

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres
Title(English)	
著者(和文)	北澤直樹
Author(English)	Naoki Kitazawa
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第9372号, 授与年月日:2014年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:村山 光孝,遠藤 久顕,山田 光太郎,芥川 一雄,梅原 雅顕, 佐伯 修
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第9372号, Conferred date:2014/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	要約
Type(English)	Outline

博士論文 ”On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres” 要約

折り目写像は, Morse 関数の理論とその一般化という, 多様体をジェネリックな写像を用いて調べる方法において基本的な道具である.

折り目写像は, 特異点が局所的に

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{k=n}^{m-i} x_k^2 - \sum_{k=m-i+1}^m x_k^2)$$

の型であるような滑らかな写像として定義され (各特異点で一意に定まる $\min\{i, m - n + 1 - i\}$ を指数とよぶ), Morse 関数は自然に折り目写像とみなされる ($n = 1$). **特異点集合**つまり特異点全体の集合は, 定義域多様体の $n - 1$ 次元の滑らかな部分多様体で, そこへの制限写像は滑らかなめ込みとなる (**特異値集合**を特異値全体の集合または特異点集合の像として定義する).

折り目写像や, より広く良い写像例えば**安定写像**についての研究は, Whitney ([19]), Thom ([18]) にはじまり, その後 Levine, Eliashberg, Mather 等の研究を経て, 最近では例えば Saeki, Sakuma 等により活発になされている. ここで以下の流れに着目する.

特異点集合が指数 0 の折り目特異点のみからなる折り目写像を **special generic 写像**とよぶ. この写像は, 特異点を丁度 2 個もつ球面上の Morse 関数の一般化であるといえる. special generic 写像は [1] で導入されその後 [4] さらに [12], [16] 続いて [14] 等の研究がある. 次元 2 以上の標準球面上の, 自身より高くない次元 2 以上のユークリッド空間への標準的射影から自然に得られる, 特異値集合が埋め込まれた球面であるような折り目写像は, special generic 写像の最も簡単な例である. [12] では, 2 次元以上の 4 次元でない滑らかな球面と 4 次元の標準球面上に, 平面への special generic 写像で特異値集合が埋め込まれた球面であるようなものが構成された. さらに [12] 他 [13] において次元 4 以上の球面が $1 \leq k \leq 3$ 次元低いユークリッド空間への special generic 写像を許容する場合, 球面は必然的に標準的球面になることも示されている. 球面上の special generic 写像の存在非存在が, 球面の微分構造と関わっていることを具体的に示した結果である. 他, 同論文, [14] では, 値域が平面, 3 次元ユークリッド空間であるような special generic 写像を許容する定義域多様体を完全にあるいは部分的に決定している. 特別な写像を考えると, 定義域多様体のホモトピー・位相型・微分同相型等に関するより詳しい情報を取り出せるのである.

このように, 特定のクラスの折り目写像を許容する多様体の位相的性質を調べることは, 折り目写像の理論で基本的かつ重要問題の一つであり続けているといえる. 本博士論文においては, **同心円形折り目写像**という, 特異値集合が同心円状に埋め込まれた球

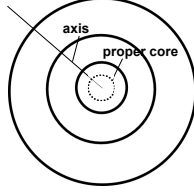


FIGURE 1. (平面への) 同心円形折り目写像の像, 特異値集合, 軸 (axis), 真核 (proper core)

面の非交和であるような折り目写像を導入し, そのクラスの写像を許容する多様体のホモロジー群やホモトピー群他位相型微分同相型について調べた.

本博士論文の要約では以下の記号を用いる. まず $k \in \mathbb{N}$ について, 今後 $\mathbb{R}^k$, S^k , D^k でそれぞれ k 次元ユークリッド空間, k 次元標準球面, k 次元標準球体を表し, $\mathbb{R}^k$ における原点中心の半径 $r > 0$ の球体を D_r^k で表す.

以下, M は m 次元 C^∞ 級多様体, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ は C^∞ 級写像で $m \geq n \geq 1$ とする.

