T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	力学的拘束を満足するデータ写像に基づいたロボットの運動設計
Title(English)	
著者(和文)	宮嵜哲郎
Author(English)	Tetsurou Miyazaki
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第9446号, 授与年月日:2014年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:岡田　昌史,岩附　信行,武田　行生,三平　満司,山浦　弘
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第9446号, Conferred date:2014/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

平成２５年度
機械物理工学専攻　学位論文

力学的拘束を満足するデータ写像に基づいたロボットの運動設計

東京工業大学大学院　理工学研究科
機械物理工学専攻
宮嵜 哲郎

指導教員　岡田 昌史　准教授
岩附 信行　教授

目次

第 1 章　序論 1
1.1　研究の背景 1
1.2　従来の研究 2
1.3　研究の目的 3
1.4　本論文の構成 4

第 2 章　軌道アトラクタに基づいた自律制御系の設計 [1] 5
2.1　はじめに 5
2.2　ベクトル場の設計 5
2.3　コントローラの設計 7
2.4　おわりに 7

第 3 章　非線形状態空間写像による力学構造の一致を利用したロボットの運動生成 [2] 8
3.1　はじめに 8
3.2　線形系における状態空間写像 8
3.2.1　力学構造を一致させる線形状態空間写像 8
3.2.2　倒立振子システムにおける運動の生成 9
3.2.3　物理的に大きく異なる系の運動生成 10
3.3　非線形系における状態空間写像 11
3.3.1　力学構造を一致させる非線形状態空間写像 11
3.3.2　タップダンスロボットを用いた実験検証 11
3.4　おわりに 12

第 4 章　非線形状態空間写像を用いた力学的整合を持つ運動変換 [3] 14
4.1　はじめに 14
4.2　運動の変換 14
4.2.1　非線形状態空間写像 14
4.2.2　状態空間写像のための状態変数の低次元化 15
4.2.3　写像の条件 15
4.2.4　最適化による写像と入力の計算 17
4.3　タップダンスロボットへの適用 17
4.3.1　タップダンスロボット 17
4.3.2　人間の運動の計測 17

4.3.3 ロボットの力学的整合性を満たす運動への変換 19
4.3.4 実験結果 21
4.3.5 考察 22
4.4 おわりに 22

第 5 章 位置・速度・加速度の微分関係と力学的整合性を満たす運動パターンの生成 [4] 24
5.1 はじめに 24
5.2 運動の変換 24
5.2.1 問題の設定 24
5.2.2 位置・速度・加速度の微分関係 25
5.2.3 運動データの満たすべき条件 25
5.3 タップダンスロボットへの適用 26
5.3.1 タップダンスロボット 26
5.3.2 実現する運動の条件 26
5.3.3 満たすべき条件の計算アルゴリズムへの実装 26
5.3.4 運動データの最適化 27
5.3.5 ロボットの運動への変換 27
5.3.6 タップダンスロボットの運動生成 28
5.4 平面二足歩行ロボットへの適用 30
5.4.1 平面二足歩行ロボット 30
5.4.2 人間の運動の計測 30
5.4.3 実現する運動の条件 31
接地状態の指定 31
閉ループの条件 32
5.4.4 満たすべき条件の計算アルゴリズムへの実装 32
5.4.5 運動データの最適化 33
5.4.6 運動低次元化を用いた軌道修正 33
5.4.7 ロボットの運動への変換 33
5.5 おわりに 34

第 6 章 力学的整合を満たす加速度運動パターン設計 36
6.1 はじめに 36
6.2 加速度を設計変数とする運動の変換 36
6.2.1 問題の設定 36
6.2.2 運動の満たすべき条件 37
6.2.3 満たすべき条件の計算アルゴリズムへの実装 37
6.2.4 計算アルゴリズムの流れ 38
6.3 運動パターンの設計 39
6.4 おわりに 39

第 7 章 結論 41
7.1 本論文の成果 41

7.2 今後の展望 42

参考文献 44

付録 A 3 章 線形系の運動方程式 46

A.1 倒立振子の運動方程式 46

A.2 2 質点ばね系の運動方程式 46

付録 B タップダンスロボットの運動方程式 48

付録 C 平面二足歩行ロボットの詳細 52

C.1 リンクの運動方程式 52

C.2 リンク間の幾何学関係 57

C.3 リンクの重心位置とかかと位置の加速度 60

C.4 順動力学 62

C.5 逆動力学 64

謝辞 67

図目次

1.1 Standard feedback system 1
1.2 Autonomous control system 2

2.1 Vector-field in state-space 5
2.2 Vector-field using obtained input sequence 6

3.1 State-space mapping 9
3.2 Inverted pendulum systems 10
3.3 Motion of the small inverted pendulum 10
3.4 Motion of the large inverted pendulum 10
3.5 Two mass spring system 10
3.6 Motion of two mass spring system 11
3.7 Tap dancing robots and their model 11
3.8 Tap dancing motion of small robot 12
3.9 Tap dancing motion of large robot 13

4.1 State-space mapping 16
4.2 Positions of the center of gravity 18
4.3 Marker position and two links model for motion capture 18
4.4 Human motion data in phase-space 18
4.5 Human motion data in state-space 18
4.6 Convergence of J 19
4.7 Angular velocities using optimized coefficient matrix 19
4.8 Angular accelerations using optimized coefficient matrix and input sequence 20
4.9 Obtained input sequence $\boldsymbol{M}$ 20
4.10 Robot motion data in phase-space 20
4.11 Robot motion data in state-space 20
4.12 Comparison of obtained inputs using different reference kinetic energies 21
4.13 Comparison of obtained robot motions using different kinetic energies in phase-space 21
4.14 Simulation result of the generated robot motion using $\boldsymbol{\Xi}$ in state-space 21
4.15 Simulation result of the generated robot motion using $\widehat{\boldsymbol{\Xi}}$ in state-space 21
4.16 Trajectory of the generated robot motion using $\boldsymbol{\Xi}$ in state-space 22
4.18 Trajectory of the generated robot motion using $\widehat{\boldsymbol{\Xi}}$ in state-space 22

4.17 Robot motion sequence realizing Ξ 22

5.1 Motion data of small tap dancing robot 28
5.2 Angular accelerations of small tap dancing robot 28
5.3 Floor reaction force of small tap dancing robot 28
5.4 Obtained input sequence of small tap dancing robot 29
5.5 Generated motion of small tap dancing robot (before optimization) 29
5.6 Generated motion of small tap dancing robot (after optimization) 29
5.7 Generated motion of large tap dancing robot (after optimization) 30
5.8 Angular accelerations of large tap dancing robot 30
5.9 Obtained input sequence of large tap dancing robot 31
5.10 Planar bipedal robot and its model 31
5.11 Marker position and human model for motion capture 31
5.12 Given absolute foot angles (blue line : θ_0, red line : θ_6) 31
5.13 Closed loop formed by leg links and ground 32
5.14 Obtained joint angle trajectories for the planar biped robot (blue line : left leg , red line : right leg , dot line: angle limit) 34
5.15 Obtained input torque trajectories for the planar biped robot (blue line : left leg , red line : right leg , dot line: angle limit) 34
5.16 Robot motion sequence (blue and red colors denote for left and right legs) 35
5.17 Index of closed loop condition (trajectory of y_m) 35
5.18 Ground reaction forces 35

6.1 Given absolute foot angles (blue line : θ_0, red line : θ_6) 37
6.2 Given absolute foot angular acceleration (blue line : $\ddot{\theta}_0$, red line : $\ddot{\theta}_6$) 37
6.3 Robot motion sequence (blue and red lines denote for left and right legs) 39
6.4 Index of closed loop condition (trajectory of y_m) 39
6.5 Ground reaction forces (blue and red colors denote for left and right feet) 39
6.6 Obtained ankle joint angle and its input torque (blue line : left leg , red line : right leg , dot line: limitation) 40

7.1 Motion generations from common vector field 42

B.1 Tap dancing robot model (right foot touches ground) 48
B.2 Tap dancing robot model (left foot touches ground) 50

C.1 Planar moonwalking robot model 52
C.2 Sole of robot model (link 0) 53
C.3 Sole of robot model (link 6) 55
C.4 Planar moonwalking robot model (link 0 is fixed) 57
C.5 Planar moonwalking robot model (link 6 is fixed) 58

表目次

3.1 Parameters of tap dancing robots 12

4.1 Parameters of human model and robot 17

5.1 Parameters of large tap dancing robot 26

第 1 章

序論

1.1 研究の背景

ロボットの運動生成では，目的の運動を実現するための条件を与える必要がある．例えば，マニピュレータのリーチング運動では手先位置が目的の座標に一致するという条件を与え，歩行ロボットの移動では足裏の接地位置を指定するという条件を与える．実現する運動の条件を満たせば，力学特性の異なるロボットで実現した運動も同じ運動とみなせ，あるロボットや人間で実現した運動を他のロボットの同じ運動に変換できればロボットの運動生成が容易となる．また，福祉工学において人間が行う運動を解析し，その運動を実現するための条件，すなわち運動のコツを力学的に抽出し，それを運動の教示に利用できれば，熟練者による巧みな運動を初心者に伝授したり，健常者の運動にトルク制限などを施し高齢者や障がい者に適した運動に変換することが可能となる．さらに，高齢者や障がい者の運動に力の補助を加えて変換を行えば，運動を楽に行うための補助力の設計およびこれを発生する補助器具の開発が可能となる．

このように，ロボットの運動生成や福祉工学の発展のために，運動実現のための条件や，力学特性の異なる対象間での運動の比較・変換が容易に行える必要があるが，運動は身体・環境・情報処理 (制御) の相互作用から生成されるため，これらを統合的に扱う必要がある．すなわち，身体・環境・情報処理 (制御) の個々の場から 1 つの場が共創され，場に従って身体が動くことで運動が生成されると解釈できる．さらに，その動き方は運動方程式で記述されるため，力学系の時間発展として運動のモデル化も可能である．これに対し，これまでのロボットの運動生成では，Fig.1.1 にあるようにロボットの安定化制御系を設計し，これに外部から運動の目標値

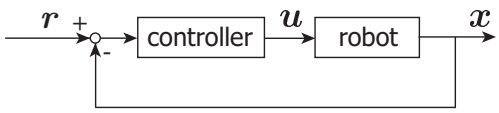


Fig.1.1 Standard feedback system

を与えることで行われてきた．安定化制御系設計では，ロボットの運動方程式からリアプノフ関数を場として定め，平衡点周りでの安定化コントローラを設計する．その後，平衡点を時間とともに移動させるための目標値を外部から与えることで，ロボットは運動を生成する．この制御法は場に基づいているものの，その場は運動とは直結しておらず，(a) ロボットの生成する場を安定化コントローラによって変形すること，(b) 動きを設計することの 2 段階に分かれている．この手法により，例えばヒューマノイドロボットのように多自由度で複雑なダイナミクスを持つロボットに対して，ZMP（Zero Moment Point）を規範としたモデル化と簡易なコントローラ設計 [5, 6, 7]，および，ZMP を規範とした目標運動の設計 [8] を可能としているが，(1) フィードバック系の遅れから目標運動を確実に実現できないこと，(2) 目標運動は外部から時間の情報を含んだものとして与えられる．そのため，(1) では遅れの小さいハイゲインフィードバックが仮定されること，(2) ではロボットが外乱により姿勢を崩しても目標値は先に進むことから，ロボットのダイナミクスのモデル化誤差，環境の変化に対するロバスト性が高いとは言いにくい．これに対し，岡田ら [1] は軌道アトラクタに基づいた自律制御系の設計法を提案した．この方法では，目標とする運動を与え，ロボットのダイナミクスに基づいて目標運動を軌道アトラクタとする場を求め，場に基づいてコントローラを設計するものである．Fig.1.2 に表されるような自律系が構成され，

この結果，外部からの目標値を必要とせずにロボットは運動を続け，環境・身体・情報処理の相互作用から生成されるロボットの運動となる．すなわち，目標運動に基づいて，身体のダイナミクス，制御のダイナミクスを合わせた場の設計による運動の生成であると言える．この

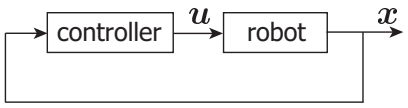


Fig.1.2 Autonomous control system

方法の特徴は，(a) 運動がアトラクタであるため安定化されていること，(b) 外部からの指令がないため運動が時間の拘束を持たないこと，すなわち，外乱・環境の変化などに合わせて運動およびその時間が変化することが挙げられる．しかし，この方法において，先に与える運動が生成される運動となるため，これが実現可能，すなわち，この運動を生成する入力列が存在するようなものでなければならない．さらに，目標となる運動はロボットの状態空間で定義されるため，多自由度系の場合にはこれが難しい．特に，歩行ロボットなどのように環境に固定されていないロボットの場合は床反力が正であることの条件，環境と多点で接触する場合には閉リンクの条件，非ホロノミック系であれば関節角度の非ホロノミックな条件などを満たす必要があり，自由に与えることはできない．これは運動の拘束条件が関節角度だけでなく角速度，角加速度も含むため，これらの整合性を満たす運動の軌道が得にくいことに起因する．多自由度系の運動を得るために，人間のモーションキャプチャデータを用いることが有効であるが，人間とロボットの力学特性は異なるため，人間の運動をロボットが実現可能な運動パターンへと変換する必要がある．

1.2 従来の研究

まず，ロボットの安定化コントローラの設計法に関する従来研究について述べる．ヒューマノイドロボットの歩行運動を生成するために，Kajita ら [8] は予見制御 [9] に基づき将来の目標 ZMP 軌道を用いて重心軌道を生成する方法を提案した．この方法では現在から近い将来までの目標 ZMP 軌道の情報を用いることで，ZMP 追従制御の遅れを解消する．ただし，予見制御を用いる方法は，ロボットが運動中に外乱を受けたとき，将来の状態を目標軌道に一致させるために現在の状態を大きく変化させるため，軌道追従の誤差が大きくなり，ZMP が支持多角形を逸脱する場合がある．この方法の改良として，西脇ら [10] は，歩行中のヒューマノイドロボットが地面の凹凸などから外乱を受けたとき，一歩の期間中に実現される ZMP 軌道と目標 ZMP 軌道との誤差が小さくなるように運動を修正する方法を提案した．この方法は将来の ZMP 許容領域の形状に応じて目標 ZMP 軌道を変形し，実現される ZMP 軌道と目標 ZMP 軌道の誤差のピークを抑制する．また，西脇ら [11] は不整地上でロボットを歩行させるときにロボットが転倒する原因の一つに，想定した ZMP と実際の ZMP にずれが生じることを挙げ，これを解消するための戦略として，遊脚を踵から着地させること，および次の一歩の接地位置，接地足縁を変更することを提案した．この方法では，一歩の期間中にバランスが維持できないときに，次の一歩でバランスを回復する．この方法は運動の軌道と，歩行中の転倒を防止する戦略を同時に得ているが，歩行に限定されるうえ，戦略の獲得は発見的な要素が強い．神永ら [12] は，アクチュエータには発生できる速度とトルクの間に関係があり，二足歩行ロボットの速い歩行を生成するとき，遊脚の運動は速度の制限がかかることが多いと指摘し，二足歩行ロボットの歩行能力を向上させるために，現在と終端時（遊脚接地時）の位置・速度・加速度を境界条件とし，これを満たすように最大関節角速度が最小となるように遊脚軌道を最適化し，リアルタイムに軌道を修正した．ただし，運動中に大きな外力を受けるなど，速度でなくトルクに制限がかかる運動には適用できない．

次に，実現可能な運動パターンを得るための従来研究について述べる．Sung ら [13] はロボットの運動の軌道を多項式関数で表し，タスクに合わせて軌道上の経由点を動かし，角度，トルク，ZMP 位置などの条件の下，運動の軌道を修正する方法を提案した．方法の検証に，ヒューマノイドロボットのボールキックタスクを二つ生成した．Lengagne ら [14] はロボットの関節角軌道を B スプライン関数で表現し，B スプライン関数は制御点の凸包に含まれる性質を利用して関節角度に制限を付加した．また，テイラー多項式を用いた区間解析 [15] でトルクや ZMP に関する不等式拘束の最大・最小値を

見積もり，運動の拘束条件を全時間で連続的に満たす運動の軌道を得る方法を提案した．方法の検証に，ヒューマノイドロボットのボールキックタスクを実現した．松本ら [16] はある時刻における特定のリンクの位置・姿勢をキーフレームとして与え，これらを補間して任意のリンクの幾何学的拘束を満たす運動パターンを得る方法を提案した．また，人間の運動をロボットが実現可能な運動パターンへと変換する方法が多く報告されている．Dariush ら [17] は，運動中にリンクの干渉を検出し，これを回避する運動をオンラインで生成する方法を提案した．Ijspeert ら [18] は人間の運動を非線形力学系に記憶させ，衝突などにより運動が停止した場合でも，その後に運動を継続可能とするコントロールポリシーを提案した．Pollard ら [19] はロボットの関節配置に基づいて，可動範囲，関節角速度などの制限を満たすよう，人間のデータを変換する方法を提案した．これらの方法は主に運動学に基づいた方法であり，幾何学的な解析に基づいている．Mistry ら [20] は椅子に座った人間が起立する運動をヒューマノイドロボットに模倣させた．運動中の人間の質量中心の軌道をロボットのサイズにスケーリングし，この軌道にロボットの質量中心を追従させることを強い拘束，人間の関節角軌道にロボットの関節角を追従させることを弱い拘束として運動パターンを変換する．この方法は静力学的な解析に基づいている．Yamane ら [21] は人間の運動データをヒューマンフィギュアの運動へ変換し，Kanoun ら [22] は，制約条件を順位づけし，順位の高い制約条件から優先的に満たすように運動パターンを生成する方法を提案した．Saab ら [23] は，ロボットの力学的な拘束を二次計画問題としてまとめ，運動パターンを得る方法を提案した．また，参考文献 [5, 6, 7] は人間の運動からヒューマノイドの全身運動をオンラインで生成する方法であるが，現在の時間ステップの情報のみを用いて運動を逐次変換するため，元の人間の運動が急激に変化するときはロボットが転倒する場合もある．これらの方法は動力学に基づいて人間の運動パターンに見た目に近い運動をロボットやキャラクタに行わせるものである．ただし，以上の方法は運動の軌道の設計法であり，運動と制御系の設計は直結していないため，1.1 章で述べた (1)，(2) の課題がある．

運動と制御系を同時に設計している従来研究として，中岡ら [24] は，動力学に基づいて人間の舞踊をロボットの運動へ変換した．この方法では上半身は舞踊動作，下半身は安定化のように役割を分け，ロボットの運動を生成する．ただし，この方法ではロボットの下半身動作は人間の運動とは別に生成される．岡田ら [25] は，アトラクタに基づくコントローラの設計を効率化するために，異なる 2 体のロボットのコントローラを身体に共通な要素と運動に共通な要素に分解・結合し，要素の組み合わせで新しいコントローラを設計した．ただし，力学特性の大きく異なるロボット同士で運動に共通な要素を抽出することは困難であり，このような場合，身体の違いを考慮した運動の変換が必要となる．

1.3 研究の目的

本論文では，運動をモデル化する手段として，運動と制御を同時に考慮できる軌道アトラクタに基づいた自律制御系を用い，自律制御系の設計に必要な場，あるいは場の設計に必要な実現可能な運動の軌道（入力の軌道を含む）を得るために，モーションキャプチャで計測した人間の運動データや他のロボットの運動データを初期値として与え，これをロボットの力学的な拘束のもと変換する方法を提案する．提案する方法は，(i) 運動の場を変換し，ロボットの運動の軌道と制御系を同時に設計する方法と，(ii) まず運動の軌道のみを変換し，その後に従来の制御系設計法を用いて，運動の軌道へ引き込む場を設計する方法の二つである．(i) の方法では，先に実現されたあるロボットの運動の場を他のロボットの力学的に実現可能な場へと写像することで，同時にその場を生成する制御系の写像も行う．

ただし，(i) の方法は運動の軌道周辺の空間全体で場を計算する必要があり，計算量が多いという課題がある．このため，この方法を自由度の多いロボットの運動の場の設計に適用することは難しい場合がある．そこで，(ii) の方法では計算量の減少を目的として，モーションキャプチャで計測した人間の運動データを力学的な拘束の下変換し，ロボットの実現可能な運動の軌道を得て，これを用いて場を設計することで制御系を得る．(ii) の方法は，状態空間写像により角度と角速度および入力の軌道を変換する方法と，角度と入力の時系列データを最適化問題によって得る方法，そして角加速度と入力の時系列データを得る方法があり，これらの方法について本論文の各章で述べる．これら提案方法をロボットの足踏

み運動や歩行運動の生成に適用し，実験によって提案方法の有効性を検証する．

1.4 本論文の構成

本論文は，以下の構成からなる．

第 2 章「軌道アトラクタに基づいた自律制御系の設計」では，従来法である自律制御系の設計法について述べる．この制御系設計手法では先に実現可能な運動データが必要であることを問題点として指摘し，そのため，制御系はロボットごと，運動ごとに設計しなければならず，これには多くの計算を必要とすること，さらに，非ホロノミック系の場合には実現可能な運動データを得ることが困難であることを指摘し，先に設計した自律制御系の情報や人間の運動データの有効利用が必要であると共に，そのためには，もとの運動をロボットのダイナミクスに合致させる変換が必要であることを述べる．

第 3 章「非線形状態空間写像による力学構造の一致を利用したロボットの運動生成」では，先に得られているロボットの運動を状態空間内のベクトル場でモデル化し，場に基づいて新たなロボットの運動を実現するコントローラを写像によって求める方法を提案する．この方法では，ロボットの力学構造を考慮し，コントローラが生成する場がロボットの運動方程式を満たすことを拘束条件とすることで写像関数が得られることを示すと共に，足踏み動作を行うロボットに適用し，安定な運動を生成することでその有効性を検証する．

第 4 章「非線形状態空間写像を用いた力学的整合を持つ運動変換」では，第 3 章で提案した方法が，コントローラが生成する場の写像であることから極めて多くの計算量を必要とし，自由度の少ない簡易なロボットへの適用しかできないこと，写像関数の選択によっては拘束条件が満たされにくいことを問題点として指摘し，運動データ (関節角度と角速度のデータ) を変換する状態空間写像を求める方法を提案する．これにより，計算が簡易化されること，拘束条件を満たしやすくなることを示すと共に，ロボットの複数の運動に適用することで，有効性を検証する．

第 5 章「位置・速度・加速度の微分関係と力学的整合性を満たす運動パターンの生成」では，さらに計算量を減らすために，接地状態などの運動の満たすべき少数の条件を与え，設計パラメータを関節角度データとし，主成分分析を用いて運動の低次元化を加えた方法を提案する．特に，関節角度と角速度，角加速度の関係を擬似微分と零位相フィルタによって与えることで，これらが伝達関数とのたたみ込み積分を表す行列の掛け算で得られることを示し，これにより，関節角度の設計のみで運動方程式を満たすための拘束条件が考慮できること，また，任意の運動について変換可能であることを示すとともに，モーションキャプチャによって得られた運動データをロボットの運動へ変換することで有効性を検証する．

第 6 章「力学的整合を満たす加速度運動パターン設計」では，5 章で提案した方法が，零位相フィルタを用いることで 4 階微分可能な関節角データとなること，さらに，これが歩行のように状態が切り替わる運動において，角加速度の不連続性を許容せず，適切な運動を生成しない場合があることを問題点として指摘すると共に，関節の角加速度を設計パラメータとした運動変換方法を提案する．関節角加速度の不連続が許容されることから関節角度データは 2 階微分可能なデータに留まり，さらに，5 章の方法と同様に，積分器の伝達関数とのたたみ込み積分を表す行列との掛け算により，関節角加速度を角速度，角度に変換することで閉リンクの拘束条件のような，関節角度に関する拘束条件を与えることが可能であることを述べる．

第 7 章「結論」では，本論文における提案手法，および，成果をまとめ，軌道アトラクタに基づいた自律運動制御系設計の応用可能性について述べる．

第 2 章

軌道アトラクタに基づいた自律制御系の設計 [1]

2.1 はじめに

岡田らの提案する軌道アトラクタに基づいた自律制御系の設計法 [1] について述べる．一般的なロボットのフィードバック制御系は Fig.1.1 で表される．Fig.1.1 の制御系では，ロボットの現在の状態変数 $\boldsymbol{x}$（関節の角度，角速度など）と目標運動パターン $\boldsymbol{r}$ の情報をコントローラに与え，入力 $\boldsymbol{u}$（トルクなど）を得ることで，ロボットの安定な運動を生成する．一方，軌道アトラクタに基づいた自律制御系は Fig.1.2 で表される．この制御系では $\boldsymbol{r}$ を用いずに，状態空間内の目的の運動の軌道 $\boldsymbol{X_r}$ をアトラクタとするように $\boldsymbol{x}$ のみから $\boldsymbol{u}$ を得て，この軌道上へ収束するロボットの周期運動を自律的に生成する．$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{X_r}$ の違いについて，一般的なフィードバック制御系に与える $\boldsymbol{r}$ は必ずしも実現可能なものでなくてもよい（位置のバンバン制御などで不連続な目標位置軌道を誤差なく実現しようとすれば無限の加速度・力が必要）のに対し，$\boldsymbol{X_r}$ は実現可能性が要求される．運動が実現可能とは，その運動を実現する入力が存在することとする．自律制御系の設計では，Fig.2.1 のように $\boldsymbol{x}$ が目的の運動の軌道 $\boldsymbol{X_r}$ に引き込まれるような場を状態空間内に設計し，その場を実現するための $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{x}$ の関数とし，これをコントローラとする．この制御系の特徴として，(a) 目的の運動をアトラクタとし，これを安定に生成すること，(b)$\boldsymbol{r}$ などの外部指令を必要としないため，運動が時間に拘束されないこと，すなわち，外乱・環境の変化などに合わせて運動およびその時間が変化することなどが挙げられる．

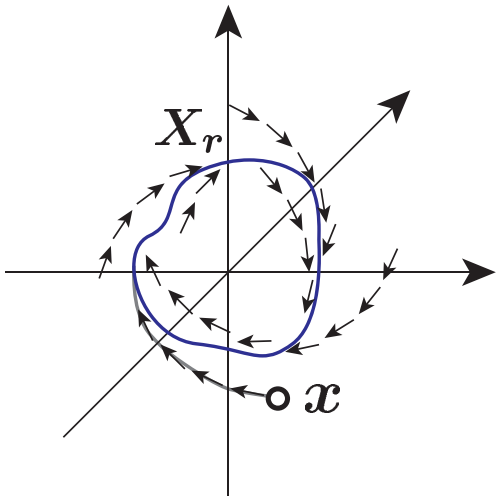


Fig.2.1 Vector-field in state-space

2.2 ベクトル場の設計

目的の運動の軌道 $\boldsymbol{X_r}$ が得られているとき，これをアトラクタとする自律制御系を設計する．ロボットの状態方程式を

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{2.1}$$

とする．これを離散化して

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_k \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \dot{\boldsymbol{x}}_k \Delta t \tag{2.3}$$

を得る．ただし，添え字 k は離散時間のステップ数，Δt はサンプリング時間を表わす．目的の運動の軌道 $\boldsymbol{X_r}$ 上のある点 $\boldsymbol{x_r}_i$ 近傍の状態 $\boldsymbol{x}_i$ に適切な入力列を与え，$\boldsymbol{x}_i$ が $\boldsymbol{X_r}$ 上に引き込まれていくような経路の場を，$\boldsymbol{X_r}$ 近

傍全域で設計する．まず，式 (2.2) を $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i}$，$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i}$ 周りでテーラー展開し，二次以上の項を無視することで

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i} + \Delta\boldsymbol{x}_i \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i} + \Delta\boldsymbol{u}_i \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{i+1} &= \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i} + \Delta\boldsymbol{x}_i) \\ &\quad + \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i} + \Delta\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i} + \Delta\boldsymbol{u}_i) \end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&\simeq \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i}) + \frac{\partial \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}}\Delta\boldsymbol{x}_i \\ &\quad + \left(\boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i}) + \frac{\partial \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}}\Delta\boldsymbol{x}_i\right) \\ &\quad (\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i} + \Delta\boldsymbol{u}_i)\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&\simeq \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i}\right)\Delta\boldsymbol{x}_i \\ &\quad + \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})\Delta\boldsymbol{u}_i \\ &\quad + \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i}) + \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i}\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i}\right)\boldsymbol{x}_i \\ &\quad + \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})\boldsymbol{u}_i \\ &\quad + \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i}) + \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i} \\ &\quad - \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i}\right)\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i} - \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i}\end{aligned}\tag{2.9}$$

となり，$\boldsymbol{x}_i$ と $\boldsymbol{u}_i$ の係数と定数項をまとめると

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{C}_i \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{A}_i = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i}\right) \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i}) \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_i &= \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i}) + \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i} \\ &\quad - \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i}\right)\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i} - \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i})\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i}\end{aligned}\tag{2.13}$$

のように線形系に近似できる．この近似は $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i}$，$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}i}$ 近傍でのみ成り立つ．式 (2.10) を j ステップ先まで拡張すると

$$\boldsymbol{X}_{i+1}^{i+j} = \boldsymbol{A}_{set}\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{B}_{set}\boldsymbol{U}_i^{i+j-1} + \boldsymbol{C}_{set} \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{X}_{i+1}^{i+j} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{i+1}^T & \cdots & \boldsymbol{x}_{i+j}^T\end{bmatrix}^T \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{U}_i^{i+j-1} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_i^T & \cdots & \boldsymbol{u}_{i+j-1}^T\end{bmatrix}^T \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{A}_{set} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_i^T & \cdots & \left(\prod_{k=i}^{i+j-1}\boldsymbol{A}_k\right)^T\end{bmatrix}^T \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{B}_{set} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_i & 0 & & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{A}_{i+1}\boldsymbol{B}_i & \boldsymbol{B}_{i+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \left(\prod_{k=i+1}^{i+j-1}\boldsymbol{A}_k\right)\boldsymbol{B}_i & & & \cdots & \boldsymbol{B}_{i+j-1}\end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$\boldsymbol{C}_{set} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}_{i+j-1} + \sum_{k=i}^{i+j-2}\left(\left(\prod_{\ell=k+1}^{i+j-1}\boldsymbol{A}_\ell\right)\boldsymbol{C}_k\right)\end{bmatrix} \tag{2.19}$$

が得られる．これは入力列 $\boldsymbol{U}_i^{i+j-1}$ が与えられることで $\boldsymbol{x}_i$ が移動し，軌道 $\boldsymbol{X}_{i+1}^{i+j}$ を描くことを表している．そこで，ある初期値 $\boldsymbol{x}_i$ が $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{r}}$ に沿って動くためには，式 (2.14) の左辺に

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{r}i+1}^{i+j} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i+1}^T & \cdots & \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}i+j}^T\end{bmatrix}^T \tag{2.20}$$

を与えることで，入力列 $\boldsymbol{U}_i^{i+j-1}$ を

$$\boldsymbol{U}_i^{i+j-1} = \boldsymbol{B}_{set}^{\#}\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{r}i+1}^{i+j} - \boldsymbol{A}_{set}\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{C}_{set}\right) \tag{2.21}$$

のように求められる．これは以下の評価関数

$$J = \sum_{k=i+1}^{i+j}\|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{r}k} - \boldsymbol{x}_k\|^2 \tag{2.22}$$

の最小化に相当し，Fig.2.2 のように $\boldsymbol{x}_i$ が $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{r}i+1}^{i+j}$ に沿って移動する軌道 $\boldsymbol{X}_{i+1}^{i+j}$ を実現する入力列を求めている．図中，黒点列が $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{r}i}^{i+j}$，白点列が $\boldsymbol{X}_i^{i+j}$ を表す．

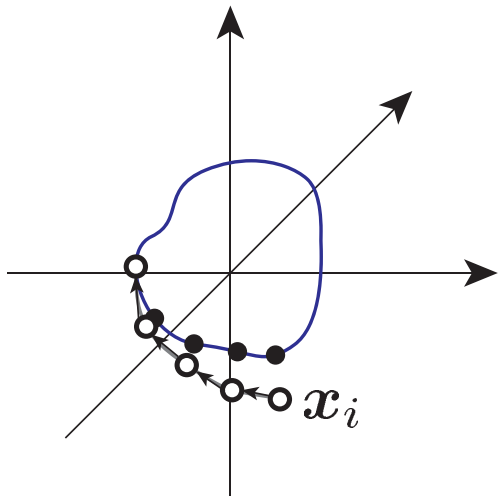


Fig.2.2 Vector-field using obtained input sequence

$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{r}}$ 近傍全域で同様の計算を行うことで，$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{r}}$ をアトラ

クタとする場を設計する．式 (2.14) のように $\boldsymbol{X_r}$ 近傍で状態方程式を各時間ステップで近似線形化するため，元の状態方程式 (2.1) が非線形性を含む場合も場を設計できる．

2.3 コントローラの設計

ベクトル場の設計で得た，$\boldsymbol{X_r}$ に収束する軌道とそれを実現する入力列を用いて，これらの関係を

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \tag{2.23}$$

のように関数近似し，コントローラを設計する．本論文では関数 $\boldsymbol{h}$ を

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \tag{2.24}$$

のような多項式関数とする．ただし，$\boldsymbol{\Theta}$ は定数の係数行列，$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の要素のべき乗を要素とするベクトルである．たとえば $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \tag{2.25}$$

のようなベクトルである場合，$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ & x_1^3 & x_1^2x_2 & \cdots & & \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2.26}$$

のように，$\boldsymbol{x}$ 内部の要素同士をかけ合わせて高次の項を作ることでベクトルの要素数を拡張したベクトルである．$\boldsymbol{\Theta}$ の計算について述べる．全ての $\boldsymbol{x_r}_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ の周りで m 点ずつ $\boldsymbol{x}_i$ を定義し，場を設計することで $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ の組 $(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, jmN)$ が得られ，これらを用いて

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}) \tag{2.27}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_{jmN} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_1) & \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_2) & \ldots & \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_{jmN}) \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_{jmN} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

