

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

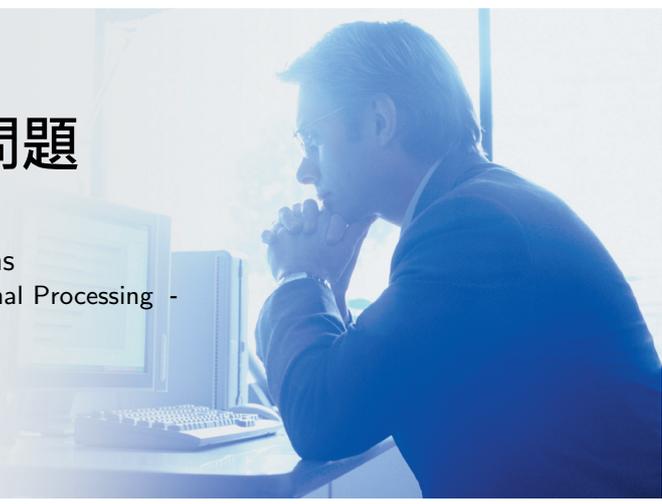
論題(和文)	信号処理・最適化・逆問題 --- 学際的自由研究のたのしみ
Title(English)	Signal Processing, Optimization, Inverse Problems --- Fun in the Interdisciplinary Perspective Around Signal Processing
著者(和文)	山田 功
Authors(English)	Isao Yamada
出典(和文)	, vol. 5, no. 1, pp. 68-79
Citation(English)	Fundamentals Review, vol. 5, no. 1, pp. 68-79
発行日 / Pub. date	2011, 7
URL	<a href="http://search.ieice.org/">http://search.ieice.org/</a>
権利情報 / Copyright	本著作物の著作権は電子情報通信学会に帰属します。 Copyright (c) 2011 Institute of Electronics, Information and Communication Engineers.

# 信号処理・最適化・逆問題

- 学際的自由研究のたのしみ -

Signal Processing, Optimization, Inverse Problems  
- Fun in the Interdisciplinary Perspective Around Signal Processing -

山田 功 Isao YAMADA



**アブストラクト** 信号処理工学は「生のデータから価値のある情報を引き出すための知や芸や技を創造・体系化するための総合科学」として成長し続け、音声・音響・画像処理工学や情報通信工学などの基盤として重要な役割を担っている。筆者は信号処理工学の進化が最適化や逆問題の深化と不可分であることを確信し、これらの隣接領域のアイデアを融合し、応用価値の高い相乗効果を生むことを目標にしてきた。本稿では、信号処理工学とその周辺分野の魅力を広く読者に伝えることを目的とし、筆者自身が関わった幾つかの研究事例を問題の背景や着想に至った経緯とともに易しく紹介している。

**キーワード** 凸最適化, 有限台ケプストラム変換, 代数的連続位相復元法, ハイブリッド最急降下法, 適応射影劣勾配法, MV-PURE

## 1. はじめに

カメラやマイクロホンやアンテナなど各種のセンサで観測された生のデータには価値のある所望情報だけでなく、不要な雑音やひずみがつきものです。生のデータから雑音やひずみを取り除き、価値の高い情報を推定する技術は信号処理と呼ばれていきます<sup>(1)-(3)</sup>

FR 誌の多くの読者にとって信号処理のイメージは「変換を使って生のデータを分析し、フィルタを使って所望情報を引き出す方法や技術」というものなのではないでしょうか。通常、生のデータは適当なベクトル空間中のベクトルとして表現されます。音のような一次元データであれば適当なサイズのユークリッド空間中のベクトルとして表現できますし、画像のような二次元データも適当なサイズの行列とみなせるのでユークリッド空間中のベクトルとして表現できます。

本稿では観測によって得られた生のデータを表現するベクトルを観測ベクトルと呼ぶことにします。基本的なシナリオでは、観測ベクトルは“信号成分(価値のある情報)”に“雑音成分(不要な情報)”が加わったものとしてモデル化されます。もちろん、信号成分と雑音成分の各々に関して何の先験情報もなければ、観測ベクトルから信号成分を上手に分離抽出することはできません。信号成分と雑音成分の各々に関して利用できる先験情報を駆使して、観測ベクトルから信号成分をできるだけ忠実に抽出することが目標となります。信号成分が特定の線形部分空間に入っていることが分かっている場合には、適当な基底やフ

レーム(基底の拡張概念<sup>(4)(5)</sup>: 必ずしも一次独立でないベクトル系)で観測ベクトルを展開し、部分空間に対応する成分を抜き出すことにより、信号成分を良好に近似するベクトルを抽出します。観測ベクトルを適当な基底やフレームで展開した際の展開係数ベクトルを与えるのが変換の役割です。実際に、フーリエ変換、離散フーリエ変換(DFT)、高速フーリエ変換(FFT)、離散コサイン変換(DCT)、ウェーブレット変換など、これまで信号処理に登場してきたほとんどの変換は様々な基底やフレームを採用して観測ベクトルを展開していることに相当しています。

また、雑音の影響を考慮して、信号成分が所属する部分空間に対応する成分を上手に抜き出すのがフィルタの役割です。

信号処理の性能を飛躍的に高めるには、かつて使われてこなかった斬新な先験情報を活用することが有効です。新しい先験情報は部分空間として表現できるものばかりではありませんから、「変換+フィルタ」という定石にこだわっているだけでは、上手に活用できません。伝統に縛られない自由な発想が必要です。複数の先験情報が利用できる場合には、これらを同時に有効利用する工夫も必要となります。そのせいか、信号処理では常識に捉われないアイデアがブレークスルーをもたらすことがよくあり、最前線の研究者が集う国際会議(例えば、IEEE Signal Processing Society 主催の国際会議 ICASSP<sup>(注1)</sup>)は異種格闘技のようなスリルと多様性の魅力に満ちています。

筆者自身は、浅学・非才を顧みず、「信号処理・最適化・逆問題」に大風呂敷を広げ、一見、無関係に見える複数の問題の間に潜むつながりを発見し、信号処理工学の問題を多面的に理解することを目標にしてきました。斬新な発想で、各々の問題に対する

山田 功 正員: シニア会員 東京工業大学大学院理工学研究科集積システム専攻  
E-mail isao@sp.ss.titech.ac.jp  
Isao YAMADA, Senior Member (Dept. of Communications and Integrated Systems, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, 152-8550 Japan).

電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ  
Fundamentals Review Vol.5 No.1 pp.68-79 2011 年 7 月  
©電子情報通信学会 2011

(注1): ICASSP は、高名な研究者とポスターを使って直接話ができるカジュアルさが人気を呼び、毎年、1,500 件に迫る最先端の成果が発表されています。ICASSP2012[General Chairs: H. Sakai (Kyoto Univ.) T. Nishitani (Tokyo Metro. Univ.), <http://www.icassp2012.com/>] は 2012 年 3 月に京都で開催されます。是非、日本から多くの方に参加して頂き、盛り上げて頂きますようお願いいたします。

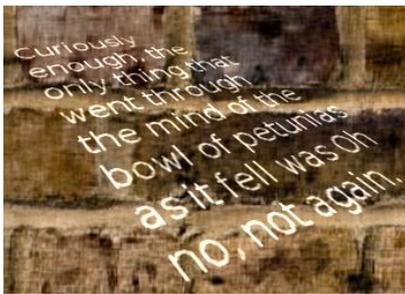
先人の優れたアイデアを有機的に融合し、信号処理工学の問題に応用できれば、想像していた以上の相乗効果生まれ、強力な信号処理アルゴリズムが実現できるに違いないと期待しているからです。

以下では FR 誌の読者に少しでも信号処理の面白さをお伝えできればと願い、筆者が関わった幾つかのささやかな研究事例を御紹介させて頂きたいと思ひます。

## 2. 信号分離と凸最適化問題

画像信号を適当なサイズの行列  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  で表現したとき、これが、低階数行列 (ランクが小さな行列)  $L_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  と疎行列 (非零成分の数が小さい行列)  $S_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  の和として表現される状況を想定し、行列  $M$  から  $L_0$  と  $S_0$  の各々を近似推定する問題を考えます (図 1)。この問題は、最近、画像の修復問題 (例えばインペインティング) や監視カメラや顔認識への応用が検討されている重要な信号分離問題になっています。

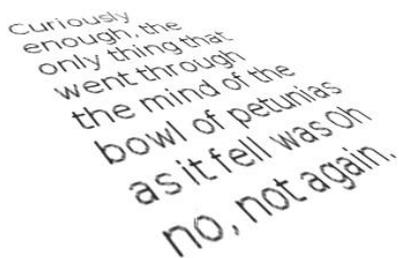
この問題では行列  $M$  が観測ベクトルに相当し、行列  $L_0$  と行



(a) 観測された画像 (行列  $M$ )



(b) 低階数行列成分  $L_0$



(c) 疎行列成分  $S_0$  (白黒反転表示)

図 1 「低階数行列 + 疎行列」分解問題の例

列  $S_0$  の各々が信号成分に相当しますが、 $L_0$  と  $S_0$  に関して利用できる先験情報は「 $L_0$  が低階数行列であること」と「 $S_0$  が疎行列であること」と「 $M = L_0 + S_0$  であること」だけです。

疎行列の集合は  $\mathbb{R}^{m \times n}$  の部分空間になりませんし、低階数行列の集合も部分空間にならないため<sup>(注2)</sup>、この問題に 1. で触れた「変換 + フィルタ」という定石は使えません。条件  $L + S = M$  のもとで整数値  $\text{rank}(L)$  と  $\|S\|_0 :=$  「 $S$  の非零成分の数」が共に小さくなる  $L$  と  $S$  のペアを見つけることが要請されているので、素直に考えてみれば、最適化問題

$$\underset{(L,S) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n}}{\text{minimize}} \quad \text{rank}(L) + \lambda \|S\|_0, \text{ s.t. } M = L + S \quad (1)$$

(ただし、 $\lambda > 0$  は適当な定数) を解決すればよさそうです<sup>(注3)</sup>。ところが画像処理で要請される問題のサイズ  $m, n$  は数千から数万であり、離散値関数  $\text{rank}(L) + \lambda \|S\|_0$  に関する最適化問題 (1) を現実的な時間で解決する方法は知られていません。理想を追求することも大事ですが、それが困難な場合には肩の力を抜いて少しか妥協する必要があります。幸い、最近、問題 (1) の解は幾つかの仮定の下で新たな最適化問題

$$\underset{(L,S) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n}}{\text{minimize}} \quad \|L\|_* + \lambda \|S\|_1, \text{ s.t. } M = L + S \quad (2)$$

の解によって良好に近似できることが分かっています<sup>(注4)</sup>。  $\|L\|_*$  は  $L$  の特異値の総和であり、 $L$  の核型ノルム (nuclear norm) [またはトレースノルム (trace norm)] と呼ばれています。  $\|S\|_1$  は  $S$  の全ての成分の絶対値和であり、 $S$  の  $\ell^1$  ノルムと呼ばれています。

