

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

題目(和文)	確率場による統計的画像処理と領域分割への応用に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	青木工太
Author(English)	Kota Aoki
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第6552号, 授与年月日:2006年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:長橋宏
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第6552号, Conferred date:2006/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

# 確率場による統計的画像処理と 領域分割への応用に関する研究

指導教官 長橋 宏 教授

提出者 東京工業大学大学院  
総合理工学研究科  
知能システム科学専攻  
青木 工太

# 目次

第1章	序論	1
1.1	本論文の背景および目的	1
1.2	論文概要	3
第2章	画像の領域分割に関する従来研究	5
2.1	はじめに	5
2.2	画素に基づく画像分割	6
2.2.1	ヒストグラムのしきい値処理	6
2.2.2	クラスタリング手法	6
2.3	領域に基づく画像分割	8
2.3.1	局所探索型アルゴリズム	9
2.3.2	グラフによる画像モデル	10
2.4	境界に基づく画像分割	11
2.4.1	特徴に基づく手法	11
2.4.2	モデルに基づく手法	12
2.5	その他の手法	13
2.6	おわりに	14
第3章	マルコフ確率場による画像のモデル化	18
3.1	はじめに	18
3.2	マルコフ確率場とギブス分布	18
3.2.1	近傍系とクリーク	20
3.2.2	マルコフ確率場	22
3.2.3	ギブス分布	23
3.2.4	マルコフ確率場とギブス分布の等価性	25
3.3	確率場モデル	27
3.3.1	イジングモデルおよびポッツモデル	28
3.3.2	線過程	31

---

3.4	ベイズ推定 . . . . .	34
3.5	ギブスサンプラによる推定 . . . . .	37
3.5.1	ギブスサンプリングのアルゴリズム . . . . .	38
3.5.2	シミュレーテッドアニーリングによる最適化 . . . . .	39
3.6	おわりに . . . . .	41
<b>第4章</b>	<b>マルコフ確率場と階層的事前分布による画像分割</b>	<b>42</b>
4.1	はじめに . . . . .	42
4.2	画像のモデル表現 . . . . .	43
4.2.1	サイトの状態に対する事前確率 . . . . .	43
4.2.2	ラベルの尤度 . . . . .	45
4.3	パラメータの事前確率分布 . . . . .	46
4.3.1	マルコフ確率場のパラメータ . . . . .	46
4.3.2	多変量正規分布のパラメータ . . . . .	47
4.4	モデルの事後分布と推定 . . . . .	49
4.4.1	提案モデルに対するギブスサンプラ . . . . .	51
4.4.2	シミュレーテッドアニーリング法による最適化 . . . . .	53
4.5	実験結果および考察 . . . . .	54
4.5.1	マルコフ連鎖の収束判定 . . . . .	55
4.5.2	提案手法による画像分割 . . . . .	58
4.6	おわりに . . . . .	60
<b>第5章</b>	<b>画像分割アルゴリズムの評価と提案手法に関する考察</b>	<b>61</b>
5.1	はじめに . . . . .	61
5.2	画像分割アルゴリズムの定量的な評価 . . . . .	61
5.2.1	Martin ら [66] による評価尺度 . . . . .	62
5.2.2	ランドインデックス [78] . . . . .	63
5.2.3	確率的ランドインデックス [97] . . . . .	65
5.3	アルゴリズムの性能評価 . . . . .	66
5.4	提案モデルへの線過程の導入 . . . . .	72
5.4.1	線過程 . . . . .	72
5.4.2	実験結果 . . . . .	74
5.5	おわりに . . . . .	76
<b>第6章</b>	<b>結論</b>	<b>77</b>
6.1	本論文の結論 . . . . .	77
6.2	今後の課題 . . . . .	79

---

付録 A 確率分布と標本抽出	80
A.1 多変量正規分布 . . . . .	80
A.2 ウィッシュャート分布 . . . . .	81
A.3 デリクレ分布 . . . . .	84
付録 B マルコフ連鎖の理論	85
謝辞	89
参考文献	90

# 目 次

2.1	実験に用いた自然画像	16
2.2	ファジィc-平均法を用いた画像分割	16
2.3	平均値シフトアルゴリズムによる画像分割	16
2.4	ウォータシェッド法による画像分割	17
2.5	グラフ理論による画像分割	17
3.1	近傍系とクリーク	21
3.2	クリークの型とポテンシャルパラメータ	30
3.3	最近傍系における線過程	31
3.4	水平 / 垂直方向のエッジ要素に対する線過程とその近傍系	32
3.5	可能なエッジパターンとそのポテンシャルパラメータ	33
3.6	ギブスサンプリングのアルゴリズム	38
4.1	提案モデルの有向非循環グラフ表現	50
4.2	実験に用いた冷却スケジュール	54
4.3	収束判定に用いた自然画像の例	55
4.4	ラベル標本列のエネルギー変化	57
4.5	画像分割の実験に用いた入力画像例	59
4.6	提案モデルのMPM およびMAP 推定による画像分割	59
4.7	シミュレーテッドアニーリングの収束の様子	60
5.1	Berkeley segmentation dataset の分割データの例	62
5.2	提案手法および従来手法による画像分割 (1)	68
5.3	提案手法および従来手法による画像分割 (2)	69
5.4	提案手法および従来手法による画像分割 (3)	69
5.5	提案手法および従来手法による画像分割 (4)	70
5.6	提案手法および従来手法による画像分割 (5)	70
5.7	提案手法および従来手法による画像分割 (6)	71
5.8	人間による画像分割データの例	71

---

5.9	線過程を追加した提案モデルによる画像分割 . . . . .	75
-----	--------------------------------	----

# 表 目 次

5.1	提案手法および従来手法に対する確率的インデックスの値 . . . . .	67
-----	--------------------------------------	----



# 第 1 章

## 序論

### 1.1 本論文の背景および目的

画像の領域分割とは、画像をある一定の基準の下で、互いに異なる一様な領域に分割する処理であり依然として、低次の画像解析における基本的な問題である。多くの直接的な応用例があり例えば、超音波画像の分割、合成開口レーダ (synthetic aperture radar; SAR) 画像を用いた農作物あるいは地形の識別、核磁気共鳴 (nuclear magnetic resonance; NMR) 画像の分割、X 線画像の分割、リモートセンシングへの応用、繊維製品の品質検査などが挙げられる。また、画像分割はより一般的に、重要な初期処理と考えられ、複雑なビジョンシステムにおけるより高度な処理系への入力になり得る。多くの異なる方法論が適用されてきたが、完全に教師なしかつ、頑健な処理は実現されていない。

画像分割問題への有効な解法の一つとして、マルコフ確率場による画像の統計的なモデル化とマルコフ連鎖によるモンテカルロシミュレーションを用いた近似計算法が挙げられる。自然画像に関して、隣接する画素は一般に、類似した性質をもっている。統計的な枠組みでは、このような規則性はマルコフ確率場によって、表現される。画像に関して、最も単純な統計モデルは画素の帰属するクラスに対する生起確率であるが、隣接する画素間の依存関係に関する知識は非常に強力であり、画像分割 [29, 23, 50, 14, 63, 83, 56, 75] に限らず、画像復元 [41, 92]、テクスチャ解析 [19, 28, 74, 21] および生成 [26]、画像領域の識別・認識問題 [59, 46]、ステレオビジョン [15, 91] などにおいて広くその有効性が示されている。これら画像処理分野の諸問題においては、数万から数十万個のパラメータの推定を必要とすることが少なくない。統計的手法は観測された不十分なデータから、その背後

にある発生メカニズムを推論する際に非常に強力な方法論である。

マルコフ確率場モデルは通常、非因果的でありしたがって、その解析には多大な計算量が必要である。1970 年代および 80 年代初頭におけるアルゴリズム [8] は概して、アドホックであったが、ギブスサンプラ [41]、変分ベイズ法 [101] あるいは、信念伝搬法 (belief propagation) [34] の成果によって、ベイズの定理に基づく統計的手法に対する興味が急増した。近年、計算機の演算性能の向上とともに、ギブスサンプリングを含むマルコフ連鎖モンテカルロ法による複雑な多変量確率分布からの標本抽出は、高度に一般化された統計モデルの解析を容易にしつつある [69, 43, 79, 2, 16, 106, 95, 77, 76]。

画像分割は画素の分類問題と解釈できる。分類は画素ごとにラベルを割り当て、帰属すべきクラス (すなわち、画像内の部分領域) を指示することで達成される。分割ラベルの推定とともに、マルコフ確率場における「最適な」モデルパラメータを決定することは容易ではない。真の分割ラベルが得られていないので、パラメータの推定は EM アルゴリズム [27] のような不完全データ手法を用いて尤度あるいは、事後分布を最大にすることにより実行される [103, 104, 84, 30]。

本論文では、画像内の各部分領域に関する理にかなった「弱い仮定」をおく。言い換えれば、パラメータに対する事前分布および、そのパラメータ (ハイパラメータ) について、データから得られる情報を「最小限」の仮定として利用するようなものを選択する。これは事前分布に対して階層的な構造を導入することにより実現され、推定したいパラメータに関する知識の具体的な表現となる。尤度あるいは、事後確率の最大化に基づく点推定 (すなわち、最尤推定および、最大事後確率推定) と比較して、提案手法は (事後) 分布推定に基づくため、不十分なデータに対する汎化能力を有する。したがって、パラメータに関する情報が十分でない状況において、有効な安定した推論が期待できる。

モデルの事後分布推定を実行するギブスサンプリングのアルゴリズムにおいて、条件付き提案事後分布はパラメータに対する事前分布の仮定から、解析的に求められる。観測された画像の下で、ギブスサンプリングにおけるマルコフ連鎖は分割ラベルおよび、パラメータに対する (ベイズの定理より求められる) 同時事後分布を効率的に探索する。この連鎖をシミュレートして得られる標本列を用いて、モンテカルロ法による推定を行う。

画像分割を画素のクラスタリングあるいは、ラベリング問題として定式化する

場合，事前に分割される領域数を指定する教師ありの手法と，そのようなモデルに対する次数の推定も同時にあるいは，段階的に行う教師なしの手法がある．教師なしの手法では，ある種のクラスタリング手法に基づいて次数を推定することが多い．この推定は一般に，事前情報や仮説を必要とし，それは特に自然画像において不確かなものである．教師ありの手法では，次数を推定する代わりにその上限を指定するが，望ましい次数よりもかなり大きい場合には過剰な分割となり，結果の質に影響を与える可能性がある．マルコフ確率場による平滑化効果はこのような過大分割を抑制する．提案モデルは指定される次数に対して頑健であることが実験により，実証される．

画像分割アルゴリズムの評価は概して，主観的である．様々な自然画像から人手による画像分割データを蓄積する試み [66] によって，アルゴリズムの性能を正しく定量化する方法の必要性が注目されている．本論文では，確率的ランドインデックス [97] を尺度として，提案手法を定量的に評価し，いくつかの従来手法と比較を行う．被験者によって分割に対する「細かさ」のレベルは異なるが，同一画像に対する分割結果には相当の一貫性があり，人手による分割データを用いることによって，アルゴリズムの信頼できる性能評価が可能であると考えられる [66] ．

## 1.2 論文概要

第2章では，画像の分割問題に関する従来研究について述べる．画像を構成する部分領域に対して3通りの定義を行い，分割手法を大別する．すなわち，画素に基づく手法，領域に基づく手法および，境界に基づく手法である．画素に基づく手法とは，画像特徴量に基づく画素のクラスタリング手法である．領域に基づく手法は画像の局所的な類似性を基準として，分割領域内の一様性および領域間の非類似性を満たすように分割を行う．境界に基づく手法はエッジを検出することによって画像を分割する．エッジは一般に輝度や色，テクスチャといった画像特徴における急激な変化として定義される．それぞれのアプローチに関して，いくつかの具体的なアルゴリズムを挙げて概説する．

第3章では，マルコフ確率場による画像のモデル化について述べる．近傍系とクリーク，ギブス分布および，マルコフ確率場とギブス分布の等価性といったマルコフ確率場モデルに関する基本事項について述べる．代表的なモデルとして，イ

ジング模型およびポッツ模型を概説し，エッジ要素に対するモデルである線過程について述べる．また，関連する内容としてベイズの定理に基づくモデルの定式化および，推定について述べ，具体的なアルゴリズムを与えるギブスサンプラを概説する．

第 4 章では，本論文の提案手法について述べる．提案モデルでは，マルコフ確率場モデルによって画像を表現し，モデルパラメータに対して階層的な事前分布を仮定する．画像分割は画素のクラスタリング問題あるいは，画像格子状におけるラベリング問題として定式化される．提案モデルに対するギブスサンプリングにおけるマルコフ連鎖は観測画像の下で，分割ラベルおよびパラメータ空間の同時事後分布を効率的に探索できるように設計される．自然画像に対して実験を行い，提案手法の有効性に関して検証する．

第 5 章では，画像分割アルゴリズムの定量的な評価および提案手法に関する改善点について考察する．画像分割は不良設定問題であるため，その解法である計算アルゴリズムの性能を定量化することは一般に難しい課題である．近年，人手によって画像分割されたデータベースが提供され，また複数の被験者による結果に一貫性がみられることが報告されている．このようなデータを用いて，信頼のある尺度により分割アルゴリズムを定量的に評価する．

第 6 章では，本論文を総括し，今後の課題について述べる．

## 第 2 章

# 画像の領域分割に関する従来研究

### 2.1 はじめに

画像の領域分割とは，それぞれの領域が一様性の基準を満たしかつ，隣接する 2 つの領域の和集合が一様でないように，画像から重なりのない領域を取り出す処理である．領域の一様性はスペクトル成分から得られる選択された特徴量に基づく．

本章では，次のように「領域」に対する 3 通りの定義により画像分割手法を大別する．

1. 領域とは，メンバシップ関数あるいはラベルなどによって指示される画素集合の連結成分である．
2. 領域とは，一様性条件を満たす画素の（最大）連結集合である．
3. 領域とは，エッジによって囲まれる画素の連結集合である．

論理的に，1 および 2 の定義はそれぞれ画素と領域に基づいた一様性に関して述べている．また，3 の定義は非一様性に関して述べている．すなわち，3 番目の定義では領域はある意味において一様であるが，それらはエッジによる非一様性を表す集合の補集合である．

本章では，以上の 3 つの定義によって分類されるアプローチに関して代表的な手法を例に挙げ，2.2 節，2.3 節で画素および，領域に基づく画像分割手法について述べ，2.4 節で境界に基づく画像分割手法について述べる．2.5 節では，それ以外のいくつかの手法について述べる．ただし以下では，図 2.1 に示す自然画像（Berkeley Segmentation Dataset[66]）を入力として実験を行う．

## 2.2 画素に基づく画像分割

画像分割は画像の特徴空間に基づく解析によって実行できる。画像内の画素に対する基本的な表現は輝度や色だけでなく、様々な方向や空間周波数をもつフィルタ集合からの応答も含まれる。画像からの特徴抽出が行われると、各画素は（一般に多次元の）特徴空間に写像され、有効な特徴量はその空間内で高い密度をもって分布する。このような特徴量の塊はクラスタと呼ばれ、画像を構成する部分領域に対応すると考えられる。

### 2.2.1 ヒストグラムのしきい値処理

ヒストグラムのしきい値処理はモノクロ画像の領域分割に対して広く用いられる手法の一つである。画像は異なる階調値の幅をもった領域から構成されると仮定し、入力画像のヒストグラムを分割領域に対応するいくつかのピークすなわち、分布の最頻値に分割する。2つの隣接するピーク間の「谷」に対するしきい値を探索することが問題となる。カラー画像の分割では問題は複雑になる。なぜなら、色情報は一般に三原色 RGB あるいはそれらの（非）線形変換によって表現され、カラー画像のヒストグラムは3次元配列として計算されるため、適切なしきい値を選択することは自明でない。いくつかの異なる色空間に対してそれぞれ1次元ヒストグラムを計算し、最も明確に分離されるピークをもつヒストグラムを選択し、しきい値処理を行う手法 [72, 73, 94] などが提案されている。

### 2.2.2 クラスタリング手法

前述の通り、一般に複数の特徴量からなる特徴空間において、画像内の各部分領域に対する特徴量はそれぞれ（理想的には分離された）クラスタとして分布すると考えられる。1つの特徴量ではクラスタに分類できない、すなわち、特徴空間内で識別境界を描けない問題でも、特徴量を複数用いることによって分類が可能になる（識別境界を描ける）場合がある。特徴量の選定やその組合せ方は画像分割問題に限らず、パターン認識の問題においてきわめて重要である。クラスタリングによる画像分割のアプローチでは、分割に有効な特徴量の選択およびその組

合せ方に重点が置かれ、手法そのものは人工知能、パターン認識、統計学といった分野で従来用いられてきた代表的な手法を利用することが多い。

### ファジィc-平均法

ファジィc-平均法 [32, 12] はデータ集合  $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ,  $\mathbf{x}_j \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^d$  を  $c$  個の代表ベクトルあるいは、プロトタイプ  $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_c\}$ ,  $\mathbf{p}_i \in \mathcal{X}$  に分類するクラスタリングアルゴリズムである。クラスタリングは次式の (条件付き) 目的関数を最小化することによって実行される。

$$J(\mathbf{x}; \mathbf{p}, U) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^c u_{i,j}^m \|\mathbf{x}_j - \mathbf{p}_i\|^2 \quad (2.1)$$

ただし、メンバシップ値  $U = (u_{i,j})$  は次のような条件を満たすものとする。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n u_{i,j} &> 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, c\} \\ \sum_{i=1}^c u_{i,j} &= 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで、パラメータ  $m$  は分割の曖昧さに影響する。目的関数の最小化は適当な初期値  $U$  から始めて、プロトタイプの更新

$$\mathbf{p}_i = \frac{\sum_{j=1}^n u_{i,j}^m \mathbf{x}_j}{\sum_{j=1}^n u_{i,j}^m} \quad (2.3)$$

### とメンバシップ値の更新

$$u_{i,j} = \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^c \left( \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{p}_j\|^2}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{p}_k\|^2} \right)^{1/(m-1)} \right)^{-1}, & I_j = \emptyset \\ \frac{1}{|I_j|}, & I_j \neq \emptyset, i \in I_j \\ 0, & I_j \neq \emptyset, i \notin I_j \end{cases} \quad (2.4)$$

を反復して行うことにより達成される (ここで、 $I_j = \{i \mid \mathbf{x}_i = \mathbf{p}_j\}$  とする) [48]。

Lim & Lee[62] は1次元ヒストグラムのしきい値処理とファジィc-平均法を用いた二段階の分割アルゴリズムを提案した。まず、スケール空間フィルタを用いて各色成分の1次元ヒストグラムを解析し、定められたしきい値を用いて色空間をい

くつかに分割する．あらかじめ指定された画素数よりも多くの画素を含む部分空間をクラスタとし，クラスタ数と各クラスタの中心を求める．ファジィc-平均法は前段階で求められたクラスタ中心を用いて，未分類の画素をクラスタリングする．図 2.2 に YIQ 色空間に対して，クラスタリング手法を適用した結果を示す．分割された画像平面において，同一クラスに帰属する画素がそれぞれ小領域を形成していることがわかる．これは色情報だけを用いて特徴空間におけるクラスタリングを行ったためであり，画素の画像平面内での位置やテクスチャ特徴を含める [18] ことによって改善される可能性がある．

### 平均値シフト

特徴空間の解析は経験的な確率密度関数の推定に基づいて実行できる．特徴空間内の密な領域は密度関数の極大値すなわち，未知分布密度の最頻値に対応する．したがって，最頻値の位置を決定すれば，それに対応するクラスタは特徴空間の局所的な構造に基づいて描き出される．分布密度の最頻値は潜在的な密度関数の勾配が零である点に位置する．平均値シフト (mean shift) アルゴリズム [35, 22] は密度を推定することなく零点の位置をみつけだし，最頻値探索とクラスタリングに対して有効な手法であると考えられる．Comaniciu & Meer[24] はこのアルゴリズムを画像分割に応用した．図 2.3 に平均値シフトを用いた手法 [24] による画像の領域分割結果を示す．一般にカーネル密度推定とノンパラメトリックな手法は「空っぽの空間現象」(empty space phenomenon[86]) に起因して，高次元空間において実用的でなくなることが知られている．したがって特徴空間がおよそ 6 次元以上であれば，注意深い解析が必要になる [24] ．

## 2.3 領域に基づく画像分割

本節では，画像の局所的な類似性に基づいた手法について述べる．これらの分割手法は画像を構成する領域のそれぞれに対する一様性および，異なる領域間の非類似性に基づいている．参考に挙げる文献では概して，有効な特徴量の選定よりもむしろ，効果的なモデルおよび，アルゴリズムの考案が主題となっている．



### 2.3.1 局所探索型アルゴリズム

局所探索型アルゴリズムとは、画像全体に対して適当な複数の出発点から、局所的に一様な領域を形成していく反復手法である。一般に計算コストが高く、初期値の設定や用いる特徴量および、領域の一様性に関する定義がアルゴリズムの性能に影響することがある。

#### 領域成長法

領域成長法 (region growing) では、まず、基本となる一様な領域 (シードと呼ばれる。最小単位は画素) を多数与えて、分類されていない画素を与えられた領域に統合する処理を反復する。画素を統合するかどうかの決定は、領域と候補となる画素との類似性を反映する基準による。Adams & Bischof[1] はすべての候補画素をその類似度によって並び替える大域的な優先順序列により、処理される画素の順序を決定した。領域の一様性を定義する様々な類似度が考えられ、画素の階調値と領域の平均階調値の差分絶対値 [1] や、そのカラー画像への応用として、色空間内での距離などが挙げられるが、濃度勾配を特徴量とする手法は特にウォータシェッド (watershed) アルゴリズムとして知られる [11, 99]。

図 2.4 にウォータシェッドアルゴリズムによる入力画像の分割結果を示す。ここでは、任意のスケールパラメータ  $\sigma$  によって画像勾配を計算し、得られた勾配の絶対値における局所最小解をシードとして、Adams & Bischof[1] による領域成長法を適用した。実験結果からも分かるように、ウォータシェッドアルゴリズムは一般に入力画像を過剰に分割する傾向がみられる。

#### 分割統合法

分割統合 (split-and-merge) 法 [49] は画像分割法および統合法を組み合わせたアルゴリズムと考えられる。分割法はトップダウン的な手法であり、ある一定の基準を満たすまで画像をより小さな領域に分割する。また、統合法はまず、画像を多くの小領域に分割し、それからより大きな領域へと統合していくボトムアップ的な手法である。分割統合法は任意の分割画像からはじめて、あらかじめ定義された一様性の基準を満たすまで統合と分割を繰り返し行う。したがって、分割結果は選択された基準によって異なり、適切な基準を設定することが重要である。

### 2.3.2 グラフによる画像モデル

画像をグラフというデータ構造によって表現し，画像分割をグラフの分割と対応付けて定式化したり，確率論と組み合わせて画像をモデル化する枠組みが提案されている．本論文で提案するマルコフ確率場モデルは後者の方法論に含まれる．本項では，グラフ表現によって画像をモデル化する枠組みについて述べる．

#### グラフ理論による手法

任意の特徴空間内における点集合は重みつき無向グラフとして表現される．すなわち，グラフの節点（ノード）は特徴空間内の点を表し，すべての節点对は辺（エッジ）によって結ばれている．それぞれの辺は節点对の非類似度に対応する重みをもつ．ある適当な尺度によって，類似度が同じ節点集合においては高く，異なる集合間では低くなるように節点の集合を互いに素な集合に分割する．

グラフの最小カット（minimum cut）とは，分割される節点間の類似度が最小になるように設定された基準である．画素をグラフの節点に置き，適切な類似度を定義することによって画像分割は最小カットの探索に基づいて実行される．Wu & Leahy[102] は最小カットを基準とした分割手法を提案したが，最小カットには小さな節点集合を切り出すという傾向がある．Shi & Malik[85] は集合の自己類似度を考慮した規格化カット（normalized cut）という基準を提案し，最小カットの問題点を解決した．

Felzenszwalb & Huttenlocher[33] は画像のグラフ表現を用いて，2つの領域間の境界に対する根拠（evidence）を定量化するための述語を定義し，この述語に基づいて効率的な分割アルゴリズムを提案した．図 2.5 にこの手法による画像分割の結果を示す．画像平滑化のためのガウシアンフィルタにおけるスケールパラメータを  $\sigma = 0.8$  とし，分割領域の大きさを制御するパラメータを  $k = 300$  とした．また，分割による最小領域の画素数を 100 とした．実験の結果，入力画像は 47 の領域に分割された．ユーザが望む分割の程度すなわち，粗い分割あるいは細かい分割の調節はパラメータの値で制御されるが，その値が結果に与える影響は大きく，入力画像の特徴や分割結果をどのように応用するかに依存するといえる．

## グラフィカルモデル

グラフィカルモデルはいくつかの異なる研究分野（統計学，人工知能，ニューラルネットワークなど）に起源をもつある種の確率ネットワークである．この枠組みは簡潔な数学的形式化を与え，ネットワークに基づく様々な計算アプローチ間の関係を理解できるようになる．混合モデル，因子分析，隠れマルコフモデル，カルマンフィルタ，イジング模型などは一般的なグラフィカルモデル形式の特殊な場合という見方もできる [88, 82] ．

グラフィカルモデルはグラフを用いて同時確率分布を表現し操作する．各節点は確率変数に対応し，2つの節点間に辺がないということは変数が条件付き独立の関係にあることを意味する．基本となるグラフの記述法によって呼ばれ方が異なり，有向グラフであれば信念（belief）ネットワークあるいは，ベイジアンネットワークとなり，無向グラフであればマルコフ確率場となる．

本論文の主題であるマルコフ確率場による画像のモデル化に関して第 3 章で詳述する．

## 2.4 境界に基づく画像分割

画像は領域間の境界を示すエッジによって分割される．エッジはほとんどの場合，輝度や色といった低レベルの画像特徴における急激な変化として定義される．本節では，エッジ検出手法を特徴に基づく手法とモデルに基づく手法に分類する．

### 2.4.1 特徴に基づく手法

輝度および各色成分を画像特徴とした場合，空間周波数フィルタリングによる高周波成分はそのような特徴における急な変化に対応するので，ハイパスフィルタを実行することによってエッジの強調あるいは検出を行える．該当するフィルタは微分演算子によって設計され，一次微分演算子である Roberts, Sobel, Prewitt 演算子や，二次微分演算子であるラプラシアン演算子などがある．しかし，これら演算子を用いたエッジ検出器，例えば，Canny エッジ検出器 [17] は緩やかな変化によって形成されるエッジを検出できず，また，テクスチャ領域内のエッジを検出するため，テクスチャ分割の問題にはあまり適さない．

Konishi ら [58] はいくつかの基本的なエッジ検出器すなわち，輝度勾配の絶対値，Nitzberg エッジ検出器 [71]，LoG (Laplacian of Gaussian) フィルタを複数のスケールで輝度および色成分に適用し，情報理論に基づいて学習データから各検出器の効果を定量的に評価した．また，その定量的な評価に基づいてエッジに対する手がかり (cues) を組み合わせることにより，高い識別能力が得られることを示した．

Martin ら [67] は同様に，局所的な領域境界モデルを構築するために適した輝度，色および，テクスチャに関する画像特徴を定義し，それらの組合せ問題を人間が描いた画像の境界線データを用いることで教師あり学習問題として定式化した．テクスチャを明確に扱うことによって，Konishi ら [58] が用いた学習用画像よりも多様な自然画像に関して性能の優れた手法を提案した．また，低レベルな画像特徴における変化である「エッジ」と比較するために「境界線」の定義をオブジェクトあるいは物体表面に対する画像平面における輪郭線とし，境界線検出を古典的なエッジ検出の問題と区別した．

#### 2.4.2 モデルに基づく手法

本項では，画像をグラフとして特に，マルコフ確率場モデルにより表現し，エネルギー関数の最小化問題として画像分割を定式化する手法について述べる．2.3.2 節で述べた手法との違いは，エッジに対応するグラフの節点を陽に定義する点である．

Geman ら [39] は画像格子に対して解像度の粗い追加の格子を置き，単一の画素ではなく，ブロックごとにエッジに対応する分割ラベルを割り当てた．テクスチャ特徴として局所的な空間統計量すなわち，階調値の共起行列から計算されるエネルギー，エントロピ，コントラストといった特徴量を用いることにより，画素ブロック間の相違を評価できる．画素ブロックにおける特徴量とエッジラベル間の相互作用をエネルギー関数として定義し，禁止エッジ (孤立点，急旋回，四重結合，小規模構造) に対する罰則項を含めた制約付き最適化としてエッジラベルの最大事後確率推定を行う．

Wang[100] は，画像格子集合の部分集合として定義された連結成分による区画 (partitions with connected components; PCC) を用いて画像分割を行った．エネルギー関数は PCC に対して定義され (1) 類似した特徴をもつ画素をまとめるよう

に作用する一様性に関する項、(2) 特徴間の距離が十分大きな隣接画素を分割する性質をもつ項および(3) 境界線の長さを制限する罰則項からなる。シミュレーテッドアニーリング法を用いてエネルギー関数を最小化することにより、PCCによる画像分割を実行する。

## 2.5 その他の手法

### 領域競合法

ベイズの定理から導出される大域的なエネルギーによる基準は、画像の領域分割に対する一般的なアプローチとして用いられる。ベイズモデルに従って画像を分割することはあらかじめ指定した記述言語に関して、モデルの最小記述長 (minimum description length; MDL) を求めることと等価である。一般に、ベイズやMDLから得られるエネルギー関数を最小化することは非常に難しい。

領域競合法 (region competition) [107] のアルゴリズムは、画像モデルに対するMDL基準すなわち、(大域的な) エネルギー関数の最小化から導出される。Zhu & Yuille[107] が用いた画像モデルは3つの要素から構成される。すなわち、領域境界の長さに比例するコスト、ガウス分布に従う領域内の画素を記述するためのコストおよび、領域に対する分布や系を記述するためのコストがある。領域競合法は二段階の(局所的な)最適化を行う。まずはじめに、画像内にシードを置き、分割領域を初期化する。第一段階として領域の数を固定し、大域的なコスト(エネルギー関数)を最小化するように領域境界を適応させる。第二段階では、エネルギーが減少する場合に領域を統合し、第一段階に戻る。エネルギーが減少しない場合はアルゴリズムを終了する。2つの処理を繰り返し行うことによりMDL基準の局所最適解に収束する。

領域競合法は動的輪郭 (active contour) モデル [54] の幾何学的な特徴と統計的手法である領域成長法 [1] を組み合わせたアルゴリズムと考えられる。分割統合処理が可逆でないため、全体のアルゴリズムが局所探索型であり、大域的な最適解に収束することが保証されなかったが、これを解決するアルゴリズムとしてデータ駆動型マルコフ連鎖モンテカルロ法が提案されている [96]。

## テクストン

テクストン (textons) [64] とは, スケール, 方向および, 位相の異なるフィルタ出力を高次元空間内の点としてみなし, ベクトル量子化すなわち, クラスタリング (Malik ら [64] は  $k$ -平均法を用いた) を実行することによって探索したプロトタイプベクトルのことを指す. 各画素をそのフィルタ応答ベクトルに最も近いテクストンに写像することによって, 画像をテクストンチャンネルにおいて解析できる. つまり, 連続的な値をとるベクトルの集合を離散的な点集合として表現でき, 計算幾何学や点過程統計学の手法を応用できる. これらを道具として, テクスチャ要素の近傍に対する記述を定義したり, テクスチャ領域内の 2 つの画素の類似度を評価できる.

