T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	修正サブレイヤーモデルおよびその巨視的評価手法に基づく金属系材料の構成則に関する研究
Title(English)	A constitutive model for metals based on the modified sub-layer model and its macroscopic evaluation method
著者(和文)	寺西正輝
Author(English)	Masaki Teranishi
出典(和文)	学位:博士（工学）, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第9846号, 授与年月日:2015年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:元結　正次郎,翠川　三郎,笠井　和彦,坂田　弘安,佐藤　大樹
Citation(English)	Degree:, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第9846号, Conferred date:2015/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

修正サブレイヤーモデルおよびその巨視的評価手法に基づく金属系材料の構成則に関する研究

A constitutive model for metals based on the modified sub-layer model and its macroscopic evaluation method

東京工業大学大学院　総合理工学研究科　人間環境システム専攻
元結研究室
寺西　正輝

謝辞

本研究は、筆者が東京工業大学総合理工学研究科人間環境システム専攻において、東京工業大学教授元結正次郎博士の下で金属系材料の構成則について纏めたものです。

指導教官である東京工業大学教授　元結正次郎博士には、時には叱咤され、時には激励されながら終始懇切丁寧にご指導戴き、研究に対して誠実かつ情熱溢れる姿勢を学びました。また、元結正次郎博士には、研究のみならず人間性についても広くご教示戴きました。心から感謝するとともに、厚く御礼申し上げます。

東京工業大学教授　笠井和彦博士には、研究に対して貴重なご助言を頂くとともに、研究を進めるにあたり貴重な実験結果を提供して頂きました。心から感謝致します。

東京工業大学教授　翠川三郎博士には、発表および論文を纏めるにあたって貴重なご助言を賜りましたことを心より感謝致します。

東京工業大学教授　坂田弘安博士には、大学院生活を送るにあたって貴重なご助言を頂きましたことを心より感謝致します。

東京工業大学准教授　佐藤大樹博士には、研究成果を纏めるにあたって貴重なご助言を頂きましたことを心より感謝致します。

東京工業大学助教　金子健作博士には、研究を行うにあたって貴重なご助言を頂いたことを心より感謝申し上げます。竹中工務店技術研究所研究員　佐藤恭章氏には、研究のみならず大学院生活を送るにあたってご助言および叱咤激励を戴きましたことを心から感謝申し上げます。本論文を執筆するにあたって快く雑務を引き受けてくれた東京工業大学大学院博士課程 1 年　沖佑典氏には、御礼申し上げます。また、その他にも大学院生活を支えてくれた研究室の皆様方には心から感謝申し上げます。最後に、元結研究室で勉強する機会を与えてくれた両親および兄弟に心から感謝致します。

内容梗概

建築構造物では、従来より、梁要素を用いた解析を多用しており、一軸応力状態において高精度に金属系材料の実現象を再現可能な材料構成則は重要である。一方、近年、シェル・ソリッド要素を用いた建築構造物全体の解析を行い、詳細な挙動を再現する需要があり、多軸応力状態に対して適用可能な材料構成則に対する必要性が高まってきている。このような解析は、膨大な自由度数を有するため計算負荷の小さい材料構成則の開発が重要といえる。しかしながら、既往の材料構成則においてもこれらの条件を全て満足するには十分とはいえない。そこで、本研究では、一軸および多軸応力状態に対して適用可能かつ高精度に金属系材料の実現象を再現できるとともに、計算負荷の小さい材料構成則の開発を目的とする。その中で、物理的に明快であるという利点からサブレイヤーモデルを基本の力学モデルとして採用し、それを修正することにより実現象に対して高い再現性を有する材料構成則を構築するとともにサブレイヤーモデルの欠点である多大な計算負荷を低減する巨視的評価手法の提案を行っている。本論文は 7 章より構成されており以下がその主な内容である。

第 1 章「序論」では、本研究の背景および本研究に関する既往の研究に関して概説するとともにその問題点を指摘し、本研究での目的について述べている。

第 2 章「一軸応力状態に対する修正サブレイヤーモデル」では、一軸応力状態に対して実現象を表現可能なサブレイヤーモデルの構築を行っている。はじめに、サブレイヤーモデルの概要について述べる。その後、古典的なサブレイヤーモデルの欠点について指摘し、その欠点を克服するための新たな硬化則の提案を行う。また、実現象において、応力振幅の飽和現象が硬化現象に大きく寄与するものと考え、その再現を試みる。しかし、新たな硬化則のみでは、飽和現象の表現には十分とは言えないため、非硬化領域の概念をサブレイヤーモデルに適用する。また、定式化の際には、微係数間に関係を定義し、諸式の単純化を図る。提案モデルの実現象に対する妥当性については、実験結果との比較を行うことにより検証している。その中で、提案モデルが、一組のパラメータにより多くの実験結果が再現可能であることを数値解析結果により示す。

第 3 章「修正サブレイヤーモデルの多軸応力状態への拡張および改善」では、2 章で提案した一軸応

力状態に対する修正サブレイヤーモデルを多軸応力状態へ拡張する。その中で、多軸応力状態における定式化は、一軸応力状態に対する理論的整合性を保持して行われる。また、2 章における修正サブレイヤーモデルの単なる拡張では、非比例載荷時の急激な硬化の進展を再現するには不十分であることを数値解析により明らかにしたうえで、修正サブレイヤーモデルの改善方法について提案を行う。なお、改善方法に対する妥当性は、提案モデルと軸応力およびせん断応力のみが生じる応力状態に対する実験結果との比較を通して検証する。

第 4 章「一軸応力状態に対する硬化則を考慮したサブレイヤーモデルの巨視的評価手法」では、第 2 章で提案した修正サブレイヤーモデルに対する巨視的評価手法を提案し、巨視的モデルの構築を行う。サブレイヤーモデルは複数の仮想のレイヤーを想定し、各レイヤーに対して計算を行う必要があることから計算負荷が大きいという欠点を持つ。そこで、本章では、サブレイヤーモデルの各レイヤーの変数を積分し、巨視的な変数として取り扱うことによって、欠点を克服可能な巨視的モデルの提案を行う。巨視的モデルの定式化に対する妥当性は、修正サブレイヤーモデルと巨視的モデルの数値解析結果を比較することにより検証する。

第 5 章「多軸応力状態に対する完全弾塑性体のレイヤーから成るサブレイヤーモデルの巨視的評価手法」では、多軸応力状態に対して完全弾塑性体のレイヤーを有するサブレイヤーモデルを巨視的に評価する手法を提案する。多軸応力状態に対しては、一軸応力状態とは異なり、解析的に巨視的定式化が不可能な箇所が存在するため、直観的に妥当と考えられる二つの近似式を用いる。また、巨視的モデルの定式化の際には、熱力学の第二法則および最大塑性散逸の原理といった一般的に広く用いられている仮説のみを用い、巨視的モデルの理論的完成度の高さを示す。これらの近似式の妥当性については、硬化則を持たないサブレイヤーモデルと巨視的モデルの数値解析結果の比較を通して検証を行う。続いて、近似式の誤差について詳細な検討を行い、修正方法の提案を行う。修正方法の妥当性については、再度、サブレイヤーモデルとの比較を行い、検証する。さらに、Bounding surface モデルと巨視的モデルとの類似性を詳細に検討する。ここで、巨視的モデルの投影応力は二つの係数とともに再定義される。これにより多種の巨視的モデルを提案し、それらを Bounding surface モデルと比較することによって類似性の検討を行う。

第 6 章「多軸応力状態に対する硬化則を考慮した修正サブレイヤーモデルの巨視的評価手法の提案

および巨視的モデルの実用性の検討」では、第 3 章で提案した多軸応力状態に対する修正サブレイヤーモデルを巨視的に評価し、硬化則を考慮した巨視的モデルの提案を行う。その中で、硬化則を考慮していない巨視的モデル同様、二つの直観的な近似式を用いる。また、第 5 章で提案した手法と同様に硬化則を有する巨視的モデルの修正方法を提案する。続いて、巨視的モデルの実用性を鑑み、軸応力とせん断応力のみが生じる応特殊応力状態への縮約を行う。ここで、第 4 章で提案した一軸応力状態に対する巨視的モデルの数値解析結果との比較を通して巨視的モデルの理論的整合性の検証を行う。また、第 3 章にて提案した修正サブレイヤーモデルとの比較を行い、本章での硬化則を考慮した巨視的モデルの定式化および硬化則を考慮した場合の修正方法の妥当性を検証する。

第 7 章「結論」では、一軸および多軸応力状態に対して適用可能かつ高精度に実現象を再現できるとともに、計算負荷の小さい材料構成則の開発を目的とした本研究において各章で得られた結果および今後の課題について述べる。

目次

第１章　序論 …… 1

１.１　本研究の背景 …… 2
１.２　本研究に関連した既往の研究 …… 4
１.３　本研究の目的 …… 7

第２章　一軸応力状態に対する修正サブレイヤーモデル …… 14

２.１　はじめに …… 15
２.２　古典的サブレイヤーモデルの問題点および新たな硬化則の提案 …… 17
　２.２.１　サブレイヤーモデルの概要
　２.２.２　各レイヤーの特性
　２.２.３　古典的サブレイヤーモデルの問題点および新たな等方硬化則の提案
　２.２.４　サブレイヤーモデルの新たな移動硬化則の提案
２.３　サブレイヤーモデルへの非硬化領域の概念の適用 …… 20
　２.３.１　サブレイヤーモデルにおける塑性ひずみ球
　２.３.２　非硬化領域の概念を有するサブレイヤーモデルの等方硬化則および移動硬化則
　２.３.３　微係数間の関係および飽和値の導出
２.４　数値解析 …… 27
　２.４.１　数値解析アルゴリズム
　２.４.２　塑性ひずみ球の性質
　２.４.３　実験結果との比較による妥当性検証
２.５　まとめ …… 32

第３章　修正サブレイヤーモデルの多軸応力状態への拡張および改善 …… 49

３.１　はじめに …… 50
３.２　修正サブレイヤーモデルの多軸応力状態への拡張 …… 52
　３.２.１　各レイヤーの特性
　３.２.２　等方硬化則および移動硬化則
　３.２.３　サブレイヤーモデルにおける塑性ひずみ球
　３.２.４　塑性ひずみ球を有するサブレイヤーモデルの等方硬化則および移動硬化則

３.２.５　微係数間の関係および飽和値の導出
３.３　実現象再現のための修正サブレイヤーモデルの改善 ……59
３.３.１　多軸応力状態の実現象に対する修正サブレイヤーモデルの欠点
３.３.２　修正サブレイヤーモデルの改善
３.４　数値解析……62
３.４.１　特殊な応力場への縮約および数値解析アルゴリズムの構築
３.４.２　一軸応力状態の修正サブレイヤーモデルとの比較による理論的整合性の検証
３.４.３　実験結果との比較による妥当性検証
３.４.４　数値解析結果に対する考察
３.５　まとめ……70

第４章　一軸応力状態に対する硬化則を考慮した修正サブレイヤーモデルの巨視的評価手法 …… 85

４.１　はじめに……86
４.２　硬化則を考慮したサブレイヤーモデルの巨視的定式化 ……87
４.２.１　各レイヤーの特性
４.２.２　巨視的弾性構成則
４.２.３　巨視的硬化則および他の巨視的応力
４.２.４　巨視的降伏条件式
４.２.５　過去の履歴の取り扱い
４.３　数値解析……94
４.３.１　数値解析アルゴリズム
４.３.２　修正サブレイヤーモデルとの比較による妥当性検証
４.４　まとめ……97

第５章　多軸応力状態に対する完全弾塑性体のレイヤーから成るサブレイヤーモデルの巨視的評価手法 …… 102

５.１　はじめに……104
５.２　硬化則を考慮しない巨視的モデルの定式化 ……105
５.２.１　微視的モデルの概要および各レイヤーの特性
５.２.２　巨視的弾性構成則および巨視的降伏応力
５.２.３　その他の巨視的応力
５.２.４　過去の履歴の取り扱い
５.２.５　近似式の導入による巨視的降伏条件式の導出

５.２.６　近似式の導入による巨視的塑性流れ則の導出
５.２.７　Loading surface の中心および投影中心応力
５.３　数値解析……113
５.３.１　数値解析アルゴリズム
５.３.２　接線係数テンソル
５.３.４　数値解析例
５.４　巨視的モデルとサブレイヤーモデルの差異に関する検討および修正方法の提案……119
５.４.１　誤差に対する考察
５.４.２　過去の微視的応力の方向近似による修正方法
５.４.３　区分的な巨視的評価による修正方法
５.４.４　修正方法の妥当性検証のための数値解析
５.５　Bounding surface モデルと巨視的モデルの類似性 ……126
５.５.１　Bounding surface モデルの概要と分類
５.５.２　巨視的モデルの投影応力方向の再定義
５.５.３　巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則の再定義
５.５.４　巨視的変数の変化率
５.５.５　Loading surface の中心の変化率に関する考察
５.５.６　数値解析例
５.６　まとめ……134

第６章　多軸応力状態に対する硬化則を考慮した修正サブレイヤーモデルの巨視的評価手法の提案および巨視的モデルの実用性の検討…… 156

６.１　はじめに……157
６.２　硬化則を考慮した巨視的モデルの定式化 ……158
６.２.１　各レイヤーの特性
６.２.２　巨視的応力および巨視的硬化則
６.２.３　過去の履歴の取り扱い
６.２.４　近似式の導入による巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則の提案
６.２.５　硬化則を考慮した巨視的モデルにおける修正方法
６.３　特殊な応力場に対する巨視的モデルの縮約 ……170
６.３.１　縮約の条件に基づく各レイヤーの特性
６.３.２　巨視的弾性構成則、巨視的応力および巨視的硬化則
６.３.３　巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則
６.３.４　数値解析アルゴリズム
６.３.５　接線係数テンソル
６.３.６　一軸応力状態に対する巨視的モデルとの比較による理論的整合性の確認

６.３.７　サブレイヤーモデルとの比較による妥当性の検証
６.４　まとめ……181

第７章　結論および今後の課題 …… 190

本研究に関連して著者が発表した論文……194
参考文献……197
Appendix1,2,3……205

第１章　序論

１.１　本研究の背景

１.２　本研究に関する既往の研究

１.３　本研究の目的

１.１　本研究の背景

これまでに多種の鋼構造物が建設されており、大規模かつ複雑な形状の鋼構造も建設されている。また、今後も鋼構造の需要は高まることが予想される。

我が国は、世界有数の地震大国であり、毎年多く地震が発生している。大地震時においては、多大なエネルギーが構造物に入力されることにより部材に塑性変形が生じ、構造物が被害を受けることは避けられない。

構造物の塑性変形の評価に対しては、塑性設計法及び限界状態設計法が既に導入されている。これらの設計法の導入後、汎用の有限要素法コードや構造解析ソフトの普及およびコンピューターの高度化と相まって、コンピューターシミュレーションを用い構造物応答を把握する需要が、研究者のみならず、構造設計者の間でも高まっており、日常的に実施されている。今後、こうした傾向はより一層進んでいくことが予想される。

近年、E-Defence の実大三次元震動破壊実験施設を用いた実験(島田(2008)、赤沢(2008)、松岡(2009)、山田(2009)、島田(2010)、笠井(2011,2012))に代表されるように、地震時の建築構造物の大局的および局所的な挙動を解明するための実大構造建物の実験が実施されている。実大構造建物の実験は、局所損傷から全体損傷の関連性、崩壊メカニズムの解明、非構造材と構造部材の挙動の相関など縮小実験および構造部材実験では再現不可能な地震時の構造物の実現象を再現可能である。また、E-Defence の実験と並行して開発されているのが、数値震動台 E-Simulator(堀(2007))である。E-Simulator は、高度な計算機を用いることを前提として、構造物全体をソリッド要素やシェル要素でモデル化することよって構造物の破壊過程を仔細に捉える汎用有限要素法の開発を目的としている。また、E-Simulator は、世界最大規模の震動台 E-Defence を用いても実施することが困難な超高層ビルや橋梁などの実験を数値上で行うことを想定している(宮村(2008,2010)、秋葉(2011))。その開発過程で、既に構造実験の再現(井根(2007a,b,2008a,b,c)山下(2011))、E-Defence で実施された実験結果の再現(宮村(2009)、山下(2012))が報告されている。また、E-simulator の他にも、E-defence で行われた実験の数値解析による再現が行われている(小高(2011)、小橋(2011)、松田(2011)、Fig.1-1 参照)。以上の観点から E-Defence における実験およびその再現のための大規模解析は、構造物の安全性の評価、構造物の耐震性の向上などに資する非常に重要な研究であると言える。

E-Simulator の解析に代表されるような大規模解析は、膨大な自由度数を取り扱うため、計算負荷が非常に大きいという特徴を持つ。今日、コンピューターにおける計算・処理速度は日々進歩を続けており、また、スーパーコンピューターを用いた大規模解析を行う例も報告されているが、多大な計算

時間を要する。計算負荷に対する問題は、コンピューターの発達により将来解決されることが期待されるが、精確な構造物の挙動の解明は、地震大国である我が国にとって早急に対処すべき課題であり、依然として計算負荷の小さいシミュレーション手法の確立は重要な課題の一つであると言える。

前述したように、地震時に、構造物には塑性変形が生じ、構造物応答は非線形となる。構造物における非線形性は、主に材料非線形性と幾何学的非線形性に大別することができる。材料非線形性は、材料構成則に依存し、構造物に多大な塑性変形が生じる場合には材料構成則の選択が、数値解析結果の精度に大きく依存する。材料構成則に必要とされる精度は、問題に依存する。例えば構造物の大局的な評価に対して、詳細な解析は重要ではないと考えられるが、局部的な評価が必要である場合は、詳細な解析が重要であると考えられる。また、材料構成則の諸式は対象とする応力状態により異なる記述となる。建築構造物では、従来より、梁要素を用いた解析を多用しており、一軸応力状態において高精度に鋼材の実現象を再現可能な材料構成則は重要である。一方、前述したように、建築構造物局部の挙動を仔細に解明するための大規模解析が実施されてきている。このような解析では、地震時に構造物の接合部等に生じる複雑な多軸応力場を再現するためにソリッド要素およびシェル要素が主に用いられるため、材料構成則は多軸応力状態に対して適用可能であり、応力レベルでの高精度な再現性が求められる。また、有限要素法において応力の計算は、積分点毎に行われる必要があることから計算負荷を小さくする手法が必要である。計算負荷の低減のために大きなひずみ増分に対しても精確な解を得ることを目的とした手法が応力積分においていくつか提案されている。その中で、Ortiz(1985)による前進型オイラー法と後退型オイラー法の一般形である Generalized trapezoidal return mapping アルゴリズム、また、石田(1989)、飯島(1995)らによる高次の微係数の影響を考慮可能な摂動法が挙げられる。

今日、鋼構造において用いられる金属材料は、軟鋼のみではなく、極低降伏鋼、高張力鋼、アルミニウム鋼、ステンレス鋼等多様化の傾向にある。これらの材料は、それぞれ異なる材料特性を有しているが、実用上の観点から材料構成則は各々の金属の挙動をパラメータの変化によって再現可能であることが望ましいと言える。

これらを踏まえて、本研究では、一軸応力状態および多軸応力状態に対して金属系材料の実現象を表現可能、かつ計算負荷が小さいこと材料構成則の提案を目的とする。

１.２　本研究に関する既往の研究

材料は、その変形性状から可逆的な変形状態である弾性状態と不可逆的な変形状態である塑性状態に大別することができる。弾性状態を取り扱う弾性論は 19 世紀中ごろから発展を遂げたのに対して、塑性状態を扱う塑性論は 20 世紀に入ってから多数の研究が行われ発展を遂げてきた理論である。塑性力学は、1864 年に Tresca が実験結果より最大せん断力が限界値に達した時に金属の降伏が生じることを報告したに端を発する(最大せん断応力説)。その後、Tresca の降伏条件式は、Guest により様々な組み合わせ応力の下で成り立つことが実験により検証された。1913 年には、von Mises が偏差応力の第二不変量が限界値に達すると降伏に至るという条件を提案した(最大せん断ひずみエネルギー説)。また、Bridgman による高圧下での延性材料の実験結果により静水圧応力が延性材料の降伏に影響を与えないことが報告され、この実験的事実を満足する Tresca と von Mises の降伏条件式に対する重要性が高まったと言える。現在でも Tresca と von Mises の降伏条件式は、一般的に用いられており、特に、後者は解析的な扱い易さから多用されている降伏条件式である。その後、20 世紀半ばに、Hill により塑性力学が一つの理論として確立され、それに基づいた様々な研究がなされてきた。さらに、近年では、有限要素法の発展とそれに伴うコンピューターの計算処理能力の向上により、実験結果の精確な再現のための塑性論に基づく材料構成則が多数報告されてきた。

これまでに実験結果の再現のために多種の材料構成則が提案されている。材料構成則は、古典的塑性論に基づいた現象論的塑性モデル、結晶塑性論に基づいた結晶塑性モデルに大別することができる。本論文では、計算負荷が小さく、より実用的であることから現象論的塑性モデル(本論文中で材料構成則は現象論的塑性モデルを指す)について研究を行っている。材料構成則は弾塑性遷移過程の実現象を再現するための力学モデルとひずみ硬化域の実現象を表現するための硬化則により構築されていると考えられる(Fig.1-2)。

力学モデルは、一軸応力状態のみに適用可能なものと一軸および多軸応力状態に適用可能なものに大別することができる。一軸のみに適用可能な力学モデルとしては、Radial mapping モデル(Yokoo(1977)、小野(1997))や Menegotto-Pinto(笠井(2006)、山崎(2006)、張(1991)、藤本(2006))モデルが挙げられる。これらのモデルは、要素実験から得られた応力ひずみ関係を観察し、関数・ルールを定義することによって応力ひずみ曲線を近似するモデルであり、準用に対する簡便さから広く用いられている。しかしながら、塑性論に準じていないため原則的には、多軸応力状態への適用は不可能である。

一軸および多軸状態応力状態に対して適用可能な力学モデルとしては Mroz(1967,1969)により提案された Multi-surface モデルおよび Besseling(1958)および Iwan(1966,1967)により提案され、山田(1980)によ

り用いられたサブレイヤーモデルが挙げられる。サブレイヤーモデルはフラクションモデルもしくはDistributed Element モデルともよばれる。Multi-surface モデルは応力空間上に仮想の曲面を想定するモデル(Fig.1-4 参照)であり、サブレイヤーモデルは複数の仮想のレイヤーを想定する力学モデルである(Fig.1-3 参照)。両者は、曲面もしくはレイヤーの逐次的な降伏により遷移硬化の本質を表現可能であり、また、Masing の提案したバウシンガー効果に対するルールを満足するため物理的に有効な力学モデルである。特に、後者は、非常に単純なルールにより各変数が定義されており、物理的に明快なモデルといえる。しかしながら、両者とも各曲面もしくはレイヤーに対して計算を行い、不可逆な諸量を記憶する必要があるため計算負荷が大きいという欠点を有する。さらに、多軸応力状態に対して適用可能な力学モデルとしては、Dafalias(1975,1976)により提案された Bounding surface(BS)モデルおよびKrieg(1975)により提案された Two surface モデルが挙げられる (これらのモデルは本質的に同一であるため本論文ではこれらのモデルを総称して Bounding surface(BS)モデルとよぶ)。BS モデルは、応力空間上に Bounding surface や Loading surface といった曲面を想定しそれらの位置関係により応力ひずみ関係を決定する力学モデルである(Fig.1-5 参照)。また、Krieg(1975)は、BS モデルが、無限の曲面を持つMulti-surface モデルと考えることができると言及している。BS モデルは、サブレイヤーモデルのように各レイヤーに対して計算を行う必要がないため計算負荷が小さいという特徴を持つが、各曲面に関する諸量の変化率がある仮定により決定されているため物理的根拠が曖昧な力学モデルということができる。この他にも、後述する Armstrong-Frederick の移動硬化則を重ね合わせた Chaboche モデルがChaboche(1979,1983,1986)により多軸応力状態に適用可能な力学モデルとして挙げられる(Fig.1-6 参照)。このモデルは、定式化の容易さから広く用いられている力学モデルであるが、Armstrong-Frederick の移動硬化則が仮定により決定されているため BS モデルと同様、物理的根拠が曖昧であり、また Masing のルールを満足しないという欠点を持つ。また、Chaboche モデル(Chaboche(1983))はより一部の BS モデルと相似性を有していることが明らかにされている。さらに、他にも、応力ひずみ曲線をバウシンガー部と骨格部とに便宜的に分けることによる簡易な表現を試みた力学モデルも提案されている(秋山(1990),山田(2002))おり、また、多軸応力状態への拡張が試みられている(松本(2003,2005))が十分な精度を有しているとは言い難い。

ひずみ硬化域の現象を再現するために、これまでに様々な硬化則が提案されている。硬化則は、移動硬化則および等方硬化則に大別することができる。既往の移動硬化則(例えば Neto(2008))としてはPrager あるいは Ziegler の移動硬化則のほかに Armstrong-Frederik の移動硬化則等が挙げられる。一方、等方硬化則においては、線形等方硬化則のほかに Zarvel(1978)による等方硬化則が提案されている。そ

の後、これらの硬化則のみでは、実現象を表現するには、不十分であるとして、等方硬化則を適切に抑制するための非硬化領域の概念が Chaboche(1979,1983)により提案され、Macdowell(1985a,b,c), Ohno(1982)により体系的に定式化されている(Fig.1-7)。また、この概念は、田中(1988,1991)により等方軟化も表現可能なものに修正されている。

力学モデルに硬化則および非硬化領域の概念を付与した多軸応力状態に対して適用可能な材料構成則が既にいくつか提案されている。例えば、吉田(2002)が提案した非硬化領域の概念を有する BS モデルは、スプリングバック解析のために提案されており、精度の高い結果を示している。また、田中(1988,1991)により提案された非硬化領域の概念を有する Chaoboche モデルは、非比例載荷に対して非常に精度のよい解析結果を示している。しかしながら、これらのモデルは一軸および多軸応力状態に対する様々な載荷パターンに対する検討(ランダム載荷等)が実施されておらず、また、Masing のルールを満足しない BS モデルと Chaboche モデルを基本としていることから汎用性が疑わしい部分があると言える。一方、Masing のルールを満たすサブレイヤーモデルを基本とし、硬化則等を考慮した材料構成則がいくつか提案されている。例えば、鈴木(1986)による非硬化領域の概念を適用したサブレイヤーモデルや Chiang(1997a,b)により非線形硬化則を考慮したサブレイヤーモデルなどが提案されている。しかし、前者は、軟化現象を表現することができず、また、弾性核の過膨張という欠点を有している。後者は、応力振幅の飽和現象を表現することができず、また、古典的サブレイヤーモデルの欠点を有している(2 章参照)。これらを踏まえると、これまでに提案された材料構成則では実現象の再現には十分であるとは言えない。Table1-1 に各力学モデルの特徴をまとめて記す。

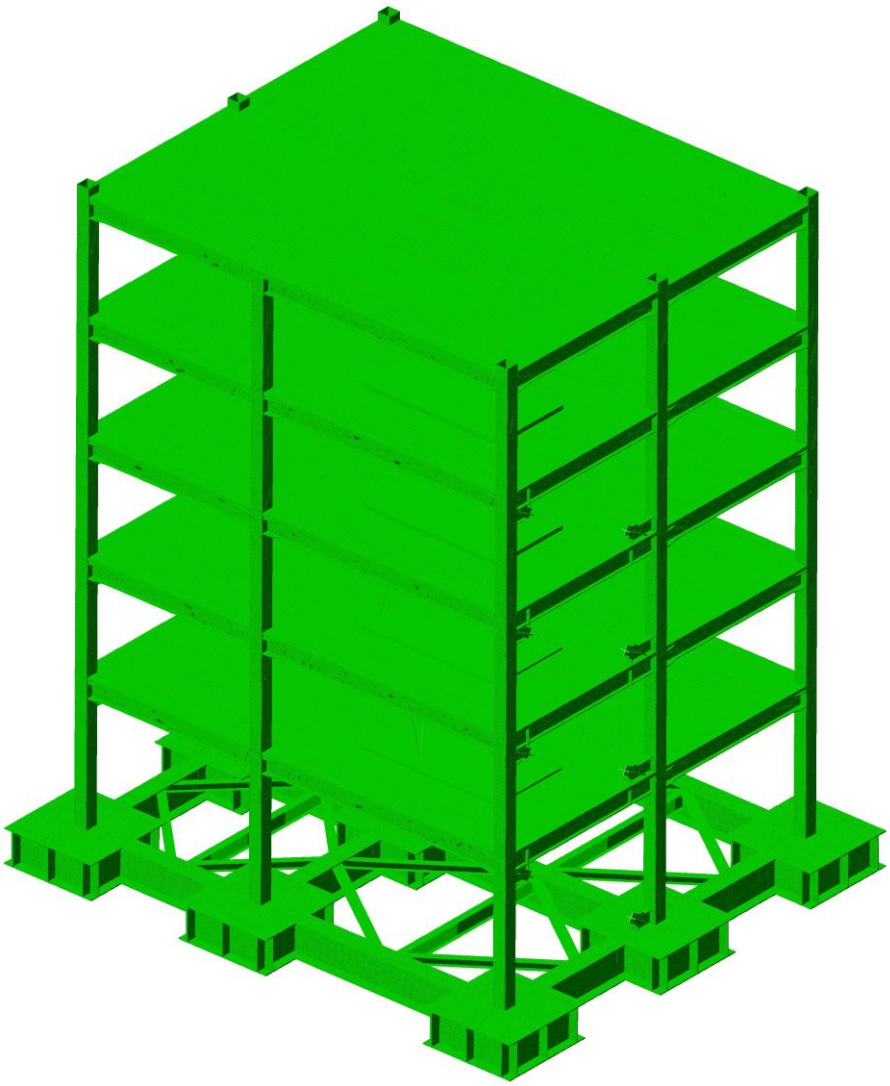
１.３　本研究の目的

建築構造物では、従来より、梁要素を用いた解析を多用しており、一軸応力状態において高精度に鋼材の実現象を再現可能な材料構成則は重要である。一方、近年、シェル・ソリッド要素を用いた建築構造物全体の解析を行い、詳細な挙動を再現する需要があり、多軸応力状態に対して適用可能な材料構成則に対する必要性が高まってきている。このような解析は、膨大な自由度数を有するため計算負荷の小さい材料構成則の開発が重要といえる。しかしながら、既往の材料構成則においてもこれらの条件を全て満足するには十分とはいえない。そこで、本研究では、一軸および多軸応力状態に対して適用可能かつ高精度に実現象を再現できるとともに、計算負荷の小さい[注)]材料構成則の開発を目的とする。その中で、物理的に明快であるという利点からサブレイヤーモデルを基本の力学モデルとして採用し、それを修正することにより実現象に対して高い再現性を有する材料構成則を構築するとともにサブレイヤーモデルの欠点である多大な計算負荷を低減する巨視的評価手法の提案を行っている。Fig.1-8 が本論文の内容に関するフローチャートである。

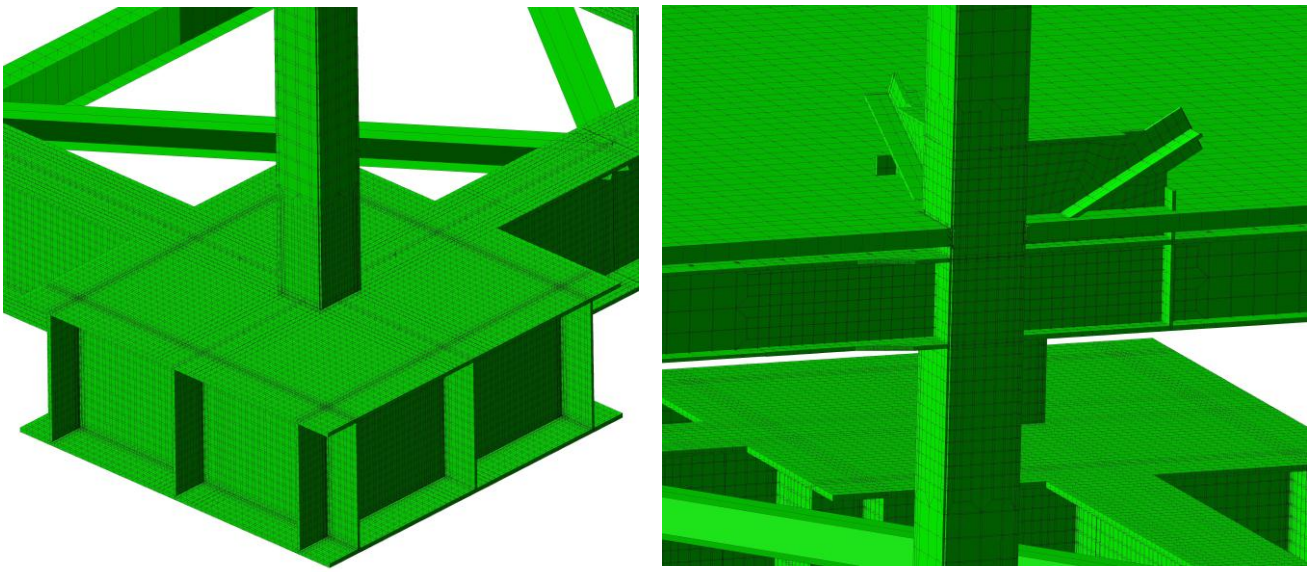
注)ここで、計算負荷は、材料構成則としての計算負荷であり、1.1 節で述べたような積分手法に対する計算負荷ではない。積分手法による計算負荷の低減については、本論文では対象外としている。

Chapter1

Figures and Tables



(a) Whole



(b) Part

Fig.1-1 Numerical model using shell elements

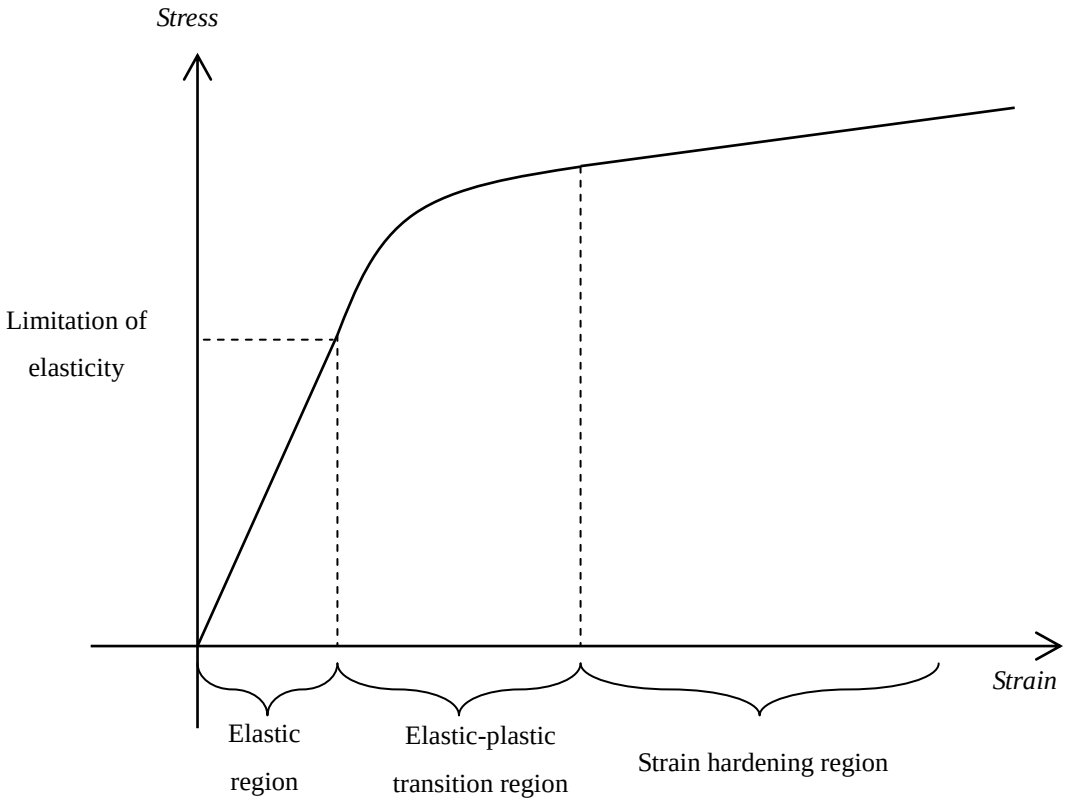
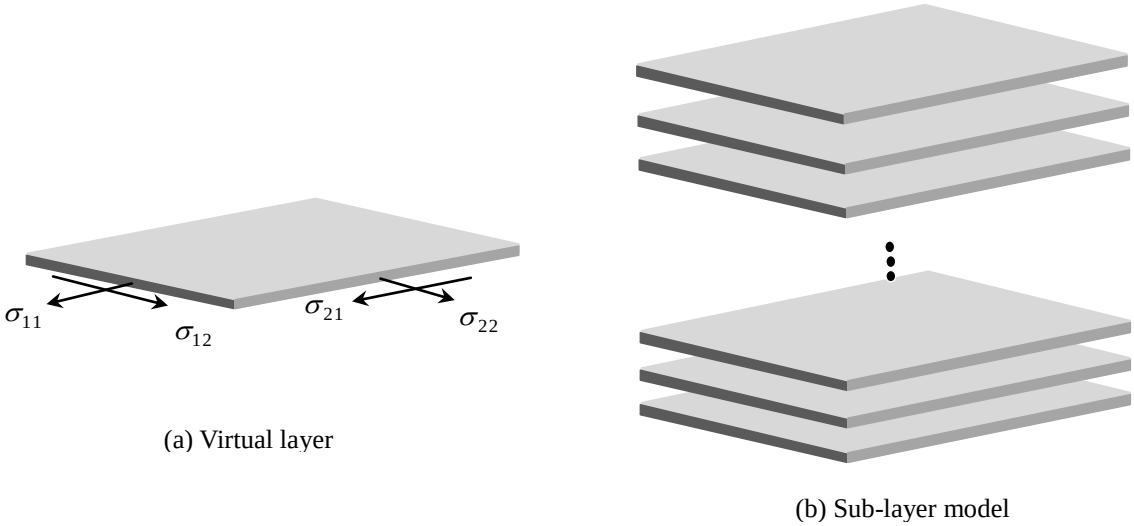


Fig.1-2 Each region for the stress-strain curve



(a) Virtual layer

(b) Sub-layer model

Fig.1-3 Conceptual diagram of the sub-layer model

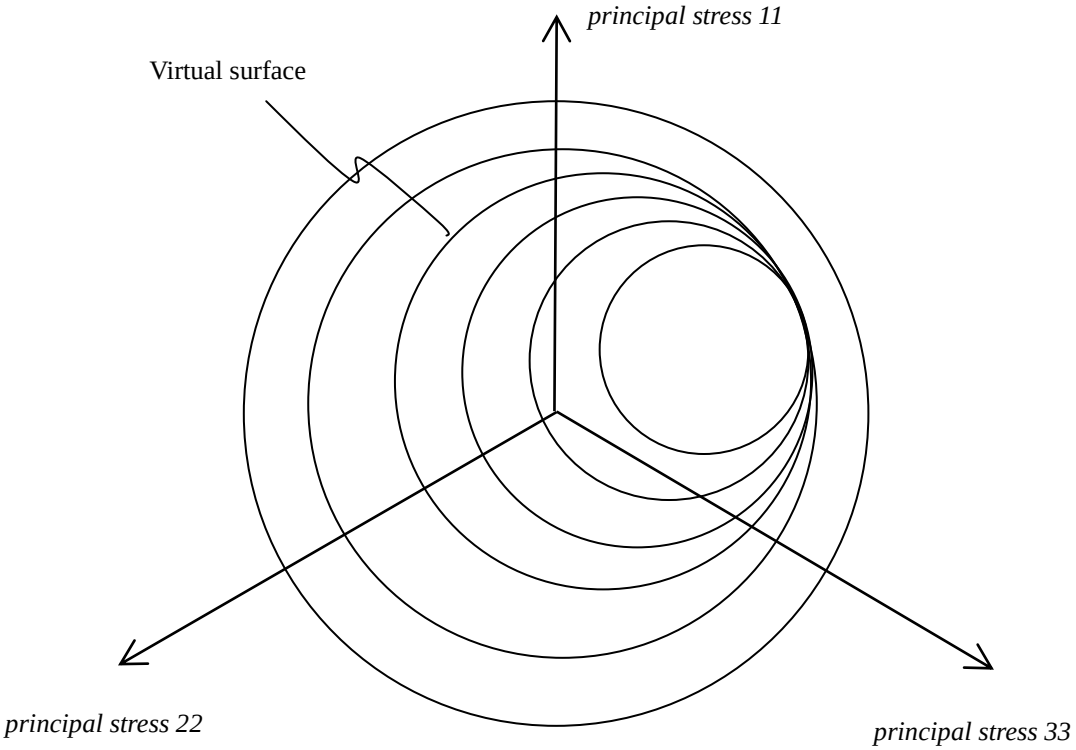


Fig.1-4 Conceptual diagram of the multi-surface model

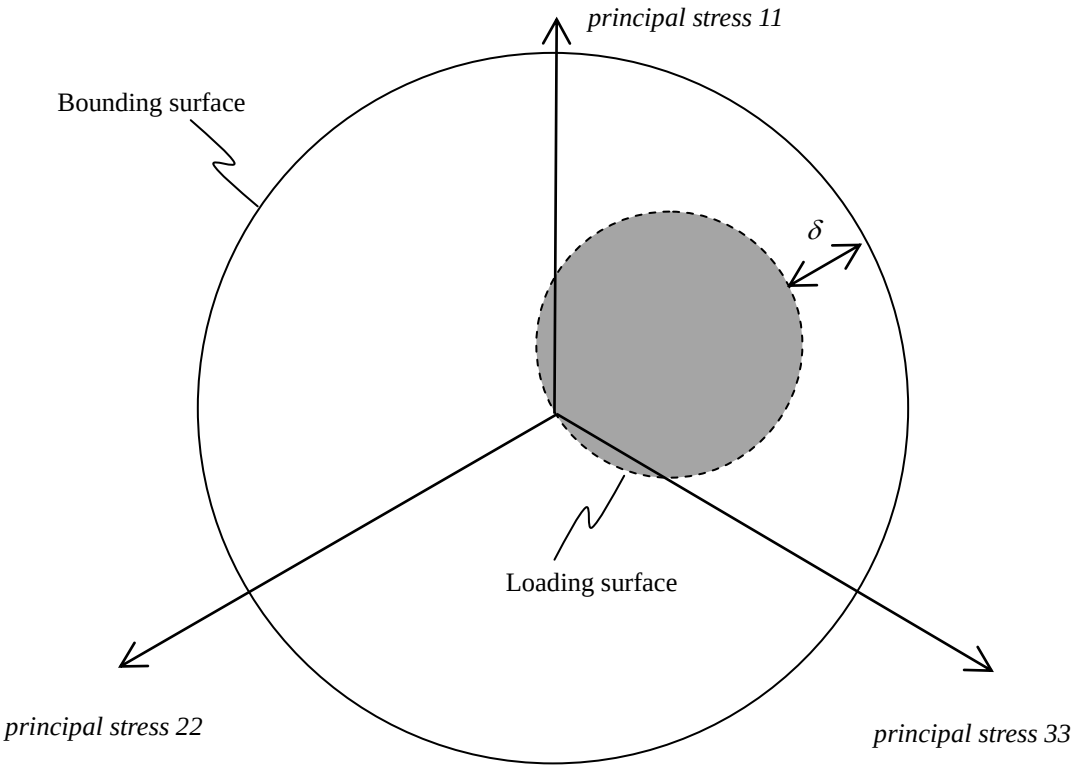


Fig.1-5 Conceptual diagram of the bounding surface model

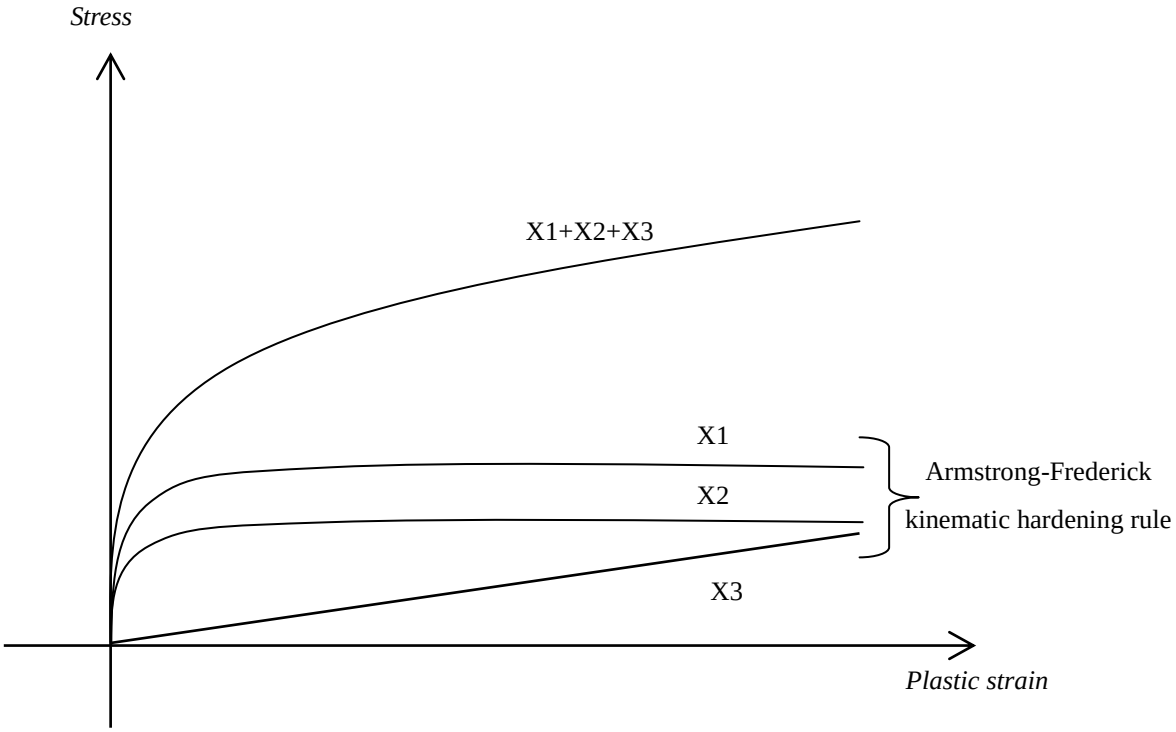


Fig.1-6 Stress plastic strain relation for Chaboche model

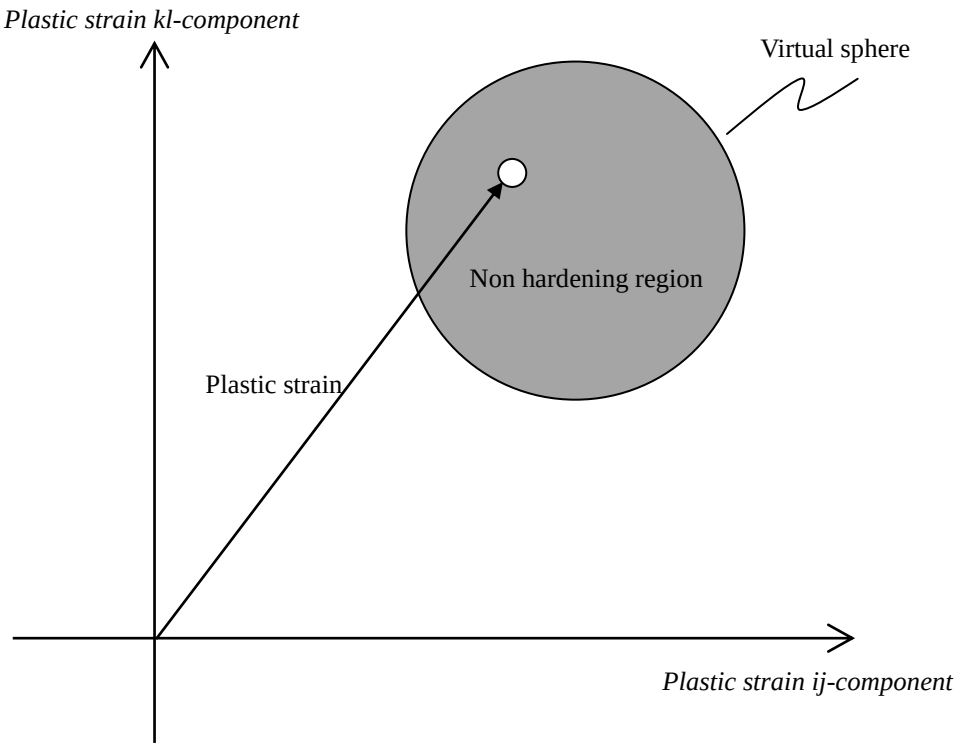


Fig.1-7 Conceptual diagram of the non-hardening region

Table1-1 Properties of constitutive models

Constitutive model	Application to multi-axial problems	Calculation cost	Masing's rule	Reproduciblity of hardening phenomena(Multi-axial)
Radial mapping model	×	○	×	-
Menegotto-Pinto model	×	○	×	-
Sub-layer model	○	×	○	?
Multi-surface model	○	×	○	?
Bounding surface model	○	○	×	△
Chaboche model	○	△	×	△

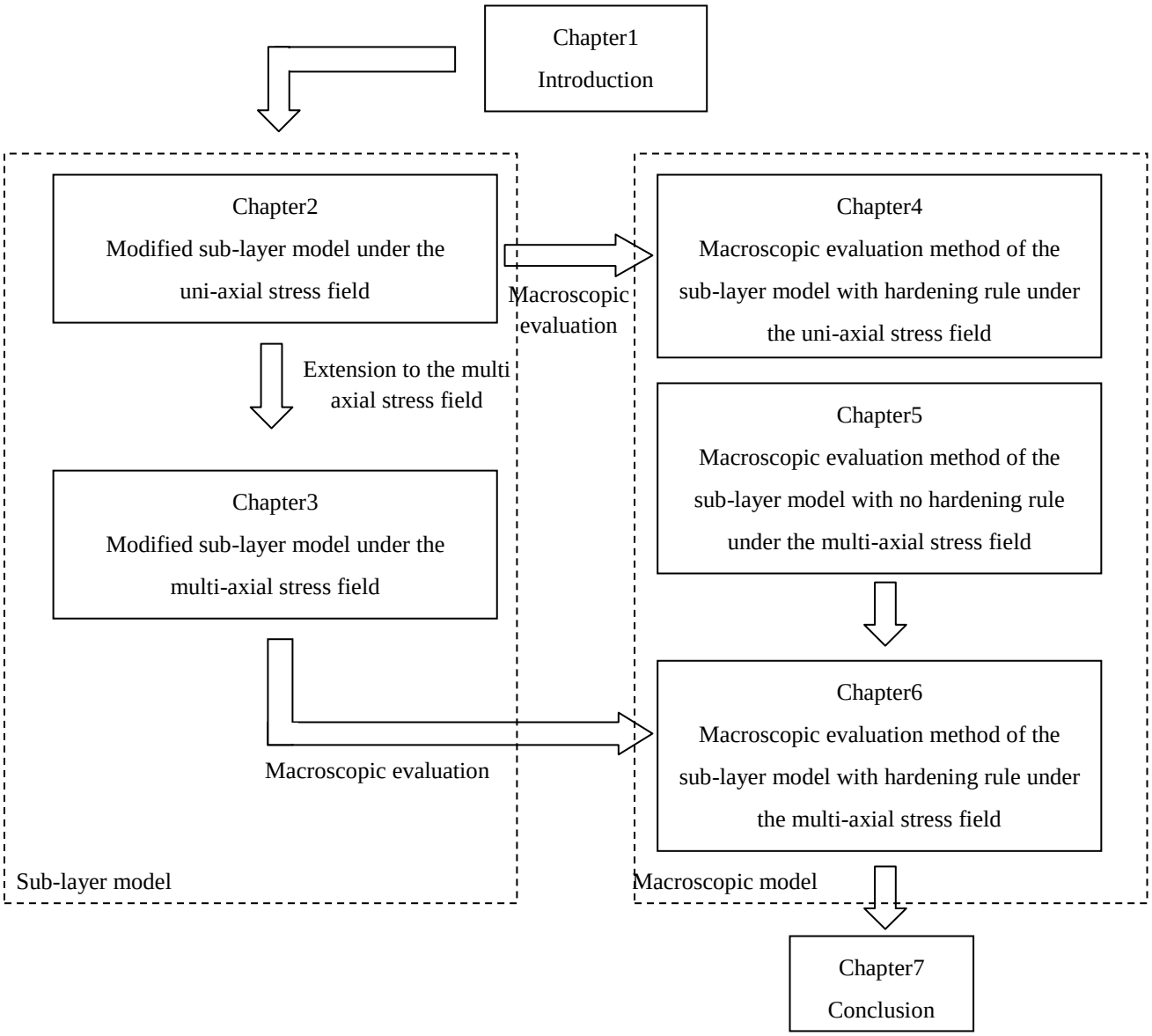


Fig.1-8 Flow chart of the thesis

第 2 章　一軸応力状態に対する修正サブレイヤーモデル

２.１　はじめに

２.２　古典的サブレイヤーモデルの問題点および新たな硬化則の提案

２.２.１　サブレイヤーモデルの概要

２.２.２　各レイヤーの特性

２.２.３　古典的サブレイヤーモデルの問題点および新たな等方硬化則の提案

２.２.４　サブレイヤーモデルの新たな移動硬化則の提案

２.３　サブレイヤーモデルへの非硬化領域の概念の適用

２.３.１　サブレイヤーモデルにおける塑性ひずみ球

２.３.２　非硬化領域の概念を有するサブレイヤーモデルの等方硬化則および移動硬化則

２.３.３　微係数間の関係および飽和値の導出

２.４　数値解析

２.４.１　数値解析アルゴリズム

２.４.２　塑性ひずみ球の性質

２.４.３　実験結果との比較による妥当性検証

２.５　まとめ

２．１　はじめに

建築構造においては、従来より、軸応力のみを考慮した梁要素等の数値解析が多用されており、一軸応力状態に対して実現象を高精度に再現可能な材料構成則の開発は重要である。一方、近年、E ディフェンスでの実験に代表されるような実大建築構造物の振動実験が行われており、実験結果の再現のためにシェル、ソリッド要素を用いた構造物全体の解析が行われていることから、多軸応力状態に対して適用可能な材料構成則が望まれる。材料構成則は、基本となる力学モデルに硬化則を付与することによって構築される。一軸および多軸状態応力状態に対して適用可能な力学モデルとしては Mroz(1967,1969)により提案された Multi-surface モデルおよび Besseling(1958)および Iwan(1966,1967)により提案され、山田(1980)により用いられたサブレイヤーモデルが挙げられる。サブレイヤーモデルはフラクションモデルもしくは Distributed Element モデルともよばれる。Multi-surface モデルは応力空間上に仮想の曲面を想定するモデルであり、サブレイヤーモデルは複数の仮想のレイヤーを想定する力学モデルである。両者は、曲面もしくはレイヤーの逐次的な降伏により遷移硬化の本質を表現可能であり、また、Masing の提案したバウシンガー効果に対するルールを満足するため物理的に有効な力学モデルである。特に、後者は、非常に単純なルールにより各変数が定義されており、物理的に明快なモデルといえる。ひずみ硬化域の現象を再現するために、これまでに様々な硬化則が提案されている。硬化則は、移動硬化則および等方硬化則に大別することができる。既往の移動硬化則(Neto(2008))としては Prager あるいは Ziegler の移動硬化則のほかに Armstrong-Frederik の移動硬化則等が挙げられる。一方、等方硬化則においては、線形等方硬化則のほかに Zarvel(1978)による等方硬化則が提案されている。その後、これらの硬化則のみでは、実現象を表現するには、不十分であるとして、等方硬化則を適切に抑制するための非硬化領域の概念が Chaboche(1979,1983,1986)により提案され、Macdowell(1985a,b,c), Ohno(1982)により体系的に定式化されている。また、この概念は、田中(1988,1991)により等方軟化も表現可能なものに修正されている。　更に、上記の概念を考慮した力学モデルとしては、田中(1988,1991)による Chaboche モデルや鈴木(1984,1986)によるサブレイヤーモデルが挙げられる。前者のモデルは、比例載荷および非比例載荷における実現象に対して再現性を有するが、各変化則が複雑であり、多くの材料定数を有していることから実用性に乏しく、また、Chaboche モデルを基本としていることから Masing のルールを満たさないという欠点を持つ。後者のモデルは、繰返し載荷時の等方軟化を表現不可能なことから、実現象の再現に対して十分なモデルとは言えない。

これらを踏まえて、本章では、一軸応力状態に対して実際の硬化現象を高精度に再現可能である

とともに単純なルールにより表現される非硬化領域の概念を有する修正サブレイヤーモデルを提案することを目的としている。以下に本章での内容を示す。

(1)　2.2 節では、一軸応力状態において等方硬化を有する古典的サブレイヤーモデルの取り扱い上の留意点を述べ、それを克服するための新たな等方硬化則を提案する。また、移動硬化則も同時に提案する。

(2)　2.3 節では、一軸応力状態において田中(1988,1991)により修正された非硬化領域の概念を(1)で提案された硬化則を有するサブレイヤーモデルに適用する。また、この概念の定式化の際に、各微係数間に或る関係を導入することにより諸式の単純化を図る。

(3)　2.4 節では、(2)で構築したモデルを一軸応力状態における鋼材の実験結果(貞末(2006)、空處(2006))と比較し、提案モデルの妥当性を検証する。

２.２　古典的サブレイヤーモデルの問題点および新たな硬化則の提案

２.２.1　サブレイヤーモデルの概要

サブレイヤーモデルは、Fig.2-1(a)に示すように、降伏応力の異なる複数の仮想レイヤーを想定する力学モデルである。また、サブレイヤーモデルでは、ひずみは全レイヤーで均一、応力は全レイヤーの応力の平均で表され、各レイヤーが逐次的に降伏することにより弾性状態から弾塑性状態への滑らかな移行(弾塑性遷移過程)を表現可能となる。有限要素法では、レイヤーが各積分点に設定される。Fig.2-1(b)は応力ひずみ関係を表しており、細線が各レイヤーの応力、太線がサブレイヤーモデルとしての応力を表している。

２.２.２　各レイヤーの特性

各レイヤーに対して線形等方硬化則を有する N 個のレイヤーから成るサブレイヤーモデル(古典的サブレイヤーモデルと呼ぶ)を考える。ここで、レイヤーの厚さ方向に仮想座標系 $\zeta\left(-1/2 \le \zeta \le 1/2\right)$ を想定すると、各レイヤーの位置は仮想座標系上の点 $\zeta_j\left(j=1\sim N\right)$ により決定される。Chiang(1994a,b)は、各 ζ_j の間隔を不均一にすることによって計算負荷の低減を図る手法を提案しているが、ここでは、理論の単純化のためにレイヤー j の特性は、各 $\zeta_j\left(j=1\sim N\right)$ の間隔は均等であるとする。各レイヤーの特性は以下のように定義される。

弾性構成則：$\sigma\left(\zeta_j\right)=E\left(\varepsilon\left(\zeta_j\right)-\varepsilon_p\left(\zeta_j\right)\right)$ (2-1)

等方硬化則：$\dot{\sigma}^I\left(\zeta_j\right)=E^I\left|\dot{\varepsilon}_p\left(\zeta_j\right)\right|$ (2-2)

降伏条件式：$\phi\left(\zeta_j\right)=\left|\sigma\left(\zeta_j\right)\right|-\left(\sigma_y\left(\zeta_j\right)+\sigma^I\left(\zeta_j\right)\right)$ (2-3)

塑性負荷条件：$\phi\left(\zeta_j\right)=\dot{\phi}\left(\zeta_j\right)=0$ (2-4)

ここに、E はヤング係数、E^I は等方硬化の係数、ε はひずみ、ε_p は塑性ひずみ、σ は応力、σ^I は等方硬化則により生じる弾性区間の変化(等方硬化応力と呼ぶ)、σ_y は初期降伏応力(一定)、$\left(\dot{*}\right)$ は変数 $\left(*\right)$ の変化率を表す。ここで、各レイヤーの応力 $\sigma\left(\zeta_j\right)\left(j=1\sim N\right)$ を微視的応力とする。同様に他のレイヤー毎の変数についても定義し、これらを微視的変数と呼ぶ。また、微視的初期降伏応力は、Fig.2-1(a)に示すように ζ 軸上で連続かつ単調減少な関数とする。なお、σ_y の具体的な式は 2.4.3 項にて述べる。

次に、サブレイヤーモデルの諸量について述べる。サブレイヤーモデルでは、各レイヤーは並列

に配置されており全レイヤーのひずみは等しい。これを e と定義すると、以下のように表される。

$$\varepsilon(\zeta_j) = \text{constant} = e \quad (j = 1 \sim N) \tag{2-5}$$

サブレイヤーモデルの応力は、微視的応力の全レイヤーにおける平均で表される。これを平均応力 s とすると、次のように表される。

$$s = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma(\zeta_j) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}E(e - \varepsilon_p(\zeta_j)) = E(e - e_p) \tag{2-6}$$

$$e_p = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_p(\zeta_j) \tag{2-7}$$

ここに、e_p は微視的塑性ひずみの全レイヤーにおける平均であり、平均塑性ひずみと呼ぶ。

２.２.３　古典的サブレイヤーモデルの問題点および新たな等方硬化則の提案

古典的サブレイヤーモデルは取り扱い時に留意すべき事項を有している。これらの留意点を把握するために 2.2.1 項のレイヤーの特性を持つ古典的サブレイヤーモデルの定振幅繰返し載荷時の数値解析結果を Fig.2-2 に示す。このとき、ひずみ振幅は 1～250 サイクル目までは 0.005、251 サイクル目に 0.008 としている。Fig.2-2 の実線は、1 および 251 サイクル目の結果を抽出している。以下に留意点を記す。

1) 1 サイクル目では、弾塑性遷移過程が表現されているが、251 サイクル目では、ほぼバイリニアーな挙動となる。これは、$\sigma^I(\zeta)$ が $\varepsilon_p(\zeta)$ であることが原因である。Fig.2-3 は古典的サブレイヤーモデルの $\sigma(\zeta), \sigma^I(\zeta)$ の挙動を示しており、Fig.2-3(a)に示すように処女載荷時では、$\sigma^I(\zeta)$ が $\varepsilon_p(\zeta)$ の関数であることから各レイヤーの $\sigma^I(\zeta)$ は不均一に増加する。その後、繰返し載荷が行われると、Fig.2-3(b)に示すように、$\sigma(\zeta) + \sigma^I(\zeta)$ は最終的に全レイヤーで均一となり、サブレイヤーモデルの応力ひずみ関係はバイリニアーな応答となる。

2) 繰返し載荷時に、$\zeta = 1/2$ における微視的初期降伏応力と等方硬化応力の和(弾性核)が塑性化の進展に伴い膨張し続け、応力ひずみ関係はやがて線形応答に陥る。これは、全ての等方硬化則における問題でもある。

なお、上記の留意点は多軸応力状態においても共通である。ここで、二つの留意点を克服するための新たな微視的等方硬化則として式(2-2)を次式のように再定義する。

$$\dot{\sigma}^I(\zeta_j) = -(\zeta_j - \zeta_c)\theta|\dot{e}_p| \tag{2-8}$$

ここに、$\zeta_c > 0$ は定数である。Fig.2-4 に示すように、$\theta|\dot{e}_p|$ は微視的等方硬化応力の増分が仮想座標系上で線形に変化すると考えた時に生じる直線と ζ 軸との回転角を示しており、ζ_c は回転中心である。また、$\dot{\sigma}^I$ は e_p の関数である。従って、式(2-8)の定義より $\sigma^I + \sigma_y$ が常に不均一となることから留意点(1)を克服できる。なお、$\theta = \theta(s^I)$ とし、具体的な式は鋼種毎に 2.4.3 項にて述べる。ここに、平均等方硬化応力 s^I は微視的等方硬化応力の平均、すなわちモデルとしての等方硬化応力と定義され、以下のように表される。

$$s^I = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma^I(\zeta_j) \tag{2-9}$$

式(2-8),(2-9)より s^I の変化率は次のように導出される。

$$\dot{s}^I = -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\zeta_j - \zeta_c)\theta|\dot{e}_p| = \zeta_c\theta|\dot{e}_p| > 0 \tag{2-10}$$

式(2-8),(2-10)より $1/2 \geq \zeta > \zeta_c$ において $\dot{\sigma}^I$ は減少するが、$\zeta_c > \zeta \geq -1/2$ において $\dot{\sigma}^I$ は増加する。また、$\zeta_c > 0$ から $\dot{s}^I$ は常に増加することを示唆している。従って、式(2-8),(2-10)によって弾性核を膨張させずに等方硬化を表現できることから留意点(2)を克服できる。Fig.2-2 に式(2-8),(2-10)の等方硬化則を有するサブレイヤーモデルの計算結果を示す(図中○で示す)。

２.２.４　サブレイヤーモデルの新たな移動硬化則の提案

微視的移動硬化則に対して以下の定義を導入する。

$$\dot{\sigma}^K(\zeta_j) = K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\dot{\sigma}^I(\zeta_j) \tag{2-11}$$

ここに、σ^K は移動硬化により生じる各レイヤーでの応力(移動硬化応力と呼ぶ)で、K は定数であり全硬化係数である。また、sgn は符号関数である。式(2-11)は、$\sigma^I + \sigma^K$ の e_p に対する変化率の和が常に K であることを示唆している。σ^K の平均として次のように平均移動硬化応力 s^K の変化率を定義する。

$$\dot{s}^K = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\dot{\sigma}^K(\zeta_j) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\{K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\dot{\sigma}^I(\zeta_j)\} = K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\dot{s}^I \tag{2-12}$$

さらに、式(3)に移動硬化を考慮し、降伏条件式を再定義する。

$$\phi(\zeta_j) = |\sigma(\zeta_j) - \sigma^K(\zeta_j)| - (\sigma_y(\zeta_j) + \sigma^I(\zeta_j)) \tag{2-13}$$

２.３　サブレイヤーモデルへの非硬化領域の概念の適用

硬化現象を表現するには、硬化則の考慮が必要不可欠である。定振幅繰返し載荷時に応力振幅がある値に漸近する現象（飽和現象(Chaboche(1979))）は等方硬化に深く関連しており、飽和現象の適切な評価は重要であると考えられる。飽和現象を表現するために、塑性ひずみ空間上に仮想の超球(塑性ひずみ球と呼ぶ)を想定する非硬化領域の概念が Chaboche(1979,1983,1986), Macdowell(1985a,b,c), Ohno(1982)により用いられている。この概念では、塑性ひずみ球内に塑性ひずみが存在する場合は等方硬化応力が増加せず、球外もしくは球上では等方硬化応力が増加する。つまり、球内が非硬化領域となる。しかし、この概念は、等方硬化応力の増加を適切に抑制できるが、減少を表現不可能である。これを受けて田中(1988,1991)は、その後、等方硬化応力の減少も表現可能な修正案を提案している。その中で、田中らは、塑性ひずみ球外および球上では等方硬化応力および球の半径は増加し、球内では等方硬化応力および球の半径が減少するルールを提案した。これにより、等方硬化および軟化を表現可能な概念が構築された。また、田中らにより修正された概念は、実現象を精度よく再現可能なものの、諸式が複雑である。そこで、本章では、田中らにより提案された塑性ひずみ球の定式化の際に現れる諸式間の変化率の関係を定義し、諸式の単純化を図るとともに、それを 2-2 で修正されたサブレイヤーモデルに適用することを試みる。

２.３.１　サブレイヤーモデルにおける塑性ひずみ球

一軸応力状態においてサブレイヤーモデルの塑性ひずみ球を以下のように定義する。

$$\Phi_e = \left| e_p - e_c \right| - e_r \tag{2-14}$$

一軸応力状態では、塑性ひずみ球は、式(2-14)のように区間で表される。$\Phi_e < 0$ で表される区間が非硬化領域である。ここに、e_r は非硬化領域で表される区間の半分、e_c は区間の中心を表している(Fig.2-5(a)参照)。田中らの概念では、Φ_e は正負両方の値を取ると定義されているが、本論文では、常に $\Phi_e \le 0$ と定義する。Φ_e の基本的なルールを以下のように定める。

$\Phi_e < 0$ の場合：$\dot{e}_r, \dot{s}^I < 0$,　$\dot{e}_c \propto -\dot{e}_p$

$\Phi_e = 0$ の場合：$\dot{e}_r, \dot{s}^I > 0$,　$\dot{e}_c \propto \dot{e}_p$

ここで、Fig.2-5 を用いて本論文で提案する Φ_e の概要を説明する。Fig.2-5 は、繰返し載荷における平均応力 s、平均等方硬化応力 s^I ならびに Φ_e の挙動を概念的に示している。処女載荷時には $e_r = 0$

とする。Fig.2-5(a)に示すように、時刻t_1からt_3までe_pは$\Phi_e=0$を満たすためe_r, s^Iは増加し、e_cは$\dot{e}_p$の方向に移動する。これは、その後、Fig.2-5(b)に示すように、時刻t_3において除荷を行い、さらに再載荷を行うと、時刻t_4において弾性比例限に達する。また、時刻t_4からt_5においてe_pが非硬化領域内を移動する、つまり$\Phi_e<0$となるため、e_r, s^Iは減少し、e_cは$-\dot{e}_p$の方向に移動する。時刻t_5においてe_pが再び$\Phi_e=0$の値を取り、その後、時刻t_5からt_6において続いて$\Phi_e=0$となるためe_r, s^Iは増加し、e_cは$\dot{e}_p$の方向に移動する。次に、式展開を行う。はじめに、以下の変数を定義する。

$$e_p = e_{po} + e_{pi} \tag{2-15}$$

ここに、e_{po}は$\Phi_e=0$で生じる塑性ひずみ、e_{pi}は$\Phi_e<0$で生じる塑性ひずみである。他の変数についても同様に$\Phi_e=0$での変数は$(\ )_o$、$\Phi_e<0$での変数は$(\ )_i$と表し、常に$(\ )=(\ )_o+(\ )_i$が成り立つものとする。e_rおよびe_cの変化率を次のように定義する。

$$\dot{e}_r = \frac{de_{ro}}{de_{po}}\dot{e}_{po} + \frac{de_{ri}}{de_{pi}}\dot{e}_{pi} \tag{2-16}$$

$$\dot{e}_c = \frac{de_{co}}{de_{po}}\dot{e}_{po} + \frac{de_{ci}}{de_{pi}}\dot{e}_{pi} \tag{2-17}$$

次に、応力振幅の飽和現象を表すためにΦ_eが満足すべき条件について考える。Fig.2-6は、原点を中心とした定振幅繰返し載荷において、応力振幅飽和時のsとe_pの関係およびΦ_eの挙動を概念的に表している。ここで、e_pの応力振幅飽和時における値(飽和値)をe_{ps}とする。また、他の変数についても飽和値を$(\ )_s$と表すことにする。先述したように、$\Phi_e<0$では、e_rは減少し、e_cは$-\dot{e}_p$の方向に移動する。従って、Fig.2-6に示すように、時刻t_1から時刻t_2までe_rは減少し、e_cは$-\dot{e}_p$の方向に移動する。その後、時刻t_2から時刻t_3までe_rは増加し、e_cは$\dot{e}_p$の方向に移動する。ここで、応力振幅が飽和値に達するには$\Phi_e(t_1)$が$\Phi_e(t_2)$を経て、$\Phi_e(t_3)$と一致することが条件となる。これを満たすには、次式が成り立つ必要がある。

$$e_r(t_1) - e_r(t_2) = \int_{t_1}^{t_3} de_{ro} \tag{2-18}$$

$$e_r(t_1) + \mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\int_{t_1}^{t_3} de_{co} = e_r(t_2) + \mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\int_{t_1}^{t_3} de_{po} \tag{2-19}$$

式(2-18),(2-19)より応力振幅が飽和値をとるためにΦ_eが満足すべき条件が次のように示される。

$$\frac{de_{co}}{de_{po}} = 1 - \mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\frac{de_{ro}}{de_{po}} \tag{2-20}$$

さらに、$\Phi_e(t_1)$が$\Phi_e(t_3)$と一致する条件より次式が成り立つ。

$$\int_{t_1}^{t_3} \frac{de_{ro}}{de_{po}} de_{po} = -\int_{t_1}^{t_3} \frac{de_{ri}}{de_{pi}} de_{pi} \tag{2-21}$$

$$\int_{t_1}^{t_3} \frac{de_{co}}{de_{po}} de_{po} = -\int_{t_1}^{t_3} \frac{de_{ci}}{de_{pi}} de_{pi} \tag{2-22}$$

従って、式(2-20),(2-21),(2-22)より次式が導かれる。

$$\int_{t_1}^{t_3} de_{po} = -\int_{t_1}^{t_3} \left(\mathrm{sgn}(\dot{e}_p) \frac{de_{ri}}{de_{pi}} + \frac{de_{ci}}{de_{pi}} \right) de_{pi}, \tag{2-23}$$

２.３.２　非硬化領域の概念を有するサブレイヤーモデルの等方硬化則および移動硬化則

微視的等方硬化応力の変化率を次のように定義する。

$$\dot{\sigma}^I(\zeta_j) = \frac{d\sigma_o^I(\zeta_j)}{de_{po}} \dot{e}_{po} + \frac{d\sigma_i^I(\zeta_j)}{de_{pi}} \dot{e}_{pi} \tag{2-24}$$

式(2-11)より微視的移動硬化応力は次式のようになる。

$$\dot{\sigma}^K(\zeta_j) = K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}(\dot{e}_p) \left(\frac{d\sigma_o^I(\zeta_j)}{de_{po}} \dot{e}_{po} + \frac{d\sigma_i^I(\zeta_j)}{de_{pi}} \dot{e}_{pi} \right) \tag{2-25}$$

式(2-24),(2-25)を全レイヤーで平均すると、

$$\dot{s}^I = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \dot{\sigma}^I(\zeta_j) = \frac{ds_o^I}{de_{po}} \dot{e}_{po} + \frac{ds_i^I}{de_{pi}} \dot{e}_{pi} \tag{2-26}$$

$$\dot{s}^K = K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}(\dot{e}_p) \left(\frac{ds_o^I}{de_{po}} \dot{e}_{po} + \frac{ds_i^I}{de_{pi}} \dot{e}_{pi} \right) \tag{2-27}$$

ここに、

$$\frac{ds_o^I}{de_{po}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{d\sigma_o^I(\zeta_j)}{de_{po}} \tag{2-28}$$

$$\frac{ds_i^I}{de_{pi}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{d\sigma_i^I(\zeta_j)}{de_{pi}} \tag{2-29}$$

次に、応力振幅飽和時の平均等方硬化応力の飽和値s_s^Iについて考える。Fig.2-7 に示すように、原点を中心とした定振幅繰返し載荷において応力振幅飽和時の平均塑性ひずみの値がe_{ps}であり、また、飽和に至るまでの平均塑性ひずみの経路が$0, e_{p1}(t_1), e_{p2}(t_2) \cdots, e_{ps}(t_s)$で表されるものとする。こ

のとき、s_s^I は次のようになる。

$$s_s^I = \int_0^{t_1} ds^I + \int_{t_1}^{t_2} ds^I + \int_{t_2}^{t_3} ds^I \cdots + \int_{t_m}^{t_s} ds^I = \int_0^{t_s} ds^I \tag{2-30}$$

