論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	塑性化を考慮した偏心率計算法の提案
Title(English)	
著者(和文)	山崎義弘, 坂田弘安
Authors(English)	Yoshihiro Yamazaki, HIROYASU SAKATA
出典(和文)	第14回日本地震工学シンポジウム論文集, Vol. , No. , pp. 856-862
Citation(English)	, Vol. , No. , pp. 856-862
発行日 / Pub. date	2014, 12

塑性化を考慮した偏心率計算法の提案

山崎義弘[1)]、坂田弘安[2)]

1) 東京工業大学建築学専攻、助教　博士(工学)
e-mail : yamazaki.y.ai@m.titech.ac.jp
2) 東京工業大学建築学専攻、教授　工博
e-mail : sakata.h.aa@m.titech.ac.jp

要　約
弾性剛性のバランスによって定められる偏心率の物理的意味を解釈することで、これを塑性域での捩れ振動の影響指標としても展開する。すなわち、降伏耐力のバランスから耐力偏心率を新たに提案する。また、剛性偏心問題と耐力偏心問題の間に等価性があることを示し、さらに通常の静的解析で考慮される外力分布と、動的解析で考慮される外力分布の違いがもたらす影響を理論的に考察する。

キーワード：　捩れ振動、剛性偏心、耐力偏心、偏心率、木造住宅

1. はじめに

弾性剛性に基づく偏心率の検討では、塑性化を許容した終局状態における捩れ振動の影響を考慮できない可能性があるため、筆者らは文献1において、1層の木質構造物を対象に終局状態における捩れを含む変位モードの簡易予測法を提案した。この方法は、仮定した崩壊型とそれに対する外力分布の定式化によって、比較的容易に変位モードを計算することができ、特に各耐力壁の剛性のバランスと耐力のバランスが異なるときにも合理的な評価が可能な点で有効である。

本論では、上述のような弾性域での捩れ振動と塑性域での捩れ振動の特性の違いを、理論的に考察することを目的としている。具体的には、建築基準法で定められた偏心率の意味を物理的に解釈することで、従来の弾性剛性に基づく評価を、塑性域にまで展開する。続いて、導出した塑性域での偏心率が、従来の弾性域の偏心率と等価性をもつことを示し、それらの変換パラメータを定義することで、塑性域での捩れ振動の特性を決定づける要因を分析する。また、従来の静的解析では剛床の質量中心位置への集中荷重が与えられるが、このような水平荷重分布の影響についても一考する。

2. 剛性偏心問題における偏心率の物理的意味

偏心率とは剛性偏心距離e_{ky}と剛性中心周りの弾力半径r_{ex}の比と定義される。剛性偏心距離は、水平力によって励起される捩りモーメントの大きさを、弾力半径は捩り抵抗の大きさを表す。そこで、図1のような剛床の質量中心に水平力F_xを受ける1層構造モデルを考える。なお、動的な振動状態では必ずしも質量中心に水平力を与える静的荷重条件は必ずしも妥当とは言えないが、ここでは偏心率の物理的な意味を考える上での仮定と考える。

水平力とモーメントのつり合いから、質量中心の水平変位u_xと床の回転角θは、それぞれ次式のように求まる。

$$F_x = K_x u_x - K_x e_{ky}\theta = K_x\left(u_x - e_{ky}\theta\right) \quad , \qquad F_x e_{ky} = \left(K_\theta - K_x e_{ky}^2\right)\theta \tag{1a,b}$$

ここで、K_xは捩れを拘束した場合の層剛性、すなわちx方向の各耐力壁の初期剛性の総和、K_θは質量中心周りの捩れ剛性である。式(1a),(1b)からF_xを消去し、さらに質量中心と剛性中心の相対水平変位を図1(b)のようにΔと定義することで、次式が得られる。

$$\frac{\Delta}{u_x} = \frac{K_x e_{ky}^2}{K_\theta} \quad , \qquad \Delta = e_{ky}\theta \tag{2a,b}$$