## ブロブワールド

入力画像に対するブロブワールド (Blobworld) [18] 表現は各画素について色, テクスチャおよび, 画像平面内での座標を特徴ベクトルとして, EM (Expectation-Maximization) アルゴリズムを用いたクラスタリングにより得られる. 色に関する特徴量は知覚的に一様である  $L^*a^*b^*$  色空間における 3 次元記述子を用いる. テクスチャ特徴は各画素において, 明度成分  $L^*$  に対する勾配とガウス平滑化カーネルから計算される 2 次モーメント行列すなわち,  $2 \times 2$  の半正定値対称行列の固有値成分 [71] を用いて求める. 以上の特徴量に画像平面内での座標  $(x, y)$  を加えた特徴ベクトルを用いて, EM アルゴリズムによる画素のクラスタリングを行う. ブロブワールド表現による画像分割の問題点は, 座標ベクトルの影響によって大きな背景領域が分割されてしまったり, オブジェクト境界を渡って平滑化するため, 境界が視覚的にはっきりしていても分割できない場合があることなどである.

## 2.6 おわりに

本章では, 画像の領域分割に関する従来研究について述べた.

2.2 節では, 画素に基づく手法としてヒストグラムのしきい値処理および, クラスタリング手法について述べた. 特に, ファジィ  $c$ -平均法と平均値シフトアルゴリズムの 2 つのアプローチを概説し, 自然画像に対して実験を行った. これらの手

法は（領域の一様性から導かれる）画像分割に有効な特徴の選定および，効果的なクラスタリングアルゴリズムの適用が重要になる．

2.3 節では，領域に基づく手法について述べた．領域成長法は，初期領域をどのように指定するか，拡張される領域あるいは，候補となる画素をどのような順序で処理するか，といったことが分割結果に大きく影響する．分割統合法はアルゴリズムの性質から「角張った」分割領域となりやすい．グラフ構造によって画像を表現する手法は一般に計算コストが高くなるため，効率的な最適化アルゴリズムや近似法が必要である．

2.4 節では，領域境界による分割手法について述べた．複数のフィルタ出力を統計的に最適に組み合わせることによって，エッジ（あるいは，明確に区別して「境界線」）を検出するアプローチを概説した．また，グラフ表現において明示的なエッジモデルを導入する手法について述べた．

2.5 節では，その他の手法として，領域成長法と動的輪郭法を統一的に定式化する領域競合法について述べた．フィルタ応答ベクトルのクラスタリングによって得られるテクストンと呼ばれるテクスチャ記述子について述べた．また，色，テクスチャおよび，画像平面内の位置を特徴ベクトルとして画素をクラスタリングするプロブワールドという表現について述べた．

最後に，カラー画像の領域分割に関する（モノクロ画像についても触れられている）サーベイ論文として文献 [87, 20] を挙げる．



図 2.1 実験に用いた自然画像 [66] .

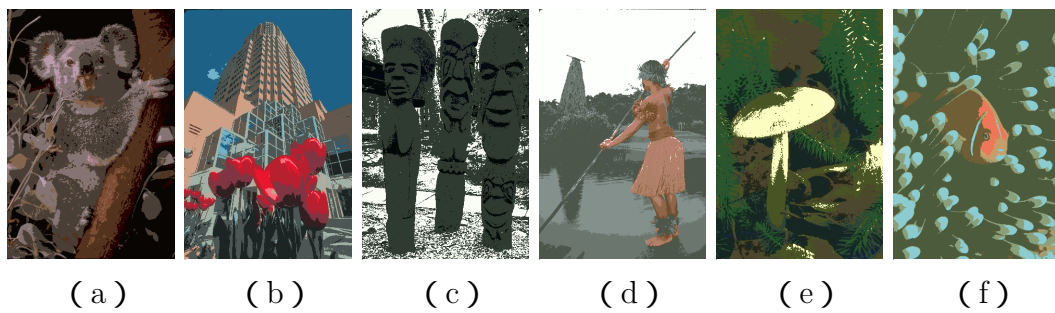


図 2.2 ファジィc-平均法と1次元ヒストグラムのしきい値処理による画像分割 . 入力画像は11の領域に分割された .

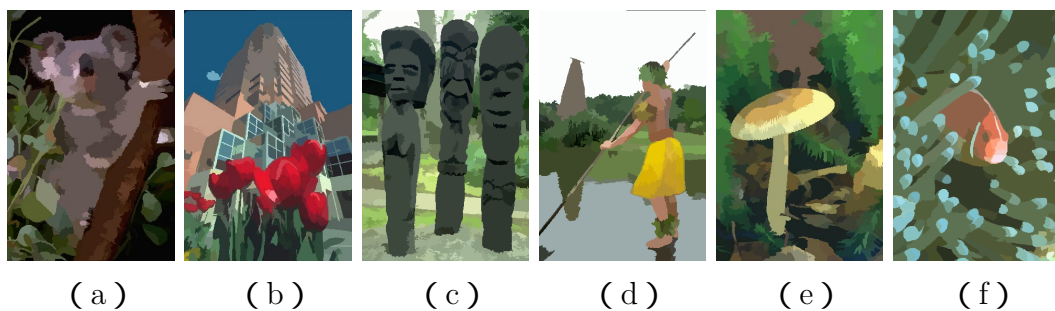


図 2.3 平均値シフトアルゴリズムによる画像分割 [24] . パラメータは  $(h_s, h_r, M) = (8, 7, 100)$  とした . 入力画像は40の領域に分割された .



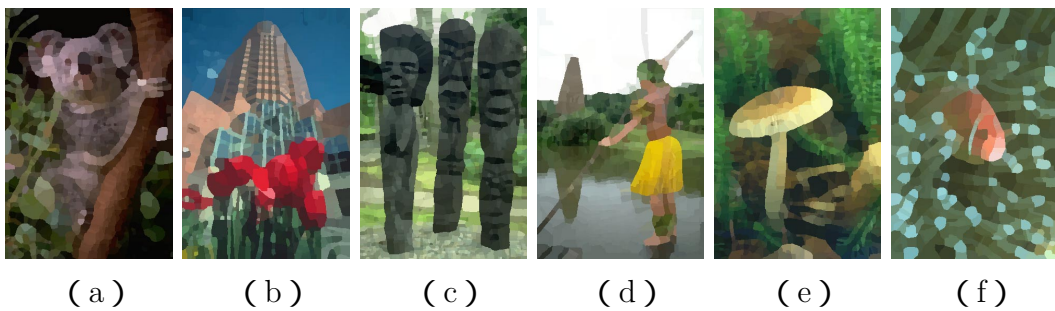


図 2.4 ウォータシェッド法による画像分割 ( $\sigma = 5$ ) . 入力画像は 325 の領域に分割された .



図 2.5 グラフ理論による画像分割 [33] . パラメータは  $\sigma = 0.8$  ,  $k = 300$  とした . 入力画像は 23 の領域に分割された .

## 第 3 章

# マルコフ確率場による画像のモデル化

### 3.1 はじめに

本章では、本論文の主題であるマルコフ確率場による画像のモデル表現について述べる。

3.2 節において、マルコフ確率場に関するいくつかの基本的な定理および証明を概説する。3.3 節では、代表的なマルコフ確率場モデルとそれらを用いた画像の分割手法について述べる。また、マルコフ確率場モデルに関連して、3.4 節でベイズの定理に基づく推定について述べる。ベイズ統計を用いて定式化されるモデルの解析は一般に、膨大な計算量が必要である。これに対して、マルコフ連鎖に基づくモンテカルロシミュレーションは有効な近似解法を与える。3.5 節では特に、ギブスサンプリングアルゴリズムを概説する。なお、本論文を通して一貫性を保つため、記号および用語を統一するようにした。

### 3.2 マルコフ確率場とギブス分布

はじめに、確率場について一般的な定義を与える [38, 61]。

ある格子構造をもったサイトを  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  と記述し、各サイト  $s \in S$  は確率変数  $X_s$  をもつものとする。格子全体に対する変数の集合を  $X = \{X_s \mid s \in S\}$  と記述する。各変数  $X_s$  はその状態空間  $\Lambda_s$  から値  $x_s$  を割れ当てられる。すなわち、 $X_s = x_s, x_s \in \Lambda_s \subset \mathbb{R}, \forall s \in S$ 。格子に対するある特定の配置は  $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_N = x_N\}$  により与えられ、簡単のため、 $\{X = \mathbf{x}\}$  あるいは、単に  $\mathbf{x}$  と省略する。ただし、 $\mathbf{x} = \{x_s\}$  あるいは、 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  とする。変数  $\mathbf{x}$  に対す

る配置空間を  $\Omega$  によって表す．よって，

$$\Omega = \prod_{s \in \mathcal{S}} \Lambda_s, \quad \Lambda_s \subset \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

以下では，説明を単純化するために，共通の状態空間を  $\Lambda = \{1, 2, \dots, L\}$  と仮定する． $x_s$  が共通の状態空間  $\Lambda$  から生じるとすれば，すべての可能な配置  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  は配置空間  $\Omega = \Lambda^N$  に含まれる．

$\Pi$  を  $\Omega$  上の（同時）確率測度であるとし， $\Pi(\mathbf{X} = \mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$  を満たすものとする．Besag[8] は，同時分布  $\Pi(\mathbf{x})$  がその局所条件付き確率  $\Pi(X_s = x_s | X_r = x_r, r \neq s)$  によって一意に決まることを証明した．これを次のように書き直す．

$$\Pi_s(x_s | \mathbf{x}_{(s)}) = \Pi(X_s = x_s | X_r = x_r, r \neq s), \quad s \in \mathcal{S}, \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.2)$$

ここで， $\mathbf{x}_{(s)} = \{x_r, r \neq s\}$  とする．

すなわち，

命題 3.1  $\mathbf{X} = \{X_s\}$  の同時分布はその局所条件付き確率によって一意に決まる．

証明．この証明は Besag[8] による．まず，任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  に対して，

$$\frac{P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{y})} = \prod_{i=1}^N \frac{P(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_N)}{P(y_i | x_1, \dots, x_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_N)} \quad (3.3)$$

であることを証明する．明らかに，次式が成り立つ．

$$P(\mathbf{x}) = P(x_N | x_1, \dots, x_{N-1}) P(x_1, \dots, x_{N-1}) \quad (3.4)$$

ここで，例えば，与えられた条件付き確率から  $P(x_{N-1} | x_1, \dots, x_{N-2})$  を得ることは容易でないので， $P(x_1, \dots, x_{N-1})$  は容易に分解できない．しかし， $y_N$  を導入して

$$P(\mathbf{x}) = \frac{P(x_N | x_1, \dots, x_{N-1})}{P(y_N | x_1, \dots, x_{N-1})} P(x_1, \dots, x_{N-1}, y_N) \quad (3.5)$$

と記述すると， $P(x_1, \dots, x_{N-1}, y_N)$  における  $x_{N-1}$  に関して，同様に  $y_{N-1}$  を導入

することにより次のように変形できる．

$$P(x_1, \dots, x_{N-1}, y_N) = \frac{P(x_{N-1} | x_1, \dots, x_{N-2}, y_N)}{P(y_{N-1} | x_1, \dots, x_{N-2}, y_N)} P(x_1, \dots, x_{N-2}, y_{N-1}, y_N) \quad (3.6)$$

以上の処理を続けると，最終的に式 (3.3) になる． $\Omega$  上の 2 つの確率測度  $\Pi$  および  $\mu$  が同じ局所条件付き確率をもつと仮定すると， $\frac{\Pi(\mathbf{x})}{\Pi(\mathbf{y})} = \frac{\mu(\mathbf{x})}{\mu(\mathbf{y})}$  であり，これは  $\Pi = \mu$  を意味する．  $\square$

サイトは画素のようなユークリッド空間における点あるいは，領域を表現するだけでなく，端点や線分，表面パッチといった画像の特徴も表現できる．サイトの集合はその規則性によって分類される．格子上のサイトは空間的に規則性があると考えられる．大きさ  $M \times N$  の 2 次元画像に対する規則的な格子は  $S = \{(i, j) | 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N\}$  と記述でき，その要素は標本化された画像内の位置に対応する．また，空間的な規則性をもたない，すなわち不規則なサイトの一般的な例として，画像から抽出される端点や線分といった特徴が挙げられる．ここでは (画像格子に対応する) 格子状に並んだ規則的なサイトを仮定する．

### 3.2.1 近傍系とクリーク

$S$  上のサイトはある近傍系を通して互いに関連付けられる．対称な近傍系  $\mathcal{N}^o = \{\mathcal{N}_s^o \subset S, s \in S\}$  は次のように定義される．

$$\mathcal{N}_s^o = \{r \in S | 0 < |s - r|^2 \leq o\} \quad (3.7)$$

ここで， $|s - r|$  は 2 点  $s, r \in S$  間のユークリッド距離である． $\mathcal{N}_s^o$  はサイト  $s$  から一定の距離内にあるサイトの集合を表し，次数  $o$  によって定義される (ただし，これは近傍の統計的な次数 [61] には言及しない)．1 次近傍系  $o = 1$  (あるいは，4 近傍系，最近傍系とも呼ばれる) では，すべての (内部にある) サイトは図 3.1 (a) に示すような 4 つの近傍サイトをもつ．また，2 次近傍系  $o = 2$  (あるいは，8 近傍系とも呼ばれる) および，8 次近傍系  $o = 8$  では，それぞれ図 3.1 (b) (c) のように，すべての (内部にある) サイトに対して 8 および，24 の近傍サイトがある．

近接関係は以下の性質をもつものとする．

1. サイトはそれ自身とは近接しない， $s \notin \mathcal{N}_s$ ．

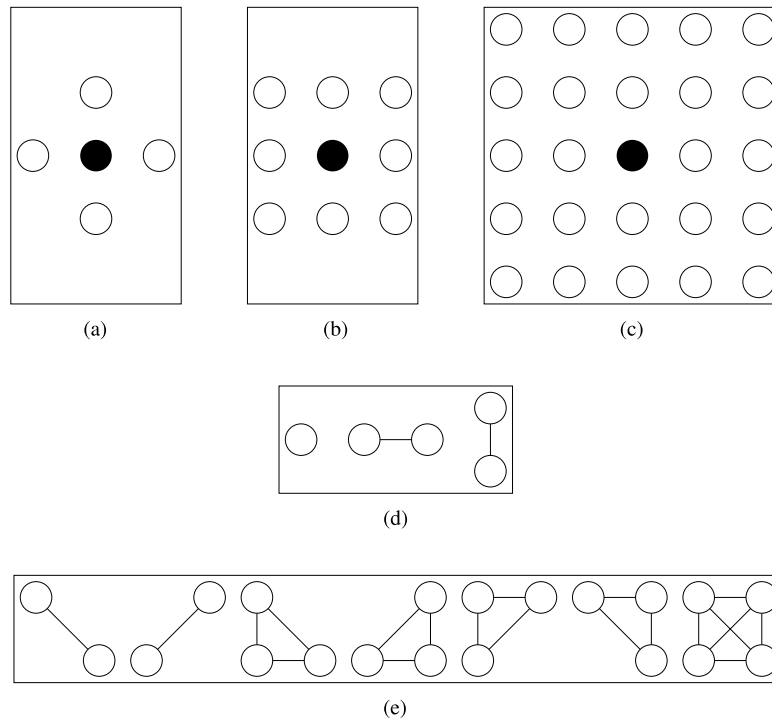


図 3.1 近傍系とクリーク (a) サイト  $s = \bullet$  の 1 次近傍系  $o = 1$  (あるいは, 最近傍系)  $r = \circ \in \mathcal{N}_s$  (b) 2 次近傍系  $o = 2$  (c) 8 次近傍系  $o = 8$  (d) 最近傍系に対するクリーク (e) 2 次近傍系に対するその他のクリーク.

2. 近接関係は相互にある,  $s \in \mathcal{N}_r \Leftrightarrow r \in \mathcal{N}_s$ .

これらは Hammersley-Clifford の定理 [8, 38] に必要な基準であり, 一様なマルコフ確率場に対して, 近傍構造が対称かつ, 自己相似でなければならないことを示唆する.

近傍系  $\mathcal{N}$  が与えられたとき, 集合  $C \subseteq S$  は  $C$  の異なるサイト同士からなるすべての組が近傍であるならば, クリークである. すなわち,  $s, r (s \neq r)$  がクリーク  $C$  の要素であるとは,  $s \in \mathcal{N}_r (\Leftrightarrow r \in \mathcal{N}_s)$  であることを意味する. 単一のサイトからなる部分集合もまた, クリークである. よって, クリークには, 単一のサイトからなるクリーク  $C = \{s\}$  や, 周辺にある 2 つのサイトの組からなるクリーク  $C = \{s, r\}$  などがある. 単項サイトおよび, 二項サイトからなるクリークを集め

て次のように,  $\mathcal{C}_1$  および  $\mathcal{C}_2$  と記述する.

$$\mathcal{C}_1 = \{s \mid s \in \mathcal{S}\} \quad (3.8)$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\{s, r\} \mid r \in \mathcal{N}_s, s \in \mathcal{S}\} \quad (3.9)$$

クリークにおけるサイトは順序をもち,  $\{s, r\}$  と  $\{r, s\}$  は同じでないことに注意する.  $\mathcal{N}$  に関して  $\mathcal{S}$  上で定義されるすべてのクリークの集合は

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \quad (3.10)$$

となり,  $\dots$  はより大きなクリーク集合を表す.

例として,  $\mathcal{S}$  を長方形格子  $\mathcal{Z}_m = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq m\}$  で表現すると (すなわち,  $\mathcal{S} = \mathcal{Z}_m, N = m^2$ ), 最近傍系は  $\mathcal{N}_{i,j} = \{(i, j-1), (i, j+1), (i-1, j), (i+1, j)\}$  となる. この近傍系に対応するクリークは図 3.1 (d) に示すような  $\mathcal{S}$  の部分集合すなわち,  $\mathcal{Z}_m$  の部分集合  $\{(i, j)\}, \{(i, j), (i, j+1)\}$  および,  $\{(i, j), (i+1, j)\}$  である. よって,  $\mathcal{N}_{i,j}$  の局所クリーク集合  $\mathcal{C}_s$  に含まれるクリークは,  $\{(i, j)\}, \{(i, j), (i, j+1)\}, \{(i, j), (i+1, j)\}, \{(i, j), (i, j-1)\}$  および,  $\{(i, j), (i-1, j)\}$  である. 2次近傍系に対して, クリーク集合  $\mathcal{C}$  は図 3.1 (d) かつ (e) のようになる.

Geman & Geman[41] は主に小さなクリークに関して実験を行った. 彼らは単項サイトおよび二項サイトに対するクリークによって目的とする変数集合  $\mathbf{X}$  を効果的にモデル化したが, より複雑な画像をモデル化するためには, より複雑なクリークが必要だろうと述べている.

### 3.2.2 マルコフ確率場

マルコフ確率場は格子構造上で相互作用する変数の集合に対する統計モデルであり, その理論は結晶や磁場といった物理現象の空間的依存性あるいは, 文脈依存を解析するための統計理論の一つである. また, 因果的あるいは, 双方向的という意味でもなく, ある近傍構造に関してマルコフ過程の一般化とみなせる.

マルコフ確率場の性質とは以下のようなものである. 格子  $\mathcal{S}$  上のあるサイト  $s$  における変数  $X_s$  は任意の値  $x_s \in \Lambda$  をとり得るが,  $X_s = x_s$  となる確率は  $s$  の周辺にあるサイトに割り当てられた値すなわち, 状態 (の集合) に依存する. 確率過程  $\mathbf{X} = \{X_s\}$  は以下の条件を満たすとき (かつ, そのときに限り), 近傍系  $\mathcal{N}$

に関する  $S$  上のマルコフ確率場と呼ばれる。

$$\Pi(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.11)$$

$$\Pi_s(x_s | \mathbf{x}_{(s)}) = P(x_s | x_r, r \in \mathcal{N}_s) \quad (3.12)$$

式 (3.11) で表される正值性はいくつかの理由 (例えば, 命題 3.1 など) から仮定され, 多くの場合, 実際に満たされる。また, 式 (3.12) で表されるマルコフ性は  $X$  の局所的な特徴を表現する。言い換えれば, 周辺にあるサイトの状態のみが互いに直接的な相互作用をもつ。

マルコフ確率場とギブス分布の間の等価性 (3.2.4 節参照) に関する理論的な証明 (Hammersley-Clifford の定理 [8, 38]) により, 局所条件付き確率の形式が得られ, 数学的に有効な同時確率  $\Pi(\mathbf{x})$  を定義できる。このマルコフ確率場とギブス分布の等価性に関する定理は近傍系が前述の 2 つの基準すなわち,  $s \notin \mathcal{N}_s$  および,  $s \in \mathcal{N}_r \Leftrightarrow r \in \mathcal{N}_s$  に従うことを暗に要求する。

### 3.2.3 ギブス分布

ギブス分布は  $\Omega$  上の正の確率測度  $\Pi$  に対する一つの表現である。ギブス分布はポテンシャル関数の集合  $V = \{V_A | A \subset S\}$ ,  $V_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  に関して定義される。ポテンシャル関数  $V$  の本質的な要素は  $V_\emptyset(\mathbf{x}) = 0$  および,  $x_s = x'_s, \forall s \in A$  ならば  $V_A(\mathbf{x}) = V_A(\mathbf{x}')$  である。また, ある  $s \in S$  に対して,  $x_s = 0$  (他の任意の一貫した値でも同様であるが, ここでは  $0 \in \Lambda$  を仮定する) であれば必ず,  $V_A(\mathbf{x}) = 0$  ならば,  $V$  は規格化されているという。規格化されたポテンシャルは唯一の表現を保証するが, 実際には他の実用的な重要性はない。

ある実現値  $\{X = \mathbf{x}\}$  に対応するエネルギーは次式のように定義される。

$$U(\mathbf{x}) = - \sum_{ACS} V_A(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

このとき, 同時確率は

$$\Pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{1}{T} U(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.14)$$

となる。ここで,  $T$  は温度と呼ばれる定数であり, 以下では特に述べない限り, 1 であると仮定する。また,  $Z$  は規格化定数あるいは, 分配関数と呼ばれる定数で

あり，次式のようになる．

$$Z = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \exp \left\{ -\frac{1}{T} U(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.15)$$

$Z$  は解析的および，数値計算的にも扱いにくい．なぜなら， $\Omega$  の要素数は組合せ論的な数になり，中程度の大きさの問題に対してでさえ， $\Omega$  の要素全てに関して和を求める  $Z$  の評価は非常に大きな負担となる．この問題を解決するために，いくつかの近似手法が提案されている [9, 10] ．

$\Pi(\mathbf{x})$  はある配置（あるいは「パターン」） $\mathbf{x}$  が起こる確率である．より起こりそのような配置ほど低いエネルギーをもつ．温度  $T$  は分布の鋭さを制御する．温度が高いとき，すべての配置は均等に分布する傾向があり，または，温度が 0 に近ければ，分布はエネルギーの大域的な極小値の周辺に集中する．温度  $T$  とエネルギー  $U(\mathbf{x})$  が与えられたなら， $\Pi(\mathbf{x})$  に従って配置空間  $\Omega$  を（3.5 節で述べるギブスサンプリングなどによって）サンプリングすることにより，ある種の「パターン」を生成できる．

#### $\mathcal{N}$ -ポテンシャル関数

$\mathcal{N}$ -ポテンシャル関数はポテンシャル関数に対する前述のすべての基準を満たすだけでなく，近傍系  $\mathcal{N}$  および，それに対応するクリークの集合  $\mathcal{C}$  が与えられたとき，次のように定義される．

$$V_C(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{if } C \notin \mathcal{C} \quad (3.16)$$

このとき，ギブス分布  $\Pi$  は

$$\Pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ \sum_{C \in \mathcal{C}} V_C(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.17)$$

と定義され，規格化定数あるいは，分配関数は

$$Z = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \exp \left\{ \sum_{C \in \mathcal{C}} V_C(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.18)$$

となる．



### 3.2.4 マルコフ確率場とギブス分布の等価性

マルコフ確率場とギブス分布の等価性ははじめに、Hammersley & Clifford[45]によって証明されたが、論文として発表されてはいない。いくつかの証明がなされていて例えば、Besag[8]による証明が挙げられる。また、Möbiusの反転定理[81]に基づいた証明がGrimmett[44]および、Moussouris[68]によってなされ、Geman[38]によって書き直された。

マルコフ確率場とギブス分布の等価定理を用いて、 $\mathcal{N}$ -ポテンシャル関数  $V_C(\mathbf{x})$  に関して表現することにより、マルコフ確率場の局所条件付き確率は次式のように形成される。

$$P(x_s | x_r, r \in \mathcal{N}_s) = \frac{1}{Z_s} \exp \left\{ \sum_{C \in \mathcal{C}_s} V_C(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.19)$$

ここで、 $Z_s = \sum_{\lambda_s \in \Lambda} P(\lambda_s | x_r, r \in \mathcal{N}_s)$  は局所規格化定数であり、局所クリーク集合  $\mathcal{C}_s = \{C \in \mathcal{C}, s \in C\}$  に対する和である。

マルコフ確率場とギブス分布の等価性は、すべてのギブス分布ごとに1つのマルコフ確率場が存在し、またその逆も同様であるということを述べているが、これはギブス分布が  $\mathcal{N}$ -ポテンシャルに関して定義されかつ、マルコフ確率場が式(3.19)のように表現される場合のみ真である[31]。式(3.19)に従わないマルコフ確率場を定義した場合、同時確率分布が存在しないモデルとなる。また、 $\mathcal{N}$ -ポテンシャルを使わないギブス分布を定義した場合、これは局所確率分布が存在しないモデルとなる。このようなモデルではパラメータの推定や分布からの標本抽出が困難となるため、マルコフ確率場とギブス分布をクリーク構造に関して定義することが望ましい。

**定理 3.1 (マルコフ確率場とギブス分布の等価性)** 近傍系  $\mathcal{N}$  を仮定する。  $\Pi$  が  $\mathcal{N}$  に関してマルコフ確率場であるときかつそのときに限り、  $\Pi$  は  $\mathcal{N}$  に関してギブス分布である。

Besag[8] による証明

Hammersley & Clifford[45] が提示した問題は、「各サイトにおいてその近傍を仮定するとき、有効な確率構造を系に与える  $Q(\mathbf{x})$  の一般形は何か」と述べられる。

ここで，正值性の条件式 (3.11) すなわち， $\Pi(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$  から

$$Q(\mathbf{x}) \equiv \log \{ \Pi(\mathbf{x}) / \Pi(\mathbf{0}) \}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.20)$$

