T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	線形空間回路網に関する理論的研究
Title(English)	
著者(和文)	小川英光
Author(English)	HIDEMITSU OGAWA
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第734号, 授与年月日:1977年3月31日, 学位の種別:論文博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第734号, Conferred date:1977/3/31, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

線形空間回路網に関する理論的研究

小川英光

東京工業大学 384636

目　次 I

第 I 章 序説

第 1 節　序論　2

第 II 章 空間回路網理論の基礎

第 2 節　Cahn 形一般標本化定理　16

第 3 節　空間回路網理論の基礎　31

第 III 章 複素共役演算と対合演算

第 4 節　作用素の空間における複素共役演算　76

第 5 節　実対合と共変対合　105

第 6 節　共変対合に関する固有値問題　147

第 IV 章 並進作用素によって生成される作用素の空間

第 7 節　並進作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$　196

第 8 節　微分作用素と積分作用素　237

第 9 節　作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と関数空間 H_N の直交基底　259

第 V 章 反転作用素によって生成される作用素の空間

第 10 節　点 a に関する反転作用素　286

第 11 節　反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ (I)　305

第 12 節　反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ (II)　328

第 VI 章 双対演算とその応用

第 13 節　変形対合　358

第 14 節　有限 Fourier 変換作用素　387

第 15 節　双対演算とその応用　413

第 16 節　$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$　439

第 VII 章 空間回路網理論の応用

第 17 節　空間回路網の誤差評価　466

第 18 節　作用素の近似とその応用　486

第 19 節　可変空間回路網の制御容易な近似的構成法　500

第 20 節　空間回路網理論のその他の応用　519

第 21 節　擬似直交性理論　565

第 VIII 章 総括

第 22 節　結論　590

目　次 II

第 I 章　序説　〔1－14〕

第 1 節　序論　2

1.1　空間回路網技術の思想的背景及び歴史　2

1.2　本研究の立場と位置づけ　5

1.3　本論文の構成　7

第 II 章　空間回路網理論の基礎　〔15－74〕

第 2 節　Cahn 形一般標本化定理　16

2.1　まえがき　16

2.2　再生核　16

2.3　Cahn 形一般標本化定理　20

2.4　内積の選点表現　26

2.5　Christoffel 数 $|\lambda_n|^2$　28

2.6　標本化基底と他の基底との関係　30

第 3 節　空間回路網理論の基礎　31

3.1　情報処理の数学的定式化　31

3.1.1　信号空間　31

3.1.2　情報処理機能の定式化　35

3.2　情報処理機能の表現　37

3.2.1　dyad と dyadic　37

3.2.2　作用素の schmidt 族とトレース族　39

3.2.3　作用素の行列表現と dyadic 表現　42

3.2.4　基本座標系　46

3.3 空間回路網の設計理論 49
3.3.1 自然座標系 49
3.3.2 自然座標系の性質 53
3.3.3 空間回路網の設計理論 57
3.3.4 作用素の積分表現 62
3.4 偶数個の端子をもつ空間回路網理論 68
3.5 基本的な概念の要約 72

第Ⅱ章 複素共役演算と対合演算 〔75 - 193〕

第4節 複素共役概念の作用素の空間への拡張とその応用 76
4.1 まえがき 76
4.2 複素共役演算の定義とその基本的性質 77
4.3 複素共役演算の数学的性質 83
4.4 実作用素と虚作用素 85
4.5 等方作用素と反等方作用素 90
4.6 実作用素，等方作用素，自己共役作用素の相互関係 93
4.7 作用素の実分解 95
4.8 作用素の等方分解 102
第5節 実対合と共変対合 105
5.1 まえがき 105
5.2 実対合と共変対合の定義 106
5.3 実対合 ω 108
5.3.1 ω の基本的性質 108
5.3.2 ω of dyadic 表現と積分表現 110
5.3.3 ω と関数の縮少 113
5.4 実対合の積 117
5.5 実対合に関する固有値問題 121
5.5.1 実対合に関する固有値問題 121

5.5.2 実対合の固有集合の性質 124
5.6 共変対合 Ω 127
5.6.1 Ω の基本的性質 127
5.6.2 ΩA の dyadic 表現と積分表現 132
5.6.3 Ω と作用素の縮少 133
5.6.4 Ω のその他の性質 135
5.7 共変対合の積 138
5.8 付録、命題 5.16 の証明 141
第6節 共変対合に関する固有値問題 147
6.1 共変対合 Ω に関する固有値問題 147
6.1.1 Ω に関する固有値問題 147
6.1.2 Ω の固有集合と ω の固有集合の関係 149
6.1.3 二積類の共変対合の固有集合の関係 152
6.2 共変対合による作用素の分解 153
6.2.1 共変対合による作用素の分解 153
6.2.2 共変対合による作用素の分解と作用素の縮少 154
6.2.3 共変対合の固有集合の性質 157
6.3 共変対合 Ω と共役演算 * の積 Ω* に関する固有値問題 159
6.3.1 Ω* に関する固有値問題 159
6.3.2 Ω* の固有空間の性質 161
6.3.3 Ω* の固有空間と Ω₁* の固有空間の関係 166
6.4 共変対合 Ω₁ と共役演算 * の積 Ω₁* による作用素の分解 167
6.4.1 Ω₁* による作用素の分解 167
6.4.2 共変対合と共役演算の積による作用素の分解と作用素の縮少 169
6.4.3 Ω₁* の固有空間の性質 170
6.5 共変対合の積 ΩΩ₁ に関する固有値問題 172
6.5.1 ΩΩ₁ に関する固有値問題 172
6.5.2 ΩΩ₁ の固有空間と ωω₁ の固有空間の関係 174

6.6 等方ユニタリ作用素に関する固有値問題 178
6.7 $U^2=E$ の場合 181
6.7.1 $U^2=E$ が成立するための条件 181
6.7.2 U に関する固有値問題 183
6.7.3 $\Omega\Omega_e$ による作用素の分解 185
6.8 $U^4=E$ の場合 186
6.8.1 $U^4=E$ が成立するための条件 187
6.8.2 U に関する固有値問題 188
6.8.3 $\Omega\Omega_e$ による作用素の分解 191

第 II 章 並進作用素によって生成される作用素の空間 [195-284]

第7節 並進作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ 196
7.1 まえがき 196
7.2 並進作用素 196
7.3 作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(L_2)$ と $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ 202
7.4 インパルス応答による $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と H_N の同形対応 207
7.5 作用素 ρ_1 の性質 212
7.6 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の積分表現による特徴づけ 219
7.7 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の結合特性による特徴づけ 220
7.8 正弦作用素 $S^{(n)}$ と余弦作用素 $C^{(n)}$ 224
7.9 平均化作用素 $\Sigma_N(a)$ と差分作用素 $\Delta_N(a)$ 226
7.9.1 平均化作用素 $\Sigma_N(a)$ と差分作用素 $\Delta_N(a)$ 227
7.9.2 $\Sigma_N(a)$ と $\Delta_N(a)$ のインパルス応答 229
7.9.3 偶関数の空間及び奇関数の空間の自然座標系 231
7.10 等方性と反等方性 233
7.11 付録、補題 5.8 の証明 236

第8節 微分作用素と積分作用素 237
8.1 まえがき 237
8.2 空間微分を行なう作用素 D_N 237
8.3 D_N のインパルス応答と結合特性 239
8.4 D_N の結合特性の評価 243
8.5 D_N の精度 246
8.6 D_N の結合特性の区間 ℓ から受ける影響 248
8.7 二階微分作用素 D_N^2 252
8.8 空間積分作用素 I_N 255
8.9 あとがき 257
第9節 作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と関数空間 H_N の直交基底 259
9.1 まえがき 259
9.2 作用素のノルムと階数の関係 260
9.3 一般の基底 263
9.4 ユニタリ基底 269
9.5 並進基底 271
9.6 標本化基底 274
9.7 階数 1 の基底 277
9.8 ベキ等基底 279
9.9 各基底間の相互関係 280
9.10 付録 命題 9.15 の証明 282

第II章 反転作用素によって生成される作用素の空間 [285-355]

第10節 点 a に関する反転作用素 286
10.1 まえがき 286
10.2 点 a に関する反転作用素 $I_N(a)$ 286

10.3 $I_N(a)$ と $T_N(a)$ の関係 290
10.4 正規直交系 $\{I_N(a_{n/2})/\sqrt{2N+1}\}$ 294
10.5 $I_N(a)$ と $E^{(n)}$ の関係 296
10.6 a - 対称演算 $\overset{a}{\times}$ 298
10.7 a - 対称演算による $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の特徴づけ 303
第11節 反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ (I) 305
11.1 まえがき 305
11.2 作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(L_2)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ 305
11.3 $\mathcal{B}^{(2)}(H)$ の複素共役演算に関する閉性 310
11.4 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の関係 311
11.5 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の結合特性による特徴づけ 314
11.6 インパルス応答による $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と H_N の同形対応 320
11.7 作用素 P_2 の性質 323
11.8 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の実作用素 327
第12節 反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ (II) 328
12.1 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の積分表現による特徴づけ 328
12.2 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と相関 329
12.3 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と自己相関 334
12.4 相関とたたみこみ 337
12.5 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の a - 対称演算 $\overset{a}{\times}$ に関する閉性 340
12.6 作用素 $C^{(n)}I_N(0)$ と $S^{(n)}I_N(0)$ 342
12.7 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の偶作用素と奇作用素 345
12.8 正弦/余弦変換作用素 C_N 348
12.8.1 正弦/余弦変換作用素 C_N 348
12.8.2 C_N のその他の性質 351
12.9 相関とたたみこみの和で表される作用素 352

第 III 章　双対演算とその応用　〔357－463〕

第13節　変形対合　358

13.1　まえがき　358

13.2　変形対合　359

13.3　変形対合の積　363

13.4　変形対合に関する固有値問題　365

13.5　等方ユニタリ作用素の積分核　369

13.6　等方ユニタリ作用素の構成法　374

13.7　等方ユニタリ作用素の積分核の実分解 (I)　377

13.8　等方ユニタリ作用素の積分核の実分解 (II)　383

第14節　有限 Fourier 変換作用素　387

14.1　まえがき　387

14.2　有限 Fourier 変換作用素 $\mathfrak{F}_N$　387

14.3　$\mathfrak{F}_N$ の固有空間 $H_N^{(\chi)}$　392

14.4　$\mathfrak{F}_N$ の固有空間 $H_N^{(\chi)}$ への射影作用素　395

14.5　自然座標系の空間 $H_N^{(\chi)}$ への射影　399

14.6　$\mathfrak{F}_N$ の積分核　404

14.7　$\mathfrak{F}_N$ の実分解　407

第15節　双対演算とその応用　413

15.1　まえがき　413

15.2　双対関数　413

15.3　$\mathfrak{B}^{(1)}(H_N)$ における双対作用素　420

15.4　$\mathfrak{B}(H_N)$ における双対作用素　427

15.5　結合特性の次元独立性　434

15.5.1　結合特性の次元独立性　434

15.5.2　オー種次元独立性の条件　435

15.5.3 結合特性のオ＝種次元独立性 437
15.6 まとめ 438
第16節 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ 439
16.1 まえがき 439
16.2 作用素 $F_N(a)$ と $J_N(a)$ 439
16.2.1 作用素 $F_N(a)$ 440
16.2.2 作用素 $J_N(a)$ 441
16.3 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ 443
16.3.1 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ 444
16.3.2 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ 446
16.4 空間 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1\sim4)$ の相互関係 448
16.5 直流応答による $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ と H_N の同形対応 453
16.6 作用素 ρ_n $(n=3,4)$ の性質 456

第四章 空間回路網理論の応用 [465－588]

第17節 空間回路網の誤差評価 466
17.1 まえがき 466
17.2 標本化定理に関する誤差 467
17.2.1 帯域制限に関する誤差 467
17.2.2 標本点の一様なずれの補償 473
17.2.3 付録、Lebesgue の定数 476
17.3 多入力係数加算器の同相誤差 478
17.3.1 同相誤差 478
17.3.2 m－同相誤差が零になる為の条件 479
17.3.3 同相誤差が零になる為の条件 481
17.3.4 同相誤差が零になる作用素の集合の性質 482

第18節 作用素の近似とその応用 486
18.1 まえがき 486
18.2 Weierstrass 形近似定理 487
18.3 Čebyšev 形近似定理 489
18.4 オ=標本化と低域通過汀波器 496
第19節 可換空間回路網の制御容易な近似的構成法 500
19.1 まえがき 500
19.2 可換空間回路網の制御容易な近似的構成法 501
19.2.1 オー近似 501
19.2.2 オニ近似 502
19.2.3 オミ近似 505
19.3 ボケの作用素の直線近似 509
19.3.1 ボケの作用素 509
19.3.2 ボケの作用素のオニ近似 511
19.3.3 ボケの作用素とオミ近似 513
第20節 空間回路網理論のその他の応用 519
20.1 太いビームを使用した観測装置の分解能改善法 519
20.1.1 まえがき 519
20.1.2 観測結果からの信号復元法(原理的考察) 521
20.1.3 Real Pulse による標本化定理との関係 522
20.1.4 太いビームを使用した観測装置の分解能改善法 525
20.1.5 作用素 $W_N(a)$ の性質 528
20.1.6 例 531
20.1.7 あとがき 535
20.2 標本点上で与えられた関数の補間表示法 536
20.2.1 まえがき 536
20.2.2 四分割法 536

20.2.3 二分割法 538
20.2.4 補間表示装置の試作 539
20.3 ユニタリ作用素の逆作用素の構成法 553
20.3.1 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元の場合 553
20.3.2 $\mathcal{B}(H_N)$ の元への拡張 554
20.4 相関関数を不変に保つ作用素の特徴づけ 556
20.4.1 相関関数を不変に保つ $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元 557
20.4.2 相関関数を不変に保つ $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元 561
20.4.3 あとがき 563
第21節 擬似直交性理論 565
21.1 まえがき 565
21.2 準備 566
21.3 擬似直交系の特徴づけ 570
21.4 擬似直交系の形式保存性 573
21.5 擬似直交系のその他の性質 575
21.6 擬似直交系の例 579
21.7 擬似直交標本化基底 582
21.8 擬似双直交系 584
21.9 あとがき 585
21.10 付録 586
21.10.1 命題 21.2 の証明 586
21.10.2 命題 21.12 の証明 587
第Ⅲ章 総括 [589 - 595]
第22節 結論 590
22.1 本研究で得られた成果 590

22.2 本研究の直接的応用分野 592
22.3 将来展望 593

謝辞 596
参考文献 597
発表論文一覧 608
索引 612
1. 命題索引 612
2. 系索引 615
3. 補題索引 616
4. 図索引 617
5. 表索引 618
6. 記号索引 619
7. 事項索引 622

第 I 章

序　説

第1節 序論

1.1 空間回路網技術の思想的背景及び歴史

電子計算機は、今や社会の隅々にまで浸透している。本来計算の為に考案された機械が、このように様々な分野に応用できるのは、万能Turing機械と呼ばれる理論的裏付けがあるからである。[1] 人々はこの理論を拠所に、電子計算機の高速化、大容量化、信頼性向上に努力を傾けると共に、考え得るあらゆる領域にその応用範囲を広げて行き、その結果、現在のような情報化社会の興隆を迎えるに至ったのである。

ところが、このような試みが全て成功した訳ではない。これらの試みを通して、ゲームのプレイ、定理の証明、言語翻訳、学習、パターン認識等の問題に対しては、電子計算機の能力が極めて低いことが明らかにされた。

こうして、原理的に可能であるということと、現実的規模で可能であるということの間には、非常に大きな差異があることが認識され、もう一度人間の頭脳の働きと電子計算機の能力の関係が見直されることになった。その結果、パターン認識のように人間が殆ど無意識に行なっている情報処理が、電子計算機にとっては非常に不得意であり、逆に人間が不得意とする情報処理を電子計算機は簡単に行なってしまうという関係にあることが分かった。

そうして見ると、現在の電子計算機技術をますます発展させるということは、人間の不得意とする情報処理を機械に代行させるという意味で好ましいことであると言える。しかし その反面、このような傾向が強くなればなる程、人間と電子計算機の間の意思疎通が困難となり、様々な問題が生じてくるのではないかと心配される。

一方、細胞診、X線写真の解析、泡箱写真の解析、指紋の照合等の分野で行

なわれる基礎的情報処理は、ある程度経験を積んだ人間にとって容易なものであるけれども、扱うべき量が厖大である為に、機械化を行ない、そのような作業から人間を解放することが望まれている。ここでも、電子計算機による解決が試みられているけれども、これらの問題が本質的には全てパターン認識の問題に帰着される為に、未だ充分な成果を収めているとは言い難いのである。

こうして、人間の不得意な情報処理を代行してくれる電子計算機と人間との間の歪をなくするという問題と、人間の得意とする情報処理を、より短時間により大量に行なうことができる情報処理装置を開発するという問題が浮かび上ってきた。

第一の問題を解決する為には、情報処理という問題を、電子計算機の立場からだけでなく、それとは異質の人間の頭脳に近い新しい情報処理様式の立場から考え直すことが必要ではないかと思われる。その結果として、人間の得意とする情報処理の能力を更に量的に高めることができ、第二の問題も同時に解決されるであろうという期待がもたれる。

では、どのようにして人間頭脳の情報処理機構を調べていけば良いであろうか。世の多くの人々は、次の二つの立場をとった。即ち、心理学的立場と生理学的立場である。

心理学的立場は、脳を外から眺め、刺激と反応をもとにその働きを解明しようとするものである。ただ、そこで得られる実験精度があまりに悪く、現時点でこの立場をとることには疑問がもたれる。

生理学的立場には、更に二つの立場がある。即ち、直接個々の神経細胞の働きを生理学的に調べていくものと、[2] そうして得られた知見をもとに、ある機能を実現するような工学的モデルを作り、そのモデルを解析することにより脳の働きを解明しようとするものがあるが、いずれにしても、どのような神経細胞(神経素子)がどのように結合されているかという構造に着目するところにその特徴がある。

前者は、脳を直接攻撃する最も正統的な方法であるかも知れないが、脳があ

表1.1　空間回路網の位置づけ

情報処理の種類	立　場	技　術
論理的情報処理 (意識的処理 分析的判断)	数学基礎論 (Turing機械)	電子計算機
非論理的情報処理 (無意識的処理 総合的判断)	心理学	
	生理学	神経回路，パーセプトロン
	進化論	空間回路

まりに大規模で複雑なシステムである為に、化学に於ける分子レベルの現象を、素粒子レベルの基本的な性質から導き出そうとすることに対応しているように思われる。

現在、工学の分野で最も盛んに行なわれているのが、後者の立場に立つ研究であるが、[3] 神経素子という非線形素子を多数結合した非線形回路網を扱う為に、数学的取扱いが容易でなく、多くの場合、シミュレーションによってその能力を確かめるだけに終り、なかなか体系としてまとまっていかないのが現状である。ただその中にあって、神経統計力学と呼ばれる一つの理論体系が甘利[4]等により着々と築かれているのは注目に値する。

このような背景のもとに、第三の立場が現われた。それは、視聴覚系を含めた脳が、合目的性にかなった進化の過程を通じて現在の姿に到達したものであると見なし、その合目的性の具体的内容を情報科学の立場から解明することにより、脳の情報処理様式を明らかにしようという、いわば進化論の立場である[5]~[7]（表1.1）。

このような立場から、飯島は視覚パターンの認識理論を展開していくと共に、[6] そこで明らかにされた各種情報処理を実際に金物で実現する為の方式を探っていった。その結果、空間情報を扱うシステムは、広い意味での位相構造を保存する変換機能を備えており、しかも、空間的に分布するパターンを、空間並列

的に同時処理するものでなければいけないことが認識され[5]、文字図形の位置正規化を例に、大域相互依存回路網という方式が提案された。[9] これは、入力図形の重心が時間の経過と共に指数関数的に座標原点に近づくものであり、時時刻々に於ける位置正規化過程が、非線形微積分方程式（発展方程式）で記述されている。

そして、位置正規化に限らず、回転、伸縮、ボケの正規化等々、同様の形の方程式で記述できるものが、他にも数多く存在することが分かり、[10] またそれらの処理が、線形回路網の内部状態を外部条件によって制御することにより全体として非線形な回路網を構成することによって実現できるばかりでなく、制御を行なう為にパターン全体から大域的情報を抽出する部分も、線形回路を組合せることにより構成できることが分かってきた。[11]

そこで、非線形な回路網を全体として取扱う前に、まず基本となるべき線形回路網を自由に取扱えるようにならなければいけないという考えのもとに、名称も"大域相互依存回路網"から"空間回路網"と改められ[12][13]、この中心となるべき線形空間回路網の設計理論を整備する仕事が始められた。まず第一段階として、扱う信号をある空間周波数以下に帯域制限されたものに限り、更に情報処理機能も、並進作用素と可換な線形作用素に限ることにより、その機能を実現する為のある程度統一的な線形空間回路網理論が作られた。[12][14] その後、二次元空間回路網及び時間空間回路網への拡張が試みられると共に、[15][16] 座標変換による信頼性向上[17] 及び各種誤差評価の問題[18] が論じられた。そしてこれらの理論を飯島のパターン認識理論[8]に適用することにより、このような考え方が確かに有効であることが認められた。[19]～[21]

以上が、空間回路網の思想的背景及び、本研究が開始される以前の研究状況である。

1.2 本研究の立場と位置づけ

上述のような思想的背景のもとにある空間回路網理論と、より本格的に展開していく為に、筆者は次のような立場をとった。即ち、情報処理とは、ある信号空間の元をある信号空間の適当な元に変換することであるから、情報処理機能を作用素として数学的に定式化することは、極く自然なことである。そしてそのような見方は、既に文献(12),(14)でもとられている。しかし、その段階に留って、一個一個の作用素を解析していくのではなく、作用素の作る空間を考え、一個一個の作用素をその空間の中の点と見なすことにより、より見通しの良い、より緻密な理論体系を築くことができるのではないかと考えた。

このような考え方は、文字認識の研究でも既に行なわれている。即ち、文字図形を $f(x)$ と関数の形で表現することにより、数学的取扱いを可能にするだけでなく、更に進んで、文字図形集合、即ち関数 $f(x)$ の集合を考え、関数自身をその集合の中の点とみなすことにより、文字図形集合の木目細かな構造解析が行なわれている。そして、その結果を活用することにより、高性能の光学的文字読取装置が開発されたことは、前に述べたとうりである。[19] つまり、数学的に言えば、関数の性質だけでなく、関数空間の構造が解析され、利用されていったのである。

筆者はこのような考え方が、関数だけでなく、もう一段上の作用素に対しても有効ではないかと考えたのである。しかしこの考え方を、1.1 で述べた大域相互依存形非線形空間回路網に直接適用することは、現在の段階では困難である。我々は未だ、作用素空間の取扱いにそれ程習熟しているわけではない。非線形作用素の空間を考える前に、まず、より簡単な線形作用素の空間で、作用素空間の自由な取扱いに慣れておく必要があるように思われる。

しかも、大域相互依存形非線形空間回路網の中心は、あくまで線形空間回路網であり、これを外部条件によって制御することにより、全体として非線形な空間回路網を構成するのである。従って、線形作用素の空間の構造解析を行って得られた結果は、そのまま大域相互依存形非線形空間回路網に生かされるものと思われる。事実、並進作用素 $T(a)$ やボケの作用素 $P(\sigma)$ のように、入力

パターンによって α や σ が変化するけれども、α や σ を固定している限り線形作用素になっているような例は数多く存在し、そのような作用素に対しては、線形理論がかなり有効な働きをしていることが確かめられるのである。

また、平滑化、空間微分、ラプラシアン等、画像処理の分野における各種前処理で、線形作用素によって表されるものも多い。

そこで筆者は、作用素空間の考え方の有効性を確かめる為に、まず第一段階として、情報処理機能を連続線形作用素に限り、作用素空間の構造解析を基礎にした線形空間回路網の設計理論を展開していった。

その結果、任意に与えられた連続線形作用素に対する空間周波数特性、或いはその作用素を空間回路網で実現する際の結合特性が、作用素空間の中に設定されたある座標系に対するその作用素の座標成分として求められることが分かり、実際にそれらの値を求める為の手続きも得られた。

また、この理論によれば、ある情報処理装置を外部から制御することによりその機能を変化させていくということは、作用素空間の中の点を、ある軌跡に沿って変化させるということになり、幾何学的イメージが非常につかみ易くなった。

更に、空間回路網の構造を作用素空間の中で表現することにより、空間回路網の構造の変化が情報処理機能に及ぼす影響、或いは逆に、情報処理機能の性質が空間回路網の構造に及ぼす影響も、明確になってきた。

本論文は、こうして得られた成果をまとめたものであり、線形空間回路網の設計理論として実際に役立つばかりでなく、1.1 で述べた空間回路網研究の目標に対する一つの有力な接近法になるものと思われる。

1.3 本論文の構成

本論文は、8つの章と22の節から成り立っている。相互関係を図1.1に示す。第II章では、情報処理機能を作用素として数学的に定式化し、この作用素

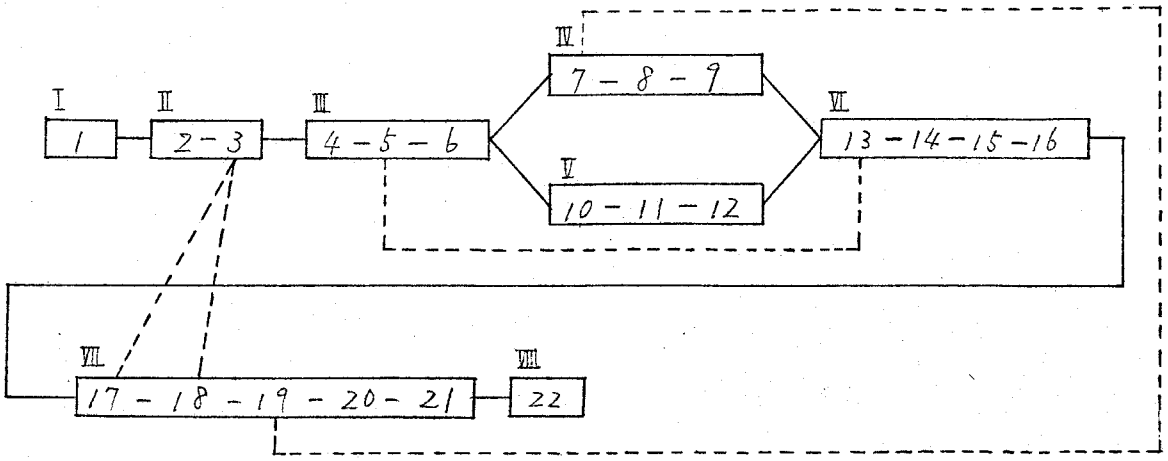


図1.1　各章と節の関係

を電子回路で構成する為の基本的な設計理論を述べる。第Ⅲ章では、作用素の空間の構造を解析する為の手段として導入された作用素に対する複素共役演算と対合演算について論じる。第Ⅳ章では、一様な構造をもった空間回路網、即ち、並進作用素によって生成される作用素の空間について論じる。第Ⅴ章は、第Ⅳ章と対等な位置にあるものであり、反転作用素によって生成される作用素の空間について論じる。第Ⅵ章では、双対演算と呼ばれる対合とその応用について論じる。第Ⅶ章では、空間回路網の誤差評価、空間回路網理論の応用、空間回路網に冗長性を加味する為の擬似直交性理論について論じる。最後に第Ⅷ章では、本研究で得られた成果のまとめと、将来展望を行なう。

より詳しく説明する。

第Ⅱ章は二節からなっている。文字認識とか画像処理の対象となるような信号は、本来　連続な空間領域で定義されているものである。ところが、本論文で展開する空間回路網理論は、種々の情報処理機能を電子回路で実現することを前提としており、有限個の離散点上の値だけを使って信号を処理しなければいけない。そこで、空間回路網理論を展開していく準備として、第2節では、"関数空間の再生核"という概念をもとに、一般標本化定理を再構成する。

与えられた機能をもつ情報処理装置を構成する為の基本的な設計理論を確立

することが、第3節の目的である。まず、情報を担う信号を、関数空間 $L_2[-l, l]$ の元としてとらえることにより、情報処理機能を L_2 から L_2 への作用素として定式化する。作用素を実際に金物で実現する為には、信号空間を有限次元に限らなければいけない。そのような空間として、N 次以下の三角多項式の空間 H_N を採用し、L_2 及び H_N の上の有界線形作用素の全体を、それぞれ $\mathcal{B}(L_2)$ 及び $\mathcal{B}(H_N)$ とする。本節で展開した理論に従えば、$\mathcal{B}(L_2)$ の元 A が与えられたとき、A の $\mathcal{B}(H_N)$ での最良近似 A_N を、係数加算器と抵抗よりなる多端子回路網で実現することができるのである。ここで、A_N の空間周波数特性、結合特性の概念が導入される。

第Ⅲ章は、三節からなっている。第4節では、作用素の空間における複素共役演算について論じる。これは、複素数値関数 f に対する複素共役関数を $\bar{f}$ とするとき

$$\bar{A} f \equiv \overline{A\bar{f}} \tag{1.1}$$

によって定義される回帰的半線形作用素であり、空間回路網理論の到る処で重要な働きをしている。特に本節では、複素共役演算の数学的性質を明らかにするとともに、作用素が実数値関数を実数値関数に変換する為の条件、同じことであるが、空間回路網の結合特性が実行列になる為の条件、空間回路網の構造が等方或いは反等方になる為の条件等を、この複素共役演算を用いて論じる。

第5節と第6節では、実対合と共変対合について論じる。以下の章で導入される対称演算とか双対演算と呼ばれる非線形演算は、数学的には、前節で論じた複素共役演算と同様の性質をもっている。これら三種類の回帰的半線形演算に共通の性質を抽象したものが、本節で導入される対合演算である。作用素 A に対する共役作用素を A^* とする。等方ユニタリ作用素* U を使って、

$$\omega f \equiv U\bar{f} \tag{1.2}$$

$$\Omega A \equiv U\bar{A}U^* = \omega A \omega \tag{1.3}$$

なる演算を定義し、ω を実対合 (real involution)，Ω を共変対合 (

---

* $A^* = A^{-1}$ なる A をユニタリ作用素，$\bar{A} = A^*$ なる A を等方作用素という。

covariant involution）と名付ける。ω と Ω を同時に呼ぶときには、単に対合ということもある。U を、対合の生成作用素という。第5節では、対合及び対合のつくる集合の数学的性質について論じ、第6節では、共変対合に関する固有値問題を論じる。

これまでは、作用素の空間 $\mathcal{B}(H_N)$ 全体についての議論であった。扱う作用素の対象を、$\mathcal{B}(H_N)$ の特殊な部分空間に限ることにより、更に詳細な議論を展開することができる。本論文では、そのような部分空間として、いずれも信号空間 H_N と同形な四種類の空間 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1,2,3,4)$ を取上げる。まず第Ⅲ章では、並進作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ について三節に分けて論じる。

第7節では、空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の構造解析を行なう。インパルス応答によって、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と H_N が Schmidt の内積の意味で位相同形になることを示す。この同形写像を使って H_N の性質が $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に移行され、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に基本座標系と自然座標系が導入される。前者は $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の空間周波数特性を与えるものであり、後者は結合特性を与えるものである。その結果、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元が一様構造の空間回路網で構成できることが明らかにされる。これは、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元がたたみ込みの形で積分表現されることと等価である。

第8節では、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元の例として、空間的に一階及び二階微分を行なう作用素、空間的に不定積分を行なう作用素について論じる。これらの作用素の結合特性を調べることにより、電子計算機による画像処理の分野で用いられている近似的微分公式とは異なる新しい近似公式を与える。

作用素の空間及び関数空間の幾何学的イメージをつかむ為には、それらの空間に座標系を導入すると良い。そこで第9節では、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ 及び H_N の正規直交基底について論じる。まず一般の正規直交基底に対して成立する恒等式及び不等式を導く。次いで、これらの不等式の等号が成立する条件として、ユニタリ基底、標本化基底、並進基底等の概念を導入し、それらの性質を詳しく論じる。

第Ⅳ章では、反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ について

三節に分けて論じる。その為の準備として第10節では、

$$(I(a)f)(x) \equiv f(2a-x) \qquad (1.4)$$

によって定義される（点aに関する）反転作用素$I(a)$そのものの性質を明らかにしておく。また$I(a)$によって生成される共変対合であるa-対称演算についても論じる。

第11節と第12節では、空間$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の構造について第7節と平行した議論を行なう。まず、インパルス応答によって$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$とH_Nが位相同形になるばかりでなく、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$と$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$も、反転作用素$I(0)$を右から掛けるという演算によって位相同形になることを示す。これらの同形写像を使うことにより、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$にも基本座標系と自然座標系が導入される。その結果、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の元が等方な構造をもった空間回路網で構成できることが明らかにされる。これは、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の元A_Nが、入力信号とA_Nのインパルス応答との相互相関の形で積分表現されることと等価である。

第四章は四節からなっている。第5節で導入した共変対合Ωに関して、空間$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$$(n=1,2)$は必ずしも閉じていない。これらの空間の中だけで$\Omega$と同様の議論をする為に、第13節では、$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$からそれ自身の上への回帰的半線形作用素を導入し、（第n種）変形対合と名付ける。この変形対合の数学的性質を論じるとともに、等方ユニタリ作用素U_Nの積分核と、U_Nによって生成される対合及び変形対合の関係を明らかにする。

第14節では、有限Fourier変換作用素$\mathfrak{F}_N$の性質について論じる。特に対合及び変形対合の一般論で得られた成果を利用しながら、$\mathfrak{F}_N$の固有空間の性質、固有空間への射影作用素、$\mathfrak{F}_N$の積分核の性質を明らかにする。

$\mathfrak{F}_N$によって生成される対合、変形対合を、それぞれ双対演算、変形双対演算と名付ける。第15節では、これら各種双対演算の応用について論じる。まずH_Nにおける双対演算の応用として、$f \in H_N$の標本点における値とFourier係数の関係を論じ、変形双対演算の応用として、$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$$(n=1,2)$における結

合特性と空間周波数特性の関係を論じる。$\mathcal{B}(H_N)$における双対演算の応用として、$\mathcal{B}(H_N)$における結合特性と空間周波数特性の関係を論じ、その結果を用いて、結合特性の次元独立性を論じる。最後に、共変対合の特殊な例である複素共役演算、双対演算、対称演算と反変対合の特殊な例である共役演算の関係とその役割をまとめる。

第16節では、$\mathcal{B}(H_N)$における双対演算を用いることにより、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$と双対な空間$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$及び$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$と双対な空間$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$の構造を解明する。その結果、$\mathcal{B}^{(m)}(H_N)$ $(m=1,2)$がインパルス応答によってH_Nと位相同形に結びつけられていたのに対して、$\mathcal{B}^{(m)}(H_N)$ $(m=3,4)$が直流応答によってH_Nと位相同形に結びつけられることが分かる。また結合特性で言えば、$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$の元は対角行列になり、$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$の元は逆対角行列になる。

第四章は五節からなっている。空間回路網技術で問題となる誤差は大別して、

(i) 空間回路網の端子数の有限性に関する誤差

(ii) 標本化定理に関する誤差

(iii) 素子に起因する誤差

(iv) 入力に雑音が加わった場合の誤差

の四種類になる。

第17節では、(ii)の標本化定理に関する誤差の中から、帯域制限の条件が破れた場合の誤差評価と、標本点の一様なずれの補償法について論じるとともに、(iii)の中から、多入力係数加算器の同相誤差を、作用素論の立場から論じる。

第18節では、上記(i)に関する問題を論じる。作用素を電子回路で実現する場合には、回路の端子数が有限個であるという物理的制約から、実際には有限次元の作用素しか実現できない。従って、本来無限次元の作用素Aに対しては、それを有限次元の作用素A_Nで近似しなければいけない。この作用素の近似の問題は、大きく二つの形に分かれる。第一の形は、$N\to\infty$(端子数$\to\infty$)のとき、A_NがAにどれだけ近づくかというWeierstrass形近似問題であ

り、第二の形は、N を固定しておいて、その中で最良近似を求める Čebyšev 形近似問題である。本節では、この両者を論じる。また、標本化定理を応用した観測装置を製作する場合に重要な働きをする第二標本化が、普通の標本化によって得られたパターンを、更にその部分空間の元で最良近似することに他ならないことを明らかにし、Čebyšev 形近似問題の結果を利用して、第二標本化を行なう空間回路網の構造を決定する。

第 19 節では、外部条件によって重み抵抗の値が変化するような空間回路網の近似的構成法を述べる。一応 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の 1-パラメータ半群に限って議論を進めるけれども、この近似的構成法によれば、可変抵抗の値の符号が一定になるばかりでなく、新しい抵抗値を決定する為の計算回数が、第3節の設計理論に従う素朴な方法に比して、$2N+1$ 回から 1 回に減少し、可変抵抗の数も、$(2N+1)^2$ 個から $2N+1$ 個に減少するのである。この方法をボケの作用素に適用することにより、その有効性も確認される。

第 20 節では、空間回路網理論の応用を四種類示す。まず 20.1 では、太いビームを使用した観測装置の分解能改善法について述べる。これは同時に、上記(ii)の標本化定理に関する誤差の中の、唯一点の値を観測することは物理的に不可能であるという物理的観測誤差に対する一つの解答になっている。20.2 では、第 14 節で論じた有限 Fourier 変換作用素 $\mathfrak{F}_N$ の固有空間の性質を利用して、標本点上で与えられた関数の補間表示法について論じる。20.3 では、あるユニタリ作用素 $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ が既に全物で構成されているとき、それを用いて A_N の逆作用素 A_N^{-1} を構成する方法について論じる。その際、共変対合の一種である対称演算が利用される。最後に 20.4 では、相関関数を不変に保つ作用素の特徴づけが、第4章で導入した複素共役演算を使うことにより、非常に簡単に行なえることを示す。

第 21 章では、擬似直交性理論を展開する。擬似直交系は、冗長性を加味することによるアナログ空間回路網の信頼性向上を目的として、飯島[37]により導入されたばかりの全く新しい概念であり、その性質は、これまでほとんど分か

っていなかった．本節では、擬似直交基底を種々の分野へ応用していく為の基礎を確立する為に、擬似直交基底のもつ数学的性質を関数解析的立場から明らかにしていく．

第四章では，本研究で得られた成果をまとめるとともに、将来展望を試みる．

第 Ⅱ 章

空間回路網理論の基礎

第2節　Cahn形一般標本化定理

2.1　まえがき

文字認識とか画像処理の対象となるような信号は、本来、連続な空間領域で定義されているものである。ところが、本論文で展開する空間回路網理論は、種々の情報処理機能を、電子回路で実現することを前提としており、有限個の離散点上の値だけを使って、信号を処理しなければいけない。この間隙を埋めるものが、標本化定理である。

そこで、空間回路網理論を展開していく準備として、まず本節では、標本化定理について述べることにする。標本化定理は、染谷[1]、Shannon[2]に始まり現在まで数多くの研究が行なわれているが、[3]~[6]本論文では、"関数空間の再生核"という概念[7]をもとにして、Cahn形一般標本化定理[8],[9]を再構成し、それにまつわる種々の性質を整理していく。

2.2では、関数空間の再生核について、既に得られている結果を整理する。それを基礎にして、2.3で、Cahn形一般標本化定理を導く。2.4で、標本化定理の成立する空間では、内積を、関数の標本点上の値だけを使って表現できること、および、直交性と選点直交性が、同じ事柄を表すことを示す。2.5で、標本化基底の重みに関する性質を論じ、2.6では、2.4の結果を利用しながら、標本化基底と一般の正規直交基底を結びつけるユニタリ変換の具体的な形を求める。

2.2　再生核

ある領域Sの上で定義された複素数値関数で構成される有限次元Hilbert空

内を X_N とし、$f, g \in X_N$ の内積とノルムを

$$(f, g), \quad \|f\| \equiv \sqrt{(f, f)} \tag{2.1}$$

で表す（文献(12), p.363）。ここで、領域Sは、有限区間$[a, b]$であっても、無限区間$(-\infty, \infty)$であっても、多次元空間であってもかまわない。例えば、第3節以下では、Sが有限区間$[-\ell, \ell]$であり、内積が

$$(f, g) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \overline{g(x)}\, dx \tag{2.2}$$

の場合が、もっぱら議論の対象になっている。ここで $\overline{g(x)}$ は、$g(x)$ の共役複素数である。

X_N の任意の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=1}^N$ に対して、二変数関数 $K(x, y)$ を、次のように定義する。

$$K(x, y) \equiv \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \overline{u_n(y)} \tag{2.3}$$

〔補題 2.1〕関数 $K(x, y)$ は、正規直交基底 $\{u_n\}_{n=1}^N$ のとりかたによらず同じ関数になる。

（証明）X_N の他の正規直交基底を $\{v_n\}_{n=1}^N$ とすれば、

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} v_n(x) \overline{v_n(y)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \Big[\sum_{m=1}^{N} (v_n, u_m)\, u_m(x) \Big] \overline{\Big[\sum_{\ell=1}^{N} (v_n, u_\ell)\, u_\ell(y) \Big]} \\
&= \sum_{\ell, m=1}^{N} \Big[\sum_{n=1}^{N} (u_\ell, v_n) \overline{(u_m, v_n)} \Big] u_m(x) \overline{u_\ell(y)} \\
&= \sum_{\ell, m=1}^{N} (u_\ell, u_m)\, u_m(x) \overline{u_\ell(y)} \\
&= \sum_{m=1}^{N} u_m(x) \overline{u_m(y)} \\
&= K(x, y)
\end{aligned} \tag{Q.E.D}$$

〔命題 2.1〕 関数 $K(x,y)$ は、空間 X_N の再生核（reproducing kernel）である。[7] 即ち、次の関係を満足する。

任意に固定された $y \in S$ に対して、 $K(\cdot, y) \in X_N$ (2.4)

任意の $f \in X_N$ に対して $f(y) = (f, K(\cdot, y))$ (2.5)

（証明） 式(2.4)は、式(2.3)から明らかである。式(2.3)より

$$(f, K(\cdot, y)) = \left(f(x), \sum_{n=1}^{N} u_n(x)\,\overline{u_n(y)}\right)_x$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (f, u_n)\, u_n(y)$$

$$= f(y)$$

となり、式(2.5)も成立する。 (Q.E.D)

式(2.5)は、X_N に属する全ての関数 f の点 y での値 $f(y)$ が、f 自身と $K(\cdot, y)$ の内積によって表現されることを、意味している。これが、"再生核"という名前の所以である。別の言葉で表現すれば、$K(x,y)$ は、空間 X_N の中で、デルタ関数の働きをしているのである。なお、ある関数空間に再生核が存在すれば、それは一意に定まることが知られている。[7]

再生核の性質を述べる。まず、式(2.3)より、次の系が成立する。

〔系 2.1〕 関数 $K(x,y)$ は、Hermite 対称である：

$$K(y,x) = \overline{K(x,y)} \tag{2.6}$$

〔命題 2.2〕 任意に固定された $y \in S$ に対して、次式が成立する。

$$\|K(\cdot, y)\|^2 = K(y,y) \geq 0 \tag{2.7}$$

また、関数

$$\varphi_0(x) = 1 \tag{2.8}$$

が、空間 X_N に属している場合には、次の関係も成立する。

$$\left(K(\cdot, y), \varphi_0\right) = 1 \qquad (2.9)$$

（証明） 式(2.5) より、

$$K(y, y) = \left(K(\cdot, y), K(\cdot, y)\right) = \|K(\cdot, y)\|^2 \geqq 0$$

となり、式(2.7)が成立する。$\varphi_0 \in X_N$ のとき、式(2.5)で $f = \varphi_0$ とおけば、

$$\left(K(\cdot, y), \varphi_0\right) = \overline{\varphi_0(y)} = 1$$

となり、式(2.9)が成立する。 (Q.E.D)

式(2.9)の右辺が、yによらない定数になっていることは、注目すべき点である。

〔命題 2.3〕 任意に固定された点 $y_0 \in S$ に対して、

$$\max_{\|f\| \leq 1} |f(y_0)| = \sqrt{K(y_0, y_0)} \qquad (2.10)$$

なる関係が成立する。$K(y_0, y_0) \neq 0$ のとき、max は、

$$f_0(x) = \theta \frac{K(x, y_0)}{\sqrt{K(y_0, y_0)}} \qquad : |\theta| = 1 \qquad (2.11)$$

なる関数によって、実際に到達される（文献(7), p.96 ; (10) p.39）*。

（証明） 式(2.5), (2.7) と Schwarz の不等式より

$$|f(y_0)| = |(f, K(\cdot, y_0))| \leq \|f\| \cdot \|K(\cdot, y_0)\| \leq \sqrt{K(y_0, y_0)}$$

$$\therefore \quad |f(y_0)| \leq \sqrt{K(y_0, y_0)} \qquad (2.12)$$

となる。Schwarz の不等式で等号が成立する条件より、式(2.12)の等号が成立するための必要十分条件は、$f(x) = \alpha K(x, y_0)$ かつ $\|f\| = 1$ である。そして、式(2.7)から明らかなように、この二つの条件を満足する関数は、式(2.11)の形に表わされるのである。 (Q.E.D)

---

* $K(y_0, y_0) = 0$ は、全ての $f \in X_N$ に対して $f(y_0) = 0$ が成立することと同値である。

〔系 2.2〕 各点 $x, y \in S$ に対して、次の不等式が成立する。

$$|K(x,y)| \leq \sqrt{K(x,x)}\sqrt{K(y,y)} \tag{2.13}$$

2.3 Cahn 形一般標本化定理

周期波形に対する標本化定理を最初に導いた C. R. Cahn[8] に因んで、有限次元関数空間に対する標本化定理を、Cahn 形標本化定理と呼ぶ。* 2.3では、2.2で準備した再生核を基礎にして、空間 X_N における Cahn 形標本化定理を導く。

〔定義 2.1〕 空間 X_N の正規直交基底 $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ が、標本化関数になっているとき、即ち、任意の $f \in X_N$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} w_n f(x_n) \psi_n(x) \tag{2.14}$$

が成立するとき、$\{\psi_n\}_{n=1}^N$ を、X_N の正規直交標本化基底（orthonormal sampling basis）という。そして、複素数の組 $\{w_n\}_{n=1}^N$ を重み、あるいは、重み係数といい、領域 S の点の組 $\{x_n\}_{n=1}^N$ を、標本点という。なお、混乱の恐れがない場合は、正規直交標本化基底を、単に標本化基底ということもある。

式(2.14)を 別の形で表せば、

$$(f, \psi_n) = w_n f(x_n) \qquad (n = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.15}$$

となる。即ち、関数 f と ψ_n の内積が、f の点 x_n における値 $f(x_n)$ の w_n 倍になっているのである。この性質が、連続な空間領域で定義されている信号と、離散点上の値しか扱うことができない電子回路による空間回路網との、橋渡しをするのである（3.3.1. 参照）

また、定義から明らかなように、標本点の数 N と、空間 X_N の次元数 N とは、

---

* Cahn 自身による文献は 見受けられないけれども、文献(8)に示した Goldman の本によれば、周期波形に対する標本化定理を最初に導いたのは、C. R. Cahn だと思われる。
なお、空間 X_N が無限次元のときは、Shannon 形と呼ばれる。

完全に一致している。

ところで、任意の空間 X_N に、標本化基底が存在するわけではない。一つの空間が与えられたとき、その空間に標本化基底が存在するか否かを確かめる方法、および、標本化基底の存在が分かったとき、実際にそれを構成する方法を次に示す。

〔命題 2.4〕空間 X_N に、正規直交標本化基底が存在するための必要十分条件は、X_N の再生核 $K(x,y)$ に対して、

$$|w_n|^2 K(x_m, x_n) = \delta_{m,n} \quad (m,n=1,2,\cdots,N) \tag{2.16}$$

を満足するようなSの点 $\{x_n\}_{n=1}^N$ が存在することである。ここで、$\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタであり、

$$|w_n|^2 = \frac{1}{K(x_n, x_n)} \quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{2.17}$$

である。そしてこのとき、正規直交標本化基底 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ は、

$$\varphi_n(x) = \overline{w_n}\, K(x, x_n) \quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{2.18}$$

で与えられ、式(2.14)が成立する。

（証明）$\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ を X_N の正規直交標本化基底とすれば、任意の $f \in X_N$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} (f, \varphi_n)\, \varphi_n(x) \tag{2.19}$$

であるから、式(2.15)、(2.19)、(2.3)より

$$\begin{aligned}(f, \varphi_n) &= w_n f(x_n) \\ &= w_n \sum_{m=1}^{N} (f, \varphi_m)\, \varphi_m(x_n) \\ &= \left(f, \overline{w_n} \sum_{m=1}^{N} \overline{\varphi_m(x_n)}\, \varphi_m\right)\end{aligned}$$

$$= (f, \overline{w_n} K(\cdot, x_n))$$

$$\therefore \ (f, \psi_n - \overline{w_n} K(\cdot, x_n)) = 0 \qquad (2.20)$$

式(2.20)は、全ての $f \in X_N$ と n に対して成立するから、

$$\psi_n(x) = \overline{w_n} K(x, x_n) \qquad (n = 1, 2, \cdots, N) \qquad (2.21)$$

となり、式(2.18)が成立する。

更に、式(2.15)で $f = \psi_m$ とおけば

$$w_n \psi_m(x_n) = (\psi_m, \psi_n) = \delta_{m,n}$$

$$\therefore \ w_n \psi_m(x_n) = \delta_{m,n} \quad (m, n = 1, 2, \cdots, N) \qquad (2.22)$$

となる。式(2.21)(2.22)より、式(2.16)が成立する。

逆に、式(2.16)(2.18)が成立したとすれば、式(2.5)より

$$(\psi_m, \psi_n) = (\overline{w_m} K(\cdot, x_m), \overline{w_n} K(\cdot, x_n))$$

$$= \overline{w_m} w_n K(x_n, x_m) = \delta_{m,n}$$

$$\therefore \ (\psi_m, \psi_n) = \delta_{m,n} \quad (m, n = 1, 2, \cdots, N) \qquad (2.23)$$

となり、$\{\psi_n\}_{n=1}^N$ は、X_N の正規直交基底となる。更に、式(2.18)(2.5)より

$$(f, \psi_n) = (f, \overline{w_n} K(\cdot, x_n)) = w_n f(x_n)$$

$$\therefore \ (f, \psi_n) = w_n f(x_n) \qquad (n = 1, 2, \cdots, N) \qquad (2.24)$$

となり、式(2.14)が成立する。即ち、$\{\psi_n\}_{n=1}^N$ は、X_N の正規直交標本化基底になる。 (Q.E.D)

命題2.4より、標本化基底を構成するためには、次の手順に従えば良いことがわかる(図2.1)。

(1) 空間 X_N の再生核 $K(x, y)$ を、式(2.3)に従って求める。

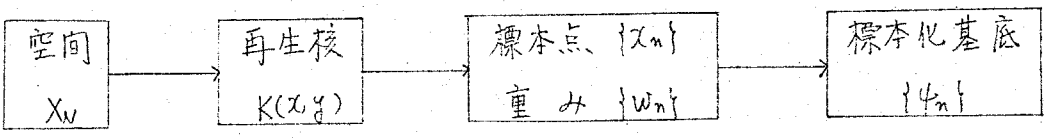


図2.1　正規直交標本化基底の構成手順

(ii) 再生核から、式(2.16)に従って標本点 $\{x_n\}_{n=1}^N$ と重み $\{w_n\}_{n=1}^N$ を決定する。

(iii) この標本点と重み、および再生核を使い、式(2.18)に従って、標本化基底 $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ を構成する。

このように、正規直交標本化基底 $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ という関数系の決定問題が、再生核 $K(x,y)$ の零点を見出す問題に帰着されるのである。

式(2.16)に従って、再生核の零点、即ち、標本点を求めるための実際的手法を、ここでは示さない。しかし、空間 X_N が、N 次以下の多項式の空間ならば、Christoffel-Darboux の公式(文献(10), 定理3.2.2)から、容易にそれを求めることができるし、本論文で扱う N 次以下の三角多項式の空間の場合にも、再生核の形(式(3.77), (3.74))から、やはり容易に標本点を求めることができるのである。

なお、再生核 $K(x,y)$ は、空間 X_N によって一意に決まるけれども、標本点 $\{x_n\}_{n=1}^N$ の方は、必ずしも一意には決まらない。実際そのような例は、式(3.75)で見ることができる。また、標本点が決まれば、式(2.17)から $\{|w_n|^2\}_{n=1}^N$ は一意に決まるけれども、$\{w_n\}_{n=1}^N$ 自身に対しては、絶対値1の定数倍だけの自由度が残ってしまい、

$$\psi_n(x) = \theta \frac{K(x, x_n)}{\sqrt{K(x_n, x_n)}} \qquad : |\theta| = 1 \tag{2.25}$$

となる。しかし、式(2.18)を式(2.14)に代入してみれば、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} |w_n|^2 f(x_n) K(x, x_n) \tag{2.26}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \frac{K(x, x_n)}{K(x_n, x_n)} \qquad (2.27)$$

となるから、$f(x)$の再構成には、w_nよりも$|w_n|^2$が本質的な影響を与えることになるのである。従って、w_nを

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{K(x_n, x_n)}} > 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots, N) \qquad (2.28)$$

に選んでも、本質を失うことはない。

しかし、以下では、理論の一般性を保つために、w_nは複素数として扱うことにする。

式(2.25)が式(2.11)と同じ形をしていることから、式(2.10)に対応して、

$$\max_{\|f\| \leq 1} |f(x_n)| = |\psi_n(x_n)| \qquad (n = 1, 2, \cdots, N) \qquad (2.29)$$

なる関係が成立する。このように、標本化関数は、ノルム1の関数の中で、最も大きな値をとる関数になっているのである。

〔系 2.3〕空間X_Nの正規直交基底$\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$が標本化基底になるための必要十分条件は、

$$w_n \psi_m(x_n) = \delta_{m,n} \qquad (m, n = 1, 2, \cdots, N) \qquad (2.30)$$

を満足するようなSの点$\{x_n\}_{n=1}^{N}$が、存在することである。ここで、

$$w_n = \frac{1}{\psi_n(x_n)} \qquad (n = 1, 2, \cdots, N) \qquad (2.31)$$

である。

系2.3は、標本化関数の零点と標本点の関係を表す式(2.30)が、標本化定理において本質的な性質、即ち、必要十分条件であることを明らかにするとともに、重みw_nと、標本化関数の絶対値が最大になる値$\psi_n(x)$との関係を、強調したものである。

しかし、式(2.30)から標本点を求めることは、必ずしも容易なことではない。やはり、命題2.4に示したように、再生核から求める方が、便利が良いのである。

さて、式(2.27)からわかるように、

$$l_n(x) \equiv \frac{K(x, x_n)}{K(x_n, x_n)} = w_n \varphi_n(x) \quad (n = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.32}$$

とおけば、次の系が成立する。

〔系 2.4〕空間 X_N に標本化基底が存在すれば、任意の $f \in X_N$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} f(x_n) l_n(x) \tag{2.33}$$

なる関係が成立する。ここで、x_n, l_n は、それぞれ式(2.16), (2.32)で与えられるものである。

式(2.33)から、関数系 $\{l_n\}_{n=1}^{N}$ が、Lagrange補間多項式(文献(10), p.329)に対応するものであることがわかる。Lagrange補間多項式が持っている多くの性質を、関数系 $\{l_n\}_{n=1}^{N}$ も持っている。例えば、式(2.30)に対応する関係式

$$l_m(x_n) = \delta_{m,n} \quad (m, n = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.34}$$

は、文献(10)の式(14.1.3)に対応する性質である。また、文献(10)の式(14.1.5)に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 2.5〕式(2.8)で定義される関数 φ_0 が、空間 X_N に属しているとき、次の関係が成立する。

$$\sum_{n=1}^{N} w_n \varphi_n(x) = 1 \tag{2.35}$$

$$\sum_{n=1}^{N} l_n(x) = 1 \tag{2.36}$$

式(2.35)(2.36)の右辺が、xによらない定数になっていることは、注目すべき点である。

2.4 内積の選点表現

標本化基底の存在する空間では、次の命題で示すように、内積を、関数の標本点上の値だけを使って表現することができる。これを、内積の選点表現という。式(2.14)より次の命題が成立する。

〔命題 2.6〕空間 X_N に標本化基底が存在すれば、任意の $f, g \in X_N$ に対して、次の関係が成立する。

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{N} |w_n|^2 f(x_n) \overline{g(x_n)} \tag{2.37}$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |w_n|^2 |f(x_n)|^2 \tag{2.38}$$

ここで x_n, w_n は式(2.16)で与えられるものである。

関数の直交性の概念に、内積を有限和で置き換えた選点直交性がある。選点直交性は、電子計算機による関数近似の問題に現われるが(文献(11), p.101)、空間回路網理論においても、17.2.2で示すように、標本点の一様なずれの補償に利用できるので、ここにその性質を、簡単にまとめておく。

まず式(2.37)から、次のことがわかる。標本化基底が存在する空間では、その標本化基底の重み $\{w_n\}_{n=1}^{N}$ を重みとする選点直交性

$$\sum_{n=1}^{N} |w_n|^2 f(x_n) \overline{g(x_n)} = 0 \tag{2.39}$$

と本来の意味の直交性

$$(f, g) = 0 \tag{2.40}$$

が、同じものになる。また、次の命題が成立する。

〔 命題 2.7 〕 空間 X_N に、標本点を $\{x_n\}_{n=1}^N$、重みを $\{w_n\}_{n=1}^N$ とする。標本化基底が存在するとき、X_N に属する N 個の関数の組 $\{u_n\}_{n=1}^N$ に対して、次の三条件は、互いに同値となる。

(i) $(u_m, u_n) = \delta_{m,n} \quad (m,n = 1,2,\cdots,N)$ (2.41)

(ii) $\sum_{l=1}^{N} |w_l|^2 u_m(x_l)\overline{u_n(x_l)} = \delta_{m,n} \quad (m,n = 1,2,\cdots,N)$ (2.42)

(iii) $\sum_{l=0}^{N} u_l(x_m)\overline{u_l(x_n)} = K(x_n, x_n)\,\delta_{m,n} \quad (m,n = 1,2,\cdots,N)$ (2.43)

ここで、$K(x,y)$ は X_N の再生核である。

式 (2.37) から、(i)⟷(ii) は明らかである。(ii)⟷(iii) も、次に行なう考察から明らかであるので、ここでは証明を略す。

命題 2.7 の (i) と (ii) の関係は、本来の意味の直交性と選点直交性の関係であった。では、(ii) と (iii) の関係は何であろうか。この関係を明らかにする為に、

$$u_{m,n} \equiv w_m u_n(x_m) \quad (m,n = 1,2,\cdots,N) \tag{2.44}$$

とおく。式 (2.44) (2.16) を使って、命題 2.7 の (ii)(iii) を書きなおしてみれば、

(ii)′ $\sum_{l=1}^{N} u^*_{n,l}\, u_{l,m} = \delta_{m,n} \quad (m,n = 1,2,\cdots,N)$ (2.45)

(iii)′ $\sum_{l=1}^{N} u_{m,l}\, u^*_{l,n} = \delta_{m,n} \quad (m,n = 1,2,\cdots,N)$ (2.46)

となる。ここで

$$u^*_{m,n} = \overline{u_{n,m}} \tag{2.47}$$

である。式 (2.45) (2.46) は、行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ が、正規直交系 $\{u_n\}_{n=1}^N$ のとりかたによらず、常に、ユニタリ行列なることを、意味している。即ち、式 (2.42) と (2.43) は、それぞれ行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ の列ベクトルに関する直交性と、行ベクトルに関する直交性を表す式になっていたのである。

なお、このユニタリ行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ の持つ意味については、2.6 で明らかにす

る。

さて、式(2.37)で、$g=\varphi_0$ とおけば、次の系が成立する.

〔系 2.5〕 空間 χ_W に標本化基底が存在し、更に、式(2.8)で定義される関数 φ_0 が χ_W に属していれば、次の関係が成立する。

$$(f,\varphi_0)=\sum_{n=1}^{N}|w_n|^2 f(x_n) \tag{2.48}$$

ここで、x_n, w_n は、式(2.16)で与えられるものである。

関数の定義域が $S=[a,b]$ で、しかも内積が

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,d\alpha(x) \tag{2.49}$$

で与えられるとき

$$(f,\varphi_0)=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \tag{2.50}$$

となる。即ち、(f,φ_0) は、関数 f と x 軸及び直線 $x=a$, $x=b$ によって囲まれる領域の、測度を $\alpha(x)$ とする面積を表している。式(2.48)は、この面積が、標本点における f の値 $\{f(x_n)\}$ だけから求まることを示しており、一種の数値積分公式になっている。式(2.48)に現れる重み係数 $\{|w_n|^2\}_{n=1}^N$ は、Christoffel数と呼ばれることがある(文献(10), p.47)。

そこで、本論文では、一般に式(2.17)で与えられる重み係数 $\{|w_n|^2\}_{n=1}^N$ を、Christoffel数と呼ぶことにする。Christoffel数の性質については、2.5で論じる。

2.5 Christoffel数 $|w_n|^2$

2.4で定義したChristoffel数 $\{|w_n|^2\}_{n=1}^N$ は、本来の意味のChristoffel数(文献(10)、p.47)と同様の性質を持っている。また、本来の意味のChristoffel

数が、2.3で触れたLagrange補間多項式と密接な関係にあったように$\{|w_n|^2\}_{n=1}^N$と式(2.32)で定義される関数系$\{l_n\}_{n=1}^N$の間にも、密接な関係が存在する。2.5では、これらの関係について、論じることにする。

まず、式(2.17)は、文献(10)の式(3.4.8)に対応する$|w_n|^2$の表現形式になっている。文献(10)の式(3.4.6)に対応するものは、次の式(2.51)である。

〔命題 2.8〕 Christoffel数$|w_n|^2$は、次のように表される。

$$|w_n|^2 = \|l_n\|^2 \quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{2.51}$$

また、式(2.8)で定義される関係φ_0が、空間X_Nに属している場合には、次の関係も成立する。

$$|w_n|^2 = (\varphi_0, l_n) \quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{2.52}$$

$$w_n = (\varphi_0, \varphi_n) \quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{2.53}$$

式(2.51)(2.52)は、関数l_nのノルムの二乗$\|l_n\|^2$と広義の面積(l_n, φ_0)が同じ値になり、共にChristoffel数と一致することを意味している。

式(2.38)より 文献(10)の式(3.4.5)に対応する次の命題が成立する。

〔命題 2.9〕 式(2.8)で定義される関数φ_0が、空間X_Nに属しているとき、Christoffel数の和に関して、次の関係が成立する。

$$\sum_{n=1}^{N} |w_n|^2 = \|\varphi_0\|^2 \tag{2.54}$$

一つの空間X_Nの中で、標本化基底$\{\varphi_n\}_{n=1}^N$が異なれば、Christoffel数$\{|w_n|^2\}_{n=1}^N$の値も、一般には異なる。しかし、式(2.54)の右辺の値は、標本化基底とは無関係な量であるから、もし$\varphi_0 \in X_N$ならば、Christoffel数の和は、標本化基底のとり方によらず、一定の値になることがわかる。

2.6 標本化基底と他の基底との関係

空間 X_N の標本化基底を $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$，他の任意の正規直交基底を $\{u_n\}_{n=1}^N$ とすれば、$\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ も正規直交基底であるから、$\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ と $\{u_n\}_{n=1}^N$ とは、ユニタリ変換で結ばれているはずである。そのユニタリ変換が、式(2.44)で導入した行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ になっていることを示す。

〔命題 2.10〕 空間 X_N に、標本点を $\{x_n\}_{n=1}^N$，重みを $\{w_n\}_{n=1}^N$ とする標本化基底 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ が存在したとする。$\{u_n\}_{n=1}^N$ を、X_N の任意の正規直交基底とし、式(2.44)によって ユニタリ行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ を定義すれば、$\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ と $\{u_n\}_{n=1}^N$ は、次の関係で結ばれる。

$$u_n(x) = \sum_{m=1}^{N} u_{m,n}\, \varphi_m(x) \tag{2.55}$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=1}^{N} u_{m,n}^{*}\, u_m(x) \tag{2.56}$$

（証明） 式(2.15),(2.44)より式(2.55)は明らかである．前節で示したように、行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ はユニタリであるから、式(2.55)より式(2.56)も成立する。 (Q.E.D)

正規直交基底 $\{u_n\}_{n=1}^N$ として、$\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ 自身を選べば、当然のことながら、式(2.44)(2.30)より、行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ は単位行列になる．

第3節　空間回路網理論の基礎*

本節では、一般に情報処理と言われているものの、数学的定式化を行なうと共に、情報処理機能を実際に金物で実現するための設計理論を展開し、線形空間回路網理論の枠組みを与える。(1)〜(3)

3.1　情報処理の数学的定式化

3.1.1　信号空間

オ2節で論じた標本化定理について、考えてみる。連続な領域Sの上で定義された関数を一個一個取り上げて、その関数が、Sの有限個の点における値だけを使って再表現できるかどうかを、逐一調べてみても、標本化定理を導くことはできない。やはりオ2節で論じたように、関数一個一個を調べるのではなく、それらの関数を含むような関数集合を設定し、その集合のもつ性質として、標本化定理をとらえ直さなければいけないのである。**

このように、あるものについて何か知ろうとする場合には、そのものだけを調べるよりも、他のものとの関係において理解する方が、はるかに分かり易い。情報という問題を扱うときには、特にそうである。つまり、物事は内包的によりも外延的にとらえる方が、分かり易いのである。

そこで3.1では、情報を担う信号というものを数学的に定式化するために、これらの信号が作る集合を考え、その集合に属する元として信号を定義することにする。では、その集合として、どのような集合を採用すればよいであろうか。すなわち、信号空間の元として情報を担う信号を定義するのであるが、その信号空間とはどのような空間であろうか。パターン認識の問題を例にとりながら、以下にそれを述べる。

図形を、関数 $f(x)$ で表す。ここで x は、図形の描かれている空間領域S、あ

---

* 本節は　五十嵐 彰 博士（電総研）との共同研究によるものである。

** オ2節では、再生核がその集合を代表しており、標本化定理は その集合の標本化基底として把握されている。

るいは、図形の投影されている平面S（人間でいえば網膜平面、機械でいえば、入力部分の光電変換面）等の点であり、関数$f(x)$のとる値は、S上の各点xにおける光エネルギー密度に関係する値である。

二つの図形f_1, f_2が与えられたとき、この二つの図形を重ね合わせたものはまた一つの図形となる。それをf_1+f_2とすれば

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad (3.1)$$

となる。また図形fの明るさをa倍したものも一つの図形である。それをafとすれば、

$$(af)(x) = af(x) \qquad (3.2)$$

となる。

そこで、ある領域Sに描きうるすべての図形の集合をXとすれば、Xに属する任意の図形に対して、加法演算と正数倍の演算とが、それぞれ式(3.1),(3.2)で定義されることになる。しかも、黒地に白い図形を描くばかりでなく、白地に黒い図形を描く場合をも考えれば、式(3.2)は全ての実数aに対して定義されるから、この二つの演算に対してXが実線形空間になっていることがわかる。

次に、Xに属する一つの図形fを考える。この図形に何かの拍子にノイズが加わって、少し異なった図形f'になることがある。この場合fとf'を全く別の図形と見ることもできる。しかし、パターン認識の立場からすれば、これは本来同じものであるから、同じ図形あるいは近い図形とみなす方が自然であろう。すなわち、f'はfの近くにあるのである。こうして、図形に対しても近さの概念が生まれる。数学ではこれを近傍という。そして、近傍の概念が導入された集合を位相空間という。

ところで、位相空間を規定する近傍の公理をみれば、一点fの近傍は、この点の近さの状態、すなわち位相を規定しているが、二点f, gの相互の関係については何も触れていない。したがって、これだけでは、位相的性質といって

も、一点とその近傍とで定まるような性質を扱っているのであって、他の点との近さというような関係は出てこない。この意味から言えば、位相空間は空間の極端に細部の性質、いわゆる局所的性質を規定していることになる（文献(4), p.98）。

このような位相空間に対して、二点の近さとか、もっと進んで、いわゆる大局的な性質を調べてゆくために、Hausdorff の分離公理と呼ばれるものについて考える。二つの異なる図形 f, g をとる。この場合にも、それぞれ f および g の近傍というものが考えられる。そして、次第に細かく見てゆけば、f の近傍と g の近傍の両方に属するような図形を排除することができるであろう。このように、位相空間のどんな二点に対しても、それぞれの近傍で互いに交わらないものが存在するとき、その位相空間は Hausdorff 空間と呼ばれる（文献(5), p.22）。

さらに、f の近くにある f' と、g の近くにある g' に対して、$f'+g'$ という図形を式(3.1)によって考えることができるが、$f'+g'$ は $f+g$ の近くにあると考えられる。同様に、数 a の近くにある数 a' に対して、$a'f'$ という図形を式(3.2)によって考えることができるが、この $a'f'$ も af の近くにあると考えられる。

以上の事柄をまとめれば、図形集合 X が次の四つの条件を満足していることがわかる。

(i) X は線形空間である。

(ii) X は Hausdorff 空間である。

(iii) f, g の和 $f+g$ は、二変数 f, g の関数として連続である。

(iv) f と数 a との積 af は、二変数 a, f の関数として連続である。

(i) は X の代数的構造を表し、(ii) は X の位相的構造を表している。そして (iii), (iv) は、この二つの構造が互いに調和していることを示している。(i)～(iv) を満足する集合 X は、位相線形空間と呼ばれる（文献(5), p.39）。以上直観的にではあるが、図形集合が位相線形空間になることを見てきた。

しかし、全ての信号空間が位相線形空間になるとは限らない。そこで一般的には、信号空間をある種の位相空間とみなすことにする。

ところで、近傍の定義にはいろいろある。例えば、fを含む全ての部分集合がfの近傍である、という定義（離散位相, discrete topology）もあるし、fの近傍はX全体である、という定義（密着位相、indiscrete topology）もある（文献(6), p.34）。このように、非常に細かい位相から、非常に粗い位相までいろいろの段階がある。しかし、一般的に位相を定義しておいて、ある問題に対してはこの位相の入れ方が最適である、というように具体的な形を決定する手段は、数学の世界においてもまだ得られていない。数学の世界ではアプリオリに特定の位相を定義して、その特定の位相に対しては、いろいろと細かい性質が調べられているという段階である。そこで、我々としては、図形のもっともらしいいくつかの性質を基にして、直観的に位相を与えなければならないのである。

上でもこのような立場から図形集合の性質を調べ、それが位相線形空間になることを見てきた。しかし、これだけではまだ広すぎて、細かい議論を展開しにくい。また、初めから範囲を広げすぎると、方向を見失うおそれがあるので、本論文では、信号空間として、位相線形空間の特殊な場合であるHilbert空間（文献(7), p.363）を採用することにする。

外界にある図形は、実数値関数として表される。しかし、例えばそれを、一度Fourier変換してしまえば、複素数値関数になるし、また、理論展開を簡潔にするためにも、図形集合を、複素数値関数にまで拡大しておく方が良い。

また、我々が通常扱っている図形は、二次元平面上に描かれているが、数式を簡単化して理解し易くするために、その領域を、一次元に限定する。

図形を描きうる外界の領域は、無限に広い。しかし、人間にしろ機械にしろ、一度に観測できるのは、有限の領域である。そこで、これまでに述べてきた図形$f(x)$の定義域Sとしては、有限区間$[-\ell, \ell]$を採用する。

更に、図形$f(x)$を表現するためには、何らかの物理現象を利用しなければい

けないことから、$f(x)$を、エネルギー有限の条件

$$\|f\|^2 \equiv \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|^2 dx < \infty \qquad (3.3)$$

を満足するような関数に限ることにする。

結局、本論文では、信号空間として、複素Hilbert空間$L_2[-\ell,\ell]$を採用する。ここで空間$L_2[-\ell,\ell]$とは、有限区間$[-\ell,\ell]$で定義された複素数値関数であって、二乗可積分な関数、即ち、式(3.3)を満足する関数の全体である。任意の$f,g\in L_2[-\ell,\ell]$に対して、内積は

$$(f,g) \equiv \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad (3.4)$$

と定義される。そして、任意の$\varepsilon>0$に対し、fのε-近傍$U(f;\varepsilon)$が

$$U(f;\varepsilon) \equiv \{g \mid \|f-g\|<\varepsilon\} \qquad (3.5)$$

と定義される。

3.1.2 情報処理機能の定式化

3.1.1で、情報を担う信号の数学的定式化を行なった。パターン認識理論を建設したり、情報処理装置を設計する問題を扱うために次にしなければいけないことは"情報処理"そのもの、あるいは"情報処理機能"というものを数学的に定式化することである。

そこで再び、パターン認識を例にとって考察を進める。情報科学の立場からすれば、パターン認識とは外界に提示されたパターンを、それが属する概念に対応づけることである、と定義される。さらに、各概念に対応して標準パターンというものが少なくとも一個考えられるから、パターン認識とは、与えられたパターンを、それが属する概念に対応する標準パターンに対応づける操作である、ということができる。

ところで前項において、情報を担う信号を位相空間の元として定式化したか

ら、ここでは、情報処理というものを、ある位相空間の元をある位相空間の適当な元に変換する操作である、と定義する。そうすれば、この変換を行なうもの、即ち、ある位相空間からある位相空間への作用素が、その情報処理機能を表していることになる（図3.1）。

そして、この作用素をできるだけ素直に金物で実現すれば、それはこの作用素と同じ働き、即ち、代数的処理だけでなく、位相的処理も行なうことができるシステムとなるのである。そのための設計および解析理論を空間回路網理論という。

さて、真のパターン認識をしようと思えば、一つ一つのパターンだけでなく、そのパターンが属する空間全体の構造を知らなければいけない。同様に、より優れた情報処理装置を設計したり、あるいは、情報処理機能そのものについて論じようと思えば、一つの情報処理機能（一つの作用素）に着目するだけでなく、その情報処理機能の属する空間全体の構造を知らなければいけない。即ち情報処理機能に対しても、外延的記述が重要になってくるのである。

では、作用素の空間として、どのような空間を選べば良いのであろうか。ある位相空間からある位相空間への作用素の全体としたのでは、あまりに条件が弱すぎて、実のある理論は展開できない。前項でも、より具体的な信号空間として、複素Hilbert空間$L_2[-l, l]$を採用することにした。しかも、$L_2[-l, l]$

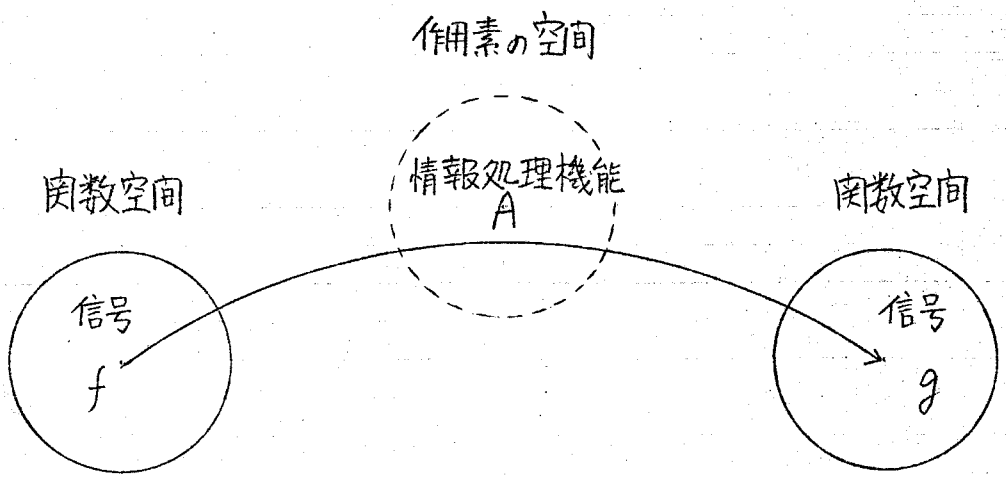


図3.1. 情報処理機能の定式化

は、式(3.1), (3.2)を満足する線形空間になっている。もし、このような線形という性質が、情報処理を行なった後でも保存されていると仮定すれば、その処理を表す作用素は、線形作用素に限られてしまう。線形作用素の中にも、有界作用素と非有界作用素がある(文献(7), p.279, 525)。しかし、本論文では、より素直な作用素である有界線形作用素を、主として扱うことにする。

結局、本論文で主として扱う作用素の空間は、複素Hilbert空間$L_2[-l, l]$からそれ自身の中への有界線形作用素の全体であり、それを$\mathcal{B}(L_2)$で表すことにする。* そして、時に応じて、より強い条件をつけていくことにする。

3.2 情報処理機能の表現

3.2.1 dyad と dyadic

与えられた作用素から、空間回路網を設計したり、作用素の空間の構造を調べ、その幾何学的イメージをつかむ為には、作用素の空間に座標系を導入すると都合が良い。本項では、その為の準備として、文献(8)に沿いながら、dyadおよびdyadicという概念について述べる。

3次元ベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ に対して、内積は通常

$$(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\ \bar{b}_2\\ \bar{b}_3\end{pmatrix} = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + a_3\bar{b}_3 \qquad (3.6)$$

と定義され、その結果は、一つの複素数になる。ところで、式(3.6)の右辺で、aを縦ベクトル, bを横ベクトルにすれば,

$$\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) = \begin{pmatrix}a_1\bar{b}_1, & a_1\bar{b}_2, & a_1\bar{b}_3\\ a_2\bar{b}_1, & a_2\bar{b}_2, & a_2\bar{b}_3\\ a_3\bar{b}_1, & a_3\bar{b}_2, & a_3\bar{b}_3\end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

---

* $\mathcal{B}$は、bounded (有界)の頭文字をとったものである。

となり、結果は、一つの行列になる。このように、二つのベクトルから一つの行列を作る演算を、一般のHilbert空間に拡張したものが、dyad である。即ち、Hilbert空間 X の元 f, g に、

$$\langle f, g \rangle h \equiv (h, g) f \quad : \quad h \in X \tag{3.8}$$

によって定義される作用素 $\langle f, g \rangle$ を対応づける演算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を dyad という。ここで、式(3.8)の右辺の $(\cdot, \cdot)$ は、X における内積である（文献(8), p.7）*。dyad の一次結合（特に本論文では、無限和も含む）を、dyadic という。dyad の定義から、容易に次の関係式を得る（文献(8), p.7）。

〔補題 3.1〕 a を複素数, f, g, h, u, v を複素Hilbert空間 X の元, A を X の上の有界線形作用素とすれば、次の関係が成立する。

$$a\langle f, g \rangle = \langle af, g \rangle = \langle f, \bar{a} g \rangle \tag{3.9}$$

$$\langle f+g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \tag{3.10}$$

$$\langle f, g+h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle \tag{3.11}$$

$$A\langle f, g \rangle = \langle Af, g \rangle \tag{3.12}$$

---

* 定義でも述べたように、dyad の概念は、$L_2[-\ell, \ell]$ に限らず一般のHilbert空間（文献(7), p.364）に対して意味をもつ。例えば、実行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

に対し 内積を

$$(A, B) = ae + bf + cg + dh$$

によって定義すれば

$$\langle A, B \rangle C = (C, B) A$$

によって dyad が定義できる。

ところで、dyad の記号としては、良く $f \otimes g$ が使われている。(8) しかし、上の例のように、行列に対しても dyad の記号を適用しようとしたとき、$A \otimes B$ としたのでは、Kronecker積と混同してしまう。そこで 本論文では、dyad の記号として ⊗ を使わずに、敢えて $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を使用することにする。

$$\langle f, g \rangle A = \langle f, A^* g \rangle \tag{3.13}$$

$$\langle f, g \rangle \langle u, v \rangle = (u, g) \langle f, v \rangle \tag{3.14}$$

$$\langle f, g \rangle^* = \langle g, f \rangle \tag{3.15}$$

$$\| \langle f, g \rangle \| = \| f \| \cdot \| g \| \tag{3.16}$$

ここで A^*は

$$(Af, g) = (f, A^* g) \quad \text{for all } f, g \in X \tag{3.17}$$

によって定義される作用素Aの共役作用素（文献(7), P.375）であり、式(3.16)の左辺の$\| \cdot \|$は、

$$\| A \| = \sup_{\| f \| = 1} \| Af \| \tag{3.18}$$

によって定義される作用素のノルムである（文献(7), p.374）。

3.2.2 作用素のSchmidt族とトレース族

更に準備を続ける。Hilbert空間Xの完全正規直交系（文献(7), p.367）を$\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$とし、$A \in B(X)$とする。もし

$$\| A \|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \| A u_n \|^2} \tag{3.19}$$

が有限な値をもてば、その値は、完全正規直交系$\{u_n\}$のとり方によらず一定となる。そこで、式(3.19)で与えられる汎関数$\| \cdot \|_2$を、作用素のSchmidtノルムという。有限なSchmidtノルムをもつ作用素の全体を、Schmidt族といい、$B_2(X)$で表す（文献(8), p.29；(9), p.70）。

Schmidtノルムと式(3.18)で与えられる普通のノルムの間には、

$$\| A \| \leqq \| A \|_2 \tag{3.20}$$

なる関係が成立している（文献(8)，p.29）。

有限次元の値域をもつ作用素を、有限次元的作用素という（文献(7), p.397）。有限次元的作用素は、Schmidt族に属する（文献(8), p.34）。式(3.8)から分かるように、dyadの値域は高々一次元であるから、dyadは有限次元的作用素である。

さて、$B_2(X)$の元A, Bに対して、

$$(A, B) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} (Au_n, Bu_n) \tag{3.21}$$

は常に収束し、その値は、完全正規直交系$\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$のとり方によらない。
(A, B)は内積の公理（文献(7), p.363）

$$(B, A) = \overline{(A, B)} \tag{3.22}$$

$$(\alpha A, B) = \alpha (A, B) \quad ; \alpha は複素数 \tag{3.23}$$

$$(A+B, C) = (A, C) + (B, C) \tag{3.24}$$

$$(A, A) > 0 \quad ; A \neq 0 \tag{3.25}$$

を満足しており，Schmidtの内積と呼ばれる（文献(8), p.31）。3.2.1の脚注で示した行列に対する内積は、Schmidtの内積の一例である。この例からもわかるように、Schmidtの内積は、ベクトルに対する所謂Euclidの内積を、作用素の空間へ自然に拡張したものになっている。

Schmidt族$B_2(X)$は、Schmidtの内積に関してHilbert空間になっている。更に、$B_2(X)$はSchmidtノルムのもとで、Banach対称環（文献(5), p.182）になり、$B(X)$の両側イデアルになっている（文献(5), p.182; (8), p.34）。従って、$A \in B_2(X)$, $B \in B(X)$に対して

$$A^* \in B_2(X) \tag{3.26}$$

$$BA \in B_2(X), \quad AB \in B_2(X) \tag{3.27}$$

が成立する。

Schmidtの内積は、式(3.22)～(3.25)の他にも、次の性質をもつ(文献(8), p.31)。

〔補題 3.2〕 $A, B \in B_2(X)$, $C \in B(X)$, $f, g, u, v \in X$ に対して、次の関係が成立する。

$$(A^*, B^*) = \overline{(A, B)} \tag{3.28}$$

$$(CA, B) = (A, C^*B) \tag{3.29}$$

$$(AC, B) = (A, BC^*) \tag{3.30}$$

$$(\langle f, g \rangle, \langle u, v \rangle) = (f, u)(v, g) \tag{3.31}$$

Schmidt族の二つの作用素の積で表される作用素の全体を、トレース族といい、$B_1(X)$ で表す(文献(8), p.37; (9), p.70)。トレース族の作用素Aに対しては、常にトレース $tr(A)$ が定義でき、次のように表される。

$$tr(A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (Au_n, u_n) \tag{3.32}$$

$$= (C, B^*) \tag{3.33}$$

ここで、$\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は、Xの完全正規直交系であり

$$A = BC \quad ; B, C \in B_2(X) \tag{3.34}$$

である。そして、式(3.32)(3.33)の値は、完全正規直交系のとり方、およびAの分解の仕方によらず一定である(文献(8), p.37)。式(3.27)より、

$$B_1(X) \subset B_2(X) \subset B(X) \tag{3.35}$$

であることが分かる。また、有限次元的作用素は、トレース族に属する(文献(8), p.42)。

〔補題 3.3〕 $A, B \in B(X)$ のどちらか一方が、トレース族の作用素ならば、他方がSchmidt族に属していなくても、Schmidtの内積 (A, B) は意味をもつ。

〔補題 3.4〕 任意の $A \in B(X)$, $f, g \in X$ に対して

$$(A, \langle f, g \rangle) = (Ag, f) \tag{3.36}$$

なる関係が成立する。ここで、式(3.37)の左辺の内積は、Schmidtの内積であり、右辺の内積は、Xにおける内積である。

3.2.3 作用素の行列表現とdyadic表現

空間 $L_2[-l, l]$（以下、簡単のために L_2 と書く）の完全正規直交系を $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ とすれば、任意の $f, g \in L_2$ は、

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n u_n(x) \\ g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n u_n(x) \end{cases} \tag{3.37}$$

と一意に展開される。ここで、展開係数は、

$$f_n = (f, u_n), \quad g_n = (g, u_n) \tag{3.38}$$

によって与えられる。しかも、

$$(f, g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \overline{g}_n \tag{3.39}$$

となる。特に

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 \tag{3.40}$$

である。これをParsevalの等式という。式(3.40)の右辺の級数が有限になるような、可算無限個の成分でできているベクトルの全体を l_2 で表す。任意の元

$(f_n) \in l_2$ に対し、式(3.37)に従って作られた f は、L_2 の元となる。しかも、式(3.39)(3.40)の関係があるから、空間 l_2 は $L_2[-l, l]$ と全く同じ空間であると考えることができる(文献(7), p.397)。

ところで、光学系あるいは立体回路を用いない限り、即ち、集中定数回路で空間回路網を構成しようとする限り、情報処理機能を離散的な形で表しておいた方がよい。その為には、信号空間として L_2 のかわりに l_2 を用いる方がよいことが、上述のことから分かるであろう。

この場合、L_2 の上の作用素は、l_2 の上では無限次元行列の形をとる。即ち、$f \in L_2$ を $g \in L_2$ に変換する作用素を A とするとき

$$g = Af \tag{3.41}$$

となるが、これを離散的な形で表せば、

$$g_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} f_n \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3.42}$$

となる。ここで

$$a_{m,n} \equiv (A u_n, u_m) \tag{3.43}$$

である(文献(7), p.398)。

このように、作用素 A と行列 $\langle\langle a_{m,n} \rangle\rangle$ とは、全く同じ情報処理機能をもっていて、ただその見掛けの形が異なるだけである。また、式(3.43)から分かるように、行列 $\langle\langle a_{m,n} \rangle\rangle$ の形は、空間 L_2 の座標系 $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ の選び方によって変わる。そこで、座標系 $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ も表に出して行列 $\langle\langle a_{m,n} \rangle\rangle$ を表現すれば、

$$A = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{m,n} \langle u_m, u_n \rangle \tag{3.44}$$

となる。これが、作用素 A の dyadic 表現である。ここで式(3.44)の右辺の無限級数は、作用素の強位相に関する収束、即ち、強収束の意味である*。以下、作用素に関する無限級数が現れたときは、特に断わらない限り、常に、強収束の意味で収束する場合を扱うことにする。

式(3.31)より、式(3.44)に現れる dyad が、Schmidt の内積に関して、正規

---

* 作用素の列 $A_n \in B(X)$ を考える。任意の $f \in X$ に対して $A_n f$ が Af に収束するとき、作用素の列 A_n は作用素 $A \in B(X)$ に強収束するという(文献(7), p.305)。

直交系になっていることが分かる：

$$(\langle u_m, u_n \rangle, \langle u_p, u_q \rangle) = \delta_{m,p}\delta_{n,q} \tag{3.45}$$

更に、式(3.36)(3.43)より、$\langle u_m, u_n \rangle$に対する展開係数$a_{m,n}$が式(3.38)と同じ形式で、

$$a_{m,n} = (A, \langle u_m, u_n \rangle) \tag{3.46}$$

と表されることが分かる。即ち、作用素のdyadic表現(3.44)は、関数のFourier式展開(3.37)に対応する表現形式になっているのである。

結局、次の命題が成立する。

〔命題 3.1〕 $B(L_2)$に属する任意の作用素Aは、L_2の完全正規直交系$\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$を使って、式(3.44)のようにdyadic表現できる。そして、展開係数$a_{m,n}$は、式(3.43)または(3.46)によって与えられる。

式(3.44)で与えられる$A \in B(L_2)$のdyadic表現において、作用素Aの性質は、行列$\langle\langle a_{m,n} \rangle\rangle$の性質に移行し、逆も成立する。例えば、式(3.44)に対して、共役作用素A^*は

$$A^* = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{m,n}^* \langle u_m, u_n \rangle \tag{3.47}$$

と表される。ここで、$a_{m,n}^*$は、式(2.47)と同じ意味である。

式(3.43)より

$$Au_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,n} u_m \tag{3.48}$$

となるから、次の補題が成立する。

〔補題 3.5〕 式(3.44)で与えられる$A \in B(L_2)$のdyadic表現に対して次の関係が成立する。

$$\begin{cases} (Au_m, Au_n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{p,m}\overline{a_{p,n}} & (3.49) \\ (A^*u_m, A^*u_n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \overline{a_{m,p}}\, a_{n,p} & (3.50) \end{cases}$$

特に

$$\begin{cases} \|Au_n\|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_{m,n}|^2 & (3.51) \\ \|A^*u_m\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{m,n}|^2 & (3.52) \end{cases}$$

となる。

式(3.49)は、行列$\langle\langle a_{m,n}\rangle\rangle$の第m列ベクトルと第n列ベクトルの内積が、$Au_m$と$Au_n$の内積と一致することを意味している。同様に、式(3.50)は、行列$\langle\langle a_{m,n}\rangle\rangle$の第n行ベクトルと第m行ベクトルの内積が、$A^*u_m$と$A^*u_n$の内積に一致することを意味している。式(3.51)は、行列$\langle\langle a_{m,n}\rangle\rangle$の第n列ベクトルのノルムが、$Au_n$のノルムと一致することを意味し、式(3.52)は、行列$\langle\langle a_{m,n}\rangle\rangle$の第m行ベクトルのノルムが、$A^*u_m$のノルムと一致することを意味している。

式(3.19), (3.51), (3.52)から、直ちに次の補題を得る。

〔補題 3.6〕 Schmidt族$B_2(L_2)$に属する作用素Aのdyadic表現を、式(3.44)とする。このとき、行列$\langle\langle a_{m,n}\rangle\rangle$のSchmidtノルムは、座標系$\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$のとり方によらず一定であり、その値は、作用素AおよびA^*のSchmidtノルムと一致する：

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \sqrt{\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} |a_{m,n}|^2} \qquad (3.53)$$

式(3.32)と(3.43)より、次の補題が成立する。

〔補題 3.7〕 トレース族$B_1(L_2)$に属する作用素Aのdyadic表現を、式(3.44)とする。このとき行列$\langle\langle a_{m,n}\rangle\rangle$のトレースは、座標系$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$のとり方によらず一定であり、その値は、作用素Aのトレースと一致する：

$$tr(A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,n} \tag{3.54}$$

〔補題 3.8〕 $A \in B(L_2)$ のdyadic表現を式(3.44)とする。このとき、各展開係数 $a_{m,n}$ に対して、次の不等式が成立する。

$$|a_{m,n}| \leq \|A\| \leq \|A\|_2 \tag{3.55}$$

（証明） 式(3.43)とSchwarzの不等式から

$$|a_{m,n}| = |(Au_n, u_m)| \leq \|Au_n\| \cdot \|u_m\| \leq \|A\|$$

となり、式(3.55)の才一の不等式が成立する。才二の不等式は、式(3.20)から明らかである。 (Q.E.D)

式(3.55)の才二の不等式が意味をもつのは、$A \in B_2(L_2)$ の場合だけである。式(3.55)のように、$|a_{m,n}|$ の評価としては、$\|A\|_2$ よりも $\|A\|$ の方が、より精密な評価量になっている。しかし、式(3.18)(3.19)からわかるように、一般には、$\|A\|_2$ の方が $\|A\|$ よりも計算しやすいのである。

3.2.4. 基本座標系

3.2.3で求めた作用素 $A \in B(L_2)$ に対応する行列 $\|a_{m,n}\|$ の形は、L_2 の座標系 $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ のとりかたによって異なる。しかも、座標系の選び方には、無限の自由度がある。そこで、まず、できるだけ簡潔に理論が展開できるように、座標系を選ぶことが望ましい。そのような座標系を、基本座標系（fundamental basis）と呼ぶことにする。では、基本座標系として、どのような関数系を採用すれば良いであろうか。以下にそれを述べる。

図形のもつ意味は、本来、その図形の描かれている平面上の絶対的位置に無関係である。例えば、文字パターン"A"を"エイ"と読むならば、それを平行移動したものも、やはり"エイ"と読まれる。ところが、文字認識の研究において、認識率に最も大きな影響を与えるものの一つが、文字パターンの位置ずれであ

ることが、経験的に知られており、要因分析による、ある程度の裏付けもされている。[10]

従って、文字認識技術においては、文字パターンの位置の正規化が、非常に重要になってくる。また、位置ずれをおこした文字パターンを、完全に認識装置に取り入れるためには、認識装置が実際に扱える有限次元空間を、位置ずれに対して不変な空間、即ち、並進作用素の不変部分空間(文献(7), p.443)に設定しておかなければいけない。このような問題を論じるためには、L_2の座標系として、並進作用素の固有関数を採用すれば良いことがわかる。

任意の実数aに対して、並進作用素(translation operator) $T(a)$は、

$$(T(a)f)(x) = f(x-a) \quad : \quad f \in L_2[-\ell, \ell] \tag{3.56}$$

と定義される。ここで、$x-a \notin [-\ell, \ell]$の場合には、$\mod 2\ell$で考えるものとする。更に、関数fの一価性を保存するために、$x=-\ell$における値$f(-\ell)$を、$f(-\ell)=f(\ell)$となるように修正しておくものとする。このように修正しても、空間L_2で考えている限り一般性を失うことはないのである。

さて、このように並進作用素$T(a)$を定義すれば、解析半群の理論(文献(11), Chapter IX)より

$$T(a) = e^{-ia(\frac{1}{i}D)} \tag{3.57}$$

となる。ここで、$i=\sqrt{-1}$であり、$-iD$は、後でのべる微分作用素$-id/dx$の自己共役な拡張である。並進作用素$T(a)$の性質は、自己共役な微分作用素$-iD$と関数$\exp(-iax)$の性質によって決ってしまう。このように、微分作用素$-iD$は、並進作用素、あるいは更に一般に、並進作用素と可換な作用素に、本質的な影響を与えるのである。例えば、微分作用素$-iD$の固有関数は、同時に、並進作用素と可換な全ての作用素の固有関数になっている。

ところで、微分作用素$-id/dx$は、$C^{(1)}[-\ell, \ell]$即ち、台有限、連続、連続微分可能な関数族(文献(7), p.351)で定義された対称作用素(文献(7), p.532)であ

るから、式(3.57)のように、作用素の関数を考えようとすれば、$-id/dx$ を自己共役作用素に拡張しておかなければいけない(文献(7), p.563)。この自己共役に拡張した微分作用素を $-iD$ と書くことにすれば、それは、$W_2^{(1)}[-l, l]$ 即ち、$f \in L_2[-l, l]$ かつ $-iDf \in L_2[-l, l]$ なる関数族(文献(7), p.325)の中で、境界条件

$$f(-l) = e^{i\theta} f(l) \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi) \tag{3.58}$$

を満足する関数全体の上で定義された微分作用素になる(文献(7), p.535)。

式(3.58)からわかるように、$-id/dx$ の拡張の仕方は、θ のとり方に応じて、連続無限個存在する。しかし、実数値関数に対しても、式(3.58)が成立するためには、θ は 0 か π に限られてしまう。そこで、$\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の場合だけを考えることにする。

$\theta = \pi$ に対しては、$\theta = 0$ の場合とほとんど平行して理論が展開できるので、ふ々にその概略を述べるに止め、本論文では主として、$\theta = 0$ の場合について論じる。$\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の違いは、空間回路網の端子数の奇数個と偶数個の違いに現れてくる。

結局本論文では、$\theta = 0$、即ち、境界条件

$$f(-l) = f(l) \tag{3.59}$$

によって拡張された微分作用素 $-iD$ を基礎にとって、理論を展開することにする。

そうすれば、微分作用素 $-iD$ の固有値、固有関数は、

$$\frac{n\pi}{l}, \quad \varphi_n(x) \equiv e^{i\frac{n\pi}{l}x} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3.60}$$

となる。$\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は、$L_2[-l, l]$ の完全正規直交系をなす。そこで本論文では、基本座標系として、式(3.60)で定義される $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を採用することにする。

基本座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は、空間 $L_2[-l, l]$ の元に対して、空間周波数を規定する。$\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ に関する $A \in B(L_2)$ の行列表現を $\langle\!\langle A^{\sim}(m, n) \rangle\!\rangle$ とすれば、式(3.43)

より

$$\tilde{A}(m,n) = (A\varphi_n, \varphi_m) \tag{3.61}$$

となる。式(3.61)は、φ_nなる空間周波数成分が、作用素Aによってφ_mなる空間周波数成分に変換される割合が、$\tilde{A}(m,n)$であることを示している。そこで、無限次元行列$(\!(\tilde{A}(m,n))\!)$を、作用素Aの空間周波数特性(spatial frequency characteristics)と名づける。補題3.8より、次の命題が成立する。

〔命題 3.2〕 $A\in B(L_2)$の空間周波数特性$(\!(\tilde{A}(m,n))\!)$に対して

$$|\tilde{A}(m,n)| \leqq \|A\| \leqq \|A\|_2 \tag{3.62}$$

なる不等式が成立する。

なお、微分作用素については、第8章でもう一度詳しく論じることにする。

3.3. 空間回路網の設計理論

3.3.1 自然座標系

式(3.61)で与えられる作用素$A\in B(L_2)$の行列表現$(\!(\tilde{A}(m,n))\!)$を基に、式(3.42)に従って空間回路網を構成しようとすれば、次の問題が生じる。

(i)空間回路網は、有限個の入出力端子しかもち得ないから、無限次元行列をそのまま実現することはできない。

(ii)空間回路網が外部から入力信号$f\in L_2$を受取る場合、式(3.38), (3.4)より

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx \tag{3.63}$$

なる演算を行なって$\tilde{f}_n$を求めなければいけない。しかし、式(3.63)を金物で実現することは困難である。

(iii)式(3.63)からわかるように、実数値関数$f\in L_2$に対して、$(\tilde{f}_n)_{n=-\infty}^{\infty}$は複素ベクトルになり、回路構成が複雑になる。

これらの問題を解決するために、L_2の座標系を次のようにして、基本座標系$\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$から、自然座標系と呼ばれる新しい座標系$\{\psi_n\}$に変換することにする。

まず(i)の問題を解決するためには、信号空間を、L_2の有限次元部分空間に限らなければいけない。3.2.4で論じた理由により、有限次元部分空間としては、並進作用素$T(a)$の不変部分空間になるように、$T(a)$の固有関数$\{\psi_n\}_{n=-N}^{M}$によって張られるL_2の部分空間を、まず採用する。ここで、$M, -N$は、基本座標系$\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$を有限個で打切ったときの、$n$の最大値と最小値である。

次に、(iii)の問題を解決するためには、$\{\psi_n\}_{n=-N}^{M}$によって張られる有限次元部分空間に新しく座標系$\{\psi_n\}_{n=-N}^{M}$を導入し、$\{\psi_n\}_{n=-N}^{M}$による展開係数が、実数値関数に対して全て実数になるようにしなければいけない。そのための必要十分条件は、$\psi_n(x)$ $(n=-N, -N+1, \cdots, M)$が全て実数値関数になることである。更に、$\{\psi_n\}_{n=-N}^{M}$を$\{\varphi_n\}_{n=-N}^{M}$の一次結合として

$$\psi_n(x) = \sum_{m=-N}^{M} u^*_{m,n}\, \varphi_m(x) \qquad (n=-N, -N+1, \cdots, M) \tag{3.64}$$

と表したとき*、$\psi_n(x)$が全て実数値関数になるためには、$M \geq N$のとき

$$\begin{cases} u^*_{-m,n} = \overline{u^*_{m,n}} & (m, n = -N, -N+1, \cdots, N) \\ u^*_{m,n} = 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{3.65}$$

となることが必要十分である。$M<N$の場合には、式(3.65)でNをMとおけば、そのまま成立する。結局、$M=N$の場合を考えれば良いことになる。

そこで本論文では、有限次元信号空間として、$\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$によって張られる$(2N+1)$次元部分空間を採用することにし、以下、このN次以下の三角多項式の空間を、H_Nと表すことにする。

(ii)の問題を解決するためには、$\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$が空間H_Nの標本化基底になっていれば良い。即ち、任意の$f \in H_N$に対して、式(2.15)で述べた関係式

$$(f, \psi_n) = w_n f(x_n) \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm N) \tag{3.66}$$

---

* $u^*_{m,n}$は、式(2.47)と同じ意味である。

が成立すれば良い。そうすれば、式(3.63)に対応する積分演算

$$(f, \varphi_n) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\varphi_n(x)\,dx \tag{3.67}$$

と等価なことが、標本点 x_n における f の値 $f(x_n)$ を観測することによって、達成できるのである。*

式(3.60)で与えられる空間 H_N の基本座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ に対し、関数 $\varphi_0(x)$ を

$$\varphi_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}\varphi_n(x) \tag{3.68}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\left(1+2\sum_{n=1}^{N}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{3.69}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\,\frac{\sin\frac{(2N+1)\pi}{2\ell}x}{\sin\frac{\pi}{2\ell}x} \tag{3.70}$$

によって定義する。空間 H_N の標本化基底は、この $\varphi_0(x)$ を使って、一般に次のように表される。

〔補題 3.9〕 空間 H_N の正規直交標本化基底を $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ とする。$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ は一般に

$$u_n(x) = e^{-i\theta_n}\varphi_0(x-a-a_{p_n}) \tag{3.71}$$

と表される。ここで、θ_n $(n=-N,-N+1,\cdots,N)$ は任意の実定数、a は $[-\ell,\ell]$ に属する実数、$\{p_n\}_{n=-N}^{N}$ は集合として $\{n\}_{n=-N}^{N}$ と同じものであり、

$$a_n \equiv \frac{2\ell n}{2N+1} \qquad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{3.72}$$

である。

(証明) 空間 H_N の再生核を $K(x,y)$ とすれば、式(2.3)(3.60)(3.68)より

$$K(x,y) = \sum_{n=-N}^{N}\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}$$

---

* 唯一点における値を観測することは、物理的に不可能であるから、厳密にいえば、式(3.66)を空間回路網の入力部のモデルとして使用することはできない。それにもかかわらず式(3.66)で表される標本化基底の考え方は、空間回路網理論において、有効な働きをするのである。この問題については、20.1で改めて論じることにする。

$$= \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(x-y)$$

$$= \sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-y)$$

$$\therefore\ K(x,y) = \sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-y) \qquad (3.73)$$

となる。ところで 式(3.70), (3.72) から分かるように、

$$\varphi_0(a_n) = \sqrt{2N+1}\,\delta_{n,0} \qquad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \qquad (3.74)$$

であるから、式 (3.73) (3.74) より

$$K(a+a_{p_m},\ a+a_{p_n}) = (2N+1)\delta_{m,n} \qquad (3.75)$$

となる。従って、式(2.17)より

$$|w_n|^2 = \frac{1}{2N+1} \qquad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \qquad (3.76)$$

となり、式(2.18) (3.73). (3.75) より

$$u_n(x) = \frac{e^{-i\theta_n}}{\sqrt{2N+1}}\,K(x,\ a+a_{p_n})$$

$$= e^{-i\theta_n}\varphi_0(x-a-a_{p_n}) \qquad (3.77)$$

となる。これが求める式(3.71)である。 (Q.E.D)

ところで、式(2.26)～(2.28)で論じたように、関数の再構成の立場からみれば、式(3.71)に現れる $\{\theta_n\}_{n=-N}^{N}$ をどのように選んでも、本質的な影響は現れない。そこで、全ての n に対して、$\theta_n = 0$ とおくことにする。そうすれば、式(3.70)から分かるように、φ_0 は実数値関数であるから、$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ も実数値関数になって、問題(iii)に対する要請をも満足することになる。

式(3.71)におけるパラメータ a, $\{p_n\}_{n=-N}^{N}$ の選び方も、本質的なものではないから、標本点が区間$[-l,l]$の中で一様に分布するように、$a=0$, $p_n = n$ $(n=-N,-N+1,\cdots,N)$ とおくことにする。

結局、有限次元信号空間 H_N に、新しい座標系 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を

$$\psi_n(x) = \psi_0(x-a_n) \quad (n=-N, -N+1, \cdots, N) \tag{3.78}$$

によって導入すれば、上記問題点(i)~(iii)が全て解決されることになる。$\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$に対する標本化定理は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\psi_n(x) \qquad : f \in H_N \tag{3.79}$$

$$(f, \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} f(a_n) \quad (n=-N, -N+1, \cdots, N) \tag{3.80}$$

となり、C.R.Cahn によって導かれたものと一致する。[12] このように、新しい座標系$\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$は、連続な空間領域$[-l, l]$で定義された関数$f(x)$と、空間回路網で扱うことができる離散点上で定義された関数、即ちベクトルとを、自然な形で結びつける座標系になっている。そこで、空間H_Nの完全正規直交系$\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$を、自然座標系(natural basis)と名づける。自然座標系の基本的な性質については、3.3.2で論じる。

3.3.2 自然座標系の性質

3.3.1で導入した自然座標系$\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$の基本的な性質について論じる。まず、$N=4$に対する$\psi_0(x)$のグラフを、図3.2に示す。

〔命題3.3〕空間H_Nの自然座標系$\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$に対して、次の関係が成立する。

$$\psi_m(a_n) = \sqrt{2N+1}\,\delta_{m,n} \tag{3.81}$$

$$\psi_n(-x) = \psi_{-n}(x) \tag{3.82}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \psi_n(x) = \sqrt{2N+1} \tag{3.83}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \{\psi_n(x)\}^2 = 2N+1 \tag{3.84}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \psi_n(x)\psi_n(y) = \sqrt{2N+1}\,\psi_0(x-y) \tag{3.85}$$

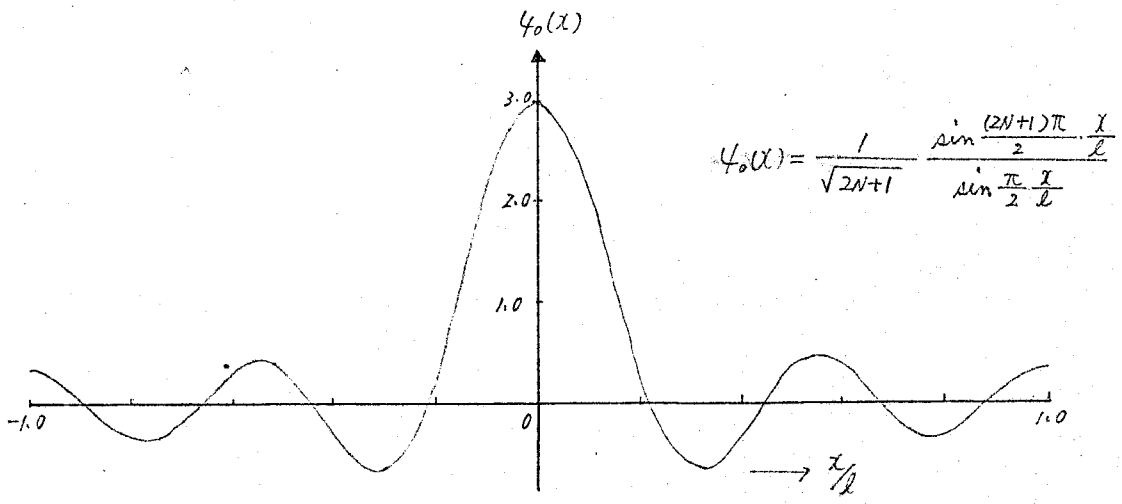


図3.2. 空間 H_N の自然座標系 $\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ $(N=4,\ n=0)$

ここで $\{a_n\}_{n=-N}^{N}$ は、式(3.72)で与えられる自然座標系の標本点である。

系2.3で述べたように、式(3.81)は、$\{\psi_n\}$ が標本化基底であることに因るものである。式(3.84)(3.85)は、補題2.1で述べたように、$\{\psi_n\}$ が正規直交基底であることに因るものである。

式(3.83)は、式(3.68)とある意味で双対な関係になっている。この双対な関係の本質については、オ15節で詳しく論じる。

式(3.83), (3.84)は、次のような意味をもっている。$f(x)$ から

$$\hat{f_n} \equiv (f, \psi_n) \quad (n=-N, -N+1, \cdots, N) \tag{3.86}$$

によって $\hat{f_n}$ を求めるときには、式(3.67)から分かるように、区間 $[-\ell, \ell]$ に属する全ての x に対して、関数値 $f(x)$ を同等に使うのではなく、$f(x)$ に $\psi_n(x)$ という重みを付けて使っている。更に $f \in H_N$ の場合には、式(3.80)から分かるように、それは $f(x)$ の $x=a_n$ なる唯一点の値だけを使うことと等価になっている。このように、一見 $f(x)$ を同等に使わないで、その一部を特に強調して使っているように見える。しかし、全ての n にわたって考えてみれば、式(3.83),(3.84)が示すように、$f(x)$ の値を、全ての $x \in [-\ell, \ell]$ に対して、同等に使ったことになっているのである。

次に、自然座標系 $\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ と基本座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ の関係について述べる。式(2.44)で、$w_m = 1/\sqrt{2N+1}$, $x_m = a_m$, $u_n = \varphi_n$ とおけば、

$$u_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \varphi_n(a_m) \tag{3.87}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \exp\left(i \frac{2\pi mn}{2N+1}\right) \quad (m,n = -N, -N+1, \cdots, N) \tag{3.88}$$

となるので、命題2.10より 次の命題が成立する。

〔命題 3.4〕 自然座標系と基本座標系は、次の関係で結ばれている。

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} \varphi_n(a_m) \psi_m(x) \tag{3.89}$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} \overline{\varphi_m(a_n)} \psi_m(x) \tag{3.90}$$

2.4で論じたように、式(3.87)で与えられる行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ は、ユニタリ行列である。従って、作用素 $\mathcal{F}_N$ を

$$\mathcal{F}_N \equiv \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m,n=-N}^{N} \varphi_n(a_m) \langle \psi_m, \psi_n \rangle \tag{3.91}$$

によって定義すれば、$\mathcal{F}_N$ は H_N の上のユニタリ作用素になる。$\mathcal{F}_N$ を有限Fourier変換作用素と呼ぶ。$\mathcal{F}_N$ については、オ14節で詳しく論じるが、$\mathcal{F}_N$ を使って命題3.4を 次のように表現しなおすことができる。

〔系 3.1〕 自然座標系と基本座標系は、有限Fourier変換によって結ばれている。即ち、各 n ($n = -N, -N+1, \cdots, N$) に対して、次の関係が成立する。

$$\varphi_n = \mathcal{F}_N \psi_n \tag{3.92}$$

$$\psi_n = \mathcal{F}_N^* \varphi_n \tag{3.93}$$

(証明) 式(3.91), (3.90) より

$$\mathcal{F}_N \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m,p=-N}^{N} \varphi_p(a_m) \langle \psi_m, \psi_p \rangle \psi_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m,p=-N}^{N} \varphi_p(a_m) (\varphi_n, \psi_p) \psi_m$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} \varphi_n(a_m) \psi_m$$

$$= \varphi_n$$

となり、式(3.92)が成立する。$\mathcal{F}_N$ はユニタリ作用素であるから、式(3.92)より式(3.93)が成立する。 (Q.E.D)

式(3.68), (3.83)より、次の系が成立する。

〔系 3.2〕 全ての n に対して、次の関係が成立する。

$$(\psi_n, \varphi_0) = (\varphi_n, \psi_0) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \tag{3.94}$$

$\|\psi_n\| = \|\varphi_n\| = 1$ $(n=-N, -N+1, \cdots, N)$ を考慮すれば、式(3.94)から次のことがわかる。自然座標系 $\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ の各座標軸 ψ_n と、基本座標系の一つの軸 φ_0 とのなす角度は、n に関して常に一定の値 $\cos^{-1}(1/\sqrt{2N+1})$ になる。また、基本座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ の各座標軸 φ_n と、自然座標系の一つの軸 ψ_0 とのなす角度も、n に関して一定になり、それは、ψ_n と φ_0 のなす角度と同じ値になる。この関係を、$N=1$ の場合について、図3.3に示す。

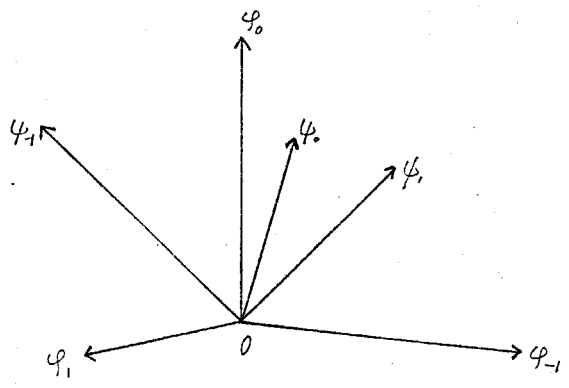


図3.3 自然座標系 $\{\psi_n\}$ と基本座標系 $\{\varphi_n\}$ の関係

式(2.48), (2.38)で $|W_n|^2 = 1/(2N+1)$, $\chi_n = a_n$ とおけば、$f \in H_N$ に対して、

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} f(a_n) \qquad (3.95)$$

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |f(a_n)|^2 \qquad (3.96)$$

なる関係が成立する。式(3.95)は、三角多項式に対するGaussの数値積分公式として知られているものであり、文献(13)でも証明してあるように、実は、$f \in H_N$ の条件を、$f \in H_{2N}$ まで弱くすることができるのである。

3.3.3 空間回路網の設計理論

3.3.1でも述べたように、空間回路網は有限個の入出力端子しかもち得ないから、$B(L_2)$ の作用素Aを実際に空間回路網で実現するためには、Aを H_N から H_N への作用素、即ち、$B(H_N)$ の元で近似しなければいけない。* 本論文では、その近似として、

$$A_N \equiv E_N A E_N \qquad (3.97)$$

によって定義される作用素 A_N を採用することにする。ここで E_N は、空間 L_2 からその部分空間 H_N への射影作用素(文献(7), p.418)であり、H_N の任意の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を使って

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} \langle u_n, u_n \rangle \qquad (3.98)$$

と表される。

A_N は、その定義から分かるように、次の三段階の処理を行なうものである。まず、入力信号 $f \in L_2$ を、E_N によって空間 H_N へ射影する。こうして得られた $E_N f \in H_N$ は、平均二乗誤差の意味で、f の H_N の元による最良近似になっている。次に、$E_N f$ に対して、本来の変換であるAを作用させる。その結果得られる $AE_N f$ は、一般には H_N に属していないので、再び H_N に射影して、その最良

---

* 本論文では簡単のために、第18節以外は全て空間回路網の入力側と出力側の端子数が同じ場合を扱うことにする。端子数が入力側と出力側で異なるより一般の場合への拡張が容易にできることは、第18節の例からも、明らかなことである。

近似を求めるのである。この過程を、図3.4に示す。

従って、入力信号を空間 H_N に限定してしまえば、A_N は、H_N からそれ自身の中への有界線形作用素、即ち、$B(H_N)$ の元になる。そしてこのとき、射影作用素 E_N は、$B(H_N)$ の単位元になっている。

A_N が、ある意味で A の最良近似になっていることを、第8節で証明する。

さて、式(3.44),(3.61)より、$A \in B(L_2)$ は基本座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を使って

$$A = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}(m,n) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle \qquad (3.99)$$

とdyadic表現できる。一方、式(3.98)で $u_n = \varphi_n$ とおけば

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \qquad (3.100)$$

となる。式(3.99),(3.100)を式(3.97)に代入すれば、A_N が

$$A_N = \sum_{m,n=-N}^{N} \tilde{A}(m,n) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle \qquad (3.101)$$

とdyadic表現できることが分かる。ここで、$\tilde{A}(m,n)$ $(m,n=-N,-N+1,\cdots N)$ の値が N によらないこと、即ち、

$$(A_N \varphi_n, \varphi_m) = (A\varphi_n, \varphi_m) = \tilde{A}(m,n) \qquad (3.102)$$

$$(m,n=-N,-N+1,\cdots\cdots,N)$$

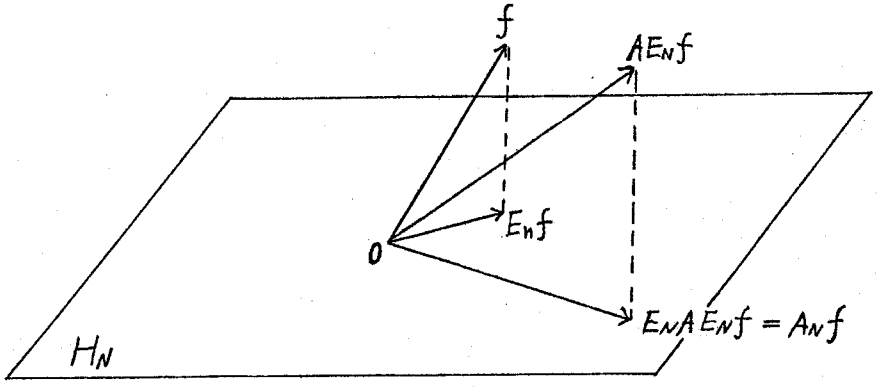


図3.4　A の近似 $A_N = E_N A E_N$ の意味

が成立することは、注目すべき点である。

3.2.4 の最後でも述べたように、式(3.102)は、$\varphi_n\ (n=-N,-N+1,\cdots,N)$ なる空間周波数成分が、作用素 A_N によって $\varphi_m\ (m=-N,-N+1,\cdots,N)$ なる空間波数成分に変換される割合が、$\tilde{A}(m,n)$ であることを示している。そこで $(2N+1)\times(2N+1)$ 行列 $\langle\langle \tilde{A}(m,n)\rangle\rangle$ を、作用素 A_N の空間周波数特性、或いは空間回路網 A_N の空間周波数特性と呼ぶことにする。

自然座標系 $\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ は、H_N の正規直交基底であるから、$A_N\in\mathcal{B}(H_N)$ を、$\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ を使って次のように dyadic 表現することができる。

$$\begin{cases} A_N=\sum_{m,n=-N}^{N}\hat{A}_N(m,n)\langle\psi_m,\psi_n\rangle & (3.103)\\ \hat{A}_N(m,n)\equiv(A_N\psi_n,\psi_m)=(A_N,\langle\psi_m,\psi_n\rangle) & (3.104)\end{cases}$$

そして

$$A_N\psi_n=\sum_{m=-N}^{N}\hat{A}_N(m,n)\psi_m \qquad (3.105)$$

なる関係が成立する。式(3.80), (3.105)から、式(3.104)で与えられる行列 $\langle\langle\hat{A}_N(m,n)\rangle\rangle$ が、次のような物理的意味をもっていることが分かる。即ち、空間回路網の入力側に、第 n 端子だけ 1, 他は全て零となるような信号を加えれば、出力側第 m 端子に、$\hat{A}_N(m,n)$ なる値が観測されるのである。

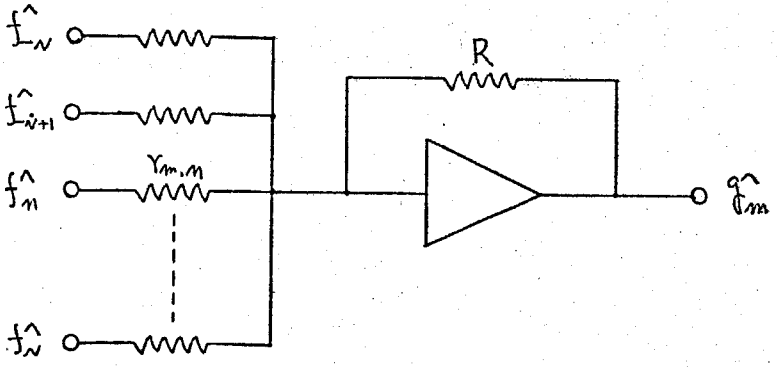
従って、n を固定したとき、$\hat{A}_N(m,n)$ が全ての m に対して一定符号をとる場合には、図3.5に示すように 入力側第 n 端子と出力側第 m 端子を結ぶ抵抗を

$$\frac{R}{\gamma_{m,n}}=\left|\hat{A}_N(m,n)\right| \qquad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \qquad (3.106)$$

と選ぶことにより、作用素 $A_N\in\mathcal{B}(H_N)$ と等価な処理を行なう空間回路網を、多入力係数加算器を使って構成することができる。また、$\hat{A}_N(m,n)$ が正負両方の値をとる場合、即ち、ある固定された m に対して、

$$\begin{cases} \hat{A_N}(m, n_i) \leqq 0 & (i = 1, 2, \cdots, p) \\ \hat{A_N}(m, n_i) > 0 & (i = p+1, p+2, \cdots, 2N+1) \end{cases} \qquad (3.107)$$

となる場合には、図3.6 における各抵抗値を



$$\hat{g_m} = -\sum_{n=-N}^{N} \frac{R}{r_{m,n}} \hat{f_n} \quad ; \quad \frac{R}{r_{m,n}} = \left| \hat{A_N}(m,n) \right|$$

図3.5 多入力係数加算器による行列演算の実行.

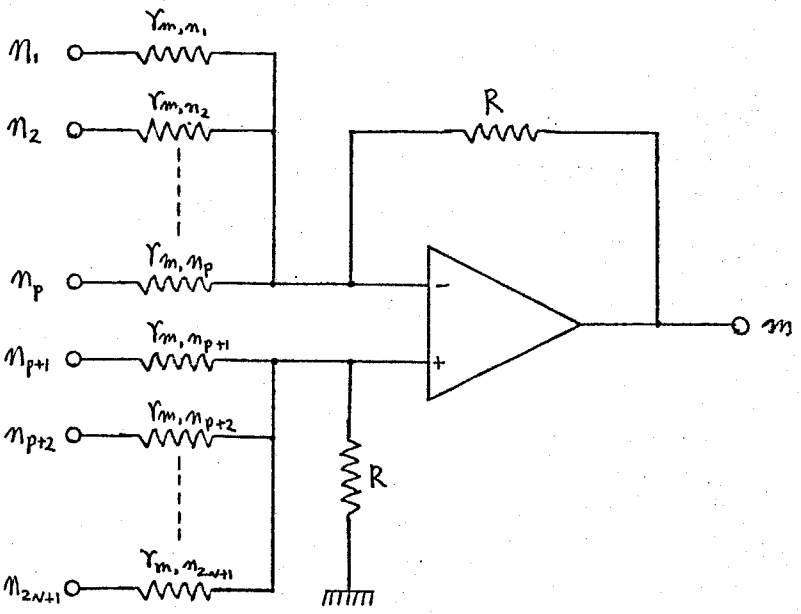


図3.6 差動形演算増幅器による A_N の実現

$$\begin{cases} \dfrac{R}{r_{m,n_i}} = \left| \hat{A_N}(m,n_i) \right| & (i=1,2,\cdots,p) \\ \dfrac{R}{r_{m,n_i}} = \hat{A_N}(m,n_i) & (i=p+1,p+2,\cdots,2N+1) \end{cases} \tag{3.108}$$

と選ぶことにより、やはり、作用素 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ と等価な処理を行なう空間回路網を、構成することができる。[14]* これら二つの場合を、全ての入出力端子にわたって、模式的に描けば、図3.7のようになる。そこで、式(3.104)で与えられる行列 $\langle\!\langle \hat{A_N}(m,n) \rangle\!\rangle$ を、作用素 A_N の結合特性(connection characteristics)、または 空間回路網 A_N の結合特性と名付ける。なお、$\hat{A_N}(m,n)$ が複素数の場合には、それを実数部と虚数部に分解することにより、回路構成は複雑になるけれども、同じ考え方によって、空間回路網を構成することができる。この問題については、4.4 及び 4.7 で論じる。

〔 命題 3.5 〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の空間周波数特性を $\tilde{A_N} \equiv \langle\!\langle \tilde{A_N}(m,n) \rangle\!\rangle$, 結合特性を $\hat{A_N} \equiv \langle\!\langle \hat{A_N}(m,n) \rangle\!\rangle$ とする。式(3.87)で与えられるユニタリ行列を $\hat{\mathcal{F}_N}$ で表せば、次の関係が成立する。

$$\tilde{A_N} = \hat{\mathcal{F}_N}^* \hat{A_N} \hat{\mathcal{F}_N} \tag{3.109}$$

$$\hat{A_N} = \hat{\mathcal{F}_N} \tilde{A_N} \hat{\mathcal{F}_N}^* \tag{3.110}$$

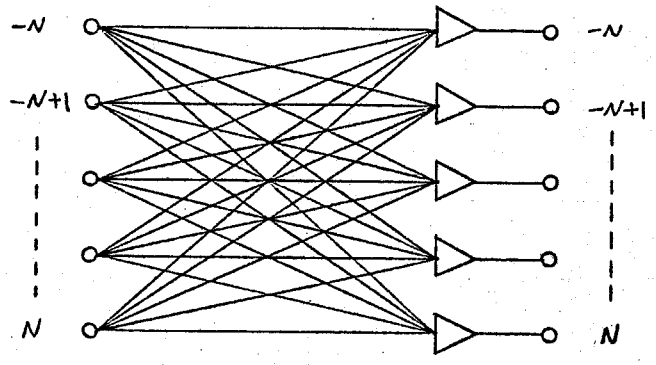


図3.7 多入力係数加算器による空間回路網の構成

---

* 実際には、多入力係数加算器の同相誤差を考慮しなければいけないが、この問題については、17.3 で論じる。

ここで $\hat{\mathbf{F}}_N^{*}$ は、行列 $\hat{\mathbf{F}}_N$ のエルミート共役である。

（証明） 式 (3.104), (3.102), (3.90) より

$$\begin{aligned}\hat{A}_N(m,n) &= (A_N\psi_n, \psi_m)\\ &= \left(A_N \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{q=-N}^{N}\overline{\varphi_q(a_n)}\varphi_q, \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{p=-N}^{N}\overline{\varphi_p(a_m)}\varphi_p\right)\\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{p,q=-N}^{N}\varphi_p(a_m)(A_N\varphi_q,\varphi_p)\overline{\varphi_q(a_n)}\\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{p,q=-N}^{N}\varphi_p(a_m)\tilde{A}_N(p,q)\overline{\varphi_q(a_n)}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \hat{A}_N(m,n) = \frac{1}{2N+1}\sum_{p,q=-N}^{N}\varphi_p(a_m)\tilde{A}_N(p,q)\overline{\varphi_q(a_n)} \qquad (3.111)$$

$$(m,n = -N, -N+1, \cdots, N)$$

式 (3.111) は、式 (3.110) に他ならない。$\hat{\mathbf{F}}_N$ はユニタリ行列であるから、式 (3.109) は 式 (3.110) から明らかである。 (Q.E.D)

式 (3.91) から分かるように、行列 $\hat{\mathbf{F}}_N$ は、有限Fourier変換作用素 $\mathbf{F}_N$ の結合特性であり、式 (3.109), (3.110) はそれぞれ式 (3.89), (3.90) に対応する関係である。

補題 3.8 より 次の命題が成立する。

〔命題 3.6〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の空間周波数特性 $\{\tilde{A}_N(m,n)\}$ と、結合特性 $\{\hat{A}_N(m,n)\}$ に対して、次の評価式が成立する。

$$|\tilde{A}_N(m,n)| \leqq \|A_N\| \leqq \|A_N\|_2 \qquad (3.112)$$

$$|\hat{A}_N(m,n)| \leqq \|A_N\| \leqq \|A_N\|_2 \qquad (3.113)$$

3.3.4 作用素の積分表現

任意の有界線形作用素 $A \in \mathcal{B}(L_2)$ が、常に積分表現できるわけではない。しかし、作用素の空間を $\mathcal{B}(H_N)$ に限定すれば、それは常に可能であって、次のようになる。

〔命題 3.7〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ は 常に

$$(A_N f)(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} a_N(x,y) f(y)\,dy \qquad (3.114)$$

と積分表現できる。そして、積分核 $a_N(x,y)$ は、H_N の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ から

$$a_{m,n} \equiv (A_N u_n, u_m) \quad (m,n = -N, -N+1, \cdots, N) \qquad (3.115)$$

によって作られる $a_{m,n}$ を使って

$$a_N(x,y) = \sum_{m,n=-N}^{N} a_{m,n} u_m(x) \overline{u_n(y)} \qquad (3.116)$$

と表される。

（証明） $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ は、式(3.115)で与えられる行列 $\langle\!\langle a_{m,n} \rangle\!\rangle$ を使って

$$A_N = \sum_{m,n=-N}^{N} a_{m,n} \langle u_m, u_n \rangle \qquad (3.117)$$

と dyadic 表現できるから

$$\begin{aligned}(A_N f)(x) &= \sum_{m,n=-N}^{N} a_{m,n} \langle u_m, u_n \rangle f(x) \\ &= \sum_{m,n=-N}^{N} a_{m,n} (f, u_n) u_m(x) \\ &= \Big(f(y), \sum_{m,n=-N}^{N} \overline{a_{m,n} u_m(x) u_n(y)}\Big)_y \\ &= \big(f(y), \overline{a_N(x,y)}\big)_y\end{aligned}$$

$$\therefore (A_N f)(x) = \big(f(y), \overline{a_N(x,y)}\big)_y \qquad (3.118)$$

となる。式(3.118)の右辺を、内積の定義式(3.4)を使って書きなおせば、式(3.114)になる。

$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ を、L_2 から H_N への作用素とみなせば、式(3.114)は、全ての $f \in L_2$ に対して意味をもつ。例えば、式(3.115)で $A_N = E_N$ とおけば $a_{m,n} = \delta_{m,n}$ となるから、式(3.116), (3.73)より

$$a_N(x,y) = \sum_{m,n=-N}^{N} \delta_{m,n}\, u_m(x)\, \overline{u_n(y)}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} u_n(x)\, \overline{u_n(y)}$$

$$= \sqrt{2N+1}\ \psi_0(x-y)$$

$$\therefore\ a_N(x,y) = \sqrt{2N+1}\ \psi_0(x-y) \qquad (3.119)$$

となる。従って、任意の $f \in L_2$ に対して、E_N は

$$(E_N f)(x) = \frac{\sqrt{2N+1}}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \psi_0(x-y) f(y)\, dy \qquad (3.120)$$

と積分表現される。式(3.120)は、Dirichlet積分と呼ばれ、積分核 $\sqrt{2N+1}\ \psi_0(x)$ は、Dirichlet核と呼ばれる(文献(15), p.49)。このように、空間 H_N の再生核は、Dirichlet核に他ならなかったのである。

式(3.114)は、式(3.116)で与えられる関数 $a_N(x,y)$ が、H_N の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ のとり方によらないことを示している。そこで、$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ として、H_N の基本座標系 或いは 自然座標系を採用すれば、次の系を得る。

〔系 3.3〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の積分核 $a_N(x,y)$ は、A_N の空間周波数特性 $(\!(\tilde{A}_N(m,n))\!)$ 或いは 結合特性 $(\!(\hat{A}_N(m,n))\!)$ を使って、

$$a_N(x,y) = \sum_{m,n=-N}^{N} \tilde{A}_N(m,n)\, \varphi_m(x)\, \overline{\varphi_n(y)} \qquad (3.121)$$

$$= \sum_{m,n=-N}^{N} \hat{A}_N(m,n)\, \psi_m(x)\, \psi_n(y) \qquad (3.122)$$

と表される。

積分核 $a_N(x,y)$ の物理的意味を理解するためには、$a_N(x,y)$ を次のように表現すれば良い。

〔命題 3.8〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の積分核を $a_N(x,y)$ とすれば、任意に固定した $\xi \in [-\ell, \ell]$ に対して

$$a_N(x,y) = \sqrt{2N+1}\,(A_N T(y)\psi_0)(x) \qquad (3.123)$$

なる関係が成立する。特に、

$$a_N(x,a_n) = \sqrt{2N+1}\,(A_N\psi_n)(x) \quad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \qquad (3.124)$$

である。ここで $T(y)$ は、式 (3.56) で定義された並進作用素であり、a_n は式 (3.72) で与えられた自然座標系の標本点である。

(証明) 式 (3.116) から分かるように、各 $x\in[-l,l]$ に対して、$a_N(x,y)$ は y の関数として H_N に属しているから、式 (3.114), (3.120) および

$$\psi_0(-x) = \psi_0(x) \qquad (3.125)$$

より

$$\begin{aligned}\sqrt{2N+1}\,(A_N T(y)\psi_0)(x) &= \frac{\sqrt{2N+1}}{2l}\int_{-l}^{l} a_N(x,z)\psi_0(z-y)\,dz \\ &= \frac{\sqrt{2N+1}}{2l}\int_{-l}^{l}\psi_0(y-z)a_N(x,z)\,dz \\ &= a_N(x,y)\end{aligned}$$

となり、式 (3.123) が成立する。式 (3.123) で $y=a_n$ とおき、式 (3.78) を考慮すれば、式 (3.124) が成立することが分かる。 (Q.E.D)

式 (3.123) は、空間 H_N の再生核である $\sqrt{2N+1}\,\psi_0(x-y)$ を、x の関数として、A_N で変換したものが $a_N(x,y)$ であることを意味している。この命題3.8は、後でいろいろと有効に利用される。例えば、次の命題も、命題3.8を使えば簡単に導くことができる。

〔命題3.9〕 $A_N\in\mathcal{B}(H_N)$ の結合特性 $\{\!\{\hat{A}_N(m,n)\}\!\}$ は、積分核 $a_N(x,y)$ を使って、

$$\hat{A}_N(m,n) = \frac{1}{2N+1}\,a_N(a_m,a_n) \qquad (3.126)$$

$$(m,n=-N,-N+1,\cdots N)$$

と表される。ここで a_n は、式 (3.72) で与えられる自然座標系の標本点である。

(証明) 式 (3.104), (3.124), (3.80) より

$$\hat{A}_N(m,n) = (A_N\psi_n,\psi_m)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} (a_N(\cdot, a_n), \psi_m)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} a_N(a_m, a_n)$$

となり、式(3.126)が成立する。 (Q.E.D)

命題3.9は、作用素 $A_N \in B(H_N)$ の結合特性の才 m, n 要素 $\hat{A_N}(m,n)$ が、積分核 $a_N(x,y)$ の標本点 $x=a_m$, $y=a_n$ における値の定数倍になっていることを示している。従って、結合特性を使って表現できた多くの量が、積分核を使って、同じ形式で表現できることが分かる。

例えば、補題3.6, 補題3.7より A_N の Schmidt ノルム及びトレースは、

$$\| A_N \|_2^2 = \sum_{m,n=-N}^{N} |\hat{A_N}(m,n)|^2 \tag{3.127}$$

$$tr(A_N) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n,n) \tag{3.128}$$

と表されるが、これを積分核を使って表現すれば、次のようになる。

〔命題3.10〕 $A_N \in B(H_N)$ の Schmidt ノルム $\| A_N \|_2$ およびトレース $tr(A_N)$ は、積分核 $a_N(x,y)$ を使って次のように表される。

$$\| A_N \|_2^2 = \frac{1}{(2l)^2} \int_{-l}^{l} \int_{-l}^{l} |a_N(x,y)|^2 dx dy \tag{3.129}$$

$$tr(A_N) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} a_N(x,x) dx \tag{3.130}$$

式(3.129)で示したように、作用素 $A_N \in B(H_N)$ の積分核を $a_N(x,y)$ とするとき、x と y の二変数関数としての $a_N(x,y)$ の L_2-ノルムが、A_N の Schmidt ノルムになっている。これに対して、A_N の式(3.18)で定義される普通のノルムと $a_N(x,y)$ の間には、次の関係が成立する。

〔命題3.11〕 $A_N \in B(H_N)$ の積分核を $a_N(x,y)$ とすれば、次の不等式が成立する。

$$\| a_N(x,y) \|_x \leqq \sqrt{2N+1}\, \| A_N \| \tag{3.131}$$

$$\| a_N(x,y) \|_y \leqq \sqrt{2N+1}\, \| A_N \| \tag{3.132}$$

$$| a_N(x,y) | \leqq (2N+1) \| A_N \| \tag{3.133}$$

ここで、$\| a_N(x,y) \|_x$ は、x の関数としての $a_N(x,y)$ のノルムである。

（証明）式(3.123)より

$$\| a_N(x,y) \|_x = \| \sqrt{2N+1}\, A_N T(y) \psi_0 \| \tag{3.134}$$

$$\leqq \sqrt{2N+1}\, \| A_N \| \cdot \| T(y) \psi_0 \|$$

$$= \sqrt{2N+1}\, \| A_N \|$$

となり、式(3.131)が成立する。

A_N^* の積分核は $\overline{a_N(y,x)}$ であるから、式(3.123)より

$$\overline{a_N(x,y)} = \sqrt{2N+1}\, (A_N^* T(x) \psi_0)(y) \tag{3.135}$$

となる。式(3.135)と

$$\| A_N^* \| = \| A_N \| \tag{3.136}$$

より、同様にして 式(3.132)を得る。

H_N の再生核は $\sqrt{2N+1}\, \psi_0(x-y)$ であるから、式(2.10), (3.81), (3.131)より

$$| a_N(x,y) | \leqq \sqrt{\sqrt{2N+1}\, \psi_0(x-x)}\, \| a_N(x,y) \|_x$$

$$= \sqrt{2N+1}\, \| a_N(x,y) \|_x$$

$$\leqq (2N+1) \| A_N \|$$

となり 式(3.133)が成立する。 (Q.E.D)

式(3.120)からわかるように、$A_N = E_N$ のとき

$$a_N(x,y) = \sqrt{2N+1}\ \varphi_0(x-y) \tag{3.137}$$

であるから、式(3.81)を考慮すれば、

$$a_N(x,x) = 2N+1 \tag{3.138}$$

となる。一方 $\|E_N\|=1$ であるから、$A_N=E_N$ のとき、$y=x$ に対して、式(3.133)の等式が成立する。このように、$\mathcal{B}(H_N)$の元全体について考えれば、式(3.133)は $|a_N(x,y)|$ に対する最も精密な評価量になっているのである。また、式(3.126)を考慮すれば、不等式(3.133)が、不等式(3.113)の一般化になっていることが分かる。

3.4 偶数個の端子をもつ空間回路網理論

3.2.4で述べておいたように、微分作用素 $-\lambda d/dx$ の自己共役な拡張の仕方には、式(3.58)に現れるθが零になる場合の他に、$\theta=\pi$ によるものが存在する。このように拡張した場合も、これまでに論じてきたことを少しずつ変更することにより、ほとんど平行した理論を展開することができる。ただ、$\theta=0$ による拡張では、空間回路網の端子数が奇数個になったのに対して、$\theta=\pi$ による拡張では、それが偶数個になるという違いはある。以下理論の概略だけを述べる。

境界条件

$$f(-\ell) = -f(\ell) \tag{3.139}$$

のもとに、微分作用素 $-\lambda D$ の固有値、固有関数を求めれば、式(3.60)に対応して、

$$\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ell},\quad \varphi_{n-\frac{1}{2}}(x) \equiv \exp\left(i\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ell}x\right)\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{3.140}$$

となる。$\{\varphi_{n-\frac{1}{2}}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は、$L_2[-\ell,\ell]$ の完全正規直交系になっている。

式(3.140)より

$$\overline{\varphi_{n-\frac{1}{2}}(x)} = \varphi_{-n+\frac{1}{2}}(x) \tag{3.141}$$

であるから

$$\psi_{n-\frac{1}{2}}(x) \equiv \sum_{m=-N}^{M} u^{*}_{m-\frac{1}{2},\,n-\frac{1}{2}}\ \varphi_{m-\frac{1}{2}}(x) \quad (n=-N,-N+1,\cdots,M) \tag{3.142}$$

によって* $\{\varphi_{n-\frac{1}{2}}\}_{m=-N}^{M}$ を新しい座標系 $\{\psi_{n-\frac{1}{2}}\}_{n=-N}^{M}$ に変換したとき，$\psi_{n-\frac{1}{2}}$ が全て実数値関数になるための必要十分条件は、$M \geq N+1$ のとき、式(3.65)に対応して、

$$\begin{cases} u^{*}_{-m+\frac{1}{2},\,n-\frac{1}{2}} = \overline{u^{*}_{m-\frac{1}{2},\,n-\frac{1}{2}}} & (m,n=-N,-N+1,\cdots,N+1) \\ u^{*}_{m-\frac{1}{2},\,n-\frac{1}{2}} = 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{3.143}$$

となる。$M<N+1$ の場合にも、同様の条件が得られるので、結局、$M=N+1$ の場合を考えれば良いことになる。

$\{\varphi_{n-\frac{1}{2}}\}_{n=-N}^{N+1}$ の一部を除く理由は何もないので、有限次元信号空間として、$\{\varphi_{n-\frac{1}{2}}\}_{n=-N}^{N+1}$ によって張られる(2N+2)次元部分空間を採用することにし、以下、この空間を $H_{N+\frac{1}{2}}$ と表す。

空間 $H_{N+\frac{1}{2}}$ の再生核を $K(x,y)$ とすれば、式(3.140)より

$$K(x,y) = \sum_{n=-N}^{N+1} \varphi_{n-\frac{1}{2}}(x)\,\overline{\varphi_{n-\frac{1}{2}}(y)} \tag{3.144}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N+1} \varphi_{n-\frac{1}{2}}(x-y) \tag{3.145}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{N+1} \cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}(x-y) \tag{3.146}$$

$$= \frac{\sin\frac{(2N+2)\pi}{2l}(x-y)}{\sin\frac{\pi}{2l}(x-y)} \tag{3.147}$$

となる。式(3.147)より、任意の $a \in [-l,l]$ に対して

---

* $u^{*}_{m-\frac{1}{2},\,n-\frac{1}{2}}$ は、式(2.47)と同じ意味である。

$$K\left(a+\frac{2\ell m}{2N+2},\ a+\frac{2\ell n}{2N+2}\right)=(2N+2)\delta_{m,n} \qquad (3.148)$$

$$(m,n=-N,-N+1,\cdots,N+1)$$

であるから、命題2.4より、$\{a+2\ell n/2N+2\}_{n=-N}^{N+1}$ を標本点とする標本化基底が空間 $H_{N+\frac{1}{2}}$ に存在することが分かる。標本点が区間$[-\ell,\ell]$の中で一様に分布するように、ここでは、標本点として、

$$a_{n-\frac{1}{2}} \equiv \frac{2\ell(n-\frac{1}{2})}{2N+2} \quad (n=-N,-N+1,\cdots,N+1) \qquad (3.149)$$

を採用することにする。そうすれば、命題2.4より、空間 $H_{N+\frac{1}{2}}$ の標本化基底 $\{\psi_{n-\frac{1}{2}}\}_{n=-N}^{N+1}$ が

$$\psi_{n-\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{\sqrt{2N+2}}K(x,a_{n-\frac{1}{2}}) \qquad (3.150)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2N+2}}\,\frac{\sin\frac{(2N+2)\pi}{2\ell}(x-a_{n-\frac{1}{2}})}{\sin\frac{\pi}{2\ell}(x-a_{n-\frac{1}{2}})} \qquad (3.151)$$

となり、任意の $f\in H_{N+\frac{1}{2}}$ に対して、式(3.79),(3.80)に対応する標本化定理

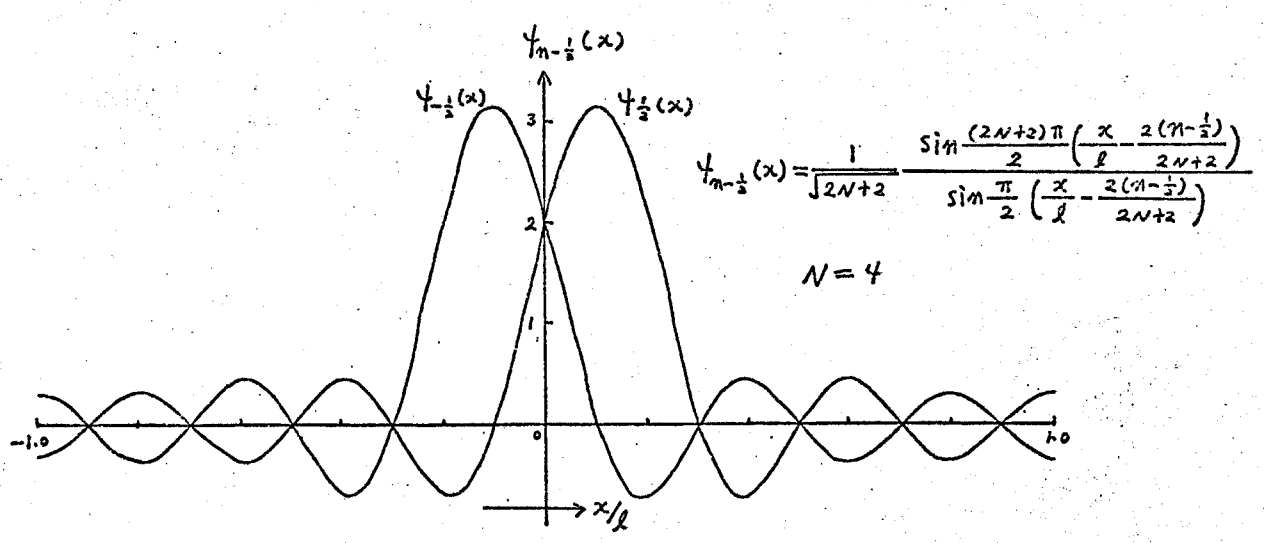


図3.8. 空間 $H_{N+\frac{1}{2}}$ の自然座標系 $\{\psi_{n-\frac{1}{2}}\}_{n=-N}^{N+1}$ $(N=4,\ n=0,1)$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2N+2}}\displaystyle\sum_{n=-N}^{N+1} f(a_{n-\frac{1}{2}})\,\psi_{n-\frac{1}{2}}(x) & (3.152) \\ (f,\psi_{n-\frac{1}{2}})=\dfrac{1}{\sqrt{2N+2}}\,f(a_{n-\frac{1}{2}}) & (3.153) \end{cases}$$

が成立することがわかる。$\{\psi_{n-\frac{1}{2}}\}_{n=-N}^{N+1}$ を、空間 $H_{N+\frac{1}{2}}$ の自然座標系と名付ける。$N=4\,(2N+2=10)$ に対する $\psi_{\pm\frac{1}{2}}(x)$ のグラフを、図3.8に示す。

L_2 から $H_{N+\frac{1}{2}}$ への射影作用素を $E_{N+\frac{1}{2}}$ とする。任意の $A\in B(L_2)$ に対し、式(3.97)に対応して、

$$A_{N+\frac{1}{2}} \equiv E_{N+\frac{1}{2}}\,A\,E_{N+\frac{1}{2}} \qquad (3.154)$$

とおけば、$A_{N+\frac{1}{2}}\in B(H_{N+\frac{1}{2}})$ となる。$A_{N+\frac{1}{2}}$ は、式(3.103),(3.104)に対応して、

$$\begin{cases} A_{N+\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{m,n=-N}^{N+1} \hat{A}_{N+\frac{1}{2}}(m,n)\,\langle\psi_{m-\frac{1}{2}},\psi_{n-\frac{1}{2}}\rangle & (3.155) \\ \hat{A}_{N+\frac{1}{2}}(m,n)\equiv(A_{N+\frac{1}{2}}\psi_{n-\frac{1}{2}},\psi_{m-\frac{1}{2}}) & (3.156) \end{cases}$$

と dyadic 表現できるから、式(3.105)に対応して、

$$A_{N+\frac{1}{2}}\psi_{n-\frac{1}{2}} = \sum_{m=-N}^{N+1} \hat{A}_{N+\frac{1}{2}}(m,n)\,\psi_{m-\frac{1}{2}} \qquad (3.157)$$

となる。従って、入力側 n 番目端子と出力側 m 番目端子を、$\hat{A}_{N+\frac{1}{2}}(m,n)$ なる値の係数加算器で結べば、$A_{N+\frac{1}{2}}\in B(H_{N+\frac{1}{2}})$ と等価な処理を行なう空間回路網を構成することができる。そしてこのとき、空間回路網の端子数は、入力側、出力側共に偶数$(2N+2)$個になっているのである。

このように、微分作用素 $-\lambda\,d/dx$ の反周期性の条件による自己共役な拡張を基礎にとっても、これまでと同様な理論を展開することができる。しかし、直流成分を表す関数 $\varphi_0(x)$ は、

$$\varphi_0(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\varphi_{n-\frac{1}{2}}(x) \qquad (3.158)$$

からわかるように，Nがどんなに大きくても，それが有限である限り，空間$H_{N+\frac{1}{2}}$に属していない。従って，式(3.83)およびこの関係式が本質的に効いている数値積分公式(3.95)等は，このように簡潔な形で論じることはできない。また$H_{N+\frac{1}{2}}$に属する全ての関数がもっている反周期性という性質自体も，かなり不自然な性質である。それ故，このような理論展開も可能であるということを示すに止め，3.5以降では，全て奇数個の端子をもつ空間回路網について論じることにする。

3.5 基本的な概念の要約

空間回路網理論に関して，これまでに論じてきた主要な概念を要約して，図3.9に示す。

まず，情報を担う信号を，関数空間$L_2[-l, l]$の元としてとらえることにより，情報処理機能を，L_2からL_2への作用素として，定式化した。これが図3.9の最上段に示してある。

処理の対象となるL_2の元の種々の表現が，左側の列に示してある。その表現形式に応じて，作用素の表現も異なるので，それが真中の列に示してある。また，右側の列には，出力信号の表現及び，それが求まる具体的な変換形式が示してある。

関数空間L_2に，基本座標系$\{\varphi_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$を導入する。基本座標系は，微分作用素$-\lambda d/dz$の周期性の境界条件のもとでの固有関数として定義され，空間L_2に，空間周波数の概念を規定する。関数$f \in L_2$の基本座標系に対する展開係数，即ち，Fourier係数として，fの無限次元ベクトル表現$(\tilde{f}_m)_{m=-\infty}^{\infty}$が求まる。また，作用素$A \in \mathcal{B}(L_2)$も，基本座標系によって行列表現することができる。この無限次元行列$\tilde{A}=((\tilde{A}(m,n)))$を，$A$の空間周波数特性という。これが第二段目に示してある事柄である。

作用素を実際に金物で実現するためには，信号空間を有限次元に限らなけれ

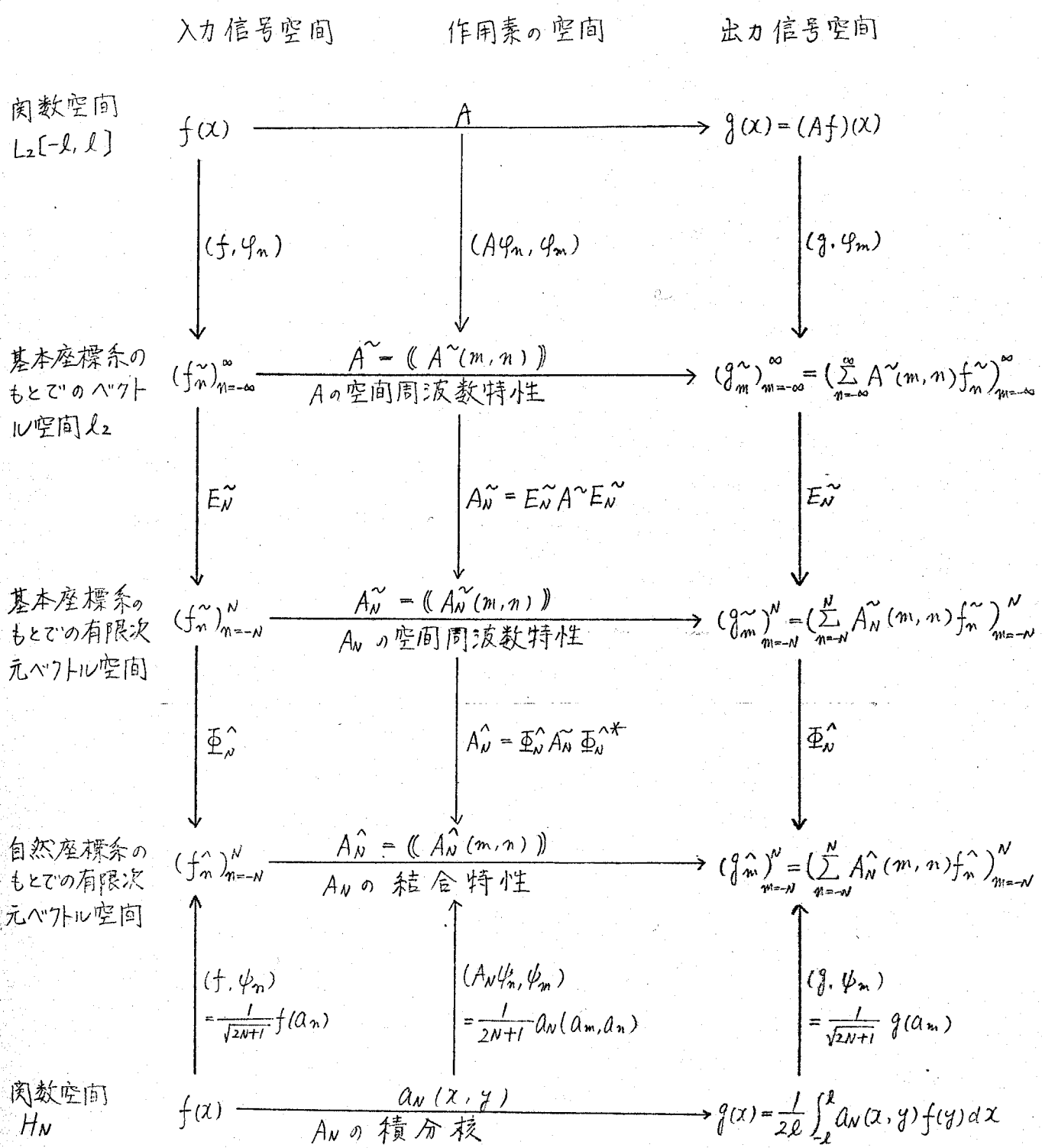


図3・9　空間回路網理論の枠組み

ばいけない。そのような空間として、基本座標系の一部 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ によって張られる $(2N+1)$ 次元関数空間 H_N を採用する。L_2 から H_N への射影作用素 E_N を使い、式 (3.97) によって有限次元作用素 A_N を定義すれば、A_N は、$A \in B(L_2)$ の $B(H_N)$ の元によるある意味での最良近似になっている。

$\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ を H_N の基本座標系という。この基本座標系を使って、$f \in H_N$ の有限次元ベクトル表現 $(\tilde{f_n})_{n=-N}^{N}$、および $A_N \in B(H_N)$ の有限次元行列表現 $\tilde{A_N} = \langle\langle \tilde{A_N}(m,n) \rangle\rangle$ が求まる。$(\tilde{f_n})_{n=-N}^{N}$ は $(\tilde{f_n})_{n=-\infty}^{\infty}$ の一部を切取ったものであり、$\tilde{A_N}$ も無限次元行列 $\tilde{A}$ の一部を切取ったものになっている。この行列 $\tilde{A_N}$ を、A_N の空間周波数特性という。これが 才三段目に示してある事柄である。

基本座標系は、複素数値関数である。外界に与えられた信号を、空間回路網に取り入れるためには、実数値関数でできている標本化基底が便利である。このような標本化基底で、標本点が区間 $[-l, l]$ に一様に分布し、その形が最も簡単なものが、式 (3.78) で与えられる自然座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ である。この自然座標系によって、$f \in H_N$ は $(\hat{f_n})_{n=-N}^{N}$ とベクトル表現され、その成分は、f の標本点における値の定数倍になっている。自然座標系による A_N の行列表現 $\hat{A_N} = \langle\langle \hat{A_N}(m,n) \rangle\rangle$ から直接 多入力係数加算器を使って、A_N と等価な処理を行なう空間回路網を構成することができる。それ故 この行列 $\hat{A_N}$ を、A_N の結合特性という。これが才四段目に示してある事柄である。

A_N は常に積分表現可能であり、積分核 $a_N(x,y)$ は 式 (3.116), (3.121), (3.122) 或いは式 (3.123) で与えられる。積分核と結合特性の間には、式 (3.126) が示しているように、密接な関係があり、結合特性に対して成立する多くの命題が、積分核に対しても、同じ形式で成立する。これが最下段に示してある事柄である。

第 Ⅲ 章

複素共役演算と対合演算

第4節　作用素の空間における複素共役演算(1)

4.1　まえがき

複素数zに対する共役複素数$\bar{z}$の概念は、二つの方向に拡張されている。一つは、複素数値関数fに対し

$$\bar{f}(x) \equiv \overline{f(x)} \tag{4.1}$$

によって、複素共役関数$\bar{f}$を定義するものである。他の一つは、作用素Aに対し、式(3.17)によって、共役作用素A^*を定義するものである。

共役の概念を、このように拡張しておけば、例えば

$$\bar{z}z = |z|^2 \geq 0 \tag{4.2}$$

という関係が

$$(\bar{f}f)(x) = |f(x)|^2 \geq 0 \tag{4.3}$$

$$(A^*Af, f) = \|Af\|^2 \geq 0 \tag{4.4}$$

によって

$$\bar{f}f \geq 0, \quad A^*A \geq 0 \tag{4.5}$$

と、関数の空間および作用素の空間に自然に導入できる。このような事情から、従来の数学では、この二種類の拡張の仕方が、同等なものであるとみなされてきた。

しかし、$\bar{f}$とA^*とは、必ずしも対応した概念であるとは言えない。後でわかるように(式(7.101))、空間回路網理論においては、A^*に対応する共役関数は

むしろ

$$f^*(x) \equiv \overline{f(-x)} \tag{4.6}$$

によって定義されるf^*であるということができるのである。

では、複素共役関数$\bar{f}$に対応して、複素共役作用素$\bar{A}$という概念を、作用素の空間に導入することができるであろうか。そしてそこから、有益な結果を導きだすことができるであろうか。実は、複素共役作用素$\bar{A}$という概念は、非常に基本的で重要な概念であり、空間回路網理論の到る処で その威力を発揮するのである。

本節では、Aに対して$\bar{A}$を対応させる複素共役演算の定義を与え、その数学的性質を明らかにする。そして 空間回路網の結合特性が実行列になるための条件、空間回路網の構造が等方、あるいは反等方になるための条件等を、この複素共役演算を使って論じることにする。

なお、オ4節～オ6節では、記号Hで、空間L_2とその部分空間H_Nを同時に表すことがある。例えば、$A \in B(H)$に対してある命題が述べられている場合、その命題は、$A \in B(L_2)$に対しても、$A \in B(H_N)$に対しても成立するのである。

4.2 複素共役演算の定義とその基本的性質

関数fを、式(4.1)で定義される複素共役関数$\bar{f}$に対応させる作用素を、Weで表す*:

$$We\, f \equiv \bar{f} \tag{4.7}$$

$f \in L_2$のとき$\bar{f} \in L_2$であり、$f, g \in L_2$と複素数a, bに対して、明らかに次の関係が成立する。

$$We(af+bg) = \bar{a}\, We\, f + \bar{b}\, We\, g \tag{4.8}$$

---

* Weの添字eの意味は、§5.2で述べる。

$$\omega_e^2 = E \tag{4.9}$$

$$\| \omega_e f \| = \| f \| \tag{4.10}$$

$$(\omega_e f, \omega_e g) = \overline{(f, g)} \tag{4.11}$$

関数空間の上で定義された作用素 A に対し、

$$\bar{A} \equiv \omega_e A \omega_e \tag{4.12}$$

によって定義される作用素 $\bar{A}$ を、A の複素共役作用素 (complex-conjugate operator) という。A を $\bar{A}$ に対応させる作用素 Ω を、複素共役演算 (complex-conjugation) という。この演算を、ω_e に対応して、Ω_e と表すこともある。

式 (4.12) より

$$\bar{A} f = \overline{A \bar{f}} \tag{4.13}$$

となる。即ち、f に $\bar{A}$ を作用させるということは、図 4.1 に示すように、まず f を $\bar{f}$ に変換しておいて A を作用させ、再びその結果の複素共役関数を求めることと等価な変換になっている。このように、関数に対する複素共役演算を使って、作用素に対する複素共役演算が定義できるのである。

〔命題 4.1〕 $A \in B(H)$ ならば $\bar{A} \in B(H)$ である。

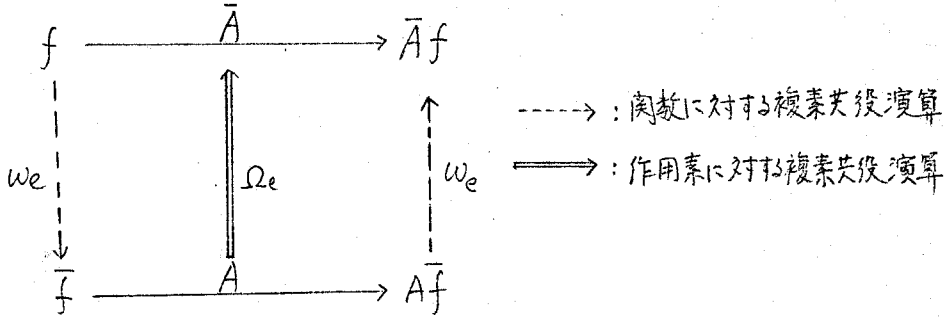


図 4.1、作用素に対する複素共役演算の定義

$B(H_N)$は、$B(L_2)$の部分環(文献(2), p.148)とみなすことができる。このような見方をしたとき、命題4.1は、$B(H_N)$が複素共役演算に関して閉じた部分環になることを、表している。

〔命題4.2〕 任意の$A, B \in B(H)$, $f, g \in H$ および複素数a, bに対して、次の関係が成立する。

$$\overline{aA + bB} = \bar{a}\bar{A} + \bar{b}\bar{B} \tag{4.14}$$

$$\bar{\bar{A}} = A \tag{4.15}$$

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} \tag{4.16}$$

$$\overline{Af} = \bar{A}\bar{f} \tag{4.17}$$

$$\overline{\langle f, g \rangle} = \langle \bar{f}, \bar{g} \rangle \tag{4.18}$$

$$\| \bar{A} \| = \| A \| \tag{4.19}$$

(証明) 例えば、式(4.9)より

$$\overline{Af} = w_e(Af) = w_e A w_e w_e f = \bar{A}\bar{f}$$

となり、式(4.17)を得る。他も同様に証明できる。 (Q.E.D)

式(3.17)で定義される共役演算$*$も、次に示すように、命題4.2と似た性質をもっている:

$$(aA + bB)^* = \bar{a}A^* + \bar{b}B^* \tag{4.20}$$

$$A^{**} = A \tag{4.21}$$

$$(AB)^* = B^*A^* \tag{4.22}$$

$$\langle f, g \rangle^* = \langle g, f \rangle \tag{4.23}$$

$$\| A^* \| = \| A \| \tag{4.24}$$

式(4.20)(4.21)(4.24)は、それぞれ式(4.14)(4.15)(4.19)と全く同じ性質である。しかし、式(4.22)の右辺が、AとBの順序が逆転しているのに対して、式(4.16)では、そのままの順序である。また、式(4.18)と(4.23)の右辺も異なるし、式(4.17)に対応する関係も、A^*に対しては、成立しない。このように、複素共役演算$^-$と共役演算*は、異なった概念である。そして、式(4.17),(4.18)等からも分かるように、ある面では、A^*よりも$\bar{A}$の方が、fに対応した概念であるということができる。

しかし、複素共役演算と共役演算は、全く無関係の演算ではない。例えば、次の関係が成立している。

〔命題 4.3〕複素共役演算と共役演算は、可換である。即ち、任意の$A \in B(H)$に対して、次の関係が成立する。

$$(\bar{A})^* = (\overline{A^*}) \tag{4.25}$$

(証明) 式(4.9),(4.11)より、任意の$A \in B(H)$に対して、

$$(\bar{A}^* f, g) = (f, \bar{A} g) = (f, w_e A w_e g) = \overline{(w_e f, A w_e g)}$$

$$= \overline{(A^* w_e f, w_e g)} = (w_e A^* w_e f, g) = (\overline{A^*} f, g)$$

$$\therefore \quad (\bar{A}^* f, g) = (\overline{A^*} f, g) \tag{4.26}$$

となり、式(4.25)が成立する。 (Q.E.D)

〔系 4.1〕$B(L_2)$および$B(H_N)$の単位元EおよびE_Nに対して、次の関係が成立する。

$$\bar{E} = E \quad , \quad \bar{E}_N = E_N \tag{4.27}$$

（証明） 式(4.15),(4.16) より

$$\overline{E} = \overline{E}E = \overline{E}\overline{\overline{E}} = \overline{E\overline{E}} = \overline{\overline{E}} = E$$

となり、式(4.27)の第一式が成立する。第二式も同様に証明できる。(Q.E.D)

従って 次の命題が成立する。

〔命題 4.4〕 $A \in B(H)$ が逆をもてば、$\overline{A}$ も逆をもち

$$(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})} \tag{4.28}$$

となる。

命題4.4は、逆元をとる演算と、複素共役演算が、可換であることを示している。

式(4.16)と(4.27)より、直ちに次の命題を得る。

〔命題 4.5〕 $A \in B(L_2)$ に対して

$$A_N \equiv E_N A E_N \tag{4.29}$$

とおけば

$$\overline{A}_N = E_N \overline{A} E_N \tag{4.30}$$

となる。

命題4.5は、$A \in B(L_2)$ からその近似である A_N を求める演算と、複素共役演算が可換であることを意味している。

複素共役演算の定義式(4.12)より、次の命題が成立する。

〔命題 4.6〕 $A \in B(H)$ が

$$(Af)(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} a(x,y) f(y)\, dy \tag{4.31}$$

と積分表現できれば、$\bar{A}$も積分表現可能であって

$$(\bar{A}f)(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \overline{a(x,y)}\, f(y)\, dy \tag{4.32}$$

となる。

式(3.47)に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 4.7〕 Hの完全正規直交系$\{u_n\}$による$A \in B(H)$のdyadic表現を、

$$\begin{cases} A = \sum_{m,n} a_{m,n} < u_m, u_n > & (4.33) \\ a_{m,n} = (Au_n, u_m) & (4.34) \end{cases}$$

とすれば、次の関係が成立する。

$$\bar{A} = \sum_{m,n} \overline{a_{m,n}} < \bar{u}_m, \bar{u}_n > \tag{4.35}$$

命題4.7から、作用素に対する複素共役演算と、普通の行列に対する複素共役演算の関係が分かる。即ち、実数値関数だけでできている完全正規直交系を、実基底と呼ぶことにすれば、次の系が成立する。

〔系 4.2〕 $A \in B(H)$の実基底$\{u_n\}$による行列表現を$\langle\langle a_{m,n} \rangle\rangle$とすれば、$\bar{A}$の同じ基底による行列表現は、$\langle\langle \overline{a_{m,n}} \rangle\rangle$となる。

しかし、$\{u_n\}$が実基底でなければ、かならずしも系4.2は成立しない。次の系に示す空間周波数特性は、その例である。

〔系 4.3〕 $A_N \in B(H_N)$に対して、$B \equiv \bar{A}_N$とおけば、次の関係が成立する。

$$\tilde{B_N}(m,n) = \overline{\tilde{A_N}(-m,-n)} \tag{4.36}$$

$$\hat{B_N}(m,n) = \overline{\hat{A_N}(m,n)} \tag{4.37}$$

このように、$\overline{A_N}$ の結合特性が、A_Nの結合特性の単なる複素共役であるのに対して、$\overline{A_N}$の空間周波数特性は，A_Nの空間周波特性の各要素を、原点、$(m=n=0)$に関して対称に変換した後で、複素共役をとったものになっているのである(図4.2(a)参照)．

4.3 複素共役演算の数学的性質

4.2に引き続き、作用素に対する複素共役演算の数学的性質について論じる。

$A \in B(H)$に対して、$Af=0$ となるような $f \in H$ の全体を，Aの核(kernel)といい，$\mathrm{Ker}(A)$と表す：

$$\mathrm{Ker}(A) \equiv \{ f \mid Af = 0 \} \tag{4.38}$$

また、集合Sの各元の複素共役元の全体を、$\overline{S}$で表す。

〔命題 4.8〕 $A \in B(H)$の核 $\mathrm{Ker}(A)$と値域$R(A)$に対して次の関係が成立する*

$$\mathrm{Ker}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{Ker}(A)} \tag{4.39}$$

$$R(A) = \overline{R(A)} \tag{4.40}$$

従って 次の命題が成立する．

〔命題 4.9〕 Hの閉じた部分空間をSとし，HからSへの射影作用素をPとすれば，次の同値関係が成立する。

$$\overline{S} = S \iff \overline{P} = P \tag{4.41}$$

ここで、$\Longleftrightarrow$の左側の $\overline{\ }$は、関数に対する複素共役演算であり，右側の $\overline{\ }$は、作用素に対する複素共役演算である。

---

* より一般の場合が、命題6.21で証明してあるので、命題4.8の証明は省く、命題4.9についても同様である.