ここで、微視的降伏応力の平均を $\bar{s}_y$ とし、次のように定義する。

$$\bar{s}_y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_y\left(\zeta_j\right) \tag{2-31}$$

Fig.2-7 に示すように、式(2-30),(2-31)より除荷時の平均応力と全レイヤーが降伏するまでの平均応力の差は $\bar{s}_y + s_s^I$ となる。式(2-30)に式(2-26)を用いると、次式のようになる。

$$s_s^I = \int_0^{t_s} \dot{s}^I = \int_0^{t_s} \left(\frac{\dfrac{ds_o^I}{de_{po}}}{\dfrac{de_{ro}}{de_{po}}} de_{ro} + \frac{\dfrac{ds_i^I}{de_{pi}}}{\dfrac{de_{ri}}{de_{pi}}} de_{ri} \right) \tag{2-32}$$

２.３.３　微係数間の関係および飽和値の導出

前項で定義した Φ_e に関する微係数 $de_{ro}/de_{po}, de_{ri}/de_{pi}, de_{ci}/de_{pi}$ および等方硬化に関する微係数 $d\sigma_0^I/de_{po}, d\sigma_i^I/de_{pi}$ は自由に決定することができる。しかし、これらの微係数間に何らかの関係がなければ、パラメータの数は多くなり、実験結果に応じてそれらを適切に決定することは困難となる。そこで、定式化を単純化するために微係数間に或る関係を定義する。はじめに、Φ_e における微係数間の関係を以下のように定義する。

$$\frac{de_{ri}}{de_{pi}} = -\alpha \frac{de_{ro}}{de_{po}} \tag{2-33}$$

$$\frac{de_{ci}}{de_{pi}} = -\alpha \frac{de_{co}}{de_{po}} \tag{2-34}$$

ここに、α は定数であり。式(2-23)に式(2-20),(2-33),(2-34)を用いると次式が誘導される。

$$\int_{-e_{ps}}^{e_{ps}} de_{po} = \alpha \int_{-e_{ps}}^{e_{ps}} de_{pi} \tag{2-35}$$

式(2-35)は、応力振幅の飽和時に $\Phi_e = 0$ および $\Phi_e < 0$ のときに生じる塑性ひずみの比が $\alpha:1$ となることを示唆している。硬化応力に関する微係数間に以下の関係を定義する。

$$\frac{d\sigma_i^I(\zeta_j)}{de_{pi}} = -\alpha \frac{d\sigma_o^I(\zeta_j)}{de_{po}} \tag{2-36}$$

また、Φ_e の微係数と等方硬化の微係数間の関係を次のように定義する。式(2-33),(2-34),(2-36)より α が大きくなるほど等方軟化がより早く進行することが分かる。

$$\frac{ds_o^I}{de_{po}} = F\frac{de_{ro}}{de_{po}} \tag{2-37}$$

$$\frac{ds_i^I}{de_{pi}} = F\frac{de_{ri}}{de_{pi}} = -\alpha F\frac{de_{ro}}{de_{po}} \tag{2-38}$$

ここに、F は定数である。また、式(2-37),(2-38)の定義は式(32)を容易に導出することを意図している。従って、式(2-20),(2-28),(2-29),(2-33),(2-34),(2-36),(2-37),(2-38)より全ての微係数が関係付けられたことが分かる。ここで、2.2.3 項で定義した式(2-8)を用いると、微視的等方硬化応力の微係数は次式のようになる。

$$\frac{d\sigma_o^I(\zeta_j)}{de_{po}} = -\mathrm{sgn}(\dot{e}_p)(\zeta_j - \zeta_c)\theta \tag{2-39}$$

式(2-20),(2-28),(2-29),(2-33),(2-34),(2-36),(2-37),(2-38)より各微係数が導かれる。

$$\frac{ds_o^I}{de_{po}} = \mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\zeta_c\theta, \quad \frac{ds_i^I}{de_{pi}} = -\mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\alpha\zeta_c\theta \tag{2-40),(2-41}$$

$$\frac{de_{ro}}{de_{po}} = \mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\frac{\zeta_c\theta}{F}, \quad \frac{de_{ri}}{de_{pi}} = -\mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\frac{\alpha}{F}\zeta_c\theta \tag{2-42),(2-43}$$

$$\frac{de_{co}}{de_{po}} = 1 - \frac{\zeta_c\theta}{F}, \quad \frac{de_{ci}}{de_{pi}} = -\alpha\left(1 - \frac{\zeta_c\theta}{F}\right) \tag{2-44),(2-45}$$

これにより、全ての微係数が関係づけられたことが分かる。ここで、式(2-41)および式(2-43)より等方軟化が起きる場合は、塑性ひずみ球の半径も小さくなることが分かる。また、これに加え、初期降伏応力が一定である性質により、過剰な等方軟化によって弾塑性遷移過程が消失することはないことが理解される。次に、上記の関係を用いて定振幅繰返し載荷における平均等方硬化応力の飽和値について考える。式(2-40),(2-41),(2-42),(2-43)を式(2-32)に用いると、平均等方硬化応力の飽和値は次のようになる。

$$s_s^I = \int_0^{t_s} F\left(de_{ro} + de_{ri}\right) = \int_0^{t_s} F de_r = F e_{rs} \tag{2-46}$$

さらに、飽和状態より e_r, e_c の飽和値 e_{rs}, e_{cs} に対して次式が成り立つことは明らかである。

$$e_{rs} = e_{ps}, \quad e_{cs} = 0 \tag{2-47),(2-48}$$

従って、平均等方硬化応力の飽和値 s_s^I は次のように表される。

$$s_s^I = F e_{ps} \tag{2-49}$$

式(2-12)の両辺を $-e_{ps}$ から e_{ps} まで積分し、$\int_{-e_{ps}}^{e_{ps}} ds^I = 0$ であることを考慮すると、平均移動硬化応力の飽和値 s_s^K は次のようになる。

$$s_s^K = K e_{ps} \tag{2-50}$$

式(2-13)の降伏条件式を全レイヤーで平均すると次式が求められる。

$$\left| s_s - s_s^K \right| - \left(\bar{s}_y + s_s^I \right) = 0 \tag{2-51}$$

式(2-51)に式(2-49),(2-50)を代入すると次式が導出される。

$$\left| s_s - K e_{ps} \right| - \left(\bar{s}_y + F e_{ps} \right) = 0 \tag{2-52}$$

ここで、$s_s - K e_{ps} > 0$ と仮定し、飽和時の弾性構成則 $e_{ps} = e_s - s_s / E$ を用いると次式が導かれる。

$$s_s = \frac{(K+F) e_s + \bar{s}_y}{1 + \dfrac{K+F}{E}} \tag{2-53}$$

式(2-53)において、$K, F, E, \bar{s}_y$ は定数であることから平均応力の飽和値はひずみ経路に依らずひずみ振幅により決定されることが分かる。さらに、各飽和値は単純な式で表されていることが理解される。

最後に 2.2 節および 2.3 節で定義した各変数を再掲する。

＜微視的諸量＞

弾性構成則：$\sigma(\zeta_j) = E\left\{ e - \varepsilon_p(\zeta_j) \right\}$ (2-54)

等方硬化則：$\dot{\sigma}^I(\zeta_j) = -(\zeta_j - \zeta_c)\theta \left| \dot{e}_{po} \right| + \alpha(\zeta_j - \zeta_c)\theta \left| \dot{e}_{pi} \right|$ (2-55)

移動硬化則：$\dot{\sigma}^K(\zeta_j) = K \dot{e}_p - \mathrm{sgn}(\dot{e}_p) \dot{\sigma}^I(\zeta_j)$ (2-56)

降伏条件式： $\phi(\zeta_j)=\left|\sigma(\zeta_j)-\sigma^K(\zeta_j)\right|-\left(\sigma_y(\zeta_j)+\sigma^I(\zeta_j)\right)$ (2-57)

塑性負荷条件： $\phi(\zeta_j)=\dot{\phi}(\zeta_j)=0$ (2-58)

＜サブレイヤーモデルの諸量＞

弾性構成則： $s=E(e-e_p)$ (2-59)

等方硬化則： $\dot{s}^I=\zeta_c\theta\left|\dot{e}_{po}\right|-\alpha\zeta_c\theta\left|\dot{e}_{pi}\right|$ (2-60)

移動硬化則： $\dot{s}^K=K\dot{e}_p-\mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\dot{s}^I$ (2-61)

＜塑性ひずみ球の諸量＞

塑性ひずみ球： $\Phi_e=\left|e_p-e_c\right|-e_r$ (2-62)

非硬化領域の幅： $\dot{e}_r=\frac{\zeta_c}{F}\theta\left|\dot{e}_{po}\right|-\frac{\alpha\zeta_c}{F}\theta\left|\dot{e}_{pi}\right|$ (2-63)

非硬化領域の中心： $\dot{e}_c=\left(1-\frac{\zeta_c}{F}\theta\right)\dot{e}_{po}-\alpha\left(1-\frac{\zeta_c}{F}\theta\right)\dot{e}_{pi}$ (2-64)

提案モデルにおいて微係数間の関係は、α, F, K のみによって決定され、田中(1988,1991)によるものに比べ､単純なものとなっていることが理解される｡Fig.2-8 に微係数間の関係の一覧を示す(図中(＊)は式番号を示す)。

２.４　数値解析

２.４.１　数値解析アルゴリズム

3 章で提案した基本式を基に数値解析アルゴリズムを作成する。時刻 t における変数 ${}^{t}(\ )$ および ${}^{t+\Delta t}e$ が既知であるとして時刻 $t+\Delta t$ の変数 ${}^{t+\Delta t}(\ )$ を求める。また、${}^{t+\Delta t}(\ )={}^{t}(\ )+\Delta(\ )$ が各変数において成り立つものとする。アルゴリズムは Return Mapping Algorithm に基づいている。

<u>弾性試行段階</u>：増分区間において塑性化が進展していないもの $\left({}^{trial}(\varepsilon_p)={}^{t}(\varepsilon_p)\right)$ として各諸量の試行値 ${}^{trial}(\ )$ を求める。

$$ {}^{trial}\sigma(\zeta_j)=E\left({}^{t+\Delta t}e-{}^{t}\varepsilon_p(\zeta_j)\right),\ {}^{trial}\sigma^{I}(\zeta_j)={}^{t}\sigma^{I}(\zeta_j),\ {}^{trial}\sigma^{K}(\zeta_j)={}^{t}\sigma^{K}(\zeta_j) \qquad \text{(2-65),(2-66),(2-67)} $$

$$ {}^{trial}e_c={}^{t}e_c,\ {}^{trial}e_r={}^{t}e_r \qquad \text{(2-68),(2-69)} $$

<u>弾塑性判定</u>：各レイヤーにおける降伏条件式 ${}^{trial}\phi$ を用いて、弾塑性判定を行う。

$$ {}^{trial}\phi(\zeta_j)=\left|{}^{t+\Delta t}\sigma(\zeta_j)-{}^{t+\Delta t}\sigma^{K}(\zeta_j)\right|-\left({}^{t+\Delta t}\sigma_y(\zeta_j)+{}^{t+\Delta t}\sigma^{I}(\zeta_j)\right) \qquad \text{(2-70)} $$

${}^{trial}\phi(\zeta_j)<0$ のとき、弾性状態であるので試行値を正解として終了する。

${}^{trial}\phi(\zeta_j)\geq 0$ のとき、塑性変形が生じているので、塑性修正子を実行する。

<u>塑性修正子</u>：増分区間で塑性化が進展していることが明らかとなったので、塑性化を考慮した、各諸量の真値を求める。時刻応力 $t+\Delta t$ における微視的応力は、以下のようになる。

$$ {}^{t+\Delta t}\sigma(\zeta_j)={}^{trial}\sigma(\zeta_j)-E\Delta\varepsilon_p(\zeta_j) \qquad \text{(2-71)} $$

時刻 $t+\Delta t$ におけるレイヤーj の降伏関数は次式のようになる。

$$ {}^{t+\Delta t}\phi(\zeta_j)=\left|{}^{t+\Delta t}\sigma(\zeta_j)-{}^{t+\Delta t}\sigma^{K}(\zeta_j)\right|-\left({}^{t+\Delta t}\sigma_y+{}^{t+\Delta t}\sigma^{I}(\zeta_j)\right)={}^{trial}\phi(\zeta_j)-E\left|\Delta\varepsilon_p(\zeta_j)\right|-K\left|\Delta e_p\right|=0 \qquad \text{(2-72)} $$

式(2-72)の降伏したレイヤーにおける和を取ると、次式が導かれる。

$$ \sum_{j=1}^{M}{}^{t+\Delta t}\phi(\zeta_j)=\sum_{j=1}^{M}{}^{trial}\phi(\zeta_j)-EN\left|\Delta e_p\right|-KM\left|\Delta e_p\right|=0 \qquad \text{(2-73)} $$

ここで、N は全レイヤーの数、M は降伏したレイヤーの数である。式(2-73)を導出するにあたって、$\Delta e_p=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Delta\varepsilon_p(\zeta_j)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M}\Delta\varepsilon_p(\zeta_j)$ を用いている。式(2-73)を整理すると、次式が導かれる。

$$ \Delta e_p=\mathrm{sgn}(\Delta e)\frac{\sum_{j=1}^{M}{}^{trial}\phi(\zeta_j)}{EN+KM} \qquad \text{(2-74)} $$

である。式(2-74)より、各レイヤーの塑性ひずみは次式のようになる。

$$\Delta\varepsilon_p(\zeta_j)=\frac{\mathrm{sgn}(\Delta e)^{trial}\phi(\zeta_j)-K\Delta e_p}{E} \tag{2-75}$$

<u>塑性ひずみ球の判定式</u>：式(2-74)を用いて、Δe_p を求める。ここで、$\Delta e_{pi}=\Delta e_p$ と仮定し、${}^{t+\Delta t}e_{ci}$ および ${}^{t+\Delta t}e_{ri}$ を求め、さらに、${}^{t+\Delta t}\Phi_e=\left|{}^{t+\Delta t}e_p-{}^{t+\Delta t}e_{ci}\right|-{}^{t+\Delta t}e_{ri}$ により ${}^{t+\Delta t}e_p$ が塑性領域内外どちらに位置するかを判定する。

${}^{t+\Delta t}\Phi_e<0$ のとき、$\Delta e_{pi}=\Delta e_p\,,\Delta e_{po}=0$ である。

${}^{t+\Delta t}\Phi_e\geq 0$ のとき、$\Delta e_{po}\neq 0$ であるので、Δe_{pi} および Δe_{po} の真値を求める必要がある。従って、次式が成り立つ必要がある。

$${}^{t+\Delta t}\Phi_e=\left|{}^{t+\Delta t}e_p-{}^{t+\Delta t}e_c\right|-{}^{t+\Delta t}e_r=0 \tag{2-76}$$

ここで、各微係数は $\dot{e}_{po}+\dot{e}_{pi}=\dot{e}_p$ および式(2-63),(2-64)を用いると次式が得られる。

$${}^{t+\Delta t}\Phi_e=\left|{}^{t+\Delta t}e_p-{}^{t}e_c-\left(1-\frac{\zeta_c}{F}\theta\right)\Delta e_{po}+\alpha\left(1-\frac{\zeta_c}{F}\theta\right)(\Delta e_p-\Delta e_{po})\right|-\left({}^{t}e_r+\frac{\zeta_c}{F}\theta\left|\Delta e_{po}\right|-\frac{\alpha\zeta_c}{F}\theta\left|\Delta e_p-\Delta e_{po}\right|\right)=0 \tag{2-77}$$

式(2-77)より次式が求められる。

$$\Delta e_{po}=\frac{{}^{t+\Delta t}e_p-{}^{t}e_c-{}^{t}e_r+\alpha\Delta e_p}{1+\alpha}\quad(\Delta e_p>0) \tag{2-78a}$$

$$\Delta e_{po}=\frac{{}^{t+\Delta t}e_p-{}^{t}e_c+{}^{t}e_r+\alpha\Delta e_p}{1+\alpha}\quad(\Delta e_p<0) \tag{2-78a}$$

得られた $\Delta e_{pi}\,,\Delta e_{po}$ を基に各諸量を更新する。

$$\Delta\sigma(\zeta_j)=E(\Delta e-\Delta\varepsilon_p(\zeta_j)) \tag{2-79}$$

$$\Delta\sigma^I(\zeta_j)=-(\zeta_j-\zeta_c)\theta\left|\Delta e_{po}\right|+\alpha(\zeta_j-\zeta_c)\theta\left|\Delta e_{pi}\right| \tag{2-80}$$

$$\Delta\sigma^K(\zeta_j)=K\Delta e_p-\mathrm{sgn}(\Delta e_p)\Delta\sigma^I(\zeta_j) \tag{2-81}$$

$$\Delta s=E(\Delta e-\Delta e_p) \tag{2-82}$$

$$\Delta s^I=\zeta_c\theta\left|\Delta e_{po}\right|-\alpha\zeta_c\theta\left|\Delta e_{pi}\right| \tag{2-83}$$

$$\Delta s^K=K\Delta e_p-\mathrm{sgn}(\Delta e_p)\Delta s^I \tag{2-84}$$

本項で提案した非硬化領域の概念を考慮したサブレイヤーモデルの数値解析フローは、弾性試行、弾塑性判定、塑性修正子、塑性ひずみ球の判定の順に実施されており、塑性ひずみ球の判定の後に各硬化応力の更新を行っている。これは、塑性修正子内で硬化応力の増分を決定する他の数理塑性モデルのアルゴリズムとは異なる。しかし、式(2-74),(2-75)より微視的および巨視的塑性ひずみは全硬化係数 K のみにより決定されることから等方硬化応力の増分およびそれに従属する移動硬化応力の増分は塑性修正子後でも任意に決定することができる。しかるに、塑性ひずみ球による判定を実施した後に各硬化応力の更新を実施してもアルゴリズムとしての不整合は生じないと考えられる。

２.４.２　塑性ひずみ球の性質

提案した Φ_e の性質を把握するために 1 レイヤーの提案モデル(バイリニアー型弾塑性モデル)の数値解析結果を示す。ひずみ履歴は Fig.2-9 に示すように与える。Fig.2-10 は、平均等方硬化応力 s^I と平均累積塑性ひずみ $\bar{e}_p = \int \left| de_p \right|$ の関係を表している。ここで、$\alpha = 0,0.1,1.0$ をパラメータとしている。ひずみ振幅毎の平均等方硬化応力の飽和値について見ると、 $nstep$ までは $\alpha = 0,0.1,1.0$ において全て同じ飽和値を示している。これは、式(2-51)に α が含まれていないことからも明らかである。$nstep$-$ostep$ の区間において、 $\alpha = 0$ つまり等方軟化を考慮しない場合は、 s^I が減少せず、 $nstep$ から一定の飽和値を示す。一方、 $\alpha = 0.1,1.0$ の場合は s^I が減少し、 $mstep$ での飽和値と同様の値に近づいていく様子が分かる。これは、先述したように s^I の飽和値はひずみの経路に依らず、ひずみ振幅のみによって決定されることに起因している。また、$nstep$-$ostep$ の区間では、α が大きくなるにつれて s^I が早く減少する様子が見られる。Fig.2-11 は、Fig.2-10 に描かれた点線の四角近傍を拡大したものである。$\alpha = 0.1,1.0$ の場合は A 点より s^I が減少するが、その後、$B_{0.1}$,$B_{1.0}$ 点を経てそれぞれ s^I が増加し、最終的に C 点で $\alpha = 0,0.1,1.0$ の値が一致する様子が分かる。また、式(2-35)で示したように $\Phi_e = 0$ で生じる塑性ひずみの値と $\Phi_e < 0$ で生じる塑性ひずみの値が α:1 となる様子が分かる。

２.４.３　実験結果との比較による妥当性検証

4.1 節で作成したアルゴリズムの数値解析結果を山崎、笠井らにより行われた二種類の鋼材 (SN400,SN490 および LY225)における実験結果(貞末(2006)、空處(2006))との比較を通して提案モデルの妥当性を検証する。

はじめに、微視的降伏応力に対して以下の定義を導入する。

$$\sigma_y = \frac{B}{A+\zeta} + C \tag{2-85}$$

ここに A, B, C は定数であり、これらにより弾塑性遷移過程における応力ひずみ曲線の形状および初期降伏応力が決定される。さらに、$\theta\left(s^I\right)$ を鋼種ごとに定める。SN400 および SN490 では $\theta\left(s^I\right)$ は以下のように定義される。

$$\theta\left(s^I\right) = Q\left(s^I{}_{\lim} - s^I\right) \tag{2-86}$$

LY225 では以下のように定義される。

$$\theta\left(s^I\right) = Qs^I{}_{\lim}\left\{\exp\left(\frac{s^I{}_{\lim} - s^I}{s^I{}_{\lim}}\right) - 1\right\} \tag{2-87}$$

式(2-86),(2-87)において Q , $s^I{}_{\lim}$ は定数である。 $s^I{}_{\lim}$ は平均等方硬化応力の限界値であり、式(2-86),(2-87)は平均等方硬化応力が $s^I{}_{\lim}$ に近づくほど平均等方硬化応力の増分値が減少することを示唆している。また、Q は値が大きくなるほど早く等方硬化および等方軟化が進行する。これは、Zarvel(1978)により提案された等方硬化則と類似している。次に、実験結果との比較を示す。レイヤーの数は 50 とし、Table2-1 に示すように、材料特性および定数を鋼種毎に与える。ここで、レイヤー数は、Appendix1 に示すように、サブレイヤーモデルにおいて滑らかな弾塑性遷移過程を表現するために十分な数として設定されている。また、Table2-1 の各定数に関連する式番号を表の下に記す。ここで、各材料定数の決定は、漸増載荷と漸減載荷における実験結果と一致するように試行錯誤的に行った。また、Fig.2-12 に示すように、ひずみ履歴は両鋼種とも漸増、漸減、シフト 1、シフト 2、シフト 3,ランダムパターンで与える。Fig.2-13(a)-(g)は SN400、Fig.2-14(a)-(g)は SN490、Fig.2-15(a)-(g)は LY225 の実験結果と数値解析結果の比較を行ったものであり、全ての載荷パターンにおいて両者が概ねよく対応していることが分かる。しかしながら、降伏棚が表れる小ひずみ領域では、提案モデルが実現象を十分再現できていないことが分かる。これは、式(2-11)で定義したように、K が定数であることに起因している。従って、降伏棚を表現するには別途考慮が必要である。しかし、降伏棚の表現方法については既に水野(1994)、Mahan(2011) らにより研究がなされており、降伏棚の発生を累積塑性ひずみに対してローカルな現象と捉えることによって、降伏棚を再現可能なモデルの提案を行っている。これら既往のルールを修正サブレイヤーモデルに対して適用することは可能であると考えられるが、修正サブレイヤーモデルの定式化が複雑になることから、適用およびルールの単純化は今後の課題の一つとする。以上より提案モデルが、降伏棚の領域を除いて山

崎(2008)、笠井(2008)らによる Menegotto-Pinto モデルの結果と同程度の精度を有していることが明らかとなった。従って、実験結果と提案モデルの数値解析結果の比較を通して提案モデルの妥当性が検証された。しかしながら、本章で扱った飽和現象の他にも、ラチェッティングやリラクゼーション等の現象が報告されている。これらの現象については、既に Voyadjis(1998)、大野(1998)、水野(1998)、Karim(1998)、Chiang(2008)により材料構成則が提案されており、また、建築構造物には、大きな影響はないと考えられるため、本章での提案モデルでは、考慮しなかった。しかし、系統的に金属系材料の実現象を再現可能な材料構成則は、非常に有用であると考えられるため、これらの現象の再現については今後の課題の一つとする。

２.５　まとめ

本章では、古典的なサブレイヤーモデルの欠点を指摘し、新たな硬化則の提案を行い、また、サブレイヤーモデルに非硬化領域の概念を導入することによって、修正サブレイヤーモデルの構築を行った。本章で得られた知見を以下に示す。

(1)　等方硬化を有する古典的サブレイヤーモデルの取り扱い上の留意点を述べ、それらを克服する新たな等方硬化則を提案した。また、等方硬化則に関連した移動硬化則の提案も行った。

(2)　一軸応力状態において等方硬化および軟化現象を表現可能かつ、単純な諸式により表現される塑性ひずみ球の提案を行った。

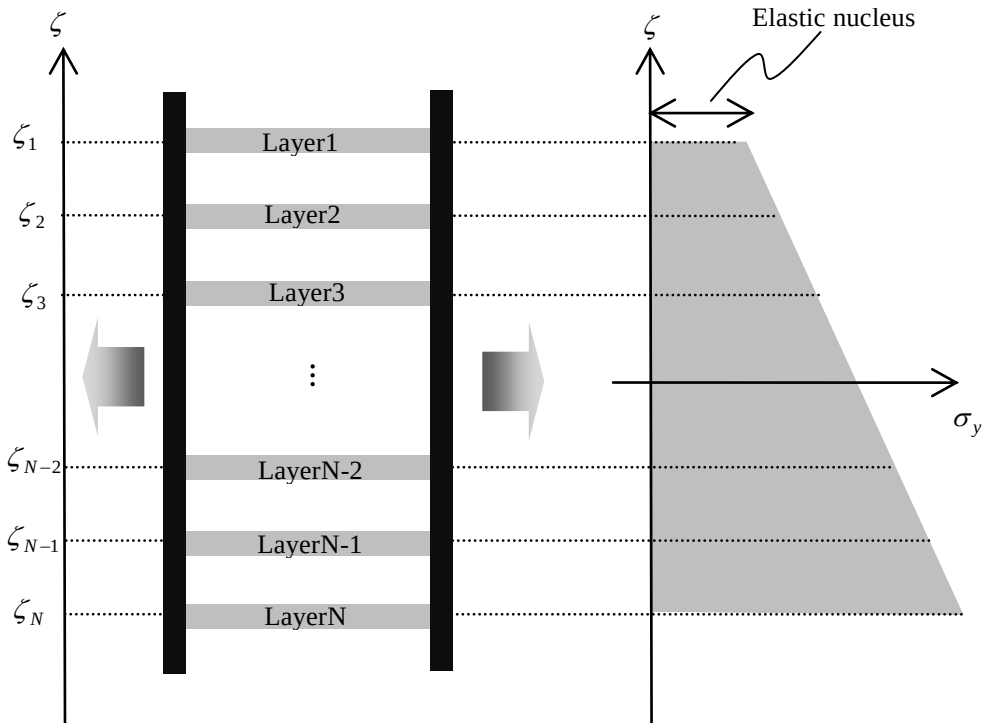
(3)　一軸応力状態において新たな硬化則を有するサブレイヤーモデルに 2)で提案した概念を導入した。

(4)　実験結果と(3)のモデルの数値解析結果を比較することによって定式化の妥当性を確認した。

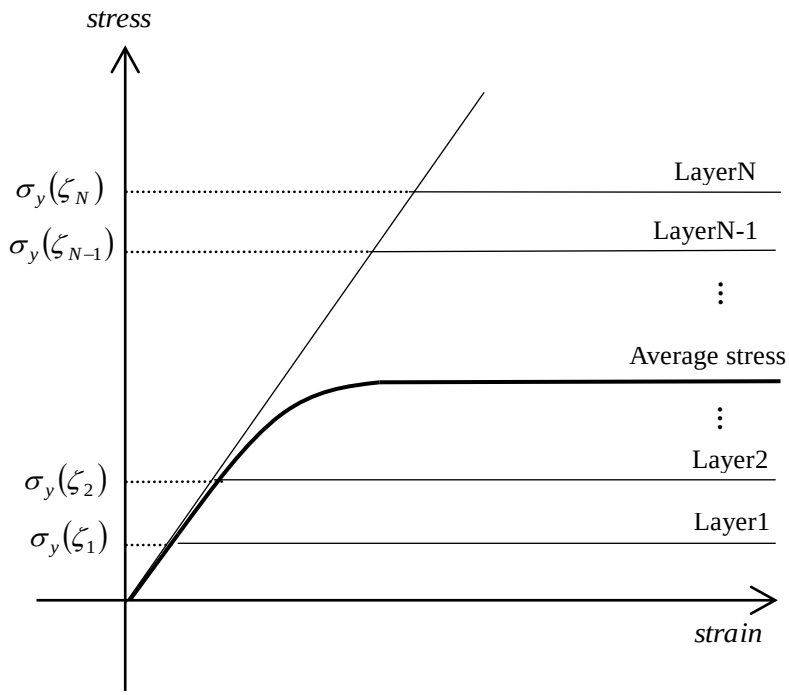
一方、本論文における問題点としては試行錯誤による材料定数の決定、サブレイヤーモデルの多大な計算負荷､飽和現象以外の実現象の再現性および多軸応力状態の実現象の再現性が挙げられる。試行錯誤に依らない合理的な材料定数の決定手法の提案および他の実現象の再現性については今後の課題とする。計算負荷の低減のための本提案モデルの巨視的手法の提案および多軸応力状態における実現象を表現可能かつ単純な材料構成則の構築は、それぞれの後の章にて検討を行っていくものとする。

Chapter2

Figures and Tables

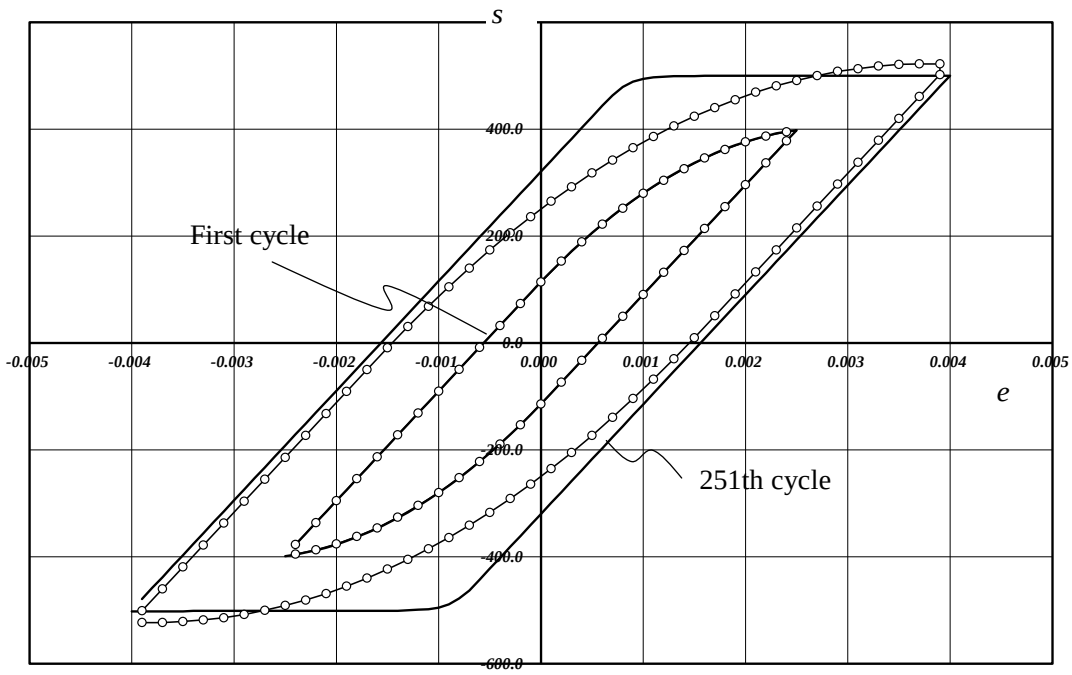


(a) Distribution of the yield stress for the virtual coordinate



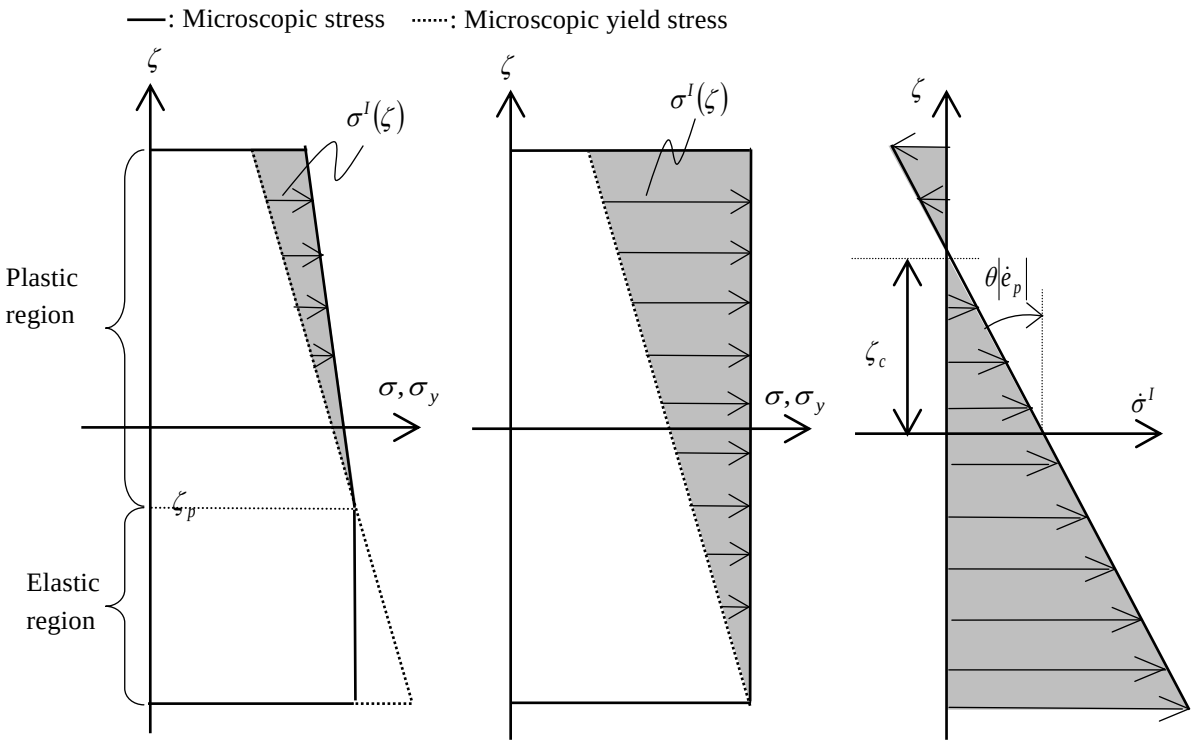
(b) Stress-strain relation

Fig.2-1 Sub-layer model



(Solid line: Classic sub-layer model, Symbol: Modified sub-layer model)

Fig.2-2 Stress-strain relation of the sub-layer model

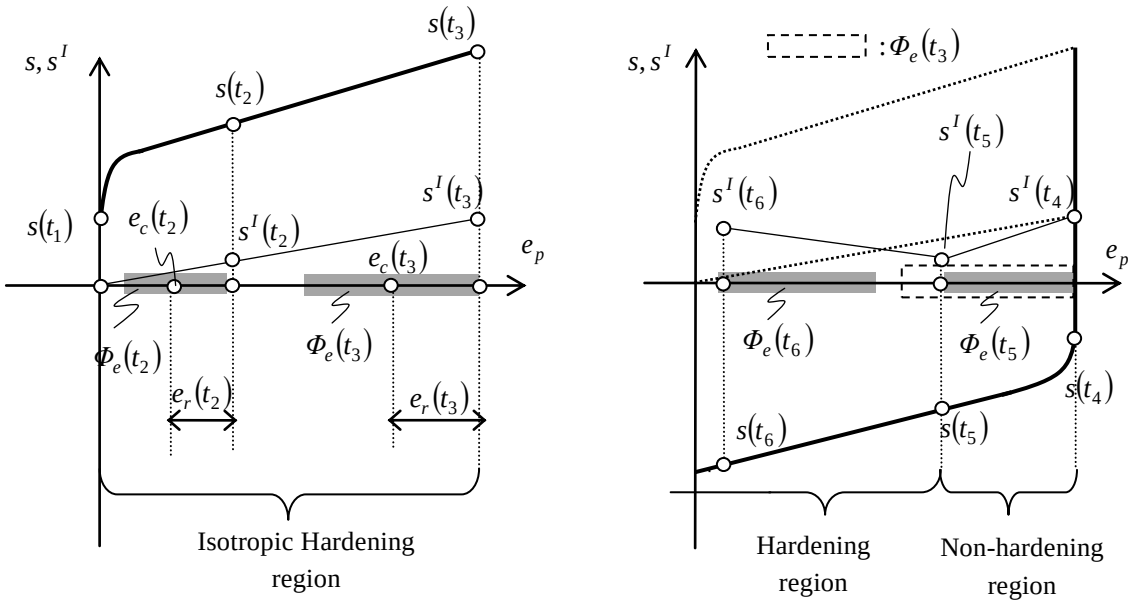


(a) Virgin loading

(b) After cyclic loadings

Fig.2-3 Behavior of microscopic stress and isotropic hardening stress for the virtual coordinate

Fig.2-4 Modified isotropic hardening rule of the sub-layer model for the virtual coordinate



(a) Virgin state (b) After(a)

Fig.2-5 Behavior of s, s^I and Φ_e for the cyclic loading

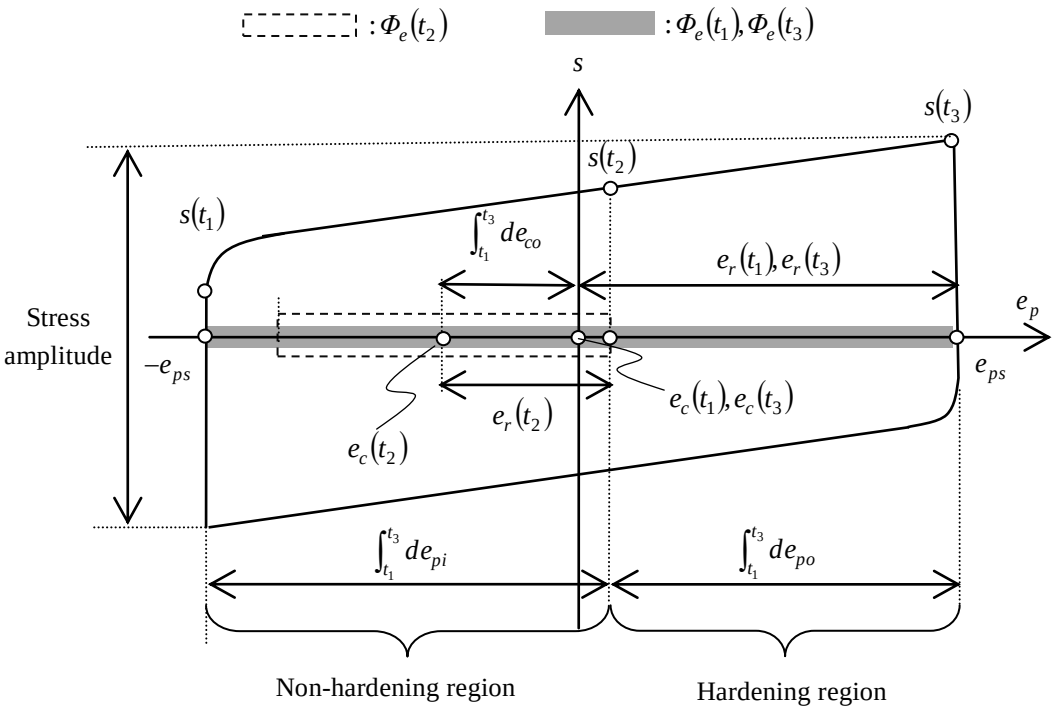


Fig.2-6 Behavior of Φ_e in the state of saturation

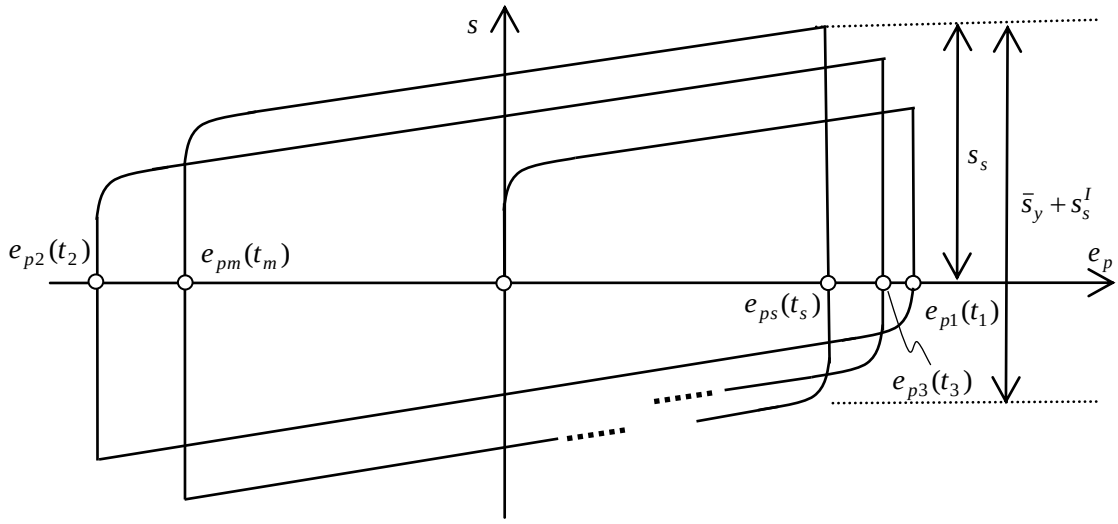


Fig.2-7 Plastic strain path to the state of saturation

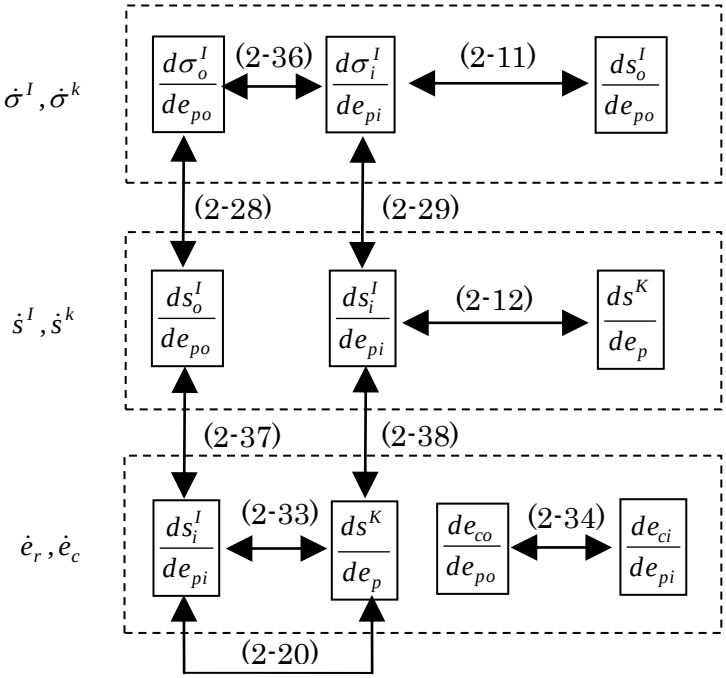


Fig.2-8 Relations among derivatives

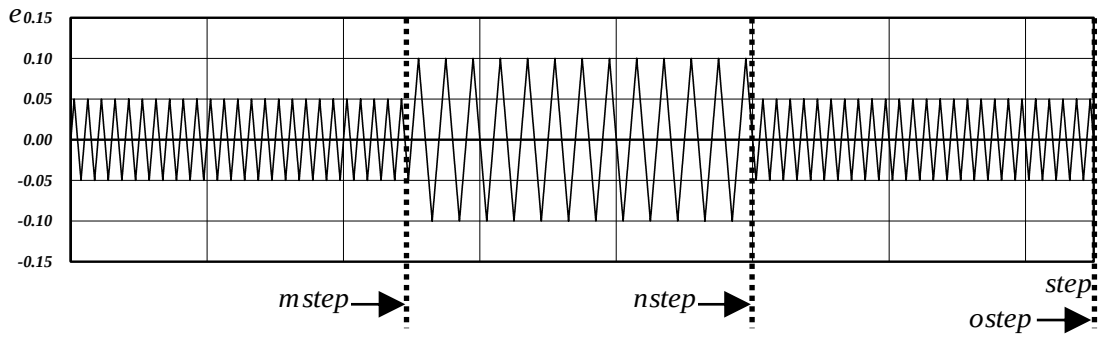


Fig.2-9 Strain path

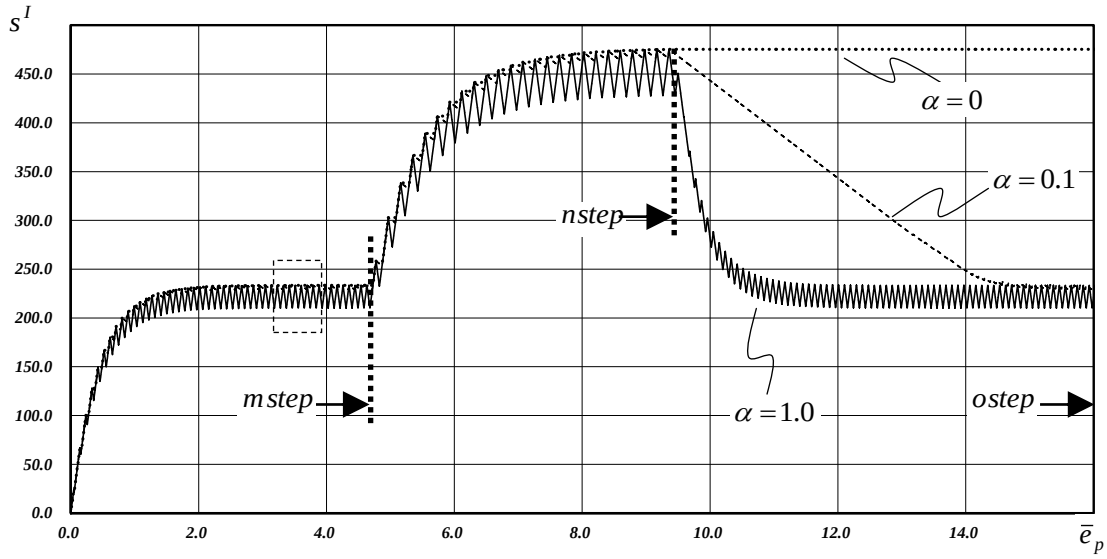


Fig.2-10 Isotropic hardening stress-cumulative plastic strain relation

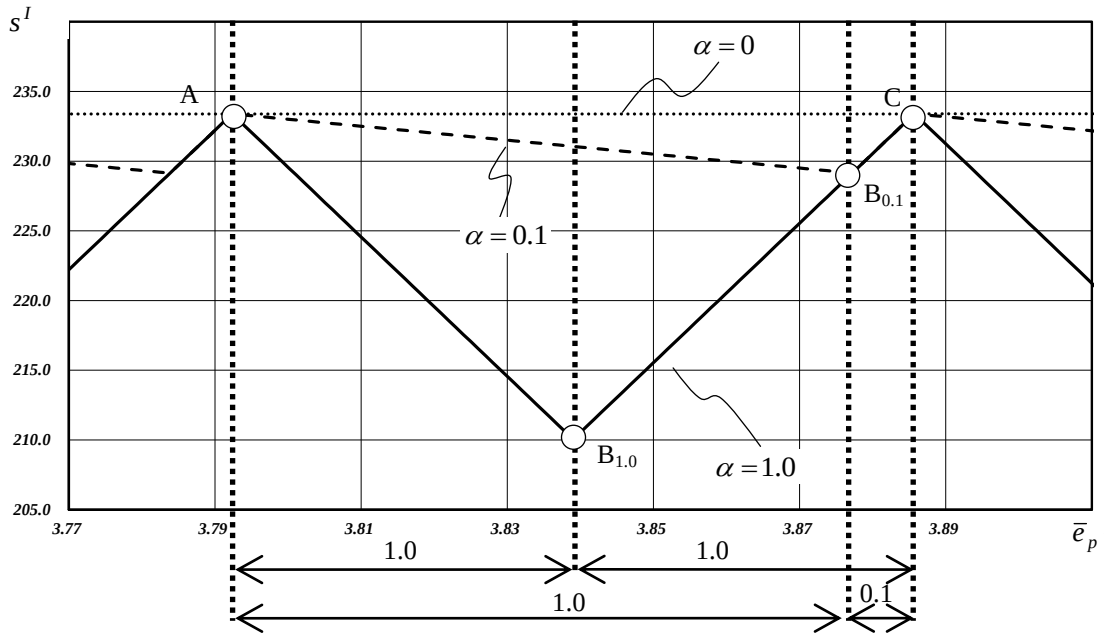
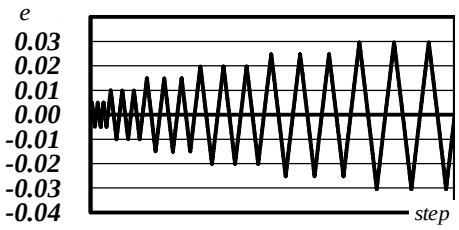


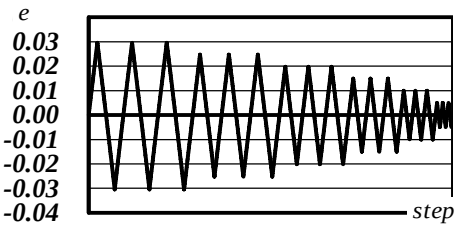
Fig.2-11 Magnified diagram of the area of ⬚ in Fig.2-10

Table2-1 Material properties for steels

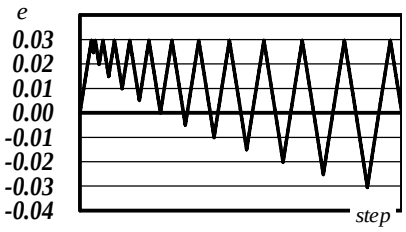
	E[N/mm^2]	K[N/mm^2]	F[N/mm^2]	α	ζ_c	Q	$s^I_{\lim}$[N/mm^2]	A	B[N/mm^2]	C[N/mm^2]
SN400	205000	2000	4200	0.4	0.5	12	180	0.58	90	35
SN490	205000	2500	5500	0.2	0.5	10	300	0.56	80	70
LY225	205000	700	3000	0.2	0.4	4.5	200	0.56	50	70
		Eq.(2-11)	(2-33)-(2-38)		(2-8),(2-66),(2-67)				(2-65)	



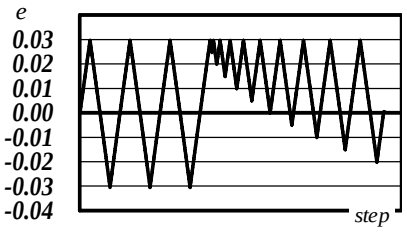
(a) Gradual decrease loading



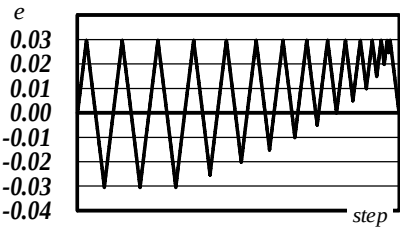
(b) Gradual decrease loading



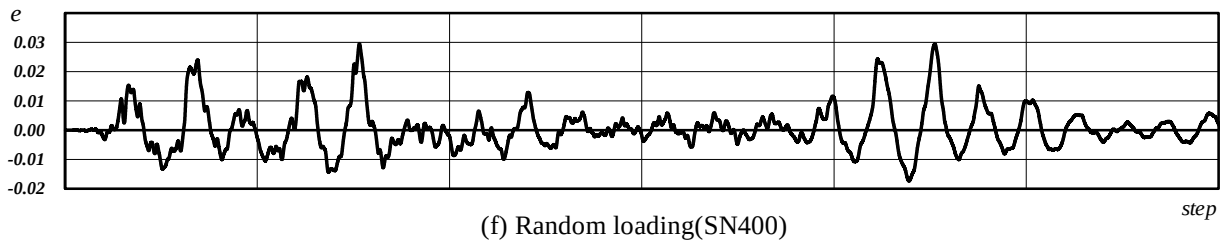
(c) Shift1 loading



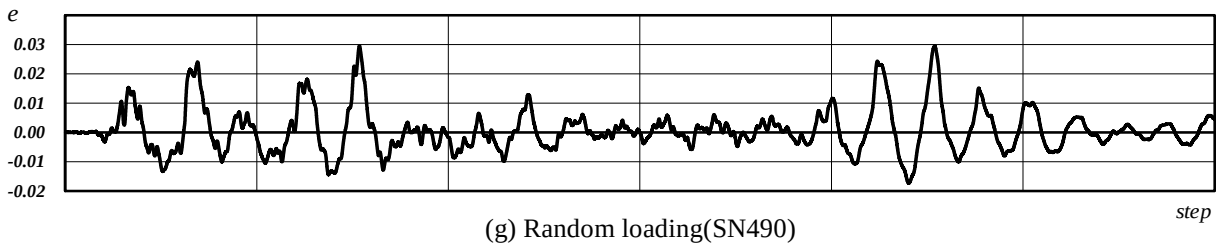
(d) Shift2 loading



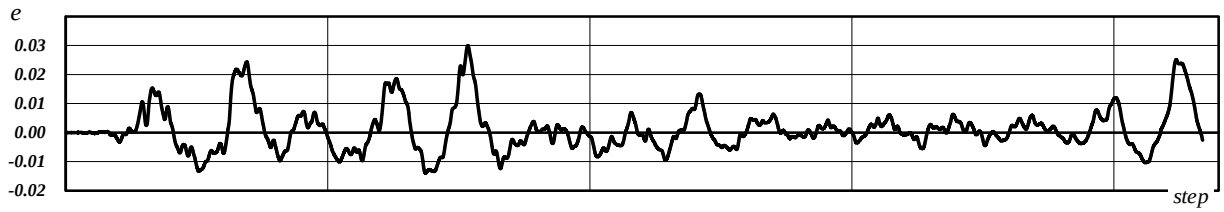
(e) Shift3 loading



(f) Random loading(SN400)

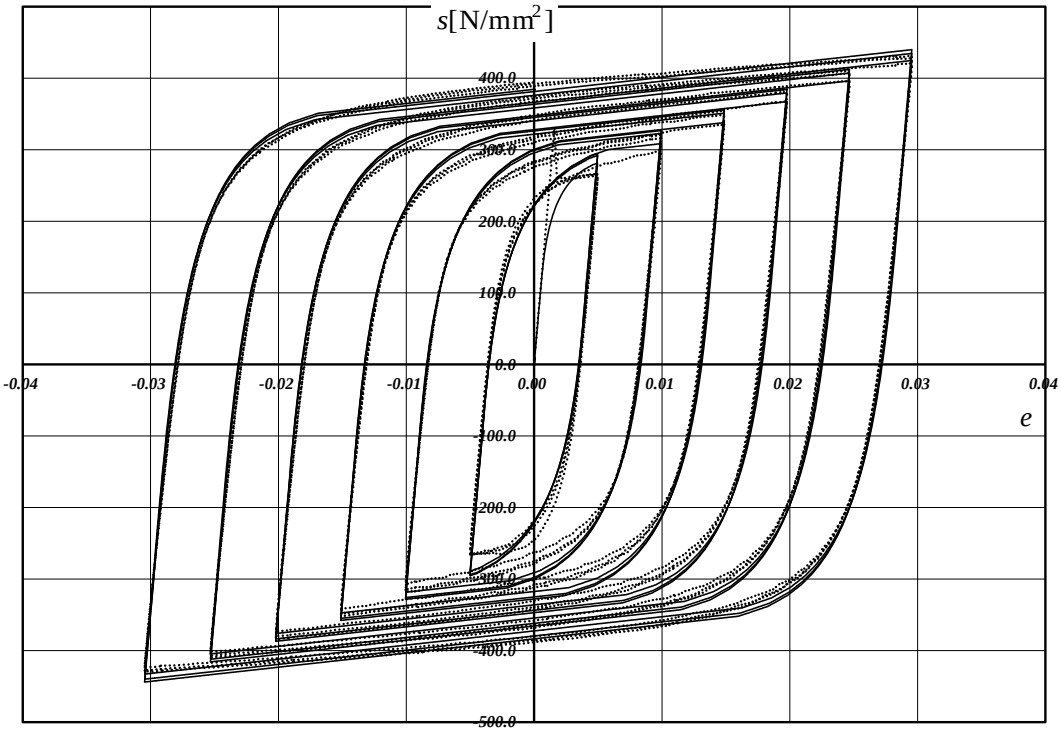


(g) Random loading(SN490)



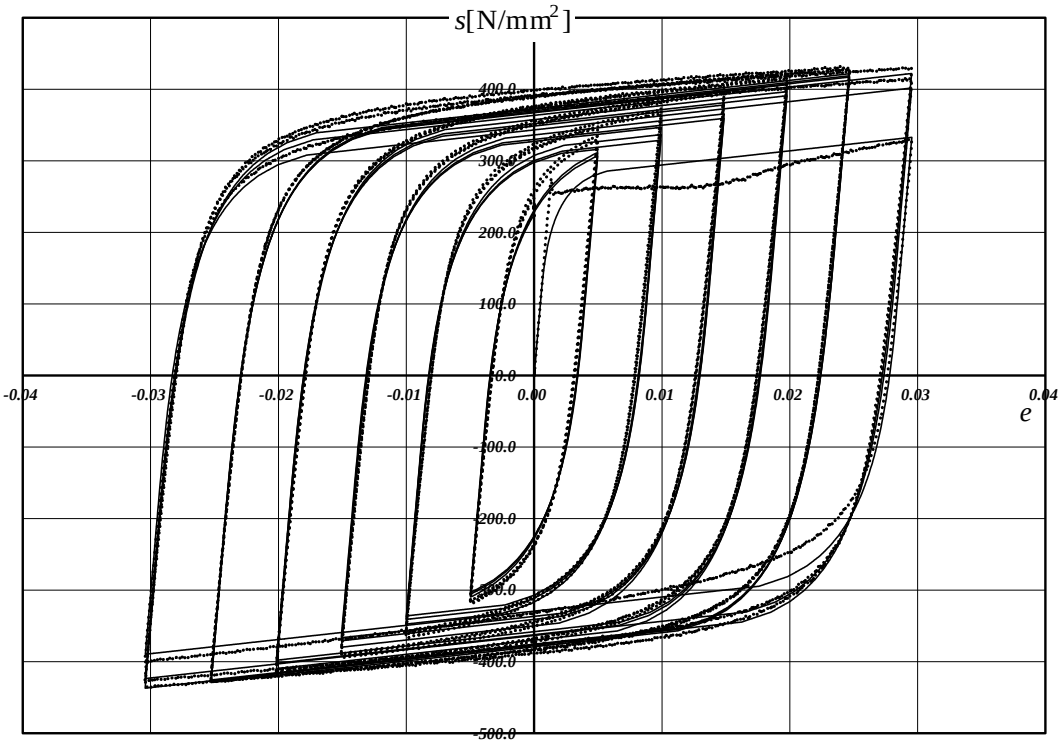
(h) Random loading(LY225)

Fig.2-12 Strain path



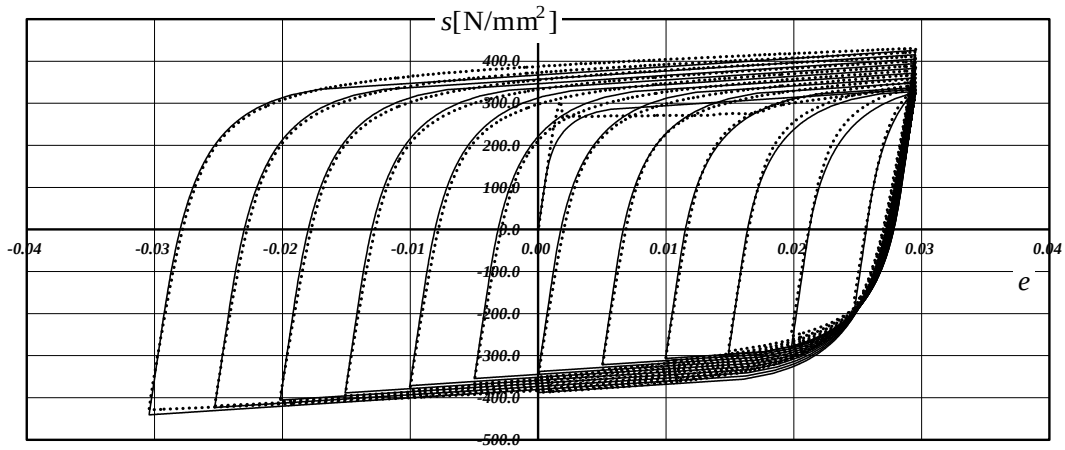
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-13(a) Gradual increase(SN400)



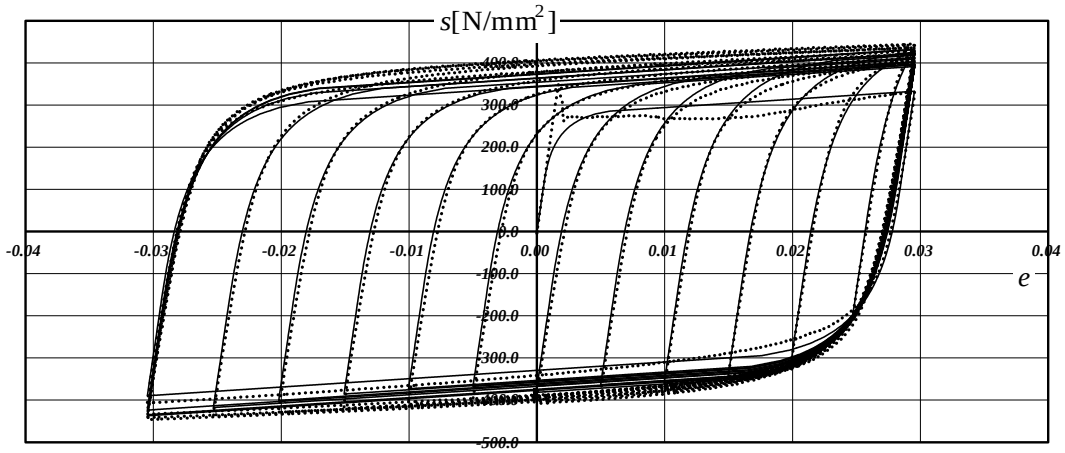
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-13(b) Gradual decrease(SN400)



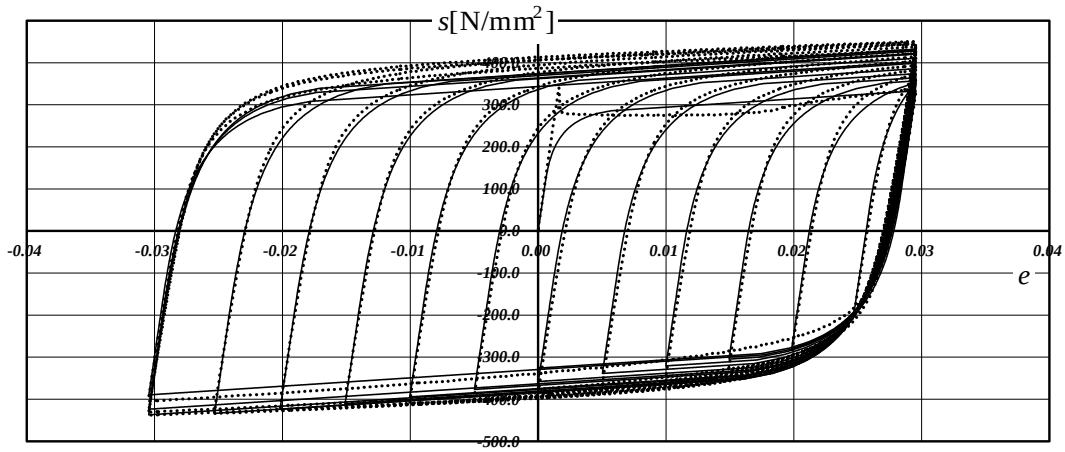
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-13(c) Shift1(SN400)



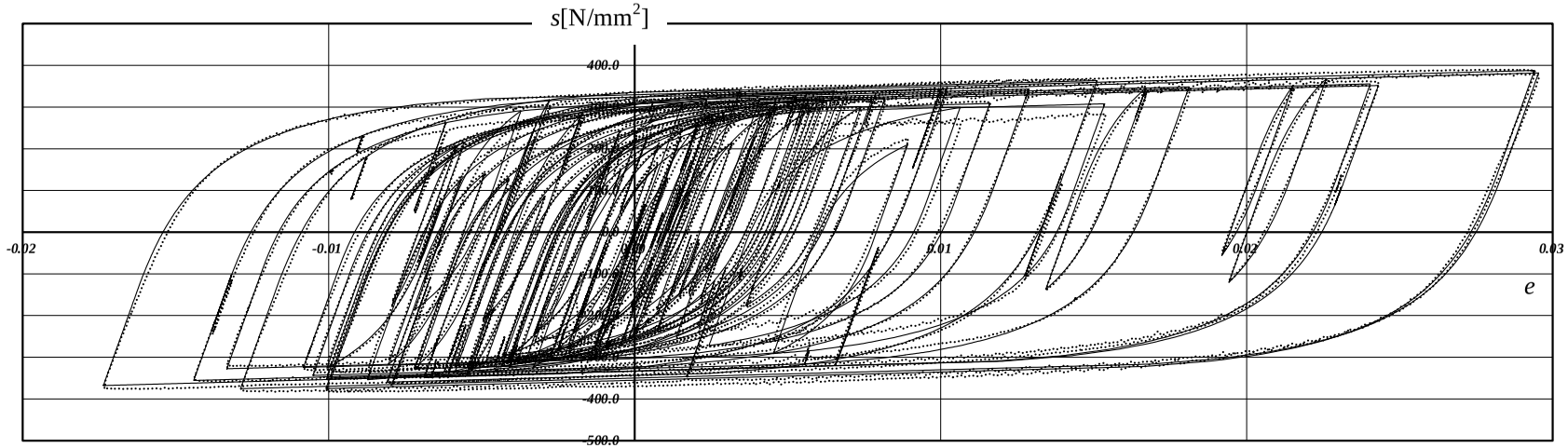
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-13(d) Shift2(SN400)



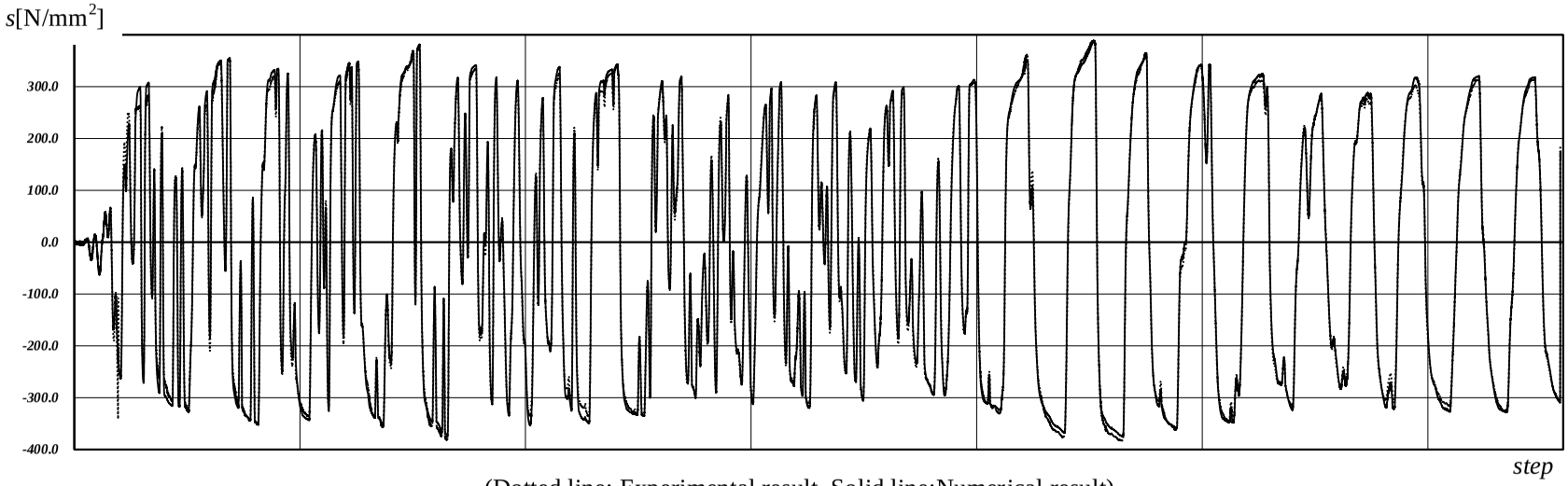
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-13(e) Shift3(SN400)



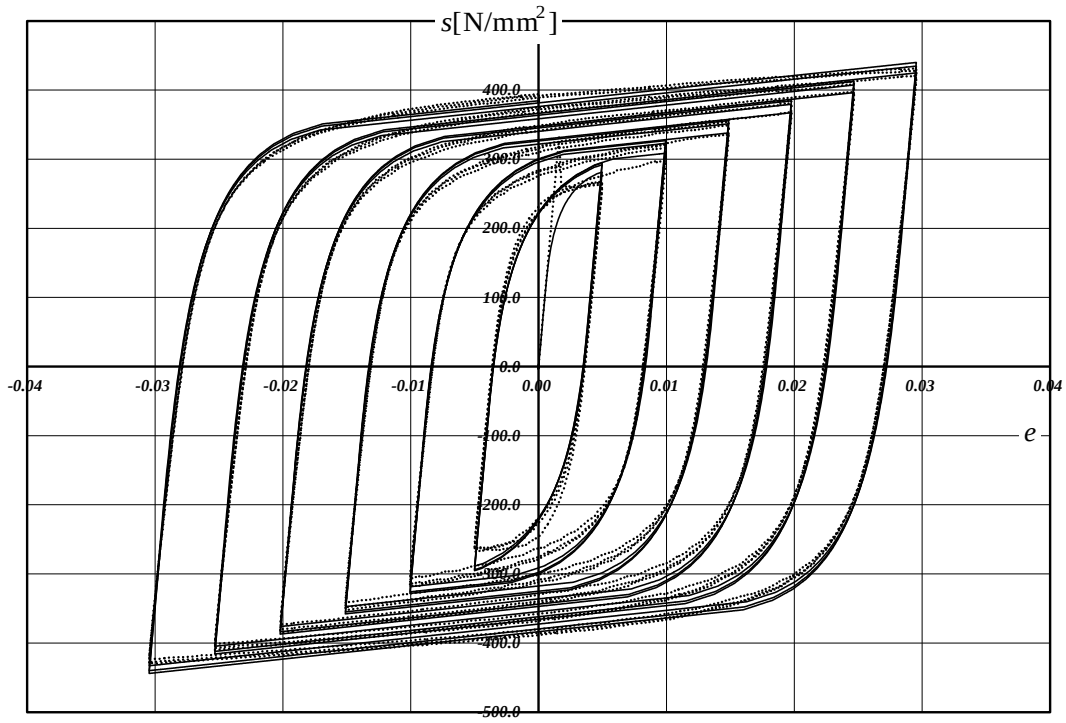
(Dotted line: Experimental result, Solid line:Numerical result)

Fig.2-13(f) Random(SN400)



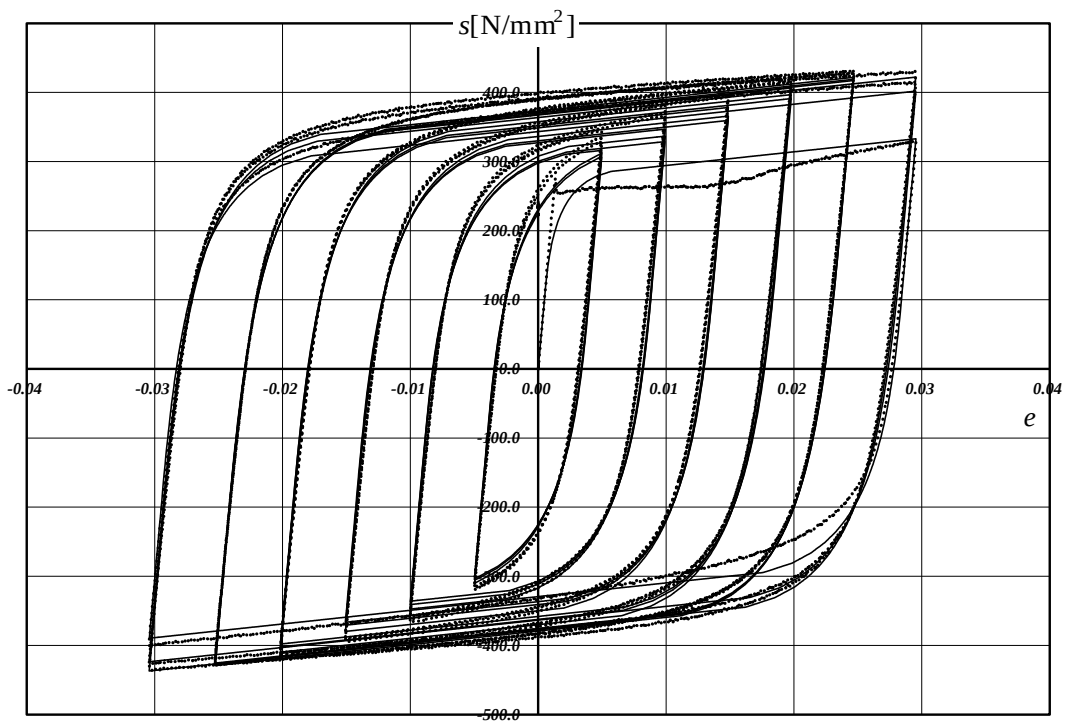
(Dotted line: Experimental result, Solid line:Numerical result)

Fig.2-13(g) Random(SN400)



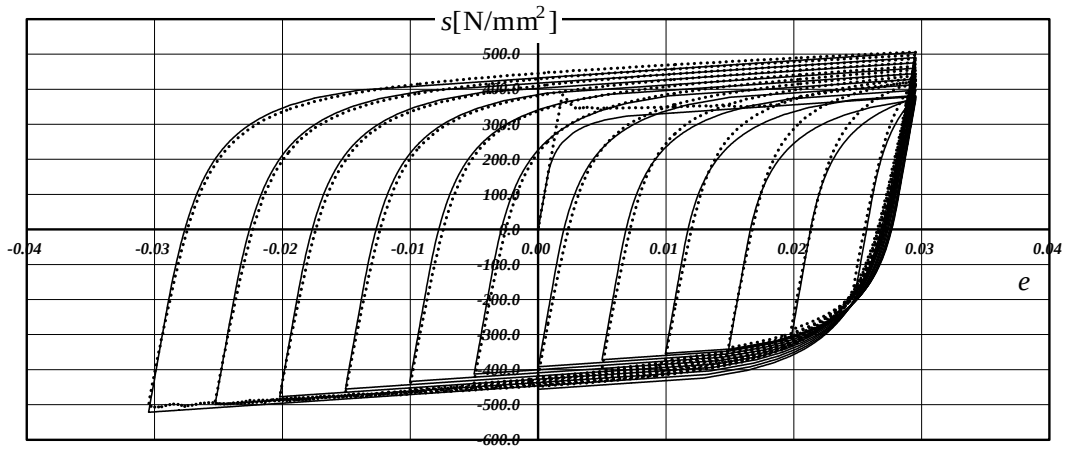
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-14(a) Gradual increase(SN490)