と定義する．Hammersley-Clifford の定理に対する Besag[8] の証明は任意の確率分布  $\Pi$  について，上記の条件で  $\Omega$  に関して一意に  $Q(\mathbf{x})$  の展開

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) = & \sum_{1 \leq i \leq N} x_i G_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} x_i x_j G_{i,j}(x_i, x_j) \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} x_i x_j x_k G_{i,j,k}(x_i, x_j, x_k) + \cdots \\ & + x_1 x_2 \cdots x_N G_{1,2,\dots,N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (3.21)$$

が存在するという所見に基づいている．Hammersley & Clifford が導いた結果は次のように述べられる．

**命題 3.2** 任意の  $1 \leq i < j < \cdots < r \leq N$  に対して，式 (3.21) における関数  $G_{i,j,\dots,r}$  はサイト  $i, j, \dots, r$  がクリークを形成するときかつそのときに限り，非零である．この制限の下で， $G$ -関数は任意に選択される．

**証明**．ある単一のサイトにおける状態の変化がマルコフ確率場全体に対する結合エネルギーに与える影響について考察する．そこで，状態  $x_i$  が非零の値をとる場合と  $x_i = 0$  である場合の2つの確率分布を比較する．任意の  $\mathbf{x} \in \Omega$  が与えられたとき， $x_i = 0$  である実現値を  $\mathbf{x}_i = \{x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N\}$  とおくと，これらの比は次のように記述できる．

$$\begin{aligned} \exp \{ Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{x}_i) \} &= \Pi(\mathbf{x}) / \Pi(\mathbf{x}_i) \\ &= \frac{\Pi_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)}{\Pi_i(0 | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

すなわち，任意の  $\mathbf{x} \in \Omega$  に対して， $Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{x}_i)$  は  $x_i$  と  $s_i$  の近傍サイトの状態のみに依存する．一般性を失うことなく，サイト  $s_1$  に関して考察すると，式 (3.21)

から

$$\begin{aligned}
 Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{x}_1) = & x_1 \left\{ G_1(x_1) + \sum_{2 \leq j \leq N} x_j G_{1,j}(x_1, x_j) \right. \\
 & + \sum_{2 \leq j < k \leq N} x_j x_k G_{1,j,k}(x_1, x_j, x_k) + \cdots \\
 & \left. + x_2 x_3 \cdots x_N G_{1,2,\dots,N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \right\} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

が得られる．ここで，サイト  $s_l$  ( $l \neq 1$ ) はサイト  $s_1$  の近傍ではないと仮定する．このとき， $Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{x}_1)$  はすべての  $\mathbf{x} \in \Omega$  に対して， $x_l$  と独立でなければならない． $i \neq 1$  あるいは  $i \neq l$  に対して， $x_i = 0$  とすると， $\Omega$  上で  $G_{1,l}(x_1, x_l) = 0$  であることがわかる．同様に， $\mathbf{x}$  を適切に選ぶことによって， $x_1$  と  $x_l$  の両方が関係するすべての  $n$ -変数  $G$ -関数が零でなければならないことがわかる．互いに近傍でない任意のサイトの組について同じような結果を適用できるので，一般に， $G_{i,j,\dots,r}$  はサイト  $i, j, \dots, r$  がクリークを形成する場合のみ非零となり得る．

他方， $G$ -関数の任意の集合は正值性条件を満たす有効な確率分布  $\Pi$  をもたらず．そして， $Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{x}_i)$  は  $x_i$  および  $x_l$  に関係する非零の  $G$ -関数が存在するときのみ  $x_l$  に依存するので，結果として同じことが  $\Pi_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$  にも当てはまる．  $\square$

クリークポテンシャル関数  $V_C(\mathbf{x})$  を指定することによって，同時確率  $\Pi(\mathbf{x})$  が得られる．このように，目的とする系の振舞いに対して適当なポテンシャル関数を選ぶことにより，変数間の相互作用に関する事前知識を記号化する．

### 3.3 確率場モデル

領域やテクスチャといった画像の性質をモデル化するために，いくつかの有用なマルコフ確率場モデルが提案されている [61]．具体的には，イジング模型およびポッツ模型あるいは，ガウスマルコフ確率場などがある．これらはすべて自己モデル [8] と呼ばれ，その単純な形式と計算コストの低さあるいは，パラメータ推定が比較的容易であることから，広く用いられている [19, 28, 30, 75]．

画像には，物体と背景の境界など，画素値あるいは，画像から得られる特徴量の急激に変化する領域が隣接する場合がある．このような画素における変数間の

不連続（エッジ）を検出するために，線過程と呼ばれる確率場が提案された [41] .

以下では，画像格子に対する確率場モデルとしてイジング模型および，ポッツ模型について 3.3.1 節で述べ，エッジ要素に対する格子上で定義される線過程について 3.3.2 節で述べる .

### 3.3.1 イジング模型およびポッツ模型

2つの変数に対する制約条件は文脈情報を伝達する最も低い次数の制約であり，その単純な形式および，計算コストの低さから一般的に用いられる . これらの制約条件は二項サイトのクリークポテンシャルとしてギブスエネルギーに組み込まれる . 2つのサイトに対するクリークポテンシャルまでを含めると，エネルギーは次式のようになる .

$$U(\mathbf{x}) = - \sum_{s \in \mathcal{S}} V_1(x_s) - \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{r \in \mathcal{N}_s} V_2(x_s, x_r) \quad (3.24)$$

ここで， $\sum_{s \in \mathcal{S}}$  は  $\sum_{\{s\} \in \mathcal{C}_1}$  と等価であり， $\sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{r \in \mathcal{N}_s}$  は  $\sum_{\{s,r\} \in \mathcal{C}_2}$  と等価である . 適切な  $V_1$  および  $V_2$  を選択することによって，マルコフ確率場すなわち，ギブス分布は指定される .

Besag[8] による自己モデルは次のように定義される .  $G_s(\cdot)$  を任意の関数とした， $\beta_{s,r}$  をサイト  $s$  および  $r$  における状態間の相互作用を反映する制約条件として， $V_1(x_s) = x_s G_s(x_s)$  かつ， $V_2(x_s, x_r) = \beta_{s,r} x_s x_r$  とおくと，エネルギーの一般形は

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= - \sum_{C \in \mathcal{C}} V_C(\mathbf{x}) \\ &= - \sum_{1 \leq s \leq N} x_s G_s(x_s) - \sum_{1 \leq s < r \leq N} x_s x_r G_{s,r}(x_s, x_r) \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる . 自己モデルはさらに，個々の  $x_s$  に関する仮定に従って分類され [61]，イジング模型およびポッツ模型をその一形態として含む .

画像がもつ潜在的な特性すなわち，より明確にいえば，サイトの状態間で起こる相互作用は空間的な確率過程によってモデル化できる . ポッツ模型は画像の領域分割あるいは，画像修復などに関する文献において，その有効性が示されてきた [3, 56, 55, 92] . ここではまず，格子上で最近傍系を仮定するモデルであるイジング模型について述べる .

イジング模型は相転移の統計理論に由来し，幅広く応用されている . 応用例と

して液体・気体相転移のモデル化などが挙げられるが、主に磁性体のモデル化に用いられてきた。イジング模型の背景には、格子状物質の巨視的な性質をその微視的な相互作用すなわち、分子間の相互作用を通してモデル化するという考え方がある。例えば、ある磁場の下で、 $N$  個のスピンからなる規則的な格子を考える。各サイト（あるいは分子）におけるスピンは外部磁場と共にそれらの配列に依存して、 $\{-1, +1\}$  の値をとる。さらに、各スピンはその最近傍にあるスピンと相互作用しその結果、相互作用エネルギーを生じる。これら2つの要素から、系のエネルギーは次のように定義される。

$$E = -H\mu \sum_i \sigma_i - J \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (3.26)$$

ここで、 $\mu$  は個々のスピンの磁気モーメントであり、 $J$  は系の結合定数である。 $ij$  に対する和は格子内のすべての最近傍サイト対に関して計算される。興味があるのは、 $M = \mu \sum_i \sigma_i$  で定義される巨視的な特性としての系の磁化である。物質の自発磁化は直接の近傍でない個々のスピンおよび、磁気モーメント間に働く長距離相互作用によって起きる。イジング模型はこのような長距離相関関係を表現するモデルとして用いられる。

以上のような性質をもつイジング模型を画像処理分野で応用する場合、画像は通常、いくつかの異なる領域から構成されるため、格子上の各サイトにおいて  $\{-1, +1\}$  の二値しか取らないイジング模型を定式化し直し、より一般的な状態空間を扱えるようにする必要がある。

ポッツ模型はイジング模型の一般化であり、各サイトにおける変数に対して（3つ以上の）多値状態から1つを割り当てる。ポテンシャル関数はそれぞれのクリークに対して定義され、イジング模型における相互作用項に置き換わる。クリークポテンシャルはクリークの型  $C \in \mathcal{C}$ （大きさ、形状あるいは、方向）および、局所的な配置  $\mathbf{x}_C \equiv \{x_i | i \in C\}$  に依存する。1つ以上のサイトを含むクリークに対して、ポッツ模型のクリークポテンシャルは次のように定義される。

$$V_C(\mathbf{x}) = \begin{cases} \zeta_C & \text{if } C \text{ 上のすべてのサイトが同じ値をとる} \\ -\zeta_C & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.27)$$

ここで、 $\zeta_C$  は型  $C$  のクリークに対するポテンシャルである。単項サイトクリーク

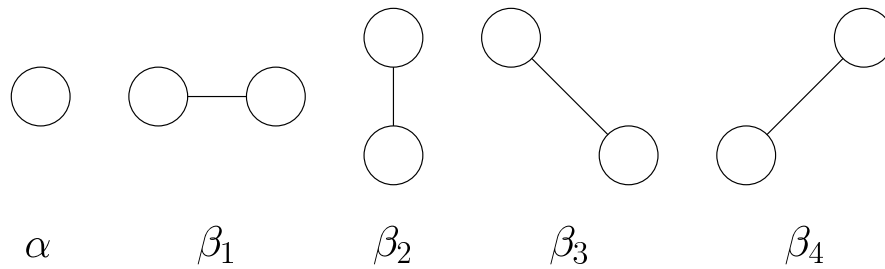


図 3.2 クリークの型と対応するポテンシャルパラメータ .

に対して，そのポテンシャルは次式のように，各サイト  $s \in S$  に割り当てられた値に依存する .

$$V_1(\mathbf{x}) = V_1(x_s) = \alpha_k \quad \text{if } x_s = k \in \mathcal{L} \quad (3.28)$$

ここで， $\alpha_k$  は値  $k$  に対するポテンシャルである .

ポッツ模型に 2 次近傍系を仮定すると，単項サイトクリークに対する  $\alpha$  と二項サイトクリークに対する  $\beta$  の 2 つのパラメータのみが非零となる . 二項サイトクリークに対するポテンシャル関数は次のように表される .

$$V_2(x_s, x_r) = \begin{cases} \beta_C & \text{if クリーク } \{s, r\} = C \in \mathcal{C}_2 \text{ が同じ値をとる} \\ -\beta_C & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.29)$$

ここで， $\beta_C$  は型  $C$  のクリークに対する  $\beta$  パラメータであり， $\mathcal{C}_2$  は二項サイトクリークの集合である . 2 次近傍系では，二項サイトクリークに対して 4 つの型があるので，図 3.2 のように 4 つの異なる  $\beta_C$  が与えられる . モデルが等方的である場合には，4 つの  $\beta_C$  は同じ値をとる . 二項サイトクリークまでを仮定したポッツ模型は，その単純さから領域やテクスチャに対するモデルとして広く用いられている [28, 30, 75] .

状態空間  $\Lambda = \{0, 1, \dots, L-1\}$  を階調値の集合 ( $L$  は階調数) と考えると，デジタルモノクロ画像は画像内の各画素を確率変数  $X_s, s \in S$  と定義し，画素に割り当てられる階調値を  $x_s$  とおくことでモデル化される . イジング模型あるいはポッツ模型を用いて，通信路におけるノイズなどにより劣化した画像から元の画像を復元する (ノイズを除去する) 画像修復問題に対して，統計的な定式化が行われている [41, 65, 31, 39, 7, 40, 70] .

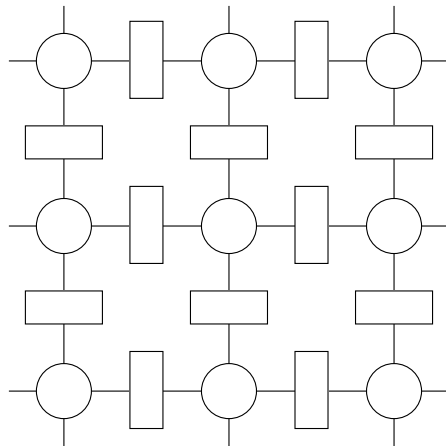


図 3.3 最近傍系における線過程．円は画素に対応するサイトを示し，長方形はその双対な線過程のサイトを示す．

### 3.3.2 線過程

画像分割に関して基礎になる確率場はサイトの状態に対する事前確率として，平滑化の性質をもつ確率過程である．3.3.1 節で述べたポッツ模型は平滑化に有効なモデルとして，しばしば用いられてきた．しかし，画像内に顕著な不連続が存在する場合，ポッツ模型は過剰な平滑化を引き起こし得る [40]．

この問題を解決するために，Geman & Geman[41] は画像格子に対するマルコフ確率場に線過程と呼ばれるもう 1 つのマルコフ確率場を結合することを提案した．線過程に対する状態空間は  $\{0, 1\}$  であり，画像格子上のサイトにおいて，その状態間に起こる不連続すなわち，エッジの存在を表している．2 つの結合されたマルコフ確率場は図 3.3 に示すように，空間的に交互に合わされた 2 つの格子上で定義される（ただし，ここでは，最近傍系を仮定している）．図 3.3 において，円で表されている格子は既存の画素に対応するサイトであり，長方形で示されている双対な格子は導入されたエッジに対応するサイトである．近傍にあるサイト対のそれぞれの間には可能なエッジが存在し得る．

線過程は水平方向のエッジ要素に対する格子と，垂直方向のエッジ要素に対する格子に分けられる．それぞれの方向に対する格子構造において，図 3.4 のような近傍系を仮定する．本論文では次のような記号を用いる．画素に対応する  $N$  個のサイトは格子

$$S = \{s_1, \dots, s_N\} \quad (3.30)$$

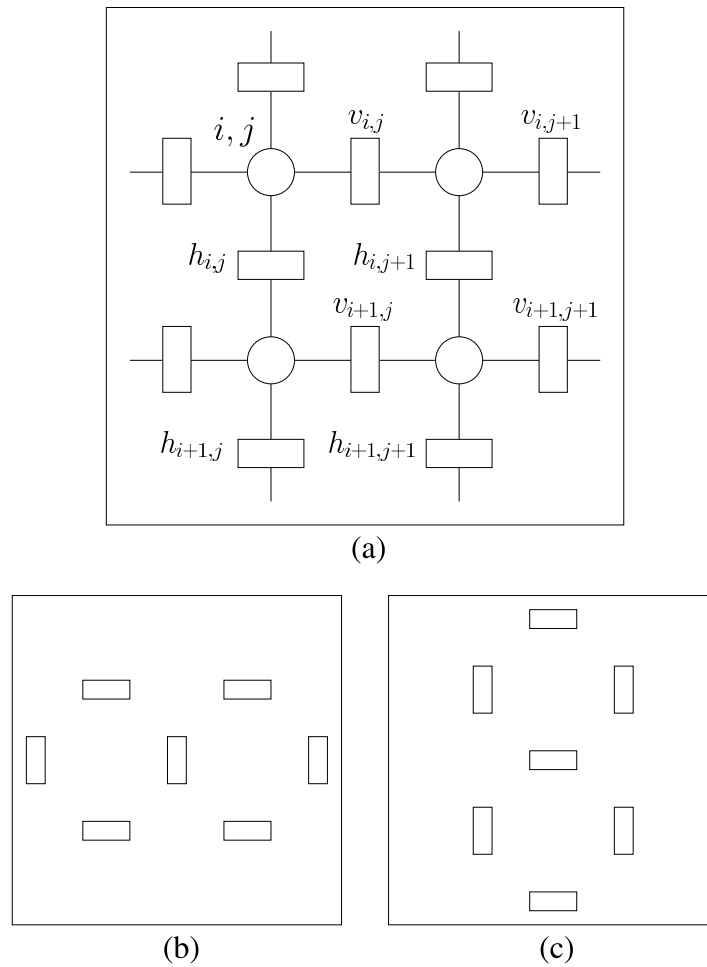


図 3.4 水平 / 垂直方向のエッジ要素に対する線過程とその近傍系 (a) 水平 / 垂直方向のエッジ要素に対する格子構造 (b) 水平方向, および (c) 垂直方向のエッジ要素に対する近傍サイト集合 .

と記述され, エッジ要素に対応するサイトは双対な格子

$$\mathcal{L} = \{(s, r) \mid s, r \in \mathcal{S}, r \in \mathcal{N}_s\} \tag{3.31}$$

と記述される. ここで,  $\mathcal{N}_s$  はサイト  $s$  に対する近傍サイトの集合を示し, 前述のとおり, 最近傍系を仮定している. 線過程に対する格子上で定義される確率変数を  $Z$  とおく. 各サイト  $l \in \mathcal{L}$  における状態は  $\{0, 1\}$  から値  $z_l (\equiv z_{s,r}, r \in \mathcal{N}_s)$  をとるものとする. また,  $Z$  の配置空間を  $\Psi$  とおき, 画像格子上のサイトにおける変数の集合と同様に, ある配置を  $z \in \Psi$  で表す.



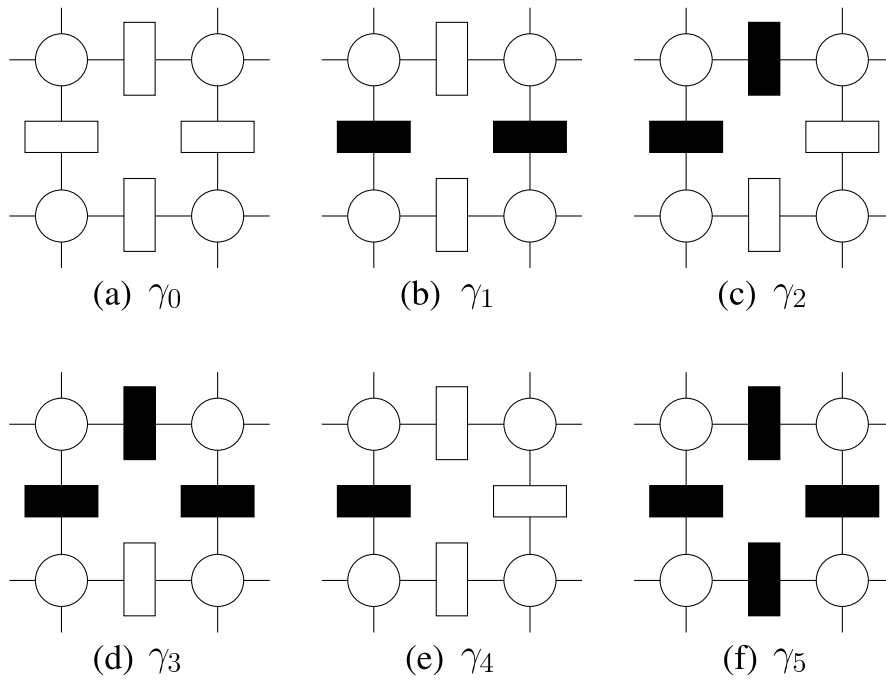


図 3.5 可能なエッジパターンと対応するポテンシャルパラメータ (a) エッジなし (b) 継続 (c) 転換 (d) 分岐 (e) 終端 (f) 交差.

線過程に対する格子上的近傍系において，エッジ要素に関する性質について考察する [41]．例えば，画像はその画素数に比べて少数の平坦な領域から構成されていると考えると，画素対に対する変数間に強い不連続が起こることは少ない，つまり，画像内のエッジ要素は少ないと仮定できる．また，エッジ要素は孤立してまばらに存在するよりも，直線状に連続して現れることが多いが，集中して現れる可能性は低いと考えられる．

以上のような考察から，図 3.5 に示すように，エッジ要素の起こり得る可能なパターンを 6 通り挙げる事ができる．これらのエッジパターンに対応する（ポテンシャル）パラメータを用いて，線過程に対するポテンシャルエネルギーを

$$U(\mathbf{z}) = \sum_{l \in \mathcal{L}} \sum_{e \in \mathcal{E}} \gamma_e I_e(\mathbf{z}_l) \tag{3.32}$$

と定義する．ここで， $\mathbf{z}_l$  はサイト  $l$  とその近傍にあるサイトに関する局所的な配置を表し，関数  $I_e(\mathbf{z}_l)$  は  $\mathbf{z}_l$  がエッジパターン  $e$  であるとき値 1 を取り，そうでないとき値 0 をとるものとする．また， $\mathcal{E}$  は図 3.5 で示される可能なエッジパターンの集

合を表し,  $\gamma_e, e = 0, \dots, 5$  は各パターンに対応するパラメータとする. 6つのポテンシャルパラメータについて, 次のように仮定することは理に適っている.

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \gamma_4 \leq \gamma_5 \quad (3.33)$$

なぜなら, 実画像において起こりにくいパターンのパラメータを比較的大きな値にすることは, 対応するポテンシャルエネルギーの値を大きくするからである. その結果, そのようなパターンを含む (線過程の格子に対する) 配置の同時確率が小さくなり, 線過程はエッジ要素に関する性質を反映した有効なモデルとなる.

線過程のようにエッジ要素を陽に用いたモデルではなく, 区分的に連続なポテンシャル関数を導入することによって, 画像格子上のサイトにおける状態間の不連続を考慮するモデルも提案されている [40]. 組合せ最適化と比較して, 実数最適化は実行が困難でないため, 修正したポテンシャル関数を用いる手法の方が実装が容易である. 一方で, 線過程を用いたエッジ要素に対する確率場モデルは得られた結果を入力として, より高次の画像処理へ適用できる可能性がありまた, 禁止エッジパターン [39] のような複雑なエッジ配置を自然に記述できるという利点がある.

### 3.4 ベイズ推定

ベイズ統計学はベイズの定理を用いる基礎理論であり, 推定や意思決定において有効な枠組みを与える.

ベイズ統計の枠組みにおいて, ラベリングあるいは, クラスタリングの観点から画像分割問題を定式化すると, 画像は階層的なモデルによって記述される. 上位レベルでは, 画像を構成する部分領域を示すラベル (あるいは, クラス)  $\mathbf{x}$  の同時生起確率  $P(\mathbf{x})$  がマルコフ確率場によって効果的にモデル化される. 観測される画像に対して, 画素の値 (あるいは, 画素や領域に対する特徴量) は対応する上位レベルのラベルが示す確率分布に従って生起すると考えられる.

観測された画像を所与として, ラベル配置  $\mathbf{x} \in \Omega$  が生起する条件付き確率はベイズの定理により, 次式のように計算される.

$$P(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})P(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{x} \in \Omega} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})P(\mathbf{x})} \quad (3.34)$$

ここで、 $y = \{y_s\}$  は画素と同じ格子  $S$  上で定義される確率変数の集合  $Y = \{Y_s\}$  の実現値であり、観測された画像を表す。一般に、 $d$  次元の変数ベクトル  $y_s \in \mathbb{R}^d$  を仮定する。式 (3.34) の  $P(x|y)$  は事後確率と呼ばれる。また、 $y$  を観測された画像データと考えると、 $p(y|x)$  は  $x$  の関数  $L(x) \equiv p(y|x)$  とみなせる。関数  $L(x)$  を  $x$  の尤度関数と呼び通常、データを生成する確率過程を適切に記述するように定義される。

### 事前分布の選択

ベイズ統計において、未知変数  $x$  の事前分布  $P(x)$  とは、データ  $y$  を考慮するより前に  $x$  に関する（ランダム性というよりもむしろ）不確実性を表現する確率分布である。事前分布はベイズ的な考え方の基本であるが、それをどのように選択するかということはしばしば主観を伴い、そのような主観性を利用する立場と極力用いない立場に分かれた様々な考え方が提案され、議論されてきた。

変数に関する明確で限定的な情報を表現する事前分布として、共役事前分布が用いられる [37]。共役な事前分布とは、固定された尤度関数に対して事後分布もまた同じ分布族になるような事前分布であり、代数的に扱いやすい。また、変数に関して「無知」すなわち、情報の欠落を表現する事前分布として例えば、Jeffrey の事前分布 [52] のようないわゆる無情報事前分布がある。さらに、参照事前分布 (reference priors) [6, 4, 5] と呼ばれるデータによる情報を利用する無情報事前分布が提案されている。これらの事前分布は一般に、非正則である（すなわち、その和あるいは、積分が有限でない）。

画像格子上で定義される変数（ここでは、画像分割を指示するラベル）に関して、その生起確率をマルコフ確率場でモデル化することは理に適った選択であるといえる。しかし、モデルに含まれるパラメータに関しては事前分布の選択が推定手法および、その精度に影響することから、様々なアプローチが考えられる。本論文で提案するモデルについて、4.3 節で述べる。

### ベイズの定理を用いた推定

事後確率  $P(x|y)$  は観測画像  $y$  の下で、ラベル配置  $x$  の生起確率を表しているが、どの配置が生起するかを示してはいない。ベイズの定理の下で、 $x$  に対して 1 つの配置  $\hat{x}$  を示すことは一つの決定であり、統計学的にはデータ  $y$  からの推定問

題となる．一般に， $\mathbf{x}$ の「真の値」と $\hat{\mathbf{x}}$ は近い方が望ましい．事後確率 $P(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ から $\hat{\mathbf{x}}$ を推定値とする決定規則を $\mathbf{y}$ の関数 $\psi(\mathbf{y})$ として表し，推定に対する損失関数を $l(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{y}))$ とおく．ベイズ推定とは，事後確率による損失関数の期待値（つまり，期待損失）

$$E_{P(\mathbf{x}|\mathbf{y})} \{l(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{y})) | \mathbf{y}\} = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} P(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \cdot l(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{y})) \quad (3.35)$$

を最小化する $\hat{\mathbf{x}} = \psi(\mathbf{y})$ を求めることである．

事後確率 $P(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ は画像 $\mathbf{y}$ が観測されたとき，分割結果としてのラベル集合が配置 $\mathbf{x}$ である確からしさすなわち，確信度を表すと考えられる．したがって，事後確率を最大にする配置つまり，

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} P(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \\ &= \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})P(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

となる $\hat{\mathbf{x}}$ を推定値とすることは自然であり，最大事後確率（maximum a posteriori; MAP）推定と呼ばれる．ここで， $\Delta > 0$ を任意の十分小さな定数として，次のような0-1損失基準

$$l(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{y})) = \begin{cases} 0 & \text{if } \|\mathbf{x} - \psi(\mathbf{y})\| \leq \Delta \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.37)$$

として損失関数を定義すると， $\psi(\mathbf{y})$ は事後確率を最大にするための決定規則（ベイズ決定則と呼ばれる）となる．言い換えれば，MAP推定は0-1損失基準を用いた期待損失最小化に相当する．Geman & Geman[41]の論文以来，多くのビジョン問題がマルコフ確率場とMAP推定の枠組みにおいて定式化された[28, 31, 39]．MAP推定は事前分布を罰則項に対応させれば，正則化（regularization）とみなせる[65]．

一方で，事後確率ではなく，事後周辺確率を用いて推定値を決定する基準もある．これは最大事後周辺確率（maximum posterior marginal; MPM）推定と呼ばれ，MAP推定がラベル集合の全体に対して与えられたのとは異なり，サイト $s \in S$

における変数  $X_s$  に対して次のような事後周辺確率

$$P(x_s|\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x}_{(s)} \in \Omega_{(s)}} P(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \quad (3.38)$$

すなわち、サイト  $s$  を除くすべてのサイト集合に関する事後確率の周辺化を求め、これを最大にする次式のような値（ラベル）をそれぞれのサイトに対して推定値とする基準である。

$$\begin{aligned} \hat{x}_s &= \arg \max_{x_s \in \Lambda} P(x_s|\mathbf{y}) \\ &= \arg \max_{x_s \in \Lambda} \sum_{\mathbf{x}_{(s)} \in \Omega_{(s)}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})P(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

ここで、 $\mathbf{x}_{(s)}$  はサイト  $s$  を除くすべてのサイトにおける配置  $\mathbf{x}_{(s)} = \{x_r \mid r \neq s, r \in S\}$  を表し、 $\Omega_{(s)}$  を対応する配置空間とする。和は  $\Omega_{(s)}$  の可能なすべての配置に関して求められる。ベイズ統計に基づく画像修復において、MPM 推定による復元画像の方が最大事後確率を用いるよりも元の画像に近いということが指摘されている [65, 70, 92]。

### 3.5 ギブスサンブラによる推定

ギブスサンブラを含むマルコフ連鎖に基づいたモンテカルロ法の要点は、標本を抽出したい分布を不変（あるいは、定常）分布としてもつエルゴード的マルコフ連鎖を構築することである。さらに、いくつかの仮定の下で、マルコフ連鎖による標本は漸近的に目的とする確率分布に従って分布しているとみなせる。したがって、例えば、4.4 節で述べるように事後確率  $P(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  を不変分布とするマルコフ連鎖をシミュレートすることによって、抽出された標本を用いて式 (3.39) の MPM 推定を近似的に実行できる。

ギブスサンブラ（熱浴法としても知られる）は概念的には、マルコフ連鎖を用いたサンプリング法の中で最も単純な手法であるが、Geman & Geman[41] や Gelfand & Smith[36] の研究によって注目され、幅広い問題に応用されている。特に、離散変数が比較的小さな有限集合から値をとる場合や、連続的な変数が容易に標本を抽出できるような標準的な条件付き分布に従う場合などに適した手法である。

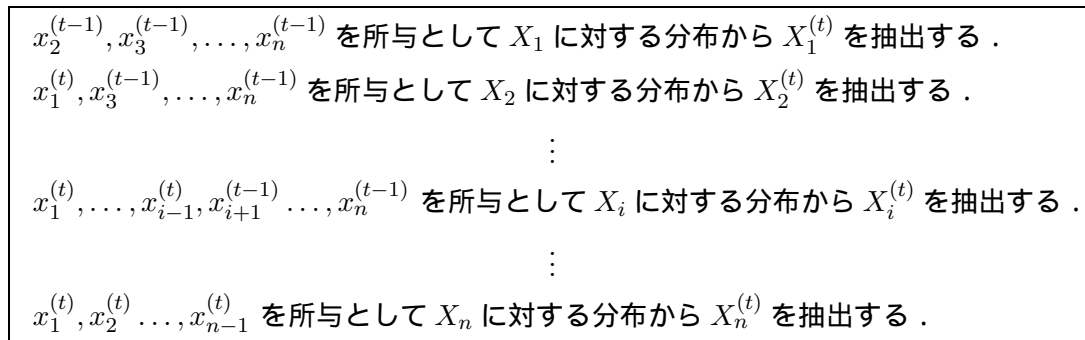


図 3.6 ギブスサンプリングのアルゴリズム .

