

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	トランスバーサル型回路の設計に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	坂庭好一
Author(English)	KOHICHI SAKANIWA
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第908号, 授与年月日:1977年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第908号, Conferred date:1977/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

トランスバーサル型回路の設計に関する研究

昭和52年1月

指導教官 岸 源也 教授

提出者 大学院博士課程 電子工学専攻
坂庭好一

トランスバーカル型回路の設計に関する研究

第1章	緒言	
1.1	本研究の背景と目的	1
1.2	本研究の概要	4
1.3	準備	6
1.3.1	トランスバーカル型回路の構造	
1.3.2	2乗誤差評価式	
1.3.3	代表的なMS形自動等化器	
第2章	タップ利得2乗和の抑えられたトランスバーカル型回路	
2.1	はじめに	17
2.2	準備	19
2.3	タップ利得の増大現象	21
2.4	タップ利得2乗和の持つ物理的意味	27
2.5	設計方法	30
2.6	自動等化器への応用	34
2.7	最小近似誤差の評価	41
2.8	例題	43
2.9	おとがき	53
第3章	集中定数遅延回路を用いた半無限トランスバーカル型回路の伝達関数	
3.1	はじめに	54

3.2	準備	55
3.3	伝達関数の漸近近似の必要十分条件	57
3.4	例題	62
3.5	あとがき	64
第4章	希望特性の分貝値をタップ利得とする分貝総和型 2乗誤差最小 トランスバーカル型回路	
4.1	はしがき	65
4.2	構成方法 (I)	66
4.3	構成方法 (II)	73
4.4	マトリクス回路の構成に関する検討	76
4.5	プリセット型等化器とくわの応用	80
4.6	計算例	82
4.7	あとがき	98
第5章	トランスバーカル型回路の偏差解析	
5.1	はしがき	99
5.2	準備	101
5.3	伝達関数への累影響	103
5.4	振幅及び位相特性への累影響	108
5.5	時間領域標準値への累影響	127
5.6	偏差の分類	136
5.7	統計的偏差が伝達特性に及ぼす影響	137
5.8	あとがき	147
第6章	離散的なタップ利得をもつトランスバーカル型回路	
6.1	はしがき	148

6.2	離散空間における2乗誤差の最小化 (大域的最小を得るのに十分な調査範囲の決定)	149
6.2.1	直流利得も含めた近似の場合	
6.2.2	直流利得を問題としない近似の場合	
6.3	縦続型構成に関する考察	163
6.4	あとがき	171
第7章	2次縦続型構成に対する自動等化器	
7.1	はじめ	172
7.2	準備	173
7.3	大域的最適解があるための十分条件	179
7.4	自動等化アルゴリズム	183
7.5	あとがき	185
第8章	トランスバーサル型回路を用いたSSBディジタル 変復調器の一形式	
8.1	はじめ	186
8.2	準備	187
8.3	変調部	189
8.4	復調部	193
8.5	あとがき	196
第9章	結言	197
	謝辞	200
	参考文献	201

第1章 緒論

1.1 本研究の背景と目的

トランスパーカル型回路は、1940年 H.E. Kallmann によって提案された⁽⁷⁾が、その大きな特長は、一般に安定性に関する考慮が不要で、その実設計が容易であることと、特性を可変にし易いことと考えられる。以来、トランスパーカル型回路は、その特長を生かして、通信の各分野で広く利用されていく。その主なものは、浮波器の他に、各種通信路の歪を等化する振幅等化器、位相又は遅延等化器、及び時間領域の等化器などである。特に近年では、可変等化器⁽⁹⁾や自動等化器^{(9)~(10)}としての応用的研究が盛んで、そのうちでも、自動等化器に関する研究は、非常に多い^{(16) (17)}。

しかしながら、トランスパーカル型回路の基礎的な理論面での研究とすると、余り多くの研究が成りおいていないように思われる。例えは (i) 従来提唱されてきたトランスパーカル型回路回路の代表的な設計方法の中には、設計の結果として得られるゲインの大きさだけが考慮はものは、少ないようである。しかし、現実には、ダイナミックレンジや素子感度、あるいは、偏差の影響を考えると、ゲインの大きさには、ある一定の上限があるものと考えられ、何らかの意味で、ゲインの大きさを制限した設計方法を検討しておく必要があるものと考えられる。さらに、(ii) 因果律を考えるとトランスパーカル型回路は、本質的に半無限の構造をもつものと考えられ、設計に普通のフリエ級数論をそのまま適用することは出来ない。又、現実には、遅延回路として、集中定数の全域通過回路を用いる場合も多く、その実質もフリエ級数とは異なる。従って、このような半無限トランスパーカル型回路で実現出来る伝達関数や、トランスパーカル型等化器の等化能力を調べるおくことは、重要であると思われる。しかし、この部分での研究も少ないようである^{(16) (17)}。一部分が解決されていくに過ぎず、検討の余地が残されているように思われる。又、(iii) トランスパーカル型回路の時間領域特性と周波数領域特性との関係を表す理論として、対反響理論⁽⁸⁾がよく知られており、現在に致す

で、一つの代表的な設計方法の基礎を提供している。然るに、トランスパーカル型回路の設計に對及響理論をその子の形で適用しようとする、必然的にタップねが決るおの工率の重ね合せによつて、タップねでそのおの特性を一致させようとする。いわゆる分奏一致型の設計をせよと得る。その為、各分奏では、希望特性に一致するが、それ以外では、近似度が不明確になる傾向になる。この問題は、二乗誤差等を評価式として用いることにより、相当解決されるかと考えられるが、二乗誤差を評価式として用いると、通常は、タップ利得が希望特性によつて簡単に表せないと云う事態が起り、可変等化器等としては、使用しにくいものとなる。そこで、二乗誤差を評価式として用いる、しかも、タップ利得が希望特性によつて簡単に表されるようなトランスパーカル型回路の構成方法が望まれる。さらに、(iv) デジタルフィルタなどの方面では、係数のおの誤差が伝達特性に与える影響について、比較的詳しく研究が為されていようであるが⁽²⁶⁾、アナログ素子を用いたトランスパーカル型回路においては、偏差のおの回路パラメータは、タップ利得で 4 ではなく、他に多くの要素が現れ、それらの要素の偏差が特性に及ぼす影響を考察したものは、比較的少ないようである。電荷転送素子を用いたもの⁽²⁷⁾が代表されるような、固定トランスパーカル型回路においては、云々ともなく、タップ利得の変わらぬ可変トランスパーカル型回路においても、タップ利得の調整では、補償出来る影響を与える偏差もあり、偏差解析は、重要な問題と考えられる。これらの問題に加え、(v) デジタル回路を用いたトランスパーカル型回路では、タップ利得として許されるのは、連続的の値ではなく、離散的の値である。従つて、タップ利得が離散値に限られることを考慮した設計方法が必要となるか、問題自体が比較的新しい為か、研究も少ないようである。CADによる設計方法等⁽²⁸⁾が、発表される⁽²⁹⁾が、大域的最適解が得られるという保証があるという問題もあり、検討の余地が残されている。(vi) 自動等化器として、用いられたトランスパーカル型回路は、おのほら、通常型構成によつておの限られるようである、等価な二次区間の系統構成におの回路を用いた例は、見かけな

いようである。しかし、近似すべき特性によれば、2次系統型構成による方が、優れている場合もあり、⁽³²⁾ 2次系統型構成によるトランスパーカル型回路が、自動等化器として、応用可能であるかどうか検討におく必要があると思われる。さらに、(vii) 実際のデジタル通信網への応用として、トランスパーカル型回路を用いたデジタル変復調器の設計に関する問題など、多くの問題が、おこせられる。

本研究の目的は、上に挙げた問題に対し、統一的考察を行うことにある。

尚、本文は、トランスパーカル型回路の設計に際しては、誤差評価式として、2乗誤差を用いること、ほが一貫している。2乗誤差は、数学的に取り扱い易いという理由に加え、パーセバルの等式が使える場合には、時間領域と周波数領域の関係が明確であり、さらに、トランスパーカル型回路において、平均2乗誤差最小による設計と、SN比最大による設計とが等価である⁽³³⁾ といった意味があり、一つの有力な評価量であると知られる。

1.2. 本研究の概要

本研究は、各節に挙げた7つの問題点に対する考察を目的とし、第2章から、第8章まで、さしざしの問題を扱っていく。本節では、以下各章の内容を簡単にまとめ置く。

第2章では、タップ利得2乗和の抑えられたトランスバーサル型回路の最小2乗近似による設計方法について述べている。まず、トランスバーサル型回路の普通の最小2乗近似による設計について、どのような場合にタップ利得が大きくなるかを調べ、次に、本章で提案するタップ利得2乗和の抑えられた設計方法のもつ物理的意味を述べている。そして、本章の基本定理として、タップ利得2乗和の抑えられた設計方法を示すと共に、それと、自動等化器に利用する場合の最適タップ利得設定アルゴリズムを与えている。最後に、タップ利得2乗和を抑えたときの最小2乗誤差を与える近似式を導くと共に、幾つかの例題を付している。

第3章では、集中定数遅延回路を用いたトランスバーサル型回路による、実現出来る伝達関数の満たすべき必要十分条件について述べ、例題を付している。

第4章では、希望特性の分臭値をタップ利得と見做す可変等化器等として、便利な形式の分臭総和型2乗誤差最小のトランスバーサル型回路について述べている。まず、その構成方法を2つ述べ、そこで、必要となるマトリクス回路の構成に関する検討を行っている。又、分臭総和型2乗誤差に関して、テータにより積分型2乗誤差との比較、適当なタップ数と分臭数の関係、近似に適当なタップの値、重み関数の影響などについて調べている。又、フリスケット型等化器と2の応用方法に関する検討もしている。

第5章では、トランスバーサル型回路の各種回路パラメータの微小偏差が伝達特性、振幅及び位相特性、時周領域等間隔標本値に与える影響を1次近似による調べ、偏差の生じる回路パラメータの種類及び位置によって変る影響の大きさな特徴を述べると共に、幾つかの計算例を示

しる。又、偏差による影響がタップ利得の調整で補償出来るか否かにより、偏差の種類を分類することを提案し、最後に、タップ利得が設計値を中心に統計的分布をもちと仮定した場合、伝達特性に与える影響から見た、通常型構成と、総統型構成の比較を行う。

第6章では、前半で、離散的なタップ利得をもつトランスパーカル型回路の最小二乗近似による設計において、大域的な最小値を得るに十分な調査範囲を、直流利得を含めた近似の場合と、直流利得を問題としない近似の場合に分けて求められている。又、CA田による、局所的な最小値を得る場合の助けとする目的で、連続空間上での二乗誤差評価関数の形状を調べられている。後半では、タップ利得が二進レベルに制限された総統型構成によるトランスパーカル型回路で、実現出来る零値の位置を系統的に求め、設計の際のデータを与えている。

第7章では、二次区間総統型構成によるトランスパーカル型回路を、MS形自動等化器として用いる場合の考察を行い、二次総統型構成によるタップ利得を変化とする空間で、二乗誤差評価関数を停留させる点が大域的な最適点であり得る十分条件を求めると共に、二乗誤差評価関数を停留させる点へ収束する簡単な自動等化アルゴリズムを示し、二次総統型構成によるトランスパーカル型回路を自動等化器として用いることの可能性と、限界を明らかにしている。

第8章では、標本化定理に基づき、トランスパーカル型回路で構成される、周波数分割多重波B-AM-ディジタル変復調システムの一形式について述べている。

1.3 準備

本節では、本論文で扱うトランスバースカル型回路に關して、多少の説明をしておく。即ち、1.3.1項で、トランスバースカル型回路の構造について説明し、1.3.2項で代表的な2重誤差評価式をあげ、その説明を行う。又、1.3.3項では、従来の通常mean square テルゴリズム⁽³⁹⁾による自動等化器(以下、MS形自動等化器と略す)の代表的なものを2,3紹介し、説明を加えておく。

尚、本論文では、主として、エネルギー有限の信号を扱っており、時間波形 $x(t)$ に対し、そのフリエ変換 $X(\omega)$ を形式的に

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ x(t) &\triangleq (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (1.3.0-1)$$

で、定義し、 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ などと記しておく。

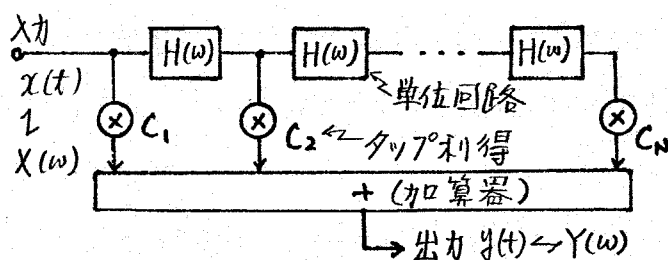
1.3.1 トランスバースカル型回路の構造

トランスバースカル型回路は、言葉の意味^(*)からして、本来、横方向に遷延線を配し、タップを設けて、各タップの出力を加算して、最終の出力を得るという(図1.1)の構造をもつもの⁽³⁸⁾と考えられ、タップ付遷延線や、FIR フィルタにより、代表される。

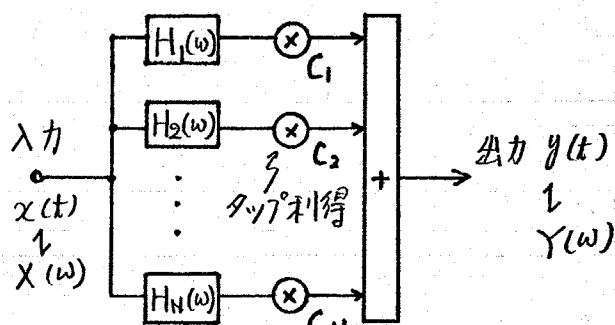
(図1.1)に示すトランスバースカル型回路の伝達関数は、

$$F(\omega) = \sum_{m=1}^N C_m H^{m-1}(\omega) \quad (1.3.1-1)$$

で与えられる。但し、 $H(\omega)$ は、遷延



(図1.1) トランスバースカル型回路(通常型構成)



(図1.2) 拡張されたトランスバースカル型回路

(*) transversal: (adj) 横切り, 横断線, (n) 横断線.
cf. transversal wave: 横波, transversal line: 魚の側線.

線に相当する単位回路の伝達関数, 又, C_m はタップ利得である。単位回路としては, 理想遅延線

$$\exp\{-j\omega\tau\} \quad (1.3.1-2)$$

を仮定することから最も普通であり基本となるが, 現実には, 集中定数の全域通過回路

$$(a-s)/(a+s), \quad a > 0, \quad s = j\omega \quad (1.3.1-3)$$

$$(s^2 - as + b)/(s^2 + as + b), \quad a, b > 0, \quad s = j\omega \quad (1.3.1-4)$$

や, これらと多区間用として, 使用帯域内で理想遅延線を近似したものを多く用いられているようである。

(図1.2) に示す回路の伝達関数は,

$$F(\omega) = \sum_{m=1}^N C_m \cdot H_m(\omega) \quad (1.3.1-5)$$

と与えられる, (図1.1) の標準的なトランスバーサル型回路の一般形, あるいは拡張された形とみることが出来る。⁽¹⁶⁾ 実際, 式(1.3.1-5)において,

$$H_m(\omega) = H^{m-1}(\omega)$$

とすれば, 式(1.3.1-1)に一致する。本論文では, (図1.2) に示した構造の回路を拡張されたトランスバーサル型回路, 又は, トランスバーサル型回路の一般形と呼ぶことにする。

又, 2次区間等の系統構成に対して, (図1.1) の構成を通常型構成によるトランスバーサル型回路と呼ぶことにする。

尚, タップ利得の番号付けは, 場合によって異なることがあるが, 特に誤解の生じると思われる場合は, その都度断ることにする。

1.3.2 2乗誤差評価式

本項では, トランスバーサル型回路の周波数領域及び時間領域での設計に際して, 用いられる代表的な2乗誤差評価式をあげ, それらの間の関係を述べると共に, それらが, タップ利得を要素とするベクトルに属する2次式として,

統一的に扱ったことを指摘する。又、その際現わゆる実対称相関行列の正値性について、多少考察しておく。

(i) まず、周波数領域の2乗誤差評価式として、代表的なものとして、積分型2乗誤差及び分点総和型2乗誤差

$$\epsilon_{w_1} \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} W(\omega) |Y(\omega) - G(\omega)|^2 d\omega \quad (0 < \omega_0 \leq +\infty) \quad (1.3.2-1)$$

$$\epsilon_{w_2} \triangleq \sum_{i=-M}^M W(\omega_i) |Y(\omega_i) - G(\omega_i)|^2, \quad -\omega_i = \omega_{-i} \quad (1.3.2-2)$$

が考えられる。但し、

- $G(\omega)$: 希望出力特性
- $W(\omega) = W(-\omega) > 0$: 重み関数
- $Y(\omega) \triangleq F(\omega) X(\omega)$: トランス11-カル型回路の出力
- $F(\omega)$: トランス11-カル型回路の伝達関数
(式(1.3.1-1) あるいは 式(1.3.1-5))
- $X(\omega)$: 入力

である。ここで、式(1.3.2-2)の ϵ_{w_2} は、取値計算が簡単で実用的であるという意味で、式(1.3.2-1)の ϵ_{w_1} の代用と考えられるものである。従って、以下、 ϵ_{w_1} について、多少詳しく説明しておくことにする。式(1.3.2-1)の ϵ_{w_1} は、簡単に計算できるように、タップ利得を要素とするベクトルに関する二次式として、次のように表せる。(以下、本項では、 $'$: 転置, $\bar{\cdot}$: 複素共役, $\text{Re}\{\cdot\}$: 実部とする。)

$$\epsilon_{w_1} = \mathbf{c}' \mathbf{A} \mathbf{c} - 2 \mathbf{c}' \mathbf{b} + \epsilon_0 \quad (1.3.2-1)$$

- 但し、 $\mathbf{c} \triangleq (c_1, c_2, \dots, c_N)'$: タップ利得を要素とするベクトル
- $\mathbf{A} \triangleq (a_{kl})_{k,l=1 \sim N}$: 実対称行列 (自己相関行列に相当)
- $a_{kl} = (1/\pi) \int_0^{\omega_0} W(\omega) |X(\omega)|^2 \text{Re}\{H_k(\omega) \bar{H}_l(\omega)\} d\omega$
- $\mathbf{b} \triangleq (b_1, b_2, \dots, b_N)'$: 実定数ベクトル (相互相関ベクトルに相当)
- $b_k = (1/\pi) \int_0^{\omega_0} W(\omega) \text{Re}\{X(\omega) \cdot G(\omega) \bar{H}_k(\omega)\} d\omega$
- $\epsilon_0 \triangleq (1/\pi) \int_0^{\omega_0} W(\omega) |G(\omega)|^2 d\omega$

$\varepsilon \omega_2$ に対しても全く同様に式(1.3.2-1)' と同一の形式に表すことが出来る。その具体的な式は 4.2 節に示している。さて、式(1.3.2-1)' にあいて、

$$C'AC = (1/2\pi) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} W(\omega) |Y(\omega)|^2 d\omega = (1/2\pi) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} W(\omega) |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 d\omega \quad (1.3.2-5)$$

であるから、実対称行列 A が、少なくとも半正値であることは、明らかである。さらに、行列 A が正値であれば、式(1.3.2-1)' の $\varepsilon \omega_1$ を最小とする最適タフ°利得 C_{opt} が一意に定まり、

$$C_{opt} = A^{-1}b \quad (1.3.2-6)$$

となる。 A の正値性は、非常に病的な入力 $X(\omega)$ や、単位回路 $H(\omega)$ を考えない限り、成り立つものと考えられ、例之は、次の補題が成り立つ。

(補題 1.3-1) 重み関数 $W(\omega)$ ($= W(-\omega) > 0$)、及び恒等的に零でない入力 $X(\omega)$ が連続で、トリス H -ケル型回路の伝達関数 $H(\omega)$ が、

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^N C_m H^{m-1}(\omega) = \sum_{m=1}^N C_m e^{-j(m-1)\theta(\omega)} \quad (1.3.2-7)$$

ただし、 $H(\omega) \equiv e^{-j\theta(\omega)}$: 理想遅延線を含む、全域通過回路

と看しうる場合、式(1.3.2-1)' あるいは、式(1.3.2-5) の行列 A は正値となる。

但し、 $\varepsilon \omega_1$ (式(1.3.2-1)) と与之積分の存在は、仮定しておく。 (補題 1.3-1 終)

(証明) まず、 $H(\omega) = e^{-j\theta(\omega)}$ が、集中定数の全域通過回路である場合を考へる。式(1.3.2-7) を式(1.3.2-5) に代入し、 $\zeta \equiv \theta(\omega)$ なる変数変換を行い、 $\theta(\omega)$ が奇関数であること、及び、逆関数 $\omega = \theta^{-1}(\zeta)$ が考へらることに注意すると^(*)

$$C'AC = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta(\omega_0)}^{\theta(\omega_0)} W\{\theta^{-1}(\zeta)\} |X\{\theta^{-1}(\zeta)\}|^2 \left\{ \sum_{k,l=1}^N C_k C_l e^{-j(k-l)\zeta} \right\} \frac{d\theta^{-1}(\zeta)}{d\zeta} d\zeta \quad (1.3.2-8)$$

が得られる。ここで、 $W\{\theta^{-1}(\zeta)\} |X\{\theta^{-1}(\zeta)\}|^2 \{d\theta^{-1}(\zeta)/d\zeta\}$ は、連続で恒等的に零でない偶関数であり、又、 $\sum_{k,l=1}^N C_k C_l e^{-j(k-l)\zeta}$ は、有限区間 $(-\theta(\omega_0), \theta(\omega_0))$ に、孤立零隻しか持たない。従って、式(1.3.2-8) は、 $\zeta \neq 0$ に対して零と成り立つことはなく、 A は、正値である。

次に、理想遅延線 $H(\omega) = e^{-j\omega\tau}$ の場合を考へると、式(1.3.2-5) から直接に、

$$C'AC = (1/2\pi) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} W(\omega) |X(\omega)|^2 \left\{ \sum_{k,l=1}^N e^{-j(k-l)\tau\omega} \right\} d\omega \quad (1.3.2-9)$$

(*) 詳しくは、第 3 章、3.2 節を参照されたい。

となり、上の場合と全く同様に A が正値であることを云える。(証明・終)

式(1.3.2-2)の分変系総和型2乗誤差 ε_{ω_2} の場合も、分変の数 $(2M+1)$ がサンプルの数 (N) より大きいと可成り、例之は、入力 x が、すべてこの分変で零であるような病的な場合を除き、行列 A は正値であることを云えるよと思われ。

(ii) 次に、時間領域での代表的な2乗誤差評価式をあげると、

$$\varepsilon_{t_1} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \{y(t) - g(t)\}^2 dt \quad (1.3.2-9)$$

$$\varepsilon_{t_2} \triangleq T \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{y(iT) - g(iT)\}^2 \quad (1.3.2-10)$$

等しいと考えられる。但し、

$$\left. \begin{aligned} y(t) &\leftrightarrow Y(\omega) \triangleq H(\omega) \cdot X(\omega) : \text{トランスミット型回路の出力} \\ H(\omega) &: \text{トランスミット型回路の伝達関数} \\ & \text{(式(1.3.1-1)あるいは式(1.3.1-5))} \\ X(\omega) &: \text{入力} \\ g(t) &\leftrightarrow G(\omega) : \text{希望出力} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2-11)$$

である。そこで、式(1.3.2-9)の ε_{t_1} と式(1.3.2-10)の ε_{t_2} 及び(ii)で示した式(1.3.2-1)の ε_{ω_1} の間の関係を述べておくと、

① ε_{t_1} と ε_{ω_1} は、11°-セ11°ルの等式で結び合っており、

$$\varepsilon_{t_1} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega) - G(\omega)|^2 d\omega \quad (1.3.2-12)$$

が成り立つ(但し、 ε_{ω_1} で $\omega_0 = \infty$, $\pi(\omega) = 1$)。

② $X(\omega)$ 及び $G(\omega)$ が $(-\pi/T, \pi/T)$ に帯域制限されたものとすると、

$$\varepsilon_{t_1} = \varepsilon_{t_2} = (1/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |Y(\omega) - G(\omega)|^2 d\omega \quad (1.3.2-13)$$

が成り立つ。証明は、簡単で、第1の等式は、帯域制限波形の標本化定理から、又、第2の等式は、11°-セ11°ルの等式から直ちに得られる。従って、このとき、 ε_{t_1} 及び ε_{t_2} と、 ε_{ω_1} ($\omega_0 = \pi/T$, $\pi(\omega) = 1$) は、互いに定数倍を除いて、等しいことになる。

③ 一般にエネルギー有限の信号に対して成り立つことを云える。

$$\left. \begin{aligned} Y^*(\omega) &\triangleq (1/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(\omega + 2k\pi/T) \cdot \chi_{\pi/T}(\omega) \leftrightarrow y^*(\omega) \\ G^*(\omega) &\triangleq (1/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\omega + 2k\pi/T) \cdot \chi_{\pi/T}(\omega) \leftrightarrow g^*(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2-14)$$

$$\text{但し, } \pi_{\pi/T}(\omega) \triangleq \begin{cases} 0, & |\omega| > \pi/T \\ 1, & |\omega| < \pi/T \end{cases}$$

とすると、式(1.3.2-10)の ε_{t_2} は、次のように表せよ。

$$\varepsilon_{t_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \{y^*(t) - g^*(t)\}^2 dt = (1/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |Y^*(\omega) - G^*(\omega)|^2 d\omega \quad (1.3.2-15)$$

式(1.3.2-14)の $Y^*(\omega)$ 及び $G^*(\omega)$ は、 $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$ 及び $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ の帯域制限内挿信号のフーリエ変換であり、式(1.3.2-15)の証明も、標準化定理とパーセルの等式から直ちに得られる。

さて、上に述べた①②の場合、時間領域の2乗誤差評価式 ε_{t_1} あるいは ε_{t_2} は、式(1.3.2-12) 及び式(1.3.2-13) とよく同波長領域の2乗誤差評価式 ε_{ω_1} (式(1.3.2-11)) に帰着されるので、 ε_{ω_1} に関して (i) で述べた事柄がそのまま成り立つ。即ち、2乗誤差評価式が、タップ利得ベクトルに関する二次式として、式(1.3.2-1)' と同じ形式に書ける。これを行列 A に対して (補題 1.3-1) が成り立つ。単位回路とは、理想遅線あるいは集中定数の全域通過回路を用いたようなパーセル型回路に対応し、 A が正値となる。従って、最適タップ利得が一意的に定まり、式(1.3.2-6) と同一の式で与えられる。

次に③の場合であるが、この場合も、式(1.3.2-15)の2乗誤差評価式が式(1.3.2-1)' と同一の形式に表されることになりはしない。即ち、式(1.3.2-15)は、

$$\varepsilon_{t_2} = C'AC - 2C'b + \varepsilon_0 \quad (1.3.2-15')$$

$C \triangleq (c_1, c_2, \dots, c_N)'$: タップ利得ベクトル

$A \triangleq (a_{kl})_{k,l=1 \sim N}$

$$a_{kl} = a_{lk} \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega + 2n\pi/T) \cdot \bar{H}_k(\omega + 2n\pi/T) \right\} \times \left\{ \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\omega + 2m\pi/T) H_l(\omega + 2m\pi/T) \right\} d\omega \quad (1.3.2-16)$$

$b \triangleq (b_1, b_2, \dots, b_N)'$

$$b_k \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega + 2n\pi/T) \bar{H}_k(\omega + 2n\pi/T) \right\} G^*(\omega) d\omega$$

$$\varepsilon_0 \triangleq (1/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |G^*(\omega)|^2 d\omega, \quad (G^*(\omega) \text{ は式(1.3.2-14)})$$

と表せる。又、このとき、行列 A が、少くとも半正値であることにも多りはない。しかしこの場合、 A の正値性に関する (補題 1.3-1) が、常に成り立つとは限らないので注意を要する。ここに、その簡単な反例をあげておく。

$$\begin{aligned} \text{(例)} \quad X(\omega) &\cong \begin{cases} 1 & |\omega| < 3\pi/T \\ 0 & |\omega| > 3\pi/T \end{cases} \\ H_k(\omega) &\cong e^{-j(k-1)\omega T/3} \end{aligned} \quad (1.3.2-17)$$

とし、さらに簡単な為、 $T=1$ とすると、式 (1.3.2-16) から、

$$A_{kl} = A_{lk} = \frac{\sin(k-l)\pi/3}{(k-l)\pi/3} \left\{ 1 + 2 \cos \frac{2}{3}(k-l)\pi \right\} \left\{ 1 + 2 \cos \frac{2}{3}(l-1)\pi \right\} \quad (1.3.2-18)$$

が得られ、最も簡単な例として、 $N=2$ の場合を計算すると、

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.2-19)$$

となり、明らかに、半正値ではあまが、正値ではないことが分る。 (例・終)

但し、③の場合にも、 A の正値性に関して次の補題が成り立つ。

(補題 1.3-2) 一般に、トランスバ-カル型回路の単位回路が理想遅延線であり、しかも、その遅延時間が、式 (1.3.2-10) の二乗誤差評価式の問題として標準的周遅延 T に等しいとき、即ちトランスバ-カル型回路の伝達関数が、

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^N C_m e^{-j(m-1)\omega T} \quad (1.3.2-20)$$

の場合には、一般に帯域制限された入力 $X(\omega)$ に対して式 (1.3.2-15) の行列 A は正値とすることが示される。(補題 1.3-2・終)

尚、時間領域の二乗誤差評価式として、

$$\varepsilon_{t3} \cong \sum_{i=1}^M w(t_i) \{y(t_i) - g(t_i)\}^2 \quad (1.3.2-21)$$

但し、 $w(t) > 0$: 重み関数、その他は、式 (1.3.2-11) と同じ。

なども著せられ、第4章で扱われる。

さらに、以上では、各二乗誤差評価式が有限であるという点から、エネルギー有限の信号を扱って来たが、 Π -有限の信号に対しては、

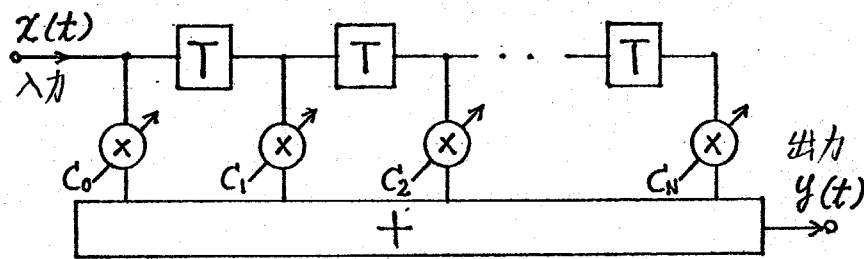
$$\varepsilon_{t4} \cong \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \{y(t) - g(t)\}^2 dt \quad (1.3.2-22)$$

といった評価式を用いることが出来る。

1.3.3. 代表的なMS形自動等化器.

本項では、タップ利得の入力と出力制限を加えない、通常型構成によるMS形自動等化器の代表的なものを2.3で紹介し、第2章2.6節で述べるタップ利得乗和の抑えらぬ自動等化器に関する議論、さらに、第2章で述べる系統型構成による自動等化器の議論と対比し準備とする。尚、MS形自動等化器は、いわゆる最急降下法による逐次近似アルゴリズムを基本とするものである。

本項で扱うトランスバース型回路は遅延時間Tの理想遅延線を用いた通常型構成による(図1.3)のものである。但し、ここで



(図1.3) 理想遅延線を用いたトランスバース型回路.

は、便宜上、タップの

番号を $0 \sim N$ とし(2.13.2)に注意されたい。又、誤差評価式は式(1.3.2-10), 即ち

$$\varepsilon \triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{y(iT) - g(iT)\}^2 = \mathbf{C}' \mathbf{A} \mathbf{C} - 2 \mathbf{C}' \mathbf{b} + \varepsilon_0 \quad (1.3.3-1)$$

但し、 $\mathbf{C} \triangleq (C_0, C_1, \dots, C_N)'$: タップ利得ベクトル

$\mathbf{A} \triangleq (a_{m,m})_{m,m=0 \sim N}$: 自己相関行列.

$$a_{m,m} = a_{n,m} \triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{i-m} x_{i-m}$$

$\mathbf{b} \triangleq (b_0, b_1, \dots, b_N)'$; 相互相関ベクトル.

$$b_m \triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{i-m} g_i, \quad x_i \triangleq x(iT)$$

$$\varepsilon_0 \triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_i^2, \quad g_i \triangleq g(iT)$$

(1.3.3-2)

とする。この場合、第2項(補題1.3-2)に述べたように、行列Aは一般に正値である。従って、タップ利得の入力と出力制限を加えない場合、式(1.3.3-1)の ε を最小とする最適タップ利得は、

$$\partial \varepsilon / \partial \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C} - \mathbf{b} = 0 \quad (1.3.3-3)$$

を満すものと、一意的に定まる。

以下、式(1.3.3-3)を満すように収束するタップ利得設定アルゴリズムの

代表的なものを述べていく。

(a) 基本形⁽¹⁰⁾

最急降下法による、最適タップ利得 C_{opt} を求める最も基本的な方法で、 k 回の調整後のタップ利得を C_k とし、次のタップ利得 C_{k+1} を、

$$C_{k+1} = C_k - \Delta C_k \quad (1.3.3-4)$$

但し、

$$\begin{aligned} \Delta C_k &\triangleq (\Delta C_0, \Delta C_1, \dots, \Delta C_N)^T \\ &= \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial C} \right)_{C=C_k} \\ &= \alpha (A C_k - b) \end{aligned}$$

あるいは、

$$\Delta C_m = \alpha_m \sum_{i=-\infty}^{\infty} (y_i - g_i) x_{i-m} \quad (1.3.3-5)$$

$$\alpha \triangleq \text{diag}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad (1.3.3-6)$$

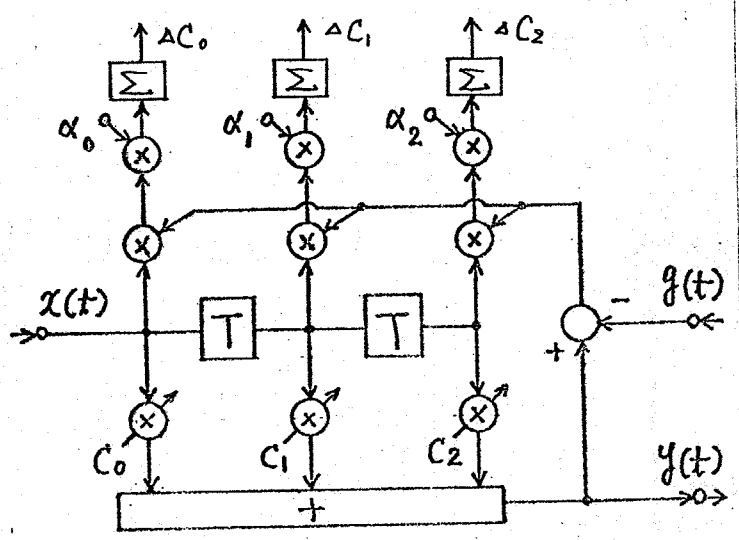
による。これは (図1.4) に示すような構成で実現され、通常、 $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_N \triangleq \alpha_0$ とし、 $0 < \alpha_0 < 2/d_{max}$ (d_{max} は行列 A の最大固有値) とする。タップ利得収束アルゴリズムは収束し、 $C_{opt} = A^{-1}b$ の得らばよことを保証されるが、収束の速度は、必ずしも速いものではない。

次の2つの方法は、収束を速める工夫を行なったものである。

(b) 信号経路にマトリクス回路をもつ構成⁽¹¹⁾

実際の通信システムでは、信号の伝送形態も定めてあり、全く未知の回路を等化するとは、まれであり、等化可能な回路の概ねの特性は、分るのである。適当なマトリクス回路を挿入することにより、収束の速い自動等化器が得られる。

ここに紹介するのは、R.W. Chang によって提案された方法で、(図1.5) のような



(図1.4) (a) 基本形

構成をまつ。このとき、(図1.5)に示した記号を用いて、式(1.3.3-1)は、

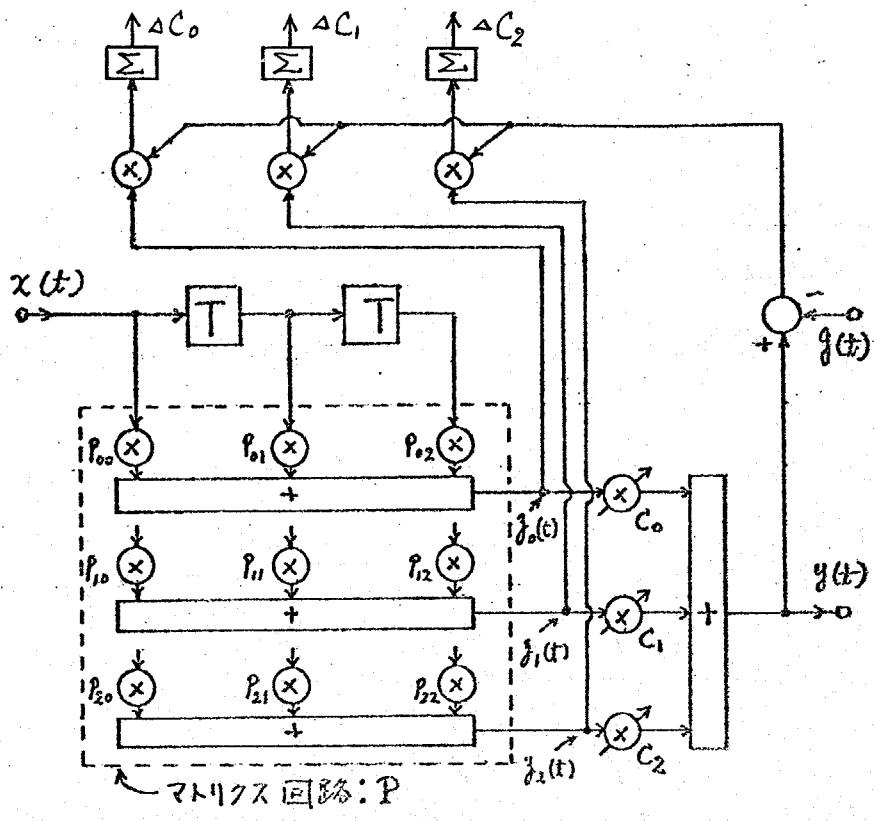
$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^N C_n z_{n,i} - g_i \right\}^2 \\ &= \mathbf{c}' \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}' \mathbf{c} \\ &\quad - 2\mathbf{c}' \mathbf{P} \mathbf{b} + \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{1.3.3-7}$$

となり、又、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{c}} \right) = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}' \mathbf{c} - \mathbf{P} \mathbf{b} \tag{1.3.3-8}$$

あるいは、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_n} \right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (y_i - g_i) z_{n,i} \tag{1.3.3-8}'$$



(図1.5) 信号経路にマトリクス回路をまつ構成。

が得らる。但し、 $z_{n,i} \triangleq z_n(iT)$ 等である。このとき、

$$\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}' = \mathbf{E} \text{ (単位行列)} \tag{1.3.3-9}$$

が成立しているのは、最急降下法によるプログラムを式(1.3.3-4), (1.3.3-5)で、 $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_N = 1$ とし、1回の調整を行うと、

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{c}_0 - \Delta \mathbf{c}_0 \quad (\Delta \mathbf{c}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{c}} \right) \mathbf{c} = \mathbf{c}_0 - \mathbf{P} \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{P} \mathbf{b} \end{aligned} \tag{1.3.3-10}$$

となる。この \mathbf{c}_1 が、最適タップ利得を与えることは、式(1.3.3-9)のとき、式(1.3.3-8)を0とすることから、容易に理解出来る。又、式(1.3.3-9)を満たす行列は、

$$\mathbf{P} \triangleq \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{U}' \tag{1.3.3-11}$$

但し、 \mathbf{Q} は任意の直交行列。 (1.3.3-12)

$$\mathbb{D}^{1/2} \triangleq \text{diag} (1/\sqrt{d_0}, 1/\sqrt{d_1}, \dots, 1/\sqrt{d_n})$$

$d_0 \sim d_n (>0)$ は、行列 A の固有値

又、 U は、 $UAU' = \mathbb{D}$ とする直交行列

(1.3.3-12)

と与えられる。行列 A は、 λ が $\alpha(t)$ により決まるから、被等化特性が、ある程度分る。この場合とは、 P とは、固定行列を用いて、十分であることが予想される。又、行列 P の挿入による、最小近似誤差が、変化する事も容易に示される。

(c) タップ利得制御部にマトリクス回路をもち構成⁽¹²⁾

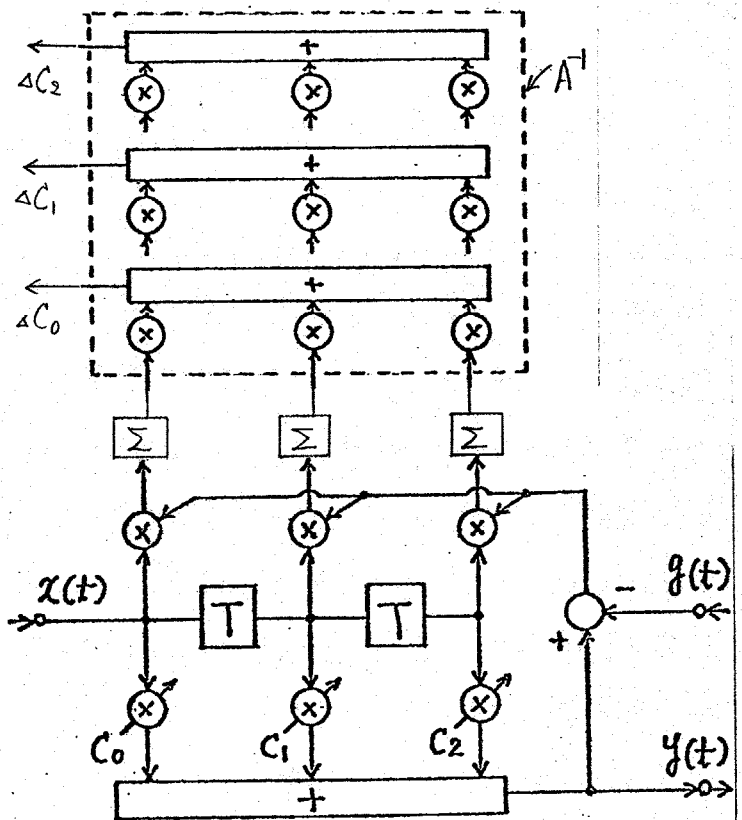
(図1.4)の構成における式(1.3.3-5)では、 α を対角行列とし、 α とは、 A^{-1} を用いる。1回の調整で、

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 - \Delta C \\ &= A^{-1}b \end{aligned} \quad (1.3.3-13)$$

$$(\because \Delta C_0 = C_0 - A^{-1}b)$$

となり、 C_1 が最適タップ利得を与えることは、明らかである。この場合も、被等化特性が、ある程度分る。この場合とは、 A^{-1} とは、固定行列を用いることが出来、収束の速い自動等化器が得られる。

この場合の構成は、(図1.6)に示すようになる。



(図1.6) タップ利得制御部にマトリクス回路をもち構成

第2章 タップ利得2乗和の抑えられたトランスパーナル型回路

2.1 はし加さ

トランスパーナル型回路のタップ利得の大きさには、ダイナミックレンジや素子感度の面などから、ある一定の制限が課せられると考えられる。従って、従来の設計方法で設計したときに得られるタップ利得が非常に大きな値となってしまうようなことは、好ましくないといえる。そのためには、実現出来ないという問題が起るようになる。然るに、タップ利得の大きさを考慮した設計方法を考察した研究は、少いようである⁽⁴⁾、特に、タップ利得の大きさを積極的に抑えた設計方法というものは、見当たらないように思われる。

本章では、最小2乗近似による設計の場合について、上記の問題を考察し、タップ利得2乗和の抑えられたトランスパーナル型回路の設計方法について述べる。まず、2.2節では、準備として1.3.2項を引用して、トランスパーナル型回路の設計のために、問題とする代表的な2乗誤差評価式が系統的に扱えることを指摘し、本章で用いる記号の説明を行う。次に、2.3節では、従来の最小2乗近似による設計のために、設計の結果得られるタップ利得が、どのような場合に大きくなるかについて調べられる。2.4節では、タップ利得の大きさを表す評価量として採用するタップ利得2乗和に関し、その持つ物理的意味を述べ、タップ利得2乗和を抑えることの意義を述べられる。2.5節では、タップ利得2乗和を一定値に抑えた状態が、希望特性との2乗誤差を最小とする一つの新しい設計方法を示される。2.6節では、2.5節に示した設計方法を、最急降下法を用いたMS形自動等化器に適用する場合のタップ利得設定アルゴリズムを示し、併せて、等化器の構成方法を述べられる。さらに、2.7節では、タップ利得2乗和を抑えた場合の最小近似誤差を知り目的で、その簡単な近似式を導かれる。2.8節では、通常、最小2乗近似による設計で得られるタップ利得が大きくなる例、及び、2.5節に示した設計方法による設計例を示すと共に、2.7

節で導いたタップ利得2乗和を抑えたときの最小近似誤差を与える式を用いた数値例などを示している。

尚、2.8節の例に見られるように、遅延素子に相当する単位回路に異なった回路を用いたトランスパール型回路において、最小近似誤差は、同程度であるがタップ利得の大きさをみると相当の違いがあると言った場合がある。このようなとき、ここで提案したタップ利得2乗和を抑えた最適設計の結果得られる最小2乗誤差は、単位回路として異なった回路を用いたトランスパール型回路の優劣を比較する一つの基礎を与えるものと考えられることも出来る。

2.2 準備

本節では, 1.3.2項で述べたことの結論として, 各種の二重誤差評価式が統一的に扱えることを指摘し, 又, 本章で用いる記号の説明をしておく。

1.3.2項で述べたように, トランスミナル型回路の設計に際して, 用いられる周波数領域及び時間領域での代表的二重誤差評価式, 式(1.3.2-1), (1.3.2-2), (1.3.2-9), (1.3.2-10)などは, いずれも, マトリクスを用いて統一的に扱える。

$$\varepsilon = C'AC - 2C'b + \varepsilon_0 \quad (2.2-1)$$

但し, $C \equiv (C_1, C_2, \dots, C_N)'$: タップ利得を要素とする実ベクトル
 $A \equiv (a_{pq})_{p,q=1 \sim N}$: 入力, 重み関数, 単位回路で決まる実対称行列
 $b \equiv (b_1, b_2, \dots, b_N)'$: 入力, 重み関数, 単位回路, 希望出力で決まる実定数ベクトル
 ε_0 : 重み関数, 希望出力で決まる正定数
 (' は転置を表す。)

と表せよ。又, 同じく 1.3.2項で, 行列 A は少なくとも半正値であること, かも, 例外的な場合を除き, 行列 A は正値となることを述べ, その証明も与えられた。

次に本章で用いる記号について少し説明しておく。まず, 行列 A は実対称行列であることから, 適当な直交行列 U により, 対角化され, 次のように表せよ。⁽⁴⁰⁾

$$A = UDU' \quad (2.2-2)$$

但し, U は適当な直交行列とする。

$$\left. \begin{aligned} D &\equiv \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N) \\ d_1, d_2, \dots, d_N &\text{ は行列 } A \text{ の固有値 } (\geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.2-3)$$

である。又, 式(2.2-3)を一般性を失うことなく,

$$0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_N \quad (2.2-4)$$

としよう。ここで, 式(2.2-2)の直交行列 U を用いて, 次のベクトルを定義しておく。

$$V \triangleq (v_1, v_2, \dots, v_N)' = U' \cdot b \quad (2.2-5)$$

又、ベクトルノルムを

$$\|C\|^2 \triangleq C' C \quad (2.2-6)$$

で定義しておく。

さて、一般に、式(2.2-1)で表される2乗誤差の極値を与えるものは、式(2.2-1)の ε を C_i ($i=1 \sim N$) で偏微分すると K より、連立方程式

$$A \cdot b = C \quad (2.2-7)$$

を満すものがあることがわかる。行列 A が半正値で固有値 λ は、零をもつとすると、 A は、正則でなく、連立方程式(2.2-7)は、不定又は、不能となる。一方、行列 A が、正値であれば、式(2.2-7)は、一意的の解をもち、是れが、式(2.2-1)の ε を最小とする最適タフの利得 C_{opt} となる。

$$C_{opt} = A^{-1} b \quad (2.2-8)$$

又、そのときの最小近似誤差は、

$$\varepsilon_{min} = \varepsilon_0 - b' A^{-1} b \quad (2.2-9)$$

で与えられる。1.3.2項で述べたように、行列 A は通常正値であり、非常に例外的な場合のみ半正値となることをよから、本章では、以下、特に断らな限り、行列 A は、正値実対称行列として扱うことにする。

2.3 タップ利得の増大現象

本節では、通常の最小二乗近似による設計に対し、設計の結果得らぬタップ利得が、どのような場合に大きくなるかについて述べる。

タップ利得の大きさを制限する通常の最小二乗近似による設計で、式(2.2-1)の二乗誤差を最小とする最適タップ利得は、 A が正値とすると、式(2.2-8), 即ち

$$C_{opt} = A^{-1}b \tag{2.3-1}$$

で与えられる。このとき、 C_{opt} のノルムに関して、次の補題が成り立つ。

(補題 2.3-1) 式(2.3-1)が成り立つとき、 C_{opt} のノルムは、次の不等式で押えらる。

$$\|b\|/d_{max} \leq \|C_{opt}\| \leq \|b\|/d_{min} \tag{2.3-2}$$

但し、 $d_{max} = d_N \geq d_1 = d_{min} > 0$ は、正値実対称行列 A の最大固有値及び最小固有値である。(補題 2.3-1 証明)

(証明) $A'A$ の最大固有値及び最小固有値が d_N^2 及び d_1^2 と存在すること、 $b \neq 0$ のとき、 $C_{opt} \neq 0$ であること、より一般に、 $C_{opt} \neq 0$ に対して、

$$d_1^2 \leq \frac{C_{opt}'(A'A)C_{opt}}{C_{opt}'C_{opt}} \leq d_N^2 \tag{2.3-3}$$

が成り立つことから、式(2.3-1)の条件を代入すれば、直ちに式(2.3-2)が得らる。(証明・終)

式(2.3-2)から、通常の最小二乗近似による設計の結果、タップ利得が大きくなることか起るのは、

(a) $\|b\|$ が大きくなる

(b) d_{min} が小さくなる

の少なくとも一方が、起る場合に限られることが分る。

以下、こゝから (a), (b) の状態が起る場合を具体的に調べる為、 T は 11 -カール型回路とし、最も基本的な、理想遅延線を用いたものを想定し、又、二乗誤差評価式の重み関数は、 1 とおく。このとき、1.3.2項で述べた、代表的二乗誤差評価式に対し、 $\|b\|$ の大きさについて、次の補題が

成り立つ。

(本問題 2.3-2) ① 周波数領域の積分型二乗誤差 ε_{ω_1} (式(1.3.2-1)) ω $W(\omega)=1$ 又, 時間領域の積分型二乗誤差 ε_{t_1} (式(1.3.2-9)) の場合, ② 時間領域の等間隔標本系二乗誤差 ε_{t_2} (式(1.3.2-10)) ω 入力 $X(\omega)$ 及 ω 希望出力 $G(\omega)$ ($-\pi/T, \pi/T$) に帯域制限されたものである場合, ③ 時間領域の等間隔標本系総和型二乗誤差 ε_{t_2} (式(1.3.2-10)) ω , トリス II-カル型回路の単位回路の遅延時間 T 標本系間隔 T に等しい場合 の3つに分けて考えよと, せよとせよ,

①, ② のとき,

$$\|b\| \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{N \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |X(\omega)|^2 d\omega \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |G(\omega)|^2 d\omega} \quad (2.3-4)$$

③ のとき

$$\|b\| \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{N \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X^*(\omega)|^2 d\omega \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |G^*(\omega)|^2 d\omega} \quad (2.3-5)$$

が成り立つ。但し,

$$\left. \begin{aligned} X^*(\omega) &\triangleq (1/T) \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\omega + 2m\pi/T) \cdot \mathcal{R}_{\pi/T}(\omega) \\ G^*(\omega) &\triangleq (1/T) \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(\omega + 2m\pi/T) \cdot \mathcal{R}_{\pi/T}(\omega) \\ \mathcal{R}_{\pi/T}(\omega) &= 1 \quad (|\omega| < \pi/T), \quad 0 \quad (|\omega| > \pi/T) \\ X(\omega) &: \text{入力}, \quad G(\omega) : \text{希望出力} \end{aligned} \right\} \quad (2.3-6)$$

である。又, 式(2.3-4)は, ε_{t_1} (式(1.3.2-9)) の場合 $\omega_0 = \infty$, ε_{t_2} (式(1.3.2-10)) ω , ($-\pi/T, \pi/T$) に帯域制限された信号の場合には, $\omega_0 = \pi/T$ とする。

(補題 2.3-2 終)

上の補題2: ①, ②, ③ いずれの場合も, 行列 A が正値とあることは, 1.3.2 項2' 既に述べた。又, ①, ② が, 統一的に扱えること, 1.3.2 項2' 述べた。次に証明を簡単に記しておく。

(証明) ①, ② のとき, 1.3.2 項の式(1.3.2-4) ω , $W(\omega)=1$ と $|H_R(\omega)|=1$ に注意すると,

$$b_R \triangleq (1/2\pi) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} X(\omega) \cdot G(\omega) \overline{H_R(\omega)} d\omega$$

$$\begin{aligned} &\leq (1/2\pi) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |X(\omega)| |G(\omega)| d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{-\omega_0}^{\omega_0} |X(\omega)|^2 d\omega \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |G(\omega)|^2 d\omega} \quad (\text{イッヅワルツの不等式}) \end{aligned} \quad (2.3-7)$$

これから、直ちに式(2.3-4)が得らる。

②のとき、

$$H_k(\omega + 2n\pi/T) = e^{-j(k-1)\{\omega + 2n\pi/T\}T} = e^{-j(k-1)\omega T} \quad (2.3-8)$$

が成り立つことに注意すると、式(1.3.2-16)から

$$\begin{aligned} b_k &\cong (1/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left\{ (1/T) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega + 2n\pi/T) e^{j(k-1)\omega T} \right\} G^*(\omega) d\omega \\ &\leq (1/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X^*(\omega)| |G^*(\omega)| d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X^*(\omega)|^2 d\omega \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |G^*(\omega)|^2 d\omega} \quad (\text{イッヅワルツの不等式}) \end{aligned} \quad (2.3-9)$$

これから、直ちに式(2.3-5)が得らる。 (証明終)

(補題 2.3-2) から、 $\|b\|$ の大きさは式(2.3-4)あるいは式(2.3-5)で抑えらる。すなわち、 $\|b\|$ が大きくなることはない。従って、 $X(\omega)$, $G(\omega)$ あるいは $X^*(\omega)$, $G^*(\omega)$ のスペクトルが、何れ一定であるとき、 $\|b_{opt}\|$ が大きくなるのは $d_{min} (=d_1)$ が小さくなる時である。

さて、理想遅延線を用いたトランスパーカレ型回路の伝達関数は、周波数領域で、周期関数となる。周波数領域の誤差評価式としてこれを、有限周波数帯域の近似とする場合、即ち、(補題 2.3-2)で述べた分類に従えば、①の ε_{ω_1} (式(1.3.2-1))で ω_0 が有限の場合、及び②、③の場合について、 d_{min} が小さくなる場合を調べると、次のような場合が考えられる。

(i) ナイキスト・レートに比べ、高速のサンプリングを用いたトランスパーカレ型回路の場合。周波数領域で言えば、特性を近似する帯域に比べ、トランスパーカレ型回路の持つ周期が大きい場合。

これに対し、特性を近似する帯域とトランスパーカレ型回路の持つ周期が同じ場合とす。

(ii) 入力 $X(\omega)$ あるいは $X^*(\omega)$ のスペクトルが、矩形 $|X(\omega)| = 1 (|\omega| < \omega_0)$,

$X(\omega) = 0$ ($|\omega| > \omega_0$) 又, $|X^*(\omega)| = 1$ ($|\omega| \leq \pi/T$) から, 至小ことにより d_{min} が, 小さくなる場合.

(iii). ロールオフ特性を有する入力², タイミング位相加算³の場合.
 等²か, あげ³らる。

次に, 実際に行列 A の最小固有値が, どの程度小さくなるか, 数値例をあげておくことにする。まず

<表2.1> 行列 A の固有値 (i) の場合.

(i) の場合にかかる表とすると,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |F(\omega) - G(\omega)|^2 d\omega \\ &= C'AC - 2C'b + \epsilon_0. \end{aligned} \tag{2.3-10}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{n=1}^N C_n e^{-j(n-1)\omega T} \\ (0 < \epsilon \leq T) \end{aligned} \tag{2.3-11}$$

であり, 一般性を失うことゝ, $T=1$ としておく。<表2.1> の場合の行列 A の最小固有値ならびに最大固有値の大きさをタッ⁷程 $N=5$ と 10 について, $\epsilon = 1 \sim 1/10$ 及び $\epsilon = 1 \sim 1/5$ の場合の数値をまとめる。これから分るように最小固有値 d_{min} は, 非常に小さな値となり, (補題 2.3-1) の式 (2.3-2) に従えば, $\|b\|$ が一定であれば $\|C_{opt}\|$ が非常に大きくなる可能性のあることが分る。

$N=5$	d_{min}	d_{max}	$1/d_{min}$
$\epsilon = 1$	1.0	1.0	1.0
0.9	0.59008	1.1111	1.6947
0.8	0.26430	1.2500	3.7836
0.7	0.89358×10^{-1}	1.4285	1.1191×10^1
0.6	0.23246×10^{-1}	1.6662	4.3018×10^1
1/2	0.46629×10^{-2}	1.8488	2.1446×10^2
1/3	0.14540×10^{-3}	2.8827	6.8918×10^3
1/4	0.13391×10^{-4}	3.5229	7.4677×10^4
1/5	0.21605×10^{-5}	3.9428	4.6286×10^5
1/10	0.80081×10^{-8}	4.6893	1.2487×10^8

$N=10$	d_{min}	d_{max}	$1/d_{min}$
$\epsilon = 1$	1.0	1.0	1.0
0.9	0.23927	1.1111	4.1794
0.8	0.22080×10^{-1}	1.2500	4.5029×10^1
0.7	0.11913×10^{-2}	1.4286	8.3942×10^2
0.6	0.44794×10^{-4}	1.6667	2.2324×10^4
1/2	0.10871×10^{-5}	2.0000	9.1988×10^5
1/3	0.42470×10^{-9}	2.9992	2.3546×10^9
1/4	0.19793×10^{-11}	3.9839	5.0523×10^{11}
1/5	0.32774×10^{-13}	4.9117	3.0512×10^{13}

<表 2.2> 逆行列 (A^{-1}) の数値例 ($A^{-1} = (A^{-1})^T$)

$\tau = 1/2$	$A^{-1} =$	1.2×10^1	-2.4×10^1	2.9×10^1	-2.1×10^1	8.4×10^0
			5.6×10^1	-6.8×10^1	5.2×10^1	-2.1×10^1
				8.8×10^1	-6.8×10^1	2.9×10^1
					5.6×10^1	-2.4×10^1
						1.2×10^1
$\tau = 1/3$	$A^{-1} =$	1.8×10^2	-5.4×10^2	7.3×10^2	-5.1×10^2	1.6×10^2
			1.7×10^3	-2.3×10^3	1.6×10^3	-5.1×10^2
				3.2×10^3	-2.3×10^3	7.3×10^2
					1.7×10^3	-5.4×10^2
						1.8×10^2
$\tau = 1/4$	$A^{-1} =$	1.5×10^3	-5.1×10^3	7.2×10^3	-4.9×10^3	1.4×10^3
			1.8×10^4	-2.5×10^4	1.8×10^4	-4.9×10^3
				3.6×10^4	-2.5×10^4	7.2×10^3
						-5.1×10^3
						1.5×10^3
$\tau = 1/5$	$A^{-1} =$	8.2×10^3	-3.0×10^4	4.3×10^4	-2.9×10^4	7.8×10^3
			1.1×10^5	-1.6×10^5	1.1×10^5	-2.9×10^4
				2.3×10^5	-1.6×10^5	4.3×10^4
					1.1×10^5	-3.0×10^4
						8.2×10^3
$\tau = 1/10$	$A^{-1} =$	1.9×10^6	-7.4×10^6	1.1×10^7	-7.3×10^6	1.9×10^6
			2.9×10^7	-4.3×10^7	2.9×10^7	-7.3×10^6
				6.4×10^7	-4.3×10^7	1.1×10^7
					2.9×10^7	-7.3×10^6
						1.9×10^6

又、〈表2.2〉には、この場合の行列Aの逆行列 A^{-1} の収値係りを $N=5$, $\tau=1/2 \sim 1/10$ の場合について示している。 $\|C_{opt}\|$ は式(2.3-1)より与えられるから、〈表2.2〉から分子より、係りとは、 $b = (+, -, +, \dots, +, -)^T$, あるいは $b = (-, +, -, \dots, -, +)^T$ などの場合とすると、 $\|C_{opt}\|$ が非常に大きくなることになる。この場合の実際の近似係りについては、2.8節(係り-1)に示す。

(ii)の場合の一般係りとし、

$$\chi(\omega) = \begin{cases} |\sin \omega| & |\omega| < \pi/4 \\ 0 & |\omega| > \pi/4 \end{cases} \quad (2.3-12)$$

のときの行列Aの最小固有値ならびに最大固有値を〈表2.3〉に示しておく。但し、この場合、トランスミッタ型回路の遅延素子の遅延時間は

〈表2.3〉 行列Aの固有値 (ii)の場合 ($\tau=T$)

	d_{min}	d_{max}	$1/d_{min}$
$N=5$	2.9289×10^{-1}	1.7071	3.4141
10	1.3397×10^{-1}	1.8660	7.4641
15	6.0307×10^{-2}	1.9379	1.6582×10^1
20	4.0507×10^{-2}	1.9595	2.4687×10^1
25	2.5072×10^{-2}	1.9749	3.9885×10^1
30	1.9215×10^{-2}	1.9808	5.2043×10^1

$\tau=T$ である。この場合にも、最小固有値がかなり小さくなり、希望出力より $\|C_{opt}\|$ が相当大きくなることがあり得ることになる。

(iii)の場合、25%余法ルールオフ入力に対して、タイミング位相のずれにより、 10^{-3} 程度の最小固有値の現れることが報告されている(15)。

尚、上の(i)~(iii)の場合には、行列Aが正值でしかた $\|C_{opt}\|$ が大きくなる場合であるが、さらに、

(iv) Aが半正值になると、2乗誤差の極値を与える連立方程式、式(2.2-7)の $AC=b$ は、不愈又は不能となり、この場合、式(2.2-7)を満足する収束するMS形自動等化器のタップ利得設定アルゴリズムが暴走を起すことがあると考えられ、その為、タップ利得が大きくなるほうとあり得ると考えられる。

2.4. タップ利得2乗和の物理的意味

本節では、トランスバーカル型回路において、タップ利得2乗和の物理的意味を述べ、設計に際して、タップ利得2乗和を抑えることの意義を明らかにする。

まず、タップ利得2乗和を抑えることの直接の意味として、

① タップ利得2乗和を抑えることにより、タップ利得の絶対値が抑えられる。設計の結果得られるタップ利得を現実に行きうるタップ利得の可変範囲に抑えることが出来、タップ利得の出力端で、信号の大きさが、ダイナミックレンジを越えて、非線形歪を受けたりといったような事態が防げられる。と云うことがあがらぬ。

さらに、タップ利得2乗和は、広い意味の雑音と深く関係しており、

② トランスバーカル型回路において、タップ利得を構成する増幅器から生じる雑音あるいは、タップ利得を構成する係数器の打ち切り誤差、又、入力信号に、加った雑音あるいは、入力信号の量子化誤差等による出力の等価雑音は、タップ利得2乗和に比例する量となり、タップ利得2乗和を抑えた設計方法は、これらの雑音を抑えた状態での最適設計となる。と云うべきな意味がある。

次にこのことについて、多少詳しく説明する。簡単の為、理想遅延線 $e^{j\omega t}$ を用いたトランスバーカル型回路を想定し、雑音あるいは、打ち切り誤差等は、平均が零で、相関がゼロと仮定する。又、時間領域の積分型2乗誤差式(1.3.2-9)を用いた場合について、説明しておくことにする。そうするとトランスバーカル型回路の入力を $x(t)$ とするとき、出力 $y(t)$ は、

$$y(t) = \sum_{m=1}^N c_m \cdot x\{t - (m-1)T\} \quad (2.4-1)$$

であり、希望出力 $g(t)$ との2乗誤差評価式は、

$$E_{t1} = \int_0^{\infty} \{y(t) - g(t)\}^2 dt \quad (2.4-2)$$

がある。まず、タップ利得を構成する増幅器から生じる雑音あるいは、係数器の相値打ち切り誤差のモデルとして、各タップ利得 c_n が、

$$\left. \begin{aligned} C_m &\rightarrow C_m(1 + \delta_m), \quad \langle \delta_m \rangle = 0, \quad \langle \delta_m \delta_n \rangle = 0 \quad (m \neq n) \\ \langle \delta_m^2 \rangle &= \sigma^2 \quad (\text{但し, } \langle \cdot \rangle \text{ は平均を表す. 以下同様}) \end{aligned} \right\} \quad (2.4-3)$$

と表せるとすると, このときの出力 $y_1(t)$ の平均エネルギーは,

$$\langle \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2(t) dt \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \cdot \sum_{n=1}^N C_n^2 \quad (2.4-4)$$

となり, 等価雑音エネルギーが, タップ利得の乗積と比較していることが分る. 又, このときの二重誤差評価式 (2.4-2) は,

$$\langle \varepsilon_{t_1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^N C_n x\{t - (n-1)\tau\} - g(t) \right]^2 dt + \left\{ \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \right\} \cdot \sum_{n=1}^N C_n^2 \quad (2.4-5)$$

となり, このから, タップ利得の乗積 $\sum_{n=1}^N C_n^2$ を抑えたい設計は, 出力の等価雑音エネルギーを抑えたい状態での希望特性 $g(t)$ と出力 $y(t)$ との二重誤差を最小とする最適設計にならなければならないことが分る.

次に, 入力信号の雑音や量子化誤差のモデルとして, $x(t)$ が,

$$\left. \begin{aligned} x(t) &\rightarrow x(t) + n(t) \\ \langle \int_{-\infty}^{\infty} n(t) dt \rangle &= 0, \quad \langle \int_{-\infty}^{\infty} n(t-i\tau) n(t-j\tau) dt \rangle = 0 \quad (i \neq j) \\ \langle \int_{-\infty}^{\infty} n^2(t) dt \rangle &= \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4-6)$$

と表せるとし, 又, $n(t)$ は入出力信号 $x(t)$, $y(t)$, $g(t)$ 等とは相関がないとするならば, このときの出力 $y_2(t)$ の平均エネルギー及び, 二重誤差評価式 (2.4-2) は, 前と同様にして,

$$\langle \int_{-\infty}^{\infty} y_2^2(t) dt \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt + \sigma^2 \sum_{n=1}^N C_n^2 \quad (2.4-7)$$

$$\langle \varepsilon_{t_1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^N C_n x\{t - (n-1)\tau\} - g(t) \right]^2 dt + \sigma^2 \sum_{n=1}^N C_n^2 \quad (2.4-8)$$

となり, この場合も, 前と全く同様の事柄が云えることになる.

以上は, 信号及び雑音のエネルギーを有限とした場合であり, エネルギー無限で, パワーが有限の場合に対しても, 式 (1.3.2-23) に示した誤差評価式 ε_{t_1} を用いることにより, 同様の議論を行うことが出来る.

又, ここでは, 時間領域の積分二重誤差式 (1.3.2-9) を用いた場合について, 説明したが, 時間領域の積分型二重誤差 ε_{t_1} は, 1.3.2項で述べたように, 周波数領域及び時間領域で代表的な他の二重誤差評

例式(式(1.3.2-1), (1.3.2-13), (1.3.2-15))と, 式(1.3.2-12), (1.3.2-13), (1.3.2-15)に示すように明確な関係が示されており, それらの二乗誤差評価式の場合も, ここで述べた場合に帰着されるが, 同一の結果が得られることになる。

最後に, 上記の①と②の関係について述べておく。入出力レベルがほぼ一定で, しかもタップ利得が大きくなる場合, トランスパーカル型回路の加算器の部分では, 非常に大きな信号同相の引き算が行なわれることになる。ダイナミックレンジだけを考えた場合, 利得の分割を行なうと, タップ利得の大きさを全体に小さくし, その分, 加算器を経たあとに増幅器を置いてあげようと思われすが, 雑音を考慮すると, 全く事情が異なってくる。即ち, 入力にかけた雑音などの場合, 利得を分割しても, 出力の雑音は本質的に不変で, 小さくならない。為, タップ利得増和を抑えた設計手法により得られる雑音量に比べ, 利得を分割しただけでは, 非常に大きな雑音を含む出力が, 出てくることになる。

2.5. 設計方法

本節では、タップ利得の乗積を一定に抑之れトランスバーカル型回路の最小乗近似による設計方法を述べた。次の定理が本章の最も基本的なものである。

《定理 2.1》 $K (> 0)$ 以上とせよ。タップ利得の乗積を

$$\|C\|^2 = \sum_{n=1}^N C_n^2 = K \quad (2.5-1)$$

に抑之れ状態での式 (2.2-1) の乗積誤差を、

$$\varepsilon \triangleq C'AC - 2C'b + \varepsilon_0 \quad (2.2-1)$$

を最小とするトランスバーカル型回路の最適タップ利得 C_{opt}^K 及びそのときの最小近似誤差 ε_{min}^K は、

$$\begin{aligned} f(\lambda) &\triangleq b'(A - \lambda E)^{-2} b \\ &= v'(\mathbb{D} - \lambda E)^{-2} v \\ &= \sum_{i=1}^N v_i^2 / (d_i - \lambda)^2 \\ &= K \end{aligned} \quad (2.5-2)$$

を満足する λ の最小値を λ_1 とするとき、

$$C_{opt}^K = (A - \lambda_1 E)^{-1} b \quad (= C_{\lambda_1}) \quad (2.5-3)$$

$$\varepsilon_{min}^K = \lambda_1 K - b'(A - \lambda_1 E)^{-1} b + \varepsilon_0 \quad (= \varepsilon(\lambda_1)) \quad (2.5-4)$$

が与えられる。但し、 v は式 (2.2-5)、 \mathbb{D} は式 (2.2-3) で、与えられるものとす。

又、 E は単位行列である。

(定理 2.1 終)

(証明) ラグランジュの未定乗積を λ とし、

$$L \triangleq C'AC - 2C'b + \varepsilon_0 - \lambda \|C\|^2 \quad (2.5-5)$$

とすれば、

$$\partial L / \partial C_i = 0 \quad (i=1 \sim N)$$

を解けば、 ε の停留値を与えるタップ利得が求まる。

$$C_{\lambda} \triangleq (A - \lambda E)^{-1} b$$

$$= U(\mathbb{D} - \lambda E)^{-1} U' b \quad (2.5-6)$$

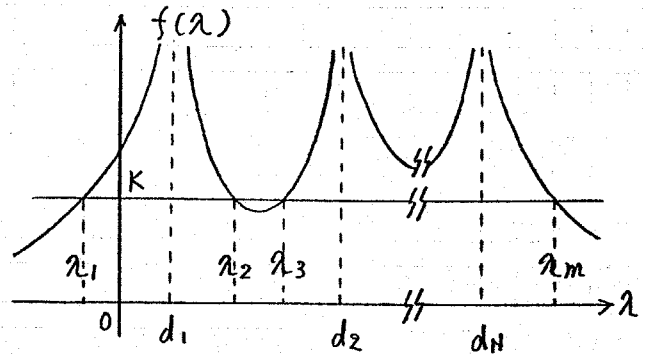
を得る。これをタップ利得の乗積に対する条件式 (2.5-1) に代入すれば、式 (

(2.5-2) が得られる。式(2.5-2)

が定義される $f(\lambda)$ は、

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^N v_i^2 / (d_i - \lambda)^2 \quad (d_i > 0)$$

と書けるから、一般に(図2.1)のよう
な形状をとり、 $f(\lambda) > 0$, $f(\pm\infty)$
 $= 0$ である。方程式 $f(\lambda) = K$ は少
くとも 2, 最高 $2N$ 個の実根を



(図2.1) $f(\lambda)$ のグラフ (式(2.5-2))

持つことが分る。今、その根を λ_1 から、

$$\lambda_1 (< d_1), \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m (> d_N), \quad (2 \leq m \leq 2N) \quad (2.5-7)$$

と置く。このとき、 λ_p ($p=1 \sim m$) を式(2.5-6)のタッフ利得
 λ_p は、明らかに、式(2.5-1)の条件を満足する。又、 λ_p をタッフ利得とし
たときの近似誤差を $\varepsilon(\lambda_p)$ と表すことができ、

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda_p) &= \mathcal{C}'A\mathcal{C} - 2\mathcal{C}'b + \varepsilon_0 \mid \mathcal{C} = \mathcal{C}_{\lambda_p} = U(\mathcal{D} - \lambda_p E)^{-1}U'b \\ &= \lambda_p K - b'(A - \lambda_p E)^{-1} \cdot b + \varepsilon_0 \\ &= \lambda_p K - \sum_{i=1}^N v_i^2 / (d_i - \lambda_p) + \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (2.5-8)$$

となりこの $\varepsilon(\lambda_p)$ に対し、次の関係が成り立つ。

$$\varepsilon(\lambda_1) < \varepsilon(\lambda_p) \quad (p=2 \sim m-1) < \varepsilon(\lambda_m) \quad (2.5-9)$$

実際、 $p=2 \sim m$ とし、 $\varepsilon(\lambda_1)$ と $\varepsilon(\lambda_p)$ の大きさを比較する為、引計算を行うと、
式(2.5-7)を用いて、

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda_p) - \varepsilon(\lambda_1) &= (\lambda_p - \lambda_1) \cdot K - \sum_{i=1}^N v_i^2 \left\{ \frac{1}{d_i - \lambda_p} - \frac{1}{d_i - \lambda_1} \right\} \\ &= (\lambda_p - \lambda_1)^2 \sum_{i=1}^N \frac{v_i^2}{(d_i - \lambda_p)^2 (d_i - \lambda_1)} > 0 \end{aligned}$$

を得る。同様に、 $q=1 \sim m-1$ とし、

$$\varepsilon(\lambda_m) - \varepsilon(\lambda_q) = -(\lambda_m - \lambda_q)^2 \sum_{i=1}^N \frac{v_i^2}{(d_i - \lambda_q)^2 (d_i - \lambda_m)} > 0$$

を得る。式(2.5-9)から、タッフ利得 2 重根を K の抑えた状態の、最小近
似誤差となる最適タッフ利得及び、そのときの最小近似誤差は、 λ_1 及び $\varepsilon(\lambda_1)$ であることが分る。式(2.5-3)及び式(2.5-4)の結果が得られる。(証明終)

(定理2.1) により、実対称行列 A が正値である場合には、式 (2.5-3) の最適タップ利得が一意的に定まるときは、 $\lambda_1 < d_i (i=1 \sim N)$ であるが、 $(A - \lambda_1 E)^{-1} = U(\mathcal{D} - \lambda_1 E)^{-1}U'$ が常に存在することから、明らかである。一方 A が半正値とすると、通常の2乗誤差最小による設計では、式 (2.2-1) の ε の極値と与える連立方程式 $AC = b$ は、不定又は不能となり、MS形自動等化器などにおいて、タップ利得の決定アルゴリズムの暴走が起ると考えられるが、これを避けるように、タップ利得2乗和に一定の制限を設けたこととすると、 $\lambda_1 < 0$ となり^(*)、 $(A - \lambda_1 E) = U(\mathcal{D} - \lambda_1 E)U'$ は正値で、 $(A - \lambda_1 E)^{-1}$ が存在することになり、最適タップ利得が一意的に定まることになる。

又、(定理2.1) によりは、 λ_1 を求めることが、一つの問題となるが、これは、 $\lambda_1 < d_1$ であることと、 $\lambda < d_1$ で、 $f(\lambda)$ が、単調増大且つ下に凸であることから、ニュートン法により、簡単に求められる。殊に、現実には、タップ利得2乗和は、タップ利得の大きさを制限する(場合 $\lambda = 0$ の時)に比べ、小さく抑える場合が、問題となるであろうから、 $\lambda_1 < 0$ であり、ニュートン法の初期値としては、 $\lambda = 0$ を用いてやれば、十分である。

尚、特に行列 A が、単位行列である時は、その定数倍である場合、即ち、直交級対称展開となる場合には、(定理2.1) は、次のように簡単になる。

(定理2.1の系) $K (> 0)$ が与えられ、 $\|C\|^2 = K$ のもとで、式 (2.2-1) の2乗誤差 ε を最小とする最適タップ利得 C_{opt}^K 、及び、そのときの最小近似誤差 ε_{min}^K は、

$$A = \alpha \cdot E \quad (\alpha > 0) \quad (2.5-10)$$

のとき、

$$C_{opt}^K = \sqrt{K} \cdot b / \|b\| \quad (2.5-11)$$

$$\varepsilon_{min}^K = \alpha \cdot K - 2\sqrt{K} \cdot \|b\| + \varepsilon_0 \quad (2.5-12)$$

で与えられる。

(定理2.1の系・終)

(証明) (定理2.1) により、式 (2.5-10) の条件を入れると、

$$f(\lambda) = \|b\|^2 / (\alpha - \lambda)^2 = K$$

(*) $\lambda_1 < d_i (i=1 \sim N)$ であり、 A が半正値であることから、 $d_1 = 0$ より、 $\lambda_1 < 0$ となる。

となり、これを満足、 λ の最小値 λ_1 は、

$$\lambda_1 = \alpha - \|b\|/\sqrt{K}$$

と(2)与之らぬ。これを式(2.5-10)と共に、(定理2.1)の式(2.5-3), (2.5-4)に代入すれば、求める結果が、直ちに得られる。(証明終)

式(2.5-10)の条件が、成り立つ場合、タツノ利得の大きさを制限しない通常の最小二乗近似による設計で得られる最適タツノ利得 C_{opt} は、

$$C_{opt} = \|b\|/\alpha \quad (2.5-13)$$

と与之らぬから、タツノ利得二乗和を抑える場合の最適タツノ利得、式(2.5-11)は、式(2.5-13)の C_{opt} 全体に定数を掛け、タツノ利得二乗和が、 K となるように λ もの λ_1 と等しいことが分る。

2.6. 自動等化器への応用.