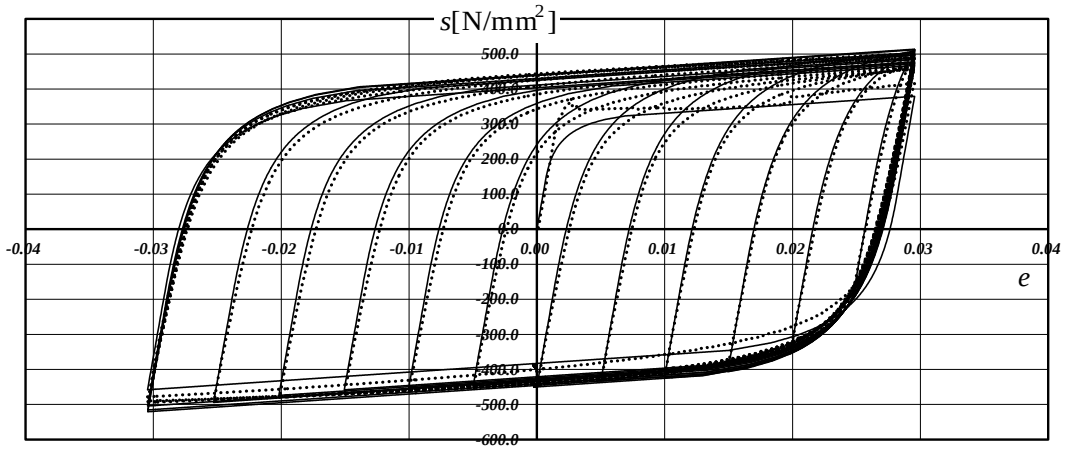
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-14(b) Gradual decrease(SN490)



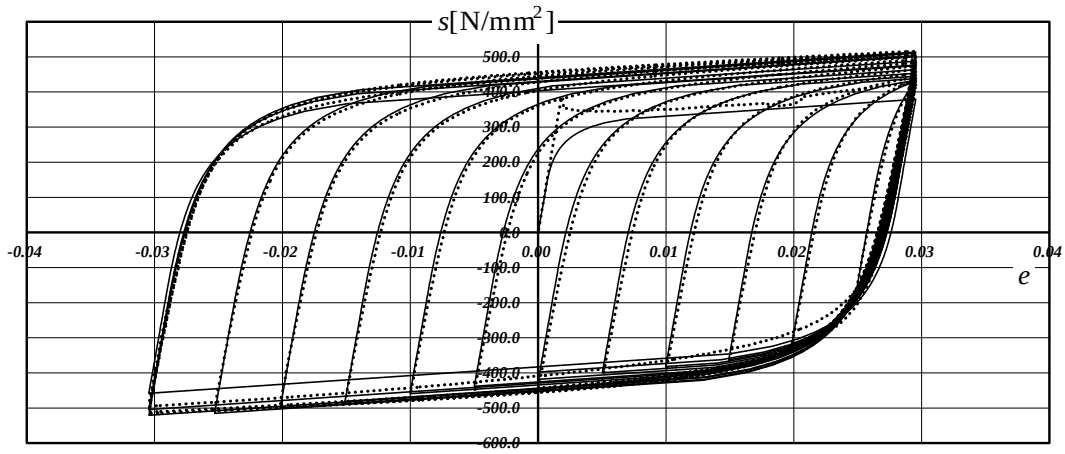
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-14(c) Shift1(SN490)



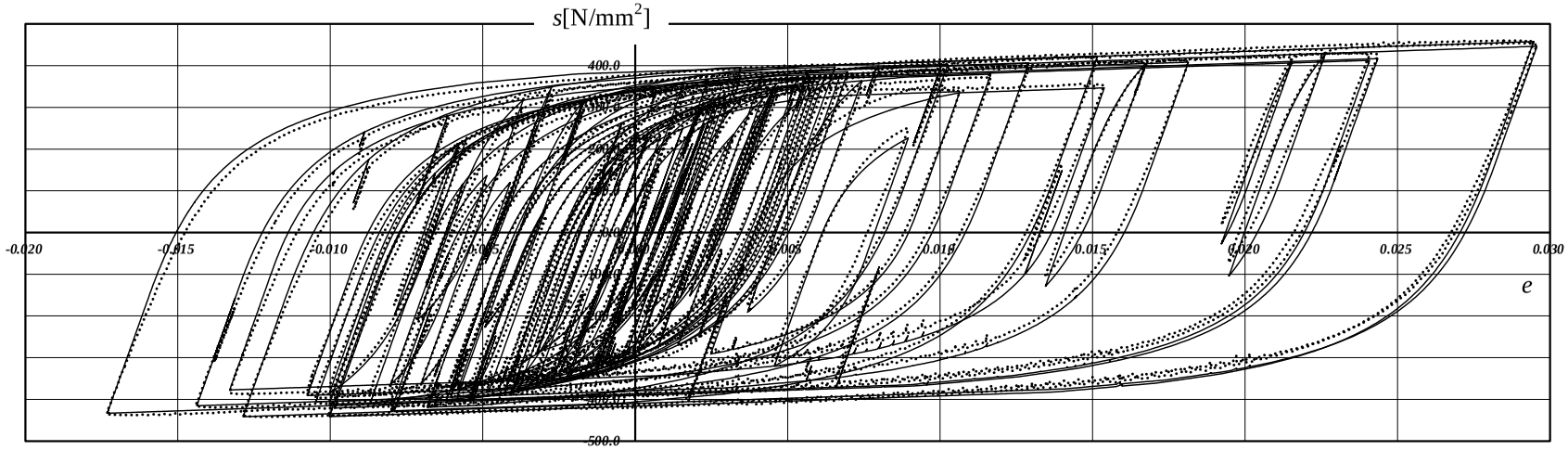
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-14(d) Shift2(SN490)



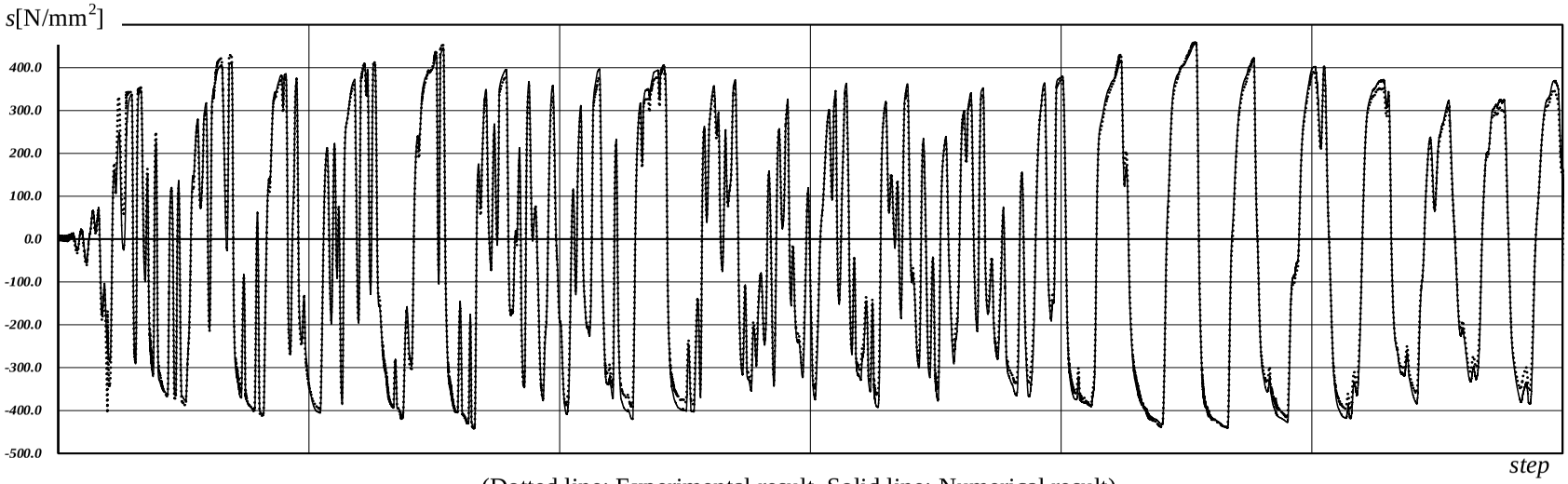
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-14(e) Shift3(SN490)



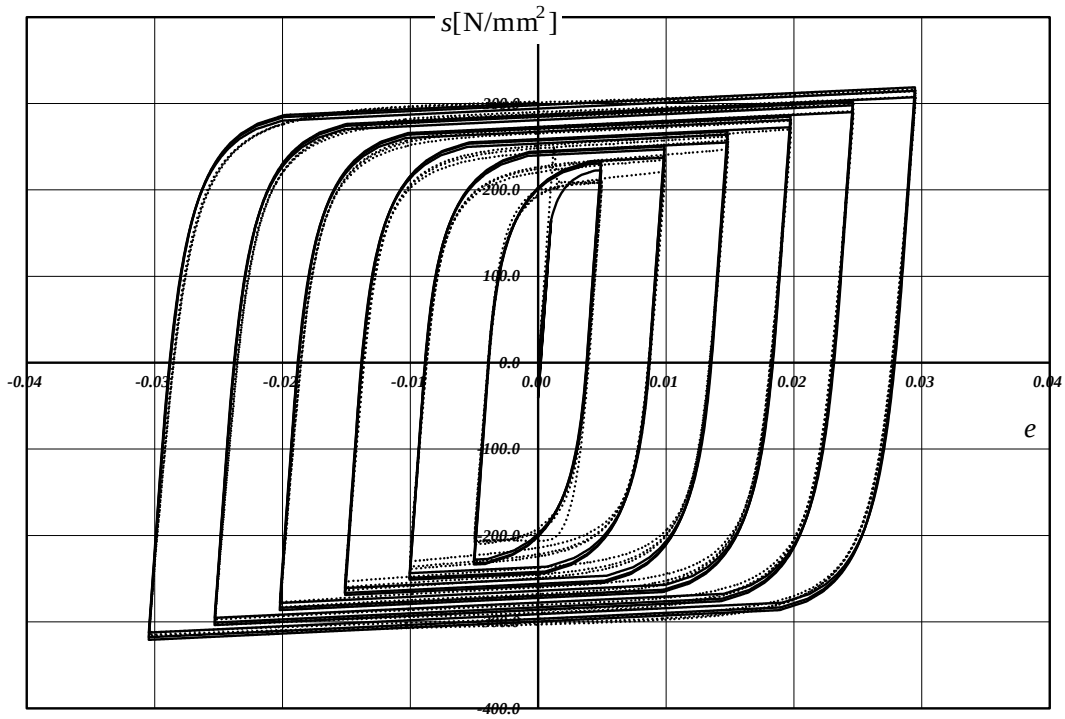
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-14(f) Random(SN490)



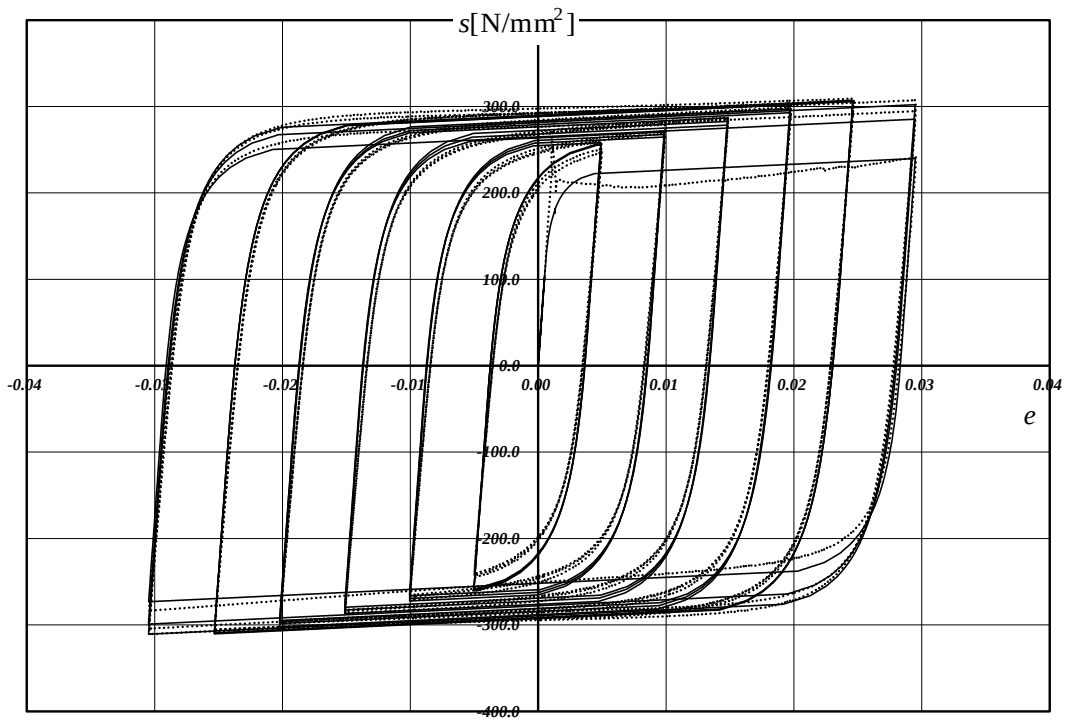
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-14(g) Random(SN490)



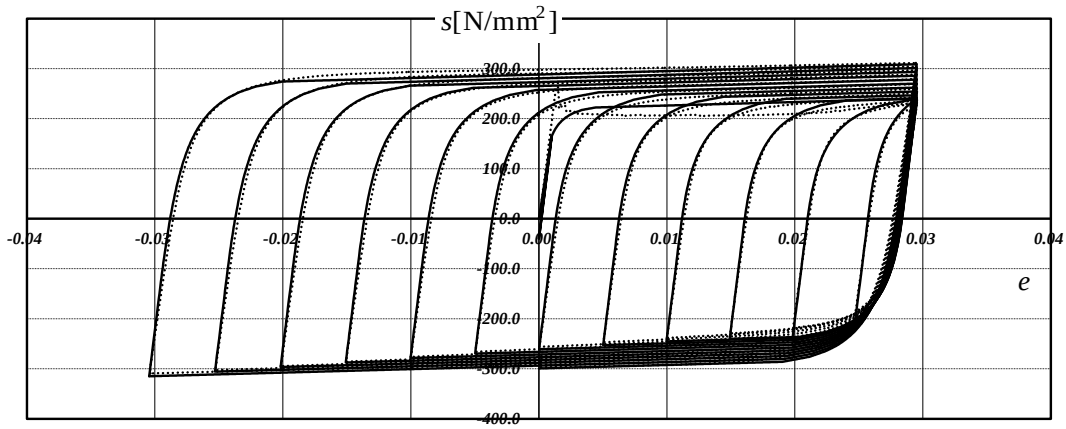
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-15(a) Gradual increase(LY225)



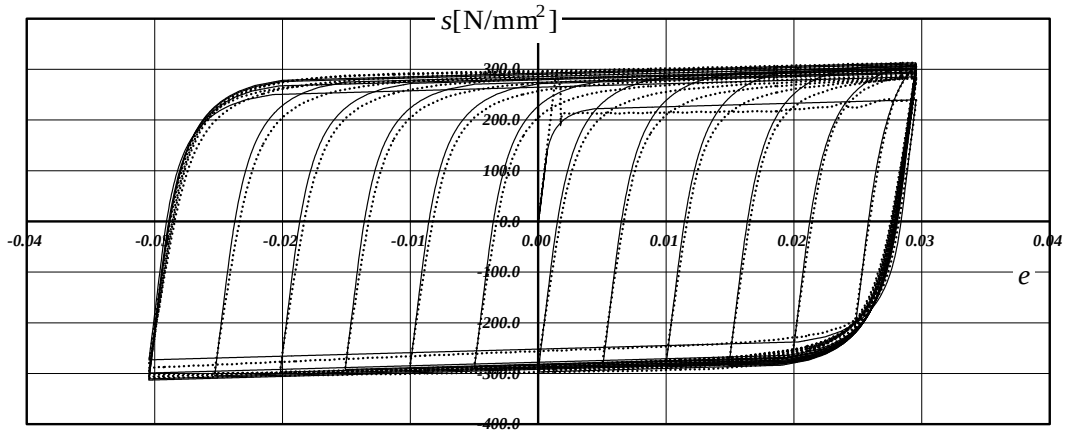
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-15(b) Gradual decrease(LY225)



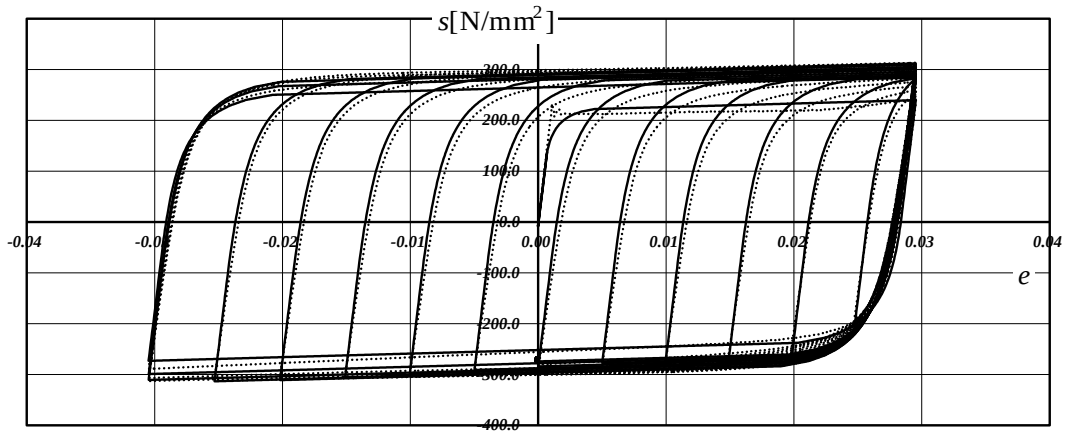
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-15(c) Shift1(LY225)



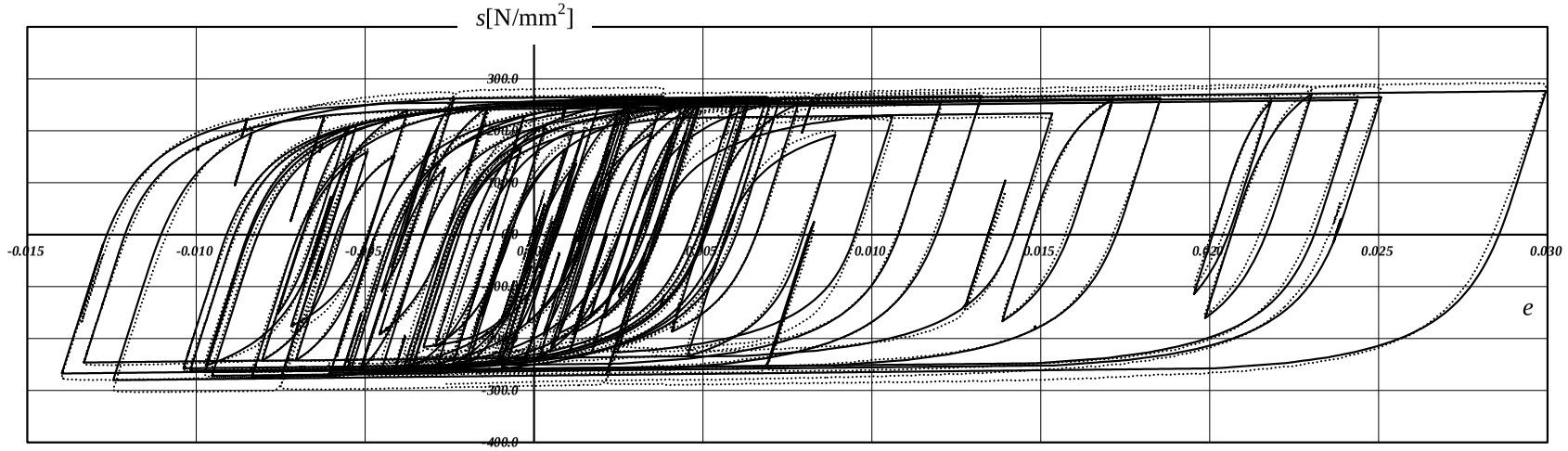
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-15(d) Shift2(LY225)



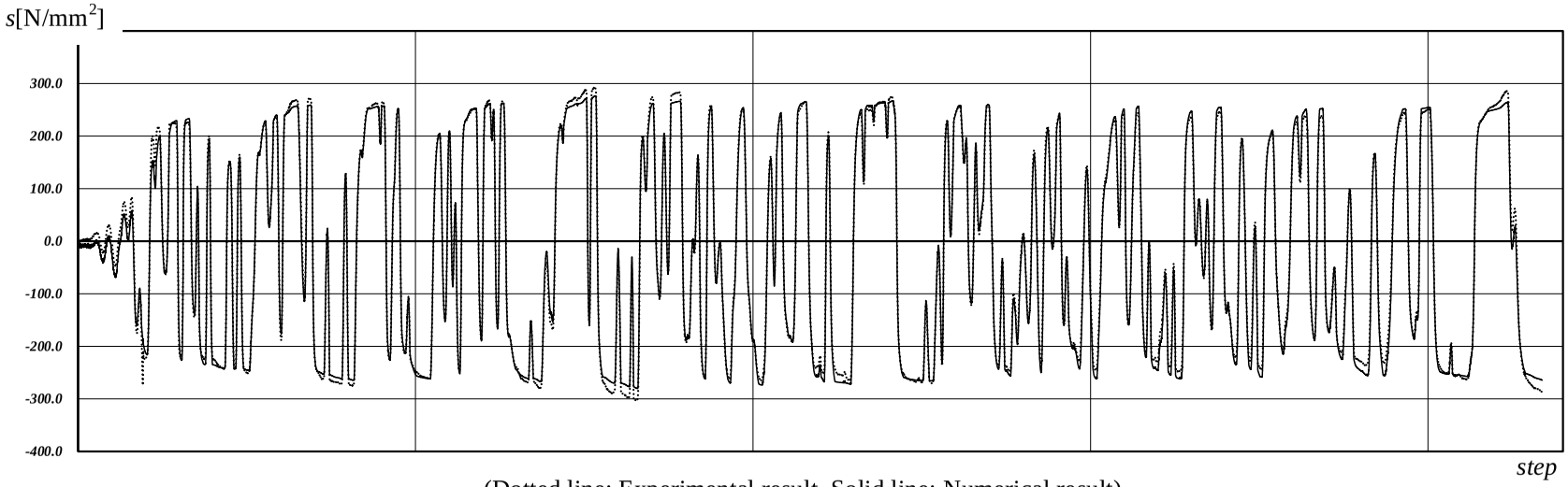
(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-15(e) Shift3(LY225)



(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-15(f) Random(LY225)



(Dotted line: Experimental result, Solid line: Numerical result)

Fig.2-15(g) Random(LY225)

第 3 章　修正サブレイヤーモデルの多軸応力状態への拡張および改善

３.１　はじめに

３.２　修正サブレイヤーモデルの多軸応力状態への拡張

３.２.１　各レイヤーの特性

３.２.２　等方硬化則および移動硬化則

３.２.３　サブレイヤーモデルにおける塑性ひずみ球

３.２.４　塑性ひずみ球を有するサブレイヤーモデルの等方硬化則および移動硬化則

３.２.５　微係数間の関係および飽和値の導出

３.３　実現象再現のための修正サブレイヤーモデルの改善

３.３.１　多軸応力状態の実現象に対する修正サブレイヤーモデルの欠点

３.３.２　修正サブレイヤーモデルの改善

３.４　数値解析

３.４.１　特殊な応力場への縮約および数値解析アルゴリズムの構築

３.４.２　一軸応力状態の修正サブレイヤーモデルとの比較による理論的整合性の検証

３.４.３　実験結果との比較による妥当性検証

３.４.４　数値解析結果に対する考察

３.５　まとめ

３.１　はじめに

大地震時に、建築構造物の柱梁接合部周辺等には複雑な多軸応力場が形成されるため、数値解析を用いて局所的な挙動を精確に把握するには、多軸応力状態に適用可能、かつ実現象を高精度に再現可能な材料構成則の開発が重要である。

多軸応力状態に対する実現象は、一軸応力状態に比べて非常に複雑な様相を呈することが報告されている。多軸応力状態に対する応力振幅の飽和現象に関しては、ひずみ経路の形状により応力振幅の飽和値および飽和に至るまでの時間に急激な差異が生じる現象が多数報告されている(Lamba(1978a,b)、Jiang(2008)、田中(1985a,b)、大橋(1985))。また、多軸応力状態において繰返し載荷を行うと、塑性変形に誘起され降伏曲面に異方的な変化が生じることも報告されている(白鳥(1976)、石川(1988)、佐々木(1990)、武田(1987,2000)、桑原(2001,2002,2004))。

これまでに、サブレイヤーモデルにより多軸応力状態における実現象の再現を試みている研究が報告されている。Chiang(1994a,1997a,b)は、多軸応力状態に対するランダム載荷において実験結果とサブレイヤーモデルと実験結果の比較を行っており、両者が比較的良い対応を示すことを報告している。しかしながら、その中で、一組のパラメータによる複数の実験結果の再現に対して言及をしておらず、汎用性は疑わしいと言える。また、Chiang(1997a,b)のサブレイヤーモデルでは硬化則を各レイヤーの塑性ひずみの変数として定義していることから 2 章で述べた古典的サブレイヤーモデルの欠点の一つ(繰返し載荷によって応力がやがてバイリニアーな応答となる)を有している。また、鈴木(1984,1986)は非硬化領域の概念を有したサブレイヤーモデルの提案を行っている。このモデルでは、応力振幅の飽和現象を表現可能であると考えられるが、等方軟化を表現できず、また、提案されている等方硬化則では 2 章で述べた古典的サブレイヤーモデルの欠点の一つである弾性核の過膨張を抑制することができないため、実現象を表現するには不十分である。

これらを踏まえて、本章では、多軸応力状態に対する実現象を再現するために、2 章で提案した修正サブレイヤーモデルを多軸応力状態へと拡張する。このとき、上述の現象全てを精確に再現する材料構成則の構築は困難であるため、降伏曲面の異方的な変化については対象外とし、応力振幅の飽和現象に焦点をあて、その再現のための材料構成則の構築を行うことを本章の目的とする。以下に本章における内容を示す。

(1)　3.2 節では、2 章で提案した修正サブレイヤーモデルにおける硬化則および塑性ひずみ球を多軸応力状態へと展開する。このとき、一軸応力状態の場合と同様に微係数間に関係式を導入することにより諸式の単純化を図る。

(2)　3.3 節では、修正サブレイヤーモデルの多軸応力状態における飽和現象の再現に対する欠点を指摘し、修正サブレイヤーモデルの改善を行う。

(3)　3.4 節では、(1),(2)で提案した基礎式より数値解析アルゴリズムを作成する。このとき、本章での提案モデルと 2 章での修正サブレイヤーモデルとの理論的整合性を検討するために解析結果の比較を行う。さらに、実験結果(Ohashi(1985))と提案モデルの比較を行い、妥当性の検証を行う。

３.２　修正サブレイヤーモデルの多軸応力状態への拡張

３.２.１　各レイヤーの特性

多軸応力状態に対するサブレイヤーモデルは、一軸応力状態の場合と同様に降伏応力の異なる複数の仮想のレイヤーを想定する。また、サブレイヤーモデルにおいてひずみは全レイヤーで均一であり、応力は全レイヤーの平均で表される。Fig.3-1 は平面応力状態に対するサブレイヤーモデルの概念図である。このとき、各レイヤーの降伏曲面を主応力空間上で図示すると Fig.3-2 のようになる。

続いて、多軸応力状態における各レイヤーの特性を示す。このとき、各レイヤーの位置は一軸応力状態における場合と同様にレイヤーの厚さ方向に仮想の座標系 $\zeta\left(-1/2 \le \zeta \le 1/2\right)$ を想定し、$\zeta_j\left(j=1\sim N\right)$ を設定することにより特定される。降伏条件式は von Mises の降伏条件式を用い、塑性流れ則は連合流れ則を用いる。このとき、レイヤー j の特性は以下のようになる。

弾性構成則：$\boldsymbol{\sigma}'\left(\zeta_j\right)=2G\left(\boldsymbol{\varepsilon}'\left(\zeta\right)-\boldsymbol{\varepsilon_p}\left(\zeta_j\right)\right)$ (3-1)

降伏条件式：$\phi\left(\zeta_j\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{\sigma}'\left(\zeta_j\right)-\boldsymbol{\sigma}'^K\left(\zeta_j\right)\right):\left(\boldsymbol{\sigma}'\left(\zeta_j\right)-\boldsymbol{\sigma}'^K\left(\zeta_j\right)\right)}-\left(\sigma_y\left(\zeta_j\right)+\sigma^I\left(\zeta_j\right)\right)\le 0$ (3-2)

塑性流れ則：$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}\left(\zeta_j\right)=\frac{\partial\phi\left(\zeta_j\right)}{\partial\left(\boldsymbol{\sigma}'\left(\zeta_j\right)-\boldsymbol{\sigma}'^K\left(\zeta_j\right)\right)}\dot{\gamma}\left(\zeta_j\right)=\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}'\left(\zeta_j\right)-\boldsymbol{\sigma}'^K\left(\zeta_j\right)}{\sigma_y\left(\zeta_j\right)+\sigma^I\left(\zeta_j\right)}\dot{\gamma}\left(\zeta_j\right)$ (3-3)

塑性負荷条件：$\phi\left(\zeta_j\right)=\dot{\phi}\left(\zeta_j\right)=0$ (3-4)

ここに、$G=E/(2(1+\nu))$ はせん断弾性係数、E はヤング係数、ν はポアソン比、$\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソル、$\boldsymbol{\varepsilon_p}$ は塑性ひずみテンソル、$\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、σ^I は等方硬化則により生じる弾性領域の変化(等方硬化応力とよぶ)、$\boldsymbol{\sigma}^K$ は弾性領域の中心テンソル(移動硬化応力テンソルとよぶ)、σ_y は初期降伏応力(一定)、γ は塑性進展パラメータである。また、σ_y は ζ に関して単調減少な関数と定義する(具体的な式については 3.4.3 項にて説明する)。ここで、$(*)'$, $(\dot{*})$ はそれぞれ変数 $(*)$ の偏差成分および変化率を表すものとする。なお、本章では、2 章と同様、各レイヤーの諸量を微視的諸量とよぶことにする。

上述したようにサブレイヤーモデルでは、全レイヤーにおいてひずみが等しい。これを $\boldsymbol{e}$ と定義すると、次のように表される。

$\boldsymbol{\varepsilon}\left(\zeta_j\right)=\text{constant}=\boldsymbol{e} \quad \left(j=1\sim N\right)$ (3-5)

サブレイヤーモデルの応力は、全レイヤーの微視的応力の平均で表されることから以下のように表

される。

$$\boldsymbol{s}' = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_j) = 2G(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{e_p}) \tag{3-6}$$

$$\boldsymbol{e_p} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta_j) \tag{3-7}$$

ここに、$\boldsymbol{e_p}$ は全レイヤーの微視的塑性ひずみテンソルの平均であり、平均塑性ひずみテンソルと呼ぶ。式(3-6)は、ひずみテンソルおよび平均塑性ひずみテンソルにより表されていることからサブレイヤーモデルの弾性構成則と考えることができる。

３.２.２　等方硬化則および移動硬化則

2 章で提案したサブレイヤーモデルの等方硬化則および移動硬化則を多軸応力状態に拡張する。まず、微視的な等方硬化則を以下のように定義する。

$$\dot{\sigma}^I(\zeta_j) = -p(\zeta_j - \zeta_c)\theta\dot{g} \tag{3-8}$$

$$\dot{g} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\dot{\gamma}(\zeta_j) \tag{3-9}$$

ここに、ζ_c は定数であり、θ は鋼材毎に決定される関数であり、具体的な式については、式(2-86),(2-87)を参照されたい。また、g は微視的塑性進展パラメータ γ の全レイヤーにおける平均であり、モデルとしての塑性進展パラメータである。さらに、p は多軸応力状態に対する実現象の再現のために新たに定義した変数であり、p の具体的な表現については 3.3.2 項にて述べる。なお、式(3-8)において p =1 とし、一軸応力状態、即ち $\dot{g} = |\dot{e}_p|$ と考えると、式(3-8)は 2 章において提案した微視的な等方硬化則と一致することが理解される。また、式(3-8)を全レイヤーで平均すると、次式が導出される。

$$\dot{s}^I = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\dot{\sigma}^I(\zeta_j) = p\zeta_c\theta\dot{g} \tag{3-10}$$

ここで、s^I はモデルとしての等方硬化応力であり、平均等方硬化応力とよぶものとする。続いて、微視的な等方硬化応力と移動硬化応力の関係を以下のように定義する。

$$\sqrt{\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^{K}\left(\zeta_j\right):\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^{K}\left(\zeta_j\right)}=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\dot{g}-\dot{\sigma}^{I}\left(\zeta_j\right)\right) \tag{3-11}$$

ここに、K は定数であり、全硬化係数を表す。式(3-11)において、一軸応力状態の条件、すなわち、$\dot{\sigma}'^{K}_{11}=2\dot{\sigma}^{K}_{11}/3$，　$\dot{\sigma}'^{K}_{22}=\dot{\sigma}'^{K}_{33}=-\dot{\sigma}'^{K}_{11}/2$ とすると、式(3-11)は 2 章における微視的な等方硬化応力と移動硬化応力の関係式に一致することが分かる。また、Prager の移動硬化則と同様に $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^{K}\left(\zeta_j\right)\propto\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}\left(\zeta_j\right)$ と仮定すると式(3-11)より次式が導かれる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^{K}\left(\zeta_j\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\dot{g}-\dot{\sigma}^{I}\left(\zeta_j\right)\right)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}\left(\zeta_j\right)}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}\left(\zeta_j\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}\left(\zeta_j\right)}} \tag{3-12}$$

式(3-12)を全レイヤーにおいて平均すると、

$$\dot{\boldsymbol{s}}'^{\boldsymbol{K}}=\frac{1}{N}\sqrt{\frac{2}{3}}\sum_{i=1}^{N}\left(K\dot{g}-\dot{\sigma}^{I}\left(\zeta_j\right)\right)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}\left(\zeta_j\right)}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}\left(\zeta_j\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}\left(\zeta_j\right)}} \tag{3-13}$$

ここで、$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}$ を平均移動硬化応力テンソルとよぶものとする。

３.２.３　サブレイヤーモデルにおける塑性ひずみ球

多軸応力状態に対する非硬化領域の概念をサブレイヤーモデルに適用する。このとき、平均塑性ひずみ空間において仮想の球を想定し、球内を非硬化領域と考える。ここで、仮想の球を塑性ひずみ球と呼ぶことにする。塑性ひずみ球を平均塑性ひずみ空間上で次式のように定義する。

$$\Phi_e=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\left(\boldsymbol{e_p}-\boldsymbol{e_c}\right):\left(\boldsymbol{e_p}-\boldsymbol{e_c}\right)}-e_r\le 0 \tag{3-14}$$

ここに、e_r は塑性ひずみ球の半径、$\boldsymbol{e_c}$ は塑性ひずみ球の中心を表すテンソルである(Fig.3-3 参照)。一軸応力状態の場合と同様に、平均塑性ひずみは常に塑性ひずみ球内もしくは球面上に位置するものとし$\left(\Phi_e\le 0\right)$、球外には存在しないものとする。ここで、多軸応力状態における塑性ひずみ球のルールを以下のように定義する。

$\Phi_e<0$ の場合：$\dot{e}_r,\dot{s}^{I}<0$，　$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{c}}\propto-\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$

$\Phi_e=0$ の場合：$\dot{e}_r,\dot{s}^{I}>0$，　$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{c}}\propto\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$

これより、平均塑性ひずみが塑性ひずみ球内に存在する場合は、塑性ひずみ球の半径および平均等方硬化応力は減少し、塑性ひずみ球の中心は $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$ とは逆の方向に移動する。一方、平均塑性ひずみが塑性ひずみ球面上に存在する場合は、塑性ひずみ球の半径および平均等方硬化応力は増加し、塑性

ひずみ球の中心は$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$と同一の方向に移動する。以上が塑性ひずみ球に関するルールである。続いて、塑性ひずみ球面上で生じる塑性ひずみを$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{po}}$、球内で生じる塑性ひずみを$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{pi}}$と定義すると、次の関係が成り立つ。

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{po}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{pi}} \tag{3-15}$$

他の変数についても、球面上で生じる変数は$(\ )_o$、球内で生じる変数は$(\ )_i$とし、$(\ )=(\ )_o+(\ )_i$が成り立つものとする。$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{c}}, e_r$の$g$に対する変化率を次のように定義する。

$$\dot{e}_r = \frac{de_{ro}}{dg_o}\dot{g}_o + \frac{de_{ri}}{dg_i}\dot{g}_i, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{c}} = \frac{d\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{co}}}{dg_o}\dot{g}_o + \frac{d\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{ci}}}{dg_i}\dot{g}_i \tag{3-16),(3-17}$$

ここに、g_oおよびg_iはそれぞれ球面上および球内でのモデルとしての塑性進展パラメータである(式(3-9)参照)。続いて、応力振幅が飽和値を取るために$e_r, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{c}}$がとるべき条件を導く。Fig.3-3 は、応力振幅飽和時において、平均塑性ひずみ空間上での塑性ひずみ球の挙動を概念的に表したものである。平均塑性ひずみの経路は、Fig.3-3 の点線で表されるように直線とし、この直線経路を繰返して応力振幅が飽和に至っている状態にあるものとする。このとき、平均塑性ひずみの経路は、時刻t_1における塑性ひずみ球の中心を通り、球を横切るものとする。平均塑性ひずみの経路は当然ながら Fig.3-3 に表されるような直線だけではなく様々な形状の経路を取る可能性がある。これらに対する飽和条件を解析的に表すことは困難であるため、ここでは、平均塑性ひずみの経路は図のように直線とし、この直線経路に対する応力振幅の飽和条件を導く。また、他の複雑な経路については、3.3 節の数値解析結果により飽和現象を確認するものとする。時刻$t_1 < t < t_2$では、平均塑性ひずみが塑性ひずみ球内$(\Phi_e < 0)$に存在するものとし、時刻$t = t_2$において、はじめて平均塑性ひずみが塑性ひずみに接触する$(\Phi_e = 0)$ものとする。その後、時刻$t_2 < t < t_3$まで、再び平均塑性ひずみが塑性ひずみ球面上に存在する$(\Phi_e = 0)$ものとする。従って、応力振幅飽和時には、時刻t_1とt_3における塑性ひずみ球が一致する必要があることから、幾何学的な関係より次式が導かれる。

$$e_r(t_1) - e_r(t_2) = \int_{t_3}^{t_1} de_{ro} \tag{3-18}$$

$$e_r(t_1) + \sqrt{\frac{2}{3}}\int_{t_1}^{t_3}\sqrt{d\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{co}} : d\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{co}}} = e_r(t_2) + \sqrt{\frac{2}{3}}\int_{t_1}^{t_3}\sqrt{d\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{po}} : d\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{po}}} \tag{3-19}$$

式(3-18),(3-19)を整理すると次式が導かれる。

$$\int_{t_1}^{t_3} de_{ro} = \sqrt{\frac{2}{3}}\int_{t_1}^{t_3}\sqrt{d\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{po}} : d\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{po}}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\int_{t_1}^{t_3}\sqrt{d\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{co}} : d\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{co}}} \tag{3-20}$$

ここで、想定している平均塑性ひずみの経路は直線であることから、塑性状態にあるレイヤーの微視的塑性ひずみ増分の方向は等しいと考えることができる。従って、式(3-3),(3-7),(3-9)より $\sqrt{d\boldsymbol{e}_{po}:d\boldsymbol{e}_{po}}=\sqrt{\frac{3}{2}}dg_o$ が成り立つ(この関係が一般の経路では成り立たないことは式(3-3),(3-7),(3-9)より容易に導かれる)。この関係を式(3-20)に用いると次式が導かれる。

$$\sqrt{\frac{d\boldsymbol{e}_{co}}{dg_o}:\frac{d\boldsymbol{e}_{co}}{dg_o}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{de_{ro}}{dg_o}\right) \tag{3-21}$$

先に定義した塑性ひずみ球のルールより $\dot{\boldsymbol{e}}_{co}\propto\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$ であることを考慮すると、式(3-21)は次式のように書くことができる。

$$\frac{d\boldsymbol{e}_{co}}{dg_o}=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{de_{ro}}{dg_o}\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}} \tag{3-22}$$

３.２.４　塑性ひずみ球を有するサブレイヤーモデルの等方硬化則および移動硬化則

塑性ひずみ球を有するサブレイヤーモデルの等方硬化応力および移動硬化応力について述べる。$\dot{g}_o$，$\dot{g}_i$ を用いて微視的等方硬化応力を次のように定義する。

$$\dot{\sigma}^I(\zeta_j)=\frac{d\sigma_o^I(\zeta_j)}{dg_o}\dot{g}_o+\frac{d\sigma_i^I(\zeta_j)}{dg_i}\dot{g}_i \tag{3-23}$$

ここで、式(3-11)を用いると微視的移動硬化応力の変化率が次のように表される。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^K=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(K-\frac{d\sigma_o^I(\zeta_j)}{dg_o}\dot{g}_o-\frac{d\sigma_i^I(\zeta_j)}{dg_i}\dot{g}_i\right)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta_j)}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta_j):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta_j)}} \tag{3-24}$$

また、式(3-23)を全レイヤーにおいて平均すると、平均等方硬化応力の増分が次式のように導出される。

$$\dot{s}^I=\frac{ds_o^I}{dg_o}\dot{g}_o+\frac{ds_i^I}{dg_i}\dot{g}_i \tag{3-25}$$

ここに

$$\frac{ds_o^I}{dg_o}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{d\sigma_o^I(\zeta_j)}{dg_o},\quad \frac{ds_i^I}{dg_i}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{d\sigma_i^I(\zeta_j)}{dg_i} \tag{3-26),(3-27}$$

なお、平均移動硬化応力は、式(3-13)を用いて求められる。続いて、前項で述べた直線経路の繰返し

載荷において、応力振幅が飽和する時の平均等方硬化応力 s_s^I について述べる。詳細は割愛するが、飽和時の時刻を t_s とすると、式(2-32)と同様に s_s^I が次のように求められる。

$$s_s^I = \int_0^{t_s} ds^I = \int_0^{t_s} \left(\frac{\dfrac{ds_o^I}{dg_o}}{\dfrac{de_{ro}}{dg_o}} de_{ro} + \frac{\dfrac{ds_i^I}{dg_i}}{\dfrac{de_{ri}}{dg_i}} de_{ri} \right) \tag{3-28}$$

３.２.５　微係数間の関係および飽和値の導出

2.3.3 項と同様に諸式の単純化のために微係数間の関係式を定義する。はじめに、塑性ひずみ球における微係数間の関係を次のように定義する。

$$\frac{de_{ri}}{dg_i} = -\alpha \frac{de_{ro}}{dg_o}, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_{ci}}{dg_i} = -\alpha \frac{d\boldsymbol{e}_{co}}{dg_o} \tag{3-29),(3-30}$$

ここに、α は定数である。次に、微視的な等方硬化応力における微係数に対して次式を定義する。

$$\frac{d\sigma_i^I(\zeta_j)}{dg_i} = -\alpha \frac{d\sigma_o^I(\zeta_j)}{dg_o} \tag{3-31}$$

塑性ひずみ球の半径の微係数と平均等方硬化応力の微係数間に次の関係を定義する。

$$\frac{ds_o^I}{dg_o} = F \frac{de_{ro}}{dg_o}, \quad \frac{ds_i^I}{dg_i} = F \frac{de_{ri}}{dg_i} \tag{3-32),(3-33}$$

式(3-32),(3-33)は式(3-28)で表される飽和値を単純な形式にすることを意図している。ここに F は変数であり 3.3.2 項にて詳述する。微視的等方硬化応力の微係数は式(3-8)を用いると、次式のように表される。

$$\frac{d\sigma_o^I(\zeta_j)}{dg_o} = -p(\zeta_j - \zeta_c)\theta \tag{3-35}$$

従って、式(3-22),(3-23),(3-29)-(3-35)より各微係数は次式のように表される。

$$\frac{ds_o^I}{dg_o} = p\zeta_c\theta, \quad \frac{ds_i^I}{dg_i} = -\alpha p\zeta_c\theta \tag{3-36),(3-37}$$

$$\frac{de_{ro}}{dg_o} = \frac{1}{F} p\zeta_c\theta, \quad \frac{de_{ri}}{dg_i} = -\frac{\alpha}{F} p\zeta_c\theta \tag{3-38),(3-39}$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_{co}}{dg_o}=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{p\zeta_c\theta}{F}\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}},\quad \frac{d\boldsymbol{e}_{ci}}{dg_i}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\left(1-\frac{p\zeta_c\theta}{F}\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}} \qquad \text{(3-40),(3-41)}$$

また、平均等方硬化応力の飽和値は、式(3-28),(3-32),(3-33)より次式のように表されることが分かる。

$$s_s^I=F\int_0^{t_s}dg \qquad \text{(3-42)}$$

以上が、2 章で提案したモデルの多軸応力状態に対する拡張である。詳細は割愛するが、本節で多軸応力状態に拡張した提案モデルは、一軸応力状態の条件を用い、かつ $p=1$ とすると、2 章で述べた一軸応力状態に対する提案モデルに帰結する。

３.３　実現象再現のための修正サブレイヤーモデルの改善

３.３.１　多軸応力状態の実現象に対する修正サブレイヤーモデルの欠点

これまでに、多軸応力状態において様々な金属系材料の実現象が実験により報告されている。その中でも本章では、多軸応力状態における飽和現象に着目し、その再現を修正サブレイヤーモデルによって試みる。多軸での飽和現象とは、ひずみ増分の方向が頻繁に変化する場合、一軸の単調繰返し載荷時に比べ、応力振幅の飽和値が急激に増大し、また、急速に飽和に至る現象である。この現象を再現するため Hopperstad(1995a,b),Macdowell(1985a,b,c),Basuroychowdhury(1998), 田中(1988,1991)らが材料構成則を提案しているが、サブレイヤーモデルを用いての再現は未だ報告されていない。そこで、はじめに、この現象に対する修正サブレイヤーモデルの適用性を見るために数値解析結果を示す。ひずみ経路は、軸ひずみのみを繰返し与える場合(Fig.3-4(a))、軸ひずみとせん断ひずみを交互に作用させることによりひずみ空間上でひずみ経路が四角の軌跡を描く場合(Fig.3-4(b))および円形の軌跡を描く場合(Fig.3-4(c))を想定する。また、直線経路、四角経路および円形経路のひずみ振幅はそれぞれ $\Delta e_M/2 = 0.6, 0.6/\sqrt{2}, 0.6\%$ である。ここで、p は、$p=1$ つまり 2 章で提案した修正サブレイヤーモデルの多軸応力状態へ単純に拡張したモデルとする。Fig.3-5 は、各ひずみ経路における平均等方硬化応力と累積塑性ひずみ $\bar{e}_p = \sqrt{\frac{2}{3}}\int \sqrt{\boldsymbol{de_p}:\boldsymbol{de_p}}$ の関係を示しており、目標値も併せて記している。これより、直線形路については、2 章でみた様に飽和値に対して問題はないものの、円形、四角については、等方硬化応力の飽和値および飽和に至る速度は目標値に遠く及ばないことが分かる。

３.３.２　修正サブレイヤーモデルの改善

前項で、ひずみ増分の方向が急変した場合に生じる等方硬化応力の飽和値および飽和に至る速度の急激な増加は本章における提案モデルでは不十分であることを述べた。そこで、はじめに、等方硬化則に以下のような改善を施す。

$$\dot{\sigma}^I = -p(\zeta - \zeta_c)\theta\dot{g} \tag{3-43}$$

$$p = 1 + p_o\left(1 - \left|\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}} : \frac{\dot{\boldsymbol{e}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}:\dot{\boldsymbol{e}}}}\right|\right) \tag{3-44}$$

ここに p_o は定数である。式(3-44)において軸応力のみが生じる場合もしくはせん断応力のみが生じる場合は、常に $\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}} : \frac{\dot{\boldsymbol{e}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}:\dot{\boldsymbol{e}}}} = 1$ であるので $p=1$ となる、即ち、改善前のサブレイヤーモデルと同

じ結果となる。式(3-43),(3-44)によって、四角経路や円形経路等のように応力とひずみ増分の方向に著しい差異が生じる場合は、$\left|\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}}:\frac{\dot{\boldsymbol{e}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}:\dot{\boldsymbol{e}}}}\right|$の値が小さくなるため、等方硬化が素早く促進することを表現可能となる。また、式(3-38)-(3-41)より p の値は塑性ひずみ球の半径および中心の移動の増分に対して関係することから、 p の増加に伴い素早く飽和現象が促進されることが理解される。

続いて、 F に次のような改善を行う。

$$F = F_o\left(1 + F_1\left(1 - \left|\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}}:\frac{\dot{\boldsymbol{e}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}:\dot{\boldsymbol{e}}}}\right|\right)\right) \tag{3-45}$$

ここに、 F_o は定数であり、 F_1 は新たに導入した定数である。式(3-45)は式(3-43)と同様に、軸応力のみが生じる場合は $F = F_o$ (定数)となることから、改善前のサブレイヤーモデルと一致する。また、式(3-45)より F は、先に述べた p と同様に、応力とひずみ増分の方向に著しい差異が生じる場合に値が大きくなるという特徴を持つ。式(3-42)より等方硬化応力の飽和値は F に影響されるため、式(3-45)により等方硬化応力の飽和値の増大が再現可能と考えられる。

最後に 3.2 節で定義した各諸量をまとめて記す。

＜微視的諸量＞

弾性構成則： $\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_j) = 2G\{\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta_j)\}$ (3-46)

等方硬化則： $\dot{\sigma}^I(\zeta_j) = -p(\zeta_j - \zeta_c)\theta\dot{g}_o + \alpha p(\zeta_j - \zeta_c)\theta\dot{g}_i$ (3-47)

移動硬化則： $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^K(\zeta_j) = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\dot{g} - \dot{\sigma}^I(\zeta_j)\right)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta_j)}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta_j):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta_j)}}$ (3-48)

降伏条件式： $\phi(\zeta_j) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_j) - \boldsymbol{\sigma}'^K(\zeta_j)\right):\left(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_j) - \boldsymbol{\sigma}'^K(\zeta_j)\right)} - \left(\sigma_y(\zeta_j) + \sigma^I(\zeta_j)\right) \le 0$ (3-49)

塑性負荷条件： $\phi(\zeta_j) = \dot{\phi}(\zeta_j) = 0$ (3-50)

＜サブレイヤーモデルの諸量＞

弾性構成則： $\boldsymbol{s}' = 2G(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}})$ (3-51)

等方硬化則： $\dot{s}^I = p\zeta_c\theta\dot{g}_o - \alpha p\zeta_c\theta\dot{g}_i$ (3-52)

移動硬化則： $\dot{\boldsymbol{s}}'^{\boldsymbol{K}} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{2}{3}}\sum_{i=1}^{N}\left(K\dot{g} - \dot{\sigma}^I(\zeta_j)\right)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta_j)}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta_j):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta_j)}}$ (3-53)

＜塑性ひずみ球の諸量＞

塑性ひずみ球：$\Phi_e = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\boldsymbol{e_p} - \boldsymbol{e_c}):(\boldsymbol{e_p} - \boldsymbol{e_c})} - e_r \leq 0$ (3-54)

非硬化領域の幅：$\dot{e}_r = \frac{p\zeta_c}{F}\theta\dot{g}_o - \frac{\alpha p\zeta_c}{F}\theta\dot{g}_i$ (3-55)

非硬化領域の中心：$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{c}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{p\zeta_c\theta}{F}\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}}\dot{g}_o - \sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\left(1 - \frac{p\zeta_c\theta}{F}\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}}\dot{g}_i$ (3-56)

以上が多軸応力状態に対する修正サブレイヤーモデルの諸量である。これら諸量より提案モデルにおいて微係数間の関係は、α, F, K のみによって決定されるため、田中(1988,1991)によるものに比べ、単純なものとなっていることが理解される。

３.４　数値解析

3.2 節および 3.3 節では多軸応力状態に対する修正サブレイヤーモデルの定式化を行った。ここでは、得られた基礎式を基に数値解析アルゴリズムの構築を行い、解析を実施し、実験結果との比較を行う。多軸応力状態に対する実験は、薄肉の円筒試験片に軸力とトルクを作用させることによって試験片中央部に近似的に軸応力とせん断応力のみが生じる特殊な応力場(本章では軸・せん断応力状態とよぶ)を生じさせることが多い。そこで、軸・せん断応力状態へと修正サブレイヤーモデルを縮約し、数値解析アルゴリズムの構築を行う。

３.４.１　特殊な応力場への縮約および数値解析アルゴリズムの構築

＜軸・せん断応力状態における各レイヤーの諸量＞

はじめに、軸・せん断応力状態に対する各レイヤーの諸量を求める。軸・せん断応力状態の条件は次のようになる。

$$\sigma_{22}(\zeta_j)=\sigma_{33}(\zeta_j)=\sigma_{23}(\zeta_j)=\sigma_{13}(\zeta_j)=\sigma_{22}^K(\zeta_j)=\sigma_{33}^K(\zeta_j)=\sigma_{23}^K(\zeta_j)=\sigma_{13}^K(\zeta_j)=0 \tag{3-57a}$$

$$\varepsilon_{p22}(\zeta_j)=\varepsilon_{p33}(\zeta_j)=-\varepsilon_{p11}(\zeta_j)/2 \tag{3-57b}$$

式(3-57b)は、体積一定条件を用いて導出している。式(3-57a)を用いると式(3-1)は次式のようになる。

$$\sigma_{11}(\zeta_j)=E\left(e_{11}-\varepsilon_{p11}(\zeta_j)\right),\quad \sigma_{12}(\zeta_j)=2G\left(e_{12}-\varepsilon_{p12}(\zeta_j)\right) \tag{3-58a),(3-58b}$$

式(3-58)は軸・せん断応力状態に対する弾性構成則である。続いて、式(3-57)を式(3-2)に用いると、降伏条件式が以下のように表される。

$$\phi(\zeta_j)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\sigma_{11}(\zeta_j)-\sigma_{11}^K(\zeta_j)\right)^2+2\left(\sigma_{12}(\zeta_j)-\sigma_{12}^K(\zeta_j)\right)^2}-\left(\sigma_y(\zeta_j)+\sigma^I(\zeta_j)\right)\le 0 \tag{3-59}$$

式(3-59)の導出にあたって、$\sigma'_{11}(\zeta_j)=2\sigma_{11}(\zeta_j)/3,\sigma'_{22}(\zeta_j)=\sigma'_{33}(\zeta_j)=-\sigma'_{11}(\zeta_j)/2,\sigma'_{12}(\zeta_j)=\sigma_{12}(\zeta_j)$を用いている。さらに、式(3-3)より塑性流れ則は次のようになる。

$$\dot{\varepsilon}_{p11}(\zeta_j)=\frac{3}{2}\frac{\sigma'_{11}(\zeta_j)-\sigma'^K_{11}(\zeta_j)}{\sigma_y(\zeta_j)+\sigma^I(\zeta_j)}\dot{\gamma}(\zeta_j)=\frac{\sigma_{11}(\zeta_j)-\sigma_{11}^K(\zeta_j)}{\sigma_y(\zeta_j)+\sigma^I(\zeta_j)}\dot{\gamma}(\zeta_j) \tag{3-60a}$$

$$\dot{\varepsilon}_{p12}(\zeta_j)=\frac{3}{2}\frac{\sigma'_{12}(\zeta_j)-\sigma'^K_{12}(\zeta_j)}{\sigma_y(\zeta_j)+\sigma^I(\zeta_j)}\dot{\gamma}(\zeta_j)=\frac{3}{2}\frac{\sigma_{12}(\zeta_j)-\sigma_{12}^K(\zeta_j)}{\sigma_y(\zeta_j)+\sigma^I(\zeta_j)}\dot{\gamma}(\zeta_j) \tag{3-60b}$$

以上を基に数値解析アルゴリズムを作成する。

<数値解析アルゴリズム>

アルゴリズムでは、時刻 t における変数 ${}^{t}(\ )$ および ${}^{t+\Delta t}e_{11}, {}^{t+\Delta t}e_{12}$ が既知であるとして時刻 $t+\Delta t$ の変数 ${}^{t+\Delta t}(\ )$ を求める。また、${}^{t+\Delta t}(\ )={}^{t}(\ )+\Delta(\ )$ が各変数において成り立つものとする。基本的な考え方は Return mapping algorithm に準拠している。

<u>弾性試行段階</u>:増分区間において塑性化が進展していないもの $\left({}^{trial}\varepsilon_p={}^{t}\varepsilon_p, {}^{trial}\sigma_{ij}^{K}={}^{t}\sigma_{ij}^{K}, {}^{trial}\sigma^{I}={}^{t}\sigma^{I}\right)$ として各諸量の試行値 ${}^{trial}(\ )$ を求める。微視的応力の各成分の試行値は次のようになる。

$$ {}^{trial}\sigma_{11}(\zeta_j)=E\left({}^{t+\Delta t}e_{11}-{}^{t}\varepsilon_{p11}(\zeta_j)\right), \quad {}^{trial}\sigma_{12}(\zeta_j)=2G\left({}^{t+\Delta t}e_{12}-{}^{t}\varepsilon_{p12}(\zeta_j)\right) \qquad \text{(3-61a),(3-61b)} $$

<u>弾塑性判定</u>：各レイヤーにおける降伏条件式 ${}^{trial}\phi(\zeta_j)$ を用いて、弾塑性判定を行う。

$$ {}^{trial}\phi(\zeta_j)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}\left({}^{trial}\sigma_{11}(\zeta_j)-{}^{t}\sigma_{11}^{K}(\zeta_j)\right)^2+2\left({}^{trial}\sigma_{12}(\zeta_j)-{}^{t}\sigma_{12}^{K}(\zeta_j)\right)^2}-\left(\sigma_y(\zeta_j)+{}^{t}\sigma^{I}(\zeta_j)\right) \qquad \text{(3-62)} $$

${}^{trial}\phi(\zeta_j)<0$ ならば弾性状態であるため ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}(\zeta_j)={}^{trial}\boldsymbol{\sigma}(\zeta_j)$ として計算を終了する。

${}^{trial}\phi(\zeta_j)\geq 0$ ならば塑性変形が生じているため塑性修正子にて真値を求める。

<u>塑性修正子</u>：増分区間で塑性化が進展していることが明らかとなったので、塑性化を考慮した各諸量の真値を求める。時刻 $t+\Delta t$ における微視的応力の各成分は次のようになる。

$$ {}^{t+\Delta t}\sigma_{11}(\zeta_j)={}^{trial}\sigma_{11}(\zeta_j)-E\Delta\varepsilon_{p11}(\zeta_j), \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_{12}(\zeta_j)={}^{trial}\sigma_{12}(\zeta_j)-2G\Delta\varepsilon_{p12}(\zeta_j) \qquad \text{(3-63a),(3-63b)} $$

微視的な塑性ひずみ増分の各成分は式(3-60)より次式のようになる。

$$ \Delta\varepsilon_{p11}(\zeta_j)=\frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{11}(\zeta_j)-{}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^{K}(\zeta_j)}{\sigma_y(\zeta_j)+{}^{t+\Delta t}\sigma^{I}(\zeta_j)}\Delta\gamma(\zeta_j) \qquad \text{(3-64a)} $$

$$ \Delta\varepsilon_{p12}(\zeta_j)=\frac{3}{2}\frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{12}(\zeta_j)-{}^{t+\Delta t}\sigma_{12}^{K}(\zeta_j)}{\sigma_y(\zeta_j)+{}^{t+\Delta t}\sigma^{I}(\zeta_j)}\Delta\gamma(\zeta_j) \qquad \text{(3-64b)} $$

微視的な等方硬化則および移動硬化則は次式で表される。

$$ \Delta\sigma^{I}(\zeta_j)=-p(\zeta_j-\zeta_c)\theta\Delta g \qquad \text{(3-65)} $$

$$ \Delta\sigma_{11}^{K}(\zeta_j)=\left(K\Delta g-\Delta\sigma^{I}(\zeta_j)\right)\frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{11}(\zeta_j)-{}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^{K}(\zeta_j)}{\sigma_y(\zeta_j)+{}^{t+\Delta t}\sigma^{I}(\zeta_j)} \qquad \text{(3-66a)} $$

$$\Delta\sigma_{12}^{K}\left(\zeta_j\right)=\left(K\Delta g-\Delta\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)\right)\frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{12}\left(\zeta_j\right)-{}^{t+\Delta t}\sigma_{12}^{K}\left(\zeta_j\right)}{\sigma_y\left(\zeta_j\right)+{}^{t+\Delta t}\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)} \tag{3-66b}$$

ここに、式(3-9)よりモデルとしての塑性進展パラメータ g の増分は次式のようになる。

$$\Delta g=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Delta\gamma\left(\zeta_j\right) \tag{3-67}$$

式(3-63),(3-64),(3-66)を用いて ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}\left(\zeta_j\right)-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{K}\left(\zeta_j\right)$ の各成分を求める。はじめに、11 成分は次のようになる。

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{11}\left(\zeta_j\right)-{}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^{K}\left(\zeta_j\right)={}^{trial}\sigma_{11}\left(\zeta_j\right)-{}^{t}\sigma_{11}^{K}\left(\zeta_j\right)-\frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{11}\left(\zeta_j\right)-{}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^{K}\left(\zeta_j\right)}{\sigma_y\left(\zeta_j\right)+{}^{t+\Delta t}\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)}\left(E\Delta\gamma\left(\zeta_j\right)+K\Delta g-\Delta\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)\right) \tag{3-68}$$

従って、式(3-68)より次式が導出される。

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{11}\left(\zeta_j\right)-{}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^{K}\left(\zeta_j\right)=\frac{{}^{trial}\sigma_{11}\left(\zeta_j\right)-{}^{t}\sigma_{11}^{K}\left(\zeta_j\right)}{1+\dfrac{E\Delta\gamma\left(\zeta_j\right)+K\Delta g-\Delta\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)}{\sigma_y\left(\zeta_j\right)+{}^{t}\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)+\Delta\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)}}=O\left(\zeta_j\right) \tag{3-69}$$

同様に 12 成分についても次式のように導かれる。

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{12}\left(\zeta_j\right)-{}^{t+\Delta t}\sigma_{12}^{K}\left(\zeta_j\right)=\frac{{}^{trial}\sigma_{12}\left(\zeta_j\right)-{}^{t}\sigma_{12}^{K}\left(\zeta_j\right)}{1+\dfrac{3G\Delta\gamma\left(\zeta_j\right)+K\Delta g-\Delta\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)}{\sigma_y\left(\zeta_j\right)+{}^{t}\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)+\Delta\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)}}=P\left(\zeta_j\right) \tag{3-70}$$

式(3-69),(3-70)を時刻 $t+\Delta t$ における降伏条件式に代入すると次のようになる。

$${}^{t+\Delta t}\phi\left(\zeta_j\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}O^{2}\left(\zeta_j\right)+2P^{2}\left(\zeta_j\right)}-\left(\sigma_y\left(\zeta_j\right)+{}^{t+\Delta t}\sigma^{I}\left(\zeta_j\right)\right)=0 \tag{3-71}$$

式(3-71)は、$\Delta\gamma\left(\zeta_j\right)$ に関する非線形方程式であるので Newton-Raphson 法を用いて解くことを考える。${}^{t+\Delta t}\phi\left(\zeta_j\right)$ は、微視的塑性進展パラメータ $\Delta\gamma\left(\zeta_i\right)$ の関数なので、一次微係数により次のように近似できる。

$$\begin{aligned}&\phi\left(\zeta_j\right)\left(\Delta\gamma\left(\zeta_1\right)+\delta\Delta\gamma\left(\zeta_1\right),\Delta\gamma\left(\zeta_2\right)+\delta\Delta\gamma\left(\zeta_2\right),\cdots,\Delta\gamma\left(\zeta_N\right)+\delta\Delta\gamma\left(\zeta_N\right)\right)\\&=\phi\left(\zeta_j\right)\left(\Delta\boldsymbol{\gamma}\right)+\frac{d\phi\left(\zeta_j\right)}{d\Delta\gamma\left(\zeta_1\right)}\delta\Delta\gamma\left(\zeta_1\right)+\frac{d\phi\left(\zeta_j\right)}{d\Delta\gamma\left(\zeta_2\right)}\delta\Delta\gamma\left(\zeta_2\right)+\cdots\frac{d\phi\left(\zeta_j\right)}{d\Delta\gamma\left(\zeta_N\right)}\delta\Delta\gamma\left(\zeta_N\right)=0\end{aligned} \tag{3-72}$$

ここに、$\Delta\boldsymbol{\gamma}=\left(\Delta\gamma\left(\zeta_1\right),\Delta\gamma\left(\zeta_2\right),\cdots,\Delta\gamma\left(\zeta_N\right)\right)$ で表される N 次元のベクトルである。また、δ は増分を表す。式(3-72)を行列を用いて表現すると次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \delta\Delta\gamma(\zeta_1) \\ \delta\Delta\gamma(\zeta_2) \\ \vdots \\ \delta\Delta\gamma(\zeta_N) \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{d\phi(\zeta_1)}{d\Delta\gamma(\zeta_1)} & \frac{d\phi(\zeta_1)}{d\Delta\gamma(\zeta_2)} & \frac{d\phi(\zeta_1)}{d\Delta\gamma(\zeta_3)} & \cdots & \frac{d\phi(\zeta_1)}{d\Delta\gamma(\zeta_N)} \\ \frac{d\phi(\zeta_2)}{d\Delta\gamma(\zeta_1)} & \frac{d\phi(\zeta_2)}{d\Delta\gamma(\zeta_2)} & \frac{d\phi(\zeta_2)}{d\Delta\gamma(\zeta_3)} & & \frac{d\phi(\zeta_2)}{d\Delta\gamma(\zeta_N)} \\ & \vdots & & \ddots & \\ \frac{d\phi(\zeta_N)}{d\Delta\gamma(\zeta_1)} & \frac{d\phi(\zeta_N)}{d\Delta\gamma(\zeta_2)} & \frac{d\phi(\zeta_N)}{d\Delta\gamma(\zeta_3)} & & \frac{d\phi(\zeta_N)}{d\Delta\gamma(\zeta_N)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi(\zeta_1)(\Delta\boldsymbol{\gamma}) \\ \phi(\zeta_2)(\Delta\boldsymbol{\gamma}) \\ \vdots \\ \phi(\zeta_N)(\Delta\boldsymbol{\gamma}) \end{Bmatrix} \tag{3-73}$$

上式より $\delta\Delta\boldsymbol{\gamma}$ を求め、次式により $\Delta\boldsymbol{\gamma}$ を更新する。

$$\Delta\boldsymbol{\gamma} = \Delta\boldsymbol{\gamma} + \delta\Delta\boldsymbol{\gamma} \tag{3-74}$$

続いて、式(3-73)の微係数を実際に求める。はじめに、$\frac{d^{t+\Delta t}\phi(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)}$ は式(3-71)より次式のようになる。

$$\frac{d^{t+\Delta t}\phi(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\frac{2}{3}\frac{dO(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)}O(\zeta_j) + 2\frac{dP(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)}P(\zeta_j)}{\sqrt{\frac{2}{3}O^2(\zeta_j) + 2P^2(\zeta_j)}} - \frac{d\Delta\sigma^I(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)} \tag{3-75}$$

また、$\frac{d\Delta\sigma^I(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)}, \frac{d\Delta g}{d\Delta\gamma(\zeta_m)}$ は次のようになる。

$$\frac{d\Delta g}{d\Delta\gamma(\zeta_m)} = \frac{1}{N},\quad \frac{d\Delta\sigma^I(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)} = \frac{d\sigma^I(\zeta_j)}{dg}\frac{d\Delta g}{d\Delta\gamma(\zeta_m)} = \frac{1}{N}\frac{d\sigma^I(\zeta_j)}{dg} \tag{3-76),(3-77}$$

続いて、$\frac{dO(\zeta_j)}{d\gamma(\zeta_m)}, \frac{dP(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)}$ を求める。$\frac{dO(\zeta_j)}{d\gamma(\zeta_m)}$ は以下のようになる。

$$\frac{dO(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)} = \frac{{}^{trial}\sigma_{11}(\zeta_j) - {}^{t}\sigma_{11}^{K}(\zeta_j)}{\left(1 + \frac{E\Delta\gamma(\zeta_j) + K\Delta g - \Delta\sigma^I(\zeta_j)}{\sigma_y(\zeta_j) + {}^{t+\Delta t}\sigma^I(\zeta_j)}\right)^2} \times \frac{\frac{d\Delta\sigma^I(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)}\left(E\Delta\gamma(\zeta_j) + K\Delta g - \Delta\sigma^I(\zeta_j)\right) - \left(\sigma_y(\zeta_j) + {}^{t+\Delta t}\sigma^I(\zeta_j)\right)\left(E\delta_{jm} + \frac{K}{N} - \frac{d\Delta\sigma^I(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)}\right)}{\left(\sigma_y(\zeta_j) + {}^{t+\Delta t}\sigma^I(\zeta_j)\right)^2} \tag{3-78}$$

ここに、δ_{jm} はクロネッカーのデルタ関数である。同様に、$\frac{dP(\zeta_j)}{d\gamma(\zeta_m)}$ は以下のようになる。

$$\frac{dP(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)} = \frac{{}^{trial}\sigma_{12}(\zeta_j) - {}^{t}\sigma_{12}^{K}(\zeta_j)}{\left(1 + \frac{3G\Delta\gamma(\zeta_j) + K\Delta g - \Delta\sigma^I(\zeta_j)}{\sigma_y(\zeta_j) + {}^{t+\Delta t}\sigma^I(\zeta_j)}\right)^2} \times \frac{\frac{d\Delta\sigma^I(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)}\left(3G\Delta\gamma(\zeta_j) + K\Delta g - \Delta\sigma^I(\zeta_j)\right) - \left(\sigma_y(\zeta_j) + {}^{t+\Delta t}\sigma^I(\zeta_j)\right)\left(3G\delta_{jm} + \frac{K}{N} - \frac{d\Delta\sigma^I(\zeta_j)}{d\Delta\gamma(\zeta_m)}\right)}{\left(\sigma_y(\zeta_j) + {}^{t+\Delta t}\sigma^I(\zeta_j)\right)^2} \tag{3-79}$$

式(3-75)-(3-79)を用いて、式(3-73)-(3-75)の反復計算を実施することにより $\Delta\boldsymbol{\gamma}$ および Δg を求める。

塑性ひずみ球の判定式：ここで、$\Delta g_i = \Delta g$ と仮定し、${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}_{ci}$ および ${}^{t+\Delta t}e_{ri}$ を求め、${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}_e = \left| {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}_p - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}_{ci} \right| - {}^{t+\Delta t}e_{ri}$ へ代入し、${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}_p$ が塑性領域内外どちらに位置するかを判定する。

${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}_e < 0$ のとき、$\Delta g_i = \Delta g$, $\Delta g_o = 0$ である。

${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}_e \geq 0$ のとき、$\Delta g_o \neq 0$ であるので、Δg_i および Δg_o の真値を求める必要がある。従って、次式が成り立つ必要がある。

$$ {}^{t+\Delta t}\Phi_e = \frac{2}{3}\sqrt{\left({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e_p} - {}^{t}\boldsymbol{e_c} - \Delta\boldsymbol{e_c}(\Delta g_o)\right):\left({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e_p} - {}^{t}\boldsymbol{e_c} - \Delta\boldsymbol{e_c}(\Delta g_o)\right)} - {}^{t}e_r - \Delta e_r(\Delta g_o) = 0 \quad (3\text{-}80) $$

$\Delta\boldsymbol{e_c}, \Delta e_r$ は Δg_o の関数であるので、上式を Newton-Raphson 法を用いて解く。得られた $\Delta g_o, \Delta g_i$ を基に各諸量を更新する。

$$ \Delta\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_j) = 2G\left(\Delta\boldsymbol{e}' - \Delta\boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta_j)\right) \quad (3\text{-}81) $$

$$ \Delta\sigma^I(\zeta_j) = -p(\zeta_j - \zeta_c)\theta\Delta g_o + \alpha p(\zeta_j - \zeta_c)\theta\Delta g_i \quad (3\text{-}82) $$

$$ \Delta\boldsymbol{\sigma}'^K(\zeta_j) = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\Delta g - \Delta\sigma^I(\zeta_j)\right)\frac{\Delta\boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta_j)}{\sqrt{\Delta\boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta_j):\Delta\boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta_j)}} \quad (3\text{-}83) $$

$$ \Delta\boldsymbol{s}' = 2G\left(\Delta\boldsymbol{e}' - \Delta\boldsymbol{e_p}\right) \quad (3\text{-}84) $$

$$ \Delta s^I = p\zeta_c\theta\Delta g_o - \alpha p\zeta_c\theta\Delta g_i \quad (3\text{-}85) $$

$$ \Delta\boldsymbol{s}'^K = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{2}{3}}\sum_{i=1}^{N}\left(K\Delta g - \Delta\sigma^I(\zeta_j)\right)\frac{\Delta\boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta_j)}{\sqrt{\Delta\boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta_j):\Delta\boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta_j)}} \quad (3\text{-}86) $$

本項で提案した数値解析アルゴリズムでは、2 章で提案した修正サブレイヤーモデルと同様に塑性ひずみ球の判定の後に各硬化応力の更新を行っている。これは、塑性修正子内で硬化応力の増分を決定する他の数理塑性モデルのアルゴリズムとは異なる。また、一軸応力状態と異なり、軸・せん断応力状態では、式(3-75)-(3-79)より塑性進展パラメータは全硬化係数 K だけで陽に求められるものではないため、等方硬化応力の増分の影響を受けると考えられ、厳密には、塑性修正子内における反復計算の中で、塑性ひずみ球の判定を同時に行う必要があると考えられる。しかしながら、これは、非常に複雑なアルゴリズムとなり、収斂計算により計算負荷がさらに大きくなることが想定されることから、本論文では、ひずみ増分を小さくした場合には、等方硬化応力の増分の影響は塑性進展パラメータ導出時には小さいと考え、一軸応力状態と同様に、塑性修正子の後に塑性ひずみ球の判定を行い、各硬化応力の諸量を更新するものしている。なお、ここでは、詳細は割愛するが、

垂直応力が全て存在する場合(3 軸応力状態)の修正サブレイヤーモデルの数値解析アルゴリズムでは、一軸応力状態の場合と同様に塑性進展パラメータは全硬化係数 K のみによって決定されるため、前述した問題は生じない。

３.４.２　一軸応力状態の修正サブレイヤーモデルとの比較による理論的整合性の検証

ここでは、多軸応力状態へと拡張・改善した修正サブレイヤーモデルの理論的整合性を検証する。そこで、前項にて提案した修正サブレイヤーモデルに軸ひずみのみを作用させ、2 章で提案した一軸応力状態に対する修正サブレイヤーモデルの結果との比較を行う。ひずみ経路は、Fig.2-12(a),(b)に示す漸増載荷および漸減載荷とする。材料特性は、Table3-1 に示す。また、σ_y は式(2-85)、$\theta\left(s^I\right)$ は式(2-86)を用いる。Fig.3-6(a),(b)は両モデルの結果の比較であり、これらより両者が完全に一致していることが明らかとなったため本節で行った定式化の理論的整合性が示されたといえる。