Geman & Geman[41] は式 (3.36) において示したような MAP 推定問題に対して、シミュレーテッドアニーリング (simulated annealing) として知られるギブスサンプリングを用いた最適化アルゴリズムを適用した。一般に、最適化したい目的関数は非凸であり、多峰性を有するため、いかなる確定的な (deterministic) 最適化手法でも局所解に陥る可能性がある。シミュレーテッドアニーリングは温度という概念によってこの問題を解決しようとする、大域解を探索できる可能性をもった方法論である。

以下ではまず、ギブスサンプリングのアルゴリズムを概説し次に、シミュレーテッドアニーリングを用いた最適化について述べる。

### 3.5.1 ギブスサンプリングのアルゴリズム

離散的あるいは、連続的な確率変数  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  に対する同時確率分布  $\Pi(\mathbf{x}) = \Pi(x_1, \dots, x_n)$  から標本を抽出したいとする。ギブスサンプラでは、注目する要素を除いたすべての要素を現在の状態で固定して、注目要素の状態を対応する条件付き事後分布から抽出された標本に繰り返し置き換える。 $\mathbf{X}^{(t-1)}$  から  $\mathbf{X}^{(t)}$  を生成する手順は図 3.6 のように表現できる。 $X_{i-1}$  に対する新たな値が  $X_i$  に対する次の値を抽出するときすぐに、使われることに注意する。

適切な条件の下で、ギブスサンプラにおいて用いられるマルコフ連鎖の状態は長期間において、目的とする分布をもつ [41, 69]。つまり、 $\mathbf{X}^{(0)}$  に関係なく  $t \rightarrow \infty$  において、 $\mathbf{X}^{(t)}$  の分布は  $\Pi(\mathbf{x})$  に収束する (文献 [41] の定理 A)。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\mathbf{X}^{(t)} = \mathbf{x} | \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)}) = \Pi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.40)$$

このようなマルコフ連鎖をシミュレートすることによって、モンテカルロ法による推定で用いられる標本値を生成できる。

上述したギブスサンプリングのアルゴリズムは、 $X^{(0)}$  に対する初期状態を必要とする。理想的にはマルコフ連鎖の状態に対する不変分布  $\Pi(x)$  から  $X^{(0)}$  の標本を抽出するが、多くの場合これは可能でない。よって、通常は、 $x$  に対する事前分布からあるいは、分布の最頻値周辺からランダムに選択される。推定値に対して初期値の選択が与える影響を軽減するために、サンプリングによる最初の  $M$  個の標本を放棄するということが行われる。この最初の  $M$  回の標本抽出はバーンイン (burn-in) 期間と呼ばれる。マルコフ連鎖が状態空間をすばやく自由に遷移できるならば、比較的小さな  $M$  に対して、 $X^{(M)}$  は実質的に  $X^{(0)}$  に依存しなくなる。一方で、マルコフ連鎖が状態空間の小領域 (分布の最頻値など) から長い期間抜け出せないならば、長いバーンイン期間が必要になる。

マルコフ連鎖の挙動は推定値の収束率すなわち、許容できる正確な推定に必要な連鎖の長さ  $N$  も確定する。 $M$  および  $N$  に対する適切な値を決めるために、多くの理論的な収束判定法が提案されている。実験に基づいた比較として Cowles & Carlin[25] が挙げられる。本論文では、抽出した標本列 (あるいは、それらから計算される尺度) を図として表示し、いくつかの初期状態から生成した標本列に対して変動の様子を比較することにより、 $M$  および  $N$  の値を決定する。

### 3.5.2 シミュレーテッドアニーリングによる最適化

次式のように表現されるギブス分布をもつマルコフ確率場を考える。

$$\Pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} e^{-U(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.41)$$

ここで、 $\Pi(\mathbf{x})$  を最小にする  $\mathbf{x}$ 、言い換えれば、次のような基底状態 (ground states)  $\Omega_{\min}$  をみつきたいとする。

$$\Omega_{\min} = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \mid U(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} U(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.42)$$

Kirkpatrick ら [57] は、この系と統計物理における物理系の間にある類似性に注目した。このような系では、基底状態を見つけるためにアニーリング処理を用いる。アニーリングとは系の相互作用物質をはじめに高温で熱し、ゆっくりと冷却する

ことによって、より低い温度において平衡状態に達するようにする処理である。金属の精錬やある種の結晶の成長はこのようにして行われる。このような処理を最適化問題に適用したものがシミュレーテッドアニーリング法である。

ギブス分布に対してアニーリング処理を模倣するために温度  $T$  を導入し、式 (3.41) を次式のように再定義する。

$$\Pi_T(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z_T} e^{-U(\mathbf{x})/T} \quad (3.43)$$

したがって、次のようになる。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Pi_T(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\Omega\|} \quad (3.44)$$

すなわち、高温において  $\Pi_T(\mathbf{x})$  は一様分布のようになり、すべての状態  $\mathbf{x} \in \Omega$  は同じ生起確率をもつ。温度が下がり 1 に近づくにつれ、 $\Pi_T(\mathbf{x})$  は元々の分布  $\Pi(\mathbf{x})$  に漸近する。温度がさらに低くなった場合、以下のようなになる。

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Pi_T(\mathbf{x}) = \Pi_0(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_{\min} \\ \frac{1}{\|\Omega_{\min}\|}, & \mathbf{x} \in \Omega_{\min} \end{cases} \quad (3.45)$$

温度を下げる前に、式 (3.40) のようにマルコフ連鎖における定常分布に到達するように各温度において、モンテカルロ法によるシミュレーションが必要である。温度を十分ゆっくり下げたならば、 $\mathbf{x} \in \Omega_{\min}$  を得られることが保証される。各温度におけるマルコフ連鎖の長さおよび、温度をどのくらい下げるべきかということは、次のような冷却スケジュールによって決まる。

定理 3.2 (シミュレーテッドアニーリング)  $S = \{s_1, \dots, s_N\}$  とするとき、

$$\{\mathbf{X}^{((k-1)\tau+1)}, \mathbf{X}^{((k-1)\tau+2)}, \dots, \mathbf{X}^{(k\tau)}\}$$

が温度  $T(k)$  において、マルコフ連鎖であるような整数  $\tau \geq N$  が存在すると仮定する。 $T(k)$  が次のような条件

1.  $k \rightarrow \infty$  のとき、 $T(k) \rightarrow 0$  および、
2. 任意の  $k \geq 2$  に対して、 $T(k) \geq \frac{N\Delta}{\log k}$



を満たす任意の (減少) 温度列ならば,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(\mathbf{X}^{(k\tau)} = \mathbf{x} | \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)}) = \Pi_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.46)$$

となる.

証明 . Geman & Geman[41] の定理 B を参照 . □

$\Delta$  はエネルギー  $U(\mathbf{x})$  の大域的な最大値と最小値の差として定義される . 定理 3.2 は 2 つの条件を満たす冷却スケジュールで無限回のシミュレーションを行えば, マルコフ連鎖の収束を理論的に保証する . しかし, この冷却スケジュールはほとんど実用的ではない . まず,  $\Delta$  を計算することが不可能でありまた, 十分低い温度になるまでには非常に多くの反復回数が必要であるからである . 実際に, Geman & Geman[41] が用いた近似的なスケジュールは

$$T(k) = \frac{C}{\log(1+k)}, \quad k \geq 1 \quad (3.47)$$

である . ただし,  $C = 3.0$  あるいは,  $C = 4.0$  とした ( $C \ll N\Delta$ ) . このスケジュールのほかにもある意味において, 最適な冷却スケジュールを求める研究が行われた [69] .

### 3.6 おわりに

本章では, マルコフ確率場モデルによる画像表現と, 関連するベイズ推定および, ギブスサンプリングアルゴリズムについて述べた .

まず, 一般的な確率場について述べ, 画像のような規則的な格子上における近傍系および, クリークを定義しさらに, マルコフ確率場を定義した . ギブス分布について述べ, マルコフ確率場とギブス分布の等価性を概説した . 代表的なマルコフ確率場モデルとして, イジング模型とポッツ模型および, 線過程について述べた . マルコフ確率場によって定式化される画像処理問題と関連の深い事項として, ベイズの定理を用いた推定を概説しまた, 具体的な計算近似手法として, ギブスサンプリングについて述べた .

## 第 4 章

# マルコフ確率場と階層的事前分布による画像分割

### 4.1 はじめに

本章では，マルコフ確率場モデルによる画像表現に階層的な事前分布を導入したモデルを提案する．ここでは，画像の領域分割を画素の分類問題と考える．すなわち，画像格子上において，各サイトを最適な部分領域に帰属させることが課題である．

4.2 節において，マルコフ確率場モデルによる画像分割問題の定式化を行う．部分領域を示すラベルの生起確率はマルコフ確率場によって，モデル化される．観測画像はラベルが与えられたとき，それぞれがラベルにより指示される確率分布に従う（独立な）確率変数の集合として定式化される．観測された画像の下で，ラベル配置の事後確率はこれらの定義からベイズの定理に従って求められ，事後確率あるいは，事後確率より求まる事後周辺確率から一定の基準により，各サイトに対する最適な状態を決定する．事前分布の選択は推定手法の構築および，推定結果の精度に影響する問題であり，4.3 節で階層的な事前分布構造を提案する．4.4 節では，提案モデルに対するギブスサンプリングを用いた画像分割の推定法について述べる．4.5 節で実験結果および考察について述べる．

## 4.2 画像のモデル表現

基本的な画像モデルは次のように記述される．大きさが  $M \times N$  の2次元格子を  $S = \{(i, j) | 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N\}$  と記述する．観測された画像は  $S$  上で定義される確率変数の集合  $Y = \{Y_s | s \in S\}$  の実現値すなわち， $\{Y = y\} \equiv \{Y_s = y_s | s \in S\}$  とする．各画素がとり得る値は一般に， $d$ 次元ベクトル  $y \in \mathbb{R}^d$  を仮定する．また，以下では，観測画像を  $y \equiv \{y_s\}$  と略記する．モデル次数  $L$  は画像を構成する部分領域の最大数を与え，状態空間  $\Lambda = \{1, 2, \dots, L\}$  をそのような部分領域の集合とする．画像の領域分割とは，画素と同じ格子  $S$  上で定義される確率変数の集合  $X$  にラベル  $x \in \Omega$  を割り当てることである．したがって，各サイトの状態は  $\Lambda$  からの値  $x_s$  をとる．ここで， $\Omega = \Lambda^{M \times N}$  はラベルに対する配置空間を表す．また，観測画像と同様に， $\{X = x\} \equiv \{X_s = x_s | s \in S\}$  を  $x \equiv \{x_s\}$  と略記する．ある近傍系を仮定するとき，サイト  $s$  の近傍にあるサイト集合を  $\mathcal{N}_s$  と記述しまた， $\mathcal{N}_s$  に対するラベル集合を  $x_{\mathcal{N}_s} \equiv \{x_r | r \in \mathcal{N}_s\}$  と記述する．

以下では，ベイズの定理に基づいて画像の領域分割問題を定式化する．

### 4.2.1 サイトの状態に対する事前確率

画像格子上のサイトにおける状態の確率分布はその空間的な特性を考慮して，モデル化される．画像格子上の2つのサイト間には相互作用があり，それらの状態は従属的であるが，その位置がある程度離れていれば，直接的にはそのような相関関係はなく，2つのサイト間に位置するより近いサイトを通して影響しあうと考えられる．このような性質はマルコフ確率場によって，効果的に定式化される．ここでは，各サイト  $s \in S$  におけるラベル  $x_s$  は次式のように，マルコフ確率場に従って生起するものと仮定する．

$$P(x_s | x_{\mathcal{N}_s}, \{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \beta) = \frac{\exp\{-\alpha_{x_s} - \sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(x_s, x_r)\}}{\sum_{\lambda \in \Lambda} \exp\{-\alpha_\lambda - \sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(\lambda, x_r)\}} \quad (4.1)$$

ここで， $\mathcal{N}_s$  に対して，図 3.1 (a) に示す最近傍系を仮定し，マルコフ確率場は一様かつ，等方的であるとした．すなわち，二項サイトクリークに対する相互作用係数  $\beta_{s,r}$  はサイトの格子上での位置および， $s$  と  $r$  の方向によらず一定の値  $\beta$  をとるものとする．また，単項サイトクリークに対する外場パラメータ  $\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$

は各状態に対して定義される．関数  $I(x_s, x_r)$  はサイト  $s$  および  $r$  の状態が異なる ( $x_s \neq x_r$ ) とき 1, そうでない ( $x_s = x_r$ ) とき  $-1$  をとる．

式 (4.1) に対する同時確率はマルコフ確率場とギブス分布の等価性定理 [45] から, 次のように定式化される．

$$P(\mathbf{x}|\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \beta) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ - \sum_{s \in \mathcal{S}} \alpha_{x_s} - \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(x_s, x_r) \right\} \quad (4.2)$$

ここで, 分配関数 (あるいは, 規格化定数)  $Z$  は

$$Z = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \exp \left\{ - \sum_{s \in \mathcal{S}} \alpha_{x_s} - \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(x_s, x_r) \right\} \quad (4.3)$$

のように計算され通常, 解析的あるいは, 数値計算的にも評価することは不可能である．そのため, 2つの異なるマルコフ確率場 (すなわち, ギブス分布) に対する実現値を比較できない．言い換えれば, パラメータ  $\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  および  $\beta$  の尤度を求められない．これに対して, Besag[9, 10] は式 (4.2) のようなマルコフ確率場による尤度関数を格子上の各サイト  $s \in \mathcal{S}$  に対する局所的な確率  $P(x_s | \mathbf{x}_{\mathcal{N}_s}, \{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \beta)$  の積として, 次式のように近似した．

$$PL(\mathbf{x}; \{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \beta) \equiv \prod_{s \in \mathcal{S}} P(x_s | \mathbf{x}_{\mathcal{N}_s}, \{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \beta) \quad (4.4)$$

これは擬似尤度と呼ばれ, パラメータの最尤推定などに用いられる [42]．Geman & Graffigne[42] は一般的な条件の下で, 最大擬似尤度推定の存在性, 一意性および, 一貫性を証明した．式 (4.2) の代わりに, 擬似尤度による近似

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}|\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \beta) &\approx PL(\mathbf{x}; \{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \beta) \\ &= \prod_{s \in \mathcal{S}} \frac{\exp \{ -\alpha_{x_s} - \sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(x_s, x_r) \}}{\sum_{\lambda \in \Lambda} \exp \{ -\alpha_\lambda - \sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(\lambda, x_r) \}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

を用いることにする．

### 4.2.2 ラベルの尤度

観測画像は混合正規分布に従って生成される実現値の集合であると仮定する．混合正規分布の密度関数は，観測された画像を構成する部分領域に対応してモデル次数を  $L$  とすると， $L$  個の多変量正規分布の密度関数  $\{p_\lambda(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$  の重みつき線形和によって定義される．すなわち，密度関数

$$p(\mathbf{y} | \{\boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}) = \sum_{\lambda=1}^L P(\lambda) p_\lambda(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda) \quad (4.6)$$

ただし，

$$p_\lambda(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_\lambda|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\lambda)' \boldsymbol{\Sigma}_\lambda^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\lambda) \right\} \quad (4.7)$$

をもつ確率分布に従って，画像内の各画素  $s \in \mathcal{S}$  は互いに独立に値  $\mathbf{y}_s \in \mathbb{R}^d$  をとるものと仮定する．ここで，混合正規分布のパラメータ  $\{\boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  は，ラベル  $\lambda \in \Lambda$  によって指定される多変量正規分布に対する  $d$  次元の平均ベクトル  $\boldsymbol{\mu}_\lambda$  および， $d \times d$  の共分散行列  $\boldsymbol{\Sigma}_\lambda$  を表す．また， $P(\lambda) \equiv \omega_\lambda$  は混合パラメータと呼ばれ，次のような条件を満たす．

$$\sum_{\lambda=1}^L \omega_\lambda = 1 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq \omega_\lambda \leq 1, \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (4.8)$$

言い換えれば，観測画像はそれぞれが多変量正規分布によってモデル化される部分領域から構成される．画像格子上的サイト  $s \in \mathcal{S}$  がラベル  $\lambda \in \Lambda$  をもつ部分領域に帰属する，すなわち，状態  $x_s = \lambda$  とすれば，同じ格子上で定義される変数  $Y_s$  に対する確率密度関数は式 (4.7) より，それぞれ

$$p(\mathbf{y}_s | x_s = \lambda, \boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_\lambda|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_\lambda)' \boldsymbol{\Sigma}_\lambda^{-1} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_\lambda) \right\} \quad (4.9)$$

と記述できる．

### 4.3 パラメータの事前確率分布

パラメータに対する事前分布はしばしば主観的に選択されるが，事後分布の評価に直接関連し，推定の質に影響を与えると考えられる．Barker[3] や Kato[55] は無情報事前分布である一様分布や参照事前分布 (reference priors) [6, 4, 5] を用いた．本論文では，観測されたデータをより積極的に利用するために，パラメータに対して共役な事前分布を用いる．さらに，パラメータの事前分布に含まれるパラメータすなわち，ハイパパラメータを確率変数とする階層モデルを導入する．提案モデルの事後分布に対してギブスサンプラを用いた分布推定を適用し，パラメータおよびサイトの状態 (分割結果) を同時に推定する．

モデルに含まれるパラメータは，マルコフ確率場における外場係数  $\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  と二項サイトクリークに関する相互作用係数  $\beta$  および，多変量正規分布における平均ベクトルと共分散行列  $\{\mu_\lambda, \Sigma_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  である．以下では，それぞれのパラメータに対する事前分布について述べる．

#### 4.3.1 マルコフ確率場のパラメータ

式 (4.1) で定義された各サイトにおける局所的な状態確率について，相互作用係数  $\beta$  を 0 とおく．すなわち，二項サイトに関するクリークポテンシャルを無視すると

$$P(x_s | \mathbf{x}_{N_s}, \{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \beta = 0) = \frac{e^{-\alpha_{x_s}}}{\sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-\alpha_\lambda}} \approx P(x_s) \quad (4.10)$$

となり，各サイトの状態は互いに独立とみなせる．マルコフ確率場における外場係数はラベルの生起確率に相当し，したがって，混合正規分布における混合パラメータと等価であるといえる．そこで，式 (4.8) の条件を満たす混合パラメータ  $\{\omega_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  を用いて，外場係数  $\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  を

$$\alpha_\lambda = -\log \omega_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda = \{1, \dots, L\} \quad (4.11)$$

とおき，その事前分布として，次のように (多項分布の共役分布である) ディリクレ分布を仮定する．

$$(\omega_1, \dots, \omega_L) \sim \mathcal{D}(u, \dots, u) \quad (4.12)$$

ここで、 $\mathcal{D}(u, \dots, u)$  はディリクレ分布を表し、パラメータはすべて同じ値  $u = 1$  をとるものとする。

二項サイトクリークに関する相互作用係数である  $\beta$  に関して、式 (4.5) の擬似尤度による近似の結果、あるラベル配置の下で  $\beta$  の事後分布が正則でないことがある [3, 55]。そこで、 $\beta$  は定数として、実験的にその値を定めることにする。

### 4.3.2 多変量正規分布のパラメータ

提案モデルはデータが互いに独立であると仮定するのではなく、データ間の相互作用を考慮する拡張された混合モデルとも解釈できる。これは前項で述べた通り、マルコフ確率場における外場係数と混合正規分布における混合パラメータが等価であることからわかる。

混合モデルに対して、無情報事前分布はモデルパラメータに関する非正則な事前分布を与える。混合モデルを構成する要素（確率分布）のなかで、観測データが1つも帰属しない要素が存在する可能性がありこのとき、データはそれらの要素に関する情報を持たない。例えば、観測データ  $\mathbf{y} = \{y_s\}$  に対して、 $\lambda$  番目の要素に帰属するデータがないつまり、 $x_s = \lambda$  となるデータが1つもない場合、パラメータ  $(\mu_\lambda, \Sigma_\lambda)$  の事後分布（各要素パラメータは独立であるとする） $p(\mu_\lambda, \Sigma_\lambda | \mathbf{y}, \mathbf{x})$  はデータが情報を持たないため、事前分布  $p(\mu_\lambda, \Sigma_\lambda)$  と同じになる。この事前分布が非正則であれば、事後分布  $p(\mu_\lambda, \Sigma_\lambda | \mathbf{y}, \mathbf{x})$  も非正則でありしたがって、

$$p(\mu_\lambda, \Sigma_\lambda | \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} p(\mu_\lambda, \Sigma_\lambda, \mathbf{x} | \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} p(\mu_\lambda, \Sigma_\lambda | \mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \quad (4.13)$$

より  $p(\mu_\lambda, \Sigma_\lambda | \mathbf{y})$  も同様に、非正則になる。

本論文では、Richardson & Green[79] が一変量データに対して用いた階層的な事前分布に基づき、これを多次元パラメータに対する事前分布に拡張する。この事前分布は「弱情動的」である。すなわち、パラメータはデータから得られる情報に依存するかあるいは、あまり依存しないかもしれない。階層的な事前分布の導入と既定のハイパパラメータの選択によって、パラメータに関して「最小限」の仮定をする。

ここでは、画像内の部分領域に関して、次のような仮定をおく。

1. 特徴量の平均値は観測データの変動区間に対して、均一である。

2. 特徴量の分散はそれぞれの領域で同じような値となる .

1つ目の仮定は多変量正規分布に対して、観測データの変動区間における中間点を平均ベクトルとし、区間の幅から適当な分散を決定することにより達成できる . 2つ目はそれぞれの領域内で特徴量の値が極端にばらついたり、集中することはないという信念を反映する .

提案モデルにおける式 (4.9) の多変量正規分布に関して、平均ベクトルと共分散行列  $\{\mu_\lambda, \Sigma_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  の事前分布としてそれぞれ、次のように多変量正規分布および、ウィッシュャート分布を仮定する .

$$\mu_\lambda \sim \mathcal{N}_r(\xi, \kappa^{-1}) \quad (4.14)$$

$$\Sigma_\lambda^{-1} | \rho \sim \mathcal{W}_r(ar, (r\rho)^{-1}) \quad (4.15)$$

ただし、平均ベクトル  $\mu$  および共分散行列  $\Sigma$  をパラメータにもつ多変量正規分布を  $\mathcal{N}_r(\mu, \Sigma)$  と記述し、自由度  $m (\geq d)$  および  $d \times d$  の正定値行列  $V$  をパラメータとするウィッシュャート分布を  $\mathcal{W}_r(m, V)$  と記述する . 定数パラメータである  $d$  次元ベクトル  $\xi$  および、 $d \times d$  の (対角) 行列  $\kappa$  はそれぞれ、次のように計算される .

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)' \quad (4.16)$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} R_1^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_r^{-2} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

ただし、 $R_i, i = 1, \dots, r$  は観測されたデータが変動する区間 (値域) の幅を示し、 $\xi_i, i = 1, \dots, r$  はその区間の中間点を示す . 式 (4.14) および式 (4.15) は  $(\mu_\lambda, \Sigma_\lambda)$  の各組が先験的に依存していないので、多変量正規分布の自然共役な事前分布すなわち、正規-ウィッシュャート分布ではないがそれぞれ、パラメータに関して共役的である .

平均ベクトルに対する事前分布  $\mathcal{N}_r(\xi, \kappa^{-1})$  は、 $\mu_\lambda$  がデータの変動区間に関して均一であるという信念を反映する . ここで、ウィッシュャート分布のパラメータ (ハイパラメータ)  $\rho$  を確率変数とみなして、次のように階層的な事前分布を導入する .

$$\rho \sim \mathcal{W}_r(qr, (r\nu)^{-1}) \quad (4.18)$$



ただし,  $d \times d$  の対角行列  $\nu$  は次式のように計算される.

$$\nu = \begin{pmatrix} \frac{100q}{aR_1^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{100q}{aR_2^2} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

観測データの幅に関する知識が分散共分散  $\Sigma_\lambda$  に関して多くを示唆する, という仮定は限定的であると考えられる [79]. 式 (4.15) および式 (4.18) の仮定において, ウィッシュャート分布の自由度を  $a > 1 > q$  とおくことにより,  $\Sigma_\lambda$  が同じような値をとるとい信念をその絶対的な値に関して制限する (例えば, すべて等しいとおく) ことなく表現する. 式 (4.18) のウィッシュャート分布は  $q < 1$  とおくとき非正則な分布となるが, その事後分布は正則であることが示される [90].

#### 4.4 モデルの事後分布と推定

4.2 節で定義した画像モデルと, 4.3 節で導入したパラメータの事前分布から, 観測データを含むすべての変数の同時分布は次のように記述できる.

$$p(\beta, \alpha, \mu, \Sigma, \rho, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mu, \Sigma)P(\mathbf{x}|\beta, \alpha)p(\beta)p(\alpha)p(\mu)p(\Sigma|\rho)p(\rho) \quad (4.20)$$

ただし, ここでは,  $\alpha = \{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ,  $\mu = \{\mu_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  および,  $\Sigma = \{\Sigma_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  を意味するものとする. この階層的なモデルは図 4.1 に示すように, 有向非循環グラフとして表現される.