直積集合  $\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n}$  は、線形代数でおなじみのユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  や全ての  $m \times n$  行列からなるベクトル空間  $\mathbb{R}^{m \times n}$  と一見全く別種の概念に見えますが、これらは、いずれもヒルベルト空間 (すなわち完備な内積空間) として統一的に扱うことができます<sup>(注5)</sup>。最適化問題 (2) の目的関数はヒルベルト空間  $\mathcal{H}_0 := \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n}$  上に定義された凸関数になります。更に、制約集合

$$D := \{(L, S) \in \mathcal{H}_0 \mid L + S = M\}$$

もヒルベルト空間  $\mathcal{H}_0$  の閉凸集合となるので、最適化問題 (2) は

(注2): この事実、ランク 1 の二つの行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

の線形結合  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  のランクが 2 になることから直ちに確認できます。

(注3): この例のように信号処理では、問題を最適化問題に翻訳して解決を図る方針が有力な戦略になっています。このことを考えると信号処理の研究を進めるのに最適化の知見が大いに役に立つことが想像できるかと思ひます。

(注4): 行列の非零特異値の総数は行列のランクに一致します。

(注5): まず、直積集合  $\mathcal{H}_0 := \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n}$  の二つの元  $X := (X_1, X_2), Y := (Y_1, Y_2) \in \mathcal{H}_0$  と実数  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して、加算と実数倍を各々  $X + Y := (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2), \alpha X := (\alpha X_1, \alpha X_2)$  のように定義すると  $\mathcal{H}_0$  がベクトル空間になることが分かります。更に、ベクトル空間  $\mathcal{H}_0$  に内積とノルムを  $\langle X, Y \rangle_{\mathcal{H}_0} := \frac{1}{2} \text{trace}(X_1^T Y_1) + \frac{1}{2} \text{trace}(X_2^T Y_2), \|X\|_{\mathcal{H}_0} := \sqrt{\langle X, X \rangle_{\mathcal{H}_0}}$  によって定義すると  $\mathcal{H}_0$  は結局、 $N (= 2mn)$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^N$  と同一視でき、ヒルベルト空間の条件を満足することが確かめられます (例えば、拙著 [6] p.92, p.121 参照)。

ヒルベルト空間に定義された凸最適化問題<sup>(注6)</sup> になっていることが分かります。一般に凸最適化問題は局所最適解が大域最適解となることが保証された筋が良い問題なのですが、最適化問題(2)の目的関数は微分不可能な点を多く持つ関数ですし、画像信号の表現に使われるのは大規模行列ですから、標準的なアルゴリズムは適用できません。

筆者らは、 $Z := (Z_1, Z_2) \in \mathcal{H}_0$  に対して二つの関数

$$f(Z) := \|Z_1\|_* + \lambda \|Z_2\|_1$$

$$g(Z) := i_D(Z) := \begin{cases} 0, & \text{if } Z \in D \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

を新たに定義することにより、制約付き最適化問題(2)が制約のない最適化問題

$$\underset{Z \in \mathcal{H}_0}{\text{minimize}} f(Z) + g(Z) \quad (3)$$

に書き換えられることに注目し、問題(3)に Douglas-Rachford splitting<sup>(7)-(9)</sup>(ヒルベルト空間上に定義された二つの凸関数の和の最小化を達成するアルゴリズム)を適用して解決することを提案しています<sup>(10)</sup>

Douglas-Rachford splitting の実現には各々の凸関数に対する近接写像 (proximity operator) の計算が必要になります。問題(3)の場合には、 $f$  と  $g$  の各々に対する近接写像は、任意に固定された  $\gamma \in (0, \infty)$  に対して

$$\text{prox}_{\gamma f}(Z) := \arg \min_{Y \in \mathcal{H}_0} \left\{ f(Y) + \frac{1}{2\gamma} \|Y - Z\|_{\mathcal{H}_0}^2 \right\}$$

$$= (\text{shrink}(Z_1, 2\gamma), \text{soft\_threshold}(Z_2, 2\gamma\lambda)) \in \mathcal{H}_0$$

$$\text{prox}_{\gamma g}(Z) := \arg \min_{Y \in \mathcal{H}_0} \left\{ g(Y) + \frac{1}{2\gamma} \|Y - Z\|_{\mathcal{H}_0}^2 \right\}$$

$$= \arg \min_{(Y_1, Y_2) \in D} \|(Y_1, Y_2) - (Z_1, Z_2)\|_{\mathcal{H}_0}$$

$$= \frac{1}{2} (M + Z_1 - Z_2, M - Z_1 + Z_2) \in \mathcal{H}_0$$

となります。幸い、 $\text{shrink}(Z_1, 2\gamma)$  (例えば文献(11)参照)は、 $Z_1$  の特異値分解

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^t,$$

(ただし、 $u_i^t u_j = \delta_{i,j}$ ,  $v_i^t v_j = \delta_{i,j}$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ ) を用いて

$$\text{shrink}(Z_1, 2\gamma) := \sum_{i=1}^n \max\{\sigma_i - 2\gamma, 0\} u_i v_i^t \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

と計算できますし、 $\text{soft\_threshold}(Z_2, 2\gamma\lambda)$  (例えば文献(5)(12)の第  $i, j$  成分  $\text{soft\_threshold}(Z_2, 2\gamma\lambda)_{(i,j)}$  も  $Z_2$  の第  $i, j$  成分  $Z_2(i, j)$  を用いて

(注6): ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上に定義された関数  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  は「 $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$  ( $\forall \lambda \in (0, 1), \forall x, y \in \mathcal{H}$ )」を満たすとき、凸関数であるといわれます。集合  $C \subset \mathcal{H}$  は「 $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$  ( $\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in C$ )」を満たすとき、凸集合であるといわれます。特に、 $C$  の境界も  $C$  に含まれるとき、閉凸集合であるといわれます。ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の閉凸集合上で凸関数を最小化する問題を凸最適化問題といわれます。

$$\text{soft\_threshold}(Z_2, 2\gamma\lambda)_{(i,j)}$$

$$= \text{sign}(Z_2(i, j)) \cdot \max\{0, |Z_2(i, j)| - 2\gamma\lambda\}$$

のように計算できます。Douglas-Rachford splitting は、二つの凸関数の和の最小化問題が

$$Z^* \in \mathcal{H}_0 \text{ minimizes } f + g$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z^* = \text{prox}_{\gamma g}(Y), \\ Y = (2\text{prox}_{\gamma f} - I)(2\text{prox}_{\gamma g} - I)(Y), \end{cases} \quad (4)$$

$$I: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ は恒等写像}$$

のように、 $T_1 := 2\text{prox}_{\gamma f} - I$  と  $T_2 := 2\text{prox}_{\gamma g} - I$  の合成写像  $T := (2\text{prox}_{\gamma f} - I)(2\text{prox}_{\gamma g} - I)$  の不動点を求める問題に帰着される事実を利用しています。幸い、 $T_1$  と  $T_2$  は共に非拡大写像となり、したがって、 $T$  も非拡大写像<sup>(注7)</sup>になるため、Mann の定理<sup>(13)-(15)</sup>(ヒルベルト空間で定義された非拡大写像の不動点の逐次近似定理<sup>(注8)</sup>)を適用して、関係(4)を満たす  $Y$  と  $Z^*$  が求められるのです。実際に、筆者らはこのアイデアを用いて、効率的に最適化問題(2)が解決できることを明らかにしています<sup>(10)</sup>。必ずしも微分可能性が保証されない複数の凸関数の和を最小化するタイプの最適化問題は、信号画像処理にとどまらず逆問題のシナリオの中に頻繁に登場します<sup>(15)(16)</sup>。最近、筆者らは「テンソルの低階数補完問題(三次元データの復元問題の数理モデル)<sup>(17)(18)</sup>」にも Douglas-Rachford splitting が応用できることを示し、その有効性を明らかにしています<sup>(19)</sup>。

### 3. 畳込みを和に変換する数理と信号分離

信号処理では Joseph Fourier(1768-1830) の名を冠したフーリエ変換以外にも多種多様な線形変換が利用されます。線形変換は、ベクトル空間に定義された多種多様な基底やフレームを新しい座標軸として採用することにより、生のデータを観察する視点を変える手段と考えられます。目的に応じた上手な線形変換を用い、所望情報の姿を鮮やかに浮かび上がらせることは信号処理の醍醐味の一つに違いありません。「少年よ大志を抱け」ではありませんが、学生時代の筆者にはこの定石は窮屈に感じられました。できることなら、線形変換の束縛から飛び出し、「簡単な計算で目の前の風景がガラリと変わるような斬新な変換」を発明し、信号処理の発展に寄与してみたいと妄想を抱いていました。デジタル信号処理のれい明期から名高いパイブル<sup>1)</sup>の第10章「Homomorphic Signal Processing」に「ベクトル空

(注7): 一般に、ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  に定義された写像  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  に対して、 $T(x) = x$  となる点  $x \in \mathcal{H}$  は写像  $T$  の不動点であるといわれます。全ての不動点から成る集合  $\text{Fix}(T) := \{x \in \mathcal{H} \mid T(x) = x\}$  を不動点集合といわれます。写像  $T$  は「 $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$  ( $\forall x, y \in \mathcal{H}$ )」を満たすとき、非拡大写像であるといわれます。非拡大写像の不動点集合が空でないとき、 $\text{Fix}(T)$  は閉凸集合になることが知られています(注17参照)。

(注8): ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  に定義された非拡大写像  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  が  $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$  を持つとき、任意の初期値  $x_0 \in \mathcal{H}$  と  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$  を満たす実数列  $(\alpha_n)_{n \geq 0} \subset [0, 1]$  を用いて、点列  $(x_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{H}$  を  $x_{n+1} := (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n)$  によって生成すると、 $(x_n)_{n \geq 0}$  は  $\text{Fix}(T)$  中の1点に弱収束することが知られています(Mannの定理)。特に  $\mathcal{H}$  が有限次元であるときには、弱収束は通常のノルムの意味の収束に一致します<sup>(6)</sup>。

間の代数演算 (ベクトルの加算とスカラー倍) の定義も変えてしまう魔法の変換」を利用するアイデアが紹介されています。信号処理に登場するほとんどの変換が「ベクトル空間の座標軸を取り換える機能を実現する線形変換」とどまっているのに対し、代数演算の定義を一変させる魔法の変換は信号処理に新たな発展の可能性を感じさせてくれます。2. の議論から想像できることですが、現在では、和の形で結合した 2 信号の分離問題については、ヒルベルト空間上の凸最適化の強力な解法を駆使することにより、多様な先験情報を効果的に生かすことが可能になっています。一方、畳込み演算で結合した 2 信号の分離問題については、重要な問題であるにも関わらず、特別な統計的仮定 (例えば、独立成分分析<sup>(20)</sup> (21) が採用している確率変数の独立性の仮定) 以外に先験情報を効果的に生かした解法はほとんど知られていません。仮に、魔法の変換を使うことによって「畳込み演算で結合した 2 信号を分離する問題」が「和の形で結合した 2 信号を分離する問題」に帰着できれば、凸最適化の解法を味方につけることができ、畳込み演算で結合した 2 信号の分離問題が見通し良く解決できるかもしれません。