３.４.３　実験結果との比較による妥当性の検証

前節で改善した多軸応力状態における修正サブレイヤーモデルを Ohashi(1985)により実施された実験結果と比較する。実験において使用されている鋼材は 316 ステンレススチールであり、また、円筒試験片に引張りとねじりを加えることによって、試験片中央部に近似的に軸・せん断応力状態を生じさせる実験となっている。ひずみ経路は、軸ひずみのみを繰返し与える場合(Fig.3-4(a))および軸ひずみとせん断ひずみを交互に作用させることによりひずみ空間上でひずみ経路が四角の軌跡を描くように与える(Fig.3-4(b))。また、ひずみ経路、ひずみ振幅、サイクル数および解析ケース名は Table3-2 にまとめて記す。サブレイヤーモデルのレイヤー数は 50 とする。材料特性を Table3-3 に示す。また、σ_y は式(2-85)、$\theta\left(s^I\right)$は式(2-86)を用いる。Fig.3-7 は L-1,L-2,L-3 の実験結果であり、全ての振幅において実験結果と数値解析結果が良く対応していることが分かる。Fig.3-8,9,10 は S-1,S-2,S-3 の結果であり、両者がよく対応している様子が分かる。なお、ここで、Fig.3-8~11 において $\sigma_1=\sigma_{11},\sigma_3=\sqrt{3}\sigma_{12}$, $e_1=e_{11},e_3=2e_{12}/\sqrt{3}$ であることに注意されたい。また、Fig.3-11 は Fig.3-8,9,10 の結果を応力空間上で見たもの(S-3 は 7 サイクル目のみを表示)であり、提案モデルが実験における応力経路をよく再現できていることが確認できる。従って、実験結果との比較によって提案モデルの実現象に対する妥当性が検証されたと言える。しかしながら、多軸応力状態では、本章で実施したひずみ経路の他にも様々なパターンが考えられる。これらの再現性については、今後、実験結果の整備および提案モデルの改良も含めて検討すべき課題の一つである。

３.４.４　数値解析結果に対する考察

ここでは、前項において実行した数値解析結果に対しての考察を行う。Fig.3-11 で示したように、四角のひずみ経路を与えると、修正サブレイヤーモデルおよび実験結果における応力空間上での応力経路は、原点を中心に回転した四角となる。そこで、サブレイヤーモデルの諸量を観察することによりこの応力形状について考察を行う。なお、ここでは、議論の単純化のために硬化則を考慮していないサブレイヤーモデルの解析結果を基に考察を行う。Fig.3-12 は、解析ケース S-1,S-2,S-3 における硬化則を考慮していないサブレイヤーモデルの解析結果を応力空間上で表したものである。また、Fig.3-13 は、S-1,S-2,S-3 において降伏したレイヤー数とステップの関係を表したものである。さらに、Fig.3-14 は、2 サイクル目での各レイヤーの微視的応力の挙動を示したものである。図中□は、各レイヤーの微視的応力を表しており、それぞれ原点から外に向かって 1,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50 番目のレイヤーの応力を抽出しており、点線はモデルの応力を表している。ここで、レイヤーの番号は、降伏応力が最も小さいものを 1 番としている。また、図中左列は、弾性状態および塑性状態にあるレイヤーの微視的応力の挙動を、右列は塑性状態にあるレイヤーの微視的応力の挙動を抽出して示している。

はじめに S-1 についての考察を行う。Fig.3-12(a)を見ると、応力経路の形状は、原点を中心としておよそ 35 度傾いた四角となっている。このとき、Fi.g.3-13(a)より全てのレイヤーが降伏しないうちに除荷を行い、再負荷を繰返し行っていることが分かる。これにより、Fig.3-14(a)に見るように、内側のレイヤーは降伏しているためその応力軌道は降伏円上を動いているのに対して、外側のレイヤーは弾性状態にあるためその軌道はひずみの軌道と同様に四角となっていることが分かる。サブレイヤーモデルの応力はレイヤーの応力の平均で表されるため、Fig.3-12(a)で示したようにモデルとしての応力の軌道は原点を中心に回転した四角となると理解される。また、降伏したレイヤーの偏差応力増分は、偏差ひずみ増分と塑性ひずみ増分の方向が一致したときに飽和する。これにより、降伏したレイヤーの数および偏差応力増分が飽和したレイヤー数が多いほどこの回転角は 45 度に漸近していくことが理解される。S-1 では、前述したように、外側のレイヤーが降伏していないため、回転角はおおよそ 35 度となっている。続いて、S-2,S-3 についての考察を行う。Fig.3-12(b)を見ると、S-2,S-3 の応力経路の形状は、S-1 に比べて丸みを帯びた四角となり、原点を中心としてほぼ 45 度の方向に回転していることが分かる。このとき、ステップ毎の降伏したレイヤー数は、S-1 の場合とは異なり Fig.3-13(b),(c)より全レイヤーが降伏した後に除荷を行い、再負荷を行っていることが分かる。また、Fig.3-14(b),(c)に見るように、各レイヤーの応力の軌道は、S-1 に比べると、塑性状態に

あるレイヤー即ち降伏円上を動くレイヤー数が多いため、S-2,S-3 におけるモデルとしての応力は、S-1 に比べて丸みを帯びた四角となっていると言える。また、回転角についても S-2,S-3 は塑性状態にあるレイヤー数が多いため、先に述べた理由よりほぼ 45 度となっている。

次に、本項での考察を用いて、前項における数値解析結果を分析する。Fig.3-11(b)に見るように、応力経路の形状は、振幅が大きくなるにつれて四角から徐々に丸みを帯びた四角となっていることが分かる。また、原点を中心とした四角の回転角は振幅が大きくなるにつれて 45 度に近づいていることが分かる。これらの傾向は、Fig.3-11(a)に見るように実験結果にもみられるものであり、本章で提案したサブレイヤーモデルが実現象に対して妥当性を有していることが示されたと言える。

３.５　まとめ

本章では、2 章で構築した修正サブレイヤーモデルを多軸応力状態に拡張し、また、実現象の再現のための改良を行った。本章で得られた知見を以下に示す。

(1)　2 章で提案したサブレイヤーモデルにおける新たな等方硬化則および移動硬化則を多軸応力状態に拡張した。

(2)　多軸応力状態において非硬化領域の概念を表現するための塑性ひずみ球を提案し、定式化を行った。このとき、2 章の場合と同様に、微係数間の関係を仮定することにより諸式の単純化を意図した。

(3)　ひずみ増分の方向が頻繁に変化する場合の急激な硬化の進展を表現するために修正サブレイヤーモデルの等方硬化則および定数 F の修正を行った。このとき、一軸応力状態における結果には、影響を及ぼさないように修正を行った。この修正の妥当性の検証は実験結果との比較を通して行われた。

(4)　(1)(2)(3)で構築した多軸応力状態における修正サブレイヤーモデルを軸応力およびせん断応力のみが生じる軸・せん断応力状態に縮約した。また、2 章で提案した一軸応力状態における修正サブレイヤーモデルと本章での提案モデルの解析結果を比較することによって、理論的整合性を確認した。

(5)　実験結果と修正サブレイヤーモデルの比較を行ったのち、各レイヤーの微視的応力の挙動に対して検討を行うことにより、サブレイヤーモデルの応力形状のメカニズムについて明らかにした。

他の複雑なひずみ経路の再現性については、実験結果の整備および提案モデルの更なる改善を含めて今後の課題の一つとする。

Chapter3

Figures and Tables

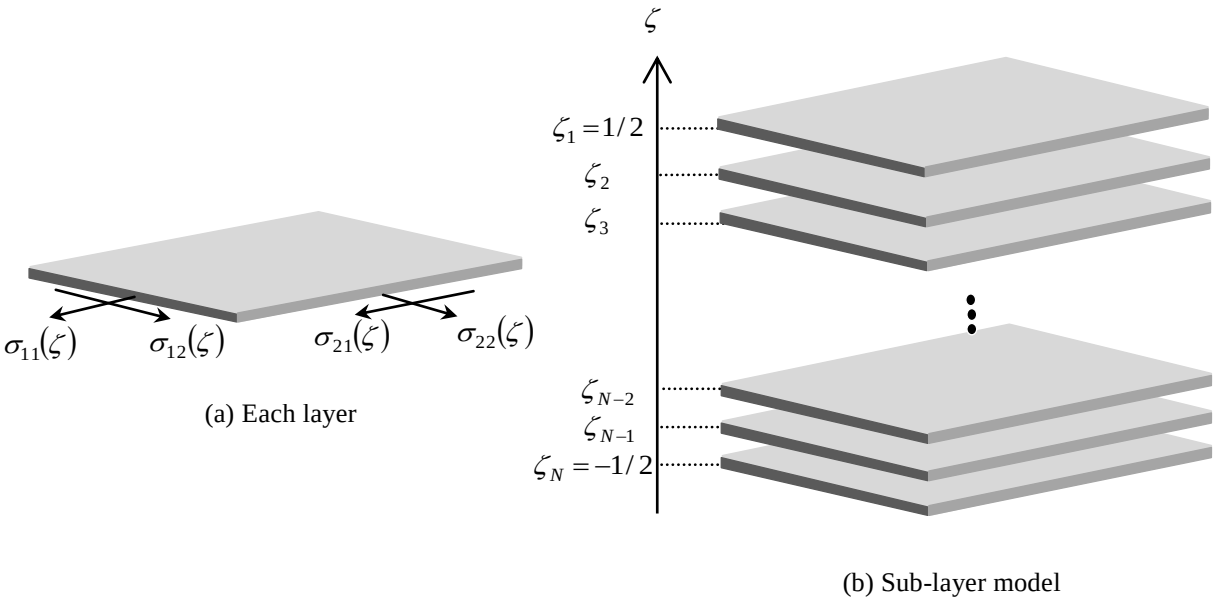


Fig.3-1 Conceptual diagram of the sub-layer model for the plane stress field

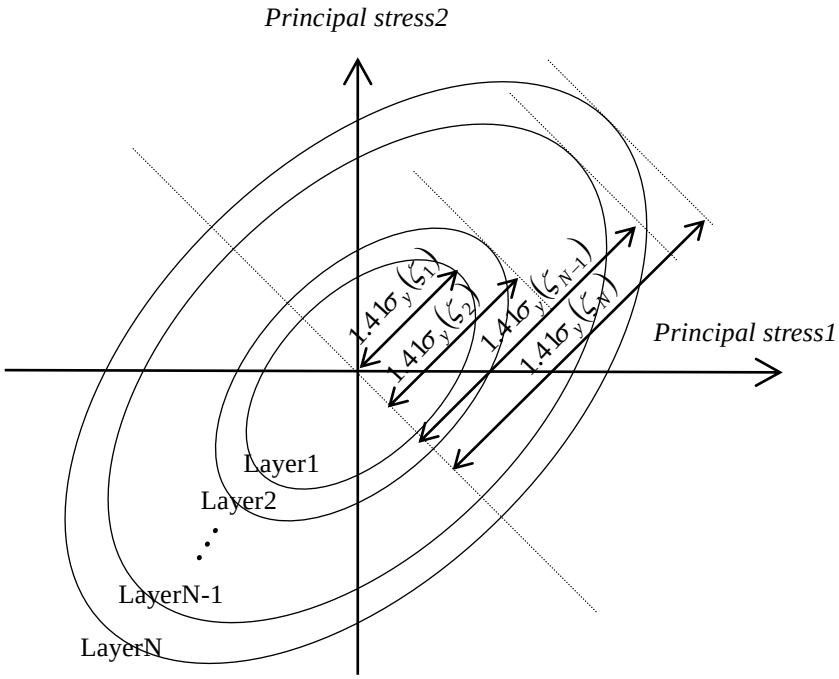


Fig.3-2 Yield surface of each layer for the principal stress field

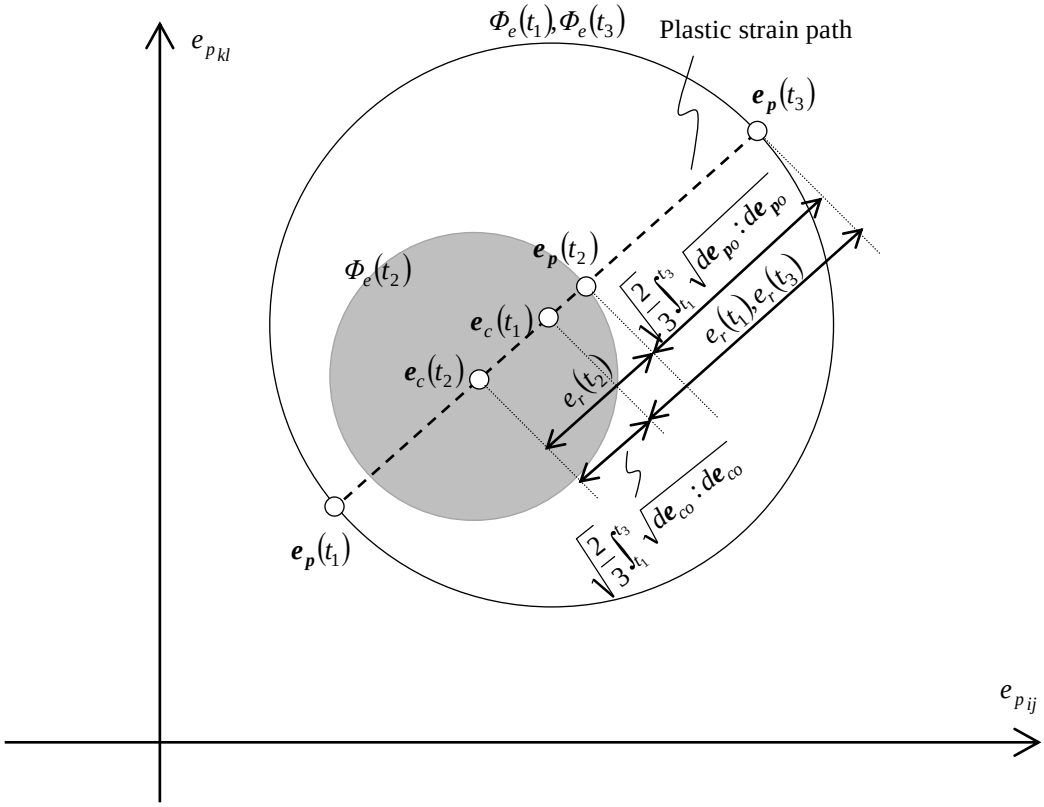
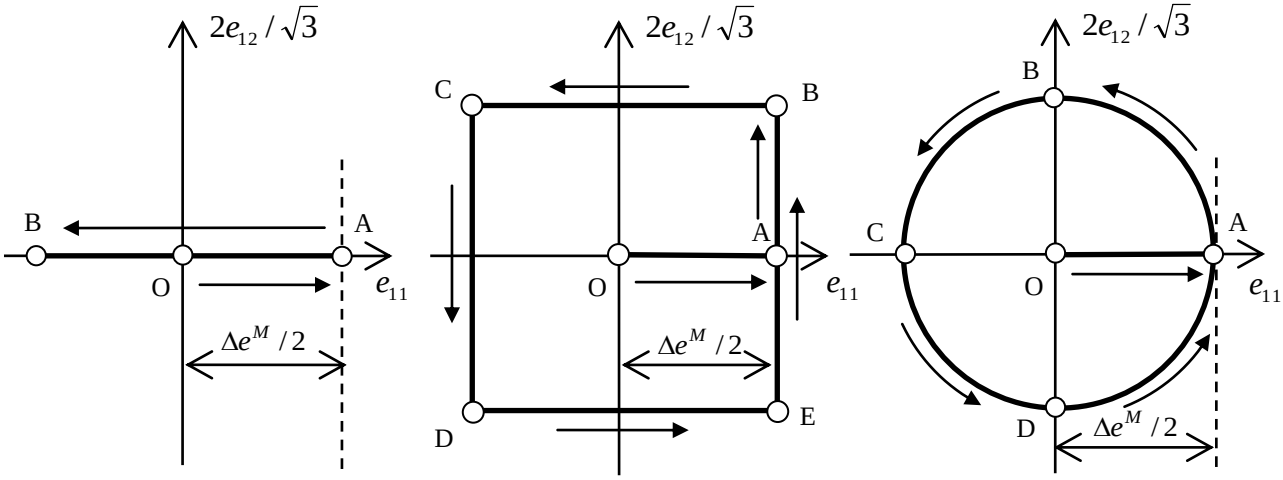


Fig.3-3 Behavior of the plastic strain sphere for the plastic strain field

Table3-1 Material properties

E[N/mm^2]	ν	K[N/mm^2]	F[N/mm^2]	α	ζ_c	Q	$s^I_{\lim}$	A	B[N/mm^2]	C[N/mm^2]
205000	0.3	2000.0	4200.0	0.4	0.5	12.0	180.0	0.58	90.0	35.0



Loading path: O-A-B-A-B-… Loading path: O-A-B-C-D-E-B-C-D… Loading path: O-A-B-C-D-A-B…

(a) Line trajectory (b) Square trajector (c) Circle trajectory

Fig.3-4 Strain path

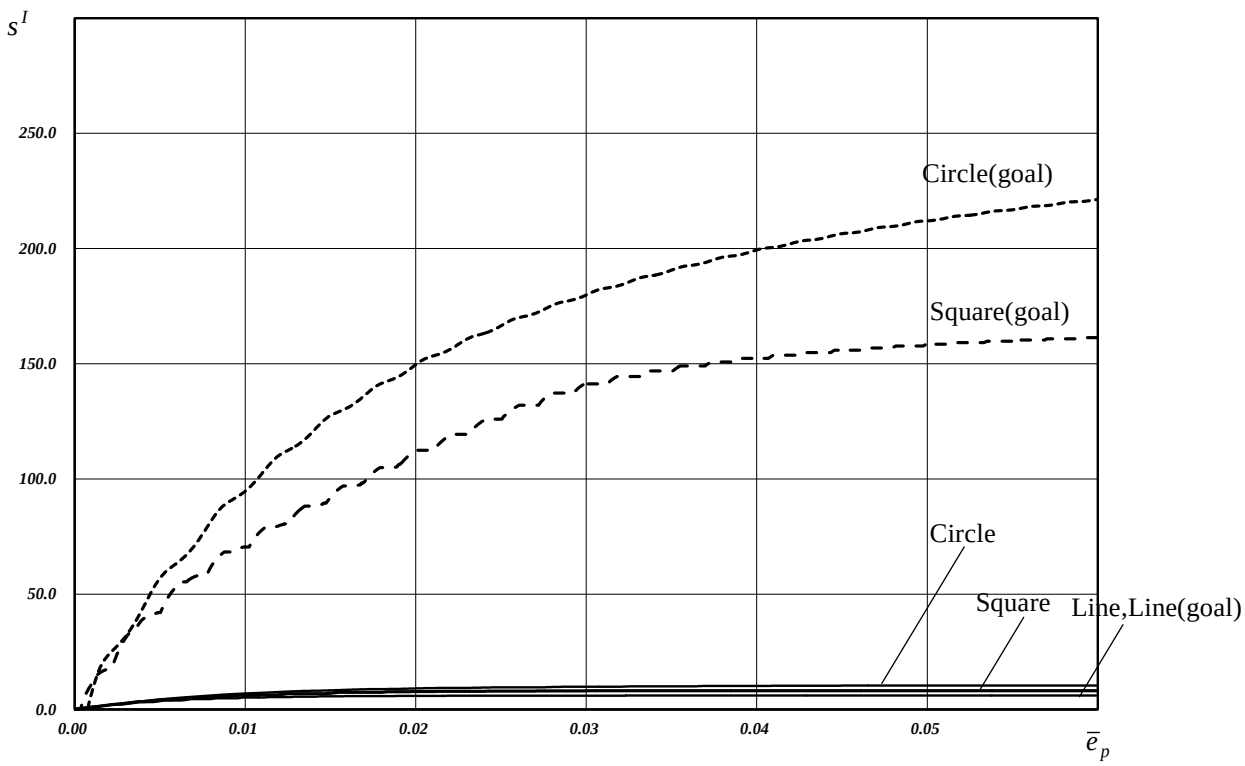
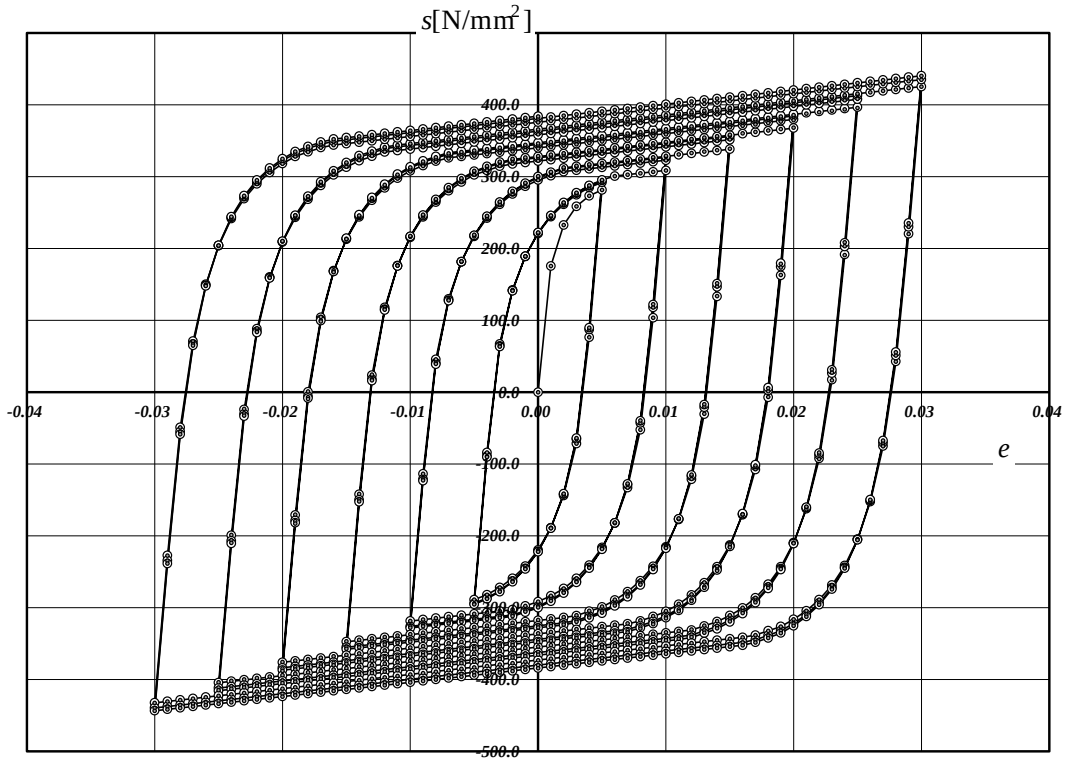
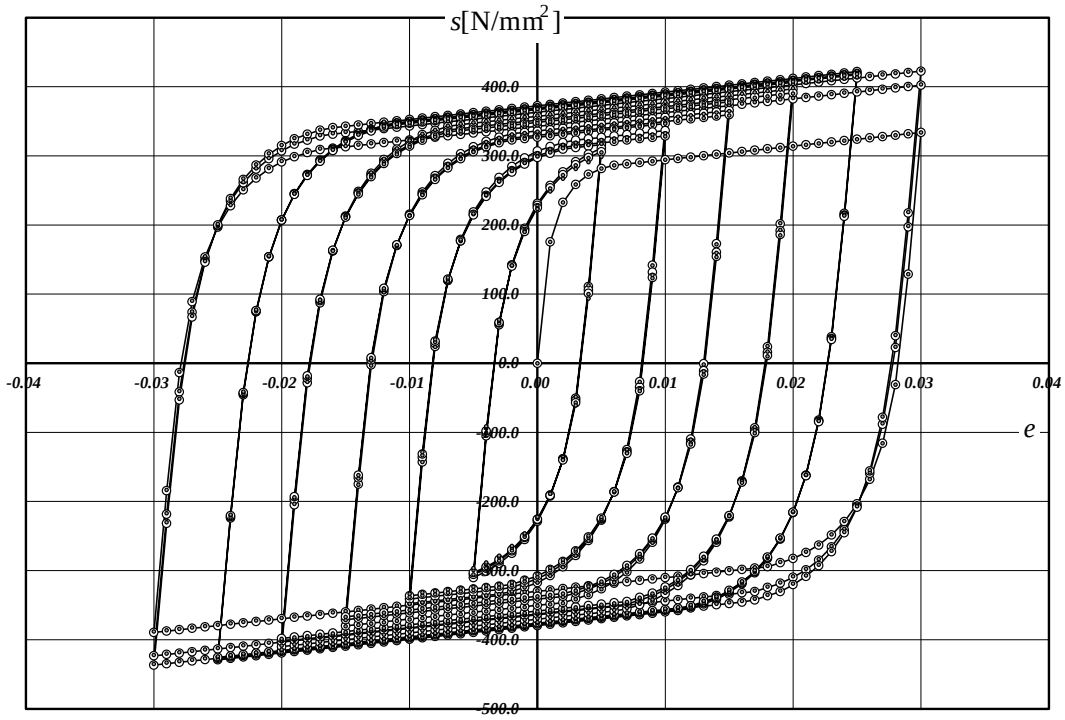


Fig.3-5 Isotropic hardening stress- accumulated plastics strain relation



(a) Gradual increase loading(SN400)



(White: Modified sub-layer model(chapter two) Gray: Modified sub-layer model (chapter three))

(b) Gradual decrease loading(SN400)

Fig.3-6 Comparison between the sub-layer model formulated in chapter three and the one formulated in chapter two

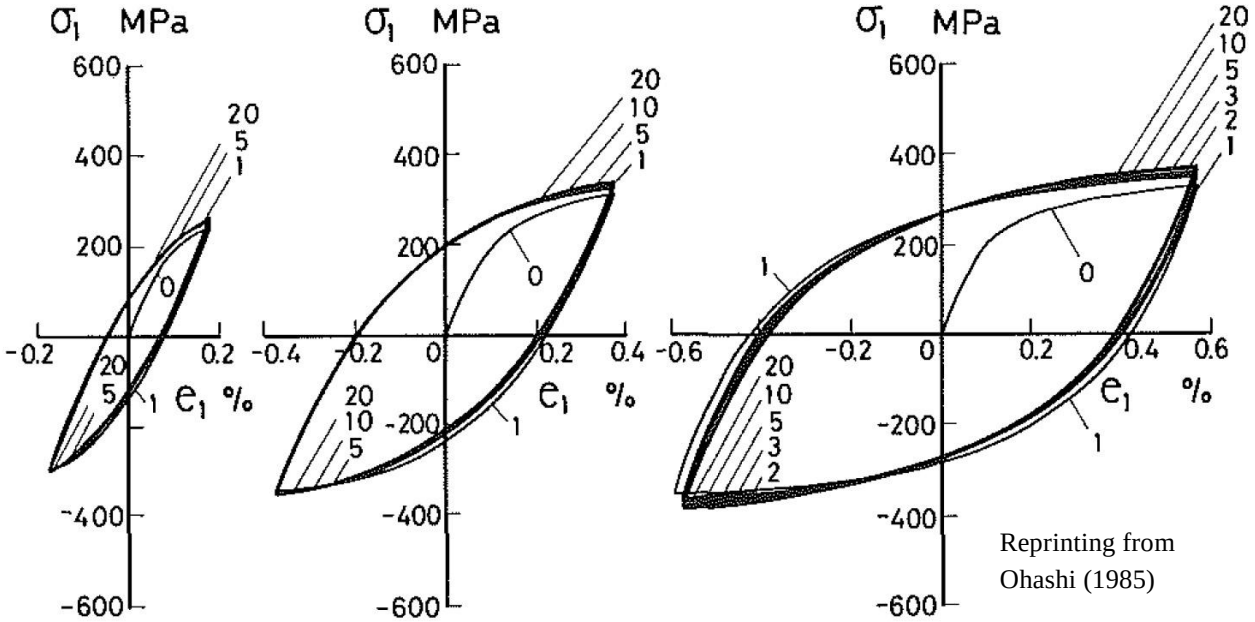
Table3-2 Strain path

Trajectory	Numerical case	$\Delta e^M / 2$ [%]	Number of cycle
Line	L-1	0.2	20
	L-2	0.4	20
	L-3	0.6	20
Square	S-1	0.2	20
	S-2	0.4	20
	S-3	0.6	7

Table3-3 Material properties

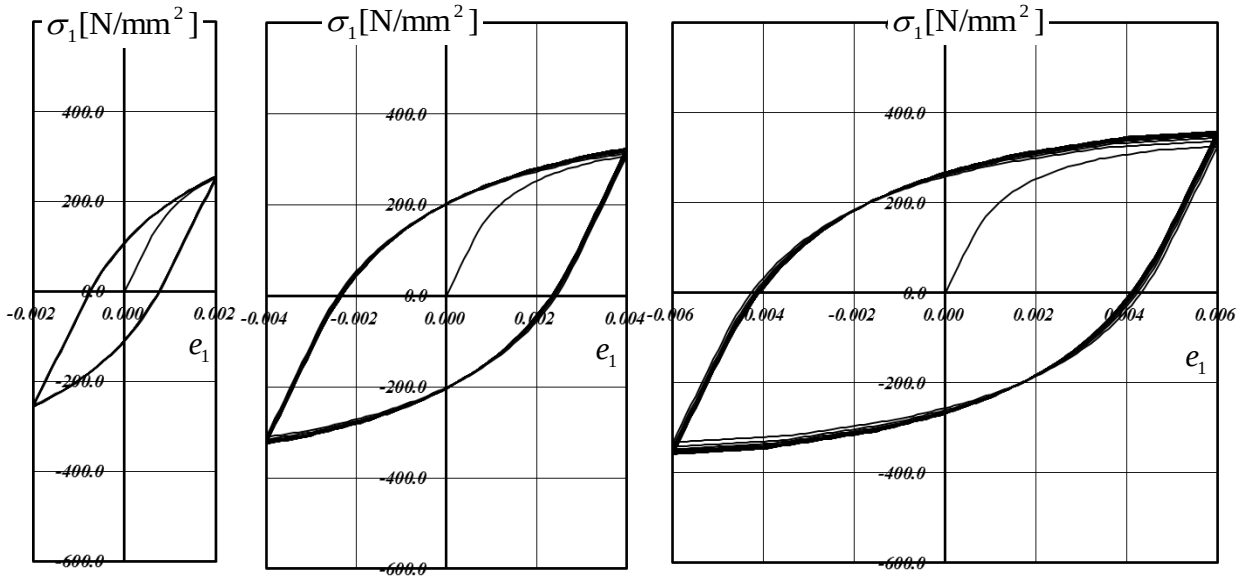
E[N/mm^2]	ν	K[N/mm^2]	F_o[N/mm^2]	F_1[N/mm^2]	p_o[N/mm^2]	α	ζ_c	Q	$s^I_{\lim}$
205000	0.3	6000.0	8000.0	100.0	30.0	0.0	0.5	4.0	300.0

A	B[N/mm^2]	C[N/mm^2]
0.65	140.0	0.0



Case: L-1 Case: L-2 Case: L-3

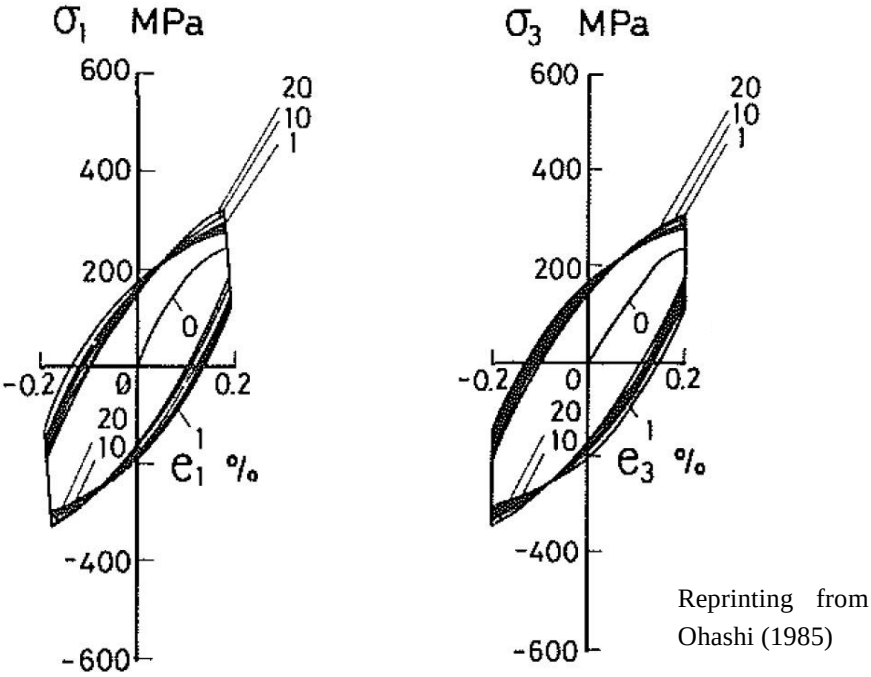
(a) Experimental results (316 stainless steel)



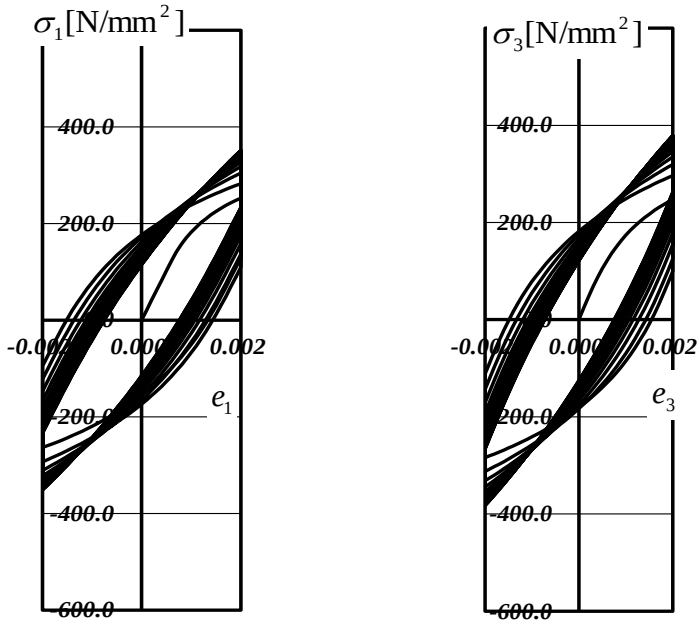
Case: L-1 Case: L-2 Case: L-3

(b) Numerical results

Fig.3-7 Comparison between numerical results and experimental results by Ohashi(1985) (Case: L-1,L-2,L-3)

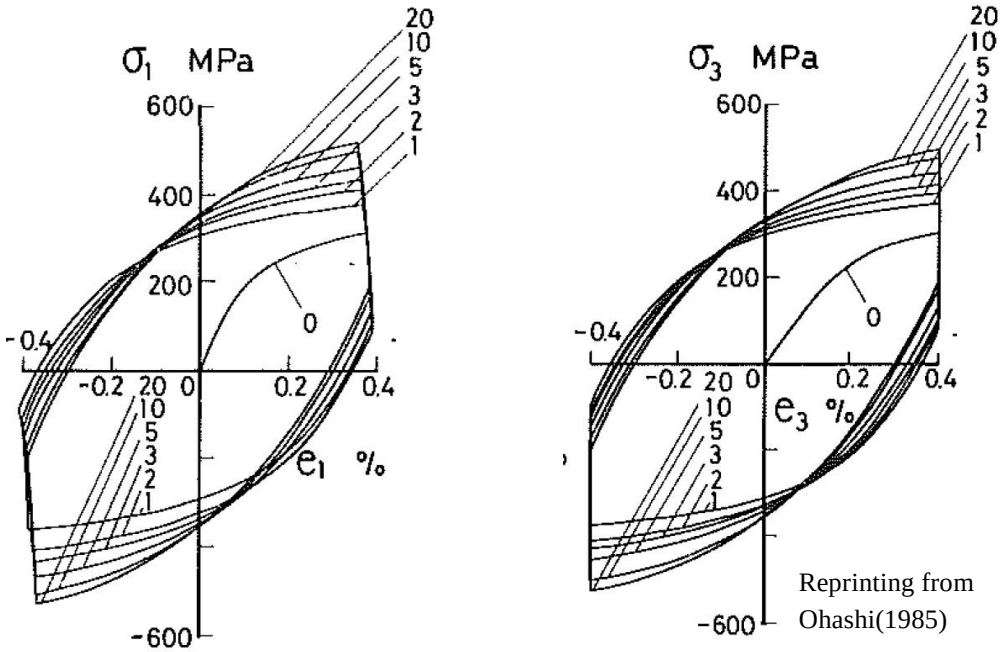


(a) Experimental results (316 stainless steel)

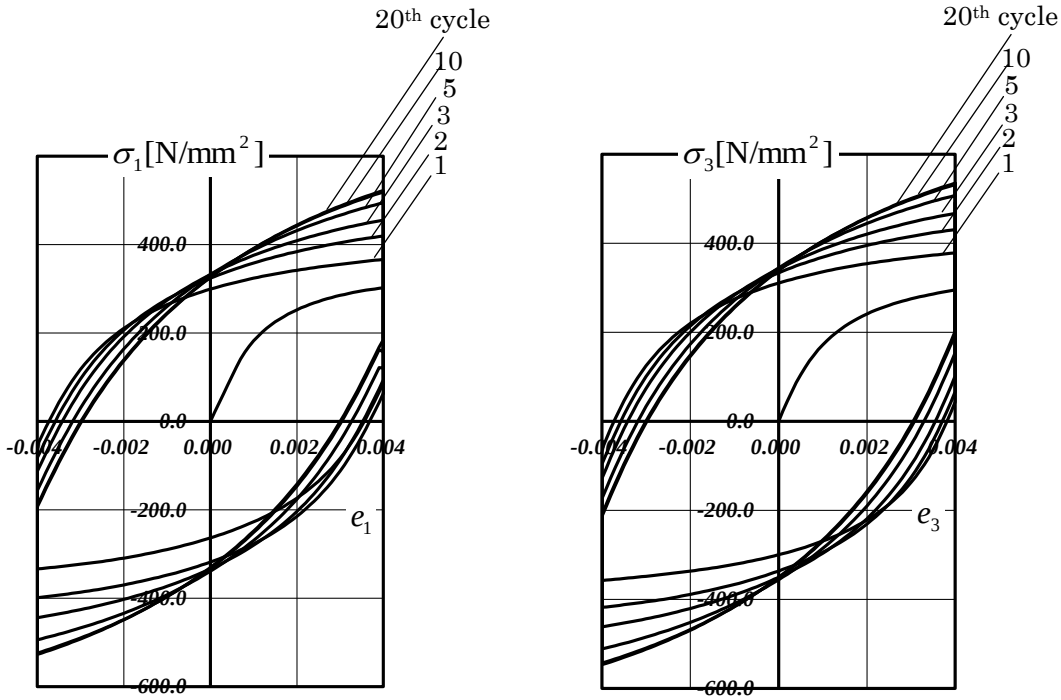


(b) Numerical results

Fig.3-8 Comparison between numerical results and experimental results by Ohashi(1985) (Case: S-1)

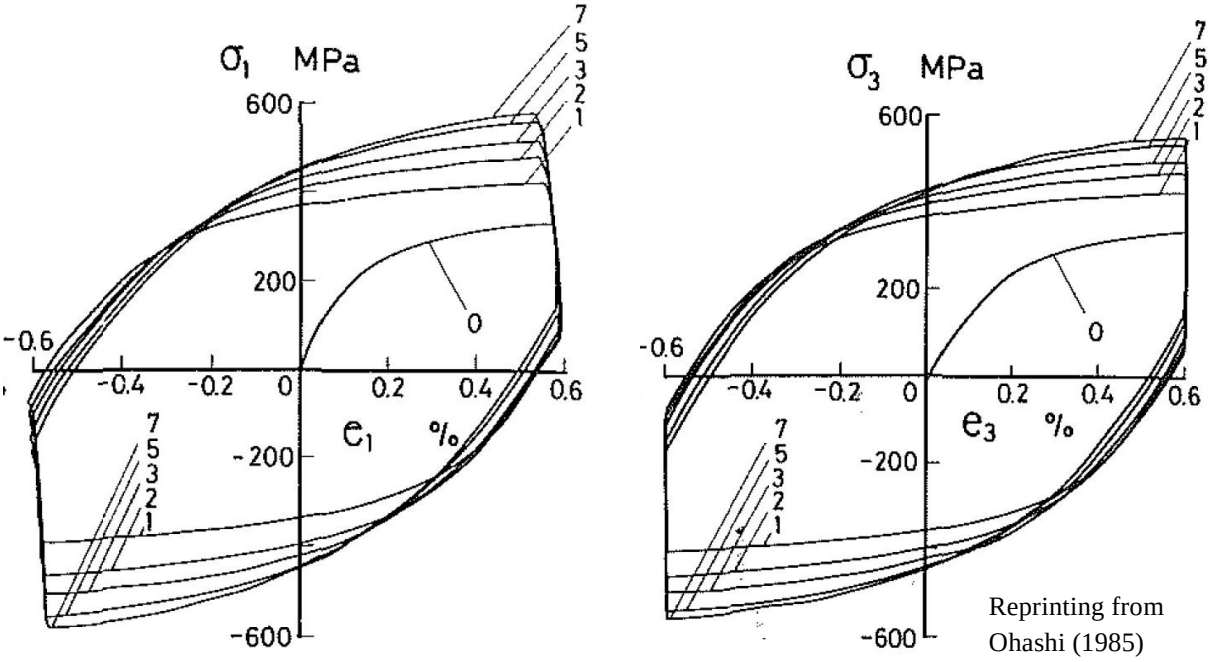


(a) Experimental results (316 stainless steel)

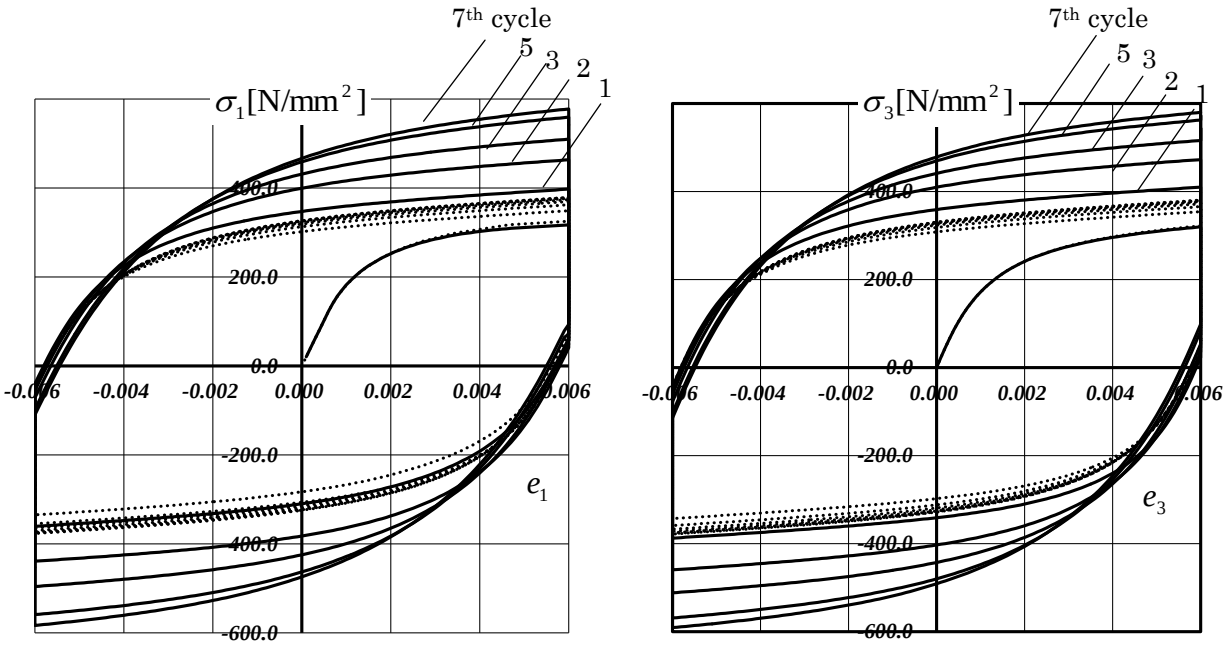


(b) Numerical results

Fig.3-9 Comparison between numerical results and experimental results by Ohashi(1985) (Case: S-2)



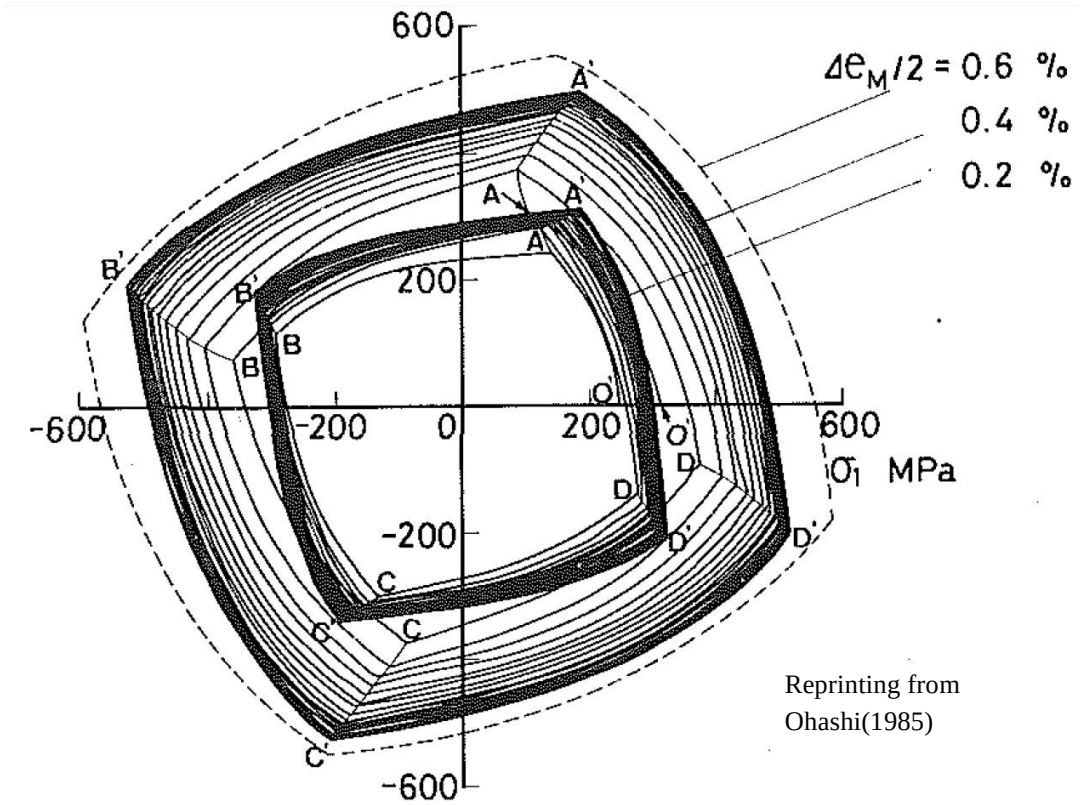
(a) Experimental results (316 stainless steel)



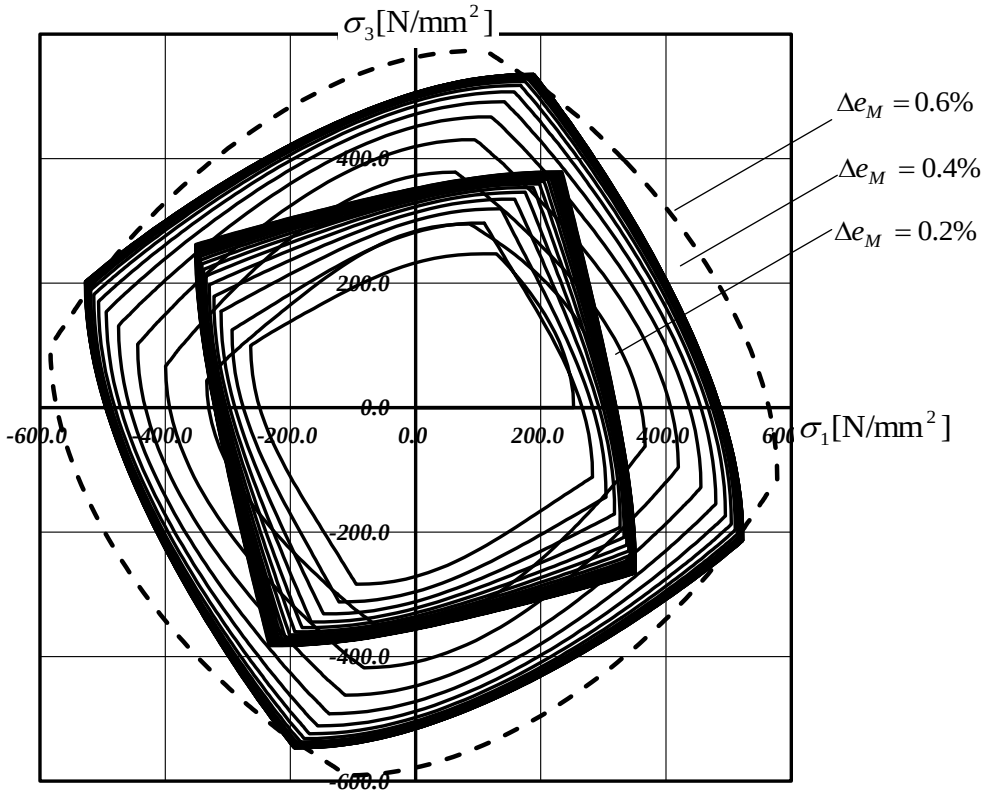
(Dotted line: p=1, Solid line: modified model)

(b) Numerical results

Fig.3-10 Comparison between numerical results and experimental results by Ohashi(1985) (Case: S-3)

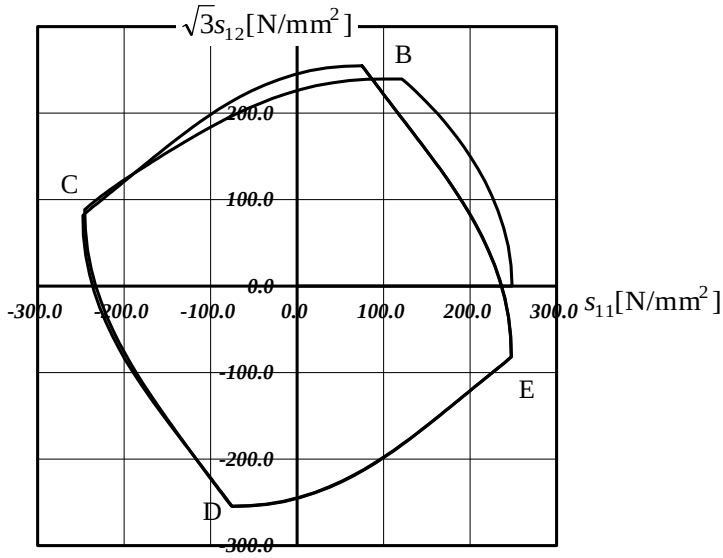


(a) Experimental results (316 stainless steel)

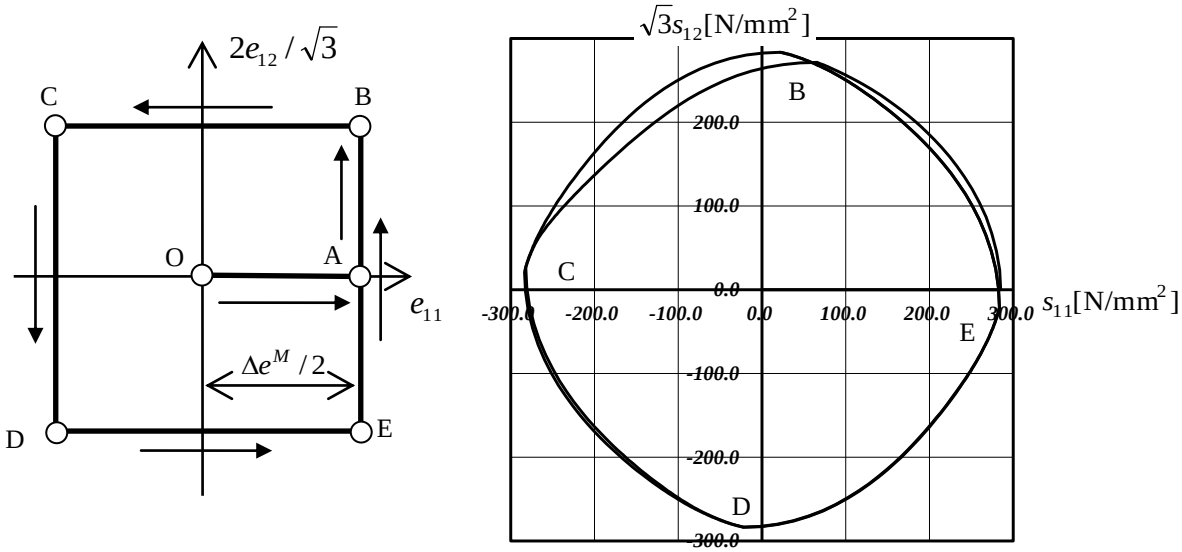


(b) Numerical results

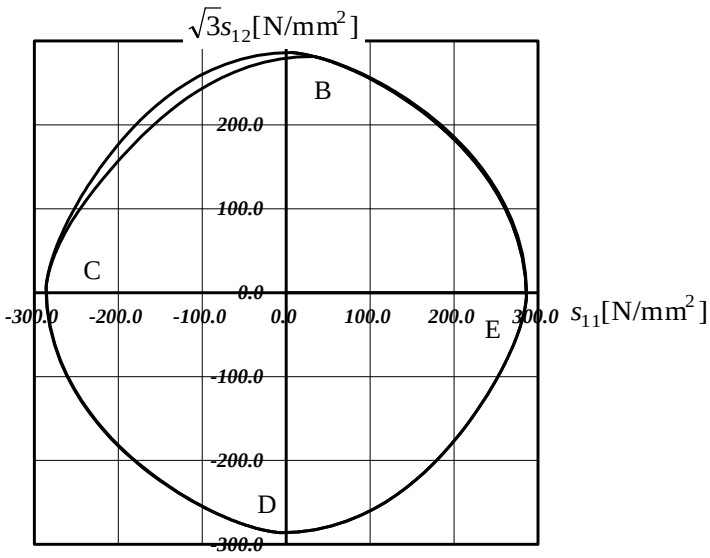
Fig.3-11 Comparison between numerical results and experimental results by Ohashi(1985) (Case: S-1,S-2,S-3)



(a) S-1(non-hardening)

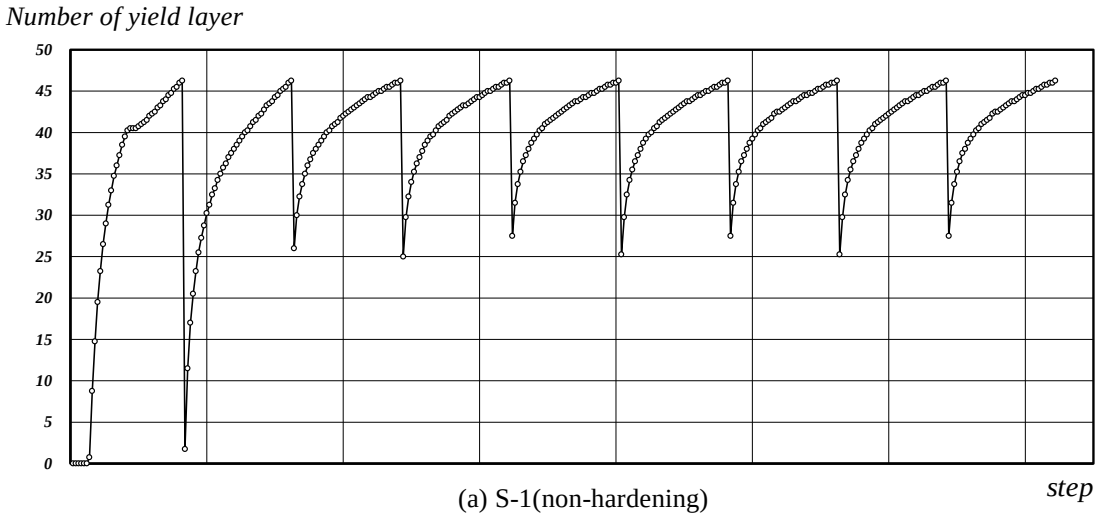


(b) S-2(non-hardening)

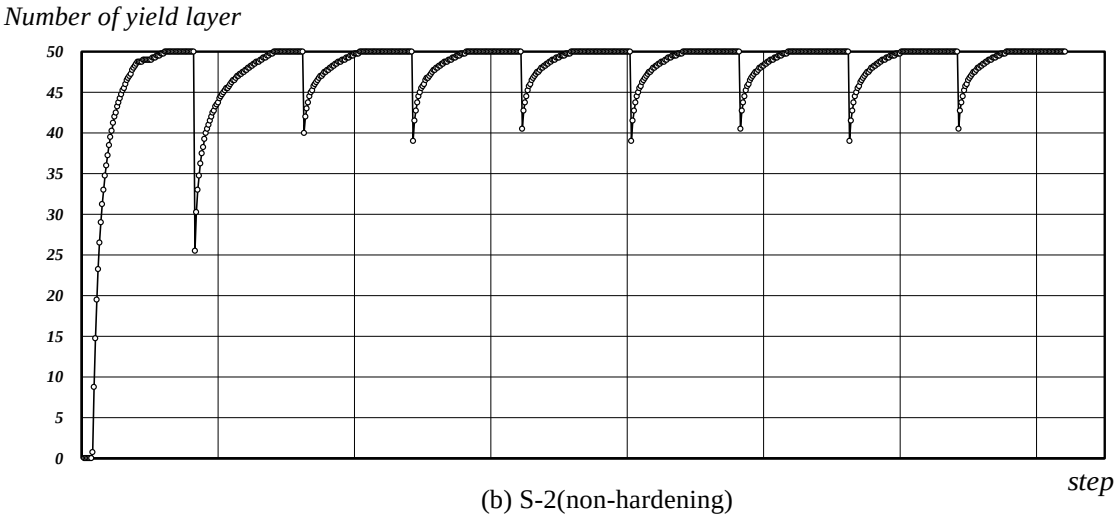


(c) S-3(non-hardening)

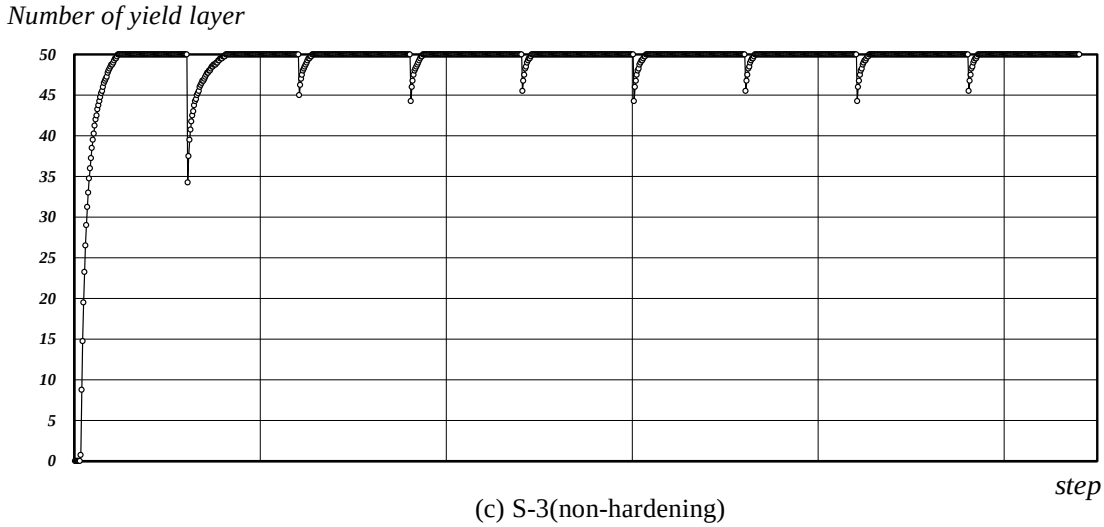
Fig.3-12 Numerical results of the sub-layer model for the stress field(Case: S-1,S-2,S-3)



(a) S-1(non-hardening)

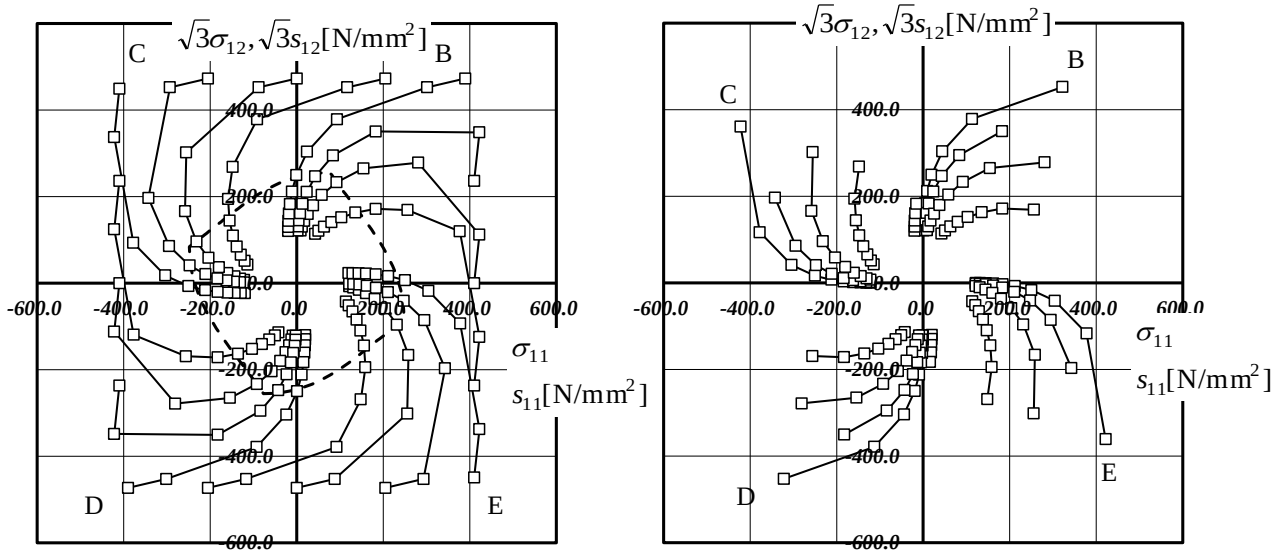


(b) S-2(non-hardening)

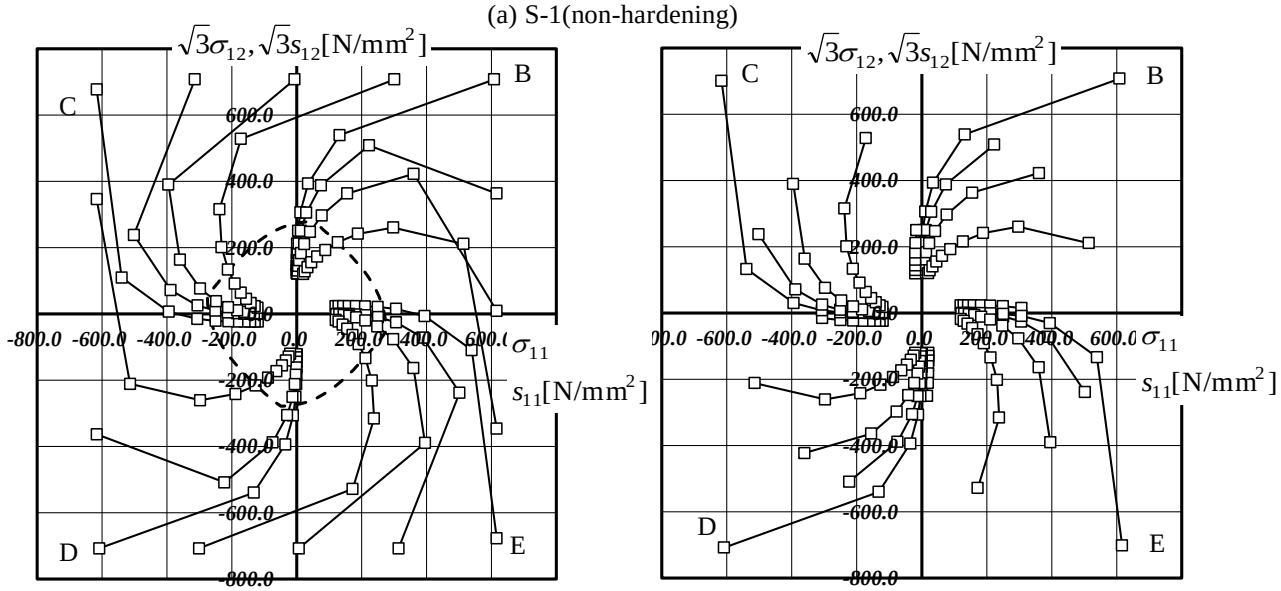


(c) S-3(non-hardening)

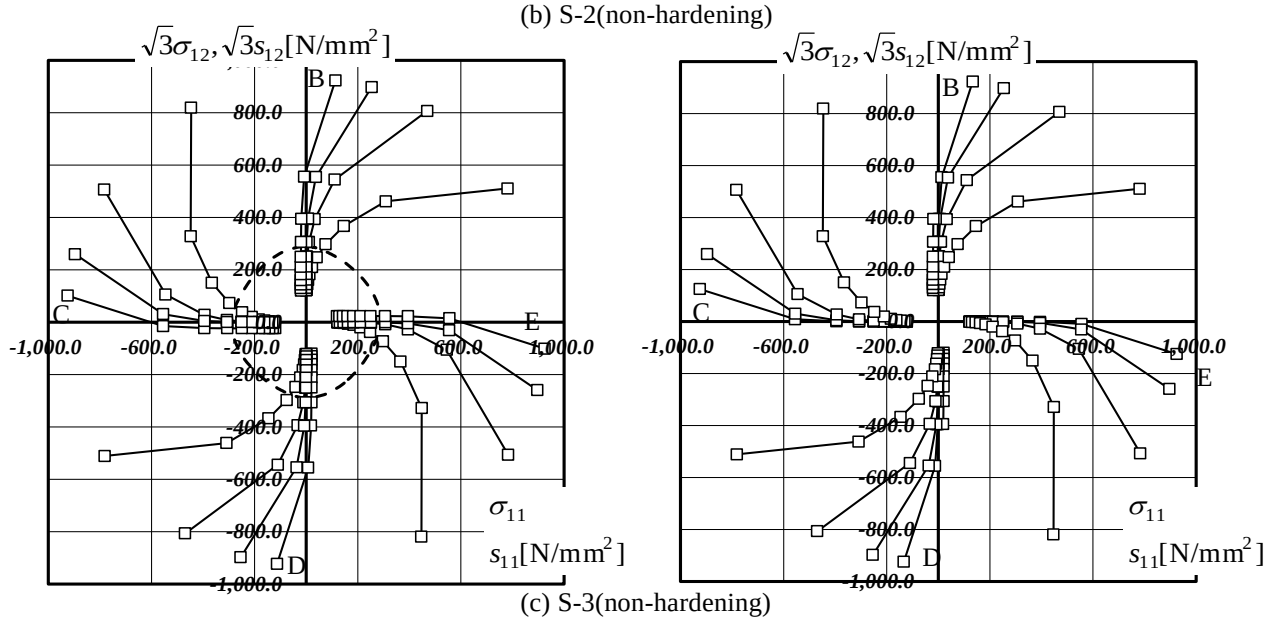
Fig.3-13 Number of yield layer - step relation(Case: S-1,S-2,S-3)



(a) S-1(non-hardening)



(b) S-2(non-hardening)



(c) S-3(non-hardening)

(Lafe side: all layer, Right side: yield layer)

Fig.3-14 Behavior of microscopic stress of each layer for the stress field (Case: S-1,S-2,S-3)

第４章　一軸応力状態に対する硬化則を考慮した修正サブレイヤーモデルの巨視的評価手法

４.１　はじめに

４.２　硬化則を考慮したサブレイヤーモデルの巨視的定式化

４.２.１　各レイヤーの特性

４.２.２　巨視的弾性構成則

４.２.３　巨視的硬化則および他の巨視的応力

４.２.４　巨視的降伏条件式

４.２.５　過去の履歴の取り扱い

４.３　数値解析

４.３.１　数値解析アルゴリズム

４.３.２　修正サブレイヤーモデルとの比較による妥当性検証

４.４　まとめ

４.１　はじめに

序論で述べたように、大規模解析はその自由度数の多さから多大な計算負荷を要する。有限要素法の計算負荷は、コーディング方法、収斂方法、剛性マトリクスの算出方法および連立方程式の解法等様々な要因が含まれると考えられる。無論、材料構成則も有限要素法における計算負荷を決定する要因の一つであり、計算負荷の小さな材料構成則の開発は重要な課題の一つであると言える。

2 章および 3 章では、多軸応力状態に対して適用可能かつ物理的に明快であるという観点からサブレイヤーモデルを基本の力学モデルとして硬化則の提案を行い、材料構成則を構築した。その中で、一軸および多軸応力状態における実現象に対して、サブレイヤーモデルは有効な力学モデルであることを示した。しかしながら、有限要素法において、サブレイヤーモデルは、各積分点に対して複数のレイヤーを想定し、各レイヤーに対して計算を行う必要性があるため計算負荷が大きいという欠点を有している。これを受けて、元結(2007)は、これまでに一軸応力状態に対してサブレイヤーモデルを巨視的に評価する手法を提案した。成果として、硬化則を考慮していない巨視的モデルの定式化を行い、巨視的モデルと Bounding surface(BS) モデルの相似性について言及し、BS モデルに用いられている仮定の根拠が曖昧であることを示した。また、定式化の際には、熱力学の第二法則、最大塑性散逸の原理、von Mises の降伏条件といった基本的な仮説のみを用いており、巨視的モデルの理論的完成度が高いことを示している。

そこで、本章では、2 章で提案した硬化則を考慮した修正サブレイヤーモデルの巨視的評価手法の提案を行う。本章の内容は以下のようになる。

(1)　4.2 節では、2 章で提案した修正サブレイヤーモデルのレイヤー数を無限と想定し、各レイヤーの諸量を積分することにより巨視的諸量の導出し、計算負荷の低減[注)]を目的とした巨視的モデルを構築する。また、巨視的モデルにおいて非硬化領域の概念を導入する。

(2)　4.3 節では、(1)で構築した巨視的モデルの基礎式を基に数値解析アルゴリズムを作成するとともに 2 章で提案した修正サブレイヤーモデルとの結果を比較を通して、定式化の妥当性の検証を行う。

注)ここで、計算負荷の低減とは、あくまで積分点の応力算定における計算負荷の低減であり、有限要素法での自由度数の減少による計算負荷の低減ではない。

４.２　硬化則を考慮したサブレイヤーモデルの巨視的評価手法

４.２.１　各レイヤーの特性

本章では、2 章で提案した修正サブレイヤーモデルにおいてレイヤー数が無限のものを考える。このとき、各レイヤーの位置は、仮想の座標系 $\zeta\left(-1/2 \le \zeta \le 1/2\right)$ によって認識されるものとする。2 章において提案した等方硬化則および移動硬化則より各レイヤーの特性は、以下のようになる。

弾性構成則： $\sigma(\zeta) = E\left(\varepsilon(\zeta) - \varepsilon_p(\zeta)\right)$ (4-1)

等方硬化則： $\dot{\sigma}^I(\zeta) = -(\zeta - \zeta_c)\theta\left|\dot{e}_p\right|$ (4-2)

移動硬化則： $\dot{\sigma}^K(\zeta) = K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}\left(\dot{e}_p\right)\dot{\sigma}^I(\zeta)$ (4-3)

降伏条件式： $\phi(\zeta) = \left|\sigma(\zeta) - \sigma^K(\zeta)\right| - \left(\sigma_y(\zeta) + \sigma^I(\zeta)\right) \le 0$ (4-4)

塑性負荷条件： $\phi(\zeta) = \dot{\phi}(\zeta) = 0$ (4-5)

ここに、E はヤング係数、K は全硬化係数、ε は全ひずみ、ε_p は塑性ひずみ、σ は応力、σ^I は等方硬化則により生じる弾性区間の変化(等方硬化応力と呼ぶ)、σ^K は移動硬化則により生じる降伏曲面の中心を表す応力(移動硬化応力と呼ぶ)、σ_y は初期降伏応力(一定)、sgn は符号関数、$\dot{(*)}$ は変数 $(*)$ の変化率を表す。ζ_c は定数、θ は定数であり、等方硬化則および移動硬化則については 2 章を参照されたい。なお、$\sigma(\zeta)$ を微視的応力とし、他の変数についても各レイヤーにおける諸量を微視的変数とよぶ。また、$\sigma_y(\zeta)$ は、ζ 上で連続かつ単調減少な関数とし、具体的には式(2-85)を参照されたい。e_p は次項にて説明を行う。

４.２.２　巨視的弾性構成則

サブレイヤーモデルの概念より、全レイヤーにおいて全ひずみが均一であることから、ε は次のように表される。

$$\varepsilon(\zeta) = \mathrm{constant} = e \tag{4-6}$$

ここに、e を巨視的ひずみとよぶ。微視的応力 $\sigma(\zeta)$ の全領域 $\left(-1/2 \le \zeta \le 1/2\right)$ における平均をとると次式のようになる。

$$s = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma(\zeta) d\zeta \tag{4-7a}$$

ここで、s を巨視的応力と呼ぶことにする。このように微視的な諸量を積分して巨視的な諸量として扱うものを巨視的モデルと呼ぶ。続いて、式(4-1)の全領域における平均を取り、式(4-6)を用いると次式が導かれる。

$$s = E\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(e - \varepsilon_p(\zeta)\right) d\zeta = E\left(e - e_p\right) \tag{4-7b}$$

$$e_p = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_p(\zeta) d\zeta \tag{4-8}$$

式(4-7b)は巨視的モデルの弾性構成則を表している。また、e_p は全領域における微視的塑性ひずみの平均であり、巨視的塑性ひずみとよぶ。次に、巨視的な降伏応力として次式を定義する。

$$s_y = \frac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p} \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \sigma_y(\zeta) d\zeta, \quad \bar{s}_y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_y(\zeta) d\zeta \tag{4-9),(4-10}$$

ここに、ζ_p は弾性領域$\left(-\frac{1}{2} \le \zeta \le \zeta_p\right)$と塑性領域$\left(\zeta_p \le \zeta \le \frac{1}{2}\right)$の境界を表す$\zeta$ である。なお、ζ_p は全領域が塑性領域になる場合は$\zeta_p = -1/2$ となる変数である。従って、s_y は塑性領域における降伏応力の平均であり、$\bar{s}_y$ は全領域おける降伏応力の平均である。

