

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	モード解析による構造系と制御系の最適設計に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	梶原逸朗
Author(English)	ITSURO KAJIWARA
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第2538号, 授与年月日:1993年11月30日, 学位の種別:論文博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第2538号, Conferred date:1993/11/30, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

モード解析による構造系と制御系の
最適設計に関する研究

梶原 逸朗

目次

第1章	緒論	1
1.1	本研究の背景と目的	1
1.2	従来の研究	4
1.3	本論文の構成	6
第2章	感度解析を用いた構造物の最適設計	10
2.1	緒言	10
2.2	共振点と反共振点の感度を用いた構造物の最適化方法	11
2.2.1	共振振動数感度	11
2.2.2	反共振振動数感度の提案	12
2.2.3	設計変数の変更方法	14
2.2.4	共振点消去理論	15
2.2.5	適用例	15
	(a)多質点系モデルへの適用	15
	(b)平板への適用	19
2.3	時刻歴応答を考慮した構造物の最適設計	25
2.3.1	固有モードと時刻歴応答の感度	25
2.3.2	部分構造合成法との結合	27
2.3.3	F型構造物の形状最適化	28
2.4	結言	31
第3章	共振点消去理論による光ピックアップの設計	32
3.1	緒言	32
3.2	構造系の振動が関与する制御問題	33
3.3	振動の節を活用した一体化設計法	36
3.4	振動の節と極-零点消去の相対性	36
3.4.1	モード解析と振動の節	36
3.4.2	不可制御・不可観測性	39
3.4.3	極-零点消去法	43
3.5	一体化構造の光ピックアップの提案	46
3.6	光ピックアップの振動特性	46
3.7	共振点消去理論による構造最適化	52
3.7.1	構造最適化理論	52

3.7.2	光ピックアップ構造の最適化	5 4
3.8	サーボ特性の解析および実験	5 8
3.9	結言	6 4
第4章	構造物の低次元モデル化と最適振動制御系の設計法	6 5
4.1	緒言	6 5
4.2	モード解析に基づく最適設計法	6 7
4.2.1	低次元モデルの作成と制御系の設計	6 7
4.2.2	実システムの極配置	6 9
4.2.3	実験モード解析との結合	7 0
4.2.4	制御系の安定化最適設計	7 1
4.2.5	感度解析	7 4
	(a)2次形式評価関数の感度	7 4
	(b)実システムの極の感度	7 4
4.2.6	平板の振動制御への適用	7 5
	(a)FEMに基づく設計	7 5
	(b)実験データに基づく設計	8 4
4.3	特性行列同定法に基づく最適設計法	9 0
4.3.1	低次元モデルの作成と制御系の設計	9 0
4.3.2	実システムおよび閉ループ系の定式化	9 0
	(a)実験データから実システムを同定する場合	9 0
	(b)実システムをFEMで作成する場合	9 2
4.3.3	制御系の安定化最適設計	9 2
4.3.4	平板の振動制御への適用	9 6
	(a)実験データに基づく設計	9 6
	(b)FEMに基づく設計	1 0 4
4.4	結言	1 1 0
第5章	モード解析を用いた連続体構造物の H^∞ ロバスト振動制御	1 1 2
5.1	緒言	1 1 2
5.2	H^∞ ロバスト制御理論	1 1 3
5.2.1	H^∞ 制御系の定式化	1 1 4
5.2.2	H^∞ ノルムの定義	1 1 5
5.2.3	H^∞ 制御問題の解法	1 1 6
5.2.4	周波数重み関数を用いた周波数応答の整形	1 1 9

5.3	モード解析によるモデル化と H^∞ 制御系の設計1 2 1
5.4	平板の振動制御への適用1 2 4
5.4.1	FEMに基づく設計1 2 4
5.4.2	実験モード解析に基づく設計1 3 5
5.5	結言1 3 7
第6章	感度解析による構造系と制御系の同時最適設計1 3 8
6.1	緒言1 3 8
6.2	制御系の構成と同時最適化の概念1 3 9
6.3	動特性指定による同時最適設計法1 4 0
6.3.1	最適化問題の設定1 4 1
6.3.2	感度解析1 4 2
	(a)2次形式評価関数の感度1 4 2
	(b)極の感度1 4 3
	(c)FRFのゲインと位相の感度1 4 4
	(d)零点の感度1 4 5
6.3.3	3自由度モデルへの適用1 4 6
6.4	高次モードの安定性を保障する同時最適設計法1 5 5
6.4.1	最適化問題の設定1 5 7
6.4.2	設計変数の定義1 5 8
6.4.3	平板の同時最適化による振動制御1 5 9
	(a)白色雑音外乱が作用する場合1 5 9
	(b)有色雑音外乱が作用する場合1 6 9
6.5	結言1 7 3
第7章	コンプレックス法による構造系と制御系の同時最適設計1 7 4
7.1	緒言1 7 4
7.2	構造系と出力フィードバック制御系の同時最適設計1 7 6
7.2.1	構造系と制御系の定式化1 7 6
7.2.2	同時最適化問題1 7 7
7.2.3	平板の同時最適化による振動制御1 7 8
	(a)白色雑音外乱が作用する場合1 8 0
	(b)有色雑音外乱が作用する場合1 8 6
7.3	構造系と H^∞ 制御系の同時最適設計1 9 2
7.3.1	同時最適化問題1 9 2
7.3.2	平板の同時最適化による振動制御1 9 4

7.4 結言2 0 3
第8章 結論2 0 5
付録2 1 1
A1 最適化方法2 1 1
A1.1 擬似最小二乗法2 1 1
A1.2 非線形計画法による最適設計2 1 2
A1.2.1 乗数法2 1 2
A1.2.2 準ニュートン法2 1 3
A1.2.3 Wolfeの直線探索法2 1 4
A1.2.4 コンプレックス法2 1 5
A2 特性行列同定法2 1 7
A2.1 線形最小二乗法による初期値の計算2 1 7
A2.2 誤差を含むデータに対する反復改良2 1 9
参考文献2 2 1
謝辞2 2 6

本論文で用いる主な記号を以下に示す。

$C_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$:	減衰行列
d	:	外乱の数
$E[\cdot]$:	期待値
$F \in \mathbb{R}^{p \times t}$:	フィードバックゲイン行列
H_u	:	制御入力に関する2次形式評価関数
H_y	:	出力に関する2次形式評価関数
$K_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$:	剛性行列
$M_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$:	質量行列
n	:	構造系の自由度
p	:	制御入力の数
$Q \in \mathbb{R}^{t \times t}$:	出力に関する重み行列
$q \in \mathbb{R}^{2r}$:	モード座標に低次元化された状態ベクトル
$q_0 \in \mathbb{R}^{2n}$:	物理座標による状態ベクトル
$q_e \in \mathbb{R}^{2v}$:	モード座標に変換された状態ベクトル
$R \in \mathbb{R}^{p \times p}$:	制御入力に関する重み行列
r	:	低次元モード座標変換における採用モード数
s_i	:	i 次の極
t	:	出力の数
$u \in \mathbb{R}^p$:	制御入力ベクトル
v	:	モード座標変換における採用モード数 ($n > v > r$)
$w \in \mathbb{R}^d$:	外乱ベクトル
$x \in \mathbb{R}^n$:	変位ベクトル
$y \in \mathbb{R}^t$:	出力ベクトル
$\Phi \in \mathbb{R}^{n \times r}$:	モード座標による低次元システム作成のための 固有モード行列
$\Phi_e \in \mathbb{R}^{n \times v}$:	モード座標による実システム作成のための 固有モード行列
$\phi_i \in \mathbb{R}^n$:	i 次の固有ベクトル
τ_j	:	設計変数ベクトルの第 j 成分
Ω_i	:	i 次の固有振動数

ここで、 $\mathbb{R}^{n \times n}$ は $(n \times n)$ の行列、 \mathbb{R}^n は n 次元のベクトルを表す。

第1章 緒論

1.1 本研究の背景と目的

各種機械の急速な発展にともない、機械工学は新たな展開を迎えている。性能および信頼性に優れた機械を設計、開発するためには機械工学のみならず物理学、電気電子工学、制御工学など多種多方面の学問、技術の融合が不可欠になりつつある。そして、各分野を統合した設計手法の開発、および機械のさらなる高性能化を目指した統合システムの最適設計手法の開発が重要視されている。さらに、企業における商品開発・設計期間の短縮と多様化、およびコスト低減による経済性の向上が強く要望されている。このような観点から、さまざまな分野の学問・技術を融合することにより、機械システム全体としての現象の解明および設計手法の開発が、これからの機械工学の発展のために必要である。

従来、機械の設計においては、設計仕様に基づいた設計指針となるものは存在していたが、設計者の経験やノウハウに頼り試行錯誤的に行う部分も多かった。また、機械系と電気系といった異分野にまたがる設計に際しては、それぞれの分野の設計者が独立に行っており、両者の連携は十分にとられていないのが現状である。しかし、今後は、このような設計方法では機械の高性能化が困難になっており、機械構造物の最適設計および機械全体の統合システムとしての設計手法の開発が不可欠である。

機械の性能を大きく左右するものに振動問題があげられる。機械の振動は、機械そのものの機能、信頼性を劣化させるばかりでなく、疲労破壊、騒音問題など人間の環境に対しても悪影響を及ぼす重大な問題である。そこで、機械構造物の振動挙動を解明するために、いくつかの振動解析手法および振動実験手法が開発された。構造物の振動解析手法としては、近年のコンピューターの発達により、有限要素法(Finite Element Method、略してFEM)を用いたモード解析手法が発展してきた。そして、このモード解析手法に基づいて、振動特性の向上を目指した構造変更を行う手法が開発されてきた。その手法の一つとして、構造物の一部の質量および剛性を変更したときの固有振動数および固有モードの変動量を予測する構造変更シミュレーション手法がある。また、設計変数の単位変化に対する固有振動数および固有モードの変動量(感度)を用いて、動特性の変更を行う感度解析手法がある。これらは、構

造変更を行うときの指針にはなるが、あくまで変更後の動特性を予測しているにすぎず、しかも複数の固有振動数や固有モードを同時に変更する場合にはさらに工夫が必要である。そして、現実の振動問題として、構造物の固有振動数や固有モードを単に変更するだけでは解決できないことが多く、最適化方法の適用には限界がある。

上述のように、構造設計のみでは十分な性能が発揮できない場合には、制御系の導入により性能を補う方法が従来とられてきた。特に最近の機械には、小型化、軽量化、省エネルギー化が求められる一方で、高速、高精度などの高性能化がますます要求されるようになってきており、それに対応するために制御系を内蔵する機械が一般的になりつつある。今後、さらに機械の高性能化が進むにつれて、むしろ制御系が機械の中核機能となることが考えられる。このような機械の振動問題は、機械構造そのものによって励起されると同時に、電気系で構成される制御系によっても引き起こされる。そして、機械の軽量化により構造系の固有振動数は低下の傾向にあり、逆に機械の高速、高精度化を達成するために制御系の周波数帯域は増加の傾向にある。この結果、制御周波数帯域内に多くの構造系固有振動数が含まれるようになった。このように、構造系と制御系の特性はたがいに深く連成しており、複雑な振動挙動を呈している。しかし、構造設計と制御設計の間の連携はあまりとられていないのが現状であり、制御しにくい構造に対して、複雑な制御系を構成しなければならないことがしばしば生じている。もしも、制御性を考慮した適切な構造系が設計されたならば、制御系の負担は軽減され、機械全体の性能の向上が期待できる。構造系と制御系を総合した設計法の確立は現時点において大きな課題であるといえる。

本研究では、このような背景を鑑みて、構造動力学における振動問題を対象とし、構造系と制御系の個別の最適設計、および構造系と制御系の同時最適設計法を開発することを目的としている。本論文では、FEMおよび実験同定手法により機械構造物をモデル化し、モード解析法および感度解析法に基づいて、構造系と制御系の最適化、および両者の同時最適化を行う方法を提案している。

本論文では、まず構造物の最適設計に関して、上述の固有振動数と固有モードに加えて、新たに反共振振動数を目的関数として採用し、設計変数である構造物の形状の最適値を決定する方法を提案している。この最適化は、本論文で提唱する反共振振動数の感度を用いることにより可能になる。そして、これらの感度を用いることにより、振動特性を向上させるための周波数応答関数(Frequency Response Function、略して

FRF)の整形および共振点消去理論によるFRF上の共振峰の消滅を実現している。また、構造物の時刻歴応答に着目した感度解析手法を用いた、構造最適化手法を示している。これらの感度解析手法を用いることにより、従来の固有振動数および固有モードのみの感度を用いた構造変更では解決できなかった振動問題に対処することを試みる。そして、ここで提案した共振点消去理論を用いて、制御性に優れた構造系の動特性を実現する最適化方法を提案する。この手法を、光サーボ系の最適設計に適用する。光ディスク装置に内蔵される光サーボ系は、構造系と制御系の特性が深く干渉し合い、本手法を適用する上で格好の対象である。本手法により、構造系と制御系の連携のとれた構造設計を実現し、実際に光ディスク装置の開発を行い、本手法の実用性を明らかにしている。次に、連続体である柔軟構造物に対して、最適制御系を設計する方法を提案する。ここでは、FEMでモデル化された大自由度構造系に対し、小自由度の出力フィードバックにより制御系を構成し、閉ループ系の安定性を保障しながら制御性能を向上させる制御系の最適化方法を示している。上述の最適設計では、構造系と制御系の双方の特性を考慮した、構造系もしくは制御系の個別設計を行っている。

次に、統合システムのさらなる高性能化を目指し、構造系と制御系の同時最適化方法を提案している。構造物の動特性の最適化の目的として、固有振動数および固有モード等を変更することにより、希望する時刻歴応答および周波数特性を実現することがあげられる。制御系の最適化についても同様に、システムの過渡応答特性や周波数応答特性を整形することを目標としている。前者の過渡応答特性の最適化を目的とした制御系設計法として、状態変数と制御入力で定義される2次形式評価関数を最小にする最適レギュレータ理論が代表的である。そして、後者の周波数特性の整形を可能とし、さらに構造系のパラメータ変動などの不確定性に対しロバストな制御系を設計するための手法として、 H^∞ 制御理論が有力視されている。このように構造系と制御系の最適化において、両者の目標には共通した側面があり、また両者の特性は互いに深く干渉している。ここに、構造系と制御系の同時最適化の意義があり、統合システムのさらなる高性能化が期待できる。そこで、本論文では構造系と最適レギュレータおよび H^∞ 制御系との同時最適設計を行うことにより、優れた過渡応答特性および周波数応答特性の整形の実現を目指している。

1. 2 従来の研究

従来の動的問題における構造物の最適設計法は、主として共振による構造物の不安定現象を抑制するために、構造物の固有振動数を外乱により励振される可能性がある周波数帯域から回避させるような構造物の形状を決定する問題を対象としている。このような構造変更を実行する際に、モード解析法に基づいた構造変更シミュレーション法や固有振動数の感度が用いられてきた。固有振動数および固有モードの感度解析法は、Fox⁽¹⁾とNelson⁽²⁾により提唱された。その後、固有振動数および固有モードに関する感度解析法の改良を行った研究⁽³⁾⁽⁴⁾、有限要素法を用いた感度解析法に関する研究⁽⁵⁾、計算効率の面からいくつかの手法の比較を行った研究⁽⁶⁾、およびこれらの感度を用いた構造変更手法の研究⁽⁷⁾⁽⁸⁾がなされてきた。また、減衰性能を向上させるために、簡単な速度フィードバックによる制御系を付加した構造系の感度解析についても検討されている⁽⁹⁾。このように、感度解析法に関してさまざまな研究が行われているが、固有振動数のみの変更では目標とする周波数応答レベルの低減が実現できなかつたり、固有振動数および固有モードの大幅な変更が構造物の設計における制約上、実現不可能となる問題を生じる場合があった。そこで、従来の感度解析法における適用限界を取り除くような、新しい手法の開発が要求されている。

構造系と制御系の特性が深く連成しあう系の設計に関しては、従来、制御系と構造系の干渉を避けるために、一般に両者の周波数帯域を分離して、構造系と制御系を個別に設計する方法がとられてきた。つまり、制御系の周波数帯域内に構造系の共振周波数が含まれないように、構造系の固有振動数をできるだけ高く設計するか、制御系を狭帯域に設計してきた。ところが、最近のメカトロニクス機器には、高速、高精度化に加えて軽量化に対する厳しい要求がある。必然的に、構造系の固有振動数が低下の傾向にある一方で、広帯域の制御系が要求されている。そのために、制御の帯域内に構造系の複数の共振周波数が含まれることになり、良好な制御を達成するために振動の制御が課題となるような事例が多発している。このように、構造系と制御系の動特性とは分離されるものではなく、一体化した設計法の確立が今後の重要な課題になろうとしている。

柔軟構造物の制御に関しては、さまざまな研究がなされている。制御系の設計としては、最適レギュレータ理論による線形状態フィードバックを用いたもの⁽¹⁰⁾や、低次元の動的補償器を用いて制御系を構成

する研究⁽¹¹⁾がみられる。そして、制御特性の向上を図るために、外乱もしくは構造系のパラメータ変動に対するロバスト安定化に関する研究^{(12)~(14)}などがある。これらの研究では、状態変数と制御入力だけからなる2次形式評価関数の重み行列もしくはフィードバックゲインなどの制御側のパラメータのみを調整することにより、制御特性の向上を図ることを検討している。柔軟構造物としては、梁構造物やトラス構造を対象としたものが多く、マニピュレータや宇宙構造物等の振動制御問題を扱っている^{(15)~(20)}。柔軟構造物のモデル化としては、連続体を分布定数系および集中定数系としてモデル化したもの⁽²¹⁾や、FEMによりモデル化し、制御系を設計するアプローチがみられる⁽¹⁰⁾。このように、従来の研究では基礎的な形状の対象および低次元モデルに対する適用が多く、一般的な大自由度柔軟構造物の制御に適用するにはさらに検討の余地が残されている。また、FEMモデルを用いて制御系を構成し、システムの動特性の向上を目指した従来の研究では、システムの低次元化と高次モードの安定化については十分に検討されていない。

上述のシステムの低次元化にともなう誤差をはじめ、システムに混入するさまざまな不確定性に対し、システムの安定性を保障する設計法としてロバスト制御理論がある。ロバスト制御理論として、 H^∞ 制御理論^{(22)~(30)}が最近注目されている。 H^∞ 制御理論を適用した例としては、アクティブサスペンション⁽³¹⁾、磁気浮上⁽³²⁾、塔状構造物⁽³³⁾の振動制御などがみられる。しかし、従来の報告では、制御対象を比較的簡単な小自由度系としてモデル化しており、実用を目指した実際の大自由度構造物への適用にはさらに検討が必要だと思われる。さらに、従来の報告ではシミュレーション結果が中心であり、解析結果と実験結果の比較評価が十分に行われていない。

制御性能をさらに向上させることを目的とした、構造系と制御系の同時最適化問題が、最近重要視されている。同時最適化に関する従来の研究としては、最適状態フィードバック系における評価関数の中に構造系の質量を導入した目的関数を定義し、その目的関数の低減を目的とした研究^{(34)~(36)}がみられる。制御対象としては、簡単な梁構造物やトラス構造、および宇宙構造物を扱っており、おもにFEMによりモデル化を行っている^{(37)~(42)}。これら一連の研究では、トラス構造の断面形状や梁構造物の形状を設計変数として最適化することにより、最適レギュレータにより構成される閉ループシステムの性能向上を目指している。また、ファジィ目標を用いた多目的計画問題として同時最適化を実行する研究⁽⁴³⁾も行われている。しかし、これらの研究で

は、FEMモデルを低次元化することにより制御系を設計した際の、実システムの安定性については検討されていない。そして、システムの周波数特性を対象にした構造系と制御系の同時最適化は行われていない。

1. 3 本論文の構成

本論文では、上記の現状と問題点を踏まえ、モード解析を用いた構造系と制御系の最適設計、および構造系と制御系の統合システムの同時最適設計に関する研究を行っている。まず、感度解析を用いた構造物の動特性の最適設計法を提案し、この構造最適化方法に基づいて制御性を考慮した構造物の最適設計法を示し、光サーボ系の設計および開発を行っている。次に、構造設計のみでは十分な性能を発揮できない場合に、制御系の導入を行い、この制御系の最適化を行うことにより、連続体構造物に対する振動制御性能を向上させることを試みる。ここでは、構造物の低次元モデル化手法を示し、制御系の最適設計方法を提案している。また、FEMによりモデル化された連続体構造物に対し、 H^∞ 理論を用いてロバスト制御系を設計する方法を示し、実験モード解析によるモデル化手法との結合を図っている。さらに、上述の構造系と制御系の個別の最適化により達成できる性能の限界を向上させるために、構造系と制御系を同時に最適化することにより、さらなる高性能化の実現を目指している。まず、感度解析を用いた構造系と制御系の同時最適設計方法を提案しており、FEMモデルの形状と最適レギュレータの同時最適化を行っている。そして、コンプレックス法を用いた構造系と制御系の同時最適化方法を提案し、FEMモデルの形状と線形出力フィードバック系および H^∞ 制御系の同時最適化を可能にしている。

本論文は、全8章で構成されており、その概要を以下に示す。

第2章では、感度解析による構造物の最適設計法を示す。ここでは、まず反共振振動数に着目した周波数応答レベルの低減方法および共振点の除去方法を提案する。すなわち、対象とする振動数に反共振振動数を一致させることにより、効果的な応答レベルの低減と、共振振動数と反共振振動数を一致させることにより共振峰の除去を実現させる構造最適化を示している。この最適化を可能にするために、本章では反共振振動数の感度を提唱している。次に構造物の時刻歴応答に着目した最適化方法を提案する。すなわち、衝撃力が構造物に作用したときの変位の最適化方法を示す。さらに、部分構造合成法と提案する最適

化手法を結合することにより、複雑大自由度の構造物に対する最適設計の効率化を実現している。質量とばねから成る多自由度系モデルとFEMによりモデル化された平板およびF型構造物の最適設計を行い、解析と実験により本手法の有効性を検証している。

第3章では、制御性を考慮した構造最適化方法を示し、この手法により光サーボ系の設計および開発を行う。まず、制御性を考慮して機械構造を設計し、その上で制御系を含めた一体化設計を行う一つの設計法を提案し、これを光ディスク装置のサーボ系の設計に適用して、有用性を検討する。本方法は、モード解析によって求めた振動の節に着目して、これを媒体に構造系と制御系の一体化設計を図ろうとするものである。振動の節によって作り出される不可制御、不可観測性を積極的に活用することによって、制御し易い構造系を実現させることが本研究の主旨である。また、本章では一体成形による新しいタイプの光ピックアップを提案すると共に、提案する最適化手法を、これの設計開発に応用することを示す。構造最適化手法としては、第2章で提案した共振点除去理論を用いて、制御性を考慮した光ピックアップの構造の最適化を行う。そして、実際に光サーボ系を開発し、その特性を解析と実験により調べ、制御仕様との対応を調べることにより実用化の可能性について検討する。

第4章では、構造物の低次元モデル化手法と制御系の最適設計法を示している。すなわち、FEMとモード解析を用いたシステムの低次元化、およびシステム同定法により実験データに基づくシステムの低次元化を行い、そのシステムに対し制御系を設計する方法を示す。ここで、システム同定法として、特性行列同定法および実験モード解析法を用いる。このように、システムの低次元化を行い制御系を設計した場合、実システムとしての安定性すなわちロバスト性が問題になる。そこで、最適化において実システムの極配置を考慮することにより、低次元化で無視した固有モードの安定性を保障する制御系の設計法を提案する。本章では、低次元モデルの作成法と非線形最適化手法に基づいた制御系の最適設計法を示し、柔軟構造物である平板の振動制御に本手法を適用する。そして、制御系の特性をシミュレーションおよび実験により調べ、本手法の有効性を検証する。

第5章では、モード解析による連続体構造物の H^∞ ロバスト振動制御法について示している。ここでは、連続体である平板を制御対象とし、 H^∞ 理論に基づいてロバスト制御系を設計し、制振性能およびロバスト性能の評価を解析および実験により行うことを目的としている。まず、

制御対象をFEMによりモデル化し、モード座標を用いてシステムの低次元化を行う。そして、 H^∞ 理論により出力フィードバック系の動的補償器を設計する。そして、閉ループ系の制御効果を解析および実験により評価する。さらに、制御対象の特性に故意に誤差を与えた上で実験を行い、ロバスト性能を評価する。次に、制御性能およびロバスト性能を考慮した周波数重み関数を設定し、 H^∞ 制御系を設計することにより、システムの動特性の総合評価を行う。最後に、振動実験で得られたFRFから実験モード解析により制御対象をモデル化し、 H^∞ 制御系を設計した結果を示し、その実用性を明らかにしている。

第6章では、感度解析を用いることにより、制御系と構造系の設計変数を同時に最適化する方法を提案する。すなわち、従来の評価関数を用いた時刻歴応答の最適化と、希望する周波数特性を実現させるための最適化の両方を、感度解析に基づいた構造系と制御系の同時最適化により行う方法を示す。ここでは、2つの最適化問題を考えている。一つは、目的関数である閉ループ系の動特性を希望する目標値に一致させる最適化であり、もう一つはシステムの低次元化で無視した固有モードの安定性を保障しながら、目的関数を最小にする最適化である。目的関数としては、閉ループシステムの2次形式評価関数、FRFのゲインと位相、極および零点を採用し、これらの動特性の最適化を図る。さらに、コロケーションの成立しないシステムに対する設計、および外乱の周波数特性を考慮した同時最適化を実現している。本章では、構造系の設計変数を含めた感度解析理論および同時最適設計手法を示し、多質点系およびFEMを用いた平板の振動制御に本手法を適用する。制振特性をシミュレーションおよび実験により調べ、本手法の有効性を明らかにする。

第7章では、出力定数フィードバック系と H^∞ 制御系に対する構造系と制御系の同時最適設計を、コンプレックス法により実行する方法を提案する。本章の同時最適化問題で定義する目的関数は、設計変数に対して不連続関数となるが、目的関数の感度を用いずに設計変数の最適解を探索するコンプレックス法を用いることにより、同時最適化を可能にしている。まず、実システムに低次元の出力フィードバック則を直接適用し、実システムの全ての固有モードを考慮した2次形式評価関数および構造変数を含めた目的関数を定義し、コンプレックス法により構造系と制御系の同時最適化を行う方法を示す。また、本手法ではコロケーションの成立しないシステムへの適用、および外乱の周波数特性を考慮した設計を可能にしている。次に、より高性能な周波数特性

の整形およびロバスト性能を実現するために、構造系と H^∞ 制御系の同時最適設計法を提案する。ここでは、閉ループ系における外乱から制御量までの H^∞ ノルムを目的関数として採用し、これを最小にするような構造系と制御系の設計変数を同時に探索する。以上の2つの制御系に対する同時最適設計手法を平板の振動制御系の同時最適設計に適用し、その有効性を検証する。

第8章では、本研究で得られた結論および今後の課題について述べている。

第2章 感度解析を用いた構造物の最適設計

2.1 緒言

固有振動数や固有モードなどの構造物の動特性を希望する状態にするための板厚や寸法形状などの設計変数の最適な値を決定する、いわゆる構造物の動的な最適化方法は、モード解析法を用いる方法と感度解析を用いる方法の2種類に大別できる⁽⁴⁴⁾。前者は構造変更シミュレーションと呼ばれ、実験モード解析をもとにした不具合対策に主に用いられるのに対し、後者は有限要素法(FEM)などの数値振動解析をもとにした最適設計に多く用いられている。本章では、後者の感度解析を用いた構造物の動特性の最適化方法を提案する。すなわち、共振振動数と反共振振動数の感度を用いた共振点消去理論の提案、時刻歴応答の振幅を低減させる構造最適化および部分構造合成法との結合について示す。

従来 of 動的問題における構造物の最適設計法は、主として共振による構造物の不安定現象を抑制するために、構造物の固有振動数をその周波数帯域から回避させるような構造物の形状を決定する問題を対象としている。このような構造変更を実行する際に、固有振動数の感度が用いられてきた。しかし、固有振動数のみの変更では目標とする周波数応答レベルの低減が実現できなかつたり、また固有振動数の大幅な変更が構造物の設計における制約上、実現不可能な場合も生じる。そこで本章では、反共振振動数に着目した周波数応答レベルの低減方法および共振点の消去方法を提案する⁽⁴⁵⁾。すなわち、対象とする振動数に反共振振動数を一致させることにより、効果的な応答レベルの低減と、共振峰の消去を実現させる構造最適化を、反共振振動数の感度を最適化に導入することにより実現させる。そこで、まず反共振振動数の感度を求める理論を提案する。そして、この理論を用いれば、共振振動数だけでなく反共振振動数も任意に変更することが可能になることを示す。次に、共振振動数感度と、反共振振動数感度の両方を用い、共振振動数と反共振振動数を一致させることにより、周波数応答関数(FRF)の中に存在する共振峰を消去する方法を提案する。この方法では、共振現象そのものを消去するのではなく、固有モードの節を加振点もしくは応答点に一致させることにより、特定の点間のFRFの中に共振峰が現われないようにする。本手法は、反共振点の感度を提案することにより、固有モードの感度を用いることなく、固有値感度のみで

振動の節を自由に移動させることを可能にするものであり、複数の共振峰を同時に消去できる特徴がある。現実の振動問題として、共振峰の振動数を単に変更するだけでは解決できないことが多く、最適化方法の適用には限界があったが、本手法はこの限界を除くものであり、振動に対する不具合対策や最適設計に対し有力な手段になる。

上記の方法は構造物の周波数特性の最適化に着目したものであるが、次に構造物の時刻歴応答に着目した最適化方法を提案する⁽⁴⁶⁾。すなわち、衝撃力が構造物に作用したときの変位の最適化方法を示す。このときの変位応答は、モード解析を用いることにより、固有振動数と固有ベクトルにより記述される各モードの振幅成分の重ね合わせとして定義できる⁽⁴⁷⁾。そして、衝撃応答を支配するモード振幅成分の感度を用いて、振幅低減を目的とした最適化を実行することにより、過渡応答特性の向上を実現させる。ここでは、FEMを用いて構造最適化を行うわけだが、設計変数としては要素の板厚、節点座標を採用し、形状の最適化を試みる。さらに、時刻歴応答の最適化を行う際には、固有振動数と固有モードの感度が必要になるが、複雑大自由度構造物に対しこれらの振動解析および感度解析を効率的に実行するために、本手法と部分構造合成法との結合を実現させる。

2. 2 共振点と反共振点の感度を用いた 構造物の最適化方法

共振振動数と反共振振動数の感度を用いた構造物の最適化方法を示す。反共振振動数を希望する値に変更することにより、応答レベルの効果的な低減と共振峰の消去が実現できる。まず、共振振動数の感度と提案する反共振振動数の感度を計算する理論を示す。そして、複数の共振振動数と反共振振動数を目標値に一致させるように、擬似最小二乗法を用いて設計変数の変更量を決定する方法を示す。次に、FRF上の共振峰を消去する理論を示し、多質点系モデルと平板の最適設計に本手法を適用する。

2.2.1 共振振動数感度

n 自由度の構造物の運動方程式は次式となる。

$$M_s \ddot{x} + C_s \dot{x} + K_s x = f \quad (2-1)$$

ここで、 $M_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $C_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $K_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ はそれぞれ質量行列、減衰行列および剛性行列である。そして、 $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $f \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ変位ベク

トル、外力ベクトルである。 $x = Xe^{j\omega t}$ 、 $f = Fe^{j\omega t}$ とし、減衰を無視すれば式(2-1)は次のように表せる。

$$(K_s - \omega^2 M_s)X = F \quad (2-2)$$

ここで、 $X \in \mathbb{R}^n$ は定常応答振幅、 $F \in \mathbb{R}^n$ は加振力振幅である。この系の固有振動数 Ω_r と固有モード $\phi_r \in \mathbb{R}^n$ ($r = 1 \sim n$)は、式(2-2)において $F = 0$ とおいた

$$(K_s - \lambda_r M_s)\phi_r = 0 \quad (2-3)$$

を解けば求められる。ここで、

$$\lambda_r = \Omega_r^2 \quad (2-4)$$

材料定数や形状寸法などの設計変数を τ_j ($j = 1 \sim l$, l は最適化の対象となる設計変数の数)とし、式(2-3)を一つの設計変数 τ_j で偏微分すると

$$(K_s - \lambda_r M_s) \frac{\partial \phi_r}{\partial \tau_j} + \left(\frac{\partial K_s}{\partial \tau_j} - \lambda_r \frac{\partial M_s}{\partial \tau_j} \right) \phi_r - \frac{\partial \lambda_r}{\partial \tau_j} M_s \phi_r = 0 \quad (2-5)$$

式(2-5)に左から ϕ_r^T を乗ずれば、その左辺の第1項は式(2-3)の転置を含むので零となる。そして固有値感度は次式となる。

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial \tau_j} = \frac{\phi_r^T \left(\frac{\partial K_s}{\partial \tau_j} - \lambda_r \frac{\partial M_s}{\partial \tau_j} \right) \phi_r}{\phi_r^T M_s \phi_r} \quad (2-6)$$

式(2-4)を τ_j で微分して式(2-6)を代入し、固有モードを $\phi_r^T M_s \phi_r = 1$ になるように正規化すれば、共振振動数感度は次式となる。

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial \tau_j} = \frac{\phi_r^T \left(\frac{\partial K_s}{\partial \tau_j} - \lambda_r \frac{\partial M_s}{\partial \tau_j} \right) \phi_r}{2\Omega_r} \quad (2-7)$$

2.2.2 反共振振動数感度の提案

式(2-2)において $\omega^2 = \lambda$ とすれば

$$X = (K_s - \lambda M_s)^{-1} F \quad (2-8)$$

式(2-8)は次のようにも表される。

$$X = \frac{\text{adj}(K_s - \lambda M_s) F}{\det(K_s - \lambda M_s)} \quad (2-9)$$

$adj(K_s - \lambda M_s)$ の i 行 j 列成分は $det(K_d - \lambda M_d)$ と記述することができる。ここで、 K_d と M_d はそれぞれ K_s と M_s から i 行 j 列成分を除去した $\mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ の非対称な行列である。このとき、点 i と点 j の間の FRF は次式となる。

$$G_{ij} = \frac{X_i}{F_j} = \frac{det(K_d - \lambda M_d)}{det(K_s - \lambda M_s)} \quad (2-10)$$

式(2-10)から、反共振振動数は次式の固有値問題を解くことにより得られることは明かである。

$$(K_d - \lambda M_d)\psi^R = 0 \quad (2-11)$$

$$\psi^{LT}(K_d - \lambda M_d) = 0 \quad (2-12)$$

ここで、 $\psi^R \in \mathbb{R}^{n-1}$ と $\psi^L \in \mathbb{R}^{n-1}$ はそれぞれ右、左固有ベクトルであり、質量行列 M_d により正規化されている。加振点応答の FRF ($i = j$) の場合には、 M_d と K_d は共にフルランクの対称行列となり、反共振振動数 Γ_s の感度は固有振動数の感度と同様に次式により求められる。

$$\frac{\partial \Gamma_s}{\partial \tau_j} = \frac{\psi_s^{RT} \left(\frac{\partial K_d}{\partial \tau_j} - \Gamma_s^2 \frac{\partial M_d}{\partial \tau_j} \right) \psi_s^R}{2\Gamma_s} \quad (2-13)$$

一方、加振点と応答点が異なる FRF ($i \neq j$) の場合には、 M_d がフルランクにならない場合が起こり得る。特に、FEM において集中定数系を仮定して質量行列 M_s を作成する場合、($i \neq j$) のとき M_d は必ずランク落ちする。この場合、式(2-11)、(2-12)の固有値計算を数値解析で行う際に不都合を生じる。そこで、もし K_d がフルランクであれば、式(2-11)、(2-12)を次式のように書き直す。

$$(\mu K_d - M_d)\psi^R = 0 \quad (2-14)$$

$$\psi^{LT}(\mu K_d - M_d) = 0 \quad (2-15)$$

ここで、 $\mu = 1/\lambda$ である。 ψ^R と ψ^L は、式(2-14)と(2-15)の固有値問題を解くことにより得られる。一般に、式(2-14)、(2-15)は複素固有値問題となるが、固有値 μ_s が正の実数をとる場合のみ反共振現象が起こり、その振動数 Γ_s は次式で与えられる。

$$\Gamma_s^2 = \frac{1}{\mu_s} \quad (2-16)$$

式(2-14)を設計変数 τ_j で偏微分し、 ψ_s^{LT} を左からかけることにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} \psi_s^{LT}(\mu_s K_d - M_d) \frac{\partial \psi_s^R}{\partial \tau_j} + \psi_s^{LT} \left(\mu_s \frac{\partial K_d}{\partial \tau_j} - \frac{\partial M_d}{\partial \tau_j} \right) \psi_s^R \\ + \frac{\partial \mu_s}{\partial \tau_j} \psi_s^{LT} K_d \psi_s^R = 0 \end{aligned} \quad (2-17)$$

式(2-17)の左辺第1項は式(2-15)により零になる。そして、式(2-16)を設計変数 τ_j で偏微分して得られる、 $2\Gamma_s(\partial\Gamma_s/\partial\tau_j) = (-1/\mu_s^2)\partial\mu_s/\partial\tau_j$ の関係をを用いれば、反共振振動数の感度は次式となる。

$$\frac{\partial\Gamma_s}{\partial\tau_j} = \frac{\Gamma_s^3 \psi_s^{L^T} \left(\mu_s \frac{\partial K_d}{\partial\tau_j} - \frac{\partial M_d}{\partial\tau_j} \right) \psi_s^R}{\psi_s^{L^T} K_d \psi_s^R} \quad (2-18)$$

2.2.3 設計変数の変更方法

現在の共振振動数 Ω と反共振振動数 Γ を、目標値 Ω^* と Γ^* に変更するための設計変数 τ の修正量 $\Delta\tau$ を擬似最小二乗法により求める方法を示す。

式(2-7)、(2-13)および(2-18)から得られる共振振動数と反共振振動数の感度で構成される感度行列 R を次式として定義する。

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial\tau_1} & \cdots & \frac{\partial\Omega}{\partial\tau_l} \\ \frac{\partial\Gamma}{\partial\tau_1} & \cdots & \frac{\partial\Gamma}{\partial\tau_l} \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

式(2-19)のように、 R は共振と反共振の振動数の感度を横に並べた行列である。振動数を変更する共振峰と反共振峰の数をそれぞれ n_r 、 n_a とし、設計変数の数を l とすると、 R は $(n_r + n_a)$ 行 l 列になる。設計変数の変更量 $\Delta\tau$ は、1次感度のみを用いて、目的関数の現在値と目標値の関係を近似した次式

$$\begin{Bmatrix} \Omega^* \\ \Gamma^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega \\ \Gamma \end{Bmatrix} + R\Delta\tau \quad (2-20)$$

すなわち

$$R\Delta\tau = \begin{Bmatrix} \Omega^* - \Omega \\ \Gamma^* - \Gamma \end{Bmatrix} \quad (2-21)$$

を解けば求められる。ここでは、 $\Delta\tau$ のノルムを最小にする R の一般逆行列を用いることによって式(2-21)を解く。ここで、一般逆行列を用いる利点としては、設計変数の変更量 $\Delta\tau$ のノルムを最小とする解を与えるので、できるだけ小さな設計変数の変更で目的関数を目標値に一致させることが可能なことである。このことは、構造物の形状を実現させる立場から、大幅な寸法の変更を避ける意味で有効である。一般逆行列の計算方法は、本論文の巻末の付録に示す。ここで求めた $\Delta\tau$ は、1次感度のみで近似した式(2-20)に基づいて求めているので、一回の計算で目標値に一致する保証はないので、反復計算を行うことにより目標値に収束させる。

2.2.4 共振点消去理論

一般に構造物の伝達関数すなわちFRFは、次のように記述される。

$$G(\omega) = \alpha \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (\omega^2 - \Gamma_j^2)}{\prod_{i=1}^n (\omega^2 - \Omega_i^2)} \quad (2-22)$$

ここで、 a 次の共振振動数と b 次の反共振振動数が等しいとすると

$$\Omega_a = \Gamma_b \quad (2-23)$$

このとき式(2-22)では、分母の $(\omega^2 - \Omega_a^2)$ と分子の $(\omega^2 - \Gamma_b^2)$ が消去される。このように共振振動数と反共振振動数が同一の値になるように変更の目標値を決めて式(2-21)を解けば、共振峰を消去させるために必要な設計変数の変化量を求めることができる。

つぎに、共振点消去の物理的意味を考える。

式(2-22)のFRFは、次のように各固有モードの重ね合わせとして表すこともできる。

$$G(\omega) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\phi_{\alpha i} \phi_{\alpha j}}{k_{\alpha} - m_{\alpha} \omega^2} \quad (2-24)$$

m_{α} 、 k_{α} はそれぞれ α 次のモード質量、モード剛性である。 α 次の共振峰を消去するためには、式(2-24)において固有モード成分 $\phi_{\alpha i}$ もしくは $\phi_{\alpha j}$ のどちらかを零にしなければならない。したがって、共振峰と反共振峰を一致させることは、加振点または観測点を固有モードの節に一致させることと等価であることがわかる。

2.2.5 適用例

ここまで示してきた共振振動数と反共振振動数の感度を求める理論と変更量を決定する理論を、実際の力学モデルに適用し、解析と実験の両面から本手法の有効性を検討する。まず、ばねと質点からなる6自由度系モデルに適用し、次いでFEMを用いた平板モデルへの適用を試みる。

(a) 多質点系モデルへの適用

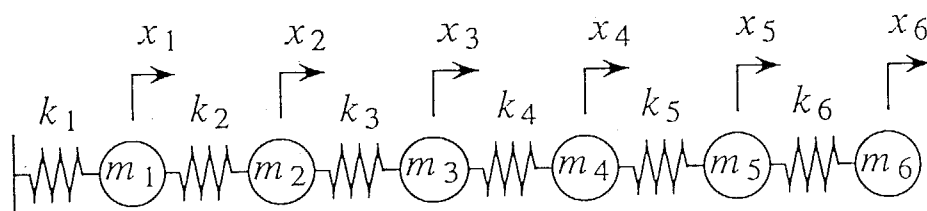
図2-1に示す6自由度系モデルを考える。この系の共振振動数と、質点4の自己応答における反共振振動数を表2-1に示す。ここで、2次と5次の共振峰を消去させるために、2次の共振振動数と1次の反共振振動

数、および5次の共振振動数と4次の反共振振動数を一致させることを試みる。すなわち、次の条件

$$\left. \begin{aligned} \Omega_2^* &= \Gamma_1^* = 340(\text{Hz}) \\ \Omega_5^* &= \Gamma_4^* = 850(\text{Hz}) \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

が成立するような系の変更を行う。設計変数は次式に示すように各質量とする。

$$\tau = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}^T \quad (2-26)$$



$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = \dots = m_6 = 1 \text{ (kg)} \\ k_1 &= k_2 = \dots = k_6 = 10^7 \text{ (N/m)} \end{aligned}$$

図2-1 6質点系モデル

表2-1 質点4における自己応答の共振・反共振振動数

Order	1	2	3	4	5	6
Resonance (Hz)	121.3	356.9	571.8	753.4	891.3	977.3
Anti-Resonance (Hz)	311.1	385.2	711.8	814.3	930.0	—

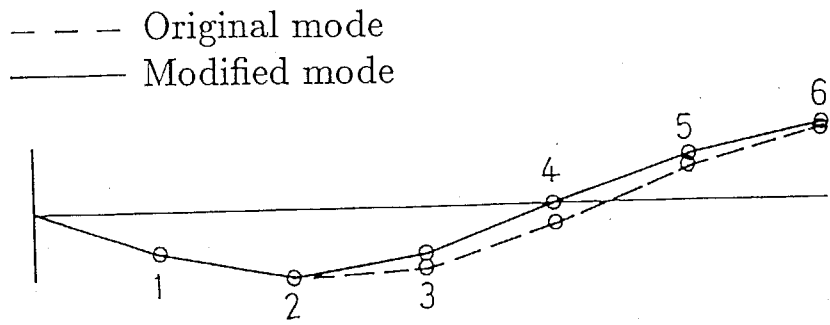
本手法により得られた、変更後の質量を表2-2に示す。そして、変更後の共振振動数と反共振振動数を表2-3に示す。このように、2次の共振振動数と1次の反共振振動数、および5次の共振振動数と4次の反共振振動数は式(2-25)に示した同一の目標値に一致していることがわかる。変更前と変更後の2次と5次の固有モードの変化を図2-2に示す。そして、質点4における自己コンプライアンスを図2-3に示す。同図において、破線が変更前、実線が変更後の特性であるが、変更後の特性は2次と5次の共振峰が完全に消滅しており、これらのモードに関して、図2-2から質点4が固有モードの節になっていることがわかる。

表2-2 変更後の各質点の質量

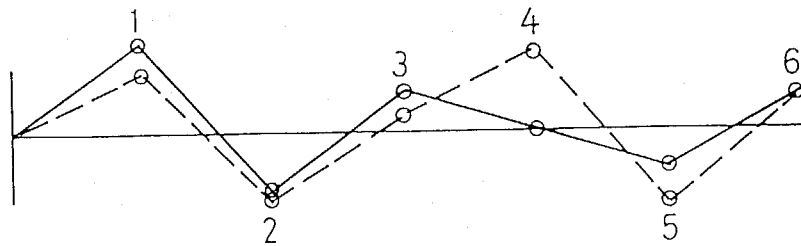
<i>Point No.</i>	1	2	3	4	5	6
<i>Mass (Kg)</i>	0.931	1.470	1.225	1.005	0.990	0.776

表2-3 変更後の質点4の共振・反共振振動数

<i>Order</i>	1	2	3	4	5	6
<i>Resonance (Hz)</i>	121.6	340.0	567.4	754.8	850.0	948.5
<i>Anti-Resonance (Hz)</i>	340.0	340.0	681.2	850.0	850.0	—



(a) 2次モード



(b) 5次モード

図2-2 固有モードの変化

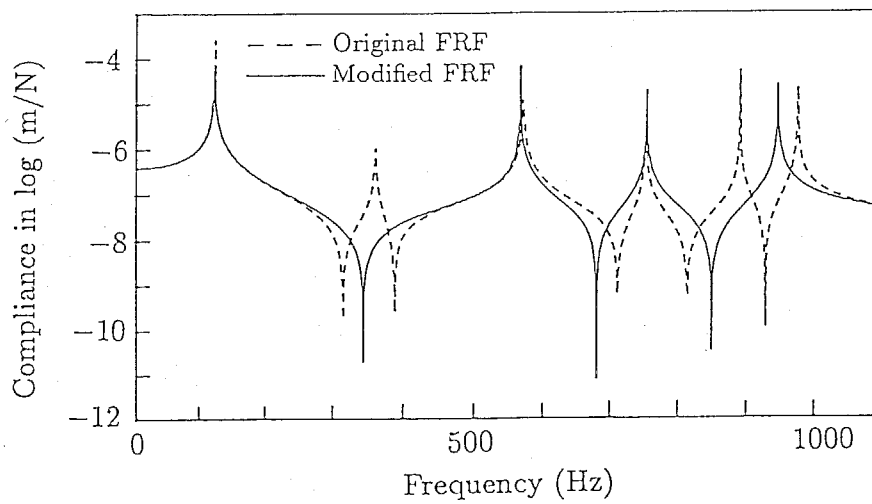


図2-3 質点4の自己コンプライアンス

(b) 平板への適用

図2-4のような、一端を固定した厚さ6mmの長方形平板（鋼）の動特性の最適化に本手法を適用する。同図に示すように平板をFEMによりモデル化し、要素の板厚を設計変数として採用する。上述の感度解析の理論から、板厚 τ_t に対する特性行列 M_s 、 K_s の感度から、共振振動数および反共振振動数の感度が計算できる。そこで、各特性行列の感度は、以下に示すように各要素表面の面積分により求められる。

まず、FEMにより得られる質量行列は次式となる。

$$M_s = \rho \tau_t \int_S N^T N dS \quad (2-27)$$

ここで、 ρ は密度、 N は形状関数である。そして、面内変形および面外変形における剛性行列 K_p 、 K_l はそれぞれ次式となる。

$$K_p = \frac{\tau_t Y}{1 - \nu^2} \int_S D^T E D dS \quad (2-28)$$

$$K_l = \frac{\tau_t^3 Y}{12(1 - \nu^2)} \int_S D^T E D dS \quad (2-29)$$

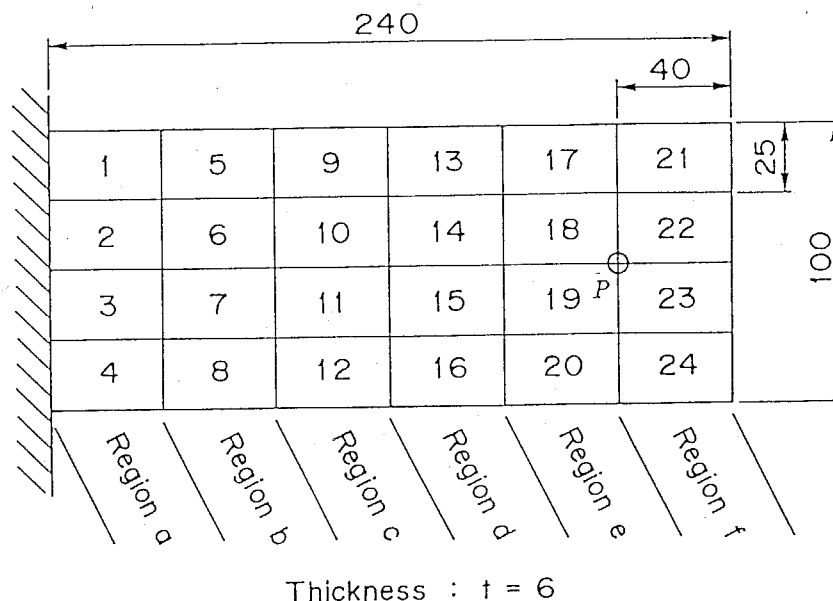


図2-4 平板モデル（一端固定）

ここで、 ν 、 Y はそれぞれポアソン比と縦弾性係数である。そして、 D 、 E はそれぞれひずみ・変位行列、ひずみ・応力行列である。

各特性行列の感度は式(2-27)、(2-28)、(2-29)を板厚 τ_i で偏微分することによりそれぞれ次式として求まる。

$$\frac{\partial M_s}{\partial \tau_i} = \rho \int_S N^T N dS \quad (2-30)$$

$$\frac{\partial K_p}{\partial \tau_i} = \frac{Y}{1-\nu^2} \int_S D^T E D dS \quad (2-31)$$

$$\frac{\partial K_l}{\partial \tau_i} = \frac{\tau_i^2 Y}{4(1-\nu^2)} \int_S D^T E D dS \quad (2-32)$$

また、この平板の物性値を以下に示す。

$$\rho = 7.87 \times 10^3 (\text{kg/m}^3)$$

$$Y = 206 (\text{GPa})$$

$$\nu = 0.3$$

点Pの5kHz以下の自己コンプライアンスを、FEMによって計算した結果は、図2-5の破線のようになる。図2-5の共振振動数と反共振振動数を表2-4に示す。まず、3次の共振峰を上記の理論によって消去することを考える。そのため、3次の共振点と2次の反共振点の振動数を1510Hzという同一の値に変更する。

$$\Omega_3^* = \Gamma_2^* = 1510 (\text{Hz}) \quad (2-33)$$

そのための設計変数は、図2-4のa~fの6カ所の縦方向の帯状部分の板厚とする。図2-4中の番号は、計算に使用する有限要素モデルの四角形平面かく要素の番号であり、各帯状部分にはそれぞれ4要素が含まれる。

上記の方法により、式(2-33)を満足させるための6通りの設計変数を計算した結果、各帯状部分の板厚を初期の6mmから表2-5のように変えればよいという解を得た。そこで、板厚を表2-5のように変えてFEMによって計算を行ったところ、自己コンプライアンスは図2-5の実線のようになった。点線上の3次の共振峰が実線では消滅していることがわかる。図2-6は3次の固有モードの計算結果である。図2-6(a)は変更前、(b)は変更後の固有モードであり、変更後は点Pが固有モードの節に一致していることがわかる。

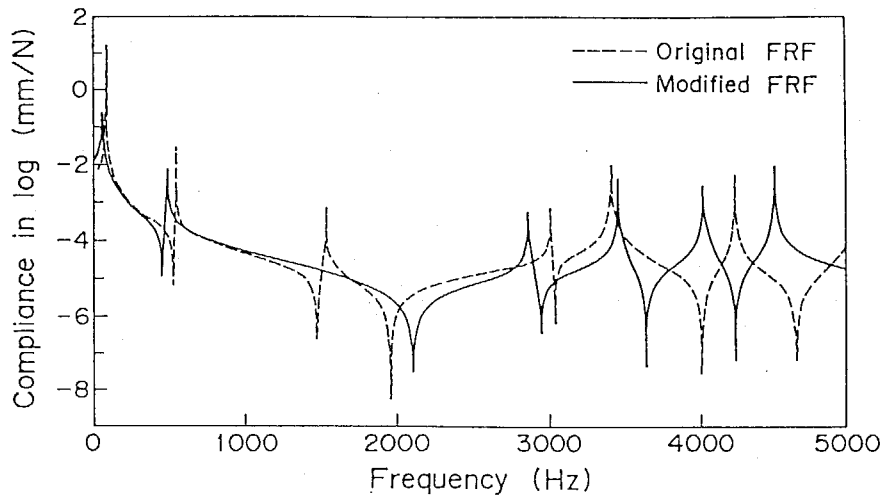


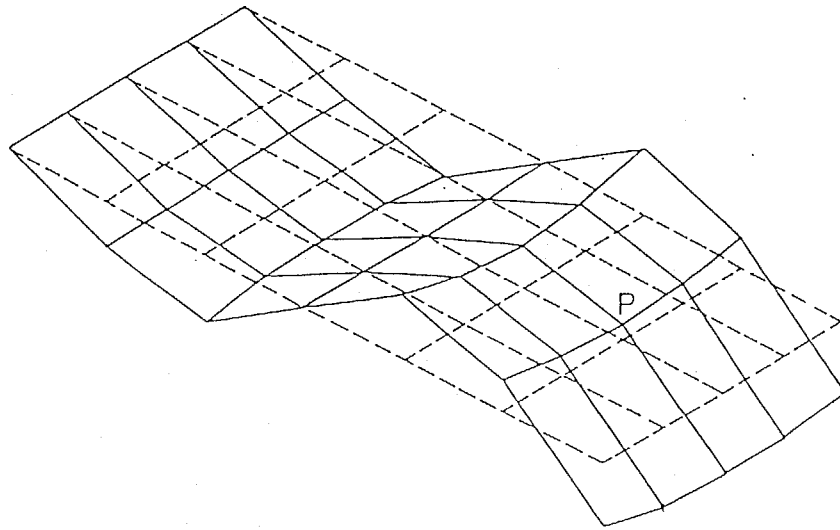
図2-5 点Pの自己コンプライアンス

表2-4 図2-5における共振・反共振振動数

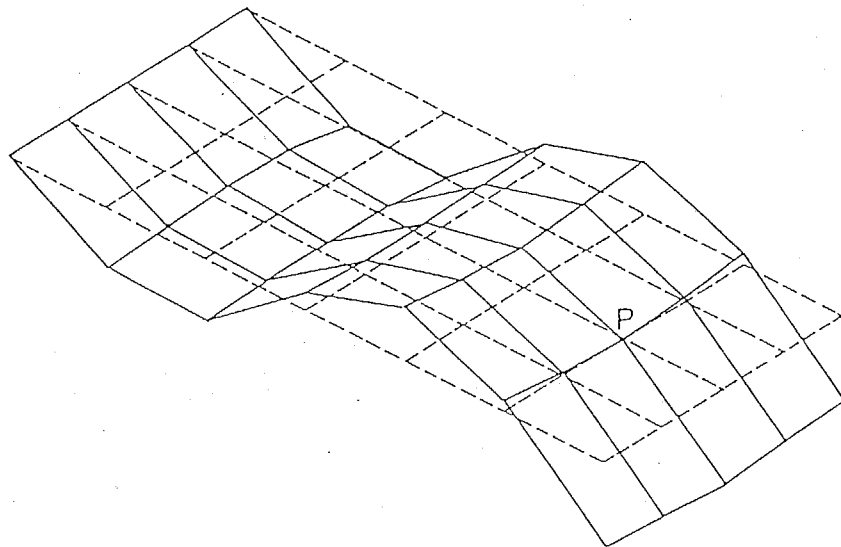
<i>Order</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>
<i>Resonance (Hz)</i>	87.5	550.0	1546	3021	3426	4252
<i>Anti-Resonance (Hz)</i>	526.9	1477	1926	3049	4011	4646

表2-5 変更後の板厚 (3次共振峰消去)

<i>Region</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>Thickness (mm)</i>	5.285	5.701	5.019	5.136	8.385	4.816



(a) 変更前



(b) 変更後

図2-6 3次の固有モードの変化

図2-4の平板を実際に製作し、打撃振動試験により点Pの自己コンプライアンスを測定した結果を、図2-7に示す。図2-7の点線は、変更前の板厚が一様に6mmのときの実験結果であり、図2-5の点線の計算結果とよく一致している。図2-7の実線は板厚を表2-5のように変更したときの実験結果であり、3次の共振峰は完全に消滅しており、また図2-5の計算結果ともよく一致している。

次に、3次と4次の共振峰を同時に連続して消去することを試みる。すなわち、共振振動数と反共振振動数の目標値を次のように設定する。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_3^* &= \Gamma_2^* = 1500(\text{Hz}) \\ \Omega_4^* &= \Gamma_4^* = 3000(\text{Hz}) \end{aligned} \right\} \quad (2-34)$$

このときの設計変数は、すべての要素の板厚とする。本手法により得られた各要素の板厚を表2-6に示す。変更後の点Pの自己コンプライアンスを図2-8に示すが、3次と4次の共振峰が消滅していることがわかる。このように、本手法を用いれば複数の共振峰の同時消去も実現可能である。

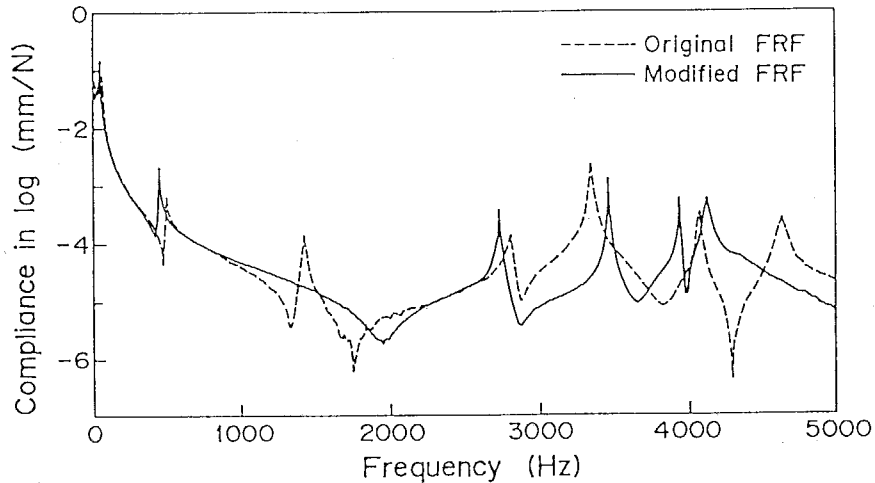


図2-7 3次共振峰消去時のFRFの実験結果

表2-6 変更後の板厚(3次・4次共振峰消去)

<i>Element No.</i>	1	2	3	4	5	6
<i>Thickness (mm)</i>	3.811	3.727	3.727	3.811	5.749	5.825
<i>Element No.</i>	7	8	9	10	11	12
<i>Thickness (mm)</i>	5.825	5.749	6.425	6.173	6.173	6.425
<i>Element No.</i>	13	14	15	16	17	18
<i>Thickness (mm)</i>	6.695	5.011	5.011	6.695	9.572	7.318
<i>Element No.</i>	19	20	21	22	23	24
<i>Thickness (mm)</i>	7.318	9.572	7.266	5.198	5.198	7.266

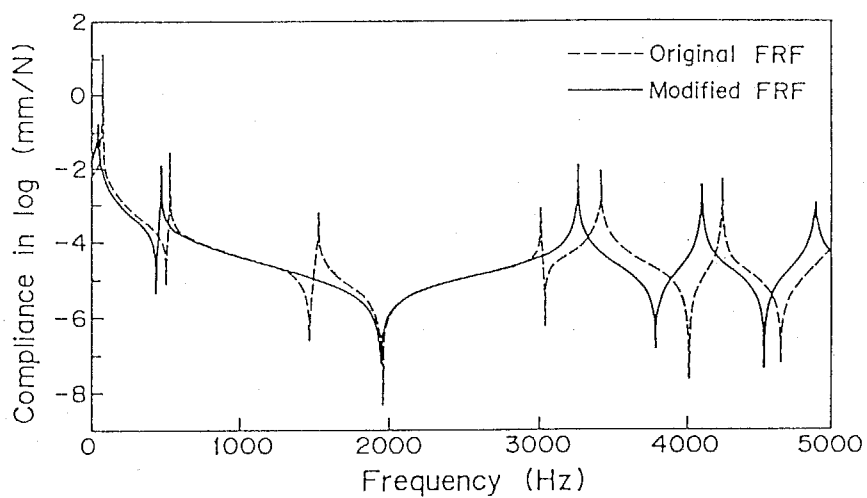


図2-8 3次・4次共振峰消去時の点Pの自己コンプライアンス

2.3 時刻歴応答を考慮した構造物の最適設計

構造系に衝撃力が作用するときの変位応答の最適化方法を示す。構造物の変位応答をモード解析を用いることにより、固有振動数と固有ベクトルにより記述される各モードの振幅成分の重ね合わせとして記述する。そして、衝撃応答を支配するモード振幅成分の感度を用いて、振幅低減を目的とした最適化を実行する。ここでは、FEMを用いて構造最適化を行うわけだが、設計変数としては有限要素の板厚、節点座標を採用し形状の最適化を試みる。さらに、複雑大自由度構造物の振動解析および感度解析を効率的に実行するために、本手法と部分構造合成法との結合を実現させる。そして、F型構造物の最適設計に本手法を適用し、その有効性を検証する。

2.3.1 固有モードと時刻歴応答の感度

時刻歴応答における各モードの振幅成分の感度を計算するためには、固有振動数と固有モードの感度が必要になる。固有振動数の感度は前述の式(2-7)により求めることができるので、固有モードの感度を算出する方法を以下に示す。

不減衰系の固有モードの感度をモード座標 $\xi \in \mathbb{R}^r$ (r は採用モード数)を用いて次のように記述する。

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \tau_j} = \Phi \xi \quad (2-35)$$

ここで、 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times r}$ は固有モード行列である。式(2-35)を式(2-5)に代入すると

$$(K_s - \lambda_i M_s) \Phi \xi = - \left(\frac{\partial K_s}{\partial \tau_j} - \lambda_i \frac{\partial M_s}{\partial \tau_j} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \tau_j} M_s \right) \phi_i \quad (2-36)$$

が得られる。式(2-36)の左から Φ^T をかけると

$$(\Lambda - \lambda_i I) \xi = - \Phi^T \left(\frac{\partial K_s}{\partial \tau_j} - \lambda_i \frac{\partial M_s}{\partial \tau_j} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \tau_j} M_s \right) \phi_i \quad (2-37)$$

ここで、 Λ は固有値を対角上に並べた行列である。式(2-37)から($k \neq i$)の場合の ξ の成分 ξ_k は次のように求まる。

$$\xi_k = - \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \phi_k^T \left(\frac{\partial K_s}{\partial \tau_j} - \lambda_i \frac{\partial M_s}{\partial \tau_j} \right) \phi_i \quad (k \neq i) \quad (2-38)$$

ξ_i については、固有モードの正規化条件 $\phi_i^T M_s \phi_i = 1$ を設計変数 τ_j で偏微分し、式(2-35)のモード座標に変換することにより、次のようになる。

$$\xi_i = - \frac{1}{2} \phi_i^T \frac{\partial M_s}{\partial \tau_j} \phi_i \quad (2-39)$$

式(2-38)、(2-39)から ξ が求まれば、式(2-35)から固有モードの感度が求められる。ここで、式(2-38)から $\lambda_k \gg \lambda_i$ であれば $\xi_k = 0$ とみなせるので、変更モード次数 i よりも十分大きいモード数 r を採用すれば、全モードを用いなくとも、十分な精度をもつ感度が算出できることを後述の適用例によって示す。このことは、簡単な性質であるが、計算時間の短縮化、さらに部分構造合成法と本手法の結合を行う上で重要である。

次に時刻歴応答の感度を示す。式(2-1)において比例粘性減衰を仮定したとき、点 p に単位衝撃力が作用したときの点 q の応答は次式となる。

$$x_q(t) = \sum_{j=1}^r \frac{\phi_{jq}\phi_{jp}}{\Omega_j} \frac{e^{-\zeta_j\Omega_j t}}{\sqrt{1-\zeta_j^2}} \sin\Omega_j \sqrt{1-\zeta_j^2} t \quad (2-40)$$

ただし、初期値を $x_q(0) = \dot{x}_q(0) = 0$ とする。式(2-40)において ζ_j はモード減衰比である。ここで、式(2-40)から振幅を小さく抑えるためには、 $\phi_{jq}\phi_{jp}/\Omega_j$ を小さくし、同じモード減衰の下で応答の収束を早めるためには、 Ω_j を大きくすればよい。この条件は同時に満足するので、振幅の感度について考える。モード振幅の k 次成分

$$a_k = \frac{\phi_{kq}\phi_{kp}}{\Omega_k} \quad (2-41)$$

を τ_j で偏微分すれば、 a_k の感度は、

$$\frac{\partial a_k}{\partial \tau_j} = \frac{\left(\frac{\partial \phi_{kq}}{\partial \tau_j} \phi_{kp} + \phi_{kq} \frac{\partial \phi_{kp}}{\partial \tau_j} \right) \Omega_k - \phi_{kq}\phi_{kp} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \tau_j}}{\Omega_k^2} \quad (2-42)$$

となる。

上述の感度を計算するためには、特性行列の感度を計算しなければならない。本研究で開発した最適化プログラムは、設計変数として有限要素の板厚と節点座標を採用している。板厚に関する特性行列の感度は前述の式(2-30)、(2-31)、(2-32)に従って計算することができる。節点座標に関する特性行列の感度は、解析的に求めることが困難であるので、差分による方法で算出する。すなわち、節点座標を変更する方向にわずかな変位を与え、FEMにより特性行列の再計算を行い、もとの特性行列との差分をとることにより、特性行列の感度を計算する。この場合、特性行列は節点座標の線形関数ではないので節点座標の差分量に依存して変化する。そこで、特性行列の感度の信頼性を高めるために、2つの差分量に関する特性行列を計算し、もとの特性行列と合わせて3つの特性行列からそれぞれ対応する3つの成分を2次曲線で

補間し、それを微分することにより特性行列の感度を計算する。これは、簡単な方法ではあるが、精度上大きな改善が可能であることを本研究で確認している。さらに、計算時間短縮のために、特性行列の再計算は、変更する節点を含む要素のみについて行っており、ここで用いた節点のみを用いて特性行列の感度を求め、固有値および固有ベクトルの感度を計算している。

設計変数の変更方法は、モード座標における振幅成分の目標値を与え、前述の一般逆行列を用いた方法により、設計変数を更新する。

2.3.2 部分構造合成法との結合

複雑大自由度な構造物の最適化を可能とするために、本手法と部分構造合成法の一手法である区分モード合成法を結合する。

区分モード合成法により得られた固有振動数を λ_i 、各分系の固有モードを $\phi_i^\alpha (\alpha=1, \dots, m)$ とする。 α は分系番号で、 m は分系数である。このとき、式(2-7)に対応する i 次の固有振動数の感度は次式となる。

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \tau_j} = \frac{\sum_{\alpha=1}^m \phi_i^{\alpha T} \left(\frac{\partial K_\alpha}{\partial \tau_j} - \lambda_i \frac{\partial M_\alpha}{\partial \tau_j} \right) \phi_i^\alpha}{2\Omega_i} \quad (2-43)$$

ここで、 K_α 、 M_α はそれぞれ分系 α の剛性行列、質量行列である。

固有モード感度については、式(2-38)、(2-39)に対応する式として、

$$\xi_k = - \sum_{\alpha=1}^m \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \phi_k^{\alpha T} \left(\frac{\partial K_\alpha}{\partial \tau_j} - \lambda_i \frac{\partial M_\alpha}{\partial \tau_j} \right) \phi_i^\alpha \quad (k \neq i) \quad (2-44)$$

$$\xi_i = - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \phi_i^{\alpha T} \frac{\partial M_\alpha}{\partial \tau_j} \phi_i^\alpha \quad (2-45)$$

式(2-44)、(2-45)の結果を式(2-35)に代入すれば、固有モードの感度が求まる。この方法では、全系の全自由度の固有モードを採用できないが、前述のように、変更しようとする固有モード次数よりもある程度大きい次数まで採用すれば実用上十分であるという性質から、部分構造合成法を用いた本手法の適用が可能となる。

なお、式(2-43)~(2-45)は、全分系の総和として示されているが、実際には変更する分系についてのみ計算しなおせばよいことは明らかである。そして、節点座標の感度計算に際しては、変更する分系内の変更節点を含む要素のみについて特性行列の再計算を行い、感度を計算することにより計算時間の短縮が可能になる。

2.3.3 F型構造物の形状最適化

上述の方法を用いて図2-9に示す3つの分系から成るF型構造物の最適化を行う。いま、点Pのx方向に単位衝撃力が作用するとき、点Pと点Qの間の動的な相対変位を抑えることを目標とする。このときの点Pと点Q間の相対変位は、式(2-40)をもとにして次式で示される。

$$x_{PQ}(t) = \sum_{j=1}^r \frac{(\phi_{jP} - \phi_{jQ})\phi_{jP}}{\Omega_j} \frac{e^{-\zeta_j \Omega_j t}}{\sqrt{1-\zeta_j^2}} \sin \Omega_j \sqrt{1-\zeta_j^2} t \quad (2-46)$$

ただし、各点の初期変位、初期速度は零とする。

振動解析の結果、相対変位の振動挙動を支配するのは3次モードの振幅成分であることが判明した。相対変位の振動を抑えるために、1次と2次および3次の振幅成分の目標値を表2-7のように設定し、構造変更を行う。設計変数は図2-9の3つの領域内の節点のz方向の座標、すなわち寸法 d_1 、 d_2 、 d_3 および同図に示す9カ所の領域の板厚とする。

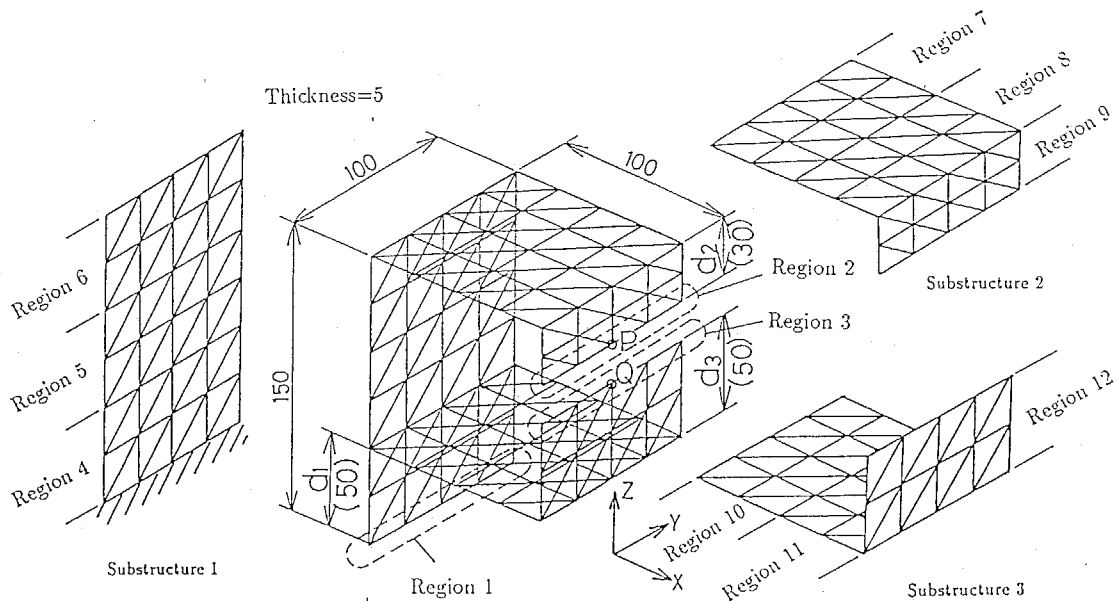


図2-9 F型構造物

本手法による最適化の結果を表2-8に示す。なお、この計算における採用モード数は40である。点Pに衝撃力が作用したときの構造変更前と変更後の点P、Q間の相対変位を図2-10に示すが、構造変更によって相対変位が低減していることがわかる。そして、変更前と変更後の点P、Q間の相対変位に関するコンプライアンスを図2-11に示す。同図から、3次の共振時の応答レベルが低減していることがわかる。なお、ここでは各モードに3%のモード減衰を与えている。