数学の世界では、部分空間Sと Sへの射影作用素Pが、同じものとみなされる。そして、作用素Pの性質を通して、部分空間Sの性質を議論することが、良く行なわれる。このような考え方は、パターン認識の研究にも取り入れられている。渡辺の部分空間法[3]、磯道の浮遊円板法[4]及び 18.4 で論じるオ=標本化[5]等が、その例である。このような立場から見ても、作用素に対する複素共役演算が、関数に対する複素共役演算の自然な拡張になっていることが、命題4.9から分かる。

作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{L}_2)$ を、空間回路網で実現するためには、式(3.97)で示したように、これを有限次元作用素 $A_N \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_N)$ で近似しなければいけない。18.2 で詳しく論じるけれども、空間回路網の端子数を無限に多くしたとき、即ち、$N \to \infty$ にしたとき、A_N が A に一様収束(作用素のノルムに関する収束：文献(6), p.305)するかどうかということは、端子数の決定に際して、非常に重要になってくる。ところで、有限次元的作用素の列の一様収束による極限として表される作用素は、完全連続作用素と呼ばれる*(文献(6), p.401)。完全連続作用素は、有界作用素である(文献(6), p.308)。そして、3.2.2で論じたSchmidt族の作用素は、完全連続作用素である(文献(8), p.32)。従って、Hilbert空間 $\mathcal{X}$ の上で定義された完全連続作用素の全体を、$\mathcal{B}_c(\mathcal{X})$ で表せば** 式(3.35)より

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{B}_2(\mathcal{X}) \subset \mathcal{B}_c(\mathcal{X}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}) \qquad (4.42)$$

なる関係が成立する。

この完全連続作用素の全体、あるいはその部分環になっているSchmidt族、トレース族が、複素共役演算に関して閉じていることを、次に示す。

〔命題 4.10〕

(i) $A \in \mathcal{B}_c(\mathcal{H})$ ならば $\overline{A} \in \mathcal{B}_c(\mathcal{H})$ である。

(ii) $A \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ならば $\overline{A} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ である。そして、このとき、$A, B \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$

---

* 完全連続作用素はまた、有界集合をコンパクト集合に変換する作用素としても、定義できる(文献(6), p.395)。しかもコンパクト集合は、有限の被覆をもっているので(文献(6), p.264)、パターン認識の立場からみても、完全連続作用素という概念は、重要な概念である。[7]

** $\mathcal{B}_c(\mathcal{X})$ の c は、completely continuous operator (完全連続作用素)の c である。

に対して、次の関係が 成立する。

$$(\bar{A}, \bar{B}) = \overline{(A, B)} \tag{4.43}$$

$$\|\bar{A}\|_2 = \|A\|_2 \tag{4.44}$$

(iii) $A \in \mathcal{B}_1(H)$ ならば、$\bar{A} \in \mathcal{B}_1(H)$ である。そして このとき

$$tr(\bar{A}) = \overline{tr(A)} \tag{4.45}$$

となる。また、$A, B \in \mathcal{B}(H)$ のどちらか一方が $\mathcal{B}_1(H)$ に属していれば、式(4.43)が成立する。

(証明) (i)を証明する。$A \in \mathcal{B}(H)$ とすれば、有限次元的作用素の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、充分大きな N をとれば、$n \geq N$ なる全ての n に対して

$$\|A - A_n\| < \varepsilon$$

となる。しかも 式(4.40)より、$\bar{A}_n$ も有限次元的作用素であるから、式(4.14), (4.19)より

$$\|\bar{A} - \bar{A}_n\| = \|A - A_n\| < \varepsilon$$

となる。従って、$\bar{A}$ も完全連続作用素になる。他も同様に証明できる。(Q.E.D)

4.4 実作用素と虚作用素

3.3.3で予告しておいたように、本項では、結合特性が 実行列になるための条件について、論じる。

[定義 4.1] $\bar{A} = A$ のとき、$A \in \mathcal{B}(H)$ を実作用素(real operator)といい*、$\bar{A} = -A$ のとき、虚作用素(imaginary operator)という。

$A \in \mathcal{B}(H)$ が実作用素になるための必要十分条件を与える。その前に、一つの準備をする。

---

* 次に示す命題4.14より、ここで定義した実作用素が、文献(13)の p.316 で定義されている real operator と同じものであることがわかる。

〔補題 4.1〕 H の任意の関数 f は、実数値関数 $f^{(1)}, f^{(2)}$ を使って

$$f = f^{(1)} + i f^{(2)} \tag{4.46}$$

と一意に分解される。このとき $f^{(1)}, f^{(2)}$ は

$$f^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \quad , \quad f^{(2)} \equiv \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \tag{4.47}$$

と表される。

〔命題 4.11〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して、次の各条件は互いに同値である。*

(i) A_N : 実(虚)作用素

(ii) $\overline{\tilde{A_N}(-m,-n)} = \pm \tilde{A_N}(m,n)$ (4.48)

(iii) $\overline{\hat{A_N}(m,n)} = \pm \hat{A_N}(m,n)$ (4.49)

(iv) $\overline{a_N(x,y)} = \pm a_N(x,y)$. (4.50)

(v) A_N は実数値関数を実(純虚)数値関数に変換する。

(vi) A_N は純虚数値関数を純虚(実)数値関数に変換する。

(証明) (v) ⟶ (i) を示す。(v) が成立したとすれば、$\bar{f} = f$ なる元 $f \in H_N$ に対して

$$\overline{A_N f} = \pm A_N f$$

となるから

$$\bar{A}_N f = \bar{A}_N \bar{f} = \overline{A_N f} = \pm A_N f$$

$$\therefore \bar{A}_N f = \pm A_N f \qquad \text{for all } \bar{f} = f$$

となる。従って、補題 4.1 より、全ての $f \in H_N$ に対して

$$\bar{A}_N f = \pm A_N f$$

---

* (iii), (iv) を除けば、この命題は $\mathcal{B}(L_2)$ の元に対してもそのまま成立する

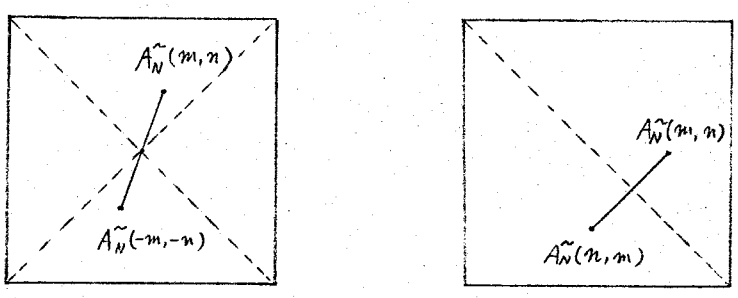
となり、(i)が成立する。他も同様に証明できる。 (Q.E.D)

現実の文字読取技術 或いは 画像処理技術で要求される処理のほとんどが、実数値関数を実数値関数に変換するものである。* 命題4.11から、そのような変換を行なう作用素が 実作用素であり、しかもそのとき、結合特性が実行列になることが分かる。本論文では、理論展開を美しくする為もあって、信号空間を複素数値関数の空間にまで広げ、作用素も、複素数値関数を複素数値関数に変換するものを扱っている。しかし、上でも述べたように、もし今問題にしている作用素が、実数値関数を実数値関数に変換するものであれば、結合特性は実行列になり、その作用素と等価な働きをする空間回路網を、3.3.3で述べた方法によって実現することができるのである。

$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$が虚作用素ならば、式(4.14)より、$-\lambda A_N$は実作用素になる。しかも、命題4.11から分かるように、もし入力信号が、実数値関数だけ、或いは、純虚数値関数だけに限られていれば、A_Nも$-\lambda A_N$も実質的には同じ作用素とみなすことができる。従って、A_Nの代わりに、$-\lambda A_N$を3.3.3で述べた方法によって構成すれば、A_Nと実質的には同じ働きをする空間回路網を実現することができる。

なお、任意の作用素が、実作用素を使って、補題4.1と同じ形式で表現できる。この作用素の実分解については、4.7で論じることにする。

式(4.48)は、A_Nが実作用素になる為の必要十分条件が、A_Nの空間周波数特性のm,n要素$\tilde{A_N}(m,n)$と、原点$(m=n=0)$に関して対称な位置にある要素



(a) $\bar{A}_N = A_N$ (b) $A_N^* = A_N$

図 4.2 $\bar{A}_N = A_N$ および $A_N^* = A_N$ の空間周波数特性による表現

---

* もちろん Fourier 変換のように、そうでないものもある。

$\tilde{A}_N(-m,-n)$が、互いに複素共役な関係になっていることである、ということを意味している。この関係を模式的に図4.2の(a)に示す。

比較のために記すと、A_Nが自己共役作用素($A_N^* = A_N$)になるための必要十分条件は、式(3.47)から分かるように、

$$\overline{\tilde{A}_N(n,m)} = \tilde{A}_N(m,n) \qquad (m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{4.51}$$

である。式(4.51)は、A_Nの空間周波数特性$\{\!\{\tilde{A}_N(m,n)\}\!\}$のすm,n要素$\tilde{A}_N(m,n)$と、対角線に関して対称な位置にある要素$\tilde{A}_N(n,m)$が互いに複素共役な関係にあることを、意味している。この関係を、模式的に図4.2の(b)に示す。

命題4.11の(V)が分かってしまえば、系4.1で述べた恒等作用素EおよびE_Nが実作用素になることは、当然のことであるといえる。同様に、式(3.56)で定義された並進作用素も実作用素になること、即ち、

$$\overline{T(a)} = T(a) \tag{4.52}$$

が成立することも、明らかなことである。

同じく命題4.11の(V)から、式(3.91)で定義された有限Fourier変換作用素$\mathfrak{F}_N$が、実作用素にならないことが分かるが、$\mathfrak{F}_N$に対しては、次の関係が成立している。

$$\overline{\mathfrak{F}_N} = \mathfrak{F}_N^* \tag{4.53}$$

実際、式(3.91),(4.14),(4.18),(3.47)より

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{F}_N} &= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m,n=-N}^{N} \overline{\varphi_n(a_m)} \langle \overline{\psi_m}, \overline{\psi_n} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m,n=-N}^{N} \overline{\varphi_m(a_n)} \langle \psi_m, \psi_n \rangle \\ &= \mathfrak{F}_N^*\end{aligned}$$

となり、式(4.53)が成立する。

式(4.15),(4.25)より、次の系が成立する。

〔系 4.4〕 $A \in B(H)$ に対して、次の各条件は、互いに同値である。

(i) A : 実(虚)作用素

(ii) $\bar{A}$: 実(虚)作用素

(iii) A^* : 実(虚)作用素

系4.4より、実作用素の全体及び虚作用素の全体が、複素共役演算及び、共役演算に関して、閉じていることが分かる。

$A \in B(H)$ が自己共役作用素になるための必要十分条件は、任意の $f \in H$ に対して、(Af, f) が実数になることである(文献(6), p.376)。この事実に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 4.12〕 $A \in B(H)$ とし、$S \equiv \{f \mid \bar{f} = \lambda f, |\lambda| = 1\}$ とする。$\bar{A} = A$ ならば、任意の $f \in S$ に対して (Af, f) は実数になり、$\bar{A} = -A$ ならば、任意の $f \in S$ に対して (Af, f) は、純虚数になる。

(証明) $\bar{A} = \mu A$ とすれば

$$\overline{(Af, f)} = (\bar{A}\bar{f}, \bar{f}) = (\mu\lambda Af, \lambda f) = \mu(Af, f)$$

$$\therefore \overline{(Af, f)} = \mu(Af, f) \tag{4.54}$$

となる。式(4.54)で、$\mu = \pm 1$ の場合を考えれば、命題4.12が成立することが分かる。 (Q.E.D)

命題4.12の逆は、必ずしも成立しない。例えば、基本座標系の構成元である φ_n によって張られる一次元部分空間への射影作用素を $E^{(n)}$ とする:

$$E^{(n)} \equiv \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{4.55}$$

$E^{(n)}$ は自己共役作用素であるから、全ての $f \in L_2$ に対して、二次形式 (Af, f) は実数になっている。しかし、式(4.18)と $\bar{\varphi}_n = \varphi_{-n}$ より

$$\overline{E^{(n)}} = E^{(-n)} \tag{4.56}$$

であるから、$n \neq 0$ のとき、$E^{(n)}$ は実作用素にも虚作用素にもならないのである。

4.5 等方作用素と反等方作用素

〔定義 4.2〕 $A \in B(H)$ とする。$\overline{A} = A^*$ のとき A を等方作用素（isotropic operator）といい、$\overline{A} = -A^*$ のとき 反等方作用素（anti-isotropic operator）という。等方作用素の全体を $B_i(H)$ で表し、反等方作用素の全体を、$B_{ai}(H)$ で表す*

例えば、式(4.53)より、有限Fourier変換作用素 $\mathfrak{F}_N$ は、等方作用素である。即ち、$\mathfrak{F}_N \in B_i(H_N)$ となる。

また

$$f(x) = \exp(-ix) \tag{4.58}$$

とおけば、式(3.57)より

$$T(a) = f(-iD) \tag{4.59}$$

$$|f(x)| = 1 \tag{4.60}$$

であるから、$T(a)$ はユニタリ作用素である（文献(6), p.460）。しかも、$T(a)$ の定義式(3.57)から容易に分かるように

$$T(a)^{-1} = T(-a) \tag{4.61}$$

であるから

$$T(a)^* = T(-a) \tag{4.62}$$

となる。従って、式(4.52), (4.62)より、$a \not\equiv 0 \pmod{2l}$ のとき、並進作用素 $T(a)$ は、等方作用素にも、反等方作用素にもならない。

---

* $B_i(H)$, $B_{ai}(H)$ の添字 i および ai は、isotropic および anti-isotropic の頭文字である。

〔命題 4.13〕 $A_N \in B(H_N)$ に対して 次の各条件は互いに同値である。

(i) A_N : 等方(反等方)作用素

(ii) $\tilde{A_N}(-n,-m) = \pm \tilde{A_N}(m,n)$ (4.63)

(iii) $\hat{A_N}(n,m) = \pm \hat{A_N}(m,n)$ (4.64)

(iv) $a_N(y,x) = \pm a_N(x,y)$ (4.65)

例えば、式(3.126)より (iv)→(iii) は明らかである。他も容易に証明できる。

命題 4.13 の(i)(iii)より、A_Nが等方(反等方)作用素になることと、A_Nの結合特性 $\hat{A_N}$ が対称(反対称)行列になることとが、同値であることが分かる。更に、$\hat{A_N}$ が対称(反対称)行列になるということは、図4.3に示すように、A_Nに対応する空間回路網の出力側才m端子からみて、上に $m-n$ 個離れた端子間の結合係数と、入力側才m端子からみて上に $m-n$ 個離れた端子間の結合係数が、同じ値(逆の符号)になるということに他ならない。等方(反等方)作用素という名称は、この性質によるものである。

このように、等方作用素と反等方作用素は、平行して議論ができるので、以下では主として、等方作用素について論じることにする。

等方作用素 A_N の結合特性 $\hat{A_N}$ が対称行列になるということは、行列 $\hat{A_N}$ が対角線に関して対称になっているということである。この関係を、模式的に、図4.4の(b)に示す。

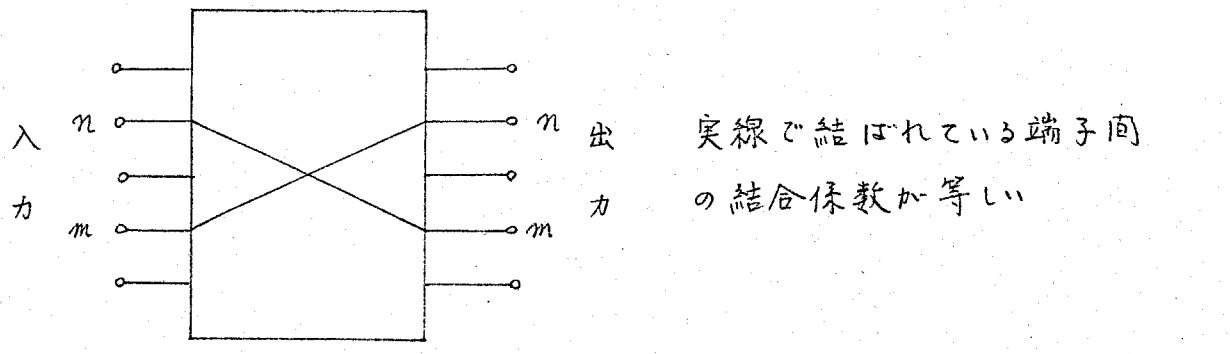
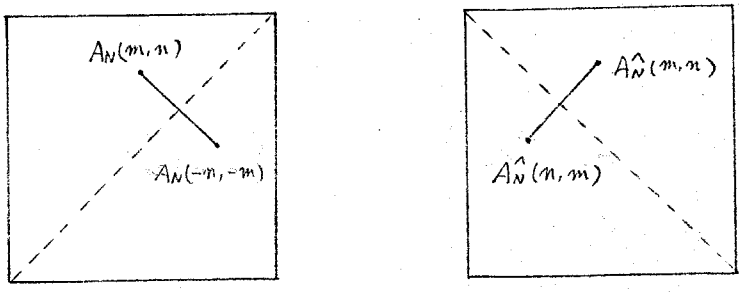


図 4.3 空間回路網の構造の等方性



(a) 空間周波数特性　　(b) 結合特性

図4.4　作用素の等方性 ($\bar{A}_N = A_N^*$) の空間周波数特性および結合特性による表現

これに対して、等方作用素 A_N の空間周波数特性 $\hat{A}_N$ は、命題4.13の(ii)から分かるように、逆対称行列になっている。即ち、逆対角線に関して対称な行列になっているのである。この関係を、模式的に 図4.4の(a)に示す。

〔系4.5〕 $A \in B(H)$ に対して、次の各条件は互いに同値である。

(i) A：等方（反等方）作用素

(ii) $\bar{A}$：等方（反等方）作用素

(iii) A^*：等方（反等方）作用素

系4.5より、$B_i(H)$ 及び $B_{ai}(H)$ が、複素共役演算及び共役演算に関して、閉じていることが分かる。

〔命題4.14〕 $B_i(H_N)$ 及び $B_{ai}(H_N)$ は、$B(H_N)$ の部分空間であり、Schmidtの内積に関して、互いに直交している。

（証明） $B_i(H_N)$ 及び $B_{ai}(H_N)$ が $B(H_N)$ の部分空間になることは、定義4.2と式(4.14), (4.20)より明らかである。$A_N \in B_i(H_N)$, $B_N \in B_{ai}(H_N)$ とすれば、$\bar{A}_N^* = A_N$, $\bar{B}_N^* = -B_N$ であるから、式(3.28), (4.43)より

$$(A_N, B_N) = (\bar{A}_N^*, -\bar{B}_N^*) = -\overline{(\bar{A}_N, \bar{B}_N)} = -(A_N, B_N)$$

$$\therefore (A_N, B_N) = 0$$

となり、命題の後半が成立する (Q.E.D)

実は、$\mathcal{B}(H_N)$が $\mathcal{B}_i(H_N)$ と $\mathcal{B}_{ac}(H_N)$の直和に分解(文献(6), p.416)されるのであるが、この問題については、4.8 で論じる。

4.6 実作用素、等方作用素、自己共役作用素の相互関係

これまでに現れた複素共役演算及び共役演算によって特徴づけられる作用素をまとめれば、次のようになる。

(i) 実作用素 : $\bar{A} = A$ (4.66)

(ii) 虚作用素 : $\bar{A} = -A$ (4.67)

(iii) 自己共役作用素 : $A^* = A$ (4.68)

(iv) 反自己共役作用素 : $A^* = -A$ (4.69)

(v) 等方作用素 : $\bar{A} = A^*$ (4.70)

(vi) 反等方作用素 : $\bar{A} = -A^*$ (4.71)

この六種類の作用素の間の関係を明らかにすることが、4.6 の目的である。容易に分かるように、次の補題が成立する。

〔補題 4.2〕 $A \in \mathcal{B}(H)$に対して、次の三条件のうち、任意の二個が成立すれば 残りの一個も成立する。

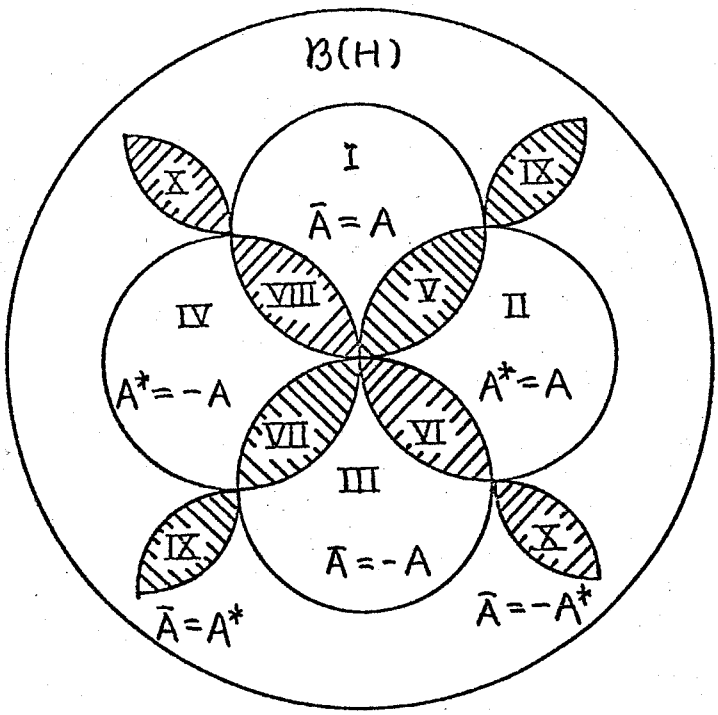
(i) $\bar{A} = \lambda A$: $\lambda = \mu\nu$ (4.72)

(ii) $A^* = \mu A$: $\mu = \bar{\nu}\lambda$ (4.73)

(iii) $\bar{A} = \nu A^*$: $\nu = \lambda\bar{\mu}$ (4.74)

補題4.2 で、λ, μ, ν が ± 1 の場合を考えれば、式(4.66)～(4.71) で与えられる六種類の作用素の間の相互関係が、図 4.5 (a) のようになることが分かる。A と iA は、図4.5(a)の中心に関して対称な領域に属する。図4.5 で領域 Ⅸ, Ⅹ を二個所設けたのは、この対称性を保存するためである。

図 4.5 (a)より、次のことが分かる。自己共役作用素に対しては、実作用素と



(i) 実作用素
$\bar{A} = A$ (I, V, VIII)

(ii) 純虚作用素
$\bar{A} = -A$ (III, VI, VII)

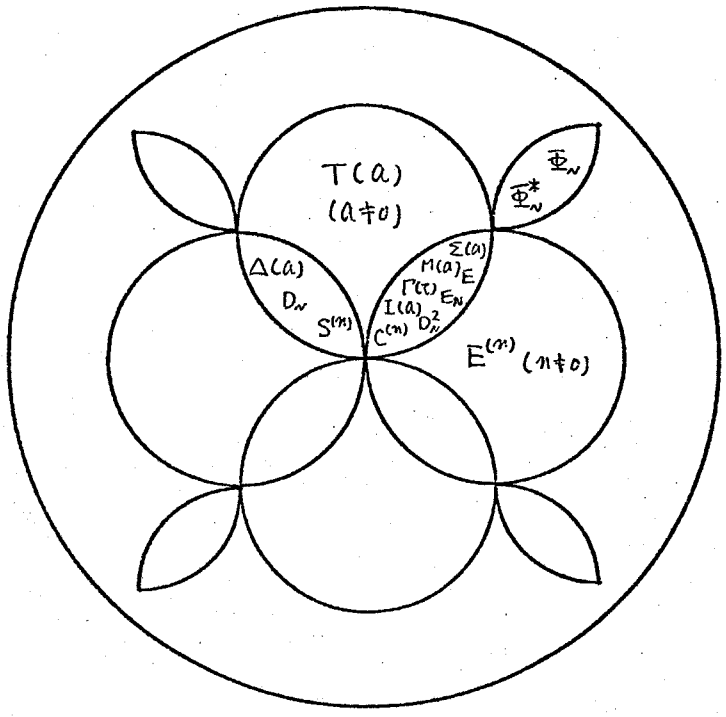
(iii) 自己共役作用素
$A^* = A$ (II, V, VI)

(iv) 反自己共役作用素
$A^* = -A$ (IV, VII, VIII)

(v) 等方作用素
$\bar{A} = A^*$ (V, VII, IX)

(vi) 反等方作用素
$\bar{A} = -A^*$ (VI, VIII, X)

(a) 作用素の分類



(b) 具体例

図 4.5 共役演算と複素共役演算による作用素の分類

等方作用素が同じ概念になり、虚作用素と反等方作用素が同じ概念になる。また、反自己共役作用素に対しては、実作用素と反等方作用素が同じ概念になり、虚作用素と等方作用素が同じ概念になる。

系4.4より、実作用素の全体および虚作用素の全体は、複素共役演算に関しても、閉じている。系4.5より、等方作用素の全体、反等方作用素の全体についても、同じことがいえる。更に、自己共役作用素の全体、反自己作用素の全体も、これらの演算に関して、閉じている。従って、図4.5(a)のI～Xの各領域は、複素共役演算に関しても、共役演算に関しても、閉じているのである。

このような分類をした場合に、具体的な作用素がどの領域に属するかを、図4.5(b)に示す。図4.5(b)には、後で現れる作用素も含まれているが、その定義を示せば、次のとうりである。

$$T(\tau) = e^{\tau D^2} \qquad (\text{ボケの作用素}) \qquad (4.75)$$

$$M(a)f(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x-y)\,dy \qquad (\text{平滑化作用素}) \qquad (4.76)$$

$$\Sigma(a) = \frac{1}{2}(T(a) + T(-a)) \qquad (\text{平均化作用素}) \qquad (4.77)$$

$$\Delta(a) = \frac{1}{2}(T(a) - T(-a)) \qquad (\text{差分作用素}) \qquad (4.78)$$

$$C^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E^{(n)} + E^{(-n)}) \qquad (\text{余弦作用素}) \qquad (4.79)$$

$$S^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(E^{(n)} - E^{(-n)}) \qquad (\text{正弦作用素}) \qquad (4.80)$$

$$(I(a)f)(x) = f(2a-x) \qquad (\text{点}a\text{に関する反転作用素}) \qquad (4.81)$$

4.7 作用素の実分解

$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$が実作用素または虚作用素ならば、4.4で論じたように、A_Nと等価な働きをする空間回路網を、3.3.3で述べた方法によって構成することができる。しかし、例えば有限Fourier変換作用素のように、A_Nが実作用素でも虚

作用素でもない場合には、そのままの形では、A_N を空間回路網によって実現することができない。そこで本節では、このような作用素を、実作用素を使って表現する問題と考える。

〔補題 4.3〕 $\mathcal{B}(H)$ の実作用素 A, B に対して

$$A + iB = 0 \tag{4.82}$$

が成立すれば、$A = B = 0$ である。ここで 0 は、全ての $f \in H$ を零に変換する零作用素である。

（証明） $\overline{0} = 0$ であるから、式(4.82)の両辺の複素共役をとれば、

$$A - iB = 0 \tag{4.83}$$

となる。しかも $0 \pm 0 = 0$, $a0 = 0$ (a: 複素数) であるから、式(4.82), (4.83)より、$A = B = 0$ となる。 (Q.E.D)

〔命題 4.15〕 $\mathcal{B}(H)$ の任意の元 A は、実作用素 $A^{(1)}, A^{(2)}$ を使って

$$A = A^{(1)} + iA^{(2)} \tag{4.84}$$

と一意に分解される。このとき $A^{(n)}$ $(n = 1, 2)$ は

$$A^{(1)} = \frac{1}{2}(A + \overline{A}), \quad A^{(2)} = \frac{1}{2i}(A - \overline{A}) \tag{4.85}$$

と表される。

（証明） 式(4.85)で与えられる作用素 $A^{(1)}, A^{(2)}$ が実作用素であり、この $A^{(n)}$ $(n = 1, 2)$ に対して式(4.84)が成立することは、明らかである。後は、式(4.84)の分解の一意性を示せばよい。式(4.84)の他に実作用素 $B^{(1)}, B^{(2)}$ を使って

$$A = B^{(1)} + iB^{(2)} \tag{4.86}$$

と分解できたとすれば、式(4.84), (4.86)より

$$(A^{(1)} - B^{(1)}) + i(A^{(2)} - B^{(2)}) = 0 \tag{4.87}$$

となる。しかも、$A^{(n)}-B^{(n)}$ $(n=1,2)$ は実作用素であるから、補題4.3 より、
$B^{(n)}=A^{(n)}$ $(n=1,2)$ となる。 (Q.E.D)

この命題は、補題4.1 に対応している。式(4.84)の分解において、$A^{(2)}=0$ の場合が実作用素，$A^{(1)}=0$ の場合が虚作用素である。そこで、$A^{(1)}$, $A^{(2)}$ とそれぞれAの実部，虚部と呼びたいところであるが、この用語は既に別の意味に使用されている。即ち、任意の $A\in B(H)$ は、自己共役作用素 $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ を使って、式(4.84)の形に一意に分解される。このとき $A^{(n)}$ $(n=1,2)$ は、

$$A^{(1)}=\frac{1}{2}(A+A^*),\quad A^{(2)}=\frac{1}{2i}(A-A^*) \tag{4.88}$$

と表される。そして二次形式は

$$(Af,f)=(A^{(1)}f,f)+i(A^{(2)}f,f) \tag{4.89}$$

となり、$(A^{(n)}f,f)$ $(n=1,2)$ が実数になることから、$A^{(1)}$, $A^{(2)}$ をそれぞれAの実部，虚部というのである(文献(9), p.61)。

ところで，命題4.15 で与えられる作用素の分解に対しても、二次形式は、式(4.89)の形になる。そしてもはや、$(A^{(n)}f,f)$ $(n=1,2)$ は、任意の $f\in H$ に対して実数になるということはない。しかし、命題4.12 が主張しているようにもし f が

$$\bar{f}=\lambda f \quad (|\lambda|=1) \tag{4.90}$$

を満足していれば、$(A^{(n)}f,f)$ は実数になるのである。そこで命題4.15 で与えられる作用素の分解を、Ω_e-実分解、あるいは単に実分解と呼び、$A^{(1)}$, $A^{(2)}$ をそれぞれ、A の Ω_e-実部，Ω_e-虚部(Ω_e-real(imaginary) part of A)と呼ぶことにする。

命題4.15で与えられる作用素の実分解を使えば、任意の $A_N\in B(H_N)$ を、次のようにして空間回路網で実現することができる。$f\in H_N$ および $A_N\in B(H_N)$ を、補題4.1 および命題4.15に従って

$$f=f^{(1)}+if^{(2)} \tag{4.91}$$

$$A_N = A_N^{(1)} + i A_N^{(2)} \tag{4.92}$$

と分解すれば、

$$A_N f = (A_N^{(1)} f^{(1)} - A_N^{(2)} f^{(2)}) + i (A_N^{(2)} f^{(1)} + A_N^{(1)} f^{(2)}) \tag{4.93}$$

となる。$A_N^{(1)}, A_N^{(2)}$ は実作用素であるから、その結合特性は実行列になり、3.3.3 で述べた方法によって、空間回路網で実現できる。しかも、実作用素は実数値関数を実数値関数に変換するから、$A_N^{(m)} f^{(n)}$ $(m,n=1,2)$ は全て、実数値関数である。従って、複素数値関数 $f \in H_N$ を式(4.91)のように、実部と虚部の二組の端子で表し、式(4.93)に従って回路を構成すれば、任意の $f \in H_N$ を処理することができる任意の $A_N \in B(H_N)$ を、空間回路網で実現できるのである。

命題 4.15 で与えられる作用素の実分解を、空間周波数特性、結合特性等を使って行なう為には、次のようにすれば良い。

〔系 4.6〕 $A_N \in B(H_N)$ の実分解を、式(4.84)とする。$A_N^{(p)}$ $(p=1,2)$ の空間周波数特性を $(\!(\tilde{A}_N^{(p)}(m,n))\!)$、結合特性を $(\!(\hat{A}_N^{(p)}(m,n))\!)$、積分核を $a_N^{(p)}(x,y)$ とすれば、次の関係が成立する。

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \tilde{A}_N^{(1)}(m,n) = \frac{1}{2}\left(\tilde{A}_N(m,n) + \overline{\tilde{A}_N(-m,-n)}\right) \\ \tilde{A}_N^{(2)}(m,n) = \frac{1}{2i}\left(\tilde{A}_N(m,n) - \overline{\tilde{A}_N(-m,-n)}\right) \end{cases} \tag{4.94}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} \hat{A}_N^{(1)}(m,n) = \frac{1}{2}\left(\hat{A}_N(m,n) + \overline{\hat{A}_N(m,n)}\right) \\ \hat{A}_N^{(2)}(m,n) = \frac{1}{2i}\left(\hat{A}_N(m,n) - \overline{\hat{A}_N(m,n)}\right) \end{cases} \tag{4.95}$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} a_N^{(1)}(x,y) = \frac{1}{2}\left(a_N(x,y) + \overline{a_N(x,y)}\right) \\ a_N^{(2)}(x,y) = \frac{1}{2i}\left(a_N(x,y) - \overline{a_N(x,y)}\right) \end{cases} \tag{4.96}$$

つまり、作用素の実分解を、結合特性あるいは積分核を使って行なう場合には、これらを、普通の意味で実分解すれば良い。しかし 空間周波数特性を使

う場合には、普通の実分解では駄目であって、式(4.94)のようにしなければいけないのである。

ところで、次に問題になることは、式(3.97)による作用素の縮少と、式(4.84)による作用素の分解の順序である。$A \in B(L_2)$が与えられたとき、式(3.97)に従ってA_Nを求め、その後で式(4.84)のように分解した場合と、最初に式(4.85)に従ってAのΩ_e-実部$A^{(1)}$とΩ_e-虚部$A^{(2)}$を求め、その後で、これらの作用素を式(3.97)によって有限次元作用素で近似した場合と、果して両者が同じ作用素になるかという問題である。この問題に対する保証を与えてくれるのが、次の命題である。

〔命題4.16〕 $A \in B(L_2)$に対して

$$A_N \equiv E_N A E_N \tag{4.97}$$

とおく。AおよびA_NのΩ_e-実分解を

$$A = A^{(1)} + i A^{(2)}, \quad A_N = A_N^{(1)} + i A_N^{(2)} \tag{4.98}$$

とすれば

$$A_N^{(n)} = E_N A^{(n)} E_N \quad (n=1,2) \tag{4.99}$$

となる。

(証明) 命題4.5より

$$A_N^{(1)} = \frac{1}{2}(A_N + \bar{A}_N) = \frac{1}{2}(E_N A E_N + E_N \bar{A} E_N)$$

$$= \frac{1}{2} E_N (A + \bar{A}) E_N = E_N A^{(1)} E_N$$

となり、$n=1$に対して式(4.99)が成立する。$n=2$の場合も同様に証明できる。 (Q.E.D)

命題4.16を図に表せば、図4.6のようになる。

次に、実分解によるAの性質(例えば等方性、自己共役性等)の保存性について論じる。

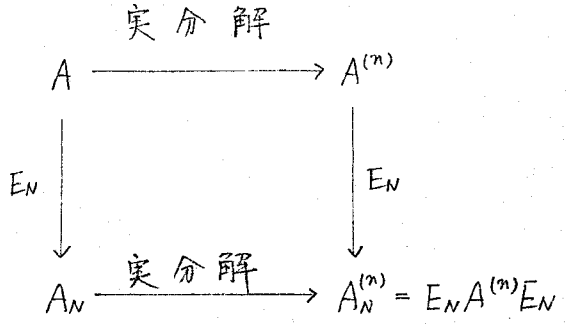


図4.6　命題4.16の説明図 $(n=1,2)$

〔命題 4.17〕命題4.15による $A \in \mathcal{B}(H)$ の実分解を考える。次の各項(イ)～(ニ)の中の三条件は、互いに同値である。

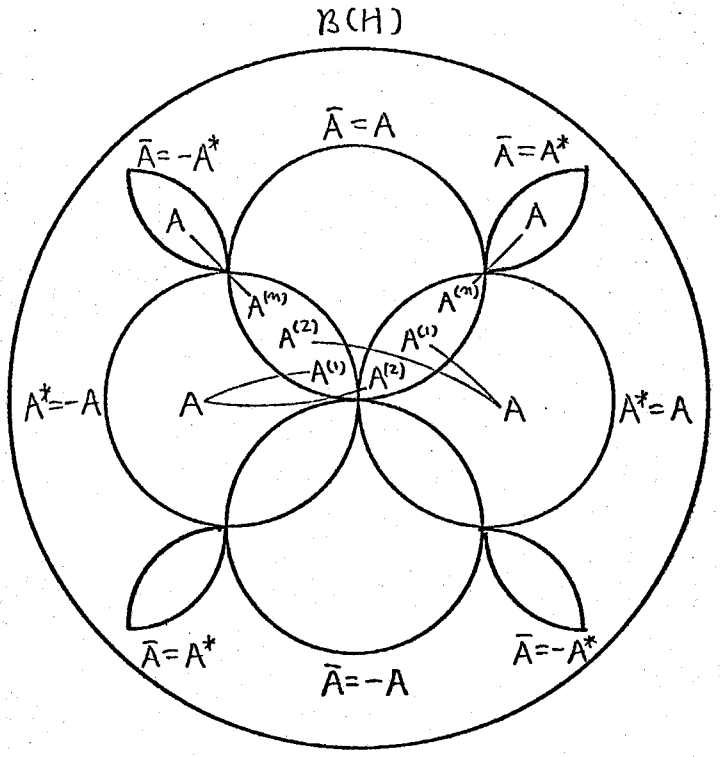
(イ)
(i) $A \in \mathcal{B}_i(H)$
(ii) $A^{(n)} \in \mathcal{B}_i(H)$ $(n=1,2)$
(iii) $A^{(n)*} = A^{(n)}$ $(n=1,2)$

(ロ)
(i) $A \in \mathcal{B}_{ai}(H)$
(ii) $A^{(n)} \in \mathcal{B}_{ai}(H)$ $(n=1,2)$
(iii) $A^{(n)*} = -A^{(n)}$ $(n=1,2)$

(ハ)
(i) $A^* = A$
(ii) $A^{(1)} \in \mathcal{B}_i(H)$, $A^{(2)} \in \mathcal{B}_{ai}(H)$
(iii) $A^{(1)*} = A^{(1)}$, $A^{(2)*} = -A^{(2)}$

(ニ)
(i) $A^* = -A$
(ii) $A^{(1)} \in \mathcal{B}_{ai}(L_2)$, $A^{(2)} \in \mathcal{B}_i(L_2)$
(iii) $A^{(1)*} = -A^{(1)}$, $A^{(2)*} = A^{(2)}$

命題4.17を、図4.5(a)を使って説明すれば、次のようになる。
作用素Aの実分解において
(イ) Aが領域Ⅸに属していれば、$A^{(1)}$ も $A^{(2)}$ も領域Ⅱに属している。このとき



$$A = A^{(1)} + iA^{(2)}$$

ここで

$$A^{(1)} = \frac{1}{2}(A+\bar{A}),\quad A^{(2)} = \frac{1}{2i}(A-\bar{A})$$

$$\overline{A^{(n)}} = A^{(n)} \quad (n=1,2)$$

例 $E^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^{(n)} + iS^{(n)})$ $(n\neq 0)$

図 4.7 作用素の実分解

Aが等方作用素であるという性質を、$A^{(1)}, A^{(2)}$ 共に受継いでいる。有限Fourier変換作用素 $\mathfrak{F}_n$ の実分解は、この場合に対応している。$\mathfrak{F}_n$ の実分解については、14.9 で詳しく論じる。

(ロ) Aが領域Xに属していれば、$A^{(1)}$ も $A^{(2)}$ も領域XIIIに属している。このとき、Aが反等方作用素であるという性質を、$A^{(1)}, A^{(2)}$ 共に受継いでいる。

(ハ) Aが領域IIに属していれば、$A^{(1)}$ は領域IVに、$A^{(2)}$ は領域IIIに属す。このとき、Aが自己共役作用素であるという性質を、$A^{(1)}$ が受継いでいる。そして、Aが等方作用素あるいは反等方作用素でなくても、$A^{(1)}$ が等方に、$A^{(2)}$ が反等方になるのである。式(4.55)で与えられる作用素 $E^{(n)}$ の実分解は、この場合に対応している。$E^{(n)}$ の実分解については、7.8 で詳しく論じる。

(ニ) Aが領域IVに属していれば、(ハ)の場合と逆に、$A^{(1)}$ が領域IIIに、$A^{(2)}$ が領域Vに属す。このとき、Aが反自己共役作用素であるという性質を、$A^{(1)}$ が受継いでいる。そして、Aが等方作用素あるいは反等方作用素でなくても、$A^{(1)}$ が反等方に、$A^{(2)}$ が等方になるのである。これらの関係を図4.7に示す。

4.8 作用素の等方分解

等方作用素を空間回路網で実現すれば、図4.3に示すように、回路の構造は、入力側から見ても、出力側から見ても、同じになっている。この様な回路の構造の対称性を利用すれば、実際に空間回路網を構成する際の、誤配線等を軽減することができる。そこで4.8では、任意の作用素を、等方作用素と反等方作用素の和に分解する問題を考える。なお、4.7で論じた作用素の実分解とほぼ平行した議論ができるので、要点だけを述べることにする。

〔命題 4.18〕 $\mathcal{B}(H)$ の任意の元 A は、等方作用素 $A^{(1)}$ と 反等方作用素 $A^{(2)}$ を使って、

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} \tag{4.100}$$

と一意に分解される。このとき $A^{(n)}(n=1,2)$ は、

$$A^{(1)} = \frac{1}{2}(A+\bar{A}^*), \quad A^{(2)} = \frac{1}{2}(A-\bar{A}^*) \tag{4.101}$$

と表される。

命題4.18で与えられる作用素の分解を、等方分解と呼ぶ。命題4.18と命題4.14を一口で言えば、次のようになる。

〔系4.7〕 $\mathcal{B}(H_N)$ は、次のように直和分解される：

$$\mathcal{B}(H_N) = \mathcal{B}_i(H_N) \oplus \mathcal{B}_{ac}(H_N) \tag{4.102}$$

作用素の等方分解を、空間周波数特性、結合特性を使って行なう為には、次のようにすれば良い。

〔系4.8〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の等方分解を、式(4.100)とする。$A_N^{(p)}(p=1,2)$ の空間周波数特性を $\{\!\{\hat{A}_N^{(p)}(m,n)\}\!\}$、結合特性を $\{\!\{\hat{A}_N^{(p)}(m,n)\}\!\}$、積分核を $a_N^{(p)}(x,y)$ とすれば 次の関係が成立する。

$$\tilde{A}_N^{(p)}(m,n) = \frac{1}{2}\left(\tilde{A_N}(m,n) \pm \tilde{A_N}(-n,-m) \right) \tag{4.103}$$

$$\hat{A}_N^{(p)}(m,n) = \frac{1}{2}\left(\hat{A_N}(m,n) \pm \hat{A_N}(n,m) \right) \tag{4.104}$$

$$a_N^{(p)}(x,y) = \frac{1}{2}\left(a_N(x,y) \pm a_N(y,x) \right) \tag{4.105}$$

ここで、式(4.103)～(4.105)の右辺の複号±は、$p=1$のとき＋，$p=2$のとき－を使用する。

式(3.56)で定義された並進作用素の等方分解については、7.9で詳しく論じる。命題4.16に対応して、次の命題が成立する。

〔命題4.19〕 $A \in \mathcal{B}(L_2)$に対して

$$A_N = E_N A E_N \tag{4.106}$$

とおく。AおよびA_Nの等方分解と

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad A_N = A_N^{(1)} + A_N^{(2)} \tag{4.107}$$

とすれば

$$A_N^{(n)} = E_N A^{(n)} E_N \quad (n=1,2) \tag{4.108}$$

となる。

（証明）以下に現れる複号±は、$n=1$のとき＋，$n=2$のとき－とする。命題4.5と

$$E_N^* = E_N \tag{4.109}$$

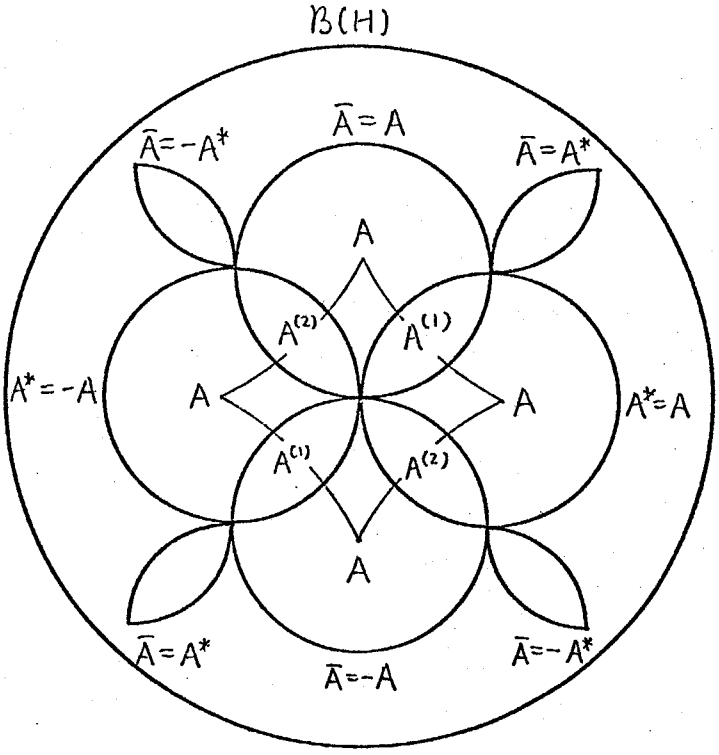
より

$$2A_N^{(n)} = A_N \pm \bar{A}_N^* = E_N A E_N \pm \overline{(E_N A E_N)}^*$$

$$= E_N A E_N \pm (E_N \bar{A} E_N)^*$$

$$= E_N (A \pm \bar{A}^*) E_N = 2 E_N A^{(n)} E_N$$

$$\therefore A_N^{(n)} = E_N A^{(n)} E_N$$



$$A = A^{(1)} + A^{(2)}$$

ここで

$$A^{(1)} = \frac{1}{2}(A+\bar{A}^*),\quad A^{(2)} = \frac{1}{2}(A-\bar{A}^*)$$

$$\overline{A^{(1)}}^* = A^{(1)},\quad \overline{A^{(2)}}^* = -A^{(2)}$$

例　$T(a) = \Sigma(a) + \Delta(a)$　$(a \neq 0)$

図4.8　作用素の等方分解

となり、式(4.108)が成立する。　(Q.E.D)

命題4.19より、$A \in \mathcal{B}(\mathcal{L}_2)$を等方分解した後で、式(4.106)に従って有限次元に近似しても、最初に式(4.106)によって有限次元に近似した後で、等方分解をしても、同じ結果になることが分かる。

命題4.17(図4.7)に対応する図を、図4.8に示す。

第5節　実対合と共変対合(8)

5.1　まえがき

前節で、作用素に対する複素共役演算の概念を導入し、これを基礎に、実作用素、等方作用素等について論じてきた。

ところで、偶関数を偶関数に、奇関数を奇関数に変換する作用素を、偶作用素と呼ぶことにすれば、オⅢ章で扱う並進作用素によって生成される作用素の空間では、等方作用素と偶作用素が同じ概念になる(命題7.35)。そして、偶作用素の特徴づけの為に使われる対称演算と呼ばれる半線形作用素が、数学的には、複素共役演算と同じような性質をもっている。

一方、有限Fourier変換作用素に関連して、双対演算と呼ばれる半線形作用素を導入することにより、オⅢ章で論じるように、基本座標系と自然座標系の間に成立するある種の双対関係、空間周波数特性と結合特性の間に成立するある種の双対関係、および結合特性の次元独立性等々の問題を議論することができる。そして、この双対演算も、数学的には、複素共役演算と同じような性質をもっている。

よって、対称演算や双対演算に共通の性質を、一般的に論じておくことは、意味のあることである。このような演算を、実対合及び共変対合と名付け、その数学的性質を、本節および次のオ6節で解明する。

オⅢ章やオⅡ章で扱う$\mathcal{B}(H_N)$の特殊な部分空間$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$$(n=1,2)$では、これらの空間の中だけで定義される変形対合というものを考えることができる。変形対合および、その共変対合との関係については、オ13節で論じる。

5.2 実対合と共変対合の定義

関数空間Hの上の等方ユニタリ作用素U，即ち

$$\overline{U} = U^* = U^{-1} \tag{5.1}$$

を満足する作用素 $U \in \mathcal{B}(H)$ を使って，二種類の演算を、次のように定義する。

$$\begin{cases} \omega f \equiv U\bar{f} & : f \in H \quad (5.2) \\ \Omega A \equiv U\bar{A}U^* & : A \in \mathcal{B}(H) \quad (5.3) \end{cases}$$

ωをHにおける実対合(real involution)と名付け、Ωを$\mathcal{B}(H)$における共変対合(covariant involution)と名付ける。* 混乱の恐れがない場合、或いは、ωとΩを同時に呼ぶとき、単に対合ということもある。線形作用素Uを　対合の生成作用素という。

式(5.2),(5.3)で $U=E$ または $U=E_N$ とおけば、才4節で論じた関数および作用素に対する複素共役演算と一致する。そこで、才4節でそうしたようにこの場合を特に、Eに因んだ添字eを付けて、ω_e, Ω_e と表すことにする：

$$\omega_e f = \bar{f} \ , \quad \Omega_e A = \bar{A} \tag{5.4}$$

式(4.53)から分かるように、有限Fourier変換作用素$\mathfrak{F}_N$は、式(5.1)の条件を満足している。そこで、$U=\mathfrak{F}_N$ の場合を、

$$f' \equiv \mathfrak{F}_N \bar{f} \ , \quad A_N^{\#} \equiv \mathfrak{F}_N \bar{A}_N \mathfrak{F}_N^* \tag{5.5}$$

と表すことにし、これを H_N および $\mathcal{B}(H_N)$ における双対演算と名付ける。双対演算については、才Ⅵ章で詳しく論じる。

対合の例を、もう一つ示す。原点に関する反転作用素I(0)を

$$(I(0)f)(x) \equiv f(-x) \quad : f \in H \tag{5.6}$$

---

* 対合の頭についている"実"或いは"共変"の意味は、5.6.1で述べる。

で定義すれば、任意の $f \in H$ に対して

$$I(0)^2 f = f \tag{5.7}$$

$$\| I(0) f \| = \| f \| \tag{5.8}$$

となる。式(5.7), (5.8)は、$I(0)$がHの上のユニタリ作用素であり

$$I(0)^{-1} = I(0) \tag{5.9}$$

であることを意味している。更に式(5.6)と命題4.11より

$$\overline{I(0)} = I(0) \tag{5.10}$$

であるから

$$\overline{I(0)} = I(0)^* = I(0)^{-1} = I(0) \tag{5.11}$$

となる。即ち、$I(0)$も式(5.1)の条件を満足している。そこで $U = I(0)$ の場合を

$$f^* \equiv I(0) \bar{f}, \quad A^{\star} \equiv I(0) \bar{A} I(0) \tag{5.12}$$

と表すことにし、これを対称演算と名付ける。式(5.12)のオー式は、式(4.6)と同じものである。

作用素に対する複素共役演算Ω_eは、関数に対する複素共役演算 w_e を使って式(4.12)で定義された。作用素に対する共変対合Ωも、関数に対する実対合wを使って、式(4.12)と全く同じ形で表すことができる。それを次に示す。

〔命題5.1〕同じ生成作用素をもつ実対合wと共変対合Ωの間には、次の関係が成立する。

$$\Omega A = w A w \quad : A \in \mathcal{B}(H) \tag{5.13}$$

（証明）wとΩの生成作用素をUとする。式(5.1), (5.2), (4.12)より

$$U\bar{A}U^* = U\bar{A}\bar{U}$$
$$= U(we\,Awe)(we\,Uwe)$$
$$= (Uwe)A(Uwe)$$
$$= wAw$$
$$\therefore U\bar{A}U^* = wAw \qquad (5.14)$$

となるから、式(5.3)より式(5.13)が成立する。 (Q.E.D)

式(5.14)から分かるように、もしΩを式(5.13)によって定義すれば、そのΩが、式(5.3)のように表現できる。つまり、式(5.3)と(5.13)は、全く等価な式なのである。そして、式(5.3)が、$\mathcal{B}(H)$における共変対合を直接定義しているのに対して、式(5.13)は、Hにおける実対合を介して、$\mathcal{B}(H)$の共変対合を与えているのである。

5.3 実対合 ω

5.3.1 ωの基本的性質

しばらくの間、Hにおける実対合ωの性質について論じる。まず定義より直ちに次の命題を得る。

〔命題 5.2〕 任意の $f, g \in H$ および複素数 a, b に対して、次の関係が成立する。

$$\omega(af + bg) = \bar{a}\omega f + \bar{b}\omega g \quad (\text{半線形}) \qquad (5.15)$$

$$\omega^2 = f \quad (\text{回帰的}) \qquad (5.16)$$

$$\|\omega f\| = \|f\| \quad (\text{等　長}) \qquad (5.17)$$

$$(\omega f, \omega g) = \overline{(f, g)} \qquad (5.18)$$

$$(\omega f, g) = (\omega g, f) \qquad (5.19)$$

式(5.15)～(5.18)で、$\omega = we$ とおけば、それぞれ式(4.8)～(4.11)になる。

式(5.15)は、ωが半線形作用素であることを意味している。この非線形性は、ωの定義式(5.2)から分かるように、複素共役演算 we に由来するものである。従って、非線形に関する性質は、全てのωに共通であって、それは既に、複素共役演算に関連して現れていたものである。そして、各ωにある個性は、ωを生成する線形作用素Uによるものなのである。

式(5.16)の性質は、回帰的(involutive)と呼ばれる。ωを(実)対合(involution)と呼ぶのは、この為である。

通常、線形空間における対合の公理としては、式(5.15)～(5.17)が採用されている(文献(1), p.65)。実は、これらの定義の仕方は同値であって、次の命題が成立する。

〔命題5.3〕式(5.15)～(5.17)を満たすHからHへの作用素ωは、等ユニタリ作用素Uを使って、

$$\omega = Uwe \tag{5.20}$$

と一意に表される。

(略証)

$$U = \omega we \tag{5.21}$$

とおけば良い。 (Q.E.D)

命題5.3より、実対合ωと等ユニタリ作用素Uが、一対一に対応していることが分かる。

Halmosは、式(5.16), (5.18)を満たすωを conjugation と呼んでいる(文献(2), p.145)が、これも式(5.2)で定義される実対合と同じものである。*

式(5.18)から、直ちに次の系を得る。

---

* これまでは、複素共役演算weを基礎にとって実対合ω及びその生成作用素Uと、考えてきた。しかし、式(5.15)～(5.17)を満たす任意の対合ω_0を一個固定しておいて

$$\omega_0 V \omega_0 = V^* = V^{-1}$$

を満足するVとω_0からωを

$$\omega \equiv V\omega_0$$

と定義しても、今までと同じ議論ができることを注意しておく。

〔系 5.1〕 $\{u_n\}$ が H の正規直交系ならば、$\{\omega u_n\}$ もまたそうである。

5.3.2 ωf の dyadic 表現と積分表現

〔命題 5.4〕 $\{u_n\}$ を、H の正規直交基底とし、等方ユニタリ作用素 U に対して

$$u_{m,n} \equiv (Uu_n, u_m) \tag{5.22}$$

とおく。U は次のように dyadic 表現される。

$$U = \sum_{m,n} u_{m,n} \langle u_m, u_n \rangle \tag{5.23}$$

$$= \sum_{m,n} u_{n,m} \langle \omega u_m, \omega u_n \rangle \tag{5.24}$$

ここで ω は、U によって生成される実対合である。

（証明）式(5.23)は、命題3.1から明らかである。式(5.2), (5.1), (4.17)より

$$(U\omega u_n, \omega u_m) = (U^2 \overline{u_n}, U\overline{u_m}) = (U\overline{u_n}, \overline{u_m})$$

$$= (\overline{u_n}, \overline{Uu_m}) = \overline{(u_n, Uu_m)}$$

$$= (Uu_m, u_n) = u_{n,m}$$

$$\therefore (U\omega u_n, \omega u_m) = u_{n,m} \tag{5.25}$$

となるから、系5.1と命題3.1より式(5.24)が成立する。 (Q.E.D)

従って、もし式(5.22)で与えられる行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ が対称行列になれば、U の $\{u_n\}$ による dyadic 表現と、$\{\omega u_n\}$ による dyadic 表現が、完全に一致するのである。しかし、一般には行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ は対称行列にならない。この行列が、対称行列になる為の一つの十分条件を、次に与える。

〔命題5.5〕 H の実数値正規直交基底 $\{u_n\}$ を使って、式(5.22)で $u_{m,n}$

を定義すれば、行列$\langle\langle U_{m,n}\rangle\rangle$は対称ユニタリ行列になる。

(証明) 式(5.1),(4.17)より、

$$U_{m,n} = (\mathcal{U}u_n, u_m) = (u_n, \mathcal{U}^* u_m) = (u_n, \overline{\mathcal{U}} u_m)$$

$$= \overline{(\bar{u}_n, \mathcal{U}\bar{u}_m)} = (\mathcal{U}u_m, u_n) = U_{n,m}$$

$$\therefore U_{m,n} = U_{n,m}$$

となり、$\langle\langle U_{m,n}\rangle\rangle$は対称行列になる。$\langle\langle U_{m,n}\rangle\rangle$がユニタリ行列になることは、$\mathcal{U}$がユニタリ作用素であることから、明らかである。 (Q.E.D)

このように、式(5.22)で与えられる行列$\langle\langle U_{m,n}\rangle\rangle$は、そのとき使った基底$\{u_n\}$に何か条件をつけなければ、たとえ式(5.1)が成立していても、対称行列にはならない。しかし、ωについては、次の命題が成立する。

〔命題5.6〕 $\{u_n\}$をHの任意の正規直交基底とする。すm,n成分が、$(\omega u_n, u_m)$で与えられる行列は、対称ユニタリ行列である。

(証明)

$$a_{m,n} \equiv (\omega u_n, u_m)$$

とおけば、式(5.19)より、$a_{n,m} = a_{m,n}$となる。即ち、行列$\langle\langle a_{m,n}\rangle\rangle$は対称行列である。しかも、系5.1より

$$\sum_p a_{p,m}\overline{a_{p,n}} = \sum_p (\omega u_m, u_p)\overline{(\omega u_n, u_p)}$$

$$= (\omega u_m, \omega u_n) = \delta_{m,n}$$

となるから、$a_{m,n} = a_{n,m}$を考慮すれば、$\langle\langle a_{m,n}\rangle\rangle$がユニタリ行列になることが分かる。 (Q.E.D)

〔命題5.7〕 Hの任意の正規直交基底$\{u_n\}$を使って、$\mathcal{U}, \omega$は、次のように表される。

$$U = \sum_n \langle \omega u_n, \bar{u}_n \rangle \tag{5.26}$$

$$\omega f = \sum_n \overline{(f, u_n)}\, \omega u_n \tag{5.27}$$

（証明）$\{\bar{u}_n\}$も正規直交基底であるから、式(3.12), (5.2)より

$$U = U\sum_n \langle \bar{u}_n, \bar{u}_n \rangle = \sum_n \langle U\bar{u}_n, \bar{u}_n \rangle$$

$$= \sum_n \langle \omega u_n, \bar{u}_n \rangle$$

となり、式(5.26)が成立する。(5.27)は、式(5.26)と式(5.2)から明らかである。 (Q.E.D)

命題5.4に示したように、Uのdyadic表現は、一般には二重級数になる。ところが、命題5.7のように、$\{\omega u_n\}$と$\{\omega e u_n\}$の組を使えば、dyadic表現が一重級数になるのである。

これは積分核についても、同じである。即ち、命題3.7で述べたように、積分核は、H_Nの正規直交基底$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$を使って、一般には二重級数で表される。ところが、$\{\omega u_n\}_{n=-N}^{N}$と$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$の組を使えば、$U_N$の積分核が、次に示すように、一重級数になるのである。

〔命題5.8〕H_Nの実対合ωとその生成作用素U_Nは、次のように積分表現される。

$$(U_N f)(x) = \frac{\sqrt{2N+1}}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} U_N(x, y) f(y)\, dy \tag{5.28}$$

$$(\omega f)(x) = \frac{\sqrt{2N+1}}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} U_N(x, y) \overline{f(y)}\, dy \tag{5.29}$$

ここで $U_N(x, y)$は、H_Nの任意の正規直交基底$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$を使い

$$U_N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} (\omega u_n)(x)\, u_n(y) \tag{5.30}$$

によって与えられる関数である。

（証明） 式(5.26), (5.30), (3.4) より

$$(U_N f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \langle \omega u_n , \overline{u_n} \rangle f(x)$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} (f, \overline{u_n})(\omega u_n)(x)$$

$$= \left(f(y), \sum_{n=-N}^{N} \overline{(\omega u_n)(x)\, u_n(y)} \right)_y$$

$$= \left(f(y), \sqrt{2N+1}\, \overline{u_N(x,y)} \right)_y$$

$$= \frac{\sqrt{2N+1}}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} u_N(x,y) f(y)\, dy$$

となり、式(5.28)が成立する。式(5.2), (5.28) より、式(5.29)は明らかである。 (Q.E.D)

命題5.8より、式(5.30)の右辺が H_N の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ の選び方に依存しないことが分かる。

式(5.4)で述べたように、$U_N = E_N$ のとき $\omega = \omega_e$ であるから、式(5.30)で $\omega = \omega_e$ とおけば、命題2.1 と式(3.73)より

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \overline{u_n(x)}\, u_n(y) = \psi_0(x-y) \qquad (5.31)$$

となる。従って、式(5.30)が式(5.31)の一般化になっていることが分かる。

U_N は等方であるから、命題4.13より、積分核 $\sqrt{2N+1}\, u_N(x,y)$ は対称になる。即ち、任意の $x, y \in [-\ell, \ell]$ に対して

$$u_N(y,x) = u_N(x,y) \qquad (5.32)$$

が成立する。式(5.32)はまた、式(5.30)で u_n を ωu_n と置くことによって、容易に導くことができる。

5.3.3 ω と関数の縮少

命題4.5に対応する命題が、H の実対合の ω に対して、常に成立するわけで

はない。その為には 次の条件が必要である。まず、式(4.30)より次の補題が成立する。

〔補題5.1〕 $A \in \mathcal{B}(L_2)$ が等方作用素ならば

$$A_N \equiv E_N A E_N \tag{5.33}$$

によって与えられる A_N も、等方作用素である。

〔補題5.2〕 等方作用素 $A \in \mathcal{B}(L_2)$ に対し、式(5.33)によって A_N を定義すれば、次の二式は互いに同値となる。

$$A_N = A E_N \tag{5.34}$$

$$A_N = E_N A \tag{5.35}$$

(証明) 補題5.1より、A_N も等方である。そこで、式(5.34)が成立したとすれば、式(4.27), (4.109)より

$$A_N = \bar{A}_N^* = (\bar{A} E_N)^* = E_N \bar{A}^* = E_N A$$

となり、式(5.35)が成立する。逆も同様に証明できる。 (Q.E.D)

式(5.34)は、空間 H_N が作用素 A の不変部分空間になっていることを表している。即ち、入力信号が H_N に帯域制限されている限り、A_N は A と厳密に同じ働きをするのである。

式(5.35)は、$A \in \mathcal{B}(L_2)$ によって変換した結果が空間 H_N に入るものは、本質的には H_N の元だけであるということを、意味している。もう少し正確に言えば:

$$S \equiv \{ f \mid Af \in H_N,\ f \in H \} \tag{5.36}$$

とおくとき

$$S \cap H_N^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(A) \tag{5.37}$$

となるのである。* 実際、$f \in S \cap H_N^{\perp}$ とすれば、式(5.35)より

$$Af = E_N A f = E_N A E_N f = E_N A 0 = 0$$

となり、$f \in Ker(A)$ となる。

従って、補題5.2より、$A \in \mathcal{B}(L_2)$ が等方作用素ならば、Aの値域を H_N に限定した場合の意味のある最大の定義域が、H_N であることが分かる。

空間 H_M, H_N $(M>N)$ の自然座標系の0零番目の構成元を、それぞれ $\varphi_0^{(M)}, \varphi_0^{(N)}$ とすれば、式(3.68)より

$$E_N \varphi_0^{(M)} = \sqrt{\frac{2N+1}{2M+1}}\, \varphi_0^{(N)} \qquad (M>N) \tag{5.38}$$

となる。また、式(3.92), (3.93)の両辺の一をとれば、式(4.53)より

$$\overline{U}_N \varphi_n = \varphi_{-n}, \qquad \overline{U}_N^{*} \varphi_n = \varphi_{-n} \tag{5.39}$$

となるから

$$E_N \overline{U}_M E_N \varphi_0 = E_N \overline{U}_M \varphi_0 = E_N \varphi_0^{(M)} = \sqrt{\frac{2N+1}{2M+1}}\, \varphi_0^{(N)}$$

$$\therefore\ E_N \overline{U}_M E_N \varphi_0 = \sqrt{\frac{2N+1}{2M+1}}\, \varphi_0^{(N)} \tag{5.40}$$

となる。従って

$$\| E_N \overline{U}_M E_N \varphi_0 \| = \sqrt{\frac{2N+1}{2M+1}} < 1 \tag{5.41}$$

となるから、$\overline{U}_M$ が H_M の上のユニタリ作用素であるにもかかわらず、$E_N \overline{U}_M E_N$ は H_N の上のユニタリ作用素にならないのである。

このように、たとえ $A \in \mathcal{B}(L_2)$ がユニタリ作用素であっても、このAから式(5.33)によって作られる作用素 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ は、一般にはユニタリ作用素にならない。しかし、次の場合には、A_N もユニタリ作用素になるのである。

---

* $H_N^{\perp}$ は、H_N の直交補空間(文献(3), p.50)を表す。

〔 補題5.3 〕補題5.1と同じ記号を使用する。AがHの上のユニタリ作用素で、更に

$$A_N = A E_N \tag{5.42}$$

または

$$A_N = E_N A \tag{5.43}$$

が成立すれば、A_NもH_Nの上のユニタリ作用素になる。

〔 命題5.9 〕空間Hを、L_2または$H_M(M>N)$とする。Hにおける実対合ωを生成する等方ユニタリ作用素Uに対し

$$U_N \equiv E_N U E_N \tag{5.44}$$

とおく。次の三条件は互いに同値である。

(i) U_NがH_Nの等方ユニタリ作用素になり、更に、U_Nによって生成されるH_Nの実対合ω_Nに対して

$$\omega_N E_N = E_N \omega \tag{5.45}$$

が成立する。

(ii) $$U_N = U E_N \tag{5.46}$$

(iii) $$U_N = E_N U \tag{5.47}$$

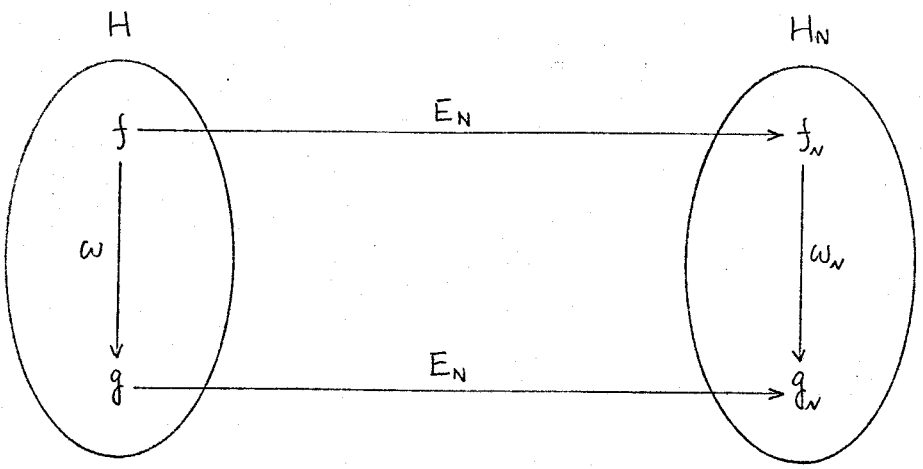
(証明) (i) ⟶ (iii) : $U = \omega w_e$であるから

$$E_N U = E_N \omega w_e = \omega_N E_N w_e = \omega_N w_e w_e E_N w_e$$

$$= U_N \overline{E_N} = U_N$$

となり、式(5.47)が成立する。

(iii) ⟶ (i) : 補題5.1, 補題5.3よりU_NはH_Nの等方ユニタリ作用素となる。従って、U_Nによって生成される実対合ω_Nを考えることができる。また、H_N



必要十分条件：$U_N = UE_N$ または $U_N = E_N U$

図5.1 命題5.7の説明図

および$H_N^{\perp}$は、複素共役演算weに関して閉じているから、

$$we\,E_N = E_N we \qquad (5.48)$$

となる。ここで左辺のweは、H_Nにおける複素共役演算であり、右辺のweは、Hにおける複素共役演算である。よって、式(5.59),(5.62),(5.64)より

$$E_N\omega = E_N U we = U_N we = U_N E_N we = U_N we E_N = \omega_N E_N$$

となり、式(5.45)が成立する。

(ii)⟷(iii)：Uは等方作用素であるから、補題5.2より明らかである。(Q.E.D)

命題5.9を図で表せば、図5.1のようになる。

5.4 実対合の積

これまでは、唯一個の実対合の性質について論じてきたが、5.4では、空間Hのいくつかの実対合ω_n $(n=1,2,\cdots)$の積について論じる。なお、ω_nの生成作用素を、同じ添字を付けて$U^{(n)}$で表すことにする。

$$\omega_1\omega_2 = U^{(1)}U^{(2)*} \tag{5.49}$$

より、偶数個の実対合の積は、ユニタリ作用素になり、

$$(\omega_1\omega_2)^* = \omega_2\omega_1 \tag{5.50}$$

となる。特に、ω_2 または ω_1 が ω_e の場合には、

$$\omega\omega_e = U, \quad \omega_e\omega = U^* \tag{5.51}$$

となる。

式(5.49)より、直ちに次の命題が成立する。

〔命題5.10〕 ω_1 と ω_2 が可換になるための必要十分条件は、$U^{(1)}U^{(2)*}$ が自己共役作用素になることである。特に ω と ω_e が可換になるための必要十分条件は、ω の生成作用素 U が自己共役作用素になることである。

$$\omega_1\omega_2\omega_3 = U^{(1)}U^{(2)*}U^{(3)}\omega_e \tag{5.52}$$

より、奇数個の実対合の積は、半線形作用素になるけれども、一般には、実対合にならない。

しかし、新しい積 $\circ$ を

$$\begin{cases} U^{(1)}\circ U^{(2)} \equiv U^{(1)}U^{(2)*}U^{(1)} & (5.53) \\ \omega_1\circ\omega_2 \equiv \omega_1\omega_2\omega_1 & (5.54) \end{cases}$$

によって定義すれば、$U^{(1)}\circ U^{(2)}$ も再び等すユニタリ作用素になり、$\omega_1\circ\omega_2$ は、$U^{(1)}\circ U^{(2)}$ によって生成される実対合になるのである。

例えば

$$\omega\circ\omega = \omega = U\omega_e \tag{5.55}$$

$$\omega_e\circ\omega = U^*\omega_e \tag{5.56}$$

$$w \circ we = U^2 we \tag{5.57}$$

となる。即ち、U^2によって生成される実対合が$we \circ w$であり、U^2によって生成される実対合が$w \circ we$である。

ただ、この新しい積に関しては

$$\begin{cases} w \circ (w \circ w_1) = w_1 & (5.58) \\ (w \circ w) \circ w_1 = w \circ w_1 & (5.59) \end{cases}$$

から分かるように、結合則は成立しない。つまり、実対合は、積$\circ$に関して、亜群になるけれども、半群にはならないのである。

次に、二種類の実対合w_1, w_2から生成される各種演算の関係について論じる。図5.2の三角形の各頂点A, B, Cに、それぞれ実対合$w_1, w, w \circ w_1$を対応させる。各辺AB, BC, CAに、頂点にある実対合の積を対応させる。積の順序は、ww_1の場合BA, $w_1 w$の場合ABと表すことにする。

$w_1, w, w \circ w_1$の間には、非常に密接な関係がある。まず、w_1からwを経由して$w \circ w_1$が得られたが、逆に、$w \circ w_1$からwを経由すれば、式(5.58)よりw_1が得られる。即ち、図5.2で、頂点Aと頂点Cを取換えても良いのである。

これは、次に示すように、普通の積に関しても成立する。

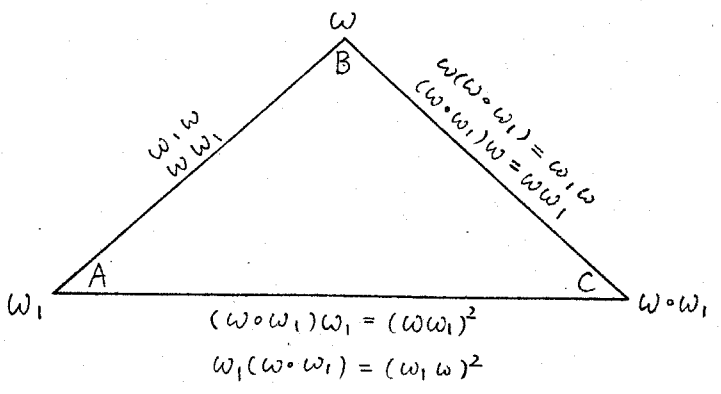


図5.2　二種類の実対合w_1, wから生成される各種演算の関係

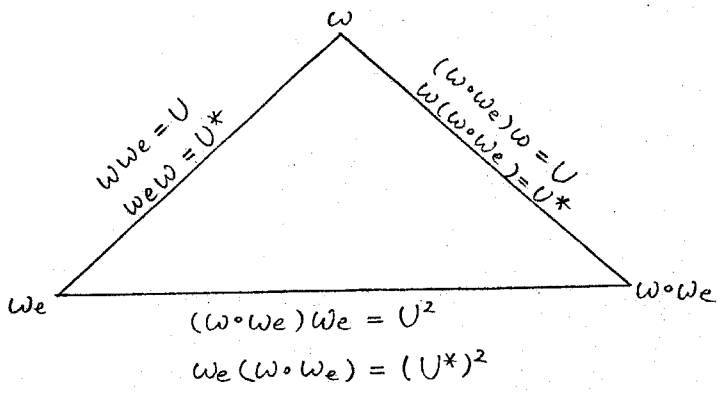


図5.3　ωとweから生成される各種演算の関係

〔補題 5.4〕

$$\begin{cases} (\omega\circ\omega_1)\omega = \omega\omega_1 & (5.60) \\ \omega(\omega\circ\omega_1) = \omega_1\omega & (5.61) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\omega\circ\omega_1)\omega_1 = (\omega\omega_1)^2 & (5.62) \\ \omega_1(\omega\circ\omega_1) = (\omega_1\omega)^2 & (5.63) \end{cases}$$

式(5.60),(5.61)は、それぞれ、図5.2の三角形において、CB=BA, BC=ABを意味している。この事実を考慮すれば、式(5.62),(5.63)がそれぞれ

$$CA = CB\cdot BA, \quad AC = AB\cdot BC \tag{5.64}$$

を意味していることが分かる。これは直接

$$\begin{cases} ((\omega\circ\omega_1)\omega)(\omega\omega_1) = (\omega\circ\omega_1)\omega_1 & (5.65) \\ (\omega_1\omega)(\omega(\omega\circ\omega_1)) = \omega_1(\omega\circ\omega_1) & (5.66) \end{cases}$$

と証明することもできる。

これまでの議論で特に、$\omega_1 = we$ とおけば、式(5.51)より、図5.2は図5.3のようになる。

5.5 実対合に関する固有値問題

5.5.1 実対合に関する固有値問題

実対合に関する固有値問題と考える。

〔補題 5.5〕 複素数 λ が、実対合 ω の固有値になるための必要十分条件は $|\lambda| = 1$ となることである。

（証明） $\omega f = \lambda f$ とすれば

$$f = \omega^2 f = \omega(\lambda f) = \bar{\lambda}\omega f = |\lambda|^2 f$$

$$\therefore |\lambda| = 1$$

となる。逆に、$|\lambda| = 1$ を満足する任意の複素数 λ と、任意の関数 $g \in H$ に対して

$$f \equiv \frac{1}{2}(g + \bar{\lambda}\omega g) \tag{5.67}$$

とおけば、$|\lambda| = 1$ であるから

$$2\omega f = \omega g + \lambda\omega^2 g = \lambda(g + \bar{\lambda}\omega g) = 2\lambda f$$

$$\therefore \omega f = \lambda f$$

となり、λ は ω の固有値になっている。 (Q.E.D)

〔補題 5.6〕 次の三条件のうち、任意の二個が成立すれば、残り一個も成立する。

(i) $\omega_1 f = \lambda f \quad : \lambda = \mu\bar{\nu}$ (5.68)

(ii) $\omega f = \mu f \quad : \mu = \nu\lambda$ (5.69)

(iii) $\omega\omega_1 f = \nu f \quad : \nu = \bar{\lambda}\mu$ (5.70)

〔命題 5.11〕 ω, ω_1 を、H における実対合とし、$f \in H$ に対して

$$g \equiv \omega f \tag{5.71}$$

とおく。

$$\omega_1 f = \lambda f \tag{5.72}$$

が成立するための必要十分条件は

$$(\omega \cdot \omega_1) g = \bar{\lambda} g \tag{5.73}$$

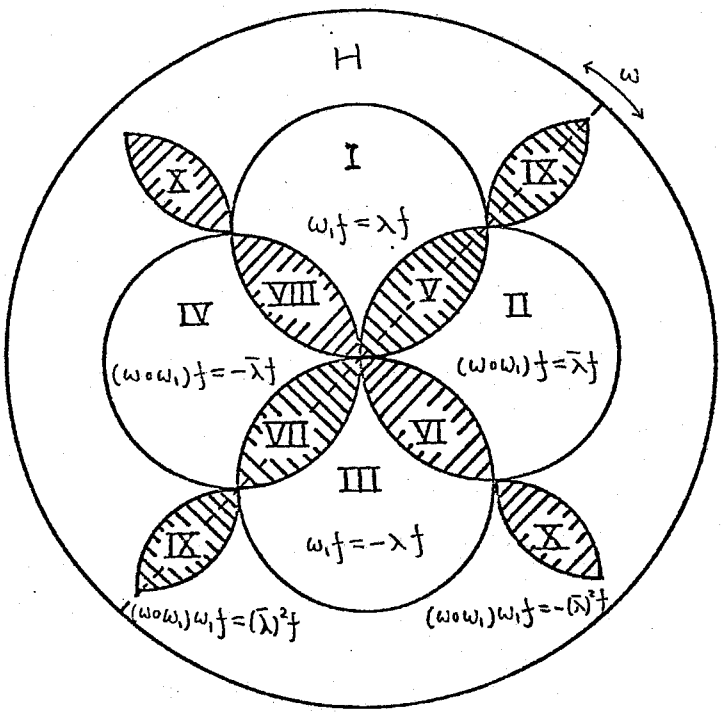
が成立することである。

（証明） 式(5.72)が成立したとすれば、式(5.71), (5.60)より

$$(\omega \cdot \omega_1) g = (\omega \cdot \omega_1) \omega f = \omega \omega_1 f = \bar{\lambda} \omega f = \bar{\lambda} g$$

となり、式(5.73)が成立する。逆も同様に証明できる。 (Q.E.D)

補題 5.6 と命題 5.11 を図示すれば、図 5.4 のようになる*。命題 5.11 を考慮すれば、f と ωf が、図 5.4 の点線に関して対称な領域に属することが分かる。



(i) $\omega_1 f = \lambda f$ (I, V, VIII)

(ii) $\omega_1 f = -\lambda f$ (III, VI, VII)

(iii) $(\omega \cdot \omega_1) f = \bar{\lambda} f$ (II, V, VI)

(iv) $(\omega \cdot \omega_1) f = -\bar{\lambda} f$ (III, VI, VIII)

(v) $(\omega \cdot \omega_1) \omega_1 f = (\bar{\lambda})^2 f$ (V, VII, IX)

(vi) $(\omega \cdot \omega_1) \omega_1 f = -(\bar{\lambda})^2 f$ (VI, VIII, X)

（ωにより、点線に関して対称に変換される）

図 5.4 実対合に関する各種固有集合の関係

---

* 補題 5.6 と命題 5.11 を一枚の図に表すために、補題 5.8 で、$\mu = \lambda$ および ω が $\omega \cdot \omega_1$ の場合が図 5.4 に示してある。

また、f と if は、図5.4の中心に関して対称な領域に属する。図5.4で、領域Ⅲ, Ⅴ が二個所設けてあるのは、この二種類の対称性（線対称と点対称）を保存する為である。

$(\omega\cdot\omega_1)\omega_1$ はユニタリ作用素であるから、図5.4の斜線を施してある領域(ⅴ)と(ⅵ)は、互いに直交する部分空間である。これに対して他の領域(ⅰ)～(ⅳ)は、部分空間になっていない。しかし、次に示すように(ⅰ)～(ⅳ)の中の任意の一個の領域だけで、全空間Hを張るのである。

補題4.3に対応して、次の補題が成立する。

〔補題 5.7〕

$$\omega f = \lambda f, \quad \omega g = \lambda g \tag{5.74}$$

を満足する $f, g \in H$ に対して

$$f + ig = 0 \tag{5.75}$$

が成立すれば $f = g = 0$ となる。

（証明）式(5.15)より、$\omega 0 = 0$ であるから、式(5.75)の両辺に ω を作用させれば $\lambda(f - ig) = 0$ となる。補題5.5より $\lambda \neq 0$ であるから

$$f - ig = 0 \tag{5.76}$$

となり、式(5.75), (5.76)より、$f = g = 0$ となる。 (Q.E.D)

補題5.7は、実数 x, y に対する「$x + iy = 0$ ならば $x = y = 0$」という事実の、関数に対する一般化になっている。

〔命題 5.12〕 λ を絶対値1の複素数とする。任意の $f \in H$ は

$$\omega_1 f^{(n)} = \lambda f^{(n)} \quad (n = 1, 2) \tag{5.77}$$

なる元 $f^{(1)}, f^{(2)}$ を使って

$$f = f^{(1)} + i f^{(2)} \tag{5.78}$$

と一意に分解される。そして $f^{(n)}(n=1,2)$ は

$$f^{(1)} = \frac{1}{2}(f + \bar{\lambda}\omega_1 f), \quad f^{(2)} = \frac{1}{2i}(f - \bar{\lambda}\omega_1 f) \tag{5.79}$$

と表される。

(証明) 式(5.79)で与えられる $f^{(1)}$ が式(5.77)を満たすことは、補題5.5の証明の中で示したとうりである。式(5.79)で与えられる $f^{(2)}$ が式(5.77)を満たすことも、同様に証明することができる。また、これら $f^{(n)}(n=1,2)$ が式(5.78)を満足することも、明らかである。最後に、分解の一意性を示す。もし式(5.78)の他に、式(5.77)を満たす $g^{(n)}(n=1,2)$ を使って、f が

$$f = g^{(1)} + i g^{(2)} \tag{5.80}$$

と分解できたとすれば、式(5.78), (5.80)より

$$(f^{(1)} - g^{(1)}) + i(f^{(2)} - g^{(2)}) = 0 \tag{5.81}$$

となる。$f^{(n)} - g^{(n)}$ $(n=1,2)$ は、式(5.77)を満足しているから、補題5.7より $g^{(n)} = f^{(n)}$ $(n=1,2)$ となる。 (Q.E.D)

命題5.12で、$\omega_1 = \omega_e$, $\lambda = 1$ と置いたものが、補題4.1である。即ち、命題5.12は、複素数値関数の実数値関数による式(4.46)の形の分解を、一般化したものになっている。

5.5.2 実対合の固有集合の性質

命題5.12は、任意に固定した実対合 ω_1 の任意に固定した固有値 λ に対応する固有集合 S_λ の元を使って、任意の関数 $f \in H$ が、式(5.78)の形に分解できることを表している。この固有集合 S_λ が、実対合 ω に関して用いる為の条件を、次に述べる。

〔命題 5.13〕 実対合 ω_1 の固有値 λ に対応する固有集合を、S_λ とする：

$$S_\lambda \equiv \{ f \mid \omega_1 f = \lambda f,\ f \in H \} \tag{5.82}$$

ω を任意の実対合とするとき、次の条件は、互いに同値である。

(i) $\omega S_\lambda = S_\lambda$　　(ii) $\omega S_{-\lambda} = S_{-\lambda}$

(iii) $\omega_1 \circ \omega = \lambda^2 \omega$　　(iv) $\omega \circ \omega_1 = \overline{\lambda}^2 \omega_1$

(iv) $\omega_1 \omega = \lambda^2 \omega \omega_1$

（証明） (i) ⟶ (iii)：$f \in H$ を

$$f = f^{(1)} + i f^{(2)} \quad : f^{(n)} \in S_\lambda \quad (n = 1, 2) \tag{5.83}$$

と分解すれば、(i) より

$$\omega_1 (\omega f^{(n)}) = \lambda \omega f^{(n)} \quad (n = 1, 2) \tag{5.84}$$

となるから

$$(\omega_1 \circ \omega) f^{(n)} = \omega_1 \omega \omega_1 f^{(n)} = \lambda \omega_1 \omega f^{(n)} = \lambda^2 \omega f^{(n)}$$

$$\therefore (\omega_1 \circ \omega) f^{(n)} = \lambda^2 \omega f^{(n)} \quad (n = 1, 2) \tag{5.85}$$

となる。従って、式 (5.83), (5.85) より

$$(\omega_1 \circ \omega) f = (\omega_1 \circ \omega) f^{(1)} - i (\omega_1 \circ \omega) f^{(2)} = \lambda^2 (\omega f^{(1)} - i \omega f^{(2)})$$

$$= \lambda^2 \omega (f^{(1)} + i f^{(2)}) = \lambda^2 \omega f$$

$$\therefore (\omega_1 \circ \omega) f = \lambda^2 \omega f \quad : f \in H \tag{5.86}$$

となり、(iii) が成立する。他も同様に証明できる。 (Q.E.D)

(i) は、S_λ が ω に関して閉じていることを意味し、(ii) は $S_{-\lambda}$ が ω に関して、閉じていることを意味している。なお、S_λ が線形作用素の不変部分集合になるための条件については、命題 6.3 で論じる。

〔系 5.2〕 ω_1 の固有集合 S_λ で、ω_1 自身に関して閉じているものは、S_1 および S_{-1} であり、しかもそれだけである。

命題 5.13 で特に $\lambda = 1$ とおけば、次の系が成立する。

〔系 5.3〕 命題 5.13 と同じ記号のもとで、次の各条件は互いに同値である。

(i) $\omega S_1 = S_1$　　(ii) $\omega S_{-1} = S_{-1}$

(iii) $\omega_1 \circ \omega = \omega$　　(iv) $\omega \circ \omega_1 = \omega_1$

(v) $\omega_1 \omega = \omega \omega_1$

つまり、ω_1 の固有集合 S_1 および S_{-1} が ω に関して閉じるための必要十分条件は ω と ω_1 が可換になることである。なお、この可換性の条件を、実対合の生成作用素で表現したものが、命題 5.10 である。系 5.3 で特に $\omega_1 = \omega_e$ とおき、命題 5.10 を考慮すれば、次の系が成立することが分かる。

〔系 5.4〕 次の各条件は、互いに同値である。

(i) ω は実数値関数を実数値関数に変換する.

(ii) ω は純虚数値関数を、純虚数値関数に変換する。

(iii) $\omega \omega_e = \omega_e \omega$

(iv) $U^* = U$

ω と ω_e との可換性については、命題 6.30 でもう一度論じる.

〔命題 5.14〕 ω_1, ω_2 の固有値 λ に対応する固有集合を、それぞれ $S_\lambda^{(1)}, S_\lambda^{(2)}$ とする。

$$\omega_2 S_\lambda^{(1)} = S_\lambda^{(1)} \tag{5.87}$$

が成立するための必要十分条件は、

$$\omega_1 S_\mu^{(2)} = S_\mu^{(2)} \tag{5.88}$$

が成立することである. ここで $\mu = \bar{\lambda}$ または $\mu = -\bar{\lambda}$ である。

命題 5.14 を、図 5.4 を使って説明すれば、次のようになる。もし領域 (i), (ii)

が、$\omega \cdot \omega_1$ に関して閉じていれば、領域(iii), (iv)は ω_1 に関して閉じており、逆もまた成立するのである。

5.6 共変対合 Ω

5.6.1 Ωの基本的性質

これまでは、空間Hにおける実対合について論じてきたが、これからは、式(5.3)または式(5.13)で与えられる$\mathcal{B}(H)$における共変対合Ωについて、論じていく。まず、定義より直ちに、次の命題を得る。

〔命題 5.15〕任意の $A, B \in \mathcal{B}(H)$, $f, g \in H$ および複素数 a, b に対して、次の関係が成立する。

$$\Omega(aA+bB) = \bar{a}\Omega A + \bar{b}\Omega B \quad (\text{半線形}) \tag{5.89}$$

$$\Omega^2 A = A \quad (\text{回帰的}) \tag{5.90}$$

$$\Omega(AB) = (\Omega A)(\Omega B) \quad (\text{共変的}) \tag{5.91}$$

$$\Omega(A^*) = (\Omega A)^* \tag{5.92}$$

$$\|\Omega A\| = \|A\| \quad (\text{等長}) \tag{5.93}$$

$$\Omega\langle f, g\rangle = \langle \omega f, \omega g\rangle \tag{5.94}$$

$$\omega(Af) = (\Omega A)(\omega f) \tag{5.95}$$

命題5.15で$\Omega = \Omega_e$とおけば、命題4.2および命題4.3になる。式(5.89)～(5.93)はΩ自身に関する性質であり、式(5.94), (5.95)は、同じ生成作用素によって生成されるΩとωの関係を示すものである。式(5.89)は、Ωが半線形作用素であることを意味している。この非線形性は、Ωの定義式(5.3)から分かるように、複素共役演算Ω_eに由来するものである。従って、非線形に関する性質は、全てのΩに共通であって、それは既に、Ω_eに関連して現れていたもので

ある。そして各Ωにある個性は、Ωを生成する線形作用素Uによるものである。

式(5.90)の性質は、回帰的と呼ばれる。そこで、ωの場合と同様に、Ωをも(実)対合と呼びたいところであるが、環の元に対する対合という用語は、既に次のように用いられている。

即ち、環Rの各元x, yに対して、

$$(ax+by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^* \qquad (\text{半線形}) \qquad (5.96)$$

$$x^{**} = x \qquad (\text{回帰的}) \qquad (5.97)$$

$$(xy)^* = y^*x^* \qquad (\text{反変的}) \qquad (5.98)$$

なる条件を満足するR上の作用素*を、対合(involution)と呼ぶのである(文献(4), p.178)*。

式(5.96), (5.97)は、それぞれ式(5.89), (5.90)と同じである。しかし式(5.98)の右辺のx, yの順序が、左辺のそれと逆になっているのに対して、式(5.91)では、両辺のA, Bの順序が同じである。

そこで、環の元に対し、式(5.96)~(5.98)によって定義される従来の対合を、反変対合(contravariant involution)と呼び、式(5.89)~(5.91)で定義される演算を、共変対合(covariant involution)と呼ぶことにする。**

式(5.3)で定義されたΩを、共変対合と名付けたのは、Ωが式(5.89)~(5.91)の性質をもっているからである。しかし、まだωの場合のように、式(5.89)~(5.91)によるΩの定義と、式(5.3)によるΩの定義が、一致するかどうか分からない。その関係を明らかにするものが、次の命題である。

〔命題5.16〕 式(5.89)~(5.93)を満たす$\mathcal{B}(H_N)$からそれ自身への作用素Ωは

$$\pm\bar{U}_N = U_N^* = U_N^{-1} \qquad (5.99)$$

なる$U_N \in \mathcal{B}(H_N)$を使って、式(5.3)のように表される。

---

* 式(4.20)~(4.22)に示したように、作用素に対する共役演算*は、対合の公理を満足している。

** この名称は、飯島泰蔵教授による。

証明は長くなるので、5.8へまわす。

ωに関しては、命題5.3で示したように、式(5.15)~(5.17)から等方ユニタリ作用素Uが一意に決った。しかし、Ωに関しては、命題5.16が主張しているように、式(5.89)~(5.93)からユニタリ作用素U_Nを構成することはできるが、それが必ずしも等方になるとは限らないで、反等方になることもあるのである。

反等方ユニタリ作用素Uを使い、式(5.2),(5.3)に従ってω及びΩと定義すれば、命題5.2, 命題5.15で述べた性質のうち、式(5.16)以外は全て成立している。しかし、ωはもはや回帰的性質をもっておらず、

$$\omega^2 f = -f \qquad (\text{反回帰的}) \tag{5.100}$$

となるのである。また、式(5.13)も成立せず

$$\Omega A = -\omega A \omega \tag{5.101}$$

となる。

そこで、等方ユニタリ作用素$U \in \mathcal{B}(H)$を使い、式(5.2)で定義されるωを、実対合(real involution)と呼び、反等方ユニタリ作用素$U \in \mathcal{B}(H)$を使い式(5.2)で定義されるωを、虚対合(imaginary involution)と呼ぶことにする。そして、それぞれのωから、式(5.13), (5.101)によって生成されるΩを、それぞれ"実対合ωによって生成される共変対合Ω"及び"虚対合ωによって生成される共変対合Ω"と呼び、混乱の恐れがない場合には、前者を単に共変対合と呼ぶことにする。本論文では、5.2で定義したように、実対合によって生成される共変対合について、もっぱら論じることにする。

〔補題5.8〕 $A \in \mathcal{B}(H)$が、$\mathcal{B}(H)$の全ての元と可換ならば、AはHの上の恒等作用素の定数倍である。

才7節の結果を使うと、この証明が簡単にできるので、証明は7.11にまわ

し、ここではその結果だけを使用することにする。

〔命題5.17〕 空間Hの上の等方ユニタリ作用素U, Vが、同じ共変対合Ωを生成する為の必要十分条件は、

$$V = aU \quad (|a| = 1) \tag{5.102}$$

となることである。

（証明） 式(5.102)の十分性は明らかであるから、必要性を示す。任意の$A \in B(H)$に対して

$$V\bar{A}V^* = U\bar{A}U^* \tag{5.103}$$

が成立したとする。両辺の一をとり、式(5.1)を使えば

$$V^*AV = U^*AU$$

となり、任意の$A \in B(H)$に対して

$$(VU^*)A = A(VU^*) \tag{5.104}$$

が成立する。従って、補題5.8よりVU^*は Hの上の恒等作用素の定数倍になり、

$$V = aU \tag{5.105}$$

となる。式(5.105)の両辺のノルムをとれば、$\|U\| = \|V\| = 1$より $|a| = 1$ となる。 (Q.E.D)

命題5.3で示したように、ωとその生成作用素Uとは、一対一に対応している。ところが、命題5.17が主張しているように、共変対合Ωは、集合$\{aU \mid |a|=1\}$或いは$\{a\omega \mid |a|=1\}$と、一対一に対応しているのである（図5.5）。

Ωの定義式(5.3)と式(4.27)より、

$$\Omega E = E, \quad \Omega E_N = E_N \tag{5.106}$$

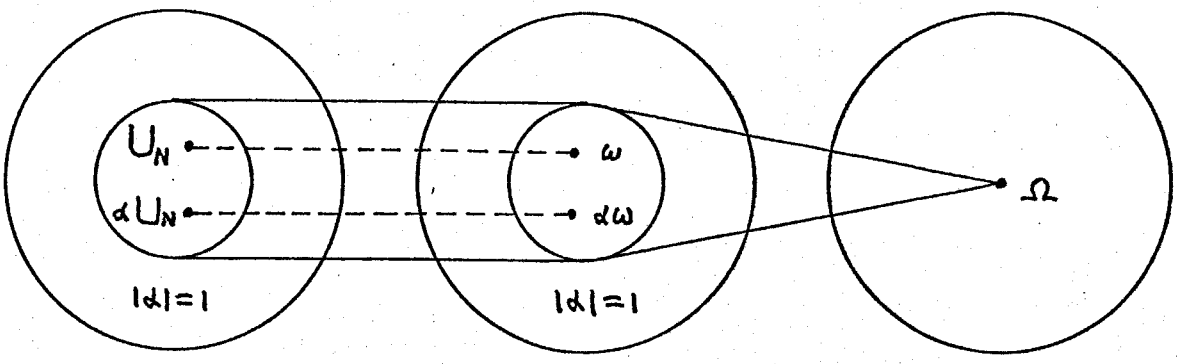


図5.5　UとωとΩの対応関係

となる。ここで、式(5.106)の右一式のΩは、$\mathcal{B}(L_2)$の共変対合であり、右二式のΩは、$\mathcal{B}(H_N)$の共変対合である。式(5.106)より、次の命題が成立する。

〔命題5.18〕 $A\in\mathcal{B}(H)$が逆をもてば、ΩAも逆をもち、

$$(\Omega A)^{-1}=\Omega(A^{-1}) \tag{5.107}$$

となる。

命題4.10に対応して、次の命題が成立する。

〔命題5.19〕

(i) $A\in\mathcal{B}_c(H)$ ならば $\Omega A\in\mathcal{B}_c(H)$である。

(ii) $A\in\mathcal{B}_2(H)$ ならば $\Omega A\in\mathcal{B}_2(H)$である。そしてこのとき、$A,B\in\mathcal{B}_2(H)$に対して、次の関係が成立する。

$$(\Omega A,\Omega B)=\overline{(A,B)} \tag{5.108}$$

$$\|\Omega A\|_2=\|A\|_2 \tag{5.109}$$

(iii) $A\in\mathcal{B}_1(H)$ ならば $\Omega A\in\mathcal{B}_1(H)$である。そしてこのとき

$$tr(\Omega A)=\overline{tr(A)} \tag{5.110}$$

となる。また、$A, B \in B(H)$ のどちらか一方が $B_1(H)$ に属していれば、式(5.108)が成立する。

(証明) (i)を証明する。$A \in B_c(H)$ とすれば、命題4.10より $\bar{A} \in B_c(H)$ である。しかも、完全連続作用素の全体 $B_c(H)$ は、$B(H)$ の両側イデアルである(文献(5), p.13)から、式(5.3)より $\Omega A \in B_c(H)$ となる。* 他も同様に証明できる。(Q.E.D)

〔系5.5〕 $B(H)$ の元の列 $\{A_n\}$ が、Schmidtの内積に関して正規直交系ならば、$\{\Omega A_n\}$ もまたそうである。

5.6.2 ΩA のdyadic表現と積分表現

命題5.7に対応して、次の命題が成立する。

〔命題5.20〕 H の任意の正規直交基底 $\{u_n\}$ を使って ΩA は次のように表される。

$$\Omega A = \sum_{m,n} \overline{(Au_n, u_m)} \langle wu_m, wu_m \rangle \qquad (5.111)$$

(証明) 系5.1より $\{wu_n\}$ も正規直交基底であるから、式(5.95),(5.18)より

$$((\Omega A)(wu_n), wu_m) = (w(Au_n), wu_m) = \overline{(Au_n, u_m)}$$

となる。よって、命題3.1より、式(5.111)が成立する。(Q.E.D)

命題5.20で $\Omega = \Omega_e$ とおけば、命題4.7になる。

命題5.8に対応して、次の命題が成立する。

〔命題5.21〕 $A_N \in B(H_N)$ とすれば、ΩA_N は次のように積分表現される。

$$((\Omega A_N)f)(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} k_N(x, y) f(y)\, dy \qquad (5.112)$$

ここで ΩA_N の積分核 $k_N(x, y)$ は、A_N の積分核 $a_N(x, y)$ と式(5.30)で与えられる U_N の積分核 $\sqrt{2N+1}\, u_N(x, y)$ を使って

---

* 環Rの加群の部分群Sで、Rの任意の元xに対して、$xS \subset S$ が成立するとき、SをRの左イデアル、$Sx \subset S$ のとき右イデアル、両方成立するとき(両側)イデアルという(文献(6), p.53)。

$$k_N(x,y)=\frac{2N+1}{(2l)^2}\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l}U_N(x,z)\overline{U_N(y,z')}\,\overline{a_N(z,z')}\,dz'dz \qquad (5.113)$$

と表される。

5.6.3 Ω と作用素の縮少

次に、命題5.9に対応する問題を考える。空間 $H_M, H_N\ (M>N)$ の自然座標系の才零番目の構成元を、それぞれ $\varphi_0^{(M)}$, $\varphi_0^{(N)}$ とすれば、式(5.38), (3.12), (3.13)より

$$E_N\langle\varphi_0^{(M)},\varphi_0^{(M)}\rangle E_N=\frac{2N+1}{2M+1}\langle\varphi_0^{(N)},\varphi_0^{(N)}\rangle \qquad (5.114)$$

となる。一方、$U_N=\mathfrak{U}_N$ の場合を考えれば、式(5.5), (3.92)より

$$\varphi_0^{(N)\prime}=\varphi_0 \quad (N=0,1,2,\cdots) \qquad (5.115)$$

であるから、式(5.94), (5.5), (5.115)より

$$\langle\varphi_0^{(M)},\varphi_0^{(M)}\rangle^{\#}=\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle \quad (M=0,1,2,\cdots) \qquad (5.116)$$

となる。全てのNに対して、$\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle\in\mathcal{B}(H_N)$ であるから、式(5.114), (5.116)より

$$E_N\langle\varphi_0^{(M)},\varphi_0^{(M)}\rangle^{\#}E_N=(E_N\langle\varphi_0^{(M)},\varphi_0^{(M)}\rangle E_N)^{\#} \quad (M>N) \qquad (5.117)$$

である。ここで式(5.117)の左辺の#は、$\mathcal{B}(H_M)$ における双対演算であり、右辺の#は $\mathcal{B}(H_N)$ における双対演算である。

このように、一般には、$\mathcal{B}(H_M)$ から $\mathcal{B}(H_N)$ への作用素の縮少と共変対合Ωの順序を交換することはできない。しかし、次に示す条件があれば、それは可能である。

〔命題5.22〕 空間Hを、L_2 または $H_M\ (M>N)$ とする。$\mathcal{B}(H)$ における共変対合Ωを生成する等方ユニタリ作用素Uおよび任意の作用素 $A\in\mathcal{B}(L_2)$ に対し

$$U_N\equiv E_N U E_N \qquad (5.118)$$

$$A_N \equiv E_N A E_N \tag{5.119}$$

とおく．もし

$$U_N = U E_N \tag{5.120}$$

または

$$U_N = E_N U \tag{5.121}$$

が成立すれば、U_Nによって生成される$\mathcal{B}(H_N)$の共変対合Ω_Nに対して

$$\Omega_N A_N = E_N(\Omega A)E_N \tag{5.122}$$

が成立する。

（証明）補題5.1、補題5.3よりU_NはH_Nの上の等方ユニタリ作用素になる。従って、U_Nによって生成される共変対合Ω_Nを考えることができる。また、補題5.2より、式(5.120)と(5.121)は互いに同値な式である。そこで、式(5.121)が成立したとすれば、命題4.5と式(5.119)より

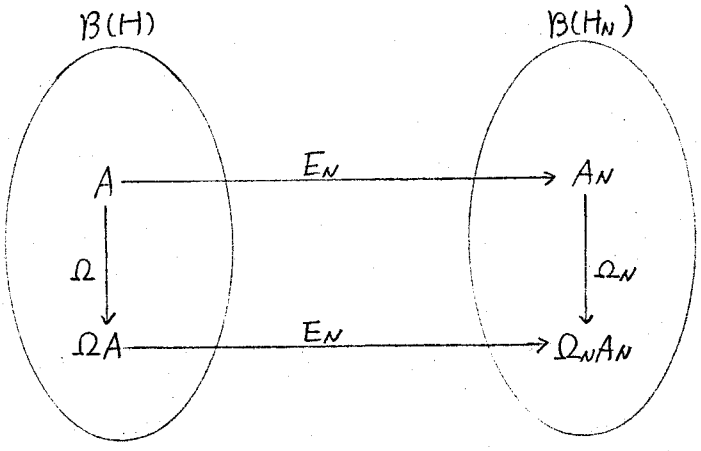
$$\Omega_N A_N = U_N \bar{A}_N U_N^* = (E_N U)(E_N \bar{A} E_N)(E_N U)^*$$

$$= (E_N U E_N)\bar{A}(E_N U E_N)^* = (E_N U)\bar{A}(E_N U)^*$$

$$= E_N(U\bar{A}U^*)E_N = E_N(\Omega A)E_N$$

となり、式(5.122)が成立する。 (Q.E.D)

命題5.22を図に表せば、図5.6のようになる。



十分条件：$U_N = UE_N$ または $U_N = E_N U$

図5.6 命題5.22の説明図

5.6.4 Ω のその他の性質

引続き、共変対合 Ω の数学的性質について論じる。

〔補題 5.9〕 $A \in \mathcal{B}(H)$ に対する次の性質は、Ω によって保存される。

(i) $A^* = \pm A$　　(ii) $A^2 = A$ (べき等)

(iii) A：射影　　(iv) $A \geq 0$

(v) $A^{-1} = A^*$ (ユニタリ)　　(vi) $A^*A = AA^*$ (正規)

〔命題 5.23〕 $A \in \mathcal{B}(H)$ の核 $Ker(A)$ と値域 $R(A)$ に対して次の関係が成立する。

$$Ker(\Omega A) = \omega Ker(A) \tag{5.123}$$

$$R(\Omega A) = \omega R(A) \tag{5.124}$$

(証明) $f \in Ker(\Omega A)$ とすれば

$$(\Omega A) f = 0 \tag{5.125}$$

となる。式(5.125)の両辺の ω をとれば、式(5.95), (5.90) より $A(\omega f) = 0$ となる。従って $\omega f \in Ker(A)$ であり、式(5.16)より $f \in \omega Ker(A)$ となる。

$$\therefore Ker(\Omega A) \subset \omega Ker(A) \tag{5.126}$$

式(5.126), (5.90), (5.16) より

$$\omega ker(A) = \omega Ker(\Omega(\Omega A)) \subset \omega(\omega Ker(\Omega A)) = Ker(\Omega A)$$

$$\therefore \omega Ker(A) \subset Ker(\Omega A) \tag{5.127}$$

式(5.126), (5.127), より式(5.123)が成立する。式(5.124)も同様に証明できる。

(B.E.D)

命題 5.23 で $\Omega = \Omega_e$ とおけば、命題 4.8 になる。命題 5.23 は例えば次のよ

うに応用される。

〔命題 5.24〕 $S_n\ (n=1,2)$ をHの閉じた部分空間とし、Hから S_n への射影作用素を P_n とする。$m,n=1,2$ に対し、次の同値関係が成立する。

$$\omega S_m = S_n \iff \Omega P_m = P_n \tag{5.128}$$

（証明） $\omega S_m = S_n$ とする。補題 5.9 の(iii)より ΩP_m は射影作用素である。しかも式(5.124)より

$$R(\Omega P_m) = \omega R(P_m) = \omega S_m = S_n = R(P_n)$$

であるから、$\Omega P_m = P_n$ となる。逆に $\Omega P_m = P_n$ とすれば、式(5.124)より

$$\omega S_m = \omega R(P_m) = R(\Omega P_m) = R(P_n) = S_n$$

となり、$\omega S_m = S_n$ となる。 (Q.E.D)

このように、部分空間の ω に関する性質が、射影作用素の Ω に関する性質に翻訳できるのである。なお、命題 5.24 で $\Omega = \Omega_e$, $m=n$ とおけば、命題 4.9 になる。

式(4.24)に示したように、$\|A^*\| = \|A\|$ であるが、必ずしも

$$\|A^* f\| = \|A f\| \tag{5.129}$$

は成立しない。全ての $f \in H$ に対して式(5.129)が成立する為の必要十分条件は、Aが正規作用素になること、即ち、

$$A^*A = AA^* \tag{5.130}$$

が成立することである（文献(3), p.267）。

この事実に対応して、次の事柄が成立する。式(5.93)で示したように、$\|\Omega A\| = \|A\|$ であるが、必ずしも

$$\|(\Omega A) f\| = \|A f\| \tag{5.131}$$

は成立しない。全ての $f \in H$ に対して式(5.131)が成立する為の条件は次に示すとうりである。

〔命題 5.25〕 全ての $f \in H$ に対して式(5.131)が成立する為の必要十分条件は、

$$\Omega(A^*A) = A^*A \tag{5.132}$$

が成立することである。

(証明) 式(5.92),(5.91)より

$$\|(\Omega A)f\|^2 - \|Af\|^2 = ((\Omega A^*)(\Omega A)f, f) - (A^*Af, f)$$

$$= ((\Omega(A^*A) - A^*A)f, f)$$

$$\therefore \|(\Omega A)f\|^2 - \|Af\|^2 = ((\Omega(A^*A) - A^*A)f, f) \tag{5.133}$$

となる。しかも、任意の $f \in H$ に対して $(Af, f) = 0$ ならば $A = 0$ である(文献(7), p.379)から、式(5.133)より命題5.25が成立する。 (Q.E.D)

例えば Aがユニタリ作用素ならば

$$A^*A = E \text{ (又は } E_N) \tag{5.134}$$

となるから、式(5.106)より式(5.132)が成立する。従って、$A \in B(H)$ がユニタリ作用素ならば、全ての $f \in H$ に対して式(5.131)が成立する。一方Aがユニタリ作用素ならば、補題5.9の(v)によりΩAもユニタリ作用素になるから

$$\|Af\| = \|f\| = \|(\Omega A)f\| \quad ; f \in H \tag{5.135}$$

と直接式(5.131)を確めることもできる。

命題5.25が主張しているように、全ての $f \in H$ に対して式(5.131)が成立することを要請すれば、$A \in B(H)$ は式(5.132)を満足するものに限られてしまう。しかし、逆にfを次のように制限すれば、全ての $A \in B(H)$ に対して式(5.131)が成立するのである。

〔命題 5.26〕 関数 f が ω の固有関数ならば、全ての $A \in \mathcal{B}(H)$ に対して、式 (5.131) が成立する。

5.7 共変対合の積

これまでは、$\mathcal{B}(H)$ における唯一個の共変対合の性質について論じてきたが、5.7では、いくつかの共変対合 Ω_n ($n=1,2,\cdots$) の積について論じる。Ω_n の生成作用素を、同じ添字を付けて $U^{(n)}$ で表すことにする。

$$\Omega_1\Omega_2 A = (U^{(1)}U^{(2)*})A(U^{(1)}U^{(2)*})^* \tag{5.136}$$

より、偶数個の共変対合の積は、線形作用素になる。特に、Ω_2 または Ω_1 が Ω_e の場合には、

$$\Omega\Omega_e A = UAU^* \tag{5.137}$$

$$\Omega_e\Omega A = U^*AU \tag{5.138}$$

となる。

式 (5.136) より、命題 5.10 に対応する次の命題が成立する。

〔命題 5.27〕 Ω_1 と Ω_2 が可換になるための必要十分条件は、$U^{(1)}U^{(2)*}$ が $*$ の固有元になること、即ち、

$$(U^{(1)}U^{(2)*})^* = \lambda(U^{(1)}U^{(2)*}) \tag{5.139}$$

となる複素数 λ が存在することである。特に Ω と Ω_e が可換になるための必要十分条件は、U が $*$ の固有元になることである。

$$\Omega_1\Omega_2\Omega_3 A = (U^{(1)}U^{(2)*}U^{(3)})\bar{A}(U^{(1)}U^{(2)*}U^{(3)})^* \tag{5.140}$$

より、奇数個の共変対合の積は、半線形作用素にはなるけれども、一般には、

共変対合にならない。

しかし、新しい積$\circ$を、式(5.54)と同じ形式で、

$$\Omega_1 \circ \Omega_2 \equiv \Omega_1 \Omega_2 \Omega_1 \tag{5.141}$$

によって定義すれば、$\Omega_1 \circ \Omega_2$は$U^{(1)} \circ U^{(2)}$によって生成される共変対合になるのである。

例えば、式(5.55)～(5.57)に対応して、

$$\Omega \circ \Omega = \Omega \tag{5.142}$$

$$(\Omega_e \circ \Omega) A = U^* \bar{A} U \tag{5.143}$$

$$(\Omega \circ \Omega_e) A = U^2 \bar{A} (U^2)^* \tag{5.144}$$

となる。即ち、U^*によって生成される共変対合が$\Omega_e \circ \Omega$であり、U^2によって生成される共変対合が$\Omega \circ \Omega_e$である。

このように、Ωに対する新しい積$\circ$と、ωに対する新しい積$\circ$は、丁度対応した演算になっている。従って、当然のことながら、Ωに対する新しい積$\circ$に対しても、結合則は成立しないのである。

次に、二種類の共変対合Ω_1, Ωから生成される各種演算の関係について論じる。図5.2の場合と同様に、図5.7の三角形の各頂点A,B,Cに、それぞれ共変対合$\Omega_1, \Omega, \Omega \circ \Omega_1$を対応させる。各辺AB, BC, CAに、頂点にある共変対合

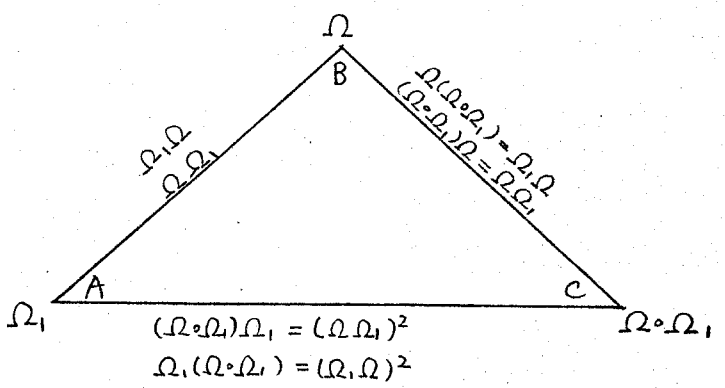


図5.7. B(H)における二種類の共変対合Ω_1, Ωから生成される各種演算の関係.

の積を、対応させる。

$\Omega_1, \Omega, \Omega\circ\Omega_1$ の間には、非常に密接な関係がある。まず、Ω_1 から Ω を経由して、$\Omega\circ\Omega_1$ が得られたが、逆に $\Omega\circ\Omega_1$ から Ω を経由すれば

$$\Omega\circ(\Omega\circ\Omega_1) = \Omega_1 \tag{5.145}$$

より、Ω_1 が得られる。即ち、図5.7で、頂点Aと頂点Cを取換えても良いのである。

これは、次に示すように、普通の積に関しても成立する。

〔補題5.10〕

$$\begin{cases} (\Omega\circ\Omega_1)\Omega = \Omega\Omega_1 & (5.146) \\ \Omega(\Omega\circ\Omega_1) = \Omega_1\Omega & (5.147) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Omega\circ\Omega_1)\Omega_1 = (\Omega\Omega_1)^2 & (5.148) \\ \Omega_1(\Omega\circ\Omega_1) = (\Omega_1\Omega)^2 & (5.149) \end{cases}$$

式(5.146),(5.147)は、図5.7の三角形において、$CB=BA$, $BC=AB$ を意味している。この事実を考慮すれば、式(5.148),(5.149)がそれぞれ、

$$CA = CB\cdot BA \quad , \quad AC = AB\cdot BC \tag{5.150}$$

を意味していることが分かる。つまり、図5.2で ω を Ω に、ω_1 を Ω_1 に置換えれば、図5.7になるのである。

補題5.10より、次の系を得る。

〔系5.6〕次の三条件は、互いに同値である。

(i) $(\Omega\circ\Omega_1)\Omega_1 = \Omega_1(\Omega\circ\Omega_1)$ (5.151)

(ii) $(\Omega_1\circ\Omega)\Omega = \Omega(\Omega_1\circ\Omega)$ (5.152)

(iii) $(\Omega\Omega_1)^2 = (\Omega_1\Omega)^2$ (5.153)

5.8 付録 命題5.16の証明

5.6.1で残しておいた命題5.16の証明を行なう。

(1) まず

$$F \equiv \Omega\Omega_e \tag{5.154}$$

とおけば、Fは$\mathcal{B}(H_N)$からそれ自身への零でない作用素となり、式(5.89), (5.91)～(5.93)に対応して、

$$F(aA_N + bB_N) = aF(A_N) + bF(B_N) \tag{5.155}$$

$$F(A_N B_N) = F(A_N)F(B_N) \tag{5.156}$$

$$F(A_N^*) = F(A_N)^* \tag{5.157}$$

$$\|F(A_N)\| = \|A_N\| \tag{5.158}$$

が成立する。また式(5.90)よりF^{-1}が存在する。

(2) 次に

$$F(E_N) = E_N \tag{5.159}$$

を示す。式(5.156)より、任意の$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$に対して

$$F(A_N)F(E_N) = F(E_N)F(A_N) \tag{5.160}$$

が成立する。F^{-1}が存在するから、Fの値域は$\mathcal{B}(H_N)$である。従って式(5.160)より、$F(E_N)$は$\mathcal{B}(H_N)$の全ての元と可換であるから、補題5.8より

$$F(E_N) = aE_N \tag{5.161}$$

となる。一方式(5.156)より

$$F(E_N)^2 = F(E_N) \tag{5.162}$$

であるから、式(5.161),(5.162)より $a=0$ 又は $a=1$ となる。もし $a=0$ とすれば、式(5.156)より、任意の $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して

$$F(A_N) = F(A_N E_N) = F(A_N)F(E_N) = 0$$

となるから、$F \neq 0$ に矛盾する。よって $a=1$ となり、式(5.159)が成立する。

(3) $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を H_N の任意の正規直交基底とし、

$$P_n \equiv F(<u_n, u_n>) \quad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{5.163}$$

とおく。式(5.157)より

$$P_n^* = F(<u_n, u_n>)^* = F(<u_n, u_n>^*) = F(<u_n, u_n>) = P_n$$

$$\therefore\ P_n^* = P_n \tag{5.164}$$

となる。また、式(5.156),(3.31),(5.155)より

$$\begin{aligned} P_m P_n &= F(<u_m, u_m>)\, F(<u_n, u_n>) \\ &= F(<u_m, u_m><u_n, u_n>) \\ &= F((u_n, u_m)<u_m, u_n>) \\ &= \delta_{m,n} F(<u_n, u_n>) \\ &= \delta_{m,n} P_n \end{aligned}$$

$$\therefore\ P_m P_n = \delta_{m,n} P_n \tag{5.165}$$

となる。式(5.164),(5.165)は、P_n $(n=-N,-N+1,\cdots,N)$ が射影作用素であり、その値域が、互いに直交していることを表している。即ち、

$$W_n \equiv P_n H_N \quad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{5.166}$$

とおけば

$$W_m \perp W_n \quad (m \neq n) \tag{5.167}$$

となっている。

(4) $$E_N = \sum_{n=-N}^{N} <u_n, u_n> \tag{5.168}$$

の両辺のFをとれば、式(5.159), (5.155), (5.163) より

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} P_n \tag{5.169}$$

となる。式(5.166), (5.167), (5.169) より、H_N は

$$H_N = \sum_{n=-N}^{N} \oplus W_n \tag{5.170}$$

と直和分解される。よって

$$\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{rank}(P_n) = \mathrm{rank}(E_N) = 2N+1 \tag{5.171}$$

となる。ところが式(5.163)より

$$F^{-1}(P_n) = <u_n, u_n> \neq 0 \tag{5.172}$$

であるから、$P_n \neq 0$。よって、全ての n に対して $\mathrm{rank}(P_n) \geq 1$ となり、式(5.171)より $\mathrm{rank}(P_n) = 1$ となる。従って、全ての W_n は一次元部分空間である。

(5) さて、$v_0 \in W_0$ で、$\|v_0\| = 1$ なる元 v_0 を一個固定する。この v_0 から、

$$v_n \equiv F(<u_n, u_0>)v_0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N) \tag{5.173}$$

によって $\{v_n\}_{n=-N}^{N}$ を構成する。式(5.173)より

$$\begin{aligned} F(<u_m, u_n>)v_p &= F(<u_m, u_n>)F(<u_p, u_0>)v_0 \\ &= F(<u_m, u_n><u_p, u_0>)v_0 \\ &= F(\delta_{p,n}<u_m, u_0>)v_0 \end{aligned}$$

$$= \delta_{p,n} F(\langle u_m, u_0 \rangle) v_0$$

$$= \delta_{p,n} v_m$$

$$\therefore F(\langle u_m, u_n \rangle) v_p = \delta_{p,n} v_m \tag{5.174}$$

となる。特に

$$F(\langle u_0, u_n \rangle) v_n = v_0 \tag{5.175}$$

が成立する。

式(5.173), (5.158) (3.16) より

$$\| v_n \| = \| F(\langle u_n, u_0 \rangle v_0 \| \leq \| F(\langle u_n, u_0 \rangle) \| \cdot \| v_0 \|$$

$$= \| \langle u_n, u_0 \rangle \| = \| u_n \| \cdot \| u_0 \| = 1$$

$$\therefore \| v_n \| \leq 1 \tag{5.176}$$

となり、式(5.175), (5.158), (3.16) より

$$1 = \| v_0 \| = \| F(\langle u_0, u_n \rangle) v_n \| \leq \| F(\langle u_0, u_n \rangle) \| \cdot \| v_n \|$$

$$= \| \langle u_0, u_n \rangle \| \cdot \| v_n \| = \| u_0 \| \cdot \| u_n \| \cdot \| v_n \| = \| v_n \|$$

$$\therefore \| v_n \| \geq 1 \tag{5.177}$$

となるから

$$\| v_n \| = 1 \tag{5.178}$$

である。また、式(5.163), (5.174) より

$$P_n v_n = v_n \tag{5.179}$$

となるから、$v_n \in W_n$ である。従って式(5.167), (5.178) より

$$(v_m, v_n) = \delta_{m,n} \quad (m, n = -N, -N+1, \cdots, N) \tag{5.180}$$

となり、$\{v_n\}_{n=-N}^{N}$ は H_N の正規直交基底になる。

(6)
$$U_N \equiv \sum_{n=-N}^{N} \langle v_n, u_n \rangle \tag{5.181}$$

とおけば

$$U_N u_n = v_n \qquad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{5.182}$$

である。$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ および $\{v_n\}_{n=-N}^{N}$ は共に、H_N の正規直交基底であるから、式(5.182)より、U_N は H_N の上のユニタリ作用素になる。

(7) 式(5.181),(5.174)より

$$F(\langle u_m, u_n\rangle) U_N = \sum_{p=-N}^{N} F(\langle u_m, u_n\rangle)\langle v_p, u_p\rangle$$

$$= \sum_{p=-N}^{N} \langle F(\langle u_m, u_n\rangle) v_p, u_p\rangle$$

$$= \sum_{p=-N}^{N} \langle \delta_{p,n} v_m, u_p\rangle$$

$$= \langle v_m, u_n\rangle$$

$$\therefore F(\langle u_m, u_n\rangle) U_N = \langle v_m, u_n\rangle \tag{5.183}$$

となる。また式(5.182)より

$$U_N\langle u_m, u_n\rangle = \langle U_N u_m, u_n\rangle = \langle v_m, u_n\rangle$$

$$\therefore U_N\langle u_m, u_n\rangle = \langle v_m, u_n\rangle \tag{5.184}$$

となるから、式(5.183),(5.184)より

$$F(\langle u_m, u_n\rangle) U_N = U_N\langle u_m, u_n\rangle \tag{5.185}$$

となる。U_N はユニタリ作用素であるから、

$$F(\langle u_m, u_n\rangle) = U_N\langle u_m, u_n\rangle U_N^{*} \tag{5.186}$$

が全ての m, n に対して成立する。

任意の $A_N \in B(H_N)$ は、式(4.33)のように $\{\langle u_m, u_n\rangle\}_{m,n=-N}^{N}$ の一次結合で表さ

れるから、式(5.186)より、任意の $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して

$$F(A_N) = U_N A_N U_N^* \tag{5.187}$$

が成立することが分かる。

(8) 式(5.154)より $\Omega = F\Omega_e$ であるから、式(5.187)より

$$\Omega A_N = U_N \bar{A}_N U_N^* \quad : A_N \in \mathcal{B}(H_N) \tag{5.188}$$

即ち、式(5.3)が成立する。

(9) 最後に、式(5.181)で定義された U_N が式(5.99)を満足することを示す。

式(5.90), (5.188)より、任意の $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して

$$A_N = \Omega^2 A_N = U_N(\overline{U_N \bar{A}_N U_N^*})U_N^* = (U_N \bar{U}_N) A_N (\overline{U_N}^* U_N^*)$$

$$\therefore (U_N \bar{U}_N) A_N (U_N \bar{U}_N)^* = A_N \tag{5.189}$$

となる。U_N はユニタリであるから、$U_N \bar{U}_N$ もユニタリになり、

$$(U_N \bar{U}_N) A_N = A_N (U_N \bar{U}_N) \quad : A_N \in \mathcal{B}(H_N) \tag{5.190}$$

が成立する。従って補題5.8より

$$U_N \bar{U}_N = \lambda E_N \tag{5.191}$$

となり、U_N のユニタリ性より

$$\bar{U}_N = \lambda U_N^* \tag{5.192}$$

となる。よって、

$$U_N = \bar{\bar{U}}_N = \overline{(\lambda U_N^*)} = \bar{\lambda}\,\overline{U_N}^* = \bar{\lambda}(\lambda U_N^*)^* = (\bar{\lambda})^2 U_N$$

$$\therefore U_N = (\bar{\lambda})^2 U_N \tag{5.193}$$

となるから $\lambda = \pm 1$ となり、式(5.99)が成立する。 (Q.E.D)

第6節　共変対合に関する固有値問題

前節に引続き、$\mathcal{B}(H)$における共変対合について論じる。特に本節では、共変対合に関する固有値問題、その結果を使った作用素の分解、及び生成作用素Uに、条件$U^2=E$または$U^4=E$が付加された場合の共変対合の性質について論じる。

6.1　共変対合Ωに関する固有値問題

6.1.1　Ωに関する固有値問題

4.4で定義したように、複素共役演算Ω_eの固有値1に対する固有元が実作用素であり、固有値-1に対する固有元が虚作用素であった。本項ではより一般に、共変対合Ωに関する固有値問題について、論じていく。

〔補題 6.1〕複素数λが、共変対合Ωの固有値になるための必要十分条件は、$|\lambda|=1$となることである。

証明は、補題5.5の場合と全く同様にできる。

〔命題 6.1〕Ωの固有値λに対応する固有元の全体をG_λとする：

$$G_\lambda = \{ A \mid \Omega A = \lambda A,\ A \in \mathcal{B}(H) \} \tag{6.1}$$

次の各条件は、互いに同値である。

(i)　$A \in G_\lambda$ (6.2)

(ii)　$iA \in G_{-\lambda}$ (6.3)

(iii)　$\Omega A \in G_{\bar{\lambda}}$ (6.4)

(iv) $A^* \in G_\lambda$ (6.5)

(v) $(Af, g) = \overline{\lambda(A\omega f, \omega g)}$ for all $f, g \in H$ (6.6)

(証明) (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) : (i)が成立したとすれば

$$\Omega(iA) = -i\Omega A = -i\lambda A = (-\lambda)(iA)$$

となり、(ii)が成立する。逆も同様に証明できる。

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) は、式(5.90)から、(i) $\Longleftrightarrow$ (iv)は、式(5.92)から、(i) $\longrightarrow$ (v)は 式(5.18), (5.95) から それぞれ明らかである。

(v) $\longrightarrow$ (i) : (v)が成立したとすれば、任意の $f, g \in H$ に対して

$$(Af, g) = \overline{\lambda(A\omega f, \omega g)} = \overline{\lambda\lambda(A\omega(\omega f), \omega(\omega g))} = |\lambda|^2(Af, g)$$

$$\therefore (Af, g) = |\lambda|^2(Af, g)$$

となり、$|\lambda| = 1$ となる。そこで $\{u_n\}$ を H の正規直交基底とすれば、式(5.111)より

$$\Omega A = \sum_{m,n} \overline{(A\omega u_n, \omega u_m)} \langle u_m, u_n \rangle$$

$$= \sum_{m,n} \lambda (Au_n, u_m) \langle u_n, u_n \rangle$$

$$= \lambda A$$

となり、(i)が成立する。 (Q.E.D)

命題 6.1 の (iii), (iv) より、次の系が成立する。

〔系 6.1〕 Ω の固有集合 G_λ で、Ω 自身に関して閉じているものは、G_1 および G_{-1} であり、しかもそれだけである。

〔系 6.2〕 Ω の固有集合 G_λ で、共役演算 $*$ に関して閉じているものは、G_1 および G_{-1} であり、しかもそれだけである。

〔命題 6.2〕 Ω の固有集合を G_λ とする。$A \in G_\lambda$ の逆 A^{-1} が存在すれば

$A^{-1} \in G_\lambda$ となる。

（証明）補題 6.1 より $|\lambda| = 1$ であるから、命題 5.18 より

$$\Omega(A^{-1}) = (\Omega A)^{-1} = (\lambda A)^{-1} = \bar{\lambda} A^{-1}$$

となり、$A^{-1} \in G_\lambda$ が成立する。 (Q.E.D)

〔系 6.3〕 Ω の固有値 λ に対応する固有集合を G_λ とする。$A \in G_\lambda$, $B \in G_\mu$ ならば $AB \in G_{\lambda\mu}$, $BA \in G_{\lambda\mu}$ である。

6.1.2 Ω の固有集合と ω の固有集合の関係

6.1.1 で述べてきたものは、$B(H)$ における共変対合 Ω の固有集合自身の性質であった。6.1.2 では、Ω に対応する H における実対合 ω の固有集合と、Ω の固有集合の関係について論じる。

〔命題 6.3〕

$$G_\lambda = \{ A \mid \Omega A = \lambda A, \quad A \in B(H) \} \tag{6.7}$$

$$S_\mu = \{ f \mid \omega f = \mu f, \quad f \in H \} \tag{6.8}$$

とおく。$A \in G_\lambda$ となる為の必要十分条件は、

$$A S_\mu \subset S_{\lambda\mu} \tag{6.9}$$

となることである。

（証明）$A \in G_\lambda$ とすれば、任意の $f \in S_\mu$ に対して

$$\omega(Af) = (\Omega A)(\omega f) = \lambda A(\omega f) = \lambda A(\mu f) = \lambda\mu(Af)$$

となり、$Af \in S_{\lambda\mu}$ となる。よって $AS_\mu \subset S_{\lambda\mu}$ が成立する。

逆に、$AS_\mu \subset S_{\lambda\mu}$ が成立したとする。命題 5.12 を使えば、任意の $f \in H$ は、S_μ の元 $f^{(1)}, f^{(2)}$ を使って

$$f = f^{(1)} + i f^{(2)} \tag{6.10}$$

と表される。しかも、仮定により

$$\omega(Af^{(n)}) = \lambda\mu(Af^{(n)}) \quad (n=1,2) \tag{6.11}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\Omega A)f &= (\Omega A)(f^{(1)} + i f^{(2)}) \\ &= (\Omega A)(\bar{\mu}\omega f^{(1)} + i\bar{\mu}\omega f^{(2)}) \\ &= \bar{\mu}\{(\Omega A)(\omega f^{(1)}) + i(\Omega A)(\omega f^{(2)})\} \\ &= \bar{\mu}\{\omega(Af^{(1)}) + i\omega(Af^{(2)})\} \\ &= \lambda|\mu|^2(Af^{(1)} + iAf^{(2)}) \\ &= \lambda A(f^{(1)} + i f^{(2)}) \\ &= \lambda A f\end{aligned}$$

$$\therefore (\Omega A)f = (\lambda A)f \quad ; f \in H \tag{6.12}$$

となり、$A \in G_\lambda$ となる。 (Q.E.D)

証明から分かるように、命題6.3をもう少し厳密に言えば、次のようになる。ある固定したλに対して$A \in G_\lambda$ならば、ωの全ての固有集合S_μに対して、$AS_\mu \subset S_{\lambda\mu}$が成立する。また、ある固定した$\mu$に対して、$AS_\mu \subset S_{\lambda\mu}$が成立すれば、$A \in G_\lambda$となる。なお$AS_\mu \subset S_{\lambda\mu}$は、$S_\mu$の任意の元$f$を$A$で変換すれば、その結果$Af$は常に$S_{\lambda\mu}$に属することを表している。従って、$A \in G_1$ならば、全ての固有集合$S_\mu$が、$A$の不変部分集合になり、また、ある固定した$S_\mu$が、$A$の不変部分集合になっていれば、$A \in G_1$である。

命題6.3で$\Omega = \Omega_e$, $\omega = \omega_e$, $\lambda = 1$, $\mu = \pm 1$ 或いは、$\Omega = \Omega_e$, $\omega = \omega_e$, $\lambda = -1$, $\mu = \pm 1$ とおけば、命題4.11になる。

〔命題 6.4〕 命題6.3と同じ記号を使う。$A \in G_\lambda$ならば、任意のS_μに属する任意のf, gに対して

$$\overline{(Af, g)} = \lambda (Af, g) \qquad (6.13)$$

が成立する。逆に、ある S_μ に属する全ての f, g に対して、式(6.13)が成立すれば、$A \in G_\lambda$ となる。

(証明) $A \in G_\lambda$ とすれば、式(6.6)と補題5.5より、任意の $f, g \in S_\mu$ に対して

$$\overline{(Af, g)} = \lambda(A\omega f, \omega g) = \lambda(A\mu f, \mu g) = \lambda(Af, g)$$

となり、式(6.13)が成立する。逆に式(6.13)が、ある S_μ の任意の元に対して成立したとする。命題5.12より、任意の $f \in H$ は、S_μ の元 $f^{(1)}, f^{(2)}$ を使って式(6.10)のように表されるから

$$\begin{aligned}
((\Omega A)f, f) &= ((\Omega A)(f^{(1)} + i f^{(2)}), f^{(1)} + i f^{(2)}) \\
&= ((\Omega A)f^{(1)}, f^{(1)}) - i((\Omega A)f^{(1)}, f^{(2)}) + i((\Omega A)f^{(2)}, f^{(1)}) + ((\Omega A)f^{(2)}, f^{(2)}) \\
&= \overline{(Af^{(1)}, f^{(1)})} - i\overline{(Af^{(1)}, f^{(2)})} + i\overline{(Af^{(2)}, f^{(1)})} + \overline{(Af^{(2)}, f^{(2)})} \\
&= \lambda\{(Af^{(1)}, f^{(1)}) - i(Af^{(1)}, f^{(2)}) + i(Af^{(2)}, f^{(1)}) + (Af^{(2)}, f^{(2)})\} \\
&= \lambda(A(f^{(1)} + i f^{(2)}), f^{(1)} + i f^{(2)}) \\
&= \lambda(Af, f)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad ((\Omega A - \lambda A)f, f) = 0 \quad : f \in H \qquad (6.14)$$

となる。全ての $f \in H$ に対して $(Af, f) = 0$ ならば $A = 0$ であるから、式(6.14)より $\Omega A = \lambda A$ となり $A \in G_\lambda$ となる。 (Q.E.D)

命題6.4より、ある S_μ に属する任意の f, g に対して式(6.13)が成立すれば、ω の任意の固有集合 S_λ に属する任意の f, g に対して、式(6.13)が成立することが分かる。

命題6.4で $\lambda = \pm 1$ とおけば次の系が成立する。

〔系6.4〕 命題6.3と同じ記号を使う。$A \in G_1$ となるための必要十分条件は、ある S_μ に属する任意の元 f, g に対して、(Af, g) が実数になることである。$A \in G_{-1}$ となるための必要十分条件は、ある S_μ に属する任意の f, g

に対して、(Af, g) が純虚数になることである。

6.1.3　二種類の共変対合の固有集合の関係

補題 6.6 に対応して、次の補題が成立する。

〔補題 6.2〕次の三条件のうち、任意の二個が成立すれば、残りの一個も成立する。

(i) $\Omega_1 A = \lambda A \quad : \lambda = \mu\nu$ (6.15)

(ii) $\Omega A = \mu A \quad : \mu = \nu\lambda$ (6.16)

(iii) $\Omega\Omega_1 A = \nu A \quad : \nu = \bar{\lambda}\mu$ (6.17)

命題 6.11 の場合と同様にして、次の命題を得る。

〔命題 6.5〕Ω, Ω_1 を $\mathcal{B}(H)$ における共変対合とし、$A \in \mathcal{B}(H)$ に対して

$$B = \Omega A \tag{6.18}$$

とおく。

$$\Omega_1 A = \lambda A \tag{6.19}$$

が成立するための必要十分条件は

$$(\Omega \circ \Omega_1) B = \bar{\lambda} B \tag{6.20}$$

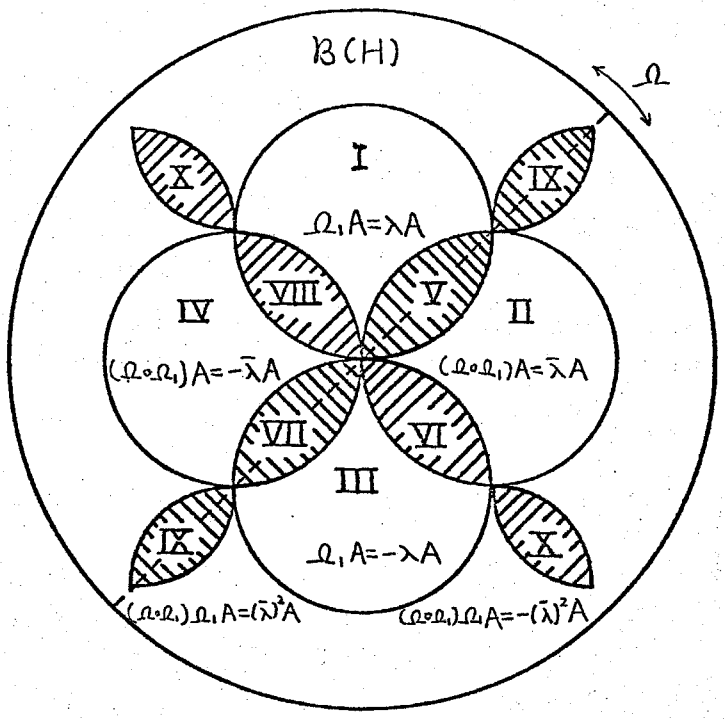
が成立することである。

補題 6.2 と命題 6.5 を図示すれば、図 6.1 のようになる。* 命題 6.5 を考慮すれば、A と ΩA が、図 6.1 の点線に関して対称な領域に属することが分かる。また命題 6.1 より、A と iA は図 6.1 の中心に関して対称な領域に属する。図 6.1 で領域 IX, X が二個所設けてあるのは、この二種類の対称性（線対称と点対称）を保存する為である。

式 (5.137) より、図 6.1 の斜線を施してある領域 (V) と (Vi) は、$\mathcal{B}(H)$ の部分空間である。これに対して、他の領域 (i)～(iv) は、部分空間になっていない。

---

* 補題 6.2 と命題 6.5 を一枚の図に表すために、補題 6.2 で $\mu = \bar{\lambda}$ および Ω が $\Omega \circ \Omega_1$ の場合が、図 6.1 に示してある。なお、図 6.1 は、図 5.4 に対応するものである。



(i) $\Omega_1 A = \lambda A$
(I, V, VIII)

(ii) $\Omega_1 A = -\lambda A$
(III, VI, VII)

(iii) $(\Omega\circ\Omega_1)A = \bar{\lambda}A$
(II, V, VI)

(iv) $(\Omega\circ\Omega_1)A = -\bar{\lambda}A$
(IV, VII, VIII)

(v) $(\Omega\circ\Omega_1)\Omega_1 A = (\bar{\lambda})^2 A$
(V, VII, IX)

(vi) $(\Omega\circ\Omega_1)\Omega_1 A = -(\bar{\lambda})^2 A$
(VI, VIII, X)

(Ωにより点線に関して対称に変換される。)

図 6.1　共変対合に関する各種固有集合の関係.

しかし、6.2で示すように(命題 6.6) (i)～(iv) の中の任意の一個の領域だけで、全空間 B(H) を張るのである。

6.2　共変対合による作用素の分解.

6.2.1　共変対合による作用素の分解

補題 6.7 と同様にして、次の補題を得る.

