状の振動はほとんど現れないが, これは, セラミックスの場合にはひずみ応答の最大値に比べて正弦波状の振動の振幅が極めて小さいためであると考えられる.

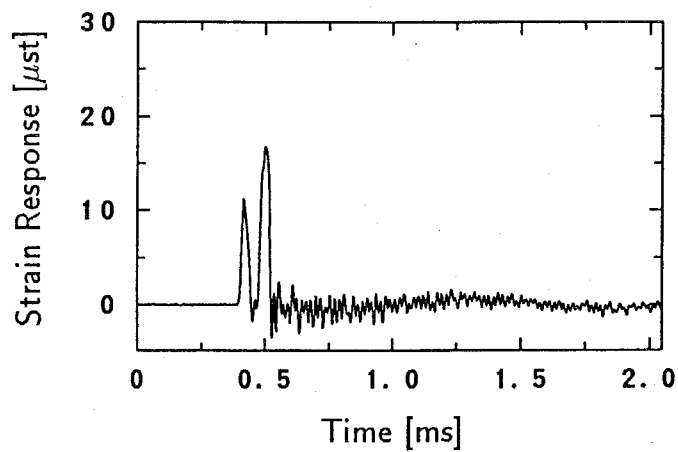


(a) $\alpha = 10^\circ$

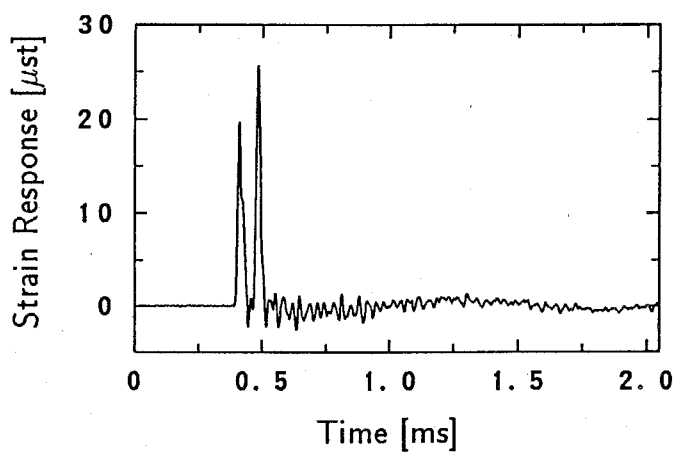


(b) $\alpha = 30^\circ$

Figure 6.17: PMMA 樹脂の衝撃試験におけるハンマのひずみ応答

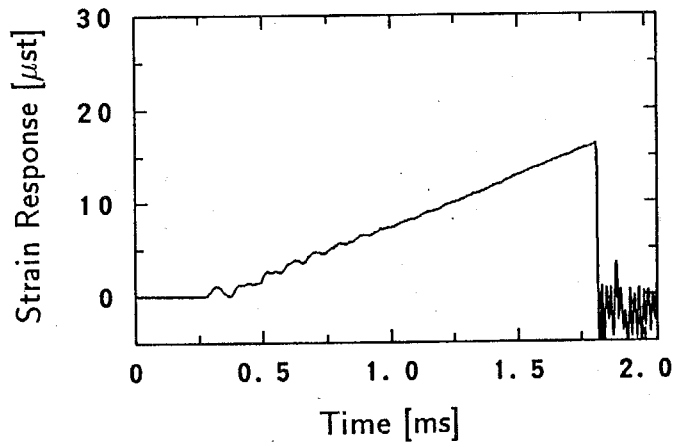


(c) $\alpha = 60^\circ$

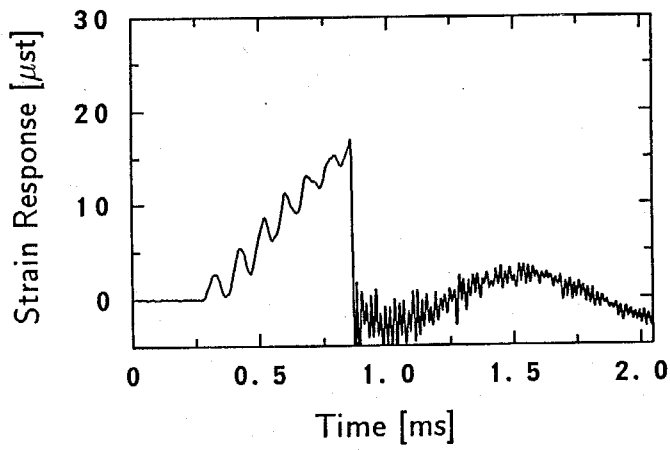


(d) $\alpha = 90^\circ$

Figure 6.17: PMMA 樹脂の衝撃試験におけるハンマのひずみ応答 (続き)

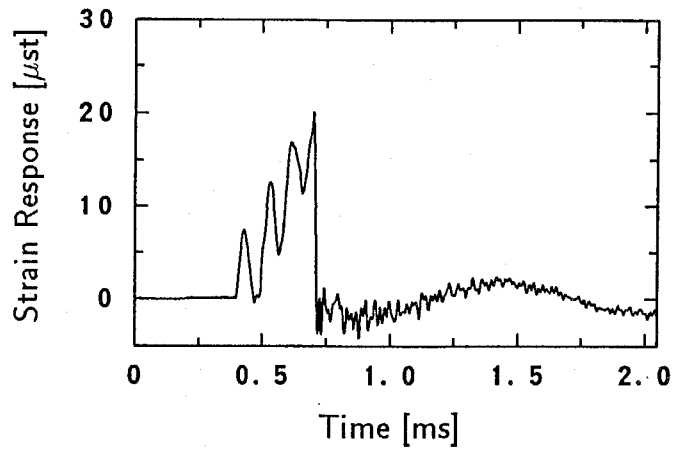


(a) $\alpha = 10^\circ$

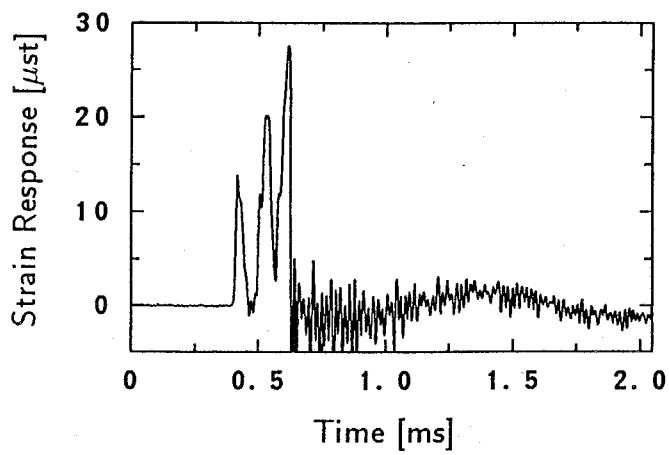


(b) $\alpha = 30^\circ$

Figure 6.18: エポキシ樹脂の衝撃試験におけるハンマのひずみ応答

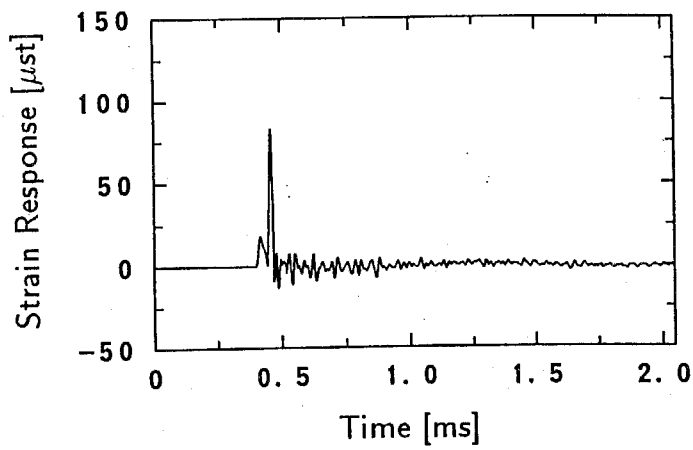


(c) $\alpha = 60^\circ$

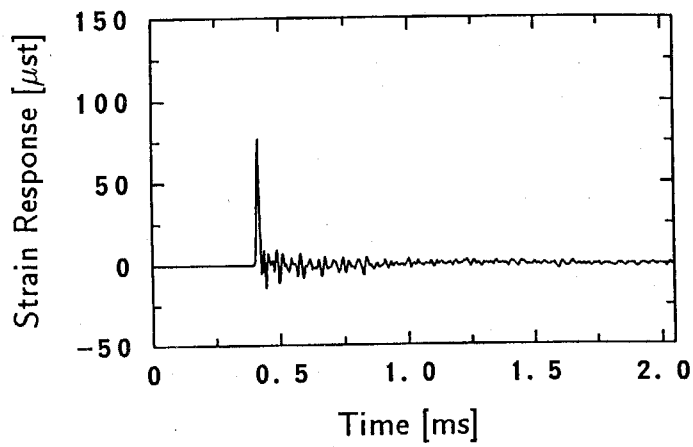


(d) $\alpha = 90^\circ$

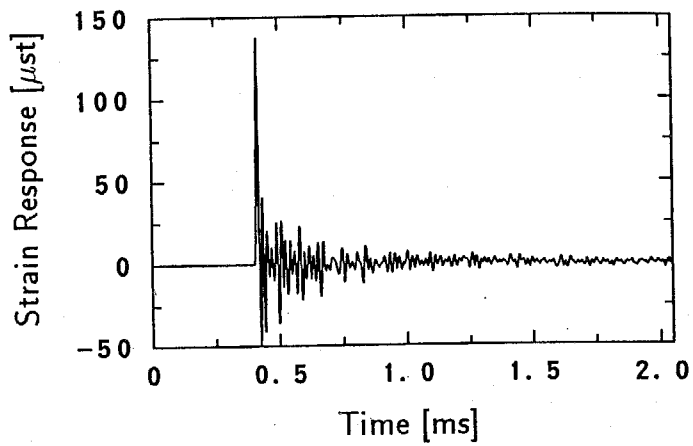
Figure 6.18: エポキシ樹脂の衝撃試験におけるハンマのひずみ応答 (続き)



(a) $\alpha = 30^\circ$



(b) $\alpha = 60^\circ$



(c) $\alpha = 90^\circ$

Figure 6.19: セラミックスの衝撃試験におけるハンマのひずみ応答

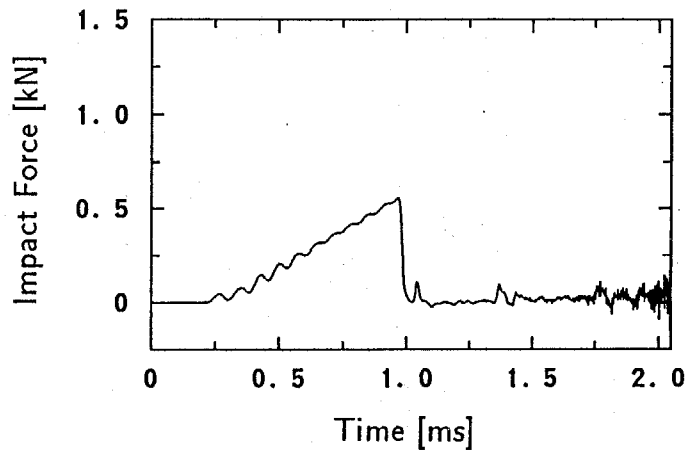
6.4.2 衝撃力

最適逆システムの手法に基づいて同定した伝達関数 Fig.6.13(d) を用いて、ハンマのひずみ応答より逆問題解析を行って衝撃力を算定した。PMMA 樹脂試験片の場合のひずみ応答データ Fig.6.17 から衝撃力を算定した結果を Fig.6.20 に示す。Fig.6.20(a) ~ (d) はそれぞれ $\alpha = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の場合の衝撃力の算定結果である。いずれの持ち上げ角度 α においても衝撃力は振動しながら立ち上がり、最大値に達した後急激に零となることから、試験片は脆性的に破断したと考えられる。 α が大きくなるにつれて、すなわち、衝撃速度が大きくなるにつれて、衝撃時間は短くなり、最大衝撃力は逆に大きくなる。衝撃速度が大きくなるにつれて衝撃力波形の立ち上がり部分の振動の振幅は大きくなるが、周期はほとんど変化しないことから、試験片の曲げ振動によって衝撃力が振動的になると考えられる。なお、ひずみ応答の測定波形 Fig.6.17 に見られた正弦波状の振動、および、急激に値が減少した後の細かな振動は、逆問題解析によって得られた衝撃力波形には現れない。