まず本博士論文は論文 [6], [7], [8] そして [9] の内容を元に行っていることを添えておく.

以下本博士論文の構成をいくつかの定義結果と共に説明する. 第 1 節で導入, 第 2 節で折り目写像の基本性質など準備を行い第 3 節で以下のように同心円形折り目写像を導入した.

定義 1([6], [7]). $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像で $n \geq 2$ とする. 次を満たす折り目写像 $f_0: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ があるとき f は同心円形折り目写像 (round fold map) であるという. さらに f_0 を f の標準形 (normal form) という.

1. 微分同相写像 $\Phi: M \rightarrow M$, $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ があり $f_0 \circ \Phi = \phi \circ f$ が成立する.
2. 特異点集合 $S(f_0)$ が標準球面の非交和.
3. 制限写像 $f_0|_{S(f_0)}$ は埋め込み.
4. ある $l \in \mathbb{N}$ があり $f_0(S(f_0)) = \sqcup_{k=1}^l \partial D_k^n$ (ただし $\sqcup_{k=1}^l \partial D_k^n$ は非交和を表す).

このとき標準形 f_0 において, $\mathbb{R}^n$ 内の原点を起点とする半直線を f_0 の軸 (axis) とよぶ. f_0 について, $\mathbb{R}^n$ 内の $D_{\frac{1}{2}}^n$ を f_0 の真核 (proper core) という. f_0 の軸 L について 1 次元 C^∞ 級部分多様体 $\phi^{-1}(L)$ もまた f の軸 (axis) という. f_0 の真核 $D_{\frac{1}{2}}^n$ について $\phi^{-1}(D_{\frac{1}{2}}^n)$ もまた f の真核 (proper core) という.

- 例 1.
1. 導入で説明した, 球面上の, 特異値集合が埋め込まれた球面であるような special generic 写像は同心円形折り目写像である. 真核の点の逆像は標準球面である.
 2. [15] の §6 で, 特異点集合が 2 個の連結成分からなる同心円形折り目写像とみなせる, S^2 上の C^∞ 級 S^2 束の構造を有する多様体から平面への写像が例として挙げられている. この写像は special generic 写像ではない. 真核の点の逆像は 2 個の S^2 の非交和である, 正則値全体の集合の連結成分が, 真核を含むもの以外 2 個あるが, それらに属する正則値の逆像は, 明らかに S^2 または空である.

第 3 節では続いて例えば基本的性質として同心円形折り目写像を許容する多様体のホモロジー群について調べた (Theorem 1). 第 4 節では, 前の例を含むクラスとして正則値の逆像が球面の非交和であるような同心円形折り目写像を考えた. 例えば Theorem 3 として以下定義域多様体のある程度次元の低いホモトピー群の受ける制限を得た (本博士論文とは若干異なる形で紹介).

定理 1([6], [7]). M を単連結 m 次元 C^∞ 級多様体, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を以下を満たす同心円形折り目写像 ($m \geq n \geq 2$) とし, $m \geq 2n$ とする.

1. 特異点の指数が 0 または 1.
2. $f(M)$ が D^n に微分同相.
3. 各正則値 $p \in \mathbb{R}^n - f(S(f))$ の逆像 $f^{-1}(p)$ は almost-sphere の非交和.

f の真核上の点の逆像の連結成分数が l であれば,

$$\pi_k(M) \cong \{0\} \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

$$\pi_n(M) \cong H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{l-1} & m > 2n \\ \mathbb{Z}^{2(l-1)} & m = 2n \end{cases}$$

が成り立つ.

第 5 節以降では同心円形折り目写像を許容する多様体のより幾何的な情報例えば位相型・微分同相型について調べた. まずひとつ論文における定理 (Theorem 5) を述べるために本博士論文第 3 節の同心円形折り目写像の導入の部分で定義した用語を説明する.