代数演算を変える変換の代表例は、おなじみの (実) 対数関数です。対数関数の定義域は  $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  です。実際に、正数  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$  の積  $x_1 \cdot x_2 > 0$  は、対数関数  $\ln$  によって、 $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$  のように和に変換されます。実数の部分集合  $\mathbb{R}_+$  上の 2 項演算  $\otimes$  を通常の実数の乗算によって「 $x_1 \otimes x_2 := x_1 \cdot x_2 (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+)$ 」によって定義すると、 $(\mathbb{R}_+, \otimes)$  は可換群になりますが、任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  と  $x \in \mathbb{R}_+$  に対して  $\alpha \diamond x := \exp(\alpha \cdot \ln x)$  を新たに定義すると  $(\mathbb{R}_+, \otimes, \diamond)$  は  $\otimes$  をベクトルの加算、 $\diamond$  をスカラー倍演算とする実数体上のベクトル空間と見ることができます。ベクトル空間  $(\mathbb{R}_+, \otimes, \diamond)$  と一次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^1$  の間には

$$\begin{aligned} \ln((\alpha \diamond x_1) \otimes (\beta \diamond x_2)) &= \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 \\ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

が成立し、対数関数が二つのベクトル空間の間の同形写像を実現しています。この例を拡張し、「数列の畳込み演算」を「新しい数列の和に写す変換」が実現できれば、魔法の変換ができそうです。

Oppenheim 等はそのような変換の候補として複素ケプストラム変換を提案しています。以下、複素ケプストラム変換の方針とこの方針に潜む問題点を説明します。周知のように適当な条件のもとで、二つの実数列  $(x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$  と  $(y_k)_{k=-\infty}^{\infty}$  の畳込みは、実数列

$$z_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k \quad (n \in \mathbb{Z})$$

として定義され、両辺に複素数  $e^{-jn\omega}$  ( $\omega \in [0, 2\pi)$ ,  $j^2 = -1$ ) を掛けて、 $n$  について形式的な総和をとると、 $(z_k)_{k=-\infty}^{\infty}$  のフーリエ変換  $Z(\omega)$  は

$$Z(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{-jn\omega}$$

$$= \underbrace{\left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega} \right)}_{X(\omega)} \underbrace{\left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-jn\omega} \right)}_{Y(\omega)}$$

のように  $X(\omega)$  ( $(x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$  のフーリエ変換) と  $Y(\omega)$  ( $(y_k)_{k=-\infty}^{\infty}$  のフーリエ変換) の積で表現されます。

更に複素数に関して  $e$  を底とする対数を用いると

$$\underbrace{\log Z(\omega)}_{\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{-jn\omega}} = \underbrace{\log X(\omega)}_{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_n e^{-jn\omega}} + \underbrace{\log Y(\omega)}_{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{y}_n e^{-jn\omega}} \quad (5)$$

のように二つの複素数列  $(\hat{x}_n)_{n=-\infty}^{\infty}$  と  $(\hat{y}_n)_{n=-\infty}^{\infty}$  の和に変換できそうです<sup>(注9)</sup>。数列  $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$  を新しい数列<sup>(注10)</sup>  $(\hat{x}_n)_{n=-\infty}^{\infty}$  に写す変換は複素ケプストラム変換と呼ばれています。標語的に言えば、「数列のフーリエ変換の対数を計算した後、逆フーリエ変換を計算する」のが Oppenheim らの魔法の変換の方針です。非の打ち所がないアイデアに見えますが、実は対数関数  $\log X(\omega)$  の扱いには細心の注意が必要です。まず、一価関数の関係として式 (5) が成立するように複素対数関数の虚部に現れる  $2\pi$  の整数倍を正しく決定する必要があります (注9)。また、対数関数につきまとう特異点の存在もやっかいです。更に、各  $\omega \in [0, 2\pi)$  で  $2\pi$  の整数倍が矛盾なく決まり、 $\log X(\omega)$  が展開できる幸運な場合にも、複素ケプストラム  $(\hat{x}_n)_{n=-\infty}^{\infty}$  は一般に無限長数列になってしまいます<sup>(注11)</sup>。悲しいことですが、我々人間が扱うことができるのは、所詮は有限個の情報に限られてしまうので、無限長の数列  $(\hat{x}_n)_{n=-\infty}^{\infty}$  の表現は不便極まりません<sup>(注12)</sup>。「対数関数の特異点が原因で複素ケプストラムが定義できない数列が存在すること」や「有限長の数列に対応した複素ケプストラムが無限長になってしまうこと」は複素ケプストラム変換の使い勝手が甚だ悪いことを露呈しています。

筆者らは「複素ケプストラム変換に数多くの困難が生じる根本的な原因は、畳込み演算によって有限長数列の長さが保存されないことにある」と考えました。指定されたサイズ以下の長さを持った有限長数列全体の集合が畳込み演算で閉じるはずがありません。そこで、興味の対象をサイズ  $N$  を固定して定義される有限長数列の集合  $K^N := \{(x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N \mid x_0 > 0\}$  に絞ることにしました<sup>(22)</sup>。次に、任意の 2 数列  $(a_n)_{n=0}^{N-1}, (b_n)_{n=0}^{N-1} \in K^N$

(注9): 複素数  $z (\neq 0)$  の極形式  $z = r e^{j\theta} \in \mathbb{C}$  ( $j^2 = -1$ ,  $r > 0$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$ ) に現れる  $\theta (= \text{Arg}(z))$  を  $z$  の偏角の主値といいます。  $z$  の複素対数  $\log z$  は多価関数となり、その値は「 $\log z := \ln r + j(\theta + 2\rho\pi)$  ( $\rho$  は任意の整数、右辺の第 1 項の  $\ln$  は実対数関数)」のように無限個の複素数として定義されます。仮に、 $\rho = 0$  に固定し、虚部として偏角の主値を採用した一価関数  $\ln z := \ln r + j\theta$  を使ってみると  $z_i = r_i e^{j\theta_i}$  ( $r_i > 0$ ,  $-\pi < \theta_i \leq \pi$ ,  $i = 1, 2$ ) から、 $\ln z_1 + \ln z_2 = \ln r_1 r_2 + j(\theta_1 + \theta_2)$  となり、 $\theta_1 + \theta_2 \in (-2\pi, 2\pi]$  が複素数  $z_1 z_2$  の偏角の主値  $\text{Arg}(z_1 z_2) \in (-\pi, \pi]$  に一致する保証はありません。このことから、各  $\omega$  で関係 (5) を一価関数の意味で成立させるには  $\log X(\omega)$ ,  $\log Y(\omega)$ ,  $\log Z(\omega)$  の各々の虚部に現れる  $2\pi$  の整数倍を注意深く指定する必要があります (4. の議論参照)。

(注10):  $(\hat{x}_n)_{n=-\infty}^{\infty}$  は  $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$  の複素ケプストラムと呼ばれています。

(注11): 例えば、「 $x_0 = 1$ ,  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_n = 0 (n > 1)$ 」のフーリエ変換  $X(\omega) = 1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}$  に対して、 $\log X(\omega) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n} e^{-jn\omega}$  となり、「 $\hat{x}_n = \frac{2^{-n}}{n} (n = 1, 2, \dots)$ 」は無限長の数列になります。

(注12): サイズ  $N$  の DFT 及び IDFT を用いて、折り返しひずみを受けた有限長数列  $\hat{x}_n^{(N)} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_{n+Nk} (n = 0, 1, \dots, N-1)$  を得ることもできますが、このひずみの存在は大変やっかいです。

の有限畳込み演算 (finite convolution) を通常の畳込みを長さ  $N$  で打ち切った数列

$$(a \otimes b)_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

によって定義すると,  $(K^N, \otimes)$  が可換群になることに注目しました. 更に, この可換群にスカラー倍演算  $\diamond$  を新しく追加することができ, 実数体上のベクトル空間  $(K^N, \otimes, \diamond)$  が (適当な連続性の要請のもとで) 一意に定義されることを明らかにしています<sup>(23)</sup>. 「畳込み演算で結合した 2 信号を分離する問題」を考えると, 十分に大きなサイズ  $N$  を指定しておけば, ベクトル空間  $(K^N, \otimes, \diamond)$  は, 「畳込み演算で結合した 2 信号を分離する問題」を記述するのに不足のないベクトル空間になっていることが想像できます. 論文<sup>(22)</sup><sup>(23)</sup>ではベクトル空間  $(K^N, \otimes, \diamond)$  とユークリッド空間  $\mathbb{R}^N$  をつなぐ同形写像, すなわち

$$\begin{aligned} \Psi & \left[ \lambda \diamond (a_n)_{n=0}^{N-1} \otimes \mu \diamond (b_n)_{n=0}^{N-1} \right] \\ & = \lambda \Psi \left[ (a_n)_{n=0}^{N-1} \right] + \mu \Psi \left[ (b_n)_{n=0}^{N-1} \right] \\ & (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall (a_n)_{n=0}^{N-1}, (b_n)_{n=0}^{N-1} \in K^N) \end{aligned} \quad (6)$$

を満足する全単射  $\Psi: K^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  が本質的に一意に決まること, 更には, 与えられた  $(x_n)_{n=0}^{N-1} \in K^N$  から  $\Psi \left[ (x_n)_{n=0}^{N-1} \right] \in \mathbb{R}^N$  が簡単に計算できること等を明らかにしています<sup>(注13)</sup> [ $\Psi$  を有限台ケプストラム変換 (finite extent cepstrum transform) と呼んでいます]. この事実から  $\Psi$  を用いることにより, 「(有限)畳込み演算で結合した 2 信号を分離する問題」を「ユークリッド空間上に表現されたベクトルの和を分離する問題」に正確に翻訳できることが分かります. 特に, 論文<sup>(23)</sup>では, 行列やテンソルのような多次元配列データを扱うための数々の工夫と有限台ケプストラム変換の数理的な性質を詳しく紹介しています. 現在, 有限台ケプストラム変換と凸最適化の最近の知見を組み合わせることにより, 畳込み演算で結合した 2 信号の分離問題の新解法を探っています. 1990 年代前半に同形写像  $\Psi$  を提案した当時, 筆者には, 「和で結合した 2 信号の分離問題がヒルベルト空間上に定式化された凸最適化問題として首尾良く解決できること (2. 参照)」など想像もできないことでした. 20 年近くの時を経て, 同形写像  $\Psi$  の研究結果が, 「不動点集合上の凸最適化問題の研究 (5. 参照)」と出遭うことの不思議さを感じています.