本論文で提案するモデルの事後確率分布はベイズの定理を用いて, 次式のように与えられる.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, \theta, \phi | \mathbf{y}) &= \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \phi)P(\mathbf{x}|\theta)p(\theta)p(\phi)}{\sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Theta \times \Phi} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \phi)P(\mathbf{x}|\theta)p(\theta)p(\phi) d\theta d\phi} \\ &\approx \frac{1}{Z} \prod_{s \in \mathcal{S}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{r}{2}} |\Sigma_{x_s}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_{x_s})' \Sigma_{x_s}^{-1} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_{x_s}) \right\} \\ &\quad \times \prod_{s \in \mathcal{S}} \frac{\omega_{x_s} \exp \left\{ -\sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(x_s, x_r) \right\}}{\sum_{\lambda \in \Lambda} \omega_\lambda \exp \left\{ -\sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(\lambda, x_r) \right\}} \\ &\quad \times p(\rho) p(\omega_1, \dots, \omega_L) \prod_{\lambda=1}^L p(\boldsymbol{\mu}_\lambda) p(\Sigma_\lambda | \rho) \end{aligned} \quad (4.21)$$

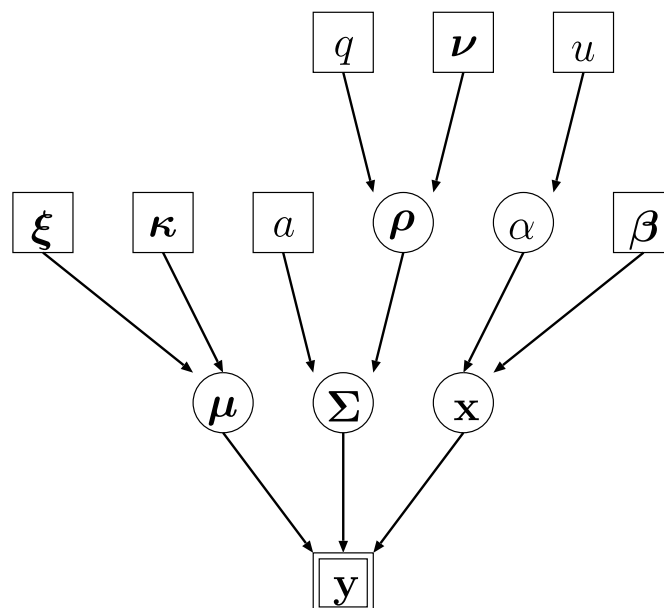


図 4.1 提案モデルの有向非循環グラフ表現．円で囲まれる量は未知変数を指示し，矩形は既知の定数を表し，二重の矩形は観測データを示す．矢印はモデルの条件付き独立構造を表現する．

ここで， $Z$  は規格化のための定数である．また， $\theta$  および  $\phi$  はそれぞれ，マルコフ確率場と多変量正規分布におけるパラメータを表し， $\Theta$  および  $\Phi$  は対応するパラメータ空間を示すものとする．上式 (4.21) では，式 (4.11) によって外場係数  $\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  を混合パラメータ  $\{\omega_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  に置き換え，式 (4.5) の擬似尤度による近似を用いた．モデルパラメータに対する事前分布の密度関数はそれぞれ，式 (4.12)，式 (4.14)，式 (4.15) および，式 (4.18) の仮定より得られる．

画像分割問題は式 (4.21) の事後分布に基づいて，画像格子上で定義されるサイトの状態および，モデルパラメータに関する最適化問題として，次のように定式化される．

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*, \theta^*, \phi^* &= \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega, \theta \in \Theta, \phi \in \Phi} p(\mathbf{x}, \theta, \phi | \mathbf{y}) \\ &= \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega, \theta \in \Theta, \phi \in \Phi} p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \phi) P(\mathbf{x} | \theta) p(\theta) p(\phi) \end{aligned} \quad (4.22)$$

上式 (4.22) はサイトの状態とモデルパラメータに対する最大事後確率 (maximum a posteriori; MAP) 推定と呼ばれる．あるいは，別の基準として，次式のような

最大事後周辺確率 (maximum posterior marginal; MPM) 推定がある .

$$x_s^* = \arg \max_{x_s \in \Lambda} P(x_s | \mathbf{y}) = \arg \max_{x_s \in \Lambda} \sum_{\mathbf{x}_{(s)} \in \Omega_{(s)}} P(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \quad (4.23)$$

ここで,  $\mathbf{x}_{(s)}$  はサイト  $s$  を除くすべてのサイトにおける配置  $\{x_r | r \neq s, r \in \mathcal{S}\}$  を表し,  $\Omega_{(s)}$  を対応する配置空間とする . 確率  $P(\mathbf{x} | \mathbf{y})$  はモデルパラメータに関して事後確率密度関数  $p(\mathbf{x}, \theta, \phi | \mathbf{y})$  を周辺化することにより, 次式のように得られる .

$$P(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \int_{\Theta \times \Phi} p(\mathbf{x}, \theta, \phi | \mathbf{y}) d\theta d\phi \quad (4.24)$$

事後周辺確率による推定は画素あたりの誤識別に対して, その総数の期待値を効果的に最小化する .

これらの基準を評価し, サイトの状態とモデルパラメータに対する推定値を決定するために, 様々なアルゴリズムが提案されている . 一般的な大きさの自然画像では, ラベルの配置空間  $\Omega$  に関して評価することは解析的あるいは, 数値計算的にも困難であるため, なんらかの近似解法が必要である . 本論文では, このような問題に対してギブスサンプリングあるいは, シミュレーテッドアニーリング法を適用する .

#### 4.4.1 提案モデルに対するギブスサンプリング

ギブスサンプリングのアルゴリズムを提案モデルに適用すると, 以下の 5 つの手順から構成される . ただし, 以下では, 注目している要素を除く他のすべての (固定された) パラメータを記号 ' $\dots$ ' と省略する .

1.  $s \in \mathcal{S}$  について,  $x_s$  を条件付き事後確率  $P(x_s | \dots)$  から抽出する .
2.  $\lambda \in \Lambda$  について,  $\omega_\lambda$  を条件付き事後分布  $p(\omega_\lambda | \dots)$  から抽出する .
3.  $\lambda \in \Lambda$  について,  $\mu_\lambda$  を条件付き事後分布  $p(\mu_\lambda | \dots)$  から抽出する .
4.  $\lambda \in \Lambda$  について,  $\Sigma_\lambda$  を条件付き事後分布  $p(\Sigma_\lambda | \dots)$  から抽出する .
5.  $\rho$  を条件付き事後分布  $p(\rho | \dots)$  から抽出する .

それぞれの手順における条件付き事後確率密度は各パラメータに対する共役な事前分布の仮定（式(4.12), 式(4.14), 式(4.15)および, 式(4.18)）から, 解析的に求められる. 例えば, 画像格子上的サイト  $s \in \mathcal{S}$  に対する状態  $x_s$  について, 他のすべてのパラメータを固定した条件付き事後確率は次のようになる.

$$\begin{aligned}
& P(x_s = \lambda | \mathbf{x}_{\mathcal{N}_s}, \alpha_\lambda, \beta, \boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda, \mathbf{y}_s) \\
& \propto P(x_s = \lambda | \mathbf{x}_{\mathcal{N}_s}, \alpha_\lambda, \beta) p(\mathbf{y}_s | x_s = \lambda, \boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda) \\
& \propto \exp \left\{ -\alpha_\lambda - \sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(\lambda, x_r) \right\} \cdot |\boldsymbol{\Sigma}_\lambda|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_\lambda)' \boldsymbol{\Sigma}_\lambda^{-1} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_\lambda) \right\} \\
& = \omega_\lambda |\boldsymbol{\Sigma}_\lambda|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_\lambda)' \boldsymbol{\Sigma}_\lambda^{-1} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_\lambda) - \sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(\lambda, x_r) \right\} \quad (4.25)
\end{aligned}$$

上式(4.25)の条件付き事後確率は通常混合正規分布によってモデル化される潜在(あるいは, 隠れ)変数に対する事後確率[90]と比較して, マルコフ確率場による変数間の相互作用を表現する項  $-\sum_{r \in \mathcal{N}_s} \beta I(x_s = \lambda, x_r)$  をもつ.

同様に, モデルパラメータに対してそれぞれ, 次のような条件付き事後分布が解析的に求まる.

$$(\omega_1, \dots, \omega_L) | \dots \sim \mathcal{D}(u + m_1, \dots, u + m_L) \quad (4.26)$$

$$\boldsymbol{\mu}_\lambda | \dots \sim \mathcal{N}_r \left( (m_\lambda \boldsymbol{\Sigma}_\lambda + \boldsymbol{\kappa})^{-1} (m_\lambda \boldsymbol{\Sigma}_\lambda \bar{\mathbf{y}}_\lambda + \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\xi}), (m_\lambda \boldsymbol{\Sigma}_\lambda + \boldsymbol{\kappa})^{-1} \right) \quad (4.27)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_\lambda | \dots \sim \mathcal{W}_r \left( ar + m_\lambda, \left[ r \boldsymbol{\rho} + \sum_{s \in \mathcal{S}_\lambda} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_\lambda)(\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_\lambda)' \right]^{-1} \right) \quad (4.28)$$

$$\boldsymbol{\rho} | \dots \sim \mathcal{W}_r \left( qr + arL, \left[ r \boldsymbol{\nu} + r \sum_{\lambda=1}^L \boldsymbol{\Sigma}_\lambda^{-1} \right]^{-1} \right) \quad (4.29)$$

ただし, 集合  $\mathcal{S}_\lambda = \{s \in \mathcal{S}, x_s = \lambda\}$  はラベル  $\lambda \in \Lambda$  を割り当てられたサイト(部分)集合を表し,  $m_\lambda$  はその要素数(すなわち, 集合の濃度)とする. ベクトル  $\bar{\mathbf{y}}_\lambda$  は次式のように,  $\mathcal{S}_\lambda$  に対応する画素がとる値の平均値とする.

$$\bar{\mathbf{y}}_\lambda = \frac{1}{m_\lambda} \sum_{s \in \mathcal{S}_\lambda} \mathbf{y}_s, \quad \lambda \in \Lambda \quad (4.30)$$

式(4.21)の密度関数  $p(\mathbf{x}, \theta, \phi | \mathbf{y})$  をもつ事後分布からギブスサンプラを用いて  $N$  個の標本列  $\{\mathbf{x}^{(k)}, \theta^{(k)}, \phi^{(k)} | k = 0, \dots, N-1\}$  を抽出したとすると, 観測画像  $\mathbf{y}$  を

所与として，サイト  $s \in \mathcal{S}$  における状態  $x_s$  に対する事後周辺確率  $P(x_s|\mathbf{y})$  は次式のように，近似できる．

$$\begin{aligned} P(x_s = \lambda|\mathbf{y}) &= \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \delta(x_s, \lambda) \int_{\Theta \times \Phi} p(\mathbf{x}, \theta, \phi|\mathbf{y}) d\theta d\phi \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(x_s^{(k)}, \lambda) \equiv \hat{P}(x_s = \lambda|\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ここで， $\delta(i, j)$  はクロネッカーのデルタである．サイト  $s$  の状態が  $x_s = \lambda$  となる確率は標本平均として近似され，近似された確率  $\hat{P}(x_s = \lambda|\mathbf{y})$  により，式 (4.23) の MPM 推定値は次のように決定できる．

$$x_s^* \approx \arg \max_{\lambda \in \Lambda} \hat{P}(x_s = \lambda|\mathbf{y}) = \arg \max_{\lambda \in \Lambda} \#\{k | x_s^{(k)} = \lambda\} \quad (4.32)$$

ここで， $\#\{k | x_s^{(k)} = \lambda\}$  は状態が  $x_s = \lambda$  となる標本の総数を表す．すなわち，生成された標本列の中で最も多く出現したラベルを MPM 推定値とする．

初期状態  $\mathbf{x}^{(0)}$  は各サイトごとに一様乱数によって決定し，各モデルパラメータの初期値はそれぞれの事前分布からランダムに抽出する．上述のギブスサンプリングにより，初期標本からはじまって，次々と標本を抽出していく．3.5.1 節で述べたように，推定には初期値に依存しない（とみなせる）標本列のみを用いることにする．本論文では，マルコフ連鎖の収束を判定するために，抽出されたラベルの標本列  $\{x^{(k)}\}$  について，次式のような二項サイトクリークに関するエネルギーを計算する．

$$U_2(\mathbf{x}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{r \in \mathcal{N}_s} I(x_s, x_r) \quad (4.33)$$

この値が初期値に依存せずに，安定して変動しているかを観察することによって，収束を判定する．

#### 4.4.2 シミュレーテッドアニーリング法による最適化

各サイトに対する状態の推定値すなわち，ラベルを決定するもう一つの基準として，MAP 推定を実行する．前述のギブスサンプラにおける条件付き事後分布にそれぞれ，温度パラメータ  $T(k)$  を追加することにより，シミュレーテッドアニーリング法を用いてモデルの事後確率に関して，各サイトの状態およびパラメータ

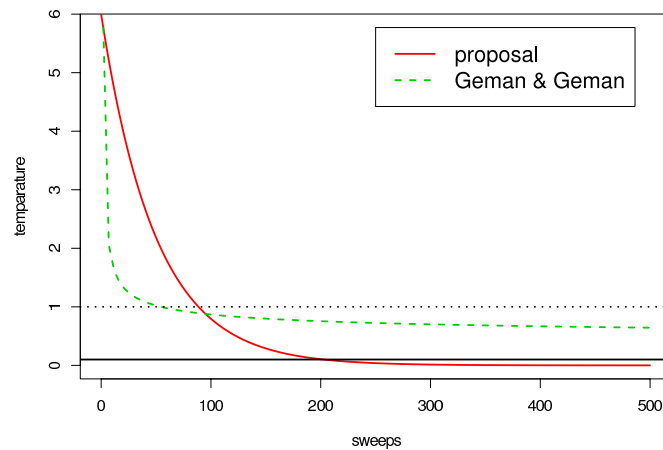


図 4.2 実験に用いた冷却スケジュール．比較のため，Geman & Geman[41] が用いたスケジュール ( $C = 4.0$  とする) を点線で示す．

の最適化を行う．ここでは，実験的に，次のような冷却スケジュールを用いることにする．

$$T_k = 0.98 T_{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (4.34)$$

ただし，初期温度は  $T_0 = 6.0$  とする．実験に用いた冷却スケジュールおよび，Geman & Geman[41] が用いたスケジュール ( $C = 4.0$  とする) を図 4.2 にそれぞれ，実線と点線で示す．Geman & Geman[41] のゆっくり冷却する対数スケジュールは一般に，よりロバストであると考えられるが，ここでは，妥当な反復回数で収束させるために式 (4.34) を用いる．小さな温度の値は事後分布の計算において，オーバーフローを引き起こす可能性があるため，温度が  $T_k < 0.1$  となる  $k \approx 200$  回の反復後にアルゴリズムを終了する．

## 4.5 実験結果および考察

提案手法を自然画像の分割に適用した．本節では，ギブスサンプリングによるマルコフ連鎖の収束に関する実験について述べ，自然画像に対する提案モデルの MPM 推定および，MAP 推定による分割結果を示す．

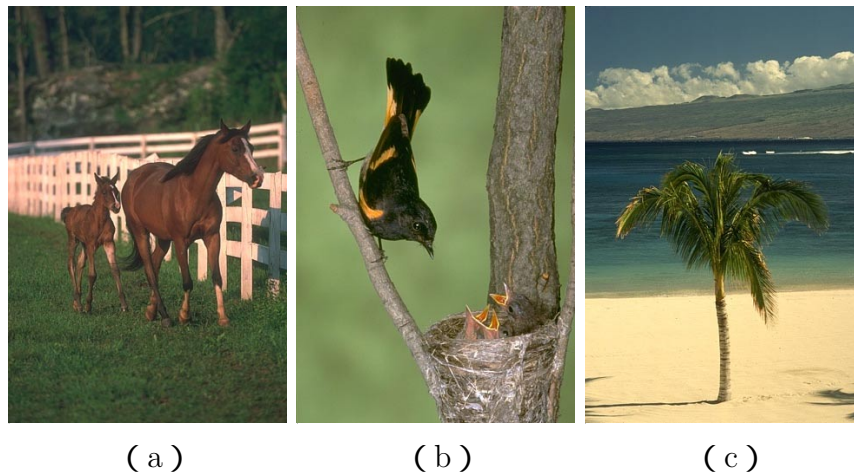


図 4.3 収束判定に用いた自然画像の例 [66] .

#### 4.5.1 マルコフ連鎖の収束判定

提案モデルの条件付き事後分布に対して、ギブスサンプリングによるマルコフ連鎖の収束について調べる。提案モデルはマルコフ確率場において、二項サイトクリークに関する相互作用を考慮しないとき、多変量正規分布の混合モデルとなる。ギブスサンプリングを使った混合正規分布の解析に関して、「トラップ状態」の問題が報告されている [89]。Robert [80] は以下のように述べている。

連鎖の理論的な既約性にもかかわらず、ギブスサンプリングは事実上、混合要素分布の一つにごく少数の観測値が割り当てられる状況にトラップされる。

このようなトラップ状態は、少数の観測値を含む混合要素分布がごく小さな分散をもつことを許容することによって起こり得る。つまり、要素分布の平均を観測データの 1 点におくような尤度における特異点にパラメータの値が近づきかつ、その分散が零になる傾向が許容される。これは要素分布の分散を等しくなるように制約するかあるいは、本論文で行ったように、事前分布の階層構造によりそれぞれの要素分布に対して、類似した分散となることを優遇することで回避できる。この事前分布は事後確率密度に関して正則化の効果をもち、尤度における特異点付近の極大値を減らしあるいは、除去する。

図 4.3 に示す自然画像 [66] に対して、実験を行った。入力された画像はまず、画素ごとに RGB 色空間から  $L^*a^*b^*$  色空間内の座標値に変換される。したがって、各

画素は  $d = 3$  次元ベクトルで表される．モデルに含まれる定数パラメータはそれぞれ， $a = 3$ ， $q = 0.3$ ， $u = 1$  とした．ここでは，シミュレーションの反復回数を最大 2,000 とし，マルコフ確率場のパラメータを  $\beta = 0.5$  とした．モデル次数はすべての画像に対して， $L = 10, 15$  を指定した．

マルコフ連鎖のシミュレーションによって得られた標本列に対して，式 (4.33) で定義したラベル標本の二項サイトクリークに関するエネルギーを計算した結果を図 4.4 に示す．ギブスサンプラはシミュレーションの初期において，エネルギーの高い状態から低い状態へすばやく移動していることがわかる．実験に用いた各入力画像に対する事後分布には 2 個から 3 個の最頻値が存在し，ギブスサンプラはそれら最頻値に対応するパラメータ空間内の（明確に分割される）領域をある期間をかけて移動する．

図 4.3 (b) および (c) の画像に対して得られた標本列の中には，ギブスサンプラがパラメータ空間内のいくつかの領域を移動して抽出されたものがある．これは，分割される領域数の上限を指定するモデル次数が入力画像に対して大きいため，言い換えれば，入力画像がモデル次数よりも少ない領域でモデル化できるためであると考えられる．シミュレーションの途中で，それまで少なくとも 1 つ以上のサイトに割り当てられていたラベルがどのサイトにも割り当てられなくなることが起こり得る．また，それとは逆に，割り当てられていなかったラベルが割り当てられるようになることもある．このようなときに対応して，エネルギーに大きな変化がみられる．

2 つのモデル次数  $L = 10, 15$  に関して，各入力画像とも，シミュレーションに顕著な違いはみられなかった．比較的大きなモデル次数を指定しても入力画像をモデル化するために必要な次数に対応して，ギブスサンプラが状態空間および，パラメータ空間の限定された領域を移動するためであると考えられる．



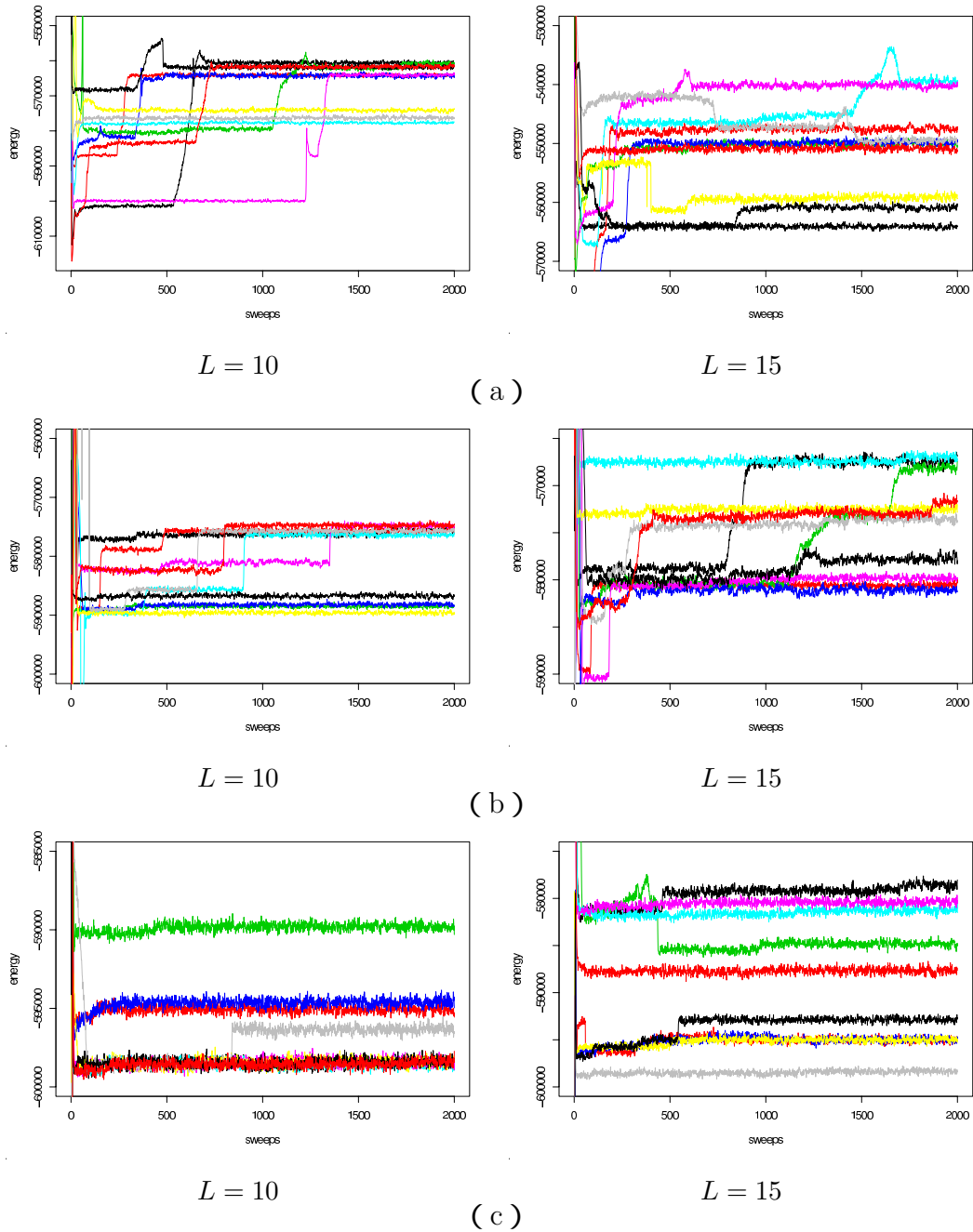


図 4.4 複数のラベル標本列の二項サイトクラスターに関するエネルギー変化．縦軸と横軸はそれぞれエネルギーの値および標本の長さを示す．グラフはそれぞれ図 4.3 (a) から (c) の画像に対応し， $L$  はモデル次数を表す．

### 4.5.2 提案手法による画像分割

前項の実験からまず、800 回の反復抽出をバーンイン期間のシミュレーションとして行うことにした。さらに 200 回の反復抽出を行って得られた標本を用いて、各サイトの状態に対する MPM 推定値（ラベル）を決定する。マルコフ確率場のパラメータは  $\beta = 0.5$  とし、モデル次数はすべての入力画像に対して、 $L = 10, 15, 20$  の 3 通りで実験した。また、同様に、 $\beta = 0.5$  および、 $L = 10, 15$  として、シミュレーテッドアニーリング法による MAP 推定を行った。初期状態およびパラメータはそれぞれの事前分布からランダムに抽出される。実験に用いた入力画像の例を図 4.5 に示し、MPM および MAP 推定による画像の（それぞれ、 $L = 10$  に対する）分割結果を図 4.6 に示す。

入力画像に対するシミュレーテッドアニーリングの収束の様子を図 4.7 に示す。高い温度  $T$  において、モデル化が観測データとマルコフ確率場との相互作用に限定されている。つまり、ラベル配置は主に、外場によって決定される。したがって、初期の高い温度において、モデルは観測データのヒストグラムに当てはめられる。臨界点付近の温度（ここでは、約 90 回の反復後に到達する）においてのみ、長距離の相関が期待されさらに温度を下げると、ランダムな変動は次第に減少する。

提案手法はあらかじめモデル次数を指定する、教師ありのクラスタリング手法とみなせる。提案モデルは指定されるモデル次数に関して、頑健である。なぜなら、分割される領域の最大数がモデル次数によって制限され、その値を比較的小さくしても、安定して分割でき、モデル次数を大きくした場合でも、マルコフ確率場による平滑化効果が有効に作用して過大分割を抑えられるからである。平滑化の効果は二項サイトクリークに対するパラメータ  $\beta$  によって制御され、その値を大きくすると、大きな領域をもつ粗い分割となる。実際、入力画像を構成する部分領域に対応して、結果的に、指定したモデル次数よりも少ないラベルが使用されることがある。すなわち、アルゴリズムは入力画像を表現するために、十分な次数に適応的に収束することが期待できる。

マルコフ確率場による平滑化の効果は領域の境界において、過剰に作用する可能性がある。この問題に対して、5.4 節では、線過程 [41] を導入したモデルについて述べる。



図 4.5 画像分割の実験に用いた入力画像例 [66] .



images segmented using MPM criterion



images segmented using MAP criterion

図 4.6 提案モデルの MPM 推定および, MAP 推定による画像分割. それぞれ図 4.5 の画像に対応する .

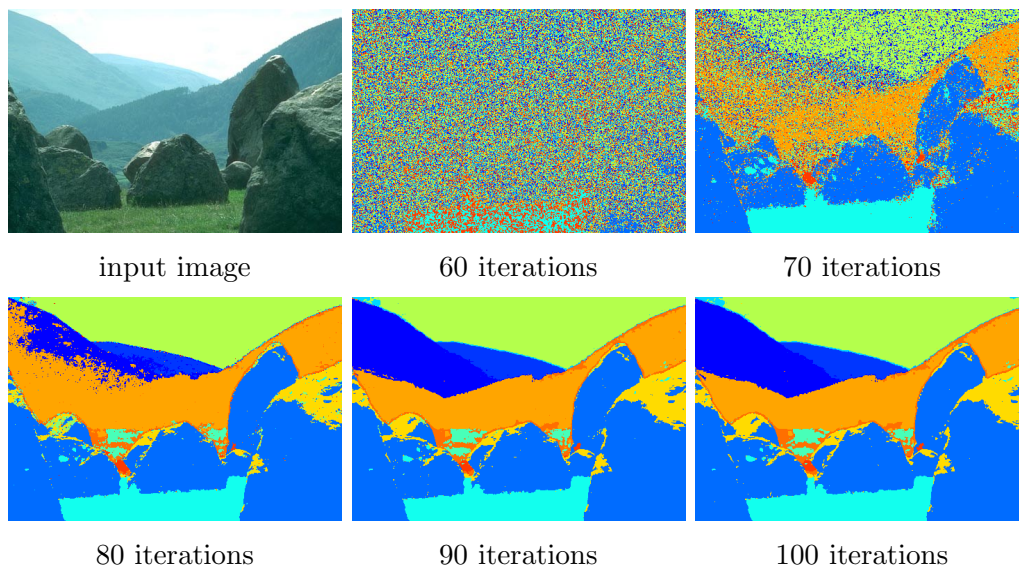


図 4.7 シミュレーテッドアニーリングの収束の様子．モデル次数は  $L = 15$  であり，200 回反復したシミュレーションのうち，60 回から 100 回反復後の分割結果を 10 回おきに示す．

## 4.6 おわりに

本章では，マルコフ確率場モデルによる画像表現に階層的な事前分布を導入したモデルを提案した．画像格子上的のサイトに対して帰属すべき部分領域を指示するラベルを割り当てる問題として，画像分割を定式化した．割り当てられるラベルの尤度は多変量正規分布の密度関数として定義し，各サイトの状態に対する事前分布はマルコフ確率場によってモデル化した．モデルに含まれるパラメータを確率変数とみなし，画像を構成する部分領域に関して弱い仮定をおき，それらを反映するような事前分布を階層的な構造によって表現した．ギブスサンプリャによるマルコフ連鎖はサイトの状態とパラメータの同時事後分布を効率的に探索できるように構築される．自然画像に対する実験結果は本手法の有効性を示した．

## 第 5 章

# 画像分割アルゴリズムの評価と提案手法に関する考察

### 5.1 はじめに

画像分割は不良設定問題であるため，すなわち，アルゴリズムが出力した結果を比較するためのたった一つの ground truth（正しく分割された画像）が存在しないため，アルゴリズムの性能を定量化することは難しく，様々な評価尺度が提案されている [105, 13]．本章では，人間によって分割された画像データベース [66] を用いて，Unnikrishnan ら [97] によって提案された確率的ランドインデックスにより画像分割結果を定量的に評価する．また，その評価に基づいてモデルの拡張および，提案手法に関する改善点について考察する．

### 5.2 画像分割アルゴリズムの定量的な評価

近年，複数の自然画像から人手による分割データを蓄積する取組み [66] によって，既存の画像分割アルゴリズムの性能を定量化する原則的な手法が提案されている [97]．データベース [66] には，自然画像に対してそれぞれの区画が顕著な物体を表すように，複数の被験者によって分割された画像データが含まれている．

Martin ら [66] は，同一画像の異なる被験者による分割結果の間には無視できない一貫性があり，人手による分割データとの比較によるアルゴリズム性能の評価は信頼できると述べている．人間あるいは，計算機プログラムによる画像分割では，複数の手がかりが利用可能である．被験者はどのような手がかりを使うこと



図 5.1 Berkeley segmentation dataset[66] の分割データの例 (a) の原画像に対して (b) から (d) は被験者の異なる分割データを示す (c) および (d) は (b) に対する詳細化であり (c) と (d) は相互の詳細化である。