表2-7 モード振幅成分の目標値

Resonance order r	Amplitude $(\phi_{rP} - \phi_{rQ})\phi_{rP}/\Omega_r (mm)$		Target/Original
	Original	Target	
1	0.273	0.26	0.95
2	-0.215	-0.20	0.93
3	1.433	0.80	0.56

表2-8 設計変数の最適値

Region	1 (d_1)	2 (d_2)	3 (d_3)
Length (mm)	56.12	25.60	54.22
Region	4	5	6
Thickness (mm)	5.460	6.062	6.050
Region	7	8	9
Thickness (mm)	6.478	7.578	7.938
Region	10	11	12
Thickness (mm)	5.424	5.453	4.742

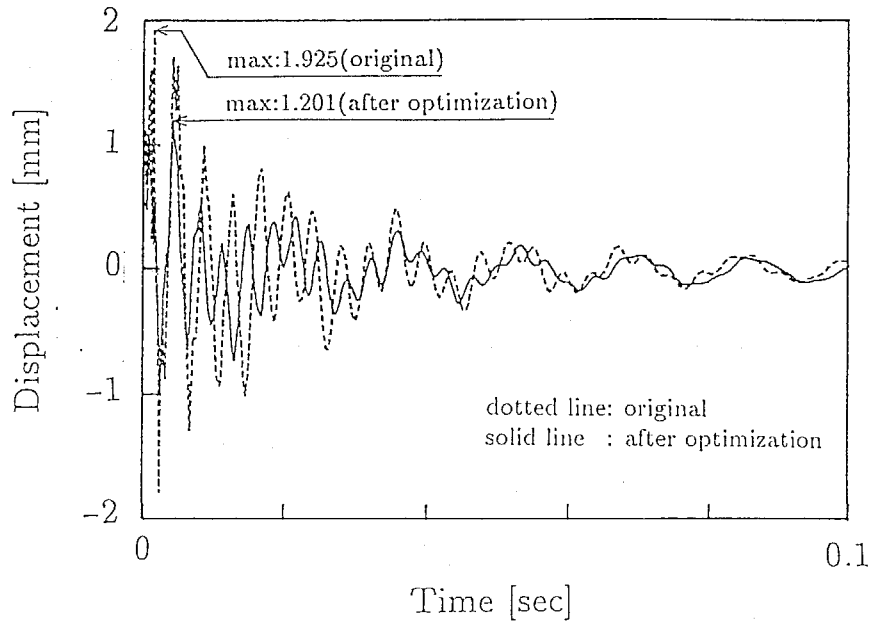


図2-10 点P、Q間の相対衝撃応答

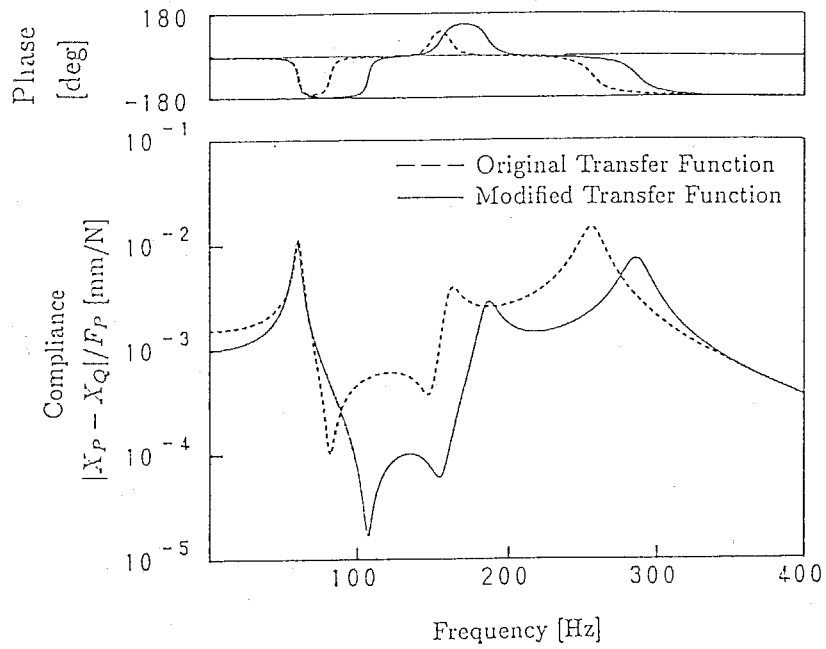


図2-11 点P、Q間の相対変位に関するコンプライアンス

2. 4 結言

本章では、感度解析を用いた構造物の最適化方法を提案した。その中で、まず共振振動数と反共振振動数の感度を用いた構造物の最適化方法を提案し、以下の結論を得た。

- (1) 新しく反共振振動数感度を提案した。
- (2) 共振振動数と反共振振動数の両方を、両者の感度を用いて希望する値に自由に変更する最適化方法を提案した。
- (3) FRFにおいて共振振動数と反共振振動数を一致させることにより、共振峰を消去する方法を提案した。
- (4) FEMにより、本手法を実行するプログラムを開発した。そして、多質点系モデルおよび平板の構造最適化に適用することにより提案した方法の有効性を検証した。

次に、構造物の時刻歴応答に着目した最適化方法を示し、以下の結論を得た。

- (5) FEMによるモデルの板厚と節点座標の感度を用いて、構造物の時刻歴応答の最適化を行う手法を示した。
- (6) 本手法により、単位衝撃応答における振幅のモード成分を変更することにより応答レベルの低減が実現できることを示した。
- (7) 本手法と部分構造合成法を結合することにより、複雑大自由度な構造物の最適設計に適用する際の効率化を可能にした。
- (8) 本手法をF型構造物の最適化に適用し、単位衝撃力が作用した際の特定2点間の相対変位の低減を実現した。

第3章 共振点消去理論による 光ピックアップの設計

3.1 緒言

最近の機械には、小型化、軽量化、省エネルギー化が求められる一方で、高速、高精度などの高性能化がますます要求されるようになってきており、それに対応するために制御系を内蔵する機械が一般的になりつつある。しかし、機械構造系と制御系設計の間の連携はあまりとられていないのが現状であり、制御しにくい構造に対して、複雑な制御系を構成しなければならないことがしばしば生じている。もしも、制御性を考慮した適切な構造系が設計されたならば、制御系の負担は軽減され、機械全体の性能の向上が期待できる。構造系と制御系を総合した設計法の確立は現時点において大きな課題であるといえる。

そのような視点から、本研究は、制御性を考慮して機械構造を設計し、その上で制御系を含めた一体化設計を行う一つの設計法を提案し、これを光ディスク装置のサーボ系の設計に適用して、有用性を検討しようとするものである^{(48)~(52)}。このサーボ系には、最近ますます軽量化、高速、高精度化に対する厳しい要求が課されるようになってきており⁽⁵³⁾、本法を応用する上で格好な対象である。本方法の骨子は、モード解析によって求めた振動の節に着目して、これを媒体に構造系と制御系の一体化設計を図ろうとするものである。振動の節では変位が零であり、また節上に作用する加振力のそのモードへの影響も零である。つまり、振動の節では、現代制御理論で扱う不可制御、不可観測が成立する。不可制御、不可観測は極-零点消去によって生ずるものであるから、振動の節を積極的に活用することによって、構造系において極-零点消去が実現されることになり、その分制御系の補償回路が簡素化され、制御し易い構造系が得られる。

コンパクトディスク(以下、CD)装置などに代表される光ディスク装置は制御系を内蔵し、高い付加価値を有する機械の代表例である。CD装置は、ディスク上に刻まれた凹凸(ピット)の信号を光ピックアップによって検出し、高品質の音を非接触で再生する装置である。データが高密度で記録できるので、新時代のデータファイル装置、書き換え可能な光磁気ディスク装置として期待されている。光ピックアップは、これらの装置の心臓部であり、フォーカシングサーボ、トラッキングサーボによって垂直、水平方向が制御され、CDの動きに対し、高速かつ高精度で追従

することが要求される。

以上のことを実現するためには、光ピックアップを構成する構造系と制御系を一体化した総合的な設計が望まれる。特に、制御性を考慮して機械力学的観点から構造系を開発することの重要性が指摘されているが、現状ではその点が立ち遅れているように思われる。

本章では、一体成形による新しいタイプの光ピックアップを提案すると共に、提案する最適化手法を、この設計開発に応用する。これは一体成形による簡易構造であるため、製造行程の簡略化、軽量化が図られるという利点を有するが、ヒンジ構造であるために振動特性が制御系の安定性に影響することが懸念される。

そこで、第2章で提案した共振点消去の理論を用いて、制御性を考慮した光ピックアップの構造の最適化を行う。そして、構造最適化された光ピックアップを用いてサーボ系を構成し、その特性を解析と実験により調べ、制御仕様との対応を調べることにより実用化の可能性について検討する。

3. 2 構造系の振動が関与する制御問題

従来、制御系と構造系の干渉を避けるために、一般に両者の周波数帯域を分離して、構造系と制御系を個別に設計する方法⁽⁵⁴⁾がとられてきた。つまり、制御系の周波数帯域内に構造系の共振周波数が含まれないように、構造系の固有振動数をできるだけ高く設計するか、制御系を狭帯域に設計してきた。

ところが、最近のメカトロニクス機器には、高速、高精度化に加えて軽量化に対する厳しい要求がある。必然的に、構造系の固有振動数が低下の傾向にある一方で、広帯域の制御系が要求されている。そのために、制御の帯域内に構造系の複数の共振周波数が含まれることになり、良好な制御を達成するために振動の制御が課題となるような事例が多発している。このように、構造系と制御系の動特性とは分離されるものではなく、一体化した設計法の確立が今後の重要な課題になろうとしている。

光ディスク装置に使用される光ピックアップのサーボ系は、まさに構造系の振動が制御系に関与する代表例である。光ピックアップの構造系の固有振動数をサーボ系の制御帯域内に含めないように設計することは大変難しく、構造系の振動特性を含めた制御系の設計が強いられている。ここでは、この光サーボ系の設計問題を考えてみる。

CD装置はディスク上に刻まれた凹凸の信号を光ピックアップによって検出し、高品質な音を非接触で再生する装置である。データが高密度で記録できるので、新時代のデータファイル装置や書換え可能な光磁気ディスク装置として期待されている。光ピックアップは、これらの装置の心臓部である。

光ディスク装置の構成を図3-1に示す。光ピックアップはCD上の信号にレンズを追従させるためにフォーカシングサーボとトラッキングサーボ系を有しており、制御精度は前者で $1\mu\text{m}$ 、後者にいたっては $0.1\mu\text{m}$ が要求されている。しかも、現規格では、CDの上下方向の振れ(y_i)は $\pm 0.5\text{mm}$ 、送り方向の振れ(x_i)は $\pm 70\mu\text{m}$ まで許容されている。そのために、フォーカシングにおいて500(55dB)以上、トラッキングにおいて700(57dB)以上の高いループゲインが要求されている。

図3-2は、光ピックアップアクチュエータの周波数特性の1例を示す。ここでは、これを構造系の周波数特性と定義する。この特性では1次共振振動数を ω_0 、2次共振振動数を ω_p と表わす。CDの基本回転数を ω_0 より低い周波数と考えれば、位相進み補償を加えた後、ゲイン交差周波数 ω_c を0dBとして基本回転数までのゲイン差がループゲインである。したがって、高いループゲインを得るには、 ω_c を高い周波数に設定したい。ところが、制御理論でよく知られているように、2次の共振ピークが0dBを越えると制御系が不安定になることがあるために、 ω_c の設定に限界がある。この場合、必然的に高いループゲインが得られない。この問題を解決するには、次の事項が考えられる。

- (1) 制御系によって2次共振点が原因となる不安定を除く。
- (2) 構造系の変更によって2次共振点を高い周波数に移し、かつ共振ピークの低減を図る。

項目(1)は、ノッチフィルタによる共振点の消去、状態フィードバックによる安定化などが考えられる。しかし、そのために制御系が複雑になり、補償回路が大掛になることは避けられない。このような例は制御性の悪い構造系といえる。

項目(2)は、制御性を考慮した構造系の設計に関する問題である。現状では、2次共振を防ぐために推力中心と重心を合わせるようにアクチュエータの重量バランスをとるとか、ダンピング効果をもたせる⁽⁵⁵⁾などの対応がとられている。ところが、目下の主要課題はアクセス

時間の短縮にある。それとともに、構造系には益々の軽量化と10kHz以上の高域まで2次共振の発生の防止が求められており、従来の技術では対応できない状況にきている。

上述の問題を解決するために、本論文では新たに第3の方法を提案する。

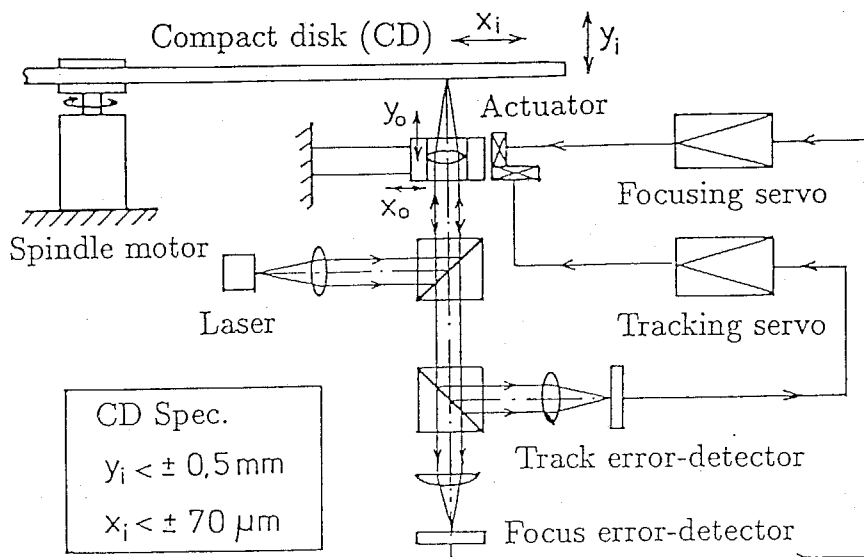


図3-1 光ディスク装置の光サーボ系

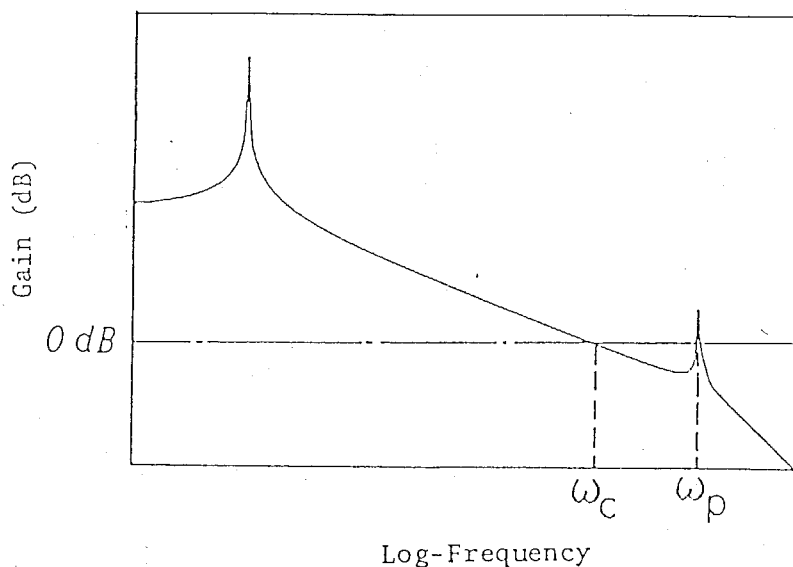


図3-2 ゲイン交差周波数付近にある構造系の2次共振の問題

3. 3 振動の節を活用した一体化設計法

制御系を内蔵する機械の性能は、制御系に課せられた性能仕様に依存する。したがって、その性能仕様を容易に満足するように制御性のよい機械構造を作ることは、機械の性能向上にとって不可欠である。そのような視点から、本章で提案する構造系と制御系の一体化設計法を流れ図で表して図3-3に示す。この図では、要求される機能や、制御系の性能仕様の両面から、先ず構造系の最適化を図り、その上で、制御系を設計し、仕様が満足されているか否かシミュレーションによる検討を行っている。構造系が最適化されていれば、簡単な制御系で目標とする機能、仕様が満足されることになり、一体化設計の目的が達成される。

さて、ここで問題となるのが、構造最適化の手法であるが、ここでは、振動の節の性質を活用して、これを構造系の希望する位置に設定することをもって構造最適化法とする。次節に述べるように、振動の節を活用すれば、制御系の極-零点消去が構造系で達成される。したがって、光サーボ系の制振問題に立ち戻れば、構造系に2次共振として現われた不用な極は、制御系によって取り除く代わりに、この構造最適化法によって消去され、制御系の負担は軽減されることになる。ここに、構造系と制御系の一体化設計法の意義がある。

3. 4 振動の節と極-零点消去の相対性

3.4.1 モード解析と振動の節

モード解析では、まず与えられた運動方程式から固有値と固有ベクトルを求め、その固有ベクトルによって構成されたモード行列 Φ を用いて、物理座標系からモード座標系への線形変換を行う。モード座標系では固有モードの直交性の性質によって各座標間が非連成化されるので、図3-4に示すように、 N 自由度系といえども N 個の1自由度系の合成を見ることができるので解析もすっきりとして簡単になる。ただし、 M_s 、 K_s は質量行列および剛性行列、 C_s は比例粘性行列、 m_i 、 c_i 、 k_i は各々 i 次のモード質量、モード減衰、モード剛性を表わす。

いま、1例として、図3-5に示すような、1端固定で先端に質量が付加されたはり構造物を考える。このはり上の点 a に駆動力 F_a が作用したことによる点 b の変位応答 X_b は、モード解析によって次のように表わされる。

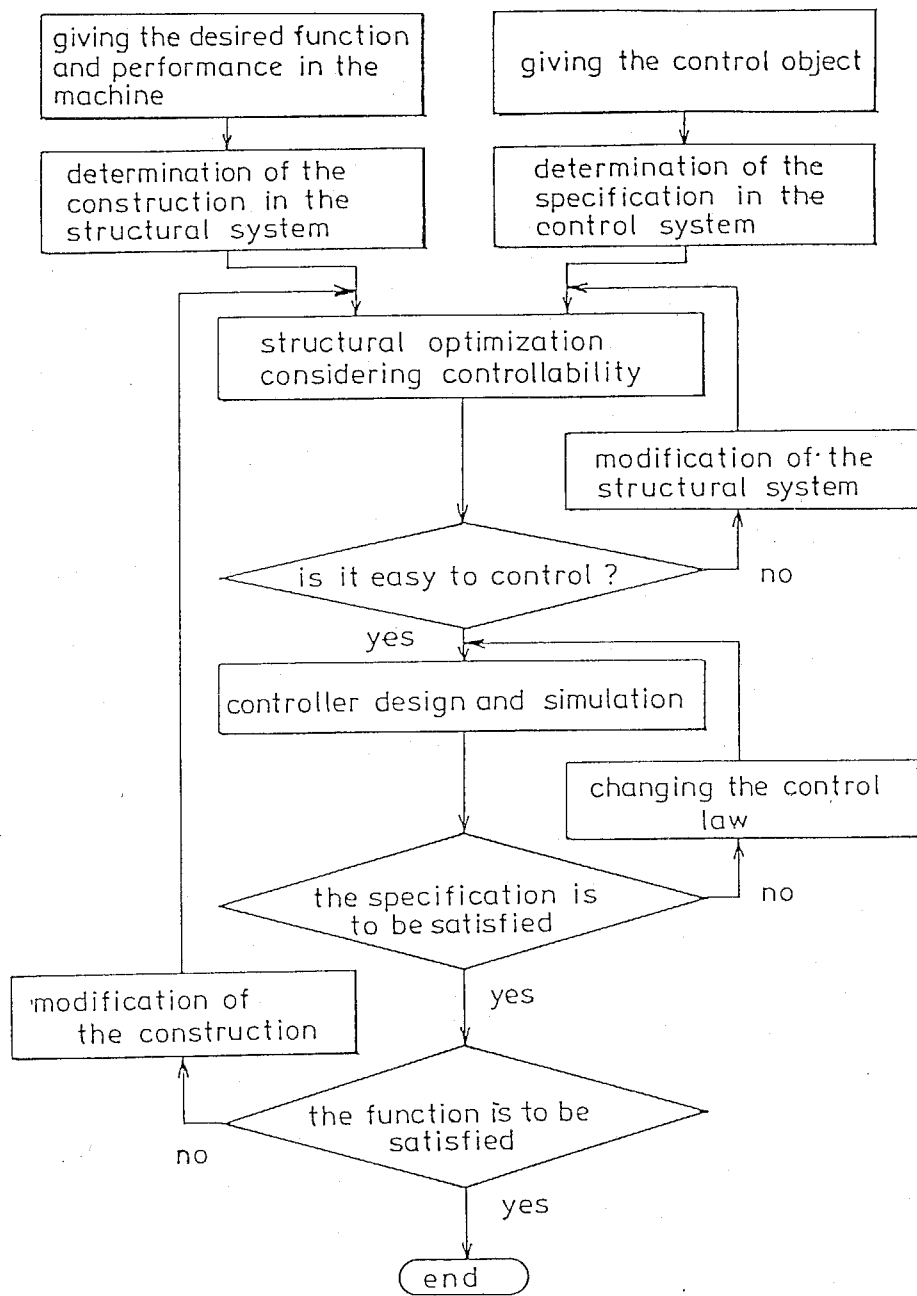


図3-3 構造系と制御系の一体化設計の概念

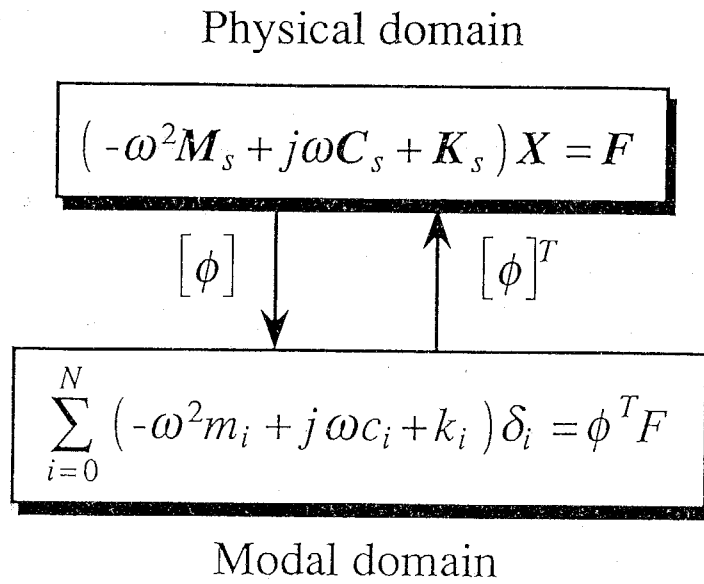


図3-4 物理座標系とモード座標系の対応

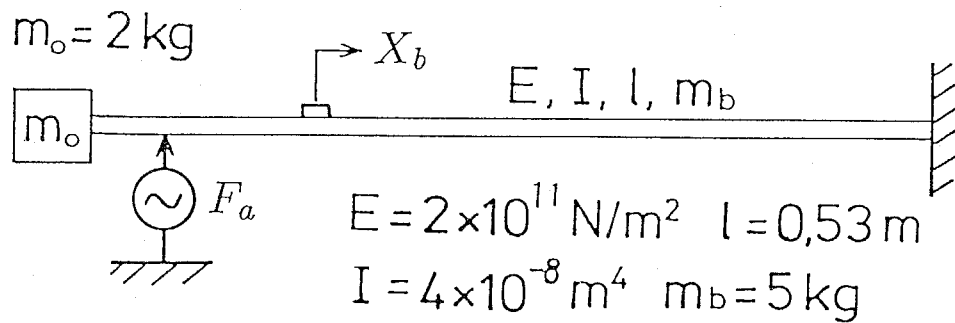


図3-5 はり構造物の駆動点と応答点

$$\begin{aligned}\frac{X_b}{F_a} &= \sum_{i=1}^N \frac{\phi_{ia}\phi_{ib}}{-\omega^2 m_i + j\omega c_i + k_i} \\ &= \sum_{i=1}^N \phi_{ia}\phi_{ib} G_i(\omega)\end{aligned}\quad (3-1)$$

ここに、 G_i は*i*次モードの伝達関数、 ϕ_{ia} 、 ϕ_{ib} は*i*次モードの固有ベクトル成分を表わす。

$$\begin{aligned}G_i(\omega) &= \frac{1/k_i}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + j(2\zeta_i\omega/\Omega_i)} \\ \Omega_i &= \sqrt{k_i/m_i}, \quad \zeta_i = c_i/2\sqrt{k_i m_i}\end{aligned}$$

この関係を駆動力 F_a に対する X_b の応答のブロック線図で表わすと図3-6のようになる。

図3-5に示したはり構造物の例について、モード解析によって固有モードを求め、1次~3次までの振動モードとして表わすと図3-7のようになる。この図から、2次モードの振動の節は先端から0.09の位置にあり、3次モードは0.035と0.45の位置にあることがわかる。振動の節では変位が零であるから、 X_b を*i*次モードの振動の節上に選べば、そのモードの応答は現われない。これは、図3-6における*i*次モードの固有モード成分 ϕ_{ib} が零であることを意味する。同様に、 F_a を*i*次モードの振動の節上に選んでもそのモードの X_b の応答は現われない。これは、固有モード成分 ϕ_{ia} が零であることに外ならない。

以下に、現代制御理論を特徴づける可制御性、可観測性と振動の節との関係について考察する。

3.4.2 不可制御・不可観測性

次式のように、図3-4と同じ運動方程式で表わされる構造系に制御力 u が作用することを考える。

$$M_s \ddot{x} + C_s \dot{x} + K_s x = B_s u \quad (3-2)$$

ここに、 x 、 u は変位と制御力のベクトル、 B_s は制御力の入力行列を表わす。これを状態方程式に書き換えて

$$\dot{q}_0 = A q_0 + B u \quad (3-3)$$

$$y = C q_0 \quad (3-4)$$

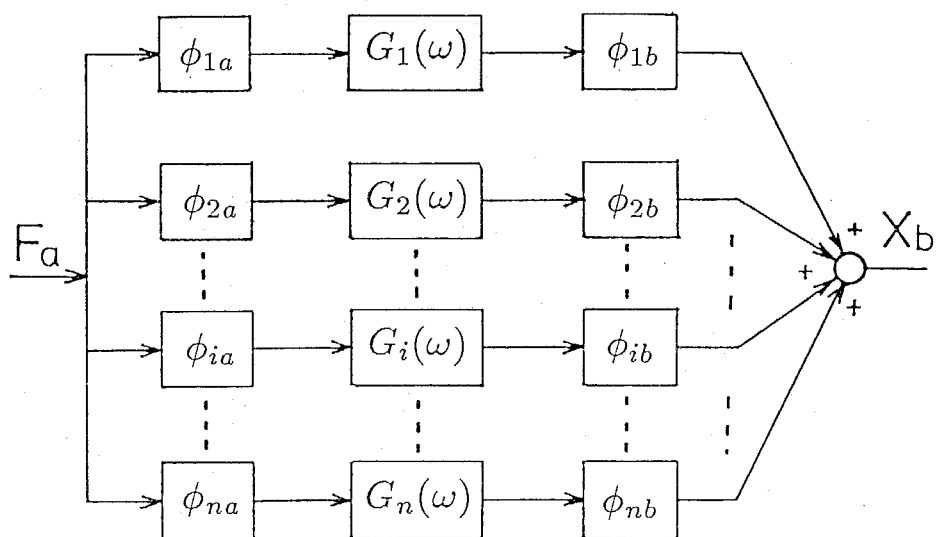


図3-6 モード解析による多自由度系の応答ブロック線図表示

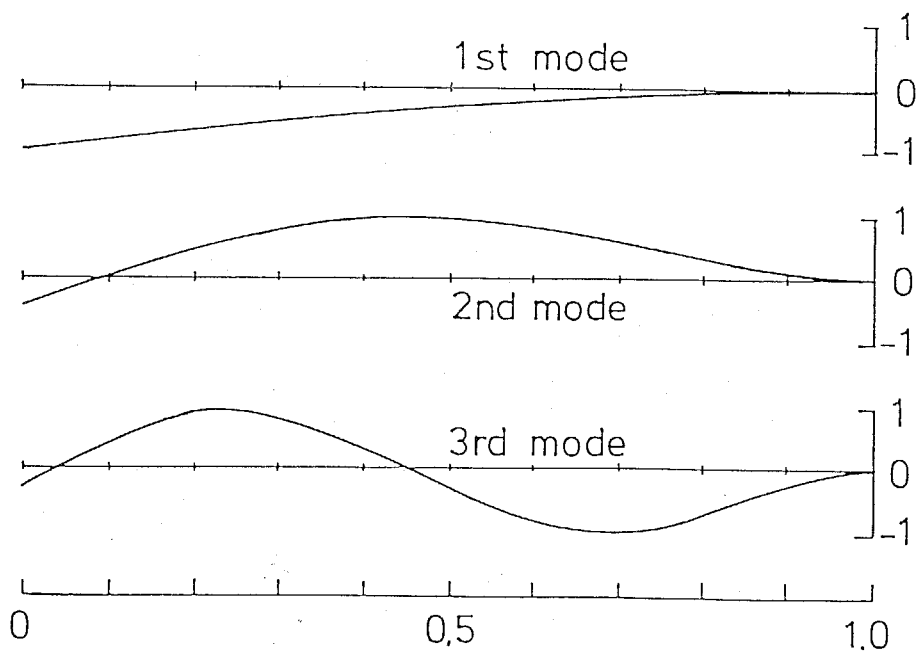


図3-7 はり構造物の振動モード形

ただし、式(3-2)と式(3-3)、(3-4)とは次のように対応している。

$$q_0 = \{x, \dot{x}\}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_s^{-1}B_s \end{bmatrix}$$

$$C = [I \ 0]$$

ここに、 I は単位行列、 0 は零行列を表わす。モード解析に対応させて、ここでも固有ベクトルによって作られた座標変換行列 T を用いて、次の1次変換を行う。

$$q_0 = Tz$$

いま、1入力、1出力を仮定して、 $B \rightarrow b$ 、 $C \rightarrow c$ と置いて変換すれば、次のような正準系の状態方程式で表わされる。

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{b}u \quad (3-5)$$

$$y = \tilde{c}z \quad (3-6)$$

ここに、 \tilde{A} 、 \tilde{b} 、 \tilde{c} は対角正準形式となり、 λ_i は固有値である。

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n})$$

$$\tilde{b} = T^{-1}b = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n}]^T$$

$$\tilde{c} = cT = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n}\}$$

この正準系の状態方程式をブロック線図で表わすと図3-8のようになる。この図と図3-6を比較すれば、モード解析における固有モード成分 ϕ_{ia} 、 ϕ_{ib} は正準系における β_i 、 θ_i と対応し、 i 次モードの伝達関数は固有値 λ_i による i 次の閉ループ系と対応していることがわかる。

現代制御理論では、 $\beta_i \neq 0$ であるとき、その系を可制御、 $\theta_i \neq 0$ のとき可観測といい、 $\beta_i = 0$ 、 $\theta_i = 0$ を不可制御、不可観測と呼んでいる。したがって、 $\phi_{ia} = 0$ は不可制御、 $\phi_{ib} = 0$ は不可観測に相当し、これらは振動の節において作られる。図3-9には、

- (1) 可制御 可観測
- (2) 不可制御 可観測
- (3) 可制御 不可観測
- (4) 不可制御 不可観測

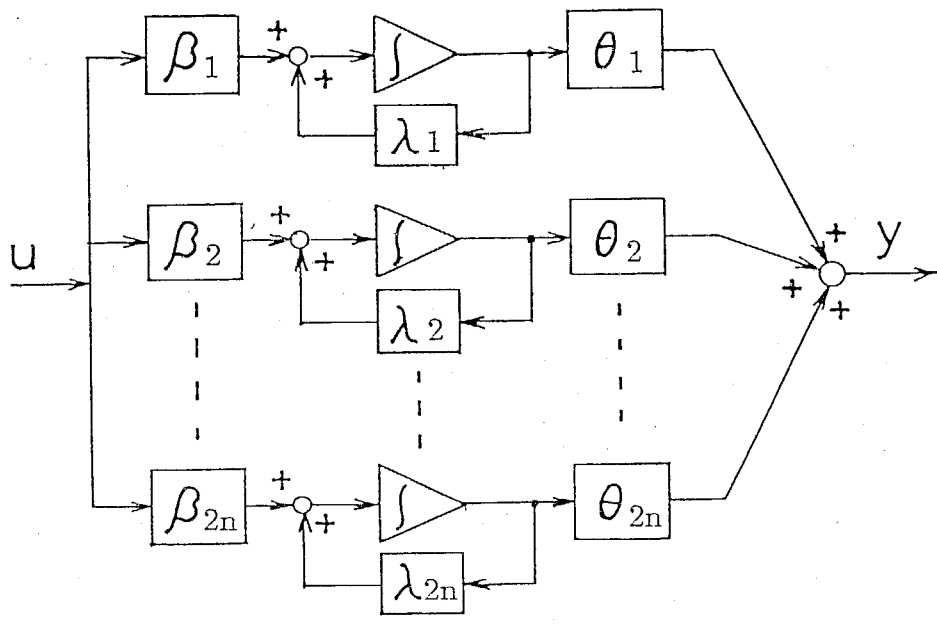


図3-8 正準系による応答のブロック線図表示

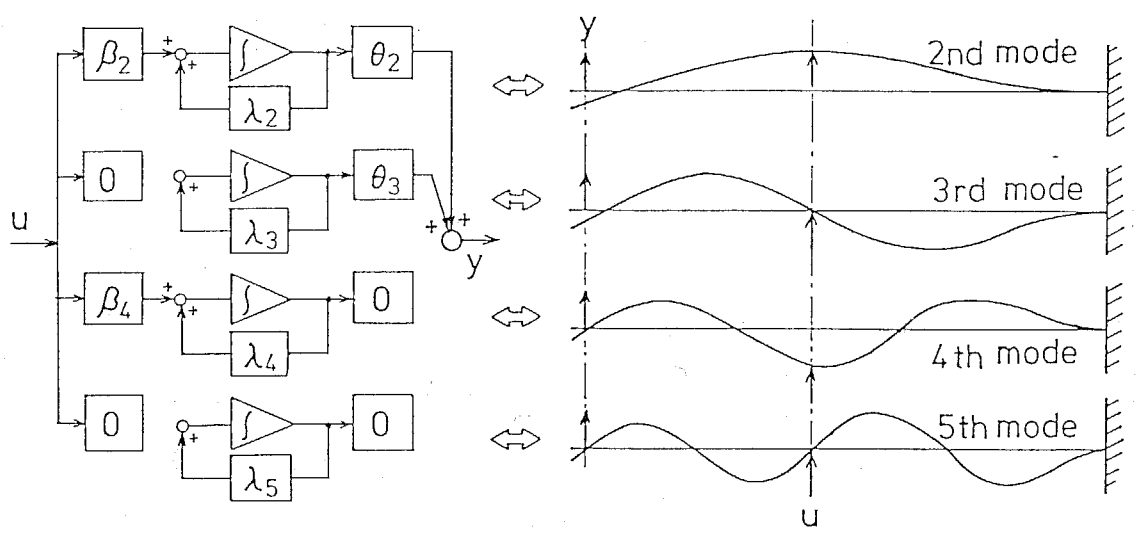


図3-9 可制御性、可観測性と振動モード形上の駆動点と応答点の対応

の4つのケースと、それに対応する振動モード形を示す。ここに、 u は制御力、 y は応答を示す。理論的には極-零点消去によって不可制御、不可観測が生ずるのであるが、具体的には構造系の振動の節がこれらを作っていることがわかる。

3.4.3 極-零点消去法

最適制御理論では完全フィードバックを前提とするので、可制御性、可観測性が保証されていることが制御系設計の条件である。しかし、状態フィードバックに依存しなければ、それにこだわることはない。むしろ、不可制御、不可観測性を積極的に利用して、不要な極の消去を図り、制御性のよい構造系をつくり出すことに意義がある。これは振動の節を積極的に活用することに他ならない。図3-5および図3-7に示したはり構造物とその振動モードを用いて、振動の節を活用した構造系の極-零点消去法を説明する。

図3-10は、はり構造物の先端から0.2の場所を駆動点として、同時にその点を観測点にしたときの変位/力の周波数応答を示す。1000Hzの範囲に3つの共振ピークが現われており、1次、2次、3次の共振ピークが各々、35Hz、280Hz、860Hzにある。このように、駆動点と観測点が振動の節の位置から離れれば、大きな共振ピークが現われる。

次に、駆動点をはり先端から0.2、観測点を0.05にとったときの周波数応答を図3-11に示す。観測点が2次と3次の振動の節の位置に近いためにこれらの共振ピークは低下しているが、2次の共振ピーク付近で360度の位相遅れが現われているために、制御系が内蔵された場合、図3-2に示した問題が起こる。

さらに、駆動点と観測点を0.09の位置に選んだときの周波数応答を図3-12に示す。この位置は2次モード振動の節の位置と一致している。したがって、2次の極が零点によって消去されるために2次の共振ピークが消滅している。これは、共振点と反共振点が一致した結果、共振ピークが消去されたことでもある。

最後に、駆動点を2次モードの振動の節、観測点を3次モードの振動の節の位置に選んだときの周波数応答を図3-13に示す。同図から見られるように、不可制御、不可観測の性質を活用すれば、極-零点消去によって2次と3次の共振ピークは完全に消滅しており、1自由度系の周波数応答と同じ構造系の特性が得られている。このような特性に構造系が設計されたならば、制御系設計の負担は軽減されることを実例によって示す。

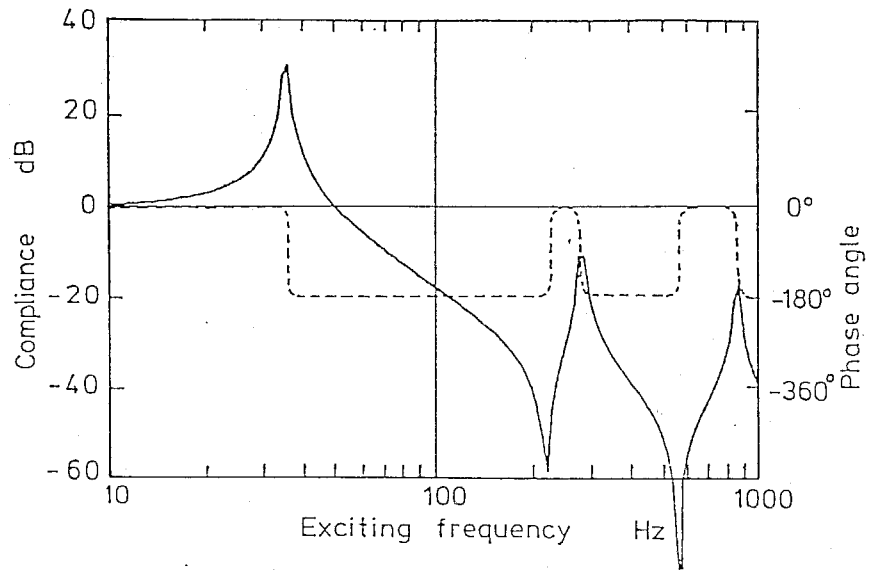


図3-10 はりの先端から0.2の位置の駆動点コンプライアンス

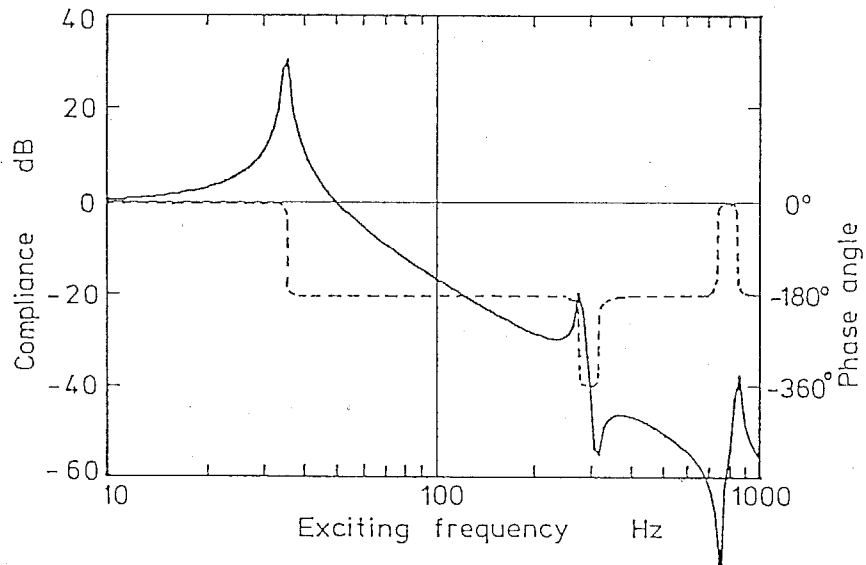


図3-11 0.2の位置の駆動点と0.05の位置の応答点間の
コンプライアンス

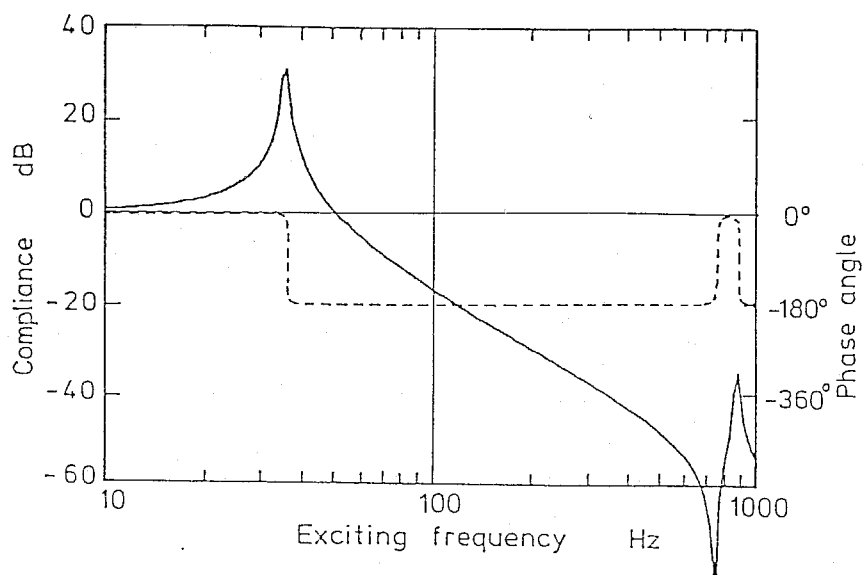


図3-12 二次モードの節(0.09)上の駆動点コンプライアンス

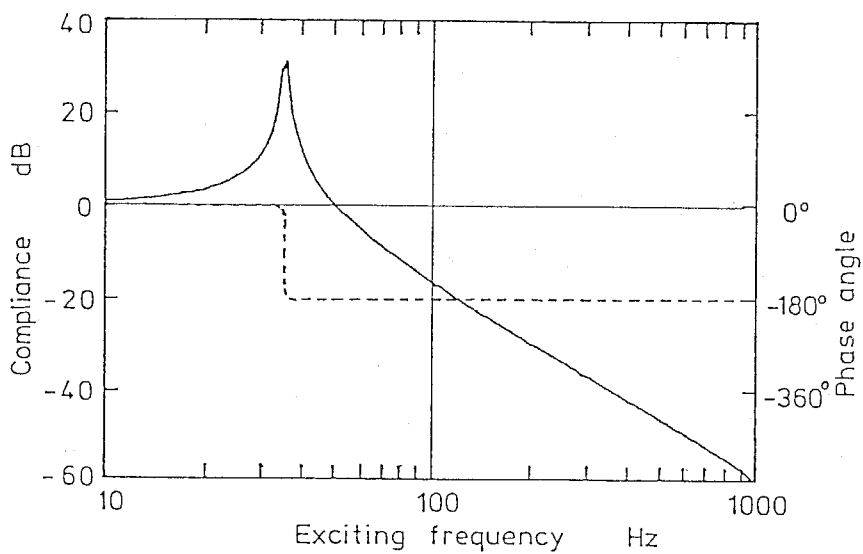


図3-13 二次モードの節上の駆動点と三次モードの節上の応答点間のコンプライアンス

3. 5 一体化構造の光ピックアップの提案

本研究で提案する光ピックアップを図3-14に示す。これは、一体成形タイプのヒンジ方式を採用した光ピックアップである。この光ピックアップは、二重ヒンジ構造によりフォーカス方向およびトラック方向に運動の自由度をもたせている。このように、形状は極めて簡単で、従来の複数の部品を組み合わせて一つのピックアップを構成するものより、コストも低く製造が簡単で量産に有利である。また、型による一体成形であるので、製造上の組立によって生じる構造特性（品質）のばらつきが少ないという特徴がある。このことは、信頼性の高い制御系を構成する上で非常に有利である。さらに部品点数が少ないということから、このピックアップは軽量化が図られることにより、駆動エネルギーを低減できる点が特徴であり、アクセスの高速化も期待できる。なお、この光ピックアップの材質はPBT（ポリブチレンテレフタレート）である。

アクチュエータの構成は、コイルとマグネットにより磁気力を発生させ駆動力を得る。光ピックアップ本体にコイルを取り付けるもの（ムービングコイル型）と、本体に磁石を取り付けるもの（ムービングマグネット型）に分けられる。本研究では、前者の駆動方式を採用する。

本研究で提案するピックアップは上記のような特徴を有するが、ヒンジ方式を採用しているために、その振動特性が制御特性に影響することが懸念される。安定なサーボ系を構成するためには、サーボ帯域内に存在する光ピックアップの高次の弾性モードの影響を除去しなければならない。そこで、まず光ピックアップの振動特性を解析により調べ、振動特性上の問題点について考察する。次に、制御性を考慮した構造の最適化を行い、サーボ系を構成したときの特性について検討を行う。

3. 6 光ピックアップの振動解析

まず、FEMを用いて光ピックアップの特性行列を計算する。そして、モード解析により振動特性を調べる。図3-15に解析モデルを示す。材質はPBTであり、その物性値は次のとおりである。

$$\begin{array}{ll} \text{縦弾性係数} & E = 1.50(\text{GPa}) \\ \text{密度} & \rho = 1.22 \times 10^3(\text{kg/m}^3) \end{array}$$

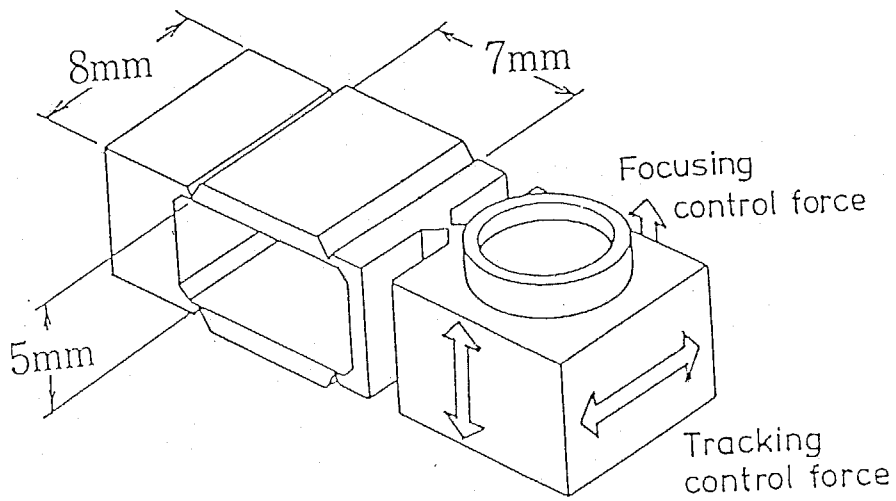


図3-14 一体構造の光ピックアップ

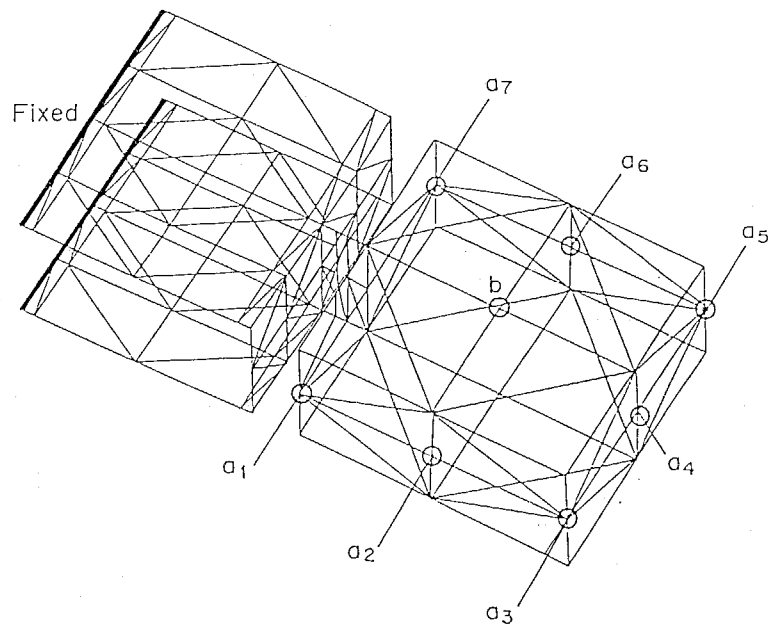


図3-15 光ピックアップの有限要素解析モデル

図3-15において先端点 a_4 を駆動点とする。応答点是对物レンズの中心点 b である。点 a_4 をトラック方向に駆動したときの点 b のトラック方向のコンプライアンスを図3-16に示す。そして、点 a_4 をフォーカス方向に駆動したときの点 b のフォーカス方向のコンプライアンスを図3-17に示す。トラック方向の特性に関しては1次共振振動数が50.9Hz、2次共振振動数が2262Hzに存在している。一方、フォーカス方向の特性に関しては、1次共振が46.6Hz、2次共振が2037Hzに存在している。ここで、両方向の1次と2次の振動モード形をそれぞれ図3-18、3-19に示す。次に、サーボ系を構成する上での振動特性上の問題点について考察する。

まず、トラック方向の特性について考える。

サーボ系に要求されるトラック方向のループゲインは前述どおり57dB以上である。図3-16に示すトラック方向の伝達関数特性から、仕様で与えられたループゲインを実現させるためには、ゲイン交差周波数を1kHz以上に設定する必要がある。しかし、位相進み補償を用いて1次共振のみを補償する場合、2kHz付近に存在する2次共振によってサーボ系が不安定になる可能性が大きい。したがって、2次共振の発生を抑えるような構造最適化を行う必要がある。

フォーカス方向の特性についても同様に、必要なループゲインは前述どおり55dB以上であるから、図3-17に示す振動特性から、この場合もゲイン交差周波数を1kHz程度に設定しなければならない。したがって、安定なフォーカシングサーボ系を構成するためには、2kHz付近に存在する2次モードの発生を抑えなければならない。

そこで、共振点消去理論を用いてこれらの2次共振を完全に消滅させることを試みる。

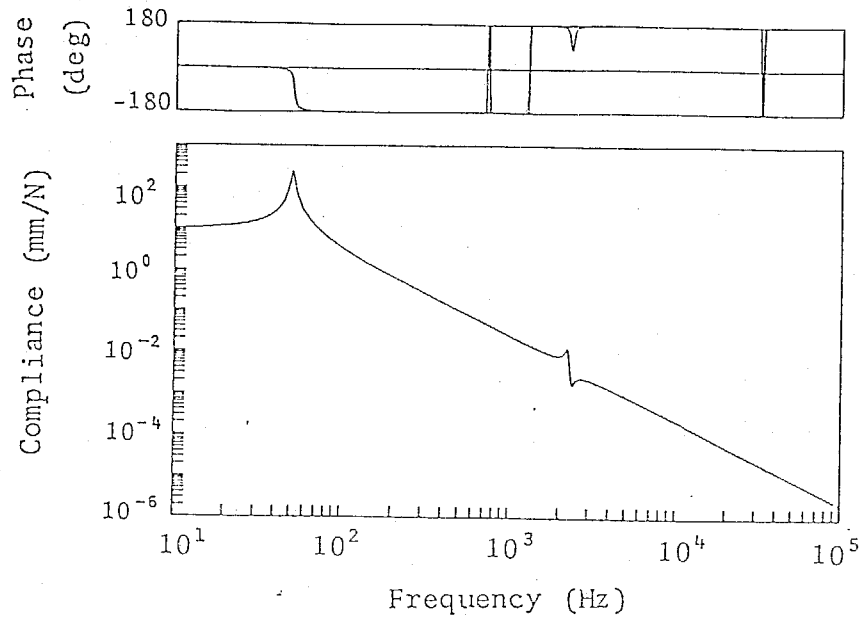


図3-16 トラック方向の振動特性

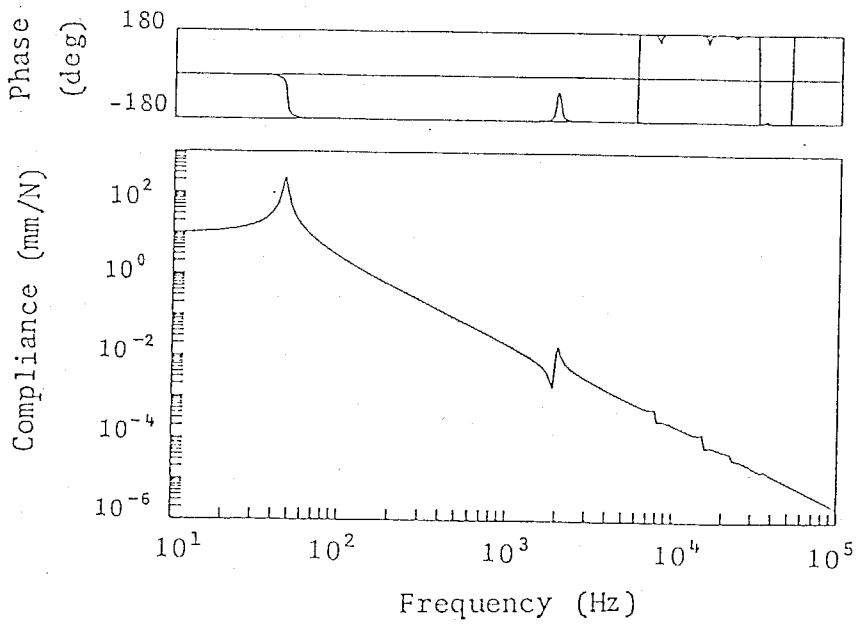
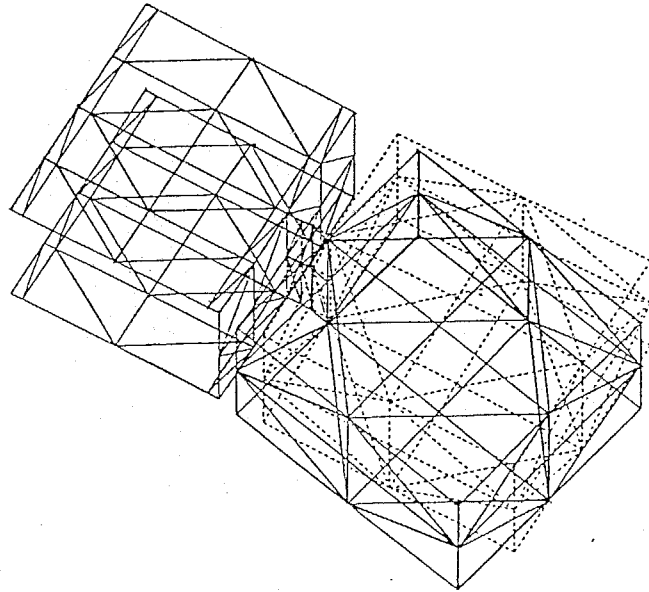
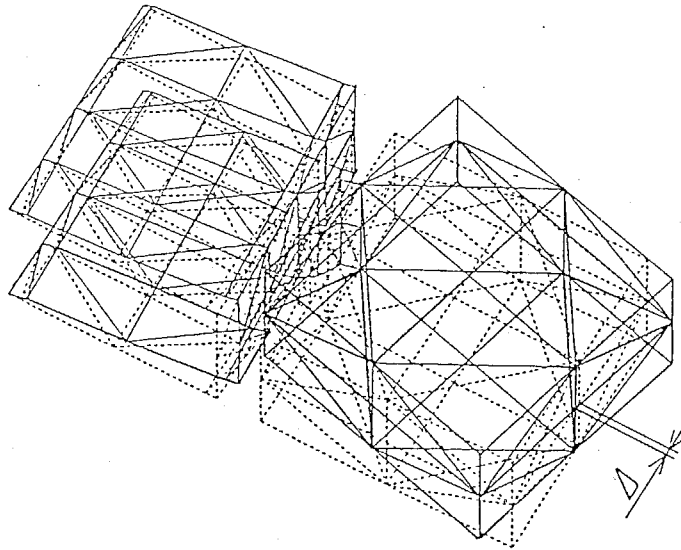


図3-17 フォーカス方向の振動特性

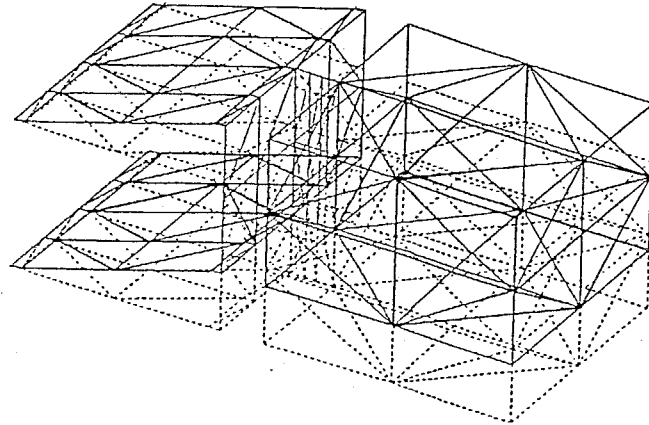


(a) 1次モード

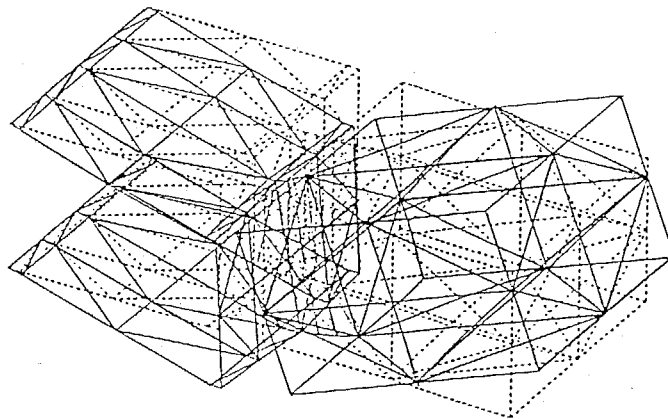


(b) 2次モード

図3-18 トラック方向の振動モード形



(a) 1次モード



(b) 2次モード

図3-19 フォーカス方向の振動モード形

3.7 共振点消去理論による構造最適化

ここでは、第2章で提案した共振点消去の理論を用いて光ピックアップの構造の最適化を行う。変更条件は、トラック方向の2次の振動モードの節を、駆動点に一致させ、2次共振峰の発生を抑えることである。

第2章では、FEMの板厚を設計変数として採用し感度解析を実行したが、ここでは付加質量を設計変数として採用し、共振点と反共振点の感度を用いて2次の共振点の消去を実現するような構造の最適化を行う。そこで、この最適化方法を以下に示す。

3.7.1 構造最適化理論

付加質量による固有値の感度は次のように求められる。

付加質量行列を ΔM とすると、固有値問題は次式となる。

$$[K_s - \lambda_r(M_s + \Delta M)]\phi_r = 0 \quad (3-7)$$

ここで、 K_s 、 M_s はそれぞれ剛性行列、質量行列である。 λ_r 、 ϕ_r は r 次の固有値、固有ベクトルである。このとき、設計変数(付加質量) m_i に対する r 次の共振振動数 Ω_r の感度は次式となる。

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial m_i} = -\frac{\lambda_r \phi_r^T \frac{\partial \Delta M}{\partial m_i} \phi_r}{2\Omega_r \phi_r^T (M_s + \Delta M) \phi_r} \quad (3-8)$$

いま、点 j 加振の自己コンプライアンスを考えると、 s 次の反共振振動数の感度は以下のように求められる。

式(3-7)の左辺の係数行列の第 j 行 j 列を除去した行列の固有値問題は次式となる。

$$[K_d - \mu_s(M_d + \Delta M_d)]\varphi_s = 0 \quad (3-9)$$

ここで、 μ_s 、 φ_s は、それぞれ s 次の固有値と固有ベクトルであり、添字 d の付してある行列は、もとの特性行列の第 j 行 j 列成分を除去してある。このとき、設計変数 m_i に対する反共振振動数 Γ_s の感度は次式となる。

$$\frac{\partial \Gamma_s}{\partial m_i} = -\frac{\mu_s \varphi_s^T \frac{\partial \Delta M_d}{\partial m_i} \varphi_s}{2\Gamma_s \phi_s^T (M_d + \Delta M_d) \varphi_s} \quad (3-10)$$

共振・反共振振動数の1次の感度のみを用いて、変更後の共振・反共振振動数を定式化すれば次式のようなになる。

$$\begin{Bmatrix} \Omega^* \\ \Gamma^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega \\ \Gamma \end{Bmatrix} + R\Delta m \quad (3-11)$$

ここで

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial m_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega}{\partial m_l} \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial m_1} & \cdots & \frac{\partial \Gamma}{\partial m_l} \end{bmatrix}$$

Ω^* 、 Γ^* はそれぞれ共振・反共振振動数の目標値である。ここで、共振振動数と反共振振動数の目標値を独立に設定する場合、誤差ノルムを最小にする一般逆行列を感度行列 R について求め、それを R^+ とすれば付加質量ベクトル Δm は次式となる。

$$\Delta m = R^+ \begin{Bmatrix} \Omega^* - \Omega \\ \Gamma^* - \Gamma \end{Bmatrix} \quad (3-12)$$

次に、共振・反共振振動数の目標値を設定せずに、対象とする共振振動数と反共振振動数を一致させる方法について説明する。

式(3-11)にて Ω^* と Γ^* の成分の数は同じで、次に示すように両者の対応する成分を全て一致させる場合を考える。

$$\Omega^* = \Gamma^* \quad (3-13)$$

このとき、式(3-11)の上半分と下半分との差をとると次式が得られる。

$$\{\Omega - \Gamma\} + \left[\frac{\partial \Omega}{\partial m_1} - \frac{\partial \Gamma}{\partial m_1}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial m_l} - \frac{\partial \Gamma}{\partial m_l} \right] \Delta m = 0 \quad (3-14)$$

すなわち、式(3-11)に式(3-13)という条件が加わり、各項の行成分の数が半分に縮小されている。式(3-14)の右辺第2項の係数行列(感度行列)の一般逆行列を

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial m_1} - \frac{\partial \Gamma}{\partial m_1}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial m_l} - \frac{\partial \Gamma}{\partial m_l} \right]^+$$

とすれば、 Δm は次式で求められる。

$$\Delta m = \left[\frac{\partial \Omega}{\partial m_1} - \frac{\partial \Gamma}{\partial m_1}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial m_l} - \frac{\partial \Gamma}{\partial m_l} \right]^+ \{\Gamma - \Omega\} \quad (3-15)$$

この Δm は、1次の感度のみを用いて得られた変更量であるので、固有値の再解析を行い、目標値と比較しながら収束するまで反復計算を行う。

この考え方は、ある着目点を振動の節に最も一致させやすい方向に、変更量を決定しているといえる。

3.7.2 光ピックアップ構造の最適化

上記の方法により、まずトラック方向の振動特性の最適化を実行する。構造変更方法としては光ピックアップ本体に質量を付加し、トラック方向の2次の振動モードの節を先端点 a_4 に一致させることを試みる。すなわち、2次の共振振動数 Ω_2 と1次の反共振振動数 Γ_1 の目標値に関して

$$\Omega_2^* = \Gamma_1^* \quad (3-16)$$

となるように付加質量を決定する。付加質量を取り付ける位置は、図3-15の点 a_i ($i=1\sim7$)とする。光ピックアップ本体に取り付ける駆動用コイルの質量を考慮して最適設計を行い、本手法により求められた付加質量を表3-1に示す。ここで得られた質量を付加したとき、トラック方向の2次の共振振動数と1次の反共振振動数は1720Hzとなっている。

次に、実際に光ピックアップ本体に表3-1に示す質量が付加したときの特性を調べる。

表3-1に示す質量を付加したとき、図3-15の点 a_4 を加振したときの点 b のコンプライアンスを図3-20に示す。同図から、もともと2kHz付近に存在していた2次の共振峰は完全に消滅していることがわかる。このとき、1次の共振振動数は37.2Hzとなっている。そして、1次共振以降は20kHz以上まで2次共振の存在しない、理想的な振動特性が実現されている。また、構造変更後のトラック方向の2次の振動モードを図3-21に示す。同図から最適設計により2次の振動モードの節が先端点 a_4 に一致したことがわかる。

表3-1 付加質量の計算結果

POINT	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
MASS (g)	0.1	0.1	0.149	0.1	0.149	0.1	0.1

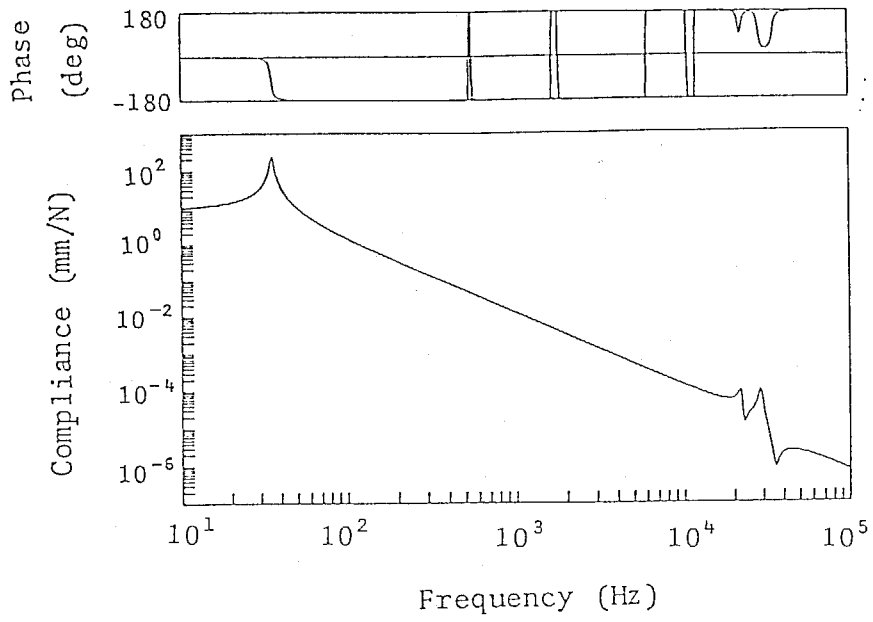


図3-20 構造最適化後のトラック方向の振動特性

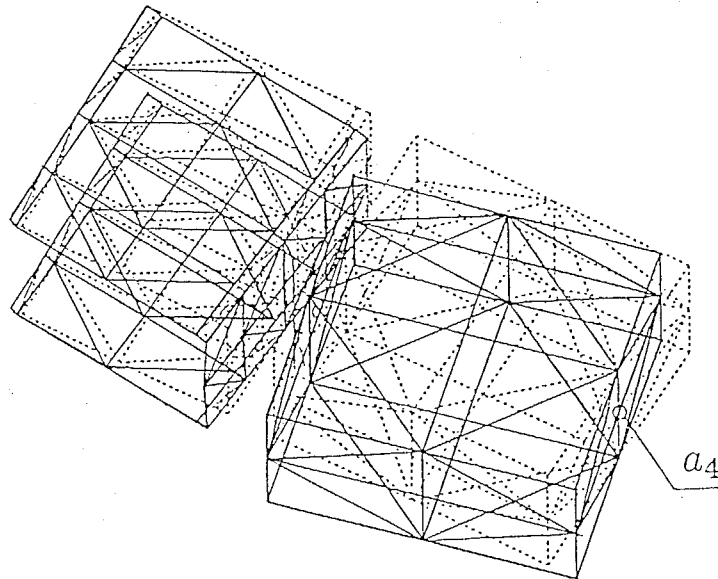


図3-21 構造最適化後のトラック方向の2次の振動モード形

次に、フォーカス方向の振動特性の最適化を実行する。

トラック方向の構造最適化後のフォーカス方向の2次の振動モードを図3-22に示すが、この振動モードを生じる周波数は1588Hzである。前述のように、安定なフォーカシングサーボ系を構成するためには、この2次モードの発生を抑えなければならない。そこで、フォーカス方向の駆動に際しては、同方向の2次モードの節の位置を駆動点とすることにより、このモードの発生を抑えることを試みる。いま、光ピックアップのレンズホルダ両側面にコイルを取り付け、図3-14のようにレンズホルダ両側面にフォーカス方向の駆動力が作用する場合を考える。このとき、図3-22から2次モードの節はレンズホルダ両側面の中央部である図3-15の点 a_2 、 a_6 にほぼ一致しているため、この駆動方式は都合がよい。そこで、同図の節の位置 a_2 、 a_6 を加振したときの点 b のコンプライアンスを図3-23に示す。同図から1588Hzに存在していた2次の共振峰は完全に消滅していることがわかり、これによって制御性の良いフォーカスサーボ系の構成が期待できる。また、このときのフォーカス方向の1次の共振振動数は37.2Hzとなっており、1次共振以降はほぼ8kHzまで2次共振の存在しないほぼ理想的な振動特性といえる。次に、サーボ系の設計と実験を行い、その特性について検討を行う。

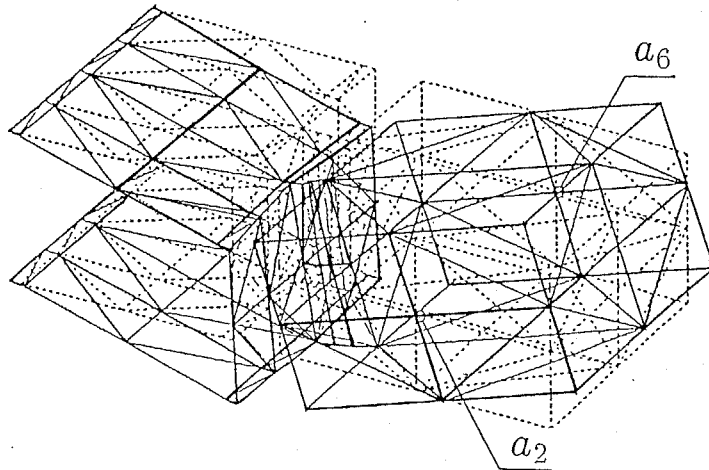


図3-22 構造最適化後のフォーカス方向の
2次の振動モード形

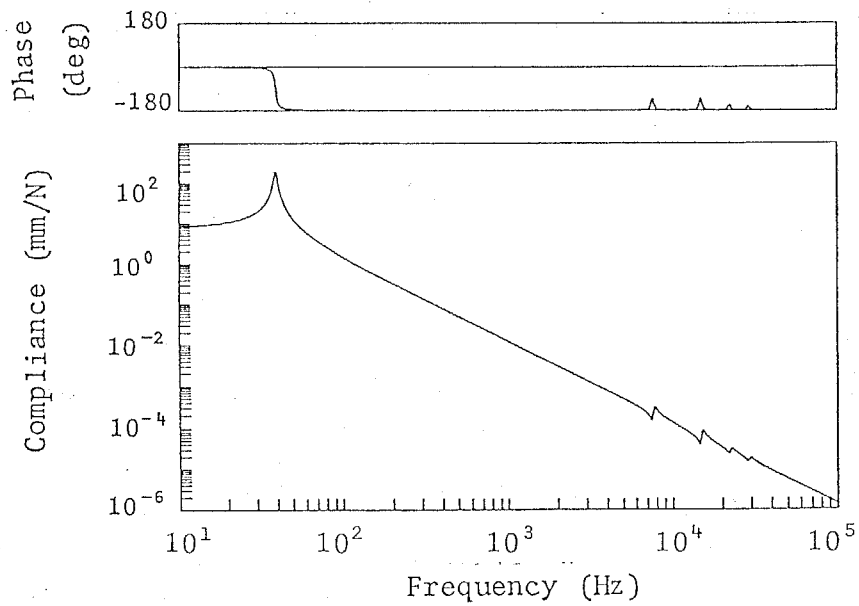


図3-23 構造最適化後のフォーカス方向の振動特性

3. 8 サーボ特性の解析および実験

図3-24に示すように直列補償器を用いてサーボ系を構成する。ここで、制御仕様を満足するループゲインを実現させるために、フォーカス、トラック方向ともゲイン交差周波数を1kHz付近に設定する。しかし、図3-20、3-23から振動特性のゲイン交差周波数における位相はすでに -180 度となっており、このまま出力をフィードバックしただけでは安定なサーボ系を構成できない。そこで、位相進み補償を用いてゲイン交差周波数における位相を進ませ、適切な位相余裕を得ることにより安定なサーボ系を構成する。フォーカス、トラック方向とも同条件の位相進み補償を用いる。次式に示す位相進み補償の伝達関数

$$G_d = \frac{\alpha T_d s + 1}{T_d s + 1} \quad (3-17)$$

の各パラメータを次のように設定する。

$$\begin{cases} \alpha = 10 \\ T_d = 5.033 \times 10^{-5} \end{cases} \quad (3-18)$$