#### 4. 代数的連続位相復元とアレー信号処理

「線形時不変システムの周波数特性 (振幅特性と位相特性) がシステムのインパルス応答のフーリエ変換で与えられること」は, 信号処理や回路理論のテキストの始めの方で学ぶ周知の事実です<sup>(1)-(3)</sup>. 数列  $(x_n)_{n=0}^{N-1}$  のフーリエ変換を  $X(\omega)$  とするとき, その位相特性は複素数  $X(\omega) = \Re \{X(\omega)\} + j\Im \{X(\omega)\}$  の偏角の主値を対応させる関数  $\hat{\theta}_X: [0, 2\pi) \ni \omega \mapsto \text{Arg} \{X(\omega)\} \in (-\pi, \pi]$  として定義されることが多いようです. もちろん, 「 $X(\omega)$  の偏角の主値  $\hat{\theta}_X(\omega)$ 」は逆正接関数  $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$  を

用いて

$$\hat{\theta}_X(\omega) := \begin{cases} \arctan \left( \frac{\Im \{X(\omega)\}}{\Re \{X(\omega)\}} \right) & (\text{if } \Re \{X(\omega)\} > 0) \\ \arctan \left( \frac{\Im \{X(\omega)\}}{\Re \{X(\omega)\}} \right) + \pi & (\text{if } \Re \{X(\omega)\} < 0, \Im \{X(\omega)\} \geq 0) \\ \arctan \left( \frac{\Im \{X(\omega)\}}{\Re \{X(\omega)\}} \right) - \pi & (\text{if } \Re \{X(\omega)\} < 0, \Im \{X(\omega)\} < 0) \\ \pi/2 & (\text{if } \Re \{X(\omega)\} = 0, \Im \{X(\omega)\} > 0) \\ -\pi/2 & (\text{if } \Re \{X(\omega)\} = 0, \Im \{X(\omega)\} < 0) \end{cases}$$

のように簡単に計算することができますが, 値域が  $(-\pi, \pi]$  に制限されるため, 不連続関数となってしまいます. また, 3. の議論でも触れたように, 本来, 位相特性に要請される基本性質「 $X(\omega)Y(\omega)$  の位相特性 =  $X(\omega)$  の位相特性 +  $Y(\omega)$  の位相特性」を保証するには, 各  $\omega$  で,  $\hat{\theta}_X(\omega)$  に補正項  $2\pi\rho(\omega)$  ( $\rho(\omega)$  は適当な整数値) を加えて定義される連続関数  $\Theta_X: [0, 2\pi) \ni \omega \mapsto \hat{\theta}_X(\omega) + 2\pi\rho(\omega) \in \mathbb{R}$  を新たに  $X(\omega)$  の位相特性として再定義する必要があります (注 9). 一見, 整数値  $\rho(\omega)$  の特定は容易なことのように見えますが, 論文<sup>(26)</sup>に紹介した  $A(\omega) := -\frac{3}{4}e^{-j3\omega} + \left\{\frac{5}{4} - \left(r + \frac{1}{r}\right)\right\}e^{-j2\omega} + \left\{-\frac{3}{4} + \left(r + \frac{1}{r}\right)\right\}e^{-j\omega} + \frac{5}{4}$  ( $r > 1$ ) の場合 (図 2) から想像できるように, 位相特性が急しゅんな変化をし,  $\rho(\omega)$  の特定が困難な例は低次のシステムにも無数にあります.

以下では「各  $\omega$  で  $\Theta_X$  が連続になるための整数値  $\rho(\omega)$  の決定問題」を「連続位相復元問題」と呼ぶことにします<sup>(注14)</sup>. 連続位相復元問題は, 信号処理の体系の出発点に登場する極めて重要な問題であるにも関わらず, 厳密解法は長年知られていませんでした. 筆者は 1986 年 (当時は修士課程在学中) にこの問題を坂庭好一先生 (東工大) から御紹介頂き, 挑戦してみたのですが, 全く歯が立ちませんでした. 1997 年になって, 黒沢馨先生 (現, 茨城大) との議論がヒントになり, 「指定された区間内にある代数方程式の実根を数え上げる問題の解法 (Strum の定理<sup>(25)</sup>)」のアイデアを拡張することによって, 連続位相復元問題の厳密解法「代数的連続位相復元法<sup>(26)</sup>」にたどり着くことができました. 代数的連続位相復元法は「複素関数論の偏角の原理に登場する周回積分」を有限回の代数演算 (四則演算) だけで計算する問題の厳密解法にもなっているため, 多項式の零点分布を与えることができ, Nirmal K. Bose 先生 (故人<sup>(27)</sup>: ペンシルバニア州立大) との共同研究<sup>(28)</sup>に発展しています.

ところで, アレー信号処理では, 所望情報を「特別な関数の極小値の位置情報」や「特別な関数の零点の位置情報」に翻訳することが重要な方針になっています. 例えば, アレーアンテナによる到来方向推定問題の代表的解法 (MUSIC 法: MULTiple SInal Classification<sup>(29)</sup><sup>(30)</sup>) は「MUSIC null-spectrum と呼ばれる関数の全ての極小値を探索する問題」に帰着させるアイデアですし, Root-MUSIC 法<sup>(31)</sup>も「単位円周の近くに分布する

(注13): 式 (6) は  $\Psi$  が広義の線形写像になっていることを示しています.

(注14): 対数関数と多項式関数の合成関数を単位円周に沿って解析接続<sup>(24)</sup>した結果を陽に表現する問題と解釈できます.

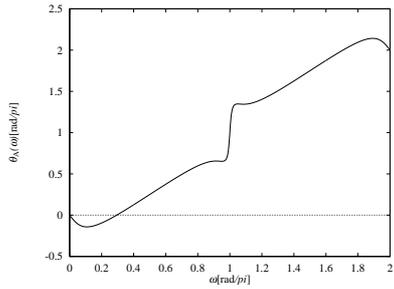
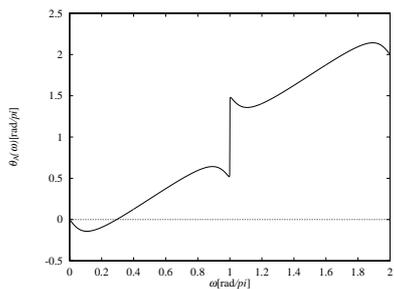
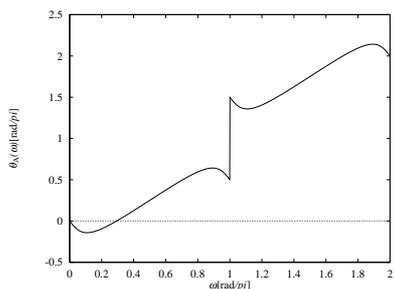
(a) 連続位相  $\Theta_A(\omega)$  ( $r = 1.1$ )(b) 連続位相  $\Theta_A(\omega)$  ( $r = 1.01$ )(c) 連続位相  $\Theta_A(\omega)$  ( $r = 1.001$ )

図 2 急峻な変動を伴う連続位相の例

全ての零点を探索する問題に帰着させるアイデアです。Vitterli (EPFL) 等が提唱している非線形標準化定理の発想<sup>(32)</sup>もよく見ると類似の方針になっています。これらの方針は全ての極小値や零点を数値最適化やグリッドサーチで探索すれば達成できそうですが、一般に検出漏れのリスクを避けることは困難です。仮に極小値分布決定問題 (任意に指定された方位区間に分布する極小値の総数を決定する問題) や零点分布決定問題 (任意に指定された領域に分布する零点の総数を決定する問題) が解決できれば、これらの大域的な情報を活用することにより、検出漏れのリスクは大幅に低下できるはずですが。

最近、筆者らは、代数的連続位相復元法を応用することにより、到来方向推定問題のシナリオの中で、極小値分布決定問題と零点分布決定問題を解決するアイデアを提案しており、有限回の四則演算で高精度な「到来方向分布推定 (任意に指定された方位区間から到来する信号の数の推定)」が実現できることを明らかにしています<sup>(33)</sup>

信号処理工学に限らず、科学技術の世界で発信されるアイデアは、そこに何らかの最適性が保証されているとき、抜群の説得力を持ちます。一つの基準で最適であることは、少なくともその基準ではこれより優れたものが存在しないことを保証し、アイデアの特徴や位置付けが明確になるからです。ところが、信号処理工学では、一つの基準で最適であるからといって、それが研究課題の最終決着となることはほとんどありません。現代の信号処理工学では、複数の最適化基準をいかにして同時に考慮し、効果的に活用するかが、重要なポイントとなっています<sup>(注15)</sup>。

ところで、凸最適化問題の解集合 (全ての最適解を集めた集合) は少なくとも一つの最適化基準では最良な点の集まりなので、信号処理にとっては喉から手が出るほど魅力的な「宝の山」になっているはずですが。更に、「宝の山」の全貌を捉え、この宝の山から別の最適化基準で最良な点を選択する問題 (以下では、「階層構造を持つ凸最適化問題」と呼びます) が解決できれば<sup>(注16)</sup>、複数の最適化基準の斬新な活用法に繋がり、従来の信号処理技術の性能を飛躍的に向上させることも期待できます。

筆者は、20 世紀後半に急速に発展した凸最適化問題の解法を学ぶ過程で、凸最適化問題の解集合の多くが「計算可能な非拡大写像」の不動点集合 (注 7) として表現されてきたことに気が付きました (文献 (6) (15) の中で豊富な例を挙げています)。また、数多くの凸最適化アルゴリズムが非拡大写像の不動点への収束点列を生成する Mann の定理 (注 8) の応用例になっていることに気が付きました。例えば、以下で紹介する射影勾配法 (Projected gradient method<sup>(34)</sup>) とその一般形 (Forward-Backward splitting<sup>(35)-(37)</sup>) のほか、2. で紹介した Douglas-Rachford splitting<sup>(7)-(9)</sup> は Mann の定理の応用例になっています。更に、逆問題や信号画像復元問題に広く応用されてきた射影 Landweber 法<sup>(38)</sup>、並列射影法<sup>(39)</sup>、交互射影法<sup>(40)</sup> も Mann の定理の特別な応用例として解釈できます。

筆者らは「階層構造を持つ凸最適化問題」を解決するために「凸最適化問題の解集合の精密表現を可能にする手段」として非拡大写像に注目し、非拡大写像の不動点集合から最適な 1 点の選択を可能にするハイブリッド最急降下法 (Hybrid steepest descent method<sup>(41)-(43)</sup>) を提案しています。ハイブリッド最急降下法は射影勾配法の非自明な拡張であり、不動点理論の分野で培われた「閉凸集合を非拡大写像の不動点集合として表現するための膨大なアイデア」を丸ごと応用することを可能にしています。ハイブリッド最急降下法の応用は画像復元問題<sup>(44)</sup> やアレーアンテナのロバストビームフォーミング<sup>(45)</sup> などに広がっています。以下、ハイブリッド最急降下法のアイデアを簡単に紹介します。

ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上に定義された写像  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  に対して

(注 15): 例えば、画像復元問題ではデータ忠実性基準のほかに絶対値和や全変動 (Total Variation) を抑圧することにより、エッジ情報欠落の対策になることが知られています。

(注 16): 凸最適化問題の解集合は一般に無限集合ですから、宝の山の全ての点を列挙することは不可能です。

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \kappa \|x - y\| \quad (\forall x, y \in \mathcal{H})$$