も制限されず、推奨もされていない。したがって、例えば、色および、テクスチャのコヒーレンスといった低次の手がかりのみに基づいた計算アプローチが完璧な性能を達成することは困難である（人間はよく知っている物体に関する知識を手がかりとして用いるかもしれない）。図 5.1 に示す人手による画像分割結果の例から、分割に対して選択する細かさのレベルはそれぞれの被験者によって、様々であることがわかる。

Martin ら [66] は被験者による分割に対する細かさの違いすなわち、分割の「詳細化」を罰しない一貫性のある評価尺度を提案した。この尺度は比較する 2 つの分割結果が近似的に等しい分割数をもつときのみ、意味をもつ。Rand[78] はクラスタリングによる 2 つの分類の一致性を測る尺度を提案した。これはランドインデックスと呼ばれ、異なる分割数をもつ分割結果に関しても計算が可能であるが、画像分割の詳細化に対応しない。Unnikrishnan ら [97] は分割の詳細化に対応しかつ、任意の分割数を許容する尺度として、確率的ランドインデックスを提案した。以下では、それぞれの尺度を概説する。

### 5.2.1 Martin ら [66] による評価尺度

2 つの分割  $S$  および  $S'$  に対して、画素  $x_i$  を含む領域（区画）をそれぞれ、 $R(S, x_i)$  および  $R(S', x_i)$  とおく。局所的な詳細化誤差（local refinement error; LRE）は次式のように定義される。

$$E(S, S', x_i) = \frac{|R(S, x_i) \setminus R(S', x_i)|}{|R(S, x_i)|} \quad (5.1)$$

ここで，記号  $\setminus$  は集合の差を表し， $|A|$  は集合  $A$  の濃度を表す．この尺度は対称ではなく，一方向のみにおいて，詳細化を測る．各画素におけるそれぞれの方向による LRE の値から，画像全体に対する 2 通りの尺度が計算される．すなわち，大域的な一貫性誤差 (global consistency error; GCE) はすべての局所的な詳細化を同じ方向に強制し，局所的な一貫性誤差 (local consistency error; LCE) は画像の部分ごとに異なる方向の詳細化を許容する． $N$  を画素数としてそれぞれ，次のように定義される．

$$GCE(S, S') = \frac{1}{N} \min \left\{ \sum_i E(S, S', x_i), \sum_i E(S', S, x_i) \right\} \quad (5.2)$$

$$LCE(S, S') = \frac{1}{N} \sum_i \min \{ E(S, S', x_i), E(S', S, x_i) \} \quad (5.3)$$

任意の 2 つの分割に対して， $LCE \leq GCE$  であるので明らかに，GCE は LCE よりも厳しい尺度である．2 つの尺度は詳細化を許容するが，比較される 2 つの分割が同じような分割数をもつときのみ意味がある．これは著者ら [66] が述べているように，誤差が零となる 2 つの自明な分割のためである．すなわち，領域あたり 1 画素の分割および，画像全体に対して 1 つの領域という分割である．それらは誤差関数の使用を限定してしまう．

### 5.2.2 ランドインデックス [78]

画像の分割は画素のクラスタリングと解釈できる．Rand[78] は，データ  $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$  をクラスタリングすることによって得られた 2 つの分類結果  $A$  および  $B$  に対して，それらの類似度すなわち，一致性を測るための単純な尺度を提案した． $A$  において同じクラスタに帰属しかつ，同様に， $B$  においても同じクラスタに帰属するデータ対  $(y_i, y_j)$ ,  $i \neq j \in \{1, \dots, N\}$  の数を  $n_{11}$  と記述する．また， $A$  において異なるクラスタに帰属しかつ，同様に， $B$  においても異なるクラスタに帰属するデータ対の数を  $n_{00}$  と記述する．すなわち， $n_{11}$  ( $n_{00}$ ) の値はデータ対が両方の分類結果において同じ (異なる) クラスタに帰属するほど大きくなるので， $n_{11}$  および  $n_{00}$  は 2 つの分類の類似度を表す量であるとわかる．同様にして， $n_{01}$  および  $n_{10}$  を非類似度として定義すると，ランドインデックスは次式のように

計算される<sup>1</sup> .

$$R(A, B) = \frac{n_{00} + n_{11}}{n_{00} + n_{11} + n_{01} + n_{10}} = \frac{2(n_{00} + n_{11})}{N(N-1)} \quad (5.4)$$

ランドインデックスは分類が完全に一致する場合に値 1 をとり,  $A$  および  $B$  におけるクラス数が同じである必要がない. しかし, データの分類をランダムに決定した場合, ランドインデックスの期待値は一定の値をとらない.

補正ランド (adjusted Rand; AR) インデックス [51] は, 2 つの分類  $A$  および  $B$  が一定のクラス数および, 各クラスにおいて一定のデータ数をもつ分布 (一般化超幾何分布) からランダムに抽出されると仮定する.  $A$  および  $B$  のクラス数をそれぞれ,  $c_A, c_B$  とし,  $A$  においてクラス  $i$  に帰属しかつ,  $B$  においてクラス  $j$  に帰属するデータの個数を行列の要素として,  $N_{ij}, i \in \{1, \dots, c_A\}, j \in \{1, \dots, c_B\}$  と記述する. また,  $N_{i\cdot}$  および,  $N_{\cdot j}$  を次のように定義する.

$$N_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{c_B} N_{ij}, \quad N_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{c_A} N_{ij} \quad (5.5)$$

すなわち,  $N_{i\cdot}$  は  $A$  におけるクラス  $i$  に帰属するデータ数を表し,  $N_{\cdot j}$  は  $B$  におけるクラス  $j$  に帰属するデータ数を表す. AR インデックスは  $N_{ij}$  の値から, 次式のように計算される.

$$AR(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^{c_A} \sum_{j=1}^{c_B} \binom{N_{ij}}{2} - \left[ \sum_{i=1}^{c_A} \binom{N_{i\cdot}}{2} \sum_{j=1}^{c_B} \binom{N_{\cdot j}}{2} \right] / \binom{N}{2}}{\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{c_A} \binom{N_{i\cdot}}{2} + \sum_{j=1}^{c_B} \binom{N_{\cdot j}}{2} \right] - \left[ \sum_{i=1}^{c_A} \binom{N_{i\cdot}}{2} \sum_{j=1}^{c_B} \binom{N_{\cdot j}}{2} \right] / \binom{N}{2}} \quad (5.6)$$

AR インデックスの期待値は 0 であり, 最大値は 1 である. したがって, AR インデックスはランドインデックスよりも幅広い値をとる.

画像分割における一般的な同意として, 人間による画像の解釈はラベルを割り当てるという画素レベルの精度とは異なるが, 分割の詳細化が許容されるならば,

<sup>1</sup>実際には,  $N_{ij}$  および式 (5.5) を用いて, 次式のように効率的に計算される.

$$R(A, B) = \frac{2}{N(N-1)} \left\{ \binom{N}{2} + 2 \sum_{i,j} \binom{N_{ij}}{2} - \sum_i \binom{N_{i\cdot}}{2} - \sum_j \binom{N_{\cdot j}}{2} \right\}$$



一貫性があるといえるだろう。しかし，ランドインデックスおよび，補正ランドインデックスのどちらにおいても，このような許容は達成されない。

### 5.2.3 確率的ランドインデックス [97]

Unnikrishnan ら [97] はランドインデックスの統計的な性質と，分割の詳細化に適切に対応する能力を結合する尺度を提案した。後者の性質は主として，画像分割結果の一貫性を定量化する場合に関連する。画像  $y = \{y_1, \dots, y_N\}$  に対応する人手による分割画像 (ground truth) データの集合を  $\{S_1, \dots, S_K\}$  とし，これらと比較される (アルゴリズムの出力結果である) 分割を  $S$  とする。 $i$  番目の画素に対して，分割  $S$  において割り当てられたラベルを  $x_i^S$ ，人手による分割画像  $S_k$  におけるラベルを  $x_i^{S_k}$  と表す。

Unnikrishnan らはそれぞれの画素対に対するラベルの関係を未知の分布によってモデル化した。これは次のような筋書きとして具体化される [97]。各被験者は画像の分割  $S_k$  に関する情報を  $i$  番目と  $j$  番目の画素対に対する二値の数  $\mathbb{I}(x_i^{S_k} = x_j^{S_k})$  の形式で提供する。ただし， $\mathbb{I}$  は引数が真のとき 1，偽のとき 0 をとる関数である。すべての知覚的に正しい分割の集合はこの数上にベルヌーイ分布を定義し，期待値  $p_{ij}$  をもつ確率変数を与える。したがって，すべての非順序対  $(i, j)$  に対する集合  $\{p_{ij}\}$  は画像  $y$  に対する正しい分割の生成モデルを定義する。

分割  $S$  において， $i$  番目と  $j$  番目の画素対が同じラベルをとる事象を

$$c_{ij} = \mathbb{I}(x_i^S = x_j^S) \quad (5.7)$$

と表すとき，確率的ランド (probabilistic Rand; PR) インデックスは次式のように記述される。

$$PR(S, \{S_k\}) = \frac{1}{\binom{N}{2}} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} [c_{ij}p_{ij} + (1 - c_{ij})(1 - p_{ij})] \quad (5.8)$$

この尺度は  $[0, 1]$  における値をとり，0 は  $S$  および  $\{S_1, \dots, S_K\}$  がまったく類似しないことを意味し，すべての分割が等しいとき 1 となる。

画素  $i$  および  $j$  が同じラベルをとる確率  $p_{ij}$  は次式のように，対応するベルヌー

イ分布の標本平均として，選択される．

$$\bar{p}_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{I}(x_i^{S_k} = x_j^{S_k}) \quad (5.9)$$

このとき，

$$\begin{aligned} PR(S, \{S_k\}) &= \frac{1}{\binom{N}{2}} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} [c_{ij} \bar{p}_{ij} + (1 - c_{ij})(1 - \bar{p}_{ij})] \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{\binom{N}{2}} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} [c_{ij} \mathbb{I}(x_i^{S_k} = x_j^{S_k}) + (1 - c_{ij}) \mathbb{I}(x_i^{S_k} \neq x_j^{S_k})] \right\} \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K R(S, S_k) \end{aligned} \quad (5.10)$$

すなわち，PR インデックスは  $(S, S_k), k = 1, \dots, K$  の各組に対するランドインデックスの平均となる．分割の正しさの尺度に対する妥当な要求には，次のようなものが考えられ，PR インデックスはこれらを満たす [98]．

1. 非現実的な入力例が異常に高い類似値を与えるような縮退したケースをもたない．
2. 分割におけるラベルの濃度あるいは，領域の大きさが等しいという仮定をしない．
3. 人間による画像の分割は解釈によって異なると同時に，知覚による分類はおそらく，いくつかの大きな領域に対して一貫性がある．直観的に，このことは人間があいまいに思う領域においてのみ，ラベルの詳細化に対応し，それ以外では詳細化の違いを罰するような知覚的に意味のある類似尺度を要求する．

### 5.3 アルゴリズムの性能評価

データベース [66] 内の評価用画像に対して提案手法および，従来手法を適用して得られた分割結果と複数の被験者による画像分割データから，式 (5.8) で定義される PR インデックスの値を計算する．従来手法として，ファジィ c-平均法 [62]，

表 5.1 提案手法および、従来手法に対する PR ランドインデックスの値 .

アルゴリズム	図 5.2	図 5.3	図 5.4	図 5.5	図 5.6	図 5.7
MPM 推定 ( $L = 10$ )	0.8379	0.8205	0.7380	0.8215	0.7086	0.6395
MPM 推定 ( $L = 15$ )	0.8515	0.8157	0.7515	0.8005	0.6535	0.6362
MPM 推定 ( $L = 20$ )	0.8446	0.8236	0.7530	0.7775	0.7001	0.6349
MAP 推定 ( $L = 10$ )	0.8522	0.8399	0.7371	0.7894	0.6780	0.4905
MAP 推定 ( $L = 15$ )	0.8505	0.8456	0.7642	0.7961	0.6326	0.5137
ファジィ $c$ -平均法 [62]	0.7476	0.8139	0.5173	0.8571	0.7540	0.6169
グラフに基づく手法 [33]	0.7864	0.8273	0.9083	0.9365	0.8303	0.3302
平均値シフト [24]	0.8215	0.8249	0.8908	0.9340	0.8257	0.3223
ウォータシェッド法	0.8117	0.7654	0.8748	0.8564	0.8162	0.2965

グラフに基づく手法 [33]，平均値シフトアルゴリズム [24]，ウォータシェッド法を選択し，各アルゴリズムのパラメータ指定は第 2 章で述べた実験と同じにした．

図 5.2 から図 5.7 に入力画像および，各アルゴリズムによって得られた対応する分割画像の例を示す．また，それぞれの入力画像に対する人手による分割データ [66] を画像として，図 5.8 に示す．これら人手による画像分割データ集合に対して計算された PR インデックスの値を表 5.1 に示す．提案手法による分割結果は他手法と同程度かあるいは，比較的高い評価となった．

ファジィ $c$ -平均法を除く 3 つの従来手法による出力は少なくとも 40 以上，多い場合で 100 を超える部分領域に分割されており，過大分割（一つ一つの領域が小さく，領域の総数は多い）を抑えるために，入力画像の内容あるいは，性質に依存する平滑化フィルタパラメータを調節する必要がある．しかし，同一のラベルが複数の異なる領域を指示することがなく，ラベルの連結性が保証されている．提案手法（および，ファジィ $c$ -平均法）は画素のクラスタリングによって画像分割を行い，特徴の類似した領域に対して，同じラベルを割り当てる．アプリケーションによってラベルの連結性が要求される場合も考えられる．

図 5.4，図 5.5，図 5.6 に示した画像に対する人手による分割データでは，類似した色特徴をもつ背景が前景に位置するオブジェクトによって分断されそれぞれ，異なるラベルを割り当てられている場合がある．また，類似する（色）特徴をもつ領域が離れた位置に現れる場合，提案手法はそれらに同一のラベルを割り当てる可能性が高い．一方，人手による分割データでは，そのような離れた類似領域

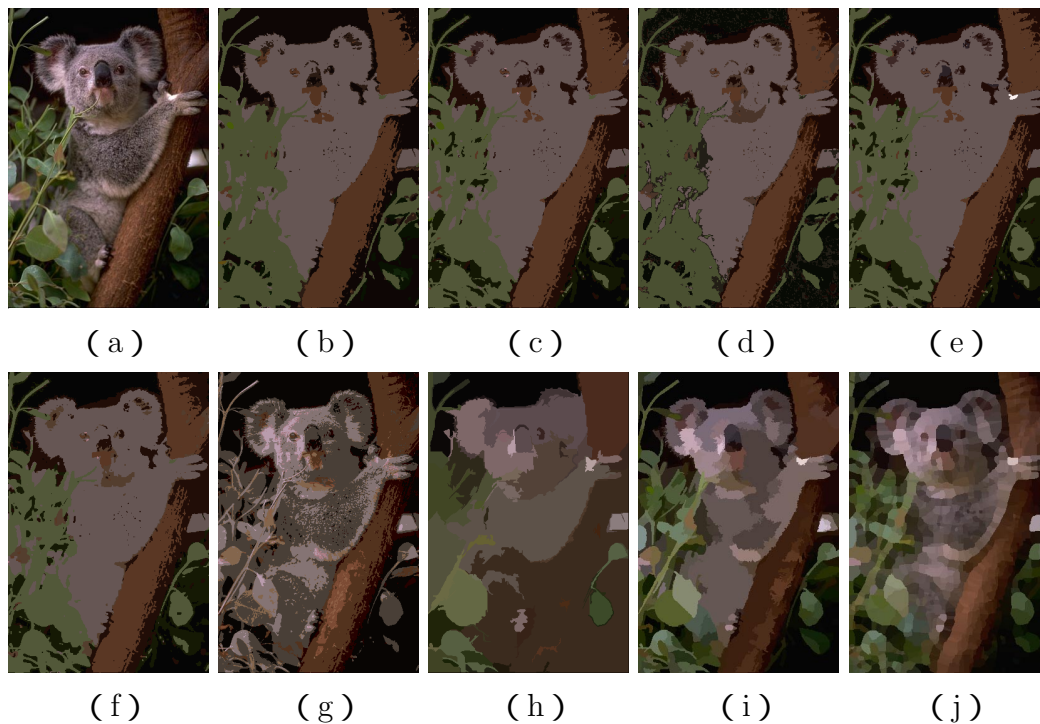


図 5.2 提案手法および従来手法による画像分割 (1) (a) 原画像 (b) から (d) は提案モデルに対する MPM 推定値でありそれぞれ, 次数を  $L = 10$ ,  $L = 15$ ,  $L = 20$  とした (e) および (f) は提案モデルに対する MAP 推定値でありそれぞれ, 次数を  $L = 10$ ,  $L = 15$  とした (g) ファジィc-平均法 [62] (h) グラフに基づく手法 [33] (i) 平均値シフトアルゴリズム [24] (j) ウォータシェッド法 .

に (被験者が意図したかどうかにかかわらず) 異なるラベルが割り当てられている . 以上のような場合に , 提案手法に対する PR インデックスの値による評価はその定義から , 低くなるのがわかる . 実際 , 図 5.8 に示した 2 つの画像に関して , 図 5.6 (a) に対する提案手法の評価は比較的低いことが表 5.1 からわかる ( 図 5.6 (a) の画像中で , 左右に位置する「緑色の植物」に対して , 提案手法は同一のラベルを割り当て , 人手による分割データでは異なるラベルが割り当てられている . )

ラベルの連結性を完全に保証するわけではないが , 色特徴に加えて各画素の画像内での位置  $(x, y)$  を画像特徴とすることにより , 画像平面において互いに離れた 2 つの領域をある程度 , 区別できるようになる . 実際 , 平均値シフトアルゴリズムによる画像分割 [24] では , 同様な特徴を用いている .

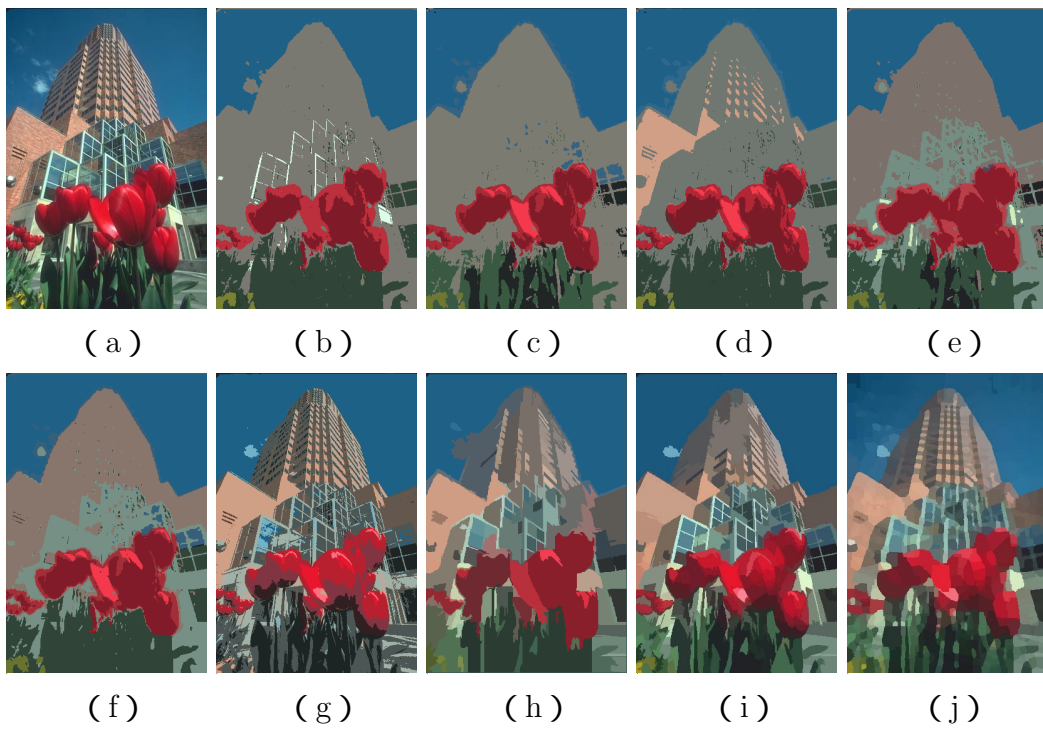


図 5.3 提案手法および従来手法による画像分割 (2) (a) から (j) に関しては図 5.2 と同じである .

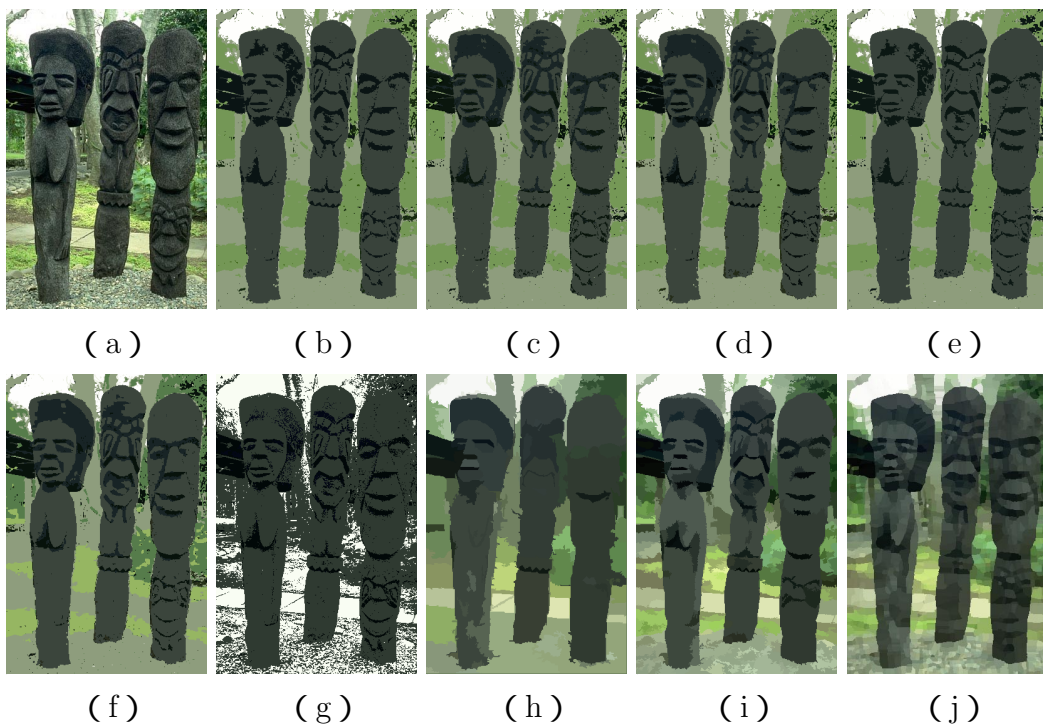


図 5.4 提案手法および従来手法による画像分割 (3) (a) から (j) に関しては図 5.2 と同じである .



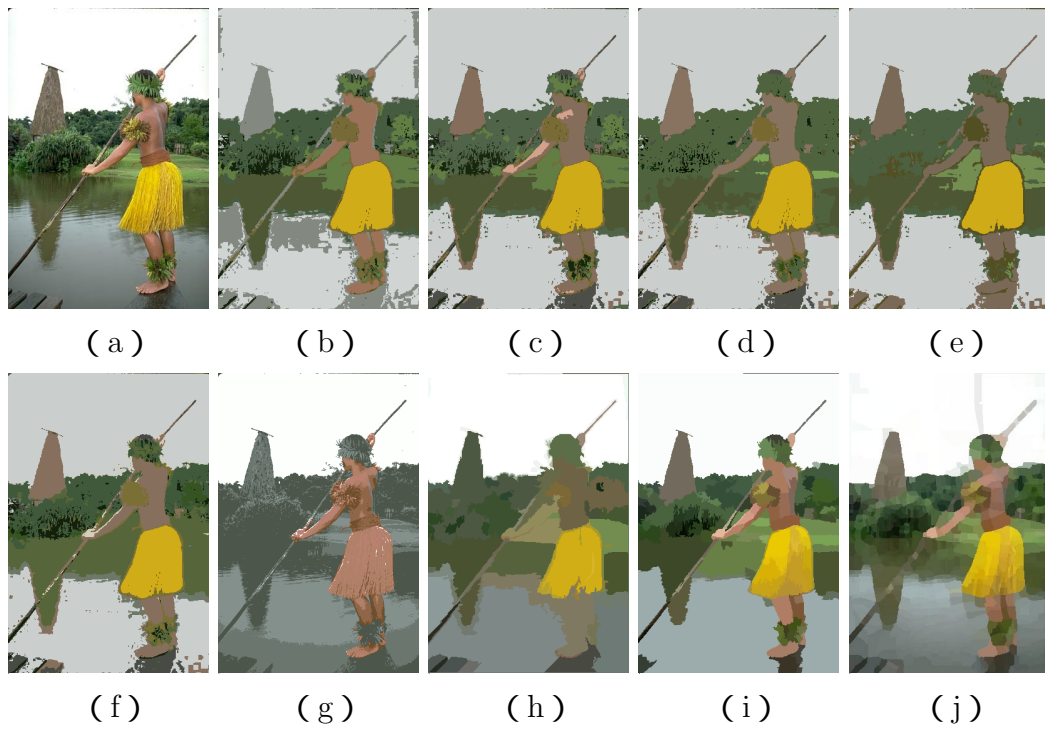


図 5.5 提案手法および従来手法による画像分割 (4) (a) から (j) に関しては図 5.2 と同じである .

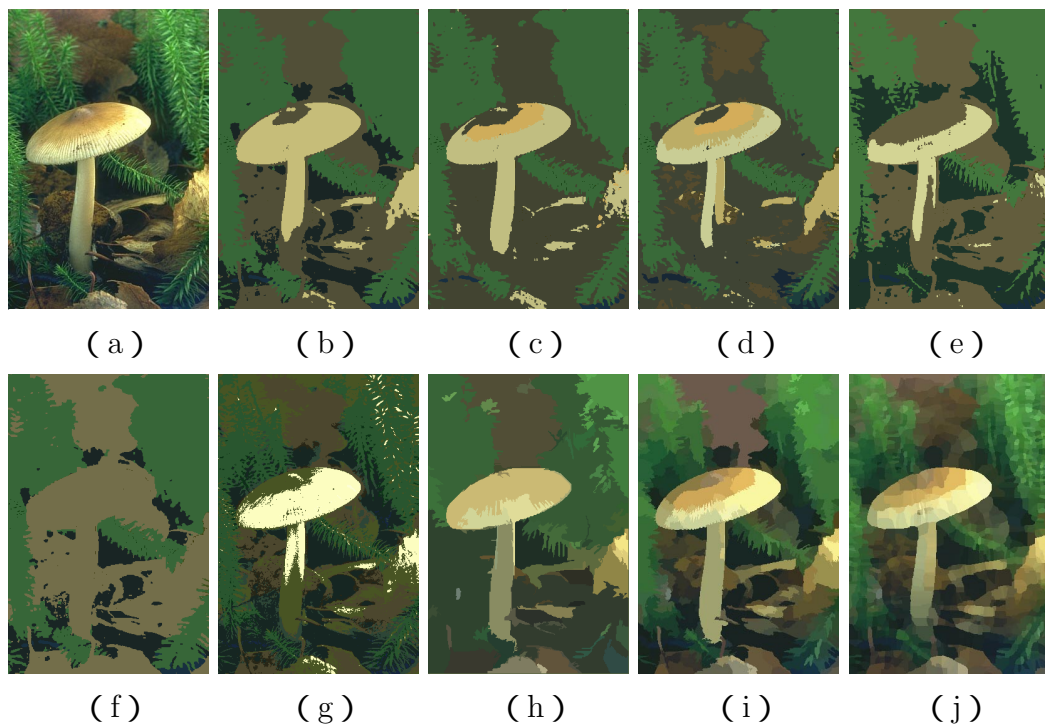


図 5.6 提案手法および従来手法による画像分割 (5) (a) から (j) に関しては図 5.2 と同じである .