本節では, 前節で述べたタップ利得2乗和を抑えた2乗誤差最小による設計方法を, 1.3.3項で紹介したMS形自動等化器に適用することと考える. その場合のタップ利得設定アルゴリズムと等化器の構成方法について述べる.

まず考えられる方法として, 2.5節の(定理2.1)の λ_1 をニュートン法で求める方法をそのまゝ自動等化器に適用することがある. しかし, その場合式(2.5-2)で定義された $f(\alpha)$ の微分 $f'(\alpha)$ が必要となるが, これは, 入力信号の自己相関とか, 出力と希望出力の差と, λ の相互相関とか言った. 通常のMS形自動等化器で用いられる比較的簡単なワードレタの付加によって得られる量から求めることは困難なようで, 別に $f'(\alpha) = \mathbf{b}'(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \mathbf{b}$ を計算する回路を設ける必要があることになる. したがって, 本節では, $f(\alpha)$ の形状から, 類似した $f(\alpha)$ の近似式を用いることにより, 通常のMS形自動等化器を多少変更するだけで構成方法を示すと共に, タップ利得2乗和を抑えた最適タップ利得設定アルゴリズムを示している.

本節で扱うトランスバーサル型回路の基本構成としては, 1.3.3項(図1.3)と考えることにする. 又, 誤差評価式としては, 同様に, 時間領域の等間隔標本値誤差2乗和式(1.3.3-1)の ε を考えることにする. 即ち,

$$\varepsilon \triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{y(iT) - g(iT)\}^2 = \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C} - 2\mathbf{C}'\mathbf{b} + \varepsilon. \quad (1.3.3-1)$$

尚, 2.3節に述べたように, タップ利得が非常に大きくなるのは, 上式中の標本値間隔 T に対して, トランスバーサル型回路の単位回路の遅延時間 τ が, $\tau < T$ なる関係にあるときであるが, その場合にも, 本節の議論は, そのまゝ成り立つと考えられるので, ここでは, $\tau = T$ とした.(図1.3)の構成を基本として, 議論を進めおくことにする. 又, 本節でも 1.3.3項と同じく, タップ利得の番号付けを, 便宜上, $C_0 \sim C_N$ としているので, 注意される.

以下, 1.3.3項で紹介した, 3種類のMS形自動等化器に対し, タップ利得2乗和を抑えた場合のタップ利得設定アルゴリズムと, その構成方法について, 順に述べたいことにする.

(a) 基本形へ適用した場合 (1.3.3項 (a) 参照)

2.5節の議論から,

$$L \triangleq C'AC - 2C'b + \varepsilon_0 - \lambda C'C \quad (2.6-1)$$

$$C_2 \triangleq (A - \lambda E)^{-1} b \quad (2.6-2)$$

$$f(\lambda) \triangleq V'(\Theta - \lambda E)^{-2} V = \|C_2\|^2 \quad (> 0) \quad (2.6-3)$$

λ_1 はさらに加えて, $f(\lambda)$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\lambda} f(x) dx = V'(\Theta - xE)^{-1} V \Big|_{-\infty}^{\lambda} = b' C_2 \quad (2.6-4)$$

が成り立つことに注意しておく。さらに, 以下の議論では, タップ利得の重和 K は, タップ利得を制限しない設計で得られるタップ利得の重和 $K_0 (\triangleq \|C_{opt}\|^2)$ より, 小さく制限する場合を考へておくとする。従って, ラグランジュ乗数 λ は, $\lambda < 0$ である。

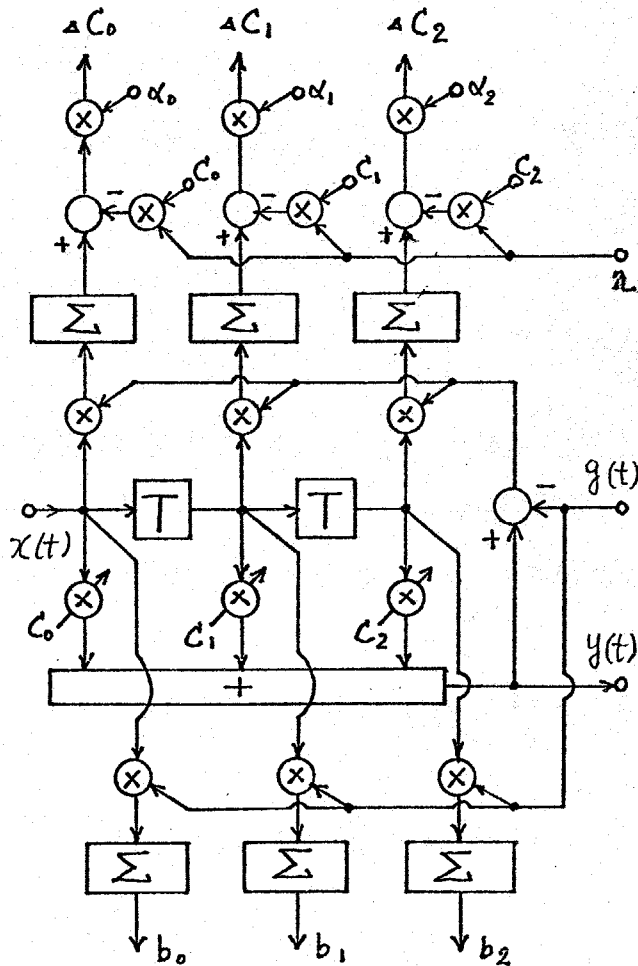
このとき, タップ利得の重和を K に制限した MS 形自動等化器のタップ利得設定アルゴリズムとして, 次のような方法が考へられる。又, そのための等化器の構成は, (図 2.2) に示すようになる。
 ≪タップ利得の重和を抑えた最適タップ利得設定アルゴリズム≫

- ① λ とし, 適当な初期値 C_0 (例として零) を与え, 最急降下法による, C_k に収束させる。即ち,

$$\left. \begin{aligned} C_{k+1} &= C_k - \Delta C_k \\ \Delta C_k &= (1/2) \alpha (2L/2C) C = C_k \\ &= \alpha \{ (A - \lambda^0 E) C_k - b \} \end{aligned} \right\} (2.6-5)$$

ここで, α は調整のステップサイズを決定する量で, 式 (2.6-5) が収束する為には,

$$0 < \alpha < 2 / (d_{max} - \lambda^0) \quad (2.6-6) \quad (\text{図 2.2) 基本形への適用}$$



17. 必要である。これはついでに、後述するが、式(2.6-6)が満たされるとき、

$$C_k (k \rightarrow \infty) \rightarrow C_{\lambda} \quad (2.6-7)$$

② ①の結果として、式(2.6-3), (2.6-4)の右辺が正である。即ち、

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda^0) &= \|C_{\lambda^0}\|^2 > 0 \\ \int_{-\infty}^{\lambda^0} f(\lambda) d\lambda &= b \cdot C_{\lambda^0} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6-8)$$

③ 次に、式(4.3)の $f(\lambda)$ をその形状から類推して、

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^N \mu_i^2 / (d_i - \lambda)^2 \doteq \rho / (\sigma - \lambda)^2 \quad (2.6-9)$$

と近似するとすると、式(2.6-8)から、

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \lambda^0 + b' \cdot C_{\lambda^0} / \|C_{\lambda^0}\|^2 > \lambda^0 \\ \rho &= (b' \cdot C_{\lambda^0})^2 / \|C_{\lambda^0}\|^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.6-10)$$

が得られる。

④ ③の結果を使うと、与えられたタッフ利得2重和 K に対して、

$$K = f(\lambda_1) \doteq \rho / (\sigma - \lambda_1)^2 \quad (2.6-11)$$

と見ると、この λ_1 の近似値 λ_1^0 として、

$$\begin{aligned} \lambda_1^0 &= \sigma - \sqrt{\rho/K} \\ &= \lambda^0 + \frac{b' \cdot C_{\lambda^0}}{\|C_{\lambda^0}\|^2} \left\{ 1 - \frac{\|C_{\lambda^0}\|}{\sqrt{K}} \right\} \end{aligned} \quad (2.6-12)$$

が得られる。但し、式(2.6-12)を正の値に限定して、 $\sigma - \lambda_1^0 > 0$ を仮定して置く。

これは、 $\lambda^0 > \lambda_1^0$ であることが満たされる。従って、例えは、 $\lambda^0 = 0$ としても十分で、タッフ利得を制限しないアルゴリズムから本アルゴリズムに重利換之と云う場合には、自然に満たされることがある。

⑤ λ として、④で得られた λ_1^0 を用いて①の操作を行えば、 $C_{\lambda_1^0}$ ($\|C_{\lambda_1^0}\|^2 \doteq K$) が得られる。

以上で、得られた結果が不十分な場合には、さらに次の過程を付加してやることにより、正確にタッフ利得2重和を K に抑之ることが出来る。

⑥ ①から⑤までで、 $\lambda_1 < \lambda^0$ ($\lambda^0 = 0$ である場合) である時、常に $\lambda_1^0 < \lambda^0$ が成り立つので、①の初期値を一般に λ^k ($k=0, 1, 2, \dots$) とし、これを④で得られ

(1b) 信号経路にマトリクス回路を構成し適用した場合 (1.3.3項(1b)参照)
式(2.6-1), (2.6-2), (2.6-3)を,

$$\Delta \cong C' P A P' C - 2 C' P b + \epsilon_0 - \lambda \|C\|^2 \quad (2.6-18)$$

$P A_0 P' = E$, A_0 は、行列 A の推定行列. ($A \approx A_0$)

$$C \alpha \cong (P A P' - \lambda E)^{-1} P \cdot b \quad (2.6-19)$$

$$f(\lambda) \cong (P b)' (P A P' - \lambda E)^{-2} (P b) \quad (2.6-20)$$

を置き換えると, 2.5節
の理論及び, 本節 (a)
の理論は, その対応する
もの。以下, このときの等化
器の構成は, (図2.4) のよ
うになる。

(a) の議論のうち, ①
の式(2.6-5)に相当する
ものは,

$$\Delta C_k = \beta \{ (P A P' - \lambda E) C_k - P b \} \quad (2.6-21)$$

となり,

$$0 < \beta < 2 / (d_{p_{max}} - \lambda) \quad (2.6-22)$$

のとき, 収束が保証される。

但し, $d_{p_{max}}$ は, 行列 $P A P'$

の最大固有値である。

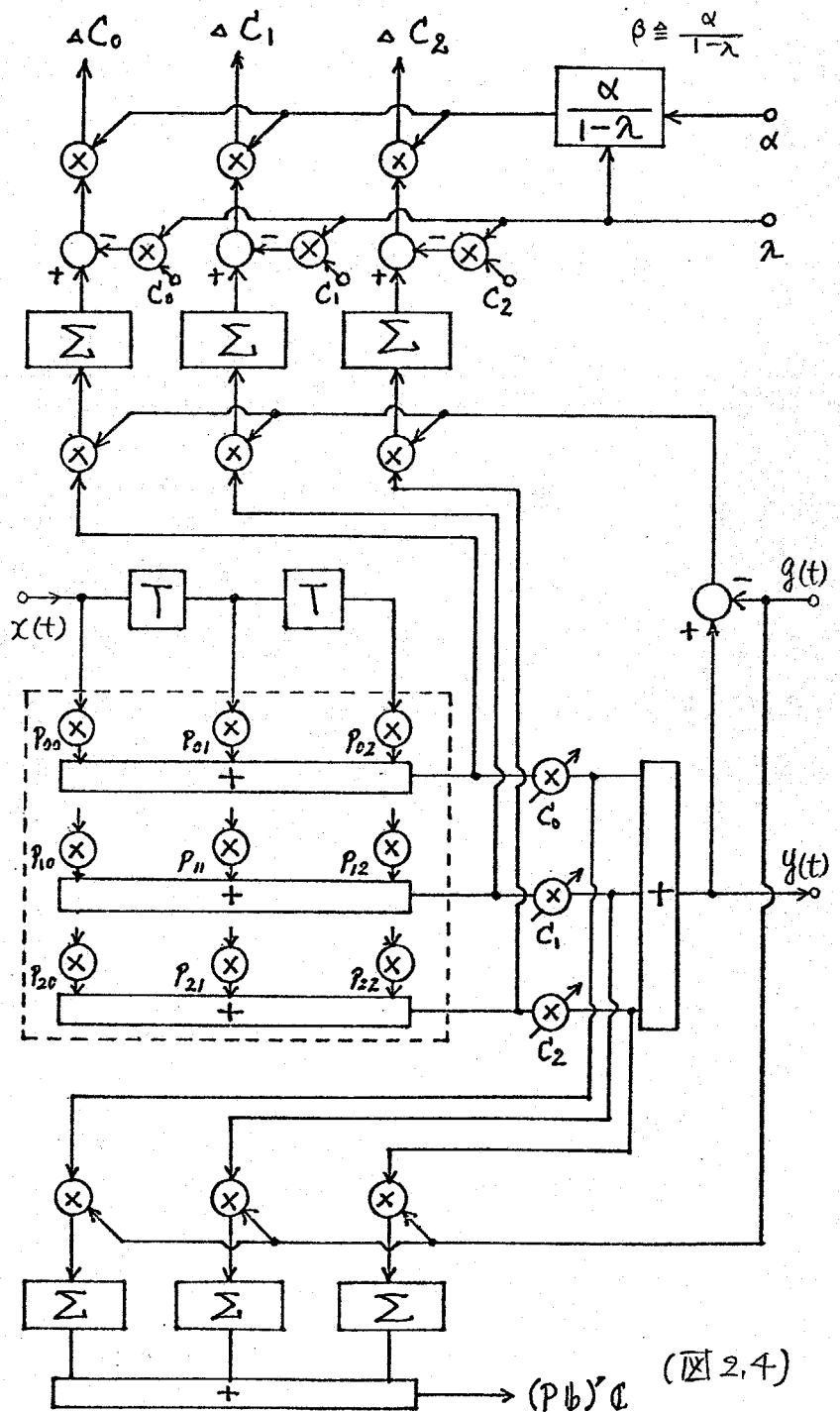
②

以下のマトリクスは, 全

く同様であるが, 特に,

$$A = A_0 \quad (2.6-23)$$

となる場合には,



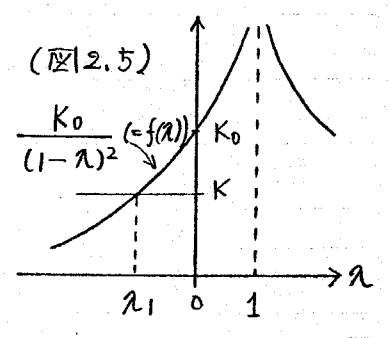
(図2.4)

$$\beta = 1/(1-\lambda) \quad (2.6-24)$$

と12. ①の収束は1回で達成される。又、この場合
 Kは、特に与えられたKに対して、ラグランジュ乗数 λ_1
 が、

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{K_0/K} \quad (2.6-25)$$

と12. 簡単に得られる。従って、 $\lambda=0$ と12. ①の操作
 が一回、これより K_0 が得られ、式(2.6-25)から λ_1
 が得られる。再び①の操作を一回行うと2"。タップ利得2乗和をKと12. 等化器
 が得られることになる。これは、 $PA_0P^T = E$ が成り立つ為で、(定理2.1の条)の場合
 に相当している。



(C) タップ利得制御部をマトリクス回路をもつ構成へ適用した場合
 (1.3.3項 (C) 参照)

この場合も、(A) と本質的に同じで、異なるのは、①の操作中式(2.6-5)
 を、

$$\Delta C_k = \beta (A_0 - \lambda E)^{-1} \{ (A - \lambda E) C_k - b \} \quad (2.6-26)$$

A_0 : 行列Aの推定行列. ($A_0 \approx A$)

と書き直してある。従って、等化器の構成は(図2.6) (次頁) のようにする
 べし(但し、 $\beta=1$ としている)。図中、U及び $d_0 \sim d_n$ は、 A_0 に対する対角化
 直交行列及び、 A_0 の固有値 σ_i あり、Aに対するものはない。又、このとき、操作
 ①は、

$$0 < \beta < 2/\sigma_{max} \quad (2.6-27)$$

のとき、収束が保証される。但し、 $\lambda < 0$ とし、 σ_{max} は

$$\left. \begin{aligned} (A_0 - \lambda E)^{-1} (A - \lambda E) &= U_1 \mathcal{D}_1 U_1^T \\ \mathcal{D}_1 &= \text{diag}(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n), \sigma_i > 0 \\ \sigma_{max} &= \max(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \end{aligned} \right\} \quad (2.6-28)$$

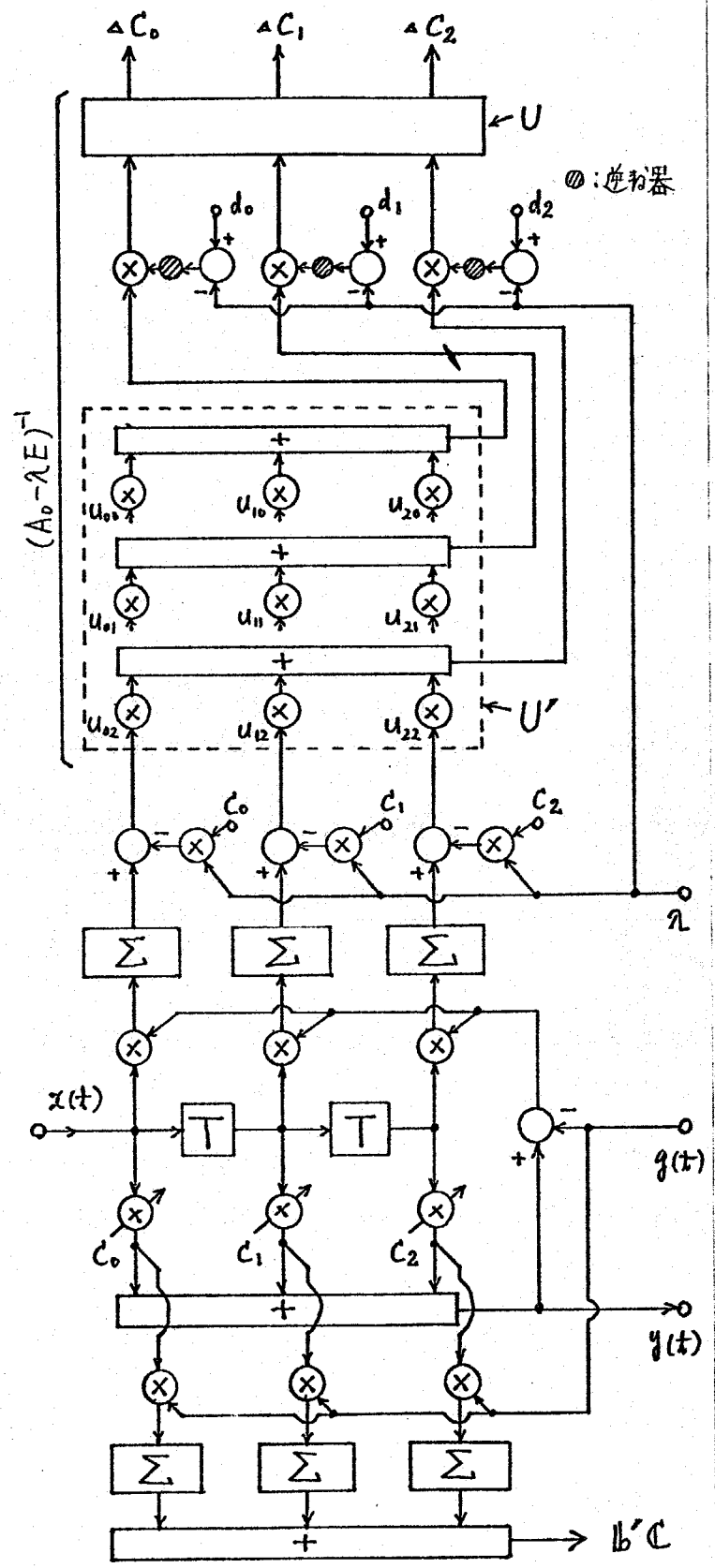
と与えられるものである。(文献(12)参照)

特に、 $A=A_0$ の場合には、 $\beta=1$ とし、①の操作は一回で収束する。②以

下に示すは、(a)の場合と全く同一である。

尚、(b)、(c)の場合には、マトリクス回路をとりおき、タップ利得の乗和を抑えるもマトリクス回路の係数器の値が大きくなるほうと余り。意味のない議論となりかねない。その点、今後の検討を要する点があり、その意味で、(b)、(c)に示すは、余り詳しく論ずることをさけ、要旨のみを記した。

本節に示した自動等化アルゴリズムは、実用には、まず、通常の自動等化器にタップ利得の乗和の大きさを監視する機構を設け、タップ利得の乗和がある値を越えたら、本節に示したアルゴリズムに切り換えるようにして使うことになると思われ。その点、本節に示した構成方法は、いつか、 $\alpha=0$ とすれば通常のタップ利得の大きさ制限しないMS形自動等化器として作動し、便利があると考えられる。



(図2.6)

2.7. 最小二乗誤差の評価

本節では、タップ利得2乗和を K に抑えよときの最小近似誤差 ε_{\min}^K が K の関数であることを強調し、 $\varepsilon(K)$ と表すことにし、 $\varepsilon(K)$ を簡単に評価する近似式を導く。即ち、 $\varepsilon(K)$ をタップ利得を制限しない通常の二乗誤差最小による設計のとき得られるタップ利得2乗和 $K_0 (= f(0) = \|C_{opt}\|^2)$ のまわりで、テイラー展開し、それを基礎にした簡単な評価式を得たい。 $\varepsilon(K)$ の大きさが簡単に評価出来るは、タップ利得2乗和 K の大きさと、そのときの最小近似誤差 $\varepsilon(K)$ の大きさの兼ね合いを考へて設計の際に役立つと考へられる。

次に、その結果を定理として述べよう。

〔定理2.2〕 $\varepsilon(K)$ は、 $K=K_0$ の近傍で、

$$\begin{aligned} \varepsilon(K) = \varepsilon_0 - \delta_0 + \frac{(K-K_0)^2}{4 \sum u_i^2/d_i^3} - \frac{\sum u_i^2/d_i^4}{8 \{ \sum u_i^2/d_i^3 \}^3} (K-K_0)^3 \\ - \frac{\{ 4 \sum u_i^2/d_i^5 \cdot \sum u_i^2/d_i^3 - 9 (\sum u_i^2/d_i^4)^2 \}}{64 \{ \sum u_i^2/d_i^3 \}^5} (K-K_0)^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.7-1)$$

と展開される。但し、

$$\delta_0 \equiv \sum u_i^2/d_i \quad (2.7-2)$$

であり、総和は、 $i=1 \sim N$ (タップ数) とする。さらに、これから、次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 - \delta_0 \{ 1 - \theta^2/4\mu - \theta^3/8\mu - (9-4\mu^3)\theta^4/64\mu - \dots \} \\ \leq \varepsilon(K) \leq \varepsilon_0 - \delta_0 \{ 1 - \theta^2/4\mu - \mu\theta^3/8 - 5\mu^2\theta^4/64 - \dots \} \end{aligned} \quad (2.7-3)$$

但し、 $0 < K \leq K_0$ 。

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 - \delta_0 \{ 1 - \theta^2/4\mu - \mu\theta^3/8 - (9-4\mu^3)\theta^4/64\mu - \dots \} \\ \leq \varepsilon(K) \leq \varepsilon_0 - \delta_0 \{ 1 - \theta^2/4 - \theta^3/8\mu - 5\mu^2\theta^4/64 - \dots \} \end{aligned} \quad (2.7-4)$$

但し、 $K_0 \leq K$ 。

ここで、 $\mu \equiv d_N/d_1$ 、 $\theta \equiv (K-K_0)/K_0$ とする。 (定理2.2. 系)

(証明) 式(2.7-1)はテイラー展開から、直ちに得られる。又、式(2.7-3)の

か、式(2.7-4)は、式(2.7-1)に於いて、 $K_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 / d_i^2$ に注意し、コーシーの不等式を用い、さらに、 $0 < d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_N$ を使うと容易に導かれる。
 又、式(2.7-3)、(2.7-4)で、等号が成り立つのは、 $d_1 = d_2 = \dots = d_N$ のときである。
 (証明終)

式(2.7-3)、(2.7-4)が、簡単な形で使い易いと思われる。尚、実際問題として、 $K \leq K_0$ の場合の式(2.7-3)が重要であり、そのうちで、誤差を安全側に(大目)に見込んで右側の不等式がより重要であろう。又、式(2.7-3)(2.7-4)を使うに当っては、通常の2乗誤差最小による設計で、 $\epsilon_0, K_0, \hat{\epsilon}(K_0) = \epsilon_{min}$ が求められ、 δ_0 は、 $\delta_0 = \epsilon_0 - \hat{\epsilon}(K_0) = \epsilon_0 - \epsilon_{min}$ と記す。計算結果として、他には、固有値の最大最小比 μ を求めなければならない。
 特に、次節に於ける行列の場合のように、固有値の存在範囲

$$0 < d_m \leq d_i \ (i=1 \sim N) \leq d_M \tag{2.7-5}$$

が、簡単に知られるので、

$$\mu' \equiv d_M / d_m \geq \mu \tag{2.7-6}$$

と記す。式(2.7-3)、(2.7-4)で、 μ の代わりに μ' を用いても、不等式は、そのままで成り立ち、より簡単に $\hat{\epsilon}(K)$ の値を評価出来ることになる。

さらに、次節で用いる、 $f(\lambda)$ の近似式に於ける式(2.6-8)(2.6-9)、(2.6-10)を $\lambda^0 = 0$ と記す。用いることとする。

$$\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i^2}{d_i^m} \cong \frac{\|C_{opt}\|^{m-1}}{(|b' C_{opt}|)^{m-2}} \quad (m=1, 2, 3, \dots) \tag{2.7-7}$$

但し、 $m=1, 2$ の場合は、上式は、「 \cong 」ではなく、「 $=$ 」で成り立つ。

即ち得られ、これを式(2.7-1)に簡単にする事が考えられる。最も簡単な形は、

$$\hat{\epsilon}(K) \cong \epsilon_0 - (|b' C_{opt}|) + \frac{|b' C_{opt}|}{4} \left(1 - \frac{K}{K_0}\right)^2 \dots \tag{2.7-8}$$

が得られる。ここで、式(2.7-7)及び式(2.7-8)中に現われる値は、全て、 λ^0 の利得を制限して通常の設計の結果と記す。自然に得られるものばかりであることに注意しておく。尚、(定理2.2)及び式(2.7-8)を用いて、後述の節を示す。

2.8 例題

本節では、通常、最小二乗近似による設計と対比、設計の結果得らぬ39
 7°利得加、相当大きく増やす実例、並加、その例に対し、2.5節で述べ
 たタップ利得2乗和を抑えた設計方法を適用した例を、(例1-1)及び(例1-2)
 2°示す。又、(例1-3)では、2.7節で述べた、タップ利得2乗和を抑えたとき
 の最小近似誤差を評価する近似式を用いた例題を示す。

(例1-1)

(図2.7)に示す、トランスインバータ型回路で、
 単位回路と12、理想遅延線を用いた場
 合を考へると、この回路の伝達関数
 は、

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^N C_n e^{-j(n-1)\omega T} \quad (2.7-1)$$

又、入力は、

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| < \pi) \\ 0 & (|\omega| > \pi) \end{cases} \quad (2.7-2)$$

希望出力は、

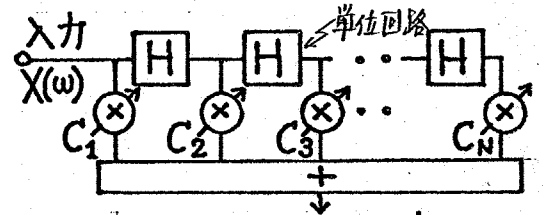
$$G(\omega) = \begin{cases} 1 + 0.1\omega^2 & (|\omega| < \pi) \\ 0 & (|\omega| > \pi) \end{cases} \quad (2.7-3)$$

2°ありとする。さらに、誤差評価式を

$$\varepsilon \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(\omega) - H(\omega) \cdot X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.7-4)$$

2°定義しておく。

2°、この2°、タップ数 $N=5$ とし、単位回路の遅延時間 T を $1 \sim 1/5$ までと
 2°し、通常、タップ利得の大きさを制限しない、最小二乗近似による設計で、
 式(2.7-4)の ε を最小化して得らぬ最小近似誤差 ε_{min} 及び、そのときのタッ
 2°利得2乗和 K を <表2.4>に示す。この例では、 T を1から段々小さくし
 2°くと、それに伴って、最小二乗誤差 ε_{min} も、小さくなり、同じタップ数2°



$$\text{出力: } Y(\omega) = \sum_{k=1}^N C_k H^k(\omega) X(\omega)$$

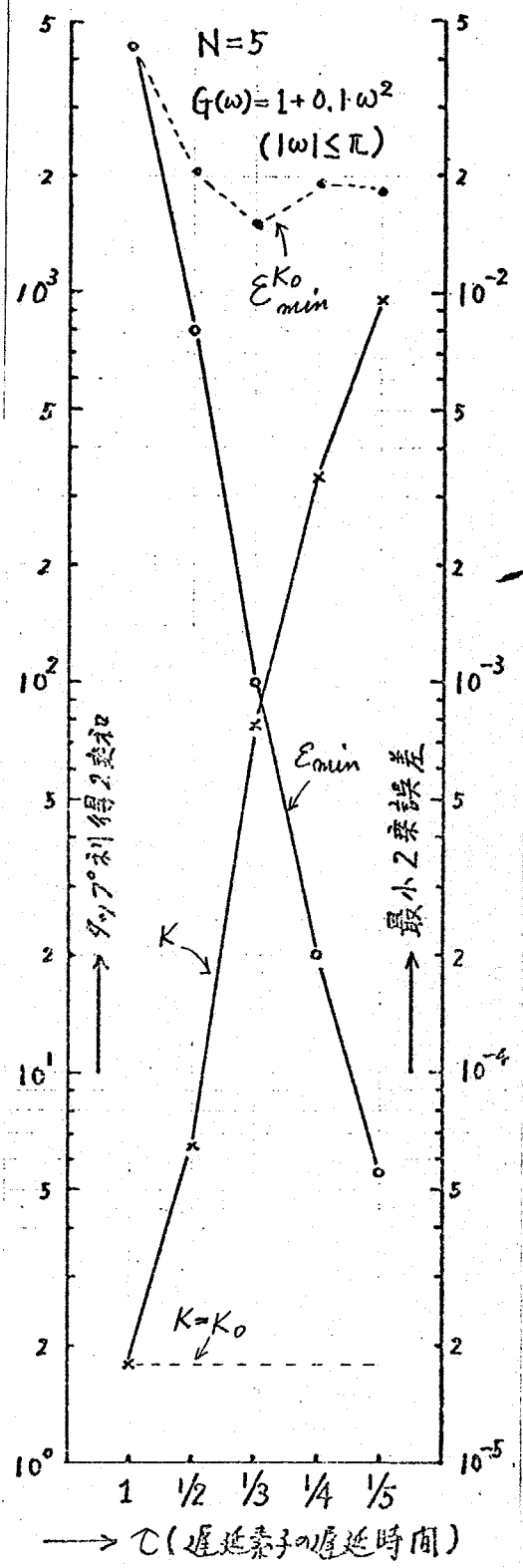
(図2.7) トランスインバータ型回路

表 2.4

τ	タップ利得2乗和(K)	ϵ_{min}	$\epsilon_{min}^{K_0}$
$\tau=1$	1.8094 ($\triangleq K_0$)	0.43436×10^{-1}	0.43436×10^{-1}
$1/2$	6.4846	0.80103×10^{-2}	0.21312×10^{-1}
$1/3$	7.8029×10^1	0.99909×10^{-3}	0.15480×10^{-1}
$1/4$	3.3908×10^2	0.20027×10^{-3}	0.19529×10^{-1}
$1/5$	9.5626×10^2	0.55436×10^{-4}	0.18898×10^{-1}

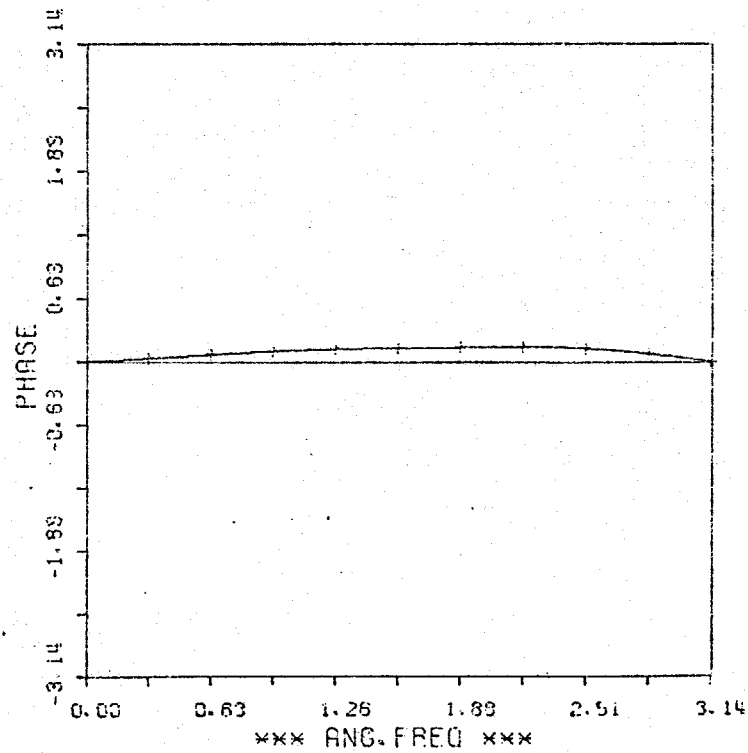
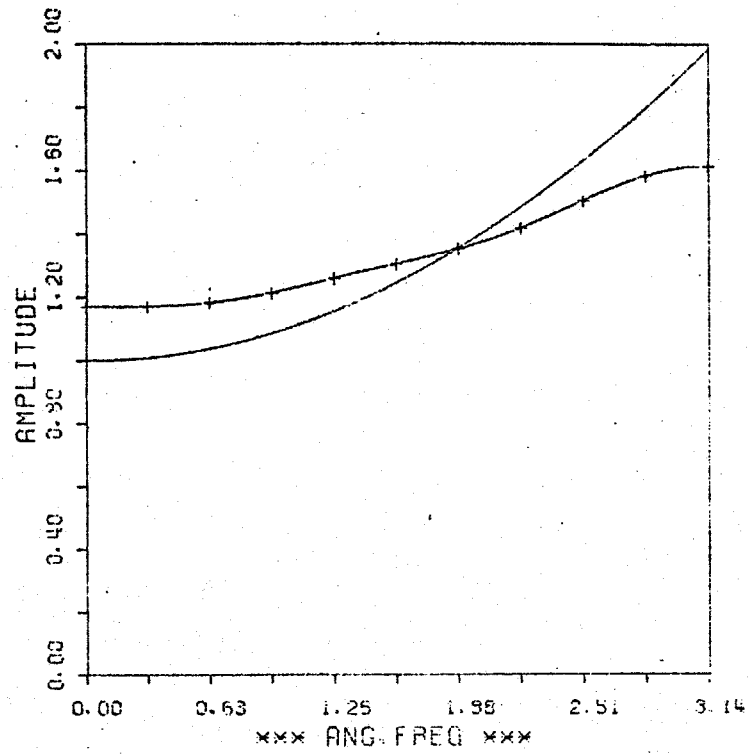
より良い近似が、成されることになり、同時に
 タップ利得2乗和も、段々大きくなり、 $\tau=1$ の
 ときと、 $\tau=1/5$ のときでは、およそ500倍の
 差がある (ϵ_{min} に對しては、約1000倍違
 う)。又、同じく、表2.4に、2.5節で示した
 タップ利得2乗和を抑えた設計方法による
 結果を示している。即ち、ここでは、 $\tau=1$ の時
 通常的最小2乗近似より得られるタップ利
 得2乗和 1.8094 ($\triangleq K_0$) に、抑えた場合
 の最小2乗誤差 $\epsilon_{min}^{K_0}$ を $\tau=1/2 \sim 1/5$ につ
 いて示している。この値では、タップ利得2
 乗和を K_0 に抑えらる、 $\tau=1/2 \sim 1/5$ の単位
 回路を用いた場合の方が、 $\tau=1$ の単位回路
 を用いた場合より、小さな最小2乗誤差が得
 られることが分る。尚、表2.4の結果を更
 んだり、(図2.8)に書き直してある。

さらに、(図2.9) (a) ~ (c) では、 $\tau=1, 1/2,$
 $1/3$ の場合について、最小2乗近似から得ら
 れる特性を、タップ利得を制限しない場合



(図2.8) 最小2乗誤差とタップ利得2乗和

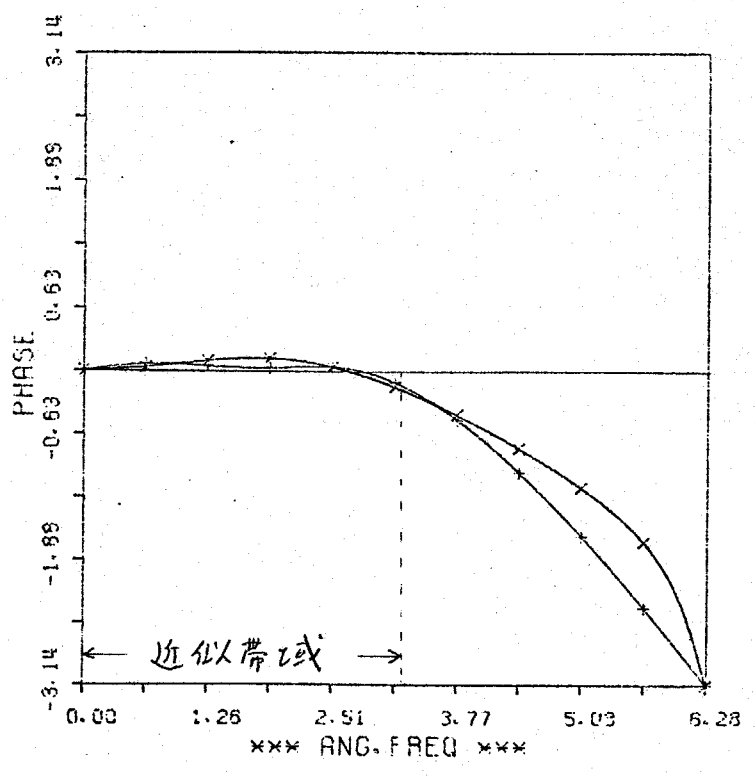
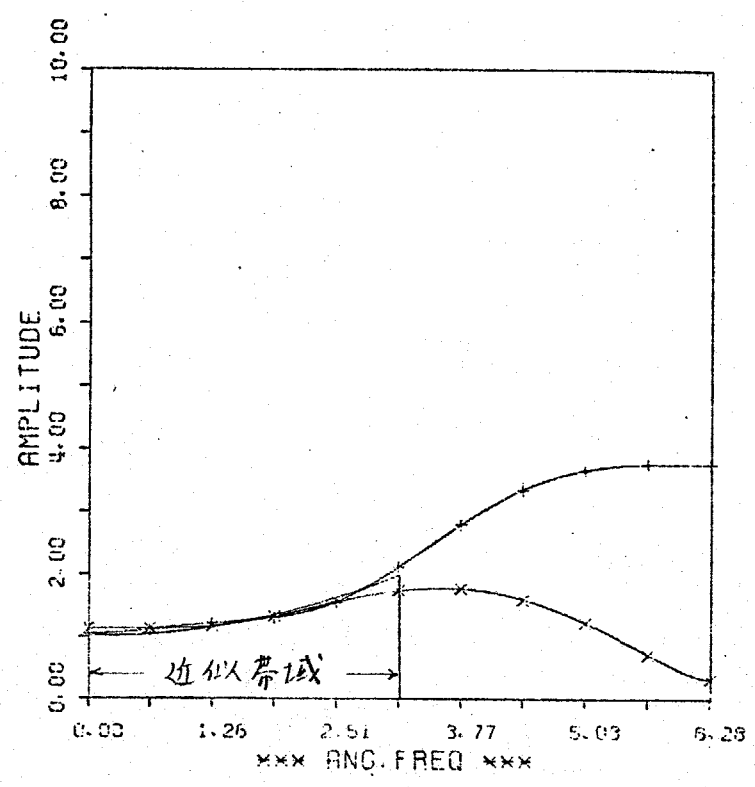
(例1-1)



(图2.9)(a) $C=1.0$

— : $G(\omega)$ 希望特性
 —+— : $F_{opt}(\omega)$ タイプ利得2乗和正制限係数
 最小2乗近似特性

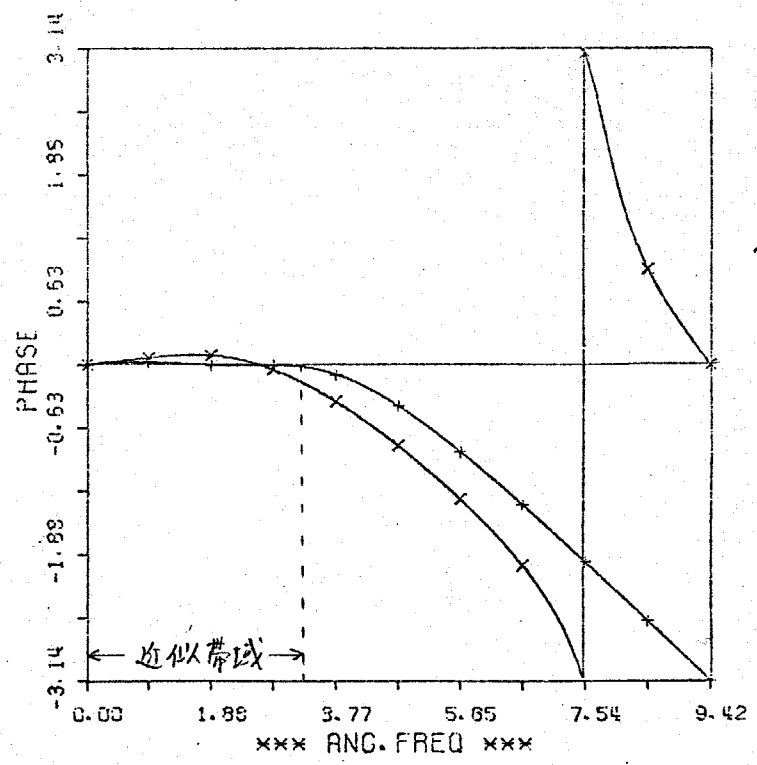
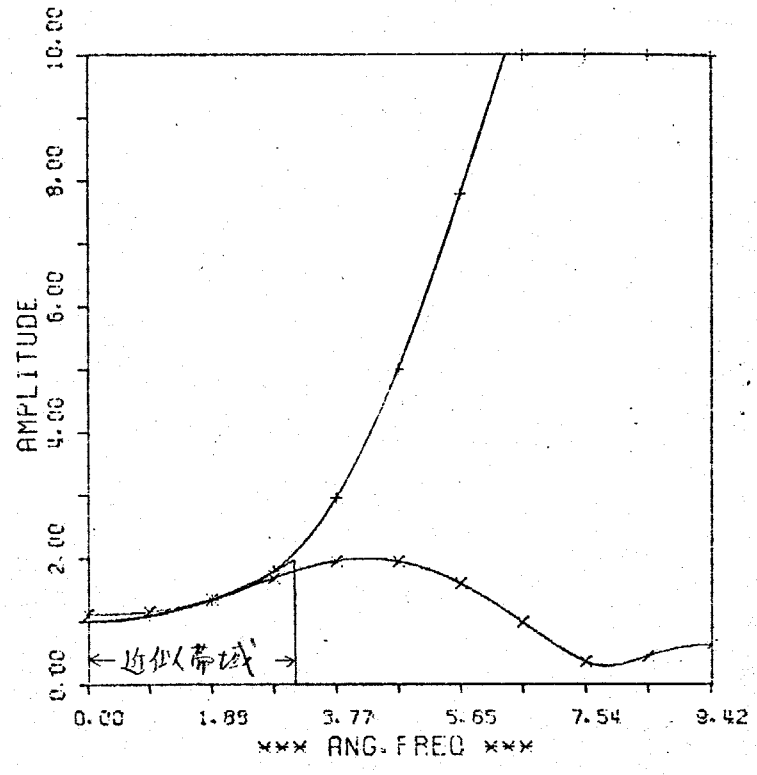
(例1-1)



(例2.9)(b) $\tau = 1/2$

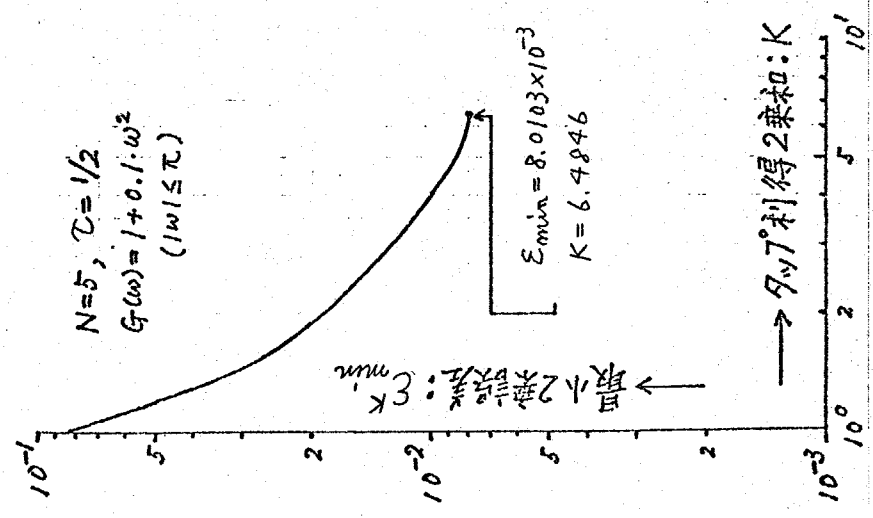
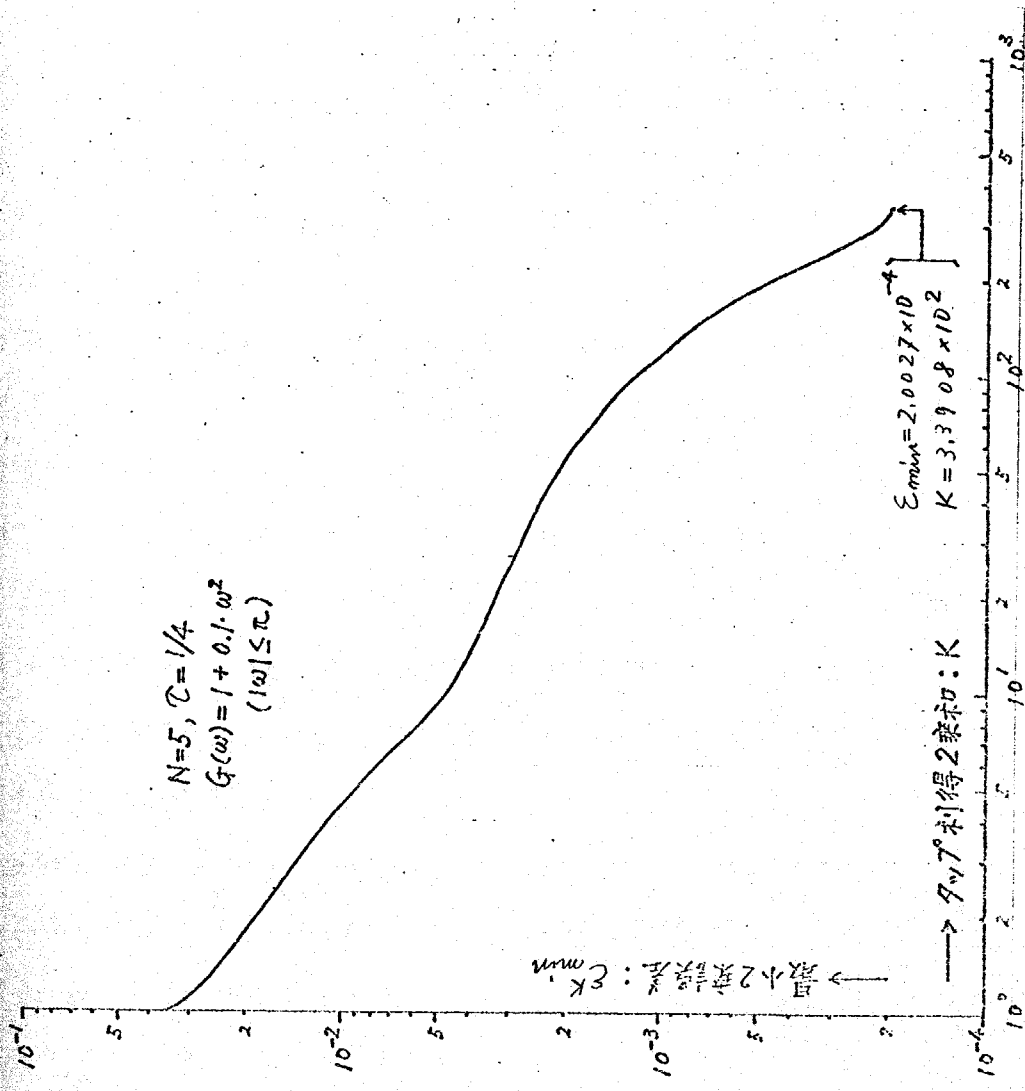
- : $G(\omega)$ 希望特性
- +- : $F_{opt}(\omega)$ τ の利得2乗制限による最小2乗近似特性
- x- : $F_{opt}^{K_0}(\omega)$ τ の利得2乗制限と K_0 の抑圧による最小2乗近似特性

(31-1)



(图2.9)(c) $\zeta = 1/3$

- : $G(\omega)$ 希望特性
- +- : $F_{opt}(\omega)$ $\pm 7^\circ$ 利得2重制限による最小2重近似特性
- x- : $F_{opt}^{K_0}(\omega)$ $\pm 7^\circ$ 利得2重制限と K_0 設定による最小2重近似特性



(図2.10) タップ利得2乗和 K とそのときの最小2乗誤差

($F_{opt}(\omega)$) と, タップ利得2乗和を K_0 に抑えた場合 ($F_{opt}^{K_0}(\omega)$) の両方について示している。これから分かるように, $\tau=1/2$ とか $1/3$ などは, タップ利得を制限しない場合, 近似帯域内では, 希望特性 $G(\omega)$ を非常によく近似しているが, その外では, 非常に大きな利得をもつ特性になっている。これに対し, タップ利得2乗和を K_0 に抑えた最小2乗近似特性では, 近似帯域外でも, 大きな利得をもつようなことはない。これから, タップ利得を制限しない場合, 近似帯域外の雑音を大きく増幅してしまうのに対し, タップ利得2乗和を抑えた設計にすれば, そのようなことがないということも理解出来る。

(図2.10)には, $\tau=1/2$ 及び $1/4$ の場合について, タップ利得2乗和 K と, そのときの最小2乗誤差の関係を示している。(対頁)

尚, ここまで述べたのは, 2.3節で示した タップ利得の大きさを $X^*X(i)$ (2.3頁) の例証である。(例1-終)

(例1-2)

(図2.7)に示したトランスミッタ型回路で, タップ数 $N=9$ とし, λ とし。

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| < 1) \\ 0 & (|\omega| > 1) \end{cases} \quad (2.8-5)$$

が, λ とするときは, 希望出力が,

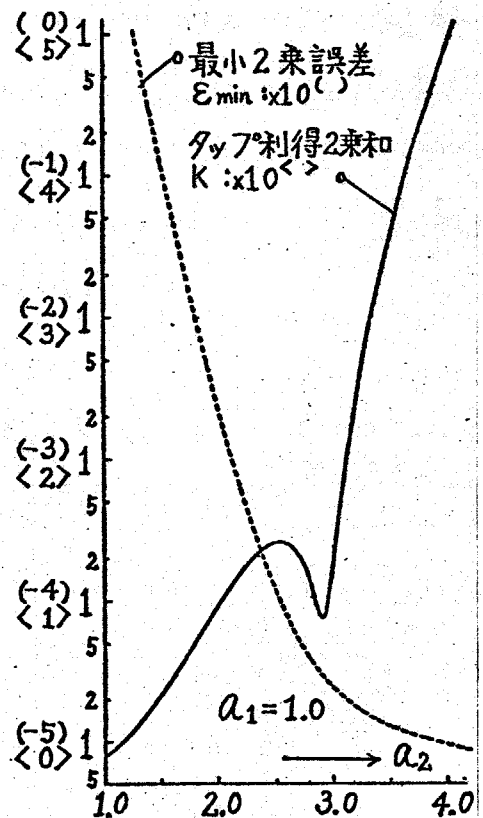
$$G(\omega) = \exp(-j2\omega) \quad (|\omega| < 1) \quad (2.8-6)$$

であるとする。このとき, 周波数領域成分系総和型2乗誤差

$$\varepsilon = \sum_{i=-64}^{64} \left| G\left(\frac{i}{64}\right) - \sum_{k=1}^9 C_k \cdot H^k\left(\frac{i}{64}\right) \cdot X\left(\frac{i}{64}\right) \right|^2 \quad (2.8-7)$$

を最小化する問題を考之す。但し, 単位回路 $H(\omega)$ とし, 次の3種類を考之ておく。

- 理想遅延系 $\exp(-j\omega\tau)$



(図2.11) 2次全域通過回路を用いたときの, E_{min} とタップ利得2乗和

○ 1次全域通過回路.

$$(a-j\omega)/(a+j\omega) \quad (a>0)$$

○ 2次全域通過回路

$$\{a_2 - a_1 j\omega + (j\omega)^2\} / \{a_2 + a_1 j\omega + (j\omega)^2\} \quad (a_1, a_2 > 0)$$

この2つを、単位回路と12. 2次全域通過回路を用いた場合を考へ、通常最小二乗近似による設計で、タップ利得2乗和が大きくなることを示す。(図2.11)(57頁)に、2次全域通過回路のパラメータ a_1, a_2 を $a_1=1$ とし、 a_2 を変えたときの、最小二乗誤差 E_{min} と、そのときのタップ利得2乗和の関係を示している。これから分かるように、近似を良くしようとすれば、 a_2 をある程度大きくしなくては必要があるが、すると、タップ利得2乗和が、非常に大きくなることになる。2次全域通過回路の遅延特性を描いてみれば、分子と分母が、この場合にも、(例-1)の場合と同様のことが起る(図2.11)に示す。タップ利得2乗和が大きくなると、最小近似誤差の小さいところ、即ち、 a_2 の比較的大きいところでは、近似帯域内 ($|\omega| < 1$) において、2次全域通過回路の遅延特性は、平坦であるか、かなり小さいものとなり、ほぼこの小さい理想遅延線とみられるようになるから、2.3節に示した(4)(23頁)の構成から、タップ利得2乗和が、大きくなることを示される。

次に、異なる単位回路を用いた例として、II型回路と比較する2つの例を<表2.5>①、②に示す。いずれも、タップ利得2乗和を制限しない状態では、それぞれ、同程度の最小二乗誤差 E_{min} を用いているが、2次全域通過回路を用いたものは、タップ利得2乗和が、他に比べ、相当大きく、それは、(2.11)と考へられる。表

<表2.5>

タップ利得2乗和: K		制限がないとき	最小のものに合せたとき	
単位回路の種類				
①	理想遅延線	E_{min}	1.1134×10^{-5}	—
	$C=1.7$	K	7.6754×10^{-1}	—
	2次全域通過回路	E_{min}	1.0528×10^{-5}	4.6133×10^{-4}
	$a_1=1.0, a_2=3.8$	K	2.8256×10^4	7.6754×10^{-1}
②	理想遅延線	E_{min}	5.2005×10^{-5}	1.6649×10^{-3}
	$C=2.0$	K	9.0576×10^{-1}	8.1688×10^{-1}
	1次全域通過回路	E_{min}	6.1780×10^{-5}	—
	$a=0.6$	K	8.1688×10^{-1}	—
	2次全域通過回路	E_{min}	5.3955×10^{-5}	1.0901×10^{-3}
	$a_1=0.9, a_2=2.8$	K	4.4011×10^4	8.1688×10^{-1}

cf. 無等化時 (i.e. $C_1=1, C_2=C_3=0$): $E=1.5104 \times 10^{-2}$

の最右種に、2.5節に示した設計法により、タップ利得2乗和を、①、②のうちの内の、最小のものに抑えた場合の最小2乗誤差を示しているが、これは、単位回路の要するトランスミナル型回路の優劣を比較する一つの定量的な値と見ることが可能と思われる。又、〈表2.5〉②で、理想遅延線を用いた場合には、タップ利得2乗和を、 9.0576×10^{-1} から 8.1688×10^{-1} に、わずか小さく抑えたにもかかわらず、最小近似誤差は、 5.2005×10^{-5} から 1.6649×10^{-3} へとかなり劣化した。一方、2次全域通過回路を用いた場合には、タップ利得2乗和を、 4.4011×10^{-1} から 8.1688×10^{-1} にかなり大幅に小さく制限しているにもかかわらず、最小近似誤差は、 5.3955×10^{-5} から 1.0901×10^{-3} へと理想遅延線を用いたトランスミナル型回路場合よりわずかに劣化するが、劣化が少く、この点も、単位回路としての要する特徴が見られる。即ち、この例で見られる、理想遅延線を用いたトランスミナル型回路は、タップ利得の制限に対する感度が大きく、2次全域通過回路を用いたものは、小いと云うことが出来る。(例2-終)

(例1-3) 最小近似誤差の評価 (2.7節、式(2.7-3), (2.7-4), (2.7-8)の使用例)

(図2.7) に示す形の非巡回形テリツタフィルタ (i.e. $H(\omega) = \exp(-j\omega T)$)

を考へ、タップ数 $N=5$ とする。
 入力は、 $|\omega| \leq 1$ に帯域制限されたものとし、

$$X(\omega) = 1 - 0.25\omega^2 \quad (2.8-8)$$

とし、希望出力は、

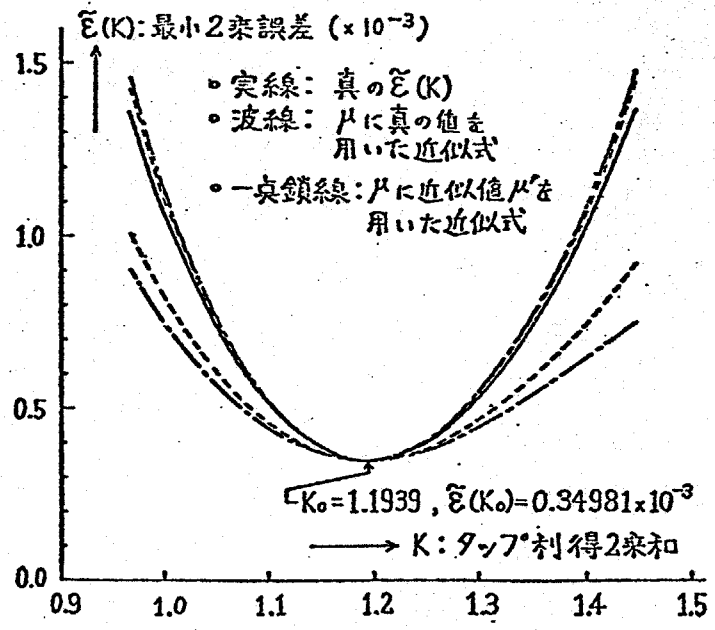
$$G(\omega) = 1 \quad (|\omega| \leq 1) \quad (2.8-9)$$

とありとする。又、誤差評価式を

$$\varepsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[g(nT) - \sum_{l=1}^5 c_l x\{(n-l+1)T\} \right]^2$$

$$= C' A C - 2 C' B + \varepsilon_0$$

(2.8-10)



(図2.12) 2.7節式(2.7-3), (2.7-4)の使用例

とする。但し、 T はナイスト間隔で $T=\pi$, $x(t), g(t)$ は $X(\omega)$ 及び $G(\omega)$ のフーリエ変換であるとする。

まず、式(2.7-3), (2.7-4)の使用例について述べる。式(2.8-10)の行列 A の固有値 $d_i (i=1\sim 5)$ は、

$$\inf |X(\omega)/T|^2 \leq d_i (i=1\sim 5) \leq \sup |X(\omega)/T|^2 \quad (2.8-11)$$

の範囲にあることが、式(2.7-6)の μ' (固有値の最大最小比 μ の近似値) とし、簡単に、

$$\mu' = 16/9 = 1.7778$$

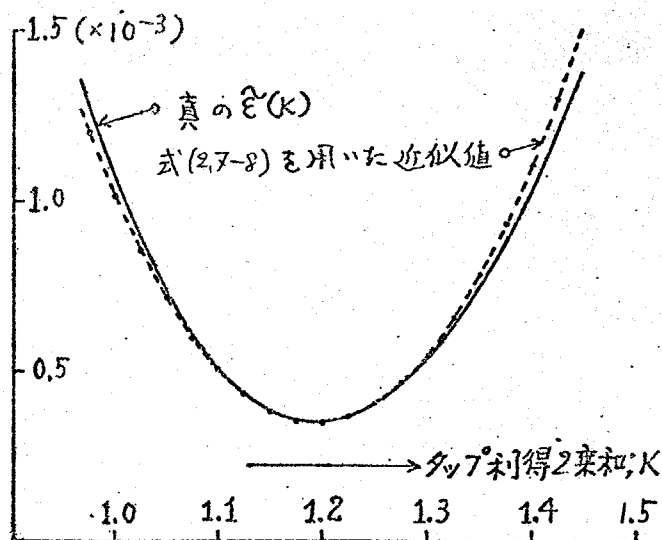
が得られる。尚、真の固有値最大最小比 μ は、

$$\mu = 1.4981$$

である。以上により、タップ利得乗和 K のときの最小二乗誤差 $\epsilon(K) (= \epsilon_{min}^K)$ の K の近傍における変化の様子を、式(2.7-3), (2.7-4)を用いて、図2.12に示す。特に、より重要と思われる誤差を大きく評価したものは、真の $\epsilon(K)$ と非常によく近似しており、無等化時 (ie. $C_1=1, C_2=C_5=0$) の場合の ϵ が、 1.26×10^{-3} であることから、その以下の $\epsilon(K)$ を与える K の範囲 ($K \approx 1.0 \sim 1.4$) では、 μ' を用いたものも十分使用可能と思われる。

次に、式(2.7-8)を用いた場合を(図2.13)に示しておく。式(2.7-8)の計算は、2.7節でも述べた通り、タップ利得を制限しない通常の最小二乗近似の設計において、自然に得られる値だけを用いて、計算可能で、見やすく、しかも、(図2.13)に見られるように、近似度も優れている。

(例-3. 終)



(図2.13) 2.7節 式(2.7-8)の使用例

2.9 あとがき.

本章では、タップ利得2乗和を抑えらぬトランスバーサル型回路の最小2乗近似による設計方法を述べた。即ち、2.3節で、通常の最小2乗近似による設計の結果として、得らぬタップ利得が大きくなる場合について、2.4節で、タップ利得2乗和のもつ物理的意味について述べ、タップ利得2乗和を抑えた設計方法が、雑音を抑えた状態でのトランスバーサル型回路の出力と希望出力の2乗誤差を最小とする最適設計になっていることを示した。そして、2.5節で、本章の基本定理として、タップ利得2乗和を一定値に抑えらぬトランスバーサル型回路の最小2乗近似による設計方法を述べた。2.6節では、2.5節で述べた設計方法をMS形自動等化器に適用した場合の最適タップ利得設定アルゴリズムと、等化器の構成方法を述べた。さらに2.7節では、タップ利得2乗和を抑えた場合の最小近似誤差を知る目的で、テイラー展開を用いた簡単な近似式を導いた。最後に2.8節では、通常の最小2乗近似による設計で得らぬタップ利得が大きくなる場合及び、2.5節で述べたタップ利得2乗和を抑えた設計方法による設計例、そして、2.7節で導いたタップ利得2乗和を抑えたときの最小2乗誤差を与える近似式を用いた例などを示した。

残された問題は、例として、タップ利得の大きさをばらつきを抑えた設計方法の検討などがあげられる。

第3章 集中定数遅延回路を用いた半無限トランスバーサル型回路の伝達関数

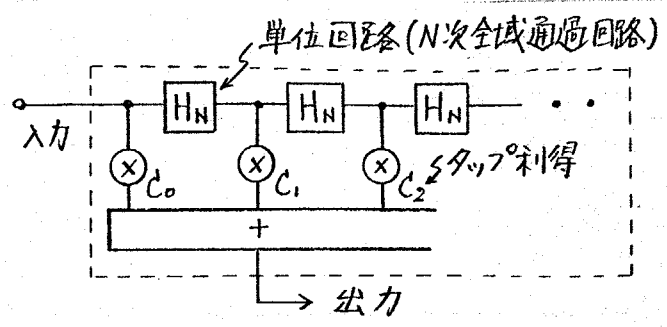
3.1 はしがき

物理的に実現可能なシステムは、必然的に因果律を満ちている必要がある。この意味でトランスバーサル型回路も本質的に半無限の構造を持つものに限られ、両側に無限に延びた構造のものは許されない。従って、単位回路として、理想遅延線を用いたものでも、普通のフーリエ級数論で扱うことは出来ない。さらに、単位回路として、集中定数の全域通過回路を用いた場合には、フーリエ級数論がそのままでは使えないのは明らかである。このような半無限トランスバーサル型回路が実現出来る伝達関数も、その等化能力を調べなくては重要なことと思われるが、余り多くの研究が成されていないように思われる。この問題に关するお少々の研究の中に Gibbs⁽¹⁶⁾によるものがあるが、具体的な結果としては、単位回路として、1次全域通過回路を使った半無限トランスバーサル型回路では、必ず2乗誤差が零に収束するが、2次以上の全域通過回路を用いたものは、必ずしも誤差が零に収束しないということが分っている程度である。入力が実質的に帯域制限されるべく、その帯域内での近似が問題となる場合の検討や、2次以上の全域通過回路を用いた場合、どのような特性で「近似出来るのか」と云った問題に対しては、検討が為されていないようである。

そこで、本章では、上記の問題に対して考察する。具体的には、単位回路として、 N 次全域通過回路を用いた半無限トランスバーサル型回路により、ステップのおよそ無限に近づいたとき、2乗誤差が零になるという意味で実現出来る伝達関数の満たすべき必要十分条件を求めたい。まず、3.2節では、誤差の形を定義すると共に、記法の説明を行って置く。次いで、3.3節では、半無限トランスバーサル型回路が実現出来る伝達関数の満たすべき必要十分条件を幾つかの場合に分けて述べ、3.4節で例題を示して置く。

3.2 準備

本章で扱うトランスバースル型回路は、(図3.1)に示すような半無限の構造を持つものとし、その単位回路とよば、集中定数のN次全域通過回路



(図3.1) 半無限トランスバースル型回路

$$H_N(j\omega) = \frac{P_N(-j\omega)}{P_N(j\omega)} = \exp\{-j\theta_N(\omega)\} \tag{3.2-1}$$

を用いるものとする。但し、式(3.2-1)で

$$P_N(s) \cong 1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_N s^N$$

$$= \prod_r (\sigma_r + s) \cdot \prod_i (\sigma_i + j\omega_i + s)(\sigma_i - j\omega_i + s)$$

($\sigma_r, \sigma_i, \omega_i > 0$)

$$\tag{3.2-2}$$

$$\theta_N(\omega) \cong 2 \left\{ \sum_r \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma_r} + \sum_i \tan^{-1} \frac{\omega - \omega_i}{\sigma_i} + \sum_i \tan^{-1} \frac{\omega + \omega_i}{\sigma_i} \right\}$$

がある。このとき、(図3.1)の半無限トランスバースル型回路の伝達関数は、

$$F_N(j\omega) \cong \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot H_N^m(j\omega) \tag{3.2-3}$$

と表される。ここで、誤差評価式を

$$\varepsilon \cong \int_{-\omega_0}^{\omega_0} W(\omega) |G(j\omega) - F_N(j\omega)|^2 d\omega \tag{3.2-4}$$

$0 < \omega_0 \leq \infty$, $W(\omega) = W(-\omega)$: 重み関数'

$G(j\omega)$: 希望伝達関数'

を定義する。又、希望伝達関数 $G(j\omega)$ とは、

$$G(j\omega) \in L_2(-\omega_0, \omega_0) \tag{3.2-5}$$

を満たすものを考察の対象とする。さらに、重み関数 $W(\omega)$ は、

$$0 < W(\omega) \cdot (1 + \omega^2) < +\infty \tag{3.2-6}$$

を満たすものと仮定する。これらの条件は決して厳しいものではない。

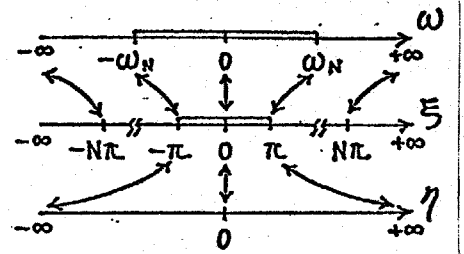
まず、伝達関数 $G(j\omega)$ が半無限トランスバースル型回路で実現可能であると

云うときの“実現可能”と云う言葉の定義を述べた。

(定義3.1) $G(j\omega) \in L_2(-\omega_0, \omega_0)$ が、単位回路として、 N 次全域通過回路を用いた(図3.1)の半無限トランスミナル型回路で“実現可能”であるとは、式(3.2-4)の2乗誤差 ε を零とすることが出来ることである。(定義3.1終)

さて、この2次節の準備として、(図3.2)に示す変数変換を定義しておく。即ち、式(3.2-2)で与えられる N 次全域通過回路の位相関数 $\theta_N(\omega)$ により、 ξ を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \xi &\equiv \theta_N(\omega) & \omega &\in (-\infty, \infty) \\ \omega &= \theta_N^{-1}(\xi) & \xi &\in (-N\pi, N\pi) \end{aligned} \right\} (3.2-7) \quad (図3.2) \text{ 変数変換}$$



$\theta_N(j\omega)$ は、狭義の単調増大奇関数であり、 ξ を $(-N\pi, N\pi)$ に限れば、逆関数 $\theta_N^{-1}(\xi)$ が存在し、やはり狭義増大奇関数となる。そして、このとき $\omega \in (-\infty, \infty)$ と $\xi \in (-N\pi, N\pi)$ は、(図3.2)に示すように一対一に対応している。

又、(図3.2)に示す η の変数変換

$$\left. \begin{aligned} \xi &\equiv \theta_1(\eta) = 2 \tan^{-1}(\eta/a) & \eta &\in (-\infty, \infty) \\ \eta &= \theta_1^{-1}(\xi) = a \tan(\xi/2) & \xi &\in (-\pi, \pi), \quad a > 0 \end{aligned} \right\} (3.2-8)$$

について全く同称である。

次に記法の説明をしておく。本章では、 ω の関数を、英大文字で表し、式(3.2-7)の変数変換を施して ξ の関数を対応する英小文字で表す。さらに、式(3.2-8)の変数変換を行って η の関数を同じ英大文字に \sim を付して表すことにする。例えば、 $G(j\omega)$ に対して、

$$\left. \begin{aligned} g(j\xi) &\equiv G\{j\theta_N^{-1}(\xi)\} \\ G(j\eta) &\equiv G\{j\theta_N^{-1}(\theta_1(\eta))\} = g\{j\theta_1(\eta)\} \end{aligned} \right\} (3.2-9)$$

である。又、以下、本章では、 \prime は微分を表すものとし、積分は主値積分とする。

3.3 伝達関数の満たすべき必要十分条件.