を満たす定数  $\kappa > 0$  が存在するとき、 $T$  はリブシツ連続であるといい、 $\kappa$  は  $T$  のリブシツ定数であるといいます。特に、1 未満のリブシツ定数を持つ写像  $T$  は縮小写像であるといいます。縮小写像は唯一の不動点を持ち、任意に選ばれた初期点に縮小写像を繰り返し作用して生成された点列が不動点に収束することが保証されています (縮小写像の不動点定理: Banach 1922)。この定理は単純であるがゆえに強力であり、数理学全体に登場する数多くの逐次近似アルゴリズムがこの定理を基本原理としています。一方、非拡大写像 (注 7) は、1 をリブシツ定数に持つ写像であり、その不動点の様相は一変します。例えば、写像  $T_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x + 1$  は

$$|T_1(x) - T_1(y)| = |x - y| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

を満たすので非拡大写像ですが不動点を持ちません。次の非拡大写像

$$T_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} -1 & (x < -1) \\ x & (-1 \leq x \leq 1) \\ 1 & (1 < x) \end{cases}$$

は閉区間  $[-1, 1]$  に属す全ての点を不動点に持ちます。これらの例は非拡大写像の不動点の性質が縮小写像の場合ほど単純でないことを示唆しています。幸い「非拡大写像が空でない不動点集合 (不動点全体として定義される集合) を持つとき、不動点集合は閉凸集合になる」ことが知られています<sup>(注17)</sup>。更に、与えられた非拡大写像の不動点集合中の 1 点に収束する点列を生成するアルゴリズム (注 8 の Mann の定理) も知られています。

式 (4) で紹介した非拡大写像  $T$  のほかにも工学的応用価値の高い非拡大写像はいくらでもあります。基本的な例を紹介しておきます。閉凸集合  $C \subset \mathcal{H}$  と微分可能な凸関数  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  が  $\arg \min_{x \in C} f(x) \neq \emptyset$  を満たし、また、勾配  $\nabla f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  がリブシツ連続

$$(\exists \kappa > 0, \forall x, y \in \mathcal{H}) \quad \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \kappa \|x - y\|$$

であるとして、このとき、 $C$  上への距離射影 (図 3)  $P_C: \mathcal{H} \rightarrow C: x \mapsto \arg \min_{z \in C} \|x - z\|$  が計算できるなら、任意の  $\mu \in (0, \frac{2}{\kappa})$  を用いて定義された写像  $P_C(I - \mu \nabla f): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  (ただし、 $I: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  は恒等写像) は

$$\text{Fix}(P_C(I - \mu \nabla f)) = \arg \min_{x \in C} f(x)$$

を満たす非拡大写像になります<sup>(6) (46)</sup>。この非拡大写像に Mann の定理を適用すれば、任意の初期値  $x_0 \in \mathcal{H}$  と

$$x_{n+1} := P_C(I - \mu \nabla f)(x_n) \quad (7)$$

(注17): 非拡大写像  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  が不動点を持つとき、 $T$  の不動点集合  $\text{Fix}(T)$  は  $\text{Fix}(T) = \bigcap_{y \in \mathcal{H}} \left\{ x \in \mathcal{H} \mid \langle y - T(y), x \rangle \leq \frac{\|y\|^2 - \|T(y)\|^2}{2} \right\}$  のように無限個の閉半空間の共通部分集合として表現できます。非拡大写像と不動点集合の代数的な性質については例えば論文<sup>(15)</sup>参照して下さい。

から生成された点列  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  が  $\arg \min_{x \in C} f(x)$  の 1 点に弱収束することが分かります。式 (7) のアルゴリズムは、射影勾配法にほかなりません。

ところが、非拡大写像の不動点集合 (一般に無限集合) の中から、何らかの意味で最適な不動点を選択する問題 (= 「不動点の最適化問題」) には Mann の定理を使うことができません。ハイブリッド最急降下法 (図 4) は、この要請に応えるアルゴリズムになっています。

現在、ハイブリッド最急降下法には多くの収束定理がありますが、ここでは最も簡単なものを挙げておきます。

[定理 1] (ハイブリッド最急降下法の収束定理<sup>(41)</sup>) 写像  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  は  $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$  を満たす非拡大写像とし、凸関数  $\Theta: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  の勾配  $\nabla \Theta: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  は  $T(\mathcal{H}) := \{T(x) \mid x \in \mathcal{H}\}$  上で強単調:

$$(\exists \eta > 0, \forall x, y \in T(\mathcal{H})) \quad \langle \nabla \Theta(x) - \nabla \Theta(y), x - y \rangle \geq \eta \|x - y\|^2,$$

かつリブシツ連続であるとして、また、ステップサイズ  $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset [0, \infty)$  は、(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ , (ii)  $\sum_{n \geq 1} \lambda_n = \infty$ , (iii)  $\sum_{n \geq 1} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| < \infty$  を同時に満たすと仮定します [例えば、 $\lambda_n := \frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は、条件 (i)-(iii) を同時に満たす]。このとき、任意の初期点  $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^N$  と

$$u_{n+1} := T(u_n) - \lambda_{n+1} \nabla \Theta(T(u_n)) \quad (8)$$

または

$$v_{n+1} := T(v_n - \lambda_{n+1} \nabla \Theta(v_n)) \quad (9)$$

によって生成される二つの点列  $(u_n)_{n \geq 0}$  及び  $(v_n)_{n \geq 0}$  は、共に  $\Theta(u^*) = \min_{u \in \text{Fix}(T)} \Theta(u)$  を満たす唯一の点  $u^* \in \text{Fix}(T)$  に強収束することが保証されます<sup>(注18)</sup>。

筆者らは、式 (8) と式 (9) のアルゴリズムが「不動点理論の代表的なアイデア (非拡大写像)」と「最適化理論の代表的なアイデア (最急降下法)」の極めて簡潔な融合によって実現されていることに注目し、これらをハイブリッド最急降下法と呼んでいます。特に、式 (9) と式 (7 のアルゴリズム) を見比べてみると、ハイブリッド最急降下法が射影勾配法の非自明な一般化になっていることが分かります。更に、射影勾配法の議論に登場した非拡大写像  $P_C(I - \mu \nabla f)$  を定理 1 中の  $T$  として採用すれ

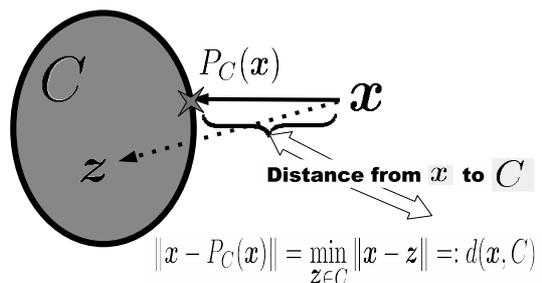


図 3 閉凸集合  $C$  への距離射影 (凸射影)

(注18): 強収束性は  $\mathcal{H}$  が無限次元の場合にも点列がノルムの意味で収束することを保証しています。

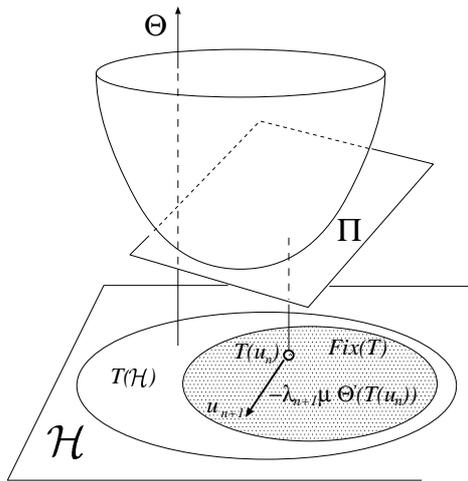


図4 ハイブリッド最急降下法による点列の生成

ば、ハイブリッド最急降下法によって、階層構造を持つ凸最適化問題が解決できることが分かります。

ハイブリッド最急降下法の応用価値を高めるために筆者らは定理1の様々な拡張を提案しています(例えば「凸関数  $\Theta$  に課せられた条件の緩和<sup>(47)</sup>」、「 $T$  に課せられた条件の準非拡大写像への緩和<sup>(48)</sup>」、「数値誤差に対するロバスト性を考慮した拡張<sup>(49)</sup>」、「分散ネットワーク上の学習アルゴリズムへの拡張<sup>(50)</sup>」)。また、数多くの数理工学者や数学者によってハイブリッド最急降下法の多種多様な一般化が検討されています(例えば、文献<sup>(51)</sup>)。更に、筆者らの最新の論文<sup>(15)</sup>には、「不動点集合上で微分不可能な凸関数を最小化する問題」に Moreau-Yosida Regularization<sup>(52)</sup>とハイブリッド最急降下法の融合を応用するアイデアが提案されています。

## 6. 劣勾配射影法と適応学習アルゴリズム

適応フィルタの学習アルゴリズム<sup>(53)-(55)</sup>は日本のお家芸に違いありません。LMS法(Least Mean Squares)<sup>(53)</sup>のアルゴリズムを正規化して導かれる正規化LMS法(NLMS: Normalized Least Mean Squares)は時々刻々変化する超平面(「単一の線形方程式」の解集合)への直交射影を繰り返す学習アルゴリズム<sup>(56)</sup>であり、適応システム同定問題の定番アルゴリズムとして広く利用されています<sup>(54)</sup>。更に、線形多様体(有限個の超平面の共通部分集合: 線形連立方程式の解集合)への距離射影を繰り返す学習アルゴリズム<sup>(57)(58)</sup>もアフィン射影法(APA: Affine Projection Algorithm)の名で広く利用されています<sup>(55)</sup>。

筆者は、2003年に電子情報通信学会誌に適応フィルタの学習アルゴリズムに関する解説記事を執筆するお話を頂いたことがありました。最新の知見で見通しの良い理解の仕方を提示してみたいという気持ちがあり、お引き受けすることにしました。ところが、構想を練れば練るほど本会の諸先輩がかつて執筆された解説記事の視点を越えることの困難さがあらわになり、安易に引き受けてしまったことを後悔する心境になりました。原稿締切日の直前になって幸運にも凸最適化の古典的なアルゴリズム「Polyakの射影劣勾配法<sup>(59)</sup>」と「正規化LMS法の戦略<sup>(56)</sup>」

の間の類似性に気付くことができました。正規化LMS法は時々刻々変動する情報を扱うアルゴリズムであり、Polyakの射影劣勾配法は、時間的変動のない凸関数を最小化するためのアルゴリズムです。両者の用途には大きな違いがありますが、アルゴリズムの形がとても似ています。射影劣勾配法に非負値をとる凸関数列  $\Theta_n: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) を形式的に適用しますと<sup>(注19)</sup>、閉凸集合  $C \subset \mathbb{R}^N$  上でこの凸関数列  $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  を漸近的に最小化するためのアルゴリズム

$$u_{n+1} := \begin{cases} P_C \left( u_n - \lambda_n \frac{\Theta_n(u_n)}{\|\Theta'_n(u_n)\|^2} \Theta'_n(u_n) \right) & \text{if } \Theta'_n(u_n) \neq 0, \\ P_C(u_n) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (10)$$