４.２.３　巨視的硬化則および他の巨視的応力

巨視的な等方硬化則および移動硬化則として次式を定義する。

$$\dot{s}_p^I = \frac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p} \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \dot{\sigma}^I(\zeta) d\zeta = -\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \zeta_p\right) - \zeta_c\right\} \theta \left|\dot{e}_p\right| \tag{4-11}$$

$$\dot{s}_p^K = \frac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p} \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \dot{\sigma}^K(\zeta) d\zeta = K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}\left(\dot{e}_p\right) \dot{s}_p^I \tag{4-12}$$

$$\dot{s}^I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dot{\sigma}^I(\zeta) d\zeta = \zeta_c \theta \left|\dot{e}_p\right|, \tag{4-13}$$

$$\dot{s}^K = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dot{\sigma}^K(\zeta) d\zeta = K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\dot{s}^I \tag{4-14}$$

ここに、s_p^I, s_p^K はそれぞれ微視的等方硬化応力および移動硬化応力の塑性領域における平均であり、s^I, s^K は、全領域における平均である。式(4-11),(4-13)および式(4-12),(4-14)より次式の関係が導かれる。

$$\dot{s}_p^I = -\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\zeta_p\right)-\zeta_c\right\}\frac{\dot{s}^I}{\zeta_c} \tag{4-15}$$

$$\dot{s}_p^K = \left[K\dot{e}_p + \mathrm{sgn}(\dot{e}_p)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\zeta_p\right)-\zeta_c\right\}\frac{\dot{s}^I}{\zeta_c}\right] \tag{4-16}$$

次に、$s_p^I, s_y, \bar{s}_y$ の間を関係づける変数として d_p を次式のように定義する。

$$s_y + s_p^I = (1-d_p)(\bar{s}_y + s_p^I) \tag{4-17}$$

式(4-17)より $s_y + s_p^I$ は、その定義から塑性領域が全領域に広がる $(\zeta_p = -1/2)$ につれて $\bar{s}_y + s_p^I$ に等しくなることが分かる。従って、式(4-17)より塑性領域が全領域に広がるにつれて d_p は 0 に近づく関数であることが理解される。さらに、d_p, ζ_p 間の関係を表す変数 D_p を次のように定義する。

$$\frac{1}{2}-\zeta_p = 1 - D_P d_p \tag{4-18}$$

続いて、巨視的な応力として $s_p, \bar{s}$ を以下のように定義する。

$$s_p = \frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \sigma(\zeta) d\zeta, \quad \bar{s} - s_k^p = \frac{\bar{s}_y + s_p^I}{s_y + s_p^I}\left(s_p - s_p^K\right) = \frac{\bar{s}_y + s_p^I}{s_y + s_p^I}\frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}}\left(\sigma(\zeta) - \sigma^K(\zeta)\right)d\zeta$$

(4-19),(4-20)

s_p は塑性領域での微視的な応力の平均であり、平均塑性応力とよぶ。$\bar{s}$ は、$s_p^K = 0$ とすれば $\bar{s}_y + s_p^I$ で規定される曲面に s_p を投影した応力であり、投影応力とよぶことにする。また、式(4-17),(4-20)より s_p と $\bar{s}$ 間に次の関係があることが理解される。

$$\bar{s} - s_p^K = \frac{\left(s_p - s_p^K\right)}{1-d_p} \tag{4-21}$$

また、式(4-21)と d_p の性質から、塑性領域が全領域に広がるにつれて、s_p と $\bar{s}$ は一致することが理解される。

4.2.4　巨視的降伏関数

続いて、前項において定義した巨視的な諸量に対する降伏条件式の導出を行う。式(4-4)を塑性領域で積分すると次式が導出される。

$$\Phi_p = \frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}}\left\{\left|\sigma(\zeta)-\sigma^K(\zeta)\right|-\left(\sigma_y(\zeta)+\sigma^I(\zeta)\right)\right\}d\zeta = \left|s_p - s_p^K\right| - \left(s_y + s_p^I\right) = 0 \qquad (4\text{-}22)$$

式(4-22)に式(4-17),(4-21)を用いると次式が導かれる。

$$\overline{\Phi} = \left|\bar{s} - s_p^K\right| - \left(\bar{s}_y + s_p^I\right) = 0 \qquad (4\text{-}23)$$

式(4-22),(4-23)は、前節で定義した巨視的変数から構成されており、巨視的モデルの降伏条件式であることが理解される。また、式(4-17),(4-21)より塑性化が進展し、全領域が塑性化すると、Φ_p が $\overline{\Phi}$ に一致する。ここで、Φ_p の性質を明らかにするために、次の巨視的変数を定義する。

$$s_a = s - \left(s_p - s_p^k\right) \qquad (4\text{-}24)$$

式(4-24)を式(4-22)に代入すると、次式が導かれる。

$$\Phi_p = \left|s - s_a\right| - \left(s_y + s_p^I\right) = 0 \qquad (4\text{-}25)$$

式(4-25)より s_a は Φ_p で規定される区間の中心を示していることが分かる。Fig.4-1(a)は各巨視的変数の挙動を表した概念図である。本章では、一軸応力状態を扱っていることから変数は全てスカラーで表されるが、理解を容易にするために Fig.4-1(a)では、降伏条件式を円として表現している。ここで、降伏曲面 $\overline{\Phi}$ の初期値 $\overline{\Phi}_{initial}$ の半径は等方硬化が生じていない $\left(s_p^I = 0\right)$ ことから $\bar{s}_y$ で表される。その後、塑性化が進展すると、$\overline{\Phi}$ の半径は等方硬化により膨張することから $\bar{s}_y + s_p^I$ となり、移動硬化によりその中心は s_p^K で表される。同様に、降伏曲面 Φ_p も、塑性化が進展すると半径が膨張し、$s_y + s_p^I$ で表され、その中心は s_a で表される。このとき、巨視的応力 s は式(4-25)より常に Φ_p 上にあることが理解される。また、前述したように、全領域が塑性化するにつれて Φ_p が $\overline{\Phi}$ に一致することから、Φ_p は Loading surface、$\overline{\Phi}$ は Bounding surface であり、巨視的モデルが Bounding surface モデルと類似性を有していることが理解される。続いて、このときの各レイヤーの降伏曲面の挙動を表したものが Fig.4-1(b)である。巨視的モデルにおいて、レイヤーの数は無限であるが、ここでは、模擬的にレイヤーを有限に表している。Fig.4-1(b)では、$\zeta_c = 1/2$ とし、$\sigma_y(1/2)$ の値は常に一定であると考える。塑性化が進展すると、各レイヤーの降伏曲面の半径が膨張するとともに、

中心が移動する。このとき、図に示すように、式(4-2),(4-3)の性質より $\dot{\sigma}^I$ と $\dot{\sigma}^K$ の和は全硬化係数 K で表されることから、ζ が $1/2$ から $-1/2$ へ減少するにつれて、降伏曲面の半径がより多く増加し、その中心の移動は少なくなる。また、$\zeta_p = -1/2$ の時は、各レイヤーの降伏曲面を全て平均したものが Fig.4-1(a)における $\overline{\Phi}$ であることが式(4-22)から理解される。

４.２.５　過去の履歴の取り扱い

繰返し載荷時には、処女載荷時とは異なり、微視的応力の分布は複雑な形状となる(元結(2007)も参考されたい)。Fig.4-2 は、ζ 軸上でその様子を概念的に示したものである。また、図中では、煩雑さを避けるために移動硬化は生じず、等方硬化のみが生じるものとするが後の理論の一般性を失うものではない。Fig.4-2(a)は、処女載荷時における微視的応力分布の形状を表している。塑性領域 $\left(\zeta_p \le \zeta \le \frac{1}{2}\right)$ では、レイヤーが降伏しているため、$\sigma_y(\zeta)+\sigma^I(\zeta)$ により形成される点線上に微視的応力が存在する。一方、弾性領域 $\left(-\frac{1}{2} \le \zeta \le \zeta_p\right)$ では、レイヤーが弾性状態のため微視的応力は均一となる。また、等方硬化応力の定義より塑性化が進展するにつれて、$\sigma_y(\zeta)+\sigma^I(\zeta)$ は ζ_c を中心として回転する。Fig.4-2(b)は、Fig.4-2(a)から除荷を行い、逆方向に再載荷を行ったときの微視的応力の挙動を示している。 このとき、微視的応力の分布は折れ線上で表され、複雑な形状となることが理解される。ここで、塑性領域と弾性領域の境界値 ζ_p の応力として s_f を次のように定義する。

$$s_f(\zeta_p) = E^{cur}e + {}^{pre}\sigma(\zeta_p) \tag{4-26}$$

ここに、${}^{pre}\sigma(\zeta_p)$ は除荷時の微視的応力の値を示しており、微視的応力の過去の履歴を示している。また、${}^{cur}e$ は、除荷時を基準とし、その後生じたひずみである。式(4-26)に塑性ひずみが含まれないのは、塑性領域と弾性領域の境界では、塑性変形が生じていないためである。これらの変数は以下の関係であると定義する。

$$\sigma(\zeta) = {}^{cur}\sigma(\zeta) + {}^{pre}\sigma(\zeta) = E\left({}^{cur}e - {}^{cur}\varepsilon_p(\zeta)\right) + E\left({}^{pre}e - {}^{pre}\varepsilon_p(\zeta)\right) \tag{4-27}$$

他の変数についても除荷時の値を ${}^{pre}(\ )$ と表し、$(\ ) = {}^{cur}(\ ) + {}^{pre}(\ )$ が成り立つものと定義する。また、s_f は、その定義および式(4-4)から次式を満たさなければならないことは明らかである。

$$\phi(\zeta_p) = \left|s_f(\zeta_p) - \sigma^K(\zeta_p)\right| - \left(\sigma_y(\zeta_p) + \sigma^I(\zeta_p)\right) = 0 \tag{4-28}$$

式(4-28)を解くことにより ζ_p を求めることができる。続いて、過去の履歴を考慮したときの各巨視

的応力を示す。はじめに、s_p に過去の履歴を考慮すると、次式のようになる。

$$s_p = \frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \left\{E\left({}^{cur}e - {}^{cur}\varepsilon_p(\zeta)\right) + {}^{pre}\sigma(\zeta)\right\} d\zeta = E^{cur}e - \frac{E^{cur}e_p}{1-D_p d_p} + {}^{pre}s_p \tag{4-29}$$

$${}^{pre}s_p = \frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} {}^{pre}\sigma(\zeta) d\zeta \tag{4-30}$$

続いて、$\bar{s}$ は式(4-21),(4-29)を用いると、次式のようになる。

$$\bar{s} = \frac{1}{1-d_p}\left(E^{cur}e - \frac{E^{cur}e_p}{1-D_p d_p} + {}^{pre}s_p - s_p^K\right) + s_p^K \tag{4-31}$$

以上により硬化則を考慮した巨視的モデルの基礎式が導出された。なお、巨視的モデルにおける塑性ひずみ球は、2 章で提案したサブレイヤーモデルにおける塑性ひずみ球と全く同一であるためここでは、説明は省略する。最後に、非硬化領域の概念を考慮した諸量をまとめて記すが、これまでの議論において本質を損なうものではないことを注意されたい。

＜微視的諸量＞

弾性構成則：$\sigma(\zeta) = E\left\{e - \varepsilon_p(\zeta)\right\}$ (4-32)

等方硬化則：$\dot{\sigma}^I(\zeta) = -(\zeta-\zeta_c)\theta\left|\dot{e}_{po}\right| + \alpha(\zeta-\zeta_c)\theta\left|\dot{e}_{pi}\right|$ (4-33)

移動硬化則：$\dot{\sigma}^K(\zeta) = K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}\left(\dot{e}_p\right)\dot{\sigma}^I(\zeta)$ (4-34)

降伏条件式：$\phi(\zeta) = \left|\sigma(\zeta) - \sigma^K(\zeta)\right| - \left(\sigma_y(\zeta) + \sigma^I(\zeta)\right) \le 0$ (4-35)

塑性負荷条件：$\phi(\zeta) = \dot{\phi}(\zeta) = 0$ (4-36)

＜サブレイヤーモデルの諸量＞

弾性構成則：$s = E\left(e - e_p\right)$ (4-37)

平均塑性化応力：$s_p = E^{cur}e - \frac{E^{cur}e_p}{1-D_p d_p} + {}^{pre}s_p$ (4-38)

投影応力：$\bar{s} = \frac{1}{1-d_p}\left(E^{cur}e - \frac{E^{cur}e_p}{1-D_p d_p} + {}^{pre}s_p - s_p^K\right) + s_p^K$ (4-39)

等方硬化則：$\dot{s}^I = \zeta_c \theta \left| \dot{e}_{po} \right| - \alpha \zeta_c \theta \left| \dot{e}_{pi} \right|$，　$\dot{s}_p^I = -\left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \zeta_p \right) - \zeta_c \right\} \frac{\dot{s}^I}{\zeta_c}$　(4-40),(4-41)

移動硬化則：$\dot{s}^K = K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}\left(\dot{e}_p\right)\dot{s}^I$，　$\dot{s}_p^K = K\dot{e}_p - \mathrm{sgn}\left(\dot{e}_p\right)\dot{s}_p^I$　(4-42),(4-43)

降伏条件式：$\Phi_p = \left| s_p - s_p^K \right| - \left(s_y + s_p^I \right) \le 0$，　$\overline{\Phi} = \left| \bar{s} - s_p^K \right| - \left(\bar{s}_y + s_p^I \right) \le 0$　(4-44a),(4-44b)

塑性負荷条件：$\Phi_p = \dot{\Phi}_p = \overline{\Phi} = \dot{\overline{\Phi}} = 0$　(4-45)

＜塑性ひずみ球の諸量＞

塑性ひずみ球：$\Phi_e = \left| e_p - e_c \right| - e_r \le 0$　(4-46)

非硬化領域の幅：$\dot{e}_r = \frac{\zeta_c}{F}\theta \left| \dot{e}_{po} \right| - \frac{\alpha \zeta_c}{F}\theta \left| \dot{e}_{pi} \right|$　(4-47)

非硬化領域の中心：$\dot{e}_c = \left(1 - \frac{\zeta_c}{F}\theta \right)\dot{e}_{po} - \alpha \left(1 - \frac{\zeta_c}{F}\theta \right)\dot{e}_{pi}$　(4-48)

ここに、e_r は塑性ひずみ球の半径、e_c は塑性ひずみ球の中心を表すテンソルである。また、α, F は定数であり、詳細は 2 章を参照されたい。塑性ひずみ球のルールを以下のように定義する。

$\Phi_e < 0$ の場合：$\dot{e}_r, \dot{s}^I < 0$，　$\dot{e}_c \propto -\dot{e}_p$

$\Phi_e = 0$ の場合：$\dot{e}_r, \dot{s}^I > 0$，　$\dot{e}_c \propto \dot{e}_p$

また、球上で生じる変数は、$(\ )_o$、球内で生じる変数は $(\ )_i$ とし、$(\ ) = (\ )_o + (\ )_i$ が成り立つものとする。式(4-33)は非硬化領域の概念を考慮した微視的な等方硬化則であり詳細は 2 章および式(2-55)を参照されたい。

４.３　数値解析

４.３.１　数値解析アルゴリズム

4.2 節で提案した巨視的モデルの基礎式を基に数値解析アルゴリズムを構築する。時刻 t を既知とし、時刻 $t+\Delta t$ を求めるアルゴリズムを構築する。ここで、時刻 t における諸量は ${}^{t}(\ )$ および ${}^{t+\Delta t}e$ とし、${}^{t+\Delta t}(\ )={}^{t}(\ )+\Delta(\ )$ が成り立つものとする。また、過去の履歴 ${}^{pre}(\ )$ も既知であるとする。アルゴリズムは Return mapping algorism に準拠し、構築されている。なお、変数 $s_y, \bar{s}_y, d_p, D_p$ については Apeendix2 を参照されたい。

<u>変数 ${}^{t+\Delta t}\zeta_p$ の決定</u>：${}^{t+\Delta t}\zeta_p$ は式(4-26),(4-28)より塑性領域と弾性領域の境界の降伏条件式である次式を解くことにより求められる。

$$\phi\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)=\left|E^{t+\Delta t}\left({}^{cur}e\right)+{}^{pre}\sigma\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)-{}^{t}\sigma^{K}\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)\right|-\left(\sigma_y\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)+{}^{t}\sigma^{I}\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)\right)=0 \qquad (4\text{-}49)$$

ここに、${}^{t+\Delta t}\left({}^{cur}e\right)={}^{t+\Delta t}e-{}^{pre}e$ である。ここで、式(4-46)を解くためには、${}^{pre}\sigma(\zeta)$ は除荷時に記憶する必要がある。従って、ζ 軸上にいくつかの参照点を設け記憶することを考える。

<u>弾性試行段階</u>: 増分区間において塑性化が進展していないもの $\left({}^{trial}\left(\varepsilon_p\right)={}^{t}\left(\varepsilon_p\right)\right)$ として各諸量の試行値 ${}^{trial}(\ )$ を求める。各巨視的応力の試行値は次式のようになる

$${}^{trial}s=E\left({}^{t+\Delta t}e-{}^{t}e_p\right) \qquad (4\text{-}50)$$

$${}^{trial}s_p=E^{t+\Delta t}\left({}^{cur}e\right)-\frac{E^{trial}\left({}^{cur}e_p\right)}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p}+{}^{pre}s_p\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right) \qquad (4\text{-}51)$$

ここに、${}^{trial}\left({}^{cur}e_p\right)={}^{t}e_p-{}^{pre}e_p$ である。

<u>弾塑性判定</u>：巨視的降伏条件式の試行値 ${}^{trial}\overline{\Phi}$ を用いて弾塑性判定を行う。

$${}^{trial}\Phi_p=\left|{}^{trial}s_p-{}^{t}s_p^{K}\right|-\left(s_y+{}^{t}s_p^{I}\right)=0 \qquad (4\text{-}52)$$

${}^{trial}\Phi_p<0$ のとき弾性状態であるので試行値を正解として終了する。

${}^{trial}\Phi_p\geq 0$ のとき塑性変形が生じているので塑性修正子を実行する。

<u>塑性修正子</u>：増分区間で塑性化が進展していることが明らかとなったので、塑性化を考慮した巨視的応力の真値を求める。時刻 $t+\Delta t$ における各巨視的応力は次式のようになる。

$${}^{t+\Delta t}s={}^{trial}s-E\Delta e_p \qquad (4\text{-}53)$$

$$ {}^{t+\Delta t}s_p = {}^{trial}s_p - \frac{E\Delta e_p}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p} \tag{4-54} $$

時刻 $t+\Delta t$ における巨視的降伏条件式は式(4-22),(4-54)より次式のようになる。

$$ {}^{t+\Delta t}\Phi_p = \left| {}^{trial}s_p - \frac{E\Delta e_p}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p} - {}^{t}s_p^K - \Delta s_p^K \right| - \left(s_y + {}^{t}s_p^I + \Delta s_p^I \right) = 0 \tag{4-55} $$

式(4-31)において、$\Delta s_p^K = K\Delta e_p - \mathrm{sgn}\left(\Delta e_p\right)\Delta s_p^I$ であることを考慮すると、次式が導かれる。

$$ \Delta e_p = \mathrm{sgn}\left(\Delta e_p\right)\frac{{}^{trial}\Phi_p}{\dfrac{E}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p} + K} \tag{4-56} $$

<u>塑性ひずみ球の判定式</u>：ここで、$\Delta e_{pi} = \Delta e_p$ と仮定し、${}^{t+\Delta t}e_{ci}$ および ${}^{t+\Delta t}e_{ri}$ を求め、さらに、${}^{t+\Delta t}\Phi_e = \left| {}^{t+\Delta t}e_p - {}^{t+\Delta t}e_{ci} \right| - {}^{t+\Delta t}e_{ri}$ により ${}^{t+\Delta t}e_p$ が塑性領域内外どちらに位置するかを判定する。

${}^{t+\Delta t}\Phi_e < 0$ のとき、$\Delta e_{pi} = \Delta e_p$, $\Delta e_{po} = 0$ である。

${}^{t+\Delta t}\Phi_e \geq 0$ のとき、$\Delta e_{po} \neq 0$ であるので、Δe_{pi} および Δe_{po} の真値を求める必要がある。従って、次式が成り立つ必要がある。

$$ {}^{t+\Delta t}\Phi_e = \left| {}^{t+\Delta t}e_p - {}^{t+\Delta t}e_c \right| - {}^{t+\Delta t}e_r = 0 \tag{4-57} $$

式(4-57)より次式が求められる。

$$ \Delta e_{po} = \frac{{}^{t+\Delta t}e_p - {}^{t}e_c - {}^{t}e_r + \alpha\Delta e_p}{1+\alpha} \quad \left(\Delta e_p > 0\right) \tag{4-58a} $$

$$ \Delta e_{po} = \frac{{}^{t+\Delta t}e_p - {}^{t}e_c + {}^{t}e_r + \alpha\Delta e_p}{1+\alpha} \quad \left(\Delta e_p < 0\right) \tag{4-58b} $$

得られた $\Delta e_{pi}, \Delta e_{po}$ を基に各諸量を更新する。

$$ \Delta\sigma(\zeta) = E\left(\Delta e - \Delta\varepsilon_p(\zeta)\right) \tag{4-59} $$

$$ \Delta\sigma^I(\zeta) = -(\zeta - \zeta_c)\theta\left|\Delta e_{po}\right| + \alpha(\zeta - \zeta_c)\theta\left|\Delta e_{pi}\right| \tag{4-60} $$

$$ \Delta\sigma^K(\zeta) = K\Delta e_p - \mathrm{sgn}\left(\Delta e_p\right)\Delta\sigma^I(\zeta) \tag{4-61} $$

$$ \Delta s = E\left(\Delta e - \Delta e_p\right) \tag{4-62} $$

$$ \Delta s^I = \zeta_c\theta\left|\Delta e_{po}\right| - \alpha\zeta_c\theta\left|\Delta e_{pi}\right| \tag{4-63} $$

$$\Delta s_p^I = -\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+{}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)-1\right\}\frac{\Delta s^I}{\zeta_c} \tag{4-64}$$

$$\Delta s^K = K\Delta e_p - \mathrm{sgn}\left(\Delta e_p\right)\Delta s^I \tag{4-65}$$

$$\Delta s_p^K = K\Delta e_p - \mathrm{sgn}\left(\Delta e_p\right)\Delta s_p^I \tag{4-66}$$

本項では、巨視的モデルの数値解析アルゴリズムの構築を行った。その中で、巨視的モデルは、サブレイヤーモデルと異なり、各レイヤーに対して試行値、弾塑性判定および塑性修正の計算を行う必要がなく、単一のレイヤーでの計算量に相当することが明らかとなった。従って、巨視的モデルはサブレイヤーモデルの欠点である多大な計算負荷を克服していると考えられる。

４.３.２　修正サブレイヤーモデルとの比較による妥当性検証

2 章で提案した一軸応力状態におけるサブレイヤーモデルと本章で提案した修正サブレイヤーモデルを巨視的に評価した巨視的モデルを比較することによって巨視的モデルの妥当性の検証を行う。ひずみ経路は、Fig.2-12(a),(b)に示すように、漸増載荷と漸減載荷を与える。材料特性は Table2-1 に示すように、SN400 材と同一の値を与える。また、σ_y は式(2-85)、$\theta\left(s^I\right)$は式(2-86)を用いる。Fig.4-3 は、数値解析結果であり、両者が一致することが分かる。従って、本章で提案した巨視的モデルの妥当性が検証されたと言える。

４.４　まとめ

本章では、2 章で提案した一軸応力状態に対する修正サブレイヤーモデルを巨視的に評価し、硬化則を考慮した巨視的モデルの提案を行った。本章で得られた知見を以下に示す。

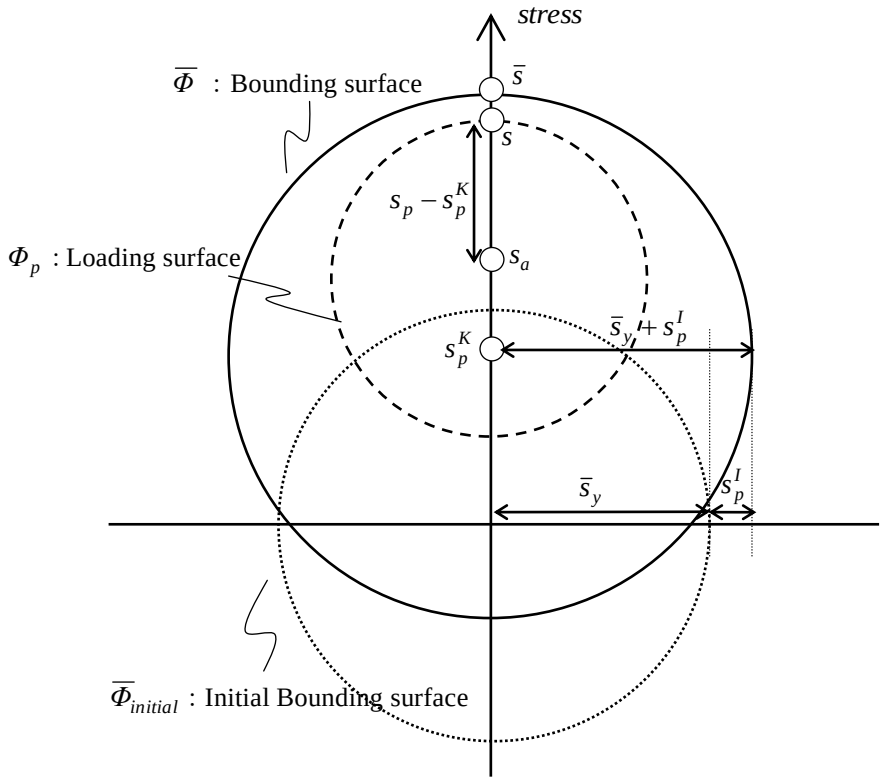
(1)　多大な計算負荷を有する修正サブレイヤーモデルを巨視的に評価し、計算負荷の軽減を目的とした巨視的モデルの提案を行った。

(2)　(1)での巨視的モデルに非硬化領域の概念を導入した。

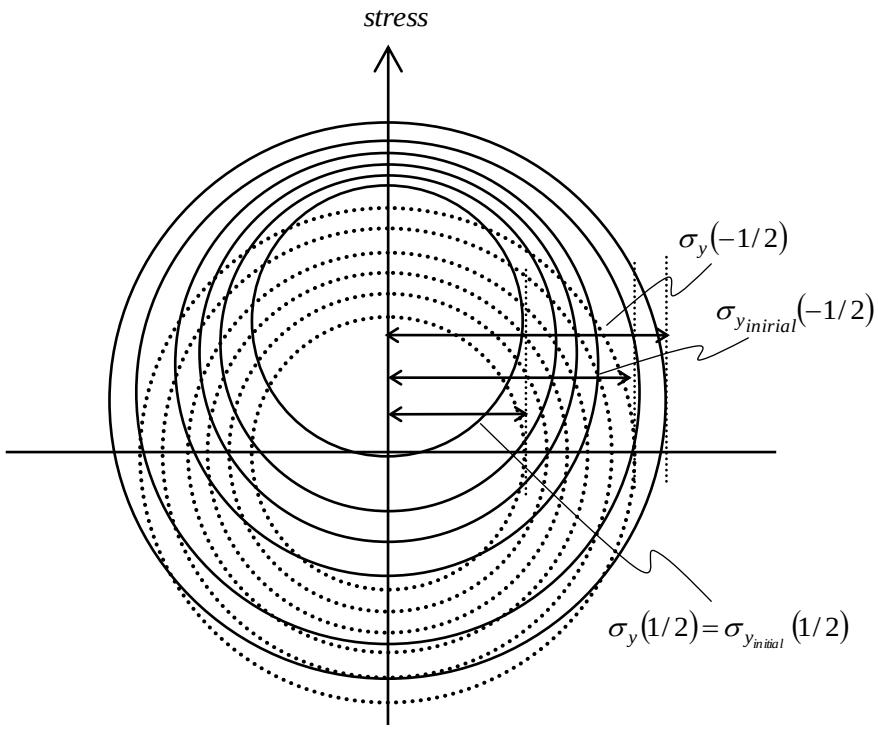
(3)　巨視的モデルの妥当性を修正サブレイヤーモデルの解析結果との比較を通して、検証を行った。また、両モデルが一致することを確認した。

Chapter4

Figures and Tables



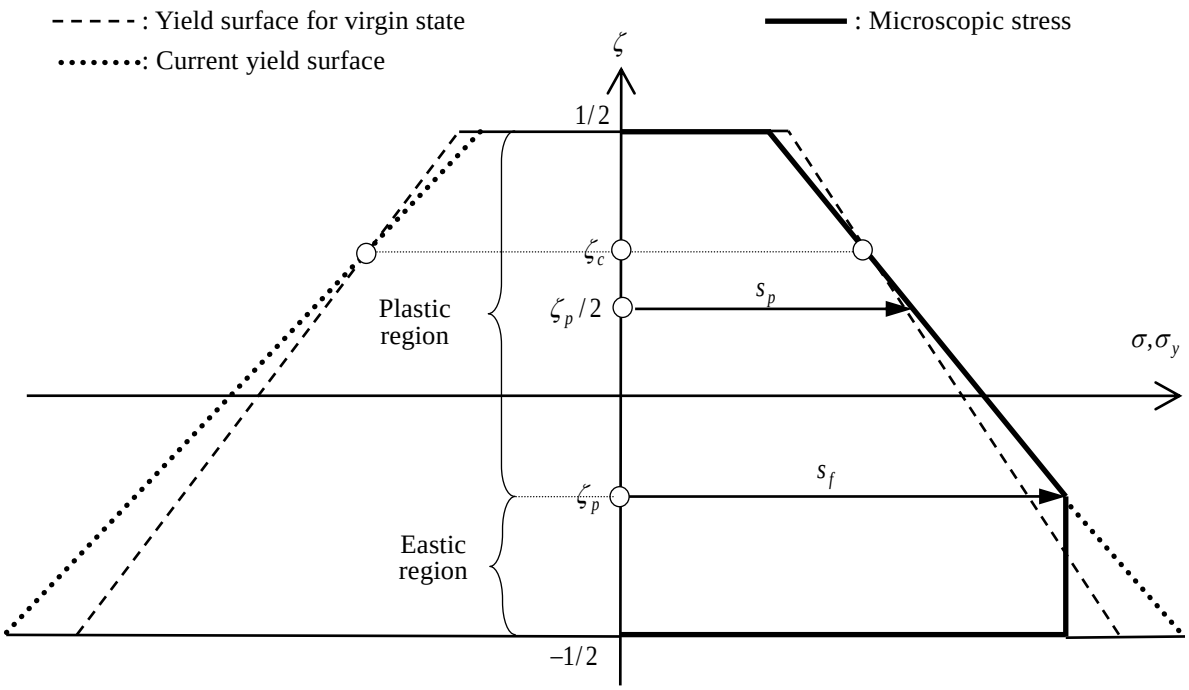
(a) Macroscopic variables



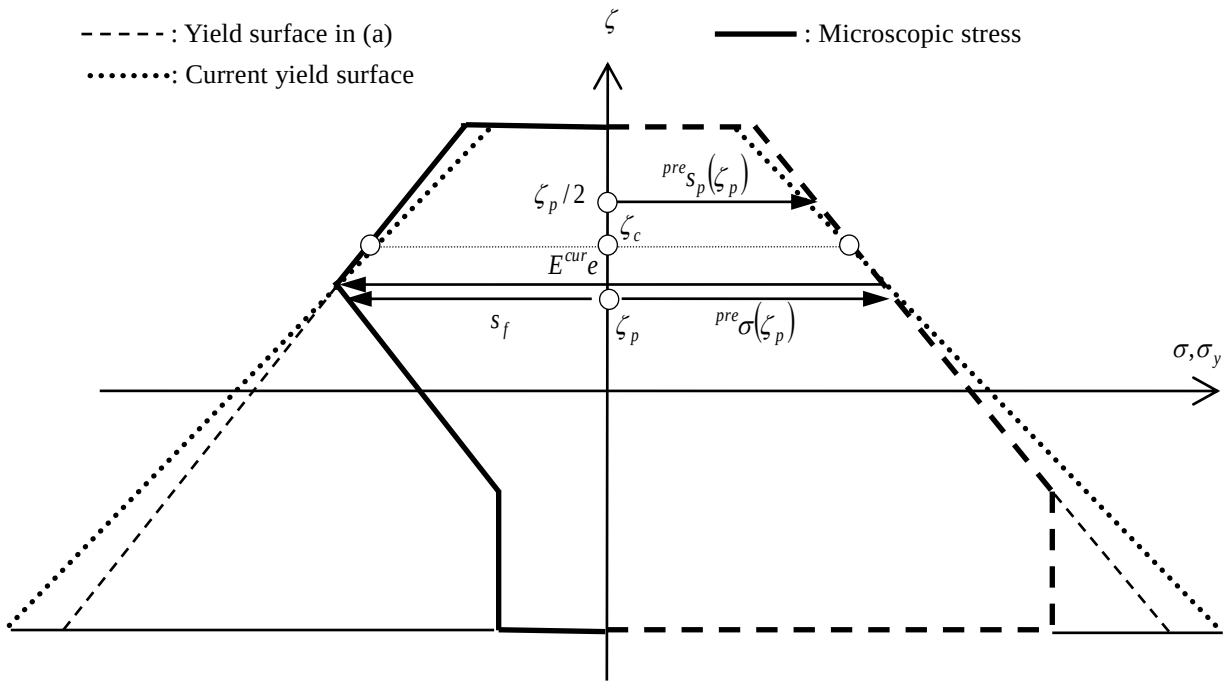
(Solid line: Current yield surface for each layer, Dotted line: Initial yield surface for each layer)

(b) Microscopic variables

Fig.4-1 Behavior of macroscopic and microscopic variables for the stress field

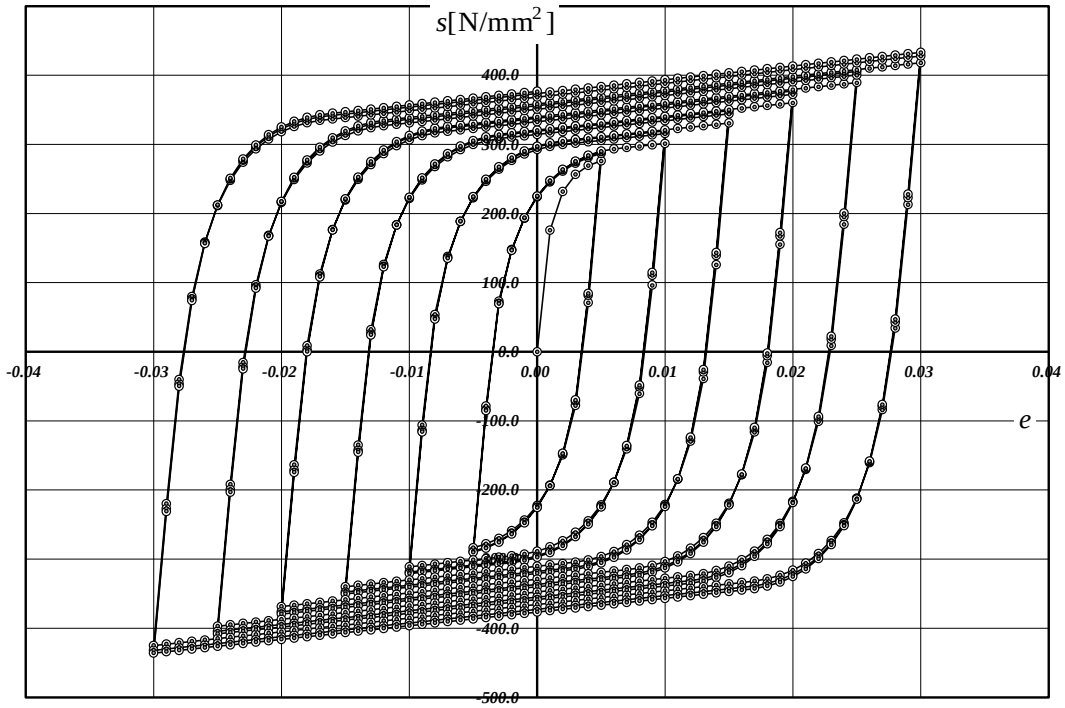


(a) Virgin loading



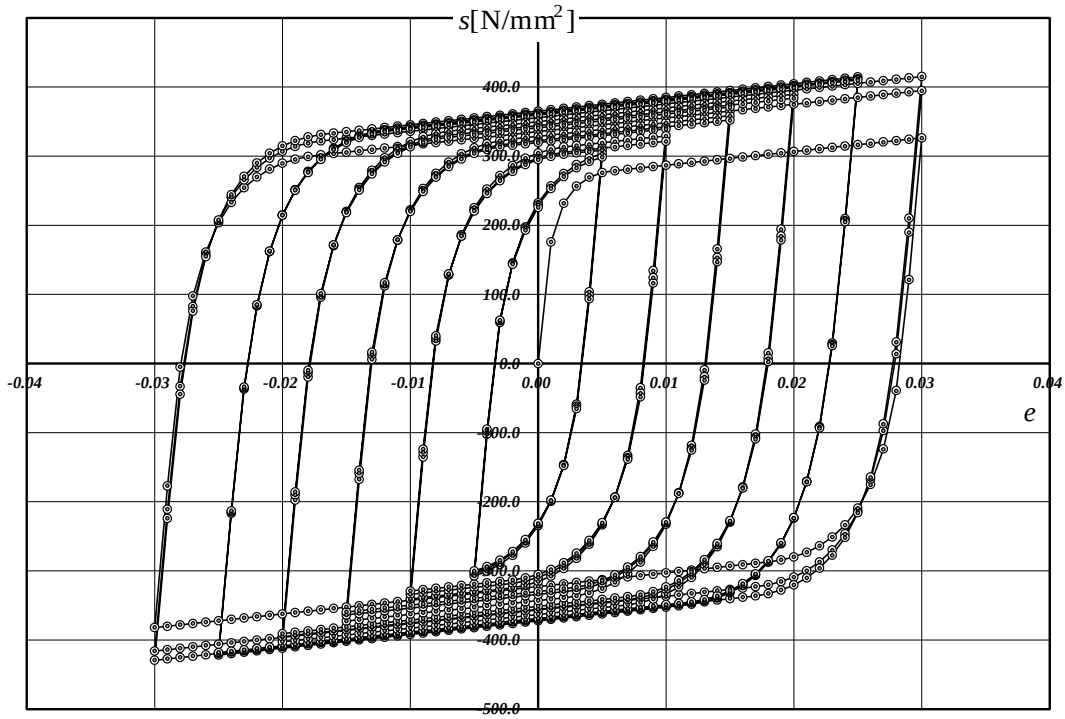
(b) Non-virgin loading

Fig.4-2 Behavior of microscopic variables under cyclic loadings for the virtual coordinate



(Gray: Macroscopic model, White: Modified sub-layer model)

(a) Gradual increase loading



(Gray: Macroscopic model, White: Modified sub-layer model)

(b) Gradual decrease loading

Fig.4-3 Comparison between the modified sub-layer model and the macroscopic model

第５章　多軸応力状態に対する完全弾塑性体のレイヤーから成るサブレイヤーモデルの巨視的評価手法

５.１　はじめに

５.２　硬化則を考慮しない巨視的モデルの定式化

５.２.１　微視的モデルの概要および各レイヤーの特性

５.２.２　巨視的弾性構成則および巨視的降伏応力

５.２.３　その他の巨視的応力

５.２.４　過去の履歴の取り扱い

５.２.５　近似式の導入による巨視的降伏条件式の導出

５.２.６　近似式の導入による巨視的塑性流れ則の導出

５.２.７　Loading surface の中心および投影中心応力

５.３　数値解析

５.３.１　数値解析アルゴリズム

５.３.２　接線係数テンソル

５.３.４　数値解析例

５.４　巨視的モデルとサブレイヤーモデルの差異に関する検討および修正方法の提案

５.４.１　誤差に対する考察

５.４.２　過去の微視的応力の方向近似による修正方法

５.４.３　区分的な巨視的評価による修正方法

５.４.４　修正方法の妥当性検証のための数値解析

５.５　Bounding surface モデルと巨視的モデルの類似性

５.５.１　Bounding surface モデルの概要と分類

５.５.２　巨視的モデルの投影応力方向の再定義

５.５.３　巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則の再定義

５.５.４　巨視的変数の変化率

５.５.５　Loading surface の中心の変化率に関する考察

５.５.６　数値解析例

５.６　まとめ

５.１　はじめに

構造物の崩壊挙動をコンピュータシミュレーションで追跡することは、地震時に建物の安全性を評価する際に極めて重要な課題である。このとき、鉄骨構造の地震時の挙動を精確に把握するためには、鋼材のバウシンガー効果を適切に評価する必要がある。また、近年、E-ディフェンスの再現解析に代表されるように建物全体をシェル、ソリッド要素でモデル化した大規模解析も行われてきている。このような解析は、多大な自由度数を有するために、計算負荷が極めて大きくなる。以上の観点から、数値解析において、多軸応力状態でバウシンガー効果を適切に評価でき、かつ計算負荷の小さい材料構成則の開発は重要な課題であるといえる。

3 章では､2 章で構築した一軸応力状態に対する修正サブレイヤーモデルを多軸応力状態へ拡張した。その中で、多軸応力状態における実験結果との比較を行い、サブレイヤーモデルが実現象に対して有効であることを示した。しかしながら、有限要素法においてサブレイヤーモデルは、各積分点に対して複数のレイヤーを想定し、各レイヤーに対して計算を行う必要性があるため計算負荷が大きいという欠点を有している。多軸応力状態に対しては、積分点および各諸量の成分数が一軸応力状態に比べ多くなる(久田(2008))ことから多大な計算負荷は致命的な欠点であると言える。

これらを踏まえて、本章では、サブレイヤーモデルの欠点である多大な計算負荷を低減する巨視的モデルを多軸応力状態において提案する。以下にその内容を示す。

(1)　5.2 節では、多軸応力状態において硬化則を考慮しない巨視的モデルの定式化を行う。このとき、一軸応力状態に対する巨視的モデルとは異なり、解析的に巨視的定式化が不可能な箇所があるので近似式を二つ導入する。しかし、定式化の際には、熱力学の第二法則と最大塑性散逸の原理といった普遍的な仮説のみを用い、巨視的モデルの理論的完成度の高さを示す。

(2)　5.3 節では、巨視的モデルの数値解析アルゴリズムを作成する。また、巨視的モデルの有限要素法への実装を踏まえ、増分形に対して整合性を有する接線係数テンソルを誘導する。さらに、巨視的モデルとサブレイヤーモデルとの数値解析結果を比較し、近似式の妥当性の検証を行う。

(4)　5.4 節では、5.3 節での数値解析により得られた巨視的モデルとサブレイヤーモデルとの差異の原因を明らかにし、修正方法の提案を行うとともに、妥当性の検証を行う。

(5)　5.5 節では、巨視的モデルと Bounding surface モデルの類似性に対して詳細な検討を行う。その中で、投影応力の方向を再定義することにより、様々な巨視的モデルを提案する。また、各巨視的モデルとサブレイヤーモデルを比較することによって各巨視的モデルの妥当性について考察する。

５.２　硬化則を考慮しない巨視的モデルの定式化

５.２.１　微視的モデルの概要および各レイヤーの特性

本章では、Fig.5-1(a)に示すように無限のレイヤーから成るサブレイヤーモデル(微視的モデル)を考える。各レイヤーは、仮想座標系 $\zeta\left(-1/2 \le \zeta \le 1/2\right)$ によって認識されるものとし、それらを仮想レイヤーと呼ぶ。また、仮想レイヤーを完全弾塑性体とし、降伏条件は von Mises の降伏条件を用いる。各仮想レイヤーの特性は、以下のようになる。

自由エネルギー：$\psi(\zeta)=G\left(\boldsymbol{\varepsilon}'(\zeta)-\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right):\left(\boldsymbol{\varepsilon}'(\zeta)-\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right)+\frac{1}{2}\hat{K}\hat{\varepsilon}(\zeta)^2$ (5-1)

Clausius-Duhem の不等式：$-\dot{\psi}(\zeta)+\boldsymbol{\sigma}'(\zeta):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'(\zeta)+\hat{\sigma}\dot{\hat{\varepsilon}} \ge 0$ (5-2)

弾性構成則：$\boldsymbol{\sigma}(\zeta)=2G\left(\boldsymbol{\varepsilon}'(\zeta)-\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right)+\hat{\sigma}\boldsymbol{i}$，　$\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)=2G\left(\boldsymbol{\varepsilon}'(\zeta)-\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right)$ (5-3)

塑性散逸項：$\lambda(\zeta)=\boldsymbol{\sigma}(\zeta):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)$ (5-4)

降伏条件式：$\phi(\zeta)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\boldsymbol{\sigma}'(\zeta):\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)}-\sigma_y(\zeta) \le 0$ (5-5)

塑性流れ則：$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)=\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)}{\sigma_y(\zeta)}\dot{\gamma}(\zeta)$ (5-6)

塑性条件：$\phi(\zeta)=\dot{\phi}(\zeta)=0$，　$\phi(\zeta)\dot{\gamma}(\zeta)=0$，　$\dot{\gamma}(\zeta) \ge 0$ (5-7)

$$\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)=\boldsymbol{\sigma}(\zeta)-\hat{\sigma}(\zeta)\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{\varepsilon}'(\zeta)=\boldsymbol{\varepsilon}(\zeta)-\frac{1}{3}\hat{\varepsilon}(\zeta)\boldsymbol{i} \tag{5-8}$$

$$\hat{\sigma}(\zeta)=\frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}(\zeta),\quad \hat{\varepsilon}(\zeta)=tr\boldsymbol{\varepsilon}(\zeta),\quad \hat{\sigma}(\zeta)=\hat{K}\hat{\varepsilon}(\zeta) \tag{5-9}$$

ここに、G はせん断弾性係数、$\hat{K}$ は体積弾性係数、$\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソル、$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}$ は塑性ひずみテンソル、$\hat{\varepsilon}$ は体積ひずみ、$\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、σ_y は初期降伏応力(一定)、$\hat{\sigma}$ は平均応力、γ は塑性進展パラメータ、$\boldsymbol{i}$ は単位テンソルである。$(*)'$, $(\dot{*})$は、それぞれ変数$(*)$偏差成分、変化率を表す。Fig.5-2(a)は、偏差応力空間上で微視的モデルの許容応力空間を概念的に表している。また、Fig.5-2(b)に示すように降伏応力はζ 上で連続、かつ単調減少とし、具体的には式(2-85)を参照されたい。

５.２.２　巨視的構成則および巨視的降伏応力

サブレイヤーモデルの概念より各レイヤーは、外力に対して並列的に配置されていることから各仮想レイヤーにおけるひずみテンソルは等しい。これを巨視的ひずみとし、変数 $\boldsymbol{e}$ で表す。すなわち、

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\zeta)=\text{constant}=\boldsymbol{e},\quad \hat{\varepsilon}(\zeta)=\text{constant}=\hat{e} \tag{5-10}$$

ここに、$\hat{e}$ は巨視的な体積ひずみである。$\boldsymbol{e}$ を与えた時のモデル全体の応力は、仮想レイヤーの応力の平均となり次のように表される。

$$\boldsymbol{s} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}(\zeta) d\zeta \tag{5-11}$$

同様に、モデル全体の自由エネルギーおよび Clausius-Duhem の不等式は仮想レイヤーの平均として表される。従って、モデル全体の自由エネルギー Ψ は、

$$\Psi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi(\zeta) d\zeta = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right) : \left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right) d\zeta + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K\hat{e}^2 d\zeta \tag{5-12}$$

Clausius-Duhem の不等式は、

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-\dot{\psi}(\zeta) + \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) : \dot{\boldsymbol{e}}' + \hat{\sigma}(\zeta)\dot{\hat{e}}\right) d\zeta \geq 0 \tag{5-13}$$

式(5-13)の第 2,3 項は、式(5-10)より次式のようになる。

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) : \dot{\boldsymbol{e}}' d\zeta = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) d\zeta : \dot{\boldsymbol{e}}' = \boldsymbol{s}' : \dot{\boldsymbol{e}}' \tag{5-14}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{\sigma}(\zeta)\dot{\hat{e}} d\zeta = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{\sigma}(\zeta) d\zeta \dot{\hat{e}} = \hat{s}\dot{\hat{e}} \tag{5-15}$$

ここに、$\hat{s}$ は巨視的な平均応力である。式(5-13)に式(5-14),(5-15)と式(5-12)の変化率を代入すると、次のようになる。

$$\left\{\boldsymbol{s}' - 2G\left(\boldsymbol{e}' - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) d\zeta\right)\right\} : \dot{\boldsymbol{e}}' + \left(\hat{s} - K\hat{e}_e\right)\dot{\hat{e}}_e + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) d\zeta \geq 0 \tag{5-16}$$

ここに、$\hat{e}_e$ は巨視的な体積弾性ひずみであり、$\hat{e} = \hat{e}_e$ である。この不等式が、任意のひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{e}}'$ に対して成り立つ条件から次式が得られる。

$$\boldsymbol{s}' = 2G\left(\boldsymbol{e}' - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) d\zeta\right) = 2G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}\right) = 2G\boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{e}}, \quad \hat{s} = \hat{K}\hat{e} \tag{5-17),(5-18}$$

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) d\zeta, \quad \Lambda = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) d\zeta \geq 0 \tag{5-19),(5-20}$$

ここに、$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{e}}$ は巨視的弾性ひずみ、$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}$ は巨視的塑性ひずみであり、Λ は巨視的塑性散逸項である。ま

た、式(5-9)をζ上で積分し、式(5-17),(5-18)を用いると、$\boldsymbol{s}$は次式のように表せる。

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}' + \hat{s}\boldsymbol{i} = 2G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{e}_p\right) + \hat{K}\hat{e}_e\boldsymbol{i} = 2G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{e}_p\right) + \hat{K}\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} : \boldsymbol{e} \tag{5-21}$$

ここに、$\otimes$はテンソル積を表す。式(5-21)は、巨視的な弾性構成則を表している。このように仮想座標系において、微視的モデルの微視的諸量を積分し、巨視的諸量として扱うものを巨視的モデルと呼ぶ (Fig.5-1(b))。以降、巨視的モデルの定式化において、使用する変数は微視的変数をギリシャ文字、巨視的変数をローマ文字で表す。

次に、二種類の巨視的降伏応力を次のように定義する。

$$s_y = \frac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p} \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \sigma_y(\zeta) d\zeta, \quad \bar{s}_y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_y(\zeta) d\zeta \tag{5-22),(5-23}$$

ここに、ζ_pは塑性領域$\left(\zeta_p < \zeta \le 1/2\right)$と弾性領域$\left(-1/2 \le \zeta < \zeta_p\right)$の境界値である。$s_y$は塑性領域において微視的降伏応力を平均したものであり、$\bar{s}_y$は全領域において微視的降伏応力を平均したものである。$s_y, \bar{s}_y$の関係を示す変数d_p、また、d_p, ζ_pの関係を示す変数D_pを次のように定義する。

$$s_y = \left(1 - d_p\right)\bar{s}_y, \quad 1 - D_p d_p = \frac{1}{2} - \zeta_p \tag{5-24),(5-25}$$

d_pは、塑性領域が全領域に近づく、つまり$\zeta_p \to -1/2$となるにつれ0に近づく変数である。

５.２.３　その他の巨視的応力

三種類の巨視的応力を以下のように定義する。

$$\boldsymbol{s}_e' = \frac{1}{\frac{1}{2} + \zeta_p} \int_{-\frac{1}{2}}^{\zeta_p} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) d\zeta, \quad \boldsymbol{s}_p' = \frac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p} \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) d\zeta \tag{5-26),(5-27}$$

$$\bar{\boldsymbol{s}}' = \frac{\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) d\zeta}{\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \sigma_y(\zeta) d\zeta} \bar{s}_y \tag{5-28}$$

$\boldsymbol{s}_e'$は、弾性領域において、微視的応力を平均したものであり、平均弾性応力と呼ぶ。$\boldsymbol{s}_p'$は、塑性領域において、微視的応力を平均したものであり、平均塑性応力と呼ぶ。また、$\bar{\boldsymbol{s}}'$は$\boldsymbol{s}_p'$をs_yで除し、$\bar{s}_y$によって規定される降伏曲面に投影したものであり、投影応力と呼ぶ。また、$\boldsymbol{s}', \boldsymbol{s}_e', \boldsymbol{s}_p'$の定義よ

り次の関係が導かれる。

$$\boldsymbol{s}' = \left(\frac{1}{2} + \zeta_p\right)\boldsymbol{s}'_e + \left(\frac{1}{2} - \zeta_p\right)\boldsymbol{s}'_p \tag{5-29}$$

式(5-24),(5-27),(5-28)を用いると、$\boldsymbol{s}'_p, \bar{\boldsymbol{s}}'$ の間に次の関係が導かれる。

$$\boldsymbol{s}'_p = (1 - d_p)\bar{\boldsymbol{s}}' \tag{5-30}$$

５.２.４　過去の履歴の取り扱い

繰返載荷を行うと、微視的モデルの微視的応力は複雑に変化する。Fig.5-3 は、ζ 上での微視的モデルの許容応力空間における微視的応力の挙動とそれに伴う巨視的諸量を表している。Fig.5-3 では、理解しやすいように降伏応力分布を線形と想定しているため、微視的モデルの概念図は円錐形で表される。しかし、以降の展開は降伏応力分布を線形に限定し、巨視的モデルの本質を失うものではない。はじめに、Fig.5-3(a)に示すように載荷を行う。このとき、全ての仮想レイヤーが降伏するまで微視的応力の分布は折れ線状に表される。次に、Fig.5-3(b)は非処女載荷時の微視的応力の挙動を示したものである。Fig.5-3(a)より除荷し、再び載荷を行うと、点 A で最初の仮想レイヤーが降伏する。さらに載荷を行うと、点 A は点 A'へと移動し、塑性領域の微視的応力は円錐表面上の曲線で表される。ここで、塑性領域と弾性領域の境界値 ζ_p における応力として $\boldsymbol{s}'_f$ を定義する。

$$\boldsymbol{s}'_f(\zeta_p) = 2G^{cur}\boldsymbol{e}' + {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_p) \tag{5-31}$$

ここに、${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'$ は除荷時の微視的応力であり、微視的応力の過去の履歴を表している。また、これは以下の関係を持つと定義する。

$$\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) = {}^{cur}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) + {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) = 2G\left\{{}^{cur}\boldsymbol{e}' + {}^{cur}\boldsymbol{\varepsilon}_p(\zeta)\right\} + 2G\left\{{}^{pre}\boldsymbol{e}' + {}^{pre}\boldsymbol{\varepsilon}_p(\zeta)\right\} \tag{5-32}$$

他の変数についても除荷時の値を ${}^{pre}(\ )$ と表す。また、${}^{cur}(\ )$ は除荷時の値を基準とした現載荷時の値である。従って、$(\ ) = {}^{cur}(\ ) + {}^{pre}(\ )$ と定義することができる。また、$\phi(\zeta_p)$ では式(5-5),(5-7)より次式を満たさなければならないことは明らかである。

$$\phi(\zeta_p) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\boldsymbol{s}'_f(\zeta_p) : \boldsymbol{s}'_f(\zeta_p)} - \sigma_y(\zeta_p) = 0 \tag{5-33}$$

式(5-33)を解くことによって ζ_p を決定する。

次に、過去の履歴を考慮した各巨視的応力を示す。$\boldsymbol{s}'_p$ は、次式のようになる。

$$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}}\left[2G\left\{{}^{cur}\boldsymbol{e}' - {}^{cur}\boldsymbol{\varepsilon}_p(\zeta)\right\} + {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)\right]d\zeta = 2G^{cur}\boldsymbol{e}' - \frac{2G^{cur}\boldsymbol{e}_p}{1-D_p d_p} + {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} \tag{5-34}$$

$${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta_p) = \frac{1}{1-D_p d_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta \tag{5-35}$$

$\bar{\boldsymbol{s}}'$ は、次式のようになる。

$$\bar{\boldsymbol{s}}' = \frac{1}{1-d_p}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{1-d_p}\left\{2G^{cur}\boldsymbol{e}' - \frac{2G^{cur}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}}{1-D_p d_p} + {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}\right\} \tag{5-36}$$

$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{e}}$ は、式(5-29),(5-34)を用いて導出する。

５.２.５　近似式の導入による巨視的降伏条件式の導出

前節で述べたように、繰返載荷により微視的応力は複雑に変化する。これらを巨視的に扱うには何らかの近似が必要である。そこで、次のような近似式を導入する。

$$\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) \approx \frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}:\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}}}\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y(\zeta) \quad \left(\frac{1}{2} \le \zeta \le \zeta_p\right) \tag{5-37}$$

塑性領域における $\sqrt{\boldsymbol{\sigma}'(\zeta):\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)}$ は、式(5-5),(5-7)より $\sqrt{2/3}\sigma_y(\zeta)$ で表されるが、方向は不明である。そこで、近似式(5-37)では方向を $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ と近似している。$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ の方向は、塑性領域における微視的応力の平均の方向であるので、$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ を用いることは妥当であると考えられる。式(5-37)の両辺を積分し、$\sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}:\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}}$ を計算すると、次のようになる。

$$\sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}:\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}s_y \tag{5-38}$$

式(5-38)より巨視的な降伏関数が次のように導かれる。

$$\Phi_p = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}:\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}} - s_y = 0, \quad \dot{\Phi}_p = 0 \tag{5-39a}$$

また、式(5-39a)に式(5-24),(5-30)を用いると、次式が導かれる。

$$\bar{\Phi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\bar{\boldsymbol{s}}':\bar{\boldsymbol{s}}'} - \bar{s}_y = 0, \quad \dot{\bar{\Phi}} = 0 \tag{5-39b}$$

5.2.6　近似式の導入による巨視的塑性流れ則の導出

巨視的散逸項 Λ に以下の近似式を導入する。

$$\Lambda = \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) d\zeta \approx \frac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p} \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) d\zeta : \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) d\zeta = \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} : \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} \geq 0 \tag{5-40}$$

これは、微視的散逸項の平均が塑性領域における微視的応力の平均と微視的塑性ひずみの平均の積と等しいことを示す近似である。式(5-40)は、式(5-24),(5-30)を用いて以下のように表すこともできる。

$$\Lambda = \bar{\boldsymbol{s}}' : \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} = (1 - d_p)\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} \tag{5-41),(5-42}$$

従って、$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}, \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}}$ に対する熱力学的力がそれぞれ $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{s}}'$ であることが理解される。これは、式(5-39)の降伏条件式の妥当性を示唆している。続いて、最大塑性散逸の原理を導入して、塑性流れ則を誘導する。式(5-39),(5-40),(5-41),(5-42)よりラグラジアンは次式のようになる。

$$L = -\Lambda + \Phi_p \dot{g} = -\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} : \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} : \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}} - s_y \right) \dot{g} \tag{5-43a}$$

$$L = -\Lambda + \bar{\Phi} \dot{g} = -\bar{\boldsymbol{s}}' : \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\bar{\boldsymbol{s}}' : \bar{\boldsymbol{s}}'} - \bar{s}_y \right) \dot{\bar{g}} \tag{5-43b}$$

ここに、$\dot{g}, \dot{\bar{g}}$ はラグランジュの未定定数である。ラグラジアンをそれぞれ $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{s}}'$ で偏微分すると次式のようになる。

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}} = -\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} : \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}}} \dot{g} = -\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} + \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}}{s_y} \dot{g} = 0 \tag{5-44a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{s}}'} = -\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\boldsymbol{s}}'}{\sqrt{\bar{\boldsymbol{s}}' : \bar{\boldsymbol{s}}'}} \dot{\bar{g}} = -\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} + \frac{3}{2} \frac{\bar{\boldsymbol{s}}'}{\bar{s}_y} \dot{\bar{g}} = 0 \tag{5-44b}$$

従って、巨視的塑性流れ則は、

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}}{s_y} \dot{g}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\boldsymbol{s}}'}{\bar{s}_y} \dot{\bar{g}} \tag{5-45a),(5-45b}$$

$$\dot{\bar{g}} = (1 - d_p)\dot{g} \tag{5-46}$$

となる。ここで、g , $\bar{g}$ を巨視的塑性進展パラメータと呼ぶ。また、塑性条件は次式のようになる。

$$\Phi_p = \dot{\Phi}_p = 0, \quad \Phi_p \dot{g} = 0, \quad \dot{g} \geq 0 \tag{5-47a}$$

$$\bar{\Phi} = \dot{\bar{\Phi}} = 0, \quad \bar{\Phi} \dot{\bar{g}} = 0, \quad \dot{\bar{g}} \geq 0 \tag{5-47b}$$

本項、前項では、巨視的降伏条件式、巨視的塑性散逸項について述べた。これらの導出時には、近似式(5-37),(5-40)を用いた。しかし、用いた仮説は、基本的な熱力学の第二法則、最大塑性散逸の原理、von Mises の降伏条件のみであり、巨視的モデルの理論的完成度は高いといえる。ここで用いた近似式の妥当性については、5.3 節で巨視的モデルとサブレイヤーモデルの数値解析結果を比較し、検証する。

５.２.７　Loading surface の中心および投影中心応力

巨視的応力、平均塑性応力、投影応力の関係について考える。次に示す新たな変数を定義する。

$$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{s}' - \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} \tag{5-48}$$

式(5-30),(5-48)を用いると、投影応力は次式のように表せる。

$$\bar{\boldsymbol{s}}' = \frac{1}{1-d_p}\left(\boldsymbol{s}' - \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}}\right) \tag{5-49}$$

式(5-48)を式(5-39a)に用いると、次式のようになる。

$$\Phi_p = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{s}' - \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}}\right):\left(\boldsymbol{s}' - \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}}\right)} - s_y = 0 \tag{5-50}$$

式(5-50)より $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}}$ は、$\boldsymbol{s}'$ の移動硬化則といえる。従って、式(5-39a)は Bounding surface モデルにおける Loading surface に相当する。また、塑性が進展するにつれて式(5-39a)が式(5-39b)に幾何学的に一致していくことを考えれば、式(5-39b)は Bounding surface に相当することが分かる。次に、以下の変数を定義する。

$$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{g}} = \frac{1}{d_p}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}} \tag{5-51}$$

また、式(5-49),(5-51)を用いると、次式が導かれる。

$$\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{g}} = \frac{1}{1-d_p}\left(\boldsymbol{s}' - \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{g}}\right) \tag{5-52}$$

式(5-52)より $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{g}}$ はスケールファクターを $1/(1-d_p)$ としたときの $\bar{\boldsymbol{s}}'$, $\boldsymbol{s}'$ の投影中心応力であることが分かる。なお、Bounding surface モデルとの類似性については、5.5 節で詳細に検討する。

５.３　数値解析

５.３.１　数値解析アルゴリズム

5.2 節で誘導した巨視的モデルの基礎式を用いて数値計算アルゴリズムを構築する。時刻 t の諸量と ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}$ は既知であり、時刻 $t+\Delta t$ における他の諸量を算定する手順を示す。ここで、時刻 t における諸量は ${}^{t}(\ )$ と表し、${}^{t+\Delta t}(\ )={}^{t}(\ )+\Delta(\ )$ とする。また、過去の諸量 ${}^{pre}(\ )$ についても既知であるとする。基本的な考え方は、Return mapping rule に準じている。なお、s_y, $\bar{s}_y$, D_p, d_p の求め方は、Appendix2 に記す。

<u>変数 ${}^{t+\Delta t}\zeta_p$ の決定</u>：式(5-33)より ${}^{t+\Delta t}\zeta_p$ を決定するためには、過去の微視的応力 ${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ を記憶しておく必要がある。そこで、Fig.5-4 に示すように数値計算のため、ζ 上に M 個の参照点を設定し、その点において ${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ を記憶する。なお、塑性領域における ${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ は、式(5-37)を用いて導出し、弾性領域における ${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ は塑性化が進展していないため $2G^{cur}\boldsymbol{e}'$ だけ平行移動する。${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ を用いると、ζ_p は次式を解くことによって得ることができる。

$$\phi\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\boldsymbol{s}'_f\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right):\boldsymbol{s}'_f\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)}-\sigma_y\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)\leq 0 \tag{5-53}$$

$$\boldsymbol{s}'_f\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)=2G^{t+\Delta t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e}'\right)+{}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right) \tag{5-54}$$

ここに、${}^{t+\Delta t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e}'\right)={}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'-{}^{pre}\boldsymbol{e}'$ である。

<u>弾性予測子</u>：増分区間において、塑性化が進展しないもの $\left({}^{trial}\boldsymbol{e_p}={}^{t}\boldsymbol{e_p}\right)$ として各巨視的応力の試行値 ${}^{trial}(\ )$ を計算する。

$${}^{trial}\boldsymbol{s}'=2G^{trial}\boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{e}}=2G\left({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{e}}-{}^{t}\boldsymbol{e_p}\right) \tag{5-55}$$

$${}^{trial}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}=2G^{t+\Delta t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e}'\right)-\frac{2G^{trial}\left({}^{cur}\boldsymbol{e_p}\right)}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p}+{}^{pre}\boldsymbol{s}'_p\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right), \tag{5-56}$$

$${}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'=\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\,{}^{trial}\boldsymbol{s}'_p \tag{5-57}$$

ここに、${}^{trial}\left({}^{cur}\boldsymbol{e_p}\right)={}^{t}\boldsymbol{e_p}-{}^{pre}\boldsymbol{e_p}$ である。

<u>弾塑性判定</u>：降伏条件式の試行値 ${}^{trial}\overline{\Phi}$ を用いて弾塑性判定を行う。

$${}^{trial}\overline{\Phi}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}':{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}-\bar{s}_y={}^{trial}s_{eq}-\bar{s}_y,\quad {}^{trial}s_{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}':{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'} \tag{5-58),(5-59}$$

${}^{trial}\overline{\Phi} < 0$ のとき、弾性状態であるので試行値を正解として終了。

${}^{trial}\overline{\Phi} \geq 0$ のとき、塑性変形が生じているので塑性修正子を実行する。

<u>塑性修正子</u>：増分区間で塑性化が進展していることが明らかとなったので、塑性化を考慮した真の巨視的応力を求める。

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}' = 2G\,{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{e}} = 2G\left({}^{trial}\boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{e}} - \Delta\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}\right) = {}^{trial}\boldsymbol{s}' - 2G\Delta\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}} \tag{5-60} $$

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} = {}^{trial}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \frac{2G\Delta\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}}{1 - {}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p} \tag{5-61} $$

$$ {}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}' = {}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}' - \frac{2G\Delta\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}}{\left(1 - {}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1 - {}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)} \tag{5-62} $$

式(5-45)より巨視的塑性流れ則は次式のようになる。

$$ \Delta\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{{}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}'}{\sqrt{{}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}' : {}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}'}}\Delta g = \frac{3}{2}\frac{{}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}'}{\overline{s}_y}\Delta g \tag{5-63} $$

式(5-62)に式(5-63)を代入すると、${}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}'$ と ${}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'$ の方向が同じであることが分かる。従って、次式が導かれる。

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{n} = \frac{{}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}'}{\sqrt{{}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}' : {}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}'}} = \frac{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}{\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}' : {}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}} = {}^{trial}\boldsymbol{n} \tag{5-64} $$

式(5-62),(5-63),(5-64)を用いると、${}^{t+\Delta t}\overline{\Phi}$ は次のように表される。

$$ {}^{t+\Delta t}\overline{\Phi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{{}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}' : {}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{s}}'} - \overline{s}_y = {}^{trial}\overline{\Phi} - \frac{3G\Delta g}{\left(1 - {}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1 - {}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)} = 0 \tag{5-65} $$

式(5-65)より巨視的塑性進展パラメータが求められる。

$$ \Delta g = \frac{\left(1 - {}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1 - {}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}{3G}\,{}^{trial}\overline{\Phi} \tag{5-66} $$

式(5-66)を用いて、各巨視的応力を修正する。

サブレイヤーモデルでは全てのレイヤーで塑性ひずみを記憶しなければならないのに対して、巨視的モデルでは参照点の微視的応力を記憶するだけで良い。また、弾性試行段階、塑性修正子においてもサブレイヤーモデルでは、各レイヤーに対して計算を行う必要がある反面、巨視的モデルでは巨視的諸量を計算するため、1 レイヤー分の計算負荷となる。従って、巨視的モデルはサブレイ

ヤーモデルの計算負荷が大きいという致命的な欠点を克服していると考えられる。

５.３.２　接線係数テンソル

Simo(1985,1998)により提案された増分形に整合性のある弾塑性接線係数 $\boldsymbol{K}^{ep}$ を巨視的モデルにおいて求める。式(5-61),(5-63),(5-64)より巨視的応力の微分をとると、

$$\frac{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}'}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'} = 2G\boldsymbol{I} - 2G\sqrt{\frac{3}{2}}\,{}^{trial}\boldsymbol{n}\otimes\frac{d\Delta g}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'} - 2G\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{d^{trial}\boldsymbol{n}}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'}\Delta g \tag{5-67}$$

式(5-67)を展開するために、$\dfrac{d\Delta g}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'}, \dfrac{d^{trial}\boldsymbol{n}}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'}$ を求める。はじめに、$\dfrac{d\Delta g}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'}$ を求める。式(5-60),(5-65)より ${}^{t+\Delta t}\overline{\boldsymbol{\Phi}}$ の微分は次のようになる。

$$\frac{d^{t+\Delta t}\overline{\Phi}}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{d\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}':{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'} - \frac{3G}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\frac{d\Delta g}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'} = 0 \tag{5-68}$$

式(5-68)の第一項を式(5-56),(5-57)を用いて計算すると、

$$\frac{d\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}':{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'} = \frac{2G}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\frac{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}{\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}':{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}} = \frac{2G}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\,{}^{trial}\boldsymbol{n} \tag{5-69}$$

式(5-69)を式(5-68)に代入し整理すると、次式が求められる。

$$\frac{d\Delta g}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right){}^{trial}\boldsymbol{n} \tag{5-70}$$

次に、$\dfrac{d^{trial}\boldsymbol{n}}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'}$ を求める。

$$\frac{d^{trial}\boldsymbol{n}}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'} = \frac{d}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'}\frac{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}{\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}':{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}} = \frac{d^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'}:\frac{d}{d^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}\frac{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}{\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}':{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}} \tag{5-71}$$

式(5-71)において、

$$\frac{d}{d^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}\frac{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}{\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}':{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}} = \frac{\boldsymbol{I}-{}^{trial}\boldsymbol{n}\otimes{}^{trial}\boldsymbol{n}}{\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}':{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'}} \tag{5-72}$$

である。ここに、$\boldsymbol{I}$ は $\boldsymbol{I}:\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$($\boldsymbol{A}$は二階のテンソル)となる四階のテンソルである。従って、式(5-71)は次式のようになる。

$$\frac{d^{trial}\boldsymbol{n}}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'}=\frac{2G}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\frac{\boldsymbol{I}-{}^{trial}\boldsymbol{n}\otimes{}^{trial}\boldsymbol{n}}{\sqrt{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}':{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}'}} \tag{5-73}$$

式(5-70),(5-73)を式(5-67)に代入すると、

$$\frac{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}'}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'}=2G\boldsymbol{I}-2G\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right){}^{trial}\boldsymbol{n}\otimes{}^{trial}\boldsymbol{n}-\frac{6G^2}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\frac{\boldsymbol{I}-{}^{trial}\boldsymbol{n}\otimes{}^{trial}\boldsymbol{n}}{{}^{trial}s_{eq}}\Delta g \tag{5-74}$$

$d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}'=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}/3\right):d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}$ と式(5-21)を用いて式(5-74)を ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}$ 表示にすると、弾塑性接線係数 $\boldsymbol{K}^{ep}$ は次式のようになる。

$$\boldsymbol{K}^{ep}=\frac{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}}=\theta_1\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{3}\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}\right)+\theta_2\,{}^{trial}\boldsymbol{n}\otimes{}^{trial}\boldsymbol{n}+\hat{K}\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} \tag{5-75}$$

$$\theta_1=2G-\frac{6G^2\Delta g}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right){}^{trial}s_{eq}} \tag{5-76}$$

$$\theta_2=-2G\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)+\frac{6G^2\Delta g}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right){}^{trial}s_{eq}} \tag{5-77}$$

５.３.３　数値解析例

5.3.1 項で構築した数値解析アルゴリズムを基に巨視的モデルの数値解析例を示す。はじめに、巨視的モデルの特性を把握するために平面ひずみ状態における数値解析例を二つ示し、その後、巨視的モデルの適用限界を示すために特定のひずみ経路を与え近似式の誤差が大きくなる例について示す。なお、三つの解析ケースにおいて降伏応力分布 σ_y は式(2-85)を、材料特性は Table5-1 を用い、ひずみ経路のみが各ケースにて異なるものとする。ここに、E はヤング係数、ν はポアソン比である。

<u>Case1</u>：平面ひずみ状態におけるサブレイヤーモデル(200 レイヤー)と巨視的モデルの解析結果の比較を行い、巨視的モデルの定式化の際に用いた近似式(5-37),(5-40)の妥当性を検証する。ひずみ経路を Fig.5-5 に示す。Fig.5-6 は、偏差応力空間上で両モデルを比較したものである。$m\,step$までは、式(5-37),(5-40)の関係が厳密に成り立つことから巨視的モデルとサブレイヤーモデルの結果は一致する。$m-nstep$間では、過去の諸量に対して両モデルの差異はないが、式(5-37),(5-40)ともに成り立たないため差異が生じ始める。その後、$n-ostep$間では、$nstep$での両モデルの差異が過去の諸量として記憶されるため差異がさらに大きくなることが分かる。ここで、両モデルの誤差を次式のよう

に定義する。

$$error = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{s}'_{sub} - \boldsymbol{s}'_{macro}\right):\left(\boldsymbol{s}'_{sub} - \boldsymbol{s}'_{macro}\right)}}{\bar{s}_y} \times 100[\%] \tag{5-78}$$

ここに$(*)_{sub}$および$(*)_{macro}$はそれぞれサブレイヤーモデルおよび巨視的モデルの変数を表す。Fig.5-7 は式(5-78)による誤差とステップの関係を示しておりその最大値は 15.9[％]となり、両モデルは比較的良い対応を示していることが理解される。続いて、巨視的モデルにおける巨視的変数の挙動について示す。Fig.5-8 は、$n-ostep$間において、$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$および$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}}$で規定される Loading surface の挙動を偏差応力空間上で示しており、降伏するにつれΦ_p(Loading surface)が$\overline{\Phi}$(Bounding surface)に一致していく様子が分かる。また、Fig.5-9 では、$\boldsymbol{s}', \bar{\boldsymbol{s}}', \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$を$\pi$平面上で同時に示しており、全レイヤーが降伏すると、$\boldsymbol{s}', \bar{\boldsymbol{s}}', \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$が一致することが分かる。