〔補題 6.3〕

$$\Omega A = \lambda A \quad , \quad \Omega B = \lambda B \qquad (6.21)$$

を満足する $A, B \in B(H)$ に対して.

$$A + \lambda B = 0 \tag{6.22}$$

ならば $A = B = 0$ である。

補題6.3で $\Omega = \Omega_e$, $\lambda = 1$ とおいたものが 補題4.3である。

補題6.3を使えば、命題6.12の場合と同様にして、次の命題を得る。

〔命題 6.6〕 λ を絶対値1の複素数とする。任意の $A \in B(H)$ は、

$$\Omega_1 A^{(n)} = \lambda A^{(n)} \quad (n=1,2) \tag{6.23}$$

なる元 $A^{(n)}$ $(n=1,2)$ を使って

$$A = A^{(1)} + \lambda A^{(2)} \tag{6.24}$$

と一意に分解される。そして $A^{(n)}$ は、

$$A^{(1)} = \frac{1}{2}(A + \overline{\lambda}\Omega_1 A), \quad A^{(2)} = \frac{1}{2\lambda}(A - \overline{\lambda}\Omega_1 A) \tag{6.25}$$

と表される。

式(5.79)で、f を A に、ω_1 を Ω_1 に変換したものが、式(6.25)である。

命題6.6で $\Omega_1 = \Omega_e$, $\lambda = 1$ と置けば、命題4.15になる。

命題6.6で $\lambda = 1$ と置けば、系6.4から分かるように、Ω_1 に対応する実対合 ω_1 の固有集合のいずれかに属している元 f に対して、二次形式 $(A^{(n)}f, f)$ $(n=1,2)$ が実数になる。そこで、この $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ を、それぞれ A の Ω_1-実部、Ω_1-虚部と呼ぶことにする。そして、式(6.24)の分解を、A の Ω_1-実分解と呼ぶ。4.7で述べたように、単に実分解といえば、Ω_e-実分解のことである。

6.2.2 共変対合による作用素の分解と作用素の縮小

空間 H を、L_2 または H_M $(M>N)$ とする。$A \in B(H)$ が与えられたとき、式(5.119)によって A_N を求め、その後で、命題6.6のように分解した場合と、最初に、命題6.6に従って $A^{(n)}$ $(n=1,2)$ を求め、その後でこれらの作用素を、式(5.119)

によって縮少した場合と、果して同じ結果が得られるであろうか。6.2.2ではこの問題を考える。

〔 補題 6.4 〕 空間Hを、L_2 または $H_M (M>N)$ とする。$\mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B}(H_N)$ における共変対合を Ω_1, Ω とし、対応する実対合を ω_1, ω とする。$A \in \mathcal{B}(H)$, $B_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して

$$\Omega B_N = E_N (\Omega_1 A) E_N \tag{6.26}$$

が成立するための必要十分条件は、任意の $f, g \in H_N$ に対して、

$$(B_N \omega f, \omega g) = (A \omega_1 f, \omega_1 g) \tag{6.27}$$

が成立することである。

（証明） 式(6.26)が成立したとすれば、任意の $f, g \in H_N$ に対して

$$(B_N \omega f, \omega g) = \overline{(\omega B_N \omega f, g)} = \overline{(\Omega B_N f, g)}$$

$$= \overline{(E_N (\Omega_1 A) E_N f, g)} = \overline{(\Omega_1 A f, g)}$$

$$= \overline{(\omega_1 A \omega_1 f, g)} = (A \omega_1 f, \omega_1 g)$$

となり、式(6.27)が成立する。逆に、式(6.27)が、任意の $f, g \in H_N$ に対して成立したとすれば、H_N の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ に対して

$$(\Omega B_N u_n, u_m) = \overline{(B_N \omega u_n, \omega u_n)}$$

$$= \overline{(A \omega_1 u_n, \omega_1 u_m)}$$

$$= (\Omega_1 A u_n, u_m)$$

$$\therefore (\Omega B_N u_n, u_m) = (\Omega_1 A u_n, u_m) \tag{6.28}$$

となるから、命題3.1より式(6.26)が成立する。 (Q.E.D)

式(6.27)において、たとえ $f \in H_N$ であっても、一般には $\omega_1 f \in H_N$ であ

ることを注意しておく。

〔命題 6.7〕 補題6.7と同じ記号を使う。$A \in B(H)$ に対して

$$A_N = E_N A E_N \tag{6.29}$$

とおき、A, A_N の Ω_1, Ω による分解(命題6.6)をそれぞれ $A^{(n)}, A_N^{(n)}$ $(n=1,2)$ とする。次の各条件は互いに同値である。

(i) $A_N^{(n)} = E_N A^{(n)} E_N \quad (n=1,2)$ (6.30)

(ii) $(A_N^{(n)} \omega f, \omega g) = (A^{(n)} \omega_1 f, \omega_1 g) \quad (n=1,2;\ \forall f, g \in H_N)$ (6.31)

(iii) $\Omega A_N = E_N (\Omega_1 A) E_N$ (6.32)

(証明) (ii)が成立したとすれば、補題6.4より

$$\Omega A_N^{(n)} = E_N (\Omega_1 A^{(n)}) E_N \quad (n=1,2) \tag{6.33}$$

となるから、式(6.24)より

$$\begin{aligned}
\Omega A_N &= \Omega (A_N^{(1)} + i A_N^{(2)}) = \Omega A_N^{(1)} - i \Omega A_N^{(2)} \\
&= E_N (\Omega_1 A^{(1)}) E_N - i E_N (\Omega_1 A^{(2)}) E_N \\
&= E_N (\Omega_1 A^{(1)} - i \Omega_1 A^{(2)}) E_N \\
&= E_N (\Omega_1 (A^{(1)} + i A^{(2)})) E_N \\
&= E_N (\Omega_1 A) E_N
\end{aligned}$$

となり、(iii)が成立する。他も同様に証明できる。 (Q.E.D)

式(4.30)から分かるように、式(6.32)が $\Omega_1 = \Omega_e$, $\Omega = \Omega_e$ に対して成立している。従って、式(6.30)が、Aの実分解に対して成立していることが分かる。これは、命題4.16に他ならない。

命題6.7と命題6.22より、次の命題が成立する。

〔 命題 6.8 〕 空間Hを、L_2 または $H_M (M>N)$ とする。$\mathcal{B}(H)$ の等方ユニタリ作用素Uに対して、

$$U_N \equiv E_N U E_N \tag{6.34}$$

とおくとき

$$U_N = U E_N \tag{6.35}$$

または

$$U_N = E_N U \tag{6.36}$$

が成立したとする。U および U_N によって生成される $\mathcal{B}(H)$ および $\mathcal{B}(H_N)$ の共変対合を、Ω および Ω_N とする。$A \in \mathcal{B}(H)$ の式(6.29)による縮少を A_N とし、A, A_N の Ω, Ω_N による分解(命題 6.6)をそれぞれ $A^{(n)}, A_N^{(n)}$ $(n=1,2)$ とすれば"

$$A_N^{(n)} = E_N A^{(n)} E_N \quad (n=1,2) \tag{6.37}$$

が成立する。

(証明) 補題 6.2 より式(6.35)と(6.36)は互いに同値な式である。これらの式のどちらかが成立すれば、命題 6.22 の証明でも述べたように、U_N は H_N の上の等方ユニタリ作用素になり、Ω_N を考えることができる。そして、命題 6.22 より式(6.122)が成立するから、命題 6.7 より式(6.37)が成立する。
(Q.E.D)

6.2.3 共変対合の固有集合の性質

命題 6.6 は、任意に固定した共変対合 Ω_1 の、任意に固定した固有値入に対応する固有集合 $\mathfrak{S}_\lambda$ の元を使って、任意の作用素 $A \in \mathcal{B}(H)$ が、式(6.24)の形に表現できることを表している。この固有集合 $\mathfrak{S}_\lambda$ が、共変対合 Ω に関して閉じる為の条件について論じる。まず命題 6.13 に対応して、次の命題が成立する。

〔 命題 6.9 〕 共変対合 Ω_1 の固有値入に対応する固有集合を $\mathfrak{S}_\lambda$ とする:

$$\mathfrak{S}_\lambda \equiv \{ A \mid \Omega_1 A = \lambda A,\ A \in \mathcal{B}(H) \} \tag{6.38}$$

Ωを任意の共変対合とするとき、次の各条件は、互いに同値である。

(i) $\Omega G_\lambda = G_\lambda$　　(ii) $\Omega G_{-\lambda} = G_{-\lambda}$

(iii) $\Omega_1 \circ \Omega = \lambda^2 \Omega$　　(iv) $\Omega \circ \Omega_1 = \overline{\lambda^2} \Omega_1$

(v) $\Omega_1 \Omega = \lambda^2 \Omega \Omega_1$

証明は、命題6.13の場合と全く同様にできるので省略する。命題6.9の(i)は、G_λがΩに関して閉じていることを表し、(ii)は$G_{-\lambda}$がΩに関して閉じていることを表している。(v)から　次の系が成立する。

〔系　6.5〕Ω_1の固有集合G_λで、Ω_1自身に関して閉じているものは、G_1およびG_{-1}であり、しかもそれだけである。

命題6.9で特に$\lambda = 1$とおけば、次の系が成立する。

〔系　6.6〕命題6.9と同じ記号のもとで、次の各条件は互いに同値である。

(i) $\Omega G_1 = G_1$　　(ii) $\Omega G_{-1} = G_{-1}$

(iii) $\Omega_1 \circ \Omega = \Omega$　　(iv) $\Omega \circ \Omega_1 = \Omega_1$

(v) $\Omega_1 \Omega = \Omega \Omega_1$

つまり、Ω_1の固有集合G_1およびG_{-1}がΩに関して閉じるための必要十分条件は、ΩとΩ_1が可換になることである。なお、この可換性の条件を、共変対合の生成作用素で表現したものが、命題6.27である。系6.6で特に$\Omega_1 = \Omega e$とおき命題6.27を使えば、次の系を得る。

〔系　6.7〕次の各条件は、互いに同値である。

(i) Ωは実作用素を実作用素に変換する。

(ii) Ω は虚作用素を虚作用素に変換する。

(iii) $\Omega\Omega_e = \Omega_e\Omega$ (6.39)

(iv) $U^* = \lambda U \quad (|\lambda|=1)$ (6.40)

Ω と Ω_e の可換性については、命題6.30でもう一度論じる。

系6.5～系6.7は、それぞれ系5.2～系5.4に対応するものである。系5.4の(iv)が $U^*=U$ であるのに対して、系6.7の(iv)は、$U^*=\lambda U$ となり、$\lambda(|\lambda|=1)$ だけの自由度が残っている。これは、命題5.3と命題5.17の違いによるものである。即ちωの生成作用素はωに対して一意に決ったけれども、Ω に対しては、命題5.17が示しているように、絶対値1の定数倍の自由度が残っていたのであり、その影響が系6.7の(iv)に現れているのである。

〔命題 6.10〕 Ω_1, Ω_2 の固有値λに対応する固有集合を、それぞれ $G_\lambda^{(1)}$, $G_\lambda^{(2)}$ とする。

$$\Omega_2 G_\lambda^{(1)} = G_\lambda^{(1)} \tag{6.41}$$

が成立するための必要十分条件は、

$$\Omega_1 G_\mu^{(2)} = G_\mu^{(2)} \tag{6.42}$$

が成立することである。ここで $\mu=\bar{\lambda}$ または $\mu=-\bar{\lambda}$ である。

証明は、命題5.14の場合と全く同様にできるので省略する。命題6.10を図6.1を使って説明すれば、次のようになる。もし領域(i),(ii)が $\Omega\cdot\Omega_1$ に関して閉じていれば、領域(iii),(iv)はΩに関して閉じており、逆もまた成立する。

6.3 共変対合Ωと共役演算$*$の積$\Omega*$に関する固有値問題

6.3.1 $\Omega*$に関する固有値問題

6.3では、共変対合Ωと共役演算$*$の積$\Omega*$に関する固有値問題について論じる。4.5で導入した等方作用素、反等方作用素は、$\Omega=\Omega_e$の場合、即ち、

Ω_e*の固有値1および−1に対応する固有元であった。従って、以下で述べる事柄は、等方作用素、反等方作用素に対してもそのまま成立するのである。

まず、式(5.92)より補題6.1に対応する次の補題が成立する。

〔補題6.5〕複素数λがΩ*の固有値になるための必要十分条件は、$\lambda = \pm 1$になることである。

絶対値1の全ての複素数がΩの固有値になったのに対して、Ω*の固有値は、補題6.5が主張しているように、$\lambda = \pm 1$の二個に限られるのである。

作用素の普通のノルム(式(3.18))に関して、$\mathcal{B}(H)$はBanach空間になっている(文献(1), p276, 305)。そして式(5.89), (5.93), (4.20), (4.24)から分かるように、Ω*はこのBanach空間$\mathcal{B}(H)$の上の有界線形作用素になっている。従って、Ω*の固有値λに対応する固有元の全体(零作用素も含める)$\mathcal{G}_\lambda$は、$\mathcal{B}(H)$の閉じた部分空間になる。

命題6.1に対応して、次の命題が成立する。

〔命題6.11〕Ω*の固有値λ(=±1)に対応する固有空間を$\mathcal{G}_\lambda$とする:

$$\mathcal{G}_\lambda \equiv \{ A \mid \Omega A^* = \lambda A, \ A \in \mathcal{B}(H) \} \tag{6.43}$$

次の各条件は、互いに同値である.

(i) $A \in \mathcal{G}_\lambda$ (6.44)

(ii) $\Omega A \in \mathcal{G}_\lambda$ (6.45)

(iii) $A^* \in \mathcal{G}_\lambda$ (6.46)

(iv) $(Af, g) = \lambda(Aw g, wf)$ for all $f, g \in H$ (6.47)

証明は、命題6.1の場合と同様にできる。

命題6.11の(i)~(iii)は、Ω*の固有空間$\mathcal{G}_\lambda$($\lambda = \pm 1$)が、Ωおよび*に関して閉じていることを表している。

命題6.11の(i)~(iii)で$\Omega = \Omega_e$とおけば系4.5になる。

命題6.2 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 6.12〕 Ω^*の固有値λに対応する固有空間を$\mathcal{G}_\lambda$とする。$A\in\mathcal{G}_\lambda$の逆A^{-1}が存在すれば、$A^{-1}\in\mathcal{G}_\lambda$となる。

式(4.22), (5.91)より系6.3に対応する次の系を得る。

〔系 6.8〕 Ω^*の固有値λに対応する固有空間を$\mathcal{G}_\lambda$とし、$A\in\mathcal{G}_\lambda$, $B\in\mathcal{G}_\mu$とする。積ABがΩ^*の固有元になるための必要十分条件は

$$AB=\nu BA \quad (\nu=\pm 1) \tag{6.48}$$

が成立することであり、このとき$AB\in\mathcal{G}_{\lambda\mu\nu}$となる。

系6.3に示したように、Ωの固有元の積は、再びΩの固有元になった。ところが、系6.8が主張しているように、Ω^*の固有元A, Bの積は、AとBが式(6.48)で与えられる交換関係を満足していない限り、Ω^*の固有元にはならないのである。これは、式(4.22)で示したように、$(AB)^*=B^*A^*$と、*をとる前と後ではAとBの順序が逆になることによるものである。

〔系 6.9〕

$$\mathcal{G}_\lambda\equiv\{A\mid \Omega A^*=\lambda A,\ A\in\mathcal{B}_2(H)\} \tag{6.49}$$

とする。$A\in\mathcal{G}_1$かつ$B\in\mathcal{G}_{-1}$ならば直交関係$(A,B)=0$が成立する。

(証明) $A\in\mathcal{G}_1$, $B\in\mathcal{G}_{-1}$とすれば、式(3.28), (5.108)より

$$(A,B)=(\Omega A^*,\Omega B^*)=(A,-B)=-(A,B)$$

となり $(A,B)=0$ となる。 (Q.E.D)

系6.9で $H=H_N$, $\Omega=\Omega_e$ とおけば、命題4.14になる。

6.3.2 Ω^*の固有空間の性質

Ω^*の固有空間とωの固有集合の関係を調べる前に、命題6.3の逆の問題と

考える。即ち、命題6.3では、Ωの固有集合がAに関して閉じるための条件を求めたが、逆にAの固有空間がΩに関して閉じるための条件を、明らかにする。

まず、式(6.95)より、次の補題が成立する。

〔補題 6.6〕 $A \in \mathcal{B}(H)$に対して 次の二式は互いに同値である。

$$Af = \lambda f \tag{6.50}$$

$$(\Omega A)(\omega f) = \overline{\lambda}(\omega f) \tag{6.51}$$

つまり、fがAの固有値λに対応する固有関数ならば、ωfはΩAの固有値$\overline{\lambda}$に対応する固有関数になり逆もまた成立するのである。

〔命題 6.13〕 正規作用素 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$の固有空間を

$$S_\lambda \equiv \{ f \mid A_N f = \lambda f,\ f \in H_N \} \tag{6.52}$$

とし、S_λ への射影作用素を P_λ とする。次の各条件は、互いに同値である。

(i) $\Omega A_N^* = \lambda A_N$ (6.53)

(ii) A_Nの全ての固有値μに対して

$$\omega S_\mu = S_{\lambda\mu} \tag{6.54}$$

となるような複素数λが存在する。

(iii) A_Nの全ての固有値μに対して

$$\Omega P_\mu = P_{\lambda\mu} \tag{6.55}$$

となるような複素数λが存在する。

(証明) (ii)$\longleftrightarrow$(iii)：命題5.24より明らかである。

(ii)$\longrightarrow$(i)：A_Nは正規作用素であるから、任意の$f \in H_N$は、

$$f = \sum_\mu f_\mu \quad : f_\mu \in S_\mu \tag{6.56}$$

と表される。$f_\mu \in S_\mu$ に (ii) を適用すれば

$$A_N(\omega f_\mu) = \lambda\mu(\omega f_\mu) \tag{6.57}$$

となるから、補題 6.6 より

$$(\Omega A_N) f_\mu = \overline{\lambda\mu}\, f_\mu \tag{6.58}$$

となる。更に A_N の正規性と式(5.92)より

$$(\Omega A_N^*) f_\mu = \lambda\mu f_\mu \tag{6.59}$$

となるから(文献(2), p.160)、式(6.56), (6.59) と $f_\mu \in S_\mu$ より

$$(\Omega A_N^*) f = \sum_\mu (\Omega A_N^*) f_\mu = \sum_\mu \lambda\mu f_\mu = \lambda \sum_\mu A_N f_\mu$$

$$= \lambda A_N \sum_\mu f_\mu = \lambda A_N f$$

$$\therefore (\Omega A_N^*) f = (\lambda A_N) f \quad : f \in H_N \tag{6.60}$$

となり、(i) が成立する。

(i) ⟶ (ii): $f \in S_\mu$ とすれば、A_N は正規作用素であるから

$$A_N^* f = \bar{\mu} f \tag{6.61}$$

となる。よって、式(5.13), (6.61) と補題 6.5 から

$$A_N(\omega f) = \omega^2 (A_N \omega f) = \omega(\Omega A_N) f = \omega(\lambda A_N^*) f$$

$$= \lambda\omega(A_N^* f) = \lambda\omega(\bar{\mu} f) = \lambda\mu(\omega f)$$

となり、$\omega f \in S_{\lambda\mu}$ となる。

$$\therefore \omega S_\mu \subset S_{\lambda\mu} \tag{6.62}$$

次に $f \in S_{\lambda\mu}$ とすれば、$\lambda^2 = 1$ であるから式(6.62)より $\omega f \in S_{\lambda(\lambda\mu)} = S_\mu$ と

なるから　$f = \omega(\omega f) \in \omega S_\mu$　となり

$$S_{\lambda\mu} \subset \omega S_\mu \tag{6.63}$$

(Q.E.D)

となる。式(6.62),(6.63)より(ii)が成立する。

命題6.13より、式(6.54),(6.55)が全てのμに対して成立するような複素数λが存在するとすれば、それは$\lambda = \pm 1$に限られることが分かる。$\lambda = 1$の場合が、A_Nの固有空間S_μがωに関して閉じている場合である。

命題6.13で、$\Omega = \Omega_e$, $\omega = \omega_e$とおけば、次の系が成立する。

〔系 6.10〕命題6.13と同じ条件のもとで、次の各条件は互いに同値である。

$$\text{(i)}\quad \overline{A_N}^* = \pm A_N \tag{6.64}$$

$$\text{(ii)}\quad \overline{S}_\lambda = S_{\pm\lambda} \qquad \text{for all } \lambda \tag{6.65}$$

$$\text{(iii)}\quad \overline{P}_\lambda = P_{\pm\lambda} \qquad \text{for all } \lambda \tag{6.66}$$

但し、複号同順であり、$\overline{S}_\lambda$はS_λの元の複素共役元の全体である。

系6.10から、次のことが分かる。正規作用素$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$の全ての固有空間が、複素共役演算ω_eに関して閉じていれば、A_Nは等方作用素になり、逆もまた成立する。複素数λが反等方正規作用素A_Nの固有値ならば、$-\lambda$もA_Nの固有値になる。更に、零でない固有値λに対応する固有空間S_λには、実数値関数も純虚数値関数も含まれない。

命題6.13の証明から分かるように、A_Nの定義域が有限次元空間であるという条件を使ったのは、(ii)⟶(i)だけである。従って、命題6.13および系6.10において、(i)⟶(ii)⟷(iii)は$\mathcal{B}(L_2)$の元に対しても、そのまま成立するのである。

命題6.4に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 6.14〕

$$S_\mu \equiv \{ f \mid \omega f = \mu f \ , \ f \in H \} \tag{6.67}$$

とする。

$$\Omega A^* = \lambda A \tag{6.68}$$

ならば、任意の S_μ に属する任意の f, g に対して

$$(Af, g) = \lambda (Ag, f) \tag{6.69}$$

が成立する。逆に、ある S_μ に属する任意の f, g に対して式(6.69)が成立すれば、式(6.68)が成立する。

証明は、命題6.4の場合と同様にできる。

命題6.14より次のことが分かる。ω の固有集合の任意の一個に属する全ての元 f, g に対して式(6.69)が成立すれば、他の任意の固有集合に属する全ての元 f, g に対して式(6.69)が成立する。

命題6.14で、$\lambda = -1$, $g = f$ とおけば、次の系が成立する。

〔系6.11〕命題6.14と同じ記号を使う。$\Omega A^* = -A$ ならば、任意の S_μ に属する任意の元 f に対して、直交関係 $(Af, f) = 0$ が成立する。

例えば、微分作用素 D_N

$$(D_N f)(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad : f \in H_N \tag{6.70}$$

は反等方作用素であるから 命題6.14 および系6.11 で $\Omega = \Omega_e$ とおけば、任意の実関数 $f, g \in H_N$ に対して

$$(D_N f, g) = -(D_N g, f) \tag{6.71}$$

$$(D_N f, f) = 0 \tag{6.72}$$

が成立する。式(6.71)は部分積分の公式であり、式(6.72)は、$f(x)$ と $df(x)/dx$ が直交するということであり、いずれも良く知られている事柄である。

6.3.3　Ω^* の固有空間と Ω_1^* の固有空間の関係

補題 6.2 及び補題 6.6 に対応して、次の補題が成立する。

〔補題 6.7〕次の三条件のうち、任意の二個が成立すれば、残りの一個も成立する。

(i) $\Omega_1 A^* = \lambda A$: $\lambda = \mu\nu$ (6.73)

(ii) $\Omega A^* = \mu A$: $\mu = \nu\lambda$ (6.74)

(iii) $\Omega\Omega_1 A = \nu A$: $\nu = \lambda\mu$ (6.75)

6.5.1 で示すように、$\Omega\Omega_1$ の固有値 ν の絶対値は 1 であるが、必ずしも $\nu = \pm 1$ にはならない。ところが、補題 6.7 から分かるように、もし (iii) と (i)、或いは (iii) と (ii) が同時に成立すれば、$\nu = \pm 1$ になってしまう。従って、$\Omega\Omega_1$ の $\nu = \pm 1$ 以外の固有値に対応する固有元は、決して Ω^* あるいは Ω_1^* の固有元になることはないのである。

命題 6.5 および命題 6.9 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 6.15〕Ω, Ω_1 を $\mathcal{B}(H)$ における共変対合とし、$A \in \mathcal{B}(H)$ に対して、

$$B \equiv \Omega A \tag{6.76}$$

とおく。

$$\Omega_1 A^* = \lambda A \tag{6.77}$$

が成立するための必要十分条件は、

$$(\Omega \cdot \Omega_1) B^* = \lambda B \tag{6.78}$$

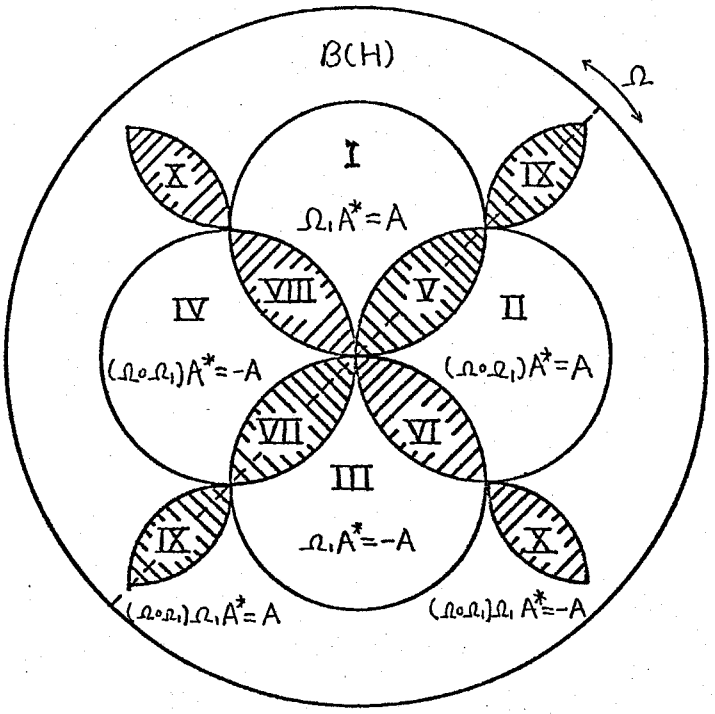
が成立することである。

補題 6.7 と命題 6.15 を図示すれば、図 6.2 のようになる。* 命題 6.15 を考慮すれば、A と ΩA が、図 6.2 の点線に関して対称な領域に属することが分かる。図 6.2 で領域 Ⅱ が二個所設けてあるのは、この対称性を保存するためである。**

---

* 補題 6.7 と命題 6.15 を一枚の図に表すために、補題 6.7 で Ω が $\Omega \cdot \Omega_1$ の場合が図 6.2 に示してある。なお、図 6.2 は 図 6.1 および図 5.4 に対応するものである。

** 図 6.3 で領域 Ⅱ が二個所設けてあるのは、図の美しさを保つためである。



(i) $\Omega_1 A = A$
(I, V, VIII)

(ii) $\Omega_1 A^* = -A$
(III, VI, VII)

(iii) $(\Omega\circ\Omega_1)A^* = A$
(II, V, VI)

(iv) $(\Omega\circ\Omega_1)A^* = -A$
(IV, VII, VIII)

(v) $(\Omega\circ\Omega_1)\Omega_1 A^* = A$
(V, VII, IX)

(vi) $(\Omega\circ\Omega_1)\Omega_1 A^* = -A$
(VI, VIII, X)

(Ωにより、点線に関して対称に変換される)

図6.2 共変対合と共役演算に関する各種固有空間の関係

6.4 共変対合 Ω_1 と共役演算 $*$ の積 Ω_1* による作用素の分解

6.4.1 Ω_1* による作用素の分解

補題6.3 および補題6.7 に対応して、次の補題が成立する。

〔補題 6.8〕

$$\mathcal{G}_\lambda \equiv \{A \mid \Omega_1 A^* = \lambda A,\ A \in \mathcal{B}(H)\} \quad (\lambda = \pm 1) \qquad (6.79)$$

とすれば $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_{-1} = \{0\}$ となる。

(証明) $A \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_{-1}$ とすれば $A = \Omega_1 A^* = -A$ となり $A = 0$ となる。

(Q.E.D)

〔命題 6.16〕 $\Omega_1 *$ の固有値 λ に対応する固有空間を $\mathcal{G}_\lambda$ とする。任意の $A \in \mathcal{B}(H)$ は、$\mathcal{G}_\lambda$ の元 $A^{(\lambda)}$ $(\lambda = \pm 1)$ を使って

$$A = A^{(1)} + A^{(-1)} \tag{6.80}$$

と一意に分解される。そして $A^{(\lambda)}$ は、

$$A^{(\lambda)} = \frac{1}{2}(A + \lambda \Omega_1 A^*) \qquad (\lambda = \pm 1) \tag{6.81}$$

と表される。

証明は、命題6.6の場合と同様にできる。

つまり、$\mathcal{B}(H)$ は、$\Omega_1 *$ の固有空間 $\mathcal{G}_\lambda$ $(\lambda = \pm 1)$ を使って

$$\mathcal{B}(H) = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_{-1} \tag{6.82}$$

と直和分解されるのである。命題6.16および式(6.82)で $\Omega_1 = \Omega_e$ とおけばそれぞれ命題4.18および系4.7になる。

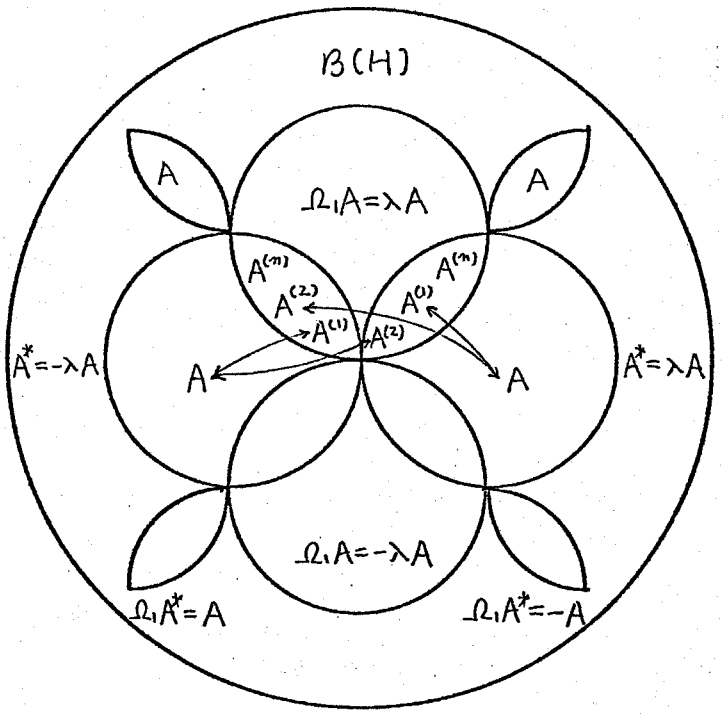
命題5.12および命題6.6では、

$$f = f^{(1)} + i f^{(2)} \quad ; \quad \omega_1 f^{(n)} = \lambda f^{(n)} \tag{6.83}$$

$$A = A^{(1)} + i A^{(2)} \quad ; \quad \Omega_1 A^{(n)} = \lambda A^{(n)} \tag{6.84}$$

と、$f^{(2)}$ および $A^{(2)}$ の前に i がついていたのに対して、式(6.80)では、$A^{(-1)}$ の前に i がついていない。また、式(6.83),(6.84)では、$f^{(1)}$ と $f^{(2)}$ および $A^{(1)}$ と $A^{(2)}$ が同じ固有集合に属していたのに対して、式(6.80)では、$A^{(1)}$ と $A^{(-1)}$ が異なる固有空間に属している。これは、ω_1 および Ω_1 が非線形作用素であって、ω_1 或いは Ω_1 の固有値 λ に対応する固有元の全体が線形空間にならないのに対して、$\Omega_1 *$ が線形作用素であり、$\Omega_1 *$ の固有値 λ に対応する固有元の全体が線形空間になるという違いによるものである。

命題6.6で与えた Ω_1 による分解が、同時に $\Omega_1 *$ による分解になったり式(4.89)で与えた自己共役分解になることがある。そのための条件を、図6.3



$A=A^{(1)}+iA^{(2)}$:

$\Omega_1 A^{(\eta)}=\lambda A^{(\eta)}$ $(\eta=1,2)$

$\longleftrightarrow$: 必要十分条件

図 6.3　Ω_1 による作用素の分解

に示す。図6.3で $\Omega_1=\Omega_e$, $\lambda=1$ とおけば 図4.7になり、これは実分解が同時に等方分解になるための条件を表している。

6.4.2　共変対合と共役演算の積による作用素の分解と作用素の縮方

空間Hを、L_2 または $H_M(M>N)$ とする。$A\in B(H)$ が与えられたとき式(6.29)によって A_N を求めて、その後で命題6.16のように分解した場合と、最初に命題6.16に従って $A^{(\lambda)}(\lambda=\pm1)$ を求め、その後でこれらの作用素を式(6.29)によって縮方した場合と、果して同じ結果が得られるであろうか。6.4.2.では、この問題と考える。

〔命題6.17〕空間Hを、L_2 または $H_M(M>N)$ とする。$B(H), B(H_N)$ における共変対合を Ω_1, Ω とし、対応するH, H_N における実対合を ω_1, ω とする。

$A \in \mathcal{B}(H)$ の式(6.29)による縮少を A_N とし A, A_N の $\Omega_1 *$, $\Omega *$ による分解(命題6.16)を、それぞれ $A^{(\lambda)}$, $A_N^{(\lambda)}$ $(\lambda = \pm 1)$ とする。次の各条件は、互いに同値である。

(i) $A_N^{(\lambda)} = E_N A^{(\lambda)} E_N \quad (\lambda = \pm 1)$ (6.85)

(ii) $(A_N^{(\lambda)} \omega f, \omega g) = (A^{(\lambda)} \omega_1 f, \omega_1 g) \quad (\lambda = \pm 1 ; \forall f, g \in H_N)$ (6.86)

(iii) $\Omega A_N = E_N (\Omega_1 A) E_N$ (6.87)

証明は、命題6.7の場合と同様にできる。

式(4.30)より、式(6.87)が $\Omega_1 = \Omega e$, $\Omega = \Omega e$ に対して成立している。従って式(6.85)が、A の等方分解に対して成立することが分かる。これは、命題4.19に他ならない。

命題6.17の(iii)は、命題6.7の(iii)と全く同じ条件である。従って、$\Omega_1 *$ による A の分解と、式(6.29)による A の縮少の順序の交換が許されれば、同時に、Ω_1 による A の分解と A の縮少の順序の交換も許され、逆も成立するのである。

従って、命題6.8に対応して、次の命題が成立する。

〔命題6.18〕 命題6.8と同じ条件、同じ記号のもとで、A, A_N の $\Omega *$, $\Omega_N *$ による分解(命題6.16)と、それぞれ $A^{(\lambda)}$, $A_N^{(\lambda)}$ $(\lambda = \pm 1)$ とすれば、式(6.85)が成立する。

6.4.3 $\Omega_1 *$ の固有空間の性質

命題6.9および命題6.13に対応して、次の命題が成立する。

〔命題6.19〕 $\Omega_1 *$ の固有値 λ に対応する固有空間を $\mathcal{G}_\lambda$ とする:

$$\mathcal{G}_\lambda \equiv \{ A \mid \Omega_1 A^* = \lambda A, \ A \in \mathcal{B}(H) \}, \quad (\lambda = \pm 1) \tag{6.88}$$

Ω を任意の共変対合とするとき、次の各条件は、互いに同値である。

(i) $\Omega G_\lambda = G_\lambda$ $(\lambda = \pm 1)$ (ii) $\Omega G_\lambda^* = G_\lambda$ $(\lambda = \pm 1)$

(iii) $\Omega_1 \circ \Omega = \Omega$ (iv) $\Omega \circ \Omega_1 = \Omega_1$

(v) $\Omega \Omega_1 = \Omega_1 \Omega$

証明は、命題 6.13 の場合と同様にできる。

命題 6.19 の (i), (ii) は、次のことを意味している。$\Omega_1 *$ の固有空間 G_λ $(\lambda = \pm 1)$ が Ω に関して閉じていれば、同時に $\Omega *$ に関しても閉じており、逆もまた成立する。

命題 6.19 の (v) は、明らかに $\Omega = \Omega_1$ に対して成立している。従って、$\Omega_1 *$ の固有空間 G_λ $(\lambda = \pm 1)$ は、Ω_1 自身に関して閉じている。これは、命題 6.11 の (i), (ii) で既に示した事である。

命題 6.19 の (v) は、系 6.6 の (v) と同じ条件である。従って次の系が成立する。

〔系 6.12〕 $\Omega_1 *$ の全ての固有空間が、Ω に関して閉じるための必要十分条件は、Ω_1 の固有値 1 または -1 に対応する固有集合が、Ω に関して閉じることである。

従って、系 6.7 に対応して、次の系が成立する。

〔系 6.13〕 次の各条件は、互いに同値である。

(i) Ω は、等方作用素を等方作用素に変換し、反等方作用素を反等方作用素に変換する。

(ii) Ω は、実作用素を実作用素に変換する。

(iii) Ω は、虚作用素を虚作用素に変換する。

(iv) $\Omega \Omega_e = \Omega_e \Omega$ (6.89)

(v) Ω の生成作用素 U に対して

$$U^* = \lambda U \qquad (|\lambda| = 1) \tag{6.90}$$

なる複素数 λ が存在する。

命題 6.19 より直ちに、命題 6.10 および命題 6.14 に対応する次の命題が成立する。

〔命題 6.20〕 Ω_1^* および Ω_2^* の固有値 λ に対応する固有空間を、それぞれ $G_\lambda^{(1)}$, $G_\lambda^{(2)}$ とする。

$$\Omega_2 G_\lambda^{(1)} = G_\lambda^{(1)} \quad (\lambda = \pm 1) \tag{6.91}$$

が成立するための必要十分条件は、

$$\Omega_1 G_\lambda^{(2)} = G_\lambda^{(2)} \quad (\lambda = \pm 1) \tag{6.92}$$

が成立することである。

命題 6.20 を、図 6.2 を使って説明すれば、次のようになる。もし領域(i), (iii) が $\Omega^*\Omega_1$ に関して閉じていれば、領域(iii), (iv) は Ω_1 に関して閉じており、逆もまた成立する。

6.5 共変対合の積 $\Omega\Omega_1$ に関する固有値問題

6.5.1 $\Omega\Omega_1$ に関する固有値問題

本項では、$\mathcal{B}(H)$ における共変対合 Ω と Ω_1 の積 $\Omega\Omega_1$ に関する固有値問題について論じる。

まず、式 (5.106) から分かるように、H の上の恒等作用素は、$\Omega\Omega_1$ の固有値 1 に対する固有元になっている。即ち、$\Omega\Omega_1$ は常に、$\lambda = 1$ を固有値としてもっている。また、固有方程式

$$\Omega\Omega_1 A = \lambda A \tag{6.93}$$

の両辺のノルムをとれば、式 (5.93) より、$\|A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ となるから、$\Omega\Omega_1$ の固有値の絶対値は、常に 1 になっている。

式 (5.89), (6.93) から分かるように、$\Omega\Omega_1$ は Banach 空間 $\mathcal{B}(H)$ の上の有界線形作用素であるから、$\Omega\Omega_1$ の固有値 λ に対応する固有元の全体(零作用素

も含む）は、$B(H)$の閉じた部分空間になっている。

命題6.11 及び命題6.1 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題6.21〕 $\Omega\Omega_1$の固有値λに対応する固有空間を$\mathcal{G}_\lambda$とする。次の各条件は、互いに同値である。

(i) $A \in \mathcal{G}_\lambda$ (6.94)

(ii) $\Omega_1 A \in \mathcal{G}_\lambda$ (6.95)

(iii) $\Omega A \in \mathcal{G}_\lambda$ (6.96)

(iv) $(\Omega \cdot \Omega_1) A \in \mathcal{G}_\lambda$ (6.97)

(v) $(\Omega_1 \cdot \Omega) A \in \mathcal{G}_\lambda$ (6.98)

(vi) $A^* \in \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}$ (6.99)

(vii) $UU^{(1)*}A = \lambda A UU^{(1)*}$ (6.100)

(viii) $(Af, g) = \lambda(A\omega\omega_1 f, \omega\omega_1 g)$ for all $f, g \in H$ (6.101)

命題6.21 の(i)～(v)は、$\Omega\Omega_1$の固有空間$\mathcal{G}_\lambda$が、Ω_1, Ω, $\Omega\Omega_1$ 及び$\Omega_1\Omega$に関して閉じていることを表している。(vi)は、λが$\Omega\Omega_1$の固有値ならば、$\bar{\lambda}$もまた$\Omega\Omega_1$の固有値になり、式(6.93)に対して、

$$\Omega\Omega_1 A^* = \bar{\lambda} A^* \tag{6.102}$$

が成立することを表している。従って、$|\lambda|=1$に対応する固有空間$\mathcal{G}_1$は、共役演算$*$に関しても、閉じている。

命題6.12，命題6.2 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題6.22〕 $\Omega\Omega_1$の固有値λに対応する固有空間を$\mathcal{G}_\lambda$とする。$A \in \mathcal{G}_\lambda$の逆$A^{-1}$が存在すれば、$A^{-1} \in \mathcal{G}_{\bar{\lambda}}$である。

系6.8 及び系6.3 に対応して、次の命題が成立する。

〔系6.14〕 $\Omega\Omega_1$の固有値λに対応する固有空間を$\mathcal{G}_\lambda$とする。$A \in \mathcal{G}_\lambda$,

$B \in \mathcal{G}_\mu$ ならば、$AB \in \mathcal{G}_{\lambda\mu}$, $BA \in \mathcal{G}_{\lambda\mu}$ である。特に $\mathcal{G}_1$ は、作用素の普通の和と積に関して、単位元をもった環になる。

系 6.9 に対応して、次の命題が成立する。

〔系 6.15〕

$$\mathcal{G}_\lambda \equiv \{A \mid \Omega\Omega_1 A = \lambda A,\ A \in \mathcal{B}_2(H)\} \tag{6.103}$$

とする。$A \in \mathcal{G}_\lambda$ かつ $B \in \mathcal{G}_\mu$ $(\mu \neq \lambda)$ ならば、直交関係 $(A, B) = 0$ が成立する。

6.5.2 $\Omega\Omega_1$ の固有空間と $\omega\omega_1$ の固有空間の関係

〔補題 6.9〕互いに直交する部分空間の族 $\{S_n\}_{n=1}^K$ で H_N を

$$H_N = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_K \tag{6.104}$$

と直和分解したとする。各 S_n への射影作用素を P_n とし、$\alpha(\cdot)$ を、添字集合 $\{n\}_{n=1}^K$ の上の全単射とする。$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して

$$A_N S_n \subset S_{\alpha(n)} \qquad \text{for all } n \tag{6.105}$$

が成立するための必要十分条件は、

$$A_N P_n = P_{\alpha(n)} A_N \qquad \text{for all } n \tag{6.106}$$

である。

（証明）各 S_n は互いに直交しており、$\alpha(\cdot)$ は単射であるから

$$P_{\alpha(m)} P_{\alpha(n)} = \delta_{m,n} P_{\alpha(n)} \tag{6.107}$$

となる。また式(6.104)より、次式が成立する。

$$\sum_{n=1}^{K} P_n = E_N \tag{6.108}$$

そこで、式(6.105)が成立したとすれば

$$P_{\alpha(n)} A_N P_n = A_N P_n \qquad \text{for all } n \tag{6.109}$$

となるから、式(6.107)～(6.109)より

$$P_{\alpha(n)} A_N = P_{\alpha(n)} A_N E_N = \sum_{m=1}^{K} P_{\alpha(n)} A_N P_m = P_{\alpha(n)} A_N P_N = A_N P_n$$

となり、式(6.106)が成立する。逆に 式(6.106)が成立したとすれば

$$P_{\alpha(n)} A_N P_n = A_N P_n^2 = A_N P_n$$

となり、式(6.109)が、従って式(6.105)が成立する。 (Q.E.D)

〔 命題 6.23 〕

$$S_\mu = \{ f \mid \omega\omega_1 f = \mu f,\ f \in H_N \} \tag{6.110}$$

とし、S_μ への射影作用素を、P_μ とする。$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して、次の各条件は、互いに同値である。

(i) $\Omega\Omega_1 A_N = \lambda A_N$ (6.111)

(ii) $\omega\omega_1$ の全ての固有値 μ に対して

$$A_N S_\mu \subset S_{\lambda\mu} \tag{6.112}$$

となるような複素数 λ が存在する。

(iii) $\omega\omega_1$ の全ての固有値 μ に対して

$$A_N P_\mu = P_{\lambda\mu} A_N \tag{6.113}$$

となるような複素数 λ が存在する。

$\omega\omega_1$ のユニタリ性と補題6.9を使えば、命題6.13の場合と同様に証明

できる。

命題6.23のωおよびω_1の生成作用素を、それぞれU_Nおよび$U_N^{(1)}$とすれば、式(5.49)より

$$\omega\omega_1 = U_N U_N^{(1)*} \tag{6.114}$$

である。よって、式(6.110)で与えられるS_μは、ユニタリ作用素$U_N U_N^{(1)*}$の固有値μに対応する固有空間になっている。そこで、命題6.23で特に、$\omega_1 = \omega_e$とおけば、次の系が成立する。

〔系 6.16〕 Ωの生成作用素U_Nの固有空間を

$$S_\mu \equiv \{ f \mid U_N f = \mu f,\ f \in H_N \} \tag{6.115}$$

とし、S_μへの射影作用素を、P_μとする。$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$に対して、次の各条件は、互いに同値である。

(i) $$\Omega\,\Omega_e A_N = \lambda A_N \tag{6.116}$$

(ii) U_Nの全ての固有値μに対して

$$A_N S_\mu \subset S_{\lambda\mu} \tag{6.117}$$

となるような複素数λが存在する。

(iii) U_Nの全ての固有値μに対して

$$A_N P_\mu = P_{\lambda\mu} A_N \tag{6.118}$$

となるような複素数λが存在する。

〔系 6.17〕 命題6.23あるいは系6.16と同じ記号のもとで、次の関係が成立する。

$$A_N S_\mu \subset S_\mu \quad (\lambda = 1) \tag{6.119}$$

$$A_N S_\mu \perp S_\mu \quad (\lambda \neq 1) \tag{6.120}$$

式(6.119)は、S_μ が A_N の不変部分空間になることを意味している。式(6.120)は、S_μ の元 f を A_N で変換した結果 $A_N f$ が、S_μ と直交していることを表している。

命題6.23とある意味で逆な命題を次に示す。

〔命題6.24〕 $A_N \in B(H_N)$ の固有空間を

$$S_\mu \equiv \{ f \mid A_N f = \mu f,\ f \in H_N \} \tag{6.121}$$

とする。

$$\Omega\, \Omega_1 A_N = \lambda A_N \tag{6.122}$$

ならば、A_N の全ての固有値 μ に対して

$$\omega\, \omega_1 S_\mu = S_{\bar{\lambda}\mu} \quad (|\lambda| = 1) \tag{6.123}$$

が成立する。また、A_N が正規作用素ならば、この逆も成立する。

証明は、命題6.13の場合と同様にできる。

命題6.24より、次のことが分かる。複素数 μ が、式(6.122)を満足する A_N の固有値ならば、$\bar{\lambda}\mu$ もまた、A_N の固有値である。

命題6.24で、$\omega_1 = \omega_e$, $\Omega_1 = \Omega_e$ とおけば、次の系が成立する。

〔系 6.18〕 $A_N \in B(H_N)$ の固有値 μ に対応する固有空間を S_μ とする。

$$\Omega\, \Omega_e A_N = \lambda A_N \tag{6.124}$$

ならば、A_N の全ての固有値 μ と Ω の生成作用素 U_N に対して

$$U_N S_\mu = S_{\bar{\lambda}\mu} \quad (|\lambda| = 1) \tag{6.125}$$

が成立する。また、A_N が正規作用素ならば、逆も成立する。

命題 6.3 と命題 6.23 と命題 6.24 及び系 6.16 と系 6.18 が、それぞれ互いに逆の関係になっている。これらの命題の相互関係を、表 6.1 にまとめて示す。

表 6.1　各種固有集合の各種演算に関する閉性

定義域 / S_μ と A	H	H_N	H_N	H_N
	$\omega f = \mu f$	$A_N f = \mu f$	$\omega\omega_1 f = \mu f$ $U_N U_N^{\omega *} f = \mu f$	$U_N f = \mu f$
$\Omega A = \lambda A$	$A S_\mu \subset S_{\lambda\mu}$ 〔命題 6.3〕			
$\Omega A_N^* = \lambda A_N$		$\omega S_\mu = S_{\lambda\mu}$ $\Longleftrightarrow$ 正規 〔命題 6.13〕		$\omega_e S_\mu = S_\mu$ $\omega S_\mu = S_\mu$ $(\omega \cdot \omega_e) S_\mu = S_\mu$ 〔命題 6.46〕
$\Omega\Omega_1 A_N = \lambda A_N$		$\omega\omega_1 S_\mu \subset S_{\lambda\mu}$ $\Longleftarrow$ 正規 〔命題 6.24〕	$A_N S_\mu \subset S_{\lambda\mu}$ 〔命題 6.23〕	
$\Omega \overline{A_N} = \lambda A_N$		$U_N S_\mu \subset S_{\lambda\mu}$ $\Longleftarrow$ 正規 〔系 6.18〕		$A_N S_\mu \subset S_{\lambda\mu}$ 〔系 6.16〕

6.6　等方ユニタリ作用素に関する固有値問題

6.6 を通じて、次の記号を使用する。空間 H を、L_2 または H_N とし、H の上の等方ユニタリ作用素を、U とする。U によって生成される実対合を ω、共

変対合を Ω とする。Uの固有値 λ に対応する固有空間を S_λ とし、S_λ への射影作用素を、P_λ とする。

〔命題 6.25〕

$$\overline{U^*} = U \tag{6.126}$$

$$\Omega U^* = U \tag{6.127}$$

$$(\Omega \circ \Omega e) U^* = U \tag{6.128}$$

命題 6.25 は、U が Ωe^*, Ω^* および $(\Omega \circ \Omega e)^*$ の固有値 1 に対応する固有空間に属していることを表している。Uは正規作用素であるから、命題 6.25 と命題 6.13 より、次の命題が成立する。

〔命題 6.26〕

$$\overline{P_\lambda} = P_\lambda \tag{6.129}$$

$$\Omega P_\lambda = P_\lambda \tag{6.130}$$

$$(\Omega \circ \Omega e) P_\lambda = P_\lambda \tag{6.131}$$

式(6.129)は、等方ユニタリ作用素の固有空間への射影作用素が、常に実作用素になることを表しており、注目すべき点である。再び命題 6.13 を考慮すれば、命題 6.26 から、次の命題が成立することが分かる。

〔命題 6.27〕

$$\omega e\, S_\lambda = S_\lambda \tag{6.132}$$

$$\omega\, S_\lambda = S_\lambda \tag{6.133}$$

$$(\omega \circ \omega e)\, S_\lambda = S_\lambda \tag{6.134}$$

命題 6.27 は、次のことを意味している。Uの固有空間 S_λ は、図 5.3 の三角形の頂点に対応する演算 ω_e, ω 及び $\omega\cdot\omega_e$ に関して閉じている。従ってまた、これらの有限個の組合せに関しても、S_λ は閉じている。

〔補題 6.10〕 $A\in\mathcal{B}(H)$ の固有値 λ に対応する固有空間への射影作用素を P_λ とすれば、次式が成立する。

$$AP_\lambda = \lambda P_\lambda \tag{6.135}$$

補題 6.10 より、次の系が成立する。

〔系 6.19〕

$$P_\lambda U = UP_\lambda = \lambda P_\lambda \tag{6.136}$$

$$P_\lambda U^* = U^* P_\lambda = \bar{\lambda} P_\lambda \tag{6.137}$$

式(6.137)と式(5.51)より、次の命題が成立する。

〔命題 6.28〕 任意の $f\in H$ に対して、次式が成立する。

$$P_\lambda f = \lambda P_\lambda(\omega f) \tag{6.138}$$

命題 6.28 は、f の S_λ への射影成分が、$\overline{\omega f} = U^* f$ の S_λ への射影成分の λ 倍になっていることを意味している。

〔命題 6.29〕 次の各条件は、互いに同値である。

(i) $f\in S_\lambda$ (6.139)

(ii) $(f, g) = \lambda(f, \omega\bar{g})$ for all $g\in H$ (6.140)

(iii) $(f, g) = \bar{\lambda}(f, \overline{\omega g})$ for all $g\in H$ (6.141)

(iv) $(f, g) = \lambda(f, Ug)$ for all $g \in H$ (6.142)

(v) $(f, g) = \overline{\lambda}(f, U^* g)$ for all $g \in H$ (6.143)

(iv), (v) は、(ii), (iii) を、それぞれ式(6.51)を使って書きなおしたものである。

6.7 $U^2 = E$ の場合

これまでは、一般の等方ユニタリ作用素によって生成される実対合及び共変対合の性質について論じてきた。しかし、このような一般的議論では、例えば"$\Omega\Omega_1$ の固有空間への、$A \in B(H)$ の射影成分を、具体的に求めることができない。そこで、6.7 および 6.8 では、生成作用素 U に制限を加えて、もう少し詳細な議論を展開することにする。まず本項では、

$$U^2 = E \tag{6.144}$$

を満足する等方ユニタリ作用素によって生成される共変対合について論じる。

なお、本来ならば、空間 H の上の恒等作用素を、$H = L_2$ のときは E, $H = H_N$ のときは E_N と表すべきであるが、簡単のために、これらをまとめて、E で表すことにする。

6.7.1 $U^2 = E$ が成立するための条件

$U^2 = E$ を満足する等方ユニタリ作用素 U によって生成される $B(H)$ の共変対合 Ω の特徴づけを行なう。

〔命題 6.30〕 次の各条件は、互いに同値である。

(i) $U^2 = E$ (6.145)

(ii) $U^* = U$ (6.146)

(iii) $\overline{U} = U$ (6.147)

(iv) $\Omega U = U$ (6.148)

(v) $(\Omega \circ \Omega e) U = U$ (6.149)

(vi) $\Omega \Omega e = \Omega e \Omega$ (6.150)

(vii) $\Omega \circ \Omega e = \Omega e$ (6.151)

(viii) $\Omega e \circ \Omega = \Omega$ (6.152)

(ix) $\omega \omega e = \omega e \omega$ (6.153)

(x) $\omega \circ \omega e = \omega e$ (6.154)

(xi) $\omega e \circ \omega = \omega$ (6.155)

ここで、(vi)～(viii)は、もし(vi)～(viii)の中のどれか一個が成立すれば、Ωの生成作用素で、(i)を満たすものが存在するという意味である。

（略証）Ωの生成作用素の一つをU_0とする。(vi)が成立したとすれば、式(5.137), (5.138)より、任意の$A \in \mathcal{B}(H)$に対して

$$U_0 A U_0^* = U_0^* A U_0$$

$$\therefore U_0^2 A = A U_0^2 \quad (6.156)$$

となる。従って、補題5.8より

$$U_0^2 = e^{i\theta} E \quad (\theta: \text{実数}) \quad (6.157)$$

となるから

$$U \equiv e^{-i\frac{\theta}{2}} U_0 \quad (6.158)$$

とおけば、Uは(i)を満足する。しかも、命題5.17より、UはΩの生成作用素になっている。よって(vi)⟶(i)が成立する。

(iii)～(v) が (ii) と同値になることは、命題 6.25 から明らかである。また (vi)～(viii) が互いに同値になること、および (ix)～(xi) が互いに同値になることは、それぞれ系 5.3 及び系 6.6 から明らかである。 (Q.E.D)

命題 6.30 の (i)～(iii) は、等方ユニタリ作用素 U が、実自己共役作用素のとき、またそのときに限って、$U^2=E$ を満足することを、意味している。

式 (5.92) に示したように、共役演算 * は、任意の Ω と可換であった。ところが、複素共役演算 Ω_e は、任意の Ω とは可換にならない。そして、Ω が Ω_e と可換になるということによって、$U^2=E$ が特徴づけられることを、(i), (vi) は表している。ここで、次のことは注意を要する。ω と U が一対一に対応しているのに対して、Ω は $\{aU;|a|=1\}$ と一対一に対応している。従って、Ω の生成作用素 U が (i) を満足していても、同じ Ω の他の生成作用素、例えば、λU に対しては、$(\lambda U)^2=-E$ となり、もはや (i) は成立しなくなるのである。しかし、とにかく Ω と Ω_e が可換ならば、必ず (i) を満たすような生成作用素 U が存在するのである。

系 6.7 で論じたように、$\Omega\Omega_e=\Omega_e\Omega$ はまた、Ω が実(虚)作用素を実(虚)作用素に変換することによって特徴づけられる。同じく系 5.4 で論じたように、$\omega\omega_e=\omega_e\omega$ は、ω が実(純虚)数値関数を実(純虚)数値関数に変換することによって、特徴づけられるのである。

式 (5.7) に示したように、原点に関する反転作用素 I(0) は、(i) を満たしている。従って、対称演算と複素共役演算は、交換可能である。即ち、式 (5.12) で定義した記号を用いて

$$f^{\pm}=f^{\mp},\quad A^{\pm}=A^{\mp} \tag{6.169}$$

なる関係が成立する。

6.7.2 U に関する固有値問題

式 (6.145), (6.146) より、次の命題が成立する。

〔命題 6.31〕 $U^2=E$ を満足する等方ユニタリ作用素 U の固有値は、± 1 であり、対応する固有空間への射影作用素 P_λ ($\lambda=\pm 1$) は、

$$P_\lambda = \frac{1}{2}(E+\lambda U) \tag{6.160}$$

で与えられる。

例えば $U=I(0)$ の場合、固有値1に対応する固有空間は、偶関数の空間 $H^{(e)}$ であり、$H^{(e)}$ への射影作用素 $E^{(e)}$ は*、式(6.160)より、

$$E^{(e)} = \frac{1}{2}(E+I(0)) \tag{6.161}$$

となる。これは、任意の関数 $f\in H$ の偶関数成分 $f^{(e)}$ が、

$$f^{(e)}(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)) \tag{6.162}$$

で与えられるという 良く知られた事実を、作用素の形で表したものである。

命題6.31を使えば、$U^2=E$ を満足する等方ユニタリ作用素の一般形を求めることができる。即ち、次の命題が成立する。

〔命題 6.32〕 $U^2=E$ を満足する等方ユニタリ作用素 U は、$\omega_S=S$ なる閉部分空間 S に関する鏡映作用素(reflection operator)であり、逆もまた

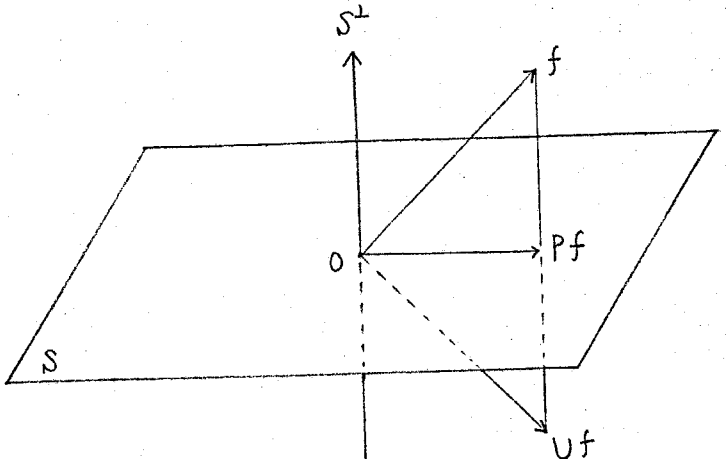


図6.4 部分空間 S に関する鏡映作用素 U (P は S への射影作用素)

---

* $H^{(e)}$ および $E^{(e)}$ の添字 e は、even の頭文字である。

成立する.

(証明) $U^2=E$ を満足する等ユニタリ作用素 U の、固有値 1 に対応する固有空間を S、S への射影作用素を P とすれば 命題 6.31 より,

$$U = 2P - E \tag{6.163}$$

と表される。式(6.163)は、U が、部分空間 S に関する鏡映作用素であることを表している(図 6.4 参照)。しかも、式(6.132)より、S は We に関して閉じている。逆に U と、$WeS=S$ なる閉部分空間 S に関する鏡映作用素とすれば、S への射影作用素 P を使って、U は式(6.163)のように表される。$WeS=S$ であるから、命題 6.24 より $\overline{P}=P$ となり、式(6.163)より $\overline{U}=U$ となる。また $U^*=U$ および $U^2=E$ は明らかであるから、結局 $\overline{U}=U^*=U^{-1}=U$ が成立する。(Q.E.D)

例えば、原点 $x=0$ に関する反転作用素 $I(0)$ は、式(6.161)から分かるように、偶関数の空間 $H^{(e)}$ に関する鏡映作用素である.

6.7.3 $\Omega\Omega e$ による作用素の分解

共変対合の積 $\Omega\Omega_1$ の固有空間への射影を、具体的に求めることは、一般には困難であった。しかし、次の条件があれば、容易にそれを求めることができる。

〔命題 6.33〕 $U^2=E$ を満足する等ユニタリ作用素 U によって生成される共変対合演算を、Ω とする。任意の $A\in B(H)$ は、

$$\Omega\overline{A^{(\lambda)}} = \lambda A^{(\lambda)} \quad (\lambda=\pm 1) \tag{6.164}$$

なる元 $A^{(\lambda)}$ $(\lambda=\pm 1)$ を使って

$$A = A^{(1)} + A^{(-1)} \tag{6.165}$$

と一意に分解される。そして $A^{(\lambda)}$ は、

$$A^{(\lambda)} = \frac{1}{2}(A + \lambda \Omega \bar{A}) \quad (\lambda = \pm 1) \tag{6.166}$$

と表される。

式(5.137)で示したように

$$\Omega \Omega_e A = UAU^* \tag{6.167}$$

である。このUとΩの対応を考えて、式(6.160)でEをΩ_e^2に、Uを$\Omega\Omega_e$に変換したものが、式(6.166)である。このような形式的対応は、既に式(5.79)と(6.25)の間にも現れていたものである。

また、命題6.33で与えた$\Omega\Omega_e$による作用素の分解と、命題6.16で与えた$\Omega_1 *$による作用素の分解は、全く同じ形式になっている。従って、6.4で論じた多くの事柄が、命題6.33で与えた分解に対しても成立することが分かる。

6.8 $U^4 = E$ の場合

本論文で重要な働きをしている有限Fourier変換作用素$\mathfrak{F}_N$は、後で(式(14.13))示すように、

$$\mathfrak{F}_N^4 = E_N \tag{6.168}$$

を満足している。そこで6.8では、

$$U^4 = E \tag{6.169}$$

を満足する等ユニタリ作用素によって生成される共変対合について、詳しく論じることにする。

6.8.1 $U^4 = E$ が成立するための条件

$U^4 = E$ を満足する等ユニタリ作用素 U によって生成される $\mathfrak{B}(H)$ の共変対合 Ω の特徴づけを行なう。

〔命題 6.34〕 次の各条件は、互いに同値である。

$$\begin{cases} \text{(i)} & U^4 = E \end{cases} \tag{6.170}$$

$$\text{(ii)} \quad U^3 = U^* \tag{6.171}$$

$$\text{(iii)} \quad (U^2)^* = U^2 \tag{6.172}$$

$$\begin{cases} \text{(iv)} & \overline{U^2} = U^2 \end{cases} \tag{6.173}$$

$$\text{(v)} \quad \Omega(U^2) = U^2 \tag{6.174}$$

$$\text{(vi)} \quad (\Omega \circ \Omega_e)(U^2) = U^2 \tag{6.175}$$

$$\begin{cases} \text{(vii)} & \Omega U = U^3 \end{cases} \tag{6.176}$$

$$\text{(viii)} \quad (\Omega \circ \Omega_e) U = U^3 \tag{6.177}$$

$$\begin{cases} \text{(ix)} & (\Omega \circ \Omega_e)\Omega_e = \Omega_e(\Omega \circ \Omega_e) \end{cases} \tag{6.178}$$

$$\text{(x)} \quad (\Omega_e \circ \Omega)\Omega = \Omega(\Omega_e \circ \Omega) \tag{6.179}$$

$$\text{(xi)} \quad (\Omega \Omega_e)^2 = (\Omega_e \Omega)^2 \tag{6.180}$$

$$\begin{cases} \text{(xii)} & (\omega \circ \omega_e)\omega_e = \omega_e(\omega \circ \omega_e) \end{cases} \tag{6.181}$$

$$\text{(xiii)} \quad (\omega_e \circ \omega)\omega = \omega(\omega_e \circ \omega) \tag{6.182}$$

$$\text{(xiv)} \quad (\omega \omega_e)^2 = (\omega_e \omega)^2 \tag{6.183}$$

ここで (ix)～(xi) は、それらが成立すれば、Ωの生成作用素で (i) を満たすものが存在するという意味である。

(略証) 式(5.144)より、U^2によって生成される共変対合は $\Omega\circ\Omega_e$ である。しかも、(i)は $(U^2)^2=E$ であるから、命題6.30より、(i), (iii)～(vi), (ix), (xii) が互いに同値であることが分かる。(ix)～(xi)が互いに同値であることは系5.10から明らかである。 (Ω.E.D)

(iii), (iv) は、$U^4=E$ のとき、U^2が実自己共役作用素になることを、意味している。(ix) は、$\Omega\circ\Omega_e$ が実(虚)作用素を実(虚)作用素に変換することを表し、(xii) は $\omega\circ\omega_e$ が、実(純虚)数値関数を実(純虚)数値関数に変換することを、表している。

6.8.2 Uに関する固有値問題

$U^4=E$ であるから、Uの固有値は、$\pm 1, \pm i$ である。従って、U^2の固有値は、± 1 となる。この固有値 ± 1 に対応する固有空間を $S_\pm$ とし、$S_\pm$ への射影作用素を $P_\pm$ とすれば、命題6.31より

$$P_\pm = \frac{1}{2}(E \pm U^2) \quad (\text{複号同順}) \tag{6.184}$$

となる。この $P_\pm$ を使えば、Uの固有値λに対応する固有空間 S_λ への射影作用素 P_λ が、次のように表される。

〔命題6.35〕 $U^4=E$ を満足する等方ユニタリ作用素Uの固有値 λ ($=\pm 1, \pm i$) に対応する固有空間 S_λ への射影作用素 P_λ は、次のように表される。

$$P_\lambda = \frac{1}{2}P_\pm(E+\bar{\lambda}U) \tag{6.185}$$

$$= \frac{1}{2}P_\pm(E+\lambda U^*) \tag{6.186}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}(\bar{\lambda})^n U^n \tag{6.187}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} \lambda^n (U^*)^n \qquad (6.188)$$

ここで、式(6.185), (6.186) の $P_\pm$ は、$\lambda = \pm 1$ のとき P_+ を、$\lambda = \pm i$ のとき P_- を使うものとする。

（証明） 式(6.136) を U^2 に適用すれば、

$$U^2 P_\pm = \pm P_\pm \qquad (6.189)$$

であるから

$$U P_\pm = \pm U^* P_\pm \qquad (6.190)$$

となる。式(6.190) より、式(6.185) の右辺と式(6.186) が同じものであることが分かる。そこで、これらを P とおいて、P が実際に S_λ への射影作用素、即ち、P_λ になることを示す。式(6.184), (6.171) より $P_\pm$ と $E + \lambda U^*$ は可換であるから、式(6.190) より

$$4P^2 = P_\pm (E + \bar{\lambda} U) P_\pm (E + \lambda U^*)$$

$$= P_\pm (E + \bar{\lambda} U)(E + \bar{\lambda} U^*)$$

$$= P_\pm (2E + \bar{\lambda} U + \lambda U^*)$$

$$= P_\pm (E + \bar{\lambda} U) + P_\pm (E + \lambda U^*)$$

$$= 4P$$

$$\therefore \quad P^2 = P \qquad (6.191)$$

$$2P^* = (E + \lambda U^*) P_\pm^* = (E + \lambda U^*) P_\pm = P_\pm (E + \lambda U^*) = 2P$$

$$\therefore \quad P^* = P \qquad (6.192)$$

となり、P は射影作用素である。更に、$UP = \lambda P$ となるから、P は、S_λ の中

への射影作用素である。しかも、

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \frac{1}{2} P_+ (E + \lambda U^*) = P_+ \tag{6.193}$$

$$\sum_{\lambda=\pm i} \frac{1}{2} P_- (E + \lambda U^*) = P_- \tag{6.194}$$

が成立するから、$P = P_\lambda$ となる。式(6.184)を(6.185)に代入すれば式(6.187)となり、式(6.187)の$*$をとれば、式(6.188)になる。(Q.E.D)

式(6.184), (6.193), (6.194)より、空間Hが、U^2およびUの固有空間を使って

$$\left.\begin{aligned} H &= S_+ \oplus S_- \\ S_+ &= S_1 \oplus S_{-1} \\ S_- &= S_i \oplus S_{-i} \end{aligned}\right\} \tag{6.195}$$

と直和分解されることが分かる(図6.5)。

〔命題 6.36〕

$$U = UP_+ + \lambda(\bar{\lambda} U P_-) \tag{6.196}$$

と分解するとき、UP_+および$\bar{\lambda}UP_-$は、等方実自己共役作用素になり、Ω-実作用素になる。そして、次の関係が成立する。

$$UP_+ = (2P_1 - E)P_+ \tag{6.197}$$

$$= P_1 - P_{-1} \tag{6.198}$$

$$= \frac{1}{2}(U + U^*) \tag{6.199}$$

$$\bar{\lambda} U P_- = (2P_i - E)P_- \tag{6.200}$$

$$= P_i - P_{-i} \tag{6.201}$$

$$= \frac{1}{2i}(U - U^*) \tag{6.202}$$

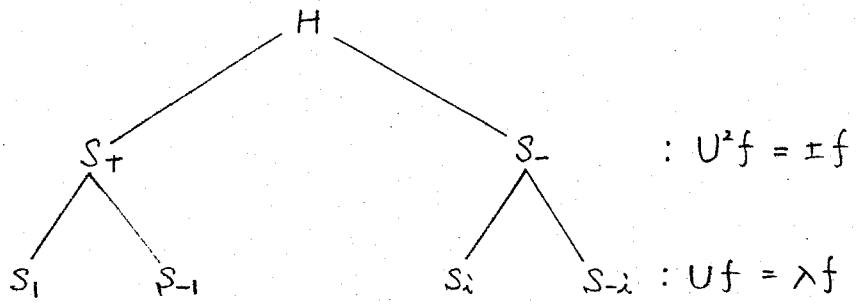


図6.5　U^2 および U による空間 H の直和分解（$U^2=E$）

（証明）UP_+ および $\bar{\iota}UP_-$ が実作用素になることは、式(6.129)，(6.190)から明らかである。従って、命題6.25と図4.8から、等方自己共役作用素になる。更に式(6.127)，(6.184)，(6.192)より $\Omega-$実作用素になることも、明らかである。式(6.185)を逆に解けば、式(6.197)，(6.200)が成立し、この結果と式(6.195)から、式(6.198)，(6.201)が成立する。式(6.199)，(6.202)は、自己共役分解の一意性と式(4.89)から明らかである。　(Q.E.D)

一見何でもない式(6.196)の分解が、このように、実分解、自己共役分解、$\Omega-$実分解になっているのである。そして更に、式(6.197)，(6.200)から分かるように、UP_+ は、空間 S_+ の中で、S_1 に関する鏡映作用素になり，$\bar{\iota}UP_-$ は、空間 S_- の中で、$S_{\bar{\iota}}$ に関する鏡映作用素になっているのである。

6.8.3　$\Omega\Omega_e$ による作用素の分解

$\Omega\Omega_e$ による作用素の分解を考える前に、まず $(\Omega\circ\Omega_e)\Omega_e$ による作用素の分解を考える。$\Omega\circ\Omega_e$ は U^2 によって生成される共変対合であり、式(6.148)より、

$$(\Omega\circ\Omega_e)\Omega_e=(\Omega\Omega_e)^2 \qquad (6.203)$$

となることを注意しておく。命題6.33を $\Omega\circ\Omega_e$ に適用すれば、次の命題が成立する。

〔命題 6.37〕 $(\Omega\circ\Omega_e)\Omega_e$ の固有値は ± 1 であり、対応する固有空間 G_ε への射影作用素 P_ε は、次のように表される。

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2}(\Omega_e^2 \pm (\Omega\circ\Omega_e)\Omega_e) \tag{6.204}$$

$$= \frac{1}{2}(\Omega_e^2 \pm (\Omega\Omega_e)^2) \tag{6.205}$$

式(6.166)が式(6.160)と密接な関係にあったように、式(6.204), (6.205)は、式(6.184)と密接な関係にある。即ち、式(6.166)の場合と同様に、式(6.184)で E を Ω_e^2 に、U を $\Omega\Omega_e$ に変換すれば、式(6.205)になる。或いは、U^2 によって生成される共変対合が $\Omega\circ\Omega_e$ であるから、U^2 を $(\Omega\circ\Omega_e)\Omega_e$ に変換すれば、式(6.204)になるのである。

作用素と共変対合の間の、このような対応関係を考慮すれば、命題 6.35 に対応して、次の命題が成立することが分かる。

〔命題 6.38〕 $\Omega\Omega_e$ の固有値は $\pm 1, \pm i$ であり、対応する固有空間 G_λ $(\lambda = \pm 1, \pm i)$ への射影作用素 P_λ は、次のように表される。

$$P_\lambda = \frac{1}{2}P_\varepsilon(\Omega_e^2 + \bar{\lambda}\Omega\Omega_e) \tag{6.206}$$

$$= \frac{1}{2}P_\varepsilon(\Omega_e^2 + \lambda\Omega_e\Omega) \tag{6.207}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}(\bar{\lambda})^n(\Omega\Omega_e)^n \tag{6.208}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}\lambda^n(\Omega_e\Omega)^n \tag{6.209}$$

ここで P_ε は、命題 6.37 で与えられる G_ε への射影作用素であり、$\lambda = \pm 1$ のとき P_+ を、$\lambda = \pm i$ のとき P_- を使用するものとする。

命題 6.37, 命題 6.38 より、$\mathcal{B}(H)$ が $(\Omega\Omega_e)^2$ および $\Omega\Omega_e$ の固有空間を使って

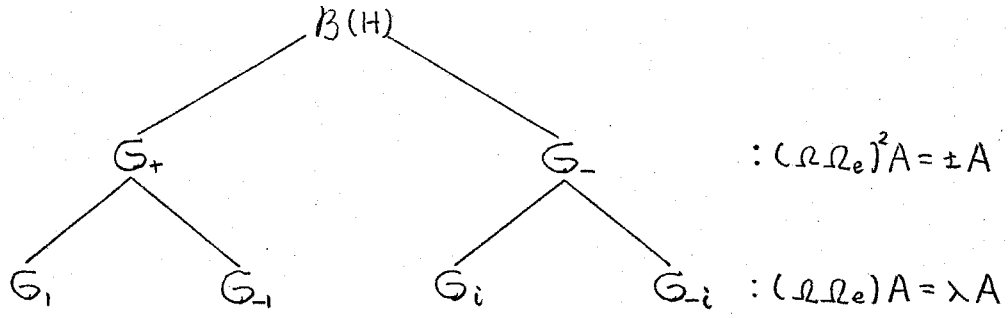


図 6.6　$(\Omega\Omega_e)^2$ および $\Omega\Omega_e$ による $\mathcal{B}(H)$ の直和分解 $(U^4=E)$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{B}(H) &= G_+ \oplus G_- \\ G_+ &= G_1 \oplus G_{-1} \\ G_- &= G_i \oplus G_{-i}\end{aligned}\right\} \qquad (6.210)$$

と直和分解されることが分かる（図 6.6）。図 6.6 は，図 6.5 に対応するものである。

第 Ⅲ 章

並進作用素によって生成される作用素の空間

第 7 節　並進作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$

7.1　まえがき

これまでは、作用素の空間 $\mathcal{B}(H_N)$ 全体についての議論であった。扱う作用素の対象を、$\mathcal{B}(H_N)$ の特殊な部分空間に限定することにより、更に詳細な議論を展開することができる。本論文では、そのような部分空間として、いずれも信号空間 H_N と同形な四種類の空間 $\mathcal{B}^{(m)}(H_N)$ $(m=1,2,3,4)$ を取り上げる。

まず第四章では、並進作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ について論じる。[1]〜[3]*

パターン認識の問題において、並進作用素が非常に大切な役割を果していることは、3.2.4 で述べたとうりである。また、パターン認識における飯島理論[4]で重要な働きをしているボケ変換、或いは、画像処理で良く現われる空間微分、平滑化といった作用素は、全てこの空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に属しているのである。

作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の構造は、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元が対象としている信号空間 H_N の構造と、密接な関係をもっている。そこで、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と H_N の間を自由に往復することによって、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の構造をより良く理解することができるのである。その為の手段として、本節では、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元にそのインパルス応答を対応させる作用素 ρ_1 を導入する。この ρ_1 を使うことによって、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の構造が次々と解明されていく。

7.2　並進作用素

並進作用素によって生成される作用素の空間の構造を論じる前に、並進作用

---

* 空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ は、第11節 第12節で、空間 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$, $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ は、第16節で論じる。

素そのものの性質について，簡単にまとめておく。

まず並進作用素 $T(a)$ は、式 (3.56) で示したように、任意の $f \in L_2[-l, l]$ を，周期 $2l$ で全区間 $(-\infty, \infty)$ に拡張しておいて，

$$(T(a)f)(x) \equiv f(x-a) \qquad (-\infty < a < \infty) \tag{7.1}$$

によって定義される作用素である。容易に分かるように、

$$T(a+2l) = T(a) \tag{7.2}$$

$$T(a)T(b) = T(a+b) \tag{7.3}$$

$$T(0) = E \tag{7.4}$$

$$T(a)^{-1} = T(-a) \tag{7.5}$$

$$T(a)^* = T(-a) \tag{7.6}$$

$$\overline{T(a)} = T(a) \tag{7.7}$$

$$\| T(a)f \| = \| f \| \qquad : f \in L_2 \tag{7.8}$$

なる関係が成立する。式 (7.6), (7.7) は、それぞれ式 (4.62), (4.52) で示したとうりである。式 (7.3) ～ (7.5) より、並進作用素の全体 $\{T(a) : -\infty < a < \infty\}$ が、作用素の積に関して群になることが分かる。そして，解析半群の理論により、$T(a)$ は、式 (3.57) に示したように、自己共役な微分作用素 $-iD$ を使って

$$T(a) = e^{-ia(-iD)} \tag{7.9}$$

と表現できるのである。

更に，式 (3.60) に示したように、$-iD$ の周期性の境界条件のもとでの固有値，固有関数は、それぞれ $n\pi/l$ 及び $\varphi_n(x)$ であったから、$T(a)$ の固有値，固有関数は、式 (7.9) より、それぞれ $\overline{\varphi_n(a)}$ 及び $\varphi_n(x)$ となる（文

献(5), P. 460):

$$T(a)\varphi_n = \overline{\varphi_n(a)}\,\varphi_n \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{7.10}$$

式(7.10),(3.61)より直ちに、$T(a)$の空間周波数特性$\langle\langle \tilde{T}(m,n,a)\rangle\rangle$が、

$$\tilde{T}(m,n,a) = \overline{\varphi_n(a)}\,\delta_{m,n} \qquad (m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{7.11}$$

と対角行列になり、そのn,n要素が、基本座標系の構成元である$\varphi_n(x)$の$x=-a$における値$\varphi_n(-a)=\overline{\varphi_n(a)}$になることが分かる。

式(3.100)を考慮すれば、式(7.10),(3.97)より、有限次元並進作用素$T_N(a)$が、

$$T_N(a) \equiv E_N T(a) E_N = T(a) E_N \tag{7.12}$$

となることが分かる。式(7.12)の最後の項は、空間H_Nが、全てのaに対して$T(a)$の不変部分空間になることを表している。即ち、入力信号がH_Nに帯域制限されている限り、$T_N(a)$は$T(a)$と厳密に同じ働きをするのである。$T_N(a)$に対しても、式(7.2),(7.3),(7.5)～(7.8)がそのまま成立する。また、式(7.4)に対しては、式(7.4),(7.12)から分かるように

$$T_N(0) = E_N \tag{7.13}$$

となる。

式(3.45)より、式(4.55)で定義された射影作用素の集合$\{E^{(n)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$は、Schmidtの内積に関して、正規直交系になっている:

$$(E^{(m)}, E^{(n)}) = \delta_{m,n} \qquad (m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots) \tag{7.14}$$

そして、式(3.44),(3.46),(7.14)より、基本座標系$\{\varphi_n\}$による$T(a), T_N(a)$のdyadic表現に対応した次の展開公式が成立する。

〔命題 7.1〕任意のaに対して、次の関係が成立する。

$$T(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_n(a)}\, E^{(n)} \tag{7.15}$$

$$T_N(a) = \sum_{n=-N}^{N} \overline{\varphi_n(a)}\, E^{(n)} \tag{7.16}$$

更に次の関係が成立する。

$$\overline{\varphi_n(a)} = (T(a),\ E^{(n)}) \tag{7.17}$$

〔命題 7.2〕任意の a, b に対して、次の関係が成立する。

$$(T_N(a),\ T_N(b)) = \sqrt{2N+1}\ \varphi_0(a-b) \tag{7.18}$$

$$\| T_N(a) \|_2 = \sqrt{2N+1} \tag{7.19}$$

$$tr(T_N(a)) = \sqrt{2N+1}\ \varphi_0(a) \tag{7.20}$$

（証明） 式(7.16), (7.14), (3.73), 13.82) より

$$\begin{aligned}(T_N(a),\ T_N(b)) &= \Big(\sum_{m=-N}^{N} \overline{\varphi_m(a)}\, E^{(m)},\ \sum_{n=-N}^{N} \overline{\varphi_n(b)}\, E^{(n)} \Big) \\ &= \sum_{m,n=-N}^{N} \varphi_n(b)\, \overline{\varphi_m(a)}\, (E^{(m)},\ E^{(n)}) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(b)\, \overline{\varphi_n(a)} \\ &= \sqrt{2N+1}\ \varphi_0(b-a)\end{aligned}$$

となり、式(7.18)が成立する。式(7.18)で $b=a$ とおけば、式(3.81)より式(7.19)を得る。式(7.18)で $b=0$ とおけば、式(7.13)と

$$tr(A_N) = (A_N,\ E_N) \ :\ A_N \in B(H_N) \tag{7.21}$$

より、式(7.20)が成立する。 (Q.E.D)

〔系 7.1〕 $\{ T_N(a_n)/\sqrt{2N+1} \}_{n=-N}^{N}$ は、Schmidt の内積に関して、正規直交系をなす：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2N+1}}T_N(a_m),\ \frac{1}{\sqrt{2N+1}}T_N(a_n)\right)=\delta_{m,n} \qquad (7.22)$$

ここで a_n $(n=-N,-N+1,\cdots,N)$ は，式(3.72)で与えられる自然座標系の標本点である。

$T(a)$ は、超関数を使わない限り、積分表現できない。しかし、3.3.5で述べたように、$T_N(a)$ は積分表現可能であって，次のようになる。

〔命題 7.3〕 $T_N(a)$ は、次のように積分表現される。

$$(T_N(a)f)(x)=\frac{\sqrt{2N+1}}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\psi_0(x-y-a)f(y)\,dy \qquad (7.23)$$

（証明） $T_N(a)$ の積分核を $t_N(x,y,a)$ とすれば、命題3.8と式(7.12)(7.3)より、

$$t_N(x,y,a)=\sqrt{2N+1}\,(T_N(a)T(y)\psi_0)(x)=\sqrt{2N+1}\,(T_N(a+y)\psi_0)(x)$$

$$=\sqrt{2N+1}\,\psi_0(x-y-a)$$

となり，式(7.23)が成立する。 (Q.E.D)

命題7.3より、$T_N(a)$ の積分核 $t_N(x,y,a)$ が、x と y の差の関数になることが分かる。また、命題7.3，命題3.13及び式(3.78)より次の系が成立する。

〔系 7.2〕 $T_N(a)$ の結合特性を，$\langle\langle T_N^{\wedge}(m,n,a)\rangle\rangle$ とすれば

$$T_N^{\wedge}(m,n,a)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\psi_{m-n}(a) \qquad (7.24)$$

となる。

系7.2より，$T_N(a)$ の結合特性が、積分核と同じように，m と n の差だけに依存する行列、即ち、巡回行列（文献(6)，P.161）になることが分かる。

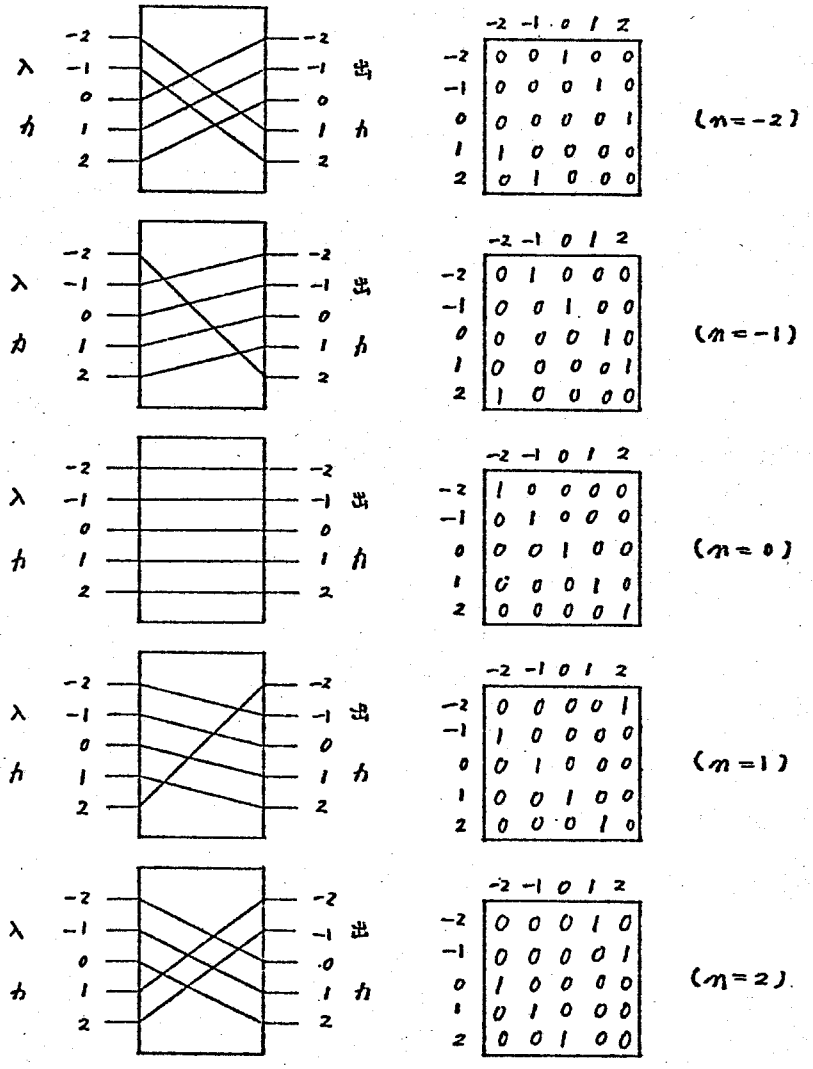
式(3.103)，(7.24)より、$T_N(a)$ の自然座標系によるdyadic表現は，

$$T_N(a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m,n=-N}^{N} \psi_{m-n}(a) \langle \psi_m, \psi_n \rangle \qquad (7.25)$$

となる．特に $a = a_n$ のときは、式(3.81)より

$$T_N(a_n) = \sum_{m=-N}^{N} \langle \psi_m, \psi_{m-n} \rangle \qquad (7.26)$$

となる。そして 式(7.25), (7.26), (7.21)より、次の命題が成立する。



(a) 回路の結線　　(b) 結合特性 $\hat{T_N}(a_n)$

図7.1　$T_N(a_n)$ の結合特性 $\hat{T_N}(a_n)$ と回路の結線

〔命題 7.4〕任意の a に対して、次の関係が成立する。

$$T_N(a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \psi_n(a)\, T_N(a_n) \tag{7.27}$$

$$\psi_n(a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \left(T_N(a),\ T_N(a_n) \right) \tag{7.28}$$

式(7.26)は、自然座標系の標本点の間隔の n 倍だけ入力信号を平行移動する為には、空間回路網の入出力端子を、n 個ずつずらして、そのまま(重み1で)結線すれば良いということを意味しており、直観的イメージと非常に良く一致している(図7.1参照)。

更に式(7.27)から分かるように、このような回路 $T_N(a_n)$ を、$\psi_n(a)/\sqrt{2N+1}$ なる重みで並列に接続することにより、任意の a だけ平行移動する空間回路網を、構成することができるのである。

7.3 作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(L_2)$ と $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$

並進作用素と可換な $\mathcal{B}(L_2)$ の元、即ち、任意の実数 a に対して、交換関係

$$AT(a) = T(a)A \tag{7.29}$$

を満足する作用素 $A \in \mathcal{B}(L_2)$ の全体を $\mathcal{B}^{(1)}(L_2)$ と表す。同様に、式(7.12)で与えられる $T_N(a)$ と可換な $\mathcal{B}(H_N)$ の元の全体を、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と表す。

$\mathcal{B}(H_N)$ を $\mathcal{B}(L_2)$ の部分空間とみなしたとき、次の命題が成立する。

〔命題 7.5〕

$$\mathcal{B}^{(1)}(L_2) \cap \mathcal{B}(H_N) = \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \tag{7.30}$$

〔命題 7.6〕次の各命題は、互いに同値である。

(i) $A \in \mathcal{B}^{(1)}(H)$ (7.31)

(ii) $\bar{A} \in \mathcal{B}^{(1)}(H)$ (7.32)

(iii) $A^{*} \in \mathcal{B}^{(1)}(H)$ (7.33)

即ち、$\mathcal{B}^{(1)}(H)$は、複素共役演算 及び 共役演算$*$に関して、閉じているのである。

命題7.1で、$T(a)$ 及び $T_N(a)$が、正規直交系$\{E^{(n)}\}$によって表されることを示した。実は、これは$\mathcal{B}^{(1)}(H)$に固有の性質であって、次の命題が成立する。

〔命題 7.7〕 $A \in \mathcal{B}(H)$が$\mathcal{B}^{(1)}(H)$に属する為の必要十分条件は、Aが

$$A = \sum_n \tilde{A}(n) E^{(n)} \tag{7.34}$$

と表されることである。ここで$\tilde{A}(n)$は、Aの固有値であって

$$\tilde{A}(n) = (A, E^{(n)}) \tag{7.35}$$

となる。

(証明) $A \in \mathcal{B}^{(1)}(L_2)$とすれば、式(7.10)より

$$T(a)(A\varphi_n) = \overline{\varphi_n(a)}(A\varphi_n) \tag{7.36}$$

となる。再び式(7.10)より、$T(a)$の固有値$\overline{\varphi_n(a)}$の重複度(文献(7), p.288)は、$a \neq 0 \pmod{2\ell}$のとき 1であり、対応する固有関数はφ_nであるから、$A\varphi_n$は、φ_nによって張られる一次元部分空間の元になる。即ち、適当な複素数$\tilde{A}(n)$を使って、$A\varphi_n$は

$$A\varphi_n = \tilde{A}(n)\varphi_n \tag{7.37}$$

と表される。しかも、$\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$は$L_2$の完全正規直交系であるから、式(7.37)より式(7.34)が成立する。

更に、式(4.55), (3.36), (7.37)より

$$(A, E^{(n)}) = (A, \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle) = (A\varphi_n, \varphi_n) = A^{\sim}(n)$$

となり、式(7.35)が成立する。

逆に $A \in B(L_2)$ が式(7.34)の形に表現できたとすれば

$$E^{(m)}\varphi_n = \delta_{m,n}\varphi_n \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{7.38}$$

より、式(7.37)が成立するから、式(7.10)より

$$AT(a)\varphi_n = \overline{\varphi_n(a)}\, A\varphi_n = \overline{\varphi_n(a)}\, A^{\sim}(n)\varphi_n \tag{7.39}$$

$$T(a)A\varphi_n = A^{\sim}(n)T(a)\varphi_n = A^{\sim}(n)\overline{\varphi_n(a)}\varphi_n \tag{7.40}$$

となる。よって、

$$AT(a)\varphi_n = T(a)A\varphi_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{7.41}$$

となる。$\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は、L_2 の完全系であるから、式(7.41)より、$A \in B^{(1)}(L_2)$ となる。$H = H_N$ の場合も、同様に証明できる。 (Q.E.D)

命題7.7より、$B^{(1)}(H)$ の全ての元が、$T(a)$ と同じ固有関数をもち、その固有関数の全体が、3.2.4 で導入した基本座標系になることが分かる。これより直ちに、次の系を得る。

〔系 7.3〕 $A \in B(H)$ が $B^{(1)}(H)$ に属する為の必要十分条件は、Aの空間周波数特性 $A^{\sim} = \langle\langle A^{\sim}(m,n) \rangle\rangle$ が、Aの固有値 $A^{\sim}(n)$ を対角要素 $A^{\sim}(n,n)$ とする対角行列になることである。

系7.3が主張しているように、$A \in B^{(1)}(H)$ の空間周波数特性 $A^{\sim} = \langle\langle A^{\sim}(m,n) \rangle\rangle$ と、固有値から作られるベクトル $(A^{\sim}(n))$ は、同じものとみなせる。* そこで、ベクトル $(A^{\sim}(n))$ をも、$A \in B^{(1)}(H)$ の空間周波数特性と呼び、同じ記号 $A^{\sim}$ で表すことにする。即ち、前者 $A^{\sim} = \langle\langle A^{\sim}(m,n) \rangle\rangle$ は行列であり、後者 $A^{\sim} = (A^{\sim}(n))$ は

---

* ベクトル $(\cdots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots)^T$ を、簡単のために (α_n) と略記する。ここで、$(\cdots)^T$ は、ベクトルの転置を表す。

ベクトルであり、それを同じ記号$A^{\sim}$, 同じ名称"空間周波数特性"で呼ぶのである。特に両者を区別したい場合には、後者を、"$\mathcal{B}^{(1)}(H)$ における空間周波数特性"と呼ぶこともある。

$$E^{(m)}E^{(n)} = \delta_{m,n}E^{(n)} \quad (m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{7.42}$$

であるから、命題 7.1 より

$$E^{(n)}T(a) = T(a)E^{(n)} = \overline{\varphi_n(a)}\,E^{(n)} \tag{7.43}$$

となり、$E^{(n)} \in \mathcal{B}^{(1)}(\mathcal{L}_2)$ となる。しかも、新しく定義された空間周波数特性は、式(7.35)のように、正規直交系$\{E^{(n)}\}$の展開係数として表される。そこで、$\{E^{(n)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 及び $\{E^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ を、それぞれ空間 $\mathcal{B}^{(1)}(\mathcal{L}_2)$ 及び $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の基本座標系と名付けることにする。

〔系 7.4〕 $A \in \mathcal{B}(H)$ が $A \in \mathcal{B}^{(1)}(H)$ となる為の必要十分条件は、全てのれに対して、交換関係

$$AE^{(n)} = E^{(n)}A \tag{7.44}$$

が成立することである。

式(4.36), (3.47)に対して、次の命題が成立する。

〔命題 7.5〕 $A \in \mathcal{B}^{(1)}(H)$ に対して、$B \equiv \bar{A}$, $C = A^{*}$ とおく。A, B, C の空間周波数特性に関して、次の関係が成立する。

$$B^{\sim}(n) = \overline{A^{\sim}(-n)}, \quad C^{\sim}(n) = \overline{A^{\sim}(n)} \tag{7.45}$$

(証明) 式(7.35), (4.43), (5.57)より

$$B^{\sim}(n) = (\bar{A}, E^{(n)}) = (\overline{A, \bar{E}^{(n)}}) = \overline{(A, E^{(-n)})} = \overline{A^{\sim}(-n)}$$

となり、式(7.45)の才一式が成立する。同様に、式(3.28)と

$$E^{(n)*} = E^{(n)} \tag{7.46}$$

より、才二式が成立する。 (Q.E.D)

式(7.45)と式(4.1),(4.6)を比較してみれば、$A \in B^{(1)}(H)$の空間周波数特性に対する一と*の役割が、関数に対する一と*の役割の丁度逆になっていることが分かる。

〔補題 7.1〕 $A, B \in B^{(1)}(H)$ ならば $AB \in B^{(1)}(H)$ となる。更に、A および B の空間周波数特性を使って、AB は、

$$AB = \sum_n \tilde{A}(n)\tilde{B}(n)E^{(n)} \tag{7.47}$$

と表される。

〔命題 7.9〕 $B^{(1)}(H)$は、単位元をもった可換環である。

命題7.9と命題7.6より、$B^{(1)}(H)$の任意の元が、正規作用素になることが分かる。また、次の命題も成立する。

〔命題 7.10〕 $A \in B^{(1)}(H)$の逆A^{-1}が存在する為の必要十分条件は、全てのnに対して $\tilde{A}(n) \neq 0$ となることである。そしてこのとき A^{-1}は、

$$A^{-1} = \sum_n \frac{1}{\tilde{A}(n)} E^{(n)} \tag{7.48}$$

と表され、$A^{-1} \in B^{(1)}(H)$ が成立する。

補題7.1と式(3.100)から直ちに、次の命題が成立する。

〔命題 7.11〕 $A \in B^{(1)}(L_2)$ に対して、次の関係が成立する。

$$A_N \equiv E_N A E_N = A E_N = E_N A \tag{7.49}$$

命題 7.11 は、式(7.12)で示した並進作用素の性質が、$B^{(1)}(L_2)$に属する全ての作用素に共通な性質であることを示している。更に、具体的に言えば、$A_N = AE_N$ は、空間 H_N が $B^{(1)}(L_2)$ の全ての作用素に対する不変部分空間になっていることを表している。即ち、入力信号が H_N に帯域制限されている限り A_N は A と厳密に同じ働きをするのである。

また $A_N = E_N A$ は、5.3.3 で述べたように、$A \in B^{(1)}(L_2)$ によって変換した結果が H_N に入るものは、本質的には H_N の元だけである、ということを意味している。

以上の二点から、空間 H_N が、$A \in B^{(1)}(L_2)$ の値域を H_N に限定した場合の意味のある最大の定義域になっているということができる。従って、$B^{(1)}(L_2)$ の作用素全体を扱っている限り、3.3.3 で論じたように、空間回路網の入出力端子の数を等しくとることは、非常に自然であるといえる。

7.4 インパルス応答による $B^{(1)}(H_N)$ と H_N の同形対応

並進作用素と可換な作用素 $B^{(1)}(L_2)$ の中で、我々が実際に全物で実現できる作用素の族は、$B^{(1)}(H_N)$ である。そこで以下、空間 $B^{(1)}(H_N)$ の性質について論じることにする。

命題 7.7, 命題 7.9 から分かるように、$B^{(1)}(H_N)$ は、代数的には、$2N+1$ 次元線形空間であり、可換環になっている。しかし、より詳細な議論をしていく為には、更に位相を導入して、$B^{(1)}(H_N)$ を位相空間にしなければいけない。これまでにも、強位相, 一様位相, Schmidt ノルムによる位相等を、必要に応じて使ってきたが、ここでもう一度どのような位相が妥当であるかを考えてみることにする。

まず第一に、その位相によって、$A_N \in B^{(1)}(H_N)$ のもつ種々の物理的性質、例えば、空間周波数特性、結合特性等を、作用素の空間の中だけで 議論できることが望ましい。第二に、A_N の $B^{(1)}(H_N)$ での振舞によって、同時に A_N をある

信号に作用させたときの様子が分かることが望ましい。そうすれば、作用素の近似の問題も、考え易くなってくるのである。

幸いなことに、A_N が $B^{(1)}(H_N)$ に属していれば、A_N のインパルス応答を知ることによって、H_N に属する全ての信号に対する応答を知ることができる（命題 7.25）ので、作用素の空間 $B^{(1)}(H_N)$ と関数の空間 H_N の関係を調べる為には、インパルス応答に着目すれば良いことが分かる。

$A_N \in B^{(1)}(H_N)$ に A_N のインパルス応答を対応させる作用素を、ρ_1 で表す：

$$\rho_1(A_N) \equiv \sqrt{2N+1}\, A_N \psi_0 \quad : \quad A_N \in B^{(1)}(H_N) \tag{7.50}$$

ここで ρ_1 の添字 1 は、ρ_1 の定義域が $B^{(1)}(H_N)$ であることを表している。インパルス応答は、$B(H_N)$ の全ての元に対して定義できる。しかし、逆に H_N の元が与えられたとき、それに対応する作用素を求めようとすれば、つまり、ρ_1 の逆作用素 ρ_1^{-1} を考える場合には、ρ_1^{-1} の値域、即ち ρ_1 の定義域を、$B(H_N)$ の $2N+1$ 次元部分空間に限定しておかねばいけないのである。

ρ_1 の定義から、例えば

$$\rho_1(T_N(a))(x) = \sqrt{2N+1}\, \psi_0(x-a) \tag{7.51}$$

$$\rho_1(T_N(a_n)) = \sqrt{2N+1}\, \psi_n \tag{7.52}$$

$$\rho_1(E^{(n)}) = \psi_n \tag{7.53}$$

となる。

〔命題 7.12〕 ρ_1 は、$B^{(1)}(H_N)$ から H_N の上への一対一線形作用素である。

命題 7.12 から、ρ_1 の線形な逆 ρ_1^{-1} が存在することが分かる。ρ_1^{-1} の具体的な形は、後で示す（命題 7.14）。

命題 7.12 から、$B^{(1)}(H_N)$ と H_N が作用素 ρ_1 によって、代数的には同形（

文献(8), p.2)に結びついていることが分かった。同じ ρ_1 によって、位相的にも同形(文献(8), p.20)になるように、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ にSchmidtノルムによって位相を導入することにする。それは、次の命題7.13から分かるように、Schmidtノルムが、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における二点間の距離が H_N における対応する二点間の距離に完全に一致するような唯一の位相であるからである。

〔命題 7.13〕線形空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の上で定義された汎関数 J で、任意の $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して

$$J[A_N] = \|\rho_1(A_N)\| \tag{7.54}$$

を満足するものは、Schmidtノルムであり、しかもそれだけである。

(証明) もし J が式(7.54)を満足したとすれば、$T_N(a)$ のユニタリ性及び式(3.78), (3.79)より

$$J[A_N]^2 = \|\rho_1(A_N)\|^2 = \|\sqrt{2N+1}\, A_N \varphi_0\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} \|A_N \varphi_0\|^2$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \|T_N(a_n) A_N \varphi_0\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} \|A_N \varphi_n\|^2 = \|A_N\|_2^2$$

$$\therefore\ J[A_N] = \|A_N\|_2$$

となる。この証明を逆にたどれば、Schmidtノルムが式(7.54)を満足することが分かる。 (Q.E.D)

内積のノルムによる表現

$$4(f, g) = \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2 \tag{7.55}$$

(文献(7), p.50)に、命題7.13から得られる関係式

$$\|A_N\|_2 = \|\rho_1(A_N)\| \quad : A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \tag{7.56}$$

を適用すれば、次の系を得る。

〔系 7.5〕 任意の $A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して

$$(A_N, B_N) = (\rho_1(A_N), \rho_1(B_N)) \tag{7.57}$$

が成立する。ここで、左辺の内積は Schmidt の内積であり、右辺の内積は、H_N における内積である。

系7.5 から直ちに、次の系を得る。

〔系 7.6〕 H_N の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ に対して

$$U_N^{(n)} \equiv \rho_1^{-1}(u_n) \tag{7.58}$$

とおけば、$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ は $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の正規直交基底になり、逆も成立する。更に $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の $U_N^{(n)}$ に対する座標成分は、そのインパルス応答

$$a_N(x) \equiv \rho_1(A_N)(x) \tag{7.59}$$

の、u_n に対する座標成分と一致する：

$$(A_N, U_N^{(n)}) = (a_N, u_n) \tag{7.60}$$

つまり、A_N が、例えば $T_N(a)$ のように、一つのパラメータを含んでいるとき、それを $A_N(a)$ で表し、そのインパルス応答を $a_N(x,a)$ で表すことにすれば、$A_N(a)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ での軌跡と、$a_N(x,a)$ の H_N での軌跡が全く一致するのである。

系7.6 と式(7.52),(7.53) より、H_N の基本座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ 及び自然座標系 $\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ に対応する $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の正規直交基底は、それぞれ $\{E^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{T_N(a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$ となる。7.3 で $\{E^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ が $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の空間周波数特性と密接な関係にあることから、$\{E^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ を $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の基本座標系と呼ぶことにした。後で(命題7.24)分かるように、$\{T_N(a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$ は、$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の結合特性と密接な関係にある。そこで、この正規直交基底を、

$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の自然座標系と呼ぶことにする。

式(3.89), (3.90)の両辺の ρ_1^{-1} をとり、ρ_1^{-1} の線形性を利用すれば、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ におけるこれら二種類の座標系の間に、命題3、4 と同じ関係

$$E^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} \varphi_n(a_m) \frac{1}{\sqrt{2N+1}} T_N(a_m) \tag{7.61}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}} T_N(a_m) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} \overline{\varphi_m(a_n)}\, E^{(m)} \tag{7.62}$$

が成立することが分かる。

このように、H_N と $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ のどちらか一方の性質が分かれば、それを ρ_1^{-1} 或いは ρ_1 によって、直ちにもう一方の空間の性質に変換することができるのである。

$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ と $f \in H_N$ に対する拡張されたdyadを、次のように定義する。

$$\langle f,\ A_N \rangle B_N \equiv (B_N, A_N) f \qquad : B_N \in \mathcal{B}(H_N) \tag{7.63}$$

$$\langle A_N,\ f \rangle g \equiv (g, f) A_N \qquad : g \in H_N \tag{7.64}$$

この拡張されたdyadを使えば、ρ_1 および ρ_1^{-1} を、次のように表現することができる。

〔命題 7.14〕 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ 及び H_N の対応する正規直交基底 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を使って、ρ_1, ρ_1^{-1} は

$$\rho_1 = \sum_{n=-N}^{N} \langle u_n, U_N^{(n)} \rangle \tag{7.65}$$

$$\rho_1^{-1} = \sum_{n=-N}^{N} \langle U_N^{(n)}, u_n \rangle \tag{7.66}$$

とdyadic表現される。しかも、この表現形式は、座標系のとり方に依存しない。

(証明) 式(7.57)より、任意の $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して、

$$\rho_1(A_N) = \sum_{n=-N}^{N} (\rho_1(A_N), u_n) u_n$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} (\rho_1(A_N), \rho_1(U_N^{(n)})) u_n$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} (A_N, U_N^{(n)}) u_n$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \langle u_n, U_N^{(n)} \rangle A_N$$

となり、式(7.65)が成立する。ρ_1^{-1}についても、同様に証明できる。(Q.E.D)

7.5 作用素ρ_1の性質

7.4で導入した作用素ρ_1の性質、及びそれから導かれるいくつかの命題について論じる。

〔命題 7.15〕$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$をH_Nの正規直交基底とし、$U_N^{(n)} \equiv \rho_1^{-1}(u_n)$とする。$\mathcal{B}(H_N)$の元

$$A_N \equiv \sum_{m,n=-N}^{N} a_{m,n} \langle u_m, u_n \rangle \tag{7.67}$$

に対して

$$\mathcal{U}_N \equiv \sum_{m,n=-N}^{N} a_{m,n} \langle U_N^{(m)}, U_N^{(n)} \rangle \tag{7.68}$$

とおけば、任意の$f \in H_N$に対して、次の関係が成立する。

$$\rho_1^{-1}(A_N f) = \mathcal{U}_N \rho_1^{-1}(f) \tag{7.69}$$

命題7.15は、図7.2に示すように、fから$A_N f$を求めるH_Nの上の作用素A_Nと$\rho_1^{-1}(f)$から$\rho_1^{-1}(A_N f)$を求める$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$の上の作用素$\mathcal{U}_N$が、式

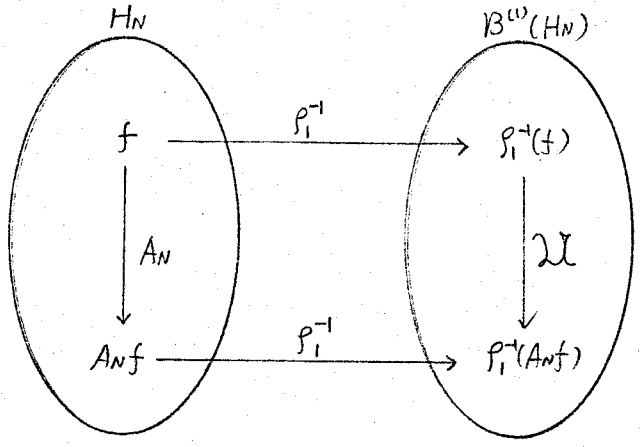


図7.2　命題7.15の説明図

(7.67), (7.68) のように同じ形の dyadic 表現をもつことを意味している。即ち、対応する座標系 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$, $\{U_N^{(m)}\}_{n=-N}^{N}$ を使えば、その展開係数が同じ $a_{m,n}$ になるのである。

〔命題 7.16〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ が $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ となるとき、またそのときに限って、次式が成立する。

$$\rho_1^{-1}(A_N f) = A_N \rho_1^{-1}(f) \quad : f \in H_N \tag{7.70}$$

（証明） 補題7.1より、$A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ のとき $A_N B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ となる。しかも、

$$\rho_1(A_N B_N) = A_N \rho_1(B_N) \tag{7.71}$$

であるから、$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ ならば

$$\rho_1^{-1}(A_N f) = \rho_1^{-1}(A_N \rho_1 \rho_1^{-1}(f)) = \rho_1^{-1}\rho_1(A_N \rho_1^{-1}(f)) = A_N \rho_1^{-1}(f)$$

となり、式(7.70)が成立する。逆に式(7.70)が任意の $f \in H_N$ に対して成立したとすれば、$B_N \equiv \rho_1^{-1}(f)$ とおくことにより、任意の $B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して、$A_N B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ となる。従って、特に $B_N = E_N$ とおけば、$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ となる。

(Q.E.D)

命題 7. 16 は、$A_N \in B^{(1)}(H_N)$ のとき、またそのときに限って、命題 7. 15 で定義した $B^{(1)}(H_N)$ の上の作用素 $\mathcal{A}_N$ が、"A_N を掛ける" という作用素に等しくなることを意味している。

命題 7. 16 の応用を一つ与える。

〔系 7. 7〕 $A_N, B_N \in B^{(1)}(H_N)$, $f = \rho_1(B_N)$ とし、λ を複素数とする。次の二式は、互いに同値である。

$$\begin{cases} A_N f = \lambda f & (7.72) \\ A_N B_N = \lambda B_N & (7.73) \end{cases}$$

(証明) 式 (7. 72) が成立したとすれば、命題 7. 16 より

$$A_N B_N = A_N \rho_1^{-1}(f) = \rho_1^{-1}(A_N f) = \rho_1^{-1}(\lambda f)$$

$$= \lambda \rho_1^{-1}(f) = \lambda B_N$$

となり、式 (7. 73) が成立する。逆は、式 (7. 71) から明らかである。(Q. E. D)

式 (7. 53) より、式 (7. 38) と (7. 42) が、式 (7. 72) と (7. 73) の関係にあることが分かる。また、式 (7. 43) も式 (7. 10) と同値な関係式であることが分かる。

〔命題 7. 17〕 任意の $A_N \in B^{(1)}(H_N)$, $g \in H_N$ に対して、$f \equiv \rho_1(A_N)$, $B_N \equiv \rho_1^{-1}(g)$ とおけば次の関係が成立する。

$$A_N g = B_N f \qquad (7.74)$$

(証明) 命題 7. 9 より $B^{(1)}(H_N)$ は可換環であるから

$$A_N g = A_N \rho(B_N) = \rho(A_N B_N) = \rho(B_N A_N)$$

$$= B_N \rho(A_N) = B_N f$$

となり、式(7.74)が成立する。 (Q.E.D)

命題7.17は、A_N を g に作用させたものが、g をインパルス応答とするような $B^{(1)}(H_N)$ の作用素 B_N と、A_N のインパルス応答に作用させたものに等しいことを意味している。この性質を使えば、種々の計算を簡単に行なうことができる。例えば、式(7.52), (7.53), (7.10)より、

$$E^{(m)}\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} T_N(a_n)\varphi_m = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \overline{\varphi_m(a_n)}\,\varphi_m$$

$$\therefore E^m\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \overline{\varphi_m(a_n)}\,\varphi_m \qquad (7.75)$$

となるのである。

〔命題7.18〕 任意の $f \in H_N$ に対して、$A_N \equiv \rho_1^{-1}(f)$ とおけば"

$$f(x) = (A_N, T_N(x)) \qquad (7.76)$$

となる。

(証明) $\sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-y)$ は H_N の再生核であるから、式(2.5), (7.51), (7.57)より

$$f(x) = (f(y), \sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-y))_y = (f, \rho_1(T_N(x))) = (A_N, T_N(x))$$

となり、式(7.76)が成立する。 (Q.E.D)

命題7.18を使えば、例えば式(7.51)より

$$(T_N(a), T_N(b)) = \rho_1(T_N(a))(b) = \sqrt{2N+1}\,\varphi_0(a-b)$$

$$\therefore (T_N(a), T_N(b)) = \sqrt{2N+1}\,\varphi_0(a-b) \qquad (7.77)$$

と式(7.18)を容易に、しかもエレガントに求めることができるのである。また式(7.17), (7.28)も、それぞれ式(7.53), (7.52)を使えば、命題7.18からの直接の帰結として、求めることができる。

H_N の元 f を $B^{(1)}(H_N)$ で表現する為には、f を ρ_1^{-1} で変換すれば良い。しかし、点 x における f の値 $f(x)$ を $B^{(1)}(H_N)$ で表現する為には、もはや、ρ_1^{-1} を使うことはできない。そのような場合に、命題 7.18 が備力を発揮するのである。そのような応用例を、次にいくつか示す。

まず、式(7.76)の右辺に、Schwarz の不等式を適用すれば、次の系が成立する。

〔系 7.8〕 $f \in H_N$ に対して $A_N \equiv \rho_1^{-1}(f)$ とおけば、次の不等式が成立する。

$$|f(x)| \leqq \sqrt{2N+1}\,\|f\| = \sqrt{2N+1}\,\|A_N\|_2 \qquad (7.78)$$

系 7.8 はまた、命題 2.3 と式(7.56)からも導くことができる。式(7.76)で $x=0$ とおけば、式(7.13), (7.21) より次の系が成立する。

〔系 7.9〕 $A_N \in B^{(1)}(H_N)$ のトレースは、A_N のインパルス応答の原点における値と一致する:

$$tr(A_N) = \rho_1(A_N)(0) \qquad (7.79)$$

〔命題 7.19〕 任意の $A_N \in B^{(1)}(H_N)$ に対して、次の関係が成立する。

$$\rho_1(\overline{A}_N) = \overline{\rho_1(A_N)}\,, \quad \rho_1(A_N^*) = \rho_1(A_N)^* \qquad (7.80)$$

ここで、式(7.80)の才二式の右辺の $*$ は、式(4.6)で与えられた $*$ である。

(証 明) 命題 7.6 と式(7.76), (7.7), (4.43)より、各点 $x \in [-l, l]$ に対して

$$\rho_1(\overline{A}_N)(x) = (\overline{A}_N, T_N(x)) = \overline{(A_N, T_N(x))} = \overline{\rho_1(A_N)(x)}$$

となり、式(7.80)の才一式が成立する。才二式も同様に証明できる。 (Q.E.D)

命題 7.19 は、4.1 で述べた共役演算と複素共役演算の対応関係の妥当性

を示すものである。命題 7.19 から 導かれるそのような例を、もう一つ示す。

〔系 7.10〕 任意の $A_N \in B^{(1)}(H_N)$, $f \in H_N$ に対して

$$(A_N f)^* = A_N^* f^* \tag{7.81}$$

が成立する。

（証明） $B_N \equiv P_1^{\dagger}(f)$ とおけば、式(7.80), (7.33) と命題 7.9 より

$$(A_N f)^* = P(A_N B_N)^* = P(B_N^* A_N^*) = P(A_N^* B_N^*)$$

$$= A_N^* P(B_N^*) = A_N^* P(B_N)^* = A_N^* f^*$$

となり、式(7.81) が成立する。 (Q.E.D)

式(5.12), (5.95) より、一般には、

$$(A_N f)^* = A_N^{\dagger} f^* \quad ; A_N \in B(H_N) \tag{7.82}$$

である。式(7.81), (7.82) で $f \equiv f^*$ とおけば、$A_N \in B^{(1)}(H_N)$ のとき

$$A_N^{\dagger} f = A_N^* f \quad ; A_N \in B^{(1)}(H_N) \tag{7.83}$$

となる。従って次の命題が成立する。

〔命題 7.20〕 $B^{(1)}(H_N)$ の元に対しては、対称演算と共役演算が一致する：

$$A_N^{\dagger} = A_N^* \quad ; A_N \in B^{(1)}(H_N) \tag{7.84}$$

共役演算 $*$ は、式(4.2) のように、内積を使って間接的に定義される為に、一般には、A_N^* を具体的に書き表すことはできない。しかし、命題 7.20 より、$B^{(1)}(H_N)$ の元 A_N に対しては、

$$A_N^* = I_N(0)\,\bar{A}_N\,I_N(0) \quad ; A_N \in B^{(1)}(H_N) \tag{7.85}$$

と具体的に表現することができるのである。

〔命題 7.21〕空間 H_N の正規直交基底を $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ とし、$U_N^{(n)} \equiv \beta_1^{-1}(u_n)$ とすれば、任意の $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して

$$A_N T_N(a)^* = \sum_{n=-N}^{N} (A_N u_n^*)(a)\, U_N^{(n)} \tag{7.86}$$

となる。ここで u_n^* は、式(4.7)で与えられるものである。特に次の関係が成立する。

$$A_N = \sum_{n=-N}^{N} (A_N u_n^*)(0)\, U_N^{(n)} \tag{7.87}$$

$$T_N(a) = \sum_{n=-N}^{N} \overline{u_n(a)}\, U_N^{(n)} \tag{7.88}$$

(証明) 命題7.18と命題7.19より

$$\begin{aligned} A_N T_N(a)^* &= T_N(a)^* A_N \\ &= \sum_{n=-N}^{N} (T_N(a)^* A_N,\ U_N^{(n)})\, U_N^{(n)} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} (A_N U_N^*,\ T_N(a))\, U_N^{(n)} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \beta_1(A_N U_N^{(n)*})(a)\, U_N^{(n)} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} (A_N u_n^*)(a)\, U_N^{(n)} \end{aligned}$$

となり、式(7.86)が成立する。式(7.86)で $a=0$ とおけば式(7.87)となり、$A_N = E_N$ とおけば式(7.88)になる。 (Q.E.D)

式(7.86)～(7.88)が、座標系 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ のとりかたによらないということは、注目すべき点である。

$\varphi_n^* = \varphi_n$ であるから、式(7.87)で $u_n = \varphi_n$ とおけば

$$A_N = \sum_{n=-N}^{N} (A_N \varphi_n)(0)\, E^{(n)} \tag{7.89}$$

となる。更に式(7.37)より、

$$(A_N \varphi_n)(0) = \tilde{A_N}(n) \tag{7.90}$$

となるから、式(7.89)が式(7.34)に対応する式であることが分かる。式(7.52),(7.75)を考慮すれば、式(7.61)が式(7.87)で $A_N = E^{(n)}$, $u_m = \varphi_m$ とおいたものに他ならないことが分かる。また、式(7.16)は式(7.88)で、$u_n = \varphi_n$ とおいたものである。

7.6 $B^{(1)}(H_N)$ の積分表現による特徴づけ

命題7.3で、$T_N(a)$ の積分核が x と y の差の関数になることを示した。実は、これは $B^{(1)}(H_N)$ に固有の性質であって、次の命題が成立する。

〔命題7.22〕 $A_N \in B(H_N)$ が $B^{(1)}(H_N)$ に属する為の必要十分条件は、H_N の元 $a_N(x)$ を使って A_N が、

$$(A_N f)(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} a_N(x-y) f(y)\, dy \tag{7.91}$$

と積分表現できることである。そしてこのとき

$$a_N(x) = \rho_1(A_N)(x) \tag{7.92}$$

となる。

(証明) $A_N \in B^{(1)}(H_N)$ のとき、A_N のインパルス応答 $a_N(x)$ を使って、A_N が式(7.91)のように積分表現できることは、式(3.123)より明らかである。逆に式(7.91)が成立したとすれば、再び式(3.123)より

$$a_N(x-y) = \sqrt{2N+1}\,(A_N T_N(y) \varphi_0)(x) \tag{7.93}$$

となる。従って、式(7.93),(3.78),(7.3)より

$$(A_N T_N(a)\psi_n)(x) = (A_N T_N(a) T_N(a_n)\psi_0)(x) = (A_N T_N(a+a_n)\psi_0)(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} a_N(x-(a+a_n)) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} a_N((x-a)-a_n)$$

$$= (A_N T_N(a_n)\psi_0)(x-a) = (T_N(a) A_N \psi_n)(x)$$

$$\therefore \quad A_N T_N(a)\psi_n = T_N(a) A_N \psi_n \quad \text{for all } n . \tag{7.94}$$

となり、$A_N \in B^{(1)}(H_N)$ となる。また、式(7.93)で $g=0$ とおけば、式(7.92)が成立する。 (Q.E.D)

命題7.22は、$A_N f$ が、f と a_N のたたみこみ(convolution)の形で表現できることを表している。即ち、たたみこみを $*$ で表せば

$$A_N f = f * a_N \tag{7.95}$$

となるのである。このような立場から見れば、式(7.74)は、既に良く知られている関係式

$$f * g = g * f \tag{7.96}$$

の別の表現にすぎないことが分る。

7.7 $B^{(1)}(H_N)$ の結合特性による特徴づけ

式(7.25)で、$T_N(a)$ の結合特性が巡回行列になることを示した。実は、これは $B^{(1)}(H_N)$ に固有の性質であって、次の命題が成立する。

[命題7.23] $A_N \in B(H_N)$ が $B^{(1)}(H_N)$ に属する為の必要十分条件は、A_N の結合特性 $\langle\langle \hat{A_N}(m,n) \rangle\rangle$ が

$$\hat{A_N}(m,n) = \hat{A_N}(m-n) \tag{7.97}$$

となることである。

(証明) 式(7.97)が必要であることは、式(3.126),(7.93)より明らかである。逆に式(7.97)が成立したとする。後で(式(9.47))証明するよう

に、自然座標系 $\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ に対して、加法定理

$$\psi_n(x-y)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{m=-N}^{N}\psi_m(x)\psi_{n-m}(y) \qquad (7.98)$$

が成立しているから、A_N の積分核を $a_N(x,y)$ とすれば、式(3.122),(7.98)より

$$\begin{aligned} a_N(x,y) &= \sum_{m,p=-N}^{N} \hat{A_N}(m-p)\psi_m(x)\psi_p(y) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n)\sum_{m=-N}^{N}\psi_m(x)\psi_{m-n}(y) \\ &= \sqrt{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\hat{A_N}(n)\psi_n(x-y) \end{aligned}$$

$$\therefore\ a_N(x,y)=\sqrt{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\hat{A_N}(n)\psi_n(x-y) \qquad (7.99)$$

となるから、命題 7.22 より $A_N\in\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ となる。 (Q.E.D)

つまり、A_N の結合特性 $\langle\!\langle \hat{A_N}(m,n)\rangle\!\rangle$ が巡回行列になるとき、またそのときに限って、$A_N\in\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ となるのである。これは、A_N を空間回路網で構成する場合、その結合係数が、入力端子 n と出力端子 m の絶対的位置には関係せず、その間隔 $m-n$ だけに依存すること、即ち、空間回路網の構造が一様になることを意味している。そして、その間隔が n のときの結合係数が、$\hat{A_N}(n)$ である。そこで、空間周波数特性の場合と同様に、ベクトル $(\hat{A_N}(n))$ をも、$A_N\in\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の結合特性と呼び、本来の結合特性と同じ記号 $\hat{A_N}$ で表すことにする。特に混乱の恐れがある場合には、ベクトル $(\hat{A_N}(n))$ を、"$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における結合特性"と呼ぶこともある。

例えば、式(7.25)より、$T_N(a)$ の結合特性は $\langle\!\langle \psi_{m-n}(a)/\sqrt{2N+1}\rangle\!\rangle$ なる巡回行列であり、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における結合特性は、$(\psi_n(a)/\sqrt{2N+1})$ なるベクトルである。

式(7.27)より、$T_N(a)$ を $\{T_N(a_n)\}_{n=-N}^{N}$ で展開したときの展開係数からなるベクトルが、$T_N(a)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における結合特性になっていることが分かる。実は、これは $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に固有の性質であって、次の命題が成立する。

〔命題 7.24〕 $A_N \in B(H_N)$ が、$B^{(1)}(H_N)$ に属する為の必要十分条件は、

$$A_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n)\, T_N(a_n) \tag{7.100}$$

が成立することである。ここで $(\hat{A_N}(n))$ は、A_N の結合特性であって、

$$\hat{A_N}(n) = \frac{1}{2N+1}(A_N, T_N(a_n)) \tag{7.101}$$

$$= \frac{1}{2N+1} P_1(A_N)(a_n) \tag{7.102}$$

と表される。

（証明） 式(7.100)が十分であることは明らかである。$A_N \in B^{(1)}(H_N)$ とすれば、式(7.79)が成立しているから、式(7.79)で $y=0$ とおき式(7.92)を考慮すれば"

$$P_1(A_N)(x) = \sqrt{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n)\, \varphi_n(x) \tag{7.103}$$

となる。式(7.103)の両辺の P_1^{-1} をとれば"、式(7.100)が成立する。従って、式(7.22)より式(7.101)が成立し、更に式(7.76)より式(7.102)が成立する。(Q.E.D.)

式(7.87)で $u_n = \varphi_n$ とおけば、$\varphi_n^* = \varphi_{-n}$ であるから、

$$A_N = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} (A_N \varphi_{-n})(0)\, T_N(a_n) \tag{7.104}$$

となる。

$$(A_N \varphi_{-n})(0) = (A_N \varphi_0)(a_n) \tag{7.105}$$

であるから、式(7.102)を考慮すれば、式(7.104)が式(7.100)と本質的には同じ式であることが分かる。ただ、式(7.104)と式(7.100)の見掛上の違いは、式(7.105)の左辺と右辺の違いであって、これは次のような物理的意味をもっている。まず、式(7.105)の左辺は、A_N を空間回路網で実現した場合、入力側に才$(-n)$端子だけ1、他の端子は全て零となるような信号を加えた場合に、出力側才0端子に現われる信号の値を示している。一方、式(7.105)の右辺は、入力側に才0端子だけ1、他の端子は全て零となるような信号を加えた場合に

出力側それぞれ端子に現われる信号値を示している。更に、$0-(-n)=n$ および $n-0=n$ と、注目している入出力の間隔が同じnになっている。そして、この両者の値が、式(7.105)が主張しているように、同じ値になるということは、まさしく空間回路網の構造の一様性を示すものである。

〔命題 7.25〕 $A_N \in B^{(1)}(H_N)$ のインパルス応答を $a_N(x)$ とすれば、任意の $f \in H_N$ に対して、次の関係が成立する。

$$(A_N f)(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\, a_N(x-a_n) \tag{7.106}$$

(証明) 式(7.100)に式(7.102)を代入すれば

$$\rho_1^{-1}(f) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\, T_N(a_n) \tag{7.107}$$

となるから、命題7.17より、式(7.106)が成立する。 (Q.E.D)

式(7.100)を $f \in H_N$ に作用させれば

$$(A_N f)(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} a_N(a_n)\, f(x-a_n) \tag{7.108}$$

となるから、命題7.24と命題7.25が式(7.74)の左辺と右辺の関係にあることが分かる。また式(7.106), (7.108)は、$A_N \in B^{(1)}(H_N)$ のインパルス応答を知ることによって、H_N に属する全ての信号fに対する応答を知ることができる、ということを意味している。

式(7.61), (7.62), (7.35) および式(7.101)より次の命題が成立する。

〔命題 7.26〕 $A_N \in B^{(1)}(H_N)$ の空間周波数特性と結合特性の間に、次の関係が成立する。

$$\left.\begin{aligned} \tilde{A_N}(n) &= \sum_{m=-N}^{N} \overline{\varphi_n(a_m)}\, \hat{A_N}(m) \\ \hat{A_N}(n) &= \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} \varphi_n(a_m)\, \tilde{A_N}(m) \end{aligned}\right\} \tag{7.109}$$

最後に、$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ のインパルス応答の様々な表現形式をまとめておく。

〔命題 7.27〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ のインパルス応答 $a_N(x)$ は、次のように表される。

$$a_N(x) \equiv \rho_1(A_N)(x) \tag{7.110}$$

$$= (A_N, T_N(x)) \tag{7.111}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \tilde{A_N}(n)\, \varphi_n(x) \tag{7.112}$$

$$= \sqrt{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n)\, \varphi_n(x) \tag{7.113}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} a_N(a_n)\, \varphi_n(x) \tag{7.114}$$

式(7.111)は、インパルス応答の作用素による表現である。式(7.112)は、空間周波数特性による表現であり、式(7.113)は結合特性による表現である。そして式(7.112)は、インパルス応答自身の標本点における値による表現であり、式(3.79)で $f = a_N$ とおいたものである。

7.8 正弦作用素 $S^{(n)}$ と余弦作用素 $C^{(n)}$

7.10 の準備として、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の基本座標系 $\{E^{(n)}\}$ の実等方分解に深い関係をもっている正弦作用素と余弦作用素について論じる。

まず、H_N の基本関数系 $\{\varphi_n\}$ を、

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} \left(c_n(x) + i\, s_n(x) \right) \tag{7.115}$$

と分解する。ここで

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 2 & (n \neq 0) \end{cases} \tag{7.116}$$

$$c_n(x) \equiv \sqrt{\epsilon_n}\cos\frac{n\pi}{\ell}x = \frac{\sqrt{\epsilon_n}}{2}\left(\varphi_n(x)+\varphi_{-n}(x)\right) \tag{7.117}$$

$$s_n(x) \equiv \sqrt{\epsilon_n}\sin\frac{n\pi}{\ell}x = \frac{\sqrt{\epsilon_n}}{2i}\left(\varphi_n(x)-\varphi_{-n}(x)\right) \tag{7.118}$$

である。式(7.117), (7.118)の ρ_1^{-1} を、それぞれ $C^{(n)}$, $S^{(n)}$ とおけば

$$C^{(n)} \equiv \rho_1^{-1}(c_n) = \frac{\sqrt{\epsilon_n}}{2}\left(E^{(n)}+E^{(-n)}\right) \tag{7.119}$$

$$S^{(n)} \equiv \rho_1^{-1}(s_n) = \frac{\sqrt{\epsilon_n}}{2i}\left(E^{(n)}-E^{(-n)}\right) \tag{7.120}$$

となる。$C^{(n)}$ を余弦作用素(cosine operator)といい、$S^{(n)}$ を正弦作用素(sine operator)という。

式(7.115)の両辺の ρ_1^{-1} をとれば

$$E^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}}\left(C^{(n)}+iS^{(n)}\right) \tag{7.121}$$

となる。式(7.121)は、命題4.15と式(4.57), (7.119), (7.120)から分かるように、$E^{(n)}$ の実分解になっている。従ってまた、$E^{(n)}$ の自己共役性より、式(7.121)は $E^{(n)}$ の等方分解にもなっている。即ち、

$$\overline{C^{(n)}} = C^{(n)*} = C^{(n)}, \quad \overline{S^{(n)}} = -S^{(n)*} = S^{(n)} \tag{7.122}$$

なる関係が成立する。図4.5(b)に描かれた $C^{(n)}$, $S^{(n)}$ の位置は、式(7.122)から決められたものである。

$\{c_0, c_n, s_n\}_{n=1}^{N}$ は、空間 H_N の正規直交基底であるから、系7.6より、$\{C^{(0)}, C^{(n)}, S^{(n)}\}_{n=1}^{N}$ は、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の正規直交基底になっている。

余弦作用素 $C^{(n)}$ 及び正弦作用素 $S^{(n)}$ は、その定義から明らかなように、それらのインパルス応答が、それぞれ余弦関数 $c_n(x)$, 正弦関数 $s_n(x)$ になるような作用素であった。またそれらは、空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の正規直交基底であり、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の基本座標系の構成元 $E^{(n)}$ を実等方分解しても得られるものであった。しかし、これだけではまだ、$C^{(n)}$ 及び $S^{(n)}$ がどのような作用素であるかと、直

観的に理解することは、困難である。その為には、これらの作用素を、次のように表現すれば良い。

〔命題 7.28〕

$$C^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} \left(\langle c_n, c_n \rangle + \langle s_n, s_n \rangle \right) \tag{7.123}$$

$$S^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} \left(\langle s_n, c_n \rangle - \langle c_n, s_n \rangle \right) \tag{7.124}$$

関数 c_n と s_n によって張られる高々2次元部分空間を、$H^{(n)}$ で表す。式(7.124)は、次のことを意味している。任意に固定した n に対して、$\sqrt{\epsilon_n} S^{(n)}$ は、c_n を s_n に、s_n を $-c_n$ に変換する。即ち、$\sqrt{\epsilon_n} S^{(n)}$ は、空間 $H^{(n)}$ の中では、関数 $f \in H^{(n)}$ を $90°$ 回転する作用素であり、$H^{(n)\perp}$ に対しては、零作用素である。また、式(7.123)より、任意に固定した n に対して、$\sqrt{\epsilon_n} C^{(n)}$ が空間 $H^{(n)}$ の上への射影作用素であることが分かる。* 従って、次の系が成立する。

〔系 7.11〕

$$E_N = \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\epsilon_n} C^{(n)} \tag{7.125}$$

式(7.125)はまた、式(3.69)の両辺に P_1^{-1} を作用させ、

$$P_1(E_N) = \sqrt{2N+1}\, \varphi_0 \tag{7.126}$$

と式(7.119)を用いて導くこともできる。

7.9 平均化作用素 $\Sigma_N(a)$ と差分作用素 $\Delta_N(a)$

7.8では、7.10の準備として、作用素 $E^{(n)}$ の等方分解に深い関係をもっている正弦作用素と余弦作用素について論じた。7.9では、やはり7.10の準備として、並進作用素 $T_N(a)$ の等方分解に深い関係をもっている平均化作用素 $\Sigma_N(a)$

---

* 式(7.123), (7.124)の左辺の $C^{(n)}$, $S^{(n)}$ は、並進作用素と可換であるが、右辺の個々の dyad は、並進作用素と可換でない。

と差分作用素 $\Delta_N(a)$ について論じることにする。

7.9.1 平均化作用素 $\Sigma_N(a)$ と差分作用素 $\Delta_N(a)$

式(7.12)で与えられる並進作用素 $T_N(a)$ に対し、

$$\Sigma_N(a) \equiv \frac{1}{2}\left(T_N(a) + T_N(a)^*\right) \tag{7.127}$$

$$\Delta_N(a) \equiv \frac{1}{2}\left(T_N(a) - T_N(a)^*\right) \tag{7.128}$$

によって与えられる作用素 $\Sigma_N(a)$ を平均化作用素(averaging operator)と名付け、$\Delta_N(a)$ を差分作用素(difference operator)と名付ける。ここで導入した差分作用素 $\Delta_N(a)$ の定義は、通常の差分作用素の定義($T_N(a)^* - E_N$)と、少し異なっている。関数 $y = f(x)$ に対する通常の意味の差分を δy とし、ここで定義した差分を Δy とすれば

$$\delta y = f(x+a) - f(x) \tag{7.129}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}\{f(x-a) - f(x+a)\} \tag{7.130}$$

となっている(図7.3参照)。a が充分小さいときには、$\delta y \fallingdotseq -\Delta y$ である。本論文では、平均化作用素 $\Sigma_N(a)$ との対称性を保つ為に $\Delta_N(a)$ を式(7.128)のように定義したのである。

式(7.127),(7.128)より明らかに

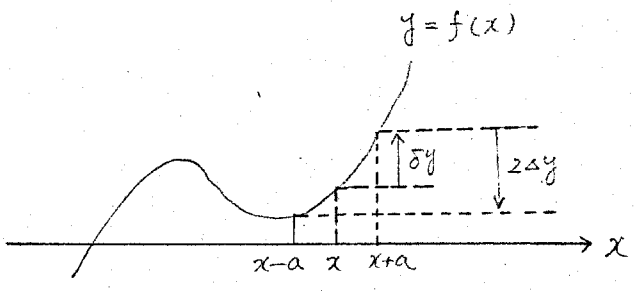


図7.3 差分の二種類の定義

$$T_N(a) = \Sigma_N(a) + \Delta_N(a) \tag{7.131}$$

なる関係が成立する。$T_N(a)$は実作用素であるから、命題4.18より、式(7.131)が、$T_N(a)$の等方分解になっていることが分かる。つまり、並進作用素を等方分解するということは、平均化作用素と差分作用素の和に分解することなのである。これより直ちに、次の関係が成立する。

$$\overline{\Sigma_N(a)} = \Sigma_N(a)^* = \Sigma_N(-a) = \Sigma_N(a) \tag{7.132}$$

$$\overline{\Delta_N(a)} = -\Delta_N(a)^* = -\Delta_N(-a) = \Delta_N(a) \tag{7.133}$$

〔補題 7.2〕 H_Nの任意の正規直交基底を$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$とし、$U_N^{(n)} \equiv P_1^{-n}(u_n)$とすれば

$$\Sigma_N(a) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{\overline{u_n(a) + u_n(-a)}}{2} U_N^{(n)} \tag{7.134}$$

$$\Delta_N(a) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{\overline{u_n(a) - u_n(-a)}}{2} U_N^{(n)} \tag{7.135}$$

となる。特に、次の関係が成立する。

$$\Sigma_N(a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \frac{\psi_n(a) + \psi_n(-a)}{2} T_N(a_n) \tag{7.136}$$

$$\Delta_N(a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \frac{\psi_n(a) - \psi_n(-a)}{2} T_N(a_n) \tag{7.137}$$

（証明）

$$(\Sigma_N(a) u_n^*)(0) = \frac{1}{2}\overline{(u_n(a) + u_n(-a))} \tag{7.138}$$

を式(7.87)に代入すれば、式(7.134)が成立する。他の式も、同様に証明できる。 (Q.E.D)

H_Nに属する偶関数の全体を$H_N^{(e)}$とし、奇関数の全体を$H_N^{(o)}$とすれば、次の命題が成立する。*

〔命題 7.29〕 空間$H_N^{(e)}$の正規直交基底を$\{u_n\}_{n=0}^{N}$, $H_N^{(o)}$の正規直交基

---

* $H_N^{(e)}$, $H_N^{(o)}$の添字eおよびoは、それぞれevenおよびoddの頭文字である。

底を $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ とし、$U_N^{(n)} \equiv \rho_1^{-1}(u_n)$, $V_N^{(n)} \equiv \rho_1^{-1}(v_n)$ とすれば

$$\Sigma_N(a) = \sum_{n=0}^{N} \overline{u_n(a)}\, U_N^{(n)} \tag{7.139}$$

$$\Delta_N(a) = \sum_{n=1}^{N} \overline{v_n(a)}\, V_N^{(n)} \tag{7.140}$$

となる。特に、次の関係が成立する。

$$\Sigma_N(a) = \sum_{n=0}^{N} c_n(a)\, C^{(n)} \tag{7.141}$$

$$\Delta_N(a) = \sum_{n=1}^{N} s_n(a)\, S^{(n)} \tag{7.142}$$

式(7.139), (7.140)は、式(7.88)に対応する表現形式であり、式(7.141), (7.142)は式(7.16)に対応する表現形式である。

7.9.2 $\Sigma_N(a)$ と $\Delta_N(a)$ のインパルス応答

並進作用素 $T_N(a)$ のインパルス応答は、空間 H_N の再生核及び標本化基底と密接な関係にあった。同様に、$\Sigma_N(a)$, $\Delta_N(a)$ のインパルス応答は、それぞれ空間 $H_N^{(e)}$, $H_N^{(o)}$ の再生核及び標本化基底と密接な関係にある。7.9.2.では、まず再生核との関係について論じる。

〔命題 7.30〕 $\Sigma_N(a)$ 及び $\Delta_N(a)$ のインパルス応答を、それぞれ $\sqrt{(2N+1)/2}\,\nabla_N(x,a)$, $\sqrt{(2N+1)/2}\,\Delta_N(x,a)$ とする。$H_N^{(e)}$ 及び $H_N^{(o)}$ の正規直交基底を、それぞれ $\{u_n\}_{n=0}^{N}$, $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ とすれば、次の関係が成立する。

$$\sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-a) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,\nabla_N(x,a) + \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,\Delta_N(x,a) \tag{7.143}$$

$$\nabla_N(x,a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_0(x-a) + \varphi_0(x+a)\right) \tag{7.144}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2N+1}} \sum_{n=0}^{N} \overline{u_n(a)}\, u_n(x) \tag{7.145}$$

$$\Delta_N(x,a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_0(x-a) - \varphi_0(x+a)\right) \tag{7.146}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2N+1}} \sum_{n=1}^{N} \overline{V_m(a)}\, V_n(x) \tag{7.147}$$

式(7.145),(7.147)で、$a=y$ とおけば、命題2.1より $\sqrt{(2N+1)/2}\,\nabla_N(x,y)$ 及び $\sqrt{(2N+1)/2}\,\Delta_N(x,y)$ が、それぞれ $H_N^{(e)}$ 及び $H_N^{(o)}$ の再生核になる。これを積分変換の形で表せば、次のようになる。

〔命題 7.31〕 $H_N^{(e)}$ 及び $H_N^{(o)}$ の上への射影作用素を、それぞれ $E_N^{(e)}$, $E_N^{(o)}$ とすれば、次の関係が成立する。

$$(E_N^{(e)} f)(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\, \nabla_N(x,y) f(y)\, dy \tag{7.148}$$

$$(E_N^{(o)} f)(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\, \Delta_N(x,y) f(y)\, dy \tag{7.149}$$

即ち、任意に固定した a に対して、$\sqrt{(2N+1)/2}\,\nabla_N(x-y,a)$ を積分核とする作用素は $\Sigma_N(a)$ であり、$\sqrt{(2N+1)/2}\,\nabla_N(x,y)$ を積分核とする作用素は、$E_N^{(e)}$ となるのである。$\sqrt{(2N+1)/2}\,\Delta_N(x,a)$ についても同様である。

なお、$\nabla_N(x,y)$ 及び $\Delta_N(x,y)$ は、式(7.144),(7.146)から分かるように、$x-y$ の関数にはならないから、$E_N^{(e)}$, $E_N^{(o)}$ は共に、$T_N(a)$ と可換でない。即ち、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元にはならない。

式(7.144),(7.146)より

$$\nabla_N(x,x) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\, \varphi_0(2x)\right) \tag{7.150}$$

$$\Delta_N(x,x) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\, \varphi_0(2x)\right) \tag{7.151}$$

となるから、命題2.3より、系7.4に対応する次の系が成立する。

〔系 7.12〕 $f \in H_N^{(e)}$, $g \in H_N^{(o)}$ とすれば、各点 $x \in [-\ell, \ell]$ に対して次の不等式が成立する。

$$|f(x)| \leqq \sqrt{\frac{2N+1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\varphi_0(2x)\right)}\,\|f\| \tag{7.152}$$

$$|g(x)| \leqq \sqrt{\frac{2N+1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\varphi_0(2x)\right)}\,\|g\| \tag{7.153}$$

7.9.3 偶関数の空間及び奇関数の空間の自然座標系

$\sqrt{(2N+1)/2}\,\nabla_N(x,y)$, $\sqrt{(2N+1)/2}\,\Delta_N(x,y)$ は、x と y の二変数関数とみなしたとき、それぞれ $H_N^{(e)}$, $H_N^{(o)}$ の再生核になっていた。従って、式(2.5)より次の命題が成立する。

〔命題 7.32〕

$$(\Sigma_N(a),\Sigma_N(b)) = \frac{2N+1}{2}\left(\nabla_N(\cdot,a),\nabla_N(\cdot,b)\right) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,\nabla_N(a,b) \tag{7.154}$$

$$(\Delta_N(a),\Delta_N(b)) = \frac{2N+1}{2}\left(\Delta_N(\cdot,a),\Delta_N(\cdot,b)\right) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,\Delta_N(a,b) \tag{7.155}$$

〔系 7.13〕

$$(\Sigma_N(a_m),\Sigma_N(a_n)) = \frac{2N+1}{2}\left(\nabla_N(\cdot,a_m),\nabla_N(\cdot,a_m)\right) = \frac{2N+1}{\epsilon_n}\delta_{m,n} \quad (m,n=0,1,2,\cdots,N) \tag{7.156}$$

$$(\Delta_N(a_m),\Delta_N(a_n)) = \frac{2N+1}{2}\left(\Delta_N(\cdot,a_m),\Delta_N(\cdot,a_m)\right) = \frac{2N+1}{2}\delta_{m,n} \quad (m,n=1,2,\cdots,N) \tag{7.157}$$

系 7.13 と命題 2.4 より、次の命題が成立する。

〔命題 7.33〕

$$\varphi_n^{(e)}(x) \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_n}{2}}\,\nabla_N(x,a_n), \quad \varphi_n^{(o)}(x) \equiv \Delta_N(x,a_n) \tag{7.158}$$

とおけば、$\{\varphi_n^{(e)}\}_{n=0}^{N}$ は $H_N^{(e)}$ の、$\{\varphi_n^{(o)}\}_{n=1}^{N}$ は $H_N^{(o)}$ の正規直交標本化基底になる。即ち、任意の $f\in H_N^{(e)}$, $g\in H_N^{(o)}$ に対して、次の関係が成立する。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\frac{\epsilon_n}{2N+1}}\, f(a_n)\, \psi_n^{(e)}(x) \tag{7.159}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{2N+1}} \sum_{n=1}^{N} g(a_n)\, \psi_n^{(o)}(x) \tag{7.160}$$

式(7.159), (7.160)は、式(3.79)に対応する式であって、標本点$\{a_n\}$も、自然座標系$\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$の標本点と一致している。そこで、$\{\psi_n^{(e)}\}_{n=0}^{N}$, $\{\psi_n^{(o)}\}_{n=1}^{N}$をそれぞれ$H_N^{(e)}$, $H_N^{(o)}$の自然座標系と呼ぶことにする。$\{\psi_n^{(e)}\}_{n=0}^{N}$, $\{\psi_n^{(o)}\}_{n=1}^{N}$のグラフ及び系7.13から得られるこれらの関数に対する上界をそれぞれ図7.4, 図7.5に示す。

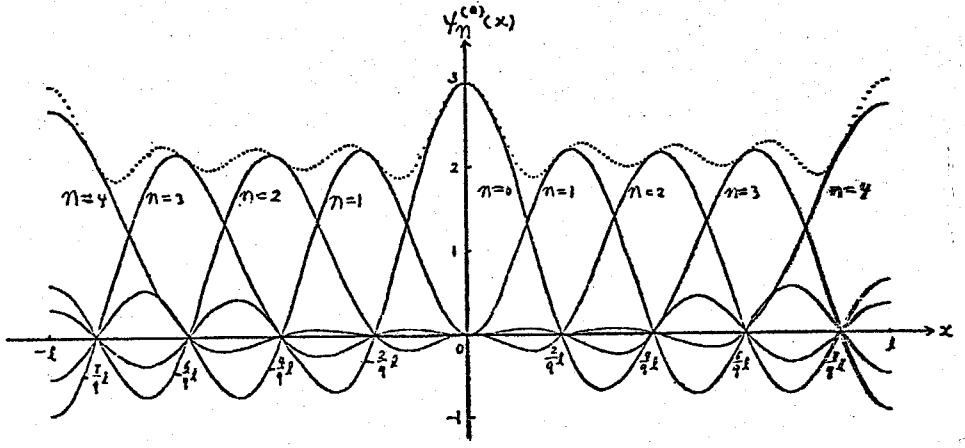


図7.4 空間$H_N^{(e)}$の自然座標系$\{\psi_n^{(e)}\}_{n=0}^{N}$とその上界 ($N=4$)

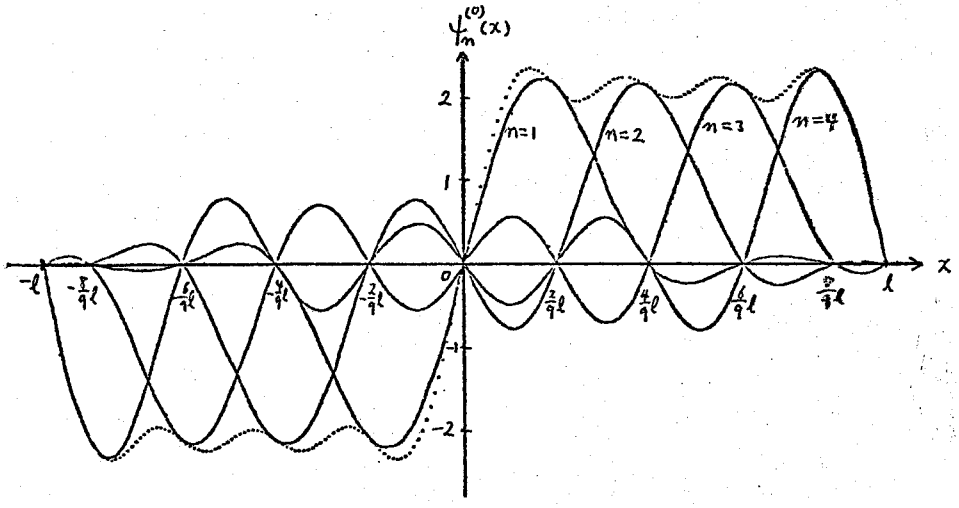


図7.5 空間$H_N^{(o)}$の自然座標系$\{\psi_n^{(o)}\}_{n=0}^{N}$とその上界 ($N=4$)

なお、式(7.143)で $a=a_n$ とおけば、式(7.158)より、式(7.145)に対応して、

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}}\left(\varphi_n^{(e)} + \varphi_n^{(o)}\right) \quad (n=0,1,2,\cdots,N) \tag{7.161}$$

なる関係が成立する。即ち、φ_n の偶関数成分が $\varphi_n^{(e)}/\sqrt{\epsilon_n}$ であり、奇関数成分が $\varphi_n^{(o)}/\sqrt{\epsilon_n}$ となる。

式(7.145),(7.147)で $u_n=\varphi_n^{(e)}$, $v_n=\varphi_0^{(o)}$ とおいて、両辺の p_1^{-1} をとれば式(7.27)に対応する次の系が成立する。

〔系 7.14〕

$$\Sigma_N(a) = \sum_{n=0}^{N}\sqrt{\frac{\epsilon_n}{2N+1}}\,\varphi_n^{(e)}(a)\,\Sigma_N(a_n) \tag{7.162}$$

$$\Delta_N(a) = \sqrt{\frac{2}{2N+1}}\sum_{n=1}^{N}\varphi_n^{(o)}(a)\,\Delta_N(a_n) \tag{7.163}$$

7.10 等方性と反等方性

$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対応する空間回路網は、命題7.23に示したように、全て一様な構造としているが、更に、等方或いは反等方な構造をもつ場合がある。7.10では、そのような構造をもつ場合について詳しく論じる。

命題7.6より、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ は複素共役演算 $-$ 及び共役演算 $*$ に関して閉じている。従って、命題4.18によって $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ を

$$A_N = A_N^{(1)} + A_N^{(2)} \tag{7.164}$$

と等方分解した場合、$A_N^{(1)}$, $A_N^{(2)}$ 共に、再び $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元になっている。そして、次の命題が成立する。

〔命題7.34〕 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に属する等方作用素の全体を $\mathcal{B}_c^{(1)}(H_N)$, 反等方作

用素の全体を $\mathcal{B}_{ac}^{(1)}(H_N)$ とすれば、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ は、

$$\mathcal{B}^{(1)}(H_N) = \mathcal{B}_c^{(1)}(H_N) \oplus \mathcal{B}_{ac}^{(1)}(H_N) \tag{7.165}$$

と直和分解される。

$\mathcal{B}(H_N)$ のある部分空間 $\mathcal{G}$ に属する A_N を、式(7.164)のように等方分解したとき、一般には、$A_N^{(1)}$ も $A_N^{(2)}$ も $\mathcal{G}$ には属さない。ところが、命題7.34が主張しているように、$\mathcal{G} = \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の場合には、$A_N^{(1)}$, $A_N^{(2)}$ 共に $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に属するのである。

例えば、$T_N(a)$ を等方分解すれば、式(7.131)のようになり、$\Sigma_N(a) \in \mathcal{B}_c^{(1)}(H_N)$, $\Delta_N(a) \in \mathcal{B}_{ac}^{(1)}(H_N)$ となっている。また、$E^{(n)}$ を等方分解すれば、式(7.121)のようになり、$C^{(n)} \in \mathcal{B}_c^{(1)}(H_N)$, $S^{(n)} \in \mathcal{B}_{ac}^{(1)}(H_N)$ となっている。

系4.5と命題7.6より $\mathcal{B}_c^{(1)}(H_N)$ 及び $\mathcal{B}_{ac}^{(1)}(H_N)$ が、複素共役演算 $-$ 及び共役演算 $*$ に関して閉じていることが分る。また、命題4.13，命題7.20，系7.8，命題7.22，命題7.23より、次の命題が成立する。

〔命題7.35〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して次の各条件は、互いに同値である。但し、複号同順とする。

(i) $$\bar{A}_N = \pm A_N^{*} \tag{7.166}$$

(ii) $$\bar{A}_N = \pm A_N^{\natural} \tag{7.167}$$

(iii) $$\tilde{A_N}(-n) = \pm \tilde{A_N}(n) \quad (n = -N, -N+1, \cdots, N) \tag{7.168}$$

(iv) $$\hat{A_N}(-n) = \pm \hat{A_N}(n) \quad (n = -N, -N+1, \cdots, N) \tag{7.169}$$

(v) $$a_N(-x) = \pm a_N(x) \tag{7.170}$$

(i)は、A_N が等方（反等方）作用素であることを表している。(ii)は

$$A_N I_N(0) = \pm I_N(0) A_N \tag{7.171}$$

と同値であるから、A_N が 偶関数を偶(奇)関数に、奇関数を奇(偶)関数に変換する作用素であることを意味している。このような作用素を、偶(奇)作用素と名付ける。(iii),(iv) は、空間周波数特性、結合特性が、n の関数として偶(奇)関数になることを意味しており、(v) はインパルス応答が偶(奇)関数になることを意味している。

等方(反等方)作用素は、それに対応する空間回路網の構造に関係した名称であり、偶(奇)作用素は、その作用素が、どのような関数をどのような関数に変換するかという、変換の性質を表す名称である。そして、命題 7.35 の(i),(ii)が示しているように、並進作用素と可換な作用素に対しては、これら二概念が一致してしまうのである。

なお、命題 7.35 の (iii)~(v) は、本来 (ii) に対する必要十分条件である。それが同時に (i) に対する必要十分条件になるのは、命題 7.20 が成立しているからである。

〔命題 7.36〕 $A_N \in \mathcal{B}_c^{(1)}(H_N)$, $B_N \in \mathcal{B}_{ac}^{(1)}(H_N)$ に対して、次の関係が成立する。

$$\begin{cases} A_N = \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\epsilon_n}\, \tilde{A}_N(n)\, C^{(n)} & (7.172) \\ \tilde{A}_N(n) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} (A_N,\ C^{(n)}) & (7.173) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_N = \sum_{n=0}^{N} \epsilon_n\, \hat{A}_N(n)\, \Sigma_N(a_n) & (7.174) \\ \hat{A}_N(n) = \frac{1}{2N+1} (A_N,\ \Sigma_N(a_n)) & (7.175) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_N = i\sqrt{2} \sum_{n=1}^{N} \tilde{B}_N(n)\, S^{(n)} & (7.176) \\ \tilde{B}_N(n) = \frac{1}{i\sqrt{2}} (B_N,\ S^{(n)}) & (7.177) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_N = 2 \sum_{n=1}^{N} \hat{B}_N(n)\, \Delta_N(a_n) & (7.178) \\ \hat{B}_N(n) = \frac{1}{2N+1} (B_N,\ \Delta_N(a_n)) & (7.179) \end{cases}$$

式(7.125)は、式(7.172)で $A_N = E_N$ とおいたものである。式(7.141),(7.142)は、それぞれ式(7.172),(7.176)で、$A_N = \Sigma_N(a)$, $B_N = \Delta_N(a)$ とおいたものであり、式(7.162),(7.163)は、それぞれ式(7.174),(7.178)で、$A_N = \Sigma_N(a)$, $B_N = \Delta_N(a)$ とおいたものである。

命題7.36より、次のことが分る。空間 $B^{(1)}(H_N)$ で基本座標系 $\{E^{(n)}\}_{n=0}^{N}$ 及び自然座標系 $\{T_N(a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$ が果した役割を、空間 $B_c^{(1)}(H_N)$ では $\{C^{(n)}\}_{n=0}^{N}$ 及び $\{\sqrt{\epsilon_n/(2N+1)}\ \Sigma_N(a_n)\}_{n=0}^{N}$ が、空間 $B_{ac}^{(1)}(H_N)$ では $\{S^{(n)}\}_{n=1}^{N}$ 及び $\{\sqrt{\epsilon_n/2N+1)}\ \Delta_N(a_n)\}_{n=1}^{N}$ がそれぞれ果しているのである。そこで、これらの正規直交基底を、それぞれの空間における基本座標系、自然座標系と名付けることにする。

7.11 付録　補題5.8の証明

5.6.1で与えた補題5.8の証明を、$H = L_2$ の場合について行なう。A が $B(L_2)$ の全ての元と可換ならば、任意の $a \in [-l, l]$ に対して $T(a)$ と可換であるから、$A \in B^{(1)}(L_2)$ となる。従って、命題7.7より、式(7.37)が成立する。更に、命題7.9より、A は正規作用素になるから

$$A^* \varphi_n = \overline{A^\sim(n)}\, \varphi_n \tag{7.180}$$

(文献(7), p.291)が成立する。式(7.37),(7.180)より

$$A^\sim(m) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \langle A\varphi_m, \varphi_n \rangle = \langle \varphi_m, A^*\varphi_n \rangle = A^\sim(n) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle$$

$$\therefore\ A^\sim(m) = A^\sim(n) \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{7.181}$$

そこで、$\lambda \equiv A^\sim(n)$ とおけば、式(7.34)より

$$A = \lambda \sum_{n=-N}^{\infty} E^{(n)} = \lambda E \tag{7.182}$$

となり、$A = \lambda E$ となる。$H = H_N$ の場合も、同様に証明できる。　(Q.E.D)

第8節　微分作用素と積分作用素

8.1　まえがき

空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に属する作用素の具体例として、これまでに、次のような作用素が現われた。並進作用素 $T_N(a)$, 平均化作用素 $\Sigma_N(a)$, 差分作用素 $\Delta_N(a)$, H_N への射影作用素 E_N, 関数 φ_n によって張られる一次元部分空間への射影作用素 $E^{(n)}$, 余弦作用素 $C^{(n)}$, 正弦作用素 $S^{(n)}$, そして微分作用素 D_N。