を得ることができます。ただし、 $\Theta'_n(u_n) \in \mathbb{R}^N$  は、

$$\Theta_n(x) \geq \Theta_n(u_n) + \langle \Theta'_n(u_n), x - u_n \rangle \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

を満たすベクトル(劣勾配: subgradient)であり、 $\Theta_n$  が微分可能な場合は勾配 (gradient)  $\nabla \Theta_n(u_n) \in \mathbb{R}^N$  に一致します。 $P_C: \mathbb{R}^N \rightarrow C$  は式(7)に登場した距離射影です。また、 $\lambda_n \in [0, 2]$  は定数です。実は、 $\Theta_n$  をうまく選択することにより、正規化LMS法をはじめ、適応フィルタの学習アルゴリズムとして、これまでに提案されてきた数多くのアルゴリズムが基本アルゴリズム(10)から統一的に導かれることが確かめられます。すなわち、多種多様な学習アルゴリズムの戦略が、共通の土俵(基本アルゴリズム(10))の上で凸関数列の選択の違いとして、比較できるようになるのです。この見方によって、個々のアルゴリズムの強みや弱みの原因が明確になるばかりでなく、凸関数列の選択を工夫することにより、更に強力なアルゴリズムを新たに設計することも可能になります。筆者はこの基本アルゴリズム(10)を適応射影劣勾配法(Adaptive projected subgradient method)と呼び、その基本性質を急いで調べ、いち早く解説記事<sup>(60)</sup>の形で紹介することができました。幸い、ヒルベルト空間に拡張された適応射影劣勾配法の数学的性質も解明され<sup>(61)(62)</sup>、これまで、音響エコー消去問題<sup>(63)</sup>、無線通信システムの干渉抑圧問題<sup>(64)(65)</sup>、オンラインパターン認識問題<sup>(66)</sup>、分散ネットワーク上の適応学習問題<sup>(67)(68)</sup>など、情報通信システムに登場する多くの適応学習問題に応用し、その有効性を実証することができました。適応射影劣勾配法と不動点近似との関係については、易しい和文の解説<sup>(69)</sup>があります。凸射影法の時変モデルへの拡張<sup>(70)(71)</sup>と適応射影劣勾配法の最近の展開については解説記事<sup>(72)</sup>を御覧頂ければ幸いです。

## 7. 逆問題と低階数最小分散疑似不偏推定法

悪条件逆問題(ill-conditioned inverse problem)の理解を深めるために、線形逆問題の未解決問題にも挑戦してみました。ガウスの最小二乗推定以来、信号処理問題や逆問題の多くは、推定対象の未知ベクトル  $\beta \in \mathbb{R}^m$  と観測ベクトル  $y \in \mathbb{R}^n$  が既知の

(注19): 実際には、式(10)で「 $\Theta_n = \Theta$  ( $n \in \mathbb{N}$ )」とすれば、単一の凸関数  $\Theta: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$  を  $K$  上で最小化するアルゴリズム(Polyakの射影劣勾配法)になります。

モデル行列  $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ( $\text{rank}(L) = m$ ) と雑音ベクトル  $\epsilon \in \mathbb{R}^n$  を用いて

$$y = L\beta + \epsilon, \quad (11)$$

のように関係付けられるモデルを想定し、平均二乗誤差

$$\begin{aligned} \text{MSE}_\beta(\Phi) &:= E_\epsilon (\|\Phi y - \beta\|^2) \\ &= E_\epsilon (\|\Phi y - E_\epsilon(\Phi y)\|^2) + \|E_\epsilon(\Phi y) - \beta\|^2 \\ &= \underbrace{\sigma^2 \text{trace}(\Phi Q \Phi^t)}_{\text{variance}} + \underbrace{\|(\Phi L - I_m)\beta\|^2}_{\text{bias}^2} \quad (12) \end{aligned}$$

( $\|\cdot\|$  はユークリッドノルム,  $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  は単位行列) をできるだけ小さく抑える推定行列  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  を設計し,  $\Phi y \approx \beta$  を得ることが目標となっています。ただし, 式 (11) の中で  $E_\epsilon$  は  $\epsilon$  に関する期待値を表し,  $\sigma^2 Q := E_\epsilon(\epsilon \epsilon^t) \succ 0$  (共分散行列の正定値性) を仮定しています。

現在に至ってもなお, この基本的な推定問題に最終決着が宣言されていない理由は,  $\Phi$  の最適化基準  $J$  が未知ベクトル  $\beta$  を用いて定義されており, 直接最小化するすべがないためです。最小分散不偏推定法 (minimum variance unbiased estimator)<sup>(73)</sup> や最良線形不偏推定法 (BLUE: best linear unbiased estimator)<sup>(74)</sup> と呼ばれている推定法は「全ての  $\beta$  に対して  $\Phi y$  が不偏推定 (unbiased estimate) [すなわち  $E_\epsilon(\Phi y) = \beta$ ] となる推定行列  $\Phi$  の中で, 特に  $\Phi y$  の分散 (variance) の最小化を達成する推定行列」を用いる推定法であり, 制約付き最適化問題

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{trace}[\Phi Q \Phi^t] \\ \text{subject to} & \Phi L = I_m. \end{cases} \quad (13)$$

の唯一解

$$\Phi_{BLUE} := (L^t Q^{-1} L)^{-1} L^t Q^{-1}$$

として与えられます。実にすっきりとした素晴らしい作戦なのですが, 残念ながら式 (11) が情報  $\beta$  の観測モデルを表す信号処理の多くのシナリオでは,  $L$  の特異値分解

$$L = \sum_{i=1}^m \sigma_i u_i v_i^t,$$

(ただし,  $u_i^t u_j = \delta_{i,j}$ ,  $v_i^t v_j = \delta_{i,j}$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > 0$ ) に小さな特異値  $\sigma_i$  が現れるため,  $\Phi_{BLUE}$  の性能は我々の期待を大きく裏切ることになります。このことは,  $\epsilon$  が白色雑音 ( $Q = I_n$ ) であるときを考えると,  $\Phi_{BLUE}$  によって達成される平均二乗誤差が

$$\text{MSE}_\beta(\Phi_{BLUE}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2}$$

となることから確認できます。この表現から,  $L$  が小さな特異値を持つとき,  $\text{MSE}_\beta(\Phi_{BLUE})$  が大きくなってしまふことが分かります。 $\Phi_{BLUE}$  は不偏推定の中で  $\text{MSE}_\beta$  を最小化した推定法ですので,  $\text{MSE}_\beta$  の値をより小さく抑えるには, バイアスを許すしかありません。Marquardt<sup>(75)</sup> は  $Q = I_n$  の場合に,  $\sum_{i=r+1}^m \frac{1}{\sigma_i^2} > \frac{\|\beta\|^2}{\sigma^2}$  を満たす  $r$  に対して

$$\Phi_M = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^t \in \mathcal{X}_r^{m \times n} := \{X \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \text{rank}(X) \leq r\}$$

を推定行列に用いると  $\text{MSE}_\beta(\Phi_M) < \text{MSE}_\beta(\Phi_{BLUE})$  が達成されることを明らかにしています。Marquardt の発見は「低階数推定行列の中で最良な推定行列は何か」という問題を我々に提示しているように見えます。そこで, 筆者らは「 $\mathcal{X}_r^{m \times n}$  の中からバイアスを可能な限り小さく抑え, 更に分散の最小化も達成する推定行列  $\Phi$ 」を探索する問題を考えてみました。もちろん,  $\Phi y$  のバイアスを小さく抑えるには,  $\Phi L \approx I_m$  となることが望ましいのですが, 低階数行列の条件  $\Phi \in \mathcal{X}_r^{m \times n}$  ( $r < m$ ) を課す場合,  $\Phi L = I_m$  は達成できません。その代わりに適当な行列ノルム  $\|\cdot\|$  を採用し, 推定行列の候補を集合  $\arg \min_{\Phi_r \in \mathcal{X}_r^{m \times n}} \|\Phi_r L - I_m\|^2$  に絞り込み, この集合上で分散の最小化を行う方針が考えられます<sup>(注20)</sup>。ところが, 候補の集合  $\arg \min_{\Phi_r \in \mathcal{X}_r^{m \times n}} \|\Phi_r L - I_m\|^2$  は採用される行列ノルムによって変わってしまいます。一般に一つの行列ノルムで近似  $\Phi L \approx I_m$  の最適性が達成されても, 別の行列ノルムでは, 近似  $\Phi L \approx I_m$  の最適性は保証されません。そこで, 筆者らは全てのユニタリ不変ノルム<sup>(注21)</sup>  $\|\cdot\|_\ell$  ( $\ell \in \mathcal{J}$ : ユニタリ不変ノルムのインデックス集合) の各々に対して定義される集合

$$\mathcal{P}_r^\ell := \arg \min_{\Phi_r \in \mathcal{X}_r^{m \times n}} \|\Phi_r L - I_m\|_\ell^2 \quad (\ell \in \mathcal{J})$$

が,  $\bigcap_{\ell \in \mathcal{J}} \mathcal{P}_r^\ell \neq \emptyset$  を満たすことを示し, 推定行列の候補を集合  $\bigcap_{\ell \in \mathcal{J}} \mathcal{P}_r^\ell$  に絞ることを考えました。 $\Phi_r \in \bigcap_{\ell \in \mathcal{J}} \mathcal{P}_r^\ell$  は無限種類あるいかなるユニタリ不変ノルム  $\|\cdot\|_\ell$  で計ったとしても  $\Phi_r L \approx I_m$  の最適性を同時に達成していますから, ノルム選択の困難さは理想的に解消されるのです。そこで, 筆者らは  $\Phi_r^* \in \bigcap_{\ell \in \mathcal{J}} \mathcal{P}_r^\ell$  を満たす行列  $\Phi_r^* \in \mathcal{X}_r^{m \times n}$  を  $\beta \in \mathbb{R}^m$  に対する低階数擬似不偏推定行列 (pseudo-unbiased reduced-rank matrix) または低階数擬似不偏推定法 (pseudo-unbiased reduced-rank estimator) と呼び, 最適化問題

$$\begin{cases} \text{minimize} & \text{trace}[\Phi_r^* Q (\Phi_r^*)^t] \\ \text{subject to} & \Phi_r^* \in \bigcap_{\ell \in \mathcal{J}} \mathcal{P}_r^\ell \end{cases} \quad (14)$$

の解  $\Phi_r^{\text{mvp}} \in \mathcal{X}_r^{m \times n}$  を  $\beta \in \mathbb{R}^m$  に対する低階数最小分散擬似不偏推定法 (minimum-variance pseudo-unbiased reduced-rank estimator (MV-PURE)) と呼ぶことにしました<sup>(76)-(78)</sup>。低階数最小分散擬似不偏推定問題 (14) は, 最小分散不偏推定問題 (13) の自然な一般化になっています。実際に  $r = m$  の場合には, 問題 (14) は問題 (13) に一致します。集合  $\mathcal{X}_r^{m \times n}$  は凸集合でないため<sup>(注22)</sup>, 問題 (14) は凸最適化問題ではありませんが, 筆者らは線形代数の知識を駆使することにより, その解を陽に表現す