<u>Case2</u>：平面ひずみ状態において複雑な弾塑性繰返し載荷を行う。このとき、全レイヤーが降伏する前に除荷および再負荷を繰り返すことにより過去の微視的応力が複雑な形状になることを意図した上で、ひずみ経路は Fig.5-10 のように与える。Fig.5-11 は両モデルの解析結果の比較であり、(a)は偏差応力空間上、(b),(c)は各成分における偏差応力ひずみ関係、(d)はζ_p―ステップ関係である。これらより、両モデルがよく対応していることが理解される。また、Fig.5-11(d)より$o-pstep$間において、巨視的モデルがサブレイヤーモデルの特徴である塑性化の急進展を表現できていることが分かる。これは、巨視的モデルが Masing のルールを満足することを示唆している。巨視的モデルが Masing のルールを満足することに関して以下のような考察が可能である。先述したように、巨視的モデルは Bounding surface モデルと概念的な類似性を有している。Bounding surface モデルにおいても Masing のルールを満足するための仮定が田中(1991),水野(1993,1994),Montans(2000)により提案されている。これらに比べ、巨視的モデルにおける Masing のルールは、サブレイヤーモデルを巨視的に評価することによって演繹的に導出されていることから物理的に有効であると考えられる。一方、Fig.5-12 は、ステップ毎の誤差であり、終始誤差が小さな値を示していることから複雑な弾塑性繰返し載荷においても巨視的モデルが有効であることが理解される。

<u>Case3</u>：巨視的モデルとサブレイヤーモデルの差異が大きくなる場合の数値解析結果を示す。Fig.5-13 に示すようなひずみ履歴を与え、サイクル数は 2 とする。Fig.5-13(a)より、ひずみの 11 成分が生じているときは他の成分は 0 であり、22 成分が生じているとき 33 成分は 22 成分と逆方向に生じ 11 成分は 0 となる。これを繰り返すと、Fig.5-13(b)に見るように偏差ひずみ空間上では、ひずみ経路

は長方形で表される。このようなひずみ履歴が建築構造物において生じるとは考えにくいが、巨視的モデルの適用限界を示すために重要であると考えられる。Fig.5-14 は、両モデルの解析結果の比較であり、(a)は応力空間上、(b),(c)は各成分における偏差応力ひずみ関係、(d)はζ_p —ステップ関係である。また、Fig.5-15 は、ステップ毎の誤差を示している。これより、最大の誤差は 29.8[%]となり Case1,2 に比べて大きな誤差が生じていることが理解される。続いて、誤差の原因について考察する。Fig5-16 は、近似式(5-40)の両辺をサブレイヤーモデルにおいて比較したものである。これを見ると、左辺と右辺はよく対応していることから近似式(5-40)の影響は小さいものと推測される。従って、誤差の主原因は、塑性領域における微視的応力の方向に対する近似である式(5-37)であると考えられる。次節では、塑性領域における微視的応力の方向の乱れについて詳細に検討し、修正方法の提案を行う。

５.４　巨視的モデルとサブレイヤーモデルの差異に対する検討および修正方法の提案

5.3.3 項において、特定のひずみ経路においてサブレイヤーモデルと巨視的モデルには大きな差異が生じることが明らかとなった。そこで、本節では、その誤差の原因について詳細に検討し、修正方法を示す。

５.４.１　誤差に対する考察

ここでは、5.3.3 項の Case3 における誤差について詳細に考察を行う。前述したように、巨視的塑性散逸項の導出時に提案した近似式(5-40)は両モデルの差異に対して影響は小さく、近似式(5-37)、即ち塑性領域における微視的応力の方向の乱れが誤差の主原因であると考えられる。従って、式(5-37)に関する誤差が最も大きくなる場合について考える。Fig.5-17 は、二つのレイヤーを持つサブレイヤーモデルにおいて、各レイヤーの応力の挙動を示している。処女載荷時には、両モデルの微視的応力の方向は一致している。その後、除荷を行い、再び載荷を行うと、時刻 t_1 において一つ目のレイヤーが降伏する。載荷を継続すると、時刻 t_2 において二つのレイヤーが降伏し、両レイヤーの微視的応力の方向は大きく差異が生じる。さらに、載荷を行うと、時刻 t_2 後は、徐々に両レイヤーの微視的応力の方向が近づき、最終的に時刻 t_3 において両レイヤーの微視的応力の方向は同一となる。このことから、全レイヤーが降伏した直後に最も近似式(5-37)の精度が悪くなると考えられる。ここで、Fig.5-14(d)を改めて見ると、Case3 では、全レイヤーが降伏した直後に除荷を行い、また再載荷を行っていることが分かる。これにより巨視的モデルとサブレイヤーモデルとの結果に大きな誤差が生じたと考えられる。続いて、塑性領域における微視的応力の乱れをさらに詳しくみるために、Case3 におけるサブレイヤーモデルの微視的応力の挙動を見てみる。Fig.5-18 は、2 サイクル目での各レイヤーの応力の挙動を抽出して示している。図中□は、各レイヤーの微視的応力を表しており、それぞれ原点から外に向かって 1,20,40,60,80,100,120,140,160,180,200 番目のレイヤーの微視的応力を抽出しており、点線は平均応力を表している(1 番目のレイヤーの降伏応力が最小)。Fig.5-18(a)は全領域におけるレイヤーの挙動を表しており、(b)は塑性領域における微視的応力のみを抽出して示している。これより塑性領域における微視的応力の方向に顕著な乱れが生じていることが理解される。また、前述したように全レイヤーが降伏した直後に除荷を行っていることから、常に、微視的応力の方向に大きな乱れが生じていることが分かる。これらを受けて、誤差の原因に対する修正方法を二つ提案する。

５.４.２　過去の微視的応力の方向近似による修正方法

微視的応力の方向の乱れが誤差の主要因であることから、塑性領域における過去の諸量の修正方法を提案する。

はじめに、塑性領域における過去の微視的応力 ${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ に対する修正方法を提案する。式(5-37)より巨視的モデルの塑性領域における ${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ の方向は全て除荷時の $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ と同一の方向であると定義した。また、弾性領域においては、${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ は塑性化が進展していないため $2G^{cur}\boldsymbol{e}'$ だけ平行移動する。しかし、前述したように塑性領域における微視的応力の方向が著しく乱れる場合があり、式(5-37)の近似では、サブレイヤーモデルと巨視的モデルの計算結果に大きな差異が見られることがある。そこで、塑性領域における過去の微視的応力の方向を新たに以下のように定義する。

$$ {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) = \frac{\boldsymbol{v}'}{\sqrt{\boldsymbol{v}':\boldsymbol{v}'}}\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y(\zeta) \tag{5-79}$$

ここで、$\boldsymbol{v}'$ は次のように定義される。

$$ \boldsymbol{v}' = \left(1-\left(\frac{\frac{1}{2}-\zeta}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)^{n_1}\right)\boldsymbol{\sigma}'\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}-\zeta}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)^{n_1}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_p) \tag{5-80}$$

ここに、n_1 は定数である。式(5-80)は $\zeta = 1/2$ のとき、$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\sigma}'(1/2)$、$\zeta = \zeta_p$ のとき $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\sigma}'(\zeta_p)$ となることを意味する。従って、式(5-79)は塑性領域において微視的応力の方向が $\boldsymbol{\sigma}'(1/2)$ から $\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_p)$ にかけて非線形的に変化することを示している。ここで、$\boldsymbol{\sigma}'(1/2)$、$\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_p)$ は近似を含まない正しい値となるため式(5-79)は微視的応力の方向を補正することが可能となる。ここで、$\boldsymbol{\sigma}'(1/2)$ および $\boldsymbol{\sigma}'(-1/2)$ は本来、巨視的モデルにおいては不明の値であるので、別途計算を行う必要がある。これは、修正された巨視的モデルが、従来の巨視的モデルに比べて多少計算負荷が大きいことを示しているが、多くのレイヤー数を持つサブレイヤーモデルの計算負荷に比べれば、修正手法を適用した巨視的モデルの方が計算負荷に対する優位性を有することは明らかである。

続いて、${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ と同様に塑性領域における過去の平均塑性化応力 ${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta)$ の修正を行う。前項では、${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ を式(5-79)のように定義したため、${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta) = \int_{\zeta}^{\frac{1}{2}} {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta/(1/2-\zeta)$ を求めると、除荷時の $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ および $\boldsymbol{s}'$ の値に矛盾が生じてしまう。この矛盾を回避するために ${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta)$ を以下のように定義する。

$$ {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta)=\frac{\boldsymbol{w}'}{\sqrt{\boldsymbol{w}':\boldsymbol{w}'}}\sqrt{\frac{2}{3}}s_y(\zeta) \tag{5-81} $$

ここで $\boldsymbol{w}'$ は次のように定義される。

$$ \boldsymbol{w}'=\left(1-\left(\frac{\frac{1}{2}-\zeta}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)^{n_2}\right)\boldsymbol{\sigma}'\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}-\zeta}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)^{n_2}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} \tag{5-82} $$

ここに n_2 は定数である。式(5-82)は式(5-81)と同様に $\zeta=1/2$ のとき、$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{\sigma}'(1/2)$、$\zeta=\zeta_p$ のとき $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ となり、矛盾を回避することができる。ここで、除荷時の $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ は既知であり、$\boldsymbol{\sigma}'(1/2)$は、前述のように別途計算する必要がある。本項では、過去の微視的応力および平均塑性化応力の方向に対してのみ修正方法を提案し、現在の値に対しては適用していない。これは、現在の値に対して修正方法を適用すると、諸式が非常に複雑となり、陽な導出を行うことが困難なためである。本項における修正方法の妥当性については 5.4.4 項における数値解析結果を通して検証する。

５.４.３　区分的な巨視的評価による修正方法

前項に引き続いて両モデルの差異を小さくするための巨視的モデルの修正方法の提案を行う。ここでは、微視的応力の方向の乱れを小さくするために区間毎に巨視的モデルを計算する手法を提案する。5.2,5.3 節にて提案した巨視的モデルでは、全領域$(-1/2\le\zeta\le1/2)$において微視的変数が連続であると仮定し、巨視的評価手法の提案を行っていたが、本項の修正方法では、Fig.5-19 に示すように微視的変数が区分的に連続的と考え、巨視的に評価する領域を複数に分割する。このとき、分割数を N とすると、領域 k $(k=1\sim N)$は、$(\zeta_{b,k}\le\zeta\le\zeta_{a,k})$で表され、その中で、微視的変数は連続であると仮定する。(Fig.5-19 では N=3)。

複数の領域に分割される巨視的モデルについて述べる。式(5-11)より全領域における巨視的応力 $\boldsymbol{s}'$ は、区分的に連続であることから次式のように表される。

$$ \boldsymbol{s}'=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta=\int_{\zeta_{b,1}}^{\zeta_{a,1}}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta+\int_{\zeta_{b,2}}^{\zeta_{a,2}}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta+\cdots\int_{\zeta_{b,N}}^{\zeta_{a,N}}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta=\sum_{k=1}^{N}\frac{\zeta_{a,k}-\zeta_{b,k}}{\zeta_{a,k}-\zeta_{b,k}}\int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta \tag{5-83} $$

ここに、$\zeta_{a,1}=1/2,\zeta_{b,N}=-1/2$ であり、他の $\zeta_{a,k},\zeta_{b,k}$ は任意に決定される。また、Fig.5-19 に示すように $\zeta_{a,k+1}=\zeta_{b,k}(k=1\sim N-1)$が成り立つものとする。領域 $k(\zeta_{b,k}\le\zeta\le\zeta_{a,k})$における巨視的弾性構成則として次式を定義する。

$$\boldsymbol{s}'_{,k} = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}} \int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}} \int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}} 2G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right) d\zeta = 2G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p},k}\right) \tag{5-84}$$

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p},k} = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}} \int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) d\zeta \tag{5-85}$$

ここに、$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p},k}$ は領域 k における巨視的塑性ひずみである。式(5-84),(5-85)を式(5-83)に代入することにより全領域における巨視的弾性構成則は次式のように表される。

$$\boldsymbol{s}' = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{s}'_{,k} \left(\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}\right) = \sum_{k=1}^{N} 2G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p},k}\right)\left(\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}\right) \tag{5-86}$$

式(5-86)は、 領域 $k\left(k = 1 \sim N\right)$ の幅 $\left(\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}\right)$ により各領域の巨視的応力 $\boldsymbol{s}'_{,k}$ が重みづけされていることを意味している。すなわち、領域 k の幅が大きいほど、$\boldsymbol{s}'_{,k}$ の影響が大きくなることを意味している。以上のように微視的変数を領域 $k\left(k = 1, N-1\right)$ において連続と仮定するのが本項における修正方法である。なお、本項において $(*)_{,k}$ は、領域 $k\left(\zeta_{b,k} \le \zeta \le \zeta_{a,k}\right)$ における巨視的変数を表すものとする。

次に、領域 k における巨視的降伏応力を次のように定義する。

$$s_{y,k} = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{p,k}} \int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}} \sigma_y(\zeta) d\zeta, \quad \bar{s}_{y,k} = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}} \int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}} \sigma_y(\zeta) d\zeta \tag{5-87),(5-88}$$

ここに、$s_{y,k}$ は塑性領域 $\left(\zeta_{p,k} \le \zeta \le \zeta_{a,k}\right)$ における微視的降伏応力の平均、$\bar{s}_{y,k}$ は領域 $k\left(\zeta_{b,k} \le \zeta \le \zeta_{a,k}\right)$ における降伏応力の平均である。また、$\zeta_{p,k}$ は領域 k における弾性領域と塑性領域の境界である。式(5-87),(5-88)により $\zeta_{p,k} \to \zeta_{b,k}$ となるにつれて、$s_{y,k} \to \bar{s}_{y,k}$ となることが分かる。ここで、変数 $s_{y,k}, \bar{s}_{y,k}$ の関係を示す変数 $d_{p,k}$、また、$d_{p,k}, \zeta_{p,k}$ の関係を示す変数 $D_{p,k}$ を次のように定義する。

$$s_{y,k} = \left(1 - d_{p,k}\right)\bar{s}_{y,k}, \quad \zeta_{a,k} - \zeta_{p,k} = 1 - D_{p,k} d_{p,k} \tag{5-89),(5-90}$$

ここに、$d_{p,k}$ は、$\zeta_{p,k} \to \zeta_{b,k}$ となるにつれて 0 に近づく変数である。次に、巨視的降伏応力 $s_{y,k}, \bar{s}_{y,k}$ に対応するものとして以下の巨視的応力を定義する。

$$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{p,k}} \int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{p,k}} \int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}} 2G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right) d\zeta \tag{5-91}$$

$$\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k} = \frac{\bar{s}_{y,k}}{s_{y,k}} \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}_k} = \frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}}{1 - d_{p,k}} \tag{5-92}$$

次に、過去の履歴について述べるが、基本的には、5.2.4 項の内容と同一である。なお、$\zeta_{p,k}$ の導出は、領域 k において式(5-33)を適用するだけであるので詳細は割愛する。続いて、$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}, \bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}$ において 5.2.4 項で定義した過去の履歴を考慮する。式(5-91)において $\boldsymbol{\sigma}'={}^{cur}\boldsymbol{\sigma}'+{}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'$ $\boldsymbol{e}'={}^{cur}\boldsymbol{e}'+{}^{pre}\boldsymbol{e}'$ および $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)={}^{cur}\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)+{}^{pre}\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)$ であることを考慮すると、$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}$ は次式のように表される。

$$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}=\frac{1}{\zeta_{a,k}-\zeta_{p,k}}\int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}}\left[2G\left\{{}^{cur}\boldsymbol{e}'-{}^{cur}\boldsymbol{\varepsilon}_{p}(\zeta)\right\}+{}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)\right]d\zeta=2G\,{}^{cur}\boldsymbol{e}'-\frac{2G\left(\zeta_{a,k}-\zeta_{b,k}\right)}{1-D_{p,k}d_{p,k}}{}^{cur}\boldsymbol{e}_{p}+{}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} \quad (5\text{-}93)$$

$${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}\left(\zeta_{p,k}\right)=\frac{1}{\zeta_{a,k}-\zeta_{p,k}}\int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}}{}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta \quad (5\text{-}94)$$

同様に $\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}$ は、次式のようになる。

$$\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}=\frac{1}{1-d_{p,k}}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}=\frac{1}{1-d_{p,k}}\left\{2G\,{}^{cur}\boldsymbol{e}'-\frac{2G\left(\zeta_{a,k}-\zeta_{b,k}\right)}{1-D_{p,k}d_{p,k}}{}^{cur}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}+{}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}\right\} \quad (5\text{-}95)$$

続いて、巨視的な降伏関数を導出するために近似式を導入する。5.2 節の近似式(5-37)と同様に塑性領域 $\left(\zeta_{p,k}\le\zeta\le\zeta_{a,k}\right)$ における微視的応力の方向に対して次の近似を導入する。

$$\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)\approx\left(\frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}}{\sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}:\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}}}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{y}(\zeta) \quad (5\text{-}96)$$

式(5-96)は、式(5-37)に比べて近似を適用している領域が小さいことから微視的応力の方向に対してより精度の高い近似が可能であることが理解される。近似式(5-96)の両辺を塑性領域 $\left(\zeta_{p,k}\le\zeta\le\zeta_{a,k}\right)$ で積分すると、巨視的な降伏条件式が次式のように導かれる。

$$\Phi_{p,k}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}:\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}}-s_{y,k}=0 \quad (5\text{-}97a)$$

式(5-89),(5-92),(5-97a)より投影応力の降伏関数は次式のように導かれる。

$$\bar{\Phi}_{,k}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}:\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}}-\bar{s}_{y,k}=0 \quad (5\text{-}97b)$$

さらに、巨視的な塑性流れ則の導出のために 5.2 節の近似式(5-40)と同様に領域 k の塑性散逸項に対して以下の近似式を導入する。

$$\Lambda_{,k}=\int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)d\zeta\approx\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k}\ge 0 \quad (5\text{-}98)$$

式(5-97)および(5-98)よりラグランジアン $L_{,k}$ を次式のように定義する。

$$L_{,k} = -\Lambda_{,k} + \Phi_{p,k}\dot{g}_{,k} = -\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} : \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} : \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}} - s_{y,k}\right)\dot{g}_{,k} \tag{5-99}$$

ここに、$\dot{g}_{,k}$ はラグランジュの未定定数である。式(5-99)を $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}$ で偏微分し、最大塑性散逸の原理を用いると次式が導かれる。

$$\frac{\partial L_{,k}}{\partial \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}} = -\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k} + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}}{\sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} : \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}}}\dot{g}_{,k} = 0 \tag{5-100}$$

従って、流れ則が次式のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}}{\sqrt{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} : \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}}}\dot{g}_{,k} = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}}{s_{y,k}}\dot{g}_{,k} = \frac{3}{2}\frac{\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}}{\bar{s}_{y,k}}\dot{g}_{,k} \tag{5-101}$$

式(5-101)より $g_{,k}$ は領域 k における巨視的塑性進展パラメータであることが理解される。以上が区分的に分割された巨視的諸量である。なお、本項の修正方法に対する妥当性の検証は次項にて検討を行う。

５.４.４　修正方法の妥当性検証のための数値解析

5.4.2 項および 5.4.3 項で提案した巨視的モデルの修正方法の妥当性を検証するために数値解析をおこなう。なお、修正方法を区別するために 5.4.2 項のものを修正方法 A、5.4.3 項のものを修正方法 B とそれぞれ区別する。数値解析においてひずみ経路および材料特性は Case3 と同一のものを用いる。

＜修正方法 A＞

数値解析アルゴリズムについては、5.3.1 項と同一であるため割愛する。なお、式(5-79)(5-81)にて定義した係数 n_1, n_2 はそれぞれ 6.0 および 5.0 とする。Fig.5-20 は、サブレイヤーモデルと巨視的モデルの解析結果の比較であり、(a)は応力空間上、(b),(c)は各成分における偏差応力ひずみ関係、(d)は ζ_p —ステップ関係である。また、Fig.5-21 は、ステップ毎の誤差を示している。これらより、修正方法 A を適用した巨視的モデルは修正前のものに比べ、改善されていることが理解される。従って、修正方法 A の妥当性が検証されたと言える。

<修正方法 B＞

数値解析アルゴリズムについては、5.3.1 項とほぼ同一であるため領域 k における塑性進展パラメ

ータの増分のみを記す。

$$\Delta g_{,k} = \frac{\left(1-{}^{t+\Delta t}D_{p,k}\,{}^{t+\Delta t}d_{p,k}\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}d_{p,k}\right)_{trial}\overline{\Phi}_{,k}}{3G\left(\zeta_{a,k}-\zeta_{b,k}\right)} \tag{5-102}$$

式(5-102)は式(5-66)に対応していることを参照されたい。また、領域 k における接線係数テンソル $\boldsymbol{K}^{ep}{}_{,k}$ についても 5.3.2 項と同様に以下のように求められる。

$$\boldsymbol{K}^{ep}{}_{,k} = \frac{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}_{,k}}{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}} = \theta_1\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{3}\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}\right)+\theta_2\,{}^{trial}\boldsymbol{n}_{,k}\otimes{}^{trial}\boldsymbol{n}_{,k}+\hat{K}\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} \tag{5-103}$$

$$\theta_1 = 2G-\frac{6G^2\Delta g_{,k}}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_{p,k}\right){}^{trial}s_{eq,k}}, \quad \theta_2 = -2G\frac{\zeta_{a,k}-\zeta_{p,k}}{\zeta_{a,k}-\zeta_{b,k}}+\frac{6G^2\Delta g_{,k}}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_{p,k}\right){}^{trial}s_{eq,k}} \tag{5-104),(5-105}$$

$${}^{trial}\boldsymbol{n}_{,k} = \frac{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'_{,k}}{\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'_{,k}:{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'_{,k}}}, \quad {}^{trial}s_{eq,k} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'_{,k}:{}^{trial}\overline{\boldsymbol{s}}'_{,k}} \tag{5-106),(5-107}$$

次に、数値解析結果を示す。ここで、分割数を 2 とし、$\zeta_{a1}=0.5$,$\zeta_{b1}=\zeta_{a2}=-0.305, \zeta_{b2}=-0.5$ とする。$\zeta_{b1}=\zeta_{a2}$ の値は、$\sigma_y(\zeta_{b1})=\{\sigma_y(-1/2)-\sigma_y(1/2)\}/2$ となるように設定している。これは、微視的応力の方向の乱れが、微視的降伏応力の差により生じることから、この差を小さくする分割となるように意図している。Fig.5-20 は、両モデルの解析結果の比較であり、(a)は応力空間上、(b),(c)は各成分における偏差応力ひずみ関係、(d)は ζ_p —ステップ関係である。また、Fig.5-21 は、ステップ毎の誤差を示している。これらより、修正方法 B を適用した巨視的モデルは修正前のものに比べ、大きく改善されていることが理解される。従って、修正方法 B の妥当性が検証されたと言える。また、分割数を最低である 2 としてもその分割位置を適切に設定することにより誤差を著しく低減可能であることを示した。

本項では、二つの修正方法に対する妥当性を数値解析を通して検証した。その結果、両手法ともサブレイヤーモデルとの差異が改善されることが明らかとなった。特に、修正方法 B は、A に比べ、著しい改善効果が見られた。従って、巨視的モデルの修正方法の妥当性が検証されたと言える。しかしながら、修正方法 A においては係数 n_1, n_2 の決定が試行錯誤的に行われており、また、修正方法 B においては分割数および分割位置が試行錯誤的に決定されている。これらの合理的かつ最適な決定方法については、今後の課題の一つとする。

５.５　Bounding surface モデルと巨視的モデルの類似性

Bounding surface モデルは、計算負荷が小さいという利点から多くの研究者によって様々な定式化が提案されている。例えば、藤本(1985),中込(2002)のモデルは、Loading surface および Bounding surface の他に、中間曲面を想定することによって一軸応力状態に対して実験結果と良い対応を示している。また、田中(1991)、水野(1993,1994)のモデルでは、Masing のルールを満足させるために、仮想境界線を導入しており、一軸および二軸応力状態に対する実験結果との比較し、良い対応を示している。さらに、吉田(2002)は、応力空間上に非硬化領域の概念を想定し、これを Bounding surface モデルに適用することによりスプリングバック解析に対して高い再現性を有している。一方、Bounding surface モデルと他の力学モデルとの関連性については既にいくつかの研究が報告されている。Krieg(1975)は Bounding surface モデルにおいて Loading surface が塑性化の進展によって Bounding surface に近づく過程が Multi-surface モデルにおける各曲面の逐次的な降伏に対応しているとし、両モデルの直観的な類似性について述べている。また、Chaboche(1983(a),(b))は Mroz が提案した Loading surface の変化率が Armstrong-Fredrick の移動硬化則と類似性を有していることを指摘している。さらに、元結(2003,2007)、白(2003,2004,2005)、鵜飼(2003)により一軸応力状態に対してサブレイヤーモデルを巨視的に評価したモデル(巨視的モデル)の変化率が Bounding surface モデルの変化率と類似性を有していることが確認されている。しかしながら、Bounding surface モデルと他の力学モデルの関連性に関する研究は、まだ十分とは言えない。そこで、本章では、Bounding surface モデルと巨視的モデルの類似性について検討する。

５.５.１　Bounding surface モデルの概要と分類

Bounding surface モデルとは、Fig.5-22 に示すように応力空間上に Loading surface および Bounding surface といった曲面を想定する力学モデルである。Bounding surface モデルでは、Loading surface 上に応力が常に存在すると考える。また、Loading surface の中心から応力へのテンソルと平行に原点から Bounding surface に投影した応力を投影応力として定義している。Bounding surface モデルは Loading surface モデルの半径の変化という観点から、

(1)　半径が塑性化に応じて変化する Radial mapping モデル

(2)　半径が常に一定である Two surface モデル

に分類することができる。5 章で誘導した巨視的モデルは、Loading surface の半径が変化することから Radial mapping モデルと類似性を有していると言える。また、Bounding surface モデルでは、Loading

surface の中心の変化率が以下のように多数提案されている(Fig.5-23 参照)。

(3) Loading surface の直交方向即ち塑性ひずみ増分の方向（Prager's kinematic rule）

(4) 応力テンソルの増分方向（Phillip's kinematic rule）

(5) 投影応力テンソルから応力テンソルを除して表されるテンソルの方向への増分（Mroz's kinematic rule）

(5)に関しては、Chaboche(1983(a),(b))により既に Armstrong-Frederik の移動硬化則と類似性を有していることが報告されている。本章では、(3),(4)の変化率を持つ Bounding surface モデルと巨視的モデルの類似性を検討する。

５.５.２　巨視的モデルの投影応力方向の再定義

5.2 節で定式化した硬化則を考慮しない巨視的モデルにおいて投影応力の方向を再定義することにより多種の巨視的モデルの提案を行う。なお、微視的変数は 5.2.1 項において定義した変数を用い、また、巨視的変数 $\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e_p}, s_y, \bar{s}_y, d_p, D_p, \boldsymbol{s}', \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ についても 5.2.2,5.2.3 項で定義した変数を用いる。5.2 節において投影応力は $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ と同一の方向とし $\bar{s}_y$ で規定される曲面に投影されるものと定義した。しかしながら、投影応力の方向は任意の方向に決定可能と考えられる。ここで、投影応力の方向を係数 β_1, β_2 を用いて次式のように再定義する。

$$\bar{\boldsymbol{s}}' = \frac{\bar{s}_y}{s_y}\left(\beta_1 \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} + \beta_2 \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} {}^{cur}\boldsymbol{\sigma}' d\zeta\right) = \frac{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}}{1-d_p} \tag{5-108}$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}} = \left(\beta_1 \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} + \beta_2 \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} 2G^{cur}\boldsymbol{e}' d\zeta\right) = \left(\frac{\beta_1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta) d\zeta + \beta_2 \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} 2G^{cur}\boldsymbol{e}' d\zeta\right) \tag{5-109}$$

ここに、$\beta_1 = 1$ および $\beta_2 = 0$ ならば、5.2 節で提案した巨視的モデルに一致する。また、$\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$ の第二項は ${}^{cur}\boldsymbol{e}'$ に関する項となっている。これは、非処女載荷時においても ${}^{cur}\boldsymbol{e}'$ が除荷後、緩やかに増加することから、$\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$ の急激な変化を抑制し、Bounding surface 外に応力が出ることを防ぐためである。Bounding surface モデルにおいて曲面外の応力の存在条件については McDowell(1989)により提案されているが、本章では、5.5.6 節の数値解析結果を通して示す。また、巨視的な変数は全て、${}^{cur}\dot{\boldsymbol{e}}' = \dot{\boldsymbol{e}}'$ および $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$ を用いて表現されることから、式(5-109)のように $\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$ を定義し、${}^{cur}\boldsymbol{e}'$ の項および係数 β_1, β_2 を新たに設けることによって、5.5.5 項に示すように巨視的モデルにおいて多種の変化率を表現可能となる。

５.５.３　巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則の再定義

5.2 節で述べたように、塑性領域における微視的応力の大きさは既知であるが、方向は不明であるため、近似式が必要になる。ここでは、式(5-37)の代わりに次のような近似式の導入を行う。

$$\left\{\beta_1\boldsymbol{\sigma}' + 2G\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2{}^{cur}\boldsymbol{e}'\right\} \approx \frac{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}:\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}}}\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \tag{5-110}$$

式(5-110)より微視的な降伏条件式は次式のように導出される。

$$\phi(\zeta) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left\{\beta_1\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) + 2G\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2{}^{cur}\boldsymbol{e}'\right\}:\left\{\beta_1\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) + 2G\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2{}^{cur}\boldsymbol{e}'\right\}} - \sigma_y = 0 \tag{5-111}$$

また、式(5-111)の両辺を塑性領域で積分すると、巨視的降伏条件式が次式のように導かれる。

$$\Phi_p = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}:\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}} - s_y = 0 \tag{5-112}$$

式(5-112)を式(5-50)と比べると、$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ が $\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$ に変化しただけであることが分かる。従って、式(5-112)は Loading surface を表しており、Loading surface の中心の応力 $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}}$ は式(5-48)と同様に次式で定義されることが分かる。

$$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{s}' - \tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}} \tag{5-113}$$

また、式(5-108),(5-113)および $s_y = (1-d_p)\bar{s}_y$ を用いると、投影応力による巨視的降伏条件式が、次式のように導出されることが分かる。

$$\bar{\Phi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\bar{\boldsymbol{s}}':\bar{\boldsymbol{s}}'} - \bar{s}_y = 0 \tag{5-114}$$

従って、式(5-112)および式(5-114)が新たな巨視的降伏条件式であることが理解される。また、式(5-111)の微視的降伏条件式を用いて式(5-112),(5-114)の巨視的降伏条件式が導出されたことから本章での巨視的モデルが Masing のルールを満足することを示唆している。

続いて、巨視的な塑性流れ則について述べる。はじめに、式(5-40)と同様に塑性散逸項に対して以下の近似式を導入する。

$$\Lambda = \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}':\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}d\zeta \approx \tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} \geq 0 \tag{5-115}$$

式(5-115)は式(5-108)を用いて次式のように表すことができる。

$$\Lambda = \bar{\boldsymbol{s}}' : \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} = \left(1 - d_p\right)\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} \tag{5-116),(5-117}$$

続いて、最大塑性散逸の原理を導入して、塑性流れ則を誘導する。式(5-112),(5-114),(5-115),(5-116)を用いると、ラグランジアン L は次のようになる。

$$L = -\Lambda + \Phi_p \dot{g} = -\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}} : \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}} : \tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}} - s_y\right)\dot{g} \tag{5-118a}$$

$$L = -\Lambda + \overline{\Phi}\dot{g} \cong -\bar{\boldsymbol{s}}' : \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\bar{\boldsymbol{s}}' : \bar{\boldsymbol{s}}'} - \bar{s}_y\right)\dot{\bar{g}} \tag{5-118b}$$

ここに、$\dot{g}, \dot{\bar{g}}$ はラグランジュの未定定数である。式(5-118a,b)をそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$ および $\bar{\boldsymbol{s}}'$ で偏微分し、最大塑性散逸の原理を用いると次式が導かれる。

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}} = -\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}} : \tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}}}\dot{g} = 0 \tag{5-119a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{s}}'} = -\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\bar{\boldsymbol{s}}'}{\sqrt{\bar{\boldsymbol{s}}' : \bar{\boldsymbol{s}}'}}\dot{\bar{g}} = 0 \tag{5-119b}$$

式(5-119)より、流れ則が次式のように導かれる。

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}} : \tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}}}\dot{g} = \frac{3}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}}{s_y}\dot{g} \tag{5-120a}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\bar{\boldsymbol{s}}'}{\sqrt{\bar{\boldsymbol{s}}' : \bar{\boldsymbol{s}}'}}\dot{\bar{g}} = \frac{3}{2}\frac{\bar{\boldsymbol{s}}'}{\bar{s}_y}\dot{\bar{g}} \tag{5-120b}$$

従って、式(5-120)が新たな塑性流れ則である。続いて、過去の履歴を考慮し、巨視的変数を表す。過去の履歴については、5.2.4 項において詳述しているので参照されたい。$\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$ は、過去の履歴を考慮すると、次式のように表される。

$$\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}} = \beta_1 \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} + \beta_2 \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} 2G^{cur}\boldsymbol{e}' d\zeta = \beta_1\left(2G^{cur}\boldsymbol{e}' - \frac{2G^{cur}\boldsymbol{e}_p}{\frac{1}{2} - \zeta_p} + {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}\right) + \beta_2 2G\left(\frac{1}{2} - \zeta_p\right)^{cur}\boldsymbol{e}' \tag{5-121}$$

$${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) d\zeta \tag{5-122}$$

同様に、$\bar{\boldsymbol{s}}'$ は次式のようになる。

$$\bar{\boldsymbol{s}}' = \frac{\tilde{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}}{1-d_p} = \frac{1}{1-d_p}\left\{\beta_1\left(2G^{cur}\boldsymbol{e}' - \frac{2G^{cur}\boldsymbol{e}_p}{\frac{1}{2}-\zeta_p} + {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}\right) + \beta_2 2G\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)^{cur}\boldsymbol{e}'\right\} \tag{5-123}$$

５.５.４　巨視的変数の変化率

各巨視的変数の変化率を求める。はじめに、巨視的応力 $\boldsymbol{s}'$ の変化率は次式のように表される。

$$\dot{\boldsymbol{s}}' = 2G\left(\dot{\boldsymbol{e}}' - \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}\right) \tag{5-124}$$

式(5-121)より $\tilde{\dot{\boldsymbol{s}}}'_{\boldsymbol{p}}$ の変化率は次式のようになる。

$$\tilde{\dot{\boldsymbol{s}}}'_{\boldsymbol{p}} = \frac{\beta_1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} 2G\left(\dot{\boldsymbol{e}}' - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right)d\zeta + \beta_2\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} 2G\dot{\boldsymbol{e}}'d\zeta = 2G\left\{\beta_1 + \left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2\right\}\dot{\boldsymbol{e}}' - \frac{2G\beta_1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} \tag{5-125}$$

ここに、${}^{cur}\dot{\boldsymbol{e}}' = \dot{\boldsymbol{e}}'$ および $\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}d\zeta = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}d\zeta = \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$ を用いている。$\bar{\boldsymbol{s}}'$ の変化率は式(5-123)より次のようになる。

$$\dot{\bar{\boldsymbol{s}}}' = \frac{2G}{1-d_p}\left\{\left(\beta_1 + \left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2\right)\dot{\boldsymbol{e}}' - \frac{\beta_1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}\right\} \tag{5-126}$$

また、Loading surface の中心を表す $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}}$ の変化率は次のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} = \dot{\boldsymbol{s}}' - \tilde{\dot{\boldsymbol{s}}}'_{\boldsymbol{p}} = 2G\left\{1-\beta_1-\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2\right\}\dot{\boldsymbol{e}} + 2G\left(-1+\frac{\beta_1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} \tag{5-127}$$

式(5-127)より $\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}}$ は係数 β_1, β_2 により様々な変化率を取ることが分かる。次節にて係数 β_1, β_2 を変化させた場合の $\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}}$ について考察を行う。

５.５.５　**Loading surface の中心の変化率に関する考察**

ここでは、係数 β_1, β_2 に対する考察を行う。

＜ $\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$ の場合＞

はじめに、Dafalias(1976)により提案された Loading surface の中心の変化率が塑性ひずみ増分と比

例的である場合(Prager's kinematic rule)、即ち $\dot{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{a}}' \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$ の場合を想定する。このとき、$\dot{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{a}}'$ は $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$ に対する比例定数を $k(k \neq 0)$ とすると次式のように表すことができる。

$$\dot{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{a}}' = k\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} \tag{5-128}$$

式(5-127)と式(5-128)において係数を比較すると次式が導かれる。

$$1-\beta_1-\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2=0\,,\quad 2G\left(-1+\frac{\beta_1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)=k \tag{5-129),(5-130}$$

式(5-129),(5-130)より次式が導かれる。

$$\beta_2=\frac{1-\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\left(\frac{k}{2G}+1\right)}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\,,\quad \beta_1=\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\left(\frac{k}{2G}+1\right) \tag{5-131),(5-132}$$

式(5-131),(5-132)より、$k=2G\left(\frac{1}{1/2-\zeta_p}-1\right)$ とすると、$\beta_1=1\,,\beta_2=0$ となり 5.2 節で提案した巨視的モデルと一致する。従って、5.2 節の巨視的モデルは Prager 型の Bounding surface モデルと類似性を有していることが分かる。

＜ $\dot{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{a}}' \propto \dot{\boldsymbol{s}}'$ の場合＞

次に、Dafalias(1976)により提案された Loading surface の中心テンソルの変化率が応力増分と比例的(Phillip's kinematic rule)である、即ち $\dot{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{a}}' \propto \dot{\boldsymbol{s}}'$ の場合を想定する。このとき、$\dot{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{a}}'$ は $\dot{\boldsymbol{s}}'$ に対する比例定数を $k(k \neq 0)$ とすると次式のように表すことができる。

$$\dot{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{a}}' = k\dot{\boldsymbol{s}}' = 2Gk\left(\dot{\boldsymbol{e}}' - \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}\right) \tag{5-133}$$

式(5-127)と式(5-133)において係数を比較すると次式が導かれる。

$$1-\beta_1-\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2=2Gk\,,\quad -1+\frac{\beta_1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}=-2Gk \tag{5-134),(5-135}$$

従って、式(5-134),(5-135)より次式が導出される。

$$\beta_1=\frac{\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2}{\frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}-1}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)^2\beta_2}{\frac{1}{2}+\zeta_p} \tag{5-136}$$

ここで、$\beta_2 = \dfrac{\frac{1}{2}+\zeta_p}{\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)^2}$ とすると、$\beta_1 = 1$ となる。また、$k = \dfrac{1}{2G}\left(1-\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)$ である。

＜$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$ の場合＞($k \neq 0$)

続いて、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}}$ が $\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$ と比例的である場合を想定する。このとき、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}}$ は $\dot{\boldsymbol{s}}'$ に対する比例定数を $k(k \neq 0)$ とすると次式のように表すことができる。

$$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} = k\dot{\boldsymbol{s}}'_p = 2Gk\dot{\boldsymbol{e}}' - \frac{2G}{\frac{1}{2}-\zeta_p}k\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} \tag{5-137}$$

式(5-127)と式(5-137)において係数を比較すると次式が導かれる。

$$1-\beta_1-\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2 = 2Gk, \qquad -1+\frac{\beta_1}{\frac{1}{2}-\zeta_p} = -\frac{2Gk}{\frac{1}{2}-\zeta_p} \tag{5-138),(5-139}$$

式(5-138),(5-139)を整理すると、

$$\beta_2 = -1+\frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p} \tag{5-140}$$

となり、β_1 を恣意的な値とすることができる。従って、$\beta_1 = 1$ とすると、$k = -\dfrac{1}{2G}\left(\dfrac{1}{2}+\zeta_p\right)$ となる。

＜$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\bar{\boldsymbol{s}}}'$ の場合＞

$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}}$ が $\dot{\bar{\boldsymbol{s}}}'$ と比例的である場合を想定する。このとき、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}}$ は $\dot{\boldsymbol{s}}'$ に対する比例定数を $k(k \neq 0)$ とすると次式のように表すことができる。

$$\dot{\bar{\boldsymbol{s}}}' = \frac{2G}{1-d_p}\left\{\left(\beta_1+\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2\right)\dot{\boldsymbol{e}}' - \frac{\alpha}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}\right\} \tag{5-141}$$

式(5-127)と式(5-142)において係数を比較すると次式が導かれる

$$1-\beta_1-\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2 = \frac{k}{1-d_p}\left(\beta_1+\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)\beta_2\right), \qquad -1+\frac{\beta_1}{\frac{1}{2}-\zeta_p} = -\frac{\beta_1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\frac{k}{1-d_p} \tag{5-142),(5-143}$$

式(5-142),(5-143)より

$$\beta_2 = \left(\frac{1}{2}+\zeta_p\right)\beta_1 \tag{5-144}$$

従って、$\beta_1 = 1$とすると、$\beta_2 = \dfrac{1}{2} + \zeta_p$となる。

最後に、Table5-2 に係数毎の各巨視的モデルをまとめて記す。

５.５.６　数値解析例

ここでは、本節で提案した巨視的モデルの数値解析例を示す。なお、数値解析アルゴリズムについては、5.3.1 項で示したものとほぼ同一となるため割愛する。ひずみ履歴、降伏応力分布および材料特性は、5.3.2 項の Case1 と同一のものを用いる。Fig.5-24 は、サブレイヤーモデルおよび係数毎の巨視的モデルにおける応力の挙動を偏差応力空間において示したものである。これを見ると、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$型、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{s}}'$型、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\bar{\boldsymbol{s}}}'$型巨視的モデルは 5 章で提案した$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$型巨視的モデルに比べて、応力経路が原点寄りを通る傾向がある。特に、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{s}}'$型巨視的モデルは、ほぼ直線的に動くことが分かる。Fig.5-25 は、式(5-78)で表される誤差とステップの関係を示したものであり、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$型巨視的モデル以外は処女載荷時から誤差が生じていることが分かる。近似式(5-110)による両モデルの差異は、処女載荷時には生じないので、近似式(5-115)が原因であると考えられる。Fig.5-26 は、サブレイヤーモデルにおいて式(5-115)の左辺(点線)および右辺の結果を示したものであり、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$型巨視的モデルでは処女載荷時には一致し、非処女載荷時にも両辺の差異は小さいことが理解される。一方、他の巨視的モデルは、処女載荷時から式(5-115)の両辺に大きな差異が生じていることから、これが、前述した処女載荷時における$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$型以外に生じている誤差の原因であると考えられる。Fig.5-25 を再び見ると、ステップ数によっては、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{s}}'$型巨視的モデルの誤差が$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$型巨視的モデルより小さい箇所も存在するが、これは、誤差が誤差を偶然打ち消している状況であり、全体的な挙動を見ると、$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$型巨視的モデルが最もサブレイヤーモデルと近い値を示しているといえるだろう。また、2 章および 3 章においてサブレイヤーモデルが金属系材料の実現象と良い対応を示していることから$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$型巨視的モデルが金属系材料に対しては最も有効な巨視的モデルであると言える。しかしながら、Bounding surface モデルがコンクリート(Voyiadjis(1994))や地盤(Dafalias(1986))の材料構成則に用いられていることを考えれば、ひび割れを示すための損傷変数等を考慮することにより他の巨視的モデルが金属系材料以外の材料構成則として適用可能であるとも考えられる。これらの材料に対する適用性の検証については今後の検討課題の一つとする。

５.６　まとめ

多軸応力状態において無限個の完全弾塑性体から成るレイヤーを持つサブレイヤーモデルを巨視的に評価することによって、サブレイヤーモデルの欠点である多大な計算負荷を克服可能な巨視的モデルを構築した。得られた結論を以下に示す。

(1)　硬化則を考慮していない巨視的モデルの定式化を行った。その中で、巨視的モデルの降伏条件式および塑性流れ則を提案する際、直観的に有効と考えられる 2 つの近似式を用いた。また、巨視的モデルの定式化の際、熱力学の第二法則と最大塑性散逸の原理のみを用いており、巨視的モデルの理論的完成度の高さを示した。

(2)　実用性という観点から有限要素法への実装を考慮し、巨視的モデルにおいて増分形に整合性がある接線係数テンソルの誘導を行った。

(3)　近似式の妥当性を検証するためにサブレイヤーモデルと巨視的モデルの数値解析結果の比較を行った。その中で、極端なひずみの変化が生じる場合は、両モデルにおいて大きな差異が生じることが明らかとなった。

(4)　(3)で明らかとなった両モデルの差異の原因を詳細に検討し、修正方法の提案を行った。その中で、過去の微視的応力の方向近似に対する修正方法と区分的な巨視的評価による修正方法の提案を行った。これらの修正方法は、数値解析を実施することにより妥当性の検証を行った。しかしながら、各修正方法には未だ改良の余地があるためそれらについては今後の課題の一つとする。

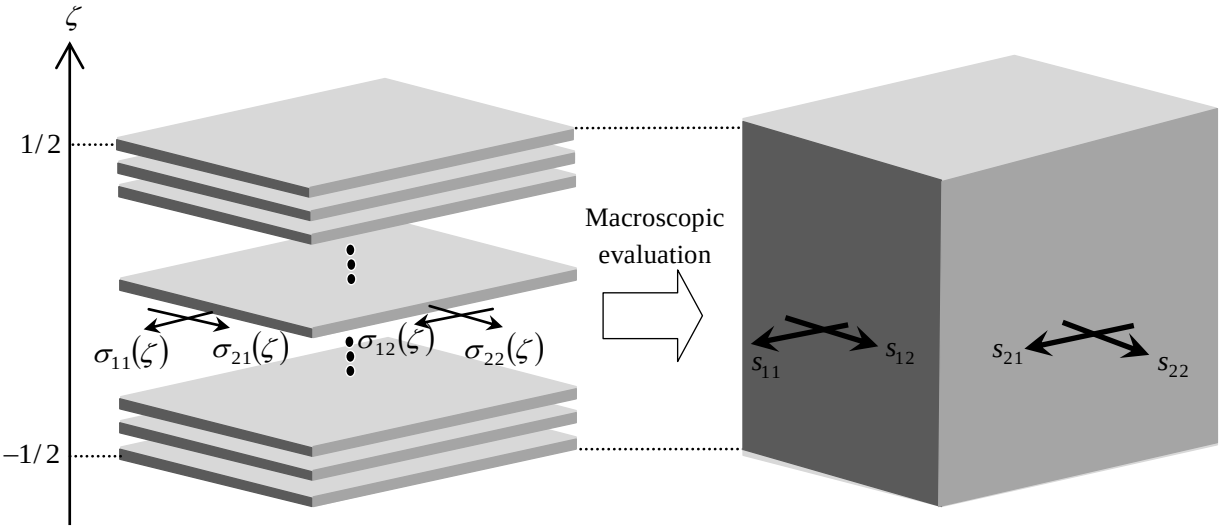
(5)　巨視的モデルと Bounding surface モデルの類似性を詳細に検討するために巨視的モデルにおける投影応力の方向を二つの係数を用いて再定義した。

(6)　巨視的モデルの各変化率を導出し、各種 Bounding surface モデルとの類似性の検討を行った。その結果、巨視的モデルがいくつかの Bounding surface model と類似性を有していることを明らかにした

(7)　(5)で提案した巨視的モデルの数値解析例を示し、係数毎に得られた巨視的モデルの結果をそれぞれ比較し、実現象の再現という観点から、(1)で提案した巨視的モデルが金属材料に対しては、最も有用であることを確認した。しかしながら、他の巨視的モデルについても、金属以外の材料構成則に対して有用である可能性があるため、今後の課題の一つとする。

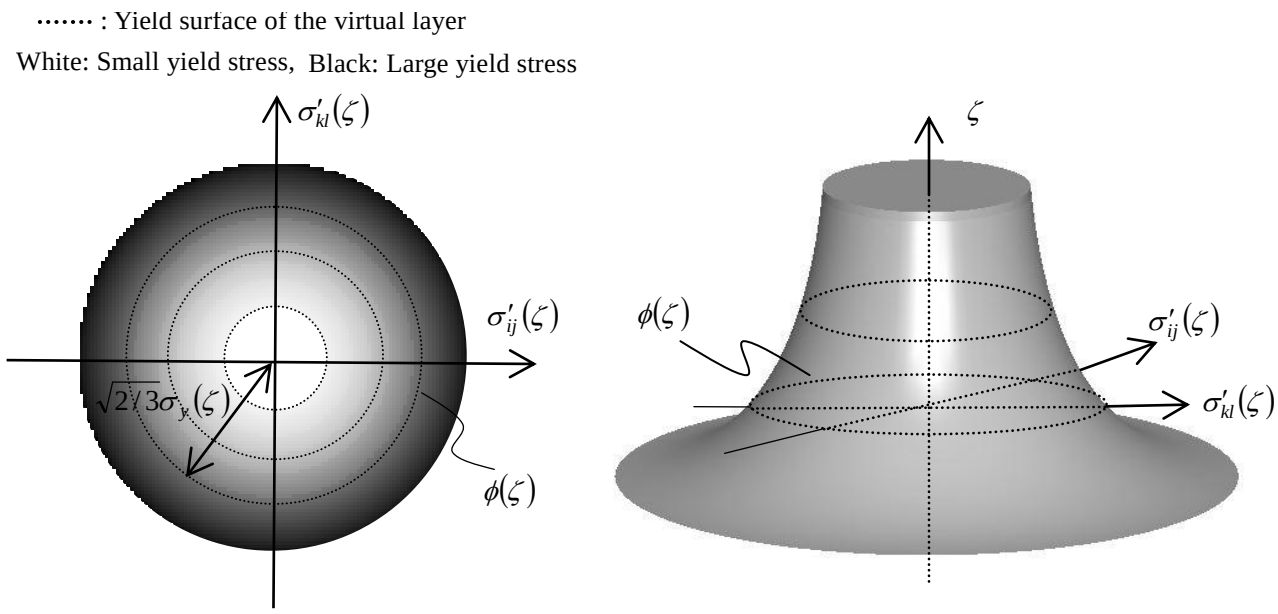
Chapter5

Figures and Tables



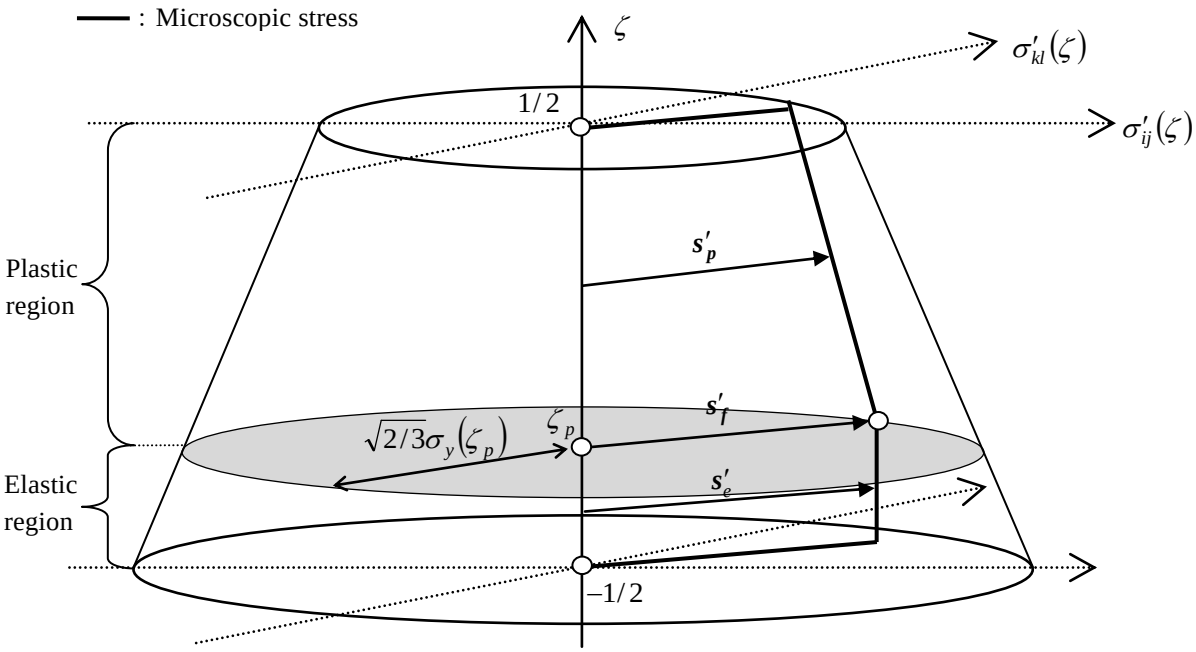
(a) Sub-layer (Microscopic) model (b) Macroscopic model

Fig.5-1 Conceptual diagram of the microscopic model and the macroscopic model

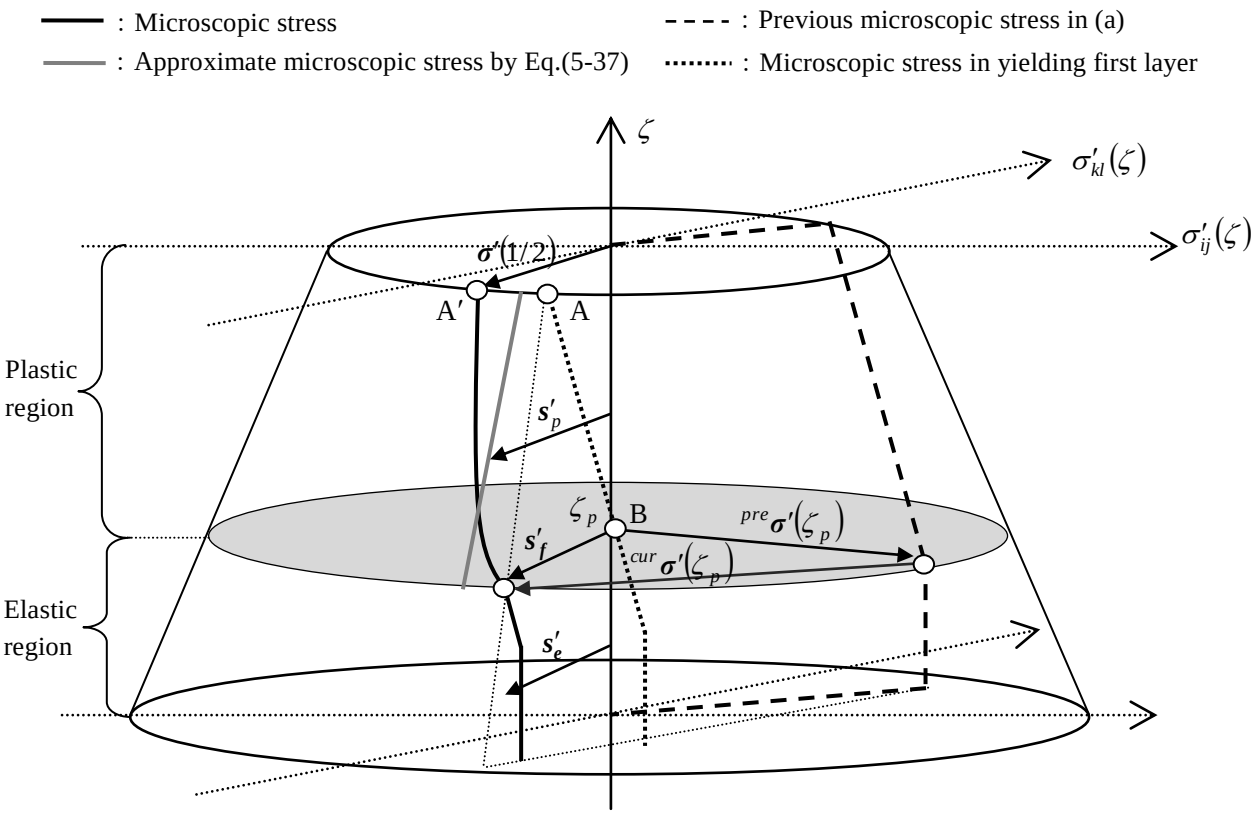


(a) Yield surface of each layer for the deviatoric stress field (b) Allowable stress space for the virtual coordinate

Fig.5-2 Conceptual diagram of the microscopic model for the stress field



(a) Virgin loading



(b)Non virgin loading

Fig.5-3 Allowable stress space of the microscopic model for the virtual coordinate

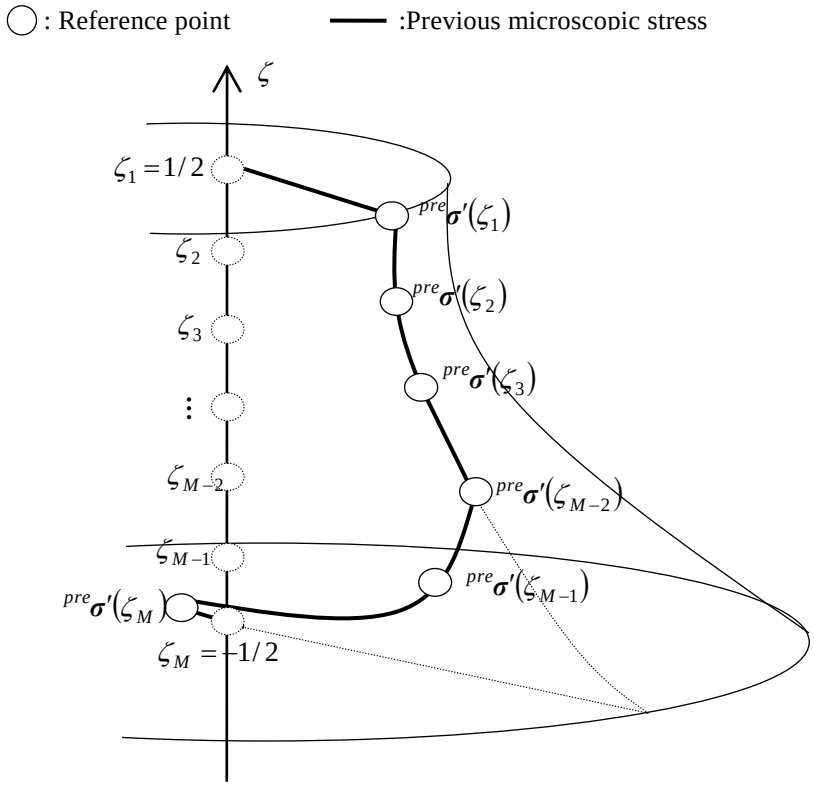


Fig.5-4 Reference points for the virtual coordinate

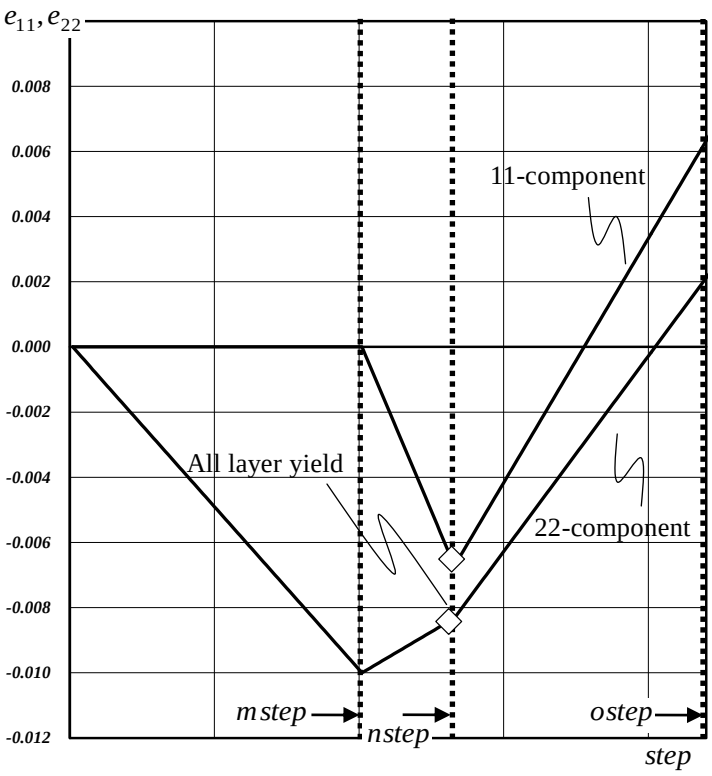
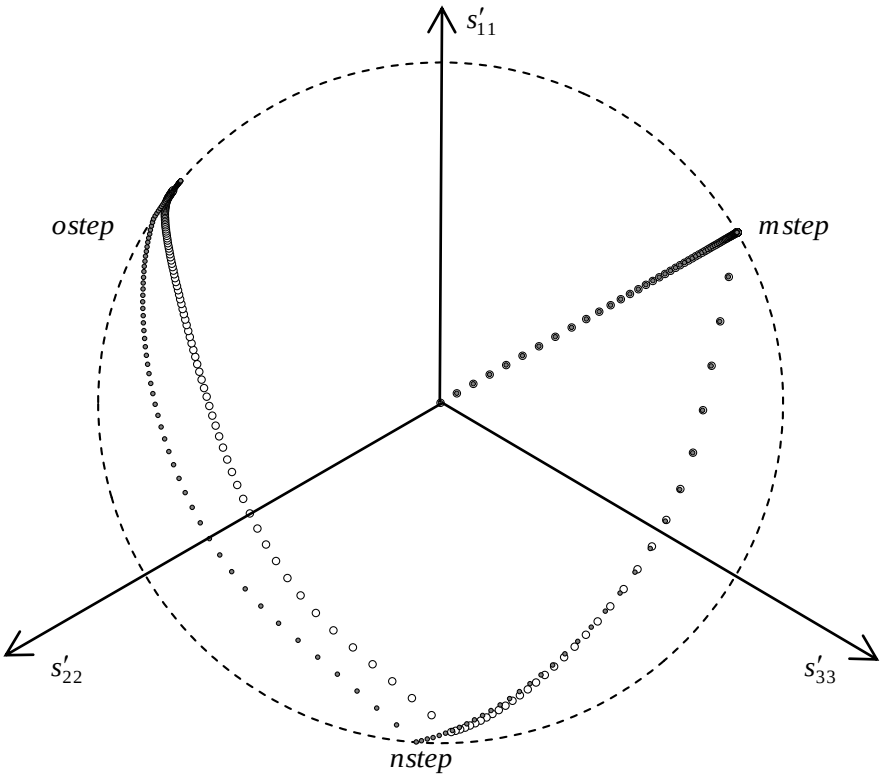


Table5-1 Material properties

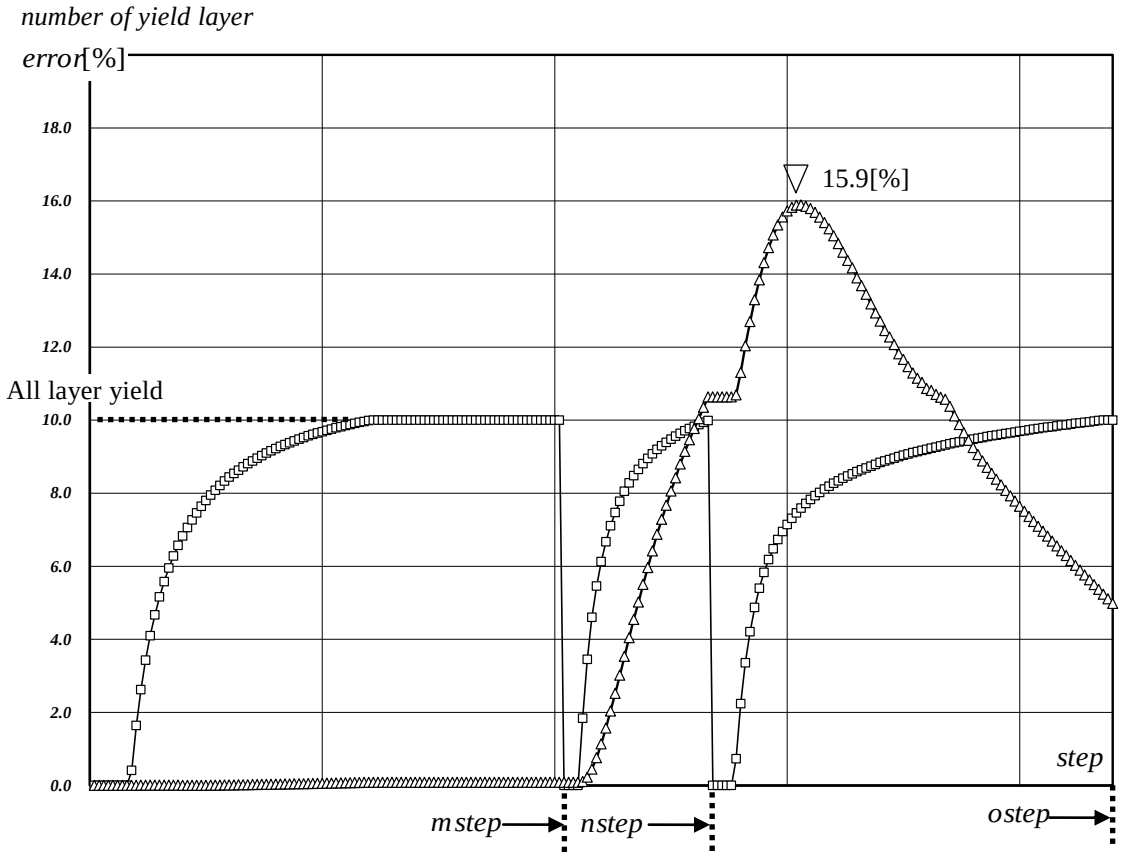
E[N/mm^2]	205000
ν	0.3
A	0.65
B[N/mm^2]	140.0
C[N/mm^2]	0.0

Fig.5-5 Strain path (Case1)



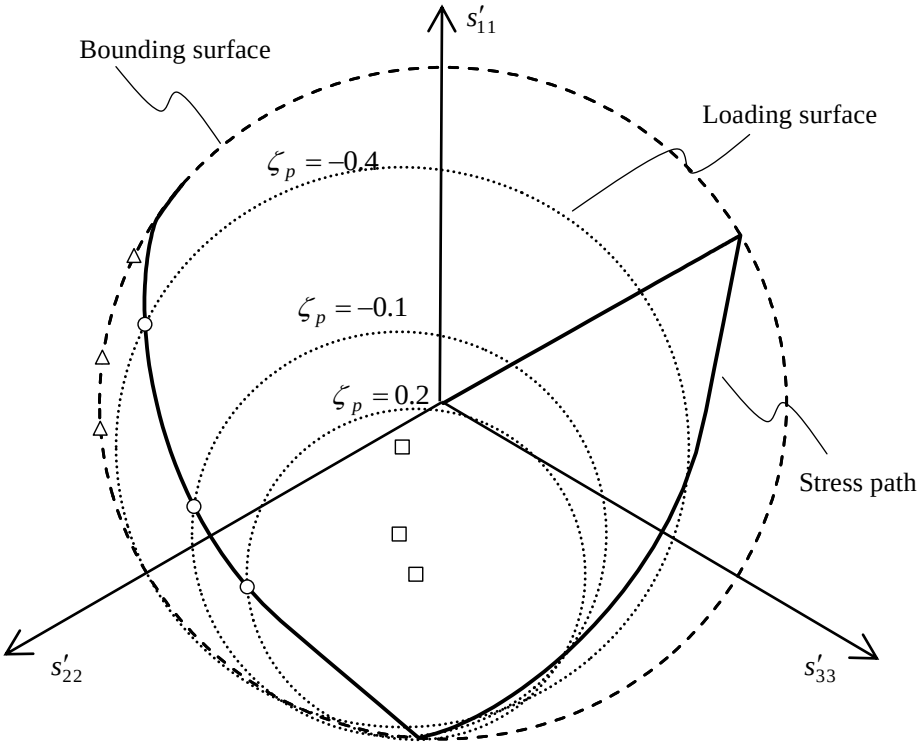
(White: Sub-layer model, Gray: Macroscopic model)

Fig.5-6 Comparison between the sub-layer model and the macroscopic model (Case1)



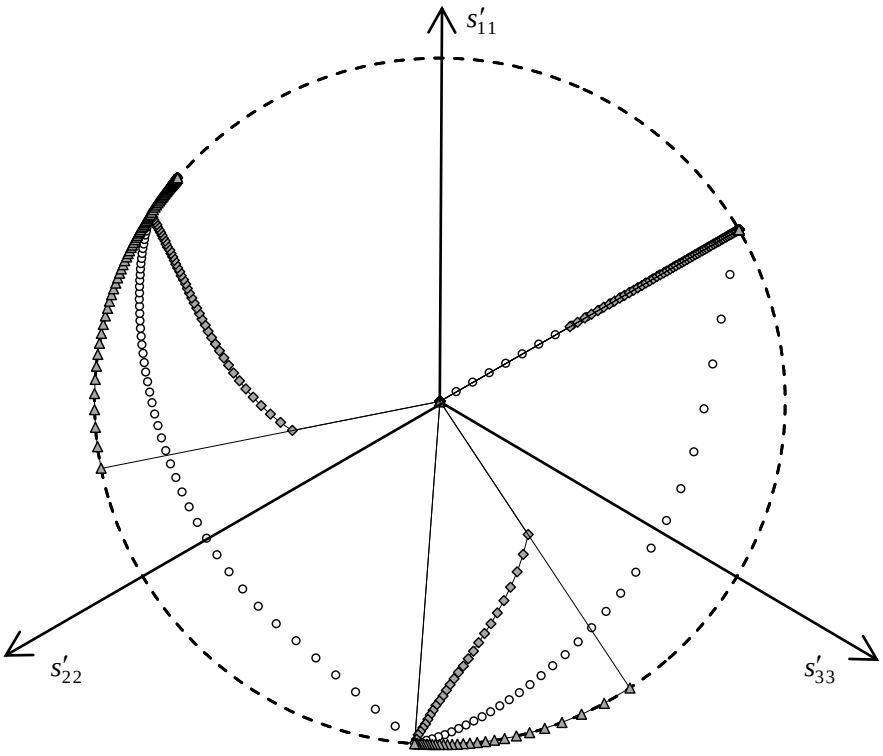
(Triangle: Error, Square: Number of yield layer)

Fig.5-7 Error, number of yield layer-step relation (Case1)



(○ : $\boldsymbol{s}'$, △ : $\bar{\boldsymbol{s}}'$, □ : $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{a}}$)

Fig.5-8 Behavior of the loading surface from *nstep* to *ostep* for the deviatoric stress field (Case1)



(○ : $\boldsymbol{s}'$, △ : $\bar{\boldsymbol{s}}'$, ◇ : $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$)

Fig.5-9 Macroscopic variables for the deviatoric stress field (Case1)

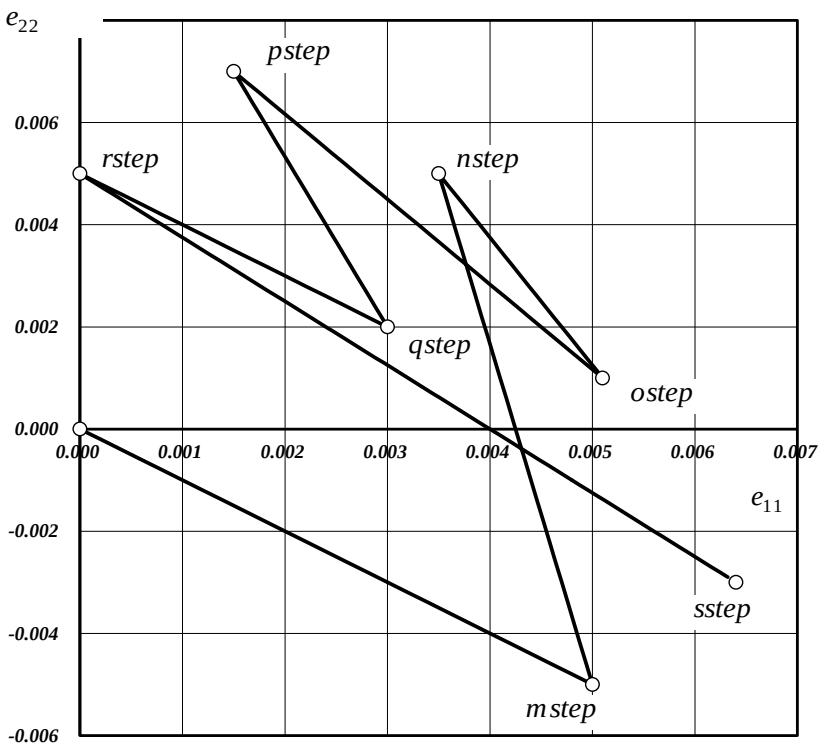
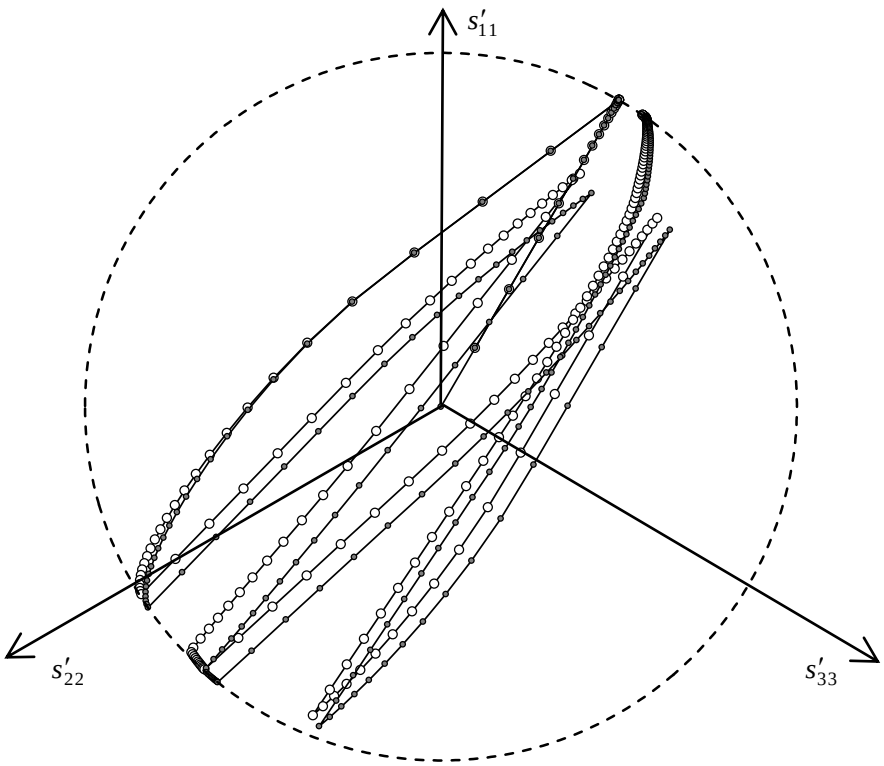
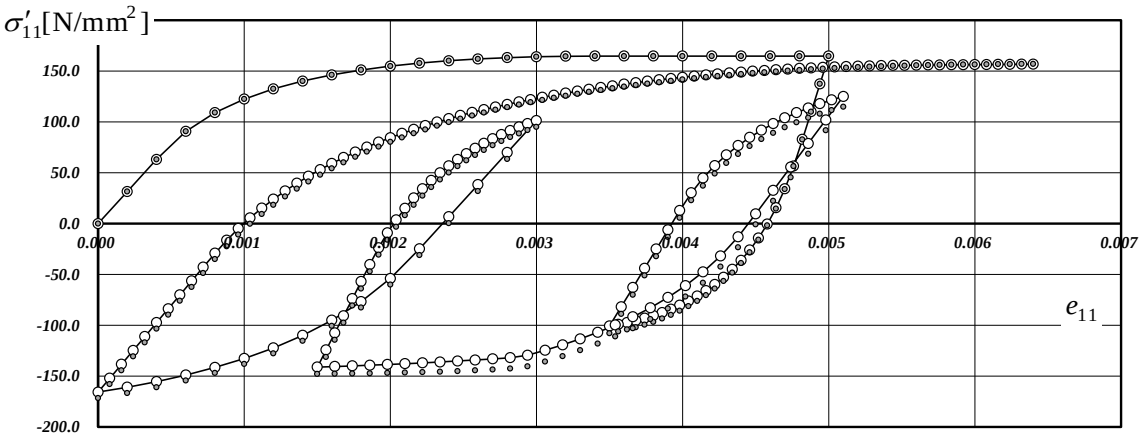