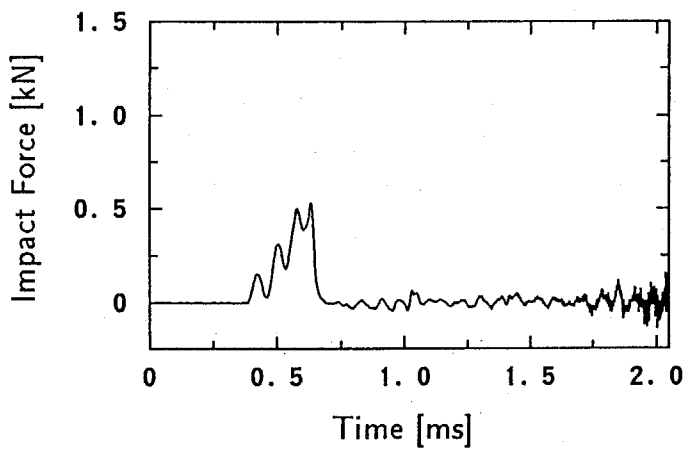
次に、同じひずみ応答データから、静的較正によって決定された定数を乗じて衝撃力を算定した結果を Fig.6.21 に示す。逆問題解析手法により算定された衝撃力波形 Fig.6.20 と比較すると、いずれの持ち上げ角度 α においても、静的較正により得られた衝撃力波形には正弦波状の振動と除荷後の細かな振動が混入する。前述したように、これらはハンマの内部の振動が検出されたものであり、真の衝撃力波形にはこのような振動は無い。また、 $\alpha = 60^\circ, 90^\circ$ の場合には衝撃中に衝撃力が負になる部分があるが、実際には試験片とハンマの衝突による衝撃力は引張力となることはあり得ず、静的較正に基づく測定法では衝撃力を正確に評価できないことが示唆される。

Fig.6.22 は、Fig.6.18 のひずみ応答の測定データから逆問題解析を行ってエポキシ樹脂試験片に作用した衝撃力を算定した結果である。PMMA 樹脂試験片の場合の衝撃力波形とは、衝撃力の大きさや衝撃時間などが異なるが、定性的には類似の結果である。

Fig.6.23 は、同様に、Fig.6.19 のひずみ応答の測定データから逆問題解析を行ってセラミックス試験片に作用した衝撃力を算定した結果である。なお、この場合には衝撃時間が短いために、全データの内の前半部分(時刻 0 ~ 1ms の範囲)のみを拡大して表示している。セラミックス試験片の場合には、PMMA 樹脂、エポキシ樹脂試験片の場合に比べ

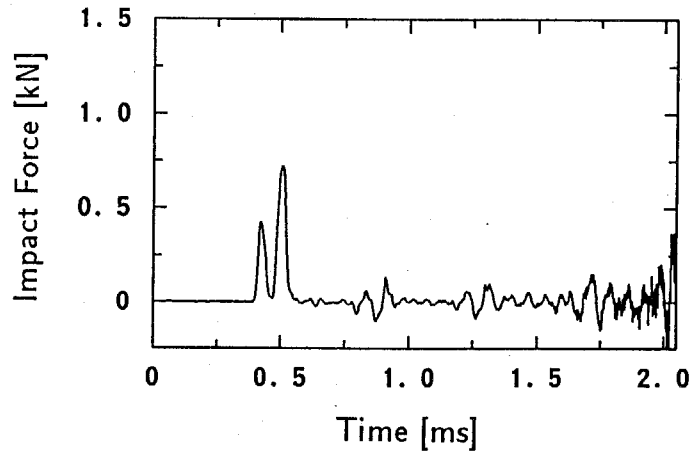


(a) $\alpha = 10^\circ$

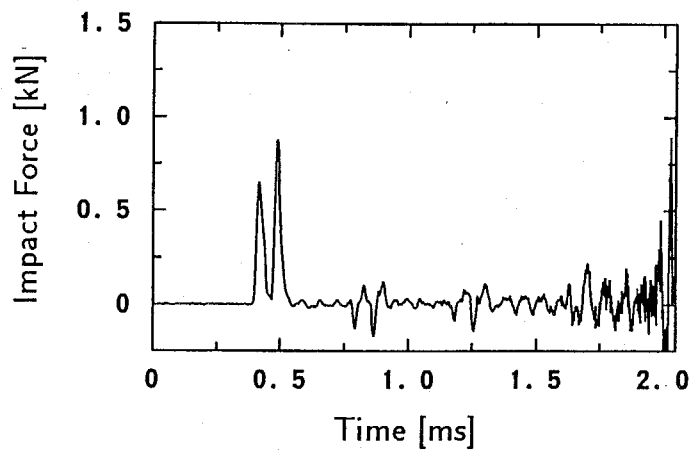


(b) $\alpha = 30^\circ$

Figure 6.20: 逆問題解析手法に基づく PMMA 樹脂試験片の衝撃力の測定結果

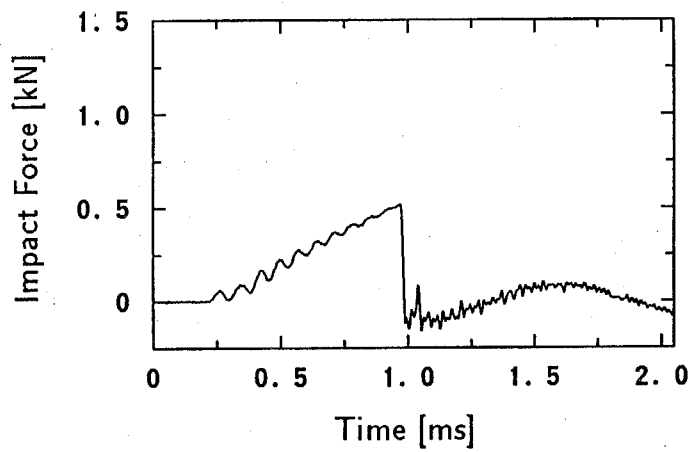


(c) $\alpha = 60^\circ$

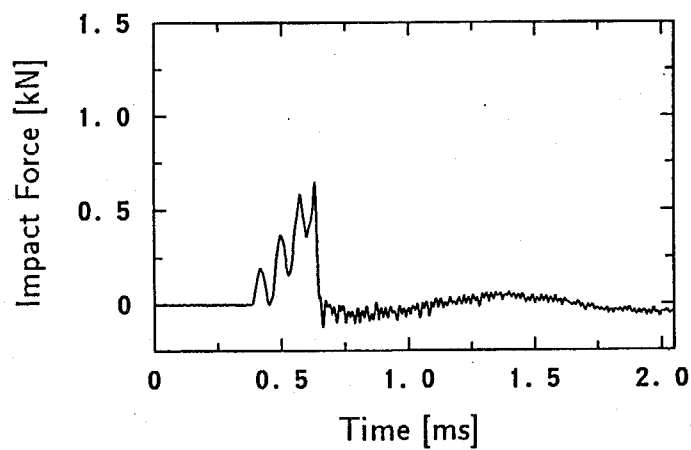


(d) $\alpha = 90^\circ$

Figure 6.20: 逆問題解析手法に基づく PMMA 樹脂試験片の衝撃力の測定結果 (続き)

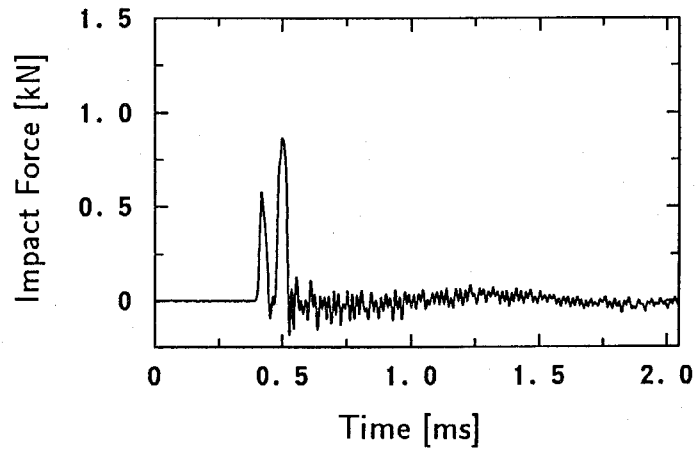


(a) $\alpha = 10^\circ$

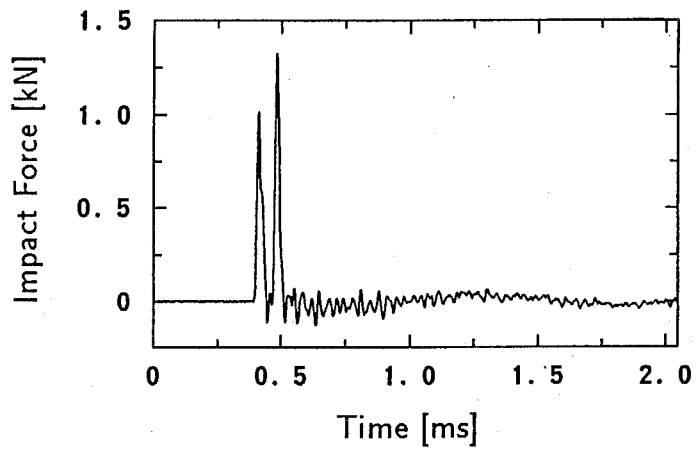


(b) $\alpha = 30^\circ$

Figure 6.21: 静的較正に基づく PMMA 樹脂試験片の衝撃力の測定結果

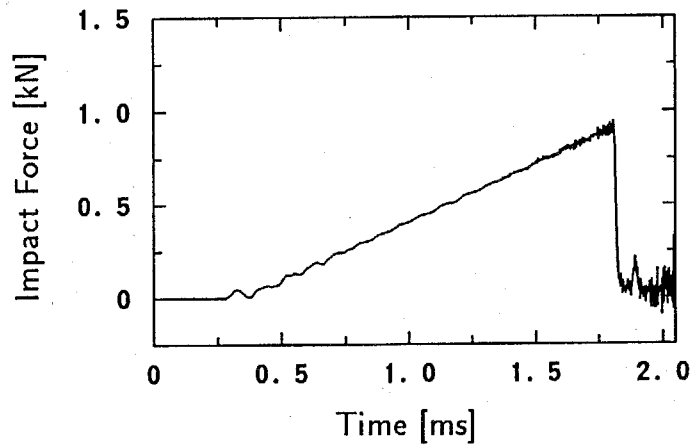


(c) $\alpha = 60^\circ$

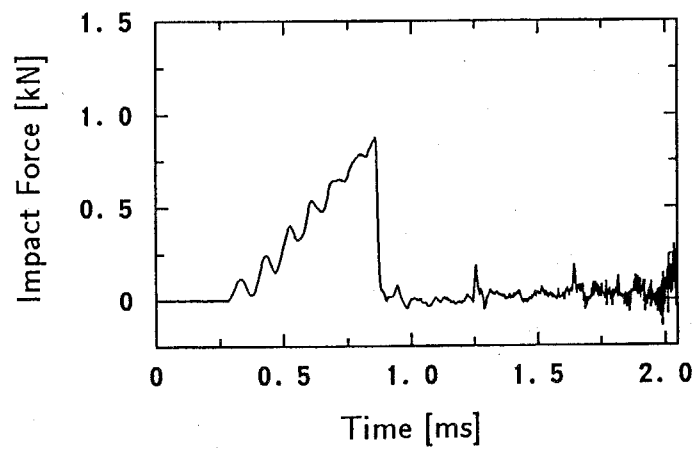


(d) $\alpha = 90^\circ$

Figure 6.21: 静的較正に基づく PMMA 樹脂試験片の衝撃力の測定結果 (続き)