(注20): 第1層目の最適化問題の制約集合が  $\mathcal{X}_r^{m \times n}$ , 最適化基準が  $f_1(\Phi_r) := \|\Phi_r L - I_m\|^2$  であり, また, 第2層目の最適化問題の制約集合が  $\arg \min_{\Phi_r \in \mathcal{X}_r^{m \times n}} f_1(\Phi_r)$ , 最適化基準が  $f_2(\Phi_r) := \sigma^2 \text{trace}(\Phi_r Q \Phi_r^t)$  となる「階層構造を持つ最適化問題」になります。

(注21):  $\mathbb{R}^{m \times n}$  に定義された行列ノルム  $\|\cdot\|$  が, 全ての  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  と全ての直交行列  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  に対して  $\|UXV\| = \|X\|$  となる時, この行列ノルムはユニタリ不変であるといえます。フロベニウスノルム  $\|X\|_F := \sqrt{\text{trace}[X^t X]}$ , スペクトルノルム  $\|X\|_2 :=$  「 $X$  の最大の特異値」, 核型ノルム (トレースノルム)  $\|X\|_* :=$  「 $X$  の特異値の総和」[式 (2)] はいずれもユニタリ不変となります。

(注22): 例えば,  $\mathcal{X}_1^{2 \times 2}$  が凸集合にならないことは, (注2) の例から直ちに確かめられます。

ることにも成功しています。筆者らがたどり着いた MV-PURE が、悪条件逆問題に対して本領を発揮するには、与えられた  $y$  と  $L$  に対してランク  $r$  の信頼できる選択法を実現する必要があります。信頼できるランク選択法が確立できれば、 $\beta \in \mathbb{R}^m$  を  $\Phi$  の列空間の基底でスパース表現する問題に対して一つの方向付けができるにちがいないと思っています<sup>(注23)</sup>。現在検討中の「MV-PURE のランク選択問題」は難問に違いなさそうですが、 $L$  が小さな特異値を持ち、 $\epsilon$  がガウス雑音である場合には

$$\text{SURE}_{L\beta}(L\Phi_r^{\text{mvp}}) := \|L\Phi_r^{\text{mvp}}(y) - y\|^2 + 2\sigma^2 \text{trace}(L\Phi_r^{\text{mvp}}) - n\sigma^2$$

を最小にする  $r \in \{1, 2, \dots, m\}$  を選択する方法が有力であることが分かってきました<sup>(81)</sup>。  $\text{SURE}_{L\beta}(L\Phi_r^{\text{mvp}})$  は  $L\beta$  に対する Stein のリスク不偏推定量<sup>(82)</sup>に相当し、

$$E_\epsilon [\text{SURE}_{L\beta}(L\Phi_r^{\text{mvp}})] = E_\epsilon [\|L\Phi_r^{\text{mvp}}(y) - L\beta\|^2] \leq \|L\|^2 \text{MSE}_\beta(\Phi_r^{\text{mvp}}) \quad (\|L\| \text{ は行列ノルム})$$

を満たしています。

なお、 $\beta$  が確率変数ベクトルである場合には、 $E_{\epsilon, \beta}(\|\Phi y - \beta\|^2)$  を最小にする  $\Phi$  (Wiener フィルタと呼ばれています) を選ぶことが、常とう手段となつて久しいのですが、Wiener フィルタは  $L$  や  $Q$  のモデル誤差に脆弱であることも知られています。信号処理の分野ではモデル誤差にロバストな推定法を実現するために様々な工夫が提案されてきました。実は、式 (14) に示した MV-PURE の定式化を拡張することにより、 $\beta$  が確率変数ベクトルである場合にも、モデル誤差にロバストな推定法が実現できることが分かっています。筆者らはこのロバスト推定法を確率的 MV-PURE (Stochastic MV-PURE) と呼び、その基本的な性能を明らかにしています<sup>(78) (83) (84)</sup>。

## 8. おわりに

世界中の最新の研究成果が瞬時に検索でき、比較できてしまう便利な時代が到来し、研究者はかつてない恩恵を享受するとともにし烈なスピード競争にさらされています。筆者自身は「信号処理・最適化・逆問題」に大風呂敷を広げ、偉大な先人たちが幾つもの世代にわたって創り上げてきた知的遺産の中からキラリと光る珠玉のアイデアを発見・吟味・融合することに力を注ぎ、その結果生まれる相乗効果を最大化してみたいと思ってきました。幸い「信号処理・最適化・逆問題」には自由な妄想<sup>(85)</sup>が触媒となり、一見、無関係に見えていた複数のアイデアが結び付き、解決の鍵になる問題がたくさんあり、たまらない魅力を感じています。

本稿で御紹介したささやかな研究事例は、信号処理工学とその

(注23): 本研究では、Lasso<sup>(79)</sup>の問題設定と同様に  $n \geq m$  が仮定されています。  $n < m$  を前提とした圧縮センシング (compressed sensing)<sup>(80)</sup>では、 $\beta$  の近似表現に利用できる基底が始めから指定されているのに対し、低ランク行列  $\Phi$  を決定する本研究の問題設定では  $\beta$  の近似表現に利用する基底が雑音の共分散行列と  $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ( $n \geq m$ ) から戦略的に選択されることに注意してください。

周辺のほんの小さなひとかけらに過ぎませんが、筆者が楽しんでいるワンダーランドの魅力が少しでも読者の皆様に伝わり、明日の信号処理を担う若手研究者が一人でも現れることになれば、これに勝る喜びはありません。

## 文 献

- (1) A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, Digital Signal Processing, Prentice-Hall, 1975.
- (2) デジタル信号処理の基礎, 辻井重男 (編著), 電子情報通信学会, 東京, 1985.
- (3) デジタル信号処理ハンドブック, 電子情報通信学会 (編), オーム社, 東京, 1993.
- (4) I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, 1992.
- (5) S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, 2nd ed., Academic Press, 1999.
- (6) 山田 功, 工学のための関数解析, 数理工学社 (数理工学社・サイエンス社), 2009.
- (7) P. L. Lions and B. Mercier, "Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators," SIAM J. Numer. Anal. vol.16, no.6, pp. 964-979, 1979.
- (8) J. Eckstein and D. P. Bertsekas, "On the Douglas-Rachford splitting method and proximal point algorithm for maximal monotone operators," Math. Program. vol.55, pp.293-318, 1992.
- (9) P. L. Combettes and J. -C. Pesquet, "A Douglas-Rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery," IEEE J. Sel. Top. Signal Process., vol.1, no.4, pp.564-574, 2007.
- (10) S. Gandy and I. Yamada, "Convex optimization techniques for the efficient recovery of a sparsely corrupted low-rank matrix," Journal of Math-for-Industry. 2(2010B-5), pp.147-156, 2010.
- (11) J-F. Cai, E. J. Candés, and Z. Shen, A singular value thresholding algorithm for matrix completion, "SIAM J. Optim. vol.20, no.4, pp.1956-1982, 2010.
- (12) D. L. Donoho, "Denoising by soft-thresholding," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.41, no.3, pp.613-627, 1995.
- (13) W. R. Mann, "Mean value methods in iteration," Proc. Amer. Math. Soc. vol.4, no.3, pp. 506-510, 1953.
- (14) C. W. Groetsch, "A note on segmenting Mann iterates," J. Math. Anal. Appl. vol.40, no.2, pp.369-372, 1972.
- (15) I. Yamada, M. Yukawa and M. Yamagishi, "Minimizing the moreau envelope of nonsmooth convex functions over the fixed point set of certain quasi-nonexpansive mappings," Fixed Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering (H.H.Bauschke, R. Burachik, P.L.Combettes, V.Elser, D.R.Luke and H.Wolkowicz, eds.), Chapter 17, pp.345-390, Springer, 2011.
- (16) 山田 功, "最適化と信号処理 (前編) ~ 射影勾配法の二つの一般化," 映情学誌, vol.63, no.8, pp.1088-1093, 2009.
- (17) E. J. Candés and B. Recht, "Exact matrix completion via convex optimization," Found. Comput. Math., vol.9, pp.717-772, 2008.
- (18) B. Recht, M. Fazel and P. A. Parrilo, "Guaranteed minimum rank solutions to linear matrix equations via nuclear norm minimization," SIAM Review, vol.52, no.3, pp.471-501, 2010.
- (19) S. Gandy, B. Recht, and I. Yamada, "Tensor completion and low-n-rank tensor recovery via convex optimization," Inverse Probl., vol.27, no.2, 025010, 2011.
- (20) P. Comon, "Independent component analysis," Higher Order Statics, J. L. Lacoume, ed., pp.29-38, Elsevier, 1992.
- (21) A. Hyvärinen and E. Oja, "Independent component analysis: Algorithms and applications," Neural Netw., vol.13, nos.4-5, pp.411-430, 2000.
- (22) 山田 功, 坂庭好一, "新しい準同型変換とその逆畳み込み問