とし，$\boldsymbol{\Theta}$ を

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})^{\#} \tag{2.31}$$

のように求める．$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})^{\#}$ は $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X})$ の擬似逆行列である．式 (2.31) で計算される $\boldsymbol{\Theta}$ は，$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{X}$ の関係を最小二乗法で関数近似した行列となる．べき乗多項式の次数は下げれば関数近似の精度が落ち，上げれば関数が極めてセンシティブになること，計算の不安定性を導くことから，適切な次数を選ばなければならず，その方針を与えることは困難である．このため，多項式の次数は実験やシミュレーションを行いながら調整するパラメータの一つとなっている．また，自律制御系のコントローラは，設計した場を関数近似して得るため，これを用いて生成される運動は与えた運動パターンに厳密には一致しない．例えば，運動の制約条件は軌道上では満たされるが，軌道周辺の空間では必ずしも満たされないため，この誤差が運動の生成に致命的かどうか判別するためには，実験を行い検証する必要がある．

2.4 おわりに

本章では，岡田らの提案する軌道アトラクタに基づいた自律制御系の設計法 [1] について述べた．自律制御系設計の課題として，場の設計に必要な，アトラクタとする目的の運動の軌道 $\boldsymbol{X_r}$ は実現可能である必要があり，かつこの $\boldsymbol{X_r}$ を制御系を設計するよりも先に得る必要があることが挙げられる．ここでの運動が実現可能とは，その運動を実現する入力列が存在することである．そのため，制御系はロボットごと，運動ごとに設計しなければならず，これには多くの計算を必要とする．さらに，$\boldsymbol{X_r}$ は一般にロボットを安定化せずに運動を生成して得るが，ロボットが非ホロノミック系や劣駆動系の場合，安定化せずに目的の運動の軌道を得ることは難しい．

第 3 章

非線形状態空間写像による力学構造の一致を利用したロボットの運動生成 [2]

3.1 はじめに

前章で自律制御系設計の課題，すなわち先に実現可能な運動の軌道を得る必要があること，および自律制御系はロボットごと，運動ごとに設計しなければならないことを述べた．これらの課題を解決するために，本章ではあるロボットの自律制御系を設計して運動を実現したとき，この実現された運動の場を他のロボットが力学的に実現可能な場へと写像し，同時にその場を生成するコントローラを写像する方法について述べる．この方法は，写像によって二つの系の運動方程式の力学構造を一致させるものであり，この写像によって力学的に一致した運動の変換を行うものである．力学構造の一致とは，2 つの系の状態方程式の係数が一致することであり，物理的に異なる系同士も力学構造が一致すれば，数学的に同じ系とみなせる．また，同時に写像によってコントローラの変換も行うため，一致させた力学系の組の片方の運動を実現するコントローラが得られれば，もう一方の力学的に一致した運動を実現可能とする．運動とともにコントローラも写像できれば，ロボット安定化の可能性が大きく広がると考えられ，ロボットの運動設計法の発展に貢献できる．

3.2 線形系における状態空間写像

3.2.1 力学構造を一致させる線形状態空間写像

まず，簡単のために線形系を用いて，提案する手法について述べる．以下の状態方程式で表される二つの線形力学系

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \tag{3.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\beta}\mu \tag{3.2}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{x}$，u はそれぞれ系 1 の状態変数と入力であり，同様に $\boldsymbol{\xi}$，μ は系 2 の状態変数と入力である．これらの系について以下の仮定を設ける．

仮定 1　二つの系の状態変数の次元は同じ，すなわち，$\dim(\boldsymbol{x}) = \dim(\boldsymbol{\xi})$ である．

仮定 2　二つの系は可制御である．

仮定 3　二つの系は 1 入力系，すなわち，$\dim(u) = \dim(\mu) = 1$ である．

このとき，以下の線形状態空間写像 $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \tag{3.3}$$

によって式 (3.1)，(3.2) の力学構造を一致させることを考える．ただし，$\boldsymbol{T}$ は仮定 1 より正則な正方行列である．まず，二つの系の極（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\alpha}$ の固有値）を一致させるため，式 (3.1) を以下のように書き換える．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}v \tag{3.4}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \tag{3.5}$$

$$v = u + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{3.6}$$

ここで，$\boldsymbol{K}$ は状態フィードバックゲインであり，

$$\mathrm{eig}(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = \mathrm{eig}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{3.7}$$

を満たすものとする．仮定 1，2 より，極配置によって $\boldsymbol{K}$ は得られる．このとき, 式 (3.3) を用いて, 式 (3.2) は

$$\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\mu \tag{3.8}$$

と書き換えられる．これより，式 (3.4) と (3.8) を見比べて，$\boldsymbol{T}$ が

$$\boldsymbol{T}\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{T} \tag{3.9}$$
$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta} \tag{3.10}$$

を満たすとき，

$$\mu = v = u + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{3.11}$$

とすることで，二つの系の力学構造は一致する．これにより，力学系 1 の運動が以下の軌道アトラクタに基づいた自律制御系のコントローラ

$$u = h(\boldsymbol{x}) \tag{3.12}$$

によって生成されているとすると，式 (3.2) の系においてこれと力学的に一致する運動は，式 (3.3)，(3.11)，(3.12) より得られるコントローラ

$$\mu = h(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\xi} \tag{3.13}$$

によって生成される．

ここで，$\boldsymbol{T}$ の物理的意味について考察する．いま，$\widetilde{\boldsymbol{A}}$，$\boldsymbol{\alpha}$ の固有値分解を

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}_1^{-1} \tag{3.14}$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}_2^{-1} \tag{3.15}$$

とする．このとき

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{x} \tag{3.16}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{\xi} \tag{3.17}$$

とすると，式 (3.4)，(3.2) はそれぞれ

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{\Lambda}\widehat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{B}v \tag{3.18}$$
$$\dot{\widehat{\boldsymbol{\xi}}} = \boldsymbol{\Lambda}\widehat{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{\beta}\mu \tag{3.19}$$

と同値変換される．これら二つの系を見比べ，$\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{\xi}} = \bar{\boldsymbol{x}}$ とすると，$\boldsymbol{T}$ は式 (3.10) の条件から

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1^{-1} \tag{3.20}$$

と一致する．これらの関係は Fig.3.1 のように表される．$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\xi}$ の状態空間はそれぞれ $\boldsymbol{T}_1^{-1}$，$\boldsymbol{T}_2^{-1}$ によって $\bar{\boldsymbol{x}}$ の要素で定義される共通の状態空間に写像される．これにより，三つの空間における運動は全て力学的に一致した運動となる．また，$\boldsymbol{\Lambda}$ は固有値 λ_i を要素とする対角

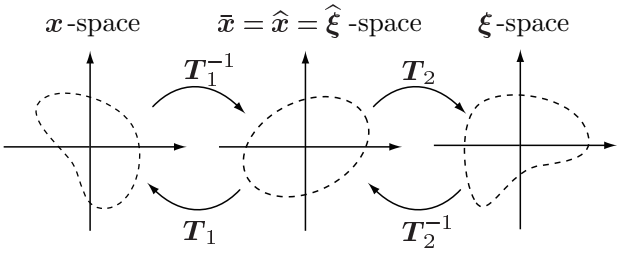


Fig.3.1 State-space mapping

行列であることから，$\bar{\boldsymbol{x}}$ の各要素 $\bar{x}_i$ は独立である．すなわち，

$$\dot{\bar{x}}_i = \lambda_i\bar{x}_i + b_i v \tag{3.21}$$

の構造を持っており，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\xi}$ を固有値の等しいモードに分解していることに相当する．これより，仮定 1 が満たされなくても $\dim(\boldsymbol{x}) > \dim(\boldsymbol{\xi})$ であれば，$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ の固有値の一部と $\boldsymbol{\alpha}$ の固有値を一致させることで，同様の状態空間写像が可能である．つまり，次元の高い力学系のコントローラが得られれば，これを次元の低い力学系のコントローラに用いることが可能である．ただし，その逆は不可である．

また，式 (3.9)，(3.10) の連立方程式において，$\widetilde{\boldsymbol{A}}$，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{T} \in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{\beta} \in R^n$ であることから，$n^2 + n$ 本の方程式と，n^2 個の未知数が存在する．しかし，式 (3.15) の固有値分解において，$\boldsymbol{T}_i$ $(i = 1, 2)$ の一般解 $\bar{\boldsymbol{T}}_i$ は，ひとつの $\boldsymbol{T}_i$ と任意の数 a_1，$\cdots$，a_n を用いて

$$\bar{\boldsymbol{T}}_i = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \boldsymbol{T}_i \tag{3.22}$$

と表されることから，未知数は $n^2 + n$ 個となる．すなわち，式 (3.9)，(3.10) を満たす $\boldsymbol{T}$ は唯一解となる．

3.2.2 倒立振子システムにおける運動の生成

前節で述べた方法を用い，倒立振子システムの運動を生成する．ここでは，Fig.3.2 に表される二つの倒立振子システムを考える．入力を u_i $(i = 1, 2)$，振子の回転角を θ_i，カートの移動距離を y_i とし，運動方程式を $\theta_i \simeq 0$ 周りで線形近似することで線形力学系が得られ

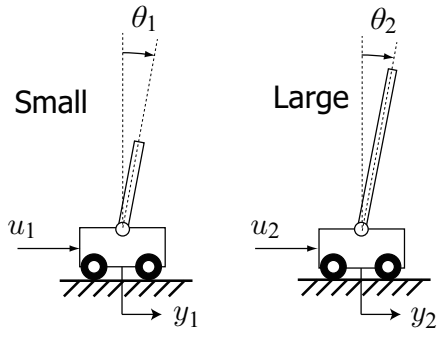


Fig.3.2 Inverted pendulum systems

る．なお，状態変数は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} y_1 & \theta_1 & \dot{y}_1 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \in R^4 \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} y_2 & \theta_2 & \dot{y}_2 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.24}$$

であり，状態方程式を付録 A.1 に示す．ここでは図のように振子の長さが異なる二つのシステムを設定した．これらは前節の三つの仮定を満たしている．

まず，倒立振子 Small に対して最適レギュレータを用いてフィードバック安定化し，これに外部から適当な目標パターンを与えることで運動を生成した．次に，これを観測された運動 $\boldsymbol{X_r}$ とし，式 (3.12) のコントローラを設計した．コントローラの関数 h は式（2.24）のような $\boldsymbol{x}$ のべき多項式とした．このときの倒立振子 Small の動きを Fig.3.3 に示す．左図は状態空間における $\boldsymbol{x}$ の

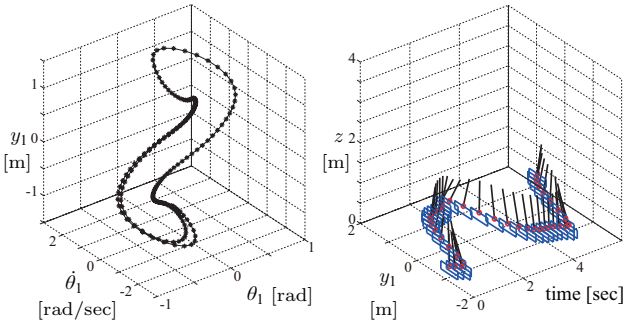


Fig.3.3 Motion of the small inverted pendulum

動き，右図はこのときの倒立振子の動きを示している．ただし，表示の都合上，左図では 4 次元ある状態空間のうち θ_1，$\dot{\theta}_1$，y_1 の 3 次元を表示している．これは振子を安定化しながら，カートが左右へと移動する運動である．

次に，提案する手法により写像 $\boldsymbol{T}$ を求め，式 (3.13) のコントローラを用いて倒立振子 Large の運動を生成した．この結果を Fig.3.4 に示す．運動の振幅が変化するが，カートが左右へと移動する安定な運動が実現された．この結果から，提案手法を用いたコントローラの設

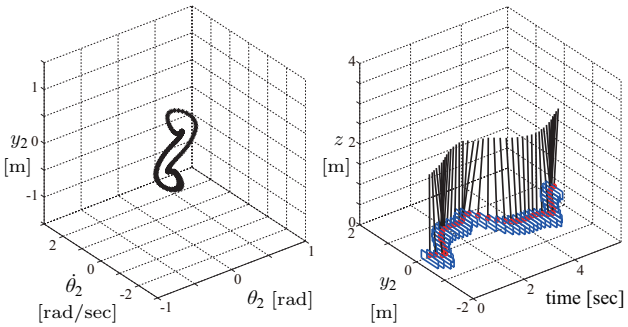


Fig.3.4 Motion of the large inverted pendulum

計について，以下のことが言える．

1. 新たな系に対して安定に運動を生成するコントローラが設計された．
2. 倒立振子 Large の運動は倒立振子 Small の運動に比べ，振子，カートの動きが小さくなった相似な形をしている．これは，倒立振子の力学特性が振子の長さに大きく依存することと一致する．
3. これらより，二つの運動は力学的に一致する運動であるといえる．

3.2.3 物理的に大きく異なる系の運動生成

提案する手法は，2 つの系が仮定 1~3 を満たせば，実世界での系の運動の物理的な違いに関係なく，これらを力学的に一致させることが可能である．その例として，倒立振子 Small の運動を Fig.3.5 に表される 2 質点ばね系の運動へ変換する．2 質点ばね系の状態変数は

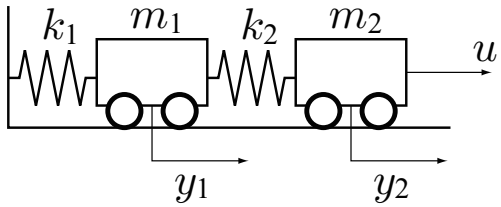


Fig.3.5 Two mass spring system

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.25}$$

となり，状態方程式を付録 A.2 に示す．変換された運動を Fig.3.6 に示す．Fig.3.3 と同様，y_1，$\dot{y}_1$，y_2 の 3 次

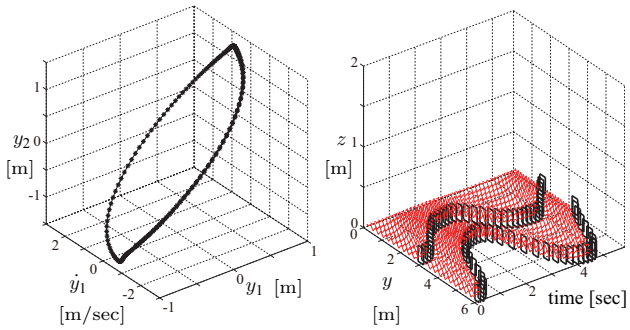


Fig.3.6 Motion of two mass spring system

元空間を示している．質点が移動する安定な運動が生成されている．この結果から，物理的に大きく異なる場合でも提案手法によって運動が生成可能であるだけでなく，力学的に一致する運動を表すことができることが分かる．

3.3 非線形系における状態空間写像

3.3.1 力学構造を一致させる非線形状態空間写像

異なる二つの非線形な力学系を

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})u \tag{3.26}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi})\mu \tag{3.27}$$

とし，これらの力学構造を一致させる非線形状態空間写像

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \tag{3.28}$$

を考える．式 (3.28) の両辺を時間で微分すると

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{3.29}$$

が得られるため，線形系の場合の式 (3.9)，(3.10) に相当する条件は

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})) \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})) \tag{3.31}$$

で得られる．$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ は

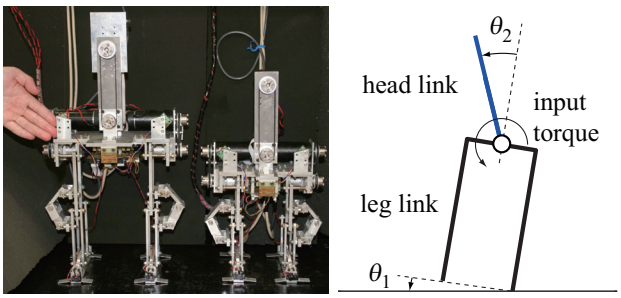
$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \tag{3.32}$$

のように $\boldsymbol{x}$ のべき乗の多項式として，係数 $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}$ を式 (3.30)，(3.31) の方程式を満たすようにニュートン法によって求めることで，非線形状態空間写像が得られる．ただし，状態空間全域で式 (3.30)，(3.31) を満たす写像を得るためには，べき乗多項式の次数を無限とする必要があり，一般には求まらない．そのため，ここでは状態空間全域ではなく，運動の軌道近辺に空間を限定することで，写像が有限次数のべき乗多項式として十分な精度で計算可能となる．具体的には，$\boldsymbol{x}$ の代表点を $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{r}}$ の近傍に複数点設定し，それらに対して式 (3.30)，(3.31) を満たす $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ を求める．ただし，設定した代表点が多すぎると写像の解は得られない．また，このとき式 (3.27) のコントローラは

$$\mu = h(\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{\xi})) \tag{3.33}$$

によって得られる．ここで，$\boldsymbol{T}^{-1}$ は $\boldsymbol{T}$ の逆関数を意味するが，$\boldsymbol{T}$ を式 (3.32) のようにしたことで，逆関数の存在性を一般に保証することはできない．そこで，先に $\boldsymbol{T}$ を求め，代表点 $\boldsymbol{x}$ に対応する $\boldsymbol{\xi}$ を求めた後に，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$ を満たす $\boldsymbol{T}^{-1}$ を $\boldsymbol{\xi}$ のべき乗の多項式として求めた逆関数の近似解を式 (3.33) に用いることとする．

3.3.2 タップダンスロボットを用いた実験検証

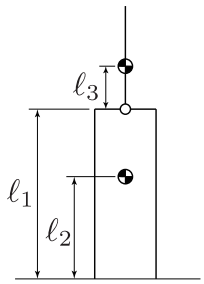


(a) (b)

Fig.3.7 Tap dancing robots and their model

提案する方法の有効性を，Fig.3.7-(a) に示す 2 体のタップダンスロボット Small と Large[1] の運動生成で検証する．このロボットは頭部リンクを振り，その慣性力を利用して脚部リンクを左右交互に接地させて足踏み運動を行うものであり，Fig.3.7-(b) のように頭部リンクと脚部リンクの 2 リンク系でモデル化される．ロ

Table 3.1 Parameters of tap dancing robots



	Large	Small
leg mass [kg]	2.9	2.8
head mass [kg]	0.5	0.5
length ℓ_1 [m]	0.26	0.21
length ℓ_2 [m]	0.19	0.15
length ℓ_3 [m]	0.11	0.11

ボットの脚部リンク，頭部リンクの回転角 θ_1，θ_2[rad] と角速度 $\dot{\theta}_1$，$\dot{\theta}_2$[rad/sec] の 4 変数を状態変数とする．入力 u[Nm] は頭部リンクと脚部リンクをつなぐ関節に発生するトルクである．ロボットの足首は受動関節であり，運動にノンホロノミックな拘束を与えるため，運動中のロボットの角度データの軌道は自由に選べない．また，右脚接地状態と左脚接地状態に分けて運動方程式を求めるが，運動中 θ_1，θ_2 の軌道は連続となる．ロボット Small，Large のパラメータを Table3.1 に示す．ただし，ℓ_1 は脚の長さ，ℓ_2 は地面から脚重心までの長さ，ℓ_3 は頭の回転中心から頭重心までの長さである．ロボット Large はロボット Small と比較して脚が長い．タップダンスロボットの運動方程式については付録 B に詳しい．

まず，ロボット Small について PD 制御された θ_2 にサイン関数の目標値を与え，頭部リンクを振らすことで足踏み動作を行わせた．この運動は安定化されていないが，足踏みができた 1 周期分のデータを $\boldsymbol{X_r}$ とし，これをアトラクタとする式 (3.12) のコントローラを得た．このときのロボットの動き，および，状態変数の軌跡を Fig.3.8 に示す． 次に，状態空間写像を求めロボット Small のコントローラをロボット Large のコントローラに変換し，運動を生成した．このときの運動を Fig.3.9 に示す．この結果から，状態空間写像を用いて，ロボット Small の運動からロボット Large の運動が生成されたことが分かる．今回の実験では，ロボット Small のコントローラをそのままロボット Large に用いても安定な運動が生成可能であった．ただし，その場合ロボット Small の運動の足踏み周期とロボット Large の運動の足踏み周期は異なっていた．これに対し，状態空間写像を用いたコントローラではロボット Small の足踏み周期とほぼ等しいロボット Large の運動が生成された．

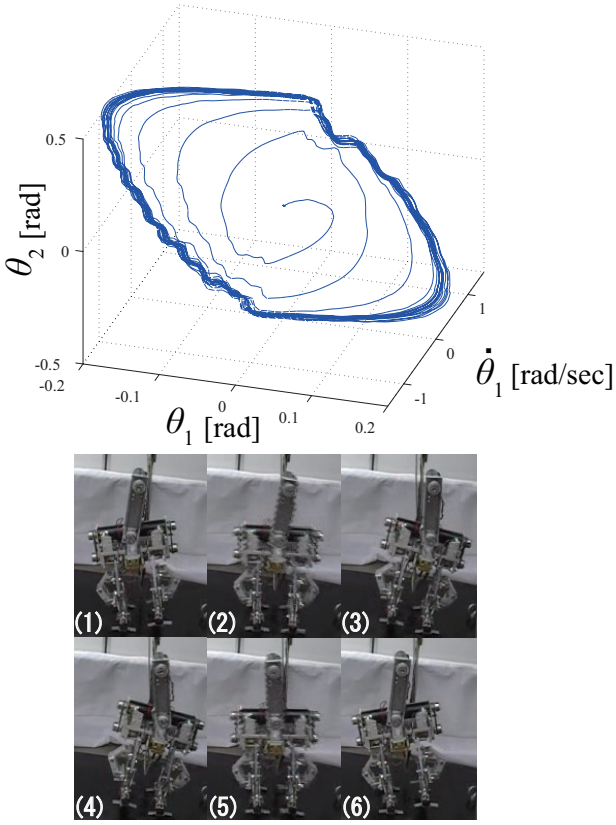


Fig.3.8 Tap dancing motion of small robot

この結果から，状態空間写像を用いることで力学的に一致した運動が生成されることが理解できる．

タップダンスロボット Small と Large の運動は，運動を実現するための入力を出すことができれば一致させられるが，実際のロボットには関節角度の制限や入力トルクの制限があるため，これらの制限により一致させられるサイズ差には限界があると思われる．ただし，サイズ差の限界を定量的に求めるのは難しい．サイズ差の限界を超えて運動を一致させようとすると，評価関数は制限によって収束しきらなくなる．

3.4 おわりに

本章では，先に実現された運動の場を他のロボットの力学的に実現可能な場へと写像し，同時にその場を生成するコントローラを写像する方法を提案した．以下に得られた結果を示す．

1. 線形系の場合について，固有値分解に基づいた線形写像によって，状態方程式を力学的に一致させる方

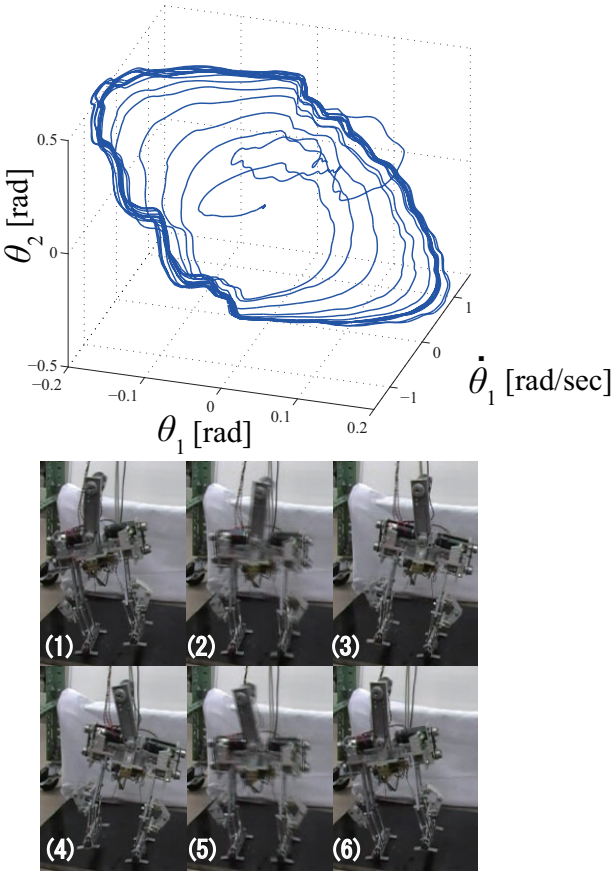


Fig.3.9 Tap dancing motion of large robot

法，および，コントローラの変換方法を示した．また，倒立振子を対象としたシミュレーションによって，提案方法の有効性を示した．

2. 倒立振子の運動を 2 質点ばね系に変換し，力学構造が大きく異なる系に対しても，提案方法が有効であることを示した．
3. 線形系の場合を非線形系に拡張し，非線形状態空間写像によって，二つの状態方程式を力学的に一致させる方法，および，コントローラの変換手法を示した．
4. タップダンスロボットを用いた実験により，状態空間写像を用いることで力学的に一致した運動が生成可能であることを示した．

固有値の一致により，線形系の力学構造は数学的に一致させることが可能であることから，非線形系においても運動の一致が写像によって定義できれば，その他の運動についても変換可能となることが示唆される．線形系の場合の拡張として，非線形系を対象とした力学構造の一致について述べた．ただし，実際の計算では，線形系のように状態空間全域で力学構造一致の条件を満たす写像を得ることは難しいため，運動の軌道近辺に空間を限定することで，写像を計算可能としている．また，線形系の場合は仮定 3 により入力は 1 つに限定されるが，非線形系の場合は式 (3.30)，(3.31) さえ満足すれば，入力の数は限定されない．ただし，入力の数が増えるほど式 (3.31) の要素数は増えるため，非線形状態空間写像 $\boldsymbol{T}$ が満たすべき式数は増える．

第 4 章

非線形状態空間写像を用いた力学的整合を持つ運動変換 [3]

4.1 はじめに

前章の方法の課題として，写像の計算のために運動の軌道周辺の空間全体で力学構造の一致の条件を満足する必要があり，計算量が多い点が挙げられる．このため，自由度の多いロボットの運動の場の設計に適用することは難しい場合がある．また，非線形系の力学構造の一致では，線形系とのアナロジーのため，状態方程式の係数を個々に一致させているが，これが厳しい条件となっている．行った検証実験ではタップダンスロボット Small と Large の力学特性の違いが小さい（リンク構造が同じで，パラメータがやや異なる程度）ためにこの条件を満たすことができている．

これらの課題を解決するために，本章ではモーションキャプチャで計測した人間の運動データを力学的な拘束のもと変換し，自律制御系の場の設計に必要なロボットの運動の軌道と入力の軌道のみを得て，これらを用いて 2 章の従来法で場を設計することで制御系を得る方法について述べる．この方法で得られる運動は与えた少数の拘束条件のみを満たすものであり，この条件を満たす範囲でロボットの運動は人間の運動から変化できるため，制限値を超えた無理な入力を要求しない運動が得られる．前章の方法では運動の軌道周辺の空間全体で写像を計算したが，本章の方法では運動の軌道上のみで写像を計算するため，前章の方法と比較し写像の計算量は低減している．また，前章の方法では，非線形系の力学構造を一致させるため，状態方程式の係数を 2 つに分割し，それぞれを共通の写像で一致させているが，本章の方法では状態方程式を分割せずに入力を含めて一致させるため，条件の厳しさは緩和される．

本章の方法では，はじめにロボットで実現する運動の満たすべき条件を与え，この条件を満たすロボットの運動を生成するために人間の運動を変換する．この方法では，モーションキャプチャデータから実現すべき運動の満たすべき条件を定める．実現する運動の条件は運動ごとに異なる．ロボットの運動は実現する運動の条件と力学的整合性を満たす拘束のもと人間の運動から変換され，ロボットが劣駆動系である場合も，ロボットの適切な運動パターンを得ることができる．また，運動の変換では，人間の運動データをロボットの運動パターンへと変換する非線形状態空間写像を得る．これは人間のデータが変換されることでロボットにおける速度・加速度の拘束を満たすよう状態空間写像と入力列を求めるものである．さらに，運動エネルギーを考慮することで，変換される運動の入力の大きさを調整する．検証のために，提案する方法をタップダンスロボットへと適用し，従来法では実現が難しかった運動の生成を行い，本手法の有効性を示す．

4.2 運動の変換

4.2.1 非線形状態空間写像

式 (3.26)，(3.27) で表される異なる二つの力学系を考える．式 (3.26) を力学系 1，式 (3.27) を力学系 2 とする．$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\xi}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^T & \dot{x}^T \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi^T & \dot{\xi}^T \end{bmatrix}^T \tag{4.1}$$

のように一般化座標ベクトル x，ξ とそれらの時間微分 $\dot{x}$，$\dot{\xi}$ で構成されているとし，$\dim(\boldsymbol{x}) = \dim(\boldsymbol{\xi})$，

$\dim(\boldsymbol{u}) = \dim(\boldsymbol{\mu})$ を仮定する．力学系 1 の運動の時系列データ $\boldsymbol{X}$，その時間微分 $\dot{\boldsymbol{X}}$，および運動に必要な入力列 $\boldsymbol{U}$ が

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 & \cdots & \dot{\boldsymbol{x}}_n \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

のように与えられているとする．ただし，上式中の添え字は時間ステップを表す．このとき，$\boldsymbol{X}$ を力学系 2 の力学的に整合する運動データ

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\xi}_n \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

へと変換する．すなわち，

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \tag{4.6}$$

で表せる一階微分可能な非線形状態空間写像 $\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{\Xi}$ を実現する入力列

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 & \cdots & \boldsymbol{\mu}_n \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

を求めることを考える．ここで $\boldsymbol{T}$ を

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Theta_T}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}1} \\ \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}) \tag{4.8}$$

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}_x \boldsymbol{x} \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T & \left(\widehat{\boldsymbol{x}}^2\right)^T & \cdots & \left(\widehat{\boldsymbol{x}}^\ell\right)^T \end{bmatrix}^T \tag{4.10}$$

とする．ただし，$\boldsymbol{T}_x$ は定数の行列である．すなわち，非線形状態空間写像 $\boldsymbol{T}$ は $\boldsymbol{x}$ を低次元化した空間での値 $\widehat{\boldsymbol{x}}$ のべき乗多項式で表せるとし，その係数からなる行列 $\boldsymbol{\Theta_T}$ を求めることが写像 $\boldsymbol{T}$ を求めることに相当する．ただし，式 (4.10) 中の $\widehat{\boldsymbol{x}}^\ell$ は $\widehat{\boldsymbol{x}}$ の要素同士を式 (2.26) の要領でかけあわせて ℓ 次のべき乗項を並べたベクトルである．また，式 (4.10) では $\boldsymbol{x}$ の一次の項は低次元化していない．これは $\boldsymbol{\phi}$ の中の全ての $\boldsymbol{x}$ を低次元化することで，状態空間におけるある方向への運動の情報が不足し，適切な写像が行えなくなることを避けるためのものである．

4.2.2 状態空間写像のための状態変数の低次元化

$\boldsymbol{x}$ が高次な空間を張る場合，そのべき乗 $\boldsymbol{x}^\ell$ の項数は極めて多くなる．そこで，先に $\boldsymbol{x}$ を $\widehat{\boldsymbol{x}}$ へと低次元化する．式 (4.4) の $\boldsymbol{X}$ を以下のように特異値分解する．

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1^T \\ \boldsymbol{V}_2^T \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{S}_1 = \mathrm{diag}\left\{ s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_r \right\} \tag{4.12}$$

$$\boldsymbol{S}_2 = \mathrm{diag}\left\{ s_{r+1} \quad s_{r+2} \quad \cdots \right\} \tag{4.13}$$

ここで，$s_r \gg s_{r+1}$ を仮定すると，$\boldsymbol{X}$ は低次な空間で $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{V}_1^T$ とみなすことができる．このとき $\boldsymbol{T}_x$ は

$$\boldsymbol{T}_x = \boldsymbol{Q}_1^T \tag{4.14}$$

として得られる．

4.2.3 写像の条件

写像を求めるために，写像が満たすべき条件を与え，これを評価関数として最適化し，パラメータ $\boldsymbol{\Theta_T}$ と $\boldsymbol{M}$ を得る．満たすべき条件は，以下の (a) 実現する運動の条件，(b) 速度に関する条件，(c) 速度・加速度に関する条件，(d) キーポーズに関する条件，(e) 運動エネルギーに関する条件の 5 つを考える．(a) はロボットの運動の特性を定める条件，(b)，(c) はロボットの力学的整合性を満たすための条件，(d) はロボットが平衡点で静止し続けるという自明な解を避けるための条件，(e) は変換された運動の入力の大きさを調整するための条件である．

(a) **実現する運動の条件**

異なる身体間で運動が一致するためには，何らかの意味で運動の等価性を定義する必要があり，それは運動の見た目，効果，目的など，着目する点によって様々な定義がある [26]．そこで，所望の運動を得るために運動の一致の条件として，実現する運動の条件を与える．実現する運動の条件は運動の変換前後で人間とロボットの運動がともに満たす条件であり，ロボットの運動の特性を定めるものである．実現する運動の条件は運動によって異なり，例えばロボットの歩行運動を生成する場合，人間の歩行運動一周期における足の接地状態を実現する運動の条件として与え，これにならうロボットの歩行運動を得る，ということが考えられる．なお，具体例については 4.3.3 章で示す．

(b) **速度に関する条件**

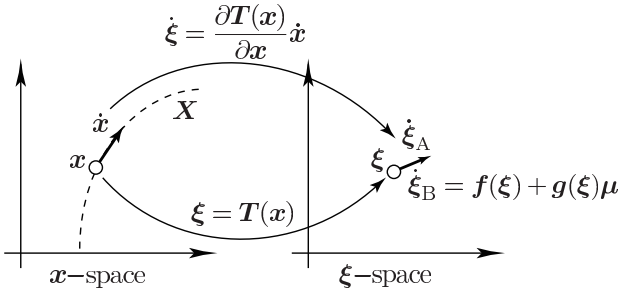


Fig.4.1 State-space mapping

式 (4.8) より

$$\xi = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}1}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}) \tag{4.15}$$

$$\dot{\xi} = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}2}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}) \tag{4.16}$$