ここで、剛性中心の水平変位u_s（$= u_x - \Delta$）を用いれば、式(2a)は次式のように書き換えられる。

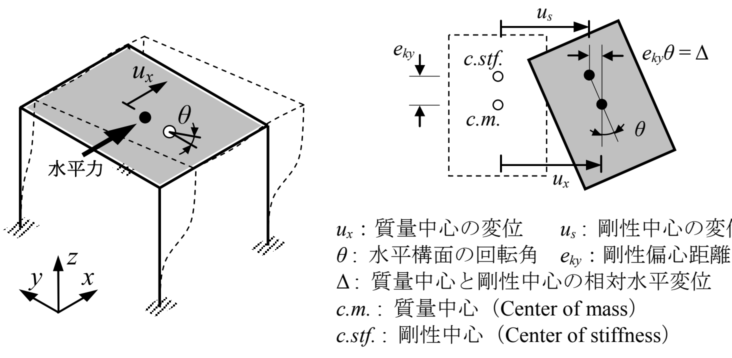
$$\frac{\Delta}{u_s} = \frac{K_x e_{ky}^2}{K_\theta - K_x e_{ky}^2} = \frac{e_{ky}^2}{r_{ex}^2} = R_{ex}^2 \quad , \qquad r_{ex} = \sqrt{\frac{K_\theta - K_x e_{ky}^2}{K_x}} \tag{3a,b}$$

つまり、剛性中心の水平変位u_sと、質量中心と剛性中心の相対水平変位Δの比で定義された変位モードが、偏心率R_{ex}の二乗に等しいという関係が得られる。

また、式(1a)と式(1b)からθを消去すれば、

$$F_x = K_x\left(1 - \frac{K_x e_{ky}^2}{K_\theta}\right)u_x = \frac{K_x}{1 + R_{ex}^2}u_x \tag{4}$$

上式は、捩れ非拘束時には捩れ拘束時に比べ層剛性が$1/(1+R_{ex}^2)$ 倍に低下することを表す（図2）。



(a)　荷重条件　　　(b)　変位の定義

図１　対象とする構造モデル

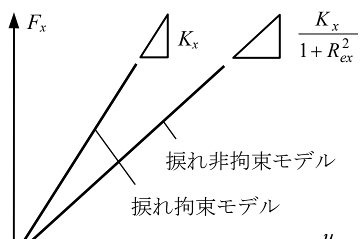


図２　質量中心に水平力を受ける場合の見かけの層せん断力－層間変形関係

3. 耐力偏心問題への展開

前章の考察から、偏心率とはある仮定された荷重条件下での捩れの相対的な大きさによって表せることが分かった。この考えを塑性域まで拡張することを考える。

塑性域での捩れを含んだ変位モードの予測法については，筆者らが文献1で提案した手法を用いる。

これは、一方向地震力を受ける耐力壁構造において、地震力を受ける方向の耐力壁は塑性域、その直交方向の耐力壁は弾性域という崩壊型（終局状態）を仮定することで、そのときの外力分布、変位モードおよび質量マトリクスの関係を、固有値問題からの類推により求めるものである（図3）。各耐力壁の荷重－変形関係の包絡線は完全弾塑性型としており、x方向・y方向のi番目の耐力壁の降伏耐力・初期剛性を、それぞれ$F_{xi}, F_{yi}, k_{xi}, k_{yi}$とする。降伏変形と終局変形は全ての耐力壁に共通で、それぞれδ_v, δ_uとする。詳細は割愛するが、終局状態における1次モード（終局1次モード）$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{u1}}$は次式により求まる。

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{u1}} = \{\phi_{u11}\ \phi_{u21}\}^{\mathrm{T}} \quad , \quad \frac{\phi_{u21}}{\phi_{u11}} = \frac{F_{x0}e_{fy}}{K_\theta^{(y)}u_x - F_{x0}r_m^2} \tag{5a,b}$$

$$F_{x0} = \sum F_{xi} \quad , \quad e_{fy} = \sum F_{xi}y_i \Big/ \sum F_{xi} \quad , \quad K_\theta^{(y)} = \sum k_{yi}x_i^2 \tag{6a-c}$$