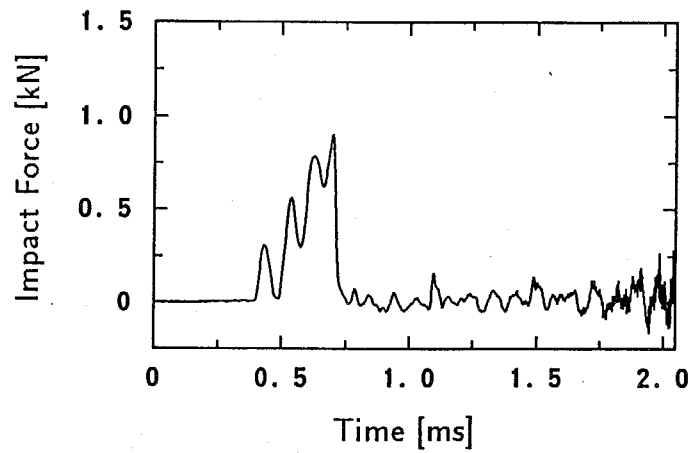


(a) $\alpha = 10^\circ$

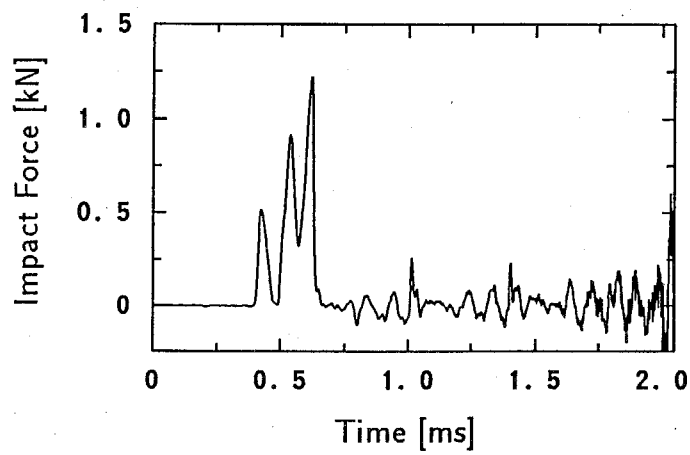


(b) $\alpha = 30^\circ$

Figure 6.22: 逆問題解析手法に基づくエポキシ樹脂試験片の衝撃力の測定結果



(c) $\alpha = 60^\circ$



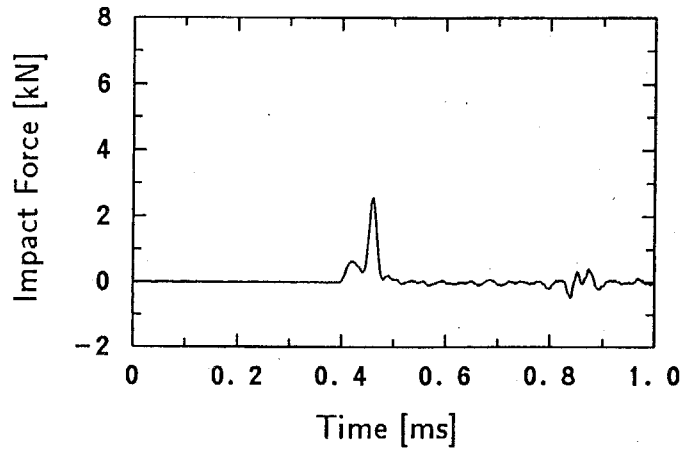
(d) $\alpha = 90^\circ$

Figure 6.22: 逆問題解析手法に基づくエポキシ樹脂試験片の衝撃力の測定結果 (続き)

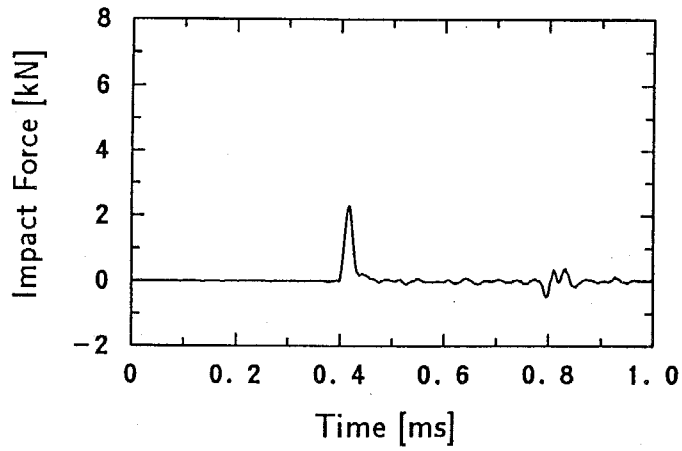
て衝撃時間は極めて短い。特に、 $\alpha = 60^\circ, 90^\circ$ の場合には衝撃力波形の立ち上がり部分の振動が見られず、セラミックス試験片は曲げ振動の初期の1周期の間に脆性的に破断したと考えられる。

以上の各試験片の衝撃力測定結果の最大衝撃力を Table 6.2 に示す。Table 6.2 において、衝撃速度はハンマの持ち上げ角度から式 (6.8) により求めた値である。また、静的較正に基づいて測定した最大衝撃力と、逆問題解析手法を適用して測定した最大衝撃力の両方をそれぞれ個々の試験片について示している。

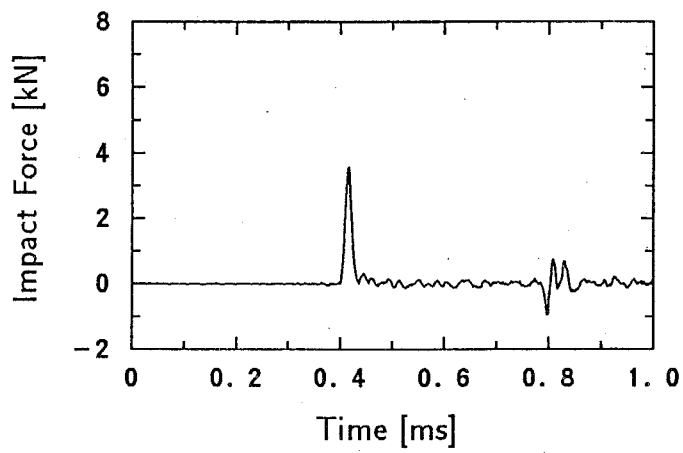
さらに、Table 6.2 の結果より衝撃速度と最大衝撃力の関係をプロットしたグラフを Fig.6.24 に示す。Fig.6.24(a) ~ (c) はそれぞれ、PMMA 樹脂試験片、エポキシ樹脂試験片、セラミックス試験片についての衝撃試験の結果を示しており、いずれにおいても、●印は静的較正に基づいて測定した最大衝撃力、○印は逆問題解析手法を適用して測定した最大衝撃力を表している。また、PMMA 樹脂試験片とエポキシ樹脂試験片については準静的な三点曲げ試験も行って最大荷重を測定したため、Fig.6.24(a), (b) にはその結果を□印で示している。Fig.6.24 によれば、いずれの材料についても、最大衝撃力は衝撃速度が大きくなるにつれて増加する。また、PMMA 樹脂試験片とエポキシ樹脂試験片については、静的較正に基づいて測定した場合と逆問題解析手法を適用して測定した場合のいずれの結果も、衝撃速度が零に近づくとつれて準静的な三点曲げ試験の結果に漸近する。しかしながら、衝撃速度が大きい場合には、静的較正に基づいて測定した最大衝撃力は逆問題解析手法を適用して測定した最大衝撃力に比べて大きい値になる。このことは、静的較正に基づく衝撃力の測定では、材料の衝撃強度が過大評価されること、すなわち、危険側に評価されることを示している。



(a) $\alpha = 30^\circ$



(b) $\alpha = 60^\circ$

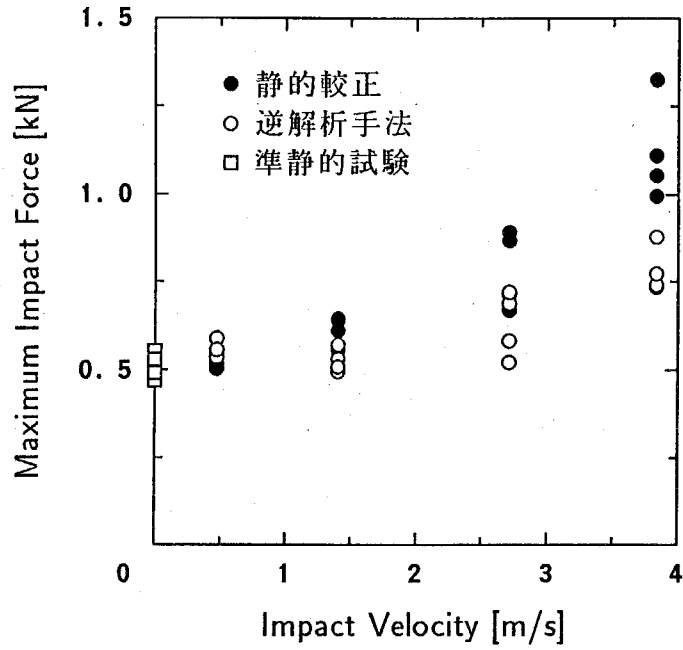


(c) $\alpha = 90^\circ$

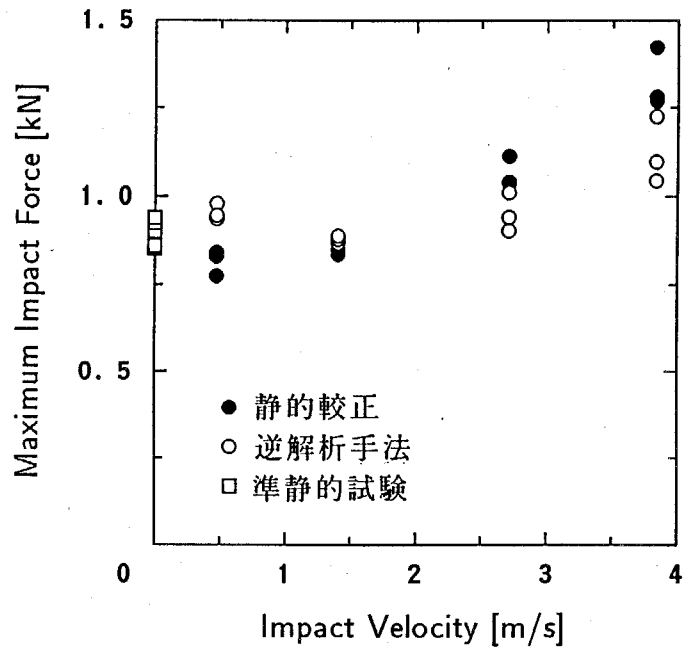
Figure 6.23: 逆問題解析手法に基づくセラミックス試験片の衝撃力の測定結果