本節では、問題を右表
のように分け、各節(定義
3.1)の意味で、実現可能
な $G(j\omega)$ の満たすべき必
要十分条件を求めよ。尚
(表3.1)は、 ω_0 及び $\theta_N(\omega)$

<表3.1> 問題の分類.

全域通過回路 の次数と性質 近似帯域 ω_0	N=1	N ≥ 2	
		$\theta_N(\omega_0) = k\pi$ $1 \leq k \leq N-1$	$(k-1)\pi < \theta_N(\omega_0) < k\pi$ $1 \leq k \leq N$
有限	(3)	(2)	(4)
無限	(1)		

に属し、著せられる全々の場合を含んでいす。以下、<表3.1>に従い、順に結
果を述べていく。

(1) $\omega_0 = \infty$, $N \geq 1$ の場合

((定理3.1)) 伝達関数 $G(j\omega)$ が (図3.1) の半無限トランスミナル型回路
で実現出来る為の必要十分条件は、次の (a-1) 及び (b-1) が成り立つこと
である。

(a-1) $f(j\xi)$ ($\xi \in (-N\pi, N\pi)$) が 周期 $(-\pi, \pi)$ の周期関数で、且つ
 $(-\pi, \pi)$ で、2乗平均収束の意味で

$$f(j\xi) = C_0 + C_1 \cos \xi + C_2 \cos 2\xi + \dots - j(C_1 \sin \xi + C_2 \sin 2\xi + \dots) \quad (3.3-1)$$

のような級数に展開出来ること。(これは、Wiener-Lee変換として知られている⁽⁴⁾)

(b-1) $f(j\xi)$ ($\xi \in (-N\pi, N\pi)$) が 周期 $(-\pi, \pi)$ の周期関数で、 $G(j\omega)$
の実部及び虚部に対し、ヒルベルト変換対

$$\left. \begin{aligned} G_I(\omega) &= -(1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \{G_R(\omega)/(\omega-x)\} dx \\ G_R(\omega) &= (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \{G_I(\omega)/(\omega-x)\} dx \end{aligned} \right\} \omega \in (-\infty, \infty) \quad (3.3-2)$$

但し、 $G_R(\omega) \triangleq \text{Re}\{G(j\omega)\}$, $G_I(\omega) \triangleq \text{Im}\{G(j\omega)\}$ (以下同様)

が成り立つこと。

尚、式(3.3-2)は、 $G(j\omega)$ のフーリエ変換が因果律を満たすことと他
ならない。(定理3.1・終)

(証明) $\omega_0 = \infty$ とすると, 式(3.2-4)は,

$$\varepsilon = \int_{-N\pi}^{N\pi} \nu(\xi) \left| g(j\xi) - \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-jm\xi} \right|^2 d\xi \quad (3.3-3)$$

$$\text{但し, } \nu(\xi) \triangleq \nu(\xi) \cdot \{\theta_N^{-1}(\xi)\}' \quad (3.3-4)$$

となる。一方, 式(3.2-6)の条件から,

$$0 < \nu(\xi) < +\infty \quad \xi \in (-N\pi, N\pi) \quad (3.3-5)$$

の成立することから云える。よって, 重み関数 $\nu(\xi)$ は本質的に意味をなさず, $\varepsilon \rightarrow 0$ と,

$$\varepsilon_1 \triangleq \int_{-N\pi}^{N\pi} \left| g(j\xi) - \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-jm\xi} \right|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad (3.3-6)$$

とは, 同値である。又, 式(3.2-5)の条件から,

$$g(j\xi) \in L_2(-N\pi, N\pi) \quad (3.3-7)$$

があり, 直ちに (a-1) が得られる。

(b-1) については, 式(3.3-1)が $G(j\omega)$ のフリエ変換の因果性と同値である⁽⁴¹⁾ことから, 明らかであるが, 次の(定理3.2)の証明と同様に, 74「ル関数系の $L_2(0, \infty)$ 」の完備性を用いても示すことも出来る。(証明終)

(定理3.1)で, 特に $N=1$ の場合には, $g(j\xi)$ が, 周期関数であるという条件は不要で, 式(3.3-1), あるいは, 式(3.3-2)の条件 (即ち, $G(j\omega)$ のフリエ変換が, 因果律を満すということ) にだけ「良い」ことになる。

(2) $0 < \omega_0 < +\infty$, $N \geq 2$, $\theta_N(\omega_0) = k\pi$ ($k=1 \sim N-1$) の場合.

((定理3.2)) 伝達関数 $G(j\omega)$ が, (図3.1)の半無限トランスミナル型回路が実現出来る為の必要十分条件は, 次の (a-2) あるいは, (b-2) が成り立つことである。

(a-2) $g(j\xi)$ ($\xi \in (-k\pi, k\pi)$) が, 周期 $(-\pi, \pi)$ の周期関数で, 且つ $(-\pi, \pi)$ で 式(3.3-1)のように展開出来ること。

(b-2) $g(j\xi)$ ($\xi \in (-k\pi, k\pi)$) が 周期 $(-\pi, \pi)$ の周期関数であり, 次の積分変換対

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) \cos^2 \frac{\theta_N(\omega)}{2} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{R(x) \cdot \theta_N'(x) dx}{\tan\{\theta_N(\omega)/2\} - \tan\{\theta_N(x)/2\}} \\ R(\omega) \cos^2 \frac{\theta_N(\omega)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{X(x) \cdot \theta_N'(x) dx}{\tan\{\theta_N(\omega)/2\} - \tan\{\theta_N(x)/2\}} \end{aligned} \right\} (3.3-8)$$

$$\omega \in (-\omega_0, \omega_0)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し, } X(\omega) &\triangleq G_I(\omega) - \tan\{\theta_N(\omega)/2\} \cdot G_R(\omega) \\ R(\omega) &\triangleq G_R(\omega) + \tan\{\theta_N(\omega)/2\} \cdot G_I(\omega) \end{aligned} \right\}$$

が成り立つこと。

(定理3.2.終)

(証明) 式(3.2-4)に式(3.2-7)の変数変換を施すと

$$\varepsilon = \int_{-k\pi}^{k\pi} \nu(\xi) \left| g(j\xi) - \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{j m \xi} \right|^2 d\xi \quad (3.3-9)$$

ここで、 $\nu(\xi)$ は式(3.3-4)より与えられる。又、式(3.2-6)の条件から

$$0 < \nu(\xi) < +\infty, \quad \xi \in (-k\pi, k\pi) \quad (3.3-10)$$

が成り立ち、 $\varepsilon \rightarrow 0$ と同値の条件と12。

$$\varepsilon_2 \triangleq \int_{-k\pi}^{k\pi} \left| g(j\xi) - \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{j m \xi} \right|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad (3.3-11)$$

が得られる。さらに、式(3.2-5)の条件から

$$g(j\xi) \in L_2(-k\pi, k\pi) \quad (3.3-12)$$

が成り立ち、直ちに(9-2)が得られる。

次に、式(3.3-11)に式(3.2-8)の変数変換を行うと、

$$\varepsilon_2 = 2a \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\tilde{G}(j\eta)}{a+j\eta} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{(a-j\eta)^m}{(a+j\eta)^{m+1}} \right|^2 d\eta \quad (3.3-13)$$

が得られる。ここで、式(3.2-5)の条件と

$$0 < \theta_N'(\omega) < +\infty, \quad \omega \in (-\omega_0, \omega_0) \quad (3.3-14)$$

を使えば、

$$\tilde{H}(j\eta) \triangleq \tilde{G}(j\eta)/(a+j\eta) \in L_2(-\infty, \infty) \quad (3.3-15)$$

が成り立つ。一方、式(3.3-12)より

$$\frac{1}{\sqrt{2a}} L_n(j\omega, a) \triangleq \frac{(a-j\eta)^n}{(a+j\eta)^{n+1}} \quad (3.3-16)$$

は、ラケール関数のフーリエ変換であり、ラケール関数系が $L_2(0, \infty)$ で完備であることと、ハーセバルの等式が成り立つことを使えば、式(3.3-13)で、 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ となる条件は、式(3.3-15)で定義される $\hat{H}(j\eta)$ のフーリエ逆変換が因果律を満す時間関数であることになり、次のヒルベルト変換対

$$\left. \begin{aligned} \tilde{H}_I(\eta) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{H}_R(\eta)}{\eta-x} dx \\ \tilde{H}_R(\eta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{H}_I(\eta)}{\eta-x} dx \end{aligned} \right\} \eta \in (-\infty, \infty) \quad (3.3-17)$$

$$\text{但し, } \tilde{H}_R(\eta) \triangleq \operatorname{Re}\{\tilde{H}(j\eta)\}, \quad \tilde{H}_I(\eta) \triangleq \operatorname{Im}\{\tilde{H}(j\eta)\}$$

が成り立つことと同値である。^{(42), (43)} 式(3.3-17)の条件を ω の世界に書き直し、式(3.3-8)の条件が得らぬ。(証明終)

尚、おと同様、(定理3.2)で、特に $k=1$ の場合には、 $g(j\omega)$ が、同期関数であることを言う条件は、不要である。

((定理3.2の系)) (定理3.2)の条件(b-2)に代り、 $G(j\omega)$ が

$$G(j\omega) \sec^2\{\theta_N(\omega)/2\} \in L_2(-\omega_0, \omega_0) \quad (3.3-18)$$

を満している場合には、式(3.3-8)の条件は、次の積分変換対

$$\left. \begin{aligned} G_I(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{G_R(x) \cdot \sec^2\{\theta_N(x)/2\} \cdot \theta'_N(x)}{\tan\{\theta_N(\omega)/2\} - \tan\{\theta_N(x)/2\}} dx \\ G_R(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{G_I(x) \cdot \sec^2\{\theta_N(x)/2\} \cdot \theta'_N(x)}{\tan\{\theta_N(\omega)/2\} - \tan\{\theta_N(x)/2\}} dx \end{aligned} \right\} \omega \in (-\omega_0, \omega_0) \quad (3.3-19)$$

が成り立つことと云う条件に置き換えてよい。

(定理3.2の系終)

(証明). 式(3.3-18)から、

$$\tilde{G}(j\eta) \in L_2(-\infty, \infty) \quad (3.3-20)$$

が云え、式(3.3-15)で、 $\hat{H}(j\eta)$ と $\tilde{G}(j\eta)$ のフーリエ逆変換の因果性は同値

となる。従つて、式(3.3-17)で、 $\hat{H}(j\omega)$ の代りに $\hat{G}(j\omega)$ を用ゐることから、
 式(3.3-19)が得られる。(証明終)

$G(j\omega)$ が式(3.3-18)を満す場合にも、当然式(3.3-8)の条件が使ゐる
 訳であるが、式(3.3-19)の条件の方がより簡単である。

(3) 及び (4) の場合

もし、 $G(j\omega)$ が、 $\omega \in (-\omega_N, \omega_N)$ ($\omega_0 < \omega_N$) で与えられる、
 $G(j\omega) \in L_2(-\omega_N, \omega_N)$ で、 $\theta_N(\omega_N) = k\pi$ ($k=1 \sim N$) が満される
 とすれば、 ω_0 を ω_N まで拡張して、上に述べた場合に帰着されること
 になるが、一般の場合には、簡単な条件は得られないようである。

3.4 例題

本節では、前節の(定理3.2)及び(定理3.2の系)を用いた例を示す。

(例1) 今、(図3.1)の半無限トランスミタ型回路で、単位回路を

$$H_2(s) \triangleq \frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 + 2s + 1} = e^{-j\theta_2(\omega)} \quad (3.4-1)$$

但し、 $s = j\omega$

とする。さて、このとき、次の2つの伝達関数

$$G_1(s) \triangleq (s^2 + 1)/(s^2 + 3s + 1) \quad (3.4-2)$$

$$G_2(s) \triangleq (s^2 + 1)/(2s^2 + 3s + 1) \quad (3.4-3)$$

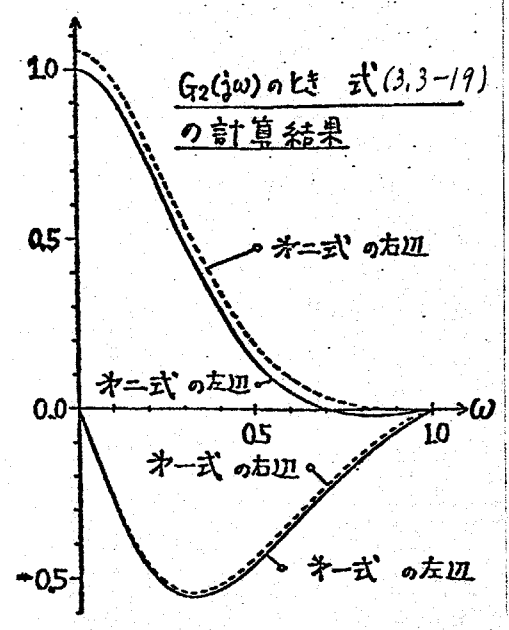
但し、 $s = j\omega$

が、 $|\omega| \leq \omega_0 = 1$ なる帯域で実現出来るかどうか判定してみよう。この場合、 $\omega_0 = 1$ で有限であり、又、 $\theta_2(1) = \pi$ が成り立っているから、(定理3.2)が使える。従って(a-2)あるいは(b-2)のいずれかの条件を用いても判定出来ることになるが、ここでは、さらに $G_1(j\omega)$ 、 $G_2(j\omega)$ が、式(3.3-18)を満たしていることが分かるので、(定理3.2の系)を用い、式(3.3-19)に基づき判定してみよう。実際に、式(3.3-19)を計算してみると、 $G_1(j\omega)$ は実現出来、 $G_2(j\omega)$ は実現出来ないことが分かる。ちなみに、 $G_2(j\omega)$ に関して、式(3.3-19)の右辺及び左辺を計算した結果を(図3.2)に示しておく。明らかに等号の成り立たないことが分かるだろう。

次に、 $G_1(j\omega)$ 、 $G_2(j\omega)$ を次に示す誤差評価式に基づき、有限段のトランスミタ型回路で近似した場合の最小近似誤差 ϵ_{Lmin} の減り方の様子を〈表3.2〉(次頁)に示しておく。但し、誤差評価式は、

$$\epsilon_L \triangleq \int_{-1}^1 W(\omega) |G_p(j\omega) - \sum_{n=0}^{L-1} C_n H_2^n(j\omega)|^2 d\omega \quad (3.4-4)$$

$p = 1$ 又は 2 , $W(\omega) \triangleq 4/(1 + \omega^2)$



(図3.2) (定理3.2の系)の適用例

である。〈表3.2〉によっても、 $G_1(j\omega)$ は実現出来、 $G_2(j\omega)$ は実現不可能であろうことが容易に想像される。(例1-終)

(例1-2) (例1-1)と同じ単位回路を用いた半無限トランスミナル型回路で、次の2つの伝達関数

$$G_3(s) \triangleq \frac{2s}{s^2+4s+1} \quad (s=j\omega) \quad (3.4-5)$$

$$G_4(s) \triangleq \frac{2s}{3s^2+4s+1} \quad (s=j\omega) \quad (3.4-6)$$

が、 $|\omega| \leq \omega_0 = 1$ の帯域で実現出来るかどうかが判定される。この場合、(例1-1)のときと異なり、 $G_3(j\omega)$ 、 $G_4(j\omega)$ は、(例1-1)の定理3.2の条)が使える為の条件、式(3.3-18)を満足しない。 (定理3.2)の(a-2)が成り立つ(b-2)によらぬ。このため、(a-2)を用いて判定出来る。式(3.4-5)及び式(3.4-6)から、変数変換によつて、 $f_3(j\zeta)$ 、 $f_4(j\zeta)$ を求めると、

$$f_3(j\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot e^{-j^n \zeta}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = 1/3 \\ \gamma_n = -2/3^{n+1} \quad (n=1, 2, \dots) \end{array} \right. \quad (3.4-7)$$

$$f_4(j\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \cdot e^{-j^n \frac{\zeta}{2}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_0 = 1/4, \quad \delta_1 = 1/8 \\ \delta_n = -3/2^{n+2} \quad (n=2, 3, \dots) \end{array} \right. \quad (3.4-8)$$

が得られ、 $G_3(j\omega)$ は実現出来、 $G_4(j\omega)$ は実現出来ないことが分る。

(例1-2.終)

〈表3.2〉 近似誤差の比較

77° 数L	近似誤差 E_{Lmin}	
	$G_1(j\omega)$ のとき	$G_2(j\omega)$ のとき
0	1.0000×10^0 (0.60000)	1.0000×10^0 (0.66337)
1	4.0000×10^{-1}	4.1958×10^{-1}
2	1.6000×10^{-2}	1.6694×10^{-2}
3	6.4000×10^{-4}	2.0114×10^{-4}
4	2.5600×10^{-5}	1.9421×10^{-4}
5	1.0240×10^{-6}	1.6652×10^{-4}
10	1.0486×10^{-13}	1.5746×10^{-4}
20	1.0995×10^{-27}	1.5675×10^{-4}
30	1.1529×10^{-41}	1.5669×10^{-4}
40	1.2089×10^{-55}	1.5668×10^{-4}
50	1.2677×10^{-69}	1.5667×10^{-4}

注) 77°の数0は、 $C_0=1$ 、 $C_i=0$ ($i=1, 2, \dots$) としたときの誤差各々、このときの値()内)を規格化したもの。

3.5 あとがき

本章では, $G(j\omega) \in L_2(-\omega_0, \omega_0)$ が与えられるとき, $G(j\omega)$ が, 単位回路として, 集中定数 N 次全域通過回路を用いた半無限トランスバーサル型回路の伝達関数として, 実現出来る為の必要十分条件について考察し, 幾つかの判定条件を求め, その適用例を述べた。

残された問題点としては,

- i) 周期関数に対するヒルベルト変換を用いた条件式を導出すること。
- ii) ヒルベルト変換の微分形とも考えられるコーシー・リーマンの条件を用いた判定条件を検討すること。
- iii) 単位回路として, 全域通過回路に限らず, 一般の集中定数回路を用いた場合に対する判定条件を検討すること。
- iv) 近似帯域が $0 < \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ のような, いわゆる帯域通過型の場合への理論の拡張に関する検討などが挙げられる。

第4章 希望特性の分周値をタップ利得とする分周総和型2重誤差最小 トランスバーサル型回路

4.1 はしかり,

トランスバーサル型回路の代表的な設計方法の一つに分周(標準分周)-一致型の設計方法があり、可変遅延等化器に適用したものの⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾や、タップ間隔が必ずしも等しくない回路に拡張したものの⁽²⁰⁾⁽²¹⁾がある。しかし、分周一致型の設計では、タップの間で分周の値が決まれば、各分周では希望特性に一致するが分周以外では、近似度が明確でないということがある。この点は、2重誤差等価評価式として用いることにより、かなり解決できると考えられるが、2重誤差等価評価式として用いると、通常は、タップ利得の希望特性に於て、簡単に表せるという事態が起り、希望特性が変化するに於て、極値問題を解いて、タップ利得を求めたのでは、可変等化器なしでは、甚々不便で、希望特性がけで決まる調整部を持つ構成が望まれる。

本章は、上記の問題に対する一つの解決策として、誤差評価式として、分周値が多くとれる分周総和型2重誤差を採用し、しかも、希望特性の分周値をタップ利得として構成される分周総和型2重誤差最小のトランスバーサル型回路について述べる。また、4.2節で希望特性の分周値をタップ利得とする分周総和型2重誤差最小のトランスバーサル型回路の基本的な構成方法を、周波数領域近似の場合と、時間領域の近似の場合について述べる。続いて、4.3節では、同じ考え方を導き出し別の構成方法として、タップ利得調整機構を持ち、希望特性の分周値をタップ利得制御入力とする分周総和型2重誤差最小のトランスバーサル型回路を示す。4.4節では、前の二節で使われるマトリクス回路の構成に於いて、それを単純化する方法を併りに述べる。4.5節では、ポールセット型等化器として適用する方法について、簡単に考察する。最後に4.6節では、主にテーパにより分周総和型2重誤差の性質を調べ、適当なタップ間と分周値の関係、適当なタップの間、単位回路の最適遅延時間、重み関数の影響などについて述べる。

4.2. 構成方法 (I)

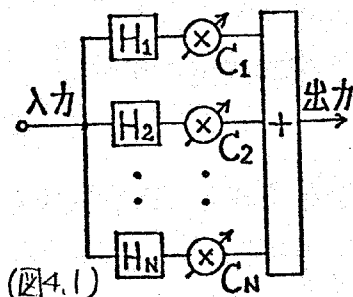
本節では、希望特性の分乗値をタップ利得とする分乗総和型2乗誤差最小のトランスバーサル型回路の基本的な構成方法を、周波数領域の近似の場合と、時間領域の近似の場合について述べる。本構成方法は、分乗の数を任意に多くとることが出来、しかも、タップ利得が希望特性の分乗値そのものになるという点から、可変等化器等として、便利な形式と考えられる。

(i) 周波数領域での近似の場合

基礎となるトランスバーサル型回路は、(図4.1)の拡張した形式を取る。この回路の伝達関数は、

$$F(\omega) = \sum_{k=1}^N C_k H_k(\omega) \tag{4.2-1}$$

がある。但し、 $C_1 \sim C_N$ はタップ利得であり、 $H_k(\omega)$ は通常の変遷線を用いた回路では、 $e^{-j(k-1)\omega}$ と取り扱われる。



今、周波数領域での分乗総和型2乗誤差を、

$$\varepsilon_{\omega} \triangleq \sum_{i=-M}^M W(\omega_i) |G(\omega_i) - F(\omega_i)|^2 \tag{4.2-2}$$

但し、 $G(\omega)$: 希望特性, $W(\omega) = W(-\omega) > 0$: 重み関数

ω_i ($i = -M \sim M$): 分乗 ($\omega_{-i} = \omega_i, \omega_0 = 0$)

が定義される。この時、マトリクスを用いて

$$\varepsilon_{\omega} = C' A C - 2 C' b + \varepsilon_0 \tag{4.2-3}$$

但し、 $C \triangleq (C_1, C_2, \dots, C_N)'$: タップ利得, $A \triangleq (a_{kl})_{k,l=1 \sim N}$

$b \triangleq (b_1, b_2, \dots, b_N)'$

のように表せる。ここで

$$\left. \begin{aligned} a_{kl} &= a_{lk} = W(0) H_k(0) H_l(0) + 2 \sum_{i=1}^M W(\omega_i) \operatorname{Re} \{ H_k(\omega_i) \overline{H_l(\omega_i)} \} \\ b_k &= W(0) G(0) H_k(0) + 2 \sum_{i=1}^M W(\omega_i) \operatorname{Re} \{ G(\omega_i) \overline{H_k(\omega_i)} \} \\ \varepsilon_0 &= W(0) \cdot G^2(0) + 2 \sum_{i=1}^M W(\omega_i) |G(\omega_i)|^2 \end{aligned} \right\} \tag{4.2-4}$$

あり。但し、 $'$ は転置, $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ は実部, $\operatorname{Im}\{\cdot\}$ は虚部, $\overline{\cdot}$ は複素共役を言及することができる(以下、同様)。

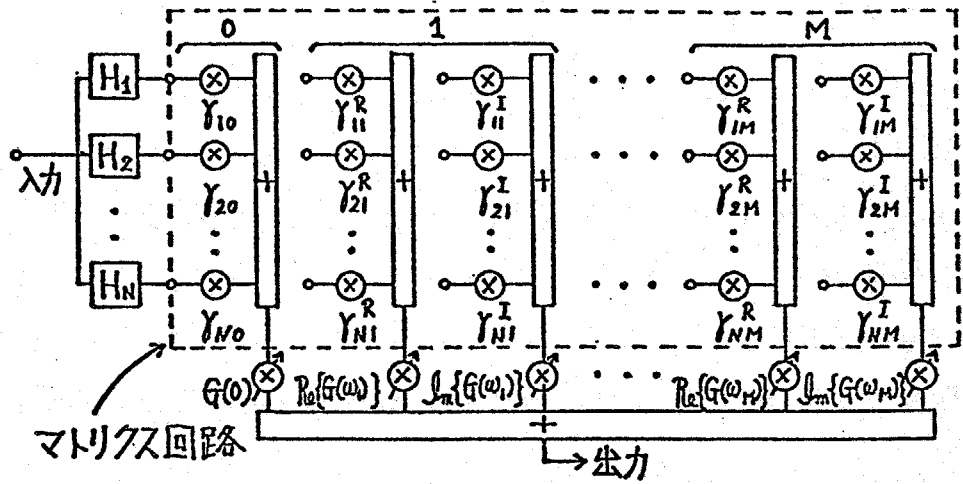
又、式(4.2-3)の行列 A は正値とL, A が半正値と取り扱う例外的な場合

命は、除くこととする。

この時、基本となる構成方法として、次の定理が成り立つ。

《定理4.1》

任意の希望特性 $G(\omega)$ に対し、式(4.2-2)と与えられた $\varepsilon\omega$ を最小とするトランスパナル型回路は、 $W(\omega)$ と $H_k(\omega)$ ($k=1 \sim N$) を“ H_2 ” (図4.2) 希望特性の分変値をタップ利得とする分変系統型二乗誤差最小



固定マトリクス回路と、 $G(\omega)$ の分変値をタップ利得とする回路と (図4.2) のように構成出来る。但し、 Y_{li}^R, Y_{li}^I ($l=1 \sim N, i=1 \sim M$) は、

$$\left. \begin{aligned} Y_{li}^R &= W(\omega) \cdot \sum_{k=1}^N \alpha_{kl} H_k(\omega) \\ Y_{li}^R &= 2W(\omega) \cdot \sum_{k=1}^N \alpha_{kl} \cdot \text{Re}\{H_k(\omega)\} \\ Y_{li}^I &= 2W(\omega) \cdot \sum_{k=1}^N \alpha_{kl} \cdot \text{Im}\{H_k(\omega)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.2-5)$$

と与えられる、ここで

$$A^{-1} \triangleq (\alpha_{kl}) \quad k, l = 1 \sim N, \quad (\alpha_{kl} = \alpha_{lk}) \quad (4.2-6)$$

である。(定理4.1 終)

(証明) $\varepsilon\omega$ を最小とする最適タップ利得 C_{opt} は、

$$C_{opt} = A^{-1} b \quad (4.2-7)$$

と与えられるから、これを式(4.2-4)の b_k と式(4.2-6)を用いて書き下し、式(4.2-5)の記号を用くと、

$$C_{opt} = Y_{l0} G(\omega) + \sum_{i=1}^M Y_{li}^R \cdot \text{Re}\{G(\omega)\} + \sum_{i=1}^M Y_{li}^I \cdot \text{Im}\{G(\omega)\} \quad (4.2-8)$$

$(l=1 \sim N)$

となる。従ってこのときの伝達関数は、 ω_i と C_{li} に関する総和の順序を交換することにより、

$$F_{opt}(\omega) = G(\omega) \sum_{l=1}^N \gamma_{l0} H_l(\omega) + \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}\{G(\omega_i)\} \sum_{l=1}^N \gamma_{li}^R H_l(\omega) + \sum_{i=1}^M \operatorname{Im}\{G(\omega_i)\} \sum_{l=1}^N \gamma_{li}^I H_l(\omega) \quad (4.2-9)$$

となり、これから直ちに(図4.2)の構成が得られる。尚、 γ_{l0} , γ_{li}^R , γ_{li}^I ($l=1 \sim N$, $i=1 \sim M$)が、 $G(\omega)$ に依らぬものは、明らかである。(証明終)

ここで、特別であるが、基本的な場合として、理想遅延線を用いたトランスミタール型回路において、遅み関数が $w(\omega)=1$ であり、分周 ω_i が等間隔である場合には、式(4.2-5)で示されたマトリクス回路の係数値は、次の系で与えられるように簡単に表すことができる。但し、一般性を失うことなく、理想遅延線の遅延時間を $\tau=1$ と置く。

(定理4.1の系) (定理4.1)で、

$$H_k(\omega) = e^{-j(k-1)\omega} \quad (k=1 \sim N)$$

$$w(\omega) = 1.$$

$$\omega_i = -\omega_{-i} = i\pi/M \quad (i=0 \sim M)$$

$$2M+1 > N$$

(4.2-10)

すると、式(4.2-5)で示されたマトリクス回路の係数値は、具体的に、

$$\gamma_{l0} = \frac{2M+N+(-1)^{N-l-1}}{2M(2M+N)}$$

$$\gamma_{li}^R = \frac{1}{M} \cos(l-1) \frac{i\pi}{M} + \frac{(-1)^l}{2M(2M+N)} \left\{ 1 + (-1)^{N-1} \frac{\cos(N-\frac{1}{2}) \frac{i\pi}{M}}{\cos(i\pi/2M)} \right\}$$

$$\gamma_{li}^I = -\frac{1}{M} \sin(l-1) \frac{i\pi}{M} + \frac{(-1)^l}{2M(2M+N)} \left\{ \tan \frac{i\pi}{2M} + (-1)^N \frac{\sin(N-\frac{1}{2}) \frac{i\pi}{M}}{\cos(i\pi/2M)} \right\}$$

$$(l=1 \sim N, i=1 \sim M-1)$$

$$\gamma_{lM}^R = (-1)^{l-1} \cdot 2 / (2M+N), \quad \gamma_{lM}^I = 0$$

(4.2-11)

と与えられる。

(定理4.1の系終)

(証明) 式(4.2-10)に従って実際に行列 A を計算すると、

$$A = (A_{kl}) = \begin{pmatrix} 1+2M & -1 & 1 & \dots & (-1)^{N-1} \\ -1 & 1+2M & -1 & \dots & (-1)^{N-2} \\ 1 & -1 & 1+2M & \dots & (-1)^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{N-1} & (-1)^{N-2} & (-1)^{N-3} & \dots & 1+2M \end{pmatrix} \quad (4.2-12)$$

となり、逆行列 \$A^{-1}\$ が、

$$A^{-1} = (\alpha_{kl}) = \frac{1}{2M(2M+N)} \begin{pmatrix} 2M+N-1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{N-2} \\ 1 & 2M+N-1 & 1 & \dots & (-1)^{N-3} \\ -1 & 1 & 2M+N-1 & \dots & (-1)^{N-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{N-2} & (-1)^{N-3} & (-1)^{N-4} & \dots & 2M+N-1 \end{pmatrix} \quad (4.2-13)$$

と与えられることは、容易に確かめられる。この \$\alpha_{kl}\$ を用いて、式(4.2-10)に従い、式(4.2-5)を実際に計算することにより、式(4.2-11)が得られる。(証明終)

尚、(定理4.1)に示した構成方法は、その証明から分るよう、誤差評価式が式(4.2-3)のように表され、\$A = (A_{kl})\$ が希望特性に依らず、分周 \$\omega_i\$ と \$T\$ の利得 \$C_L\$ に關する総和の順序が交換可能であることは、常に可能である。次に述べた時間領域での分周総和型2乗誤差を評価式として場合も与うのであるが、他に、例えは、周波数領域での実部と虚部と別々の重み関数を用いた評価式を採用した場合、即ち、

$$\varepsilon^1_{\omega} \cong \sum_{i=1}^M \left\{ W_R(\omega_i) |G_R(\omega_i) - F_R(\omega_i)|^2 + W_I(\omega_i) |G_I(\omega_i) - F_I(\omega_i)|^2 \right\} \quad (4.2-14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し、} & G(\omega) : \text{希望特性, } G_R(\omega) \cong \text{Re}\{G(\omega)\}, G_I(\omega) \cong \text{Im}\{G(\omega)\} \\ & F_R(\omega) \cong \text{Re}\{F(\omega)\}, F_I(\omega) \cong \text{Im}\{F(\omega)\}, F(\omega) \text{ は式(4.2-1)} \\ & W_R(\omega) = W_R(-\omega) > 0, W_I(\omega) = W_I(-\omega) > 0, \text{重み関数} \end{aligned} \right\} \quad (4.2-15)$$

の場合も、微分特性まで用いた評価式を採用した場合、即ち、

$$\varepsilon^2_{\omega} \cong \sum_{i=1}^M \left\{ W_1(\omega_i) |G(\omega_i) - F(\omega_i)|^2 + W_2(\omega_i) |G'(\omega_i) - F'(\omega_i)|^2 \right\} \quad (4.2-16)$$

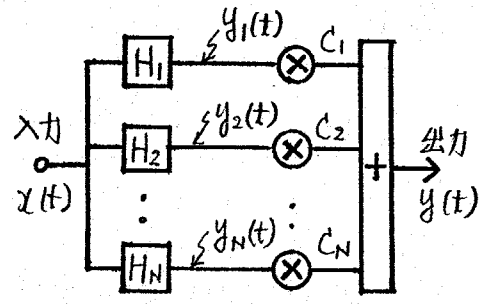
但し, $G'(\omega) \triangleq \omega G(\omega)/2\omega$, $F'(\omega) \triangleq \omega F(\omega)/2\omega$ } (4.2-17)
 $W_1(\omega) = W_1(-\omega) > 0$, $W_2(\omega) = W_2(-\omega) > 0$

の場合も同様。 (定理4.1)と同様の構成が可能であることを付け加えておく。

(ii) 時間領域での近似の場合。

トランスミッタ型回路の一般形を考へ、入力 $x(t)$ が定まっているとして、各タップ利得の値を観測される時間波形を (図4.3) の如く、 $y_k(t)$ ($k=1 \sim N$) とすると、出力波形 $y(t)$ は、

$$y(t) = \sum_{k=1}^N C_k \cdot y_k(t) \quad (4.2-18)$$



(図4.3)

と与えられる。このとき、時間領域での分枝総和型2乗誤差を、

$$\epsilon_t \triangleq \sum_{i=1}^M w(t_i) |g(t_i) - y(t_i)|^2 \quad (4.2-19)$$

但し、 $\begin{cases} g(t) : \text{希望出力波形} \\ w(t) > 0 : \text{重み波形} \end{cases}$

と定義すると、

$$\epsilon_t = C' A C - 2 C' b + \epsilon_0 \quad (4.2-20)$$

但し、 $\begin{cases} C \triangleq (C_1, C_2, \dots, C_N) : \text{タップ利得ベクトル} \\ A \triangleq (a_{kl})_{k,l=1 \sim N} : \text{実対称行列} \\ b \triangleq (b_1, b_2, \dots, b_N) \end{cases}$

と書け、このとき、

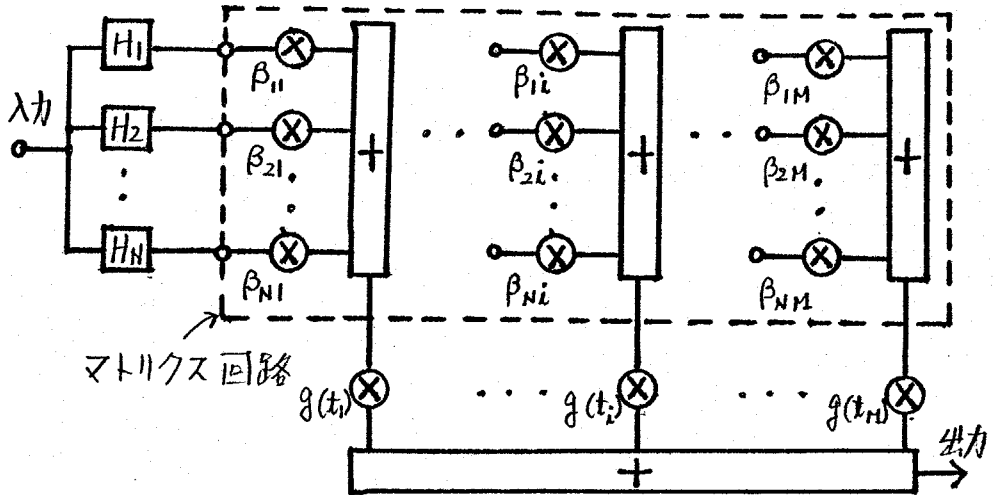
$$\begin{cases} a_{kl} = a_{lk} = \sum_{i=1}^M w(t_i) \cdot y_k(t_i) \cdot y_l(t_i) \\ b_k = \sum_{i=1}^M w(t_i) \cdot y_k(t_i) \cdot g(t_i) \\ \epsilon_0 = \sum_{i=1}^M w(t_i) \cdot g^2(t_i) \end{cases} \quad (4.2-21)$$

とあり、従って、式(4.2-19)の行列 A が半正値となる例外的な場合を除けば、周波数領域の場合の(定理4.1)に対応して、次の定理が成り立つ。

(定理4.2) 入力 $x(t)$ が定まっているとき、任意の希望出力波形 $g(t)$ に対し

2, 式(4.2-19)

ここで与えられた
を最小とする
トランスミナル
型回路は、希
望出力波形に
依らぬ固定
マトリクス回路
と希望出力波
形 $g(t)$ の分
値をタップ利



(図4.4) 希望特性の分値値をタップ利得とする分値系統和型
二乗誤差最小のトランスミナル型回路(時間領域の近
似の場合).

得とする回路²⁾ (図4.4) のように構成出来る。但し、 β_{li} ($l=1 \sim N, i=1 \sim M$) は、

$$\beta_{li} = \sum_{k=1}^N \alpha_{kl} \cdot \omega(t_i) \cdot y_k(t_i) \quad (l=1 \sim N, i=1 \sim M) \quad (4.2-22)$$

ここで与えられ、 α_{kl}

$$A^{-1} \triangleq (\alpha_{kl})_{k,l=1 \sim N} \quad (\alpha_{kl} = \alpha_{lk}) \quad (4.2-23)$$

がある。(定理4.2 終)

(証明) ε_T を最小とする最適タップ利得 $C_{opt} = A^{-1}b$ を式(4.2-21)の b_k と式(4.2-23)を用いて書き下すと、式(4.2-22)の β_{li} を用いることにより、

$$C_l^{opt} = \sum_{i=1}^M \beta_{li} g(t_i) \quad (4.2-24)$$

を得る。このときの出力 $y^{opt}(t)$ を計算し、 t_i と C_l に関する総和の順序を交換すれば、

$$y^{opt}(t) = \sum_{i=1}^M \left\{ \sum_{l=1}^N \beta_{li} y_l(t) \right\} g(t_i) \quad (4.2-25)$$

となり、これから直ちに(図4.4)の構成が得られる。(証明 終)

ここで、例えは、微分特性まで用いて評価式

$$\varepsilon_T' \triangleq \sum_{i=1}^M \left\{ \omega_1(t_i) |g(t_i) - y(t_i)|^2 + \omega_2(t_i) |g'(t_i) - y'(t_i)|^2 \right\} \quad (4.2-26)$$

$$\text{但し, } \begin{cases} f'(t) \equiv \partial f(t) / \partial t, & g'(t) \equiv \partial g(t) / \partial t, \\ f(t): \text{希望出力波形, } & g(t): \text{式 (4.2-17)} \\ w_1(t) > 0, w_2(t) > 0: \text{重み関数} \end{cases}$$

これを用いた場合にも、(定理4.2)と同様の構成が可能であり、これを付加しておく。

4.3 構成方法(II).

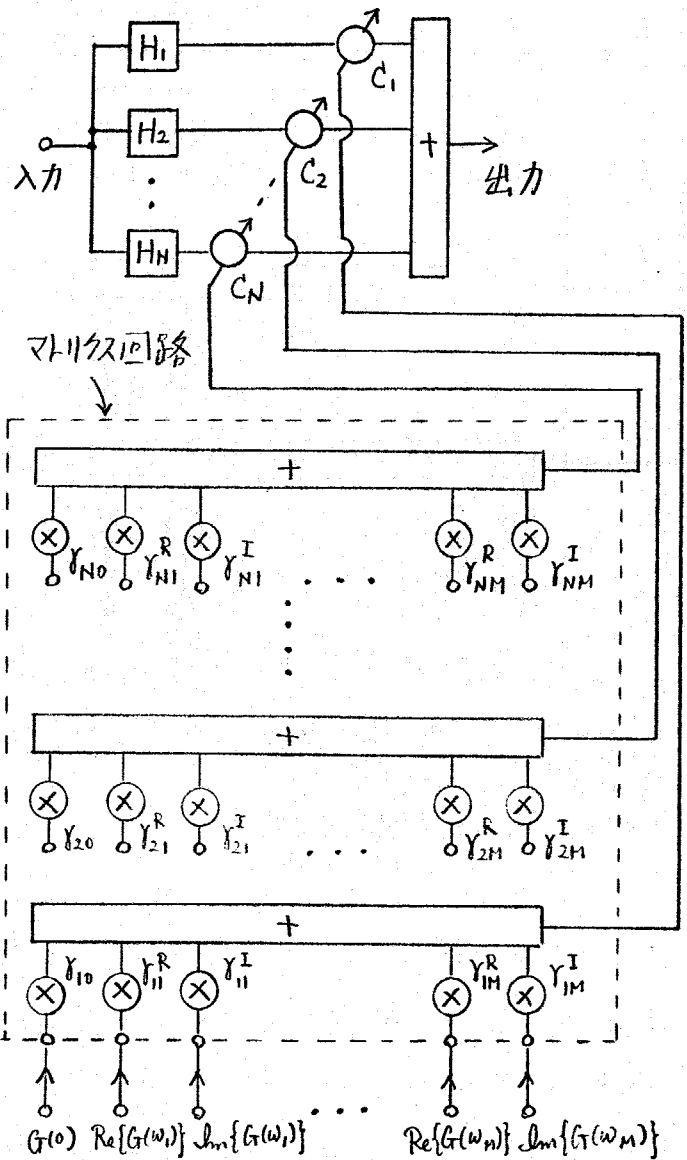
本節では、前節(定理4.1)および(定理4.2)と同じ考え方で得られるタップ利得調整機構に固定マトリクス回路をもち、希望特性の分乗値をタップ利得制御入力とする分乗総和型2乗誤差最小のトランスパーナル型回路の構成方法を周波数領域の近似の場合と、時間領域の近似の場合について述べる。

(i) 周波数領域の近似の場合

前節(i)と同じ仮定、同じ記号のもとに(式(4.2-1)~式(4.2-6)), 次の定理が成り立つ。

(定理4.3) 任意の希望特性 $G(\omega)$ に対し、式(4.2-2)で与えられる $\varepsilon\omega$ を最小とするトランスパーナル型回路は、タップ利得制御機構に、 $W(\omega)$ と $H_k(\omega)$ ($k=1\sim N$) により決まる固定マトリクス回路をもち、希望特性の分乗値をタップ利得制御入力とする回路で(図4.5)のように構成出来る。但し、 $Y_{l0}, Y_{li}^R, Y_{li}^I$ ($l=1\sim N, i=1\sim M$) は、式(4.2-5)で与えられる。(定理4.3終)

(証明) (定理4.1)の証明に於ける式(4.2-8)から、直ちに得られる。(証明終)



(図4.5) 希望特性の分乗値をタップ利得制御入力とする分乗総和型2乗誤差最小のトランスパーナル型回路(周波数領域の近似の場合)

(ii) 時間領域の近似の場合

前節 (ii) と同じ仮定, 同じ記号のもとに (式(4.2-18)~式(4.2-23)), 次の定理が成り立つ。

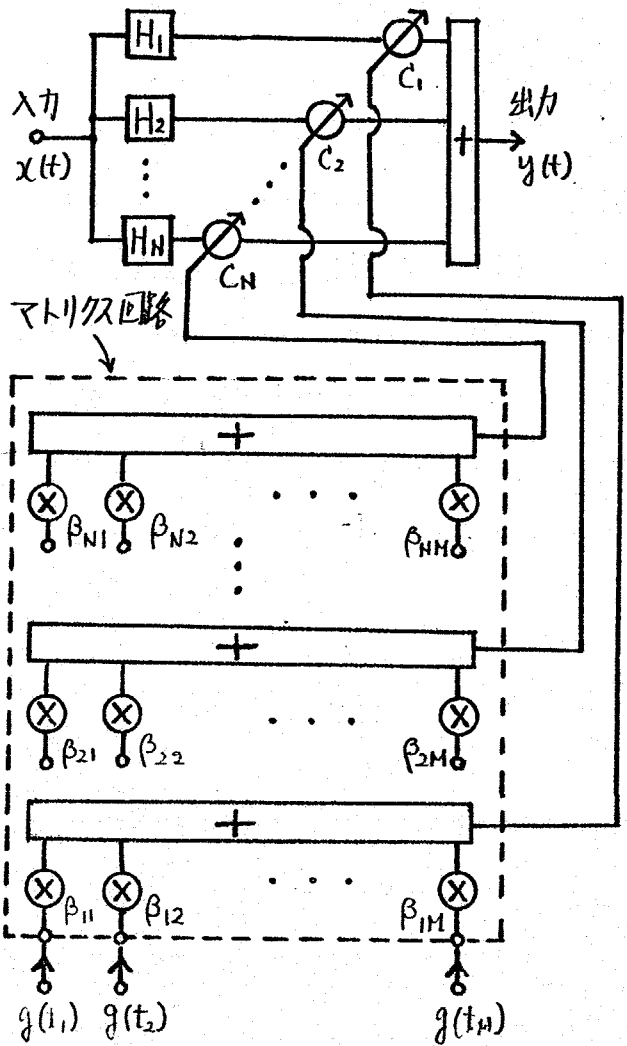
(定理4.4) 入力 $x(t)$ が定まりるとき, 任意の希望出力波形 $g(t)$ に対し, 式(4.2-19) で与えられる z を最小にするトランスミナル型回路は, タップ利得調整機構をもち, 希望出力波形 $g(t)$ の分真値をタップ利得制御入力とする回路で, (図4.6) のように構成出来る。但し, β_{ei} ($i=1 \sim N, e=1 \sim M$) は, 式(4.2-22) で与えられる。(定理4.4 終)

(証明) (定理4.2) の証明における式(4.2-24) から 直ちに得られる。

(証明 終)

本節で示した構成方法は, 前節と異なり, 固定マトリクス回路を含む

タップ利得調整機構をもち, 希望特性の分真値をタップ利得制御入力とするものであるが, マトリクス回路の係数値は, 前節の (定理4.1) 又, (定理4.2) のものと, 全く同じ, 同一である。従って, 前節の (定理4.1の系) などは, 本節に際してもそのまま成り立つ。又, 前節の構成方法が, 式(4.2-14), (4.2-16), (4.2-26) などの誤差評価式を採用した場合にも適用可能であると同様, 本節で示したタップ利得調整機構をもつ構成方法を, 以下の誤差評価式を採用した場合にも適用することの出来るという点も付け加えておく。



(図4.6) 希望特性の分真値をタップ利得制御入力とする分真総和型2重誤差最小のトランスミナル型回路(時間領域の近似)

さらに、前節に示した構成方法は、ゲイン利得が、希望特性の分母値と分子値の比
よりというところに特徴があり、本節に示した構成方法は、ゲイン利得調整機
構を必要とするが、信号経路にマトリクス回路を必要とせず、実用上に際しては、
演算誤差の影響などが少く、有利であるかと思われ。

本節及び前節に示した構成方法は、可変等化器等として、便利な形式と考えら
れ、プリセット型等化器としての応用方法については、その4.6節で簡単に述べる。
又、この比較的大きなマトリクス回路を必要とする為、マトリクス回路を
なるべく簡単に構成することが望ましいが、その点に関しては、次節で考察する。

4.4 マトリクス回路の構成に関する検討

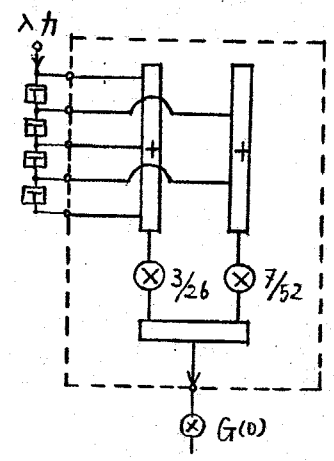
本節では、4.2節及び4.3節で述べていたトランスII-II型回路の構成が容易となり、マトリクス回路の単純化について、例によって考察する。マトリクス回路の大きさは、(タップ数) × (分枝数) であり、一般にかなり大きなものとなり、その構成には、係数が増え、経済的にも好ましくなく、出まれば、簡略化されることを望まれる。ここでは、基本的な場合の例によって、相当の簡略化が出来ることを示しておく。

代表として、4.2節(定理4.1)によれば(図4.2)の構成方法による場合を考へる。又、最も基本的なものとして、理想送達線を用いたトランスII-II型回路を想定し、(定理4.1の系)の伝定(式(4.2-10))が成り立つ場合を考へることとする。N(タップ数)=5, 分枝数(2M+1)=9の場合^(*)を例にとり、(定理4.1の系)式(4.2-11)によつて、マトリクス回路の係数値は、計算により、

$$\begin{aligned}
 \gamma_{li}^R (l=1 \sim N) &= \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \\ 3 \\ 7/2 \\ 3 \end{pmatrix} \downarrow l \\
 \gamma_{li}^R (l=1 \sim N) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1-1/13 & 1 & 1-5/13 \\ 1/\sqrt{2} & 1/13 & -1/\sqrt{2} & -1+5/13 \\ 0 & -1-1/13 & 0 & 1-5/13 \\ -1/\sqrt{2} & 1/13 & 1/\sqrt{2} & -1+5/13 \\ -1 & 1-1/13 & 1 & 1-5/13 \end{pmatrix} \downarrow l \\
 \gamma_{li}^I (l=1 \sim N) &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1/13 \tan(3\pi/8) & 0 & 1/13 \tan(3\pi/8) & 0 \\ 1/\sqrt{2} - 1/13 \tan(3\pi/8) & 1 & 1/\sqrt{2} - 1/13 \tan(3\pi/8) & 0 \\ 1 + 1/13 \tan(3\pi/8) & 0 & 1 + 1/13 \tan(3\pi/8) & 0 \\ 1/\sqrt{2} - 1/13 \tan(3\pi/8) & -1 & 1/\sqrt{2} - 1/13 \tan(3\pi/8) & 0 \\ 1/13 \tan(3\pi/8) & 0 & 1/13 \tan(3\pi/8) & 0 \end{pmatrix} \downarrow l
 \end{aligned} \tag{4.4-1}$$

(*) 次節で示すように、実際上、分枝数は、タップ数のほぼ2倍と見做すことが出来る。

となる。従って、このマトリクス回路をそのまま実現しようとすると、25回の掛算と27回の加算が必要となる(但し、係数値が零となるものは最初から除いてよい)。しかし、式(4.4-1)を42分のように、マトリクス回路の構成は、縦方向及び横方向で、同一のものがあり、これら12、適当にまとめるとか出来る。例として、縦方向(上の方向)に3項目に掛算器を減らしてやると、(図4.7)のような構成となり、14回の掛算と、22回の加算で済むことになる。



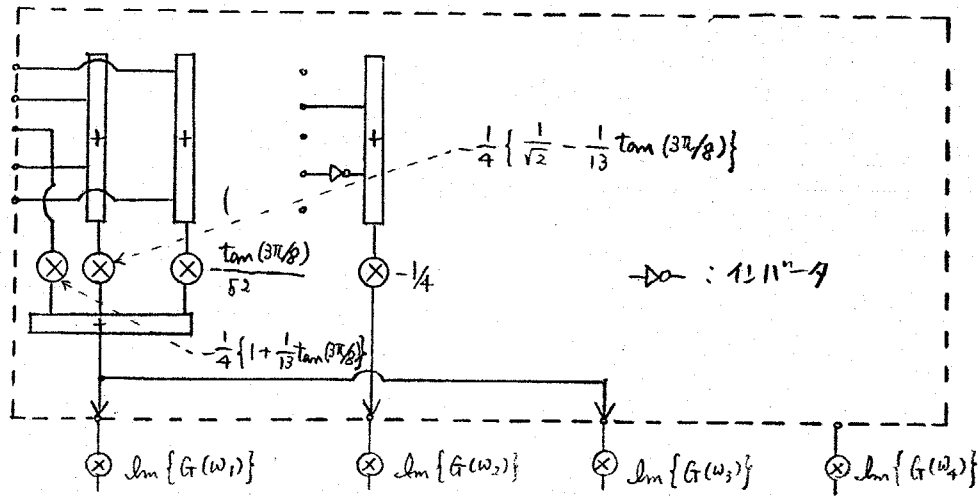
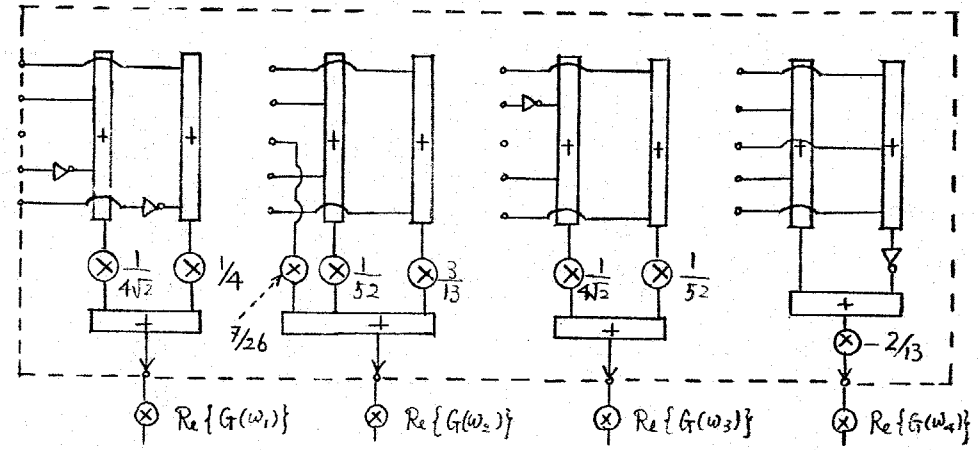
(図4.7) マトリクス回路の簡略化(1)

横方向に3項目に単純化を行うことも可能である。さらに各係数値を適当な係数値の和や差で表すなどの工夫を加えることも可能で、例として、式(4.4-1)では、 γ_{1i}^R 及び γ_{1i}^I に現れる数値は、 $\pm 1/4$ の定数を除くと、1, $1/\sqrt{2}$, $1/13$, 及び

$(\sqrt{5}-1)/13$ などが

使って表すことが出来る。これを利用すると、(図4.8)のように構成された7つが利得として $\frac{1}{4} \operatorname{Re}\{G(w_1)\}$, $\frac{1}{4} \operatorname{Im}\{G(w_1)\}$ を用いることには、マトリクス回路として、7回の掛算と、15回の加算で実現されることになる。

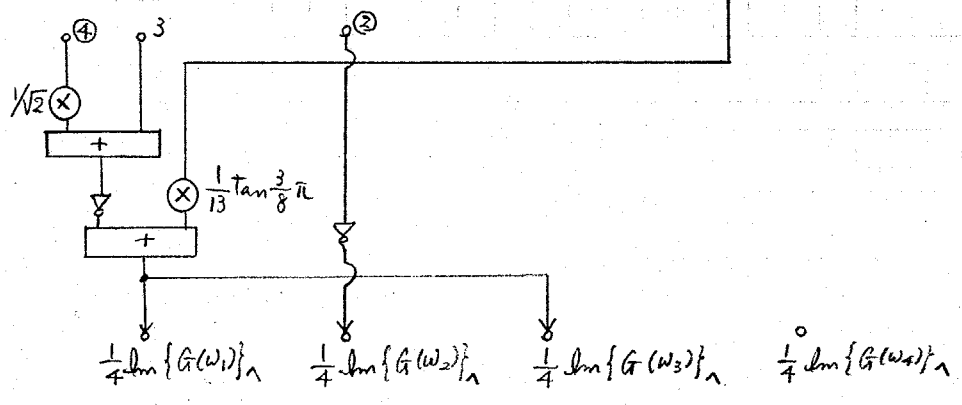
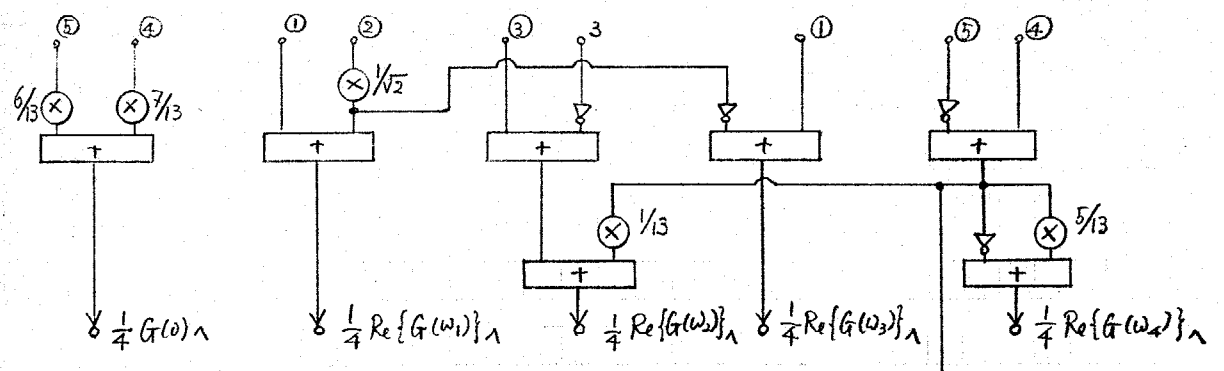
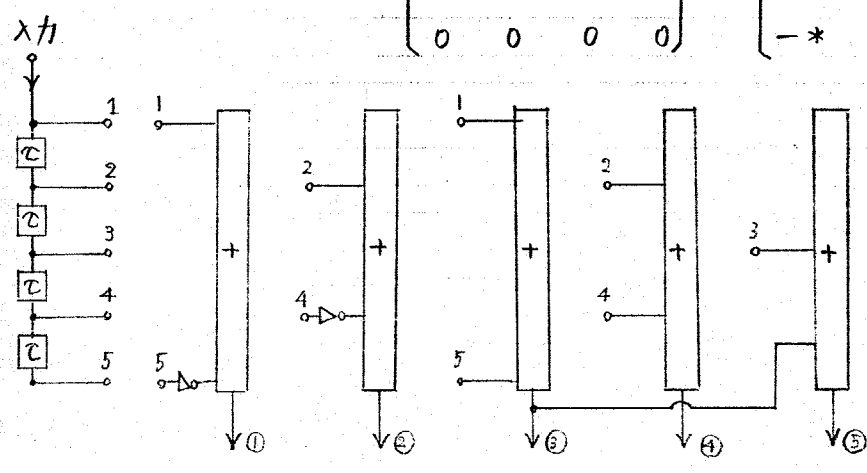
以上とは、ほ



(図4.8) マトリクス回路の簡単化(2)

$$\gamma_{li} = \frac{1}{4} \begin{matrix} 6/13 \\ 7/13 \\ 6/13 \\ 7/13 \\ 6/13 \end{matrix} \quad \gamma_{li}^R = \frac{1}{4} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{matrix} + \frac{1}{4} \begin{matrix} 0 & -1/3 & 0 & -5/13 \\ 0 & 1/3 & 0 & 5/13 \\ 0 & -1/3 & 0 & -5/13 \\ 0 & 1/3 & 0 & 5/13 \\ 0 & -1/3 & 0 & -5/13 \end{matrix}$$

$$\gamma_{li}^I = -\frac{1}{4} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} + \frac{1}{4} \begin{matrix} -* & 0 & -* & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ -* & 0 & -* & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ -* & 0 & -* & 0 \end{matrix} \quad * = \frac{1}{13} \tan \frac{3}{8} \pi$$



人の一俤りに過ぎないが、マトリクス回路の見掛けよりは、比較的簡単に構成されることを示唆するには、十分であろう。

又 デジタル回路を用いる場合には、ROMを用いることも⁽²⁴⁾、行列加算形構成⁽²⁵⁾などの方法を初用して、マトリクス回路を簡単にすることも可能と考えられるが、ここでは、深く立ち入らないことにする。

4.5. フリット型等化器としての応用

4.2節及び4.3節述べたトランスミッタ型回路の構成方法は、タップ利得あるいは、タップ利得調整機構の制御入力か、希望特性の分点値そのものによらば、可変等化器等として、便利な形式と考えられる。そこで、本節では、周波数領域でのフリット型等化器としての応用することを考え、パイロット信号として、 $\cos \omega_i t$ (あるいは、 $\sin \omega_i t$) を用いた場合、希望出力 $Y(\omega)$ に対して、トランスミッタ型回路のタップ利得 (あるいは、タップ利得の制御入力) $\text{Re}\{G(\omega_i)\}$ 及び $\text{Im}\{G(\omega_i)\}$ を求める一法を検討する。

(図4.9)に示すように、被等化回路の特性を、

$$Z(\omega) \cong R(\omega) + jS(\omega) \tag{4.5-1}$$

とし、送信端からパイロット信号として、 $\cos \omega_i t$ を送出すると、受信端で観測される受信信号は、簡単な計算により

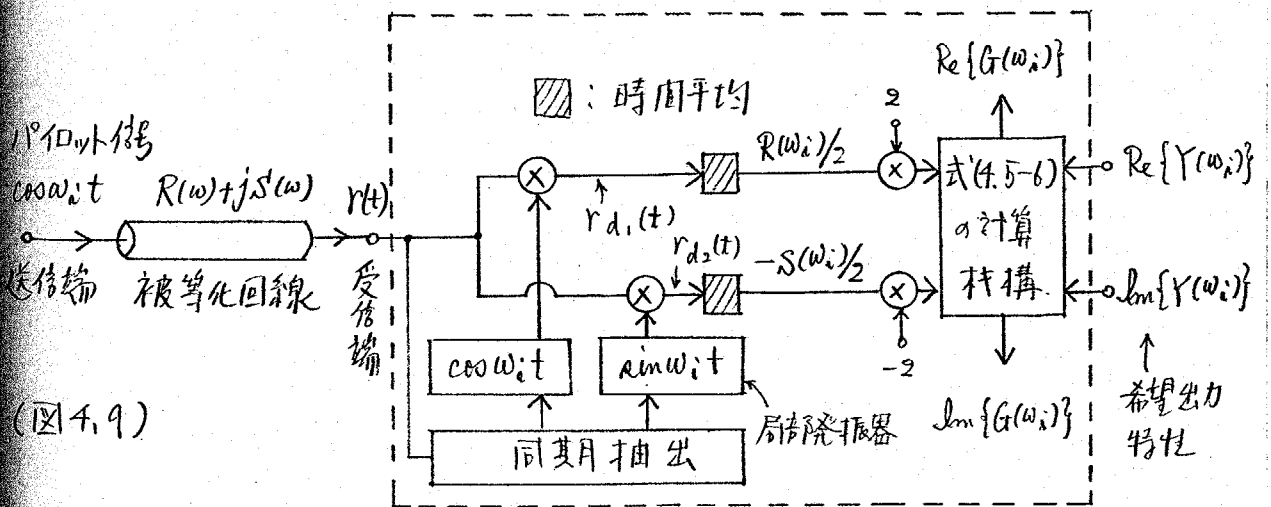
$$r(t) = R(\omega_i) \cos \omega_i t - S(\omega_i) \sin \omega_i t \tag{4.5-2}$$

となる。従ってこれから、 $R(\omega_i)$ 、 $S(\omega_i)$ を得るには、後述の、次のような方法が考えられる。

① $r(t)$ を $\cos \omega_i t$ 及び $\sin \omega_i t$ で乗積検波し、平均する。実際、

$$\left. \begin{aligned} r_{d1}(t) &\cong r(t) \cos \omega_i t = \{R(\omega_i)/2\} \{1 + \cos 2\omega_i t\} - \{S(\omega_i)/2\} \sin 2\omega_i t \\ r_{d2}(t) &\cong r(t) \sin \omega_i t = \{R(\omega_i)/2\} \sin 2\omega_i t - \{S(\omega_i)/2\} \{1 - 2 \cos \omega_i t\} \end{aligned} \right\} \tag{4.5-3}$$

となり、これらを時間平均すれば



(図4.9)

$$\left. \begin{aligned} \langle r_{d1}(t) \rangle &= R(\omega_i)/2 \\ \langle r_{d2}(t) \rangle &= -S(\omega_i)/2 \end{aligned} \right\} (4.5-4)$$

が得られる。

② $r(t)$ を $t = nT_i$ 及び $t = nT_i + T_i/4$ (但し, $T_i \triangleq 2\pi/\omega_i$) でサンプリングする。実際,

$$\left. \begin{aligned} r(nT_i) &= R(\omega_i) \cdot \cos 2n\pi - S(\omega_i) \sin 2n\pi = R(\omega_i) \\ r(nT_i + T_i/4) &= R(\omega_i) \cos\{2n\pi + \pi/2\} - S(\omega_i) \sin\{2n\pi + \pi/2\} = -S(\omega_i) \end{aligned} \right\} (4.5-5)$$

が得られる。

こうして、被等化回路の特性 $Z(\omega)$ が分かれば、希望出力特性 $Y(\omega)$ に対して、トランスリ-カル型回路の伝達特性 $G(\omega)$ が受けもつべき特性は、その比で与えられる。

$$G(\omega) = \frac{Y(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{\{Y_R(\omega) \cdot R(\omega) + Y_I(\omega) S(\omega)\} + j \{Y_I(\omega) R(\omega) - Y_R(\omega) S(\omega)\}}{R^2(\omega) + S^2(\omega)} \quad (4.5-6)$$

$$\text{但し, } Y_R(\omega) \triangleq \text{Re}\{Y(\omega)\}, \quad Y_I(\omega) \triangleq \text{Im}\{Y(\omega)\}$$

よって、この実部 $\text{Re}\{G(\omega_i)\}$ 及び虚部 $\text{Im}\{G(\omega_i)\}$ を計算する機構を設けて、4.2節あるいは4.3節で示したトランスリ-カル型回路のゲイン調整機構の根拠を(図4.9)に示しておく。

尚、パイロット信号は、適当な同期信号を有しているものと見做す。

4.6 計算例

本節では、周波数領域の2乗誤差評価式による設計に話を限定し、まず、伝達関数の近似と、振幅・位相特性の近似との関係について、簡単に考察し、続いて、バターワースフィルタを、分母総和型2乗誤差を評価式として近似した例題の計算データを示し、それによって、分母数は、タップ数のほぼ2倍と出た場合と考へられること、バターワースフィルタの次数とそれを近似するのに必要なタップ数との関係、及び、単位回路の最適な時延時間などについて述べている。又、重み関数の影響を示す例もあげている。

(i) 伝達関数の近似と振幅、位相特性の近似との関係

本章で扱っている2乗誤差評価式は、伝達関数そのものを対象としていて、通常よく取り扱われる振幅特性、位相特性といったものを直接に扱っておらず、そのほか、欠点とも考へられる。そこで、伝達関数に属する2乗誤差を対応する振幅特性と位相特性を用いて表してみよう。

$$W(\omega) \cdot |G(\omega) - F(\omega)|^2 = 4 e^{\alpha_W + \alpha_G + \alpha_F} \left\{ \sin^2 \frac{\alpha_G - \alpha_F}{2} + \sin^2 \frac{\theta_G - \theta_F}{2} \right\} \quad (4.6-1)$$

$$\text{但し、} \begin{cases} W(\omega) \cong e^{\alpha_W} & : \text{重み関数} \\ G(\omega) \cong e^{\alpha_G - j\theta_G} & : \text{希望伝達関数} \\ F(\omega) \cong e^{\alpha_F - j\theta_F} & : \text{トランスII-II型回路の伝達関数} \end{cases}$$

となる。従って、比較的近似がよくなるため、 $\alpha_G \cong \alpha_F$, $\theta_G \cong \theta_F$ と考へられるときならば、式(4.6-1)は近似的に、

$$W(\omega) \cdot |G(\omega) - F(\omega)|^2 \cong e^{\alpha_W + \alpha_G + \alpha_F} \{ (\alpha_G - \alpha_F)^2 + (\theta_G - \theta_F)^2 \} \quad (4.6-2)$$

となり、 $\alpha_W(\omega)$ を仮定すれば、

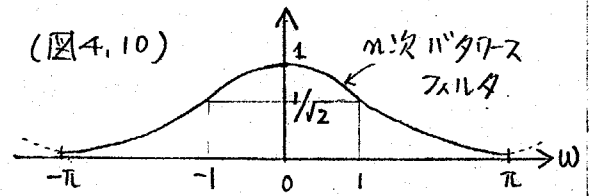
$$\alpha_W(\omega) \cong -2\alpha_G(\omega) \quad (4.6-3)$$

を選んでおけば、対応振幅と位相特性の2乗誤差の和を評価しやすくなる。一方、 $\alpha_W(\omega)$ を一定を選んでおくと、 $\alpha_G(\omega)$ の小さいところは、重みが小さくなることになる。対応振幅及び位相特性に属しては、その近似($\alpha_G(\omega)$ の小さい付近)での近似度が比較的悪くなることを予想される。

(ii) 計算データ.