これまでは、空間回路網理論の枠組みの決定、及び作用素の空間の座標系としての役割に重点をおいて、これらの作用素を論じてきた。

ところで、複合類似度法と呼ばれる飯島の文字認識理論[1]では、標準パターンを x 方向及び y 方向に空間微分することによって、各カテゴリーに対するモード関数を求めることができるようになっている。また、濃淡図形を尖鋭化したり、濃淡図形から境界線を抽出し、線図形に変換したり、或いは、複雑な濃淡図形からある目的物だけを検出し切出す為の手段として、空間的一階微分及び二階微分の電子計算機に適した種々の近似的手法が、開発されている。[2],[3],[4]

このように、微分作用素 D_N 及び二階微分作用素 D_N^2 は、文字認識及び画像処理の分野において、それ自体重要な働きをしている。そこで、オ7節で展開した $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に関する一般論の応用として、作用素 D_N 及び D_N^2 について、詳しく論じることにする。

また、空間的に不定積分を行なう作用素についても、微分作用素 D_N の一般化逆作用素として、簡単に論じることにする。

8.2　空間微分を行なう作用素 D_N

3.2.4 で定義したように、微分作用素 $-i\,d/dx$ の、周期性の境界条件による自己共役な拡張を、$-iD$ で表せば

$$D\varphi_n = i\frac{n\pi}{\ell}\varphi_n \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{8.1}$$

となる。そこで、定義域を H_N に限り、

$$D_N \equiv E_N D E_N \tag{8.2}$$

とおく。本節の主題は、この空間微分を行なう作用素 D_N の性質、特に、D_N を空間回路網で実現する際の、結合特性の性質を明らかにすることである。

式(8.1),(8.2)と命題 7.7, 命題 7.35, 命題 7.36 より、次の命題が成立する。

〔命題 8.1〕 $D_N \in \mathcal{B}^{(1)}_{dc}(H_N)$ である。D_N の空間周波数特性を $\{\tilde{D_N}(n)\}_{n=-N}^{N}$ とすれば

$$\tilde{D_N}(n) = i\frac{n\pi}{\ell} \tag{8.3}$$

となり、D_N は次のように表される。

$$D_N = (-)\sqrt{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{\ell}S^{(n)} \tag{8.4}$$

つまり、D_N は並進作用素と可換な、反等方奇作用素である。また、式(7.122)より $S^{(n)}$ は実作用素であるから、式(8.4)より、D_N も実作用素になる。従って、次の関係が成立する。

$$\bar{D}_N = -D_N^{*} = -D_N^{\star} = D_N \tag{8.5}$$

〔補題 8.1〕

$$\|D_N\| = \frac{N\pi}{\ell} \tag{8.6}$$

$$\| D_N \|_2 = \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{3}} \qquad (8.7)$$

(証明) 式(8.6)は、式(8.1)と文献(5)の定理1(p.8)より明らかである。式(8.4)のSchmidtノルムの二乗をとれば、式(8.7)を得る。(Q.E.D)

補題8.1より、$N \longrightarrow \infty$ のとき $\| D_N \|$ も $\| D_N \|_2$ も無限大に発散する。これは、微分作用素 $D = d/dx$ が非有界作用素(文献(6), p.525, p.535)である為に生じる現象である。

8.3 D_N のインパルス応答と結合特性

D_N が並進作用素と可換な実作用素であることから、D_N の $B^{(1)}(H_N)$ における結合特性は、実ベクトルになる。この結合特性の具体的な形を求める為に、まず、D_N のインパルス応答を求めることにする。

〔命題 8.2〕 D_N のインパルス応答は、次のように表される。

$$\delta_1(D_N)(x) = \sqrt{2N+1}\,\frac{d}{dx}\varphi_0(x) \qquad (8.8)$$

$$= (-)2\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x \qquad (8.9)$$

$$= \frac{\frac{(2N+1)\pi}{2\ell}\cos\frac{(2N+1)\pi}{2\ell}x - \frac{\pi}{2\ell}\cos\frac{\pi}{2\ell}x\cdot\sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x)}{\sin\frac{\pi}{2\ell}x} \qquad (8.10)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2N+1}}{2\ell}\cot\frac{\pi}{2\ell}x\cdot\left\{(-1)^N(2N+1)\varphi_0(x+\ell) - \varphi_0(x)\right\} \qquad (8.11)$$

(証明) 式(8.8)は、定義そのものである。式(3.69), (3.70)の両辺を微分すれば、それぞれ式(8.9), (8.10)を得る。

$$\varphi_0(x+\ell) = \frac{(-1)^N}{\sqrt{2N+1}}\,\frac{\cos\frac{(2N+1)\pi}{2\ell}x}{\cos\frac{\pi}{2\ell}x} \qquad (8.12)$$

であるから、式(8.10)より式(8.11)が成立する。(Q.E.D)

式(8.4)の両辺に ρ_1 を作用させても、式(8.9)を得ることができる。また、式(8.9)から、$\rho_1(D_N)$ が奇関数であることが分かるが、これは、命題7.35で示したように、D_N が反等方奇作用素である為に生じる現象である。$\rho_1(D_N)$ のグラフを、図8.1に示す。

系7.8と式(8.7)より、次の評価式が成立する。

〔系 8.1〕

$$|\rho_1(D_N)(x)| \leqq \frac{(2N+1)\pi}{\ell}\sqrt{\frac{N(N+1)}{3}} \tag{8.13}$$

〔命題 8.3〕 D_N の結合特性を $(\hat{D_N}(n))$ とすれば

$$\hat{D_N}(n) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ (-1)^n d_1(a_n) = \dfrac{\pi}{2\ell}\cdot\dfrac{(-1)^n}{\sin\frac{n\pi}{2N+1}} & (n\neq 0) \end{cases} \tag{8.14}$$

となる。ここで

$$d_1(x) \equiv \frac{\pi}{2\ell}\,\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\ell}x} \tag{8.15}$$

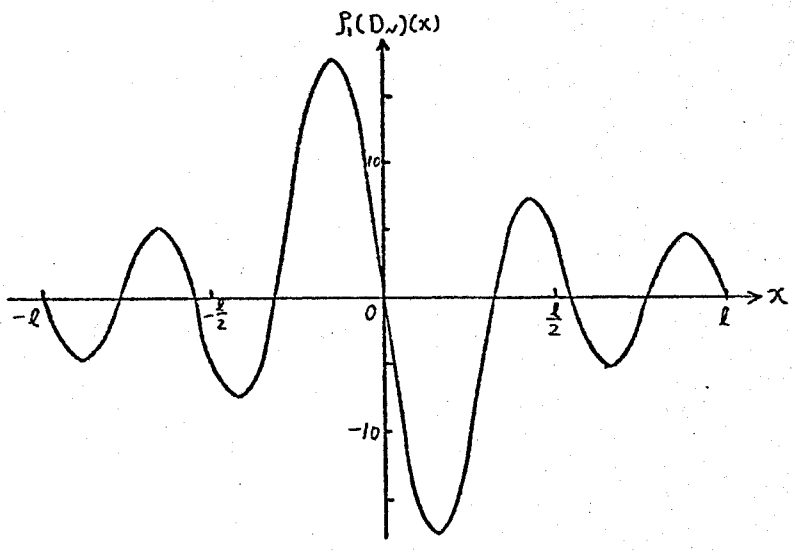


図 8.1 D_N のインパルス応答 ($\ell=\pi$, $N=4$)

である。

（証明）　式(7.102)より

$$\hat{D_N}(n) = \frac{1}{2N+1} P_1(D_N)(a_n) \qquad (8.16)$$

であるから、式(8.10)で $x = a_n$ とおけば、式(8.14)が成立する。(Q.E.D)

命題8.3において、$\hat{D_N}(0) = 0$ となるのは、D_N が反等な作用素であるからである。また、命題8.3は、D_N の結合特性の本質的な部分を、式(8.15)で定義される関数 $d_1(x)$ が担っていることを、意味している。式(8.14)と式(8.16)の違いは、$P_1(D_N)/(2N+1)$ が N の関数であるのに対して、$d_1(x)$ が N に依存しないことである。この $d_1(x)$ が N に依存しないという性質が、後で色々と役立つのである。

〔系 8.2〕　D_N の結合特性 $\hat{D_N}(n)$ は、n に関する奇関数である。

式(7.100), (7.178)に式(8.14)を代入して、次の系を得る。(7)

〔系 8.3〕

$$D_N = \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sin \frac{n\pi}{2N+1}} \Delta_N(a_n) \qquad (8.17)$$

式(8.14), (8.15)から分かるように、$\hat{D_N}(n)$ は、$n = 1, 2, \cdots, N$ に対して、交互に正負の値をとる。更に、系8.2を考慮すれば、$|\hat{D_N}(n)|\ (n = 1, 2, \cdots N)$ が分かれば、全ての n に対して、$\hat{D_N}(n)$ の値が分かることになる。

l, N が与えられれば、命題8.3から直ちに $\hat{D_N}(n)$ を求めることができる。しかし、結合特性 $\hat{D_N}(n)$ の性格を感じとしてつかむ為には、それをグラフで表すのが良い。すぐ上で述べたこと及び関数 $d_1(x)$ が N によらないことを考慮すれば、結局、式(8.15)で定義される関数 $d_1(x)$ の、$0 \leqq x \leqq l$ におけるグラフを描いておけば良いことが分かる。$l = \pi$ の場合について、$d_1(x)$、標本点 $a_n^{(N)}\ (n = 1, 2, \cdots, N)$* 及び $d_1(x)$ の各種評価式**を、図8.2に示

---

* 標本点 a_n は、式(3.72)から分かるように、N の関数である。これを強調する場合には、添字 N を付けて、$a_n^{(N)}$ と表すことにする。

** $d_1(x)$ の評価式については、§4 で論じる。

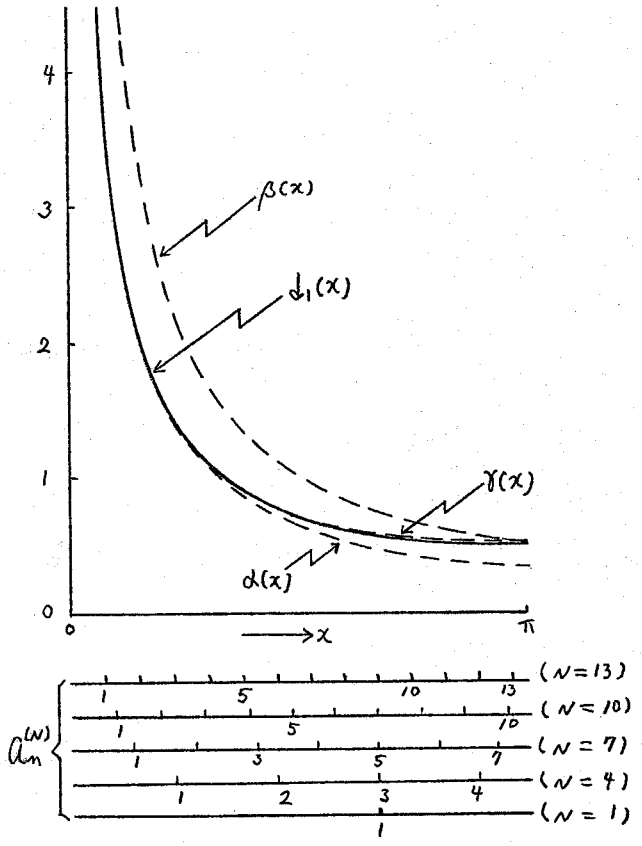


図8.2　D_Nの結合特性（$\hat{D_N}(m)$）とその各種評価式（$\lambda=\pi$）

す。図8.2のx軸の下の目盛は、$x=a_n^{(N)}$の値を示す。例えば、$x=a_1^{(4)}$は、$N=4$の軸の番号1によって表される。従って、例えば$N=4, n=1$に対する$d_1(x)$の値を読み取れば、その値が$|\hat{D_4}(1)|$になっているのである。

本来微分という演算は、微分しようとする関数fの、微分しようとする点x及びその無限小の近傍での値$f(x)$と$f(x+\Delta x)$を使用する演算である。従って、本来ならば、ある程度大きなΔxに対して、$f(x+\Delta x)$の値は、微分操作に影響を与えないはずである。D_Nの結合特性の絶対値$|\hat{D_N}(m)|$の、mに関する単調減少性は、この性質を反映したものである。

では、何故結合特性が、大きなmに対して完全に零にならないかといえば、本来の微分操作が、微分しようとする点の無限小の近傍の値を用いているのに対して、現実には、無限小の近傍の値を使用することができないからである。空間回路網理論では、微分されるべき関数を、有限次元の空間H_Nに制限することにより、$\Delta x \longrightarrow 0$という極限操作を直接扱わなくても、式(8.17)のように、差分作用素の族$\{\Delta_N(a_n)\}_{n=1}^{N}$の一次結合で厳密に微分を行なうことができるのである。ただその代償として、結合特性が、大きなmに対しても完全には零にならないという事態が生じたのである。

しかし、関数集合の次元$(2N+1)$が大きくなれば、式(8.72)から定まる標本点間隔

$$\Delta x \equiv \frac{2\ell}{2N+1} \tag{8.18}$$

がより小さくなる。その結果、微分しようとする点 x のより近い近傍の値 $f(x+\Delta x)$ を使用することができるようになるので、$|n| \longrightarrow$ 大 に対する結合特性の減少の割合も大きくなるはずである。実際、この現象は、図 8.2 にもはっきりと現われている。

このことはまた、8.5 で論じる D_N の精度 $\mu(D_N)$ が、N に関する単調減少関数であるという性質にも、反映している。

上でも述べたように、$|\hat{D_N}(n)|$ $(n=1, 2, \cdots, N)$ は、n に関して単調減少関数であるから、D_N の第一近似として、式(8.17) の第一項だけをとり、それを $D_{N(1)}$ と表せば、

$$(D_{N(1)} f)(x) = \frac{\pi}{\ell} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2N+1}} \frac{f(x+a_1) - f(x-a_1)}{2} \tag{8.19}$$

となる。$\Delta_N(a_1)$ 及び $D_{N(1)}$ は、式(8.17) の第二項以下と直交している。従って、微分作用素 D_N の第一近似としては、単なる差分 $\Delta_N(a_1)$ よりも、それに $\pi/\ell\sin(\pi/(2N+1))$ 倍 の補正を行なった $D_{N(1)}$ の方が、より精密な近似になっていることが分かる。

空間回路網の立場からいえば、D_N を厳密に構成する為には、式(8.17) に従って、同じ番号を除く全ての入出力端子を、結線しなければいけない。ところが、式(8.19) で表される $D_{N(1)}$ は、番号が一個ずれた入出力端子だけを結線し、その他は全て省略することに対応している。

8.4 D_N の結合特性の評価

微分作用素 D_N の結合特性は、命題 8.3 或いは系 8.3 から分かるように、比較的簡単な形をしている。しかし、結合特性 $(\hat{D_N}(n))$ を求める為には、sin の計算を行なわなければいけないので、関数キーのない電卓等で、簡単にその

値と求めることはできない。そこで、$D_N^{\wedge}(n)$ を、n に関する簡単な有理関数で近似しておけば、$D_N^{\wedge}(n)$ の値を、上記電卓等で、簡単に推定することができる。しかも、近似式が、$D_N^{\wedge}(n)$ の上からの評価式、或いは下からの評価式になっていれば、$D_N^{\wedge}(n)$ の性質を知る上で、なお一層好都合である。

そこで §4 では、$D_N^{\wedge}(n)$ に対する上記要請を満足するような各種評価式を導くことにする。

Jordan の不等式

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \tag{8.20}$$

より、次の補題が成立する。

〔補題 8.2〕 式(8.15)で定義される関数 $d_1(x)$ に対して、次の不等式が成立する。

$$\frac{1}{x} < d_1(x) < \frac{\pi}{2}\frac{1}{x} \quad (0 < x < \ell) \tag{8.21}$$

補題 8.2 と 命題 8.3 より、次の命題が成立する。

〔命題 8.4〕 D_N の結合特性 $(D_N^{\wedge}(n))$ に対して

$$\frac{1}{(\Delta x)|n|} < |D_N^{\wedge}(n)| < \frac{\pi}{2}\frac{1}{(\Delta x)|n|} \tag{8.22}$$

なる評価式が成立する。ここで、Δx は、式(8.18)で与えられる標本点の間隔である。

命題 8.4 より、$|D_N^{\wedge}(n)|$ の n に関する単調減少の程度が、$1/n$ のオーダーであることが分かる。

式(8.21)に現われる二種類の評価式を

$$\alpha(x) \equiv \frac{1}{x}, \quad \beta(x) \equiv \frac{\pi}{2}\frac{1}{x} \tag{8.23}$$

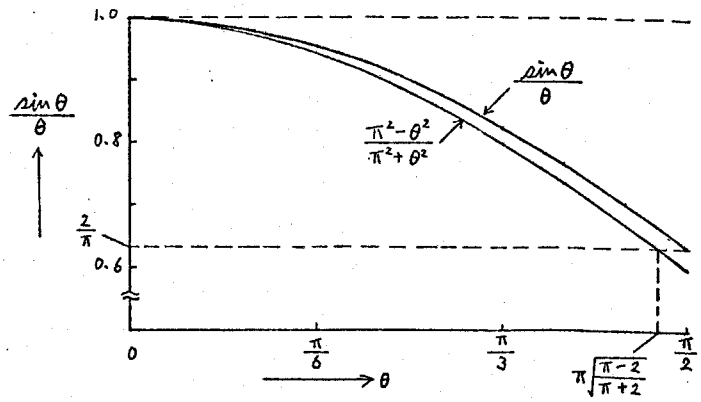


図 8.3　Jordan の不等式と Redheffer の 不等式

とおき、そのグラフを、図 8.2 に示す。この図から分かるように、x が小さいところでは、$\beta(x)$ の近似の精度が、又 x が大きいところでは、$\alpha(x)$ の近似の精度が悪くなる。これは、図 8.3 に示すように、式(8.20)で与えられる Jordan の不等式が、かなり乱暴な不等式であるからである。

ところで、約5年前に、R. Redheffer によって、新しい不等式

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \geqq \frac{\pi^2-\theta^2}{\pi^2+\theta^2} \qquad (\theta: 実数) \tag{8.24}$$

が発見された。[8] この不等式は、図 8.3 に示すように、θ のかなり広い範囲に対して、Jordan の不等式よりも、非常に精度の良いものである。そこで、以下この不等式を、Redheffer の不等式と呼ぶことにする。

Redheffer の不等式を、式(8.15)に適用すれば、次の補題が成立する。

〔補題 8.3〕　式(8.15)で定義される関数 $d_1(x)$ に対して、次の不等式が成立する。

$$d_1(x) \leqq \frac{1}{x}\,\frac{4l^2+x^2}{4l^2-x^2} \qquad (x>0) \tag{8.25}$$

補題 8.3 と命題 8.3 より、次の命題が成立する。

〔命題 8.5〕 D_N の結合特性 ($\hat{D_N}(n)$) に対して

$$|\hat{D_N}(n)| \leq \frac{1}{(\Delta x)|n|} \frac{(2N+1)^2+n^2}{(2N+1)^2-n^2} \quad (n \neq 0) \qquad (8.26)$$

なる評価式が成立する。ここで Δx は、式(8.18)で与えられる標本点間隔である。

式(8.26)の右辺を $\gamma(x)$ とおき、そのグラフを、図8.2に示す。この図から分かるように、$0 < x < 2\pi\sqrt{(\pi-2)/(\pi+2)}$ なる範囲では、$\gamma(x)$ が非常に精密な上からの評価式になっている。

これを、直接結合特性の言葉で表現すれば、次のようになる。命題8.4、命題8.5で与えた $|\hat{D_N}(n)|$ に対する二種類の上からの評価式のうち

$$0 < |n| < (2N+1)\sqrt{\frac{\pi-2}{\pi+2}} \qquad (8.27)$$

なる n に対しては、命題8.5で与えた評価量の方が、より精密である。なお、図8.2から分かるように、ほとんどの n が、式(8.27)を満足しているのである。例えば、式(8.27)を満さない n は、図8.2より $N=10$ で、$n = \pm 10$ だけであり、$N=13$ でも、やはり $n = \pm 13$ だけである。

8.5 D_N の精度

3.3.3 の設計理論に従って、作用素 $A_N \in \Pi(H_N)$ を空間回路網で実現する場合、A_N の結合係数 $\hat{A_N}(m,n)$ の値そのものもさることながら、$|\hat{A_N}(m,n)|$ の最大値と最小値の比 μ が問題になる。

例えば、$\mu = 0.01$ のとき、5%系列の抵抗を使い、全ての入出力端子を、結合特性に従って結線しても、それは意味のないことである。$\mu = 0.01$ のとき、もし全ての入出力端子を、結合特性に従って忠実に結線するのであれば、少なくとも1%系列の抵抗を使わなければいけない。また、もし5%系列の抵抗を使うのであれば、結合係数の最大値に対する比率が5%未満になるよう

な結合係数をもつ入出力端子間の結線は、省略しても良いのである。

そこで、各作用素 A_N に対して、この比率 μ を求めておくことは、回路構成上、意味のあることである。より厳密に定義すれば、次のようになる。

〔定義 8.1〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して

$$\mathcal{N} \equiv \{ m, n \mid \hat{A_N}(m,n) \neq 0 \} \tag{8.28}$$

とおく。

$$\mu(A_N) \equiv \frac{\min\limits_{m,n \in \mathcal{N}} |\hat{A_N}(m,n)|}{\max\limits_{m,n \in \mathcal{N}} |\hat{A_N}(m,n)|} \tag{8.29}$$

によって与えられる $\mu(A_N)$ を、作用素 A_N の精度と呼ぶ。

式(8.14)を式(8.29)に代入すれば、次の命題が成立する。

〔命題 8.5〕 D_N の精度 $\mu(D_N)$ は、次式で与えられる。

$$\mu(D_N) = 2 \sin \frac{\pi}{2(2N+1)} \tag{8.30}$$

結合特性(式(8.14))やノルム(式(8.6),(8.7))が、微分されるべき関数の定義域 $[-l, l]$ を表すパラメータ l に依存していたのに対して、D_N の精度が、l によらず、N だけの関数になっていることは、注目すべき点である。

命題 8.6 と Jordan の不等式、Redheffer の不等式より、次の系が成立する。

〔系 8.4〕 D_N の精度 $\mu(D_N)$ は、N に関して単調減少であり、次の不等式が成立する。

$$\frac{2}{2N+1} < \frac{\pi}{2N+1} \frac{4(2N+1)^2-1}{4(2N+1)^2+1} \leqq \mu(D_N) < \frac{\pi}{2N+1} \quad (N \geqq 1) \tag{8.31}$$

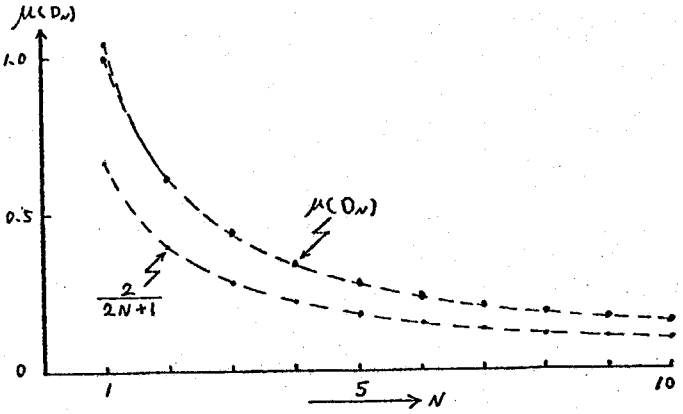


図8.4　D_N の精度 $\mu(D_N)$ とその評価式のグラフ

$\mu(D_N)$ および式(8.31)で与えられる各種評価量のグラフを、図8.4に示す。式(8.31)のオニ及びオ三の評価が良い為に、図8.4では、$N=1$ の場合を除いて、オニ及びオ三の評価と真の値との区別がつかなくなっている。

8.6　D_N の結合特性の区間 ℓ から受ける影響

我々は今まで、空間回路網が対象とする信号空間として区間 $[-\ell, \ell]$ で定義された関数空間 $L_2[-\ell, \ell]$ の部分空間 H_N を考えてきた。そして、区間を決定するパラメータ ℓ については、何も制限をつけていなかった。

ところで、外界に例えば

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{\ell}x \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{8.32}$$

という関数が与えられた場合を考えてみる(図8.5)。普通に考えれば、関数 f は、区間 $[-\ell, \ell]$ で与えられ、それを周期 2ℓ で全区間 $(-\infty, \infty)$ に拡張したものであると、みなすことができる。このような立場をとれば、f は空間 $L_2[-\ell, \ell]$ の元であるということができる。更に式(8.32)の形から分かるように、f は、$L_2[-\ell, \ell]$ の部分空間 H_1 の元であると主張できる。

しかし、f を図8.5の下に示したように、区間 $[-3\ell, 3\ell]$ で与えられ、

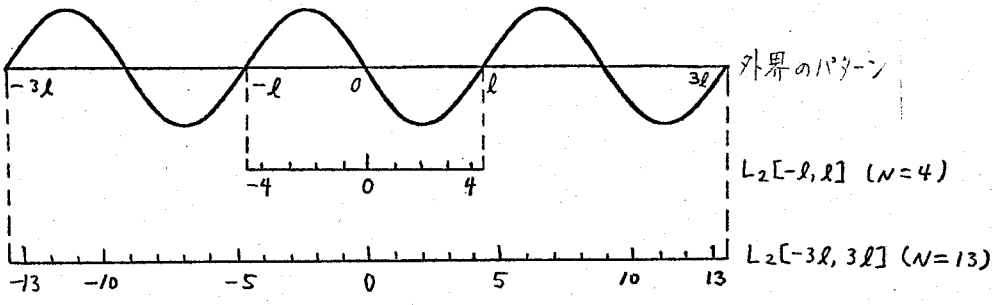


図8、5　外界に提示されたパターンの空間回路網への導入の仕方*

それを周期 6ℓ で全区間 $(-\infty, \infty)$ に拡張したものであると、みなすこともできる。式で書けば

$$f(x) = \sin \frac{3\pi}{3\ell} x \qquad (8,33)$$

である。このような立場をとれば、f は空間 $L_2[-3\ell, 3\ell]$ の元であるということができる。更に式(8、33)の形から分かるように、f は、$L_2[-3\ell, 3\ell]$ の部分空間 H_3 の元であって、もはや、$L_2[-3\ell, 3\ell]$ の部分空間 H_1 からは、はみ出してしまうのである。

このように、外界に与えられたパターンは同じものであっても、それを観測する空間回路網の立場からみれば、区間 $[-\ell, \ell]$ の選び方によって、その信号のもつ空間周波数成分が異ってくるのである。

ところで、本来解析学で与えられる微分の概念は、区間 $[-\ell, \ell]$ には無関係であり、微分しようとする点、x およびその無限小の近傍 $(x+\Delta x)$ での f の値 $f(x)$ と $f(x+\Delta x)$ にしか、依存しないものである。上の例で示した関数 f を、式(8、32)の形で表現しようと、式(8、33)の形で表現しようと、その微分は共に、

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\pi}{\ell} \cos \frac{\pi}{\ell} x \qquad (8,34)$$

となるのである。

---

* 区間が 2ℓ から 6ℓ と 3 倍になっても、標本点間隔が一定になるように、$N=4$ から $N=13$ に増えている。

微分作用素 D_N の結合特性は、式(8.14)から分かるように、区間を指定するパラメータ ℓ と、次元を指定するパラメータ N の両者の関数になっている。ℓ を一定とし、N だけが変化した場合に、この結合特性がどのように変化するかは、図8.2に示したとうりである。

では、ℓ が変化した場合、結合特性はどのような影響を受けるであろうか。上で述べたことを考慮すれば、ℓ が変化しても、図8.5に示したように、式(8.18)で与えられる標本点間隔 Δx が一定になるように、同時に N も変化させれば、結合特性は、それ程大きな影響を受けないと思われる。この性質を明らかにすることが8.6の目的である。

微分作用素 D_N の結合特性は、ℓ の関数になっているので、8.6では、それを強調する為に、$D_N^{\wedge}(n)$ の代りに、$D_N^{\wedge}(n;\ell)$ という記号を使用することにする:

$$D_N^{\wedge}(n;\ell) \equiv \frac{\pi}{2\ell}\frac{(-1)^n}{\sin\frac{n\pi}{2N+1}} \qquad (n=\pm1,\pm2,\cdots,\pm N) \qquad (8.35)$$

問題は、標本点間隔一定の条件、即ち、

$$\Delta x = \frac{2\ell}{2N+1} = \frac{2(\lambda\ell)}{2M+1} \qquad (\lambda>1) \qquad (8.36)$$

を満足する組 (ℓ, N) と $(\lambda\ell, M)$ に対して、結合係数 $D_N^{\wedge}(n;\ell)$ と $D_M(n;\lambda\ell)$ が、どれだけ近いかということである。ここで、$\lambda>1$ と仮定しても、一般性を失うことはない。なお、$\lambda=3$, $N=4$, $M=13$ に対する標本点の様子が、図8.5に示してある。

理想的には、

$$D_N^{\wedge}(n;\ell) = D_M^{\wedge}(n;\lambda\ell) \qquad (n=\pm1,\pm2,\cdots,\pm N) \qquad (8.37)$$

となれば良いのであるが、次に示すように、ここまでは望むことができない。

〔命題 8.7〕 $|D_M^{\wedge}(n;\lambda\ell)|$ は、$\lambda(>1)$ に関して単調減少である:

$$|D_N^{\wedge}(n;\ell)| > |D_M^{\wedge}(n;\lambda\ell)| \tag{8.38}$$

このように、$D_N^{\wedge}(n;\ell)$ と $D_M^{\wedge}(n;\lambda\ell)$ が厳密に一致することはないけれども、次に示すように、標本点間隔 Δx が充分小さくなったとき、あまり大きくない n に対して、$D_N^{\wedge}(n;\ell)$ と $D_M^{\wedge}(n;\lambda\ell)$ は、非常に近い値をとるのである。

〔命題 8.8〕 $n\pi/(2N+1)$ が充分小さいとき、次の近似式が成立する。

$$D_N^{\wedge}(n;\ell) \fallingdotseq D_M^{\wedge}(n;\lambda\ell) \fallingdotseq \frac{(-1)^n}{(\Delta x)|n|} \tag{8.39}$$

（証明） 充分小さい θ に対して

$$\sin\theta \fallingdotseq \theta \tag{8.40}$$

であるから、式(8.35), (8.36)より、$D_N^{\wedge}(n;\ell) \fallingdotseq (-1)^n/(\Delta x)\cdot|n|$ は明らかである。式(8.35), (8.36)より

$$D_M^{\wedge}(n;\lambda\ell) = \frac{\pi}{2\ell}\,\frac{(-1)^n}{\lambda\sin\frac{1}{\lambda}\frac{n\pi}{2N+1}} \tag{8.41}$$

となる。$\lambda > 1$ であるから、$n\pi/\lambda(2N+1)$ はなおさら小さい値になっており、式(8.40)より、式(8.39)の才＝式も成立する。 (Q.E.D)

式(8.22)の $|D_N^{\wedge}(n)|$ に対する評価量は、Δx が一定ならば、ℓ にも N にも依存しない量であるから、$D_M^{\wedge}(n;\lambda\ell)$ に対しても有効である。よって

$$\frac{1}{(\Delta x)|n|} < |D_M^{\wedge}(n;\lambda\ell)| < \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{(\Delta x)|n|} \tag{8.42}$$

なる不等式が成立する。

$|D_N^{\wedge}(n;\ell)|$, $|D_M^{\wedge}(n;\lambda\ell)|$ 及び式(8.42)の評価量のグラフを、($\ell=\pi$, $N=4$), ($\lambda=5/3$, $M=7$), ($\lambda=3$, $M=13$) の場合について、図8.6に示す。この図から分かるように、N が大きい程、また、$n\pi/(2N+1)$ が小さい程、$|D_N^{\wedge}(n;\ell)|$

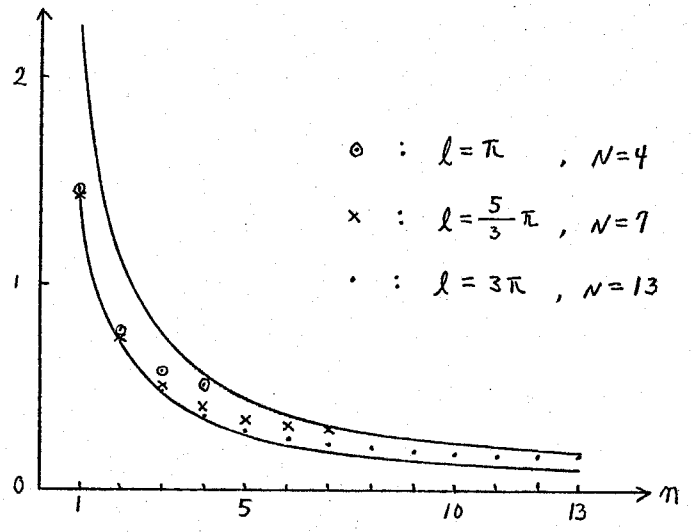


図 8.6　D_N の結合特性 $|\hat{D_N}(n)|$ の区間 ℓ から受ける影響

の値が、式(8.42)で与えられる下限に近づいている。これがまさしく、命題8.8で主張している事柄であり、8.6で提起した問題に対する解答である。

8.7　二階微分作用素 D_N^2

空間的に二階微分を行なう作用素 $D_N^2 = d^2/dx^2$ についても、D_N と同様の議論ができる。以下、その要点だけをまとめて示す。

命題8.1より $D_N^2 \in \mathcal{B}_c^{(1)}(H_N)$ となり、命題7.36より

$$D_N^2 = -\sqrt{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 C^{(n)} \qquad (8.43)$$

となる。つまり、D_N^2 は並進作用素と可換な、自己共役実等方偶作用素である。そして、式(8.43),(8.7)より、D_N^2 の Schmidt ノルムは

$$\|D_N^2\|_2 = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{15}} \qquad (8.44)$$

$$= \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{3N^2+3N-1}{5}}\,\|D_N\|_2 \qquad (8.45)$$

となる．

$\varphi_0(x)$ は N の関数であるから，それを強調して，$\varphi_0^{(N)}(x)$ と表すことにすれば，D_N^2 のインパルス応答は

$$\rho_1(D_N^2)(x) = \sqrt{2N+1}\,\frac{d^2}{dx^2}\varphi_0^{(N)}(x) \tag{8.46}$$

$$= -2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \cos\frac{n\pi}{\ell}x \tag{8.47}$$

$$= \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\left[\frac{(2N+1)\sqrt{2N-1}\,\varphi_0^{(N-1)}(x) - (2N-1)\sqrt{2N+1}\,\varphi_0^{(N)}(x)}{4\left(\sin\frac{\pi}{2\ell}\right)^2} - N^2\sqrt{2N+1}\,\varphi_0^{(N)}(x)\right] \tag{8.48}$$

となる．$D_N^2 \in \mathcal{B}_c^{(1)}(H_N)$ であるから，当然のことながら，D_N^2 のインパルス応答は，偶関数になっている．$\rho_1(D_N^2)$ のグラフを，図 8.7 に示す．

ところで

$$\sqrt{2N-1}\,\varphi_0^{(N-1)}(a_n^{(N)}) = (-1)^{n-1}2\cos\frac{n\pi}{2N+1} \tag{8.49}$$

であるから，式(7.102)，(8.48)より，D_N^2 の結合特性（$(D_N^2)\hat{}(n)$）は，

$$(D_N^2)\hat{}(n) = \begin{cases} -\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\frac{N(N+1)}{3} & (n=0) \\ \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\frac{\cos\frac{n\pi}{2N+1}}{\left(\sin\frac{n\pi}{2N+1}\right)^2} & (n\neq 0) \end{cases} \tag{8.50}$$

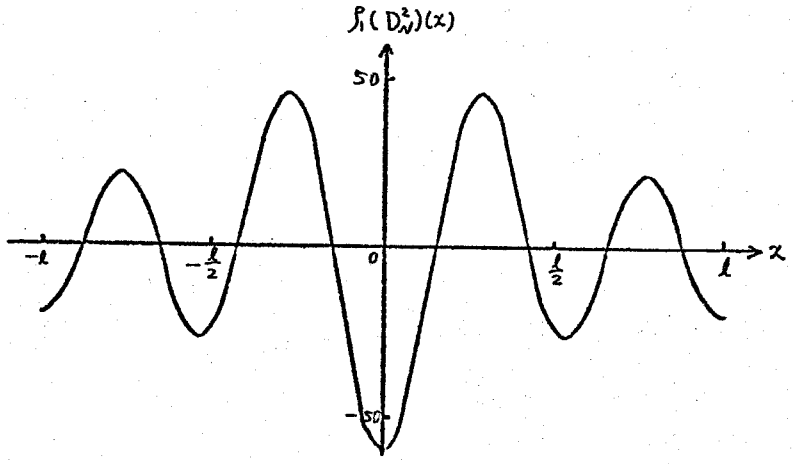


図 8.7　D_N^2 のインパルス応答（$\ell=\pi$, $N=4$）

となる。D_N の場合と同様、D_N^2 の結合特性の本質的な部分は、N によらない関数

$$d_2(x) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \frac{\cot\frac{\pi}{2\ell}x}{\left(\sin\frac{\pi}{2\ell}x\right)^2} \tag{8.51}$$

が、担っているのである。実際、式(8.50)は

$$(D_N^2)\hat{}(n) = (-1)^{n-1} d_2(a_n^{(N)}) \quad (n\neq 0) \tag{8.52}$$

と表される。図8.2と同様、$\ell=\pi$ に対する $d_2(x)$ のグラフと標本点 $a_n^{(N)}$ を、図8.8に示す。

式(7.174)に式(8.50)を代入すれば、D_N^2 に対する次の表現を得る。

$$D_N^2 = -\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \frac{N(N+1)}{3} E_N + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{\cot\frac{n\pi}{2N+1}}{\left(\sin\frac{n\pi}{2N+1}\right)^2} \Sigma_N(a_n) \tag{8.53}$$

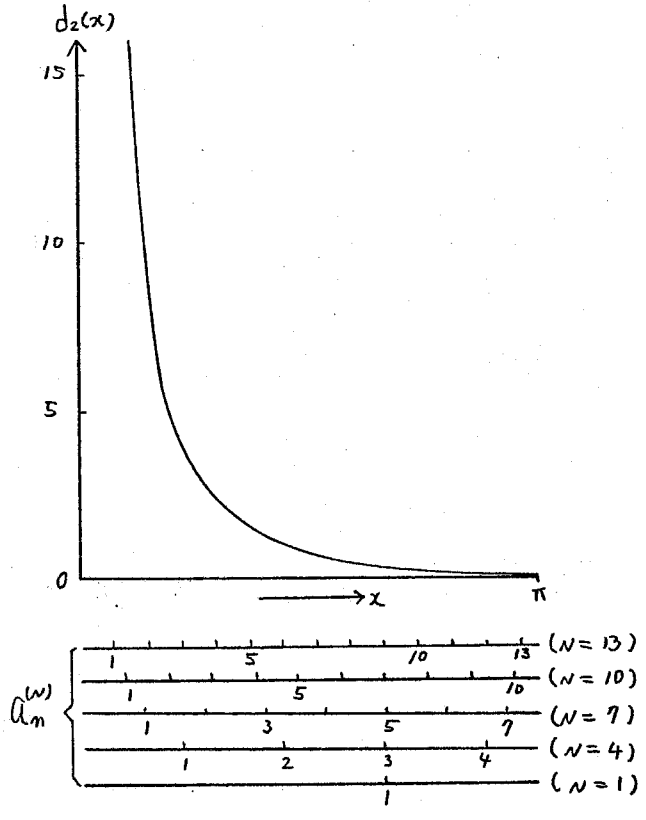


図8.8　D_N^2 の結合特性 $((D_N^2)\hat{}(n))$ $(\ell=\pi)$

このように、二階微分という無限小の操作が、平均化作用素 $\{\Sigma_N(a_n)\}_{n=0}^{N}$ の一次結合によって、厳密に表現できるのである。

$d_2(x)$ は区間 $0<x\leq\ell$ で単調減少関数である。また不等式

$$\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 > \cos\theta \quad (0<\theta<\tfrac{\pi}{2}) \tag{8.54}$$

(文献(11), p.238)より

$$|(D_N^2)\hat{}(0)| > |(D_N^2)\hat{}(\pm 1)| \tag{8.55}$$

となるから、$|(D_N^2)\hat{}(n)|$

$(n=0, 1, 2, \cdots, N)$ は n に関する単調減少関数になっている。そこで、D_N^2 の第一近似として、式(8.53)の $n=1$ の項までをとり、それを $D_{N(1)}^2$ と表せば

$$(D_{N(1)}^2 f)(x) = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \left(\frac{\cos\frac{\pi}{2N+1}}{\left(\sin\frac{\pi}{2N+1}\right)^2} \frac{f(x+a_1)+f(x-a_1)}{2} - \frac{N(N+1)}{3} f(x) \right) \tag{8.56}$$

となる。

8.8 空間積分作用素[9] I_N

空間微分 D_N の一般逆[10]として、空間的に不定積分を行なう作用素を求めることができる。それを I_N とすれば、命題 8.1 より

$$I_N \equiv D_N^+ = \frac{\sqrt{2}\,\ell}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} S^{(n)} \tag{8.57}$$

となる。例えば

$$S^{(m)} C_n = \frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\epsilon_n}} A_n \quad (m, n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{8.58}$$

と式(8.57)より

$$(I_N C_n)(x) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ \dfrac{\ell}{n\pi} A_n(x) & (n=1, 2, \cdots, N) \end{cases} \tag{8.59}$$

となる。式(8.59)の第二式は、良く知られている積分公式である。$C_0(x)=1$ であるから、C_0 の不定積分は x になるはずである。ところが式(8.59)の第一式より、$(I_N C_0)(x)=0$ となっている。これは、I_N を D_N の一般逆として定義した為に、D_N の核 $\mathrm{Ker}(D_N)=H^{(0)}$ がそのまま I_N の核 $\mathrm{Ker}(I_N)$ になったからである。つまり、I_N は被積分関数の直流分を完全に取り除き、残りの成分に対して、厳密に不定積分を行なう作用素なのである。

式(8.57)より、I_N は実反等方奇作用素である。

式(8.56)の P_1 をとれば、I_N のインパルス応答が

$$P_1(I_N)(x) = \frac{2\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{\ell}x \qquad (8.60)$$

となることが分かる。式(8.60)の右辺を、簡単な形で表すことはできない。しかし、$N\longrightarrow\infty$ とすれば

$$\frac{2\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{\ell}x = \begin{cases} -(x+\ell) & ; -\ell\leqq x<0 \\ 0 & ; x=0 \\ -(x-\ell) & ; 0<x\leqq\ell \end{cases} \qquad (8.61)$$

となるから、式(8.60)が、式(8.61)で与えられる関数を、空間 H_N へ射影したものであることが分かる。式(8.60),(8.61)のグラフを、図8.9に示す。このグラフからも予想のつくことであるが、$P_1(I_N)(x)$ に対して、

$$0 < P_1(I_N)(x) < 2(\ell-x) \qquad (0<x<\ell) \qquad (8.62)$$

なる評価式が成立する(文献(11), p.249)。

式(7.102),(8.60)より、I_N の結合特性($\hat{I}_N(n)$)は、

$$\hat{I}_N(n) = \frac{2\ell}{(2N+1)\pi}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}\sin\frac{2mn\pi}{2N+1} \qquad (8.63)$$

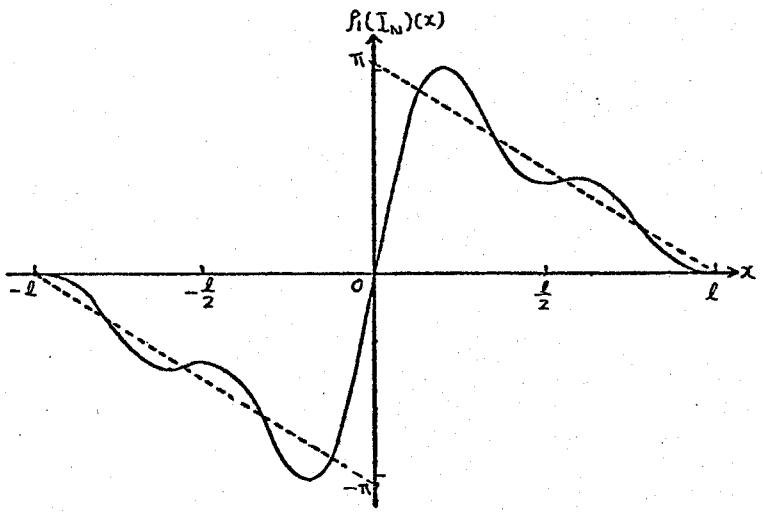


図8.9　I_N のインパルス応答 ($\ell=\pi$, $N=4$)*

* ---- は、式(8.61)のグラフである。

となる。式(8.63)より、例えば

$$I_1^{\wedge}(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad I_4^{\wedge}(3) = \frac{\sqrt{3}}{12}, \quad I_7^{\wedge}(5) = \frac{97\sqrt{3}}{2100} \tag{8.64}$$

となるから、D_N 及び D_N^2 とは異なり、たとえ $a_n^{(N)} = a_m^{(M)}$ であっても、$I_N^{\wedge}(n) = I_M^{\wedge}(m)$ とはならない。従って、図8.2或いは図8.8のように、一つのグラフだけから、全ての N に対して $I_N^{\wedge}(n)$ を読みとることはできないのである。

8.9 あとがき

差分作用素 $\Delta_N(a_1)$ と、式(8.19)で与えられる D_N のオー近似 $D_{N(1)}$ とは、単なる定数倍の違いだけである。ところが、二階微分の場合には、事情は異なる。濃淡図形から境界線を抽出する為に、

$$(\Sigma_N(a_1) - E_N) f(x) = \frac{1}{2}(f(x+a_1) + f(x-a_1) - 2f(x)) \tag{8.65}$$

という式が用いられることが、良くある。[2),(12)] また差分 $\Delta_N(a_1)$ を二回施せば

$$\Delta_N(a_1)^2 f(x) = \frac{1}{4}(f(x+a_2) + f(x-a_2) - 2f(x)) \tag{8.66}$$

となる。式(8.65),(8.66)は、いずれも式(8.56)で与えられる D_N^2 のオー近似 $D_{N(1)}^2$ とは異なっているのである。

しかし、これらの近似式を、単純に D_N^2 の近似として比較することは、意味のないことである。例えば、濃淡図形から境界線を抽出する為に、二階微分として式(8.65)を使用する場合、それは単なる二階微分の近似ではなく、その他にも、平滑化操作による雑音の低減効果も、同時に意図しているのである。[12)]

従って、本節で求めた D_N 及び D_N^2、或いはそれらのオー近似式(8.19)及び式(8.56)と、電子計算機による画像処理の分野で良く用いられている微分演算子を、単純に比較することは、ここではしない。

しかし、上の例のように、複合機能 $X_N = A_N B_N \cdots C_N$ を、一つの作用素 $X_{N(1)}$ で近似する場合にも、本節で述べてきた事柄が、一つの指針を与えることは、言うまでもないことである。

第9節 作用素の空間 $B^{(1)}(H_N)$ と関数空間 H_N の直交基底(1)(2)

9.1 まえがき

我々が、作用素や関数を自由に扱うことができる為には、それらの属している作用素の空間及び関数の空間の幾何学的イメージを、はっきりとつかんでおかなければいけない。

文字認識の分野では、文字集合の作る関数空間に、モード関数系と呼ばれる座標系を導入し、この座標系の上に立って、或いはこの座標系を通じて、文字集合の性質を解明するという方法が良く用いられている。(3)

このように、座標系の導入は、その空間の幾何学的イメージをつかむ上に、非常に役立つのである。更にその結果として、直観的に見通し良く、思考を押し進めることができるようになるのである。

このような立場から、これまでに、三角多項式の空間 H_N 及び H_N の上で定義された並進作用素と可換な作用素の空間 $B^{(1)}(H_N)$、或いはその部分空間 $B_c^{(1)}(H_N)$, $B_{ac}^{(1)}(H_N)$ に、基本座標系及び自然座標系と名付けた二種類の座標系を、導入してきた。

しかし、例えば式(3.78)のように、H_N の自然座標系 $\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ が、ψ_0 から並進操作によって構成されるという性質が、$\{\psi_n\}$ が標本化基底であるという性質と、どのような関係にあるのであろうかという疑問が生じてくる。

また、作用素の空間についていえば、正規直交基底のもつ一般的性質すら、まだあまり分ってない状態である。まして、$B^{(1)}(H_N)$ の基本座標系を構成している $E^{(m)}$ の階数が、全てのmに対して1になり、自然座標系を構成している $T_N(a_n)$ が、全てのnに対してユニタリ作用素になっているということが、偶然の取るに足りない性質なのか、或いはもっと特徴的な性質なのかといった擬

問には、これまでの段階では、答えることができない。

そこで本節では、関数空間 H_N と作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に限って、正規直交基底の種々の性質を、明らかにしていく。まず正規直交基底の間に成立する種々の恒等式を導く。次に、正規直交基底の間に成立するいくつかの不等式を導く。これらの不等式の等号が成立する条件として、ユニタリ基底、標本化基底階数1の基底を導入し、それらの性質を詳しく検討していく。また、ユニタリ基底及び階数1の基底の特別な場合として、それぞれ並進基底及び中等基底を導入し、その性質を明らかにする。

なお、特にことわらない限り、本節を通じて、$\{u_m\}_{m=-N}^{N}$ を H_N の正規直交基底とし、$U_N^{(m)} \equiv \rho_1^{-1}(u_m)$ とする。また、正規直交基底を、単に基底ということがある。

9.2 作用素のノルムと階数の関係

以下の項で導入される各種基底の特徴づけの為の準備として、作用素のノルムと階数に関係したいくつかの不等式を導く。

$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の標準分解を

$$A_N = W_N [A_N] \tag{9.1}$$

とする。ここで A_N の固有値を $\{A_N(m)\}_{m=-N}^{N}$ とし、$\mathcal{N} \equiv \{m \mid A_N(m) \neq 0\}$ とすれば、$[A_N]$, W_N は

$$[A_N] \equiv (A_N^* A_N)^{1/2} = \sum_{m=-N}^{N} |A_N(m)| E^{(m)} \tag{9.2}$$

$$W_N = \sum_{m \in \mathcal{N}} \frac{A_N(m)}{|A_N(m)|} E^{(m)} \tag{9.3}$$

と表される。式(9.3)より

$$\mathrm{rank}(A_N) = \|W_N\|_2^2 \tag{9.4}$$

となり、任意の $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}} \|A_N\|_2 \leqq \|A_N\| \leqq \|A_N\|_2 \tag{9.5}$$

なる同値関係が成立しているから、次の補題が成立する。

〔補題 9.1〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の Schmidt ノルムが 1 ならば、次の不等式が成立する。

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}} \leqq \|A_N\| \leqq 1 \tag{9.6}$$

$$1 \leqq \|W_N\|_2 \leqq \sqrt{2N+1} \tag{9.7}$$

A_N のノルム及び階数に対しては、それぞれ補題 9.1 に示すような不等式が成立している。しかし、これら二つの量は、全く独立ではなく、相互に関係をもっているのである。それを次に示す。

〔命題 9.1〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の Schmidt ノルムが 1 ならば

$$1 \leqq \|W_N\|_2 \cdot \|A_N\| \leqq \|W_N\|_2 \tag{9.8}$$

なる不等式が成立する。

（証 明） 式(9.1)の両辺の Schmidt ノルムをとれば

$$\|[A_N]\| = \|A_N\| \tag{9.9}$$

（である（文献(4), p.5）、式(9.5)と文献(4)の Lemma 3 (p.29) より

$$1 = \|A_N\|_2 = \|W_N[A_N]\|_2 \leqq \|W_N\|_2 \cdot \|[A_N]\|$$
$$\leqq \|W_N\|_2 \cdot \|A_N\| \leqq \|W_N\|_2 \cdot \|A_N\|_2 = \|W_N\|_2 \quad (\text{Q.E.D.})$$

〔補題 9.2〕 零でない $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して、式(9.5)の才二の等号が

成立する為の必要十分条件は、$\mathrm{rank}(A_N)=1$ となることである。

命題9.1と補題9.2より、次の系が成立する。

〔系 9.1〕 $A_N \in B^{(1)}(H_N)$ に対して、式(9.8)のオニの等号が成立する為の必要十分条件は、$\mathrm{rank}(A_N)=1$ となることである。そしてこのとき、オーの等号も成立して

$$\| W_N \|_2 \cdot \| A_N \| = 1 \tag{9.10}$$

となる。

系9.1から、$A_N \in B^{(1)}(H_N)$ に対して、式(9.8)のオーの等号が成立しなければ、オニの等号も成立しないことが分かる。しかし、オニの等号に、いくらでも近いものは存在する。即ち、任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\| W_N \|_2 \cdot \| A_N \| > \| W_N \|_2 - \varepsilon \tag{9.11}$$

となるような $A_N \in B^{(1)}(H_N)$ が、常に存在するのである。それを、次に例で示す。

$$A_N(\theta) \equiv \cos\theta E^{(m)} + \sin\theta E^{(n)} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi/4) \tag{9.12}$$

$$= W_N(\theta)\{A_N(\theta)\} \tag{9.13}$$

とおけば

$$\| A_N(\theta) \| = \cos\theta \tag{9.14}$$

$$\| W_N(\theta) \|_2 = \begin{cases} 1 & (\theta=0) \\ \sqrt{2} & (0<\theta \leqq \pi/4) \end{cases} \tag{9.15}$$

であるから

$$\| W_N(\theta) \|_2 \cdot \| A_N(\theta) \| = \begin{cases} 1 & (\theta=0) \\ \sqrt{2}\cos\theta & (0<\theta \leqq \pi/4) \end{cases} \tag{9.16}$$

となる。式(9.16)の様子を、図9.1に示す。この図から分るように、式(9.

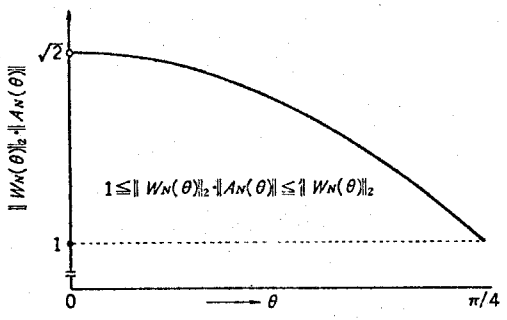


図 9.1　階数とノルムの積 $\|W_N(\theta)\|_2 \cdot \|A_N(\theta)\|$

12) で与えられる $A_N(\theta) \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対しては、$\theta = 0$ のとき、式 (9.8) の二つの等号が同時に成立し、$\theta \neq 0$ のとき、どちらの等号も成立しない。しかし θ を充分小さくとれば、式 (9.11) が成立するのである。

9.3　一般の基底

9.3では、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ および H_N の一般の正規直交基底がもっている種々の性質を明らかにしていく。

〔命題 9.2〕 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ を $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元とし、$u_n \equiv P_1(U_N^{(n)})$ とする。次の各条件は、互いに同値である。

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad (U_N^{(m)}, U_N^{(n)}) = \delta_{m,n} \quad \text{for all } m, n & (9.17) \\ \text{(ii)} \quad \sum_{n=-N}^{N} \langle U_N^{(n)}, U_N^{(n)} \rangle = \mathbb{1}_N & (9.18) \\ \text{(iii)} \quad \sum_{n=-N}^{N} \overline{u_n(a)}\, U_N^{(n)} = T_N(a) \quad \text{for all } a & (9.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{(iv)} \quad (u_m, u_n) = \delta_{m,n} \quad \text{for all } m, n & (9.20) \\ \text{(v)} \quad \sum_{n=-N}^{N} \langle u_n, u_n \rangle = E_N & (9.21) \\ \text{(vi)} \quad \sum_{n=-N}^{N} u_n(x)\, \overline{u_n(y)} = \sqrt{2N+1}\, \phi_0(x-y) & (9.22) \end{cases}$$

(vii) $$\rho_1 = \sum_{n=-N}^{N} \langle u_n , U_N^{(n)} \rangle \qquad (9.23)$$

(viii) $$\rho_1^{-1} = \sum_{n=-N}^{N} \langle U_N^{(n)} , u_n \rangle \qquad (9.24)$$

ここで、式(9.18)の右辺の $\mathfrak{S}_N$ は、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の上の恒等作用素である。

(i), (iv) はそれぞれ、$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ が $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ 及び H_N の正規直交基底になることと、直接表現したものである。(iv)～(vi) が互いに同値であることは、良く知られている事実である。例えば (iv) ⟶ (vi) は、$\sqrt{2N+1}\,\psi_0(x-y)$ が H_N の再生核であることと、命題2.1から明らかである。(i)～(iii) は、それぞれ (iv)～(vi) を空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の中で表現しなおしたものである。例えば、(i) と (iv) の同値性は、系7.6から明らかであり、(ii) と (v) の同値性は、命題7.15から明らかである。(iii) は、式(7.88)に他ならないが、この両辺の ρ_1 をとり、$a=y$ とおけば、(vi) となる。(i), (iv) から (vii), (viii) が導かれることは、命題7.14で示したとうりであるが、命題9.2は、その逆も成立することを、主張しているのである。例えば (vii) ⟶ (iii) は、次のようにして証明できる。命題7.18と (vii) より、任意の $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して

$$\begin{aligned}(A_N, T_N(a)) &= \rho_1(A_N)(a) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} (A_N, U_N^{(n)}) u_n(a) \\ &= (A_N, \sum_{n=-N}^{N} \overline{u_n(a)}\, U_N^{(n)})\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (A_N, T_N(a) - \sum_{n=-N}^{N} \overline{u_n(a)}\, U_N^{(n)}) = 0 \qquad (9.25)$$

となり、(iii) が成立する。

式(9.19)で $a=0$ とおけば、系7.9より、次の系を得る。

〔系 9.2〕

$$\sum_{n=-N}^{N} \overline{tr(U_N^{(n)})}\, U_N^{(n)} = E_N \qquad (9.26)$$

式(7.117),(7.118)と系7.9より

$$tr(C^{(n)}) = \sqrt{\epsilon_n} \quad , \quad tr(S^{(n)}) = 0 \tag{9.27}$$

となるから、系9.2で、$\{U_N\}$ として $\{C^{(n)}, S^{(n)}\}$ を採用したものが、系7.11であることが分る。

命題7.6, 命題7.19, 式(3.28)(4.43)より、次の系が成立する。

〔系9.3〕 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ が $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の正規直交基底ならば、$\{U_N^{(n)*}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{\overline{U_N^{(n)}}\}_{n=-N}^{N}$ もまた、そうである。$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ についても、同様である。

〔系9.4〕 次の関係が成立する。

$$\sum_{n=-N}^{N} U_N^{(n)*} U_N^{(n)} = E_N \tag{9.28}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} (U_N^{(n)*} u_n)(x) = \sqrt{2N+1}\, \psi_0(x) \tag{9.29}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} |u_n(x)|^2 = 2N+1 \tag{9.30}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} u_n^*(x)\, u_n(x) = \sqrt{2N+1}\, \psi_0(2x) \tag{9.31}$$

(証明) 任意の $f, g \in H_N$ に対して、$A_N \equiv \rho_1^{-1}(f)$, $B_N \equiv \rho_1^{-1}(g)$ とおけば、系7.5, 式(3.21), 命題7.17より,

$$(f, g) = (A_N, B_N) = \sum_{n=-N}^{N} (A_N u_n, B_N u_n)$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} (U_N^{(n)} f, U_N^{(n)} g) = \sum_{n=-N}^{N} (U_N^{(n)*} U_N^{(n)} f, g)$$

$$\therefore \quad ((E_N - \sum_{n=-N}^{N} U_N^{(n)*} U_N^{(n)}) f, g) = 0 \tag{9.32}$$

となり、式(9.28)が成立する。式(9.28)の両辺へ ρ_1 をとれば、式(9.29)を得る。式(9.22)で $g = x$ とおけば 式(9.30)が、$g = -x$ とおけば 式(9.31)が、それ

で成立する。

$[U_N^{(n)}]$ は U_N のいわば絶対値に相当する部分であり、式(9.2)より、

$$[U_N^{(n)}]^2 = U_N^{(n)*} U_N^{(n)} \tag{9.33}$$

であるから、式(9.28)と(9.30)が対応する関係式であることが分る。式(9.28)で $\{U_N^{(n)}\}$ として $\{E^{(n)}\}$ を採用すれば式(3.100)になり、$\{C^{(n)}, S^{(n)}\}$ を採用すれば、式(7.125)になる。

式(9.31)は、式(9.28)に形式的に対応する式である。式(9.31)で" $u_n = \psi_n$ とおけば"

$$\psi_0(2x) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \psi_n(x) \psi_{-n}(x) \tag{9.34}$$

と、$\psi_0(x)$ に対する倍角の公式を得る。

式(9.19)の両辺の*をとれば"

$$\sum_{n=-N}^{N} u_n(a) U_N^{(n)*} = T_N(a)^* \tag{9.35}$$

となる。式(9.29)と(9.35)は、ある意味で逆の関係になっている。

補題9.1と命題9.1より次の命題が成立する。

〔命題9.3〕 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ の標準分解を

$$U_N^{(n)} = W_N^{(n)} [U_N^{(n)}] \tag{9.36}$$

とすれば、次の不等式が成立する。

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}} \leqq \| U_N^{(n)} \| \leqq 1 \tag{9.37}$$

$$1 \leqq \| W_N^{(n)} \|_2 \leqq \sqrt{2N+1} \tag{9.38}$$

$$1 \leqq \| W_N^{(n)} \|_2 \cdot \| U_N^{(n)} \| \leqq \| W_N^{(n)} \|_2 \tag{9.39}$$

各座標ベクトル $U_N^{(n)}$ は、当然のことながら、Schmidt ノルムの意味での単位球面上に、位置している。しかし、これを普通のノルムで計れば、半径1と半径 $1/\sqrt{2N+1}$ の二個の球面の間に、分布しているのである。命題9.3で実際に等号が成立する場合については、後の項で論じる。

次に、H_N の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ が満足している不等式と加法定理について述べる。u_n を一個だけ取り出してみれば、系7.8より、全ての x に対して、

$$|u_n(x)| \leqq \sqrt{2N+1} \tag{9.40}$$

となっているが、$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ 全体についてみれば、次の不等式が成立する。

〔命題9.4〕 全ての x に対して

$$\sqrt{2N+1} \leqq \sum_{n=-N}^{N} |u_n(x)| \leqq 2N+1 \tag{9.41}$$

なる不等式が成立する。$x=x_0$ に対して、オーの等式が成立する為の必要十分条件は、ある n_0 が存在して、

$$|u_n(x_0)| = 0 \quad \text{for all } n \neq n_0 \tag{9.42}$$

となることである。オニの等式が成立する為の必要十分条件は、全ての n に対して、$|u_n(x_0)|$ が同じ値になることである。

（証明） 式(9.19)の両辺のSchmidtノルムをとれば、オーの不等式を得る。Schmidtノルムは強ノルム（文献(5), p.110, 文献(16)）であるから等号が成立する為の条件は、式(9.42)で与えられる。式(9.30)と不等式 $2ab \leqq a^2+b^2$ から、オニの不等式を得る。 (Q.E.D)

〔系9.5〕 式(9.41)のオーの等号が成立するような点 x_0 は、高々 $2N+1$ 個しか存在しない。もし点 x_0 で式(9.41)のオーの等号が成立したとすれば、ある n_0 が存在して、

$$|u_n(x_0)| = \sqrt{2N+1}\,\delta_{n,n_0} \tag{9.43}$$

$$u_{n_0}(x) = e^{i\theta}\psi_0(x-x_0) \tag{9.44}$$

となる。ここで θ は、任意に固定した実定数である。

（証明）式(9.43)は、式(9.42)から明らかであり、式(9.44)は、命題2、3から明らかである。系の前半は、式(9.43)から明らかである。(Q.E.D)

〔命題 9.5〕任意の $f \in H_N$ に対して、加法定理

$$f(x+y) = \sum_{n=-N}^{N} (U_N^{(n)*} f)(y)\, u_n(x) \tag{9.45}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} (A_N u_n^*)(y)\, u_n(x) \tag{9.46}$$

が成立する。ここで、$A_N = \rho_1^{-1}(f)$ である。

（証明）式(9.35)の右から A_N を掛け、両辺の ρ_1 をとれば、式(9.45)が成立する。更に命題7.17を考慮すれば、式(9.46)が成立することが分る。(Q.E.D)

命題9.5で、$f = \sqrt{2N+1}\,\psi_0$ とおき、$y=x$ とおけば式(9.31)になり、y を $-y$ におけば、式(9.22)になる。また命題9.5で、$f=\psi_n$, $u_m = \psi_m$ とおけば

$$\psi_n(x+y) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} \psi_{n-m}(y)\,\psi_m(x) \tag{9.47}$$

となる。式(9.47)で y を $-y$ に換えたものが、式(7.98)であり、$n=0$, $y=x$ とおいたものが、式(9.34)である。

〔命題 9.6〕$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を H_N の正規直交基底、$\{v_n\}_{n=-N}^{N}$ を H_N の元の組とし、$U_N^{(n)} \equiv \rho_1^{-1}(u_n)$, $V_N^{(n)} \equiv \rho_1^{-1}(v_n)$ とする。任意の $a, x \in [-l, l]$ に対して

$$\sum_{n=-N}^{N} \bar{v}_n(a)\, u_n(x) = \sum_{n=-N}^{N} u_n(a)\, \bar{v}_n(x) \tag{9.48}$$

及び

$$\sum_{n=-N}^{N} v_n(a)\, U_N^{(n)} = \sum_{n=-N}^{N} u_n(a)\, V_N^{(n)} \qquad (9.49)$$

が成立する為の必要十分条件は、全ての m, n に対して

$$(v_n,\ u_m) = (v_m,\ u_n) \qquad (9.50)$$

が成立することである。

証明は、容易にできるので略す。式(9.49)は、式(7.74)の逆に対応する関係式になっている。

任意に固定した $f \in H_N$ に対して、

$$v_n \equiv U_N^{(n)*} f \qquad (9.51)$$

とおけば、式(9.50)が成立しているので、命題9.6より、式(9.45)の右辺のxとyを交換しても良いことが分る。これは、式(9.45)の左辺からみれば明らかなことである。

また、

$$v_n \equiv \omega u_n \qquad (9.52)$$

とおけば、命題5.6より式(9.50)が成立する。しかも、式(5.40)より、式(9.48)の右辺は、ω の生成作用素の積分核 $\sqrt{2N+1}\, U_N(x, a)$ と一致するから式(9.48)が、式(5.32)の一般化になっていることが分かる。

なお、命題9.6については、オ3節及びオ5節で、もう一度触れることにする。

9.4 ユニタリ基底

〔定義 9.1〕 全ての n に対して、$\sqrt{2N+1}\, U_N^{(n)}$ がユニタリ作用素になるとき、$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を、ユニタリ基底(unitary base ; U-base)という。

$U_N^{(n)}$ の $\{E^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ による展開と

$$U_N^{(n)} = \sum_{m=-N}^{N} u_{m,n} E^{(m)} \tag{9.53}$$

とし、$U_N^{(n)}$ の標準分解を、(9.36) とする。

正規直交基底がユニタリ基底になる為の必要十分条件を、次に述べる。

〔命題 9.7〕次の各条件は、互いに同値である。

$$(i)\quad U_N^{(n)*} U_N^{(n)} = \frac{1}{2N+1} E_N \tag{9.54}$$

$$(ii)\quad [\,U_N^{(n)}\,] = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} E_N \tag{9.55}$$

$$(iii)\quad W_N^{(n)} = \sqrt{2N+1}\; U_N^{(n)} \tag{9.56}$$

$$(iv)\quad \| U_N^{(n)} \| = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \tag{9.57}$$

$$(v)\quad (U_N^{(n)*} u_n)(x) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \varphi_0(x) \tag{9.58}$$

$$(vi)\quad |u_{m,n}| = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \tag{9.59}$$

(証明) (i) ⟶ (ii) ⟶ (iii) ⟶ (iv) 及び (i) ⟷ (v) は明らかである。(iv) ⟶ (vi) : 式 (9.53) と文献 (4) の Theorem 1 (p. 8) より、

$$\| U_N^{(n)} \| = \max_m |u_{m,n}| \tag{9.60}$$

であるから、(iv) が成立したとすれば

$$1 = \| U_N^{(n)} \|_2^2 = \sum_{m=-N}^{N} |u_{m,n}|^2 \leqq (2N+1) \max_m |u_{m,n}|^2 = 1$$

となり、(vi) が成立する。(vi) ⟶ (i) : 補題 7.1 と式 (3.100) から明らかである。 (Q.E.D)

式 (9.57) と命題 9.3 から、普通ノルムの意味での最小の球面上に、全ての $U_N^{(n)}$ が位置するものとして、即ち、式 (9.37) の $=$ の等号が成立するもの

として、ユニタリ基底が特徴づけられることが分る。又、$U_N^{(n)}$ の階数は全て $2N+1$ であるから、ユニタリ基底は、階数が最大の基底になっている。即ち、式(9.38)のオニの等号が成立する。しかも、式(9.39)のオーの等号も、同時に成立している。式(9.58)は、式(9.29)の左辺の全ての項が、同じ関数 $\varphi_0(x)/\sqrt{2N+1}$ になることを、意味している。従って、ユニタリ基底に対しては、式(9.29)は自明のことと言える。

命題9.7と式(4.19),(4.24)より、系9.3に対応する次の系が成立する。

〔系 9.6〕 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ が $B^{(1)}(H_N)$ のユニタリ基底ならば $\{U_N^{(n)*}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{\overline{U_N^{(n)}}\}_{n=-N}^{N}$ もまた、そうである。$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ についても、同様である。

9.5 並進基底

ユニタリ基底の特別な場合である並進基底について論じる。

〔定義 9.2〕 ある実数の組 $\{x_n\}_{n=-N}^{N}$ $(x_0=0)$ に対して

$$u_n(x) = u_0(x-x_n) \tag{9.61}$$

$$U_N^{(n)} = T_N(x_n)\, U_N^{(0)} \tag{9.62}$$

となるとき、$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を、並進基底(translational base; T-base)という。(7)

〔命題 9.8〕 次の各条件は、互いに同値である。

(i) $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ は並進基底である。

(ii) $\{\theta_m\}_{m=-N}^{N}$ を任意実定数の組とするとき

$$U_N^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} e^{i\theta_m} \overline{\varphi_m(x_n)}\, E^{(m)} \tag{9.63}$$

となる．ここで $\{x_n\}_{n=-N}^{N}$ は，式(3.72)及び

$$\{k_n\}_{n=-N}^{N} = \{n\}_{n=-N}^{N}, \quad k_0 = 0 \tag{9.64}$$

を用いて，次式で与えられる。

$$x_n = a k_n \quad (n = -N, -N+1, \cdots, N) \tag{9.65}$$

(iii) 式(9.63)で与えられる $U_N^{(0)}$ と式(9.64)で与えられる $\{k_n\}$ を使って，$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ は，

$$u_n(x) = \sqrt{2N+1}\,(U_N^{(0)}\varphi_{k_n})(x) \tag{9.66}$$

と表される。

証明は略す。式(9.63)の両辺の P_1 をとれば，

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} e^{i\theta_m} \overline{\varphi_m(x_n)}\, \varphi_m(x) \tag{9.67}$$

となる。式(9.63)，(9.67)で特に

$$\theta_n = -\frac{n\pi}{\ell} a + \theta_0 \tag{9.68}$$

とおけば

$$U_N^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} e^{i\theta_0} T_N(a + k_n) \tag{9.69}$$

$$u_n(x) = e^{i\theta_0} \varphi_0(x - (a + k_n)) \tag{9.70}$$

となる。

系9.3，系9.6に対応して，次の系が成立する。

〔系9.7〕 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ が $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の並進基底ならば $\{U_N^{(n)*}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{\overline{U_N^{(n)}}\}_{n=-N}^{N}$ もまたそうである。$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ についても同様である。

〔系 9.8〕 並進基底は、ユニタリ基底である。

〔命題 9.9〕 並進基底に対して、次の関係が成立する。

$$(U_N^{(m)*}u_n)(x) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\varphi_{k_n-k_m}(x) \tag{9.71}$$

ここで $\{k_n\}_{n=-N}^{N}$ は、式(9.64)で与えられるものである。

（証明） 並進基底はユニタリ基底であるから、式(9.68)より

$$(U_N^{(0)*}u_0)(x) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\varphi_0(x) \tag{9.72}$$

となる。従って、式(9.72),(9.61),(9.62)より式(9.71)を得る。 (Q.E.D)

いうまでもなく、式(9.71)で $n=n$ とおいたものは、式(9.68)と一致している。

命題9.5と命題9.9より、次の加法定理が成立する。

〔系 9.9〕 H_N の並進基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ に対して、

$$u_n(x+y) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{m=-N}^{N}\varphi_{k_n-k_m}(y)u_m(x) \tag{9.73}$$

なる加法定理が成立する。

式(7.67),(7.2),(7.3)より

$$\sum_{n=-N}^{N}T_N(a_n) = (2N+1)E^{(0)} \tag{9.74}$$

$$T_N(a_n)^{2N+1} = E_N \tag{9.75}$$

であるから、式(9.61),(9.62)と命題9.8より、次の命題を得る。

〔命題 9.10〕 並進基底に対して、次の関係が成立する。

$$\sum_{n=-N}^{N}u_n(x) = e^{i\theta_0}\sqrt{2N+1} \tag{9.76}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} U_N^{(n)} = e^{i\theta_0}\sqrt{2N+1}\ E^{(0)} \tag{9.77}$$

$$\prod_{n=-N}^{N} U_N^{(n)} = U_N^{(n)^{2N+1}} = U_N^{(0)^{2N+1}} \tag{9.78}$$

ここで、θ_0は、命題9.8で与えられた定数である。

式(9.76)の右辺が、xによらない定数であることは、注目すべき点である。なお、式(9.76)で、$U_n = \varphi_n$とおいたものが、式(3.83)である。

式(9.76),(9.77)は、並進基底の全ての構成元の和が、絶対値1の定数倍を除いて、並進基底のとり方に依存しないことを表している。また式(9.78)は、並進基底の全ての構成元の積が、その任意の一個の元の$2N+1$乗と同じものになることを意味している。

9.6 標本化基底

一般の有限次元関数空間における標本化基底については、既に才2節で論じている。9.6では、別の立場から、即ち、不等式(9.37)~(9.41)の等号が成立する条件に関連づけて、関数空間H_N及び作用素の空間$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$の標本化基底について論じることにする。

H_Nにおける標本化基底は、定義2.1と同様に定義される。$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$における標本化基底は、次のように定義する。

〔定義 9.3〕 任意の$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$に対して

$$A_N = \sum_{n=-N}^{N} w_n f(x_n) U_N^{(n)} \tag{9.79}$$

が成立するような複素数の組$\{w_n\}_{n=-N}^{N}$と、区間$[-l, l]$に属する実数の組$\{x_n\}_{n=-N}^{N}$が存在するとき、$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$を標本化基底(sampling base ; S-base)という。ここで、$f = P_1(A_N)$である。

即ち、A_Nのインパルス応答fの値が、全ての$x \in [-l, l]$に対して分ら

なくても、$2N+1$ 個の点 $\{x_n\}_{n=-N}^{N}$ だけで分っていれば、A_N が完全に再現できるような基底のことである。

式(9.79)の両辺の P_l をとれば

$$f(x)=\sum_{n=-N}^{N} w_n f(x_n)\, u_n(x) \tag{9.80}$$

となる。従って、$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ が $B^{(1)}(H_N)$ の標本化基底になることと、$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ が H_N の標本化基底になることとは、同値である。そこで、命題2.4 及び系2.3 を $B^{(1)}(H_N)$ の言葉に翻訳すれば、次の命題となる。

〔命題 9.11〕次の各条件は、互いに同値である。

(i) $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ は標本化基底である。

(ii) $$w_m\left(U_N^{(n)}, T_N(x_m)\right)=\delta_{m,n} \tag{9.81}$$

(iii) $$U_N^{(n)}=\overline{w_n}\, T_N(x_n) \tag{9.82}$$

ここで

$$w_n=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\, e^{-i\theta_n} \tag{9.83}$$

$$x_n=a+a_{k_n} \tag{9.84}$$

であり、θ_n 及び $a\in[-l,l]$ は任意実定数、$\{k_n\}_{n=-N}^{N}$ は式(9.77)で与えられるものである。

命題2.3 より、不等式(9.40)に関連した次の命題が成立する。

〔命題 9.12〕$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を H_N の基底とする。各 u_n に対し、$x_n\in[-l,l]$ が存在して

$$|u_n(x_n)|=\sqrt{2N+1} \tag{9.85}$$

となるのは、$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ が標本化基底のときであり、しかもそのときに限る。そしてこのとき、$\{x_n\}_{n=-N}^{N}$ は式(9.84)で与えられる。

命題9.4 と系9.5 に関連して、次の命題を得る。

〔命題 9.13〕

$$\sum_{n=-N}^{N} |u_n(x_m)| = \sqrt{2N+1} \tag{9.86}$$

を満足する相異なる $2N+1$ 個の点 $\{x_m\}_{m=-N}^{N}$ が存在する為の必要十分条件は，$\{u_n\}_{m=-N}^{N}$ が標本化基底になることである。そしてこのとき、$\{x_m\}_{m=-N}^{N}$ は、式(9.84)で与えられる。

命題(9.11)より、次の系を得る。

〔系 9.10〕 $\{U_N^{(n)}\}_{m=-N}^{N}$ が、$B^{(1)}(H_N)$ の標本化基底ならば、$\{U_N^{(n)*}\}_{m=-N}^{N}$ 及び $\{\overline{U_N^{(n)}}\}_{m=-N}^{N}$ もまた そうである。$\{u_n\}_{m=-N}^{N}$ についても、同様である。

〔系 9.11〕 標本化基底は、ユニタリ基底である。

命題9.11より、命題9.9に対応する次の命題を得る。

〔命題 9.14〕 標本化基底に対して、次の関係が成立する。

$$(U_N^{(m)*} u_n)(x) = \sqrt{2N+1}\, w_m \overline{w_n}\, \varphi_{k_n - k_m}(x) \tag{9.87}$$

ここで、$\{w_n\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{k_n\}_{n=-N}^{N}$ は、それぞれ式(9.83), (9.84)で与えられるものである。

式(9.87)で $m=n$ とおけば、確かに式(9.58)と一致する。

命題9.5と命題9.14より、系9.9に対応する次の系が成立する。

〔系 9.12〕 H_N の標本化基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ に対して、

$$u_n(x+y) = \sqrt{2N+1}\, \overline{w_n} \sum_{m=-N}^{N} w_m \varphi_{k_n - k_m}(y)\, u_m(x) \tag{9.88}$$

なる加法定理が成立する。

式(9.88)で $u_n = \varphi_n$ とおけば、式(9.47)になる。

9.7 階数1の基底

不等式(9.38)の才二の等号で特徴づけられる基底は、ユニタリ基底であったが、才一の等号で特徴づけられるものが、階数1の基底である。

〔定義 9.4〕 全てのnに対して、$\mathrm{rank}(U_N^{(n)}) = 1$ が成立するとき、$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を、階数1の基底(base of rank 1 ; r1-base)という。

〔命題 9.15〕 $B^{(1)}(H_N)$ の基底 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ の標準分解と、式(9.36)とするとき、次の各条件は、互いに同値である。

(i) $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ は、階数1の基底である。

(ii) $\{\{U_N^{(n)}\}\}_{n=-N}^{N}$ は基底である。

(iii) $$W_N^{(n)} = U_N^{(n)} \qquad (9.89)$$

(iv) $$U_N^{(m)} U_N^{(n)} = 0 \quad \text{for} \quad m \neq n \qquad (9.90)$$

(v) 任意実定数の組 $\{\theta_n\}_{n=-N}^{N}$ 及び、集合として $\{n\}_{n=-N}^{N}$ に一致する $\{k_n\}_{n=-N}^{N}$ を用いて、$U_N^{(n)}$ は、

$$U_N^{(n)} = e^{i\theta_n} E^{(k_n)} \qquad (9.91)$$

と表される。

(vi) $$\| U_N^{(n)} \| = \| U_N^{(n)} \|_2 \qquad (9.92)$$

(vii) $$\| U_N^{(n)*} U_N^{(n)} \|_2 = \| U_N^{(n)} \|_2^2 \qquad (9.93)$$

(viii) $$\| U_N^{(n)2} \|_2 = \| U_N^{(n)} \|_2^2 \qquad (9.94)$$

(ix) $$\| U_N^{(n)*} u_n \| = \| u_n \| \qquad (9.95)$$

(x) $\| U_N^{(n)} u_n \| = \| u_n \|$ (9.96)

(xi) 式(9.53)から得られる行列 $\langle\langle |u_{m,n}| \rangle\rangle$ は、置換行列である。

証明は、9.10 にまわす。

式(9.92)と命題9.3から、普通のノルムの意味での最大の球面上に、全ての $U_N^{(n)}$ が位置するものとして、即ち、不等式(9.37)のオニの等号が成立するものとして、階数1の基底が特徴づけられることが分る。また、その定義から分るように、階数1の基底は、階数が最小の基底、即ち、不等式(9.38)のオーの等号が成立する基底になっており、しかも、不等式(9.39)の二つの等号が、同時に成立しているのである。

この意味で、階数1の基底とユニタリ基底とは、対応する両極端の基底になっているということができる。

式(9.91)は、階数1の基底が、絶対値1の定数倍を除いて、基本座標系と一致することを、意味している。これは、(xi)と式(9.53)からも、うなずけることである。

普通のノルムに対しては、式(9.93)は常に成立している(文献(8), p.261)。又、$B^{(1)}(H_N)$ の元は全て正規作用素であるから、式(9.94)も普通のノルムに対して、常に成立している(文献(8), p.267)。しかし、Schmidtノルムに対しては、必ずしもこれらの等式は成立しなくて、命題9.15に述べたようになるのである。

式(9.91)の両辺に ρ_1 を作用させれば、次の系を得る。

〔系 9.13〕 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ が階数1の基底ならば、全ての x に対して、不等式(9.41)のオニの等号が成立する。

命題9.15より、次の系が成立する。

〔系 9.14〕 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ が、$B^{(1)}(H_N)$ の階数1の基底ならば、$\{U_N^{(n)*}\}_{n=-N}^{N}$

及び $\{\overline{U_N^{(n)}}\}_{n=-N}^{N}$ もまた、そうである。$\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ についても同様である。

9.8 ベキ等基底

基本座標系を特徴づけるものとして、階数 1 の基底の特殊な場合であるベキ等基底について論じる。

〔定義 9.5〕 全ての n に対して

$$U_N^{(n)2} = U_N^{(n)} \tag{9.97}$$

が成立する基底 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を、ベキ等基底 (idempotent base; I-base) という。

〔命題 9.16〕 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の基底 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ の標準分解を、式 (9.36) とするとき、次の各条件は、互いに同値である。

(i) $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ 及び $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ は、ベキ等基底である。

(ii) $$[U_N^{(n)}] = U_N^{(n)} \tag{9.98}$$

(iii) $$W_N^{(n)} = [U_N^{(n)}] \tag{9.99}$$

(iv) $$U_N^{(n)} \geq 0 \tag{9.100}$$

(v) $$U_N^{(n)} = E^{(k_n)} \quad ; \{k_n\}_{n=-N}^{N} = \{\gamma\}_{n=-N}^{N} \tag{9.101}$$

(vi) $$(U_N^{(n)} u_n)(x) = u_n(x) \tag{9.102}$$

(vii) 式 (9.53) から得られる行列 $\langle\langle u_{m,n} \rangle\rangle$ に対し

$$u_{m,n} \geq 0 \tag{9.103}$$

が成立する。

(viii) 式(9.53)から得られる行列$\langle\langle U_{m,n}\rangle\rangle$は、置換行列である。

証明は、命題9.15の場合と同様にできるので省略する。

式(9.101)から分るように、べキ等基底は、集合として基本座標系と完全に一致する。*

式(9.98)より$U_N^{(n)}$は、自己共役作用素になるから、べキ等基底は必然的に射撮作用素になってしまう。また、式(9.102)は、全ての$U_N^{(n)}$が、自分自身のインパルス応答を、不動点にもつことを意味している。

〔定義 9.6〕全てのnに対して、$U_N^{(n)} \geqq 0$となるとき、$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$及び$\{U_n\}_{n=-N}^{N}$を正値基底(positive-definite base ; P-base)という。

式(9.100)から、次の系を得る。

〔系 9.15〕$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$及び$\{U_n\}_{n=-N}^{N}$がべキ等基底になる為の必要十分条件は、それらが正値基底になることである。

命題9.16、命題9.15より、次の二つの系を得る。

〔系 9.16〕$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$が$B^{(1)}(H_N)$のべキ等基底ならば、$\{U_N^{(n)*}\}_{n=-N}^{N}$及び$\{\overline{U_N^{(n)}}\}_{n=-N}^{N}$もまたそうである。$\{U_n\}_{n=-N}^{N}$についても同様である。

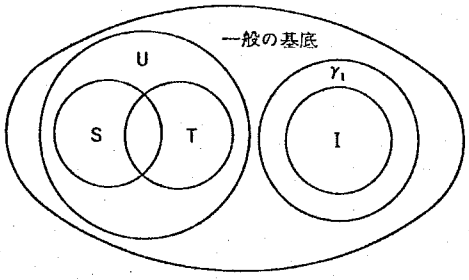
〔系 9.17〕べキ等基底は、階数1の基底である。

9.9 各基底間の相互関係

これまでに現われた各種基底の相互関係を、図9.2に示す。空間回路網理論で重要な働きをしている二種類の基底のうち、基本座標系は、図9.2のIに属しており、自然座標系は、SとTの共通部分に属している。

---

* H_Nの基本座標系$\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$は、元来、微分作用素$-id/dx$の固有値問題として、求められたものである。しかし、固有値問題からは、必ず絶対値1の定数倍だけの自由度が残ってしまう。ところが、命題9.16に示すように、べキ等基底として特徴づけるならば、この自由度を取り除くことができるのである。



U: ユニタリ基底

S: 標本化基底

T: 並進基底

γ_1: 階数1の基底

I: ベキ等基底

図 9.2　各基底の相互関係

表 9.1　各種基底の特徴づけ*

番号	不等式による特徴づけ	式の番号
1	$U \updownarrow \quad \gamma_1 \updownarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2N+1}} \leqq \lVert U_N^{(n)} \rVert \leqq 1$	(9.37)
2	$\gamma_1 \updownarrow \quad U \downarrow$ $1 \leqq \lVert W_N^{(n)} \rVert_2 \leqq \sqrt{2N+1}$	(9.38)
3	$U, \gamma_1 \downarrow \quad \gamma_1 \updownarrow$ $1 \leqq \lVert W_N^{(n)} \rVert_2 \lVert U_N^{(n)} \rVert \leqq \lVert W_N^{(n)} \rVert_2$	(9.39)
4	$S \updownarrow$ $\lvert U_n(x) \rvert \leqq \sqrt{2N+1}$	(9.40)
5	$S \updownarrow \quad \gamma_1 \downarrow$ $\sqrt{2N+1} \leqq \sum_{n=-N}^{N} \lvert U_n(x) \rvert \leqq 2N+1$	(9.41)

* $\leftrightarrow$ は等号が成立する為の必要十分条件を、$\rightarrow$ は十分条件を表す。

一般の基底に対して成立している不等式(9.37)~(9.41)の等号が成立する条件として、各種基底の特徴づけを行なってきた。それらをまとめて、表9.1に示す。表9.1で $\Longleftrightarrow$ は等号が成立する為の必要十分条件を、$\longrightarrow$ は、十分条件を示す。

不等式(9.39)のオーの等号は、表9.1から分るように、ユニタリ基底に対しても、階数1の基底に対しても、成立している。しかし、この二種類の基底は、あくまでも十分条件であって、必要条件ではない。実際7.8で導入した正弦作用素と余弦作用素に対しては、式(7.119), (7.120)より

$$\begin{cases} \|C^{(0)}\| = 1, \quad \|C^{(n)}\| = \|S^{(n)}\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & (9.104) \\ \mathrm{rank}(C^{(0)}) = 1, \quad \mathrm{rank}(C^{(n)}) = \mathrm{rank}(S^{(n)}) = 2 \quad (n=1,2,\cdots) & (9.105) \end{cases}$$

なる関係が成立しているから、正規直交基底 $\{C^{(n)}, S^{(n)}\}$ の全ての構成元に対して、式(9.39)のオーの等号が成立しているのである。しかも、式(9.105)から分るように、$C^{(n)}, S^{(n)}$ $(n=1,2,\cdots)$ はユニタリ基底の構成元にも、階数1の基底の構成元にも、なり得ないのである。

9.10 付録 命題9.15の証明

9.7の命題9.15を証明する為に、まず、いくつかの準備を行なう。

〔補題9.3〕 $A_N \in B^{(1)}(H_N)$ に対して

$$\|A_N^* A_N\|_2 = \|A_N\|_2^2 \qquad (9.106)$$

が成立すれば、ある η_0 が存在して

$$A_N = A_N(\eta_0) E^{(\eta_0)} \qquad (9.107)$$

と表される。ここで、$A_N(\eta_0)$ は A_N の η_0 番目の固有値である。

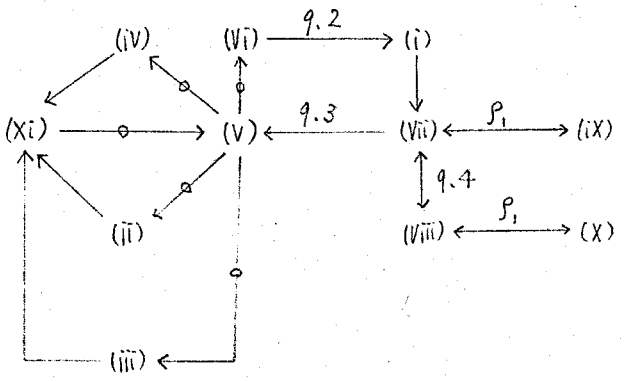


図 9.3　命題 9.15 の証明の順序

補題 3.2 と命題 7.9 より次の補題が成立する。

〔 補題 9.4 〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して、次式が成立する。

$$\| A_N^* A_N \|_2 = \| A_N^2 \|_2 \tag{9.108}$$

さて、命題 9.15 の証明に移る。証明の順序を、図 9.3 に示す。図 9.3 において、矢印の上の番号、例えば (vi) $\xrightarrow{9.2}$ (i) は、(vi) $\longrightarrow$ (i) が補題 9.2 から容易に証明できることを示している。また $\xrightarrow{\rho_1}$ は、その部分が、ρ_1 の性質から直ちに導かれることを示し、$\longrightarrow\!\!\circ$ は、その部分が明らかであることを示している。従って、矢印に何もついていない部分だけを証明する。

(i) $\longrightarrow$ (viii) : $U_N^{(n)} = \langle f, g \rangle$ とおけば

$$\| U_N^{(n)*} U_N^{(n)} \|_2 = \| f \|^2 \| g \|^2 = \| U_N^{(n)} \|_2^2$$

(iii) $\longrightarrow$ (xi) : 式 (9.53), (9.3) より

$$W_N^{(n)} = \sum_{m \in \mathcal{N}_n} \frac{U_{m,n}}{|U_{m,n}|} E^{(m)} \tag{9.109}$$

となる。ここで $\mathcal{N}_n = \{ m \mid U_{m,n} \neq 0 \}$ である。よって (iii) から

$$|U_{m,n}| = 1 \quad \text{for all } m \in \mathcal{N}_n \tag{9.110}$$

となる。行列 $\langle\!\langle U_{m,n} \rangle\!\rangle$ のユニタリ性より

$$\sum_{m=-N}^{N} |U_{m,n}|^2 = 1 \qquad (9.111)$$

であるから、各 n に対して、番号 k_n が定まり、$|U_{m,n}| = \delta_{m,k_n}$ となる。よって、$(|U_{m,n}|)$ は置換行列である。

(ii) $\longrightarrow$ (xi), (iv) $\longrightarrow$ (xi) も同様にして証明できる。 (Q.E.D)

第 II 章

反転作用素によって生成される作用素の空間

第10節　点aに関する反転作用素

10.1　まえがき

第四章では、並進作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ について、論じてきた。7.6 で述べたように、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ は、H_N の元のたたみこみ積と密接な関係にあった。

ところで、$\mathcal{B}(H_N)$ のもう一つの特殊な部分空間に、H_N の元の相関関数と密接な関係にあるものがある。それが、第五章で論じようとしている反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ である。$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ については、次の第11節及び第12節で論じることにし、本節では、その準備として、反転作用素そのものの性質を、明らかにしておく。また、反転作用素によって生成される共変対合である $a-$ 対称演算について論じ、最後に、$a-$ 対称演算による $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の特徴づけを行なう。

10.2　点aに関する反転作用素 $I_N(a)$

関数 $f(x)$ を 点、$x=a$ に関して反転する作用素を $I(a)$ とし、$g=I(a)f$ とすれば、

$$g(a+x)=f(a-x) \tag{10.1}$$

となる。式(10.1)で $a+x$ を改めて x とおけば

$$(I(a)f)(x)=f(2a-x) \tag{10.2}$$

となる。$a=0$ の場合が、式(5.6)で定義した原点に関する反転作用素である。

式(10.2)より、$I(a)\in\mathcal{B}(L_2)$ であり、

$$(I(a)\varphi_n)(x) = \varphi_n(2a)\varphi_{-n}(x) \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{10.3}$$

であるから、次の命題が成立する。

〔命題 10.1〕 $I(a)$ は、次のようにdyadic表現される。

$$I(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_n(2a)} \langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle \tag{10.4}$$

命題10.1より、H_N は $I(a)$ の不変部分空間になり、

$$I_N(a) \equiv E_N I(a) E_N = E_N I(a) = I(a) E_N \tag{10.5}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \overline{\varphi_n(2a)} \langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle \tag{10.6}$$

なる関係が成立する。従って、以下 $I_N(a)$ について論じるけれども、その多くの部分は、$I(a)$ に対しても、そのまま成立することを注意しておく。

式(10.6)は、$I_N(a)$ の空間周波数特性 $\tilde{I}_N(a)$ が

$$\tilde{I}_N(a) = \begin{pmatrix} & & & & \varphi_N(2a) \\ & & & \varphi_1(2a) & \\ & & \varphi_0(2a) & & \\ & \varphi_{-1}(2a) & & & \\ \varphi_{-N}(2a) & & & & \end{pmatrix} \tag{10.7}$$

と逆対角行列になることを、意味している。

$I(a)$ は積分表現できないけれども、$I_N(a)$ は、次のように、積分表現できる。

〔命題 10.2〕 $I_N(a)$ は、次のように積分表現される。

$$(I_N(a)f)(x) = \frac{\sqrt{2N+1}}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \varphi_0(x+y-2a) f(y)\, dy \tag{10.8}$$

これは、$\sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-y)$ が H_N の再生核であることと、式(10.2), (10.5)から明らかである。命題7.3と命題10.2を比較すれば、$T_N(a)$ の積分核が x と y の差の関数であったのに対して、$I_N(a)$ の積分核は、x と y の和の関数になっていることが分る。

これは結合特性についても言えることである。即ち、命題10.2と命題3.9より、系7.2に対応して、次の系が成立する。

〔系10.1〕 $I_N(a)$ の結合特性を $\langle\!\langle \hat{I}_N(m,n,a)\rangle\!\rangle$ とすれば、

$$\hat{I}_N(m,n,a)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\varphi_{m+n}(2a) \tag{10.9}$$

となる。

つまり、$T_N(a)$ の結合特性が、m と n の差だけに依存する行列、即ち、巡回行列であったのに対して、$I_N(a)$ の結合特性は、m と n の和だけに依存する行列、即ち、逆巡回行列になるのである。

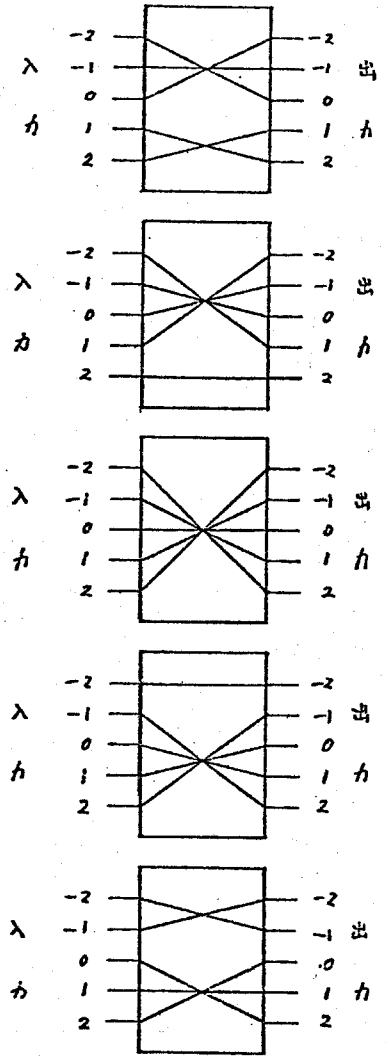
特に、$a=a_n/2$ の場合には、

$$\hat{I}_N(p,q,\tfrac{1}{2}a_n)=\delta_{p+q,n}\quad(\mathrm{mod}\ 2N+1) \tag{10.10}$$

$$I_N(\tfrac{1}{2}a_n)=\sum_{m=-N}^{N}\langle\varphi_{n-m},\varphi_m\rangle \tag{10.11}$$

となる。$N=2$, $n=0,\pm1$ の場合について、$I_N(a_n/2)$ の結合特性 $\hat{I}_N(a_n/2)$ と、回路の結線の様子を、図10.1に示し、反転の中心を、図10.2に示す。式(10.10)の右辺は、$\mathrm{mod}(2N+1)$ で同じ値になっているから、図10.2に示すように、例えば、$x=a_1$ に関する反転作用素 $I_2(a_2/2)$ と、$x=-3a_1/2$ に関する反転作用素 $I_2(-3a_1/2)$ とは、同じ作用素になる。図10.1の $n=2$ に対する回路の結線が、±1 番目の入出力端子を中心とする対称な部分と、±1 番目と ±2 番目の端子の中間を中心とする対称な部分に分れているのは、この為である。

式(10.2), (10.5)より



	-2	-1	0	1	2	
-2	0	0	1	0	0	$(n=-2)$
-1	0	1	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	1	
2	0	0	0	1	0	

	-2	-1	0	1	2	
-2	0	0	0	1	0	$(n=-1)$
-1	0	0	1	0	0	
0	0	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	1	

	-2	-1	0	1	2	
-2	0	0	0	0	1	$(n=0)$
-1	0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	0	
1	0	1	0	0	0	
2	1	0	0	0	0	

	-2	-1	0	1	2	
-2	1	0	0	0	0	$(n=1)$
-1	0	0	0	0	1	
0	0	0	0	1	0	
1	0	0	1	0	0	
2	0	1	0	0	0	

	-2	-1	0	1	2	
-2	0	1	0	0	0	$(n=2)$
-1	1	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	1	
1	0	0	0	1	0	
2	0	0	1	0	0	

(a) 回路の結線　　(b) 結合特性 $I_N^{\wedge}(\frac{1}{2}a_N)$

図 10・1　$I_N(\frac{1}{2}a_N)$ の結合特性と回路の結線

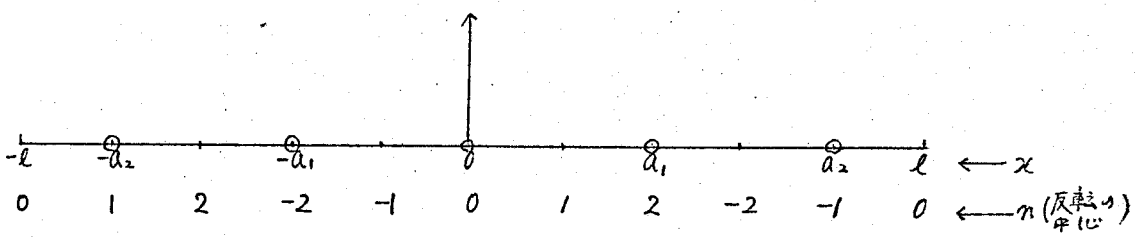


図 10・2　$I_N(a_n/2)$ の反転の中心（0：標本点）

$$(I_N(a)f)(x) = f(2a-x) \quad : f \in H_N \tag{10.12}$$

であるから、式(5.7),(5.8)に対応して

$$I_N(a)^2 = E_N \tag{10.13}$$

$$\| I_N(a)f \| = \| f \| \quad : f \in H_N \tag{10.14}$$

なる関係が成立する。従って、式(10.6),(10.12)～(10.14)より、次の命題が成立する。

〔 命題 10.3 〕

$$\overline{I_N(a)} = I_N(a)^* = I_N(a)^{-1} = I_N(a) \tag{10.15}$$

即ち、$I_N(a)$ は、ベキ等作用素であり、等方ユニタリ作用素であり、実自己共役作用素である。

10.3 $I_N(a)$ と $T_N(a)$ の関係

式(10.12)から容易に想像がつくように、$I_N(a)$ は、$I_N(0)$ と $T_N(a)$ を用いて、表すことができる。この $T_N(a)$ による表現が、$I_N(a)$ に対する多くの性質を導き出す為の基礎となるのである。

〔 命題 10.4 〕

$$I_N(a) = T_N(2a)\,I_N(0) = I_N(0)\,T_N(2a)^* \tag{10.16}$$

（証明）オー式は、式(10.12)から明らかである。従って、$I_N(a)$ の自己共役性より、オニ式も成立する。

命題 10.4 と式(7.2)より

$$I_N(a+\ell) = I_N(a) \tag{10.17}$$

となる。命題10.4より、並進作用素と$I_N(0)$の積の順序を交換すると、並進作用素に＊がつくことが分る。この性質は、次に示すように、$I_N(0)$に限らず任意の$I_N(a)$に対して成立するのである。

〔命題10.5〕（交換関係1）

$$T_N(b)I_N(a) = I_N(a)T_N(b)^* \tag{10.18}$$

$$I_N(a)T_N(b) = T_N(b)^* I_N(a) \tag{10.19}$$

（証明）命題10.4より

$$T_N(b)I_N(a) = T_N(b)T_N(2a)I_N(0) = T_N(2a)T_N(b)I_N(0)$$

$$= T_N(2a)I_N(0)T_N(b)^* = I_N(a)T_N(b)^*$$

となり、式(10.18)が成立する。式(10.18)でbを$-b$とおけば、式(10.19)になる。 (Q.E.D)

〔命題10.6〕

$$T_N(b)I_N(a)T_N(c) = I_N\left(a+\tfrac{1}{2}(b-c)\right) \tag{10.20}$$

特に

$$T_N(b)I_N(a)T_N(b) = I_N(a) \tag{10.21}$$

$$T_N(b)I_N(a)T_N(b)^* = I_N(a+b) \tag{10.22}$$

（証明）命題10.5と命題10.4より

$$T_N(b)I_N(a)T_N(c) = T_N(b)T_N(c)^* I_N(a) = T_N(b-c)T_N(2a)I_N(0)$$

$$= T_N\left(2\left(a+\tfrac{1}{2}(b-c)\right)\right)I_N(0) = I_N\left(a+\tfrac{1}{2}(b-c)\right)$$

となり、式(10.20)が成立する。式(10.21),(10.22)は、式(10.20)から明らかである。

式(10.22)と命題10.5より、次の系を得る。

〔系10.2〕

$$T_N(2b)\,I_N(a) = I_N(a+b) \tag{10.23}$$

$$I_N(a)\,T_N(2b) = I_N(a-b) \tag{10.24}$$

$I_N(a)$が自己共役であることを考慮して、式(10.23),(10.24)の両辺の$*$をとれば、それぞれ式(10.18),(10.19)になる。式(10.22)より次の命題が成立する。

〔命題10.7〕(交換関係2)

$$T_N(b)\,I_N(a) = I_N(a+b)\,T_N(b) \tag{10.25}$$

$$I_N(a)\,T_N(b) = T_N(b)\,I_N(a-b) \tag{10.26}$$

$T_N(b)$と$I_N(a)$の積に関する交換関係を、命題10.5と命題10.7の二種類求めたけれども、前者は$I_N(a)$を固定した場合であり、後者は、$T_N(b)$と固定した場合である。

命題10.6は、反転作用素の両側から並進作用素を掛けたものである。逆に、並進作用素の両側から反転作用素を掛ければ、命題10.4,命題10.5と式(10.13)より、次のようになる。

〔命題10.8〕

$$I_N(a)\,T_N(b)\,I_N(c) = T_N(2(a-c)-b) \tag{10.27}$$

特に

$$I_N(a)\,T_N(b)\,I_N(a) = T_N(b)^* \tag{10.28}$$

式(10.28)より、次の系を得る。

〔 系 10.3 〕

$$I_N(a)\,I_N(b) = T_N(2(a-b)) \tag{10.29}$$

特に

$$I_N(a)\,I(-a) = T_N(4a) \tag{10.30}$$

式(10.29)で $b=a$ とおけば、式(10.13)になる。

系 10.3 より、$I_N(a)$ と $I_N(-a)$ は 可換であるけれども、一般には、$I_N(a)$ と $I_N(b)$ は非可換であり、次の交換関係が成立する。

〔 命題 10.9 〕 (交換関係3)

$$I_N(a)\,I_N(b) = I_N(-b)\,I_N(-a) \tag{10.31}$$

反転作用素の積を

$$\prod_{n=1}^{k} I_N(x_n) = I_N(x_1)\,I_N(x_2)\cdots I_N(x_k) \tag{10.32}$$

と書くことにすれば、式(10.29)を一般化した次の命題が成立する。

〔 命題 10.10 〕 x_n $(n=1,2,\cdots)$ を区間 $[-l, l]$ に属する実数とするとき、次の関係が成立する。

$$\prod_{n=1}^{2k} I_N(x_n) = T_N\left(2\sum_{n=1}^{2k}(-1)^{n-1}x_n\right) \tag{10.33}$$

$$\prod_{n=1}^{2k-1} I_N(x_n) = I_N\left(\sum_{n=1}^{2k-1}(-1)^{n-1}x_n\right) \quad (k=1,2,\cdots) \tag{10.34}$$

(証 明) 式(10.33)を、数学的帰納法によって証明する。$k=1$ のときは、式(10.29)に示したように、確かに成立している。$k-1$ で成立したとすれば、式(10.29)より

$$\prod_{n=1}^{2k} I_N(x_n) = \left(\prod_{n=1}^{2(k-1)} I_N(x_n)\right) I_N(x_{2k-1})\,I_N(x_{2k})$$

$$= T_N\left(2\sum_{n=1}^{2(k-1)}(-1)^{n-1}x_n\right) T_N\left(2(x_{2k-1}-x_{2k})\right)$$

$$= T_N\left(2\sum_{n=1}^{2k}(-1)^{n-1}x_n\right)$$

となり、kでも成立する。式(10.34)も、式(10.29),(10.24)を使って、同様に証明できる。 (Q.E.D)

命題10.10は、反転作用素の偶数個の積が並進作用素になり、奇数個の積が、反転作用素になることを意味している。特に式(10.34)で$k=2$の場合と考えれば、次の関係が成立する。

$$I_N(a)\,I_N(b)\,I_N(c) = I_N(a-b+c) \qquad (10.35)$$

式(10.35)の右辺で、aとcを取換えても同じであるから、次の交換関係が成立する。

〔系 10.4〕(交換関係4)

$$I_N(a)\,I_N(b)\,I_N(c) = I_N(c)\,I_N(b)\,I_N(a) \qquad (10.36)$$

10.4 正規直交系 $\{I_N(a_n/2)/\sqrt{2N+1}\}$

並進作用素の組$\{T_N(a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$が、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$の正規直交基底であったように、$\{I_N(a_n/2)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$も正規直交系になることを示す。

〔命題10.11〕

$$(I_N(a),\,I_N(b)) = \sqrt{2N+1}\,\varphi_0(2(a-b)) \qquad (10.37)$$

$$\|I_N(a)\|_2 = \sqrt{2N+1}. \qquad (10.38)$$

(証明) 式(10.16),(10.15),(7.20)より

$$(I_N(a),\,I_N(b)) = (T_N(2a)I_N(0),\,T_N(2b)I_N(0))$$

$$= (T_N(2a),\,T_N(2b)I_N(0)^2)$$

$$= (T_N(2a),\ T_N(2b)) \tag{10.39}$$

$$= \sqrt{2N+1}\,\varphi_0(2(a-b)) \tag{10.40}$$

となり、式(10.37)が成立する。式(10.37)で $b=a$ とおけば、式(10.38)となる。 (Q.E.D)

命題10.11より、直ちに次の命題が成立する。

〔命題10.12〕 任意の $a\in[-\ell,\ell]$ に対して、

$$\left(I_N\left(\tfrac{1}{2}a_m+a\right),\ I_N\left(\tfrac{1}{2}a_n+a\right)\right) = (2N+1)\,\delta_{m,n} \tag{10.41}$$
$$(m,n=-N,-N+1,\cdots,N)$$

となる。即ち、$\left\{I_N\left(\tfrac{1}{2}a_n+a\right)/\sqrt{2N+1}\right\}_{n=-N}^{N}$ は正規直交系をなす。

〔命題10.13〕 任意の $a,b\in[-\ell,\ell]$ に対して、次の展開公式が成立する。

$$I_N(a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}\varphi_n(2(a-b))\,I_N\left(\tfrac{1}{2}a_n+b\right) \tag{10.42}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}\varphi_n(2a)\,I_N\left(\tfrac{1}{2}a_n\right) \tag{10.43}$$

(証明) まず、$b=0$ の場合を証明する。式(10.37),(10.11),(7.98),(10.12)より

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left(I_N(a),\ I_N\left(\tfrac{1}{2}a_n\right)\right)I_N\left(\tfrac{1}{2}a_n\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}\varphi_n(2a)\,I_N\left(\tfrac{1}{2}a_n\right) \tag{10.44}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}\varphi_n(2a)\sum_{m=-N}^{N}\langle\varphi_{n-m},\varphi_m\rangle$$

$$= \sum_{m=-N}^{N}\left\langle\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}\varphi_n(2a)\,\varphi_{n-m},\ \varphi_m\right\rangle$$

$$= \sum_{m=-N}^{N} \langle \psi_m(2a-x), \psi_m(x) \rangle$$

$$= \sum_{m=-N}^{N} \langle I_N(a)\psi_m, \psi_m \rangle$$

$$= I_N(a) \sum_{m=-N}^{N} \langle \psi_m, \psi_m \rangle$$

$$= I_N(a) \qquad (10.45)$$

となり、式(10.43)が成立する。このように、全ての $I_N(a)$ が、$\{I_N(\frac{1}{2}a_n)\}_{n=-N}^{N}$ によって張られる部分空間 S に属しており、しかも $\{I_N(\frac{1}{2}a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$ が S の正規直交基底になっているから、式(10.37), (10.41)より式(10.42)も成立する。

式(10.43)に現われる $I_N(\frac{1}{2}a_n)$ の展開係数が、式(10.9)で与えられる $I_N(a)$ の結合特性と同じ形をしていることは、注目すべき点である。

10.5 $I_N(a)$ と $E^{(n)}$ の関係

これまでは、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の自然座標系と関係のある $T_N(a)$ と $I_N(a)$ の関係を調べてきたが、10.5では、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の基本座標系 $\{E^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ と $I_N(a)$ の関係について論じる。

まず、式(10.3)より次の命題が成立する。

〔命題 10.14〕

$$(I_N(a), E^{(n)}) = \delta_{n,0} \quad \text{for all } a, n \qquad (10.46)$$

命題10.14は、全ての $a \in [-l, l]$ に対して、$I_N(a)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に属する成分が $E^{(0)}$ であり、しかもそれだけであることを示している。従って、次の系が成立する。

〔系 10.5〕

$$I_N(a) - E^{(0)} \perp B^{(1)}(H_N) \tag{10.47}$$

〔系 10.6〕

$$(I_N(a),\ T_N(b)) = 1 \qquad \text{for all } a, b \tag{10.48}$$

$$tr(I_N(a)) = 1 \qquad \text{for all } a \tag{10.49}$$

（証明） 式(10.47)と命題 7.18 より

$$(I_N(a),\ T_N(b)) = (I_N(a) - E^{(0)},\ T_N(b)) + (E^{(0)},\ T_N(b))$$

$$= \varphi_0(b) = 1$$

となり、式(10.48)が成立する。式(10.48)で $b=0$ とおけば、式(10.49)になる。 (Q.E.D)

式(10.46)～(10.48)の幾何学的説明は、11.5 の 図11.5 で与える。

式(10.6)より、次の命題が成立する。

〔命題 10.15〕 $n=-N, -N+1, \cdots, N$ に対して、次式が成立する。

$$E^{(n)} I_N(a) = \varphi_{-n}(2a) \langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle \tag{10.50}$$

$$I_N(a) E^{(n)} = \varphi_n(2a) \langle \varphi_{-n}, \varphi_n \rangle \tag{10.51}$$

$$E^{(0)} I_N(a) = I_N(a) E^{(0)} = E^{(0)} \tag{10.52}$$

式(10.50), (10.51)より、次の交換関係が成立する。

〔系 10.7〕（交換関係 5）

$$E^{(n)} I_N(a) = I_N(a) E^{(-n)} \quad (n=-N, -N+1, \cdots, N) \tag{10.53}$$

10.6 a-対称演算 $\overset{\star_a}{\star}$

式(10.15)より、点aに関する反転作用素 $I_N(a)$ は、共変対合を生成する。それを $\overset{\star_a}{\star}$ で表せば

$$A_N^{\overset{\star_a}{\star}} \equiv I_N(a)\,\overline{A}_N\,I_N(a) \quad ; \quad A_N \in \mathcal{B}(H_N) \tag{10.54}$$

となる。$\overset{\star_a}{\star}$ を、a-対称演算と名付ける。$a=0$ のときが、式(5.12)で定義した対称演算 $\overset{\star}{\star}$ である。

式(10.35), (10.28), (10.53)より、それぞれ

$$I_N(b)^{\overset{\star_a}{\star}} = I_N(2a-b) \tag{10.55}$$

$$T_N(b)^{\overset{\star_a}{\star}} = T_N(b)^{\star} \tag{10.56}$$

$$E^{(n)\overset{\star_a}{\star}} = E^{(n)} \qquad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{10.57}$$

となる。式(10.55)は、反転作用素にa-対称演算を施したものが、再び反転作用素になることを表しており、式(10.56), (10.57)は、並進作用素及び $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ の基本座標系についても、同様の性質があることを示している。また式(7.46)を考慮すれば、式(10.56), (10.57)より、$T_N(b)$ 及び $E^{(n)}$ に対して、$\overset{\star_a}{\star}$ がaに関係なく、$\overset{\star}{\star}$ と同じ働きをしていることが分る。この問題については、10.7でもう一度論じる。

式(10.13)より、6.7で論じたことが、$\overset{\star_a}{\star}$ に対して、そのまま成立する。例えば、命題6.30より、a-対称演算と複素共役演算は可換になる。即ち、

$$\underline{\overset{\star_a}{\star}} = \overline{\overset{\star_a}{\star}} \tag{10.58}$$

なる交換関係が成立する。式(10.58)は、$\overset{\star_a}{\star}$ が実(虚)作用素を実(虚)作用素に変換することを意味している。

命題6.31より、次の命題が成立する。

〔命題 10.16〕 $I_N(a)$ の固有値は、± 1 である。1 に対応する固有空間を $H_N^{(ea)}$, -1 に対応する固有空間と $H_N^{(oa)}$ とし、それぞれの空間への射影作用素を、$E_N^{(ea)}$, $E_N^{(oa)}$ とすれば

$$E_N^{(ea)} = \frac{1}{2}(E_N + I_N(a)), \quad E_N^{(oa)} = \frac{1}{2}(E_N - I_N(a)) \tag{10.59}$$

となる。*

式 (10.12) から明らかなように、$H_N^{(ea)}$ は、H_N の元で、点 $x=a$ を中心とする偶関数の全体であり、$H_N^{(oa)}$ は、$x=a$ を中心とする奇関数の全体である。

式 (10.59) より

$$I_N(a) = 2E_N^{(ea)} - E_N \tag{10.60}$$

となるから、命題 6.32 で、一般的に述べたように、$I_N(a)$ は、部分空間 $H_N^{(ea)}$ に関する鏡映作用素になっている。つまり、$f(x)$ と $f(2a-x)$ に変換する操作と、空間 H_N の中で説明すれば、図 10.3 に示すように ベクトル f を、部分空間 $H_N^{(ea)}$ に関して対称な位置に変換することに、相当しているのである。

式 (10.58) より、☆$_a$ の固有値は、± 1 である。固有値 1 に対応する固有空間を $\mathcal{B}_{ea}(H_N)$, -1 に対応する固有空間を $\mathcal{B}_{oa}(H_N)$ と表す。式 (10.54), (10.13) から容易に分るように、次の命題が成立する。

〔命題 10.17〕 次の三条件は、互いに同値である。

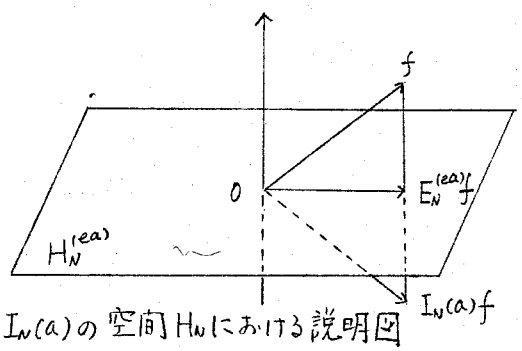


図 10.3 $I_N(a)$ の空間 H_N における説明図

---

* $H_N^{(ea)}$, $E_N^{(ea)}$ の添字 e 及び $H_N^{(oa)}$, $E_N^{(oa)}$ の添字 o は、それぞれ even, odd の頭文字であり、添字 a は、$H_N^{(ea)}$ 及び $H_N^{(oa)}$ が、それぞれ、点 $x=a$ を中心とする偶関数及び奇関数の空間であることを意味する。

(i) $A_N \in B_{ea}(H_N)$ (10.61)

(ii) $I_N(a) A_N = A_N I_N(a)$ (10.62)

(iii) $A_N H_N^{(ea)} \subset H_N^{(ea)}$, $A_N H_N^{(oa)} \subset H_N^{(oa)}$ (10.63)

〔命題 10.18〕次の三条件は、互いに同値である。

(i) $A_N \in B_{oa}(H_N)$ (10.64)

(ii) $I_N(a) A_N = -A_N I_N(a)$ (10.65)

(iii) $A_N H_N^{(ea)} \subset H_N^{(oa)}$, $A_N H_N^{(oa)} \subset H_N^{(ea)}$ (10.66)

命題10.17, 命題10.18 から分るように、$B_{ea}(H_N)$ は、点 a に関する偶関数(以後 a-偶関数と呼ぶ)を a-偶関数に変換し、点 a に関する奇関数(以後 a-奇関数と呼ぶ)を a-奇関数に変換する作用素の全体であり、$B_{oa}(H_N)$ は、a-偶関数を a-奇関数に、a-奇関数を a-偶関数に変換する作用素の全体である。そこで、$B_{ea}(H_N)$ の元を、a-偶作用素、$B_{oa}(H_N)$ の元を、a-奇作用素と呼ぶことにする。特に $a=0$ の場合は、7.10 で定義したように、単に偶作用素、奇作用素と呼び、記号も、$B_e(H_N)$, $B_o(H_N)$ と、a を省くことにする。

命題 6.26 より、式(10.59)で表される射影作用素は

$$\overline{E_N^{(ea)}} = E_N^{(ea)\star a} = E_N^{(ea)} \tag{10.67}$$

$$\overline{E_N^{(oa)}} = E_N^{(oa)\star a} = E_N^{(oa)} \tag{10.68}$$

なる性質をもっているから、共に、a-偶作用素である。また、式(10.55), (10.15)から分るように、$I_N(a)$ も a-偶作用素である。

空間 H_N が

$$H_N = H_N^{(ea)} \oplus H_N^{(oa)} \tag{10.69}$$

と直和分解されるように、空間 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_N)$ も

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{B}_{ea}(\mathcal{H}_N) \oplus \mathcal{B}_{oa}(\mathcal{H}_N) \tag{10.70}$$

と直和分解される。この具体的な分解の仕方は、命題 6.33 で $\Omega = \stackrel{\star}{a}$ と置くことによって、得られる。

次に、'a-対称演算と、積分核、結合特性、空間周波数特性の関係について述べる。

〔命題 10.19〕 $A_N \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_N)$ に対して $B_N = A_N^{\stackrel{\star}{a}}$ とおき、A_N 及び B_N の積分核を、それぞれ $a_N(x,y)$, $b_N(x,y)$ とおけば

$$b_N(x,y) = \overline{a_N(2a-x,\ 2a-y)} \tag{10.71}$$

となる。

（証明） 命題 3.8 と命題 10.4 より

$$\begin{aligned} b_N(x,y) &= \sqrt{2N+1}\,(I_N(a)\bar{A}_N I_N(a) T_N(y)\varphi_0)(x) \\ &= \overline{(I_N(a)\sqrt{2N+1}\,A_N T_N(2a) I_N(0) T_N(y)\varphi_0)(x)} \\ &= \overline{(I_N(a)\sqrt{2N+1}\,A_N T_N(2a) T_N(y)^* I_N(0)\varphi_0)(x)} \\ &= \overline{\sqrt{2N+1}\,(A_N T_N(2a-y)\varphi_0)(2a-x)} \\ &= \overline{a_N(2a-x,\ 2a-y)} \end{aligned} \tag{Q.E.D}$$

つまり、$a_N(x,y)$ に、x の関数及び y の関数として $I_N(a)$ を施こした後で、複素共役をとれば、$b_N(x,y)$ となるのである。

命題 10.19 と命題 3.9 から、B_N の結合特性も容易に導くことができるけれども、特に $a=0$ の場合には次のように簡単に表せるのである。

〔命題 10.20〕 $A_N \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_N)$ に対して $B_N = A_N^{\star}$ とおけば、

$$B_N^{\sim}(m,n) = \overline{A_N^{\sim}(m,n)} \qquad (10.72)$$

$$B_N^{\wedge}(m,n) = \overline{A_N^{\wedge}(-m,-n)} \qquad (10.73)$$

となる。

（証 明） 式(10.72)は式(10.3)から、式(10.73)は命題10.19と命題3.9から、明らかである。 (Q.E.D)

命題10.20と系4.3より、対称演算$\overset{\star}{\star}$と複素共役演算$^-$が、空間周波数特性と結合特性に対して、丁度逆の働きをしていることが分る。

命題10.19，命題10.20及び系4.3より、次の命題が成立する。

〔命題10.21〕次の各条件は、互いに同値である。但し、複号同順とする。

(i) $$A_N^{\overset{\star}{\star}} = \pm A_N \qquad (10.74)$$

(ii) $$A_N I_N(0) = \pm I_N(0) A_N \qquad (10.75)$$

(iii) $$A_N^{\sim}(-m,-n) = \pm A_N^{\sim}(m,n) \quad \text{for all } m,n \qquad (10.76)$$

(iv) $$A_N^{\wedge}(-m,-n) = \pm A_N^{\wedge}(m,n) \quad \text{for all } m,n \qquad (10.77)$$

(v) $$a_N(-x,-y) = \pm a_N(x,y) \quad \text{for all } x,y \qquad (10.78)$$

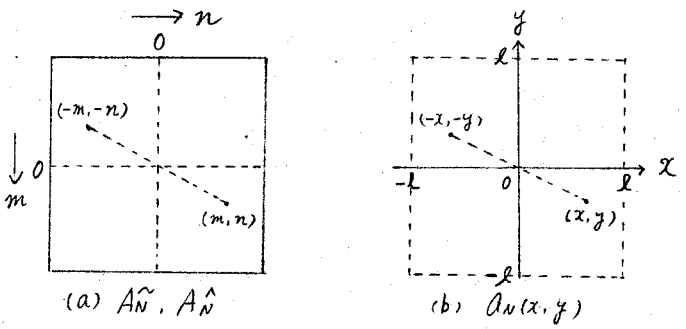


図10.4 偶作用素A_Nの空間周波数特性$A_N^{\sim}$，結合特性$A_N^{\wedge}$は、(0,0)要素を中心とする点対称行列であり、積分核$a_N(x,y)$は、原点を中心とする点対称な関数である。

命題10.19は、A_Nが偶(奇)作用素になるということと、A_Nの空間周波数特性$A_N\hat{\ }$或いは結合特性$A\hat{}_N$が、図10.4に示すように、(0,0)要素を中心とする点対称(点反対称)な行列になるということが、同値であることを意味している。これはまた、積分核$a_N(x,y)$についても成立することである。

10.7 a-対称演算による$B^{(1)}(H_N)$の特徴づけ

我々は、命題7.20で、任意の$A_N \in B^{(1)}(H_N)$に対して、$\overset{\star}{}$と$*$が一致することを見てきた。また、任意のaに対して、$\overset{\star a}{}$と$*$の間に、式(10.56),(10.57)のような関係が成立することを見てきた。実は、次に示すように、これらの関係は、$B^{(1)}(H_N)$にとって特徴的な性質なのである。

〔命題10.22〕 $A_N \in B(H_N)$が$B^{(1)}(H_N)$に属する為の必要十分条件は、任意の$a \in [-\ell, \ell]$に対して、

$$A_N^{\star a} = A_N^{*} \tag{10.79}$$

となることである。

(証明) 必要性は、命題7.24と式(10.56)から明らかである。逆に、任意の$a \in [-\ell, \ell]$に対して、式(10.79)が成立したとすれば

$$I_N(a) A_N I_N(a) = A_N^{\overline{*}} \quad \text{for any } a \tag{10.80}$$

となるから、式(10.29),(10.80)より

$$A_N T_N(a) = A_N I_N(\tfrac{1}{2}a) I_N(0) = I_N(\tfrac{1}{2}a) A_N^{\overline{*}} I_N(0)$$

$$= I_N(\tfrac{1}{2}a) I_N(0) A_N = T_N(a) A_N$$

となり、$A_N \in B^{(1)}(H_N)$となる。 (Q.E.D)

つまり、命題7.20は、式(10.79)で$a=0$と置いた場合であり、式(10.56),(10.57)は、式(10.79)でそれぞれ$A_N = T_N(b)$, $A_N = E^{(n)}$と置いた

場合である。

命題7.20を根拠に、命題7.35で、$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$が等方(反等方)作用素になることと、偶(奇)作用素になることとが、同値であることを示した。これはまた、図4.4と図10.4を比較することにより、直観的にも理解のできることである。

即ち、$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$の空間周波数特性$A_N^{\sim}$は対角行列であるから、$A_N^{\sim}$が逆対角線に関して線対称になる(図4.4(a))ことと、$A_N^{\sim}$が(0,0)要素に関して点対称になる(図10.4(a))こととは、同じことなのである。結合特性$A_N^{\wedge}$についても、$A_N^{\wedge}$が巡回行列であることを考慮すれば、図4.4(b)と図10.4(a)が同じことを意味していることが分る。

命題10.22より、命題7.35を次のように拡張することができる。

[系10.8] $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$が等方(反等方)作用素になる為の必要十分条件は、任意に固定した$a \in [-l, l]$に対して、A_Nがa-偶(a-奇)作用素になることである。

命題10.22或いは系10.8より、任意の$a, b \in [-l, l]$に対して、

$$A_N^{\overset{\star}{a}} = A_N^{\overset{\star}{b}} \quad : \quad A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \tag{10.81}$$

となる。従って、次のことが分る。もし$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$が、ある$a_0 \in [-l, l]$に対して、$a_0$-偶関数を$a_0$-偶($a_0$-奇)関数に、$a_0$-奇関数を$a_0$-奇($a_0$-偶)関数に変換すれば、任意の$a \in [-l, l]$に対して、a-偶関数をa-偶(a-奇)関数に、a-奇関数をa-奇(a-偶)関数に変換するのである。

第 11 節　反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ (I)

11.1　まえがき

扱う作用素の対象を、$\mathcal{B}(H_N)$ の特殊な部分空間に限定することにより、より詳細な議論を展開することができる、という立場から、第10章では、並進作用素によって生成される作用素の空間について、論じてきた。

同様の立場から、本節及び次の節で、反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の構造を、解明していく。$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の構造を調べる為の一つの良い方法は、第10章でそうしたように、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と同形な、しかも、その構造が良く分っている空間との同形写像を、うまく導入することである。そのような空間として、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ 及び H_N を採用する。そして、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$, 或いは $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と H_N の間の同形写像を導入し、それを通じて、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の構造を解明していく。その結果、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ が H_N の元のたたみこみ積と密接な関係にあったのに対し、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ は H_N の元の相関関数と密接な関係にあることを明らかにする。

11.2　作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(L_2)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$

〔定義 11.1〕任意の $a \in [-l, l]$ に対して、交換関係

$$A\,T(a) = T(a)^* A \tag{11.1}$$

を満足する $A \in \mathcal{B}(L_2)$ の全体を、$\mathcal{B}^{(2)}(L_2)$ と表し、交換関係

$$A_N\,T_N(a) = T_N(a)^* A_N \tag{11.2}$$

を満足する $A_N \in B(H_N)$ の全体を、$B^{(2)}(H_N)$ と表す。

定義 7.1 で与えた $B^{(1)}(L_2)$, $B^{(1)}(H_N)$ との違いは、式(11.1), (11.2) の右辺の並進作用素に $*$ がつくことである。即ち、例えば、$B^{(1)}(L_2)$ の元 A と $T(a)$ の積の順序を交換すると、並進の方向が、a から $-a$ に逆転するのである。

命題 10.5 より、全ての $a \in [-l, l]$ に対して、$I_N(a) \in B^{(2)}(H_N)$ となることが分る。

$B(H_N)$ は $B(L_2)$ の部分空間とみなせるから、式(7.12), (11.1) より、命題 7.5 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 11.1〕

$$B^{(2)}(L_2) \cap B(H_N) = B^{(2)}(H_N) \tag{11.3}$$

〔命題 11.2〕 $A \in B(H)$ が $B^{(2)}(H)$ に属する為の必要十分条件は、A が

$$A = \sum_n A^{\sim}(n) < \varphi_n, \varphi_{-n} > \tag{11.4}$$

と dyadic 表現されることである。* ここで、$A^{\sim}(n)$ は、

$$A^{\sim}(n) \equiv A^{\sim}(n, -n) \tag{11.5}$$

である。

(証明) $A \in B^{(2)}(H)$ とすれば、定義 11.1 と式(7.10)より、任意の $a \in [-l, l]$ に対して

$$(A\varphi_n, \varphi_m) = (\varphi_n(a) A T(a) \varphi_n, \varphi_m) = \varphi_n(a) (T(a)^* A \varphi_n, \varphi_m)$$

$$= \varphi_n(a) (A\varphi_n, T(a)\varphi_m) = \varphi_n(a) (A\varphi_n, \overline{\varphi_m(a)}\varphi_m)$$

$$= \varphi_{m+n}(a) (A\varphi_n, \varphi_m)$$

$$\therefore \quad A^{\sim}(m, n) (\varphi_{m+n}(a) - \varphi_0(a)) = 0 \quad \text{for all } a \tag{11.6}$$

---

* 5.1 でも述べたように、記号 H で、空間 L_2 とその部分空間 H_N を、同時に表す。従って式(11.4)の Σ は、$H = L_2$ のとき $n = -\infty$ から ∞ まで、$H = H_N$ のとき $n = -N$ から N までの総和を表す。

となり、式(11.4)が成立する。式(10.50)より

$$E^{(n)} I(0) = \langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle \tag{11.7}$$

であるから、式(10.16)より

$$\langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle T(a) = T(a)^* \langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle \tag{11.8}$$

となり、$\langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle \in \mathcal{B}^{(2)}(H)$ となる。従って、式(11.4)が成立すれば、$A \in \mathcal{B}^{(2)}(H)$ となる。 (Q.E.D)

命題11.2 は、$A \in \mathcal{B}(H)$ が $\mathcal{B}^{(2)}(H)$ に属する為の必要十分条件は、Aの空間周波数特性$A^\sim$が逆対角行列になることである、ということを意味している。そこで、$\mathcal{B}^{(1)}(H)$ の場合と同様に、逆対角成分で作られるベクトル$(A^\sim(n))$をも、$A \in \mathcal{B}^{(2)}(H)$ の空間周波数特性と呼び、同じ記号$A^\sim$で表すことにする。特に区別したい場合は、"$\mathcal{B}^{(2)}(H)$における空間周波数特性"と呼ぶこともある。

式(11.7)を考慮すれば、命題11.2と系10.7より、次の系が成立することが分る。

〔系11.1〕 $A \in \mathcal{B}(H)$ が $\mathcal{B}^{(2)}(H)$ に属する為の必要十分条件は、全てのnに対して、交換関係

$$A E^{(n)} = E^{(-n)} A \tag{11.9}$$

が成立することである。

系11.1と系7.4の違いは、式(11.9),(7.44)の右辺の$E^{(-n)}$と$E^{(n)}$の違いである。

命題11.2と式(7.10)から、次の系が成立する。

〔系11.2〕 $A \in \mathcal{B}^{(2)}(H)$ となる為の必要十分条件は、全てのnに対して、

$$A \varphi_n(x) = A^\sim(-n) \varphi_{-n}(x) \tag{11.10}$$

となることである。ここで $(A^{\sim}(n))$ は、式(11.5)で与えられるAの空間周波数特性である。

式(11.10)で $A = I(a)$ とおいたものが、式(10.3)である。

命題11.2より、更に次の系が成立する。

〔系11.3〕 $A, B \in B^{(2)}(H)$ ならば、$AB \in B^{(1)}(H)$ となり、

$$AB = \sum_n A^{\sim}(n) B^{\sim}(-n) E^{(n)} \tag{11.11}$$

となる。

式(11.11)の右辺で、$A^{\sim}(n)$, $B^{\sim}(-n)$ とnの符号が逆になっている点は、注意を要する。系11.3より、直ちに次の系を得る。

〔系11.4〕 $A \in B^{(2)}(H)$ に対して、A^{-1} が存在する為の必要十分条件は、全てのnに対して、$A^{\sim}(n) \neq 0$ となることである。そしてこのとき、$A^{-1} \in B^{(2)}(H)$ となり

$$A^{-1} = \sum \frac{1}{A^{\sim}(-n)} \langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle \tag{11.12}$$

と表される。

〔命題11.3〕 $A \in B^{(2)}(H)$ の空間周波数特性 $(A^{\sim}(n))$ は、

$$A^{\sim}(n) = (A, E^{(n)} I(0)) \tag{11.13}$$

$$= (A I(0), E^{(n)}) \tag{11.14}$$

$$= (I(0) A, E^{(-n)}) \tag{11.15}$$

と表される。

(証明) 補題3.2と式(10.13)より

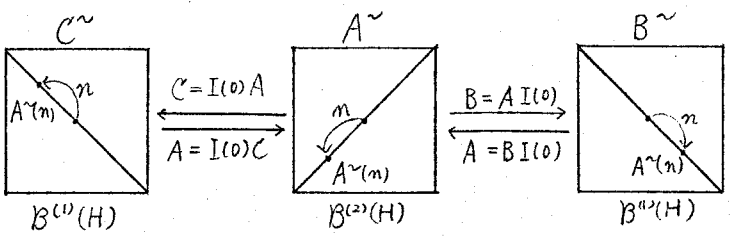


図11.1　$A \in \mathcal{B}^{(2)}(H)$ の空間周波数特性とその $\mathcal{B}^{(1)}(H)$ での表現

$$(E^{(m)}I(0),\ E^{(n)}I(0)) = (E^{(m)},\ E^{(n)}) = \delta_{m,n} \qquad (11.16)$$

となるから、式(11.13)は 式(11.14),(11.7) から明らかである。式(11.14)は、式(11.13)と補題3.2から、式(11.15)は 式(11.13),系10.7と補題3.2から明らかである。(Q.E.D)

系11.3より、$AI(0), I(0)A \in \mathcal{B}^{(1)}(H)$ であるから、命題11.3と命題7.7より、次のことが分る。$A \in \mathcal{B}^{(2)}(H)$ の $\mathcal{B}^{2}(H)$ における空間周波数特性 $A^{\sim}$ と、$B \equiv AI(0) \in \mathcal{B}^{(1)}(H)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H)$ における空間周波数特性 $B^{\sim}$ とは、完全に一致し、$C \equiv I(0)A \in \mathcal{B}^{(1)}(H)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H)$ における空間周波数特性 $C^{\sim}$ のオ n 要素 $C^{\sim}(n)$ は、$A^{\sim}$ のオ $(-n)$ 要素 $A^{\sim}(-n)$ と一致する。これを図示すれば、図11.1のようになる。

そこで、$\mathcal{B}^{(2)}(H)$ の完全正規直交基底 $\{E^{(n)}I(0)\}$ を、$\mathcal{B}^{(2)}(H)$ の基本座標系と名付けることにする。

命題11.2より、命題7.11に対応する次の命題が成立する。

〔命題11.4〕 $A \in \mathcal{B}^{(2)}(L_2)$ に対して、次の関係が成立する。

$$A_N \equiv E_N A E_N = A E_N = E_N A \qquad (11.17)$$

命題11.4より、次のことが分る。空間 H_N は、$\mathcal{B}^{(1)}(L_2)$ の場合と同じ様に、$\mathcal{B}^{(2)}(L_2)$ の全ての元に対する不変部分空間になっている。即ち、入力信号が H_N に帯域制限されている限り、A_N は A と厳密に同じ働きをするのである。また、$A \in \mathcal{B}^{(1)}(L_2)$ によって変換した結果が H_N に入るものは、本質的には H_N の元

だけである。

従って、$\mathcal{B}^{(2)}(L_2)$の元全体を扱っている場合にも、3.3.3で論じたように空間回路網の入出力端子の数を等しくとることは、非常に自然であるということができる。

11.3 $\mathcal{B}^{(2)}(H)$の複素共役演算に関する閉性

〔命題 11.5〕 $\mathcal{B}^{(2)}(H)$の元は全て、等方作用素である：

$$\bar{A} = A^* \quad : A \in \mathcal{B}^{(2)}(H) \tag{11.18}$$

（証明） 系11.2より

$$(\bar{A}\varphi_n, \varphi_m) = \overline{(A\varphi_{-n}, \varphi_{-m})} = \overline{(\tilde{A}(n)\varphi_n, \varphi_{-m})}$$

$$= \overline{\tilde{A}(n)}\,\overline{(\varphi_n, \varphi_{-m})}$$

$$\therefore (\bar{A}\varphi_n, \varphi_m) = \overline{\tilde{A}(-m)}\,\delta_{n,-m} \tag{11.19}$$

となる。同様にして

$$(A^*\varphi_n, \varphi_m) = \overline{\tilde{A}(-m)}\,\delta_{n,-m} \tag{11.20}$$

となるから、式(11.19),(11.20)より式(11.18)が成立する。 (Q.E.D)

$\mathcal{B}^{(1)}(H)$の元に対しては、$\overset{\alpha}{*}$と$*$が同じ働きをしていたが、$\mathcal{B}^{(2)}(H)$の元に対しては、$-$と$*$が同じ働きをするのである。

式(11.19),(11.20)と命題11.2より、命題7.6に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 11.6〕 次の各条件は、互いに同値である。

(i) $A \in \mathcal{B}^{(2)}(H)$ (ii) $\bar{A} \in \mathcal{B}^{(2)}(H)$ (iii) $A^* \in \mathcal{B}^{(2)}(H)$

同じく式(11.19),(11.20)と命題11.2より、命題7.8に対応して、次の系が成立する。

〔系 11.5〕 $A \in B^{(2)}(H)$ に対して $B \equiv \bar{A} = A^*$ とおく。A, Bの空間周波数特性に関して、次の関係が成立する。

$$B^{\sim}(n) = \overline{A^{\sim}(-n)} \tag{11.21}$$

、命題7.8に見るように、$B^{(1)}(H)$の元の空間周波数特性に対する複素共役演算ーと共役演算*の働きが異なっていた。そして、系11.5と命題7.8を比較してみれば、$B^{(2)}(H)$の元の空間周波数特性に対するーと*の働きが、$B^{(1)}(H)$のそれに対するーの働きと一致していることが分る。つまり、$B^{(2)}(H)$では、*がーに吸収されているのである。

11.4 $B^{(2)}(H_N)$ と $B^{(1)}(H_N)$ の関係

11.4より$B^{(2)}(H_N)$について論じるけれども、その多くの部分は、$B^{(2)}(L_2)$に対しても、そのまま成立することと、注意しておく。

図11.1から予想されるように、$B^{(2)}(H_N)$と$B^{(1)}(H_N)$の間には密接な関係があるので、11.4では、その関係を明らかにしていく。

〔命題 11.7〕 $a \in [-l, l]$ を任意に固定した定数とする。$B^{(2)}(H_N)$の元に$I_N(a)$を右(左)から掛けるという演算は、$B^{(2)}(H_N)$から$B^{(1)}(H_N)$の上へのユニタリ作用素であり、その逆演算は、$B^{(1)}(H_N)$の元に同じく$I_N(a)$を右(左)から掛けるという作用素である:

$$\begin{cases} B^{(2)}(H_N) I_N(a) = B^{(1)}(H_N) & (11.22) \\ B^{(1)}(H_N) I_N(a) = B^{(2)}(H_N) & (11.23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_N(a)\,\mathcal{B}^{(2)}(H_N) = \mathcal{B}^{(1)}(H_N) & (11.24) \\ I_N(a)\,\mathcal{B}^{(1)}(H_N) = \mathcal{B}^{(2)}(H_N) & (11.25) \end{cases}$$

（証明）　$I_N(a) \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ であるから、系11.3より

$$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)\,I_N(a) \subset \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \qquad (11.26)$$

となる。一方　$B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ とすれば、任意の $b \in [-l, l]$ に対して、

$$B_N I_N(a) T_N(b) = B_N T_N(b)^* I_N(a) = T_N(b)^* B_N I_N(a) \qquad (11.27)$$

となるから、$B_N I_N(a) \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ となる。しかも

$$B_N = (B_N I_N(a)) I_N(a) \qquad (11.28)$$

であるから、結局式(11.22)が成立する。

$I_N(a)$ を右から掛けるという演算が、ユニタリ作用素になることは、

$$\| A_N I_N(a) \|_2 = \| A_N \|_2 \quad : A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N) \qquad (11.29)$$

から明らかである。命題の残りの部分も、同様に証明できる。　(Q.E.D)

命題11.7から分るように、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ との同形対応は、a のとり方に応じて、少なくとも連続無限個存在する。しかし、図11.1に示した空間周波数特性との対応を考慮すれば、又後で示すように、結合特性及びインパルス応答を考慮すれば、$a=0$ の場合、即ち、$I_N(0)$ を右から掛けるという同形写像が、最も相応しいものであるということができる。そこで以下、主として、この $I_N(0)$ を右から掛けるという同形写像を、使うことにする。

式(11.4)の両辺に右から $I_N(0)$ を掛ければ、式(11.7)より式(7.34)を得る。即ち、命題7.7と命題11.2は、$I_N(0)$ を右から掛けるという同形写像によって、互いに結ばれているのである。

$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元に $I_N(a)$ を掛けただけで、式(11.22)のように、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と一

致してしまった。では、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の元に、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$の全ての元を掛ければ、どうなるであろうか。それを次に示す。

〔命題 11.8〕 $m, n = 1, 2$ とするとき、次の関係が成立する。

$$\mathcal{B}^{(m)}(H_N)\cdot\mathcal{B}^{(n)}(H_N) = \begin{cases} \mathcal{B}^{(1)}(H_N) & (m=n) \\ \mathcal{B}^{(2)}(H_N) & (m\neq n) \end{cases} \tag{11.30}$$

部分集合 S によって張られる部分空間を、$\mathcal{L}(S)$と表す。命題 7.7 と命題 11.2 より、次の命題が成立する。

〔命題 11.9〕

$$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)\cap\mathcal{B}^{(2)}(H_N) = \mathcal{L}(E^{(0)}) \tag{11.31}$$

つまり、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$と$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の両方に属する作用素は、$E^{(0)}$を定数倍したものだけである。$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$と$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の幾何学的関係を更に詳細に述べれば、次のようになる。

〔命題 11.10〕

$$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)\ominus\mathcal{L}(E^{(0)}) \perp \mathcal{B}^{(2)}(H_N) \tag{11.32}$$

$$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)\ominus\mathcal{L}(E^{(0)}) \perp \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \tag{11.33}$$

(証明) $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)\ominus\mathcal{L}(E^{(0)})$ とすれば、命題 7.7 より

$$A = \sum_{m\neq 0} A_N^{\sim}(m)\langle\varphi_m, \varphi_m\rangle \tag{11.34}$$

となる。ここで $(A_N^{\sim}(m))$は、A_Nの空間周波数特性である。従って式(3.31)より、$n=-N, -N+1, \cdots, N$ に対して

$$(A_N, \langle\varphi_n, \varphi_{-n}\rangle) = \sum_{m\neq 0} A_N^{\sim}(m)(\langle\varphi_m, \varphi_m\rangle, \langle\varphi_n, \varphi_{-n}\rangle)$$

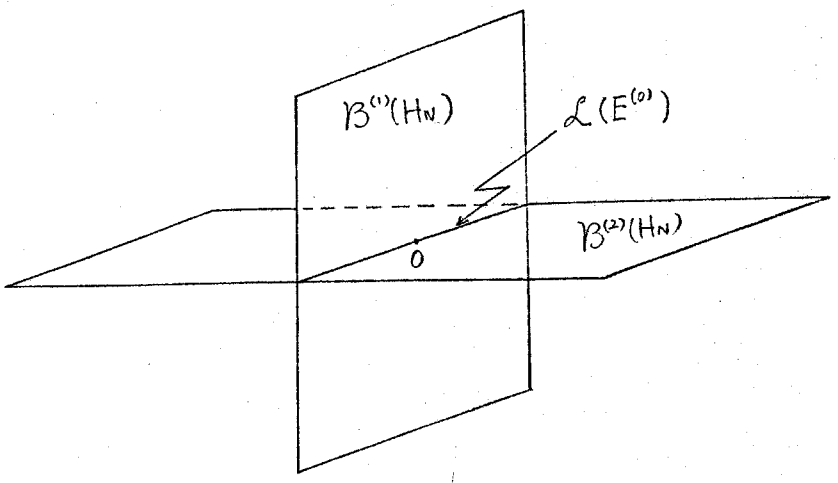


図 11.2　$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の幾何学的関係

$$= \sum_{m\neq 0} \tilde{A_N}(m)(\varphi_m, \varphi_n)(\varphi_{-n}, \varphi_m) = 0$$

となるから、命題 11.2 より式 (11.32) が成立する。式 (11.33) も同様に証明できる。 (Q.E.D)

命題 11.9, 命題 11.10 を図で表せば、図 11.2 のようになる。

なお、式 (10.52) から分るように、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の共通部分である $\mathcal{L}(E^{(0)})$ の各元は、全ての $a\in[-l, l]$ に対して、$I_N(a)$ を右或いは左から掛けるという同形写像の不動点になっている。

11.5　$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の結合特性による特徴づけ

本節或いは本章の標題の"反転作用素によって生成される作用素の空間"と、定義 11.1 で与えた作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ とは、今までのところ、$I_N(a)\in\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ 以外直接の結びつきはなかった。11.5 では、その関係を明らかにする。

命題 7.7 と命題 11.2 は、$I_N(0)$ を右から掛けるという同形写像によって、互いに結ばれていた。命題 7.24 にこの同形写像を施せば、次の命題が成立

する。

〔 命題 11.11 〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ が $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に属する為の必要十分条件は、A_N が、

$$A_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n)\, I_N(\tfrac{1}{2}a_n) \tag{11.35}$$

と表されることである。ここで

$$\hat{A_N}(n) \equiv \frac{1}{2N+1}\,(A_N,\ I_N(\tfrac{1}{2}a_n)) \tag{11.36}$$

$$= \frac{1}{2N+1}\,(A_N I_N(0),\ T_N(a_n)) \tag{11.37}$$

$$= \frac{1}{2N+1}\,(I_N(0) A_N,\ T_N(a_{-n})) \tag{11.38}$$

である。

（証 明） 十分性は明らかである。$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して式(11.36)～(11.38)が互いに等しいことは、命題10.3と命題10.4から明らかである。そこで、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ とすれば、命題11.7、命題7.24及び命題10.4より、

$$A_N = (A_N I_N(0))\, I_N(0)$$

$$= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} (A_N I_N(0),\ T_N(a_n))\, T_N(a_n)\, I_N(0)$$

$$= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} (A_N I_N(0),\ T_N(a_n))\, I_N(\tfrac{1}{2}a_n) \tag{11.39}$$

となるから、式(11.37)より式(11.35)が成立する。 (Q.E.D)

式(11.35)に式(10.11)を代入すれば

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n)\, I_N(\tfrac{1}{2}a_n) = \sum_{m,n=-N}^{N} \hat{A_N}(m+n) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle \tag{11.40}$$

となるから、次の命題が成立する。

〔 命題 11.12 〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ が $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に属する為の必要十分条件は、

A_N の結合特性 $\langle\!\langle \hat{A_N}(m,n) \rangle\!\rangle$ が

$$\hat{A_N}(m,n) = \hat{A_N}(m+n) \tag{11.41}$$

となることである。ここで、式(11.41)の右辺の $\hat{A_N}(n)$ は、式(11.36)で与えられるものである。

命題11.11はよさしく、反転作用素によって生成される作用素の空間が、定義11.1で与えた作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と一致することと表している。しかも、命題11.12と考慮すれば、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の直交系 $\{I_N(\frac{1}{2}a_n)\}_{n=-N}^{N}$ に関する展開係数の組 $(\hat{A_N}(n))$ が、

$$\hat{A_N}(n) = \hat{A_N}(n,0) = \hat{A_N}(0,n) \tag{11.42}$$

と、A_N の結合特性 $\hat{A_N} = \langle\!\langle \hat{A_N}(m,n) \rangle\!\rangle$ の第0列ベクトル及び第0行ベクトルと一致することが分る。更に、$\hat{A_N}$ は、式(11.41)から分るように、ベクトル $(\hat{A_N}(n))$ から完全に再現される。そこで、空間周波数特性の場合と同様に、ベクトル $(\hat{A_N}(n))$ をも、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の結合特性と呼び、本来の結合特性と同じ記号 $\hat{A_N}$ で表すことにする。特に混乱の恐れがある場合には、ベクトル $(\hat{A_N}(n))$ を、"$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ における結合特性" と呼ぶこともある。また、正規直交基底 $\{I_N(\frac{1}{2}a_n)/\sqrt{2N+1}\}$ を、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の自然座標系と名付ける。

$\{I_N(\frac{1}{2}a_n)\}_{n=-N}^{N}$ の結合特性と、それと空間回路網で実現する際の結線の様子は、図10.2に示したとうりである。その図からも分るように、式(11.41)は、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の結合特性 $\hat{A_N}$ が、逆巡回行列になることを、意味している。

命題11.5で、$\mathcal{B}^{(2)}(H)$ の元が全て等方作用素であることを示したが、$H=H_N$ の場合には、命題4.13と式(11.41)から、それは明らかである。また、図10.2(a)を見れば、確かに $I_N(\frac{1}{2}a_n)$ が等方な構造をしていることが分る。従って、$\{I_N(\frac{1}{2}a_n)\}_{n=-N}^{N}$ の一次結合で表される $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の構造は、等方になるのである。

式(11.36)~(11.38)より、次のことが分る。$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ にお

ITる結合特性 $\hat{A_N}$ と、$B \equiv A_N I_N(0) \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における結合特性 $\hat{B_N}$ とは、完全に一致し、$C_N \equiv I_N(0) A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における結合特性 $\hat{C_N}$ のオn要素 $\hat{C_N}(n)$ は、$\hat{A_N}$ のオ$(-n)$要素 $\hat{A_N}(-n)$ と一致する。この関係を、図11.3に示す。図11.3のオ0列ベクトルが、それぞれの空間における結合特性なのである。

図10.2と図7.1を比較してみれば分るように、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元は一様な構造をしているので、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元よりも $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元の方が、回路構成が容易である。そして、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ を

$$A_N = (A_N I_N(0)) I_N(0) \tag{11.43}$$

と分解すれば、$A_N I_N(0) \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ となり、$I_N(0)$ は、図10.2(a)の $n=0$ を見れば分るように、入出力の端子番号を唯逆にするだけであるから、$A_N I_N(0)$ を回路で構成しておいて、入力側の端子番号を逆にすれば、等価的に $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ を構成したことになるのである。しかも、$A_N I_N(0)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における結合特性は、図11.3に示したように、A_N の $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ における結合特性と全く同じであるから、$A_N I_N(0)$ の為に新たに結合特性を計算しなおす必要はなく、A_N の $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ における結合特性を、そのまま使うことができるのである。

例えば $A_N = I_N(\frac{1}{2} a_n)$ のときは

$$I_N(\tfrac{1}{2} a_n) = T_N(a_n) I_N(0) \tag{11.44}$$

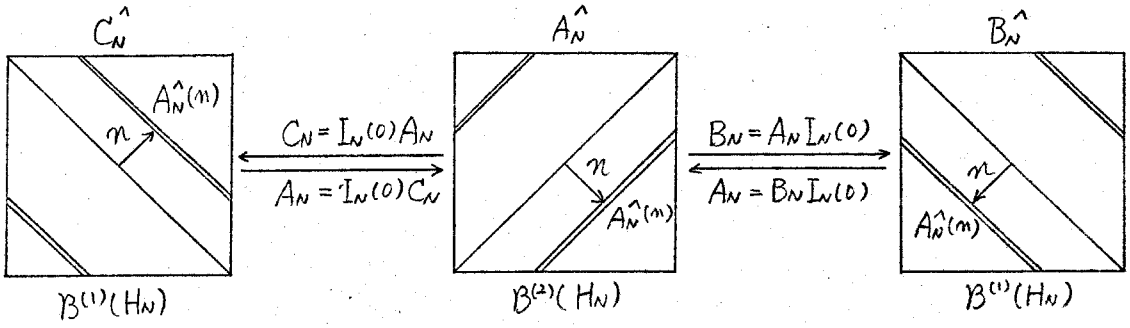


図11.3 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の結合特性とその $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ での表現

であるから、図11.4 のように構成すれば良いのである。図11.4 は、入力側の端子番号が逆になっていることを除けば、$T_N(a_1)$ の回路構成図である図 7.1(a) の $n=1$ の場合と同じである。

命題11.9 或いは 図11.2 に示したように、$E^{(0)}$ は $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の両空間に属している。これは又、式(9.74), (11.44), (10.52) から得られる関係式

$$\sqrt{2N+1}\,E^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} T_N(a_n) \tag{11.45}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} I_N\left(\frac{1}{2}a_n\right) \tag{11.46}$$

からも、明らかである。式(11.45) 及び (11.46) は、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の自然座標系及び $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の自然座標系の総和が、共に $\sqrt{2N+1}\,E^{(0)}$ になることを意味している。また、式(7.17), (10.46) で $n=0$ とおけば

$$(T_N(a),\ E^{(0)}) = (I_N(a),\ E^{(0)}) = 1 \tag{11.47}$$

となる。これは、自然座標系の各構成元 $T_N(a_n)/\sqrt{2N+1}$ 及び $I_N(\frac{1}{2}a_n)/\sqrt{2N+1}$ $(n=-N, -N+1, \cdots, N)$ の空間 $\mathcal{L}(E^{(0)})$ に属する成分が、n に関係なく $E^{(0)}/\sqrt{2N+1}$ であり、$E^{(0)}$ と各構成元とのなす角度の余弦も、n に関係なく、$1/\sqrt{2N+1}$ となることを、意味している。

以上の関係を模式的に示したものが、図11.5 である。この図を見れば、式(10.48) で与えられる $I_N(a)$ と $T_N(b)$ の関係も、直観的に理解できるであろう。

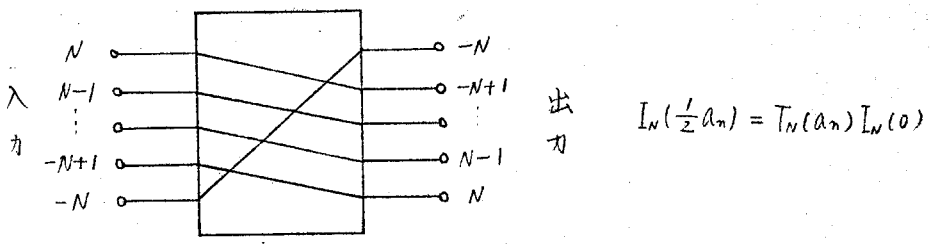


図11.4 $I_N(\frac{1}{2}a_n) \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ での構成法 ($n=1$ の場合)

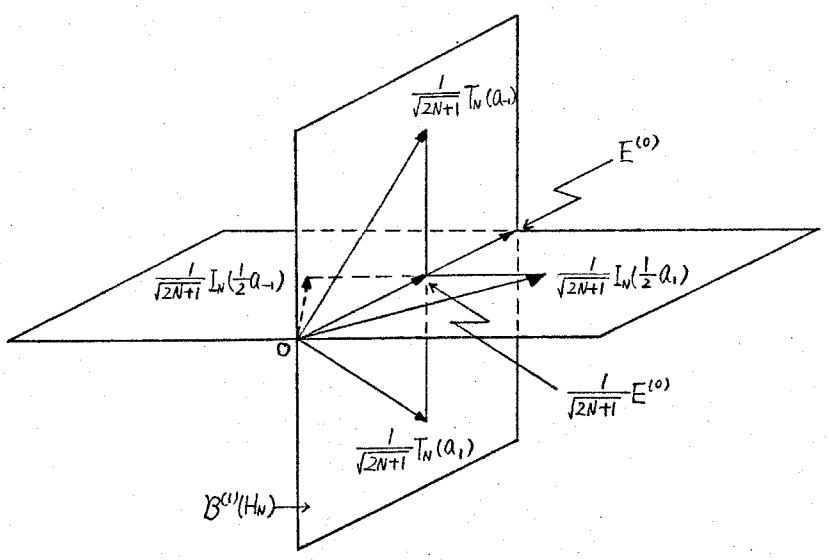


図 11.5　自然座標系 $\{T_N(a_n)/\sqrt{2N+1}\}$ と $\{I_N(\frac{1}{2}a_n)/\sqrt{2N+1}\}$ の関係

図 11.1 と図 11.3 より、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ における空間周波数特性と結合特性の間に、命題 7.26 と同じ関係が成立することは、明らかである。また、式(7.61), (7.62) の右から $I_N(0)$ を掛ければ、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の基本座標系 $\{E^{(n)} I_N(0)\}_{n=-N}^{N}$ と自然座標系 $\{I_N(\frac{1}{2}a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$ の間に

$$E^{(n)} I_N(0) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} \varphi_n(a_m) \frac{1}{\sqrt{2N+1}} I_N(\frac{1}{2} a_m) \qquad (11.48)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}} I_N(\frac{1}{2}a_n) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} \overline{\varphi_m(a_n)}\, E^{(m)} I_N(0) \qquad (11.49)$$

なる関係が成立する。

式(4.37), (11.42) より、次の系が成立する。

〔系 11.6〕　$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して $B_N \equiv \overline{A}_N = A_N^*$ とおく。A_N, B_N の結合特性に関して、次の関係が成立する。

$$\hat{B}_N(n) = \overline{\hat{A}_N(n)} \qquad (11.50)$$

11.6 インパルス応答による $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と H_N の同形対応

空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ が、インパルス応答によって、H_N と位相まで含めて同形に対応づけられることは、7.4 で論じたとうりである。$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対しても、7.4 と同様の議論ができることを示す。

$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に、そのインパルス応答と対応づける作用素を、ρ_2 で表す:

$$\rho_2(A_N) \equiv \sqrt{2N+1}\, A_N \varphi_0 \quad : A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N) \tag{11.51}$$

ここで、ρ_2 の添字 2 は、ρ_2 の定義域が $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ であることを表している。インパルス応答は、$\mathcal{B}(H_N)$ の全ての元に対して定義できる。"にもかかわらず"、$\mathcal{B}(H_N)$ の部分空間によって、ρ_1, ρ_2 と異なった記号を用いるのは、7.4 でも述べたように、その逆作用素 ρ_1^{-1}, ρ_2^{-1} を考えたいからである。

インパルスは偶関数であるから、次の補題が成立する.