Fig.5-10 Strain path (Case2)

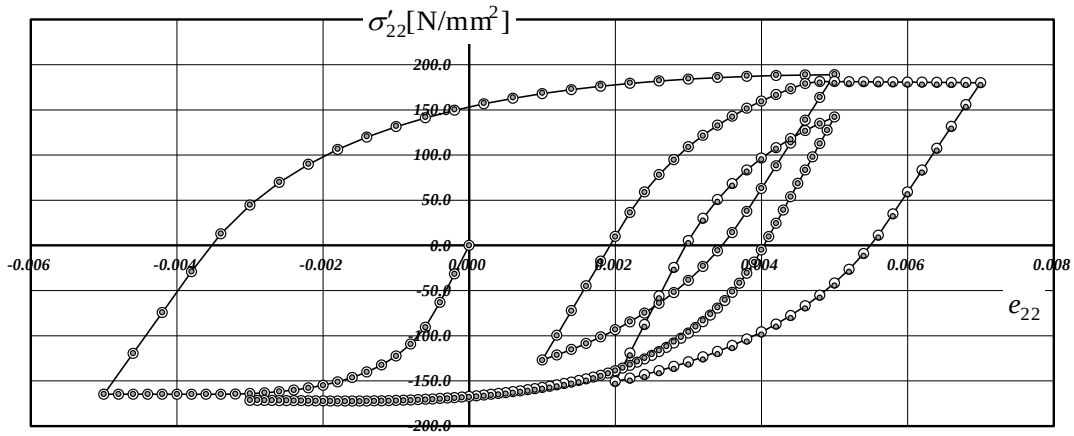


(White: Sub-layer model, Gray: Macroscopic model)

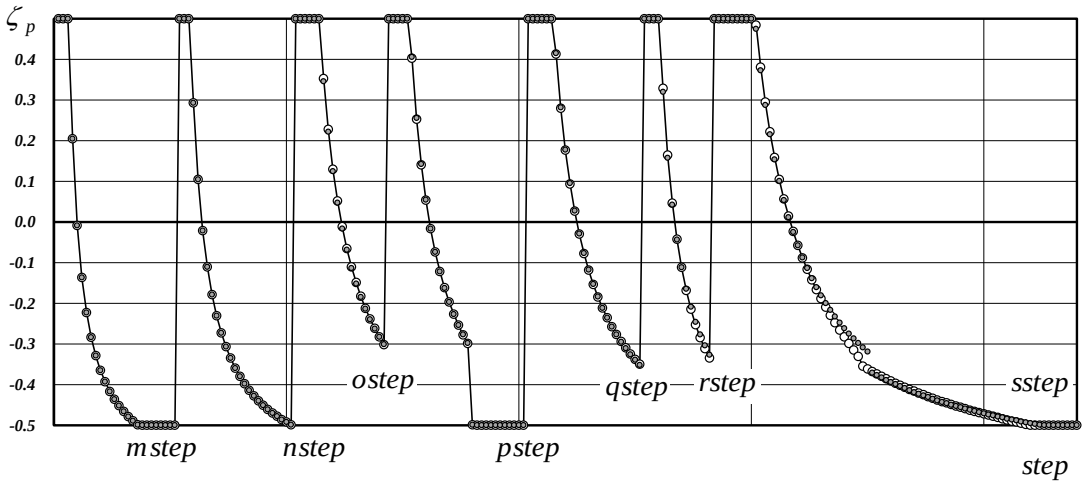
(a) Deviatoric stress field



(b) Stress-strain relation (11-component)



(c) Stress-strain relation (22-component)



(White: Sub-layer model, Gray: Macroscopic model)

(d) ζ_p-$step$ relation

Fig.5-11 Comparison between the sub-layer model and the macroscopic model (Case2)

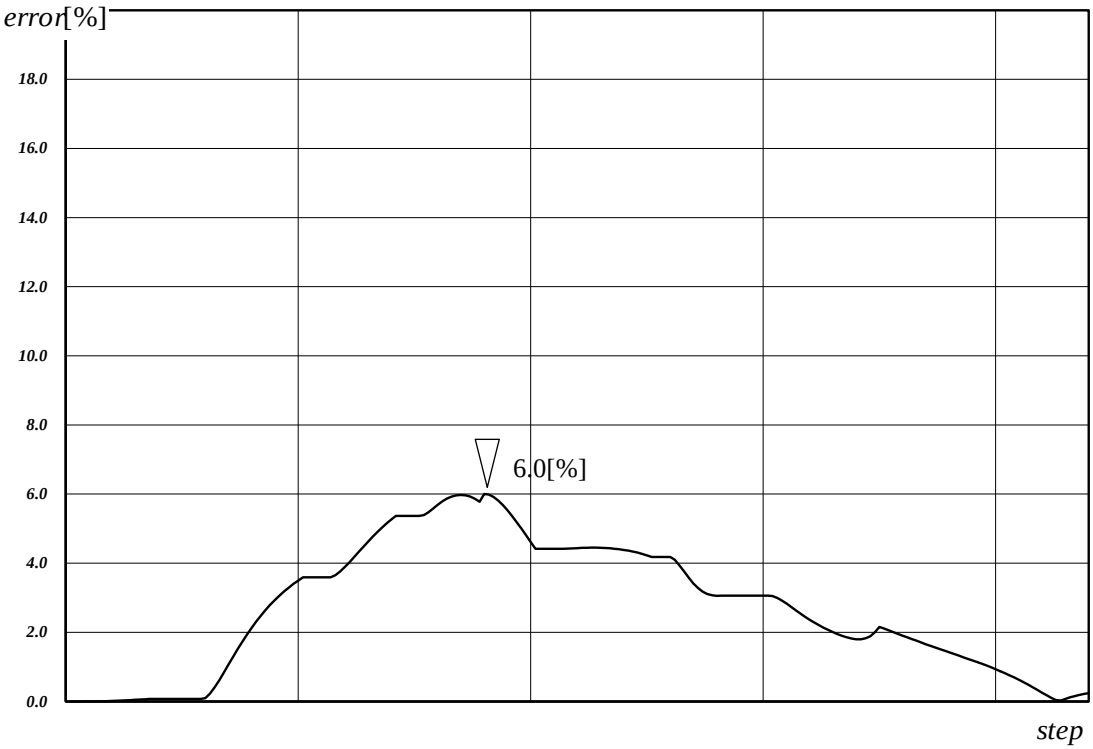
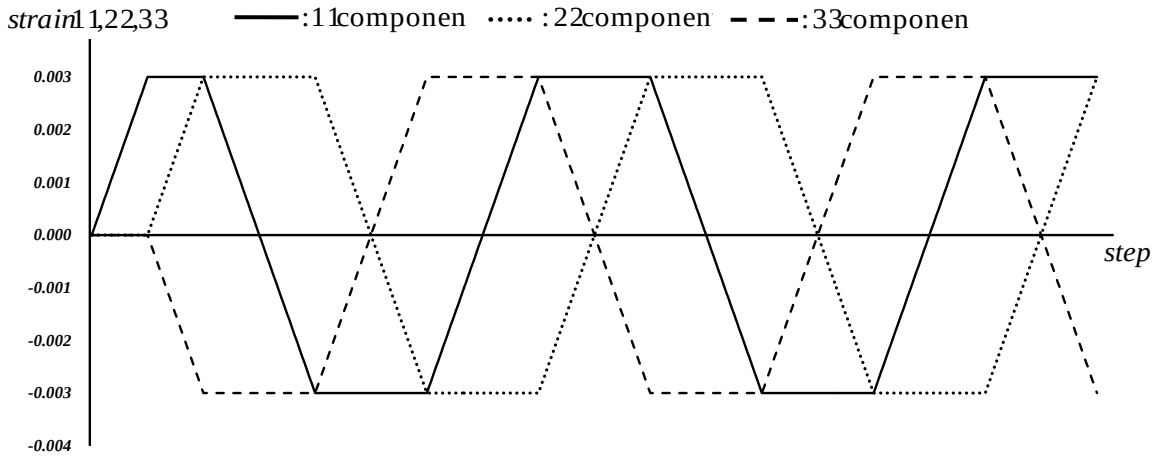
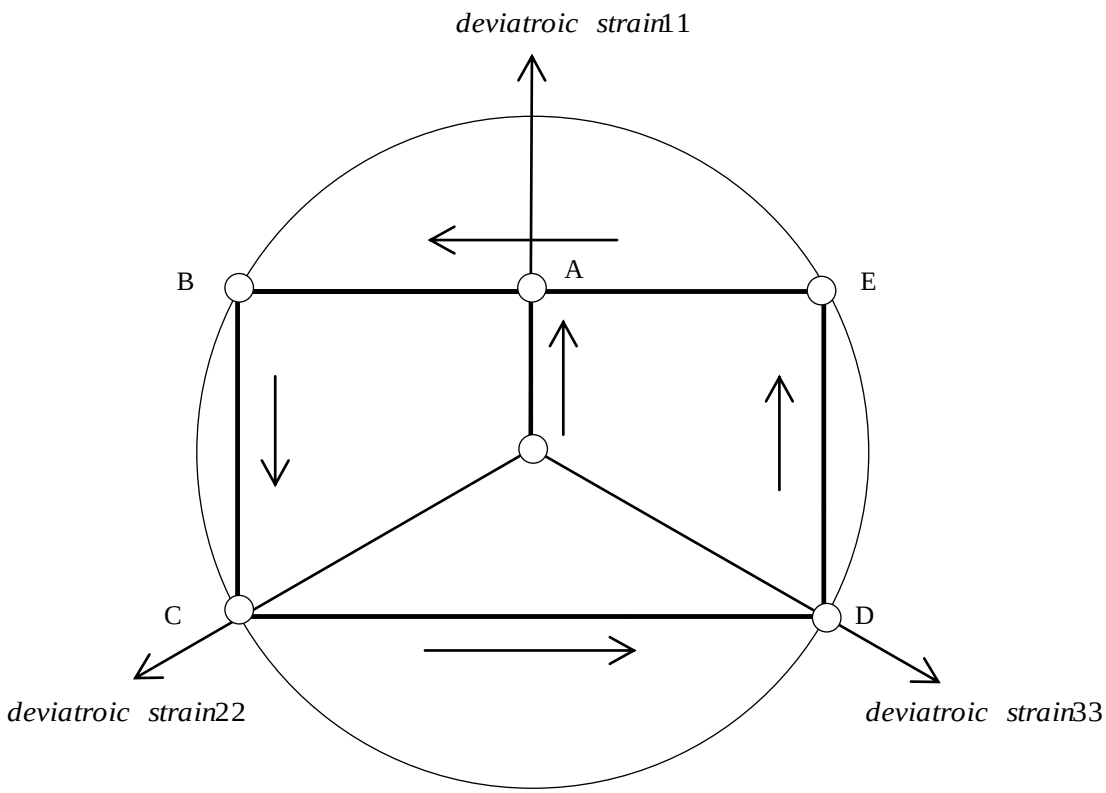


Fig.5-12 Error -step relation (Case2)



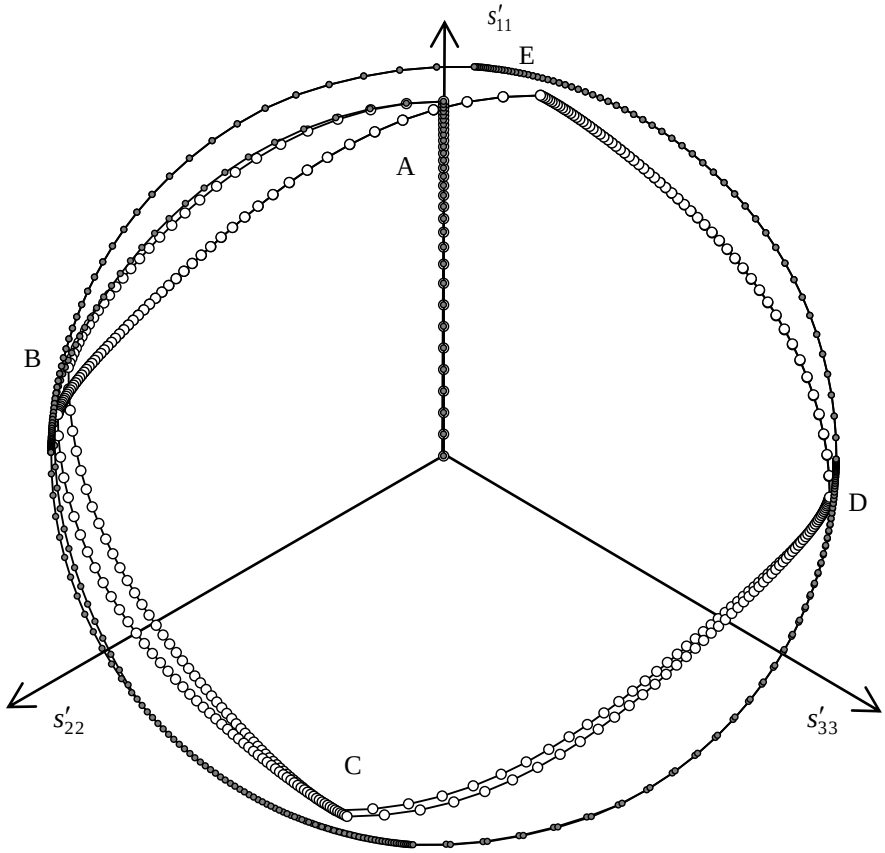
(a) Strain-step relation



Loading path: O-A-B-C-D-E-B-C-D…

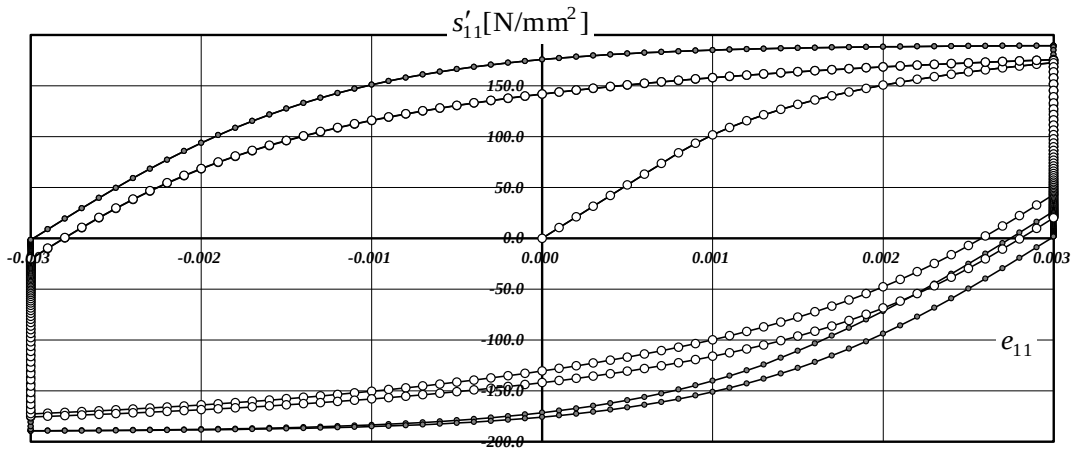
(b) Deviatoric strain field

Fig.5-13 strain path (Case3)

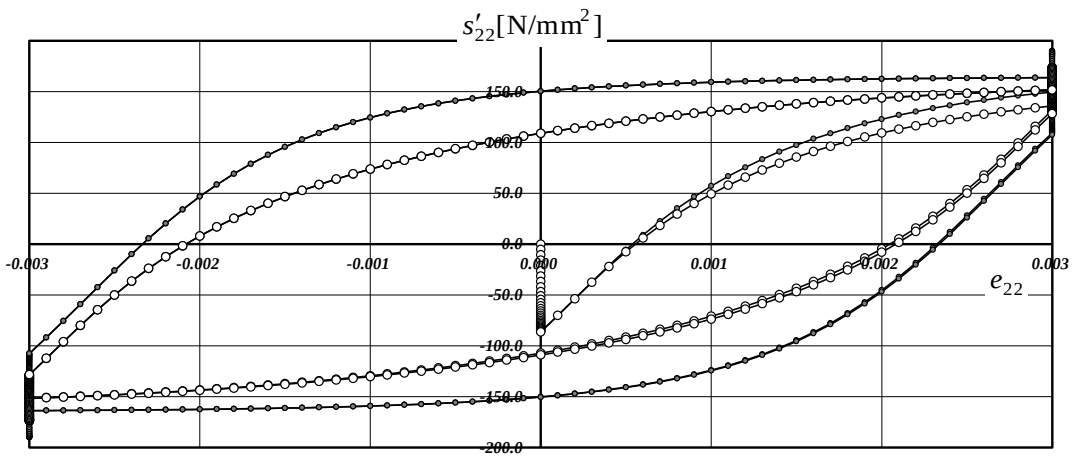


(White: Sub-layer model, Gray: Macroscopic model)

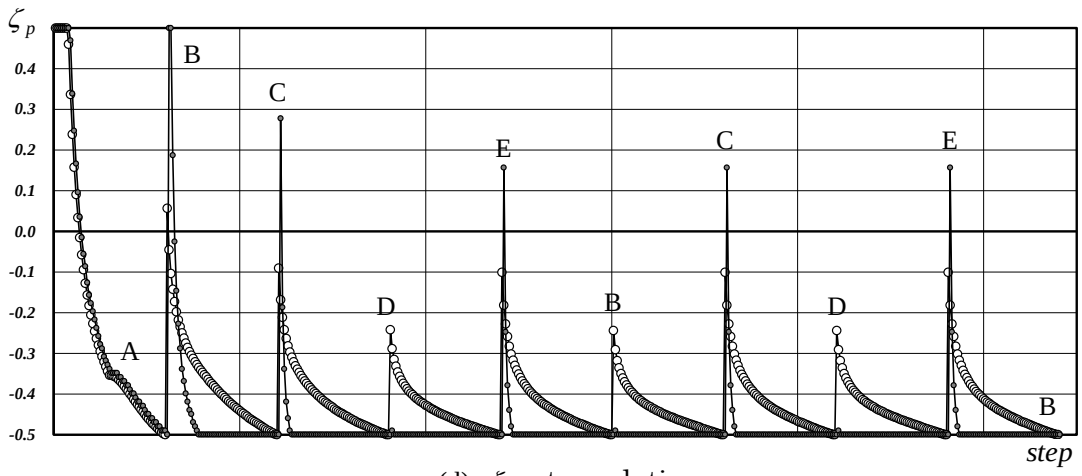
(a) Deviatroric stress field



(b) Deviatoric stress-strain relation (11-component)



(c) Deviatoric stress-strain relation (22component)



(d) ζ_p -step relation

(White: sub-layer model, Gray: macroscopic model)

Fig.5-14 Comparison between the sub-layer model and the macroscopic model (Case3)

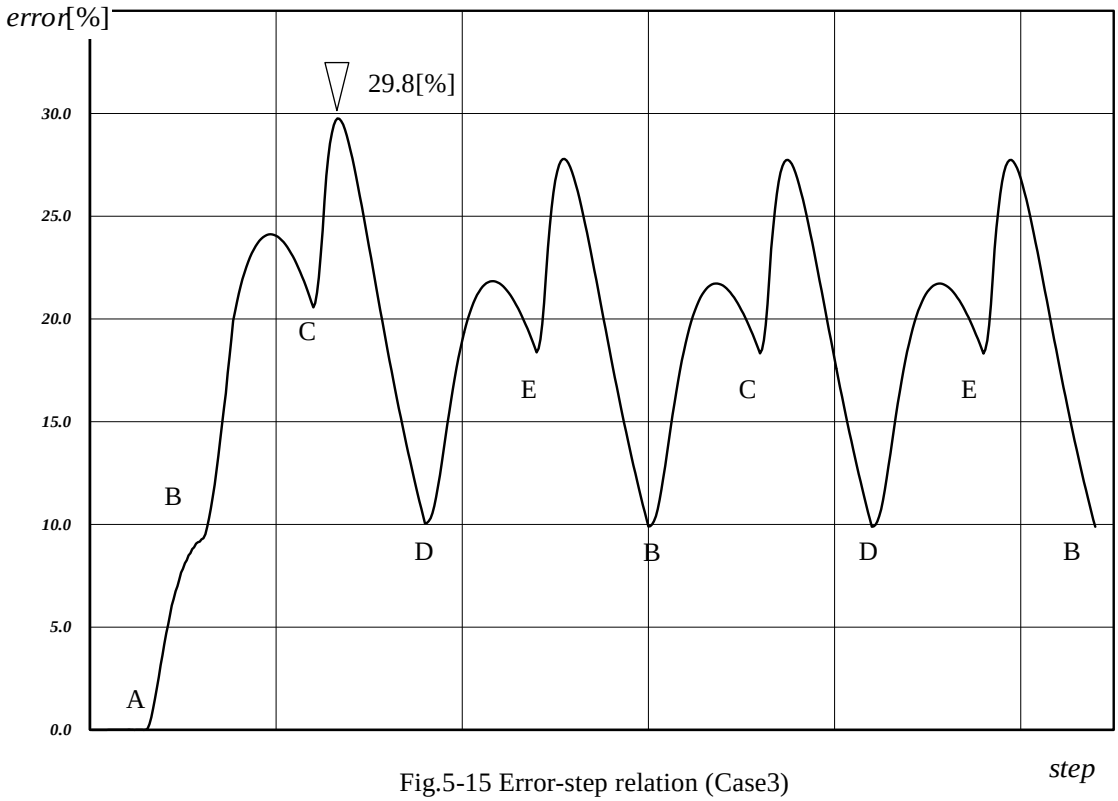
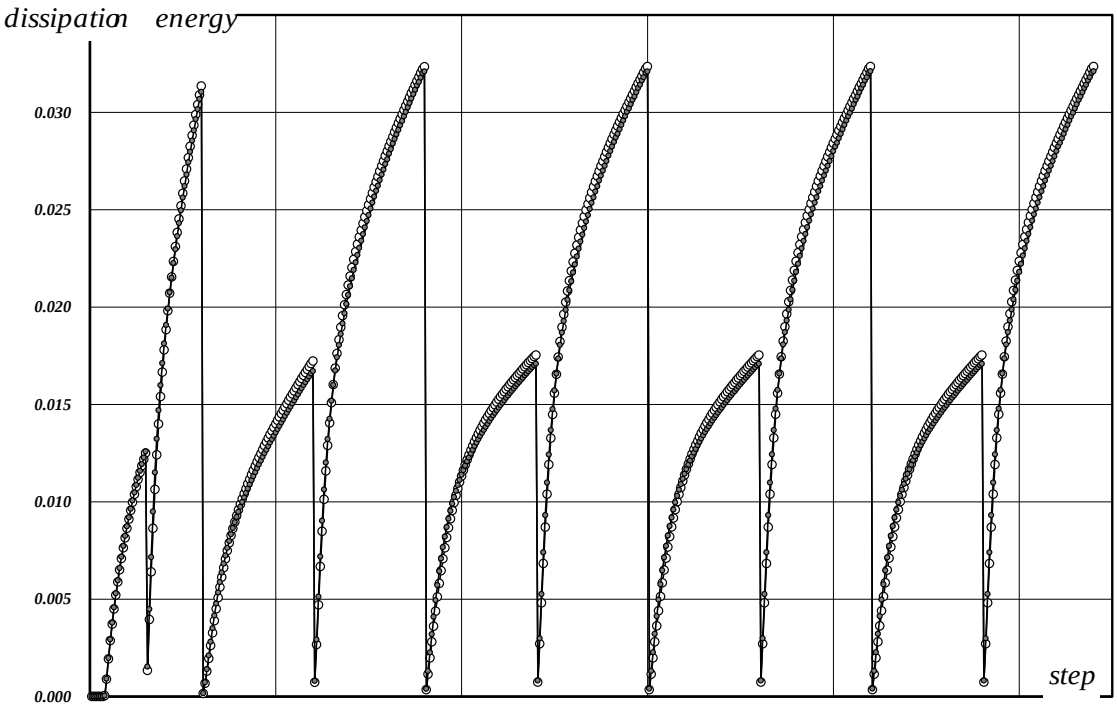


Fig.5-15 Error-step relation (Case3)



(White: Right side in Eq.(5-40), Gray: Left hand side in Eq.(5-40))

Fig.5-16 Dissipation energy-step relation (Case3)

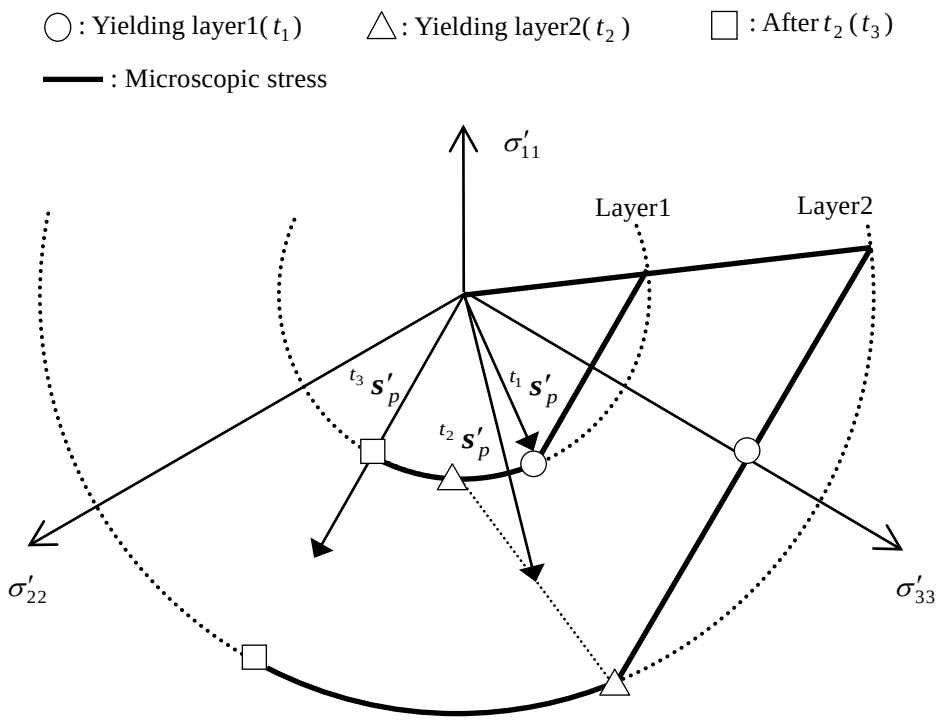
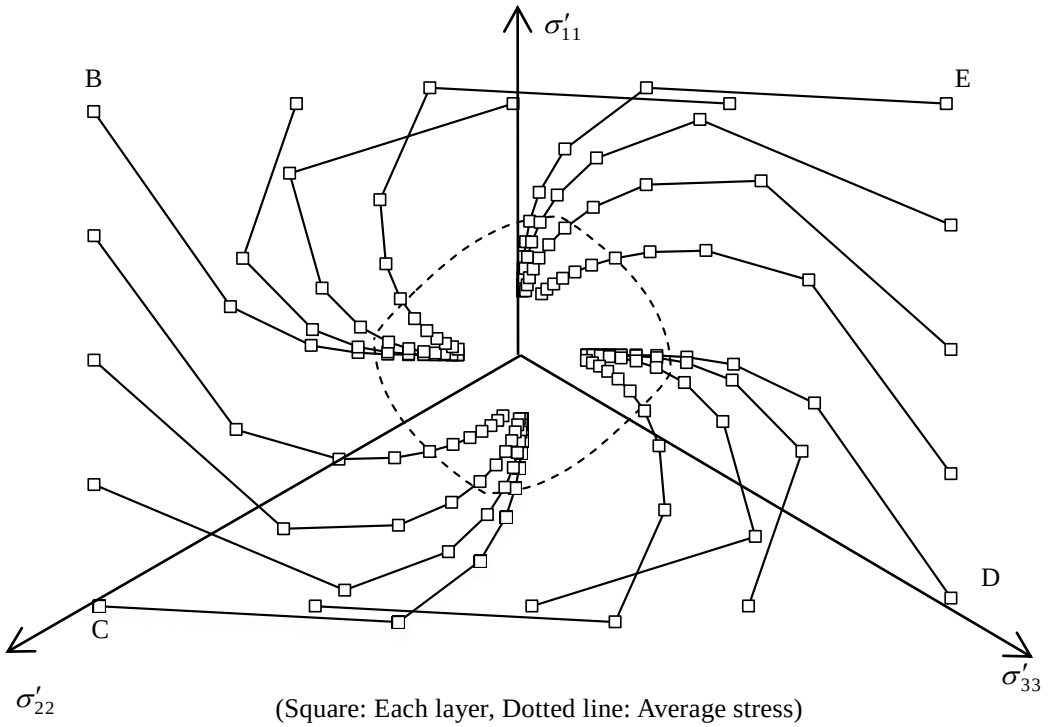
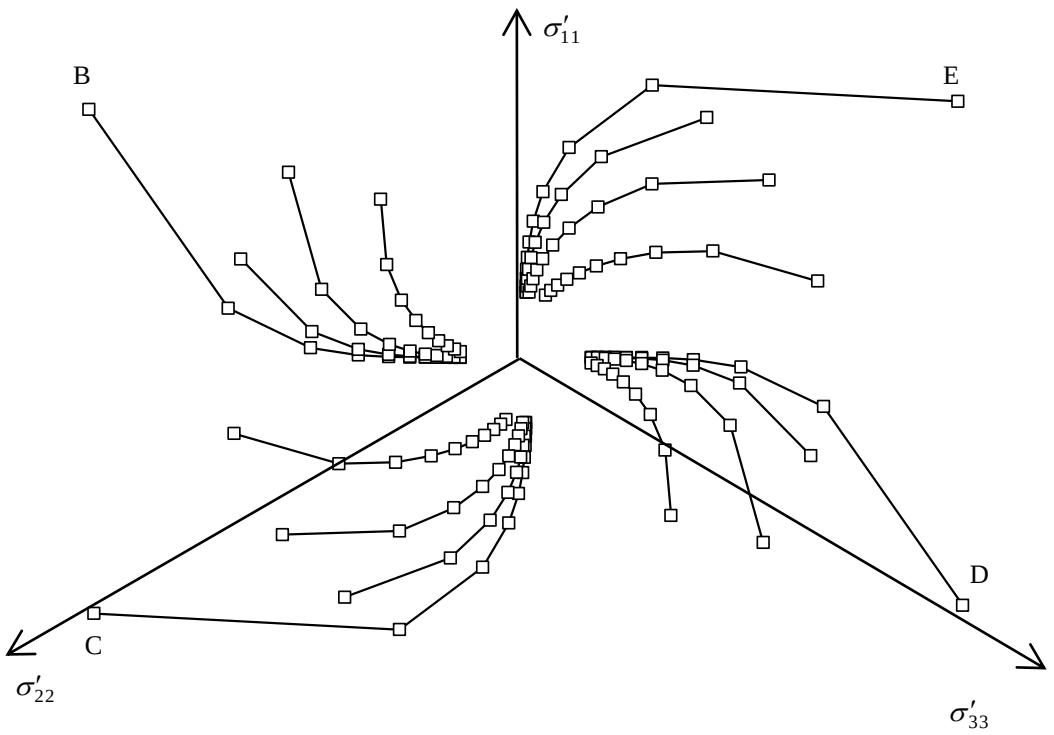


Fig.5-17 Stress behavior of the sub-layer model for deviatoric stress field



(Square: Each layer, Dotted line: Average stress)

(a) Microscopic stress for each layer and average stress



(b) Microscopic stress for each layer

Fig. 5-18 Behavior of microscopic stress (Case3)

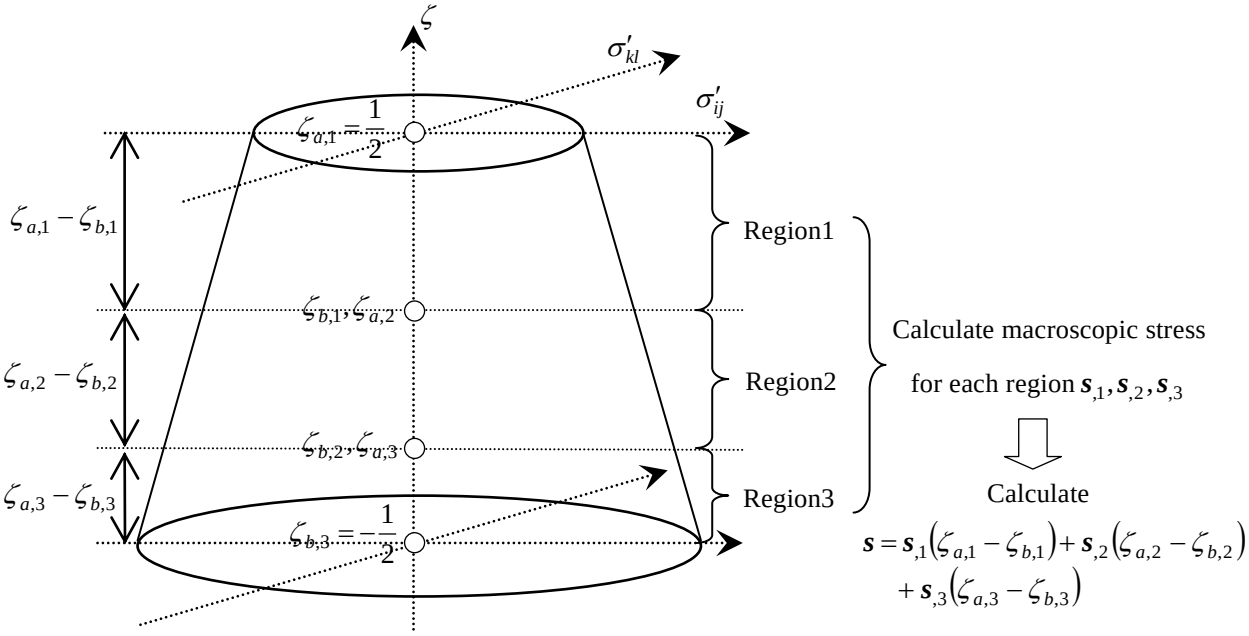
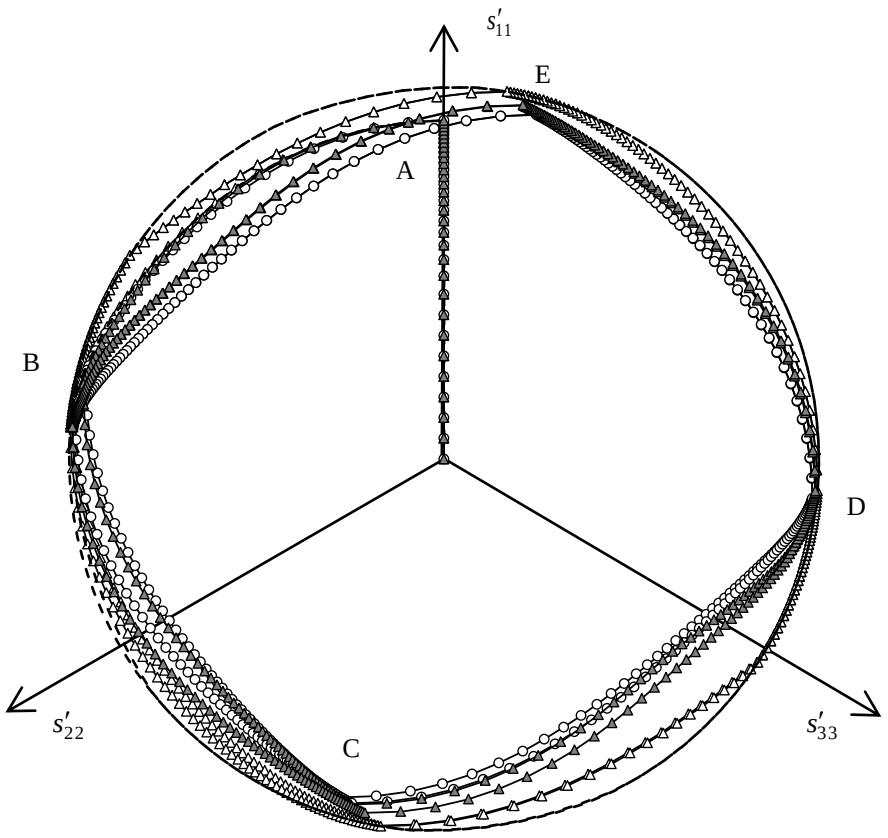
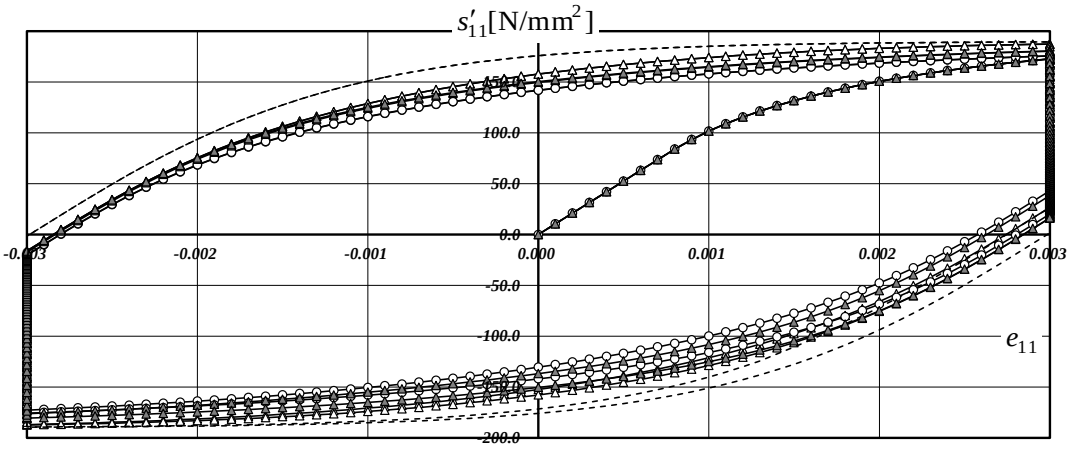


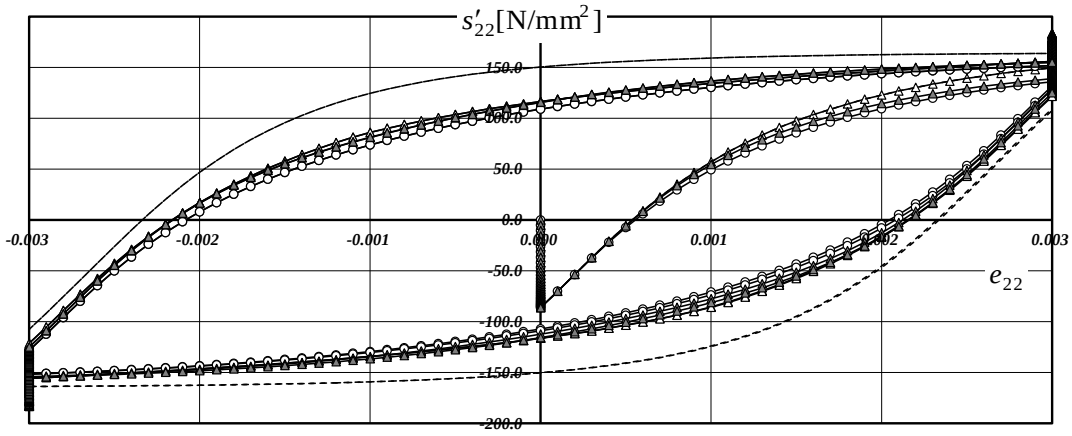
Fig.5-19 Modification of the macroscopic model (typeB)



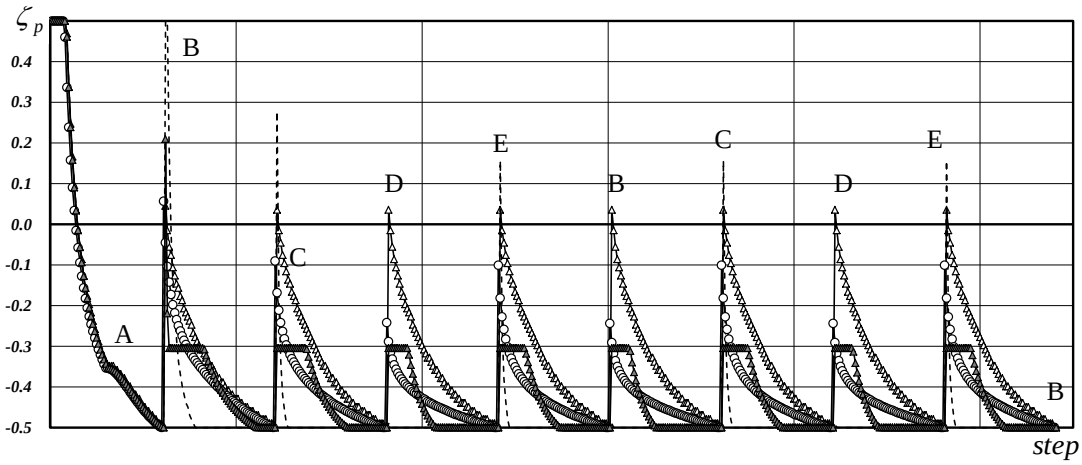
(White circle: Sub-layer model, Dotted line: Macroscopic model,
White triangle: Modified macroscopic model (typeA), Gray triangle: Modified macroscopic model (typeB))
(a) Deviatroric stress field



(b) Deviatoric stress-strain relation (11component)



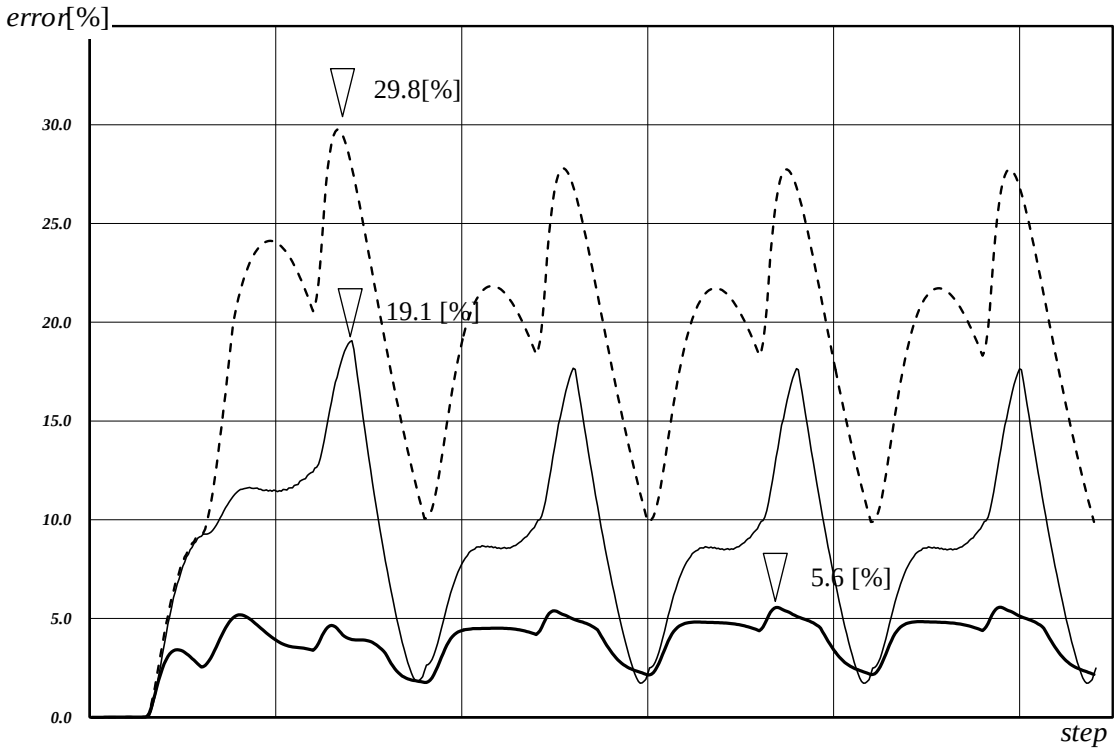
(c) Deviatoric stress-strain relation (22component)



(d) ζ_p -step relation

(White circle: Sub-layer model, Dotted line: Macroscopic model,
White triangle: Modified macroscopic model (typeA), Gray triangle: Modified macroscopic model (typeB))

Fig.5-20 Comparison among the sub-layer model and macro models (Case3)



(Dotted line: Macroscopic model, Thin solid line: Modified macroscopic model (typeA), Thick solid line: Modified macroscopic model (typeB))

Fig.5-21 Error-step relation (Case3)

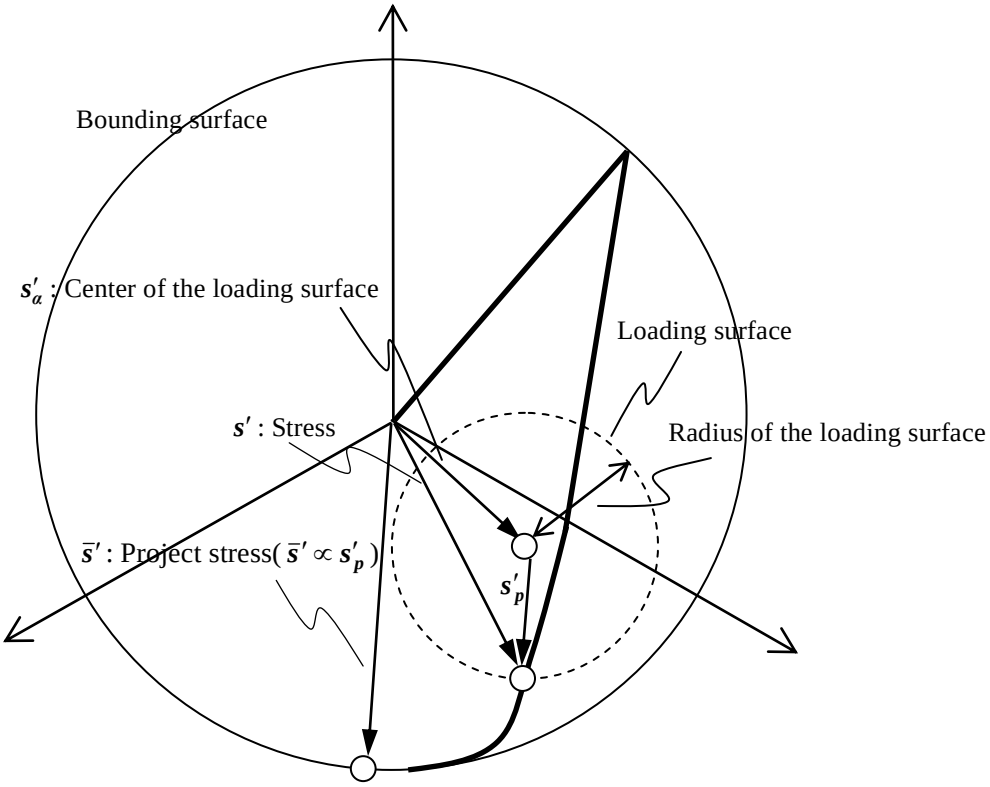


Fig. 5-22 Conceptual diagram of the bounding surface model for the stress field

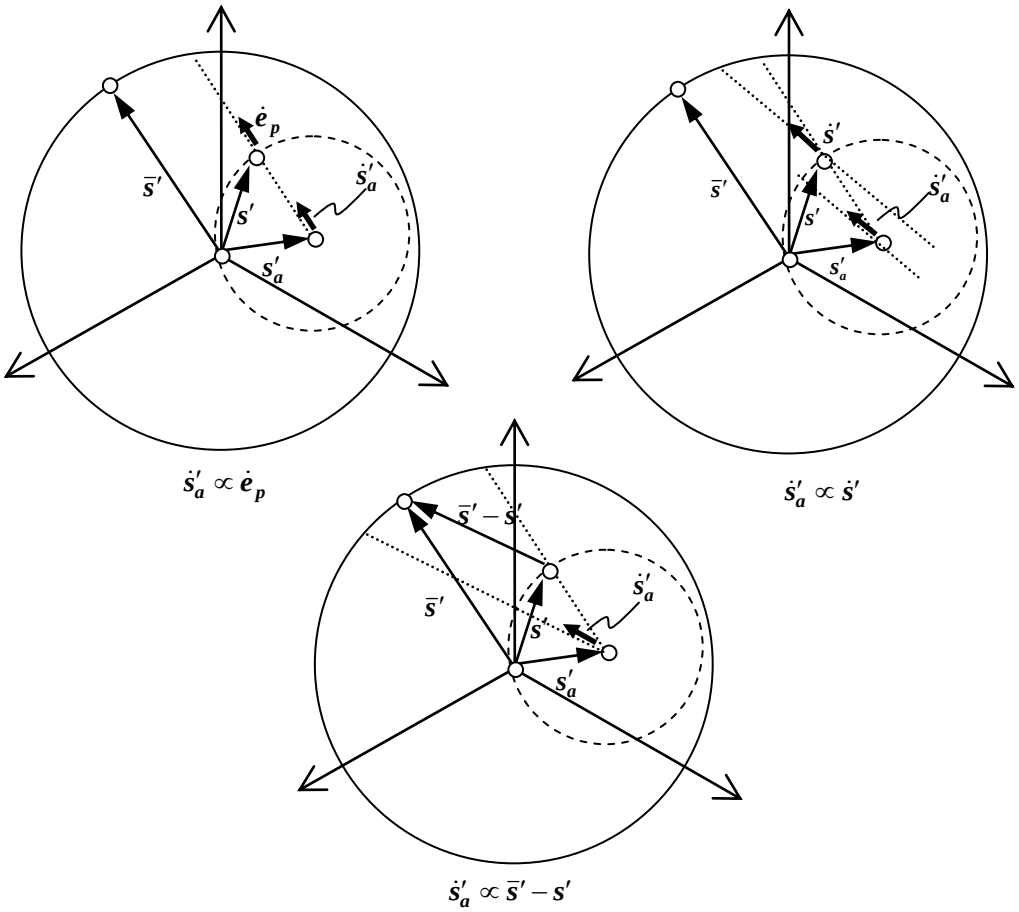
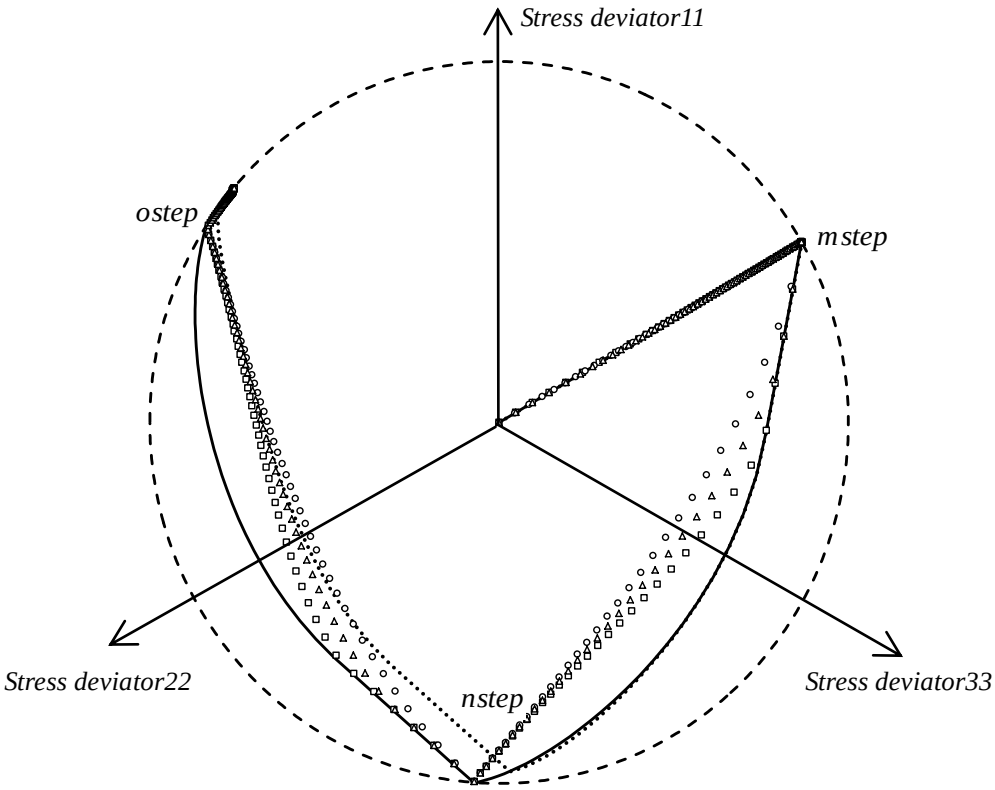


Fig. 5-23 Classification of the bounding surface model by $\dot{s}'_a$

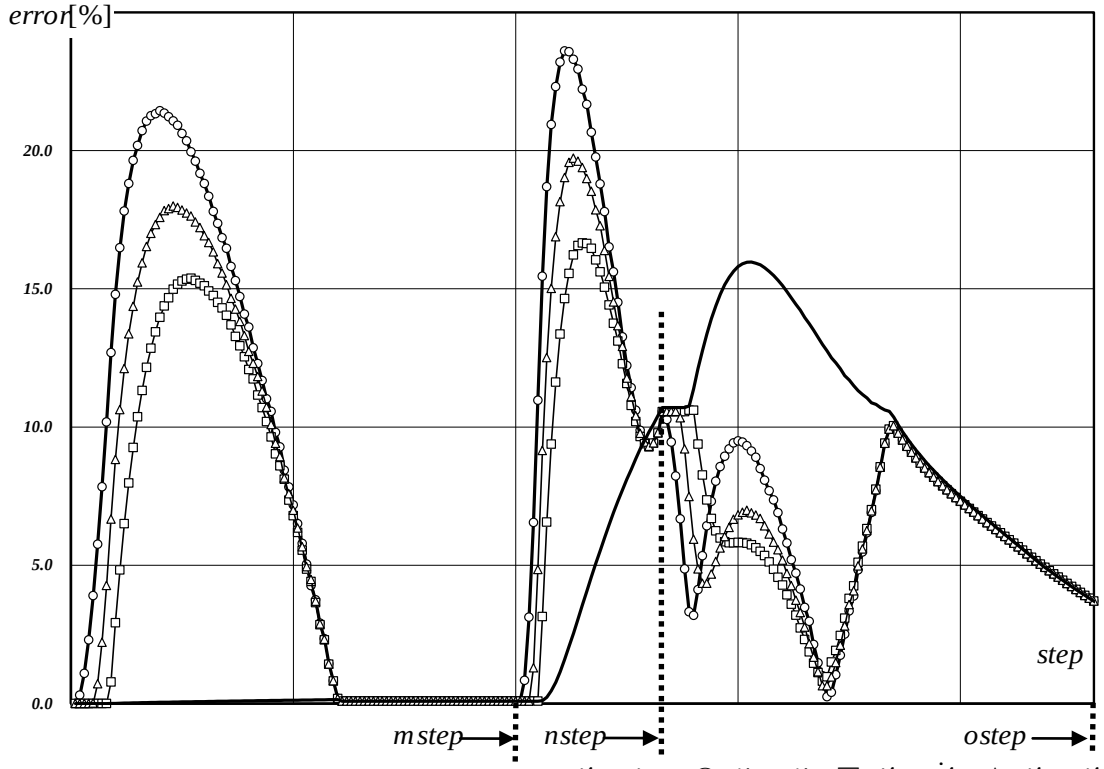
Table5-2 Various macro model by coeffcients β_1 and β_2

$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}}$	β_1	β_2
$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$ (Prager's translation rule)	1.0	0.0
$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{s}}'$ (Phillip's translation rule)	1.0	$\dfrac{\frac{1}{2}+\zeta_p}{\left(\frac{1}{2}-\zeta_p\right)^2}$
$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$	1.0	$-1+\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}$
$\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\bar{\boldsymbol{s}}}'$	1.0	$\frac{1}{2}+\zeta_p$



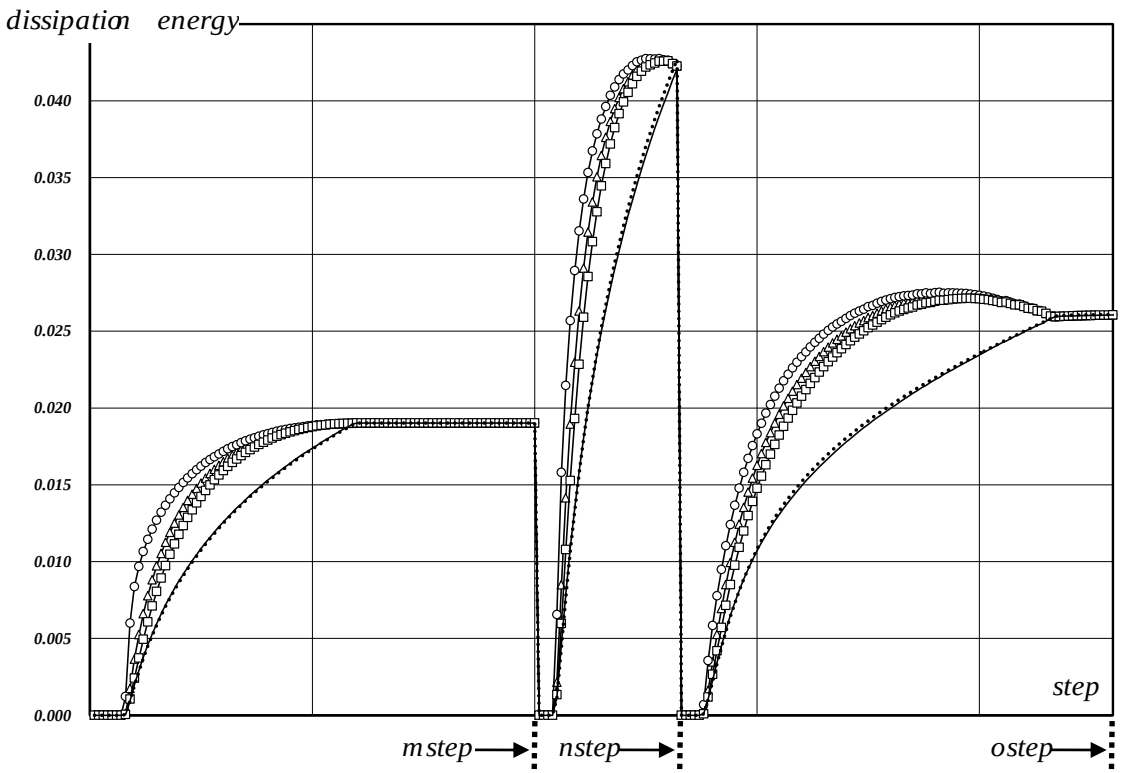
(Dotted line: sub-layer model, Solid line: conventional macroscopic model($\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$)
○: $\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{s}}'$, □: $\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\bar{\boldsymbol{s}}}'$, △: $\dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{a}} \propto \dot{\boldsymbol{s}}'_{\boldsymbol{p}}$)

Fig. 5-24 Comparison among the sub-layer model and macroscopic models for deviatoric stress field



(Solid line: Conventional macroscopic model($\dot{s}'_a \propto \dot{e}_p$), ○: $\dot{s}'_a \propto \dot{s}'$, □: $\dot{s}'_a \propto \dot{\bar{s}}'$, △: $\dot{s}'_a \propto \dot{s}'_p$)

Fig.5-25 Error-step relation



(Dotted line: Sub-layer model, Solid line: Conventional macroscopic model($\dot{s}'_a \propto \dot{e}_p$), ○: $\dot{s}'_a \propto \dot{s}'$, □: $\dot{s}'_a \propto \dot{\bar{s}}'$, △: $\dot{s}'_a \propto \dot{s}'_p$)

Fig.5-26 Dissipation energy-step relation

第６章　多軸応力状態に対する硬化則を考慮した修正サブレイヤーモデルの巨視的評価手法の提案および巨視的モデルの実用性の検討

６.１　はじめに

６.２　硬化則を考慮した巨視的モデルの定式化

６.２.１　各レイヤーの特性

６.２.２　巨視的応力および巨視的硬化則

６.２.３　過去の履歴の取り扱い

６.２.４　近似式の導入による巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則の提案

６.２.５　硬化則を考慮した巨視的モデルにおける修正方法

６.３　特殊な応力場に対する巨視的モデルの縮約

６.３.１　縮約の条件に基づく各レイヤーの特性

６.３.２　巨視的弾性構成則、巨視的応力および巨視的硬化則

６.３.３　巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則

６.３.４　数値解析アルゴリズム

６.３.５　接線係数テンソル

６.３.６　一軸応力状態に対する巨視的モデルとの比較による理論的整合性の確認

６.３.７　サブレイヤーモデルとの比較による妥当性の検証

６.４　まとめ

６.１　はじめに

建築構造分野では、従来より、構造実験を行い、部材および接合部等の塑性変形挙動の解明および塑性変形性能に対する検討が行われている。また、近年、E-ディフェンスでの震動実験に代表されるように実大構造物の大規模実験が実施されてきている。これらの実験において、構造物の各部には、複雑な多軸応力場が形成されるため、構造物の挙動を精確に追跡するには、多軸応力状態に対して硬化現象を再現可能な材料構成則が必要不可欠である。また、その中で、建築構造において用いられる部材の多くは薄肉断面であることから有限要素法では、シェル要素が多用されている。一方、金属材料の多軸応力状態における特性を把握することを目的とした要素実験では、従来より、薄肉円筒試験片に軸力とねじりを作用させることによって試験片中央部に近似的に軸応力およびせん断応力のみが生じる応力状態を作り出す試験が多数行われている。この試験方法によって、応力振幅の飽和現象、ラチェッティングおよび後続降伏曲面のゆがみなどの多軸応力状態における様々な実現象が報告されている。このような観点から、有限要素法において、シェル要素に適用可能な平面応力場への縮約および軸およびせん断のみが生じる応力状態への縮約は、材料構成則の実用性および適用性を考える上で重要であると言える。

これらを踏まえて、本章では、3 章で提案した多軸応力状態に対する修正サブレイヤーモデルを巨視的に評価し、硬化則を考慮した巨視的モデルの提案を行う。また、巨視的モデルにおいて特殊な応力状態への縮約を行う。以下にその内容を示す。

(1)　6.2 節では、3 章で提案した修正サブレイヤーモデルを巨視的に評価し、硬化則を考慮した巨視的モデルの提案を行う。このとき、3 章と同様に塑性ひずみ球の導入を行う。

(2)　また、5.4 節で提案した硬化則を考慮していない巨視的モデルの修正方法を硬化則を考慮した巨視的モデルに拡張する。

(3)　6.3 節では、巨視的モデルを軸応力とせん断応力のみが生じる特殊な応力場に対して縮約を行う。同時に、有限要素法への実装を鑑み増分形に整合性を有する接線係数テンソルの導出を行う。

(4)　また、第 4 章で提案した一軸応力状態の巨視的モデルと(3)で提案した巨視的モデルを比較することにより巨視的モデルの理論的整合性について検討するとともに、3 章で提案した実現象を表現可能な修正サブレイヤーモデルと巨視的モデルの結果を比較することにより巨視的モデルの定式化の妥当性および実現象に対する再現性を検証する。さらに、(2)で提案した修正方法の妥当性についても検証する。

６.２　硬化則を考慮した巨視的モデルの定式化

６.２.１　各レイヤーの特性

3 章で提案した多軸応力状態における修正サブレイヤーモデルにおいてレイヤー数を無限と想定し、巨視的評価を行い、硬化則を考慮した巨視的モデルの構築を行う。はじめに、各レイヤーの特性を示す。5.2 節と同様に、各レイヤーの位置を仮想座標系 $\zeta\left(-1/2 \le \zeta \le 1/2\right)$ により認識すると、各レイヤーの特性は次のようになる。

弾性構成則：$\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) = 2G\left(\boldsymbol{\varepsilon}'(\zeta) - \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right)$ (6-1)

等方硬化則：$\dot{\sigma}^I(\zeta) = -p(\zeta - \zeta_c)\theta\dot{g}$，　$p = 1 + p_o\left(1 - \left|\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}} : \frac{\dot{\boldsymbol{e}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}:\dot{\boldsymbol{e}}}}\right|\right)$ (6-2)

移動硬化則：$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^K(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\dot{g} - \dot{\sigma}^I(\zeta)\right)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)}}$ (6-3)

降伏条件式：$\phi(\zeta) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) - \boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)\right):\left(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) - \boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)\right)} - \left(\sigma_y(\zeta) + \sigma^I(\zeta)\right) \le 0$ (6-4)

塑性流れ則：$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) - \boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)}{\sigma_y(\zeta) + \sigma^I(\zeta)}\dot{\gamma}(\zeta)$ (6-5)

塑性条件：$\phi(\zeta) = \dot{\phi}(\zeta) = 0$，　$\phi(\zeta)\dot{\gamma}(\zeta) = 0$，　$\dot{\gamma}(\zeta) \ge 0$ (6-6)

ここに、G はせん断弾性係数、$\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソル、$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}$ は塑性ひずみテンソル、$\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、σ^I は等方硬化則により生じる弾性領域の変化(等方硬化応力とよぶ)、$\boldsymbol{\sigma}^K$ は、弾性領域の中心テンソル(移動硬化応力テンソルとよぶ)、σ_y は初期降伏応力(一定)、γ は塑性進展パラメータである。σ_y は ζ 上で連続、かつ単調減少とし、具体的には式(2-85)を参照されたい。p_o, ζ_c, K は定数であり、θ は変数である。等方硬化則および移動硬化則の詳細については、2 章および 3 章を参照されたい。なお、$\boldsymbol{s}, \boldsymbol{e}, g$ については後に述べる。また、5 章と同様に各レイヤーの諸量を微視的変数と呼ぶこととする。$(*)', (\dot{*})$ は、それぞれ変数 $(*)$ の偏差成分および変化率を表す。

６.２.２　巨視的応力および巨視的硬化則

巨視的な弾性構成則および巨視的応力 $\boldsymbol{s}$,巨視的ひずみ $\boldsymbol{e}$,巨視的塑性ひずみ $\boldsymbol{e}_p$,巨視的降伏応力 $s_y, \bar{s}_y$ については 5.2 節における定義と同一であるため説明は割愛し、式のみを示す。

$$\boldsymbol{s}' = 2G\left(\boldsymbol{e}' - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta)d\zeta\right) = 2G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{e_p}\right) = 2G\boldsymbol{e'_e} \tag{6-7}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\zeta) = \text{constant} = \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e'_e} = \boldsymbol{e}' - \boldsymbol{e_p}, \quad \boldsymbol{e_p} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta)d\zeta \tag{6-8),(6-9),(6-10}$$

$$s_y = \frac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \sigma_y(\zeta)d\zeta, \quad \bar{s}_y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_y(\zeta)d\zeta \tag{6-11),(6-12}$$

ここに、ζ_p は塑性領域 $(\zeta_p < \zeta \le 1/2)$ と弾性領域 $(-1/2 \le \zeta < \zeta_p)$ の境界値である。続いて、式(6-2),(6-3)を用いて、巨視的な等方硬化則および移動硬化則を次のように定義する。

$$\dot{s}_p^I = \frac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \dot{\sigma}^I(\zeta)d\zeta = -p\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \zeta_p\right) - \zeta_c\right\}\theta\dot{g} = -\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \zeta_p\right) - \zeta_c\right\}\frac{\dot{s}^I}{\zeta_c} \tag{6-13}$$

$$\dot{s}^I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dot{\sigma}^I(\zeta)d\zeta = p\zeta_c\theta\dot{g}, \tag{6-14}$$

$$\dot{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{p}}'^{\boldsymbol{K}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}'^K(\zeta)d\zeta = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2} - \zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \left\{\left(K\dot{g} - \dot{\sigma}^I(\zeta)\right)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)}}\right\}d\zeta \tag{6-15}$$

$$\dot{\boldsymbol{s}}'^{\boldsymbol{K}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}'^K(\zeta)d\zeta = \sqrt{\frac{2}{3}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{\left(K\dot{g} - \dot{\sigma}^I(\zeta)\right)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)}}\right\}d\zeta \tag{6-16}$$

ここに、$s_p^I, \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}'^{\boldsymbol{K}}$ はそれぞれ微視的等方硬化応力および移動硬化応力の塑性領域における平均であり、$s^I, \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}$ は、全領域 $(-1/2 \le \zeta \le 1/2)$ における平均である。続いて、$s_p^I, s_y, \bar{s}_y$ の間を関係づける変数として d_p を次式のように定義する。

$$s_y + s_p^I = (1 - d_p)(\bar{s}_y + s_p^I) \tag{6-17}$$

式(6-11),(6-12)より $s_y + s_p^I$ は、その定義から塑性領域が全領域に広がる $(\zeta_p = -1/2)$ につれて $\bar{s}_y + s_p^I$ に等しくなることが分かる。従って、式(6-17)より塑性領域が全領域に広がるにつれて d_p は 0 に近づく関数であることが理解される。さらに、d_p, ζ_p 間の関係を表す変数 D_p を次のように定義する。

$$\frac{1}{2} - \zeta_p = 1 - D_P d_p \tag{6-18}$$

続いて、巨視的な応力として $\boldsymbol{s}'_p$，$\bar{\boldsymbol{s}}'$ を以下のように定義する。

$$\boldsymbol{s}'_p = \frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta\,, \quad \bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}} = \frac{\bar{s}_y + s_p^I}{s_y + s_p^I}\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right) \tag{6-19),(6-20}$$

$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ は塑性領域での微視的な応力の平均であり、平均塑性応力とよぶ。また、$\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ は $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ を $\bar{s}_y + s_p^I$ で形成される曲面に投影する応力テンソルであることから $\bar{\boldsymbol{s}}'$ を投影応力と呼ぶこととする。また、式(6-17),(6-20)より $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ と $\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ 間において次の関係が誘導される。

$$\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}}{1-d_p} \tag{6-21}$$

式(6-21)と d_p の性質から、塑性領域が全領域に広がるにつれて、$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ と $\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ は一致することが分かる。

６.２.３　過去の履歴の取り扱い

5.2.4 項と同様に過去の履歴について述べる。基本的には、硬化則を考慮していない場合と同様であるので詳細は割愛し、変数のみを記す。弾性領域と塑性領域の境界を表す微視的応力 $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{f}}(\zeta_p)$ を次式のように定義する。

$$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{f}}(\zeta_p) = 2G^{cur}\boldsymbol{e}' + {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_p) \tag{6-22}$$

他の変数についても除荷時の値を ${}^{pre}(\ )$ と表す。また、${}^{cur}(\ )$ は除荷時の値を基準とした現載荷時の値である。従って、$(\ ) = {}^{cur}(\ ) + {}^{pre}(\ )$ と定義することができる。また、$\phi(\zeta_p)$ では式(6-4),(6-6)より次式を満たさなければならないことは明らかである。

$$\phi(\zeta_p) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{f}}(\zeta_p) - \boldsymbol{\sigma}'^{K}(\zeta_p)\right):\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{f}}(\zeta_p) - \boldsymbol{\sigma}'^{K}(\zeta_p)\right)} - \left(\sigma_y(\zeta_p) + \sigma^I(\zeta_p)\right) = 0 \tag{6-23}$$

式(6-23)を解くことによって ζ_p を決定する。次に、過去の履歴を考慮した各巨視的応力を示す。$\boldsymbol{s}'_p$ は、次式のように表される。

$$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}}\left[2G\left\{{}^{cur}\boldsymbol{e}' - {}^{cur}\boldsymbol{\varepsilon}_p(\zeta)\right\} + {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)\right]d\zeta = 2G^{cur}\boldsymbol{e}' - \frac{2G^{cur}\boldsymbol{e}_p}{1-D_p d_p} + {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} \tag{6-24}$$

$$ {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta_p) = \frac{1}{1-D_p d_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta \tag{6-25} $$

同様に、$\bar{\boldsymbol{s}}'$ は次式のようになる。

$$ \bar{\boldsymbol{s}}' = \frac{1}{1-d_p}\left\{2G^{cur}\boldsymbol{e}' - \frac{2G^{cur}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}}{1-D_p d_p} + {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\} + \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}} \tag{6-26} $$

６.２.４　近似式の導入による巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則の提案

5.2.5 項および 5.2.6 項と同様に近似式を導入することにより巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則を提案する。はじめに、巨視的降伏条件式を導出する。巨視的モデルでは、サブレイヤーモデルと異なり、微視的変数を積分した巨視的応力を用いて計算を行うため微視的変数の挙動は不明である。そこで、塑性領域における $\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)$ に対して以下のような近似式を導入する。

$$ \boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta) \approx \frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}):(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}})}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sigma_y(\zeta)+\sigma^I(\zeta)\right) \quad \left(\frac{1}{2}\le\zeta\le\zeta_p\right) \tag{6-27} $$

塑性領域における $\sqrt{(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)):(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta))}$ は、式(6-4)より $\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sigma_y(\zeta)+\sigma^I(\zeta)\right)$ で表されるが、方向は不明である。そこで、近似式(6-27)では方向を $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ と近似している。$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ の方向は、塑性領域における $\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)$ の平均の方向であるので、$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ を用いることは妥当であると考えられる。式(6-27)の両辺を積分し、$\sqrt{(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}):(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}})}$ を計算すると、次式が導出される。

$$ \sqrt{(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}):(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}})} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(s_y+s_p^I\right) \tag{6-28} $$

式(6-28)より巨視的な降伏関数が次のように導かれる。

$$ \Phi_p = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}):(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}})} - \left(s_y+s_p^I\right) = 0, \quad \dot{\Phi}_p = 0 \tag{6-29a} $$

また、式(6-29a)に式(6-17),(6-21)を用いると、次式が導かれる。

$$ \bar{\Phi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{(\bar{\boldsymbol{s}}'-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}):(\bar{\boldsymbol{s}}'-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}})} - \left(\bar{s}_y+s_p^I\right) = 0, \quad \dot{\bar{\Phi}} = 0 \tag{6-29b} $$

従って、式(6-29)を巨視的モデルの降伏条件式として扱う。続いて、巨視的な塑性流れ則について考える。巨視的塑性流れ則の提案にあたって、巨視的散逸項 Λ を次式のように定義する。

$$\Lambda = \left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right) : \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} \geq 0 \tag{6-30}$$

式(6-30)は、式(6-21)を用いて以下のように表すこともできる。

$$\Lambda = \left(\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right) : \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} = \left(1 - d_p\right)\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} \tag{6-31),(6-32}$$

従って、$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}, \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}}$ に対する熱力学的力がそれぞれ $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ であることが理解される。これは、式(6-29)の降伏条件式の妥当性を示唆している。続いて、式(6-29),(6-30),(6-31)よりラグラジアンは次式のようになる。

$$L = -\Lambda + \Phi_p \dot{g} = -\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right) : \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right) : \left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right)} - \left(s_y + s_p^I\right)\right)\dot{g} \tag{6-33a}$$

$$L = -\Lambda + \bar{\Phi}\dot{g} = -\left(\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right) : \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right) : \left(\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right)} - \left(\bar{s}_y + s_p^I\right)\right)\dot{\bar{g}} \tag{6-33b}$$