ここに、F_{x0}はx方向の耐力壁の降伏耐力の総和であり、層の終局耐力を表す。(x_i, y_i) はi番目の耐力壁の質量中心からの相対位置を表し、e_{fy}は耐力偏心距離を、$K_\theta^{(y)}$ はy方向の耐力壁が寄与する振れ剛性を表す[1),2)]。$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{u1}}$の1行目は並進成分であり長さの単位、2行目は回転成分であり角の単位をもつ。上式は以下のような関係式に基づいて導出されている。

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u1}} = \{F_{x0}\ M\}^{\mathrm{T}} \quad , \quad {\omega_{u1}}^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{u1}} = \mathbf{f}_{\mathbf{u1}} \quad , \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad M = -F_{x0}e_{fy} + K_\theta^{(y)}\theta \tag{7a-d}$$

ここに、 $\mathbf{f}_{\mathbf{u1}}$は終局状態における外力モードであり水平力とモーメントで構成され、$\mathbf{m}$は質量マトリクス（質量m, 回転慣性I）, ω_{u1}は定数である。

また、式(5b)中のu_xは終局状態に達したときの質量中心の水平変位であるが、文献1では耐力中心から最も離れた耐力壁の最大変形が終局変形δ_uに達した状態を終局状態と定義し、$u_x(1 + l_y\phi_{u21}/\phi_{u11}) = \delta_u$を拘束条件として与えることで、次式により求めた。

$$u_{x0} = \frac{F_{x0}(r_m^2 - e_{fy}l_y) + K_\theta^{(y)}\delta_u + \sqrt{\left[F_{x0}(r_m^2 - e_{fy}l_y) + K_\theta^{(y)}\delta_u\right]^2 - 4K_\theta^{(y)}F_{x0}r_m^2\delta_u}}{2K_\theta^{(y)}} \quad , \quad r_m = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{8a,b}$$

ここに、l_yは質量中心から終局変形に達した耐力壁までのy方向距離、r_mは質量回転半径である。

2章で行った考察から、終局状態における変位モードと偏心率が式(3a)で関係づけられるため、塑性域での耐力偏心率R'_{ex}を次式のように定義する。

$$R'^2_{ex} = \frac{F_{x0}e_{fy}^2}{K_\theta^{(y)}u_x - F_{x0}(e_{fy}^2 + r_m^2)} = \frac{e_{fy}^2}{r'^2_{ex}} \quad , \quad r'_{ex} = \sqrt{r''^2_{ex} - r_m^2} \quad , \quad r''_{ex} = \sqrt{\frac{K_\theta^{(y)} - (F_{x0}/u_x)e_{fy}^2}{F_{x0}/u_x}} \tag{9a-c}$$

つまり、耐力中心の水平変位と、質量中心と耐力中心の相対水平変位の比によって耐力偏心率を定義したことになるが、木造の耐力壁構造では剛性と耐力が比例関係にあるとしても妥当と考えられ、$R_{ex} = R'_{ex}$なら弾性時と塑性時で変位モードが等しくなることを表す。

式(9a)より、耐力偏心率R'_{ex}の計算時は、剛性偏心距離e_{ky}を耐力偏心距離e_{fy}に、弾力半径r_{ex}は等価弾力半径r'_{ex}に置き換えれば良いことが分かる。さらに、式(3)と式(9)の比較から、塑性域ではK_xをF_{x0}/u_xに、K_θを $K_\theta^{(y)}$ に置き換え、弾力半径はr_mとの二乗値の差の平方根、つまり図4のようにr_mを正弦成分としたときの余弦成分をとっている。F_{x0}/u_xは層の等価剛性に他ならず、K_θを $K_\theta^{(y)}$ とすることもy方向の耐力壁しか剛性をもっていないことから理解できる。弾力半径を図4のようにとることは、考慮してい