を得る．一方，式 (4.15) の時間微分から

$$\dot{\xi} = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}1}\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}})}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{4.17}$$

を得る．式 (4.16) と (4.17) を比べ，$\dot{\xi}$ に関して

$$\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}2}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k) = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}1}\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.18}$$

が満たされる必要がある．

(c) **速度・加速度に関する条件**

式 (4.6) を時間微分して得られる $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ を $\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{A}}$ とする．$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{A}}$ は

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{A}} = \frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}})}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{4.19}$$

で表される．一方，力学系 2 の状態方程式 (3.27) より得られる $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ を $\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{B}}$ とする．$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{B}}$ は

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}})) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}))\boldsymbol{\mu} \tag{4.20}$$

で表される．式 (4.19) と (4.20) を比べ，$\dot{\boldsymbol{\xi}}$ に関して

$$\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k))\boldsymbol{\mu}_k \tag{4.21}$$

が満たされる必要がある．$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{A}}$ と $\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{B}}$ の関係を Fig.4.1 に示す．$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{A}}$ は $\dot{\boldsymbol{x}}$ を $\boldsymbol{\xi}$ 空間へ写像することで得られ，$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{B}}$ は $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{\xi}$ 空間へ写像した $\boldsymbol{\xi}$ から状態方程式によって得られる $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ である．3.3.1 章の力学構造一致の条件では状態方程式の係数を別々に一致させたが，この条件では式 (4.21) のように状態方程式右辺全体を入力を含めて一致させるため，条件の厳しさは緩和されている．

(d) **キーポーズの条件**

上記 (a)，(b)，(c) の条件だけでは，自明な解，すなわち力学系 2 の一つの平衡点 $\left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \equiv \boldsymbol{0}\right)$ への写像を許す場合も考えられる．そこで，自明な解を避けるために，キーポーズの条件を与える．ここでのキーポーズとは，2 つの力学系のある共通の時間ステップにおいて，これらのモデルで値が共通となる姿勢角である．写像を用いて $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{\Xi}$ に変換しても値が変化しない一般化座標のデータ $x_k(= \xi_k)$ がキーポーズであり，運動一周期から m 点を指定する．$k = p_h$ $(h = 1, 2, \cdots, m)$ のときをキーポーズとして指定し，写像に関して

$$x_{p_h} = \xi_{p_h} = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}1}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_{p_h}) \tag{4.22}$$

の条件を与える．これにより，$\boldsymbol{\xi}$ は静止することなく，動き続けるものとなる．得られる $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}$，$\boldsymbol{M}$ の一意性はキーポーズの数に依存するが，その数を知ることは難しい．キーポーズを多く与えることは運動の詳細を先に与えることとなるが，与えすぎれば解が存在しなくなる可能性が高い．そのため，キーポーズの設定は重要なパラメータとなる．

(e) **運動エネルギーの条件**

ロボットがある運動を行うとき，その運動を実現する力やトルクの軌道は複数存在する場合がある．例えば，マニピュレータにリーチング動作を行わせるとき，マニピュレータが冗長であれば到達までの経路は多く存在し，また到達までの時間を設定しなければ，制御系のゲインを調整することで素早く到達する運動やゆっくり到達する運動などが可能である．提案する方法では，力学系 2 の運動エネルギーを所望のものとするような条件を与え，実現する運動を調整する．運動エネルギー E は状態変数によって決まるため，

$$E_k = E(\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)) \tag{4.23}$$

で表される．そこで，k における所望の参照運動エネルギーを $E_{\mathrm{r}k}$ とし，

$$E_{\mathrm{r}k} = E(\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)) \tag{4.24}$$

の条件を与える．このとき $E_{\mathrm{r}k}$ は運動の入力の大きさを調節するパラメータである． 実際のロボットには，とくに衝突などにより，モデル化が難しいエネルギーの損失がある．このときロボットの運動エネルギーが大きければエネルギー損失が相対的に小さくなり，ロボットは運動を継続しやすくなる場合がある．ただし，$E_{\mathrm{r}k}$ を大きくしすぎると，運動のロバスト性が失われる．

4.2.4 最適化による写像と入力の計算

本論文では写像を式 (4.8) の関数とした．そのため，前節で設定した条件を全て満たす写像が存在するとは限らない．そこで，実現する運動の条件の下で式 (4.18), (4.21), (4.22), (4.24) に基づいて，以下の評価関数 J を

$$J = \sum_{k=1}^{n} \left(\|\boldsymbol{J}_{1k}\|^2 + \|\boldsymbol{J}_{2k}\|^2 + J_{4k}^2 \right) + \sum_{h=1}^{m} \|\boldsymbol{J}_{3h}\|^2 \tag{4.25}$$

$$\boldsymbol{J}_{1k} = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}2}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k) - \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}1}\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}_k \tag{4.26}$$

$$\boldsymbol{J}_{2k} = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}_k - \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k))\boldsymbol{\mu}_k\} \tag{4.27}$$

$$\boldsymbol{J}_{3h} = \boldsymbol{x}_{p_h} - \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}1}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_{p_h}) \tag{4.28}$$

$$J_{4k} = E_{\mathrm{r}k} - E(\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)) \tag{4.29}$$

のように設定し，$\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}$ の i 行 j 列要素 Θ_{Tij}，$\boldsymbol{\mu}_k$ の i 要素 μ_{ki} での J の勾配を求め，

$$\Theta_{Tij} \leftarrow \Theta_{Tij} - \frac{\partial J}{\partial \Theta_{Tij}}\delta \tag{4.30}$$

$$\mu_{ki} \leftarrow \mu_{ki} - \frac{\partial J}{\partial \mu_{ki}}\delta \tag{4.31}$$

によって $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}}$，$\boldsymbol{M}$ を更新することで最適化する．δ は定数である．

4.3 タップダンスロボットへの適用

4.3.1 タップダンスロボット

提案する方法の有効性を検証するために，人間の運動をタップダンスロボットの運動に変換する．式 (3.26) を人間の簡略化モデルとし，式 (3.27) をタップダンスロボットとする．ロボットの状態変数 $\boldsymbol{\xi}$ は

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{4.32}$$

のように脚部リンク，頭部リンクの回転角 θ_1，θ_2[rad]，角速度 $\dot{\theta}_1$，$\dot{\theta}_2$[rad/sec] で構成され，入力 $\boldsymbol{\mu}(\in R^1)$[Nm] は頭部リンクと脚部リンクをつなぐ関節に発生するトルクである．

4.3.2 人間の運動の計測

自由度の異なる系の間での運動の変換について，自由度の高い系の運動を自由度の低い系の運動に変換する場合，自由度のいくつかを無視すれば変換が可能である．ただし，考慮する自由度のうち，どのモードを一致させるかによって，運動が大きく変わる可能性があるため，ロボットの構造（どれが手，どれが脚，など）まで考慮した写像が必要である．逆に，自由度の低い系の運動を自由度の高い系の運動に変換する場合，そもそもはじめに与えられる運動の情報が少ないため，自由度の高い系の運動に変換することは一般に不可能である．この場合，残りの冗長な自由度に対して何らかの拘束の付加や，評価関数の設定などを行う必要がある．

今回の検証実験では人間の運動をロボットの運動に変換するために，人間の冗長な自由度を無視することで，人間のモデルもタップダンスロボットと同じ 2 リンク系とする．人間モデルのリンクの質量と慣性モーメントを文献 [27] の値を人間の体型に合わせてスケーリングして求める．人間モデルとタップダンスロボットの重心位置を Fig.4.2 に，力学パラメータを Table 4.1 に示す．ただし，ℓ_1 は脚の長さ，ℓ_2 は地面から脚重心までの長さ，ℓ_3 は頭の回転中心から頭重心までの長さである．

Table 4.1 Parameters of human model and robot

	human	robot
leg mass [kg]	31.8	2.8
head mass [kg]	41.8	0.5
length ℓ_1 [m]	0.83	0.21
length ℓ_2 [m]	0.50	0.15
length ℓ_3 [m]	0.21	0.11

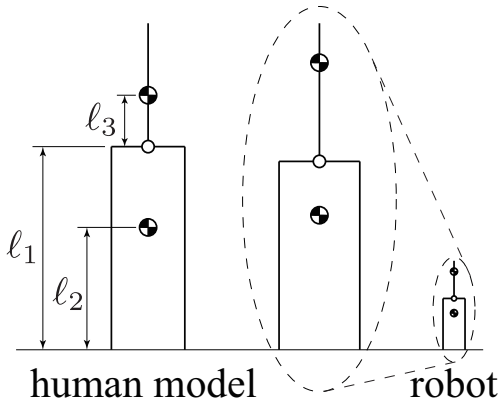
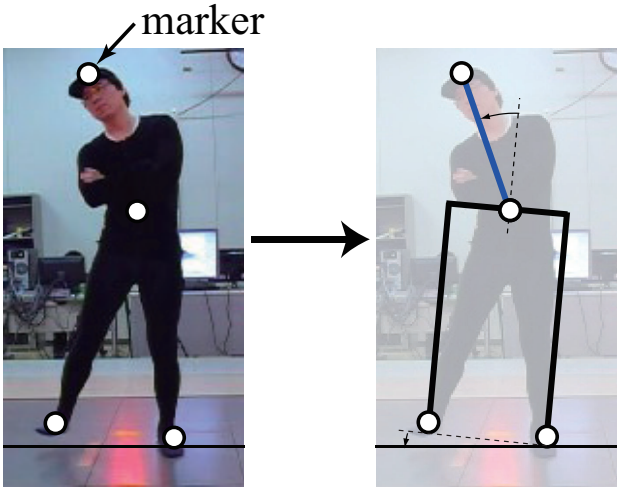


Fig.4.2 Positions of the center of gravity

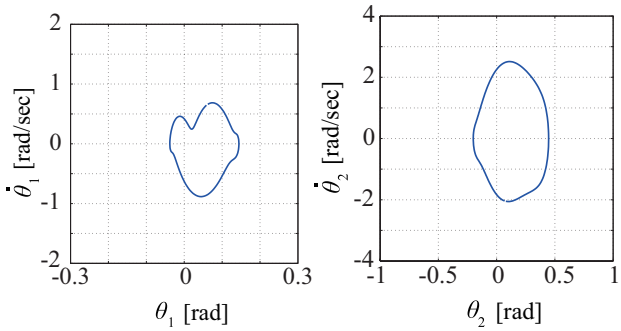
Fig.4.2 のロボットは人間モデルに大きさを合わせて表示しており，ロボットは人間モデルと比較して脚部，頭部リンクの重心位置が高く，脚部リンクに対する頭部リンクの質量比が小さい．人間は上体を振って左右の足を交互に接地させる足踏み運動を行い，光学式モーションキャプチャシステムを使用してこの運動を計測する．Fig.4.3 に示すように四つのマーカが人間の頭頂部，腹部，両足つま先に付けられ，マーカの位置を元にモデルのリンク長さを決める．モーションキャプチャで得られ



(a) (b)

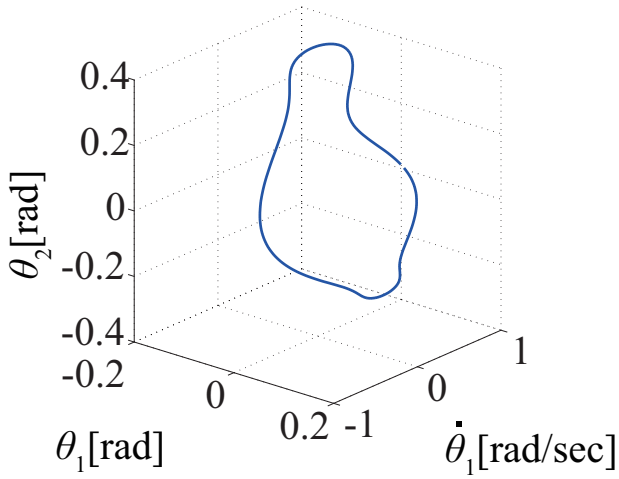
Fig.4.3 Marker position and two links model for motion capture

たマーカ座標データを二次元平面に射影し，モデルの角度データを求める．さらに角度データから角速度と角加速度を差分で求め，人間モデルの状態変数 $\boldsymbol{x}$ の軌道を得た．Fig.4.4 にそれぞれの位相空間での θ_1 と θ_2 の軌道を示す．人間の運動データはサンプリングタイム 5msec で計測され，一周 200 点である． 人間の運動データの

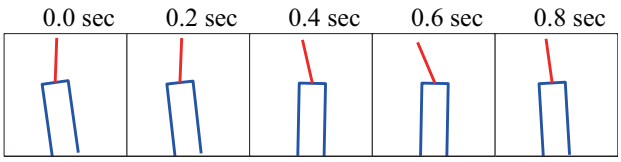


(a) (b)

Fig.4.4 Human motion data in phase-space



(a)



(b)

Fig.4.5 Human motion data in state-space

状態空間における軌道を Fig.4.5-(a) に示す．運動データは 4 次元空間で表されるが，ここでは表示の都合上，θ_1，θ_2，$\dot{\theta}_1$ の 3 次元空間で表した．Fig.4.5-(b) は運動中のモデルの姿勢を表す．

4.3.3 ロボットの力学的整合性を満たす運動への変換

まず，写像の条件と設計変数 $\boldsymbol{\Theta_T}$，$\boldsymbol{M}$ の初期値について述べる．実現する運動の条件として，タップダンスロボットの運動一周期における左右脚の接地状態を人間の運動と同じとする．このために，例えば運動データ k で人間が右脚接地（θ_1 が正）しているとき，$\boldsymbol{J}_{1k}$ の計算にはロボットの右脚接地時の運動方程式を用いる．左足接地時も同様である．実現する運動の条件に関連し，キーポーズは両足接地する瞬間の θ_1 $(= 0$ rad$)$ とした．人間の運動一周期分のデータの軌道上で等間隔に選んだ 20 点にキーポーズの 2 点を加えたものを代表点 $\boldsymbol{X}$ とし，これを $\boldsymbol{\Theta_T}$ と $\boldsymbol{M}$ の計算に用いる．$\boldsymbol{\Theta_T}$，$\boldsymbol{M}$ の初期値をそれぞれ $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}0}$，$\boldsymbol{M}_0$ とし，これらを

$$\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{U} \tag{4.34}$$

とする．$\boldsymbol{I}$ は単位行列であり，$\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}0}$ を用いた写像 $\boldsymbol{T}$ では $\boldsymbol{\Xi}$ は $\boldsymbol{X}$ と同じ軌道となる．$\boldsymbol{U}$ は逆動力学解析より求めた人間の運動の入力列である．$\boldsymbol{T}_x$ は $\boldsymbol{x} \in R^4$ を $\widehat{\boldsymbol{x}} \in R^2$ に低次元化するものとした．$\boldsymbol{\phi}(\widehat{\boldsymbol{x}})$ は $\ell = 5$ とする．写像の条件の一つである式 (4.21) は $\boldsymbol{\Theta_T} = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{T}0}$，$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0$ では満たされず，人間の運動そのままではロボットの力学的整合性は満たされない．

次に，所望の参照運動エネルギー $E_{\mathrm{r}k}$ を一定値 0.1 J，式 (4.30)，(4.31) の δ を 2×10^{-7} とし，J を最小化する $\boldsymbol{\Theta_T}$，$\boldsymbol{M}$ を求めた．繰り返し計算における J の履歴を Fig.4.6 に示す．8000 回の繰り返しにより，J は初期値を与えたときの値の 1/100 のオーダーまで小さくなった．ロボットの角速度 $\dot{\theta}_1$，$\dot{\theta}_2$ を Fig.4.7 に示す．図中 k はキーポーズを除く代表点のラベル，$\circ$ は式 (4.8) の $\dot{\xi}$，実線は式 (4.8) の ξ の時間微分を表す．また，ロボットの角加速度 $\ddot{\theta}_1$，$\ddot{\theta}_2$ を Fig.4.8 に示す．図中 $\circ$ は $\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{A}}$ の加速度項の値，実線は $\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{B}}$ の加速度項の値を表す． 得られた $\boldsymbol{M}$ を Fig.4.9 に示す． これらの結果から以下のことが導かれる．

(i) Fig.4.7 より，$\circ$ と実線が一致していることから，$\boldsymbol{\Xi}$ は式 (4.18) を十分に満たす．

(ii) Fig.4.8 より，$\circ$ と実線が一致していることから，$\boldsymbol{\Xi}$ は式 (4.21) を十分に満たす．

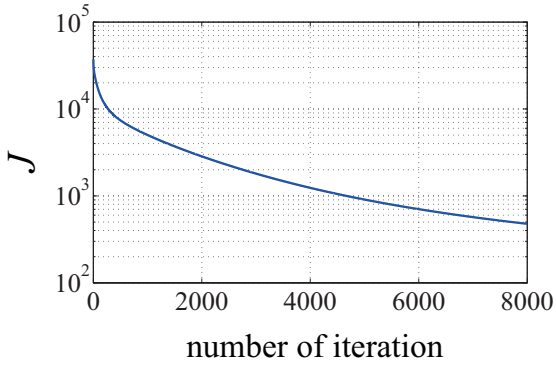


Fig.4.6 Convergence of J

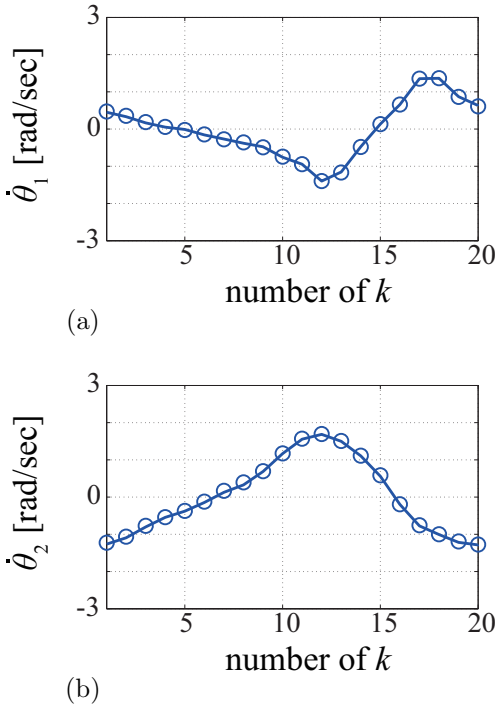


Fig.4.7 Angular velocities using optimized coefficient matrix

(iii) (ii) を満たすために，人間の運動データ $\boldsymbol{X}$ は Fig.4.10 に示すロボットの運動データ $\boldsymbol{\Xi}$ に変換され，運動の実現に必要な入力列 $\boldsymbol{M}$ が Fig.4.9 に示すように得られる．

以上より，得られた $\boldsymbol{\Xi}$ はタップダンスロボットの力学的整合性を満たす運動のデータであり，$\boldsymbol{\Xi}$ と $\boldsymbol{M}$ は軌道アトラクタに基づいた自律制御系設計の目標運動データとして利用可能である．ロボットの運動データの状態空

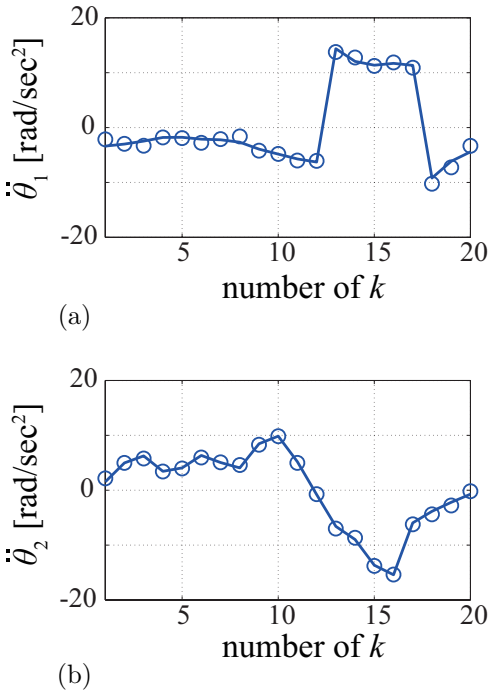


Fig.4.8 Angular accelerations using optimized coefficient matrix and input sequence

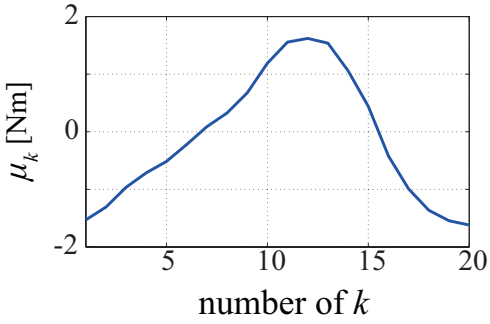


Fig.4.9 Obtained input sequence $\boldsymbol{M}$

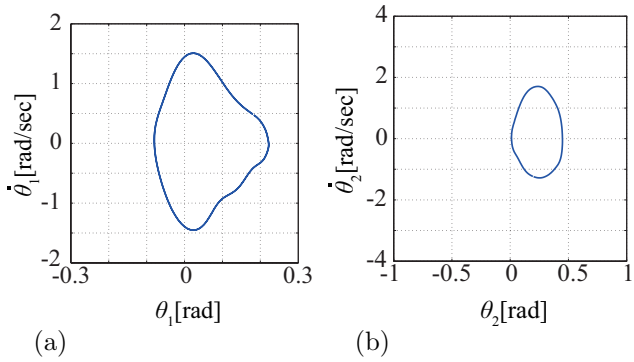


Fig.4.10 Robot motion data in phase-space

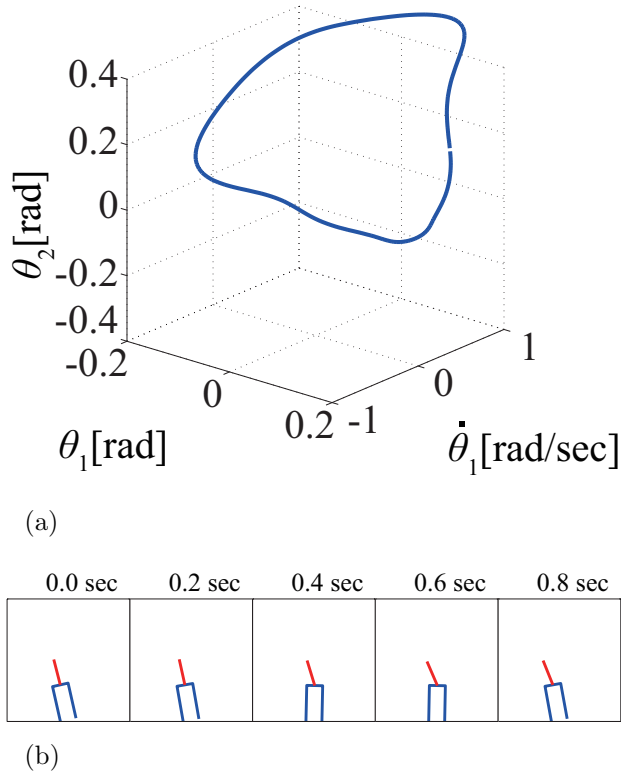


Fig.4.11 Robot motion data in state-space

間における軌道と運動中のモデルの姿勢を Fig.4.11 に示す．Fig.4.5 と同様に θ_1，θ_2，$\dot{\theta}_1$ の 3 次元空間として表した．キーポーズを両足接地の瞬間の θ_1 としたことにより，人間とロボットとで接地脚が切り替わるタイミングは一致するが，ロボットは人間と比べて脚部リンクが短いので，人間と左右脚の接地タイミングを合わせるために，脚部リンク傾きの振幅が人間よりも大きくなる傾向がある．タップダンスロボットは 1 つの入力で 2 つのリンクを動かす劣駆動系であるため，実現可能な足踏み運動の軌道およびその入力を得るためにこれまでは頭部リンクに三角関数の運動パターンを与え，周期運動となったときの軌道と入力を得ていた．この方法では Fig.4.11 のような左右非対称な足踏み運動の軌道およびその入力を得ることは難しかったが，本研究の方法を用いることでこれを容易に得ることが可能となった．

また，人間の運動データから得られるロボットの実現可能な運動は多数存在し，所望の参照運動エネルギー E_{rk} を変更することで異なる運動が得られる．ここでは運動エネルギーを最小化するように参照運動エネルギー

$E_{\mathrm{r}k}$ を 0 J とし，ロボットの運動の $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_T$，$\widehat{\boldsymbol{\Xi}}$，$\widehat{\boldsymbol{M}}$ を求めた．$\widehat{\boldsymbol{M}}$ と $\boldsymbol{M}$ の比較を Fig.4.12 に示す．$E_{\mathrm{r}k}$ を小さくしたことにより，ロボットの運動に必要な入力トルクは小さくなる．$\widehat{\boldsymbol{\Xi}}$ と $\boldsymbol{\Xi}$ の比較を Fig.4.13 に示す． $\widehat{\boldsymbol{\Xi}}$

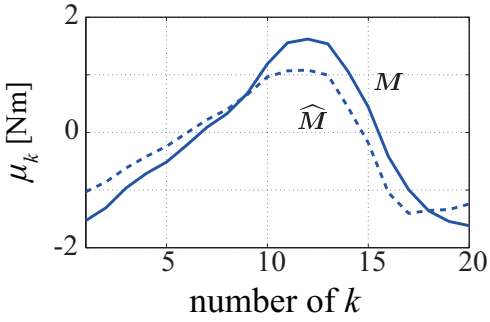


Fig.4.12 Comparison of obtained inputs using different reference kinetic energies

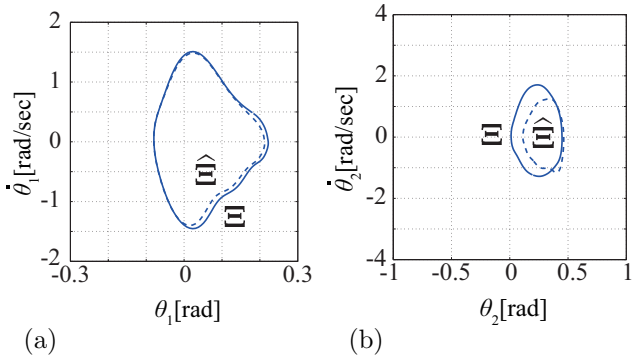


Fig.4.13 Comparison of obtained robot motions using different kinetic energies in phase-space

と $\boldsymbol{\Xi}$ とでは，とくに θ_2 の軌道が異なる．これは脚部リンクの回転中心が受動関節でありトルクを発生できず，接地脚の切り替わりタイミングの拘束が θ_1 の軌道を制限するのに対し，頭部リンクはモータで直接駆動でき，θ_2 の軌道は拘束されずに冗長な自由度となっているためである．得られた運動の軌道と入力を目標運動データとして用いて軌道アトラクタに基づいた自律制御系を設計し，運動を生成するシミュレーションを行った．$\boldsymbol{\Xi}$，$\boldsymbol{M}$ を用いた場合を Fig.4.14 に，$\widehat{\boldsymbol{\Xi}}$，$\widehat{\boldsymbol{M}}$ を用いた場合を Fig.4.15 に示す． 図中 ∘ は目標運動データ，実線はシミュレーションで生成されたロボットの運動の軌道である．どちらの場合も与えた軌道に近い安定な運動が生成された．

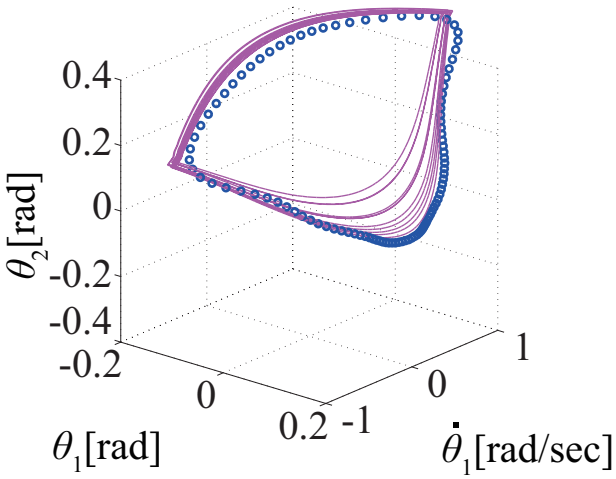


Fig.4.14 Simulation result of the generated robot motion using $\boldsymbol{\Xi}$ in state-space

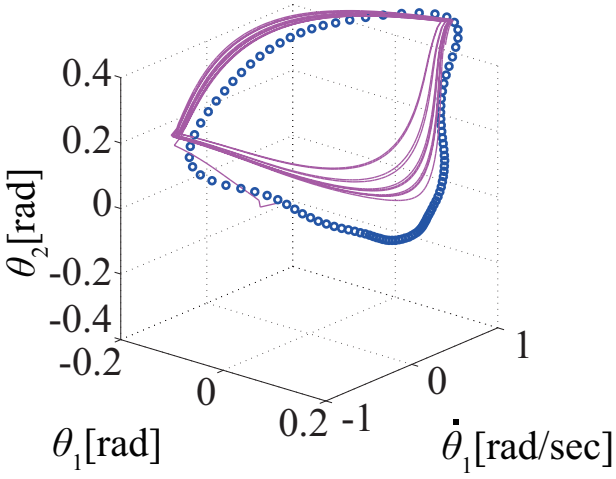


Fig.4.15 Simulation result of the generated robot motion using $\widehat{\boldsymbol{\Xi}}$ in state-space

4.3.4 実験結果

$\boldsymbol{\Xi}$，$\boldsymbol{M}$ を用いて軌道アトラクタに基づいた自律制御系を設計し，タップダンスロボット実機にて運動を生成した．実験の結果生成されたロボットの運動の状態空間における軌道を Fig.4.16 に示す．Fig.4.16 の ∘ は目標運動データ，実線は実験で生成された運動の軌道である．生成されたロボットの運動を Fig.4.17 に示す．これは運動の様子を 0.2sec ごとに表した連続写真であり，人間の運動と同じように左右の脚の接地時間が異なる非

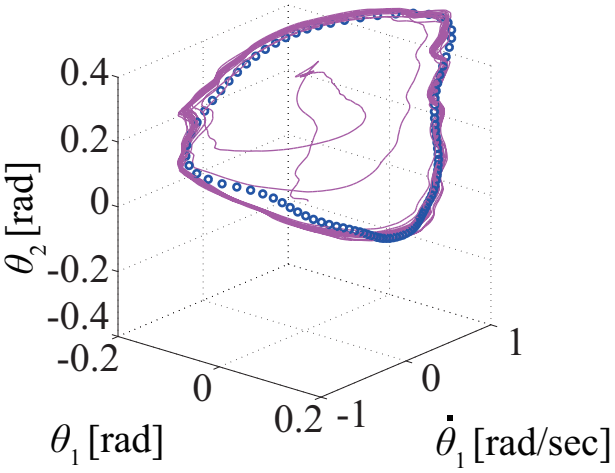


Fig.4.16 Trajectory of the generated robot motion using Ξ in state-space

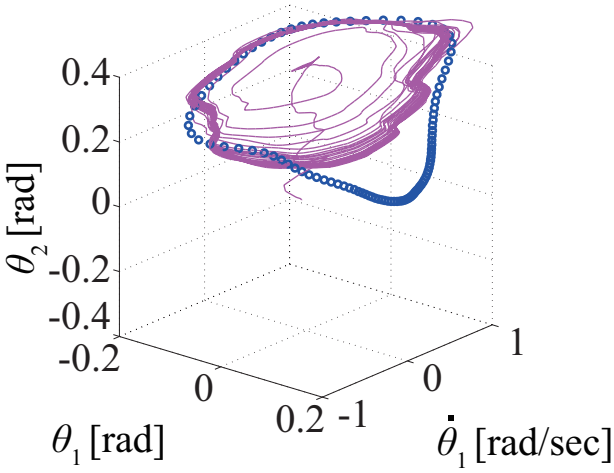


Fig.4.18 Trajectory of the generated robot motion using $\widehat{\Xi}$ in state-space

対称な運動である．実験の結果，目標運動データに近い安定な運動が生成された．

また，$\widehat{\Xi}$, $\widehat{M}$ を用いて自律制御系を設計し，ロボット実機にて運動を生成した．実験の結果生成されたロボットの運動の状態空間における軌道を Fig.4.18 に示す．生成した運動は与えた軌道 $\widehat{\Xi}$ へと十分に引き込まれなかった．

4.3.5 考察

1. Fig.4.16 において，Ξ に引き込まれる運動が生成されたことから，提案する方法で得られる運動パターンが力学的に実現可能であることが確かめられた．
2. Fig.4.18 において，$\widehat{\Xi}$ に引き込まれる運動が生成されなかったのは，Fig.4.18 の運動は Fig.4.16 の運動と比べてロボットの運動エネルギーが小さく，衝突によるエネルギー損失が相対的に大きいことが原因と考えられる．
3. さらに，ここでは $\dim(\boldsymbol{x})=\dim(\boldsymbol{\xi})$, $\dim(\boldsymbol{u})=\dim(\boldsymbol{\mu})$ を仮定したが，運動の全てを表す変換という観点から $\dim(\boldsymbol{x})>\dim(\boldsymbol{\xi})$, $\dim(\boldsymbol{u})>\dim(\boldsymbol{\mu})$ の場合も，高次元な側の運動が低次元な側の運動を表すのに十分な情報を持つならば本章の方法は適用可能であると考えられる．

4.4 おわりに

本章では，モーションキャプチャで計測した人間の運動データを非線形状態空間写像を用いて力学的な拘束のもと変換し，自律制御系の場の設計に必要なロボットの運動の軌道と入力の軌道を得て，これを用いて 2 章の従