〔 補題 11.1 〕

$$\rho_2(A_N I_N(0)) = \rho_1(A_N) \quad : A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \tag{11.52}$$

$$\rho_1(A_N I_N(0)) = \rho_2(A_N) \quad ; A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N) \tag{11.53}$$

補題 11.1 は、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の間の、$I_N(0)$ を右から掛けるという同形写像によって互いに結ばれている二つの作用素 A_N と $A_N I_N(0)$ が、同じインパルス応答をもつことを意味している。

式(11.53)と式(7.51)～(7.53)より、例えば"

$$\rho_2(I_N(a))(x) = \sqrt{2N+1}\, \varphi_0(x-2a) \tag{11.54}$$

$$\rho_2(I_N(\tfrac{1}{2}a_n))(x) = \sqrt{2N+1}\, \varphi_n(x) \tag{11.55}$$

$$\rho_2(\langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle)(x) = \rho_2(E^{(n)} I_N(0))(x) = \varphi_n(x) \tag{11.56}$$

となる。

命題7.12，系7.5 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 11.13〕 ρ_2 は、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ から H_N の上への一対一線形作用素であって、内積を保存する。即ち、$A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して

$$(\rho_2(A_N), \rho_2(B_N)) = (A_N, B_N) \tag{11.57}$$

が成立する。

命題11.13 は、ρ_2 によって $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ が H_N に位相まで含めて同形に結びつけられていることを、示している。この命題より、ρ_2 の逆 ρ_2^{-1} の存在が保証される。従って、補題11.1より、次の命題が成立する。

〔命題 11.14〕 任意の $f \in H_N$ に対して、次の関係が成立する。

$$\rho_2^{-1}(f) = \rho_1^{-1}(f) I_N(0) \tag{11.58}$$

$$\rho_1^{-1}(f) = \rho_2^{-1}(f) I_N(0) \tag{11.59}$$

命題11.7 で、$\mathcal{B}(H_N)$ の元に右(左)から $I_N(a)$ を掛けるという変換が、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の間の同形対応を与えることを示した。そして、特に $I_N(0)$ を右から掛けるという変換が、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ 及び $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ における空間周波数特性及び結合特性を保存するという意味で、最も自然な同形対応になっていることを見てきた(図11.1，図11.3)。命題11.14は、インパルス応答による H_N との同形対応という立場から見ても、図11.6 に示すように、$I_N(0)$ を右から掛けるという変換が、自然な同形対応になっていることを、意味している。

命題11.13 より、系7.6 に対応する次の系が成立する。

〔系 11.7〕 H_N の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ に対して

$$U_N^{(n)} \equiv \rho_2^{-1}(u_n) \tag{11.60}$$

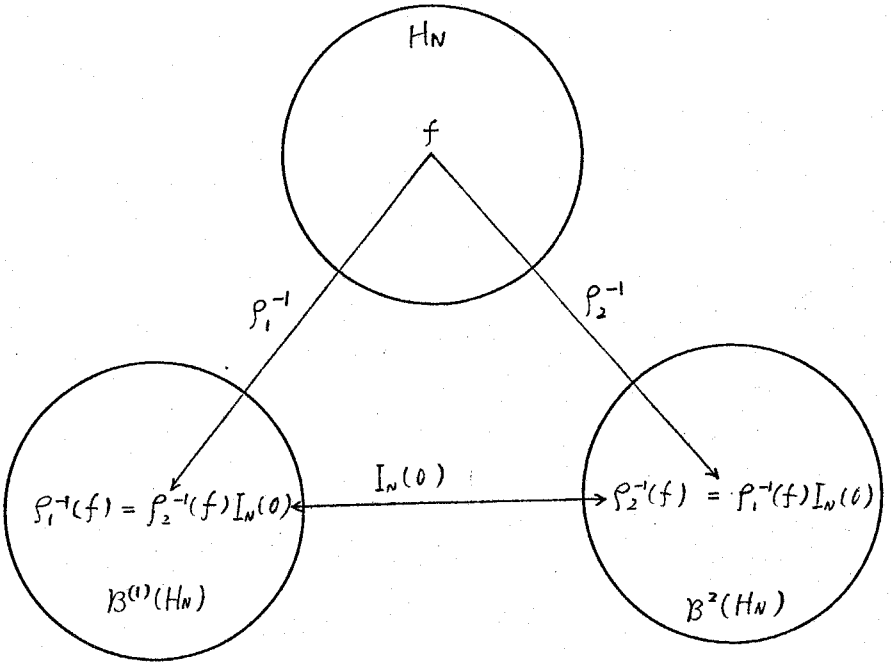


図 11.6　$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$, $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ 及び H_N の間の同形対応

とおけば、$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ は $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の正規直交基底になり、逆も成立する。更に、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の $U_N^{(n)}$ に対する座標成分は、そのインパルス応答

$$a_N(x) \equiv \rho_2(A_N)(x) \tag{11.61}$$

の、u_n に対する座標成分と一致する:

$$(A_N, U_N^{(n)}) = (a_N, u_n) \tag{11.62}$$

$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ が、例えば $I_N(a)$ のように、一つのパラメータを含んでいるとき、それを $A_N(a)$ で表し、そのインパルス応答を $a_N(x, a)$ と表すことにする。$A_N(a)$ の $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ での軌跡と、$a_N(x, a)$ の H_N での軌跡が、完全に一致することを系 11.7 は示している。

式 (11.48), (11.49) の両辺に ρ_2 を作用すれば、式 (11.55), (11.56) より、それぞれ式 (3.89), (3.90) になる。つまり、空間 H_N における関係式 (3.89), (3.90) を、ρ_1^{-1} によって $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ で表現しなおしたものが、式 (7.61), (7.62)

であり、それを、$I_N(0)$ によって $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ で表現しなおしたものが、式(11.48), (11.49) であり、それを、ρ_2 によって再び H_N で表現しなおせば、元の関係式 (3.89), (3.90) になるのである。

式(7.63), (7.64) で定義した拡張されたdyadを使えば、命題 7.14 の場合と同様にして、ρ_2, ρ_2^{-1} を、次のように表すことができる。

〔命題 11.15〕 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ および H_N の対応する正規直交基底を、$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$, $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ とすれば、ρ_2, ρ_2^{-1} は、

$$\rho_2 = \sum_{n=-N}^{N} \langle u_n, U_N^{(n)} \rangle \tag{11.63}$$

$$\rho_2^{-1} = \sum_{n=-N}^{N} \langle U_N^{(n)}, u_n \rangle \tag{11.64}$$

とdyadic 表現される。しかも、この表現形式は、座標系のとり方に依存しない。

11.7 作用素 ρ_2 の性質

11.6で導入した作用素 ρ_2 の性質、およびそれから導かれるいくつかの命題にについて論じる。まず、命題 7.15 と同様にして、次の命題を得る。

〔命題 11.16〕 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を H_N の正規直交基底とし、$U_N^{(n)} \equiv \rho_2^{-1}(u_n)$ とする。$\mathcal{B}(H_N)$ の元

$$A_N \equiv \sum_{m,n=-N}^{N} a_{m,n} \langle u_m, u_n \rangle \tag{11.65}$$

に対して、

$$\mathfrak{A}_N \equiv \sum_{m,n=-N}^{N} a_{m,n} \langle U_N^{(m)}, U_N^{(n)} \rangle \tag{11.66}$$

とおけば、任意の $f \in H_N$ に対して、次式が成立する。

$$\rho_2^{-1}(A_N f) = \mathcal{U}_N \rho_2^{-1}(f) \tag{11.67}$$

命題11.16は、fから$A_N f$を求めるH_Nの上の作用素A_Nと、$\rho_2^{-1}(f)$から$\rho_2^{-1}(A_N f)$を求める$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の上の作用素$\mathcal{U}_N$が、式(11.65),(11.66)のように、同じ形のdyadic表現をもつことを意味している。即ち、対応する座標系$\{u_m\}_{m=-N}^{N}$, $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$を使えば、その展開係数が同じ$a_{m,n}$になるのである。

命題7.16と同様にして、次の命題を得る。

〔命題11.17〕次の同値関係が成立する。

(i) $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \iff \rho_2^{-1}(A_N f) = A_N \rho_2^{-1}(f)$ (11.68)

(ii) $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N) \iff \rho_2^{-1}(A_N f) = A_N \rho_1^{-1}(f)$ (11.69)

(iii) $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N) \iff \rho_1^{-1}(A_N f) = A_N \rho_2^{-1}(f)$ (11.70)

式(11.68)は、$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$のとき、またそのときに限って、命題11.16で定義した$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の上の作用素$\mathcal{U}_N$が、"A_Nを掛ける"という作用素に等しくなることを、意味している。命題11.17と命題7.16をまとめれば、表11.1のようになる。

命題7.18に対応して、次の命題が成立する。

表11.1 H_Nからの同形対応ρ_m^{-1} $(m=1,2)$

A_N \ $\rho_m^{-1}(Af)$	$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$	$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$
$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$	(i) $\rho_1^{-1}(A_N f) = A_N \rho_1^{-1}(f)$	(ii) $\rho_2^{-1}(A_N f) = A_N \rho_2^{-1}(f)$
$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$	(iii) $\rho_1^{-1}(A_N f) = A_N \rho_2^{-1}(f)$	(iv) $\rho_2^{-1}(A_N f) = A_N \rho_1^{-1}(f)$

〔命題 11.18〕 任意の $f \in H_N$ に対して、$A_N \equiv \rho_2^{-1}(f)$ とおけば、

$$f(x) = (A_N,\ I_N(\tfrac{1}{2}x)) \tag{11.71}$$

$$= (A_N I_N(0),\ T_N(x)) \tag{11.72}$$

$$= (I_N(0) A_N,\ T_N(x)^*) \tag{11.73}$$

となる。

（証 明） 補題 11.1 と命題 7.18 より、式(11.72)が成立する。従って、命題 10.4 より、式(11.71), (11.73) も成立する。 (Q.E.D)

H_N の元 f を $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ で表現する為には、f と ρ_2^{-1} で変換すれば良い。しかし、点 x における f の値 $f(x)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ で表現する為には、もはや ρ_2^{-1} を使うことはできない。そのような場合に、式(11.71)が偉力を発揮するのである。

式(11.71)の右辺に Schwarz の不等式を適用すれば、式(10.38)より系 7.8 に対応して、次の系を得る。

〔系 11.8〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ のインパルス応答に対して

$$|\rho_2(A_N)(x)| \leqq \sqrt{2N+1}\, \|A_N\|_2 \tag{11.74}$$

なる評価式が成立する。ここで等号は、A_N が $I_N(\frac{1}{2}x)$ に比例するとき、またそのときに限って、成立する。

命題 11.18 と命題 11.11 より、式(7.102)に対応して、次の関係が成立する。

〔命題 11.19〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の結合特性 $(\hat{A_N}(n))$ は、A_N のインパルス応答を用いて

$$\hat{A_N}(n) = \frac{1}{2N+1} \rho_2(A_N)(a_n) \tag{11.75}$$

と表される。

例えば、$I_N(a)$ の結合特性を $(\hat{I}_N(n,a))$ とすれば、式(11.54), (11.75)より

$$\hat{I}_N(n;a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\varphi_n(2a) \tag{11.76}$$

となる。これは、命題10.13で求めておいたものと、確かに一致している。命題10.13の証明と比較すれば、結合特性を求める為の公式(11.75)が、いかに優れているかが分かるであろう。

〔系11.9〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ のインパルス応答 $\rho_2(A_N)$ は、

$$\rho_2(A_N)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \tilde{A}_N(n)\varphi_n(x) \tag{11.77}$$

$$= \sqrt{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} \hat{A}_N(n)\varphi_n(x) \tag{11.78}$$

と表される。

(証明) 式(11.4)及び(11.35)の両辺の ρ_2 をとり、式(11.55), (11.56)を使えば、式(11.77), (11.78)を得る。 (Q.E.D)

例えば、式(11.76)を(11.78)に代入すれば

$$\sum_{n=-N}^{N}\varphi_n(2a)\varphi_n(x) = \sqrt{2N+1}\,\varphi_0(2a-x) \tag{11.79}$$

となり、確かに $\rho_2(I_N(a))$ になっている。

命題7.19に対応して、次の命題が成立する。

〔命題11.20〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して、次の関係が成立する。

$$\rho_2(A_N^*) = \rho_2(\bar{A}_N) = \overline{\rho_2(A_N)} \tag{11.80}$$

(証明) オ一式は、命題11.5から明らかである。オ二式も式(11.51)から明らかである。 (Q.E.D)

11.8 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の実作用素

命題11.5で示したように、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元は全て、等方作用素である。しかし、それは必ずしも実作用素ではないから、その結合係数が複素数になることもあり、また、入力が実数値関数であっても、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元で処理した結果が複素数値関数になることもある。そこで11.8では、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ が実作用素になる為の必要十分条件を求めることにする。

〔命題11.21〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して、次の各条件は、互いに同値である。

(i) $\overline{A_N} = \pm A_N$ (11.81)

(ii) $A_N^* = \pm A_N$ (11.82)

(iii) $\overline{A_N I_N(a)} = \pm A_N I_N(a)$ (11.83)

(iv) $\overline{I_N(a) A_N} = \pm I_N(a) A_N$ (11.84)

(v) $\overline{\rho_2(A_N)} = \pm \rho_2(A_N)$ (11.85)

(vi) $\overline{\hat{A_N}(n)} = \pm \hat{A_N}(n)$ for all n (11.86)

(vii) $\overline{\tilde{A_N}(n)} = \pm \tilde{A_N}(-n)$ for all n (11.87)

(証明) 命題4.11, 命題11.5, 及び式(11.5), (11.42)から明らかである。 (Q.E.D.)

命題11.7で与えた $I_N(a)$ を右(左)から掛けるという $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の間の同形対応が、作用素の実性及び虚性を保なしていることが、命題11.21から分かる。

第12節　反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ (II)

前節に引続き、反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ について論じる。

12.1　$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の積分表現による特徴づけ

命題10.2で、$I_N(a)$ の積分核が x と y との和 $x+y$ の関数になることを示した。実は、これは $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に固有の性質であって、次の命題が成立する。

〔命題12.1〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ が $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に属する為の必要十分条件は、H_N の元 $a_N(x)$ を使って A_N が

$$(A_N f)(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} a_N(x+y) f(y)\, dy \qquad (12.1)$$

と積分表現されることである。そしてこのとき

$$a_N(x) = \rho_2(A_N)(x) \qquad (12.2)$$

となる。

（証明）　$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ のとき、A_N のインパルス応答 $a_N(x)$ を使って、A_N が式(12.1)のように積分表現できることは、式(3.123)より明らかである。逆に式(12.1)が成立したとすれば、再び式(3.123)より

$$a_N(x+y) = \sqrt{2N+1}\,(A_N T_N(y)\psi_0)(x) \qquad (12.3)$$

となる。従って、任意の $a \in [-\ell, \ell]$ とれに対して

$$(A_N T_N(a)\psi_n)(x) = (A_N T_N(a)\, T_N(a_n)\psi_0)(x)$$

$$= (A_N T_N(a+a_n)\psi_0)(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} a_N((x+a)+a_n)$$

$$= (A_N T_N(a_n)\psi_0)(x+a)$$

$$= (T_N(a)^* A_N \psi_n)(x)$$

$$\therefore A_N T_N(a)\psi_n = T_N(a)^* A_N \psi_n \quad \text{for all } n \qquad (12.4)$$

となり、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ となる。また、式(12.3)で $g=0$ とおけば、式(12.2)が成立する。 (Q.E.D)

命題12.1は、$A_N f$ が入力信号 f と A_N のインパルス応答 a_N との相互相関関数 $f \otimes a_N$ になることを、示している。この問題については、項を改めて論じることにする。

式(12.3)に命題3.9を適用すれば、式(11.41)を得る。

12.2 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と相関

12.1で、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ のインパルス応答を $f = \rho_2(A_N)$ とするとき、$g \in H_N$ に A_N を作用させることと、g と f の相互相関関数 $g \otimes f$ を求めることが、同じことであることを示した:

$$(A_N g)(x) = (g \otimes f)(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x+y)g(y)dy \qquad (12.5)$$

そこで12.2では、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と相関関数との関係について、より詳細に論じることにする。まず、$A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ とするとき

$$\rho_1(A_N B_N) = A_N \rho_2(B_N) \qquad (12.6)$$

であるから、次の命題が成立する。

〔命題12.2〕 $A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の積のインパルス応答は、各々のイン

パルス応答の相互相関関数になっている:

$$\rho_1(A_N B_N) = \rho_2(B_N) \otimes \rho_2(A_N) \tag{12.7}$$

命題12.2と命題7.22とをまとめれば、表12.1のようになる。

〔命題12.3〕 $A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の積と $X_N \equiv A_N B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ とすれば、

$$\hat{X}_N(n) = \sum_{m=-N}^{N} \hat{A}_N(m+n)\,\hat{B}_N(m) \tag{12.8}$$

$$\tilde{X}_N(n) = \tilde{A}_N(n)\,\tilde{B}_N(-n) \tag{12.9}$$

となる。特に B_N が実作用素ならば

$$\tilde{X}_N(n) = \tilde{A}_N(n)\,\overline{\tilde{B}_N(n)} \tag{12.10}$$

となる。

（証明） 式(11.35), (10.29) より

$$\begin{aligned} X_N &= \Big(\sum_{n=-N}^{N} \hat{A}_N(n)\, I_N\big(\tfrac{1}{2}a_n\big)\Big)\Big(\sum_{m=-N}^{N} \hat{B}_N(m)\, I_N\big(\tfrac{1}{2}a_m\big)\Big) \\ &= \sum_{m,n=-N}^{N} \hat{A}_N(n)\,\hat{B}_N(m)\, T_N(a_{n-m}) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \Big(\sum_{m=-N}^{N} \hat{A}_N(m+n)\,\hat{B}_N(m)\Big) T_N(a_n) \end{aligned} \tag{12.11}$$

となるから、命題7.24より、式(12.8)が成立する。式(12.9)は式(11.11)より、式(12.10)は命題11.21より明らかである。 (Q.E.D)

表12.1 作用素の積に対するインパルス応答

A_N \ B_N	$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$	$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$
$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$	$\rho_1(A_N B_N) = \rho_1(B_N) * \rho_1(A_N)$	$\rho_2(A_N B_N) = \rho_2(B_N) * \rho_1(A_N)$
$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$	$\rho_2(A_N B_N) = \rho_1(B_N) \otimes \rho_2(A_N)$	$\rho_1(A_N B_N) = \rho_2(B_N) \otimes \rho_2(A_N)$

式(12.8)は、$A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の積の結合特性ベクトルが、インパルス応答の場合と同様に、各々の結合特性ベクトルの相互相関になっていることを、意味している。

相関関数の理論では、次のことが良く知られている。$f, g \in H_N$ の相互相関関数を $h \equiv g \otimes f$ とする。各関数の Fourier 係数の間に、

$$(h, \varphi_n) = (f, \varphi_n)(g, \varphi_{-n}) \tag{12.12}$$

$$= (f, \varphi_n)\cdot\overline{(g, \varphi_n)} \quad \text{if } \bar{g} = g \tag{12.13}$$

なる関係が成立している。(1) $A_N \equiv \beta_2^{-1}(f)$, $B_N \equiv \beta_2^{-1}(g)$ とおき、命題12.2と考慮すれば、式(12.9), (12.10)が、それぞれ式(12.12), (12.13)を、作用素の言葉で表現しなおしたものに他ならないことが分かる。

$A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ とすれば、積 $A_N B_N$ 及び $B_N A_N$ は共に $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元になっている。丁度、相関関数の順序の交換に対して、

$$(g \otimes f)(x) = (f \otimes g)(-x) \tag{12.14}$$

という関係が成立しているように、$B_N A_N$ と $A_N B_N$ の間にも、密接な関係があるはずである。次にそれを示す。

〔命題12.4〕 $A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と、任意に固定した $a \in [-l, l]$ に対して、次式が成立する。

$$B_N A_N = (A_N B_N)^{\overline{*}} = I_N(a) A_N B_N I_N(a) \tag{12.15}$$

(証明) 命題11.5より $(A_N B_N)^{\overline{*}} = B_N^{\overline{*}} A_N^{\overline{*}} = B_N A_N$ となり、オ一式を得る。$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元に対して、$* = \overset{\star}{a}$ であるから、オ二式も成立する。(Q.E.D)

従って、次の系が成立する。

〔系 12.1〕 $A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して、

$$X_N \equiv A_N B_N , \quad Y_N \equiv B_N A_N \tag{12.16}$$

とおけば 次の関係が成立する。

$$\rho_1(Y_N) = I_N(0)\,\rho_1(X_N) \tag{12.17}$$

$$\hat{Y_N}(n) = \hat{X_N}(-n) \tag{12.18}$$

$$\tilde{Y_N}(n) = \tilde{X_N}(-n) \tag{12.19}$$

表 12.1 を考慮すれば、式(12.17)が式(12.14)と同じものであることが分る。これらの関係式は、次のようにも表現できる。

〔系 12.2〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$, $g \in H_N$ に対して、$f \equiv \rho_2(A_N)$, $B_N \equiv \rho_2^{-1}(g)$ とおけば、次式が成立する。

$$A_N g = I_N(0)\, B_N f \tag{12.20}$$

系 12.2 は、相関関数の理論でいえば、上述のように 式(12.14)に対応するものであるが、これはまた、命題 7.17 に対応した命題にもなっている。つまり、式(12.20)は、次のことを意味している。$g \in H_N$ に $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ なる処理を施すことは、A_N のインパルス応答 f に、g をインパルス応答とする $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元 B_N による処理を施し、その結果得られる関数 $(B_N f)(x)$ を、原点に関して反転することに等しいのである。

$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ のインパルス応答を $a_N \equiv \rho_2(A_N)$ とするとき、式(11.35), (11.75)より、任意の $f \in H_N$ に対して、

$$(A_N f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n) f(a_n - x) \tag{12.21}$$

$$= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} a_N(a_n) f(a_n - x) \tag{12.22}$$

が成立することが分る。しかし、式(12.21),(12.22)で f の中にxが入っているのは、望ましくない。できれば、fの標本点における値 $\{f(a_n)\}_{n=-N}^{N}$ だけから、任意の $x\in[-\ell,\ell]$ に対する $(A_N f)(x)$ の値を知りたい。系12.2を使えばそれができるのである。

〔命題12.5〕 $A_N\in B^{(2)}(H_N)$ に対して、$a_N\equiv\rho_2(A_N)$ とおけば、任意の $f\in H_N$ に対して、次式が成立する。

$$(A_N f)(x)=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\,a_N(x+a_n) \tag{12.23}$$

(証明) 式(12.20),(11.35),(11.75),(10.29)より

$$\begin{aligned}(A_N f)(x)&=(I_N(0)\,\rho_2^{-1}(f)\,a_N)(x)\\&=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\,I_N(0)\,I_N\left(\tfrac{1}{2}a_n\right)a_N(x)\\&=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\,T_N(a_n)^*\,a_N(x)\\&=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\,a_N(x+a_n)\end{aligned}\qquad \text{(Q.E.D)}$$

式(12.22)と(12.23)では、fと a_N の働きが逆になっている。そういう意味で、式(12.23)の証明に、式(12.20)を使った。しかし、式(12.1)を使えば次のように証明することもできる。

まず式(12.1)は、

$$(A_N f)(x)=\left(f(y),\ \overline{a_N(x+y)}\right)_y \tag{12.24}$$

と表すことができる。式(12.24)に命題2.6を適用すれば、それが式(12.23)になるのである。即ち、式(12.23)は、式(12.24)の右辺の内積の還点表現に他ならないのである。

式(12.22),(12.23)は、$A_N\in B^{(2)}(H_N)$ のインパルス応答を知ることによっ

て、H_N に属する全ての信号 f に対する応答を知ることができる、ということを意味している。なお、この性質は、命題 7.25 に示したように、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元に対しても成立している。ただし、式(7.106)と(12.23)では、a_N の中に、$x-a_n$ と $x+a_n$ という違いがあり、式(7.108)と(12.22)では、f の中に、$x-a_n$ と a_n-x という違いがあることは、注意を要する点である。

12.3 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と自己相関

12.2ではもっぱら、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と相互相関関数との関係について論じたが、12.3では、その特殊な場合である自己相関関数との関係について、論じることにする。

命題 12.4 で、$B_N = A_N$ とおけば、次の系が成立する。

[系 12.3] $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ ならば、$A_N^2 \in \mathcal{B}_1^{(1)}(H_N)$ である。

系 10.8 を考慮すれば、系 12.3 より 次のことが分る。$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ ならば、任意の $a \in [-l, l]$ に対して、A_N^2 は a-偶関数を a-偶関数に変換し、a-奇関数を a-奇関数に変換する。

系 12.3 と命題 7.35 より、次の系が成立する。

[系 12.4] $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ のインパルス応答を $f \equiv p_2(A_N)$ とすれば、$A_N f$ は偶関数になる：

$$(A_N f)(-x) = (A_N f)(x) \tag{12.25}$$

式(12.5)より、式(12.25)は、自己相関関数が

$$(f \circledast f)(-x) = (f \circledast f)(x) \tag{12.26}$$

と、偶関数になることに対応した関係式であることが分る。つまり、系 12.3,

系12.4は、良く知られている関係式(12.26)の異なる表現になっているのである。

また、$f \in H_N$ の自己相関関数は、f の並進に対して不変である。即ち、任意の $a \in [-l, l]$ に対して

$$(T_N(a) f) \otimes (T_N(a) f) = f \otimes f \tag{12.27}$$

が成立するという事実が知られている。これを $B^{(2)}(H_N)$ の言葉で表現すれば、次のようになる。

〔系12.5〕 $A \in B^{(2)}(H_N)$ とすれば、任意の $a \in [-l, l]$ に対して

$$(T_N(a) A_N)^2 = (A_N T_N(a))^2 = A_N^2 \tag{12.28}$$

が成立する。

系12.5が成立することは、式(11.2)から明らかである。式(12.28)の両辺の ρ_2 をとり、$f \equiv \rho_2(A_N)$ とおけば

$$(T_N(a) A_N)(T_N(a) f) = A_N f \tag{12.29}$$

となる。式(12.5)を考慮すれば、式(12.29)が式(12.27)と同じものであることが分る。即ち、式(12.27)～(12.29)は、同じ事柄の別の表現になっているのである。そして、式(12.27)を式(12.28)のように、作用素で表現すれば、それは、$B^{(2)}(H_N)$ の定義式(11.2)から、いわば、自明の事柄となるのである。なお、ある作用素が相関関数を不変に保つ為の条件については、20.4で詳しく論じる。

〔命題12.6〕 $A_N \in B^{(2)}(H_N)$, $g \in H_N$ に対して、$f \equiv \rho_2(A_N)$, $B_N \equiv \rho_2^{-1}(g)$ とおけば

$$(A_N g)(0) = tr(A_N B_N) = (A_N, \bar{B}_N) = (f, \bar{g}) \tag{12.30}$$

となる。更に、$\overline{A_N} = A_N$ ならば、次式が成立する。

$$(A_N f)(0) = \|A_N\|_2^2 = \|f\|^2 \tag{12.31}$$

（証　明）

$$(A_N g)(0) = \rho_1(A_N B_N)(0) \tag{12.32}$$

であるから、系7、9 より式(12.30)が成立する。式(12.31)は式(12.30)から明らかである。(Q.E.D)

式(12.31)は、実数値関数 $f \in H_N$ に対する関係式

$$(f \otimes f)(0) = \|f\|^2 \tag{12.33}$$

の、異なる表現形式であり、式(12.30)はその一般化である。

実関数 $f, g \in H_N$ に対して

$$|(g \otimes f)(x)| \leqq \sqrt{(f \otimes f)(0) \cdot (g \otimes g)(0)} = \|f\| \cdot \|g\| \tag{12.34}$$

なる不等式が成立している。この不等式に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 12.7〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ のインパルス応答を $f \equiv \rho_2(A_N)$ とし、$g \in H_N$ とすれば、任意の $x \in [-l, l]$ に対して

$$|(A_N g)(x)| \leqq \|A_N\|_2 \cdot \|g\| = \|f\| \cdot \|g\| \tag{12.35}$$

なる不等式が成立する。

（証　明）　式(12.1)と Schwarz の不等式より

$$|(A_N g)(x)| = |(T_N(x)^* f, \overline{g})| \leqq \|T_N(x)^* f\| \cdot \|\overline{g}\| = \|f\| \cdot \|g\|$$

となり、式(12.35)が成立する。(Q.E.D)

命題 12.7 で $g = \sqrt{2N+1}\,\varphi_0$ とおいたものが、系11.8 である。

12.4 相関とたたみこみ

相関とたたみこみの間には、密接な関係があることが知られている。また、既に見てきたように、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の元による処理は、そのインパルス応答と入力信号との相関をとることであり、一方、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$の元による処理は、そのインパルス応答と入力信号とのたたみこみをとることである（図12.1）。このように、相関とたたみこみの関係が、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$と$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$の関係に対応しているので、それを作用素の立場から論じることにする。

〔命題12.8〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$, $B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$に対して

$$\begin{cases} A_N B_N = B_N^{\overline{*}} A_N & (12.36) \\ B_N A_N = A_N B_N^{\overline{*}} & (12.37) \end{cases}$$

なる交換関係が成立する。

（証明） 式(10.80)より、任意の$a \in [-l, l]$に対して

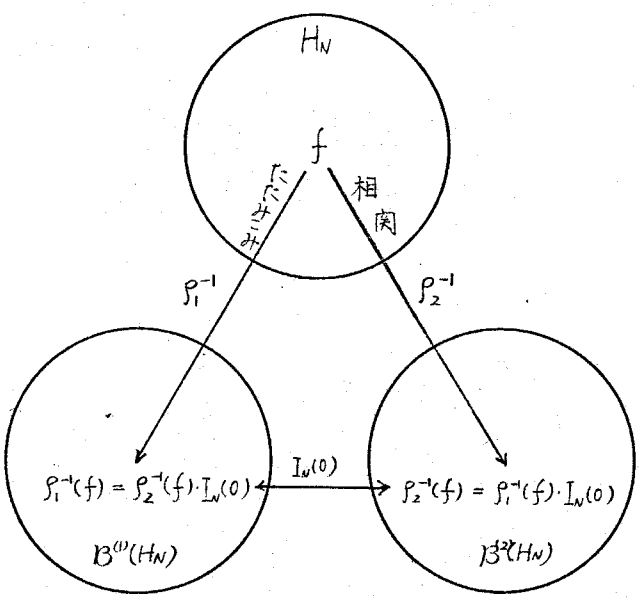


図12.1 相関とたたみこみ

$$(A_N B_N, I_N(a)) = (A_N, I_N(a) B_N^*) = (A_N, \bar{B}_N I_N(a))$$

$$= (B_N^* A_N, I_N(a)) = (\bar{B}_N^* A_N, I_N(a))$$

$$\therefore (A_N B_N - \bar{B}_N^* A_N, I_N(a)) = 0 \quad \text{for all } a \tag{12.38}$$

となり、式(12.36)が成立する。式(12.37)は式(12.36)から明らかである。
(Q.E.D)

式(12.36)で $B_N = T_N(a)$ とおけば、式(11.2)になり、$B_N = E^{(n)}$ とおけば、式(11.9)になる。このように、式(11.2)と(11.9)の交換関係の見掛上の違いは、$\overline{T_N(a)} = T_N(a)$ および $E^{(n)*} = E^{(n)}$ によるものであり、その本質は、命題12.8に示すとうりである。

〔系12.6〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して、次の交換関係が成立する。

$$\begin{cases} A_N B_N = B_N A_N \ : B_N \in \mathcal{B}_s^{(1)}(H_N) & (12.39) \\ A_N B_N = -B_N A_N \ : B_N \in \mathcal{B}_{ai}^{(1)}(H_N) & (12.40) \end{cases}$$

式(12.36), (12.37)の両辺の P_2 をとれば、次の命題が成立する。

〔命題12.9〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$, $B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して、$f \equiv P_2(A_N)$, $g \equiv P_1(H_N)$ とおけば、次式が成立する。

$$\begin{cases} A_N g = \bar{B}_N^* f & (12.41) \\ B_N f = A_N I_N(0) g & (12.42) \end{cases}$$

命題7.19を考慮すれば、式(12.41), (12.42)が、それぞれ相関とたたみこみの間に成り立つ関係式、

$$\begin{cases} g \otimes f = f * (I_N(0) g) & (12.43) \\ f * g = (I_N(0) g) \otimes f & (12.44) \end{cases}$$

に対応するものであることが分る。即ち、式(12·36),(12·41)は式(12·43)と式(12·37),(12·42)は式(12·44)と同じ事柄を、異なる形で表現したものである。

このように、相関とたたみこみの間の関係を、H_Nにおける表現(これが従来の表現である[1])、H_Nと$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$($n=1,2$)にまたがる表現、及び$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$における表現と、三種類の形で表現することができるのである。そして、これらの関係を導く場合、今までの議論の仕方から分るように、第三の表現形式が最も扱い易いのである。これまでに論じてきた相関とたたみこみにおける交換関係に、例えば式(12·39)に対応する他の二種類の表現等を補足して、表12·2にまとめて示す。

表12·2　相関とたたみこみにおける交換関係*

A_N \ $B_N=\rho_n^{-1}(g)$	$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$	$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$
$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$	$g*f=f*g$ (7·96) $A_N g=B_N f$ (7·74) $A_N B_N=B_N A_N$ (命題7·9)	$g*f=(I_N(0)f)\otimes g$ (12·44) $A_N g=B_N I_N(0)f$ (12·42) $A_N B_N=B_N A_N^{\mp}$ (12·37)
		もし $A_N^{\mp}=\pm A_N$ ならば $g*f=\pm(f\otimes g)$ $A_N g=\pm B_N f$ $A_N B_N=\pm B_N A_N$ (12·39)(12·40)
$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$	$g\otimes f=f*(I_N(0)g)$ (12·43) $A_N g=B_N^{\mp} f$ (12·41) $A_N B_N=B_N^{\mp} A_N$ (12·36)	$g\otimes f=I_N(0)(f\otimes g)$ (12·14) $A_N g=I_N(0)B_N f$ (12·20) $A_N B_N=(B_N A_N)^{\mp}$ (12·15) $=I_N(a)B_N A_N I_N(a)$ (12·15)
	もし $I_N(0)g=\pm g$ ならば $g\otimes f=\pm(f*g)$ $A_N g=\pm B_N f$ $A_N B_N=\pm B_N A_N$ (12·39)(12·40)	もし $I_N(0)A_N g=\pm A_N g$ ならば $g\otimes f=\pm(f\otimes g)$ $A_N g=\pm B_N f$ $A_N B_N=\pm B_N A_N$

* 但し、$f=\rho_n(A_N)$であり、複号同順である。(　)内の数字は、本文中の対応する式の番号である。なお$A_N\in\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$, $B_N\in\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の欄は、本文と$A_N$, B_Nの使用法が逆になっている。

12.5 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の a-対称演算 $\overset{\star a}{}$ に関する閉性

空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ は、$-$, $\overset{\star a}{}$, $*$ の三種類の演算に関して閉じており、特に、$\overset{\star a}{}$ と $*$ は同じ働きをしていた。一方、空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ は、$-$, $*$ に関して閉じており、$-$ と $*$ が同じ働きとしている。では、$\overset{\star a}{}$ についてはどうであろうか。12.5では、この問題について論じる。

命題 11.11 と式 (10.55) より、次の命題を得る。

〔命題 12.10〕 任意に固定した $a \in [-l, l]$ に対して、次の二条件は互いに同値である。

(i) $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ (ii) $A_N^{\star a} \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$

即ち、空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ も、a-対称演算 $\overset{\star a}{}$ に関して、閉じているのである。では、A_N と $A_N^{\star a}$ は、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の中で、どのような関係にあるであろうか。次にそれを述べる。

まず、命題 10.19, 命題 12.1 と式 (3.124) より、次の命題が成立する。

〔命題 12.11〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して、次式が成立する。

$$\rho_2(A_N^{\star a})(x) = \overline{\rho_2(A_N)(4a-x)} \qquad (12.45)$$

命題 12.11 と命題 3.9 から、$A_N^{\star a}$ の結合特性も容易に導くことができるけれども、特に $a=0$ の場合には、命題 10.20 より、次のように簡単に表されるのである。

〔命題 12.12〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して $B_N \equiv A_N^{\star}$ とおけば、次の関係が成立する。

$$\rho_2(A_N^{\star}) = \rho_2(A_N)^* \tag{12.46}$$

$$\hat{B_N}(n) = \overline{\hat{A_N}(-n)} \tag{12.47}$$

$$\tilde{B_N}(n) = \overline{\tilde{A_N}(n)} \tag{12.48}$$

命題12.12は、命題7.19，命題11.20に対応するものである。

命題10.22で、a－対称演算による$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$の特徴づけを行なった。ある意味でそれに対応する$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の特徴づけを行なう。

〔命題12.13〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$となる為の必要十分条件は、任意の$a, b \in [-l, l]$に対して、交換関係

$$I_N(a) A_N I_N(b) = I_N(b) A_N I_N(a) \tag{12.49}$$

が成立することである。

（証明） 式(12.49)が成立することと

$$A_N I_N(a) I_N(b) = I_N(b) I_N(a) A_N \tag{12.50}$$

が成立することとは、同値である。更に 式(10.29)より、それは

$$A_N T_N(2(a-b)) = T_N(2(a-b))^* A_N \tag{12.51}$$

と同値である。 (Q.E.D)

上の証明から分るように、実は、式(12.49)が$a=0$或いは$b=0$に対して成立すれば、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$となるのである。式(12.49)は式(10.36)の拡張になっているが、更にそれと、次のように一般化することができる。

〔系12.7〕 任意の$A_N, B_N, C_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$に対して

$$A_N B_N C_N = C_N B_N A_N \tag{12.52}$$

なる交換関係が成立する。

式(12.52)で $A_N = I_N(a)$, $C_N = I_N(b)$ とおけば式(12.49)になり、$A_N = I_N(a)$, $B_N = I_N(b)$, $C_N = I_N(c)$ とおけば、式(10.36)になる。また、$C_N = I_N(a)$ とおけば、式(12.15)を得る。

12.6 作用素 $C^{(n)}I_N(0)$ と $S^{(n)}I_N(0)$

12.7 及び 12.8 の準備として、作用素 $C^{(n)}I_N(0)$ 及び $S^{(n)}I_N(0)$ の性質を調べておく。

まず $C^{(n)} \in \mathcal{B}_1^{(1)}(H_N)$, $S^{(n)} \in \mathcal{B}_{a_1}^{(1)}(H_N)$ であるから、系12.6より、次の系が成立する。

〔系12.8〕 任意の $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と $n=0,1,2,\cdots,N$ に対して、

$$\begin{cases} C^{(n)}A_N = A_N C^{(n)} & (12.53) \\ S^{(n)}A_N = -A_N S^{(n)} & (12.54) \end{cases}$$

なる交換関係が成立する。

従って、式(7.122)より、次の関係が成立する。

〔系12.9〕 任意の $a \in [-l, l]$ と $n=0,1,2,\cdots,N$ に対して、

$$(C^{(n)}I_N(a))^{\star_a} = \overline{C^{(n)}I_N(a)} = C^{(n)}I_N(a) \quad (12.55)$$

$$-(S^{(n)}I_N(a))^{\star_a} = \overline{S^{(n)}I_N(a)} = S^{(n)}I_N(a) \quad (12.56)$$

なる関係が成立する。$I_N(a)C^{(n)}$ 及び $I_N(a)S^{(n)}$ についても、同様である。

一般に、$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1,2)$ の元に右或いは左から $I_N(a)$ を掛けるという演算は、$\overline{A_N} = \lambda A_N$ という性質を保存している。しかし、式(12.56)と式(7.122)から分るように、$A_N^* = \lambda A_N$ という性質は、必ずしも保存されないのである。

式(7.115)より、$\langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle$ は

$$\langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle = \frac{1}{\epsilon_n} \{ (\langle c_n, c_n \rangle - \langle s_n, s_n \rangle) + i(\langle s_n, c_n \rangle + \langle c_n, s_n \rangle) \} \quad (12.57)$$

と表される。また、式(7.121)の両辺に右から $I_N(0)$ を掛ければ

$$E^{(n)} I_N(0) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} (C^{(n)} I_N(0) + i S^{(n)} I_N(0)) \quad (12.58)$$

となる。式(12.58)と系12.9より、$E^{(n)} I_N(0)$ の Ω_e - 実部及び Ω_e - 虚部がそれぞれ $C^{(n)} I_N(0)/\sqrt{\epsilon_n}$ 及び $S^{(n)} I_N(0)/\sqrt{\epsilon_n}$ になっていることが分る。しかも、命題4.15に示したように、Ω_e - 実分解の仕方は一意であるから、式(11.7)(12.57),(12.58)より、次の命題が成立する。

〔命題12.14〕

$$C^{(n)} I_N(0) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} (\langle c_n, c_n \rangle - \langle s_n, s_n \rangle) \quad (12.59)$$

$$S^{(n)} I_N(0) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} (\langle s_n, c_n \rangle + \langle c_n, s_n \rangle) \quad (12.60)$$

命題12.14は、命題7.28に対応する表現形式である。命題7.28の場合と同様に、命題12.14を使えば、$C^{(n)} I_N(0)$ 及び $S^{(n)} I_N(0)$ の変換のイメージがつかみ易い。即ち、関数 c_n と s_n によって張られる高々2次元部分空間を $H^{(n)}$ とするとき、これらの作用素は、$H^{(n)}$ に直交する元を全て零にしてしまい、$H^{(n)}$ の元に対しては、次のような振舞いとするのである：

$$\sqrt{\epsilon_n}\, C^{(n)} I_N(0) \ : \ c_n \longrightarrow c_n \ , \ s_n \longrightarrow -s_n \quad (12.61)$$

$$\sqrt{\epsilon_n}\, S^{(n)} I_N(0) \ : \ c_n \longrightarrow s_n \ , \ s_n \longrightarrow c_n \quad (n \neq 0) \quad (12.62)$$

式(12.61)は、$\sqrt{\epsilon_n} C^{(n)}$ が $H^{(n)}$ への射影作用素であることを考慮すれば、次のように、より直接的に理解することができる。即ち、c_n は偶関数であり、s_n は奇関数であるから、まず $I_N(0)$ によって、

$$I_N(0) : C_n \longrightarrow C_m, \quad A_n \longrightarrow -A_n \tag{12.63}$$

と変換され、それを $\sqrt{\epsilon_n}\, C^{(n)}$ で変換しても同じであるから、式(12.61)となるのである。式(12.62)も、式(12.63),(7.124)をもとにして、同様に理解することができる。

式(7.123),(7.124),(12.61),(12.62)を、並進の立場から見ることもできる。即ち、これらの作用素は、空間 $H^{(n)}$ の上で、次のように並進作用素を使って表すことができる。

$$\sqrt{\epsilon_n}\, C^{(n)} = E_N \qquad on \quad H^{(n)} \tag{12.64}$$

$$\sqrt{\epsilon_n}\, S^{(n)} = T_N\left(\frac{l}{2n}\right) \qquad on \quad H^{(n)} \tag{12.65}$$

$$\sqrt{\epsilon_n}\, C^{(n)} I_N(0) = \begin{cases} E_N & on \ \mathcal{L}(C_n) \\ T_N\left(\frac{l}{n}\right) & on \ \mathcal{L}(A_n) \end{cases} \tag{12.66}$$

$$\sqrt{\epsilon_n}\, S^{(n)} I_N(0) = \begin{cases} T_N\left(\frac{l}{2n}\right) & on \ \mathcal{L}(C_n) \\ T_N\left(\frac{l}{2n}\right)^* & on \ \mathcal{L}(A_n) \end{cases} \tag{12.67}$$

ここで $\mathcal{L}(C_n)$ は、関数 C_n によって張られる一次元部分空間を表す。

空間 $H^{(n)}$ は、

$$H^{(n)} = \mathcal{L}(C_n) \oplus \mathcal{L}(A_n) \tag{12.68}$$

と直和分解される。式(12.64),(12.65)では、$\mathcal{L}(C_n)$ と $\mathcal{L}(A_n)$ で並進を行なう量が同じであるのに対し、式(12.66),(12.67)では、並進を行なう量が、$\mathcal{L}(C_n)$ と $\mathcal{L}(A_n)$ で異っているのである。

12.7 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の偶作用素と奇作用素

空間 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1,2)$ の元であって、aー偶作用素の全体と $\mathcal{B}^{(n)}_{ea}(H_N)$ で表し、aー奇作用素の全体と $\mathcal{B}^{(n)}_{oa}(H_N)$ で表す。特に $a=0$ の場合は、a を略して単に $\mathcal{B}^{(n)}_{e}(H_N)$, $\mathcal{B}^{(n)}_{o}(H_N)$ と表す。12.7では $\mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$, $\mathcal{B}^{(2)}_{oa}(H_N)$ の特徴づけ及びこれらの空間の $\mathcal{B}^{(1)}_{c}(H_N)$, $\mathcal{B}^{(1)}_{ac}(H_N)$ に対する関係について論じる。

〔命題 12.15〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と任意に固定した $a \in [-\ell, \ell]$ に対して、次の各条件は互いに同値である。

(i) $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$　　(ii) $\overline{A}_N \in \mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$

(iii) $A_N^* \in \mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$　　(iv) $A_N^{\star_a} \in \mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$

(v) $A_N I_N(a) \in \mathcal{B}^{(1)}_{c}(H_N)$　　(vi) $I_N(a) A_N \in \mathcal{B}^{(1)}_{c}(H_N)$

ここで、$\mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$ を $\mathcal{B}^{(2)}_{oa}(H_N)$ に、$\mathcal{B}^{(1)}_{c}(H_N)$ を $\mathcal{B}^{(1)}_{ac}(H_N)$ に置き換えても、この命題はそのまま成立する。

証明は容易に出来るので、省略する。命題12.15の(i), (v), (vi)に対応して、次の系が成立する。

〔系 12.10〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と任意に固定した $a \in [-\ell, \ell]$ に対して次の各条件は、互いに同値である。

(i) $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}_{c}(H_N)$　　(ii) $A_N I_N(a) \in \mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$

(iii) $I_N(a) A_N \in \mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$

ここで、$\mathcal{B}^{(1)}_{c}(H_N)$ を $\mathcal{B}^{(1)}_{ac}(H_N)$ に、$\mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$ を $\mathcal{B}^{(2)}_{oa}(H_N)$ に置き換えても、この命題はそのまま成立する。

空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ では、全ての $a \in [-\ell, \ell]$ に対して $\star_a = *$ であるから、

全ての a に対して $\mathcal{B}^{(1)}_{ea}(H_N) = \mathcal{B}^{(1)}_{i}(H_N)$ かつ $\mathcal{B}^{(1)}_{oa}(H_N) = \mathcal{B}^{(1)}_{ai}(H_N)$ であった。一方、空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ では $-=*$ であるから、$\mathcal{B}^{(2)}_{i}(H_N) = \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ となっており、一般には、$a \neq b$ なる a, b に対して、$\mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}_{eb}(H_N)$ 及び $\mathcal{B}^{(2)}_{oa}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}_{ob}(H_N)$ は、異なる部分空間になっている。そして、命題 12.15 と系 12.10 より、次のことが分る。$I_N(a)$ を右或いは左から掛けるという $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の間の同形写像によって、$\mathcal{B}^{(1)}_{i}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$ 及び $\mathcal{B}^{(1)}_{ai}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}_{oa}(H_N)$ が、一対一に対応しているのである。この関係を図 12.2 に示す。

例えば、$C^{(n)} \in \mathcal{B}^{(1)}_{i}(H_N)$, $S^{(n)} \in \mathcal{B}^{(1)}_{ai}(H_N)$ であるから、系 12.10 より $C^{(n)} I_N(a) \in \mathcal{B}^{(2)}_{ea}(H_N)$, $S^{(n)} I_N(a) \in \mathcal{B}^{(2)}_{oa}(H_N)$ となるはずであるが、それは既に系 12.9 に示したとうりである。

$a = 0$ の場合には、命題 10.21 より、$A_N \in \mathcal{B}^{(2)}_{e}(H_N)$ 或いは $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}_{o}(H_N)$ となる為の条件を、次のように簡単に表すことができる。

〔系 12.11〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して、次の各条件は互いに同値である。但し、複号同順である。

$$(i) \quad A_N^{\star} = \pm \overline{A}_N \tag{12.69}$$

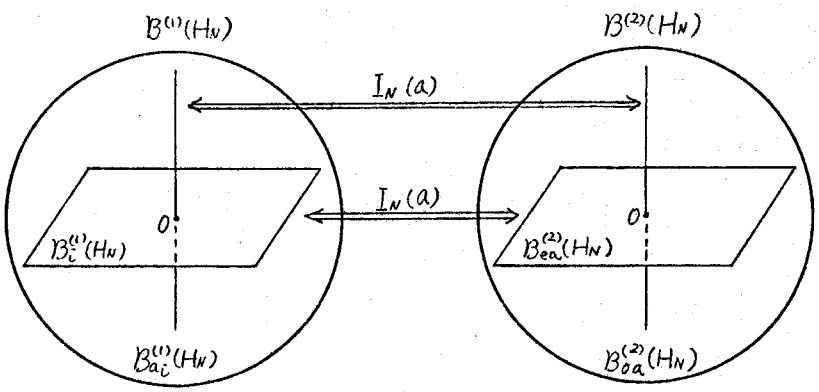


図 12.2 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$, $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ における a-偶作用素の空間と a-奇作用素の空間の相互関係

(ii) $A_N I_N(0) = \pm I_N(0) A_N$ (12.70)

(iii) $P_2(A_N)(-x) = \pm P_2(A_N)(x)$ (12.71)

(iv) $\hat{A_N}(-n) = \pm \hat{A_N}(n)$ for all n (12.72)

(v) $\tilde{A_N}(-n) = \pm \tilde{A_N}(n)$ for all n (12.73)

系12.11は、形式的には、命題7.35と全く同じである。それは、命題12.15, 系12.10及び空間周波数特性、結合特性、インパルス応答に対して図11.1, 図11.3, 補題11.1で述べた性質が $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の間に成立していることによるのである。

命題7.36と命題12.15より、次の命題が成立する。

〔命題12.16〕 $A_N \in \mathcal{B}_e^{(2)}(H_N)$, $B_N \in \mathcal{B}_o^{(2)}(H_N)$ は、次のように表される。

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\epsilon_n}\, \tilde{A_N}(n) C^{(n)} I_N(0) \tag{12.74}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \epsilon_n \hat{A_N}(n) \Sigma_N(a_n) I_N(0) \tag{12.75}$$

$$B_N = i\sqrt{2} \sum_{n=1}^{N} \tilde{B_N}(n) S^{(n)} I_N(0) \tag{12.76}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{N} \hat{B_N}(n) \Delta_N(a_n) I_N(0) \tag{12.77}$$

命題12.16から分るように、空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ で基本座標系 $\{E^{(n)} I_N(0)\}_{n=-N}^{N}$ 及び自然座標系 $\{I_N(\frac{1}{2}a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$ が果した役割と、空間 $\mathcal{B}_e^{(2)}(H_N)$ では $\{C^{(n)} I_N(0)\}_{n=0}^{N}$ 及び $\{\sqrt{\epsilon_n/(2N+1)}\, \Sigma_N(a_n) I_N(0)\}_{n=0}^{N}$ が、空間 $\mathcal{B}_o^{(2)}(H_N)$ では $\{S^{(n)} I_N(0)\}_{n=1}^{N}$ 及び $\{\sqrt{\epsilon_n/(2N+1)}\, \Delta_N(a_n) I_N(0)\}_{n=1}^{N}$ が、それぞれ果しているのである。そこで、これらの正規直交基底を、それぞれの空間における基本座標系, 自然座標系と名付けることにする。

12.8　正弦/余弦変換作用素 C_N

12.8.1　正弦/余弦変換作用素 C_N

12.8では、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に属する作用素の例として、正弦/余弦変換作用素 C_N について論じる。ここで C_N は、$f \in H_N$ を

$$f = \sum_{n=0}^{N} (\alpha_n c_n + \beta_n s_n) \qquad (\beta_0 = 0) \tag{12.78}$$

と展開したとき

$$C_N f = \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n s_n + \beta_n c_n) \tag{12.79}$$

に変換する作用素である。即ち、直流分を零にし、$n \neq 0$ なるnに対して、c_n を s_n に、s_n を c_n に変換する作用素である。C_N をdyadic表現すれば、

$$C_N = \sum_{n=1}^{N} (\langle s_n, c_n \rangle + \langle c_n, s_n \rangle) \tag{12.80}$$

となる。従って、式(12.60)より

$$C_N = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N} S^{(n)} I_N(0) \tag{12.81}$$

となり、命題12.16より、$C_N \in \mathcal{B}_0^{(2)}(H_N)$ となる。つまり、C_N は $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に属する実奇作用素である：

$$-C_N^{\star} = \bar{C}_N = C_N \tag{12.82}$$

式(12.76), (12.81) と (12.73) より、C_N の空間周波数特性 ($\tilde{C_N}(n)$) は、

$$\tilde{C_N}(n) = \begin{cases} -i & (n = 1, 2, \cdots, N) \\ 0 & (n = 0) \\ i & (n = -1, -2, \cdots, -N) \end{cases} \tag{12.83}$$

となる。

式(12.81)の両辺の β_2 をとれば、

$$\rho_2(C_N)(x) = 2\sum_{n=1}^{N} \sin\frac{n\pi}{\ell}x \qquad (12.84)$$

$$= \frac{\cot\frac{\pi}{2\ell}x - \cot\frac{(2N+1)\pi}{2\ell}x}{\sin\frac{\pi}{2\ell}x} \qquad (12.85)$$

となる。$N=4$ に対する $\rho_2(C_N)$ のグラフを、図12.3に示す。

式(12.84), (12.85)は、Dirichlet 共役核(文献(2), p.49)と一致している。これは、決して偶然のことではない。Dirichlet 核が、H_N の上の恒等作用素

$$E_N = C^{(0)} + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{N} C^{(n)} \qquad (12.86)$$

のインパルス応答であったのに対し、Dirichlet 共役核は、H_N に直交する元を零にし、H_N の元をその共役元* に変換する作用素、即ち

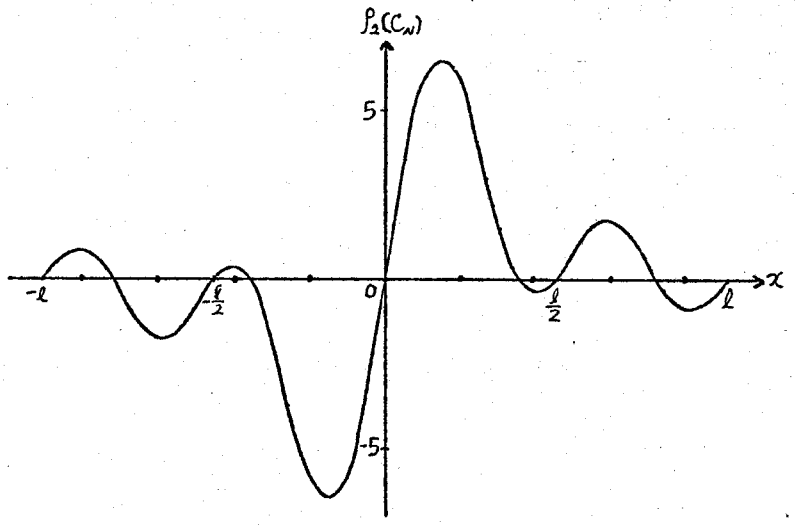


図12.3 C_N のインパルス応答 ($N=4$)
(x軸上の・は、標本点 a_n を表す。この点のグラフの値の $1/(2N+1)$ 倍が結合特性である。)

---

* 単位円 $z = \exp(ix)$ 上のベキ級数

$$a_0c_0 + \sum_n (a_n - i\beta_n)z^n \qquad (1)$$

の実部は

$$a_0c_0 + \sum_n (a_nc_n + \beta_nd_n) \qquad (2)$$

となり、普通のFourier 級数である。一方虚部は

$$\sum_n (a_nd_n - \beta_nc_n) \qquad (3)$$

となり、式(2)に対して

$$c_0 \longrightarrow 0, \quad c_n \longrightarrow d_n, \quad d_n \longrightarrow -c_n \quad (n\neq 0) \qquad (4)$$

なる変換を施こしたものになっている。式(3)を式(2)の共役級数、或いは共役元という(文献(2), p.1)。式(7.124)より、式(4)の変換を行なう作用素が、式(12.87)のように表されることが分る。

$$C_N I_N(0) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N} S^{(n)} \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \qquad (12.87)$$

のインパルス応答である（文献(2), p.49）。そして、補題 11.1 より C_N のインパルス応答は、$C_N I_N(0)$ のインパルス応答と一致するのである。

式(12.81)の両辺の Schmidt ノルムの二乗をとれば

$$\| C_N \|_2 = \sqrt{2N} \qquad (12.88)$$

となるから、式(11.74)より

$$| P_2(C_N)(x) | \leq \sqrt{2N(2N+1)} \qquad (12.89)$$

なる評価式が成立する。

C_N の結合特性（$\hat{C_N}(n)$）は、式(11.75), (12.85)より

$$\hat{C_N}(n) = \frac{\cos \frac{n\pi}{2N+1} - (-1)^n}{(2N+1) \sin \frac{n\pi}{2N+1}} \quad (n = -N, -N+1, \cdots, N) \qquad (12.90)$$

となる。この結合特性も、微分作用素 D_N 及び D_N^2 の場合のように、全ての N に対して一本のグラフだけで表すことはできない。しかし、$a_m^{(M)} = a_n^{(N)}$ を満足する組 (M, m) 及び (N, n) に対しては、

$$\hat{C_M}(m) = \frac{2N+1}{2M+1} \hat{C_N}(n) \qquad (12.91)$$

なる関係が成立している。この関係を使えば、結合特性を求める為の計算量を節約することができる。

式(12.90), (12.77)より、C_N は $\mathcal{B}_0^{(2)}(H_N)$ の自然座標系を使って

$$C_N = \frac{2}{2N+1} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos \frac{n\pi}{2N+1} - (-1)^n}{\sin \frac{n\pi}{2N+1}} \Delta_n(a_n) I_N(0) \qquad (12.92)$$

と表される。

12.8.2 C_N のその他の性質

12.9への準備も兼ねて、C_N のもつその他の性質について述べる。まず、定義から明らかなように、

$$C_N^2 = E_N - E^{(0)} \tag{12.93}$$

となる。つまり、C_N^2 は、直流分だけを取除くフィルタであり、パターン認識の分野で定正準化と呼ばれている操作を行なう作用素である。[3]~[6]*

〔補題 12.1〕

$$C_N I_N(0) C_N = E^{(0)} - I_N(0) \tag{12.94}$$

（証明） 式(12.82)より

$$C_N I_N(0) = -I_N(0) C_N \tag{12.95}$$

であるから、式(12.95), (12.93), (10.82)より

$$C_N I_N(0) C_N = -I_N(0) C_N^2 = -I_N(0)(E_N - E^{(0)})$$

$$= I_N(0) E^{(0)} - I_N(0) = E^{(0)} - I_N(0) \quad \text{(Q.E.D)} \tag{12.96}$$

〔補題 12.2〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の空間周波数特性を $(\tilde{A_N}(n))$ とすれば、

$$C_N A_N C_N = \overline{A_N^{\star}} - \tilde{A_N}(0) E^{(0)} \tag{12.96}$$

となる。特に、次の関係が成立する。

$$C_N A_N C_N = \begin{cases} A_N - \tilde{A_N}(0) E^{(0)} & : A_N \in \mathcal{B}_i^{(1)}(H_N) \\ -A_N & : A_N \in \mathcal{B}_{ac}^{(1)}(H_N) \end{cases} \tag{12.97}$$

（証明） 命題12.8, 式(12.93), (10.82)より

$$C_N A_N C_N = \overline{A_N^{\star}} C_N^2 = \overline{A_N^{\star}}(E_N - E^{(0)})$$

---

* 「定正準化」という用語が最初に現れたのは文献(4)であるが、その概念は既に文献(3)で使用されている。

$$= A_N^{\overline{\star}} - I_N(0) A_N I_N(0) E^{(0)}$$

$$= A_N^{\overline{\star}} - \tilde{A_N}(0) E^{(0)}$$

となり、式(12.96)が成立する。式(12.97)は式(12.96)から明らかである。

(Q.E.D)

例えば、$n = 1, 2, \cdots, N$ に対して、次の関係が成立する。

$$C_N C^{(n)} C_N = C^{(n)}, \quad C_N S^{(n)} C_N = -S^{(n)} \tag{12.98}$$

〔補題 12.3〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の空間周波数特性を $(\tilde{A_N}(n))$ とすれば

$$C_N A_N C_N = \tilde{A_N}(0) E^{(0)} - A_N^{\overline{\star}} \tag{12.99}$$

となる。特に、次の関係が成立する。

$$C_N A_N C_N = \begin{cases} \tilde{A_N}(0) E^{(0)} - A_N & : A_N \in \mathcal{B}_e^{(2)}(H_N) \\ A_N & : A_N \in \mathcal{B}_0^{(2)}(H_N) \end{cases} \tag{12.100}$$

(証明) 式(12.15), (12.94)を使えば、命題12.17の場合と同様に証明できる。

(Q.E.D)

式(12.100)で $A_N = I_N(0)$ とおけば、式(12.94)になる。

12.9 相関とたたみこみの和で表される作用素

12.9では、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元、或いは $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元としては、表現できないけれども、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元の和として表現できるもの、即ち、たたみこみと相関の和として表現できる作用素の例を、いくつか示すことにする。$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ は図11.2に示すような関係にあるので、そのような作用素は、空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N) \oplus (\mathcal{B}^{(2)}(H_N) \ominus \mathcal{L}(E^{(0)}))$ の元とみなすことができ、これまでに論じてきた事柄を、そのまま適用することができるのである。

まず、式(10.59)より、a-偶関数 及び a-奇関数の空間への射影作用素 $E_N^{(ea)}$, $E_N^{(oa)}$ は、そのような作用素の例である。特に 式(10.59)で $a=0$ とおけば

$$E_N^{(e)} = \frac{1}{2}(E_N + I_N(0)), \quad E_N^{(o)} = \frac{1}{2}(E_N - I_N(0)) \tag{12.101}$$

となる。$E_N^{(e)}$, $E_N^{(o)}$ の積分表現は、命題7.31に与えてあるが、式(7.144), (7.146)を考慮すれば、確かに、これらの作用素が、たたみこみと相関の和で表現できることが分る。

〔命題12.17〕 任意の複素数 α, β に対して、次の関係式が成立する。

(i) $A_N \in \mathcal{B}_{ea}^{(n)}(H_N)$ ならば、$\alpha A_N + \beta A_N I_N(a) \in \mathcal{B}_{ea}(H_N) \cap \mathcal{B}_c(H_N)$ (12.102)

(ii) $A_N \in \mathcal{B}_{oa}^{(n)}(H_N)$ ならば、$\alpha A_N + \beta A_N I_N(a) \in \mathcal{B}_{oa}(H_N)$ (12.103)

但し、$n=1$ 又は $n=2$ である。

$E_N \in \mathcal{B}_e^{(1)}(H_N)$ であるから、式(10.59), (12.102)より

$$E_N^{(ea)}, \ E_N^{(oa)} \in \mathcal{B}_{ea}(H_N) \cap \mathcal{B}_c(H_N) \tag{12.104}$$

となる。

命題7.28 と命題12.14 より、次の命題が成立する。

〔命題12.18〕 $n=1, 2, \cdots, N$ に対して、次の関係が成立する。

$$\begin{cases} \langle c_n, c_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^{(n)} + C^{(n)} I_N(0)) & (12.105) \\ \langle s_n, s_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^{(n)} - C^{(n)} I_N(0)) & (12.106) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle s_n, c_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(S^{(n)} + S^{(n)} I_N(0)) & (12.107) \\ \langle c_n, s_n \rangle = (-)\frac{1}{\sqrt{2}}(S^{(n)} - S^{(n)} I_N(0)) & (12.108) \end{cases}$$

$\langle C_n, C_n \rangle$ は空間 $\mathcal{L}(C_n)$ への射影作用素であり、$\langle A_n, A_n \rangle$ は空間 $\mathcal{L}(A_n)$ への射影作用素である。$\langle A_n, C_n \rangle$ は C_n を A_n に変換し、$\mathcal{L}(C_n)$ に直交する関数を全て零にする作用素であり、$\langle C_n, A_n \rangle$ は A_n を C_n に変換し、$\mathcal{L}(A_n)$ に直交する関数を全て零にする作用素である。そして、これらの作用素が全て相関とたたみこみの和として表現できるのである。例えば

$$\langle C_n, C_n \rangle f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ C_n(x-y) + C_n(x+y) \} f(y) dy \qquad (12.109)$$

となる。

命題 12.17 より、$\langle C_n, C_n \rangle$, $\langle A_n, A_n \rangle$ は 偶等方作用素であり $\langle A_n, C_n \rangle$, $\langle C_n, A_n \rangle$ は奇作用素である。

〔命題 12.19〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して

$$X_N \equiv A_N + A_N I_N(0), \quad Y_N \equiv A_N - A_N I_N(0) \qquad (12.110)$$

とおけば

$$C_N X_N C_N = A_N^{\overline{\star}} - A_N^{\overline{\star}} I_N(0) \qquad (12.111)$$

となる。特に、次の関係が成立する。

$$C_N X_N C_N = \begin{cases} Y_N & : A_N \in \mathcal{B}_e^{(1)}(H_N) \\ -Y_N & : A_N \in \mathcal{B}_o^{(1)}(H_N) \end{cases} \qquad (12.112)$$

ここで C_N は、正弦/余弦変換作用素である。

(証明) 式(12.98)と補題12.2より

$$C_N X_N C_N = C_N A_N C_N + C_N A_N I_N(0) C_N$$

$$= C_N A_N C_N - C_N A_N C_N I_N(0)$$

$$= (A_N^{\overline{\star}} - A_N^{\sim}(0) E^{(0)}) - (A_N^{\overline{\star}} I_N(0) - A_N^{\sim}(0) E^{(0)} I_N(0))$$

$$= A_N^{\star} - A_N^{\bar{\star}} I_N(0)$$

となり、式(12.111)を得る。式(12.112)は、式(12.111)から明らかである。 (Q.E.D)

命題12.19を使えば、今までに現れた相関とたたみこみの和で表される作用素の例に対して

$$C^N E_N^{(e)} C_N = E_N^{(0)} \tag{12.113}$$

$$C_N \langle c_n, c_n \rangle C_N = \langle \delta_n, \delta_n \rangle \tag{12.114}$$

$$C_N \langle \delta_m, c_n \rangle C_N = \langle c_n, \delta_n \rangle \tag{12.115}$$

なる関係が成立することが分る。

第 Ⅵ 章

双対演算とその応用

第13節　変形対合

13.1　まえがき

才5節，才6節で，等方ユニタリ作用素によって生成される実対合 ω 及び共変対合 Ω について論じた．Ω は $\mathfrak{B}(H_N)$ からそれ自身の上への作用素である。従って、当然のことながら、才皿章で論じた並進作用素によって生成される作用素の空間 $\mathfrak{B}^{(1)}(H_N)$，及び才五章で論じた反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathfrak{B}^{(2)}(H_N)$ の元に対しても、Ω は意味をもっている。しかし，式(3.92)，(5.5) より

$$\varphi_n' = \varphi_n \quad , \quad \varphi_n' = \varphi_n \qquad (13.1)$$

となるから、$E^{(m)} \in \mathfrak{B}^{(1)}(H_N)$ に対して，式(5.94)より

$$E^{(m)\#} = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \notin \mathfrak{B}^{(1)}(H_N) \quad (n=-N, -N+1, \cdots, N) \qquad (13.2)$$

となる。従って、$\mathfrak{B}^{(k)}(H_N)$ $(k=1,2)$ は必ずしも Ω に関して閉じていない。

では，各部分空間 $\mathfrak{B}^{(k)}(H_N)$ の中だけで* Ω と同様な議論ができないであろうか。幸なことに、7.4 及び 11.6 で論じたように、$\mathfrak{B}^{(k)}(H_N)$ は、インパルス応答 f_k $(k=1,2)$ によって H_N と位相まで含めて同形に結ばれている。従って、H_N の実対合 ω に関する性質が、f_k^{-1} によって $\mathfrak{B}^{(k)}(H_N)$ に変換できるはずである。* このような考え方によって定義された $\mathfrak{B}^{(k)}(H_N)$ からそれ自身の上への回帰的半線形作用素が、本節の表題の変形対合である。

13.2 で変形対合の正確な定義を与え、その基本的な性質を明らかにする。13.3 では、実対合及び共変対合の場合と同様に、変形対合に対する新しい積を導入する。13.4 では、変形対合に関する固有値問題について論じる．

---

* 以下、$\mathfrak{B}^{(k)}(H_N)$ $(k=1,2)$ を単に $\mathfrak{B}^{(k)}(H_N)$ と表し、f_k，f_k^{-1} $(k=1,2)$ を単に f_k，f_k^{-1} と表す．

実対合、共変対合、及び変形対合の生成作用素である等方ユニタリ作用素の積分核は、それ自体興味深い性質をもっているが、更に、上記三種類の対合を使えば、積分核の作用素論的性質及び幾何学的イメージを明確にすることができる。これらの問題を、13.5～13.8で論じる。

13.2 変形対合

H_N の実対合 ω を使い

$$\omega A_N \equiv \rho_k^{-1} \omega \rho_k A_N \quad : A_N \in \mathcal{B}^{(k)}(H_N) \quad (k=1,2) \qquad (13.3)$$

によって定義される $\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ からそれ自身の上への作用素 ω を、第 k 種変形対合（modified involution of the kth kind）と名付ける。特に混乱の恐れがない場合、或いは、第一種変形対合と第二種変形対合を同時に論じる場合には、単に変形対合と呼ぶことにする。実対合 ω の生成作用素 U_N を変形対合 ω の生成作用素という。

つまり、第 k 種変形対合 ω とは、図13.1に示すように、$\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ の元 A_N を、A_N のインパルス応答 $f \equiv \rho_k(A_N)$ に実対合 ω を作用させてできる関数 ωf をインパルス応答とするような $\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ の元に対応づける作用素のことである。

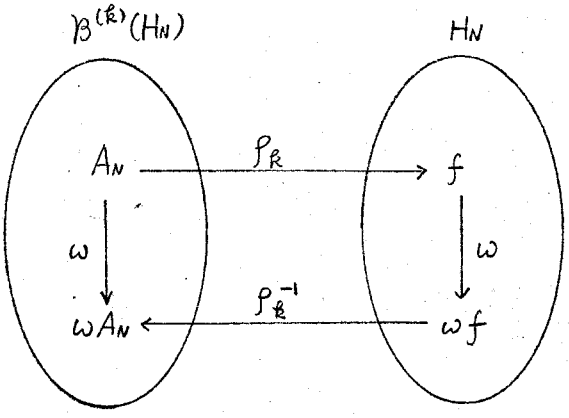


図13.1 第 k 種変形対合 ω $(k=1,2)$

例えば、$U_N = E_N$ の場合を、式(5.4)と同様に We で表せば、式(7.80)、(11.80)より

$$We\,A_N = \rho_k^{-1} We \rho_k A_N = \rho_k^{-1}\rho_k \bar{A}_N = \bar{A}_N$$

$$\therefore \quad We\,A_N = \bar{A}_N \tag{13.4}$$

となる。即ち、$U_N = E_N$ の場合には、We と Ωe が一致するのである。

式(13.3)による ω の定義の仕方は、いわば式(5.13)による Ω の定義の仕方に対応している。次に、式(5.2)、(5.3)に対応する ω の表現を与える。

〔命題 13.1〕 k 次禅変形対合 ω は、次のように表される。

$$\omega A_N = \mathcal{U}_N \bar{A}_N \quad : \quad A_N \in \mathcal{B}^{(k)}(H_N) \tag{13.5}$$

ここで $\mathcal{U}_N$ は、生成作用素 U_N の式(5.23)による dyadic 表現を使い

$$\mathcal{U}_N \equiv \sum_{m,n=-N}^{N} u_{m,n} < U_N^{(m)}, U_N^{(n)} > \tag{13.6}$$

によって与えられる $\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ の上の作用素である。ここで $U_N^{(n)} = \rho_k^{-1}(u_n)$ である。

(証明) 式(13.3)と命題7.15, 命題11.16より

$$\omega A_N = \rho_k^{-1}\omega\rho_k A_N = \rho_k^{-1} U_N \overline{\rho_k A_N} = \mathcal{U}_N \rho_k^{-1}\overline{\rho_k A_N}$$

$$= \mathcal{U}_N \overline{\rho_k^{-1}\rho_k A_N} = \mathcal{U}_N \bar{A}_N$$

となり、式(13.5)が成立する。 (Q.E.D)

命題13.1の証明と、命題7.16, 命題11.17より、次の命題が成立する。

〔命題 13.2〕 $U_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ のとき、またそのときに限って

$$\omega A_N = U_N \overline{A}_N \qquad (13.7)$$

となる。

つまり、$U_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ ならば、命題13.1における$\mathfrak{A}_N$が、U_Nを掛けるという作用素になるのである。$E_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$であるから、式(13.7)で$U_N = E_N$とおけば、式(13.4)になる。

系7.5と命題11.13より、命題5.2に対応する次の命題が成立する。

〔命題13.3〕 任意の$A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(k)}(H_N)$及び複素数a, bに対して、次の関係が成立する。

$$\omega(aA_N + bB_N) = \bar{a}\omega A_N + \bar{b}\omega B_N \quad (\text{半線形}) \qquad (13.8)$$

$$\omega^2 A_N = A_N \quad (\text{回帰的}) \qquad (13.9)$$

$$\| \omega A_N \|_2 = \| A_N \|_2 \qquad (13.10)$$

$$(\omega A_N, \omega B_N) = \overline{(A_N, B_N)} \qquad (13.11)$$

$$(\omega A_N, B_N) = (\omega B_N, A_N) \qquad (13.12)$$

$$\rho_k(\omega A_N) = \omega \rho_k(A_N) \qquad (13.13)$$

式(13.8)～(13.12)は、それぞれ式(5.15)～(5.19)と全く同じ関係である。従って、命題5.3より、次の命題が成立する。

〔命題13.4〕 式(13.8)～(13.10)を満たす$\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$からそれ自身への作用素ωは、式(13.5)の形に、一意に表される。

式(13.11)より、次の系が成立する。

〔系13.1〕 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$が$\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$の正規直交基底ならば、$\{\omega U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$もまたそうである。

例えば、次のようになる。$\mathfrak{T}_N$ によって生成される ω と、オ k 種変形双対演算と名付け、式(5.5)と同様に

$$\omega A_N = A_N' = \rho_k^{-1} \mathfrak{T}_N \overline{\rho_k(A_N)} \tag{13.14}$$

と表すことにすれば、式(13.1), (7.52), (7.73) より

$$E^{(n)\prime} = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} T_N(a_n) \qquad (n=-N, -N+1, \cdots, N) \tag{13.15}$$

となる。つまり、H_N の基本座標系 $\{\varphi_n\}$ と自然座標系 $\{\psi_n\}$ が、H_N の双対演算で結ばれていたように(式(13.1))、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の基本座標系 $\{E^{(n)}\}$ と自然座標系 $\{T_N(a_n)/\sqrt{2N+1}\}$ が、オ1種変形双対演算によって結ばれているのである。

式(13.5), (13.6)から分かるように、一般には、変形対合 ω は、二重級数で表される。しかし、$\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ の正規直交基底の組 $\{\omega U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ と $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ を使えば、次に示すように、一重級数で表すことができるのである。

〔命題 13.5〕 $\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ の任意の正規直交基底 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ を使って、変形対合 ω は、次のように表される。

$$\omega A_N = \sum_{n=-N}^{N} \overline{(A_N, U_N^{(n)})}\, \omega U_N^{(n)} \tag{13.16}$$

証明は、命題 5.7 の場合と同様にできる。

ω の、式(5.91)に対応する関係式は、一般には成立しない。しかし、次の命題は成立する。

〔命題 13.6〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(m)}(H_N)$, $B_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(m, n = 1, 2)$ とする。$\Omega A_N \in \mathcal{B}^{(m)}(H_N)$ ならば、次の関係が成立する。

$$\omega(A_N B_N) = (\Omega A_N)(\omega B_N) \tag{13.17}$$

（証 明） $m=n=1$ のとき、式(5.95)，命題 7.16 より

$$\omega(A_N B_N) = \rho_1^{-1}\omega\rho_1(A_N B_N) = \rho_1^{-1}\omega(A_N\rho_1(B_N))$$

$$= \rho_1^{-1}(\Omega A_N)(\omega\rho_1(B_N)) = (\Omega A_N)\rho_1^{-1}\omega(\rho_1(B_N))$$

$$= (\Omega A_N)(\omega B_N)$$

となり、式(13.17)が成立する。他の場合も同様に証明できる。 (Q.E.D)

変形対合 ω は、式(13.10)のように、Schmidt ノルムを保存している。ところが、一般には、作用素の普通のノルムを保存しない。しかし、次の関係は成立する。

〔命題 13.7〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(R)}(H_N)$ に対して、次の関係が成立する。

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\|A_N\| \leqq \|\omega A_N\| \leqq \sqrt{2N+1}\,\|A_N\| \qquad (13.18)$$

（証 明） 式(9.5)，(13.10)より

$$\|\omega A_N\| \leqq \|\omega A_N\|_2 = \|A_N\|_2 \leqq \sqrt{2N+1}\,\|A_N\|$$

となり、オニの不等式が成立する。今証明したことと式(13.9)より、オーの不等式も成立する。 (Q.E.D)

13.3 変形対合の積

これまでは、唯一個の変形対合の性質について論じてきたが、13.3では、$\mathcal{B}^{(R)}(H_N)$ のいくつかの変形対合 ω_n $(n=1,2,\cdots)$ の積について論じる。なお ω_n の生成作用素と、同じ添字を付けて、$U_N^{(n)}$ で表すことにする。

まず、式(13.3)，(5.49)より

$$\omega_1\omega_2 A_N = \rho_R^{-1} U_N^{(1)} U_N^{(2)*}\rho_R A_N \quad : A_N \in \mathcal{B}^{(R)}(H_N) \qquad (13.19)$$

となり、偶数個の変形対合の積は、$\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ 上の線形作用素になる。特に、

$$\omega we A_N = \rho_k^{-1} U_N \rho_k A_N \ , \quad we\omega A_N = \rho_k^{-1} U_N^* \rho_k A_N \qquad (13.20)$$

となる。

式(13.19)より、命題5.10, 命題5.27 に対応する次の命題が成立する。

〔命題13.8〕変形対合 ω_1 と ω_2 が可換になる為の必要十分条件は、$U_N^{(1)} U_N^{(2)*}$ が自己共役作用素になることである。特に ω と we が可換になる為の必要十分条件は、ω の生成作用素が自己共役になることである。

命題13.8と命題5.10より、次のことが分かる。変形対合 ω_1 と ω_2 は、同じ生成作用素によって生成される実対合 ω_1 と ω_2 が可換なとき、またそのときに限って可換である。

式(13.3), (5.52)より

$$\omega_1\omega_2\omega_3 A_N = \rho_k^{-1} U_N^{(1)} U_N^{(2)*} U_N^{(3)} \overline{\rho_k A_N} \quad : A_N \in \mathcal{B}^{(k)}(H_N) \qquad (13.21)$$

となり、奇数個の変形対合の積は、半線形作用素になるけれども、一般には、変形対合にならない。

しかし、実対合や共変対合の場合と同様に、新しい積 $\circ$ を

$$\omega_1 \circ \omega_2 \equiv \omega_1\omega_2\omega_1 \qquad (13.22)$$

によって定義すれば、$\omega_1 \circ \omega_2$ は、$U_N^{(1)} \circ U_N^{(2)}$ によって生成される変形対合になるのである。ここで $U_N^{(1)} \circ U_N^{(2)}$ は、式(5.53)で与えられるものである。

例えば、式(5.55)~(5.57), (5.142)~(5.144) に対応して

$$\omega \circ \omega = \omega \qquad (13.23)$$

$$(we \circ \omega) A_N = \rho_k^{-1} U_N^* \overline{\rho_k A_N} \qquad (13.24)$$

$$(\omega_0 \omega_e) A_N = \rho_R^{-1} U_N^2 \overline{\rho_R A_N} \qquad (13.25)$$

となる。即ち、U_N^*によって生成される変形対合が$\omega_e \circ \omega$であり、U_N^2によって生成される変形対合が$\omega \circ \omega_e$である。

このように、実対合に対して成立した関係が、そのまま変形対合に対しても成立する。従って、図5.2及び図5.3が、変形対合に対してそのまま成立している。

13.4 変形対合に関する固有値問題

補題5.5, 補題5.6に対応して、次の補題が成立する。

〔補題13.1〕 複素数λが、変形対合ωの固有値になる為の必要十分条件は、$|\lambda| = 1$となることである。

〔補題13.2〕 変形対合ω, ω_1に対して、次の三条件のうち、任意の二個が成立すれば、残りの一個も成立する。

$$(i) \quad \omega_1 A_N = \lambda A_N \quad : \quad \lambda = \mu\nu \qquad (13.26)$$

$$(ii) \quad \omega A_N = \mu A_N \quad : \quad \mu = \nu\lambda \qquad (13.27)$$

$$(iii) \quad \omega\omega_1 A_N = \nu A_N \quad : \quad \nu = \bar{\lambda}\mu \qquad (13.28)$$

命題5.11に対応して、次の命題が成立する。

〔命題13.9〕 $\omega, \omega_1 \in \mathcal{B}^{(R)}(H_N)$の変形対合とし、$A_N \in \mathcal{B}^{(R)}(H_N)$に対して

$$B_N \equiv \omega A_N \qquad (13.29)$$

とおく。

$$\omega_1 A_N = \lambda A_N \tag{13.30}$$

が成立する為の必要十分条件は，

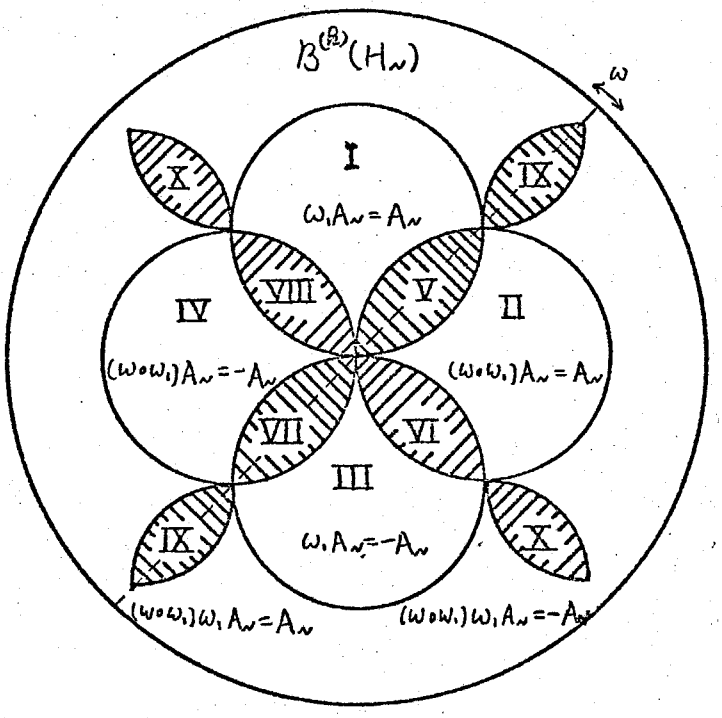
$$(\omega \circ \omega_1) B_N = \bar{\lambda} B_N \tag{13.31}$$

が成立することである。

補題13.2と命題13.9を図示すれば，図13.2のようになる。*

図13.2は，実対合の場合の図5.4及び共変対合の場合の図6.1に対応するものである。A_N と ωA_N は，図13.2の点線に関して対称な領域に属しており，A_N と ζA_N は，中心に関して対称な領域に属している。図13.2で，領域ⅨとⅩが二個所設けてあるのは，この二種類の対称性（線対称と点対称）を保存する為である。

図13.2の斜線を施してある領域(V)と(Vi)は，Schmidtの内積に関して，



(i) $\omega_1 A_N = A_N$
(Ⅰ, Ⅴ, Ⅷ)

(ii) $\omega_1 A_N = -A_N$
(Ⅲ, Ⅵ, Ⅶ)

(iii) $(\omega\circ\omega_1) A_N = A_N$
(Ⅱ, Ⅴ, Ⅵ)

(iv) $(\omega\circ\omega_1) A_N = -A_N$
(Ⅲ, Ⅶ, Ⅷ)

(v) $(\omega\circ\omega_1)\omega_1 A_N = A_N$
(Ⅳ, Ⅶ, Ⅸ)

(vi) $(\omega\circ\omega_1)\omega_1 A_N = -A_N$
(Ⅱ, Ⅷ, Ⅹ)

図13.2　3次種変形対合に関する各種固有集合の関係

---

* 補題13.2と命題13.9を一枚の図に表す為に，補題13.2で，$\mu = \bar{\lambda}$ 及び ω が $\omega\circ\omega_1$ の場合が，図13.2に示してある。

互いに直交している部分空間である。これに対して、他の領域(i)～(iv)は、部分空間になっていない。しかし、実対合及び共変対合の場合と同じように、(i)～(iv)の中の任意の一個の領域だけで、全空間 $\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ を張るのである。それを次に示す。

〔命題 13.10〕 λ を絶対値 1 の複素数とする。任意の $A_N \in \mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ は、

$$\omega A_N^{(\eta)} = \lambda A_N^{(\eta)} \quad (\eta = 1, 2) \tag{13.32}$$

なる元 $A_N^{(1)}$, $A_N^{(2)}$ を使って

$$A_N = A_N^{(1)} + i A_N^{(2)} \tag{13.33}$$

と一意に分解される。そして $A_N^{(1)}$, $A_N^{(2)}$ は、

$$A_N^{(1)} = \frac{1}{2}(A_N + \bar{\lambda}\omega A_N), \quad A_N^{(2)} = \frac{1}{2i}(A_N - \bar{\lambda}\omega A_N) \tag{13.34}$$

と表される。

証明は、命題 5.12 の場合と同様にできる。

命題 5.13 及び命題 6.9 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 13.11〕 変形対合 ω_1 の固有値 λ に対応する固有集合を、G_λ とする:

$$G_\lambda \equiv \{ A_N \mid \omega_1 A_N = \lambda A_N, \ A_N \in \mathcal{B}^{(k)}(H_N) \} \tag{13.35}$$

ω を任意の変形対合とするとき、次の各条件は互いに同値である。

(i) $\omega G_\lambda = G_\lambda$ (ii) $\omega G_\lambda = G_{-\lambda}$

(iii) $\omega_1 \circ \omega = \lambda^2 \omega$ (iv) $\omega \cdot \omega_1 = \bar{\lambda}^2 \omega_1$

(v) $\omega_1 \omega = \lambda^2 \omega \omega_1$

証明は、命題5.13の場合と同様にできる。(i)は、G_λがωに関して閉じていることを意味し、(ii)はG_λがωに関して閉じていることを意味している。命題13.11より、直ちに次の系が成立する。

〔系13.2〕変形対合ω_1の固有集合で、ω_1自身に関して閉じているものは、G_1及びG_{-1}であり、しかもそれだけである。

命題13.11で$\omega_1 = \omega_e$とおき、命題13.8を使用すれば、系5.4及び系6.7に対応する次の系が成立する。

〔系13.3〕次の各条件は、互いに同値である。

(i) ωは実作用素を実作用素に変換する。

(ii) ωは虚作用素を虚作用素に変換する。

(iii) $\omega\omega_e = \omega_e\omega$

(iv) $U_N^* = U_N$

$U_N^4 = E_N$のとき、$\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ $(k=1,2)$の元に対して

$$G_\pm^{(k)} \equiv \{ A_N \mid (\omega\omega_e)^2 A_N = \pm A_N \} \tag{13.36}$$

$$G_\lambda^{(k)} \equiv \{ A_N \mid \omega\omega_e A_N = \lambda A_N \} \quad (\lambda = \pm 1, \pm i) \tag{13.37}$$

とおく。式(6.195)の両辺のP_k^{-1}をとれば、次の命題が成立する。

〔命題13.12〕 $\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ $(k=1,2)$は次のように直和分解される。

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{B}^{(k)}(H_N) &= G_+^{(k)} \oplus G_-^{(k)} \\ G_+^{(k)} &= G_1^{(k)} \oplus G_{-1}^{(k)} \\ G_-^{(k)} &= G_i^{(k)} \oplus G_{-i}^{(k)} \end{aligned}\right\} \tag{13.38}$$

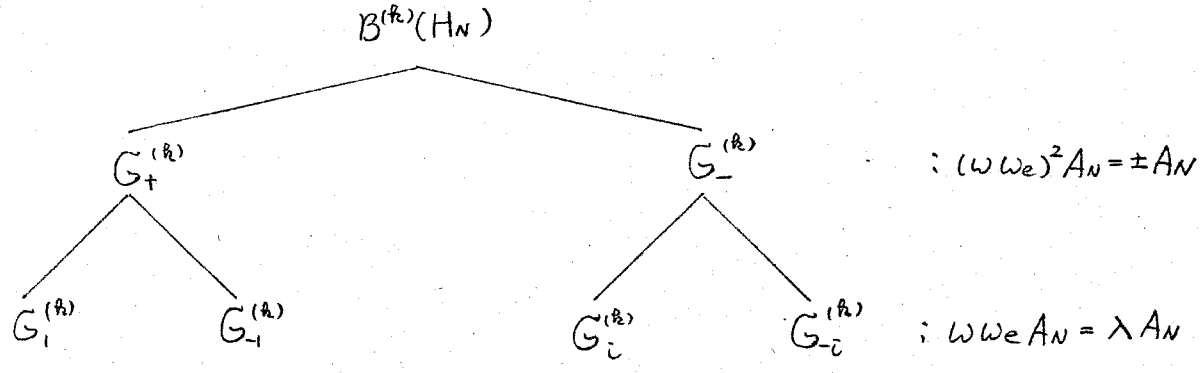


図13.3 $(\omega\omega_e)^2$ 及び $\omega\omega_e$ による $B^{(n)}(H_N)$ $(n=1,2)$ の直和分解

命題13.12 を図に表せば、図13.3 となる。この図は、図6.5, 図6.6 に対応するものである。なお 命題13.12 の直和分解を具体的に行なうには、式(6.184)及び命題6.35で、E と ω_e^2 に、U と $\omega\omega_e$ に置けば良い。

13.5 等方ユニタリ作用素の積分核

実対合、共変対合、及び変形対合の生成作用素である等方ユニタリ作用素 U_N の積分核 $\sqrt{2N+1}\,u_N(x,y)$ の性質について論じる。まず、$u_N(x,y)$ は、式(5.30)に示したように、H_N の正規直交基底のとりかたによらない表現形式をもっていると共に、式(5.32)のように、x と y に関して対称になっていることを注意しておく。

〔命題 13.13〕 任意に固定した $a\in[-l,l]$ に対して、次の関係が成立する。

$$\omega\psi_0(x-a) = u_N(x,a) \tag{13.39}$$

$$\omega u_N(x,a) = \psi_0(x-a) \tag{13.40}$$

(証 明) x の関数として、式(5.30)の両辺の ω をとれば、式(5.31)

より式(13.40)を得る。式(13.39)は式(13.40)と(6.16)より明らかである。 (Q.E.D)

本来二変数関数である U_N 及び E_N の積分核 $\sqrt{2N+1}\,U_N(x,y)$ 及び $\sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-y)$ を、えだけの関数とみなせば、命題13.13が主張しているように、各 $y=a$ に対して、両者は ω によって互いに結ばれているのである。

命題13.13と、ω の生成作用素を使って表せば、次のようになる。

〔系13.4〕任意に固定した $a\in[-l,l]$ に対して、次の関係が成立する。

$$U_N\varphi_0(x-a)=U_N(x,a) \tag{13.41}$$

$$U_N^*U_N(x,a)=\varphi_0(x-a) \tag{13.42}$$

$\sqrt{2N+1}\,U_N(x,y)$ は、U_N の積分核であった。では、パラメータ $a\in[-l,l]$ に対して、$\sqrt{2N+1}\,U_N(x\pm y,a)$ は、どのような作用素の積分核になるであろうか。それを次に示す。

〔命題13.14〕

$$\rho_1^{-1}(U_N(\cdot,a))=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\omega T_N(a) \tag{13.43}$$

$$\rho_2^{-1}(U_N(\cdot,a))=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\omega I_N\left(\frac{1}{2}a\right) \tag{13.44}$$

ここで、式(13.43)の ω は、U_N によって生成される第一種変形対合であり、式(13.44)の ω は、U_N によって生成される第二種変形対合である。

(証明) 式(13.3),(13.39)より

$$\omega T_N(a)=\rho_1^{-1}\omega\rho_1T_N(a)=\sqrt{2N+1}\,\rho_1^{-1}(\omega T_N(a)\varphi_0)$$

$$= \sqrt{2N+1}\, \rho_1^{-1}(u_N(\cdot, a))$$

となり、式(13.43)が成立する。同様にして、式(11.64), (13.39)より式(13.44)が成立する。 (Q.E.D)

つまり、$\sqrt{2N+1}\, u_N(x-y, a)$ は $\omega T_N(a)$ の積分核になり、$\sqrt{2N+1}\, u_N(x+y, a)$ は $\omega I_N(\frac{1}{2}a)$ の積分核になるのである。

〔 命題 13.15 〕 任意の $a, b \in [-l, l]$ に対して、

$$(u_N(\cdot, a), u_N(\cdot, b)) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \varphi_0(a-b) \tag{13.45}$$

なる関係が成立する。特に

$$(u_N(\cdot, a), u_N(\cdot, a_n)) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \varphi_n(a) \tag{13.46}$$

$$\| u_N(\cdot, a) \| = 1 \tag{13.47}$$

となる。

(証明) 式(5.29)を、内積の記号を使って表せば

$$(u_N(x, y), f(y))_y = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} (\omega f)(x) \tag{13.48}$$

となるから、式(5.32), (13.40)より、

$$\sqrt{2N+1}\, (u_N(\cdot, a), u_N(\cdot, b)) = (\omega u_N(\cdot, b))(a) = \varphi_0(a-b)$$

となり、式(13.45)を得る。式(13.46), (13.47)は、式(13.45)と式(3.78), (3.81)より明らかである。 (Q.E.D)

式(13.45)の右辺が、U_N によらない実数値になることは、注目すべき点である。式(13.47), (7.78)より、次の系を得る。

〔 系 13.5 〕

$$|u_N(x,y)| \leq \sqrt{2N+1} \quad \text{for all } x, y \tag{13.49}$$

式(13.45), (3.81)より、次の系を得る。

〔系 13.6〕任意に固定した実数 a に対して、$\{u_N(x, a+a_n)\}_{n=-N}^{N}$ は H_N の正規直交基底になる。

系13.6より $\{u_N(x,a_n)\}_{n=-N}^{N}$ は H_N の正規直交基底になっている。これはまた、式(13.39)から得られる関係式

$$u_N(x,a_n) = (\omega\varphi_n)(x) \quad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{13.50}$$

と系6.1からも明らかなことである。

式(13.48)で $f=\omega\varphi_0$ とおけば、式(3.94)に対応する次の系を得る。

〔系 13.7〕任意の $a\in[-l,l]$ に対して、次の関係が成立する。

$$(u_N(\cdot,a), \omega\varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \tag{13.51}$$

次に、$u_N(x,a)$ の種々の表現を与える。

〔命題 13.16〕

$$u_N(x,a) = (\Omega T_N(a))(\omega\varphi_0)(x) \tag{13.52}$$

$$= (\omega T_N(a))\varphi_0(x) \tag{13.53}$$

$$= \Omega(T_N(a)\overline{\mathcal{I}}_N^*)(\omega\varphi_0)(x) \tag{13.54}$$

(証明) 式(13.39)は

$$u_N(x,a) = \omega(T_N(a)\varphi_0)(x) \tag{13.55}$$

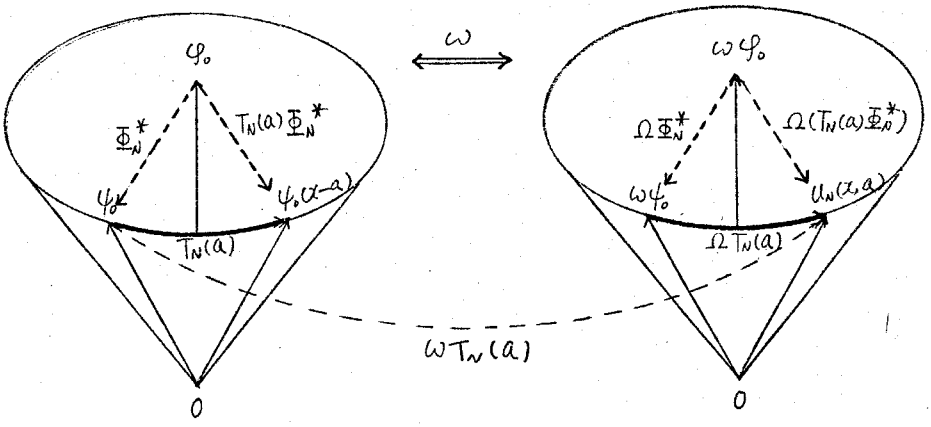


図13.4　$U_N(x,a)$ と $\varphi_0(x-a)$ の関係

と表されるから，式(6.95)より式(13.52)を得る。式(13.43)とP_1の定義より式(13.53)が成立する。式(13.55)に(3.93)を代入し，式(5.95)を使えば，式(13.54)を得る。　(Q.E.D)

式(13.39)～(13.54)を図示すれば，図13.4のようになる。即ち，$\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$は，φ_0を軸とする円錐基底[1]であるが，これをωで変換したものが，$\omega\varphi_0$を軸とする円錐基底$\{U_N(\cdot,a_n)\}_{n=-N}^{N}$になっている(式(13.50)，(13.51))。

全てのφ_nを，φ_0を軸とし，ノルムが常に1になるように滑らかに補間したものが，$\{\varphi_0(x-a)\mid a\in[-\ell,\ell]\}$である。同様に，全ての$U_N(\cdot,a_n)$を，$\omega\varphi_0$を軸とし，ノルムが常に1になるように滑らかに補間すれば，$\{U_N(x,a)\mid a\in[-\ell,\ell]\}$となる(式(13.47)，(13.51))。

φ_0を$T_N(a)$で変換したものが$\varphi_0(x-a)$であるのに対して，$\omega\varphi_0$を$\Omega T_N(a)$で変換したものが，$U_N(x,a)$である(式(13.52))。直接φ_0を$\omega T_N(a)$で変換しても，$U_N(x,a)$になる(式(13.53))。また，φ_0を$T_N(a)\Xi_N^*$で変換したものが$\varphi_0(x-a)$であるのに対して，$\omega\varphi_0$を$\Omega(T_N(a)\Xi_N^*)$で変換したものが，$U_N(x,a)$である(式(13.54))。

13.6 等方ユニタリ作用素の構成法

13.5で折に触れて述べたように、等方ユニタリ作用素の積分核 $\sqrt{2N+1}\,U_N(x,y)$ と、式(9.48)で与えられる二変数関数の間には、密接な関係がある。13.6では、その関係を明らかにし、命題9.6をもとに等方ユニタリ作用素を構成する方法について述べる。

〔命題13.17〕 H_N の正規直交基底 $\{w_n\}_{n=-N}^{N}$ に対して

$$\omega\varphi_n = w_n \qquad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{13.56}$$

となるような実対合 ω が存在する為の必要十分条件は、

$$(\varphi_m, w_n) = (\varphi_n, w_m) \qquad (m,n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{13.57}$$

である。このとき、ω を生成する等方ユニタリ作用素 U_N 及びその積分核 $\sqrt{2N+1}\,U_N(x,y)$ は、

$$U_N = \sum_{n=-N}^{N} \langle \varphi_n, \overline{w_n} \rangle \tag{13.58}$$

$$\sqrt{2N+1}\,U_N(x,y) = \sum_{n=-N}^{N} w_n(x)\varphi_n(y) \tag{13.59}$$

で与えられる。

（証明） まず式(13.57)を満足する正規直交基底 $\{w_n\}_{n=-N}^{N}$ を使い、式(13.58)によって U_N を定義する。この定義式より

$$U_N\overline{w_n} = \varphi_n \qquad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{13.60}$$

となるから、U_N はユニタリ作用素である。式(13.57),(13.58)より

$$U_N = \sum_{m=-N}^{N} \langle \varphi_m, \sum_{n=-N}^{N} \overline{(w_m,\varphi_n)}\varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \langle \sum_{m=-N}^{N} (w_n,\varphi_m)\varphi_m, \varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \langle w_n, \psi_n \rangle$$

$$\therefore \quad U_N = \sum_{n=-N}^{N} \langle w_n, \psi_n \rangle \qquad (13.61)$$

となるから、式(13.58), (13.61)より U_N は等方作用素になる。そこで、U_N によって生成される実対合を ω とすれば、式(13.60), (5.16) より式(13.56)が成立する。式(13.59)は、式(5.30)で $u_n = \psi_n$ とおいたものである。

逆に、式(13.56)が成立したとすれば、命題 5.6 より式(13.57)が成立する。式(13.58), (13.59) は命題 5.7, 命題 6.8 から明らかである。(Q.E.D)

式(3.81), (13.59)より、式(13.50)が成立することは明らかである。式(13.50)を考慮すれば、式(13.59)を次のように解釈することができる。x を任意に固定したとき、点 a_n における値を $U_N(x, a_n) \equiv w_n(x)$ とみなして H_N における標本化定理を適用し、$U_N(x, y)$ を構成したものが、式(13.59)である。即ち、

$$U_N(x, y) \equiv \sum_{n=-N}^{N} (U_N(x, \cdot), \psi_n)\, \psi_n(y) \qquad (13.62)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} U_N(x, a_n)\, \psi_n(y) \qquad (13.63)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} w_n(x)\, \psi_n(y) \qquad (13.64)$$

である。

このような解釈をすれば、何も式(13.57)の条件を $\{w_n\}_{n=-N}^{N}$ が満足していなくても、常に、式(13.59)の形で $\{w_n\}_{n=-N}^{N}$ それについて補間することができるのである。しかし、その場合にはもはや、一般には $U_N(y, x) \neq U_N(x, y)$ となり、$\sqrt{2N+1}\, U_N(x, y)$ を積分核とするユニタリ作用素は、等方にはならないのである。

命題 13.17 の証明から分かるように、式(13.57)が成立することと、式

(13.58) で定義された U_N が等方作用素になることとは、同値である。しかも、式(13.57)は、式(9.50)の特別な場合である。そこで、命題9.6と考慮すれば、次に示すように、等方ユニタリ作用素の一般的構成法を得ることができる。

〔命題13.18〕 全ての m, n に対して

$$(u_m, v_n) = (v_n, u_m) \tag{13.65}$$

となるような二組の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$, $\{v_n\}_{n=-N}^{N}$ を使って

$$U_N \equiv \sum_{n=-N}^{N} < u_n, \bar{v}_n > \tag{13.66}$$

とおけば、U_N は等方ユニタリ作用素になる。更に U_N によって生成される実対合を ω とすれば、全ての n に対して

$$\omega u_n = v_n, \quad \omega v_n = u_n \tag{13.67}$$

となる。

証明は、命題13.17の場合と同様にできる。

命題13.18と式(5.31)より、式(13.66)で与えられる U_N の積分核 $\sqrt{2N+1}\, u_N(x, y)$ は

$$\sqrt{2N+1}\, u_N(x, y) = \sum_{n=-N}^{N} u_n(x) v_n(y) \tag{13.68}$$

となる。従って、命題9.6より $u_N(y, x) = u_N(x, y)$ となるが、これは、式(5.32)で述べたとうりである。つまり、命題9.6は、式(9.48)で与えられる二変数関数を積分核とするような作用素が、等方ユニタリ作用素になる為の必要十分条件を与えていたのである。

複素共役演算、対称演算、双対演算の生成作用素、積分核、$\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 等々を、まとめて表13.1に示す。

表13.1　対合の具体例

名称	ω	Ω	$U_N(x,y)$	u_n	v_n	(u_n, v_n)
複素共役演算	—	—	$\varphi_0(x-y)$	ψ_n	ψ_n	$\delta_{m,n}$
				φ_n	φ_{-n}	$\delta_{m,-n}$
対称演算	$*$	$\star$	$\psi_0(x+y)$	ψ_n	ψ_{-n}	$\delta_{m,-n}$
				φ_n	φ_n	$\delta_{m,n}$
双対演算	$'$	$\#$	$\varphi_N(x,y)$	ψ_n	φ_n	$\overline{\varphi_m(a_m)}/\sqrt{2N+1}$
				φ_n	ψ_n	$\varphi_m(a_n)/\sqrt{2N+1}$

13.7　等方ユニタリ作用素の積分核の実分解(I)

等方ユニタリ作用素 U_N の積分核 $\sqrt{2N+1}\,U_N(x,y)$ は、一般には複素数値関数である。13.7では、この複素数値関数を、

$$\sqrt{2N+1}\,U_N(x,y) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,v_N(x,y) + i\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,w_N(x,y) \tag{13.69}$$

$$v_N(x,y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\{U_N(x,y) + \overline{U_N(x,y)}\} \tag{13.70}$$

$$w_N(x,y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\,i}\{U_N(x,y) - \overline{U_N(x,y)}\} \tag{13.71}$$

と、実部と虚部に分解し、それらのもつ意味について論じることにする。

U_N の実分解を

$$U_N = U_N^{(r)} + i\,U_N^{(i)} \tag{13.72}$$

$$U_N^{(r)} \equiv \frac{1}{2}(U_N + U_N^*),\quad U_N^{(i)} \equiv \frac{1}{2i}(U_N - U_N^*) \tag{13.73}$$

とすれば、式(5.28)に対応して、次の命題が成立する。

〔命題13.19〕

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,v_N(x,y)f(y)dy = U_N^{(r)}f(x) \tag{13.74}$$

$$= U_N P_N^{(+)} f(x) \quad : U_N^4 = E_N \tag{13.75}$$

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,w_N(x,y)f(y)dy = U_N^{(i)}f(x) \tag{13.76}$$

$$= \mp i U_N P_N^{(-)} f(x) \quad : U_N^4 = E_N \tag{13.77}$$

ここで $P_N^{(\pm)}$ は、U_N^2 の固有値 ± 1 に対応する固有空間 $S_\pm$ への射影作用素である。

（証明）　式(5.28), (5.32) より、式(13.74), (13.76) は明らかである。　$U_N^4 = E_N$ のとき、式(6.171), (6.184) より

$$U_N \pm U_N^* = U_N(E_N \pm U_N^2) = 2U_N P_N^{(\pm)}$$

$$\therefore\ U_N \pm U_N^* = 2U_N P_N^{(\pm)} \quad (\text{複号同順}) \tag{13.78}$$

となるから、式(13.75), (13.77) が成立する。　(Q.E.D)

命題13.19 は、式(13.69) で与えられる分解が、U_N の式(13.72) で与えられる実分解に対応していることを意味している。即ち、U_N の実部 $U_N^{(r)}$ の積分核が $\sqrt{(2N+1)/2}\,v_N(x,y)$ であり、虚部 $U_N^{(i)}$ の積分核が $\sqrt{(2N+1)/2}\,w_N(x,y)$ になるのである。

また、$U_N^4 = E_N$ の場合には、式(6.196) に示したように、U_N は

$$U_N = U_N P_N^{(+)} + U_N P_N^{(-)} \tag{13.79}$$

と分解される。$P_N^{(\pm)}$ は U_N^2 の固有空間 $S_\pm$ への射影作用素であるから、$U_N P_N^{(\pm)}$ は U_N の $S_\pm$ への縮少になっている。そして命題13.19 は、$U_N P_N^{(+)}$ の積分核が $\sqrt{(2N+1)/2}\,v_N(x,y)$ であり、$U_N P_N^{(-)}$ の積分核が $i\sqrt{(2N+1)/2}\,w_N(x,y)$ になることを示している。

$u_N(x,y)$ を二変数 x と y の関数とみなしたものが、これまでの議論であった。では、a をパラメータとして、x だけの関数 $u_N(x,a)$ とみなした

場合、式(13.69)の分解は、どのような意味をもつであろうか。以下それを述べる。

まず、命題13.14より

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{2N+1}\,U_N(x-y,a)f(y)dy=(\omega T_N(a))f(x) \tag{13.80}$$

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{2N+1}\,U_N(x+y,a)f(y)dy=(\omega I_N(\tfrac{1}{2}a))f(x) \tag{13.81}$$

となる。従って、次の命題が成立する。

〔命題13.20〕

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,V_N(x-y,a)f(y)dy=\frac{1}{2}(\omega T_N(a)+\overline{\omega T_N(a)})f(x) \tag{13.82}$$

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,W_N(x-y,a)f(y)dy=\frac{1}{2i}(\omega T_N(a)-\overline{\omega T_N(a)})f(x) \tag{13.83}$$

式(13.69)で $y=a$ とおけば

$$\sqrt{2N+1}\,U_N(x,a)=\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,V_N(x,a)+i\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,W_N(x,a) \tag{13.84}$$

となる。命題13.20は、この分解が、$\omega T_N(a)$ の Ω_e-実分解

$$\omega T_N(a)=\frac{1}{2}(\omega T_N(a)+\overline{\omega T_N(a)})+i\frac{1}{2i}(\omega T_N(a)-\overline{\omega T_N(a)}) \tag{13.85}$$

に対応していることを、意味している。即ち、$\omega T_N(a)$ の Ω_e-実部 $(\omega T_N(a)+\overline{\omega T_N(a)})/2$ のインパルス応答が $\sqrt{(2N+1)/2}\,V_N(x,a)$ であり、Ω_e-虚部 $(\omega T_N(a)-\overline{\omega T_N(a)})/2i$ のインパルス応答が $\sqrt{(2N+1)/2}\,W_N(x,a)$ となるのである。

式(13.81)から同様にして

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,V_N(x+y,a)f(y)dy=\frac{1}{2}(\omega I_N(\tfrac{1}{2}a)+\overline{\omega I_N(\tfrac{1}{2}a)})f(x) \tag{13.86}$$

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,W_N(x+y,a)f(y)dy=\frac{1}{2i}(\omega I_N(\tfrac{1}{2}a)-\overline{\omega I_N(\tfrac{1}{2}a)})f(x) \tag{13.87}$$

なる関係を得る。式(13·86),(13·87)は、式(13·84)で与えられる分解が
$\omega I_N(\frac{1}{2}a)$ の Ω_e - 実分解

$$\omega I_N(\tfrac{1}{2}a) = \frac{1}{2}(\omega I_N(\tfrac{1}{2}a) + \overline{\omega I_N(\tfrac{1}{2}a)}) + i\frac{1}{2i}(\omega I_N(\tfrac{1}{2}a) - \overline{\omega I_N(\tfrac{1}{2}a)}) \quad (13\cdot88)$$

に対応していることを、意味している。

即ち、式(13·84)の両辺の ρ_1^{-1} をとれば式(13·85)になり、ρ_2^{-1} をとれば、式(13·88)になるのである。このように、$\sqrt{2N+1}\,U_N(x,y)$ の分解に対して、ρ_1^{-1} をとる場合と ρ_2^{-1} をとる場合が平行して議論できるので、以下ではもっぱら、ρ_1^{-1} をとる場合についてのみ論じることにする。

次に、式(13·84)の両辺に ω を作用させた式

$$\sqrt{2N+1}\,\psi_0(x-a) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,\omega v_N(x,a) - i\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,\omega w_N(x,a) \quad (13\cdot89)$$

の意味づけを行なう。

〔命題 13·21〕

$$\omega v_N(x,a) = \sqrt{2}\,U_N^{(r)} U_N T_N(a)\psi_0(x) \quad (13\cdot90)$$

$$= \sqrt{2}\,P_N^{(+)} T_N(a)\psi_0(x) \quad ; U_N^4 = E_N \quad (13\cdot91)$$

$$\omega w_N(x,a) = \sqrt{2}\,U_N^{(i)} U_N T_N(a)\psi_0(x) \quad (13\cdot92)$$

$$= i\sqrt{2}\,P_N^{(-)} T_N(a)\psi_0(x) \quad ; \quad U_N^4 = E_N \quad (13\cdot93)$$

(証明) 式(13·70),(13·40),(5·87),(13·73)より

$$\sqrt{2}\,\omega v_N(x,a) = \omega u_N(x,a) + \omega\omega_e u_N(x,a)$$

$$= \psi_0(x-a) + (\omega\cdot\omega_e)\omega u_N(x,a)$$

$$= \psi_0(x-a) + U_N^2\psi_0(x-a)$$

$$= (E_N + U_N^2)\, T_N(a)\, \psi_0(x) \qquad (13\cdot 94)$$

$$= (U_N + U_N^*)\, U_N T_N(a)\, \psi_0(x)$$

$$= 2\, U_N^{(r)} U_N\, T_N(a)\, \psi_0(x)$$

となり、式(13・90) が成立する。$U_N^4 = E_N$ のとき、式(13・94) と(6.184) より、式(13・91) を得る。式(13・92), (13・93) も同様に証明できる。(Q.E.D)

命題13・21 より、$U_N^4 = E_N$ の場合の $\omega v_N(x,a)$, $\omega w_N(x,a)$ の幾何学的イメージが非常にはっきりとしてくる。即ち、$\omega v_N(x,a)$ は $\psi_0(x-a)$ を S_+ へ射影したものの $\sqrt{2}$ 倍であり、$\omega w_N(x,a)$ は $\psi_0(x-a)$ を S_- へ射影したものの $i\sqrt{2}$ 倍である。

〔命題13・22〕

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\, \omega v_N(x,y) f(y)\, dy = U_N^{(r)} U_N f(x) \qquad (13\cdot 95)$$

$$= P_N^{(+)} f(x) \quad : U_N^4 = E_N \qquad (13\cdot 96)$$

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\, \omega w_N(x,y) f(y)\, dy = U_N^{(i)} U_N f(x) \qquad (13\cdot 97)$$

$$= i P_N^{(-)} f(x) \quad : U_N^4 = E_N \qquad (13\cdot 98)$$

(証明) 式(13・90) と命題3・8 より式(13・95) は明らかである。$U_N^4 = E_N$ のとき式(13・95) の右辺は、式(6.184) より式(13・96) となる。式(13・97), (13・98) も同様に証明できる。(Q.E.D)

恒等作用素 E_N を

$$E_N = U_N^* U_N \qquad (13\cdot 99)$$

の形に表し、更に U_N^* を 式(13・72) の形式に実分解すれば"

$$E_N = U_N^{(r)} U_N - i\, U_N^{(i)} U_N \qquad (13\cdot 100)$$

となる。命題 13.22 は、E_N の積分核 $\sqrt{2N+1}\,\psi_0(x-y)$ の式(13.89)の分解が E_N の式(13.100)の分解に対応していることと 意味している。

また、$U_N^4 = E_N$ の場合には、E_N は

$$E_N = P_N^{(+)} + P_N^{(-)} \tag{13.101}$$

と分解される。式(13.96), (13.98) は、式(13.89)の分解が、式(13.101)に対応していることを意味している。即ち、$\sqrt{2N+1}\,\psi_0(x-y)$ が H_N の再生核であったのに対して、$U_N^4 = E_N$ の場合には、$\sqrt{(2N+1)/2}\,\omega v_N(x,y)$ および $i\sqrt{(2N+1)/2}\,\omega w_N(x,y)$ が、U_N^2 の固有空間 S_+ および S_- の再生核になっているのである。

$U_N^4 = E_N$ のとき、$T_N(a)$ の命題 13.12 による直和分解と、

$$\begin{cases} T_N(a) = T_N^{(+)}(a) + T_N^{(-)}(a) & (13.102) \\ T_N^{(\pm)}(a) \equiv \frac{1}{2}\left(T_N(a) \pm (\omega\omega_e)^2 T_N(a)\right) & (13.103) \end{cases}$$

とする。式(13.103), (13.4)より

$$\omega T_N^{(\pm)}(a) = \frac{1}{2}\left(\omega T_N(a) \pm \overline{\omega T_N(a)}\right) \tag{13.104}$$

となるから、式(13.102)の両辺に ω を作用させれば、式(13.85)になる。即ち、$(\omega\omega_e)^2$ の固有空間への $T_N(a)$ の直和分解と、$\omega T_N(a)$ の ω_e 実分解が、互いに ω によって結ばれているのである。

従って、命題 13.20 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 13.23〕 $U_N^4 = E_N$ のとき、次の関係が成立する。

$$S_1\left(T_N^{(+)}(a)\right) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,\omega v_N(x,a) \tag{13.105}$$

$$S_1\left(T_N^{(-)}(a)\right) = -i\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,\omega w_N(x,a) \tag{13.106}$$

表13.2　$U_N(x,a)$ の実分解と $\psi_0(x-a)$ の偶－奇分解（$U_N^4 = E_N$）

$$U_N = U_N^{(r)} + iU_N^{(i)} \qquad (13.72)$$

$$\sqrt{2N+1}\,U_N(x,a) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,v_N(x,a) + i\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,w_N(x,a) \qquad (13.69)$$

$$\omega T_N(a) = \frac{1}{2}\left(\omega T_N(a) + \overline{\omega T_N(a)}\right) + i\frac{1}{2i}\left(\omega T_N(a) - \overline{\omega T_N(a)}\right) \qquad (13.85)$$

$$T_N(a) = T_N^{(+)}(a) + T_N^{(-)}(a) \qquad (13.102)$$

$$\sqrt{2N+1}\,\psi_0(x-a) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,\omega v_N(x,a) - i\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,\omega w_N(x,a) \qquad (13.89)$$

$$E_N = P_N^{(+)} + P_N^{(-)} \qquad (13.101)$$

ω命題 13.13

以上の関係を、$U_N^4 = E_N$ の場合についてまとめれば、表13.2のようになる。

13.8　等方ユニタリ作用素の積分核の実分解（II）

13.7に引続き、$U_N(x,a)$ を実分解して得られる関数 $v_N(x,a)$, $w_N(x,a)$ 及びそれらを ω で変換した関数 $\omega v_N(x,a)$, $\omega w_N(x,a)$ のもつ性質と、よ

り細かく調べていく。13.7 と同じく、$U_N^4 = E_N$ の場合、U_N^2 の固有値 ± 1 に対応する固有空間を $S_\pm$ とし、$S_\pm$ への射影作用素を $P_N^{(\pm)}$ で表す。

〔命題 13.24〕 $U_N^4 = E_N$ ならば、次の関係が成立する。

$$v_N(x,a) \in S_+ \quad , \quad w_N(x,a) \in S_- \tag{13.107}$$

$$\omega v_N(x,a) \in S_+ \quad , \quad \omega w_N(x,a) \in S_- \tag{13.108}$$

（証明） 式(13.70), (6.172), (13.40)～(13.42) より

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\, U_N^2 v_N(x,a) &= U_N^2 u_N(x,a) + U_N^2 \overline{u_N(x,a)} \\
&= U_N^{*2} u_N(x,a) + U_N \omega u_N(x,a) \\
&= U_N^* \psi_0(x-a) + U_N \psi_0(x-a) \\
&= \overline{U_N \psi_0(x-a)} + U_N \psi_0(x-a) \\
&= \overline{u_N(x,a)} + u_N(x,a) \\
&= \sqrt{2}\, v_N(x,a)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad U_N^2 v_N(x,a) = v_N(x,a) \tag{13.109}$$

となり、式(13.107)のオ一式を得る。オ二式も同様に証明できる。式(13.108)は、式(13.107), (6.195) と命題 6.27 より明らかである。 (Q.E.D)

式(5.32), (13.70), (13.71) より、$v_N(x,y)$, $w_N(x,y)$ は x, y に関して対称である。しかし、$\omega v_N(x,y)$, $\omega w_N(x,y)$ が対称になるかどうかは、一般には分らない。ところが、次の補題を使えば、$U_N^4 = E_N$ の場合に、$\omega v_N(x,y)$, $\omega w_N(x,y)$ が対称になることと、結論することができる。

〔補題 13.3〕 H_N の部分空間 S の再生核を $K(x,y)$ とする。$\omega S = S$ が成立する為の必要十分条件は、

$$\overline{K(x,y)} = K(x,y) \tag{13.110}$$

である。そしてこのとき、$K(x,y)$ は対称になる:

$$K(y,x) = K(x,y) \tag{13.111}$$

（証明）　S への射影作用素を P_N とすれば

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} K(x,y) f(y)\, dy \tag{13.112}$$

であるから、$\overline{P_N}$ の積分核は $\overline{K(x,y)}$ となる。従って、命題5.24より、$We\,S = S$ となる為の必要十分条件が、式(13.110)で与えられることが分かる。式(2.6)，(13.110)より式(13.111)は明らかである。　(Q.E.D)

〔命題 13.25〕　$U_N^4 = E_N$ ならば次の関係が成立する。

$$\omega v_N(y,x) = \omega v_N(x,y)\ ,\quad \omega w_N(y,x) = \omega w_N(x,y) \tag{13.113}$$

$$\overline{\omega v_N(x,y)} = \omega v_N(x,y)\ ,\quad \overline{\omega w_N(x,y)} = -\omega w_N(x,y) \tag{13.114}$$

ここで $\omega v_N(y,x)$ は、x の関数としての $v_N(x,y)$ を ω で変換し、その後で x と y を入れ換えたものである。$\omega w_N(y,x)$ についても同様である。

（証明）　U_N^2 も等方ユニタリ作用素であるから、命題6.27より、$We\,S_\pm = S_\pm$ となる。しかも、13.7で述べたように、$\sqrt{(2N+1)/2}\,\omega v_N(x,y)$ 及び $i\sqrt{(2N+1)/2}\,\omega w_N(x,y)$ は、それぞれ S_+ 及び S_- の再生核になっている。従って、補題13.3より式(13.113)，(13.114)が成立する。　(Q.E.D)

〔命題 13.26〕　$U_N^4 = E_N$ とし、S_+ 及び S_- の任意の正規直交基底とそれぞれ $\{v_n\}_{n=-N}^{N}$，$\{w_n\}_{n=-N}^{N}$ とすれば、次の関係が成立する。

$$\left\{ v_N(x,y) = \sqrt{\frac{2}{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} (\omega v_n)(x)\, v_n(y) \right. \tag{13.115}$$

$$\begin{cases} w_N(x,y) = \dfrac{1}{i}\sqrt{\dfrac{2}{2N+1}}\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}(w v_n)(x)\,v_n(y) & (13.116) \\ w v_N(x,y) = \sqrt{\dfrac{2}{2N+1}}\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} v_n(x)\,\overline{v_n(y)} & (13.117) \\ w w_N(x,y) = i\sqrt{\dfrac{2}{2N+1}}\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} w_n(x)\,\overline{w_n(y)} & (13.118) \end{cases}$$

（証明） $\sqrt{(2N+1)/2}\,w v_N(x,y)$ 及び $\bar{i}\sqrt{(2N+1)/2}\,w w_N(x,y)$ は、それぞれ S_+ 及び S_- の再生核であるから、命題 2.1 より式(13.117),(13.118) は明らかである。これらの式の両辺に w を作用させれば、式(13.115),(13.116) になる。 (Q.E.D)

〔命題 13.27〕 $U_N^4 = E_N$ ならば、次の関係が成立する。

$$(v_N(\cdot,a), v_N(\cdot,b)) = (w v_N(\cdot,a), w v_N(\cdot,b)) \quad (13.119)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2N+1}}\,w v_N(a,b) \quad (13.120)$$

$$(w_N(\cdot,a), w_N(\cdot,b)) = (w w_N(\cdot,a), w w_N(\cdot,b)) \quad (13.121)$$

$$= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{2N+1}}\,w w_N(a,b) \quad (13.122)$$

（証明） $v_N(\cdot,a)$ は全ての a に対して実数値関数であるから、式(13.119) は明らかである。$\sqrt{(2N+1)/2}\,w v_N(\cdot,b)$ は S_+ の再生核であるから、式(2.6) より 式(13.120) が成立する。式(13.121),(13.122) も同様に証明できる。 (Q.E.D)

第14節　有限Fourier変換作用素

14.1　まえがき

次節で，空間回路網の空間周波数特性と結合特性の関係，結合特性の次元独立性等について論じる。これらの議論の主要な武器になるのが，式(3.91)で定義した有限Fourier変換作用素 $\mathfrak{F}_N$ によって生成される双対演算（式(5.5)）である。オ16節では，この双対演算を使って $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と双対な空間 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ 及び $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と双対な空間 $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ を定義し，その構造を解明する。また，20.2 で論じるように，標本点上で与えられた関数の補間表示装置を設計する場合にも $\mathfrak{F}_N$ の実分解が利用される。

そこで本節では，これらの問題に対する準備として，有限Fourier変換作用素 $\mathfrak{F}_N$ の性質について，詳細に論じることにする。

14.2　有限Fourier変換作用素 $\mathfrak{F}_N$

有限Fourier変換作用素（finite Fourier transform）$\mathfrak{F}_N$ とは，式(3.91)で定義したように

$$\mathfrak{F}_N \equiv \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m,n=-N}^{N} \varphi_n(a_m) \langle \psi_m, \psi_n \rangle \tag{14.1}$$

によって与えられる H_N からそれ自身の上へのユニタリ作用素である。ここで a_m は，式(3.72)で与えられる標本点の値である。$\mathfrak{F}_N$ の結合特性 $\mathfrak{F}_N = (\!(\hat{\mathfrak{F}}_N(m,n))\!)$ は，式(14.1)から明らかなように，

$$\hat{\mathfrak{F}}_N(m,n) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \varphi_n(a_m) \quad (m,n = -N, -N+1, \cdots, N) \tag{14.2}$$

となる。

今、$f \in H_N$ に対して $g \equiv \mathbb{T}_N^* f$ とおけば、式(3.92)より

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}} g(a_n) = (f, \varphi_n) \tag{14.3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} \overline{\varphi_m(a_n)} \frac{1}{\sqrt{2N+1}} f(a_m) \tag{14.4}$$

となる。式(14.3),(14.4)より、通常、離散的Fourier変換(discrete Fourier transform)或いは有限Fourier変換(finite Fourier transform)と呼ばれているものが、$\mathbb{T}_N$ の結合特性 $\langle\!\langle \overline{\varphi_m(a_n)}/\sqrt{2N+1} \rangle\!\rangle$ であることが分かる。[11] そこで本論文では有限Fourier変換といえば、関数を関数に変換する作用素 $\mathbb{T}_N$ を意味し、離散的Fourier変換といえば、ベクトルをベクトルに変換する行列($\langle\!\langle \overline{\varphi_m(a_n)}/\sqrt{2N+1} \rangle\!\rangle$)を意味するものとして、これらの用語を使い分けることにする(図14.1参照)。*

$\mathbb{T}_N$ は、式(4.53)に示したように、等方作用素であるから

$$\overline{\mathbb{T}_N} = \mathbb{T}_N^* = \mathbb{T}_N^{-1} \tag{14.5}$$

となる。$\mathbb{T}_N$ によって生成される実対合、共変対合と、式(5.5)に示したように、

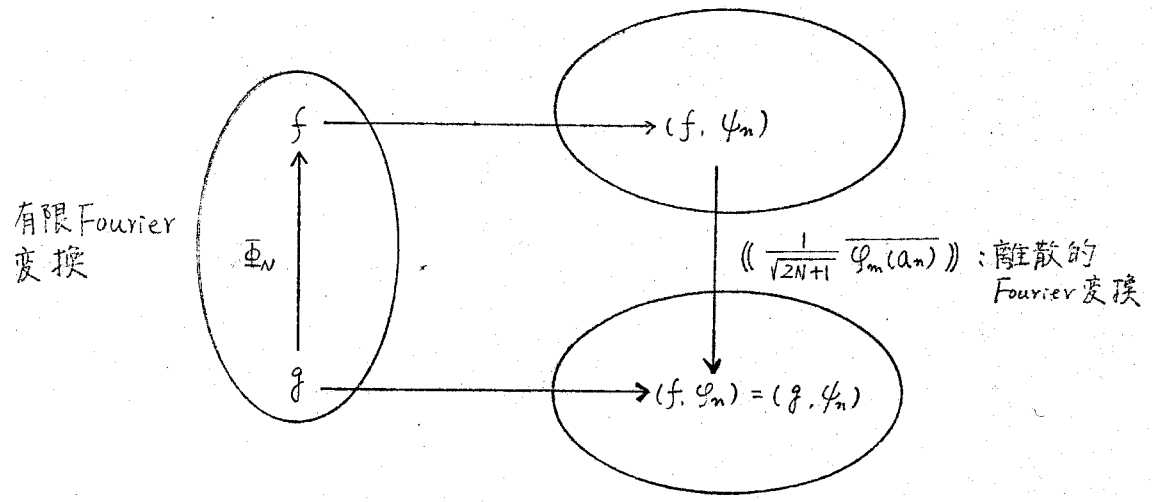


図14.1　有限Fourier変換と離散的Fourier変換

---

* 有限Fourier変換と離散的Fourier変換では、変換の方向が逆になっている。

$$f' \equiv \mathbf{E}_N \bar{f} \quad , \quad A_N^{\#} \equiv \mathbf{E}_N \bar{A}_N \mathbf{E}_N^{*} \tag{14.6}$$

と表し、双対演算と呼ぶ。式(3.92), (3.93)より

$$\varphi_n = \mathbf{E}_N \psi_n \quad , \quad \psi_n = \mathbf{E}_N^{*} \varphi_n \tag{14.7}$$

であるから、式(13.1)に示したように

$$\psi_n' = \varphi_n \quad , \quad \varphi_n' = \psi_n \tag{14.8}$$

となっている。従って、命題5.4で $u_n = \varphi_n$ とおけば、命題5.5より、次の命題が成立する。

〔命題 14.1〕

$$\mathbf{E}_N = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m,n=-N}^{N} \varphi_m(a_n) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle \tag{14.9}$$

命題14.1は、$\mathbf{E}_N$ の空間周波数特性が、$\mathbf{E}_N$ の結合特性と全く同じ行列になることを、意味している。

式(14.7), (14.8)より、式(5.39)に示したように

$$\mathbf{E}_N \varphi_n = \psi_{-n} \quad , \quad \mathbf{E}_N^{*} \psi_n = \varphi_{-n} \tag{14.10}$$

となるから、式(14.7), (14.10)より、次の系が成立する。

〔系 14.1〕

$$\mathbf{E}_N = \sum_{n=-N}^{N} \langle \varphi_n, \psi_n \rangle \tag{14.11}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \langle \psi_n, \varphi_{-n} \rangle \tag{14.12}$$

式(14.11), (14.12)は、式(5.26)でそれぞれ $u_n = \psi_n$, $u_n = \varphi_n$ とお

いたものになっている。

式(14.7), (14.10)より、次の命題が成立する。

〔命題 14.2〕

$$\mathfrak{T}_N^2 = I_N(0), \quad \mathfrak{T}_N^4 = E_N \tag{14.13}$$

命題 14.2 より直ちに、次の関係が成立する。

$$(\mathfrak{T}_N^*)^2 = I_N(0) \tag{14.14}$$

$$I_N(0)\,\mathfrak{T}_N = \mathfrak{T}_N I_N(0) = \mathfrak{T}_N^* \tag{14.15}$$

$$I_N(0)\,\mathfrak{T}_N^* = \mathfrak{T}_N^* I_N(0) = \mathfrak{T}_N \tag{14.16}$$

原点に関する反転作用素 $I_N(0)$ によって生成される実対合，共変対合と、式(5.12)に示したように、

$$f^* \equiv I_N(0)\,\bar{f}, \quad A_N^{\star} \equiv I_N(0)\,\bar{A}_N\,I_N(0) \tag{14.17}$$

と表し、対称演算と呼ぶ。命題 6.25 と式(14.5), (14.13), (5.144)より、次の命題が成立する。

〔命題 14.3〕

$$\mathfrak{T}_N^{\#} = \mathfrak{T}_N^{\star} = \overline{\mathfrak{T}}_N = \mathfrak{T}_N^* = \mathfrak{T}_N^{-1} \tag{14.18}$$

式(14.18)より、$\mathfrak{T}_N$ が等方ユニタリ作用素であるばかりでなく、偶作用素でもあることが分かる。

〔補題 14.1〕

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(a_n) = \begin{cases} 1 & (N: \text{偶数}) \\ i & (N: \text{奇数}) \end{cases} \tag{14.19}$$

（証 明）

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \sin\frac{2\pi n^2}{N} = \frac{\sqrt{N}}{2}\left(1+\cos\frac{N\pi}{2}-\sin\frac{N\pi}{2}\right) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \cos\frac{2\pi n^2}{N} = \frac{\sqrt{N}}{2}\left(1+\cos\frac{N\pi}{2}-\sin\frac{N\pi}{2}\right)-1 \end{cases} \tag{14.20}$$

〔文献(2), P.13〕より

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \sin\frac{2\pi n^2}{2N+1} = \frac{\sqrt{2N+1}}{2}\left(1-(-1)^N\right) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \cos\frac{2\pi n^2}{2N+1} = \frac{\sqrt{2N+1}}{2}\left(1+(-1)^N\right)-1 \end{cases} \tag{14.21}$$

である。ところで

$$(N+n)^2 = (2n-1)(2N+1)+\{N-(n-1)\}^2 \tag{14.22}$$

であるから

$$\begin{cases} \sin\dfrac{2\pi(N+n)^2}{2N+1} = \sin\dfrac{2\pi\{N-(n-1)\}^2}{2N+1} \\ \cos\dfrac{2\pi(N+n)^2}{2N+1} = \cos\dfrac{2\pi\{N-(n-1)\}^2}{2N+1} \end{cases} \tag{14.23}$$

となる。従って、式(14.21), (14.23)より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}\varphi_n(a_n) &= \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}\exp\left(i\frac{2\pi n^2}{2N+1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\left\{1+2\sum_{n=1}^{N}\left(\cos\frac{2\pi n^2}{2N+1}+i\sin\frac{2\pi n^2}{2N+1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\left\{1+\sum_{n=1}^{2N}\left(\cos\frac{2\pi n^2}{2N+1}+i\sin\frac{2\pi n^2}{2N+1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\left\{\frac{\sqrt{2N+1}}{2}\left(1+(-1)^N\right)+i\frac{\sqrt{2N+1}}{2}\left(1-(-1)^N\right)\right\} \\ &= \frac{1+(-1)^N}{2}+i\frac{1-(-1)^N}{2} \end{aligned} \tag{14.24}$$

となり、式(14.19)が成立する。 (Q.E.D)

〔命題 14.4〕

$$tr(\mathfrak{T}_N) = \begin{cases} 1 & (N: \text{偶数}) \\ i & (N: \text{奇数}) \end{cases} \tag{14.25}$$

（証明） 式(3.32), (14.7)より

$$tr(\mathfrak{T}_N) = \sum_{n=-N}^{N} (\mathfrak{T}_N \psi_n, \psi_n) = \sum_{n=-N}^{N} (\varphi_n, \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(a_n)$$

となるから、補題 14.1 より式(14.25) が成立する。 (Q.E.D)

14.3 $\mathfrak{T}_N$ の固有空間 $H_N^{(\lambda)}$

〔命題 14.5〕 $\mathfrak{T}_N$ の固有値は、重複度まで含めて、i^n $(n=0,1,2,\cdots,2N)$ である。

（証明） $\mathfrak{T}_N$ の固有値を λ とすれば、式(14.13) の才＝式より $\lambda^4 = 1$ となる。更に、式(14.13) の才－式から $\lambda^2 = 1$ 及び $\lambda^2 = -1$ に対応する固有空間は $H_N^{(e)}$ 及び $H_N^{(o)}$ になり、それらの空間の次元は、それぞれ $N+1$ 及び N になる。従って、命題 14.4 より、命題 14.5 が成立する。(Q.E.D)

$\mathfrak{T}_N$ の固有値 λ に対応する固有空間を $H_N^{(\lambda)}$ とすれば、$\mathfrak{T}_N$ のユニタリ性より、$\lambda \neq \mu$ のとき $H_N^{\lambda} \perp H_N^{\mu}$ となる。更に、式(6.195), (14.13) より、次の命題が成立する。

〔命題 14.6〕

$$H_N = H_N^{(e)} \oplus H_N^{(o)} . \tag{14.26}$$

$$H_N^{(e)} = H_N^{(1)} \oplus H_N^{(-1)} \tag{14.27}$$

$$H_N^{(o)} = H_N^{(i)} \oplus H_N^{(-i)} \tag{14.28}$$

但し、$N=0$ のとき $H_N^{(\lambda)} = \{0\}$ $(\lambda \neq 1)$, $N=1$ のとき $H_N^{(-i)} = \{0\}$ である。

命題 14.6 を図示すれば、図 14.2 のようになる。つまり、$H_N^{(\pm 1)}$ の元

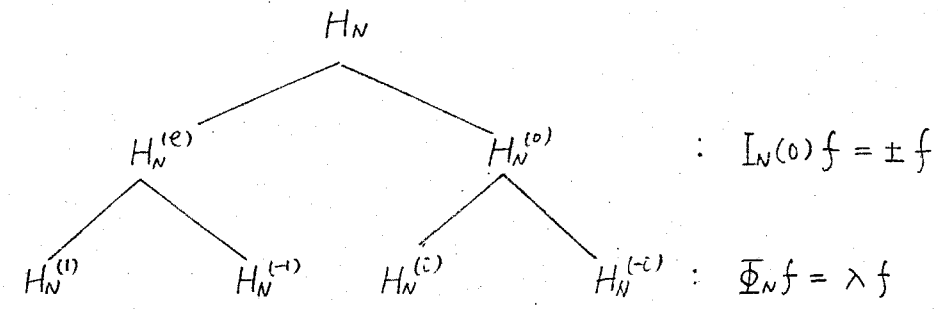


図 14.2　$\mathcal{F}_N$ 及び $I_N(0)$ による空間 H_N の直和分解

は全て偶関数であり、$H_N^{(\pm i)}$ の元は全て奇関数である。

命題 6.29 より、次の命題が成立する。

〔命題 14.7〕　$f \in H_N^{(\lambda)}$ となる為の必要十分条件は、任意の $g \in H_N$ に対して

$$(f, g) = \lambda (f, \mathcal{F}_N g) \tag{14.29}$$

となることである。

命題 14.7 で特に $g = \varphi_n$ とおけば、式(14.7)より次の系が成立する。

〔系 14.2〕　$f \in H_N^{(\lambda)}$ となる為の必要十分条件は、全ての n に対して

$$(f, \varphi_n) = \lambda (f, \varphi_n) \tag{14.30}$$

が成立することである。

式(14.30)は、$\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ が標本化基底でないにもかかわらず、$f \in H_N^{(\lambda)}$ ならば

$$f(x) = \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} f(a_n) \varphi_n(x) \quad : f \in H_N^{(\lambda)} \tag{14.31}$$

と、f と、その標本値 $\{f(a_n)\}_{n=-N}^{N}$ と基本座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ を使って再構成できることを意味している。

更に命題 14.6 を考慮すれば、次の系が成立することが分かる。

〔 系 14.3 〕 $H_N^{(\lambda)}$ の元に対して、次の標本化定理が成立する。*

$$f(x) = \pm \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\frac{\epsilon_n}{2N+1}}\, f(a_n) C_n(x) \quad : f \in H_N^{(\pm 1)} \tag{14.32}$$

$$f(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{2N+1}} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) \Delta_n(x) \quad : f \in H_N^{(\pm \circ)} \tag{14.33}$$

但し、複号同順である。

（証 明） 式(7.115)より

$$C_n = \sqrt{\epsilon_n}\, E_N^{(e)} \varphi_n \tag{14.34}$$

であるから、式(14.27), (14.30)より、$f \in H_N^{(\pm 1)}$ に対して

$$(f, C_n) = \sqrt{\epsilon_n}\,(f, E_N^{(e)} \varphi_n) = \sqrt{\epsilon_n}\,(E_N^{(e)} f, \varphi_n)$$

$$= \sqrt{\epsilon_n}\,(f, \varphi_n) = \pm \sqrt{\epsilon_n}\,(f, \psi_n) = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_n}{2N+1}}\, f(a_n)$$

となり、式(14.32)が成立する。式(14.33)も同様に証明できる。 (Q.E.D)

空間 $H_N^{(e)}$ 及び $H_N^{(o)}$ の基本座標系 $\{C_n\}_{n=0}^{N}$ 及び $\{\Delta_n\}_{n=1}^{N}$ は、本来、標本化基底ではない。ところが、関数集合と、部分空間 $H_N^{(\pm 1)}$ 及び $H_N^{(\pm \circ)}$ に限定すれば、系14.3が主張しているように、$\{C_n\}_{n=0}^{N}$ 及び $\{\Delta_n\}_{n=1}^{N}$ が、標本化関数の働きをすることになるのである。

このように興味深い現象が生じるのは、命題6.28があるからである。即ち、$H_N^{(\lambda)}$ への射影作用素を $E_N^{(\lambda)}$ とすれば、次の命題が成立するのである。

〔 命題 14.8 〕

$$E_N^{(\lambda)} \varphi_n = \lambda E_N^{(\lambda)} \psi_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N) \tag{14.35}$$

$$E_N^{(\pm 1)} C_n = \pm \sqrt{\epsilon_n}\, E_N^{(\pm 1)} \psi_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N) \tag{14.36}$$

$$E_N^{(\pm \circ)} \Delta_n = \pm \sqrt{2}\, E_N^{(\pm \circ)} \psi_n \quad (n = 1, 2, \cdots, N) \tag{14.37}$$

---

* この性質は、20.2で論じる標本点上で与えられた関数の補間表示装置を作製する際に、有効に利用される。

（証明）　式（14.35）は命題6.28から明らかである。式（14.34），（14.35）（14.27）より

$$E_N^{(\pm 1)} c_n = \sqrt{\epsilon_n}\, E_N^{(\pm 1)} E_N^{(e)} \varphi_n = \sqrt{\epsilon_n}\, E_N^{(\pm 1)} \varphi_n = \pm \sqrt{\epsilon_n}\, E_N^{(\pm 1)} \psi_n$$

となり、式（14.36）が成立する。式（14.37）も同様に証明できる。　（Q.E.D）

つまり、φ_n と ψ_n の $H_N^{(\lambda)}$ への射影成分、c_n と ψ_n の $H_N^{(\pm 1)}$ への射影成分、及び s_n と ψ_n の $H_N^{(\pm i)}$ への射影成分は、それぞれ定数倍を除いて、一致してしまうのである。* これらの射影成分の具体的な形については、14.5で論じる。

14.4　$\mathfrak{T}_N$ の固有空間 $H_N^{(\lambda)}$ への射影作用素

14.3では、空間 H_N が $\mathfrak{T}_N$ の固有空間 $H_N^{(\lambda)}$ によって直和分解されることを示し、$H_N^{(\lambda)}$ の性質について論じてきた。14.4では、この直和分解を行なう為の具体的方法、即ち、$H_N^{(\lambda)}$ への射影作用素 $E_N^{(\lambda)}$ の具体的な形を求めることにする。

まず、式（12.101）より

$$E_N^{(e)} = \frac{1}{2}(E_N + I_N(0)),\quad E_N^{(o)} = \frac{1}{2}(E_N - I_N(0)) \tag{14.38}$$

である。そして、命題6.35より、次の命題が成立する。

〔命題 14.9〕

$$E_N^{(\lambda)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} (\bar{\lambda})^n \mathfrak{T}_N^n \tag{14.39}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} \lambda^n (\mathfrak{T}_N^*)^n \tag{14.40}$$

$$= \frac{1}{4}(E_N + \lambda^2 I_N(0) + \bar{\lambda}\mathfrak{T}_N + \lambda \mathfrak{T}_N^*) \tag{14.41}$$

---

*　次21節で論じる擬似直交性理論の言葉を使えば、命題14.8の性質を、次のように表現することができる。$\{\lambda E_N^{(\lambda)} \varphi_n\}_{n=-N}^{N}$，$\{\pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} E_N^{(\pm 1)} c_n\}_{n=0}^{N}$，及び $\{\pm \frac{1}{\sqrt{2}} E_N^{(\pm i)} s_n\}_{n=1}^{N}$ は、それぞれ空間 $H_N^{(\lambda)}$，$H_N^{(\pm 1)}$，及び $H_N^{(\pm i)}$ の擬似直交標本化基底である。

$$E_N^{(\pm 1)} = \frac{1}{2} E_N^{(e)} (E_N \pm \mathcal{R}_N) \tag{14.42}$$

$$= \frac{1}{2} E_N^{(e)} (E_N \pm \mathcal{R}_N^*) \tag{14.43}$$

$$E_N^{(\pm 1)} = \frac{1}{2} E_N^{(o)} (E_N \mp i \mathcal{R}_N) \tag{14.44}$$

$$= \frac{1}{2} E_N^{(o)} (E_N \pm i \mathcal{R}_N^*) \tag{14.45}$$

式(14.40), (14.41)より、$E_N^{(\lambda)}$ が $\mathcal{R}_N$ の多項式及び $\mathcal{R}_N^*$ の多項式で表されることが分かる。式(14.42)は、$f \in H_N$ の $H_N^{(\pm 1)}$ への射影成分が、f の偶関数成分と $\mathcal{R}_N f$ の偶関数成分の和の $\frac{1}{2}$ 倍、及び差の $\frac{1}{2}$ 倍になることを意味している。式(14.43)～(14.45)も同様に解釈できる。

命題6.26より、次の命題が成立する。

〔命題 14.10〕

$$\overline{E_N^{(\lambda)}} = E_N^{(\lambda)*} = E_N^{(\lambda)\star} = E_N^{(\lambda)\#} = E_N^{(\lambda)} \tag{14.46}$$

つまり、射影作用素 $E_N^{(\lambda)}$ は、実等方偶作用素になるのである。特に $E_N^{(\lambda)}$ が実作用素であるということは、実数値関数 $f \in H_N$ の $H_N^{(\lambda)}$ への射影成分が、やはり実数値関数になるということであり、また $E_N^{(\lambda)}$ の結合特性が実行列になるということである。

〔補題 14.2〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して、次の同値関係が成立する。

$$A_N I_N(0) = \lambda A_N \iff \hat{A_N}(m,-n) = \lambda \hat{A_N}(m,n) \tag{14.47}$$

$$I_N(0) A_N = \lambda A_N \iff \hat{A_N}(-m,n) = \lambda \hat{A_N}(m,n) \tag{14.48}$$

(証明) $A_N I_N(0) = \lambda A_N$ とすれば、式(3.104), (3.82)より、

$$\hat{A_N}(m,-n) = (A_N \psi_{-n}, \psi_m) = (A_N I_N(0) \psi_n, \psi_m)$$

$$= \lambda (A_N \psi_n, \psi_m) = \lambda \hat{A}_N(m,n)$$

となる。他も同様に証明できる。 (Q.E.D)

補題14.2は、図14.3に示すように、A_Nの結合特性が、左右対称、及び上下対称になる為の必要十分条件を与えるものである。

〔命題 14.11〕 $E_N^{(\lambda)}$の結合特性 $\hat{E}_N^{(\lambda)} = \langle\langle \hat{E}_N^{(\lambda)}(m,n) \rangle\rangle$ は実行列であり、次の関係が成立する。

$$\hat{E}_N^{(\lambda)}(n,m) = \hat{E}_N^{(\lambda)}(m,n) \tag{14.49}$$

$$\hat{E}_N^{(\lambda)}(-m,-n) = \hat{E}_N^{(\lambda)}(m,n) \tag{14.50}$$

$$\hat{E}_N^{(\pm 1)}(m,-n) = \hat{E}_N^{(\pm 1)}(-m,n) = \hat{E}_N^{(\pm 1)}(m,n) \tag{14.51}$$

$$\hat{E}_N^{(\pm 1)}(m,-n) = \hat{E}_N^{(\pm 1)}(-m,n) = -\hat{E}_N^{(\pm 1)}(m,n) \tag{14.52}$$

（証明） $\hat{E}_N^{(\lambda)}$が実行列になることは、上に述べたとうりである。命題14.10に示したように、$E_N^{(\lambda)}$は等方偶作用素であるから、命題4.13, 命題10.22より、それぞれ式(14.49),(14.50)が成立する。また、式(6.136)より

$$E_N^{(\lambda)} \mathcal{I}_N = \mathcal{I}_N E_N^{(\lambda)} = \lambda E_N^{(\lambda)} \tag{14.53}$$

となるから、式(14.13),(14.53)より

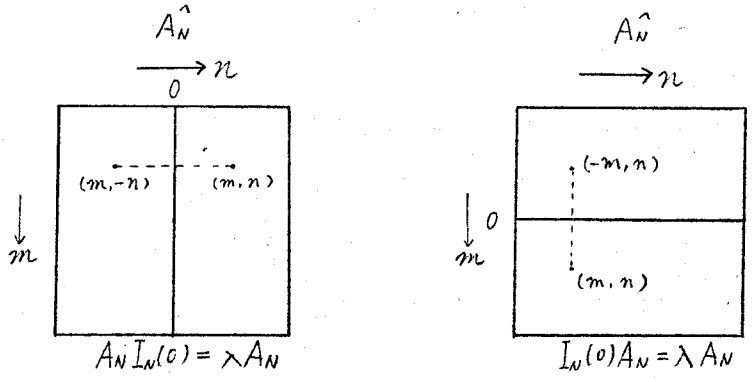


図14.3 補題14.2の説明図

$$E_N^{(\lambda)} I_N(0) = I_N(0) E_N^{(\lambda)} = \lambda^2 E_N^{(\lambda)} \tag{14.54}$$

となり、補題 14.2 より、式 (14.51), (14.52) が成立する。 (Q.E.D)

命題 14.11 を図に表せば、図 14.4 のようになる。即ち、$\hat{E}_N^{(\pm 1)}$ は、左右、上下に関して対称であり、対角線、逆対角線及び点 (0, 0) に関して対称である。一方 $\hat{E}_N^{(\pm i)}$ は、左右、上下に関して反対称であり、対角線、逆対角線、及び点 (0, 0) に関して対称である。従って、結合特性 $\hat{E}_N^{(\lambda)}$ を求める為には、例えば、図 14.4 の斜線を施した三角領域に属する要素 $\hat{E}_N^{(\lambda)}(m, n)$ だけを計算すれば良いことが分かる。つまり、式 (14.46), (14.54) から得られる関係式 (14.49) ~ (14.52) を使えば、結合特性を求める為の計算量が、$(2N+1)^2$ から $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ に軽減されるのである。ちなみに、$N=4$ のとき、$(2N+1)^2 = 81$, $\frac{1}{2}(N+1)(N+2) = 15$ となる。

結合特性 $\hat{E}_N^{(\lambda)}$ を具体的に示せば、次のようになる。

〔命題 14.12〕

$$\hat{E}_N^{(\pm 1)}(m, n) = \frac{1}{4}\left(\delta_{m,n} + \delta_{m,-n} \pm \frac{2}{\sqrt{2N+1}} \cos\frac{2\pi mn}{2N+1} \right) \tag{14.55}$$

$$\hat{E}_N^{(\pm i)}(m, n) = \frac{1}{4}\left(\delta_{m,n} - \delta_{m,-n} \pm \frac{2}{\sqrt{2N+1}} \sin\frac{2\pi mn}{2N+1} \right) \tag{14.56}$$

(証明) 式 (14.41), (14.7) より

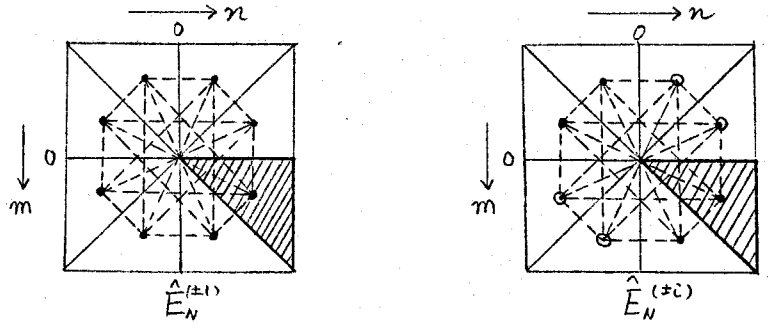


図 14.4 命題 14.11 の説明図

$$\hat{E}_N^{(\lambda)}(m,n) = (E_N^{(\lambda)}\varphi_n, \varphi_m)$$

$$= \frac{1}{4}\{(\varphi_n,\varphi_m)+\lambda^2(I_N(0)\varphi_n,\varphi_m)+\bar{\lambda}(\mathfrak{T}_N\varphi_n,\varphi_m)+\lambda(\mathfrak{T}_N^*\varphi_n,\varphi_m)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\delta_{m,n}+\lambda^2(\varphi_{-n},\varphi_m)+\bar{\lambda}(\varphi_n,\varphi_m)+\lambda\overline{(\varphi_m,\varphi_n)}\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\delta_{m,n}+\lambda^2\delta_{m,-n}+\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}\varphi_n(a_m)\} \qquad (14.57)$$