る外力分布の違いによって説明できる。すなわち、前章のような質量中心に水平力を受ける場合とは、一様な加速度分布を仮定して質量に比例した荷重を考慮しているのに対し、本論の手法では加速度分布がモード形と相似のため、いわゆる動的な効果が現れており（図5），図4中の角ψが動的効果の大きさを表している。また、式(9b)の物理的意味は、$\omega=\sqrt{(F_{x0}/u_x)/m}$ という等価固有円振動数での定常振動を考えることで説明できる（証明は割愛)。なお、塑性域についても質量比例荷重を考慮すれば、次式を得る。

$$R''^2_{ex}=\frac{F_{x0}e^2_{fy}}{K^{(y)}_{\theta}u_x-F_{x0}e^2_{fy}}=\frac{e^2_{fy}}{r''^2_{ex}} \tag{10}$$

このように、r''_{ex}は質量比例荷重下での等価弾力半径と言えることが分かる。換言すると、モード比例荷重下では質量比例荷重下よりも等価弾力半径が低下することになる。

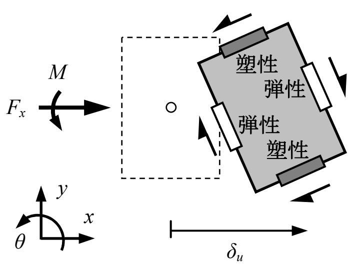


図 3　仮定する崩壊型と外力分布

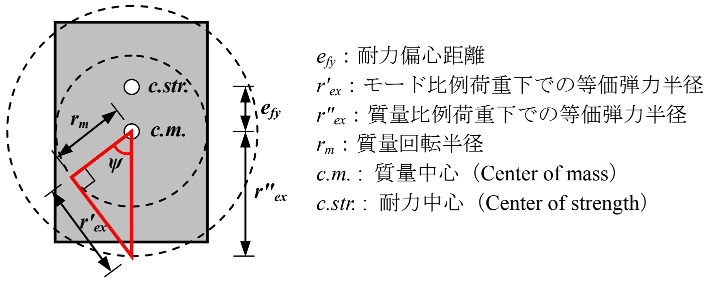
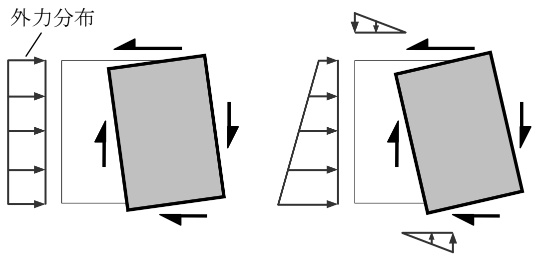


図 4　モード比例荷重下と質量比例荷重下での等価弾力半径の比較



(a) 質量比例荷重　(b) モード比例荷重

図 5　考慮している外力分布

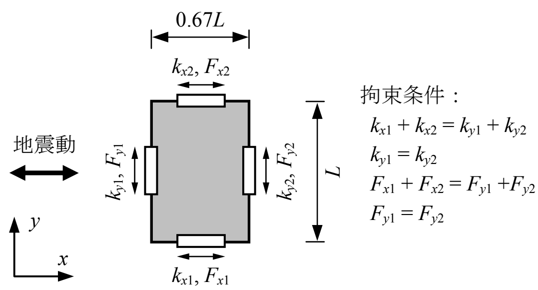


図 6　考慮する構造モデル

4. 剛性偏心問題と耐力偏心問題の等価性と変換パラメータ

振れを含むモデルの動的特性評価においては、本来は二つのパラメータが必要であり、例えば大網は偏心比と質量中心周りで定義した弾力半径比を用いている[3)]。前述のように本論では剛性偏心距離と耐力偏心距離が一致する、すなわち$e_{fy}=e_{ky}$と考え、そのような仮定の下に議論を進める。よって弾性域と塑性域での偏心率の違いは弾力半径の変化によってもたらされるため、それらの変換パラメータをここで導出しておく。