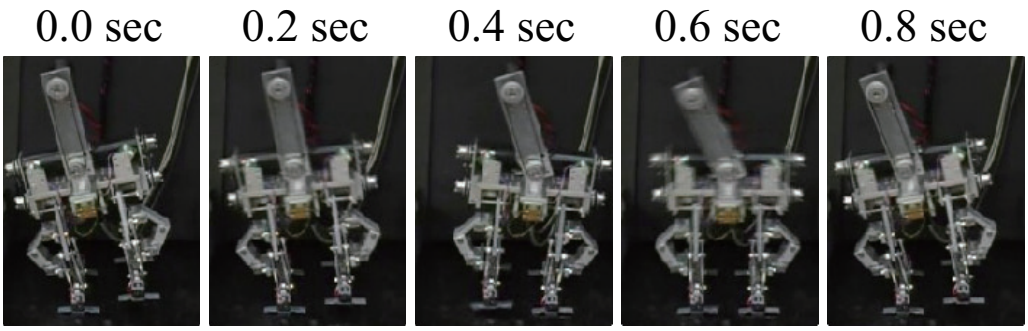


Fig.4.17 Robot motion sequence realizing Ξ

来法で場を設計することで制御系を得る方法について述べた．以下に成果を示す．

1. 異なる力学系間で，速度と加速度の力学的な拘束に基づいて運動を変換する非線形状態空間写像とその計算方法を示した．
2. ロボットの運動は与える参照運動エネルギーの値によって変化し，力学的整合性を満たす運動は複数存在することを示した．
3. 提案する非線形状態空間写像を用いてモーションキャプチャによって計測した人間の運動データを変換し，タップダンスロボットの力学的整合性を満たす運動データを得た．
4. 得られた運動データを用いて軌道アトラクタに基づいた自律制御系を設計し，目標運動のデータに一致するタップダンスロボットの運動を生成した．

第 5 章

位置・速度・加速度の微分関係と力学的整合性を満たす運動パターンの生成 [4]

5.1 はじめに

前章では，モーションキャプチャで計測した人間の運動データを，非線形状態空間写像を用いてロボットの力学的整合性を満たす運動データへと変換する方法について述べた．ただし，この方法の課題として，写像関数の与え方によっては所望の運動の軌道を得ることが難しい場合がある．前章では写像関数を状態方程式のべき多項式関数として与えたが，所望の運動の加速度軌道が不連続である場合，この軌道をべき多項式で表すことが難しい場合もある．

一般にロボットの軌道計画は，軌道を関数で表し，微分値も求められるようにするが，この場合データの自由度が関数の拘束を受ける．例えば，Suleiman ら [28] は軌道をスプライン補完し，そのパラメータを最適化することで，角度，角速度，角加速度の関係を容易に表せる方法を提案しているが，この方法ではスプライン補完の制約が厳しく，大きく変化する運動への適用は難しい．関数の拘束を避けるため，本章の方法では時系列データすべてを最適化する，点の軌道計画を採用する．これにより，任意の軌道が設計可能となるが，軌道を関数で表す方法と比べ計算量が大きいこと，位置・速度・加速度が微分関係を満たす必要があることといった課題が存在する．そこで本章では，位置・速度・加速度の関係を与え，位置と入力の時系列データを設計パラメータとし，ロボットの力学的整合性を満たす運動データを設計する方法について述べる．この方法は運動の周期性から，位置・速度・加速度の関係を与えるローパスフィルタ，微分，零位相フィルタが行列のかけ算で表されることを利用し，速度・加速度の時系列データを設計パラメータから除外することで計算量を低減している．また，ロボットの運動の軌道計画は複雑な非線形最適化問題であり，計算結果に大きな影響を及ぼす初期値の与え方は重要である．提案する方法では，初期値として人間のモーションキャプチャデータを利用することで，初期値選択の問題に対処する．得られた運動の軌道を用いて，軌道アトラクタに基づいた自律制御系 [1] を設計する．提案する方法を大きさの異なる二体のタップダンスロボットの運動生成に適用し，これらの運動を比較することで，ロボットの力学特性が反映された運動が得られることを示す．また，制御対象が自由度の多いロボットである場合の例として，平面二足歩行ロボットのムーンウォーク運動を生成する．ロボットの自由度が多いとき，主成分分析に基づく特異値分解を用いて，運動データを低次元化し，設計変数を減らす．

5.2 運動の変換

5.2.1 問題の設定

モーションキャプチャで計測して得られた人間の運動データを元に，ロボットの実現可能な周期運動の時系列データ

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 & \boldsymbol{\theta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\theta}_n \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 & \boldsymbol{\tau}_2 & \cdots & \boldsymbol{\tau}_n \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

および $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$, $\ddot{\boldsymbol{\Theta}}$ を求める問題を考える．ただし，$\boldsymbol{\theta}$ は角度ベクトル，$\dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ はその角速度，角加速度，$\boldsymbol{\tau}$ は入力トルクベクトルを表す．また，式 (5.1)，(5.2) 中の添え字は時間ステップを表す．運動データは周期運動の軌道と

し，$\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \boldsymbol{\theta}_1$，$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_1$ とする．運動の満たすべき条件として，(a) 実現する運動の条件，(b) 力学的整合性に関する条件，(c) 角度と入力の制限を挙げ，これらを満たすように運動の変換を行う．

5.2.2 位置・速度・加速度の微分関係

$\boldsymbol{\Theta}$，$\dot{\boldsymbol{\Theta}}$，$\ddot{\boldsymbol{\Theta}}$ の間には微分関係が成り立つ．ここで伝達関数

$$G_{sf}(s) = \frac{sf}{s+f} \tag{5.3}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = G_{sf}(s)\boldsymbol{\theta} \tag{5.4}$$

を考える．G_{sf} は交差周波数 f のローパスフィルタと微分器を持つため，$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}$ は時間遅れのある $\boldsymbol{\theta}$ の時間微分値である．一方，G_{sf} のインパルス応答列

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

から以下の行列

$$\boldsymbol{F}_{sf} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_n & g_1 & \cdots & g_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_2 & g_3 & \cdots & g_1 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

を定義すると，$\boldsymbol{\Theta}$ は周期運動の軌道であるため

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\Theta}}} \simeq \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{F}_{sf} \tag{5.7}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\Theta}}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_1 & \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_2 & \cdots & \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_n \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

の関係が成り立つ．これは信号とインパルス応答のたたみ込み積分に相当する．さらに，時間遅れのない $\boldsymbol{\theta}$ の時間微分値を得るために，零位相フィルタを用いる．まず，以下のローパスフィルタ

$$G_f(s) = \frac{f}{s+f} \tag{5.9}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = G_f(s)\boldsymbol{\theta} \tag{5.10}$$

を G_{sf} 同様に以下のように行列で表して

$$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}} \simeq \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{F}_f \tag{5.11}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_1 & \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2 & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

とし，時系列データを反転する行列を

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_n & \boldsymbol{\theta}_{n-1} & \cdots & \boldsymbol{\theta}_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{R} \tag{5.13}$$

とすると，最終的に微分器，ローパスフィルタ，零位相フィルタは

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} \simeq \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{F}_{sf}\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}_f\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{D}_1 \tag{5.14}$$

のように行列の掛け算で表せる．式 (5.14) で得られる $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$ は零位相フィルタによって時間遅れを解消している．$\boldsymbol{\Theta}$ と $\ddot{\boldsymbol{\Theta}}$ の微分関係も同様に

$$\ddot{\boldsymbol{\Theta}} \simeq -\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{F}_{sf}\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}_{sf}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{D}_2 \tag{5.15}$$

のように表せる．このように位置・速度・加速度の微分関係を行列の掛け算で与えることで，この関係は必ず満たされ，設計パラメータは $\boldsymbol{\Theta}$，$\boldsymbol{T}$ のみとなり，運動変換アルゴリズム全体の計算量が低減している．

5.2.3 運動データの満たすべき条件

運動データの満たすべき条件を挙げ，これらを満たす運動データを求めるために評価関数を設定し，これを最小化することで運動の変換を行う．満たすべき条件として，以下の (a) 実現する運動の条件，(b) 力学的整合性に関する条件，(c) 関節角度・入力トルクの制限を考える．

(a) 実現する運動の条件

所望の運動を得るために運動の一致の条件として，実現する運動の条件を与える．実現する運動の条件は運動の変換前後で人間とロボットの運動がともに満たす条件であり，ロボットの運動の特性を定めるものである．実現する運動の条件は運動によって異なる．

(b) 力学的整合性に関する条件

運動方程式の満足

$\boldsymbol{\Theta}$，$\dot{\boldsymbol{\Theta}}$，$\ddot{\boldsymbol{\Theta}}$，$\boldsymbol{T}$ は力学的整合性を満たすために，ロボットの運動方程式

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_k)\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta}_k, \dot{\boldsymbol{\theta}}_k) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}_k) = \boldsymbol{\tau}_k \tag{5.16}$$

を満たす必要がある．ただし，$\boldsymbol{M}$ は慣性テンソル，$\boldsymbol{C}$ はコリオリ力・遠心力ベクトル，$\boldsymbol{K}$ は重力ベクトルである．

床反力の条件

ロボットが環境に固定されていない場合，ロボットが受ける床反力は一方向に限定される．すなわち，

以下の不等式拘束条件

$$F_k \geq 0 \tag{5.17}$$

が存在する．F_k はロボットが受ける床反力である．

(c) **関節角度・入力トルクの制限**

ロボットの関節角度や，アクチュエータの発生可能な力・トルクには制限がある．そこで，これらを制限値内に収めるために

$$\theta_i^{min} \leq \theta_{ik} \leq \theta_i^{max} \tag{5.18}$$

$$\tau_i^{min} \leq \tau_{ik} \leq \tau_i^{max} \tag{5.19}$$

の制限を設ける．ただし，θ_{ik}，τ_{ik} は θ_k，τ_k の i 行要素，θ_i^{max} と θ_i^{min} は関節角 i（$\boldsymbol{\Theta}$ の i 行目）の角度上限値と下限値，τ_i^{max} と τ_i^{min} はアクチュエータ i（$\boldsymbol{T}$ の i 行目）のトルク上限値と下限値を表す．

5.3 タップダンスロボットへの適用

5.3.1 タップダンスロボット

提案する方法を Fig.3.7 に示した大きさの異なる二体のタップダンスロボット Small と Large の運動生成に適用する．ロボットの角度データ $\boldsymbol{\theta}$ は

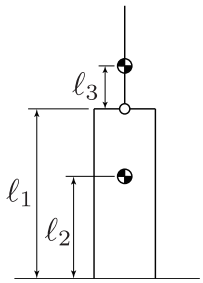
$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \tag{5.20}$$

のように脚部リンク，頭部リンクの回転角 θ_1, θ_2[rad] で構成され，入力 τ[Nm] は頭部リンクと脚部リンクをつなぐ関節に発生するトルクである．本章では，ロボット Large の頭部に追加の部品を取り付け，頭部質量を大きくした．ロボット Large の力学パラメータを Table5.1 に示す．ただし，ℓ_1 は脚の長さ，ℓ_2 は地面から脚重心までの長さ，ℓ_3 は頭部の回転中心から頭部重心までの長さである．

5.3.2 実現する運動の条件

人間の運動とタップダンスロボットの運動とで，足の接地タイミングを一致させる．このために，例えば時間ステップ k で人間が右脚接地（θ_1 が正）しているとき，運動方程式の満足に関する計算ではロボットの右脚接地時の運動方程式を用いる．左足接地時も同様である．

Table 5.1 Parameters of large tap dancing robot



	Large (heavy)
leg mass [kg]	2.9
head mass [kg]	0.7
length ℓ_1 [m]	0.26
length ℓ_2 [m]	0.19
length ℓ_3 [m]	0.12

5.3.3 満たすべき条件の計算アルゴリズムへの実装

5.2.3 章で述べた運動の満たすべき条件は本来はすべて拘束条件であり，同等に扱うべきである．ただし，一部の条件は，非線形関数である，あるいは不等式条件である，などの理由から拘束条件として計算アルゴリズムに実装することが難しいため，これを満たすために評価関数やフィードバックアルゴリズムの形で実装する．

(a) **実現する運動の条件**

運動一周期における左右脚の接地状態を拘束条件として 5.3.2 章で述べたように実装する．

(b) **力学的整合性に関する条件**

運動方程式の満足

評価関数を

$$J_m = \sum_{k=1}^{n} (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k - \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_k)^T \boldsymbol{W}_m (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k - \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_k) \tag{5.21}$$

$$\ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_k = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_k)^{-1}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta}_k, \dot{\boldsymbol{\theta}}_k) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}_k) - \boldsymbol{\tau}_k) \tag{5.22}$$

$$\ddot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} = \begin{bmatrix} \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 & \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2 & \cdots & \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_n \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

とし，これを最小化する．ただし，$\boldsymbol{W}_m$ は重み行列である．

床反力の条件

タップダンスロボットは地面に固定されていないため，床反力は常に正である．この条件を満足するた

めに，以下のアルゴリズム

$$\boldsymbol{\theta}_k \leftarrow \boldsymbol{\theta}_k + \frac{dF_j}{d\boldsymbol{\theta}_k}\delta_F \quad (F_j < F_{min}) \tag{5.24}$$

$$\boldsymbol{\tau}_k \leftarrow \boldsymbol{\tau}_k + \frac{dF_j}{d\boldsymbol{\tau}_k}\delta_F \quad (F_j < F_{min}) \tag{5.25}$$

を用いて $\boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{T}$ の値を修正する．ただし，F_j は時間ステップ j にロボットが受ける床反力，F_{min} (>0) は床反力の許容最小値，δ_F (>0) は微小係数である．

(c) **関節角度・入力トルクの制限**

今回，タップダンスロボットの運動生成では入力トルクの制限のみを実装した．以下のアルゴリズム

$$\tau_{ik} \leftarrow \tau_{ik} - K_\tau(\tau_{ik} - \tau_i^{max}) \quad (\tau_{ik} > \tau_i^{max}) \tag{5.26}$$

$$\tau_{ik} \leftarrow \tau_{ik} - K_\tau(\tau_{ik} - \tau_i^{min}) \quad (\tau_{ik} < \tau_i^{min}) \tag{5.27}$$

を用いて $\boldsymbol{T}$ の値を修正する．ただし，K_τ (>0) はゲインである．

5.3.4 運動データの最適化

評価関数 J_m を最小化する $\boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{T}$ を求める．$\boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{T}$ の i 行 j 列要素 θ_{ij}，τ_{ij} での J_m の勾配は

$$\frac{\partial J_m}{\partial \theta_{ij}} = \sum_{k=1}^{N} 2(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k - \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_k)^T \boldsymbol{W}_m \left(\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\theta}}_k}{\partial \theta_{ij}} - \frac{\partial \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_k}{\partial \theta_{ij}} \right) \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_k}{\partial \theta_{ij}} &= \frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_k)^{-1}}{\partial \theta_{ij}}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta}_k, \dot{\boldsymbol{\theta}}_k) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}_k) - \boldsymbol{\tau}_k) \\ &\quad + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_k)^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta}_k, \dot{\boldsymbol{\theta}}_k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_k}{\partial \theta_{ij}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta}_k, \dot{\boldsymbol{\theta}}_k)}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}_k} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}_k}{\partial \theta_{ij}} + \frac{\partial \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}_k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_k}{\partial \theta_{ij}} \right)\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_k)^{-1}}{\partial \theta_{ij}} = -\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_k)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_k)}{\partial \theta_{ij}} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_k)^{-1} \tag{5.30}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_k}{\partial \theta_{ij}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T & (k = j) \\ \boldsymbol{0} & (k \neq j) \end{cases} \tag{5.31}$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}_k}{\partial \theta_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & D_{1jk} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \tag{5.32}$$

$$\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\theta}}_k}{\partial \theta_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & D_{2jk} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \tag{5.33}$$

$$\frac{\partial J_m}{\partial \tau_{ij}} = 2(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_j - \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_j)^T \boldsymbol{W}_m \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_j)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_j}{\partial \tau_{ij}} \tag{5.34}$$

で得られる．ただし，式 (5.31), (5.32), (5.33) 中の 0 でない要素は各ベクトルの i 行目に入る．J_m/θ_{ij}，J_m/τ_{ij} を用い，勾配法によって評価関数を最小化する．ただし，最適化の途中で τ_{ij} が入力の制限値を超える場合，条件 (c) の式 (5.26)，(5.27) を用いて τ_{ij} を修正する．

5.3.5 ロボットの運動への変換

人間の運動を 4.3.2 章のように計測した．計測した人間の角度データを $\boldsymbol{\Theta}$ の初期値とし，逆動力学解析で求めたロボットの運動の入力列を $\boldsymbol{T}$ の初期値とする．入力の制限は ±1.5Nm とした．与えた条件の下で，ロボット Small に関して J_m を最小化する $\boldsymbol{\Theta}$，$\boldsymbol{T}$ を求めた．ロボット Small の角度データの軌道を Fig.5.1 に示す．図中青い実線はロボット Small の角度データ，破線は人間の角度データを表す．実現する運動の条件として運動一周期における左右足の接地状態を指定したため，人間とロボット Small で接地脚が切り替わるタイミングが一致していることが θ_1 の軌道からわかる．ロボット Small の $\ddot{\boldsymbol{\Theta}}$ と $\ddot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}$ の比較を Fig.5.2 に示す．図中実線は $\ddot{\boldsymbol{\Theta}}$，$\circ$ は $\ddot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}}$ を表し，これらが近い値となっていることから，得られた運動データは式 (5.16) を満たす．ロボット Small の運動一周期における床反力を Fig.5.3 に示す．運動中のロボットの床反力は常に正であることから，接地は維持される．式 (5.16) を満たすために，ロボット Small の運動の実現に必要な入力列 $\boldsymbol{T}$ が Fig.5.4 に示すように得られる．図中青い実線はロボット Small の $\boldsymbol{T}$，破線は入力の制限値を表す．$\boldsymbol{T}$ が与えた制限値内に収まるように求められている．Fig.5.4 の入力の値はバンバン制御のように制限値で飽和しているが，実現する運動の条件として足の接地タイミングのみを指定した簡単な運動なため，目的の運動を実現できる．頭部の

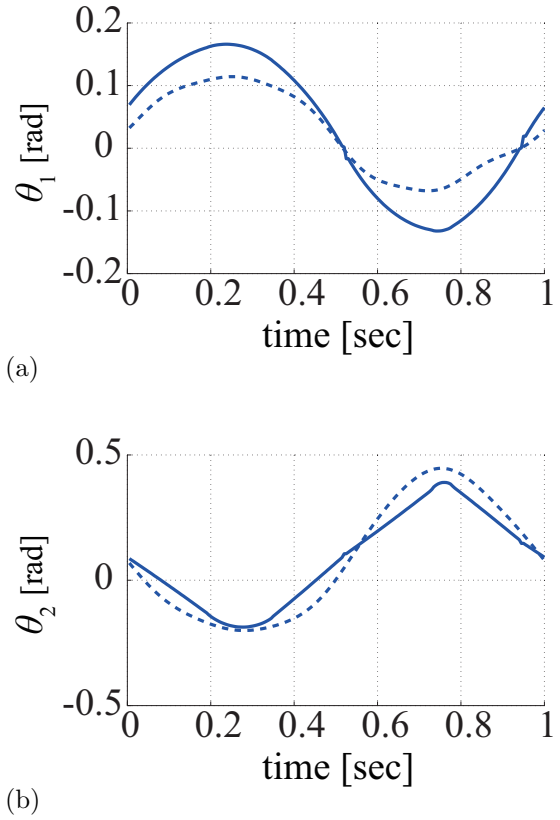


Fig.5.1 Motion data of small tap dancing robot

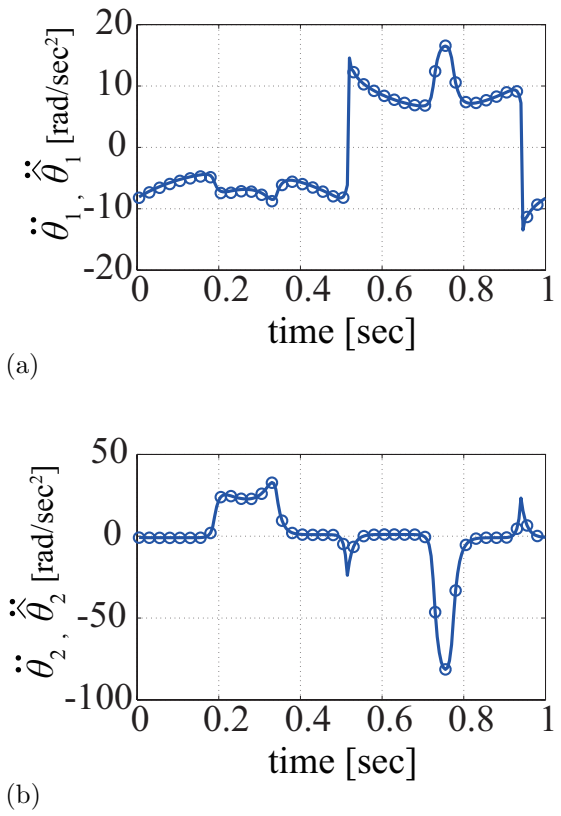


Fig.5.2 Angular accelerations of small tap dancing robot

運動の軌道はとくに制限せず，変化可能であるため，目的の運動を実現する入力の軌道は複数パターンあり，そのうちの一つが求まっている．以上より，得られた運動データはタップダンスロボット Small の実現する運動の条件，力学的整合性に関する条件，入力トルクの制限を満たしている．

5.3.6 タップダンスロボットの運動生成

得られたロボット Small の運動の軌道を用いて，軌道アトラクタに基づいた自律制御系 [1] を設計し，実験でロボットの運動を生成する．まず，最適化前の運動データ $\boldsymbol{\Theta}$，$\boldsymbol{T}$ を目標運動パターンとして自律制御系を設計し，タップダンスロボット Small の運動を生成した．生成されたロボットの運動の状態空間における軌道を Fig.5.5 に示す．図中 ∘ は目標運動パターン $\boldsymbol{\Theta}$，実線は生成された運動の軌道である．この場合，目標運動パターンがロボットの力学的整合性を満たしていないために，生成された運動は目標運動パターンと異なる不安定なものとなった．次に，最適化で得られた運動データを目標運動パターンとして自律制御系を設計し，タップダンスロボット Small の運動を生成した．実験の結果生成されたロボット Small の運動の状態空間における軌道を Fig.5.6-(a) に示す．図中 ∘ は目標運動パターン，実線は生成された運動の軌道である．Fig.5.6-(b) は運

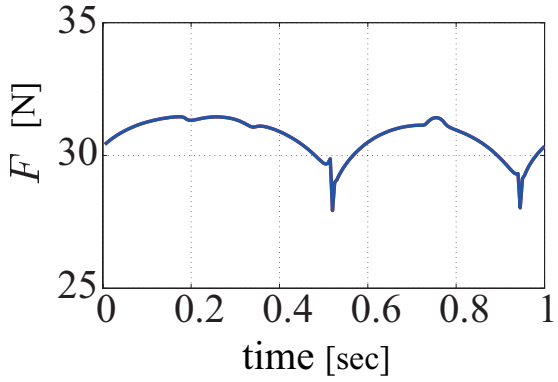


Fig.5.3 Floor reaction force of small tap dancing robot

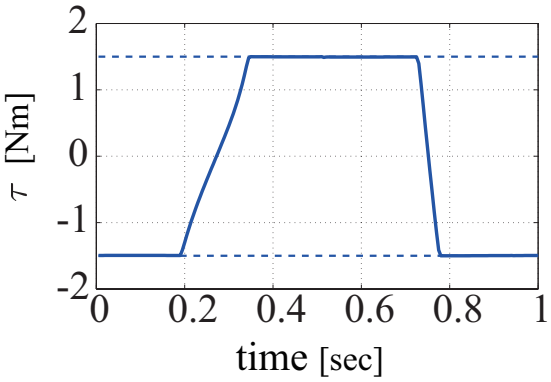


Fig.5.4 Obtained input sequence of small tap dancing robot

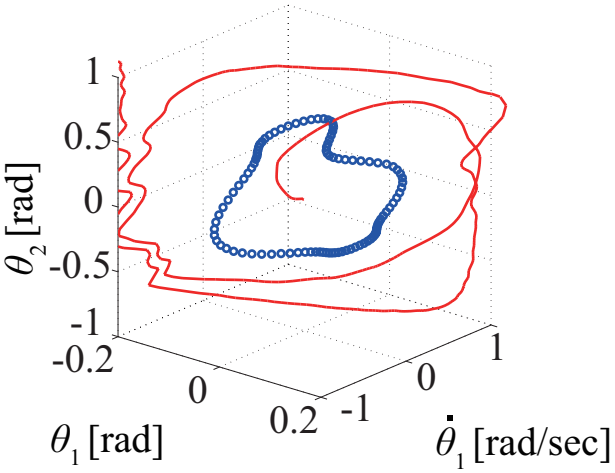
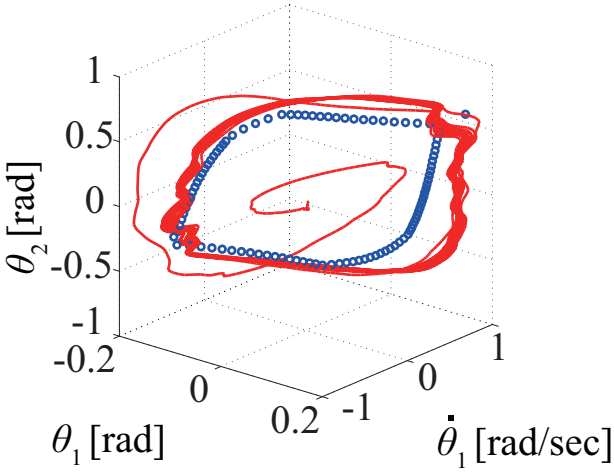


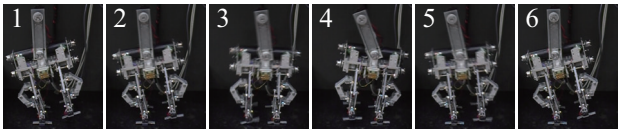
Fig.5.5 Generated motion of small tap dancing robot (before optimization)

動の様子を 0.2sec ごとに表した連続写真であり，生成されたロボット Small の運動は人間の運動と同じように左右の脚の接地時間が異なる非対称な運動である．実験の結果，与えた目標運動パターンに近い安定な運動が生成され，得られた運動データが力学的に実現可能であることが確かめられた．

また，ロボット Small と同様の条件で人間の運動データを変換し，ロボット Large の運動データを得た．この運動データを目標運動パターンとして自律制御系を設計し，ロボット Large の運動を生成した．実験の結果生成されたロボット Large の運動の状態空間における軌道を Fig.5.7-(a) に示す．図中 ∘ は目標運動パターン，実線は生成された運動の軌道である．ロボット Large で



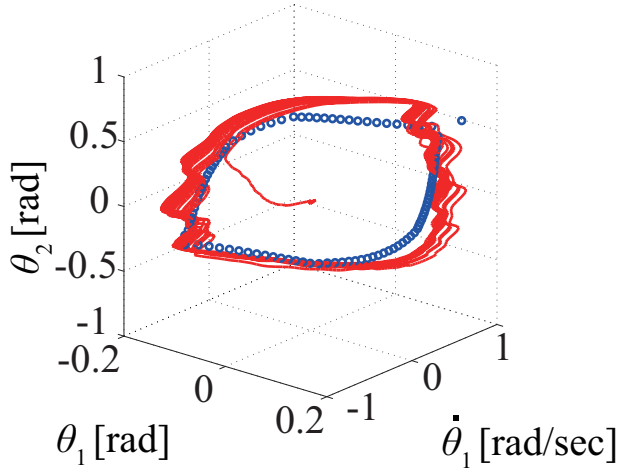
(a)



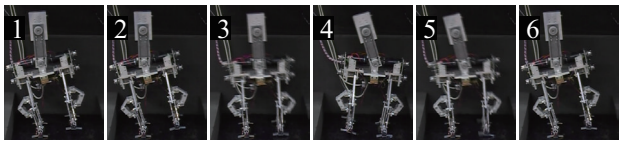
(b)

Fig.5.6 Generated motion of small tap dancing robot (after optimization)

も目標運動パターンに近い安定な運動が生成された．異なるロボット二体の運動を生成したことで，提案する方法を用いて制御対象ごとに力学的に整合する運動データが得られることを検証した．ロボット Small と Large の運動を比較する．ロボット Large の運動一周期における角加速度を Fig.5.8 に示す．図中赤い実線はロボット Large の角加速度，青い実線はロボット Small の角加速度を表し，ロボット Small の頭部角加速度は最大 80rad/sec^2 以上であるのに対し，ロボット Large の頭部角加速度は 60rad/sec^2 以下である．ロボット Large はロボット Small より頭部リンクの質量が大きく，各リンクの床からの重心位置が高いため，脚部リンクを揺動させるための力が比較的小さな頭部角加速度で得られる．ロボット Large の入力列を Fig.5.9 に示す．図中赤い実線はロボット Large の入力列，青い実線はロボット Small の入力列を表し，運動に比較的大きな頭部角加速度を要するロボット Small の方が最大トルク 1.5Nm を発生している時間が長い．

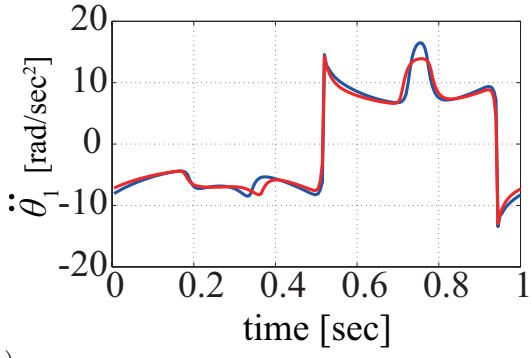


(a)

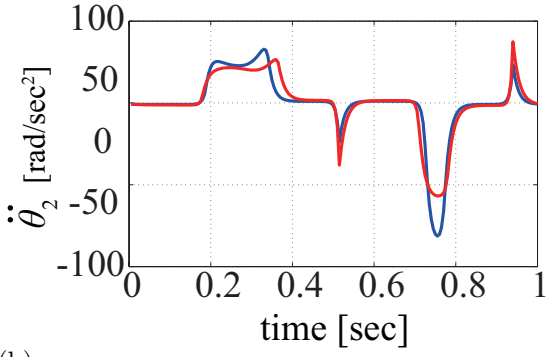


(b)

Fig.5.7 Generated motion of large tap dancing robot (after optimization)



(a)



(b)

Fig.5.8 Angular accelerations of large tap dancing robot

5.4 平面二足歩行ロボットへの適用

5.4.1 平面二足歩行ロボット

人間の運動を多自由度なロボットの運動生成に利用するための検証として，人間のムーンウォークを平面二足歩行ロボットの運動へと変換する．ロボットの自由度が多い場合，設計パラメータの探索次元が増え，運動パターン最適化における解の収束性が悪化することも考えられる．そこで，平面二足歩行ロボットの運動生成では，人間の運動パターンを主成分分析に基づいて低次元化し，復元した運動パターンがロボットの力学的拘束を満たすように，運動パターンの低次元化軌道を修正する．ムーンウォークを行う平面二足歩行ロボット [29] とそのモデルを Fig.5.10 に示す．ロボットは片足のつま先を面接地で地面に固定し，反対側の足をかかとのローラで接地させ後方へ滑らせてムーンウォークを行う．運動中，ロボットの足の接地状態は変化し，これに伴い運動方程式も変化する．ロボットの角度ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ と入力トルクベクトル $\boldsymbol{\tau}$ を

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T \tag{5.35}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6 \end{bmatrix}^T \tag{5.36}$$

とする．θ_i $(i = 0, 1, \cdots, 6)$ は各リンク i の姿勢角，τ_i $(i = 1, \cdots, 6)$ はリンク $i-1$ とリンク i をつなぐ関節のアクチュエータが発生するトルクである．平面二足歩行ロボットの運動方程式については付録 C に詳しい．

5.4.2 人間の運動の計測

ロボットの所望の運動を得るために，人間のムーンウォークをモーションキャプチャで計測した．Fig.5.11 に示すようにマーカが人間の頭頂部，腰，膝，足首，両足つま先とかかとに付けられ，マーカの位置を元に人間モデルのリンク長さを決めた．モーションキャプチャで得られたデータを二次元平面に射影し，逆運動学解析によって人間モデルの角度データを求めた．人間の角度データは FFT を用いて閉軌道とした人間の運動一周期

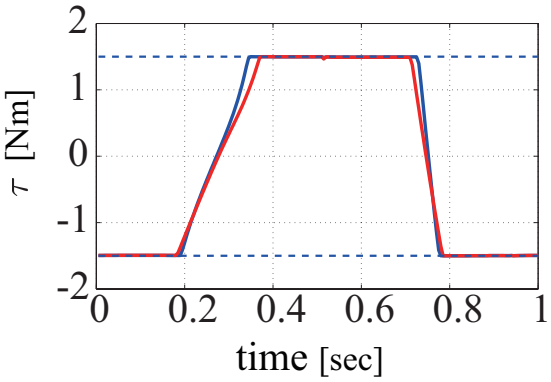
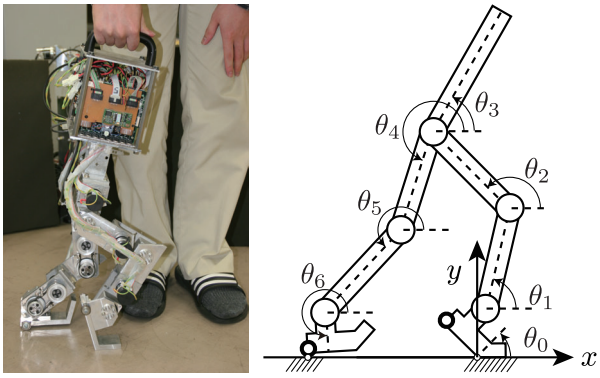


Fig.5.9 Obtained input sequence of large tap dancing robot



(a) (b)

Fig.5.10 Planar bipedal robot and its model

分である．

5.4.3 実現する運動の条件

接地状態の指定

接地状態は各時間ステップでロボットの運動方程式を決定するために必要である．本研究では人間の足リンク 0 と 6 の角度データ θ_0 と θ_6 からロボットの接地状態を与える．地面に固定する足リンクを基準リンク，滑らせる足リンクを移動リンクとし，これらを