となり、式(14.55), (14.56) が成立する。 (Q.E.D)

. 命題14.12から、直接命題14.11の各式を確かめることもできる。しかし、命題14.12のように結合特性の具体的な形を求めなくても、式(14.46), (14.54)のような作用素自身の性質から直ちに命題14.11が導かれるところに、空間回路網理論の良さがあるのである。

14.5 自然座標系の空間 $H_N^{(\lambda)}$ への射影

$\mathfrak{T}_N$ の固有空間 $H_N^{(\lambda)}$ が、式(14.30)~(14.37)のような興味深い性質をもっていることを見てきた。そして、$H_N^{(\lambda)}$ への射影作用素の具体的な形を求めた。しかし、これだけではまだ、$H_N^{(\lambda)}$ に属する関数のイメージと感覚的につかむことはむづかしい。そこで14.5では、自然座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ の $H_N^{(\lambda)}$ への射影を具体的に求めて、$H_N^{(\lambda)}$ に対する感覚を養う為の助けとすることにする。

まず、関数 $f \in H_N$ の $H_N^{(\lambda)}$ への射影成分を $f^{(\lambda)}$ で表すことにすれば、次の命題が成立する。

〔命題 14.13〕 $n=0,1,2,\cdots,N$ に対して、次の関係が成立する。

$$\varphi_{-n}^{(\lambda)} = \lambda^2\varphi_n^{(\lambda)} \qquad (14.58)$$

$$\varphi_n^{(\lambda)} = \overline{\varphi_{-n}^{(\lambda)}} = \lambda\varphi_n^{(\lambda)} \qquad (14.59)$$

$$c_n^{(\pm 1)} = \pm\sqrt{\epsilon_n}\,\varphi_n^{(\pm 1)} \qquad (14.60)$$

$$\delta_n^{(\pm i)} = \pm\sqrt{2}\,\varphi_n^{(\pm i)} \qquad (14.61)$$

（証明） 式（14.54）より

$$\psi_{-n}^{(\lambda)} = E_N^{(\lambda)} I_N(0)\psi_n = \lambda^2 E_N^{(\lambda)}\psi_n = \lambda^2\psi_n^{(\lambda)}$$

となり、式（14.58）が成立する。他の式は、命題 14.8 と式（14.58）から明らかである。 (Q.E.D)

命題 14.13 をまとめて表 14.1 に示す。この表から、次のことが分かる。まず、$E_N^{(\lambda)}$ は実作用素であるから、$\psi_N^{(\lambda)}$ は全て実数値関数である。$n\neq 0$ のとき、φ_n は複素数値関数であるが、これを $H_N^{(\lambda)}$ に射影した場合、$\varphi_n^{(\pm 1)}$ は実数値関数、$\varphi_n^{(\pm i)}$ は純虚数値関数になっている。$H_N^{(1)}$ では、$\psi_{\pm n}^{(1)}$, $\varphi_{\pm n}^{(1)}$ が全て同じ関数になっている。$H_N^{(-1)}$ では、$\psi_n^{(-1)}$ と $\psi_{-n}^{(-1)}$ が同じ関数、$\varphi_n^{(-1)}$ と $\varphi_{-n}^{(-1)}$ が同じ関数になり、$\varphi_{\pm n}^{(-1)}$ は $\psi_{\pm n}^{(-1)}$ と逆の方向を向いている。

表 14.1 より、$\{\psi_n\}_{n=0}^{N}$ の $H_N^{(\lambda)}$ への射影と、$\{\psi_{-n}\}_{n=0}^{N}$, $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$, $\{c_n\}_{n=0}^{N}$, $\{\delta_n\}_{n=1}^{N}$ の $H_N^{(\lambda)}$ への射影が、本質的には同じものであることが分かる。そこで以下、$\{\psi_n^{(\lambda)}\}_{n=0}^{N}$ についてのみ論じることにする。

〔命題 14.14〕 $n=0,1,2,\cdots,N$ に対して、次の関係が成立する。

表 14.1 $\psi_n, \varphi_n, c_n, \delta_n$ の $H_N^{(\lambda)}$ への射影

f ＼ $H_N^{(\lambda)}$	$H_N^{(1)}$	$H_N^{(-1)}$	$H_N^{(i)}$	$H_N^{(-i)}$
ψ_{-n}	$\psi_n^{(1)}$	$\psi_n^{(-1)}$	$-\psi_n^{(i)}$	$-\psi_n^{(-i)}$
φ_n	$\psi_n^{(1)}$	$-\psi_n^{(-1)}$	$i\psi_n^{(i)}$	$-i\psi_n^{(-i)}$
φ_{-n}	$\psi_n^{(1)}$	$-\psi_n^{(-1)}$	$-i\psi_n^{(i)}$	$i\psi^{(-i)}$
c_n	$\sqrt{\epsilon_n}\,\psi_n^{(1)}$	$-\sqrt{\epsilon_n}\,\psi_n^{(-1)}$	0	0
δ_n	0	0	$\sqrt{2}\,\psi_n^{(i)}$	$-\sqrt{2}\,\psi_n^{(-i)}$

＊ $N=2$ の場合が 図20.21 に示してある。

$$\psi_n^{(\pm 1)} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_n}} (\psi_n^{(e)} \pm C_n) \qquad (14.62)$$

$$\psi_n^{(\pm i)} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_n}} (\psi_n^{(o)} \pm A_n) \qquad (14.63)$$

ここで $\psi_n^{(e)}$, $\psi_n^{(o)}$ は、式(7.158)で定義される $H_N^{(e)}$ 及び $H_N^{(o)}$ の自然座標系である。

(証明) 式(14.42), (7.161), (7.115) より

$$\psi_n^{(\pm 1)} = \frac{1}{2} E_N^{(e)} (\psi_n \pm \mathcal{R}_N \psi_n) = \frac{1}{2} E_N^{(e)} (\psi_n \pm \varphi_n) = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_n}} (\psi_n^{(e)} \pm C_n)$$

となり、式(14.62)が成立する。式(14.63)も同様に証明できる。 (Q.E.D)

式(7.115)の両辺に双対演算を施し、式(7.161)を考慮すれば

$$C_n' = \psi_n^{(e)}, \quad A_n' = i\psi_n^{(o)} \qquad (14.64)$$

となる。即ち、式(14.62), (14.63)は、

$$\psi_n^{(\pm 1)} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{\epsilon_n}} (C_n \pm C_n') \qquad (14.65)$$

$$\psi_n^{(\pm i)} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{\epsilon_n}} (A_n^* \pm \bar{i} A_n') \qquad (14.66)$$

と表されるのである。但し、複号同順である。

$N=4$ に対する $\psi_n^{(\lambda)}$ のグラフを、図14.5に示す。このグラフと図7.4, 図7.5に示した $\psi_n^{(e)}$, $\psi_n^{(o)}$ のグラフを比較してみれば、$\psi_n^{(\lambda)}$ が確かに命題14.14の形に表されていることが分かる。$N=4$ であるから、$H_4^{(1)}$ は三次元空間であり、他の $H_N^{(\lambda)}$ は全て二次元空間になっている。従って、図14.5のグラフに表された関数のうち、一次独立になっているのは、図14.5(a)では三個の関数、(b)~(d)では二個の関数だけである。例えば、図14.5(b)についていえば

$$\psi_2^{(-1)} = \frac{\cos\theta + \cos 2\theta}{1 - 2\cos\theta} \psi_0^{(-1)} + \frac{1 + 2\cos 2\theta}{1 - 2\cos\theta} \psi_1^{(-1)} \qquad (\theta = \frac{\pi}{9}) \qquad (14.67)$$

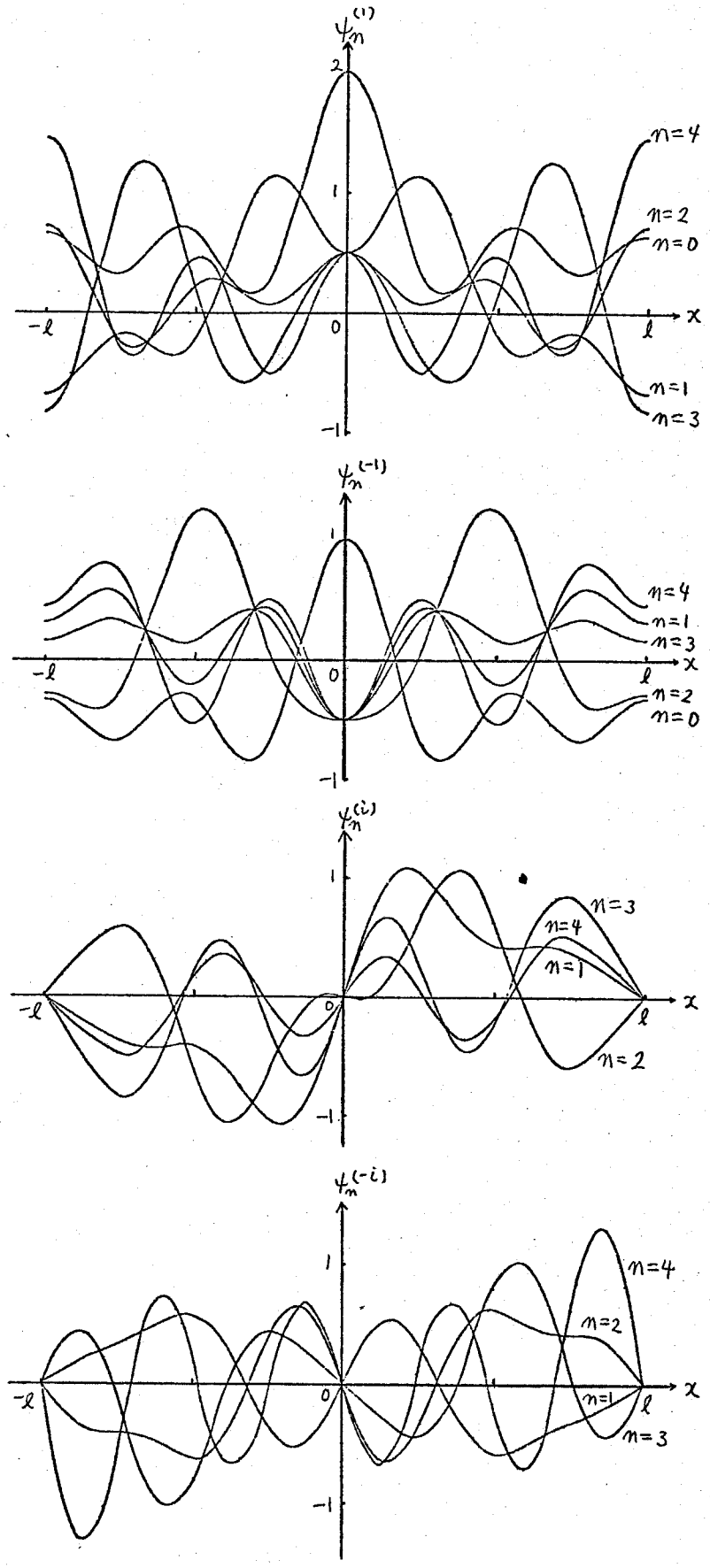


図14.5 $\{\psi_n\}_{n=0}^{N}$ の $H_N^{(\lambda)}$ への射影 $\{\psi_n^{(\lambda)}\}_{n=0}^{N}$ $(N=4)$

と、$\psi_2^{(-1)}$ は $\psi_0^{(-1)}$ と $\psi_1^{(-1)}$ の一次結合として表されるのである。

命題 14.14 と命題 7.33 より、次の系が成立する。

〔系 14.4〕 $m, n = 0, 1, 2, \cdots, N$ に対して、次の関係が成立する。

$$(\psi_m^{(\pm 1)}, \psi_n^{(\pm 1)}) = \frac{1}{4\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}} \left(2\delta_{m,n} \pm \sqrt{\frac{\epsilon_m}{2N+1}} C_n(a_m) \pm \sqrt{\frac{\epsilon_n}{2N+1}} C_m(a_n) \right) \quad (14.68)$$

$$(\psi_m^{(\pm i)}, \psi_n^{(\pm i)}) = \frac{1}{4} \left(\delta_{m,n} \pm \sqrt{\frac{2}{2N+1}} A_n(a_m) \right) \quad (m n \neq 0) \quad (14.69)$$

但し、複号同順である。特に次の関係が成立する。

$$\| \psi_0^{(\pm 1)} \|^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \right) \quad (14.70)$$

$$\| \psi_n^{(\pm 1)} \|^2 = \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{2N+1}} C_n(a_n) \right) \quad (n \neq 0) \quad (14.71)$$

$$\| \psi_n^{(\pm i)} \|^2 = \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{2N+1}} A_n(a_n) \right) \quad (n \neq 0) \quad (14.72)$$

系 14.4 より、$\psi_n^{(\lambda)}$ のノルムが、λ 及び n によって異なることが分かる。

我々が実際に図を描くことができるのは、三次元空間までであるから、$N = 1$ ($2N+1 = 3$) の場合について、$\psi_n^{(\lambda)}$ の関数空間内における様子を、図に表してみる。$N = 1$ であるから、$H_1^{(1)}$ 及び $H_1^{(-1)}$ は C_0 と C_1 によって張られる二次元部分空間に属しており、$H_1^{(i)}$ は A_1 によって張られる一次元部分空間と一致し、$H_1^{(-i)} = \{0\}$ である。命題 14.14 より

$$\psi_0^{(\pm 1)} = \frac{1}{2} (\psi_0 \pm C_0), \quad \psi_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_1 \quad (14.73)$$

$$\psi_{\pm 1}^{(1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \psi_0^{(1)}, \quad \psi_{\pm 1}^{(-1)} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \psi_0^{(-1)} \quad (14.74)$$

となるから、式 (3.69) より得られる関係式

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (C_0 + \sqrt{2} C_1) \quad (N = 1) \quad (14.75)$$

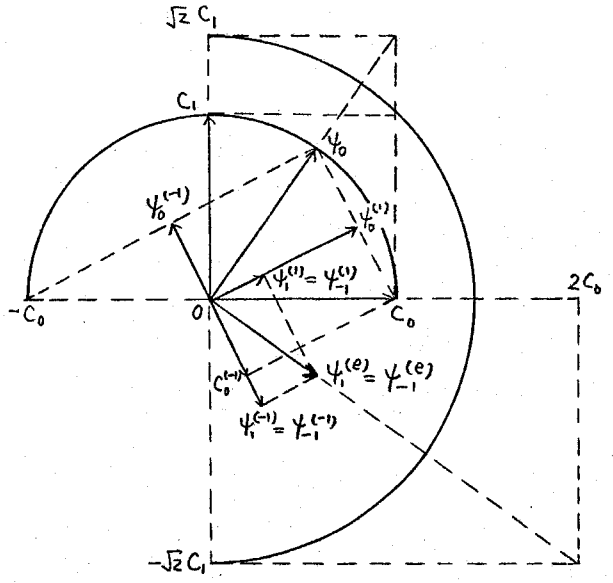


図14.6　自然座標系 $\{\psi_n\}$ の $H_N^{(\lambda)}$ への射影 $\{\psi_n^{(\lambda)}\}$ ($N=1$ の場合)*

を考慮すれば、$\psi_0^{(\pm1)}$, $\psi_{\pm1}^{(\pm1)}$ が、図14.6 のようになることが分かる。また、この図から直ちに、$C_n^{(\pm1)}$ $(n=0,1)$ を求めることができ、$C_0^{(1)} = \psi_0^{(1)}$ 及び $C_0^{(-1)} = -\psi_0^{(-1)}$ (式(16.60)) も確認できる。

14.6　$\mathfrak{H}_N$ の積分核

13.5 で展開した一般論をもとに、$\mathfrak{H}_N$ の積分核について論じる。$\mathfrak{H}_N$ の積分核を $\sqrt{2N+1}\,\mathcal{G}_N(x,y)$ と表せば、式(5.30), (14.8) より

$$\mathcal{G}_N(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(x)\,\varphi_n(y) \tag{14.76}$$

となる。式(5.32) より

$$\mathcal{G}_N(y,x) = \mathcal{G}_N(x,y) \tag{14.77}$$

となり、式(14.77), (14.15) より次の関係が成立する。

$$\mathcal{G}_N(x,-y) = \mathcal{G}_N(-x,y) = \overline{\mathcal{G}_N(x,y)} \tag{14.78}$$

---

* $H_1^{(\lambda)}$ はこの平面に垂直な一次元空間であり、$H_1^{(-\lambda)} = \{0\}$ である。

命題 13.13 より、次の命題が成立する。

〔命題 14.15〕 任意に固定した $a\in[-l,l]$ に対して、次の関係が成立する。

$$\varphi_N'(x,a)=\psi_0(x-a),\quad \psi_0'(x-a)=\varphi_N(x,a) \tag{14.79}$$

命題 13.15 より、次の命題が成立する。

〔命題 14.16〕

$$(\varphi_N(\cdot,a),\varphi_N(\cdot,b))=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\psi_0(a-b) \tag{14.80}$$

$$\|\varphi_N(\cdot,a)\|=1 \tag{14.81}$$

従って、系 13.6 に対応する次の系が成立する。

〔系 14.5〕 任意に固定した実数 a に対して、$\{\varphi_N(\cdot,a+a_n)\}_{n=-N}^{N}$ は H_N の正規直交基底になる。

特に、式(13.50),(14.8)より

$$\varphi_N(x,a_n)=\varphi_n(x)\qquad(n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{14.82}$$

となるから、$\{\varphi_N(\cdot,a+a_n)\}_{n=-N}^{N}$ が基本座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ の一般化になっていることが分かる。

系 13.7 より、次の系が成立する。

〔系 14.6〕 任意の $a\in[-l,l]$ に対して、次の関係が成立する。

$$(\varphi_N(\cdot,a),\psi_0)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}} \tag{14.83}$$

式(14.82)を考慮すれば、式(14.83)から

$$(\psi_0(x-a),\varphi_0(x))_x=\frac{1}{\sqrt{2N+1}} \tag{14.84}$$

と共に、式(3.94)の一般化になっていることが分かる。

$\mathfrak{T}_N$ によって生成されるオ n 種変形対合 $(n=1,2)$ と

$$A_N' \equiv \rho_n^{-1}(\rho_n(A_N))' \quad : A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N) \tag{14.85}$$

で表し、オ n 種変形双対演算と名付ける。

$$E_N(a) \equiv T_N(a)' \tag{14.86}$$

とおけば、命題13.14と命題11.14より、次の命題が成立する。

〔命題 14.17〕

$$\rho_1^{-1}(\varphi_N(\cdot,a)) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} E_N(a) \tag{14.87}$$

$$\rho_2^{-1}(\varphi_N(\cdot,a)) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} E_N(a) I_N(a) \tag{14.88}$$

つまり、$\sqrt{2N+1}\,\varphi_N(x,y)$ が $\mathfrak{T}_N$ の積分核であったのに対し、$\sqrt{2N+1}\,\varphi_N(x-y,a)$ は $E_N(a)$ の、$\sqrt{2N+1}\,\varphi_N(x+y,a)$ は $E_N(a)I_N(0)$ の積分核になるのである。

$$(T_N(a)\mathfrak{T}_N^*)^{\#} = \mathfrak{T}_N T_N(a) \tag{14.89}$$

であるから、命題13.16より次の命題が成立する。

〔命題 14.18〕

$$\varphi_N(x,a) = T_N(a)^{\#}\varphi_0(x) \tag{14.90}$$

$$= E_N(a)\varphi_0(x) \tag{14.91}$$

$$= \mathfrak{T}_N T_N(a)\varphi_0(x) \tag{14.92}$$

式(14.79)～(14.92)をまとめれば、図13.4に対応する図14.7を得る。

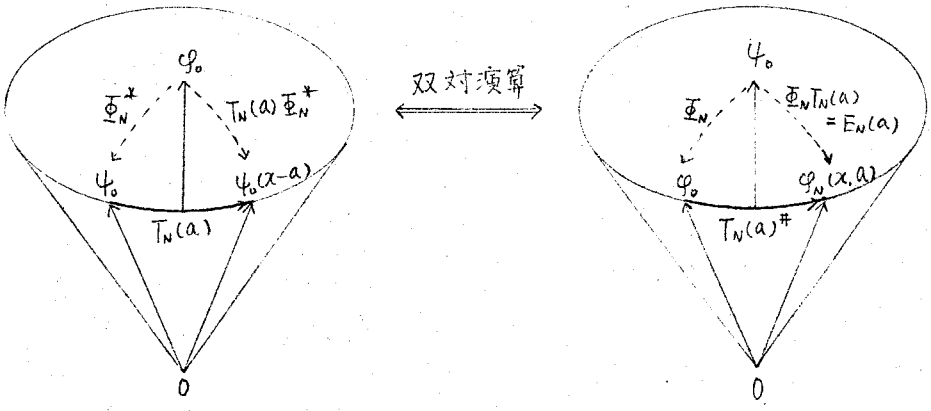


図14.7　$\varphi_N(x,a)$ と $\psi_0(x-a)$ の関係

まず、式(3.94)及び図3.3に示したように、自然座標系 $\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ は φ_0 を軸とする円錐基底であるが、これに双対演算を施せば、ψ_0 を軸とする円錐基底である基本座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ になる(式(14.82),(14.83))。

全ての ψ_n を、φ_0 を軸とし、ノルムが常に1になるように滑らかに補間したものが、$\{\psi_0(x-a)\,|\,a\in[-l,l]\}$ である(式(14.84))。同様に、全ての φ_n を、ψ_0 を軸とし、ノルムが常に1になるように滑らかに補間すれば、$\{\varphi_N(x,a)\,|\,a\in[-l,l]\}$ となる(式(14.81)～(14.83))。

ψ_0 を $T_N(a)$ で変換したものが、$\psi_0(x-a)$ であるのに対して、φ_0 を $T_N(a)^\#$ で変換したものが、$\varphi_N(x,a)$ である(式(14.90))。また φ_0 を $T_N(a)\overline{E}_N^*$ で変換したものが $\psi_0(x-a)$ であるのに対して、ψ_0 を $\overline{E}_N T_N(a)$ 或いは $E_N(a)$ で変換したものが、$\varphi_N(x,a)$ である(式(14.92),(14.91))。

14.7　$\overline{E}_N$ の実分解

式(14.7)から分かるように、$\overline{E}_N$ は実作用素ではない。そこで14.7では6.8，13.7及び13.8で展開した一般論を利用しながら、$\overline{E}_N$ の実分解について論じることにする。$\overline{E}_N$ の実分解と

$$\overline{E}_N = \overline{E}_N^{(r)} + i\,\overline{E}_N^{(i)} \tag{14.93}$$

とすれば、命題 6.36 より、次の命題が成立する。

〔命題 14.19〕 $\mathfrak{T}_N^{(r)}$, $\mathfrak{T}_N^{(i)}$ は、実等方自己共役作用素になり、非一実作用素になる。そして、次の関係が成立する。

$$\mathfrak{T}_N^{(r)} = \mathfrak{T}_N E_N^{(e)} \tag{14.94}$$

$$= (2E_N^{(1)} - E_N) E_N^{(e)} \tag{14.95}$$

$$= E_N^{(1)} - E_N^{(-1)} \tag{14.96}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathfrak{T}_N + \mathfrak{T}_N^*) \tag{14.97}$$

$$\mathfrak{T}_N^{(i)} = \bar{\imath}\, \mathfrak{T}_N E_N^{(o)} \tag{14.98}$$

$$= (2E_N^{(i)} - E_N) E_N^{(o)} \tag{14.99}$$

$$= E_N^{(i)} - E_N^{(-i)} \tag{14.100}$$

$$= \frac{1}{2\bar{\imath}}(\mathfrak{T}_N - \mathfrak{T}_N^*) \tag{14.101}$$

式(14.94)より、$\mathfrak{T}_N^{(r)}$ が奇関数を零にし、偶関数に対しては $\mathfrak{T}_N$ と同じ働きをすることが分かる。更に式(14.95)より、$\mathfrak{T}_N^{(r)}$ が偶関数に対して、空間 $H_N^{(1)}$ に関する鏡映作用素になることが分かる。式(14.96)は、$f \in H_N$ に $\mathfrak{T}_N^{(r)}$ を作用させるということが、f の $H_N^{(1)}$ への射影成分から $H_N^{(-1)}$ への射影成分を引くことと同じであることを意味している。$\mathfrak{T}_N$ は等方作用素であるから、式(14.97)は、$\mathfrak{T}_N^{(r)}$ が実自己共役作用素であることを表している。式(14.98)～(14.01)も同様に解釈できる。

式(12.113)より、$\mathfrak{T}_N$ の実部と虚部が、次の関係で結ばれていることが分かる。

〔命題 14.20〕

$$\bar{\imath}\, \mathfrak{T}_N^{(i)} = C_N^{\#} \mathfrak{T}_N^{(r)} C_N \tag{14.102}$$

（証明）　式(14.94), (14.98), (12.82), (12.113)より

$$C_N^{\#}\,\mathfrak{T}_N^{(1)}\,C_N = (\mathfrak{T}_N\bar{C}_N\mathfrak{T}_N^{*})(\mathfrak{T}_N E_N^{(e)})C_N = \mathfrak{T}_N(C_N E_N^{(e)} C_N)$$
$$= \mathfrak{T}_N E_N^{(o)} = i\,\mathfrak{T}_N^{(c)}$$

となり、式(14.102)が成立する。　(Q.E.D)

$\mathfrak{T}_N$ の積分核 $\sqrt{2N+1}\,\varphi_N(x,y)$ の実分解を

$$\sqrt{2N+1}\,\varphi_N(x,a) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,C_N(x,a) + i\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,S_N(x,a) \qquad (14.103)$$

とすれば、実分解の一意性と式(7.115), (14.82)より

$$C_N(x;a_n) = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_n}}\,C_n(x), \quad S_N(x,a_n) = S_n(x) \qquad (14.104)$$

となる。即ち、$C_N(x,a)$ は全ての $C_n(n=0,1,2,\cdots,N)$ をなについて滑らかに補間したものであり、$S_N(x,a)$ は全ての $S_n(n=1,2,\cdots,N)$ をなについて滑らかに補間したものである。$\Delta x \equiv 2\ell/(2N+1)$ とするとき、$a = k\cdot\Delta x/5$ $(k=0,1,2,\cdots,10)$, $N=4$ に対する $C_N(x,a)$, $S_N(x,a)$ のグラフを、図14.8に示す。例えば図14.8(a)をみれば、$k=5,6,\cdots,10$ と a が変化するにつれて、$C_N(x,a)$ が $C_1(x)$ から連続的に $C_2(x)$ に変化していく様子が分かる。

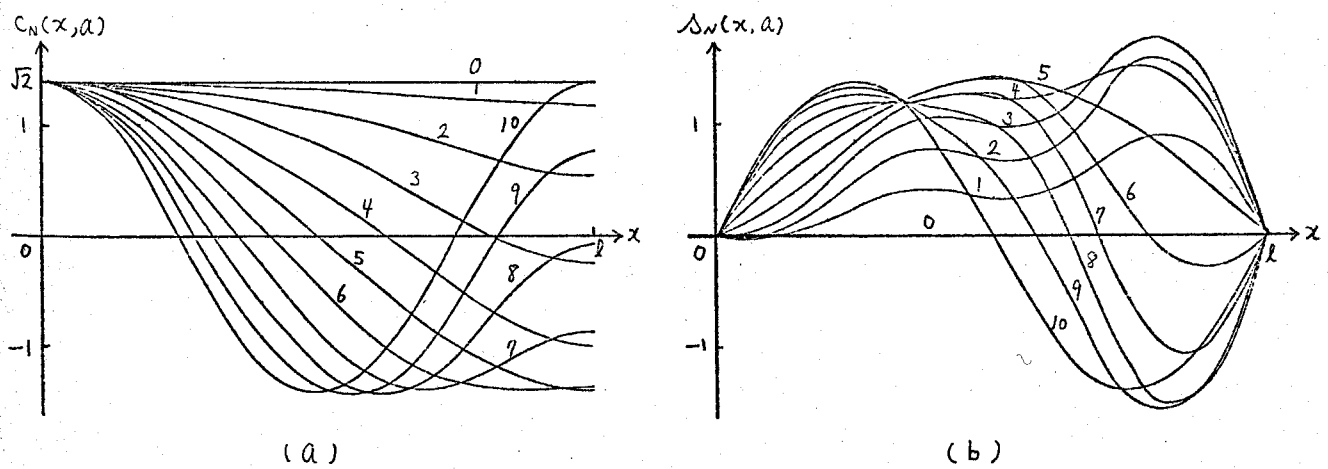
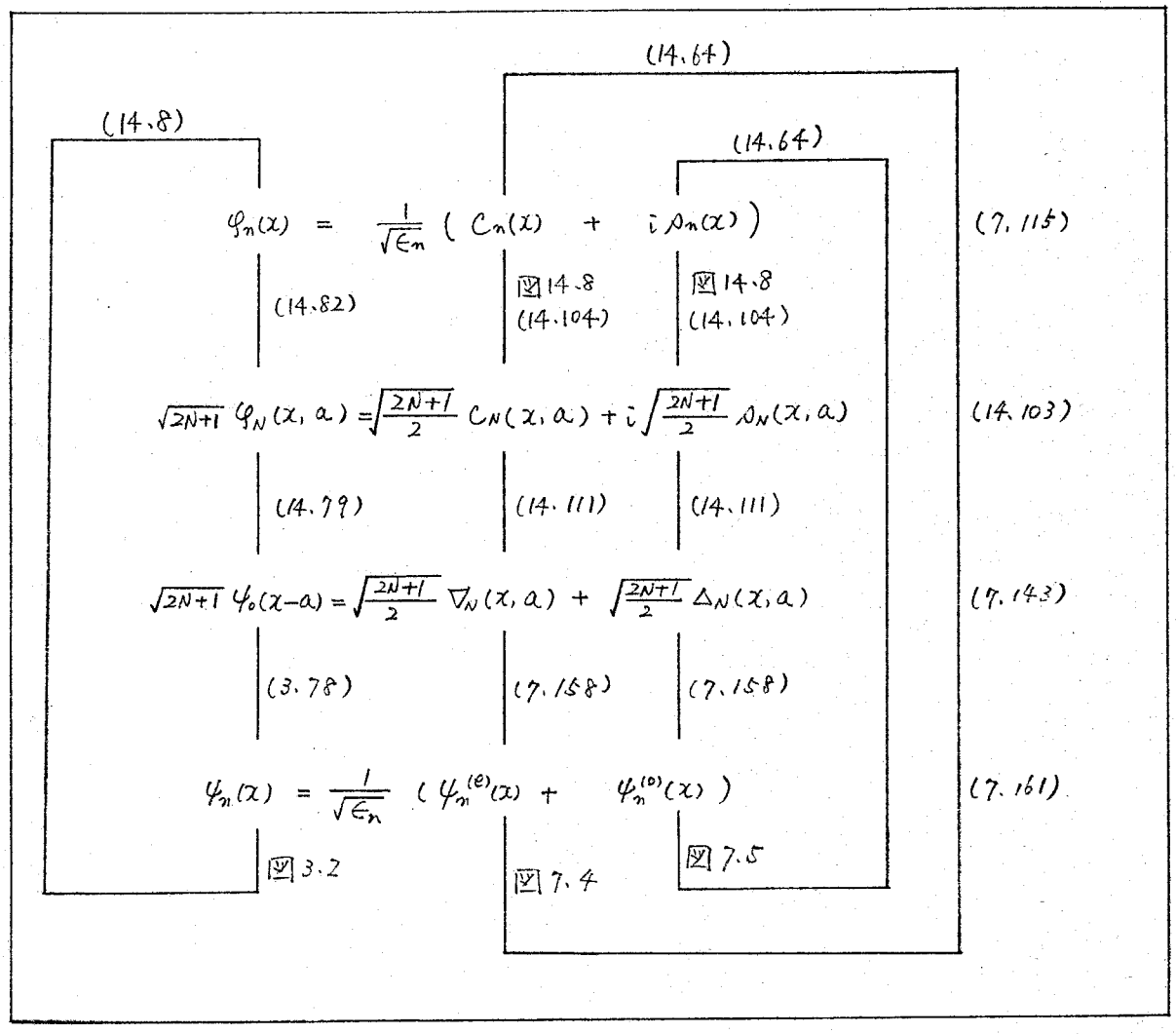


図14.8　$C_N(x,a)$ と $S_N(x,a)$ のグラフ $\left(N=4,\ a=\frac{2\ell}{2N+1}\cdot\frac{k}{5},\ k=0,1,2,\cdots,10\right)$*

---

* グラフの中の数字は、k の値を示す。

表 14.2　$\varphi_N(x,a)$ の実分解と $\psi_0(x-a)$ の偶-奇分解（関数の立場）



命題 14.19 と命題 13.19 より、次の命題が成立する.

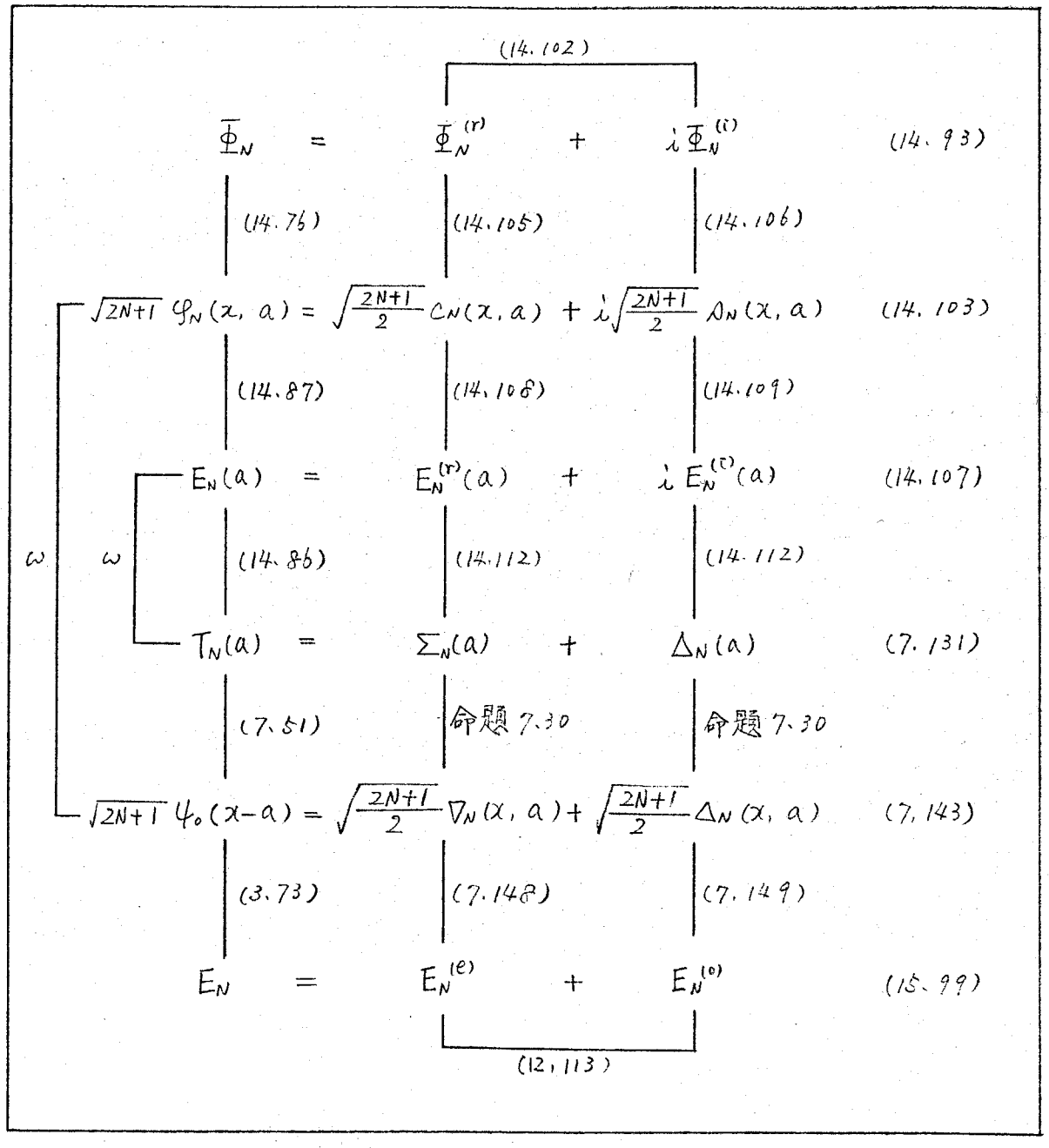
〔 命題 14.21 〕

$$(\mathfrak{F}_N^{(r)} f)(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,C_N(x,y)f(y)\,dy \qquad (14.105)$$

$$(\mathfrak{F}_N^{(i)} f)(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,S_N(x,y)f(y)\,dy \qquad (14.106)$$

$E_N(a)$ の Ω_e− 実分解と

表 14.3　$\varphi_N(x,a)$ の実分解と $\psi_0(x-a)$ の偶－奇分解（作用素の立場）



$$E_N(a) = E_N^{(r)}(a) + i E_N^{(i)}(a) \qquad (14.107)$$

とすれば、命題 13.19 より、次の命題が成立する。

〔 命題 14.22 〕

$$(E_N^{(r)}(a)f)(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,C_N(x-y,a)f(y)dy \qquad (14.108)$$

$$(E_N^{(i)}(a)f)(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,S_N(x-y,a)f(y)dy \qquad (14.109)$$

つまり、式(14.103)で与えた $\sqrt{2N+1}\,\varphi_N(x,a)$ の実部及び虚部を、二変数関数とみれば、命題14.21のように $\mathfrak{E}_N$ の実部及び虚部の積分核になっており、a を任意に固定し、x だけの関数とみれば、命題14.22のように、$E_N(a)$ の Ω_e-実部及び Ω_e-虚部の積分核になっているのである。また、命題14.22で、$x-y$ を $x+y$ にすれば、式(13.86),(13.87)より、$E_N(a)I_N(0)$ の Ω_e-実部及び Ω_e-虚部の積分核になるのである。

式(14.103)の両辺に双対演算を施せば、式(14.79)より

$$\sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-a) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,C_N'(x,a) - i\sqrt{\frac{2N+1}{2}}\,S_N'(x,a) \qquad (14.110)$$

となる。式(7.143),(14.110),(13.91),(13.93)より、次の命題が成立する。

〔 命題 14.23 〕

$$C_N'(x,a) = \sqrt{\frac{2}{2N+1}}\,\nabla_N(x,a), \quad S_N'(x,a) = i\sqrt{\frac{2}{2N+1}}\,\Delta_N(x,a) \qquad (14.111)$$

式(14.8)を一般化したものが式(14.79)であり、式(14.64)を一般化したものが、式(14.111)である。

命題7.30, 命題14.21, 命題14.23より、次の関係が成立する。

$$\Sigma_N'(a) = E_N^{(r)}(a), \quad \Delta_N'(a) = iE_N^{(i)}(a) \qquad (14.112)$$

以上の関係をまとめれば、表14.2, 表14.3のようになる。表14.3は、表13.2で $U_N = \mathfrak{E}_N$ とおいたものである。

第15節　双対演算とその応用

15.1　まえがき

前節で論じた有限Fourier変換作用素 $\mathfrak{F}_N$ によって生成される各種双対演算の応用について論じる。15.2では、式(14.6)で与えられる H_N における双対演算の応用として、$f \in H_N$ の標本点における値とFourier係数の関係について論じる。15.2の結果を $\mathfrak{F}_n^{-1}$ $(n=1,2)$ で変換すれば、$\mathfrak{B}^{(n)}(H_N)$ における結合特性と空間周波数特性の関係が得られる。それを $\mathfrak{B}^{(n)}(H_N)$ の中だけで論じる為には、式(14.85)で与えられるすべて種変形双対演算を使用すれば良い。これらの問題が、15.3で論じられる。15.4では、式(14.6)で与えられる $\mathfrak{B}(H_N)$ における双対演算の応用として、$A_N \in \mathfrak{B}(H_N)$ の結合特性と空間周波数特性の関係について論じる。その結果を利用して15.5では、結合特性の次元独立性について論じる。最後に15.6では、三種類の共変対合、即ち、複素共役演算、双対演算、及び対称演算と反変対合の一種である共役演算の関係を、まとめることにする。

15.2　双対関数

15.2を通じて、$f \in H_N$ とし、$g \equiv f'$ とする。ここで f' は、式(14.6)で与えられる双対演算である。

〔命題15.1〕　$n = -N, -N+1, \cdots, N$ に対して、次の関係が成立する。

$$\begin{cases} g(a_n) = \sqrt{2N+1}\,\overline{(f, \varphi_n)} & (15.1) \\ f(a_n) = \sqrt{2N+1}\,\overline{(g, \varphi_n)} & (15.2) \end{cases}$$

（証　明）　式(5.19),(14.8) より

$$(g, \varphi_n) = (f', \varphi_n) = \overline{(f, \varphi_n')} = \overline{(f, \varphi_n)}$$

となり、式(15.1)を得る。式(15.2)も同様に証明できる。　(Q.E.D)

つまり、f と g では、空間周波数成分と点 a_n における値とが、命題15.1の意味で丁度逆になっているのである。その結果、f のスペクトル分解を行なう為には、g の点 a_n における値を調べれば良く、逆に g のスペクトル分解を行なう為には、f の点 a_n における値を調べれば良いのである。そこで、g を f の双対関数と呼ぶことにする。$f'' = f$ であるから、f は g の双対関数になっている。

式(15.1)で $f = \varphi_m$ とおけば 式(3.81)になり、式(15.2)で、$f = \varphi_m$ とおけば

$$\varphi_m(a_n) = \varphi_n(a_m) \qquad (15.3)$$

となる。式(15.3)は式(3.88)から明らかであり、$\mathbb{E}_N$ が等方作用素であることを表している（命題4.13，式(3.91)）。

式(14.79)より、$\psi_0(x-a)$ と $\varphi_N(x, a)$ が互いに双対な関数になっているが、これらの関数に対して、実際に命題15.1が成立していることは、式(3.73),(3.85),(14.76),(14.77)から得られる関係式

$$\psi_0(x-a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(a)\varphi_n(x) \qquad (15.4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \overline{\varphi_n(a)}\,\varphi_n(x) \qquad (15.5)$$

$$\varphi_N(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(a)\psi_n(x) \qquad (15.6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \psi_n(a)\varphi_n(x) \qquad (15.7)$$

より、明らかである。式(15.6),(15.7)は、式(9.48)で $u_n = \psi_n$，$v_n = \varphi_n$ とおいたものになっている。式(15.1)で $f(x) = \psi_0(x-a)$ とおけば"

$$\varphi_N(a_n, a) = \varphi_n(a) \tag{15.8}$$

となるが、式(14.77)を考慮すれば、式(15.8)が式(14.82)と同じものであることが分かる。

双対演算 $'$ の固有値 λ に対する固有集合を、S_λ で表す：

$$S_\lambda \equiv \{ f \mid f' = \lambda f \ , \ f \in H_N \} \quad (|\lambda|=1) \tag{15.9}$$

S_1 の元を自己双対関数と呼び、S_{-1} の元を反自己双対関数と呼ぶことにする。命題15.1より、任意の $f \in S_\lambda$ に対して

$$\lambda f(a_n) = \sqrt{2N+1}\ \overline{(f, \varphi_n)} \quad ; f \in S_\lambda \tag{15.10}$$

なる関係が成立している。即ち、$f \in S_\lambda$ の n 番目の Fourier 係数を求める為には、f の点 a_n における値 $f(a_n)$ に $\lambda/\sqrt{2N+1}$ を掛けて、その共役複素数を求めれば良いのである。

しかも、命題5.12より、任意の $f \in H_N$ は、S_1 の元 $f^{(1)}, f^{(2)}$ を使って次のように表されるのである。

〔命題15.2〕 任意の $f \in H_N$ は、S_1 の元 $f^{(1)}, f^{(2)}$ を使って

$$f = f^{(1)} + i f^{(2)} \tag{15.11}$$

と一意に分解される。そして $f^{(n)}$ $(n=1,2)$ は

$$f^{(1)} = \frac{1}{2}(f + f') \ , \ f^{(2)} = \frac{1}{2i}(f - f') \tag{15.12}$$

と表される。

$f \in H_N$ が式(15.11)のように分解できていれば、f' を

$$f' = f^{(1)} - i f^{(2)} \tag{15.13}$$

と、非常に簡単に求めることができる。例えば、余弦関数 C_n $(n=0,1,2,\cdots,N)$ は、式(14.62)で与えられる関数 $\psi_n^{(\pm1)}$ を使って

$$c_n = \sqrt{\epsilon_n}\,\psi_n^{(1)} + i\,(i\sqrt{\epsilon_n}\,\psi_n^{(-1)}) \tag{15.14}$$

と表される。しかも、$\sqrt{\epsilon_n}\,\psi_n^{(\pm 1)}$ は $H_N^{(\pm 1)}$ に属する実数値関数であるから、$\sqrt{\epsilon_n}\,\psi_n^{(1)}$, $i\sqrt{\epsilon_n}\,\psi_n^{(-1)}$ 共に S_1 の元になっている。即ち、式(15.14)は、c_n の命題15.2の形式の分解になっているのである。従って、式(15.13)より、

$$c_n' = \sqrt{\epsilon_n}\,\psi_n^{(1)} - i\,(i\sqrt{\epsilon_n}\,\psi_n^{(-1)}) \tag{15.15}$$

となる。式(14.62),(15.15)より式(14.64)の第一式：$c_n' = \psi_n^{(e)}$ を導くことができる。

式(7.78),(5.17)より、次の系が成立する。

〔系 15.1〕 各点 $x \in [-\ell, \ell]$ に対して、次の不等式が成立する。

$$|f(x)| \leqq \sqrt{2N+1}\,\|f\| \tag{15.16}$$

例えば $\|\psi_0(x-a)\| = 1$ より、次の不等式が成立する。

$$|\varphi_N(x,a)| \leqq \sqrt{2N+1} \tag{15.17}$$

$\omega f = f'$ とおけば、式(5.57),(14.13),(14.17)より $(\omega \circ \omega_e) f = f^*$ となる。よって、図5.3で $U = \mathfrak{T}_N$ とおけば、三種類の実対合 $-, 1, *$ の間に、図15.1に示す関係が成立する。従って、次の命題が成立する。

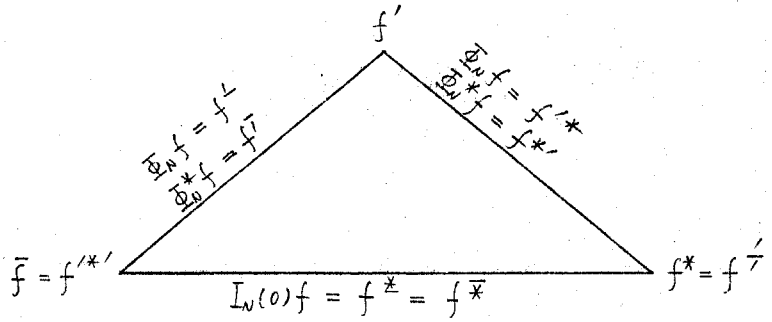


図15.1 三種類の実対合 $-, 1, *$ の関係

〔命題 15、3〕

$$\mathfrak{T}_N f = f^{-} = f^{\prime *} \tag{15.18}$$

$$\mathfrak{T}_N^{*} f = f^{\bar{}} = f^{*\prime} \tag{15.19}$$

$$I_N(0) f = f^{*} = f^{\bar{*}} \tag{15.20}$$

〔系 15、2〕 空間 $H_N^{(\lambda)}$ の元 f_λ に対して、次の関係が成立する。

$$f_\lambda' = \lambda \bar{f}_\lambda = \bar{\lambda} f_\lambda^{*} \tag{15.21}$$

（証明） 式(15、8)より $\lambda f_\lambda = f_\lambda'$ となるから、両辺の $'$ をとれば、$\bar{\lambda} f_\lambda' = \bar{f}_\lambda$ となり、式(15、21)の第一式を得る。第二式も同様に証明できる。(Q.E.D)

命題14、6より、任意の $f \in H_N$ は

$$f = \sum_{\lambda=\pm 1, \pm i} f_\lambda \quad ; f_\lambda \in H_N^{(\lambda)} \tag{15.22}$$

と一意に分解される。そしてこのとき、式(15、21)より

$$f' = \sum_{\lambda=\pm 1, \pm i} \lambda \bar{f}_\lambda \tag{15.23}$$

となる。特に f が実数値関数ならば、式(14、46)より f_λ ($\lambda = \pm 1, \pm i$) も全て実数値関数になるから

$$f' = \sum_{\lambda=\pm 1, \pm i} \lambda f_\lambda \quad ; \bar{f} = f \tag{15.24}$$

となる。例えば 式(15、14), (15、15)と

$$c_n = \sqrt{\epsilon_n}\, \psi_n^{(1)} + (-\sqrt{\epsilon_n}\, \psi_n^{(-1)}) \tag{15.25}$$

$$c_n' = \sqrt{\epsilon_n}\, \psi_n^{(1)} - (-\sqrt{\epsilon_n}\, \psi_n^{(-1)}) \tag{15.26}$$

と書きなおせば、式(15、25), (15、26)はそれぞれ式(15、22), (15、24)に対応する式になっている。

式(15.11),(15.22)で表される f に対する二種類の分解を与えた。しかも、これらの各成分に対しては、式(15.10),(14.30)より

$$f^{(k)}(a_n) = \sqrt{2N+1}\,(\overline{f^{(k)}, \varphi_n}) \quad (k=1,2) \tag{15.27}$$

$$f_\lambda(a_n) = \lambda\sqrt{2N+1}\,(f_\lambda, \varphi_n) \quad (\lambda = \pm 1, \pm i) \tag{15.28}$$

と、空間周波数成分と標本点上の値の間に、同様の関係が成立している。では、これらの二種類の分解の仕方には、どのような違いがあるのであろうか。まず式(15.11)が同じ固有集合 S_1 に属する二個の関数への分解であるのに対して、式(15.22)は、互いに直交する部分空間 $H_N^{(\lambda)}$ $(\lambda = \pm 1, \pm i)$ に属する四個の関数への分解になっている。その結果、式(15.27)では $f^{(1)}$ と $f^{(2)}$ が同じ関係を満足しているのに対して、式(15.28)では、各 f_λ に対して、λ 倍の違いが生じている。また、f が実数値関数の場合、式(15.22)の各成分 f_λ が全て実数値関数になるのに対して、式(15.11)の各成分 $f^{(1)}, f^{(2)}$ は、必ずしも実数値関数にならないのである。

命題5.11より、$-$, $/$, $*$ の間には、更に次の関係が成立する。

〔命題15.4〕 任意に固定した複素数 λ $(|\lambda|=1)$ に対して、次の同値関係が成立する。

$$\overline{f} = \lambda f \iff g^* = \overline{\lambda} g \tag{15.29}$$

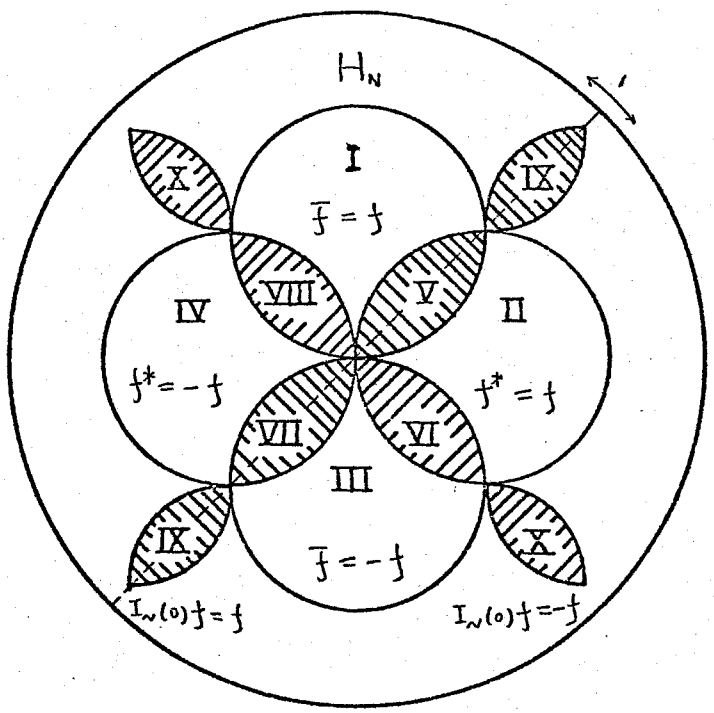
特に $\lambda = \pm 1$ に対して、次の同値関係が成立する。

$$\overline{f(x)} = \pm f(x) \iff \overline{g(x)} = \pm g(-x) \tag{15.30}$$

例えば、$f(x) \equiv \varphi_0(x-a)$ は実数値関数であるから、式(15.30)より

$$\varphi_N(-x, a) = \overline{\varphi_N(x, a)} \tag{15.31}$$

となるが、これは式(14.78)に他ならない。



(i) $\bar{f}=f$ ：実数値関数 (I, V, VIII)

(ii) $\bar{f}=-f$ ：純虚数値関数 (III, VI, VII)

(iii) $f^*=f$ ：エルミート対称 (II, V, VI)

(iv) $f^*=-f$ ：反エルミート対称 (III, VII, VIII)

(v) $I_N(0)f=f$ ：偶関数 (V, VIII, IX)

(vi) $I_N(0)f=-f$ ：奇関数 (VI, VII, X)

（双対演算 $'$ により、点線に関して、対称に変換される。）

図15.2　実対合 $-$, $*$ に関する各種固有集合の関係

図5.4を考慮しながら式(15.30)を図に表せば、図15.2のようになる。$\psi_0(x-a)$ は図15.2の領域 I に属しており、$\varphi_N(x,a)$ は領域 II に属している。$C_N(x,a)$, $\nabla_N(x,a)$ は領域 V に属しており、$\lambda_N(x,a)$, $\Delta_N(x,a)$ は領域 VIII に属している。

図15.2の領域(i), (ii)が、それぞれ実数値関数及び純虚数値関数の全体であったのに対し、領域(iii), (iv)は、それぞれFourier係数が実数値及び純虚数値をとる関数の全体である。実際それは、命題15.1と図15.2から明らかなことである。つまり、領域(i)と(iii)及び(ii)と(iv)が、それぞれ双対な集合になっているのである。

命題15.3から分かるように、$-$ と $*$ が交換可能であるのに対して、$'$ と $*$ 或いは $'$ と $-$ は、一般には交換可能でない。では、どのような関数集合に対して、交換可能になるであろうか。それと次に述べる。

〔 命題 15、5 〕 次の各条件は、互いに同値である。但し、複号同順とする。

(i) $f^{\perp} = \pm f^{\top}$ (ii) $f'^{*} = \pm f^{*\prime}$

(iii) $I_N(0) f = \pm f$ (iv) $\Xi_N^{*} f = \pm \Xi_N f$

(証明) (i), (ii), (iv), が互いに同値であることは、命題 15、3 より明らかである。(i) が成立したとすれば、命題 15、3 より

$$I_N(0) f = f^{-*} = (f^{-\prime})'^{*} = (\pm f'^{-})'^{*} = \pm f^{**} = \pm f$$

となり、(iii) が成立する。同様にして (iii)→(i) が証明できる。 (Q.E.D)

即ち、H_N の元全体に対しては、$\prime$ と $-$ 或いは $\prime$ と $*$ は可換にならないけれども、f を偶関数に限れば、これらは共に可換になり、奇関数に限れば、共に反可換になるのである。

15、3 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における双対作用素

15、3を通じて、$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$, $B_N \equiv A_N'$, $f \equiv \rho_1(A_N)$, $g \equiv \rho_1(B_N)$ とする。* ここで A_N' は、式(14、85)で与えられている第一種変形双対演算である。

命題 15、1 の f, g と、これを A_N, B_N のインパルス応答とみなせば、次の命題が成立する。

〔 命題 15、6 〕 A_N, B_N の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における空間周波数特性、結合特性に対して、次の関係が成立する。

$$B_N^{\sim}(n) = \sqrt{2N+1}\ \overline{A_N^{\wedge}(n)} \qquad (15、32)$$

$$A_N^{\sim}(n) = \sqrt{2N+1}\ \overline{B_N^{\wedge}(n)} \qquad (15、33)$$

---

* 15、3では $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元について論じるけれども、第11節、第12節の理論をつかえば、15、3で得られた結果は全て、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元に翻訳することができる。

つまり、A_N と B_N では、空間周波数特性と結合特性が、命題15.6の意味で丁度逆になっているのである。そこで、B_N を A_N のオー種変形双対作用素或いは $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における双対作用素と呼ぶことにする。$A_N'' = A_N$ であるから、A_N は B_N の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における双対作用素になっている。

並進作用素 $T_N(a)$ の空間周波数特性、結合特性は、式(7.16)(7.27)より、

$$\tilde{T_N}(n,a) = \overline{\varphi_n(a)}\,, \quad \hat{T_N}(n,a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\psi_n(a) \tag{15.34}$$

である。一方、式(14.86)で定義した $T_N(a)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における双対作用素 $E_N(a)$ は、式(14.87),(15.6),(15.7)より、

$$E_N(a) = \sum_{n=-N}^{N} \psi_n(a)\, E^{(n)} \tag{15.35}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(a)\, T_N(a_n) \tag{15.36}$$

と表される。従って、$E_N(a)$ の空間周波数特性、結合特性は、

$$\tilde{E_N}(n,a) = \varphi_n(a)\,, \quad \hat{E_N}(n,a) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\varphi_n(a) \tag{15.37}$$

となる。式(15.34),(15.37)より、$T_N(a)$ と $E_N(a)$ の間に、確かに命題15.6の関係が成立していることが分かる。

式(15.35),(15.36)は、式(9.49)で $u_n = \varphi_n$, $v_n = \psi_n$ とおいたものである。式(15.35)で $a = a_n$ とおけば、式(3.81)より

$$E_N(a_n) = \sqrt{2N+1}\, E^{(n)} \tag{15.38}$$

となる。つまり、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の自然座標系 $\{T_N(a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$ をこれに関して滑らかに補間すれば $T_N(a)/\sqrt{2N+1}$ となるように、基本座標系 $\{E^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ をこれに関して滑らかに補間すれば、$E_N(a)/\sqrt{2N+1}$ となるのである。なお、式(15.38)は、式(14.82)の両辺の ρ_1^{-1} をとっても求めることができる。

$E_N(a)$ は更に、次のような基本的性質をもっている。

〔命題 15.7〕 $\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ を $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元の集合とし、$u_n \equiv \rho_1(U_N^{(n)})$ とする。$\{U_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ が $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の正規直交基底になる為の必要十分条件は、全ての $a \in [-l, l]$ に対して、

$$\sum_{n=-N}^{N} u_n'(a)\, U_N^{(n)} = E_N(a) \qquad (15.39)$$

となることである。

（証明） 式(9.19)で $U_N^{(n)}$ を $U_N^{(n)\prime}$ とおき、両辺の $'$ をとれば"よい。

(Q.E.D)

このように、ある命題が与えられたとき、双対演算を使うことにより、それと双対な命題を容易に得ることができるのである。なお、式(15.39)で、$U_N^{(n)} = E^{(n)}$ とおけば 式(15.35)になり、$U_N^{(n)} = T_N(a_n)/\sqrt{2N+1}$ とおけば" 式(15.36)になる。

式(13.10)より、オー種変形双対演算は Schmidt ノルムを保存している。しかし、普通の作用素のノルムは保存しなくて、次の関係が成立する。

〔命題 15.8〕

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}} \|A_N\| \leqq \|A_N'\| \leqq \sqrt{2N+1}\, \|A_N\| \qquad (15.40)$$

ここで、α を任意定数とするとき、オーの等号は、$A_N = \alpha E^{(n)}$、オニの等号は、$A_N = \alpha T_N(a_n)$ $(n=-N, -N+1, \cdots, N)$ の場合、またその場合に限って成立する。

（証明） 不等式(15.40)が成立することは、命題13.7より明らかであるが、そのときの証明

$$\|A_N'\| \leqq \|A_N'\|_2 = \|A_N\|_2 \leqq \sqrt{2N+1}\, \|A_N\| \qquad (15.41)$$

において、オーの等号が成立する為の必要十分条件は、補題9.2より、$A_N' = \alpha E^{(n)}$ $(n=-N, -N+1, \cdots, N)$ である。このとき式(13.15)から

$A_N = \bar{\alpha} T_N(a_n)/\sqrt{2N+1}$ となり、式(15.42)のオニの等号も成立する。よって $\alpha/\sqrt{2N+1}$ を改めて α と書けば、式(15.40)のオニの等号が成立する為の必要十分条件が、$A_N = \alpha T_N(a_n)$ であることが分かる。今証明したことと、式(13.9)より、命題の後半は明らかである。 (Q.E.D)

オー種変形双対演算 λ の固有値 λ に対応する固有集合を、G_λ で表す：

$$G_\lambda \equiv \{A_N \mid A_N' = \lambda A_N \ , \ A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)\} \quad (|\lambda|=1) \qquad (15.42)$$

G_1 の元を、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における自己双対作用素と呼び、G_{-1} の元を $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における反自己双対作用素と呼ぶことにする。命題15.6より、任意の $A_N \in G_\lambda$ に対して

$$\lambda \tilde{A_N}(n) = \sqrt{2N+1}\ \overline{\hat{A_N}(n)} \quad : A_N \in G_\lambda \qquad (15.43)$$

なる関係が成立している。即ち、$A_N \in G_\lambda$ の結合特性を求める為には、A_N の空間周波数特性に $\lambda/\sqrt{2N+1}$ を掛けて、その複素共役をとれば良いのである。

しかも命題13.10より、命題15.2に対応する次の命題が成立する。

〔命題15.9〕 任意の $A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ は、G_1 の元 $A_N^{(1)}, A_N^{(2)}$ を使って

$$A_N = A_N^{(1)} + i A_N^{(2)} \qquad (15.44)$$

と一意に分解される。そして $A_N^{(n)}$ $(n=1,2)$ は、

$$A_N^{(1)} = \frac{1}{2}(A_N + A_N') \ , \ A_N^{(2)} = \frac{1}{2i}(A_N - A_N') \qquad (15.45)$$

と表される。

$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ が式(15.44)のように分解できていれば、A_N' は

$$A_N' = A_N^{(1)} - i A_N^{(2)} \qquad (15.46)$$

と非常に簡単に求めることができる。

$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の部分空間 $\mathcal{B}^{(1)}_\lambda(H_N)$ を

$$\mathcal{B}^{(1)}_\lambda(H_N) \equiv \{ A_N \mid A_N^{\prime} = \lambda A_N,\ A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \} \quad (\lambda = \pm 1, \pm i) \qquad (15.47)$$

によって定義すれば、命題 13.12 より次の命題を得る.

〔命題 15.10〕

$$\mathcal{B}^{(1)}(H_N) = \mathcal{B}^{(1)}_e(H_N) \oplus \mathcal{B}^{(1)}_o(H_N) \qquad (15.48)$$

$$\mathcal{B}^{(1)}_e(H_N) = \mathcal{B}^{(1)}_1(H_N) \oplus \mathcal{B}^{(1)}_{-1}(H_N) \qquad (15.49)$$

$$\mathcal{B}^{(1)}_o(H_N) = \mathcal{B}^{(1)}_i(H_N) \oplus \mathcal{B}^{(1)}_{-i}(H_N) \qquad (15.50)$$

命題 15.10 を図示すれば、図 15.3 のようになる。この図は、図 13.3 の特殊な場合であり、図 14.2 に対応するものである。

$\omega A_N \equiv A_N^{\prime}$ とおけば、式 (13.25), (14.13), (7.80) より

$$(\omega \circ \omega_e) A_N = \rho_1^{-1} I_N(0) \overline{\rho_1 A_N} = \rho_1^{-1} (\rho_1 A_N)^* = \rho_1^{-1} \rho_1 A_N^* = A_N^*$$

$$\therefore\ (\omega \circ \omega_e) A_N = A_N^* \qquad (15.51)$$

となる。従って、図 15.1 及び命題 15.3 に対応して、次の命題が成立する.

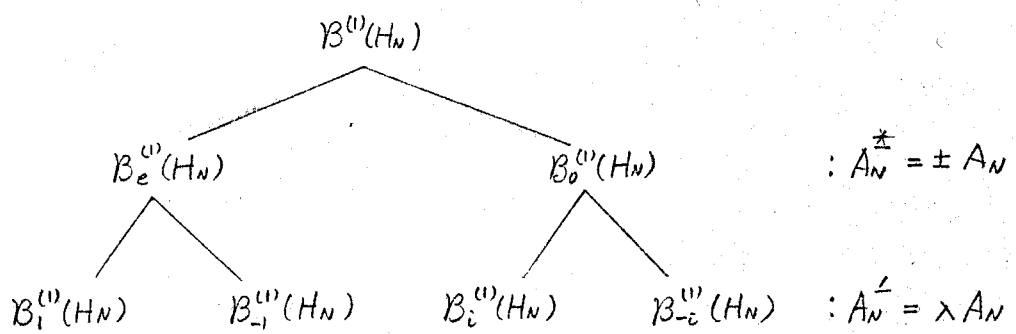


図 15.3 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の直和分解

〔命題 15.11〕

$$A_N^{\underline{I}} = A_N'^{*} = \rho_1^{-1} \mathfrak{T}_N \rho_1 A_N \tag{15.52}$$

$$A_N^{\overline{I}} = A_N^{*\prime} = \rho_1^{-1} \mathfrak{T}_N^{*} \rho_1 A_N \tag{15.53}$$

$$A_N^{\underline{*}} = A_N^{\overline{*}} = \rho_1^{-1} I_N(0) \rho_1 A_N \tag{15.54}$$

従って、$\mathcal{B}_\lambda^{(1)}(H_N)$ はまた、

$$\mathcal{B}_\lambda^{(1)}(H_N) = \{ A_N \mid A_N'^{*} = \lambda A_N,\ A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \} \tag{15.55}$$

$$= \rho_1^{-1}(H_N^{(\lambda)}) \tag{15.56}$$

と特徴づけることができる。

系 4.3, 命題 15.6 より、次の補題が成立する。

〔補題 15.1〕 $X_N \equiv A_N^{\underline{I}}$ とおけば、次の関係が成立する。

$$\begin{cases} \tilde{X}_N(n) = \sqrt{2N+1}\, \hat{A}_N(n) & (15.57) \\ \tilde{A}_N(n) = \sqrt{2N+1}\, \hat{X}_N(-n) & (15.58) \end{cases}$$

補題 15.1 より、次の命題を得る。

〔命題 15.12〕 $A_N \in \mathcal{B}_\lambda^{(1)}(H_N)$ に対して、次の関係が成立する。

$$\tilde{A}_N(n) = \bar{\lambda} \sqrt{2N+1}\, \hat{A}_N(n) \tag{15.59}$$

$$\tilde{A}_N(-n) = \lambda^2 \tilde{A}_N(n) \tag{15.60}$$

$$\hat{A}_N(-n) = \lambda^2 \hat{A}_N(n) \tag{15.61}$$

式(15.59)は、$A_N \in \mathcal{B}_\lambda^{(1)}(H_N)$ の空間周波数特性と結合特性の間の関係を示すものであり、式(15.28)に対応する関係式である。命題 4.13 から分かるよう

に、式(15.60),(15.61)は、$\lambda=\pm 1$ のとき A_N が等方作用素になり、$\lambda=\pm i$ のとき反等方作用素になることを意味している。ところで、命題7.20より、空間 $\mathcal{B}^{(l)}(H_N)$ の中では、等方作用素と偶作用素、及び反等方作用素と奇作用素は同じ概念であるから、今述べたことは、式(15.49),(15.30)からも、明らかなことなのである。

〔命題15.13〕 次の各条件は、互いに同値である。但し、複号同順である。

(i) $A_N^{\pm}=\pm A_N$ (ii) $A_N^{\perp}=\pm A_N^{T}$ (iii) $A_N^{\prime *}=\pm A_N^{*\prime}$

証明は、命題15.5の場合と同様にできる。命題15.11から分かるように、$\mathcal{B}^{(l)}(H_N)$ の元全体に対しては、$\prime$ と $-$ 或いは $\prime$ と $*$ は可換にならない。しかし、命題15.13が主張しているように、A_N を偶作用素(等方作用素)に限れば、これらは共に可換になり、奇作用素(反等方作用素)に限れば、共に反可換になるのである。

つまり、図15.3で言えば、まず部分空間 $\mathcal{B}_\lambda^{(l)}(H_N)$ $(\lambda=\pm 1,\pm i)$ は $\perp$ 或いは $\prime *$ の固有空間として特徴づけられる。そして、$\pm$ 或いは $\mp$ の固有空間として特徴づけられる偶作用素の全体 $\mathcal{B}_e^{(l)}(H_N)$ 及び奇作用素の全体 $\mathcal{B}_o^{(l)}(H_N)$ が、その一つ下の階層の部分空間 $\mathcal{B}_\lambda^{(l)}(H_N)$ の特徴づけに使用した演算 $-$ と $\prime$ 或いは $\prime$ と $*$ の交換可能性によって特徴づけられるのである。

この結果を使えば、命題15.10で与えた直和分解の具体的な方法を得ることができる。式(15.48)の分解は、命題4.18に示したとうりである。そこで、式(15.49),(15.50)の分解についてのみ述べる。

〔命題15.14〕 $X_N\in\mathcal{B}_e^{(l)}(H_N)$, $Y_N\in\mathcal{B}_o^{(l)}(H_N)$ の式(15.49),(15.50)による直和分解を

$$X_N=X_N^{(l)}+X_N^{(-l)},\quad Y_N=Y_N^{(l)}+Y_N^{(-l)} \tag{15.62}$$

とすれば、$X_N^{(\pm l)}$, $Y_N^{(\pm l)}$ は次式で与えられる。

$$X_N^{(\pm 1)} = \frac{1}{2}(X_N \pm X_N^{-1}), \quad Y_N^{(\pm i)} = \frac{1}{2}(Y_N \mp i Y_N^{-1}) \tag{15.63}$$

但し、複号同順である。

証明は、命題15.13を使えば容易にできる。また、命題15.13，命題15.11を使えば、式(15.63)で与えられた $X_N^{(\pm 1)}$, $Y_N^{(\pm i)}$ の $\perp$ による表現を、$\top$，$\mathrm{i}*$ 或いは $*\mathrm{i}$ を用いて表現しなおすこともできる。

命題13.9より、命題15.4に対応する次の命題が成立する。

〔命題15.15〕 任意に固定した複素数 λ ($|\lambda|=1$) に対して、次の同値関係が成立する。

$$\bar{A}_N = \lambda A_N \iff B_N^* = \bar{\lambda} B_N \tag{15.64}$$

特に $\lambda = \pm 1$ に対して、次の同値関係が成立する。

$$\bar{A}_N = \pm A_N \iff B_N^* = \pm B_N \tag{15.65}$$

例えば $T_N(a)$ は実作用素であるから、式(14.86), (15.65)より、全ての $a \in [-l, l]$ に対して、$E_N(a)$ は自己共役作用素になる：

$$E_N(a)^* = E_N(a) \tag{15.66}$$

命題15.15と図13.2より、図15.2で H_N を $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に、f を A_N に、$I_N(0)f$ を $A_N^{\pm}$ に置き換えれば、図15.2が空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対してそのまま成立する。

15.4 $\mathcal{B}(H_N)$ における双対作用素(1)

15.4を通じて、$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$, $B_N \equiv A_N^{\#}$ とする。ここで $A_N^{\#}$ は、式(14.6)で与えられる双対演算である。

命題15.1，命題15.6に対応して次の命題が成立する。

〔命題 15.16〕 A_N, B_N の空間周波数特性、結合特性に対して、次の関係が成立する。

$$\tilde{B_N}(m,n) = \overline{\hat{A_N}(m,n)} \tag{15.67}$$

$$\tilde{A_N}(m,n) = \overline{\hat{B_N}(m,n)} \tag{15.68}$$

つまり、A_N と B_N では、空間周波数特性と結合特性が、命題15.16の意味で丁度逆になっているのである。そこで、B_N を A_N の双対作用素と呼ぶことにする。$A_N^{\#\#} = A_N$ であるから、A_N は B_N の双対作用素になっている。

$\mathcal{B}^{(m)}(H_N)$ $(n=1,2)$ の元の双対作用素については、次節で詳しく論じる。

空間周波数特性及び結合特性の定義式(3.102), (3.104) と基本座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$、自然座標系 $\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ の関数形から分かるように、一般には、結合特性を求めるよりも空間周波数特性を求める方が、計算が簡単である。従って、もしこれら両特性が簡単な関係で結ばれていれば、結合特性を求める代りに空間周波数特性を求めれば良いことになり、都合が良い。命題15.16は、そのような問題に対する解決の指針を与えてくれるのであるが、その前に、一つの準備をする。

$\Omega A_N \equiv A_N^{\#}$ とおけば、式(5.144), (14.13), (14.17) より $(\Omega \circ \Omega_e) A_N = A_N^{\star}$ となる。従って、図5.7より、命題15.3 命題15.11 に対応する次の命題が成立する。

〔命題 15.17〕

$$A_N^{\sharp} = A_N^{\#\star} = \Xi_N A_N \Xi_N^{*} \tag{15.69}$$

$$A_N^{\bar{\#}} = A_N^{\star\#} = \Xi_N^{*} A_N \Xi_N \tag{15.70}$$

$$A_N^{\natural} = A_N^{\bar{\star}} = I_N(0) A_N I_N(0) \tag{15.71}$$

命題15.17と式(14.13)より、次の系が成立する。

〔系 15.3〕

$$A_N^{\#} = A_N^{(\#)^3} = \mathfrak{T}_N A_N \mathfrak{T}_N^{*} \tag{15.72}$$

$$A_N^{(\#)^2} = A_N^{(\#)^2} = A_N^{\overline{*}} = A_N^{\overline{*}} = I_N(0) A_N I_N(0) \tag{15.73}$$

$$A_N^{(\#)^3} = A_N^{\overline{\#}} = \mathfrak{T}_N^{*} A_N \mathfrak{T}_N \tag{15.74}$$

$$A_N^{(\#)^4} = A_N^{(\#)^4} = A_N \tag{15.75}$$

〔命題 15.18〕 各 λ に対して、次の同値関係が成立する。

(i) $\hat{A_N}(m,n) = \overline{\lambda \tilde{A_N}(m,n)} \iff A_N^{\#} = \lambda A_N \quad (|\lambda|=1)$ (15.76)

(ii) $\hat{A_N}(m,n) = \lambda \tilde{A_N}(m,n) \iff A_N^{\#*} = \lambda A_N \quad (\lambda = \pm 1)$ (15.77)

(iii) $\hat{A_N}(m,n) = \lambda \tilde{A_N}(m,n) \iff A_N^{\#} = \lambda A_N \quad (\lambda = \pm 1, \pm i)$ (15.78)

(iv) $\hat{A_N}(m,n) = \lambda \tilde{A_N}(-m,-n) \iff A_N^{\#} = \lambda A_N \quad (\lambda = \pm 1, \pm i)$ (15.79)

(証明) 命題 6.1, 命題 6.11 で $\Omega = \#$, $f = \psi_n$, $g = \psi_m$ とおけば、それぞれ式 (15.76), (15.77) が成立する。命題 6.21 で $f = \psi_n$, $g = \psi_m$ とおき、$\Omega = \#$, $\Omega_1 = \Omega_e$ 或いは $\Omega = \Omega_e$, $\Omega_1 = \#$ とおけば、それぞれ式 (15.78), (15.79) が成立する。 (Q.E.D)

式 (5.106), (5.11), (14.13) より

$$E_N^{\#} = \overline{E_N} = E_N^{*} = E_N \tag{15.80}$$

$$I_N(0)^{\#} = \overline{I_N(0)} = I_N(0)^{*} = I_N(0) \tag{15.81}$$

となるから、E_N 及び $I_N(0)$ は、命題 15.18 の (i)〜(iv) の全ての条件を、$\lambda = 1$ に対して満している。従って、式 (14.38) より、$E_N^{(e)}$, $E_N^{(i)}$ もまた命題 15.18 の全ての条件を、$\lambda = 1$ に対して満足している。

式(14.46)より、全ての $E_N^{(\lambda)}$($\lambda=\pm1,\pm i$)が、命題15.18の全ての条件を$\lambda=1$に対して満足している。また式(14.18)より

$$\mathfrak{E}_N^{\#*} = \mathfrak{E}_N^{\#} = \mathfrak{E}_N^{\overline{\#}} = \mathfrak{E}_N \tag{15.82}$$

となり、$\mathfrak{E}_N$は命題15.18の(ii)～(iv)の条件を、$\lambda=1$に対して満している。

なお、命題6.6、命題6.16、及び命題6.38を使えば、任意の$A_N\in\mathcal{B}(H_N)$を、命題15.18の各条件(i)～(iv)を満足する作用素に分解することができる。例えば、条件(iii)を満足する作用素に分解する為には、命題6.38を使って、次のようにすれば良い。

〔命題15.19〕 $\#$の固有値λに対応する固有空間を$\mathcal{B}_\lambda(H_N)$とする:

$$\mathcal{B}_\lambda(H_N) \equiv \{A_N \mid A_N^{\#} = \lambda A_N\} \quad (\lambda=\pm1,\pm i) \tag{15.83}$$

任意のA_Nは、$\mathcal{B}_\lambda(H_N)$の元$A_N^{(\lambda)}$を使って

$$A_N = \sum_{\lambda=\pm1,\pm i} A_N^{(\lambda)} \tag{15.84}$$

と一意に表される。そして$A_N^{(\lambda)}$は、次式で与えられる。

$$A_N^{(\lambda)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} \lambda^n A_N^{(\#)^n} \tag{15.85}$$

$$= \frac{1}{4}\left(A_N + \lambda^2 A_N^{\#\#} + \lambda A_N^{\overline{\#}} + \overline{\lambda} A_N^{\#}\right) \tag{15.86}$$

(証明) 式(15.84),(15.85)は命題6.38から明らかである。式(15.85)と系15.3より式(16.86)が成立する。 (Q.E.D)

式(15.83)より、$A_N^{(\lambda)}\in\mathcal{B}_\lambda(H_N)$ならば

$$A_N^{(\lambda)\#} = \lambda\,\overline{A_N^{(\lambda)}} \tag{15.87}$$

となるから、$A_N\in\mathcal{B}(H_N)$が式(15.84)のように分解されていれば

$$A_N^{\#} = \sum_{\lambda=\pm 1,\pm i} \lambda \overline{A_N^{(\lambda)}} \tag{15.88}$$

と、$A_N^{\#}$ を容易に求めることができる。これは丁度、式(15.23)に対応する関係である。

式(6.210)より、次の命題が成立する。

〔命題 15.20〕

$$\mathcal{B}(H_N) = \mathcal{B}_e(H_N) \oplus \mathcal{B}_o(H_N) \tag{15.89}$$

$$\mathcal{B}_e(H_N) = \mathcal{B}_1(H_N) \oplus \mathcal{B}_{-1}(H_N) \tag{15.90}$$

$$\mathcal{B}_o(H_N) = \mathcal{B}_i(H_N) \oplus \mathcal{B}_{-i}(H_N) \tag{15.91}$$

命題 15.20 を図示すれば、図15.4のようになる。この図は、図6.6の特殊な場合であり、図14.2, 図15.3に対応するものである。

式(15.87)より、次の同値関係が成立する。

$$A_N^{\#} = \lambda A_N \iff A_N^{\#} = \bar{\lambda} A_N \tag{15.92}$$

従って、命題 15.18 より、$A_N \in \mathcal{B}_\lambda(H_N)$ ならば

$$\hat{A_N}(-m,-n) = \lambda^2 \hat{A_N}(m,n) \tag{15.93}$$

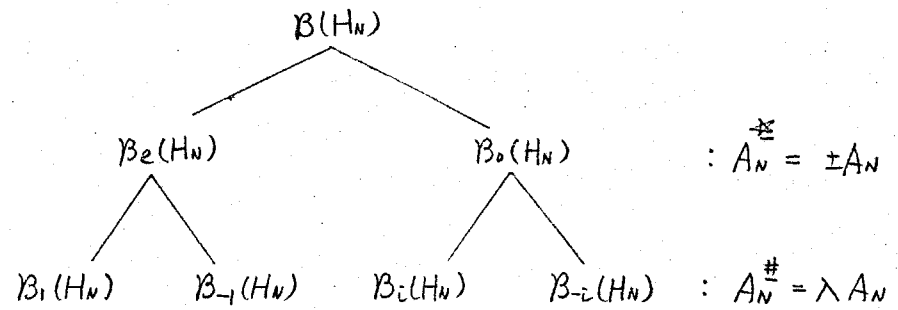


図 15.4 $\mathcal{B}(H_N)$ の直和分解

となる。即ち、$\lambda=\pm 1$ 或いは $\lambda=\pm i$ に応じて、$A_N \in B_\lambda(H_N)$ の結合特性 $\hat{A_N}$ が、(0,0) 要素を中心とする点対称行列或いは点反対称行列になるのである。これはまた、命題15.20（図15.4）と命題10.22からも明らかなことである。

命題15.5, 命題15.13 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題15.21〕 各 $\lambda(=\pm 1)$ に対して、次の各条件は互いに同値である。

$$(i)\quad A_N^{\overset{\star}{=}} = \lambda A_N \tag{15.94}$$

$$(ii)\quad A_N^{\overset{\#}{=}} = \lambda A_N^{\overline{\#}} \tag{15.95}$$

$$(iii)\quad A_N^{\#\star} = \lambda A_N^{\star\#} \tag{15.96}$$

$$(iv)\quad A_N E_N^{(e)} = \begin{cases} E_N^{(e)} A_N & (\lambda=1) \\ E_N^{(o)} A_N & (\lambda=-1) \end{cases} \tag{15.97}$$

$$(v)\quad A_N E_N^{(o)} = \begin{cases} E_N^{(o)} A_N & (\lambda=1) \\ E_N^{(e)} A_N & (\lambda=-1) \end{cases} \tag{15.98}$$

（証明） (i) ⟷ (ii) ⟷ (iii) は、系16.3から明らかである。(i)→(iv), (v)→(i) は、命題10.22と式(14.38)から明らかである。最後に、(iv)→(v) を示す。

$$E_N = E_N^{(e)} + E_N^{(o)} \tag{15.99}$$

であるから、(iv) が成立したとすれば、$\lambda=1$ のとき

$$A_N E_N^{(o)} = A_N(E_N - E_N^{(e)}) = A_N - E_N^{(e)} A_N = (E_N - E_N^{(e)}) A_N = E_N^{(o)} A_N$$

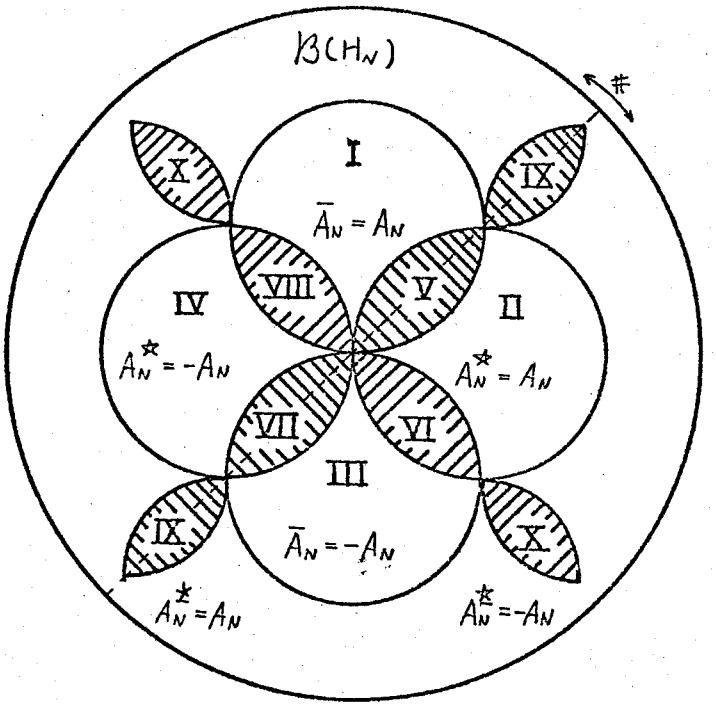
となり、(v) が成立する。$\lambda=-1$ のときも、同様に証明できる。 (Q.E.D)

命題15.17 から分かるように、$\mathcal{B}(H_N)$ の元全体に対しては、$-$ と $\#$、或いは $\#$ と $\star$ は、可換にならない。しかし、命題15.21 が主張しているように、A_N を偶作用素に限れば、これらは共に可換になり、奇作用素に限れば共に反可換になるのである。

つまり、図15.4で言えば、まず部分空間 $\mathcal{B}_\lambda(H_N)$ $(\lambda=\pm1,\pm\mathrm{i})$ は、$\overline{\star}$ 或いは $\#\star$ の固有空間として特徴づけられる。そして、$\overline{\star}$ 或いは $\overline{\#\star}$ の固有空間として特徴づけられる $\mathcal{B}_e(H_N)$ 及び $\mathcal{B}_o(H_N)$ が、その一つ下の階層の部分空間 $\mathcal{B}_\lambda(H_N)$ の特徴づけに使用した演算 $-$ と $\#$ 或いは $\#$ と $\star$ の交換可能性によって、特徴づけられるのである。

命題 6.5 より、次の命題が成立する。

〔命題 15.22〕 任意に固定した複素数 λ $(|\lambda|=1)$ に対して、次の関



(i) $\bar{A}_N = A_N$: 実作用素 (I, V, VIII)

(ii) $\bar{A}_N = -A_N$: 虚作用素 (II, VI, VII)

(iii) $A_N^{\star} = A_N$: 自己対称作用素 (I, V, VI)

(iv) $A_N^{\star} = -A_N$: 反自己対称作用素 (II, III, VII)

(v) $A_N^{\overline{\star}} = A_N$: 偶作用素 (V, VIII, IX)

(vi) $A_N^{\overline{\star}} = -A_N$: 奇作用素 (VI, VII, X)

(双対演算 # により、点線に関して対称に変換される)

図15.5 共変対合 $-$, $\star$ に関する各種固有集合の関係

係が成立する.

$$\bar{A}_N = \lambda A_N \quad \Longleftrightarrow \quad B_N^{\star} = \bar{\lambda} B_N \tag{15.100}$$

特に、$\lambda = \pm 1$ に対して、次の関係が成立する。

$$\bar{A}_N = \pm A_N \quad \Longleftrightarrow \quad B_N^{\star} = \pm B_N \tag{15.101}$$

図 6.1 を考慮しながら式(15.101)を図示すれば、図 15.5 のようになる。図 15.5 の領域 (i) (iii) が、実(虚)作用素即ち結合特性が実(純虚)行列になる作用素の全体であったのに対し、領域 (iii) (iv) は、空間周波数特性が実(純虚)行列になる作用素の全体である。実際、それは命題 15.16 と図 15.5 から明らかなことである。つまり、領域 (i) と (iii) 及び (ii) と (iv) が、それぞれ双対な集合になっているのである。

15.5 結合特性の次元独立性[11]

15.5.1 結合特性の次元独立性

$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の空間周波数特性、結合特性は、式(3.102), (3.104) に示したように、

$$\tilde{A_N}(m,n) = (A_N \varphi_n, \varphi_m), \quad \hat{A_N}(m,n) = (A_N \psi_n, \psi_m) \tag{15.102}$$
$$(m,n = -N, -N+1, \cdots, N)$$

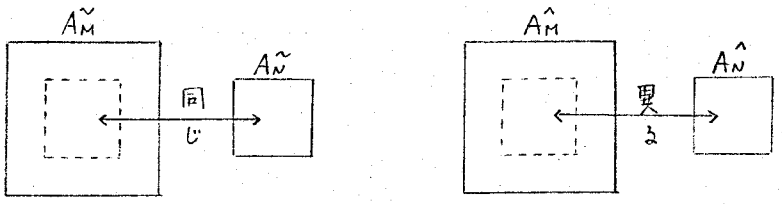
で与えられる。今、$A_M \in \mathcal{B}(H_N)$ $(M > N)$ に対して

$$A_N = E_N A_M E_N \tag{15.103}$$

とおけば、φ_n は N によらない関数であるから、式(15.102)より

$$\tilde{A_M}(m,n) = \tilde{A_N}(m,n) \quad (m,n = -N, -N+1, \cdots, N) \tag{15.104}$$

と、空間周波数特性は、次元 N に依存しない(図 15.6 (a))。しかし、ψ_n は



(a) 空間周波数特性　　(b) 結合特性

図 15.6　空間周波数特性と結合特性の次元独立性

N の関数であるから、例えば式(7.24)から分かるように、一般には $A_M^{\wedge}(m,n) \neq A_N^{\wedge}(m,n)$ と次元が異れば、結合特性は全て異ってしまうのである(図 15.6 (b))。

これは、空間回路網の規模を途中から拡大しようとする場合に、初めから全部作り直さなければいけない、ということを意味している。しかし、もし式(15.104)と同様に

$$A_M^{\wedge}(m,n) = A_N^{\wedge}(m,n) \quad (m,n = -N, -N+1, \cdots, N) \qquad (15.105)$$

という関係が成立していれば、既に作られている部分 $A_N^{\wedge}(m,n)$ をそのまま使用することができるので、非常に都合が良い。式(15.105)を満足する A_N の結合特性は才一種次元独立、或いは単に次元独立であるということにする。

結合特性の次元独立性に関して、次の三つの問題が考えられる。

(i) 結合特性が次元独立になる為の条件を明らかにすること。

(ii) 結合特性が次元に依存する場合には、その作用素を、次元独立な作用素に分解すること。

(iii) 結合特性が次元に依存する作用素を、次元に依存しない作用素で近似すること。

15.5では、才6節で論じた共変対合の理論及び前節の結果を利用しながら、上記(i)の問題を論じることにする。

15.5.2　才一種次元独立性の条件

補題 6、4 で $\Omega = \#$, $\Omega_1 = \#$, $f = \varphi_n$, $g = \varphi_m$ とおけば、次の命題が成立する。

〔命題 15、23〕 式(15、105)が成立する為の必要十分条件は、

$$A_N^{\#} = E_N A_M^{\#} E_N \tag{15、106}$$

が成立することである。*

命題 15、23 より直ちに、次の系を得る。

〔系 15、4〕 結合特性が次元独立となる作用素の全体は、線形空間をなす。

系 15、4 より、結合特性が次元に依存する作用素と、和の形にどのように分解しても、15.5.1で述べた問題(ii)を解決することはできないことが分かる。

式(15、80), (15、81)と命題 15、23 より、E_N 及び $I_N(0)$ の結合特性は、次元独立である。従って、式(14、38)と系 15、4 より、$E_N^{(e)}$, $E_N^{(0)}$ の結合特性も次元独立である。実際、これら四種類の作用素の結合特性は

$$\hat{E}_N = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{I}_N(0) = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \tag{15、107}$$

$$\hat{E}_N^{(e)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 2 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{E}_N^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & & -1 \\ & 1 & & -1 & \\ & & 0 & & \\ & -1 & & 1 & \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{15、108}$$

となり、確かに次元独立になっている。**

式(15、104)に示したように、空間周波数特性は次元独立である。よって、命題 15、18 より次の命題が成立する。

---

* $B(H_N)$ 及び $B(H_M)$ における双対演算を、同じ # で表す。

** $\mathfrak{E}_N$ に対しては、式(14、18)と(4、30)より、一見式(15、106)が成立しそうである。ところが、式(14、12)から分かるように、$\mathfrak{E}_N \neq E_N \mathfrak{E}_M E_N$ である。つまり、$\mathfrak{E}_N$ は N によってその定義の仕方が異っており、式(15、103)の意味で $\mathfrak{E}_M$ の縮少にはなっていないのである。$E_N^{(\lambda)}$ についても同様である。

〔命題 15.24〕　次の各条件は、結合特性が次元独立になる為の十分条件である。

(i)　$A_N^{\#} = \lambda A_N$　かつ　$A_M^{\#} = \lambda A_M$　(15.109)

(ii)　$A_N^{\#*} = \lambda A_N$　かつ　$A_M^{\#*} = \lambda A_M$　(15.110)

(iii)　$A_N^{\pm} = \lambda A_N$　かつ　$A_M^{\pm} = \lambda A_M$　(15.111)

(iv)　$A_N^{\overline{\#}} = \lambda A_N$　かつ　$A_M^{\overline{\#}} = \lambda A_M$　(15.112)

式(15.106)は、確かに結合特性が次元独立になる為の必要十分条件になっているけれども、何故そうなるかという理由は、それ程明確ではない。これに対して、命題15.24の各条件は、非常に明確である。即ち、各 N, M に対して命題15.24の条件が成立するということは、各 N, M に対して命題15.18の条件が成立するということである。そしてこの時、命題15.18より結合特性は空間周波数特性と N, M に無関係な形で結ばれる。その結果、空間周波数特性の次元独立性という性質が、結合特性に伝播されるのである。

E_N, I_N, $E_N^{(e)}$, $E_N^{(o)}$ は、命題15.24の全ての条件を満足している。

15.5.3　結合特性のオニ種次元独立性

結合特性に関して、次のような次元独立性を考えることができる。式(3.72)で与えられる標本点 a_n は、N の関数であるから、それを強調して $a_n^{(N)}$ と表す。式(15.105)が成立していなくても、

$$a_m^{(N)} = a_p^{(M)}, \quad a_n^{(N)} = a_q^{(M)} \tag{15.113}$$

を満足する添字の組 (m, n) と (p, q) に対して

$$|A_M^{\wedge}(p, q)| = |A_N^{\wedge}(m, n)| \tag{15.114}$$

が成立することがある。このとき、A_N の結合特性はオニ種次元独立であると

いうことにする。

命題 8.3 より、微分作用素 D_N の結合特性は、オ二種次元独立である。また式(8.52),(8.54)より、二階微分作用素 D_N^2 の結合特性は、$\hat{D_N}(0)$ を除けばオ二種次元独立である。

たとえ結合特性がオ二種次元独立であっても、オ一種次元独立でない限り、空間回路網の規模を途中から拡充する場合には、初めから全部作り直さなければいけない。しかしその場合にも、各結合係数の値を全部計算しなおす必要はなく、式(15.113)を満たす(p.8)の組に対しては、式(15.114)より、今まで用いていた結合係数の値を利用することができるのである。

また D_N 及び D_N^2 に対して、図8.2, 図8.8に示したように、オ二種次元独立の場合には、一つのグラフを描いておけば、それから全ての N に対する結合特性を読取ることができるのである。

結合特性のオ二種次元独立性に関しても、15.5.1で述べた三つの問題を考えることができる。しかし、これらの問題については、別の機会に論じることにする。

15.6 まとめ

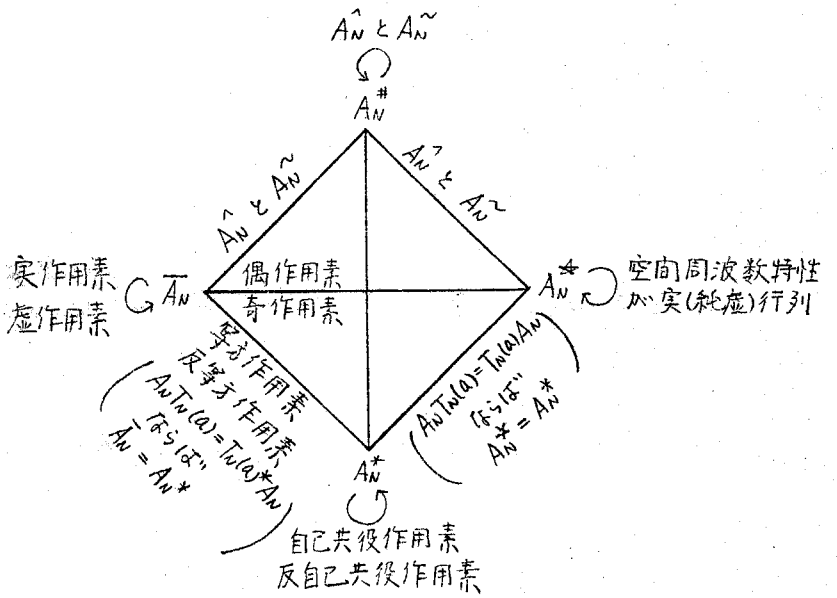


図15.7 共変対合 $-, \#, \star$ と反変対合 $*$ の働き*

これまでに論じてきた共変対合の特殊な場合である複素共役演算 $-$, 双対演算 $\#$, 対称演算 $\star$ と反変対合の特殊な場合である共役演算 $*$ の働きを、図15.7にまとめて示す。図15.7の上の三角形は、図5.7に対応するものである。

---

* 図15.7で"$\hat{A_N}$ と $\tilde{A_N}$"と記してあるのは、15.4で論じた"$\hat{A_N}$ と $\tilde{A_N}$ の関係"及び15.5で論じた"A_N の次元独立性"を意味している。

第16節　$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$

16.1　まえがき

扱う作用素の対象を、$\mathcal{B}(H_N)$ の特殊な部分空間に限定することにより、より詳細な議論を展開することができるという立場から、第四章では、並進作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ について論じ、第五章では、反転作用素によって生成される作用素の空間 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ について論じてきた。

同様の立場から本節では、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元の双対作用素の全体 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ および $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元の双対作用素の全体 $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の構造について論じる。その定義から明らかなように、$\mathcal{B}^{(m)}(H_N)$ $(m=1,2)$ の性質を、双対演算 $\sharp$ によって $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ に容易に変換することができる。その結果、$\mathcal{B}^{(m)}(H_N)$ $(m=1,2)$ がインパルス応答によって H_N と同形に結びつけられていたのに対して、$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ が直流応答によって H_N と同形に結びつけられることが分かる。なお、本節で得られた基本的結果を、図16.3にまとめて示す。

16.2　作用素 $F_N(a)$ と $J_N(a)$

準備として、並進作用素 $T_N(a)$ と双対な作用素

$$F_N(a) \equiv T_N(a)^{\sharp} \quad (-\infty < a < \infty) \tag{16.1}$$

および、反転作用素 $I_N(a)$ と双対な作用素

$$J_N(a) \equiv I_N(a)^{\sharp} \quad (-\infty < a < \infty) \tag{16.2}$$

の性質を、簡単にまとめておく。

16.2.1 作用素 $F_N(a)$

〔補題 16.1〕

$$F_N(a+2\ell) = F_N(a) \tag{16.3}$$

$$F_N(a)F_N(b) = F_N(a+b) \tag{16.4}$$

$$F_N(0) = E_N \tag{16.5}$$

$$F_N(a)^{-1} = \overline{F_N(a)} = F_N(a)^{*} = F_N(-a) \tag{16.6}$$

$$F_N(a)^{\star} = F_N(a) \tag{16.7}$$

（証明） 式(16.1),(15.70),(10.56)より

$$\overline{F_N(a)} = T_N(a)^{\overline{\#}} = T_N(a)^{\star\#} = T_N(-a)^{\#} = F_N(-a)$$

となる。式(16.3)～(16.6)の残りの式は、式(7.2)～(7.6),(5.25)と補題5.9の(V)より明らかである。式(16.7)は式(7.7),(15.101)より明らかである。 (Q.E.D)

式(16.4)～(16.6)は、$F_N(a)$が等方ユニタリ作用素であり、$\{F_N(a);-\infty<a<\infty\}$が作用素の積に関して群になることと意味している。

命題7.2と命題5.19より、次の補題が成立する。

〔補題 16.2〕

$$(F_N(a), F_N(b)) = \sqrt{2N+1}\,\delta_0(a-b) \tag{16.9}$$

特に$\{F_N(a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$は、Schmidtの内積に関して、正規直交系をなす。

式(7.16),(7.25),(7.27),(14.8)より、次の補題が成立する。

〔補題 16.3〕

$$F_N(a) = \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(a) \langle \psi_n, \psi_n \rangle \tag{16.10}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m,n=-N}^{N} \psi_{m-n}(a) \langle \varphi_m, \psi_n \rangle \tag{16.11}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \psi_n(a) F_N(a_n) \tag{16.12}$$

式(16.10)は、$F_N(a)$の固有値が$\varphi_n(a)$であり，対応する固有関数が$\psi_n(x)$であることを意味している：

$$F_N(a)\,\psi_n(x) = \varphi_n(a)\,\psi_n(x) \quad (n=-N, -N+1, \cdots, N) \tag{16.13}$$

式(16.12)より，任意の$F_N(a)$が、正規直交系$\{F_N(a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$によって展開でき、そのときの展開係数が$\psi_n(a)$であることが分かる。

〔系 16.1〕

$$F_N(a)\,\varphi_N(x, b) = \varphi_N(x, a+b) \tag{16.14}$$

$$F_N(a_n)\,\varphi_m(x) = \varphi_{m+n\,(\mathrm{mod}\,2N+1)}(x) \tag{16.15}$$

（証明） 式(16.14)は、式(16.10),(14.76)より明らかである。式(16.14)で $a=a_n$, $b=a_m$ とおけば、式(14.82)より式(16.15)が成立する。 (Q.E.D)

式(16.15)は、$F_N(a_n)$が空間周波数を$2N+1$を法としてnだけ逓倍する作用素であることを表している。この性質を、連続なパラメータに一般化したものが、式(16.14)である。そこで$F_N(a)$を、巡回的空間周波数逓倍作用素（cyclic spatial frequency multiplier）と名付けることにする。

16.2.2 作用素 $J_N(a)$

補題 16.1 に対応して、次の補題が成立する.

〔補題 16.4〕

$$J_N(a) = F_N(2a)\, I_N(0) = I_N(0)\, F_N(2a)^* \tag{16.16}$$

$$J_N(a+\ell) = J_N(a) \tag{16.17}$$

$$J_N(0) = I_N(0) \tag{16.18}$$

$$J_N(a)^{-1} = J_N(a)^* = J_N(a)^{\star} = J_N(a) \tag{16.19}$$

$$\overline{J_N(a)} = J_N(-a) \tag{16.20}$$

$$J_N(a) J_N(b) = F_N(2(a-b)) \tag{16.21}$$

$$J_N(a) F_N(b) = F_N(b)^* J_N(a) \tag{16.22}$$

(証明) 式(16.18)は式(15.81)より、式(16.16)は式(16.18),(10.16)より明らかである。式(16.17),(16.20)は、式(16.16),(16.3),(16.6)より明らかである。式(10.15),(15.69),(5.92),(5.107)より式(16.19)が成立する。式(10.29)より式(16.21)が、式(10.19)より式(16.22)が成立する。 (Q.E.D)

式(16.19)より、$J_N(a)$ がユニタリ作用素であることが分かる。

式(10.37)より、補題16.2に対応する次の補題が成立する。

〔補題 16.5〕

$$(J_N(a), J_N(b)) = \sqrt{2N+1}\, \psi_0(2(a-b)) \tag{16.23}$$

特に $\{J_N(\frac{1}{2}a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$ は、Schmidt の内積に関して、正規直交系となす。

式(16.16)と補題16.3より、次の補題が成立する。

〔 補題 16.6 〕

$$J_N(a) = \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(2a) \langle \psi_n, \psi_{-n} \rangle \tag{16.24}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m,n=-N}^{N} \psi_{m+n}(2a) \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle \tag{16.25}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} \psi_n(2a) J_N(\tfrac{1}{2}a_n) \tag{16.26}$$

式(16.24),(16.26)の#をとれば、それぞれ式(10.6),(10.43)になる。式(16.26)は、任意の$J_N(a)$が、正規直交系$\{J_N(\frac{1}{2}a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$によって展開でき、そのときの展開係数が$\varphi_n(2a)$であることを示している。

〔 系 16.2 〕

$$J_N(a)\varphi_N(x,b) = \varphi_N(x, 2a-b) \tag{16.27}$$

$$J_N(a_n)\varphi_m(x) = \varphi_{2n-m \,(\mathrm{mod}\, 2N+1)}(x) \tag{16.28}$$

(証明) 式(16.16),(16.14),(14.78)より

$$J_N(a)\varphi_N(x,b) = F_N(2a) I_N(0) \varphi_N(x,b) = F_N(2a)\varphi_N(x,-b) = \varphi_N(x, 2a-b)$$

となり、式(16.27)が成立する。式(16.28)は式(16.27),(14.82)より明らかである。 (Q.E.D)

式(16.28)は、$J_N(a_n)$が空間周波数を、$2N+1$を法として、nに関して反転する作用素であることを表している。この性質を、連続なパラメータに一般化したものが、式(16.27)である。そこで$J_N(a)$を、空間周波数反転作用素と名付けることにする。

16.3 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$に双対な空間$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$と$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$に双対な空間$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$

$\mathcal{B}^{(n-2)}(H_N)$ $(n=3,4)$の元の双対作用素の全体と、$\mathcal{B}^{(n)}$で表す:

$$\mathcal{B}^{(n)}(H_N) \equiv \mathcal{B}^{(n-2)}(H_N)^{\#} = \{ A_N \mid A_N^{\#} \in \mathcal{B}^{(n-2)}(H_N) \} \quad (n=3.\ 4) \qquad (16.29)$$

例えば 式(16.1),(16.2)より、$F_N(a) \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$, $J_N(a) \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ であり、更に式(16.5),(16.18)より

$$E_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N) \cap \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \qquad (16.30)$$

$$I_N(0) \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N) \cap \mathcal{B}^{(2)}(H_N) \qquad (16.31)$$

となる。

一般に共変対合は、部分空間と同じ次元の部分空間に変換するから、$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3.\ 4)$ は $\mathcal{B}(H_N)$ の $2N+1$ 次元部分空間である。

16.3.1 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$

〔命題 16.1〕 次の各条件は、互いに同値である。

(i) $A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ (16.32)

(ii) $A_N F_N(a) = F_N(a) A_N$ for all a (16.33)

(iii) $A_N \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle A_N$ for all n (16.34)

(iv) $A_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n) \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle$ (16.35)

(証明) 命題5.15 と式(14.8)を使用すれば、式(7.29)より (i) $\longleftrightarrow$ (ii) が、式(7.44)より (i) $\longleftrightarrow$ (iii) が、式(7.34)より (i) $\longleftrightarrow$ (iv) が、それぞれ成立する。 (Q.E.D)

(ii),(iii) は、$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の交換関係による特徴づけである。(iv)は、自然座標系 $\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$ が $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の元の固有関数になり、そのときの固有値が、A_N の結合特性の対角成分になることを意味している：

$$A_N \varphi_n(x) = \hat{A_N}(n)\varphi_n(x) \quad : \quad A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N) \tag{16.36}$$

更に、(iv)は、次のことを意味している。$A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ を、§3節で述べた方法により電子回路で実現する為には、図16.1(a)に示すように、同じ番号の入出力端子を、重み $\hat{A_N}(n)$ で結線すれば良い。そこで、固有値から作られるベクトル $(\hat{A_N}(n))$ をも、$A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の結合特性と呼び、本来の結合特性と同じ記号 $\hat{A_N}$ で表すことにする。また、正規直交系 $\{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle\}_{n=-N}^{N}$ を、$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の自然座標系と名付ける。

〔命題 16.2〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ が $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ に属する為の必要十分条件は、A の空間周波数特性 $\tilde{A_N} = \langle\!\langle \tilde{A_N}(m,n) \rangle\!\rangle$ が

$$\tilde{A_N}(m,n) = \tilde{A_N}(m-n) \tag{16.37}$$

と、巡回行列になることである。そしてこのとき、A_N は

$$A_N = \sum_{n=-N}^{N} \tilde{A_N}(n) F_N(a_n) \tag{16.38}$$

と表される。

（証明） $B_N \equiv A_N^{\#}$ とおけば、式(15.68)より $\tilde{A_N}$ が巡回行列になることと、$\hat{B_N}$ が巡回行列になることとは同値である。従って、命題7.23より命題16.2の前半が成立し、

$$\tilde{A_N}(n) = \overline{\hat{B_N}(n)} \tag{16.39}$$

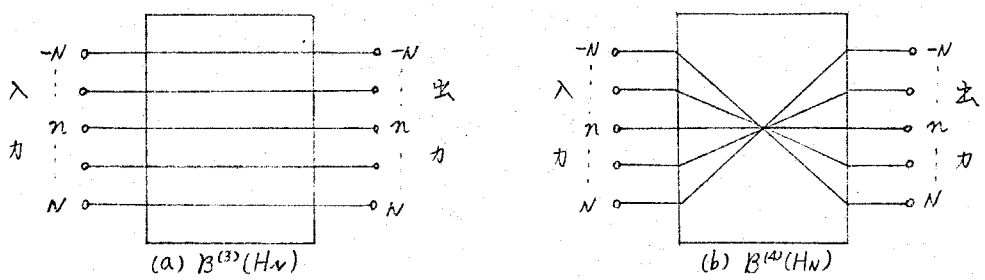


図 16.1 $\mathcal{B}^{(k)}(H_N)$ $(k=3,4)$ の元の回路構成

となる。式(7.100)の両辺の $\#$ をとれば、式(16.39),(16.1)より式(16.38)が成立する。 (Q.E.D)

そこで、ベクトル $(\tilde{A_N}(n))$ をも、$A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の空間周波数特性と呼び、本来の空間周波数特性と同じ記号 $\tilde{A_N}$ で表すことにする。また、正規直交系 $\{F_N(a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$ を、$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の基本座標系と名付ける。

〔命題16.3〕 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ は $-, *, \star$ に関して閉じており、$\overline{A}_N = A_N^*$ となる。

(証明) $A_N^{\#} \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ であるから、式(15.69),(7.84)より

$$\overline{A}_N = (A_N^{\#})^{\#} = (A_N^{\#\star})^{\#} = (A_N^{*\#})^{\#} = A_N^{*}$$

となり、$\overline{A}_N = A_N^{*}$ となる。更に命題7.6より $A_N^{\#*} \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ であるから、$A_N^{*} = (A_N^{*\#})^{\#} = (A_N^{\#*})^{\#} \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ となる。$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ が $\star$ に関して閉じていることは、式(16.38),(16.7)から明らかである。 (Q.E.D)

命題16.3より、$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の元が全て等方作用素になることが分かる。これはまた、図16.1からも明らかなことである。

式(16.35)より、$A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ に対して $A_N B_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ となり、

$$A_N B_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n) \hat{B_N}(n) \langle \psi_n, \psi_n \rangle \qquad (16.40)$$

となる。従って、命題7.9と同様に次の命題が成立する。

〔命題16.4〕 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ は、単位元をもった可換環である。

命題16.3と命題16.4より、$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の元は全て正規作用素になっている。

16.3.2 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に双対な空間 $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$

〔命題 16.5〕 次の各条件は互いに同値である。

(i) $A_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ (16.41)

(ii) $A_N F_N(a) = F_N(a)^* A_N$ for all a (16.42)

(iii) $A_N \langle \psi_n, \psi_m \rangle = \langle \psi_{-n}, \psi_{-m} \rangle A_N$ for all n (16.43)

(iv) $A_N = \sum_{n=-N}^{N} A_N^{\wedge}(n) \langle \psi_n, \psi_{-n} \rangle$ (16.44)

(証明) 式(11.2), (16.1)より (i)⟷(ii)が、式(11.9)より (i)⟷(iii)が式(11.4)より (i)⟷(iv)がそれぞれ成立する。 (Q.E.D)

(ii), (iii)は交換関係による $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の特徴づけである。(iv)は次のことを意味している。$A_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ を、才3節で述べた方法により電子回路で実現する為には、図16.1(b)に示すように、入力側才n端子と出力側才n端子を、重み $A_N^{\wedge}(n)$ で結線すれば良い。つまり、$A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の結合特性が対角行列になっていたのに対して、$A_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の結合特性は、$A_N^{\wedge}(n)$ を要素とする逆対角行列になるのである。そこで、ベクトル $(A_N^{\wedge}(n))$ をも、$A_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の結合特性と名付け、本来の結合特性と同じ記号 $A_N^{\wedge}$ で表すことにする。また、正規直交系 $\{\langle \psi_n, \psi_{-n} \rangle\}_{n=-N}^{N}$ を、$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の自然座標系と名付ける。

命題11.11, 命題11.12と式(16.2)より、次の命題が成立する。

〔命題 16.6〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ が $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ に属する為の必要十分条件は、A_N の空間周波数特性 $A_N^{\sim} = \langle\langle A_N^{\sim}(m,n) \rangle\rangle$ が

$$A_N^{\sim}(m,n) = A_N^{\sim}(m+n) \tag{16.45}$$

と、逆巡回行列になることである。そしてこのとき、A_N は

$$\begin{cases} A_N = \sum_{n=-N}^{N} A_N^{\sim}(n) J_N\left(\frac{1}{2} a_n\right) & (16.46) \\ A_N^{\sim}(n) = \frac{1}{2N+1} \left(A_N, J_N\left(\frac{1}{2} a_n\right)\right) & (16.47) \end{cases}$$

と表される。

そこで、ベクトル $(\tilde{A_N}(n))$ をも、$A_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の空間周波数特性と呼び、本来の空間周波数特性と同じ記号 $\tilde{A_N}$ で表すことにする。また、正規直交系 $\{J_N(\frac{1}{2}a_n)/\sqrt{2N+1}\}_{n=-N}^{N}$ を、$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の基本座標系と名付ける。

〔命題 16.7〕 $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ は $-, *, \overset{\star}{}$ に関して閉じており、$A_N^{\overset{\star}{}} = A_N^*$ となる。

（証明） $A_N^{\#} \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ であるから、式(15.69), (11.18)より

$$A_N^{\overset{\star}{}} = (A_N^{\#})^{\#\overset{\star}{}} = (A_N^{\#})^{\#} = (A_N^{\#})^{*\#} = A_N^{\#\#*} = A_N^*$$

となり、$A_N^{\overset{\star}{}} = A_N^*$ となる。更に命題 11.6 より $A_N^{\#*} \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ であるから、$A_N^* = (A_N^{\#*})^{\#} \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ となる。$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ が $-$ に関して閉じていることは、式(16.44)から明らかである。 (Q.E.D)

一般に、$A_N^{\overset{\star}{}} = A_N^*$ は、$A_N^{\wedge}$ が逆対称行列になることと同値である。$A_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の結合特性が逆対角行列になることを考慮すれば、命題 16.7 の $A_N^{\overset{\star}{}} = A_N^*$ は、当然のことといえる。

16.4 空間 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1\sim4)$ の相互関係

これまでに現れた四種類の空間 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1,2,3,4)$ の相互関係について論じる。まず式(15.81)より命題 11.7, 命題 11.8 に対応して、次の二命題が成立する。

〔命題 16.8〕 $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の元に $I_N(0)$ を右から掛けるという演算は、$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ から $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の上への等長作用素であり、その逆演算は、$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の元に同じく $I_N(0)$ を右から掛けるという作用素である：

$$\mathcal{B}^{(3)}(H_N) I_N(0) = \mathcal{B}^{(4)}(H_N) \qquad (16.48)$$

$$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)\, I_N(0) = \mathcal{B}^{(3)}(H_N) \tag{16.49}$$

更に、$A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $B_N \equiv A_N I_N(0) \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ のそれぞれの空間における空間周波数特性及び結合特性は、一致する。

つまり、$\mathcal{B}^{(m)}(H_N)$ $(m=3,4)$ の元の空間周波数特性に対して、図11.3と同様の関係が成立し、結合特性に対して、図11.1と同様の関係が成立するのである。式(16.35)の右から $I_N(0)$ を掛ければ式(16.44)になり、式(16.38)の右から $I_N(0)$ を掛ければ式(16.16)より式(16.46)になる。命題16.8の後半は、この事実を述べたものである。

〔命題16.9〕 $m, n = 3, 4$ に対して、次の関係が成立する。

$$\mathcal{B}^{(m)}(H_N) \cdot \mathcal{B}^{(n)}(H_N) = \begin{cases} \mathcal{B}^{(3)}(H_N) & (m=n) \\ \mathcal{B}^{(4)}(H_N) & (m \neq n) \end{cases} \tag{16.50}$$

命題16.9より、$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ が環にならないことが分かる。

命題11.9に対応して、次の命題が成立する。

〔命題16.10〕

$$\mathcal{B}^{(3)}(H_N) \cap \mathcal{B}^{(1)}(H_N) = \mathcal{L}(E_N) \tag{16.51}$$

$$\mathcal{B}^{(4)}(H_N) \cap \mathcal{B}^{(2)}(H_N) = \mathcal{L}(I_N(0)) \tag{16.52}$$

$$\mathcal{B}^{(3)}(H_N) \cap \mathcal{B}^{(4)}(H_N) = \mathcal{L}(\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle) \tag{16.53}$$

$$\mathcal{B}^{(3)}(H_N) \cap \mathcal{B}^{(2)}(H_N) = \{0\} \tag{16.54}$$

$$\mathcal{B}^{(4)}(H_N) \cap \mathcal{B}^{(1)}(H_N) = \{0\} \tag{16.55}$$

(証明) $m, n = -N, -N+1, \cdots, N$ に対して

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = T_N(a_m) \langle \psi_0, \psi_0 \rangle T_N(a_n)^* \qquad (16.56)$$

となるから*、$A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N) \cap \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ とすれば、式(7.29),(16.34)より A_N は、$\{\langle \psi_m, \psi_n \rangle\}_{m,n=-N}^{N}$ と可換になり、補題5、8より $A_N \in \mathcal{L}(E_N)$ となる。よって、式(16.30)より式(16.51)が成立する。他も同様に証明できる。(Q.E.D)

$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ ($n=1\sim4$) の相互の幾何学的関係を更に詳細に述べれば、次のようになる。その前に、一つの補題を準備する。

〔補題 16.7〕 S_0, S_1, S_2 を $\mathcal{B}(H_N)$ の部分空間とし

$$S_1 \cap S_2 = S_0 \ , \ S_1 \ominus S_0 \perp S_2 \qquad (16.57)$$

とすれば、次の直交関係が成立する。

$$S_2 \ominus S_0 \perp S_1 \qquad (16.58)$$

(証明) $f \in S_2 \ominus S_0$, $g \in S_1$ とすれば、$S_1 = (S_1 \ominus S_0) \oplus S_0$ より、

$$g = g_1 + g_0 \ : \ g_1 \in S_1 \ominus S_0, \ g_0 \in S_0$$

と分解できるから、$(f, g) = (f, g_1) + (f, g_0) = 0$ となり、式(16.58)が成立する。 (Q.E.D.)

〔命題 16.11〕

$$\mathcal{B}^{(3)}(H_N) \ominus \mathcal{L}(E_N) \perp \mathcal{B}^{(1)}(H_N) \qquad (16.59)$$

$$\mathcal{B}^{(4)}(H_N) \ominus \mathcal{L}(I_N(0)) \perp \mathcal{B}^{(2)}(H_N) \qquad (16.60)$$

$$\mathcal{B}^{(4)}(H_N) \ominus \mathcal{L}(\langle \psi_0, \psi_0 \rangle) \perp \mathcal{B}^{(3)}(H_N) \qquad (16.61)$$

証明は、命題11.10の場合と同様にできる。式(16.59),(16.51)と補題

---

* $T_N(a_n) = T_N(a_1)^n$ であるから、式(16.56)は、$T_N(a_1) \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\langle \psi_0, \psi_0 \rangle \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ から $\mathcal{B}(H_N)$ の全ての元と構成できることを意味している。

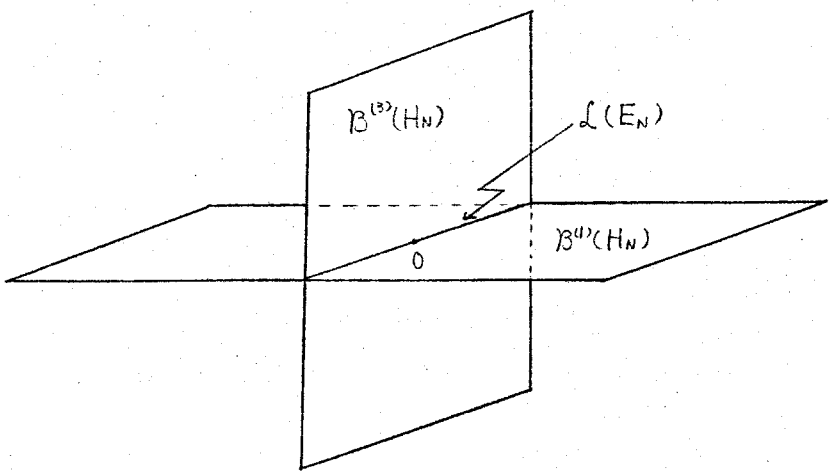


図16.2　$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の幾何学的関係

16.7 より、$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ が、図16.2に示すような幾何学的関係にあることが分かる。この図は、図11.2に対応する図であり、$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ 及び $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ に対しても、同様の図と描くことができる。このように、四種類の部分空間 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1\sim4)$ のうち、16.6 の図16.3において、縦及び横に隣接しているもの同志は、命題11.10（図11.2）或いは命題16.11（図16.2）に示したように直交している。しかし、斜めに隣接している空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ 及び $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ は、例えば、

$$(J_N(a), E^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\varphi_{2n}(2a) \tag{16.62}$$

$$(F_N(a), \langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\varphi_{2n}(a) \tag{16.63}$$

から予想がつくように、互いに直交することはないのである。

$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元の交換関係については、第12節で論じ、表12.2のような結果を得ている。$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の元の交換関係についても、同様の議論ができることを、次に示す。

命題12.4 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題16.12〕　$A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ に対して、次の関係が成立する。

$$A_N B_N = (B_N A_N)^{\overline{\star}} = I_N(0)\, B_N A_N I_N(0) \tag{16.64}$$

（証明）　$X_N \equiv A_N^{\#}$, $Y_N \equiv B_N^{\#}$　とおけば、式(12.15), (15.69)と命題16.9, 命題16.3 より

$$A_N B_N = (X_N Y_N)^{\#} = (Y_N X_N)^{\overline{*}\#} = ((Y_N X_N)^{\#})^{*} = (Y_N X_N)^{\#\star *}$$

$$= (B_N A_N)^{\star *} = (B_N A_N)^{*\star} = (B_N A_N)^{\overline{\star}} = I_N(0)\, B_N A_N I_N(0)$$

となり、式(16.64)が成立する。　(Q.E.D)

命題12.8 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題16.13〕　$A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$, $B_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ に対して

$$\begin{cases} A_N B_N = B_N A_N^{\overline{\star}} & (16.65) \\ B_N A_N = A_N^{\overline{\star}} B_N & (16.66) \end{cases}$$

証明は、命題16.13 の場合と同様にできる。

命題7.20 より、$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対しては　$A_N^{\star} = A_N^{*}$　であるから、命題12.4, 命題12.8 で $*$ と $\star$ に換え、式(10.58)を考慮すれば、命題12.4, 命題16.12 及び命題12.8 と命題16.13 が、同じ形式になっていることが分かる。

また、例えば式(16.65)の右辺で、A_N に $\overline{\star}$ がつき、B_N には何もついていない。これは、次のように考えれば良い。まず、命題16.3 より $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の元に対しては、$-$ と $*$ が同じ働きとしている。そこで、式(16.65)の $\overline{\star}$ を $*\star$ と考える。そうすれば、命題16.7 より $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の元 B_N に対しては　$B_N^{\star} = B_N^{*}$　であるから　$B_N = B_N^{*\star}$　となり、式(16.65)は

$$A_N B_N = B_N^{*\star} A_N^{*\star} \tag{16.67}$$

と対称な形に表現できるのである。

なお、命題15、9 等に対応する議論は、16.6（命題16.21）で行なう。

16.5 直流応答による $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ と H_N の同形対応

空間 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1,2)$ は、インパルス応答によって H_N と同形に対応づけられていた。ところが $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ は、以下に示すように、直流応答によって H_N と同形に対応づけられるのである。

$A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ に、その直流応答を対応づける作用素を、ρ_n $(n=3,4)$ で表す：

$$\rho_n(A_N) \equiv \sqrt{2N+1}\, A_N \varphi_0 \quad (n=3,4) \tag{16.68}$$

ここで ρ_n の添字 n は、ρ_n の定義域が $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ であることを表している。直流応答は、$\mathcal{B}(H_N)$ の全ての元に対して定義できる。にもかかわらず、定義域を $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ に限定するのは、その逆作用素 ρ_n^{-1} を考えたいからである。

φ_0 は偶関数であるから、命題16.8 より補題11.1 に対応する次の補題が成立する。

〔補題16.8〕

$$\rho_4(A_N I_N(0)) = \rho_3(A_N) \quad : \quad A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N) \tag{16.69}$$

$$\rho_3(A_N I_N(0)) = \rho_4(A_N) \quad : \quad A_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N) \tag{16.70}$$

補題16.8 は、$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の間の、$I_N(0)$ を右から掛けるという同形写像によって互いに結ばれている二つの作用素 A_N と $A_N I_N(0)$ が同じ直流応答をもつことを意味している（図16.3）。

〔命題16.14〕 $n=3,4$ に対して、次の関係が成立する。

$$\rho_n(A_N) = \rho_{n-2}(A_N^{\#})' \quad : A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N) \tag{16.71}$$

（証 明） $n=3$ のときは、式(7.50), (16.68), (14.8) より明らかである。$n=4$ の場合も、同様である。 (Q.E.D)

従って、式(7.51)～(7.53) と式(16.16), (14.79), (14.8) より、例えば、

$$\rho_3(F_N(a))(x) = \rho_4(J_N(\tfrac{1}{2}a))(x) = \sqrt{2N+1}\,\varphi_N(x,a) \tag{16.72}$$

$$\rho_3(F_N(a_m)) = \rho_4(J_N(\tfrac{1}{2}a_m)) = \sqrt{2N+1}\,\varphi_m \tag{16.73}$$

$$\rho_3(\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle) = \rho_4(\langle \varphi_m, \varphi_{-n} \rangle) = \varphi_n \tag{16.74}$$

となる。式(16.73), (16.74) は、$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ の基本座標系，自然座標系と、H_N のそれとが、ρ_n によって互いに結ばれていることを表している。

命題16.14 と式(7.57), (11.57) より、次の命題が成立する。

〔命題16.15〕 $n=3, 4$ とする。ρ_n は、$\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ から H_N の上への一対一線形作用素であって、内積を保存する。即ち、$A_N, B_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ に対して

$$(\rho_n(A_N),\ \rho_n(B_N)) = (A_N, B_N) \tag{16.75}$$

が成立する。

命題16.15 は、ρ_n によって $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ が H_N に、位相まで含めて同形に結びつけられていることを示している。

命題7.14, 命題11.5 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題16.16〕 $n=3, 4$ とする。H_N の正規直交基底 $\{u_m\}_{m=-N}^{N}$ に対して、$U_N^{(m)} \equiv \rho_n^{-1}(u_m)$ とおく。ρ_n, ρ_n^{-1} は、

$$\rho_n = \sum_{m=-N}^{N} \langle u_m,\ U_N^{(m)} \rangle \tag{16.76}$$

$$\rho_n^{-1} = \sum_{m=-N}^{N} \langle U_N^{(m)},\ u_m \rangle \tag{16.77}$$

と dyadic 表現される。しかも、この表現形式は、座標系のとり方に依存しない。

命題16.14と命題7.27, 系11.9より、$\rho_n(A_N)$ $(A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N),\ n=3,4)$ は、

$$\rho_n(A_N)(x) = \sum_{m=-N}^{N} \hat{A_N}(m)\varphi_m(x) \tag{16.78}$$

$$= \sqrt{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} \tilde{A_N}(m)\varphi_m(x) \tag{16.79}$$

と表される。式(16.78), (3.81)より式(7.102), (11.75)に対応する次の命題が成立する。

〔命題16.17〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ に対して $f \equiv \rho_n(A_N)$ とおけば、

$$\hat{A_N}(n) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} f(a_m) \quad (m=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{16.80}$$

となる。

命題16.17は、$A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の直流応答の各標本点における値が、固有値の $\sqrt{2N+1}$ 倍になっていることを意味している。また、式(16.80)を式(16.35), (16.44)に代入すれば、

$$A_N = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} f(a_m) \langle \varphi_m, \varphi_{\pm m} \rangle \tag{16.81}$$

となる。ここで式(16.81)の右辺の $\varphi_{\pm m}$ は、$A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ のとき φ_m であり、$A_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ のとき φ_{-m} である。

式(16.81)は、$A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ の直流応答だけから A_N が再現できることと、直接表現したものである。この関係式より、命題7.25、命題12.5に対応する次の命題が成立する。

〔命題16.18〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ に対して、$f \equiv \rho_n(A_N)$ とすれば、任意の $g \in H_N$ に対して、

$$(A_N g)(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} f(a_m)\, g(a_{\pm m})\, \varphi_m(x) \qquad (16.82)$$

となる。ここで、式(16.82)の右辺の $a_{\pm m}$ は、$n=3$ のとき a_m, $n=4$ のとき a_{-m} である。

このように、$A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1,2)$ の直流応答が分かれば、任意の入力信号 $g \in H_N$ に対する応答が分かるのである。

式(3.122), (16.35), (16.44), (16.80) より、次の命題が成立する。

〔命題 16.19〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ の積分核を $a_N(x,y)$ とすれば

$$a_N(x,y) = \sum_{m=-N}^{N} \hat{A_N}(m)\, \varphi_m(x)\, \varphi_{\pm m}(y) \qquad (16.83)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{m=-N}^{N} f(a_m)\, \varphi_m(x)\, \varphi_{\pm m}(y) \qquad (16.84)$$

となる。ここで $f \equiv \rho_n(A_N)$ であり、$\varphi_{\pm m}$ は $n=3$ のとき φ_m, $n=4$ のとき φ_{-m} である。

16.6 作用素 ρ_n $(n=3,4)$ の性質

命題 7.15, 命題 11.16 が、ρ_n $(n=3,4)$ に対してもそのまま成立する。従って、表 11.1 に対応する次の表 16.1 が成立する。また、命題 7.19, 命題 11.20 に対応して、次の命題が成立する。

表 16.1 H_N からの同形対応 ρ_n^{-1} $(n=3,4)$

A_N \ $\rho_n^{-1}(A_N f)$	$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$	$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$
$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$	(i) $\rho_3^{-1}(A_N f) = A_N \rho_3^{-1}(f)$	(ii) $\rho_4^{-1}(A_N f) = A_N \rho_4^{-1}(f)$
$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$	(iii) $\rho_3^{-1}(A_N f) = A_N \rho_4^{-1}(f)$	(iv) $\rho_4^{-1}(A_N f) = A_N \rho_3^{-1}(f)$

〔命題 16・20〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$, $B_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ に対して、次の関係が成立する。

$$\begin{cases} \rho_3(\bar{A}_N) = \rho_3(A_N^*) = \overline{\rho_3(A_N)} & (16\cdot 85) \\ \rho_3(A_N^{\bigstar}) = \rho_3(A_N)^* & (16\cdot 86) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_4(\bar{B}_N) = \overline{\rho_4(B_N)} & (16\cdot 87) \\ \rho_4(B_N^{\bigstar}) = \rho_4(B_N^*) = \rho_4(B_N)^* & (16\cdot 88) \end{cases}$$

(証明) 命題 16・3 と式 (16・71), (7・40), (15・18) より

$$\rho_3(\bar{A}_N) = \rho_3(A_N^*) = \rho_1(A_N^{*\#})' = \rho_1(A_N^{\#*})' = \rho_1(A_N^{\#})^{*\prime}$$
$$= \rho_3(A_N)^{\prime *\prime} = \overline{\rho_3(A_N)}$$

となり、式 (16・85) が成立する。他も同様に証明できる。 (Q.E.D)

命題 7・17, 系 12・2, 命題 12・9 に対応して、次の命題が成立する。

〔命題 16・21〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(m)}(H_N)$, $B_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(m, n = 3, 4)$ に対して、$f \equiv \rho_m(A_N)$, $g \equiv \rho_n(A_N)$ とおけば、次の関係が成立する。

$$A_N g = B_N f \qquad (m = n = 3) \qquad (16\cdot 89)$$

$$A_N g = B_N I_N(0) f \qquad (m = 3,\ n = 4) \qquad (16\cdot 90)$$

$$A_N g = B_N^{\bigstar} f \qquad (m = 4,\ n = 3) \qquad (16\cdot 91)$$

$$A_N g = I_N(0) B_N f \qquad (m = n = 4) \qquad (16\cdot 92)$$

(証明) 式 (16・89) は式 (16・82) から明らかである。式 (16・65) の両辺の ρ_4 をとれば、命題 16・20 より式 (16・90) が成立する。他も同様に証明できる。 (Q.E.D)

式 (16・89) は、$A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ を $g \in H_N$ に作用させたものが、g を直流応答

とするような $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の元 B_N と、A_N の直流応答に作用させたものに等しいことを、意味している。他の式(16.90)～(16.92)も、同様に解釈できる。

式(7.76),(11.71)に対応する関係式を求める為の準備として、オn種変形双対演算($n=3,4$)を、

$$A_N' \equiv \rho_n^{-1}(\rho_n(A_N))' \quad : \quad A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N) \tag{16.93}$$

によって定義する。*

式(16.71),(14.85)より、次の命題が成立する。

〔命題 16.22〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ に対して

$$\rho_n(A_N) = \rho_{n-2}(A_N^{\#'}) = \rho_{n-2}(A_N'^{\#}) \tag{16.94}$$

なる関係が成立する。ここで、式(16.94)のオ二項の′はオn-2種変形双対演算であり、オ三項の′はオn種変形双対演算である。

命題16.22より、次の系が成立する。

〔系 16.3〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1\sim4)$ に対して

$$A_N^{\#'} = A_N'^{\#} \tag{16.95}$$

なる関係が成立する。

〔命題 16.23〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1\sim4)$ に対して、次の関係が成立する。

$$(A_N I_N(0))' = A_N' I_N(0) \tag{16.96}$$

(証明) $n=3$ の場合を証明する。

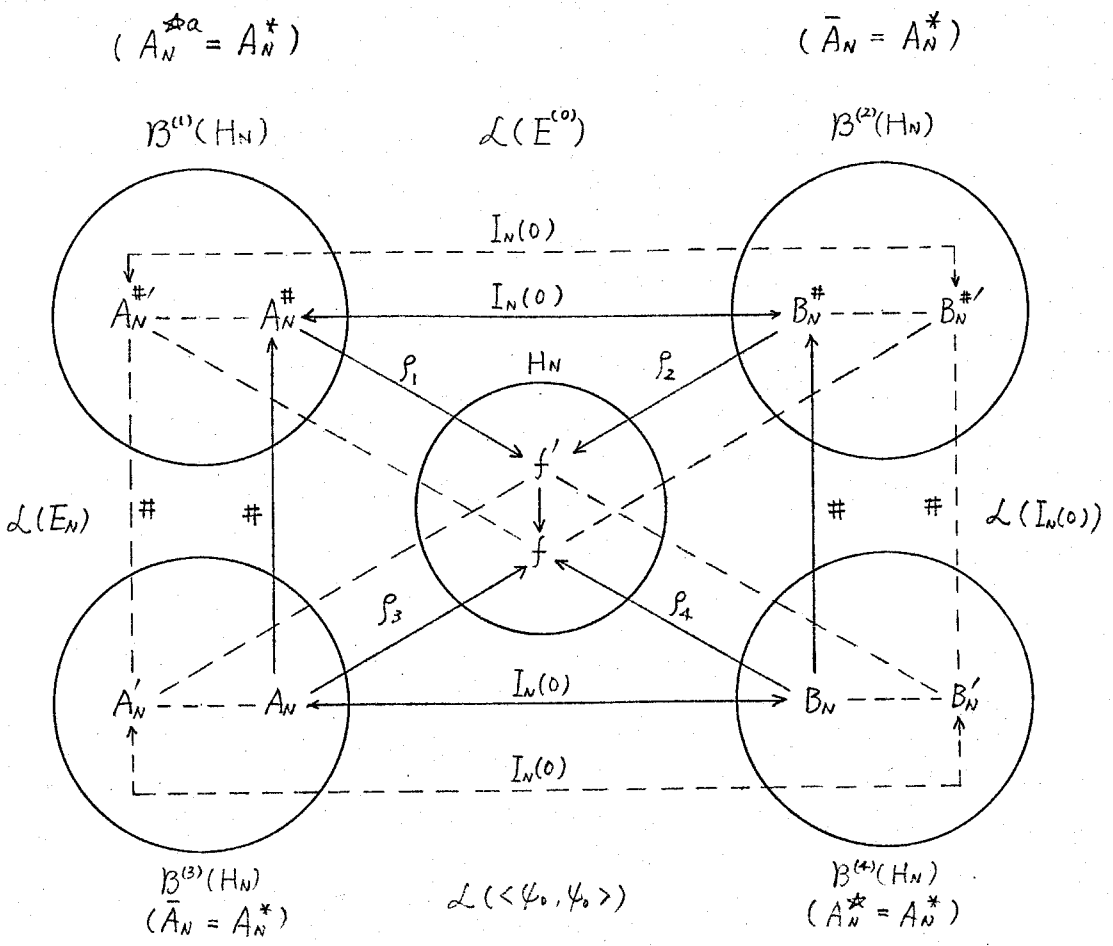
$$(A_N I_N(0))' = \rho_4^{-1}(\rho_4(A_N I_N(0))') = \rho_4^{-1}(\rho_3(A_N)')$$

---

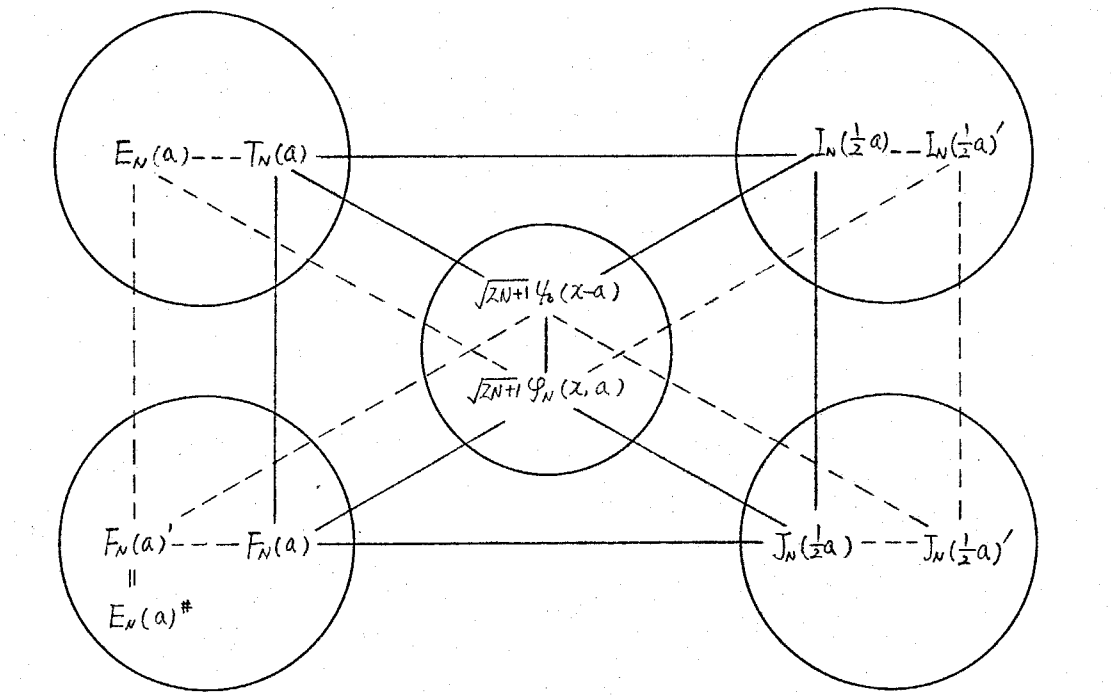
* より一般に、H_N の実対合 ω を使って、式(13.3)と同様に

$$\omega A_N \equiv \rho_n^{-1}\omega\rho_n A_N \quad : A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N) \quad (n=3,4)$$

により オn種変形対合($n=3,4$)を定義することができる。そしてこの変形対合に対しても、オ13節で論じたオn種変形対合($n=1,2$)の性質が、そのまま成立するのである。



(a) 一般的関係



(b) 具体例

図16.3 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1\sim4)$ と H_N の相互関係*

* 例えば" (a) の $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ 上の $(\bar{A}_N = A_N^*)$ は、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元が全て等方作用素であることを表し、$\mathcal{L}(E^{(0)})$ は、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N) \cap \mathcal{B}^{(2)}(H_N) = \mathcal{L}(E^{(0)})$ を表す。

表16.2　空間 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ の構造 (a)　$n=1, 2$

	$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$	$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$
交換関係 (自然座標系)	$A_N T_N(a) = T_N(a) A_N$	$A_N T_N(a) = T_N(-a) A_N$
交換関係 (基本座標系)	$A_N E_N(a) = E_N(a) A_N$	$A_N E_N(a) = E_N(-a) A_N$
$\rho_n(A_N)$	$a_N(x) = \sqrt{2N+1}\,(A_N\varphi_0)(x)$ (インパルス応答)	$a_N(x) = \sqrt{2N+1}\,(A_N\varphi_0)(x)$ (インパルス応答)
$A_N^{\sim}(m,n)$	$\hat{A_N}(m)\delta_{m,n}$ (対角行列)	$\hat{A_N}(m)\delta_{n,-m}$ (逆対角行列)
$A_N^{\wedge}(m,n)$	$\hat{A_N}(m-n)$ (巡回行列)	$\hat{A_N}(m+n)$ (逆巡回行列)
$a_N(x,y)$	$a_N(x-y)$ (たたみこみ)	$a_N(x+y)$ (相互相関)
基本座標系	$A_N = \sum_{n=-N}^{N} \tilde{A_N}(n) \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle$	$A_N = \sum_{n=-N}^{N} \tilde{A_N}(n) \langle \varphi_n, \varphi_{-n} \rangle$
自然座標系	$A_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n)\, T_N(a_n)$	$A_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(n)\, I_N(\frac{1}{2}a_n)$
$\hat{A_N}(n)$	$\hat{A_N}(n) = \frac{1}{2N+1} a_N(a_n)$	$\hat{A_N}(n) = \frac{1}{2N+1} a_N(a_n)$
$(A_N f)(x)$	$\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\, a_N(x-a_n)$	$\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\, a_N(x+a_n)$
$*$ と共変対合	$A_N^{*} = A_N^{\star}$	$A_N^{*} = \bar{A}_N$ (等方)
交換関係	$A_N B_N = B_N A_N^{*}$ $(A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N),\ B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N))$	

表16.2　空間 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ の構造　(b)　$n=3,4$

	$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$	$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$
交換関係（自然座標系）	$A_N\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle=\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle A_N$	$A_N\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle=\langle\varphi_{-n},\varphi_{-n}\rangle A_N$
交換関係（基本座標系）	$A_N F_N(a)=F_N(a)A_N$	$A_N F_N(a)=F_N(-a)A_N$
$\rho_n(A_N)$	$a_N(x)=\sqrt{2N+1}\,(A_N\varphi_0)(x)$ （直流応答）	$a_N(x)=\sqrt{2N+1}\,(A_N\varphi_0)(x)$ （直流応答）
$A_N^{\sim}(m,n)$	$A_N^{\sim}(m-n)$ （巡回行列）	$A_N^{\sim}(m+n)$ （逆巡回行列）
$A_N^{\wedge}(m,n)$	$A_N^{\wedge}(m)\delta_{n,m}$ （対角行列）	$A_N^{\wedge}(m)\delta_{n,-m}$ （逆対角行列）
$a_N(x,y)$	$\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}a_N(a_n)\varphi_n(x)\varphi_n(y)$	$\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}a_N(a_n)\varphi_n(x)\varphi_{-n}(y)$
基本座標系	$A_N=\sum_{n=-N}^{N}A_N^{\sim}(n)T_N(a_n)$	$A_N=\sum_{n=-N}^{N}A_N^{\sim}(n)J_N(\frac{1}{2}a_n)$
自然座標系	$A_N=\sum_{n=-N}^{N}A_N^{\sim}(n)\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle$	$A_N=\sum_{n=-N}^{N}A_N^{\wedge}(n)\langle\varphi_n,\varphi_{-n}\rangle$
$A_N^{\wedge}(n)$	$A_N^{\wedge}(n)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}a_N(a_n)$	$A_N^{\wedge}(n)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}a_N(a_n)$
$(A_N f)(x)$	$\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}a_N(a_n)f(a_n)\varphi_n(x)$	$\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}a_N(a_n)f(a_{-n})\varphi_n(x)$
$*$ と共変対合	$A_N^{*}=\overline{A}_N$ （等方）	$A_N^{*}=A_N^{\bigstar}$
交換関係	$A_N B_N=B_N A_N^{\bigstar}=B_N A_N^{*\bigstar}$ $(A_N\in\mathcal{B}^{(3)}(H_N),\ B_N\in\mathcal{B}^{(4)}(H_N))$	

$$= \rho_3^{-1}(\rho_3(A_N)')I_N(0) = A_N' I_N(0)$$

他の場合も、同様に証明できる。 (Q.E.D)

これまでに得られた結果（命題16.8，命題16.10，補題16.8，命題16.4，系16.3，命題16.23）と図12.1を、合わせて図16.3，表16.2に示す。

さて、いよいよ式(7.76)，(11.71)に対応する関係式を求める。

〔命題16.24〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$，$B_N \in \mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ に対して、$f \equiv \rho_3(A_N)$，$g \equiv \rho_4(A_N)$ とおけば、次の関係が成立する。

$$f(x) = (A_N, E_N(x)^{\#}) \tag{16.97}$$

$$= (A_N, F_N(x)') \tag{16.98}$$

$$g(x) = (B_N, J_N(\tfrac{1}{2}x)') \tag{16.99}$$

（証明） 式(16.94)，(7.76)，(14.86)，(13.11)より

$$f(x) = \rho_1(A_N^{\#\prime})(x) = (A_N^{\#\prime}, T_N(x)) = \overline{(A_N^{\#}, E_N(x))} = (A_N, E_N(x)^{\#})$$

となり、式(16.97)が成立する。更に式(16.95)より

$$E_N(a)^{\#} = T_N(a)'^{\#} = T_N(a)^{\#\prime} = F_N(a)'$$

$$\therefore \quad E_N(a)^{\#} = F_N(a)' \tag{16.100}$$

となるから、式(16.98)が成立する。式(16.70)，(16.98)，(16.96)，(16.16)より

$$g(x) = \rho_3(B_N I_N(0))(x) = (B_N I_N(0), F_N(x)') = (B_N, F_N(x)' I_N(0))$$

$$= (B_N, (F_N(x) I_N(0))') = (B_N, J_N(\tfrac{1}{2}x)')$$

となり、式(16.99)が成立する。 (Q.E.D)

式(16.98)の最後の項が $F_N(x)'$ となり、$F_N(x) = T_N(x)^{\#}$ となっていない。

これは、一見奇妙に思えるけれども、式(16.94)から得られる関係式

$$\rho_3(F_N(a)')(x) = \rho_1(T_N(a))(x) = \sqrt{2N+1}\,\psi_0(x-a) \qquad (16.101)$$

を考慮すれば、納得のいくところである。式(16.99)の$J_N(\frac{1}{2}x)'$についても、同様である。

〔命題16.25〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ が実(虚)作用素になる為の必要十分条件は、$\rho_n(A_N)$ が実(純虚)数値関数になることである。

〔命題16.26〕 $A_N \in \mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ が偶(奇)作用素になる為の必要十分条件は、$\rho_n(A_N)$ が偶(奇)関数になることである。

第 Ⅶ 章

空間回路網理論の応用

第17節 空間回路網の誤差評価[1]

17.1 まえがき

空間回路網の誤差の問題は、大きく

(i) 空間回路網の端子数の有限性に関する誤差

(ii) 標本化定理に関する誤差

(iii) 素子に起因する誤差

(iv) 入力に雑音が加わった場合の誤差

の四種類に分類される。(i)については、次節で論じる。(iii), (iv)については、形式は少し異なるが、飯島によって論じられている。[2] 本節では、(iii)の中で文献(2)ではまだ論じられていない多入力係数加算器の同相誤差の問題と(ii)について論じることにする。

(ii)は更に、

(イ) 唯一点の値を観測することは物理的に不可能であるという、物理的観測に関する誤差

(ロ) 帯域制限に関する誤差 (aliasing error)

(ハ) 標本点のずれに関する誤差 (jitter error)

の三種類に分類される。Papoulis[3]は、Shannonの標本化定理に対して、(イ)~(ハ)の誤差評価を与えている。山崎[4]は(ロ)の問題を、舟久保[5]は(イ),(ロ)の問題を、それぞれの立場から論じている。

本節では、別の角度から、これらの問題を論じることにする。即ち、これまでに展開してきた空間回路網理論の体系の上に立って、まず、17.2.1で(ロ)の問題を、17.2.2で(ハ)の問題を論じることにする。(イ)の問題は、20.1で改めて論じる。最後に17.3で、多入力係数加算器の同相誤差について論じる。

17.2 標本化定理に関する誤差

17.2.1 帯域制限に関する誤差

入力信号 $f \in L_2[-\ell, \ell]$ が外界に与えられたとき、空間回路網はそれと

$$g(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\varphi_n(x) \tag{17.1}$$

とみなして、処理していく。* 従って、式(3.79)より、$f \in H_N$ ならば $g = f$ となるが、$f \notin H_N$ ならば $g \neq f$ である。そこで本項では、式(17.1)で定義された g と本来の f との差 $\|f-g\|$ に対するいくつかの評価式を与えることにする。

任意の関数 $f \in L_2[-\ell, \ell]$ は、

$$f(x) = f_N(x) + f_\perp(x) \tag{17.2}$$

と一意に分解される。ここで、$f_N \in H_N$, $f_\perp \perp H_N$ である(図17.1)。$\{f(a_n)\}_{n=-N}^{N}$ が全て有界なとき、式(17.2)の分解に対して

$$\hat{f}_\perp(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} f_\perp(a_n)\varphi_n(x) \tag{17.3}$$

とおけば、式(17.1)～(17.3)と式(3.79)より

$$g(x) = f_N(x) + \hat{f}_\perp(x) \tag{17.4}$$

と表される(図17.1)。$\hat{f}_\perp \in H_N$ であるから、式(17.4),(17.2)より次の命題が成立する。

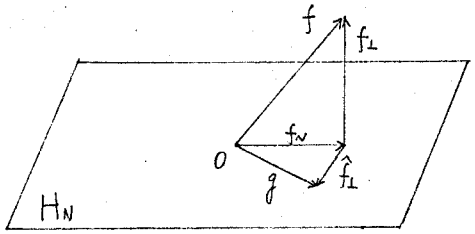


図17.1 帯域制限に関する誤差
(f:入力信号, g:観測信号)

[命題 17.1] $\{f(a_n)\}_{n=-N}^{N}$ が全て有界ならば

$$\|f-g\|^2 = \|f_\perp\|^2 + \|\hat{f}_\perp\|^2 \tag{17.5}$$

となる。

---

* ここでは、17.1で述べた(1)の問題は、一応除いて考える。

式(17.5)の右辺の $\|\hat{f}_\perp\|$ は、一般には $\|f\|$ よりも大きくなり得る。そのような例を、次に示す。

$$2M+1 = (2k+1)(2N+1) \quad (k=0,1,2,\cdots\cdots) \tag{17.6}$$

なる k, M を、一組固定する。H_M のインパルスを $\sqrt{2M+1}\,\varphi_0^{(M)}(x)$ とし、$a_m^{(M)} \equiv 2\ell m/(2M+1)$ とする*。式(17.6)より

$$a^{(M)}_{(2k+1)n} = a_n \quad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{17.7}$$

であるから

$$\varphi_0^{(M)}(a_n) = \sqrt{2M+1}\,\delta_{n,0} \tag{17.8}$$

となる。今

$$f(x) \equiv \varphi_0^{(M)}(x) \tag{17.9}$$

とおけば、式(6.38),(17.6),(17.8)より

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\varphi_0(x) \tag{17.10}$$

$$g(x) = \sqrt{2k+1}\,\varphi_0(x) \tag{17.11}$$

となる。また、式(17.4),(17.10),(17.11)より

$$\hat{f}_\perp(x) = g(x) - f_N(x) = \frac{2k}{\sqrt{2k+1}}\varphi_0(x) \tag{17.12}$$

となる。従って、式(17.9)～(17.12)より

$$\|\hat{f}_\perp\| = \frac{2k}{\sqrt{2k+1}}\|f\| \geq \sqrt{k}\,\|f\| \tag{17.13}$$

$$\|g\| = \sqrt{2k+1}\,\|f\| \tag{17.14}$$

$$\|f-g\| = \sqrt{2k}\,\|f\| \tag{17.15}$$

---

* $M=N$ の場合には、今までどおり N を省略して、$\varphi_0^{(N)}(x)=\varphi_0(x)$, $a_m^{(N)}=a_n$ と表す。

となる。式(17.13)～(17.15)は、k を大きくすれば、即ち、式(17.9)で M を大きくすれば、$\hat{f}_\perp$ 及び g が、f に比していくらでも大きくなり、誤差 $\|f-g\|/\|f\|$ も、いくらでも大きくなることを、意味している。

〔命題 17.2〕 $f \in H_M$ $(M>N)$ ならば、次の不等式が成立する。

$$\|f-g\| \leqq \sqrt{2k+2}\,\|f_\perp\| \leqq \sqrt{2k+2}\,\|f\| \tag{17.16}$$

ここで k は、

$$k \geqq \frac{M-N}{2N+1} \tag{17.17}$$

を満足する最小の整数である。

（証明） $2K+1 \equiv (2k+1)(2N+1)$ とおけば、式(17.17)より $K \geqq M$ となっている。しかも、$a^{(K)}_{(2k+1)n} = a_n$ $(n=-N,-N+1,\cdots,N)$ であるから、式(3.96),(17.3)より

$$\|f_\perp\|^2 = \frac{1}{2K+1}\sum_{m=-K}^{K} |f_\perp(a^{(K)}_m)|^2$$

$$\geqq \frac{1}{(2k+1)(2N+1)}\sum_{n=-N}^{N} |f_\perp(a_n)|^2 = \frac{1}{2k+1}\|\hat{f}_\perp\|^2$$

$$\therefore \|\hat{f}_\perp\|^2 \leqq (2k+1)\|f_\perp\|^2 \tag{17.18}$$

となる。従って、命題17.1より式(17.16)が成立する。 (Q.E.D)

命題17.1をもとにして、更に別の評価式を与える。まず、いくつかの準備を行なう。

〔補題 17.1〕 $|f(x)| \leqq C$ ならば、$|f_N(x)| \leqq C\cdot L_N$ が成立する。ここで L_N は、次式で与えられる Lebesgue の定数である*:

$$L_N = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \left|\sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x)\right| dx \tag{17.19}$$

---

* Lebesgue の定数及び不等式(17.20)については、17.2.3で述べる。

$$< \frac{4}{\pi^2}(\ell_n N + 6) \qquad (17.20)$$

（証 明） 式(3.120)より

$$f_N(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-y)f(y)\,dy \qquad (17.21)$$

となるから

$$|f_N(x)| \leqq \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|\sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-y)|\cdot|f(y)|\,dy$$

$$\leqq C\cdot\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|\sqrt{2N+1}\,\varphi_0(x-y)|\,dy = C\cdot L_N \qquad (Q.E.D)$$

〔補題 17.2〕 $|f(x)-h_N(x)| \leqq C$ なる三角多項式 $h_N \in H_N$ が存在すれば、$|f_\perp(x)| \leqq C(L_N+1)$ となる。

（証 明） $f-h_N$ の H_N への射影成分は f_N-h_N であるから、補題17.1より

$$|f_\perp(x)| = |f(x)-f_N(x)| \leqq |f(x)-h_N(x)| + |f_N(x)-h_N(x)|$$

$$\leqq C + C\cdot L_N = C(L_N+1) \qquad (Q.E.D)$$

〔補題 17.3〕 $|f_\perp(x)| \leqq C$ ならば $\|f-g\| \leqq \sqrt{2}\,C$ となる。

（証 明） 命題17.1より

$$\|f-g\|^2 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|f_\perp(x)|^2dx + \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|f_\perp(a_n)|^2 \leqq 2C^2 \qquad (Q.E.D)$$