式(3)と式(9)の比較から、改めて次式のような書き換えを行う。

$$R'^2_{ex}=\frac{(K_x/\mu)e^2_{fy}}{K_{\theta}\sin^2\psi_x-(K_x/\mu)(e^2_{fy}+r^2_m)}=\frac{e^2_{fy}}{r'^2_{ex}}\quad ,\quad R''^2_{ex}=\frac{(K_x/\mu)e^2_{fy}}{K_{\theta}\sin^2\psi_x-(K_x/\mu)e^2_{fy}}=\frac{e^2_{fy}}{r''^2_{ex}}$$

$$r'_{ex}=\sqrt{r''^2_{ex}-r_m^2}\quad,\quad r''_{ex}=\sqrt{\frac{K_\theta\sin^2\psi_x-(K_x/\mu)e_{fy}^2}{K_x/\mu}}=\sqrt{\frac{K'_\theta-K'_x\,e_{fy}^2}{K'_x}} \tag{11a-d}$$

$$K'_x=K_x/\mu\quad,\quad K'_\theta=K_\theta\sin^2\psi_x\quad,\quad \mu=\frac{u_x}{F_{x0}/K_x}=\frac{u_x}{\delta_y}\quad,\quad \sin^2\psi_x=\frac{K_\theta^{(y)}}{K_\theta} \tag{12a-d}$$

ここに、μは質量中心における見かけの塑性率といえ、$\sin^2\psi_x$は捩れ剛性におけるy方向の耐力壁の寄与率[2)]であり、これらを用いて塑性域での等価水平剛性K'_x, 等価捩れ剛性K'_θを定義した。μが大きいほど等価水平剛性が小さくなるためr'_eは大きくなり、また$\sin^2\psi_x$が大きいほど等価捩れ剛性が大きくなるためr'_eは大きくなり、物理的意味をなしていることが確認できる。

また、式(11)および式(12)から、弾性域の弾力半径r_{ex}と塑性域の等価弾力半径r'_{ex}は、μ, $\sin^2\psi_x$, r_mの三つのパラメータが関係づけていることが分かるが、式(11d)中辺平方根内の分子と分母にμを掛ければ、μと$\sin^2\psi_x$は$\mu\sin^2\psi_x$にまとめられることから、結局、変換パラメータは$\mu\sin^2\psi_x$とr_mの二つとなる。

ここで、剛性偏心率と耐力偏心率が一致する、特別な場合について調べる。$R_{ex}=R'_{ex}$あるいは$R_{ex}=R''_{ex}$とおいてそれぞれ塑性率μについて解けば、次式の等価塑性率μ'_0, μ''_0が得られる。

$$\mu'_0=\frac{K_\theta+K_x r_m^2}{K_\theta}\frac{1}{\sin^2\psi_x}=\left(1+\frac{r_m^2}{e_{ky}^2}\frac{R_{ex}^2}{1+R_{ex}^2}\right)\frac{1}{\sin^2\psi_x}\quad,\quad \mu''_0=\frac{1}{\sin^2\psi_x} \tag{13a,b}$$

また、式(11)から耐力偏心率R'_{ex}, R''_{ex}の二乗は塑性率μに関する分数関数になることが分かる。本論では1次モードで並進が卓越する構造を対象とすることとし、μの定義域が次式のように定められる。

$$\mu>\max\left\{\frac{R_{ex}^2}{1+R_{ex}^2}\frac{e_{ky}^2+r_m^2}{e_{ky}^2}\frac{1}{\sin^2\psi_x},\ 1\right\}\quad,\quad \mu>\max\left\{\frac{R_{ex}^2}{1+R_{ex}^2}\frac{1}{\sin^2\psi_x},\ 1\right\} \tag{14a,b}$$