- $\theta_0 \leq \theta_6 - \pi$ のとき　基準リンク 0，移動リンク 6
- $\theta_0 > \theta_6 - \pi$ のとき　基準リンク 6，移動リンク 0

のように判定する．足リンクの接地状態は

(i) 基準リンクがつま先で面接地，移動リンクがローラで接地

(ii) 基準リンクがつま先で点接地，移動リンクがローラで接地

の 2 パターンを考慮する．与えた接地状態を満たすように，足リンクの角度 θ_0，θ_6，角速度 $\dot{\theta}_0$，$\dot{\theta}_6$，角加速度 $\ddot{\theta}_0$，$\ddot{\theta}_6$ の軌道を与える．今回与えた θ_0 と θ_6 の軌道を Fig.5.12 に示す．θ_0 と θ_6 は接地状態 (i) のとき定数，

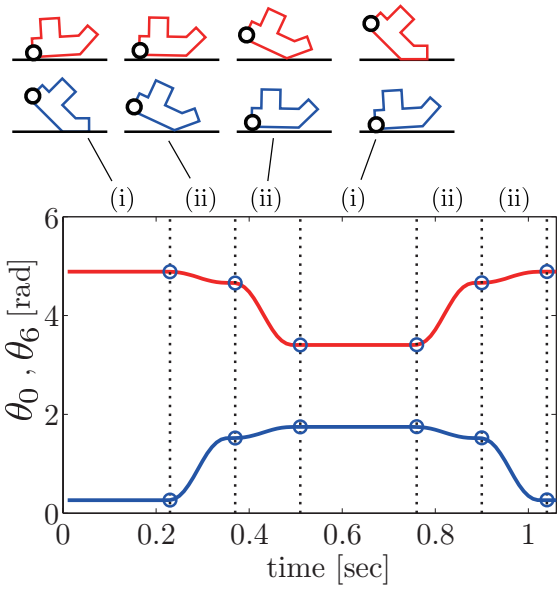
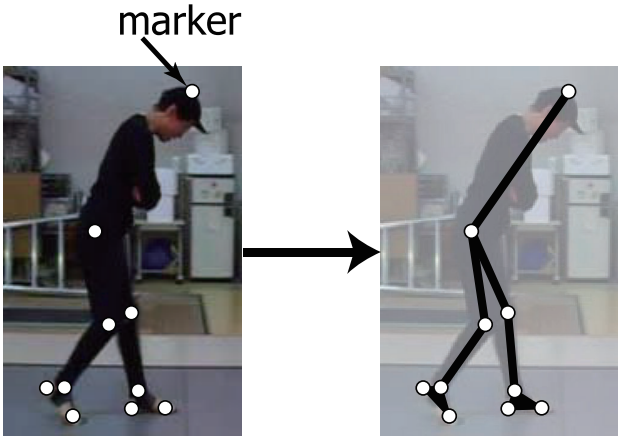


Fig.5.12 Given absolute foot angles (blue line : θ_0, red line : θ_6)

接地状態 (ii) のとき 5 次両停留関数で与えた．図中青線



(a) (b)

Fig.5.11 Marker position and human model for motion capture

は θ_0，赤線は θ_6 の軌道を表し，破線は足リンクの接地状態が変化する瞬間を表す．

閉ループの条件

ロボットは運動中に両足を常に接地させており，Fig.5.13 の赤線のように両脚部と地面で閉ループを形成する．基準リンクが接地する点の y 座標を $y_b = 0$，移

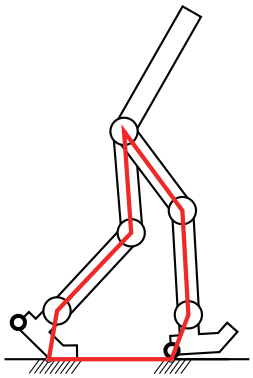


Fig.5.13 Closed loop formed by leg links and ground

動リンクが接地する点の y 座標を y_m とし，両脚部と地面で閉ループが形成されるための条件は

$$y_{mk} = 0 \tag{5.37}$$

である．ただし，$k\ (= 1, \cdots, n)$ は時間ステップである．

5.4.4 満たすべき条件の計算アルゴリズムへの実装

(a) 実現する運動の条件

接地状態の指定

5.4.3 章で述べたように，足リンクの角度 θ_0，θ_6 の運動一周期の軌道を与える．これにより，角度の設計パラメータは θ_1，$\cdots$，θ_5 の軌道となる．

閉ループの条件

閉ループの条件を全ての時間ステップで満たすために，以下の評価関数

$$J_c = \sum_{k=1}^{n} w_{ym} y_{mk}^2 \tag{5.38}$$

を最小化する．ただし，w_{ym} は重み係数である．

(b) 力学的整合性に関する条件

運動方程式の満足

タップダンスロボットの場合と同様に，評価関数を

$$J_m = \sum_{k=1}^{n} (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k - \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_k)^T \boldsymbol{W}_m (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k - \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_k) \tag{5.39}$$

$$\ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_k = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}_k)^{-1} (\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta}_k, \dot{\boldsymbol{\theta}}_k) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}_k) - \boldsymbol{\tau}_k) \tag{5.40}$$

$$\ddot{\hat{\boldsymbol{\Theta}}} = \begin{bmatrix} \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 & \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2 & \cdots & \ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_n \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

とし，これを最小化する．ただし，$\boldsymbol{W}_m$ は重み行列である．

床反力の条件

平面二足歩行ロボットは地面に固定されていないため，床反力は常に正である．この条件を満たすために以下のアルゴリズム

$$\boldsymbol{\theta}_k \leftarrow \boldsymbol{\theta}_k + \frac{df_{y0j}}{d\boldsymbol{\theta}_k} \delta_f \quad (f_{y0j} \leq f_{min}) \tag{5.42}$$

$$\boldsymbol{\tau}_k \leftarrow \boldsymbol{\tau}_k + \frac{df_{y0j}}{d\boldsymbol{\tau}_k} \delta_f \tag{5.43}$$

$$\boldsymbol{\theta}_k \leftarrow \boldsymbol{\theta}_k + \frac{df_{y6j}}{d\boldsymbol{\theta}_k} \delta_f \quad (f_{y6j} \leq f_{min}) \tag{5.44}$$

$$\boldsymbol{\tau}_k \leftarrow \boldsymbol{\tau}_k + \frac{df_{y6j}}{d\boldsymbol{\tau}_k} \delta_f \tag{5.45}$$

を用いて値を修正する．ただし，f_{y0j} と f_{y6j} は時間ステップ j で足リンク 0 と 6 が受ける床反力であり，f_{min} は床反力の許容最小値，$\delta_f\ (> 0)$ は微小係数である．

(c) 関節角度・入力トルクの制限

ロボットの関節角度と入力トルクに制限を設ける．ロボットのリンク間の相対角ベクトル $\boldsymbol{\theta}_R$ は絶対角 $\boldsymbol{\theta}$ から

$$\boldsymbol{\theta}_R = \begin{bmatrix} \theta_{R1} & \theta_{R2} & \theta_{R3} & \theta_{R4} & \theta_{R5} & \theta_{R6} \end{bmatrix}^T \tag{5.46}$$

$$\theta_{R1} = \theta_2 - \theta_3 \ , \ \theta_{R4} = -\theta_3 + \theta_4 - \pi \tag{5.47}$$

$$\theta_{R2} = \theta_1 - \theta_2 \ , \ \theta_{R5} = -\theta_4 + \theta_5 \tag{5.48}$$

$$\theta_{R3} = \theta_0 - \theta_1 \ , \ \theta_{R6} = -\theta_5 + \theta_6 \tag{5.49}$$

のように得られ，これを行列の掛け算にまとめて

$$\boldsymbol{\theta}_R = \boldsymbol{R}_{RA} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

となる．$\boldsymbol{\theta}_R$ に角度制限を与える．角度と入力トル

クの制限を満たすために，以下のアルゴリズム

$$\boldsymbol{\theta}_k \leftarrow \boldsymbol{\theta}_k - \frac{\partial \theta_{Rij}}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} K_\theta \qquad (\theta_{Rij} > \theta_{Ri}^{max}) \quad (5.51)$$

$$\boldsymbol{\theta}_k \leftarrow \boldsymbol{\theta}_k + \frac{\partial \theta_{Rij}}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} K_\theta \qquad (\theta_{Rij} < \theta_i^{min}) \quad (5.52)$$

$$\tau_{ik} \leftarrow \tau_{ik} - K_\tau(\tau_{ik} - \tau_i^{max}) \qquad (\tau_{ik} > \tau_i^{max}) \quad (5.53)$$

$$\tau_{ik} \leftarrow \tau_{ik} - K_\tau(\tau_{ik} - \tau_i^{min}) \qquad (\tau_{ik} < \tau_i^{min}) \quad (5.54)$$

を用いて値を修正する．ただし，K_θ，K_τ (> 0) はゲインである．

5.4.5 運動データの最適化

$\boldsymbol{\Theta}$ と $\boldsymbol{T}$ を未知数として，これらを評価関数の和

$$J = J_c + J_m \quad (5.55)$$

を最小化するように勾配法で計算する．設計変数の更新中，関節角度・入力トルクの制限を満たすために式 (5.51)〜(5.54) を用いて値を修正する．

5.4.6 運動低次元化を用いた軌道修正

ロボットの自由度が多い場合，設計パラメータの探索次元が増え，運動パターンを最適化するときの解の収束性が悪化することも考えられる．設計パラメータの探索次元を減らすため，運動パターンを特異値分解を用いた主成分分析によって低次元化し，復元した運動パターンがロボットの力学的拘束を満たすように，運動パターンの低次元化軌道を修正する．$\boldsymbol{\Theta}$ を主成分分析し

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{S}_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1^T \\ \boldsymbol{V}_2^T\end{bmatrix} \quad (5.56)$$

$$\boldsymbol{S}_1 = \mathrm{diag}\begin{bmatrix}s_1 & s_2 & \cdots & s_r\end{bmatrix} \quad (5.57)$$

$$\boldsymbol{S}_2 = \mathrm{diag}\begin{bmatrix}s_{r+1} & s_{r+2} & \cdots & s_m\end{bmatrix} \quad (5.58)$$

となる．$s_r \gg s_{r+1}$ が成り立つとき，$\boldsymbol{\Theta} \in R^{m\times n}$ を低次元化した $\widetilde{\boldsymbol{\Theta}} \in R^{r\times n}$ $(m > r)$ は

$$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{V}_1^T \quad (5.59)$$

のように得られ，$\boldsymbol{\Theta}$ は $\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}$ を用いて

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{Q}_1 \widetilde{\boldsymbol{\Theta}} \quad (5.60)$$

のように復元できる．運動パターンの低次元化により設計パラメータは $\boldsymbol{\Theta}$ から $\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}$ となり，探索次元は減る．$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}$ での J の勾配は

$$\frac{\partial J}{\partial \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k} = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}_k}\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_k}{\partial \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k} = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}_k}\boldsymbol{Q}_1 \quad (5.61)$$

となる．低次元化軌道 $\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}$ を

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k \leftarrow \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}_k}\boldsymbol{Q}_1 \delta_{\widetilde{\theta}} \quad (5.62)$$

のように修正する．ただし，$\delta_{\widetilde{\theta}}$ は微小係数である．$\boldsymbol{T}$ についても同様に低次元化する．

5.4.7 ロボットの運動への変換

実現する運動の条件，力学的整合性に関する条件，関節角度・入力トルクの制限を与え，人間の運動データを平面二足歩行ロボットの運動パターンに変換した．$\boldsymbol{\Theta}$ の内，θ_0，θ_6 は足リンクの接地状態を指定して軌道を与え，θ_1，$\cdots$，θ_5 は 5 次元から 3 次元に軌道を低次元化して修正した．また，角度の制限は実機の可動範囲を，入力トルクの制限はアクチュエータの発生可能な最大トルクを制限値として与えた．得られたロボットの運動パターンの角度を Fig.5.14 に，入力トルクの軌道を Fig.5.15 に示す． 図中，実線と破線はロボットと人間の軌道を表し，青線と赤線は左脚と右脚の軌道を表す．また，点線は各軌道の上限値と下限値を表す．得られたロボットの運動は人間の運動から変化し，また与えた制限を満たしている．運動パターン一周期をモデルの姿勢で表したものを Fig.5.16 に示す．図中，青線と赤線がロボットの左脚と右脚，黒太線がロボットの胴を表す．実現する運動の条件として与えた足リンク接地状態を満たすように運動パターンが得られている．また，閉ループの条件を与えたことで，運動一周期で両足接地が維持されるような運動となっている．閉ループの条件に関して，運動一周期の y_m を Fig.5.17 に示す．得られた運動の y_m は最大 0.5 mm 程度の誤差がある．ロボットが受ける床反力の y 成分を Fig.5.18 に示す．図中，青線と緑線はリンク 0 が受ける床反力，赤線と黒線はリンク 6 が受ける床反力を表す．運動一周期で床反力はすべて正であり，与えた床反力の条件を満たしている．

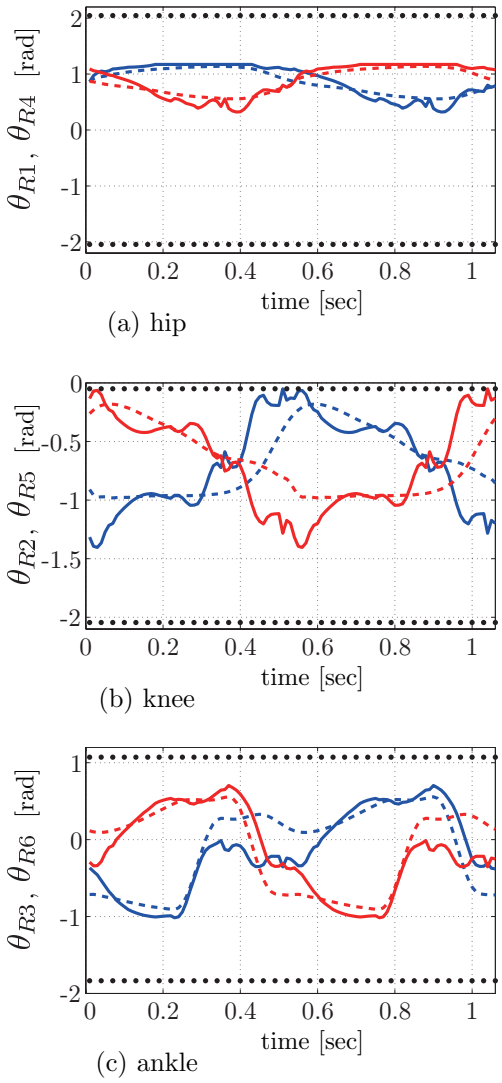


Fig.5.14 Obtained joint angle trajectories for the planar biped robot (blue line : left leg , red line : right leg , dot line: angle limit)

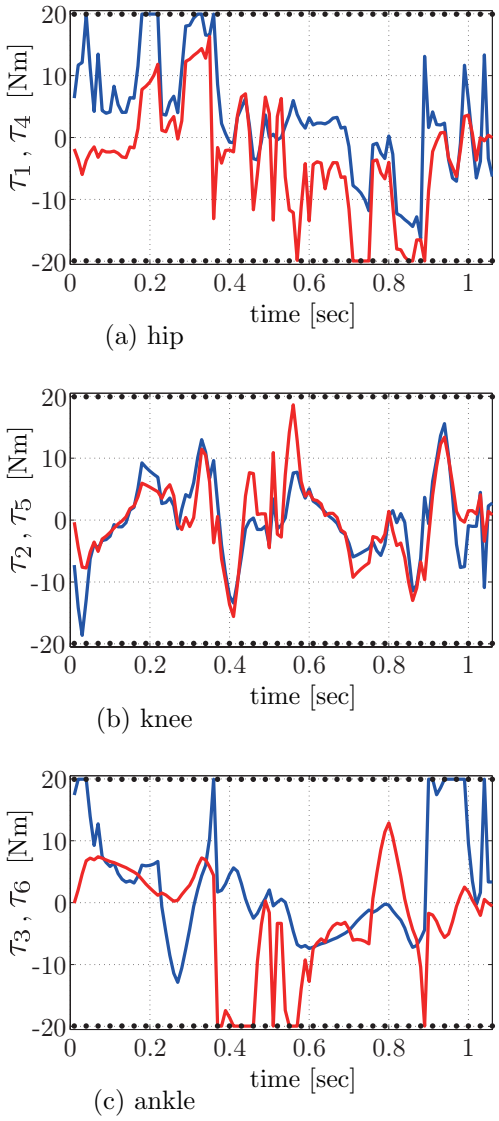


Fig.5.15 Obtained input torque trajectories for the planar biped robot (blue line : left leg , red line : right leg , dot line: angle limit)

5.5 おわりに

本章では，実現する運動の条件を満たすロボットの運動を生成するために，位置・速度・加速度の微分関係を与え，人間の運動をロボットの力学的整合性を満たす運動へと変換する方法について述べた．以下に成果を示す．

1. ロボットの運動における位置と入力を設計パラメータとし，実現する運動の条件，力学的整合性に関する条件，関節角度・入力トルクの制限を満たすように設計パラメータを最適化する方法を示した．
2. 提案する方法を用いてモーションキャプチャによって計測した人間の運動データを変換し，タップダンスロボット Small と Large の運動データを得た．
3. 得られた運動データを目標運動パターンとして用いて軌道アトラクタに基づいた自律制御系を設計し，目標運動パターンに近いタップダンスロボットの運動が生成されたことで，力学的に実現可能な運

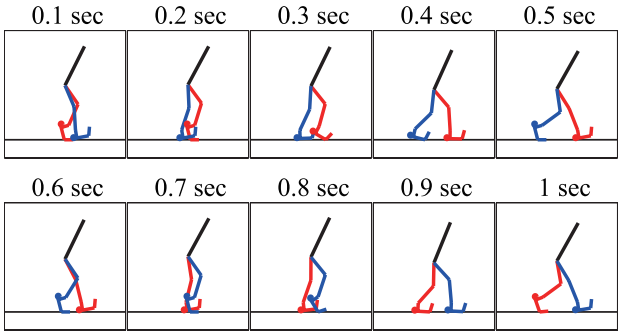


Fig.5.16 Robot motion sequence (blue and red colors denote for left and right legs)

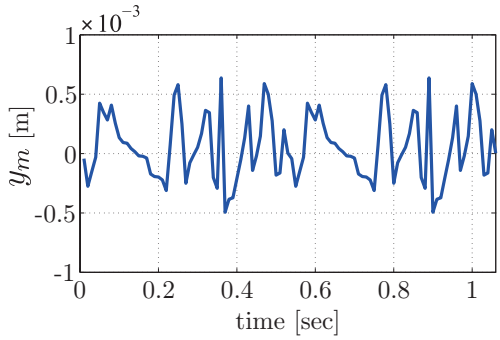


Fig.5.17 Index of closed loop condition (trajectory of y_m)

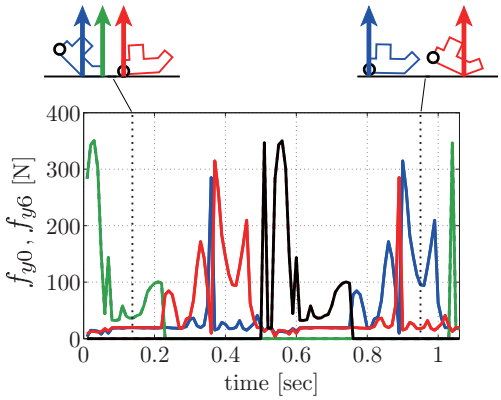


Fig.5.18 Ground reaction forces

動データが制御対象ごとに得られていることを確認した．

4. 生成したタップダンスロボット Small と Large の運動を比較し，頭部リンクの質量が大きく，各リンクの床からの重心位置が高いロボット Large では比較的小さな角加速度，発生トルクで運動が生成されていることを確認した．
5. 制御対象が自由度の多いロボットである場合，人間の運動パターンを特異値分解を用いた主成分分析によって低次元化し，復元した運動パターンがロボットの力学的拘束を満たすように，運動パターンの低次元化軌道を修正する方法を示した．運動低次元化により，設計パラメータの探索次元が減る．
6. 運動低次元化を用いて，人間のムーンウォークの運動パターンを平面二足歩行ロボットの運動パターンに変換した．得られた運動パターンは指定した足リンク接地状態と床反力の条件，関節角度の制限を満たし，閉ループの条件の誤差は 1mm 以下となった．

タップダンスロボットの運動について，人間とロボットの力学特性がかなり違うとき，接地の時間（運動の周期）が等しいという条件を満たすのが難しいことも考えられる．この場合，提案する方法では系を離散系で扱っているので，ステップごとの時間間隔を設計変数に加えることで時間最適化を計算アルゴリズムに実装可能である．これにより，変換後の運動の周期を変化させることができ，周期の異なる運動同士を同じ運動とすることも可能だと考えている．

第 6 章

力学的整合を満たす加速度運動パターン設計

6.1 はじめに

前章では，ロボットで実現する運動の満たすべき少数の条件を与え，この条件を満たすよう，人間のモーションキャプチャデータを初期値としてロボットの関節角度と入力トルクの時系列データを最適化問題によって得る方法を提案した．この方法の特徴は，(a) 運動は拘束条件のみを満たすものであり，関節角度はロボットの力学特性を満たす範囲で自由に変化できること，(b) 運動の周期性を利用し，関節角度，角速度，角加速度の関係を，擬似微分（微分器 + ローパスフィルタ）と零位相フィルタを表す伝達関数とのたたみ込み積分で表し，行列の掛け算によって簡易に表したこと，が挙げられる．しかし，前章で述べた方法は擬似微分と零位相フィルタを用いたため，角加速度は 2 階微分可能な関数となり，その結果，関節角度は 4 階微分可能な関数であることが条件となる．これにより，関節トルクがステップ関数になること，すなわち角加速度が不連続になることを許容せず，そのような点の付近では Fig.5.14-(b) に見られるようにデータが激しく振動する現象が現れる．

そこで，本章では関節の角加速度を設計パラメータとし，不連続な加速度となる運動を許容する方法を提案する．この方法では関節角度は 2 階まで微分可能な関数となる．また，関節角度は設計した角加速度を 2 階積分して得られるが，これを，これまでの手法と同様に積分器を表す伝達関数とのたたみ込み積分で与えることで，閉リンクの拘束条件を満たすような設計を可能とする．さらに，提案する方法を 5.4.1 章にある平面歩行ロボットのムーンウォークへと適用し，人間のムーンウォークからロボットの力学的に合致したムーンウォークへの変換を行う．なお，ムーンウォークは (a) 足の接地状態が激しく変化しない (常に両足接地) ため，歩行より簡略化できること，(b) 閉リンクの拘束条件を常に満たさなければならないこと，(c) 一般の歩行と同様に床反力が正である条件を満たさなければならないことなどから提案する方法の有効性を検証するために適切な対象であると考えられる．

6.2 加速度を設計変数とする運動の変換

6.2.1 問題の設定

ロボットの実現可能な周期運動パターン

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 & \boldsymbol{\theta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\theta}_n \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 & \boldsymbol{\tau}_2 & \cdots & \boldsymbol{\tau}_n \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

を求める問題を考える．ただし，$\boldsymbol{\theta}_k$，$\boldsymbol{\tau}_k$ は時間ステップ $k\ (= 1, \cdots, n)$ における角度，入力トルクのベクトルである．運動データの満たすべき条件を挙げ，これらを満たす運動パターンを求めるために評価関数を設定し，これを最小化することで運動の変換を行う．運動の満たすべき条件として，(a) 実現する運動の条件，(b) 力学的整合性に関する条件，(c) 関節角度・入力トルクの制限を考える．設計変数は

$$\ddot{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 & \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 & \cdots & \ddot{\boldsymbol{\theta}}_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_1, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \tag{6.3}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 & \boldsymbol{\tau}_2 & \cdots & \boldsymbol{\tau}_n \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

とする．$\ddot{\boldsymbol{\Theta}}$ と $\boldsymbol{T}$ は角加速度と入力トルクの運動一周期分の時系列データ，$\boldsymbol{\theta}_1$，$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ は時間ステップ $k = 1$ の角度・角速度である．これらを設計変数とすることにより，角加速度が不連続であることを許容し，関節角度は 2 階まで微分可能な関数とすることができる．時間ステップ $k\ (= 2, \cdots, n)$ の角速度と角度は，設計変数を用

いて

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_k = \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \Delta t \sum_{\ell=1}^{k-1} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_\ell \quad , \quad \boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_1 + \Delta t \sum_{\ell=1}^{k-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_\ell \tag{6.5}$$

で近似する．ただし，Δt はサンプリングタイムを表す．これを一周期分のデータ $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$，$\boldsymbol{\Theta}$ にまとめると

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \boldsymbol{F}_1 + \ddot{\boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{F}_2 \tag{6.6}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}_1 \boldsymbol{F}_1 + \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \boldsymbol{F}_1 \boldsymbol{F}_2 + \ddot{\Theta} \boldsymbol{F}_2^2 \tag{6.7}$$

$$\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \Delta t & \cdots & \Delta t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \Delta t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

となる．

6.2.2 運動の満たすべき条件

平面二足歩行ロボットのムーンウォークを生成するために，運動の満たすべき条件として，5.2.3 章と 5.4.3 章と同様に，(a) 実現する運動の条件（足リンク接地状態の指定，閉ループの条件），(b) 力学的整合性に関する条件（運動方程式の満足，床反力の条件），(c) 関節角度・入力トルクの制限を設定する．さらに本章では，周期性の条件を設定する．

(a) 実現する運動の条件

接地状態の指定

前章からの変更点として，運動があえて不連続な加速度を要求するように，足リンク角度 θ_0 と θ_6 の軌道を Fig.6.1 に示すように 3 次関数で与えた．θ_0 と θ_6 は接地状態 (i) のとき定数，接地状態 (ii) のとき 3 次関数で与えた．図中青線は θ_0，赤線は θ_6 の軌道を表し，破線は足リンクの接地状態が変化する瞬間を表す．接地状態が変化する瞬間，足リンクの加速度は Fig.6.2 のように不連続に変化する．図中青線は $\ddot{\theta}_0$，赤線は $\ddot{\theta}_6$ の軌道を表し，破線は足リンクの接地状態が変化する瞬間を表す．

周期性の条件

運動一周期後にロボットが同じ姿勢となるために

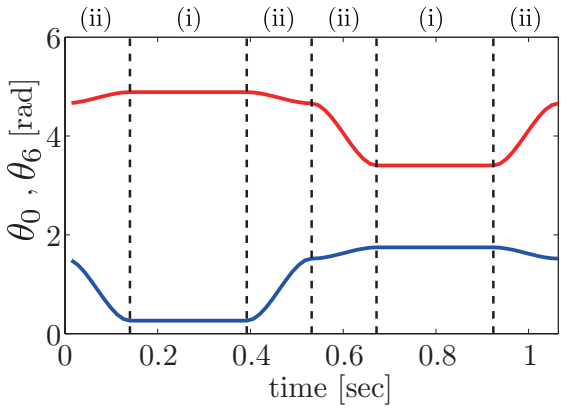


Fig.6.1 Given absolute foot angles (blue line : θ_0, red line : θ_6)

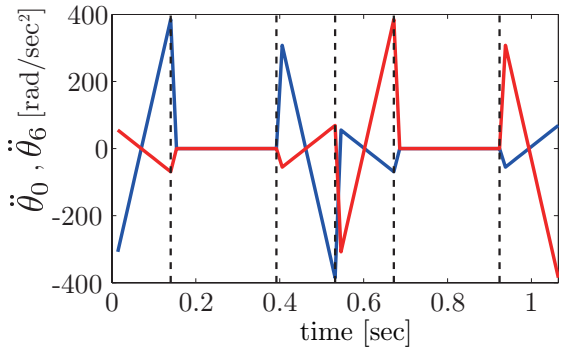


Fig.6.2 Given absolute foot angular acceleration (blue line : $\ddot{\theta}_0$, red line : $\ddot{\theta}_6$)

は，以下の周期性の条件

$$\boldsymbol{h}_{\ddot{\theta}}(\ddot{\boldsymbol{\Theta}}) = \sum_{\ell=1}^{n} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_\ell = \boldsymbol{0} \tag{6.10}$$

$$\boldsymbol{h}_{\dot{\theta}}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1, \ddot{\boldsymbol{\Theta}}) = \sum_{\ell=1}^{n} \dot{\boldsymbol{\theta}}_\ell = \boldsymbol{0} \tag{6.11}$$

を満たす必要がある．この条件は拘束条件として計算アルゴリズムに実装する．詳細は 6.2.4 節にて述べる．

6.2.3 満たすべき条件の計算アルゴリズムへの実装

本章の設計変数は 5 章と異なるため，床反力の条件と，関節角度・入力トルクの制限のアルゴリズムが以下のようになる．

(b) **力学的整合性に関する条件**

床反力の条件

床反力を正とするために，以下のアルゴリズム

$$\boldsymbol{\theta}_1 \leftarrow \boldsymbol{\theta}_1 + \frac{df_{y0j}}{d\boldsymbol{\theta}_1}\delta_f \quad (f_{y0j} \leq f_{min}) \tag{6.12}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \leftarrow \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \frac{df_{y0j}}{d\dot{\boldsymbol{\theta}}_1}\delta_f \tag{6.13}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k \leftarrow \ddot{\boldsymbol{\theta}}_k + \frac{df_{y0j}}{d\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k}\delta_f \tag{6.14}$$

$$\boldsymbol{\tau}_k \leftarrow \boldsymbol{\tau}_k + \frac{df_{y0j}}{d\boldsymbol{\tau}_k}\delta_f \tag{6.15}$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 \leftarrow \boldsymbol{\theta}_1 + \frac{df_{y6j}}{d\boldsymbol{\theta}_1}\delta_f \quad (f_{y6j} \leq f_{min}) \tag{6.16}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \leftarrow \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \frac{df_{y6j}}{d\dot{\boldsymbol{\theta}}_1}\delta_f \tag{6.17}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k \leftarrow \ddot{\boldsymbol{\theta}}_k + \frac{df_{y6j}}{d\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k}\delta_f \tag{6.18}$$

$$\boldsymbol{\tau}_k \leftarrow \boldsymbol{\tau}_k + \frac{df_{y6j}}{d\boldsymbol{\tau}_k}\delta_f \tag{6.19}$$

を用いて値を修正する．ただし，j は時間ステップ，f_{y0} と f_{y6} は足リンク 0 と 6 にかかる床反力，f_{min} は床反力の許容最小値，δ_f (>0) は微小係数である．

(c) **関節角度・入力トルクの制限**

角度と入力トルクの制限を満たすために，以下のアルゴリズム

$$\boldsymbol{\theta}_1 \leftarrow \boldsymbol{\theta}_1 - \frac{\partial\theta_{Rij}}{\partial\boldsymbol{\theta}_1}K_\theta \quad (\theta_{Rij} > \theta_{Ri}^{max}) \tag{6.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \leftarrow \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 - \frac{\partial\theta_{Rij}}{\partial\dot{\boldsymbol{\theta}}_1}K_{\dot\theta} \ , \ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_k \leftarrow \ddot{\boldsymbol{\theta}}_k - \frac{\partial\theta_{Rij}}{\partial\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k}K_{\ddot\theta} \tag{6.21}$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 \leftarrow \boldsymbol{\theta}_1 + \frac{\partial\theta_{Rij}}{\partial\boldsymbol{\theta}_1}K_\theta \quad (\theta_{Rij} < \theta_i^{min}) \tag{6.22}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \leftarrow \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \frac{\partial\theta_{Rij}}{\partial\dot{\boldsymbol{\theta}}_1}K_{\dot\theta} \ , \ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_k \leftarrow \ddot{\boldsymbol{\theta}}_k + \frac{\partial\theta_{Rij}}{\partial\ddot{\boldsymbol{\theta}}_k}K_{\ddot\theta} \tag{6.23}$$

$$\tau_{ik} \leftarrow \tau_{ik} - K_\tau(\tau_{ik} - \tau_i^{max}) \quad (\tau_{ik} > \tau_i^{max}) \tag{6.24}$$

$$\tau_{ik} \leftarrow \tau_{ik} - K_\tau(\tau_{ik} - \tau_i^{min}) \quad (\tau_{ik} < \tau_i^{min}) \tag{6.25}$$

を用いて値を修正する．ただし，K_θ，$K_{\dot\theta}$，$K_{\ddot\theta}$，K_τ (>0) はゲインである．

6.2.4 計算アルゴリズムの流れ

人間の運動をロボットの運動に変換する計算アルゴリズムについて述べる．まず，設計変数を

$$\boldsymbol{\Theta}_{set} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1^T & \dot{\boldsymbol{\theta}}_1^T & \ddot{\boldsymbol{\Theta}}_L^T \end{bmatrix}^T \ , \ \boldsymbol{T} \tag{6.26}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\Theta}}_L = \begin{bmatrix} \ddot\theta_{11} & \cdots & \ddot\theta_{1n} & \cdots & \ddot\theta_{5n} \end{bmatrix}^T \tag{6.27}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\Theta}}_{L\ n(i-1)+j} = \ddot\theta_{ij} \tag{6.28}$$

のようにまとめ，これらの初期値として人間の運動パターンを用いる．$\boldsymbol{\Theta}_{set}$ のうち，足リンクの角度 θ_0 と θ_6 の軌道は接地状態の指定により与えられるため，残りの角度 θ_1〜θ_5 の軌道と U_L を未知として，評価関数の和

$$J = J_c + J_m \tag{6.29}$$

を最小化するように勾配法で設計変数を計算する．拘束条件（周期性の条件）をまとめて

$$\boldsymbol{C}_\theta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_{\ddot\theta}(\ddot{\boldsymbol{\Theta}}) \\ \boldsymbol{h}_{\dot\theta}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1, \ddot{\boldsymbol{\Theta}}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{6.30}$$