このとき、最大位相進み角 ϕ_{max} とそれを生じる周波数 ω_{max} は次のようになる。

$$\begin{cases} \phi_{max} = 55(deg) \\ \omega_{max} = 1000(Hz) \end{cases} \quad (3-19)$$

ここで求められた補償器を用いてサーボ系を構成したときのトラック方向とフォーカス方向の閉ループ特性の解析結果をそれぞれ図3-25、3-26に示す。同図から両方向とも安定なサーボ系が構成されていることがわかる。また、制御仕様を満足するループゲインが実現されており、サーボ帯域はフォーカシングサーボで約2kHz、トラッキングサーボで約3kHzが得られている。

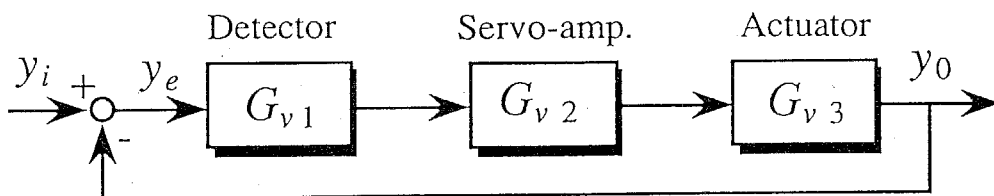


図3-24 光サーボ系のブロック線図

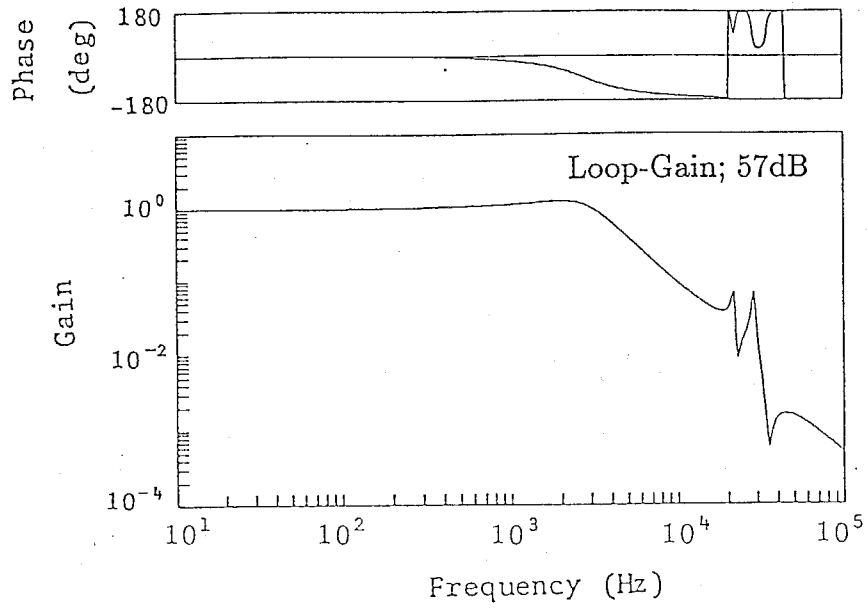


図3-25 トラック方向の閉ループ特性

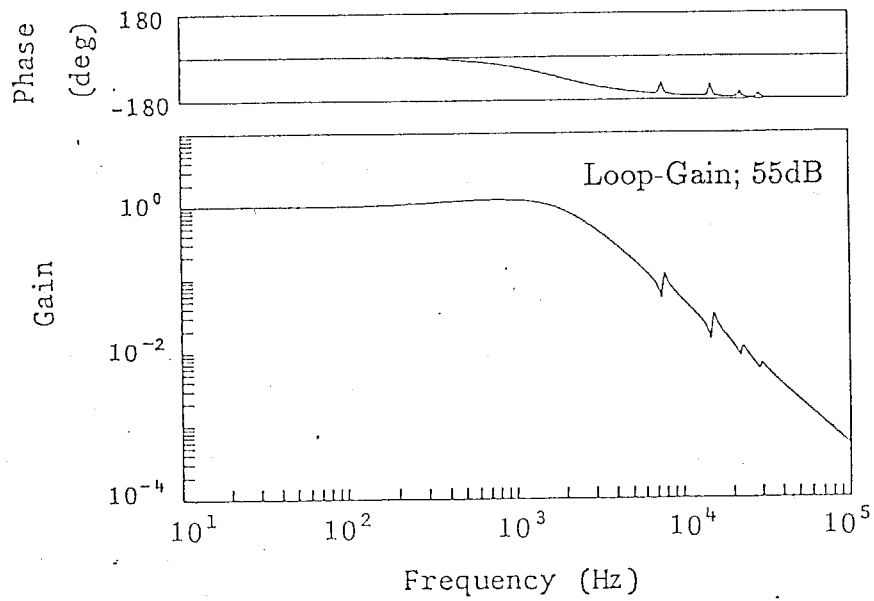


図3-26 フォーカス方向の閉ループ特性

次に実験結果を示す。

表3-1に示す付加質量を考慮して、光ピックアップ先端にトラック方向駆動用のコイルを取り付け、レンズホルダ側面にフォーカス方向駆動用のコイルを取り付ける。このようにして構成した最適構造の光ピックアップの構成図および実験装置をそれぞれ図3-27、3-28に示す。トラック方向を駆動したときのレンズ中心部のトラック方向の伝達関数特性を図3-29に示す。構造変更前は2kHz付近に2次の共振峰が存在していたが、構造最適化によりこの共振峰は消去され、1次共振以降は20kHzまで顕著な2次ピークが認められておらず、理想的な振動特性が実現されていることがわかる。次に、レンズホルダ両側面の中央部をフォーカス方向に駆動したときのレンズ中心部のフォーカス方向の伝達関数特性を図3-30に示す。構造変更前は1.5kHz付近に存在していた2次の共振峰は完全に消滅しており、この場合も1次共振のみを有する理想的な振動特性が得られている。また、実験結果は解析結果と良い対応を示している。

次に、ここで得られた最適構造の光ピックアップを用いてサーボ系を構成し、その特性について調べる。

前述の解析と同条件の位相進み補償回路を用いてサーボ系を構成する。フォーカス方向の閉ループ特性の実験結果を図3-31に示す。同図から1次共振のみを補償することにより安定なサーボ系が構成されており、約2kHzのサーボ帯域が実現されている。そして、実験結果と解析結果はよい対応を示していることがわかる。

なお、本研究で開発した光ピックアップを実際の光ディスク装置に搭載した結果、ディスク上の情報の正常な再生と、装置の有する全ての機能の良好な動作が確認された。

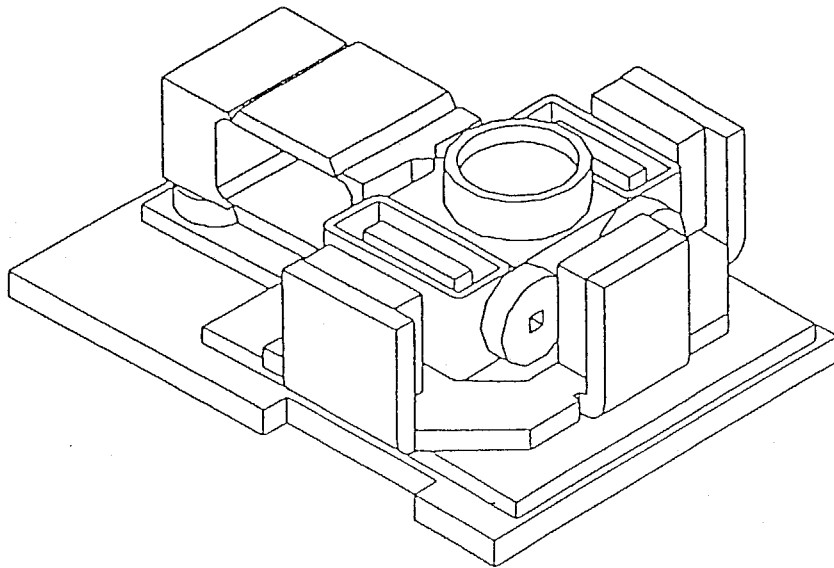


図3-27 光ピックアップの構成図

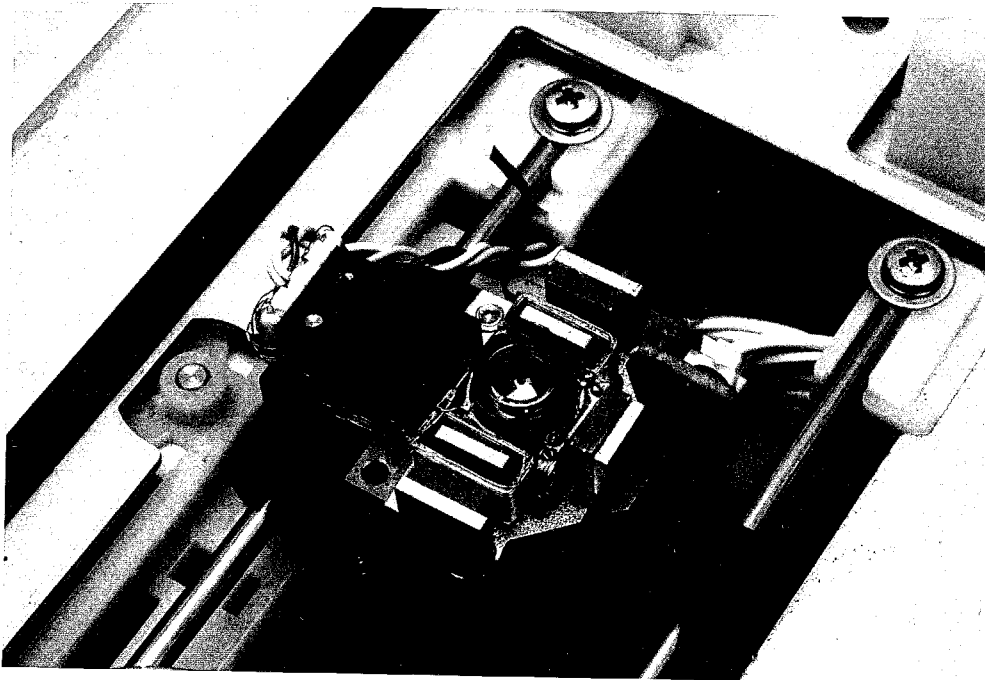


図3-28 実験装置

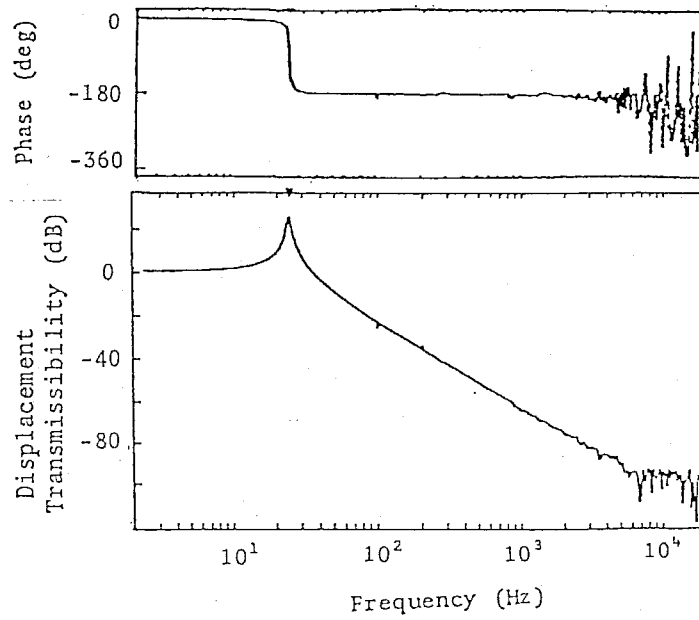


図3-29 トラック方向の振動特性の実験結果

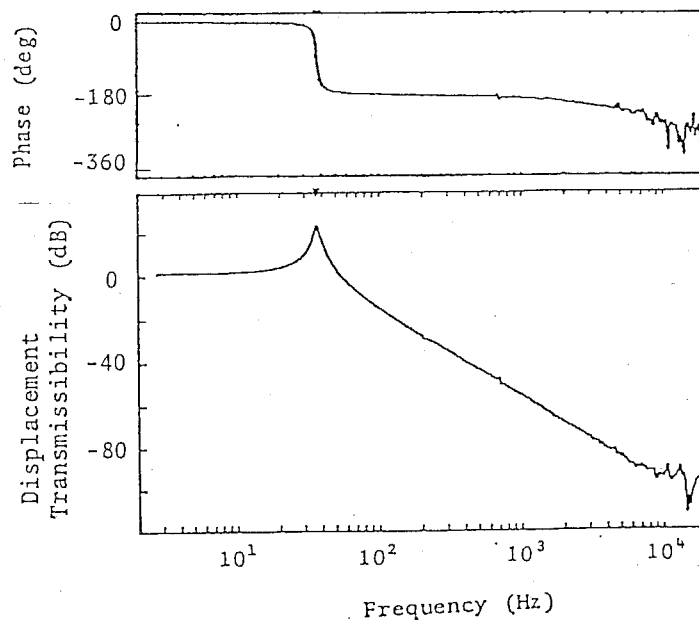


図3-30 フォーカス方向の振動特性の実験結果

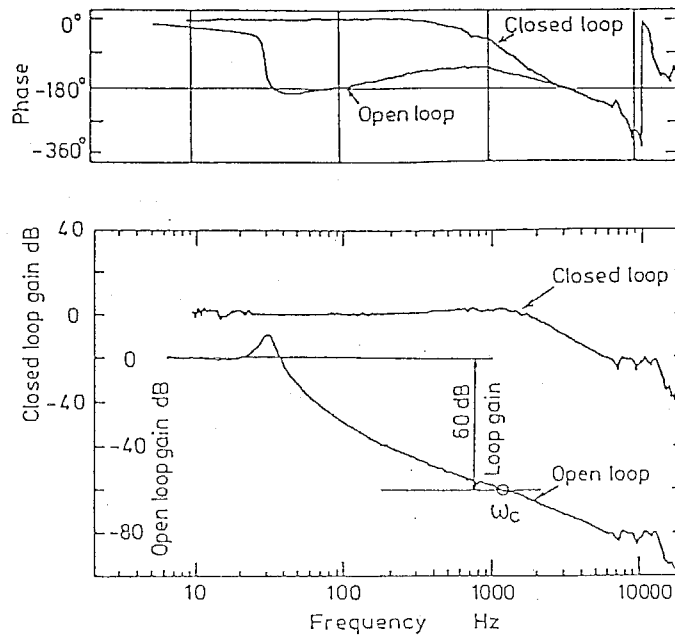


図3-31 フォーカス方向の閉ループ特性の実験結果

最後に、消去された極の励振が懸念される問題について補足しておく。制御力の作用点が消去するモードの節に一致していればそのモードの極は励起されないが、わずかに不一致があったときにその問題を生じる。その場合、2とおりのケースが考えられる。その一つは図3-11の300Hz付近で現れるような共振点が反共振点より低周波側に現れる場合であり、他はその逆に高周波側に現れる場合である。前者では位相遅れが -180 度を越えるので制御系が不安定になることがある。後者では -180 度より進むのでその心配はない。したがって、完全一致がとりきれない場合には、わずかに後者の傾向をもつように制御力の作用点を選ぶのが安全設計といえる。すなわち、対象とする共振点よりも若干低周波数側に反共振点を指定し、本手法による構造最適化を行うことが安定性の面でロバストな設計となる。

3.9 結言

本章では、光サーボ系の設計問題を対象にして、まず振動の節に着目した構造系と制御系の一体化設計法を提案し、次の知見を得た。

(1) 制御力が作用する多自由度系を、モード解析と正準系状態方程式表示により対比することによって、振動モード形の節が不可制御、不可観測に相当することを明らかにした。

(2) 制御理論では、不可制御、不可観測は極と零点の消去によって生ずるものであるから、振動の節を活用すれば、構造系の不要な共振ピークを消去できて、制御系設計の負担が軽減される。

(3) したがって、構造系の所望の場所に振動の節を作り出す手法によって、制御性を考慮した構造最適化のための一手法とすることができる。

(4) 制御性のよい構造系を得るために、振動の節を利用した構造最適化法を示した。これは振動の節によって作り出される不可制御・不可観測性を積極的に利用することにより、その振動モードによる制御系の不安定現象を抑えるものである。

なお、本手法は制御系を内蔵する機械の構造最適化に広く活用できるものと考えられる。

次に、本研究で一体化構造のヒンジ方式光ピックアップの提案、開発を行い次の知見を得た。

(5) このピックアップは従来のもものより、構造が簡単で部品点数も少なく、製造、コスト面などで有利であるが、ヒンジ方式であるが故に、振動特性がサーボ特性へ影響することが懸念された。そこで、この光ピックアップの振動特性を解析と実験で調べた。その結果、光ピックアップの振動特性における2次共振がサーボ系の安定性に大きく影響することが判明し、制御性を考慮した構造の最適設計の必要性を示した。

(6) サーボ特性へ影響しない構造系の振動特性を実現させるために、本論文で提案した共振点と反共振点の感度を利用した構造物の最適化方法を用いて光ピックアップの構造の最適化を行った。その結果、トラック方向の2次の振動モードの節を駆動点に一致させることにより2次共振が抑えられた。それによって、サーボ系の特性が向上し制御仕様を十分満足する特性が実現されたことを解析と実験により検証した。そして、この光ピックアップは実際の光ディスク装置に十分な対応を示し、その実用性が確認された。

本研究で示した設計法をさらに発展させることにより、制御性を考慮した構造系の振動モードの設定と、共振振動数(極)と反共振振動数(零)の配置を可能とし、制御系の特性向上に貢献すると思われる。

第4章 構造物の低次元モデル化と最適振動制御系の設計法

4.1 緒言

一般に状態空間にて制御系を設計する際には、制御するシステム（制御対象）を数学的に記述し、状態方程式を作成することが前提となる。しかし、制御対象の形状が複雑であったり、構造物は一般に連続体であることを考えると、弾性モードを考慮してシステムを有限自由度で数学的に記述することは困難である。複雑な形状の構造物のモデル化には、構造解析の有力な手段であるFEMがよく用いられる。しかし、FEMにより得られたモデルは自由度が大きすぎるため、直接このモデルに対して制御理論を適用し制御系を設計することは現実的ではない。従来の研究として、柔軟構造物の制御にFEMを適用した例はいくつか見られるが、いずれも簡単な梁モデルやトラス構造を対象としており^{(15)~(20)}、一般的な大自由度柔軟構造物の制御に適用するにはさらに検討の余地が残されている。また、FEMモデルを用いて制御系を構成し、システムの動特性を改善する従来の研究では、システムの低次元化と高次モードの安定化については十分に検討されていない。

本章では、FEMとモード解析を用いたシステムの低次元化、およびシステム同定法により実験データに基づくシステムの低次元化を行い、そのシステムに対し制御系を設計する方法^{(56)~(59)}を示す。そして、低次元化で無視した固有モードの安定性を保障する制御系の設計法を示す。ここで、システム同定法として、特性行列同定法⁽⁶⁰⁾および実験モード解析法⁽⁴⁴⁾を用いる。

本章では、まずモード解析を用いたシステムのモデル化と制御系の設計法を示す。FEMでモデル化した大自由度構造系を、モード座標を用いて高次モードの省略により低次元化し、最適制御理論を適用して制御系を設計する方法を示す。さらに感度解析を用いて、省略した高次モードの安定性を保障する制御系の設計法を示す。そして、実験モード解析により構造物のモード特性を同定することにより、実験データに基づいて最適制御系を設計する方法を示す。このように、本手法はすべてモード座標で展開されており、特性行列を用いた物理座標での記述は制御系の設計においては不要である点と、実験モード解析と直接結合できる点が特徴である。

上記の理論において、状態変数の数の1/2の固有モードのみを用い、

それより高次の固有モードをすべて省略することによって、システムを低次元化し、最適レギュレータ理論により制御系を形成する。他方、それよりも高次までのより多数の固有モードを用いてモード座標に変換したシステムを実システムとして採用する。そして、先に得られた制御系の制御則を実システムに適用し、その極配置を最適化することにより、実システムの安定性が保障されるように、低次元システムの制御系を最適設計する。最適化すべき目的関数としては、低次元システムで定義した2次形式評価関数および実システムの極配置とし、最適レギュレータ理論で用いる重み行列を設計変数に選び、感度解析と非線形計画法によりその最適値を決定する。

次に、特性行列同定法に基づく最適制御系の設計を行う。構造物の振動制御を対象とし、構造物の振動特性を支配する特性行列（質量行列、減衰行列および剛性行列）をFRFデータに基づいて同定することにより、低次元システムを状態方程式で記述し、制御系を設計する方法を提案する。さらに、低次元化で無視した固有モードを含む実システムの安定性を保障する設計法を示す。ここでは、FRFとしてFEMにより解析する場合と、実験により実測する場合を考える。すなわち、まず構造物のFRFをFEMによる解析もしくは実験により求め、そのデータをもとに、採用固有モードで構成される小自由度のモデルとして、構造系を記述する。そして、このモデルをもとにして最適制御理論により制御系を設計する。しかし、このままでは大自由度の構造物を小自由度にモデル化するために、無視した固有モードの安定性が問題となる。そこで、小自由度で設計した最適制御則をFEMもしくは実験同定で得られた大自由度の実システムに適用し、その極配置を参照しながら、感度解析による最適設計法を用いて、高次の固有モードでの安定性をも保障する最適状態フィードバック則を実現する方法を提案する。

特性行列同定法を用いる上記の方法の特徴は、制御対象の物理特性を把握できる点と、状態方程式が物理座標で記述できる点であり、これによりFEM等により物理座標でモデル化されたシステムと容易に結合することができる。

本章では、まず上述の低次元モデルの作成法と制御系の最適設計法を示し、柔軟構造物である平板の振動制御に本手法を適用する。そして、制御系の特性をシミュレーションおよび実験により調べ、本手法の有効性を検証する。

4.2 モード解析に基づく最適設計法

n 自由度システムの運動方程式を次式として記述する。

$$M_s \ddot{x} + C_s \dot{x} + K_s x = B_{1s} w + B_{2s} u \quad (4-1)$$

ここで、 $M_s, C_s, K_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ はそれぞれ質量行列、減衰行列および剛性行列である。 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, w \in \mathbb{R}^d$ はそれぞれ状態ベクトル、制御入力ベクトルおよび外乱入力ベクトルである。 $B_{1s} \in \mathbb{R}^{n \times d}, B_{2s} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ はそれぞれ外乱入力行列および制御入力行列である。そして、 p, d はそれぞれ制御入力および外乱入力の数である。ここでは、 M_s, K_s として、FEMにより得られた特性行列を用いる。本研究では、制御対象をFEMでモデル化した後に、モード座標を用いてシステムを低次元化する。

4.2.1 低次元モデルの作成と制御系の設計

制御系を設計するための低次元システムを作成するために、以下のモード座標 $\xi \in \mathbb{R}^r$ によりシステムを変換する。

$$x = \Phi \xi \quad (4-2)$$

ここで、 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times r}$ はシステムの固有モード行列である。そして、システムの固有値行列を $\Lambda = \text{diag}(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_r^2) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ とする。 r は低次元モデルの採用モード数であり、最低次から順に採用する。また、 Ω_i は i 次の固有振動数である。このとき、式(4-1)は次の状態方程式に変換される。

$$\dot{q} = Aq + B_1 w + B_2 u \quad (4-3)$$

ここで、

$$q = \begin{Bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{Bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ -\Lambda & -C_\Phi \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T B_{1s} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T B_{2s} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

ただし、 $C_\Phi = \Phi^T C_s \Phi$ である。また、 $\Phi^T M_s \Phi = I_r$ となるように Φ を正規化しておく。

システムの出力方程式を行列 $C_0 \in \mathbb{R}^{t \times 2n}$ を用いて次式で表す。

$$y = C_0 q_0 \quad (4-5)$$

ただし、出力の数を t とする。また、 $q_0 = (x^T, \dot{x}^T)^T$ である。式(4-5)をモード座標で表すと次式となる。

$$y = Cq \quad (4-6)$$

ここで、

$$C = C_0 \Psi \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}$$

次に最適制御系の設計を行う。このとき、式(4-3)、(4-6)に関して可制御・可観測性が成り立つとする。また、次式が成り立つと仮定する。

$$2r = t \quad (4-7)$$

すなわち、出力の数と採用モード数の2倍が等しいとする。式(4-3)に最適レギュレータ理論を適用し、フィードバックゲイン F を決定する。この際に、外乱 w に関しては、次式に示すような白色雑音を仮定する。

$$E[w(t)w(t-t_0)^T] = \delta(t-t_0)V \quad (4-8)$$

ここで、 V はこの白色雑音のインテンシティ行列である。次式に示すように、重み行列 Q 、 R を用いて、状態変数と制御入力に関する2次形式評価関数を定義する。

$$J_q = E[q^T Q q] \quad (4-9)$$

$$J_u = E[u^T R u] \quad (4-10)$$

$J = J_q + J_u$ を最小にする制御則 F を最適レギュレータ理論により決定する。すなわち、次のリカッチ方程式

$$A^T P + P A + Q - P B_2 R^{-1} B_2^T P = 0 \quad (4-11)$$

の解 P を用いてフィードバックゲイン F は次式として得られる。

$$F = R^{-1} B_2^T P \quad (4-12)$$

そして、次式に示す状態フィードバックを行う。

$$u = -Fq \quad (4-13)$$

この制御則は、モード座標の状態フィードバックを示しており、これを出力 y を用いた物理座標の状態フィードバックに変換する。式(4-6)の出

力行列 C は、式(4-7)を仮定しているため、 $\mathbb{R}^{t \times t}$ の正方行列になる。したがって、 $q = C^{-1}y$ と記述でき、物理座標 y を用いた制御則は次式となる。

$$u = -FC^{-1}y \quad (4-14)$$

上述の制御系の設計では、外乱を式(4-8)で記述されるような白色雑音としているが、外乱が有色雑音の場合には、この外乱を有色雑音入力に対する状態方程式として記述することにより、式(4-3)を含めた形で拡張状態方程式を作成する。そして、その拡張状態方程式に基づいて式(4-9)、(4-10)の評価関数を定義することにより、有色雑音外乱に対する設計が可能になる。第6章および第7章では構造系と制御系の同時最適設計法を示しているが、その中でこのような有色雑音外乱に対する設計を行っている。

ここで、式(4-14)の制御則は設計で用いた低次元システムに対しては安定性を保障するが、省略した高次モードを含む実システムに適用した際に、その安定性は保障できない。そこで、次に実システムにおける閉ループ系の極配置を参照し、その安定性を確認する。

4.2.2 実システムの極配置

前述の低次元システムの採用モードを含み、その数 r よりも大きい採用モード数 $v (v > r)$ を用いてシステムをモード座標に変換し、これを実システムとする。すなわち、モード座標 $\xi_e \in \mathbb{R}^v$ 、モード行列 $\Phi_e \in \mathbb{R}^{n \times v}$ およびシステムの固有値行列 $\Lambda_e = \text{diag}(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_v^2) \in \mathbb{R}^{v \times v}$ を用いて式(4-1)をモード座標に変換し、次の状態方程式を作成する。

$$\dot{q}_e = A_e q_e + B_{1e} w + B_{2e} u \quad (4-15)$$

ここで、

$$q_e = \begin{Bmatrix} \xi_e \\ \dot{\xi}_e \end{Bmatrix} \quad A_e = \begin{bmatrix} 0 & I_v \\ -\Lambda_e & -C_{\Phi_e} \end{bmatrix}$$

$$B_{1e} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_e^T B_{1s} \end{bmatrix} \quad B_{2e} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_e^T B_{2s} \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

ただし、 $C_{\Phi_e} = \Phi_e^T C_s \Phi_e$ である。また、 $\Phi_e^T M_s \Phi_e = I_v$ となるように Φ_e を正規化しておく。

実システムに低次元モデルを用いて求めた式(4-14)の制御則をそのまま適用すれば、

$$u = -FC^{-1}C_0 \Psi_e q_e \quad (4-17)$$

ただし、

$$\Psi_e = \begin{bmatrix} \Phi_e & 0 \\ 0 & \Phi_e \end{bmatrix}$$

式(4-17)による実システムの閉ループ系は次式となる。

$$\dot{q}_e = G_e q_e + B_{1e} w \quad (4-18)$$

ここで、

$$G_e = A_e - B_{2e} F C^{-1} C_0 \Psi_e \quad (4-19)$$

そして、 G_e の固有値解析を行うことにより、実システムの閉ループ系の極 $s_i (i=1 \sim 2v)$ が求められる。そして、この極を調べれば、系が安定か否かを判別できる。

この閉ループ系は、実システムに低次元モデルによる制御則をそのまま適用して作成したものであるから、低次元モデルで採用していない高次の固有モードに関しては、その安定性を必ずしも保障できない。この問題を解決するために、閉ループシステムの安定性を保障しつつ、制御性能の高性能化を図るための制御系の最適設計法を後述の4.2.4で提案する。

4.2.3 実験モード解析との結合

上述のように、制御系を設計するための低次元モデルの記述、制御則の設計、そして実システムにおける極配置の参照は、すべてモード座標上での定式化に基づいて行われている。したがって、上述の設計理論は実験モード解析を用いた方法にもそのまま適用できる。すなわち、各入出力点間のFRFを振動実験により測定し、実験モード解析を用いて、制御対象のモード特性を、実システムの採用モード数 v と同数の固有モードの数だけ同定する。すなわち、振動試験で得られた実験データに基づいて実システムの固有モード行列 Φ_e 、固有値行列 Λ_e およびモード減衰行列 C_{Φ_e} を同定することにより、実システムが実験的に記述できる。また、制御則を作るための低次元システムに関しては、この実システムのモード特性の一部の情報を用いることにより、同じく実験的に記述できる。これにより、上述の設計理論が適用でき、さらに後述の制御系の最適設計法も直接適用でき、実験データのみを用いた制御系の設計が可能になる。

4.2.4 制御系の安定化最適設計

システムの動特性を最適化し、同時に高次モードに対する系の安定性を完全に保障するための状態フィードバック則を決定する最適設計法について考える。

最適化すべき動特性としては、低次元システムにおける、出力および制御入力に関する次の2次形式評価関数を考える。

$$H_y = E[y^T \Gamma y] \quad (4-20)$$

$$H_u = E[u^T \Pi u] \quad (4-21)$$

ここで、 $\Gamma \in \mathbb{R}^{l \times l}$ および $\Pi \in \mathbb{R}^{p \times p}$ はあらかじめ与える一定の重み行列であり、式(4-9)、(4-10)に含まれ設計変数となる重み行列 Q 、 R とは全く別物として定義される。式(4-20)をモード座標を用いて表せば、次式になる。

$$H_y = E[q^T C^T \Gamma C q] \quad (4-22)$$

また、両評価関数は次式として求められる。

$$H_y = \text{tr}[P_1 B_1 V B_1^T] \quad (4-23)$$

$$H_u = \text{tr}[P_2 B_1 V B_1^T] \quad (4-24)$$

ここで P_1 、 P_2 はそれぞれ次のリアプノフ方程式の解である。

$$P_1 G + G^T P_1 + C^T \Gamma C = 0 \quad (4-25)$$

$$P_2 G + G^T P_2 + F^T \Pi F = 0 \quad (4-26)$$

ここで、

$$G = A - B_2 F \quad (4-27)$$

制御系の最適化の際には、これらの評価関数に加えて実システムの安定性を保障するために、式(4-19)の固有値 s_i の配置についても考慮する。

すなわち、最適化問題としては、応答性を向上させるために H_y の最小化を目的とする。そして、 H_y と相反的な関係にある H_u に関しては、その上限値を制約条件として与え、さらに実システムの安定性を保障するために、実システムにおけるすべての極の実部が負でなければならないという制約条件を与える。すなわち、 $H_u^{max} > 0$ 、 $s_i^{max} < 0 (i = 1$

、…、 $2v$)として、この制約条件付き最適化問題を記述すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \min \quad & H_y \\ \text{Subj.} \quad & \begin{cases} H_u - H_u^{max} \leq 0 \\ \text{Re}(s_i) - s_i^{max} \leq 0 \quad (i=1 \sim 2v) \end{cases} \end{aligned} \quad (4-28)$$

ここで、 H_u は最終的には H_u^{max} に一致することが予想され、式(4-28)における H_u に関する制約を等式制約条件として設定しても差し支えないと考えられる。また、 H_u^{max} を小さく設定した場合には、式(4-28)の制約を満足する最適解が存在しない場合も考えられ、このときは H_u^{max} を大きく設定し直して、再び最適化問題を実行する必要がある。

設計変数としては、式(4-9)と(4-10)に含まれる評価関数の重み行列 Q と R の成分を考える。しかし、 Q と R の成分を任意に変更してしまうと、 Q および R が正定行列でない場合の最適解の存在が問題となるので、ここでは両重み行列をコレスキー分解した形の

$$Q = L^T L \quad (4-29)$$

$$R = U^T U \quad (4-30)$$

とおき、これらの L と U の成分を実際の設計変数とする。このようにして、 Q に関しては半正定値性、 R に関しては正定値性を最低限保障させる。式(4-29)と(4-30)の L と U の最適解を、準ニュートン法と乗数法による非線形最適化法⁽⁶¹⁾を用いて探索する。本手法の流れ図を図4-1に示す。

本章で提案する方法に対して、終始実システムのみを用いて最適フィードバックゲインを直接決定する方法が考えられる。この場合には、最適レギュレータ理論を用いずに、フィードバックゲイン F の成分を適当に与え、しかもそれを設計変数に選ぶことによって最適化の過程で自由に変えて行く。この方法を採用すると、最適化の過程でシステムが不安定になる可能性があり、そのとき2次形式の評価関数が定義できなくなる。したがって、目的関数が不連続となり、目的関数の導関数を用いて最適解を探索する、通常最適化方法はここでは適用できない。本手法を用いることにより、これらの問題点を解決できる。また、不連続な目的関数に対する最適設計法として、第7章で示す目的関数の導関数を用いない設計変数の探索法の適用が有効である。

Experimental approach *Analytical approach*

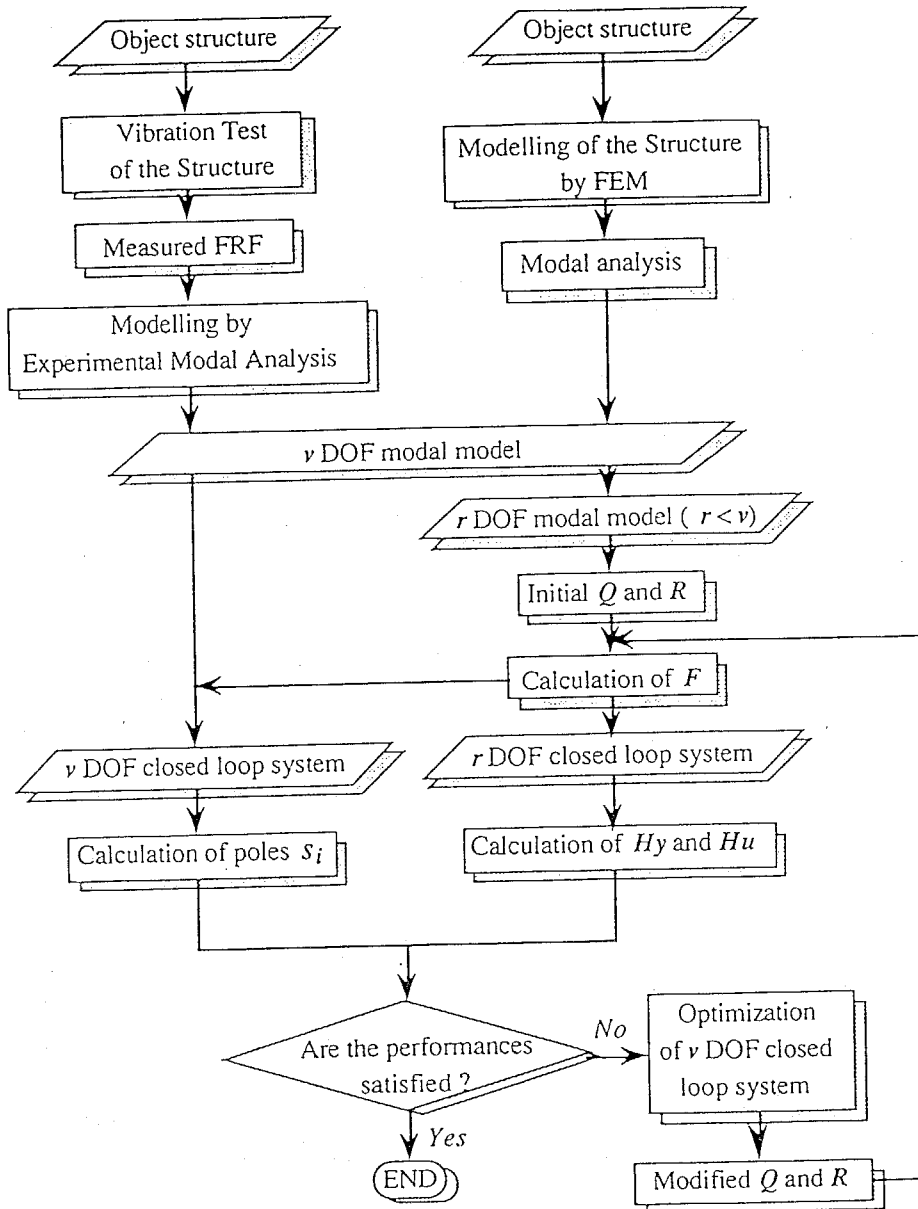


図4-1 モード解析に基づく制御系の最適化の流れ図

4.2.5 感度解析

最適化を実行するためには、目的関数に含まれる H_y 、 H_u および s_i の設計変数に関する1次感度が必要になる。これらの感度を求める方法を以下に示す。

(a) 2次形式評価関数の感度

今、設計変数の一成分を τ_j とする。式(4-20)、(4-21)の2次形式評価関数の感度は式(4-23)、(4-24)を設計変数 τ_j で偏微分することにより次式のように得られる。

$$\frac{\partial H_y}{\partial \tau_j} = \text{tr} \left[\frac{\partial P_1}{\partial \tau_j} B_1 V B_1^T \right] \quad (4-31)$$

$$\frac{\partial H_u}{\partial \tau_j} = \text{tr} \left[\frac{\partial P_2}{\partial \tau_j} B_1 V B_1^T \right] \quad (4-32)$$

ここで、 P_1 および P_2 の感度はそれぞれ式(4-25)、(4-26)を設計変数 τ_j で偏微分した次のリアプノフ方程式を解くことにより得られる。

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau_j} G + G^T \frac{\partial P_1}{\partial \tau_j} + P_1 \frac{\partial G}{\partial \tau_j} + \frac{\partial G^T}{\partial \tau_j} P_1 = 0 \quad (4-33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2}{\partial \tau_j} G + G^T \frac{\partial P_2}{\partial \tau_j} + P_2 \frac{\partial G}{\partial \tau_j} + \frac{\partial G^T}{\partial \tau_j} P_2 + \frac{\partial F^T}{\partial \tau_j} \Pi F \\ + F^T \Pi \frac{\partial F}{\partial \tau_j} = 0 \end{aligned} \quad (4-34)$$

ここで、 G および F の感度が必要になる。そこで、式(4-27)、(4-12)、(4-11)を τ_j で偏微分する。

$$\frac{\partial G}{\partial \tau_j} = -B_2 \frac{\partial F}{\partial \tau_j} \quad (4-35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_j} = -R^{-1} \frac{\partial R}{\partial \tau_j} R^{-1} B_2^T P + R^{-1} B_2^T \frac{\partial P}{\partial \tau_j} \quad (4-36)$$

$$G^T \frac{\partial P}{\partial \tau_j} + \frac{\partial P}{\partial \tau_j} G + \left(\frac{\partial Q}{\partial \tau_j} + F^T \frac{\partial R}{\partial \tau_j} F \right) = 0 \quad (4-37)$$

G および F の感度はそれぞれ式(4-35)、(4-36)で与えられる。そして、 P の感度は式(4-37)のリアプノフ方程式を解くことにより得られる。

(b) 実システムの極の感度

式(4-18)をラプラス変換すると次式が得られる。

$$(sI_{2v} - G_e) q_e(s) = B_{1e} w(s) \quad (4-38)$$

式(4-38)の右辺を零とおき固有値解析を行い、極 s_i および右固有ベクトル $\phi_{iR}(i=1\sim 2v)$ を求める。これらの固有ペアを式(4-38)に適用し、 τ_j で偏微分すると次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial \tau_j} I_{2v} - \frac{\partial G_e}{\partial \tau_j}\right) \phi_{iR} - (s_i I_{2v} - G_e) \frac{\partial \phi_{iR}}{\partial \tau_j} = 0 \quad (4-39)$$

式(4-39)において、 G_e の感度は式(4-19)を τ_j で偏微分することにより得られる。

$$\frac{\partial G_e}{\partial \tau_j} = -B_{2e} \frac{\partial F}{\partial \tau_j} C^{-1} C_0 \Psi_e \quad (4-40)$$

ここで、 F の感度は式(4-36)で与えられている。 s_i に対応する左固有ベクトル ϕ_{iL}^T を式(4-39)の両辺に左からかけることにより、左辺の第2項は零になり、極 s_i の感度は次式として求められる。

$$\frac{\partial s_i}{\partial \tau_j} = \frac{\phi_{iL}^T \frac{\partial G_e}{\partial \tau_j} \phi_{iR}}{\phi_{iL}^T \phi_{iR}} \quad (4-41)$$

4.2.6 平板の振動制御への適用

平板をFEMによりモデル化する場合と、振動実験で得られたFRFから実験モード解析によりモデル化する場合に、本手法を用いて最適制御系の設計を行う。

(a)FEMに基づく設計

FEMにより平板をモデル化する場合の最適振動制御系の設計を行う。提案する手法を図4-2に示す平板(ステンレス鋼)の振動制御系の最適設計に適用する。同図に、この平板のFEM分割および制御系の構成が示されている。この平板は、80節点60要素に有限要素分割されている。入出力については、節点19および72の変位 y_{19} 、 y_{72} および \dot{y}_{19} 、 \dot{y}_{72} を検出し、同位置に設置したアクチュエータにより制御入力 u_{19} 、 u_{72} を作用させる。外乱としては、節点72に白色雑音の外乱 w_{72} を作用させる。実験装置を図4-3に示すが、実際のシステムでは、節点19および72の変位をギャップセンサーにより検出し、その信号をA/D変換した後、DSP(AT&T社製、DSP32C)により速度および制御則の演算を高速で行い、D/A変換後にボイスコイルアクチュエータに入力され振動制御が行われる。また、本実験装置におけるサンプリング周波数は20kHzである。

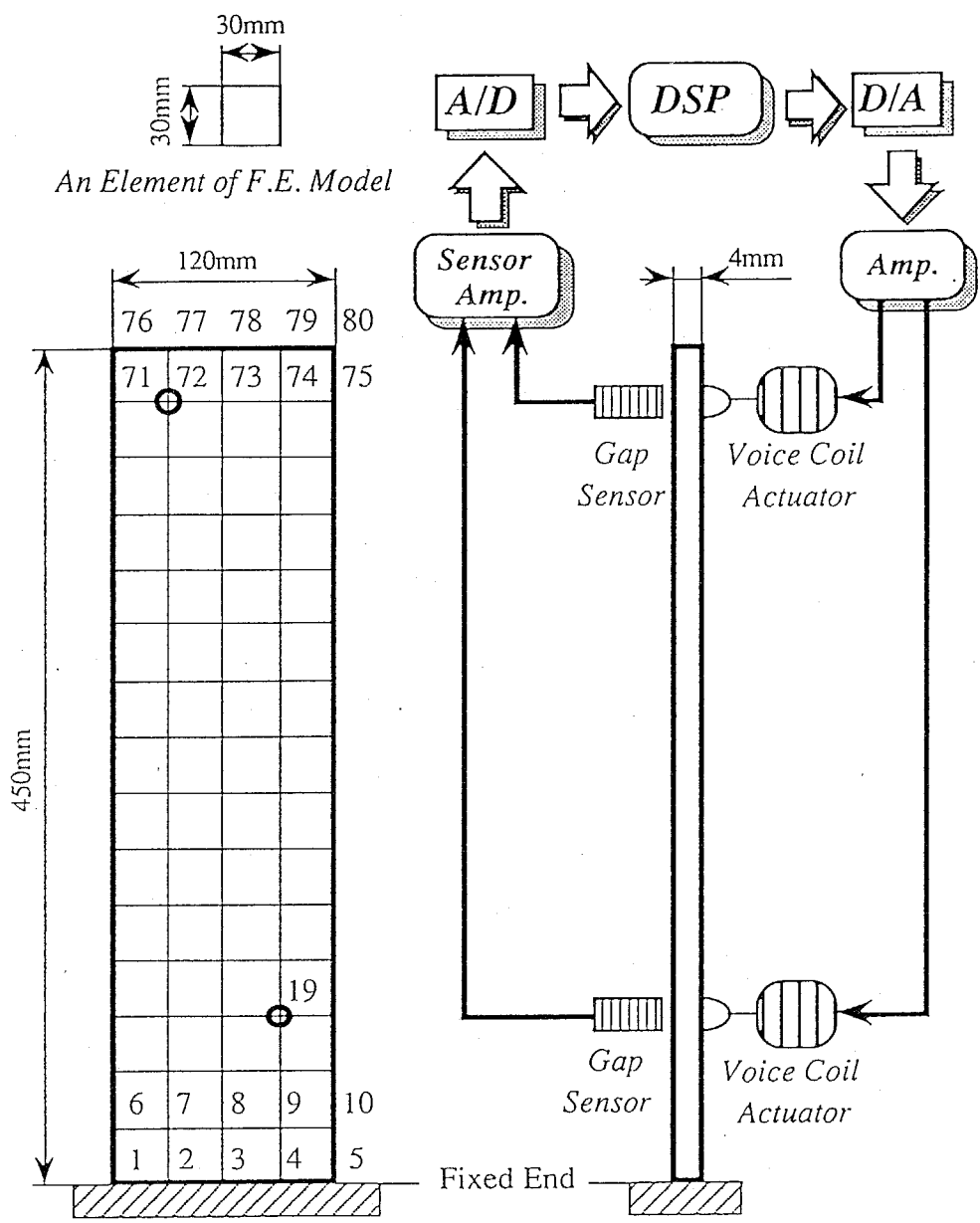


図4-2 平板の FEM 解析モデルと制御システム

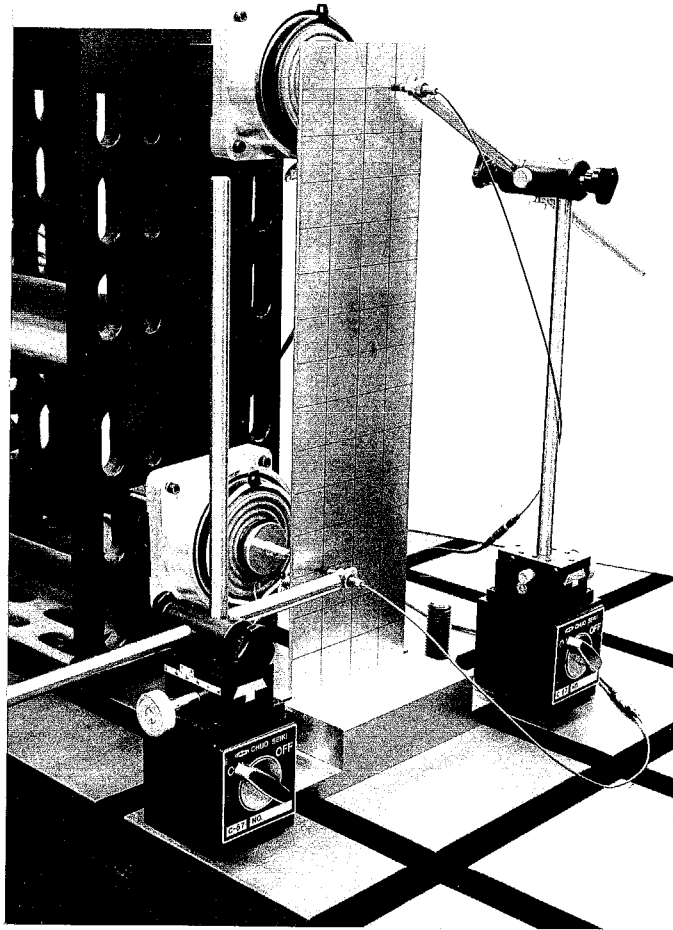


图4-3 实验装置

まず、FEMにより解析して固有振動数と固有モードを求める。ここでは、1kHz付近までの振動制御を行うものとし、固有振動数が1kHz以下である1次から9次までの固有モードを用いて実システムを記述する。また、このときの低次元システムは点19と72の2自由度であるから、その採用モード数は2となる。最適化すべき2次形式評価関数 H_y 、 H_u をそれぞれ次式のように設定する。

$$H_y = E[y_{19}^2 + y_{72}^2], \quad H_u = E[u_{19}^2 + u_{72}^2] \quad (4-42)$$

式(4-29)、(4-30)に含まれる重み行列の初期値 L_0 、 U_0 を次のように設定する。

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-43)$$

これにより、最適制御系を構成したときの低次元システムにおける評価関数の初期値は、式(4-8)の V を1としたとき次式のようにになる。

$$H_y^0 = 5.207, \quad H_u^0 = 23.58 \quad (4-44)$$

このときの制御則を実システムに適用したときの初期の極配置を、図4-4に示す。同図から、システムの極の実部が正になっているものが4個あり、システムが不安定であることがわかる。そこで、 H_u の上限値 H_u^{max} と極の実部の最大値 $s_i^{max}(i=1, \dots, 18)$ を以下のように与え、 H_y を最小にするような最適化を実行する。

$$H_u^{max} = 80.0, \quad s_i^{max} = -5.0 \quad (\forall i) \quad (4-45)$$

設計変数を L の第1行の4成分とし、式(4-43)の初期値をもとに最適化を行う。本手法により最適化した結果、 L_{opt} は、次式のようにになった。

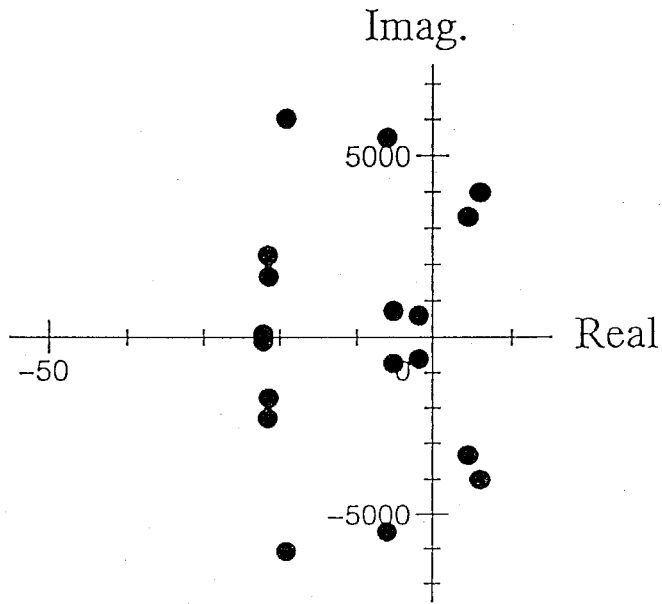
$$L_{opt} = \begin{bmatrix} -0.999 & 1.00 & 2.44 & -1.73 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-46)$$

これにより、最適制御系を構成したときの両評価関数は次式の値となる。

$$H_y^{opt} = 1.943, \quad H_u^{opt} = 80.00 \quad (4-47)$$

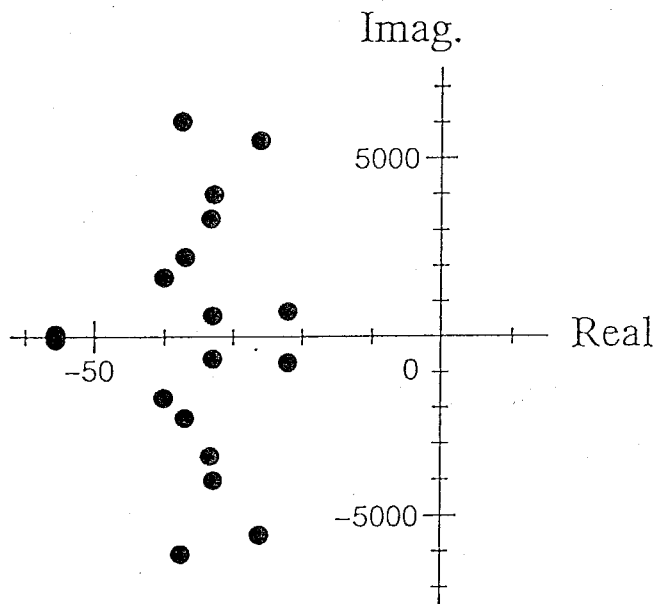
このときの実システムの極配置を図4-5に示す。これらは、式(4-45)で表される制約条件を満足しており、安定性は保障されている。最適設計

後の制御を行ったときの、節点72の衝撃応答を図4-6に示す。同図から、閉ループ系は安定であり、大きな制振効果が得られていることがわかる。また、節点72の変位に関するFRFを図4-7に示す。点線が非制御の実験結果、破線が制御時の計算結果および実線が制御時の実験結果であるが、制御を行うことにより大きな制振効果が確認され、さらに解析結果と実験結果はよく一致していることがわかる。ここで、2自由度で低次元化したシステムの評価関数が実システムのそれとほぼ一致していることを確認するために、節点72に白色雑音の外乱を作用させたときの節点19および72の応答を、低次元システムで設計したフィードバックゲインをそのまま低次元システムに適用した場合と、9自由度の実システムに適用した場合について計算する。図4-8に節点19の応答、図4-9に節点72の応答の計算結果を示す。図中の破線は9自由度実システムに対する結果で、実線は2自由度低次元システムに対する結果であるが、両者はよく一致していることがわかる。さらに、実験結果との対応をみるために、最適制御時の節点72に衝撃力が作用したときの節点19と72の応答を調べる。2自由度低次元システムおよび9自由度実システムを用いて計算した結果と、実験結果を比較したものをそれぞれ図4-10と図4-11に示す。同図から、応答は2自由度および9自由度の計算結果、そして実験結果のすべてがよく一致していることがわかる。以上のことから、2自由度低次元システムで計算した評価関数 H_y は十分信頼できることがわかる。また、制御入力に関する評価関数 H_u については各状態量の定数フィードバックであることを考えれば、 H_y と同様に信頼できることがわかる。したがって、この場合の評価関数は実システムに対して妥当なものであることが検証された。



Mode	Real	Imag. (rad/s)
1	-22.18	±93.83
2	-1.790	±601.6
3	-5.071	±730.9
4	-21.46	±1689
5	-21.58	±2263
6	4.549	±3323
7	6.056	±4001
8	-5.935	±5510
9	-19.12	±6045

図4-4 初期制御による閉ループ系の極配置



Mode	Real	Imag. (rad/s)
1	-55.70	±80.40
2	-32.98	±600.6
3	-22.10	±721.5
4	-40.09	±1689
5	-37.01	±2260
6	-33.31	±3323
7	-32.85	±3998
8	-26.21	±5510
9	-37.57	±6043

図4-5 制御系の最適化後の閉ループ系の極配置

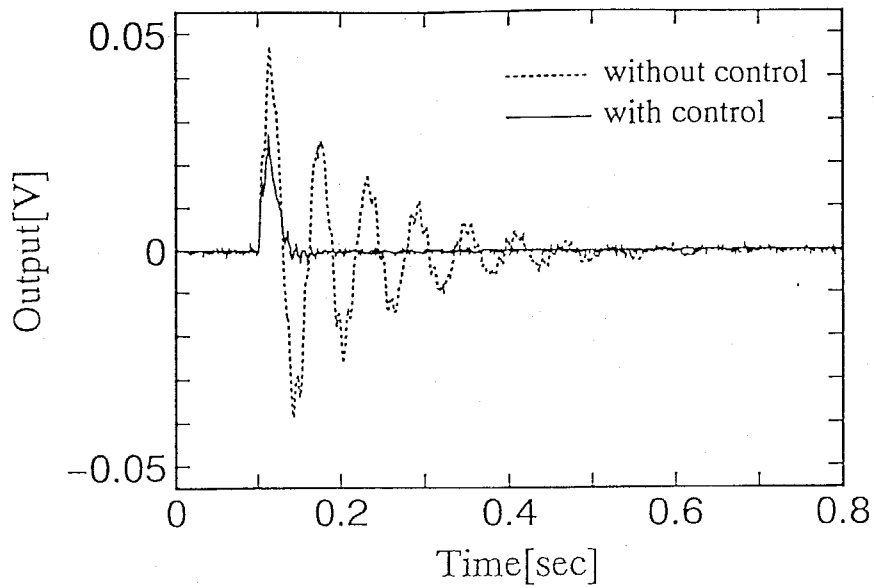


図4-6 節点72の衝撃応答の実験結果

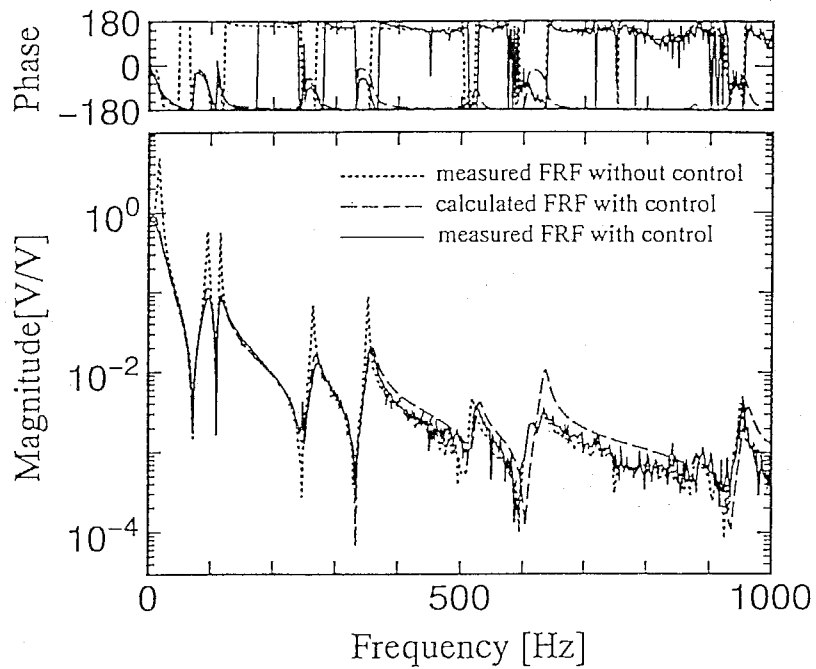


図4-7 最適化後の w_{72} から y_{72} までの FRF

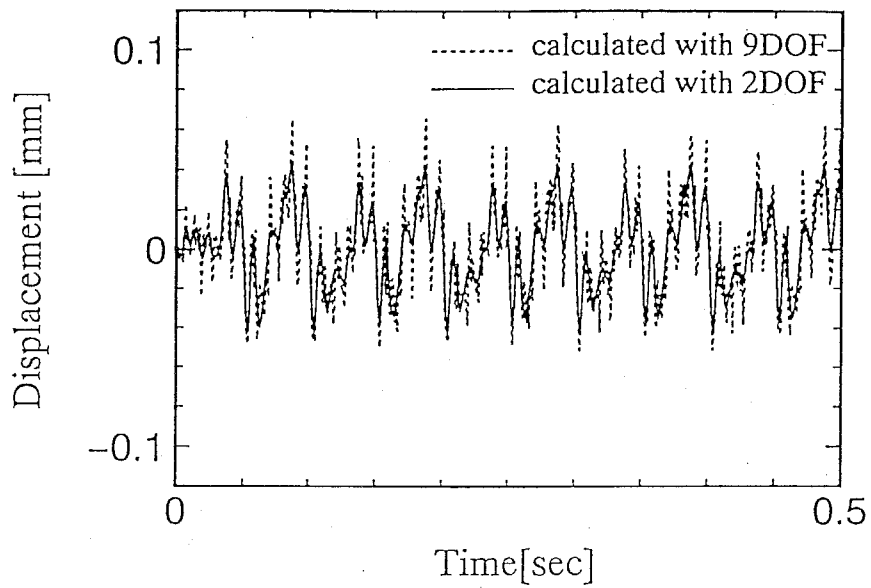


図4-8 白色雑音外乱に対する低次元システムと実システムにおける節点19の応答

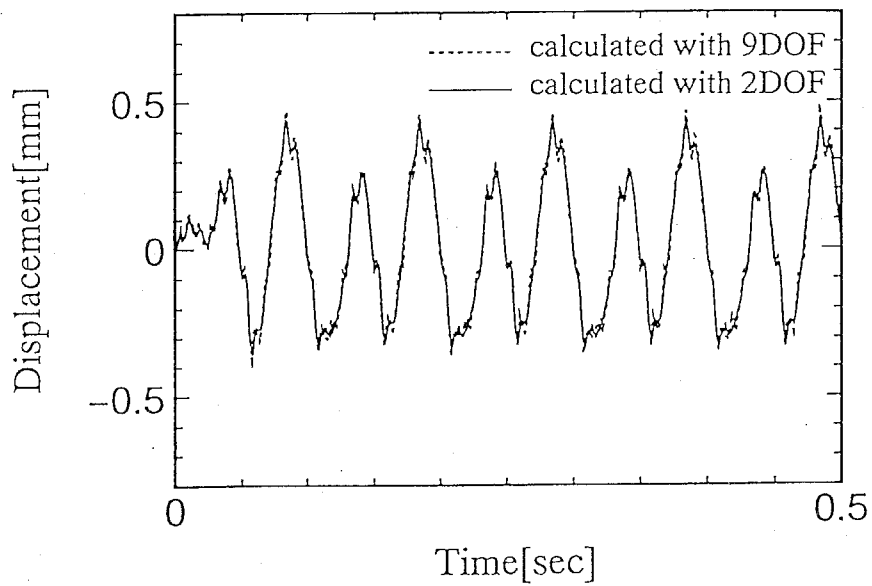


図4-9 白色雑音外乱に対する低次元システムと実システムにおける節点72の応答

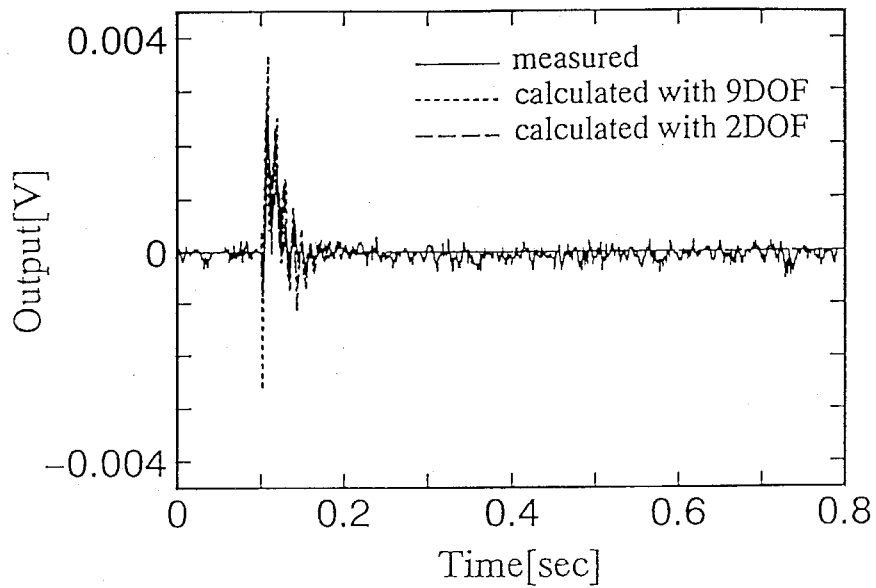


図4-10 節点72に衝撃力が作用するときの節点19における
 応答の計算結果と実験結果との比較

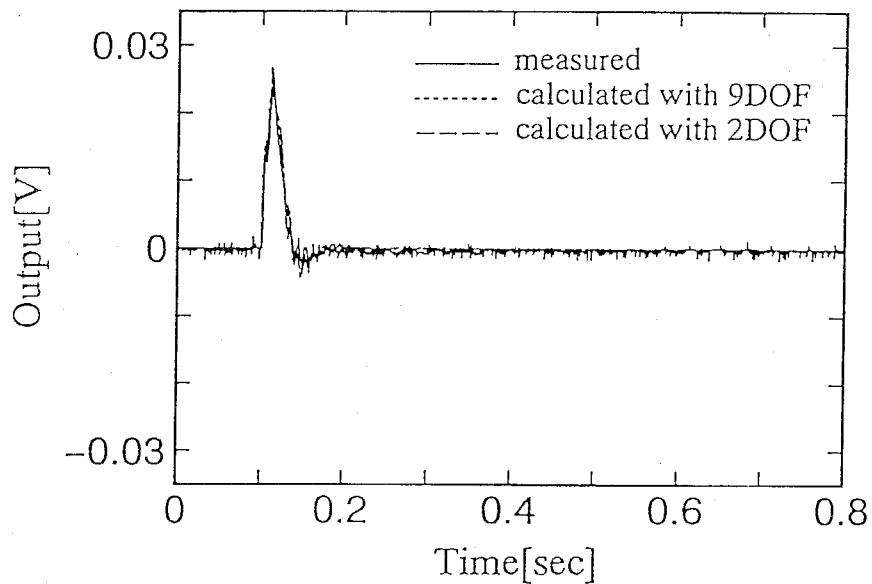


図4-11 節点72に衝撃力が作用するときの節点72における
 応答の計算結果と実験結果との比較

(b) 実験データに基づく設計

実験データのみを参照し実験モード解析に基づいて制御対象をモデル化し、最適振動制御系の設計を行う。

この平板の y_{19} と y_{72} の FRF の測定データから実験モード解析を用いて、モード特性を同定する。実際には、顕著な共振ピークとして現れている5次までの固有モードに関し実験同定を行う。 y_{72} の FRF に対し同定された FRF を図4-12に示す。この図から、同定が正しく行われていることがわかる。ここでは、開ループ系におけるアクチュエータ入力 [V] に対するセンサー出力 [V] の FRF を用いてシステム同定を行った。同定した固有振動数、モード減衰比および固有モードの y_{19} と y_{72} 成分を表4-1に示す。ここに示したモード特性を用いて、制御系の最適設計を行う。

ここでは、式(4-42)と同一の評価関数を考える。重み行列の初期値 L_0 、 U_0 を次のように設定する。

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-48)$$

これにより最適制御系を設計したときの、低次元システムにおける出力と制御入力に関する評価関数の値は次式のようなになる。

$$H_y^0 = 267.2, \quad H_u^0 = 24.07 \quad (4-49)$$

このときの制御則を実システムに適用したときの極配置を図4-13に示す。同図からシステムが不安定になっていることがわかる。このときの y_{72} の衝撃応答の実験結果は、図4-14のように発散している。

そこで、システムを安定化させるために、前回と同様 H_u^{max} と s_i^{max} の制約をそれぞれ $H_u^{max} = 80.0$ 、 $s_i^{max} = -5.0$ ($\forall i$) とし最適化を行う。そして、重み行列 L の第1行成分を設計変数に選び、その最適値 L_{opt} を本手法により決定する。最適化の結果、 L_{opt} は次のようになった。

$$L_{opt} = \begin{bmatrix} 194.4 & 87.22 & 0.162 & 0.243 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-50)$$

これにより、最適制御系を構成したときの両評価関数 H_y^{opt} 、 H_u^{opt} は次式の値となった。

$$H_y^{opt} = 14.88, \quad H_u^{opt} = 80.00 \quad (4-51)$$

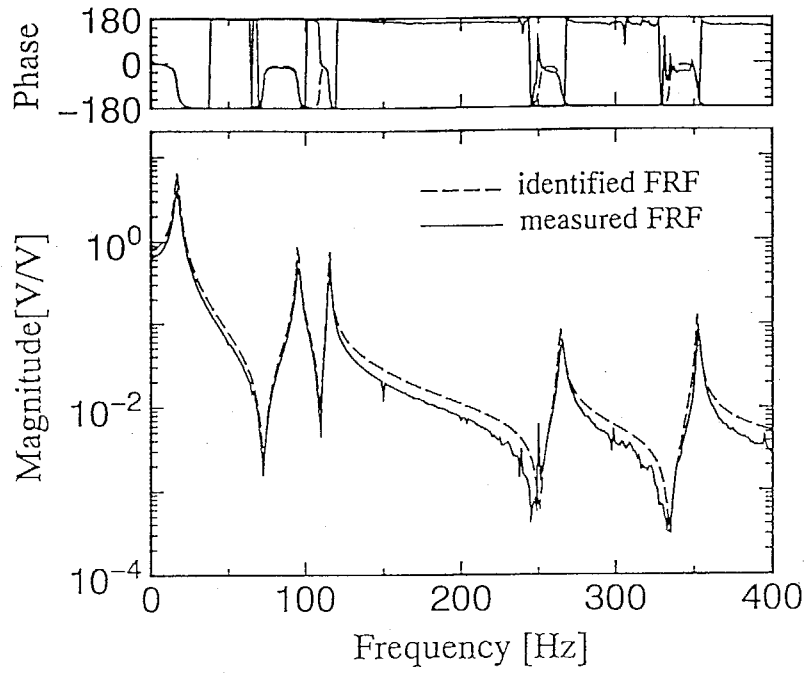


図4-12 w_{72} から y_{72} までのFRFの同定結果

表4-1 モード特性の同定結果

Mode	Natural Frequency (Hz)	Modal Damping Ratio ($\times 10^{-3}$)	Natural Mode	
			y_{19}	y_{72}
1	17.23	59.34	0.275	3.038
2	95.32	8.501	-1.292	2.259
3	115.7	3.589	-0.507	1.853
4	264.7	4.453	2.384	1.394
5	352.0	2.031	1.432	1.599

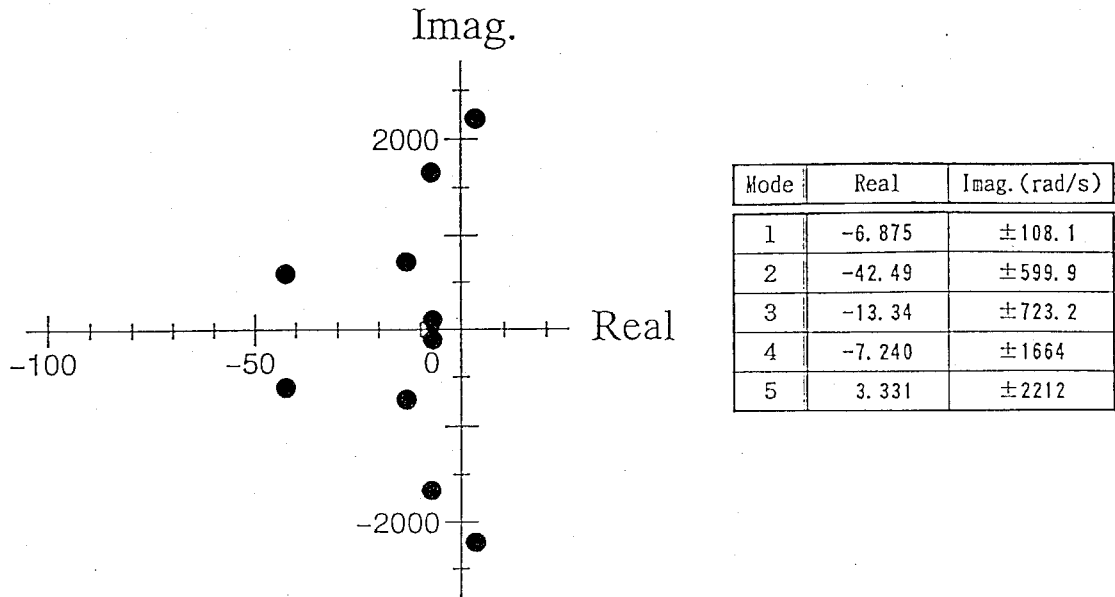


図4-13 初期制御における閉ループ系の極配置

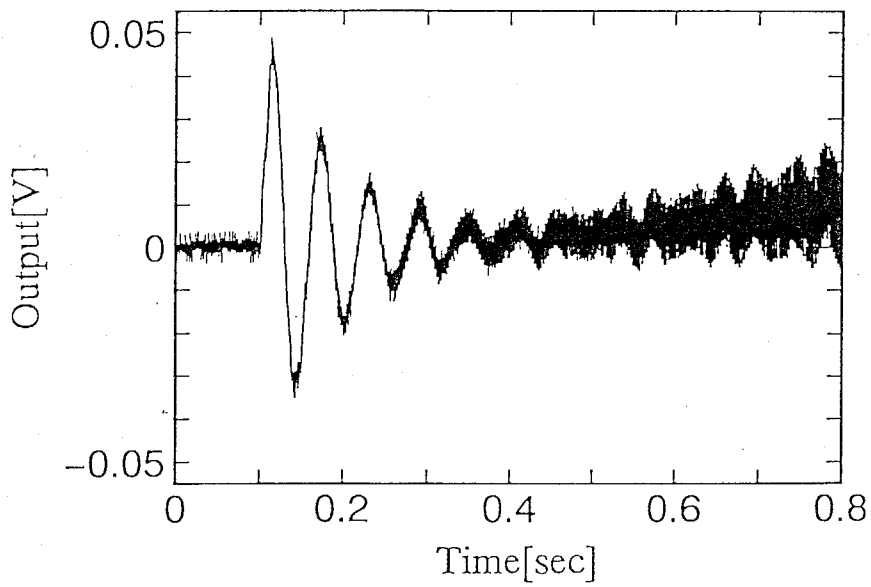


図4-14 節点72の衝撃応答の実験結果

最適化後の閉ループ系の極配置を図4-15に示すが、すべての極の実部が負になり、系の安定性が保障されていることがわかる。そして、最適化後のシステムにおける y_{72} の衝撃応答の実験結果を図4-16に示すが、安定であり制振効果の高いシステムが実現できていることがわかる。また、節点72に白色雑音の外乱が作用したときの、同点における応答の実験結果を図4-17に示すが、最適化後は初期に比べて応答レベルの大幅な低減が認められる。また、節点72の変位に関するFRFを図4-18に示す。同図において、点線が非制御の実験結果、破線が制御時の計算結果および実線が制御時の実験結果であるが、制御を行うことにより大きな制振効果が確認され、また解析結果と実験結果はよく一致していることがわかる。