ここでは、バターワースフィルタを分奏総和型2乗誤差を評価式として、最小二乗近似した計算例を示し、これによる分奏総和型2乗誤差の特徴及び、トランスパーカル型回路の近似特性について調べる。

使用するトランスパーカル型回路は、最も基本的なものとして、理想遅延線を用いた通常型のもので規定する。即ちトランスパーカル型回路の伝達関数を、



$$F(\omega) \cong \sum_{k=1}^N C_k e^{-j(k-1)\omega T} \tag{4.6-4}$$

と可す。又、近似の対象とする周波数帯域を(図4.10)に示すように $(-\pi, \pi)$ としておく。之を希望特性を、カットオフ周波数 $\omega_c=1$ のバターワースフィルタ $B_m(j\omega)$ と可す。即ち、

$$G(\omega) = B_m(j\omega) \quad |B_m(j\omega)| = 1/\sqrt{1+\omega^{2m}} \tag{4.6-5}$$

又、ここでは、便宜上、分奏総和型2乗誤差 ε を、

$$\varepsilon = \frac{1}{2M+1} \sum_{i=-M}^M W(\omega_i) |G(\omega_i) e^{j\omega_i \cdot \tau_{an}} - F(\omega_i)|^2 \tag{4.6-6}$$

と定義しておく。式(4.6-6)は、式(4.2-2)と本質的に変りないが、 $e^{j\omega \cdot \tau_{an}}$ は、トランスパーカル型回路の入力に対し、出力の時間原真を τ_{an} に4するものとを意味し、有限の時間遅れを問題としない場合には、必ずしも $\tau_{an}=0$ である必要はなく、 τ_{an} を適当に選んで、近似誤差を小さくするに可望しい。又、分奏は、等間としておく。即ち、

$$\omega_i = -\omega_{-i} = i\pi/M \quad (i=0 \sim M) \tag{4.6-7}$$

次に、各種の計算例を示すが、式(4.6-6)の ε を最小と可す $F(\omega)$ を $F_{opt}(\omega)$ とし、又、このときの分奏総和型最小2乗誤差を ε_{min} と記す。之に、分奏総和型2乗誤差の性質を調べる為、積分型2乗誤差と比較することにし、式(4.6-6)の ε を最小と可す $F_{opt}(\omega)$ に対し、

$$\varepsilon_{ms} \cong (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) |G(\omega) e^{j\omega \cdot \tau_{an}} - F_{opt}(\omega)|^2 d\omega \tag{4.6-8}$$

を定義しておく。

以下 幾つかの計算例についてまとめしておく。

① タップ数 (N) と分位数 ($2M+1$) の関係 (図4.11)

(図4.11) (a) から (図4.11) (d) に、1次, 3次, 5次のバターースフィルタを希望特性とし、決ったタップ数 (N) に対して、 M を変えたときの E_{min} 及び E_{ms} の計算結果を示している。图中、 $M=\infty$ として示しているのは、積分型2乗誤差

$$\varepsilon' \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) |G(\omega) e^{j\omega T_{\text{can}}} - F(\omega)|^2 d\omega \quad (4.6-9)$$

を最小とする設計により得られる最小近似誤差を表している。式(4.6-6)の ε は、計算の容易さと言う点から、式(4.6-9)の ε' の代りに用いられているものと見られる、この点を考慮して、(図4.11)の結果をみると、分位数 ($2M+1$) は、タップ数 (N) の何倍とせばよいことが分る。即ち、 $M \approx N$ の場合と比較し、 $M \gg N$ とした時、 E_{ms} の改善度は比較的小さい。

このことから、以下の計算例では、 $M=N-1$ としている。

② タップ数と最小近似誤差の関係 (図4.12)

(図4.12) に 1次, 3次, 5次のバターースフィルタを希望特性としたときのタップ数と最小近似誤差の関係を示している。タップ数を、それ以上増しても、最小近似誤差の改善度が顕著でない、あるいは、平均2乗誤差が、 10^{-4} 以下になる^(*) という目安で、必要なタップ数を決めることにすると、バターースフィルタの次数に対して、その3倍から4倍のタップ数を用いればよいと云うことが、(図4.12) から、得られる。

③ 単位回路の遅延時間 τ_c と最小近似誤差の関係 (図4.13)

(図4.13) (a) から (図4.13) (c) に、1次, 3次, 5次バターースフィルタを希望特性とし、タップ数 N を 5, 9, 15 とした場合の単位回路の遅延時間 τ_c と最小近似誤差の関係を示している。但し、近似の対象とする周波数帯域は $(-\pi, \pi)$ で変りはない。各場合に依りて最適な遅延時間 τ_c が存在するが、(図4.13) (c) の5次バターースフィルタを近似する場合とは、 $\tau_c=1$ がいつ

(*) ナイキストレイトでの符号間干渉が、1%未満であることにはほぼ相当し、この程度に誤差を抑えるのが一般的のようである。(22)

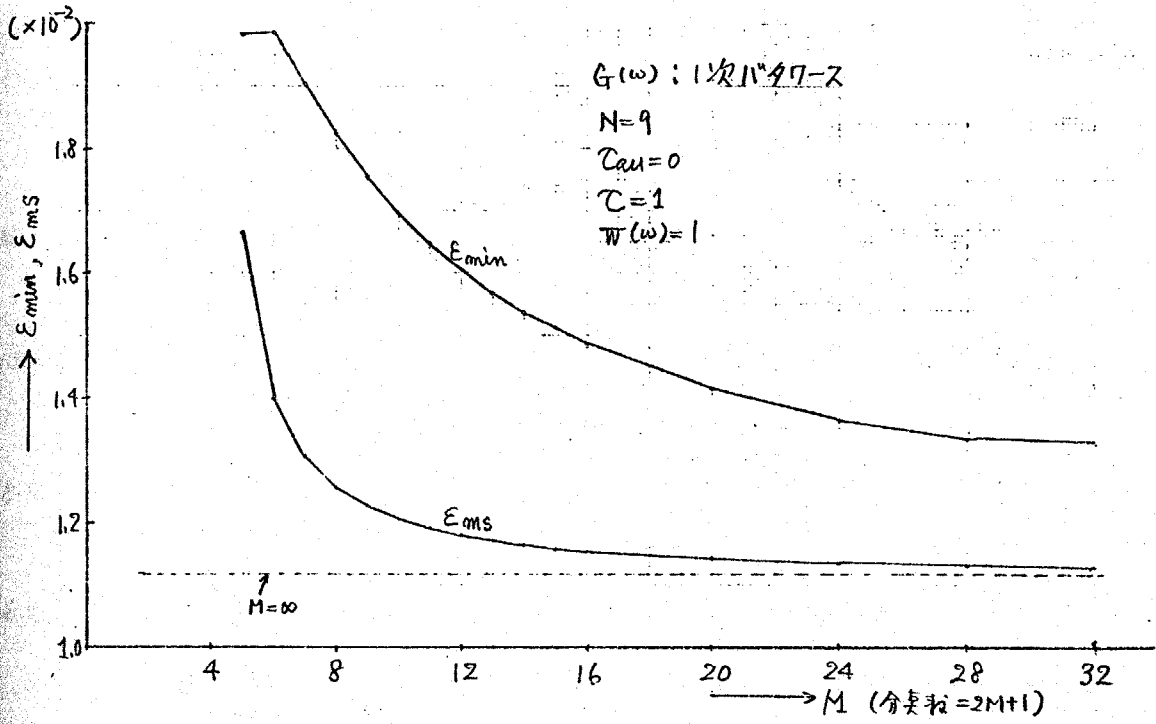
が最適であるのに対し、1次及び3次バターズフィルタを近似する場合に
は、 τ の最適値は、タップ数 N に依存し、一般に、タップ数 N が大きい
ほど、最適な遅延時間 τ の値は、小さくなる。ここに示したように、単位
回路の遅延時間を最適な値にすることにより、最小近似誤差を相当改
善することが出来るが、第2章 2.3節と同様に $\tau < 1$ の場合には、
タップ利得が小さくなることから起り得る²⁾、その点は注意を要する。

④ 出力の時間係数 τ_{an} と最小近似誤差の関係 (図4.14)

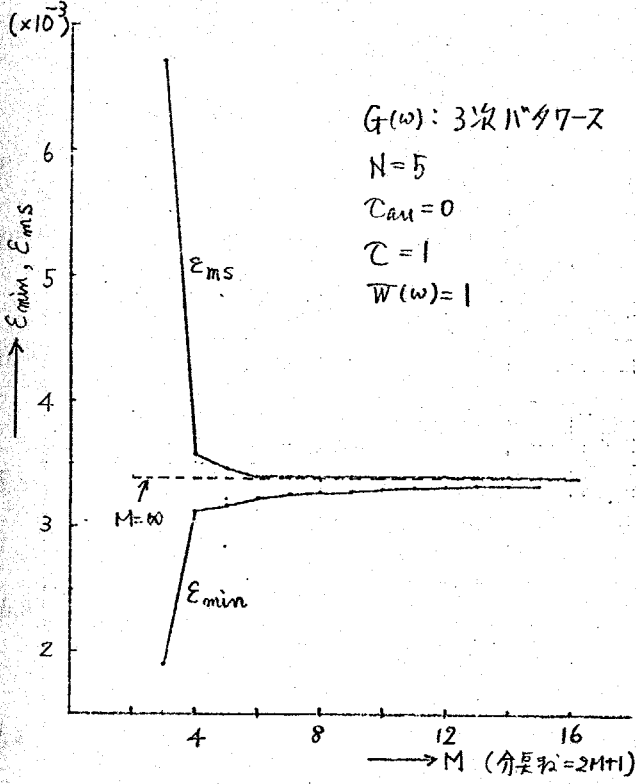
(図4.14) (a) から (図4.14) (c) に 1次, 3次, 5次 バターズフィルタを希望特
性とし、タップ数 N を 5, 9, 15 とした場合の τ_{an} の選り方と最小近似誤
差の関係を示している。 τ_{an} の選り方により、最小近似誤差が相当改善
される場合があることが分る。この τ_{an} を概略的に求める手法が提案され
ている⁽²³⁾が、あくまで、およその最適値が得られるだけで、一般には不充
分のようである。正確には実際に計算を行ってみることが必要と思われる。

⑤ 近似特性の例 (図4.15)

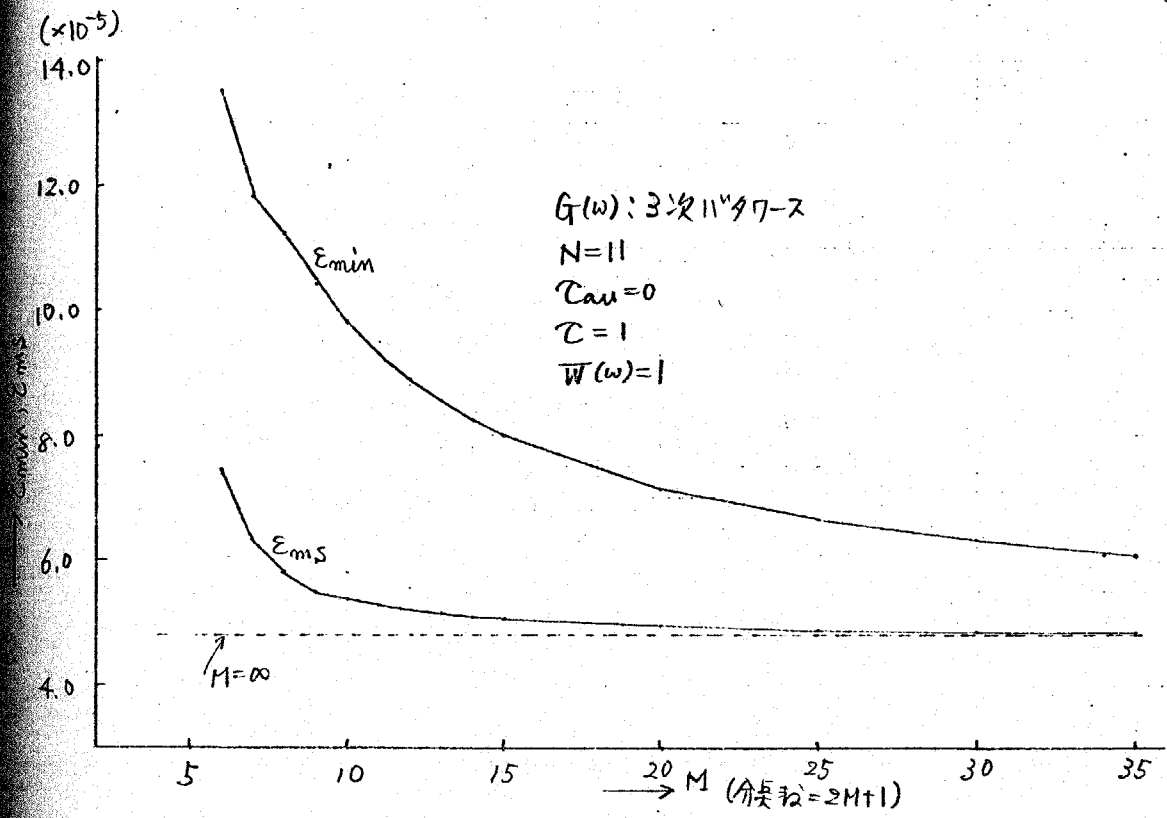
(図4.15) (a) から (図4.15) (c) に 5次バターズフィルタを希望特性とし、タッ
プ数 N を ② に従って、次段の3倍の 15 とした場合の近似特性を示してい
る。(図4.15) (a) は、 $\tau_{an} = 0$, $w(\omega) = 1$ の場合であり、阻止帯域での位相特
性の近似がやや悪くなっている。(図4.15) (b) は、 $\tau_{an} = 0$, $w(\omega) = \sqrt{1 + \omega^{10}}$
($= 1/|B_5(j\omega)|$) とした場合の例であり、(図4.15) (a) の場合に対し、阻
止帯域での位相特性の近似度は良くなるが、通過帯域内で、多少
振幅特性の近似度が劣化している。(図4.15) (c) は、④で示した (図4.14)
(c) から、 τ_{an} とし、最適値 $\tau_{an} = 1.340$ を選り、 $w(\omega) = 1$ とし、近似した
例である。相当よい近似特性が得られており、 δ_{ms} も 2.6744×10^{-5} だけ
(図4.15) (a) の場合と比べ、1桁小さくなる。



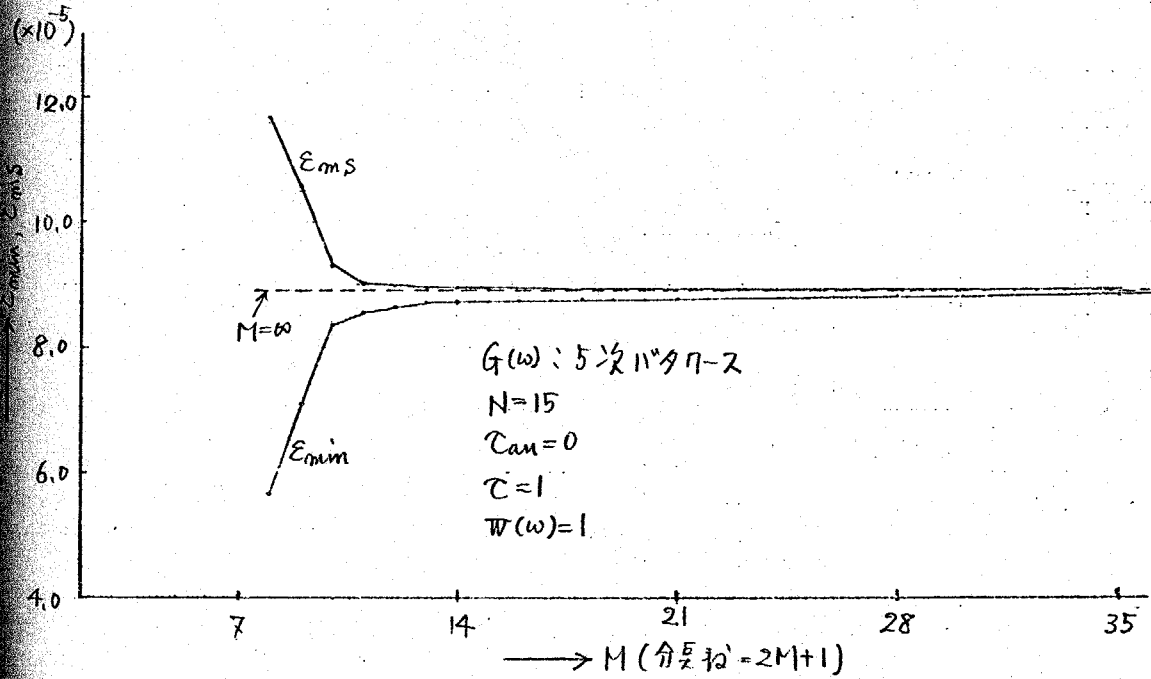
(図 4.11) (a)



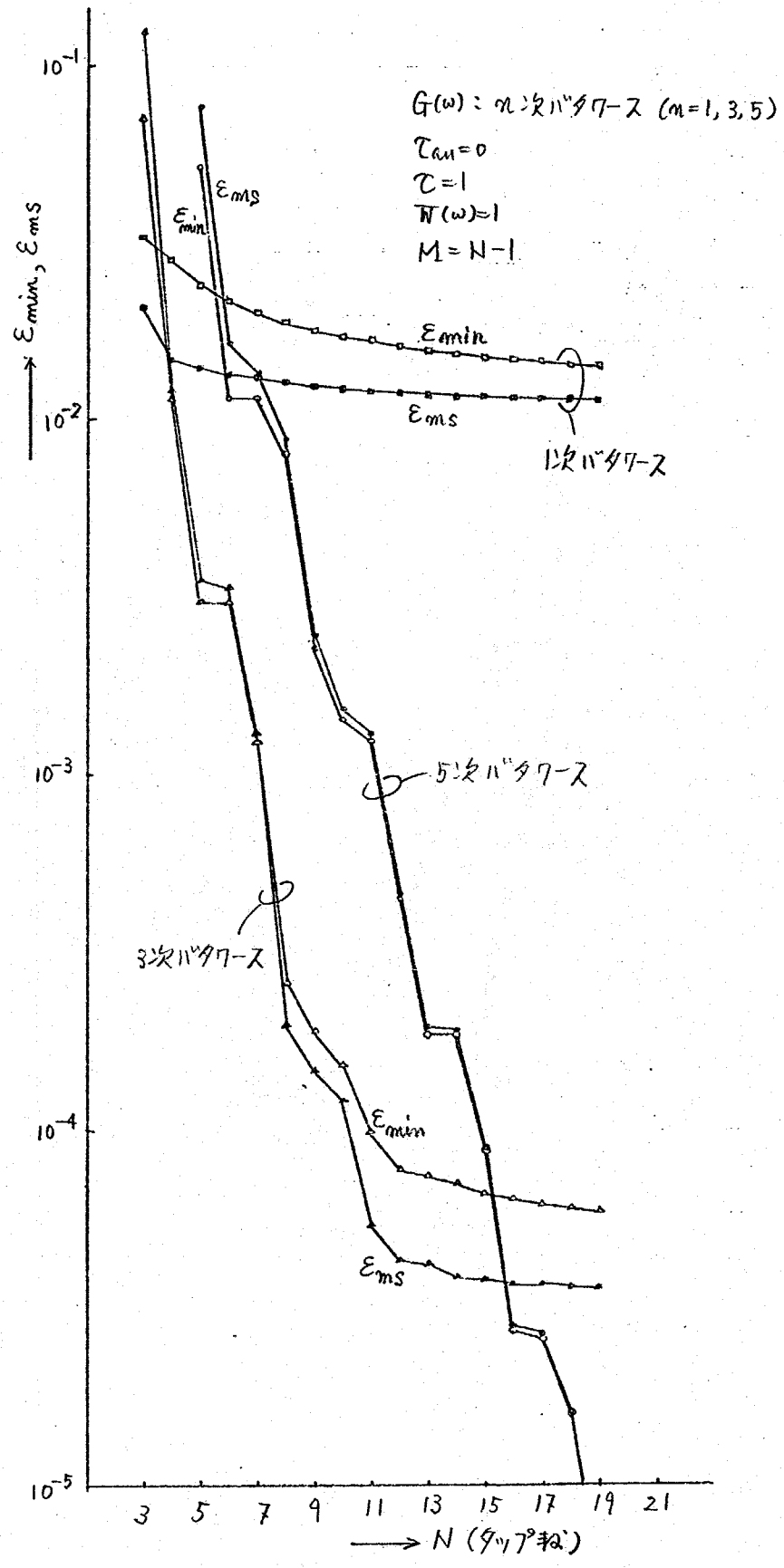
(図 4.11) (b)



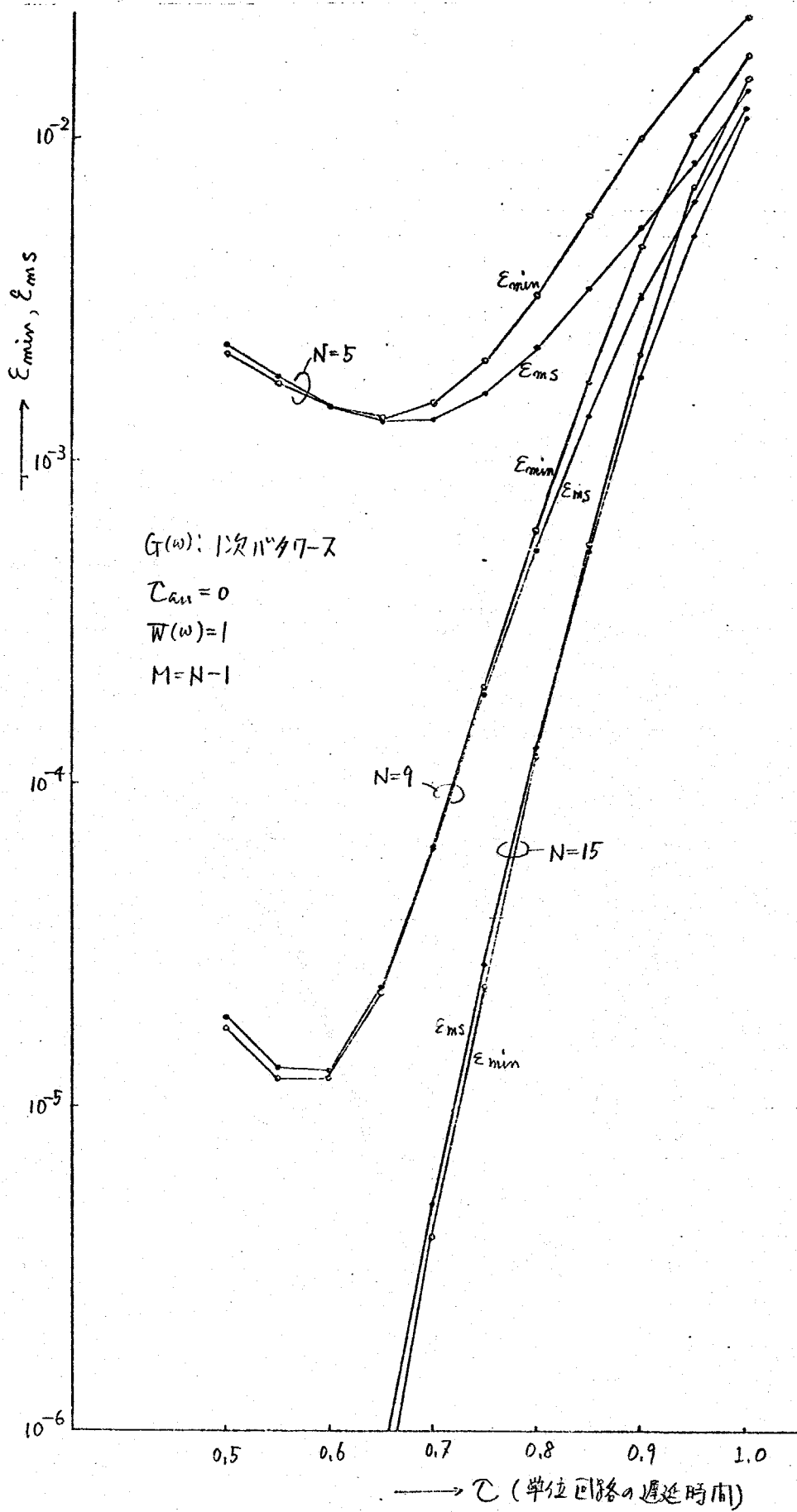
(図4.11)(c)



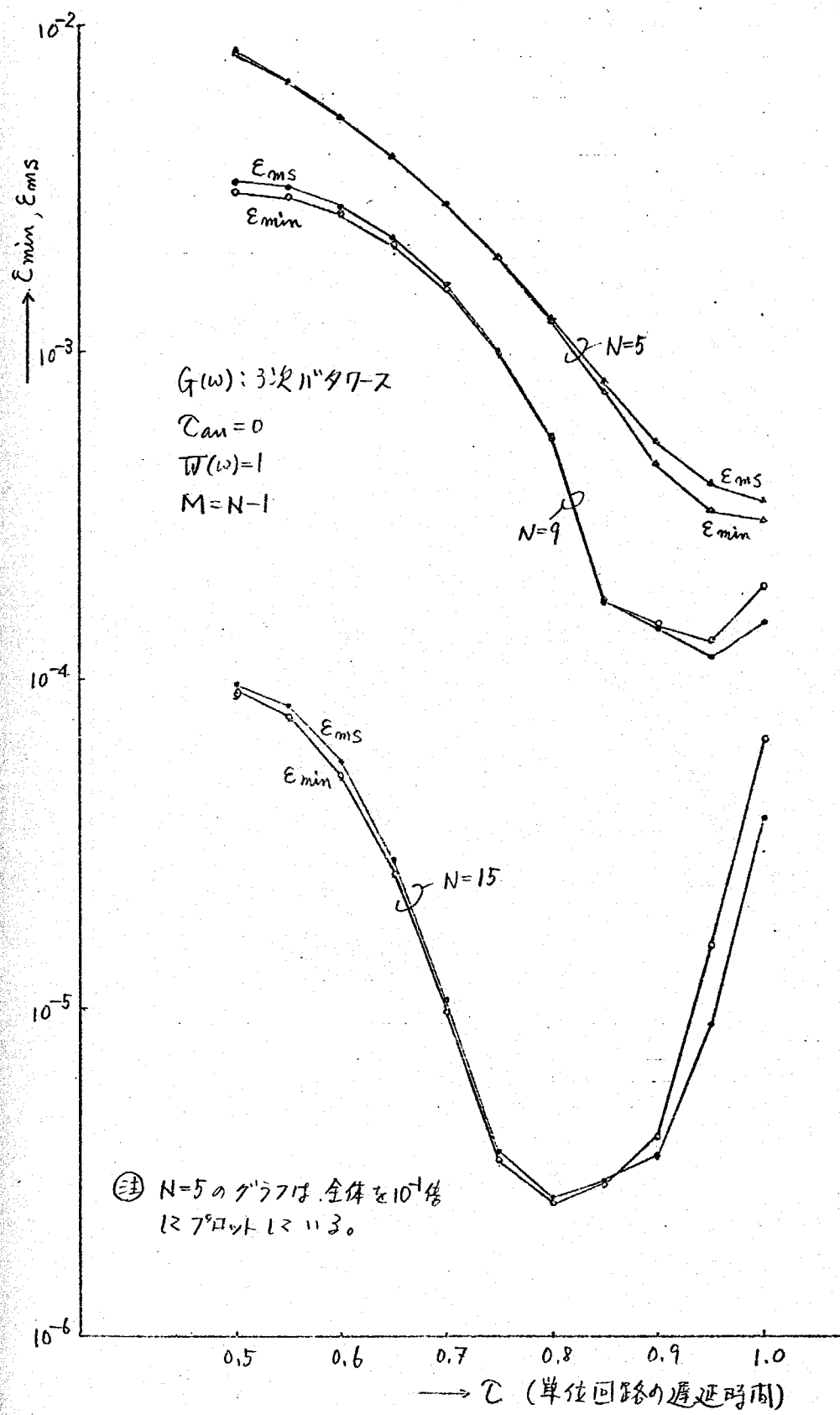
(図4.11)(d)



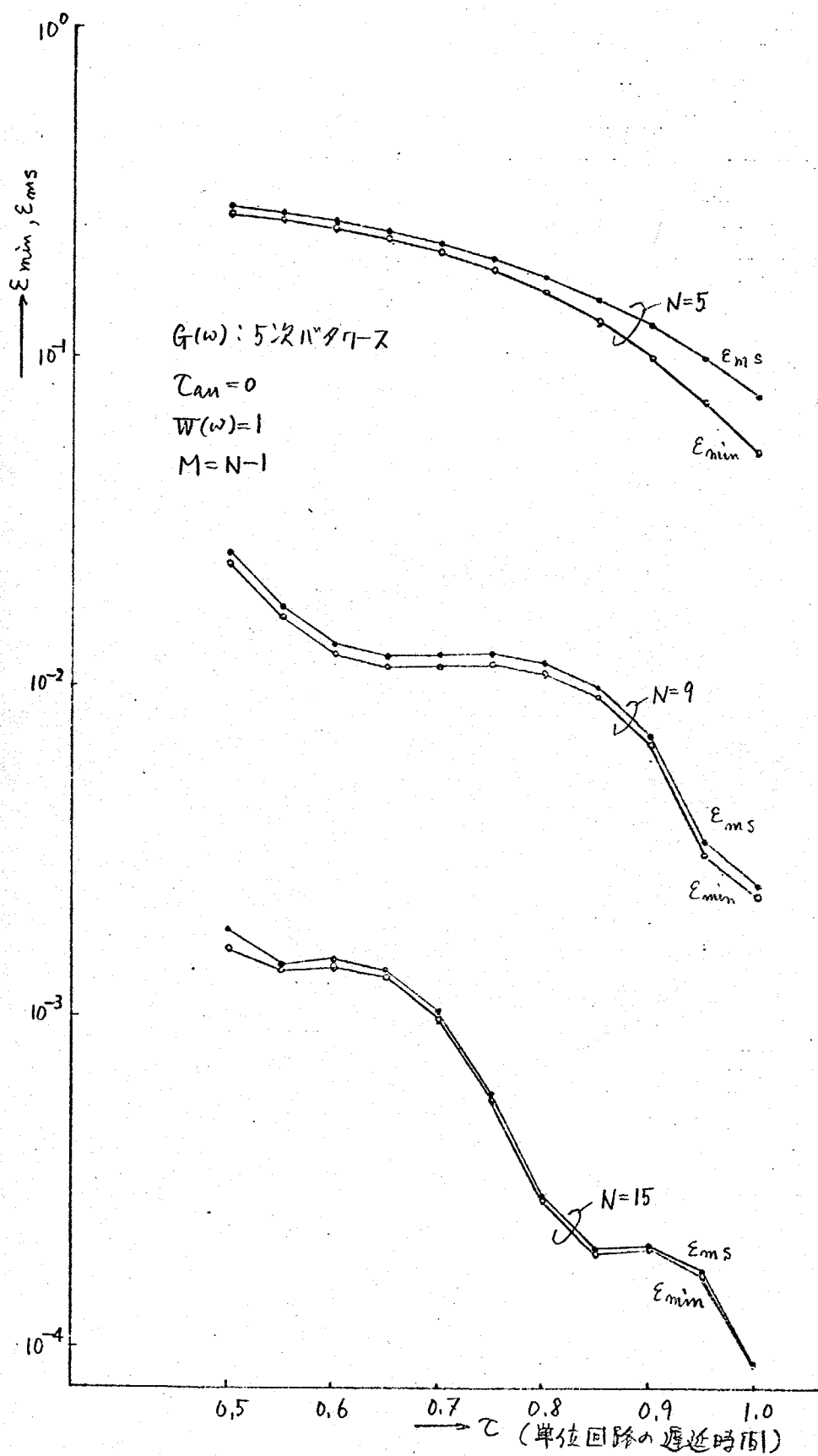
(図 4.12)



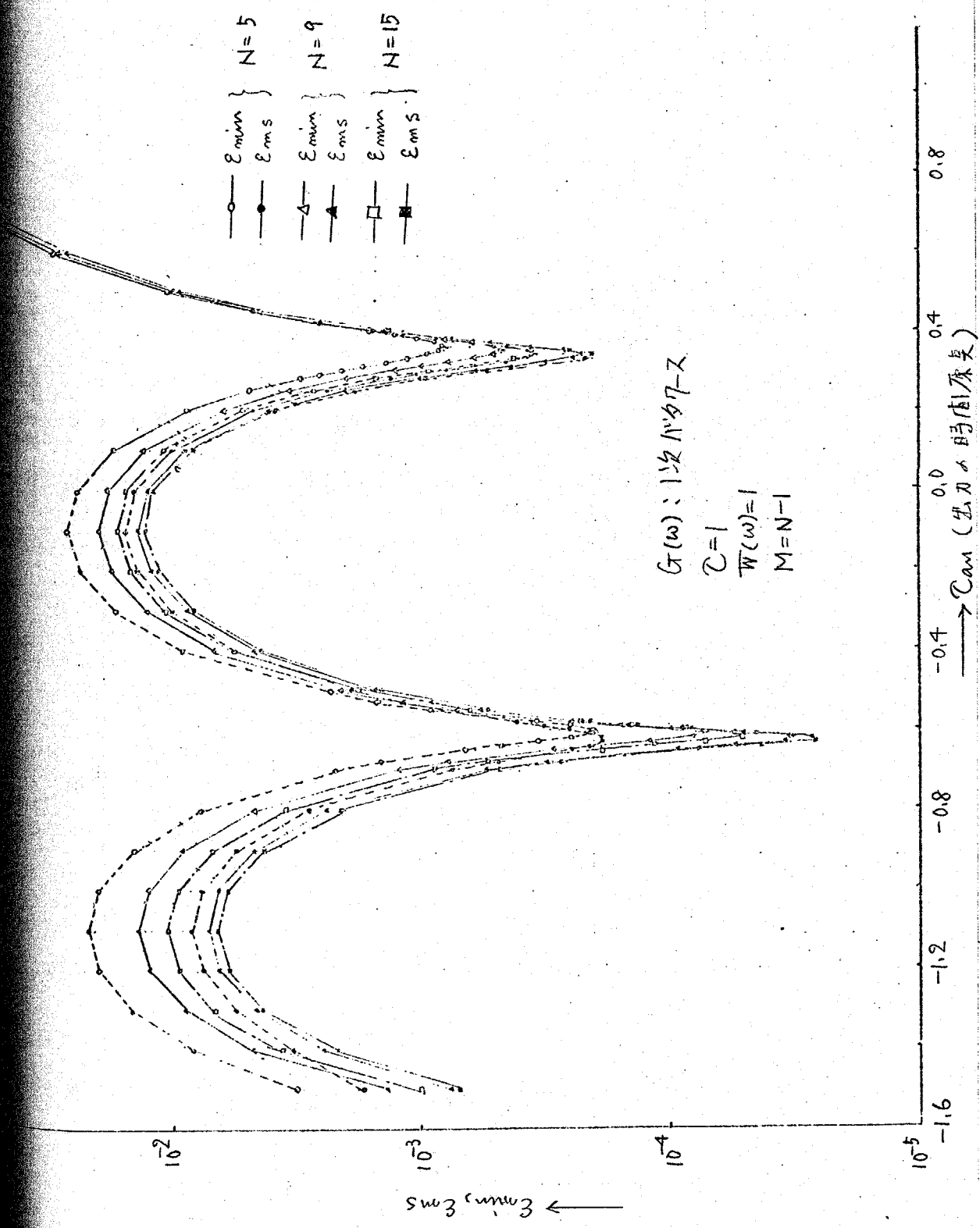
(図 4.13) (a)

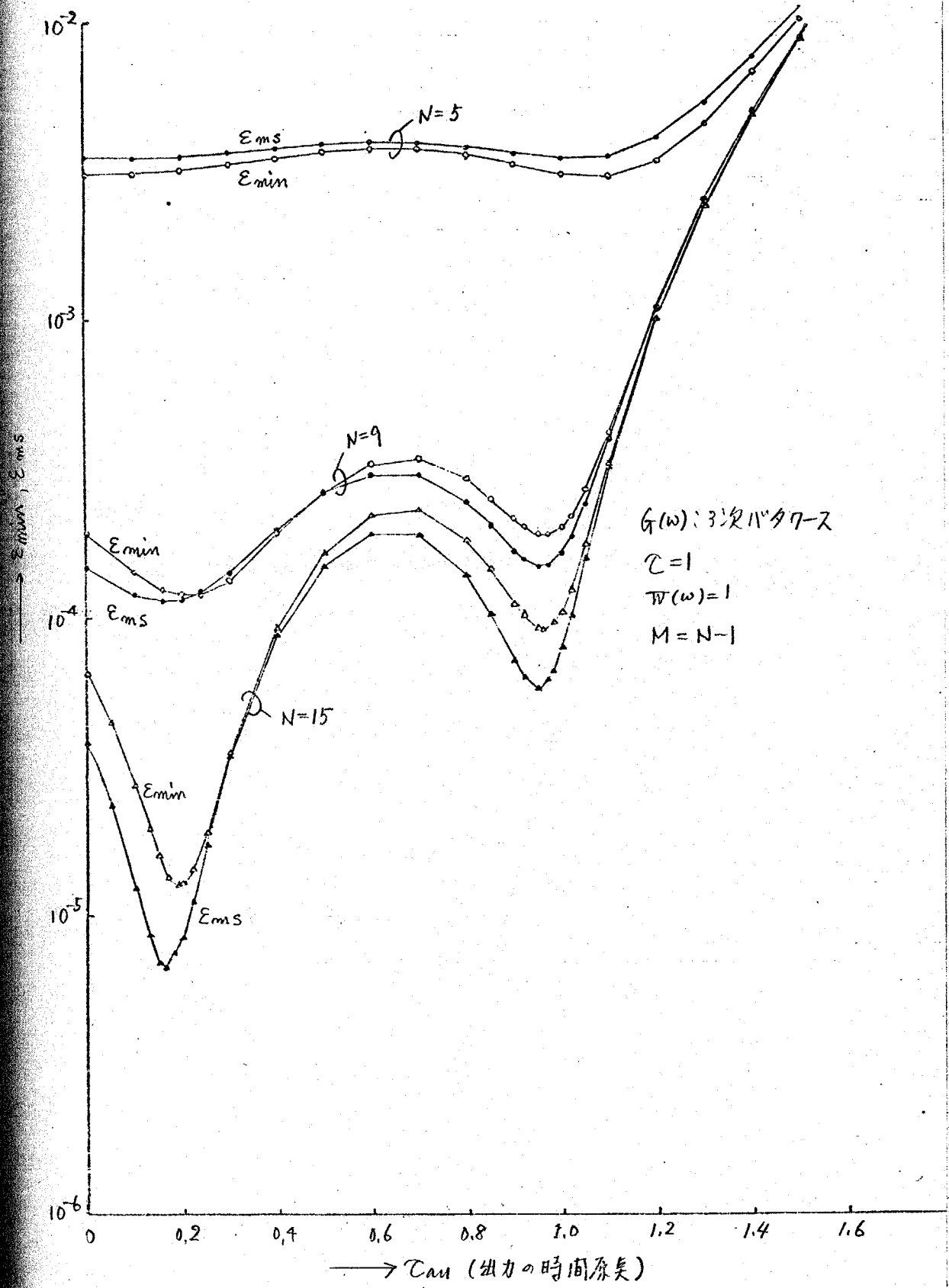


(図4.13) (b)

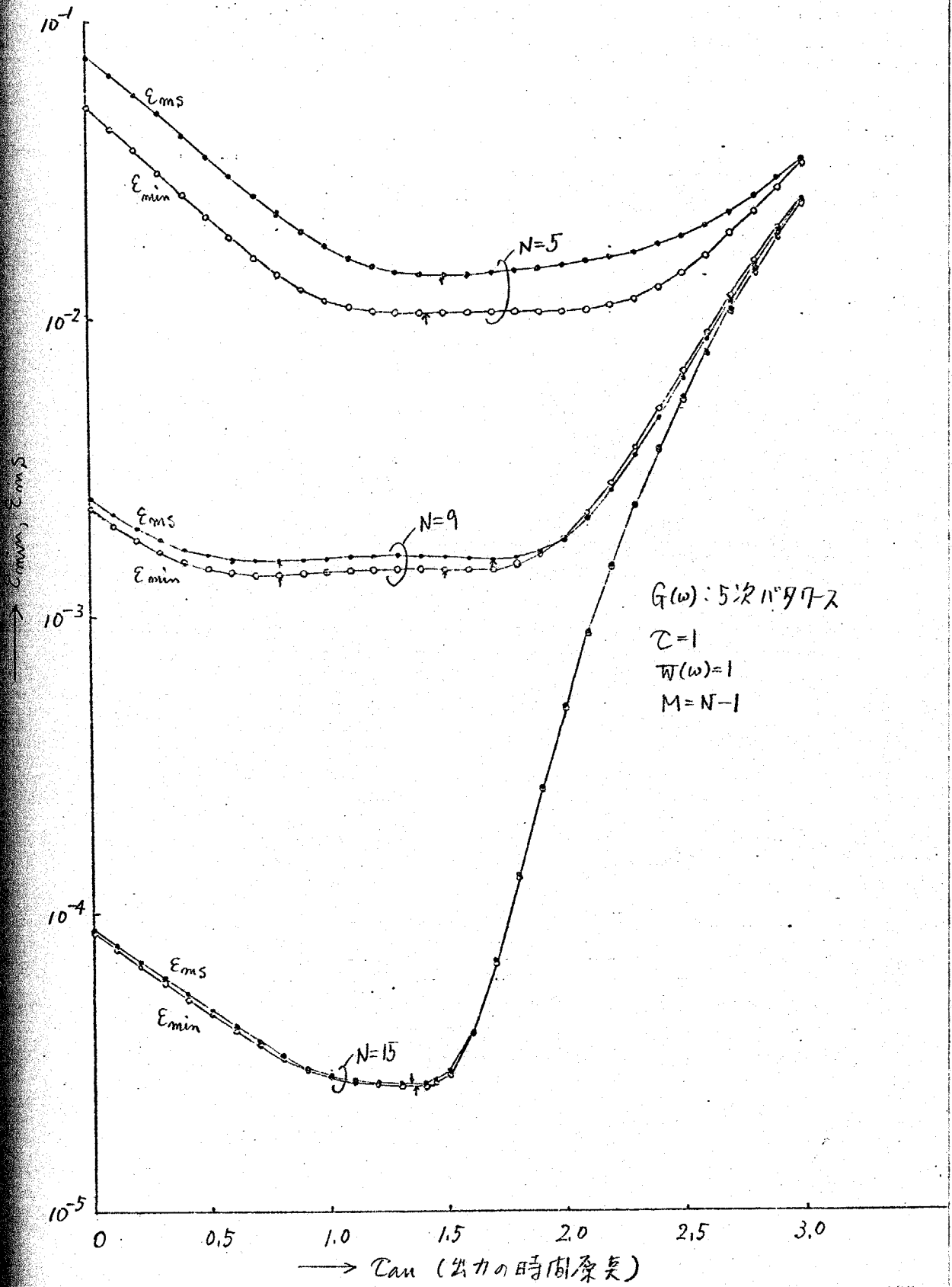


(図4.13) (C)

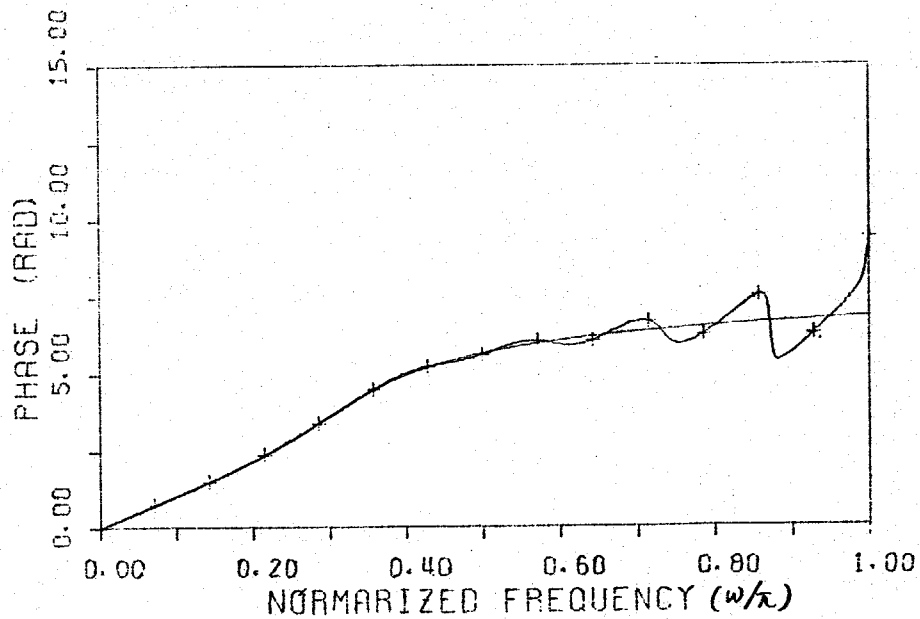
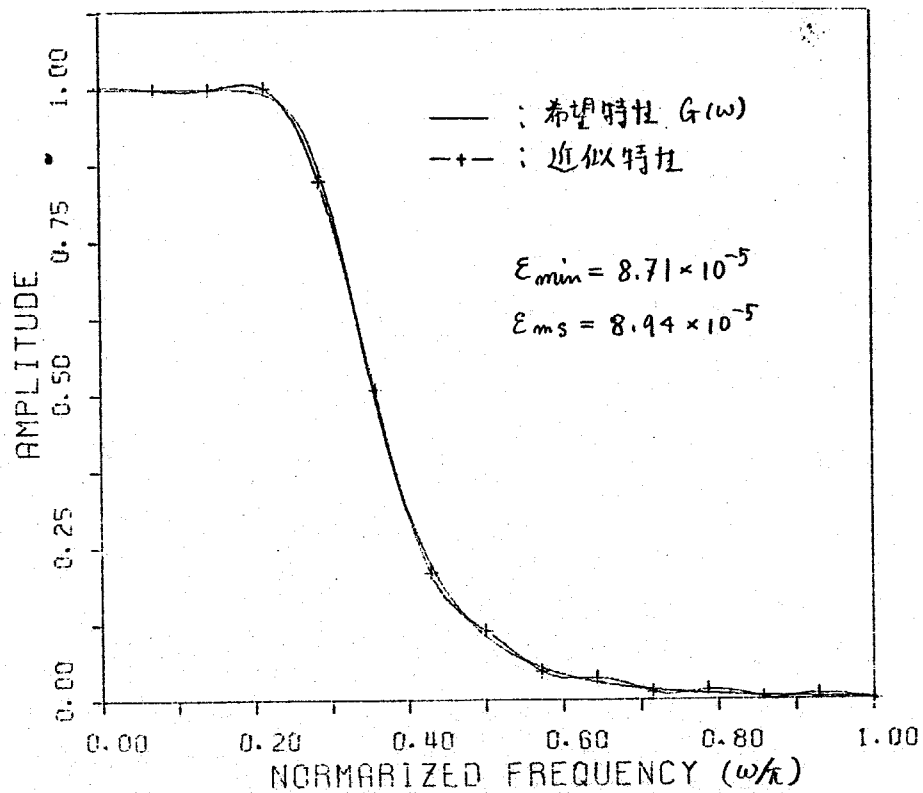




(図4.14) (b)



(図4.14)(c)



(图4.15)(a)

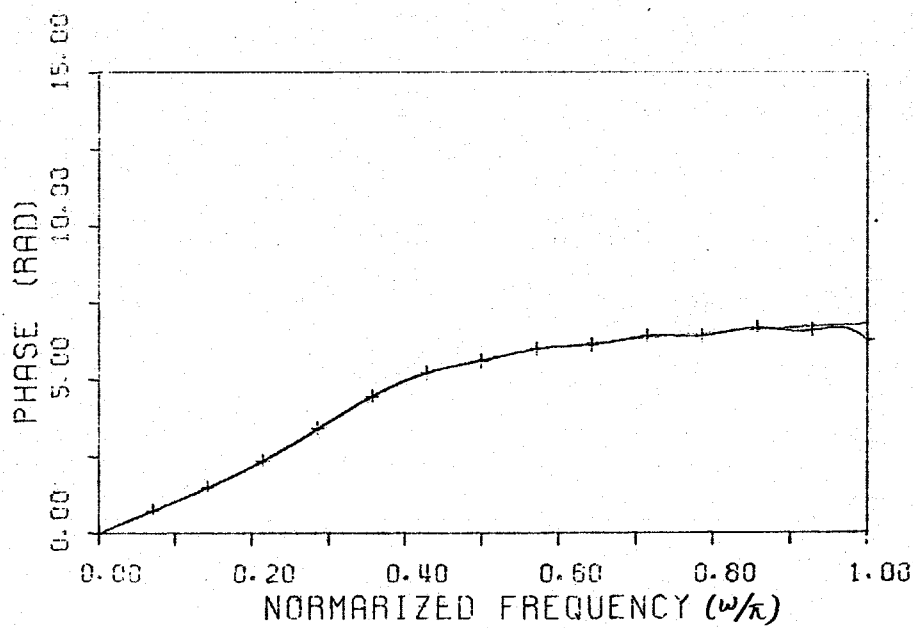
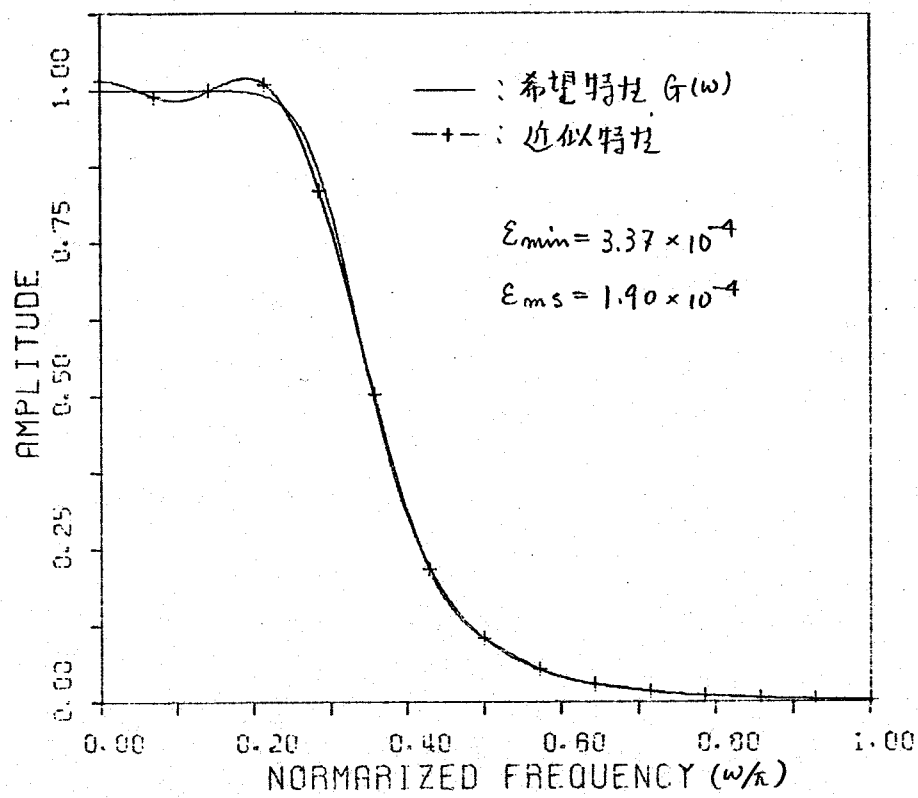
$G(\omega)$: 5次ハタケ-ズ

$\tau_{am} = 0$

$\tau = 1$

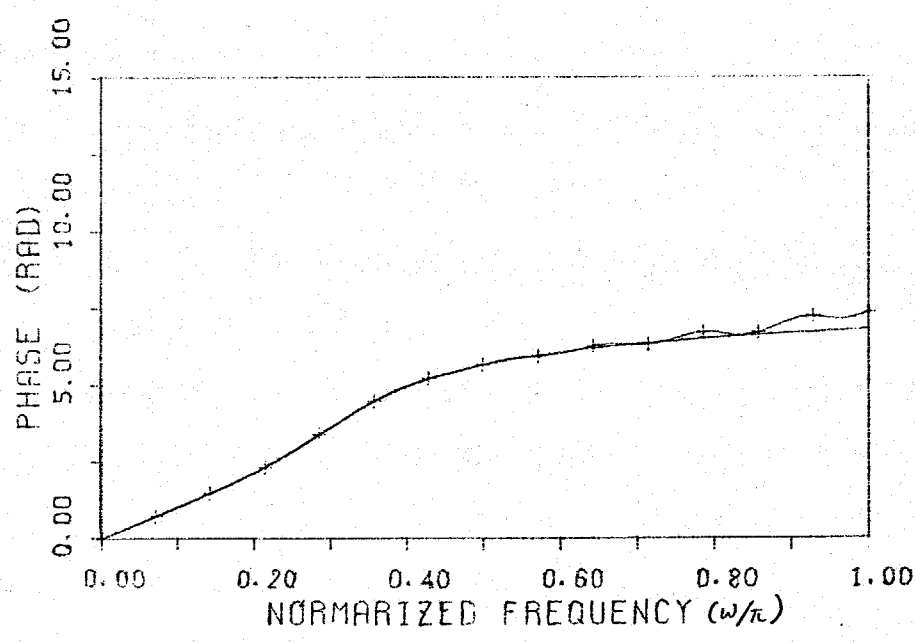
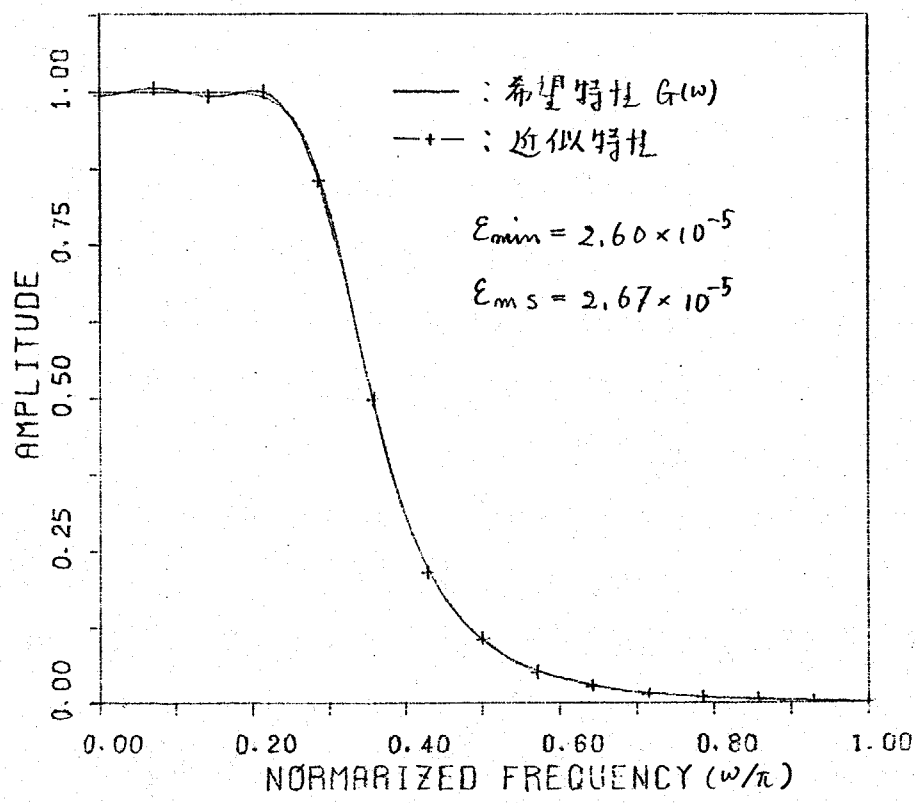
$W(\omega) = 1$

$N = 15, M = 14$



(例 4.15) (b)

 $G(\omega)$: 5次バターズ $\tau_{\text{an}} = 0$ $\tau = 1$ $\overline{W}(\omega) = \sqrt{1 + \omega^{2N}}$ $N = 15, M = 14$



(例 4.15) (c) $G(\omega)$: 5次ハイパス
 $\zeta_{an} = 1.340$
 $\zeta = 1$
 $\bar{W}(\omega) = 1$
 $N = 15, M = 14$

4.7 あとがき.

本章では, タップが2分岐型に決つてしまふ. 分岐-総型²の設計方法に対し, 分岐の数が任意に多く取れる分岐総和型²の誤差を誤差評価式として用い, しかもタップ利得, あるいはタップ利得制御入力が希望特性の分岐値とのもつて与えられる. 分岐総和型²の誤差最小トランスバーカル型回路の構成方法を周波数領域の近似の場合と時間領域の近似の場合について示した. 又, そのとき, 必要とするマトリクス回路の簡略化を例に示した. さらに, 本章で示した構成方法が, 可変等化器として, 便利な形式があることを注目し, ハイロッド伝送として, $ck\omega_0 t$ を用いた フォリセット型等化器としての応用について考察した. 最後に, バタワースフィルタを希望特性として, 近似した場合の計算ワークにより, 分岐総和型²の誤差の特徴を調べ, タップ数と分岐数の適当な関係, 適当なタップの板, 単位回路の最適遅延時間, 重み関数の影響などについて示すことが, 設計指針を示した.

残された問題点としては,

- i) 4.4節で述べたマトリクス回路の簡略化に対し, さらに系統的な検討を加えること.
- ii) 4.5節③,④で述べた単位回路の最適遅延時間, 及び最適出力時間間隔の決定法を確立すること.
- iii) 4.2節あるいは4.3節で示した構成方法によるトランスバーカル型回路を伝達関数のツミエレタとして, 用いることが考えられるが, その可能性の検討及び他の方法(例えば, FFD など)との比較検討を行うこと.
- iv) 振幅等化器あるいは位相及び遅延等化器として, 用いる場合の1つの積み上げ等による実際的検討

などが, あげられる.

第5章 トランスバーサル型回路の偏差解析

5.1 はしがき

現在、各種通信路の歪を等化す目的で、トランスバーサル型回路が広く利用されているようであるが、その特性には、非常に厳しい精度が要求される。回路パラメータの微小な偏差による特性のずれも無視出来ないものとなる。従来のタップ付遅延線等を用いた通常の固定等化器において、偏差の影響が問題となるのは、言うまでもないが、最近注目を浴びている電荷転送素子を用いたトランスバーサル型回路でも、一種の素子偏差として扱うことが可能と考えられる。電荷転送損失などが大きい問題となっているようである。⁽²⁷⁾ さらに、ある種のパラメータの偏差は、等化を行う帯域で、トランスバーサル型回路が本来具備すべき、歪歪の完全性を損うと考えられる⁽¹⁶⁾⁽²⁹⁾ タップ利得の調整では、補償出来ないと言うことが起り、偏差解析をすることが、重要な意味をもたらくことになる。又、通信上の問題であるタイミングの位相ずれなども、入力端に挿入した遅延素子のずれとして扱うことが出来ると考えられ、偏差解析が、そのような加用面を持つべきことを示唆している。

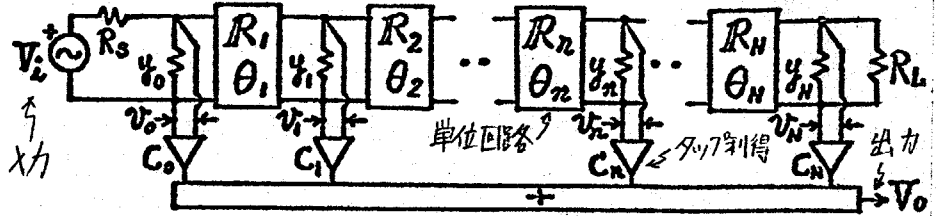
以上のような背景から、本章では、トランスバーサル型回路の各種パラメータの偏差が、その特性に与える影響を一次近似によって調べよう。まず、5.2節では、本章で扱うトランスバーサル型回路の構成と、偏差の生じる回路パラメータについて説明している。次に、5.3節では、基本的な特性である伝達関数への影響を一次近似によって調べ、その大きな特徴を述べている。5.4節では、5.3節の結果を振幅及び位相特性への影響という形で書きおとし、計算例を付して、一次近似による式が、使用に耐えるものであることを示している。5.5節では、時間領域標本値への影響を、標本誤差の重みで評価することとし、その一次近似による式を導くと共に、例によって、偏差の生じるパラメータ及びその位置による影響の特徴を示して

113。5.6節では、偏差の影響が、タイプ利得の調整による。概算出給
か否かにより、偏差の種類を分類することを提案している。又、5.7節では、タ
ップ利得が統計的である場合とそうでない場合の影響を伝達関数の変化分の
2乗絶対値の平均で評価することをし、通常型構成によるトリスバーナル型回
路と総統型構成によるものとの比較を行っている。

5.2 準備.

本節では、本章、特に5.6節で扱うトランスパーナル型回路の構成及び偏差の生じる回路パラメータについて説明し、以下の準備を要す。

トランスパーナル型回路の構成を(2)かより一般的に思われは、PTC要素を用いた(図5.1)の構成を想定する。



(図5.1) トランスパーナル型回路の構成

ここで、 R_s, R_L は始終端抵抗、 $C_0 \sim C_N$ はタップ利得、 $y_0 \sim y_N$ はタップ利得を構成する増幅器の入力アドミタンス、 $R_1 \sim R_N$ 及び $\theta_1 \sim \theta_N$ は、単位回路の映像伝導アドミタンス及び映像伝播定数である。但し、

$$R_n \cong (R'_n, R_n^2) \quad n=1 \sim N \tag{5.2-1}$$

又、正規の状態では、整合が取れている。

$$\left. \begin{aligned} R_s = R'_1 = R_1^2 = \dots = R'_N = R_N^2 = R_L \cong R \text{ (純抵抗)} \\ \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_N = \theta \text{ (純虚数)} \\ y_0 = y_1 = \dots = y_N = 0 \end{aligned} \right\} \tag{5.2-2}$$

が成立しているものとし、このときの伝達関数を

$$\begin{aligned} F_0(\omega) &\cong \sum_{n=0}^N C_n e^{-jn\theta} \\ &= 2V_o/V_i \end{aligned} \tag{5.2-3}$$

とおいて、基準の伝達関数とする。

又、偏差の生じる回路パラメータとして、<表5.1>にあげたものを考えることにする。但し、(vi)は、単位回路として、集中定数の全域通過回路を用いた場合で、1つの単位回路

<表5.1> 偏差の生じる回路パラメータ

A)	(i)	タップ利得	: C_g
	(ii)	単位回路	映像伝播定数 : θ_p
B)	(iii)	回路	映像伝導アドミタンス : R_p
	(iv)	増幅器の入力アドミタンス	: y_g
	(v)	始終端抵抗	: R_s, R_L
	(vi)	単位回路の単一称偏差	

A)は、段間の整合条件が崩れる場合。

B)は、" " " " 崩れる場合。

$$g: 0 \sim N, p: 1 \sim N$$

を構成する インダクタス 及び キャパシタが それぞれに属して、一対の偏差をもつて
場合である。

以下、5.3節から5.5節までにおいて、〈表5.1〉における、各種回路パラメータの微小偏差が、トランスミナル型回路の各種特性に与える影響を、一次近似により、調べていくことにする。この一次近似により、5.3 及び、5.4節の議論においては、同時に2つ以上の回路パラメータに偏差が生じた場合の影響は、単に各々の場合の特性への影響の和として表されることに注意しておく。

又、ここで議論を一般化して、無意味であるので、〈表5.1〉の(VI)を除き、他の場合には、トランスミナル型回路の単位回路の映像伝播定数は、

$$\theta_n = j\omega T_n, \quad \theta = j\omega T \quad (T=1) \quad (5.2-4)$$

であるものとす。さらに、煩雑さをさける為、細かい式の誘導は、多くを省略する。

5.3. 伝達関数への影響.

本節では、表5.1にある、トランスミナル型回路の各種構成パラメータの偏差が、伝達関数に与える影響を、式(5.2-3)の基準特性 $F_0(\omega)$ からのずれとして、一次近似に扱う。尚、本節の書き方としては、見易さを考慮して、表5.1の式(1)の結果を列挙して、その後でまとめ、注釈を加えることにし、式の導出や証明に関しては、節の最後で簡単に述べることにする。又、本節の結果は、後に続く節の議論の基本となるのである。

まず、 $F(\omega)$ で、偏差の起る場合の伝達関数を表すことにして、式(1)の結果を示しておく。

(i) タップ利得の偏差: $C_g \rightarrow C_g + \Delta C_g$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_0(\omega) + \Delta C_g e^{-j\omega} \\ &= F_0(\omega) + (\Delta C_g / C_g) \cdot C_g e^{-j\omega} \end{aligned} \quad (5.3-1)$$

(ii) 単位回路の遅延時間の偏差 (映像伝播定数の偏差)

① $T_p = 1 \rightarrow 1 + \delta$

$$F(\omega) \doteq F_0(\omega) - j\delta\omega \sum_{k=p}^N C_k e^{-jk\omega} \quad (5.3-2)$$

② $T_p = 1 \rightarrow 1 + \delta \cdot |\omega|$

$$F(\omega) \doteq F_0(\omega) - j\delta\omega^2 \sum_{k=p}^N C_k e^{-jk\omega} \quad (5.3-3)$$

(iii) 映像インターパスの偏差: $R_p = (R, R) \rightarrow (R+r_1, R+r_2)$

$$\begin{aligned} F(\omega) &\doteq F_0(\omega) + (1/2R) (r_1 e^{j2\omega} - r_2) \sum_{m=0}^{p-1} C_m e^{-j(2p-m)\omega} \\ &= F_0(\omega) + j(r/2R) \sin \omega \sum_{m=0}^{p-1} C_m e^{-j(2p-m)\omega} \quad (r_1 = r_2 = r) \end{aligned} \quad (5.3-4)$$

(iv) タップ利得を構成する増幅器の入力抵抗値の偏差: $y_g = 0 \rightarrow y_g (> 0)$

$$F(\omega) = F_0(\omega) - \frac{y_g R}{2 + y_g R} \left\{ \sum_{n=0}^{g-1} C_n e^{-j(2g-n)\omega} + \sum_{n=g}^N C_n e^{-jn\omega} \right\} \quad (5.3-5)$$

但し、 $y_g = 0$ の場合、 $\sum_{n=0}^{g-1} (\cdot) \equiv 0$ とす。

(v) 始終端抵抗の偏差

① $R_s = R \rightarrow R+r$

$$F(\omega) = F_0(\omega) - \{r / (2R+r)\} \cdot F_0(\omega) \quad (5.3-6)$$

$$\textcircled{2} R_L = R \rightarrow R+r$$

$$F(\omega) = F_0(\omega) + \{r/(2R+r)\} \cdot \sum_{m=0}^N C_m e^{-j(2N-m)\omega} \quad (5.3-8)$$

(vi) 基本定数多次全域通過回路 ($e^{-j\theta(\omega)}$) を単位回路に用いる場合.

① p番目の単位回路への半-称損失付加 (即ち, 全てのインダクタL及びキャパシタCに). $L \rightarrow L(1 + \sigma_L/j\omega)$, $C \rightarrow C(1 + \sigma_C/j\omega)$

$$F(\omega) \doteq F_0(\omega) + \frac{1}{2} \frac{\sin \theta(\omega)}{\omega} (\sigma_L - \sigma_C) \sum_{m=0}^{p-1} C_m e^{-j(2p-m+1)\theta(\omega)} - \frac{1}{2} \tau(\omega) (\sigma_L + \sigma_C) \sum_{m=p}^N C_m e^{-j m \theta(\omega)} \quad (5.3-9)$$

但し,

$$\tau(\omega) \doteq \partial \theta(\omega) / \partial \omega \quad (5.3-10)$$

又, 特に, 半-称損失が加わることの状態では, 各単位回路が, 近似帯域内 ($|\omega| < \pi$) にあり, 理想遅延線 ($e^{-j\omega}$) を十分よく近似しているものとすれば, 式(5.3-9)は,

$$F(\omega) \doteq F_0(\omega) + (1/2) (\sin \omega / \omega) (\sigma_L - \sigma_C) \sum_{m=0}^{p-1} e^{-j(2p-m+1)\omega} - (1/2) (\sigma_L + \sigma_C) \cdot \sum_{m=p}^N C_m e^{-j m \omega} \quad (5.3-9')$$

と表わす。

② p番目の単位回路の半-称素子偏差 (即ち, 全てのインダクタL及びキャパシタCに). $L \rightarrow L(1 + \delta_L)$, $C \rightarrow C(1 + \delta_C)$

$$F(\omega) \doteq F_0(\omega) + (1/2) j \sin \theta(\omega) (\delta_L - \delta_C) \sum_{m=0}^{p-1} C_m e^{-j(2p-m+1)\theta(\omega)} - (1/2) j \omega \cdot \tau(\omega) (\delta_L + \delta_C) \sum_{m=p}^N C_m e^{-j m \theta(\omega)} \quad (5.3-11)$$

特に, 半-称素子偏差が生じることの状態では, 各単位回路が, 近似帯域内にあり, 理想遅延線 ($e^{-j\omega}$) を十分よく近似しているものとすれば, 式(5.3-11)は,

$$F(\omega) \doteq F_0(\omega) + (1/2) \sin \omega (\delta_L - \delta_C) \sum_{m=0}^{p-1} C_m e^{-j(2p-m+1)\omega} - (1/2) j \omega \cdot (\delta_L + \delta_C) \sum_{m=p}^N C_m e^{-j m \omega} \quad (5.3-11')$$

と表わす。

さて, この二つ, 以上の結果について, 多少注釈を述べなくてはならない。まず「表5.1」にも示したように, (i), (ii) の場合は, 反射現象が起らないが, (iii) ~ (vi) では, 一般

に反射現象が生じる。例えは: (ii) では、偏差の影響として、 $\sum_{k=p}^N C_k e^{-jk\omega}$ という項しかなく、時間領域のインパルスレスを考えると、 $j\delta\omega$ あるいは $j\delta\omega^2$ の項を除いて考えれば、元々のインパルス応答が、 $t = p \sim N$ の部分を多少変化するということになるが、(iv) では、 $\sum_{m=0}^{p-1} C_m e^{-j(2p-m)\omega}$ という反射による分と、 $\sum_{m=p}^N C_m e^{-jm\omega}$ という透過量に影響を与える2つの項が生ずることになり、時間領域で考えると、 $G_0(\omega)$ のインパルス応答とはちがった部分、 $t = N+1$ 以降にも、応答が生じることになる。

又、上の結果から回路パラメータの伝達関数と与える影響 $\Delta F \equiv F(\omega) - F_0(\omega)$ の実部及び虚部のおおよその様子を知らることが出来る。即ち、(i) では、タツ利得の偏差が大きすぎ、影響の大きさを決り、そのおりの回数は、偏差を起すタツの位置で完全に決る。(ii) ①では、偏差による影響の包絡線は、 $\delta\omega$ であり、 δ に比例するのは言うまでもないが、周波数に対して直線が増大し、特に、近似帯域の端の部分で大きな影響の現れ出すことが予想される。②の場合も、さらに、2重に増大する包絡線を持つので、帯域端での影響が、おおよそ大きくなることを考へる。(iii) では、 $r_1 = r_2 = r$ の場合 (式 (5.3-5)) をみると、偏差の影響の包絡線は $\sin \omega$ であり、この場合は、むしろ、近似帯域の中程で、影響が大きくなることになる。尚 (iii) では、透過量と与える影響を表す項 $\sum_{m=p}^N C_m e^{-jm\omega}$ はないが、この場合この項は二次微小項と見做すことが出来る。さらに (iv) では、偏差の影響の包絡線は平坦である。(v) は、(iv) の特別の場合と考へることが出来る。①の場合も全体の利得が増すだけである。(vi) ②の式 (5.3-11)' の影響分 $\Delta F = F(\omega) - F_0(\omega)$ は、

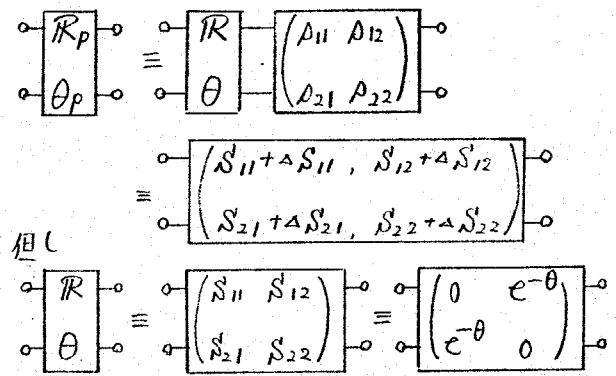
$$\Delta F | (\text{単素子偏差}) = \Delta F | (\text{遅延時間 } T_p = 1 \rightarrow 1 + (\delta e + \delta c)/2) + \Delta F | (\text{影像レピータンス } R_p = R \rightarrow R + \mu, \mu = (\delta e - \delta c, \delta e - \delta c))$$

のような2つの素子偏差の影響を加えればよいことになる。よって、①の式 (5.3-9) と式 (5.3-11)' の包絡線は、

$$\Delta F | (\text{単素子偏差}) = j\omega \Delta F | (\text{挿入損失付加}), \text{ 但し, } \delta e = \delta e, \delta c = \delta c \text{ である。特に, (vi) では、単素子偏差の場合、即ち, } \delta e = \delta c, \text{ あるいは, } \delta e = \delta c \text{ の場合には、式 (5.3-9) (5.3-9)', 式 (5.3-11), (5.3-11)' 2つの項目は、ちがなくなり、反射は}$$

生じない。尚、(iii)~(vi)に於いて、偏差の影響のうねりが回折波のみにては、一般的に論じるとは、難しいようであるが、通常、多くのトランスミナル型回路では、中央タップのタップ利得が他に比べてかなり大きいのが普通で、そのような場合にはこれを限定可とする、(ii)~(vi)に於いては、偏差の影響のうねりについて、おおよその様子を知ることが出来る。即ち、反射を表す項 $\sum_{m=0}^{p-1} C_m e^{-j(2p-n)\omega}$ および、透過量に影響する項 $\sum_{m=p}^N C_m e^{-j\omega}$ のいずれかから、その入る値とこのタップ利得が現れるかは、これによって、偏差の影響の包絡線が決り、うねりは、大抵の値とこのタップの位置が決るとなる。

最終に、(ii)~(vi)に於いて、式の導出に於いて、多少の説明しておく。反射の起る場合は、簡単であるので、省略し、代表として、p番目の単位回路に偏差が生じた場合について述べておく。今、偏差を生じたp番目の単位回路を、(図5.2)と示すように、別の回路と偏差分を表す回路の連続接続として形式的に表してやることにする。すなわち、偏差分を表す回路の散乱行列(正規化係数=R)を (A_{ij}) とすると(図5.1)と示した ψ_m (タップ利得を構成する増幅器の入力電圧)は、



(図5.2) 偏差分の分離

$$\left. \begin{aligned} \psi_m &= \psi_m^0 + (1/2) \cdot A_{11} e^{-(2p-n)\theta} \cdot V_n \quad (m < p) \\ \psi_m &= \psi_m^0 - (1/2) (1 - A_{21}) e^{-n\theta} \cdot V_n \quad (m \geq p) \end{aligned} \right\} \quad (5.3-12)$$

但し、 $\psi_m^0 \triangleq (1/2) e^{-\alpha\theta} \cdot V_n$ は基準状態の ψ_m

のように表さぬ、結局

$$F(\omega) = F_0(\omega) + A_{11} \sum_{m=0}^{p-1} C_m e^{-(2p-n)\theta} - (1 - A_{21}) \sum_{m=p}^N C_m e^{-n\theta} \quad (5.3-13)$$

を得る。証明は簡単である。又、単位回路の散乱行列を (S_{ij}) (正規化係数=R) として(図5.2)の下側の表現を用いぬは、

$$A_{11} = \Delta S_{11} e^{2\theta}, \quad (1 - A_{21}) = \Delta S_{21} e^{\theta} \quad (5.3-14)$$

の関係を代入して、

$$F(\omega) = F_0(\omega) + \Delta S_{11} \sum_{m=0}^{P-1} C_m e^{-(2P-2-m)\theta} + \Delta S_{21} \sum_{n=p}^N e^{-(m-1)\theta} \quad (5.3-13)'$$

を得る。式(5.3-13) (5.3-13)' は、近似として成り立つ式で、本節(ii)~(v)の結果は式(5.3-13) (5.3-13)' である。同様の式にあり、 ΔS_{11} あるいは ΔS_{21} がある場合は ΔS_{11} , ΔS_{21} を求めることにより得られる。

次に、(vi)の場合の式の導出について、説明にたづね、①の半線損失付加の場合を考えると、偏差の生じる側の単位回路の伝達関数を $H(\omega)$ とすると、散乱行列 $S(\omega)$ は

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H(\omega) \\ H(\omega) & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3-14)$$

よって、半線損失が加った後の散乱行列を S^d とすると、 $S^d(\omega)$ は

$$S^d(\omega) = \left[\mathbb{D}(\omega) \cdot \mathbb{1} + S(\omega) \sqrt{(\omega + \sigma_e)(\omega + \sigma_c)} \right]^{-1} \left[\mathbb{1} + \mathbb{D}(\omega) S(\omega) \sqrt{(\omega + \sigma_e)(\omega + \sigma_c)} \right] \quad (5.3-15)$$

$$\text{但し、} \mathbb{D}(\omega) \triangleq \frac{\sqrt{\omega + \sigma_e} + \sqrt{\omega + \sigma_c}}{\sqrt{\omega + \sigma_e} - \sqrt{\omega + \sigma_c}}, \quad \mathbb{1} \text{ は 2 次単位行列}$$

と与えられる。(44) により、式(5.3-14)を代入し、 σ_e, σ_c に対して Taylor 展開し、1 次近似を取ると、

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^d &\triangleq \frac{1 - H^2(\omega)}{4\omega} (\sigma_e - \sigma_c) = S_{11} + \Delta S_{11} \Rightarrow \Delta S_{11} \triangleq \frac{1 - H^2(\omega)}{4\omega} (\sigma_e - \sigma_c) \\ S_{21}^d &\triangleq H(\omega) + \frac{1}{2} H'(\omega) (\sigma_e + \sigma_c) = S_{21} + \Delta S_{21} \Rightarrow \Delta S_{21} \triangleq \frac{1}{2} H'(\omega) (\sigma_e + \sigma_c) \end{aligned} \right\} \quad (5.3-16)$$

を得られる。但し、 $H'(\omega) \triangleq \partial H(\omega) / \partial \omega$ 。よって、 $H(\omega)$ が全線通過回路であるとすると、

$$H(j\omega) = e^{-j\theta(\omega)}, \quad \sigma(\omega) \triangleq \partial \theta(\omega) / \partial \omega \quad (5.3-17)$$