C^∞ 級写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ をある同心円形折り目写像の標準形とする. E を f の真核 $D^{n-\frac{1}{2}}$ の補集合の閉包の逆像, L を軸とする. $\pi_P(x) := \frac{1}{2} \frac{x}{|x|}$ ($\pi_P : f(E) \rightarrow \partial D^{n-\frac{1}{2}}$) について $\pi_P \circ f|_E$ は C^∞ 級沈め込みであり, E には $\partial D^{n-\frac{1}{2}}$ 上の C^∞ 級 $f^{-1}(L)$ -束の構造が入る (Ehresmann の定理 [3]). $\pi_P \circ f|_{\partial E}$ は $f|_{\partial E} : \partial E \rightarrow \partial D^{n-\frac{1}{2}}$ に一致する.

f が標準形でなくとも自然に C^∞ 級束を定義できる.

定義 2. 前で定義された束が, 構造群をファイバーの微分同相写像全体として考えたとき自明束になるとする. このとき f は C^∞ 自明であるという.

第 5 節で Theorem 5 として次を得た (参考論文 [6] にあるような特別な形で紹介).

定理 2([6], [8]). $m, n \in \mathbb{N}$ で $m > n \geq 2$ とする. m 次元連結閉 C^∞ 級多様体 M 上に, C^∞ 自明な同心円形折り目写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ で真核の各点の逆像が 2 個の almost-sphere からなり特異点集合の連結成分数が 2 個であるようなものが存在する必要十分条件は, M が S^n 上の almost-sphere をファイバーとする C^∞ 級束の構造を有することである.

同心円形折り目写像 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ の特異値集合の連結成分 $C \subset f(S(f))$ について, C 上の自明な $[-1, 1]$ -束とみなせる閉管状近傍 $N(C)$ がとれ (C が $C \times \{0\} \subset C \times [-1, 1]$ とみなせる), $f|_{f^{-1}(N(C))}: f^{-1}(N(C)) \rightarrow N(C)$ と $N(C)$ から C への射影の合成は C^∞ 級沈め込みとなる. これは C^∞ 級束の構造を定める.

定義 3. 構造群をファイバーの微分同相写像全体として考えたとき, 前で定義された束が, 全ての連結成分 $C \subset f(S(f))$ について自明束になるとする. このとき f は局所 C^∞ 自明であるという.

第 6 節において, m 次元連結閉 C^∞ 級有向多様体で $\mathbb{R}^n$ ($m \geq n \geq 2$) への同心円形折り目写像を許容するものが 2 個あるときそれらの連結和上にも $\mathbb{R}^n$ への同心円形折り目写像が構成できることを具体的に与えられた写像をうまく切って貼り合わせることで示した (Proposition 9, Proposition 10). 例えば適用例として, 前の定理 2(本論文 Theorem 5) も合わせて $m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq 2$ として, 有限個の S^n 上の C^∞ 級 S^{m-n} 束の構造を有する多様体の連結和上に, 正則値の逆像が標準球面の非交和で, 特異点集合の連結成分数と真核の逆像の連結成分数が等しいような局所 C^∞ 自明な同心円形折り目写像を構成した (Theorem 13). また特別な場合であるが, [2] や [11] の 7 次元 C^∞ 級球面の微分トポロジーに関する事実を利用し, 以下を Theorem 12 として示した.

定理 3([9]). 全ての 7 次元 C^∞ 級球面は, $\mathbb{R}^4$ への, 正則値の逆像が標準球面の非交和で, 特異点集合の連結成分数と真核の逆像の連結成分数が等しいような局所 C^∞ 自明な同心円形折り目写像を許容する. さらに, 導入で挙げた [12] と [13] の研究結果より, 7 次元 C^∞ 級球面が, $\mathbb{R}^4$ へのそのような写像で特異点集合が連結になるようなものを許容すれば, 定義域の球面は S^7 と微分同相になる. また, 7 次元 C^∞ 級球面が, $\mathbb{R}^4$ へのそのような写像で特異点集合が 2 個の連結成分からなるようなものを許容すれば, 定義域の球面は S^4 上の C^∞ 級 S^3 束の構造を許容する (7 次元 C^∞ 級有向球面の微分同相型を考えると, 全部で S^7 を含んで 28 個あり, うち S^7 を含む 16 個がそのような構造を許容し, 残りは許容しないがそのようなものの連結和で表せる).