と表す．人間の運動パターンは式 (6.30) を満たしている．この例では，運動一周期のデータ数 n のところ，設計変数 $\boldsymbol{\Theta}_{set}$ $(\in R^{5n+10})$ に対して拘束条件 $R^{\frac{7}{2}n+10}$ であり，設計変数の方が多い．$\boldsymbol{\Theta}_{set}$ に関して，拘束条件の勾配 $\partial\boldsymbol{C}_\theta/\partial\boldsymbol{\Theta}_{set}$ の直交補空間の基底 $(\partial\boldsymbol{C}_\theta/\partial\boldsymbol{\Theta}_{set})^\perp$ を用いて，$\boldsymbol{\Theta}_{set}$ の更新量 $\Delta\boldsymbol{\Theta}_{set}$ を

$$\Delta\boldsymbol{\Theta}_{set} = \frac{\partial\boldsymbol{C}_\theta}{\partial\boldsymbol{\Theta}_{set}}^\perp \Delta\boldsymbol{\alpha} \tag{6.31}$$

のように表す．任意のベクトル $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ を式 (6.31) に与えて得られる $\Delta\boldsymbol{\Theta}_{set}$ は $\partial\boldsymbol{C}_\theta/\partial\boldsymbol{\Theta}_{set}$ に直交するため，これを用いて $\boldsymbol{\Theta}_{set}$ を更新すれば，拘束条件を満たしつつ J を減らすことができる．$\boldsymbol{\Theta}_{set}$ の更新は

$$\boldsymbol{\Theta}_{set}^{new} \leftarrow \boldsymbol{\Theta}_{set} - \Delta\boldsymbol{\Theta}_{set} \tag{6.32}$$

$$\Delta\boldsymbol{\Theta}_{set} = \frac{\partial\boldsymbol{C}_\theta}{\partial\boldsymbol{\Theta}_{set}}^\perp \Delta\boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial\boldsymbol{C}_\theta}{\partial\boldsymbol{\Theta}_{set}}^\perp \frac{\partial J}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\delta \tag{6.33}$$

$$\frac{\partial J}{\partial\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial J}{\partial\boldsymbol{\Theta}_{set}}\frac{\partial\boldsymbol{\Theta}_{set}}{\partial\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial J}{\partial\boldsymbol{\Theta}_{set}}\frac{\partial\boldsymbol{C}_\theta}{\partial\boldsymbol{\Theta}_{set}}^\perp \tag{6.34}$$

のように行う．ただし，δ は微小係数である．設計変数の更新中，床反力の条件と関節角度・入力トルクの制限を満たすために式 (6.12)〜(6.25) を用いて値を修正する．

6.3 運動パターンの設計

前述した運動の満たすべき条件を与え，平面二足歩行ロボットの運動パターンを設計した．ロボットの運動パターンの様子を Fig.6.3 に示す．実現する運動の条件と

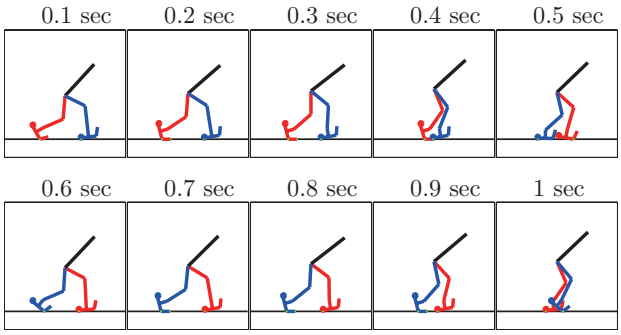


Fig.6.3 Robot motion sequence (blue and red lines denote for left and right legs)

して与えた足リンク接地状態を満たすように運動が得られている．前章のロボットのモデルはつま先回転中心から足首関節までの距離（付録 C の Fig.C.2，C.3 における ℓ_t）が 70mm だったが，本章のロボットのモデルはそれより短い 45mm とし，ロボット実機もそのように改造した．これは，ℓ_t を短くすることで，基準リンクの接地状態が変化するときのロボット胴体の上下動を小さくし，実験時に足が地面から受ける衝撃を小さくするための変更であったが，得られた計算結果では腰の上下動は小さくならなかった．また，閉ループの条件を与えたことで，運動一周期で両足接地が維持されるような運動となっている．閉ループの条件に関して，運動一周期の y_m を Fig.6.4 に示す．得られた運動の y_m は十分小さくなった．床反力の条件について，運動一周期の床反力を Fig.6.5 に示す．図中，青線は左足，赤線は右足の床反力を示す．実線は基準リンクの回転中心と移動リンクのかかとにかかる床反力を表し，破線は基準リンクつま先先端にかかる床反力を表す．基準リンクには点接地時に一つ，面接地時に二つの床反力が発生し，二つの床反力が正のとき，基準リンクの面接地が維持される．運動一周期ですべての床反力が 0 以上となっている．得られた運動パターンの相対角と入力トルクの時系列データのうち，例として足首関節のデータを Fig.6.6 に示す．図中，実線はロボットの運動，破線は人間の運動，点線は

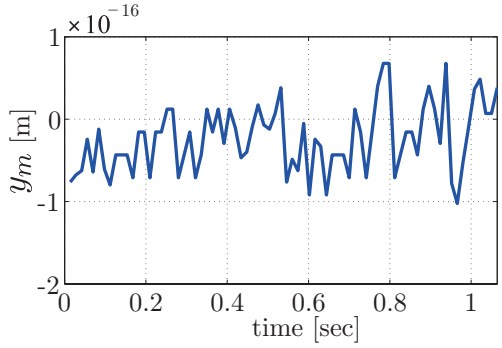


Fig.6.4 Index of closed loop condition (trajectory of y_m)

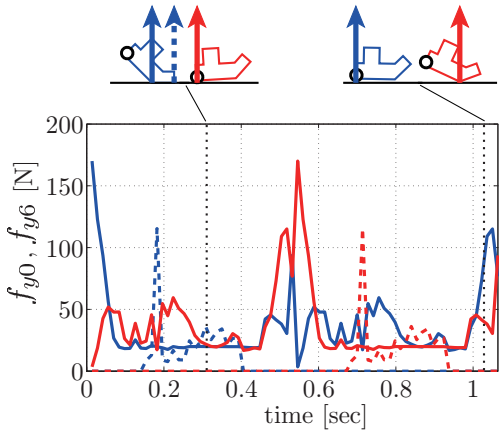


Fig.6.5 Ground reaction forces (blue and red colors denote for left and right feet)

制限値であり，青線は左足の運動，赤線は右足の運動を表す．相対角と入力トルクの制限値は，歩行ロボット実機の関節可動域およびアクチュエータの最大トルクの値を与えた．各関節の相対角と入力トルクともに，与えた制限値を満たす運動が得られた．

6.4 おわりに

ロボットの運動における角加速度と入力トルクの時系列データを設計変数とし，運動を設計する方法について述べた．以下に結果を示す．

1. ロボットにおける運動の角加速度と入力の軌道を設計変数とし，実現する運動の条件，力学的整合性に関する条件，関節角度・入力トルクの制限を満たすように設計変数を最適化する方法を示した．
2. この方法では，関節角度は設計した角加速度を 2 階

積分して得られるが，これを，前章の方法と同様に積分器を表す伝達関数とのたたみ込み積分で与えることで，閉リンクの拘束条件を満たすような設計を可能とする．前章の方法では，擬似微分と零位相フィルタを用いたため，角加速度は 2 階微分可能な関数となり，その結果，関節角度は 4 階微分可能な関数であることが条件となるが，これは関節トルクがステップ関数になること，すなわち角加速度が不連続になることを許容しない．一方，角加速度を設計パラメータとする方法では角加速度の軌道が不連続であることを許容し，関節角度は 2 階まで微分可能な関数として得られる．

3. さらに，提案する方法を平面歩行ロボットのムーンウォークへと適用し，人間のムーンウォークからロボットの力学的に合致したムーンウォークへの変換を行った．

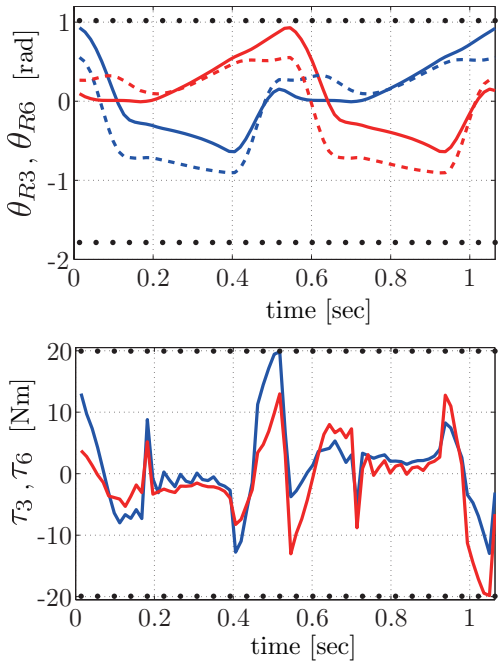


Fig.6.6 Obtained ankle joint angle and its input torque (blue line : left leg , red line : right leg , dot line: limitation)

第 7 章

結論

7.1 本論文の成果

本論文では，軌道アトラクタに基づいた自律制御系の設計に必要な，実現可能なロボットの運動パターンを設計するために，モーションキャプチャで計測した人間の運動データや他のロボットの運動データを初期値として与え，これをロボットの力学的な拘束のもと変換する方法を提案した．具体的な成果は以下のとおりである．

1. あるロボットの自律制御系を設計して運動を実現したとき，この実現された運動の場を他のロボットの力学的に実現可能な場へと写像し，その場を生成するコントローラを設計する方法を提案した．線形系の場合について，固有値分解に基づいた線形写像によって，状態方程式を力学的に一致させる方法，および，コントローラの変換方法を示した．さらに，線形系の場合を非線形系に拡張し，非線形状態空間写像によって二つの状態方程式を力学的に一致させる方法，および，コントローラの変換手法を示した．タップダンスロボットを用いた実験により，状態空間写像を用いることで力学的に一致した運動が生成可能であることを示した．
2. 人間の運動データを非線形状態空間写像を用いてロボットの力学的整合性を満たす運動へと変換する方法を提案した．この方法では，非線形状態空間写像を用いて，異なる力学系間で速度と加速度の力学的な拘束に基づいて運動を変換する．運動パターンを得たのちに，従来の制御系設計法を用いて，運動パターンへ引き込む場を設計することで，運動の場を変換する方法の課題である計算量の多さを低減している．ロボットの運動は与える参照運動エネルギーの値によって変化し，力学的整合性を満たす運動は複数存在することを示した．提案する非線形状態空間写像を用いてモーションキャプチャによって計測した人間の運動データを変換し，タップダンスロボットの力学的整合性を満たす運動データを得て，これを用いて軌道アトラクタに基づいた自律制御系を設計し，目標運動のデータに一致するタップダンスロボットの運動を生成した．これにより，提案する方法で得られる運動パターンが力学的に実現可能であることが確かめられた．
3. 位置・速度・加速度の微分関係を与え，人間の運動データをロボットの力学的整合性を満たす運動へと変換する方法を提案した．この方法では，ロボットの運動における角度と入力トルクの時系列データを設計パラメータとし，実現する運動の条件，力学的整合性に関する条件，関節角度・入力トルクの制限を満たすように設計パラメータを最適化する．人間の運動データを写像を用いて変換する方法では，写像関数の選択によっては所望の運動パターンを得ることが難しい場合もあるが，時系列データすべてを設計パラメータとする方法では，任意の軌道が設計可能となる．また，運動の周期性を利用し，関節角度，角速度，角加速度の関係を，擬似微分（微分器 + ローパスフィルタ）と零位相フィルタを表す伝達関数とのたたみ込み積分で表し，行列の掛け算によって簡易に表した．検証のために，提案する方法を用いてモーションキャプチャによって計測した人間の運動データを変換し，タップダンスロボット Small と Large の運動データを得た．得られた運動データを目標運動パターンとして用いて軌道アトラクタに基づいた自律制御系を設計し，目標運動パターンに近いタップダンスロボットの運動が生成されたことで，力学的に実現可能な運動データが制

御対象ごとに得られていることを確認した．また，制御対象が自由度の多いロボットである場合，人間の運動パターンを特異値分解を用いた主成分分析によって低次元化し，復元した運動パターンがロボットの力学的拘束を満たすように，運動パターンの低次元化軌道を修正する方法を示した．運動低次元化を用いて，人間のムーンウォークの運動パターンを平面二足歩行ロボットの運動パターンに変換した．

4. ロボットの運動における角加速度と入力トルクの時系列データを設計パラメータとし，運動を設計する方法を提案した．角度と入力トルクの時系列データを設計パラメータとする方法では，擬似微分と零位相フィルタを用いたため，角加速度は 2 階微分可能な関数となり，その結果，関節角度は 4 階微分可能な関数であることが条件となるが，これは関節トルクがステップ関数になること，すなわち角加速度が不連続になることを許容しない．一方，角加速度を設計パラメータとする方法では角加速度の軌道が不連続であることを許容し，関節角度は 2 階まで微分可能な関数として得られる．また，関節角度は設計した角加速度を 2 階積分して得られるが，これを，これまでの手法と同様に積分器を表す伝達関数とのたたみ込み積分で与えることで，閉リンクの拘束条件を満たすような設計を可能とする．さらに，提案する方法を平面歩行ロボットのムーンウォークへと適用し，人間のムーンウォークからロボットの力学的に合致したムーンウォークへの変換を可能にした．

7.2 今後の展望

本論文で提案した方法の課題として，元の運動と変換された運動との間の一致の条件の設定が運動設計者の主観に依るところが大きいうえ発見的な要素が強いという点が挙げられ，考察の余地がある．また，提案方法ではロボットの身体と環境がはじめに与えられており，この場合の場の設計とは制御系の設計と同義であった．そこで，今後の研究計画として，(a) はじめに場を与え，その場を実現するために身体，環境，制御系の三つを設計することを進める．さらに，将来の展望として (b) 運動のコツを力学的に抽出し，これを人間の運動教示や運動補助器具の設計に利用することを考える．これらについて以下に述べる．

(a) 設計対象に身体と環境を加えることで，制御系のみを設計する従来法では実現できない運動も実現可能となる．身体の設計では，リンク系の構造ははじめに与え，リンク長やリンク質量などが身体の設計パラメータとなる．Fig.7.1 のようにリンク系の構造が異なる複数の身体があるとき，これらの運動を共通の場から生成することも可能である．これにより，場が同じであることによって，異なる身体間の運動の一致の条件が定められる．

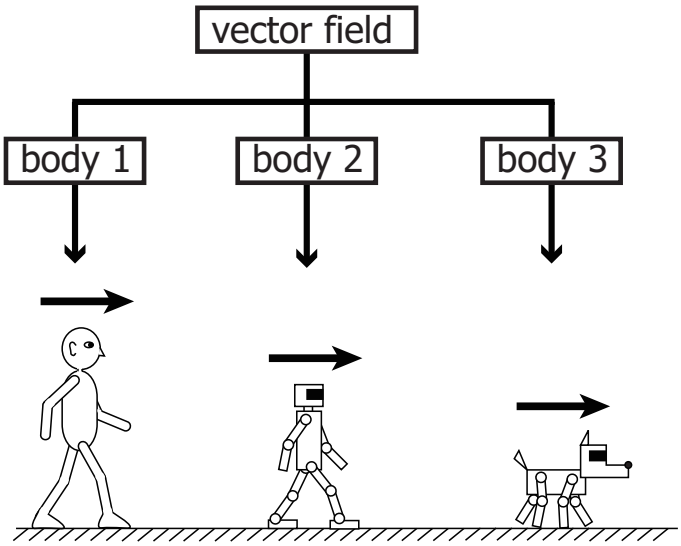


Fig.7.1 Motion generations from common vector field

(b) 設計した制御系が目的の運動を実現するための力の教示情報（力を入れるタイミングなど）を含み，かつ設計した身体・環境が目的の運動に有利ならば，与えた場の中に運動を実現するためのコツが内在していると考えられる．運動のコツが力学的に抽出できれば，ロボットの運動設計のみならず，人間の運動設計にも応用できる．具体的には，健常者の歩行にトルク制限を施し，高齢者や障がい者に適した運動に変換することで，適切な力を入れるタイミングを教示できるようになる．さらに，これにアクティブあるいはパッシブな力補助を加えて変換を行えば，所望の力を発生する補助器具の開発を可能とする．

このように，これまでに行ってきた研究は主にロボットの運動の設計に関するものであるが，これを機械工学，人間工学へと拡張し，非線形力学をベースとしたロボットの身体・環境・制御系設計，および人の運動教示と運動補助器具の開発へと展開していく予定である．

参考文献

[1] 岡田, 村上. 軌道アトラクタを用いたロボットの同調運動制御によるコミュニケーション原理の表現. 日本ロボット学会誌, Vol. 25, No. 4, pp. 545–553, 2007.

[2] 宮嵜, 岡田. 非線形状態空間写像による力学構造の一致を利用したロボットの運動生成. 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会, 1P1-Q01, 2011.

[3] 岡田, 宮嵜. 非線形状態空間写像を用いた力学的整合を持つ運動変換. 日本機械学会論文集（C 編）, Vol. 79, No. 802, pp. 1913–1922, 2013. ©日本機械学会 (https://www.jstage.jst.go.jp/article/kikaic/79/802/79_1913/_article/-char/ja/).

[4] 宮嵜, 岡田. 位置・速度・加速度の微分関係と力学的整合性を満たす運動パターンの生成. 計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会, pp. 1943–1948, 2012. 2N3-5.

[5] K.Yamane, and J.Hodgins. Simultaneous tracking and balancing of humanoid robots for imitating human motion capture data. In *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2510–2517, 2009.

[6] K.Yamane, and J.Hodgins. Control-aware mapping of human motion data with stepping for humanoid robots. In *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 726–733, 2010.

[7] K.Yamane, S.Anderson, and J.Hodgins. Controlling humanoid robots with human motion data: Experimental validation. In *Proceedings of IEEE-RAS International Conference on Humanoids Robots*, pp. 504–510, 2010.

[8] S.Kajita, F.Kanehiro, K.Kaneko, K.Fujiwara, K.Harada, K.Yokoi and H.Hirukawa. Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1620–1626, 2003.

[9] T.Katayama, T.Ohki, T.Inoue and T.Kato. Design of an optimal controller for a discrete-time system subject to previewable demand. *International Journal of Control*, Vol. 41, No. 3, pp. 677–699, 1985.

[10] 西脇, 加賀美. 将来にわたる zmp 許容領域を考慮したオンライン 2 足歩行軌道生成法. 日本ロボット学会誌, Vol. 30, No. 7, pp. 702–710, 2012.

[11] 西脇, 加賀美. 不整地適応能力向上のためのエッジ着地を用いた二足歩行動作の設計と制御. 日本ロボット学会ロボティクスシンポジア予稿集, 第 18 巻, pp. 135–140, 2013.

[12] 神永, ヨハネス, クリスティアン. 二足歩行の歩行能力を向上するための遊脚軌道最適化およびオンライン軌道修正. 日本ロボット学会学術講演会, 4K2-2, 2012.

[13] C.H.Sung, T.Kagawa and Y.Uno. Planning of kicking motion with via-point representation for humanoid robots. In *Proceedings of the International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence*, pp. 337–342, 2011.

[14] S.Lengagne, P.Mathieu, A.Kheddar and E.Yoshida. Generation of dynamic motions under continuous constraints: Efficient computation using b-splines and taylor polynomials. In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 698–703, 2010.

[15] M.Berz and G.Hoffstatter. Computation and ap-

plication of taylor polynomials with interval remainder bounds. *Reliable Computing*, Vol. 4, pp. 83–97, 1998.

[16] 松本, 杉原. 人型ロボットのインタラクティブ動作設計における運動拘束条件の自動整合. 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会, 1A2-O04, 2012.

[17] B.Dariush, M.Gienger, A.Arumbakkam, Y.Zhu, B.Jian, K.Fujimura, and C.Goerick. Online transfer of human motion to humanoids. *International Journal of Humanoid Robotics*, Vol. 6, No. 2, pp. 265–289, 2009.

[18] A.J.Ijspeert, J.Nakanishi, T.Shibata, and S.Schaal. Nonlinear dynamical systems for imitation with humanoid robots. In *Proceedings of the IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 219–226, 2001.

[19] N.S.Pollard, J.K.Hodgins, M.J.Riley, and C.G.Atkeson. Adapting human motion for the control of a humanoid robot. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 2, pp. 1390–1397, 2002.

[20] M.Mistry, A.Murai, K.Yamane, and J.Hodgins. Sit-to-stand task on a humanoid robot from human demonstration. In *Proceedings of the IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 218–223, 2010.

[21] K.Yamane and Y.Nakamura. Dynamics filter - concept and implementation of on-line motion generator for human figures. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 19, No. 3, pp. 421–432, 2003.

[22] O.Kanoun, F.Lamiraux, P.B.Wieber, F.Kanehiro, E.Yoshida and J.P.Laumond. Prioritizing linear equality and inequality systems: Application to local motion planning for redundant robots. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 724–729, 2009.

[23] L.Saab, O.Ramos, N.Mansard, P.Soueres and J.Y.Fourquet. Generic dynamic motion generation with multiple unilateral constraints. In *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 4127–4133, 2011.

[24] 中岡, 中澤, 金広, 金子, 森澤, 比留川, 池内. 脚タスクモデルを用いた 2 足歩行ヒューマノイドロボットによる人の舞踊動作の再現. 日本ロボット学会誌, Vol. 24, No. 3, pp. 388–399, 2006.

[25] 岡田, 渡辺. 軌道アトラクタに基づくコントローラの身体・運動要素への分解と結合による運動創発. 日本ロボット学会誌, Vol. 28, No. 6, pp. 715–722, 2010.

[26] 國吉. 模倣の適応性と創発性:実世界における人間的知性の基盤. 日本ロボット学会誌, Vol. 25, No. 5, pp. 671–677, 2007.

[27] Herron, R.E., J.R.Cuzzi, and J.Hugg. Mass distribution of the human body using biostereometrics. Technical report, Texas Institute for Rehabilitation and Research Biostereometrics Laboratory, 1976.

[28] W.Suleiman, E.Yoshida, F.Kanehiro, J.P.Laumond and A.Monin. On human motion imitation by humanoid robot. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2697–2704, 2008.

[29] 渡辺, 岡田. 軌道アトラクタを用いた自律制御のための力学系次元拡張と平面脚ロボットへの応用. 第 17 回ロボティクス・シンポジア予稿集, 2012.

付録 A

3 章 線形系の運動方程式

A.1 倒立振子の運動方程式

Fig.3.2 の倒立振子システムの運動方程式を，振子回転角 $\theta \simeq 0$ 周りで線形近似して

$$(m_c + m_\ell)\ddot{y} + m_\ell \ell \ddot{\theta} = -d_c \dot{y} + u \tag{A.1}$$

$$m_\ell \ell \ddot{y} + (I + m_\ell \ell^2)\ddot{\theta} = m_\ell g \ell \theta - d_\ell \dot{\theta} \tag{A.2}$$

のように得る．ただし，m_c と m_ℓ は台車と振子の質量，ℓ は振子回転中心から振子重心までの長さ，I は振子重心周りの慣性モーメント，g は重力加速度，d_c と d_ℓ は台車と振子の粘性係数である．運動方程式を状態変数 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} y & \theta & \dot{y} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$ に関する状態方程式に書き直すと

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \tag{A.3}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_c + m_\ell & m_\ell \ell \\ 0 & 0 & m_\ell \ell & I + m_\ell \ell^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d_c & 0 \\ 0 & m_\ell g \ell & 0 & -d_\ell \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_c + m_\ell & m_\ell \ell \\ 0 & 0 & m_\ell \ell & I + m_\ell \ell^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

となる．

A.2 2 質点ばね系の運動方程式

Fig.3.5 の 2 質点ばね系の運動方程式は

$$m_1 \ddot{y}_1 = -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) - c_1 \dot{y}_1 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \tag{A.6}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -k_2(y_2 - y_1) - c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + u \tag{A.7}$$

である．ただし，y_i $(i = 1, 2)$ は台車 i の位置，m_i は台車 i の質量，k_1 と c_1 は台車 1 と静止座標系をつなぐばねの定数およびダンパの定数，k_2 と c_2 は台車 1 と台車 2 をつなぐばねの定数およびダンパの定数，u は台車 2 に与える

並進力である．運動方程式を状態変数 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{bmatrix}^T$ に関する状態方程式に書き直すと

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \tag{A.8}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 - k_2 & k_2 & -c_1 - c_2 & c_2 \\ k_2 & -k_2 & c_2 & -c_2 \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

となる．

付録 B

タップダンスロボットの運動方程式

■右足接地の場合

タップダンスロボットが右脚接地するときのモデルを Fig.B.1 に示す．このモデルの運動方程式は次式で表さ

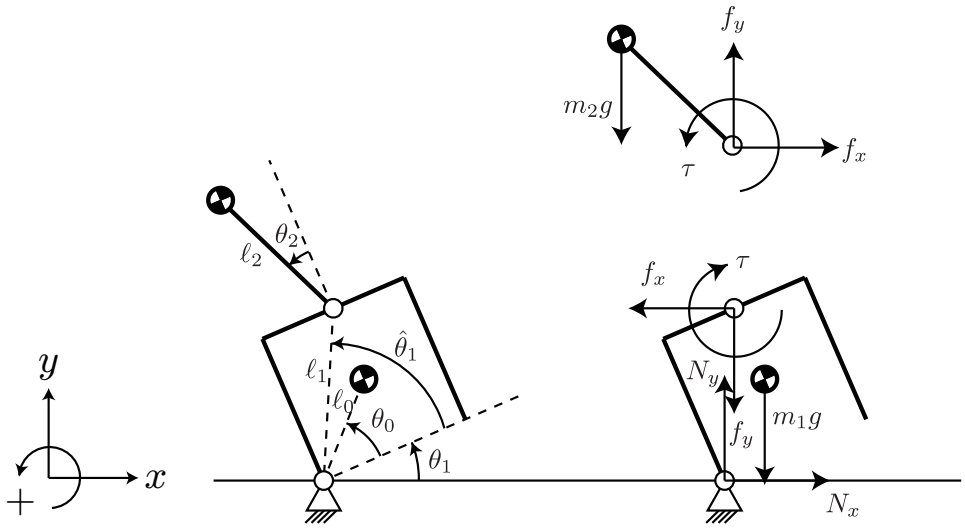


Fig.B.1 Tap dancing robot model (right foot touches ground)

れる．

$$(I_1 + m_1\ell_0^2)\ddot{\theta}_1 = -m_1 g\ell_0\cos(\theta_0+\theta_1) + \ell_1 f_x \sin(\widehat{\theta}_1+\theta_1) - \ell_1 f_y\cos(\widehat{\theta}_1+\theta_1) - \tau - D_1\dot{\theta}_1 + D_2\dot{\theta}_2 \tag{B.1}$$

$$I_2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2) = \tau + f_y\ell_2\sin(\theta_1+\theta_2) + f_x\ell_2\cos(\theta_1+\theta_2) - D_2\dot{\theta}_2 \tag{B.2}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = f_x \tag{B.3}$$

$$m_2\ddot{y}_2 = f_y - m_2 g \tag{B.4}$$

$$x_2 = \ell_1\cos(\widehat{\theta}_1+\theta_1) - \ell_2\sin(\theta_1+\theta_2) \tag{B.5}$$

$$y_2 = \ell_1\sin(\widehat{\theta}_1+\theta_1) + \ell_2\cos(\theta_1+\theta_2) \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= -\ell_1\ddot{\theta}_1\sin(\widehat{\theta}_1+\theta_1) - \ell_2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\cos(\theta_1+\theta_2)\\ &\quad - \ell_1\dot{\theta}_1^2\cos(\widehat{\theta}_1+\theta_1) + \ell_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_2 &= \ell_1\ddot{\theta}_1\cos(\widehat{\theta}_1+\theta_1) - \ell_2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\sin(\theta_1+\theta_2)\\ &\quad - \ell_1\dot{\theta}_1^2\sin(\widehat{\theta}_1+\theta_1) - \ell_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{aligned} \tag{B.8}$$

運動方程式を角度に関する式としてまとめ，次式を得る．

$$\left\{\widehat{I}_1 - m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2-\widehat{\theta}_1)\right\}\ddot{\theta}_1 - m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2-\widehat{\theta}_1)\ddot{\theta}_2$$
$$= -m_1 g\ell_0\cos(\theta_0+\theta_1) - m_2 g\ell_1\cos(\widehat{\theta}_1+\theta_1) + m_2\ell_1\ell_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\cos(\theta_2-\widehat{\theta}_1) - \tau - D_1\dot{\theta}_1 + D_2\dot{\theta}_2 \tag{B.9}$$

$$\left\{\widehat{I}_2 - m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2-\widehat{\theta}_1)\right\}\ddot{\theta}_1 + \widehat{I}_2\ddot{\theta}_2 = m_2 g\ell_2\sin(\theta_1+\theta_2) - m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\widehat{\theta}_1) + \tau - D_2\dot{\theta}_2 \tag{B.10}$$

$$\widehat{I}_1 = I_1 + m_1\ell_0^2 + m_2\ell_1^2, \quad \widehat{I}_2 = I_2 + m_2\ell_2^2 \tag{B.11}$$

これらから以下を得る．

$$\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{C} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\tau \tag{B.12}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}\widehat{I}_1 - m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2-\widehat{\theta}_1) & -m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2-\widehat{\theta}_1)\\ \widehat{I}_2 - m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2-\widehat{\theta}_1) & \widehat{I}_2\end{bmatrix} \tag{B.13}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}-m_1 g\ell_0\cos(\theta_0+\theta_1) - m_2 g\ell_1\cos(\widehat{\theta}_1+\theta_1) + m_2\ell_1\ell_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\cos(\theta_2-\widehat{\theta}_1) - D_1\dot{\theta}_1 + D_2\dot{\theta}_2\\ m_2 g\ell_2\sin(\theta_1+\theta_2) - m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\widehat{\theta}_1) - D_2\dot{\theta}_2\end{bmatrix} \tag{B.14}$$

状態変数を $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2\end{bmatrix}^T$ とし，運動方程式 (B.12) を状態方程式に書き直すと

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})\tau \tag{B.15}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\end{bmatrix} \tag{B.16}$$

となる．

また，床反力 N_y は

$$N_y = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + (m_1+m_2)g \tag{B.17}$$

$$\ddot{y}_1 = \ell_0\ddot{\theta}_1\cos(\theta_0+\theta_1) - \ell_0\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_0+\theta_1) \tag{B.18}$$

となる．

■左足接地の場合

タップダンスロボットが左脚接地するときのモデルを Fig.B.2 に示す．このモデルの運動方程式は次式で表される．

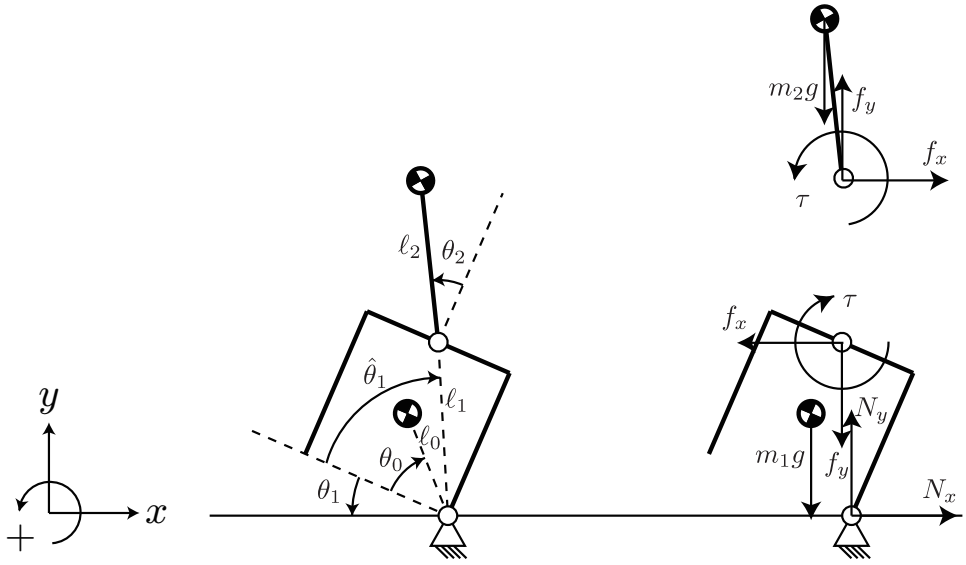


Fig.B.2 Tap dancing robot model (left foot touches ground)

$$(I_1 + m_1\ell_0^2)\ddot{\theta}_1 = m_1 g\ell_0\cos(\theta_0 - \theta_1) + \ell_1 f_x \sin(\widehat{\theta}_1 - \theta_1) + \ell_1 f_y \cos(\widehat{\theta}_1 - \theta_1) - \tau - D_1\dot{\theta}_1 + D_2\dot{\theta}_2 \tag{B.19}$$

$$I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = \tau + f_y\ell_2\sin(\theta_1 + \theta_2) + f_x\ell_2\cos(\theta_1 + \theta_2) - D_2\dot{\theta}_2 \tag{B.20}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = f_x \tag{B.21}$$

$$m_2\ddot{y}_2 = f_y - m_2 g \tag{B.22}$$

$$x_2 = -\ell_1\cos(\widehat{\theta}_1 - \theta_1) - \ell_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \tag{B.23}$$

$$y_2 = \ell_1\sin(\widehat{\theta}_1 - \theta_1) + \ell_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= -\ell_1\ddot{\theta}_1\sin(\widehat{\theta}_1 - \theta_1) - \ell_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos(\theta_1 + \theta_2)\\ &\quad + \ell_1\dot{\theta}_1^2\cos(\widehat{\theta}_1 - \theta_1) + \ell_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\sin(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned} \tag{B.25}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_2 &= -\ell_1\ddot{\theta}_1\cos(\widehat{\theta}_1 - \theta_1) - \ell_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)\\ &\quad - \ell_1\dot{\theta}_1^2\sin(\widehat{\theta}_1 - \theta_1) - \ell_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned} \tag{B.26}$$