を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_{11} &\triangleq (1/2) (\sin \theta(\omega) / \omega) e^{-j\theta(\omega)} (\sigma_e - \sigma_c) \\ \Delta S_{21} &\triangleq -(1/2) \sigma(\omega) e^{-j\theta(\omega)} (\sigma_e + \sigma_c) \end{aligned} \right\} \quad (5.3-18)$$

となり、式(5.3-13)' に代入し、式(5.3-9)の結果が得られる。②の半線素子偏差の場合も全く同様である。さらにここで述べた方法は、反射現象を扱っており、2次以上の近似式の場合にも拡張出来るものである。

5.4 振幅及び位相特性の影響

本節では、前節の結果に基づき、トランスミタブル型回路の各種構成パラメータ偏差の影響を、振幅及び位相特性に及ぼす影響と見直し、一次近似による式を導くと共に、位相等化器の場合を例にして計算例を付して、一次近似による式が十分使用出来ることであることを例証する。尚、本節の書き出しには、多少一般化的な場合について考察し、その結果と前節の結果を用いて、トランスミタブル型回路の各種構成パラメータの偏差が、振幅及び位相特性に及ぼす影響を、表5.1に述べて述べ、最後に、計算例及び注釈を加えることにする。

(I) 一般論

ここでは、伝達関数としての振幅、位相特性の関係を簡単に述べる。即ち、

$$F_0(\omega) \cong A_0(\omega) \cdot e^{-jB_0(\omega)} \tag{5.4-1}$$

かつ、

$$F(\omega) = F_0(\omega) + \sum_{i=1}^K \alpha_i(\omega) e^{-j\beta_i(\omega)} \quad (\cong A(\omega) e^{-jB(\omega)}) \tag{5.4-2}$$

に変化した場合、 $F(\omega)$ の振幅 $A(\omega)$ 及び位相 $B(\omega)$ を表す一次近似式を導く。但し、細い証明は省く。

Ⓐ $A_0(\omega) \gg |\sum_{i=1}^K \alpha_i(\omega) e^{-j\beta_i(\omega)}|$ かつ、

この条件を用いて、式(5.4-2)の一次近似を計算すれば、容易に、

$$A(\omega) \cong |F(\omega)| \cong A_0(\omega) + \sum_{i=1}^K \alpha_i(\omega) \cos\{B_0(\omega) - \beta_i(\omega)\} \tag{5.4-3}$$

$$B(\omega) \cong -\arg F(\omega) \cong B_0(\omega) - \{1/A_0(\omega)\} \sum_{i=1}^K \alpha_i(\omega) \sin\{B_0(\omega) - \beta_i(\omega)\} \tag{5.4-4}$$

を得る。

Ⓑ $A_0(\omega) \approx |\sum_{i=1}^K \alpha_i(\omega) e^{-j\beta_i(\omega)}|$ かつ、

この場合 Ⓐ の処理を繰り返すことは出来ないように思われる。

$$\alpha(\omega) e^{-j\beta(\omega)} \cong \sum_{i=1}^K \alpha_i(\omega) e^{-j\beta_i(\omega)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i,j=1}^K \alpha_i(\omega) \alpha_j(\omega) \cos\{\beta_i(\omega) - \beta_j(\omega)\}} \exp\left\{-j \tan^{-1} \frac{\sum_{i=1}^K \alpha_i(\omega) \sin\beta_i(\omega)}{\sum_{i=1}^K \alpha_i(\omega) \cos\beta_i(\omega)}\right\} \tag{5.4-5}$$

とすると、 $A_0(\omega) \approx \alpha(\omega)$ を用いて、

$$A(\omega) \doteq (1/2) \{A_0(\omega) + \alpha(\omega)\} \sqrt{2 + 2 \cos \{B_0(\omega) - \beta(\omega)\}}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2} \{B_0(\omega) + \beta(\omega)\} - \tan^{-1} \left\{ \frac{\alpha(\omega) - A_0(\omega)}{\alpha(\omega) + A_0(\omega)} \tan \frac{B_0(\omega) - \beta(\omega)}{2} \right\}$$

$$\doteq \frac{1}{2} \{B_0(\omega) + \beta(\omega)\} - \frac{\alpha(\omega) - A_0(\omega)}{2 A_0(\omega)} \tan \frac{B_0(\omega) - \beta(\omega)}{2} \quad (5.4-7)$$

を得る。但し、式(5.4-7)より、

$$\left| \frac{\alpha(\omega) - A_0(\omega)}{\alpha(\omega) + A_0(\omega)} \tan \frac{B_0(\omega) - \beta(\omega)}{2} \right| \ll 1$$

を仮定し、 $A_0(\omega) \approx \alpha(\omega)$ であり、 $B_0(\omega) - \beta(\omega) = n\pi$ の近傍では成り立つ。

③ $A_0(\omega) \ll \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i(\omega) e^{-j\beta_i(\omega)} \right|$ のとき、

式(5.4-5)を定義した $\alpha(\omega), \beta(\omega)$ を用いると、

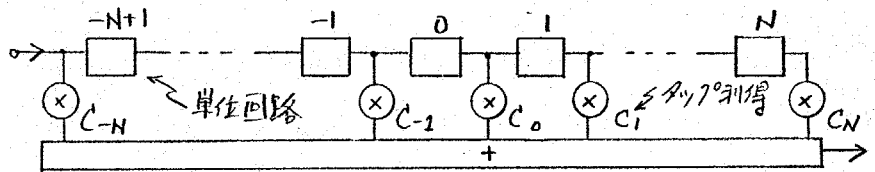
$$A(\omega) \doteq \alpha(\omega) + A_0(\omega) \cos \{ \beta(\omega) - B_0(\omega) \} \quad (5.4-8)$$

$$B(\omega) \doteq \beta(\omega) - \{A_0(\omega)/\alpha(\omega)\} \sin \{ \beta(\omega) - B_0(\omega) \} \quad (5.4-9)$$

が得られる。

(II) トランスインピーリ型回路の各種構成パラメータの偏差が、振幅及び位相特性に及ぼす影響。

ここでは、各節及び本節(I)の結果を用いて、表5.1に示した各種偏差の影響を調べ



(図5.3) 単位回路及びタップ利得の番号付け。

る。但し、本節では、単位回路とタップ利得の番号付け(図5.3)のように定めておくことに注意される。又、(I)と同様に、③、④の場合も、式(5.4-5)が簡単になる場合の結果が複雑になること、さらに偏差解析をすれば、 $A_0(\omega) \gg \alpha(\omega)$ の場合が重要と考えられることから、以下では、③の条件が成り立つ場合に限って議論する。これは、フィルタの帯域内あるいは位相等化器などの場合の偏差解析を行うことになり、重要である。以下に、一次近似による結果を列挙しておく。式の導出は、各節(i)~(vi)

の結果と、本節式(5.4-3), (5.4-4)を組み合せれば、直ちに得らる。又、記号を12.

$$\left. \begin{aligned} A_0(\omega) e^{-jB_0(\omega)} &\triangleq \bar{H}_0(\omega) && : \text{偏差前の基準特性} \\ A(\omega) e^{-jB(\omega)} &\triangleq \bar{H}(\omega) && : \text{偏差後の特性} \end{aligned} \right\} \quad (5.4-10)$$

を用いる。

(i) タップ利得の偏差: $C_g \rightarrow C_g + \Delta C_g$

$$A(\omega) \doteq A_0(\omega) + \Delta C_g \cos g\omega = A_0(\omega) + (\Delta C_g / C_g) \cdot C_g \cos g\omega \quad (5.4-11)$$

$$B(\omega) \doteq B_0(\omega) - \{\Delta C_g / A_0(\omega)\} \cdot \sin \{B_0(\omega) - g\omega\}. \quad (5.4-12)$$

(ii) 単位回路の遅延時間の偏差 (映像伝播定数の偏差)

① $T_p = 1 \rightarrow 1 + \delta$

$$A(\omega) \doteq A_0(\omega) + \delta \omega \sum_{m=p}^N C_m \sin \{B_0(\omega) - m\omega\} \quad (5.4-13)$$

$$B(\omega) \doteq B_0(\omega) + \{\delta \omega / A_0(\omega)\} \cdot \sum_{m=p}^N C_m \cos \{B_0(\omega) - m\omega\} \quad (5.4-14)$$

② $T_p = 1 \rightarrow 1 + \delta \cdot |\omega|$

$$A(\omega) \doteq A_0(\omega) + \delta \omega^2 \sum_{m=p}^N C_m \sin \{B_0(\omega) - m\omega\} \quad (5.4-15)$$

$$B(\omega) \doteq B_0(\omega) + \{\delta \omega^2 / A_0(\omega)\} \sum_{m=p}^N C_m \cos \{B_0(\omega) - m\omega\} \quad (5.4-16)$$

(iii) 映像伝播定数の偏差: $R_p = (R, R) \rightarrow (R+r_1, R+r_2)$

$$\begin{aligned} A(\omega) \doteq A_0(\omega) + (r_1/2R) \sum_{m=-N}^{p-1} C_m \cos [B_0(\omega) - \{2(p-1)-m\}\omega] \\ - (r_2/2R) \sum_{m=-N}^{p-1} C_m \cos \{B_0(\omega) - (2p-m)\omega\} \end{aligned} \quad (5.4-17)$$

$$\begin{aligned} B(\omega) \doteq B_0(\omega) - \{r_1/2R \cdot A_0(\omega)\} \sum_{m=-N}^{p-1} C_m \sin [B_0(\omega) - \{2(p-1)-m\}\omega] \\ + \{r_2/2R \cdot A_0(\omega)\} \sum_{m=-N}^{p-1} C_m \sin \{B_0(\omega) - (2p-m)\omega\} \end{aligned} \quad (5.4-18)$$

特に $r_1 = r_2 = r$ とすれば、

$$A(\omega) \doteq A_0(\omega) - (r/R) \sin \omega \sum_{m=-N}^{p-1} C_m \sin \{B_0(\omega) - (2p-m-1)\omega\} \quad (5.4-17)'$$

$$B(\omega) \doteq B_0(\omega) - (r/R) \cdot \{\sin \omega / A_0(\omega)\} \sum_{m=-N}^{p-1} C_m \cos \{B_0(\omega) - (2p-m-1)\omega\} \quad (5.4-18)'$$

(iv) タップ利得を構成する増幅器の入力減衰の偏差: $y_g = 0 \rightarrow y_g (> 0)$

$$A(\omega) \doteq A_0(\omega) - \frac{y_g R}{2 + y_g R} \left[\sum_{n=-N}^{g-1} C_n \cos \{B_0(\omega) - (2g-n)\omega\} + \sum_{m=g}^N C_m \cos \{B_0(\omega) - m\omega\} \right] \quad (5.4-19)$$

$$B(\omega) \doteq B_0(\omega) + \frac{1}{A_0(\omega)} \cdot \frac{y_g R}{2 + y_g R} \left[\sum_{n=-N}^{g-1} C_n \sin \{B_0(\omega) - (2g-n)\omega\} + \sum_{m=g}^N C_m \sin \{B_0(\omega) - m\omega\} \right] \quad (5.4-20)$$

但し、 $g = -N$ のとき、 $\sum_{n=-N}^{g-1} (\cdot) = 0$ とする。

(v) 始終端阻抗の偏差

① $R_s = R \rightarrow R+r$

$A(\omega) = \{2R / (2R+r)\} \cdot A_0(\omega) \doteq (1 - r/2R) \cdot A_0(\omega)$ (5.4-21)

$B(\omega) = B_0(\omega)$ (5.4-22)

② $R_L = R \rightarrow R+r$

$A(\omega) \doteq A_0(\omega) + \{r / (2R+r)\} \sum_{m=-N}^N C_m \cos\{B_0(\omega) - (2N-m)\omega\}$ (5.4-23)

$B(\omega) \doteq B_0(\omega) - \{r / (2R+r) \cdot A_0(\omega)\} \sum_{m=-N}^N C_m \sin\{B_0(\omega) - (2N-m)\omega\}$ (5.4-24)

(vi) 集中定数多次全域通過回路 ($e^{-j\theta(\omega)}$) を単位回路に用いる場合.

① p番目の単位回路の半-極損失付加 (i.e. $L \rightarrow L(1+\sigma_l/j\omega)$, $C \rightarrow C(1+\sigma_c/j\omega)$)

$A(\omega) \doteq A_0(\omega) + \frac{\sigma_l - \sigma_c}{2} \cdot \frac{\sin \theta(\omega)}{\omega} \sum_{m=-N}^{p-1} C_m \cos\{B_0(\omega) - (2p-m-1)\theta(\omega)\}$
 $- \frac{\sigma_l + \sigma_c}{2} \cdot \tau(\omega) \cdot \sum_{m=p}^N C_m \cos\{B_0(\omega) - m \cdot \theta(\omega)\}$ (5.4-25)

$B(\omega) \doteq B_0(\omega) - \frac{\sigma_l - \sigma_c}{2 A_0(\omega)} \cdot \frac{\sin \theta(\omega)}{\omega} \sum_{m=-N}^{p-1} C_m \sin\{B_0(\omega) - (2p-m-1)\theta(\omega)\}$
 $+ \frac{\sigma_l + \sigma_c}{2 A_0(\omega)} \cdot \tau(\omega) \sum_{m=p}^N C_m \sin\{B_0(\omega) - m \theta(\omega)\}$ (5.4-26)

但し,

$\tau(\omega) \doteq 2 \theta(\omega) / \omega$ (5.4-27)

又、特に、半-極損失が加わることの状態では、各単位回路が、近似帯域内 ($|\omega| < \pi$) にあり、理想遅延線 ($e^{-j\omega}$) に十分に近似してはいるとすれば、式(5.4-25), (5.4-26)は、

$A(\omega) \doteq A_0(\omega) + \frac{\sigma_l - \sigma_c}{2} \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \sum_{n=-N}^{p-1} C_n \cos\{B_0(\omega) - (2p-n-1)\omega\}$
 $- \frac{\sigma_l + \sigma_c}{2} \sum_{n=p}^N C_n \cos\{B_0(\omega) - n \cdot \omega\}$ (5.4-25)'

$B(\omega) \doteq B_0(\omega) - \frac{\sigma_l - \sigma_c}{2 A_0(\omega)} \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \sum_{m=-N}^{p-1} C_m \sin\{B_0(\omega) - (2p-m-1)\omega\}$
 $+ \frac{\sigma_l + \sigma_c}{2 A_0(\omega)} \sum_{m=p}^N C_m \sin\{B_0(\omega) - m \omega\}$ (5.4-26)'

と出きる。

② p番目の単位回路の半-極素子偏差 (i.e. $L \rightarrow L(1+\delta_l)$, $C \rightarrow C(1+\delta_c)$)

$$A(\omega) \doteq A_0(\omega) - \{(\delta_e - \delta_c)/2\} \sin \theta(\omega) \cdot \sum_{m=-N}^{P-1} C_m \sin\{B_0(\omega) - (2p-m-1)\theta(\omega)\} \\ + \{(\delta_e + \delta_c)/2\} \omega \tau(\omega) \sum_{m=p}^N C_m \sin\{B_0(\omega) - m\theta(\omega)\} \quad (5.4-28)$$

$$B(\omega) \doteq B_0(\omega) - \{(\delta_e - \delta_c)/2 \cdot A_0(\omega)\} \sin \theta(\omega) \cdot \sum_{m=-N}^{P-1} C_m \cos\{B_0(\omega) - (2p-m-1)\theta(\omega)\} \\ + \{(\delta_e + \delta_c)/2 \cdot A_0(\omega)\} \omega \cdot \tau(\omega) \cdot \sum_{m=p}^N C_m \cos\{B_0(\omega) - m\theta(\omega)\} \quad (5.4-29)$$

特に、一称偏差の生じる以先の状態では、各単位回路の近似帯域内では、理想遅延線 ($e^{-j\omega}$) を十分に近似しているものとする、式 (5.4-28), (5.4-29) は、

$$A(\omega) \doteq A_0(\omega) - \{(\delta_e - \delta_c)/2\} \sin \omega \sum_{m=-N}^{P-1} C_m \sin\{B_0(\omega) - (2p-m-1)\omega\} \\ + \{(\delta_e + \delta_c)/2\} \omega \sum_{m=p}^N C_m \sin\{B_0(\omega) - m\omega\} \quad (5.4-28)'$$

$$B(\omega) \doteq B_0(\omega) - \{(\delta_e - \delta_c)/2 \cdot A_0(\omega)\} \sin \omega \sum_{m=-N}^{P-1} C_m \cos\{B_0(\omega) - (2p-m-1)\omega\} \\ + \{(\delta_e + \delta_c)/2 \cdot A_0(\omega)\} \omega \cdot \sum_{m=p}^N C_m \cos\{B_0(\omega) - m\omega\} \quad (5.4-29)'$$

とある。

ここで、(i)~(vi)の結果について、多少注釈を加えておく。本節の結果は本質的には、各節の結果を書き直したものであり、各節に比べ、本質的に新しいものを含みはしない。しかし、振幅及び位相特性と云う形では見ていることと異なる多少の特徴が現れている。以下 (i)~(vi) について順に述べていくことにする。(i) ①、振幅特性は、タップ利得の偏差の大きさに比例し、その位置で決まるゆりをもつ影響を受ける。又位相特性は、タップ利得の偏差の大きさ、元の振幅特性の逆数に比例し、元の位相特性と、タップの位置で決まるゆりをもつ影響を受けることになる。従って、位相特性は、元の振幅特性の小さい部分で、比較的大きな影響が現われ、又、例えは、元の位相特性が比較的小さくてもあるか、否か、偏差の生じるタップの位置で決まるゆりをもつ影響が現われるか否か云々の事が分る。(ii) 以降については、振幅及び位相特性への影響のゆりの回数を同じにする事柄について、一般的に論ずることは難しいが、各影響の包絡線については、次のようにことが分る。(ii) ①、振幅特性と現れる影響の包絡線は、直線であり、帯域の端で、大きな影響が現われることが予想される。又、位相特性と現れる影響の包絡線は、 $\delta\omega/A_0(\omega)$ であり、振幅特性への影響に比べ、さらに、元の振幅特性 $A_0(\omega)$ の小さい部分で大きな影響を受ける可能性のあることが分る。(ii) ②は ①、 $\delta\omega$ であることと、 $\delta\omega^2$ によるもの

り、帯域の端で、さらに大きな影響を及ぼすことが予想される。(iii)の場合で、
 特く、 $r_1=r_2=r$ の場合とすると、振幅及び位相特性に現れる影響の包絡線は、
 $\sin \omega$ 及び $\omega \cdot \sin \omega / A_0(\omega)$ であり、(ii)に比べ、すなわち、帯域の中央及び $A_0(\omega)$ の小
 さい部分で、大きな影響を及ぼすことが予想される。(iv)では、振幅及び位相特性に
 現れる影響の包絡線は、 $y_p R / (2 + y_p R)$ 及び、 $y_p R / (2 + y_p R) \cdot A_0(\omega)$ であり、
 $A_0(\omega)$ が、ほぼ一定である時は、すなわち、一定の大きな影響が現れることが予想され
 る。(vi)の場合には、多少複雑であるが、①の式(5.4-25)'、(5.4-26)'に注目する
 と、振幅特性に現れる影響は、 $\sin \omega / \omega$ と、1を包絡線とする2項から成
 り、前者のかわりに、帯域中央においては、直流付近及び帯域端で大きな影響を及ぼすこと
 が予想される。位相特性に就いては、振幅の場合に対し、各包絡線と $1/A_0(\omega)$ が
 掛っており、その分だけ量減することになる。(vi)②の式(5.4-28)'、(5.4-29)'に注目
 すると、偏差の影響の各包絡線は、(vi)①の場合に ω を垂軸形になる。この場
 合は、帯域端でより大きな影響の現れる可能性のみをみることもできる。尚 (vi)の偏差
 による影響は、(iii)①と (iii)の偏差の影響の和として、別節に述べたと同様に
 検討付けらるべき。即ち、 $\Delta A(\omega) \cong A(\omega) - A_0(\omega)$ 、 $\Delta B(\omega) = B(\omega) - B_0(\omega)$ とする。

$$\left. \begin{array}{l} \Delta A(\omega) \\ \Delta B(\omega) \end{array} \right|_{\substack{\text{半称系} \\ \text{偏差}}} = \left. \begin{array}{l} \Delta A(\omega) \\ \Delta B(\omega) \end{array} \right|_{\text{遅延時間 } T_p=1 \rightarrow 1 + (\delta_e + \delta_c)/2}$$

$$+ \left. \begin{array}{l} \Delta A(\omega) \\ \Delta B(\omega) \end{array} \right|_{\substack{\text{影像位相タラシ} \\ R_p=R \rightarrow R+r, \frac{r}{R} = (\delta_e - \delta_c, \delta_e - \delta_c)}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta A(\omega) \\ \Delta B(\omega) \end{array} \right|_{\text{半称素子偏差}} = j\omega \cdot \left. \begin{array}{l} \Delta A(\omega) \\ \Delta B(\omega) \end{array} \right|_{\substack{\text{半称損失付加} \\ \text{但し } \delta_e = \sigma_e, \delta_c = \sigma_c}}$$

が成立する。又、(vi)②：一称偏差の場合、即ち、 $\sigma_e = \sigma_c$ あるいは $\delta_e = \delta_c$ の場合
 には、反射による項は消失する。尚、(v)は (iv)の特別の場合と考へられるが、特
 くに、(v)①では、振幅が一定倍されるわけでは、位相には影響が現れない。さらに、(ii)
 ~ (vi)において、例えは、中央タップのタップ利得が、他に比べ、かなり大きいものと
 いう場合には、各偏差による影響のうちの回数の多くは、おぼろげな値を知るこ
 とが出来る。別節に述べたと同様である。

(Ⅳ) 計算例

こゝでは、本節(Ⅱ)に示した、各種偏差の影響を一次近似によつて求め式を用いた計算例を示す。一次近似による式が、相当よい近似を与へること、明らかに、(Ⅱ)で述べた、おぼつかぬ偏差の影響が、実際に現われにくいことを示す。

こゝで例とするのは、位相等化器の場合であり、 $A_0(\omega) \approx 1$ が期待出来ること、微小な偏差に対しては、本節(Ⅰ)の④の仮定が成り立つことになる。すなわち、希望特性を、

$$G(\omega) \triangleq e^{-ja \sin b\omega} \quad (|\omega| \leq \pi) \quad (5.4-30)$$

とし、これを、タップ数 $2N+1$ のフリスII-II型回路(図5.3参照)

$$F_0(\omega) = \sum_{m=-N}^N C_m e^{-j m \omega} \quad (|\omega| \leq \pi) \quad (5.4-31)$$

で、最小二乗近似、即ち、

$$\varepsilon \triangleq (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |G(\omega) - F_0(\omega)|^2 d\omega \rightarrow \text{最小} \quad (5.4-32)$$

としておき、基準伝達関数 $F_0(\omega) = A_0(\omega) e^{-j B_0(\omega)}$ とする。このときの最適タップ利得は、簡単な計算により、一般に、

$$C_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_n(a) \frac{\sin(m \cdot b + n)\pi}{(m \cdot b + n)\pi}, \quad J_m(x) \text{ は 第 } m \text{ 種ベッセル関数} \quad (5.4-32)$$

で与えられる。特に、 b が整数の場合には、

$$C_m = \begin{cases} 0 & (m/b \text{ が 整数でない}) \\ J_{m/b}(a) & (m/b \text{ が 整数}) \end{cases} \quad (5.4-33)$$

となる。以下に示す計算例は、同様にして、比較的良い近似が得られる。

$$A_0(\omega) \approx 1, \quad B_0(\omega) \approx a \sin b\omega \quad (5.4-34)$$

が成立している。

(図5.4) から (図5.7) に 幾つかの計算例を示す。但し、偏差後(exact)とあるのは、偏差後の正確な特性であり、これに対し、偏差後(approxi)は、本節(Ⅱ)に示した一次近似による計算結果である。又、図中、位相(PHASE)の単位は、ラジアンである。

(図5.4) (a) ~ (d) に (i) タップ利得の偏差の場合の計算例を示している。すなわち、一次近似による計算結果は、十分よい近似を与えていることが分る。

(図5.5) (a) (b) 及び (図5.5) (c) (d) には、(ii) 単位回路の遅延線と遅延時間

偏差した場合の特性の計算例を示している。この場合も、一次近似式による結果は、近似を用いた結果と非常によく一致しており、帯域端の影響が大きいといふことも分る。

(図5.6)に、(iii) 単位回路の映像インピーダンスが偏差した場合の特性の計算例を示している。この場合、一次近似による計算結果は、余りよい近似を与えているとはいえないようである、さらに、高次の近似式が必要であることを示していると考えられる。

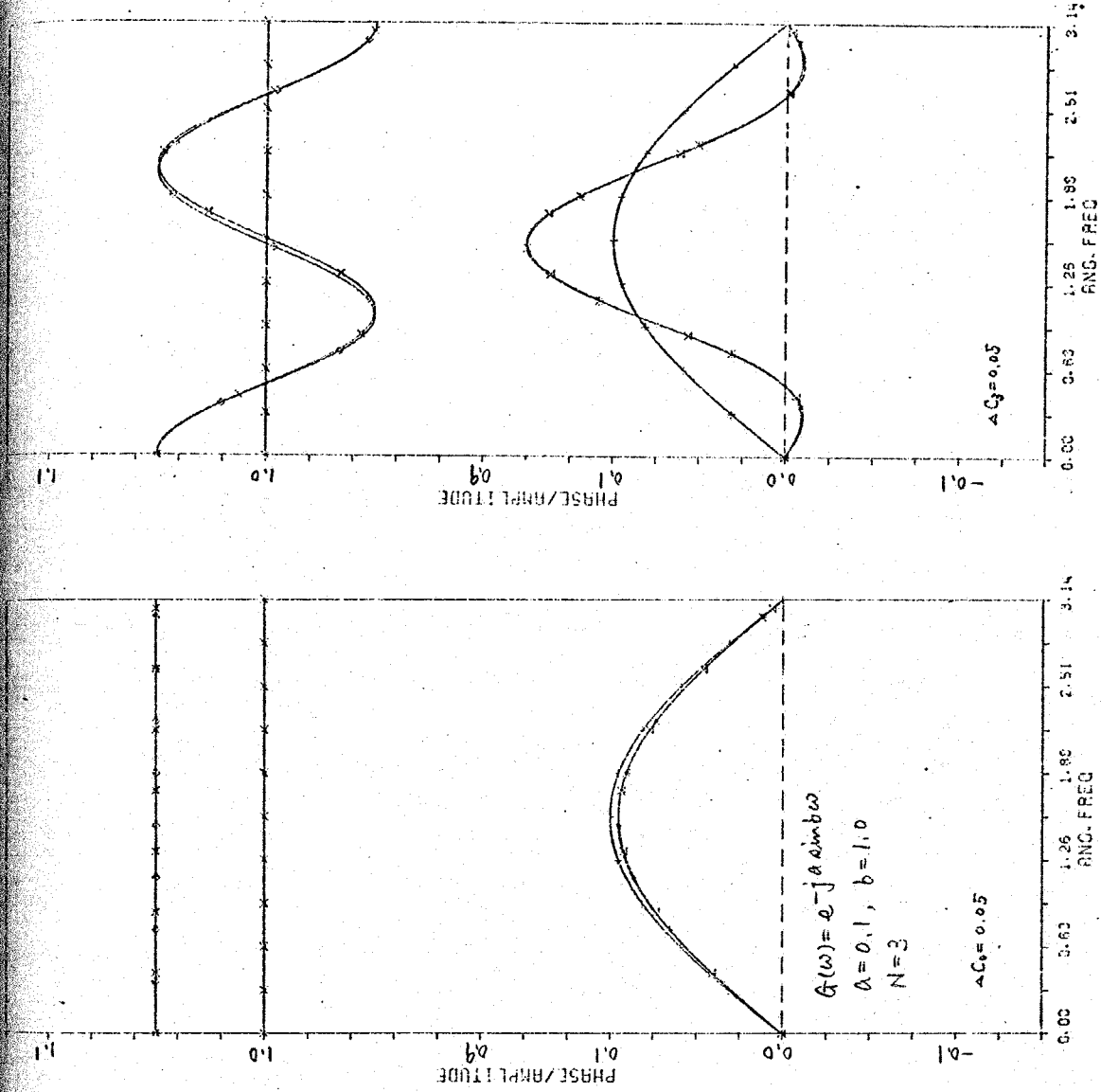
(図5.7) (a) (b)に、(iv) タップ利得を構成する増幅器の入カパシタンスが偏差した場合の特性の計算結果を示している。この場合は近似を用いた計算結果と一次近似式による結果とが非常によく一致をみられる。又、偏差による影響の包絡線が平坦であるなど、(ii)で見かけた近似式から得られる大まかな予想とも一致する傾向が見られる。

以上、計算例を幾つか示したが、一次近似による式で、かなり、多くの場合が取り扱えると思われる。但し、二次以上の近似式が必要と思われる場合もあり、今後の検討を要することは事実である。

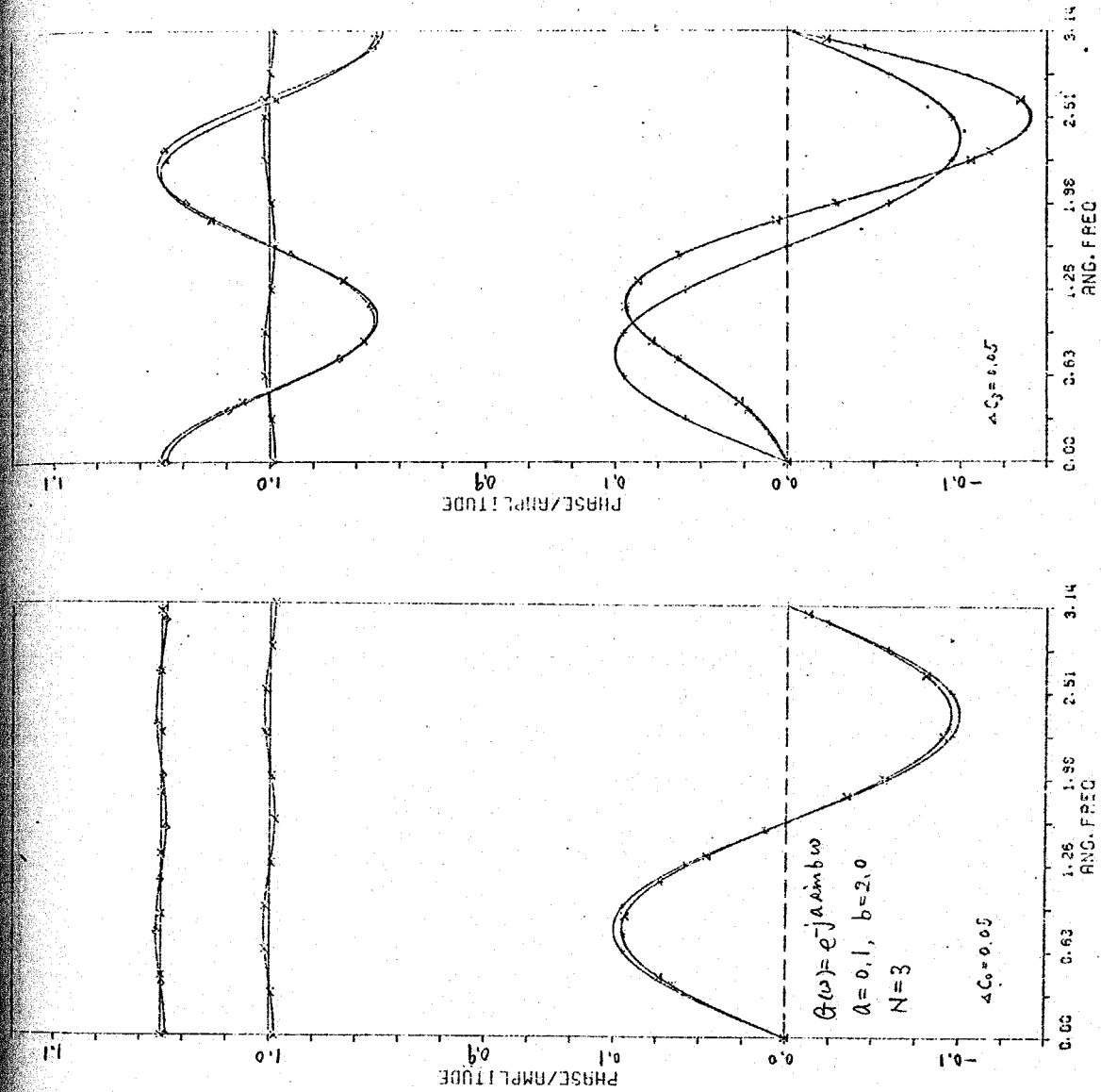
(図5.4)(a)

(1) タップ利得の偏差

- : 希望特性 ($|G(\omega)|$)
- + : 元特性 ($A_0(\omega)$)
- : 偏差後 (exact)
- ◇ : 偏差後 (approx)



- : 希望特性 ($\angle G(\omega)$)
- + : 元特性 ($\angle A_0(\omega)$)
- : 偏差後 (exact)
- ◇ : 偏差後 (approx)



(图5-4) (6)

(1) 下列各例的偏差

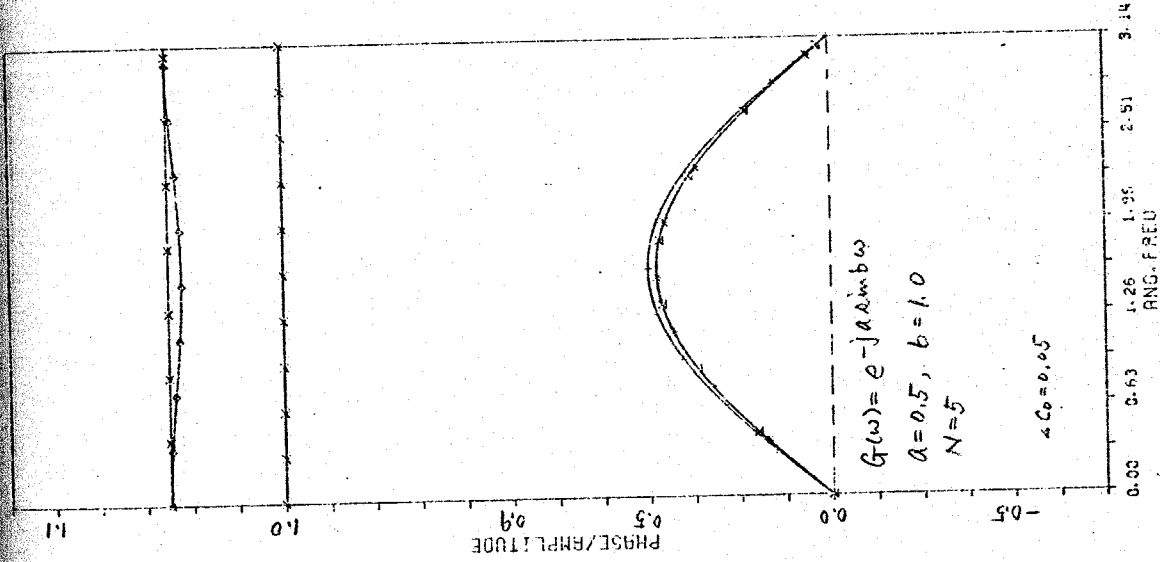
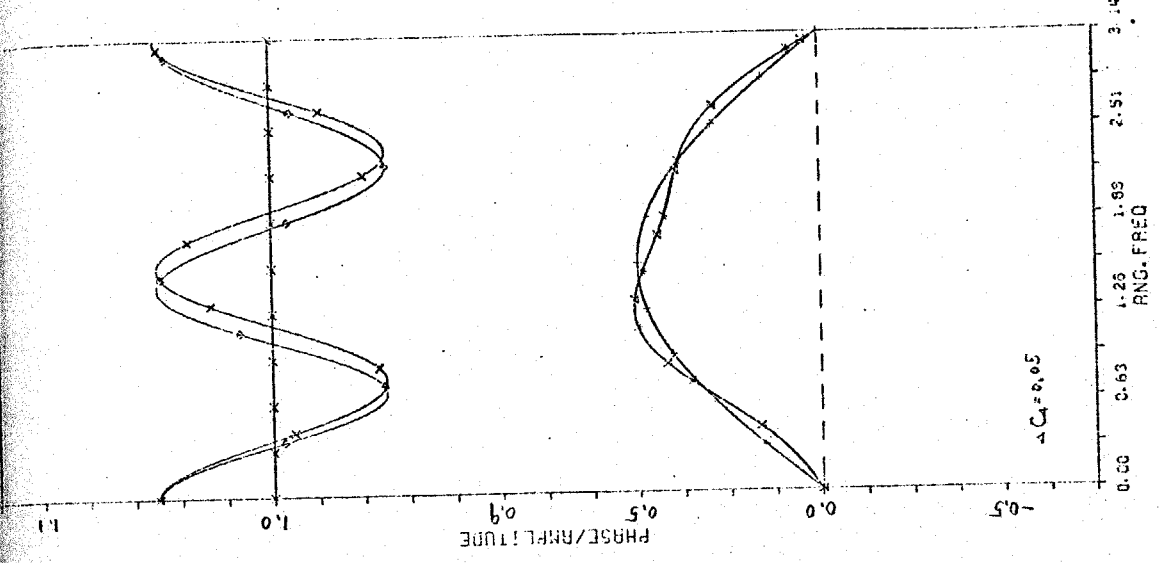
- : 希望特性 ($|G(\omega)|$)
- *-: 无特性 ($A_0(\omega)$)
- : 偏差后 (exact)
- x-: 偏差后 (approx)

- : 希望特性 ($a \sin b \omega$)
- *-: 无特性 ($B_0(\omega)$)
- : 偏差后 (exact)
- x-: 偏差后 (approx)

(図5.4)(c)

(1) タップ利得の偏差

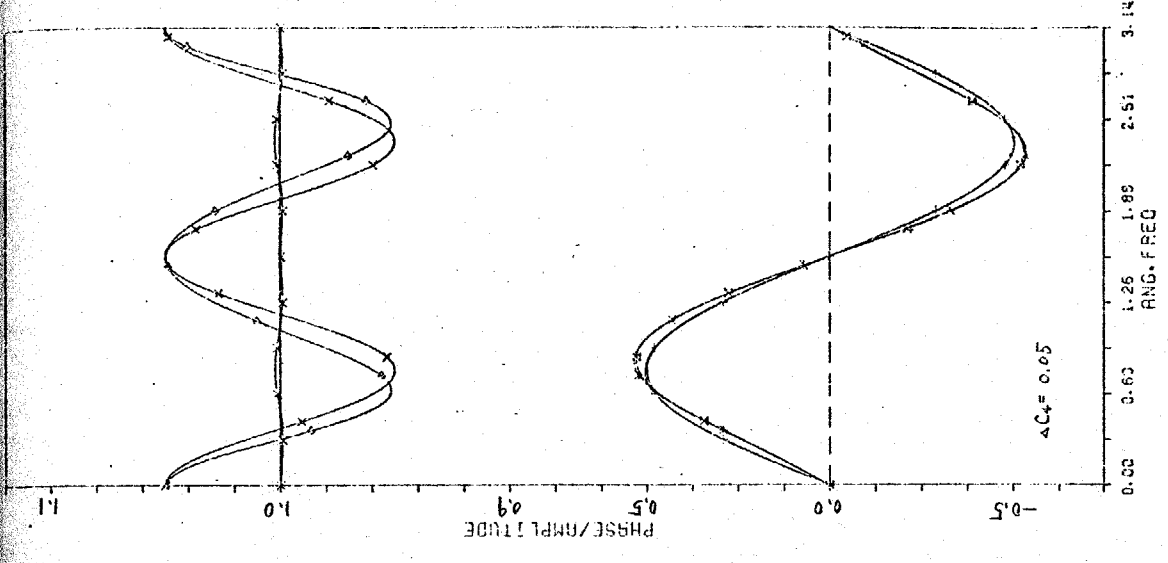
- : 希望特性 ($G(\omega)$)
- x-: 元特性 ($A_0(\omega)$)
- o-: 偏差後 (exact)
- * -: 偏差後 (approx)



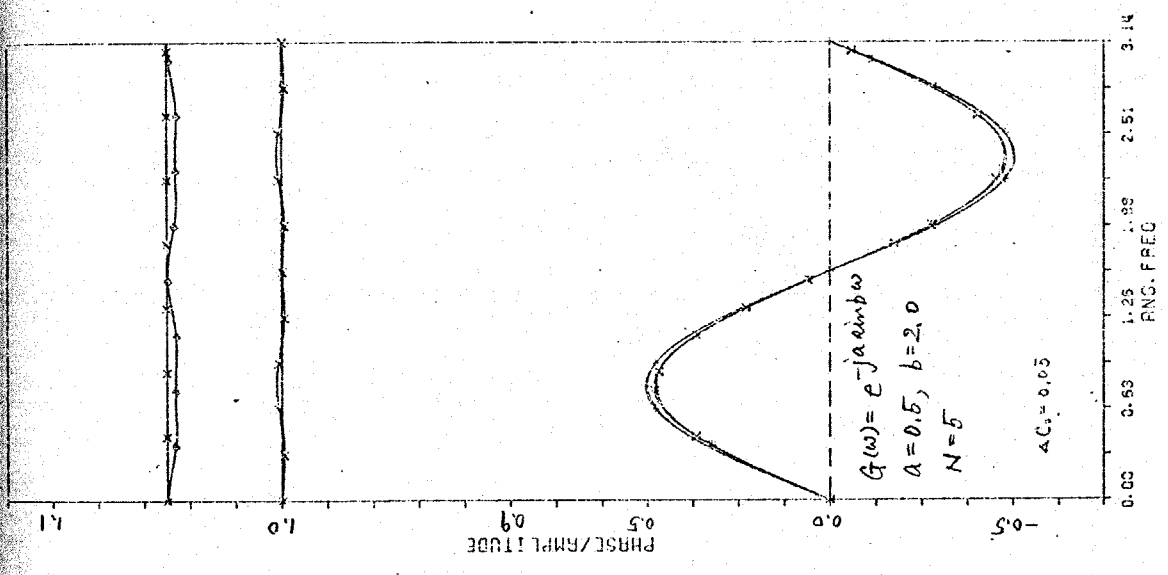
- : 希望特性 ($A_{amb}(\omega)$)
- x-: 元特性 ($B_0(\omega)$)
- * -: 偏差後 (exact)
- o-: 偏差後 (approx)

(图54) (d)
 (i) トップ利得の偏差

- : 希望特性 ($G(\omega)$)
- x-: 元特性 ($A_0(\omega)$)
- o-: 偏差後 (exact)
- : 偏差後 (approx)

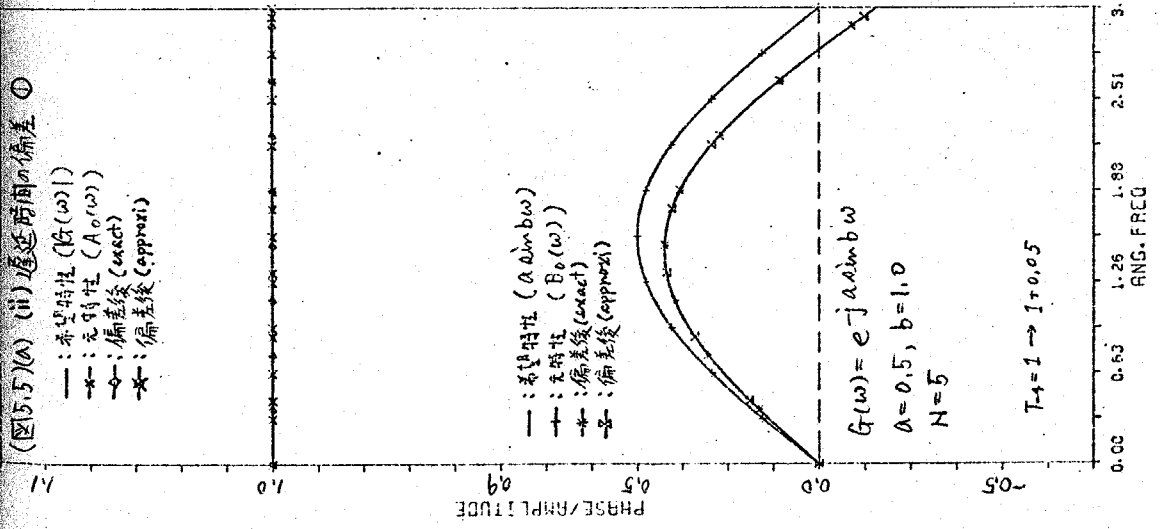


- : 希望特性 ($A_0(\omega)$)
- x-: 元特性 ($B_0(\omega)$)
- o-: 偏差後 (exact)
- : 偏差後 (approx)

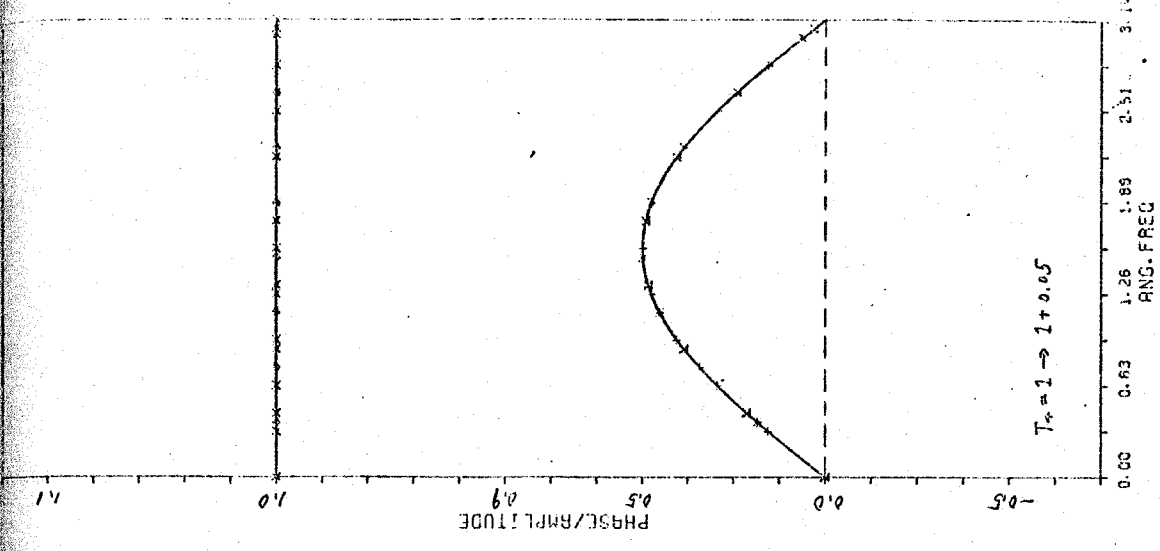
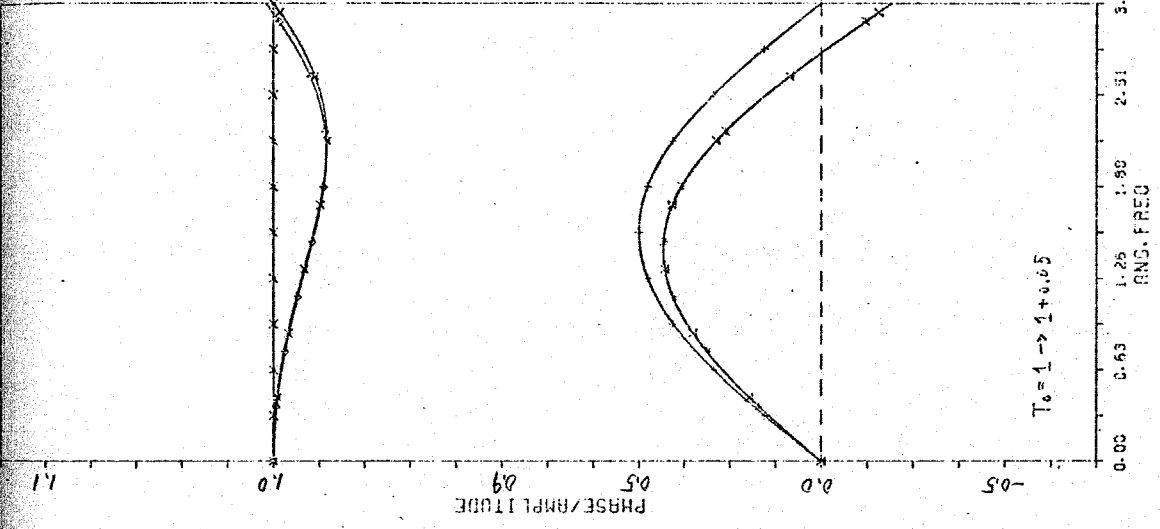


(图5.5)(a) (ii) 延迟时间的偏差

- : 希望特性 ($A_0(\omega)$)
- x- : 无特性 ($A_0(\omega)$)
- o- : 偏差后 (exact)
- * : 偏差后 (approx)

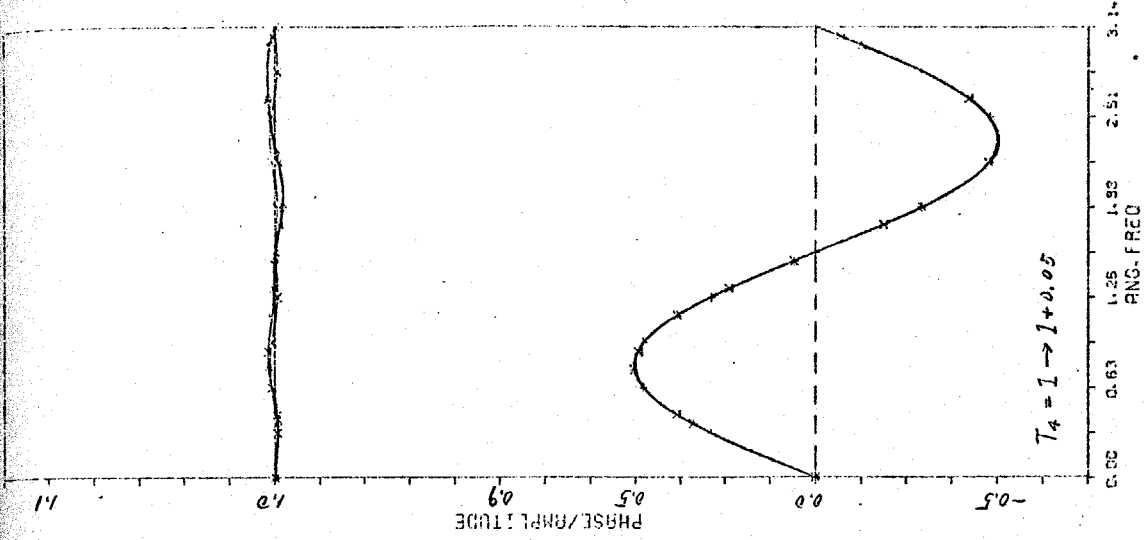
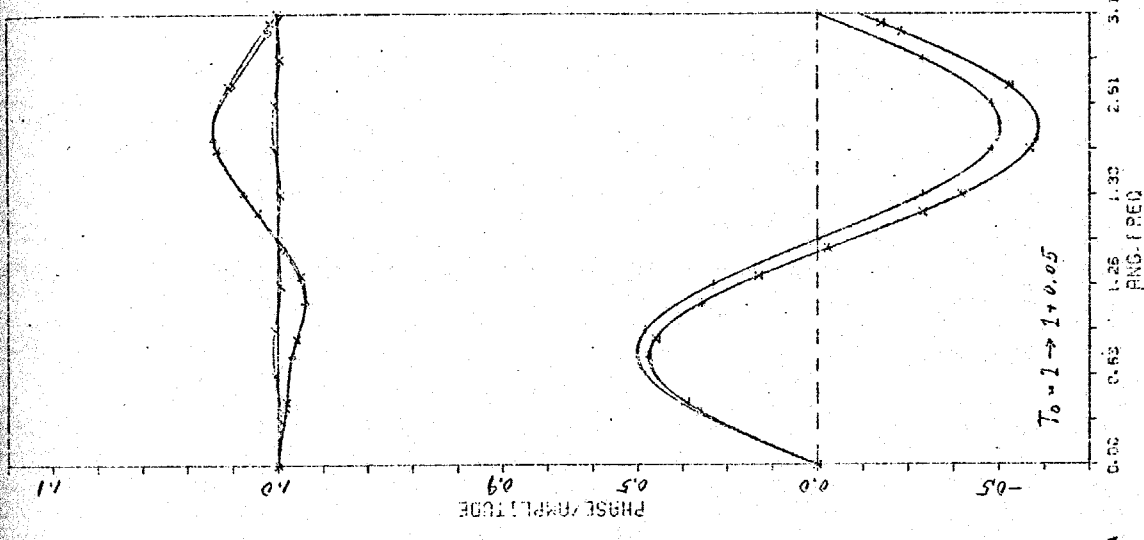
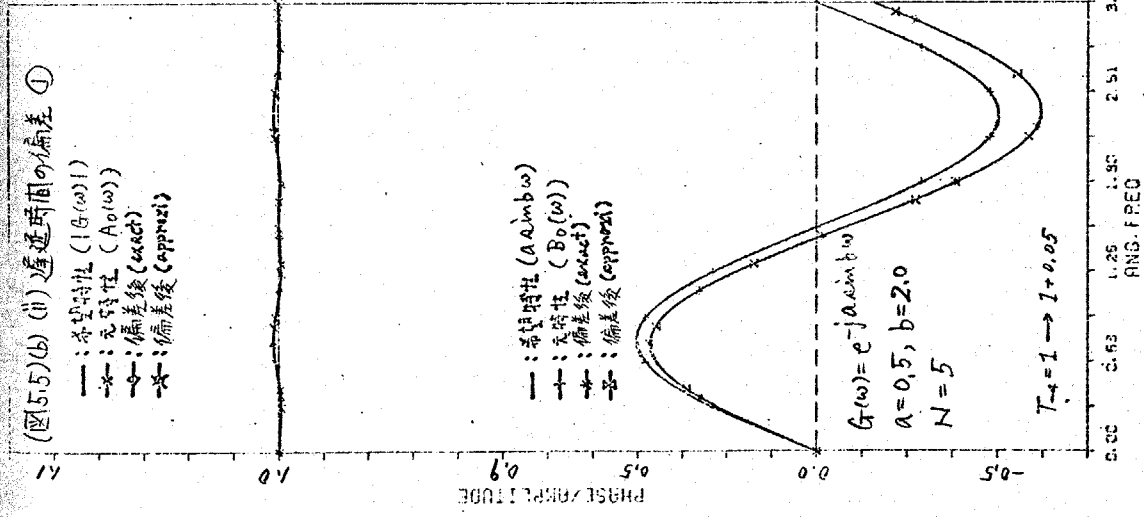


- : 希望特性 ($A_0 \sin b \omega$)
- x- : 无特性 ($B_0(\omega)$)
- o- : 偏差后 (exact)
- * : 偏差后 (approx)



(图5.5)(b) (ii) 延迟时间的偏差 ①

- : 希望特性 ($|G(\omega)|$)
- *- : 无碍性 ($A_0(\omega)$)
- : 偏差后 (exact)
- * : 偏差后 (approx)



- : 希望特性 ($|A_{\Delta}(\omega)|$)
- *- : 无碍性 ($B_0(\omega)$)
- : 偏差后 (exact)
- * : 偏差后 (approx)

$G(\omega) = e^{-ja\omega} b\omega$
 $a = 0.5, b = 2.0$
 $N = 5$

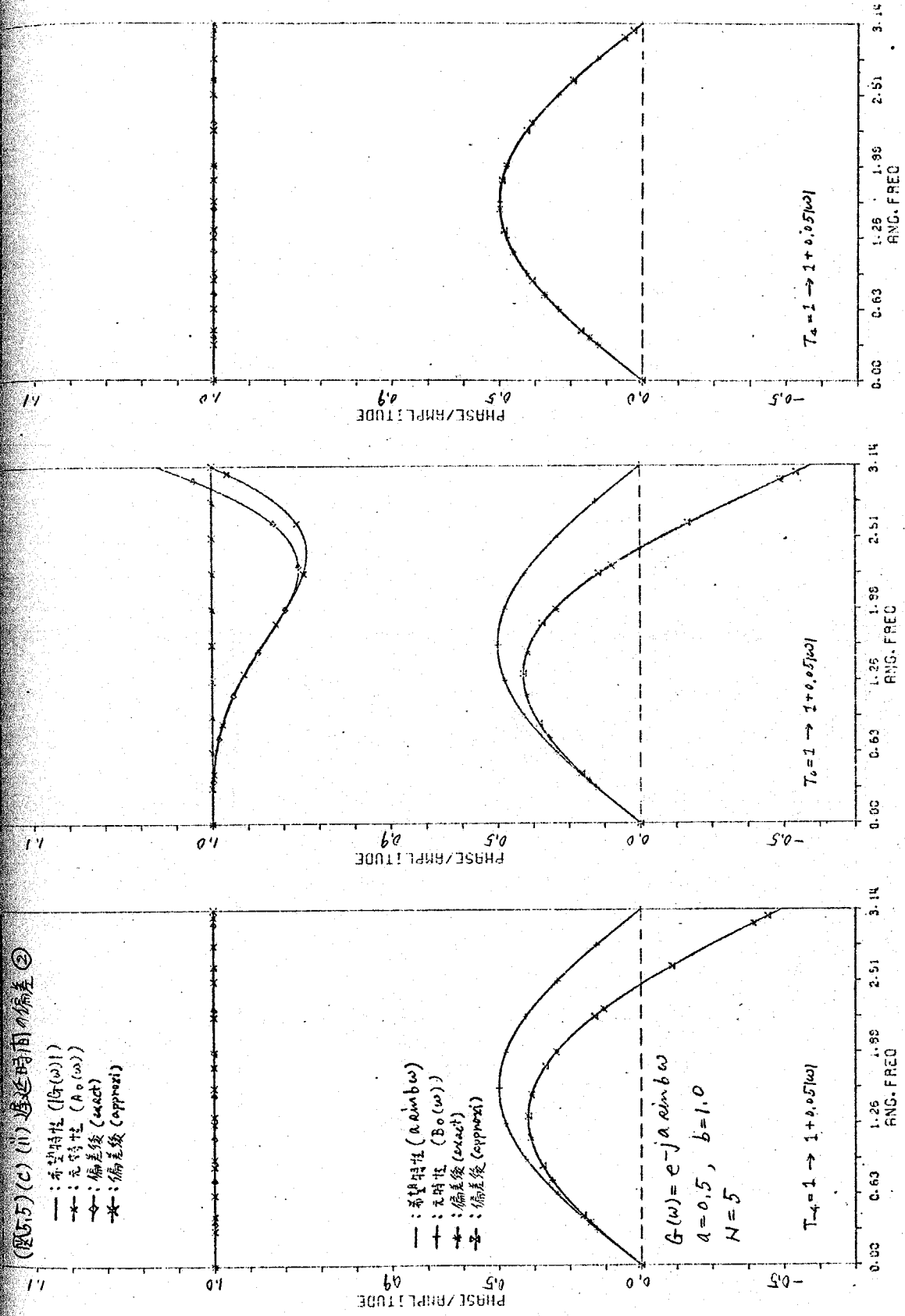
$T_4 = 1 \rightarrow 1 + 0.05$

(图5.5) (c) (ii) 延迟时间的偏差

- : 希望特性 ($|G(\omega)|$)
- * : 无失真 ($A_0(\omega)$)
- ◇ : 偏差后 (exact)
- ☆ : 偏差后 (approx)

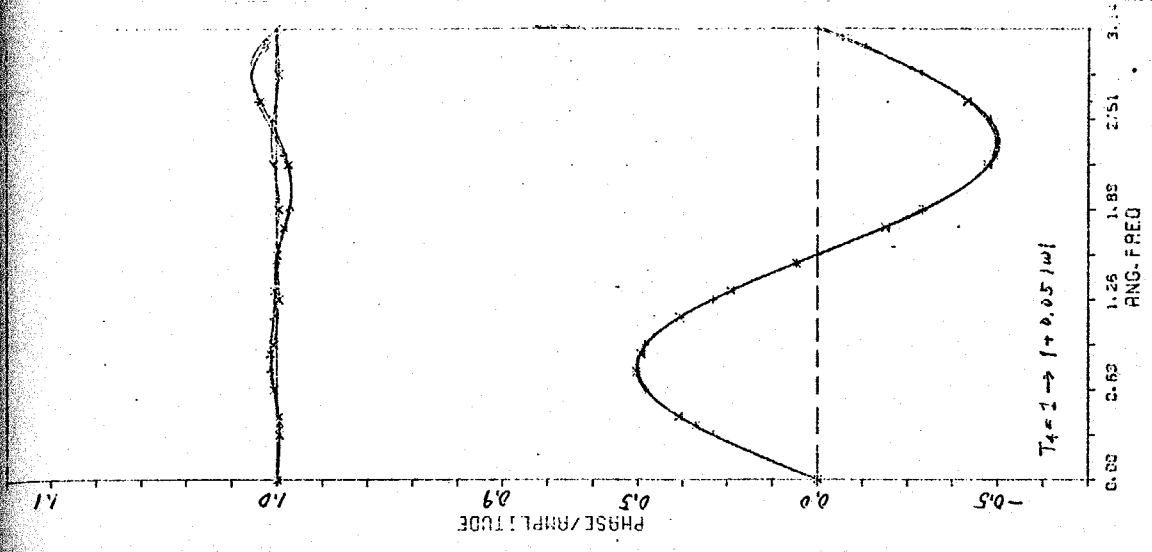
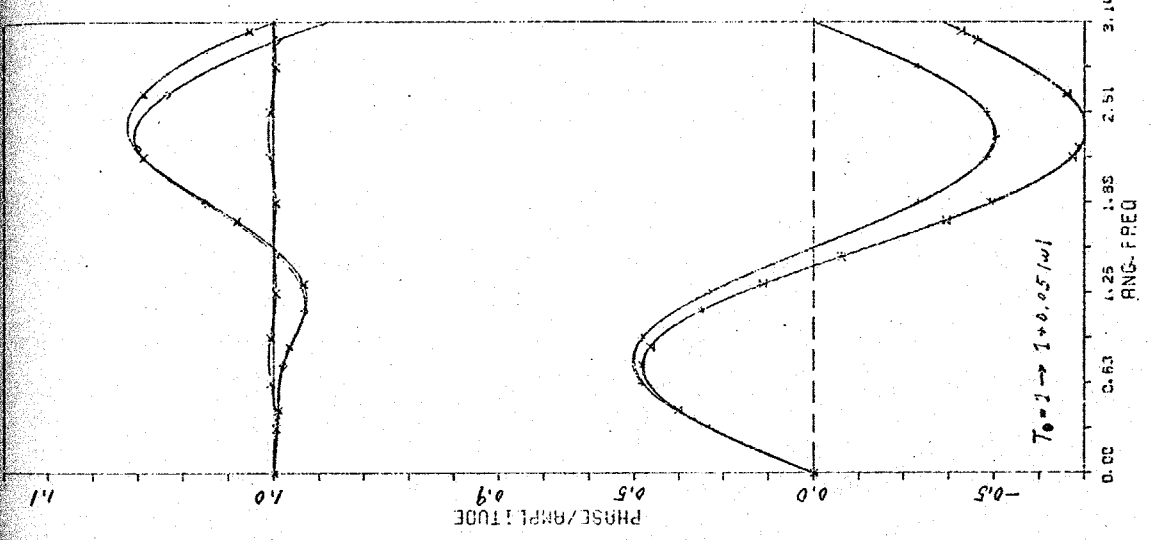
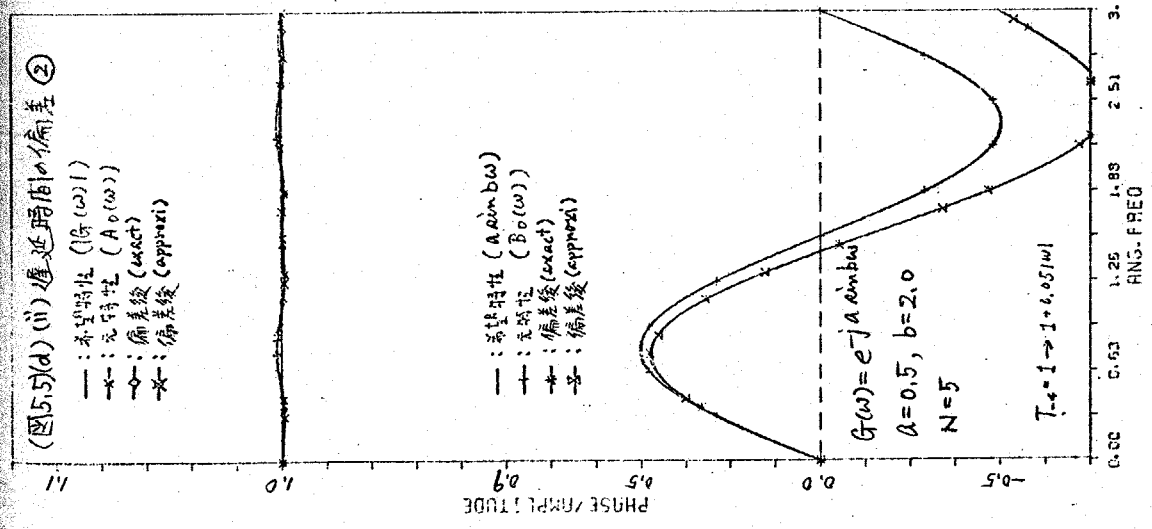
- : 希望特性 ($a \sin b\omega$)
- + : 无失真 ($B_0(\omega)$)
- ◇ : 偏差后 (exact)
- ☆ : 偏差后 (approx)

$G(\omega) = e^{-ja} \sin b\omega$
 $a = 0.5, b = 1.0$
 $N = 5$

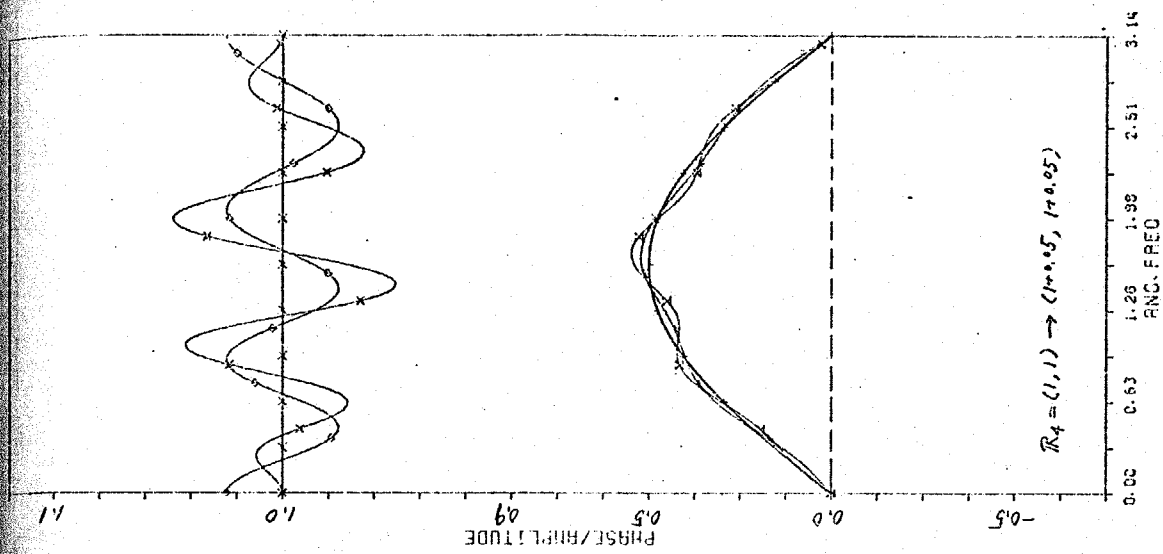
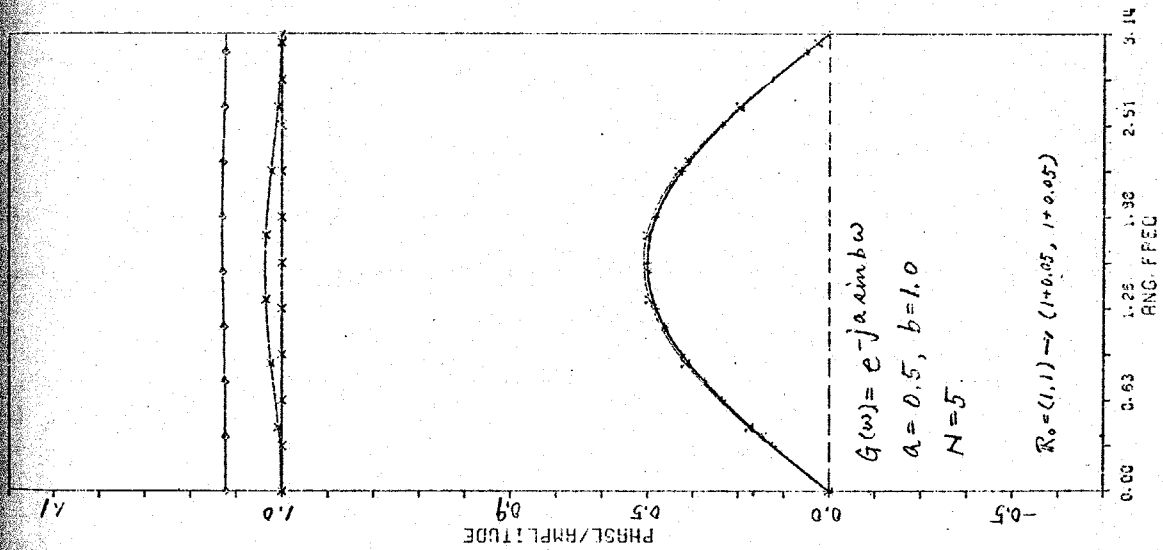


(图5.5)(d) (ii) 延迟误差的偏差②

- : 期望特性 ($|G(\omega)|$)
- x- : 实际特性 ($A_0(\omega)$)
- o- : 偏差 (exact)
- * : 偏差 (approx)



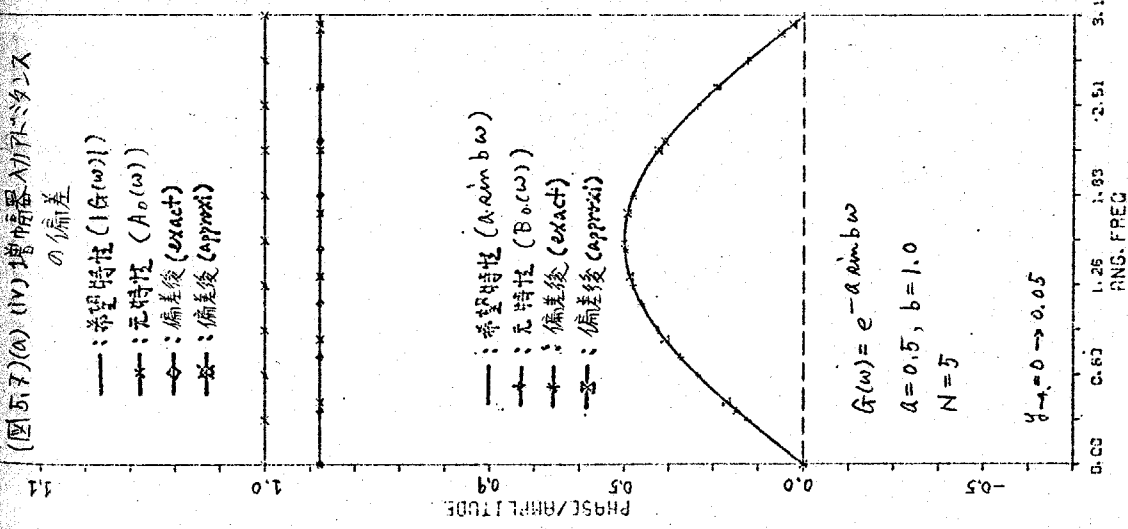
(图5.6)
 (iii) 影像化システムの偏差
 —: 希望特性 ($|G(\omega)|$)
 -x-: 元特性 ($A_0(\omega)$)
 -o-: 偏差後 (exact)
 -□-: 偏差後 (approx)



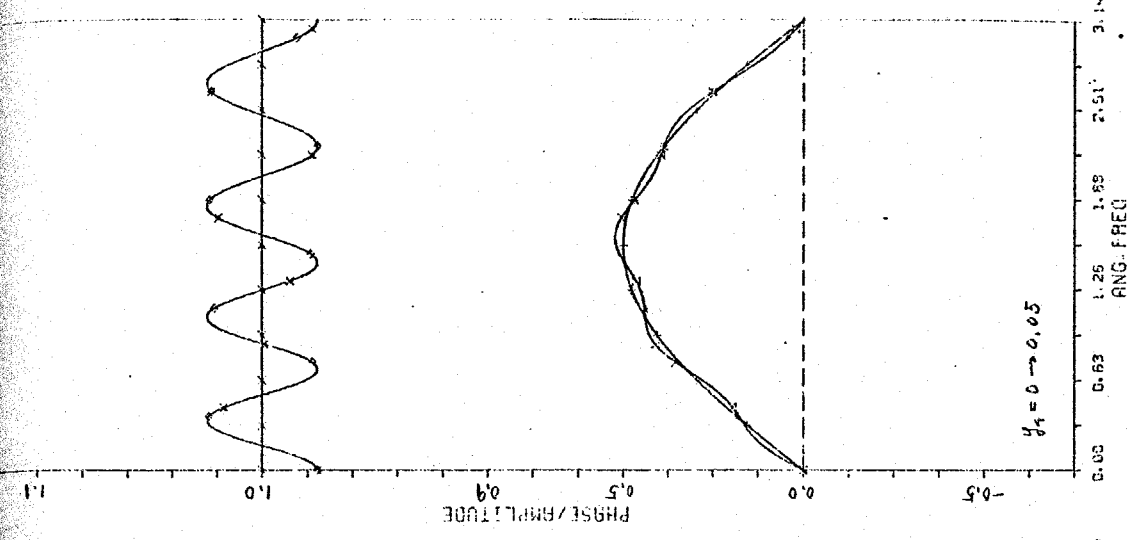
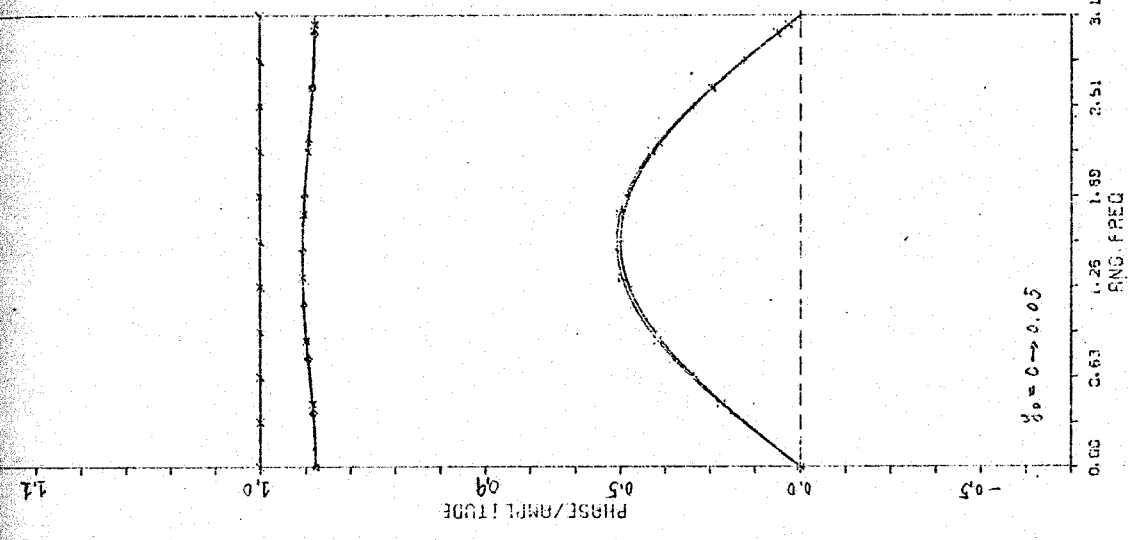
—: 希望特性 ($A \sin b \omega$)
 -x-: 元特性 ($B_0(\omega)$)
 -o-: 偏差後 (exact)
 -□-: 偏差後 (approx)