Table 6.2: 最大衝撃力の測定結果

試験片	衝撃速度 [m/s]	最大衝撃力 [N]	
		静的較正	逆問題解析
PMMA 樹脂	0.473	504	537
		519	559
		540	589
	1.404	558	497
		612	510
		645	533
		640	573
	2.712	669	522
		716	583
		889	688
		866	720
	3.835	995	734
		1053	740
		1111	772
		1324	877
エポキシ樹脂	0.473	773	936
		841	946
		829	979
	1.404	836	867
		878	879
		850	888
	2.712	1037	902
		1040	941
		1114	1011
	3.835	1268	1043
		1281	1097
		1421	1224
セラミックス	1.404	3598	2411
		4303	2561
	2.712	3433	2157
		3985	2274
	3.835	5753	3088
		7086	3580

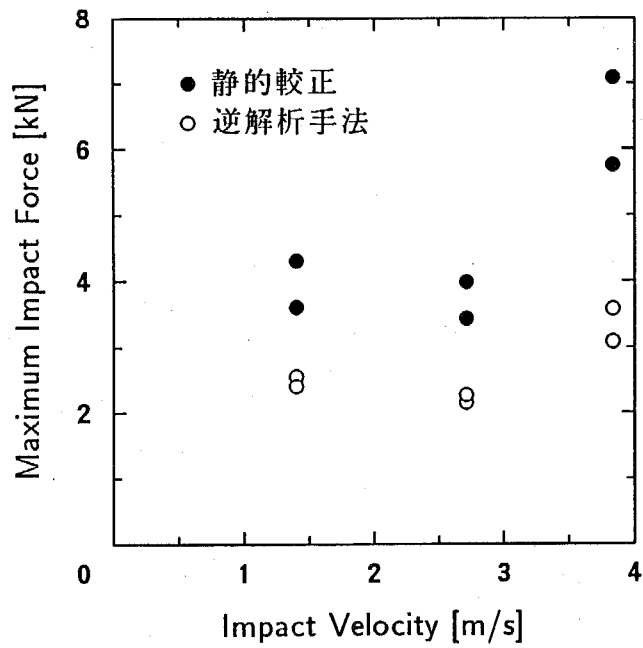


(a) PMMA 樹脂試験片



(b) エポキシ樹脂試験片

Figure 6.24: 最大衝撃力の測定結果



(c) セラミックス試験片

Figure 6.24: 最大衝撃力の測定結果 (続き)

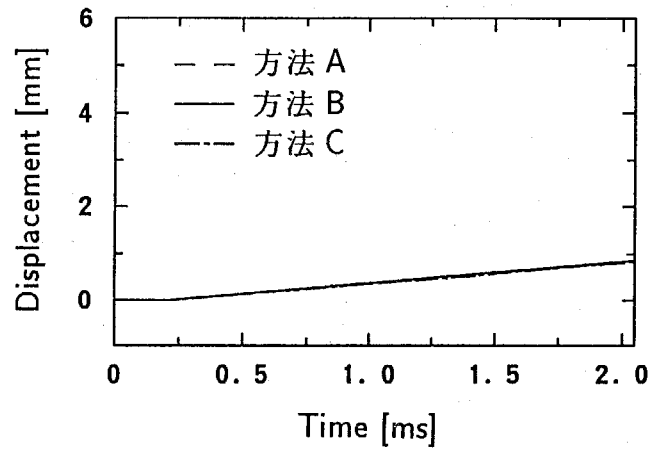
6.4.3 吸収エネルギー

前項に示した衝撃力の測定結果を用いて、各試験片の吸収エネルギーを算定した。まず、吸収エネルギーを算定した際の途中結果である、荷重点変位の算定結果を Fig.6.25 に示す。Fig.6.25(a) ~ (d) は PMMA 樹脂試験片の衝撃試験をそれぞれ $\alpha = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の持ち上げ角度のもとで行った場合の結果である。また、破線は静的較正に基づく衝撃力の測定結果から算定した荷重点変位、実線は逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定結果から算定した荷重点変位、一点鎖線はポテンショメータを用いて測定した荷重点変位を示している。Fig.6.25 によれば、いずれの持ち上げ角度においても、荷重点変位は時間とともに直線的に増加し、算定方法に関係なく同様の結果が得られる。荷重点変位の時間に対する増加の割合は、持ち上げ角度から式 (6.8) によって求めた衝撃速度にほぼ一致する。このことは、本実験に使用した試験機の秤量が試験片の吸収エネルギーに比べて極めて大きいために、衝撃によるハンマの速度変化が極めて小さくなったことによると考えられる。また、既に述べたように静的較正に基づく衝撃力の測定結果と逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定結果の間には大きな違いがあったが、それらの衝撃力のそれぞれから算定した荷重点変位の間にはほとんど違いがない。これは、式 (6.6), (6.7) によって衝撃力から荷重点変位を求める際に衝撃力を時間に関して二回積分するために、衝撃力波形に混入している振動成分が荷重点変位にほとんど影響を及ぼさないためと考えられる。なお、エポキシ樹脂試験片およびセラミックス試験片の荷重点変位の算定結果も PMMA 樹脂試験片の場合と類似の傾向を示した。

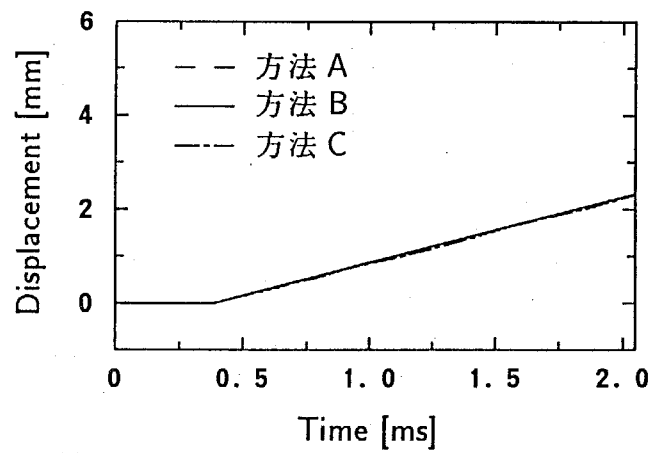
以上の結果より、本実験のように試験片の吸収エネルギーが試験機の秤量に比べて極めて小さい場合には、本研究で採用したいずれの方法を用いても荷重点変位を測定できることが明らかになった。

上述の衝撃力および荷重点変位の測定結果より、式 (6.9) に基づいて試験片の吸収エネルギーを計算した結果を Table 6.3 に示す。Table 6.3 において、衝撃速度はハンマの持ち上げ角度から式 (6.8) によって求めた値であり、方法 A ~ C によって得られた吸収エネルギーを個々の試験片について示している。また、表中のデータの順序は Table 6.2 のデータの順序に対応している。

さらに、Table 6.3 の結果より衝撃速度と吸収エネルギーの関係をプロットしたグラフを

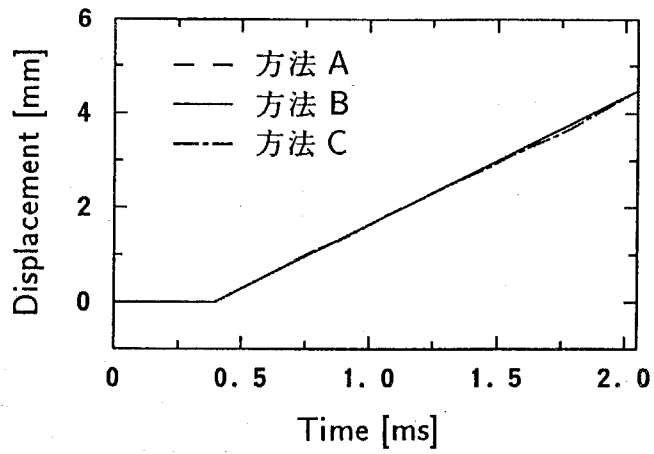


(a) $\alpha = 10^\circ$

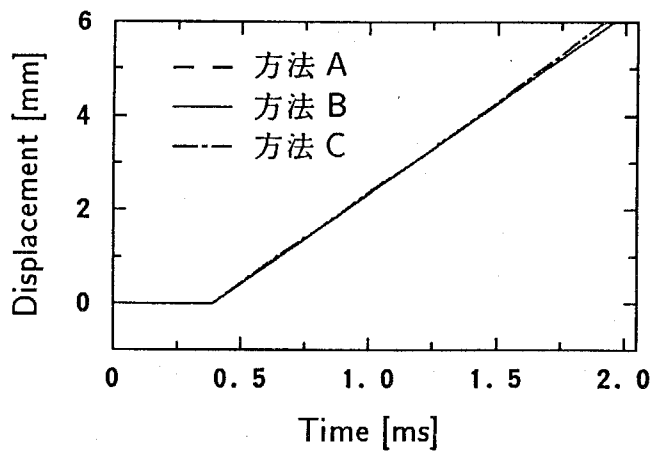


(b) $\alpha = 30^\circ$

Figure 6.25: PMMA 樹脂試験片の荷重点変位の測定結果



(c) $\alpha = 60^\circ$



(d) $\alpha = 90^\circ$

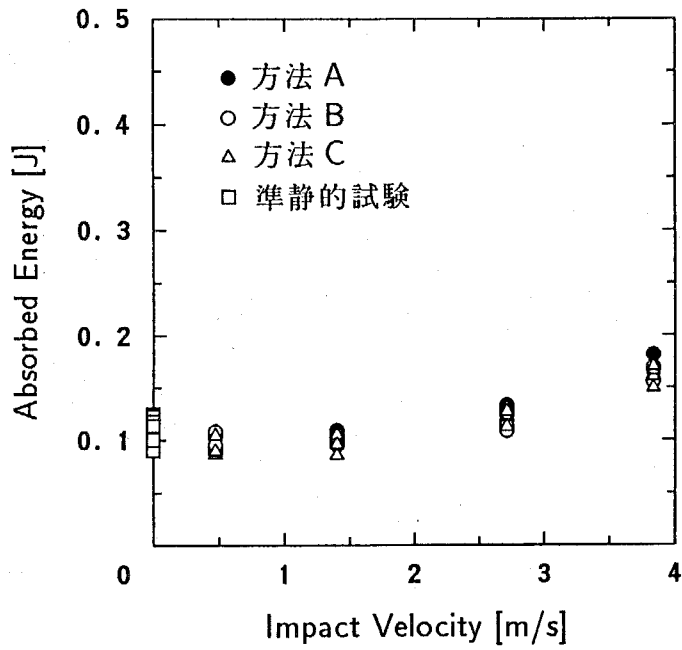
Figure 6.25: PMMA 樹脂試験片の荷重点変位の測定結果 (続き)