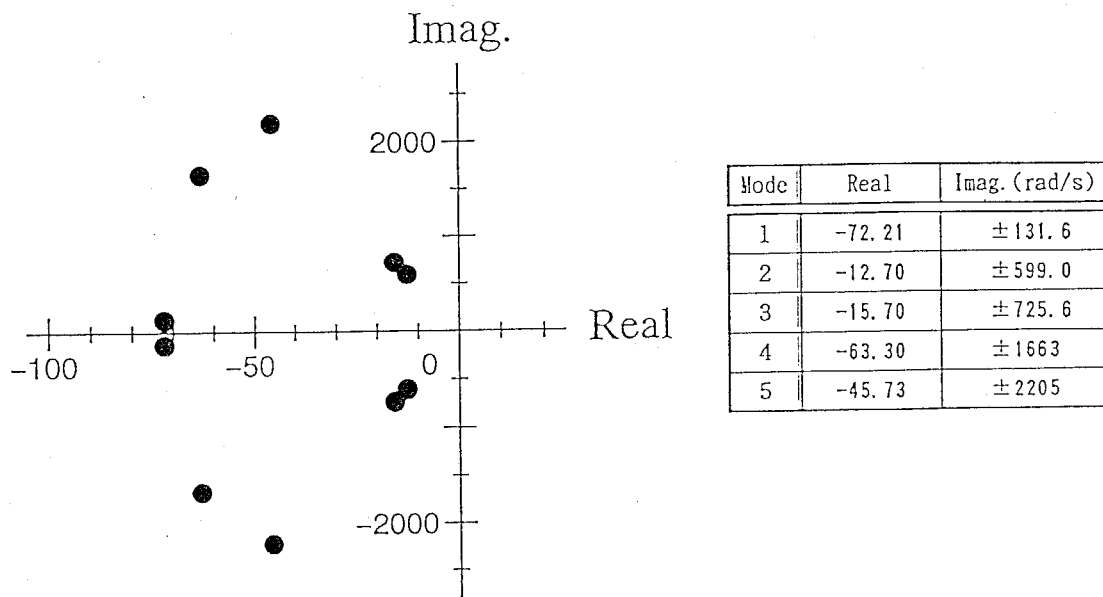


図4-15 制御系の最適化後の閉ループ系の極配置

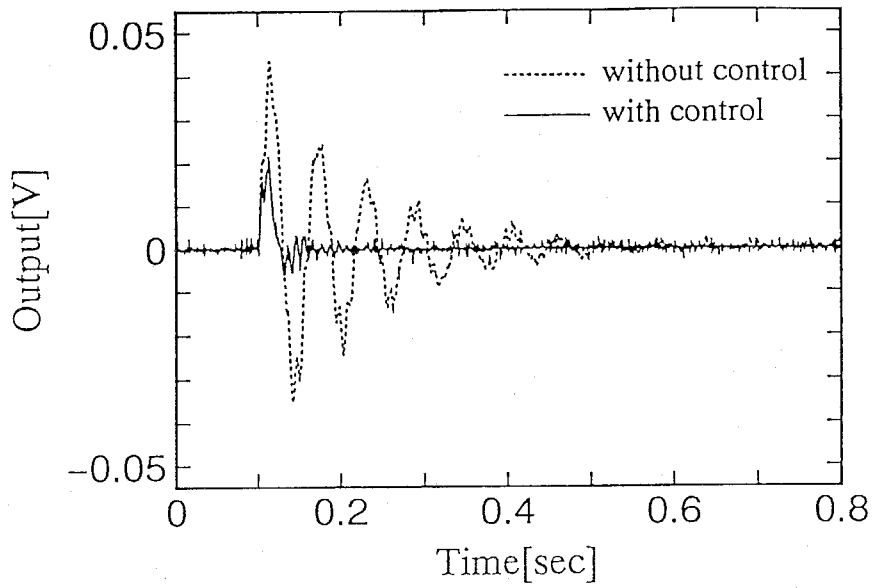


図4-16 最適化後の節点72の衝撃応答の実験結果

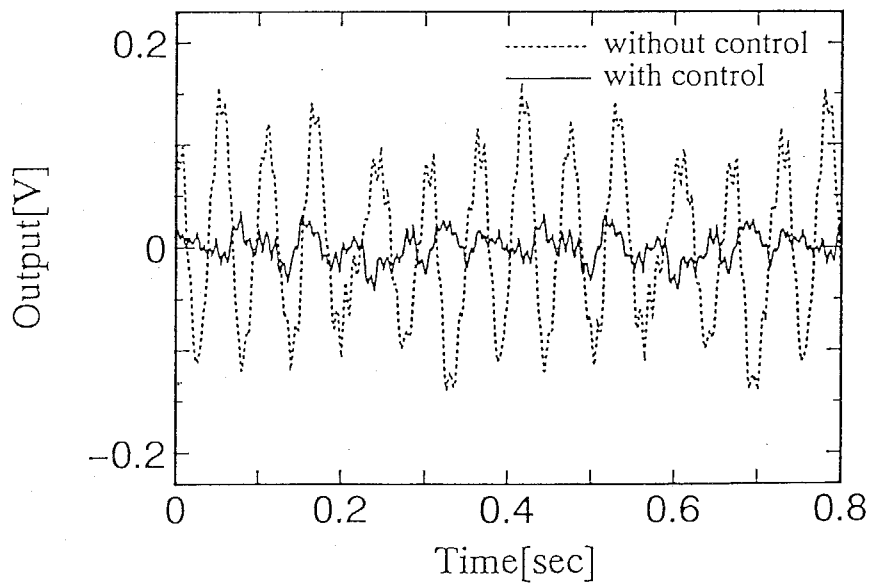


図4-17 節点72の白色雑音外乱に対する応答の実験結果

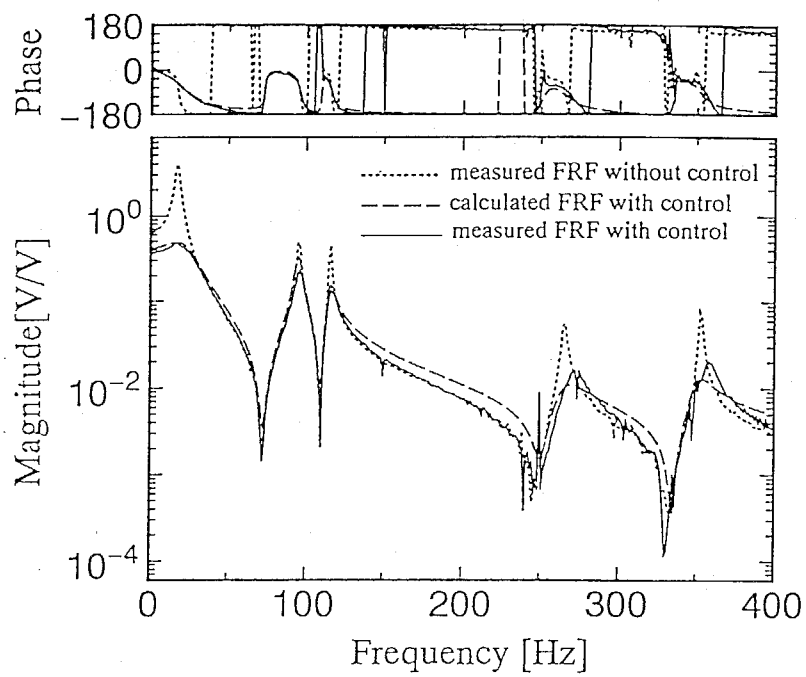


図4-18 最適化後の w_{72} から y_{72} までの FRF

4.3 特性行列同定法に基づく最適設計法

4.3.1 低次元モデルの作成と制御系の設計

特性行列同定法により同定されたシステムに対して最適制御系を構成することを考える。粘性減衰系を仮定し、同定された特性行列を用いて構成される r 自由度振動系の運動方程式は次式で示される。

$$M_I \ddot{x}_I + C_I \dot{x}_I + K_I x_I = B_{1I} w + B_{2I} u \quad (4-52)$$

ここで、 $x_I \in \mathbb{R}^r$ は r 次元の変位ベクトル、 $M_I, C_I, K_I \in \mathbb{R}^{r \times r}$ はそれぞれ同定した質量行列、減衰行列および剛性行列である。 w と u は、前述と同様に外乱ベクトルおよび制御入力ベクトルであり、 $B_{1I} \in \mathbb{R}^{r \times d}$ 、 $B_{2I} \in \mathbb{R}^{r \times p}$ はそれぞれ制御入力行列、外乱入力行列である。式(4-52)を式(4-3)と同一の状態変数方程式で記述する。ただし、このときの状態ベクトル q と各行列 A, B_1 および B_2 はそれぞれ次のようになる。

$$q = \begin{Bmatrix} x_I \\ \dot{x}_I \end{Bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ -M_I^{-1} K_I & -M_I^{-1} C_I \end{bmatrix}$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_I^{-1} B_{1I} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_I^{-1} B_{2I} \end{bmatrix} \quad (4-53)$$

外乱 w としては、式(4-8)の白色雑音外乱を想定する。そして、式(4-13)と同様の状態フィードバック $u = -Fq$ により制御系を構成する。ここで、制御系の設計に関しては前述と同様に式(4-9)、(4-10)の両評価関数の和を最小にする、最適レギュレータ理論を適用する。このとき、同定したシステムに対して最適レギュレータ理論を適用すれば、当然のことながら、このシステムに関しては安定性が保障されることになる。しかし、同定したシステムに限られた固有モードしか採用していないことを考えると、無視した固有モードによるスピルオーバーが発生し、安定性が劣化することが懸念される。

そこで、最適レギュレータ理論で得られた状態フィードバックを大自由度の実システムに適用し、その極配置を参照することにより、実システムの安定性を判別する。

4.3.2 実システムおよび閉ループ系の定式化

(a) 実験データから実システムを同定する場合

v 自由度の実システムの運動方程式を次式で表す。

$$M_R \ddot{x}_R + C_R \dot{x}_R + K_R x_R = B_{1R} w + B_{2R} u \quad (4-54)$$

ここで、 $M_R, C_R, K_R \in \mathbb{R}^{v \times v}$ はそれぞれ特性行列同定法により得られた実システムにおける質量行列、減衰行列および剛性行列である。 $x_R \in \mathbb{R}^v$ をシステム同定で参照した自由度 $x_I \in \mathbb{R}^r$ と、それ以外の自由度 $x_D \in \mathbb{R}^{v-r}$ に分けて表現すると

$$x_R = \begin{Bmatrix} x_D \\ x_I \end{Bmatrix} \quad (4-55)$$

外乱入力 w と制御入力 u は同定システムで参照した自由度と同一位置に作用するものとし、この場合の入力行列 B_{1R}, B_{2R} は次のようになる。

$$B_{1R} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{1I} \end{bmatrix} \quad B_{2R} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{2I} \end{bmatrix} \quad (4-56)$$

そして、実システムにおける状態方程式を式(4-15)として作成する。ただし、このときの q_e, A_e, B_{1e} および B_{2e} はそれぞれ次式となる。

$$q_e = \begin{Bmatrix} x_R \\ \dot{x}_R \end{Bmatrix} \quad A_e = \begin{bmatrix} 0 & I_v \\ -M_R^{-1}K_R & -M_R^{-1}C_R \end{bmatrix}$$

$$B_{1e} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_R^{-1}B_{1R} \end{bmatrix} \quad B_{2e} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_R^{-1}B_{2R} \end{bmatrix} \quad (4-57)$$

また、同定システムの自由度に対応する出力方程式を $y = Cq_e$ とする。ここで、 $C \in \mathbb{R}^{2r \times 2v}$ は参照した状態に関する成分のみが1で他の成分はすべて零の出力行列である。

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \quad (4-58)$$

最適制御則は低次元同定システムで設計されたものを用いる。このとき、制御入力 u は

$$u = -Fy$$

$$= -FCq_e \quad (4-59)$$

となる。このときの閉ループ系は次式となる。

$$\dot{q}_e = (A_e - B_{2e}FC)q_e + B_{1e}w \quad (4-60)$$

式(4-60)から実システムの閉ループ系の極配置を調べることにより、系の安定性を評価できる。

(b) 実システムをFEMで作成する場合

このときの構造物の運動方程式は式(4-1)となる。実システムとしては、FEMによる構造解析で得られた特性行列を用いているため、自由度がかなり大きくなることが予想される。そこで、採用モード数 v のモード座標に変換して小自由度の運動方程式を作成する。そして、実システムとしての状態方程式を式(4-15)のように記述する。

ここで、前述と同様に出力行列 $C_0 \in \mathbb{R}^{2r \times 2n}$ を参照した状態に関する成分のみが1で他の成分はすべて零とすると、出力方程式は $y = C_0 \Psi_e q_e$ として記述できる。最適制御則は低次元の同定システムで設計されたものと同じものを用いる。このとき、制御入力 u は次式となる。

$$\begin{aligned} u &= -Fy \\ &= -FC_0 \Psi_e q_e \end{aligned} \quad (4-61)$$

そして、このときの閉ループ系は次式となる。

$$\dot{q}_e = (A_e - B_{2e}FC_0\Psi_e)q_e + B_{1e}w \quad (4-62)$$

上述のように、実システムの閉ループ系は、低次元の同定システムに対して設計された制御則により構成されているので、このままでは低次元化で省略した固有モードの安定性は保障できない。そこで、式(4-60)および(4-62)で記述された実システムの閉ループ系の極配置を参照しながら、システムの安定性を保障する最適制御則を決定する方法を次節で説明する。

4.3.3 制御系の安定化最適設計

ここでは、FEMによる解析および実験により得られたFRFから特性行列同定法により低次元システムを作成し、低次元化で無視した固有モードの安定性を保障する制御系の設計法を示す。提案する方法の概念を図4-19および図4-20に流れ図として示す。図4-19は実験により得られたFRFに基づく設計法を示し、図4-20はFEMによる解析により得られたFRFに基づく設計法を示す。

前者の図4-19のアプローチは、構造物のFRFを振動試験により測定し、それに基づいて特性行列の同定を行い、システムのモデル化を行う。そして、この同定システムに最適レギュレータ理論を適用し、最適状態フィードバック則を求める。しかし、同定モデルは高次のモード成分を無視しており、この制御則を実構造物に適用する際には、システムの安定性は保障できない。そこで、最適制御系を設計するために同

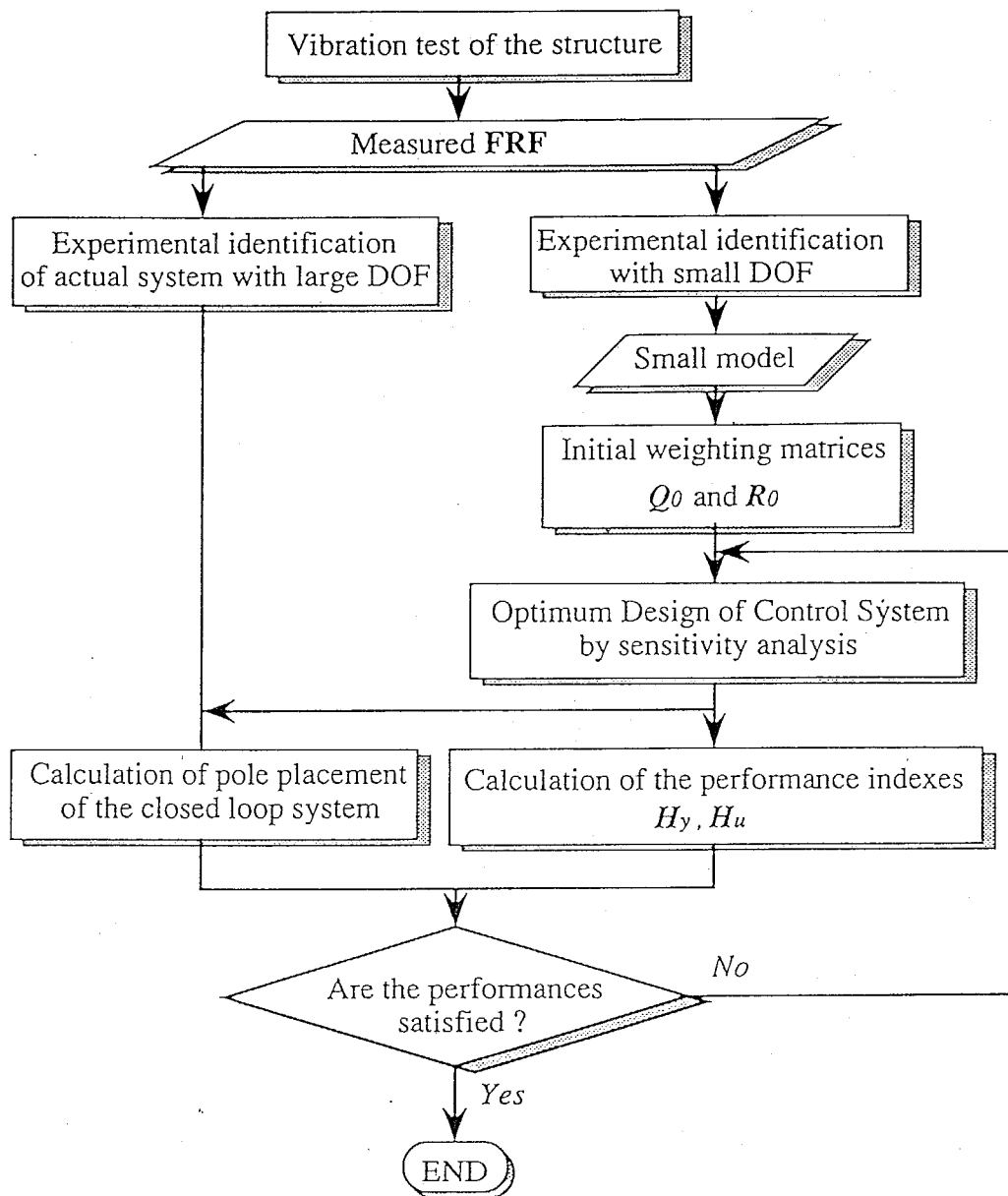


図4-19 特性行列同定法に基づく制御系の最適化の流れ図
(実験データに基づく設計法)

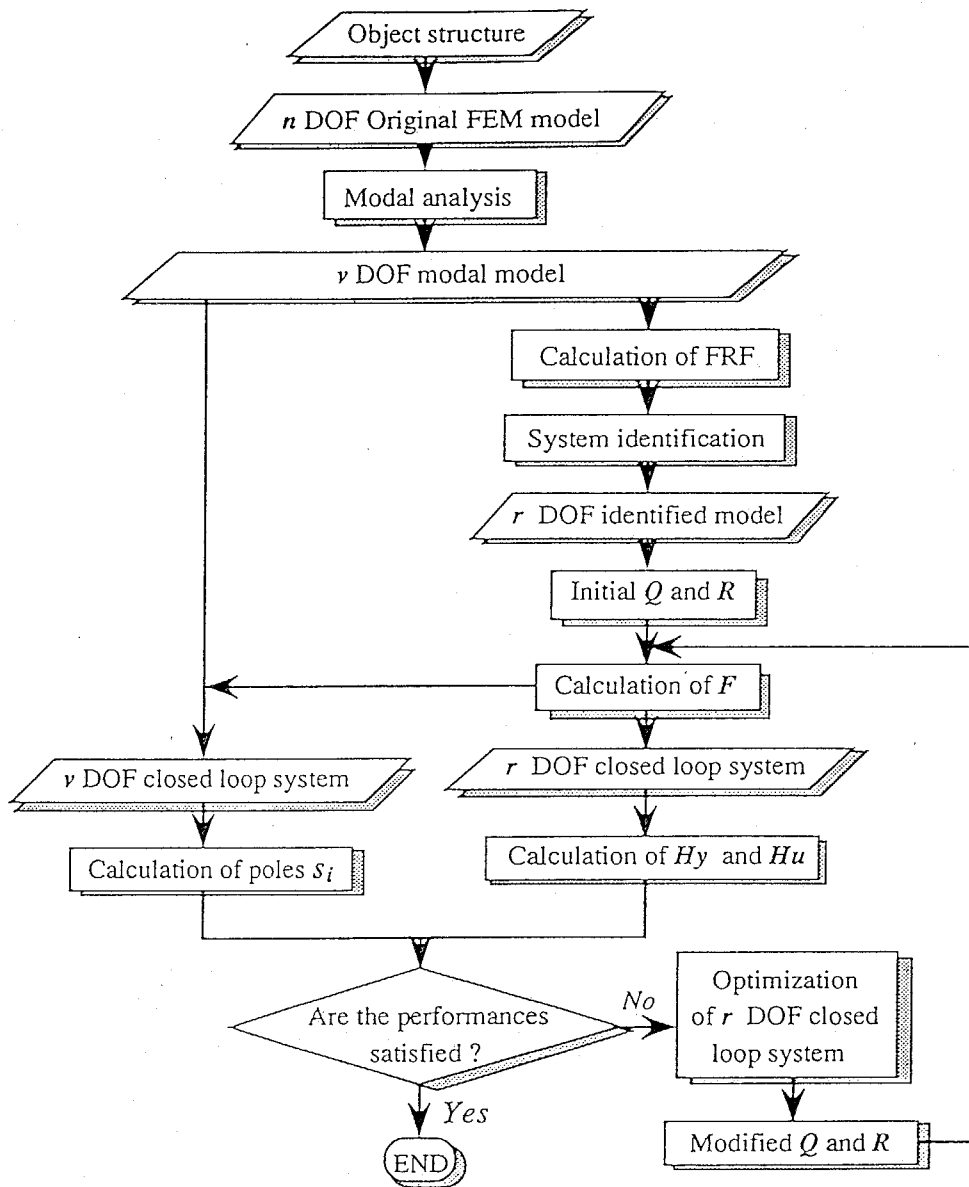


図4-20 特性行列同定法に基づく制御系の最適化の流れ図
(FEMに基づく設計法)

定したシステムの自由度よりも十分大きい自由度で同定したシステムを実システムとして作成する。そして、小自由度システムで設計した制御則を大自由度の実システムに適用し、閉ループシステムの極配置を参照することによりシステムの安定性、最適性を評価し、設計指標を満たすように制御則の最適化を行う。ここで、最適化すべき目的関数としては、状態変数および制御入力に関する2次形式評価関数、実システムにおける極配置とし、設計変数としては、2次形式評価関数に含まれる重み行列 Q 、 R とする。

後者の図4-20に示すアプローチは、FEMによる解析モデルに基づいて最適制御系を設計するものである。まず、FEMにより制御対象をモデル化し、モード解析によりモード座標系における状態方程式を作成し、これを実システムとする。同時に構造物のFRFを計算し、このデータから特性行列同定法により希望する自由度の特性行列を同定する。そして、この同定システムに最適レギュレータ理論を適用し、最適状態フィードバック則を求める。しかし、前述と同様に同定システムは高次のモード成分を無視しており、この制御則を実構造物に適用する際には、システムの安定性は保障できない。そこで、この場合も同様に制御入力をFEMから直接得られた実システムに適用し、閉ループシステムの極配置を参照することによりシステムの安定性、最適性を評価し、設計指標を満たすように制御則の最適化を行う。ここで、最適化すべき目的関数としては、状態変数および制御入力に関する2次形式評価関数、実システムにおける極配置とし、設計変数としては、2次形式評価関数に含まれる重み行列 Q 、 R とする。

本手法のアプローチはFEMモデルに基づいているので、構造系の設計段階における最適制御系の設計に有効であり、制御後の特性が解析により予測できる特徴を持つ。ここでは、特性行列同定法の理論説明については省略するが、その詳細については巻末の付録を参照されたい。

最適化問題としては前述の4.2.4で説明したように、出力および制御入力に関する2次形式評価関数 H_y 、 H_u を式(4-20)、(4-21)により定義し、 H_u と閉ループ系の極 s_i の制約のもとに H_y を最小化することで制振性能の向上を図る。ここで、設計変数としては式(4-29)、(4-30)の行列 L 、 U を採用する。また、実システムで構成した閉ループ系の安定性を保障するために極配置を参照する必要があるが、これは式(4-60)および(4-62)で記述される閉ループ系の固有値 s_i として得られる。そして、 $H_u^{max} > 0$ 、

$s_i^{max} < 0 (i = 1, \dots, 2v)$ として、式(4-28)に示す最適化問題を実行する。

$$\begin{aligned} \min & H_y \\ \text{Subj.} & \begin{cases} H_u - H_u^{max} \leq 0 \\ \text{Re}(s_i) - s_i^{max} \leq 0 \quad (i = 1 \sim 2v) \end{cases} \end{aligned}$$

設計変数 L 、 U の最適解を、準ニュートン法と乗数法との組合せによる非線形最適化法を用いて探索する。本手法の適用の際には、目的関数に含まれる H_q 、 H_u および s_i の設計変数に関する1次微係数(感度)が必要になるが、これらの感度は4.2.5で示した方法で同様に求めることができる。

4.3.4 平板の振動制御への適用

ここでは、実験データにより得られたFRFから特性行列を同定する場合と、FEMによる解析から得られたFRFを用いて特性行列を同定する場合について、本手法により最適制御系を設計する。

(a) 実験データに基づく設計

図4-21に示される平板を制御対象とする。制御対象そのものは図4-2に示すものと同一である。ここでは、5次のモードまで制御することを目的とし、参照点を図4-21に示したように5カ所を選ぶ。この平板の面外方向の振動を、点1と点5に制御入力を加えることによって振動制御を行う。また、最適レギュレータを構成するための自由度は2とし、点1、5を参照点とする。実験システムについては、点1、5の変位の状態量をギャップセンサーを用いて測定し、同点に取り付けられたボイスコイルアクチュエータにより振動制御が行われる。また、サンプリング周波数は20kHzである。

ここで扱う状態量は、変位に関してはギャップセンサーの出力電圧、およびその時間微分である。また、制御入力はアクチュエータに加える入力電圧とする。開ループの状態、ギャップセンサーとアクチュエータの入出力電圧間のFRFを用いることにより、同定された特性行列の中にアクチュエータの特性を含むことが可能となる。

まず、5自由度の実システムとして特性行列を同定する。ここでは、粘性減衰系を仮定して同定を行った。その結果、同定された質量行列 M_R 、減衰行列 C_R 、剛性行列 K_R は次のようになった。

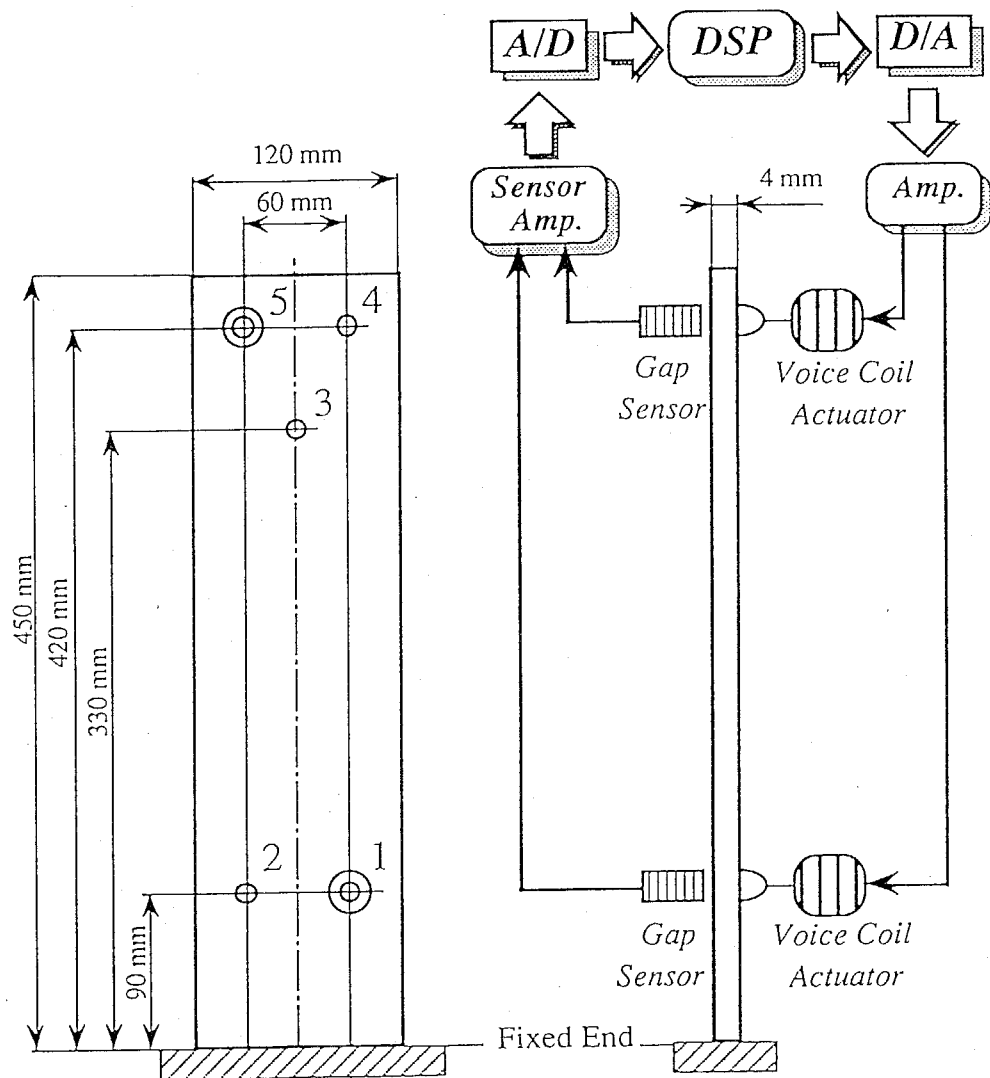


図 4-21 制御対象と実験装置の構成

$$\begin{aligned}
M_R &= \begin{bmatrix} 5.125 & 0.3449 & 3.370 & 1.056 & -1.583 \\ 0.3449 & 5.204 & 2.707 & -2.030 & 0.7533 \\ 3.370 & 2.707 & 8.667 & 0.003413 & -1.461 \\ 1.056 & -2.030 & 0.003413 & 2.543 & -1.481 \\ -1.583 & 0.7533 & -1.461 & -1.481 & 6.959 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \\
C_R &= \begin{bmatrix} 5.437 & 1.367 & 3.324 & 0.6249 & -0.3522 \\ 1.367 & 4.705 & 2.874 & -1.159 & -0.2172 \\ 3.324 & 2.874 & 10.08 & -0.03883 & -0.8878 \\ 0.6249 & -1.159 & -0.03883 & 1.694 & -0.02134 \\ -0.3522 & -0.2172 & -0.8878 & -0.02134 & 5.707 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\
K_R &= \begin{bmatrix} 93.62 & -34.97 & -15.86 & -2.306 & 10.79 \\ -34.97 & 77.82 & -6.129 & 2.810 & -1.972 \\ -15.86 & -6.129 & 38.54 & -5.970 & -22.03 \\ -2.306 & 2.810 & -5.970 & 15.06 & -13.16 \\ 10.79 & -1.972 & -22.03 & -13.16 & 33.88 \end{bmatrix} \quad (4-63)
\end{aligned}$$

このときの点1と点5の間のFRFの実測値と同定結果を図4-22に示す。同図から、実測値と同定結果はよく一致していることがわかる。他の伝達関数についても同様に実測値と同定結果はよく一致する結果が得られた。

つぎに、最適制御系を設計するための2自由度システムを同定する。このときの参照点は点1、5とする。同定の結果、各特性行列は次のようになった。

$$\begin{aligned}
M_I &= \begin{bmatrix} 7.034 \times 10^{-4} & 1.120 \times 10^{-4} \\ 1.120 \times 10^{-4} & 8.909 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \\
C_I &= \begin{bmatrix} 7.946 \times 10^{-3} & 1.540 \times 10^{-3} \\ 1.540 \times 10^{-3} & 1.132 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\
K_I &= \begin{bmatrix} 15.64 & -13.11 \\ -13.11 & 2.448 \end{bmatrix} \quad (4-64)
\end{aligned}$$

このときの点1、5間の同定されたFRFを図4-23に示す。破線が測定結果、実線が同定結果である。このように、実測値によく適合する同定システムが実現された。この2自由度システムに対して最適制御系を設計する。ここでは、制御入力は点1、5に、外乱入力は点5に加わるとする。また、 V は外乱入力の数1であるのでスカラーとなり、その値を1とする。

重み行列の初期値 L_0 、 U_0 を次のように設定する。

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-65)$$

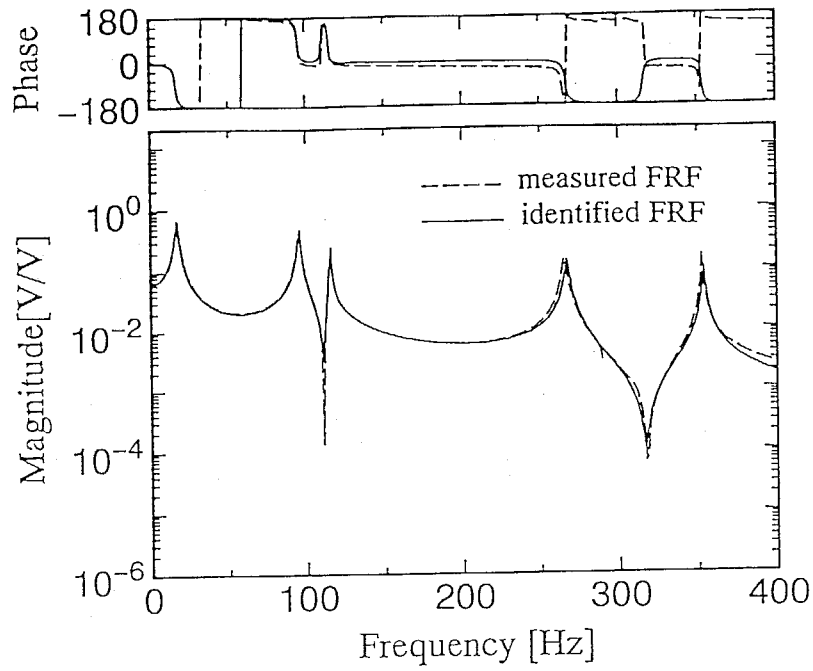


図4-22 点1-5間のFRFの5自由度同定結果

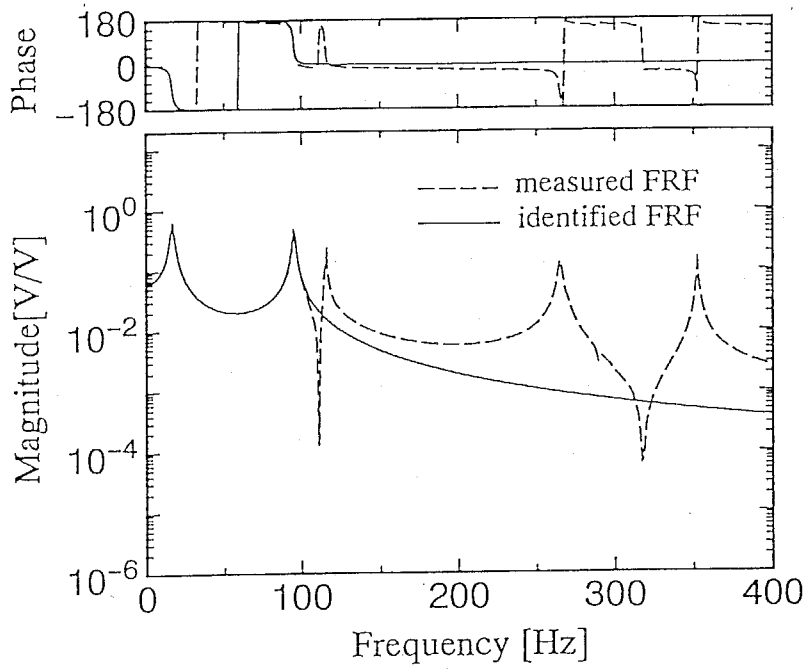


図4-23 点1-5間のFRFの2自由度同定結果

評価関数 H_y 、 H_u はそれぞれ節点1と節点5の変位応答 y_1 、 y_5 および制御入力 u_1 、 u_5 の自乗和の平均値とする。

$$H_y = E[y_1^2 + y_5^2], \quad H_u = E[u_1^2 + u_5^2] \quad (4-66)$$

これにより、最適制御系を構成したときの両評価関数の初期値 H_y^0 、 H_u^0 は次式のようなになる。

$$H_y^0 = 70.22, \quad H_u^0 = 11.86 \quad (4-67)$$

このときの制御則を、5自由度の実システムに適用したときの極配置を図4-24に示す。同図から、システムの極の実部は全て負で安定となっているが、2次と3次のモードに関しては、極が虚軸付近に存在し、安定性が低いことがわかる。このときの、点5における衝撃応答を図4-25に示す。非制御時における応答に比べ振動の収束は速いが、高次モード成分の収束はあまり良くないことがわかる。

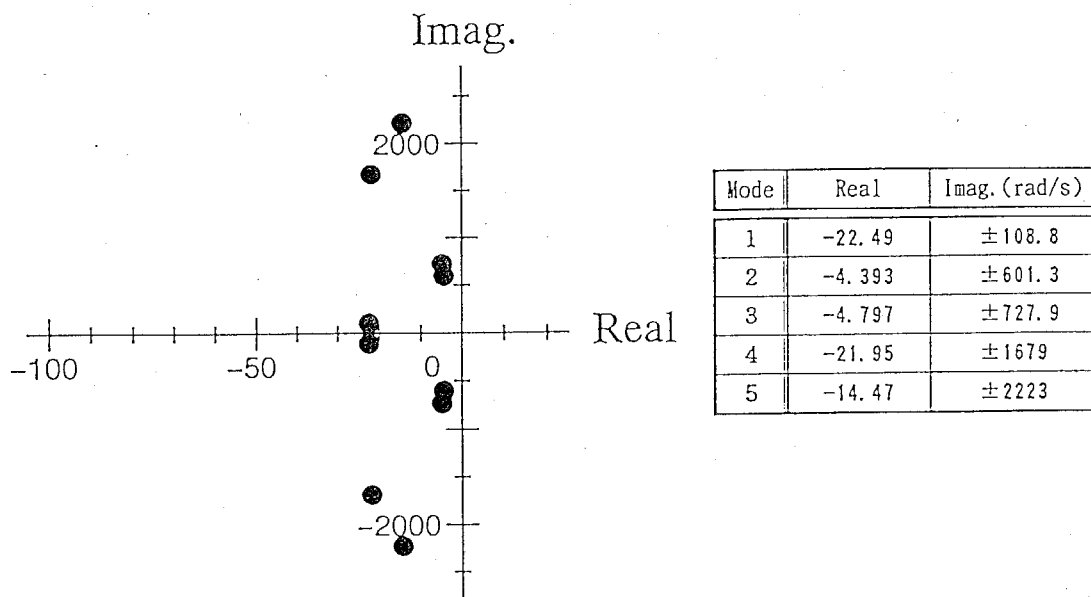


図4-24 初期制御による閉ループ系の極配置

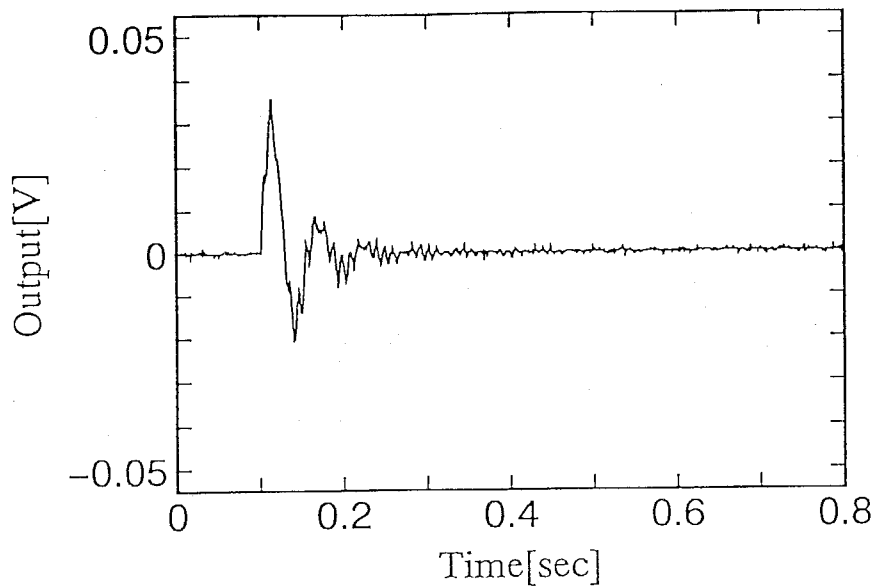


図4-25 初期制御による点5の衝撃応答の実験結果

ここでは、システムの制御性能と安定性をさらに向上させることを目的とし、 H_u の上限値 H_u^{max} と極の実部の最大値 $s_i^{max} (i=1, \dots, 10)$ を以下のように与え、 H_y を最小にするような最適化を実行する。

$$H_u^{max} = 80.0, \quad s_i^{max} = -20.0 \quad (\forall i) \quad (4-68)$$

先の初期値をもとに L_0 の第1行成分を設計変数とし、図4-19に示す流れにしたがって最適化を行う。本手法により最適化した結果、 L_{opt} は、次式のようになった。

$$L_{opt} = \begin{bmatrix} -6.474 & 2.072 & 2.347 \times 10^{-2} & 6.275 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-69)$$

これにより、最適制御系を構成したときの両評価関数 H_y^{opt} 、 H_u^{opt} は次式の値となる。

$$H_y^{opt} = 16.88, \quad H_u^{opt} = 80.00 \quad (4-70)$$

このように H_y は初期値よりも大きく低減し制振性能が向上しており、また H_u に関しては上限値に達していることがわかる。このときの実システムの極配置を図4-26に示すが、制約を満足していることがわかる。最適設計以後の制御を行ったときの、点5の衝撃応答を図4-27に示す。同図から、振動の収束性と高次モードの安定性が改善されていることがわかる。また、点5に白色雑音の外乱が作用したときの同点における応答を図4-28に示すが、最適制御により応答レベルが大幅に低減していることがわかる。

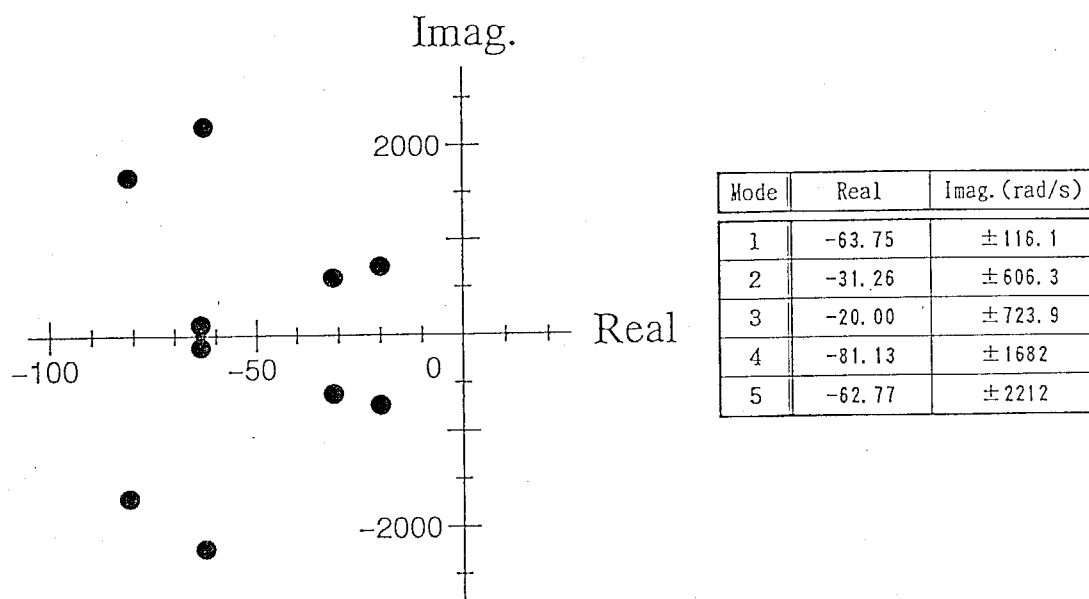


図4-26 制御系の最適化後の閉ループ系の極配置

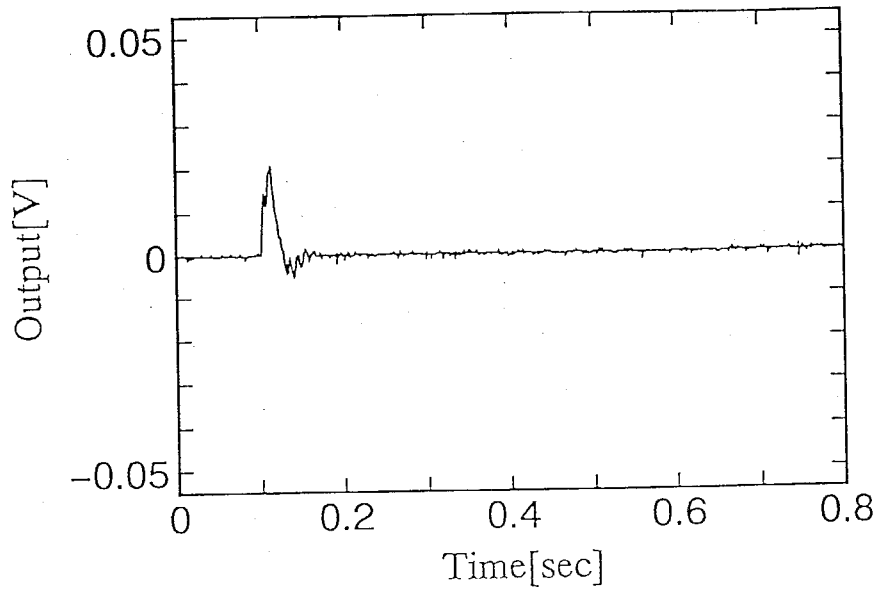


図4-27 制御系の最適化後の点5の衝撃応答

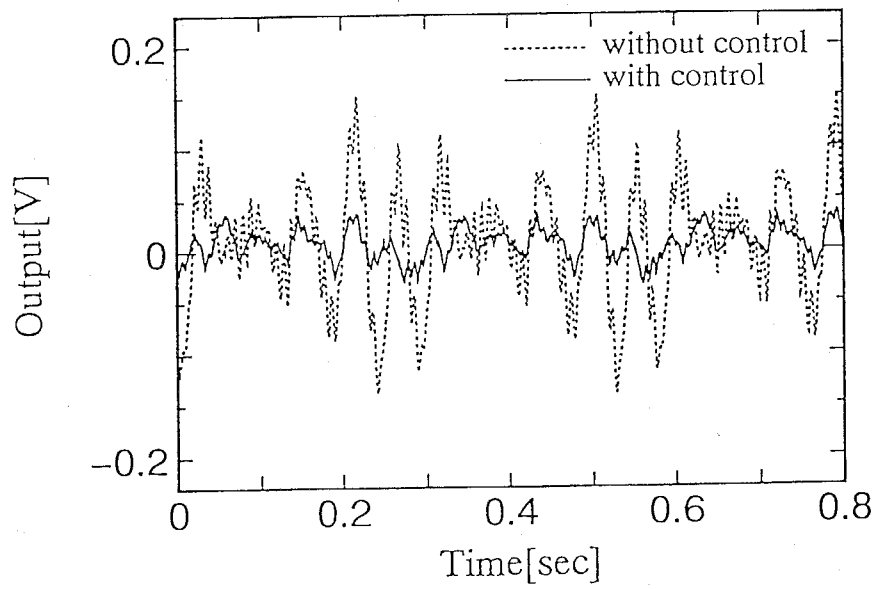


図4-28 点5の白色雑音外乱に対する応答

(b)FEMに基づく設計

図4-2に示す平板の有限要素モデルから実システムを記述する。まず、FEMにより解析して固有振動数と固有モードを求める。そして、1kHz付近まで振動制御することを考え、固有振動数が1kHz以下である9次までの固有値と固有ベクトルを用いて、実システムを定義する。

次に、制御系を設計するための小自由度システムを特性行列同定法により同定する。ここでは2自由度で同定し、そのための2つの参照点として図4-2の節点19と節点72を選ぶことにする。これらの節点は、それぞれ図4-21の点1と点5に対応している。この2点のFRFから特性行列を同定する。この際に、制御対象は不減衰系と仮定する。ここで同定する特性行列は、上述(a)の場合と異なり、アクチュエータの特性は含まれていない。同定された2自由度システムと、もとのシステムの節点19と72の間のFRFを図4-29に示す。同図から、対象としている低次のモードに関して、両特性はよく一致していることがわかる。また、同定された M_I 、 K_I は次式の通りである。

$$\begin{aligned} M_I &= \begin{bmatrix} 4.545 \times 10^{-3} & 6.760 \times 10^{-4} \\ 6.760 \times 10^{-4} & 3.853 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \\ K_I &= \begin{bmatrix} 1.122 \times 10^3 & -66.28 \\ -66.28 & 9.264 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-71)$$

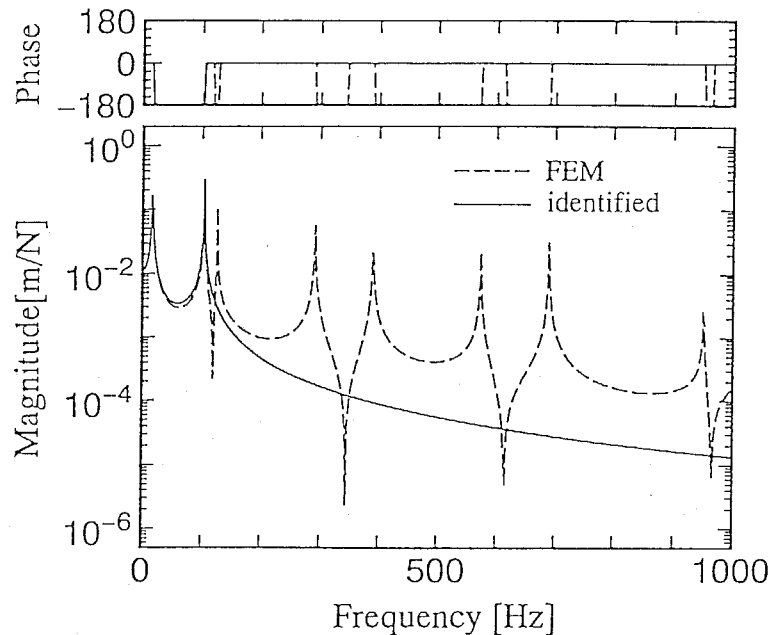


図4-29 節点72のFRFの2自由度同定結果

同定された2自由度システムにおいて最適制御系を設計する。ここでは、制御入力は節点19、72に、外乱入力は節点72に加わるとする。このとき、 B_I 、 D_I は次のようになる。

$$B_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-72)$$

また、外乱入力行列 V のスカラー値を1とする。

重み行列の初期値 L_0 、 U_0 を次のように設定する。

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-73)$$

評価関数 H_y 、 H_u はそれぞれ各節点の変位応答と制御入力の自乗和の平均値とする。すなわち、 $\Gamma = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$ 、 $\Pi = \text{diag}(1, 1)$ とすると、 H_y 、 H_u は次のようになる。

$$H_y = E[y_{19}^2 + y_{72}^2], \quad H_u = E[u_{19}^2 + u_{72}^2] \quad (4-74)$$

これにより最適制御系を構成したときの評価関数の初期値 H_y^0 、 H_u^0 は次式のようなになる。

$$H_y^0 = 13.42, \quad H_u^0 = 37.12 \quad (4-75)$$

このときの状態フィードバック則を、実システムの制御に適用したときの極配置を図4-30に示す。同図からわかるように第4、5、9次の固有モードの極が実部に正の値を持っている。つまり、この系は不安定である。このときの、節点72の衝撃応答を図4-31に示すが、FEMによる実システムの応答が発散していることがわかる。

そこで、 L_0 、 U_0 を初期値として、図4-20に示す最適化手法の流れにしたがって最適解 L_{opt} を求める。ここでは L_0 の第1行の4成分を設計変数に選ぶ。

制約条件としては、評価関数 H_u の上限値を初期の値 H_u^0 とほぼ同じ値とし、

$$H_u^{max} = 37.0 \quad (4-76)$$

また、極の実部の最大値として

$$s_i^{max} = -5.0 \quad (\forall i) \quad (4-77)$$

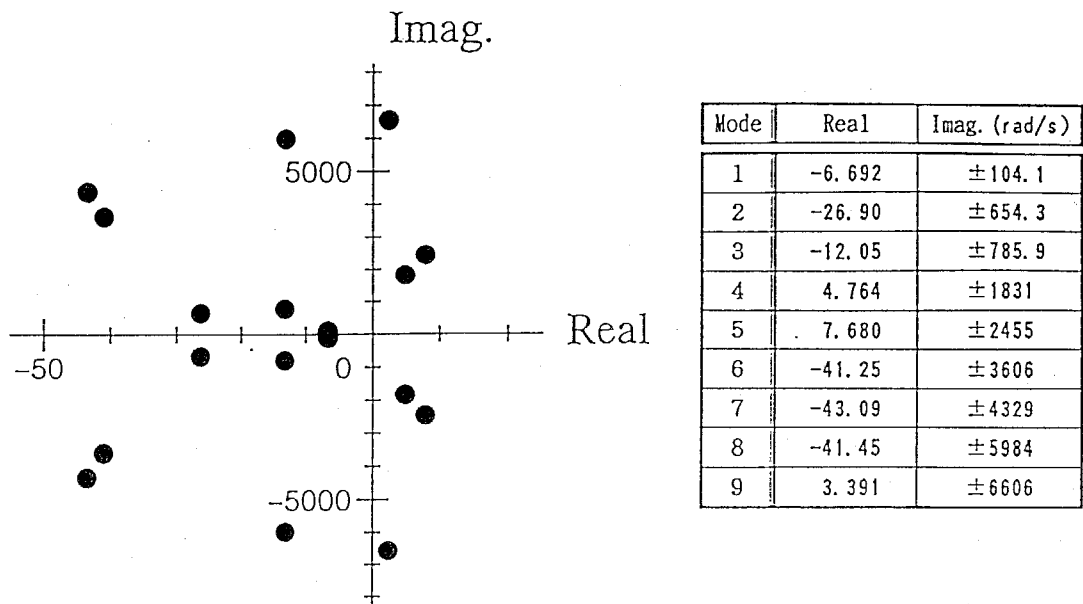


図4-30 初期制御による閉ループ系の極配置

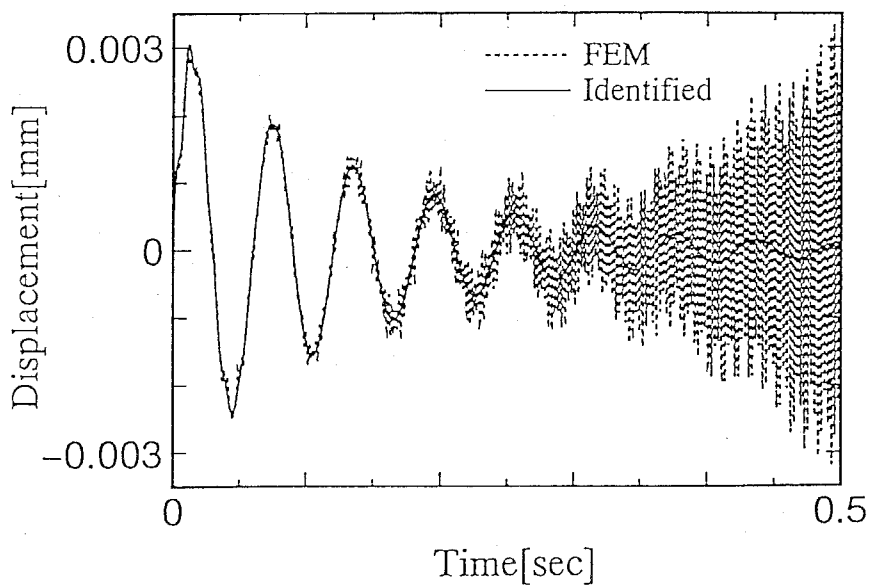


図4-31 初期制御による節点72の衝撃応答の計算結果

とする。そして、 H_q を最小にするような最適化を行った結果、 L_{opt} は次のようになった。

$$L_{opt} = \begin{bmatrix} 11.4 & -3.47 & 2.38 \times 10^{-2} & 4.14 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-78)$$

また、最適制御系を構成したときの評価関数 H_y^{opt} 、 H_u^{opt} は次式の値となる。

$$H_y^{opt} = 3.311, \quad H_u^{opt} = 37.00 \quad (4-79)$$

このように H_y は大幅に低減され、 H_u は制約の上限値になっていることがわかる。すなわち、初期制御とほぼ同じ消費量の制御エネルギーで、制御性能は大きく向上していることがわかる。このときの最適フィードバックゲインを実システムの制御に用いたときの極配置を図4-32に示す。同図から、すべての極が制約を満たしており、安定性が保障されていることがわかる。

最適制御を行ったときの、2自由度システムと実システムの衝撃力に対する節点72の応答を図4-33に示す。同図から、実システムの応答も2自由度システムと同様安定であり、両者はよく対応していることがわかる。

次に、実験による検証を行った結果を以下に示す。

実験装置は図4-3に示すものと同一である。初期値における制御則を用いて制御系を構成したときの、節点72における衝撃応答を図4-34に示すが、解析結果の図4-31と同様にスピルオーバー現象を起こしている。そして、最適化された制御則を用いて実験を行った結果、同点の衝撃応答は図4-35のように安定化された。これについても、図4-33の解析結果とよく一致している。また、白色雑音の外乱が節点72に作用したときの同点の応答を図4-36に示すが、応答レベルの改善が確認できる。以上の結果から、本手法の有効性が検証された。

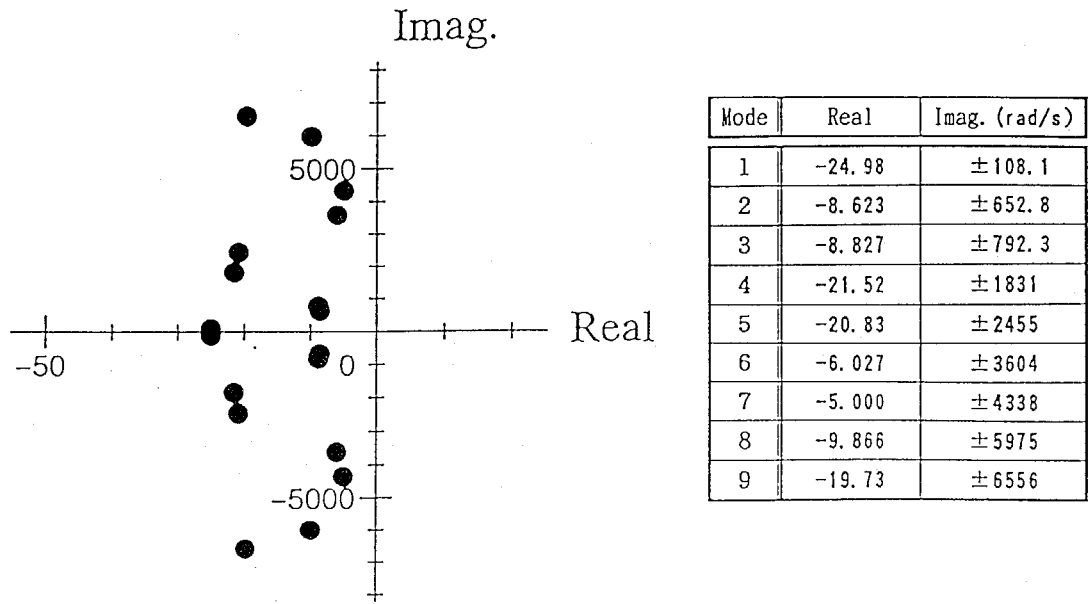


図4-32 制御系の最適化後の閉ループ系の極配置

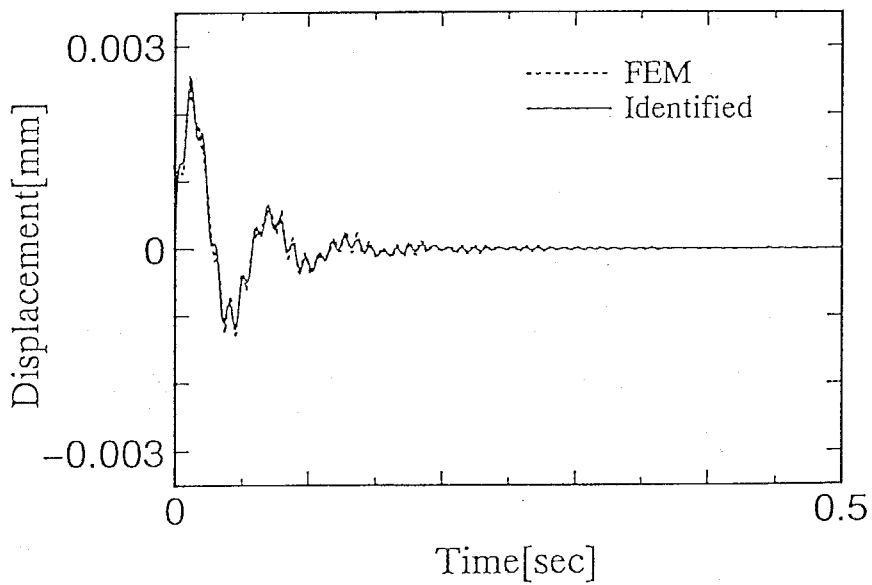


図4-33 最適制御時の節点72の衝撃応答の計算結果

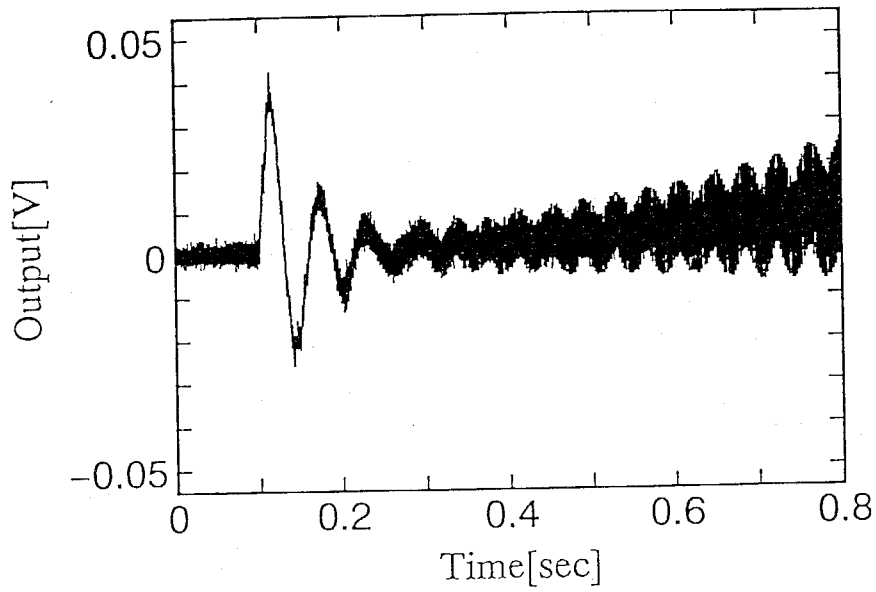


図4-34 初期制御における節点72の衝撃応答の実験結果

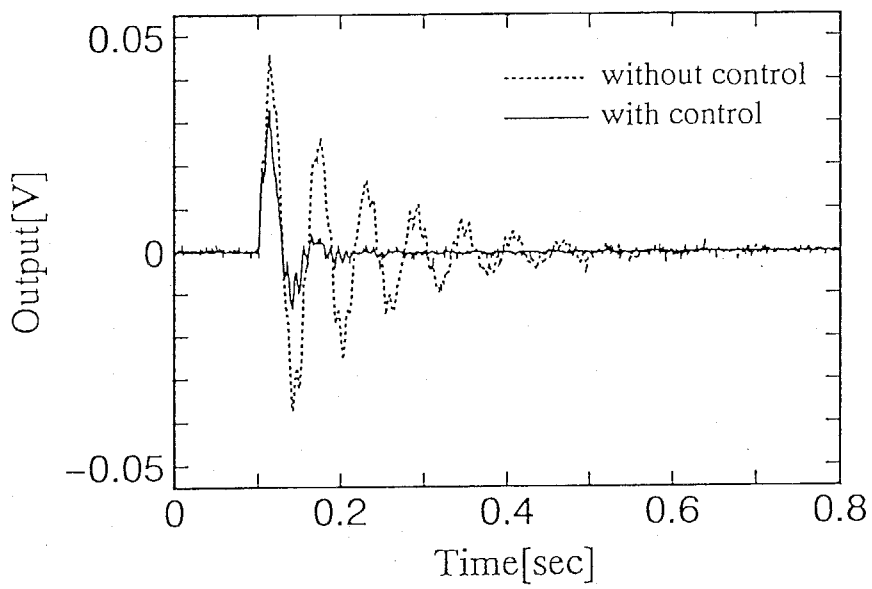


図4-35 最適制御時の節点72の衝撃応答の実験結果

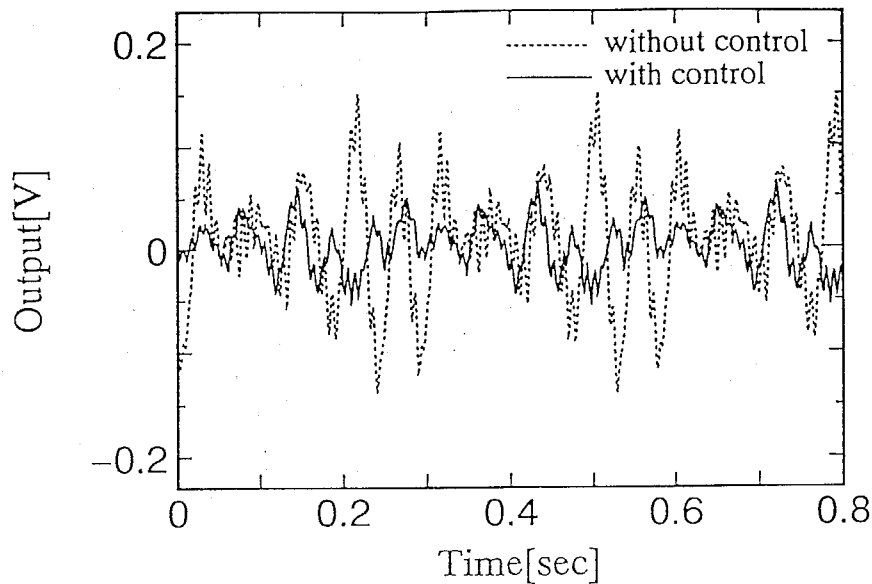


図4-36 節点72の白色雑音外乱に対する応答の実験結果

4. 4 結言

本章では、構造物の低次元モデル化と最適制御系の設計方法を示した。構造物の低次元化として、モード解析と特性行列同定法による方法を示した。まず、モード解析と感度解析を用いた最適振動制御系の設計法に関して、以下の結論を得た。

- (1) モード座標で記述した低次元システムおよび実システムの両方を用いて、実システムの安定性を保障する低次元制御系の最適設計法を提案した。
- (2) 実験モード解析を用いて、実験データに基づく制御系の最適設計法を提案した。
- (3) 平板の振動制御に本手法を適用し、制御系の動特性をシミュレーションおよび実験の両面から検討した結果、すべての結果について両者は良く一致し、また本手法の有効性が検証された。

上記のモード解析に基づく方法の特徴は、システムの記述および制

御系の設計がすべてモード座標上で行われており、構造物のモード特性のみを把握することにより制御系を設計でき、さらに実験モード解析とも容易に結合できることである。

次に、特性行列同定法を用いたシステムのモデル化と、最適制御系の設計法を提案し以下の結論を得た。

(4) 振動実験により得られたFRFから特性行列同定法を用いて、希望する自由度を有するシステムの記述を可能にし、同定システムに対し制御系を設計する方法を示した。

(5) 大自由度構造系をFEMで定式化した後に、モード解析により得られたFRFから特性行列同定法により希望する小自由度にまで縮小するモデル化を可能にし、最適制御系を設計する方法を示した。

(6) システムを同定する際に、無視した高次モードの安定性を保障するために、同定システムと実システムの動特性の両方を参照しながら、感度解析と非線形最適化法の適用により、最適な制御系を設計する方法を示した。

(7) 本手法により、実験データおよびFEMによる解析に基づいて最適制御系を設計し、シミュレーションおよび実験により制御系の動特性を評価した結果、両者は良く一致し、また良好な制振特性が確認された。

上記の特性行列同定法に基づく方法の特徴は、構造物の物理特性が把握できる点と、FEM等により物理座標でモデル化されたシステムと容易に結合でき、制御系の設計が可能になることである。ここで、特性行列を同定する際に注意すべきことは、アクチュエータの配置される点および外乱の作用する点に関して、これらの各点に入力が作用するときの構造物の各参照点におけるFRFが十分に再現されるように、特性行列を決定する必要がある。

第5章 モード解析を用いた連続体構造物の H^∞ ロバスト振動制御

5.1 緒言

近年、ロバスト制御の有力な手法として H^∞ 制御理論^{(22)~(30)}が注目されている。構造系のパラメータ変動に対してロバストな制御系を構成できることは、構造系のモデル化の面から非常に有効である。構造系のパラメータ変動としては、さまざまな要因が考えられる。構造物の動特性自身が時間とともに若干変動するものや、モデル化した時点ですでに実システムとの間に誤差を有するもの、および高次の固有モードを無視してシステムを低次元化したことによる誤差などが考えられる。構造解析の有力な手段であるFEMにより構造物をモデル化する場合、このようなロバスト制御理論は特に有効になる。すなわち、FEMでモデル化する場合には解析モデルと実システムとの間にすでに誤差を有すること、および、自由度が大きくなることによりモード座標を用いてモデルの低次元化を行う際に、無視した高次モード成分が構造系の特性の誤差となるが、これらの誤差に対しロバストな制御系の設計が可能になる。

無視した高次モードの安定化に関して、第4章では感度解析を用いた最適設計法により、システムの2次形式評価関数および極配置の最適化を行い、制御性能および高次モードの安定性の向上を実現した。 H^∞ 制御理論によれば、構造特性の不確定性を考慮した周波数重み関数を用いて評価関数を定義することにより、設定した不確定性の範囲内で常にロバスト安定性を保障する制御系の設計が可能になる。

従来の研究において、 H^∞ 制御理論を適用した例としては、アクティブサスペンション⁽³¹⁾、磁気浮上⁽³²⁾、搭状構造物⁽³³⁾の振動制御などがみられる。しかし、従来の報告では、制御対象を比較的簡単な小自由度系としてモデル化しており、実用を目指した実際の大自由度構造物への適用にはさらに検討が必要だと思われる。さらに、従来の報告ではシミュレーション結果が中心であり、解析結果と実験結果の比較評価が十分に行われていない。

そこで、本章では連続体である平板を制御対象とし、 H^∞ 制御理論に基づいてこの平板の振動制御系を設計し、その特性の評価を解析および実験により行う⁽⁶²⁾。まず、制御対象をFEMによりモデル化し、システムの固有値解析を行い、モード座標を用いてシステムの低次元化を行