式(13a),(14a)がモード比例荷重下（R'_{ex}），式(13b),(14b)が質量比例荷重下（R''_{ex}）の塑性率に対応する。

5. パラメータスタディ

導出した耐力偏心率の傾向、および従来の偏心率との比較を、具体的な構造モデルを設定して検討する。対象とするモデルは文献1で設定したものと同じであり、図6のように表すことができる。ここで、主要な変動要因である剛性偏心距離e_{ky}および耐力偏心距離e_{fy}は、質量回転半径r_mで除した無次元長さ、剛性偏心比$\bar{e}_{ky}$および耐力偏心比$\bar{e}_{fy}$で表すことにする。

$$\bar{e}_{ky}=\frac{e_{ky}}{r_m}\quad,\quad \bar{e}_{fy}=\frac{e_{fy}}{r_m}\quad,\quad r_m=\sqrt{\frac{L^2+(0.67L)^2}{12}}\approx 0.35L \tag{15a-c}$$

式(15c)は図6のモデルにおいて均等質量分布と仮定することで得られる。なお、図6中に示した拘束条件と床の辺長比から、本モデルでは$\sin^2\psi_x=0.31$となる。

まずは耐力偏心率R'_{ex}の傾向を図7に示す。図7(a)のように剛性および耐力の偏心比$\bar{e}_{ky}=\bar{e}_{fy}$を横軸にとるとほぼ線形的な関係になる。一方、図7(b)のように塑性率μを横軸にとると分数関数であるため、μが定義域の下限値（式(14)右辺第1項）に近づくとR'_{ex}が急上昇する。μが大きくなるとR'_{ex}は緩やかに減少し、$\bar{e}_{ky}$にほぼ比例する関係が見られる。ただし、図3に示した崩壊型を担保するためにはμがある程度大きい必要があることに注意が必要である（文献1では$\mu=2.5$〜3.5程度を考慮した）。

図8は式(13)に示した剛性偏心率R_{ex}と耐力偏心率R''_{ex}が一致する場合の塑性率$\mu''_0 = 3.2$で固定し、$R_{ex} (= R''_{ex})$ とR'_{ex}を比較している。図の実線と破線の差が、同じ塑性率でみた場合の動的効果に相当し、$\bar{e}_{ky} = \bar{e}_{fy}$ が大きいほどその影響は大きくなる。$R_{ex} = 0.3$のときには$R'_{ex} = 0.38$であった。図9は$R_{ex} = 0.3$となる $\bar{e}_{ky}$ で固定した場合のR_{ex}, R'_{ex}, R''_{ex}を比較している。2本の実線の差が動的効果に相当し、μが大きいほどその影響は大きくなる。前述のように$R_{ex} = R''_{ex}$となるのは$\mu''_0 = 3.24$のときであるが、$R_{ex} = R'_{ex}$となるのは$\mu'_0 = 4.3$のときであった。