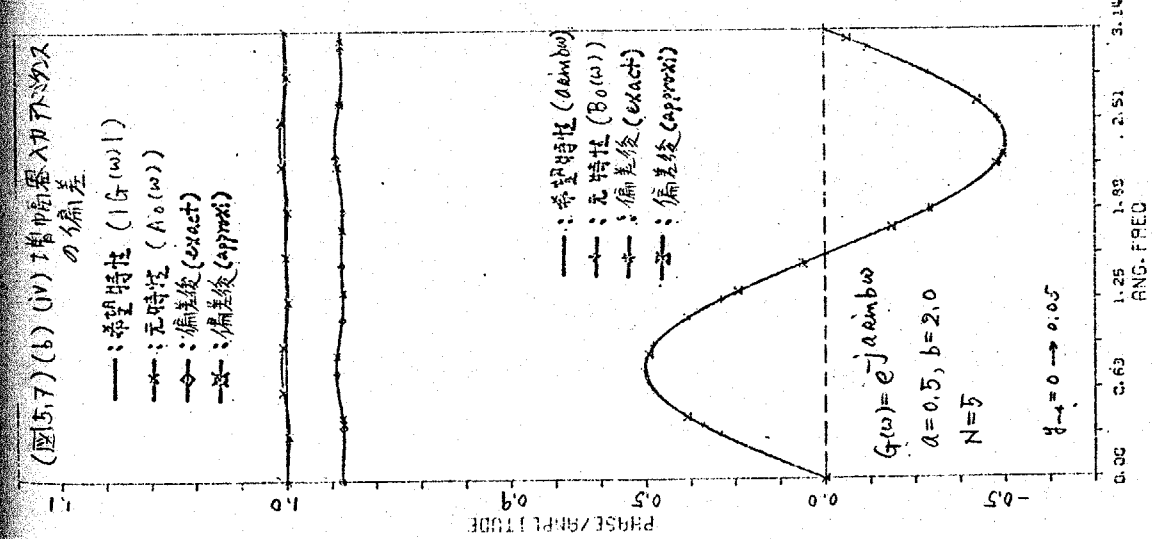
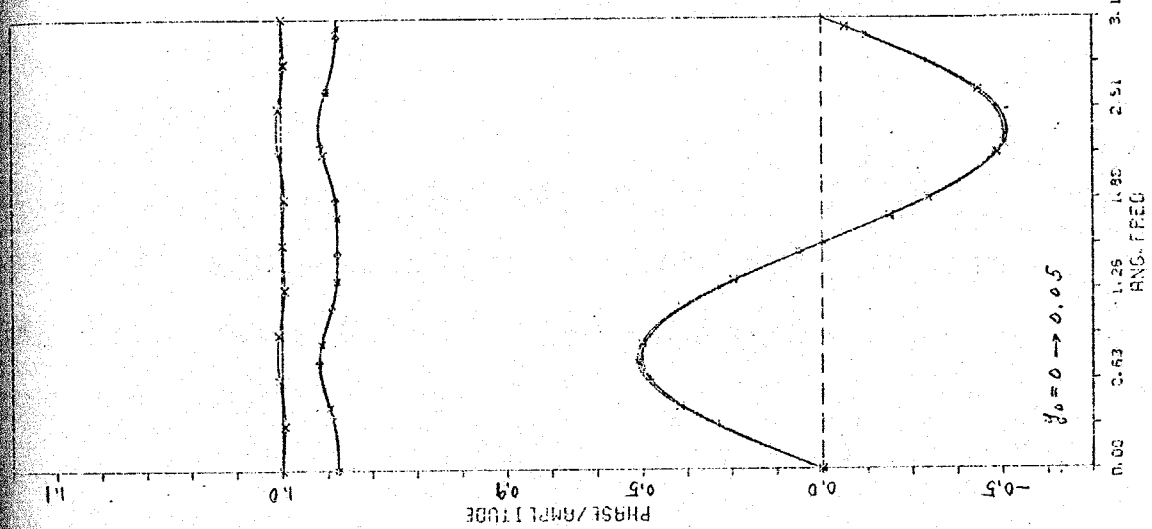
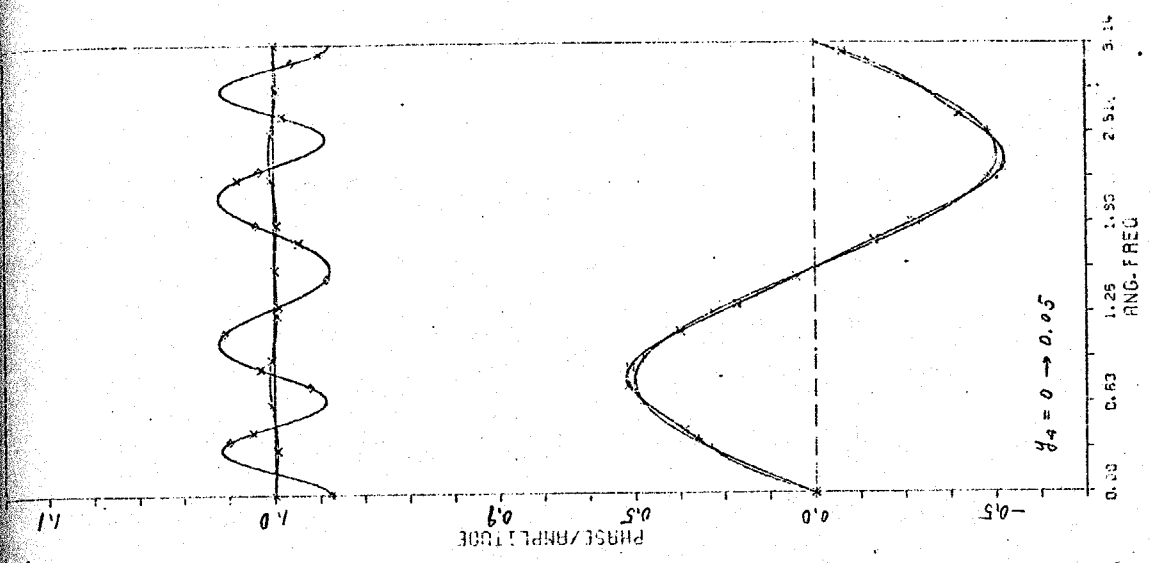
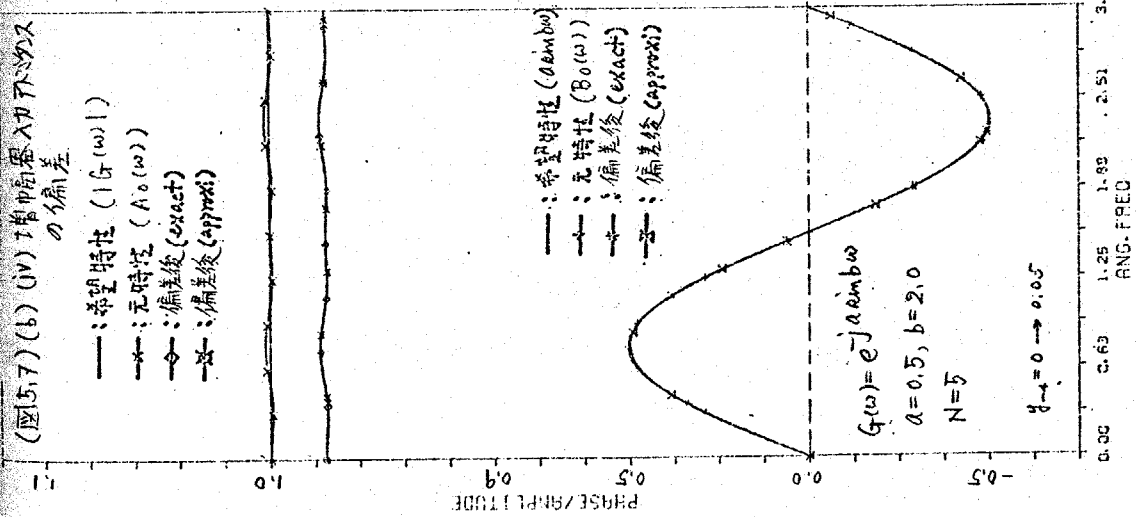
(図5) $G(\omega)$ (IV) 増幅器特性の偏差

- : 希望特性 ($|G(\omega)|$)
- - - : 元特性 ($A_0(\omega)$)
- : 偏差後 (exact)
- ◇ : 偏差後 (approx)



- : 希望特性 ($A_0 \sin b \omega$)
- - - : 元特性 ($B_0(\omega)$)
- : 偏差後 (exact)
- ◇ : 偏差後 (approx)



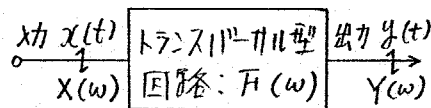


5.5 時間領域標本値への影響

本節では、トランス11'-111型回路の各種構成パラメータの偏差が、時間領域標本値に与える影響を、基準特性との等間隔標本誤差2乗和を評価することとし、一次近似による式を導出すると共に、計算例を付して、偏差の生じるパラメータの種類及びその位置による影響の特徴を説明する。尚、本節の書き方は、まず、一般の場合について、多少考察し、次に、多少特殊な場合について、5.3節の結果をもちき、トランス11'-111型回路の各種構成パラメータの偏差の影響を〈表5.1〉に述べ、最後に、計算例と、偏差の種類と位置による影響の特徴について述べる。本節で扱っている等間隔標本誤差2乗和は、概ね、符号関数差を評価する量と考えることも可能と思わしむ。

(I) 一般論

トランス11'-111型回路の基準の伝達関数を



$$F_0(\omega) \cong \sum_{n=0}^N C_n e^{-jn\omega} \quad (5.5-1) \quad (\text{図5.8})$$

又、各種パラメータに偏差が生じた場合の伝達関数を

$$F(\omega) = F_0(\omega) + \Delta F(\omega) \quad (5.5-2)$$

と表す。このとき、(図5.8)に示すように、この回路に入力 $x(t) \rightarrow X(\omega)$ が入ると、出力は

$$Y_0(\omega) \cong F_0(\omega) \cdot X(\omega) \rightarrow y_0(t) \quad (5.5-3)$$

$$Y(\omega) \cong F(\omega) \cdot X(\omega) \rightarrow y(t) \quad (5.5-4)$$

である。このとき、本節で採用する評価量、等間隔標本誤差2乗和を

$$E \cong \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{y(m - \tau_{an}) - y_0(m - \tau_{an})\}^2 \quad (5.5-5)$$

但し、 τ_{an} は、 n 個の位相を表す実定数。

を定義する。この時、標本化定理から、11'-111の等式を用いて、周波数領域に書き直せば、

$$E = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Delta F(\omega + 2i\pi) X(\omega + 2i\pi) \cdot e^{j(\omega + 2i\pi) \cdot \tau_{an}} \right|^2 d\omega \quad (5.5-6)$$

となる。

特に、トランス11'-111型回路の偏差による代表的な影響として、式(5.3-13)を

を考へると,

$$\Delta F(\omega) = A_{11}(\omega) \sum_{k=0}^{P-1} C_k e^{-j(sp-k)\omega} - \{1 - A_{21}(\omega)\} \sum_{k=p}^N C_k e^{-jk\omega} \quad (5.5-7)$$

とあり. この場合,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k,l=0}^N C_k C_l \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{D}_1(\omega)|^2 e^{j(k-l)\omega} d\omega \\ &\quad + \sum_{k,l=p}^N C_k C_l \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{D}_2(\omega)|^2 e^{j(k-l)\omega} d\omega \\ &\quad - 2 \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=p}^N C_k C_l \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \{ \overline{\mathcal{D}_1(\omega)} \mathcal{D}_2(\omega) \} e^{j(2p-k-l)\omega} d\omega \end{aligned} \quad (5.5-8)$$

を得る. 但し,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_1(\omega) &\triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_{11}(\omega+2i\pi) \cdot X(\omega+2i\pi) e^{-j(\omega+2i\pi)Ca} \\ \mathcal{D}_2(\omega) &\triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{1 - A_{21}(\omega+2i\pi)\} X(\omega+2i\pi) e^{-j(\omega+2i\pi)Ca} \end{aligned} \right\} \quad (5.5-9)$$

とあり. この式に, 偏差の与り及び基準の取捨により, 十分に等化が出来ること,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} Y_0(\omega+2i\pi) e^{-j(\omega+2i\pi)Ca} \\ &= F_0(\omega) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(\omega+2i\pi) e^{-j(\omega+2i\pi)Ca} \end{aligned} \quad (5.5-10)$$

が成り立つことが, 式(5.5-7)より $A_{11}(\omega)$, $1 - A_{21}(\omega)$ が定数と見做すことが, 又は入力 $X(\omega)$ が $(-\pi, \pi)$ に帯域制限されておれば成り立つ. 式(5.5-9)は,

$$\mathcal{D}_1(\omega) = A_{11}/F_0(\omega), \quad \mathcal{D}_2(\omega) = (1 - A_{21})/F_0(\omega) \quad (5.5-11)$$

と表せることが出来る. 特に A_{11} , $(1 - A_{21})$ が定数と見做す場合には, 式(5.5-8)に於いて, 相関関数は $(1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{D}_1(\omega)|^2 e^{jm\omega} d\omega$ 等と,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{D}_1(\omega)|^2 e^{jm\omega} d\omega = \frac{|A_{11}|^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{jm\omega}}{|F_0(\omega)|^2} d\omega = \frac{|A_{11}|^2}{2\pi j} \oint \frac{z^{m-1} dz}{\sum_{k,l=0}^N C_k C_l z^{k-l}} \quad (5.5-12)$$

となり. $z^{m-1} / \{ \sum_{k,l=0}^N C_k C_l z^{k-l} \}$ の単位円内の留数之和を求めればよい. 計算出来ることである. 但し, 式(5.5-8), (5.5-12)等, 一般の場合には相当に計算が複雑であること. 次に, 少し, 特殊な場合について, 具体的に計算結果を示すこととする.

(II) 時間領域標本値への影響 (位相等化器の場合)

入力加, 帯域制限されておらず, 振幅歪はないものとする. 即ち,

$$|X(\omega)| = 1 \quad (|\omega| < \pi), \quad 0 \quad (|\omega| > \pi) \quad (5.5-13)$$

このとき、式(5.5-5)より、(5.5-6)は、 C_m より、

$$E = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta F(\omega)|^2 d\omega \tag{5.5-14}$$

で表される。特に、 $\Delta F(\omega)$ が式(5.5-7)より与えられる場合には、

$$E = \sum_{n=-(p-1)}^{p-1} \left\{ \sum_{k=\max(0, n)}^{\min(p-1, p-1+n)} C_k C_{k-n} \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A_{11}(\omega)|^2 e^{jm\omega} d\omega$$

$$+ \sum_{m=-(N-p)}^{N-p} \left\{ \sum_{k=\max(p, p+m)}^{\min(N, N+m)} C_k C_{k-n} \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |1-A_{21}(\omega)|^2 e^{jm\omega} d\omega$$

$$- 2 \sum_{m=-(N-p+1)}^p \left\{ \sum_{k=\max(0, 2p-m-N)}^{\min(p+1, p-m)} C_k C_{2p-k-m} \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} \left\{ \bar{A}_{11}(\omega) \{1-A_{21}(\omega)\} e^{jm\omega} \right\} d\omega \tag{5.5-15}$$

したがって、 A_{11} 、 $(1-A_{21})$ が定数である場合には、

$$E = |A_{11}|^2 \sum_{k=0}^{p-1} C_k^2 + |1-A_{21}|^2 \sum_{k=m}^N C_k^2 - 2 \text{Re} \{ \bar{A}_{11} (1-A_{21}) \} \cdot \sum_{k=\max(0, 2p-N)}^{p-1} C_k C_{2p-k} \tag{5.5-16}$$

となる。以下、(表5.1)に従い、上の結果を用いて、各種偏差に対する影響を一次近似から調べる。

(i) タップ利得の偏差: $C_g \rightarrow C_g + \Delta C_g$

$$E = (\Delta C_g)^2 = \left\{ \Delta C_g / C_g \right\}^2 \cdot C_g^2 \tag{5.5-17}$$

(ii) 単位回路の遅延時間の偏差 (映像伝播定数の偏差)

① $T_p=1 \rightarrow 1+\delta$

$$E = 2 \left\{ 1 - \frac{\sin \delta \pi}{\delta \pi} \right\} \sum_{k=p}^N C_k^2 + 4 \delta \frac{\sin \delta \pi}{\delta \pi} \sum_{m=1}^{N-p} \left\{ \sum_{k=p+m}^N C_k C_{k-m} \right\} \frac{(-1)^m}{m^2 \pi^2 \delta^2}$$

$$\approx \left[\left(\frac{\pi^2}{3} \right) \sum_{k=p}^N C_k^2 + 4 \sum_{m=1}^{N-p} \left\{ \sum_{k=p+m}^N C_k C_{k-m} \right\} \frac{(-1)^m}{m^2} \right] \cdot \delta^2 \tag{5.5-18}$$

② $T_p=1 \rightarrow 1+\delta|\omega|$

$$E \approx \left[\left(\frac{\pi^4}{5} \right) \sum_{k=p}^N C_k^2 + 4 \sum_{n=1}^{N-p} (-1)^n \left(\frac{\pi^2}{m^2} - \frac{6}{m^4} \right) \left\{ \sum_{k=p+n}^N C_k C_{k-m} \right\} \right] \cdot \delta^2 \tag{5.5-19}$$

(iii) 映像歪み係数の偏差: $R_p=R \rightarrow R+\Delta R$, $\Delta R=(r, r)$

$$E \approx (1/2) \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} C_k^2 - \sum_{k=2}^{p-1} C_k C_{k-2} \right\} (r/R)^2 \tag{5.5-20}$$

(iv) タップ利得を構成する増幅器の入力抵抗の偏差: $y_g=0 \rightarrow y_g(>0)$

$$E \approx \left\{ \sum_{k=0}^N C_k^2 + 2 \sum_{k=\max(0, 2g-N)}^{g-1} C_k C_{2g-k} \right\} \left\{ y_g R / (2+y_g R) \right\}^2 \tag{5.5-21}$$

但し、 $g=0$ のとき、 $\sum_{k=\max(0, 2g-N)}^{g-1} (\dots) = 0$ となる。

(V) 始終端阻抗の偏差

① $R_s = R \rightarrow R+r$

$$E = \left\{ r / (2R+r) \right\}^2 \sum_{k=0}^N C_k^2 \tag{5.5-22}$$

② $R_L = R \rightarrow R+r$

$$E = \left\{ r / (2R+r) \right\}^2 \sum_{k=0}^N C_k^2 \tag{5.5-23}$$

(VI) 集中定数多次全域通過回路を単位回路に用いる場合、但し、偏差の起る
 以ての状態では、多次全域通過回路の伝達関数は、帯域内 $(-\pi, \pi)$ の理想通
 過線 $(e^{-j\omega})$ に十分よく近似したものと見做す。

① p 番目の単位回路 λ の半-称損失付加 (i.e. $L \rightarrow L(1+\sigma_e/j\omega)$, $C \rightarrow C(1+\sigma_c/j\omega)$)

$$E \doteq (\sigma_e - \sigma_c)^2 \frac{1}{8\pi} \left[(2S_i 2\pi) \sum_{k=0}^{p-1} C_k^2 + \{ (m+2)S_i (m+2)\pi + (m-2)S_i (m-2)\pi - 2m S_i m\pi \} \sum_{m=1}^{p-1} \left\{ \sum_{k=m}^{p-1} C_k C_{k-m} \right\} \right] \\
 + (\sigma_e + \sigma_c)^2 (1/4) \sum_{k=p}^N C_k^2 \\
 - (\sigma_e^2 - \sigma_c^2) \frac{1}{4} \left[\sum_{m=-(N-p+1)}^p \left\{ S_i m\pi - S_i (m-2)\pi \right\} \left\{ \sum_{k=\max(0, 2p-m-N)}^{\min(p-1, p-m)} C_k C_{2p-k-m} \right\} \right] \tag{5.5-24}$$

但し、 $S_i x \doteq \int_0^x (\sin t/t) dt$

② p 番目の単位回路の半-称素子偏差 (i.e. $L \rightarrow L(1+\delta_e)$, $C \rightarrow C(1+\delta_c)$)

$$E \doteq (\delta_e - \delta_c)^2 (1/8) \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} C_k^2 - \sum_{k=2}^{p-1} C_k C_{k-2} \right\} \\
 + (\delta_e + \delta_c)^2 (1/4) \left[(\pi^2/3) \sum_{k=p}^N C_k^2 + 4 \sum_{m=1}^{N-p} \left\{ \sum_{k=p+m}^N C_k C_{k-m} \right\} \cdot (-1)^m / m^2 \right] \\
 - (\delta_e^2 - \delta_c^2) \frac{1}{8} \left[\sum_{k=\max(0, 2p-N)}^{p-1} C_k C_{2p-k} + \sum_{k=\max(0, 2p-2-N)}^{p-2} C_k C_{2p-2-k} + 4 \sum_{\substack{m=-(N-p-1) \\ m \neq 0, 2}}^p \frac{(-1)^{m+1}}{m(m-2)} \left\{ \sum_{k=\max(0, 2p-N)}^{\min(p-1, p-m)} C_k C_{2p-N-k} \right\} \right] \tag{5.5-25}$$

ここで、上の結果から、多少注釈を加えておく。(i)では、 E はタップ利得
 の偏差の大きさを決める。その位置にはよらない。(ii)では、①、②のいずれの場合も、 δ の
 正負によらず、偏差の生じる単位回路の位置 δ の絶対値により E が決まる。(iii)の場合
 も(ii)と同様である。又、(V)では、始終端阻抗の偏差が、いずれも、同一の異分母
 を与えることになる。(VI)では、特に、半-称偏差 (i.e. $\sigma_e = \sigma_c$, あるいは、 $\delta_e = \delta_c$) の場合は
 は、式(5.5-24), (5.5-25)より、中央項及び右項は消え、左項のみが残る。

さらに、通常の等化器で、概ねそうであるように、中央タップのタップ利得が、他

k 比へて、十分大きい場合には、(ii), (iii), (iv), (vi) 2, $\sum_k C_k^2$ の項に対し、
 $\sum_k C_k C_{k-i}$ とする項は、比較的小さく、普通はよく、 E に関する主要な
 部分は、前者の総和で決まる。又、 $\sum_k C_k^2$ の項では、その総和に、大抵のタップ利得を
 有する中央タップが加わるか否か、大抵はほぼ決まる。偏差のない状態では、十分
 良好な等化が行えたと見られる。 $\sum_{k=0}^N C_k^2 \approx (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |F_0(\omega)|^2 d\omega \approx 1$ が成
 り立つと見られる。中央タップが、総和に含まれるは、 $\sum C_k^2 \approx 1$, 含まれるけ
 れば、 $\sum C_k^2 \approx 0$ ということが、非常に大抵に見られる。成り立つと見られる。

(III) 計算例

前節と同じく、希望特性を

$$G(\omega) \triangleq e^{-j a \sin b \omega} \quad (|\omega| < \pi)$$

とし、これをタップ数 $N+1$ の FIR-カル型回路

$$F_0(\omega) = \sum_{n=0}^N C_n e^{-j n \omega}$$

で最小二乗近似、即ち

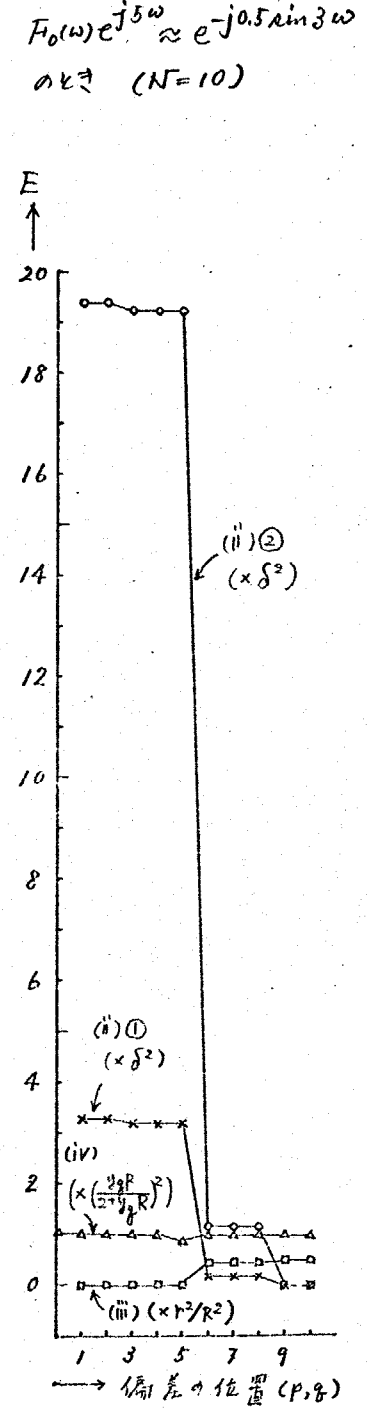
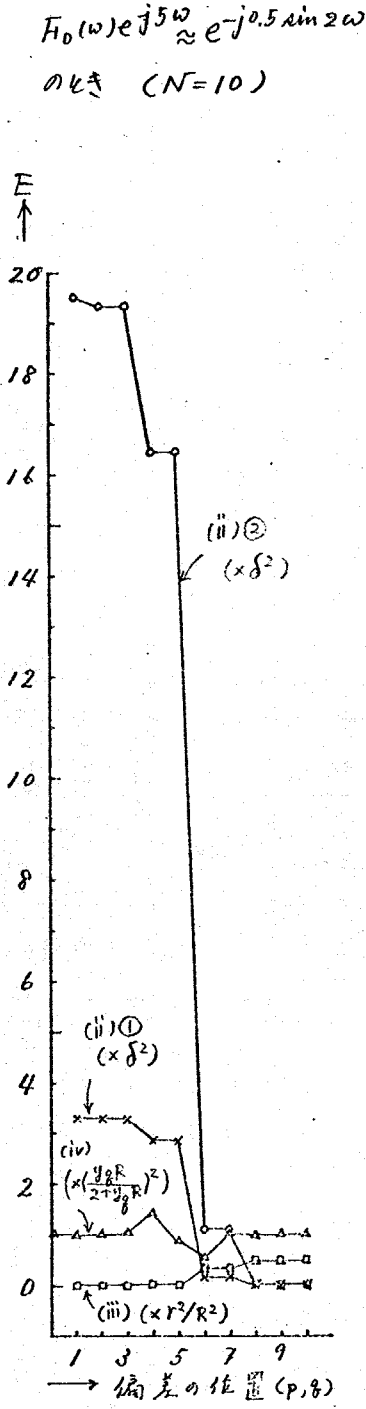
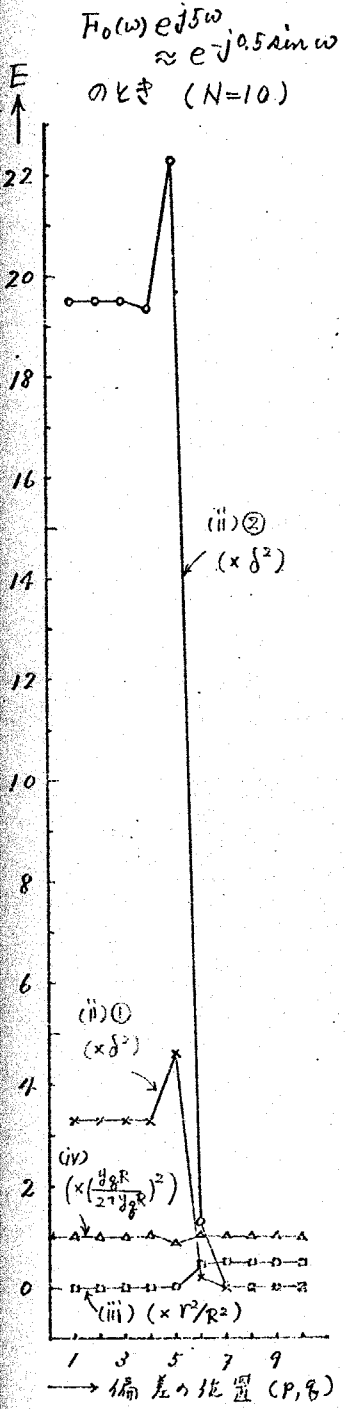
$$E \triangleq (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |F_0(\omega) e^{j \omega C_{am}} - G(\omega)|^2 d\omega \rightarrow \text{最小}$$

として例に於いて計算する。以下に示すのは $N=10, C_{am}=5$ の場合で、 $a=0.5$
 とし、 $b=1, 2, 3$ の各場合について計算した結果である。ここに示す例では、中央
 タップ C_5 が他と比べて大きく、又、 $\sum_{k=0}^{10} C_k^2 \approx 1$ が成り立つ。

(図5.9)に、(ii) ①, ②, (iii), (iv) の計算結果を示す。いずれも、(II) 2 述べた考察とよく
 一致しており、偏差の種類及び、偏差の位置により、 E の値に大きな特徴があり、興味深
 い。即ち、(ii) 2 は、 E に関する主要項は、式(5.5-18), (5.5-19) 2, $\sum_{k=p}^N C_k^2$ 2 あり
 じ。 $p=1 \sim 5$ 2 は、ほぼ 1, $p=6 \sim 10$ 2 は、非常に小さい値と予想され、(図5
 .9) の結果とよく合っている。さらに、(ii) ① 2 は、 $(\pi/3) \div 3.3$, ② 2 は、 $(\pi/5) \div 19.5$
 2 あり、数値的にもよく一致を見られる。(iii) 2 は、逆に、式(5.5-20) 2, E に関する
 主要項は、 $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p-1} C_k^2$ 2 あり、 $p=1 \sim 5$ 2 は、非常に小さく、 $p=6 \sim 10$ 2 は、ほぼ
 0.5 と見られる。この場合も、(図5.9) の結果とよく一致をみる。 (iv) の主要項
 は、式(5.5-21) から、 $\sum_{k=0}^N C_k^2 \approx 1$ 2, ほぼ一定であり、偏差の位置により、
 かつ、この場合も、(図5.9) の計算結果は、概ね、よく合っていると見られる。

(図5.10) (a), (b) へ (vi) の場合の計算結果を示している。この場合、式(5.5-24) (5.5-25) において、 E に関与する重要項は、第1項の $\sum_{k=0}^{p-1} C_k^2$ 及び、第2項の $\sum_{k=p}^N C_k^2$ と考えられ、前者は $p=1\sim 5$ の場合、後者は $p=6\sim 10$ の場合と考えると、(図5.10) (a), (b) においても、多少とよく一致した結果が得られる。又、(図5.10) の (a), (b) を比較して、半-標損失付加に比べ、半-標差付加の場合の方が、 $d_e = \sigma_e$, $d_c = \sigma_c$ とすると、 E が大きい、即ち、時間領域標本値の影響が大きいことが分る。さらに、(図5.9) 及び (図5.10) を合せると見ると、(iii) の偏差が最も、顕著な影響を及ぼすことが知られる。

尚、以上の計算結果 (図5.9) (図5.10) は、本節 (五) で示した近似式に基づいてのものであるが、一次近似による偏差解析が、十分に近似を与えることに依りては、本節の計算結果 (図5.9) (図5.10) から得られる結論は、十分信頼出来ると考えられる。

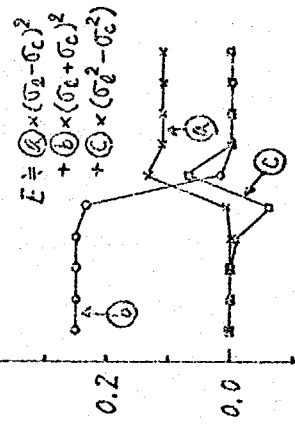


(図 5.9)

(vi) ① 半一称損失付加

$$F_0(\omega) e^{j5\omega} \approx e^{j0.5 \sin \omega}$$

のとき (N=10)

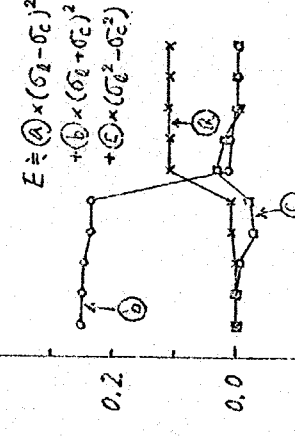


→ 偏差の位置 (p)

(vi) ② 半一称損失付加

$$F_0(\omega) e^{j5\omega} \approx e^{-j0.5 \sin 2\omega}$$

のとき (N=10)

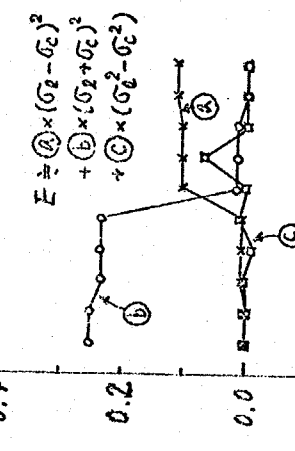


→ 偏差の位置 (p)

(vi) ③ 半一称損失付加

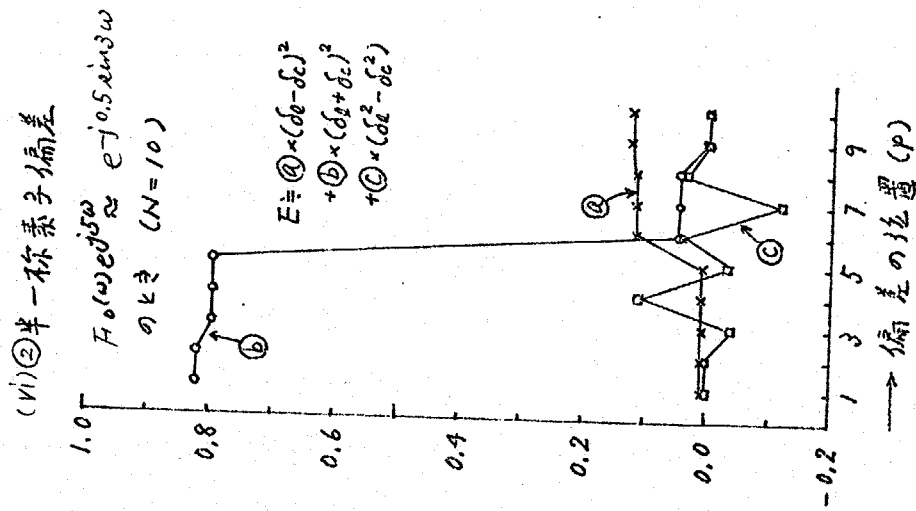
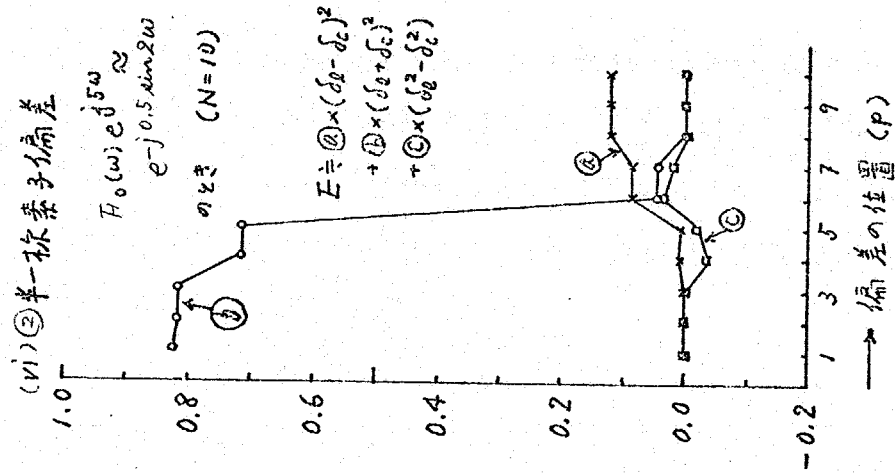
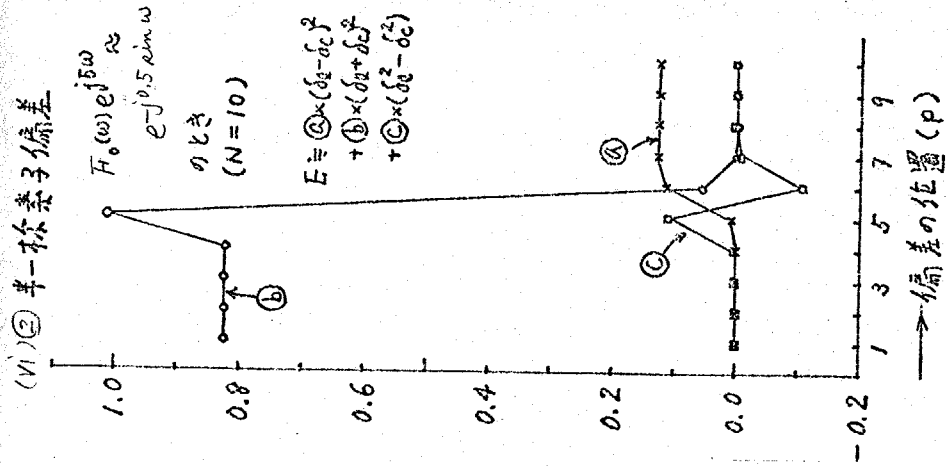
$$F_0(\omega) e^{j5\omega} \approx e^{-j0.5 \sin 3\omega}$$

のとき (N=10)



→ 偏差の位置 (p)

(図5.10) (a)



(図5.10) (b)

5.6. 偏差の分類

本節では、トランスバーサル型回路の各種構成パラメータの偏差に対し、その影響が、タップ利得の調整で補償出来るか否により、偏差の種類を分類することを提案する。タップ利得の調整による補償という観点に立つ理由は、トランスバーサル型回路が、可変等化器等として広く用いられているように、タップ利得が可変である場合が多いと思われからである。

まず、タップの数を増やさないとするとき、5.3節に述べた結果(式(5.3-1)~式(5.3-11)')から、タップ利得の調整による補償出来る偏差は、(i) タップ利得の偏差、(ii) ①始端抵抗の偏差に限られると考えられる。その他の場合、偏差の影響を全周波数帯域において、零にしようとするとき、例えば、(iii) では、 $\sum_{k=p}^N C_k e^{-jk\omega} \equiv 0$ としなげればならず、一般にこれは、 $C_k = 0$ ($k=p \sim N$) を意味し、補償不可能である。

そこで、タップ数を増やすことを許した場合を問題とすると、これは、第3章とも関連し、もともと、トランスバーサル型回路が、近似帯域で有している一種の近似系の完全性を、パラメータの偏差が損うか否かという問題となる。これに代しては、トランスバーサル型回路が有する一種の近似系の完全性を損うと考えられる報告もあり⁽²⁹⁾、又、手近かな例としては、

- 全々の遅延線が $T \rightarrow T - \delta$ ($\delta > 0$) に偏差した場合。この場合、7-11級程度の周波数が広がることになり、タップ数を増せば、タップ利得の調整で近似度をいくらでも上げることが出来る。
- 全々の遅延線が $T \rightarrow T + \delta$ ($\delta > 0$) に偏差した場合。7-11級程度の周波数がせばまり、タップ数を増やし、タップ利得を調整しても、近似誤差が大きくなることとなる。

といった異種の偏差が存在する事実もある、興味深い問題と思われよう。

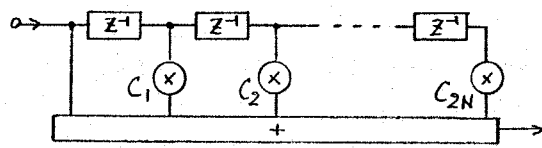
ここでは、上に述べたように異種の偏差が存在することと指摘し、タップ数を増し且つ、タップ利得を調整して、偏差の影響が補償出来るか否かによる偏差の分類を提案するに留め、これに関する検討は、今後の課題として残しておくことにする。

5.7 統計的偏差が伝達特性に及ぼす影響

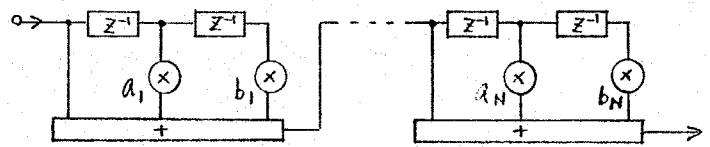
本節では、偏差が統計的ばらつきをもつ場合について、多少の考察を行う。即ち、タップ利得が設計値を中心とし、一様分布と仮定した場合について、それが伝達特性に与える影響を、現実の特性と理想特性の差の二乗絶対値の平均で評価することにし、⁽²⁸⁾通常型構成と、縦続型構成の比較を行うことを目的としている。これは、タップ利得の打ち切り誤差や、信号の量子化誤差を統計的に評価していることに相当すると考えられ、考察の価値が十分あるものと考えよう。

— 通常型構成と縦続型構成の比較 —

(図5.11)に、通常型構成のトリスリプル型回路と、二次縦続型構成の例を示しているが、図に示すように、ここでは、両者の比較を行う為に、タップの数が両者で一致するように、 $C_0 \equiv 1$ とし、固定し、 C_0 に代るは、ばらつきを仮定しないこととする。



(a) 通常型構成



(図5.11) (b) 二次縦続型構成

さて、タップ利得の設計値を C_m で表し、現実のばらつきをもつタップ利得を C_{mA} で表すことにし、 C_{mA} は次のように表されるものと仮定する。

$$C_{mA} = C_m (1 + \Delta \cdot x_{C_m}) \tag{5.7-1}$$

ここで、 Δ はばらつきの中値を表し、 x_{C_m} は $(-1, 1)$ に一様分布した確率変数で、 n に従って互いに独立とする。即ち、結合確率密度関数を $P(x_{C_1}, x_{C_2}, \dots, x_{C_{2N}})$ とし、

$$P(x_{C_1}, x_{C_2}, \dots, x_{C_{2N}}) = \prod_{n=1}^{2N} P_n(x_{C_n}) \tag{5.7-2}$$

$$P_n(x_{C_n}) = \begin{cases} 1/2 & |x_{C_n}| < 1 \\ 0 & |x_{C_n}| > 1 \end{cases}$$

が成り立つものとする。又、縦続分解した場合の a_n, b_n ($n=1 \sim N$) に従って全く同様に仮定する。

又、以上に対応して、通常型構成に対する設計値 C_m の伝達関数及び現実の

伝達関数は,

$$K_I(z^{-1}) \cong 1 + \sum_{m=1}^{2N} C_m z^{-m} \quad (z^{-1} \cong e^{-j\omega T}) \tag{5.7-3}$$

$$K_A(z^{-1}) \cong 1 + \sum_{m=1}^{2N} C_m (1 + \Delta \cdot \alpha_{Cm}) z^{-m} \quad (z^{-1} \cong e^{-j\omega T}) \tag{5.7-4}$$

とある。さらに、これを系統型構成した場合のものを、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} H_I(z^{-1}) &\cong \prod_{i=1}^N H_{i,I}(z^{-1}) \quad (\cong K_I(z^{-1})) \\ H_{i,I}(z^{-1}) &\cong 1 + a_i z^{-1} + b_i z^{-2} \end{aligned} \right\} (z^{-1} \cong e^{-j\omega T}) \tag{5.7-5}$$

$$\left. \begin{aligned} H_A(z^{-1}) &\cong \prod_{i=1}^N H_{i,A}(z^{-1}) \\ H_{i,A}(z^{-1}) &\cong 1 + a_i (1 + \Delta \cdot \alpha_{ai}) z^{-1} + b_i (1 + \Delta \cdot \alpha_{bi}) z^{-2} \end{aligned} \right\} (z^{-1} \cong e^{-j\omega T}) \tag{5.7-6}$$

とあることに注意する。

ここで、通常型構成による場合の誤差及び、系統型構成による場合の誤差を E, F と表すことにし、 E, F を

$$E \cong K_A(z^{-1}) - K_I(z^{-1}) \tag{5.7-7}$$

$$F \cong H_A(z^{-1}) - H_I(z^{-1}) \tag{5.7-8}$$

と定義する。このとき、 $\langle \cdot \rangle$ と平均を表すことにする。

$$\langle E \rangle = 0 \tag{5.7-9}$$

$$\langle F \rangle = 0 \tag{5.7-10}$$

が成り立つことは、簡単に示される。以下では、 E 及び F の二乗絶対値の平均

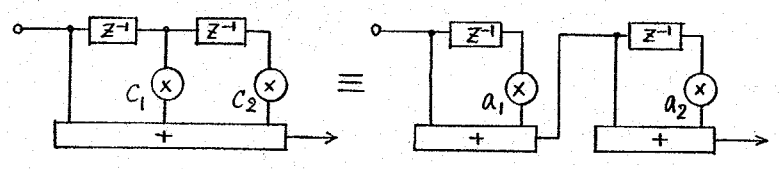
$$\langle |E|^2 \rangle = \langle |K_A|^2 \rangle - |K_I|^2 \tag{5.7-11}$$

$$\langle |F|^2 \rangle = \langle |H_A|^2 \rangle - |H_I|^2 \tag{5.7-12}$$

を評価量として、用いることにし、通常型構成と系統型構成の比較を行うことにする。まず、最も簡単な場合の例について考える。

(例-1) (図5.12)に示す、2

次のトランスミナル型回路と見れば、1次系統型構成として場合を考えると、



(図5.12) 2次トランスミナル型回路と其の1次分解。

$$C_1 = a_1 + a_2, \quad C_2 = a_1 a_2 \tag{5.7-13}$$

が成り立つことに注意すると、簡単な計算により

$$\langle |E|^2 \rangle = (\Delta^2/3) (C_1^2 + C_2^2) \quad (5.7-14)$$

$$\langle |F|^2 \rangle = (\Delta^2/3) (C_1^2 + C_2^2) + (\Delta^2/3) \cdot C_2 \{ C_2 - 2 + 2C_1 \cos \theta \} + (\Delta^4/4) C_2^2 \quad (5.7-15)$$

$$\text{但し, } \cos \theta \triangleq (z+z^{-1})/2 \quad z \triangleq e^{-j\omega T}$$

より得られる。これを比較すると、

$$\max_{\theta} \langle |F|^2 \rangle = (\Delta^2/3) (C_1^2 + C_2^2) + (\Delta^2/3) (C_2^2 - 2C_2) + (\Delta^4/4) C_2^2 + (\Delta^2/3) \cdot 2|C_1 \cdot C_2|$$

$$\min_{\theta} \langle |F|^2 \rangle = (\Delta^2/3) (C_1^2 + C_2^2) + (\Delta^2/3) (C_2^2 - 2C_2) + (\Delta^4/4) C_2^2 - (\Delta^2/3) \cdot 2|C_1 \cdot C_2|$$

と $\langle |E|^2 \rangle$ との大きさを比べることができる。

① $\langle |E|^2 \rangle \geq \max_{\theta} \langle |F|^2 \rangle$ の領域

$$(\Delta^2/3) (C_2^2 - 2C_2) + (\Delta^4/4) C_2^2 + (\Delta^2/3) \cdot 2|C_1 \cdot C_2| \leq 0 \quad (5.7-16)$$

② $(\max_{\theta} \langle |F|^2 \rangle \geq) \langle |E|^2 \rangle \geq \min_{\theta} \langle |F|^2 \rangle$ の領域

$$(\Delta^2/3) (C_2^2 - 2C_2) + (\Delta^4/4) C_2^2 - (\Delta^2/3) \cdot 2|C_1 \cdot C_2| \leq 0 \quad (5.7-17)$$

③ $\min_{\theta} \langle |F|^2 \rangle \geq \langle |E|^2 \rangle$ の領域

$$(\Delta^2/3) (C_2^2 - 2C_2) + (\Delta^4/4) C_2^2 - (\Delta^2/3) \cdot 2|C_1 \cdot C_2| \geq 0 \quad (5.7-18)$$

より分かる、これを図示すると、(図5.13)に示すようになる。(a)は、変数 C_1, C_2 に對し(2) 図示したところであるが、1次系統分解(すなわち、 a_1, a_2 が実数である)の場合、 $C_2 \leq C_1^2/4$ であることに注意しておく。(b)は、 a_1, a_2 を虚数とし(1) 図示した場合である。これから、1次系統分解による構成が、全2の帯域に渡って、通常型構成より優れているのは、①の領域のみであり、 a_1, a_2 あるいは C_1, C_2 がかなり小さい所に限られることが分る。(134-1.終)

次に、(図5.11)に示した、通常型構成と、2次系統型構成の場合について、一般的考察を行う。この場合も、式(5.7-4), (5.7-6)より、 x_{cm}, x_{a_i}, x_{b_i} が(1.1)に示した分布を有する独立な確率変数であると、簡単な計算により、

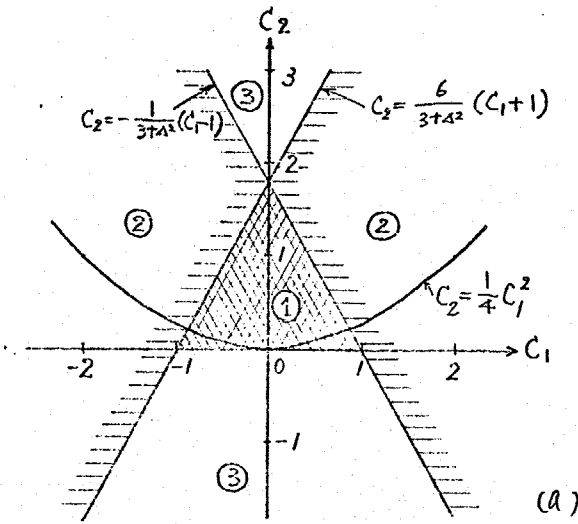
$$\langle |E|^2 \rangle = (\Delta^2/3) \sum_{m=1}^{2N} C_m^2 \quad (5.7-19)$$

$$\langle |F|^2 \rangle = |H_I|^2 \left\{ \sum_{i=1}^N P_i + \sum_{i < j} P_i P_j + \sum_{i < j < k} P_i P_j P_k + \dots + \prod_{i=1}^N P_i \right\} \quad (5.7-20)$$

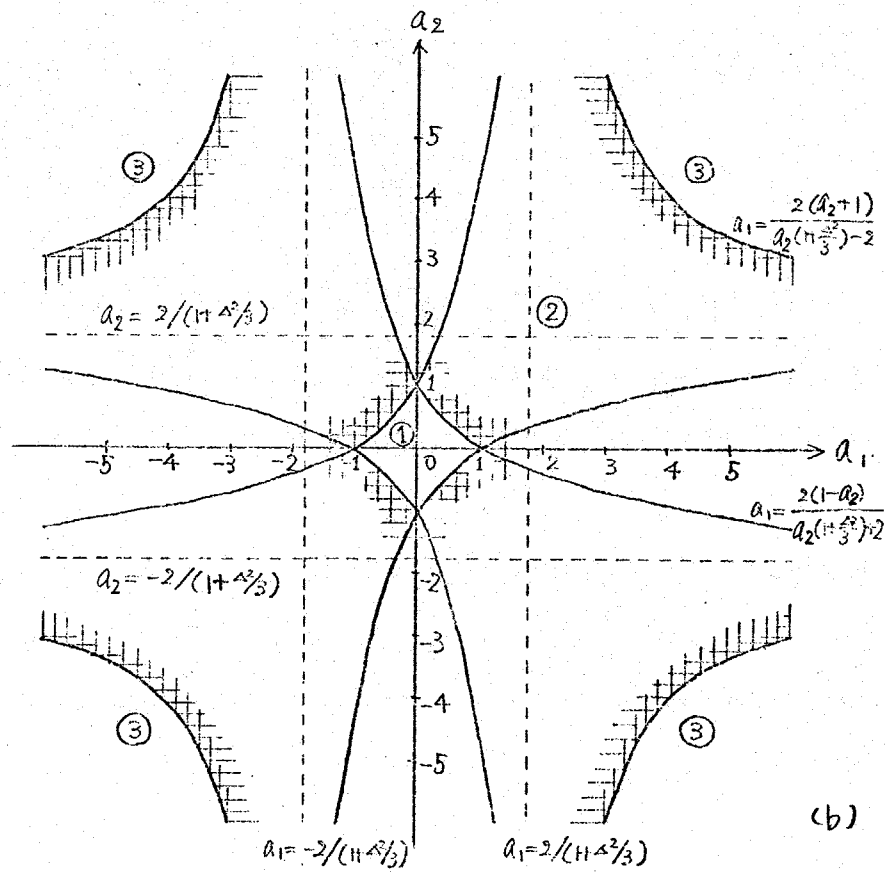
$$\text{但し, } P_i \triangleq \frac{\Delta^2}{3} \frac{a_i^2 + b_i^2}{|H_{i,I}|^2} \quad (i=1 \sim N) \quad (5.7-21)$$

を得る。一方、(2) (図5.11)の通常型構成と2次系統型構成によるリスノイズ比

(12|-1)



- ① $\langle |E|^2 \rangle \geq \max \langle |F|^2 \rangle$
- ② $\max \langle |F|^2 \rangle \geq \langle |E|^2 \rangle \geq \min \langle |F|^2 \rangle$
- ③ $\min \langle |F|^2 \rangle \geq \langle |E|^2 \rangle$



(図 5.13) 通常型構成による二次トランスミッタ型回路と、その1次継続型構成の比較

型回路各々同一の伝達関数 $H(z)$ を有している ($H_1=K_2$) から、それらの合成回路の得られる関数は、従属関係があり、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \sum_{i=1}^N a_i \\ C_2 &= \sum_{i=1}^N b_i + \sum_{i < j} a_i a_j \\ C_3 &= \sum_{i < j} (a_i b_j + a_j b_i) + \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k \\ C_4 &= \sum_{i < j} b_i b_j + \sum_k b_k \left\{ \sum_{i < j, i, j \neq k} a_i a_j \right\} + \sum_{i < j < k < l} a_i a_j a_k a_l \\ &\vdots \\ C_{2N} &= \prod_{i=1}^N b_i \end{aligned} \right\} (5.7-22)$$

が成立していることに注意。

そこで、式(5.7-22)を代入すると、式(5.5-19)の $\langle |E|^2 \rangle$ と式(5.5-20)の $\langle |F|^2 \rangle$ の大小を比較し、これら2つが、一般的に論ずるのは(例1-1)からみても困難なように、次に計算機による比較例を示し、その後、多少特別な場合に限って、理論的考察を付し加える。尚、式(5.5-20)及び(5.5-21)から、分子よりの Δ が十分小ければ、

$$\langle |F|^2 \rangle \approx |H_1|^2 \sum_{i=1}^N P_i \quad (5.7-23)$$

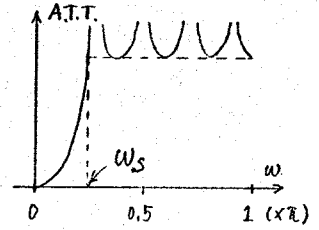
$$\approx \sum_{i=1}^N Q_i$$

$$\text{但し、 } Q_i \approx (\Delta^2/3) (a_i^2 + b_i^2) \prod_{j \neq i} |H_{j,1}|^2 \quad (5.7-24)$$

が近似的に成り立つと考へられ、これから、 $\prod_{j \neq i} |H_{j,1}|^2$ の減衰の大きさは、 $\langle |F|^2 \rangle$ の大小を決定することから予想される。この事実が、次の計算例により理解出来るであろう。

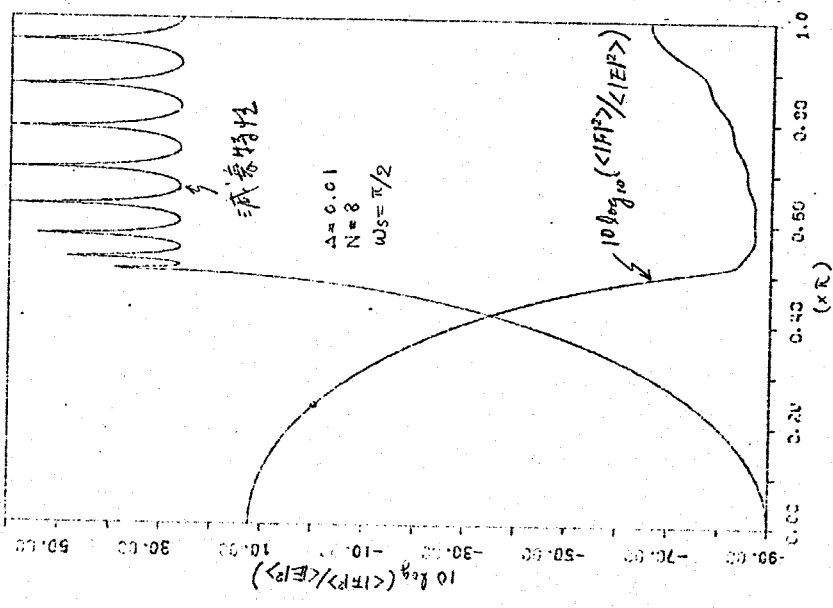
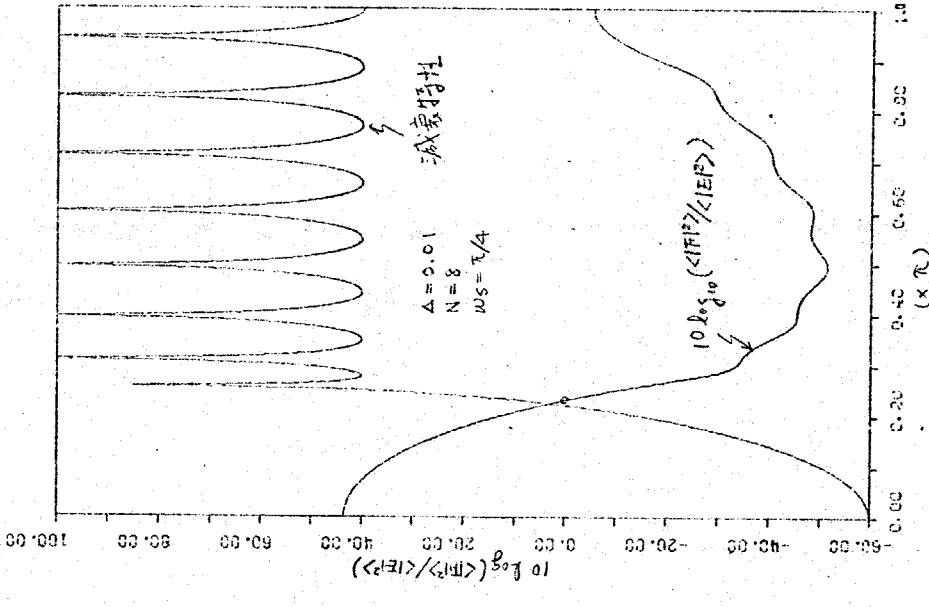
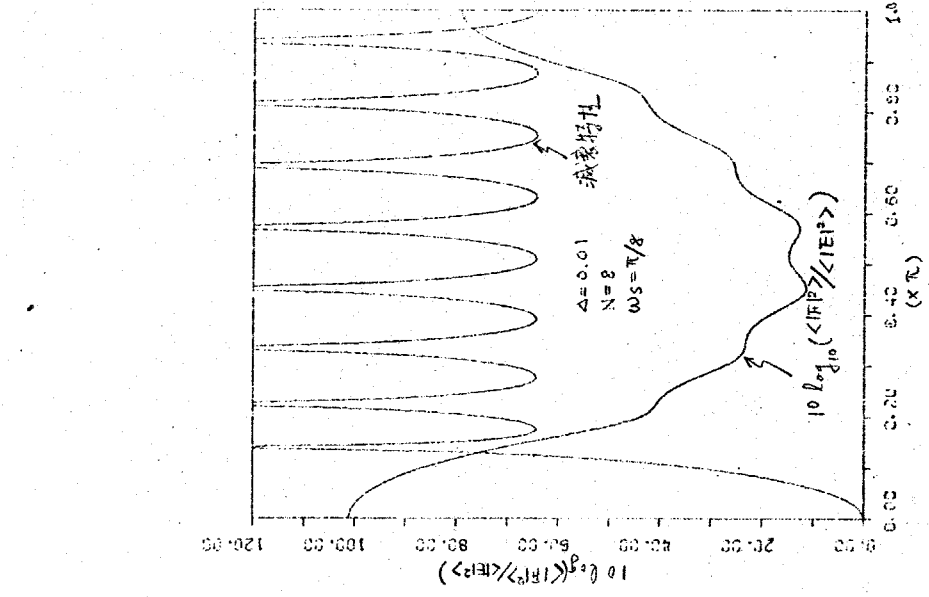
(例2) 線型位相阻止域4エッジ特性のトランスミナル型フィルタを考へ、通常型構成と、2次連続型構成による場合の比較を行う。(図5.15)(a),(b)に、 $\Delta=0.01$

とし、 $N=8$ 及び $N=12$ の場合について、 $\omega_s = \pi/8, \pi/4, \pi/2$ としたときの減衰特性、及び、式(5.5-19)の $\langle |E|^2 \rangle$ と式(5.5-20)の $\langle |F|^2 \rangle$ の比較をグラフで示している。但し、 ω_s の定義は(図5.14)を参照されたい。(図5.15)(a),(b)から云えることは、一般に

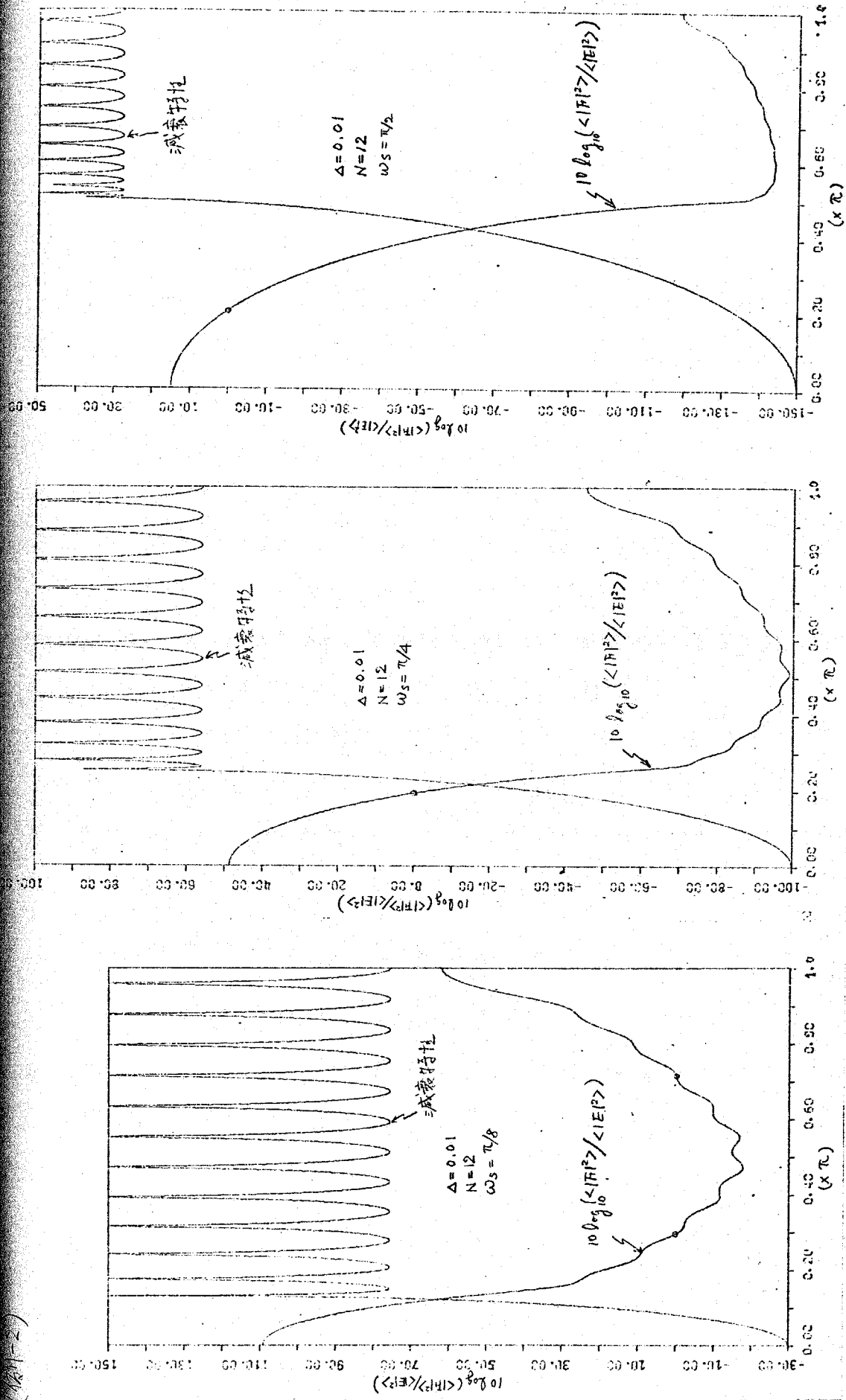


に通過帯域内では、2次連続型構成の方が劣るが、特に(図5.14) ω_s の定義

(例1-2)



(図5.15) (a) 線型位相領域を有するトランスバース型フィルタ (減衰特性の単位は 10dB)



(図15.15)(b) 各種位相阻止域フィルタ特性を有するトラサリ二階型回路。
 通常型構成と二階型構成の比較。(減衰特性の単位は、デシベル、10dB)

(図15.15)

ω_0 が小さい場合、その傾向が顕著である。又、減衰域では、2次縦続型構成の方がほとんどの場合、優れていると云える。といったことなからである。特に減衰域においては、2次縦続型構成の方が優れていると云う事は、諸長制限された FIR フィルタフィルタにおいて、2次縦続型構成の方が、減衰量が大きく取れるという結果⁽²²⁾と一致している。興味深い。

(5.7-2.終)

最後に、多少特別の場合に限る。通常型構成と2次縦続型構成の比較を、 $\langle |F|^2 \rangle$ 及び $\langle |H|^2 \rangle$ の大小という観点から、考察する。まず、仮定として、(図 5.11) の回路で、各2次区間は線型位相 $\theta = 11^\circ$ のフィルタとする。即ち、

$$b_i = 1 \quad (i=1 \sim N) \quad (5.7-25)$$

$$|H_{i,2}(e^{-j\omega T})|_{\omega=0} \geq |H_{i,1}(e^{-j\omega T})|_{\omega=0} \quad (i=1 \sim N) \quad (5.7-26)$$

が成り立つものとす。すると、これらの条件から、各2次区間で、

$$a_i \geq 0 \quad (i=1 \sim N) \quad (5.7-27)$$

が得られる。又、これを通常型構成の1つ又は π - π 型回路全体も線型位相 $\theta = 11^\circ$ のフィルタと取り、式(5.7-22)から、その $\theta = 11^\circ$ の利得に因りて

$$c_i \geq 0 \quad (i=1 \sim 2N) \quad (5.7-28)$$

が成り立つことに注意しておく。又、 $\theta = 11^\circ$ の特性ということから、特に帯域内の特性がより重要と考慮され、代表として、直流点 ($\omega=0$, あるいは $Z=1$) に注目して、 $\langle |F|^2 \rangle$ と $\langle |H|^2 \rangle$ の大小を比較する。そうすると、式(5.7-23)から、

$$\begin{aligned} \langle |F|^2_{\omega=0} \rangle &> (\Delta^2/3) \cdot \sum_{i=1}^N \{ (a_i^2 + b_i^2) \prod_{j=1}^i |H_{j,2}|^2_{\omega=0} \} \\ &= (\Delta^2/3) \cdot |H_1|^2_{\omega=0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{a_i^2 + b_i^2}{(1 + a_i + b_i)^2} \end{aligned} \quad (5.7-29)$$

が得られる。さらに、式(5.7-25) (5.7-27) に注意すれば、

$$1/5 \leq (a_i^2 + b_i^2) / (1 + a_i + b_i)^2 \leq 1 \quad (5.7-30)$$

が成り立ち、

$$|H_1|^2_{\omega=0} = (1 + \sum_{i=1}^{2N} c_i)^2 \quad (5.7-31)$$

に注意すれば、結局

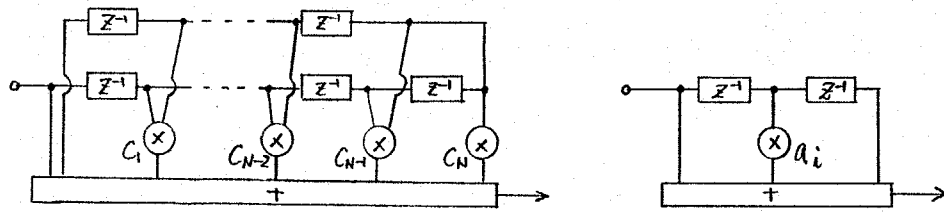
$$\langle |F|^2_{\omega=0} \rangle > (\Delta^2/3) (1 + \sum_{i=1}^{2N} c_i)^2 (N/5) \quad (5.7-32)$$

を得る。よって、式(5.7-19)と合せ、式(5.7-28)に注意すれば、

$$\left. \frac{\langle |F|^2 \rangle}{\langle |E|^2 \rangle} \right|_{\omega=0} > \frac{N}{5} \frac{(1 + \sum_{m=1}^{2N} C_m)^2}{\sum_{m=1}^{2N} C_m^2} > \frac{N}{5} \quad (5.7-33)$$

を得る。即ち、 $N \geq 5$ ならば、常に $\langle |F|^2_{\omega=0} \rangle > \langle |E|^2 \rangle$ であり、線型位相2次ロ-パス区間5区間以上ならば、 $\omega=0$ で常に、2次系統構成の方が通常型構成より劣るようになる。これは(例1-2)の(図5.15)の計算例にも現れている。

尚、線型位相フィルタを仮定した場合、(図5.16)に示すような構成のトランスII-カド型回路



(図5.16) (a) 線型位相トランスII-カド型回路 (b) 2次区間。

路で構成出来、最初から、この構成を仮定すれば自然であると思われる。この場合とは、

$$\langle |E|^2 \rangle = (\Delta^2/3) \sum_{n=1}^N C_n^2 \quad (5.7-19)'$$

$$\langle |F|^2 \rangle = |H|^2 \left\{ \sum_{i=1}^N R_i^2 + \sum_{i < j} R_i R_j + \dots + \prod_{i=1}^N R_i \right\} \quad (5.7-20)'$$

$$\text{但し、} R_i \triangleq (\Delta^2/3) \cdot a_i^2 / |H_{i,1}|^2 \quad (i=1 \sim N) \quad (5.7-21)'$$

となるが、上述の議論のうち、式(5.7-30)に対応する不等式が、

$$0 \leq a_i^2 / (2 + a_i)^2 \leq 1$$

となり、式(5.7-33)に対応する不等式を得ることは出来ない。

又、逆に、(図5.11)で、掛算器を置かなから7タップ(例には、 C_0 に当るとして)にも全く掛算器が入らないとすると、式(5.7-33)に対応する不等式は、

$$\left. \frac{\langle |F|^2 \rangle}{\langle |E|^2 \rangle} \right|_{\omega=0} > \frac{3}{5} N \quad (5.7-34)$$

が得られ、線型位相ロ-パス2次区間2区間以上ならば、 $\omega=0$ で常に、2次系統構成の方が通常型構成より劣るようになることを付加しておく。

尚、遅延線の統計的偏差を仮定すると、通常型構成のトランスII-カド型回路

2^m,

$$K_A \triangleq \sum_{m=0}^N C_m e^{-j\omega \sum_{i=1}^m T_i (1 + \Delta \cdot x_i)} \quad T_i = T \quad (i=1 \sim N)$$

(x_i は $(-1, 1)$ に一様分布する独立な確率変数)

この場合、平均は

$$\langle K_A \rangle = \sum_{m=0}^N C_m (\sin \Delta \omega T / \Delta \omega T)^m e^{-j\omega m T}$$

とあり、 $\Delta \omega T$ のこともあり。又、統計的偏差も有りかつ利得も遅延線を分割した場合に、面白いと思われ結果も得られ、この時省略は可。

5.8. あとがき

本書では、トランスバーナル型回路の各種構成パラメータの偏差がその特性に与える影響について述べてきた。即ち、5.3節では、各種構成パラメータの微小偏差がトランスバーナル型回路の伝達関数に与える影響を一次近似により求め、その大まかな特徴を述べた。5.4節では、振幅及び位相特性に与える影響を一次近似により求め、典型的な計算例により、一次近似による近似式が、どの使用に耐えるものがあることを示した。5.5節では、時間領域標本値への影響を、標本長誤差の重みで評価することとし、各種パラメータ偏差による影響を一次近似で求めると共に、位相等化器を固定した場合の計算例を示し、偏差の生じるパラメータ及びその位置によって、影響に及ぼす特徴があることを示した。さらに5.6節では、偏差の影響がゲイン利得の調整に与える補償量が出るか否かにより、偏差の種類を分類することを提案した。最後に5.7節では、ゲイン利得の統計的ばらつきをもつて固定した場合の影響を、伝達特性の変化分の重み絶対値の平均で評価することとし、通常型構成と総統型構成の比較を行い、特に、線型位相二次総統型構成と、それを通常型構成した場合には、2次区間のほか、5以上では、通常型構成の方が優れていることを示した。

残された問題点としては、

- (i) 2次あるいは3次の高次近似式を求めよ。
- (ii) 5.6節では、偏差の分類を提案するに留まっていた。これを系統的に行うこと。
- (iii) 5.7節に関して、統計的ばらつきに相関がある場合の検討。又、ゲイン利得だけだけでなく、他の回路パラメータの統計的偏差の影響を問へること、さらに、近似する特性と解がつけ、通常型構成と、総統型構成の優劣を比較することなどがあげられる。

第6章 離散的なタップ利得をもつトランスパーカ型回路.