〔命題 17.3〕 f が周期 2ℓ の周期関数で、$f \in Lip\,\alpha$ $(0<\alpha\leqq 1)$, 即ち

$$|f(x+y)-f(x)| \leqq K\cdot|y|^\alpha \qquad (17.22)$$

ならば

$$\| f - g \| \leqq \sqrt{2}\, AK \cdot \frac{L_N + 1}{N^\alpha} \tag{17.23}$$

が成立する。ここで、

$$A \equiv \frac{6}{\pi} \ln 2 + 1 \quad = 2.32 \cdots \tag{17.24}$$

である。

（証　明）　命題17.3の条件を満足する f に対して

$$h_N(x) \equiv \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2}{N} y\right) \left(\frac{\sin y}{y}\right)^4 dy \tag{17.25}$$

とおく。この $h_N(x)$ は、de la Vallée Poussin 三角多項式と呼ばれる N 次三角多項式であって、

$$| f(x) - h_N(x) | \leqq \frac{AK}{N^\alpha} \tag{17.26}$$

なる不等式を満足している（文献(6), p.6）。従って、補題17.2，補題17.3より，式(17.23)を得る。　(Q.E.D)

〔命題17.4〕　$f^{(r)} \equiv d^r f(x)/dx^r$ $(r = 1, 2, \cdots)$ とする。$f^{(r-1)}$ が絶対連続で、$| f^{(r)}(x) | \leqq C$ (a.e. x) ならば

$$\| f - g \| \leqq \frac{4\sqrt{2}}{\pi} K_r C \frac{L_N + 1}{(N+1)^r} \tag{17.27}$$

となる。ここで，B_p を Bernoulli 数，E_p を Euler 数とするとき

$$K_r \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(r-1)k}}{(2k+1)^{r+1}} \tag{17.28}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(2^{2p} - 1)\, \pi^{2p}}{2(2p)!} B_p & (r = 2p-1) \\ \dfrac{\pi^{2p+1}}{2^{2p+2}(2p)!} E_p & (r = 2p) \end{cases} \tag{17.29}$$

である。

（証　明）　命題17.4 の条件を満足する f に対して

$$|f(x)-h_N(x)| \leqq \frac{4}{\pi}\frac{CK_r}{(N+1)^r} \tag{17.30}$$

を満足するような N 次三角多項式 $h_N(x)$ が存在する（文献(7), p.377）。従って、補題17.2, 補題17.3 より、式(17.27)が成立する。 (Q.E.D)

式(17.28)が式(17.29)のように表されることは、文献(8)(p.41)より明らかである。例えば

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{\pi^2}{8} \fallingdotseq 1.23, & K_2 = \dfrac{\pi^3}{32} \fallingdotseq 0.969 \\ K_3 = \dfrac{\pi^4}{96} \fallingdotseq 1.01, & K_4 = \dfrac{5\pi^5}{1536} \fallingdotseq 0.996 \end{cases} \tag{17.31}$$

となり、K_r は 1 に近い値をとっている。

命題17.1 で誤差を求める式を与え、命題17.2～命題17.4 で誤差の評価式を与えた。これらの評価量を、それぞれ Δ_n $(n=2,3,4)$ とおいて、相互の関係を見よう。その為に、命題17.2～命題17.4 の条件を全て満している関数

$$f(x) \equiv C_M(x) = \sqrt{2}\cos\frac{M\pi}{l}x \quad (M>N) \tag{17.32}$$

について、$\|f-g\|$ 及び Δ_n を計算してみる。$M>N$ であるから、$f_N=0$, $f=f_\perp$ は明らかである。よって、$g=\hat{f}_\perp$ となり、整数 m と k を使って、M を、

$$M = m(2N+1)+k \quad (0 \leqq k \leqq 2N) \tag{17.33}$$

と分解すれば、

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}\cos\frac{2\pi Mn}{2N+1}\psi_n(x) \tag{17.34}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2}\,C_0(x) & : k=0 \\ C_k(x) & : 1 \leqq k \leqq N \\ C_{2N+1-k}(x) & : N+1 \leqq k \leqq 2N \end{cases} \tag{17.35}$$

となる*。従って、式(17.32),(17.35)より、次の関係が成立する。

$$\|f\| = \|f_\perp\| = 1\ ,\quad \|g\| = \|\hat{f}_\perp\| = \sqrt{1+\delta_{k,0}} \tag{17.36}$$

$$\|f-g\| = \sqrt{2+\delta_{k,0}} \tag{17.37}$$

余弦関数は絶対連続であり

$$|f(x+y)-f(x)| \leqq \frac{\sqrt{2}M\pi}{\ell}|y| \tag{17.38}$$

$$\left|\frac{d}{dx}f(x)\right| \leqq \frac{\sqrt{2}M\pi}{\ell} \tag{17.39}$$

であるから、命題17.2～命題17.4より

$$\Delta_2 = \sqrt{2k+2}\ ,\quad \Delta_3 = \frac{2AM\pi(L_N+1)}{\ell N}\ ,\quad \Delta_4 = \frac{M\pi^2(L_N+1)}{\ell(N+1)} \tag{17.40}$$

となる。式(17.40)と式(17.37)を比較してみれば、次のことが分かる。まず、Δ_2～Δ_4共に、Mが大きくなれば、いくらでも大きくなり、評価の精度が、次第に悪くなる。** Δ_3とΔ_4については

$$\Delta_4 = \frac{\pi}{2A}\frac{N}{N+1}\Delta_3 < \frac{\pi}{2A}\Delta_3 < 0.676\Delta_3 \tag{17.41}$$

となり、今考えている例に対しては、Δ_4の方が、Δ_3よりも精度が良くなっている。ちなみに、$\ell=\pi$, $N=4$, $M=5$について、式(17.40)の数値を求めてみれば、$L_4 = 1.880\cdots$であるから $\Delta_2 = 2.00$, $\Delta_3 = 16.73$, $\Delta_4 = 9.05$となる。

17.2.2 標本点の一様なずれの補償

標本化定理を利用した観測機構、例えば、フライングスポットスキャナー(以下、FSSと略記する)を用いた文字分析装置の入力部分で、次のような問題が生じる。即ち、たとえば文字の書かれた紙を固定しておいても、同じデ

---

* これが、帯域制限の条件が破れた場合の誤差が、折り返し誤差(aliasing error)と呼ばれる所以である。

** 式(17.15),(17.16)から分かるように、式(17.9)のような関数に対しては、Mが大きくなる程Δ_2の精度は良くなる。

ータを得ることが、困難なのである。これは、FSSで紙面を走査する場合に、標本点の間隔が高精度で制御できるのに対して、最初の標本点の位置が、あまり精度良く制御できないことに起因している。

これと数学的モデルで示せば、次のようになる。今考えている装置が、標本化関数として、H_N の自然座標系 $\{\psi_n\}_{n=-N}^{N}$ をもっていたとする。$\{\psi_n\}$ の標本点は、式(3.72)で与えられる $\{a_n\}_{n=-N}^{N}$ であるけれども、上に述べたように、最初の標本点が a だけずれたとすれば、実際の標本点 $\{x_n\}_{n=-N}^{N}$ は

$$x_n = a + a_n \quad (n=-N, -N+1, \cdots, N) \tag{17.42}$$

となる。a は、FSSで走査をするたびに異なってくる。そこで、もし形式的に

$$\tilde{f}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} f(x_n)\psi_n(x) \tag{17.43}$$

とおけば、同じ f に対して、走査をするたびに異なった $\tilde{f}$ を得ることになるのである。

17.2.2では、このようにして得られた $\tilde{f}$ から、本来の f を得る方法、即ち、標本点の一様なずれの補償法を与える。

〔補題17.4〕 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ を H_N の正規直交基底とする。式(17.42)で与えられる全ての x_n で有限な値をもつような関数 $f \in [-l, l]$ に対して、

$$\begin{cases} f_n \equiv \dfrac{1}{2N+1} \displaystyle\sum_{m=-N}^{N} f(x_m)\overline{u_n(x_m)} & (17.44) \\ \tilde{f}(x) \equiv \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} f_n u_n(x) & (17.45) \end{cases}$$

とおけば、$\tilde{f} \in H_N$ は

$$\tilde{f}(x_n) = f(x_n) \quad \text{for all } n \tag{17.46}$$

を満足する f の補間三角多項式になっている。しかも、補間点が同じならば、H_N の基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ のとりかたによらず、$\tilde{f}$ は同じ関数になる。

（証　明）　$\{\psi_n(x-a)\}_{n=-N}^{N}$ は、標本点を $\{x_n\}_{n=-N}^{N}$、重みと $1/\sqrt{2N+1}$ とする H_N の標本化基底であるから、式(17.44)を式(17.45)に代入し、命題2.7を使えば、式(17.46)を得る。命題の後半を証明する為には、H_N の他の基底を用い、式(17.44),(17.45)と同様にして構成した補間多角多項式を h とするとき、$h=\tilde{f}$ を示せば良い。式(17.46)より、全ての x_n に対して $h(x_n)=\tilde{f}(x_n)$ であるから

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}h(x_n)\psi_n(x-a)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}\tilde{f}(x_n)\psi_n(x-a)=\tilde{f}(x)\qquad(Q.E.D)$$

補題17.4で $u_n(x)=\psi_n(x-a)$ とおけば 式(17.46)と $\tilde{f}\in H_N$ より、

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}f(x_n)\psi_n(x-a)\qquad(17.47)$$

となる。式(17.47)から分かるように、式(17.44),(17.45)の操作は、本質的には、必ずしも H_N に属していない関数 f を、H_N に属しているものとみなして、$\{x_n\}_{n=-N}^{N}$ を標本点とする標本化基底で形式的に補間することに相当している。

従って、補題17.4で求めた $\tilde{f}$ に対する誤差評価として、17.2.1.で求めた結果がそのまま適用できる。

式(17.47)より、次の系が成立する。

〔系17.1〕　補題17.4において、$f\in H_N$ ならば $\tilde{f}=f$ となる。

系17.1より、もし $f\in H_N$ ならば、補題17.4で求めた $\tilde{f}$ は、H_N の正規直交基底 $\{u_n\}_{n=-N}^{N}$ ばかりでなく、標本点 $\{x_n\}_{n=-N}^{N}$、即ち、式(17.42)における a の値によらず、同じ関数になることが分かる。

これは、取りも直さず、17.2.2.の始めに述べた標本点の一様なずれに対する補償法を与えるものである。即ち、$f\in H_N$ に対して、観測値 $\{f(x_n)\}_{n=-N}^{N}$ が与え

られたとき、

$$\begin{cases} f_n \equiv \dfrac{1}{2N+1} \displaystyle\sum_{m=-N}^{N} f(x_m)\,\psi_n(x_m) & (17.48) \\ \tilde{f}(x) \equiv \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} f_n\,\psi_n(x) & (17.49) \end{cases}$$

なる操作を行なえば、ずれ量 a に無関係に、$\tilde{f}=f$ となるのである。

17.2.3 付録、Lebesgue の定数

17.2.1 で現われた Lebesgue の定数について、簡単にまとめておく。

Lebesgue の定数は、本来

$$L_N \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{2N+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right| dx \qquad (17.50)$$

で与えられるものである（文献(7), P.67）。この L_N が式(17.19)のように表されることは、式(3.70)より明らかである。L_N はまた、次のように表されることが知られている（文献(7), P.73）。

$$L_N = \frac{1}{2N+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\tan\frac{n\pi}{2N+1} \qquad (17.51)$$

$$= \frac{16}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4m^2-1}\sum_{n=1}^{(2N+1)m}\frac{1}{2n-1}\right) \qquad (17.52)$$

式(17.52)より、L_N が N に関して単調に増加することが分かる。

〔補題 17.5〕

$$\frac{1}{4\pi}\ln N < L_N < \frac{4}{\pi^2}(\ln N + 6) \qquad (17.53)$$

式(17.53)の才一の不等式より、$N\to\infty$ のとき $L_N\longrightarrow\infty$ となることが分かる。この才一の不等式は、文献(10)の231頁の証明と同様にして証明できる。本論文では、上からの評価式の方が大切であるから、式(17.53)の才ニの不等式、即ち、式(17.20)だけと証明する。

（補題17.5 の才ニの不等式の証明）始めに、いくつかの準備を行なう。

まず

$$\int_0^{\pi} |\cot N x| \, dx = 2 \tag{17.54}$$

は容易に導くことができる。次に、

$$I_N \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, dx \tag{17.55}$$

とおけば、$N=1$ のとき

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{2}{\pi} S_i \pi \tag{17.56}$$

となる。ここで、$S_i x$ は積分正弦関数であり、特に

$$\frac{2}{\pi} S_i \pi = 1.17897975\cdots \tag{17.57}$$

は、Gibbs の定数と呼ばれている（文献(9), p.250）。また、一般の N に対しては、

$$I_{N+1} - I_N = \frac{2}{\pi} \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, dx \leqq \frac{2}{N\pi^2} \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} |\sin x| \, dx$$

$$= \frac{2}{N\pi^2} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{N\pi^2}$$

$$\therefore \quad I_{N+1} - I_N \leqq \frac{4}{N\pi^2} \tag{17.58}$$

となるから、式(17.56)より

$$I_N \leqq \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + I_1$$

$$\leqq \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} \, dx \right) + I_1 \tag{17.59}$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left(\int_1^N \frac{1}{x} \, dx + 1 \right) + I_1 = \frac{4}{\pi^2} (\ln N + 1) + \frac{2}{\pi} S_i \pi$$

$$\therefore \quad I_N \leqq \frac{4}{\pi^2} \left(\ln N + 1 + \frac{\pi}{2} S_i \pi \right) \tag{17.60}$$

となる。式(17.59)から分かるように、式(17.60)は、$N=1$ に対しても成立している。これだけの準備のもとで、証明に入る。式(17.50)より、

$$L_N = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}\right| dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin Nx\cdot\cos\frac{1}{2}x+\cos Nx\cdot\sin\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right| dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin Nx\cdot\cot\frac{1}{2}x+\cos Nx\right| dx$$

$$\leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin Nx\cdot\cot\frac{1}{2}x\right| dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos Nx|\,dx$$

式(17.54) と $\cot\theta \leqq 1/\theta$ $(0<\theta\leqq\pi/2)$ より

$$\leqq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin Nx|}{x}dx + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{N\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx + \frac{2}{\pi}$$

式(17.55),(17.60) より

$$= I_N + \frac{2}{\pi} \tag{17.61}$$

$$\leqq \frac{4}{\pi^2}\left\{\ln N + 1 + \frac{\pi}{2}(1+Si\,\pi)\right\} \tag{17.62}$$

となる。式(17.57) より $1+\frac{\pi}{2}(1+Si\,\pi) = 5.4798\cdots$ であるから、式(17.62) より式(17.53) のオニの不等式が成立する。 (Q.E.D)

17.3 多入力係数加算器の同相誤差

17.3.1 同相誤差

$A_N \in B(H_N)$ を、多入力係数加算器を使って実現する際に生じる同相誤差について考える。実作用素 A_N の結合係数 $\hat{A_N}(m,n)$ が、正負両方の値をとる場合には、式(3.108) を満足する抵抗を使って、図3.6のように構成すれば一応 A_N と等価な働きをする回路を作ることができる。しかし、式(3.108) から得られた抵抗値に対して、もし

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{R_-}{\gamma_{m,n_i}} \neq \sum_{i=p+1}^{2N+1}\frac{R_+}{\gamma_{m,n_i}} \tag{17.63}$$

となっていれば、文献(11)で論じられているように、同相誤差が生じ、もはやその回路は、正確には A_N と同じ機能を果さないのである。

ところで、A_N を実現する場合、一般には、出力端子が $2N+1$ 個あるから、図 3.6 の回路が才何番目の端子に対応する回路であるかを明確にする為に、出力側才 m 端子に対応する回路の同相誤差を、mー同相誤差と呼ぶことにする。そして、全ての端子の同相誤差が零になる場合、即ち、全ての m に対して、mー同相誤差が零になる場合に、単に、同相誤差は零であると言うことにする。

これまでに述べてきたことは、$\mathcal{B}(H_N)$ の実作用素についてであった。任意の $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ は、命題 4.15 に示したように、

$$A_N = A_N^{(1)} + iA_N^{(2)} \tag{17.64}$$

と、実作用素 $A_N^{(1)}$, $A_N^{(2)}$ の和に一意に分解される。そして実際には、A_N ではなく、$A_N^{(1)}$ と $A_N^{(2)}$ が回路で実現できるのである。しかし、ここではまとめて

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{A}_N(m,n) = 0 \tag{17.65}$$

のとき、A_N の mー同相誤差は零である、と言うことにする。このとき、$A_N^{(r)}$ $(r=1,2)$ の結合特性に対しても

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{A}_N^{(r)}(m,n) = 0 \qquad (r=1,2) \tag{17.66}$$

となり、$A_N^{(1)}$, $A_N^{(2)}$ の mー同相誤差は共に零になるのである。

17.3.2 mー同相誤差が零になる為の条件

$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の結合特性に対して

$$\varepsilon_m \equiv \sum_{n=-N}^{N} \hat{A}_N(m,n) \qquad (m=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{17.67}$$

なる量を考える。mー同相誤差が零になるということは、式(17.65)から分かるように、$\varepsilon_m = 0$ ということに他ならない。また、A_N が実作用素のとき、もし $\varepsilon_m > 0$ (<0) ならば、$r = R_+/\varepsilon_m$ $(= R_-/|\varepsilon_m|)$ なる抵抗で、図 3.6 の演算増幅器の $+(-)$ 端子とアースの間を接続すれば、mー同相誤差を補償するこ

とができる。そこで ε_m を、A_N の m- 同相誤差の補償量と呼ぶことにする。

〔命題 17.5〕 ε_m は次のように表される。

$$\varepsilon_m \equiv \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(m,n) \tag{17.68}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(a_m) \tilde{A_N}(n,0) \tag{17.69}$$

$$= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} a_N(a_m, y)\, dy \tag{17.70}$$

$$= (A_N \varphi_0)(a_m) \tag{17.71}$$

$$= \sqrt{2N+1}\,(A_N \varphi_0, \varphi_m) \tag{17.72}$$

$$= \sqrt{2N+1}\,(A_N, \langle \psi_m, \psi_0 \rangle) \tag{17.73}$$

証明の順序を、図17.2に示す。図中、矢印の上の番号、例えば、$(71) \xleftrightarrow{(3.102)} (69)$ は、式(17.71)と式(17.69)が同値であることが、式(3.102)から容易に導かれるということを示している。

式(17.68)は定義そのものであり、式(17.69),(17.70)は、それぞれ空間周波数特性及び積分核による表現である。ε_m が結合特性の m 行ベクトルに関係しているのに対して、空間周波数特性の零列ベクトルにだけ関係し、m によらないことは、興味ある点である。この事実は、後で論じる(命題17.7)同相誤差が零になる為の条件に反映している。式(17.71),(17.72)は直流応答による表現であり、式(17.73)は $\mathcal{B}(H_N)$ における表現である。

命題17.5より直ちに、次の命題が成立する。

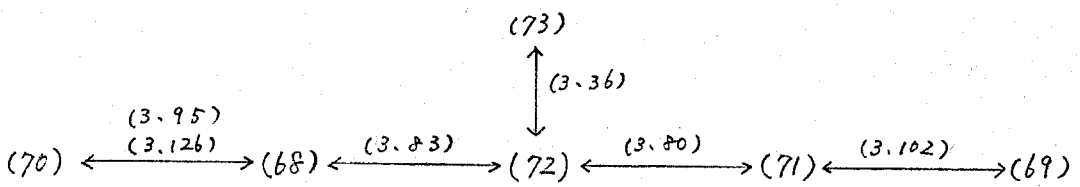


図17.2 命題17.5の証明の順序

〔命題 17.6〕 次の各条件は、$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の m－同相誤差が零になる為の必要十分条件である。

(i) $\sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(m,n) = 0$ (17.74)

(ii) $\sum_{n=-N}^{N} \varphi_n(a_m) \tilde{A_N}(n,0) = 0$ (17.75)

(iii) $\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} a_N(a_m, y)\, dy = 0$ (17.76)

(iv) $(A_N \varphi_0)(a_m) = 0$ (17.77)

(v) $(A_N \varphi_0, \varphi_m) = 0$ (17.78)

(vi) $(A_N, \langle \varphi_m, \varphi_0 \rangle) = 0$ (17.79)

(iv) は、a_m が A_N の直流応答の零点になることと意味し、(v) は A_N の直流応答が φ_m と直交していることを、(vi) は A_N が $\langle \varphi_m, \varphi_0 \rangle$ と直交していることを、それぞれ表している。(v) より次の系が成立する。

〔系 17.2〕 A_N の m－同相誤差が零ならば、出力側オ m 端子は、入力信号の直流成分の変動による影響を受けない。

〔系 17.3〕 $A_N \in \mathcal{B}oa_m(H_N)$ の m－同相誤差は、零である。

（証明） A_N は a_m－偶関数を a_m－奇関数に変換するから、$(A_N \varphi_0)(a_m) = 0$ となる。よって式(17.77)より m－同相誤差は零になる。

(Q.E.D)

17.3.3 同相誤差が零になる為の条件

命題 17.6 より、次の命題が成立する。

〔命題 17.7〕 次の各条件は、$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の同相誤差が零になる為

の必要十分条件である。

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=-N}^{N} \hat{A_N}(m,n) = 0 \qquad \text{for all } m \qquad (17.80)$$

$$\text{(ii)}\quad \tilde{A_N}(m,0) = 0 \qquad \text{for all } m \qquad (17.81)$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} a_N(x,y)\,dy = 0 \qquad \text{for all } x \qquad (17.82)$$

$$\text{(iv)}\quad A_N \varphi_0 = 0 \qquad (17.83)$$

$$\text{(v)}\quad (A_N, \langle \varphi_m, \varphi_0 \rangle) = 0 \qquad \text{for all } m \qquad (17.84)$$

命題17.7の(i)は、A_Nの同相誤差が零になるということを、直接表現したものである。(ii)はA_Nの空間周波数特性の第零列ベクトルが、零ベクトルになることを表している。(iii)は、任意に固定したxに対し、yの関数としての$a_N(x,y)$のグラフと、$y=\pm\ell$で囲まれている領域の面積が、常に零になることを意味している。(iv)は、A_Nが直流分を全て零にしてしまうことを意味している。従って、次の系が成立する。

〔系17.4〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$の同相誤差が零ならば、入力信号の直流成分の変動は、出力に影響を与えない。

17.3.4 同相誤差が零になる作用素の集合の性質

m-同相誤差が零となる$\mathcal{B}(H_N)$の元の全体をS_mとし、同相誤差が零となる$\mathcal{B}(H_N)$の元の全体をSとする:

$$S = \bigcap_m S_m \qquad (17.85)$$

本項では、集合S_m, Sの性質について論じる。

〔命題17.8〕 $S_m\ (m=-N,-N+1,\cdots,N)$は、$\mathcal{B}(H_N)$の$(2N+1)^2-1$次元

部分空間であり、S_m の直交補空間 $S_m^{\perp}$ は、互いに直交している。 S は、$\mathcal{B}(H_N)$ の $(2N+1)^2-(2N+1)$ 次元部分空間である。

（証 明） 式(3.31)より、作用素の系 $\{\langle \varphi_m, \varphi_0 \rangle\}_{m=-N}^{N}$ は、正規直交系をなしている：

$$(\langle \varphi_m, \varphi_0 \rangle, \langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle) = \delta_{m,n} \qquad (17.86)$$

従って、式(17.79), (17.85), (17.86)より、命題が成立する。 (Q.E.D)

集合 S が、$(2N+1)^2-(2N+1)$ 次元部分空間になることは、式(17.81)からも理解できる。即ち、$A_N \in S$ となる為の必要十分条件は、式(17.81)が示すように、$(2N+1)\times(2N+1)$ 次の行列 $\tilde{A_N}$ の対称列ベクトルが零ベクトルになることであった。従って、$A_N \in S$ に対して、A_N の自由度は $(2N+1)^2-(2N+1)$ となり、命題17.8の後半と一致するのである。

式(17.86), (17.79)より

$$\langle \varphi_m, \varphi_0 \rangle \in S_n \quad \text{for all } n \neq m \qquad (17.87)$$

となっている。よって、式(17.87)、命題17.8より、S_m, S_n $(m \neq n)$, S の関係が、図17.3のようになることが分かる。

式(17.83)より、次の命題が成立する。

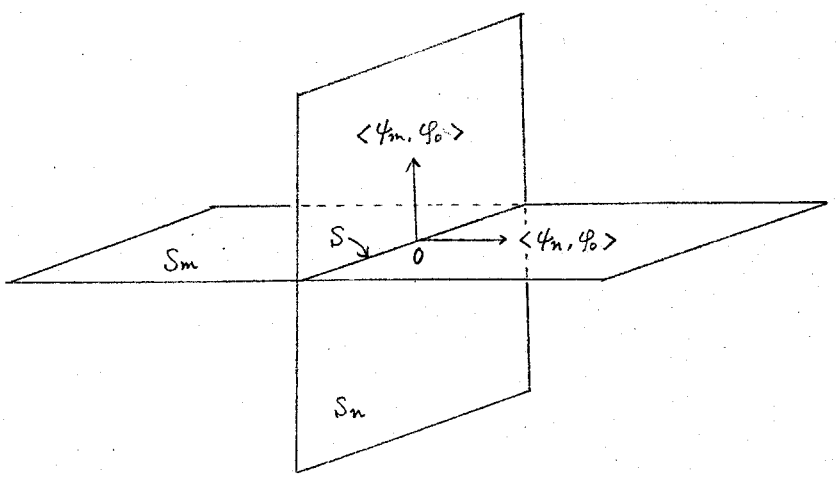


図17.3 S_m, S_n, S の関係 $(m \neq n)(N=1)$

〔命題 17.9〕　S は、$\mathcal{B}(H_N)$ の左イデアルである。

〔命題 17.10〕　ω と、$\omega\varphi_0 = \lambda\varphi_0$ を満足する H_N の実対合とし、Ω を、ω に対応する $\mathcal{B}(H_N)$ の共変対合とする。$A_N \in S$ となる為の必要十分条件は、$\Omega A_N \in S$ となることである。

（証明）　式(5.95)より　$\omega(A_N\varphi_0) = \alpha(\Omega A_N)\varphi_0$ となり、$\omega 0 = 0$ であるから、式(17.83)より命題が成立する。　(Q.E.D)

〔系 17.5〕　次の各条件は、互いに同値である。

(i) $A_N \in S$, (ii) $\bar{A}_N \in S$, (iii) $A_N^{\#a} \in S$

（証明）　$\bar{\varphi}_0 = \varphi_0$, $I_N(a)\bar{\varphi}_0 = \varphi_0$ と命題 17.10 より明らかである。　(Q.E.D)

〔命題 17.11〕　$r = 1, 2$ とする。ある m に対して $A_N \in S_m \cap \mathcal{B}^{(r)}(H_N)$ ならば、$A_N \in S$ である。そして、次の各条件は、$A_N \in S \cap \mathcal{B}^{(r)}(H_N)$ となる為の必要十分条件である。

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=-N}^{N} A_N(n) = 0 \tag{17.88}$$

$$\text{(ii)}\quad \tilde{A_N}(0) = 0 \tag{17.89}$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{1}{2l}\int_{l} a_N(x)\,dx = 0 \tag{17.90}$$

$$\text{(iv)}\quad (A_N, E^{(0)}) = 0 \tag{17.91}$$

式(17.91)と図 11.2 より、次のことが分かる。$\mathcal{B}^{(1)}(H_N) \oplus \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元で、同相誤差が零になるものは、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の共通部分である $\mathcal{L}(E^{(0)})$ に直交する部分である：

$$S \cap (\mathcal{B}^{(1)}(H_N) \oplus \mathcal{B}^{(2)}(H_N)) = (\mathcal{B}^{(1)}(H_N) \oplus \mathcal{B}^{(2)}(H_N)) \ominus \mathcal{L}(E^{(0)}) \tag{17.92}$$

また、命題16.15と式(17.83)より、次のことが分かる。$\mathcal{B}^{(r)}(H_N)$ $(r=3,4)$ の元で、同相誤差が零になるものは、零作用素だけである:

$$S \cap \left(\mathcal{B}^{(3)}(H_N) \oplus \mathcal{B}^{(4)}(H_N) \right) = \{0\} \tag{17.13}$$

第18節　作用素の近似とその応用(1)~(3)

18.1　まえがき

3.3 で述べたように、作用素を電子回路で実現する場合には、回路の端子数が有限個であるという物理的制約から、実際には有限次元の作用素しか実現できない*。従って、本来無限次元であるような作用素に対しては、それを有限次元作用素で近似しなければいけないのである。こうして、作用素の近似という非常に重要で本質的な問題が生じてくる。

作用素の近似の問題は、大きく二つの形に分類される。第一の形は、有限次元で近似された作用素が、その次元数を無限大にしてやくとき、はたして本来の作用素をいくらでも近似できるであろうか、という問題である。第二の形は、今度は逆に次元数を一定にしておいて、その中で最良近似の存在と一意性を論じ、さらには、最良近似そのものを求める、という問題である。いうまでもなく、我々工学者にとってより重要なのは、後者の形である。よく知られている連続関数の多項式による近似にならって、前者と機能の Weierstrass 形近似問題、後者と機能の Čebyšev 形近似問題と名づけることにする(文献(4), P.25, 29)。

まず 18.2 で、Weierstrass 形近似について論じる。18.3 では、扱う信号がすべて信号空間のある部分空間に制限されている場合に対して、Čebyšev 形近似の問題を論じる。そして、誤差の上限を最小にするだけでなく、各入力信号に対して最小の誤差を与えるものは、式(18.3)で定義された A_{MN}(式(3.97)で定義した A_N は、この特殊な場合である)であり、しかもそれだけであることを示す。18.4 では、標本化定理を応用した観測装置を製作する場合に重要な働きをする第二標本化が、普通の標本化によって得られたパターンを、さらにその部分空間の元で最良に近似することにほかならないことと明ら

---

* 一般には、作用素の定義域も値域も共に無限次元であるが、本論文では、これらが共に本質的に有限次元である作用素を有限次元作用素ということにする(文献(4), p.271)

かにし、18.3 で論じた問題の特殊な場合として、オニ標本化を行なう空間回路網の構造と決定する。また、オニ標本化と低域通過沪波器とは、数学的には同じ作用素であることと明らかにする。

18.2 Weierstrass 形近似定理

X を複素Hilbert空間とし、$\mathcal{B}(X)$ を、X から X の中への有界線形作用素とする。X の二つの有限次元部分空間を X_M, X_N とし、X_M から X_N への有界線形作用素の全体を、$\mathcal{B}(X_M, X_N)$ とする。$\mathcal{B}(X_M, X_N)$ は $\mathcal{B}(X)$ の有限次元部分空間になっている。

Weierstrass 形近似の問題をはっきりと定式化すれば、つぎのようになる。

〔 問題 18.1 〕 $\mathcal{B}(X)$ に属する作用素 A に対して、任意に与えられた誤差の範囲内に入る近似を、$\mathcal{B}(X_M, X_N)$ の中で決定すること。ここで、M, N は A に応じて適当に大きくとれるものとする。

この問題を解決してゆく為に、近似の為の評価基準をもうける。

〔 定義 18.1 〕 $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(X_M, X_N)$, $f \in X$ に対して、二種類の近似度を次のように定義する。

(i) A に対する B の f における近似度 $d(A, B, f)$:

$$d(A, B, f) \equiv \| Af - Bf \| \tag{18.1}$$

(ii) A に対する B の X における近似度 $d(A, B)$:

$$d(A, B) \equiv \| A - B \| = \sup_{f \in X,\ \|f\|=1} d(A, B, f) \tag{18.2}$$

(i) は、同じ入力信号 f と A および B で処理したとき、処理後にそれらがどれだけ異なっているかを、ベクトルの間の距離で計ったものである。
(ii) は、f の大きさ (ノルム) を 1 に正規化しておいて、f を X の中で

動かしたときの、(i) の意味の誤差の上限を表している。数学的にいえば、(i) は 強位相による評価基準であり、(ii) は一様位相による評価基準である（文献(5), P. 305, 306）。

X から X_M 及び X_N への射影作用素を P_M 及び P_N とする。$\mathcal{B}(X)$ に属する任意の作用素 A に対して、有限次元作用素 $A_{M,N}$ を

$$A_{M,N} \equiv P_N A P_M \tag{18.3}$$

によって定義すれば、$A_{M,N} \in \mathcal{B}(X_M, X_N)$ となる。この $A_{M,N}$ が問題 1 に対する一つの解答になっている。それを次に命題の形で示す。

〔命題 18.1〕（強収束）$M, N \longrightarrow \infty$ とすることにより、$A_{M,N}$ で A を、強位相の意味でいくらでも近似できる。即ち

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall f \in X,\ \exists N_0(\varepsilon, f);\ \forall M, N \geq N_0,$$
$$0 \leqq d(A, A_{M,N}, f) < \varepsilon \tag{18.4}$$

〔命題 18.2〕（一様収束）A が完全連続作用素ならば、$M, N \longrightarrow \infty$ とすることにより、$A_{M,N}$ で A を、一様位相の意味でいくらでも近似することができる。即ち

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0(\varepsilon);\ \forall M, N \geq N_0,$$
$$0 \leqq d(A, A_{M,N}) < \varepsilon \tag{18.5}$$

文献 (6) に、この命題の $M = N$ の場合が証明してある。$M \neq N$ の場合も、それとほとんど同様にして証明することができるので、ここでは省略する。

$X = L_2[-l, l]$, $X_M = X_N = H_N$, $A_{M,N} = A_N$ が、本論文でこれまでに扱ってきたものである。3.3 で述べたように、命題 18.1, 命題 18.2 における N_0 に対して、A_{N_0} を実現する空間回路網の端子数が、入出力共に $2N_0+1$ となる。このことから、命題 18.1 と命題 18.2 の違いが、はっきりするであろう。

即ち、誤差の範囲 ε が任意に与えられたとき、命題18.1では、有限個の入力集合 $\{f\}$ に対してのみ共通の N_0 をとることができ、$\{f\}$ が無限集合になれば、もはや N_0 を共通にとることができなくなる。ところが、実際の空間回路網では、入出力端子の数は固定されている。このことは、必ず ε よりも大きな誤差を生じる入力信号 f が存在していることを意味している。これに反して、A が完全連続作用素ならば、N_0 は ε だけで定まるから、有界な入力集合 $\{f\}$（C をある定数とするとき、$\|f\| < C$ となるような f の全体であって、無限集合である）に対して共通の N_0 をとることができるのである。

完全連続作用素の全体 $\mathfrak{B}_c(X)$ は、$\mathfrak{B}(X)$ の両側イデアルである（文献(4), p.272）。この事実と、命題18.2 に関連して上で述べたことから、次のことが分かる。ある機能を、いくつかのユニットに分けて構成する場合、できるだけ AB 或いは BA（$A \in \mathfrak{B}(X)$, $B \in \mathfrak{B}_c(X)$）を一個のユニットにまとめておくことが、誤差評価の上からみて得策である。

18.3 Čebyšev 形近似定理

18.2では、式(18.3)によって定義された有限次元作用素 $A_{M,N}$ で、M, N を十分大きくすることにより、いくらでも A を近似できることを示した。しかし、18.2でも触れておいたように、我々が実際に空間回路網を実現する場合には、回路の端子数をある値に固定する。その場合に A に対する最良近似を求めることは 作用素の空間 $\mathfrak{B}(X_M, X_N)$ の M 及び N をある値に固定して、その中で A の最良近似を求める、という問題になる。

ところで、$\mathfrak{B}(X_M, X_N)$ の M, N を固定した場合、$A_{M,N}$ が A の最良近似になっているかどうかは、まだ分からない。$\mathfrak{B}(X_M, X_N)$ の中に、$A_{M,N}$ よりももっと良い A の近似があるかも知れない。さらに、特殊な $B_{M,N} \in \mathfrak{B}(X_M, X_N)$ が存在して、$M, N \to \infty$ のとき $B_{M,N}$ が A に近づかなくても、M, N を固定している限り、$A_{M,N}$ よりもより良い近似を $B_{M,N}$ が与えているかも知

れないのである。もしそのような $B_{M,N}$ が存在すれば、A の近似として、我々は $A_{M,N}$ よりもむしろ $B_{M,N}$ を採用すべきであろう。

この問題に対する非常に狭い範囲での解答は、命題 7.11 及び命題 11.4 で既に得られている。即ち、もし $A \in \mathcal{B}^{(1)}(H) \oplus \mathcal{B}^{(2)}(H)$ ならば $f \in H_N$ に対して、$A_N f = Af$ となるのである。

18.3では、より一般に、$\mathcal{B}(X)$ の元 A に対する Čebyšev 形近似の問題を扱うことにする。しかし、処理されるべき信号は全て、X_M に制限されているものとする。そうすれば、任意の $A \in \mathcal{B}(X)$ は、X_M から X への有界線形作用素とみなすことができる。そのような作用素の全体を $\mathcal{B}(X_M, X)$ とし $\mathcal{B}(X_M, X)$ に、

$$\|A\|_{X_M} \equiv \sup_{f \in X_M} \frac{\|Af\|}{\|f\|} \quad : \quad A \in \mathcal{B}(X_M, X) \tag{18.6}$$

によってノルムを導入する。X は完備であるから $\mathcal{B}(X_M, X)$ も完備なノルム空間になる（文献(7), p. 71）。そこで、18.3で扱う Čebyšev 形近似の問題をはっきりと定式化すれば、次のようになる。

〔問題 18.2〕 $\mathcal{B}(X_M, X)$ に属する作用素 A に対する最良近似を、$\mathcal{B}(X_M, X_N)$ の中で決定すること。ここで、M, N はある固定された自然数である。

この問題を解決する為に、近似の為の評価基準をもうける。

〔定義 18.2〕 $A \in \mathcal{B}(X_M, X)$, $B \in \mathcal{B}(X_M, X_N)$, $f \in X_M$ に対して三種類の近似度をつぎのように定義する。

(i) A に対する B の f における近似度 $d(A, B, f)$:

$$d(A, B, f) \equiv \|Af - Bf\| \tag{18.7}$$

(ii) A に対する B の X_M における近似度 $d_M(A, B)$:

$$d_M(A, B) \equiv \|A - B\|_{X_M} = \sup_{f \in X_M, \|f\|=1} d_M(A, B) \tag{18.8}$$

(iii)　A を $\mathcal{B}(X_M, X_N)$ の元で近似するときの最良近似度 $d_{M,N}$：

$$d_{M,N} \equiv d_M(A, \mathcal{B}(X_M, X_N)) \equiv \inf_{B \in \mathcal{B}(X_M, X_N)} d_M(A, B) \qquad (18.9)$$

(i) は 18.2 の定義 18.1 の (i) と同じ意味である。

(ii) は、f を X ではなくて X_M の中だけで動かしたときの、(i) の意味の誤差の上限を表している。

(iii) は、B を $\mathcal{B}(X_M, X_N)$ の中で動かすことにより、この誤差の上限をどこまで小さくできるかを示す量である。

$\mathcal{B}(X_M, X)$ は式 (18.6) のノルムの意味でノルム空間になっており、$\mathcal{B}(X_M, X_N)$ は $\mathcal{B}(X_M, X)$ の有限次元部分空間であるから、ノルム空間における近似の一般論より、[8][4] 式 (18.9) の $\inf$ を $\min$ で置き換えることができる。即ち、A に対する (iii) の意味での最良近似が、$\mathcal{B}(X_M, X_N)$ の中に少なくとも一個存在することが分かる（文献(4), p.19）。しかし、これはあくまでも存在定理であって、最良近似の具体的な形は分かっていない。実は式 (18.3) で定義した $A_{M,N}$ が、その最良近似の一つになっていることを示すことが、本節の主な目的の一つである。

$A \in \mathcal{B}(X_M, X_N)$ の場合には A 自身が唯一の最良近似であるから、以下 $A \notin \mathcal{B}(X_M, X_N)$ と仮定する。

〔定理 18.3〕（強い意味の Čebyšev 形近似定理）全ての入力信号 $f \in X_M$ に対して最小の誤差を与える A の $\mathcal{B}(X_M, X_N)$ における近似は $A_{M,N}$ であり、しかもそれだけである。即ち、$\forall B \in \mathcal{B}(X_M, X_N)$, $\forall f \in X_M$ に対して

$$d(A, A_{M,N}, f) \leqq d(A, B, f) \qquad (18.10)$$

が成立する。ここで全ての $f \in X_M$ に対して等号が成立するのは、$B = A_{M,N}$ のときであり、しかも そのときに限る。

（証明）$\mathcal{B}(X_M, X_N)$ の任意の元 B に対して、$A_{M,N} - B$ の値域は X_N

に含まれる。しかも、任意の $f \in X_M$ に対して、$(A - A_{M,N})f$ が X_N に直交することが、次のように示される。

$\forall f \in X_M$, $\forall g \in X_N$ に対して

$$\begin{aligned}(Af - A_{M,N}f, g) &= (Af, g) - (P_N A P_M f, g) \\ &= (Af, g) - (AP_M f, P_N g) \\ &= (Af, g) - (Af, g) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore (A - A_{M,N}) X_M \perp X_N \qquad (18.11)$$

従って、$\forall B \in \mathcal{B}(X_M, X_N)$, $\forall f \in X_M$ に対して

$$\begin{aligned}d(A, B, f)^2 &= \|Af - Bf\|^2 \\ &= \|Af - A_{M,N}f\|^2 + \|A_{M,N}f - Bf\|^2 \qquad (18.12) \\ &\geqq \|Af - A_{M,N}f\|^2 = d(A, A_{M,N}, f)^2\end{aligned}$$

$$\therefore d(A, A_{M,N}, f) \leqq d(A, B, f) \qquad (18.13)$$

式(18.13)で等号が成立することと、式(18.12)の右二項が零になることとは同値である。さらにそれは、ノルムの性質により

$$Bf = A_{M,N}f \qquad (18.14)$$

が成立することと同値である。$B, A_{M,N} \in \mathcal{B}(X_M, X_N)$ 及び式(18.14)より、全ての $f \in X_M$ に対して式(18.13)の等号の成立するための必要十分条件は、$B = A_{M,N}$ である。 (Q.E.D)

〔命題 18.4〕(Čebyšev 形近似定理) 扱う信号が全て X_M に制限されている限り、$A_{M,N}$ は A と $\mathcal{B}(X_M, X_N)$ の元で近似するときの、一様位相の意味での最良近似の一つになっている。即ち、任意の $B \in \mathcal{B}(X_M, X_N)$ に対し

て、次の不等式が成立する。

$$d_{M,N} = d_M(A, A_{M,N}) \leqq d_M(A, B) \tag{18.15}$$

証明は、命題18.3と定義18.2から明らかである。

命題18.4だけであれば、"(i)の意味の誤差の上限を最小にするものの一つが$A_{M,N}$である"ということであって、入力信号$f \in X_M$によっては、$A_{M,N}$よりももっと良い近似を与えるような$B \in \mathcal{B}(X_M, X_N)$が存在するかも知れない。しかし、命題18.3は、そのようなBは存在しなくて、どんな入力信号$f \in \mathcal{B}(X_M, X_N)$に対しても$A_{M,N}$が最も良い近似になっている、ということを主張しているのである。この意味で命題18.3を、強い意味でのČebyšev形近似定理と呼ぶことにする。

命題18.4で$A_{M,N}$が、式(18.6)によって定義された$\mathcal{B}(X_M, X)$のノルムの意味で、最良近似の一つになっていることを述べた。しかしそこでは、最良近似の一意性については、なにも触れていない。以下この問題を論じる。

最良近似が存在して、しかもただ一個に限る場合、その部分空間をČebyšev部分空間という。[8][9] 一般のノルム空間では、その部分空間は必ずしもČebyšev部分空間にならない。[8] 18.3で扱っているノルム空間$\mathcal{B}(X_M, X)$に対してもそうであって、部分空間$\mathcal{B}(X_M, X_N)$は$\mathcal{B}(X_M, X)$のČebyšev部分空間にはならない。それを次の例をもって示す。

Xを三次元Euclid空間、$X_M = X_N$をその二次元部分空間とする。

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{M,N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18.16}$$

に対して

$$B_0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18.17}$$

とおけば

$$d_{M,N} = d_M(A, A_{M,N}) = d_M(A, B_0) = 1 \tag{18.18}$$

となる。実際、$f \in X_N$, $\|f\| = 1$ なる f は全て

$$f = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi) \tag{18.19}$$

と表されるので

$$\|Af - A_{M,N} f\|^2 = \cos^2\theta \leqq 1 \tag{18.20}$$

$$\|Af - B_0 f\|^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{18.21}$$

となり、$\theta \in [0, 2\pi)$ について式(18.20), (18.21) の sup をとれば、式(18.18) が得られる。この様子を図18.1 に示す。

最良近似の全体は凸集合をなすから[8]、$0 \leqq \lambda \leqq 1$ なる λ に対して、

$$\lambda A_{M,N} + (1-\lambda) B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18.22}$$

は全て、A の最良近似になっている。このように、(iii) の意味の最良近似は、少なくとも連続無限個存在する。しかも、連続無限個以上存在しないことは容易にわかるから、結局ここで示した例については、最良近似は連続無限個存在する。

さらに、$\|A\|_{X_M} = 1$ 及び式(18.18) を考慮すれば、零行列も最良近似の一つになっていることが分かる。これは、

$$d_{MN} = \|A\|_{X_M} \tag{18.23}$$

が成立する場合には必ず生じる現象であって、このような場合には、誤差の上限を最小にするというだけならば、すべての入力

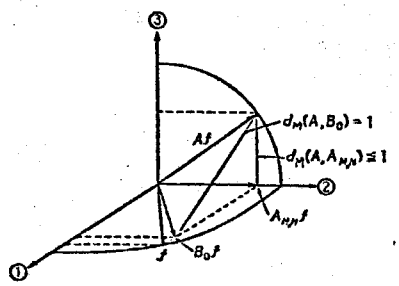


図18.1 A に対する最良近似 $A_{M,N}$ 及び B_0

信号に対して零の出力信号を出すことも一つの方法であることを示している。しかし、どんな入力信号 $f \in X_M$ に対しても誤差を最小にしようと思えば、式(18.23)が成立している場合にも、命題18.3で主張しているように、$A_{M,N}$ が唯一の最良近似になっているのである。

近似の評価基準として、これまでは作用素の強位相及び一様位相を採用してきた。次に、Schmidt ノルムを採用した場合について述べる。$\mathcal{B}(X)$ の元で、Schmidt ノルムが定義できるものは、Schmidt 族の完全連続作用素の全体 $\mathcal{B}_2(X)$ の元だけである。そこで、$\mathcal{B}(X)$ の部分空間 $\mathcal{B}_2(X)$ だけを考えることにする。$\mathcal{B}_2(X)$ は、Schmidt の内積に関して Hilbert 空間となしている(文献(12), p.34)から、その有限次元部分空間 $\mathcal{B}(X_M, X_N)$ は常に、Čebyšev 部分空間になっている(文献(9), p.103)。従って、任意の $A \in \mathcal{B}_2(X)$ に対し、Schmidt ノルムの意味での最良近似が常に $\mathcal{B}(X_M, X_N)$ の中に唯一個存在する。しかも、X_M 及び X_N の正規直交基底を、それぞれ $\{u_m\}_{m=1}^{M}$, $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ とすれば、

$$P_M = \sum_{m=1}^{M} \langle u_m, u_m \rangle, \quad P_N = \sum_{n=1}^{N} \langle v_n, v_n \rangle \tag{18.24}$$

であるから、式(18.3), (3.36) より

$$A_{MN} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} (A, \langle v_n, u_m \rangle) \langle v_n, u_m \rangle \tag{18.25}$$

となる。式(18.25)の右辺は、$A \in \mathcal{B}_2(X)$ の部分空間 $\mathcal{B}(X_M, X_N)$ への射影を表しているから、式(18.3)で与えられる A_{MN} が、Schmidt ノルムに関しても、最良近似になっていることが分かる。よって次の命題が成立する。

〔命題18.5〕 $A \in \mathcal{B}_2(X)$ の $\mathcal{B}(X_M, X_N)$ における Schmidt ノルムの意味での最良近似は、式(18.3)で与えられる A_{MN} であり、しかもそれだけである。

18.4 オニ標本化と低域通過沪波器

標本化定理を応用した観測装置（例えば文字読取機の入力部分）を製作する場合に、次の問題が生じる。

(イ) 標本化定理が成立するのは、入力信号 f がある部分空間 X_M に帯域制限されている場合だけである。従って、$f \notin X_M$ となるような複雑なパターンに対しては、もはや標本化定理は成立しない。

(ロ) たとえ $f \in X_M$ であっても、物理的にはただ一点の値と観測することはできないから、この場合にも、標本化定理を厳密な意味で成立させることはできない。

(ハ) 信号をアナログ値パターンとしてとらえるほうが、解析的には取り扱いやすく、従って設計も容易になる。しかし、現在の光電変換技術からすれば、信号を1－0の二値パターンとして観測するほうが、より高い確度が得られる。また、文字読取機の場合には、そうすることによって、文字パターンの明度の正規化も自動的にできる。

(イ),(ロ) の誤差を少なくする為には、X_M の M をできるだけ大きくとらなければいけない。しかし、M が増大するにつれて、空間回路網の端子数も増加するから、M があまり大きすぎる場合には、配線が複雑になりすぎて、実質的に製作不可能になる。この困難を解決するために考え出されたものが、オニ標本化と呼ばれる技術である。即ち、まず普通の標本化（本論文ではこれをオー標本化と呼ぶ）に従って、非常に多くの標本点でパターンをとらえて、離散的なパターンに変換する。そして、このパターンを加重平均の方法によって、再びより少ない標本点数の離散的パターンに変換する操作が、オニ標本化と呼ばれてきた。

しかし、このままでは数学的幾何学的イメージがはっきりしないので、本論文では、オニ標本化の問題をパターンの近似という立場から見直すことにする。オー標本化によって得られたパターンを、より少ない標本点数のパターンに変

換するということは、X_M の元をその部分空間 X_N（$N<M$）の元で近似することにほかならない。そこで才ニ標本化をつぎのように定義する。

〔 定義 18.3 〕 才ニ標本化とは、標本化定理の成立する部分空間の元を、その部分空間 X_N（$N<M$）の元で最良に近似する操作である。

このように才ニ標本化は、X_N の元による"最良"近似を求める操作であるから、直接 X_M で才一標本化を行なう場合よりも、(イ)、(ロ) の誤差評価がよりやりやすくなるであろう。また、このような方法をとれば、自然に二値パターンをアナログ値パターンに変換することができて、(ハ) の問題も解決されるのである。

18.4では、これまで展開してきた空間回路網理論に従い、$X=L_2[-\ell,\ \ell]$, $X_M=H_M$, $X_N=H_N$ の場合について、この才ニ標本化の問題を論じることにする。即ち、次の問題を考える。

〔 問題 18.3 〕 $f\in H_M$ の、L_2-ノルムの意味での最良近似を、$H_N(N<M)$ の中で決定する空間回路網を設計すること。

$L_2[-\ell,\ \ell]$ は Hilbert 空間であるから、その任意の有元次元部分空間が、Čebyšev 部分空間になる（文献(4), p. 61）。従って、この"元の近似"の問題を"作用素の近似"という立場からみなおすことができて、次のように述べることができる。

〔 問題 18.3′ 〕 恒等作用素 E に対する最良近似を $B(H_M, H_N)$ の中で決定すること。

このように問題を定式化しなおせば、命題 18.3 よりただちに、

$$E_{MN} \equiv E_N E E_M = E_N E_M \tag{18.26}$$

が、その最良近似であることが分かる。即ち、$f\in H_M$ の最良近似は、$E_{MN}f$

である。

式(18.26), (9.21), (3.80)より、E_{MN} は、

$$E_{MN} = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} (\varphi_m^{(M)}, \varphi_n^{(N)}) < \varphi_n^{(N)}, \varphi_m^{(M)} > \qquad (18.27)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2M+1}} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} \varphi_n^{(N)}(a_m^{(M)}) < \varphi_n^{(N)}, \varphi_m^{(M)} > \qquad (18.28)$$

と表される。式(18.28)より、入力側オm端子と出力側オn端子を

$$\hat{E}_{MN}(n,m) \equiv \frac{1}{\sqrt{2M+1}} \varphi_n^{(N)}(a_m^{(M)}) \quad \begin{pmatrix} m=-M, -M+1, \cdots, M \\ n=-N, -N+1, \cdots, N \end{pmatrix} \qquad (18.29)$$

なる値の係数加算器で結合すれば、オニ標本化 E_{MN} を行なう空間回路網を構成することができるのである。

E_{MN} は、H_M から H_N への射影作用素であった。しかも $\{\varphi_n\}$ は空間周波数を表しているから、$E_{M,N}$ は、$f \in H_M$ の H_N に属する空間周波数成分だけを取り出す低域通過沪波器と、数学的には同じものであることが分かる。ただその違いは、オニ標本化では $E_{M,N}f$ を H_N の元として $2N+1$ 個の点で表しているのに対して、低域通過沪波器では"同じ作用素"を H_M ($\supset H_N$) の元として $2M+1$ 個の点で表していることだけである。

実際、式(7.49), (6.38)より

$$(E_{MN}\varphi_n^{(M)}, \varphi_m^{(M)}) = (E_N T_M(a_n^{(M)})\varphi_0^{(M)}, \varphi_m^{(M)})$$

$$= (T_M(a_n^{(M)}) E_N \varphi_0^{(M)}, \varphi_m^{(M)})$$

$$= (E_N \varphi_0^{(M)}, T_M(a_n^{(M)})^* \varphi_m^{(M)})$$

$$= \sqrt{\frac{2N+1}{2M+1}} (\varphi_0^{(N)}, \varphi_{m-n}^{(M)})$$

$$= \frac{\sqrt{2N+1}}{2M+1} \varphi_0^{(N)}(a_{m-n}^{(M)})$$

$$\therefore (E_{MN}\varphi_n^{(M)}, \varphi_m^{(M)}) = \frac{\sqrt{2N+1}}{2M+1} \varphi_0^{(N)}(a_{m-n}^{(M)}) \qquad (18.30)$$

$$(m, n = -M, -M+1, \cdots, M)$$

となり、E_{MN} は

$$E_{MN} = \frac{\sqrt{2N+1}}{2M+1} \sum_{m,n=-M}^{M} \varphi_0^{(N)}(a_{m-n}^{(M)}) < \varphi_m^{(M)}, \varphi_n^{(M)} > \qquad (18.31)$$

と表される。そして、式(18.31) に従って回路を構成すれば、低域通過沪波器となるのである。

第19節　可変空間回路網の制御容易な近似的構成法(1)

19.1　まえがき

第7節でも述べたように、並進作用素の群 $\{T(a): -\infty < a < \infty\}$、ボケの作用素のつくる半群* $\{P(\tau): 0 \leqq \tau < \infty\}$ 等、一つのパラメータを含んだ作用素半群が、文字認識等の分野で、重要な働きをしている。このような半群で、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に属している実作用素を、一般的に $\{A_N(a): 0 \leqq a < \infty\}$ と表す。$A_N(a)$ を回路で実現する為には、$A_N(a)$ の結合特性 $\langle\langle \hat{A_N}(m-n, a) \rangle\rangle$ に対して、図3.6 の各抵抗値を、式(3.108)と同様、

$$\begin{cases} \dfrac{R}{r_{m,n_i}} = \left| \hat{A_N}(m-n_i, a) \right| & (i = 1, 2, \cdots, p) \\ \dfrac{R}{r_{m,n_i}} = \hat{A_N}(m-n_i, a) & (i = p+1, p+2, \cdots, 2N+1) \end{cases} \tag{19.1}$$

に選べば良い。

ところで、外部条件、例えば入力信号 f に応じて、パラメータ a の値が変化することがある。図3.6 でいえば、抵抗 $r_{m,n}$ の値を、外部条件に応じて変化させることに対応している。このとき、次の問題が生じる。

(i)　図3.6 の形で $A_N(a)$ が実現できる為には、各結合係数 $\hat{A_N}(n, a)$ が、a の変動範囲内で定符号でなければいけない。

(ii)　新しい抵抗値を決定する為の計算回数（$2N+1$ 回）が、N の増加と共に多くなり、実時間処理に支障をきたす。

(iii)　可変抵抗の数（$(2N+1)^2$ 個）が N の増加と共に多くなり、回路構成が複雑になる。

これらの問題に対する一つの解決策を与えることが、本節の目的である。

---

* ボケの作用素については、19.3 で詳しく論じる。

19.2 で一般論を論じ、その結果を、19.3 でボケの作用素に適用することにする。

19.2 可変空間回路網の制御容易な近似的構成法

19.2.1 オー近似

作用素半群 $\{A_N(a): 0 \leqq a < \infty\}$ に対し、

$$G_N \equiv \underset{a \to 0+}{S\text{-}\lim} \frac{1}{a}(A_N(a) - E_N) \tag{19.2}$$

によって与えられる作用素 $G_N \in B^{(1)}(H_N)$ を、$\{A_N(a)\}$ の生成作用素という。ここで $S\text{-}\lim$ は、強収束を意味する。式(19.2)より、G_N も実作用素になっている。この G_N を用いて $A_N(a)$ は、

$$A_N(a) = \exp(aG_N) \tag{19.3}$$

と表される(文献(2), p.231)。式(19.3)を、$a=0$ のまわりで展開すれば分かるように、充分小さい a に対して

$$A_N(a;1) \equiv E_N + aG_N \tag{19.4}$$

が、$A_N(a)$ の一つの近似になっている。$A_N(a;1)$ と $A_N(a)$ のオー近似と名付ける。

式(19.4)において、E_N 及び G_N は a に無関係な作用素であるから、作用素 $A_N(a;1)$ は、図19.1のように構成できる。図3.6に比較して、図19.1では一つの出力端子について演算増幅器が二台増えている。しかし、可変抵抗部分は、全体で $(2N+1)^2$ 個から $(2N+1)$ 個に減り、抵抗値を決定するための計算も、$2N+1$ 回から一回になる。しかも可変抵抗部分は、式(19.4)から分かるように、G_N を a 倍するだけであるから、常に正の値をとっている。即ち、式(19.4)は、19.1で述べた三問題に対する解決の方向を示しているの

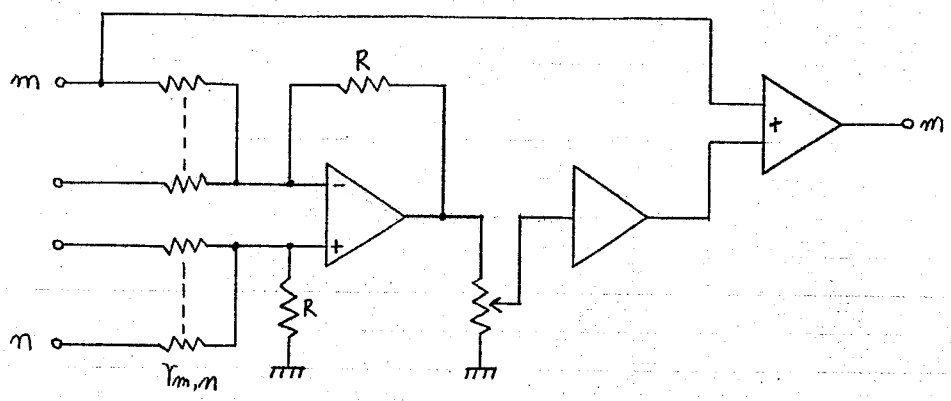


図19.1　$E_N + \gamma_N(a;n)\,R_N$ 形の回路 $(n=1,2,3)$

である。

19.2.2　オ二近似

オー近似の意味を、もう一度考えてみる。$A_N(a)$ は a の変化と共に $B^{(\omega)}(H_N)$ の中で一つの軌跡を描く。生成作用素 G_N は、この軌跡の $a=0$ の点における接ベクトルになっている。従って、$A_N(a;1)$ は図19.2のように、$A_N(0)=E_N$ からその接線方向に伸びた半直線を描く。後で示すボケの作用素 $\Gamma_N(t)$ の例（図19.4）をみても分かるように、a が充分小さいときはともかくとして、a の値がある程度大きくなると、$A_N(a;1)$ はもはや、$A_N(a)$ に対してそれ程良い近似にはならない。しかし、図19.2のような図を描いてみれば、図19.1の回路構成のままで、より良い近似を求める方法を思いつくのである。即ち、Schmidtノルムの意味での最良近似を、図19.2の半直線上で求める為には、

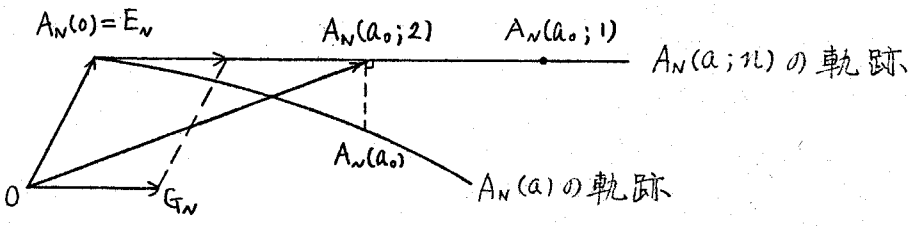


図19.2　$A_N(a)$ のオn近似 $A_N(a;n)$ $(n=1,2)$

その図に示したように、$A_N(a)$の軌跡の各点からこの半直線に垂線を下せば良いのである。このような近似の仕方を才＝近似と名付け、$A_N(a;z)$で表すことにする。

〔補題 19.1〕 x_0, x_1 を Hilbert 空間 X の任意に固定した元とし、$x_0+\mathcal{L}(x_1)$ によって作られる線形多様体を S とする。$x\in X$ の S における最良近似 $\hat{x}$ は唯一個存在し、

$$\hat{x} = x_0 + \frac{(x-x_0, x_1)}{\|x_1\|^2} x_1 \tag{19.5}$$

$$\|x-\hat{x}\|^2 = \|x-x_0\|^2 - \frac{|(x-x_0; x_1)|^2}{\|x_1\|^2} \tag{19.6}$$

となる.

〔補題 19.2〕 $B^{(1)}(H_N)$ の元 B_N に対して、次の関係が成立する。

$$\frac{d}{da}(A_N(a), B_N) = (G_N A_N(a), B_N) \tag{19.7}$$

（証明） G_N の固有値を $\{\lambda_n\}$ とすれば、式(7.37)より.

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}(A_N(a), B_N) &= \frac{d}{da}\sum_{n=-N}^{N}(A_N(a)\varphi_n, B_N\varphi_n)\\ &= \frac{d}{da}\sum_{n=-N}^{N} e^{a\lambda_n}\overline{\hat{B_N}(n)} = \sum_{n=-N}^{N}\lambda_n e^{a\lambda_n}\overline{\tilde{B_N}(n)}\\ &= \sum_{n=-N}^{N}(G_N A_N(a)\varphi_n, B_N\varphi_n) = (G_N A_N(a), B_N)\end{aligned} \quad (Q.E.D)$$

補題19.1より、次の命題が成立する。

〔命題 19.1〕 $A_N(a)$ の才＝近似を $A_N(a;z)$ とすれば、

$$A_N(a;z) = E_N + \gamma_N(a;z)\frac{G_N}{\|G_N\|_2} \tag{19.8}$$

$$\gamma_N(a;z) = \frac{(A_N(a) - E_N, G_N)}{\|G_N\|_2} \qquad (19.9)$$

となり、そのときの誤差は、次式で与えられる。

$$\|A_N(a) - A_N(a;z)\|_2^2 = \|A_N(a) - E_N\|_2^2 - |\gamma_N(a;z)|^2 \qquad (19.10)$$

式(19.9), (19.7) より

$$\gamma_N(0;z) = 0 \qquad (19.11)$$

$$\frac{d}{da}\gamma_N(a;z)\Big|_{a=0} = \|G_N\|_2 > 0 \qquad (19.12)$$

となっている。式(19.11), (19.8) より、$a=0$ に対しては $A_N(0;z) = A_N(0)$ である。また、式(19.11), (19.12) より、ある a_1 が存在して、$\gamma_N(a;z) > 0$ $(0 < a < a_1)$ となることが分かる。即ち、$0 \leq a \leq a_1$ なる a に対して、$A_N(a;z)$ を図19.1の回路で構成すれば、19.1で述べた三問題が、近似的にではあるが、解決されるのである。

なお、実際に回路を構成する場合には、式(19.8)を

$$A_N(a;z) = E_N + \mu \cdot \gamma_N(a;z)\frac{G_N}{\mu\|G_N\|_2} \qquad (19.13)$$

と変形し、$\mu \cdot \gamma_N(a;z)$ の変動範囲が〔0, 1〕になるように $\gamma_N(a;z)$ を規格化しておく方が良い。

〔系 19.1〕 $G_N^* = G_N$ ならば、全ての $a>0$ に対して $\gamma_N(a;z)>0$ となる。

(証明) $G_N^* = G_N$ ならば、G_N の固有値は全て実数であるから、式(19.3)より $A_N(a)$ の固有値は全て正になる。従って、式(19.7), (19.9)より

$$\frac{d}{da}\gamma_N(a;z) = \frac{tr(G_N^2 A_N(a))}{\|G_N\|_2} > 0 \qquad (19.14)$$

となるから、式(19.11)より $\gamma_N(a;z) > 0$ $(a>0)$ となる。 (Q.E.D)

つまり、G_N が自己共役ならば、$0<a<\infty$ なる範囲の全ての a に対して、$\gamma_N(a;z)$ は正の値をとる単調増加関数になっている。従って、$G_N^* = G_N$ ならば、全ての $a \geq 0$ に対して、19.1 で述べた三問題が解決されるのである。

以上の議論は全て、$A_N(0;z) = A_N(0)$ 即ち、$A_N(a;z)$ の軌跡が点 $A_N(0)=E_N$ を通るものであった。$\{A_N(a)\}$ の半群性を利用すれば、次のようにして容易に、$A_N(a_0;z) = A_N(a_0)$ 即ち、$A_N(a;z)$ の軌跡が点 $A_N(a_0)$ を通る場合に拡張することができる。

$$A_N(a) = A_N(a-a_0)\cdot A_N(a_0) \tag{19.15}$$

であるから、$A_N(a-a_0)$ に今までの理論を適用すれば、次の系を得る。

〔系 19.2〕 点 $A_N(a_0)$ における $\{A_N(a)\}$ の接線方向に対する最良近似を $A_N(a;z')$ とすれば、

$$A_N(a;z') = A_N(a-a_0;z)A_N(a_0) \tag{19.16}$$

$$= \left(E_N + \gamma_N(a-a_0;z)\frac{G_N}{\|G_0\|}\right)A_N(a_0) \tag{19.17}$$

となる。

式(19.15)の分解を、文献(3)の位置正規化装置について説明する。$A_N(a_0)$ は丁度、標本点間隔の整数倍だけ動かす〝整数部分〟に対応し、$A(a-a_0)$ が、標本点間隔よりも更に小さい部分をアナログ的に動かす〝小数部分〟に対応している。この場合は、整数部分の $A_N(a_0)$ は比較的作り易いので、そのままの形 $A_N(a_0)$ で実現する。しかし、小数部分の方は、$A_N(a-a_0)$ を忠実に実現しようと思えば、制御回路が複雑になるので、例えば $A_N(a-a_0;z)$ を使って近似的に構成するのである。

19.2.3 オ三近似

19.2.3では更に進んで、集合 $\{A_N(a);\ 0\leqq a\leqq\Lambda\}$ 全体と、$A_N(0)=E_N$ を通る直線で最良近似する問題を考える*。このような最良近似を才三近似と名付け、$A_N(a;3)$ と表す。より厳密にいえば、次のようになる（図19.3）。半直線の方向を定める実作用素を R_N（$\|R_N\|_2=1$）とし、

$$\left.\begin{aligned} A_N(a;3) &\equiv E_N + \gamma_N(a;3)R_N \qquad (19.18)\\ \gamma_N(a;3) &\equiv (A_N(a)-E_N,\ R_N) \qquad (19.19)\end{aligned}\right\}$$

とおく**。ここで R_N として、$A_N(a)$ に対する重みを $w(a)>0$ とする汎関数

$$J[R_N]\equiv\int_0^\Lambda w(a)\|A_N(a)-A_N(a;3)\|_2^2\,da \qquad (19.20)$$

を最小にするような R_N を採用するのである。

この最適な実作用素 R_N の求め方を、次に述べる。

〔補題 19.3〕 $B_N\in\mathfrak{B}(H_N)$ に対して $(G_N,B_N)=0$ ならば、全ての $a\geq 0$ に対して、$(A_N(a)-E_N,\ B_N)=0$ となる。

（証明）

$$X_M=\sum_{n=1}^{M}\frac{a^n}{n!}G_N^n$$

とおけば、$(G_N,B_N)=0$ より $(X_M,B_N)=0$ であるから

$$\begin{aligned}|(A_N(a)-E_N,\ B_N)| &= |(A_N(a)-E_N-X_M,\ B_N)|\\ &\leqq \|B_N\|_2\cdot\|A_N(a)-E_N-X_M\|_2 \qquad (19.21)\end{aligned}$$

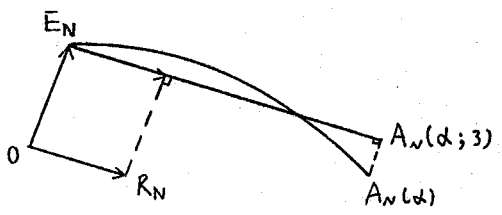


図 19.3 $A_N(a)$ の才三近似 $A_N(a;3)$

---

* 全ての a に対して $A_N(a)=E_N$ となる場合には、問題の意味がなくなるので、このような場合は、除外して考える。

** 線形多様体 $E_N+\mathcal{L}(R_N)$ における $A_N(a)$ の最良近似が、式(19.18),(19.19)で与えられることは、補題19.1から明らかである。従って、残る問題は、R_N の決定だけである。

となる．ところで、$\mathcal{B}(H_N)$ は有限次元部分空間であるから、式(19.3)と文献(4)の命題Ⅱ(p.48)より、M を充分大きくとれば、$\|A_N(a)-E_N-X_M\|_2$ をいくらでも小さくすることができ、式(19.21)より補題が成立する。 (Q.E.D)

〔命題 19.2〕 式(19.20)で与えられる汎関数 $J[R_N]$ の値を最小にするような実作用素 R_N が常に存在し、次のように表される。
集合 $\{A_N(a)-E_N : 0\leqq a\leqq\alpha\}$ を含む部分空間で、複素共役演算に関して閉じているものを $S\subset\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ とし、S の実作用素でできている正規直交基底を $\{U_N^{(m)}\}$ とする。* 才 m,n 成分が

$$b_{m,n}\equiv\int_0^\alpha w(a)\,(A_N(a)-E_N,\,U_N^{(m)})(A_N(a)-E_N,\,U_N^{(n)})\,da \tag{19.22}$$

で与えられる実の正方行列を B とする。B の最大固有値を λ とし、λ に対応する実の固有ベクトルを $\gamma=(\gamma_n)$ とすれば、

$$R_N=\sum_n\gamma_n U_N^{(n)} \tag{19.23}$$

となる。ここで $\gamma=(\gamma_n)$ は、$\|\gamma\|=1$ かつ

$$(G_N,\,R_N)>0 \tag{19.24}$$

となるように正規化しておく。また、このときの誤差は

$$J[R_N]=\int_0^\alpha w(a)\|A_N(a)-E_N\|_2^2\,da-\lambda \tag{19.25}$$

で与えられる。

(証明) 式(19.18),(19.19)と補題19.1より

$$\|A_N(a)-A_N(a;3)\|_2^2=\|A_N(a)-E_N\|_2^2-|(A_N(a)-E_N,R_N)|^2 \tag{19.26}$$

となる。よって、汎関数 $J[R_N]$ を最小にすることと、汎関数

$$J_1[R_N]\equiv\int_0^\alpha w(a)|(A_N(a)-E_N,R_N)|^2\,da \tag{19.27}$$

---

* 例えば $S=\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ とすれば、$\bar{S}=S\supset\{A_N(a)-E_N\}$ となっている。また、$\bar{S}=S$ ならば、常に、実作用素でできている正規直交基底が存在する。

を最大にすることとは、同値になる。ところで、式(19.27)より、$R_N \perp S$ ならば、$J_1[R_N]=0$ であるから、$R_N \in S$ と仮定しても、一般性を失うことはない。そこで、R_N を式(19.23)のように表し、そのときの展開係数 $\{\gamma_n\}$ から作られるベクトルを $\gamma=(\gamma_n)$ とすれば"

$$J[R_N] = \int_0^\alpha w(a) \left| \sum_m (A_N(a)-E_N, U_N^{(m)})\overline{(R_N, U_N^{(m)})} \right|^2 da$$

$$= \sum_{m,n} \overline{\gamma_m}\gamma_n \int_0^\alpha w(a)(A_N(a)-E_N, U_N^{(m)})(A_N(a)-E_N, U_N^{(n)})da$$

$$= \sum_m \left(\sum_n b_{m,n}\gamma_n \right)\overline{\gamma_m} = (B\gamma, \gamma)$$

$$\therefore \quad (B\gamma, \gamma) = \int_0^\alpha w(a) \left| (A_N(a)-E_N, R_N) \right|^2 da \qquad (19.28)$$

となる。$A_N(a)-E_N$ および $U_N^{(n)}$ は実作用素であるから、式(19.22)より B は実対称行列になり、式(19.28)より $B \geq 0$ となる。よって、$J_1[R_N]$ の最大値は、B の最大固有値 $\lambda>0$ であり、式(19.26)より式(19.28)が成立する。

B は実対称行列であるから、λ に対応する固有ベクトルで、ノルム 1 の実ベクトルが存在する。それを $\gamma=(\gamma_n)$ とすれば"、式(19.23)より R_N も $\|R_N\|_2=1$ なる実作用素になる。最後に、$(G_N, R_N)=0$ と仮定すれば"、補題 19.3 と式(19.27)より $J_1[R_N]=0$ となるから、$\lambda>0$ に矛盾する。即ち、(G_N, R_N) は零でない実数になっている。よって式(19.24)をみたすように R_N の向きを定めることができる。 (Q.E.D)

式(19.22)で与えられる行列 B の見掛上の形は、部分空間 S および S の正規直交基底 $\{U_N^{(n)}\}$ のとり方によって異なる。しかし式(19.28)から分かるように、B の二次形式の値は、S および $\{U_N^{(n)}\}$ のとり方に依存しないのである。従って、B の固有値問題を解く際の計算量を考慮すれば"、S として、$\{A_N(a) : 0 \leq a \leq \alpha\}$ を含むできるだけ小さい部分空間を採用することが望ましい。また $\{U_N^{(n)}\}$ としては、B を求める為の式(19.22)の計算が、できるだけ簡単に行なえるようなものを選ぶことが望ましい。

補題19.2と式(19.19),(19.24)より

$$\gamma_N(0;3) = 0 \tag{19.29}$$

$$\frac{d}{da}\gamma_N(a;3)\Big|_{a=0} = (G_N, R_N) > 0 \tag{19.30}$$

となる。式(19.29)は、$a=0$ に対して $A_N(0;3)=A_N(0)$ であることを意味している。また式(19.29),(19.30)より、ある a_1 が存在して、$\gamma_N(a;3)>0$ $(0<a<a_1)$ となることが分かる。即ち、$0 \leqq a \leqq a_1$ なる a に対して、$A_N(a;3)$ と図19.1の回路で構成すれば、19.1で述べた三問題が解決されるのである。

なお、ヤ＝近似の場合と同様に、実際に回路を構成する場合には、式(19.18)を

$$A_N(a;3) = E_N + \mu\cdot\gamma_N(a;3)\cdot\frac{1}{\mu}R_N \tag{19.31}$$

と変形し、$\mu\cdot\gamma_N(a;3)$ の変動範囲が〔0, 1〕になるように規格化しておくほうが良い。

19.3 ボケの作用素の直線近似

19.3.1 ボケの作用素[7]

パターン認識における飯島理論によれば、ボケの作用素は

$$\Gamma(\tau)f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} f(y)\,dy \tag{19.32}$$

で与えられる。[5] $\Gamma(\tau)$ は $L_2(-\infty,\infty)$ から $L_2(-\infty,\infty)$ への有界線形作用素である。そして、文献(2)の例2(p.235, 243)と同様にして、このボケの作用素の全体 $\{\Gamma(\tau);\ 0\leqq\tau\leqq\infty\}$ が、作用素半群をなし、

$$\Gamma(\tau) = e^{-\tau(\bar{\imath}D)^2} \tag{19.33}$$

と表されることが分かる。ここで $\bar{\imath}D$ は、微分作用素 $\bar{\imath}d/dx$ の空間 $L_2(-\infty,\infty)$

における自己共役な拡張である。

ところで、本論文で扱っている信号空間は、$L_2(-\infty, \infty)$ ではなく $L_2[-\ell, \ell]$ である。そこで、$L_2[-\ell, \ell]$ におけるポテの作用素を、式(19.33)と同じ形式で

$$\Gamma(\tau) \equiv e^{-\tau(\bar{i}D)^2} \tag{19.34}$$

によって定義する。ここで、式(19.34)の $\bar{i}D$ は、3.2.4で述べた微分作用素 $\bar{i}d/dx$ の $L_2[-\ell, \ell]$ における周期性の境界条件による自己共役な拡張である。

式(19.34)より直ちに $\Gamma(\tau) \in \mathcal{B}^{(1)}(L_2)$ であり、$\{\Gamma(\tau) : 0 \leqq \tau \leqq \infty\}$ が D^2 によって生成される作用素半群をなすことが分かる。式(3.60), (19.34)より、$\Gamma(\tau)$ の空間周波数特性 $\tilde{\Gamma}(\tau) = (\tilde{\Gamma}(n, \tau))$ は

$$\tilde{\Gamma}(n, \tau) = e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 \tau} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{19.35}$$

であるから、$\Gamma(\tau)$ は正値自己共役完全連続作用素となる。また式(19.35)より、$\Gamma(\tau)$ は

$$\Gamma(\tau) f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \vartheta_3\left(\frac{x-y}{2\ell}, i\frac{\pi\tau}{\ell^2}\right) f(y)\, dy \tag{19.36}$$

と積分表現される。ここで $\vartheta_3(v, \tau)$ は楕円テータ関数である：

$$\vartheta_3(v, \tau) \equiv 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\tau\pi i n^2} \cos 2n\pi v \tag{19.37}$$

(文献(6), p.46)。

$$\Gamma_N(\tau) \equiv E_N \Gamma(\tau) E_N \tag{19.38}$$

とおけば、式(19.35), (7.168)より $\Gamma_N(\tau) \in \mathcal{B}_i^{(1)}(H_N)$ となり、式(7.172), (7.19)より

$$\Gamma_N(\tau) = e^{-\tau(\bar{i}D_N)^2} \tag{19.39}$$

$$= C^{(0)} + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{N} e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2 \tau} C^{(n)} \tag{19.40}$$

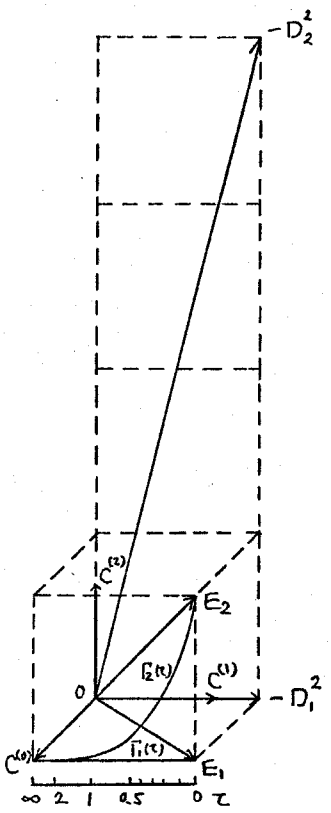


図19.4 $\Gamma_N(\tau)$の軌跡
($N=1, 2$)

$$P_1(\Gamma_N(\tau))(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2\tau}\cos\frac{n\pi}{\ell}x \quad (19.41)$$

$$\|\Gamma_N(\tau)\|_2^2 = \mathrm{tr}(\Gamma_N(2\tau)) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} e^{-2(\frac{n\pi}{\ell})^2\tau} \quad (19.42)$$

となる。インパルス応答$P_1(\Gamma_N(\tau))$のグラフを，19.3.3の図19.7に示す。

式(19.40),(8.43)をもとにして、$\Gamma_N(\tau)$及び$-D_N^2$を図に表したものが、図19.4である。この図からも分かるように、D_N^2は部分空間$\mathcal{L}(\{C^{(n)}\}_{n=1}^N)$に属しており、$\Gamma_N(\tau)$は線形多様体$E_N + \mathcal{L}(\{C^{(n)}\}_{n=1}^N)$に属している。

式(19.39)より、$\Gamma_N(\tau)$の1次近似$\Gamma_N(\tau;1)$は，

$$\Gamma_N(\tau;1) = E_N + \tau D_N^2 \quad (19.43)$$

となる。τが充分小さいところでは，$\Gamma_N(\tau;1)$は$\Gamma_N(\tau)$のかなり良い近似になっている。しかし、図19.4から分かるように，或いは、より精密には、式(19.42),(8.44)より，

$$\frac{\|D_N^2\|_2}{\|\Gamma_N(\tau)\|_2} \geqq \frac{\|D_N^2\|_2}{\|\Gamma_N(0)\|_2} = (\frac{\pi}{\ell})^2\sqrt{\frac{N(N+1)(3N^2+3N-1)}{15}} \quad (19.44)$$

となっていることから分かるように，τがある程度大きくなれば、$\Gamma_N(\tau;1)$の近似度は非常に悪くなる。

19.3.2 ボケの作用素の1次近似*

命題19.1に従って、$\Gamma_N(\tau)$の1次近似を求める。

〔命題19.3〕 $\Gamma_N(\tau)$の1次近似を$\Gamma_N(\tau;2)$とすれば

$$\Gamma_N(\tau;2) = E_N + \gamma_N(\tau;2)\frac{D_N^2}{\|D_N^2\|_2} \quad (19.45)$$

---

* 19.3.2及び19.3.3は、杉本修君(現、三菱電機)に、卒業研究として手伝っていただいたものを、一部変更したものである。

$$\gamma_N(\tau;z)=\sqrt{\frac{5N(N+1)(2N+1)}{3(3N^2+3N-1)}}\left(1-\frac{6}{N(N+1)(2N+1)}\sum_{n=1}^{N}n^2e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2\tau}\right)\quad(19.46)$$

となり、そのときの誤差は、次式で与えられる。

$$\|\Gamma_N(\tau)-\Gamma_N(\tau;z)\|_2^2$$

$$=2\sum_{n=1}^{N}\left(1-e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2\tau}\right)^2-\frac{5N(N+1)(2N+1)}{3(3N^2+3N-1)}\left(\sum_{n=1}^{N}n^2(1-e^{-(\frac{n\pi}{\ell})^2\tau})\right)^2\quad(19.47)$$

(証明) 式(19.9),(8.5)より

$$\gamma_N(\tau;z)=\frac{1}{\|D_N^2\|_2}(\Gamma_N(\tau)-E_N,\ D_N^2)\quad(19.48)$$

$$=\frac{1}{\|D_N^2\|_2}\{(\Gamma_N(\tau),D_N^2)-(D_N^*,D_N)\}$$

$$=\frac{1}{\|D_N^2\|_2}\{(\Gamma_N(\tau),D_N^2)+\|D_N\|_2^2\}$$

$$=\frac{\|D_N\|_2^2}{\|D_N^2\|_2}\left\{1+\frac{1}{\|D_N\|_2^2}(\Gamma_N(\tau),D_N^2)\right\}\quad(19.49)$$

となるから、式(19.49)に式(8.7),(8.44)を代入し、式(8.43),(19.40)を考慮すれば、式(19.46)が成立することが分かる。式(19.10)と式(7.125),(19.40),(19.46)より式(19.47)を得る。(Q.E.D)

式(19.46)より、$\gamma_N(\tau;z)$がτに関して単調に増加し、$\gamma_N(0,z)=0$と

$$\gamma_N(\infty;z)=-t_r\left(\frac{D_N^2}{\|D_N^2\|_2}\right)=\sqrt{\frac{5N(N+1)(2N+1)}{3(3N^2+3N-1)}}\quad(19.50)$$

の間の値をとることが分かる。

式(19.45)の両辺のP_1をとれば、次の関係が成立する。

$$P_1(\Gamma_N(\tau;z))(x)=\sqrt{2N+1}\left(\psi_0(x)+\frac{\gamma_N(\tau;z)}{\|D_N^2\|_2}\frac{d^2}{dx^2}\psi_0(x)\right)\quad(19.51)$$

$P_1(D_N^2)(x)=\sqrt{2N+1}\,d^2\psi_0(x)/dx^2$ の具体的な形は、式(8.47),(8.48)に与えて

ある.

$\Gamma_N(\tau;z)$ の軌跡を図19.5に、$\gamma_N(\tau;z)$ のグラフを図19.6に、$f_1(\Gamma_N(\tau;z))$ のグラフを図19.7に、それぞれ示す。

19.3.3 ボケの作用素の才三近似

命題19.2に従って、$\Gamma_N(\tau)$ の才三近似を求める。

〔補題19.4〕 $w(\tau)>0$ とし、才 m,n 成分が

$$b_{m,n} \equiv 2\int_0^d w(\tau)\left(1-e^{-(\frac{m\pi}{l})^2\tau}\right)\left(1-e^{-(\frac{n\pi}{l})^2\tau}\right)d\tau \qquad (19.52)$$

$$(m,n=1,2,\cdots,N)$$

で与えられる行列を $B=\langle\langle b_{m,n}\rangle\rangle$ とすれば、B は正の最大固有値 λ をもつ。λ は特性方程式の単純根であり、λ に対応する固有ベクトルで、$\|r\|=1$ かつ

$$0>r_1>r_2>\cdots>r_N>-1 \qquad (19.53)$$

となるものが存在する。

(証明) 式(19.52)より、全ての m,n に対して $b_{m,n}>0$ であるから、Perronの定理(文献(8), p.53)より、B は単純特性根となるような正の最大固有値 λ をもち、更に、λ に対応する固有ベクトルで、負の成分でできているベクトル $r=(r_n)$ が存在する。今それを、$\|r\|=1$ と正規化しておけば

$$-1<r_n<0 \quad (n=1,2,\cdots,N) \qquad (19.54)$$

となる。$Br=\lambda r$ より

$$\sum_{n=1}^{N} b_{m,n}r_n = \lambda r_m \qquad (19.55)$$

であるから、

$$\lambda(r_q - r_p) = \sum_{n=1}^{N} (b_{q,n} - b_{p,n}) r_n \qquad (19.56)$$

となる。ところで、$p<q$ とすれば 式(19.52)より

$$b_{p,n} < b_{q,n} \quad (p<q) \qquad (19.57)$$

となるから、式(19.57), (19.54) と $\lambda>0$ を考慮すれば、式(19.56)より

$$r_p < r_q \quad (p<q) \qquad (19.58)$$

となる。よって、式(19.58), (19.54)より式(19.53)が成立する。 (Q.E.D)

〔命題 19.4〕 $\Gamma_N(\tau)$ の才三近似を $\Gamma_N(\tau;3)$ とすれば

$$\Gamma_N(\tau;3) = E_N + r_N(\tau;3) R_N \qquad (19.59)$$

となる。ここで R_N, $r_N(\tau;3)$ は、補題19.4の条件を満足する B の固有ベクトル $r=(r_n)$ を使って

$$R_N = \sum_{n=1}^{N} r_n C^{(n)}$$

$$r_N(\tau;3) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N} r_n \left(e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \tau} - 1 \right) \qquad (19.61)$$

と表される。そして、このときの誤差は、補題19.4の B の最大固有値 λ を使って

$$\int_0^{\alpha} w(\tau) \| \Gamma_N(\tau) - E_N \|_2^2 \, d\tau - \lambda \qquad (19.62)$$

で与えられる。

(証明) 19.3.1 で述べたように、$\Gamma_N(\tau) - E_N \in \mathcal{L}(\{C^{(n)}\}_{n=1}^{N})$ であるから、命題19.2で $S = \mathcal{L}(\{C^{(n)}\}_{n=1}^{N})$, $U_N^{(n)} = C^{(n)}$ とすることができる。そうすれば、式(19.40), (7.125)より、式(19.22)の $b_{m,n}$ が式(19.52)

のように表される。従って、式(19.24)の性質以外は、命題19.2より明らかである。式(19.39)より $G_N = D_N^2$ であるから、式(8.43), (19.60), (19.53)より

$$(D_N^2, R_N) = -\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \sum_{n=1}^{N} n^2 \cdot \gamma_n > 0 \qquad (19.63)$$

となり、式(19.24)も確かに成立している。 (Q.E.D)

式(19.61)より、$\gamma_N(t;3)$ が t に関して単調に増加し、$\gamma_N(0;3)=0$ と

$$\gamma_N(\infty;3) = -t_r(R_N) = -\sqrt{2}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n \qquad (19.64)$$

の間の値をとることが分かる。

式(19.59)より R_N のインパルス応答は

$$P_1(R_N)(x) = \sum_{n=1}^{N}\gamma_n c_n(x) \qquad (19.65)$$

となるから、式(7.102)より R_N の結合特性 $\hat{R_N} = (\hat{R_N}(n))$ は

$$\hat{R_N}(n) = \frac{\sqrt{2}}{2N+1}\sum_{m=1}^{N}\gamma_m \cos\frac{2\pi mn}{2N+1} \quad (n=-N,-N+1,\cdots,N) \qquad (19.66)$$

となる。また、ベクトル (γ_n) に対して成立する関係式(19.53)は、式(19.40)で与えられる $\Gamma_N(t)$ の展開係数 $\{\exp(-(\frac{n\pi}{\ell})^2 t)\}_{n=1}^{N}$ が、n に関して単調に減少することに対応するものである。

補題19.4の行列 B の固有値問題を、最も簡単な $N=2$ の場合について解けば

$$\begin{cases} b \equiv \sqrt{(b_{22}-b_{11})^2 + 4b_{12}^2} \\ c \equiv \frac{1}{2}(b + b_{22} - b_{11}) \end{cases} \qquad (19.67)$$

とおくとき

$$\lambda = c + b_{11}\ ,\quad \gamma_1 = -\frac{b_{12}}{\sqrt{bc}}\ ,\quad \gamma_2 = -\sqrt{\frac{c}{b}} \qquad (19.68)$$

となる。しかし、$N \geq 3$ の場合に、この固有値問題を解くことは、必ずしも容

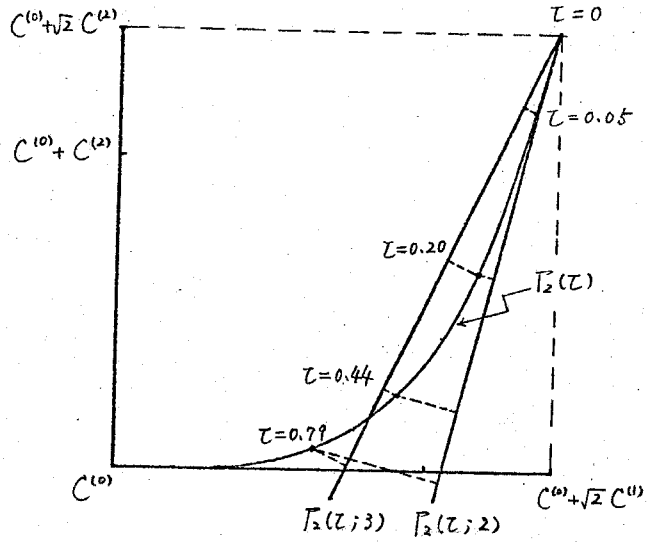


図19.5　$\Gamma_2(\tau;n)$ $(n=0,2,3)$ の軌跡
$(\ell=\pi,\ \alpha=0.79)$

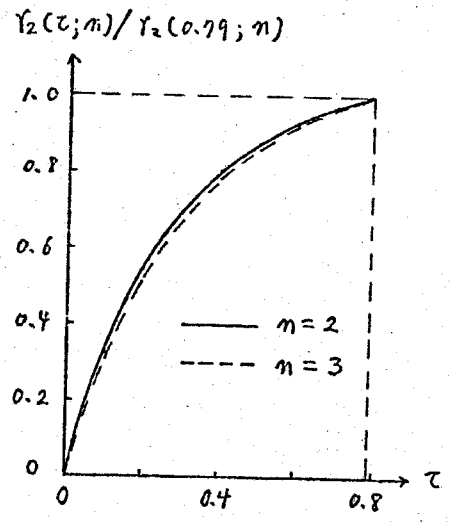
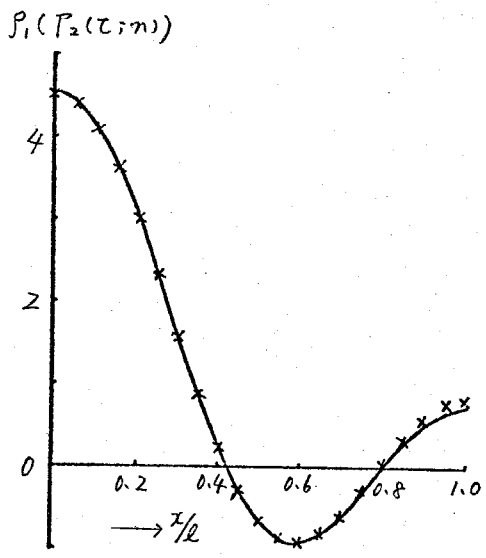
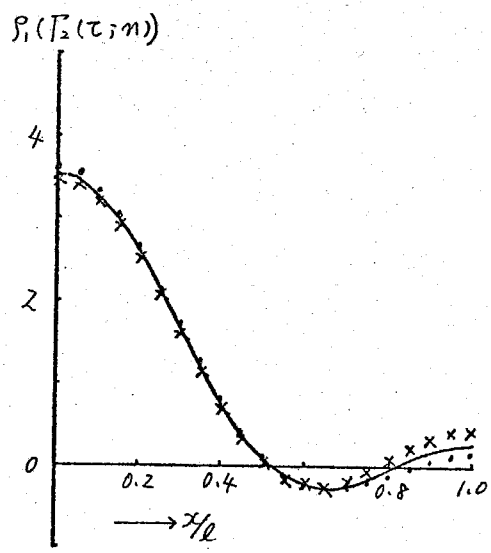


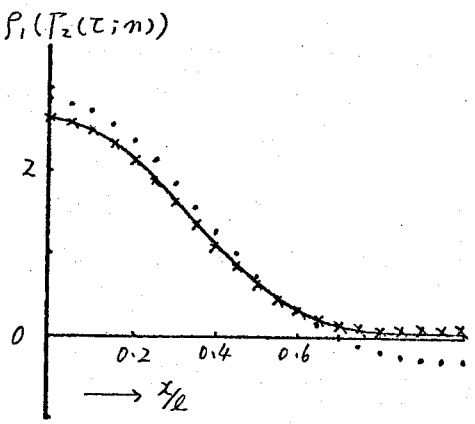
図19.6　$\gamma_2(\tau;n)/\gamma_2(0.79;n)$
$(\ell=\pi,\ \alpha=0.79)$



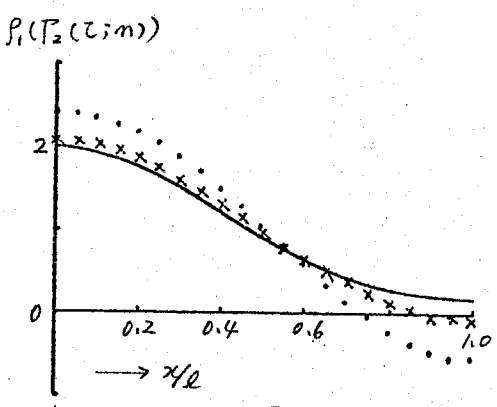
(a)　$\tau=0.05$ $(\sigma/\ell=0.1)$



(b)　$\tau=0.20$ $(\sigma/\ell=0.2)$



(c)　$\tau=0.44$ $(\sigma/\ell=0.3)$



(d)　$\tau=0.79$ $(\sigma/\ell=0.4)$

図19.7　$\Gamma_2(\tau;n)$ のインパルス応答 $(\ell=\pi,\ \alpha=0.79)$ (—: $n=0$, ・: $n=2$, X: $n=3$)

易なことではなく、数値計算に頼らざるを得ない。

式(19.59)の両辺の P_1 をとれば、式(19.65)より

$$P_1(\Gamma_N(\tau;3))(x) = \sqrt{2N+1}\,\psi_0(x) + \gamma_N(\tau;3)\sum_{n=1}^{N}\gamma_n c_n(x) \qquad (19.69)$$

となる。

文字認識の分野では、ボケの量として、例えば

$$\tau = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\sqrt{2}X}{0.8}\right)^2 - \left(\frac{a}{1.4}\right)^2\right\}, \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2} \qquad (19.70)$$

が用いられている(文献(9), 式(31))。ここで $2X$[mm]は標本点間隔であり、$2a$[mm]は文字の線幅である。式(8.18)より $X = \ell/(2N+1)$ であるから、$\ell = \pi$[mm], $2a = 0.35$[mm] とすれば、例えば $N=2$ のとき $\tau = 0.609$, $N=4$ のとき $\tau = 0.183$ となる。

そこで、$\ell = \pi$, $\alpha = 0.79$, $w(\tau) = 1$, $N=2$ の場合について、$\Gamma_N(\tau;3)$ の軌跡を図19.5に、$\gamma_N(\tau;3)$ のグラフを図19.6に、$P_1(\Gamma_N(\tau;3))$ のグラフを図19.7に、それぞれ示す。

図19.5における $\Gamma_2(\tau)$ と $\Gamma_2(\tau;n)$ $(n=2,3)$ の Schmidt ノルムの意味での誤差は、図19.7の対応するグラフの間の二乗平均誤差と一致している。その具体的数値を表19.1に示す。この表及び図19.5, 図19.7より、本章で与えた作用素の近似法が、ボケの作用素に対して、かなり有効であることが分かる。

表19.1 打ち切り近似 $\Gamma_2(\tau;n)$ の誤差 ($n=2,3$, $\alpha = 0.79$)

τ	$\|\Gamma_2(\tau)\|_2$	$\|\Gamma_2(\tau) - \Gamma_2(\tau;2)\|_2$	$\|\Gamma_2(\tau) - \Gamma_3(\tau;3)\|_2$
0.05	2.0372	0.0047	0.0449
0.20	1.6566	0.0598	0.0940
0.44	1.3743	0.2044	0.0343
0.79	1.1898	0.4209	0.1329

19.3では $w(\tau)=1$ としたが、図19.5或いは図19.4から分かるように、$\Gamma_n(\tau)$ が作用素の空間 $B(H_n)$ の中で描く軌跡の長さが、τ の値に関して一様になっていない。従って、$\tau\in[0,\alpha]$ に対する各 $\Gamma_n(\tau)$ を平等に扱う為には、$w(\tau)=1$ とするのではなく、τ の微小変化に対する軌跡の長さの変化の割合が一定になるように、$w(\tau)$ を決定しなければいけない。

図19.6より、$\gamma_2(\tau;n)$ の値と、最大値が1になるように規格化しておけば、$n=2$ と $n=3$ の場合で、ほとんど同じ曲線を描くことが分かる。実際には、この曲線に従って空間回路網を制御することになるので、$\gamma_n(\tau;n)$ が図19.6のように単純な曲線を描くということは、回路技術上望ましいことなのである。

第20節　空間回路網理論のその他の応用

本節では、これまでに展開してきた空間回路網理論の応用を、四種類述べる。まず20.1では、太いビームを使用した観測装置の分解能改善法について論じる。これは同時に、1ク.1で述べた標本化定理に関する誤差の問題(ii)の(1)「唯一点の値を観測することは物理的に不可能であるという物理的観測に関する誤差」に対する一つの解答にもなっている。

20.2では、標本点上で与えられた関数の補間表示法について論じる。

20.3では、あるユニタリ作用素 $A_N \in \mathfrak{B}^{(1)}(H_N)$ が既に全物で、或いはソフトウェアで構成されているとき、それを利用して、A_N の逆作用素 A_N^{-1} を構成する方法について論じる。

最後に20.4では、オ4節で導入した作用素に対する複素共役演算の概念を使って、相関関数を不変に保つ作用素の特徴付けを行なう。

20.1　太いビームを使用した観測装置の分解能改善法

20.1.1　まえがき

空間回路網や電子計算機のように、本来連続な領域で定義されている信号を、ある離散点上の値だけを使って処理できるのは、標本化定理のおかげである。

従って、空間回路網や電子計算機が、計算通りの機能を果す為には、標本化定理が要求する形で、信号をこれらの装置に入力しなければいけない。

標本化定理からの要請とは、次の二点である。

(i) 信号は、ある帯域制限された空間に属していること。

(ii) 入力値が、標本点上で実際にその信号がとっている値と一致すること。

要請(i)に対しては、二通りの答え方がある。まずオーは、音声信号のよう

に、処理されるべき信号を、低域通過沪波器に通して、強制的に帯域制限してしまうことである。それが不可能な場合は、標本点の数をできるだけ増して、条件の方を緩くしなければいけない。このオニの方法も、一度標本点数を固定してしまえば、それより高い周波数成分を含む入力信号に対して、誤差を生じることになる。この種の誤差については、1.2.1 で既に検討した。

唯一点における値を観測することは、物理的に不可能であるから、(ii) の要請には、そのままの形では答えることができない。解決方法として、三通り考えられる。

オーの考え方は、標本化定理そのものを変更することである。即ち、信号 f の一点における値ではなくて、物理的に観測可能な値から、f を再構成する方法を与えることである。このような方法は、Papoulis[1] と磯道[2] により、"real pulse による標本化" として、形式的に論じられたことがある。

画像情報の、空間回路網或いは電子計算機への入力には、フライングスポットスキャナ（FSS）のように、ビームで画面上を走査する観測機構が、良く使われる。このような場合には、ビームをできるだけ細くすることにより、(ii) の要請に近似的に答えることができる。これがオニの考え方である。このときの近似度が、舟久保[3] によって論じられている。

一方、画像からランダムな雑音を除去する為に、画像の平滑化が行なわれる場合がある。観測機構にこのような機能をもたせる為には、むしろ、ビームは太い方が良いのである。そこで 2.1 では、オミの考え方として、太いビームを使用した観測機構から、本来の信号を取り出す方法について、論じることにする。この方法は、本質的には、信号 f の一点における値を用いる従来の標本化定理を使用しているけれども、結果として、オーの考え方である "real pulse による標本化定理" を構成したことになっているのである。そして、このような考え方をすることにより、形式的に論じられていた Papoulis や磯道の方法の物理的意味も、明確になってくるのである。

なお、太いビームを使用した観測装置では、所謂ボケた像しか観測するこ

とができないので、この第三の方法は、この観測装置の分解能を改善することにもなっているのである。

20、1、2 観測結果からの信号復元法（原理的考察）

観測機構で行っている処理を数式で表せば

$$g(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} w(y) f(x-y)\, dy \qquad (20、1)$$

となる（図20、1）。即ち、観測しようとする点 x を中心に、$w(\cdot)$ という重みを掛けて f を平均化したものが、その点における観測値 $g(x)$ である。従って、各標本点 $x = a_n$ $(n = -N, -N+1, \cdots, N)$ における観測値は、$f(a_n)$ ではなく

$$g(a_n) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} w(y) f(a_n-y)\, dy \qquad (20、2)$$

となるのである。

そこで、我々の問題を述べれば、次のようになる。

「$\{g(a_n)\}_{n=-N}^{N}$ から f を再現せよ。」

この問題は、real pulse による標本化定理を持ち込まなくても、従来の意味の標本化定理を基礎にしている空間回路網理論によって、解決することができる。

まず、式（20、1）で定義される作用素を、A で表す。$A \in B^{(1)}(L_2)$ である

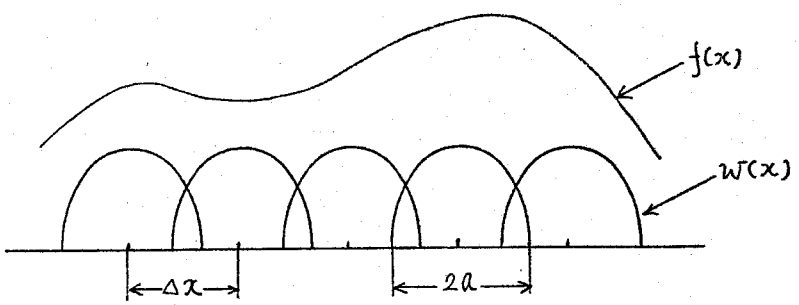


図 20、1　観測機構のモデル（a：ビームの半径，Δx：標本点間隔）

から、$f \in H_N$ ならば $g \in H_N$ である。そこで、

$$A_N \equiv E_N A E_N \tag{20.3}$$

とおくとう、A_N^{-1} が存在すれば

$$f = A_N^{-1} g \quad : f \in H_N \tag{20.4}$$

となるから、A_N^{-1} を空間回路網で実現することにより、$\{g(a_m)\}_{m=-N}^{N}$ から $\{f(a_m)\}_{m=-N}^{N}$ が、従って f が復元できるのである。

これで 20.1.1 で述べた要請 (ii) が、原理的に解決されたことになる。なお、より具体的には、20.1.4 以下で論じることにする。

ところで、要請 (ii) に対するオニの考え方を採れば、ビームの太さと標本点、間隔は、直接的に関係してくる。しかし、オ三の考え方を採れば、式 (20.2) から分かるように、標本点間隔はビームの移動間隔というか、$g(x)$ の標本点、間隔であって、ビームの太さ $2a$ には、本来関係しない量である (図 20.1)。また、技術的には、ビームを細くすることよりも、標本点間隔を小さくする方が、はるかに容易である。

20.1.3 Real Pulse による標本化定理との関係

式 (20.4) で与えられる作用素 $A_N^{-1} \in B^{(1)}(H_N)$ のインパルス応答を $h_N(x)$ とすれば、式 (20.4) と命題 7.25 より

$$f(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} g(a_n) h_N(x - a_n) \tag{20.5}$$

となる。式 (20.5) は、real pulse による観測値 $\{g(a_m)\}_{m=-N}^{N}$ から $f \in H_N$ が完全に復元できる、ということを表しているから、まさしく、real pulse による標本化定理になっている。20.1.3 ではこの点について、もう少し一般的に論じることにする。

〔 命題 20.1 〕 逆が存在する $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元 A_N に対して、

$$\begin{cases} u_n \equiv \dfrac{1}{2N+1} T_N(a_n)\, \rho_1(A_N^{-1}) & (20.6) \\ v_n \equiv T_N(a_n)\, \rho_1(A_N^{*}) \quad (n=-N,-N+1,\cdots,N) & (20.7) \end{cases}$$

とおけば、$\{u_n, v_n\}_{n=-N}^{N}$ は H_N の正規双直交基底になる。

（証明） 式(7.71),(7.57),(3.30),(7.22) より

$$\begin{aligned} (2N+1)(u_m, v_n) &= (T_N(a_m)\rho_1(A_N^{-1}),\ T_N(a_n)\rho_1(A_N^{*})) \\ &= (\rho_1(T_N(a_m)A_N^{-1}),\ \rho_1(T_N(a_n)A_N^{*})) \\ &= (T_N(a_m)A_N^{-1},\ T_N(a_n)A_N^{*}) \\ &= (T_N(a_m)A_N^{-1}A_N,\ T_N(a_n)) \\ &= (T_N(a_m),\ T_N(a_n)) = (2N+1)\delta_{m,n} \end{aligned}$$

$$\therefore\ (u_m, v_n) = \delta_{m,n} \qquad (20.8)$$

(Q.E.D)

命題20.1は、$A_N^{-1}/(2N+1)$ 及び A_N^{*} のインパルス応答を、標本点間隔 a_1 だけ次々に並進することにより、H_N の正規双直交基底が構成できることを意味している。

〔 命題 20.2 〕 (real pulse による標本化定理)

任意の $f \in H_N$ は、命題20.1によって構成される H_N の正規双直交基底 $\{u_n, v_n\}_{n=-N}^{N}$ を使って、

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} g(a_n)\, u_n(x) & (20.9) \\ g(a_n) = (f, v_n) & (20.10) \end{cases}$$

と表される。ここで、$g \equiv A_N f$ である。

（証明）　式(7.76),(7.70),(7.57),(20.7) より

$$g(a_n) = (A_N f)(a_n) = (\rho_1^{-1}(A_N f), T_N(a_n))$$

$$= (A_N \rho_1^{-1}(f), T_N(a_n)) = (\rho_1^{-1}(f), A_N^* T_N(a_n))$$

$$= (f, \rho_1(T_N(a_n) A_N^*)) = (f, v_n) \qquad (Q.E.D)$$

命題20.2 の A_N を、20.1.2で論じた A_N とみなせば、式(20.6) より、式(20.9) が式(20.5)と同じ式であることが分かる。即ち、式(20.5) は、f の双直交展開になっているのである。

［命題20.3］　命題20.1で与えられる正規双直交基底 $\{u_n, v_n\}_{n=-N}^{N}$ に対して、次の関係が成立する。

$$\sum_{n=-N}^{N} u_n(x) \overline{v_n(y)} = \sqrt{2N+1}\, \psi_0(x-y) \qquad (20.11)$$

$$\sum_{n=-N}^{N} u_n(x) = E^{(0)} \rho_1(A_N^{-1})(x) \qquad (20.12)$$

$$\sum_{n=-N}^{N} v_n(x) = (2N+1) E^{(0)} \rho_1(A_N^*)(x) \qquad (20.13)$$

（証明）　$U_N^{(n)} \equiv \rho_1^{-1}(u_n)$, $V_N^{(n)} \equiv \rho_1^{-1}(v_n)$ とおけば、$\{U_N^{(n)}, V_N^{(n)}\}_{n=-N}^{N}$ は $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の正規双直交基底になるから、式(7.76),(7.18) より

$$\sum_{n=-N}^{N} u_n(x) \overline{v_n(y)} = \sum_{n=-N}^{N} (U_N^{(n)}, T_N(x)) \overline{(V_N^{(n)}, T_N(y))}$$

$$= \left(\sum_{n=-N}^{N} (T_N(y), V_N^{(n)})\, U_N^{(n)}, T_N(x) \right)$$

$$= (T_N(y), T_N(x)) = \sqrt{2N+1}\, \psi_0(x-y)$$

となり、式(20.11)が成立する。式(9.74)と式(20.6),(20.7) より式(20.12) (20.13)は明らかである。　(Q.E.D)

上の証明から分かるように、式(20.11)は、H_Nの任意の正規双直交基底に対して成立する関係式である。また、$E^{(0)}$は直流成分だけを取り出す作用素であるから、式(20.12)の右辺は、A_N^{-1}のインパルス応答と、x軸及び直線$x=-\ell$, $x=\ell$によって囲まれる領域の面積の$1/2\ell$倍になっている。式(20.13)についても、同様に解釈できる。従って、式(20.12), (20.13)の右辺は、xによらない定数になっているのである。

20.1.4 太いビームを使用した観測装置の分解能改善法

20.1.2で、観測結果から信号を復元する方法の原理について、述べた。20.1.4では特に式(20.1)の$w(x)$が

$$w(x)=\begin{cases}1 & ;|x|<a\\ \frac{1}{2} & ;|x|=a\\ 0 & ;a<|x|\leqq\ell\end{cases}\qquad(0<a\leqq\ell)\qquad(20.14)$$

の場合について、詳しく論じることにする。これは、輝点が一様な明るさのビームを使用する場合に対応していると考えることもできるし、また、一様に照射された対象と、光電変換素子を網目状に並べたレティナ系で観測する場合に対応していると考えることもできる。

この観測変換を$M(a)$で表せば

$$M(a)f(x)\equiv\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(x-y)\,dy\qquad(0<a\leqq\ell)\qquad(20.15)$$

となる。$M(a)\in B^{(1)}(L_2)$の空間周波数特性を$(M(n,a))$とし、$\alpha\equiv\pi a/\ell$とすれば

$$M(n,a)=\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)\qquad(20.16)$$

となる。$(M(n,a))$のグラフを図20.2に示す。式(20.16)より$M(a)$は

$$M(a)=C^{(0)}+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}C^{(n)}\qquad(20.17)$$

と表される。従って、式(7,122)より次の命題が成立する。

〔命題 20.4〕

$$\overline{M(a)} = M(a)^{*} = M(a) \tag{20.18}$$

$M(a)$ の積分核を $m(x-y, a)$ とすれば、式(20.15)より

$$m(x,a) = \begin{cases} \frac{l}{a} & ; |x| < a \\ \frac{1}{2}\frac{l}{a} & ; |x| = a \\ 0 & ; a < |x| \leqq l \end{cases} \qquad (0 < a < l) \tag{20.19}$$

$$m(x, l) = 1 \tag{20.20}$$

となる。よって、次の命題が成立する。

〔命題 20.5〕 $M(a)$ は Schmidt 族の完全連続作用素であり、次の関係が成立する。

$$\| M(a) \|_2^2 = tr(M(a)) = tr(M(a)^2) = \frac{l}{a} \tag{20.21}$$

(証明) $\| M(a) \|_2^2 = l/a$ 及び $tr(M(a)) = l/a$ は、式(20.19), (20.20)から容易に導かれる。また、一般に A が Schmidt 族の作用素ならば

$$\| A \|_2^2 = tr(A^{*}A) \tag{20.22}$$

である(文献(3), p.37)から、式(20.18)を考慮すれば、$\| M(a) \|_2^2 = tr(M(a)^2)$ となる。従って、式(20.21)が成立する。 (Q.E.D)

$M(a)$ は完全連続作用素であるから、全ての $a \in [0, l]$ に対して、有界な逆が存在しない(文献(5), 命題 I, p.162)。また

$$M_N(a) \equiv E_N M(a) E_N \tag{20.23}$$

$$= C^{(0)} + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n\alpha}{n\alpha} C^{(n)} \tag{20.24}$$

とおけば、図20.2から分かるように、

$$a = \frac{n}{m}\ell \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \cdots, N \\ n = 1, 2, \cdots, m \end{pmatrix} \tag{20.25}$$

のとき、$M_N(a)$ の空間周波数特性 ($M_N(n, a)$) の中に零が含まれるから、$M_N(a)$ の逆が存在しない。そこで、$M_N(a)$ の一般逆作用素を $W_N(a)$ で表すことにすれば"

$$W_N(a) \equiv M_N(a)^+ = C^{(0)} + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N}{}' \frac{n\alpha}{\sin n\alpha} C^{(n)} \tag{20.26}$$

となる。ここで、式(20.26)の Σ' は、$\sin n\alpha = 0$ となるような n を除くことと、意味している。*

a が式(20.25)のいづれとも一致しないとき、$M_N(a)$ の逆が存在し、それは、式(20.26)の $W_N(a)$ と一致する。従って、観測装置で使用するビームの輝点の半径 a, 或いは、レティナ系の光電変換素子の受光領域の大きさの半分 a を、式(20.25)のいずれとも一致しないように設計しておけば"、a がどんなに大きくても、任意の $f \in H_N$ の $M(a)$ による観測結果 $g(a_n) = (M(a)f)(a_n)$ $(n = -N, -N+1, \cdots, N)$ から、$W_N(a)$ を通して、厳密に f を復元することができるのである。

a が式(20.25)のどれかと一致するときは、もはや、f を完全には復元することができない。例えば、$a = \ell/2$ とすれば"、式(20.26), (20.17)より

$$W_N\left(\frac{\ell}{2}\right) M\left(\frac{\ell}{2}\right) = C^{(0)} + \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} C^{(2n+1)} \tag{20.27}$$

となる。** 即ち、$a = \ell/2$ の場合には、$f \in H_N$ の偶数次の高調波成分は全て無視され、直流分と奇数次の高調波成分だけが、忠実に復元されることになるのである。

なお、$a \longrightarrow 0$ の極限では

$$\underset{a \to 0+}{\text{S-lim}}\, M(a) = E \quad , \qquad \underset{a \to 0+}{\text{S-lim}}\, W_N(a) = E_N \tag{20.28}$$

---

* 20.1を通じてこの記号を用いる。
** 式(20.27)の $[\cdot]$ は、Gauss 記号である。

となるから、a が小さくなる程、理想的なインパルスによる観測に近づくことになる。

20.1.5 作用素 $W_N(a)$ の性質

式(20.26), (7.122)より、次の命題が成立する。

〔命題 20.6〕

$$W_N(a) \in \mathcal{B}_i^{(1)}(H_N) \tag{20.29}$$

$$\overline{W_N(a)} = W_N(a)^* = W_N(a) \tag{20.30}$$

$$\| W_N(a) \| = \max_{n \in \mathcal{N}'} \left| \frac{n\alpha}{\sin n\alpha} \right| \tag{20.31}$$

$$\| W_N(a) \|_2^2 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{N}{}' \left(\frac{n\alpha}{\sin n\alpha} \right)^2 \tag{20.32}$$

$$\leqq 1 + 2 \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{l^2 + a^2 n^2}{l^2 - a^2 n^2} \right) \quad (0 < a < \frac{l}{N}) \tag{20.33}$$

ここで

$$\mathcal{N}' \equiv \{ n \mid \frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \neq 0 \ , \ |n| \leqq N \} \tag{20.34}$$

である。

不等式(20.33)は、Redheffer の不等式(8.24)から導くことができる。式(20.29)は、$W_N(a)$ が等方な構造をしており、任意の $b \in [-l, l]$ に対して、b-偶関数を b-偶関数に、b-奇関数を b-奇関数に変換する作用素であることを、意味している。

式(20.29), (20.30)より、$W_N(a)$ の結合特性 $\hat{W_N}(a)$ が、実対称な巡回行列になることが分かる。$\hat{W_N}(a)$ の具体的な形を、次に示す。式(20.26)より、$W_N(a)$ のインパルス応答 $w_N(x, a)$ は、

$$w_N(x, a) = 1 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N}{}' \frac{n\alpha}{\sin n\alpha} C_n(x) \tag{20.35}$$

となる．従って，式(7.102)，(7.28)より，次の命題が成立する．

〔命題 20.7〕 $W_N(a)$ の結合特性 $\hat{W_N}(a)=(\hat{W_N}(n,a))$ は

$$\hat{W_N}(n,a)=\frac{1}{2N+1}\left(1+2\sum_{m=1}^{N}{}'\frac{m\alpha}{\sin m\alpha}\cos\frac{2\pi mn}{2N+1}\right) \qquad (20.36)$$

$$(n=-N,-N+1,\cdots,N)$$

$$|\hat{W_N}(n,a)|\leqq\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\|W_N(a)\|_2 \qquad (20.37)$$

となる。

インパルス応答 $W_N(x,a)$ のグラフを図20.5に，結合特性 $(\hat{W_N}(n,a))$ のグラフを図20.3に、それぞれ示す。

原理的には、20.1.4で述べたように、 a が式(20.25)のいづれとも一致していなければ、$W_N(a)$ は $M_N(a)$ の逆作用素になっていて，任意の $f\in H_N$ を、観測結果 $g(a_n)=(Mf)(a_n)$ $(n=-N,-N+1,\cdots,N)$ から正確に復元することができる。しかし，図20.3から分かるように、輝点の半径 a が、式(20.25)のいづれかに近い値をとるときには、a の僅かな変化に対して、$\hat{W_N}(n,a)$ の値は急激に変化する。

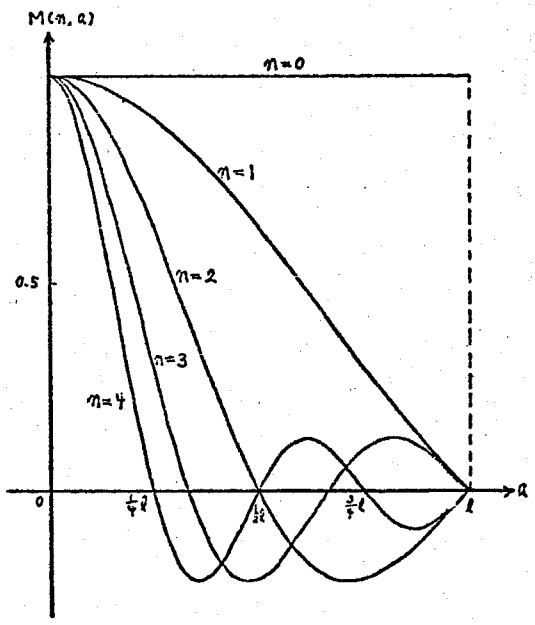


図20.2 $M(a)$の空間周波数特性

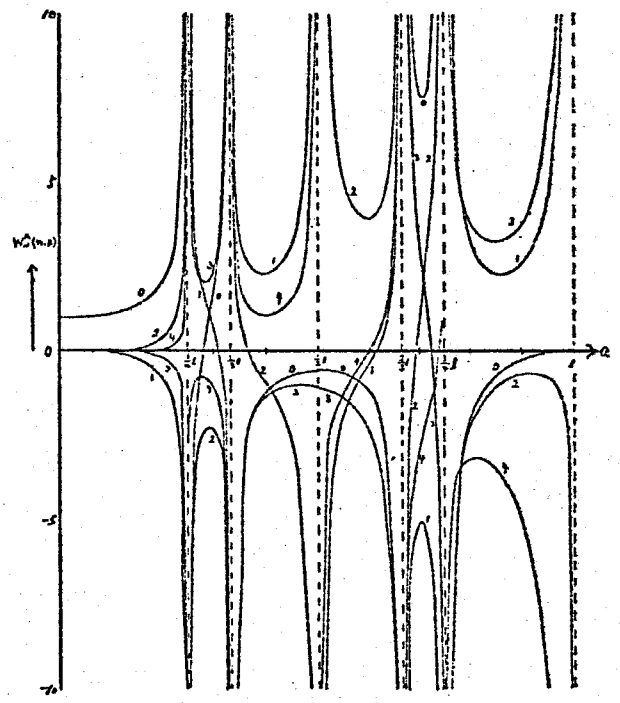


図20.3 $W_N(a)$ の結合特性 $(N=4)^*$

* グラフ上の数字は、nの値を示す

従って、この観測一復元系を安定して働かせる為には、a に対する $W_N\hat{}(n,a)$ の変化の小さいところ、例えば

$$0 < a \leq a_1 = \frac{2\ell}{2N+1} \tag{20.38}$$

の範囲に入る a の値を使用することが、得策であるということができる。

結局、一口で言えば、輝点の半径 a を、必要とする標本点間隔と同じ値（直径でいえば、標本点間隔の二倍）にまで、太くとることができるのである。

式(20.18)より $M_N(a)$ は自己共役であるから、$M_N(a)$, $W_N(a)$ に命題20.1を適用すれば、次の命題が成立する。

〔命題 20.8〕 $M_N(a)$ と $W_N(a)$ のインパルス応答 $m_N(x,a)$, $w_N(x,a)$ に対して

$$\begin{cases} u_n(x,a) \equiv \dfrac{1}{2N+1} w_N(x-a_n, a) & (20.39) \\ v_n(x,a) \equiv m_N(x-a_n, a) \quad (n=-N, -N+1, \cdots, N) & (20.40) \end{cases}$$

とおく。$a \in (0, \ell)$ が式(20.25)のいずれとも一致しなければ、$\{u_n(\cdot,a), v_n(\cdot,a)\}_{n=-N}^{N}$ は H_N の正規双直交基底になる。更に、任意の $f \in H_N$ に対して $g \equiv M(a)f$ とおけば、次の real pulse による標本化定理が成立する。

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=-N}^{N} g(a_n) u_n(x,a) & (20.41) \\ g(a_n) = (f, v_n(\cdot,a)) & (20.42) \end{cases}$$

インパルス応答 $m_N(x,a)$ 及び $w_N(x,a)$ のグラフを、それぞれ図20.4, 図20.5に示す。命題20.8と命題20.1より、これらのインパルス応答に対して、次の関係が成立することが分かる。

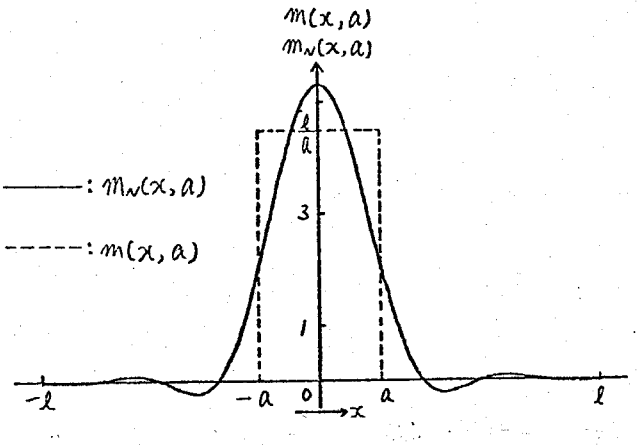


図20.4 $M_N(a)$のインパルス応答 $m_N(x,a)$
$(N=4, a=a_1)$

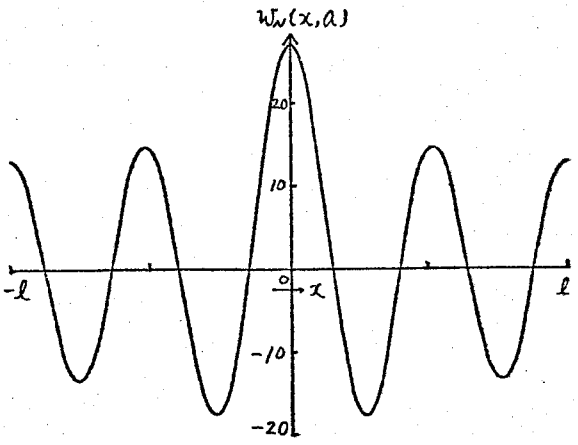


図20.5 $W_N(a)$のインパルス応答
$w_N(x,a)$ $(N=4, a=a_1)$

〔 系 20.1 〕 式(20.25)のいずれとも一致しない $a\in(0,l)$ に対して、

$$\sum_{n=-N}^{N} m_N(x-a_n,a)\,w_N(x-a_n,a) = (2N+1)^2 \qquad (20.43)$$

$$\sum_{n=-N}^{N} m_N(x-a_n,a) = 2N+1 \qquad (20.44)$$

$$\sum_{n=-N}^{N} w_N(x-a_n,a) = 2N+1 \qquad (20.45)$$

なる関係が成立する。但し、式(20.44)は、任意の $a\in(0,l]$ に対して成立している。

20.1.6 例

空間 H_N に帯域制限されている信号 f に対しては、式(20.25)のいづれとも一致しない半径 $a\in(0,l/2)$ の輝点をもつ観測装置 $M(a)$ と復元装置 $W_N(a)$ を使って、f を完全に復元することができる(命題20.8)* しかし帯域制限の条件が破れると、従来の標本化定理と同様に、もはや完全には、信号を復元することができない。そこで、入力波形とどれくらい異なった波形が復元されるかという感覚をつかむ為に、一つの例について検討する。

入力波形としては、図20.7(a)に示す矩形波を考える。この波形は、$M(l/2)$

---

* ここでは、ノイズのことは考えないことにする。

の積分核を使って

$$f(x) = m(x,\ \ell/2) \tag{20.46}$$

と表すことができる。20.1で与えられた方法を、この矩形波に対し形式的に適用して得られる波形 $\hat{f}_N(x,a)$ を求めてみる。なお、比較の為に、最良近似波形 $f_N(x) \equiv (E_N f)(x)$, 従来の標本化定理を形式的に適用して得られる ideal pulse による観測波形* $\tilde{f}_N(x) \equiv (S_N f)(x)$,

$$(S_N f)(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=-N}^{N} f(a_n)\,\varphi_n(x), \tag{20.47}$$

及び、real pulse による観測波形 $\tilde{g}_N(x,a) = (S_N M(a) f)(x)$ も、同時に求める。これら各種近似波形の関係を、図20.6に示す。

さて、式(20.46), (20.17)より $f(x)$ は

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\frac{(2n+1)\pi}{\ell} x \tag{20.48}$$

と表されるから、f の最良近似 f_N は

$$f_N(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{[\frac{N-1}{2}]} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\frac{(2n+1)\pi}{\ell} x \tag{20.49}$$

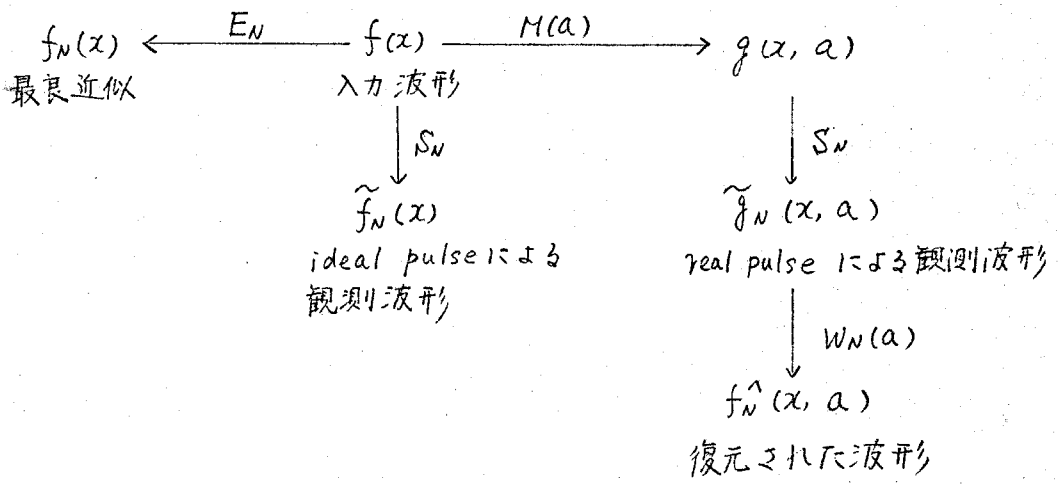


図20.6　入力波形に対する各種近似波形（S_N：標本化作用素）

---

* $S_N f$ は、式(17.1)の g と同じものである。

となる。ideal pulse による観測波形 $\tilde{f}_N(x)$ は、式(20.47),(20.19)より

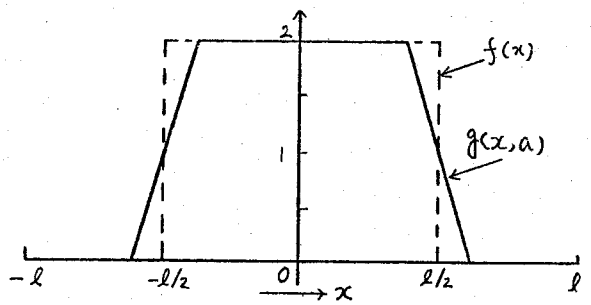
$$\tilde{f}_N(x) = \frac{2}{\sqrt{2N+1}}\left(\varphi_0(x) + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{[\frac{N}{2}]}\varphi_n^{(e)}(x)\right) \qquad (20.50)$$

となる。また、$M(a)$ による観測波形 $g(x,a)$ は、図 20.7(a) のように

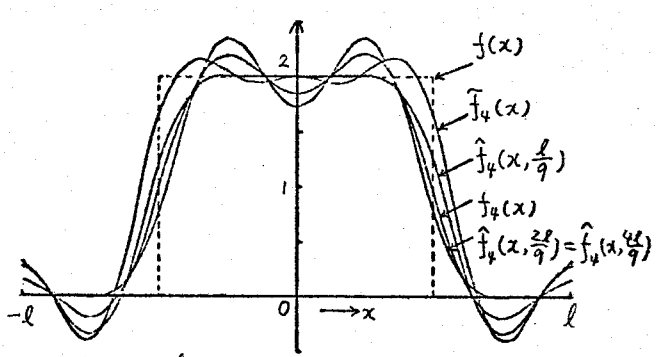
$$g(x) = \begin{cases} 2 & ; |x| \leqq \frac{\ell}{2} - a \\ \frac{x}{a} + (1 + \frac{\ell}{2a}) & ; -\frac{\ell}{2} - a < x < -\frac{\ell}{2} + a \\ -\frac{x}{a} + (1 + \frac{\ell}{2a}) & ; \frac{\ell}{2} - a < x < \frac{\ell}{2} + a \\ 0 & ; \frac{\ell}{2} + a \leqq |x| \leqq \ell \end{cases} \qquad (20.51)$$

となっているから

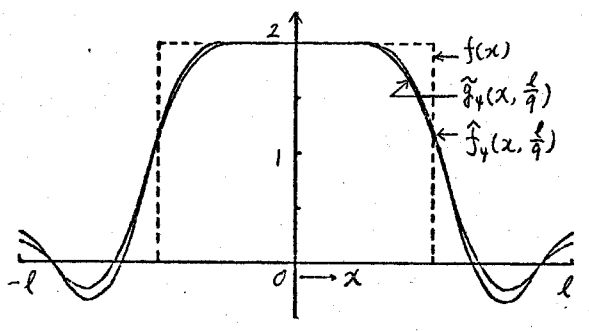
$$N_1 \equiv \left[\frac{2N+1}{4}\left(1 - \frac{2a}{\ell}\right)\right], \quad N_2 \equiv \left[\frac{2N+1}{4}\left(1 + \frac{2a}{\ell}\right)\right] \qquad (20.52)$$



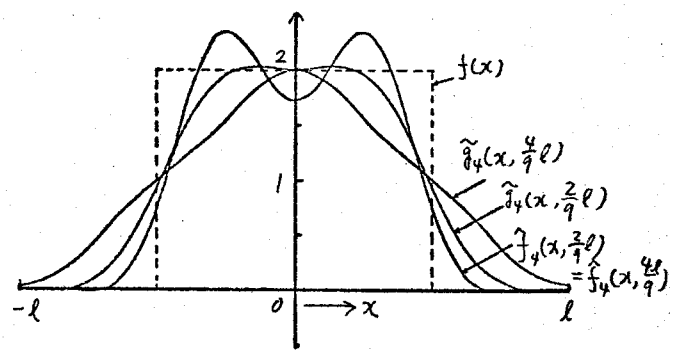
(a) $f(x)$ と $g(x,a)$ の関係 $(a = 4\ell/9)$



(b) $a = \ell/9,\ 2\ell/9,\ 4\ell/9$



(c) $a = \ell/9$



(d) $a = 2\ell/9,\ 4\ell/9$

図20.7 波形復元の例 $(N=4)$ (記号は、図20.6に従う)

とおけば

$$\tilde{g}_N(x,a)=\sqrt{\frac{2}{2N+1}}\left\{\sqrt{2}\,\varphi_0(x)+2\sum_{n=1}^{N_1}\varphi_n^{(e)}(x)+\sum_{n=N_1+1}^{N_2}\left(1+\left(\frac{1}{2}-\frac{2n}{2N+1}\right)\frac{l}{a}\right)\varphi_n^{(e)}(x)\right\} \quad (20.53)$$

$$\hat{f}_N(x,a)=\frac{2}{2N+1}\left\{w_N(x,a)+\sum_{n=1}^{N_1}\left(w_N(x-a_n,a)+w_N(x+a_n,a)\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{n=N_1+1}^{N_2}\left(1+\left(\frac{1}{2}-\frac{2n}{2N+1}\right)\frac{l}{a}\right)\cdot\left(w_N(x-a_n,a)+w_N(x+a_n,a)\right)\right\} \quad (20.54)$$

となる。

f が偶関数であるから、f_N, $\tilde{f}_N$, g, $\tilde{g}_N$ 及び $\hat{f}_N$ は全て偶関数になる。$N=4$ に対する f_N, $\tilde{f}_N$ のグラフを図20.7(b)に、$\tilde{g}_N$ と $\hat{f}_N$ の比較を図20.7の(c),(d)に示す。$N=4$ のとき、$a_1=2l/9$ であるから、図20.7に示した a の値 $l/9\sim 4l/9$ は、$N=4$ の場合の標本点間隔の半分、一倍、二倍の値になっている。なお、$\hat{f}_4(x,a)$ に対しては、$a=2l/9$ の場合と $a=4l/9$ の場合が全く同じ形になり

$$\hat{f}_4(x,\tfrac{2}{9}l)=\hat{f}_4(x,\tfrac{4}{9}l)=1+\frac{\pi}{81}\sum_{n=1}^{4}\frac{n\left(1+(-1)^n\cos\frac{n\pi}{9}\right)^2}{\left(\sin\frac{n\pi}{9}\right)^2\sin\frac{4n\pi}{9}}\cos\frac{n\pi}{l}x \quad (20.65)$$

となる。

図20.7の(c)では、$\tilde{g}_N$ と $\hat{f}_N$ の差はそれ程大きくない。これは、a がある程度(今の場合、標本点の半分)小さくなれば、復元作用素 $W_N(a)$ の効果はそれ程顕著でなく、$\tilde{g}_N$ を $\hat{f}_N$ とみなしても良いことを意味している。しかし、(d)のように a が大きくなると、$W_N(a)$ の効果は著しくなるのである。

L_2-ノルムの意味では、f_N が最も良い近似になっている。しかし、図20.7を見ても分かるように、(c)では矩形波の上の部分が比較的良く復元されており、(d)では逆に、負の部分が非常に小さいという意味で、良い近似になっている。従って、この復元波形をそのまま情報処理機器に入力する場合、或いは直接人間の目でこれを見る場合等々、復元波形の使用法によって、a の値を適当に定めることが望ましい。

20.1.7 あとがき

太いビームを使用した観測装置の分解能と改善することと、real pulse による標本化定理を構成することが、数学的には同じことであることを示した。即ち、これらの問題は、観測系と復元系のインパルス応答から作られる双直交基底を使って、入力信号を展開することに相当していることを、明らかにした。

ついで、観測系のモデルとして、式(20.15)で与えられる作用素 $M(a)$ を採用し、$M(a)$ によってボカされた波形から元の入力波形を再構成する具体的方法を与え、矩形波に対して、その有効性を確めた。

残された問題を、次に示す。

(i) 最適な a の決定 : 20.1.6の最後でも述べたように、復元された波形の使い方(情報処理機器への入力、人間の目による観察等々)によって、a の最適値は異ってくる。このような立場からの評価基準を明らかにし、最適な a を求めなければいけない。

(ii) 観測系のモデル作り : 20.1では一応観測系として $M(a)$ を採用したが、現実の FSS は、ビームの輝点の明るさは一様でない。そこで、より現実の装置に適したモデルを設定することが必要となる。[8]

一方見方を変えて、次のように主張することもできる。即ち、ある意味で最適な観測-復元系を求め、現実の観測装置を、この最適な装置に近づけるよう努力することである。

(iii) ノイズの抑制 : 20.1では一切考慮しなかったが、分解能の改善で最大の問題は、観測系で発生するノイズの抑制である。観測-復元系の範囲内で、ノイズを考慮した最適復元系を求めることも、一つの方法である。[6][7] しかし、一方では、次に行なうべき処理を含めた最適系を求めることも、また一つの方法である。例えば、20.1で扱った例でいえば、$M(a)$ の中で発生するノイズを、たとえ $W_N(a)$ が強調していても、その後で、ボケの変換 $\Gamma_N(\tau)$ を行なう場合には、$\Gamma_N(\tau)\,W_N(a)$ 全体でノイズが抑制される可能性もあるのである。

20.2 標本点上で与えられた関数の補間表示法

20.2.1 まえがき

空間回路網理論においては、H_N の信号 $f(x)$ を、標本点 $a_n = 2\ell n/(2N+1)$ $(n=-N,-N+1,\cdots,N)$ 上の値 $\{f(a_n)\}$ で作られるベクトル $\hat{f}$ として扱っている。従って、ある処理の結果得られた信号 $\hat{f}$ から、その本来の形 $f(x)$ を、例えばブラウン管面上に描かせたいという要求が出てくる。

関数 $f(x)$ とベクトル $\hat{f}$ の同等性を保証するものが、式(3.79),(3.80)で与えた標本化定理であるから、上の要求を満足させる為には、理論的には、式(3.79)に従って $\hat{f}$ を補間すれば良い。これを、直接法と名付ける。

しかし、その為には、関数 $\varphi_n(x)$ $(n=-N,-N+1,\cdots,N)$ を発生させなければいけない。そして、式(3.70)から分かるように、この関数 $\varphi_n(x)$ を発生させる回路を作ることは、必ずしも容易なことではないのである。

そこで20.2では、直接法に拠らないで、しかも直接法と同じ働きをする補間表示法について論じることにする。*

20.2.2 四分割法

系14.3をもう一度書けば、次のようになる。

〔命題 20.9〕 $f \in H_N$ を H_N の固有空間 $H_N^{(\lambda)}$ の元を使って

$$f = \sum_{\lambda=\pm1,\pm i} f_\lambda \quad : \quad f_\lambda \in H_N^{(\lambda)} \tag{20.56}$$

と直和分解すれば、各成分 f_λ に対し、次式が成立する。

$$f_{\pm1}(x) = \frac{\pm1}{\sqrt{2N+1}}\left(f_{\pm1}(0) + 2\sum_{n=1}^{N} f_{\pm1}(a_n)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{20.57}$$

$$f_{\pm i}(x) = \frac{\pm2}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=1}^{N} f_{\pm i}(a_n)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \tag{20.58}$$

但し、複号同順である。

---

* ベクトル $\hat{f}$ 自身を、ブラウン管面上に表示する装置としては、例えば文献(9)がある。

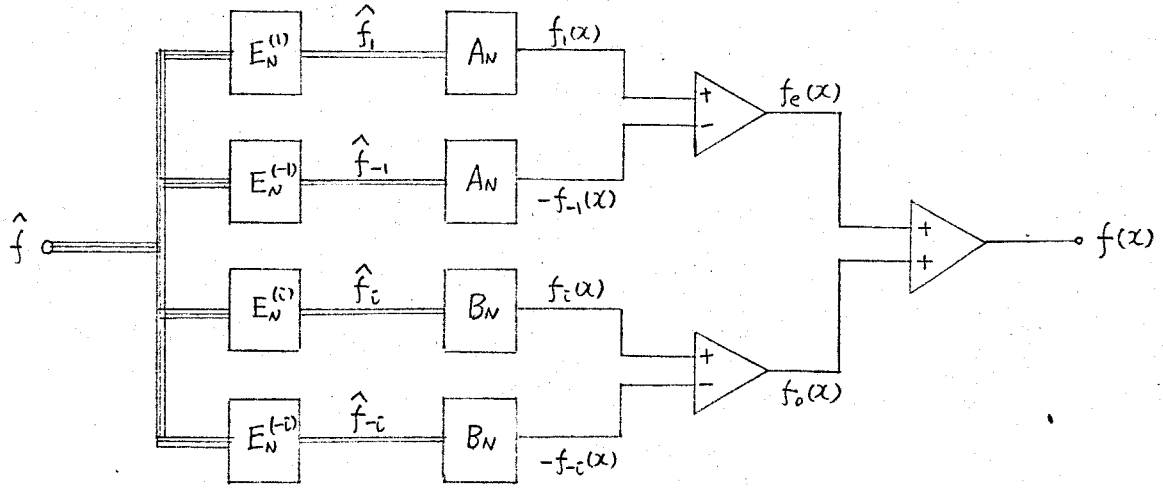


図 20.8　四分割法による波形の補間表示法

この命題 20.9 に拠る方法が、四分割法であり、ブロック図で示せば、図 20.8 のようになる。即ち、まずベクトル $\hat{f}=(f(a_n))$ を、式(20.56)に対応する四個のベクトル $\hat{f}_\lambda \equiv (f_\lambda(a_n))$ に直和分解する。* 具体的には、命題 14.12 で与えた結合特性に従って、$H_N^{(\lambda)}$ への射影作用素 $E_N^{(\lambda)}$ を構成すれば良い。ここで、$\hat{f}$ が $2N+1$ 次元ベクトルであったのに対して、$\hat{f}_{\pm 1}$ は $N+1$ 次の、$\hat{f}_{\pm i}$ は N 次のベクトルになっている。

次に、式(20.57),(20.58)に従って、$\hat{f}_\pm$, $\hat{f}_{\pm i}$ を補間し、$f_1(x)$, $-f_{-1}(x)$, $f_i(x)$, 及び $-f_{-i}(x)$ を求める。この変換を、図 20.8 では、それぞれ A_N, B_N で表してある。即ち、

$$A_N: \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\left(f(0)+2\sum_{n=1}^{N} f(a_n)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{20.59}$$

$$B_N: \quad f(x)=\frac{2}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=1}^{N} f(a_n)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \tag{20.60}$$

である。

ここが、直接法と異なるところである。関数 $\varphi_n(x)$ を全物で発生させるよりも、余弦関数 $\cos\frac{n\pi}{\ell}x$ と正弦関数 $\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ を発生させる方が、はるかに容易であることは、明らかである。

---

* これが、四分割法の所以である。

後は、式(20.56)に従って、今まで分解していたものを、逆に合成すれば良いのである。

20.2.3 二分割法

図20.8を見れば、$\hat{f}_1$ と $\hat{f}_{-1}$ が同じ A_N で補間されており、$\hat{f}_i$ と $\hat{f}_{-i}$ が同じ B_N で補間されている。それならば、これらをまとめて、

$$f_e = f_1 + f_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_{n=0}^{N} \left(f_1(a_n) - f_{-1}(a_n) \right) \epsilon_m c_n \qquad (20.61)$$

$$f_o = f_i + f_{-i} = \sqrt{\frac{2}{2N+1}} \sum_{n=1}^{N} \left(f_i(a_n) - f_{-i}(a_n) \right) \rho_n \qquad (20.62)$$

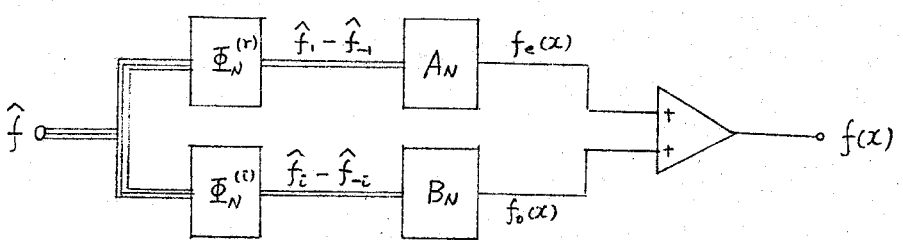
としては、どうであろうか。即ち、四個のベクトル $\hat{f}_\wedge$ に分解しなくても、直接、二個のベクトル $\hat{f}_1 - \hat{f}_{-1}$ 及び $\hat{f}_i - \hat{f}_{-i}$ が求まれば良いのである。

ところで、$\underline{\underline{T}}_N$ の実部 $\underline{\underline{T}}_N^{(r)}$ と虚部 $\underline{\underline{T}}_N^{(i)}$ は、式(14.96),(14.100)のように表される。これはまさしく、上の二分割を行なう作用素が、$\underline{\underline{T}}_N^{(r)}$ と $\underline{\underline{T}}_N^{(i)}$ であることを意味している。そこで、結合特性

$$\hat{\underline{\underline{T}}}_N^{(r)}(m,n) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \cos\frac{2\pi mn}{2N+1}, \quad \hat{\underline{\underline{T}}}_N^{(i)}(m,n) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sin\frac{2\pi mn}{2N+1} \qquad (20.63)$$

に従って回路を構成すれば、上記目的を達成することができる。

このような方法を二分割法と名付け、そのブロック図を、図20.9に示す。図20.9の A_N, B_N は、図20.8の場合と同じく、式(20.59),(20.60)に従



端子数：═══ (2N+1)，═══ (N+1 又は N)，——— (1, 時間掃引)

図20.9 二分割法による波形の補間表示法

って補間を行なう回路である。

図20.8と図20.9を比較すれば分かるように、二分割法では、四分割法に比して、演算ブロックの数が半分に減少し、しかも、補間を行なう方法、即ち、A_N, B_Nは四分割法と全く同じである。更に、式(14.55), (14.56)と式(20.63)から分かるように、四分割法の$E_N^{(\lambda)}$($\lambda=\pm1, \pm i$)に比して、二分割法の$\overline{E}_N^{(r)}$, $\overline{E}_N^{(i)}$の結合特性は、より簡単になっているのである。従って、上記三方式の中では、最後の二分割法が、最も優れているということができる。

20.2.4 補間表示装置の試作*

二分割法と四分割法による補間表示装置を、$N=2$の場合について、試作した。装置の全景を、図20.10に示す。本装置は、スライド抵抗を使って、$f\in H_2$の各標本値を$\pm6V$の間に電圧でセットすることにより、fを補間表示するばかりでなく、二個のロータリスイッチの組合せにより、fの偶関数成分f_e, 奇関数成分f_o等、表20.1に示す9種類の関数を、ブラウン管面上に表示することができるようになっている。

装置全体のブロック図を図20.11に、PC板コネクター配線図を図20.12に、各PC板の回路図を図20.13～図20.19に、それぞれ示す。

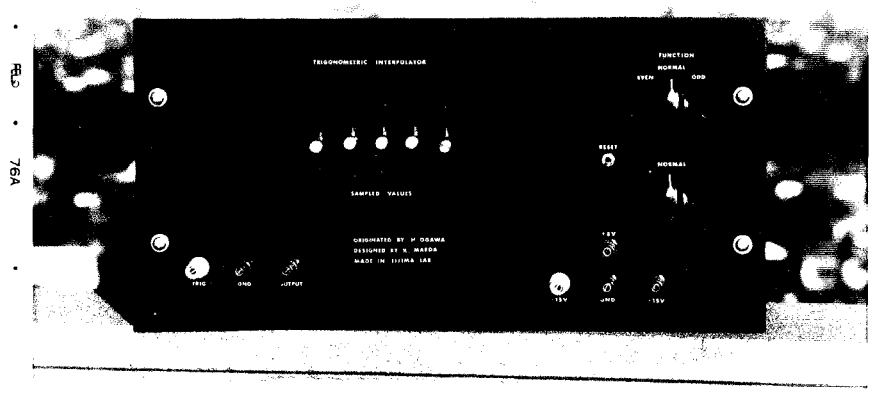
装置化において、最も問題になる点は、位相のそろった正弦波と余弦波を多数(一般には$2N$個)発生させることである。本装置では、まず位相のそろった矩形パルスを発生させ、それを積分して三角波になおし、更にダイオードと

表20.1 試作された補間表示装置によって表示できる関数**

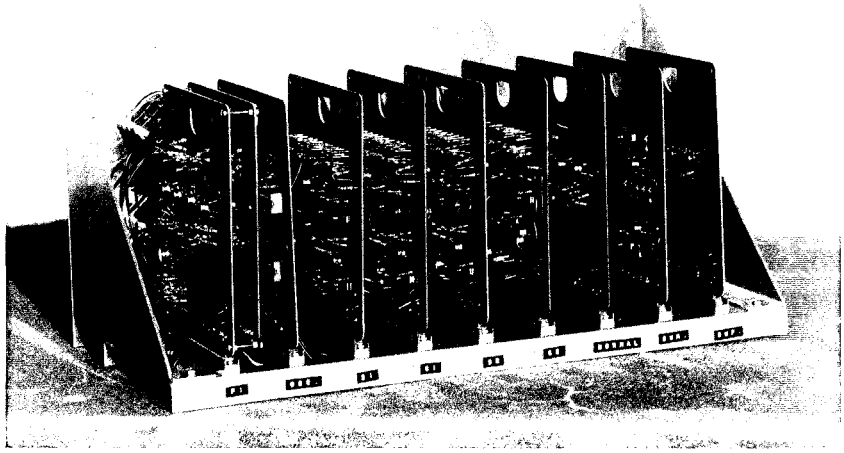
RSW2 \ RSW1	even	normal	odd
+	f_1	f_1+f_i	f_i
normal	f_e	f	f_o
−	f_-	$f_{-1}+f_{-i}$	f_{-i}

* 二分割法による装置化は、大学院生前田賢一君による。その後、四分割法による部分が、大学院生鈴木一栄君によって、付加された。

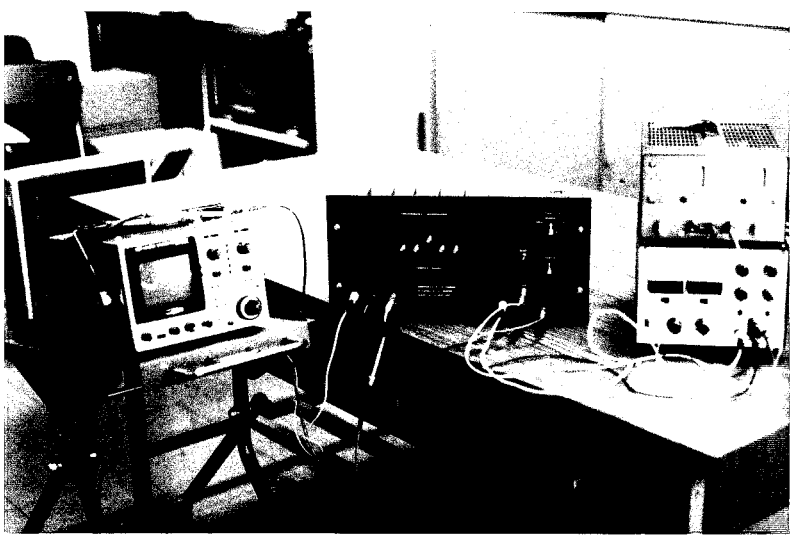
** f_e, f_o, f_λ ($\lambda=\pm1, \pm i$)は、$f\in H_2$の図14.2に示した部分空間への射影成分である。