Table 6.3: 試験片の吸収エネルギーの測定結果

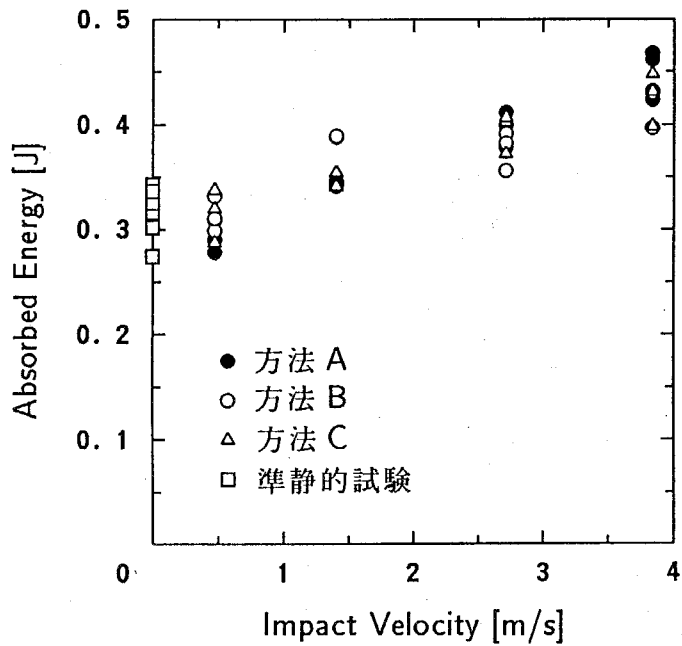
試験片	衝撃速度 [m/s]	吸収エネルギー [J]		
		方法 A	方法 B	方法 C
PMMA 樹脂	0.473	0.089	0.091	0.087
		0.093	0.096	0.090
		0.104	0.108	0.105
	1.404	0.105	0.100	0.102
		0.103	0.099	0.096
		0.101	0.096	0.086
	2.712	0.109	0.104	0.105
		0.118	0.109	0.112
		0.126	0.126	0.127
	3.835	0.133	0.130	0.131
		0.123	0.113	0.113
		0.169	0.157	0.161
0.168		0.156	0.149	
エポキシ樹脂	0.473	0.181	0.168	0.166
		0.182	0.169	0.170
		0.278	0.299	0.287
	1.404	0.290	0.310	0.320
		0.309	0.331	0.338
		0.343	0.341	0.344
	2.712	0.346	0.343	0.341
		0.388	0.389	0.354
		0.399	0.382	0.407
	3.835	0.378	0.356	0.372
		0.412	0.391	0.403
		0.423	0.397	0.398
0.461		0.430	0.431	
セラミックス	1.404	0.467	0.432	0.448
		0.105	0.093	0.091
	2.712	0.109	0.098	0.079
		0.163	0.148	0.133
	3.835	0.137	0.123	0.128
		0.243	0.184	0.151
		0.267	0.199	0.188

Fig.6.26 に示す。Fig.6.26(a) ~ (c) はそれぞれ、PMMA 樹脂試験片、エポキシ樹脂試験片、セラミックス試験片の衝撃試験結果を示しており、いずれにおいても、●印は方法 A、○印は方法 B、△印は方法 C により算定した吸収エネルギーを表している。また、PMMA 樹脂試験片とエポキシ樹脂試験片については準静的な三点曲げ試験も行って吸収エネルギーを算定したため、Fig.6.26(a), (b) にはその結果を □ 印で示している。Fig.6.26 によれば、いずれの材料についても、吸収エネルギーは衝撃速度が大きくなるにつれて増加する。PMMA 樹脂試験片とエポキシ樹脂試験片については、衝撃速度が零に近づくにつれて準静的な三点曲げ試験の結果に漸近することから、本実験により得られた吸収エネルギーはほぼ妥当な値であると考えられる。PMMA 樹脂試験片とエポキシ樹脂試験片については、方法 A ~ C のいずれの方法によって算定した場合にも吸収エネルギーはほぼ同じ値が得られたが、セラミックス試験片については、方法 A による算定結果は方法 B, C による算定結果に比べて大きな値となっている。このことは、静的較正に基づいて測定された衝撃力をもとにして吸収エネルギーを算定すると、吸収エネルギーが過大評価される可能性があることを示している。

なお、シャルピー衝撃試験における試験片の吸収エネルギーは、通常、試験片破断前後のハンマの角度変化から求めるが、前述したように、本実験では試験機の秤量に比べて試験片の吸収エネルギーが極めて小さかったために、通常の方法では吸収エネルギーを評価することはできなかった。しかし、計装化を行うことにより、このような場合にも吸収エネルギーが評価できることが明らかになった。

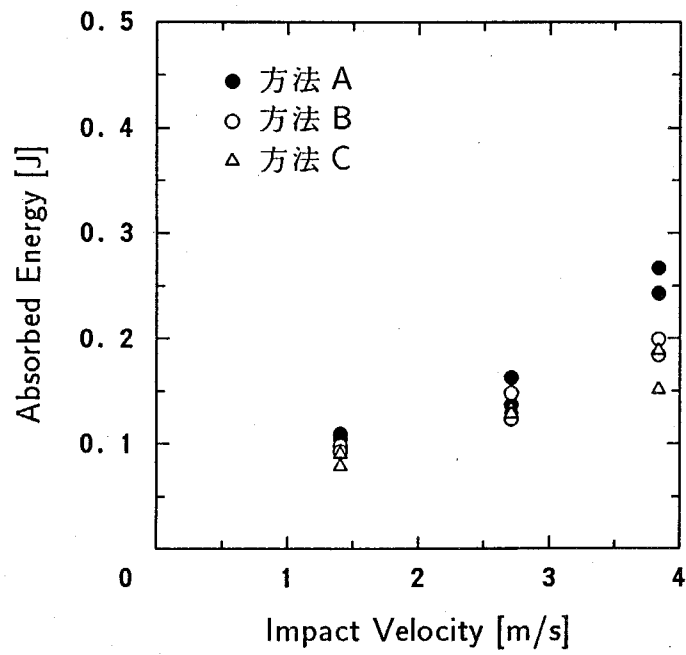


(a) PMMA 樹脂試験片



(b) エポキシ樹脂試験片

Figure 6.26: 吸収エネルギーの測定結果



(c) セラミックス試験片

Figure 6.26: 吸収エネルギーの測定結果 (続き)

6.5 結言

本章では、衝撃力の逆問題解析手法を計装化衝撃試験における衝撃力測定に適用し、その有効性を確認するとともに、従来の衝撃力測定法の問題点を明らかにした。また、衝撃力の測定結果をもとにして、試験片の吸収エネルギーを算定する方法について論じた。得られた結論は以下の通りである。

1. 逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法を適用すれば、計装化衝撃試験において試験片に作用する衝撃力を精度良く測定することができる。その際、最適逆システムによる逆問題解析手法を適用すれば、逆問題解析による雑音の拡大を抑制することができ、衝撃力の測定精度は向上する。
2. 計装化シャルピー衝撃試験において静的較正に基づいて衝撃力を測定する従来の方法は、真の衝撃力波形の上にハンマ内部の振動成分が重畳されるため、正確な衝撃力波形が得られず、衝撃力が過大に評価される難点を有する。
3. シャルピー衝撃試験機の秤量に比べて試験片の吸収エネルギーが極めて小さく、ハンマの衝撃前後の角度変化からは吸収エネルギーが評価できない場合にも、逆問題解析手法を適用して衝撃力を正確に測定すれば、吸収エネルギーを正確に評価できる。

第 7 章

結論

本論文では、これまで困難であった衝撃力の測定を容易にすることを目的として、物体の衝撃応答から任意形状の物体に作用する衝撃力の大きさと方向を求める逆問題の解析手法を研究した。はじめに、物体に作用する衝撃力とそれに対する応答とが畳み込み積分により関係づけられることに基づき、応答の測定データから逆畳み込みを行うことによって任意の衝撃力の大きさと方向が推定できることを示した。次に、この逆問題は数学的な不適切性を有するために、基礎関係式に基づく直接的な逆問題解析を行っても衝撃力の安定かつ正確な推定は困難であることを指摘するとともに、その解決法として、非因果的ウィーナフィルタ理論に基づく最適逆システム、および、特異値分解を利用した最小二乗法の二つの適切化手法を示し、これらの有効性を数値計算と実験により検証した。さらに、測定データをもとにした逆畳み込み演算を高精度かつ高効率で処理するために、高速フーリエ変換 (FFT) を利用した数値ラプラス変換・逆変換法を定式化し、その精度を詳細に調べるとともに、衝撃力の逆問題解析に適用した場合の有効性を明らかにした。そして、材料の計装化衝撃試験における衝撃荷重の測定に対して逆問題解析手法を適用し、従来に比べてより正確に衝撃力が評価できることを示した。本論文の各章で得られた結果を要約すれば、以下のようになる。

第 2 章「衝撃力の逆問題解析手法」では、まず、任意形状の物体に作用する衝撃力と応答との関係が畳み込み積分によって表されることに基づいて、応答の測定データから逆畳み込みを行うことにより衝撃力の大きさと方向を推定する逆問題の基本的な解析手法を示した。なお、この解析方法ではあらかじめ衝撃力と応答との間の伝達関数を同定

しておく必要があるが、較正実験を行って衝撃力と衝撃応答とを同時に測定し、それらの測定データより伝達関数を同定するのが適切であることを説明した。

また、衝撃力の逆問題に内在する二つの不適切性を指摘するとともに、それらを改善して衝撃力を安定かつ正確に推定するための適切化手法を示した。第一の不適切性は、衝撃力と応答の個々の成分の入出力関係に内在するもので、伝達関数の絶対値が零に近い値となる周波数域において衝撃力の推定値が不安定になることを示した。そして、この不適切性を改善するために、非因果的ウィーナフィルタ理論を応用した最適逆システムによる逆問題解析手法を提案した。一方、第二の不適切性は任意方向の衝撃力を推定する場合のフーリエ変換領域における連立一次方程式に内在するもので、伝達関数を成分とする係数行列の条件数が大きくなるにつれて衝撃力の推定結果が不安定になることを示した。そして、この不適切性を改善するために、特異値分解を用いた最小二乗法によって連立一次方程式を解き、さらに、ムーア・ペンローズの一般逆行列を有効一般逆行列に置き換える操作を施す方法を提案した。

さらに、これらの逆問題解析手法を実際に適用するために必要な数値計算の手法を論じ、逆畳み込みを数値的に行うためにはFFTを利用しフーリエ変換領域において除算を行う方法が演算効率の面から有利であり、FFTのウィンドウ関数としては指数関数を採用するのが適切であること、および、複素行列の特異値分解は行列を実部と虚部に分解し適切に配列した実行列の特異値分解と等価であり実行列の特異値分解の汎用サブルーチンを用いて計算できることを示した。

第3章「高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換」では、まず、ラプラス変換・逆変換の積分をそれぞれ有限の級数和で近似して数値ラプラス変換・逆変換を定式化した。そして、この近似の誤差は、積分を無限級数和で近似する誤差、すなわち離散化誤差と無限級数和を有限級数和で近似する誤差、すなわち打ち切り誤差との和で表示できることを示し、これらの誤差に及ぼす各パラメータの影響を明らかにした。また、サンプリング定理に基づいて高速フーリエ変換のアルゴリズムを利用することにより、この近似に基づく数値ラプラス変換・逆変換を高効率で計算する方法を示した。さらに、基本的な関数のラプラス変換・逆変換に本計算法を適用して、計算の各パラメー