運動方程式を角度に関する式としてまとめ，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\left\{\widehat{I}_1 + m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2 + \widehat{\theta}_1)\right\}\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_2\sin(\theta_2 + \widehat{\theta}_1)\\ &= m_1 g\ell_0\cos(\theta_0 - \theta_1) + m_2 g\ell_1\cos(\widehat{\theta}_1 - \theta_1) - m_2\ell_1\ell_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\cos(\theta_2 + \widehat{\theta}_1) - \tau - D_1\dot{\theta}_1 + D_2\dot{\theta}_2\end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\left\{\widehat{I}_2 + m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2 + \widehat{\theta}_1)\right\}\ddot{\theta}_1 + \widehat{I}_2\ddot{\theta}_2 = m_2 g\ell_2\sin(\theta_1 + \theta_2) + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2 + \widehat{\theta}_1) + \tau - D_2\dot{\theta}_2 \tag{B.28}$$

$$\widehat{I}_1 = I_1 + m_1\ell_0^2 + m_2\ell_1^2, \quad \widehat{I}_2 = I_2 + m_2\ell_2^2 \tag{B.29}$$

これらから，運動方程式 (B.12) の係数は

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \widehat{I}_1 + m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2+\widehat{\theta}_1) & m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2+\widehat{\theta}_1) \\ \widehat{I}_2 + m_2\ell_1\ell_2\sin(\theta_2+\widehat{\theta}_1) & \widehat{I}_2 \end{bmatrix} \tag{B.30}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} m_1 g\ell_0\cos(\theta_0-\theta_1) + m_2 g\ell_1\cos(\widehat{\theta}_1-\theta_1) - m_2\ell_1\ell_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\cos(\theta_2+\widehat{\theta}_1) - D_1\dot{\theta}_1 + D_2\dot{\theta}_2 \\ m_2 g\ell_2\sin(\theta_1+\theta_2) + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2+\widehat{\theta}_1) - D_2\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{B.31}$$

となる．状態方程式は右足接地時と同様に求める．

また，床反力 N_y は

$$N_y = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + (m_1+m_2)g \tag{B.32}$$

$$\ddot{y}_1 = -\ell_0\ddot{\theta}_1\cos(\theta_0-\theta_1) - \ell_0\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_0-\theta_1) \tag{B.33}$$

となる．

付録 C

平面二足歩行ロボットの詳細

C.1 リンクの運動方程式

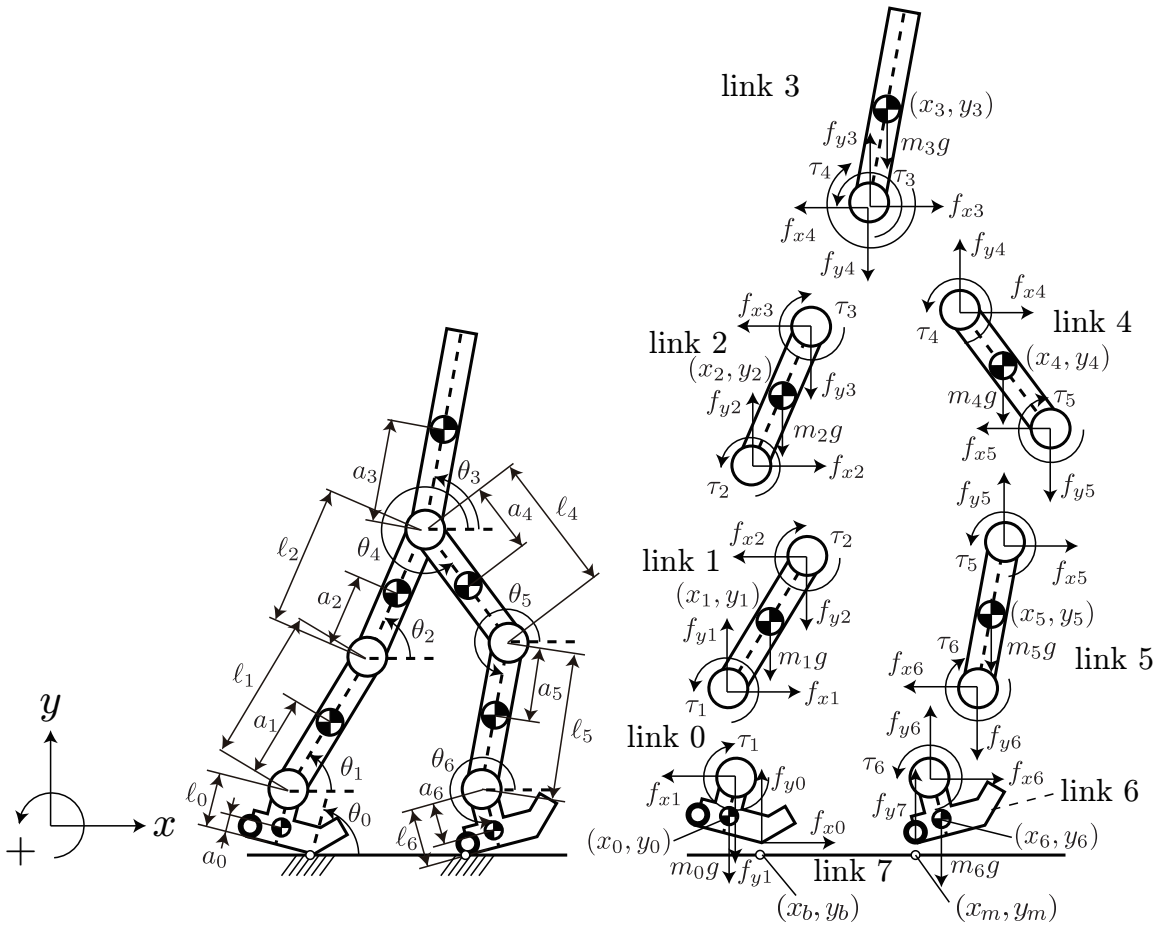


Fig.C.1 Planar moonwalking robot model

平面二足歩行ロボットの，床反力を陽に考慮するモデルを Fig.C.1 に示す．このモデルの片足の並進運動は地面に拘束され，もう片足はかかとのローラを介して地面と接触しつつ前後に滑る．ロボットは二本の足を交互に滑らせ，ムーンウォークを行う．図中，リンク i $(i = 0, 1, 2, \cdots, 7)$ の重心と関節 i の距離を a_i，リンク長さを ℓ_i，関節角を θ_i，関節トルクを τ_i，関節に生じる内力を f_{xi}，f_{yi}，重心の座標を x_i，y_i，質量と慣性モーメントを m_i，I_i，関節 i

の粘性係数を d_i，重力加速度を g とする．また，並進運動を拘束される足リンクの回転中心の x，y 座標を x_b，y_b とし，滑らせる足リンクのかかとの座標を x_m，y_m とする．ただし，実際のロボットの足リンクは地面に対し y 方向を固定されておらず，単に地面と接触している状態であるため，図中リンク 0，6 に働く f_{y0}，f_{y7} は負の値をとれない．すなわち，モデルの運動には以下の拘束条件

$$f_{y0}\ ,\ f_{y7} \geq 0 \tag{C.1}$$

が存在し，これを満たさない運動は実現できない．リンクの運動方程式を以下に示す．

リンク 0

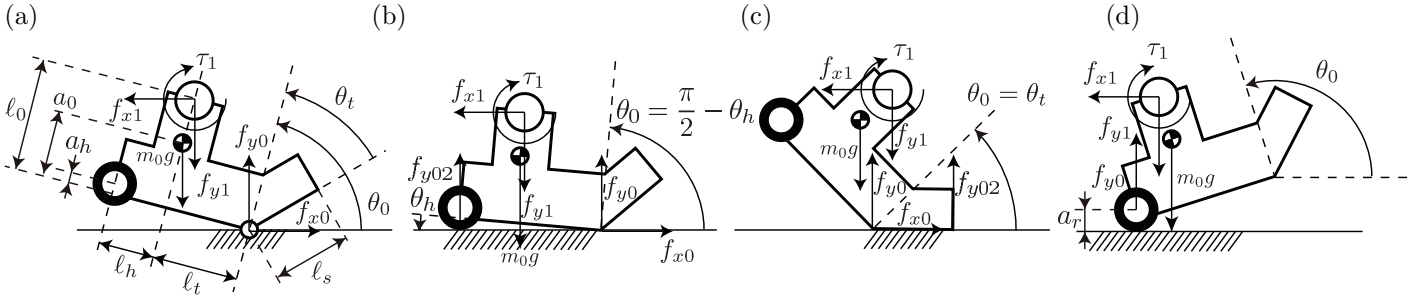


Fig.C.2 Sole of robot model (link 0)

Fig.C.2 に示すリンク 0 は地面（リンク 7）に接触する足リンクであり，接触状態によって運動方程式が変化する．$\theta_t < \theta_0 < \frac{\pi}{2} - \theta_h$ のときリンク 0 は Fig.C.2-(a) のように地面と点接触する．このとき，並進と回転の運動方程式は

$$m_0\ddot{x}_0 = f_{x0} - f_{x1} \tag{C.2}$$

$$m_0\ddot{y}_0 = f_{y0} - f_{y1} - m_0 g \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}\left\{I_0 + m_0(\ell_t^2 + a_0^2)\right\}\ddot{\theta}_0 = &-m_0 g\left\{\ell_t\cos(\frac{\pi}{2}+\theta_0) + a_0\cos\theta_0\right\}\\ &+f_{x1}\left\{\ell_t\sin(\frac{\pi}{2}+\theta_0) + \ell_0\sin\theta_0\right\} - f_{y1}\left\{\ell_t\cos(\frac{\pi}{2}+\theta_0) + \ell_0\cos\theta_0\right\}\\ &+d_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_0) - \tau_1\end{aligned} \tag{C.4}$$

となる．

また，$\theta_0 = \theta_t$，$\frac{\pi}{2} - \theta_h$ のとき，リンク 0 は Fig.C.2-(b)，(c) のように地面と面接触する．この接触状態のときリンク 0 を地面同様静止節とみなす．並進の力のつり合いは

$$0 = f_{x0} - f_{x1} \tag{C.5}$$

$$0 = f_{y0} + f_{y02} - f_{y1} - m_0 g \tag{C.6}$$

であり，回転の力のつり合いは

$$
\begin{aligned}
0 = &-m_0 g\left\{\ell_t\cos(\theta_0+\frac{\pi}{2})+a_0\cos\theta_0\right\}\\
&-f_{y1}\left\{\ell_t\cos(\theta_0+\frac{\pi}{2})+\ell_0\cos\theta_0\right\}+f_{x1}\left\{\ell_t\sin(\theta_0+\frac{\pi}{2})+\ell_0\sin\theta_0\right\}\\
&+f_{y02}\left\{(\ell_h+\ell_t)\cos(\theta_0+\frac{\pi}{2})+a_h\cos\theta_0\right\}+d_1(\dot\theta_1-\dot\theta_0)-\tau_1 \qquad (\theta_0=\frac{\pi}{2}-\theta_h)
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = &-m_0 g\left\{\ell_t\cos(\theta_0+\frac{\pi}{2})+a_0\cos\theta_0\right\}\\
&-f_{y1}\left\{\ell_t\cos(\theta_0+\frac{\pi}{2})+\ell_0\cos\theta_0\right\}+f_{x1}\left\{\ell_t\sin(\theta_0+\frac{\pi}{2})+\ell_0\sin\theta_0\right\}\\
&+f_{y02}\ell_s+d_1(\dot\theta_1-\dot\theta_0)-\tau_1 \qquad (\theta_0=\theta_t)
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

となる．順動力学シミュレーションでは，f_{y0}，f_{y02} の値からリンク 0 の面接触状態が維持されるかを判定できる．$f_{y0}>0$ かつ $f_{y02}>0$ ならばリンク 0 の面接触は維持され，$f_{y0}\le 0$ かつ $f_{y02}\le 0$ ならば足は地面から離れる．$f_{y0}>0$ かつ $f_{y02}\le 0$ ならば，リンク 0 は面接触状態から Fig.C.2-(a) の点接触状態に変化する．$\theta_0=\frac{\pi}{2}-\theta_h$ のとき $f_{y0}\le 0$ かつ $f_{y02}>0$ ならば，リンク 0 は Fig.C.2-(d) の点接触状態に変化する．$\theta_0=\theta_t$ のとき $f_{y0}\le 0$ かつ $f_{y02}>0$ ならば，モデルは転倒したとみなす（つま先の f_{y02} 作用点での点接地状態は考慮しない）．

$\theta_0>\frac{\pi}{2}-\theta_h$ のとき，リンク 0 は Fig.C.2-(d) のようにローラー部で地面と点接触する．リンク 0 を滑らせるときはこの姿勢にする．並進と回転の運動方程式は

$$m_0\ddot x_0 = -f_{x1} \tag{C.9}$$

$$m_0\ddot y_0 = f_{y0}-f_{y1}-m_0 g \tag{C.10}$$

$$
\begin{aligned}
I_0\ddot\theta_0 = &\ f_{x1}(\ell_0-a_0)\sin\theta_0-f_{y1}(\ell_0-a_0)\cos\theta_0-f_{y0}\left\{(a_0-a_h)\cos\theta_0-\ell_h\cos(\theta_0+\frac{\pi}{2})\right\}\\
&+d_1(\dot\theta_1-\dot\theta_0)-\tau_1
\end{aligned}
\tag{C.11}
$$

となる．

リンク 1

$$m_1\ddot x_1 = f_{x1}-f_{x2} \tag{C.12}$$

$$m_1\ddot y_1 = f_{y1}-f_{y2}-m_1 g \tag{C.13}$$

$$
\begin{aligned}
I_1\ddot\theta_1 = &\ f_{x1}a_1\sin\theta_1-f_{y1}a_1\cos\theta_1+f_{x2}(\ell_1-a_1)\sin\theta_1-f_{y2}(\ell_1-a_1)\cos\theta_1\\
&-d_1(\dot\theta_1-\dot\theta_0)+d_2(\dot\theta_2-\dot\theta_1)+\tau_1-\tau_2
\end{aligned}
\tag{C.14}
$$

リンク 2

$$m_2\ddot x_2 = f_{x2}-f_{x3} \tag{C.15}$$

$$m_2\ddot y_2 = f_{y2}-f_{y3}-m_2 g \tag{C.16}$$

$$
\begin{aligned}
I_2\ddot\theta_2 = &\ f_{x2}a_2\sin\theta_2-f_{y2}a_2\cos\theta_2+f_{x3}(\ell_2-a_2)\sin\theta_2-f_{y3}(\ell_2-a_2)\cos\theta_2\\
&-d_2(\dot\theta_2-\dot\theta_1)+d_3(\dot\theta_3-\dot\theta_2)+\tau_2-\tau_3
\end{aligned}
\tag{C.17}
$$

リンク 3

$$m_3\ddot x_3 = f_{x3}-f_{x4} \tag{C.18}$$

$$m_3\ddot y_3 = f_{y3}-f_{y4}-m_3 g \tag{C.19}$$

$$
\begin{aligned}
I_3\ddot\theta_3 = &\ (f_{x3}-f_{x4})a_3\sin\theta_3-(f_{y3}-f_{y4})a_3\cos\theta_3\\
&-d_3(\dot\theta_3-\dot\theta_2)+d_4(\dot\theta_4-\dot\theta_3)+\tau_3-\tau_4
\end{aligned}
\tag{C.20}
$$

リンク 4

$$m_4\ddot{x}_4 = f_{x4} - f_{x5} \tag{C.21}$$
$$m_4\ddot{y}_4 = f_{y4} - f_{y5} - m_4 g \tag{C.22}$$
$$\begin{aligned} I_4\ddot{\theta}_4 = {} & f_{x4}a_4\sin\theta_4 - f_{y4}a_4\cos\theta_4 + f_{x5}(\ell_4 - a_4)\sin\theta_4 - f_{y5}(\ell_4 - a_4)\cos\theta_4 \\ & -d_4(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3) + d_5(\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_4) + \tau_4 - \tau_5 \end{aligned} \tag{C.23}$$

リンク 5

$$m_5\ddot{x}_5 = f_{x5} - f_{x6} \tag{C.24}$$
$$m_5\ddot{y}_5 = f_{y5} - f_{y6} - m_5 g \tag{C.25}$$
$$\begin{aligned} I_5\ddot{\theta}_5 = {} & f_{x5}a_5\sin\theta_5 - f_{y5}a_5\cos\theta_5 + f_{x6}(\ell_5 - a_5)\sin\theta_5 - f_{y6}(\ell_5 - a_5)\cos\theta_5 \\ & -d_5(\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_4) + d_6(\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_5) + \tau_5 - \tau_6 \end{aligned} \tag{C.26}$$

リンク 6

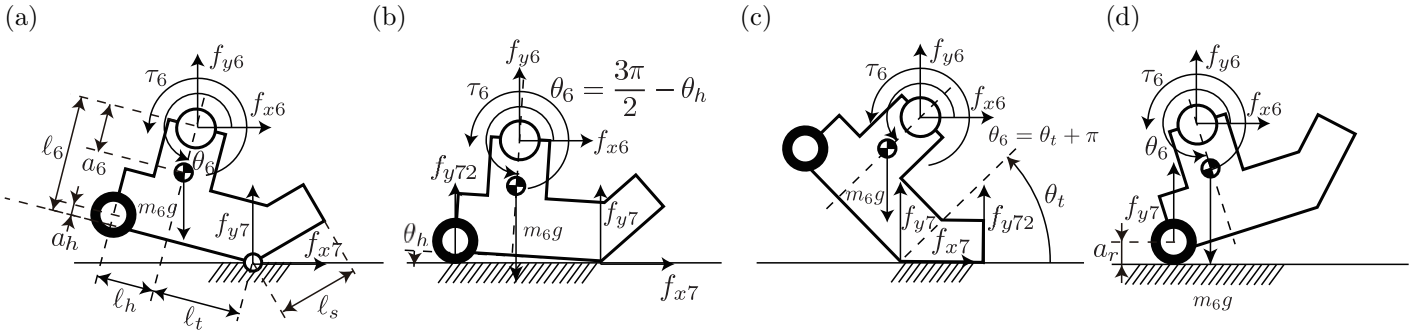


Fig.C.3 Sole of robot model (link 6)

Fig.C.3 に示すリンク 6 はリンク 0 同様地面（リンク 7）に接触する足リンクであり，接触状態によって運動方程式が変化する．$\theta_t + \pi < \theta_6 < \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ のときリンク 6 は Fig.C.3-(a) のように地面と点接触する．このとき，並進と回転の運動方程式は

$$m_6\ddot{x}_6 = f_{x6} + f_{x7} \tag{C.27}$$
$$m_6\ddot{y}_6 = f_{y6} + f_{y7} - m_6 g \tag{C.28}$$
$$\begin{aligned} \left\{I_6 + m_6(\ell_t^2 + (\ell_6 - a_6)^2)\right\}\ddot{\theta}_6 = {} & -m_6 g\left\{\ell_t\cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + (\ell_6 - a_6)\cos(\theta_6 - \pi)\right\} \\ & -f_{x6}\left\{\ell_t\sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6\sin(\theta_6 - \pi)\right\} \\ & +f_{y6}\left\{\ell_t\cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6\cos(\theta_6 - \pi)\right\} \\ & -d_6(\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_5) + \tau_6 \end{aligned} \tag{C.29}$$

となる．

また，$\theta_6 = \theta_t + \pi$，$\frac{3\pi}{2} - \theta_h$ のとき，リンク 6 は Fig.C.3-(b)，(c) のように地面と面接触する．この接触状態のときリンク 6 を地面同様静止節とみなす．並進の力のつり合いは

$$0 = f_{x6} + f_{x7} \tag{C.30}$$
$$0 = f_{y6} + f_{y7} + f_{y72} - m_6 g \tag{C.31}$$

であり，回転の力のつり合いは

$$
\begin{aligned}
0 = & -m_6 g \left\{ \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + (\ell_6 - a_6)\cos(\theta_6 - \pi) \right\} \\
& -f_{x6} \left\{ \ell_t \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \sin(\theta_6 - \pi) \right\} + f_{y6} \left\{ \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \cos(\theta_6 - \pi) \right\} \\
& +f_{y72} \left\{ (\ell_h + \ell_t)\cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + a_h \cos(\theta_6 - \pi) \right\} - d_6(\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_5) + \tau_6 \qquad (\theta_6 = \frac{3\pi}{2} - \theta_h)
\end{aligned}
\tag{C.32}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = & -m_6 g \left\{ \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + (\ell_6 - a_6)\cos(\theta_6 - \pi) \right\} \\
& -f_{x6} \left\{ \ell_t \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \sin(\theta_6 - \pi) \right\} + f_{y6} \left\{ \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \cos(\theta_6 - \pi) \right\} \\
& +f_{y72}\ell_s - d_6(\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_5) + \tau_6 \qquad (\theta_6 = \theta_t + \pi)
\end{aligned}
\tag{C.33}
$$

となる．

f_{y7}，f_{y72} の値から，リンク 6 の面接触状態が維持されるかを判定する．$f_{y7} > 0$ かつ $f_{y72} > 0$ ならばリンク 6 の面接触は維持され，$f_{y7} \leq 0$ かつ $f_{y72} \leq 0$ ならば足は地面から離れる．$f_{y7} > 0$ かつ $f_{y72} \leq 0$ ならば，リンク 6 は面接触状態から Fig.C.3-(a) の点接触状態に変化する．$\theta_6 = \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ のとき $f_{y7} \leq 0$ かつ $f_{y72} > 0$ ならば，リンク 6 は Fig.C.3-(d) の点接触状態に変化する．$\theta_6 = \theta_t + \pi$ のとき $f_{y7} \leq 0$ かつ $f_{y72} > 0$ ならば，モデルは転倒したとみなす（つま先の f_{y72} 作用点での点接地状態は考慮しない）．

$\theta_6 > \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ のとき，リンク 6 は Fig.C.3-(d) のようにローラー部で地面と点接触する．リンク 6 を滑らせるときはこの姿勢にする．並進と回転の運動方程式は

$$
m_6 \ddot{x}_6 = f_{x6} \tag{C.34}
$$

$$
m_6 \ddot{y}_6 = f_{y6} + f_{y7} - m_6 g \tag{C.35}
$$

$$
\begin{aligned}
I_6 \ddot{\theta}_6 = & f_{x6} a_6 \sin\theta_6 - f_{y6} a_6 \cos\theta_6 - f_{y7} \left\{ \ell_h \cos(\theta_6 - \frac{3}{2}\pi) - (\ell_6 - a_6 - a_h)\sin(\theta_6 - \frac{3}{2}\pi) \right\} \\
& -d_6(\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_5) + \tau_6
\end{aligned}
\tag{C.36}
$$

となる．

C.2 リンク間の幾何学関係

リンク 0 を基準とするとき（$\theta_t \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta_h$）

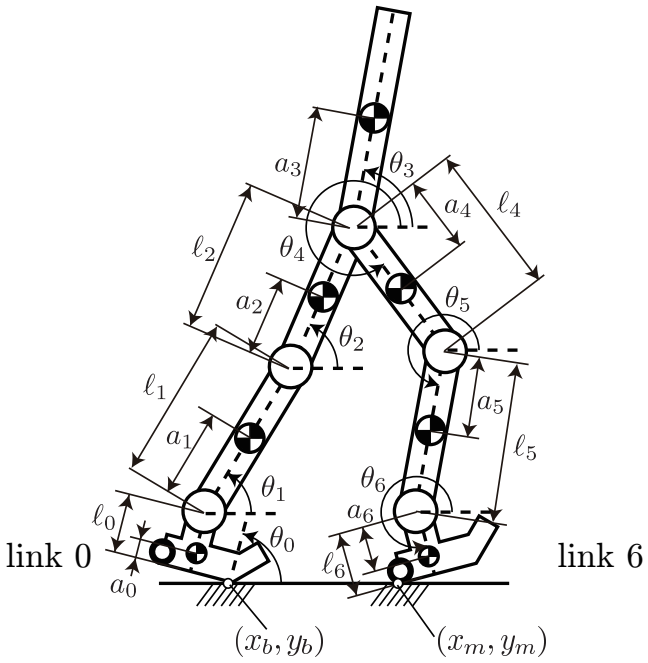


Fig.C.4 Planar moonwalking robot model (link 0 is fixed)

$$x_0 = x_b + \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + a_0 \cos\theta_0 \tag{C.37}$$

$$y_0 = y_b + \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + a_0 \sin\theta_0 \tag{C.38}$$

$$x_1 = x_b + \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \cos\theta_0 + a_1 \cos\theta_1 \tag{C.39}$$

$$y_1 = y_b + \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \sin\theta_0 + a_1 \sin\theta_1 \tag{C.40}$$

$$x_2 = x_b + \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \cos\theta_0 + \ell_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos\theta_2 \tag{C.41}$$

$$y_2 = y_b + \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \sin\theta_0 + \ell_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2 \tag{C.42}$$

$$x_3 = x_b + \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \cos\theta_0 + \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2 + a_3 \cos\theta_3 \tag{C.43}$$

$$y_3 = y_b + \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \sin\theta_0 + \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2 + a_3 \sin\theta_3 \tag{C.44}$$

$$x_4 = x_b + \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \cos\theta_0 + \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2 + a_4 \cos\theta_4 \tag{C.45}$$

$$y_4 = y_b + \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \sin\theta_0 + \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2 + a_4 \sin\theta_4 \tag{C.46}$$

$$x_5 = x_b + \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \cos\theta_0 + \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2 + \ell_4 \cos\theta_4 + a_5 \cos\theta_5 \tag{C.47}$$

$$y_5 = y_b + \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \sin\theta_0 + \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2 + \ell_4 \sin\theta_4 + a_5 \sin\theta_5 \tag{C.48}$$

$$\begin{aligned} x_6 = {} & x_b + \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \cos\theta_0 + \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2 + \ell_4 \cos\theta_4 + \ell_5 \cos\theta_5 \\ & + a_6 \cos\theta_6 \end{aligned} \tag{C.49}$$

$$\begin{aligned} y_6 = {} & y_b + \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \sin\theta_0 + \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2 + \ell_4 \sin\theta_4 + \ell_5 \sin\theta_5 \\ & + a_6 \sin\theta_6 \end{aligned} \tag{C.50}$$

$$\begin{aligned} x_m = {} & x_b + \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \cos\theta_0 + \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2 + \ell_4 \cos\theta_4 + \ell_5 \cos\theta_5 \\ & + (\ell_6 - a_h) \cos\theta_6 + \ell_h \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{C.51}$$

$$\begin{aligned} y_m = {} & y_b + \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ell_0 \sin\theta_0 + \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2 + \ell_4 \sin\theta_4 + \ell_5 \sin\theta_5 \\ & + (\ell_6 - a_h) \sin\theta_6 + \ell_h \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) - a_r \end{aligned} \tag{C.52}$$

リンク 6 を基準とするとき（$\theta_t + \pi \leq \theta_6 \leq \frac{3\pi}{2} - \theta_h$）

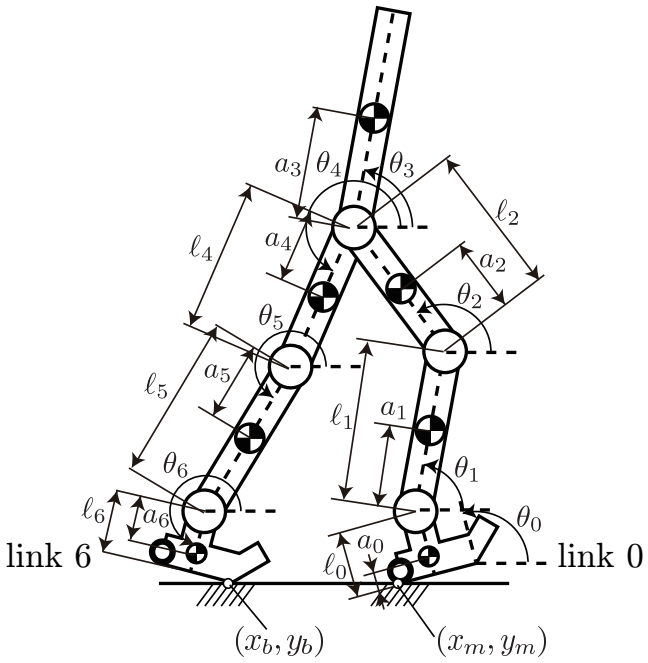


Fig.C.5 Planar moonwalking robot model (link 6 is fixed)

$$x_6 = x_b + \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + (\ell_6 - a_6)\cos(\theta_6 - \pi) \tag{C.53}$$

$$y_6 = y_b + \ell_t \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + (\ell_6 - a_6)\sin(\theta_6 - \pi) \tag{C.54}$$

$$x_5 = x_b + \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \cos(\theta_6 - \pi) + (\ell_5 - a_5)\cos(\theta_5 - \pi) \tag{C.55}$$

$$y_5 = y_b + \ell_t \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \sin(\theta_6 - \pi) + (\ell_5 - a_5)\sin(\theta_5 - \pi) \tag{C.56}$$

$$x_4 = x_b + \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \cos(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \cos(\theta_5 - \pi) + (\ell_4 - a_4)\cos(\theta_4 - \pi) \tag{C.57}$$

$$y_4 = y_b + \ell_t \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \sin(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \sin(\theta_5 - \pi) + (\ell_4 - a_4)\sin(\theta_4 - \pi) \tag{C.58}$$

$$\begin{aligned} x_3 = {} & x_b + \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \cos(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \cos(\theta_5 - \pi) + \ell_4 \cos(\theta_4 - \pi) \\ & + a_3 \cos\theta_3 \end{aligned} \tag{C.59}$$

$$\begin{aligned} y_3 = {} & y_b + \ell_t \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \sin(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \sin(\theta_5 - \pi) + \ell_4 \sin(\theta_4 - \pi) \\ & + a_3 \sin\theta_3 \end{aligned} \tag{C.60}$$

$$\begin{aligned} x_2 = {} & x_b + \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \cos(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \cos(\theta_5 - \pi) + \ell_4 \cos(\theta_4 - \pi) \\ & + (\ell_2 - a_2)\cos(\theta_2 + \pi) \end{aligned} \tag{C.61}$$

$$\begin{aligned} y_2 = {} & y_b + \ell_t \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \sin(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \sin(\theta_5 - \pi) + \ell_4 \sin(\theta_4 - \pi) \\ & + (\ell_2 - a_2)\sin(\theta_2 + \pi) \end{aligned} \tag{C.62}$$

$$\begin{aligned} x_1 = {} & x_b + \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \cos(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \cos(\theta_5 - \pi) + \ell_4 \cos(\theta_4 - \pi) \\ & + \ell_2 \cos(\theta_2 + \pi) + (\ell_1 - a_1)\cos(\theta_1 + \pi) \end{aligned} \tag{C.63}$$

$$\begin{aligned} y_1 = {} & y_b + \ell_t \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \sin(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \sin(\theta_5 - \pi) + \ell_4 \sin(\theta_4 - \pi) \\ & + \ell_2 \sin(\theta_2 + \pi) + (\ell_1 - a_1)\sin(\theta_1 + \pi) \end{aligned} \tag{C.64}$$

$$\begin{aligned} x_0 = {} & x_b + \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \cos(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \cos(\theta_5 - \pi) + \ell_4 \cos(\theta_4 - \pi) \\ & + \ell_2 \cos(\theta_2 + \pi) + \ell_1 \cos(\theta_1 + \pi) + (\ell_0 - a_0)\cos(\theta_0 + \pi) \end{aligned} \tag{C.65}$$

$$\begin{aligned} y_0 = {} & y_b + \ell_t \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \sin(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \sin(\theta_5 - \pi) + \ell_4 \sin(\theta_4 - \pi) \\ & + \ell_2 \sin(\theta_2 + \pi) + \ell_1 \sin(\theta_1 + \pi) + (\ell_0 - a_0)\sin(\theta_0 + \pi) \end{aligned} \tag{C.66}$$

$$\begin{aligned} x_m = {} & x_b + \ell_t \cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \cos(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \cos(\theta_5 - \pi) + \ell_4 \cos(\theta_4 - \pi) \\ & + \ell_2 \cos(\theta_2 + \pi) + \ell_1 \cos(\theta_1 + \pi) + (\ell_0 - a_h)\cos(\theta_0 + \pi) + \ell_h \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{C.67}$$

$$\begin{aligned} y_m = {} & y_b + \ell_t \sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2}) + \ell_6 \sin(\theta_6 - \pi) + \ell_5 \sin(\theta_5 - \pi) + \ell_4 \sin(\theta_4 - \pi) \\ & + \ell_2 \sin(\theta_2 + \pi) + \ell_1 \sin(\theta_1 + \pi) + (\ell_0 - a_h)\sin(\theta_0 + \pi) + \ell_h \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - a_r \end{aligned} \tag{C.68}$$

C.3 リンクの重心位置とかかと位置の加速度

各リンクの重心位置と滑らせる足リンクのかかと位置を時間で二階微分し，それらの並進加速度を求める．

リンク 0 を基準とするとき（$\theta_t \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta_h$）

$$\ddot{x}_0 = -\ddot{\theta}_0 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_0 a_0 \sin\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 a_0 \cos\theta_0 \tag{C.69}$$

$$\ddot{y}_0 = \ddot{\theta}_0 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_0 a_0 \cos\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 a_0 \sin\theta_0 \tag{C.70}$$