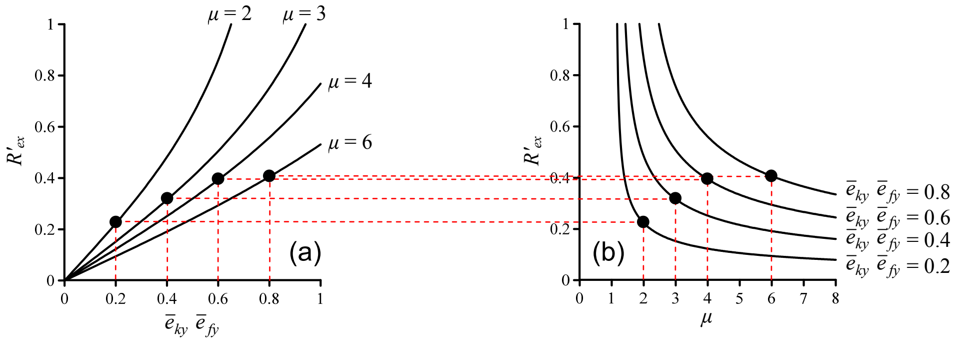


図 7　耐力偏心率 R'_{ex} の傾向（(a)剛性・耐力偏心比、(b)塑性率を横軸とした場合）

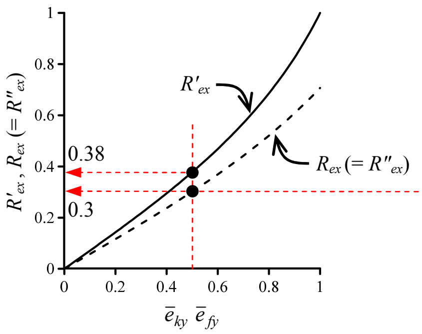


図 8　剛性偏心率 R_{ex} と耐力偏心率 R''_{ex} が一致する場合（μ=3.2）の傾向

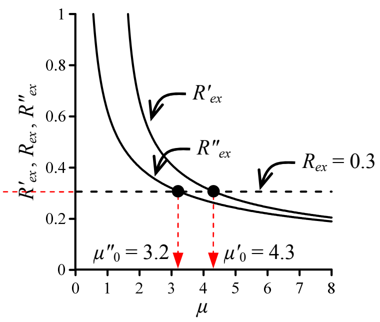


図 9　R_{ex}=0.3 の場合の 3 種偏心率の比較

6. おわりに

本論では、文献1で提案した捩れを含む終局変位モードの予測法を応用し、剛性偏心問題と耐力偏心問題の等価性を示すことで、塑性域での捩れ振動の影響指標、すなわち耐力偏心率の計算方法を提案した。剛性と耐力が比例関係にある場合には、剛性偏心率と耐力偏心率が等しければ、弾性時と塑性時で変位モードが等しいことを表す。耐力偏心率は塑性率によって変化し、剛性偏心率と耐力偏心率を等しくする塑性率も陽に求めることができるため、例えば設計で目標とする塑性率に対して、剛性偏心と耐力偏心のどちらが大きな捩れをもたらすかを判断することもできる。

参考文献

1) 山崎義弘, 坂田弘安, 笠井和彦 ： 一軸偏心した1層木質構造物の終局耐震性能評価 耐力偏心がもたらす捩れ振動の終局変位モードの予測と評価指標の提案, 日本建築学会構造系論文集, 第687号, pp.959-968, 2013.5
2) 山崎義弘, 笠井和彦, 坂田弘安 ： 一軸偏心した非剛床木質構造の動的特性および地震応答に関する基礎的研究, 日本建築学会構造系論文集, 第663号, pp.959-968, 2011.5
3) 大網浩一, 村上雅也 ： 単層一軸偏心線形系の地震応答における動的捩れ効果の指標, 日本建築学会構造系論文集, 第521号, pp.25-32, 1999.7

Calculation of Eccentricity Ratio Considering Plasticity

YAMAZAKI Yoshihiro [1] and SAKATA Hiroyasu [2]

1) Member, Assistant Professor, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.
2) Member, Professor, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

ABSTRACT

This paper focuses on eccentricity ratio which is defined in *Japanese Building Standard Law*. The index representing vulnerability to torsional vibration is calculated by the balance of mass distribution and elastic stiffness distribution. However, in order to simulate torsional vibration in plastic state, distribution of yield strength must be considered. In this paper, eccentricity ratio considering plasticity is proposed and applied to example wooden structures. It is based on our previous research which proposes calculation method of displacement mode including torsion in ultimate state. We found that conventional eccentricity ratio and proposed eccentricity ratio has conversion rule characterized by simple parameters. The effect of inertial force distribution on eccentricity ratio is also discussed.

Keywords: Torsional vibration, Stiffness eccentricity, Strength eccentricity, Eccentricity ratio, Wooden houses