タが精度に及ぼす影響を詳細に調べ、所定の計算精度が得られるように各パラメータを決定するための指標を図式的に示した。

第4章「衝撃力の逆問題解析の数値シミュレーション」では、第2章で示した衝撃力の逆問題解析手法、および、第3章で示した数値ラプラス変換・逆変換法を適用して、弾性棒の一次元縦衝撃問題に関する数値シミュレーションを行った。そして、雑音を含む測定データをもとに逆問題解析を行って衝撃力を推定する場合に直接的な逆問題解析手法を適用すると雑音が拡大されて満足な推定結果が得られないこと、すなわち、衝撃力の逆問題は不適切性を有することを示し、逆問題解析において適切化処理を適用する必要があることを明らかにした。また、この不適切性を改善するためには、ウィーナフィルタ理論を応用した最適逆システムによる逆問題解析手法が有効であることを示した。

第5章「構造要素に作用する衝撃力の測定」では、基本的な構造要素である両端支持はり、片持はり、平板などの衝撃実験を行い、ひずみゲージを使用して測定したひずみ応答の測定データから逆問題解析を行って衝撃力の大きさと方向を推定し、本研究の逆問題解析手法の有用性を検証した。まず、直接的な逆問題解析を行うと、逆問題の不適切性のために測定データに含まれる雑音や測定誤差が拡大されて衝撃力の推定結果に重畳し、衝撃力を正確に推定することは困難であることを確認した。そして、このような場合には、第2章で提案した最適逆システムによる逆問題解析手法、および、特異値分解を利用した最小二乗法による逆問題解析手法の両方が衝撃力を正確に推定するために有効であることを実証した。また、伝達関数行列の条件数が大きい場合には、ムーア・ペンローズの一般逆行列を有効一般逆行列に置き換える適切化処理を適用すれば衝撃力の推定精度は向上するが、過剰な適切化処理を施すと衝撃力の大きさが過小評価される傾向があるため、周波数領域における連立方程式の解の残差に注目して適切化処理のパラメータを適切に選択することの必要性を示した。さらに、このような適切化処理を適用しても衝撃力が十分な精度で推定できない場合にも、衝撃力の方向成分の数よりも多数のひずみ応答の測定データをもとにして逆問題解析を行えば、十分な精度で衝撃力が推定できることを示した。その他、はりや板の横衝撃のように、被衝撃体の内部を伝播す

る応力波が分散性を有する場合には、衝撃点にできるだけ近い位置でひずみ応答を測定すれば、衝撃力が正確に推定できることを明らかにした。

第6章「計装化衝撃試験における衝撃力の測定」では、まず、逆問題解析手法に基づく衝撃力の測定法を適用すれば、計装化衝撃試験において試験片に作用する衝撃力を精度良く測定できることを示した。そして、本研究で使用した計装化シャルピー衝撃試験機については、真の衝撃力波形の上にハンマ内部の振動成分が重畳されるために、静的較正に基づく従来の衝撃力測定法では衝撃力が過大に評価されること、すなわち、材料の衝撃強度が過大評価されることを示した。また、シャルピー衝撃試験機の秤量に比べて試験片の破断による吸収エネルギーが極めて小さく、ハンマの衝撃前後の角度変化からは吸収エネルギーが評価できない場合にも、逆問題解析手法を適用して衝撃力を正確に測定すれば、吸収エネルギーを正確に評価できることを示した。

参考文献

- [1] 宇治橋貞幸, 足立忠晴, 井上裕嗣, 松本浩之, 鋼球の衝突により硝子板に生ずる衝撃応力の解析, 日本機械学会論文集, A 編, Vol.52, No.474, pp.525-532, (1986)
- [2] 岸本喜久雄, 黒田聖昭, 青木繁, 坂田勝, FFT アナライザを用いた動的応力拡大係数計測システム—落重式衝撃三点曲げ試験への適用, 材料, Vol.35, No.395, pp.850-853, (1986)
- [3] 久保司郎, 材料力学とその関連分野における逆問題, システム/制御/情報, Vol.35, No.10, pp.634-642, (1991)
- [4] 久保司郎, 「計算力学と CAE シリーズ 10, 逆問題」, 培風館, (1992)
- [5] 久保司郎, 逆問題の解析手法, 材料, Vol.41, No.470, pp.1595-1604, (1992)
- [6] 小高忠男, 中原一郎, 弾性棒で衝撃された無限長はりの応力, 日本機械学会論文集, 第 1 部, Vol.33, No.248, pp.533-541, (1967)
- [7] 小林俊郎, 松原等, 上田倣完, 計装化シャルピー試験による原子炉圧力容器用 A533B 鋼の衝撃特性の解析, 鉄と鋼, Vol.67, No.14, pp.2216-2225, (1981)
- [8] 小林俊郎, 山本勇, 新家光雄, 計装化シャルピー試験による動的弾塑性破壊靱性の測定精度上の問題点, 鉄と鋼, Vol.72, No.15, pp.2133-2140, (1986)
- [9] 斎藤正徳, 特異値分解と最小二乗法, 物理探鉱, Vol.36, No.3, pp.146-158, (1983)
- [10] 佐多敏之, 田中良平, 西岡篤夫, 「新しい工業材料」, 森北出版, p.248, (1986)
- [11] 沢田孚夫, 塑性と加工, 動的引張試験における外乱振動の修正, Vol.25, No.284, pp.786-792, (1984)

- [12] 渋谷寿一, 小泉堯, 津田純嗣, 奥屋嗣之, 梁に作用する衝撃力の測定, 非破壊検査, Vol.25, No.12, pp.795-801, (1976)
- [13] 渋谷寿一, 小泉堯, 澤田隆治, 板に作用する衝撃力の測定, 日本機械学会論文集, A編, Vol.45, No.394, pp.666-673, (1979)
- [14] 渋谷寿一, 小泉堯, 高木信似智, 円輪に生ずる衝撃力の測定, 非破壊検査, Vol.36, No.1, pp.27-32, (1987)
- [15] 神宮利夫, 松本浩之, 根津紀久雄, 坂本賢治, 球の平板への衝突における衝撃荷重に及ぼす衝突接触挙動の影響, 日本機械学会論文集, A編, Vol.53, No.496, pp.2331-2335, (1987)
- [16] 神宮利夫, 松本浩之, 根津紀久雄, 坂本賢治, 各種トランスデューサによる衝撃荷重の測定における問題点, 日本機械学会論文集, A編, Vol.54, No.506, pp.1931-1936, (1988)
- [17] 谷村眞治, 饗庭雅博, 高感度衝撃端力検出法の開発の試み, 日本機械学会論文集, A編, Vol.49, No.448, pp.1565-1571, (1983)
- [18] 中尾哲也, 田中千秋, 高橋徹, 木質床上で発生する衝撃力の原波形解析, 材料, Vol.37, No.416, pp.565-570, (1988)
- [19] 中原一郎, 「材料力学, 上巻」, 養賢堂, pp.366-367, (1981)
- [20] 中原秀翼, 横衝撃をうける円板の応力, 昭和44年度東京工業大学修士論文, (1970)
- [21] 中村正久, 森勉, 衝撃荷重測定上の諸問題, 塑性と加工, Vol.3, No.13, pp.157-160, (1962)
- [22] 日本機械学会編, 「コンピュータアナリシスシリーズ6, 逆問題のコンピュータアナリシス」, コロナ社, (1991)
- [23] 林卓夫, 田中吉之助, 「衝撃工学」, 日刊工業新聞社, (1988)

- [24] 藤森英二郎, 鷹合徹也, 計装化シャルピー衝撃試験における計測上の問題点, 材料, Vol.38, No.429, pp.675-681, (1989)
- [25] 放生明廣, 茶谷明義, 上村文人, 畳み込み積分による衝撃力測定法, 日本機械学会論文集, A 編, Vol.55, No.511, pp.477-482, (1989)
- [26] 細野敏夫, 数値ラプラス変換, 電気学会論文誌 A, Vol.99, pp.44-50, (1979)
- [27] 松本浩之, 中原一郎, 木村正則, 衝撃荷重の直接測定法と間接測定法, 非破壊検査, Vol.31, No.4, pp.258-266, (1982)
- [28] 松本浩之, 中原一郎, 菊川貴行, 黒川裕, 衝突による衝撃荷重, 非破壊検査, Vol.32, No.11, pp.895-903, (1983)
- [29] 松本浩之, 宮川豊美, 宇治橋貞幸, 中原一郎, 圧電素子による衝撃荷重の測定法 (パルス幅の短い場合), 非破壊検査, Vol.33, No.8, pp.576-581, (1984)
- [30] 松本浩之, 宮川豊美, 宇治橋貞幸, 梁東律, 片持ばりの衝突位置と衝撃荷重, 日本機械学会論文集, A 編, Vol.52, No.477, pp.1423-1428, (1986)
- [31] 松本浩之, 衝撃現象の実験解析・理論解析への数値ラプラス逆変換法の適用, 「日本機械学会, P-SC112, 機械材料の衝撃強度とその試験法調査研究分科会成果報告書」, pp.17-29, (1988)
- [32] 南茂夫, 「科学計測のための波形データ処理」, CQ 出版社, pp.122-139, (1986)
- [33] 森正武, 名取亮, 鳥居達生, 「岩波講座情報科学 18, 数値計算」, 岩波書店, pp.110-118, (1982)
- [34] 柳原直人, 一次元弾性応力波理論による衝撃力測定法, 日本機械学会論文集, 第 1 部, Vol.43, No.375, pp.4048-4052, (1977)
- [35] 柳原直人, 斎藤博, 段付棒に作用する衝撃力の測定理論, 日本機械学会論文集, C 編, Vol.52, No.476, pp.1370-1374, (1986)

- [36] V.I.Bateman, T.G.Carne, D.L.Gregory, S.W.Attaway and H.R.Yoshimura, Force Reconstruction for Impact Tests, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.113, pp.192-200, (1991)
- [37] J.Baumeister, *Stable Solution of Inverse Problems*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, pp.1-15, 152-178, 179-202, (1987)
- [38] J.S.Bendat and A.G.Piersol, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, John Wiley & Sons, pp.71-76, (1980)
- [39] A.E.Brendel, Some Comments on the Evaluation of Transducer Performance, *Experimental Techniques*, Vol.17, No.5, pp.20-21, (1983)
- [40] E.O.Brigham, *The Fast Fourier Transform and its Applications*, Prentice-Hall, pp.21-22, 83-87, 131-166, 178-188, (1988)
- [41] D.J.Buttle and C.B.Scruby, Characterization of Particle Impact by Quantitative Acoustic Emission, *Wear*, Vol.137, pp.63-90, (1990)
- [42] D.J.Buttle and C.B.Scruby, Characterization of Dust Impact Process at Low Velocity by Acoustic Emission, *Acoustic Emission: Current Practice and Future Directions*, *ASTM STP 1077*, pp.273-286, (1991)
- [43] P.J.Cain, Digital Filtering of Impact Data, *Instrumented Impact Testing of Plastics and Composite Materials*, *ASTM STP 936*, pp.81-102, (1987)
- [44] C.Chang and C.T.Sun, Determining Transverse Impact Force on a Composite Laminate by Signal Deconvolution, *Experimental Mechanics*, Vol.29, No.4, pp.414-419, (1989)
- [45] M.C.Cheresh and S.McMichael, Instrumented Impact Test Data Interpretation, *Instrumented Impact Testing of Plastics and Composite Materials*, *ASTM STP 936*, pp.9-23, (1987)