う。そして、 H^∞ 制御理論により出力フィードバック系の動的補償器を設計する。そして、閉ループ系の制御効果を解析および実験により評価する。さらに、制御対象の特性に故意に誤差を与えた上で実験を行い、ロバスト性能を評価する。次に、制御性能およびロバスト性能を考慮した周波数重み関数を設定し、 H^∞ 制御系を設計し、システムの動特性の総合評価を行う。最後に、振動実験で得られたFRFから実験モード解析により制御対象をモデル化し、 H^∞ 制御系を設計した結果を示し、その実用性を明らかにしている。

5. 2 H^∞ ロバスト制御理論

制御系を設計するためには、制御対象をモデル化する必要がある。しかし、制御対象をモデル化する過程で、必ず不確定要素が入り込む。本研究のように制御対象をFEMでモデル化する場合を含め、次のような不確定性の混入が考えられる。

- (1)FEM等によりモデル化した時点ですでに混入する誤差
- (2)モデルの低次元化にともなう打ち切り誤差
- (3)負荷、環境、外乱、運転条件などによる特性変動
- (4)がたなどの非線形性の混入による特性変動

ロバスト制御とは、このような不確定性や変動に対して十分な制御性能（定常特性と過渡特性）および安定性を発揮できる制御系のことをいう。

本来、フィードバック制御系にはゲイン余裕や位相余裕といったロバスト安定条件の概念があり、最適レギュレータにも優れた低感度特性や円条件を満足するロバスト安定性が存在する。

しかし、さらに頑強なロバスト性の追求を目指し、いままでとは異なる考え方の制御系の設計法が最近注目されている。これは周波数領域での評価方法を導入した H^∞ 制御理論である。LQ制御は与えられた1つの外乱に対して最適性を保障するのに対し、 H^∞ 制御は最悪の外乱が入ったときの最悪な応答を最小にしようとする考え方に立ち、外乱の抑制という基本問題に周波数領域で対処しようとするものである。

5.2.1 H^∞ 制御系の定式化

図5-1に示すフィードバック制御系を考える。この系は次式のように定式化される。

$$\begin{Bmatrix} z \\ y \end{Bmatrix} = G(s) \begin{Bmatrix} w \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ u \end{Bmatrix} \quad (5-1)$$

$$u = K(s)y \quad (5-2)$$

ここで、 w は外乱入力、 z は制御量、 u は制御入力、 y は観測量である。また、 $G(s)$ は一般化制御対象と呼ばれ、動的補償器 $K(s)$ を零としたときの w から y までの開ループ伝達関数を表す。

この制御系において、外乱 w から制御量 z までの伝達関数 T_{zw} は次式となる。

$$T_{zw} = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (5-3)$$

このとき、 H^∞ 制御問題とは与えられた $\gamma(>0)$ に対して以下の2つの設計仕様を満足する補償器 $K(s)$ を求める問題である。

仕様1) $K(s)$ は $G(s)$ を内部安定化

仕様2) $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$

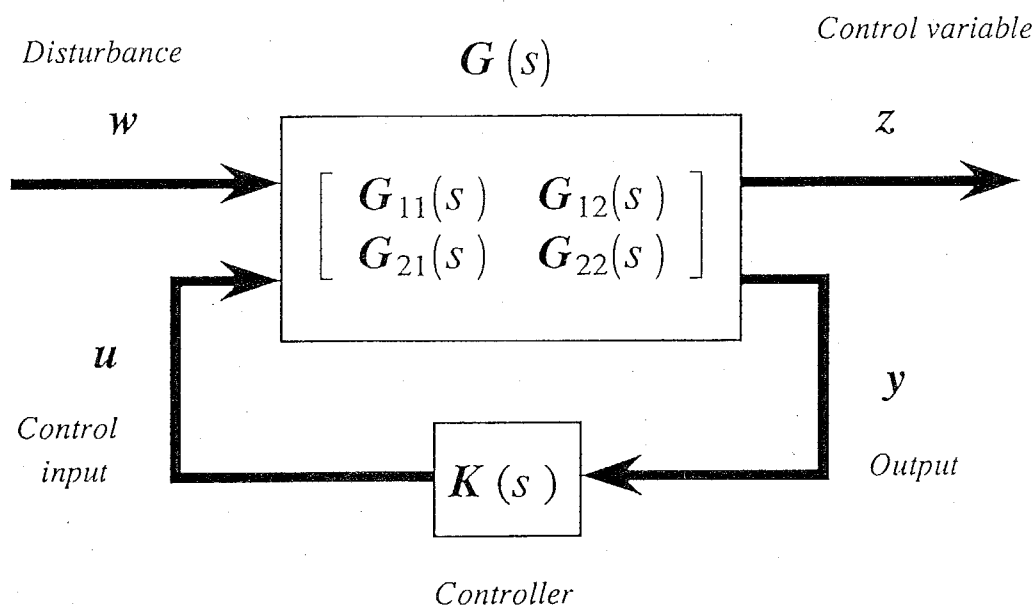


図5-1 H^∞ 制御系

仕様1)は、制御系設計における基本仕様である閉ループ系の安定性を保障するものである。一方、仕様2)は制御性能を評価するもので、制御性能を H^∞ ノルム $\|T_{zw}\|_\infty$ で評価し、それを最小にする動的補償器 $K(s)$ を設計するのが H^∞ 制御理論である。

5.2.2 H^∞ ノルムの定義

H^∞ 制御問題において、評価関数として用いられる H^∞ ノルムの定義と物理的意味について考える。まず、伝達関数 $T_{zw}(s)$ に対して H^∞ ノルム $\|T_{zw}(s)\|_\infty$ は次のように定義される。

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty = \sup \bar{\sigma}[T_{zw}(j\omega)] \quad (5-4)$$

ここで、 $\bar{\sigma}[T_{zw}(j\omega)]$ は $T(j\omega)$ の最大特異値であり、 $T^*(j\omega)T(j\omega)$ の最大固有値の平方根を表している。ただし、 $T^*(j\omega)$ は $T(j\omega)$ の共役転置を表している。式(5-4)より次式も成立する。

$$\bar{\sigma}[T_{zw}(j\omega)] \leq \|T_{zw}(s)\|_\infty \quad (5-5)$$

上述のことを簡単のため、1入出力系について考えてみる。このとき、最大特異値は複素伝達関数の絶対値になる。

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty = \sup |T_{zw}(j\omega)| \quad (5-6)$$

すなわち、1入出力系の場合、 $\|T_{zw}(s)\|_\infty$ は伝達関数のゲインの最大値を意味し、次式を満足する。

$$|T_{zw}(j\omega)| \leq \|T_{zw}(s)\|_\infty \quad (5-7)$$

さらに、 H^∞ ノルムは時間領域で表現でき、次式のように記述できる。

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup \frac{\|T_{zw}w\|_2}{\|w\|_2} = \sup \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (5-8)$$

ただし、 $\|w\|_2$ は次式で与えられる。

$$\|w\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w^T(t)w(t)dt \right\}^{1/2} \quad (5-9)$$

つまり、 $\|T_{zw}\|_\infty$ は最悪な外乱入力 $w(t)$ に対する最悪な応答 $z(t)$ の値を表している。すなわち、 H^∞ 制御理論は未知の外乱入力に対する最悪ケース設計となっている。

5.2.3 H^∞ 制御問題の解法⁽²³⁾

一般化制御対象 $G(s)$ の状態空間表現を行列 $A \in \mathbb{R}^{2r \times 2r}$ 、 $B_1 \in \mathbb{R}^{2r \times d}$ 、 $B_2 \in \mathbb{R}^{2r \times p}$ 、 $C_1 \in \mathbb{R}^{m \times 2r}$ 、 $D_{11} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ 、 $D_{12} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ 、 $C_2 \in \mathbb{R}^{t \times 2r}$ 、 $D_{21} \in \mathbb{R}^{t \times d}$ 、 $D_{22} \in \mathbb{R}^{t \times p}$ を用いて次のように記述する。

$$\dot{q} = Aq + B_1 w + B_2 u \quad (5-10)$$

$$z = C_1 q + D_{11} w + D_{12} u \quad (5-11)$$

$$y = C_2 q + D_{21} w + D_{22} u \quad (5-12)$$

そして、この一般化制御対象 $G(s)$ を次のように表す。

$$G(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (5-13)$$

ここで、

$$C_e(sI - A_e)^{-1} B_e + D_e \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & D_e \end{array} \right]$$

という表記法を用いることにする。

また、 B_1 、 D_{11} および D_{21} を H^∞ ノルム γ により、次のように正規化しておく。

$$B_1 \leftarrow \frac{B_1}{\gamma}$$

$$D_{11} \leftarrow \frac{D_{11}}{\gamma}$$

$$D_{21} \leftarrow \frac{D_{21}}{\gamma}$$

このように正規化したとき、 H^∞ 制御問題における仕様2)のノルム条件を次式のように記述できる。

$$\|T_{zw}\|_\infty < 1 \quad (5-14)$$

式(5-13)の一般化制御対象に対し、前述の仕様1)および2)を満足する H^∞ 制御系を設計する理論を示す。 H^∞ 制御系の解法としては、Glover と Doyle による状態空間において2つのリカッチ方程式を解くことにより、動的補償器を設計する方法を用いる。まず、 H^∞ 制御系の解法において、次の仮定を設ける。

S-1) (A, B_2) :可安定

S-2) $\text{rank } D_{12} = p$ (列フルランク)

S-3) $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = 2r + p$ (列フルランク); $\forall \omega \in \mathfrak{R}$

S-1') (A, C_2) :可検出

S-2') $\text{rank } D_{21} = t$ (行フルランク)

S-3') $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = 2r + t$ (行フルランク); $\forall \omega \in \mathfrak{R}$

次に、理論展開を容易にするために、一般性を失わずに以下の仮定が成立するものとして、 H^∞ 制御問題の解を与える。

$$D_{11} = 0 \quad (5-15)$$

$$D_{22} = 0 \quad (5-16)$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

$$D_{21} = [0 \quad I] \quad (5-18)$$

$$D_{12}^T C_1 = 0 \quad (5-19)$$

$$B_1 D_{21}^T = 0 \quad (5-20)$$

そして、状態空間問題で解を与えるために重要となる、リカッチ方程式に関して次のような定義を与える。次のリカッチ方程式、

$$PA + A^T P - PRP + Q = 0 \quad (5-21)$$

の解 P を以下のように記述する。

$$P = \text{Ric}\{H\} \quad (5-22)$$

ここで、 H は以下のハミルトン行列である。

$$H = \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (5-23)$$

以上の前提のもとで、 H^∞ 制御問題が可解であるための必要十分条件は次のように与えられる。

H^∞ 問題が可解、すなわち G を内部安定化し式(5-14)を満足するコントローラ $K(s)$ が存在するための必要十分条件は、

$$X = \text{Ric}\{H_X\}, \quad Y = \text{Ric}\{H_Y\} \quad (5-24)$$

が存在し、

$$X \geq 0, Y \geq 0, \lambda_{\max}(XY) < 1 \quad (5-25)$$

を満たすことである。ここで、 $\lambda_{\max}(\cdot)$ は行列の最大固有値を表し、 H_X と H_Y は次式で与えられる。

$$H_X = \begin{bmatrix} A & B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \quad (5-26)$$

$$H_Y = \begin{bmatrix} A^T & C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (5-27)$$

H^∞ 制約を満たす補償器は唯一ではなく、フリーパラメータを用いてパラメトライズされている。通常このフリーパラメータを零とおいた中心解が採用され、次式によりコントローラ $K(s)$ を設計する。

$$\dot{q}_{cp} = A_{cp} q_{cp} + B_{cp} y \quad (5-28)$$

$$u = C_{cp} q_{cp} + D_{cp} y \quad (5-29)$$

ここで、 A_{cp} 、 B_{cp} 、 C_{cp} 、 D_{cp} は次式で与えられる。

$$A_{cp} = A + B_1 B_1^T X - B_{cp} C_2 + B_2 C_{cp} \quad (5-30)$$

$$B_{cp} = (Y^{-1} - X)^{-1} C_2^T \quad (5-31)$$

$$C_{cp} = -B_2^T X \quad (5-32)$$

$$D_{cp} = 0 \quad (5-33)$$

$Ric\{H_X\}$ と $Ric\{H_Y\}$ は、LQG 制御における状態フィードバックゲインとフィルタゲインを求める2つのリカッチ方程式に対応している。実際に、 H^∞ 制御の中心解は、状態フィードバックとオブザーバ（最悪外乱推定を含む）という構造を持っていることが明らかにされている。

上記の H^∞ 制御問題の解法は、式(5-15)~(5-20)の仮定を必要とするが、Safonov と Limebeer による Loop Shifting の方法⁽²⁵⁾を用いることにより、これらの制限を取り除くことができ、本研究で作成した計算機プログラムはこの方法に基づいている。

また、 γ の最小値の決定については、設計者が任意の γ を与え H^∞ 理論の解の存在性を調べ、その繰り返しにより γ の最小値を探索する (γ -Iteration) のが現状である。本論文の第7章では、非線形探索理論の一手法であるコンプレックス法を用いて、 γ の最小値を探索する方法を示している。

5.2.4 周波数重み関数を用いた周波数応答の整形

ここでは、制御性能およびロバスト性能に関する周波数重み関数を用いた H^∞ 制御系の設計法について説明する。ロバスト性を支配する評価関数として、 w から u の間の伝達関数 T_{uw} を考え、制御性を支配する評価関数として、 w から y までの伝達関数 T_{yw} を考える。ここで、 $D_{22} = 0$ とすると、 T_{uw} 、 T_{yw} はそれぞれ次のようになる。

$$T_{uw} = K[I - C_2(sI - A)^{-1}B_2K]^{-1} \times [C_2(sI - A)^{-1}B_1 + D_{21}] \quad (5-34)$$

$$T_{yw} = [I - C_2(sI - A)^{-1}B_2K]^{-1} \times [C_2(sI - A)^{-1}B_1 + D_{21}] \quad (5-35)$$

T_{yw} および T_{uw} はそれぞれ整定関数、相補感度関数と呼ばれる。制御性能の向上のためには T_{yw} を、ロバスト性向上のためには T_{uw} を低減させる必要がある。

まず、ロバスト性について考える。外乱励振力 w がシステムに作用する場合に、安定なプラント $G(s)$ に対して図5-2のような乗法的誤差を考える。このとき、プラントは次のように表せる。

$$G'(s) = G(s)(I + \Delta m(s)) \quad (5-36)$$

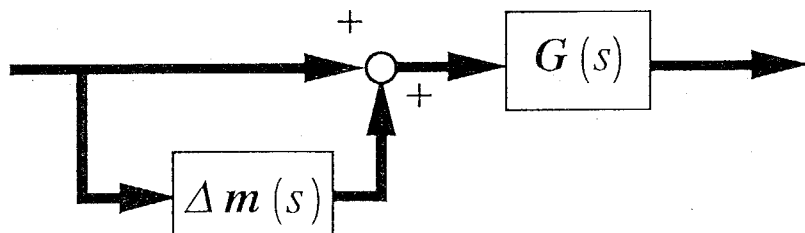


図5-2 乗法的誤差を有するシステム

式(5-36)に対して閉ループ系が安定であるためには、スモールゲイン定理より

$$\|\Delta m(s)T_{uw}(s)\|_{\infty} < 1 \quad (5-37)$$

が成り立てばよい。すなわち、このシステムを不安定にする $\Delta m(s)$ の最小サイズは、次のように与えられる。

$$\bar{\sigma}(\Delta m(j\omega)) = \frac{1}{\bar{\sigma}(T_{uw}(j\omega))} \quad (5-38)$$

以上のことから、周波数重み関数 $W_2(s)$ を用いて制御系の安定余裕についての仕様を、次式のように与えることができる。

$$\|W_2(s)T_{uw}(s)\|_{\infty} < 1 \quad (5-39)$$

もし、 $\bar{\sigma}[\Delta m(j\omega)] < \bar{\sigma}[W_2(j\omega)]$ であり、式(5-39)が満たされれば、この系は Δm の乗法的変動に対してロバスト安定となる。

次に、 w から y までの伝達関数 T_{yw} について考える。これは、整定関数と呼ばれ、振動現象を支配する周波数領域で小さくすることにより制振効果を高めることができる。したがって、この周波数領域で大きなゲインをもつ重み行列 $W_1(s)$ を導入し、次式の評価関数を定義する。

$$\|W_1(s)T_{yw}(s)\|_{\infty} < 1 \quad (5-40)$$

H^{∞} 制御系を設計する際には、制御性能とロバスト性能とのtrade-offを考慮して、 T_{yw} および T_{uw} にかかる重み関数 W_1 、 W_2 を設定する。そして、次式を満足するような H^{∞} 制御系を設計する問題となる。

$$\left\| \begin{array}{c} W_1 T_{yw} \\ W_2 T_{uw} \end{array} \right\|_{\infty} < 1 \quad (5-41)$$

重み関数を導入したときのシステムのブロック線図を図5-3に示す。ここで、ロバスト性能を向上させるためには、 T_{uw} に関しては高周波領域で小さくなるように設計すれば、高次モードによるスピルオーバー現象を抑制することができる。したがって、重み関数 W_2 は低周波領域で小さく、高周波領域で大きくなるように設定する。このような重み関数を設定することにより、図5-2に示すような、システム $G(s)$ に対し乗法的誤差を有する場合の閉ループ系の安定性の保障、すなわちロバスト性をもたせることが可能になる。また、制振性能を向上させるためには、 T_{yw} に関して、振動挙動を支配する低周波領域で小さくなることが望ましい。したがって、重み関

数 W_1 は低周波領域で大きくし、高周波領域で小さくなるように設定する。

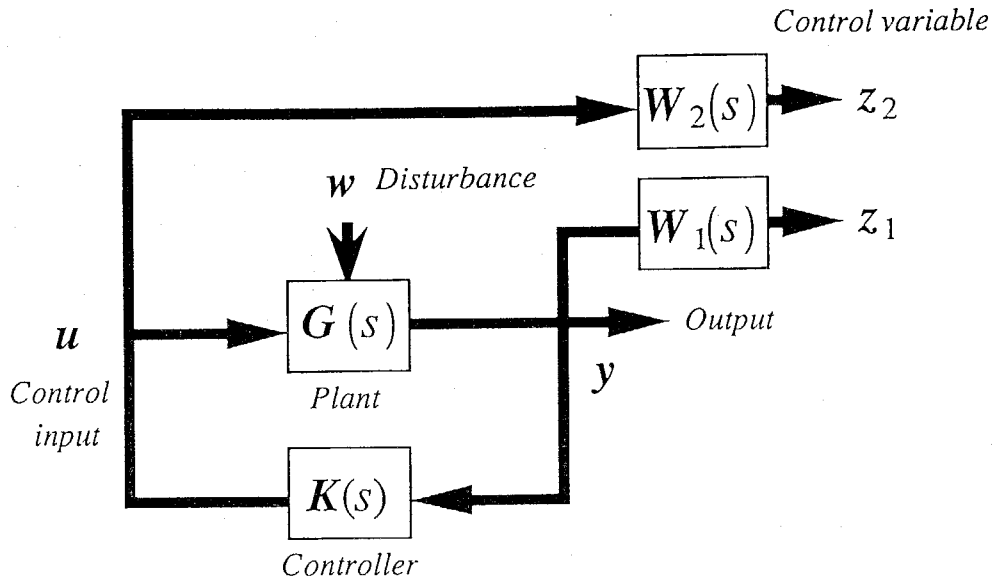


図5-3 周波数重み付き H^∞ 制御問題

5.3 モード解析によるモデル化と H^∞ 制御系の設計

ここでは、制御対象をFEMもしくは実験モード解析によりモデル化する場合を考える。前者のFEMによりモデル化する場合、系の自由度が大きくなりすぎるため、このモデルを制御系設計のための低次元システムに変換する必要がある。そこで、モード座標によるシステムの低次元化を行う。後者の実験モード解析によりモデル化する場合には、すでにモード座標上における低次元システムとして同定されているので、このシステムをそのまま制御系設計に用いればよい。本手法による制御系設計の流れを図5-4に示す。

FEMによりモデル化された、 n 自由度システムの運動方程式は式(4-1)となる。ここで、システムの固有モード行列 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times r}$ および固有値行列 $\Lambda = \text{diag}(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_r^2) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ を用いてシステムをモード座標に低次元化する。このとき、制御対象の状態方程式は式(5-10)のように記述される。

$$\dot{q} = Aq + B_1 w + B_2 u \quad (5-10)$$

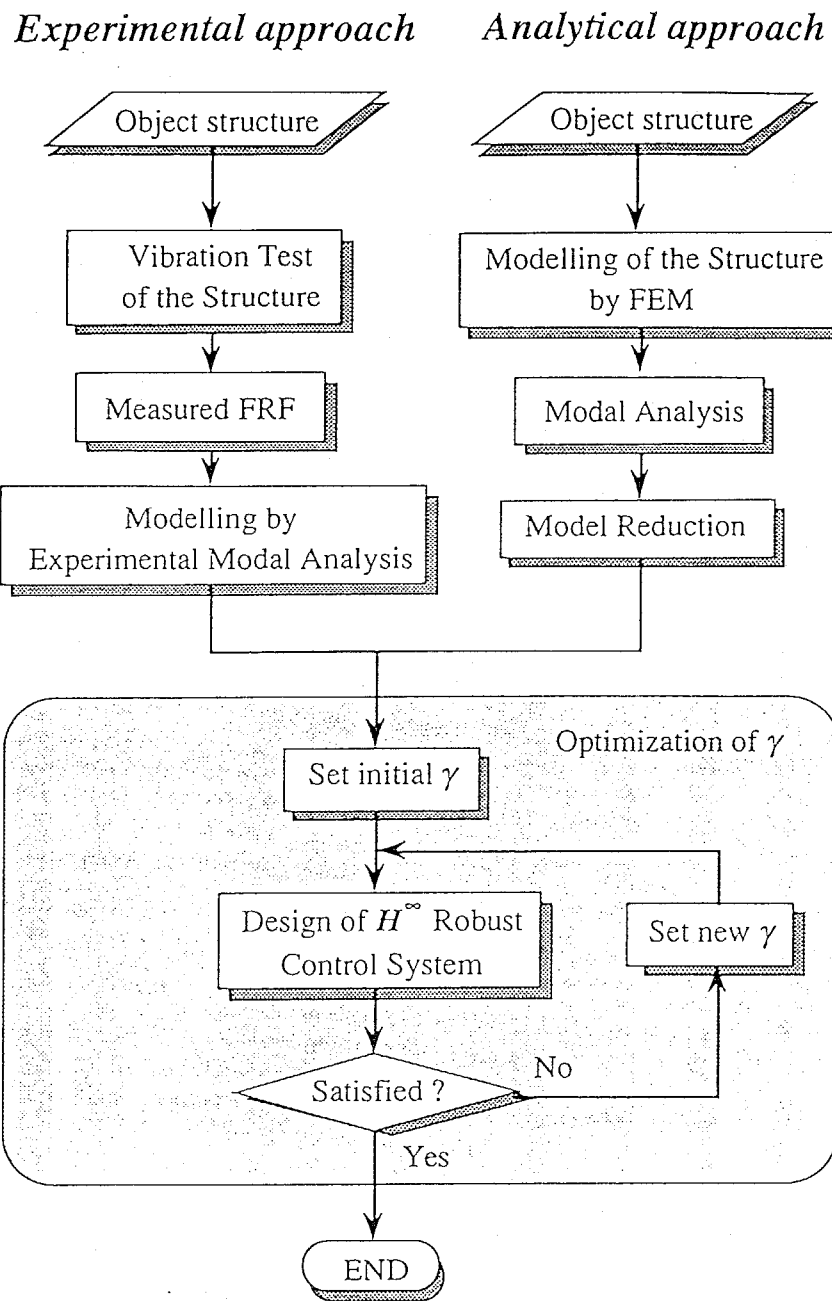


図5-4 モード解析による H^∞ 制御系設計の流れ図

ここで、状態ベクトル $q \in \mathbb{R}^{2r}$ 、各係数行列 $A \in \mathbb{R}^{2r \times 2r}$ 、 $B_1 \in \mathbb{R}^{2r \times d}$ 、 $B_2 \in \mathbb{R}^{2r \times p}$ の成分は式(4-4)に示されている。

制御量 z を行列 $C_{1s} \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$ 、 $D_{11} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ および $D_{12} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ を用いて次式のように表す。

$$z = C_{1s}q_s + D_{11}w + D_{12}u \quad (5-42)$$

ただし、制御量の数を m とする。また、 $q_s = (x^T, \dot{x}^T)^T$ である。式(5-42)をモード座標を用いて式(5-11)として記述する。

$$z = C_1q + D_{11}w + D_{12}u \quad (5-11)$$

ただし

$$C_1 = C_{1s}\Psi \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}$$

システムの入力方程式を行列 $C_{2s} \in \mathbb{R}^{t \times 2n}$ 、 $D_{21} \in \mathbb{R}^{t \times d}$ および $D_{22} \in \mathbb{R}^{t \times p}$ を用いて次式で表す。

$$y = C_{2s}q_s + D_{21}w + D_{22}u \quad (5-43)$$

ただし、出力の数を t とする。式(5-43)をモード座標上で式(5-12)のように記述する。

$$y = C_2q + D_{21}w + D_{22}u \quad (5-12)$$

ただし、

$$C_2 = C_{2s}\Psi$$

である。

ここで、式(5-10)、(5-11)、(5-12)をまとめて式(5-13)のように一般化制御対象を記述できる。また、式(5-13)において、 $D_{11} = 0$ 、 $D_{22} = 0$ とする。

次に、周波数重み関数を用いた一般化制御対象の記述を行う。制御量を $z = (z_1^T, z_2^T)^T$ とし、 z_1 および z_2 を周波数重み関数 $W_1(s)$ 、 $W_2(s)$ を用いて次式で記述する。

$$z_1(s) = W_1(s)y(s) \quad (5-44)$$

$$z_2(s) = W_2(s)u(s) \quad (5-45)$$

このように、 z_1 は出力 y に重み関数 W_1 がかった制御量であり、制御性を評価し、 z_2 は制御入力 u に重み関数 W_2 がかった制御量であり、ロバスト性能を評価する。そして、重み関数 $W_1(s)$ 、 $W_2(s)$ を次式で表す。

$$W_1(s) = C_{w1}(sI - A_{w1})^{-1}B_{w1} + D_{w1} \quad (5-46)$$

$$W_2(s) = C_{w2}(sI - A_{w2})^{-1}B_{w2} + D_{w2} \quad (5-47)$$

ここで、重み行列 $W_1(s)$ 、 $W_2(s)$ の次数をそれぞれ g_1 、 g_2 とする。式(5-46)、(5-47)を状態方程式として記述し、重み関数を含めた形で一般化制御対象 $P(s)$ を記述すると次式となる。

$$P(s) \triangleq \left[\begin{array}{ccc|c|c} A & 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ B_{w1}C_2 & A_{w1} & 0 & B_{w1}D_{21} & 0 \\ 0 & 0 & A_{w2} & 0 & B_{w2} \\ \hline D_{w1}C_2 & C_{w1} & 0 & D_{w1}D_{21} & 0 \\ 0 & 0 & C_{w2} & 0 & D_{w2} \\ \hline C_2 & 0 & 0 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (5-48)$$

このシステムに対し、 H^∞ 理論を用いて式(5-14)を満足する安定化補償器 $K(s)$ を行列 $A_{cs} \in \mathbb{R}^{g \times g}$ 、 $B_{cs} \in \mathbb{R}^{g \times t}$ 、 $C_{cs} \in \mathbb{R}^{p \times g}$ および $D_{cs} \in \mathbb{R}^{p \times t}$ を用いて次式として設計する。

$$K(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_{cp} & B_{cp} \\ \hline C_{cp} & D_{cp} \end{array} \right] \quad (5-49)$$

ただし、 $g = 2r + g_1 + g_2$ である。

上述の定式化はすべてモード座標上で行っており、振動実験で得られたFRFから実験モード解析によりモード特性を同定し、システムを記述することにより、 H^∞ 制御系を設計することが可能となる。

5.4 平板の振動制御への適用

5.4.1 FEMに基づく設計

図4-2に示す平板(ステンレス鋼)を制御対象とし、 H^∞ 制御手法を用いて振動制御を行う。まず、同図に示すようにFEMによりこの平板のモデル化を行う。そして、制御系の構成としては節点19および72の変位と速度を検出し、同位置に設置されたボイスコイルアクチュエータにより振動制御を行う。外乱 w は節点19と72に作用する外力およびセンサー雑音とする。また、式(5-49)で記述されるコントローラは連続系に対する H^∞ 理論により設計されたものであるが、実際にデジタル制御を行うときには、次の双一次変換を用いて連続系 s から離散系 z への変換を行う。

$$s = \frac{2z-1}{Tz+1} \quad (5-50)$$

ここで、 T はサンプリング時間である。

この平板の節点72における自己コンプライアンスを図5-5に示す。た

だし、ここでの入出力は、それぞれボイスコイルアクチュエータのアンプに入力される電圧[V]およびギャップセンサーアンプの出力電圧[V]とする。破線が計算結果、実線が実験結果であるが両者はよく一致している。同図から400Hz以下に5つの共振ピークが現れている。また、400Hz以上の周波数領域には、特に顕著な共振ピークが現れないことが実験結果から明らかになった。したがって、5次以下の固有モードを採用し($r=5$)、前述のモード座標で記述したシステムに H^∞ 制御理論を適用し、制御系の設計を行う。なお、構造物の減衰に関しては、実験結果からモード特性を同定することにより得られたモード減衰比を用いて、式(5-10)の行列 A の対応する成分を計算する。

まずはじめに、制御量 z を節点72の変位 y_{72} および節点19と72の制御入力 u_{19} 、 u_{72} とする。

$$z = (y_{72}, u_{19}, u_{72})^T \quad (5-51)$$

したがって、今回は重み関数 W_1 、 W_2 を設定しない、すなわち $W_1 = I_{g_1}$ 、 $W_2 = I_{g_2}$ として H^∞ 制御問題を解くことになる。また、出力 y は節点19と72の変位および速度、そして雑音との和になる。

$$y = (y_{19}, y_{72}, \dot{y}_{19}, \dot{y}_{72})^T + [0 \quad I_4]w \quad (5-52)$$

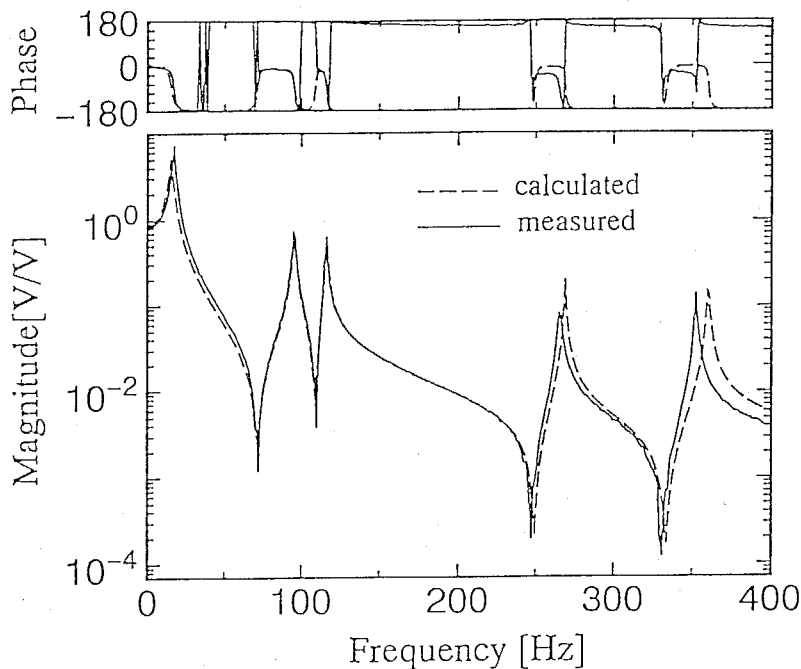


図5-5 非制御時の節点72のFRF

実際の設計では、前述のように固有モード行列 $\Phi \in \mathbb{R}^{480 \times 5}$ を用いて式(5-51)、(5-52)をモード座標に展開し、 H^∞ 制御手法を適用する。ここで、5次までの固有モードを用いてシステムをモデル化しているため、コントローラ $K(s)$ の次数は10となる。以上の条件のもとで、 H^∞ 制御系の設計を行った。 γ -Iterationの結果、外乱 w から制御量 z までの伝達関数行列 T_{zw} の H^∞ ノルムの最小値は0.25のように求められた。このときのシステムの伝達関数 T_{zw} の各周波数における最大特異値(σ -プロット)を図5-6に示す。そして、節点72に作用する外乱励振力 w_{72} に対する同点の応答 y_{72} の伝達関数を図5-7に示す。点線が非制御の実験結果、破線が制御時の計算結果、実線が制御時の実験結果である。実験はすべてサンプリング周波数5kHzで行っている。 H^∞ 制御によって1次の共振ピークが顕著に抑えられており、それ以降の周波数領域では非制御時の特性とほとんど変わらないことがわかる。すなわち、この制御に関しては、共振時の応答レベルが顕著に高く現れている1次の共振ピークのみ抑えることにより、伝達関数行列の H^∞ ノルムの低減を実現しており、他の共振ピークにはほとんど制振効果を及ぼしていないことになる。また、同図から計算結果と実験結果はよく一致していることがわかる。図5-8に w_{72} と u_{19} との間の伝達関数を示すが、計算結果と実験結果はよく一致している。そして、同図から低周波数領域で制御エネルギーが大きく消費されており、高周波数領域にいくにしたがって制御エネルギーの消費量は低減していることがわかる。このときの節点72における衝撃応答の実験結果を図5-9に示す。同図から、制御時の制振効果が確認されているが、高次モードの振動収束性はあまりよくないことがわかる。次に、この制御系のロバスト性について検討する。

ボイスコイルアクチュエータに入力する増幅器の倍率をシステムが不安定になるまで大きくする。この操作は図5-2に示すように、システムに乗法的誤差を与えていることと等価である。システム $G(s)$ に対し、不安定になる限界のシステム誤差 $\Delta G(s)$ の実測結果を図5-10に示す。また、このシステム誤差を与えたときの節点72の衝撃応答の実験結果を図5-11に示すが、システムが不安定になっていることがわかる。この特性のフーリエ変換の結果、5次モードが不安定になっていることが明らかになった。次に、ロバスト性能を向上させるための H^∞ 制御系の設計を行う。

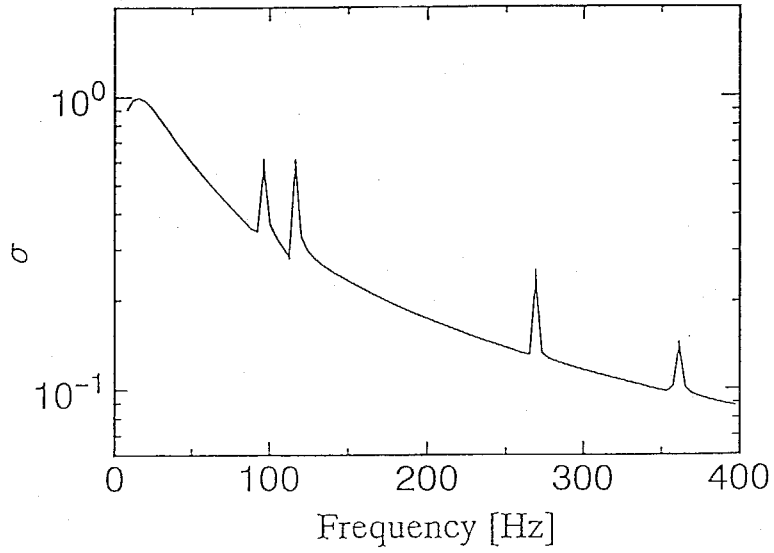


図5-6 H^∞ 制御系の σ プロット

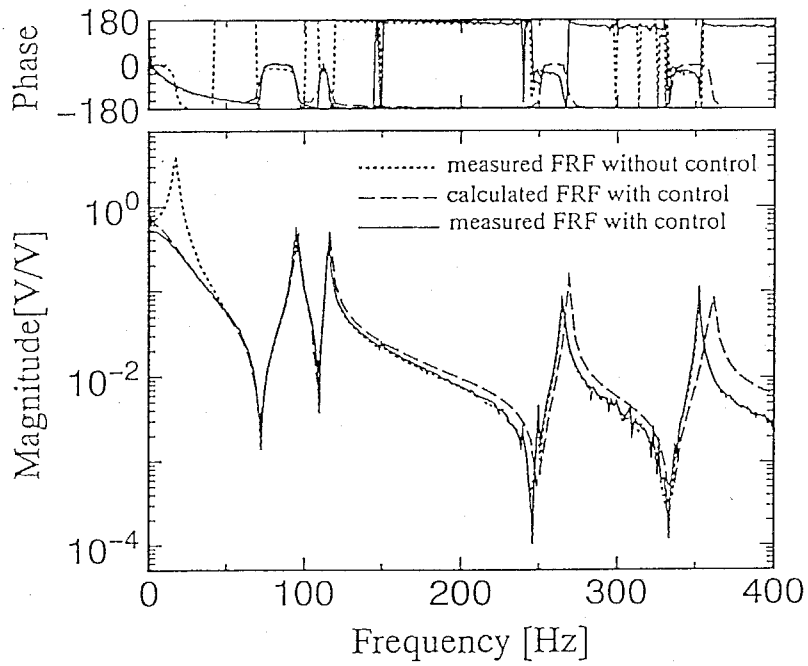


図5-7 w_{72} から y_{72} までのFRF

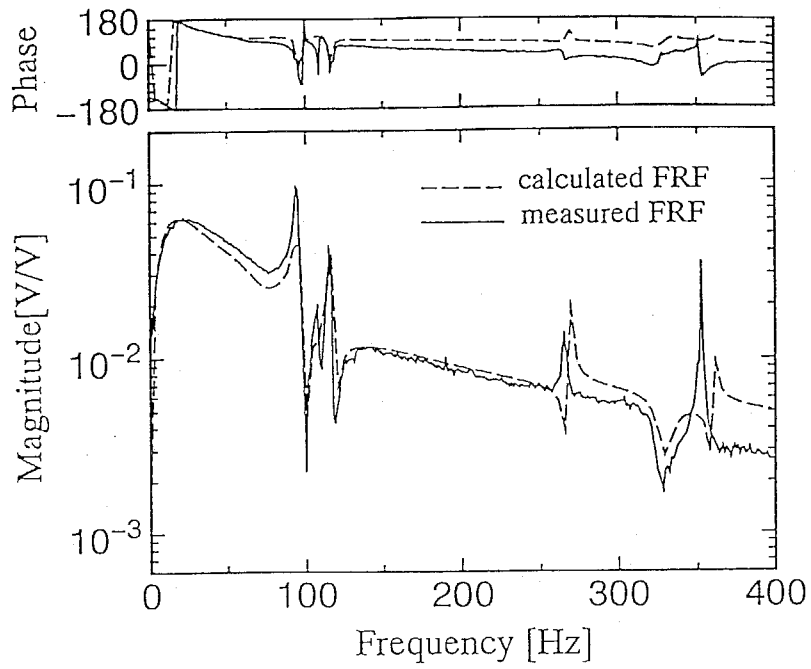


図 5-8 w_{72} から u_{19} までの FRF

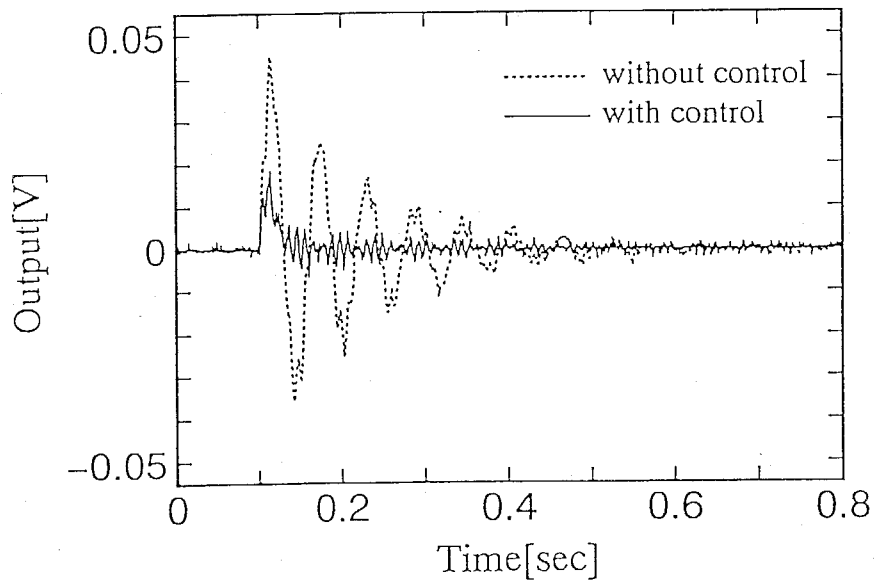


図 5-9 節点 72 における衝撃応答の実験結果

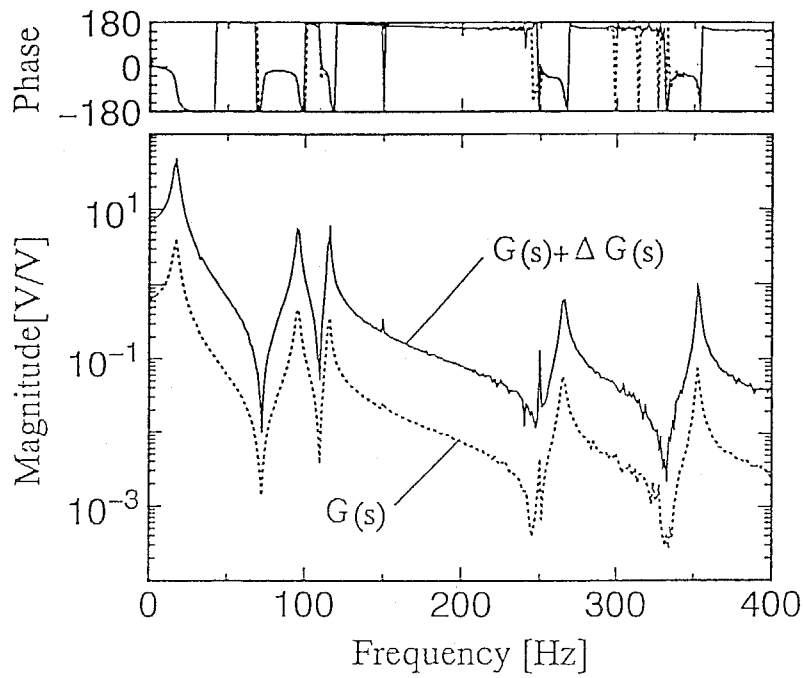


図5-10 システム $G(s)$ に対し不安定となる限界のシステム誤差 $\Delta G(s)$ の計測結果

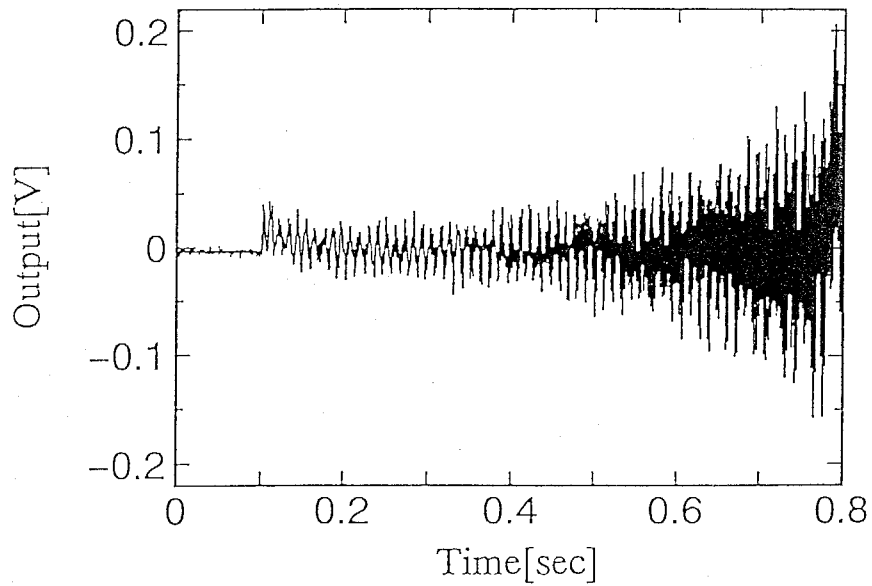


図5-11 システム誤差を与えたときの節点72の衝撃応答の実験結果

式(5-51)の制御量 z に対して、 y_{72} に重み関数 W_1 を、 u_{19} 、 u_{72} に重み関数 W_2 を与え、式(5-14)を満足するコントローラを設計することを試みる。重み関数 W_1 、 W_2 を次のように設定する。

$$W_1(s) = W_{e1}(s)\gamma \quad (5-53)$$

$$W_2(s) = \begin{bmatrix} W_{e2}(s) & 0 \\ 0 & W_{e2}(s) \end{bmatrix} \quad (5-54)$$

ただし、

$$W_{e1}(s) = \frac{630}{s+630} \quad (5-55)$$

$$W_{e2}(s) = \frac{20s}{s+1880} \quad (5-56)$$

$W_{e1}(s)$ 、 $W_{e2}(s)$ の周波数特性を図5-12に示す。この重み関数の意味は、低周波領域で制御性能を向上させ、高周波領域で制御エネルギーを小さくすることである。すなわち高次モード、特に5次モードを含む高周波数領域で W_{e2} の重みを大きくすることにより、ロバスト性を向上させることである。式(5-53)の γ の最大値を γ -Iterationにより探索する。なお、このときのコントローラの次数は13となる。 H^∞ 制御系を設計した結果 γ の最大値は1.0となり、 w_{72} 、 y_{72} との間の伝達関数および w_{72} と u_{19} との間の伝達関数はそれぞれ図5-13、5-14のようになった。図5-13から低周波領域の応答が大きく抑えられており、図5-14から高周波領域の制御エネルギーが大きく抑えられていることがわかる。そして、図5-10と同じシステム誤差を制御対象に与えたときの、節点72の衝撃応答の実験結果は図5-15のようになった。同図から安定性は維持されており、ロバスト性が向上していることがわかる。

次に、制御性能をさらに向上させることを考える。図5-9、5-15の結果から、100Hz付近に存在する2次もしくは3次モードの成分の残留振動があまり抑えられていないことがわかる。そこで、以下の重み関数を設定し H^∞ 制御系の設計を行う。

$$W_{e1}(s) = \frac{5.7 \times 10^5}{s^2 + 150s + 5.7 \times 10^5} \quad (5-57)$$

$$W_{e2}(s) = \frac{s}{s+2200} \quad (5-58)$$

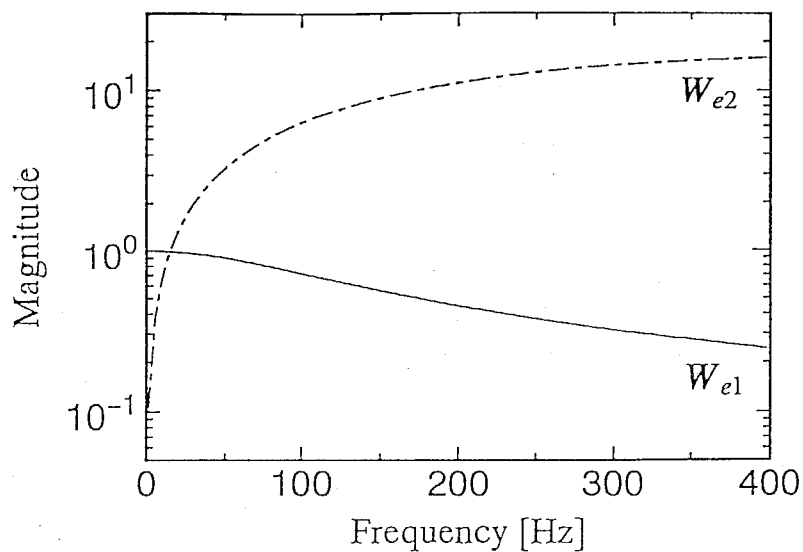


図5-12 周波数重み関数のFRF
(式(5-55)、(5-56))

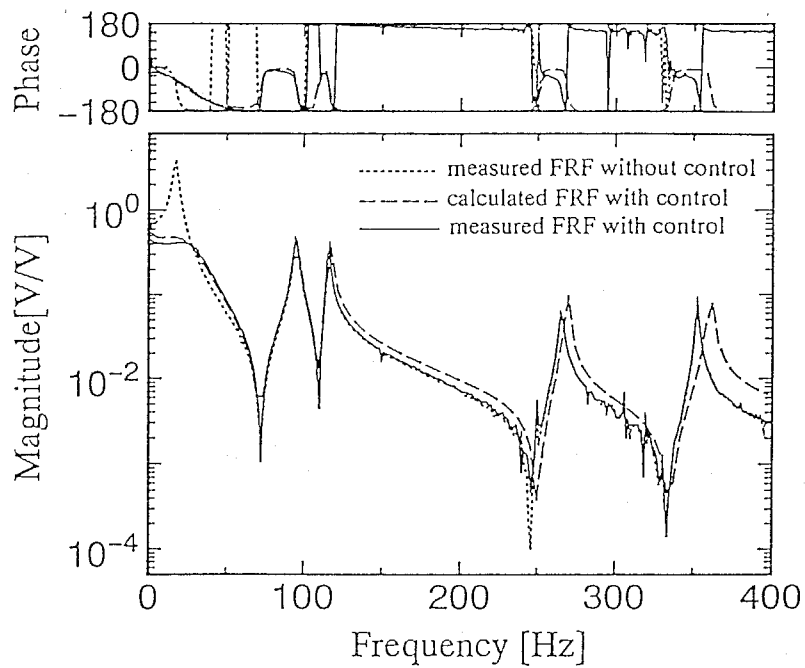


図5-13 w_{72} から y_{72} までのFRF

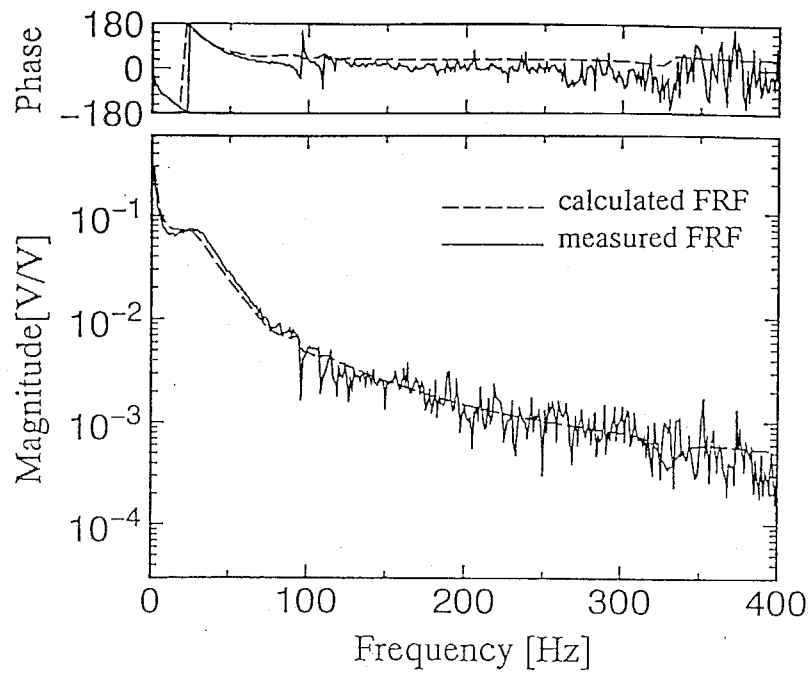


図5-14 w_{72} から u_{19} までのFRF

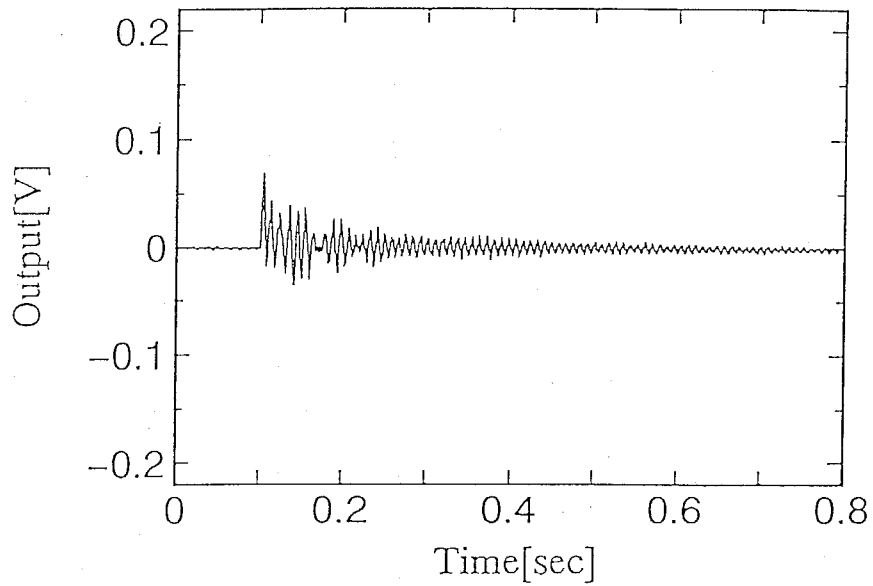


図5-15 システム誤差を与えたときの節点72の衝撃応答の実験結果

この重み関数の周波数特性は図5-16のようになる。同図から $W_{e1}(s)$ の重みが120Hz付近で大きくなるように設定し、1次共振と同様に2次および3次の共振をも抑えることを試みる。 W_{e2} については、前回と同様に高周波数領域で大きくなるように設定する。このときのコントローラの次数は14となる。 H^∞ 制御系を設計した結果、 γ の最大値は0.21となった。このときの w_{72} と y_{72} との間の伝達関数は図5-17のようになる。同図から、1次共振が大きく抑えられていると同時に、2次および3次の共振もある程度抑えられていることがわかる。このときの節点72の衝撃応答の実験結果を図5-18に示すが、残留振動が大きく低減されており、振動の収束性が改善されていることがわかる。また、節点72に白色雑音の外乱が作用したときの同点の応答の実験結果を図5-19に示すが、応答レベルの低減が実現されていることがわかる。

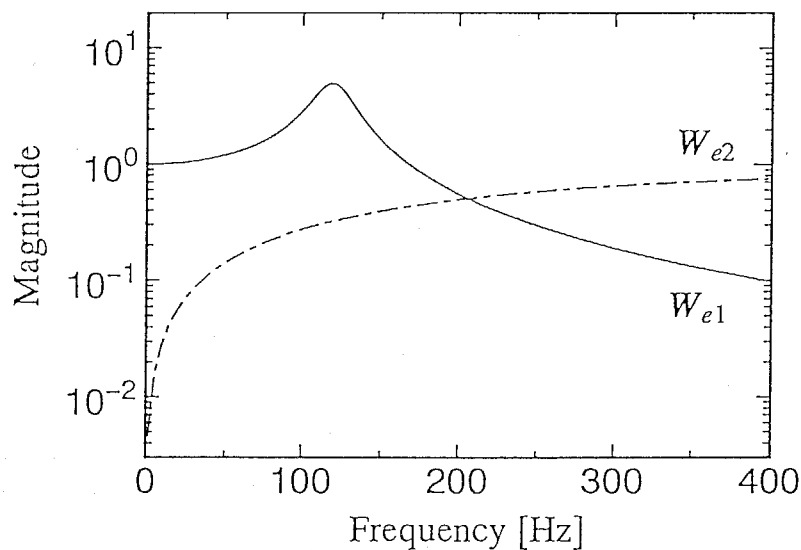


図5-16 周波数重み関数のFRF
(式(5-57)、(5-58))

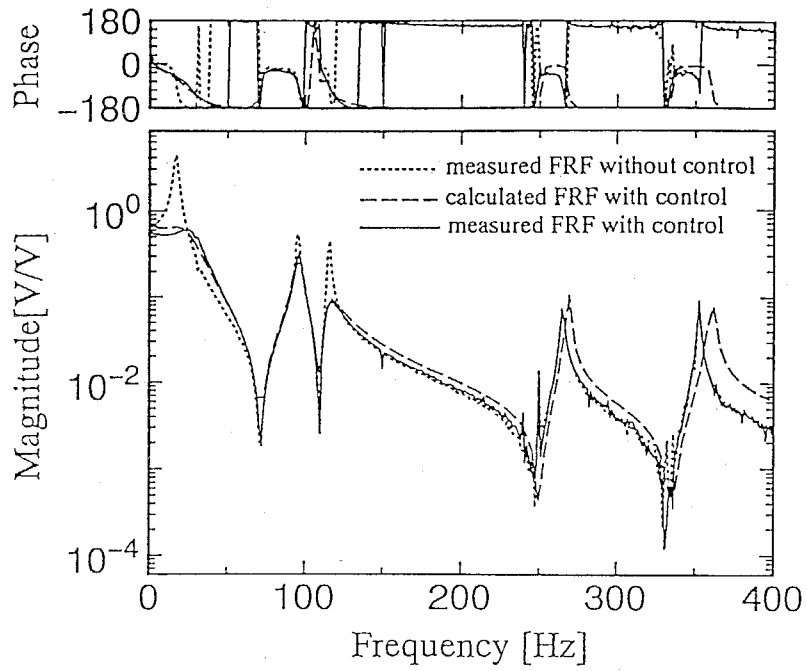


図 5-17 w_{72} から y_{72} までの FRF

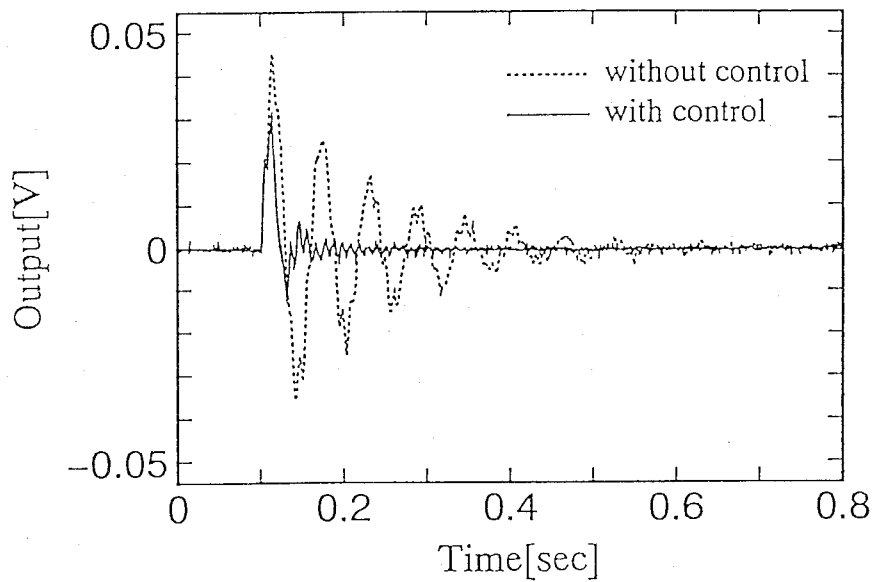


図 5-18 節点 72 における衝撃応答の実験結果

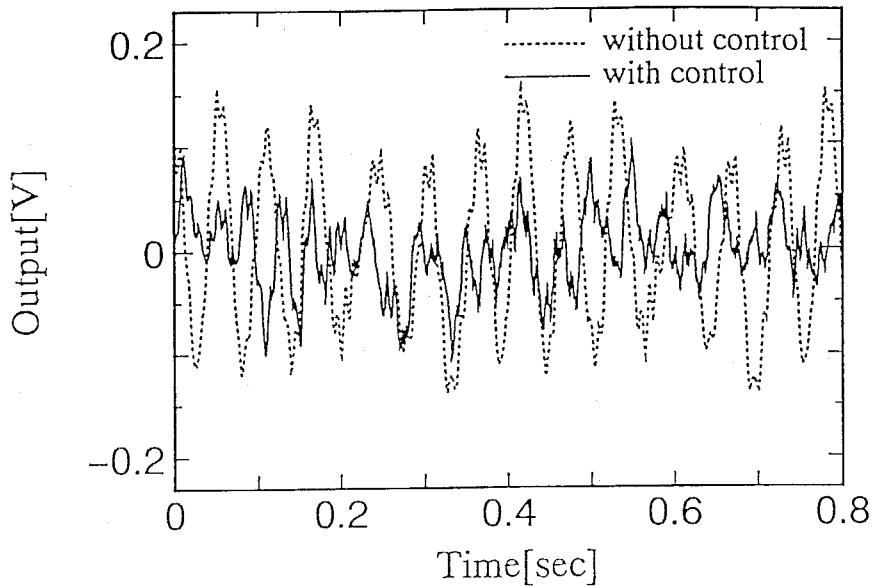


図5-19 白色雑音外乱に対する節点72の応答の実験結果

5.4.2 実験モード解析に基づく設計

実験モード解析を用いて制御対象をモデル化し、 H^∞ 制御系を設計した結果を示す。まず、節点19と72の計測されたFRFから実験モード解析によりシステム同定を行う。ここでは、FEMによる解析と同様に5次までのモード特性を同定した。そして、同定されたモード特性は表4-1に示されている。この結果を用いて式(5-48)の一般化制御対象を記述し、 H^∞ 制御系を設計することになる。結果の一例として、上述のFEMモデルに対し、式(5-57)、(5-58)の重み行列を設定したときと同条件で H^∞ 制御系の設計を行った。その結果、 γ の最大値は0.21となった。このときの w_{72} と y_{72} の間のFRFを図5-20に示す。同図から、1次の共振が抑えられておると同時に、2次および3次の共振もある程度抑えられており、図5-17の結果ともよく一致していることがわかる。また、節点72の衝撃応答の実験結果を図5-21に示すが、残留振動が大きく低減されており、振動の収束性が改善されていることがわかる。

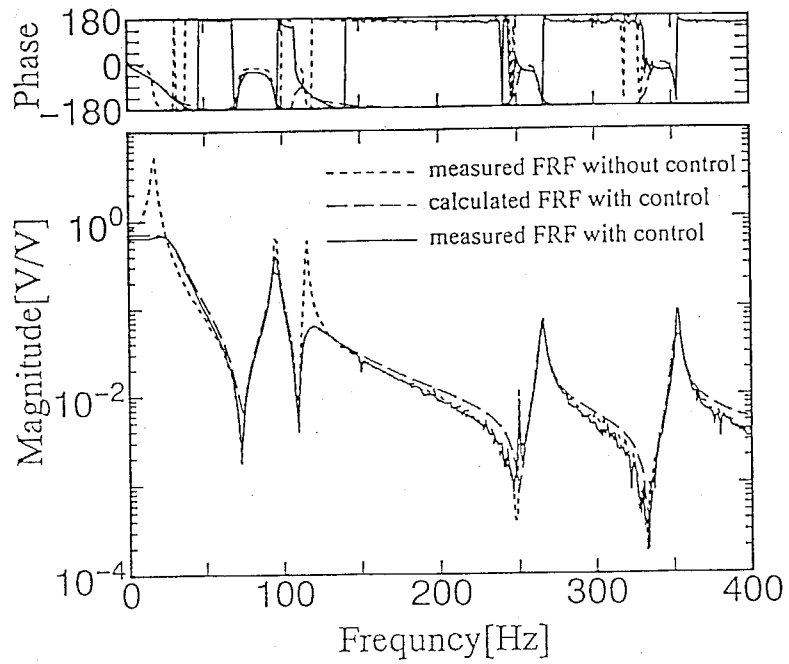


図 5-20 w_{72} から y_{72} までの FRF

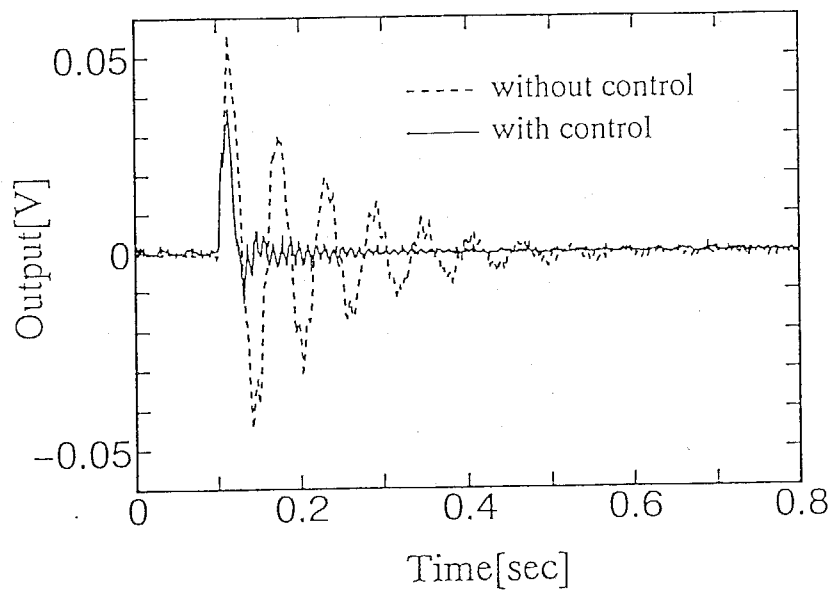


図 5-21 節点 72 における衝撃応答の実験結果

5.5 結言

本研究では、モード解析に基づいた一般化制御対象の記述を行い、連続体である平板の振動制御に H^∞ 制御手法を適用する方法を示し、以下の結論を得た。

- (1) 平板のような連続体をFEMでモデル化し、モード座標を用いて低次元化したシステムに出力フィードバック系の H^∞ 制御手法を適用し、振動制御を行った結果、良好な制振特性が実現された。
- (2) プラントの特性に故意に不確定性を与えたときの、閉ループシステムの制御性能およびロバスト性能を評価した。
- (3) 周波数重み関数を用いた H^∞ 制御系を設計することにより、制御性能およびロバスト性能の向上を実現した。
- (4) H^∞ 制御系の動特性を解析および実験の両面から検討した結果、すべての結果について両者の良い一致と H^∞ 制御手法の有効性が検証された。
- (5) 実験モード解析により同定されたシステムを用いて H^∞ 制御系を設計した結果、その有効性および実用性が明らかになった。

第6章 感度解析による構造系と制御系の同時最適設計

6.1 緒言

制御系を内蔵する機械が一般的なものとなりつつある現在、システムの高性能化を実現させるためには、構造系と制御系の同時最適化が重要になってきた。従来、制御特性の向上を図るために、外乱もしくは構造系のパラメータ変動に対するロバスト安定化に関する研究^{(12)~(14)}などが行われている。これら一連の研究では、状態変数と制御入力だけからなる2次形式評価関数の重み行列もしくはフィードバックゲインなどの制御側のパラメータのみを調整することにより、制御特性の向上を図ることを検討している。しかしこの場合、希望する制御特性を実現させるためには、制御系の負担が大きくなり、その設計が困難な場合が生じかねない。

これに対し、構造系のパラメータをも考慮した最適化の例として、最適状態フィードバック系における評価関数の中に構造系の質量などを導入し、その評価関数の低減を目的とした研究^{(34)~(36)}が行われている。しかし、これらの研究では、システムの周波数特性を対象にした構造系と制御系の同時最適化、およびシステムを低次元化する際に省略した高次モードの安定性については検討されていない。

そこで本章では、感度解析を用いることにより、制御系と構造系の設計変数を同時に最適化する方法を提案する。すなわち、従来の評価関数を用いた時刻歴応答の最適化と、希望する周波数特性を実現させるための最適化の両方を、感度解析により行う方法を示す。ここでは、2つの最適化問題を考える。一つは、目的関数である閉ループ系の動特性を希望する目標値に一致させる最適化⁽⁶³⁾であり、もう一つはシステムの低次元化で無視した固有モードの安定性を保障しながら、目的関数を最小にする最適化⁽⁶⁴⁾である。

目的関数を目標値に一致させる最適化では、システムの時刻歴応答を支配する2次形式評価関数および周波数応答を支配する閉ループシステムのFRFのゲインと位相、極および零点を目的関数として採用し、擬似最小二乗法を用いてこれらの目的関数を希望する値に一致させる方法を示す。この最適化を実行するために、構造系および制御系の設計変数に対するこれらの目的関数の感度を算出する理論を示す。そして、質量とばねからなる多自由度系に本手法を適用し、その有効性を

検証する。

次に、構造系をモード座標に縮小変換して制御系を設計した際の高次モードの安定性の保障、および外乱の周波数特性を考慮した同時最適設計法を示す。構造系のモデル化にはFEMを適用し、モード座標を用いてモデルの低次元化を行う。そして、着目する固有モードを採用し、それ以外の固有モードをすべて省略することによって、システムを低次元化し、最適レギュレータ理論により制御系を形成する。他方、無視した固有モードを含むより高次までの固有モードを用いて、モード座標に変換したシステムを実システムとして採用する。そして、先に得られた制御則を実システムに適用し、2次形式評価関数および実システムの極配置を最適化し、実システムの安定性が保障されるように、制御系および構造系を同時に最適設計する。本手法の特徴の一つはセンサーとアクチュエータの位置が異なる、すなわちコロケーションが成立しない場合でも制御系の設計が可能になることである。さらに、本手法では外乱の周波数特性を導入した拡張状態方程式に基づいて、同時最適化を行うことにより、外乱の周波数特性に応じた制振効果が実現できる。最適化を実行する際の設計変数としては、最適レギュレータ理論で用いる重み行列、およびFEMモデルの板厚を採用し、感度解析と非線形計画法により同時最適化を実行する。この最適化を実行する際に、前述の目的関数の感度を用いる。そして、FEMを用いた平板の振動制御に本手法を適用する。制振特性をシミュレーションおよび実験により調べ、本手法の有効性を検証する。

6. 2 制御系の構成と同時最適化の概念

システムのモデル化および制御系の設計法は、第4章の4.2.1で説明した方法と基本的には同じである。すなわち、 n 自由度の運動方程式を式(4-1)として作成し、制御系を設計するために式(4-2)のモード座標変換を行い、低次元システムの状態方程式を式(4-3)として記述する。また、出力方程式を式(4-6)として記述する。そして、最適レギュレータ理論により白色雑音外乱に対する最適フィードバックゲイン F を設計する。ただし、ここでも第4章と同様に出力の数 t と採用モード数の数 r との間に($2r = t$)の関係があるとし、物理座標における出力フィードバックを式(4-14)として実現する。

このような制御系設計理論に基づいて、以下では2つの同時最適化問題を考える。まず、目的関数である2次形式評価関数、FRFのゲイン

と位相、極および零点を設計者の希望する値に一致させる同時最適化を行う。これらの目的関数を自在に変更できれば、設計者の要求する時刻歴応答特性および周波数応答特性を実現することが可能になる。特に、閉ループシステムの極と零点を変更することにより、共振現象の回避および周期的外乱の除去が可能となり、制振性能の大幅な向上を実現できる。

上述のような、目的関数の変更を行うためには構造系のみ、もしくは制御系のみでの独立した最適化では実現困難である。すなわち、構造系単体としての減衰性能の低さは制御系により補う必要があるが、限られた制御エネルギーの下では制御系のみでの最適化で変更できる目的関数の範囲には限界があり、特に広い周波数帯域にわたって極と零点を自由に変更することは不可能に近く、むしろ構造系の変更により対処の方が効率的である場合が少なくない。このような観点から、構造系と制御系の特性が互いに深く干渉し合う系の性能向上を実現するためには、両者の設計の連携を図ることが不可欠であり、ここに制御系と構造系の同時最適設計の意義がある。

上記の目的関数を目標値に一致させる最適化においては、すべての状態をフィードバックすることを前提としており、自由度に対応するすべてのモードを用いて変換されたシステムに対し制御系を設計している。そこで、次に低次元化されたシステムに対し、制振性能の向上および省略した高次モードの安定性を保障する同時最適設計法を提案する。ここでは、連続体構造物をFEMでモデル化し、モード座標を用いてシステムを低次元化し出力フィードバック系を設計する。そして、制振性能として2次形式評価関数、および高次モードの安定性を保障させるために実システムの極配置を最適にするような、構造系と制御系の設計変数の最適解を同時に探索する。本手法により、センサーとアクチュエータの位置が異なる、すなわちコローケーションが成立しないシステムに対する同時最適化、および外乱の周波数特性を考慮した同時最適化を可能にしている。

6.3 動特性指定による同時最適設計法

ここでは、閉ループシステムの時刻歴応答特性を支配する2次形式評価関数、周波数応答特性を支配するFRFのゲイン、位相、極および零点を目的関数として採用する。そして、感度解析を用いて、これらの目的関数を希望する目標値に一致させる同時最適化を行う。この同