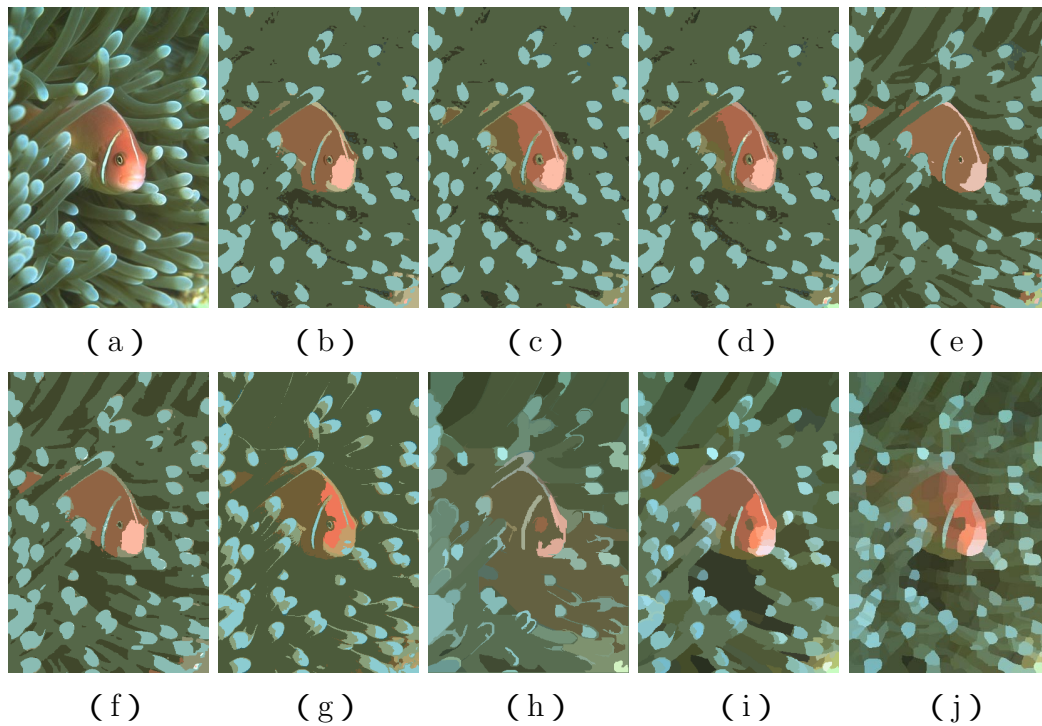


図 5.7 提案手法および従来手法による画像分割 (6) (a) から (j) に関しては図 5.2 と同じである .

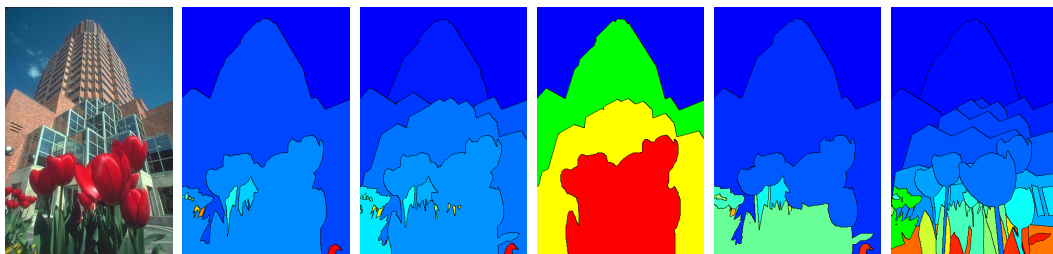


図 5.3 (a)

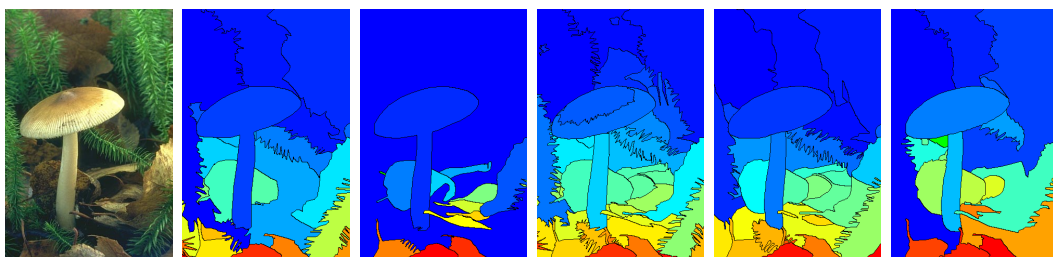


図 5.6 (a)

図 5.8 人間による画像分割データ [66] の例 . (a) および (b) の原画像それぞれに対して , 被験者の異なる分割データを画像として示している .

## 5.4 提案モデルへの線過程の導入

式 (4.1) の各サイトの状態に関する局所的な条件付き確率はサイトが領域の境界上にあるかどうかに関係なく、定義されている。パラメータ  $\beta$  の指定によってある程度、マルコフ確率場による平滑化の効果を制御できるが、境界における過剰な平滑化を抑制できない。そこで、本節では、提案モデルに 3.3.2 節で述べた線過程 [41] を導入し実験により、その効果を検証する。

### 5.4.1 線過程

ラベルに対するマルコフ確率場および、線過程の同時事前確率は次式のように分解される。

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = P(\mathbf{x}|\mathbf{z})P(\mathbf{z}) \quad (5.11)$$

すなわち、ラベル配置の生起確率は線過程の配置に関して、条件付き確率とする。対応する (ギブス) エネルギー関数は図 3.4 の線過程に対する近傍系および、式 (3.32) の定義を用いて、次のようになる。

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, \mathbf{z}) &= U(\mathbf{x}|\mathbf{z}) + U(\mathbf{z}) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \alpha_{x_s} + \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{r \in \mathcal{N}_s} (1 - z_{s,r}) \beta I(x_s, x_r) + \sum_{l \in \mathcal{L}} \sum_{e \in \mathcal{E}} \gamma_e I_e(\mathbf{z}_l) \end{aligned} \quad (5.12)$$

ここで、 $\gamma_e, e = 0, \dots, 5$  は図 3.5 で示される可能なエッジパターンに対応する定数パラメータであり、エッジ要素に関する経験的な知識を反映して指定される。 $z_{s,r}$  は画素格子上において近傍にある一対のサイト  $s$  および  $r$  間に位置する線過程サイトにおける状態であり、エッジ要素の有無を示す。ラベルに対するマルコフ確率場と同様に、線過程に関して擬似尤度 [9, 10] による近似を行うと、式 (4.21) の



モデルに対する事後分布は次式のように表される．

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \theta, \phi | \mathbf{y}) &\propto p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \phi) P(\mathbf{x} | \mathbf{z}, \theta) P(\mathbf{z}) p(\theta) p(\phi) \\
&\approx \prod_{s \in \mathcal{S}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{r}{2}} |\Sigma_{x_s}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_{x_s})' \Sigma_{x_s}^{-1} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_{x_s}) \right\} \\
&\quad \times \prod_{s \in \mathcal{S}} \frac{\omega_{x_s} \exp \left\{ -\sum_{r \in \mathcal{N}_s} (1 - z_{s,r}) \beta I(x_s, x_r) \right\}}{\sum_{\lambda \in \Lambda} \omega_{\lambda} \exp \left\{ -\sum_{r \in \mathcal{N}_s} (1 - z_{s,r}) \beta I(\lambda, x_r) \right\}} \\
&\quad \times \prod_{l \in \mathcal{L}} \frac{\exp \left\{ -\sum_{e \in \mathcal{E}} \gamma_e I_e(\mathbf{z}_l) \right\}}{\sum_{e \in \mathcal{E}} \exp \left\{ -\gamma_e \right\}} \times p(\boldsymbol{\rho}) p(\omega_1, \dots, \omega_L) \prod_{\lambda=1}^L p(\boldsymbol{\mu}_{\lambda}) p(\Sigma_{\lambda} | \boldsymbol{\rho}) \quad (5.13)
\end{aligned}$$

ただし，関数  $I_e(\mathbf{z}_l)$  は線過程のサイト  $l$  とその近傍にあるサイトの状態  $z_l$  が図 3.5 に示すエッジパターンの中で  $e$  であるときのみ値 1 をとり，そのほかのパターンの場合に値 0 をとることに注意する．

線過程の導入に対応して，4.4 節で述べた提案モデルに対するギブスサンブラを修正する必要がある．式 (4.25) のサイトの状態に関する条件付き事後確率は， $z_l$  を画素格子上的サイト  $s \in \mathcal{S}$  とその近傍サイト  $r \in \mathcal{N}_s$  間に位置するすべての線過程サイトにおける配置とすると，次式のようになる．

$$\begin{aligned}
P(x_s = \lambda | \mathbf{x}_{\mathcal{N}_s}, \mathbf{z}_l, \alpha_{\lambda}, \beta, \boldsymbol{\mu}_{\lambda}, \Sigma_{\lambda}) \\
\propto \omega_{\lambda} |\Sigma_{\lambda}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_{\lambda})' \Sigma_{\lambda}^{-1} (\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_{\lambda}) - \sum_{r \in \mathcal{N}_s} (1 - z_{s,r}) \beta I(\lambda, x_r) \right\} \quad (5.14)
\end{aligned}$$

線過程サイト  $l \in \mathcal{L}$  における状態  $z_l \in \{0, 1\}$  は， $l$  の両端に位置する画素格子上的サイトを  $s$  および  $r$  とすると（すなわち， $z_l \equiv z_{s,r}$ ），他のすべてのパラメータに関して，次のような条件付き事後確率に従う．

$$P(z_l | \dots) \propto \exp \left\{ -(1 - z_{s,r}) \beta I(x_s, x_r) - \sum_{e \in \mathcal{E}} \gamma_e I_e(\mathbf{z}_l) \right\} \quad (5.15)$$

以上の修正を加えて，線過程を導入した提案モデルに対するギブスサンプリングのアルゴリズムは次のようになる．

1.  $s \in \mathcal{S}$  について， $x_s$  を式 (5.14) の条件付き事後確率から抽出する．
2.  $l \in \mathcal{L}$  について， $z_l$  を式 (5.15) の条件付き事後確率から抽出する．
3.  $\lambda \in \Lambda$  について， $\omega_{\lambda}$  を式 (4.26) に従って抽出する．

4.  $\lambda \in \Lambda$  について,  $\mu_\lambda$  を式 (4.27) に従って抽出する .
5.  $\lambda \in \Lambda$  について,  $\Sigma_\lambda$  を式 (4.28) に従って抽出する .
6.  $\rho$  を式 (4.29) に従って抽出する .

線過程における各サイト  $l \in \mathcal{L}$  の状態  $z_l$  に対する MPM 推定値は次のように, 決定される .

$$z_l^* \approx \arg \max_{z_l \in \{0,1\}} \hat{p}(z_l | \mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \#\{k | z_l^{(k)} = 0\} < \#\{k | z_l^{(k)} = 1\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad l \in \mathcal{L} \quad (5.16)$$

すなわち, ギブスサンプリングによって生成された  $z_l$  に対する標本列  $\{z^{(k)}\}$  を用いて, 各線過程サイト  $l$  ごとに, 値 1 をとる標本の総数が値 0 をとる標本数よりも多い場合にエッジ要素であるとし ( $z_l = 1$ ), そうでない場合にエッジ要素ではないと決定する ( $z_l = 0$ ).

### 5.4.2 実験結果

線過程における 6 つのポテンシャルパラメータは実験的にそれぞれ,  $\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 0.45, \gamma_2 = 0.45, \gamma_3 = 0.9, \gamma_4 = 1.5, \gamma_5 = 1.35$  とした . これらの値は対応するエッジパターンの自然画像における性質が考慮されている . 画像格子上のサイトにおける二項クリークの相互作用パラメータは 4.5 節の実験と同様に,  $\beta = 0.15$  とした . また, 過剰な平滑化効果の抑制を見込んで, モデル次数は (やや大きく)  $L = 15$  とした . 画像格子上における各サイトおよび, 線過程の状態に対して, それぞれ式 (4.32) と式 (5.16) による MPM 推定を行った .

線過程を追加した提案モデルによる自然画像の分割結果を図 5.9 に示す . 線過程によって部分領域間の境界が適切に推定され, マルコフ確率場による領域境界における過剰な平滑化を抑制できる . さらに, 禁止エッジパターン [39] を考慮することによって, よりもっともらしい領域境界を表現できると考えられる . また, 実験結果から, 線過程あるいは, より発展したマルコフ確率場モデルによる境界線検出の可能性が示唆される .

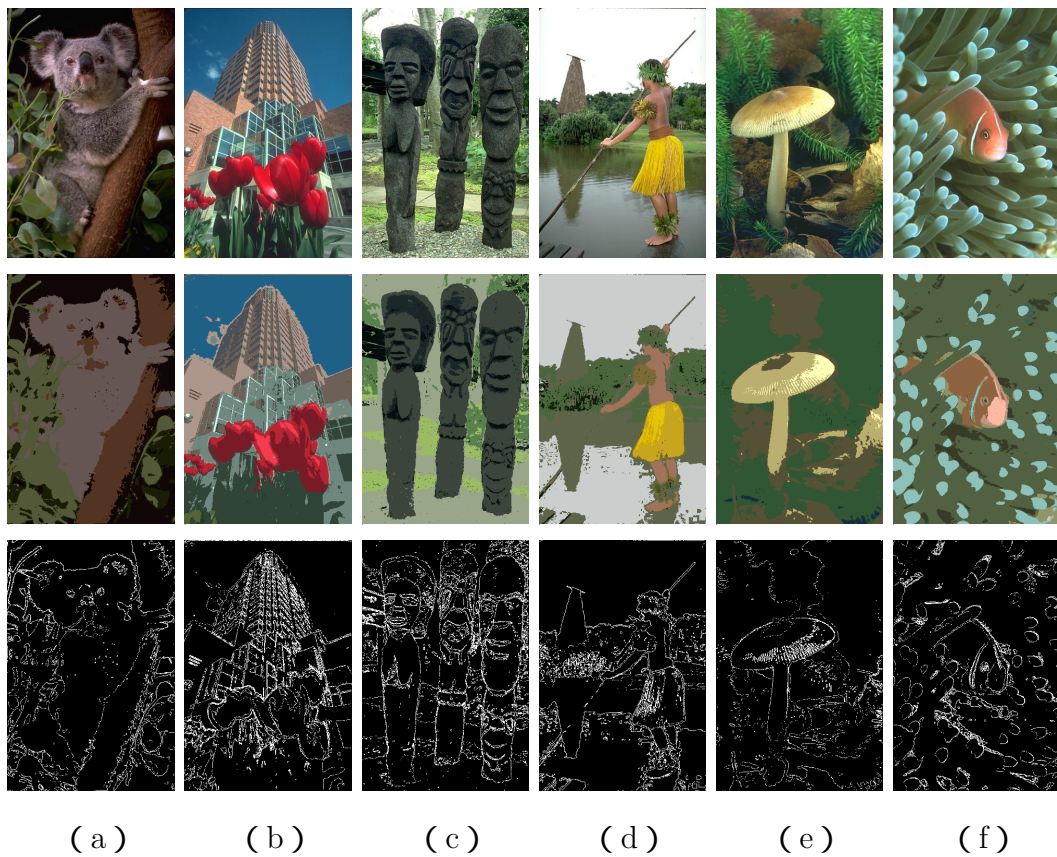


図 5.9 線過程を追加した提案モデルによる画像分割．それぞれ 1 行目から，原画像，分割画像，線過程による境界線画像を示す．

## 5.5 おわりに

本章では、提案手法および、いくつかの従来手法に関して、アルゴリズム性能の定量化を行った。入力画像に対して唯一の正しい分割 (ground truth) データは存在しないが、複数の被験者によって分割されたデータには一貫性がみられる [66]。人手によるこのような分割データから、確率的ランドインデックス [97] を尺度として、画像分割アルゴリズムを定量的に評価できる。提案手法はマルコフ確率場による平滑化が効果的に働き、過剰な分割を抑制することで安定した結果を得られた。

部分領域間の境界に対するマルコフ確率場モデルとして、線過程を提案モデルに追加した。画像格子に対するマルコフ確率場がもつ (望まれない) 効果として境界における過剰な平滑化が挙げられるが、線過程によってこれを抑制するとともに、線過程を用いた有効な境界線モデルの可能性が示唆される。

最後に、ここでは、画像特徴量として色情報 ( $L^*a^*b^*$  色空間特徴) のみを用いたが、テクスチャ情報を組み合わせる [67] ことも可能である。適当な事前分布を仮定することによって、分割される領域の数や各領域の大きさあるいは、領域境界の滑らかさに対する知識を表現でき [96]、用途に応じてモデルに組み込むことが可能である。また、アルゴリズムの定量的な評価に用いたデータベース [66] を訓練データとして、より高次の処理である物体認識などを実現するようなモデルの構築も期待される。

# 第 6 章

## 結論

### 6.1 本論文の結論

本論文では，画像の分割問題への適用を目的として，確率場による画像の統計的なモデル化について検討を行った．

提案したアルゴリズムは，基本的な視覚処理における低レベルの機能を提供する試みであると考えられる．このようなアルゴリズムが形状あるいは，物体認識のような，より高次のモデルや手続きと結びつけられ，自動的なビジョンシステムの実現を促進することを期待する．しかし，実行に必要な計算量によって，これらのアルゴリズムが有効に適用されるビジョン問題は例えば，リモートセンシングのアプリケーション，X線画像および核磁気共鳴画像の分割あるいは，農作物識別のための合成開口レーダ画像の分割，といった問題に限定されるかもしれない．

第 2 章では「領域」を 3 通りの定義すなわち (1) 画素に基づく一様性 (2) 領域に基づく一様性および (3) 非一様性に関する定義から画像分割に関する従来手法を分類し，概説した．とくに，第 5 章で提案手法の比較対象とした従来手法は，クラスタリングによるアプローチとしてファジィ-c-平均法 [62] および平均値シフト法 [24]，局所探索型アルゴリズムであるウォーターシェッド法および，グラフ表現による画像のモデル化と分割手法 [33] である．

第 3 章では，マルコフ確率場に関する基本的な定義および，定理について述べた．マルコフ確率場は格子上において仮定される近傍系に対して定義され，空間的に相互作用する変数集合を解析するための効果的な統計モデルである．ギブス分布との等価性から，その具体的な一般形を記述できる．マルコフ確率場によって，

自然画像において隣接する画素がもつ類似性を表現できる．画像分割を画像格子に対するマルコフ確率場の状態（ラベル）推定として定式化した．これはポッツモデルによって記述される．ベイズ統計学は推定において有効な枠組みを与え，これを実行するための計算機アルゴリズムとして，ギブスサンブラによるマルコフ連鎖のシミュレーションを用いた．

マルコフ確率場を用いて定式化された画像分割問題では，ラベルの推定とともに，モデルパラメータをどのように決定するかということも問題となる．第4章では，マルコフ確率場および（混合）正規分布におけるパラメータの事前分布として，階層的な構造をもった弱情報事前分布を仮定することによって，ベイズの定理を用いた統計的アプローチにおいて画像分割モデルを構築した．パラメータに関する情報が十分でないという一般に，よく起こり得る状況において，提案モデルは非常に有効であると考えられる．

マルコフ確率場のように，多くの確率変数が相互作用によって影響しあう大規模なモデルでは，その解析に多大な計算が必要である．本論文では，モデルの事後分布を効率的に探索するマルコフ連鎖をギブスサンブラによって構築し，自然画像に対する実験から，各サイトの状態および，パラメータの推定が可能であることを実証した．

画像分割アルゴリズムによる出力を定量化することによって，その性能を評価し，他の手法と比較することが可能になるが，画像分割が不良設定問題であるために一般に，そのような定量化は難しい．第5章では，近年提案された確率的ランドインデックス [97] を尺度として，分割アルゴリズムの定量的な評価を行った．確率的ランドインデックスは，同一画像の異なる被験者による分割結果 [66] を正しく分割された画像（ground truth）データとして用いる．提案手法は比較的高い評価を得たが，クラスタリングアプローチであるため，ラベルの連結性が保証されずその結果，いくつかのデータに関して評価が低くなった．また，マルコフ確率場がもつ副作用によって，領域の境界において過剰な平滑化が起こり得る．これに対して，線過程 [41] をモデルに導入し実験から，領域境界線を効果的にモデル化できることを示した．

## 6.2 今後の課題

本論文で提案したモデルは、あらかじめ分割される部分領域の上限（モデル次数）を指定しなければならない。実験結果から、比較的大きな値を用いても、マルコフ確率場がもつ平滑化効果によって過剰な分割がある程度、抑制されることが確認できた。しかし、指定される次数が大きくなるほど計算に時間がかかり、分割結果の質も悪くなる場合が考えられる。ギブスサンブラによるマルコフ連鎖のシミュレーションは、適当な基準に基づく最適なモデル次数へ収束する可能性を示唆する。そこで、モデル次数を含めた（完全に）自動的な画像分割法について検討したい。

提案アルゴリズムにおいて、ギブスサンブラによるマルコフ連鎖は比較的早く、均衡分布（の最頻値）に収束することが実験的に示された。しかし、シミュレーションによっては、極小解にトラップされたと考えられる標本列が生成されまた、その挙動が安定していないこともわかる。マルコフ連鎖の収束性は計算時間に直接関係があり、推定に用いる標本の部分列が収束していないとすれば、その結果は妥当ではない。より安定したシミュレーションを行うために、初期標本の抽出法および、効果的なマルコフ連鎖の構築が課題となる。

定数としたパラメータを観測データあるいは、人間による画像分割データ [66] から推定および、学習することにより、アルゴリズムの性能が向上しあるいは、アルゴリズムをより高次の視覚処理である認識問題に拡張できる可能性がある。とりわけ、経験的にチューニングされたエッジに関するパラメータの値を学習された値に置き換えることによって、線過程によりモデル化された領域境界線の記述はより効果的になると考えられる [47]。また、色情報以外にも、テクスチャ特徴などを適切に組み合わせることによって、単なる画像分割処理から発展的にアルゴリズムの改良を検討したい。

本論文で述べた研究は多くのさらなる応用および、研究に用いられるメカニズムを提供する。例えば、より複雑なあるいは、適応的な線過程を検討し、より高次のモデルに対するアルゴリズムおよび、最適化処理へ結びつけることは非常に興味深い課題である。マルコフ確率場を概念的に含むグラフィカルモデルおよび、それらを効率的に解析する統計的手法は信号処理あるいは、情報処理において有効な方法論として今後、ますます発展し、より広い応用分野に展開していくものと思われる。

# 付録 A

## 確率分布と標本抽出

### A.1 多変量正規分布

$n$ 次元の確率変数ベクトル  $\mathbf{y}$  に対して,  $\mathcal{L}(\mathbf{y})$  を  $\mathbf{y}$  の分布とする.  $n \times n$  正定値行列の集合を  $\mathcal{S}(n)$  と記述し, ベクトル  $\mathbf{a}$  あるいは, 行列  $\mathbf{a}$  の転置を  $\mathbf{a}'$  と記述するとき,

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)' \in \mathbb{R}^n \quad \text{および} \quad \boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij}) \in \mathcal{S}(n)$$

とおく.  $\mathbb{R}^n$  上のルベーグ測度に関する  $\mathbf{y}$  の確率密度関数  $f(\mathbf{y})$  が

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right\}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1})$$

で与えられるとき,  $\mathbf{y}$  は  $n$ 次元の多変量正規分布  $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  として分布し, 次のように表現する.

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}) = \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (\text{A.2})$$

このとき, 平均ベクトル  $E(\mathbf{y})$  および, 共分散行列  $\text{Cov}(\mathbf{y})$  はそれぞれ, 次のように与えられる.

$$E(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\mu} \quad \text{および} \quad \text{Cov}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Sigma} \quad (\text{A.3})$$

ここで,

$$\text{Cov}(\mathbf{y}) = E \left\{ (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \right\}$$

である.  $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  を平均ベクトル  $\boldsymbol{\mu}$  および, 共分散行列  $\boldsymbol{\Sigma}$  をもつ正規分布と呼ぶ.



## 正規性

線形変換の下で正規性は保たれる。すなわち，

命題 A.1  $\mathcal{L}(\mathbf{y}) = \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  と仮定する。A を階数 (rank) が  $m$  である任意の  $m \times p$  行列とし， $\mathbf{b}$  を任意の  $m \times 1$  ベクトルとする。このとき，以下が成り立つ。

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}) = \mathcal{N}_m(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}') \quad (\text{A.4})$$

## 多変量正規分布からの標本抽出

多変量正規分布から標本を抽出する方法はコレスキー分解に基づく。共分散行列  $\boldsymbol{\Sigma}$  は対称かつ，正定値であるので， $\mathbf{L}\mathbf{L}' = \boldsymbol{\Sigma}$  を満たす一意の下三角行列  $\mathbf{L}$  に分解できる。ここで， $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)' \in \mathbb{R}^n$  を  $\mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$  に従う確率変数  $Z$  の実現値とすると， $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  に従う確率変数  $X$  は  $\mathbf{z}$  に  $\mathbf{L}$  を乗じ， $\boldsymbol{\mu}$  を加えることにより生成される。すなわち，次のような性質を用いる。

$$\mathbf{z} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n) \Rightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}\mathbf{z} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (\text{A.5})$$

ここで， $\mathbf{I}_n$  は  $n \times n$  単位行列とする。上式は命題 A.1 より明らかである。

## A.2 ウィッシュャート分布

ウィッシュャート分布は多変量正規分布  $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  の共分散行列  $\boldsymbol{\Sigma}$  の推定において，中心的な役割をする。

$p$  次元の確率変数ベクトル  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$  が独立に同一の正規分布  $\mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ ， $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{S}(p)$  に従うと仮定する。行列

$$\mathbf{W} = \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \mathbf{y}_j'$$

の分布を係数行列  $\boldsymbol{\Sigma}$  および，自由度  $n$  をもつウィッシュャート分布と呼び，次のように表現する。

$$\mathcal{L}(\mathbf{W}) = \mathcal{W}_p(n, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (\text{A.6})$$

$n \geq p$  であるとき，分布  $\mathcal{W}_p(n, \Sigma)$  は次式の確率密度関数をもつ．

$$f(\mathbf{W}) = \frac{1}{2^{\frac{np}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^p \Gamma\left(\frac{n+1-j}{2}\right)} |\mathbf{W}|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{W}\Sigma^{-1})\right\} \quad (\text{A.7})$$

ただし，上式は  $p \times p$  正定値行列の集合  $\mathcal{S}(p)$  に関して正である．行列  $\mathbf{W}$  が  $\mathcal{W}_p(n, \Sigma)$  として分布するとき，その平均行列は次のように与えられる．

$$E(\mathbf{W}) = n\Sigma$$

したがって， $\mathcal{W}_p(n, \Sigma)$  を平均  $n\Sigma$  および自由度  $n$  をもつウィッシュャート分布と呼ぶ．ここで， $p = 1$  かつ  $\Sigma = 1$  であるとき，密度関数  $f(\mathbf{W})$  はカイ 2 乗分布  $\chi_n^2$  の密度関数になる．すなわち， $\mathcal{W}_1(n, 1) = \chi_n^2$  である．より一般に， $\mathcal{L}(w) = \mathcal{W}_1(n, \sigma^2)$  であるとき，

$$\mathcal{L}(w/\sigma^2) = \chi_n^2 \quad (\text{A.8})$$

となる．

### ウィッシュャート性

正規性が線形変換の下で保たれるのと同様に，ウィッシュャート性も線形変換の下で保たれる． $\mathcal{L}(\mathbf{W}) = \mathcal{W}_p(n, \Sigma)$  と仮定する．このとき，

$$\mathcal{L}(\mathbf{W}) = \mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \mathbf{y}_j'\right)$$

がわかる．ここで， $\mathbf{y}_j$  は独立に同一の正規分布  $\mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \Sigma)$  として分布する．命題 A.1 より，階数が  $m$  である  $m \times p$  行列  $\mathbf{A}$  に対して，確率変数ベクトル  $\{\mathbf{A}\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{y}_n\}$  は独立でありかつ， $\mathbf{A}\mathbf{y}_j$  はそれぞれ， $\mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}')$  をもつ．したがって，

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{A}\mathbf{y}_j (\mathbf{A}\mathbf{y}_j)' = \mathbf{A} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \mathbf{y}_j'\right) \mathbf{A}'$$

の分布は， $\mathcal{W}_p(n, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}')$  である．これは明らかに， $\mathcal{L}(\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}') = \mathcal{W}_p(n, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}')$  を意味する．すなわち，

命題 A.2  $\mathcal{L}(W) = \mathcal{W}_p(n, \Sigma)$  であるとき, 階数が  $m$  である任意の  $m \times p$  行列  $A$  に対して, 以下が成り立つ.

$$\mathcal{L}(AWA') = \mathcal{W}_p(n, A\Sigma A') \quad (\text{A.9})$$

### コレスキー分解およびパートレット分解

任意の  $\Sigma \in \mathcal{S}(p)$  に対して,  $\Sigma$  のコレスキー (Cholesky) 分解は  $\Sigma$  および, 下三角行列  $\Theta$  の 1 対 1 対応を与える.  $\mathcal{G}_T^+(p)$  を次のような正の対角要素をもつ  $p \times p$  下三角行列の群とする [53].

$$\mathcal{G}_T^+(p) = \{\Theta = (\theta_{ij}) \in \mathcal{G}_l(p) \mid \theta_{ii} > 0 (i = 1, \dots, p), \theta_{ij} = 0 (i < j)\} \quad (\text{A.10})$$

ここで,  $\mathcal{G}_l(p)$  は  $p \times p$  正則行列の群とする.

補題 A.1 (コレスキー分解) 任意の正定値行列  $\Sigma \in \mathcal{S}(p)$  に対して, 次のような下三角行列  $\Theta \in \mathcal{G}_T^+(p)$  が存在する.

$$\Sigma = \Theta\Theta' \quad (\text{A.11})$$

さらに, 行列  $\Theta \in \mathcal{G}_T^+(p)$  は一意である.

パートレット (Bartlett) 分解として知られる次の命題によって,  $\Sigma = I_p$  をもつウィッシュャート分布はカイ 2 乗分布に従う独立な変数に分解できる.