- [46] B.Davies and B.Martin, Numerical Inversion of the Laplace Transform: a Survey and Comparison of Methods, *Journal of Computational Physics*, Vol.33, pp.1-32, (1979)
- [47] J.F.Doyle, An Experimental Method for Determining the Dynamic Contact Law, *Experimental Mechanics*, Vol.24, No.1, pp.10-16, (1984)
- [48] J.F.Doyle, Further Development in Determining the Dynamic Contact Law, *Experimental Mechanics*, Vol.24, No.4, pp.265-270, (1984)
- [49] J.F.Doyle, Determining the Contact Force During the Transverse Impact of Plates, *Experimental Mechanics*, Vol.27, No.1, pp.68-72, (1987)
- [50] J.F.Doyle, Experimentally Determining the Contact Force during the Transverse Impact of an Orthotropic Plate, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.118, No.3, pp.441-448, (1987)
- [51] F.Durbin, Numerical Inversion of Laplace Transforms: an Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method, *Computer Journal*, Vol.17, No.4, pp.371-376, (1974)
- [52] A.C.Eringen, Transverse Impact on Beams and Plates, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.20, pp.461-468, (1974)
- [53] J.A.Fabianmi, Feasibility of Dynamic Load Determination from Measured Mobilities, *Proceedings of the 1987 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics, Houston, Texas*, pp.845-850, (1987)
- [54] B.S.Garbow, J.M.Boyle, J.J.Dongarra and C.B.Moler, *Lecture Notes in Computer Science 51, Matrix Eigensystem Routines—EISPACK Guide Extension*, Springer-Verlag, Section 2.4, (1977)
- [55] W.Goldsmith, *Impact, The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*, Edward Arnold, Chapter 3, 4, 6, (1960)

- [56] M.C.Han and A.L.Wicks, Force Determination with Slope and Strain Response Measurement, *Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida, Volume 1*, pp.365-372, (1990)
- [57] M.Hansen and J.M.Starkey, On Predicting and Improving the Condition of Modal-Model-Based Indirect Force Measurement Algorithms, *Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida, Volume 1*, pp.115-120, (1990)
- [58] B.Hillary and D.J.Ewins, The Use of Strain Gauges in Force Determination and Frequency Response Function Measurements, *Proceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, Volume 2*, pp.627-634, (1984)
- [59] A.J.Holzer, A Technique for Obtaining Compressive Strength at High Strain Rates Using Short Load Cells, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.20, pp.553-560, (1978)
- [60] R.A.Horn and C.R.Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, pp.335-340, 411-421, (1985)
- [61] D.R.Ireland, Procedures and Problems Associated with Reliable Control of the Instrumented Impact Test, *Instrumented Impact Testing, ASTM STP 563*, pp.3-29, (1974)
- [62] P.A.Jansson, *Deconvolution with Application in Spectroscopy*, Academic Press, pp.71-80, (1984)
- [63] W.Johnson, *Impact Strength of Materials*, Edward Arnold, Chapter 1, (1972)
- [64] R.W.Jordan and G.S.Whiston, Remote Impact Analysis by Use of Propagated Acceleration Signals, II: Comparison between Theory and Experiment, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.97, No.1, pp.53-63, (1984)

- [65] K.Karas, Platten unter seitlichem Stoß, *Ingenieur-Archiv*, Vol.10, No.4, pp.237–250, (1939)
- [66] W.Krings and H.Waller, Contribution to the Numerical Treatment of Partial Differential Equations with the Laplace Transformation—an Application of the Algorithm of the Fast Fourier Transformation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.14, No.8, pp.1183–1196, (1979)
- [67] M.M.Lavrentev, V.G.Romanov and S.P.Shishatskii, *Translations of Mathematical Monographs, Volume 64, Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, American Mathematical Society, pp.26–32, (1986)
- [68] A.D.Lewis and R.J.Rogers, Experimental and Numerical Study of Forces during Oblique Impact, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.125, No.3, pp.403–412, (1988)
- [69] B.Lundberg and A.Henchoz, Analysis of Elastic Waves from Two-Point Strain Measurement, *Experimental Mechanics*, Vol.17, No.2, pp.213–218, (1977)
- [70] J.E.Michaels and Y.H.Pao, The Inverse Source Problem for an Oblique Force on an Elastic Plate, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.77, No.6, pp.2005–2011, (1985)
- [71] J.E.Michaels and Y.H.Pao, Determination of Dynamic Forces from Wave Motion Measurements, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.53, pp.61–68, (1986)
- [72] L.D.Mitchell, Improved Methods for the Fast Fourier Transform (FFT) Calculation of the Frequency Response Function, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol.104, pp.277–279, (1982)
- [73] S.Ödeen and B.Lundberg, Prediction of Impact Force by Impulse Response Method, *International Journal of Impact Engineering*, Vol.11, No.2, pp.149–158, (1991)

- [74] A.Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 2nd ed., McGraw-Hill, pp.407–414, 418–421, (1984)
- [75] W.H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsky and W.T.Vetterling, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, pp.52–64, (1986)
- [76] R.V.Rangel and R.J.Thornhill, Prediction of Impact Forces Using Hertzian Contact Theory and Measured Modal Structural Data, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.4, No.4, pp.287–294, (1990)
- [77] E.Rothwell and B.Drachman, A Unified Approach to Solving Ill-Conditioned Matrix Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.28, pp.609–620, (1989)
- [78] H.Schwieger, Die maximale mechanische Beanspruchung beim zentralen Balkenquerstoß, *Zeitschrift für Angewante Mathematik und Mechanik*, Vol.45, No.7/8, pp.499–506, (1965)
- [79] H.Schwieger, A Simple Calculation of the Transverse Impact on Beams and Its Experimental Verification, *Experimental Mechanics*, Vol.5, No.11, pp.378–384, (1965)
- [80] H.Schwieger, Vereinfachte Theorie des elastischen Biegestoßes auf eine dünne Platte und ihre experimentelle Überprüfung, *Forschung im Ingenieurwesen*, Vol.41, No.4, pp.122–132, (1975)
- [81] J.M.Starkey, On the Ill-Conditioned Nature of Indirect Force-Measurement Techniques, *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol.4, No.3, pp.103–108, (1989)
- [82] K.K.Stevens, Force Identification Problems—An Overview, *Proceedings of the 1987 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics, Houston, Texas*, pp.838–844, (1987)

- [83] K.G.Sundin and M.Jonsson, A Stiff and Compact Impact-Force Transducer Based on Strain Measurement, *Experimental Mechanics*, Vol.25, No.1, pp.48-53, (1985)
- [84] R.J.Thornhill and C.C.Smith, Impact Force Prediction Using Measured Frequency Response Functions, *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.105, pp.227-231, (1983)
- [85] S.Timoschenko, Zur Frage nach der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Vol.62, pp.198-209, (1913)
- [86] S.Timoshenko and D.H.Young, *Vibration Problems in Engineering*, 3rd ed., Van Nostrand, pp.411-416, (1955)
- [87] M.L.Wang, T.Kreitinger and H.L.Luo, Force Identification from Structural Responses, *Proceedings of the 1987 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics, Houston, Texas*, pp.851-855, (1987)
- [88] G.S.Whiston, Remote Impact Analysis by Use of Propagated Acceleration Signals, I: Theoretical Methods, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.97, No.1, pp.35-51, (1984)
- [89] D.J.Wilcox, Numerical Laplace Transformation and Inversion, *International Journal of Electrical Engineering Education*, Vol.15, pp.247-265, (1978)
- [90] C.Zener, The Intrinsic Inelasticity of Large Plates, *Physical Review*, Vol.59, No.8, pp.669-673, (1941)

付録 A

ブリッジボックス

概要

ひずみゲージによる衝撃ひずみの測定では、高速で、かつ、微小な信号を取り扱うために、周波数特性が優れ、かつ、雑音の小さいブリッジ回路および増幅器を使用する必要がある。本研究では、以下に説明するブリッジボックスを製作し使用した。

製作したブリッジボックスの回路図を Fig.A.1 に示す。電源には昭和電子工業(株)製の 206-D15(± 15 V, 0.45 A) を使用し、ブリッジ回路および差動増幅回路に ± 15 V の直流電圧を供給した。ブリッジ回路は、アクティブゲージとダミーゲージを接続して直流ホイートストンブリッジを構成するようになっており、さらに、ブリッジの平衡を調整するための可変抵抗 (10Ω) が挿入されている。なお、通常使用されるひずみゲージの抵抗値が 120Ω であることから、ブリッジ回路の 2 辺の固定抵抗の値は 120Ω とした。差動増幅回路には、高速、低雑音、計装化用などの要件を考慮して、Analog Devices 製のオペレーションアンプ IC AD521J を採用した。また、チャンネル 1 ~ 3 の差動増幅回路の出力については、本文の参考文献 [12, 13, 14] の方法に基づく衝撃力の測定にも対応できるようにするために、National Semiconductor 製の LF356 を使用した係数加算回路を取り付けた。なお、製作に際しては、各部品は品質の高いものを使用するとともに、配線にはシールド線を使用するなどして、特に雑音対策に注意した。