6.1 はしがき.

最近、ディジタルフィルタの設計に於いて、係数値が本質的に離散値に限らなければならないことを考慮して設計方法が、幾つか発表されるようになってきた^{(30), (31)}。しかし、誤差の評価が、明確でなからず⁽³¹⁾、あるいは、一般的评价式を根拠に計算機による手法を用いていく為に、大域的最適値が得られるという数学的保証がなかったり⁽³⁰⁾、問題も多岐にわたる。一方、係数値が有限の離散値に制限された場合、その組み合わせも有限で、理論的には、その全範囲について調べることにより大域的最適値を見つけることが可能であるが、実際には、大型計算機を用いても計算時間が膨大となり、不可能に近い状況が、容易に起り得る。

本章では、このような背景から、トランスパーカ型回路のタップ利得が離散値に限らなければならない場合の設計に於いて、多少か考察を行なっている。即ち、6.2節では、離散空間における最小二乗近似に於いて、大域的な最小値を得るのに十分な調査範囲を、直流利得も含めた近似の場合と、直流利得を問題としない近似の場合について、求められている。又、CADにおける局所的な最小値を求める場合の助けとなる目的で、連続空間上での二乗誤差評価関数の形状を調べている。6.3節では、タップ利得が、2進の桁に制限された単純型構成によるトランスパーカ型回路の根を系統的に求め、設計の際のデータを与えている。

6.2. 離散空間における2乗誤差の最小化

(大域的な最小値を得るのに十分な調査範囲の決定)

本節では、タップ利得として許される値が有限な離散値の集合に限られる場合を考へ、離散空間において、2乗誤差を最小とする、大域的な最小値を得るのに十分な調査範囲を求めよ。まず、6.2.1項では、直流利得も含めた最小2乗近似の場合を考察する。続く、6.2.2項では、直流利得は問題とせず、規格化された特性フィルタを問題とする最小2乗近似の場合について考察する。特に、このとき、連続空間上においても、誤差評価式が凸関数とはならず、CADによる得られる局所的な最小値が満足する場合を考へても、その探索が問題となる。よって、連続空間上での誤差評価式の形状を調べ、CADによる極値探索の役割立つと考へられる資料を提示しておくことにする。

6.2.1 直流利得も含めた近似の場合

まず、連続空間におけるトランスバーカル型回路の2乗誤差について簡単に記しておく。1.3.2項に述べたように、連続空間におけるトランスバーカル型回路の2乗誤差は、一般に、マトリクスを用いて、

$$\varepsilon = C'AC - 2C'b + \varepsilon_0 \quad (\varepsilon_0 > 0) \quad (6.2.1-1)$$

と書ける。但し、 \prime は転置を表し、

$$\left. \begin{aligned} C &\equiv (C_1, C_2, \dots, C_N)' : \text{タップ利得ベクトル} \\ C &\in \mathcal{R}^N \text{ (N次元ユークリッド空間)} \\ A &\equiv (A_{k,l})_{k,l=1 \sim N} : \text{実対称 (自己相関) 行列} \\ b &\equiv (b_1, b_2, \dots, b_N)' : \text{N次元実 (相互相関) ベクトル} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1-2)$$

である。又、同じく1.3.2項に述べたように、例外的な場合を除き、行列Aは、正値である。そのときには、最適タップ利得 C_{opt} が一意的に定まり、

$$C_{opt} = A^{-1} \cdot b \quad (6.2.1-3)$$

と与えられる。以下、行列Aは、正値であるとす。

次に、本項で用いる記号の定義をしておく。

- (Def. 1) $\tilde{M} \triangleq \{m_1, m_2, \dots, m_d\}$, $(m_1 < m_2 < \dots < m_d)$: タップ利得と12許
さしる離散値の有限集合.
- (Def. 2) $\tilde{C} \triangleq (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_N)^T$, $\tilde{C}_i \in \tilde{M}$ ($i=1 \sim N$): 離散値から成る
タップ利得ベクトル.
- (Def. 3) $\tilde{C} \triangleq \{\tilde{C}\}_{all}$: (Def. 2) で与えられる \tilde{C} 全の集合 (有限)
- (Def. 4) $\tilde{C} \triangleq \tilde{C}' A \tilde{C} - 2 \tilde{C}' b + \epsilon_0$, $\tilde{C} \in \tilde{C}$: 離散空間における2乗
誤差評価式.
- (Def. 5) $0 < d_{min} \triangleq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_N \triangleq d_{max}$, 但し, $d_1 \sim d_N$ は行列
 A の固有値
- (Def. 6) $\|C\|^2 \triangleq C' C$: ノルムの定義. 離散空間においても同一とす.
- (Def. 7) \tilde{C}_{ad} : $\tilde{C}_{ad} \in \tilde{C}$ で, $\forall \tilde{C} \in \tilde{C}$ に対し, $\|\tilde{C}_{ad} - C_{opt}\| \leq \|\tilde{C} - C_{opt}\|$
となる. 即ち, 式(6.2.1-3)の C_{opt} から最近の離散空間上の集
ごある.

このとき, 本項の基本定理より, 次の定理が成り立つ.

(定理 6.1) 離散的なタップ利得を付与したトランスバーサル型回路において,
 \tilde{C} を最小とする最適タップ利得 $C_{opt} \in \tilde{C}$ を求めるには,

$$\|\tilde{C} - C_{opt}\| \leq (d_{max}/d_{min})^{1/2} \cdot \|\tilde{C}_{ad} - C_{opt}\| \quad (6.2.1-4)$$

を証明す $\tilde{C} \in \tilde{C}$ についてだけ. 証明すれば十分である. 即ち, これは C_{opt} を中心
とし, 最寄りの離散格子点 \tilde{C}_{ad} までの距離の $(d_{max}/d_{min})^{1/2}$ 倍の半径をもつ球
の内部にある格子点だけを調べればよいことを示している. (定理 6.1 終)

(証明) 行列 A は正値定対称だから, 適当な直交行列 U を用いて,

$$A = U \oplus U', \quad \oplus = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N) \quad (6.2.1-5)$$

と表さしる. このとき, 新しい変数 \tilde{X} を,

$$\tilde{X} \triangleq \oplus^{1/2} U' \tilde{C}, \quad \oplus^{1/2} \triangleq \text{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_N}) \quad (6.2.1-6)$$

により定義する. すると,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_{opt} &\triangleq \oplus^{1/2} U' C_{opt} \\ \tilde{X}_{ad} &\triangleq \oplus^{1/2} U' \tilde{C}_{ad} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1-7)$$

$$\tilde{x} \equiv D^{1/2} v \quad c \in \tilde{c}$$

(6.2.1-7)

など"と置く。さうすると、(Def. 4)の与えられた"は、

$$\tilde{\varepsilon} = \|\tilde{x} - x_{opt}\|^2 + \varepsilon_0 - \|x_{opt}\|^2$$

(6.2.1-8)

と書き表さし。こゝで、 $\varepsilon_0 - \|x_{opt}\|^2$ は定数であることに注意しておく。

さ"、こゝで、式(6.2.1-4)を満足しない格子点を \tilde{c}_{ext} で表すことし、その式(6.2.1-6)の座標変換したものを \tilde{x}_{ext} とする。さうすると、 \tilde{c}_{ad} 及び \tilde{c}_{ext} に対し、

$$\tilde{\varepsilon} |_{\tilde{c}_{ext} - \tilde{c}} |_{\tilde{c}_{ad}} = \|\tilde{x}_{ext} - x_{opt}\|^2 - \|\tilde{x}_{ad} - x_{opt}\|^2$$

(6.2.1-9)

一方、式(6.2.1-6)から、

$$\|x\|^2 = c'Ac$$

(6.2.1-10)

があり、行列のノルムとして良く知られた関係

$$d_1 \leq \frac{c'Ac}{\|c\|^2} \leq d_N$$

(6.2.1-11)

を用い"は、

$$d_1 \|c\|^2 \leq \|x\|^2 \leq d_N \|c\|^2$$

(6.2.1-12)

が得られる。式(6.2.1-12)から、 c の代りに、 $\tilde{c}_{ext} - c_{opt}$ 及び $\tilde{c}_{ad} - c_{opt}$ を代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} d_1 \|\tilde{c}_{ext} - c_{opt}\|^2 &\leq \|\tilde{x}_{ext} - x_{opt}\|^2 \leq d_N \|\tilde{c}_{ext} - c_{opt}\|^2 \\ (d_1 \|\tilde{c}_{ad} - c_{opt}\|^2 \leq) \|\tilde{x}_{ad} - x_{opt}\|^2 &\leq d_N \|\tilde{c}_{ad} - c_{opt}\|^2 \end{aligned} \right\} (6.2.1-13)$$

が成り立つことが分る。よ"、式(6.2.1-9)は、

$$\tilde{\varepsilon} |_{\tilde{c}_{ext} - \tilde{c}} |_{\tilde{c}_{ad}} \geq d_1 \|\tilde{c}_{ext} - c_{opt}\|^2 - d_N \|\tilde{c}_{ad} - c_{opt}\|^2$$

(6.2.1-9)'

となる。然"、 \tilde{c}_{ext} は、式(6.2.1-4)を満足しない点であるから、 $d_{min} \equiv d_1$ 、 $d_{max} \equiv d_N$ であること、及び、 $d_1, d_N > 0$ に注意すれば、

$$d_1 \|\tilde{c}_{ext} - c_{opt}\|^2 > d_N \|\tilde{c}_{ad} - c_{opt}\|^2$$

(6.2.1-4)'

となる。よ"、式(6.2.1-9)にこれを代入して、

$$\tilde{\varepsilon} |_{\tilde{c}_{ext}} > \tilde{\varepsilon} |_{\tilde{c}_{ad}}$$

(6.2.1-14)

を得る。即ち、 \tilde{c}_{ext} に関して調べる必要はないことになる。この対偶を取

(証明終)

此時、直ちに定理が得られる。

式(6.2.1-8)に示したように、 \hat{C} は、直交変換を施し、標準形に直せば、新しい座標系に換へて、 \hat{C}_{opt} に最も近い点を求める問題となるが、 \hat{C} の格子点の規則正しい配列を以てし、変換後の点に換へては、一般に回転伸縮が加えらる。複雑な配列となり、替り、全ての点について調べようとはなりかねない。この点、 $\hat{C} \in \hat{C}$ に對する距離計算は、何らかの簡単であると考へられる。但し、式(6.2.1-4)の固有値の最大最小比 (d_{max}/d_{min}) が非常に大きくなると、式(6.2.1-4)で与えられる球が、全ての離散格子点を包含するようになる(この場合は本定理は意味を失ふ)ことになる。

次に、特別の場合であるが、興味深い場合として、行列 A が、単位行列である。この包絡線となる場合が考へられる。この場合、(定理6.1)から直ちに、次の系が得られる。

《定理6.1の系》 (Def. 4) に於いて、

$$A = \alpha \cdot E \quad (\alpha > 0, E \text{ は単位行列}) \quad (6.2.1-15)$$

のときは、 \hat{C} を最小とする大域的最適離散点 $\hat{C}_{opt} \in \hat{C}$ は、(Def. 7)で与えられる \hat{C}_{ad} のものである。さらに、この場合、

$$\hat{C}_{opt} = b/\alpha \quad (6.2.1-16)$$

であるから、 \hat{C}_{opt} は、 b/α の各要素に対して、最も近い $m_i \in \mathcal{M}$ を要素とするベクトルとして求めらるることになる。(定理6.1の系終)

行列 A が、式(6.2.1-15)のように書けるのは、考へる 2乗誤差評価式に於いて、トランスバーサル型回路の伝達関数が、直交線となるような場合である。例えば、理想伝送線 $e^{-j\omega t}$ を用いたトランスバーサル型回路の誤差評価式が、

$$\varepsilon \cong (1/2\pi) \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} |G(\omega) - \sum_{m=1}^N C_m e^{-j(m-1)\omega\tau}|^2 d\omega \quad (6.2.1-17)$$

の場合などがあげられ、かなり、応用可能な場合があるものと思われ。

尚、(定理6.1の系)から、FIR フィルタなどにおいて、係数器の非零ビットの数を M 個以下に制限したとき、式(6.2.1-17)の2乗誤差を最小とする係数を決定することが出来るが、ここでは、その議論については、省略することとする。

最後に、 d_{max}/d_{min} が非常に大きくなった。 (定理 6.1) が効力を発揮する
場合を考慮し、改善の策として、計算機による一次元探索のくり返しにより、局
所的な最小値を求める場合について、一言述べよう。連続空間上での式 (6.2.1-1)
の ε は、 A が正値であることから、関数の凸関数であり、特に各タップ利得 C_p ($p=1 \sim N$)
と関心は、二次曲線である。実際

$$\varepsilon = \gamma \cdot C_p^2 - 2(\alpha - \delta) C_p + \zeta - 2\beta + \varepsilon_0. \quad (6.2.1-18)$$

$$\text{但し, } \alpha \equiv b_p, \beta \equiv \sum_{i \neq p} C_i b_i, \gamma \equiv a_{pp} > 0, \delta \equiv \sum_{i \neq p} a_{pi} C_i$$

$$\zeta \equiv \sum \sum_{i \neq j \neq p} C_i a_{ij} C_j (> 0), \delta^2 - \gamma \zeta < 0$$

と表わす。よって、 $\partial \varepsilon / \partial C_p = 0$ より、

$$C_p^{opt} = (\alpha - \delta) / \gamma = (b_p - \sum_{i \neq p} a_{pi} C_i) / a_{pp} \quad (6.2.1-19)$$

が得られ、離散空間上の一次元探索においては、上式 (6.2.1-19) で与えられる C_p^{opt}
の両隣りの格子点とだけを探せばよいことが分る。この一次元探索 $p=1 \sim N$ を 1
サイクルとして反復すれば、局所的な最小値が得られることになる。但し、当然のことな
がら、大域的な最小値が得られるという保証はない。

6.2.2 直流利得を問題としない近似の場合

本項での議論は、直流利得を含まず、与えられた特性をその近似的な離散値を
タップ利得として持つトランスミッタ型回路の最小二乗近似を行う場合のものである。
然るに、実際には、一定の利得差は余り問題とならず、相対的な
周波数特性が問題となる場合も多いように思われる。これは、一定の利得差
は、外部に増幅器あるいは掛算器を1台設けることにより比較的容易に調
整出来るからであると考えられる。

よって、本項では、直流利得を問題としない近似の場合について、本項と同様の
議論を行うことにする。

この場合には、本項 (Def.4) の ε の代わりに、 K を実数として、

$$\varepsilon_K \equiv K^2 \hat{C}' A \hat{C} - 2 \cdot K \hat{C}' \cdot b + \varepsilon_0. \quad (6.2.2-1)$$

を考慮し、これを最小化することを考えればよい。このとき、 ε_K を最小とする K は、

簡単に求めらるる、

$$K_{opt} = \tilde{C}' b / \tilde{C}' A \tilde{C} \quad (6.2.2-2)$$

となり、

$$\tilde{\epsilon}_{K_{opt}} = \epsilon_0 - (C' b)^2 / C' A C \quad (6.2.2-3)$$

を得る。これは、第1項式(6.2.1-6)で定義される座標変換を行った後の変数 \tilde{x} で書ける、

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{K_{opt}} &= \epsilon_0 - (\tilde{x}' \cdot \tilde{x}_{opt})^2 / \|\tilde{x}\|^2 && (\tilde{x}_{opt} \text{ は式(6.2.1-7)}) \\ &= \epsilon_0 - \|\tilde{x}_{opt}\|^2 \cos^2 \xi && (\xi: \tilde{x} \text{ と } \tilde{x}_{opt} \text{ の成す角}) \quad (6.2.2-3)' \end{aligned}$$

と表され、 \tilde{x}_{opt} と最小の角を成す離散値 \tilde{x}_{opt} を見つける問題となる。但し、ここで、 \tilde{C} が規則正しい配列に格子状であるに対し、 \tilde{x} は、回転伸縮をかち、複雑な配列となり、 \tilde{x}_{opt} に対し、 ξ と最小角を成す \tilde{x} を求めるのは、容易でなく、最悪の場合には、全ての格子点 $\tilde{x} = \pm \frac{1}{2} v' \tilde{C}$ ($\tilde{C} \in \tilde{C}$) について調べることになりかねない。そこで、本項における、 $\tilde{C} \in \tilde{C}$ に対し、大域的最適値を得るに十分な調査範囲を求めよう。

本項では、まず簡単な場合とし、式(6.2.2-3)'で、行列 A が、単位行列に等しい場合について述べる。又、タップ利得として許される離散値としては、2のべきを考へることとする。但し、この条件は、本質的なものでなく、以下の議論は、離散値として p 進基底の利得が許される場合に、容易に拡張可能と考えられる。

尚、以下では、一般性を失うことなく、 b により、

$$b \triangleq (b_1, b_2, \dots, b_N)' \quad |b_1| \geq |b_2| \geq \dots \geq |b_N| \quad (6.2.2-4)$$

とし置く。

(I) $A=E$ (単位行列) の場合

まず、ここで用いる記号の定義をしておく。

(Def. 1') $\tilde{M}_2 \triangleq \{-2^m, -2^{m-1}, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 2^m\}$: タップ利得として許される離散値 (2進1桁) の集合。ここで、2の冪中を考へる「 n 」が、式(6.2.2-1)に定数 K がある。一般性を失うものではないことと注意しておく。

(Def. 2') $\tilde{C} \equiv (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_N)^T$, $\tilde{c}_i \in \tilde{M}_2$ ($i=1 \sim N$): 離散値から成るタツブ利得ベクトル. 但し, 0ベクトルは除く.

(Def. 3') $\tilde{C} \equiv \{\tilde{C}\}_{all}$: (Def. 2') で与えられる \tilde{C} 全々の集合 (有限)

(Def. 4') $\|\tilde{C}\|^2 = \tilde{C}^T \cdot \tilde{C}$: ノルムの定義

(Def. 5') $\tilde{\Sigma}_{Kopt} \equiv \varepsilon_0 - (\tilde{C}^T \cdot \mathbf{1}_b)^2 / \|\tilde{C}\|^2$, $\tilde{C} \in \tilde{C}$
 $= \varepsilon_0 - \|\mathbf{1}_b\|^2 \cos^2 \theta$, 但し, $\cos \theta \equiv \tilde{C}^T \cdot \mathbf{1}_b / (\|\tilde{C}\| \cdot \|\mathbf{1}_b\|)$

∴ $\tilde{\Sigma}_{Kopt}$ を最小化しようとする 2変換差評価式である.

(Def. 6') $\tilde{C}_1 \equiv \{\tilde{C} \mid |c_i| < 2^m, i=1 \sim N\}$

(Def. 7') $\tilde{C}_0 \equiv \tilde{C} - \tilde{C}_1$

(Def. 8') $MC_i^+ \equiv \{C \mid C = (*, \dots, *, \overset{(i)}{2^m}, *, \dots, *)\}$ ($i=1 \sim N$)

$MC_i^- \equiv \{C \mid C = (*, \dots, *, \overset{(i)}{-2^m}, *, \dots, *)\}$ ($i=1 \sim N$)

但し, * は 任意の実数を表す. MC_i^+, MC_i^- は N 次元空間の超平面である.

(Def. 9') $\tilde{MC}_i^+ \equiv MC_i^+ \cap \tilde{C}_0$ ($= MC_i^+ \cap \tilde{C}_0$) ($i=1 \sim N$)

$\tilde{MC}_i^- \equiv MC_i^- \cap \tilde{C}_0$ ($= MC_i^- \cap \tilde{C}_0$) ($i=1 \sim N$)

即ち, $\tilde{MC}_i^+, \tilde{MC}_i^-$ は 超平面 MC_i^+, MC_i^- 上にある離散格子点の集合を表している.

(Def. 10') $\tilde{C}_{ref.i} : \tilde{C}_{ref.i} \in \tilde{MC}_i^+$ かつ, $\forall \tilde{C} \in \tilde{MC}_i^+$ に対して,

$\|\tilde{C}_{ref.i} - (2^m/b_i) \cdot \mathbf{1}_b\| \leq \|\tilde{C} - (2^m/b_i) \cdot \mathbf{1}_b\|$ となる. 即ち, 超平面 MC_i^+ と $\mathbf{1}_b$ の延長線との交点 $(2^m/b_i) \cdot \mathbf{1}_b$ から, 最も近い MC_i^+ 上の離散格子点 $\tilde{C}_{ref.i}$ である. ($i=1 \sim N$)

(Def. 11') $\mathbf{1}_b \equiv (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_N)^T$ ($i=1 \sim N$)

ベクトル $\mathbf{1}_b$ であり, i 番目の要素を零としたものである.

さ2. 以上の仮定のもとに, (Def. 5') の $\tilde{\Sigma}_{Kopt}$ を最小とする離散格子点を求めるのに十分な調査範囲をついて考察する. すると, 以下の事柄が云える.

① 任意の $\tilde{C} \in \tilde{C}_1$ を考えれば, 適当な p ($=1, 2, \dots, m-1$) が存在して,

$2^p \cdot \tilde{C} \in \tilde{C}$. (6.2.2-5)

が成り立つ。なぜならば、 $\hat{C} \in \hat{C}_0$ の絶対値最大の要素を \hat{C}_i とすれば、

$$|\hat{C}_i| = 2^{m-p} \quad (p=1, 2, \dots, m-1), \quad |C_j| \leq |C_i| \quad (j \neq i) \quad (6.2.2-6)$$

である。よって全体を、 2^p 倍し、 \hat{C}_0 の定義 (Def. 5') に注意すれば、式 (6.2.2

-5) が成り立つのは明らか。これと、 $\hat{\Sigma}_{Kopt}$ における、 \hat{C} を定数倍した値

が変らないことから、まず、 \hat{C}_0 の真に近づくだけ調べることは十分であることが分

る。

② $b \equiv (b_1, b_2, \dots, b_N)'$ における、例えは、 $b_j = 0$ とすると、 \hat{C} とは最初

から、 $\hat{C}_j = 0$ とだけを考えることは十分である。実際、 $\hat{C}_j \neq 0$ なる最適値 $\hat{C}_{opt,1}$

$\equiv (\hat{C}_1^{opt}, \hat{C}_2^{opt}, \dots, \hat{C}_j^{opt}, \dots, \hat{C}_N^{opt})'$ があつたとすると、任意の $\hat{C} \in \hat{C}$ に対して、

$$\hat{\Sigma}_{Kopt}(\hat{C}) \geq \hat{\Sigma}_{Kopt}(\hat{C}_{opt,1}) = \|b\|^2 - (\hat{C}_{opt,1}' \cdot b)^2 / \|\hat{C}_{opt,1}\|^2 \quad (6.2.2-7)$$

然るに、

$$\hat{C}_{opt,2} \equiv \hat{C}_{opt,1} - (0, \dots, 0, \hat{C}_j^{opt}, 0, \dots, 0) \quad (6.2.2-8)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{Kopt}(\hat{C}_{opt,2}) &= \|b\|^2 - (\hat{C}_{opt,1}' \cdot b)^2 / \{\|\hat{C}_{opt,2}\|^2 - (\hat{C}_j^{opt})^2\} \\ &< \hat{\Sigma}_{Kopt}(\hat{C}_{opt,1}) \end{aligned} \quad (6.2.2-9)$$

となり、これは矛盾である。よって、 $b_j = 0$ となるような場合は最初から $\hat{C}_j =$

0 としてより次元の低い空間で、考えることはよいことになる。従って以下、

$$b_i \neq 0 \quad (i=1 \sim N) \quad (6.2.2-10)$$

と仮定しておく。

③ $\hat{\Sigma}_{Kopt}$ におけるは、 b の代りに $-b$ (あるいは \hat{C} の代りに $-\hat{C}$) とすると、

値は変らない。従って、①では、 \hat{C}_0 の真に近づくだけ調べることは十分であること

を示した。さらに、 \hat{C}_0 の格子点が存在する $2N$ 個の超平面 MC_i^+, MC_i^-

($i=1 \sim N$) のうち、例えは、 MC_i^+ ($i=1 \sim N$) 上の格子点、即ち、 MC_i^+ ($i=1$

$\sim N$) に対してだけ調べることはよいことが分る。

④ 以上と、(Def. 5') の $\hat{\Sigma}_{Kopt}$ から、各 MC_i^+ に対しては、尚々

$$\frac{(\hat{C}' \cdot b)^2}{\|\hat{C}\|^2} \geq \max_i \left\{ \frac{(\hat{C}_{ref,i}' \cdot b)^2}{\|\hat{C}_{ref,i}\|^2} \right\} \equiv \mu \cdot \|b\|^2 \quad (0 < \mu < 1) \quad (6.2.2-11)$$

$$\text{但し, } \begin{cases} \mu \triangleq \max_i (\cos^2 \theta_i) \\ \cos \theta_i \triangleq \frac{\widehat{C}_{\text{ref},i} \cdot b}{\|\widehat{C}_{\text{ref},i}\| \cdot \|b\|} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{(\mathcal{C}_i \text{ は } \widehat{C}_{\text{ref},i} \text{ と } b)} \\ \text{が成り立つ。} \end{array} \right) \quad (6.2.2-12)$$

を満す $\widehat{C} \in \widetilde{MC}_i^+$ ($i=1 \sim N$) に対しては十分である。尚、式(6.2.2-12)は \widehat{C}_{opt} から直ちに得られる条件で、ほとんど自明である。

次に、式(6.2.2-11)の条件をより具体的に表すと、次の定理を得る。

(定理6.2) 各 \widetilde{MC}_i^+ ($i=1 \sim N$) に対し、式(6.2.2-11)の条件を具体的に書き直すと、次のようになる。今、 ρ_i ($i=1 \sim N$) を

$$\rho_i \triangleq \|b\| / \|b\| \quad (6.2.2-13)$$

で定義し、 μ を式(6.2.2-12)とすると、

(i) $\mu - \rho_i^2 \leq 0$ のとき、 \widetilde{MC}_i^+ の全ての離散格子点に対しては十分である。

(ii) $\mu - \rho_i^2 > 0$ のとき、

$$R_i \triangleq \frac{|2^m/b_i| \cdot \|b\| \cdot \{ (1-\mu) \cdot \rho_i + \sqrt{(1-\mu^2) \rho_i^2 + (\mu - \rho_i^2)} \}}{\mu - \rho_i^2} \quad (6.2.2-14)$$

とおくと、 \widetilde{MC}_i^+ に対しては、 $(2^m/b_i) \cdot b$ を中心とし、 R_i を半径とする

(超)円の中に含まれる格子点に対しては十分である。

が成り立つ。

(定理6.2-終)

(証明) a_i を $(2^m/b_i) \cdot b$ を始点とする MC_i^+ 上のベクトルとすると、 MC_i^+ 上の点は、

$$c = (2^m/b_i) \cdot b + a_i$$

と表され、式(6.2.2-11)の \mathcal{C} に代入すると、

$$(\mu - \cos^2 \theta) \|a_i\|^2 + 2 \cdot |2^m/b_i| (\mu - 1) \cos \theta_i \|b\| \cdot \|a_i\| - |2^m/b_i|^2 \|b\|^2 \leq 0$$

$$\text{但し, } \cos \theta_i \triangleq |b^T \cdot a_i| / \|b\| \cdot \|a_i\| \quad (6.2.2-15)$$

を得る。ここで、 a_i が MC_i^+ 上のベクトルであることから、

$$a_i \triangleq (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{iN})^T, \quad a_{ii} \equiv 0 \quad (6.2.2-16)$$

に注意し

$$\check{a}_i \equiv (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,i-1}, a_{i,i+1}, \dots, a_{iN})^T \quad (6.2.2-17)$$

とすると,

$$\cos^2 \theta_i = \frac{(b^T a_i)^2}{\|b\| \cdot \|a_i\|} = \frac{\|\check{b}\|^2 (\check{b}^T \check{a}_i)^2}{\|b\|^2 \|\check{b}\|^2 \|\check{a}_i\|^2} = \frac{\|\check{b}\|^2}{\|b\|^2} \cos^2 \eta \quad (6.2.2-18)$$

但し, $\cos \eta \equiv \check{b}^T \check{a}_i / \|\check{b}\| \cdot \|\check{a}_i\|$, \check{b} と \check{a}_i の成す角の余弦.

となる. 従って, ρ_i を,

$$\rho_i \equiv \max |\cos \theta_i| = \|\check{b}\| / \|b\|$$

と定義し, 式(6.2.2-15)で, $\cos \theta_i$ の代りに用いると,

$$f_i(\|a_i\|) \equiv (\mu - \rho_i^2) \|a_i\|^2 - 2|2^m/b_i| \cdot (1-\mu) \rho_i \|b\| \cdot \|a_i\| - |2^m/b_i|^2 \cdot \|b\|^2 \leq 0 \quad (6.2.2-15)'$$

を得る. 従って, $\|a_i\|$ が式(6.2.2-15)を満足しないうちは, 必ず, 式(6.2.2-15)'を満足しないうちから, 式(6.2.2-15)'を満足する a_i についてと同様のことが十分にあり.

(i) $\mu - \rho_i^2 \leq 0$ のとき, 式(6.2.2-15)'の左辺は, $\|a_i\|$ に関して, 上に凸の二次式で, $f_i(\|a_i\|) = 0$ は, 正根をもち, 全ての a_i がこの不等式を満す. 即ち, $M C_i^+$ の全ての格子点について同様のことが成り立つ.

(ii) $\mu - \rho_i^2 > 0$ のとき, $f_i(\|a_i\|)$ は, 下に凸の二次式で, $f_i(\|a_i\|) = 0$ は, 正負の二次根をもち, 正根は, 式(6.2.2-14)で与えられる. この R_i は, 式(6.2.2-11)で, \hat{c} の代りに $c (\in R^N)$ とし, 決り N 次元円錐と, 超平面 $M C_i^+$ との交り加つる(超)楕円の長半径と考えられるであろう. よって, この場合にも, 本定理の(ii)が成り立つ. (証明終)

式(6.2.2-11)の条件をいよいよ具体化した(定理6.2)では, 基準と取り離れた点を, 式(6.2.2-12)の $\cos^2 \theta_i$ を最大とする $\hat{c}_{ref,i}$ を用いる. この部分の正根を省くことができる. μ を, $\cos^2 \theta_i \equiv (\hat{c}_{ref,i}^T \cdot b)^2 / \|\hat{c}_{ref,i}\|^2 \|b\|^2$ に選ぶのが, 式(6.2.2-4)から考える. 最も妥当と思われる.

尚, 上記は, $A = E$ の場合を考えたが, $A = \alpha \cdot E$ ($\alpha > 0$) の場合も全く同様であることに付加しておく.

(II) $A = E$ (あるいは αE) である場合.

$A = E$ の場合でも述べた ①, ②, ③は、このも、そのまゝ成り立つ。即ち、①, ③は、全くそのまゝ成り立ち、②では、 A の正値性を用いることにより、式(6.2.2-9)と同様の式が導かれ、全く同様の結果が得られる。従って、 $\tilde{M}C_i^+$ ($i=1 \sim N$) における \tilde{C} の同値性は、十分であることには変りはない。さらに、行列 A の最小固有値及び最大固有値を d_{\min} 及び d_{\max} とすれば、一般に、

$$0 < d_{\min} \leq \frac{\tilde{C}' A \tilde{C}}{\|\tilde{C}\|^2} \leq d_{\max} \quad (6.2.2-19)$$

が成り立つ。これを用いるには、式(6.2.2-3)で

$$\frac{1}{d_{\max}} \frac{(\tilde{C}' b)^2}{\|\tilde{C}\|^2} \leq \frac{(\tilde{C}' b)^2}{\tilde{C}' A \tilde{C}} \leq \frac{1}{d_{\min}} \frac{(\tilde{C}' b)^2}{\|\tilde{C}\|^2} \quad (6.2.2-20)$$

が成り立ち、式(6.2.2-11)に訂正して、

$$\frac{1}{d_{\min}} \frac{(\tilde{C}' b)^2}{\|\tilde{C}\|^2} \geq \max_i \left\{ \frac{(\tilde{C}_{\text{ref},i}' b)^2}{\tilde{C}_{\text{ref},i}' A \tilde{C}_{\text{ref},i}} \right\} \quad (6.2.2-21)$$

$$\cong \mu' \cdot \|b\|^2$$

を得る。但し、

$$\mu' \cong \max_i \left\{ \frac{1}{\|b\|^2} \frac{(\tilde{C}_{\text{ref},i}' b)^2}{\tilde{C}_{\text{ref},i}' A \tilde{C}_{\text{ref},i}} \right\} \quad (6.2.2-22)$$

である。従って、式(6.2.2-21)を満たす $\tilde{C} \in \tilde{M}C_i^+$ ($i=1 \sim N$) における同値性は十分であることが分る。又、

$$\frac{\tilde{C}' b}{\|\tilde{C}\|^2} \geq \mu'' \cdot \|b\|^2, \quad \mu'' \cong d_{\min} \cdot \mu' \quad (6.2.2-21)'$$

と書き直せば、(定理6.2)は、 μ の代わりに、上の μ'' を用いて、そのまゝ適用出来ることになった。

尚、(I), (II) の議論は、調査対象平面の数を増やすことにより、離散値として、 p 進子桁を許す場合にも、容易に拡張可能と考えられる。

(II) CADによる極値探索について、

最後に、計算機による一次元探索のくり返しで、局所的な最小値を得ることと満足する場合を考慮し、式(6.2.2-3)の $\tilde{\epsilon}_{k,opt}$ に対し、 \tilde{c} を $\tilde{c} \in \mathbb{R}^N$ のある値へ、連続空間上での関数の形を同一に保ち、一次元探索の際役立つグラフを与えておく。但し、式(6.2.2-3)を見れば分るように、 ϵ_0 は定数であるから、 $\tilde{\epsilon}_{k,opt}$ を最小にすると、 $(\tilde{c}'b)^2 / \tilde{c}'A\tilde{c}$ を最大にするのは全く同値である。従って、ここでは、 $(\tilde{c}'b)^2 / \tilde{c}'A\tilde{c}$ に関して同一に保たれるようにする。

今、

$$g(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_N) \equiv (\tilde{c}'b)^2 / \tilde{c}'A\tilde{c} \tag{6.2.2-23}$$

とすると、計算機による最適化では、適当な初期値から出発し、 \tilde{c}_1 に関し、 g を最大に、 \tilde{c}_2 に関し、 g を最大に、 \dots 、 \tilde{c}_N に関し、 g を最大にするという一次元探索を行い、 $\tilde{c}_1 \sim \tilde{c}_N$ を1サイクルとし、この反復をくり返し、元の $\tilde{c}_1 \sim \tilde{c}_N$ と同じであったならば、これを最適解とすることになる。この場合、もちろん、大域的な最適解が得られるという保証はないが、少なくとも局所的な最適解は得られることになる。

以下、連続空間を x とし、タップ利得 C_p ($p=1 \sim N$) を代表し、

$$f(x) \equiv g(C_1, C_2, \dots, C_{p-1}, x, C_{p+1}, \dots, C_N) \tag{6.2.2-24}$$

の形を同一に保つておく。このとき、

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv C_p, \quad \alpha \equiv b_p, \quad \beta \equiv \sum_{i \neq p} C_i b_i, \quad \gamma \equiv a_{pp} (> 0) \\ \delta &\equiv \sum_{i \neq p} a_{pi} C_i, \quad \zeta \equiv \sum_{i, j \neq p} C_i a_{ij} C_j (> 0) \\ (\delta^2 - \gamma\zeta < 0) \quad & \text{()内の条件は、Aの正値性から導かれる。} \end{aligned} \right\} \tag{6.2.2-25}$$

とおくと、

$$f(x) = (\alpha x + \beta)^2 / (\gamma x^2 + 2\delta x + \zeta) \quad (> 0) \tag{6.2.2-24}'$$

となる。これから、 $f(x)$ の形を同一に保ち、簡単な計算により、次のような結果が得られる。但し、以下では、

$$x_1 \equiv -(\alpha\zeta - \beta\delta) / (\alpha\delta - \beta\gamma) \quad \text{(極大値を与える)} \tag{6.2.2-26}$$

$$x_2 \equiv -\beta/\alpha \quad \text{(極小値(零)を与える)} \tag{6.2.2-27}$$

$$\alpha_3 = \frac{\alpha^2 \gamma - \gamma \beta^2}{2\alpha(\beta\gamma - \alpha\delta)} \quad (6.2.2-28)$$

とあり。

① $\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) > 0$ とき,

$$\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2$$

となり。(図6.1)①に示すような形状となる。従って、 $\alpha < \alpha_3$ かつ、しかも、高さ α_1 の両隣りにある離散点と周りに対して比較を行えば、一次元探索は終了する。

② $\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0$ とき,

$$\alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1$$

となり。(図6.1)②に示すような形状となる。従って、 $\alpha > \alpha_3$ かつ、しかも、高さ α_1 の両隣りにある離散点と周りに対して比較を行えば、一次元探索は終了する。

③₁ $\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$, $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ とき,

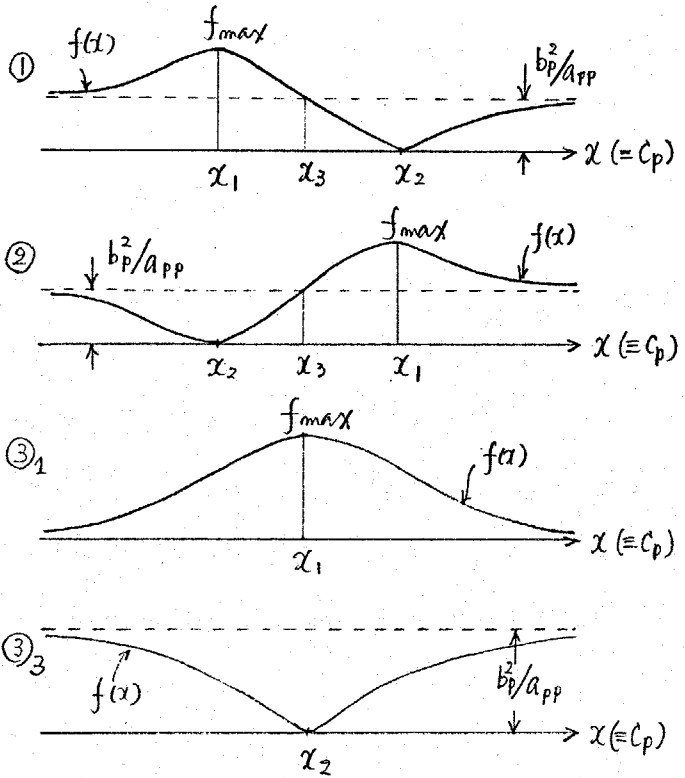
α_2 は存在せず、 $f(x)$ は(図6.1)③₁に示すような形状となる。従って、 α_1 の両隣りにある離散点と周りに対して比較を行えば、一次元探索は終了する。

③₂ $\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ とき,

これは、 $b = 0$ であり、 $C_i (i \neq p) = 0$ の場合であり、実際には起り得ない状況と考えられる。尚、このときは、 $f(x) \equiv 0$ となり、最適点は決定される。

③₃ $\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ とき,

α_2 は存在し、 $f(x)$ の形状は(図6.1)③₃に示すようになる。従って、この場合は、 α_2 から左右に最も近い離散点と周りに対して比較を行えば、一次元探索は終了する。



(図6.1) $f(x)$ (式(6.2.2-24)) の形状

以上の様に、①, ②, ③_{1,2,3} の判定を行うようにする。計算機による一次元探索は、いすれも、高々 2つの離散点に関して、 $\sum K_{ij}x_i$ を計算し、比較することによって終了し、簡単である。

以上、本節では、6.2.1項及び6.2.2項において、直流利得も含めた近似の場合と、直流利得を問題としない近似の場合について、離散的なタイプ利得をもつトランスバーナル型回路の最小2変数近似による設計について述べてきた。その内容は、離散格子点の規則正しく配列された、距離計算の簡単になる座標系において、大域的最適点を得るのに十分な格子点の調査範囲を示したことで、CADの場合の一次元探索に寄与する目的で、誤差評価式の形状を調べたことである。

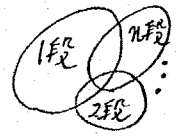
6.3 縦続型構成に関する考察

本節では、タップ利得が2進n桁に制限された縦続型構成によるトランスミナル型回路の零点の位置を求め、設計データとすることを目的とする。零点に注目した設計方法としては、例之は、 $Z = e^{-j\omega T}$ の多項式として与えられた仕様特性の零点に対し、タップ利得を2進n桁に制限したときの零点から最も近いものを選んで組み合わせるという方法が考えられる。

尚、本節の構成としては、(I)のトランスミナル型回路のn段縦続型構成による設計に於いて、多少の注釈を加え、(II)として、タップ利得が2進n桁に制限されたトランスミナル型回路の零点を示す。又、本節では、単位回路は全て理想遅延線 ($e^{-j\omega T}$) とし、暗にデジタル回路の場合を想定している。従って、その伝達関数は、 $Z = e^{-j\omega T}$ の多項式として表されることになる。

(I) トランスミナル型回路のn段縦続構成

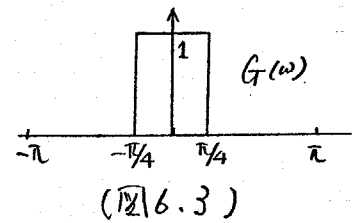
トランスミナル型回路を縦続型構成(例之は"二次係数に分解)にすると、タップ利得を定むる空間において、2乗誤差評価式は、一般に凸と成る。局所的な最小点を有する(参考文献参照)。このことは、タップ利得が離散値に制限された場合、2乗誤差の最小化が甚々難しい問題であることを意味する。タップ利得と1次連続値が許される場合とは、1段を構成したとき、これを等価なn段に分解して縦続構成しても、全く同一の特性が得られるから、最適タップ利得を、2乗誤差評価関数の凸性が保証されている1段構成の場合に於いて求め、これを因数分解して縦続型構成の最適タップ利得を定めることが出来る。しかし、タップ利得が離散値に限られた場合、この方法は採用出来ない。因数分解によって得られるタップ利得が、別と同じ離散値集合に含まれる場合など、ほとんど起るとは考えられないからである。従って、実際問題としては、適当な初期値を与え、計算機による離散空間での最適化を行い、得られた結果を準最適解として用いることになると思われる。但し、タップ利得を離散値に制限した場合、構成方法によって得られる特性の範囲が異なる(図6.2)参照)、逆にその点面白いと云える。タップ利得をある程度制限



(図6.2)

120. 構成方法に自由度を身之由は、それだけ、得らる特性の範囲が、広くなり、之の中から、最適なものを選べることになる。

一例として、タップ利得が $\{0, 1\}$ に限られた6次以下のトランスバーサル型回路で、(図6.3)のよう特性を最小二乗近似した場合を示す。誤差評価式は、6.2.2項の式(6.2.2-1)の場合とする。具体的に、



$$\tilde{\epsilon}_K = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(\omega) - K \cdot F(\omega)|^2 d\omega \quad \left(\begin{array}{l} G(\omega): \text{希望特性 (図6.3)} \\ K: \text{実定数} \end{array} \right) \quad (6.3-1)$$

であり、 $F(\omega)$ は、6次(タップ数=7)のトランスバーサル型回路を n 段 ($n=1 \sim 6$) に分解し、総統型構成した伝達関数とする。このとき、総統の段数 $n=1 \sim 6$ のそれぞれに於いて、式(6.3-1)の $\tilde{\epsilon}_K$ を最小とする総統構成とそのタップ利得、又、任意定数 K の最適値 K_{opt} と <表6.1> に示す。この結果は、全くの組み合わせによる計算の結果である。さらに <表6.1> で、 $n=1 \sim 6$ 相互で比較すると、この場合、他の条件を考慮すれば、2次と4次の2段総統型構成の場合と最小の近似誤差が得られることになり、これが最適と云うことになる。

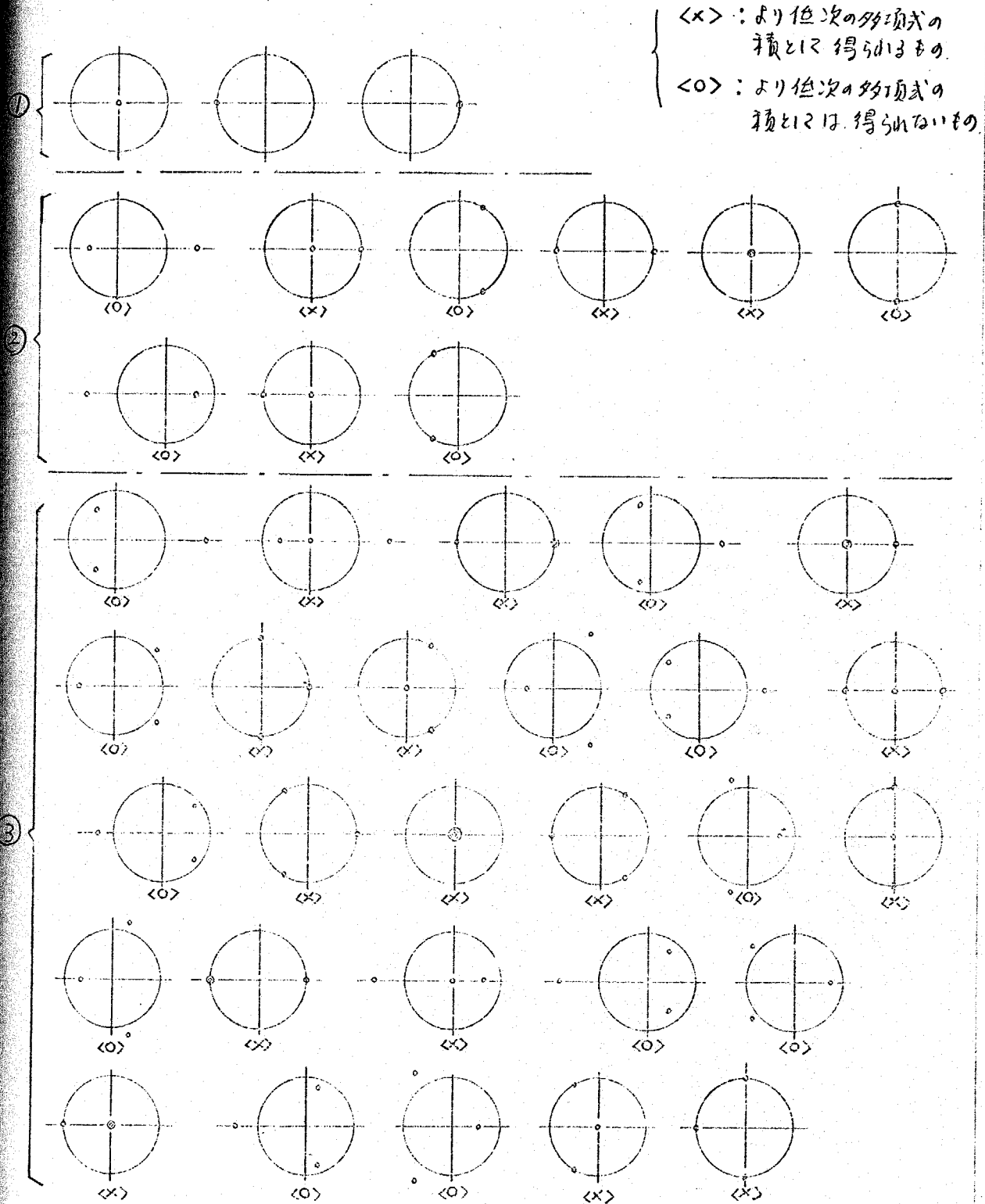
<表6.1> n 段総統型構成によるトランスバーサル型回路の比較例

段数 (n)	最適タップ利得	$\tilde{\epsilon}_{K_{opt}, min}$	K_{opt}
1	(0, 1, 1, 1, 1, 1, 0)	4.25446×10^{-2}	2.03694×10^{-1}
2	(1, 1, 1)(1, 1, 1, 1, 1)	2.47131×10^{-2}	7.80310×10^{-2}
3	(1, 1)(1, 1)(1, 1, 1, 1, 1)	2.56790×10^{-2}	7.12987×10^{-2}
4	(1, 1)(1, 1)(1, 1)(1, 1, 1, 1)	2.94759×10^{-2}	3.35429×10^{-2}
5	(1, 1)(1, 1)(1, 1)(1, 1)(1, 0, 1)	2.94759×10^{-2}	3.35429×10^{-2}
6	(1, 1)(1, 1)(1, 1)(1, 1)(1, 1)(1, 1)	4.35290×10^{-2}	1.49484×10^{-2}

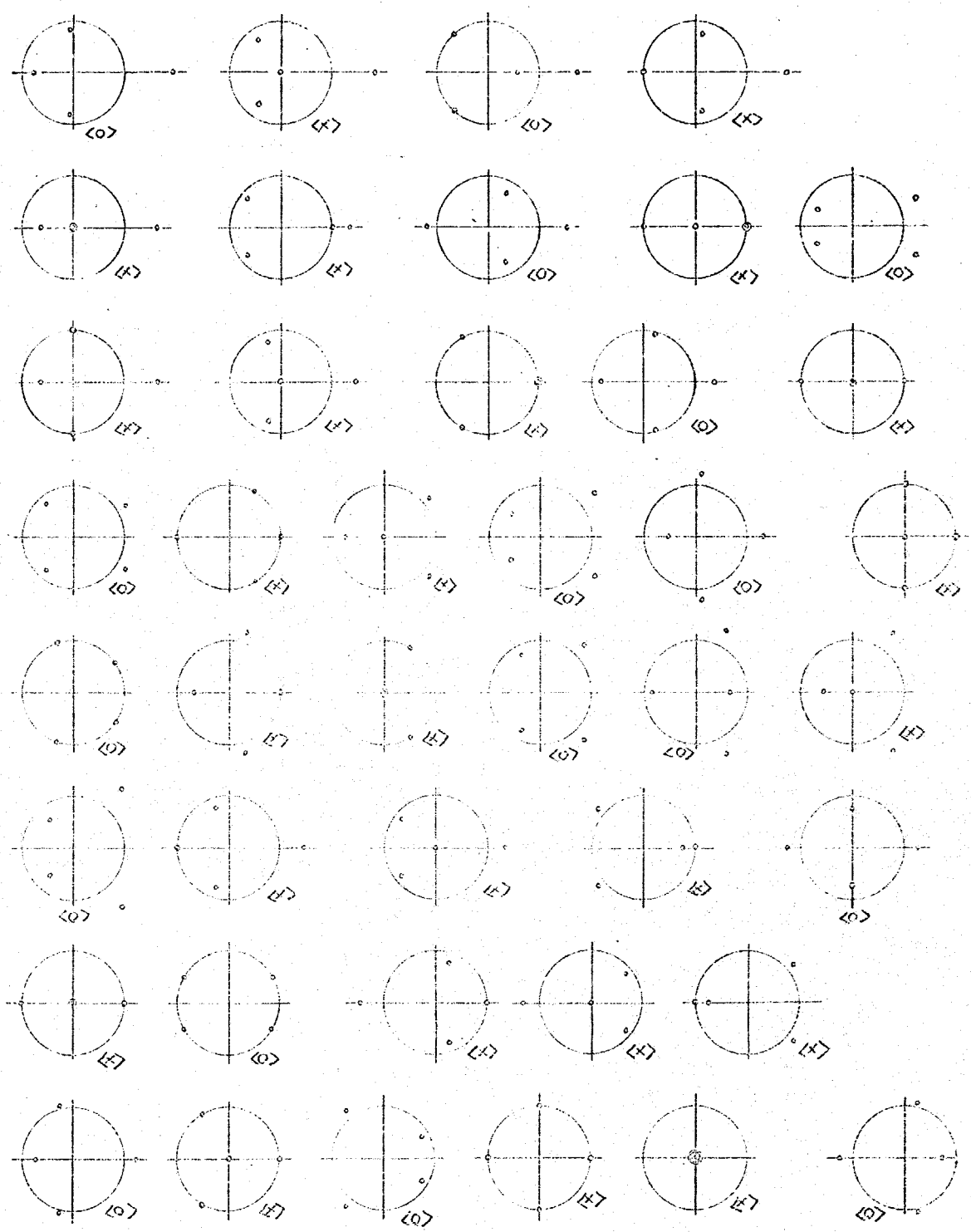
(II) タップ利得が、理想値に制限された場合の零乗

この場合は、 $T=0$ を示すことを主目的とする。

まず、タップ利得が $\{-1, 0, 1\}$ に限られた場合、トランスバーサル型回路



⊕₁



(図 6.4) (b)₁ ⊕ $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ($a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}$)

の零根

- $\langle 1 \rangle$: より低次の多項式の根として得られるもの
- $\langle 0 \rangle$: " " 根として得られるものの

の零点と12. どの程度のものか得らぬがよい。(図6.4)に示している。尚, α, β 利得を $\{-1, 0, 1\}$ としている為, $Z = e^{-j\omega T}$ の多項式で, 最高次の係数は1と12. 一般性を失わない。ここでは, 1次~4次までについて, テータを示している。

次に, 比較的応用の広いと考へらる。線型位相フィルタを2次分解による。構成した場合の零点について調べよう。まず線型位相ということから, 各2次区間を掛け合えた多項式は, 鏡像多項式にならなければならない。以下, 実用上重要と思はれる複素根の場合と話を限定することにすると, 鏡像多項式の複素根を α と示すことから, 一つの2次区間,

$$\left. \begin{aligned} Z^2 + a_1 Z + b_1, \quad 4b_1 - a_1^2 > 0 \\ \alpha_1, \alpha_2 = (-a_1 \pm j\sqrt{4b_1 - a_1^2})/2 \end{aligned} \right\} \quad (6.3-2)$$

に対して,

$$\left. \begin{aligned} Z^2 + a_2 Z + b_2, \quad 4b_2 - a_2^2 > 0 \\ \alpha_3, \alpha_4 = (-a_2 \pm j\sqrt{4b_2 - a_2^2})/2 \end{aligned} \right\} \quad (6.3-3)$$

が存在して,

$$\alpha_3 = 1/\alpha_1, \quad \alpha_4 = 1/\alpha_2 \quad (\Leftrightarrow b_1 \cdot b_2 = 1) \quad (6.3-4)$$

である。 $a_1 = 0$ のときは, $a_2 = 0$ であり, $b_1 \cdot b_2 = 1$ であるからよく, 虚軸上の零点は,

$$\pm j\sqrt{b_1}, \quad \pm j\sqrt{1/b_1}, \quad b_1 (> 0) \in \hat{M} \text{ (2進 } m \text{ 桁の数の集合)} \quad (6.3-5)$$

に限らぬ。以下, $a_1, a_2 \neq 0$ とし, 式(6.3-4)の条件を書き直すと,

$$b_1^2 \cdot a_2^2 = a_1^2 \quad (6.3-6)$$

又, 複素根であることから,

$$b_1 = (A_1/4) a_1^2, \quad b_2 = (A_2/4) a_2^2, \quad A_1, A_2 > 1. \quad (6.3-7)$$

式(6.3-6), (6.3-7)と, $b_1 \cdot b_2 = 1$ から,

$$A_1 = A_2 \triangleq A (> 1), \quad a_1^2 a_2^2 = (4/A)^2 \quad (6.3-8)$$

が得らぬ。今,

$$\alpha_1 \triangleq r e^{j\theta}, \quad \alpha_2 = r e^{-j\theta}, \quad \alpha_3 = (1/r) e^{-j\theta}, \quad \alpha_4 = (1/r) e^{j\theta} \quad (6.3-9)$$

とすると,

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left\{ \sqrt{4b_1 - a_1^2} / a_1 \right\} = (|a_1| / a_1) \tan^{-1} \sqrt{A-1}, \quad r = \sqrt{b_1} \\ A &= 4b_1 / a_1^2, \quad A > 1, \quad a_1, b_1 \in \tilde{M} \end{aligned} \right\} \quad (6.3-10)$$

を得る。こゝで、特に、 \tilde{M} とは、

$$\tilde{M}_1 \equiv \{ 2^m \mid m = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \} \quad (6.3-11)$$

の場合を考慮すると、式(6.3-10)を満すのは、

$$A = 2^m \quad (m \geq 1), \quad a_1 \in \tilde{M}_1 \quad (6.3-12)$$

のときに限られ、このとき、

$$b_1 = (A/4) a_1^2 \in \tilde{M}_1, \quad a_2 = 4 / (a_1 \cdot A) \in \tilde{M}_1, \quad b_2 = 1/b_1 \in \tilde{M}_1 \quad (6.3-13)$$

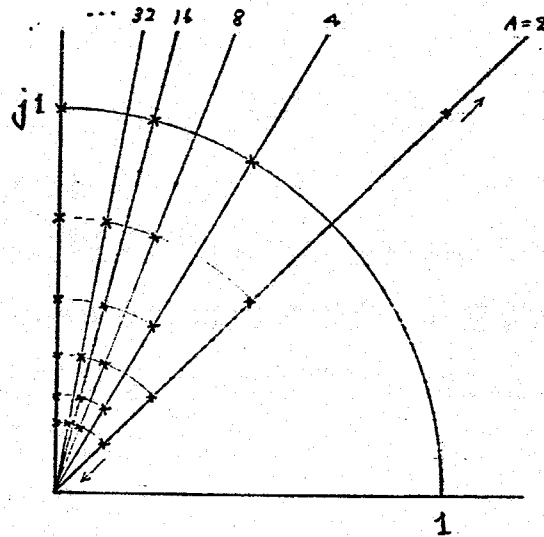
が満す。零点の位置は、(図6.5)に示すような位置に限らるゝことが分る。但し、(図6.5)には、第1象限の零点しか示しては居ないが、この実軸及び虚軸に関する対称の位置にも零点が存在する。又、虚軸に近づくにつれ、零点は集積する。

次に、より簡単な場合として、各2次区間が、その自体鏡像多項式になるような場合を考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} z^2 + Az + 1 &= 0 \\ z_{1,2} &= e^{\pm j\theta} \\ A &\in \tilde{M}, \quad |A| < 2 \end{aligned} \right\} \quad (6.3-14)$$

とあり、このとき、

$$\theta = \frac{|A|}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{4}{A^2} - 1} \quad (6.3-15)$$



(図6.5) x: 零点の位置

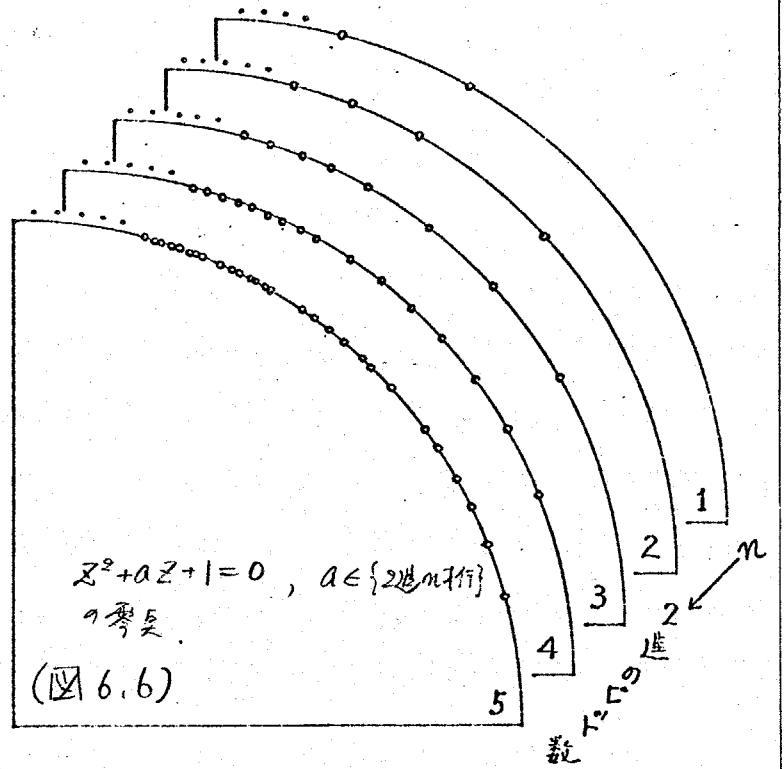
となる。従って、 n ビット数が増えるにつれて、実軸に近い根が得られるようになる。一般に、式(6.3-15)で、 A が2進 n 桁とすると、最も実軸に近い複素根の偏角 θ_{min} は、

$$\theta_{min} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{4}{(2^n - 1)/2^{n-1}} - 1} \quad (6.3-16)$$

と与えられる。Aのビット数と、 θ_{min} の関係は、<表6.2>に示しておく。

<表 6.2>

ビット数	θ_{min} (度)
1	60.00°
2	41.41°
3	28.95°
4	20.36°
5	14.36°
6	10.14°
7	7.17°
8	5.07°
9	3.58°
10	2.53°



又, (図 6.6)には, 同様に, a のビット数と, そのとき, 得られる零点の位置とをいふ。やはり, 産卵期に近づくと, 零点は集積する。

尚, 零点のパターンが, 希望特性のそれと一致するに比し, 厳密に構成出来ず, 必要十分条件である。但し, 2進誤差近似と云う目で見ると, 希望特性の零点に近いものを組み合わせで構成するという方法は, 必ずしも 2進誤差を最小とするものではないことに注意しておく必要がある。

6.4 あとがき

本章では、デジタルフィルタなどにおいては、本質的に係数器のビット数が制限されることを考慮し、離散的なタップ利得をもつトランスバーカル型回路の設計に際して考察を行った。即ち、前半では、離散的なタップ利得をもつトランスバーカル型回路の最小2乗近似による設計において、大域的な最小値を得るのに十分な調査範囲を、直流利得を含めた近似の場合と、直流利得を問題としない近似の場合に分けて求めた。又、次善の策として、計算機による一次探索の反復で局所的な最小値を得ることが考えられるが、その際に役立つ目的で、連続空間上での2乗誤差評価関数の形状を、特に直流利得を問題としない設計の場合について調べた。後半では、タップ利得が2進レベルに制限された総線型構成によるトランスバーカル型回路で、得られる零長の位置を系統的に求め、設計の際役立つと思われるデータを与えた。

残された問題としては、

- (i) 6.2節で得た結果に対する例題を調べ、実際どの程度必要な調査範囲がせよつかを検討すること。
- (ii) 6.2節、特に6.2.1項では、本質的に利用している不等式が、式(6.2.1-11)であり、任意の離散的格点系を考えた場合には、これ以上の不等式はないと考えられるが、離散的格点系が定まっている場合、その情報とA, Bの情報を利用して、より厳しい不等式を用いることにより、さらに調査範囲を限定することの検討。
- (iii) 6.3節で与えた零長パターンを利用して設計、例えは、仕様で与えられた零長に対し、最も近い零長を採用するよう設計の結果として得られる近似特性の特徴を調べること。

などがあげられる。

第7章 2次系統型構成による自動等化器

7.1 はしがき

普通、自動等化器として用いられるトランスバーサル型回路は、通常型構成のもので、これと等価な2次区間の系統型構成による回路を用いることは、少いようである。その理由として、i) 通常型構成の場合、誤差評価量がタップ利得の凸関数になるにもかかわらず、系統型構成にすると、誤差評価量がタップ利得の凸関数になるとは限らず、局所的最小点に落ち込む可能性がある。ii) タップ利得の自動設定が通常型の場合のように簡単に行えるか。と云った問題のありことが挙げられる。しかし、タップ利得が諸長制限されている場合など、近似する特性によれば、2次系統型構成の方が優れていることもあり、⁽³²⁾ 2次系統型構成による自動等化器において、大域的最適点が得られる条件とか、簡単な自動等化プログラムを考察し、自動等化器として用いることの可能性を調べたものは、無意味なことではないと思われよう。

本章では、2乗誤差を評価式とするMS形自動等化器に関して、上記の事柄を検討している。7.2節では、まず準備として、1.3.3項を引用し、通常型構成によるMS形自動等化器の要旨を述べ、続いて、7.3節の定理の基本となる固有行列式に関する補題及び2乗誤差評価式の凸性に関する補題を示している。

7.3節では、2次系統型構成によるトランスバーサル型等化器のタップ利得を変ねとする空間において、評価式である2乗誤差を停留^(*)させる点が大域的最適点であるための十分条件を示し、簡単な例を述べている。そして、7.4節では、2次系統型構成による自動等化器のタップ利得を変ねとする空間において、2乗誤差を停留させる点へ収束する簡単な自動等化プログラム及びその構成方法を示している。

本章で得られる結果は、必ずしも、2次系統型構成によるトランスバーサル型回路が自動等化器として適しているということだけではないが、その可能性と限界を明らかにしてやうと云う点で、意味があるものと考えよう。

(*) 停留という言葉は、全方向の偏微分が零となることの意味で用いている。
(分岐点)

7.2 準備

本節では、まず、1.3.3項を引用し、通常型構成によるMS形自動等化器の要旨を述べたから、次節の定理の基本となる関数行列式に関する補題及び、2乗誤差の凸性に関する補題を証明しておく。

1.3.3項で述べたように、通常のMS形自動等化器は、単位回路として、遅延時間 T の理想遅延線を使った通常型構成によるトランスバーサル型回路(図1.3)を用い、時間領域の等間隔標本長 2 乗誤差

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\mathcal{C}) &\triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{y(iT) - g(iT)\}^2 \\ &= \mathcal{C}' A \mathcal{C} - 2 \mathcal{C}' b + \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (7.2-1)$$

但し、 $\begin{cases} y(t) \text{ はトランスバーサル型回路の出力} \\ g(t) \text{ は希望出力。} \end{cases}$
 $\mathcal{C}, A, b, \varepsilon_0$ は式(1.3.3-2)に同じ、又'は転置を表す。

をタップ利得 \mathcal{C} に對し、最小にしようとするものがある。ここで、式(7.2-1)において、相関行列 A が正值となることは、1.3.3項で既に指摘した。又、自動等化のタップ設定アルゴリズムは、1.3.3項 a)基本形で述べたものが基礎となっており、この最急降下法を用いて自動等化アルゴリズムが収束し、最適タップ利得 \mathcal{C}_{opt} が得られるのは、式(7.2-1)の ε_1 が \mathcal{C} の狭義凸関数となること、あるいは、同値なこととして、 ε_1 の \mathcal{C} に對するヘッセ行列である相関行列 A が正值であることによることに注意しておく。即ち、このとき、式(7.2-1)の ε_1 を最小とする最適タップ利得は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \mathcal{C}} &\triangleq \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c_0}, \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial c_N} \right)' \\ &= A \mathcal{C} - b = 0 \end{aligned} \quad (7.2-2)$$

の解として一意的に定まる。尚、式(7.2-1)を周波数領域で表しておくと、

$$\varepsilon_1(\mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X^*(\omega) \cdot H_0(\mathcal{C}, e^{j\omega T}) - G^*(\omega)|^2 d\omega \quad (7.2-1')$$

となる。但し、

$$H_0(\ell, e^{-j\omega T}) \triangleq \sum_{m=0}^N C_m e^{-jm\omega T}$$

$$X^*(\omega) \triangleq (1/T) \mathcal{X}_{\pi/T}(\omega) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + 2k\pi/T)$$

$$X(\omega) \leftrightarrow x(t) : \lambda \text{力}$$

$$G^*(\omega) \triangleq (1/T) \mathcal{X}_{\pi/T}(\omega) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\omega + 2k\pi/T)$$

$$G(\omega) \leftrightarrow g(t) : \text{希望出力}$$

$$\mathcal{X}_{\pi/T}(\omega) \triangleq \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/T \\ 0, & |\omega| > \pi/T \end{cases}$$

(7.2-3)

である。∴ $X^*(\omega), G^*(\omega)$ は、 $x(t), g(t)$ を $|\omega| < \pi/T$ に帯域制限内挿した波形のフーリエ変換である。

さて、次に、次節の定理の基本となる行列式に関する補題と、2重誤差式の凸性に関する補題を総括して示しておく。特に(補題7.1)は、その意味深いものである。

《補題7.1》 最高次係数が零でない偶数次の実係数多項式 $F_N(z)$ が与えられると、

$$F_N(z) \triangleq C_{2N} z^{2N} + C_{2N-1} z^{2N-1} + \dots + C_1 z + C_0$$

$$\equiv A \cdot \prod_{i=1}^N (z^2 + a_i z + b_i)$$

(7.2-4)

のように分解でき、係数に関する行列式について、次の事実が成り立つ。

$$\circ z^2 + a_i z + b_i = 0 \text{ と } z^2 + a_j z + b_j = 0 \text{ (} i \neq j \text{) が共通根をもたない。}$$

(これを式(7.2-4)の分解が“素である”又は、“素分解”)
“素である”と呼ぶことにする。

(7.2-5)



$$\circ |J_N| \triangleq \frac{\partial (C_{2N}, C_{2N-1}, \dots, C_1, C_0)}{\partial (A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)} \neq 0$$

(補題7.1終)

(証明) N に関する帰納法による。まず、 $N=1$ のとき、

$$F_1(z) \triangleq C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \equiv A (z^2 + a_1 z + b_1), \quad C_2 \neq 0$$

$$C_2 = A, \quad C_1 = A \cdot a_1, \quad C_0 = A \cdot b_1$$

(7.2-6)

より,

$$|J_1| \cong \frac{\Delta(C_2, C_1, C_0)}{\Delta(A, a_1, b_1)} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = A^2 \neq 0 \quad (7.2-7)$$

となり, 明らかに式(7.2-5)の事実が成り立ちます。

次に, $N \geq 1$ のとき主張が正しいと仮定し, $N+1$ のときについて証明します。

$$\begin{aligned} F_{N+1}(z) &\cong d_{2N+2} z^{2N+2} + d_{2N+1} z^{2N+1} + \dots + d_1 z + d_0 \\ &\cong A \prod_{i=1}^{N+1} (z^2 + a_i z + b_i) \end{aligned} \quad (7.2-8)$$

とし, この z^2 一般性を失うことなく,

$$\begin{aligned} F_N(z) &\cong A \cdot \prod_{i=1}^N (z^2 + a_i z + b_i) \\ &\cong C_{2N} z^{2N} + C_{2N-1} z^{2N-1} + \dots + C_1 z + C_0 \end{aligned} \quad (7.2-9)$$

とおけば, $C_{2N} = A = d_{2N+2} \neq 0$ として, 式(7.2-9)に因しては, 帰納法の仮定により, 式(7.2-5)の主張が成り立ちます。又, 式(7.2-8)は,

$$F_{N+1}(z) \cong \sum_{i=0}^{2N+2} d_i z^i = (z^2 + a \cdot z + b) \cdot F_N(z) \quad (7.2-8')$$

と書けます。但し, 簡便のため, a_{N+1}, b_{N+1} の代わりに a, b と書いている (以下同様)。

このとき, 実際には計算を行うことにします。

$$\left. \begin{aligned} d_{2N+2} &= C_{2N} \\ d_{2N+1} &= C_{2N+1} + A C_{2N} \\ d_{2N} &= C_{2N-2} + A C_{2N-1} + b C_{2N} \\ &\vdots \\ d_{2N-i} &= C_{2N-i-2} + A C_{2N-i-1} + b \cdot C_{2N-i} \quad (i=0 \sim 2N-2) \\ &\vdots \\ d_2 &= C_0 + a C_1 + b C_2 \\ d_1 &= a C_0 + b C_1 \\ d_0 &= b C_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.2-10)$$

を得ます。よって $N+1$ のときの行列式は, 次のように表されます。

$$|J_{N+1}| = \frac{\Delta(d_{2N+2}, d_{2N+1}, \dots, d_1, d_0)}{\Delta(A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N, a, b)}$$

$$= \left| \begin{array}{cccc|cc|c} \hat{C}_{2N} & \hat{C}_{2N-1} & \hat{C}_{2N-2} & \cdots & \hat{C}_0 & & \\ & + a \hat{C}_{2N} & + a \hat{C}_{2N-1} & \cdots & + a \hat{C}_1 & a \hat{C}_0 & \\ & & + b \hat{C}_{2N-2} & & + b \hat{C}_2 & + b \hat{C}_1 & b \hat{C}_0 \\ \hline 0 & C_{2N} & C_{2N-1} & \cdots & C_1 & C_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{2N} & \cdots & C_2 & C_1 & C_0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \hat{C}_{2N} \\ \hat{C}_{2N-1} \\ \hat{C}_{2N-2} \\ \hat{C}_0 \end{array}} \right\} 2N+1 \text{行} \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} C_{2N} \\ C_{2N-1} \\ C_1 \\ C_0 \end{array}} \right\} 2 \text{行} \end{array} \quad (7.2-11)$$

但し,

$$\hat{C}_{2N-i} \triangleq \left(\frac{\partial C_{2N-i}}{\partial A}, \frac{\partial C_{2N-i}}{\partial a_1}, \frac{\partial C_{2N-i}}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial C_{2N-i}}{\partial a_N}, \frac{\partial C_{2N-i}}{\partial b_N} \right)^T \quad (7.2-12)$$

である。ここで、式(7.2-11)の列に関して基本変形を施す。即ち、第2列から第1列のa倍を引く。続いて、得られた行列の第3列から、第2列のa倍と、第1列のb倍を引く。以下、同様の操作をくり返すと、行列式の値は不変で、式(7.2-11)は次のように変形される。

$$|J_{N+1}| = \left| \begin{array}{cccc|c|c} \hat{C}_{2N} & \hat{C}_{2N-1} & \cdots & \hat{C}_0 & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & \text{---} & \text{---} \\ \hline * & * & \cdots & * & \text{---} & \text{---} \\ \hline * & * & \cdots & * & \text{---} & \text{---} \end{array} \right| = |J_N| \cdot |R_{N+1}| \quad (7.2-13)$$

さらに、式(7.2-11)の形、並びに基本変形の仕方から、式(7.2-13)の|R_{N+1}|が、

$$\left| \begin{array}{cccc|c|c} 1 & a & b & & & \\ & 1 & a & b & & \\ & & 1 & a & b & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & a & b \\ \hline C_{2N} & C_{2N-1} & \cdots & C_1 & C_0 & \\ \hline C_{2N} & \cdots & C_2 & C_1 & C_0 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc|c|c} 1 & a & b & & & \\ & 1 & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & a & b \\ \hline C_{2N} & C_{2N-1} & \cdots & C_1 & C_0 & \\ \hline C_{2N} & \cdots & C_2 & C_1 & C_0 & \end{array} \right| \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \ddots \\ 1 \end{array}} \right\} 2N+1 \text{行} \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} C_{2N} \\ C_{2N-1} \\ \cdots \\ C_1 \\ C_0 \end{array}} \right\} 2 \text{行} \end{array} \quad (7.2-14)$$

に等しいことが容易に分る。ここで、式(7.2-14)の右辺は、(z²+az+b)とF_N(z)の終結式の行列式表現であり、結局、

$$|R_{N+1}| = C_{2N}^2 \prod (\alpha_\mu - \beta_\nu) \quad , \quad C_{2N} = A \neq 0 \quad (7.2-15)$$

但し、(α_μはz²+az+b=0の根、β_νはF_N(z)=0の根であり、πはμ=1~2、ν=1~2Nの全2k渡りかとする。

が得られる。(4.5) より,

$$z^2 + az + b = 0 \text{ と } F_N(z) = 0 \text{ が共通根をもたない} \Leftrightarrow |R_{N+1}| \neq 0 \quad (7.2-16)$$

が成り立つ。

以上より, $F_{N+1}(z) \triangleq \sum_{i=0}^{2N+2} d_i z^i = A(z^2 + az + b) \prod_{i=1}^N (z^2 + a_i z + b_i)$ が "素分解" である。その一部である $F_N(z) \triangleq A \prod_{i=1}^N (z^2 + a_i z + b_i) = \sum_{i=0}^{2N} c_i z^i$ も明らかに "素分解" になっている。よって、式(7.2-16)より、 $|R_{N+1}| \neq 0$ 。又、帰納法の仮定から、 N のとき、式(7.2-5)の主張が成り立ち、 $|J_N| \neq 0$ 。よって、式(7.2-13)より、 $|J_{N+1}| \neq 0$ を得る。逆に、 $|J_{N+1}| \neq 0$ ならば、 $|J_N| \neq 0$ 且つ、 $|R_{N+1}| \neq 0$ 。よって、 N のとき、式(7.2-5)が成り立つと云う仮定と、式(7.2-16)により、 $F_{N+1}(z) = \sum_{i=0}^{2N+2} d_i z^i = A(z^2 + az + b) \prod_{i=1}^N (z^2 + a_i z + b_i)$ は "素分解" である。これより、 $N+1$ のときにも、式(7.2-5)の主張が証明されることになる。(証明終)

(補題7.1) から直接得られる 特別の場合として、次の系が成り立つ。

((補題7.1の系)) (補題7.1) における

$$\textcircled{1} \text{ 「式(7.2-4)の } F_N(z) \text{ が重根をもたない} \Leftrightarrow |J_N| \neq 0 \text{」} \quad (7.2-17)$$

\textcircled{2} 式(7.2-4)の $F_N(z)$ が、0 がある 2 個の実根しか持たない場合、

$$\text{「} F_N(z) = 0 \text{ が複素重根をもたない} \Leftrightarrow |J_N| \neq 0 \text{」} \quad (7.2-18)$$

が成り立つ。

(補題7.1の系終)

尚、(補題7.1) は、一般に 変数 (係数) の個数を変えない、実係数の範囲での任意の分解に対して、拡張されるものと考えらる。

本節の最後、凸性に関する補題を述べよう。

((補題7.2)) (凸性の十分条件). N 次元ユークリッド空間内の一つの凸領域 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ 及び、関数 $F(C, z)$ が与えられるとき、任意の $C_1, C_2 \in K$ 、任意の λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) に対して、

$$F\{(1-\lambda)C_1 + \lambda C_2, z\} = (1-\lambda)F(C_1, z) + \lambda F(C_2, z) \quad (7.2-19)$$

が成り立つならば、任意の $G(z)$ に対して、又、任意の $z = \varphi(\omega)$ に対して、

$$\begin{aligned} & (1-\lambda) \int_{\alpha}^{\beta} |F(C_1, z) - G(z)|^2 d\omega + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} |F(C_2, z) - G(z)|^2 d\omega \\ & \geq \int_{\alpha}^{\beta} |F\{(1-\lambda)C_1 + \lambda C_2, z\} - G(z)|^2 d\omega, \text{ 但し } 0 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned} \quad (7.2-20)$$

が成り立つ。即ち, $\int_{\alpha}^{\beta} |F(\mathcal{C}, z) - G(z)|^2 d\omega$ ($z = \varphi(\omega)$) は, \mathcal{C} に對して広義の凸関数である。さらに, $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$ のとき, 区間 (α, β) を含む測度が零でない集合 I が存在して,

$$\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2 \Rightarrow F(\mathcal{C}_1, \varphi(\omega)) \neq F(\mathcal{C}_2, \varphi(\omega)), \quad \omega \in I \quad (7.2-21)$$

が成り立つ。 $0 < \lambda < 1$ に対して, 式(7.2-20)は, 不等号で成り立ち, $\int_{\alpha}^{\beta} |F(\mathcal{C}, \varphi(\omega)) - G(\varphi(\omega))|^2 d\omega$ は, \mathcal{C} に對して, 狭義凸関数となる。

(補題 7.2 終)

(証明) 式(7.2-19)の条件を用いて, 實際に式(7.2-20)の左辺から右辺を引いてゆくと,

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = \lambda(1-\lambda) \int_{\alpha}^{\beta} |F(\mathcal{C}_1, \varphi(\omega)) - F(\mathcal{C}_2, \varphi(\omega))|^2 d\omega \geq 0 \quad (7.2-22)$$

が得られる。又, この式(7.2-21)が成り立つ。 $0 < \lambda < 1$ に対して, 式(7.2-22)は, 不等号で成り立ち, 狭義の凸関数となることが示された。(証明終)

次に, (補題 7.2)から直接に導かれる結果を系として述べよう。

(補題 7.2 の系 1) $F(\mathcal{C}, z) = \sum_i c_i z^i$ ($z = e^{j\omega T}$) とすれば, 任意の $G(\omega)$ に対して, $\int_{-\pi/T}^{\pi/T} |\sum_i c_i e^{j\omega T} - G(\omega)|^2 d\omega$ は, \mathcal{C} の狭義凸関数である。これは, 1.3.2項あるいは, 1.3.3項で指摘したことを示す。(補題 7.2 の系 1 終)

(補題 7.2 の系 2) $\mathcal{C} = (a, b)$ とし, $F(\mathcal{C}, z) = (z^2 + az + b) \cdot f(z)$ ($z = e^{j\omega T}$) とすれば, 任意の $G(\omega)$ に対して, $\int_{-\pi/T}^{\pi/T} |(z^2 + az + b) \cdot f(z) - G(\omega)|^2_{(z=e^{j\omega T})} d\omega$ は, (a, b) の狭義凸関数である。但し, $f(z)$ は, a, b を含まない関数とする。

(補題 7.2 の系 2 終)

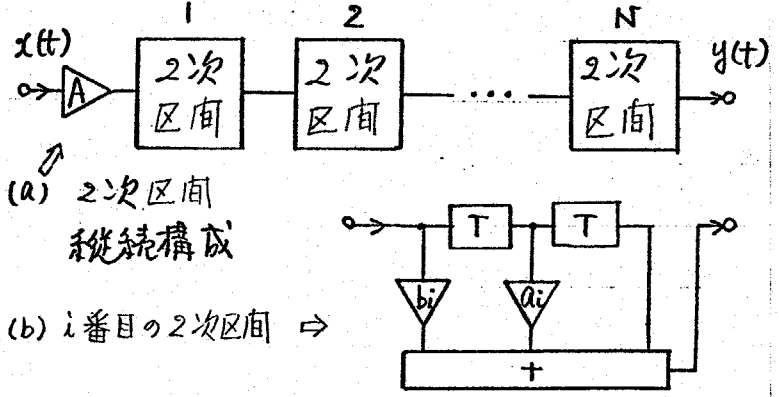
(補題 7.2 の系 3) $\mathcal{C} = (A)$ とし, $F(\mathcal{C}, z) = A \cdot f(z)$ ($z = e^{j\omega T}$) とすれば, 任意の $G(\omega)$ に対して, $\int_{-\pi/T}^{\pi/T} |A \cdot f(z) - G(\omega)|^2_{(z=e^{j\omega T})} d\omega$ は, A の狭義凸関数である。(補題 7.2 の系 3 終)

証明は, いずれも, $F(\mathcal{C}, z)$ ($z = e^{j\omega T}$) が, (補題 7.2)の式(7.2-19)及び式(7.2-21)の条件を満たすことから直ちに得られる。尚, 上の系 2 及び系 3 は, 7.4 節で用いる。

7.3 大域的最適解であるための十分条件.