- 題への応用,” 信学論 (A), vol.J72-A, no.10, pp.1538-1546, Oct. 1989.
- (23) I. Yamada, K. Sakaniwa, and S. Tsujii, “A multidimensional isomorphic operator and its properties — A proposal of finite-extent multi-dimensional cepstrum,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.42, no.7, pp.1766-1785, 1994.
- (24) 吉田洋一, 函数論, 第2版, 岩波書店, 東京, 1965.
- (25) 高木貞治, 代数学講義, 改訂新版, 共立出版, 東京, 1965.
- (26) I. Yamada, K. Kurosawa, H. Hasegawa and K. Sakaniwa, “Algebraic multidimensional phase unwrapping and zero distribution of complex polynomials - characterization of multivariate stable polynomials,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.46, no.6 pp.1639-1664, 1998.
- (27) 山田 功, “Nirmal Kumar Bose 先生を偲んで,” *IEICE Fundamentals Review*, vol.4, no.1, pp.20-22, July 2010.
- (28) I. Yamada and N. K. Bose, “Algebraic phase unwrapping and zero distribution of polynomial for continuous-time systems,” *IEEE Trans. Circuits SystI, Fundam. Theory Appl.* vol.49, no.3, pp.298-304, 2002.
- (29) R. O. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” *Proc. RADC, Spectral Estimation Workshop*, pp. 243-258, 1979.
- (30) G. Bienvenu, “Influence of the spatial coherence of the background noise on high resolution passive methods,” *Proc. 1979 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp. 306-309, May 1979.
- (31) A. J. Barabell, “Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms,” *Proc. 1983 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp. 336-339, May 1983.
- (32) M. Vetterli, P. Marziliano and T. Blu, “Sampling signals with finite rate of innovation,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.50, no.6, pp. 1417 - 1428, 2002.
- (33) I. Yamada and K. Oguchi, “High-resolution estimation of the directions-of-arrival distribution by algebraic phase unwrapping,” *Multidimens. Syst. Signal Process.*, vol.22, no.1-3, pp.191-211, 2011.
- (34) A. A. Goldstein, “Convex programming in Hilbert space,” *Bull. Amer. Math. Soc.* vol.70, no.5, pp.709-710, 1964.
- (35) G. B. Passty, “Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space,” *J. Math. Anal. Appl.* vol.72, no.2, pp.383-390, 1979.
- (36) P. Tseng, “Applications of a splitting algorithm to decomposition in convex programming and variational inequalities,” *SIAM J. Control Optim.* vol.29, no.1, pp.119-138, 1991.
- (37) P. L. Combettes and V. R. Wajs, “Signal recovery by proximal forward-backward splitting,” *SIAM Multiscale Model. Simul.* vol.4, no.4, pp.1168-1200, 2005.
- (38) B. Eicke, “Iteration methods for convexly constrained ill-posed problems in Hilbert space,” *Numer. Funct. Anal. Optim.* vol.13, nos.5-6, pp.413-429, 1992.
- (39) Y. Censor and S. A. Zenios, *Parallel Optimization: Theory, Algorithm, and Optimization*, Oxford Univ. Press, 1997.
- (40) L. M. Bregman, “The method of successive projection for finding a common point of convex sets,” *Soviet Math. Dokl.* vol.6, pp.688-692, 1965.
- (41) I. Yamada, “The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings,” *Inherently Parallel Algorithm for Feasibility and Optimization and Their Applications*, Butnariu, Censor, and Reich, eds., pp.473-505, Elsevier, 2001.
- (42) 山田 功, “凸射影アルゴリズムの考え方とハイブリッド最急降下法,” *信学誌*, vol.83, no.8, pp.616-623, Aug. 2000.
- (43) 山田 功, “ハイブリッド最急降下法—階層構造を持つ凸最適化問題の解法,” *日本応用数学会誌*, vol.14, no.3, pp.248-258, 2004.
- (44) J.-L. Starck, F. Murtagh, and J. M. Fadili, *Sparse Image and Signal Processing: Wavelets, Curvelets, Morphological Diversity*, Cambridge University Press, 2010.
- (45) K. Slavakis and I. Yamada, “Robust wideband beamforming by the hybrid steepest descent method,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.55, no.9, pp.4511-4522, 2007.
- (46) E. G. Golshtein and N. V. Tretyakov, *Modified Lagrangians and Monotone Maps in Optimization*, Wiley and Sons, 1996.
- (47) N. Ogura and I. Yamada, “Non-strictly convex minimization over the fixed point set of the asymptotically shrinking nonexpansive mapping,” *Numer. Funct. Anal. Optim.* vol.23, nos.1-2, pp.113-137, 2002.
- (48) I. Yamada and N. Ogura, “Hybrid steepest descent method for variational inequality problem over the fixed point set of certain quasi-nonexpansive mappings,” *Numer. Funct. Anal. Optim.* vol.25, nos.7-8, pp.619-655, 2004.
- (49) I. Yamada, N. Ogura, and N. Shirakawa, “A numerically robust hybrid steepest descent method for the convexly constrained generalized inverse problems,” *Inverse Problems, Image Analysis, and Medical Imaging Contemporary Mathematics vol.313*, Z.Nashed and O. Scherzer, eds., pp.269-305, American Mathematical Society, 2002.
- (50) N. Takahashi and I. Yamada, “Parallel algorithms for variational inequalities over the cartesian product of the Intersections of the fixed point sets of nonexpansive mappings,” *Journal of Approx. Theory*, vol.153, no.2, pp. 139-160, Aug. 2008.
- (51) C. Chidume, ‘Chapter 7: “Hybrid steepest descent method for variational inequalities,” *Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations ‘Lecture Notes in Mathematics 1965*, Springer, 2009.
- (52) J. J. Moreau, “Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien,” *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math*, vol.255, pp.2897-2899, 1962.
- (53) B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, 1985.
- (54) S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed., Prentice-Hall, 2001.
- (55) A. Sayed, *Fundamentals of Adaptive Filtering*, Wiley-IEEE Press, 2003.
- (56) J. Nagumo and J. Noda, “A learning method for system identification,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.12, no.3, pp.282-287, 1967.
- (57) 難元孝夫, 前田禎男, “拡張された学習的同定法,” *電学論*, vol.95-C, no.10, pp.227-234, 1975.
- (58) 尾関和彦, 梅田哲夫, “アフィン部分空間への直交射影を用いた適応フィルタ・アルゴリズムとその性質,” *信学誌 (A)*, vol.67-A, no.2, pp.126-132, Feb. 1984.
- (59) B. T. Polyak, “Minimization of unsmooth functionals,” *USSR Comput. Math. Phys.*, vol.9, pp.14-29, 1969.
- (60) 山田 功, “射影型適応アルゴリズムの新展開—射影劣こう配法による統一視とその応用,” *信学論*, vol.86, no.8, pp.654-658, Aug. 2003.
- (61) I. Yamada and N. Ogura, “Adaptive projected subgradient method for asymptotic minimization of sequence of nonnegative convex functions,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol.25, nos.7-8, pp.593-617, 2004.
- (62) K. Slavakis, I. Yamada, and N. Ogura, “The Adaptive Projected Subgradient Method over the fixed point set of strongly attracting nonexpansive mappings,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol.27, nos.7-8, pp.905-930, 2006.
- (63) M. Yukawa, K. Slavakis, and I. Yamada, “Adaptive parallel quadratic-metric projection algorithms,” *IEEE Trans. Audio, Speech and Language Processing*, vol.15, no.5, pp.1665-1680, 2007.
- (64) M. Yukawa, R. L. G. Cavalcante and I. Yamada, “Efficient blind MAI suppression in DS/CDMA systems by embedded constraint parallel projection techniques,”

- IEICE Trans. Fundamentals, vol.E88-A, no.8, pp.2062-2071, Aug. 2005.
- (65) R. L. G. Cavalcante and I. Yamada, "Multiaccess interference suppression in orthogonal space-time block coded MIMO systems by the Adaptive Projected Subgradient Method," IEEE Trans. Signal Process., vol.56, no.3, pp.1028-1042, March 2008.
- (66) K. Slavakis, S. Theodoridis and I. Yamada, "Online kernel-based classification using adaptive projection algorithms," IEEE Trans. Signal Process., vol.56, no.7, pp.2781-2796, 2008.
- (67) R. Cavalcante, I. Yamada, and B. Mulgrew, "An adaptive projected subgradient approach to learning in diffusion networks," IEEE Trans. Signal Process., vol. 57, no. 7, pp. 2762-2774, July 2009.
- (68) R. Cavalcante, A. Rogers, N. Jennings and I. Yamada, "Distributed asymptotic minimization of sequences of convex functions by a broadcast adaptive subgradient method," IEEE J. Sel. Top. Signal Process., vol. 5, Aug. 2011.
- (69) 山田 功, "凸射影と適応フィルタリングの親密な関係—はらべこ JAWS から学ぶ理想的な信号処理," 音響誌, vol.63, no.10, pp.600-605, 2007.
- (70) I. Yamada, K. Slavakis and K. Yamada, "An efficient robust adaptive filtering algorithm based on parallel subgradient projection techniques, IEEE Trans. Signal Process., vol. 50, no. 5, pp. 1091-1101, 2002.
- (71) N. Takahashi and I. Yamada, "Steady-state mean-square performance analysis of a relaxed set-membership NLMS algorithm by the energy conservation argument," IEEE Trans. Signal Process., vol. 57, no. 9, pp. 3361-3372, Sept. 2009.
- (72) S. Theodoridis, K. Slavakis and, I. Yamada, "Adaptive learning in a world of projections: a unifying framework for linear and nonlinear classification and regression tasks," IEEE Signal Process. Mag., vol.21, no.1, pp.97-123, 2011.
- (73) D. G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, New York, Wiley, 1969.
- (74) T. Kailath, A. H. Sayed, and B. Hassibi, Linear Estimation, Prentice-Hall, 2000.
- (75) D. W. Marquardt, "Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation," Technometrics, vol. 12, pp. 591-612, 1970.
- (76) I. Yamada and J. Elbadraoui, "Minimum-variance pseudo-unbiased low-rank estimator for ill-conditioned inverse problems," Proc. 2006 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, .III, pp.325-328, Toulouse, May 2006.
- (77) T. Piotrowski and I. Yamada, "MV-PURE estimator : Minimum-variance pseudo-unbiased reduced-rank estimator for linearly constrained ill-conditioned inverse problems," IEEE Trans. Signal Process., vol.56, no.8, pp.3408-3423, 2008.
- (78) 山田 功, "最適化と信号処理(後編)~低階数最小分散擬似不偏推定法," 映像学誌, vol.63, no.9, pp.1207-1212, 2009.
- (79) R. Tibshirani, "Regression shrinkage and selection via the lasso," J. Royal Statistical Society, Series B, vol.58, no.1, pp.267-288, 1996.
- (80) D. L. Donoho, "Compressed sensing," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.52, no.4, pp.1289-1306, 2006.
- (81) 島村信嗣, 山岸昌夫, 山田 功, "低階数最小分散擬似不偏推定法のランク選択規準と悪条件逆問題への応用," 信学技報, CAS2010-127, SIP2010-143, CS2010-97, pp.149-153, March 2011.
- (82) C. Stein, "Estimation of the mean of a multivariate normal distribution," Ann. Statist., vol.9, no.6, pp.1135-1151, 1981.
- (83) T. Piotrowski, R. Cavalcante and I. Yamada, "Stochastic MV-PURE estimator—robust reduced-rank estimator for stochastic linear model," IEEE Trans. Signal Process., vol.57, no.4, pp.1293-1303, 2009.
- (84) T. Piotrowski and I. Yamada, "Why the stochastic MV-

- PURE estimator excels in highly noisy situations ?," Proc. 2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, pp. 3081-3084, Taipei, April 2009.
- (85) 山田 功, "妄想力・造形力・創造力- ある理工系研究者の雑感," 季刊誌 造形ジャーナル, vol. 54, no. 1, pp. 6-9, Jan. 2009.

(SIP 研究会提案, 平成 23 年 5 月 9 日受付)

5 月 27 日最終受付)



山田 功 (正員 : シニア会員)

1985 年筑波大・情報卒. 1990 東工大 大学院理工学研究科博士課程了 (電気・電子工学専攻). 工博. 現在, 東工大大学院理工学研究科集積システム専攻教授. 主として信号処理工学, 最適化工学, 情報通信工学の研究に従事. 2011 年度本会信号処理研究専門委員会委員長. IEEE Signal Processing Theory and Method: Technical Committee Member (2009-), 本会論文賞 (1991, 1995, 2006, 2009), 国際コミュニケーション基金優秀研究賞 (2004), ドコモ・モバイル・サイエンス賞 [基礎科学部門] (2005), 藤野研究賞 (2008), 本会業績賞 (2009) 各受賞. 著書「工学のための関数解析 (数理工学社・サイエンス社)」等.