時最適化方法と、構造変数を含めた設計変数に対する感度解析法を以下に示す。

6.3.1 最適化問題の設定

変更すべき2次形式評価関数、FRFのゲイン、位相、極および零点のパラメータを縦に並べたベクトルを h とする。ここで、2次形式評価関数としては式(4-20)、(4-21)で定義されたものを用いる。そして、その目標値を h^* で表す。設計変数としては、構造系の質量行列 M_s 、剛性行列 K_s 、および最適レギュレータを設計するための重み行列 Q 、 R の成分とする。これらの設計変数をまとめて τ で表し、設計変数の変更量ベクトルを $\Delta\tau$ とする。一次感度のみを用いて、これら両者の関係を定式化すると次式となる。

$$h^* = h + T\Delta\tau \quad (6-1)$$

ここで、 T は h の τ に関する偏微分により構成されるヤコビアン行列である。本研究では式(6-1)から $\Delta\tau$ を決定するために、変更するパラメータ h の次元よりも設計変数 τ の次元の方が大きい場合を考え、 $\Delta\tau^T\Delta\tau$ で与えられる変更量のノルムが最小になるような擬似最小二乗法を用いて、 $\Delta\tau$ を決定する。

ここで、 M_s 、 K_s と R 、 Q の成分が設計変数として混在する場合には、式(6-1)をそのまま解くと、各成分間のオーダーが極端に違うことにより、得られる最適解の実現性および妥当性に問題が生ずる可能性がある。この問題は、重み行列 W を用いて次式のように変更量ベクトルのオーダーをそろえることにより、解決できる。

$$\Delta\tau_w = W\Delta\tau \quad (6-2)$$

重み行列 W は次のようにして決定する。すなわち、設計変数として採用する M_s 、 K_s 、 R 、 Q 行列の成分の最大値をそれぞれ m_{max} 、 k_{max} 、 R_{max} 、 Q_{max} とし、それらの逆数を対応する行列の変更成分の重みとし、 W を次式に示す対角行列とする。

$$W = \text{diag}\left(\left(\frac{1}{m_{max}}, \dots\right), \left(\frac{1}{k_{max}}, \dots\right), \left(\frac{1}{R_{max}}, \dots\right), \left(\frac{1}{Q_{max}}, \dots\right)\right) \quad (6-3)$$

ただし、元来の変更量ベクトルを

$$\Delta\tau^T = (\Delta m^T, \Delta k^T, \Delta R_{i,j}^T, \Delta Q_{i,j}^T) \quad (6-4)$$

すなわち、各設計変更量ベクトル Δm 、 Δk 、 ΔR および ΔQ を各設計変数の最大値 m_{max} 、 k_{max} 、 R_{max} 、 Q_{max} でそれぞれ割ったものを、実際の設計

変更量ベクトルとする。この重み行列 W を用いると、式(6-2)の各成分のオーダーをほぼ均一にすることができる。

以上に示した方法により、式(6-1)から設計変数の変更量を求め、目的関数が目標値に収束するまで反復計算を行う。

本方法の特色は、式(4-9)、(4-10)の和として定義される評価関数 J を最小にするという最適レギュレータの性質を維持したままで、制御系と構造系の設計変数の同時変更により、統合システムの動特性の最適化が可能なことである。ただし、ここではすべての状態をフィードバックすることを前提とする。すなわち、式(4-2)のモード座標変換において自由度に対応するすべての固有モードを採用する。もし、高次のモードを省略しシステムを低次元化する場合には、上述の理論では高次モードの安定性が問題となるが、後述の6.4では省略した高次モードの安定性を保障する同時最適設計法を示している。

次に、上述の最適設計を行う上で必要になる、構造変数を含めた設計変数に対する目的関数の感度を計算する理論を示す。

6.3.2 感度解析

(a) 2次形式評価関数の感度

前述の構造系と制御系の設計変数をまとめて τ で表す。式(4-20)、(4-21)の2次形式評価関数の感度は式(4-23)、(4-24)を一つの設計変数 τ_j で偏微分することにより次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial \tau_j} = & \text{tr} \left[\frac{\partial P_1}{\partial \tau_j} B_1 V B_1^T + P_1 \frac{\partial B_1}{\partial \tau_j} V B_1^T \right. \\ & \left. + P_1 B_1 V \frac{\partial B_1^T}{\partial \tau_j} \right] \end{aligned} \quad (6-5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_u}{\partial \tau_j} = & \text{tr} \left[\frac{\partial P_2}{\partial \tau_j} B_1 V B_1^T + P_2 \frac{\partial B_1}{\partial \tau_j} V B_1^T \right. \\ & \left. + P_2 B_1 V \frac{\partial B_1^T}{\partial \tau_j} \right] \end{aligned} \quad (6-6)$$

ここで、 P_1 および P_2 の感度はそれぞれ式(4-25)、(4-26)を設計変数 τ_j で偏微分した次のリアプノフ方程式を解くことにより得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial \tau_j} G + G^T \frac{\partial P_1}{\partial \tau_j} + P_1 \frac{\partial G}{\partial \tau_j} + \frac{\partial G^T}{\partial \tau_j} P_1 \\ + \frac{\partial C^T}{\partial \tau_j} \Gamma C + C^T \Gamma \frac{\partial C}{\partial \tau_j} = 0 \end{aligned} \quad (6-7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2}{\partial \tau_j} G + G^T \frac{\partial P_2}{\partial \tau_j} + P_2 \frac{\partial G}{\partial \tau_j} + \frac{\partial G^T}{\partial \tau_j} P_2 + \frac{\partial F^T}{\partial \tau_j} \Pi F \\ + F^T \Pi \frac{\partial F}{\partial \tau_j} = 0 \end{aligned} \quad (6-8)$$

式(6-7)、(6-8)から P_1 および P_2 の感度を計算するためには、 G および F の感度が必要になる。そこで、式(4-27)、(4-12)、(4-11)を τ_j で偏微分する。

$$\frac{\partial G}{\partial \tau_j} = \frac{\partial A}{\partial \tau_j} - \frac{\partial B_2}{\partial \tau_j} F - B_2 \frac{\partial F}{\partial \tau_j} \quad (6-9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \tau_j} = -R^{-1} \frac{\partial R}{\partial \tau_j} R^{-1} B_2^T P + R^{-1} \frac{\partial B_2^T}{\partial \tau_j} P \\ + R^{-1} B_2^T \frac{\partial P}{\partial \tau_j} \end{aligned} \quad (6-10)$$

$$\begin{aligned} G^T \frac{\partial P}{\partial \tau_j} + \frac{\partial P}{\partial \tau_j} G + \left(\frac{\partial A^T}{\partial \tau_j} P + P \frac{\partial A}{\partial \tau_j} + \frac{\partial Q}{\partial \tau_j} \right. \\ \left. - P \frac{\partial B_2}{\partial \tau_j} F - F^T \frac{\partial B_2^T}{\partial \tau_j} P + F^T \frac{\partial R}{\partial \tau_j} F \right) = 0 \end{aligned} \quad (6-11)$$

G および F の感度はそれぞれ式(6-9)、(6-10)で与えられる。そして、 P の感度は式(6-11)のリアプノフ方程式を解くことにより得られる。

(b) 極の感度

閉ループ系の状態方程式をラプラス変換すると次式が得られる。

$$(sI_{2r} - G)q(s) = B_1 w(s) \quad (6-12)$$

式(6-12)の右辺を零とおき固有値解析を行い、極 s_i および右固有ベクトル ϕ_{iR} ($i=1 \sim 2r$)を求める。これらの固有ペアを式(6-12)に適用し、 τ_j で偏微分すると次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial \tau_j} I_{2r} - \frac{\partial G}{\partial \tau_j} \right) \phi_{iR} - (s_i I_{2r} - G) \frac{\partial \phi_{iR}}{\partial \tau_j} = 0 \quad (6-13)$$

式(6-13)において、 G の感度は式(6-9)で示されている。ここで、 s_i に対応する左固有ベクトル ϕ_{iL}^T を式(6-13)の両辺に左からかけることにより、左辺の第2項は零になり、極 s_i の感度は次式として求められる。

$$\frac{\partial s_i}{\partial \tau_j} = \frac{\phi_{iL}^T \frac{\partial G}{\partial \tau_j} \phi_{iR}}{\phi_{iL}^T \phi_{iR}} \quad (6-14)$$

(c) FRFのゲインと位相の感度

外乱が定常調和関数であるときには、 $s = j\omega$ であるから、外乱 w から出力 y までのFRF行列 $G_c(j\omega)$ は次式になる。

$$G_c(j\omega) = C(j\omega I_{2r} - G)^{-1} B_1 \quad (6-15)$$

FRF行列の感度は、式(6-15)を τ_j で偏微分することにより

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_c(j\omega)}{\partial \tau_j} &= \frac{\partial C}{\partial \tau_j} (j\omega I_{2r} - G)^{-1} B_1 + C(j\omega I_{2r} - G)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \tau_j} (j\omega I_{2r} - G)^{-1} B_1 \\ &\quad + C(j\omega I_{2r} - G)^{-1} \frac{\partial B_1}{\partial \tau_j} \end{aligned} \quad (6-16)$$

いま、 $G_c(j\omega)$ の中の1成分 $g_c(j\omega)$ を考え、それを実部と虚部に分けて

$$g_c(j\omega) = g_c^{Re} + jg_c^{Im} \quad (6-17)$$

と表す。ここでは、FRFのゲインの変更について考える。 $g_c(j\omega)$ の大きさは

$$(g_c)_{norm} = \{g_c^*(j\omega)g_c(j\omega)\}^{1/2} \quad (6-18)$$

であり、その τ_j に関する感度は次式になる。

$$\frac{\partial (g_c)_{norm}}{\partial \tau_j} = \frac{1}{(g_c)_{norm}} \left(g_c^{Re} \frac{\partial g_c^{Re}}{\partial \tau_j} + g_c^{Im} \frac{\partial g_c^{Im}}{\partial \tau_j} \right) \quad (6-19)$$

ここで、 $g_c(j\omega)$ の実部と虚部の感度は、式(6-16)の対応する成分の感度の実部と虚部として得られる。

次に、 $g_c(j\omega)$ の位相 ψ は次式により与えられる。

$$\psi = \tan^{-1} \frac{g_c^{Im}}{g_c^{Re}} \quad (6-20)$$

位相 ψ の感度は、式(6-20)を τ_j で偏微分することにより次式となる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau_j} = \frac{1}{(g_c)_{norm}^2} \left(\frac{\partial g_c^{Im}}{\partial \tau_j} g_c^{Re} - g_c^{Im} \frac{\partial g_c^{Re}}{\partial \tau_j} \right) \quad (6-21)$$

(d) 零点の感度

外乱 w と出力 y との関係は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} y(s) &= C \frac{\text{adj}(sI_{2r} - G)}{\det(sI_{2r} - G)} B_1 w(s) \\ &= C \frac{\Gamma_{2r-1} s^{2r-1} + \Gamma_{2r-2} s^{2r-2} + \dots + \Gamma_0}{s^{2r} + \alpha_{2r-1} s^{2r-1} + \dots + \alpha_0} B_1 w(s) \end{aligned} \quad (6-22)$$

ここで、行列 $\Gamma_i (i=0 \sim 2r-1)$ と $\alpha_i (i=0 \sim 2r)$ は次のファデーブのアルゴリズムにより得られる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{2r-1} &= I_{2r} & \alpha_{2r-1} &= -\text{tr}(G\Gamma_{2r-1}) \\ \Gamma_{2r-2} &= G\Gamma_{2r-1} + \alpha_{2r-1} I_{2r} & \alpha_{2r-2} &= -\text{tr}(G\Gamma_{2r-2})/2 \\ &\vdots & &\vdots \\ \Gamma_0 &= G\Gamma_1 + \alpha_1 I_{2r} & \alpha_0 &= -\text{tr}(G\Gamma_0)/2r \end{aligned} \quad (6-23)$$

式(6-22)の分母を零とする根が極であり、これは式(6-12)の固有値解析結果と一致する。一方システムの零点は、外乱入力点と応答点を指定することにより、以下のように求められる。

式(6-22)の右辺の分子の係数行列の成分を次のようにおく。

$$[\gamma_{i,j}^{(\beta)}] = C\Gamma_\beta B_1 \quad (\beta = 0 \sim (2r-1)) \quad (6-24)$$

いま、外乱入力点 k と応答点 l の間の FRF を考えると、点 k と点 l の間の零点は次式の解として得られる。

$$\gamma_{l,k}^{(2r-1)} s^{2r-1} + \gamma_{l,k}^{(2r-2)} s^{2r-2} + \dots + \gamma_{l,k}^{(1)} s + \gamma_{l,k}^{(0)} = 0 \quad (6-25)$$

式(6-25)を解いて得られる根を $z_i (i=1 \sim (2r-1))$ とする。零点 z_i の感度は式(6-25)の s に z_i を代入し、設計変数 τ_j で偏微分することにより、次式のように得られる。

$$\frac{\partial z_i}{\partial \tau_j} = - \frac{\sum_{b=0}^{2r-1} \frac{\partial \gamma_{l,k}^{(b)}}{\partial \tau_j} z_i^b}{\sum_{a=1}^{2r-1} a \gamma_{l,k}^{(a)} z_i^{a-1}} \quad (6-26)$$

ここで、式(6-26)の係数の感度は、式(6-24)を τ_j で偏微分して

$$\frac{\partial \gamma_{l,k}^{(\beta)}}{\partial \tau_j} = \frac{\partial C}{\partial \tau_j} \Gamma_\beta B_1 + C \frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial \tau_j} B_1 + C \Gamma_\beta \frac{\partial B_1}{\partial \tau_j} \quad (6-27)$$

式(6-27)の中の $\Gamma_\beta(\beta=1\sim(2r-1))$ の感度は、前述のファデーブのアルゴリズムを上から順次 τ_j で偏微分した次式により求められる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Gamma_{2r-1}}{\partial \tau_j} &= 0 & \frac{\partial \alpha_{2r-1}}{\tau_j} &= -tr \left(\frac{\partial G}{\partial \tau_j} \Gamma_{2r-1} + G \frac{\partial \Gamma_{2r-1}}{\partial \tau_j} \right) \\
 \frac{\partial \Gamma_{2r-2}}{\partial \tau_j} &= \frac{\partial G}{\partial \tau_j} \Gamma_{2r-1} + G \frac{\partial \Gamma_{2r-1}}{\partial \tau_j} & \frac{\partial \alpha_{2r-2}}{\tau_j} &= -tr \left(\frac{\partial G}{\partial \tau_j} \Gamma_{2r-2} + G \frac{\partial \Gamma_{2r-2}}{\partial \tau_j} \right) / 2 \\
 &+ \frac{\partial \alpha_{2r-1}}{\partial \tau_j} I_{2r} & & \\
 &\vdots & & \vdots \\
 \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tau_j} &= \frac{\partial G}{\partial \tau_j} \Gamma_1 + G \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \tau_j} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_j} I_{2r} & \frac{\partial \alpha_0}{\tau_j} &= -tr \left(\frac{\partial G}{\partial \tau_j} \Gamma_0 + G \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \tau_j} \right) / 2r
 \end{aligned}$$

(6-28)

状態方程式に含まれる各行列 A 、 B_1 、 B_2 、 C 、および評価関数に含まれる各重み行列 L 、 U の各設計変数に関する感度を求めれば、上述の理論により各目的関数の感度を計算することができる。

6.3.3 3自由度モデルへの適用

図6-1に示す3自由度系モデルに本方法を適用する。同図に示すように質点3に制御入力作用し、質点2に外乱作用する場合を考える。

まず、質点2に白色雑音の外乱作用する場合を考え、質点3の変位応答に着目して、構造系と制御系の同時最適設計を行う。評価関数として、質点3の変位と制御入力の自乗平均を考える。

$$H_y = E[y_3^2] \quad (6-29)$$

$$H_u = E[u^2] \quad (6-30)$$

これは式(4-20)、(4-21)における評価関数の重み行列をそれぞれ $\Gamma = \text{diag}(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ 、 $\Pi = 1$ とおいた場合に対応している。ただし、実際の制御系の設計においては、式(4-9)と式(4-10)の評価関数の和を最小にする最適レギュレータを構成する。

構造系の質量、ばねこわさ、減衰係数は図6-1に示すとおりである。構造系の設計変数として質量とばねこわさ、そして制御系の設計変数として式(4-9)、(4-10)に含まれる重み行列を採用する。ここで、重み行列を次のように設定する。

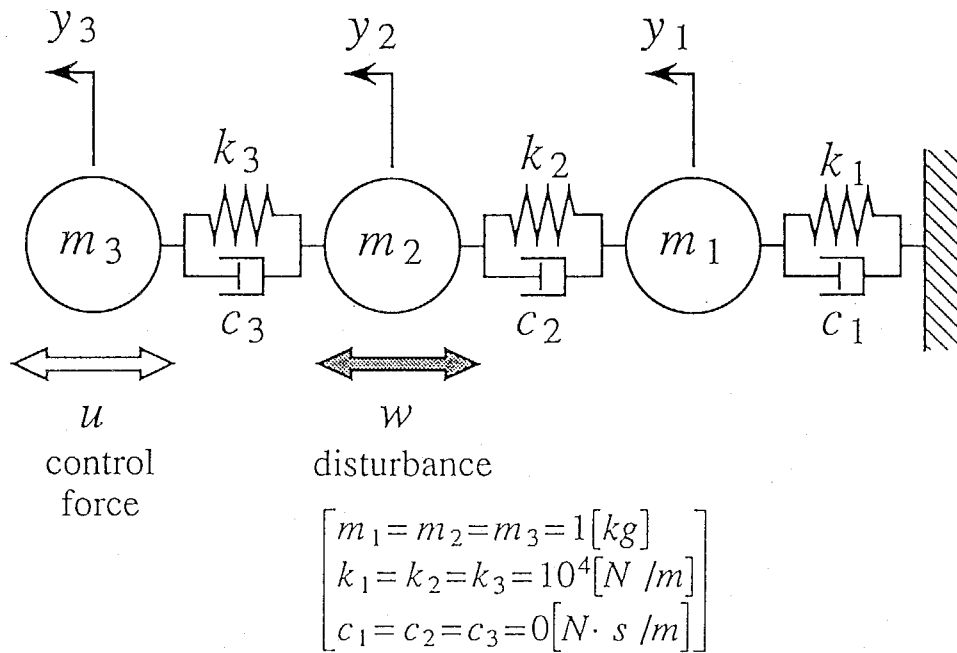


図6-1 3質点系モデル

$$Q = \text{diag}(0 \ 0 \ q(3,3) \ 0 \ 0 \ 0) \quad (6-31)$$

$$R = 1 \quad (6-32)$$

式(6-31)において、 Q の(3,3)成分の $q(3,3)$ を設計変数の1つとし、その初期値を 10^8 とする。質点2に作用する白色雑音のインテンシティ行列を $V=1$ とすると式(6-29)、(6-30)の評価関数の初期値は次のよう求まる。

$$H_y^0 = 4.23 \times 10^{-5}, \quad H_u^0 = 55.6 \quad (6-33)$$

いま、質点3の変位の低減を図る目的で以下の3通りの場合について変更を試みる。

- 1 H_y の目標値を 1×10^{-5} とする。設計変数を重み行列 Q の(3,3)成分とする。
- 2 H_y の目標値を上記1と同じとする。設計変数を重み行列 Q の(3,3)成分と構造系の質量 m_1 、 m_2 、 m_3 とばね定数 k_1 、 k_2 、 k_3 とする。

3 H_y の目標値を上記1と同じとし、 H_u の目標値を40とする。設計変数は上記2と同じとする。

各場合における H_y もしくは H_u の収束過程を図6-2~6-4に示す。そして、各場合における設計変数の収束値を表6-1に示す。図6-2から、1のケースは制御系の設計変数のみを変更しているため、 H_y を低減させる代わりに H_u がかなり大きくなっていることがわかる。図6-3の2のケースには、1のケースよりも H_u が小さく抑えられ、制御系の設計変数に加えて構造系の設計変数をも同時に変更することの効果が見られている。このことは表6-1における1と2のケースの Q の(3,3)成分の大きさにも現れており、2のケースの方が $q(3,3)$ の変更が小さくてすんでいる。

表6-1の2と3のケースを比較すると、後者は Q の成分の変更量が前者に比べて小さく、逆に構造系の設計変数の変更量が大きくなっている。これは、性質の異なる両評価関数の低減を同時に実現させるためには、制御系の設計変数よりも構造系の設計変数の変更の方が優先されることを意味している。ここで、2のケースにおいて質点2に白色雑音外乱が作用するときの、質点3の時刻歴応答の変化を図6-5に示す。この図から、変更後の応答レベルが低減していることがわかる。1と3のケースの応答については省略するが、図6-5と同程度の応答レベルの低減になっている。2のケースの外乱 w と応答 y_3 の間のFRFを図6-6に示す。破線が変更前、実線が変更後であり、後者は40Hz以下で応答レベルが大きく低減していることがわかる。

次に、質点2に28.5Hzの正弦波状外乱励振力が作用する場合を考える。 w と y_3 の間の現行のFRFを図6-7の破線で示すが、外乱の周波数で応答が極大になっていることがわかる。外乱の影響を避けるためには、前述のFRFのゲインの感度を用いて、この周波数におけるゲインを低減させることが考えられるが、ここでは、極と零点を変更することにより効果的に外乱の影響を低減することを試みる。すなわち、システムの極を変更することにより、28.5Hz付近の共振ピークを移動し、同時に23Hz付近の零点を28.5Hz付近に移動することにより、外乱の影響をできるだけ低減する変更を試みる。このときのシステムの極-零点配置を図6-8(a)に示すが、対象とする極と零点は虚軸に近い位置に存在している。ここで、対応する極と零点のノルム(s 平面上での原点からの距離)について、前者は外乱の周波数から遠ざけ、後者は逆に近づける次の変更を行う。

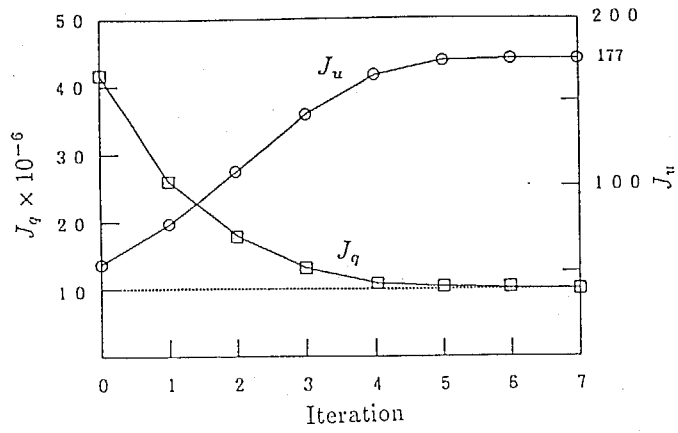


図6-2 ケース1の収束過程

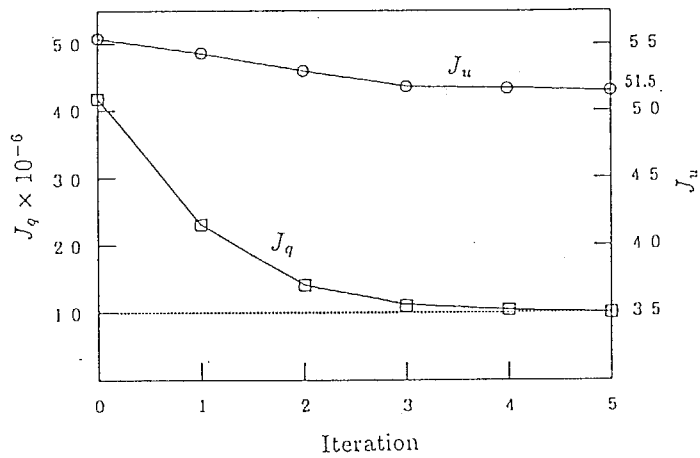


図6-3 ケース2の収束過程

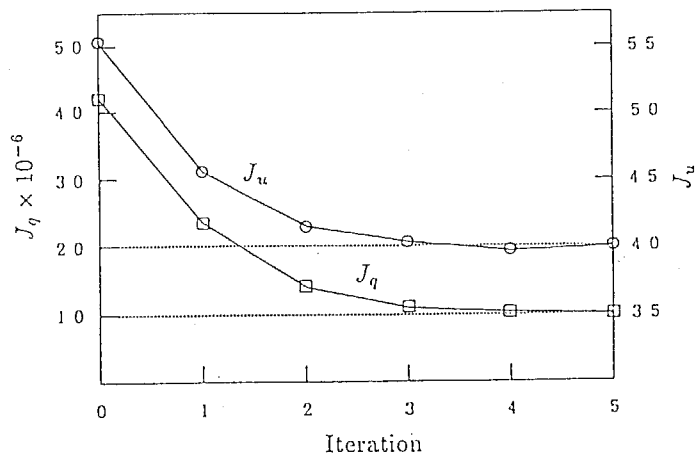


図6-4 ケース3の収束過程

表6-1 設計変数の収束結果(ケース1~3)

Original state		Design variable						
Objective function		Control	Mass (kg)			Stiffness ($\times 10^4 N/m$)		
J_q	J_u	$q_{33}(\times 10^3)$	m_1	m_2	m_3	k_1	k_2	k_3
4.23×10^{-5}	55.6	1	1	1	1	1	1	1

Optimum state		Design variable						
Case	Target	$q_{33}(\times 10^3)$	m_1	m_2	m_3	k_1	k_2	k_3
1	$J_q \rightarrow 10^{-5}$	15.35	1	1	1	1	1	1
2	$J_q \rightarrow 10^{-5}$	3.42	1.12	3.09	0.77	1.67	1.35	1.71
3	$J_q \rightarrow 10^{-5}$ $J_u \rightarrow 40$	2.67	1.20	3.96	0.75	1.33	1.55	1.67

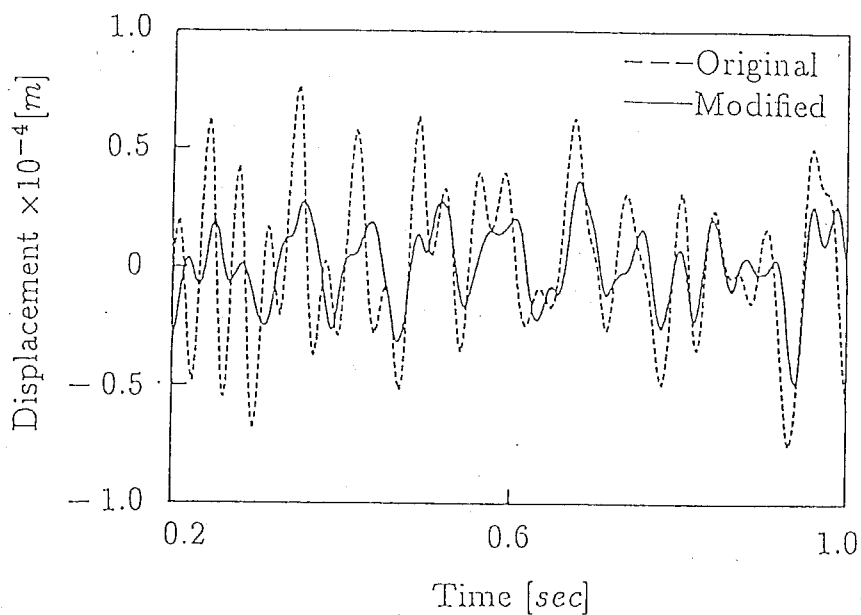


図6-5 白色雑音外乱に対する質点3の時刻歴応答の変化(ケース2)

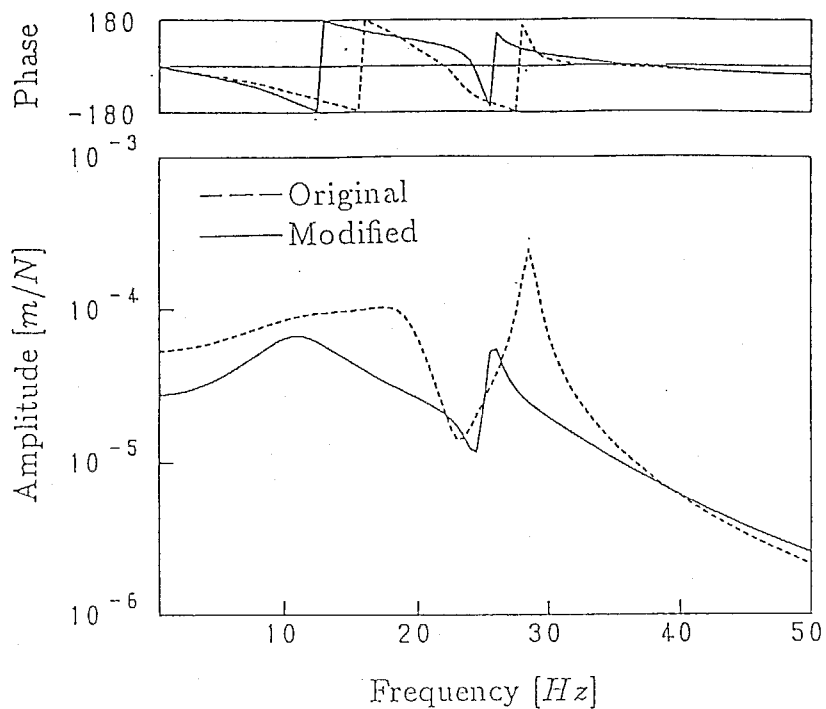


図6-6 w から y_3 までのFRF(ケース2)

4 w と y_3 の間のFRFにおいて、対象とする極と零点のノルムの目標値を表6-2のように設定する。設計変数は2の場合と同じとする。

両者のノルムの感度は、式(6-17)~(6-19)に示したFRFのゲインの感度の場合と同様に計算できる。設計変数の収束結果を表6-3に示す。変更後の w と y_3 の間のFRFを図6-7の実線で示す。このとき、システムの極-零点配置は図6-8(b)のようになっており、変更後には極が28.5Hzから遠ざかり、逆に零点が28.5Hzに一致していることがわかる。質点3の時刻歴応答を図6-9に示すが、変更後は変更前よりも応答レベルが著しく低減できていることがわかる。

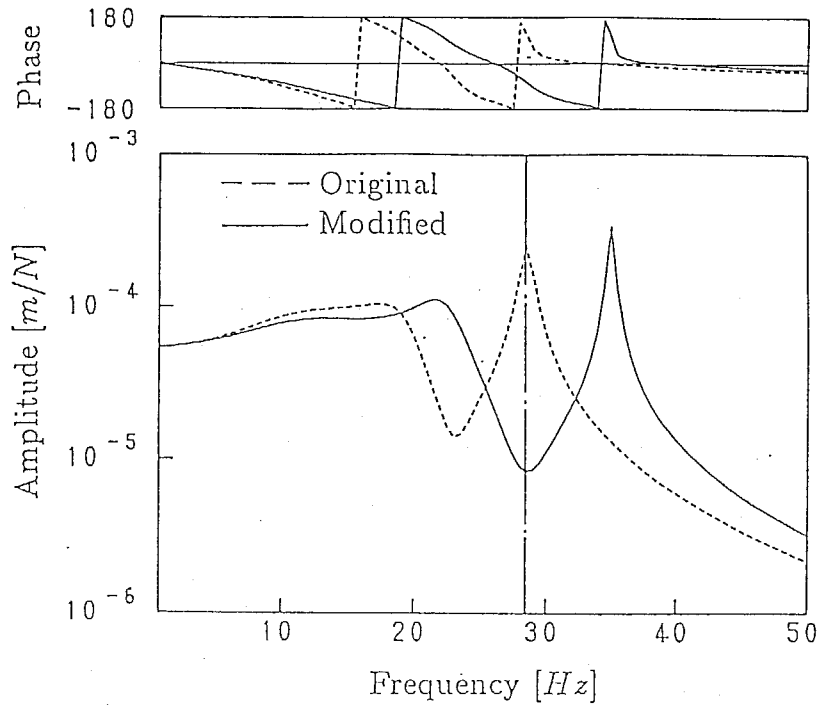


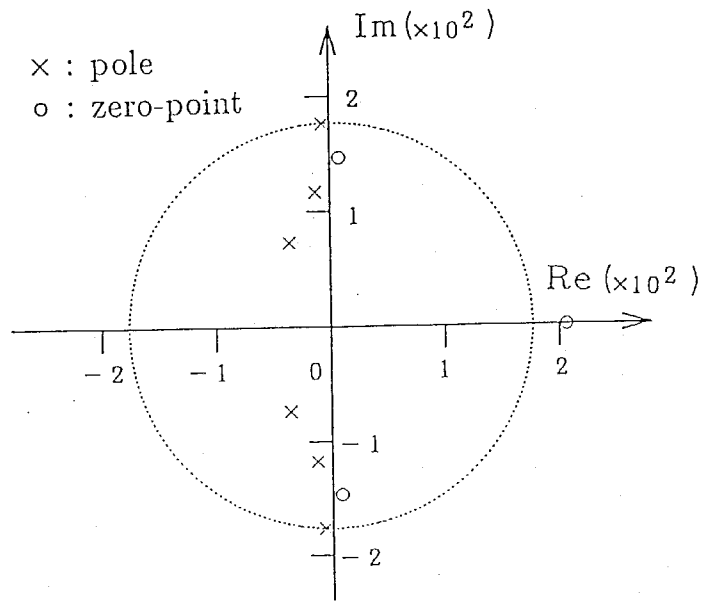
図 6-7 w から y_3 までの FRF(ケース 4)

表 6-2 極と零点の目標値(ケース 4)

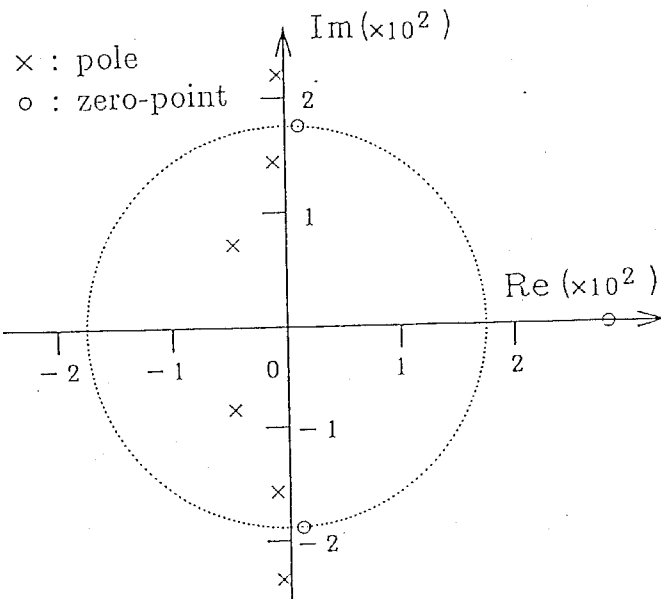
	Original			Target
	Real	Imag.	Norm	Norm
Pole	-2.64	179	$179 = 28.5 \times 2\pi$	$220 = 35.0 \times 2\pi$
Zero-P.	7.46	145	$145 = 23.1 \times 2\pi$	$179 = 28.5 \times 2\pi$

表 6-3 設計変数の収束結果(ケース 4)

Design variable						
$q_{33}(\times 10^8)$	Mass (kg)			Stiffness ($\times 10^4 N/m$)		
	m_1	m_2	m_3	k_1	k_2	k_3
0.998	0.77	0.30	0.97	1.09	1.26	1.12



(a) 変更前



(b) 変更後

図6-8 閉ループ系の極配置(ケース4)

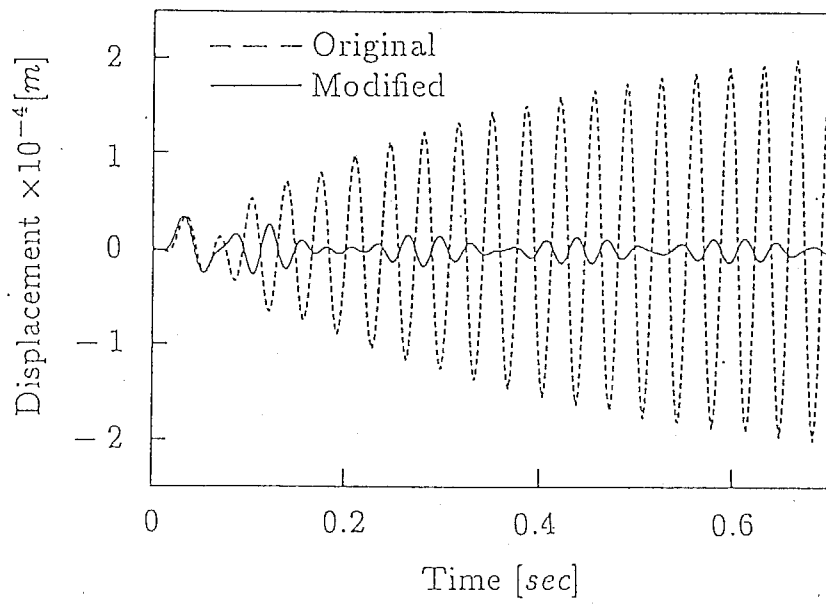


図6-9 調和外乱に対する質点3の時刻歴応答
の変化(ケース4)

6.4 高次モードの安定性を保障する同時最適設計法

ここでは、大自由度の構造系をモード座標に縮小変換して制御系を設計した際の高次モードの安定性の保障、および外乱の周波数特性を考慮した同時最適設計法を示す。構造系のモデル化にはFEMを適用し、モード座標を用いてモデルの低次元化を行う。そして、着目する固有モードを採用し、それ以外の固有モードをすべて省略することによって、システムを低次元化し、最適レギュレータ理論により制御系を形成する。他方、無視した固有モードを含むより高次までの固有モードを用いて、モード座標に変換したシステムを実システムとして採用する。そして、先に得られた制御則を実システムに適用し、2次形式評価関数および実システムの極配置を最適化し、実システムの安定性が保障されるように、制御系および構造系を同時に最適設計する。本手法の流れ図を図6-10に示す。

まず、6.2で示した方法により採用モード数 r のモード座標に変換した低次元システムを作成し、最適レギュレータ理論により制御系を設計する。次に、低次元システムの採用モードを含み、その数 r よりも十分大きい採用モード数 $v(v > r)$ を用いてシステムをモード座標に変換し、式(4-15)として実システムを作成する。そして、実システムに低次元モデルを用いて求めた式(4-17)の制御則をそのまま適用し、式(4-18)で示される閉ループ系を記述する。

そして、式(4-19)で示される行列 G_e の固有値解析を行うことにより、実システムの閉ループ系の極 $s_i(i = 1 \sim 2v)$ が求められる。そして、この極を調べれば、系が安定か否かを判別できる。

この閉ループ系は、実システムに低次元モデルによる制御則をそのまま適用して作成したものであるから、低次元モデルで採用していない固有モードに関しては、その安定性を必ずしも保障できない。この問題を解決するために、閉ループシステムの安定性を保障しつつ、制御性能の高性能化を図るための制御系の最適設計法を次に示す。

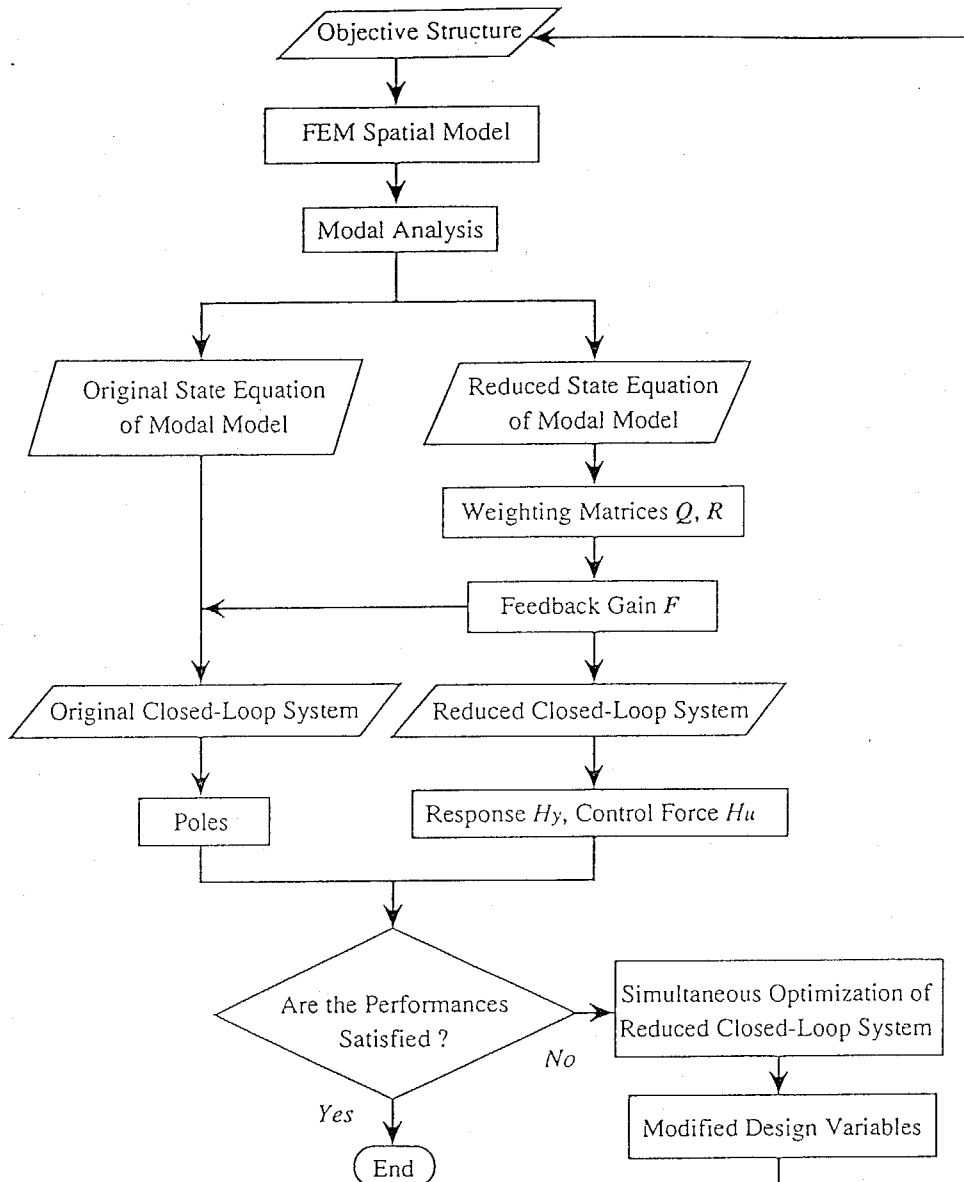


図 6-10 感度解析による同時最適化の流れ図

6.4.1 最適化問題の設定

システムの動特性を最適化し、同時に実システムで採用したすべての固有モードに対する系の安定性を保障するための、状態フィードバック則を決定する最適設計法について考える。最適化すべき動特性としては、低次元システムにおける、出力および制御入力に関する次の2次形式評価関数を考える。外乱を白色雑音とした場合の H_y および H_u は、4.2.4に示した方法により求められる。このように、第4章の制御系の最適化においては白色雑音外乱を想定していたが、実際問題として外乱が常に白色雑音であるとは限らず、むしろ特定の周波数成分が卓越したような有色雑音外乱が作用する場合の方が一般的であるといえる。このような観点から、有色雑音外乱が作用するときの同時最適化手法を開発することは有意義であり、以下にその一手法を示す。

外乱が有色雑音の場合には、以下のような拡張状態方程式を用いることにより、評価関数を定義できる。すなわち、状態方程式を用いて有色雑音 f を次式のように記述する。

$$\dot{q}_w = A_w q_w + B_w w \quad (6-34)$$

$$f = C_w q_w + D_w w \quad (6-35)$$

ここで、 w は前述と同様に白色雑音である。式(4-3)、(6-34)、(6-35)を用いて次の拡張状態方程式を作成する。

$$\dot{q}_a = A_a q_a + B_{1a} w + B_{2a} u \quad (6-36)$$

ここで、

$$q_a = \begin{Bmatrix} q \\ q_w \end{Bmatrix} \quad A_a = \begin{bmatrix} A & B_1 C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}$$

$$B_{1a} = \begin{bmatrix} B_1 D_w \\ B_w \end{bmatrix} \quad B_{2a} = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-37)$$

上述のように、外乱が白色雑音、有色雑音どちらの場合でもシステムの記述は基本的に同じである。式(6-36)の状態方程式に基づいて式(4-20)、(4-21)の評価関数を定義することにより、外乱の周波数特性に応じた構造系と制御系の同時最適化が可能になる。

制御系の最適化の際には、これらの評価関数に加えて実システムの安定性を保障するために、式(4-19)の固有値(極) s_i の配置についても考慮する。

すなわち、最適化問題としては、式(4-18)と同様に応答性を向上させ

るために H_y の最小化を目的とする。そして、 H_y と相反的な関係にある H_u に関しては、その上限値を制約条件として与え、さらに実システムの安定性を保障するために、実システムにおけるすべての極の実部が負でなければならないという制約条件を与える。すなわち、 $H_u^{max} > 0$ 、 $s_i^{max} < 0 (i=1, \dots, 2v)$ として、この制約条件付き最適化問題を次のように記述する。

$$\begin{aligned} \min \quad & H_y \\ \text{Subj.} \quad & \begin{cases} H_u - H_u^{max} \leq 0 \\ \text{Re}(s_i) - s_i^{max} \leq 0 \quad (i=1 \sim 2v) \end{cases} \end{aligned}$$

この最適化問題の設計変数の最適解を、準ニュートン法と乗数法による非線形最適化法を用いて探索する。この最適化を実行する際に、2次形式評価関数 H_y 、 H_u および極 s_i の感度が必要になる。 H_y および H_u の感度は、前述の6.3.2(a)で示した方法で求められる。また、極 s_i の感度は式(4-41)で計算できる。ただし、この感度を計算するときに必要な式(4-40)に示す G_e の感度は、制御系の設計変数に対して求めたものであるから、今回のように構造系の設計変数を含む場合の G_e の感度は次式から求めなければならない。

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_e}{\partial \tau_j} = & \frac{\partial A_e}{\partial \tau_j} - \frac{\partial B_{2e}}{\partial \tau_j} FC^{-1} C_0 \Psi_e - B_{2e} \frac{\partial F}{\partial \tau_j} C^{-1} C_0 \Psi_e \\ & + B_{2e} FC^{-1} \frac{\partial C}{\partial \tau_j} C^{-1} C_0 \Psi_e - B_{2e} FC^{-1} C_0 \frac{\partial \Psi_e}{\partial \tau_j} \end{aligned} \quad (6-38)$$

6.4.2 設計変数の定義

設計変数としては、構造系に関してFEMモデルの板厚、および制御系に関して式(4-9)、(4-10)に含まれる評価関数の重み行列 Q と R の成分を考える。ここで、構造の板厚に関しては寸法制約を考慮する必要がある。しかし、式(4-18)の最適化問題における制約条件式の増加は、最適解の探索を安定に行う上で好ましくない。そこで、本研究では板厚 t_i を α_i の関数とし、板厚の上限値 t_{max} および下限値 t_{min} を用いて、これらの上下限値を満足するように次式で定義する。

$$t_i = \frac{t_{max} - t_{min}}{1 + \exp\{-\alpha_i\}} + t_{min} \quad (6-39)$$

そして、板厚 t_i に関する実際の設計変数を α_i とすることにより、不等式制約条件を追加することなく、板厚の上限および下限値を満足する最適値を決定できる。次に、制御系の設計変数に関しては、 Q と R の成分を任意に変更してしまうと、 Q および R が正定行列でない場合の最適

解の存在が問題となるので、ここでは両重み行列を式(4-29)、(4-30)で表し、行列 L と U の成分を実際的设计変数とする。このようにして、 Q に関しては半正定値性、 R に関しては正定値性を最低限保障させる。

6.4.3 平板の同時最適化による振動制御

本手法を図6-11に示す一端固定平板(ステンレス鋼)の振動制御に適用する。この平板そのものは、図4-2に示すものと同一であるが、ここでは観測点が異なる。図6-11における節点24と66の法線方向の変位および速度を出力とし、節点19と72に設置されているボイスコイルアクチュエータにより振動制御を行う。外乱としては、節点72に白色雑音あるいは有色雑音 w_{72} が作用する。つまり出力ベクトルと制御入力ベクトルはそれぞれ次のようになる。

$$y = (y_{24}, y_{66}, \dot{y}_{24}, \dot{y}_{66})^T \quad (6-40)$$

$$u = (u_{19}, u_{72})^T \quad (6-41)$$

以上のように、このシステムではコロケーションが成立していない。

この平板の非制御時の w_{72} から y_{66} までのFRFを図6-12に示す。ここでの入出力は、それぞれ外乱としてボイスコイルアクチュエータに入力される電圧[V]、およびギャップセンサーアンプの出力電圧[V]とする。破線が計算結果、実線が実験結果である。同図から計算結果と実験結果はよく一致しており、800Hz以下には7つの共振ピークがあることがわかる。そこで、本手法を適用して2次までの固有モードを用いて、制御系を設計し、7次までの固有モードの安定性を保障する同時最適設計を行う。以下に外乱が白色雑音の場合と有色雑音の場合の適用例を示す。

(a) 白色雑音外乱が作用する場合

まず、制御系のみを最適化を実行する。すなわち式(4-29)の重み行列 L の第1行成分を設計変数として採用する。式(4-20)、(4-21)に含まれる重み行列をそれぞれ $\Gamma = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$ および $\Pi = \text{diag}(1, 1)$ とする。このとき、出力および制御入力に関する2次形式評価関数は、それぞれ次式となる。

$$H_y = E[y_{24}^2 + y_{66}^2], \quad H_u = E[u_{19}^2 + u_{72}^2] \quad (6-42)$$

重み行列 L 、 U の初期値を次のように設定する。

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-43)$$

このときの評価関数は外乱 w_{72} のインテンシティ V を1としたときそれぞれ次のように求まる。

$$H_y^{org} = 4.11, \quad H_u^{org} = 23.7 \quad (6-44)$$

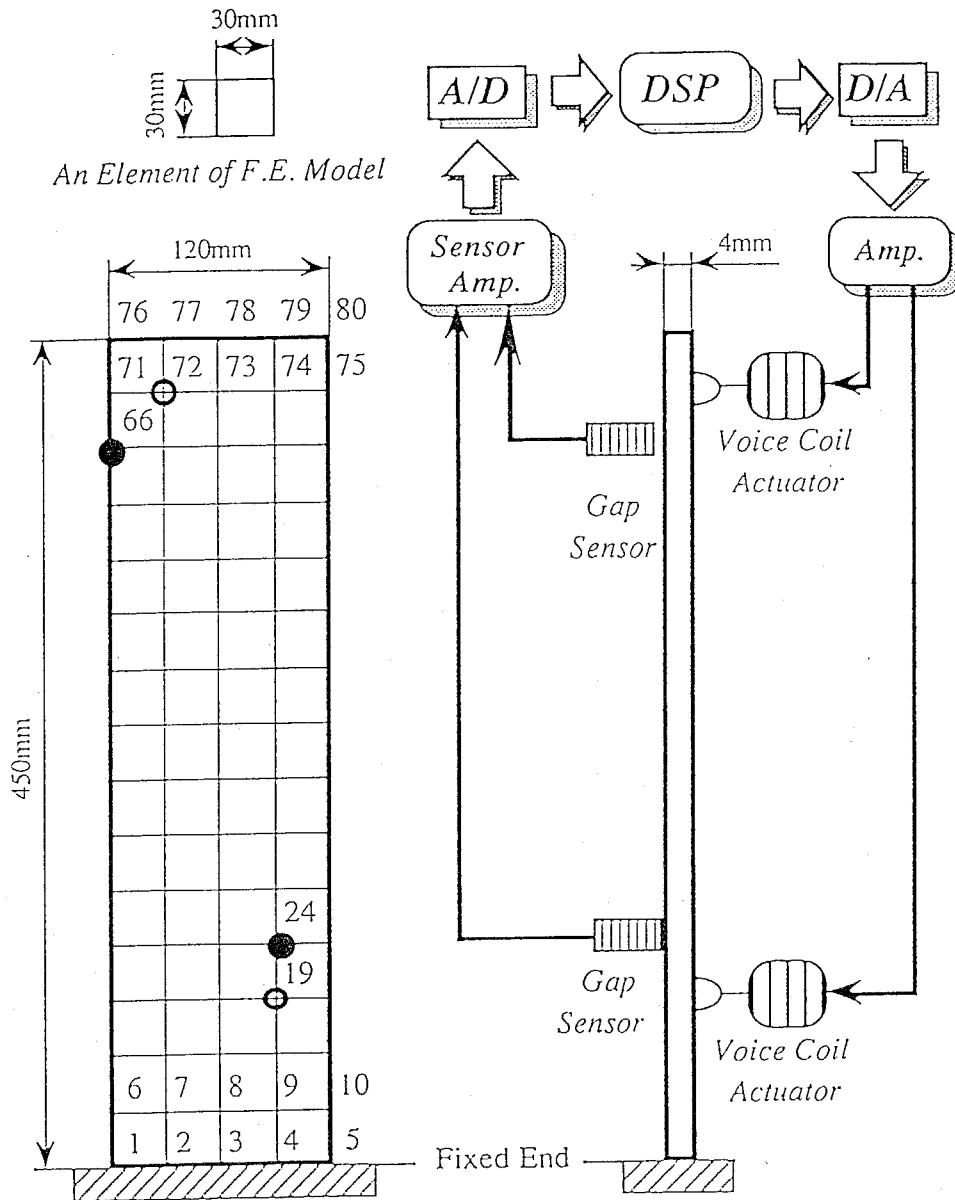


図6-11 解析モデルと制御システム

このときの閉ループ系の極配置を図6-13に示す。この図から、6次の極が不安定になっていることがわかる。そこで式(4-18)の制御入力と極配置の制約条件の上限値を次のように設定する。

$$H_u^{max} = 70 \quad s_i^{max} = -3 \quad (\forall i) \quad (6-45)$$

以上の制約の下で、本手法により目的関数の最小化を実行する。

まず、制御系のみ最適化を実行する。設計変数としては、重み行列 L の第1行成分を採用する。最適化の結果、重み行列 L の最適値は、次のように求まった。

$$L_c^{opt} = \begin{bmatrix} 11.56 & 10.33 & 2.380 & 1.083 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-46)$$

このときの両評価関数の最適値は次のようになった。

$$H_y^{opt} = 1.63 \quad H_u^{opt} = 70.0 \quad (6-47)$$

出力に関する評価関数 H_y は低減され、制御入力に関する評価関数 H_u は上限値となっていることがわかる。また、このときの閉ループ系の極配置を図6-14に示す。同図から、実システムが安定化されたことがわかる。 w_{72} と y_{66} の間のFRFを図6-15に示す。非制御時の実験結果を点線、最適化後の計算結果および実験結果をそれぞれ破線、実線で示す。図6-15より共振時の応答レベルが低減していることがわかる。そして、節点72に衝撃力および白色雑音の外乱が作用したときの、節点66の応答の実験結果をそれぞれ図6-16と図6-17に示す。点線が非制御、実線が制御系の最適化後の応答を示すが、制御系の最適化による制振効果の向上が実現されていることがわかる。

次に同時最適化を実行する。

同時最適化の設計変数としては前述の重み行列 L の成分に加えて、図6-18に示すように平板の5つの領域の板厚を採用する。式(6-39)に含まれる板厚 $t_i (i=1 \sim 5)$ の上下限値を次のように設定する。

$$3 \leq t_i \leq 6.5 \quad (\forall i) \quad (6-48)$$

制御入力と極配置の制約条件は前述の式(6-45)と同じとし、同時最適化を実行する。本手法による同時最適化を行った結果、重み行列 L の最適値は次のようになった。

$$L_{s1}^{opt} = \begin{bmatrix} 0.9795 & 1.066 & 2.788 & 1.081 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-49)$$

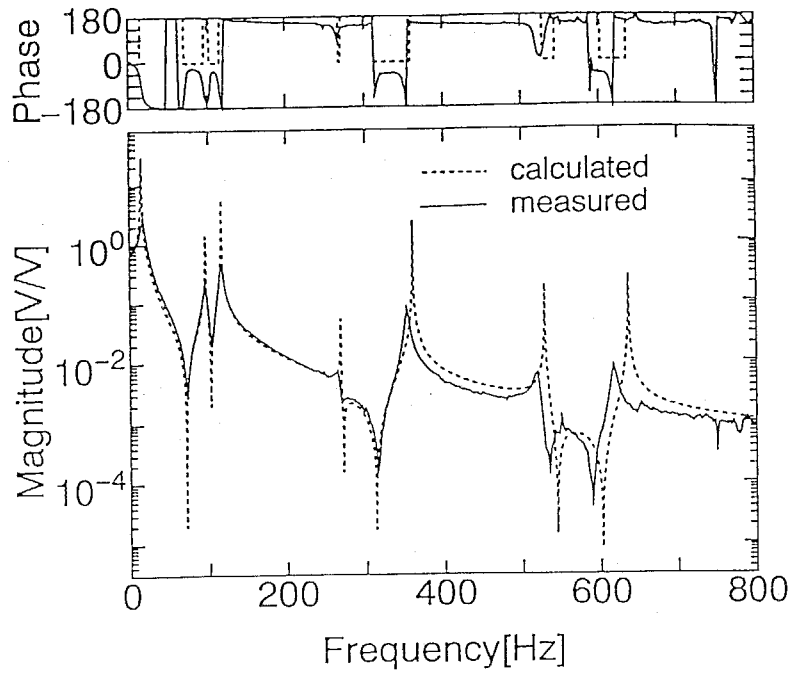


図6-12 非制御時の w_{72} と y_{66} の間の FRF

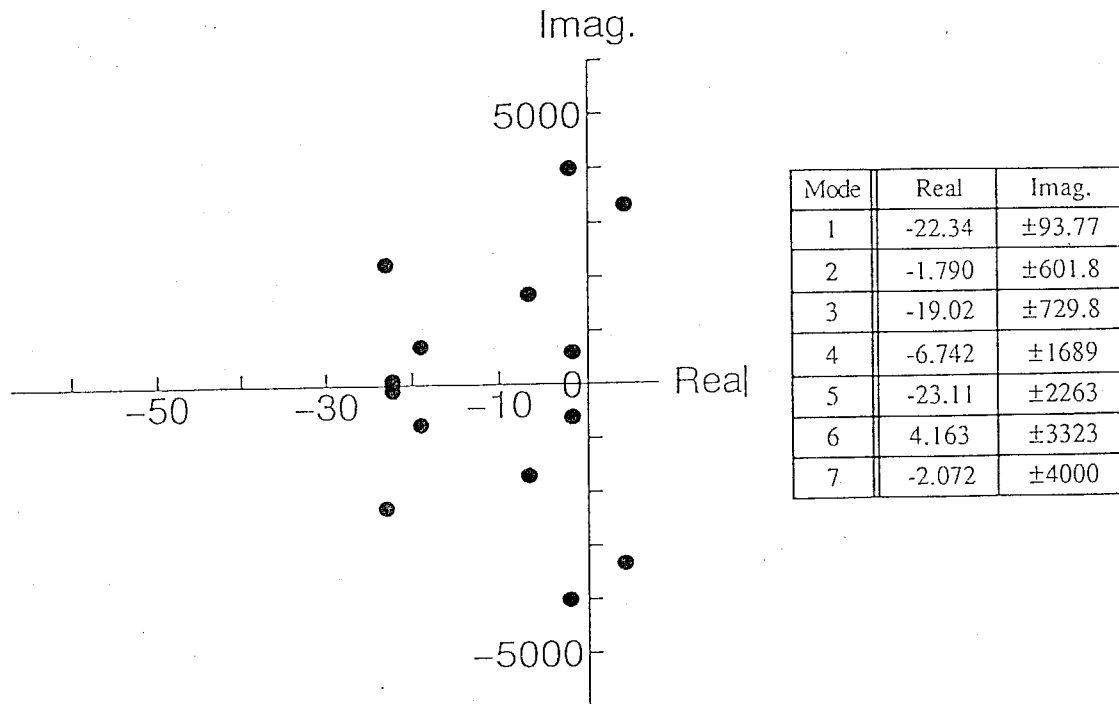


図6-13 初期制御による閉ループ系の極配置

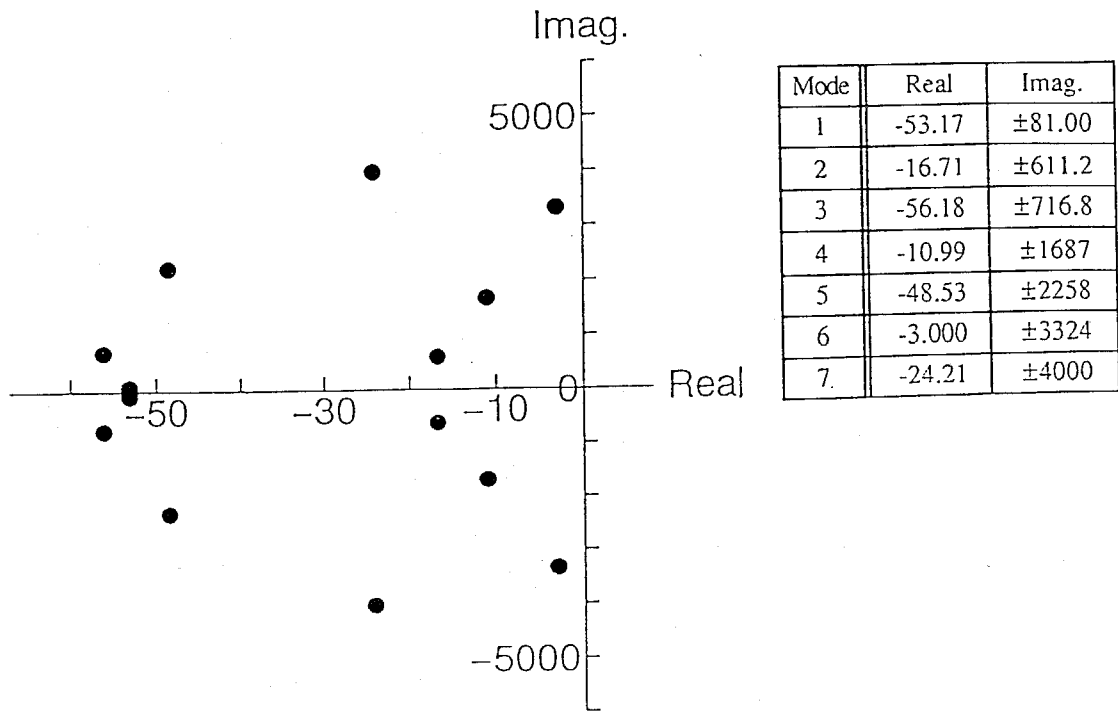


図6-14 制御系の最適化後の閉ループの極配置
(白色雑音外乱に対する設計)

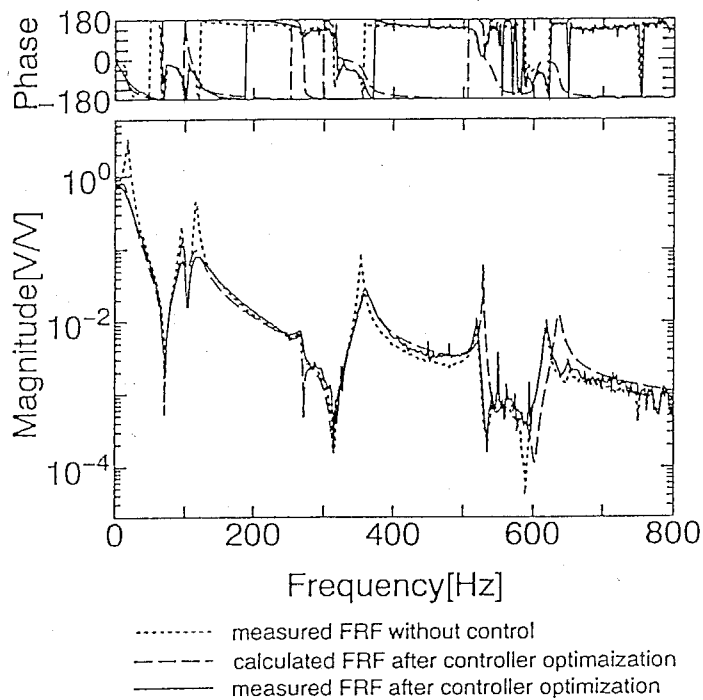


図6-15 制御系の最適化後の w_{72} と y_{66} の間の FRF
(白色雑音外乱に対する設計)

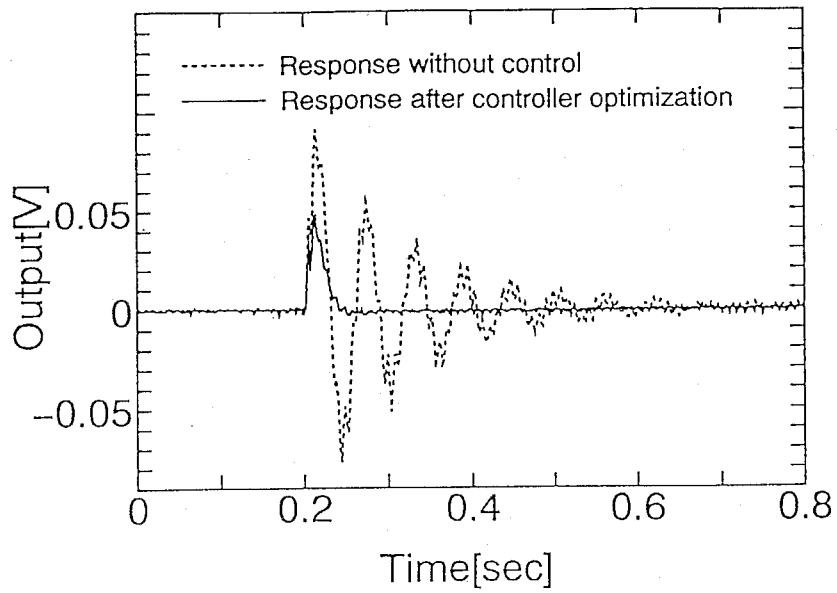


図6-16 衝撃外乱に対する節点66の応答
(実験結果)

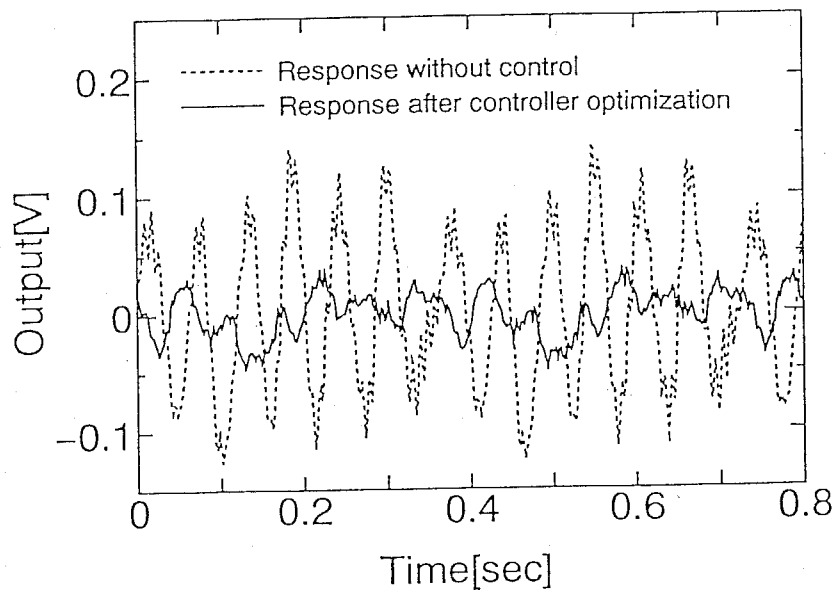


図6-17 白色雑音外乱に対する節点66の応答
(実験結果)

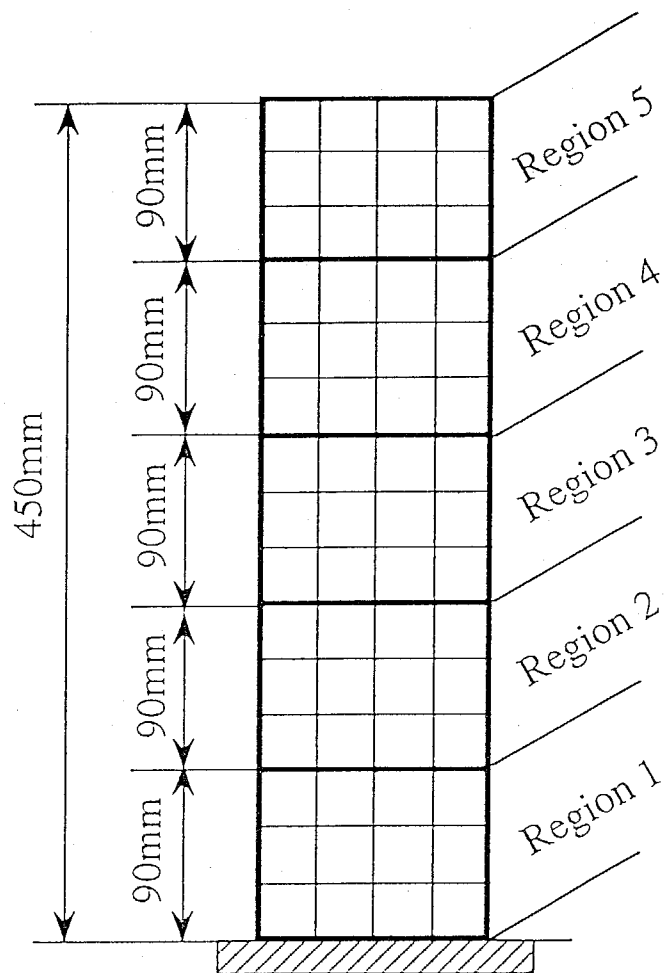


図 6-18 構造系の設計変更領域

また、平板の板厚の最適値を表6-4に示す。このときの両評価関数の最適値を次に示す。

$$H_y^{opt} = 0.484 \quad H_u^{opt} = 70.0 \quad (6-50)$$

出力に関する評価関数 H_y は制御系のみ最適化よりもさらに低減されていることがわかる。そして、制御入力に関する評価関数 H_u は前回と同様に上限値に達していることがわかる。このときの閉ループ系の極配置は図6-19のようになり、安定性が保障されていることがわかる。そして、 w_{72} から y_{66} の間のFRFを図6-20に示す。ただし、点線は制御系のみ最適化の実験結果、破線、実線はそれぞれ同時最適化後の計算結果、実験結果を示す。図6-20から、計算結果と実験結果はよく一致しており、同時最適化により共振ピークの応答レベルがさらに低減されているのがわかる。また節点72に衝撃力および白色雑音外乱が作用したときの節点66の時刻歴応答の実験結果をそれぞれ図6-21と図6-22に示す。ただし、破線は制御系のみ最適化、実線は同時最適化の結果を示し、同時最適化による結果の方が応答レベルが低減されていることがわかり、本手法の有効性が明らかになった。

表6-4 板厚の最適値(白色雑音外乱)

Region No.	1	2	3	4	5
Thickness[mm]	5.89	5.37	4.94	4.54	5.35

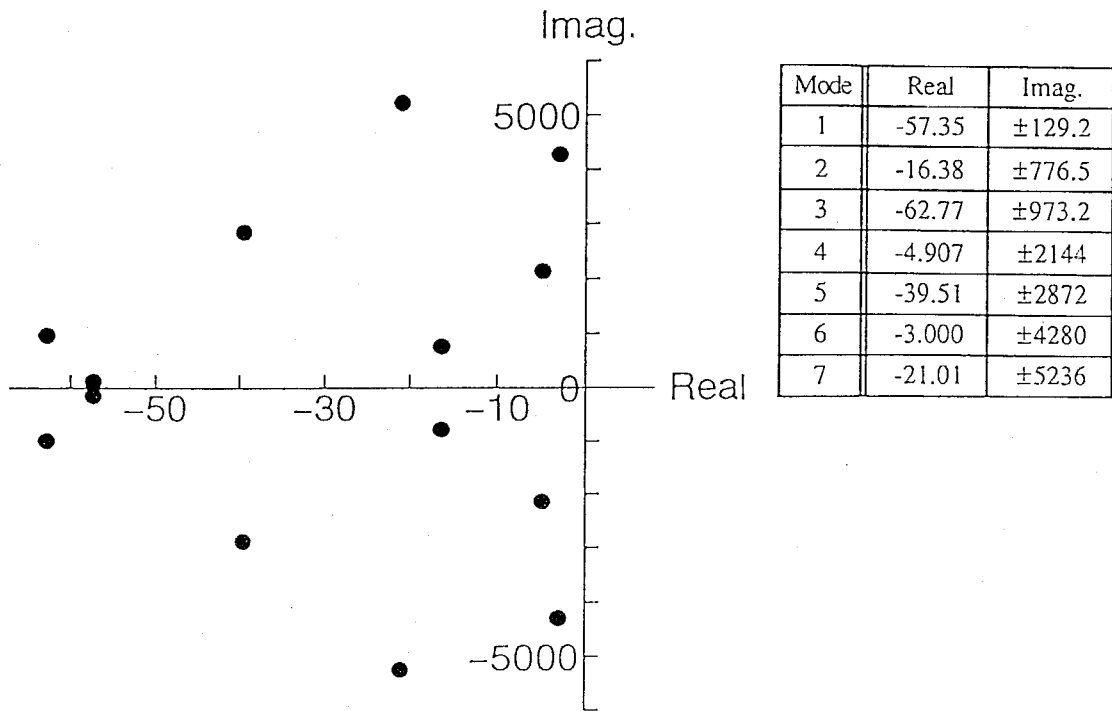


図6-19 同時最適化後の閉ループの極配置
(白色雑音外乱に対する設計)