本節では、2次総統型構成によるトランスルーカル型回路のタップ利得を適切とする空間において、2乗誤差評価関数を停留させることが、大域的最適解であるための十分条件を示す。

(図7.1)に示す、2次総統型構成によるトランスルーカル型回路を考慮することにし、この構成に於て、式(7.2-1)の2乗誤差を最小化することを考える。即ち、変数の異なることを強調する為、 ε_1 の代わりに ε_2 と書くことにし、



(図7.1) 2次総統型構成によるトランスルーカル型回路

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N) &\triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{y(iT) - g(iT)\}^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X^*(\omega) \cdot H_2(A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N, e^{j\omega T}) - G^*(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (7.3-1)$$

$$\text{但し, } H_2(A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N) \triangleq A \prod_{i=1}^N (z^2 + a_i z + b_i) \quad (7.3-2)$$

他は、式(7.2-3)に同じ。

を、変数 $\{A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N\}$ に関して、最小化する場合の問題について考える。MS形自動等化器に於ては、最急降下法が基本であり、通常型構成に於ては、式(7.1-1)の $\varepsilon_1(C)$ が、 C の狭義凸関数である為、 $\partial \varepsilon_1 / \partial C = 0$ を満足すれば、最適タップ利得 C_{opt} が一意的に求まる。しかし、変数の変った、式(7.3-1)の $\varepsilon_2(A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)$ については、一般に凸性が保証されるとは限らず、

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b_i} = 0 \quad (i=1 \sim N) \quad (7.3-3)$$

を満足する取束する最急降下法により得られる解が、最適解である保証はない。但し、式(7.3-3)を満足する

$$(A_0, a_{10}, b_{10}, \dots, a_{N0}, b_{N0}) \quad (7.3-4)$$

に關し、それか、最適解であることを保証する次の定理が成り立つ。

(定理 7.1) 変数 $(A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)$ の関数である式 (7.3-1) の ε_2 を停留させる変数 $(A_0, a_{10}, b_{10}, \dots, a_{N0}, b_{N0})$ が、 ε_2 の局所的な最小値であるための十分条件は、式 (7.3-2) を満たす。2次連続型構成に対するトランスミナル型回路の伝達関数

$$H_2(A_0, a_{10}, b_{10}, \dots, a_{N0}, b_{N0}) = A_0 \cdot \prod_{i=1}^N (z^2 + a_{i0}z + b_{i0}) \quad (7.3-5)$$

が、“素分解”に成り立つことである。(定理 7.1 終)

(証明) 通常型構成に対するトランスミナル型回路のタップ利得 $C = (C_0, C_1, \dots, C_{2N})$ を変数とする空間では、最適解が一意的に決まることに注意しておく。よって、

$$H_0(C, z) \triangleq \sum_{m=0}^{2N} C_m z^m, \quad C_{2N} \neq 0$$

$$H_2(A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N, z) \triangleq A \prod_{i=1}^N (z^2 + a_i z + b_i), \quad A \neq 0$$

を等置すると、 $H_0(C, z)$ の係数 C_m ($m=0 \sim 2N$) は、 $(A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)$ の積和として表され、従って、微分方程式

$$\frac{\partial C_m}{\partial A}, \frac{\partial C_m}{\partial a_i}, \frac{\partial C_m}{\partial b_i} \quad m=0 \sim 2N, \quad i=1 \sim N$$

が存在し、連続的である。よって、式 (7.3-3) は、

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} = \sum_{m=0}^{2N} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial C_m} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = 0 \quad \alpha: A, a_i, b_i \quad (i=1 \sim N)$$

あるいは、行列表現すれば”

$$\begin{pmatrix} \partial \varepsilon_2 / \partial A \\ \partial \varepsilon_2 / \partial a_1 \\ \partial \varepsilon_2 / \partial b_1 \\ \vdots \\ \partial \varepsilon_2 / \partial a_N \\ \partial \varepsilon_2 / \partial b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial C_0 / \partial A & \partial C_1 / \partial A & \dots & \partial C_{2N} / \partial A \\ \partial C_0 / \partial a_1 & \partial C_1 / \partial a_1 & \dots & \partial C_{2N} / \partial a_1 \\ \partial C_0 / \partial b_1 & \partial C_1 / \partial b_1 & \dots & \partial C_{2N} / \partial b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial C_0 / \partial a_N & \partial C_1 / \partial a_N & \dots & \partial C_{2N} / \partial a_N \\ \partial C_0 / \partial b_N & \partial C_1 / \partial b_N & \dots & \partial C_{2N} / \partial b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \varepsilon_1 / \partial C_0 \\ \partial \varepsilon_1 / \partial C_1 \\ \vdots \\ \partial \varepsilon_1 / \partial C_{2N} \end{pmatrix} = 0 \quad (7.3-3)'$$

と成り立つ。

$$|J_N| \triangleq \frac{\partial(C_0, C_1, \dots, C_{2N})}{\partial(A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)} \neq 0 \quad (7.3-6)$$

であるが, $(\partial \varepsilon_2 / \partial A, \partial \varepsilon_2 / \partial a_1, \partial \varepsilon_2 / \partial b_1, \dots, \partial \varepsilon_2 / \partial a_N, \partial \varepsilon_2 / \partial b_N)' = 0$ のとき, 式(7.3-3) は, 自明な解 $(\partial \varepsilon_1 / \partial C_0, \partial \varepsilon_1 / \partial C_1, \dots, \partial \varepsilon_1 / \partial C_{2N})' = \partial \varepsilon_1 / \partial C = 0$ しかもたない。これは, ε_1 の唯一の最適値を与え, 従って, このとき, 式(7.3-3)の解は, 尤域的最適値となる。

ところで, お節の(補題7.1)より,

$$A \cdot \prod_{i=1}^N (z^2 + a_i z + b_i) \text{ が "素分解" } \Leftrightarrow |J_N| \neq 0 \quad (7.2-5)$$

である。よって, 式(7.3-3)を満足する $(A_0, a_{10}, b_{10}, \dots, a_{N0}, b_{N0})$ とするとき, $H_2(A, a_{10}, b_{10}, \dots, a_{N0}, b_{N0}, z)$ が, "素分解" になっているが, 言い換えて, 式(7.3-1)の $\varepsilon_2 (= \varepsilon_1)$ を最小とする最適解である。(証明終)

(定理7.1)は, $H_2(A_0, a_{10}, b_{10}, \dots, a_{N0}, b_{N0})$ が "素分解" になっている場合に適用は, 何も言明しおらず, その場合, 最適と最適でないとも云えない。従って, (定理7.1)が, 最適値であるかを判定する道具として使える為には, 近似すべき特性 $G^*(\omega)/X^*(\omega)$ を $z = e^{-j\omega T}$ の多項式として表し, あるいは, 重根をもたないような形で十分精度よく表せているということが必要である。もしそのような状況が成り立つと見なせれば, 式(7.3-3)を満足するへ収束するアルゴリズムによって得られた $H_2(A_0, a_{10}, b_{10}, \dots, a_{N0}, b_{N0})$ が "素分解" になっているかどうかを判定し, "素分解" になっているときには, 適当に初期値を奏して, 同じアルゴリズムを走り, "素分解" となるようにすると云う方法をとることが可能である。

本節の終りに, (定理7.1)を例証する簡単な例をあげておく。

(例) 次の2乗誤差を考へる。近似すべき特性が, $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ と素分解になっている事に注意しておく。

$$\varepsilon_1 = \sum_{x=-\sqrt{0.3}, 0, \sqrt{0.3}} \{(x^2 + C_1 x + C_0) - (x^2 + 3x + 2)\}^2$$

$$\varepsilon_2 = \sum_{x=-\sqrt{0.3}, 0, \sqrt{0.3}} \{(x+a)(x+b) - (x^2 + 3x + 2)\}^2$$

まず, ε_1 について考へると, このとき,

$$\partial \varepsilon_1 / \partial c_1 = (6/5)(c_1 - 3) = 0, \quad \partial \varepsilon_1 / \partial c_0 = 6(c_0 - 2) = 0$$

となり、 ε_1 は最小となり最適解が、

$$c_1 = 3, \quad c_0 = 0, \quad \varepsilon_{1 \min} = 0$$

とし、一意的に求まる。次に ε_2 について求む。このとき、最適解が、

$$a = 1, b = 2 \quad \text{あるいは} \quad a = 2, b = 1$$

とあり、明らか。然るに、

$$\partial \varepsilon_2 / \partial a = (6/5) \{ (a+b-3) + 3b(ab-2) \}$$

$$\partial \varepsilon_2 / \partial b = (6/5) \{ (a+b-3) + 3a(ab-2) \}$$

となり、これを満たすものは、

$$\textcircled{1} \quad a = 1, b = 2, \quad \textcircled{1}' \quad a = 2, b = 1.$$

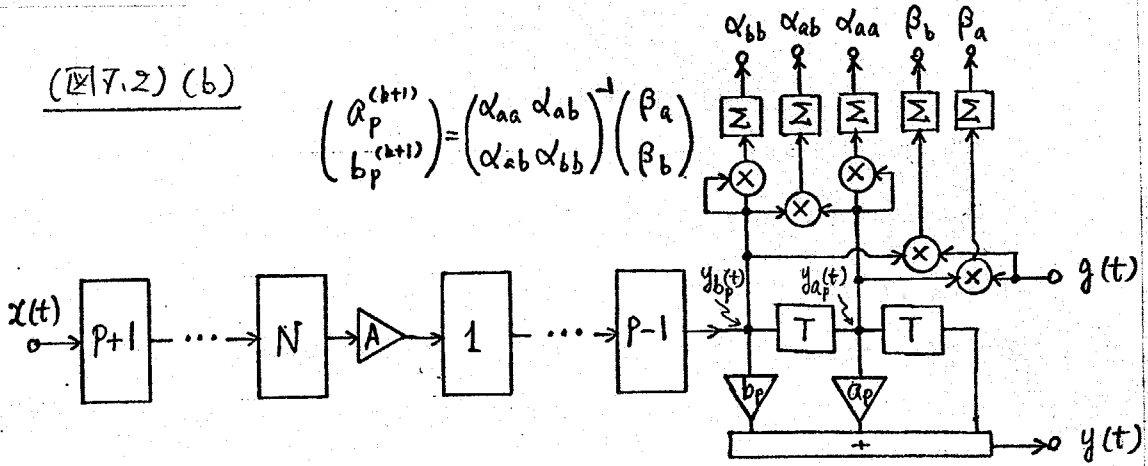
$$\textcircled{2} \quad a = b = -1$$

$$\textcircled{3} \quad a = b = (5 + \sqrt{85})/10, \quad \textcircled{3}' \quad a = b = (5 - \sqrt{85})/10$$

の合計 5 つ存在する。これらのうち、 $\textcircled{1}, \textcircled{1}'$ は、素分解となり、最適解となり得る。一方 $\textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{3}'$ は、素分解ではなく、この場合、最適解となり得ない。又、簡単な計算を行ってみると、 $\textcircled{3}, \textcircled{3}'$ の方は上に凸な停留点であり、 $\textcircled{2}$ は下に凸な停留点であることが分る。従って、最急降下法によつて、 $\textcircled{3}$ あるいは $\textcircled{3}'$ の方に落ち着くことは、ほとんど考えられないが、 $\textcircled{2}$ の方は安定であり、最適ではない局所的極小点となる。

(終)

(図7.2) (b)



$$\begin{pmatrix} \alpha_p^{(k+1)} \\ b_p^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{aa} & \alpha_{ab} \\ \alpha_{ab} & \alpha_{bb} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_a \\ \beta_b \end{pmatrix}$$

但し,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{aa} &\triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_{ap}^2(iT), & y_{ap}(t) &\leftrightarrow X(\omega) A \cdot \prod_{i \neq p} (z^2 + a_i z + b_i) \quad z = e^{j\omega T} \\ \alpha_{bb} &\triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_{bp}^2(iT), & y_{bp}(t) &\leftrightarrow X(\omega) A \cdot \prod_{i \neq p} (z^2 + a_i z + b_i) \quad z = e^{-j\omega T} \\ \alpha_{ab} &\triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_{ap}(iT) \cdot y_{bp}(iT) \\ \beta_a &\triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_{ap}(iT) \cdot g(iT) \\ \beta_b &\triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_{bp}(iT) \cdot g(iT) \end{aligned} \right\} (7.4-3)$$

式(7.4-2)は、2元一次の連立方程式であり、逆行列を求め、 a_p, b_p を計算する装置を組み込むことは、比較的簡単と考えられる。又、式(7.4-3)で与えられる $\alpha_{aa}, \alpha_{bb}, \alpha_{ab}, \beta_a, \beta_b$ は、(図7.2) (b)のような装置で求められる。

ここで、第節、(補題7.2の系2)及び(補題7.2の系3)より、 $\varepsilon_2(A, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)$ は、 $(a_p, b_p) (p=1 \sim N)$ 及び A に関して、狭義凸関数であるので、式(7.4-1)及び式(7.4-2)で、求められる各2次元空間に関するグラフ利得は、その状態で最適のものである。従って、 A 及び $(a_p, b_p) (p=1 \rightarrow N)$ を1サイクルと1反復操作を考えると、各反復操作に対し、 ε_2 は、広義単調減少となる。一方、 ε_2 は、明らかに下限を有するので、この反復操作は収斂し、そのとき、

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial a_p} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial b_p} = 0 \quad (p=1 \sim N)$$

が、同時に満ちることは、明らかである。よって、このアルゴリズムは、式(7.3-1)の ε_2 を停留させるまで収束する。

7.4 あとがき,

本章では, 2次系統型構成によるトランスミナル型回路を自動等化器として用いることの可能性を検討し, 2次系統型構成による等化器のタップ利得を変数とする空間で, 2乗誤差評価式を停留させるとか大域的最適値が存在する十分条件を, 伝達関数を $z = e^{j\omega T}$ の多項式としたとき, "素分解" になることであることを示した。又, 2次系統型構成による等化器のタップ利得を変数とする空間で, 2乗誤差評価式を停留させるとか収束する簡単な自動等化アルゴリズムを与えた。

但し本章で提案した 2次系統型構成による自動等化器が, 実用と為る為には, まず(定理 7.1)の, 効力を発揮する為には,

① 近似すべき特性が $z = e^{j\omega T}$ の多項式にて表したとき, 複素, 重根を有する形で十分精度よく近似されること,

が必要であり, このときには, 7.3節で示した自動等化アルゴリズムにおいて得られた 2次系統型構成によるトランスミナル型回路の伝達関数が "素分解" であるかを判定し, 素分解でないならば, 初期値を変えて, 再び等化を行ってやることが出来る。しかし,

② その初期値をどう選んでやれば"良いか"

といった大きな問題が残っており, 2次系統型構成によるトランスミナル型回路を自動等化器として用いるには, 相当の困難があると云わざるを得ないように思われる。

第8章 トランスバーサル型回路を用いたAMディジタル変復調器の一形式

8.1 けしき

最近、ディジタル技術の進歩に伴い、周波数分割多重通信用変復調装置のディジタル化が検討され、既にFFTを使ったものや、Weaver変調器を利用したものなどが発表されている^{(33), (34), (35)}。

そこで、本章では、トランスバーサル型回路で構成される周波数分割多重AMディジタル変復調システムの一形式について述べる。まず、8.2節で準備として標準化定理及びフーリエ変換の簡単な性質について述べ、続いて8.3節、8.4節で、変調部及び復調部の構成方法を示す。ここで提案している方式の特徴は、標準化定理に基づき、ナイquist間隔で与えられる基底帯域信号の時系列から、さらに周波数分割多重したAM信号のナイquist間隔における時系列が、直接にかも明確な形で得られることである。このことは、復調に際して有利である。尚、量子化誤差の検討は、本章の目的とするところではないので、各時系列は、すべて標本値のみとして扱ってゆくことにする。

8.2 準備

本節では、本章で用いる記号の説明と、標本化定理及びフーリエ変換の簡単な性質を示し、又、8.3節及び8.4節で扱う問題を明らかにしておく。

以下、本章では、時間関数を小文字で、又、そのフーリエ変換を大文字で表すことにし、変換対を $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ のように記す。又、 $*$ が複素共役を表し、 $\text{Re}\{z\}$ 及び $\text{Im}\{z\}$ が実部及び虚部を表すことにする。

次に標本化定理に関する補題を述べよう。

(補題 8.1) $X(\omega), Y(\omega)$ が、 $0 \leq \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ に帯域制限されたものとし、 $\omega_2/(\omega_2 - \omega_1) = N$ (整数) の有理数に成り立つとすれば、 $Z(\omega) \triangleq X(\omega) \cdot Y(\omega)$ に相当する時間波形は、次式で与えられる。

$$z(t) = T_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_0 + t_0) \cdot y(t - mT_0 - t_0) \leftrightarrow Z(\omega) \triangleq X(\omega) \cdot Y(\omega) \quad (8.2-1)$$

但し、 $\begin{cases} T_0 \triangleq \pi/(\omega_2 - \omega_1), & t_0: \text{任意定数}, \\ x(t) \leftrightarrow X(\omega), & y(t) \leftrightarrow Y(\omega). \end{cases}$ (補題 8.1 終)

(証明) 実際は式(8.2-1)の $z(t)$ をフーリエ変換すると、

$$Z(\omega) = T_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_0 + t_0) \cdot e^{j\omega(mT_0 + t_0)} \cdot Y(\omega)$$

ここで、ポアソンの求和式を用いれば、

$$Z(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\omega + 2m\pi/T_0) e^{j2m\pi \frac{t_0}{T_0}} \cdot Y(\omega)$$

又、 $X(\omega)$ が $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ に帯域制限されたことから、上式の和は $m=0$ の項だけを残せばよく、

$$Z(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

を得る。

(証明 終)

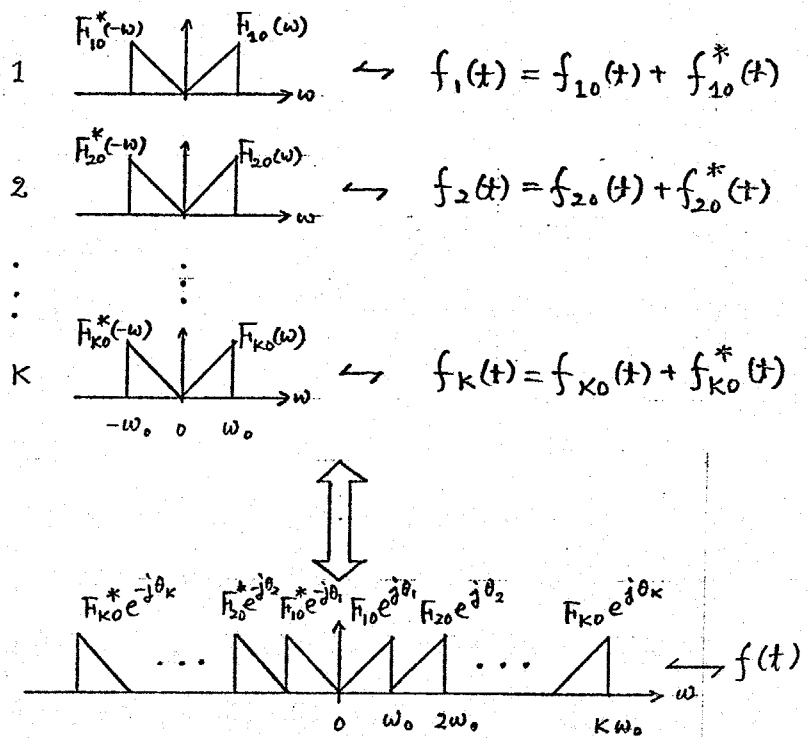
フーリエ変換の一つの性質として、 $a(t) \leftrightarrow A(\omega)$ のとき、

$$A(\omega - \omega_0) \leftrightarrow a(t) e^{j\omega_0 t} \quad (8.2-2)$$

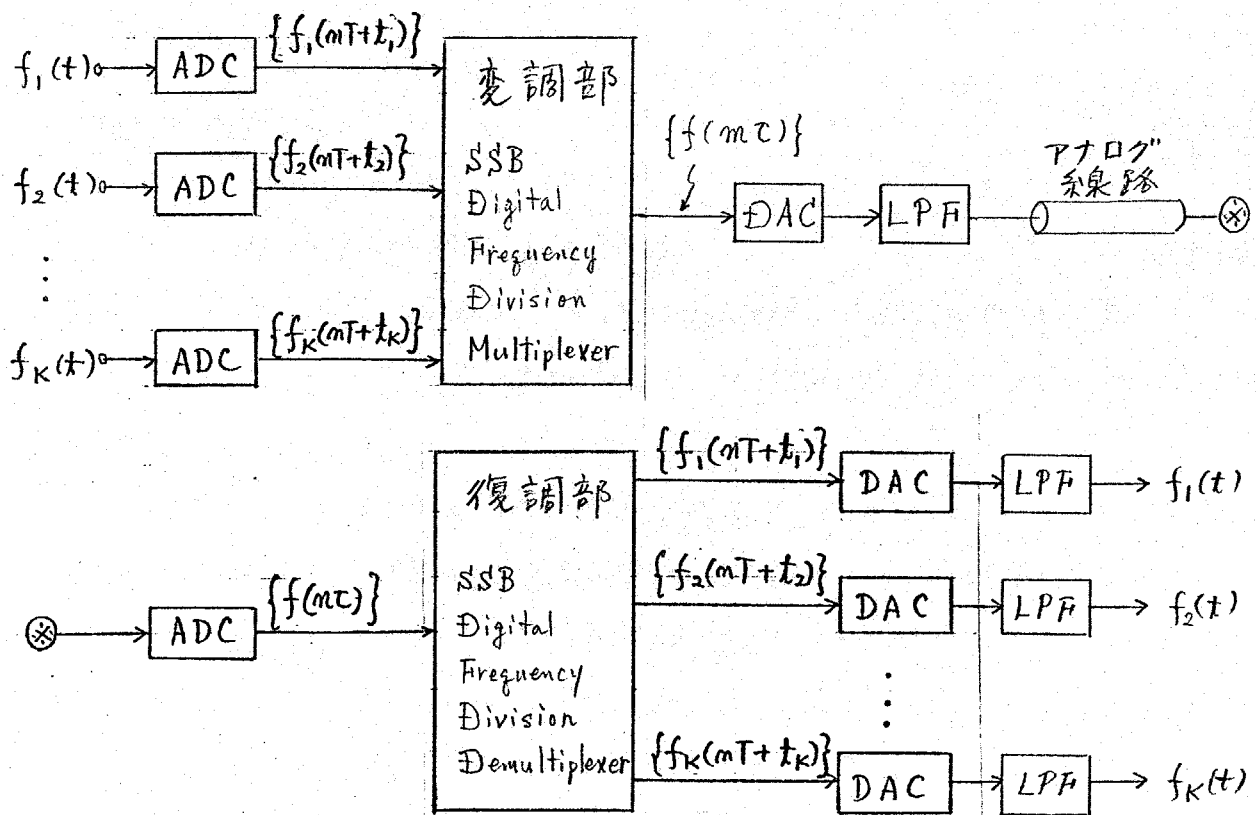
が成り立つことを挙げよう。

さて、本章の目的は、(図 8.1) に示されるような ω_0 (rad/sec) の帯域制限された基底帯域信号 $f_k(t)$ ($k=1 \sim K$) の T 秒間隔での時系列 $f_k(mT + t_k)$ (但し、 $T \triangleq \pi/\omega_0$, $0 \leq t_k < T$) から、これを周波数分割多重 (FDM) 信号

$f(t)$ のナイキスト周波数
 における時系列 $f(mT)$
 (但し, $T \triangleq T/K$) を求める
 変調部は, 逆に $f(mT)$
 から, $f_k(mT+t_k)$ ($k=$
 $1 \sim K$) を求める復調
 部を構成するに似ている
 (図 8.2 参照)。ここで
 実用面から見ると, $t_k=0$
 ($k=1 \sim K$), あるいは,
 $t_k=kT$ ($k=1 \sim K$)
 の場合が重要と思われる。



(図 8.1) 基底帯域信号と周波数分割多重 SSB 信号



(図 8.2) SSB デジタル変復調システム

8.3. 変調部

本節では、 ω_0 の帯域制限された基底帯域信号のナイキスト間隔 T の時系列 $f_k(nT+t_k)$ ($T \triangleq \pi/\omega_0$) から、これを周波数分割多重 (FDM) 信号のナイキスト間隔 T/K の時系列 $f_k^M(t)$ ($T \triangleq T/K$, K : 多重数) を求める式を導き、これを実現する回路構成を示す。

基底帯域信号 $f_k(t)$ ($k=1 \sim K$) は、

$$f_k(t) \triangleq f_{k0}(t) + f_{k0}^*(t) \quad \leftrightarrow \quad F_k(\omega) \triangleq F_{k0}(\omega) + F_{k0}^*(-\omega) \quad (8.3-1)$$

但し、 $f_{k0}(t) \leftrightarrow F_{k0}(\omega)$ であり、 $F_{k0}(\omega)$ は $0 \leq \omega \leq \omega_0$ 以外では零。

と表され、これを (図8.3) に示すように、周波数軸上で $(k-1)\omega_0$ だけ推移させ、位相 $e^{j\theta_k}$ を加えた信号、即ち、SSB変調された信号 $f_k^M(t)$ は、式(8.2-2)から

$$f_k^M(t) = f_k(t) \cos\{(k-1)\omega_0 t + \theta_k\} - 2 \operatorname{Im}\{f_{k0}(t)\} \sin\{(k-1)\omega_0 t + \theta_k\} \quad (8.3-2)$$

$$\leftrightarrow F_k^M(\omega) \triangleq F_{k0}\{\omega - (k-1)\omega_0\} e^{j\theta_k} + F_{k0}^*\{-\omega_0 - (k-1)\omega_0\} e^{-j\theta_k}$$

となる。ここで、特に、位相条件とす。

$$\theta_k = -(k-1)\omega_0 t_k \quad (8.3-3)$$

と選んでおくことにすると、式(8.3-2)から

$$f_k^M(nT+t_k) = (-1)^{n(k-1)} f_k(nT+t_k) \quad (8.3-4)$$

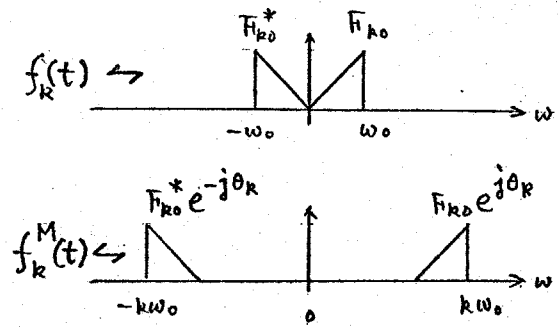
が得られ、式(8.3-2)に現われている $\operatorname{Im}\{f_{k0}(t)\}$ を使わずに表現出来ることになる。一方、式(8.2-1)より、 $T_0 = T$, $t_0 = t_k$ とし、 $x(t)$ に $f_k^M(t)$ を、 $T_0 y(t)$ に次の $\varphi_k(t)$

$$\varphi_k(t) \triangleq \{\sin k\omega_0 t - \sin(k-1)\omega_0 t\} / \omega_0 t \quad (8.3-5)$$

を代入すれば、良く知られた標本化定理となり、式(8.3-4)の結果と合せて、

$$f_k^M(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m(k-1)} f_k(mT+t_k) \varphi_k(t-mT-t_k) \quad (8.3-6)$$

を得る。(図8.1) に示したように、 $f(t)$ は、これらの和で与えられるから、そのナイキスト間隔毎の標本値 $f(mT)$ ($T = T/K$, K : 多重数) は、時系列 $f_k(mT+t_k)$ によつて、



(図8.3) 基底帯域信号の周波数軸上での推移。

$$f(mT) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n(k-1)} f_k(nT + t_k) \cdot \varphi_k(mT - nT - t_k) \quad (8.3-7)$$

と表せることになる。これを帯域 $K \cdot \omega_0$ の値域フィルタに通せば、 $f(t)$ が得られる。又、式(8.3-7)を有限項で近似構成する場合、 $|\varphi_k(t)| \propto 1/|t|$ の小さい部分を省略することになるから、それに都合の良いように添字をずらし、実用上重要と思われる $t_k=0$ 及び $t_k=kT$ ($k=1 \sim K$) の場合について、式(8.3-7)を書き直しておく。

① $t_k=0$ ($k=1 \sim K$) の場合

$$f(mT + lT) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{(m+l)(k-1)} f_k\{(m+l)T\} \cdot \varphi_k\{(m-n)T\} \quad (8.3-8)$$

$$\varphi_k\{(m-n)T\} = \frac{(-1)^{m(k-1)} \left\{ (-1)^m \sin \frac{km}{K} \pi - \sin \frac{(k-1)m}{K} \pi \right\}}{(m-n)T \pi / K} \quad (8.3-9)$$

但し、 $m=1 \sim K$, $-\infty < l < +\infty$ 。

式(8.3-8)の構成例を(図8.4)に示しておく。

② $t_k=kT$ ($k=1 \sim K$) の場合

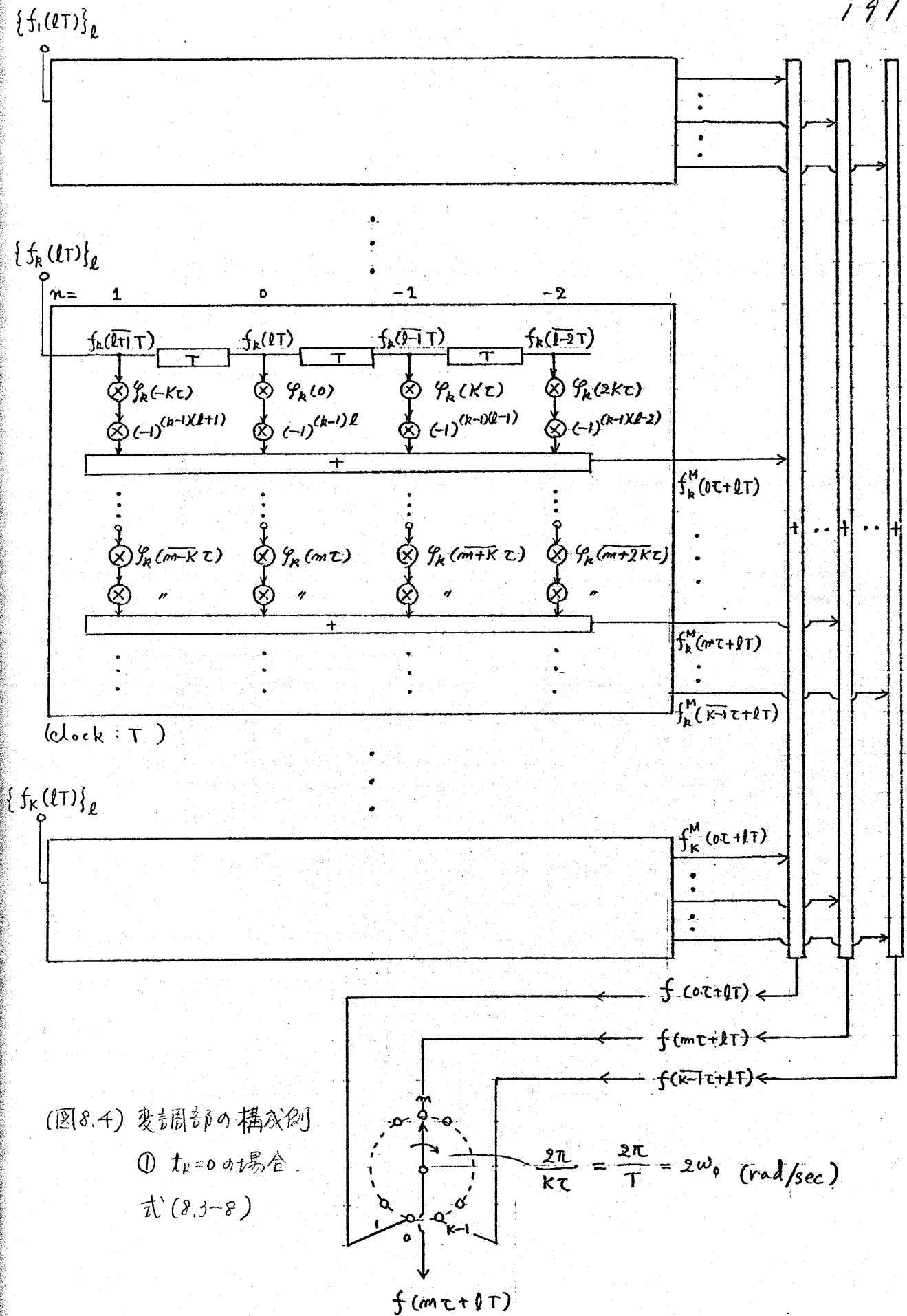
$$f(mT + lT) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{(m+l)(k-1)} f_k\{(m+l)T + kT\} \cdot \varphi_k\{(m-k)T - nT\} \quad (8.3-10)$$

$$\varphi_k\{(m-k)T - nT\} = \frac{(-1)^{m(k-1)} \left\{ (-1)^m \sin \frac{k(m-k)}{K} \pi - \sin \frac{(m-k)(k-1)}{K} \pi \right\}}{(m-k-n)T \pi / K} \quad (8.3-11)$$

但し、 $m=1 \sim K$, $-\infty < l < +\infty$ 。

式(8.3-10)の構成例を(図8.5)に示しておく。

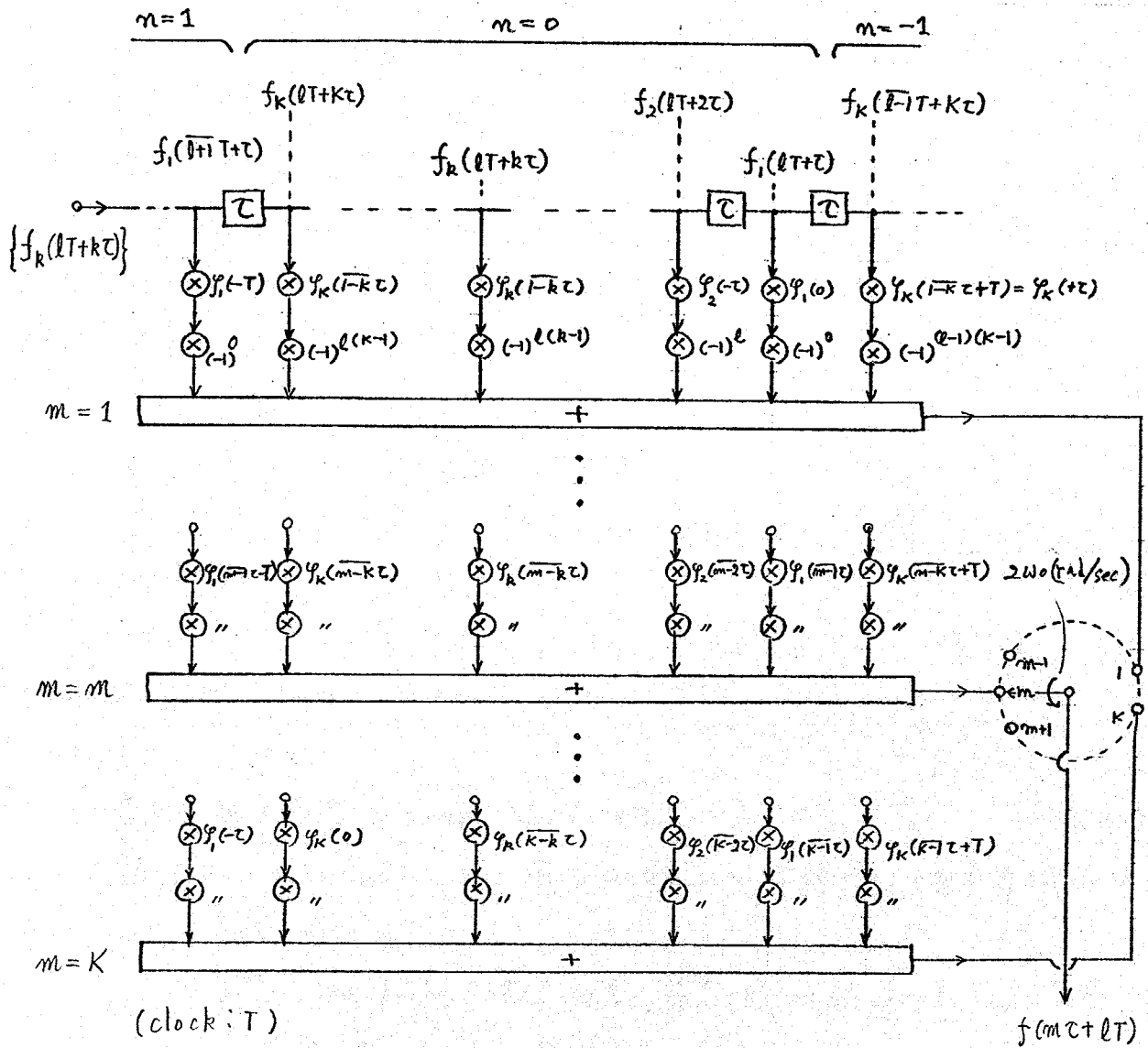
(図8.5)は、一見(図8.4)に比べ、簡単に見えるが、ツフトレツスタの板、乗算器の板、加算器の板とおいて(図8.4)と同じである。但し、(図8.5)の構成の場合、入力のA/D変換器の部分を、(図8.6)に示すような、やや高遅のA/D変換器一台で置きかえることが出来る。すなわち、こうし得られる時系列 $\{f_1(lT+kT), \dots, f_k(lT+kT)\}_l$ を、そのまま、能率よく利用すれば、(図8.5)において、 $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_k(0)$ が縦に揃うように、 m による位置をずらした構成に、クロックを T/K にせばよい。



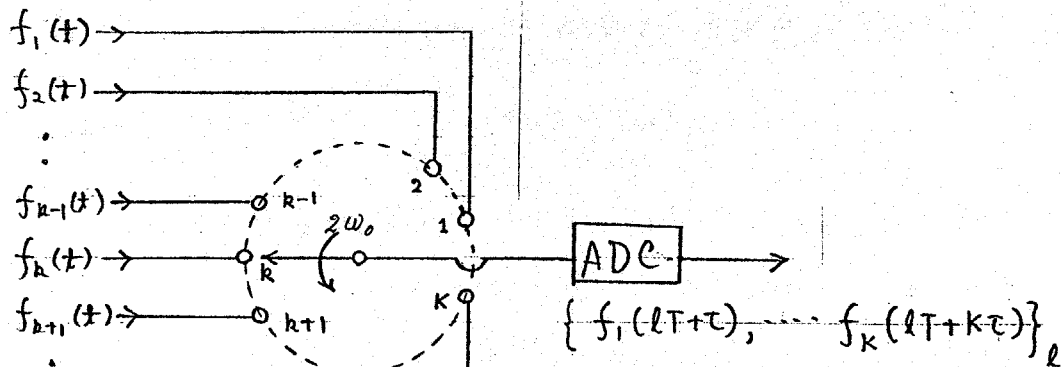
(図8.4) 変調部の構成例

① $t_k=0$ の場合.

式(8.3-8)



(図8.5) 変調部の構成例, ② $t_k = kT$ の場合, 式(8.3-10)



(図8.6)

8.4 復調部

本節では、変調と逆の操作である復調について述べる。即ち、周波数分割多重さしたSSB信号のナイquist間隔2の時刻列から元の基底帯域信号のナイquist間隔2の時刻列を求め式を導き、それを実現する回路構成を示す。

今、完全に同期かとはり τ を t_0 とするは受信側では、式(8.3-7)の時刻列 $f(m\tau)$ が与えられることになる。8.3節と同じ記号を用いて、(図8.7)を参照して、式(8.2-1)で、 $T_0 = \tau$, $t_0 = 0$ とし、 $x(t)$ を $f(t)$ と、 $y(t)$ を $\varphi_R(t)/T$ を代入すれば、 $z(t)$ と $f_R^M(t)$ が得られる。

$$f_R^M(t) = (1/K) \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m\tau) \varphi_R(t - m\tau) \tag{8.4-1}$$

となる(図8.7)の b) \rightarrow c)。これを周波数軸上へ推移させ、基底帯域に移すと、式(8.2-2)から、

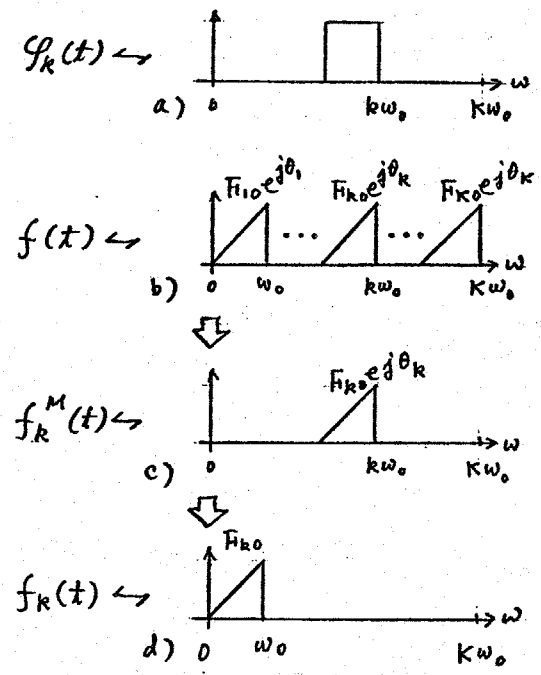
$$f_R(t) = f_R^M(t) \cos\{(k-1)\omega_0 t + \theta_k\} + 2 \text{Im}\{f_{k0}^M(t)\} \sin\{(k-1)\omega_0 t + \theta_k\} \tag{8.4-2}$$

但し、 $f_{k0}^M(t) \leftrightarrow F_k(\omega - (k-1)\omega_0) e^{j\theta_k}$

なる関係が成り立つ(図8.7)の b) \rightarrow c)。この「送信側」位相条件式(8.3-3)が満足されることに注意可なり、式(8.4-1)及び式(8.4-2)から、

$$f_R(mT + t_k) = \frac{(-1)^{n(k-1)}}{K} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m\tau) \varphi_R(mT + t_k - m\tau) \tag{8.4-3}$$

が得られ、元の基底帯域信号 f_R のナイquist間隔2の時刻列 $f_R(mT + t_k)$ が復元されることになる。これから $f_R(t)$ を得るには、帯域 ω_0 の伝域フィルタを通しければよい。変調するときと同様に、有限項での近似を考慮して、添字を適当にすれば、 $t_k = 0$ 及び $t_k = k\tau$ の場合に関して式(8.4-3)を書き直して



(図8.7) SSB信号の復調

おくと、

① $t_k = 0$ ($k=1 \sim K$) の場合

$$f_k(mT) = \frac{(-1)^{m(k-1)}}{K} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT - mT) \cdot g_k(mT) \quad (8.4-4)$$

$$g_k(mT) = \frac{\sin \frac{k \cdot m}{K} \pi - \sin \frac{(k-1) \cdot m}{K} \pi}{m \cdot \pi / K} \quad (8.4-5)$$

式(8.4-4)の構成例を(図8.8)に示しておく。

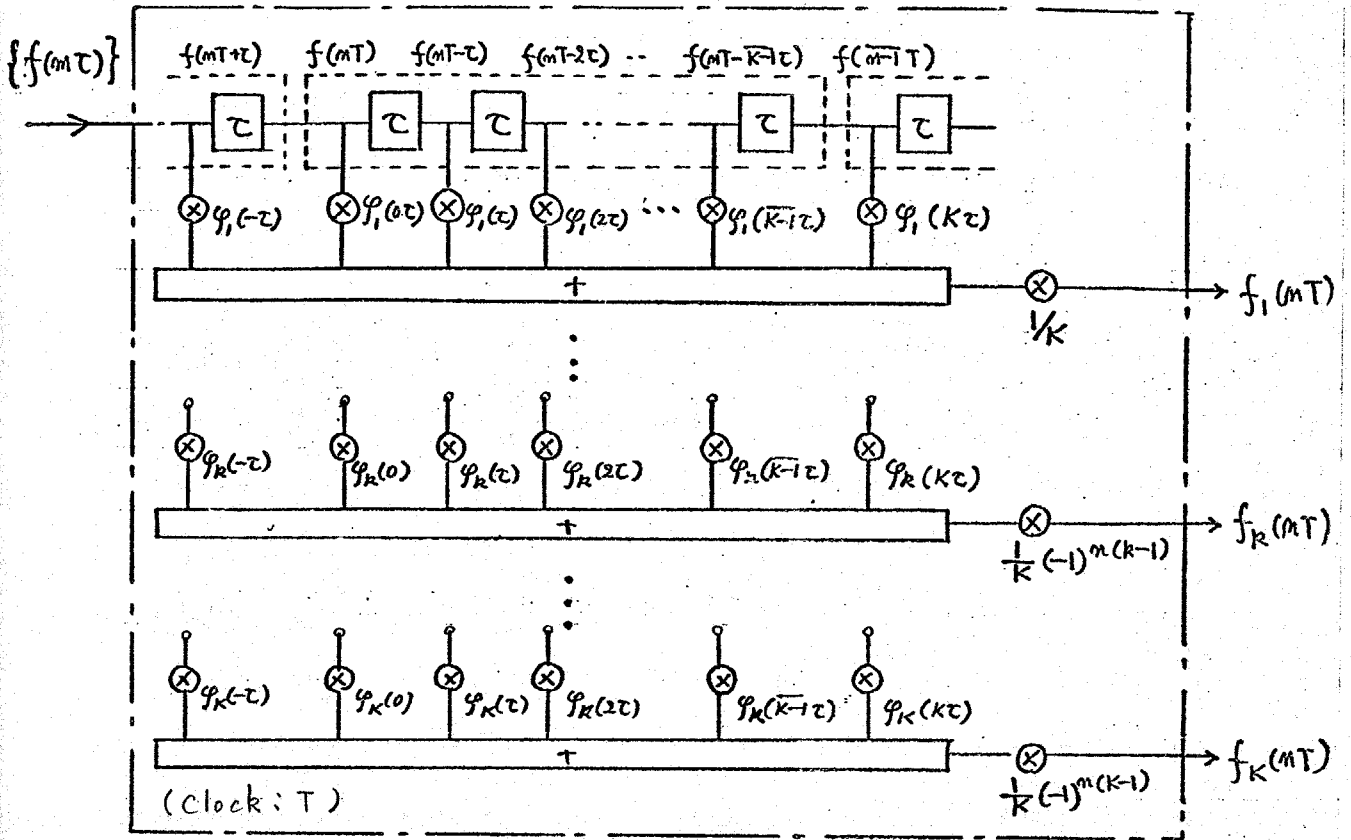
② $t_k = kT$ ($k=1 \sim K$) の場合

$$f_k(mT + kT) = \frac{(-1)^{m(k-1)}}{K} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f\{mT - (m-k)T\} g_k(mT) \quad (8.4-6)$$

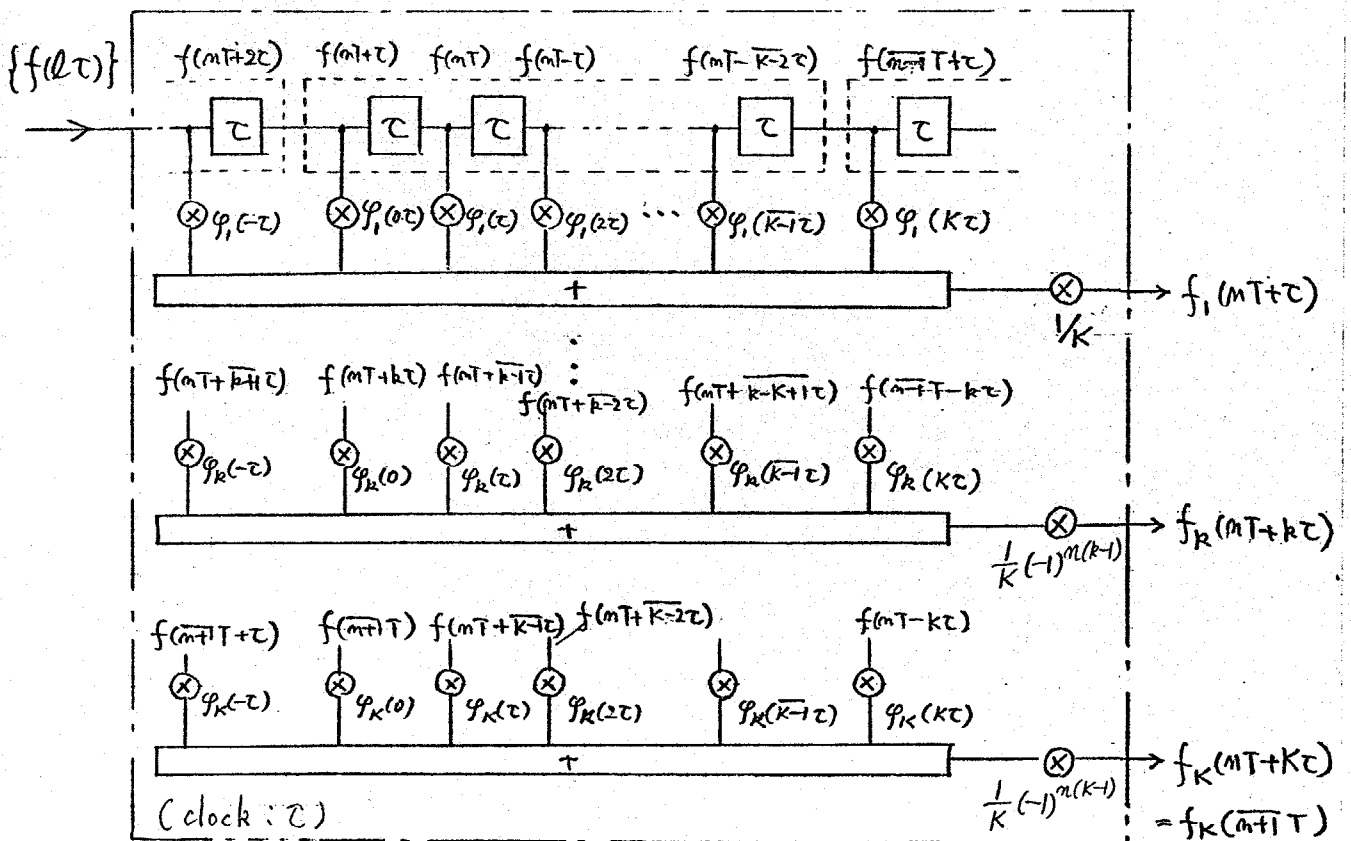
$g_k(mT)$ は式(8.4-5)と同じ。

式(8.4-6)の構成例を(図8.9)に示しておく。

尚、受信側で同期かといえないと、いわゆる通交成分が混入し、完全な復調が出来るのは、アナログシステムの場合と同様である。同期方法の一例としては、1チャネルを使う。 $f_s(t) = \cos\{(t-t_s)\omega_0/2\}$ ($t_s = -(s-1)T_s$) などの同期信号を送ることが出来るが、このときは、復調側では、 $f_s(mT + t_s) = \dots, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$ とおなじように標準化の位相を調整しやうがよいことになる。



(図8.8) 復調部の構成例, ① $\tau_R = 0$ の場合. 式(8.4-4)



(図8.9) 復調部の構成例, ② $\tau_R = k\tau$ の場合. 式(8.4-6)

8.5. あとがき,

本章では、標本化定理に基づいた周波数分割多重SSB-AMディジタル変復調システムの一形式にフック述べて。ここで述べた変復調器の構成は、(図8.4) (図8.5), (図8.8), (図8.9) に示したように、いずれも、トランスバーサル型回路によって構成される。

残された問題点としては、

i) 他の諸方式との実際的比較検討。

ii) 2重標本化定理を用い、 $\omega_2/(\omega_2 - \omega_1) = N$ (整数) が、必ずしも成り立たない一般の場合への拡張

などが挙げられる。

第9章 結言

本研究は、トランスバーカル型回路の設計、特に、2乗誤差を評価式とした設計に関する問題と、それに関連する幾つかの問題に対する考察を目的として行われ、以下に示すような結果を得た。以下、本研究で得られた結果及び残された問題等を簡単にまとめ置く。

第2章では、ゲイン利得2乗和の抑えられたトランスバーカル型回路の最小2乗近似による設計方法を示した。即ち、通常の最小2乗近似による設計では、ゲイン利得が非常に大きくなる場合の存在を指摘し、それがどのような場合に起こるかを明らかにすると共に、その解決策として、ゲイン利得2乗和を一定値に抑えた最小2乗近似による設計方法を与えた。さらに、ゲイン利得2乗和を抑えた設計方法が、出力雑音を抑えた状態での最適設計方法になるという物理的意味の存在を示し、自動等化器へ応用した場合のゲイン利得設定アルゴリズムを与えた。又、ゲイン利得2乗和を抑えたときの最小2乗誤差を簡単に評価する近似式を示した。尚、第2章に関連した問題としては、ゲイン利得の抑えられた設計方法の検討などがあげられる。

第3章では、絶対値2乗可積分の希望伝達関数が与えられたとき、それが、単位回路として、集中定数 N 次全域通過回路を用いた半無限トランスバーカル型回路で、実現出来る為の条件について考察し、幾つかの必要十分条件を与えた。残された問題としては、周期関数に対するヒルベルト変換を用いた他の形式の条件の導出及び、単位回路として、全域通過路に限らず、一般の集中定数回路を用いた場合への条件式の拡張などが考えられる。

第4章では、ゲイン利得が分岐値が決まらぬ分岐一致型の設計方法に対し、分岐の値が、任意に多く与えられる分岐総和型2乗誤差を誤差評価式として用い、かつ、ゲイン利得があるいは、ゲイン制御制御入力か、希望特性の分岐値そのものが与えられる可変等化器等として、便利な形式の分岐総和型2乗誤差最小トランスバーカル型回路の構成方法を示した。又、そこで必要となるマトリクス回路の簡略化を例として示す

検討し、相当の簡単化が可能であることを示した。さらに、可変等化器として便利な形式であることに注目し、周波数領域のプロジェクト形等化器として応用する方法を述べた。最後に、バターズフィルタを希望特性として近似した場合の計算パラメータより、分岐系統型二等誤差の特徴を調べ、分岐数はタップ数のほぼ2倍とすれば十分であることを、近似に必要なタップの数、単位回路の最適な遅延時間、帯域幅の影響などについて、定量的な設計指針を与えた。残された問題点としては、マトリクス回路の簡単化を組織的に検討すること、シミュレータとしての応用可能性と、その場合、他の方法との比較検討を行うこと、又、振幅等化器および位相及び遅延等化器として用いる場合のパラメータの集積などがあげられる。

第5章では、トランスパーナル型回路の各種構成パラメータの偏差が、伝達特性及び振幅位相特性に与える影響を一次近似により求め、それによる偏差による影響の大きい特徴を述べると共に、計算例により、一次近似式がかなりの精度で実際と一致することを示した。又、各種構成パラメータの偏差が、時間領域標本値に与える影響を、標本差乗和を評価することにより、一次近似による式を求めると共に、位相等化器を仮定した場合の計算例を示し、偏差の生じるパラメータの種類及び位置による影響の大きい特徴の存在を示した。さらに、偏差の分類を提案し、最後に、タップ利得が統計的なばらつきをもちた場合の影響を伝達関数の設計値からのずれの二等絶対値の平均で評価することとし、通常型構成と縦系統型構成の比較を行い、特に線型位相二次系統型構成と、それと通常型構成した場合の比較結果としては、二次区間の数が5以上では通常型構成の方が優れていることを示した。残された問題点としては、二次以上の高次近似式を求めると、又、この提案した偏差の分類を系統的に検討すること、また、統計的偏差を仮定した議論に対して、ばらつきに相関がある場合が、タップ利得に及ぼす、他の構成パラメータの統計的偏差の仮定した場合への議論の拡張、さらに、近似する特性と紹介した通常型構成と縦系統型構成の優劣の比較、などがあげられる。

第6章では、離散的なタップ利得をもつトランスパーナル型回路に関して考察し、第2章、最小二等近似による設計で、定域的な最小値を得るのに十分な格子点の調査範

用を、直流利得も含めた近似の場合と、直流利得を問題としない近似の場合について求めた。又、特に直流利得を問題とする場合については、CADによる局所的最小値を求める場合も考慮し、その時の一次探索の役立つ。連続空間上の2重誤差評価関数の形状も示した。後半では、タップ利得が2進 m 桁に制限された連続型構成によるトランスバーサル型回路の零点を系統的に求め、設計の際のヒントを与える。残された問題点としては、実際により、どの程度調査範囲がせまらざるかを検討すること、又、本質にこだわったとは異なる不等式を利用して格点集の情報なども使う。さらに調査範囲をせまめると、さらに、後半の議論に関しては、零点パターンを利用した設計方法及びその結果得られる近似特性の特徴を調べることも必要があげられる。

第7章では、2次区間連続型構成によるトランスバーサル型回路をMS形自動等化器として用いた場合の考察を行い、2次区間連続構成によるタップ利得を複数とする空間での2重誤差評価関数を停留させる点の全域的最適点であるための条件を示すと共に、2重誤差評価関数を停留させる点へ収束する簡単な自動等化アルゴリズムを示した。さらに、この方法が実際に効力を発揮する条件を述べ、2次区間連続型構成によるトランスバーサル型回路を自動等化器として用いることの可能性と限界を明らかにした。

第8章では、標本化定理に基づき、トランスバーサル型回路で構成される周波数分割多重波B-AM変復調システムの一形式を示し、同期方式についても簡単に触れた。残された問題点としては、他の諸方式との実際的比較検討及び2重標本化定理を用いた場合への拡張などがあげられる。

謝辞

本研究を進め乍らに當り、終始温い御指導を戴いた岸源也教授に、心から感謝する次第である。又、特に、2章から5章に關し、直接に御助言を戴いた木田拓郎助教授に心から感謝の意を表する次第である。さらに、8章に關し、有益な御助言を戴いた辻井重男助教授に深謝する。又、2章に述べた今後の問題等は、柳沢健教授の御指摘に依る。ここに感謝の意を表す。さらに、全般に渡り、有益な御助言、御討論を戴いた杉本公弘博士はじめとする岸研究室、木田研究室の諸兄に深謝する。特に、岸研究室卒業生の小林隆夫氏には、4.4節の例題の計算を巧手に行なう。ここに感謝の意を表す。

参考文献

- (1) 本田, 坂庭: "トランスバーカル形等化器の最小近似誤差" 昭50. 信学会全国大会 No. 17
- (2) 坂庭, 本田: "トランスバーカル形等化器の近似問題に関する二, 三の話題" 信学会回路とシステム研資 CST 75-71 (1975-10)
- (3) 坂庭, 本田: "トランスバーカル形等化器の偏差解析" 昭51 信学会総合全国大会 No. 52
- (4) 岸, 坂庭: "B ティーツタル変復調の一形式" 信学論 (A) 技術談話室 Vol. J 59-A. No. 6. p 514 (1976-06)
- (5) 坂庭, 本田: "トランスバーカル等化器の各種偏差の時領域標本値に与える影響" 昭52. 信学会総合全国大会 No. 1808 (昭和52年3月発表予定)
- (6) 坂庭, 本田: "タップ利得の和を制限したトランスバーカル形等化器 (自動等化器への応用)" 昭52. 信学会総合全国大会 No. 1809 (昭和52年3月発表予定)
- (7) H. E. Kallmann: "Transversal Filter." Proc. of IRE. Vol. 28, p 302 (July 1940)
- (8) H. A. Wheeler: "The Interpretation of Amplitude and Phase Distortion in terms of Paired Echoes" Proc. of IRE. Vol. 27 p 359. (June, 1939)
- (9) R. W. Lucky: "Automatic Equalization for Digital Communication" B.S.T.J. Vol. 44. No. 7. p 547. (April, 1965)
- (10) A. Gersho: "Adaptive Equalization of Highly Dispersive Channels for Data Transmission". B.S.T.J. Vol. 48. No. 1. part 1. p 55 (January, 1969)
- (11) R. W. Chang: "A New Equalizer Structure for Fast Start-Up Digital Communication" B.S.T.J. Vol. 50. No. 6. p 1969 (July-August 1971)

- (12) K. H. Muller: "A New, Fast-Converging Mean-Square Algorithm for Adaptive Equalizer with Partial Response Signaling", B.S.T.J. Vol. 54, No. 1, p 143. (January 1975)
- (13) 西田, 大上: "SN比を最大にする等化器の構成法" 信学会, 通信方式研資. CS 71-100 (1971-10)
- (14) D. A. Spaulding: "Optimizing Sensitivity in the Design of a Class of Linear Filters" IEEE, Trans. IT-16, p 456 (August 1970)
- (15) 佐藤: "タイミング位相ずれを吸収する自動等化法" 信学会 通信方式研資 CS 74-23 (1974-05)
- (16) A. J. Gibbs: "Minimum Mean-Square-Error Approximation Using Transversal-Type Filters" IEEE, Trans. CAS-21, No. 3 p 348 (May 1974)
- (17) 糸田: "タップ付遅延線の波形等化能力" 昭47 信学会全国大会, No. 45
- (18) R. Sperry and D. Surexian: "A Transversal Equalizer for Television Circuits" B. S. T. J. Vol. 39, No. 2, p 405 (March 1960)
- (19) 高橋, 昂野, 小塚: "減衰コネクタを連動補償した変形可変遅延等化器" 信学論 (A) Vol. J59-A No. 6 p 506 (1976-06)
- (20) 糸田: "トランスミナル形等化器" 信学会 回路とシステム研資. CT 73-35 (1973-09)
- (21) 糸田: "タップ付遅延線を用いた波形等化について" 信学会, 通信方式研資 CS 74-2 (1974-04)
- (22) 吉村, 岩田: "RCアクティブ化テレストフィルタの設計" 昭51, 信学会通信部門全国大会, No. 272.
- (23) 越丸: "All pass回路を用いたトランスミナル形等化器の最適設計" 東京大, 修士論文, 昭和51年2月.
- (24) A. Peled and B. Liu: "A New Hardware Realization of Digital Filters" IEEE, Trans. ASSP-22 p 456. (1974)

- (25) 岸, 三谷, 鎌田, 辻井: "ディジタルフィルタの非加算形構成" 信学論(A). 技術
 談話室. Vol. J59-A. No. 10. p 887. (1976-10)
- (26) B. Liu: "Effect of Finite Word Length on the Accuracy of Digital Filters
 (A Review)", IEEE. Trans. CT-18. No. 6. p 670 (November, 1971)
- (27) 馬場, 鷺島, 松本, 佐々木: "電荷転送素子を用いた非巡回形トランスバースカル形フィル
 タの一構成法" 信学論(A). Vol. J59-A. No. 11. p 915 (1976-11)
- (28) C.M. Puckette, W.J. Butler and D. A. Smith: "Bucket-Brigade Transversal
 Filters" IEEE. Trans. CAS-21. No. 4. (July 1974)
- (29) 小池: "遅延線の周波数特性と自動等化器に関する考察" 昭51 信学会,
 通信部門全国大会. No. 145.
- (30) 岸, 吉川, 三谷: "語長制限されたテキスト波形整形 FIR ディジタルフィルタ
 の一設計方法" 信学論(A). Vol. J59-A. No. 8. p 629. (1976-08)
- (31) 石田, 後藤, 山沢: "タップの固引きによるディジタルフィルタの合成" 信学会
 回路とシステム理論研究. CST 76-67 (1976-09)
- (32) 吉川: "語長制限のあるディジタルフィルタの設計に関する研究", 専攻博士
 論文, 昭和51年1月
- (33) M. G. Bellanger and J. L. Dagnet: "TDM-FDM Transmultiplexer:
 Digital Polyphase and FFT" IEEE. Trans COM-22 No. 9. p 1199
 (September 1974)
- (34) S. L. Freeny, R. B. Krieburty, K. V. Mina and S. K. Tewksbury:
 "Design of Digital Filters for an All Digital Frequency Division
 Multiplex-Time Division Multiplex Translator" IEEE. Trans.
 CT-18. No. 6. (November 1971)
- (35) C. F. Kurth: "SSB/FDM. Utilizing TDM Digital Filters" IEEE. Trans. COM-19 No. 1 (February 1971)
- (36) 辻井, 鎌田: "伝送における適応技術の一自動等化", 信学誌, Vol. 58
 No. 10. p 1092 (1975-10)

- (37) 佐藤: "通信回線における自動等化の原理と諸問題". 日経エレクトロニクス. 1976年2月23日号. p76.
- (38) W. R. Bennett and J. R. Davey: "Data Transmission" McGraw-Hill (1965)
- (39) 猪俣, 宮川編: "PCM通信の進歩" 産報 (1974)
- (40) 例之村, 佐竹: "行列と行列式" 裳華房 (昭33)
- (41) A. Papoulis: "The Fourier Integral and Its Applications" McGraw-Hill (1962)
- (42) 岸: "回路解析の基礎" 共立 (1955)
- (43) E. C. Titchmarsh: "Introduction to the Theory of Fourier Integrals" 2nd. ed. Oxford. (1948)
- (44) 渡部: "伝送回路網の理論と設計" 木仏社 (昭43)
- (45) 高木: "代数学講義" 共立 (昭40)