命題 A.3 (パートレット分解)  $\mathcal{L}(W) = \mathcal{W}_p(n, I_p)$  と仮定し,

$$W = TT'$$

をコレスキー分解とする. このとき,  $T = (t_{ij})$  は以下を満たす.

- (1)  $i = 1, \dots, p$  に対して,  $\mathcal{L}(t_{ii}^2) = \chi_{n-i+1}^2$ ,
- (2)  $i > j$  に対して,  $\mathcal{L}(t_{ij}) = \mathcal{N}(0, 1)$ . したがって,  $\mathcal{L}(t_{ij}^2) = \chi_1^2$ ,
- (3)  $t_{ij}$  ( $i \geq j$ ) は独立である.

## ウィットシャー分布からの標本抽出

命題 A.3 より, カイ 2 乗分布 (あるいは, 正規分布) を用いて,  $\mathcal{W}_p(n, \mathbf{I}_p)$  から標本  $\mathbf{W}_0$  を抽出する. さらに, 式 (A.11) における  $\Sigma$  のコレスキー分解を用いて,  $\mathcal{W}_p(n, \Sigma)$  から標本を抽出できる. すなわち,

$$\mathbf{W}_0 \sim \mathcal{W}_p(n, \mathbf{I}_p) \Rightarrow \mathbf{W} = \Theta \mathbf{W}_0 \Theta' \sim \mathcal{W}_p(n, \Sigma) \quad (\text{A.12})$$

これは命題 A.2 および, 補題 A.1 より明らかである.

## A.3 ディリクレ分布

$K$  次元のディリクレ分布  $\mathcal{D}(u_1, \dots, u_K)$  は次のような密度関数をもつ.

$$p(\omega_1, \dots, \omega_r; u_1, \dots, u_K) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^K \omega_i^{u_i-1} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^K \omega_i\right) \quad (\text{A.13})$$

ただし,  $\omega_i \geq 0$  かつ,  $u_i \geq 0$  であり, デルタ関数  $\delta(\cdot)$  は  $\sum_i \omega_i = 1$  を保証する. また, 規格化定数  $Z$  はディリクレ分布のパラメータ  $\{u_i \mid i = 1, \dots, K\}$  に関して, 次式のようになる.

$$Z = \frac{\prod_{i=1}^K \Gamma(u_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^K u_i\right)} \quad (\text{A.14})$$

ただし,  $\Gamma(z)$  はガンマ関数を表し, 次のように定義される.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.15})$$

## ディリクレ分布からの標本抽出

ディリクレ分布に従って分布する標本値はパラメータ  $a = u_i, b = 1$  をもつガンマ分布から  $K$  個の値を標本抽出し, それらを規格化することにより得られる [60].

# 付録 B

## マルコフ連鎖の理論

マルコフ連鎖に基づくモンテカルロ法の開発において必要となる定理を示す [69, 93] . 最も基本的な結果は、唯一の不変分布に収束するようなマルコフ連鎖が存在するということである . このような連鎖を用いることにより、その分布に関する期待値を推定できる .

### 基本的な定義

一連の確率変数  $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$  がマルコフ連鎖であるとき、 $X^{(0)}, \dots, X^{(n)}$  の値が  $X^{(n+1)}$  の分布に与える影響は  $X^{(n)}$  の値によって完全に仲介される . より形式的には、次式のようになる .

$$P(x^{(n+1)} | x^{(n)}, \{x^{(t)}, t \in \mathcal{E}\}) = P(x^{(n+1)} | x^{(n)}) \quad (\text{B.1})$$

ここで、 $\mathcal{E}$  は  $\{0, \dots, n-1\}$  の任意の部分集合である . インデックス  $t = 0, 1, 2, \dots$  はしばしば一連の「時刻」を表現する .  $X^{(t)}$  は共通の値域すなわち、マルコフ連鎖の状態空間をもつ . ここでは、状態空間は有限であると仮定する<sup>1</sup> .

マルコフ連鎖は 2 つの分布を与えることによって指定される . 1 つは  $X^{(0)}$  に対する周辺分布 (様々な状態の初期確率) であり、もう 1 つは  $X^{(n)}$  の可能な値を所与とする  $X^{(n+1)}$  に対する条件付き分布 (ある状態がもう一方の状態に続く遷移確率) である . 状態  $x$  の初期確率を  $p_0(x)$  と記述し、時刻  $n+1$  における状態  $x'$  が

---

<sup>1</sup>連続時間のパラメータは、マルコフ過程のより一般的な表記によって提供される . ここでは、マルコフ連鎖という用語は、離散時間のパラメータをもつマルコフ過程を示すものとする . 離散的な状態空間をもつマルコフ過程あるいは、一般に、一様なマルコフ連鎖として知られるものをマルコフ連鎖と呼ぶ著者もいる .

時刻  $n$  における状態  $x$  に続く遷移確率を  $T_n(x, x')$  と記述する．遷移確率が時間に依存しないとき，マルコフ連鎖は一様であるとし，遷移確率を単に  $T(x, x')$  と記述する．

遷移確率を使って，時刻  $n+1$  に生起する状態  $x$  の確率  $p_{n+1}(x)$  は時刻  $n$  における対応する確率から，次のようにわかる．

$$p_{n+1}(x) = \sum_{\tilde{x}} p_n(\tilde{x}) T_n(\tilde{x}, x) \quad (\text{B.2})$$

初期確率  $p_0(x)$  を与えると，上式により，すべての時刻における連鎖の振舞いが決定される．

時刻  $n$  における確率は行ベクトル  $p_n$  とみなせ，時刻  $n$  における遷移確率は行列  $T_n$  あるいは，マルコフ連鎖が一様であれば単に，行列  $T$  とみなせる（このような全ての要素が非負かつ，各行の和が 1 である行列を確率行列と呼ぶ）．このとき，式 (B.2) は  $p_{n+1} = p_n T_n$  と記述できる．一様な連鎖に対して， $T^k$ （行列  $T$  の  $k$  乗）は  $k$  ステップ目の遷移確率（ $T^k(x, x')$  と記述される）を与え， $p_n = p_0 T^n$  を得る．

### 不変分布

マルコフ連鎖の状態に対する不変分布（定常分布）とは，一度到達したならば永久に存続する分布のことである．より形式的に言えば，確率  $\pi(x)$  で与えられる分布が遷移確率  $T_n(x, x')$  をもつマルコフ連鎖に関して，すべての  $n$  に対して次式を満たすならば，その分布は不変である．

$$\pi(x) = \sum_{\tilde{x}} \pi(\tilde{x}) T_n(\tilde{x}, x) \quad (\text{B.3})$$

同等に，ベクトル  $\pi$  はすべての  $n$  に対して， $\pi = \pi T_n$  であるときかつ，そのときに限り不変分布を表す．一様な連鎖に対しては  $\pi = \pi T$  という一つの条件になる．マルコフ連鎖は一つ以上の不変分布をもち得る．例として， $T$  が単位行列ならば，任意の分布は不変となる．有限のマルコフ連鎖は少なくとも一つの不変分布を常にもつ．

標本抽出を行いたい分布  $\pi$  を不変分布としてもつマルコフ連鎖の構築においてしばしば，時間可逆な一様マルコフ連鎖が使われる．これはより限定的な詳細約

合い条件を満たす．すなわち， $\pi$  による確率に従って選ばれる状態から遷移が起こるとき，状態  $x$  から  $x'$  へ遷移する確率は状態  $x'$  から  $x$  へ遷移する確率と同じになる．言い換えれば，すべての  $x$  に対して，次式が成り立つ．

$$\pi(x)T(x, x') = \pi(x')T(x', x) \quad (\text{B.4})$$

次のように，これは  $\pi$  が不変分布であることを意味する．

$$\sum_{\tilde{x}} \pi(\tilde{x})T(\tilde{x}, x) = \sum_{\tilde{x}} \pi(x)T(x, \tilde{x}) = \pi(x) \sum_{\tilde{x}} T(x, \tilde{x}) = \pi(x) \quad (\text{B.5})$$

詳細釣り合いを満たさなくても，分布が不変である可能性はある．例えば，状態空間  $\{0, 1, 2\}$  上の一様分布は， $T(0, 1) = T(1, 2) = T(2, 0) = 1$  かつ，これら以外全て 0 である遷移確率をもつ一様なマルコフ連鎖に関して不変であるが，詳細釣り合いは満たさない．

### エルゴード的マルコフ連鎖

標本を抽出したい分布が不変であるかどうかに関して，マルコフ連鎖を見つけるだけでは十分ではない．マルコフ連鎖がエルゴード的であることも必要となる．すなわち，時刻  $n$  における確率  $p_n(x)$  が初期確率  $p_0(x)$  の選択にかかわらず， $n \rightarrow \infty$  で不変分布に収束する必要がある．明らかに，エルゴード的マルコフ連鎖はたった一つの不変分布をもつ．このような不変分布は均衡分布とも呼ばれる．単一の分布ではなくむしろ，分布の循環に「収束する」マルコフ連鎖もある．これら周期的な連鎖は定義により，エルゴード的ではない．

どのようなときにマルコフ連鎖がエルゴード的であるか，という問いは様々な形で質問され，回答されてきた．その多くはかなりの量の理論的な「道具」を用いる．ここでは，Neal[69] による定理を示す．

**定理 B.1** 遷移確率  $T(x, x')$  をもつ有限な状態空間上の一様なマルコフ連鎖が  $\pi$  を不変分布にもちかつ，

$$\nu = \min_x \min_{x': \pi(x') > 0} T(x, x') / \pi(x') > 0 \quad (\text{B.6})$$

であるとき，そのマルコフ連鎖はエルゴード的である．すなわち，初期確率  $p_0(x)$

にかかわらず，すべての  $x$  に対して，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \pi(x) \quad (\text{B.7})$$

となる．収束率に関する制約は次式のように与えられる．

$$|\pi(x) - p_n(x)| \leq (1 - \nu)^n \quad (\text{B.8})$$

さらに， $a(x)$  を状態の連続値関数とすると，分布  $p_n$  に関する  $a$  の期待値  $E_n[a]$  は  $\pi$  に関するその期待値  $\langle a \rangle$  に次のように収束する．

$$|\langle a \rangle - E_n[a]| \leq (1 - \nu)^n \max_{x, x'} |a(x) - a(x')| \quad (\text{B.9})$$

証明：Neal[69] (pp. 38) を参照．

□

上述の定理は一様なマルコフ連鎖に対してのみ，適用される．一様でないマルコフ連鎖に基づくアルゴリズムも多い．しかし，それらの中には単純な循環型すなわち，遷移確率がある周期  $d$  後に  $T_n = T_{n+d}$  のように反復するものがある． $d$  の倍数になる時刻における状態のみに注目すると，遷移確率  $T_0 T_1 \cdots T_{d-1}$  をもつ一様なマルコフ連鎖とみなせる．このとき，この連鎖が所望の分布に収束することを示せる [69]．さらに，所望の分布が独立に，すべての  $T_n$  に関して不変であるならば，任意の時刻からの状態を使って，モンテカルロ推定を計算できる．



# 謝辞

本研究を進めるにあたり、終始熱心な御指導を賜りました長橋宏教授に心から感謝致します。貴重な御意見および御討論をいただきました諸岡健一助手をはじめ、長橋研究室の皆様にも心から御礼を申し上げます。

## 参考文献

- [1] R. Adams and L. Bischof, “Seeded region growing,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 16, no. 6, pp. 641–647, 1994.
- [2] C. Andrieu, N. de Freitas, and A. Doucet, “Robust full Bayesian learning for radial basis networks,” *Neural Computation*, vol. 13, pp. 2359–2407, 2001.
- [3] S. A. Barker, “Image segmentation using Markov random field models,” Ph. D. dissertation, University of Cambridge, July 1998.
- [4] J. O. Berger and J. M. Bernardo, “Estimating a product of means: Bayesian analysis with reference priors,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 84, pp. 200–207, 1989.
- [5] ———, “On the development of reference priors,” in *Bayesian Statistics*, ser. 4, J. M. Bernardo, J. O. Berger, D. V. Lindley, and A. F. M. Smith, Eds. Oxford: Oxford University Press, 1992, pp. 61–77, (with discussion).
- [6] J. M. Bernardo, “Reference posterior distributions for bayesian inference,” *Journal of the Royal Statistical Society B*, vol. 41, pp. 113–147, 1979.
- [7] J. Besag, J. York, and A. Mollié, “Bayesian image restoration with two applications in spatial statistics,” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, vol. 43, pp. 1–59, 1991, (with discussion).
- [8] J. E. Besag, “Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems,” *Journal of the Royal Statistical Society B*, vol. 36, pp. 192–236, 1974.

- 
- [9] ———, “Statistical analysis of non-lattice data,” *The Statistician*, vol. 24, pp. 179–195, 1975.
- [10] ———, “Efficiency of pseudo-likelihood estimation for simple Gaussian fields,” *Biometrika*, vol. 64, pp. 616–618, 1977.
- [11] S. Beucher, “Watersheds of functions and picture segmentation,” in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing*, 1982, pp. 1928–1931.
- [12] J. C. Bezdek, “A convergence theorem for the fuzzy ISODATA clustering algorithms,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 2, no. 1, pp. 1–8, 1980.
- [13] M. Borsotti, P. Campadelli, and R. Schettini, “Quantitative evaluation of color image segmentation results,” *Pattern Recognition Letters*, vol. 19, pp. 741–747, 1998.
- [14] C. A. Bouman and M. Shapiro, “A multiscale random field model for Bayesian image segmentation,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 3, no. 2, pp. 162–177, 1994.
- [15] Y. Boykov, O. Veksler, and R. Zabih, “Fast approximate energy minimization via graph cuts,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 23, no. 11, pp. 1222–1239, 2001.
- [16] S. P. Brooks, N. Friel, and R. King, “Classical model selection via simulated annealing,” *Journal of the Royal Statistical Society B*, vol. 65, no. 2, pp. 503–520, 2003.
- [17] J. Canny, “A computational approach to edge detection,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 8, no. 6, pp. 679–698, 1986.
- [18] C. Carson, S. Belongie, H. Greenspan, and J. Malik, “Blobworld: Image segmentation using expectation-maximization and its application to image

- querying,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, no. 8, pp. 1026–1038, 2002.
- [19] R. Chellappa, “Two-dimensional discrete Gaussian Markov random field models for image processing,” in *Progress in Pattern Recognition*, L. N. Kanal and A. Rosenfeld, Eds., vol. 2. North-Holland: Elsevier Science Publishers B. V., 1985, pp. 79–112.
- [20] H. D. Cheng, X. H. Jiang, Y. Sun, and J. Wang, “Color image segmentation: Advances and prospects,” *Pattern Recognition*, vol. 34, no. 12, pp. 2259–2281, 2001.
- [21] H. Cheng and C. A. Bouman, “Multiscale Bayesian segmentation using a trainable context model,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, no. 4, pp. 511–525, 2001.
- [22] Y. Cheng, “Mean shift, mode seeking, and clustering,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 17, no. 8, pp. 790–799, 1995.
- [23] F. S. Cohen and D. B. Cooper, “Simple parallel hierarchical and relaxation algorithms for segmenting noncausal Markovian random fields,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 9, pp. 195–219, 1987.
- [24] D. Comaniciu and P. Meer, “Mean shift: A robust approach toward feature space analysis,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, no. 5, pp. 603–619, 2002.
- [25] M. K. Cowles and B. P. Carlin, “Markov chain Monte Carlo convergence diagnostics: A comparative review,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 91, pp. 883–904, 1996.
- [26] G. C. Cross and A. K. Jain, “Markov random field texture models,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 5, pp. 25–39, 1983.

- [27] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm." *Journal of the Royal Statistical Society B*, vol. 39, no. 1, pp. 1–38, 1977.
- [28] H. Derin and H. Elliott, "Modelling and segmentation of noisy and textured images using Gibbs random fields," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 9, no. 1, pp. 39–55, 1987.
- [29] H. Derin, H. Elliott, R. Cristi, and D. Geman, "Bayes smoothing algorithms for segmentation of binary images modeled by Markov random fields," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, pp. 707–719, 1984.
- [30] X. Descombes, R. D. Morris, J. Zerubia, and M. Berthod, "Estimation of Markov random field prior parameters using Markov chain Monte Carlo maximum likelihood," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, no. 7, pp. 954–963, 1999.
- [31] R. C. Dubes and A. K. Jain, "Random field models in image analysis," *Journal of Applied Statistics*, vol. 16, no. 2, pp. 131–164, 1989.
- [32] J. C. Dunn, "A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters," *Journal of Cybernetics*, vol. 3, pp. 32–57, 1973.
- [33] P. F. Felzenszwalb and D. P. Huttenlocher, "Efficient graph-based image segmentation," *International Journal of Computer Vision*, vol. 59, no. 2, pp. 167–181, 2004.
- [34] W. T. Freeman, E. C. Pasztor, and O. T. Carmichael, "Learning low-level vision," *International Journal of Computer Vision*, vol. 40, no. 1, pp. 25–47, 2000.
- [35] K. Fukunaga and L. D. Hostetler, "The estimation of the gradient of a density function," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 21, pp. 32–40, 1975.

- [36] A. E. Gelfand and A. F. M. Smith, “Sampling-based approaches to calculating marginal densities,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 85, pp. 398–409, 1990.
- [37] A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, and D. B. Rubin, *Bayesian Data Analysis*, 2nd ed. CRC Press, 2003.
- [38] D. Geman, “Random fields and inverse problems in imaging,” *Lecture Notes in Mathematics*, no. 1427, pp. 113–193, 1990.
- [39] D. Geman, S. Geman, C. Graffigne, and P. Dong, “Boundary detection by constrained optimization,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no. 7, pp. 609–628, 1990.
- [40] D. Geman and G. Reynolds, “Constrained restoration and the recovery of discontinuities,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 14, no. 3, pp. 367–383, 1992.
- [41] S. Geman and D. Geman, “Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, no. 6, pp. 721–741, 1984.
- [42] S. Geman and C. Graffigne, “Markov random field image models and their applications to computer vision,” in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1986, pp. 1496–1517.
- [43] P. J. Green, “Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination,” *Biometrika*, vol. 82, pp. 711–732, 1995.
- [44] G. R. Grimmett, “A theorem about random fields,” *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 5, pp. 81–84, 1973.
- [45] J. A. Hammersley and P. Clifford, “Markov fields on finite graphs and lattices,” 1971, *unpublished*.
- [46] X. He, R. S. Zemel, and Miguel Á Carreira-Perpiñán, “Multiscale conditional random fields for image labeling,” in *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2004.

- [47] 本郷 節之, 川人 光男, 乾 敏郎, 三宅 誠, “エネルギー学習機能をもつ局所並列確率アルゴリズムによる輪郭線抽出,” 電子情報通信学会論文誌, vol. J74-D-II, no. 3, pp. 348–356, 1991.
- [48] F. Höppner and F. Klawonn, “A contribution to convergence theory of fuzzy c-means and derivatives,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, no. 5, pp. 682–694, 2003.
- [49] S. L. Horowitz and T. Pavlidis, “Picture segmentation by a tree traversal algorithm,” *Journal of the ACM*, vol. 23, no. 2, pp. 368–388, 1976.
- [50] C.-L. Huang, T.-Y. Cheng, and C.-C. Chen, “Color images’ segmentation using scale space filter and Markov random field,” *Pattern Recognition*, vol. 25, no. 10, pp. 1217–1229, 1992.
- [51] L. Hubert and P. Arabie, “Comparing partitions,” *Journal of Classification*, vol. 2, pp. 193–218, 1985.
- [52] H. Jeffrey, *Theory of Probability*, 3rd ed. London: Oxford University Press, 1961.
- [53] T. Kariya and H. Kurata, *Generalized Least Squares*. John Wiley & Sons, 2004.
- [54] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, “Snakes: Active contour models,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 1, no. 4, pp. 321–331, 1988.
- [55] Z. Kato, “Reversible jump Markov chain Monte Carlo for unsupervised MRF color image segmentation,” in *Proceedings of the British Machine Vision Conference*, A. Hoppe, S. Barman, and T. Ellis, Eds., vol. 1, 2004, pp. 37–46.
- [56] Z. Kato, T.-C. Pong, and J. C.-M. Lee, “Color image segmentation and parameter estimation in a Markovian framework,” *Pattern Recognition Letters*, vol. 22, no. 3-4, pp. 309–321, 2001.

- [57] S. Kirkpatrick, C. D. Gellatt, and M. P. Vecchi, "Optimization by simulated annealing," *Science*, vol. 220, pp. 671–680, 1983.
- [58] S. Konishi, A. L. Yuille, J. Coughlan, and S. C. Zhu, "Fundamental bounds on edge detection: An information theoretic evaluation of different edge cues," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, 1999, pp. 573–579.
- [59] S. Kumar and M. Hebert, "Discriminative random fields: A discriminative framework for contextual interaction in classification," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, 2003.
- [60] A. M. Law and W. D. Kelton, *Simulation Modelling and Analysis*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.
- [61] S. Z. Li, *Markov Random Field Modeling in Computer Vision*, 1st ed. Tokyo: Springer-Verlag, 1995.
- [62] Y. W. Lim and S. U. Lee, "On the color image segmentation algorithm based on the thresholding and the fuzzy  $c$ -means techniques," *Pattern Recognition*, vol. 23, no. 9, pp. 935–952, 1990.
- [63] J. Liu and Y.-H. Yang, "Multiresolution color image segmentation," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 16, no. 7, pp. 689–700, 1994.
- [64] J. Malik, S. Belongie, J. Shi, and T. Leung, "Textons, contours and regions: Cue integration in image segmentation," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, 1999, pp. 918–925.
- [65] J. Marroquin, S. Mitter, and T. Poggio, "Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 82, no. 397, pp. 76–89, 1987.
- [66] D. Martin, C. Fowlkes, and D. T. J. Malik, "A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and



- measuring ecological statistics,” in *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, vol. 2, 2001, pp. 416–423.
- [67] D. R. Martin, C. C. Fowlkes, and J. Malik, “Learning to detect natural image boundaries using local brightness, color, and texture cues,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, no. 5, pp. 530–549, 2004.
- [68] J. Moussouris, “Gibbs and Markov random systems with constraints,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 10, no. 1, pp. 11–13, 1974.
- [69] R. M. Neal, “Probabilistic inference using Markov chain Monte Carlo methods,” University of Toronto, Canada, Technical Report CRG-TR-93-1, 1993.
- [70] H. Nishimori and K. Y. M. Wong, “Statistical mechanics of image restoration and error-correcting codes,” *Physical Review E*, vol. 60, no. 1, pp. 132–144, 1999.
- [71] M. Nitzberg, D. Mumford, and T. Shiota, *Filtering, Segmentation, and Depth*. Springer-Verlag, 1993.
- [72] R. Ohlander, K. Price, and D. R. Reddy, “Picture segmentation using a recursive region splitting method,” *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 8, pp. 313–333, 1978.
- [73] Y. Ohta, T. Kanade, and T. Sakai, “Color information for region segmentation,” *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 13, no. 3, pp. 222–241, 1980.
- [74] D. K. Panjwani and G. Healey, “Markov random field models for unsupervised segmentation of textured color images,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 17, no. 10, pp. 939–954, 1995.
- [75] J.-H. Park, W.-H. Cho, and S.-Y. Park, “Color image segmentation using a Gaussian mixture model and a mean field annealing EM algorithm,” *IEICE Transactions on Information and Systems*, vol. E86-D, no. 10, pp. 2240–2247, 2003.

- [76] P. Pérez, C. Hue, J. Vermaak, and M. Gangnet, “Color-based probabilistic tracking,” in *Proceedings of the European Conference on Computer Vision*, 2002, pp. 661–675.
- [77] G. Qian and R. Chellappa, “Structure from motion using sequential Monte Carlo methods,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 59, no. 1, pp. 5–31, 2004.
- [78] W. M. Rand, “Objective criteria for the evaluation of clustering methods,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 66, pp. 846–850, 1971.
- [79] S. Richardson and P. J. Green, “On Bayesian analysis of mixtures with an unknown number of components,” *Journal of the Royal Statistical Society B*, vol. 59, pp. 731–792, 1997.
- [80] C. P. Robert, “Mixtures of distributions: Inference and estimation,” in *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, W. R. Gilks, S. Richardson, and D. J. Spiegelhalter, Eds. London: Chapman & Hall, 1996.
- [81] G. C. Rota, “On the foundations of combinatorial theory,” *Zeitschrift Fur Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete*, vol. 2, pp. 340–368, 1964.
- [82] S. Roweis and Z. Ghahramani, “A unifying review of linear Gaussian models,” *Neural Computation*, vol. 11, no. 2, pp. 305–345, 1999.
- [83] E. Saber, A. M. Tekalp, and G. Bozdagi, “Fusion of color and edge information for improved segmentation and edge linking,” *Image and Vision Computing*, vol. 15, no. 10, pp. 769–780, 1997.
- [84] S. S. Saquib, C. A. Bouman, and K. Sauer, “ML parameter estimation for Markov random fields with applications to Bayesian tomography,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, no. 7, pp. 1029–1044, 1998.
- [85] J. Shi and J. Malik, “Normalized cuts and image segmentation,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 22, no. 8, pp. 888–905, 2000.

- 
- [86] B. W. Silverman, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall, 1986.
- [87] W. Skarbek and A. Koschan, “Colour image segmentation - a survey -,” Technical University of Berlin,” Technical Report 94-32, 1994.
- [88] P. Smyth, “Belief networks, hidden Markov models, and Markov random fields: A unifying view,” *Pattern Recognition Letters*, vol. 18, no. 11, pp. 1261–1268, 1997.
- [89] M. Stephens, “Bayesian methods for mixtures of normal distributions,” Ph.D. dissertation, University of Oxford, 1997.
- [90] —, “Bayesian analysis of mixture models with an unknown number of components—an alternative to reversible jump methods,” *Annals of Statistics*, vol. 28, no. 1, pp. 40–74, 2000.
- [91] J. Sun, N.-N. Zheng, and H.-Y. Shum, “Stereo matching using belief propagation,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 25, no. 7, pp. 787–800, 2003.
- [92] 田中 和之, “画像修復に対する統計的手法における最大事後周辺確率推定,” 電子情報通信学会論文誌, vol. J82-A, no. 10, pp. 1679–1684, 1999.
- [93] L. Tierney, “Markov chains for exploring posterior distributions,” *Annals of Statistics*, vol. 22, pp. 1701–1762, 1994, (with discussion).
- [94] S. Tominaga, “Color image segmentation using three perceptual attributes,” in *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1986, pp. 628–630.
- [95] P. H. S. Torr and C. Davidson, “IMPSAC: Synthesis of importance sampling and random sample consensus,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 25, no. 3, pp. 354–364, 2003.
- [96] Z. Tu and S.-C. Zhu, “Image segmentation by data-driven Markov chain Monte Carlo,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, no. 5, pp. 657–673, 2002.

- 
- [97] R. Unnikrishnan and M. Hebert, “Measures of similarity,” in *IEEE Workshop on Applications of Computer Vision*, 2005, pp. 394–400.
- [98] R. Unnikrishnan, C. Pantofaru, and M. Hebert, “A measure for objective evaluation of image segmentation algorithms,” in *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2005.
- [99] L. Vincent and P. Soille, “Watersheds in digital spaces: An efficient algorithm based on immersion simulations,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 13, no. 6, pp. 583–598, 1991.
- [100] J.-P. Wang, “Stochastic relaxation on partitions with connected components and its application to image segmentation,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 20, no. 6, pp. 619–636, 1998.
- [101] S. Waterhouse, D. MacKay, and T. Robinson, “Bayesian methods for mixture of experts,” in *Advances in Neural Information Processing Systems*, D. S. Touretzky, M. C. Mozer, and M. E. Hasselmo, Eds. Cambridge, MA: The MIT Press, 1996, vol. 8, pp. 351–357.
- [102] Z. Wu and R. Leahy, “An optimal graph theoretic approach to data clustering: Theory and its application to image segmentation,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 15, no. 11, pp. 1101–1113, 1993.
- [103] J. Zhang, “The mean field theory in EM procedures for Markov random fields,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 10, pp. 2570–2583, 1992.
- [104] J. Zhang, J. W. Modestino, and D. A. Langan, “Maximum-likelihood parameter estimation for unsupervised stochastic model-based image segmentation,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 3, no. 4, pp. 404–420, 1994.

- 
- [105] Y. J. Zhang, “A survey on evaluation methods for image segmentation,” *Pattern Recognition*, vol. 29, no. 8, pp. 1335–1346, 1996.
- [106] Z. Zhang, K. L. Chan, Y. Wu, and C. Chen, “Learning a multivariate Gaussian mixture model with the reversible jump MCMC algorithm,” *Statistics and Computing*, vol. 14, pp. 343–355, 2004.
- [107] S. C. Zhu and A. Yuille, “Region competition: Unifying snakes, region growing, and Bayes/MDL for multiband image segmentation,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 18, no. 9, pp. 884–900, 1996.