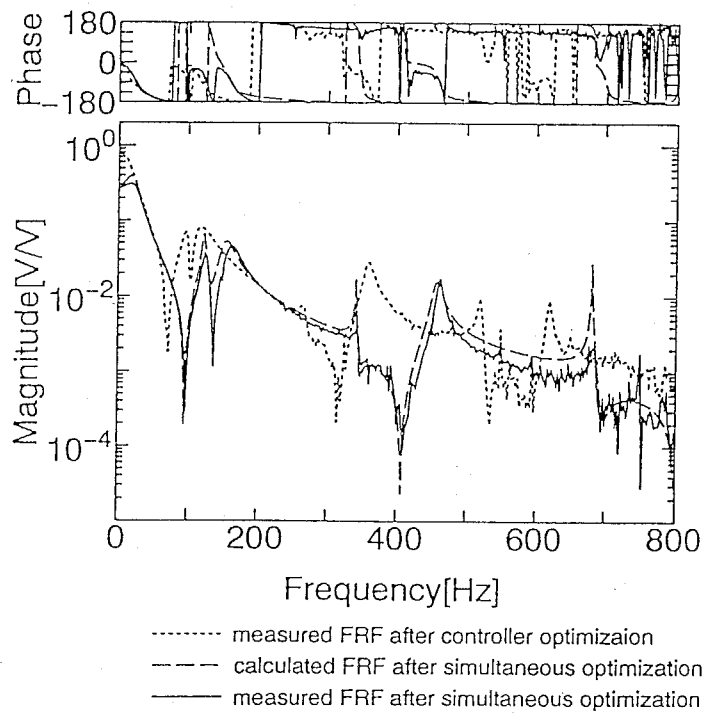


図6-20 最適化後の w_{72} と y_{66} の間の FRF
(白色雑音外乱に対する設計)

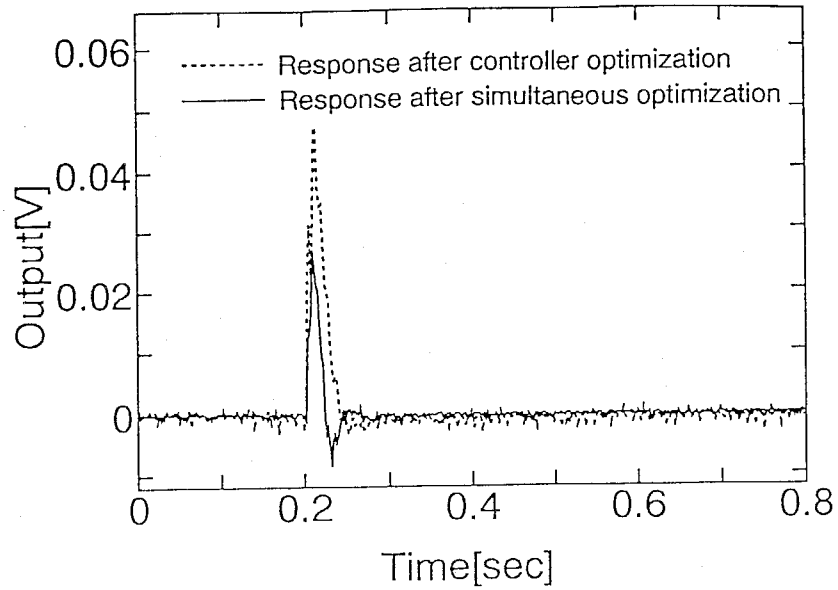


図6-21 同時最適化後の衝撃外乱に対する
節点66の応答（実験結果）

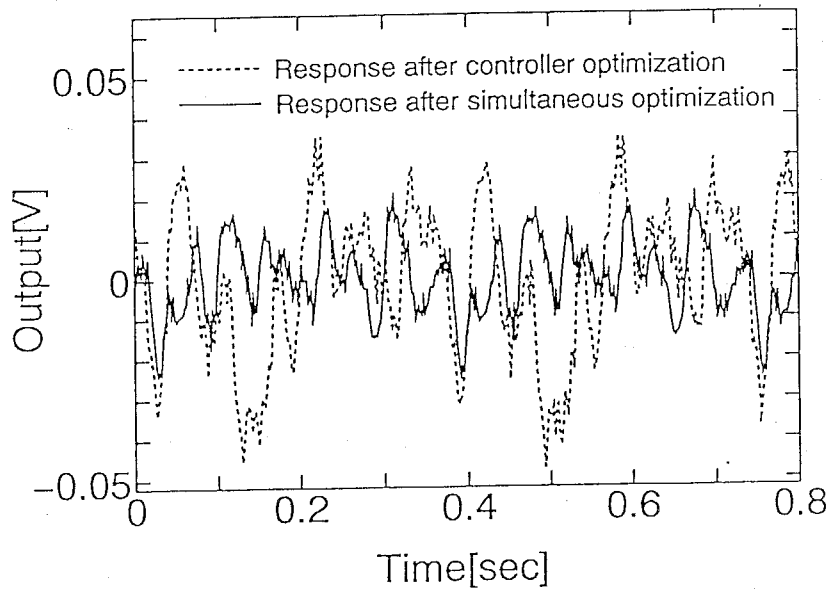


図6-22 同時最適化後の白色雑音外乱に対する
節点66の応答（実験結果）

(b) 有色雑音外乱が作用する場合

ここでは、有色雑音としてある周波数成分が卓越した特性を持つ外乱を考える。前述の図6-20のFRFから、制御系のみ最適化を行った特性は120Hz付近に3次の共振ピークを持ち、ほぼ同じ周波数に同時最適化を行ったときの2次の共振ピークが存在することがわかる。このことから、120Hzの周波数成分が卓越した外乱がシステムに作用するときには、上述の白色雑音外乱に対する同時最適設計手法では良好な制振効果が期待できない。そこで、式(6-35)に示される拡張状態方程式に基づいて、同時最適化を実行する。

有色雑音外乱の周波数特性を図6-23に示す。このように120Hzに卓越した成分を含んでいる。そこで、本手法を前述の白色雑音外乱に対して同時最適化を行った結果を初期値として再び同時最適化を実行する。その際の評価関数 H_y 、 H_u は式(6-42)に基づいて計算する。 H_y 、 H_u の初期値は次のようになる。

$$H_y^{org} = 0.113 \quad H_u^{org} = 80.2 \quad (6-51)$$

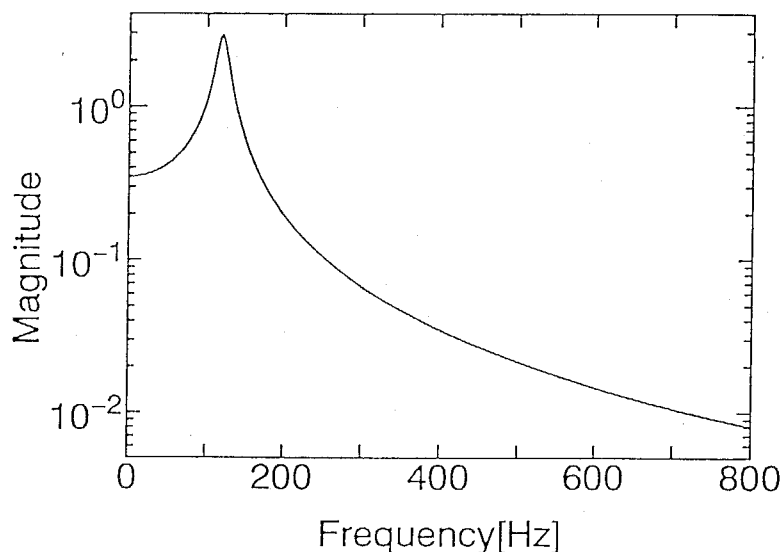


図6-23 外乱の周波数特性

設計変数は前述の白色雑音外乱に対する同時最適化の場合と同じとし、板厚の上下限值も式(6-48)と同一とする。目的関数を H_y とし、制約条件を次のように設定する。

$$H_u^{max} = 20.0, \quad s_i^{max} = -3 \quad (Vi) \quad (6-52)$$

同時最適化の結果、重み行列 L の最適値は次のようになった。

$$L_{s2}^{opt} = \begin{bmatrix} 0.9802 & 1.068 & 3.859 & 1.866 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-53)$$

また、平板の板厚の最適値を表6-5に示す。このときの両評価関数の最適値は次のようになった。

$$H_y^{opt} = 0.0319, \quad H_u^{opt} = 20.0 \quad (6-54)$$

H_y は初期値に対して大幅に低減しており、 H_u は上限値に一致していることがわかる。このときの閉ループ系の極配置を図6-24に示すが、式(6-52)の制約を満たしている。そして、最適化後の w_{72} から y_{66} までのFRFを図6-25に示す。点線が初期制御における計算結果、実線が同時最適化後の計算結果であり、120Hz付近に存在していた共振ピークは移動して、その周波数付近での応答レベルが著しく低減していることがわかる。また、節点72に120Hzの正弦波外乱が作用するときの節点66の応答の計算結果を図6-26に示す。ただし、破線は初期制御、実線は同時最適化後の結果である。同図から応答振幅レベルが著しく低減していることがわかる。このように外乱の周波数特性を考慮する場合、構造系と制御系の同時最適設計は特に有効となる。

表6-5 板厚の最適値(有色雑音外乱)

Region No.	1	2	3	4	5
Thickness[mm]	6.49	5.57	6.46	6.48	5.67

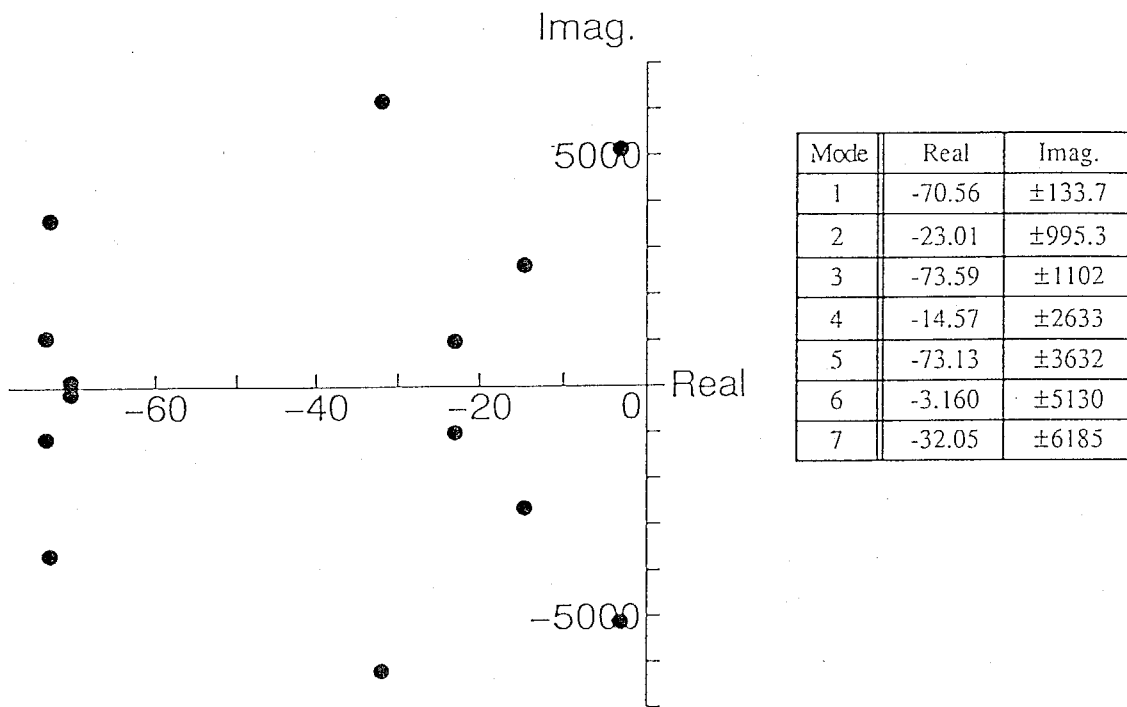


図6-24 最適化後の閉ループの極配置
(有色雑音外乱に対する設計)

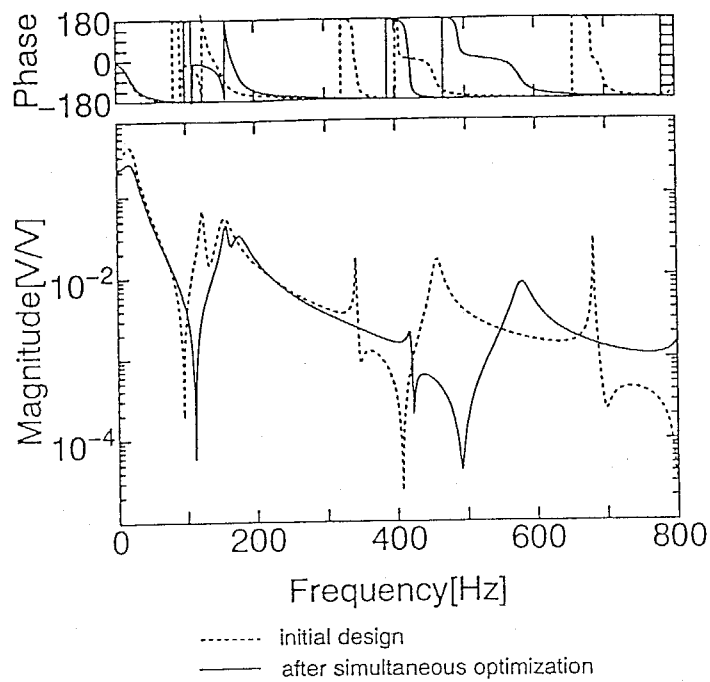


図 6-25 最適化後の w_{72} と y_{66} の間の FRF
(有色雑音外乱に対する設計)

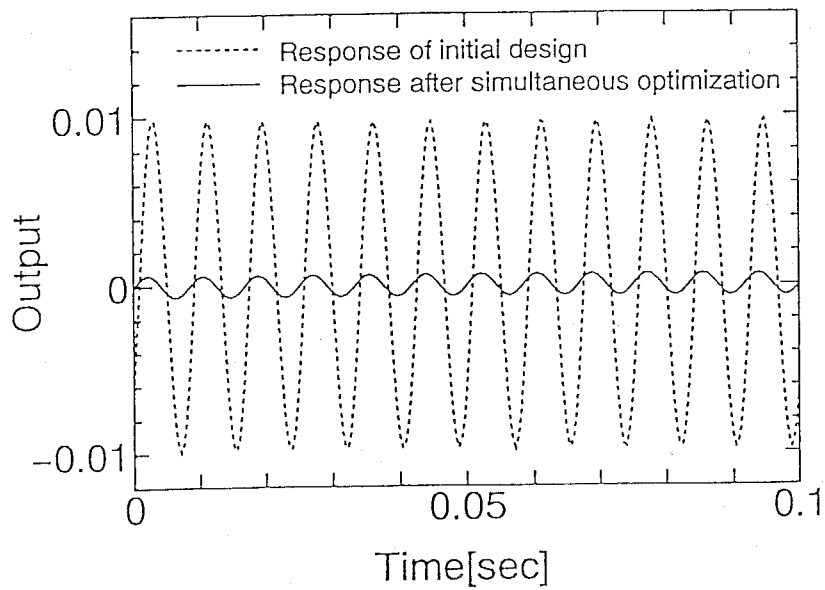


図 6-26 調和外乱に対する節点 66 の応答

6. 5 結言

本章では、感度解析を用いた構造系と制御系の同時最適化方法を提案した。まず、システムの動特性を支配する目的関数を希望する目標値に一致させる同時最適化法を提案し、以下の結論を得た。

(1) 制御系と構造系の設計変数を同時に変更することにより、システムの動特性を支配する2次形式評価関数、FRFのゲイン、位相、極および零点を希望する値に一致させる最適化を可能にした。

(2) 白色雑音の外乱が作用するときの状態変数に関する2次形式評価関数の低減を行った。その結果、制御系の設計変数に加えて構造系の設計変数をも同時に変更することにより、制御入力に関する評価関数を、制御系だけの最適化よりも著しく低く抑えることができることを明らかにした。

(3) 周期的な外乱に対しては、システムのFRFのゲインと極を変更することにより、応答を改善できることを示し、さらに零点を変更することにより効果的な応答レベルの低減が実現できることを明らかにした。

次に、高次モードの安定性を考慮した構造系と制御系の同時最適設計法を示し、以下の結論を得た。

(4) システムの低次元化で無視した固有モードの安定性を保障する、構造系と制御系の同時最適化を感度解析と非線形計画法により実行する設計法を提案した。

(5) 本手法により、有色雑音の外乱が作用するときの構造系と制御系の同時最適化を可能とし、制御系だけの最適化よりも制御性能を大幅に向上できることを明らかにした。

(6) 本手法を用いれば、コロケーションが成立しないシステムに対しても同時最適化が可能になることを示し、その有効性を明らかにした。

(7) 平板の振動制御に本手法を適用し、制振性能をシミュレーションおよび実験の両面から検討した結果、すべての結果について両者は良く一致し、また本手法の有効性が検証された。

第7章 コンプレックス法による構造系と制御系の同時最適設計

7.1 緒言

制御系を中核機能として有する構造系が主流になるにつれて、構造系と制御系の同時最適化が重要になってきた。そこで第6章では、感度解析および非線形計画法を用いた構造系と制御系の同時最適化方法を示した。すなわち、構造系をFEMでモデル化し、モード解析を用いたシステムの低次元化、および制御性能を向上させるための構造系と最適レギュレータの同時最適化を、感度解析に基づいて実行する方法を提案した。この方法では、最適レギュレータを設計するための低次元システムにより定義される2次形式評価関数を目的関数としており、低次元化で無視した固有モードを含めた大自由度の実システムの極配置を制約条件として導入することにより、実システムの安定性を保障する同時最適設計を可能にした。

本章では、出力定数フィードバック系と H^∞ 制御系に対する構造系と制御系の同時最適設計を、コンプレックス法により実行する方法⁽⁶⁵⁾⁽⁶⁶⁾を提案する。

まず、実システムに低次元の出力フィードバック則を直接適用し、実システムの全ての固有モードを考慮した2次形式評価関数および構造変数を含めた目的関数を定義し、コンプレックス法により構造系と制御系の同時最適化を行う方法を提案する。提案する手法の特徴は感度解析を行う必要がないこと、外乱の周波数特性を考慮した設計が可能であること、およびコロケーションが成立しないシステムに対する同時最適化が可能なことである。本手法では、目的関数として構造系の質量および2次形式評価関数を採用し、設計変数として有限要素モデルの板厚およびフィードバックゲイン行列の各成分を採用する。本手法のように最適制御理論を用いずに出力フィードバック則を直接設計変数として採用すると、最適化の過程で閉ループ系が不安定になることがあり、このとき2次形式評価関数が定義できなくなる。したがって、目的関数が設計変数に対して不連続となり、目的関数の設計変数に関する感度を用いて最適解を探索する、通常最適化手法はここでは適用できなくなる。そこで本研究では、このように不連続な目的関数の最適化を可能にするために、最適化手法としてコンプレックス法⁽⁶⁷⁾を採用する。コンプレックス法は、目的関数の感度を用いることなく、不等式

制約条件を満足しながら、目的関数を最小にする設計変数の最適解を探索する方法であり、本研究で提案する同時最適化に適している。また、連続な目的関数であっても、その感度の導出が複雑で困難もしくは膨大な計算時間を要する場合には、目的関数の感度を用いない本手法は有効となる。このように、本手法は目的関数の感度を用いないので、最適化のアルゴリズムが大幅に簡略化され、プログラミングが容易になり、実用面でも有利である。

次に、より高性能な周波数特性の整形およびロバスト性能を実現するために、構造系と H^∞ 制御系の同時最適設計法を提案する。構造物の動特性の最適化の大きな目的として、固有振動数および固有モード等を変更することにより、希望する周波数特性の整形を実現することがあげられる。制御系の最適化についても同様に、システムの過渡応答特性や周波数応答特性を整形することを目標としている。特に、後者の周波数特性の整形を可能とし、さらに構造系のパラメータ変動などの不確定性に対しロバストな制御系を設計するための手法として、 H^∞ 制御理論が有力である。このように構造系と制御系の最適化において、両者の目標には共通した側面があり、また両者の特性は互いに深く干渉している。そこで、構造系と H^∞ 制御系の同時最適設計を行うことにより、優れた周波数応答の整形の実現が期待できる。本手法では、閉ループ系における外乱から制御量までの H^∞ ノルムを目的関数として採用し、これを最小にするような構造系と制御系の設計変数の最適解を同時に探索する。まず、連続体構造物をFEMでモデル化し、モード座標変換によりシステムを低次元化し、一般化制御対象を記述する。そして、 H^∞ 制御理論により、出力フィードバックの動的補償器を設計する。同時最適化を行う際の設計変数として、構造系ではFEMモデルの板厚、制御系では外乱から制御量までの H^∞ ノルムを採用する。ここで、上述の目的関数の最小化を行う際に、 H^∞ コントローラの解の存在は設計変数である H^∞ ノルムに依存し、この解の存在条件を連続関数として記述できない。したがって、目的関数が設計変数に対して不連続となり、目的関数の設計変数に関する感度を用いて最適解を探索する、通常最適化手法は適用できない。そこで、上述と同様に設計変数の最適解の探索手法としてコンプレックス法を採用する。すなわち、 H^∞ 制御問題の解の存在条件を制約とし、目的関数を最小にする設計変数の最適解をコンプレックス法により探索する。

以上の2つの制御系に対する同時最適設計手法を平板の振動制御系の同時最適設計に適用し、その有効性を明らかにする。

7.2 構造系と出力フィードバック制御系の同時最適設計

ここでは、大自由度構造系に対し、小自由度の定係数出力フィードバック則を適用し、この制御則のフィードバックゲインを制御系の設計変数として直接採用し、構造系の設計変数と含めて同時最適化を実行する方法を提案する。

7.2.1 構造系と制御系の定式化

構造系をFEMにてモデル化し、採用モード数 r のモード座標に変換し、白色雑音外乱を想定した式(4-3)の状態方程式を作成する。

$$\dot{q} = Aq + B_1w + B_2u \quad (4-3)$$

また、有色雑音外乱が作用する場合には、この外乱を式(6-32)、(6-33)の状態方程式として記述し、式(6-34)に示す拡張状態方程式を作成する。

$$\dot{q}_a = A_a q_a + B_{1a}w + B_{2a}u \quad (6-34)$$

そして、ここでは式(4-3)もしくは式(6-34)のシステムを直接実システムとして設計を行うことになる。上述のシステムに対して、定係数出力フィードバックを構成するわけだが、ここでは式(4-3)の状態方程式に基づいて理論展開を行う。

システムの出力方程式を式(4-6)として記述する。

$$y = Cq \quad (4-6)$$

このとき、この系に関して可制御・可観測性が成り立つとする。

第4章で示した制御系の最適設計では、出力の数 t と採用モード数 r に関して式(4-7)を仮定していたが、ここでは、最適レギュレータ理論を用いずに、出力フィードバックゲイン行列の成分を直接決定する問題を考えるので、式(4-7)の関係は成立しなくてもよい。したがって、出力の数 t に対して採用モード数 r をどのように設定しても構わない。ただし、出力の数および観測位置により、閉ループ系を安定化できる採用モード数には限界があると考えられる。

制御系は、次の出力フィードバックにより構成する。

$$u = Fy \quad (7-1)$$

上記の制御則では、センサーとアクチュエータの位置に関しては何ら制約を与えない、すなわちコローケーションが成立していなくても構わない。そして、このときの閉ループ系は次式となる。

$$\dot{q} = G_a q + B_1 w \quad (7-2)$$

ここで、

$$G_a = A + B_2 F C \quad (7-3)$$

したがって、行列 G_a の固有値解析を行うことにより、実システムの閉ループ系の極 $s_i (i=1 \sim 2r)$ が求められる。そして、この極を調べれば、系が安定か否かを判別できる。

7.2.2 同時最適設化問題

最適化問題における目的関数として、閉ループシステムの振動制御性能および構造系の質量を考える。すなわち、振動制御性能として、式(4-20)、(4-21)で示される出力および制御入力に関する2次形式評価関数 H_y 、 H_u を考える。これらの評価関数は、基本的には4.2.4に示した方法で計算することができる。ただし、この場合には式(4-23)、(4-24)に含まれる行列 P_1 、 P_2 は次のリアプノフ方程式の解となる。

$$P_1 G_a + G_a^T P_1 + C^T \Gamma C = 0 \quad (7-4)$$

$$P_2 G_a + G_a^T P_2 + C^T F^T \Pi F C = 0 \quad (7-5)$$

ここで、閉ループシステム G_a が安定の場合のみ式(7-4)、(7-5)のリアプノフ方程式は意味のある解を持ち、式(4-20)、(4-21)の2次形式評価関数を定義できる。したがって、最適化問題において閉ループシステムの安定性を保障する制約を与える必要がある。そこで、閉ループシステム G_a の固有値(極) s_i の配置を制約条件として考慮する。そして、制御入力に関する2次形式評価関数 H_u については、その上限値を制約条件として与える。

目的関数を構造系の質量 M と出力に関する2次形式評価関数 H_y の線形結合で表し、 H_u の上限を $H_u^{max} > 0$ 、極 s_i の実部の上限を $s_i^{max} < 0 (i=1, \dots, 2r)$ として、本研究における制約条件付き最適化問題を次のように記述する。

$$\begin{aligned} \min \quad & J(\tau, \gamma) = W_M M(\tau) + W_H H_y(\tau, \gamma) \\ \text{Subj.} \quad & \begin{cases} H_u - H_u^{max} \leq 0 \\ \text{Re}(s_i) - s_i^{max} \leq 0 \quad (i=1 \sim 2r) \end{cases} \end{aligned} \quad (7-6)$$

ここで、 W_M と W_H は重み係数である。また、 $\tau \in \mathcal{R}^l$ は構造系の設計変数ベクトルであり、FEMモデルの板厚で構成され、 $\gamma \in \mathcal{R}^m$ は制御系の設計変数ベクトルであり、フィードバックゲイン行列 F の成分で構成される。 l 、 m はそれぞれ構造系および制御系の設計変数の数である。式(7-6)において、 W_M と W_H を適切に設定することにより、構造物に質量と制御性能のバランスのとれた同時最適設計を行うことができる。

同時最適化を行う際に、両設計変数に関しては次のような上下限値を設定する。

$$\tau^{min} \leq \tau \leq \tau^{max} \quad (7-7)$$

$$\gamma^{min} \leq \gamma \leq \gamma^{max} \quad (7-8)$$

上述の最適化問題を実行する際には、最適化の過程で閉ループシステムが不安定、すなわち閉ループシステムの極 $s_i (i=1 \sim 2r)$ の中で実部に正の値をもつ根が現れる可能性があり、このとき2次形式評価関数が定義できなくなる。したがって、目的関数の連続性を前提として、設計変数に関する感度を用いて最適解の探索を行う、通常最適化手法はここでは適用できない。そこで本研究では、目的関数の感度を用いずに最適解の探索を行うコンプレックス法を採用し、上述の最適化問題を実行する。コンプレックス法のアルゴリズムについては巻末の付録に示す。

7.2.3 平板の同時最適化による振動制御

本手法を図7-1に示す一端固定平板(ステンレス鋼)の振動制御に適用する。ここで、実験装置は図4-3に示すものと同一である。この平板は4mmの一樣板厚であり、その質量は1.70kgである。また同図において、平板上の節点29と62の法線方向の変位と速度を検出し、節点19と72に取り付けられたボイスコイルアクチュエータにより振動制御を行うシステムになっている。すなわち、出力ベクトルと制御入力ベクトルは次式となる。

$$y = (y_{29}, y_{62}, \dot{y}_{29}, \dot{y}_{62})^T \quad (7-9)$$

$$u = (u_{19}, u_{72})^T \quad (7-10)$$

このように、このシステムではコロケーションが成立していない。外乱としては、節点72に白色雑音もしくは有色雑音の外乱 w_{72} を作用させる。

この平板の非制御時の w_{72} と y_{62} の間のFRFを図7-2に示す。ただし、ここでの入出力は、それぞれ外乱としてボイスコイルアクチュエー

タに入力される電圧 [V]、およびギャップセンサーアンプの出力電圧 [V]とする。破線が計算結果、実線が実験結果であるが、両者はよく一致している。同図から、400Hz 以下に5つの共振ピークが現れていることがわかり、400Hz 以上の周波数領域では特に顕著な共振ピークが現れないことが実験から明らかになっている。このことから、FEMにより得られたシステムを固有値解析により得られた5次までの固有モードを用いて低次元化し、本手法による同時最適化を適用する。したがって、このときのシステムの次数は10となる。外乱が白色雑音の場合と有色雑音の場合に同時最適化を実行した結果を次に示す。

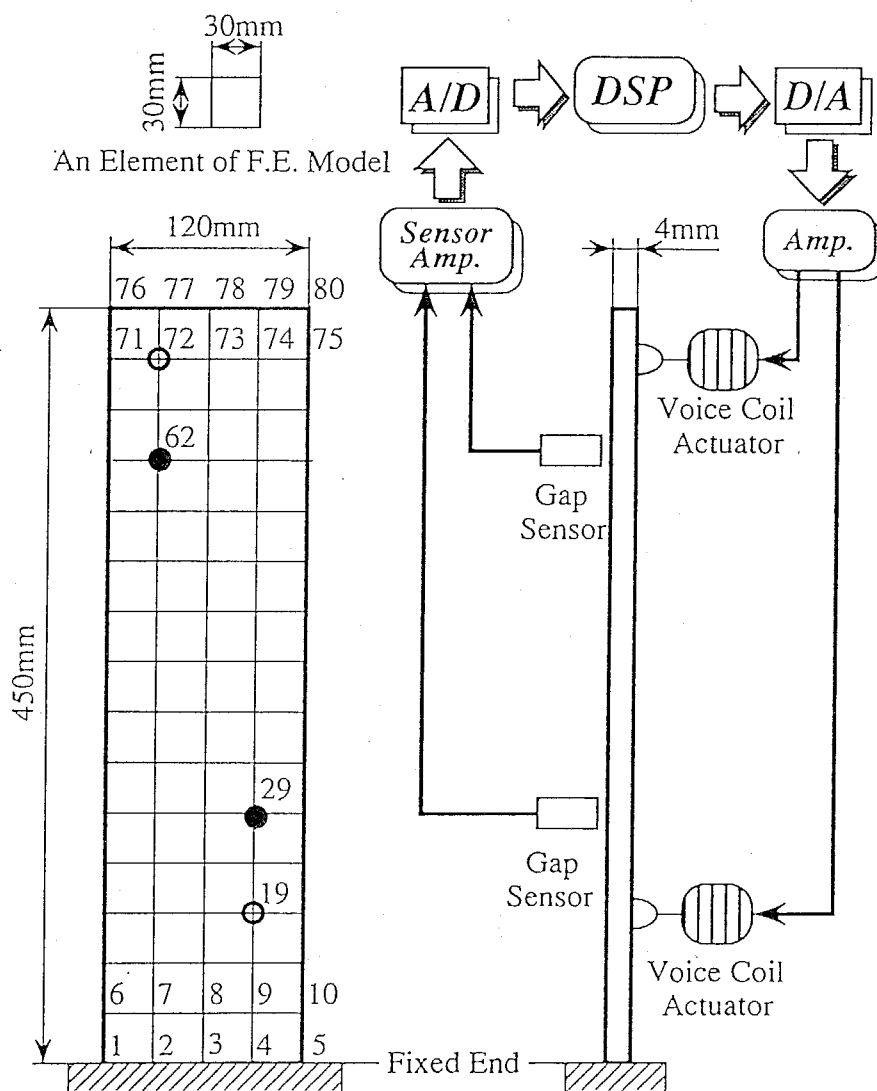


図7-1 FEM解析モデルと制御システム

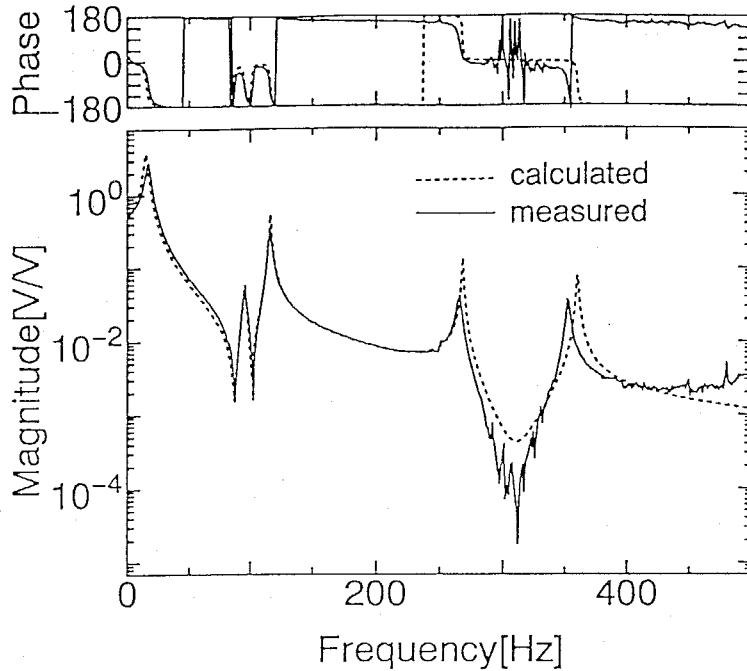


図7-2 非制御時の w_{72} と y_{62} の間の FRF

(a) 白色雑音外乱が作用する場合

まず、制御系のフィードバックゲインのみを設計変数としたときの最適化を実行する。目的関数 J を出力に関する 2 次形式評価関数 H_y とする。すなわち、式(7-6)において、 $W_M = 0$ 、 $W_H = 1$ とする。そして、式(4-20)、(4-21)に含まれる重み行列をそれぞれ $\Gamma = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$ および $\Pi = \text{diag}(1, 1)$ とする。このとき出力および制御入力に関する 2 次形式評価関数はそれぞれ次式となる。

$$H_y = E[y_{29}^2 + y_{62}^2], \quad H_u = E[u_{19}^2 + u_{72}^2] \quad (7-11)$$

いま、フィードバックゲイン行列 $F \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ の初期値を次のように設定する。

$$F^{org} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.002 \end{bmatrix} \quad (7-12)$$

このときの閉ループ系の極配置は図7-3のようになり、安定であることがわかる。また、式(7-12)の初期制御による w_{72} と y_{62} の間の FRF の計算結果を図7-4の実線で示すが、非制御時の FRF (点線) とほぼ一致して

おり、共振時の応答レベルがわずかに低減していることがわかる。そして、外乱 w_{72} のインテンシティ V を1としたときの、両評価関数の初期値は次のようになる。

$$H_y^{org} = 77.2, \quad H_u^{org} = 10.7 \quad (7-13)$$

最適化を実行する上で、フィードバックゲインの各成分を設計変数とし、その上下限値を次のように設定する。

$$F^{min} = \begin{bmatrix} -10 & -10 & -0.05 & -0.05 \\ -10 & -10 & -0.05 & -0.05 \end{bmatrix} \quad (7-14)$$

$$F^{max} = 0 \quad (7-15)$$

そして、式(7-6)における制御入力と極配置の制約条件の上限値を次のように設定する。

$$H_u^{max} = 100, \quad s_i^{max} = -2 \quad (\forall i) \quad (7-16)$$

以上の制約の下で、本手法により目的関数を最小にする最適化を実行する。ここで、設計変数の数 $\eta = 8$ に対しコンプレックス法で発生させる設計変数ベクトルの数を $\sigma = 40$ とする。式(7-12)の初期値は設計変数ベクトルの1つであるが、上述の制約条件をすべて満たしている。最適化の結果、フィードバックゲインの最適値は次のように求まった。

$$F_c^{opt} = \begin{bmatrix} -0.733 & -0.547 & -0.00422 & -0.00432 \\ -0.758 & -1.04 & -0.00287 & -0.00875 \end{bmatrix} \quad (7-17)$$

これによる閉ループ系の極配置は、図7-5のようになった。このときの両評価関数の最適値はそれぞれ次のようになった。

$$H_y^{opt} = 18.0, \quad H_u^{opt} = 100 \quad (7-18)$$

H_y は初期値に対して低減しており、 H_u は制約の上限値に達していることがわかる。 w_{72} と y_{62} の間のFRFの計算結果を図7-6の破線で示すが、非制御時のFRF(点線)よりも低次の共振ピークの応答レベルが低減しており、また図7-4の初期制御の結果よりも大きな制振効果の実現されていることがわかる。

次に同時最適化を実行する。

同時最適化における設計変数として、前述のフィードバックゲインの各成分に加えて、図6-15に示すように平板の5つの領域の板厚を採用する。板厚 $\tau_i (i = 1 \sim 5)$ の上下限の制約を次のように与える。

$$3 \leq \tau_i \leq 6 \quad (\forall i) \quad (7-19)$$

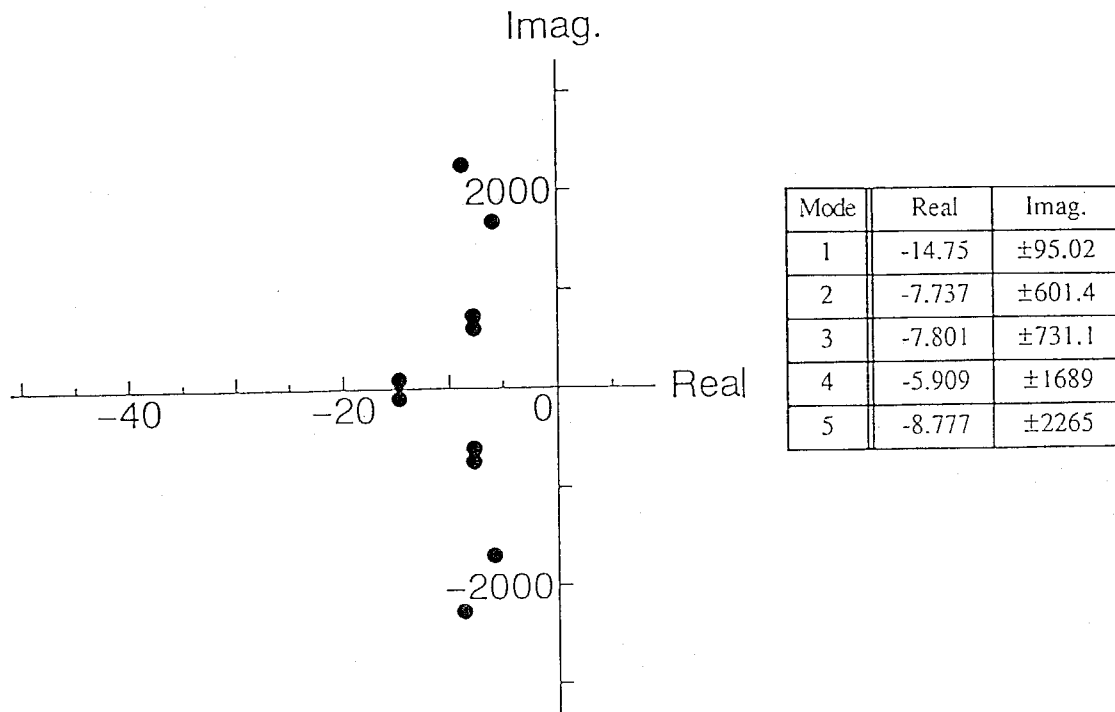


図7-3 初期制御による閉ループシステムの極配置

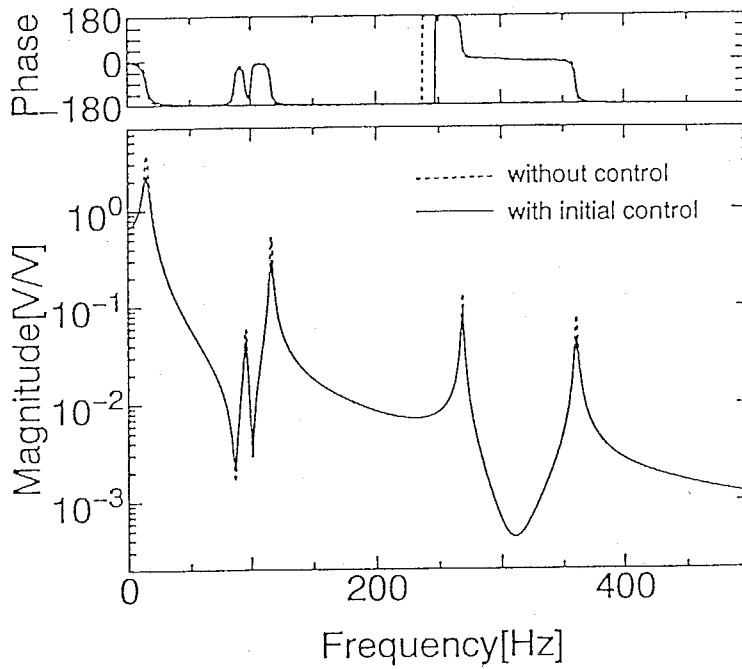


図7-4 初期制御による w_{72} と y_{62} の間の FRF

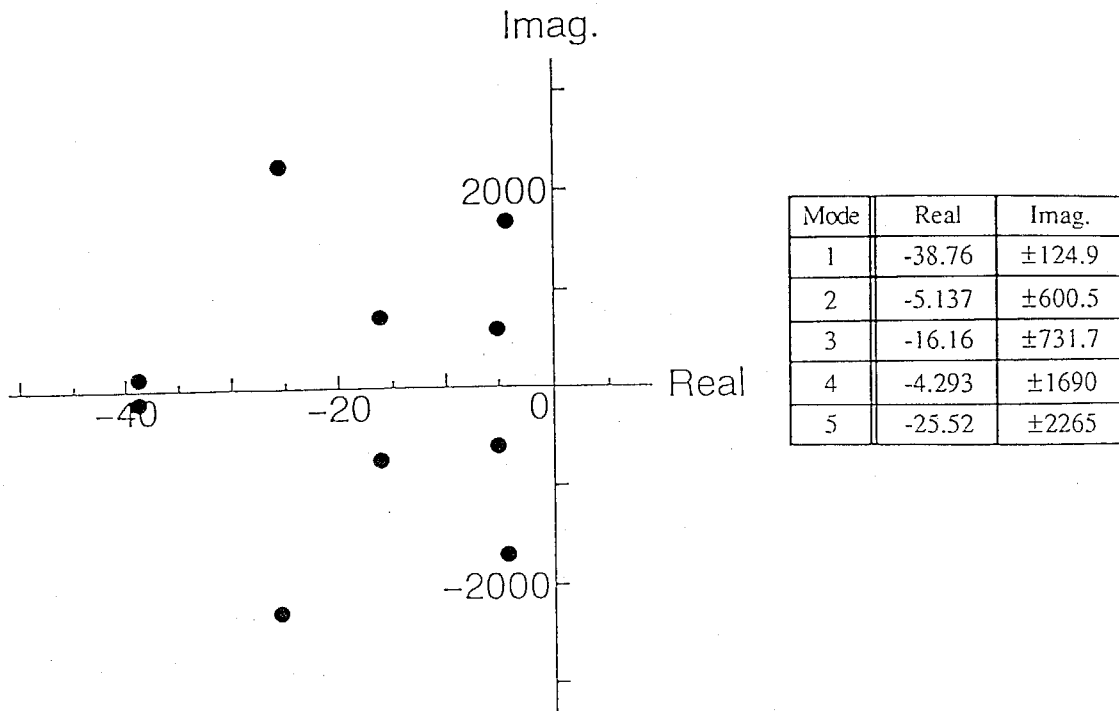


図7-5 制御系の最適化後の閉ループシステムの極配置

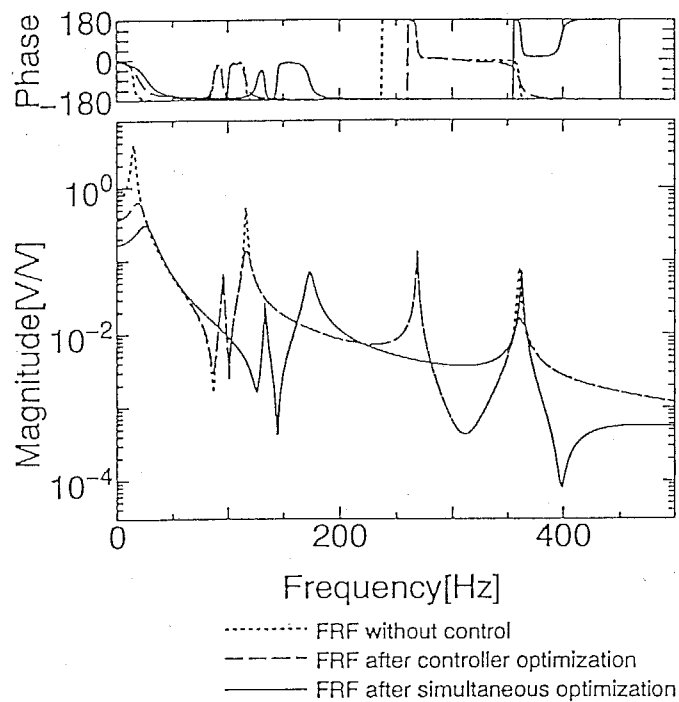


図7-6 最適化後の w_{72} と y_{62} の間の FRF
 (目的関数: $J = H_y$, 外乱: 白色雑音)

これ以外の制約条件は前述の式(7-14)、(7-15)および(7-16)と同じとし、同時最適化を実行する。ここで、設計変数の数 $\eta = 13$ に対しコンプレックス法で発生させる設計変数ベクトルの数を前回と同じく $\sigma = 40$ とする。本手法による同時最適化を行った結果、フィードバックゲインの最適値は次のようになった。

$$F_{s1}^{opt} = \begin{bmatrix} -1.65 & -1.07 & -0.00865 & -0.00924 \\ -1.09 & -1.12 & -0.00491 & -0.0123 \end{bmatrix} \quad (7-20)$$

また、平板の板厚の最適値を表7-1に示す。変更後の平板の質量は2.31kgとなり、初期の構造よりも重くなっている。このときの閉ループ系の極配置は図7-7のようになる。そして、両評価関数の最適値はそれぞれ次のようになる。

$$H_y^{opt} = 5.12, \quad H_u^{opt} = 100 \quad (7-21)$$

H_y は制御系のみ最適化の場合よりもさらに低減され、 H_u は制約の上限値に一致していることがわかる。 w_{72} と y_{62} の間のFRFの計算結果を図7-6の実線で示すが、同時最適化の結果は固有振動数が全体的に高くなっており、応答レベルは低周波数領域で特に低減していることがわかり、同時最適化の有効性が明らかとなった。

表7-1 構造系の設計変数の最適値

(目的関数: $J = H_y$, 外乱: 白色雑音)

Region No.	1	2	3	4	5
Thickness [mm]	5.99	5.74	5.66	4.92	4.97
Mass of the structure, M=2.31kg					

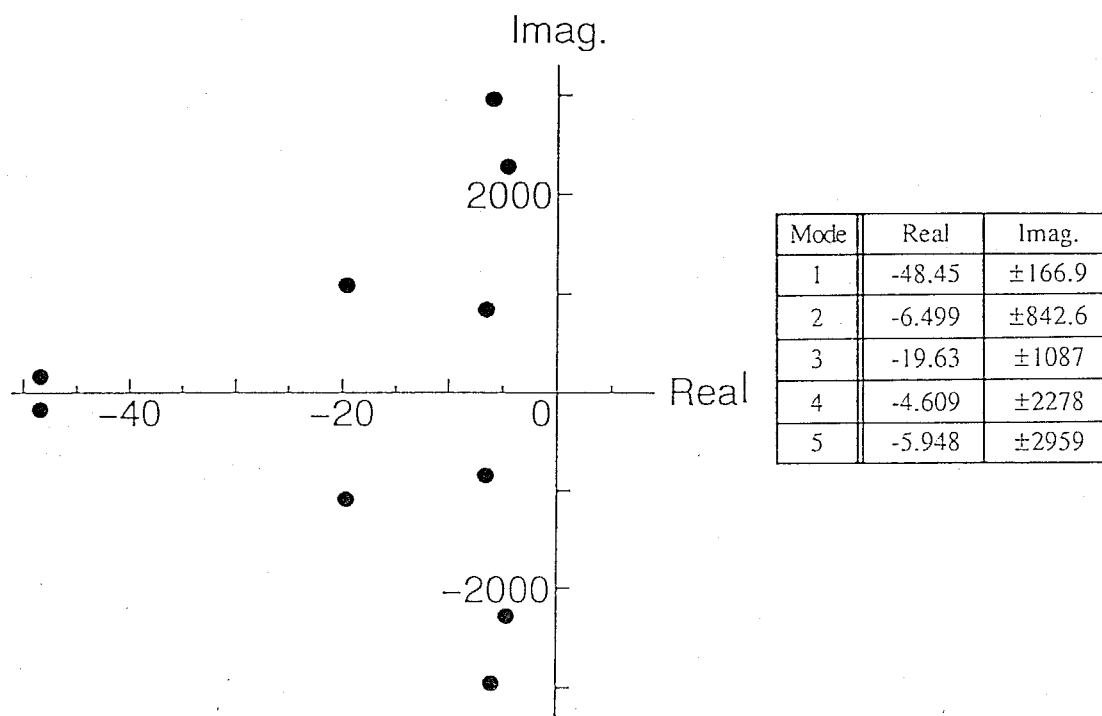


図7-7 同時最適化後の閉ループシステムの極配置
(目的関数: $J = H_y$, 外乱: 白色雑音)

(b) 有色雑音外乱が作用する場合

ここでは、有色雑音外乱としてある周波数成分が卓越した特性を持つ外乱を考える。前述の白色雑音外乱に対して設計を行った場合の図7-6のFRFから、非制御時および制御系のみのも最適化を行った特性は360Hz付近に5次の共振ピークを持ち、同じ周波数付近に同時最適化を行ったときの4次の共振ピークが存在することがわかる。このことから、360Hz付近の周波数成分が卓越した外乱がシステムに作用するときには、上述の白色雑音に対する設計では応答性能の大幅な改善は期待できない。そこで、ここでは式(6-32)、(6-33)に基づいて360Hz付近に卓越した成分を有する外乱を状態方程式で記述し、式(6-34)の拡張状態方程式を用いて同時最適化を実行する。すなわち、出力に関する2次形式評価関数 H_y を式(6-34)に基づいて計算する。制御入力に関する2次形式評価関数 H_u については、前述の白色雑音外乱に対する結果との対応をとるために、式(4-3)の状態方程式に基づいて計算する。

有色雑音外乱の周波数特性を図7-8に示す。このように、この外乱は360Hzに卓越した成分を含んでいる。まず、制御系のフィードバックゲインのみのも最適化を試みた結果、その特性は前述の白色雑音外乱を想定し、制御系のみをも最適化した特性(図7-6の破線)に対しあまり改善がみられなかった。このことは、限られた制御エネルギーの下で、定数ゲインの出力フィードバックにより高周波数領域のある特定の共振現象を抑えることは困難であることを示している。そこで、次に同時最適化を実行する。

同時最適化を実行する際の、評価関数 H_y 、 H_u 、そして採用する設計変数とその初期値および上下限界はすべて上述の白色雑音外乱に対する設計の場合と同一とする。このとき、 H_y と H_u の初期値はそれぞれ次のようになる。

$$H_y^{org} = 86.8, \quad H_u^{org} = 10.7 \quad (7-22)$$

まず、目的関数を H_y とし、式(7-16)と同じ制約を与えて同時最適化を実行する。その結果、フィードバックゲインの最適値は次のようになった。

$$F_{s2}^{opt} = \begin{bmatrix} -1.02 & -0.977 & -0.00973 & -0.00381 \\ -0.501 & -1.24 & -0.00176 & -0.0103 \end{bmatrix} \quad (7-23)$$

また、平板の板厚の最適値を表7-2に示す。このとき、変更後の平板の質量は2.20kgとなった。そして、両評価関数の最適値はそれぞれ次のようになった。

$$H_y^{opt} = 7.91, \quad H_u^{opt} = 100 \quad (7-24)$$

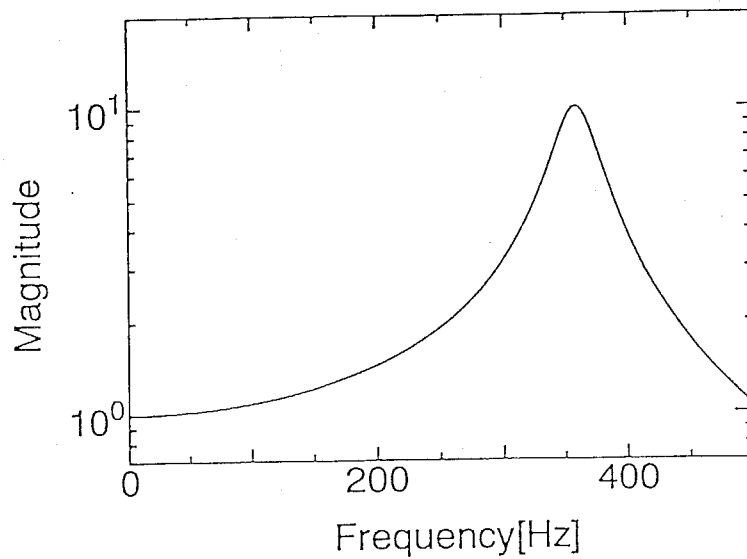


図7-8 外乱の周波数特性

表7-2 構造系の設計変数の最適値

(目的関数: $J = H_y$, 外乱: 有色雑音)

Region No.	1	2	3	4	5
Thickness [mm]	5.70	5.40	5.44	3.65	5.77
Mass of the structure, $M=2.20\text{kg}$					

H_y は大きく低減され、 H_u は制約の上限値に達している。このときの閉ループ系の極配置を図7-9に示すが、式(7-16)の制約を満たしている。そして、最適化後の w_{72} と y_{62} の間のFRFを図7-10に示す。点線が非制御の実験結果、破線が最適制御の計算結果、実線が最適制御の実験結果であるが、計算結果と実験結果はよく一致しており、360Hzに存在していた共振ピークが移動し、その周波数の応答レベルが著しく低減していることがわかる。そして、節点72に360Hzの正弦波外乱が作用するときの節点62の時刻歴応答の実験結果を図7-11に示すが、同時最適化後の応答振幅レベルは大幅に低減されている。このように、外乱の周波数特性を考慮する場合、構造系と制御系の同時最適設計は特に有効となる。

次に、構造系の質量の大幅な増加を防ぐために、平板の質量を目的関数に導入し、同時最適化を実行する。すなわち、式(7-6)において $W_M = 20$ 、 $W_H = 1$ とし、それ以外の条件は前述とすべて同一とし、同時最適化を実行する。構造物の質量と出力に関する2次形式評価関数の初期値はそれぞれ $M^{org} = 1.70\text{kg}$ 、 $H_y^{org} = 86.8$ であるので、目的関数 $J(= 20M^{org} + H_y^{org})$ と H_u の初期値はそれぞれ次のようになる。

$$J^{org} = 120.8, \quad H_u^{org} = 10.7 \quad (7-25)$$

同時最適化の結果、フィードバックゲインの最適値は次のようになった。

$$F_{s3}^{opt} = \begin{bmatrix} -1.27 & -0.772 & -0.00702 & -0.00605 \\ -0.617 & -0.986 & -0.00338 & -0.0106 \end{bmatrix} \quad (7-26)$$

また、平板の板厚の最適値を表7-3に示す。変更後の平板の質量は2.00kgとなり、前回よりも質量が低減されている。そして、目的関数の最適値 J^{opt} と制御入力に関する評価関数 H_u^{opt} は次のようになった。

$$J^{opt} = 51.7, \quad H_u^{opt} = 100 \quad (7-27)$$

このように、目的関数 J は低減され、 H_u は制約の上限値に達していることがわかる。このときの閉ループ系の極配置を図7-12に示すが、制約条件を満足する安定なシステムが実現されていることがわかる。最適化後の w_{72} と y_{62} の間のFRFの計算結果を図7-13に示すが、図7-10とほぼ同等の周波数特性が実現されている。

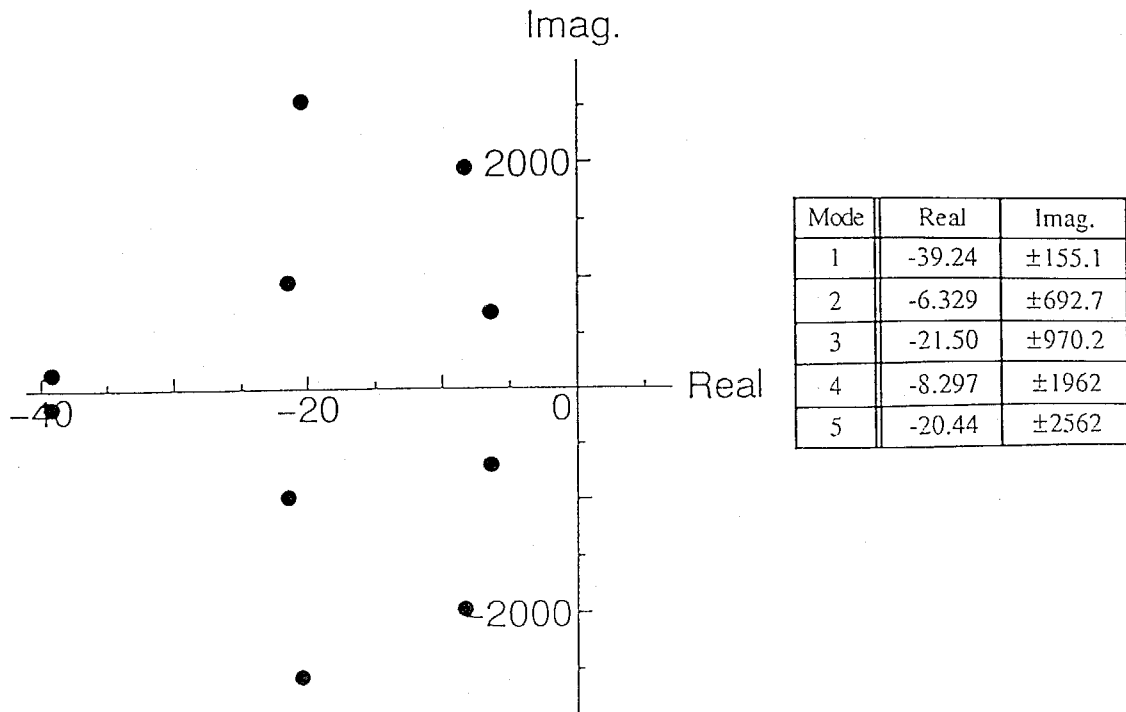


図7-9 同時最適化後の閉ループシステムの極配置
(目的関数: $J = H_y$, 外乱: 有色雑音)

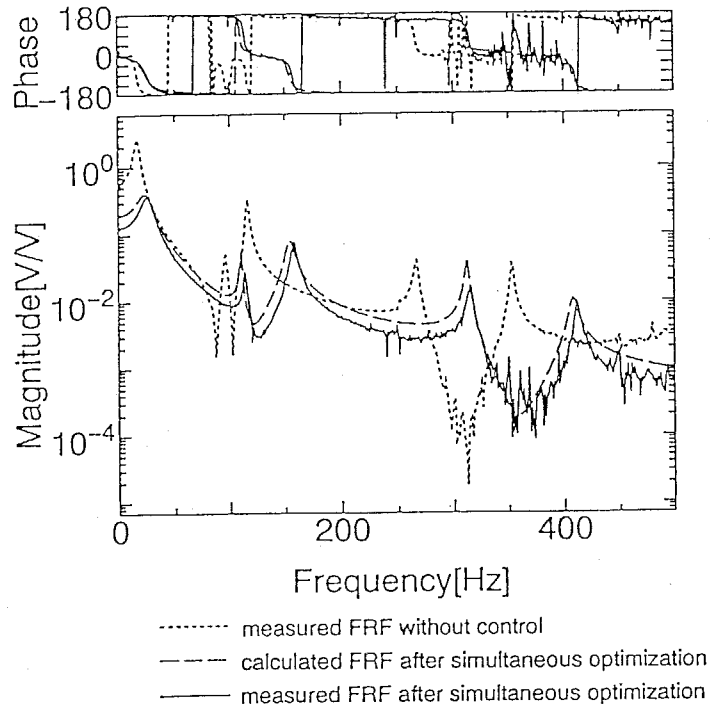


図7-10 有色雑音外乱に対する同時最適化後の w_{72} と y_{62} の間の FRF (目的関数: $J = H_y$)

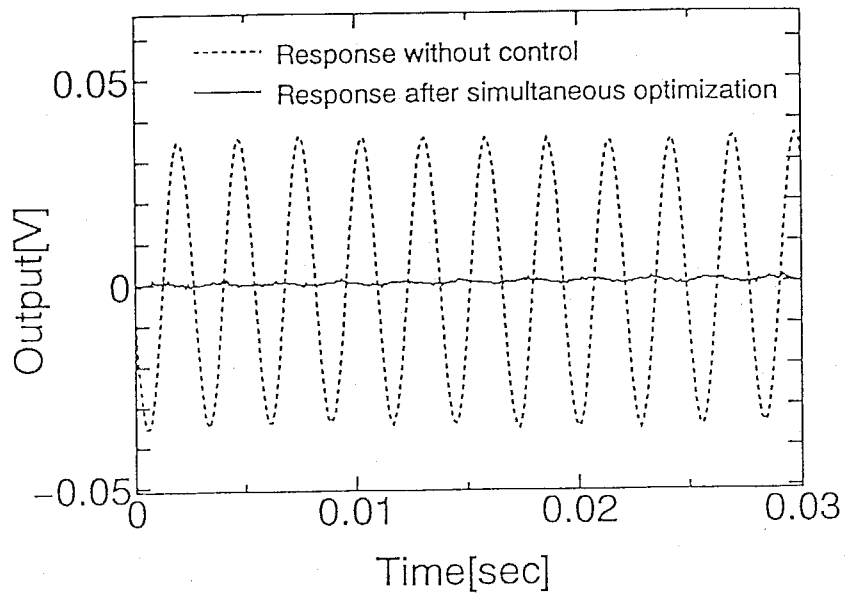


図7-11 調和外乱に対する y_{62} の時刻歴応答の実験結果

表7-3 構造系の設計変数の最適値

(目的関数: $J = 20M + H_y$, 外乱: 有色雑音)

Region No.	1	2	3	4	5
Thickness [mm]	4.95	4.60	4.63	4.63	4.84
Mass of the structure, $M=2.00\text{kg}$					

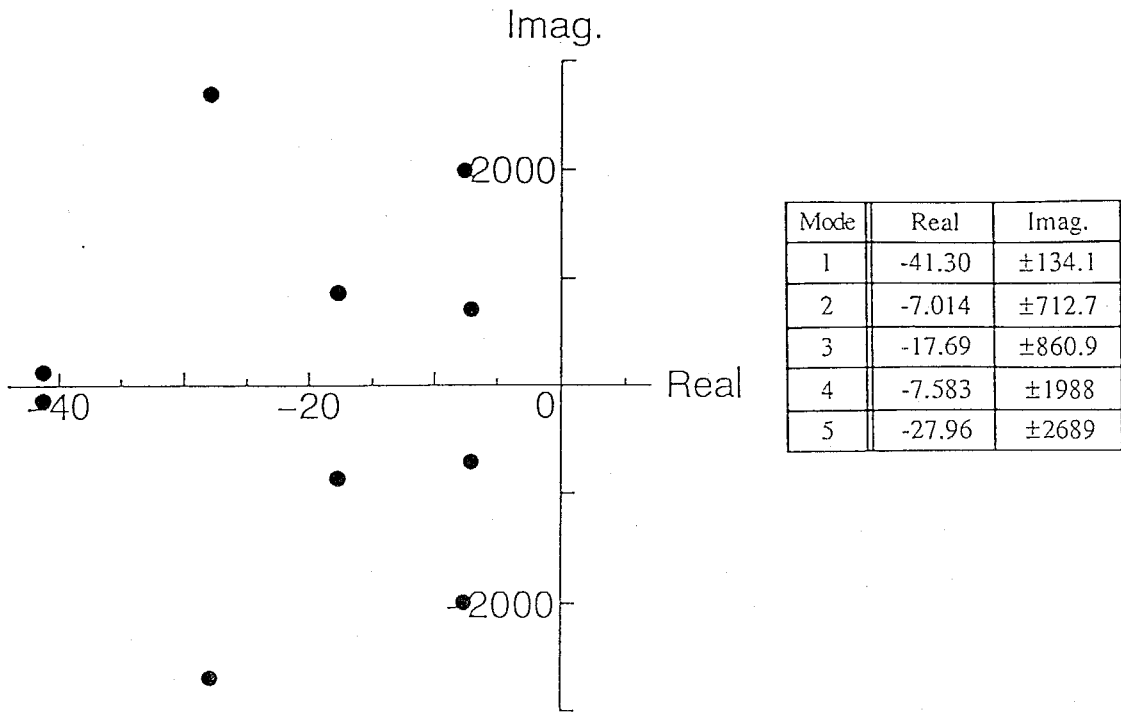


図7-12 同時最適化後の閉ループシステムの極配置
(目的関数: $J = 20M + H_y$, 外乱: 有色雑音)

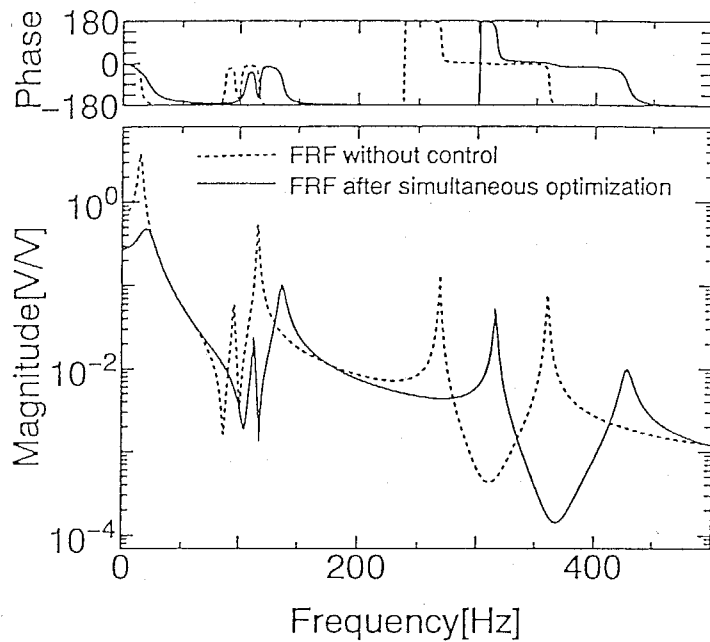


図7-13 有色雑音外乱に対する同時最適化後の w_{72} と y_{62} の間の FRF (目的関数: $J = 20M + H_y$)

7.3 構造系と H^∞ 制御系の同時最適設計

第5章で説明した H^∞ 制御系に対して、構造系と制御系の同時最適化を行う方法について考える。 H^∞ 制御系と構造系を同時に最適化することにより、より高性能な周波数応答の整形とロバスト性の実現が期待できる。

H^∞ 制御問題とは第5章で述べたように、次の一般化制御対象

$$G(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$

において、外乱 w から制御量 z までの伝達関数 T_{zw} の H^∞ ノルムに関し、

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$$

を満足する安定化補償器 $K(s)$ を次式として設計することである。

$$K(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_{cp} & B_{cp} \\ \hline C_{cp} & D_{cp} \end{array} \right]$$

そして、この $K(s)$ を用いて、次式に示す出力フィードバック系を構成する。

$$u(s) = K(s)y(s)$$

H^∞ 制御系の設計法は第5章に示した通りである。

7.3.1 同時最適化問題

最適化における目的関数を外乱 w から制御量 z までの H^∞ ノルム γ で表す。

$$J = \gamma(\tau) \tag{7-28}$$

ここで、 $\tau \in \mathbb{R}^l$ は構造系の設計変数ベクトルであり、本研究ではFEMモデルの板厚で構成される。 l は構造系の設計変数の数である。そして、 γ は目的関数であると同時に、 H^∞ 制御系を設計する際の設計変数としても採用する。この最適化の目的は、式(7-28)の最小化を同時最適化により行うことで、 H^∞ ノルムのより効果的な低減を目指すものである。

さらに最適化を行う際には、 H^∞ ノルム制約を満たす解が存在するか否かの判定、すなわち式(5-24)、(5-25)を制約条件として導入する必要が

ある。そこで、本研究における制約条件付き最適化問題を次のように記述する。

$$\begin{array}{ll} \min & J = \gamma \\ \text{Subj.} & \begin{cases} \text{式(5-24)の解 } X, Y \text{ が存在し、} \\ \text{式(5-25)を満足する。} \end{cases} \end{array} \quad (7-29)$$

次に、上式の制約条件について考える。

まず、 X 、 Y が存在するための必要十分条件は、式(5-26)、(5-27)の H_X および H_Y の固有値が一つも虚軸上に存在しないことである。したがって、 H_X および H_Y の固有値をそれぞれ s_{Xi} 、 s_{Yi} ($i = 1 \sim 4r$)とすると、式(5-24)の解が存在するための制約条件は次のように記述できる。

$$|\operatorname{Re}\{s_{Xi}\}| > 0, \quad (\forall i) \quad (7-30)$$

$$|\operatorname{Re}\{s_{Yi}\}| > 0, \quad (\forall i) \quad (7-31)$$

次に、式(5-25)の制約条件を考える。 $X \geq 0$ 、 $Y \geq 0$ であるためには、両行列の固有値 λ_{Xi} 、 λ_{Yi} ($i = 1 \sim 2r$)に関して次式を満足すればよい。

$$\lambda_{Xi} \geq 0, \quad (\forall i) \quad (7-32)$$

$$\lambda_{Yi} \geq 0, \quad (\forall i) \quad (7-33)$$

以上の関係を用いて、式(7-29)の最適化問題を書き直すと次式となる。

$$\begin{array}{ll} \min & J = \gamma \\ \text{Subj.} & \begin{cases} |\operatorname{Re}\{s_{Xi}\}| > 0, \quad (\forall i) \\ |\operatorname{Re}\{s_{Yi}\}| > 0, \quad (\forall i) \\ \lambda_{Xi} \geq 0, \quad (\forall i) \\ \lambda_{Yi} \geq 0, \quad (\forall i) \\ \lambda_{\max}(XY) < 1 \end{cases} \end{array} \quad (7-34)$$

そして、構造系と制御系の両設計変数に関しては、式(7-7)、(7-8)と同様に次のような上下限值を設定する。

$$\tau^{\min} \leq \tau \leq \tau^{\max}$$

$$\gamma^{\min} \leq \gamma \leq \gamma^{\max}$$

ここで、 γ^{\max} としては初期構造 τ^0 にて H^∞ 制御系が設計可能な γ を採用し、 γ^{\min} については十分小さい正の値を設定すればよい。また、実際にコンピュータによる数値計算を行う際には、数値演算誤差を考慮して十分小さい正の値 ε を用い、式(7-34)の制約条件を次式のように書き換

え、これにしたがって最適化を実行する。

$$\begin{aligned} \min \quad & J = \gamma \\ \text{Subj.} \quad & \begin{cases} |Re\{s_{Xi}\}| > \varepsilon, (\forall i) \\ |Re\{s_{Yi}\}| > \varepsilon, (\forall i) \\ \lambda_{Xi} \geq \varepsilon, (\forall i) \\ \lambda_{Yi} \geq \varepsilon, (\forall i) \\ \lambda_{max}(XY) < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (7-35)$$

上述の最適化問題を実行する際には、最適化の過程で H^∞ 制御系の解が存在しない場合があり、このとき目的関数が定義できなくなる。したがって、目的関数の連続性を前提として、設計変数に関する感度を用いて最適解の探索を行う、通常最適化手法はここでは適用できない。そこで本研究では、目的関数の感度を用いずに最適解の探索を行うコンプレックス法を採用し、上述の最適化問題を実行する。

7.3.2 平板の同時最適化による振動制御

本手法を図7-1に示す一端固定平板の振動制御に適用する。前述の7.2.3の場合と同様に、平板上の節点29と62の法線方向の変位および速度を検出し、節点19と72に取り付けられたボイスコイルアクチュエータにより振動制御を行うシステムになっている。外乱 w は節点19と72に作用する外力およびセンサー雑音とする。このシステムにおける出力ベクトルと制御入力ベクトルは次式となる。

$$y = (y_{29}, y_{62}, \dot{y}_{29}, \dot{y}_{62})^T + [0 \quad I_4]w \quad (7-36)$$

$$u = (u_{19}, u_{72})^T \quad (7-37)$$

このように、このシステムではコロケーションが成立していない。

そして、制御量 z を節点62の変位 y_{62} および節点19と72の制御入力 u_{19} 、 u_{72} として、次式のように記述する。

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} \quad (7-38)$$

ここで、 z_1 および z_2 を周波数重み関数 W_1 、 W_2 を用いて次式のように記述する。

$$z_1 = W_1 y_{62}, \quad z_2 = W_2 \begin{Bmatrix} u_{19} \\ u_{72} \end{Bmatrix} \quad (7-39)$$