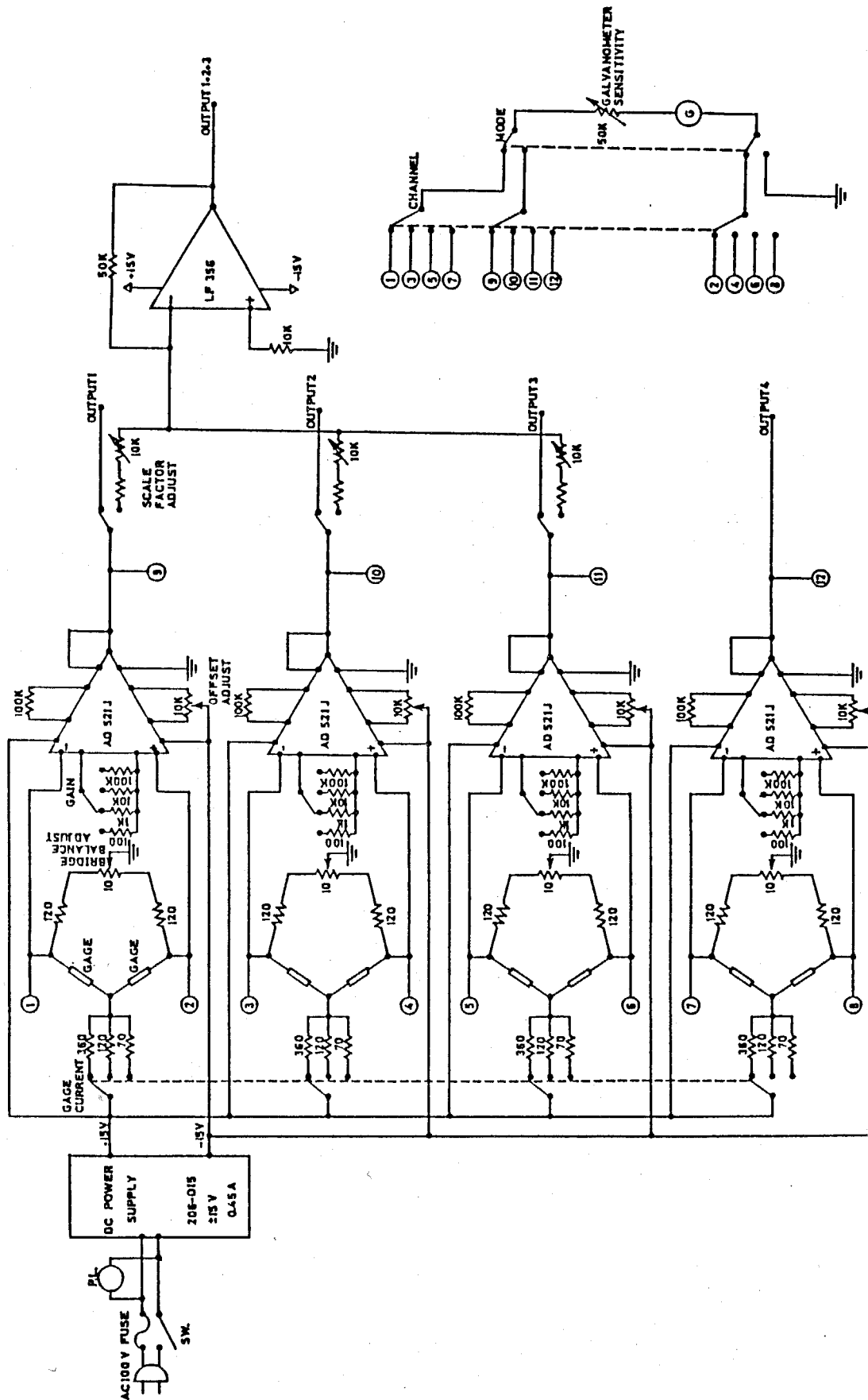


Figure A.1: ブリッジボックスの回路図

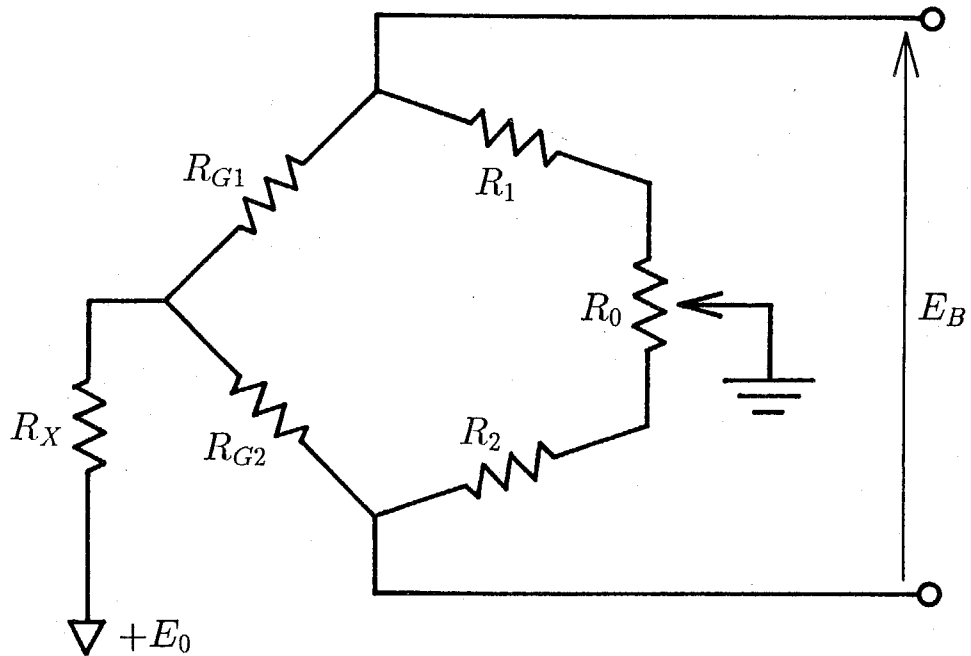


Figure A.2: ブリッジ回路

ブリッジ回路の入出力関係

アクティブゲージにより検出されるひずみとブリッジ回路の出力電圧の関係は以下のようにして求められる。

Fig.A.2 に示すように、アクティブゲージの抵抗を R_{G1} 、ダミーゲージの抵抗を R_{G2} 、ブリッジの他の 2 辺の抵抗をそれぞれ R_1 、 R_2 、平衡調整用の抵抗を R_0 、ブリッジ印加電圧調整用の抵抗を R_X とし、電源電圧を E_0 とする。ブリッジが平衡であるとき R_0 が $k : (1 - k)$ に比例配分されていると仮定し、

$$R_A = R_{G1} + R_1 + kR_0 \quad (\text{A.1})$$

$$R_B = R_{G2} + R_2 + (1 - k)R_0 \quad (\text{A.2})$$

とおけば、回路の全抵抗 R は、

$$R = R_X + \frac{R_A R_B}{R_A + R_B} \quad (\text{A.3})$$

と表される。これより、ブリッジ印加電圧 E_1 は、

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{R - R_X}{R} E_0 \\ &= \frac{R_A + R_B - \frac{(R_A - R_B)^2}{R_A + R_B}}{4R_X + R_A + R_B - \frac{(R_A - R_B)^2}{R_A + R_B}} E_0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

と表される。 $R_A \simeq R_B$ であるから $(R_A - R_B)^2 / (R_A + R_B)$ の項は十分小さく無視できるので、

$$\begin{aligned} E_1 &\simeq \frac{R_A + R_B}{4R_X + R_A + R_B} E_0 \\ &= \frac{R_0 + R_1 + R_2 + R_{G1} + R_{G2}}{4R_X + R_0 + R_1 + R_2 + R_{G1} + R_{G2}} E_0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

と近似できる。したがって、ブリッジ回路の出力 E_B は、

$$\begin{aligned} E_B &= \frac{R_1 + kR_0}{R_A} E_1 - \frac{R_2 + (1-k)R_0}{R_B} E_1 \\ &= \left\{ \frac{R_1 + kR_0}{R_{G1} + R_1 + kR_0} - \frac{R_2 + (1-k)R_0}{R_{G2} + R_2 + (1-k)R_0} \right\} E_1 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

のように求められる。ブリッジが平衡であれば $E_B = 0$ である。

アクティブゲージがひずみを受けて抵抗値が R_{G1} から $R_{G1} + \Delta R_{G1}$ に変化するとブリッジは平衡でなくなり、このときのブリッジ回路の出力 E_B とブリッジ印加電圧 E_1 の比は式 (A.6) より、

$$\frac{E_B}{E_1} = \frac{1}{1 + \lambda + \frac{\Delta R_{G1}}{R_1 + kR_0}} - \frac{1}{1 + \lambda} \quad (\text{A.7})$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{R_{G1}}{R_1 + kR_0} \\ &= \frac{R_{G2}}{R_2 + (1-k)R_0} \\ &= \frac{R_{G1} + R_{G2}}{R_0 + R_1 + R_2} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

である。式 (A.7) を $\Delta R_{G1} / (R_1 + kR_0)$ について解き、 E_B / E_1 に関してテーラー展開すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R_{G1}}{R_1 + kR_0} &= \frac{-(1 + \lambda)^2 \frac{E_B}{E_1}}{(1 + \lambda) \frac{E_B}{E_1} + 1} \\ &= -(1 + \lambda)^2 \frac{E_B}{E_1} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

を得る。 $E_B/E_1 \ll 1$ であるから、テーラー展開の第2項以下を十分小さいと考えて無視すれば、

$$\frac{\Delta R_{G1}}{R_{G1}} = -\frac{(1+\lambda)^2 E_B}{\lambda E_1} \quad (\text{A.10})$$

が得られる。

アクティブゲージの受けるひずみを ϵ 、ゲージ率を η とすれば、

$$\frac{\Delta R_{G1}}{R_{G1}} = -\eta \epsilon \quad (\text{A.11})$$

である。したがって、式(A.10)と(A.11)より、測定されるひずみとブリッジ回路の出力電圧の関係は、

$$\epsilon = \frac{1}{\eta} \frac{(1+\lambda)^2 E_B}{\lambda E_1} \quad (\text{A.12})$$

と表される。

周波数特性

衝撃ひずみの測定においては測定機器の周波数特性が重要であるため、製作したブリッジボックスの周波数特性の検定を行った。検定は、ファンクションジェネレータにより発生させた一定周波数の正弦波を差動増幅回路の入力とし、これに対する出力をオシロスコープで読み取る方法により行った。Fig.A.3にその結果を示す。差動増幅回路に採用したAD521Jの周波数特性(± 3 dB)は仕様書によれば、ゲイン10のとき300 kHz、ゲイン100のとき200 kHzであるが、Fig.A.3によれば本ブリッジボックスの周波数特性はほぼ仕様書通りの性能を有している。なお、第5章、第6章の実験においては、主にゲインを100として使用した。

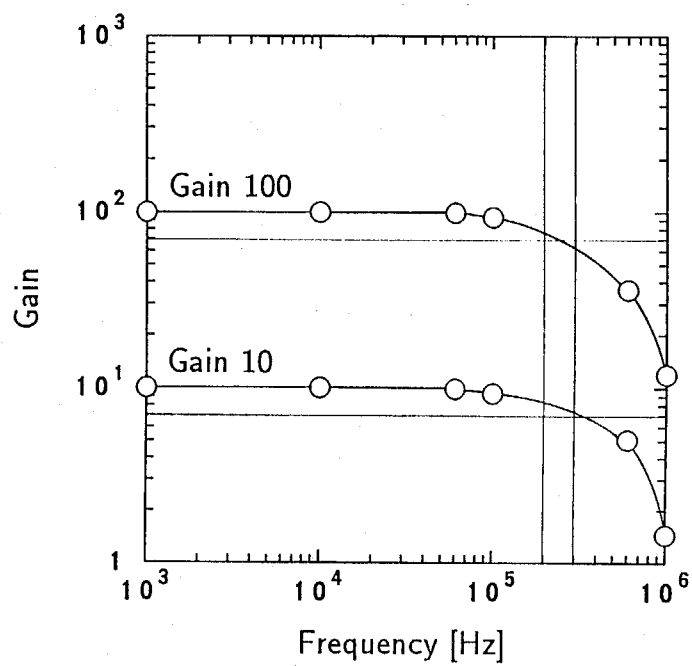


Figure A.3: ブリッジボックスの周波数特性

謝辞

本研究の遂行及び論文の取り纏めに当たっては、数多くの方々の御指導や御協力を得た。東京工業大学工学部の小泉堯教授および渋谷壽一教授には、大学院修士課程在学中より今日に至るまで、研究上の事柄はもとより凡そ総ての面について懇切丁寧なる御指導、御鞭撻を賜った。また、同岸本喜久雄助教授には本研究の遂行に当たり多くの貴重な御意見を賜り、細部に互って親切なる御指導を頂いた。東京工業大学工学部一般材料力学研究室所属の大学院修士課程および学部4年の学生、渡辺隆一君、福地淳一君、有馬克朗君、水野尚夫君、石田宏之君、上林稔君、十代幹太君、林申也君、池田直人君、岡本秀俊君、原田謙次郎君には、実験・解析の遂行および結果の取り纏めに当たって多くの協力を得た。また、同研究室および東京工業大学工学部材料力学研究室の諸先生方諸先輩方には、研究内容等につき示唆に富む御教示を賜った。一般材料力学研究室の関根紀美子事務官および納富充雄助手には、本論文の取り纏めに当たり研究以外の面で色々と御迷惑をお掛けした。この他、一々名前を挙げることはできないが、多くの大学、研究機関等の方々からも種々の示唆を得た。ここに記し深甚なる謝意を表する。

平成5年5月24日

井上 裕嗣