この定理は, 導入で挙げた球面の special generic 写像の存在非存在に関する結果のように, 特定のクラスに属する特別な写像の存在非存在が定義域多様体の微分構造の違いと関係することを具体的に示しているものといえる.

第 7 節では適当な条件の下 m 次元連結閉 C^∞ 級有向多様体から $\mathbb{R}^n$ ($m \geq n \geq 2$) への同心円形折り目写像を定義域多様体とともに連結和に分解した (Proposition 13). 第 8 節ではこれまでの特に第 5 節以降の手法や結果の応用として, $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, m \geq 2n$ として S^n 上の C^∞ 級 S^{m-n} 束の構造を有する連結 C^∞ 級有向多様体有限個と, 特異点集合が連結であるような $\mathbb{R}^n$ への同心円形折り目写像を許容するような連結 C^∞ 級有向多様体 (球面) の連結和としてあらわされる多様体を, 正則値の逆像が標準球面の非交和で, 特異点集合の連結成分数と真核の逆像の連結成分数が等しいような局所 C^∞ 自明な同心円形折り目写像を許容する多様体として特徴づけた (Theorem 18-20). 最後に Theorem 13 と Theorem 20 の結果を以下まとめる.

定理 4([6], [8], [9]). M を m 次元連結閉 C^∞ 級多様体とする. 自然数 $n \geq 2$, $m > n$ とする.

M が, 有限個の S^n 上の C^∞ 級 S^{m-n} 束の構造を有する連結 C^∞ 級有向多様体と, 特異点集合が連結であるような $\mathbb{R}^n$ への同心円形折り目写像を許容するような連結 C^∞ 級有向多様体 (球面) の連結和としてあらわされれば, 正則値の逆像が S^{m-n} の非交和でありかつ真核の逆像の連結成分数と特異点集合の連結成分の個数が等しいような局所 C^∞ 自明な同心円形折り目写像 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在する. $m \geq 2n$ であれば逆も成立する.

References

- [1] O. Burlet, G. de Rham, *Sur certaines applications generiques d'une variete close a 3 dimensions dans le plan*, Enseign. Math. 20 (1974), 275–292.
- [2] J. J. Eells, N. H. Kuiper, *An invariant for certain smooth manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. 60 (1962), 93–110.
- [3] C. Ehresmann, *Les connexions infinitesimales dans un espace fibre differentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 29–55.
- [4] Y. K. S. Furuya, P. Porto, *On special generic maps from a closed manifold into the plane*, Topology Appl. 35 (1990), 41–52.
- [5] M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag (1974).
- [6] N. Kitazawa, *On round fold maps* (in Japanese), RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), 45–59.
- [7] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.
- [8] N. Kitazawa, *Differential topology of manifolds admitting round fold maps*, arXiv:1304.0618.
- [9] N. Kitazawa, *Differential topology of manifolds admitting round fold maps II*, arXiv:1310.8407.
- [10] M. Kobayashi, O. Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2607–2636.
- [11] J. W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. (2) 64 (1956), 399–405.
- [12] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.
- [13] O. Saeki, *Topology of special generic maps into $\mathbb{R}^3$* , Workshop on Real and Complex Singularities (Sao Carlos, 1992), Mat. Contemp. 5 (1993), 161–186.
- [14] O. Saeki, K. Sakuma, *On special generic maps into $\mathbb{R}^3$* , Pacific J. Math. 184 (1998), 175–193.
- [15] O. Saeki, K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers* J. Math. Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.
- [16] K. Sakuma, *On special generic maps of simply connected $2n$ -manifolds into $\mathbb{R}^3$* , Topology Appl. 50 (1993), 249–261.
- [17] K. Sakuma, *On the topology of simple fold maps*, Tokyo J. of Math. Volume 17, Number 1 (1994), 21–32.
- [18] R. Thom, *Les singularites des applications differentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955–56), 43–87.
- [19] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces: I, mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. 62 (1955), 374–410.