(a) 前面



(b) 裏面



(c) 全景

図 20.10 補間表示装置

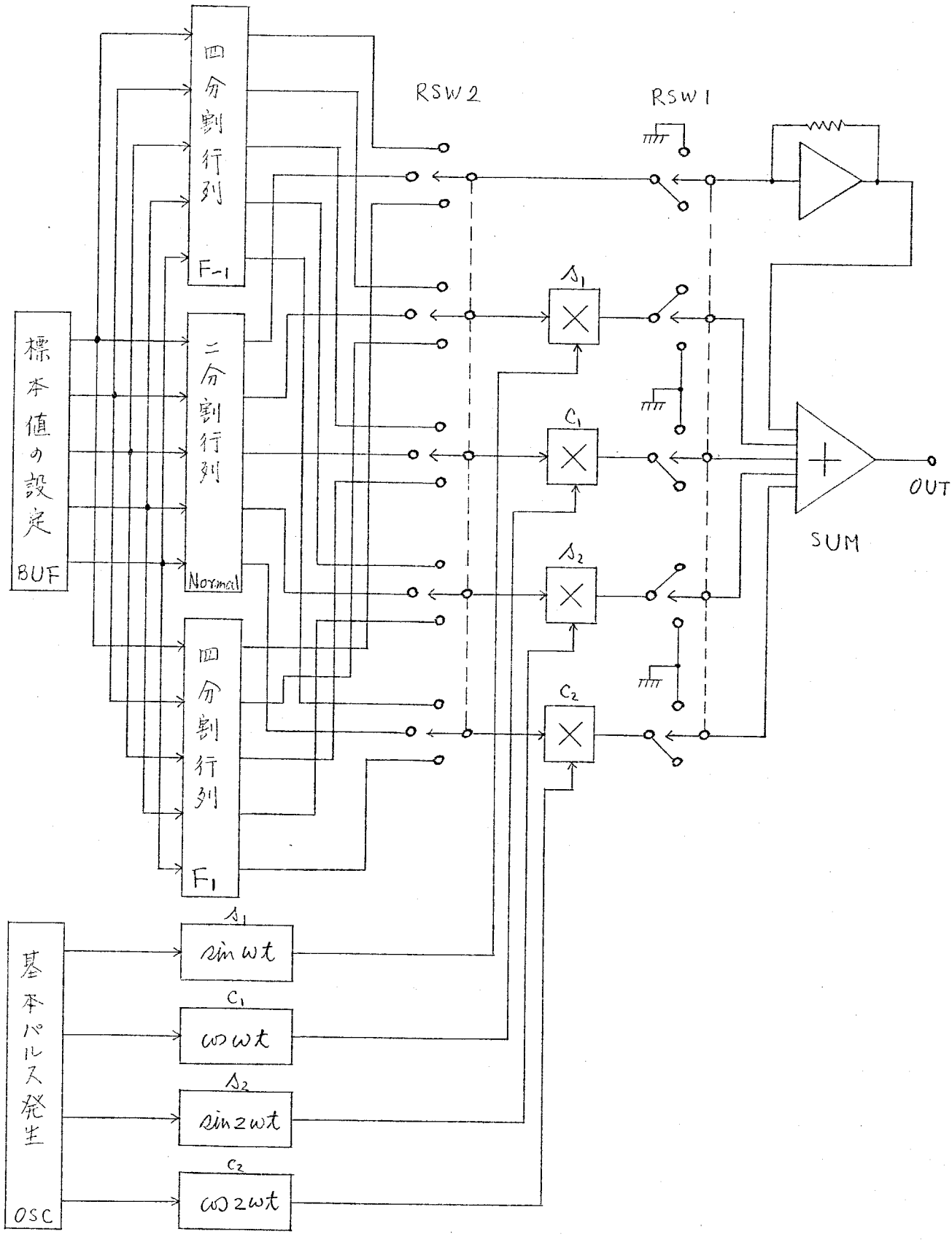


図 20.11　補間表示装置ブロック図

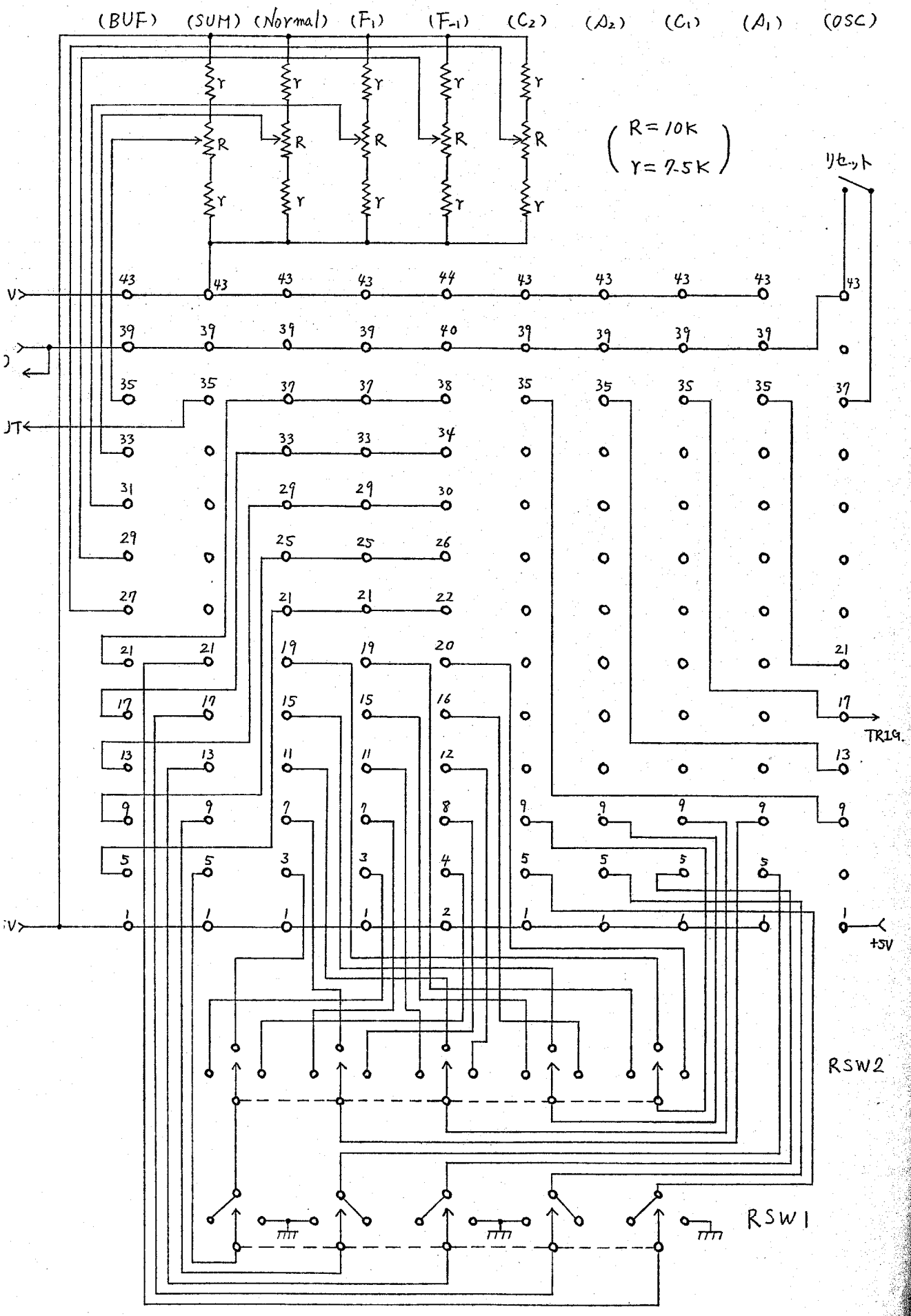


図 20.12　PC 板コネクター配線図

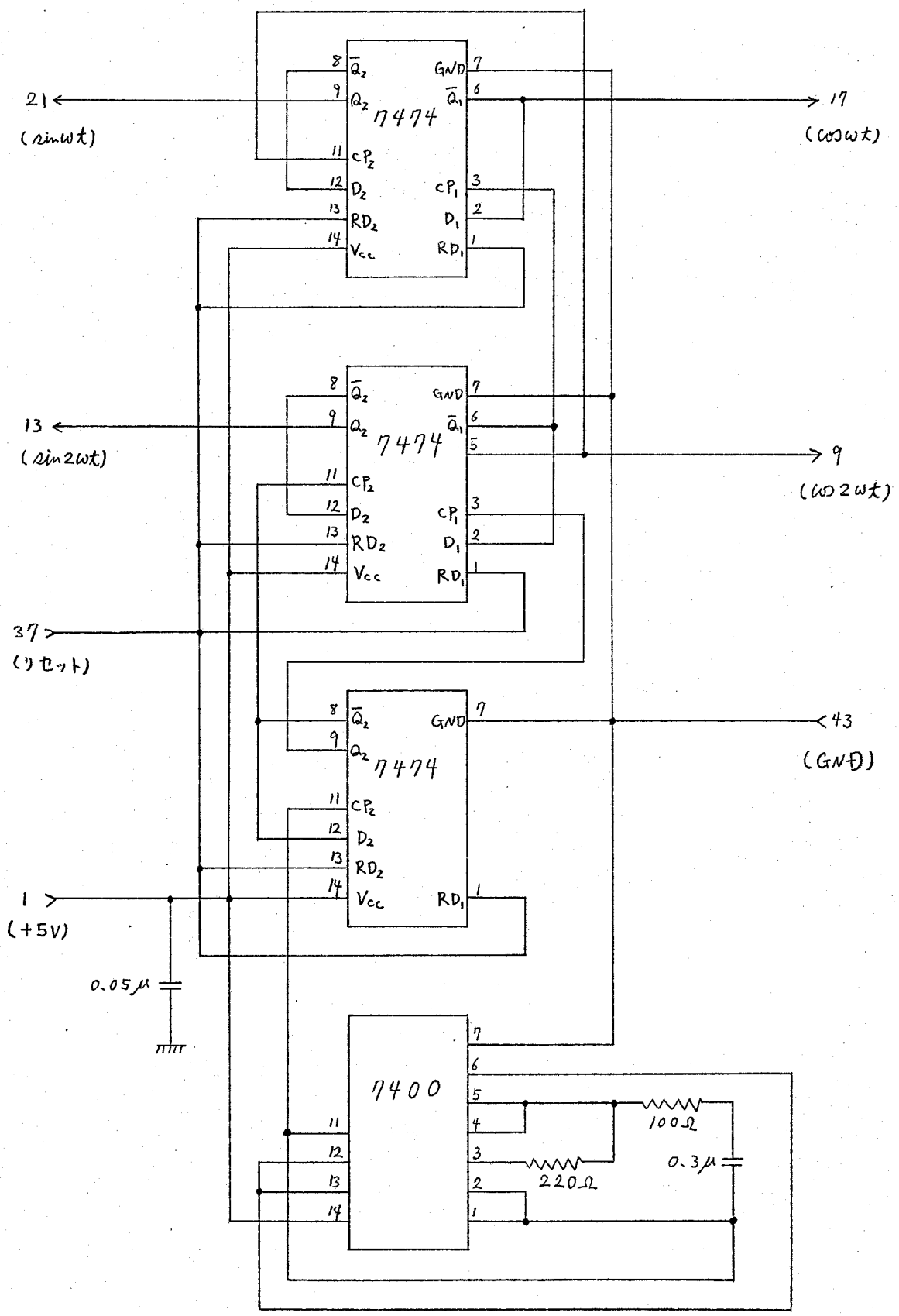


図 20.13　PC板（OSC）の回路図

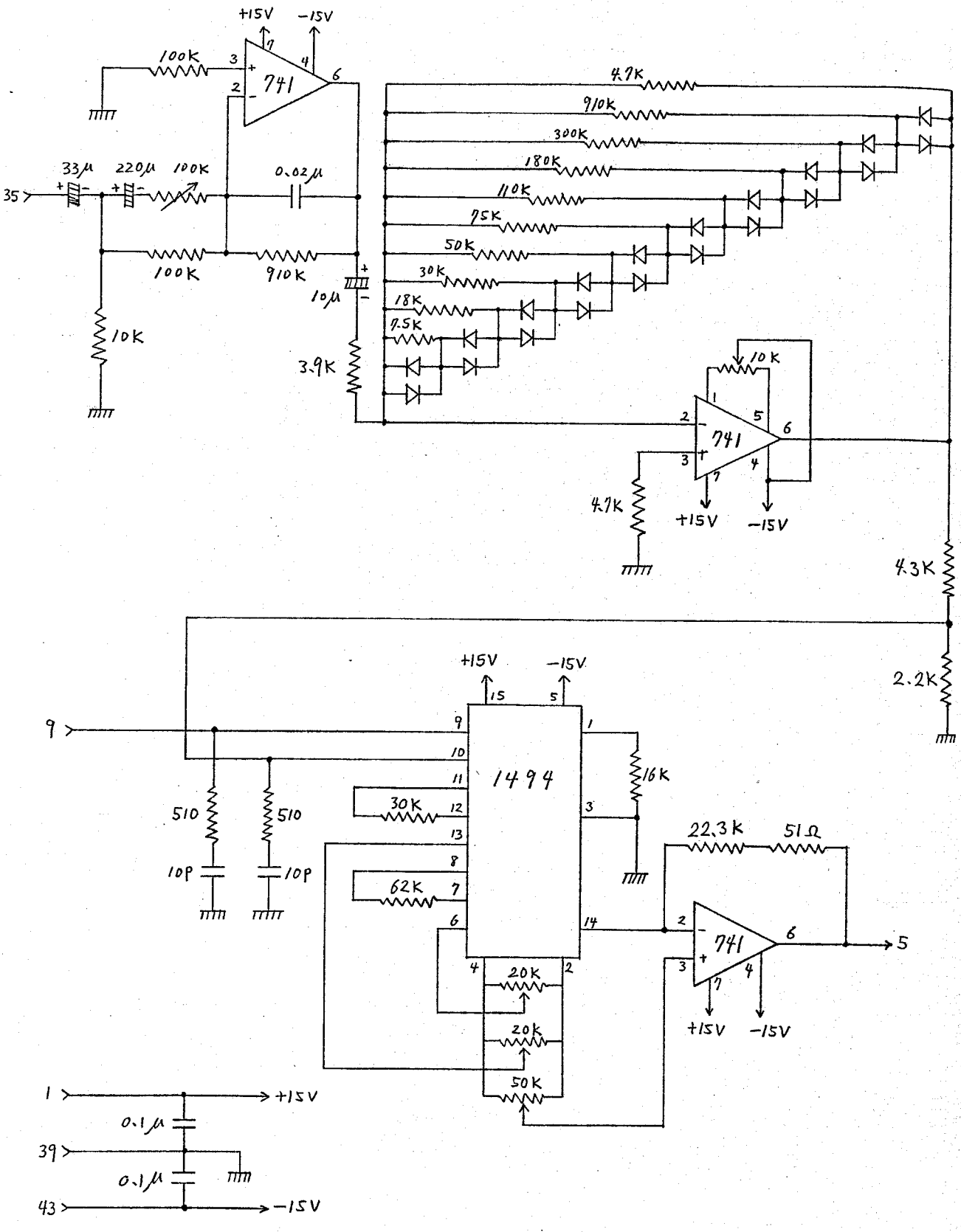
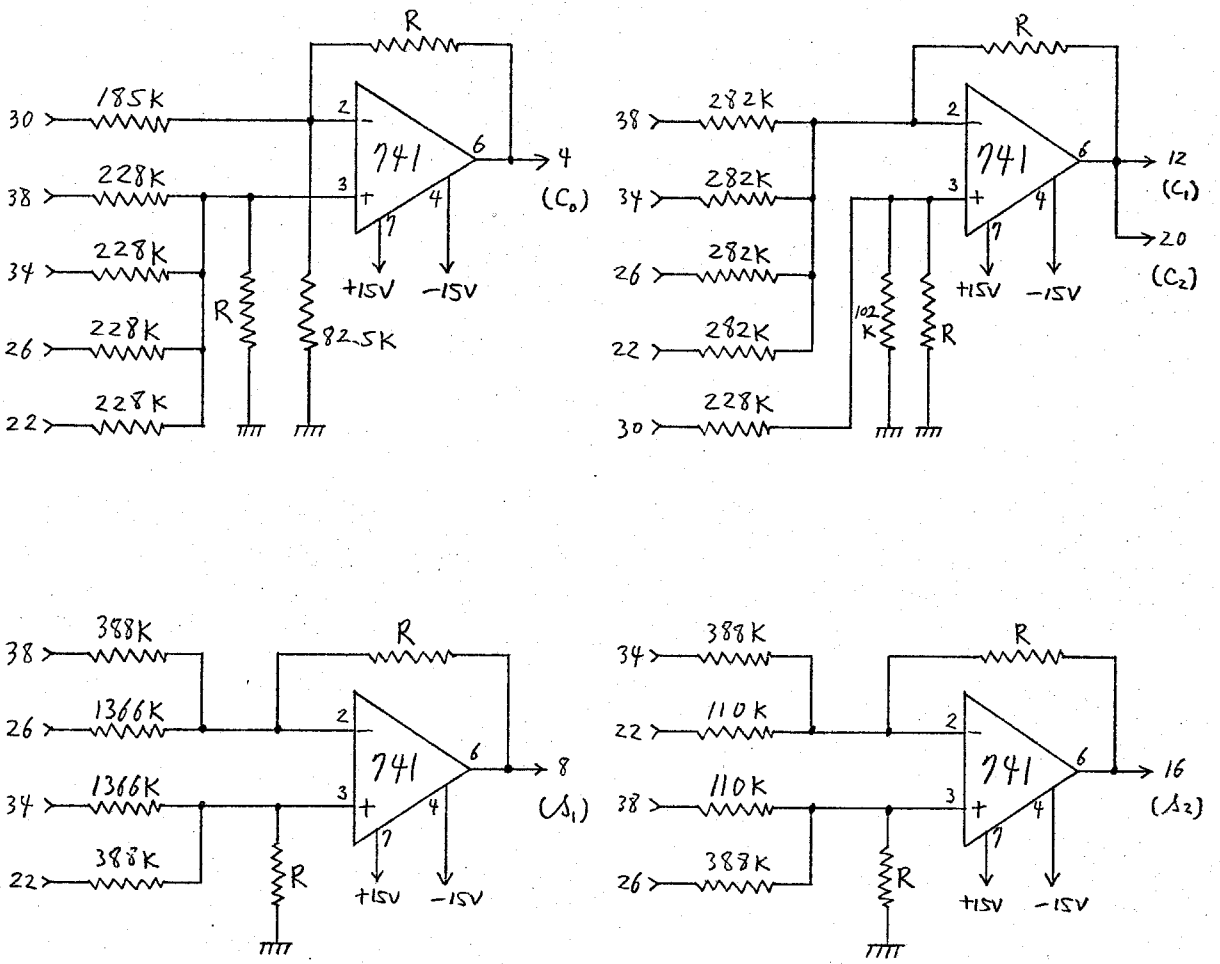
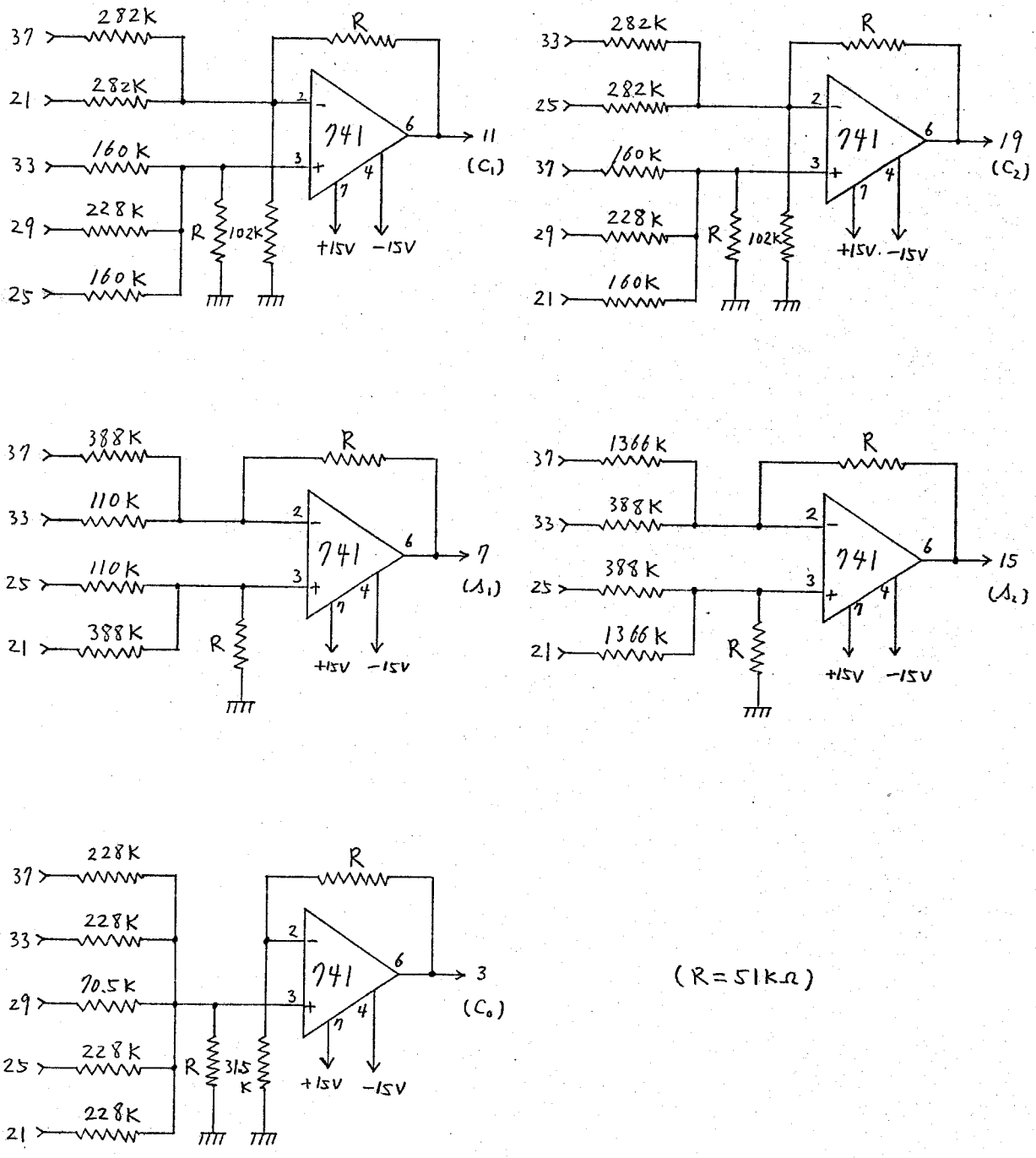


図20.14　PC板 (A_1), (C_1), (A_2), (C_2) の回路図



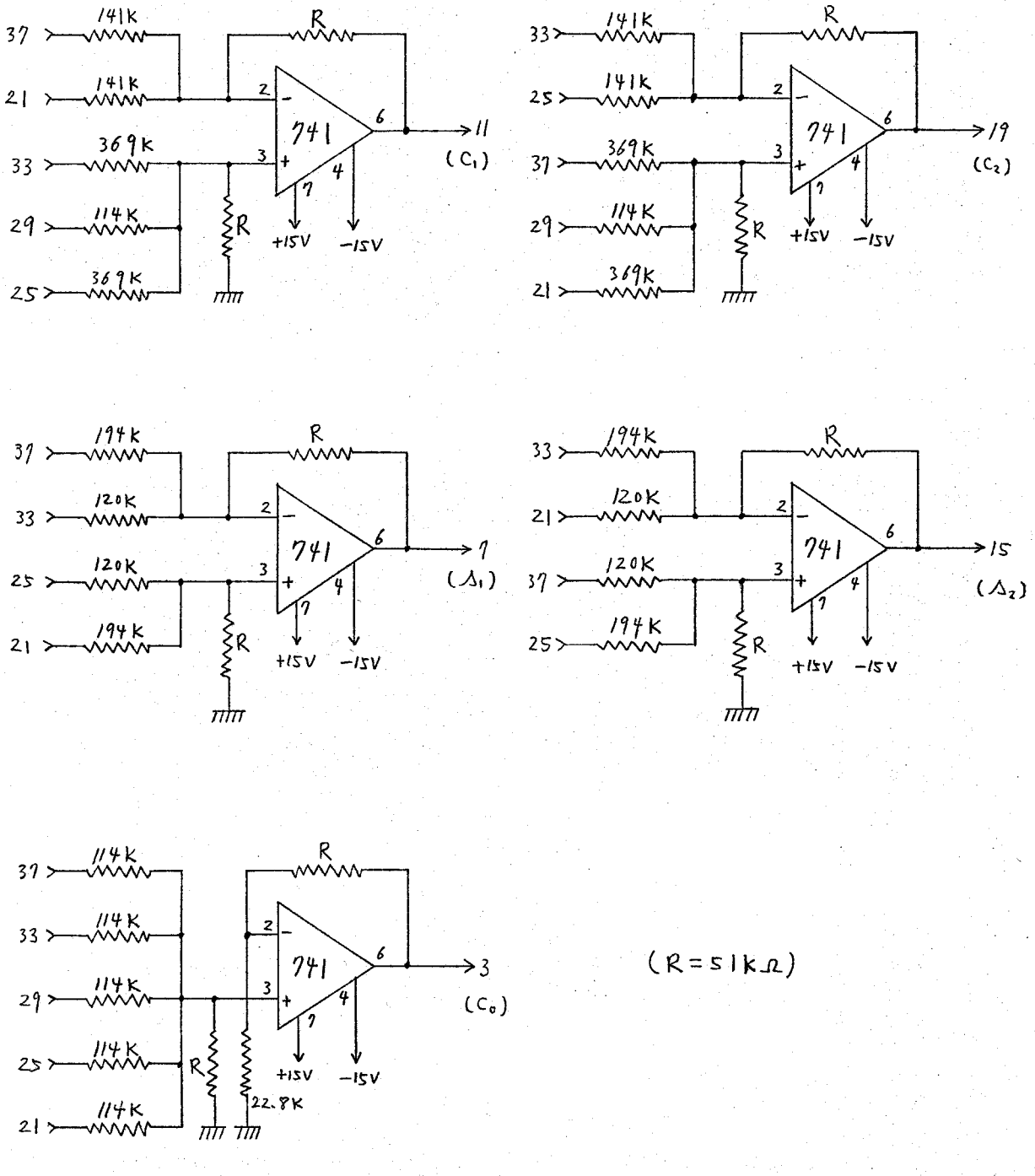
(R = 51 KΩ)

図 20.15　PC 板 (F-1) の回路図



(R=51kΩ)

図20.16　PC板(F_1)の回路図



(R=51kΩ)

図20.17　PC板(Normal)の回路図

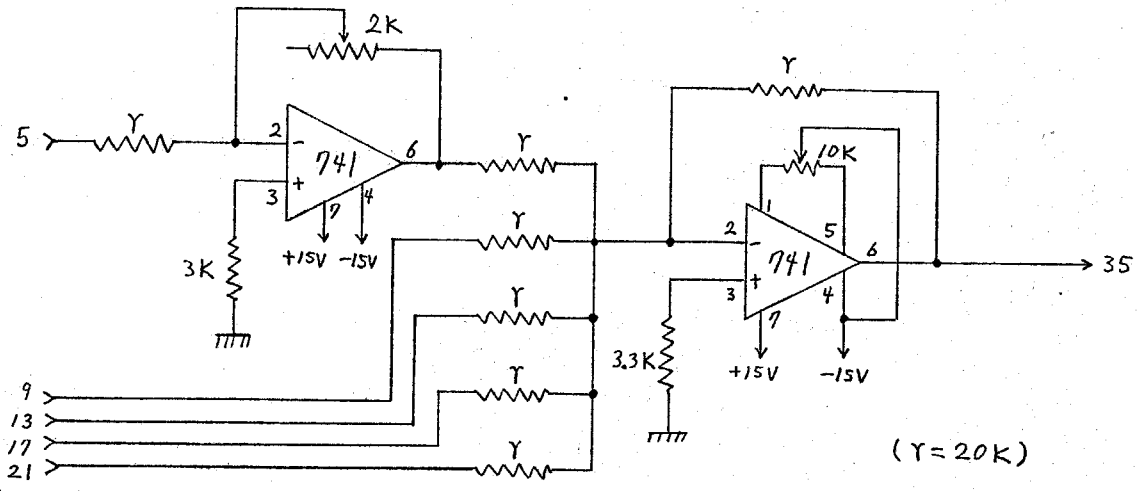


図 20.18　PC 板（SUM）の 回路図

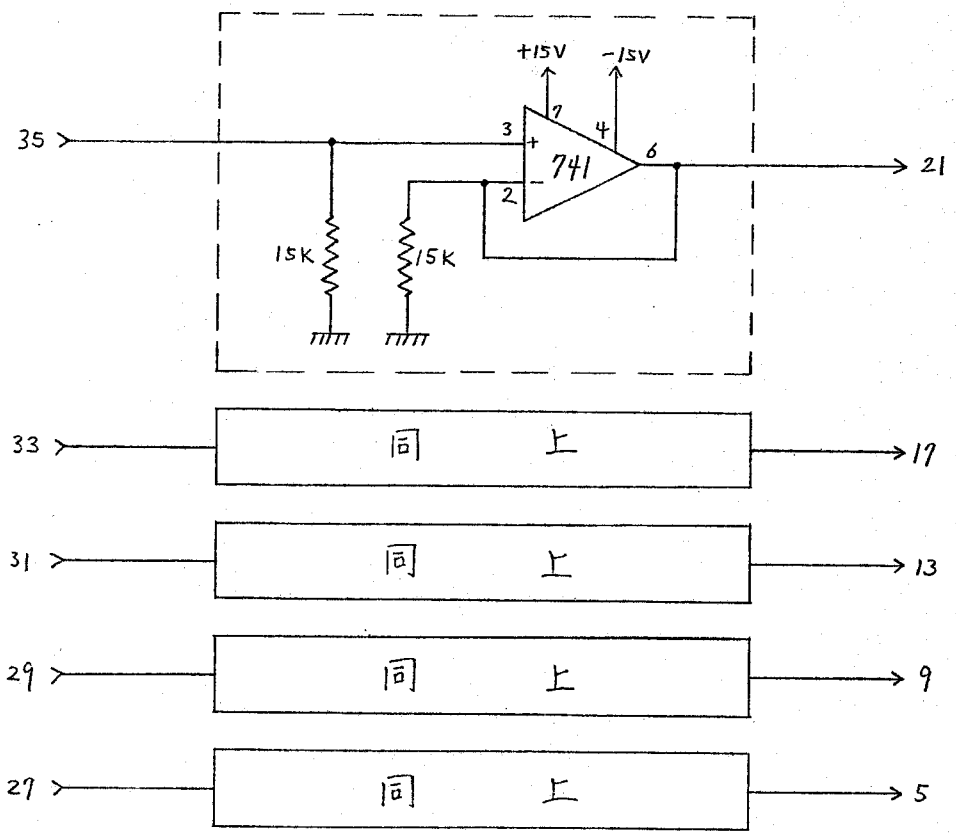
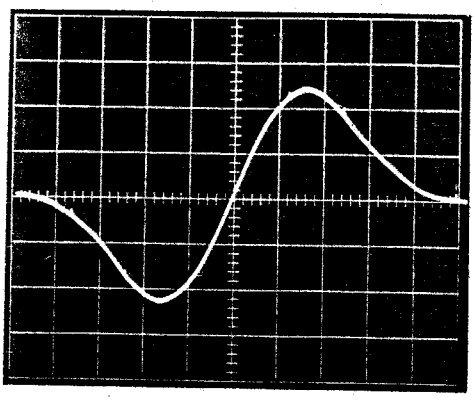
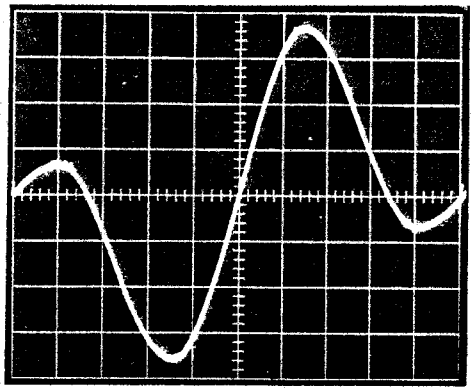


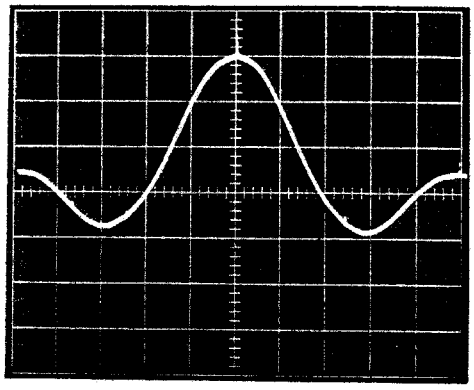
図 20.19　PC板（BUF）の回路図



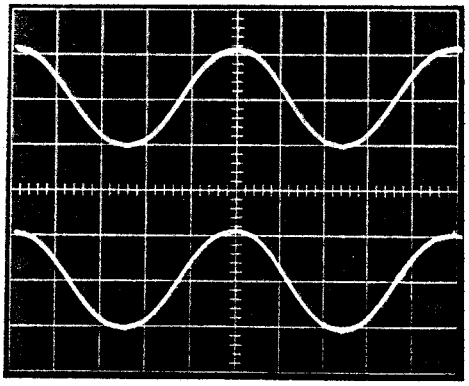
(a) $P_1(I_N)$ $(V=1)$



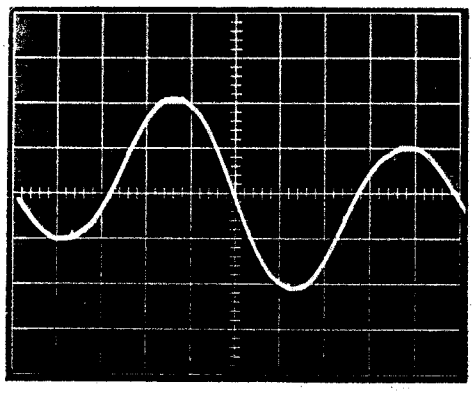
(b) $P_2(C_N)$ $(V=1)$



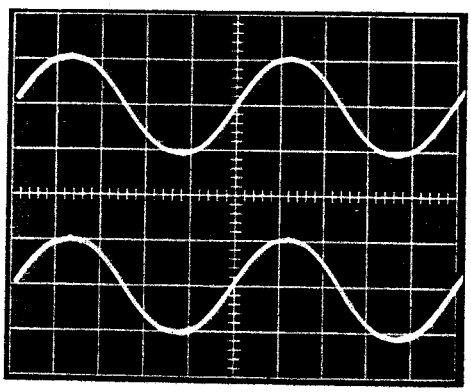
(c) Ψ_0 $(V=\sqrt{5}/3)$



(d) C_2 $(V=\sqrt{2})$



(e) $P_1(D_N)$ $(V=3)$



(f) Δ_2 $(V=\sqrt{2})$

図20.20 補間表示波形の例(I) (横目盛 = $\frac{1}{2}a_1$/div, 縦目盛 = V/div)*

* $N=2$, $l=\pi$. また、(d), (f) の上側は、市販の発振器 (NF回路設計ブロック, SY107A) からの波形であり、下側が本装置によって補間表示した波形である.

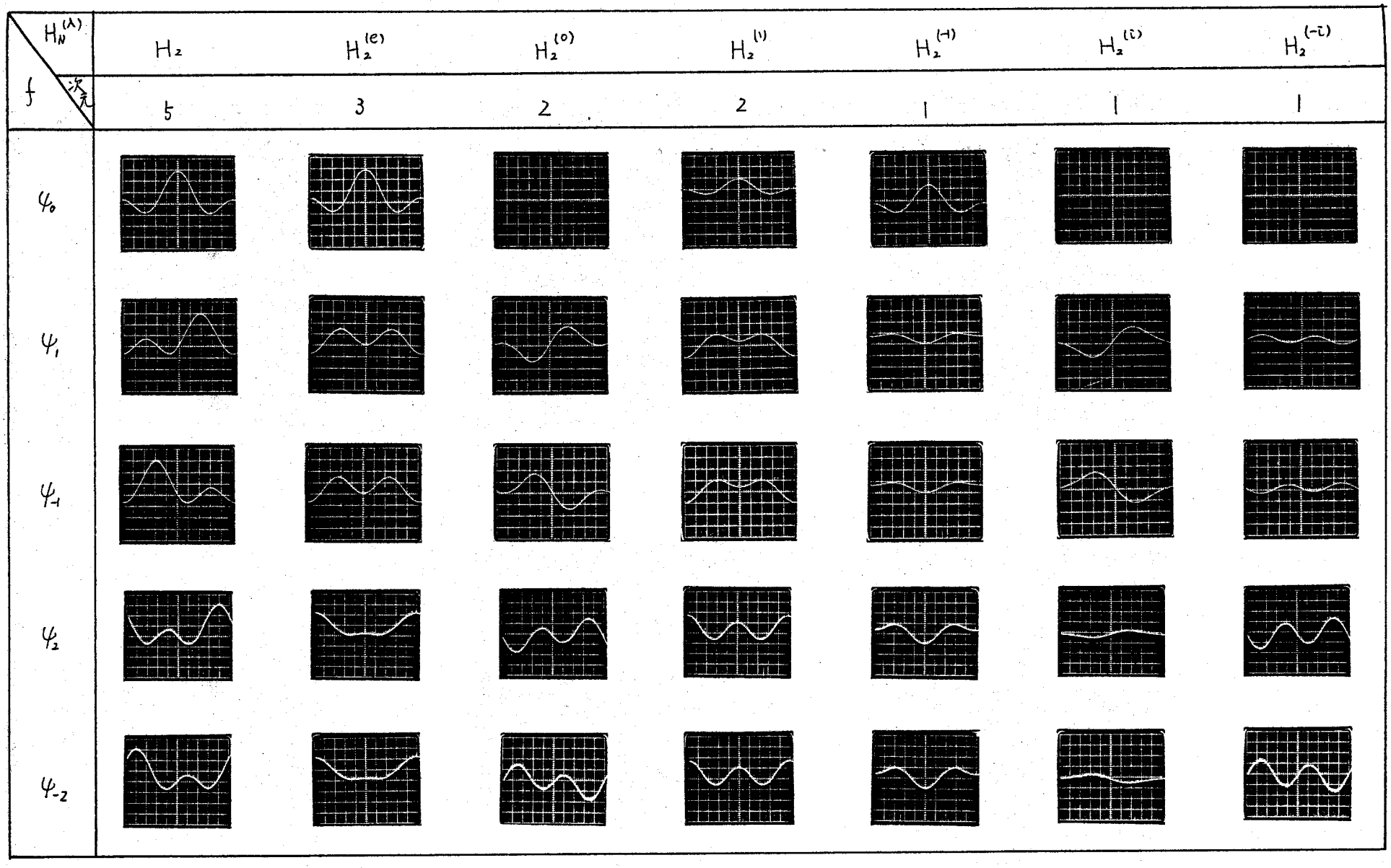


図20.21　補間表示波形の例（II）（横目盛 $=\frac{1}{2}a_1/div$，縦目盛 $=\frac{\sqrt{5}}{3}/div$）*

使って正弦波及び余弦波に変換する方法を採用した。*

本装置によって補間表示された波形の例を、図20.20, 図20.21 に示す。図20.21 は、図14.5 に対応するものである。また、この図から、式(14.58)或いは表14.1 の第一行目が確かに成立していることが分かる。

これらの図を見れば、本装置が波形の補間表示装置として、充分実用に耐えるものであることが分かる。

20.3 ユニタリ作用素の逆作用素の構成法

20.3.1 $B^{(1)}(H_N)$ の元の場合

並進作用素 $T_N(a)$ を、図19.1 の方法で実現する問題を考える。この回路構成をそのまま使うことができるのは、第19節でも述べたように、$\gamma_N(a;n)>0$ となるような a に対してだけである。そして、ある $a_1>0$ が存在し、$0<a<a_1$ なる a に対して確かに $\gamma_N(a;n)>0$ が成立していることも分かっている。

ところで、式(7.9), (19.4) より、充分小さい a に対して、$T_N(a)$ が、

$$T_N(a) \fallingdotseq E_N - aD_N \tag{20.64}$$

と表されることから分かるように、並進の方向が逆になれば、$\gamma_N(a;n)$ の符号も逆になってしまう。つまり、図19.1 の回路構成のままでは、一方向にしか並進を行なうことができないのである。

そこで、図19.1 の方法で構成された $T_N(a)$ $(0\leqq a\leqq a_1)$ を使って、$T_N(a)^{-1}$ $(0<a<a_1)$ を簡単に構成できないかという問題が生じる。

20.3では、これを少し一般化して、次の問題を考えることにする。$B^{(1)}(H_N)$ の実ユニタリ作用素 A_N に対応する空間回路、或いはソフトフェアが、既に成々の手元にあるものとする。この A_N を使って、その逆作用素 A_N^{-1} を簡単に構成する方法を与える。

A_N はユニタリであるから、$A_N^{-1}=A_N^*$ となる。更に、命題10.23 と

---

* 関数発生器 IC 8038 を使えば、より簡単に、しかもより安定した回路を構成することができる。[10]

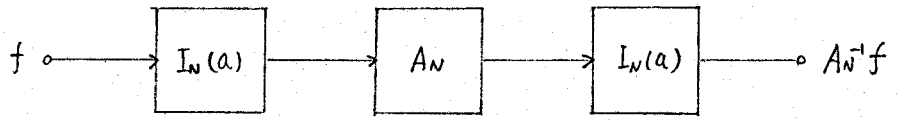


図20.22 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の実ユニタリ作用素 A_N を用いた A_N^{-1} の構成法

$\overline{A_N} = A_N$ を考慮すれば、任意の $a \in [-\ell, \ell]$ に対して

$$A_N^{-1} = I_N(a) A_N I_N(a) \tag{20.65}$$

が成立することが分かる。従って、A_N を用いて A_N^{-1} を構成する為には、図20.22のようにすればよい。即ち、任意に固定した $a \in [-\ell, \ell]$ に対する反転作用素 $I_N(a)$ を、A_N の両側に接続すれば、それで A_N^{-1} が構成できるのである。

特に $a = \frac{1}{2} a_n$ の場合には、A_N の入出力端子の番号を式(10.11)に従って変更するだけで、A_N^{-1} を構成することができる。更に図10.1(a)からも分かるように、ソフトウェアでこの方法を使用する場合には、端子番号の変更規則が最も簡単な $a = 0$ を採用すれば良い。また、金物で実現する場合には、$a = 0$ よりも $a = a_N$ 又は $a = a_{-N}$ を採用する方が、配線が簡単になるという利点がある。

20.3.2 $\mathcal{B}(H_N)$ の元への拡張

命題10.23が主張しているように、全ての $a \in [-\ell, \ell]$ に対して式(20.65)が成立するのは、$A_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ のときだけである。しかし、ある固定した a の値に対して式(20.65)が成立するような作用素は、空間 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元以外にも存在する。そして当然のことながら、そのような作用素に対して、20.3.1で述べた方法はそのまま適用できるのである。

例えば、図16.3(a)から分かるように、$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の元に対しては、$\mathcal{R} = *$ であるから、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ によって張られる部分空間 $\mathcal{L}(\mathcal{B}^{(1)}(H_N), \mathcal{B}^{(4)}(H_N))$ の実ユニタリ作用素 A_N に対しては、

$$A_N^{-1} = I_N(0) A_N I_N(0) \tag{20.66}$$

によって A_N^{-1} を構成することができるのである.

これまでは, a-対称演算 $\mathcal{A}_a$ を使って逆作用素を構成してきた。この方法は、次のように一般化することができる. 実等方ユニタリ作用素 $U_N \in \mathcal{B}(H_N)$ によって生成される共変対合を Ω とし、Ω^* の固有値 ± 1 に対応する固有空間を $G_{\pm 1}$ とする*:

$$G_\pm \equiv \{ A_N \mid \Omega A_N^* = \pm A_N \} \tag{20.67}$$

A_N が G_1 の実ユニタリ作用素ならば、$\Omega A_N = A_N^* = A_N^{-1}$ であるから

$$A_N^{-1} = U_N A_N U_N \tag{20.68}$$

となる. 従って、図20.23 に示すように、A_N の両側に U_N を接続すれば、A_N^{-1} を構成することができるのである.

また A_N が G_{-1} の実ユニタリ作用素ならば、$\Omega A_N = -A_N^{-1}$ であるから、図20.23 の最後に符号反転器を接続すれば、A_N^{-1} を構成することができる。

より一般に、$\mathcal{B}(H_N)$ の実ユニタリ作用素に対して、A_N^{-1} を構成する為には、次のようにすれば良い。まず 命題 6.16 に従って A_N を

$$A_N = A_N^{(1)} + A_N^{(-1)} \quad ; A_N^{(\lambda)} \in G_\lambda \ (\lambda = \pm 1) \tag{20.69}$$

と分解し、$A_N^{(1)}$ 及び $A_N^{(-1)}$ を構成しておく. そして、A_N を実現したい場合には、これらを図20.24 のように構成し、A_N^{-1} を実現したい場合には、図20.25 のように構成すれば良いのである.

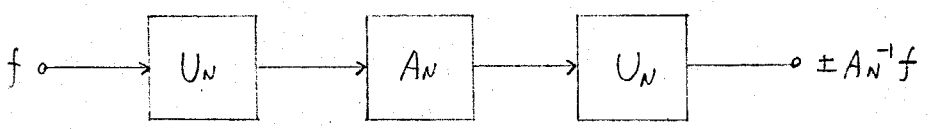


図20.23 $G_{\pm 1}$ の実ユニタリ作用素 A_N を用いた A_N^{-1} の構成法

---

* $G_{\pm 1}$ の性質については、6.3 及び 6.4 で詳しく論じてある.

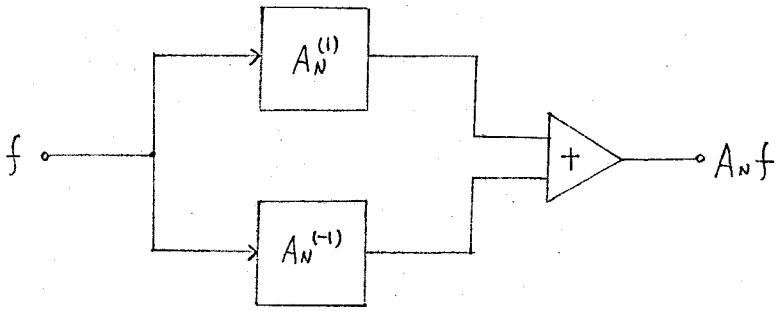


図20、24　$A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ の $G_{\pm 1}$ への分解による構成

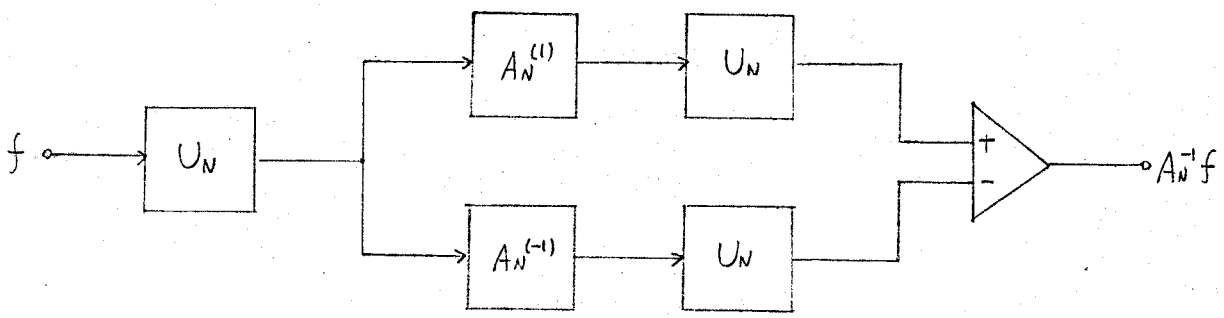


図20、25　$\mathcal{B}(H_N)$ の実ユニタリ作用素 A_N を用いた A_N^{-1} の構成法

20、4　相関関数を不変に保つ作用素の特徴づけ

並進作用素 $T_N(a)$ が自己相関関数を不変に保つこと、即ち、任意の $a \in [-l, l]$ と任意の $f \in H_N$ に対し、式(12、27)に示したように、

$$(T_N(a)f) \otimes (T_N(a)f) = f \otimes f \qquad (20、70)$$

が成立することは、良く知られている。これは、自己相関関数をとることにより、f の位相(phase)情報が失われることを意味している。

では、自己相関関数をとるということによって失われる情報が、位相情報だけかといえば、決してそうではない。20、4では、これまでに展開してきた空間回路網理論を用いることにより、自己及び相互相関関数を不変に保つ作用素の特徴づけを行なう。まず、20、4、1 では、相関関数を不変に保つ $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元の特徴づけを行なう。次いで 20、4、2 で相関関数を不変に保つ $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の

元の特徴づけを行なう。

20.4.1　相関関数を不変に保つ $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元

まず、自己相関関数を不変に保つ $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元の特徴づけを行なう。

〔補題 20.1〕　$f \in H_N$, $B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ とし、$A_N \equiv \rho_2^{-1}(f)$ とする。次の二式は、互いに同値である。

$$(B_N f) \otimes (B_N f) = f \otimes f \tag{20.71}$$

$$(B_N A_N)^2 = A_N^2 \tag{20.72}$$

（証明）　式(12.5), (11.68) より式(20.71)は、

$$B_N A_N B_N f = A_N f \tag{20.73}$$

と同値である。式(11.30)より $B_N A_N B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ であるから、式(11.70)より、式(20.73)は式(20.72)と同値である。　(Q.E.D)

〔命題 20.10〕　$B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ に対して $g \equiv \rho_1(B_N)$ とおく。次の各条件は、互いに同値である。

(i)　$(B_N f) \otimes (B_N f) = f \otimes f$　for all $f \in H_N$　(20.74)

(ii)　$B_N^{\mp} = B_N^{-1}$　(20.75)

(iii)　$I_N(0)\, B_N\, I_N(0) = B_N^{-1}$　(20.76)

(iv)　$g \otimes g = \sqrt{2N+1}\, \psi_0$　(20.77)

(v)　$\tilde{B}_N(-n)\, \tilde{B}_N(n) = 1$　for all n　(20.78)

(vi)　$(\hat{B}_N)^T \hat{B}_N = \hat{E}_N$　(20.79)

ここで (v) の $\cdot^T$ は、行列 $\cdot$ の転置を表す.

(証明) (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) : 式(12.37)より、任意の $A_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して

$$(B_N A_N)^2 = (B_N B_N^{\overline{*}}) A_N^2 \qquad (20.80)$$

となる。よって、補題20.1 より (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) が成立する.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) : 式(7.85) より明らかである.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) : $g = \beta_2(B_N I_N(0))$ であるから、式(12.5)より

$$g \otimes g = B_N I_N(0) B_N I_N(0) \sqrt{2N+1}\, \psi_0. \qquad (20.81)$$

となり、(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) が成立する.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (v) : 命題7.8 より明らかである.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (vi) : 式(3.47), (4.37) より明らかである. (Q.E.D)

(i) は、$B_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ が自己相関関数を不変に保つということと、最も直接的に表現したものである。(ii) は、その為の必要十分条件が、才4節で導入した複素共役演算を使って、簡潔に表現できることを表している。(iv) は、B_N のインパルス応答の自己相関関数が、H_N のインパルスになることを意味しており、(vi) は B_N の結合特性が(複素)直交行列になることを意味している。(vi) を、B_N の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における結合特性 ($\hat{B_N}(m)$) を使って表せば、

$$\sum_{m=-N}^{N} \hat{B_N}(m) \hat{B_N}(m-n) = \delta_{n,0} \quad \text{for all } n \qquad (20.82)$$

となる。

命題20.10 の (ii) より、次の系が成立する.

〔系 20.2〕 自己相関関数を不変に保つ $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元の全体を G_1 とする. G_1 は、作用素の通常の積に関して、可換群をなし、演算 $-, *, \star_a$ に関して閉じている.

〔補題 20.2〕 $A_N \in \mathcal{B}(H_N)$ に対して、次の三条件のうち任意の二個が成立すれば、残りの一個も成立する。

(i) $A_N^{\mp} = A_N^{-1}$　　(ii) $\bar{A}_N = A_N$　　(iii) $A_N^{*} = A_N^{-1}$

補題 20.2 と命題 20.10 の (ii) より、次の系が成立する。

〔系 20.3〕 系 20.2 と同じ記号を用いる。G_1 の実作用素はユニタリであり、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の実ユニタリ作用素は G_1 に属する。

命題 20.10 の (iii) と補題 20.1 より、G_1 の任意の元 A_N と任意の $a \in [-l, l]$ に対して、式 (20.65) が成立することが分かる。つまり、20.3.1 で論じた逆作用素の構成法が適用できる $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元全体が、G_1 なのである。そして、この G_1 と 20.3.1 で論じた実ユニタリ作用素の関係を与えるものが、系 20.3 なのである。

$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の実ユニタリ作用素の一般形を求める為に、一つの作用素族を導入する。φ_n と φ_{-n} によって張られる高々二次元の部分空間を $H^{(n)}$ とすれば、H_N は

$$H_N = H^{(0)} \oplus H^{(1)} \oplus \cdots \oplus H^{(N)} \qquad (20.83)$$

と直和分解される。即ち、任意の $f \in H_N$ は

$$f = \sum_{n=0}^{N} f_n \quad ; \quad f_n \in H^{(n)} \qquad (20.84)$$

と、一意に分解される。このとき、各 f_n を $\alpha_n \in [-l, l]$ だけ並進する作用素を $T_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^{N})$ と表し、一般化並進作用素と名付ける。並進を行なう量 α_n が、空間周波数に無関係に一定 ($\alpha_n = a$) の場合が、従来の並進作用素 $T_N(a)$ である。7.8 で論じたように、$H^{(n)}$ への射影作用素は、余弦作用素 $C^{(n)}$ を用いて $\sqrt{\epsilon_n} C^{(n)}$ と表されるから、一般化並進作用素は、従来の並進作用素を使って

$$T_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^N) = C^{(0)} + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{N} T_N(\alpha_n) C^{(n)} \qquad (20.85)$$

と表すことができる。この式より、$T_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^N)$ が $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の実ユニタリ作用素になることが分かる。

系 20.3 と式(20.78)より、次の命題が成立する。

〔命題 20.11〕 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の実ユニタリ作用素 A_N は、実定数の組 $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$ を使って、

$$A_N = T_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^N) \qquad (20.86)$$

または

$$A_N = T_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^N) - 2C^{(0)} \qquad (20.87)$$

と表される。

〔命題 20.12〕 $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の元が相互相関関数を不変に保つ為の必要十分条件は、それが自己相関関数を不変に保つことである。

(証明) 必要性は明らかであるから、十分性だけを示す。$X_N \in \mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ が自己相関関数を不変に保つとすれば、命題20.10の(ii)より $X_N^{\mp} = X_N^{-1}$ となるから、任意の $f, g \in H_N$ に対して、$A_N \equiv \rho_2^{-1}(f)$, $B_N \equiv \rho_2^{-1}(g)$ とおけば、式(12.37)より

$$(X_N A_N)(X_N B_N) = A_N(X_N^{\mp} X_N) B_N = A_N B_N \qquad (20.88)$$

となる。両辺の ρ_1 をとれば、式(12.7)より

$$(X_N g) \otimes (X_N f) = g \otimes f \qquad (20.89)$$

が成立する。

式(20.89)は、式(12.5)より

$$(X_N A_N)(X_N g) = A_N g \tag{20.90}$$

と表現しなおすことができる。式(11.75)を考慮すれば、式(20.90)が次のことを意味していることが分かる。A_N の結合特性($f(a_n)/(2N+1)$)と入力信号 g に同じ X_N なる変動が生じても、その出力に影響が現われないのである。

20.4.2 相関関数を不変に保つ $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元

〔命題 20.13〕 $B_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ が自己相関関数を不変に保つ為の必要十分条件は、$B_N = B_N^{-1}$ が成立することである。

証明は、命題 20.10 の場合と同様に行なうことができる。命題 11.5 を考慮すれば、命題 20.13 の条件が、命題 20.10 の (ii) と同じであることが分かる。従って、$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の元に対しても、系 20.3 がそのまま成立する。

〔系 20.4〕 自己相関関数を不変に保つ $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1,2)$ の元の全体を G_n とする。G_n は演算 $-, *, \overset{*}{a}$ に関して閉じており、次の関係が成立する。

$$\begin{cases} G_2 I_N(a) = G_1 \\ I_N(a) G_2 = G_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} G_1 I_N(a) = G_2 \\ I_N(a) G_1 = G_1 \end{cases} \tag{20.91}$$

$$G_m \cdot G_n = \begin{cases} G_1 & (m=n) \\ G_2 & (m \neq n) \end{cases} \tag{20.92}$$

$I_N(a)$ は実作用素であるから、系 20.4, 系 20.3 と命題 20.11 より、次の命題が成立する。

〔命題 20.14〕 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ の real unitary 作用素 A_N は、実定数の組 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{N}$ を使って

$$A_N = I_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^N) \tag{20.93}$$

または

$$A_N = I_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^N) - 2C^{(0)} \tag{20.94}$$

と表される。ここで $I_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^N)$ は、

$$I_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^N) \equiv C^{(0)} + \sqrt{2}\sum_{n=1}^N I_N(\alpha_n)C^{(n)} \tag{20.95}$$

によって定義される一般化反転作用素である。

式(20.95), (20.86), (12.37), (10.16)より、一般化並進作用素と一般化反転作用素の間には、式(10.16)と同じ

$$I_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^N) = T_N(\{2\alpha_n\}_{n=1}^N) I_N(0) \tag{20.96}$$

なる関係が成立している。

〔補題 20.3〕 $X_N \in \mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に対して、

$$(X_N g)\otimes(X_N f) = f\otimes g \quad \text{for all } f, g \in H_N \tag{20.97}$$

が成立する為の必要十分条件は、$X_N = X_N^{-1}$ が成立することである。

(証明) 必要性は命題20.13から明らかである。$X_N = X_N^{-1}$ とし、任意の $f, g \in H_N$ に対して $A_N \equiv \rho_1^{-1}(f)$, $B_N \equiv \rho_2^{-1}(g)$ とおけば、式(12.6), (11.69), (12.36), (12.41)より

$$(X_N g)\otimes(X_N f) = \rho_2^{-1}(X_N f)(X_N g) = X_N A_N X_N g = A_N^{\dagger} X_N^2 g$$

$$= A_N^{\dagger} g = B_N f = f\otimes g$$

となる。 (Q.E.D)

式(20.97)と(20.89)の違いは、それぞれの式の右辺の f と g の順序が逆になっていることである。命題20.13と補題20.3より、次の命題が成立

する。

〔 命題 20.15 〕 $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ には、相互相関関数を不変に保つような作用素は存在しない。

自己相関関数を不変に保つ為の必要十分条件は、命題 20.10 の (ii) と命題 20.13 のように、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ で、同じ形で表すことができた。しかも系 20.4 のように、互いに密接な関係があった。

しかし、相互相関関数にまで不変に保つ対象を広げれば、命題 20.12 と命題 20.15 のように、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ では、全く逆の結論に達するのである。

20.4.3 あとがき

自己相関関数を不変に保つ為の必要十分条件が、作用素の空間を $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ 及び $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ に限れば、$B_N^{\mp} = B_N^{-1}$ で与えられることを示した。しかし、これを空間 $\mathcal{B}(H_N)$ にまで拡張することはできない。例えば、作用素の空間を $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=3,4)$ に制限すれば、$B_N^{\mp} = B_N^{-1}$ は必要条件にはなるけれども、もはや十分条件にはならないのである。そのような例を次に示す。$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の実ユニタリ作用素

$$B_N \equiv E_N - 2\langle \psi_0, \psi_0 \rangle \tag{20.98}$$

及び H_N の元

$$f \equiv \sqrt{2N+1}\,(\psi_0 + \psi_1) \tag{20.99}$$

を考える。式 (11.55), (10.2), (3.78) より

$$\rho_2^{-1}(\sqrt{2N+1}\,\psi_n) = I_N(\tfrac{1}{2}a_m) \tag{20.100}$$

$$I_N(\tfrac{1}{2}a_m)\psi_n = \psi_{m-n} \tag{20.101}$$

であるから、

$$\rho_2^{-1}(f)f = 2\sqrt{2N+1}\,(\psi_0 + \psi_1^{(e)}) \tag{20.102}$$

$$\rho_2^{-1}(B_N f)(B_N f) = 2\sqrt{2N+1}\,(\psi_0 - \psi_1^{(e)}) \tag{20.103}$$

となり、$\rho_2^{-1}(B_N f)(B_N f) \neq \rho_2^{-1}(f)f$ となる。従って、式(12.5)より、式(20.98)で与えられる $B_N \in \mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ は自己相関関数を不変に保たないことが分かる。

第21節　擬似直交性理論[2),(3)]

21.1　まえがき

アナログ素子は、一般にディジタル素子に比べて、信頼性が低いといわれている。アナログ空間回路網は、このようなアナログ素子を、極めて多数使用するものであるから、この回路の動作機能を確実なものにする為には、特別な配慮が必要ではないか、と心配されてきた。現在アナログ空間回路網が使用されている場面では、まだそれほど高級な処理が行われているわけではなく、取扱われているパターン情報が、かなりの冗長性を含んでいるということもあって、意外に高い信頼性が保たれている実情である。

しかし、今後この回路網技術を積極的に伸ばしていこうとすれば、こうした心配を排除するための手法を開発していく必要があると考えられる。従来、ニューロン回路網の信頼性向上のために、多重化が有効であることを示したノイマンの構想や、冗長性を加味することによる誤り訂正可能な符号系の構成法は、有名である。このような思想を、アナログ空間回路網に対して具体化するために、擬似直交系の概念が、飯島によって提案された[11]。簡単に述べれば、次のようなものである。

N次元複素ヒルベルト空間* X_N の正規直交基底を $\{\varphi_n\}$ とすれば、X_N に属する任意の元 f は、

$$f=\sum_{n=1}^{N}(f,\varphi_n)\varphi_n \tag{21.1}$$

と展開される。更に、$f, g \in X_N$ の間の内積は、

$$(f,g)=\sum_{n=1}^{N}(f,\varphi_n)\overline{(g,\varphi_n)} \tag{21.2}$$

---

* 本節では、複素空間について理論を展開しているが、実空間の場合にも、同様の理論を展開することができることを注意しておく。なお、本節に限り、種々の記号を他の節とは独立に使用することにする。

と表される。ここで、$\overline{\cdot}$ は複素数 $\cdot$ の複素共役を表す。

いま、X_N に $M(\geq N)$ 個の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を適当にとれば、式(21.1),(21.2)と同じ形式で、f 及び内積が

$$f = \sum_{m=1}^{M} (f, \phi_m)\phi_m \tag{21.3}$$

$$(f, g) = \sum_{m=1}^{M} (f, \phi_m)\overline{(g, \phi_m)} \tag{21.4}$$

と表される。このような性質をもつ系 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を X_N の擬似直交基底と名付けたのである。

本節では、擬似直交基底と種々の分野へ応用していく為の基礎を確立する為に、擬似直交基底のもつ数学的諸性質を、関数解析的立場から、明らかにしていくことにする。

21.2 準備

N次元およびM次元複素ヒルベルト空間を X_N, X_M とし、それぞれの空間における正規直交基底を $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, $\{\phi'_m\}_{m=1}^M$ とする(図21.1)。ここで、MとNの大小関係は問わない。X_N にM個の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が与えられたとき

$$U = \sum_{m=1}^{M} \langle \varphi'_m, \phi_m \rangle \tag{21.5}$$

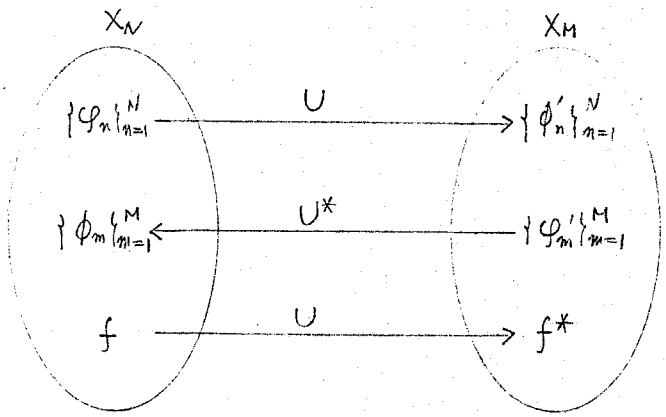


図21.1 本節で扱う各種記号の関係

によって、X_N から X_M への作用素を定義する。ここで、$\langle f, g \rangle$ は、$f \in X_M$ と $g \in X_N$ の dyad であって、次のように定義される。

$$\langle f, g \rangle h = (h, g) f \quad ; h \in X_N \tag{21.6}$$

作用素 $\cdot$ の共役作用素を $\cdot^*$ で表すとき、次の補題が成立する.

〔補題 21.1〕

$$\phi_m = U^* \varphi_m' \quad (m = 1, 2, \cdots, M) \tag{21.7}$$

(証明)

$$\langle f, g \rangle^* = \langle g, f \rangle \tag{21.8}$$

と式(21.5)から明らかである。 (Q.E.D)

補題 21.1 は、X_N に M個の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が与えられたとき、任意の M次元複素ヒルベルト空間 X_M の正規直交基底 $\{\varphi_m'\}_{m=1}^M$ の像として、$\{\phi_m\}$ が表現されるような作用素が常に存在し、それが U^* で与えられることを示している。

更に、

$$\phi_n' = U \varphi_n \quad (n = 1, 2, \cdots, N) \tag{21.9}$$

$$U_{m,n} = (\varphi_n, \phi_m) \qquad (m = 1, 2, \cdots, M : n = 1, 2, \cdots, N) \tag{21.10}$$

とおけば 次の補題が成立する。

〔補題 21.2〕

$$U = \sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n', \varphi_n \rangle \tag{21.11}$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} U_{m,n} \langle \varphi_m', \varphi_n \rangle \tag{21.12}$$

(証明) E_N を X_N の上への射影作用素とすれば"

$$E_N = \sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \tag{21.13}$$

であるから、式(21.9)より

$$U = UE_N = \sum_{n=1}^{N} \langle U\varphi_n, \varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n', \varphi_n \rangle$$

となり、式(21.11)が成立する。又、式(21.5),(21.10),(21.13)から式(21.12)が成立する。 (Q.E.D)

〔補題 21.3〕

$$U^*U = \sum_{m=1}^{M} \langle \phi_m, \phi_m \rangle \tag{21.14}$$

$$UU^* = \sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n', \phi_n' \rangle \tag{21.15}$$

(証明) 式(21.5),(21.8)から

$$U^*U = \sum_{m=1}^{M} \langle \phi_m, \varphi_n' \rangle \sum_{n=1}^{M} \langle \varphi_n', \phi_n \rangle$$

$$= \sum_{m,n=1}^{M} (\varphi_n', \varphi_{m'}) \langle \phi_m, \phi_n \rangle = \sum_{m=1}^{M} \langle \phi_m, \phi_m \rangle$$

となり、式(21.14)を得る。同様にして、式(21.11)から式(21.15)を得ることができる。 (Q.E.D)

$f \in X_N$ を U で変換したものを f^* とおけば、式(21.5)(21.11)から、次の補題が成立する。

〔補題 21.4〕

$$f^* = Uf \tag{21.16}$$

$$= \sum_{m=1}^{M} (f, \phi_m) \varphi_m' \tag{21.17}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (f, \varphi_n) \phi_n' \tag{21.18}$$

〔補題 21.5〕 $f^* \equiv Uf$, $g^* \equiv Ug$ とすれば

$$(f^*, g^*) = \sum_{m=1}^{M} (f, \phi_m)\overline{(g, \phi_m)} \tag{21.19}$$

（証 明） 式(21.17)から明らかである。 (Q.E.D)

$$Ker(U) \equiv \{ f \mid Uf = 0 \ , \ f \in X_N \} \tag{21.20}$$

によって定義される集合 $Ker(U)$ を、U の核という。部分空間 $\cdot$ の直交補空間を $\cdot^{\perp}$ とすれば

$$Ker(U) = (U^* X_M)^{\perp} \tag{21.21}$$

であるから、次の補題が成立する。

〔補題 21.6〕 $Ker(U) = \{0\}$ ならば、$U^* X_M = X_N$ である。

〔補題 21.7〕 $\mathcal{D}(\cdot)$, $\mathcal{R}(\cdot)$ をそれぞれ作用素 $\cdot$ の定義域，値域とする。$\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{D}(A)$ なる A, B に対して、

$$Ker(A) = \{0\} \tag{21.22}$$

$$AB = 0 \tag{21.23}$$

が成立すれば、$B = 0$ となる。

証明は容易にできるので、略す。

これまでに述べてきたことは全て、N次元及びM次元の複素ユークリッド空間の話に移すことができる。即ち、$f \in X_N$, $f^* = Uf \in X_M$ に、ベクトル

$$\tilde{f} \equiv \begin{pmatrix} (f, \varphi_1) \\ (f, \varphi_2) \\ \vdots \\ (f, \varphi_N) \end{pmatrix}, \qquad \tilde{f}^* \equiv \begin{pmatrix} (f, \phi_1) \\ (f, \phi_2) \\ \vdots \\ (f, \phi_M) \end{pmatrix} \tag{21.24}$$

を対応させる。

$\tilde{f}$ は、式(21.13)から分かるように、f の $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ に対する展開係数から作られるベクトルである。

$\tilde{f}^*$は、式(21.17)から分かるように、f^*の$\{\varphi_m'\}_{m=1}^M$に対する展開係数から作られるベクトルである。$\tilde{f}^*$は又、fの$\{\phi_m\}_{m=1}^M$に対する展開係数から作られるベクトルであるとみなすことができる。しかし、まだいままでのところでは、式(21.3)が成立しているかどうか分らない。逆に、式(21.3)が任意の$f\in X_N$に対して成立するような$\{\phi_m\}_{m=1}^M$の性質を論じることが本節の目的なのである。

式(21.10),(21.12)から分かるように、作用素Uには行列$\tilde{U}\equiv(u_{m,n})$が対応している。そして、式(21.24)に従って$\phi_m\longrightarrow\tilde{\varphi}_m$, $\phi_m'\longrightarrow\tilde{\varphi}_m'$なる対応付けを行い、更に、ベクトル$\tilde{\varphi}_m$の複素共役$\overline{\tilde{\varphi}_m}$を各成分の複素共役で定義すれば、行列$\tilde{U}$の第$m$行ベクトルが$\overline{\tilde{\varphi}_m}$でできており、第$n$列ベクトルが$\tilde{\varphi}_n'$でできていることが分かる。又、式(21.24)の$\tilde{f}$と$\tilde{f}^*$の間には、次の関係が成立している。

$$\tilde{f}^* = \tilde{U}\tilde{f} \tag{21.25}$$

21.3 擬似直交系の特徴づけ

本論に入る。まず、式(21.3),(21.4)を満足するような系$\{\phi_m\}_{m=1}^M$が実際に存在することを示す。

〔命題21.1〕 $X_M\supset X_N$のとき、X_MからX_Nへの射影作用素をE_Nとし、

$$\phi_m \equiv E_N\varphi_m' \quad (m=1,2,\cdots,M) \tag{21.26}$$

とおけば、任意の$f,g\in X_N$に対して、式(21.3),(21.4)が成立する。

このように、射影作用素を使えば、X_Mの正規直交基底$\{\varphi_m'\}$を用いて、実際に式(21.3),(21.4)を満足するような系$\{\phi_m\}$を構成することができた。ところで、次の命題21.2から分かるように、式(21.3),(21.4)は互いに同値な式であるから、本論文では、式(21.3)を擬似直交基底の定義として、採

用することにする。

〔定義21.1〕 N 次元複素ヒルベルト空間 X_N に属する $M(\geq N)$ 個の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が

$$\sum_{m=1}^{M} <\phi_m, \phi_m> = E_N \qquad (21.27)$$

を満足するとき、$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を、X_N の擬似直交基底(pseudoorthogonal basis)、或いは略して、擬似直交系という。

従って、以下 $M \geq N$ の場合だけを扱う。

X_N に M 個の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が与えられたとき、M 次元複素ヒルベルト空間 X_M、及び X_M, X_N における正規直交基底 $\{\varphi_m'\}_{m=1}^M$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ を任意に固定し、式(21.5), (21.9), (21.16) に従って、作用素 U, 元 $\{\phi_n'\}_{n=1}^N$, 元 f^* g^* を作れば、次の命題が成立する。

〔命題21.2〕 次の各条件は互いに同値である。

(i) $$\sum_{m=1}^{M} <\phi_m, \phi_m> = E_N \qquad (21.28)$$

(ii) $$U^*U = E_N \qquad (21.29)$$

(iii) $$(UU^*)^2 = UU^*, \quad Ker(U) = \{0\} \qquad (21.30)$$

(iv) $$U^*UU^* = U^*, \quad Ker(U) = \{0\} \qquad (21.31)$$

(v) $$(\phi_n', \phi_{n'}') = \delta_{n,n'} \quad (n, n' = 1, 2, \cdots, N) \qquad (21.32)$$

(vi) $$(f^*, g^*) = (f, g) \quad : f, g \in X_N \qquad (21.33)$$

(vii) $$\|f^*\| = \|f\| \quad : f \in X_N \qquad (21.34)$$

証明は、長くなるので 21.10.1 にまわす。

式(21.19)を考慮すれば、式(21.33)が式(21.4)と同じものであることが分かる。

UU^* は自己共役であるから、(iii) は UU^* が X_M における射影作用素になることを示している。更に、式(21.32),(21.15),(21.9)を考慮すれば、次の系を得る。

〔系 21.1〕 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が X_N の擬似直交系ならば、UU^* は X_N から UX_N の上への射影作用素になる。

結局、命題21.2を一言でいえば、次のようになる。

「$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が X_N の擬似直交系になる為の必要十分条件は、U が等長作用素[6]になることであり、そのとき、U^* は UX_N を始集合とする極大部分等長作用素[6]になっている。」

つまり、(iii),(iv) のオーの条件は、U が部分等長作用素になる為の条件であり、オニの条件は、U が更に等長作用素になる為の条件であったのである。

又、(ii) から、U の一般逆[7]が U^* になることが分かる。

X_N が関数空間の場合には、命題2.1に対応して、次の命題が成立する。

〔命題21.3〕 領域 S の上で定義された関数空間 X_N の再生核を $K(x,y)$ とする。$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が X_N の擬似直交系になる為の必要十分条件は、任意の $x, y \in S$ に対して、

$$\sum_{m=1}^{M} \phi_m(x)\overline{\phi_m(y)} = K(x,y) \qquad (21.35)$$

が成立することである。

（証明） 式(21.35)の左辺を $K'(x,y)$ とおけば、各 y に対し、x の関数として $K'(x,y) \in X_N$ が成立している。しかも、

$$(f(y), K'(y,x))_y = \sum_{m=1}^{M} \langle \phi_m, \phi_m \rangle f(x) \qquad (21.36)$$

であるから、$K'(x,y)$ が X_N の再生核になることと、式(21.24)が成立することは、同値である。更に、再生核の一意性を考慮すれば、命題21.3 が成立することが分かる。 (Q.E.D)

命題21.3 から分かるように、式(21.35)の左辺は、$M(\geq N)$ 及び擬似直交系 $\{\phi_m\}$ のとりかたによらず同じ関数 $K(x,y)$ になるのである。

21.4 擬似直交系の形式保存性

命題21.3 で問題となった再生核は、X_N の任意の正規直交基底 $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ を用いて、

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)} \tag{21.37}$$

と表現される。命題21.3 は、式(21.37)の右辺の形式が擬似直交系に対しても、そのまま保存されていることを示している。21.4では、擬似直交系のもつ、このような形式保存性について論じる。X_N から X_N への有界線形作用素の全体を $\mathcal{B}(X_N)$ で表す。

〔命題 21.4〕擬似直交系は、$A\in\mathcal{B}(X_N)$ のdyadic表現、従って、行列表現の形式を保存する。即ち

$$a_{m,n}=(A\phi_n,\phi_m)\quad(m,n=1,2,\cdots,M) \tag{21.38}$$

によって行列 $\hat{A}=(a_{m,n})$ を定義すれば、A は、

$$A=\sum_{m,n=1}^{M}a_{m,n}\langle\phi_m,\phi_n\rangle \tag{21.39}$$

とdyadic表現される。従って、$g=Af$ に対し

$$\tilde{g}^*=\hat{A}\tilde{f}^* \tag{21.40}$$

となる。ここで、$\tilde{f}^*$, $\tilde{g}^*$ は、式(21.24)で与えられるベクトルである。

（証 明） 式(21.28), (21.38) より

$$A = A\sum_{n=1}^{M} <\phi_n, \phi_n> = \sum_{n=1}^{M} <A\phi_n, \phi_n>$$

$$= \sum_{n=1}^{M} < \sum_{m=1}^{M} (A\phi_n, \phi_m)\phi_m, \phi_n> = \sum_{m,n=1}^{M} a_{m,n} <\phi_n, \phi_n>$$

となり、式(21.39) が成立する。式(21.40)も同様に証明することができる。

(Q.E.D)

〔命題 21.5〕擬似直交系は、$A, B \in \mathcal{B}(X_N)$ の Schmidt の内積 (A, B), Schmidt ノルム $\|A\|_2$, トレース $tr(A)$ の正規直交基底による表現形式（文献(5)の p.31, 29, 37）を保存する。即ち、ゆずしも等しくない M, M' 個の元からなる擬似直交系 $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$, $\{\phi^{(n)}\}_{n=1}^{M'}$ を用いて、これらの汎関数は、

$$(A, B) = \sum_{m=1}^{M} (A\phi_m, B\phi_m) \qquad (21.41)$$

$$\|A\|_2^2 = \sum_{m=1}^{M} \|A\phi_m\|^2 \qquad (21.42)$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{M'} |(A\phi_m, \phi^{(n)})|^2 \qquad (21.43)$$

$$tr(A) = \sum_{m=1}^{M} (A\phi_m, \phi_m) \qquad (21.44)$$

と表される。従って、式(21.41)～(21.44)の右辺の値は、擬似直交系のとりかたによらず一定になる。

（証 明） 式(21.28), (21.4) 及び文献(5)の補題2(p.7), 補題5(p.31) より

$$(A, B) = (A\sum_{m=1}^{M} <\phi_m, \phi_m>, \sum_{n=1}^{M} <\phi_n, \phi_n> B)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{M} (<A\phi_m, \phi_m>, <\phi_n, B^*\phi_n>)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{M} (A\phi_m, \phi_n)(B^*\phi_n, \phi_m)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{M} (A\phi_m, \phi_n)\overline{(B\phi_m, \phi_n)} = \sum_{m=1}^{M} (A\phi_m, B\phi_m)$$

となり、式(21.41)が成立する。他も同様に証明できる。 (Q.E.D)

式(21.44),(21.7)から、必ずしもユニタリ作用素にならないUに対して、次の系を得る。

〔系21.2〕 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_N)$ に対して

$$\mathrm{tr}(UAU^*) = \mathrm{tr}(A) \tag{21.45}$$

が成立する。

21.5 擬似直交系のその他の性質

〔定義21.2〕 集合 $\{u_m\}_{m=1}^M$ の中のある二つの元が一次従属(片方が零元である場合を含む)になるとき、$\{u_m\}_{m=1}^M$ は縮退しているという。

擬似直交系 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の各元の長さ $\|\phi_m\|$ は、一般には m によって異なる。そこで、元の長さ $\|\phi_m\|$ のばらつきの度合いを計る尺度として、次の量を導入する。

〔定義21.3〕

$$\mu \equiv \frac{\min_m \|\phi_m\|}{\max_m \|\phi_m\|} \tag{21.46}$$

を、擬似直交系 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の偏長度という。

明らかに、$0 \leq \mu \leq 1$ であるが、$\mu = 0$ の場合は、$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ の中に零元が含まれていることになるから $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ は縮退している。又、$\mu = 1$ ということは、$\|\phi_m\|$ が m によらず一定であるということであるから、この場合、擬似直交系は等長である、あるいは、$\{\phi_m\}$ は等長擬似直交系である、と呼ぶことにする。正規直交基底は、明らかに、等長擬似直交系である。

〔0, 1〕に属する任意の μ に対して、偏長度 μ の擬似直交系が存在する。その例は、21.6 で示す。

〔 命題 21.6 〕

$$\|U\| = 1 \tag{21.47}$$

$$\|U\|_2 = \sqrt{N} \tag{21.48}$$

（証 明） 式(21.16),(21.34) より

$$\|Uf\| = \|f\| \quad : f \in X_N \tag{21.49}$$

であるから、式(21.47)が成立する。式(21.29)より

$$\|U\|_2^2 = tr(U^*U) = tr(E_N) = N$$

となり、式(21.48)を得る。 (Q.E.D)

〔 命題 21.7 〕 $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$, $\{\phi^{(m)}\}_{m=1}^{M'}$ を擬似直交系とすれば、次の関係が成立する。

$$\|\phi_m\| \leqq 1 \tag{21.50}$$

$$|(\phi_m, \phi^{(m)})| \leqq 1 \tag{21.51}$$

（証 明） 式(21.7),(21.47)より

$$\|\phi_m\| = \|U^*\varphi_m'\| \leqq \|U^*\| \cdot \|\varphi_m'\| = 1$$

となり、式(21.50)が成立する。式(21.50)と Schwarz の不等式から、式(21.42)を得る。 (Q.E.D)

式(21.51)で $A = E_N$ とおけば、次の定理を得る。

〔 命題 21.8 〕

$$\sum_{m=1}^{M} \|\phi_m\|^2 = N \tag{21.52}$$

命題 21.8 から、次の定理が成立する。

〔命題 21.9〕 $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ を等長擬似直交系とすれば

$$\|\phi_m\| = \sqrt{\frac{N}{M}} \qquad (m=1,2,\cdots,M) \tag{21.53}$$

となる。即ち、$\|\phi_m\|$ は、M と N だけに依存し、ϕ_m の形には依存しない。

式(21.19),(21.34),(21.52)より、次の系を得る。

〔系 21.3〕 $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$, $\{\phi^{(n)}\}_{n=1}^{M'}$ を擬似直交系とすれば、次の関係が成立する。

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M'} |(\phi_m, \phi^{(n)})|^2 = N \tag{21.54}$$

〔命題 21.10〕 X_N の擬似直交系 $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ が正規直交基底になるための必要十分条件は、$M=N$ である。

(証明) $M=N$ とすれば、式(21.50),(21.52)から

$$\|\phi_m\| = 1 \qquad (m=1,2,\cdots,N) \tag{21.55}$$

となる。従って、式(21.54),(21.55)より

$$N = \sum_{m,n=1}^{N} |(\phi_m,\phi_n)|^2 = \sum_{n=1}^{N}\|\phi_n\|^4 + \sum_{m\neq n}|(\phi_m,\phi_n)|^2$$

$$= N + \sum_{m\neq n}|(\phi_m,\phi_n)|^2$$

$$\therefore\ (\phi_m,\phi_n) = 0 \qquad (m\neq n) \tag{21.56}$$

となり、$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ は X_N の正規直交基底となる。逆は明らかである。(Q.E.D)

〔定義 21.4〕 二組の元の集合 $\{u_m\}_{m=1}^{M}$, $\{v_m\}_{m=1}^{M}$ がユニタリ作用素 A によって、

$$v_m = Au_m \qquad (m=1,2,\cdots,M) \tag{21.57}$$

の形に結ばれているとき、$\{u_m\}$ と $\{v_m\}$ はユニタリ同値であるという。

〔命題 21.11〕 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を X_N の擬似直交系とし、$A \in \mathcal{B}(X_N)$ とする。$\{A\phi_m\}_{m=1}^M$ が再び X_N の擬似直交系になる為の必要十分条件は、A がユニタリ作用素になることである。

（証明） 式(21.28)より

$$\sum_{m=1}^{M} \langle A\phi_m, A\phi_m \rangle = AA^* \tag{21.58}$$

となるので、再び式(21.28)を考慮すれば、命題21.11が成立することが分かる。 (Q.E.D)

命題21.11は、X_N に同じ個数でできている二種類の擬似直交系 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$, $\{\phi^{(m)}\}_{m=1}^M$ が与えられたとき、これらが線形作用素 A で

$$\phi^{(m)} = A\phi_m \quad (m=1,2,\cdots,M) \tag{21.59}$$

と変換されるのは、$\{\phi_m\}$ と $\{\phi^{(m)}\}$ がユニタリ同値である場合に限ることを示している。ところで、21.6の例からも分かるように、ユニタリ同値でない擬似直交系が、少なくとも連続無限個存在するので、二つの擬似直交系の間のユニタリ同値性に関する判定条件が必要になってくる。

〔命題 21.12〕 X_N の二種類の擬似直交系 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$, $\{\phi^{(m)}\}_{m=1}^M$ に対して、作用素 U と式(21.5)で、V を

$$V = \sum_{m=1}^{M} \langle \varphi'_m, \phi^{(m)} \rangle \tag{21.60}$$

で定義するとき、次の各条件は、互いに同値である。

(i) $\{\phi_m\}$ と $\{\phi^{(m)}\}$ はユニタリ同値である。

(ii) $VA = U$ (21.61)

を満足するユニタリ作用素 $A \in \mathcal{B}(X_N)$ が存在する。

(iii) $UX_N = VX_N$ (21.62)

証明は21.10.2にまわす。この証明からも分かるように実は、命題21.12の

中の $\{\phi_m\}$, $\{\phi^{(m)}\}$ の擬似直交性の条件は、(iii) の十分性を証明するときだけの必要であって、(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\longrightarrow$ (iii) は、擬似直交性の条件がなくても、成立するのである。

21.6 擬似直交系の例

本節では、X_M, X_N 共に複素 Euclid 空間である場合について、二種類の具体例を示す。

〔例 1〕 ($N=2$, $M=3$ の場合)

パラメータ $a \in [0, 1]$ を含んだ三個の二次元ベクトル

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(a) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}, \quad \phi_2(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \\ \phi_3(a) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2(1-a^2)} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{21.63}$$

を考える。このベクトルと X_3 の正規直交系

$$\varphi_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21.64}$$

より、式 (21.5) に従って $U(a)$ を作れば

$$U(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \\ 0 & \sqrt{2(1-a^2)} \end{pmatrix} \tag{21.65}$$

となる。二次元単位行列を E_2 とすれば

$$U(a)^* U(a) = E_2 \tag{21.66}$$

となるから、命題 21.2 より式 (21.63) で与えられたベクトル系 $\{\phi_m(a)\}_{m=1}^{3}$

が、X_2 の擬似直交系になっていることが分かる。$a=1/\sqrt{2}$ の場合を図21.2に示す。

$$\left.\begin{aligned}&\|\phi_1(a)\|=\|\phi_2(a)\|=\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}\leqq 1\\&\|\phi_3(a)\|=\sqrt{1-a^2}\leqq 1\end{aligned}\right\}\qquad(21.67)$$

であるから、確かに式(21.50),(21.52)が成立している。

$\{\phi_m(a)\}_{m=1}^{3}$ の偏長度を $\mu(a)$ とすれば

$$\mu(a)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1+a^2}{2(1-a^2)}} & ;\ 0\leqq a\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\[2ex]\sqrt{\dfrac{2(1-a^2)}{1+a^2}} & ;\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}<a\leqq 1\end{cases}\qquad(21.68)$$

となる。$\mu(a)$ のグラフを図21.3に示す。

図21.3から、$0\leqq\mu\leqq 1$ なる任意の μ に対して、偏長度 μ の擬似直交系が、実際に存在することが分かる。

$a=1/\sqrt{3}$ のとき、$\{\phi_m(1/\sqrt{3})\}_{m=1}^{3}$ は等長擬似直交系になる。$a=0$ のとき $\phi_1(0)=\phi_2(0)$, $a=1$ のとき $\phi_3(1)=0$ となり、共に、縮退した擬似直交系になっている。

又、命題21.1より、$a\neq b$ ならば、$\{\phi_m(a)\}_{m=1}^{3}$ と $\{\phi_m(b)\}_{m=1}^{3}$ はユニタリ同値にならないから、ユニタリ同値でない擬似直交系が少なくとも連続無限個

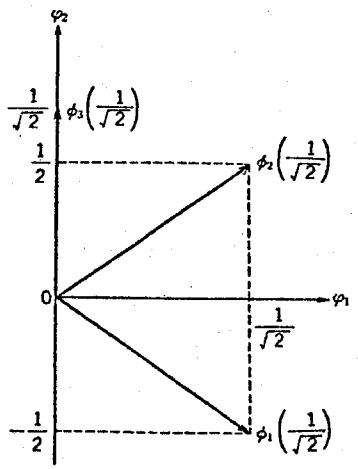


図21.2 擬似直交系の例 ($N=2$, $M=3$)

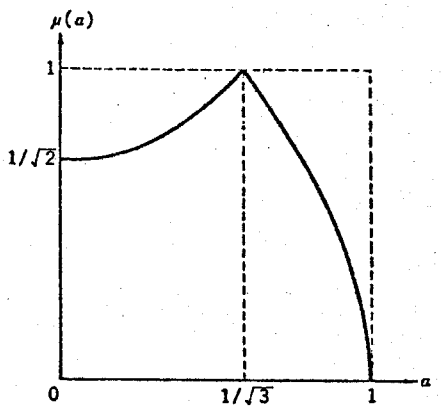


図21.3 $\{\phi_m(a)\}_{m=1}^{3}$ の偏長度 $\mu(a)$

存在することが分かる。

行列 $U(a)$ の列ベクトルが、左から順に、$\phi_1'(a)$, $\phi_2'(a)$ になっている。

〔例 2 〕（$N=2$, $M=4$ の場合）

パラメータ $\theta \in [0,1]$ を含んだ四個の二次元ベクトル

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\theta^2)}}\begin{pmatrix}\theta\\-1\end{pmatrix}, \quad \phi_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\theta^2)}}\begin{pmatrix}1\\-\theta\end{pmatrix} \\ \phi_3(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\theta^2)}}\begin{pmatrix}1\\\theta\end{pmatrix}, \quad \phi_4(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\theta^2)}}\begin{pmatrix}\theta\\1\end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (21.69)$$

を考える。このベクトルと X_4 の正規直交系

$$\varphi_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \varphi_2' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \varphi_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad (21.70)$$

より、式(21.5)に従って $U(\theta)$ を作れば

$$U(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\theta^2)}}\begin{pmatrix}\theta & -1\\ 1 & -\theta\\ 1 & \theta\\ \theta & 1\end{pmatrix} \quad (21.71)$$

となる。更に

$$U(\theta)^* U(\theta) = E_2 \quad (21.72)$$

となるから、命題21.2より、式(21.69)で与えられたベクトル系 $\{\phi_m\}_{m=1}^4$ が、X_2 の擬似直交系になっていることがわかる。しかも、全ての m に対して

$$\|\phi_m(\theta)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (21.73)$$

であるから、$\{\phi_m(\theta)\}_{m=1}^4$ は全ての θ に対して、等長擬似直交系になっている。$\theta=0$ のとき

$$\phi_1(0) = -\phi_4(0), \quad \phi_2(0) = \phi_3(0) \quad (21.74)$$

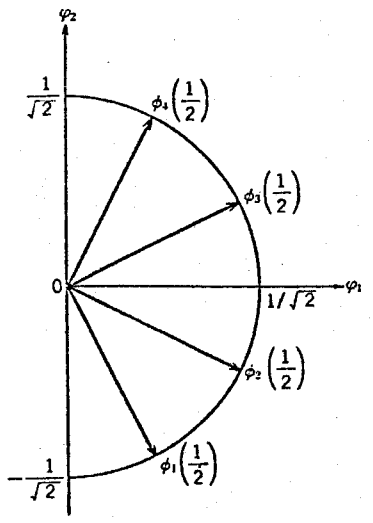


図21.4 等長擬似直交系の例（$N=2, M=4$）

$\theta = 1$ のとき

$$\phi_1(1) = \phi_2(1), \quad \phi_3(1) = \phi_4(1) \tag{21.75}$$

となり、共に縮退した擬似直交系になる。それ以外の θ に対しては、縮退はしておらず、例えば、図21.4のようになる。

又、命題21.12より、$\theta \neq \theta'$ ならば、$\{\phi_m(\theta)\}$ と $\{\phi_m(\theta')\}$ とはユニタリ同値にならないから、ユニタリ同値でない等長擬似直交系が、少なくとも連続無限個存在することが分かる。

行列 $U(\theta)$ の列ベクトルが、左から順に $\phi_1'(\theta)$, $\phi_2'(\theta)$ になっている。

21.7 擬似直交標本化基底[3]

X_N を、領域 S の上で定義された関数空間とする。

〔定義 21.5〕 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が X_N の擬似直交系であると同時に、X_N の標本化基底になっている場合、即ち、$f \in X_N$ の標本点 $\{x_m\}_{m=1}^M$ における値 $\{f(x_m)\}_{m=1}^M$ だけから、重み係数 $\{w_m\}_{m=1}^M$ と $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を用いて、f が

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} w_m f(x_m) \phi_m(x) \tag{21.76}$$

と再現できるとき、$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ を X_N の擬似直交標本化基底という。

擬似直交標本化基底を構成する為には、次のようにすれば良い。

〔命題 21.13〕 $\{\varphi_m'\}_{m=1}^M$ を X_M ($\supset X_N$) の正規直交標本化基底とする：

$$g(x) = \sum_{m=1}^{M} w_m g(x_m) \varphi_m'(x) \quad : g \in X_M \tag{21.77}$$

しかるとき、X_N の上への射影作用素 E_N を用いて

$$\phi_m \equiv E_N \varphi_m' \quad (m = 1, 2, \cdots, M) \tag{21.78}$$

とおけば、$\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ は X_N の擬似直交標本化基底になり、式(21.76)が成立する。

(証明) $f \in X_N$ とすれば、$X_N \subset X_M$ より $f \in X_M$ となるから、式(21.78)(21.77)より

$$(f, \phi_m) = (f, E_N \varphi_m') = (E_N f, \varphi_m') = (f, \varphi_m') = w_m f(x_m)$$

$$\therefore (f, \phi_m) = w_m f(x_m) \tag{21.79}$$

となる。また、式(21.78)と命題21.1より $\{\phi_m\}_{m=1}^{M}$ は X_N の擬似直交系になっているから、式(21.3), (21.79)より式(21.76)が成立する。 (Q.E.D)

例えば、H_N を前節まで用いてきたN次以下の三角多項式の空間、$\{\psi_n^{(N)}\}_{n=-N}^{N}$ を H_N の自然座標系、$a_n^{(N)} \equiv 2\ell n/(2N+1)$ とするとき $X_M = H_M$, $X_N = H_N$, $\varphi_m' = \psi_m^{(M)}$ とおけば、式(5.38)より

$$\phi_m(x) = \sqrt{\frac{2N+1}{2M+1}}\, \psi_0^{(N)}(x - a_m^{(M)}) \quad (m = -M, -M+1, \cdots, M) \tag{21.80}$$

となる。即ち、$\{\psi_0^{(N)}(x - a_m^{(N)})\}_{n=-N}^{N}$ は H_N の正規直交標本化基底であったが、並進の量を $a_n^{(N)}$ から $a_n^{(M)}$ に変え、全体を $\sqrt{(2N+1)/(2M+1)}$ 倍すれば、擬似直交標本化基底になるのである。

なお、命題21.13では、$\{\varphi_m'\}$ として X_M の正規直交標本化基底を採用したが、必ずしも標本化基底になっていない関数系 $\{\varphi_m''\}_{m=1}^{M}$ に対して、$E_N \varphi_m'' = E_N \varphi_m'$ となる場合がある。当然のことながら、そのような場合にも、$\{E_N \varphi_m''\}_{m=1}^{M}$ は X_N の擬似直交標本化基底になる。命題14.8は、そのような例になっている。即ち、$\{\varphi_n\}_{n=-N}^{N}$, $\{c_n\}_{n=0}^{N}$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$ は全て標本化基底になっていないにもかかわらず、$\{\lambda E_N^{(\lambda)} \varphi_n\}_{n=-N}^{N}$, $\{\pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} E_N^{(\pm 1)} c_n\}_{n=0}^{N}$, $\{\pm \frac{1}{\sqrt{\mu}} E_N^{(\pm i)} \lambda_n\}_{n=1}^{N}$ は、それぞれ $\mathfrak{T}_N$ の固有空間 $H_N^{(\lambda)}$, $H_N^{(\pm 1)}$, $H_N^{(\pm i)}$ の擬似直交標本化基底になるのである。

21.8 擬似双直交系[3]

正規直交系が正規双直交系に拡張されたように，擬似直交系の概念を，擬似双直交系の概念に拡張することができる。詳しいことは別の機会にして、21.8では、擬似双直交系の一般的構成法を述べるにとどめる。

まず，擬似双直交系の定義から始める。

〔定義 21.6〕 N 次元 Hilbert 空間 X_N に属する一対の $M(\geq N)$ 個の元 $\{\phi_m\}_{m=1}^M$ 及び $\{\phi_m^*\}_{m=1}^M$ が

$$\sum_{m=1}^{M} <\phi_m, \phi_m^*> = E_N \tag{21.81}$$

を満足するとき、$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ を X_N の擬似双直交系（pseudobiorthogonal basis）という。

〔命題 21.14〕 $X_M(\supset X_N)$ の正規双直交基底 $\{\varphi_m', \varphi_m'^*\}_{m=1}^M$ に対して

$$\phi_m \equiv E_N \varphi_m', \quad \phi_m^* \equiv E_N \varphi_m'^* \qquad (m=1,2,\cdots,M) \tag{21.82}$$

とおけば、$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ は X_N の擬似双直交系になる。

これは，命題 21.1 に対応する構成法であるが、より一般的には、次のようにすれば良い。

〔命題 21.15〕 $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ 及び $\{\phi_n'\}_{n=1}^N$ を、それぞれ X_N 及び X_M の正規直交系とし、

$$U \equiv \sum_{n=1}^{N} <\phi_n', \varphi_n> \tag{21.83}$$

とおく。 X_M の正規双直交系 $\{\varphi_m', \varphi_m'^*\}_{m=1}^M$ に対して

$$\phi_m \equiv U^* \varphi_m', \quad \phi_m^* = U^* \varphi_m'^* \qquad (m=1,2,\cdots,M) \tag{21.84}$$

とおけば、$\{\phi_m, \phi_m^*\}_{m=1}^M$ は X_N の擬似双直交系になる。

（証明）

$$\sum_{m=1}^{M} \langle \phi_m, \phi_m^* \rangle = \sum_{m=1}^{M} \langle U^* \varphi_m', U^* \varphi_m'^* \rangle$$

$$= U^* \sum_{m=1}^{M} \langle \varphi_m', \varphi_m'^* \rangle U \quad = U^* E_M U$$

$$= U^* U \quad = \sum_{m=1}^{N} \langle \varphi_m, \phi_m' \rangle \sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n', \varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{m,n=1}^{N} (\phi_n', \phi_m') \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \quad = E_N \qquad \text{(Q.E.D)}$$

21.9 あとがき

擬似直交系は、飯島によって導入されたばかりの、全く新しい概念であるから、その性質は、これまで、ほとんど分かっていなかった。従って、これを工学の分野へ応用しようとしても、擬似直交系のもつどの性質に着目してよいのか、見当のつけようがない。このような場合には、まず、擬似直交系そのものを知ることが大切である。擬似直交系の本質が分かれば、そしてその人が強烈な工学的問題意識をもっていれば、おのずとその応用の道も開けてくるのである。

このような立場から、本節ではもっぱら、擬似直交系のもつ数学的諸性質の解明へと力を注いできた。その結果、何が分かったであろうか。

命題21.2から、$\{\phi_m\}_{m=1}^M$ が空間 X_N の擬似直交系ならば、X_N と UX_N とは位相同形になる。つまり、X_N は作用素 U によって空間 X_M の中に、位相まで含めて同形に埋蔵される。従って、$f \in X_N$ に対して $f^* = Uf$ とおけば、f^* は f と同じものであるとみなすことができる。更に、f が X_N の中でのみ動き得たのに対して、f^* のほうは X_M 全体を動き得るのである。よって X_N の中だけの議論では得られなかった種々の事柄が f^* へ移行することによ

って、得られることになるのである。

擬似直交系が、将来種々の威力を発揮していくものとすれば、その本質は、ここにあるものと思われる。

なお、擬似直交系の具体的な応用が、文献(4)に述べられている。そこでは、本節で明らかにされた擬似直交系の性質が有効に用いられている。

21.10 付録

21.10.1 命題21.2の証明

(i) ⟷ (ii) : 式(21.14)から明らかである。

(ii) ⟶ (iii) :

$$(UU^*)^2 = U(U^*U)U^* = UE_NU^* = UU^*$$

となり、(iii)のオ一式を得る。$Uf=0$ とすれば

$$f = E_Nf = U^*Uf = U^*0 = 0$$

となり、(iii)のオ二式を得る。

(ii) ⟶ (iv) : (iii)のオ一式より

$$U(U^*UU^* - U^*) = 0 \qquad (21.85)$$

であるから、(iii)のオ二式を考慮すれば、補題21.7より(iv)のオ一式が成立する。

(iv) ⟶ (ii) : (iv)のオ一式より

$$(U^*U - E_N)U^* = 0 \qquad (21.86)$$

であるから、(iv)のオ二式と補題21.6より

$$(U^*U - E_N)X_N = (U^*U - E_N)U^*X_M = 0$$

となり、(ii) が成立する。

(ii) ⟶ (v) : 式 (21.9) より明らかである。

(v) ⟶ (vi) : 式 (21.18) から明らかである。

(vi) ⟶ (vii) : 明らかである。

(vii) ⟶ (ii) : 式 (21.16) より

$$((U^*U - E_N)f, f) = (U^*Uf, f) - (f, f)$$

$$= \|Uf\|^2 - \|f\|^2 = \|f^*\|^2 - \|f\|^2 = 0$$

$$\therefore ((U^*U - E_N)f, f) = 0 \qquad (21.87)$$

となり、(ii) が成立する。 (Q.E.D)

21.10.2 命題 21.12 の証明

(i) ⟷ (ii) : 式 (21.5), (21.60) と文献 (5) の補題 2 (p.7) より、任意の $A \in \mathcal{B}(X_N)$ に対して、

$$VA - U = \sum_{m=1}^{M} \langle \varphi_m', A^*\phi^{(m)} - \phi_m \rangle \qquad (21.88)$$

が成立する。式 (21.88) から、(i) ⟷ (ii) が分かる。

(ii) ⟶ (iii) : 明らかである。

(iii) ⟶ (ii) : 各 $f \in X_N$ に対して

$$Uf = Vg \qquad (21.89)$$

となるような元 $g \in X_N$ が少なくとも一個存在する。しかも、$\{\phi^{(m)}\}$ の擬似直交性より $\mathrm{Ker}(V) = \{0\}$ であるから、そのような g は、一意に定まる。そこで、式 (21.89) によって定義される変換 $f \to g$ を A で表すことにする。そうすれば、式 (21.89) より

$$U = VA \qquad (21.90)$$

となるから、式(21.29)を考慮すれば

$$A = V^* U \tag{21.91}$$

となる。更に、系21.1 と式(21.62), (21.29) より

$$A^*A = U^*(VV^*)U = U^*U = E_N$$

となり、A はユニタリ作用素になる。 (Q.E.D)

第四章

総括

第 22 節　結　論

22.1　本研究で得られた成果

本論文は、1968年以来筆者が行なってきた空間回路網設計に関する研究成果をまとめたものである。この研究を通じて筆者が最も留意した点は、空間回路網で実現すべき作用素一個一個に着目するのではなく、作用素の属する空間の構造を解析し、その結果を活用していかなければいけないということである。

その為に、次のことがなされた。作用素の空間にSchmidtの内積を導入することにより、作用素の空間を普通のユークリ空間と同様に扱うことができるようにした。そして、この内積のもとで、基本座標系及び自然座標系と呼ばれる二種類の正規直交基底を導入し、それらの展開係数が、それぞれ作用素の空間周波数特性，結合特性を表わすようにした。この結合特性が実行列になっていれば、直ちに、多入力係数加算器と抵抗からなる多端子回路網によって、その作用素を実現することができるのである。

本論文では、表現を簡単化し、理論の展開を美しくする為に、信号空間として複素Hilbert空間 $L_2[-\ell, \ell]$ を採用し、L_2 の上の有界線形作用素を空間回路網で実現する為の設計理論を考えてきた。従って、作用素によっては，その結合特性が必ずしも実行列にならない。実行列になる為の必要十分条件は，その作用素が実数値関数を実数値関数に変換すること、即ち、実作用素になることである。実作用素になる為の条件、或いは任意の作用素 A を $A=A_1+jA_2$（A_1, A_2 ：実作用素）と実作用素の和に分解する方法等を、第4節で導入した作用素に対する複素共役演算を用いて論じた。

この複素共役演算と、数学で良く使われている共役演算を組合せることにより、空間回路網の構造が等方或いは反等方になる為の条件を明らかにし、任意

の作用素が等方な構造をもった空間回路網と反等方な構造をもった空間回路網の和で構成できることを示した。

作用素の空間の構造を解析する為には、これらの演算の他にも、対称演算或いは双対演算と呼ばれる演算も威力を発揮する。複素共役演算，対称演算，双対演算は全て、共変対合と名付けた回帰的半線形作用素の特殊な例になっているので，これらの演算を使用する前に、共変対合の一般的性質を明らかにした。

その結果をこれらの特殊な共変対合に適用することにより、結合特性の次元独立性、基本座標系と自然座標系の関係，空間周波数特性と結合特性の関係等等と論じた。

作用素の空間の構造を更に詳細に調べる為に、いずれも信号空間 H_N と位相同形な四種類の部分空間 $\mathcal{B}^{(n)}(H_N)$ $(n=1,2,3,4)$ を取出した。$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ は並進作用素によって生成される作用素の空間であり，結合特性が巡回行列になるものである。$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ は反転作用素によって生成される作用素の空間であり，結合特性が逆巡回行列になるものである。これらの空間は共に、インパルス応答によって信号空間と位相同形に結びつけられており，前着はたたみこみと、後着は相互相関と密接な関係をもっている。

上記双対演算によって $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ を変換すれば，それぞれ $\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ が得られる。$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の元は $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の対応する元に対して，空間周波数特性と結合特性が逆になっており、$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ も同様の関係にある。従って、$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ と $\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ は共に，直流応答によって信号空間と位相同形に結び付けられるのである。

外部条件によって重み抵抗の値が変化するような空間回路網の近似的構成法を、$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の 1-パラメータ半群 $\{A_N(a)\}$ を例に論じた。この構成法によれば、可変抵抗の値の符号が一定になるばかりでなく、新しく抵抗値を決定する為の計算回数が、オ3節の設計理論に従う素朴な方法に比して，$2N+1$ 回から 1 回に減少し、可変抵抗の数も $(2N+1)^2$ 個から $2N+1$ 個に減少する。そしてここでも、$A_N(a)$ の $\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における軌跡を幾何学的にとらえることにより，

最良近似を求める為の計算回数が大幅に節約できることを示した.

空間回路網理論の応用として、太いビームを用いた観測装置の分解能改善法, 標本点上で与えられた関数の補間表示法を示した. また、ASPET/71 等で採用されている才二標本化の意味を明らかにし、最適な才二標本化を行なう空間回路網の構造を決定した.

最後に、アナログ空間回路網の信頼性向上を目指して導入された擬似直交基底の数学的性質を明らかにし、種々の分野への応用の基礎を与えた.

結局、本研究で得られた成果をまとめれば、次のようになる.

(i) 情報処理機能を表している作用素の空間を、自由に取扱えるようにし、空間回路網の空間周波数特性, 結合特性, 種々の最良近似問題等々を、作用素の空間の中だけで議論できるようにした.

(ii) その結果、外部条件によって制御される可変回路網の制御しやすい近似的構成法が得られた.

(iii) OCR とか画像処理の分野で用いられている種々の前処理の意味付け及びその精密化を行なった.

(iv) 信号空間を一つ固定して、統一的な理論体系を作ることにより、他の信号空間に対する同様の議論を行なう際の雛形ができた.

22.2 本研究の直接的応用分野

本研究で得られた成果を活用することによって解決できる見通しのついた問題がいくつかある。それを次に述べる.

(1) 大域的処理の局所的処理への分解 : 本論文で展開した設計理論に従って作用素をハード化する場合、最も問題になるのは、配線の複雑さである(電子計算機でシミュレートする場合には、計算時間に関係してくる)。そこで、局所的処理の積重ねによって、大域的処理を実現することが考えられる。数学的には、結合特性を band matrix の積で近似する問題として定式化される。

(2) 実装，配線の問題 ： (1) と関連する問題であるが、図3.5，図3.6の形の回路構成の代りに、例えば安田他[1]が採用した方法で抵抗回路網を構成できれば、複雑配線の問題は解決できる。その為の一般的方法を与えること。

(3) 擬似直交系の利用 ： 冗長性を入れてランダム雑音に対する信頼性を高めるだけでなく、例えば (1) の band matrix の積による近似の精度を上げることも考えられる。

(4) 画像処理への応用 ： 平滑化，尖鋭化，量子化，自動焦点調節等，画像処理の分野で使われている種々の変換の最適な形，或いはその最良近似を、本論文で展開した空間回路網理論の立場から求めること。

(5) 超解像 ： 画像処理の入力部に共通の問題として、分解能改善の問題がある。これは、オ17節で論じた標本化定理における折り返し誤差の問題及びオ20節で論じた太いビームを用いた観測装置の分解能改善法の問題と深い関係をもっており、これらの問題をより根元的に解決する為には、光情報処理の分野で研究されている超解像[2]の概念が必要となる。

22.3 将来展望

本研究の究極の目標は、1.1でも述べたように、合目的性を追求する進化論の立場から、脳に於ける情報処理様式の在り方を解明し、人間頭脳の得意とする情報処理機能を更に量的に高めた汎用パターン処理装置を開発し、現在なお発展を続けている電子計算機技術と融合することにより、調和のとれた情報処理技術を確立していくことである。

この目標を達成する為に今後成すべきことを、簡単に展望してみよう。

筆者は、この目標を達成する為には、図22.1に示すような段階を踏むのが適当ではないかと考えている。この図に照らして言えば、本論文は (A) と (C) から (B) を論じているものであるということができる。以下、順を追って説明する。

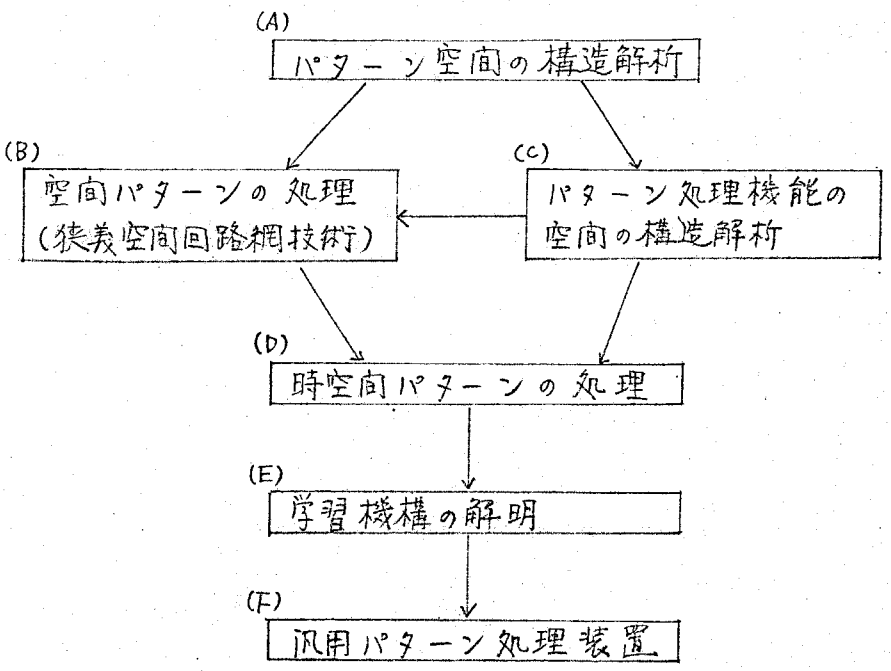


図 22.1 空間回路網技術の階層構造

(1) 信号空間のとらえ方 : 本論文では、理論体系の一つの雛形を作る為に、信号空間と $L_2[-\ell, \ell]$ に固定してきた。しかし筆者自身、決してこれに満足しているわけではない。外界に提示されたパターンを表現する為には、無限領域上の台有限な関数空間を考えなければいけないであろうし、観測されたパターンを機械の内部で表現する為には、有限領域で定義された関数空間を考えなければいけないであろう。しかも、この両者の関係を明確にしておかなければ、特に二次元図形を扱う場合には、統一的な理論体系を築くことはむずかしいのではないかと思われる(図 22.1 の (A)~(C))。

(2) 時空間パターンの処理 : 空間パターンが時間的に変動する場合には、処理の為にむやみに時間を要することはできない。しかし、この制約を逆に利用することにより、パターンの空間的情報を用いて時間的予測を行なうと同時に、時間的変動による情報をもとに空間的予測を行ないながら処理していくシステムという、(A)~(C) の段階では得られない新しい処理形態が確立されるものと思われる(図 22.1 (D))。

(3) 学習機構の解明 ： 学習問題を根元的に解明していく為には、機械によるパターン空間の構造認識が行なわれなければいけない。その為には、未だ形式化されていない情報の概括的処理を通して、機械の中に対象の情報モデルを形成していくことが必要である。では、どのようにして対象の情報モデルを記述していけば良いであろうか。一つの方法は、(1)と関係のあることであるがパターン空間をRiemann空間としてとらえることである。一般相対性理論では、物質によって空間の構造が定まり、その構造によって物質の力学的性質が定まるという見方がとられた。パターン認識の問題でも、このような考え方ができないであろうか。学習によって学ぶものはRiemann計量であり、その計量によって規定される空間の構造が、対象の情報モデルになるという考え方である。このように問題を定式化することにより、大脳で行なわれている高次情報処理機能に関する研究も、一つの局面を展開するものと思われる(図22.1の(E))。

(4) 営存システム ： 汎用パターン処理装置は、巨大なシステムになるものと思われる。そのようなシステムに対して、細部を個別に制御することはとてもできない。そこで思い出されるのが、公定歩合等による経済社会の制御の仕方である。ここで重要なことは、会社等の経済単位が、独自の目的をもって動いているということである。このように、独自の目的をもって動いている構成要素からなるシステムを、営存システムと名付けることにする。学習機能を備えた汎用パターン処理装置を実現する為には、このような営存システムの挙動を調べ、その制御方法を開発していく必要があるように思われる(図22.1の(F))。

謝　辞

筆者が電気試験所（現，電子技術総合研究所）入所以来今日に至るまで，終始御指導と御鞭撻を賜わった東京工業大学教授飯島泰蔵博士に衷心より感謝の意を表します。

数学の師であり，本研究の初期における共同研究者である電子技術総合研究所，オートマトン研究室長五十嵐彰博士に謹んで感謝致しますと共に，本研究に関して有益な討論をしていただいた同所，主任研究官磯道義典技官，舟久保登技官に厚く御礼申し上げます。

機会ある毎に暖かい励ましをいただいた東京工業大学教授関口利男博士，早稲田大学教授堀内和夫博士に心から感謝の意を表します。

東京工業大学学生　佐藤誠君（博士課程2年）には，本論文に対して熱心な討論をしていただいた。杉本恊君（現，三菱電機株式会社）には，卒業研究として19.3項を手伝っていただいた。前田賢一君（現，東京芝浦電気株式会社）と鈴木一栄君（修士課程2年）には，20.2項で述べた補間表示装置を試作していただいた。東京工業大学事務官飯田裕子嬢には，数値計算とグラフ作製を手伝っていただいた。記して感謝します。

参考文献

第1節の参考文献

(1) A.M. Turing : "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem," Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 42, pp. 230-265 (1936) ; 43, pp. 544-546 (1937).

(2) 伊藤正男 : "ニューロンの生理学", 岩波書店 (1973).

(3) 樋渡涓二 : "生体情報工学", コロナ社 (1971).

(4) S. Amari : "A method of statistical neurodynamics", Kybernetik, 14, 4, pp. 201-215 (1974).

(5) 飯島泰蔵 : "パターンの認識", 電気通信, 30, pp. 32-37 (1967-4)

(6) 飯島泰蔵 : "図形の基礎方程式と観測座標", 信学論 (C), 54-C, 7, pp. 641-648 (1971-7).

(7) 飯島泰蔵 : "人工知能とパターン認識", 日本機械学会誌, 76, pp. 31-38 (1973-1).

(8) 飯島泰蔵 : "パターン認識", コロナ社 (1973)

(9) 飯島泰蔵, 森俊二, 山崎一生, 吉村ミツ : "自動正規化回路について (大域相互依存回路網の提案)", 信学会オートマトンと自動制御研資 (1963-10).

(10) 飯島泰蔵 : "汎関数極値問題の解法を実行する空間回路網基礎方程式の導出原理", 未公開資料 (1971-6).

(11) 舟久保登 : "位置正規化装置", 電気試験所彙報, 34, 1, pp. 24-33, (1970-1).

(12) 森俊二 : "線形空間回路網理論", 信学会オートマトンと自動制御研資 (1965-7).

(13) 電子通信用語特別専門委員会編 : "通信理論専門用語集", 電子通信学会, P. 69 (1973).

(14) 森俊二，飯島泰蔵："一様巡回構造をもつ線形空間回路網の基礎理論"，電気試験所彙報，31，5，pp.675-682(1967-5).
(15) 磯道義典，森俊二，飯島泰蔵："2次元パターンの処理"，昭和40年度信学全大，S4-12(1965-11).
(16) 森俊二，磯道義典，飯島泰蔵："空間回路の過渡特性"，昭和41年度四学連大，1878(1966-4).
(17) 飯島泰蔵："等分散特徴パラメータの抽出理論"，信学会オートマトンと自動制御研資(1966-10).
(18) 飯島泰蔵："線形空間回路網の誤差評価理論"，昭和42年度四学連大，2915(1967-4).
(19) 飯島泰蔵："文字読取装置ASPET/71"，テレビ学誌，27，3，pp.157-164(1973-3).
(20) 舟久保登，岩松聡，鈴木孝則，森俊二，飯島泰蔵："電試型OCRパイロットモデル"，信学論(C)，52-C，11，pp.712-719(1969-11)；電気試験所彙報，電試型OCRパイロットモデル特集号，34，1(1970-1).
(21) 森健一："空間回路網技術によるパターン認識"，昭和47年度四学連大，263(1972-11).
(22) 五十嵐彰，小川英光，飯島泰蔵："線形空間回路網理論の位相解析的基礎づけ"，信学論(C)，53-C，6，pp.393-401(1970-6).

オ2節の参考文献

(1) 染谷勲："波形伝送"，修教社，p.70(1949).
(2) C.E. Shannon："Communication in the presence of noise"，Proc. IRE，37，1，pp.10-21(1949-1).
(3) 宮川洋："多次元空間中の定常的確率変数の標本化定理"，信学誌，42，4，pp.421-427(1959-4).
(4) A. Papoulis："Error analysis in sampling theory"，Proc. IEEE，

54, 7, pp. 947-955 (1966-7).
(5) 磯道義典：" 一般標本化定理 ", 信学論(C), 62-C, 2, pp. 79-85 (1969-2)
(6) 磯道義典, 飯島泰蔵：" Real Pulse による Sampling について ", 昭和43年度四学連大, 2629 (1968).
(7) K. Yoshida：" Functional analysis ", Springer-Verlag, (1968), P. 95.
(8) S. Goldman：" Information theory ", Prentice-Hall (1953)
(9) A. Nathan：" On sampling a function and its derivatives," Information and Control, 22, 2, pp. 172-182 (1973-3)
(10) G. Szegö：" Orthogonal polynomials ", 才3版, Amer, Math. Soc. Collog. Publ., (1967).
(11) 山内二郎, 森口繁一, 一松信：" 電子計算機のための数値計算法, I, " 培風館 (1971).
(12) B. И. スミルノフ (弥永他訳)：" 高等数学教程, 12 ", 共立出版 (1965).

才3節の参考文献

(1) 五十嵐彰, 小川英光, 飯島泰蔵：才1節の文献 (22)
(2) 小川英光, 五十嵐彰, 飯島泰蔵：" Dyadic 表現による線形空間回路網理論の展開 ", 信学論(C), 54-C, 1, pp. 58-65 (1971-1).
(3) 小川英光, 五十嵐彰, 飯島泰蔵：" 空間回路網 ", 情報処理, 11, 11, pp. 672-681 (1970-11).
(4) 河野伊三郎：" 位相空間論 ", 共立全書 82 (1966)
(5) M. A. ナイマルク (功力他訳)：" 関数解析入門, I ", 共立全書, 527 (1968).
(6) J. L. Kelley and I. Namioka (村上訳)：" 線形位相空間論 ", 共

立出版(1972).
(7) B.M. スミルノフ : 才2節の文献(12)
(8) R. Schatten : Norm ideals of completely continuous operators", 2nd Printing, Springer-Verlag. (1970).
(9) 日本数学会編 : "岩波数学辞典", 才2版, 岩波書店 (1971).
(10) 葛城純夫 : "文字パターン分布の要因分析と識別への応用", 昭和45年度四学連大, 2816, (1970-4)
(11) K. Yoshida : 才2節の文献(7)
(12) S. Goldman : 才2節の文献(8)
(13) 山内二郎, 森口繁一, 一松信 : 才2節の文献(11), P.89.
(14) 岩松聡 : "多入力係数加算器", 電気試験所彙報, 34, 1, PP.66-74 (1970-1).
(15) A. Zygmund : "Trigonometric series, Vol. I", Cambridge University Press, (1968).

才4節の参考文献

(1) 小川英光 : "複素共役作用素の空間回路網理論への応用", 昭和49年度信学全大, 1647 (1974-7).
(2) M.A. ナイマルク : 才3節の文献(5).
(3) S. Watanabe and N. Pakvasa : "Subspace method in pattern recognition", Proc. First IJCPR, pp.25-32 (1973)
(4) 磯道義典 : "浮遊円板法—自己学習のモデル—", 信学論(D), 55-D, 7, PP.435-441 (1972-7)
(5) 小川英光 : "情報処理機能の近似とその応用", 信学論(C), 54-C, 12, PP.1094-1101 (1971-12)
(6) B.M. スミルノフ : 才2節の文献(12)
(7) 近藤正三 : "ε-エントロピー理論に基づくパターン集合の近似理論",

信学論(D), 56-D, 9, PP.491-498(1973-9)
(8) R. Schatten : 才3節の文献(8)
(9) Л. А. リュステルニク, А. Р. ヤンポリスキー監修(佐藤監訳) : "関数解析", 現代応用数学ハンドブック, 9, 総合図書(1968).

才5節の参考文献

(1) Л. А. リュステルニク, В. И. ソボレフ(紫岡訳) : "関数解析入門, 1", 総合図書(1974).
(2) P. R. Halmos : "Finite-dimensional vector space", 2nd Edition, Van Nostrand (1958)
(3) 加藤敏夫 : "位相解析", 共立出版(1969)
(4) М. А. ナイマルク : 才3節の文献(5)
(5) R. Schatten : 才3節の文献(8)
(6) А. Р. フローシュ(井関訳) : "抽象代数学, 1", 東京図書, (1961)
(7) В. И. スミルノフ : 才2節の文献(12)
(8) 小川英光 : "一般化対称演算とその空間回路網理論への応用", 信学会パターン認識と学習研資, PRL 75-40 (1975-10)

才6節の参考文献

(1) В. И. スミルノフ : 才2節の文献(12)
(2) P. R. Halmos : 才5節の文献(2)

才7節の参考文献

(1) 小川英光 : "並進作用素と可換な作用素の空間の構造解析", 信学論(D), 57-D, 4, PP.197-204(1974-4).
(2) 五十嵐 彰, 小川英光, 飯島泰蔵 : 才1節の文献(22)
(3) 小川英光 : "並進作用素と可換な作用素の空間の直交基底", 信学論

(D), 57-D, 6, pp. 337-344 (1974-6)

(4) 飯島泰蔵 : 才1節の文献(8)

(5) B. M. スミルノフ : 才2節の文献(12)

(6) 遠山 啓 : "行列論", 共立全書47 (1964)

(7) 加藤敏夫 : 才5節の文献(3)

(8) M. A. ナイマルク : 才3節の文献(5)

才8節の参考文献

(1) 飯島泰蔵 : 才1節の文献(8)

(2) 長尾 真, 金出武雄 : "パターン認識における縁・線の抽出", 信学誌, 55, 12, pp. 1618-1627 (1972-12)

(3) 渡辺貞一, 米山恒雄, 玄地 宏 : "濃淡図形のセグメンテーション—微分ヒストグラム法—", 信学会, 画像工学研究会資料, IT72-1 (1972-5)

(4) A. Rosenfeld (石田他訳) : "電子計算機による画像処理", 共立出版 (1971)

(5) R. Schatten : 才3節の文献(8)

(6) B. M. スミルノフ : 才2節の文献(12)

(7) 五十嵐 彰, 小川英光 : "平行移動およびボケの変換の幾何学的意味", 信学会, オートマトン研究会資料, A70-91 (1971-3)

(8) R. Redheffer : Problem 5642, Amer. Math. Monthly, 76, p. 422 (1969) ; J. P. Williams によるこの不等式の証明が, 同じ雑誌の 76, 10, P. 1153 (1969) に載っている.

(9) 森 俊二, 飯島泰蔵 : 才1節の文献(14)

(10) D. G. Luenberger : "Optimization by vector space methods", John Wiley & Sons, Inc., (1963), P. 163

(11) D. S. Mitrinović : "Analytic inequalities", Springer-Verlag, (1970)

(12) 坂井利之，長尾真，藤林信也、木戸出正継："濃淡図形からの線要素の抽出とパターンの認識"，情報処理，10，3，pp.132－142（1969-3）.

才9節の参考文献

(1) 小川英光：才7節の文献(3)

(2) 小川英光，五十嵐彰："有限次元信号空間S_Nの基底"，電子技術総合研究所彙報，36，3，PP.180-192（1972-3）

(3) 飯島泰蔵：才1節の文献(8)

(4) R.Schatten：才3節の文献(8)

(5) I.Singer："Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces"，Springer-Verlag，(1970)

(6) 小川英光："ノルム空間における近似理論から見た主成分分析"，数理科学，1973年12月号，PP.63-67（1973-12）

(7) R.E.Edwards："On derivative and translational bases for periodic functions"，Proc.Amer.Math.Soc.，2，PP.644-653

(8) 加藤敏夫：才5節の文献(3)

才11節の参考文献

(1) 小川英光："相関関数を求める空間回路網"，昭和50年度信学全大，1211（1975-3）.

才12節の参考文献

(1) Y.W.Lee（宮川，今井訳）"Statistical theory of communication"，東京大学出版会，(1970)

(2) A.Zygmund：才3節の文献(15)

(3) 飯島泰蔵："位置移動に強い数似度を得るための正準化法"，未公開資料（1968年7月20日）

(4) 飯島泰蔵：″定正準化によるノルム変動の停留化″，未公開資料（1968年7月21日）
(5) 飯島泰蔵：″定正準化によるノルム変動の停留化，(II)″，未公開資料（1968年8月3日）
(6) 小沢一雅：″画像処理の交通科学への応用－文字線幅と視認性について－″，信学会 パターン認識と学習研資，PRL 74-3（1974-5）

才13節の参考文献

(1) 小川英光，五十嵐 彰：才9節の文献(2)

才14節の参考文献

(1) B. Gold and C. M. Rader（石田訳）：″電子計算機による信号処理″，共立出版（1973）.
(2) 森口繁一，宇田川鉦久，一松 信：″数学公式，II″，岩波全書229，岩波書店（1970）.

才15節の参考文献

(1) 小川英光：才5節の文献(8)

才17節の参考文献

(1) 小川英光：″空間回路網の誤差評価（観測誤差の評価）″，昭和46年度信学全大，153（1971-4）.
(2) 飯島泰蔵：才1節の文献(8)
(3) A. Papoulis：才2節の文献(4)
(4) 山崎一生，飯島泰蔵：″等間隔Samplingと理想低域通過沪波器との関係″，昭和42年度信学全大，130（1967-10）
(5) 舟久保 登：″空間回路網入力部″，信学会パターン認識と学習研資，

PRL 72-136 (1973-3).
(6) 河田龍夫 : "応用数学概論 II", 岩波全書162, 岩波書店 (1973)
(7) A. Zygmund : 才3節の文献(15)
(8) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信 : 才14節の文献(2)
(9) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信 : "数学公式. I", 岩波書店 (1970)
(10) Л. В. カントロビッチ, Г. П. アキーロフ (山崎他訳) : "ノルム空間の函数解析, 1", 東京図書 (1964)
(11) 岩松聡 : 才3節の文献(14)

才18節の参考文献

(1) 小川英光 : 才4節の文献(5)
(2) 五十嵐彰, 小川英光, 飯島泰蔵 : 才1節の文献(22)
(3) 小川英光, 五十嵐彰, 飯島泰蔵 : 才3節の文献(2)
(4) 加藤敏夫 : 才5節の文献(3)
(5) В. И. スミルノフ : 才2節の文献(12)
(6) F. Riesz and B. Sz.-Nagy : "Leçons dánalyse fonctionnelle", Acad. Kiadó, Boudapest, 2nd ed., P. 201 (1953)
(7) M. A. ナイマルク : "才3節の文献(5)
(8) 小川英光 : 才9節の文献(6)
(9) I. Singer : 才9節の文献(5)
(10) 吉村ミツ, 飯島泰蔵 : "一次元パターンの才二標本化", 昭和42年度四学連大, 2907 (1967-4)
(11) 飯島泰蔵, 森俊二, 玄地宏, 他 : "文字読取機 ASPET/70 の構成", 昭和45年度四学連大 2712 (1970-4).
(12) R. Schatten : 才3節の文献(8)

才19節の文献

(1) 小川英光 ： "作用素半群の直線近似"，昭和51年度電子通信学会総合全国大会，S11-2 (1976-3)
(2) K. Yoshida ： 才2節の文献(7)
(3) 舟久保 登 ： "位置正規化装置"，電気試験所彙報，34，1，pp.24-33 (1970-1)
(4) M.A. ナイマルク ： 才3節の文献(5)
(5) 飯島泰蔵 ： 才1節の文献(8)
(6) 森口繁一，宇田川銈久，一松 信 ： 数学公式，Ⅲ"，岩波全書244，岩波書店(1970).
(7) 五十嵐 彰，小川英光，飯島泰蔵 ： 才1節の文献(22)
(8) F.R. Gantmacher ： " The theory of matrices, Vol.2 ", Chelsea Publ. Co. (1971)
(9) 山崎一生，飯島泰蔵 ： "文字図形の観測機構"，信学論(D)，55-D，1，pp.15-22 (1972-1)

才20節の文献

(1) A. Papoulis ： 才2節の文献(4)
(2) 磯道義典 ： 才2節の文献(6)
(3) 舟久保 登 ： 才17節の文献(5)
(4) R. Schatten ： 才3節の文献(8)
(5) M.A. ナイマルク ： 才3節の文献(5)
(6) M.M. Sondhi ： " Image restoration : The removal of spatially invariant degradations ", Proc. IEEE, 60, 7, pp.842-853 (1972-7).
(7) T. Inouye ： " Spectral resolution improvement by non-damping filter ", Nuclear Instruments and Methods, 104, pp.541-544 (1972).

(8) M. P. Ekstrom : " A numerical algorithm for identifying spread functions of shift-invariant imaging system", IEEE Trans. on Computers, C-22, 4, pp. 322-328 (1973-4)
(9) 舟久保 登 : "空間回路波形測定装置", 電気試験所彙報, 30, 6, pp. 486-488 (1966-6).
(10) A. Tagliavini : "関数発生器ICを変形して直線性の良いVCOを作る", 日経エレクトロニクス, 1976年2月23日号, pp. 156-157 (1976-2)

才21節の参考文献

(1) 飯島泰蔵 : "擬似直交性理論とその空間回路網への応用", 昭和48年度信学全大, S8-1 (1973-3)
(2) 小川英光, 飯島泰蔵 : "擬似直交性理論", 信学会(D), 58-D, 5, pp. 271-278 (1975-5)
(3) 小川英光, 飯島泰蔵 : "擬似直交性理論", 信学会パターン認識と学習研資, PRL 73-44 (1973-7).
(4) 佐藤 誠, 飯島泰蔵 : "空間情報伝送系における比例性ノイズ抑制法", 信学論(D), 58-D, 5, pp. 279-286 (1975-5)
(5) R. Schatten : 才3節の文献(8)
(6) P. R. Halmos : "A Hilbert space problem book", D. Van Nostrand (1967)
(7) D. G. Luenberger : 才8節の文献(10)

才22節の参考文献

(1) 安田 稔, 山口幸也, 福島邦彦, 長田昌次郎 : "視覚系受容野の電子回路モデル", 信学論(C), 54-C, 6, pp. 514-521 (1971-6)
(2) 辻内順平, 村田和美 編 : "光学情報処理", 朝倉書店 (1974)

発表論文一覧

1. 本研究に関する発表論文

1.1 論文

(1) 五十嵐、小川、飯島：“線形空間回路網理論の位相解析的基礎づけ”，電子通信学会論文誌(C)，53-C，6，pp. 393-401 (1970-6)

(2) 小川、五十嵐、飯島：“空間回路網”，情報処理(人工知能特集号)，11，11，pp. 672-681 (1970-11)；Information Processing in Japan，11 (1971) に掲載．

(3) 小川，五十嵐，飯島：“Dyadic 表現による線形空間回路網理論の展開”，電子通信学会論文誌(C)，54-C，1，pp. 58-65 (1971-1)

(4) 小川：“情報処理機能の近似とその応用”，電子通信学会論文誌(C)，54-C，12，pp. 1094-1101 (1971-12)

(5) 小川，五十嵐：“有限次元信号空間 S_N の基底”，電子技術総合研究所彙報，36，3，pp. 180-192 (1972-3)

(6) 小川：“並進作用素と可換な作用素の空間の構造解析”，電子通信学会論文誌(D)，57-D，4，pp. 197-204 (1974-4)

(7) 小川：“並進作用素と可換な作用素の空間の直交基底”，電子通信学会論文誌(D)，57-D，6，pp. 337-344 (1974-6)

(8) 小川，飯島：“擬似直交性理論”，電子通信学会論文誌(D)，58-D，5，pp. 271-278 (1975-5)

1.2 口頭発表(1)：研究会

(9) 五十嵐，小川，飯島：“空間回路網理論の位相解析的考察”，電子通信学会オートマトン研究会，A68-62 (1969-3)

(10) 小川，五十嵐，飯島：“Dyadic 表現による空間回路網理論の展開”，電子通信学会オートマトン研究会，A69-33 (1969-9)

(11) 小川，飯島：″帯域制限されたパターンに対する情報処理機能の最良近似″，電子通信学会オートマトン研究会，A 70-22 (1970-7)

(12) 五十嵐，小川：″平行移動およびボケの変換の幾何学的意味″，電子通信学会オートマトン研究会，A 70-91 (1971-3)

(13) 小川：″並進作用素と可換な機能空間の構造解析″，電子通信学会オートマトン研究会，A 71-104 (1972-1)

(14) 小川：″並進作用素と可換な機能空間の構造解析，Ⅱ″，電子通信学会パターン認識と学習研究会，PRL 72-85 (1972-12)

(15) 小川：″並進作用素と可換な機能空間の直交基底″，電子通信学会パターン認識と学習研究会，PRL 72-137 (1973-3)

(16) 小川，飯島：″擬似直交性理論″，電子通信学会パターン認識と学習研究会，PRL 73-44 (1973-7)

(17) 小川：″一般化対称演算とその空間回路網理論への応用″，電子通信学会パターン認識と学習研究会，PRL 75-40 (1975-10)

1.3 口頭発表 (2)：大会

(18) 五十嵐，小川，飯島：″空間回路網理論の位相解析的考察″，昭和44年度電気四学会連合大会，No. 2979 (1969-3)

(19) 小川，五十嵐，飯島：″Dyadic表現による空間回路網理論の展開″，昭和44年度電子通信学会全国大会，No. 88 (1969-9)

(20) 小川，飯島：″有界線形情報処理機能の分類″，昭和45年度電気四学会連合大会，No. 2805 (1970-4)

(21) 小川，舟久保，飯島：″オ二標本化と Low-Pass Filter″，昭和45年度電子通信学会全国大会，No. 110 (1970-8)

(22) 五十嵐，小川：″平行移動およびボケの変換の幾何学的意味″，昭和46年度電子通信学会全国大会，No. 148 (1971-4)

(23) 小川：″空間回路網の誤差評価（観測誤差の評価）″，昭和46年度

電子通信学会全国大会, No. 153 (1971-4)

(24) 小川 : "並進作用素と可換な機能空間の構造解析", 昭和47年度電子通信学会全国大会, No. 80 (1972-4)

(25) 小川 : "並進作用素と可換な機能空間の構造解析, II", 昭和48年度電子通信学会全国大会, No. S8-2 (1973-3)

(26) 小川 : "複素共役作用素の空間回路網理論への応用", 昭和49年度電子通信学会全国大会, No. 1647 (1974-7)

(27) 小川 : "相関関数を求める空間回路網", 昭和50年度電子通信学会全国大会, No. 1211 (1975-3)

(28) 小川 : "作用素半群の直線近似", 昭和51年度電子通信学会総合全国大会, No. S11-2 (1976-3)

2. その他の発表論文

2.1 論文

(29) 小川, 磯道 : "最適 n 次元空間フィルタ (Low-Passの場合)", 電子通信学会論文誌(C), 51-C, 8, PP. 351-358 (1968-8)

(30) Ogawa and Isomichi : "Optimum spatial filter and uncertainty", Information and Control, 14, 2, PP. 180-216 (1969-2)

(31) 小川 : "ベッセル関数およびラゲールの多項式の零点の評価", 電子技術総合研究所彙報, 36, 3, PP. 193-199 (1972-3)

2.2 口頭発表

(32) 小川, 磯道 : "最適 n 次元 Low Pass 空間フィルタ", 昭和42年度電気四学会連合大会, No. 2916 (1967-4)

(33) 小川, 磯道 : "最適 n 次元空間フィルタ - Low Passの場合", 電気通信学会オートマトン研究会, A67-9 (1967-5)

(34) Ogawa and Isomichi : "The optimal n-dimensional spatial filter (low-pass type)", Proc. of the Hawaii International Conference on System Sciences, pp. 707-709 (1968-1)

(35) 小川 : "ベッセル関数の零点の評価(零点の評価への変分法の応用)", 昭和43年度電子通信学会全国大会, No. 23 (1968-10)

(36) 小川 : "学習問題への幾何学的アプローチ", オー回行動計量学大会, pp. 42-43 (1973-9)

3、解説

(37) 小川 : "ノルム空間における近似理論からみた主成分分析", 数理科学, 1973年12月号, pp. 63-67 (1973-12)

命題索引

番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁
2. 1	18	4. 4	81	5. 9	116	6. 6	154	6. 30	181
2	18	5	81	10	118	7	156	31	184
3	19	6	81	11	122	8	157	32	184
4	21	7	82	12	123	9	157	33	185
5	25	8	83	13	125	10	159	34	187
6	26	9	83	14	126	11	160	35	188
7	27	10	84	15	127	12	161	36	190
8	29	11	86	16	128	13	162	37	192
9	29	12	89	17	130	14	164	38	192
10	30	13	91	18	131	15	166	7. 1	198
3. 1	44	14	92	19	131	16	168	2	199
2	49	15	96	20	132	17	169	3	200
3	53	16	99	21	132	18	170	4	202
4	55	17	100	22	133	19	170	5	202
5	61	18	102	23	135	20	172	6	202
6	62	19	103	24	136	21	173	7	203
7	63	5. 1	107	25	137	22	173	8	205
8	64	2	108	26	138	23	175	9	206
9	65	3	109	27	138	24	177	10	206
10	66	4	110	6. 1	147	25	179	11	206
11	66	5	110	2	148	26	179	12	208
4. 1	78	6	111	3	149	27	179	13	209
2	79	7	111	4	150	28	180	14	211
3	80	8	112	5	152	29	180	15	212

番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁
7. 16	213	8. 6	247	10. 8	292	11. 12	315	12. 17	353
17	214	7	250	9	293	13	321	18	353
18	215	8	251	10	293	14	321	19	354
19	216	9. 1	261	11	294	15	323	13. 1	360
20	217	2	263	12	295	16	323	2	360
21	218	3	266	13	295	17	324	3	361
22	219	4	267	14	296	18	325	4	361
23	220	5	268	15	297	19	325	5	362
24	222	6	268	16	299	20	326	6	362
25	223	7	270	17	299	21	327	7	363
26	223	8	271	18	300	12. 1	328	8	364
27	224	9	273	19	301	2	329	9	365
28	226	10	273	20	301	3	330	10	367
29	228	11	275	21	302	4	331	11	367
30	229	12	275	22	303	5	333	12	368
31	230	13	276	11. 1	306	6	335	13	369
32	231	14	276	2	306	7	336	14	370
33	231	15	277	3	308	8	337	15	371
34	233	16	279	4	309	9	338	16	372
35	234	10. 1	287	5	310	10	340	17	374
36	235	2	287	6	310	11	340	18	376
8. 1	238	3	290	7	311	12	340	19	377
2	239	4	290	8	313	13	341	20	379
3	240	5	291	9	313	14	343	21	380
4	244	6	291	10	313	15	345	22	381
5	246	7	292	11	315	16	347	23	382

番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁
13. 24	384	14. 23	412	16. 2	445	17. 2	469	20. 8	530
25	385	15. 1	413	3	446	3	470	9	536
26	385	2	415	4	446	4	471	10	557
27	386	3	417	5	447	5	480	11	560
14. 1	389	4	418	6	447	6	481	12	560
2	390	5	420	7	448	7	481	13	561
3	390	6	420	8	448	8	482	14	561
4	392	7	422	9	449	9	484	15	563
5	392	8	422	10	449	10	484	21. 1	570
6	392	9	423	11	450	11	484	2	571
7	393	10	424	12	451	18. 1	488	3	572
8	394	11	425	13	452	2	488	4	573
9	395	12	425	14	453	3	491	5	574
10	396	13	426	15	454	4	492	6	576
11	397	14	426	16	454	5	495	7	576
12	398	15	427	17	455	19. 1	503	8	576
13	399	16	428	18	455	2	507	9	577
14	400	17	428	19	456	3	511	10	577
15	405	18	429	20	457	4	514	11	578
16	405	19	430	21	457	20. 1	523	12	578
17	406	20	431	22	458	2	523	13	582
18	406	21	432	23	458	3	524	14	584
19	408	22	433	24	462	4	526	15	584
20	408	23	436	25	463	5	526		
21	410	24	437	26	463	6	528		
22	412	16. 1	444	17. 1	467	7	529		

系索引

番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁
2. 1	18	6. 3	149	7. 8	216	9. 14	278	12. 4	334
2	20	4	151	9	216	15	280	5	335
3	24	5	158	10	217	16	280	6	338
4	25	6	158	11	226	17	280	7	341
5	28	7	158	12	230	10. 1	288	8	342
3. 1	55	8	161	13	231	2	292	9	342
2	56	9	161	14	233	3	293	10	345
3	64	10	164	8. 1	240	4	294	11	346
4. 1	80	11	165	2	241	5	297	13. 1	361
2	82	12	171	3	241	6	297	2	368
3	82	13	171	4	247	7	297	3	368
4	89	14	173	9. 1	262	8	304	4	370
5	92	15	174	2	264	11. 1	307	5	371
6	98	16	176	3	265	2	307	6	372
7	102	17	176	4	265	3	308	7	372
8	102	18	177	5	267	4	308	14. 1	389
5. 1	110	19	180	6	271	5	311	2	393
2	126	7. 1	199	7	272	6	319	3	394
3	126	2	200	8	273	7	321	4	403
4	126	3	204	9	273	8	325	5	405
5	132	4	205	10	276	9	326	6	405
6	140	5	210	11	276	12. 1	332	15. 1	416
6. 1	148	6	210	12	276	2	332	2	417
2	148	7	214	13	278	3	334	3	429

番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁
15、4	436	17、1	475	17、5	484	20、2	558	21、2	575
16、1	441	2	481	19、1	504	3	559	3	577
2	443	3	481	2	505	4	561		
3	458	4	482	20、1	531	21、1	572		

補題索引

番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁
2、1	17	5、4	120	6、10	180	13、3	384	17、5	476
3、1	38	5	121	7、1	206	14、1	390	19、1	503
2	41	6	121	2	228	2	396	2	503
3	42	7	123	8、1	238	15、1	425	3	506
4	42	8	129	2	244	16、1	440	4	513
5	44	9	135	3	245	2	440	20、1	557
6	45	10	140	9、1	261	3	441	2	559
7	45	6、1	147	2	261	4	442	3	562
8	46	2	152	3	282	5	442	21、1	567
9	51	3	153	4	283	6	443	2	567
4、1	86	4	155	11、1	320	7	450	3	568
2	93	5	160	12、1	351	8	453	4	568
3	96	6	162	2	351	17、1	469	5	568
5、1	114	7	166	3	352	2	470	6	569
2	114	8	167	13、1	365	3	470	7	569
3	116	9	174	2	365	4	474		

図索引

番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁
1. 1	8	5. 7	139	10. 2	289	15. 2	419	20. 6	532
2. 1	23	6. 1	153	3	299	3	424	7	533
3. 1	36	2	167	4	302	4	431	8	537
2	54	3	169	11. 1	309	5	433	9	538
3	56	4	184	2	314	6	435	10	541
4	58	5	191	3	317	7	438	11	543
5	60	6	193	4	318	16. 1	445	12	544
6	60	7. 1	201	5	319	2	451	13	545
7	61	2	213	6	322	3	459	14	546
8	70	3	227	12. 1	337	17. 1	467	15	547
9	73	4	232	2	346	2	480	16	548
4. 1	78	5	232	3	349	3	483	17	549
2	87	8. 1	240	13. 1	359	18. 1	494	18	550
3	91	2	242	2	366	19. 1	502	19	550
4	92	3	245	3	369	2	502	20	551
5	94	4	248	4	373	3	506	21	552
6	100	5	249	14. 1	388	4	511	22	554
7	101	6	252	2	393	5	516	23	555
8	104	7	253	3	397	6	516	24	556
5. 1	117	8	254	4	398	7	516	25	556
2	119	9	256	5	402	20. 1	521	21. 1	566
3	120	9. 1	263	6	404	2	529	2	580
4	122	2	281	7	407	3	529	3	580
5	131	3	283	8	409	4	531	4	581
6	134	10. 1	289	15. 1	416	5	531	22. 1	594

表索引

番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁	番号	頁
1、1	4	11、1	324	13、1	377	14、2	410	16、2	460
6、1	178	12、1	330	2	383	3	411	19、1	517
9、1	281	2	339	14、1	400	16、1	456	20、1	539

記号索引

まず、記号の一般的使用法を述べる.

A	作用素
A_N	有限次元作用素
$\tilde{A_N}$	A_N の空間周波数特性(行列またはベクトル)
$\hat{A_N}$	A_N の結合特性(行列またはベクトル)
$\tilde{A_N}(m,n)$	$\tilde{A_N}$ (行列)の成分
$\hat{A_N}(m,n)$	$\hat{A_N}$ (行列)の成分
$\tilde{A_N}(n)$	$\tilde{A_N}$ (ベクトル)の成分
$\hat{A_N}(n)$	$\hat{A_N}$ (ベクトル)の成分
$a_N(x,y)$	A_N の積分核
$a_N(x)$	A_N のインパルス応答

A

$\tilde{A}$ 204, 307

$\tilde{A_N}$ 61, 446, 448

$\hat{A_N}$ 61, 221, 316 445, 447

$\tilde{A}(n)$ 203, 306

$\tilde{A_N}(n)$ 313, 445, 447

$\hat{A_N}(n)$ 220, 315, 444

$\tilde{A}(m,n)$ 49

$\hat{A_N}(m,n)$ 59

a_n 51

$a_n^{(N)}$ 241

$a_N(x)$ 210, 322

$a_N(x,y)$ 63

B

$B(L_2)$ 37

$B(H_N)$ 57

$B^{(1)}(L_2)$ 202

$B^{(2)}(L_2)$ 305

$B^{(1)}(H_N)$ 202

$B^{(2)}(H_N)$ 306

$B^{(3)}(H_N)$ 439

$B^{(4)}(H_N)$ 439

$B_i(H)$ 90

$B_{ai}(H)$ 90

$B_i^{(1)}(H_N)$ 233

$B_{ai}^{(1)}(H_N)$ 234

$B_{ea}(H_N)$ 299

$B_{oa}(H_N)$ 299

$B_{ea}^{(n)}(H_N)$ 345

$B_{oa}^{(n)}(H_N)$ 345

$B_1(X)$ 41

$B_2(X)$ 39

$B_c(X)$ 84

C

C_N 348

$C^{(\alpha)}$ 225

$C_n(x)$ 225

$C_N(x, a)$ 409

$C_n^{(\pm 1)}$ 399

D

D 48

D_N 238

D_N^2 252

$D_{N(1)}$ 243

$D_{N(1)}^2$ 255

$d_1(x)$ 240

$d_2(x)$ 254

$\Delta_N(a)$ 227

$\Delta_N(x, a)$ 229

$\delta_{m,n}$ 21

E

E 80

E_N 57

E_p 471

E_{MN} 497

$E^{(n)}$ 89

$E_N^{(e)}$ 230

$E_N^{(o)}$ 230

$E_N^{(ea)}$ 299

$E_N^{(oa)}$ 299

$E_N^{(\lambda)}$ 394

$E_N(a)$ 406

$E_N^{(i)}(a)$ 411

$E_N^{(r)}(a)$ 411

ϵ_n 224

F

$F_N(a)$ 439

$\tilde{f_n}$ 49

$\hat{f_n}$ 64

Φ_N 55, 387

$\hat{\Phi_N}$ 61

$\Phi_N^{(i)}$ 407

$\Phi_N^{(r)}$ 407

$\varphi_n(x)$ 48

$\varphi_n^{(\alpha)}$ 399

$\varphi_N(x, y)$ 404

G

$\Gamma(\tau)$ 509

H

H 77

H_N 50

$H_N^{(e)}$ 228

$H_N^{(o)}$ 228

$H_N^{(ea)}$ 299

$H_N^{(oa)}$ 299

$H^{(n)}$ 226

$H_N^{(\lambda)}$ 392

I

I_N 255

$I(0)$ 166

$I(a)$ 286

$I_N(\{\alpha_n\}_{n=1}^N)$ 562

J

$J_N(a)$ 439

K

$\mathrm{Ker}(A)$ 83

L

L_N 469

L_2 42

$L_2[-\ell, \ell]$ 35

ℓ 35

ℓ_2 42

$\mathcal{L}(S)$ 313

M

$M(a)$ 525

$\mu(A_N)$ 247

N

$\nabla_N(x, a)$ 229

O

Ω 106

Ω_e 78, 106

ω 106, 359

ω_e 77, 106

P

$\psi_0(x)$ 51

$\psi_0^{(N)}$ 115

$\psi_n(x)$ 53

$\psi_n^{(e)}(x)$ 231

$\psi_n^{(o)}(x)$ 231

$\psi_n^{(\lambda)}$ 399

R

$R(A)$ 83

ρ_1 208

ρ_2 320

ρ_3 453

ρ_4 453

S

S_N 532

$S^{(n)}$ 225

$s_n(x)$ 225

$s_N(x, a)$ 409

$s_n^{(\pm i)}$ 400

$\Sigma_N(a)$ 227

T

$T(a)$ 197

$T_N(\{d_n\}_{n=1}^N)$ 559

$nl_3(v, \tau)$ 510

U

$U_N(x, y)$ 369

W

W_N 260

$W_N(a)$ 527

汎関数

$tr(A)$ 41

(f, g) 17

(A, B) 40

$\|f\|$ 17

$\|A\|$ 39

$\|A\|_2$ 39

単項演算

$[A_N]$ 260

$\bar{f}$ 76

$\bar{A}$ 78

$\bar{S}$ 83

$A_N^{\#}$ 106, 389

f' 106, 389

A_N' 362, 458

$A_N^{\star}$ 107, 390

$A_N^{\star a}$ 298

f^* 77, 107, 390

A^* 39

$U_{m,n}^*$ 27

二項演算

$f * g$ 220

$f \otimes g$ 329

$\langle f, g \rangle$ 38

$\langle f, A \rangle$ 211

$\langle A, f \rangle$ 211

$U^{(1)} \circ U^{(2)}$ 118

$\Omega_1 \circ \Omega_2$ 139

$\omega_1 \circ \omega_2$ 118, 364

その他

(d_n) 204

$((a_{m,n}))$ 43

事項索引

イ

位相空間　32
位相線形空間　33
一様位相　488
一様構造　221
一様収束　84
一般逆　255
イデアル　132
　左—　132
　右—　132
　両側—　40, 132
インパルス応答　208, 320
ε網　84

エ

α－奇関数　300
α－偶関数　300
α－対称演算　298
Hermite 対称　18

オ

折り返し誤差　473
Euler数　471
Ω_1－虚部　154
Ω_1－実部　154
Ω_1－実分解　154
Ω_e－虚部　97
Ω_e－実部　97
Ω_e－実分解　97

カ

回帰的　109
解析半群　47
核（作用素の）　83
加法定理　268
　標本化基底の—　276
　並進基底の—　273
　$\varphi_n(x)$の—　221, 268
完全正規直交系　39
Cahn形標本化定理　20

キ

擬似双直交系　584
擬似直交系　571
　等長—　575
基底　260
　円錐—　373
　階数1の—　277
　擬似直交—　571

擬似直交標本化 — 582
実 — 82
正規双直交 — 523
正規直交標本化 — 20
正値 — 280
標本化 — 20, 274
並進 — 271
ベキ等 — 279
ユニタリ — 269
基本座標系 46
L_2 の — 48
H_N の — 51
$\mathcal{B}^{(1)}(L_2)$ の — 205
$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ の — 205
$\mathcal{B}^{(2)}(H)$ の — 309
$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ の — 446
$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ の — 448
$\mathcal{B}_i^{(1)}(H_N)$ の — 236
$\mathcal{B}_{ai}^{(1)}(H_N)$ の — 236
$\mathcal{B}_e^{(2)}(H_N)$ の — 347
$\mathcal{B}_o^{(2)}(H_N)$ の — 347
逆巡回行列 288
逆対称行列 92
強位相 43, 488
強収束 43
共変的 127
共役演算 79
共役級数 349
共役元 349
虚部（作用素の） 97
近傍 32
Gibbsの定数 477

ク

空間回路網 5
空間周波数 48
空間周波数特性 49
空間回路網の — 59
A_N の — 59
$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における — 205
$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ における — 307
$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ における — 446
$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ における — 448
Christoffel数 28
Christoffel-Darbouxの公式 23
Kronecker積 38

ケ

形式保存性（擬似直交系の） 573
結合特性 61
$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$ における — 221
$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$ における — 316
$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$ における — 445
$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$ における — 447

コ

コンパクト集合　84
conjugation　109

サ

再生核　18
　H_Nの —　51
作用素の縮小　133
作用素
　一般化反転 —　562
　一般化並進 —　559
　完全連続 —　84
　奇 —　235
　虚 —　85
　鏡映 —　184
　共役 —　39
　極大部分等長 —　572
　偶 —　105, 235
　空間周波数反転 —　443
　空間積分 —　255
　差分 —　227
　自己共役 —　88
　自己双対 —　423
　実 —　85
　射影 —　57
　巡回的空間周波数逓倍 —　441
　正規 —　135
　正弦 —　225
　正弦/余弦変換 —　348
　生成 —　106, 501
　双対 —　421, 428
　対称 —　47
　等長 —　572
　等方 —　90
　二階微分 —　252
　反自己共役 —　93
　反自己双対 —　423
　半線形 —　109
　反転 —　106, 286
　反等方 —　90
　微分 —　48, 238
　非有界 —　37
　複素共役 —　78
　部分等長 —　572
　平均化 —　227
　並進 —　47, 197
　ベキ等 —　135
　ボケの —　509
　有界 —　37
　有限次元的 —　40
　有限Fourier変換 —　387
　ユニタリ —　9
　余弦 —　225

α－奇 — 300
α－偶 — 300

シ

次元独立性 435
　オ一種 — 435
　オ二種 — 437
自然座標系（H_Nの） 53
　$H_N^{(e)}$の — 232
　$H_N^{(o)}$の — 232
　$\mathcal{B}^{(1)}(H_N)$の — 211
　$\mathcal{B}^{(2)}(H_N)$の — 316
　$\mathcal{B}^{(3)}(H_N)$の — 445
　$\mathcal{B}^{(4)}(H_N)$の — 447
　$\mathcal{B}_i^{(1)}(H_N)$の — 236
　$\mathcal{B}_{ai}^{(1)}(H_N)$の — 236
　$\mathcal{B}_e^{(2)}(H_N)$の — 347
　$\mathcal{B}_o^{(2)}(H_N)$の — 347
実部（作用素の） 97
実分解 97
四分割法 536
縮退 575
巡回行列 200
情報処理機能 36
Jordan の不等式 244
Schmidt 族 39
信号空間 31

ス

数値積分公式 57

セ

精度（作用素の） 247
積分核 63
積分正弦関数 477
積分表現 63
選点直交性 26
選点表現（内積の） 26

ソ

相関関数 329
　自己 — 334
　相互 — 329
双対演算（H_Nにおける—） 106
　$\mathcal{B}(H_N)$における — 106
双対関数 414
　自己 — 415
　反自己 — 415

タ

大域相互依存回路網 5
対合 106
　環における — 128
　線形空間における — 109

虚 — 129
共変 — 106, 128, 129
実 — 106, 129
反変 — 128
変形 — 359
　オー種 — — 359
　オニ種 — — 359
　オ三種 — — 458
　オ四種 — — 458
対称演算 107, 390
オニ標本化 497
楕円テータ関数 510
たたみこみ 220
dyad 38
　拡張された — 323
dyadic 38
dyadic 表現 43

チ

重複度 203
直交補空間 115
直和分解 93
直流応答 453
Čebyšev 形近似定理 492
　強い意味の — 491
Čebyšev 形近似問題 490
Čebyšev 部分空間 493

テ

低域通過沪波器 498
定正準化 351
de la Vallée Poussin 三角多項式 471
Dirichlet 核 64
Dirichlet 共役核 349
Dirichlet 積分 64

ト

同形 208, 209
同相誤差 479
　m- — 479
等方分解 102
トレース 41
　$B^{(1)}(H_W)$ の元の — 216
トレース族 41

ナ

内積 17
　Schmidt の — 40
内積の公理 40

ニ

二分割法 538

ノ

ノルム　17
　強 —　267
　作用素の —　39
　Schmidt —　39

ハ

反回帰的　129
反変的　128
Banach 空間　160
Banach 対称環　40
Hausdorff 空間　33
Parseval の等式　42

ヒ

標準分解　260
Hilbert 空間　34

フ

複素共役演算　78
複素共役関数　77
部分環　79
不変部分空間　47
分解能改善法　519
分離公理　33
Fourier 式展開　44

ヘ

偏長度　575
変形双対演算
　オ一種 —　362
　オ二種 —　362
　オ三種 —　458
　オ四種 —　458
Bernoulli 数　471
Perron の定理　513

ホ

補間三角多項式　474
補間表示装置　539
補間表示法　536

ユ

有限 Fourier 変換　55
ユニタリ同値　578

ラ～レ

Lagrange 補間多項式　25
離散的 Fourier 変換　388
real pulse による標本化定理　523
Lebesgue の定数　476
Redheffer の不等式　245

ワ

Weierstrass 形近似問題　487