H^∞ 制御系を設計するために、まずこの平板をFEMによりモデル化する。そして、FEMにより得られたシステムの固有値解析を行い、7.2.3

と同様に5次までの固有モードを用いて低次元化し、本手法による同時最適化を実行する。したがって、制御対象の次数は10となる。この平板の非制御時の w_{72} と y_{62} の間のFRFは図7-2に示されている。

ここでは、有色雑音外乱としてある周波数成分が卓越した特性を持つ外乱を考える。そして、この有色雑音外乱の特性を考慮した重み関数 W_1 を設定することにより、制振性能に優れた周波数特性の整形の実現を試みる。また、高周波数領域における構造特性の誤差とセンサーノイズに対するロバスト性を考慮して重み関数 W_2 を設定することにより、制振性能とロバスト性能を同時に考慮した同時最適化を行う。

まず、図7-2に示すように非制御時の構造特性には、100~120Hzの周波数に2次および3次の共振ピークが存在しているが、この周波数成分を多く含む有色雑音外乱を想定し、制振性能およびロバスト性能の向上を実現するような重み関数 W_1 および W_2 を設定し、同時最適化を行う。すなわち、重み関数 W_1 、 W_2 を次のように設定する。

$$W_1(s) = W_{e1}(s)\gamma \quad (7-40)$$

$$W_2(s) = \begin{bmatrix} W_{e2}(s) & 0 \\ 0 & W_{e2}(s) \end{bmatrix} \quad (7-41)$$

ただし、

$$W_{e1}(s) = \frac{5.7 \times 10^5}{s^2 + 150s + 5.7 \times 10^5} \quad (7-42)$$

$$W_{e2}(s) = \frac{s}{s + 2200} \quad (7-43)$$

この重み関数の周波数特性は図7-14のようになる。この重み関数の意味は、 $W_{e1}(s)$ の重みを120Hz付近で大きくなるように設定することにより、外乱に対する制振性能を向上させ、同時に高次モードを含む高周波数領域で W_{e2} の重みを大きくすることにより、構造誤差に対するロバスト性を向上させることである。このときのコントローラの次数は14となる。式(7-40)~(7-43)で定義される周波数重み関数を設定した場合、最適化を行う際には式(7-40)の γ の最大値を探索することになる。したがって、式(7-35)の最適化問題の目的関数に含まれる γ を $-\gamma$ で置き換えて、最適化問題を次のように書き直す。

$$\begin{array}{l} \min \quad J = -\gamma \\ \text{Subj.} \quad \begin{cases} |Re\{s_{Xi}\}| > \varepsilon, \quad (\forall i) \\ |Re\{s_{Yi}\}| > \varepsilon, \quad (\forall i) \\ \lambda_{Xi} \geq \varepsilon, \quad (\forall i) \\ \lambda_{Yi} \geq \varepsilon, \quad (\forall i) \\ \lambda_{\max}(XY) < 1 \end{cases} \end{array} \quad (7-44)$$

そして、コンプレックス法により目的関数 J を最小にする設計変数の最適値を探索する。ここでは、式(7-44)の ε を 10^{-6} とする。

まず、設計変数を γ のみとし制御系のみ最適化を行ったところ、 γ の最大値は次のようになる。

$$\gamma_{c1}^{max} = 1.78 \quad (7-45)$$

制御系のみ最適化を行ったときの w_{72} と x_{62} との間のFRFを図7-15の破線で示す。同図から、制御系のみ最適化の場合、1次および3次の共振ピークの応答レベルは低減されているが、2次の共振ピークがほとんど低減されていないことがわかる。そこで、次に同時最適化を実行する。同時最適化における設計変数として、前述の γ に加えて、図6-18に示すように平板の5つの領域の板厚を採用する。板厚 τ_i ($i=1\sim 5$) の上下限値の制約条件を次のように与える。

$$3 \leq \tau_i \leq 6 \quad (\forall i) \quad (7-46)$$

ここで、設計変数の数 $\eta = 6$ に対しコンプレックス法で発生させる設計変数ベクトルの数を $\sigma = 40$ とし、同時最適化を実行する。本手法により同時最適化を実行した結果、 γ の最大値は次のようになった。

$$\gamma_{s1}^{max} = 2.92 \quad (7-47)$$

そして、平板の板厚の最適値は表7-4のようになった。このときの w_{72} と x_{62} との間のFRFは図7-15の実線となる。同図から、同時最適化の結果は制御系のみ最適化の結果よりも低周波数領域の応答レベルが低減しており、さらに2次および3次の共振振動数が高周波数側に移動することにより、特に100~120Hzにおける応答レベルが大きく低減されていることがわかる。また、 w_{72} から u_{19} 、 u_{72} までのFRFをそれぞれ図7-16、7-17にしめす。同図から、制御系のみ最適化および同時最適化による結果は、両者とも全周波数帯域にわたって応答レベルはほぼ同じであり、高周波数帯域で応答レベルが大きく低減していることから、ロバスト性の実現が期待できる。

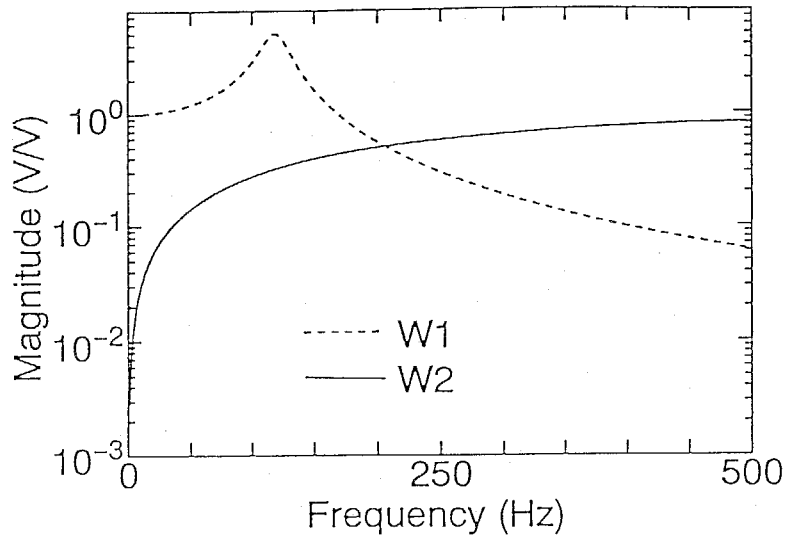


図7-14 重み関数の周波数特性
(式(7-42), (7-43))

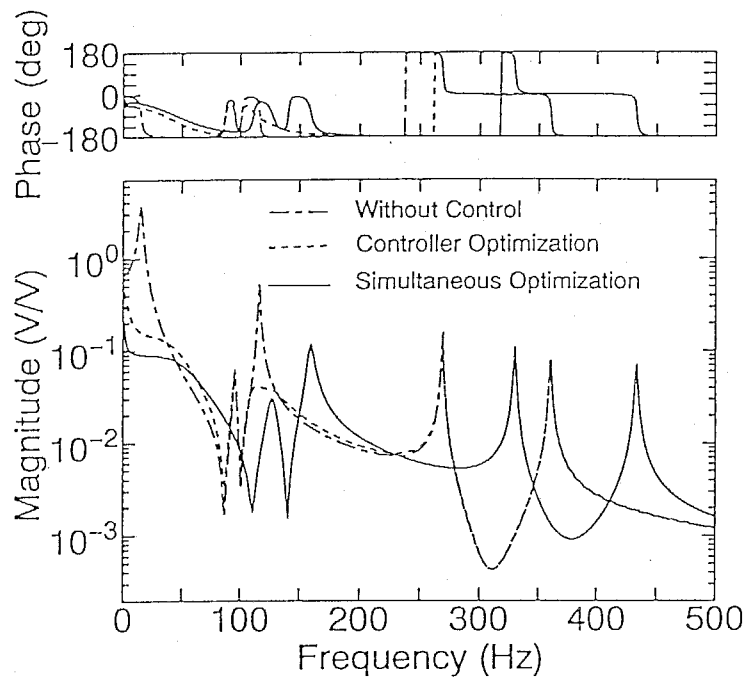


図7-15 最適化後の w_{72} と y_{62} の間の FRF
(式(7-42), (7-43) に基づく設計)

表7-4 平板の板厚の最適値

(式(7-42),(7-43)に基づく設計)

Region No.	1	2	3	4	5
Thickness [mm]	4.95	5.31	5.57	4.83	3.77

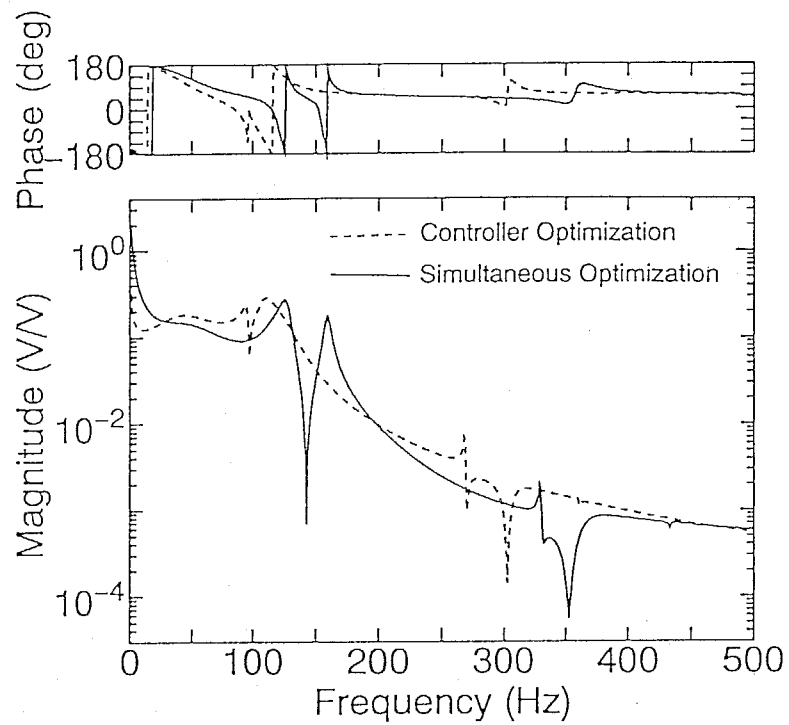


図7-16 最適化後の w_{72} と u_{19} の間の FRF
(式(7-42),(7-43)に基づく設計)

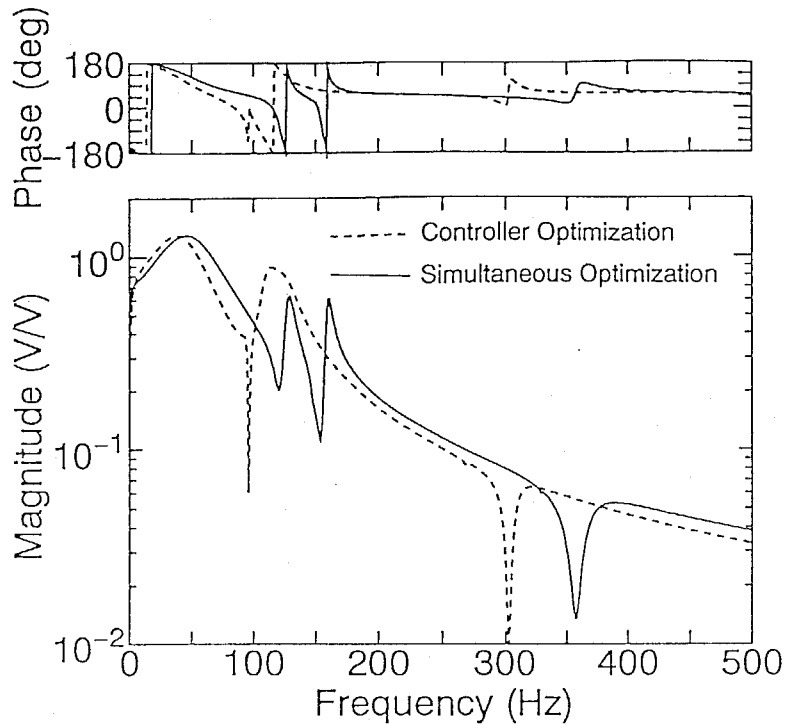


図7-17 最適化後の w_{72} と u_{72} の間の FRF
 (式(7-42), (7-43)に基づく設計)

次に、5次の共振振動数である360Hz付近の周波数成分を多く含む外乱が作用する場合を想定し、制御性能およびロバスト性能を考慮した重み関数 $W_{e1}(s)$ 、 $W_{e2}(s)$ を以下のように設定し、最適化を実行する。

$$W_{e1}(s) = \frac{5.12 \times 10^6}{s^2 + 452s + 5.12 \times 10^6} \quad (7-48)$$

$$W_{e2}(s) = \frac{s^2 + 452s + 5.12 \times 10^6}{s^2 + 1260s + 9.87 \times 10^6} \quad (7-49)$$

この重み関数の周波数特性を図7-18に示す。この重み関数の意味は、 $W_{e1}(s)$ の重みを360Hz付近で大きくなるように設定することにより、外乱に対する制振性能を向上させることである。このとき、 $W_{e2}(s)$ に関しては、前回の設計で用いた式(7-43)の1次系の重み関数を用いると、360Hz付近で消費できる制御エネルギーが小さいために、大きな制振効果の実現が困難である。そこで、式(7-49)のような2次系の重み関数 W_{e2} を設定し、図7-18に示すように360Hz付近における重みを小さくすることにより、その周波数で消費できる制御エネルギーを大きくし、制振

効果の実現を図る。そして、同時に高次モードを含む高周波数領域で $W_{e2}(s)$ の重みを大きくすることにより、構造誤差に対するロバスト性を向上させる。このときのコントローラの次数は16となる。まず、設計変数を γ のみとし制御系のみでの最適化を行ったところ、 γ の最大値は次のようになった。

$$\gamma_{c2}^{max} = 1.74 \quad (7-50)$$

制御系のみでの最適化を行ったときの w_{72} と x_{62} との間のFRFを図7-19の破線で示す。同図から、制御系のみでの最適化の場合、5次の共振ピークの応答レベルはある程度抑えられており、制振効果が現れている。

次に同時最適化を実行する。同時最適化における設計変数は、前述と同様に γ と平板の5つの領域の板厚とする。板厚 $\tau_i (i=1 \sim 5)$ の上下限界値は式(7-46)と同一である。コンプレックス法で発生させる設計変数ベクトルの数を $\sigma = 40$ とし、同時最適化を実行した結果、 γ の最大値は次のようになった。

$$\gamma_{s2}^{max} = 2.37 \quad (7-51)$$

そして、平板の板厚の最適値は表7-5のようになった。このときの w_{72} から x_{62} までのFRFは図7-19の実線となる。同図から、5次の共振ピークは高周波数側に移動しており、360Hz付近における応答レベルは制御系のみでの最適化よりもさらに低減できていることがわかる。また、 w_{72} から u_{19} 、 u_{72} までのFRFをそれぞれ図7-20、7-21に示す。同図から、制御系のみでの最適化および同時最適化による結果は、両者とも全周波数帯域にわたって応答レベルはほぼ同じであり、360Hz付近で制御エネルギーが大きく消費されていることがわかる。そして、500Hz以上の高周波数帯域で応答レベルが大きく低減していることから、ロバスト性の実現が期待できる。

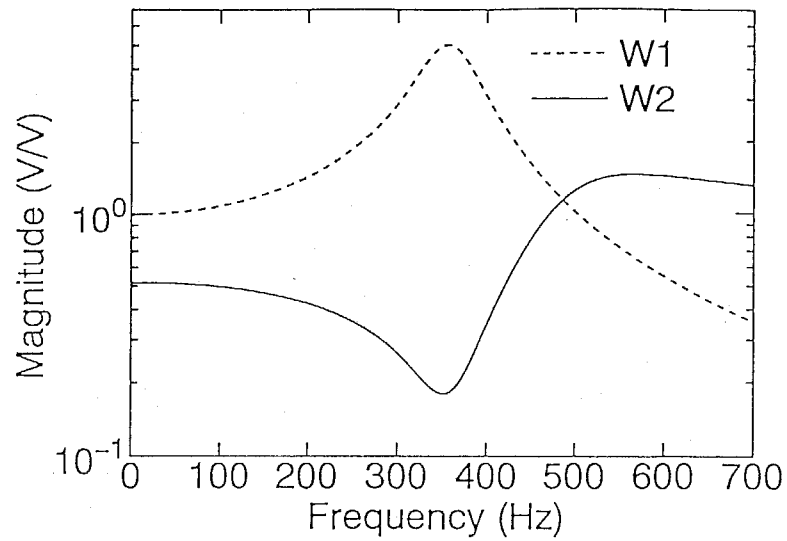


図 7-18 重み関数の周波数特性
(式(7-48), (7-49))

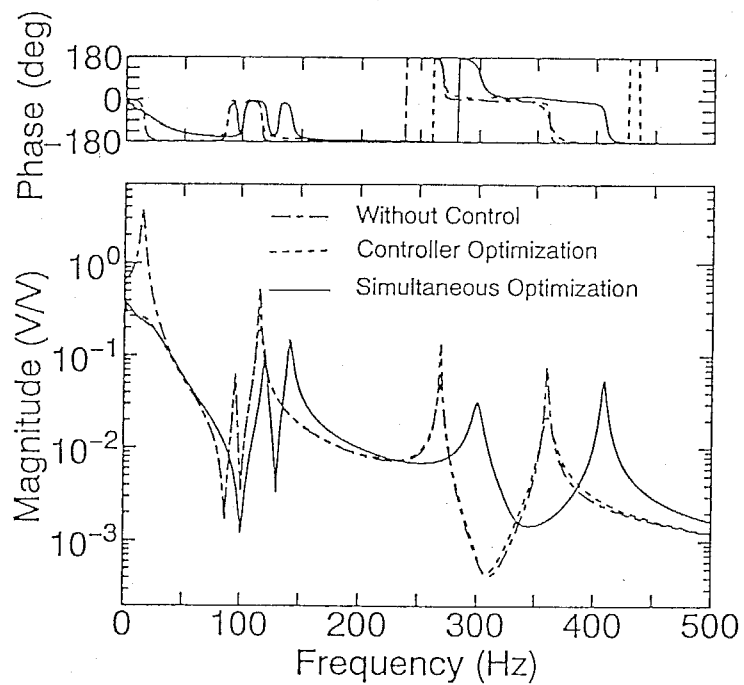


図 7-19 最適化後の w_{72} と y_{62} の間の FRF
(式(7-48), (7-49) に基づく設計)

表7-5 平板の板厚の最適値
(式(7-48),(7-49)に基づく設計)

Region No.	1	2	3	4	5
Thickness [mm]	4.32	4.59	5.87	4.71	3.27

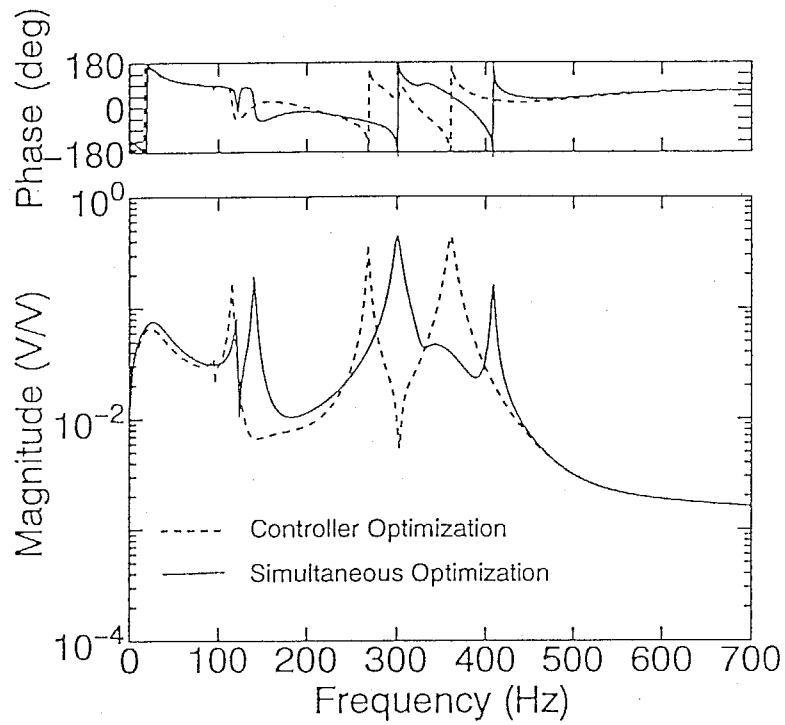


図7-20 最適化後の w_{72} と u_{19} の間の FRF
(式(7-48),(7-49)に基づく設計)

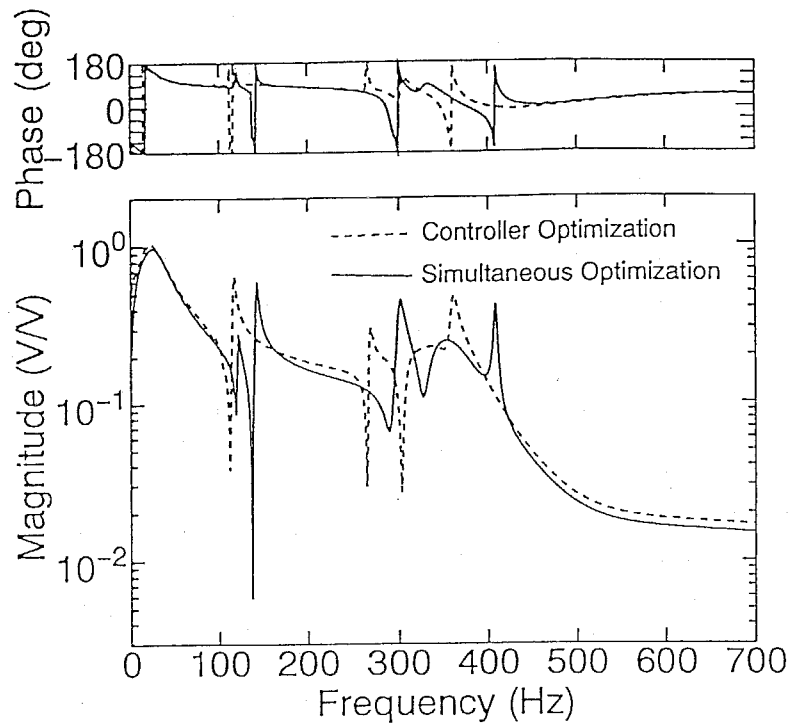


図7-21 最適化後の w_{72} と u_{72} の間の FRF
 (式(7-48), (7-49)に基づく設計)

7.4 結言

本章では、コンプレックス法による構造系と制御系の同時最適設計法を提案した。まず、構造系と出力定数フィードバック系の同時最適設計法を提案し、以下の結論を得た。

(1) 構造系の質量と閉ループ系の2次形式評価関数を目的関数の中に同時に考慮し、設計変数として採用したFEMモデルの板厚とフィードバックゲイン行列の成分を同時に最適化する方法を提案した。本手法を用いることにより、構造物の質量と制御性能のバランスのとれた同時最適設計が可能になることを示した。

(2) 本研究で定義した目的関数は設計変数に対して不連続関数となるが、目的関数の感度を用いない最適化手法としてコンプレックス法を採用することにより、設計変数の最適値の探索を可能にした。

(3) 本手法により、任意の次元の出力フィードバック系のコントローラを

設定でき、コロケーションが成立しないシステムに対する同時最適化を可能にした。このことは、現実問題として低次元コントローラで大自由度の構造物を制御しなければならず、またコロケーションが必ずしも満足できない場合の設計に適しており、本論文の適用例でその実用性を示している。

(4) 本手法により、白色雑音外乱および有色雑音外乱に対する構造系と制御系の同時最適化を可能にし、制御系のみ最適化よりも制御性能を大幅に向上できることを明らかにした。

(5) 平板の振動制御に本手法を適用した結果、制御性能の高性能化を実現し、また解析結果と実験結果は良く一致しており、本手法の有効性が検証された。

次に、構造系と H^∞ 制御系の同時最適設計法を提案し、以下の結論を得た。

(6) 閉ループ系の外乱から制御量までの H^∞ ノルムを目的関数とし、FEMによりモデル化された構造系と H^∞ コントローラをコンプレックス法により同時に最適化する方法を提案した。

(7) 制御系のみ最適化よりも、構造系と制御系の同時最適化の方が、より高性能な周波数特性の整形が可能であり、外乱が有色雑音の場合に本手法は特に有効であることを明らかにした。

(8) 平板の振動制御系の同時最適設計に本手法を適用した結果、制御系のみ最適化よりも同時最適化の方がより高性能な周波数特性の整形を実現できることを明らかにし、本手法の有効性が検証された。

第8章 結論

本論文では、モード解析を用いた構造系と制御系の最適設計法、および両者の同時最適設計法を示し、以下の知見を得た。

構造物の最適設計法として、反共振振動数感度の提唱、共振点消去理論の提案および時刻歴応答を考慮した構造物の最適化方法を示し、動特性の向上を実現した。そして、共振点消去理論を用いることにより、制御性を考慮した光ピックアップ構造の最適化を実現し、光サーボ系の設計を行った。次に、構造設計のみでは十分な性能が発揮できない場合に、制御系の導入を行い、この制御系の最適化を行うことにより、連続体構造物の振動制御性能を向上させる方法を提案した。ここでは、制御系設計のためのモデルの低次元化方法を示し、この低次元化にともなう閉ループシステムの安定性を保障する制御系の最適化方法を示した。そして、モード解析を用いた連続体構造物に対する H^∞ ロバスト振動制御系の設計法を示した。これら一連の制御系の最適化において、FEMに基づく解析的なアプローチとシステム同定に基づく実験的な設計のアプローチを示した。そして、本手法を平板により構成される振動制御系の設計に適用した結果、良好な制振効果が確認された。さらに、上述の構造系と制御系の個別の最適化により実現できる性能の限界を向上させるために、構造系と制御系の同時最適化方法を提案した。すなわち、感度解析およびコンプレックス法を用いることにより、時刻歴応答特性と周波数応答特性を向上させるための、構造系の設計変数と状態フィードバック系および H^∞ 制御系の設計変数を同時に最適化する方法を提案した。本手法を振動制御系の同時最適設計に適用した結果、制御系のみでの最適化の結果を上まわる良好な制振効果が実現された。

以下に、各章の結論を示す。

第2章では、感度解析を用いた構造物の最適化方法を提案し、以下の結論を得た。

- (1) 共振振動数感度に加えて、新しく反共振振動数感度を提唱し、共振振動数と反共振振動数の両方を、両者の感度を用いて希望する値に自由に変更する最適化方法を提案した。
- (2) 周波数応答関数において共振振動数と反共振振動数を一致させることにより、共振峰を消去する方法を提案した。そして、本手法と有限要素法を結合し、平板の構造最適化に適用することにより、提

案した方法の有効性を検証した。

- (3) 有限要素法によるモデルの板厚と節点座標の感度を用いて、構造物の時刻歴応答の最適化を行う手法を示した。すなわち、単位衝撃応答における振幅のモード成分を変更することにより、応答レベルの低減を実現する方法を提案した。
- (4) 本手法と部分構造合成法を結合することにより、複雑大自由度な構造物の最適設計に適用する際の効率化を可能にした。そして、本手法を3つの分系から構成されるF型構造物の最適化に適用し、単位衝撃力が作用する際の特定2点間の相対変位の低減を実現した。

第3章では、制御性を考慮した構造最適化法による光サーボ系の設計を行い、以下の結論を得た。

- (1) 制御力が作用する多自由度系を、モード解析と正準系状態方程式表示により対比することによって、振動モード形の節が不可制御、不可観測に相当することを明らかにした。そして、制御理論における不可制御、不可観測と極-零点消去との対応を明らかにし、振動の節を活用すれば、構造系の不要な共振ピークを消去できて、制御系設計の負担が軽減されることを示した。
- (2) 制御性のよい構造系を得るために、振動の節を利用した構造最適化法を共振点消去理論に基づいて実行する方法を示した。これは振動の節によって作り出される不可制御・不可観測性を積極的に利用することにより、その振動モードによる制御系の不安定現象を抑えるものである。本手法は制御系を内蔵する機械の構造最適化に広く活用できるものと考えられる。
- (3) 一体化構造のヒンジ方式光ピックアップを提案した。このピックアップは従来のものであり、構造が簡単で部品点数も少なく、製造、コスト面などで有利であるが、ヒンジ方式であるが故に、振動特性がサーボ特性へ影響することが懸念された。そこで、この光ピックアップの振動特性を解析と実験で調べた。その結果、光ピックアップの振動特性における2次共振がサーボ系の安定性に大きく影響することが判明し、制御性を考慮した構造の最適設計の必要性を示した。
- (4) サーボ特性に影響しない構造系の振動特性を実現させるために、本論文で提案した共振点と反共振点の感度を利用した構造物の最適化方法を用いて、光ピックアップ構造の最適化を行った。その結果、トラック方向の2次の振動モードの節を駆動点に一致させることに成功し、2次共振が抑えられた。それによって、サーボ系の特性が向上し、制御仕様を十分満足する特性が実現されたことを解析と実

験により検証した。そして、この光ピックアップは実際の光ディスク装置に十分な対応を示し、その実用性が確認された。

第4章では、構造物の低次元モデル化と最適制御系の設計方法を提案し、以下の結論を得た。

- (1) モード解析と感度解析を用いた最適振動制御系の設計方法を提案した。ここでは、モード座標で記述した低次元システムおよび実システムの両方を用いて、実システムの安定性すなわちロバスト性を保障する低次元制御系の最適設計法を示した。まず、FEMによりモデル化された対象をモード座標を用いて縮小変換し、振動制御系の最適設計を行った結果、制振性能の向上が実現され、本手法の有効性が検証された。そして、実験モード解析を用いて、実験データに基づく制御系の最適設計法を示し、その実用性を明らかにした。
- (2) 特性行列同定法を用いたシステムのモデル化と、最適制御系の設計方法を提案した。ここでは、低次元システムを作成する方法として、振動実験により得られたFRFから特性行列同定法を用いて希望する自由度を有するシステムの記述するアプローチと、大自由度構造系をFEMで定式化した後に、モード解析により得られたFRFから特性行列同定法により希望する小自由度にまで縮小するモデル化のアプローチを示した。そして、ここで得られた低次元システムに対し、最適制御系を設計する方法を示した。また、システムを同定する際に、無視した高次モードの安定性を保障するために、同定システムと実システムの動特性の両方を参照しながら、感度解析と非線形最適化法の適用により、最適な制御系を設計する方法を示した。
- (3) 上記の方法を平板で構成される振動制御系の最適設計に適用した。実験データおよびFEMによる解析に基づいて最適制御系を設計し、シミュレーションおよび実験により制御系の動特性を評価した結果、両者は良く一致し、また良好な制振特性が確認された。

第5章では、モード解析を用いた連続体構造物の H^∞ ロバスト振動制御系の設計法を示し、以下の結論を得た。

- (1) FEMおよびモード解析を用いて構造物をモデル化し制御系を設計する際に、構造特性に混入する不確定性に対する制御系のロバスト安定性の重要性を示した。そして、連続体である平板を制御対象とし、FEMおよびモード解析によりモデル化し、 H^∞ 理論により出力フィードバック系の動的補償器を設計し、振動制御を行った結果、

良好な制振特性が実現された。

- (2) 平板の構造特性に故意に誤差を与えたときの制御系のロバスト安定性を評価した。そして、適切な周波数重み関数を設定した H^∞ 制御問題を解くことにより、制御性能およびロバスト性能の向上が実現できることを明らかにした。
- (3) H^∞ 制御系の動特性を解析および実験の両面から検討した結果、すべての結果について両者の良い一致と H^∞ 制御手法の有効性が検証された。そして、実験モード解析により同定されたシステムを用いて H^∞ 制御系を設計した結果、その有効性および実用性が明らかになった。

第6章では、感度解析を用いた構造系と制御系の同時最適化方法を提案し、以下の結論を得た。

- (1) システムの動特性を支配する目的関数を希望する目標値に一致させる同時最適化法を提案した。すなわち、制御系と構造系の設計変数を同時に変更することにより、システムの動特性を支配する2次形式評価関数、周波数応答関数のゲイン、位相、極および零点を希望する値に一致させる最適化を可能にした。
- (2) 白色雑音の外乱が作用するときの状態変数に関する2次形式評価関数の低減を行った結果、制御系の設計変数に加えて構造系の設計変数をも同時に変更することにより、制御入力に関する評価関数を、制御系だけの最適化よりも著しく低く抑えることができることを明らかにした。そして、周期的な外乱に対しては、閉ループシステムの極および零点を変更することにより、効果的な応答レベルの低減が実現できることを明らかにした。
- (3) 高次モードの安定性を考慮した構造系と制御系の同時最適設計法を提案した。ここでは、システムの低次元化で無視した固有モードの安定性を保障する、構造系と制御系の同時最適化を感度解析と非線形計画法により実行する設計法を示した。
- (4) 本手法により、有色雑音の外乱が作用するときの構造系と制御系の同時最適化を実行し、制御系のみでの最適化よりも制御性能を大幅に向上できることを明らかにした。また、本手法を用いれば、コロケーションが成立しないシステムに対しても同時最適化が可能になることを示し、その有効性を明らかにした。
- (5) 上記の方法を、多質点系モデルおよび平板により構成される振動制御系の同時最適設計に適用し、制振性能をシミュレーションおよび実験の両面から検討した結果、両者の良い一致と制振性能の向

上を確認し、本手法の有効性が検証された。

第7章では、コンプレックス法による構造系と制御系の同時最適設計法を提案し、以下の結論を得た。

- (1) 構造系と出力定数フィードバック系の同時最適設計法を提案した。ここでは、構造系の質量と閉ループ系の2次形式評価関数を目的関数の中に同時に考慮し、設計変数として採用したFEMモデルの板厚とフィードバックゲイン行列の成分を同時に最適化する方法を示した。本手法を用いることにより、構造物の質量と制御性能のバランスのとれた同時最適設計が可能になることを示した。また、ここで定義した目的関数は設計変数に対して不連続関数となるが、目的関数の感度を用いない最適化手法としてコンプレックス法を採用することにより、設計変数の最適値の探索を可能にした。
- (2) 本手法により、任意の次元の出力フィードバック系のコントローラを設定でき、コロケーションが成立しないシステムに対する同時最適化を可能にした。そして、白色雑音外乱および有色雑音外乱に対する構造系と制御系の同時最適化を可能にし、制御系のみ最適化よりも制御性能を大幅に向上できることを明らかにした。
- (3) 構造系と H^∞ 制御系の同時最適設計法を提案した。ここでは、閉ループ系の外乱から制御量までの H^∞ ノルムを目的関数とし、FEMモデルの板厚と H^∞ コントローラをコンプレックス法により同時に最適化する方法を示した。本手法により、制御系のみ最適化よりも構造系と制御系の同時最適化の方が、より高性能な周波数特性の整形が可能であることを明らかにした。
- (4) 上記の方法を、平板の振動制御系の同時最適設計に適用した結果、制御系のみ最適化よりも同時最適化の方がより高性能な振動制御性能および周波数特性の整形を実現できることを明らかにし、本手法の有効性が検証された。

最後に、本研究における今後の課題を述べる。

最適設計の今後の発展を図るために、まず最適化手法の開発およびその体系化が重要になってくると思われる。現状の最適化手法では、局所的な最適解を探索するものがほとんどで、大域的な最適解を探索することは困難とされている。そこで、最近では大域的な最適解の探索を目指し、遺伝的アルゴリズムやニューラルネットワーク理論等に基づくいくつかの手法が研究、開発されている。しかし、最適化問題の諸設定に関して、明らかにされていない点も多く、実用に際してはさらに検討が必要である。そして、構造物に要求されるさまざまな最適設計に対処するためには、現在までに開発されている最適設計法の体系化を行う必要があると考えられる。

構造物の最適設計に関しては、与えられた初期構造に対して動特性を向上させるような構造物の形状を決定する現状の最適化に対し、今後は任意の初期構造に対して構造物の位相すなわち空間的な任意形状を決定する最適化が重要になってくると思われる。そして、構造系と制御系の同時最適化をさらに発展させるためには、構造物の任意形状に加えて、センサーとアクチュエータの位置、さらには制御則をも含めた総合的な最適設計が将来に向けての大きな課題だと考えられる。この最適化を実現することは容易ではないが、現段階では任意形状の最適化として均質化法、センサーとアクチュエータの位置および制御則の最適化に関しては、遺伝的アルゴリズムやニューラルネットワーク理論を用いた組み合わせ最適化の適用が有効であると考えられる。そして、構造系および制御系に要求される諸性能、および製造面における制約や経済性など、さまざまな要因を目的関数として設定し、多目的最適化を行うことが必要になってくるであろう。将来、機械に要求される高性能化に対処するためには、機械工学的観点から、これらの最適化手法および今後開発されるであろうさまざまな最適化手法の体系化を図り、統合システムの総合最適化を実現する手法の開発が重要になってくると思われる。

付 録

A 1 最適化方法

A1.1 擬似最小二乗法⁽⁶⁸⁾⁽⁶⁹⁾

第2章の式(2-21)から、設計変数ベクトル $\Delta\tau \in \mathfrak{R}^l$ を擬似最小二乗法により決定する方法を示す。いま、目的関数の変更目標値 g^* と現在値 g との差のベクトルを $\Delta g \in \mathfrak{R}^{n_r+n_a}$ とし、感度行列を $R \in \mathfrak{R}^{(n_r+n_a) \times l}$ とすると、これらの関係は次式となる。

$$R\Delta\tau = \Delta g \quad (A-1)$$

ここで、 $(n_r+n_a) < l$ のとき変更量ノルム $(\Delta\tau^T\Delta\tau)$ を最小にする設計変数の解は、以下のように得ることができる。

まず、 $\Delta\tau$ を R の行成分の線形結合で表現する。

$$\Delta\tau = R^T\eta \quad (A-2)$$

式(A-2)を式(A-1)に代入すれば、

$$RR^T\eta = \Delta g \quad (A-3)$$

このとき、 η は次式のように求まる。

$$\eta = (RR^T)^{-1}g \quad (A-4)$$

式(A-4)を式(A-2)に代入すれば、設計変数ベクトルは次式のように求まる。

$$\Delta\tau = R^T(RR^T)^{-1}g \quad (A-5)$$

この解は、上述の設計変数ベクトルの変更ノルムを最小にする解であり、式(A-5)に含まれる $R^T(RR^T)^{-1}$ を R の一般逆行列とよび、 R^+ と記述する。

式(A-5)において、 (RR^T) が正則ではなく、その逆行列が計算できない場合には、以下の手順で R^+ が計算できる。

(1) R^*R を作る。

(2) R^*R の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ 、固有ベクトル v_1, v_2, \dots, v_l を計算し

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \quad (A-6)$$

$$U^* = [v_1, v_2, \dots, v_l] \quad (A-7)$$

(3) Λ^+ を次式により計算する。

$$\Lambda^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_l^+), \quad \lambda_i^+ = \begin{cases} \lambda_i^{-1} (\lambda_i \neq 0) \\ 0 \quad (\lambda_i = 0) \end{cases} \quad (A-8)$$

(4) R^+ は次式で与えられる。

$$R^+ = (U\Lambda^+U^*)R^* \quad (A-9)$$

A1.2 非線形計画法による最適設計⁽⁶¹⁾

第4、6章で示した最適化問題に対し、非線形計画法により設計変数の最適値を探索する方法を示す。最適化問題としては、目的関数 H_y の最小化を目的とする。そして、 H_u と s_i の上限値を $H_u^{max} > 0$ 、 $s_i^{max} < 0 (i = 1, \dots, 2v)$ として、この制約条件付き最適化問題を次のように記述する。

$$\begin{aligned} \min \quad & H_y \\ \text{Subj.} \quad & \begin{cases} H_u - H_u^{max} \leq 0 \\ Re(s_i) - s_i^{max} \leq 0 \quad (i = 1 \sim 2v) \end{cases} \end{aligned} \quad (A-10)$$

式(A-10)の最適解を、準ニュートン法と乗数法による最適化手法およびコンプレックス法を用いて探索する。

A1.2.1 乗数法

制約付き最適化手法として乗数法を適用する。式(A-10)の不等式制約条件の左辺をまとめて $g_i (i = 1 \sim 2v+1)$ と表す。そして、目的関数および制約条件を含めた拡張ラグランジュ関数を次式のように作る。

$$\begin{aligned} H_L(\tau, \eta^m, \mu^m) = & H_y(\tau) \\ & + \sum_{i=1}^{2v+1} \frac{1}{2\mu_i^m} [\max\{0, \eta_i^m + \mu_i^m g_i(\tau)\}^2 - (\eta_i^m)^2] \end{aligned} \quad (A-11)$$

ここで、 m は乗数法の過程における反復回数を示す。 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2v+1})^T$ および $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2v+1})^T$ はそれぞれラグランジュ乗数ベクトル、ペナルティパラメータベクトルである。そして、設計変数で構成されるベクトルを $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l)^T$ とする。

η^m 、 μ^m が与えられたとき、式(A-11)を最小にする設計変数を準ニュー

トン法にて探索する。そして、乗数法にて η^m および μ^m の更新を行い、それらを用いて再び式(A-11)を作成する。そして、式(A-10)を満足する最適解が得られるまで、上述の過程を繰り返す。これらの手順を以下に示す。

[ステップ 0]

$0 \leq \eta^0$ 、 $0 < \mu^0$ 、 $\alpha > 1$ 、 $\beta \in (0, 1)$ 、 $\varepsilon > 0$ 、 $c^0 = \infty$ 、 $m = 0$ とする。本研究では、 $\eta^0 = 0$ 、 $\mu^0 = 10$ 、 $\alpha = 10$ 、 $\beta = 1/4$ とおく。

[ステップ 1]

$H_L(\tau, \eta^m, \mu^m)$ の制約なし最小化を行って、その解を τ^m とする。

[ステップ 2]

$I = \{i \mid |\max\{g_i(\tau^m), -\frac{\eta_i^m}{\mu_i^m}\}| > \beta c^m, \forall i\}$ とする。 $\forall i$ の中で $\max\{|\max\{g_i(\tau^m), -\frac{\eta_i^m}{\mu_i^m}\}| > c^m$ ならば、 $\eta^{m+1} = \eta^m$ 、 $c^{m+1} = c^m$ とにおいてステップ 5 に行く。さもなければステップ 3 に行く。

[ステップ 3]

$c^{m+1} = \max\{|\max\{g_i(\tau^m), -\frac{\eta_i^m}{\mu_i^m}\}|\}$ とおく。 $c^{m+1} \leq \varepsilon$ ならばストップ。

[ステップ 4]

$\eta_i^{m+1} = \max\{0, \eta_i^m + \mu_i^m g_i(\tau)\}$ とおく。

[ステップ 5]

$\{\mu_i^{m+1} = \alpha \mu_i^m, i \in I; \mu_i^{m+1} = \mu_i^m, i \notin I\}$ とおく。 $m = m + 1$ とにおいてステップ 1 に行く。

ステップ 1 において、式(A-11)を最小にする τ を準ニュートン法にて探索する。

A1.2.2 準ニュートン法

準ニュートン法における設計変数の探索方向 d^k は

$$d^k = -H_{BFGS}^k \nabla^T H_L(\tau^k, \eta^m, \mu^m) \quad (A-12)$$

となる。ここで、 k は準ニュートン法の過程における反復回数であり、 H_{BFGS}^k はBFGS公式による $H_L(\tau^k, \eta^m, \mu^m)$ のヘッセ行列の近似行列である。設計変数の更新は式(A-12)の探索方向ベクトル d^k を用いて、次式により決定される。

$$\tau^{k+1} = \tau^k + \alpha^k d^k \quad (A-13)$$

ここで、 α^k は $H_L(\tau^{k+1}, \eta^m, \mu^m)$ が十分小さくなるように決定されるわけだが、本研究では後述のWolfeの規則による直線探索により α^k を決定し

ている。

また、 H_{BFGS}^k の更新は次式により行われる。

$$H_{BFGS}^{k+1} = \left\{ I - \frac{\delta^k (\gamma^k)^T}{(\delta^k)^T \gamma^k} \right\} H_{BFGS}^k \left\{ I - \frac{\gamma^k (\delta^k)^T}{(\delta^k)^T \gamma^k} \right\} + \frac{\delta^k (\delta^k)^T}{(\delta^k)^T \gamma^k} \quad (A-14)$$

ここで、 δ^k および γ^k は次式で示される。

$$\delta^k = \tau^{k+1} - \tau^k \quad (A-15)$$

$$\gamma^k = \nabla^T H_L(\tau^{k+1}, \eta^m, \mu^m) - \nabla^T H_L(\tau^k, \eta^m, \mu^m) \quad (A-16)$$

以上の過程により $H_L(\tau, \eta^m, \mu^m)$ の最小化を行う。

A1.2.3 Wolfe の直線探索法

θ_1 、 θ_2 を次式のようにおく。

$$\theta_1 = H_L(\tau^k + \rho d^k, \eta^m, \mu^m) - H_L(\tau^k, \eta^m, \mu^m) - r_1 \rho \nabla H_L(\tau^k, \eta^m, \mu^m) d^k \quad (A-17)$$

$$\theta_2 = \nabla H_L(\tau^k + \rho d^k, \eta^m, \mu^m) d^k - r_2 \nabla H_L(\tau^k, \eta^m, \mu^m) d^k \quad (A-18)$$

そして、以下の手順で直線探索を行う。

[ステップ 0]

$0 < r_1 \leq r_2 < 1$ 、 $\rho_0 = \alpha_0^k = \Delta\rho > 0$ 、 $i = 0$ とする。

[ステップ 1]

$\theta_1(\rho_i)$ を計算する。

[ステップ 2]

$\theta_1(\rho_i) > 0$ ならばステップ 4に行く。さもなければステップ 3に行く。

[ステップ 3]

$\theta_2(\rho_i) \geq 0$ ならば $\alpha^k = \rho_i$ とおいてストップ。さもなければ $\rho_{i+1} = \rho_i + \Delta\rho$ 、 $i = i+1$ とおいてステップ 1に行く。

[ステップ 4]

$a_0 = \rho_i - \Delta\rho$ 、 $b_0 = \rho_i$ とおいてステップ 5に行く。

[ステップ 5]

$j = 0$ とおく。

[ステップ 6]

$\lambda_j = (a_j + b_j)/2$ とおく。

[ステップ 7]

$\theta_1(\lambda_j) \leq 0$ で $\theta_2(\lambda_j) \geq 0$ ならば $\alpha^k = \lambda_j$ とおいてストップ。さもなければステップ 8に行く。

[ステップ 8]

$\theta_1(\lambda_j) > 0$ ならば $a_{j+1} = a_j$ 、 $b_{j+1} = \lambda_j$ 、 $j = j+1$ とおいてステップ 6 に行く。
さもなければ $a_{j+1} = \lambda_j$ 、 $b_{j+1} = b_j$ 、 $j = j+1$ とおいてステップ 6 に行く。

A1.2.4 コンプレックス法⁽⁶⁷⁾

第7章の式(7-6)の最適解をコンプレックス法により探索する手順を以下に示す。

[ステップ 1]

構造系と制御系の両設計変数をまとめて $\eta \in \mathbb{R}^{l+m}$ で表す。そして、 $\sigma (> l+m+1)$ 個の設計変数ベクトルを作成する。ただし、そのうちの1点がすべての制約条件を満たしていなければならない。残りの $\sigma-1$ 個の設計変数ベクトルは擬似乱数を用いて次式により作成する。

$$\eta_{i,j} = \eta_i^{\min} + r_{i,j}(\eta_i^{\max} - \eta_i^{\min});$$

$$i = 1, 2, \dots, l+m; \quad j = 2, 3, \dots, \sigma \quad (A-19)$$

ここで、 $\eta_{i,j}$ は設計変数ベクトル η_j の i 番目の成分であり、 $r_{i,j}$ は区間 $[0,1]$ 上の一様乱数である。そして、 η_i^{\min} および η_i^{\max} は式(7-7)、(7-8)の設計変数の上下限值を表し、式(A-19)で得られた点はこれらの上下限制約条件を満足する。

これらの設計変数ベクトルのうち、式(7-6)の制約条件を満たしていない点があれば、その点をすでに実行可能になっている点の重心に向かって、その点と重心の midpoint のところまで動かす。重心 $\bar{\eta}^0$ は次式で与えられる。

$$\bar{\eta}^0 = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{\beta} \eta^k \quad (A-20)$$

ここで、 $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^\beta$ はそのときまでに実行可能になっている点である。このように重心と midpoint のところまで移動しても実行可能にならない場合には、この操作を繰り返すことにより、この点はやがて実行可能領域にはいる。そして、この操作によりすべての設計変数ベクトルが実行可能領域にはいるようにする。

[ステップ 2]

目的関数 $J(\eta)$ を各頂点で計算し、 $J(\eta)$ が最大値をとる頂点 η^h を用いて、次式により新しい設計変数 η^r を作成する。

$$\eta^r = (1 + \alpha)\eta^0 - \alpha\eta^h \quad \alpha \geq 1 \quad (A-21)$$

ここで、 η^0 は残りの頂点の重心であり、次式で与えられる。

$$\eta^0 = \frac{1}{\sigma - 1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{\sigma} \eta^k \quad (A-22)$$

本研究では、 $\alpha = 1.3$ とする。

[ステップ3]

$J(\eta^r) < J(\eta^h)$ で η^r が実行可能であれば、 η^h を η^r で置き換えて、[ステップ2]にもどる。 $J(\eta^r) \geq J(\eta^h)$ ならば α を $\alpha/2$ で置き換えて新しい η^r を計算して試してみる。これを $\alpha \leq \varepsilon_1 = 10^{-6}$ まで繰り返す。いくら α を小さくしても $J(\eta^r) < J(\eta^h)$ が成り立たなければ、 η^h の代わりにその次に大きな目的関数をとる頂点に対して[ステップ2]を適用する。

[ステップ4]

上記の[ステップ2]および[ステップ3]において、 η^r が式(7-6)、(7-7)、(7-8)の制約条件を満足しない場合には、重心 η^0 と現在の η^r の midpoint に新しい $(\eta^r)_{new}$ を作成する。

$$(\eta^r)_{new} = \frac{1}{2}(\eta^0 + \eta^r) \quad (A-23)$$

この操作を繰り返すことにより、すべての制約条件が満足される η^r が作成され、設計変数ベクトルは最適解へと近づいてゆく。

ここで、探索している領域が凸でない場合には、実行可能な点全体の重心が実行不可能となることもある。この場合、目的関数が最小値をとる η^{low} を残して、他の設計変数ベクトルをすべて捨て、新しい設計変数ベクトルを次式により作成する。

$$\eta_{i,j} = \eta_i^{low} + r_{i,j}(\eta_i^0 - \eta_i^{low}) \quad (A-24)$$

ここで、 η^0 は前の設計変数ベクトルにより実行不可能となった重心である。このように作成した設計変数ベクトルは、もとの設計変数ベクトルと比較して、より好ましい領域に入り、最適解の探索を続けることができる。

上記の手順により、各設計変数ベクトルは目的関数を最小点に近づけてゆく。そして、次式の収束判定を満足したときに計算を終了する。

$$\left(\frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{\sigma} (J(\hat{\eta}^0) - J(\eta^k))^2 \right)^{1/2} < \varepsilon_2 \quad (A-25)$$

ここで、 $\hat{\eta}^0$ はすべての設計変数ベクトルの重心であり、 ε_2 は正の十分小さい数である。

A 2 特性行列同定法

A2.1 線形最小二乗法による初期値の計算

定常励振を受ける多自由度系の運動方程式は一般粘性減衰系を仮定し、次のように表現できる。

$$(K - \omega_i^2 M + j\omega_i C)\delta_i = F_i \quad (A-26)$$

ここで、 K 、 M 、 C はそれぞれ剛性行列、質量行列および減衰行列を表し、 ω_i は励振周波数、 δ_i は応答変位ベクトル、 F_i は励振ベクトルである。

ω_1 から ω_N までの周波数範囲の N 周波数点($\omega_1 \sim \omega_N$)について、それぞれ励振力 $F_1 \sim F_N$ を与えるときの応答を $\delta_1 \sim \delta_N$ とすると、各周波数点について式(A-26)が成り立つ。それらをひとまとめに行列表示すれば、次式のようなになる。

$$K\delta - M\delta\omega^2 + jC\delta\omega = F \quad (A-27)$$

ここで、 δ 、 F 、 ω^2 および ω は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \delta &= [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N] \\ F &= [F_1, F_2, \dots, F_N] \\ \omega^2 &= \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2) \\ \omega &= \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \end{aligned} \quad (A-28)$$

式(A-27)を転置して表現すれば、次式のようなになる。

$$\delta^T K^T - \omega^2 \delta^T M^T + j\omega \delta^T C^T = F^T \quad (A-29)$$

上式において M^T 、 C^T 、 K^T 以外のパラメータは振動実験から得られるデータとして求まり、未知数は M^T 、 C^T 、 K^T 成分のみになる。そこで、式(A-29)を次式のように書き換えることができる。

$$\begin{bmatrix} \delta^T & -\omega^2 \delta^T & j\omega \delta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^T \\ M^T \\ C^T \end{bmatrix} = F^T \quad (A-30)$$

行列 δ^T 、 F^T は複素行列であるから、次式のように実部と虚部分けて表現できる。

$$\delta^T = \delta_R^T + j\delta_I^T$$

$$F^T = F_R^T + jF_I^T \quad (A-31)$$

式(A-31)を式(A-30)に代入し、その実部のみを取り出せば次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \delta_R^T & -\omega^2 \delta_R^T & -\omega \delta_I^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^T \\ M^T \\ C^T \end{bmatrix} = F_R^T \quad (A-32)$$

また、虚部に関して次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \delta_I^T & -\omega^2 \delta_I^T & \omega \delta_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^T \\ M^T \\ C^T \end{bmatrix} = F_I^T \quad (A-33)$$

式(A-32)と式(A-33)をあわせて次式のように表現する。

$$\begin{bmatrix} \delta_R^T & -\omega^2 \delta_R^T & -\omega \delta_I^T \\ \delta_I^T & -\omega^2 \delta_I^T & \omega \delta_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^T \\ M^T \\ C^T \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_R^T \\ F_I^T \end{Bmatrix} \quad (A-34)$$

式(A-34)において、 K^T 、 M^T 、 C^T の各成分をそれぞれ k_{ij} 、 m_{ij} 、 c_{ij} (i 行 j 列の成分)と表し、 $[K, M, C]^T$ を未知のベクトル η と書き換える。ここで、 η を次式のように記述する。

$$\eta^T = (k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}, \dots, k_{nn} \\ m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, \dots, m_{nn} \\ c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{nn}) \quad (A-35)$$

上式の各未知数にしたがって、式(A-34)の左辺および右辺の各成分を並べ替えれば、次式を得る。

$$A\eta = g \quad (A-36)$$

ここで、 A 、 g は振動試験により求まる既知項で、未知数は η のみになる。

式(A-36)は方程式と未知数の数が同じである場合には、連立方程式を直接解くことにより未知数 η は求められるが、通常は方程式の数を未知数の数より多く採用し、線形最小二乗法を適用する。誤差ベクトルを E とすれば、 E は次式となる。

$$E = g - A\eta \quad (A-37)$$

誤差の 2 乗和 λ は、重み関数行列 W を用いれば次式のようにになる。

$$\lambda = E^T W E \quad (A-38)$$

式(A-38)が各未知数に関して最小となるためには、 λ の各未知数に関する微分が零になればよい。すなわち、

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = 2A^T W (A\eta - g) = 0 \quad (A-39)$$

となり、求める未知数 η は次式のようにになる。

$$\eta = (A^T W A)^{-1} A^T W g \quad (A-40)$$

また、重みをつけない場合には次式のようにになる。

$$\eta = (A^T A)^{-1} A^T g \quad (A-41)$$

本来、最小二乗法を適用する場合、 A に誤差が含まれていると、得られる η の信頼性が問題になる。しかし、実験から得られたデータには必ず誤差が含まれている。ここで、あえて最小二乗法を用いるのは、いまのところ初期値を計算するための他の手段がないからである。この誤差は、次節で述べる反復計算により修復する。

A2.2 誤差を含むデータに対する反復改良⁽⁶⁰⁾

基本理論は統計推定学の尤度推定法の理論に基づいている。いま、自由度 n の系について周波数 $\omega_1 \sim \omega_N$ までの N 個の周波数点において励振力ベクトル $F(\omega_i)$ と応答ベクトル $Y(\omega_i)$ が計測されたとする。ここで、 ω_i の値と励振力の値には誤差がなく、応答のみが正規分布する誤差を含んで測定されたと仮定する。

説明の便宜のために、励振力ベクトルと応答ベクトルの成分を実数部と虚数部に分離し、自由度が $2n$ となる次のようなベクトルに表現する。

$$\left. \begin{aligned} F(\omega_i) &= \left\{ \begin{array}{l} F_R(\omega_i) \\ F_I(\omega_i) \end{array} \right\} \\ Y(\omega_i) &= \left\{ \begin{array}{l} Y_R(\omega_i) \\ Y_I(\omega_i) \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (A-42)$$

これに対応する形式で、応答の母分散を次のように表わす。

$$\sigma^2(\omega_i) = \begin{cases} \sigma_R^2(\omega_i) \\ \sigma_I^2(\omega_i) \end{cases} \quad (A-43)$$

つぎに、未知数である応答の真の値（母平均）を次のように表わす。

$$y(\omega_i) = \begin{cases} y_R(\omega_i) \\ y_I(\omega_i) \end{cases} \quad (A-44)$$

尤度推定法の理論にしたがって式(A-42)で表わされる応答が測定される確立密度（尤度） R を求めると、

$$R = \prod_{i=1}^N \left[\prod_{j=1}^{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j(\omega_i)} \exp \left\{ -\frac{(Y_j(\omega_i) - y_j(\omega_i))^2}{2\sigma_j^2(\omega_i)} \right\} \right) \right] \quad (A-45)$$

となる。ここで、 $Y_j(\omega_i)$ 、 $y_j(\omega_i)$ および $\sigma_j(\omega_i)$ はそれぞれ、 $Y(\omega_i)$ 、 $y(\omega_i)$ および $\sigma(\omega_i)$ の上から j 番目の成分を表わす。尤度推定法の理論によれば、真の応答の最も良い推定値は式(A-45)の R を最大にする $y(\omega_i)$ である。ただし、 $y(\omega_i)$ ($i=1 \sim N$) は誤差を含まないので、次に示す運動方程式を満足しなければならない。

$$\begin{bmatrix} K - \omega_i^2 M & -\omega_i C_p - C_d \\ \omega_i C_p + C_d & K - \omega_i^2 M \end{bmatrix} \begin{cases} y_R(\omega_i) \\ y_I(\omega_i) \end{cases} = \begin{cases} F_R(\omega_i) \\ F_I(\omega_i) \end{cases} \quad (A-46)$$

ここで、 M 、 K 、 C_p 、 C_d はそれぞれ質量行列、剛性行列、粘性減衰行列およびヒステリシス減衰行列である。式(A-46)において、減衰は粘性成分とヒステリシス成分の和からなる系を仮定している。粘性成分だけを仮定する場合は、 C_d を、ヒステリシスだけを仮定する場合は C_p を式(A-46)から削除すればよい。

以上から、特性行列の実験的同定法は、式(A-46)の制約を満足しながら、式(A-45)の尤度を最大にする特性行列および $y(\omega_i)$ ($i=1 \sim N$) を決定するという、数学的な問題に帰着される。この問題を安定に、かつ、短時間で解くために、Gauss-Newton法とMarquardt法を基礎とした方法⁽⁶⁰⁾を用いている。

参考文献

- (1) Fox, R. L. and Kapoor, M. P., "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA Journal, Vol. 6, No. 12, 1968, pp. 2426-2429.
- (2) Nelson, R. B., "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives", AIAA Journal, Vol. 14, No. 9, 1976, pp. 1201-1205.
- (3) Ojalvo, I. U., "Efficient Computation of Mode-Shape Derivatives for Large Dynamic Systems", AIAA Journal, Vol. 25, No. 10, 1987, pp. 1386-1390.
- (4) Ojalvo, I. U., "Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies", AIAA Journal, Vol. 26, No. 3, 1988, pp. 361-366.
- (5) Adelman, H. M. and Haftka, R. T., "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems", AIAA Journal, Vol. 24, No. 5, 1986, pp. 823-832.
- (6) Sutter, T. R., et al., "Comparison of Several Methods for Calculating Vibration Mode Shape Derivatives", AIAA Journal, Vol. 26, No. 12, 1988, pp. 1506-1511.
- (7) Baldwin, J. F. and Hutton, S. G., "Natural Modes of Modified Structures", AIAA Journal, Vol. 23, No. 11, 1985, pp. 1737-1743.
- (8) Grandhi, R. V., and Venkayya, V. B., "Structural Optimization with Frequency Constraints", AIAA Journal, Vol. 26, No. 7, 1988, pp. 858-866.
- (9) Haftka, R. T. and Kaapnia, R. K., "Sensitivity of Actively Damped Structures to Imperfections and Modeling Errors", AIAA Journal, Vol. 27, No. 10, 1989, pp. 1434-1440.
- (10) Khot, N. S. and Venkayya, V. B., "Optimal Structural Modifications to Enhance the Active Vibration Control of Flexible Structures", AIAA Journal, Vol. 24, No. 8, 1986, pp. 1368-1374.
- (11) Ly, U. L., Cannon, R. H. and Bryson, A. E., "Design of Low-Order Compensators Using Parameter Optimization", Automatica, Vol. 21, No. 3, 1985, pp. 315-318.
- (12) 佐伯、李、安藤、フィードバック特性を向上する制御系設計 - LQG理論の評価関数重みの調整法 -、計測自動制御学会論文集、22巻、4号、1989、383.
- (13) 小原、北森、Lyapunov方程式解の指定による構造的変動に対するロバスト安定化、計測自動制御学会論文集、25巻、6号、1989、682.
- (14) 日野、岩井、能動的制振系構成における適応極配置系の応用、計測自動制御学会論文集、25巻、7号、1989、821.
- (15) Hac, A., "Stochastic Optimal Control of Vehicles With Elastic Body and Active

- Suspension”, Trans. ASME, Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 108, 1986, pp. 106-110.
- (16) Edberg, D. L., “Control of Flexible Structures by Applied Thermal Gradients”, AIAA Journal, Vol. 25, No. 6, 1987, pp. 877-883.
 - (17) Chait, Y., Radcliffe, C. J. and MacCluer, C. R., “Frequency Domain Stability Criterion for Vibration Control of the Bernoulli-Euler Beam”, Trans. ASME, Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 110, 1988, pp. 303-307.
 - (18) Usoro, P. B., Nadira, R. and Mahil, S. S., “A Finite Element/Lagrange Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators”, Trans. ASME, Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 108, 1986, pp. 198-205.
 - (19) Chalhoub, N. G. and Ulsoy, A. G., “Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results”, Trans. ASME, Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 109, 1987, pp. 299-309.
 - (20) Venkayya, V. B., Tischler, V. A. and Khot, N. S., “Dynamics and Control of Space Structures”, Eng. Optimization, Vol. 11, No. 3/4, 1987, pp. 251-264.
 - (21) Bennett, W. H. and Kwatny, H. G., “Continuum Modeling of Flexible Structures with Application to Vibration Control”, AIAA Journal, Vol. 27, No. 9, 1989, pp. 1264-1273.
 - (22) Zhou, K. and Khargonekar, P. P., “An Algebraic Riccati Equation Approach to H^∞ Optimization”, Systems & Control Letters, 11, 1988, pp. 85-91.
 - (23) Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A., “State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, No. 8, 1989, pp. 831-847.
 - (24) Yeh, H., Banda, S. S., Heise, A. and Bartlett, A. C., “Robust Control Design with Real-Parameter Uncertainty and Unmodeled Dynamics”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 13, No. 6, 1990, pp. 1117-1125.
 - (25) Safonov, M. G. and Limebeer, D. J. N., “Simplifying the H^∞ Theory via Loop Shifting”, Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control, 1988, pp. 1399-1404.
 - (26) 古田、ロバスト制御 — 一つの私見 —、電気学会論文誌 C、109 巻、6 号、1989、408.
 - (27) 木村、ロバスト制御の現状と実用化への展望、計測と制御、30 巻、8 号、1991、647.
 - (28) 原、デジタル制御系のロバスト性、システム／制御／情報、35 巻、5 号、1991、251.
 - (29) 原、サンプル値系における H_2 および H_∞ タイプ制御、計測と制御、

30 卷、8 号、1991、655.

- (30) 近藤、原、伊藤、連続・離散時間 H_∞ 制御問題の統一的解法、計測自動制御学会論文集、27 卷、6 号、1991、415.
- (31) 川谷、山下、藤森、木村、 H_∞ 制御理論に基づくアクティブサスペンションの制御、計測自動制御学会論文集、27 卷、5 号、1991、554.
- (32) 藤田、松村、内田、柔軟ビーム磁気浮上システムの H_∞ ロバスト制御、計測と制御、30 卷、8 号、1991、706.
- (33) 野波、西村、崔、 H_∞ 最適制御によるアクティブ動吸振器を用いた多自由度構造物の振動制御（モデルの低次元化によるスピルオーバーの抑制について）、日本機械学会講演論文集、No. 910-52、1991、196.
- (34) RAO, S. S., "Combined Structural and Control Optimization of Flexible Structures", Eng. Opt., 13, 1988, pp. 1-16.
- (35) Onoda, J. and Haftka, R. T., "An Approach to Structure/Control Simultaneous Optimization for Large Spacecraft", AIAA Journal, Vol. 25, No. 8, 1987, pp. 1133-1138.
- (36) Belvin, W. K. and Park, K. C., "Structural Tailoring and Feedback Control Synthesis: An Interdisciplinary Approach", AIAA Structural Dynamic Conf., 1988, pp. 1-8.
- (37) Miller, D. F., Venkayya, V. B. and Tischler, V. A., "Integration of Structures and Controls. Some Computational Issues", Proc. IEEE Conf. Decis. Control, Vol. 24, No. 2, 1985, pp. 924-931.
- (38) Junkins, J. L. and Rew, D. W., "A Simultaneous Structure/Controller Design Iteration Method", Proc. Am. Control Conf., Vol. 3, 1985, pp. 1642-1647.
- (39) Bodden, D. S. and Junkins, J. L., "Eigenvalue Optimization Algorithms for Structure/Controller Design Iterations", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 8, No. 6, 1985, pp. 697-706.
- (40) Haftka, R. T., Martinovic, Z. N., Hallauer Jr., W. L. and Schamel, G., "An Analytical and Experimental Study of a Control System's Sensitivity to Structural Modifications", AIAA Journal, Vol. 25, No. 2, 1987, pp. 310-315.
- (41) 岩壺、池田、河村、安達、柔軟構造物の構造と制御系の同時最適設計法の開発、日本機械学会論文集（C 編）、57 卷、534 号、1991、407.
- (42) 多田、松本、永井、制御を考慮した構造物の最適設計、日本機械学会論文集（C 編）、57 卷、537 号、1991、1556.
- (43) 鈴木、ファジィ目標を含む多目標計画法による構造／制御の同時最適化、日本機械学会論文集（C 編）、58 卷、555 号、1992、3246.
- (44) 長松、モード解析、培風館、1985、252.

- (45) 梶原、大熊、長松、背戸、共振点と反共振点の感度を用いた構造物の最適化方法、日本機械学会論文集（C編）、54巻、505号、1988、2084.
- (46) 梶原、長松、時刻歴応答を考慮した構造物の最適設計、日本機械学会論文集（C編）、56巻、522号、1990、391.
- (47) 朴、石井、本多、長松、プレス機械の振動の解析と最適設計、日本機械学会論文集（C編）、56巻、524号、1990、872.
- (48) 背戸、梶原、長松、森藤、制御性を考慮した構造最適化法による光サーボ系の設計（第1報 制御系と構造系の一体化設計法）、日本機械学会論文集（C編）、55巻、516号、1989、2029.
- (49) 梶原、背戸、長松、同上（第2報 共振点消去理論による光ピックアップ構造の最適化）、日本機械学会論文集（C編）、55巻、516号、1989、2037.
- (50) 梶原、背戸、長松、森藤、中江、同上（第3報 光ピックアップの開発への応用）、日本機械学会論文集（C編）、55巻、516号、1989、2045.
- (51) Kajiwara, I., and Nagamatsu, A., "Optimum Design of Optical Pick-Up by Elimination of Resonance Peaks", Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115, No. 4, 1993, pp. 377-383.
- (52) 雉本、背戸、長松、金光、能動的機械要素を有する構造物の制振・制御（磁気軸受による弾性軸の制振問題）、日本機械学会論文集（C編）、54巻、504号、1988、1663.
- (53) 板生、山田、情報機器における振動問題と制御、日本機械学会誌、89巻、811号、1986、655.
- (54) 市川、宇宙構造物の制御、日本機械学会誌、89巻、811号、1986、668.
- (55) 早山、市川、光ディスク装置におけるメカトロニクス技術、日本機械学会誌、89巻、811号、1986、596.
- (56) 梶原、長松、稲垣、有限要素法を用いた大自由度構造系の自由度縮小によるモデル化と制御系の最適設計、計測自動制御学会論文集、28巻、3号、1992、383.
- (57) 梶原、長松、大熊、稲垣、特性行列同定法に基づく最適制御系の設計法、日本機械学会論文集（C編）、58巻、549号、1992、1385.
- (58) 梶原、稲垣、長松、モード解析と感度解析を用いた連続体構造物の最適振動制御法、日本機械学会論文集（C編）、58巻、552号、1992、2365.
- (59) Kajiwara, I., and Nagamatsu, A., "Optimum Design of Control System for Large Degrees-of-Freedom Structure to Assure Stability Against High Mode Vibrational Disturbance", 33rd SDM Conference, AIAA-92-2323-CP, 1992, pp.

1595-1603.

- (60) 大熊、長松、特性行列の実験的決定による系の同定(第7報、実用方法の提案)、日本機械学会論文集(C編)、54巻、507号、1988、2557.
- (61) 今野、山下、非線形計画法、日科技連、1982、196.
- (62) 梶原、稲垣、長松、モード解析を用いた連続体構造物の H^∞ ロバスト振動制御、日本機械学会論文集(C編)、58巻、555号、1992、3238.
- (63) 梶原、長松、感度解析による構造系と制御系の同時最適設計、計測自動制御学会論文集、26巻、10号、1990、1140.
- (64) Kajiwara, I., Tsujioka, K., and Nagamatsu, A., "Simultaneous Optimum Design of Structure and Control System to Assure Stability of Higher Modes", 34th SDM Conference, 1993.
- (65) 梶原、辻岡、長松、コンプレックス法による構造系と制御系の同時最適設計、日本機械学会論文集(C編)、59巻、563号、1993、2124.
- (66) 辻岡、梶原、浅井、長松、構造系と H^∞ 制御系の同時最適設計、日本機械学会、第71期全国大会講演論文集、No.930-63、Vol.A、1993、195.
- (67) S. S. RAO, Optimization theory and applications, Wiley Eastern Limited, (1984), 345.
- (68) 戸川、マトリクスの数値計算、オーム社、1971、46.
- (69) 中川、小柳、最小二乗法による実験データ解析、東京大学出版会、1982、63.

謝辞

本研究を遂行するにあたり、終始懇切丁寧なご指導をいただいた東京工業大学 長松昭男教授ならびに大熊政明助教授に心から感謝いたします。

日本大学 背戸一登教授からは制御工学をはじめさまざまな知識を修得させていただき、また本研究を行う上で多大のご指導、ご助言をいただいたことに、深く感謝の意を表します。

私の学部4年次卒業研究の指導教官である、東京都立大学 鈴木浩平教授からは振動に関する基礎知識をご教授いただき、また公私にわたりたいへんお世話になり、心から御礼申し上げます。

日本電気ホームエレクトロニクスの森藤浩明氏をはじめとする皆様には、光ディスク装置の試作および実験において多大のご協力をいただき、ナカミチリサーチの石塚真一氏には基礎実験装置の製作に多大のご助力をいただきました。ここに、厚く御礼申し上げます。

本学の辻岡一明助手には、本研究の遂行および本論文の作成にあたり多大のご助力をいただき、深く感謝いたします。そして、私と共に研究を行っていただいた、当時東京工業大学学生であった岩川勇人氏（現、日本経済新聞社）、小泉博氏（現、松下通信工業）、稲垣亨氏（現、日本電装）、杉山智之氏（現、本学大学院）、兼信裕氏（現、本学大学院）、浅井勝彦氏（現、本学大学院）、末吉雅弘氏（現、本学大学院）には多大のご協力をいただきました。皆様の努力と協力により、本論文を完成させることができました。ここに、心から感謝申し上げます。また、山口正勝技官をはじめとする長松、大熊研究室の皆様には公私にわたりたいへんお世話になり、深く謝意を表します。