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{\theta}_0 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_0 \ell_0 \sin\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \cos\theta_0 - \ddot{\theta}_1 a_1 \sin\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 a_1 \cos\theta_1 \tag{C.71}$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{\theta}_0 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_0 \ell_0 \cos\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \sin\theta_0 + \ddot{\theta}_1 a_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 a_1 \sin\theta_1 \tag{C.72}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 = &-\ddot{\theta}_0 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_0 \ell_0 \sin\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \cos\theta_0 - \ddot{\theta}_1 \ell_1 \sin\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \ell_1 \cos\theta_1 \\ &- \ddot{\theta}_2 a_2 \sin\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 a_2 \cos\theta_2\end{aligned} \tag{C.73}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_2 = &\ddot{\theta}_0 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_0 \ell_0 \cos\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \sin\theta_0 + \ddot{\theta}_1 \ell_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \ell_1 \sin\theta_1 \\ &+ \ddot{\theta}_2 a_2 \cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 a_2 \sin\theta_2\end{aligned} \tag{C.74}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_3 = &-\ddot{\theta}_0 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_0 \ell_0 \sin\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \cos\theta_0 - \ddot{\theta}_1 \ell_1 \sin\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \ell_1 \cos\theta_1 \\ &- \ddot{\theta}_2 \ell_2 \sin\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \ell_2 \cos\theta_2 - \ddot{\theta}_3 a_3 \sin\theta_3 - \dot{\theta}_3^2 a_3 \cos\theta_3\end{aligned} \tag{C.75}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_3 = &\ddot{\theta}_0 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_0 \ell_0 \cos\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \sin\theta_0 + \ddot{\theta}_1 \ell_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \ell_1 \sin\theta_1 \\ &+ \ddot{\theta}_2 \ell_2 \cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \ell_2 \sin\theta_2 + \ddot{\theta}_3 a_3 \cos\theta_3 - \dot{\theta}_3^2 a_3 \sin\theta_3\end{aligned} \tag{C.76}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_4 = &-\ddot{\theta}_0 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_0 \ell_0 \sin\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \cos\theta_0 - \ddot{\theta}_1 \ell_1 \sin\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \ell_1 \cos\theta_1 \\ &- \ddot{\theta}_2 \ell_2 \sin\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \ell_2 \cos\theta_2 - \ddot{\theta}_4 a_4 \sin\theta_4 - \dot{\theta}_4^2 a_4 \cos\theta_4\end{aligned} \tag{C.77}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_4 = &\ddot{\theta}_0 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_0 \ell_0 \cos\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \sin\theta_0 + \ddot{\theta}_1 \ell_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \ell_1 \sin\theta_1 \\ &+ \ddot{\theta}_2 \ell_2 \cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \ell_2 \sin\theta_2 + \ddot{\theta}_4 a_4 \cos\theta_4 - \dot{\theta}_4^2 a_4 \sin\theta_4\end{aligned} \tag{C.78}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_5 = &-\ddot{\theta}_0 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_0 \ell_0 \sin\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \cos\theta_0 - \ddot{\theta}_1 \ell_1 \sin\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \ell_1 \cos\theta_1 \\ &- \ddot{\theta}_2 \ell_2 \sin\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \ell_2 \cos\theta_2 - \ddot{\theta}_4 \ell_4 \sin\theta_4 - \dot{\theta}_4^2 \ell_4 \cos\theta_4 - \ddot{\theta}_5 a_5 \sin\theta_5 - \dot{\theta}_5^2 a_5 \cos\theta_5\end{aligned} \tag{C.79}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_5 = &\ddot{\theta}_0 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_0 \ell_0 \cos\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \sin\theta_0 + \ddot{\theta}_1 \ell_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \ell_1 \sin\theta_1 \\ &+ \ddot{\theta}_2 \ell_2 \cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \ell_2 \sin\theta_2 + \ddot{\theta}_4 \ell_4 \cos\theta_4 - \dot{\theta}_4^2 \ell_4 \sin\theta_4 + \ddot{\theta}_5 a_5 \cos\theta_5 - \dot{\theta}_5^2 a_5 \sin\theta_5\end{aligned} \tag{C.80}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_6 = &-\ddot{\theta}_0 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_0 \ell_0 \sin\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \cos\theta_0 - \ddot{\theta}_1 \ell_1 \sin\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \ell_1 \cos\theta_1 \\ &- \ddot{\theta}_2 \ell_2 \sin\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \ell_2 \cos\theta_2 - \ddot{\theta}_4 \ell_4 \sin\theta_4 - \dot{\theta}_4^2 \ell_4 \cos\theta_4 - \ddot{\theta}_5 \ell_5 \sin\theta_5 - \dot{\theta}_5^2 \ell_5 \cos\theta_5 \\ &- \ddot{\theta}_6 a_6 \sin\theta_6 - \dot{\theta}_6^2 a_6 \cos\theta_6\end{aligned} \tag{C.81}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_6 = &\ddot{\theta}_0 \ell_t \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2 \ell_t \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_0 \ell_0 \cos\theta_0 - \dot{\theta}_0^2 \ell_0 \sin\theta_0 + \ddot{\theta}_1 \ell_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \ell_1 \sin\theta_1 \\ &+ \ddot{\theta}_2 \ell_2 \cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \ell_2 \sin\theta_2 + \ddot{\theta}_4 \ell_4 \cos\theta_4 - \dot{\theta}_4^2 \ell_4 \sin\theta_4 + \ddot{\theta}_5 \ell_5 \cos\theta_5 - \dot{\theta}_5^2 \ell_5 \sin\theta_5 \\ &+ \ddot{\theta}_6 a_6 \cos\theta_6 - \dot{\theta}_6^2 a_6 \sin\theta_6\end{aligned} \tag{C.82}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_m &= -\ddot{\theta}_0\ell_t\sin(\theta_0+\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2\ell_t\cos(\theta_0+\frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_0\ell_0\sin\theta_0 - \dot{\theta}_0^2\ell_0\cos\theta_0 - \ddot{\theta}_1\ell_1\sin\theta_1 - \dot{\theta}_1^2\ell_1\cos\theta_1 \\ &\quad - \ddot{\theta}_2\ell_2\sin\theta_2 - \dot{\theta}_2^2\ell_2\cos\theta_2 - \ddot{\theta}_4\ell_4\sin\theta_4 - \dot{\theta}_4^2\ell_4\cos\theta_4 - \ddot{\theta}_5\ell_5\sin\theta_5 - \dot{\theta}_5^2\ell_5\cos\theta_5 \\ &\quad - \ddot{\theta}_6(\ell_6-a_h)\sin\theta_6 - \dot{\theta}_6^2(\ell_6-a_h)\cos\theta_6 - \ddot{\theta}_6\ell_h\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_h\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) \qquad \text{(C.83)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_m &= \ddot{\theta}_0\ell_t\cos(\theta_0+\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2\ell_t\sin(\theta_0+\frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_0\ell_0\cos\theta_0 - \dot{\theta}_0^2\ell_0\sin\theta_0 + \ddot{\theta}_1\ell_1\cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2\ell_1\sin\theta_1 \\ &\quad + \ddot{\theta}_2\ell_2\cos\theta_2 - \dot{\theta}_2^2\ell_2\sin\theta_2 + \ddot{\theta}_4\ell_4\cos\theta_4 - \dot{\theta}_4^2\ell_4\sin\theta_4 + \ddot{\theta}_5\ell_5\cos\theta_5 - \dot{\theta}_5^2\ell_5\sin\theta_5 \\ &\quad + \ddot{\theta}_6(\ell_6-a_h)\cos\theta_6 - \dot{\theta}_6^2(\ell_6-a_h)\sin\theta_6 + \ddot{\theta}_6\ell_h\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_h\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) \qquad \text{(C.84)}\end{aligned}$$

リンク 6 を基準とするとき（$\theta_t+\pi \le \theta_6 \le \frac{3\pi}{2}-\theta_h$）

$$\ddot{x}_6 = -\ddot{\theta}_6\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_6(\ell_6-a_6)\sin(\theta_6-\pi) - \dot{\theta}_6^2(\ell_6-a_6)\cos(\theta_6-\pi) \qquad \text{(C.85)}$$

$$\ddot{y}_6 = \ddot{\theta}_6\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_6(\ell_6-a_6)\cos(\theta_6-\pi) - \dot{\theta}_6^2(\ell_6-a_6)\sin(\theta_6-\pi) \qquad \text{(C.86)}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_5 &= -\ddot{\theta}_6\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_6\ell_6\sin(\theta_6-\pi) - \dot{\theta}_6^2\ell_6\cos(\theta_6-\pi) \\ &\quad - \ddot{\theta}_5(\ell_5-a_5)\sin(\theta_5-\pi) - \dot{\theta}_5^2(\ell_5-a_5)\cos(\theta_5-\pi) \qquad \text{(C.87)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_5 &= \ddot{\theta}_6\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_6\ell_6\cos(\theta_6-\pi) - \dot{\theta}_6^2\ell_6\sin(\theta_6-\pi) \\ &\quad + \ddot{\theta}_5(\ell_5-a_5)\cos(\theta_5-\pi) - \dot{\theta}_5^2(\ell_5-a_5)\sin(\theta_5-\pi) \qquad \text{(C.88)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_4 &= -\ddot{\theta}_6\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_6\ell_6\sin(\theta_6-\pi) - \dot{\theta}_6^2\ell_6\cos(\theta_6-\pi) \\ &\quad - \ddot{\theta}_5\ell_5\sin(\theta_5-\pi) - \dot{\theta}_5^2\ell_5\cos(\theta_5-\pi) - \ddot{\theta}_4(\ell_4-a_4)\sin(\theta_4-\pi) - \dot{\theta}_4^2(\ell_4-a_4)\cos(\theta_4-\pi) \qquad \text{(C.89)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_4 &= \ddot{\theta}_6\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_6\ell_6\cos(\theta_6-\pi) - \dot{\theta}_6^2\ell_6\sin(\theta_6-\pi) \\ &\quad + \ddot{\theta}_5\ell_5\cos(\theta_5-\pi) - \dot{\theta}_5^2\ell_5\sin(\theta_5-\pi) + \ddot{\theta}_4(\ell_4-a_4)\cos(\theta_4-\pi) - \dot{\theta}_4^2(\ell_4-a_4)\sin(\theta_4-\pi) \qquad \text{(C.90)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_3 &= -\ddot{\theta}_6\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_6\ell_6\sin(\theta_6-\pi) - \dot{\theta}_6^2\ell_6\cos(\theta_6-\pi) \\ &\quad - \ddot{\theta}_5\ell_5\sin(\theta_5-\pi) - \dot{\theta}_5^2\ell_5\cos(\theta_5-\pi) - \ddot{\theta}_4\ell_4\sin(\theta_4-\pi) - \dot{\theta}_4^2\ell_4\cos(\theta_4-\pi) \\ &\quad - \ddot{\theta}_3a_3\sin\theta_3 - \dot{\theta}_3^2a_3\cos\theta_3 \qquad \text{(C.91)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_3 &= \ddot{\theta}_6\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_6\ell_6\cos(\theta_6-\pi) - \dot{\theta}_6^2\ell_6\sin(\theta_6-\pi) \\ &\quad + \ddot{\theta}_5\ell_5\cos(\theta_5-\pi) - \dot{\theta}_5^2\ell_5\sin(\theta_5-\pi) + \ddot{\theta}_4\ell_4\cos(\theta_4-\pi) - \dot{\theta}_4^2\ell_4\sin(\theta_4-\pi) \\ &\quad + \ddot{\theta}_3a_3\cos\theta_3 - \dot{\theta}_3^2a_3\sin\theta_3 \qquad \text{(C.92)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= -\ddot{\theta}_6\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \ddot{\theta}_6\ell_6\sin(\theta_6-\pi) - \dot{\theta}_6^2\ell_6\cos(\theta_6-\pi) \\ &\quad - \ddot{\theta}_5\ell_5\sin(\theta_5-\pi) - \dot{\theta}_5^2\ell_5\cos(\theta_5-\pi) - \ddot{\theta}_4\ell_4\sin(\theta_4-\pi) - \dot{\theta}_4^2\ell_4\cos(\theta_4-\pi) \\ &\quad - \ddot{\theta}_2(\ell_2-a_2)\sin(\theta_2+\pi) - \dot{\theta}_2^2(\ell_2-a_2)\cos(\theta_2+\pi) \qquad \text{(C.93)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_2 &= \ddot{\theta}_6\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2}) + \ddot{\theta}_6\ell_6\cos(\theta_6-\pi) - \dot{\theta}_6^2\ell_6\sin(\theta_6-\pi) \\ &\quad + \ddot{\theta}_5\ell_5\cos(\theta_5-\pi) - \dot{\theta}_5^2\ell_5\sin(\theta_5-\pi) + \ddot{\theta}_4\ell_4\cos(\theta_4-\pi) - \dot{\theta}_4^2\ell_4\sin(\theta_4-\pi) \\ &\quad + \ddot{\theta}_2(\ell_2-a_2)\cos(\theta_2+\pi) - \dot{\theta}_2^2(\ell_2-a_2)\sin(\theta_2+\pi) \qquad \text{(C.94)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 = &-\ddot{\theta}_6\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2})-\dot{\theta}_6^2\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2})-\ddot{\theta}_6\ell_6\sin(\theta_6-\pi)-\dot{\theta}_6^2\ell_6\cos(\theta_6-\pi)\\
&-\ddot{\theta}_5\ell_5\sin(\theta_5-\pi)-\dot{\theta}_5^2\ell_5\cos(\theta_5-\pi)-\ddot{\theta}_4\ell_4\sin(\theta_4-\pi)-\dot{\theta}_4^2\ell_4\cos(\theta_4-\pi)-\ddot{\theta}_2\ell_2\sin(\theta_2+\pi)\\
&-\dot{\theta}_2^2\ell_2\cos(\theta_2+\pi)-\ddot{\theta}_1(\ell_1-a_1)\sin(\theta_1+\pi)-\dot{\theta}_1^2(\ell_1-a_1)\cos(\theta_1+\pi) \qquad \text{(C.95)}\\
\ddot{y}_1 = &\ddot{\theta}_6\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2})-\dot{\theta}_6^2\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2})+\ddot{\theta}_6\ell_6\cos(\theta_6-\pi)-\dot{\theta}_6^2\ell_6\sin(\theta_6-\pi)\\
&+\ddot{\theta}_5\ell_5\cos(\theta_5-\pi)-\dot{\theta}_5^2\ell_5\sin(\theta_5-\pi)+\ddot{\theta}_4\ell_4\cos(\theta_4-\pi)-\dot{\theta}_4^2\ell_4\sin(\theta_4-\pi)+\ddot{\theta}_2\ell_2\cos(\theta_2+\pi)\\
&-\dot{\theta}_2^2\ell_2\sin(\theta_2+\pi)+\ddot{\theta}_1(\ell_1-a_1)\cos(\theta_1+\pi)-\dot{\theta}_1^2(\ell_1-a_1)\sin(\theta_1+\pi) \qquad \text{(C.96)}\\
\ddot{x}_0 = &-\ddot{\theta}_6\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2})-\dot{\theta}_6^2\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2})-\ddot{\theta}_6\ell_6\sin(\theta_6-\pi)-\dot{\theta}_6^2\ell_6\cos(\theta_6-\pi)\\
&-\ddot{\theta}_5\ell_5\sin(\theta_5-\pi)-\dot{\theta}_5^2\ell_5\cos(\theta_5-\pi)-\ddot{\theta}_4\ell_4\sin(\theta_4-\pi)-\dot{\theta}_4^2\ell_4\cos(\theta_4-\pi)\\
&-\ddot{\theta}_2\ell_2\sin(\theta_2+\pi)-\dot{\theta}_2^2\ell_2\cos(\theta_2+\pi)-\ddot{\theta}_1\ell_1\sin(\theta_1+\pi)-\dot{\theta}_1^2\ell_1\cos(\theta_1+\pi)\\
&-\ddot{\theta}_0(\ell_0-a_0)\sin(\theta_0+\pi)-\dot{\theta}_0^2(\ell_0-a_0)\cos(\theta_0+\pi) \qquad \text{(C.97)}\\
\ddot{y}_0 = &\ddot{\theta}_6\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2})-\dot{\theta}_6^2\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2})+\ddot{\theta}_6\ell_6\cos(\theta_6-\pi)-\dot{\theta}_6^2\ell_6\sin(\theta_6-\pi)\\
&+\ddot{\theta}_5\ell_5\cos(\theta_5-\pi)-\dot{\theta}_5^2\ell_5\sin(\theta_5-\pi)+\ddot{\theta}_4\ell_4\cos(\theta_4-\pi)-\dot{\theta}_4^2\ell_4\sin(\theta_4-\pi)\\
&+\ddot{\theta}_2\ell_2\cos(\theta_2+\pi)-\dot{\theta}_2^2\ell_2\sin(\theta_2+\pi)+\ddot{\theta}_1\ell_1\cos(\theta_1+\pi)-\dot{\theta}_1^2\ell_1\sin(\theta_1+\pi)\\
&+\ddot{\theta}_0(\ell_0-a_0)\cos(\theta_0+\pi)-\dot{\theta}_0^2(\ell_0-a_0)\sin(\theta_0+\pi) \qquad \text{(C.98)}\\
\ddot{x}_m = &-\ddot{\theta}_6\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2})-\dot{\theta}_6^2\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2})-\ddot{\theta}_6\ell_6\sin(\theta_6-\pi)-\dot{\theta}_6^2\ell_6\cos(\theta_6-\pi)\\
&-\ddot{\theta}_5\ell_5\sin(\theta_5-\pi)-\dot{\theta}_5^2\ell_5\cos(\theta_5-\pi)-\ddot{\theta}_4\ell_4\sin(\theta_4-\pi)-\dot{\theta}_4^2\ell_4\cos(\theta_4-\pi)\\
&-\ddot{\theta}_2\ell_2\sin(\theta_2+\pi)-\dot{\theta}_2^2\ell_2\cos(\theta_2+\pi)-\ddot{\theta}_1\ell_1\sin(\theta_1+\pi)-\dot{\theta}_1^2\ell_1\cos(\theta_1+\pi)-\ddot{\theta}_0(\ell_0-a_h)\sin(\theta_0+\pi)\\
&-\dot{\theta}_0^2(\ell_0-a_h)\cos(\theta_0+\pi)-\ddot{\theta}_0\ell_h\sin(\theta_0+\frac{\pi}{2})-\dot{\theta}_0^2\ell_h\cos(\theta_0+\frac{\pi}{2}) \qquad \text{(C.99)}\\
\ddot{y}_m = &\ddot{\theta}_6\ell_t\cos(\theta_6-\frac{\pi}{2})-\dot{\theta}_6^2\ell_t\sin(\theta_6-\frac{\pi}{2})+\ddot{\theta}_6\ell_6\cos(\theta_6-\pi)-\dot{\theta}_6^2\ell_6\sin(\theta_6-\pi)\\
&+\ddot{\theta}_5\ell_5\cos(\theta_5-\pi)-\dot{\theta}_5^2\ell_5\sin(\theta_5-\pi)+\ddot{\theta}_4\ell_4\cos(\theta_4-\pi)-\dot{\theta}_4^2\ell_4\sin(\theta_4-\pi)\\
&+\ddot{\theta}_2\ell_2\cos(\theta_2+\pi)-\dot{\theta}_2^2\ell_2\sin(\theta_2+\pi)+\ddot{\theta}_1\ell_1\cos(\theta_1+\pi)-\dot{\theta}_1^2\ell_1\sin(\theta_1+\pi)+\ddot{\theta}_0(\ell_0-a_h)\cos(\theta_0+\pi)\\
&-\dot{\theta}_0^2(\ell_0-a_h)\sin(\theta_0+\pi)+\ddot{\theta}_0\ell_h\cos(\theta_0+\frac{\pi}{2})-\dot{\theta}_0^2\ell_h\sin(\theta_0+\frac{\pi}{2}) \qquad \text{(C.100)}
\end{aligned}
$$

C.4 順動力学

順動力学の計算では，角加速度 7 つ，内力 18 個，並進加速度 16 個の計 41 変数を未知数とする．足リンク 0 と 6 の接地状態ごとに異なる計算を行う．

リンク 0 を基準とするとき（$\theta_t \le \theta_0 \le \frac{\pi}{2}-\theta_h$）

$\theta_t < \theta_0 < \frac{\pi}{2}-\theta_h$ かつ $\theta_6 > \frac{3\pi}{2}-\theta_h$ のとき

リンク 0 がつま先で接地し，リンク 6 がかかとローラで接地する状態では，リンク 7 つの運動方程式 21 個（式 (C.2)〜(C.4)，(C.12)〜(C.26)，(C.34)〜(C.36)），並進加速度の式 16 個（式 (C.69)〜(C.84)）に以下の条件 4 つ

$$f_{y02} = 0 \qquad \text{(C.101)}$$
$$f_{x7} = 0 \qquad \text{(C.102)}$$
$$f_{y72} = 0 \qquad \text{(C.103)}$$
$$\ddot{y}_m = 0 \qquad \text{(C.104)}$$

の計 41 式を用いて，未知数は一意に求まる．

$\theta_t < \theta_0 < \frac{\pi}{2} - \theta_h$ **かつ** $\theta_t + \pi < \theta_6 \leq \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ **のとき**

リンク 0，6 がともにつま先で接地する状態では，リンク 7 つの運動方程式 21 個（式 (C.2)〜(C.4)，(C.12)〜(C.29)），並進加速度の式 16 個（式 (C.69)〜(C.84)）に以下の条件 4 つ

$$f_{y02} = 0 \tag{C.105}$$
$$f_{y72} = 0 \tag{C.106}$$
$$\ddot{x}_m - \ddot{\theta}_6 a_h \sin\theta_6 - \dot{\theta}_6^2 a_h \cos\theta_6 - \ddot{\theta}_6(\ell_h + \ell_t)\sin(\theta_6 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2(\ell_h + \ell_t)\cos(\theta_6 + \frac{\pi}{2}) = 0 \tag{C.107}$$
$$\ddot{y}_m + \ddot{\theta}_6 a_h \cos\theta_6 - \dot{\theta}_6^2 a_h \sin\theta_6 + \ddot{\theta}_6(\ell_h + \ell_t)\cos(\theta_6 + \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_6^2(\ell_h + \ell_t)\sin(\theta_6 + \frac{\pi}{2}) = 0 \tag{C.108}$$

の計 41 式を用いて，未知数は一意に求まる．

$\theta_0 = \theta_t, \frac{\pi}{2} - \theta_h$ **かつ** $\theta_6 > \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ **のとき**

リンク 0 が面で接地し，リンク 6 がかかとローラーで接地する状態では，リンク 7 つの運動方程式とつり合いの式 21 個（式 (C.5)〜(C.8)，(C.12)〜(C.26)，(C.34)〜(C.36)），並進加速度の式 16 個（式 (C.69)〜(C.84)）に以下の条件 4 つ

$$\ddot{\theta}_0 = 0 \tag{C.109}$$
$$f_{x7} = 0 \tag{C.110}$$
$$f_{y72} = 0 \tag{C.111}$$
$$\ddot{y}_m = 0 \tag{C.112}$$

の計 41 式を用いて，未知数は一意に求まる．

リンク 6 を基準とするとき（$\theta_t + \pi \leq \theta_6 \leq \frac{3\pi}{2} - \theta_h$）

$\theta_0 > \frac{\pi}{2} - \theta_h$ **かつ** $\theta_t + \pi < \theta_6 < \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ **のとき**

リンク 6 がつま先で接地し，リンク 0 がかかとローラーで接地する状態では，リンク 7 つの運動方程式 21 個（式 (C.9)〜(C.29)），並進加速度の式 16 個（式 (C.85)〜(C.100)）に以下の条件 4 つ

$$f_{x0} = 0 \tag{C.113}$$
$$f_{y02} = 0 \tag{C.114}$$
$$f_{y72} = 0 \tag{C.115}$$
$$\ddot{y}_m = 0 \tag{C.116}$$

の計 41 式を用いて，未知数は一意に求まる．

$\theta_t < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta_h$ **かつ** $\theta_t + \pi < \theta_6 < \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ **のとき**

リンク 0，6 がともにつま先で接地する状態では，リンク 7 つの運動方程式 21 個（式 (C.2)〜(C.4)，(C.12)〜

(C.29))，並進加速度の式 16 個（式 (C.85)〜(C.100)）に以下の条件 4 つ

$$f_{y02} = 0 \tag{C.117}$$
$$f_{y72} = 0 \tag{C.118}$$
$$\ddot{x}_m - \ddot{\theta}_0 a_h \sin(\theta_0 + \pi) - \dot{\theta}_0^2 a_h \cos(\theta_0 + \pi) - \ddot{\theta}_0(\ell_h + \ell_t)\sin(\theta_0 - \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2(\ell_h + \ell_t)\cos(\theta_0 - \frac{\pi}{2}) = 0 \tag{C.119}$$
$$\ddot{y}_m + \ddot{\theta}_0 a_h \cos(\theta_0 + \pi) - \dot{\theta}_0^2 a_h \sin(\theta_0 + \pi) + \ddot{\theta}_0(\ell_h + \ell_t)\cos(\theta_0 - \frac{\pi}{2}) - \dot{\theta}_0^2(\ell_h + \ell_t)\sin(\theta_0 - \frac{\pi}{2}) = 0 \tag{C.120}$$

の計 41 式を用いて，未知数は一意に求まる．

$\theta_0 > \frac{\pi}{2} - \theta_h$ かつ $\theta_6 = \theta_t + \pi, \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ のとき

リンク 6 が面で接地し，リンク 0 がかかとローラーで接地する状態では，リンク 7 つの運動方程式とつり合いの式 21 個（式 (C.9)〜(C.26)，(C.30)〜(C.33)），並進加速度の式 16 個（式 (C.85)〜(C.100)）に以下の条件 4 つ

$$\ddot{\theta}_6 = 0 \tag{C.121}$$
$$f_{x0} = 0 \tag{C.122}$$
$$f_{y02} = 0 \tag{C.123}$$
$$\ddot{y}_m = 0 \tag{C.124}$$

の計 41 式を用いて，未知数は一意に求まる．

それぞれの場合について連立方程式を行列の形に整理し

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} \tag{C.125}$$
$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T \tag{C.126}$$
$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_{x0} & f_{y0} & f_{y02} & f_{x1} & f_{y1} & f_{x2} & f_{y2} & f_{x3} & f_{y3} \\ f_{x4} & f_{y4} & f_{x5} & f_{y5} & f_{x6} & f_{y6} & f_{x7} & f_{y7} & f_{y72} \end{bmatrix}^T \tag{C.127}$$
$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{x}_1 & \ddot{y}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{y}_2 & \ddot{x}_3 & \ddot{y}_3 \\ \ddot{x}_4 & \ddot{y}_4 & \ddot{x}_5 & \ddot{y}_5 & \ddot{x}_6 & \ddot{y}_6 & \ddot{x}_m & \ddot{y}_m \end{bmatrix}^T \tag{C.128}$$
$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6 \end{bmatrix}^T \tag{C.129}$$

を得る．ただし，$\boldsymbol{M} \in R^{41\times 41}$，$\boldsymbol{C} \in R^{41}$，$\boldsymbol{B} \in R^{41\times 6}$ である．式 (C.125) に $\boldsymbol{\theta}$，$\dot{\boldsymbol{\theta}}$，$\boldsymbol{\tau}$ を既知として与え，$\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ を

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} \tag{C.130}$$

のように求める．

C.5 逆動力学

逆動力学の計算では，関節トルク 6 つ，内力 18 個，リンク重心加速度 16 個の計 40 変数が未知数である．足リンク 0 と 6 の接地状態ごとに異なる計算を行う．

リンク 0 を基準とするとき（$\theta_t \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta_h$）

$\theta_t < \theta_0 < \frac{\pi}{2} - \theta_h$ かつ $\theta_6 > \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ のとき

リンク 0 がつま先で点接地し，リンク 6 がかかとローラで点接地するとき，リンク 7 つの運動方程式 21 個（式 (C.2)〜(C.4)，(C.12)〜(C.26)，(C.34)〜(C.36)），並進加速度の式 16 個（式 (C.69)〜(C.84)）に以下の条件 3 つ

$$f_{x7} = 0 \tag{C.131}$$
$$f_{y02} = 0 \tag{C.132}$$
$$f_{y72} = 0 \tag{C.133}$$

の計 40 式を用いて，未知数は一意に求まる．

$\theta_t < \theta_0 < \frac{\pi}{2} - \theta_h$ かつ $\theta_t + \pi < \theta_6 \leq \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ のとき

リンク 0，6 がともにつま先で点接地するとき，リンク 7 つの運動方程式 21 個（式 (C.2)〜(C.4)，(C.12)〜(C.29)），並進加速度の式 16 個（式 (C.69)〜(C.84)）に以下の条件 2 つ

$$f_{y02} = 0 \tag{C.134}$$
$$f_{y72} = 0 \tag{C.135}$$

の計 39 式を用いて未知数を求める．この場合，解は一意に定まらない．

$\theta_0 = \theta_t, \frac{\pi}{2} - \theta_h$ かつ $\theta_6 > \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ のとき

リンク 0 が面で接地し，リンク 6 がかかとローラで接地するとき，リンク 7 つの運動方程式とつり合いの式 20 個（式 (C.5)，(C.6)，(C.12)〜(C.26)，(C.34)〜(C.36)），並進加速度の式 16 個（式 (C.69)〜(C.84)）に以下の条件 2 つ

$$f_{x7} = 0 \tag{C.136}$$
$$f_{y72} = 0 \tag{C.137}$$

の計 39 式を用いて未知数を求める．この場合，解は一意に定まらない．

リンク 6 を基準とするとき（$\theta_t + \pi \leq \theta_6 \leq \frac{3\pi}{2} - \theta_h$）

$\theta_0 > \frac{\pi}{2} - \theta_h$ かつ $\theta_t + \pi < \theta_6 < \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ のとき

リンク 6 がつま先で点接地し，リンク 0 がかかとローラで接地するとき，リンク 7 つの運動方程式 21 個（式 (C.9)〜(C.29)），並進加速度の式 16 個（式 (C.85)〜(C.100)）に以下の条件 3 つ

$$f_{x0} = 0 \tag{C.138}$$
$$f_{y02} = 0 \tag{C.139}$$
$$f_{y72} = 0 \tag{C.140}$$

の計 40 式を用いて，未知数は一意に求まる．

$\theta_t < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta_h$ かつ $\theta_t + \pi < \theta_6 < \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ のとき

リンク 0，6 がともにつま先で点接地するとき，リンク 7 つの運動方程式 21 個（式式 (C.2)〜(C.4)，(C.12)〜(C.29)），並進加速度の式 16 個（式 (C.85)〜(C.100)）に以下の条件 2 つ

$$f_{y02} = 0 \tag{C.141}$$
$$f_{y72} = 0 \tag{C.142}$$

の計 39 式を用いて，未知数を求める．この場合，解は一意に定まらない．

$\theta_0 > \frac{\pi}{2} - \theta_h$ **かつ** $\theta_6 = \theta_t + \pi, \frac{3\pi}{2} - \theta_h$ **のとき**

リンク 6 が面で接地し，リンク 0 がかかとローラで接地するとき，リンク 7 つの運動方程式とつり合いの式 20 個（式 (C.9)〜(C.26)，(C.30)，(C.31)），並進加速度の式 16 個（式 (C.85)〜(C.100)）に以下の条件 2 つ

$$f_{x0} = 0 \tag{C.143}$$
$$f_{y02} = 0 \tag{C.144}$$

の計 39 式を用いて，未知数を求める．この場合，解は一意に定まらない．

それぞれの場合について連立方程式を行列の形に整理し

$$\boldsymbol{BI}(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \boldsymbol{CI}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) \tag{C.145}$$
$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T \tag{C.146}$$
$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} = \Big[& f_{x0} \quad f_{y0} \quad f_{x1} \quad f_{y1} \quad f_{x2} \quad f_{y2} \quad f_{x3} \quad f_{y3} \\ & f_{x4} \quad f_{y4} \quad f_{x5} \quad f_{y5} \quad f_{x6} \quad f_{y6} \quad f_{x7} \quad f_{y7} \Big]^T \end{aligned} \tag{C.147}$$
$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} = \Big[& \ddot{x}_0 \quad \ddot{y}_0 \quad \ddot{x}_1 \quad \ddot{y}_1 \quad \ddot{x}_2 \quad \ddot{y}_2 \quad \ddot{x}_3 \quad \ddot{y}_3 \\ & \ddot{x}_4 \quad \ddot{y}_4 \quad \ddot{x}_5 \quad \ddot{y}_5 \quad \ddot{x}_6 \quad \ddot{y}_6 \quad \ddot{x}_m \quad \ddot{y}_m \Big]^T \end{aligned} \tag{C.148}$$
$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6 \end{bmatrix}^T \tag{C.149}$$

を得る．ただし，$\boldsymbol{BI} \in R^{40\times40}$ または $\in R^{39\times40}$，$\boldsymbol{CI} \in R^{40}$ または $\in R^{39}$ である．式 (C.125) に $\boldsymbol{\theta}$，$\dot{\boldsymbol{\theta}}$，$\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ を既知として与え，$\boldsymbol{\tau}$ を

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \boldsymbol{BI}(\boldsymbol{\theta})^{\#} \boldsymbol{CI}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) \tag{C.150}$$

のように求める．$\boldsymbol{BI}(\boldsymbol{\theta})^{\#}$ は $\boldsymbol{BI}$ の逆行列または疑似逆行列である．

謝辞

本研究を遂行するうえで，岡田昌史准教授，岩附信行教授には学部，修士，博士課程の 6 年間，多大なご指導をいただきました．とくに，岡田昌史准教授には研究のご指導をいただきながら，今後の生き方の指針として研究者の道を提示していただき，就職活動の相談にも多大なご協力をいただきました．教えていただいたことを自分の大きな財産とし，研究者としてさらに成長できるよう，今後も勉強に励みます．また，森川広一元助教，池田生馬助教，山本江氏には日々の研究生活でたびたびご指導をいただきました．とくに，池田生馬助教には，いつも親身に相談に乗っていただき，私が大学の研究者を目指すきっかけもいただきました．渡辺将旭氏，ニコラ・シュミット氏には，博士課程学生の規範を示していただきました．研究室学生の皆様には，日々の生活を充実した楽しいものにしていただきました．私の家族には，私の長めの学生生活を支えていただきました．ここに深く感謝申し上げます．