ここに、$\dot{g}, \dot{\bar{g}}$ はラグランジュの未定定数である。最大塑性散逸の原理を用い、また、ラグラジアンをそれぞれ $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{s}}'$ で偏微分すると次式のようになる。

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}} = -\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right) : \left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right)}}\dot{g} = -\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} + \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}}{s_y + s_p^I}\dot{g} = 0 \tag{6-34a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{s}}'} = -\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\left(\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right) : \left(\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right)}}\dot{\bar{g}} = -\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} + \frac{3}{2}\frac{\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}}{\bar{s}_y + s_p^I}\dot{\bar{g}} = 0 \tag{6-34b}$$

従って、巨視的塑性流れ則は、

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}}{s_y + s_p^I}\dot{g}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{p}} = \frac{3}{2}\frac{\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}}{\bar{s}_y + s_p^I}\dot{\bar{g}} \tag{6-35a),(6-35b}$$

$$\dot{\bar{g}} = \left(1 - d_p\right)\dot{g} \tag{6-36}$$

となる。従って、式(6-35)より $g, \bar{g}$ は巨視的塑性進展パラメータであり、これらを用いると、巨視的な塑性負荷条件は次式のように書くことができる。

$$\Phi_p = \dot{\Phi}_p = 0, \quad \Phi_p \dot{g} = 0, \quad \dot{g} \geq 0 \tag{6-37a}$$

$$\bar{\Phi} = \dot{\bar{\Phi}} = 0, \quad \bar{\Phi}\dot{\bar{g}} = 0, \quad \dot{\bar{g}} \geq 0 \tag{6-37b}$$

また、式(6-5),(6-27),(6-35)より微視的塑性ひずみ増分の方向は全て、$\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ および $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$ の方向と同一

であることが導かれるので、微視的移動硬化則および巨視的移動硬化則は次式のようになることが分かる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^{K}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\dot{g}-\dot{\sigma}^{I}(\zeta)\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}} \tag{6-38}$$

$$\dot{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{p}}'^{\boldsymbol{K}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\dot{g}-s_p^I\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}}=\left(K\dot{g}-\dot{s}_p^I\right)\frac{\bar{\boldsymbol{s}}'-\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}'^{\boldsymbol{K}}}{\bar{s}_y+s_p^I} \tag{6-39}$$

$$\dot{\boldsymbol{s}}'^{\boldsymbol{K}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\dot{g}-s^I\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}}=\left(K\dot{g}-\dot{s}^I\right)\frac{\bar{\boldsymbol{s}}'-\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}'^{\boldsymbol{K}}}{\bar{s}_y+s_p^I} \tag{6-40}$$

6.2.4 項では、5.2 節と同様に巨視的降伏条件式、巨視的塑性散逸項を導出するにあたって近似式を用いた。しかし、導入した近似式は、5.2 節と同様に二つであり、また 5.2 節の近似式と非常に類似した式で表されている。これらの近似式の妥当性は、6.3.7 項の数値解析結果を通して検証する。以上より、硬化則を考慮した巨視的モデルの基礎式が求められた。なお、巨視的モデルにおける塑性ひずみ球に関しては、3 章で提案したサブレイヤーモデルにおける塑性ひずみ球が平均塑性ひずみにより形成される空間で定義されていることから、巨視的モデルにおいても全く同一のものを用いるので詳細は割愛する(詳細は 3 章を参照されたい)。

最後に、巨視的モデルにおける諸量を以下にまとめて記す。

＜微視的諸量＞

弾性構成則： $\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)=2G\left\{\boldsymbol{e}'-\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right\}$ (6-41)

等方硬化則： $\dot{\sigma}^I(\zeta)=-p(\zeta-\zeta_c)\theta\dot{g}_o+\alpha p(\zeta-\zeta_c)\theta\dot{g}_i$,　$p=1+p_o\left(1-\left|\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}}:\frac{\dot{\boldsymbol{e}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}:\dot{\boldsymbol{e}}}}\right|\right)$ (6-42)

移動硬化則： $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^{K}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\dot{g}-\dot{\sigma}^I(\zeta)\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}}$ (6-43)

降伏条件式： $\phi(\zeta)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)\right):\left(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)\right)}-\left(\sigma_y(\zeta)+\sigma^I(\zeta)\right)\leq 0$ (6-44)

＜巨視的モデルの諸量＞

弾性構成則： $\boldsymbol{s}'=2G\left(\boldsymbol{e}'-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}\right)$ (6-45)

平均塑性化応力：$\boldsymbol{s'_p} = 2G^{cur}\boldsymbol{e'} - \dfrac{2G^{cur}\boldsymbol{e}_p}{1-D_p d_p} + {}^{pre}\boldsymbol{s'_p}$ (6-46)

投影応力：$\bar{\boldsymbol{s}}' = \dfrac{1}{1-d_p}\left\{2G^{cur}\boldsymbol{e'} - \dfrac{2G^{cur}\boldsymbol{e_p}}{1-D_p d_p} + {}^{pre}\boldsymbol{s'_p} - \boldsymbol{s'^K_p}\right\} + \boldsymbol{s'^K_p}$ (6-47)

巨視的降伏条件式：$\Phi_p = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{s'_p} - \boldsymbol{s'^K_p}\right):\left(\boldsymbol{s'_p} - \boldsymbol{s'^K_p}\right)} - \left(s_y + s^I_p\right) \le 0$ (6-48a)

$$\overline{\Phi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s'^K_p}\right):\left(\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s'^K_p}\right)} - \left(\bar{s}_y + s^I_p\right) \le 0 \quad \text{(6-48b)}$$

等方硬化則：$\dot{s}^I = p\zeta_c\theta\dot{g}_o - \alpha p\zeta_c\theta\dot{g}_i$，　$\dot{s}^I_p = -\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \zeta_p\right) - \zeta_c\right\}\dfrac{\dot{s}^I}{\zeta_c}$ (6-49)(6-50)

移動硬化則：$\dot{\boldsymbol{s}}'^{\boldsymbol{K}} = \left(K\dot{g} - \dot{s}^I\right)\dfrac{\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s'^K_p}}{\bar{s}_y + s^I_p}$，　$\dot{\boldsymbol{s}}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}} = \left(K\dot{g} - \dot{s}^I_p\right)\dfrac{\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s'^K_p}}{\bar{s}_y + s^I_p}$ (6-51),(6-52)

塑性流れ則：$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{s'_p} - \boldsymbol{s'^K_p}}{s_y + s^I_p}\dot{g} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s'^K_p}}{\bar{s}_y + s^I_p}\dot{g}$ (6-53)

＜塑性ひずみ球の諸量＞

塑性ひずみ球：$\Phi_e = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqrt{\left(\boldsymbol{e_p} - \boldsymbol{e_c}\right):\left(\boldsymbol{e_p} - \boldsymbol{e_c}\right)} - e_r \le 0$ (6-54)

塑性ひずみ球の半径：$\dot{e}_r = \dfrac{p\zeta_c}{F}\theta\dot{g}_o - \dfrac{\alpha p\zeta_c}{F}\theta\dot{g}_i$，　$F = F_o\left(1 + F_1\left(1 - \left|\dfrac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}} : \dfrac{\dot{\boldsymbol{e}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}:\dot{\boldsymbol{e}}}}\right|\right)\right)$ (6-55)

塑性ひずみ球の中心：$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{c}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\left(1 - \dfrac{p\zeta_c\theta}{F}\right)\dfrac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}}\dot{g}_o - \sqrt{\dfrac{3}{2}}\alpha\left(1 - \dfrac{p\zeta_c\theta}{F}\right)\dfrac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}}\dot{g}_i$ (6-56)

ここに、e_r は塑性ひずみ球の半径、$\boldsymbol{e_c}$ は塑性ひずみ球の中心表すテンソルである。また、α, F_o, F_1 は、定数であり、その意味については、2 および 3 章を参照されたい。また、塑性ひずみ球のルールを以下のように定義する。

$\Phi_e < 0$ の場合：$\dot{e}_r, \dot{s}^I < 0$，　$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{c}} \propto -\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$

$\Phi_e = 0$ の場合：$\dot{e}_r, \dot{s} > 0$，　$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{c}} \propto \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}$

また、球上で生じる変数は、$(\ )_o$、球内で生じる変数は $(\ )_i$ とし、$(\ ) = (\ )_o + (\ )_i$ が成り立つものとする。式(6-42)は塑性ひずみ球を考慮した場合の等方硬化則であり、詳細は 3 章および式(3-47)を参

照されたい。また、式(6-49)は、式(6-42)および式(6-13)に基づき導出された巨視的な等方硬化則である。

６.２.５　硬化則を考慮した巨視的モデルにおける修正方法

5.4 節では、硬化則を考慮していない巨視的モデルとサブレイヤーモデルの差異の主原因が微視的応力の方向の乱れであることを明らかにしたうえで、2 種類の修正方法の提案を行った。一つは、過去の微視的応力および平均塑性化応力の方向に対して微視的な諸量を別途計算し、バラつきを持たせる方法、二つ目は、微視的な諸量が区分的に連続的であると仮定し、区分的に巨視的評価を行う方法である。前者を修正方法 A、後者を修正方法 B とし、本項では、これらの修正方法を硬化則を考慮した巨視的モデルに拡張することを試みる。

＜修正方法 A＞

過去の微視的応力および平均塑性化応力の方向を微視的な諸量により近似する方法について説明するが、基本的には、5.4.2 項に硬化則に関する項を付与したものとなっている。また、5.4.2 項と同様、式の煩雑化を防ぐために現在の諸量には、6.2.1-6.2.4 項にて定義した諸式を用い、過去の諸量についてのみ再定義を行う。式(6-27)で定義したように、塑性領域における $\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)$ の方向は、全て除荷時の $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ の方向へと近似される。しかしながら、載荷パターンによっては、塑性領域における $\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)$ の方向が著しく乱れる可能性がある。そこで、過去の微視的応力の方向に対して次式のような近似を与える。

$$
{}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-{}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)=\frac{\boldsymbol{v}'}{\sqrt{\boldsymbol{v}':\boldsymbol{v}'}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sigma_y(\zeta)+\sigma^I(\zeta)\right) \tag{6-57}
$$

$$
\boldsymbol{v}'=\left(1-\left(\frac{\frac{1}{2}-\zeta}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)^{n_1}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}'\left(\frac{1}{2}\right)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}\left(\frac{1}{2}\right)\right)s+\left(\frac{\frac{1}{2}-\zeta}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)^{n_1}\left(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta_p)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta_p)\right) \tag{6-58}
$$

ここに、n_1 は定数である。式(6-57),(6-58)により過去の微視的応力の方向にバラつきを持たせることが可能となるが、$\left(\boldsymbol{\sigma}'(1/2)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(1/2)\right)$ および $\left(\boldsymbol{\sigma}'(-1/2)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(-1/2)\right)$ は、巨視的モデルにおいては本来、不明の諸量であるので別途計算が必要である。次に、${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ と同様に塑性領域における過去の平均塑性化応力 ${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta)$ の修正を行う。前項では、${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)$ を式(6-57)のように定義したため、${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta)=\int_{\zeta}^{\frac{1}{2}}{}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta/(1/2-\zeta)$ を求めると、除荷時の $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}$ および $\boldsymbol{s}'$ の値に矛盾が生じてしまう。こ

の矛盾を回避するために ${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta)$ を以下のように定義する。

$$ {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta) - {}^{pre}\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta) = \frac{\boldsymbol{w}'}{\sqrt{\boldsymbol{w}':\boldsymbol{w}'}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(s_y(\zeta) + s^I_p(\zeta)\right) \tag{6-59} $$

$$ \boldsymbol{w}' = \left(1 - \left(\frac{\frac{1}{2}-\zeta}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)^{n_2}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}'\left(\frac{1}{2}\right) - \boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}-\zeta}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\right)^{n_2}\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right) \tag{6-60} $$

ここに n_2 は定数であり、式(6-60)により ${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}}(\zeta) - {}^{pre}\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)$ の方向にバラつきを持たせつつ矛盾を回避することができる。ここで、$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}$ は既知であり、$\boldsymbol{\sigma}'(1/2)$は、前述のように別途計算する必要がある。

＜修正方法 B＞

5.4.3 項では区分的に微視的諸量が連続的であると仮定して区分的な巨視的評価を行い、近似式(5-37)の精度を向上させる修正方法の提案を行った。ここでは、前項において提案した硬化則を考慮した巨視的モデルに対してその修正方法を適用する。5.4.3 項と同様に全領域$(-1/2 \le \zeta \le 1/2)$を N 個に分割し、ζ 軸上の上から k 番目の領域を領域 $k\left(\zeta_{b,k} \le \zeta \le \zeta_{a,k}\right)$と定義する(Fig.5-19 参照)。次に、領域 k における各巨視的変数について述べる。なお、微視的な諸量は、6.2.1 項のものを用いるので参考にされたい。全領域における巨視的応力 $\boldsymbol{s}'$、領域 k における巨視的応力 $\boldsymbol{s}'_{,k}$,巨視的塑性ひずみ $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p},k}$,巨視的降伏応力 $s_{y,k}$, $\bar{s}_{y,k}$ については 5.4.3 項における定義と同一であるため詳細は割愛し、式のみを示す。

$$ \boldsymbol{s}' = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{s}'_{,k}\left(\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}\right) \tag{6-61} $$

$$ \boldsymbol{s}'_{,k} = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}}\int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}} \boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}}\int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}} 2G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)\right)d\zeta = 2G\left(\boldsymbol{e}' - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p},k}\right) \tag{6-62} $$

$$ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p},k} = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}}\int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{p}}(\zeta)d\zeta \tag{6-63} $$

$$ s_{y,k} = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{p,k}}\int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}} \sigma_y(\zeta)d\zeta, \quad \bar{s}_{y,k} = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k}}\int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}} \sigma_y(\zeta)d\zeta \tag{6-64),(6-65} $$

ここに、$\zeta_{p,k}$ は、領域 k における弾性領域$\left(\zeta_{b,k} < \zeta \le \zeta_{p,k}\right)$と塑性領域$\left(\zeta_{p,k} \le \zeta \le \zeta_{a,k}\right)$の境界である。

なお、領域 k における変数を $(*)_{,k}$ で表すものとする。続いて、領域 k における巨視的な等方硬化則および移動硬化則は式(6-13),(6-14),式(6-39),(6-40)より次式のように定義される。

$$\dot{s}_{p,k}^{I}=\frac{1}{\zeta_{a,k}-\zeta_{p,k}}\int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}}\dot{\sigma}^{I}(\zeta)d\zeta=-p\left\{\frac{1}{2}\left(\zeta_{a,k}+\zeta_{p,k}\right)-\zeta_{c}\right\}\theta\dot{g} \tag{6-66}$$

$$\dot{s}_{,k}^{I}=\frac{1}{\zeta_{a,k}-\zeta_{b,k}}\int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}}\dot{\sigma}^{I}(\zeta)d\zeta=-p\left\{\frac{1}{2}\left(\zeta_{a,k}+\zeta_{b,k}\right)-\zeta_{c}\right\}\theta\dot{g} \tag{6-67}$$

$$\dot{\boldsymbol{s}}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}=\frac{1}{\zeta_{a,k}-\zeta_{p,k}}\int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^{K}(\zeta)d\zeta=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\dot{g}-\dot{s}_{p,k}^{I}\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k}}} \tag{6-68}$$

$$\dot{\boldsymbol{s}}'^{\boldsymbol{K}}_{,k}=\frac{1}{\zeta_{a,k}-\zeta_{b,k}}\int_{\zeta_{b,k}}^{\zeta_{a,k}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^{K}(\zeta)d\zeta=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(K\dot{g}-\dot{s}_{,k}^{I}\right)\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k}}} \tag{6-69}$$

$$\dot{g}=\sum_{k=1}^{N}\dot{g}_{,k}\left(\zeta_{a,k}-\zeta_{b,k}\right) \tag{6-70}$$

ここに、$\dot{s}_{p,k}^{I},\dot{\boldsymbol{s}}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}$ はそれぞれ塑性領域 $\left(\zeta_{p,k}\le\zeta\le\zeta_{a,k}\right)$ における $\dot{\sigma}^{I},\dot{\boldsymbol{\sigma}}'^{K}$ の平均であり、$\dot{s}_{,k}^{I},\dot{\boldsymbol{s}}'^{\boldsymbol{K}}_{,k}$ は領域 $k\left(\zeta_{b,k}\le\zeta\le\zeta_{a,k}\right)$ における平均である。また、g は全領域における塑性進展パラメータであり、$g_{,k}$ は領域 k における塑性進展パラメータである。$g_{,k}$ については後に詳述する。なお、等方硬化則および移動硬化則が、$\dot{g}$ の関数であることに注意されたい。

続いて、$s_{p,k}^{I},s_{y,k},\bar{s}_{y,k}$ の間を関係づける変数として $d_{p,k}$ および $d_{p,k},\zeta_{p,k}$ 間の関係を表す変数 $D_{p,k}$ を次のように定義する。

$$s_{y,k}+s_{p,k}^{I}=\left(1-d_{p,k}\right)\left(\bar{s}_{y,k}+s_{p,k}^{I}\right) \tag{6-71}$$

$$\zeta_{a,k}-\zeta_{p,k}=1-D_{p,k}d_{p,k} \tag{6-72}$$

式(6-71)より $s_{y,k}+s_{p,k}^{I}$ は、$\zeta_{p,k}\to\zeta_{b,k}$ となるにつれて $\bar{s}_{y,k}+s_{p,k}^{I}$ に等しくなることが分かる。従って、式(6-71)より $\zeta_{p,k}\to\zeta_{b,k}$ のとき $d_{p,k}\to 0$ となる関数であることが理解される。続いて、領域 k における巨視的な応力として $\boldsymbol{s}'_{p,k},\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}$ を以下のように定義する。

$$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}=\frac{1}{\zeta_{a,k}-\zeta_{p,k}}\int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)d\zeta,\quad \bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}=\frac{\bar{s}_{y,k}+s_{p,k}^{I}}{s_{y,k}+s_{p,k}^{I}}\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}\right)=\frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}}{1-d_{p,k}} \tag{6-73),(6-74}$$

$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}$ は領域 k における平均塑性化応力、$\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}$ は投影応力である。式(6-74)と $d_{p,k}$ の性質から、$\zeta_{p,k}\to\zeta_{b,k}$ となるにつれて $\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}$ と $\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}$ は一致することが分かる。ここで、式(6-73)と(6-74)

において過去の履歴を考慮すると、$\boldsymbol{s}'_{p,k}, \bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}$ は次式のように表される。

$$\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{p,k}} \int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}} \left[2G \left\{ {}^{cur}\boldsymbol{e}' - {}^{cur}\boldsymbol{\varepsilon}_p(\zeta) \right\} + {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) \right] d\zeta = 2G\,{}^{cur}\boldsymbol{e}' - \frac{2G(\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k})}{\zeta_{a,k} - \zeta_{p,k}} {}^{cur}\boldsymbol{e}_{p,k} + {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} \quad (6\text{-}75)$$

$${}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}(\zeta_{p,k}) = \frac{1}{\zeta_{a,k} - \zeta_{p,k}} \int_{\zeta_{p,k}}^{\zeta_{a,k}} {}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) d\zeta \quad (6\text{-}76)$$

$$\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k} = \frac{2G\,{}^{cur}\boldsymbol{e}' - \dfrac{2G(\zeta_{a,k} - \zeta_{b,k})}{\zeta_{a,k} - \zeta_{p,k}} {}^{cur}\boldsymbol{e}_{p,k} + {}^{pre}\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}}{1 - d_{p,k}} + \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k} \quad (6\text{-}77)$$

次に、近似式を導入することによって巨視的な降伏条件式および塑性流れ則の導出を行う。はじめに、式(6-27)と同様に、領域 k 内の塑性領域での微視的応力の方向を以下のように近似する。

$$\boldsymbol{\sigma}'(\zeta) - \boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta) \approx \frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}}{\sqrt{(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}) : (\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k})}} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sigma_y(\zeta) + \sigma^I(\zeta) \right) \quad (\zeta_{p,k} \le \zeta \le \zeta_{a,k}) \quad (6\text{-}78)$$

式(6-78)の両辺を塑性領域において積分し、$\sqrt{(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}) : (\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k})}$ を求めると巨視的な降伏条件式が次式のように導かれる。

$$\Phi_{p,k} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}) : (\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k})} - (s_{y,k} + s^I_{p,k}) = 0 \quad (6\text{-}79a)$$

また、式(6-75),(6-71)より式(6-79a)は次式のようにも書ける。

$$\bar{\Phi}_{,k} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}) : (\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k})} - (\bar{s}_{y,k} + s^I_{p,k}) = 0 \quad (6\text{-}79b)$$

式(6-79)は、巨視的変数により構成されていることから巨視的な降伏条件式であると言える。次に、式(6-30)と同様、領域 k における巨視的な塑性流れ則の導出のために塑性散逸項を以下のように定義する。

$$\Lambda_{,k} = (\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}) : \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k} \ge 0 \quad (6\text{-}80)$$

式(6-79)および(6-80)よりラグラジアン $L_{,k}$ を次式のように定義する。

$$L_{,k} = -\Lambda_{,k} + \Phi_{p,k}\dot{g}_{,k} \quad (6\text{-}81)$$

ここに、$\dot{g}_{,k}$ はラグランジュの未定定数である。式(6-81)と最大塑性散逸の原理から次式が導かれる。

$$\frac{\partial L_{,k}}{\partial\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}\right)}=-\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k}+\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}}{\sqrt{\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}\right):\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}\right)}}\dot{g}_{,k}=0 \tag{6-82}$$

従って、式(6-82)より領域 k における巨視的塑性流れ則が次のように導出される。

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p},k}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}}{\sqrt{\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}\right):\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p},k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}\right)}}\dot{g}_{,k}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}}{\sqrt{\left(\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}\right):\left(\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}\right)}}\dot{g}_{,k}=\frac{3}{2}\frac{\bar{\boldsymbol{s}}'_{,k}-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p},k}}{\bar{s}_{y,k}+s^{I}_{p,k}} \tag{6-83}$$

従って、$g_{,k}$ は領域 k における塑性進展パラメータであることが理解される。以上より領域 k における巨視的な諸量が求められた。塑性ひずみ球に関しては、式(6-54)-(6-56)と同一であるため記述は割愛する。本項では、5.4 節にて提案した硬化則を考慮していない巨視的モデルに対する二つの修正方法を硬化則を考慮した巨視的モデルに拡張した。これらの修正方法の妥当性については、6.3.7 項において数値解析結果を通して検証する。

６.３　特殊な応力場に対する巨視的モデルの縮約

建築構造物の塑性変形挙動を詳細にシミュレーションする際には、部材が主に薄肉断面で構成されていることからシェル要素が多用される。また、多軸応力状態における要素実験を実施する際には、その簡便さから円筒試験片にねじりおよび軸力を作用させ、試験片中央部において近似的にせん断応力および軸応力のみが生じる応力状態(本章では軸・せん断応力状態とよぶ)を想定することが多い。従って、材料構成則を平面応力状態および軸・せん断応力状態へ縮約することは、実用的な観点およびモデルの妥当性を検証するために重要な意味を持つ。本節では、6.2 節で提案した硬化則を考慮した巨視的モデルの軸・せん断応力状態への縮約について述べる。なお、平面応力状態への縮約は、軸・せん断応力状態への縮約と類似しているため Appendix3 にて述べる。

６.３.１　縮約の条件に基づく各レイヤーの特性

6.2.1-6.2.4 項で提案した硬化則を考慮した巨視的モデルの軸・せん断応力状態への縮約を行う。本節で用いる変数は、6.2.1-6.2.4 項と同一の記号を用いる。微視的応力および微視的塑性ひずみに対して軸・せん断応力状態の条件は次のように表される。

$$\sigma_{22}(\zeta)=\sigma_{33}(\zeta)=\sigma_{23}(\zeta)=\sigma_{13}(\zeta)=\sigma_{22}^{K}(\zeta)=\sigma_{33}^{K}(\zeta)=\sigma_{23}^{K}(\zeta)=\sigma_{13}^{K}(\zeta)=0 \tag{6-84a}$$

$$\dot{\varepsilon}_{p22}=\dot{\varepsilon}_{p33}=-\dot{\varepsilon}_{p11}/2 \tag{6-84b}$$

式(6-84b)の導出には、体積一定条件を用いている。本項では、$[*]$を二次の正方行列、$\{*\}$は二次のベクトルを表すものとする。例えば、微視的な弾性構成則は式(6-84)より次式のように表される。

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\zeta)\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}(\zeta)\\ \sigma_{12}(\zeta)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & G\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}(\zeta)-\varepsilon_{p11}(\zeta)\\ 2\varepsilon_{12}(\zeta)-2\varepsilon_{p12}(\zeta)\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{D_e}]\left(\{\boldsymbol{\varepsilon}(\zeta)\}-\{\boldsymbol{\varepsilon}_p(\zeta)\}\right) \tag{6-85}$$

$$[\boldsymbol{D_e}]=\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & G\end{bmatrix} \tag{6-86}$$

また、本節では式(6-85)に示すように、ひずみを表すベクトルは、12 成分に 2 を乗ずるものとする。式(6-84)を考慮すると、6.2.1 項における各レイヤーの特性は以下のように表される。

等方硬化則：$\dot{\sigma}^{I}(\zeta)=-p(\zeta-\zeta_c)\theta\dot{g}$ (6-87)

移動硬化則：$\begin{Bmatrix}\dot{\sigma}_{11}^{K}(\zeta)\\ \dot{\sigma}_{12}^{K}(\zeta)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{3}{2}\dot{\sigma}_{11}^{\prime K}(\zeta)\\ \dot{\sigma}_{12}^{\prime K}(\zeta)\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{K\dot{g}-\dot{\sigma}^{I}(\zeta)}{\sqrt{\frac{3}{2}\dot{e}_{p11}{}^{2}+2\dot{e}_{p12}{}^{2}}}\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{e}_{p11}\\ 2\dot{e}_{p12}\end{Bmatrix}$ (6-88)

降伏条件式：$\phi(\zeta)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\sigma_{11}(\zeta)-\sigma_{11}^{K}(\zeta)\right)^{2}+2\left(\sigma_{12}(\zeta)-\sigma_{12}^{K}(\zeta)\right)^{2}}-\left(\sigma_{y}(\zeta)+\sigma^{I}(\zeta)\right)\leq 0$

(6-89)

塑性流れ則：$\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_{p11}(\zeta)\\ 2\dot{\varepsilon}_{p12}(\zeta)\end{Bmatrix}=\frac{3}{2}\frac{\dot{\gamma}(\zeta)}{\sigma_{y}(\zeta)+\sigma^{I}(\zeta)}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}(\zeta)-\sigma_{11}^{K}(\zeta)\\ \sigma_{12}(\zeta)-\sigma_{12}^{K}(\zeta)\end{Bmatrix}$ (6-90)

塑性負荷条件：$\phi(\zeta)=\dot{\phi}(\zeta)=0,\quad \phi(\zeta)\dot{\gamma}(\zeta)=0,\quad \dot{\gamma}(\zeta)\geq 0$ (6-91)

式(6-89)の導出には、$\sigma_{22}^{\prime}(\zeta)=\sigma_{33}^{\prime}(\zeta)=-\sigma_{11}^{\prime}(\zeta)/2$ および $\sigma_{11}^{\prime}(\zeta)=2/3\sigma_{11}(\zeta)$ を用いている。

６.３.２　巨視的弾性構成則、巨視的応力および巨視的硬化則

軸・せん断応力状態に対する巨視的変数について述べる。巨視的応力 s_{ij} および巨視的塑性ひずみ e_{pij} は、式 (6-7),(6-10)および式(6-85)を積分することによって次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix}s_{11}\\ s_{12}\end{Bmatrix}=\left[\boldsymbol{D_e}\right]\begin{Bmatrix}e_{11}-e_{p11}\\ 2e_{12}-2e_{p12}\end{Bmatrix} \tag{6-92}$$

ここに、サブレイヤーモデルの性質より各レイヤーのひずみ $\varepsilon_{ij}(\zeta)=\text{constant}=e_{ij}$ となることを用いている。続いて、平均塑性化応力は式(6-19),(6-24)より次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix}s_{p11}\\ s_{p12}\end{Bmatrix}=\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left(\begin{Bmatrix}{}^{cur}e_{11}\\ 2{}^{cur}e_{12}\end{Bmatrix}-\frac{1}{1-D_p d_p}\begin{Bmatrix}{}^{cur}e_{p11}\\ 2{}^{cur}e_{p12}\end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix}{}^{pre}s_{p11}\\ {}^{pre}s_{p12}\end{Bmatrix} \tag{6-93}$$

ここに、$\sigma_{11}(\zeta)=E\left({}^{cur}e_{11}-{}^{cur}\varepsilon_{p11}(\zeta)\right)+{}^{pre}\sigma_{11}(\zeta)$ および $\sigma_{12}(\zeta)=2G\left({}^{cur}e_{12}-{}^{cur}\varepsilon_{p12}(\zeta)\right)+{}^{pre}\sigma_{12}(\zeta)$ を用いている。投影応力 $\bar{s}_{ij}$ は式(6-20)より次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix}\bar{s}_{11}\\ \bar{s}_{12}\end{Bmatrix}=\frac{1}{1-d_p}\left(\begin{Bmatrix}s_{p11}\\ s_{p12}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}s_{p11}^{K}\\ s_{p12}^{K}\end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix}s_{p11}^{K}\\ s_{p12}^{K}\end{Bmatrix} \tag{6-94}$$

式(6-13),(6-14),(6-39),(6-40)より巨視的移動硬化則および巨視的等方硬化則は次式のようになる。

$$\dot{s}_{p}^{I}=-p\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\zeta_{p}\right)-\zeta_{c}\right\}\theta\dot{g} \tag{6-95}$$

$$\dot{s}^I = p\zeta_c\theta\dot{g} \tag{6-96}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{s}_{p11}^K \\ \dot{s}_{p12}^K \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{K\dot{g} - \dot{s}_p^I}{\sqrt{\frac{3}{2}\dot{e}_{p11}{}^2 + 2\dot{e}_{p12}{}^2}} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e}_{p11} \\ 2\dot{e}_{p12} \end{Bmatrix} \tag{6-97}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{s}_{11}^K \\ \dot{s}_{12}^K \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{K\dot{g} - \dot{s}^I}{\sqrt{\frac{3}{2}\dot{e}_{p11}{}^2 + 2\dot{e}_{p12}{}^2}} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e}_{p11} \\ 2\dot{e}_{p12} \end{Bmatrix} \tag{6-98}$$

６.３.３　巨視的降伏条件および巨視的塑性流れ則

巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則について述べる。軸・せん断応力状態において巨視的降伏条件式は式(6-29)より次式のようになる。

$$\Phi_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\left\{\boldsymbol{s_p} - \boldsymbol{s_p^K}\right\}^T \left[\boldsymbol{P}\right] \left\{\boldsymbol{s_p} - \boldsymbol{s_p^K}\right\}} - \left(s_y + s_p^I\right) \le 0 \tag{6-99a}$$

$$\overline{\Phi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s_p^K}\right\}^T \left[\boldsymbol{P}\right] \left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s_p^K}\right\}} - \left(\bar{s}_y + s_p^I\right) \le 0 \tag{6-99b}$$

$$\left[\boldsymbol{P}\right] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{6-100}$$

ここに、$s'_{p11} = 2s_{p11}/3, \bar{s}'_{11} = 2\bar{s}_{11}/3, s'_{p22} = s'_{p33} = -s'_{p11}/2, \bar{s}'_{22} = \bar{s}'_{33} = -\bar{s}'_{11}/2, s'_{p12} = s_{p12}, \bar{s}'_{12} = \bar{s}_{12}$を用いている。続いて、巨視的な塑性流れ則は、式(6-35)より次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_{p11} \\ 2\dot{e}_{p12} \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} \frac{\dot{g}}{\bar{s}_y + s_p^I} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{s}'_{11} - s'^K_{p11} \\ \bar{s}'_{12} - s'^K_{p12} \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} \frac{\dot{g}}{\bar{s}_y + s_p^I} \left[\boldsymbol{P}\right] \begin{Bmatrix} \bar{s}_{11} - s^K_{p11} \\ \bar{s}_{12} - s^K_{p12} \end{Bmatrix} \tag{6-101}$$

ここに、gは巨視的塑性進展パラメータである。次に、数値解析アルゴリズム構築の関係上、巨視的降伏条件式を次式のように書きなおす。

$$\hat{\Phi}_p = \frac{1}{2} \left\{\boldsymbol{s_p} - \boldsymbol{s_p^K}\right\}^T \left[\boldsymbol{P}\right] \left\{\boldsymbol{s_p} - \boldsymbol{s_p^K}\right\} - \frac{1}{3} \left(s_y + s_p^I\right)^2 = 0 \tag{6-102a}$$

$$\hat{\overline{\Phi}} = \frac{1}{2} \left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s_p^K}\right\}^T \left[\boldsymbol{P}\right] \left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s_p^K}\right\} - \frac{1}{3} \left(\bar{s}_y + s_p^I\right)^2 = 0 \tag{6-102b}$$

ここに、$\hat{\Phi}_p, \hat{\overline{\Phi}}$ は、$\Phi_p, \overline{\Phi}$ と区別を行うための記号であるが、これらは、本質的には同一である。

式(6-102)を用いると、巨視的塑性流れ則 $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} = \dfrac{\partial \hat{\bar{\Phi}}}{\partial\left({}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}' - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}'^{\boldsymbol{K}}\right)}\dot{\hat{g}}$ は次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_{p11} \\ 2\dot{e}_{p12} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{P}] \begin{Bmatrix} \bar{s}_{11} - s_{p11}^{K} \\ \bar{s}_{12} - s_{p12}^{K} \end{Bmatrix} \dot{\hat{g}} \tag{6-103}$$

従って、式(6-101),(6-103)より $\dot{\hat{g}}$ と $\dot{g}$ の関係は次のように導出される。

$$\dot{g} = \frac{2}{3}\left(\bar{s}_y + s_p^I\right)\dot{\hat{g}} \tag{6-104}$$

さらに、式(6-104)を用いると、巨視的移動硬化則および巨視的等方硬化則は以下のように書き直される。

$$\dot{s}_p^I = -p\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \zeta_p\right) - \zeta_c\right\}\frac{2}{3}\theta\left(\bar{s}_y + s_p^I\right)\dot{\hat{g}} \tag{6-105}$$

$$\dot{s}^I = \frac{2}{3}p\zeta_c\theta\left(\bar{s}_y + s_p^I\right)\dot{\hat{g}} \tag{6-106}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{s}_{p11}^{K} \\ \dot{s}_{p12}^{K} \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}\left(K - \frac{ds_p^I}{dg}\right)\begin{Bmatrix} \bar{s}_{11} - s_{p11}^{K} \\ \bar{s}_{12} - s_{p12}^{K} \end{Bmatrix}\dot{\hat{g}} = [\boldsymbol{R}_1]\left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}\dot{\hat{g}} \tag{6-107}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{s}_{11}^{K} \\ \dot{s}_{12}^{K} \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}\left(K - \frac{ds^I}{dg}\right)\begin{Bmatrix} \bar{s}_{11} - s_{p11}^{K} \\ \bar{s}_{12} - s_{p12}^{K} \end{Bmatrix}\dot{\hat{g}} = [\boldsymbol{R}_2]\left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}\dot{\hat{g}} \tag{6-108}$$

$$[\boldsymbol{R}_1] = \frac{2}{3}\left(K - \frac{ds_p^I}{dg}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{R}_2] = \frac{2}{3}\left(K - \frac{ds^I}{dg}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6-109),(6-110}$$

以上により、軸・せん断応力状態に対する巨視的モデルの基礎式が求められた。なお、塑性ひずみ球に関しては、6.2.4 項の各諸量のまとめを参照されたい。

６.３.４　数値解析アルゴリズム

前項で誘導した軸・せん断応力状態に対する巨視的モデルの基礎式を用いて数値解析アルゴリズムを構築する。時刻 t の諸量および ${}^{t+\Delta t}e_{11}, {}^{t+\Delta t}e_{12}$ は既知とし、時刻 $t+\Delta t$ における他の諸量を算定する手順を示す。ここで、時刻 t における諸量は ${}^{t}(\ )$ と表し、${}^{t+\Delta t}(\ ) = {}^{t}(\ ) + \Delta(\ )$ とする。また、過去の諸量 ${}^{pre}(\ )$ についても既知であるとする。基本的な考え方は、Return mapping rule に準じている。降伏応力分布によって異なる $s_y, \bar{s}_y, D_p, d_p$ の求め方は、Appendix2 に記す。

変数 ${}^{t+\Delta t}\zeta_p$ の算出：変数 ${}^{t+\Delta t}\zeta_p$ の算出は、式(6-23)を ${}^{t+\Delta t}\zeta_p$ に対して解くことにより行われる。このとき、5.3.1 項で述べたのと同様、過去の微視的応力 ${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'$ を参照点毎に記憶するものとする。

弾性予測子：増分区間において、塑性化が進展しないもの$\left({}^{trial}\boldsymbol{e_p}={}^{t}\boldsymbol{e_p}\right)$として各諸量の試行値${}^{trial}(\ )$を計算する。${}^{trial}\boldsymbol{s}$, ${}^{trial}\boldsymbol{s_p}$, ${}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}$ は式(6-92),(6-93),(6-94)より次式のように表される。

$$\left\{{}^{trial}\boldsymbol{s}\right\}=\begin{Bmatrix}{}^{trial}s_{11}\\{}^{trial}s_{12}\end{Bmatrix}=\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left(\begin{Bmatrix}{}^{t+\Delta t}e_{11}\\2{}^{t+\Delta t}e_{12}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}{}^{t}e_{p11}\\2{}^{t}e_{p12}\end{Bmatrix}\right)=\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left(\left\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}\right\}-\left\{{}^{t}\boldsymbol{e_p}\right\}\right) \tag{6-111}$$

$$\left\{{}^{trial}\boldsymbol{s_p}\right\}=\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left(\left\{{}^{t+\Delta t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e}\right)\right\}-\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p}\left\{{}^{t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e_p}\right)\right\}\right)+\left\{{}^{pre}\boldsymbol{s_p}\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)\right\} \tag{6-112}$$

$$\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}\right\}=\frac{\left[\boldsymbol{D_e}\right]}{1-d_p}\left(\left\{{}^{t+\Delta t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e}\right)\right\}-\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p}\left\{{}^{t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e_p}\right)\right\}\right)+\frac{\left\{{}^{pre}\boldsymbol{s_p}\left({}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)\right\}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}-\frac{{}^{t+\Delta t}d_p}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left\{{}^{t}\boldsymbol{s_p^K}\right\} \tag{6-113}$$

弾塑性判定：降伏条件式の試行値${}^{trial}\hat{\Phi}$を用いて弾塑性判定を行う。

$${}^{trial}\hat{\Phi}=\frac{1}{2}\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}-\frac{1}{3}\left(\bar{s}_y+{}^{t}s_p^I\right)^2 \tag{6-114}$$

${}^{trial}\hat{\Phi}<0$のとき、弾性状態であるので試行値を正解として終了。

${}^{trial}\hat{\Phi}\geq 0$のとき、塑性変形が生じているので塑性修正子を実行する。

塑性修正子：増分区間で塑性化が進展していることが明らかとなったので、塑性化を考慮した真の巨視的応力を求める。時刻$t+\Delta t$における各諸量は、次式のように表される。

$$\left\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}\right\}=\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e_p}\right\}=\left\{{}^{trial}\boldsymbol{s}\right\}-\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{\Delta\boldsymbol{e_p}\right\} \tag{6-115}$$

$$\left\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p}\right\}=\left\{{}^{trial}\boldsymbol{s_p}\right\}-\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p}\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{\Delta\boldsymbol{e_p}\right\} \tag{6-116}$$

$$\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}\right\}=\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}\right\}-\frac{1}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{\Delta\boldsymbol{e_p}\right\}-\frac{{}^{t+\Delta t}d_p}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left\{\Delta\boldsymbol{s_p^K}\right\} \tag{6-117}$$

式(6-105)-(6-110)より巨視的等方硬化則および移動硬化則は次式のように表される。

$$\Delta s_p^I=-\frac{2}{3}p\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+{}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)-\zeta_c\right\}\theta\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)\Delta\hat{g}\ ,\quad \Delta s^I=\frac{2}{3}p\zeta_c\theta\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)\Delta\hat{g} \tag{6-118),(6-119}$$

$$\left\{\Delta\boldsymbol{s_p^K}\right\}=\left[\boldsymbol{R}_1\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}\Delta\hat{g}\ ,\quad \left\{\Delta\boldsymbol{s^K}\right\}=\left[\boldsymbol{R}_2\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}\Delta\hat{g} \tag{6-120),(6-121}$$

式(6-103)より塑性流れ則は次式のように表される

$$\left\{\Delta\boldsymbol{e_p}\right\}=\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}\Delta\hat{g} \tag{6-122}$$

式(6-117),(6-120)より$\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}$が次のように得られる。

$$\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}=\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}-\left(\frac{1}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left[\boldsymbol{P}\right]+\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left[\boldsymbol{R}_1\right]\right)\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}\Delta\hat{g}$$

(6-123)

式(6-123)を整理すると次式が導かれる。

$$\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}=\left[\boldsymbol{A}\right]\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\} \tag{6-124}$$

$$\left[\boldsymbol{A}\right]=\left(\left[\boldsymbol{I}\right]+\left[\boldsymbol{B}\right]\Delta\hat{g}\right)^{-1} \tag{6-125}$$

$$\left[\boldsymbol{B}\right]=\frac{1}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left[\boldsymbol{P}\right]+\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left[\boldsymbol{R}_1\right] \tag{6-126}$$

ここに、$\left[\boldsymbol{I}\right]$は二階の単位行列である。$\left[\boldsymbol{A}\right]$を展開すると次のようになる。

$$\left[\boldsymbol{A}\right]=\begin{bmatrix}1+\frac{2}{3}\frac{K-\frac{ds_p^I}{dg}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\Delta\hat{g}+\frac{2E\Delta\hat{g}}{3\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p{}^{t+\Delta t}d_p\right)} & 0\\ 0 & 1+\frac{2}{3}\frac{K-\frac{ds_p^I}{dg}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\Delta\hat{g}+\frac{2G\Delta\hat{g}}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\end{bmatrix}^{-1}$$

(6-127)

従って、式(6-101)より$\left[\boldsymbol{A}\right]$の各成分は次式のように表される。

$$A_{11}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}\frac{K-\frac{ds_p^I}{dg}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\Delta\hat{g}+\frac{2E\Delta\hat{g}}{3\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p{}^{t+\Delta t}d_p\right)}},\quad A_{22}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}\frac{K-\frac{ds_p^I}{dg}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\Delta\hat{g}+\frac{2G\Delta\hat{g}}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p{}^{t+\Delta t}d_p\right)}}$$

(6-128a),(6-128b)

式(6-124)を用いると、時刻$t+\Delta t$の降伏条件式${}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}$は次式のようになる。

$${}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}=\frac{1}{2}\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}^T\left[\boldsymbol{A}\right]^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left[\boldsymbol{A}\right]\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}-\frac{1}{3}\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)^2=\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{3}\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)^2 \tag{6-129}$$

$$\xi=\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}^T\left[\boldsymbol{A}\right]^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left[\boldsymbol{A}\right]\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\} \tag{6-130}$$

式(6-130)を展開すると、次式のようになる。

$$\xi=\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}^T\left[\boldsymbol{A}\right]^2\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}=\left({}^{trial}\bar{s}_{11}-{}^{t}s_{p11}^K\right)^2A_{11}{}^2P_{11}+\left({}^{trial}\bar{s}_{12}-{}^{t}s_{p12}^K\right)^2A_{22}{}^2P_{22} \tag{6-131}$$

式(6-131)に式(6-128a),(6-128b)を代入すると、

$$\xi = \frac{2}{3}\left\{\frac{{}^{trial}\bar{s}_{11} - {}^{t}s_{p11}^{K}}{1 + \frac{2}{3}\frac{K - \frac{ds_p^I}{dg}}{1 - {}^{t+\Delta t}d_p}\Delta\hat{g} + \frac{2E\Delta\hat{g}}{3\left(1 - {}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1 - {}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}}\right\}^2 + 2\left\{\frac{{}^{trial}\bar{s}_{12} - {}^{t}s_{p12}^{K}}{1 + \frac{2}{3}\frac{K - \frac{ds_p^I}{dg}}{1 - {}^{t+\Delta t}d_p}\Delta\hat{g} + \frac{2G\Delta\hat{g}}{\left(1 - {}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1 - {}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}}\right\}^2$$

(6-132)

次に、Newton-Raphson 法を用いて、式(6-129)を $\Delta\hat{g}$ について解くことを考える。まず、${}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}$ を一次の微係数を用いて線形化すると次式のようになる。

$${}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}\left(\Delta\hat{g} + \delta\Delta\hat{g}\right) = {}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}\left(\Delta\hat{g}\right) + \frac{d\,{}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}\left(\Delta\hat{g}\right)}{d\Delta\hat{g}}\delta\Delta\hat{g} = 0 \tag{6-133}$$

式(6-133)より次式が導かれる。

$$\delta\Delta\hat{g} = -\frac{{}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}\left(\Delta\hat{g}\right)}{\frac{d\,{}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}\left(\Delta\hat{g}\right)}{d\Delta\hat{g}}} \tag{6-134}$$

式(6-134)により $\delta\Delta\hat{g}$ を求めて、各値を更新する。

$$\Delta\hat{g} = \Delta\hat{g} + \delta\Delta\hat{g} \tag{6-135}$$

式(6-134),(6-135)により $\Delta\hat{g}$ を更新する。続いて、$\frac{d\,{}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}}{d\Delta\hat{g}}$ を具体的に求める。$\frac{d\,{}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}}{d\Delta\hat{g}}$ は式(6-129)より次式のようになる。

$$\frac{d\,{}^{t+\Delta t}\hat{\bar{\Phi}}}{d\Delta\hat{g}} = \frac{1}{2}\frac{d\xi}{d\Delta\hat{g}} - \frac{2}{3}\left(\bar{s}_y + {}^{t+\Delta t}s_p^I\right)\frac{ds_p^I}{d\Delta\hat{g}} \tag{6-136}$$

$\frac{d\xi}{d\Delta\hat{g}}$ は式(6-132)より

$$\frac{d\,{}^{t+\Delta t}\xi}{d\Delta\hat{g}} = -\frac{4}{3}\frac{\left(\frac{2}{3}\frac{K - \frac{ds_p^I}{dg}}{1 - {}^{t+\Delta t}d_p} - \frac{2}{3}\frac{\frac{d}{d\Delta\hat{g}}\left(\frac{ds_p^I}{dg}\right)}{1 - {}^{t+\Delta t}d_p}\Delta\hat{g} + \frac{2E}{3\left(1 - {}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1 - {}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\right)\left({}^{trial}\bar{s}_{11} - {}^{t}s_{p11}^{K}\right)^2}{\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{K - \frac{ds_p^I}{dg}}{1 - {}^{t+\Delta t}d_p}\Delta\hat{g} + \frac{2E\Delta\hat{g}}{3\left(1 - {}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1 - {}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\right\}^3}$$

$$-4\frac{\left(\frac{2}{3}\frac{K-\frac{ds_p^I}{dg}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}-\frac{2}{3}\frac{\frac{d}{d\Delta\hat{g}}\left(\frac{ds_p^I}{dg}\right)}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}+\frac{2G}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\right)\left({}^{trial}\bar{s}_{12}-{}^{t}s_{p12}^{K}\right)^2}{\left\{1+\frac{2}{3}\frac{K-\frac{ds_p^I}{dg}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\Delta\hat{g}+\frac{2G\Delta\hat{g}}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\right\}^3} \quad (6\text{-}137)$$

式(6-133)-(6-1137)を用いて繰返し計算を実施し、$\Delta\hat{g}$ および Δg を求める。

<u>塑性ひずみ球の判定式</u>：ここで、$\Delta g_i=\Delta g$ と仮定し、${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}_{ci}$ および ${}^{t+\Delta t}e_{ri}$ を求め、${}^{t+\Delta t}\Phi_e=\left|{}^{t+\Delta t}e_p-{}^{t+\Delta t}e_{ci}\right|-{}^{t+\Delta t}e_{ri}$ により ${}^{t+\Delta t}e_p$ が塑性領域内外どちらに位置するかを判定する。

${}^{t+\Delta t}\Phi_e<0$ のとき、$\Delta g_i=\Delta g$, $\Delta g_o=0$ である。

${}^{t+\Delta t}\Phi_e\geq 0$ のとき、$\Delta g_o\neq 0$ であるので、Δg_i および Δg_o の真値を求める必要がある。従って、次式が成り立つ必要がある。

$${}^{t+\Delta t}\Phi_e=\frac{2}{3}\sqrt{\left({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e_p}-{}^{t}\boldsymbol{e_c}-\Delta\boldsymbol{e_c}(\Delta g_o)\right):\left({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e_p}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e_c}-\Delta\boldsymbol{e_c}(\Delta g_o)\right)}-{}^{t}e_r-\Delta e_r(\Delta g_o)=0 \quad (6\text{-}138)$$

$\Delta\boldsymbol{e_c}$, Δe_r は Δg_o の関数であるので、式(6-138)を Newton-Raphson 法を用いて解く。得られた Δg_o , Δg_i を基に各諸量を更新する。

６.３.５　接線係数テンソル

増分形に整合性のある接線係数テンソルの導出を行う。式(6-115),(6-122)より巨視的応力の微分をとると次式のようになる。

$$\left\{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}\right\}=\left\{d^{trial}\boldsymbol{s}\right\}-[\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{P}]\left\{d^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}\Delta\hat{g}+[\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{P}]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}d\Delta\hat{g} \quad (6\text{-}139)$$

$$\left\{\bar{\boldsymbol{b}}\right\}=\left\{\bar{\boldsymbol{s}}-\boldsymbol{s_p^K}\right\} \quad (6\text{-}140)$$

ここで、降伏条件式の微分とると次式のようになる。

$$d^{t+\Delta t}\hat{\Phi}=\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}^T[\boldsymbol{P}]\left\{d^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}-\frac{2}{3}\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)d^{t+\Delta t}s_p^I \quad (6\text{-}141)$$

式(6-124)の微分をとると次式のようになる。

$$\left\{d^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}=\left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}-[\boldsymbol{B}]\left\{d^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}\Delta\hat{g}-[\boldsymbol{B}]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}d\Delta\hat{g} \quad (6\text{-}142)$$

式(6-142)より $\left\{d^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}$ が次式のように導かれる。

$$\left\{d^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}=\left[\boldsymbol{A}\right]\left(\left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}-\left[\boldsymbol{B}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}d\Delta\hat{g}\right) \tag{6-143}$$

また、 $d^{t+\Delta t}s_p^I$ は、式(6-118)より次式のようになる。

$$d^{t+\Delta t}s_p^I=-\frac{2p\theta}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+{}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)-\zeta_c\right\}\left\{\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)d\Delta\hat{g}+d^{t+\Delta t}s_p^I\Delta\hat{g}\right\} \tag{6-144}$$

式(6-144)を整理すると、

$$d^{t+\Delta t}s_p^I=-\frac{\frac{2p\theta}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+{}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)-\zeta_c\right\}\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)d\Delta\hat{g}}{1+\frac{2p\theta}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+{}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)-\zeta_c\right\}\Delta\hat{g}}=Qd\Delta\hat{g} \tag{6-145}$$

$$Q=-\frac{\frac{2p\theta}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+{}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)-\zeta_c\right\}\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)d\Delta\hat{g}}{1+\frac{2p\theta}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+{}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)-\zeta_c\right\}\Delta\hat{g}} \tag{6-146}$$

式(6-142)に式(6-143), (6-145)を代入すると、

$$d^{t+\Delta t}\hat{\Phi}=\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left[\boldsymbol{A}\right]\left(\left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}-\left[\boldsymbol{B}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}d\Delta\hat{g}\right)-\frac{2}{3}\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)Qd\Delta\hat{g}=0 \tag{6-147}$$

式(6-147)より $d\Delta\hat{g}$ が次のように求まる。

$$d\Delta\hat{g}=\frac{\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left[\boldsymbol{A}\right]\left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}}{\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left[\boldsymbol{A}\right]\left[\boldsymbol{B}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}+\frac{2}{3}\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)Q}=\left\{\boldsymbol{h}\right\}^T\left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\} \tag{6-148}$$

$$\left\{\boldsymbol{h}\right\}^T=\frac{\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left[\boldsymbol{A}\right]}{\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left[\boldsymbol{A}\right]\left[\boldsymbol{B}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}+\frac{2}{3}\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)Q} \tag{6-149}$$

式(6-143)に式(6-148)を代入すると、次式のようになる。

$$\left\{d^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}=\left[\boldsymbol{A}\right]\left(\left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}-\left[\boldsymbol{B}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}\left\{\boldsymbol{h}\right\}^T\left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}\right) \tag{6-150}$$

式(6-139)に式(6-150)を代入すると次式が導出される。

$$\left\{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}\right\}=\left\{d^{trial}\boldsymbol{s}\right\}-\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left[\boldsymbol{P}\right]\left[\boldsymbol{A}\right]\left(\left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}-\left[\boldsymbol{B}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}\left\{\boldsymbol{h}\right\}^T\left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}\right)\Delta\hat{g}+\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}\left\{\boldsymbol{h}\right\}^T\left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\} \tag{6-151}$$

ここで、式(6-111),(6-113)より $d^{trial}\boldsymbol{s}, d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}$ は次式のように表される。

$$\left\{d^{trial}\boldsymbol{s}\right\}=\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}\right\},\quad \left\{d^{trial}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}=\frac{\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}\right\}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p} \tag{6-152),(6-153}$$

式(6-152),(6-153)を式(6-139)に代入すると次式が導かれる。

$$\begin{aligned}\left\{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}\right\}=\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}\right\}-\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left[\boldsymbol{P}\right]\left[\boldsymbol{A}\right]\left(\frac{\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}\right\}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}-\left[\boldsymbol{B}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}\frac{\left\{\boldsymbol{h}\right\}^T\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}\right\}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\right)\Delta\hat{g}\\ +\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{b}}\right\}\frac{\left\{\boldsymbol{h}\right\}^T\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{d^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}\right\}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\end{aligned} \tag{6-154}$$

本節では、これまでに軸・せん断応力状態に対する巨視的モデルの縮約の定式化を行い、数値解析アルゴリズムおよび接線係数テンソルの導出を行った。なお、6.2.5 項にて提案した修正方法を適用した巨視的モデルについても同様に本節での手順により縮約および数値解析アルゴリズムの構築が可能であるが、それらは非常に類似しているため詳細については割愛する。

６.３.６　一軸応力状態に対する巨視的モデルとの比較による理論的整合性の検証

本節で得られた軸・せん断応力状態に対する巨視的モデルの理論的整合性の検証のために 4 章で提案した一軸応力状態に対する巨視的モデルとの比較を行う。ひずみ経路は、Fig.2-12(a),(b)に示す漸増載荷および漸減載荷とする。材料特性は、Table2-1 に示す。また、σ_y は式(2-85)、$\theta\left(s^I\right)$は式(2-86)を用いる。Fig.6-1(a),(b)が数値解析結果であり両者が完全に一致していることが分かる。また、詳細は割愛するが、本節での定式化は、$\sigma_{12}(\zeta)=0$ とすることによって解析的にも 4 章での巨視的モデルと一致する。このことから本節で行った定式化の理論的整合性が示されたといえる。

６.３.７　サブレイヤーモデルとの比較による妥当性検証

3 章で提案した修正サブレイヤーモデル(200 レイヤー)との比較を行うことにより、硬化則を考慮した巨視的モデルの妥当性の検証を行うとともに、硬化則を考慮した巨視的モデルの修正方法 A,B の有効性を検証するために修正前後の巨視的モデルとの比較を行う。なお、修正方法 A において、係数 n_1, n_2 はそれぞれ 4.0,2.0 としている。また、修正方法 B については、分割数を 2 と 3 の場合についての計算を行い、分割数 2 の場合は $\zeta_{a1}=0.5$,$\zeta_{b1}=\zeta_{a2}=-0.305, \zeta_{b2}=-0.5$ とし、分割数 3 の場合は $\zeta_{a1}=0.5$,$\zeta_{b1}=\zeta_{a2}=0.1$, $\zeta_{b2}=\zeta_{a3}=-0.305, \zeta_{b3}=-0.5$ とする。ひずみ経路は、Fig.6-2 に示すよ

うに四角経路とし、振幅 Δe_M をパラメータとして解析を実行する。なお、このひずみ経路は、5.3.3 項の Case3 と同様に両モデルの差異が大きくなることを意図している。Table6-1 に解析ケースの一覧を示す。材料特性を Table6-2 に示す。また、σ_y は式(2-85)、$\theta\left(s^I\right)$は式(2-86)を用いる。

Fig.6-3,6-4,6-5 は、それぞれの解析ケース S-1,S-2,S-3 の結果を応力空間上で表したものである。なお、各図の(a)は修正サブレイヤーモデル、(b)は巨視的モデル、(c)は修正方法 A を適用した巨視的モデル、(d)は修正方法 B(分割数 2)を適用した巨視的モデル、(e)は修正方法 B(分割数 3)を適用した巨視的モデルの結果である。また、Fig.6-6 は、次式で表される誤差とステップの関係を表したものである。

$$error = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left\{\left(\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{k}}\right)_{sub}-\left(\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{k}}\right)_{macro}\right\}:\left\{\left(\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{k}}\right)_{sub}-\left(\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{k}}\right)_{macro}\right\}}}{\bar{s}_y+\left(s^I\right)_{sub}}\times 100[\%] \qquad (6\text{-}155)$$

ここに $(*)_{sub}$ および $(*)_{macro}$ はそれぞれサブレイヤーモデルおよび巨視的モデルの変数を表す。さらに、Table6-3 は、各巨視的モデルの誤差の最大値をまとめたものである。これらを見ると、修正方法を適用した巨視的モデルは、修正前のものに比べて誤差を低減していることが理解される。また、全体的な傾向として、5.4.4 項での結果と同様に修正方法 B が A に比べ、誤差を大きく低減していることが窺える。しかし、修正方法 B(分割数 2)の巨視的モデルでは、5.4.4 項のような著しい改善が見られない。これは、硬化則を考慮した巨視的モデルでは、式(6-2),(6-4)に示すように、塑性化が進展すると等方硬化応力が生じるため一つ目のレイヤーの降伏応力と最後のレイヤーの降伏応力の差が大きくなり、微視的な応力の方向の乱れがより顕著になるためであると推測される。なお、修正方法 A では、式(6-57)よりこの影響を受けないことは明らかであるため 5.4.4 項と同程度の誤差が生じていると思われる。しかし、修正方法 B においても分割数を 3 にすることによって誤差に対して著しい改善が見られることから、有効性が検証されたと言える。なお、今回、分割数および分割位置は直感的および試行錯誤的に決定されている側面を有する。これらの最適化に関しては今後の検討課題の一つとする。

６.４　まとめ

本章では、3 章で提案した修正サブレイヤーモデルを巨視的に評価し、硬化則を考慮した巨視的モデルの提案を行った。さらに、実用性を鑑み、巨視的モデルの軸・せん断応力状態への縮約を行った。本章で得られた知見を以下にまとめる。

(1)　硬化則を考慮した巨視的モデルの定式化を行った。その中で、硬化則のない巨視的モデルと同様､降伏条件式および塑性流れ則を提案する際､直観的に有効と考えられる 2 つの近似式を用いた。また、巨視的モデルに 3 章で提案した塑性ひずみ球を導入した。

(2)　5.4 節で提案した硬化則を考慮していない巨視的モデルに対する修正方法を硬化則を考慮した巨視的モデルへと拡張した。

(3)　多軸応力状態に対する実験結果との比較を行うために(1)で構築した硬化則を考慮した巨視的モデルの基礎式を基に軸・せん断応力状態に対する巨視的モデルの提案を行った。

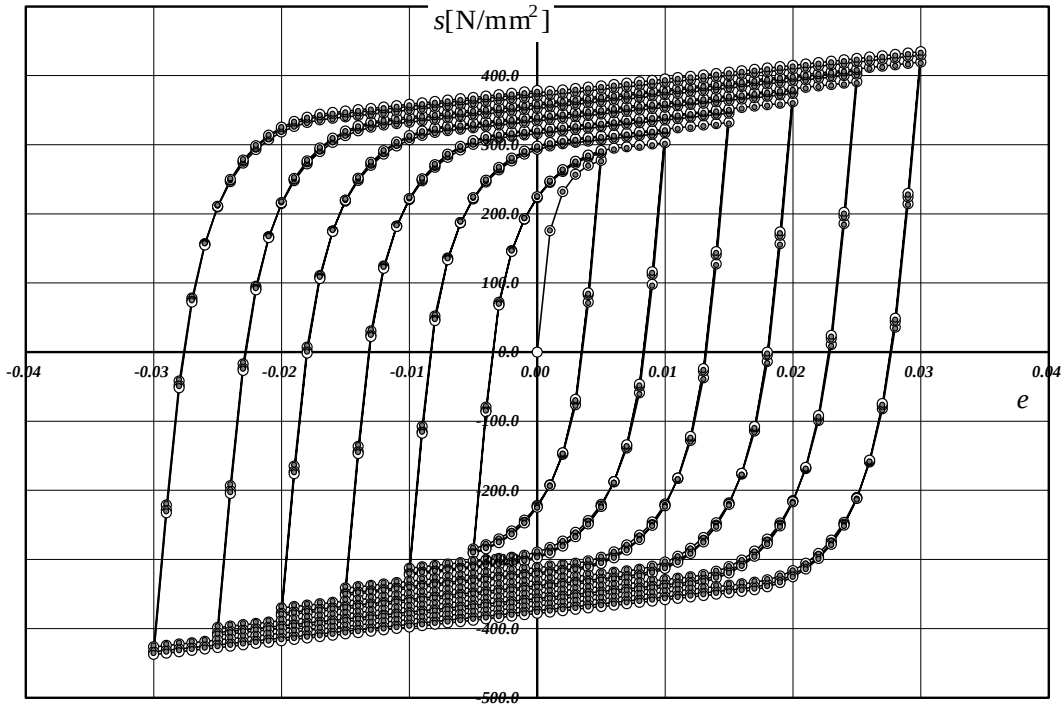
(4)　巨視的モデルの実用性を鑑み、増分形に整合性を有する接線係数テンソルを構築した。

(5)　4 章で提案した一軸応力状態に対する巨視的モデルと軸・せん断応力状態に縮約した巨視的モデルの結果を比較することにより巨視的モデルの理論的整合性を示した。

(6)　3 章で提案した修正サブレイヤーモデルとの比較により、軸・せん断応力状態に対する巨視的モデルの妥当性を検証するとともに、(2)で提案した修正方法の有効性について示した。しかし、5 章で述べたように各修正方法には、未だ改善の余地があるためそれらについては今後の検討課題の一つとする。

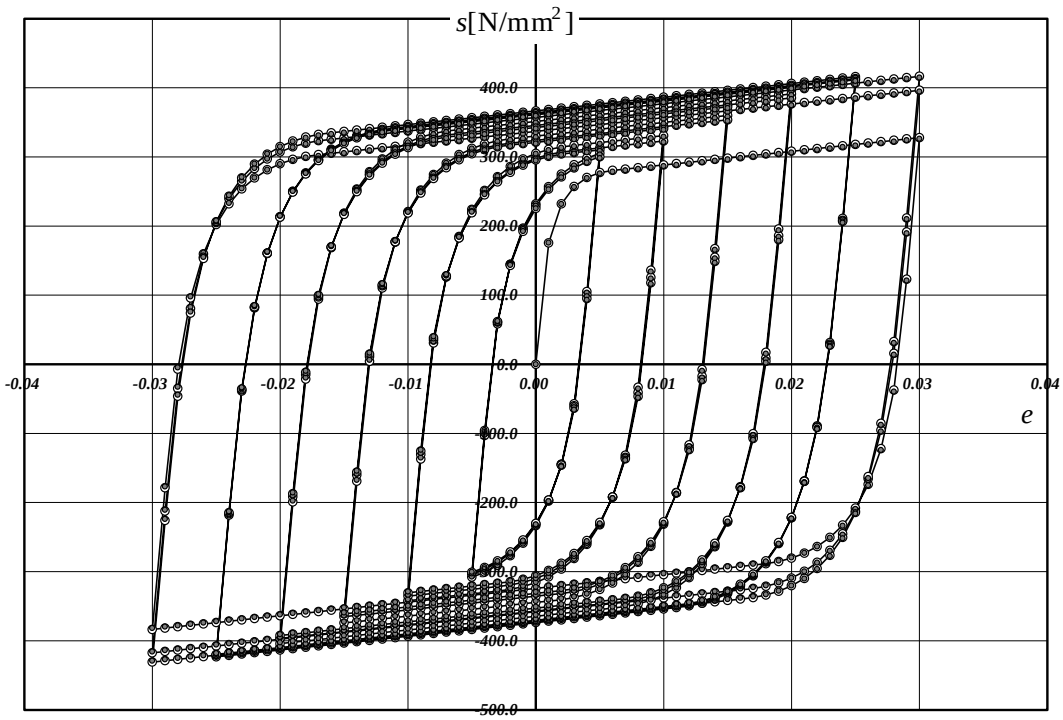
Chapter6

Figures and Tables



(White: Macroscopic model (chapter four), Gray: Macroscopic model (chapter six))

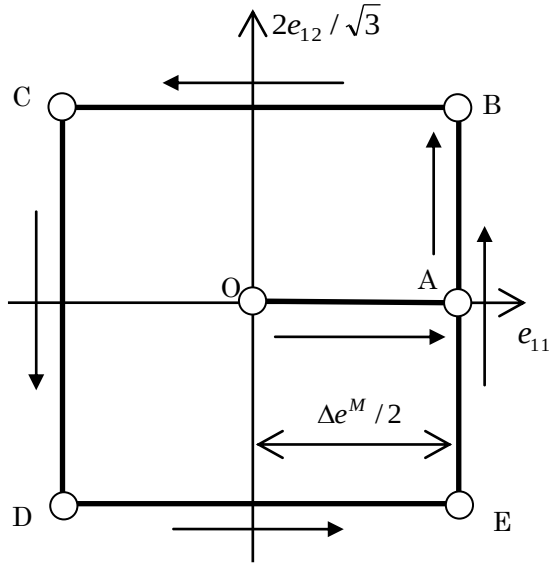
(a) Gradual increase loading



(White: Macroscopic model (chapter four), Gray: Macroscopic model (chapter six))

(b) Gradual decrease loading

Fig.6-1 Comparison between the macroscopic model formulated in chapter six and the one formulated in chapter four



Loading path: O-A-B-C-D-E-B-C-D…

Fig.6-2 Strain path

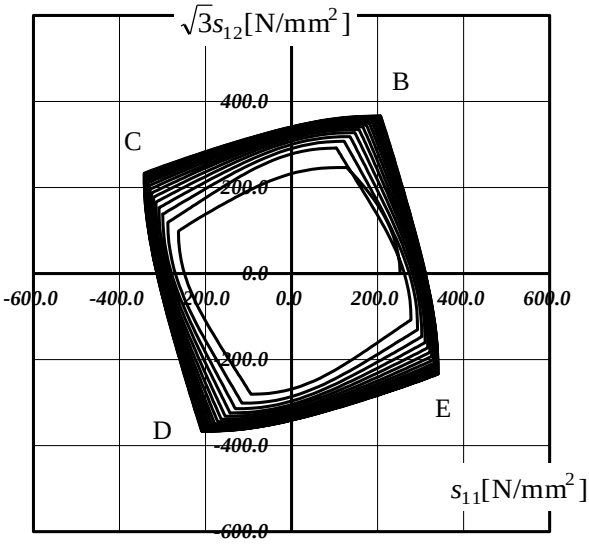
Table6-1 Numerical cases

Numerical case	$\Delta e_M/2$	Number of cycle
S-1	0.2	20
S-2	0.4	20
S-3	0.6	20

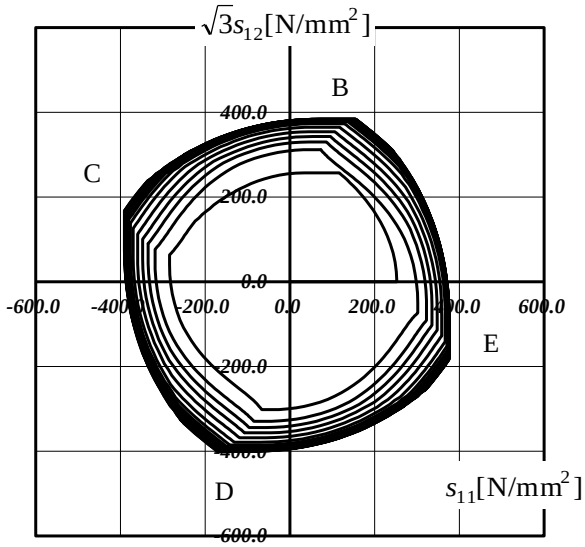
Table6-2 Material properties

E[N/mm^2]	ν	K[N/mm^2]	F_o[N/mm^2]	F_1[N/mm^2]	p_o[N/mm^2]	α	ζ_c	Q	$s^I_{\lim}$
205000	0.3	6000.0	8000.0	100.0	30.0	0.0	0.5	4.0	300.0

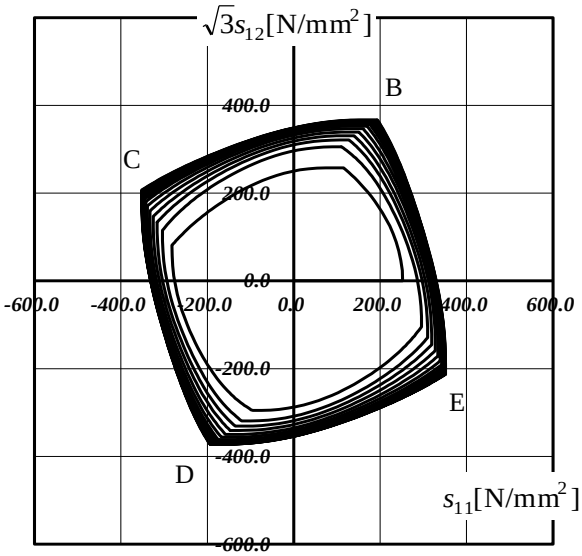
A	B[N/mm^2]	C[N/mm^2]
0.65	140.0	0.0



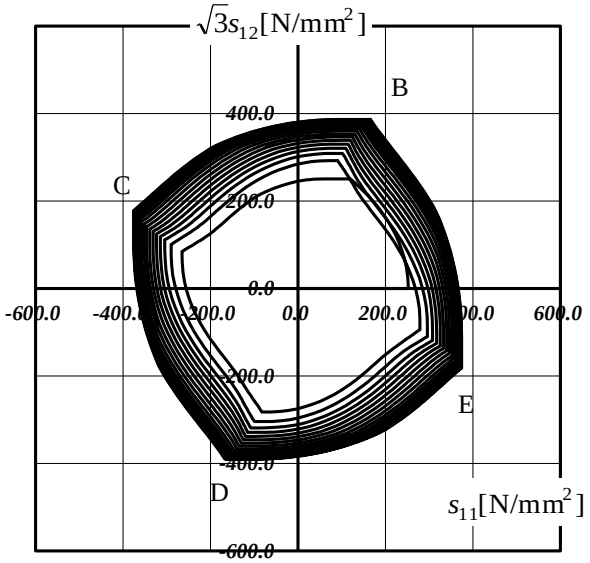
(a) Sub-layer model



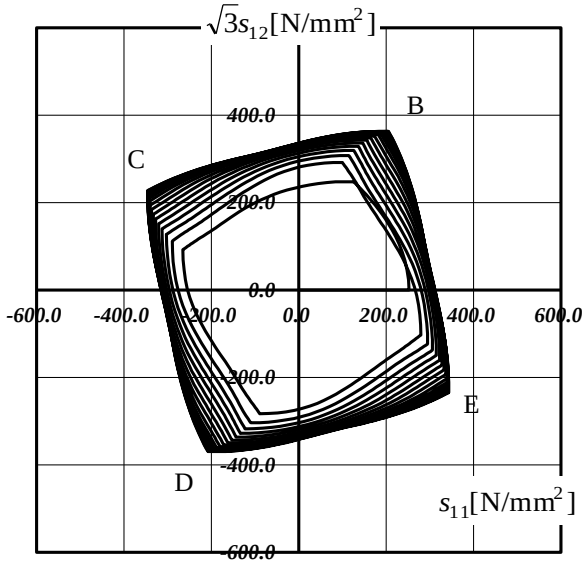
(b) Conventional macroscopic model



(c) Modified macroscopic model(typeA)

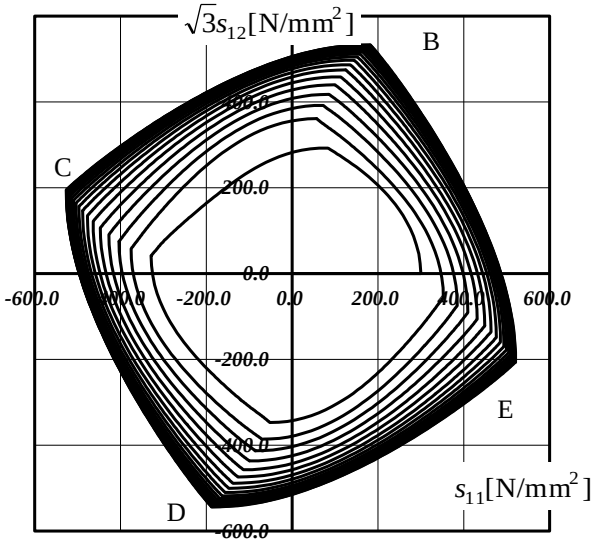


(d) Modified macroscopic mode l(typeB: number of partitions is 2)

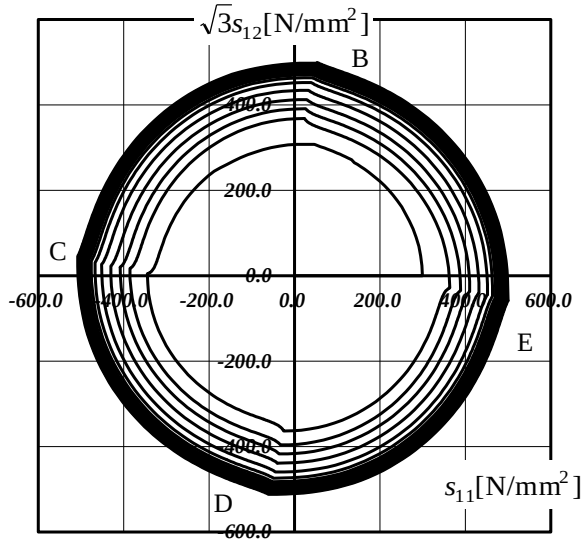


(e) Modified macroscopic model (typeB: number of partitions is 3)

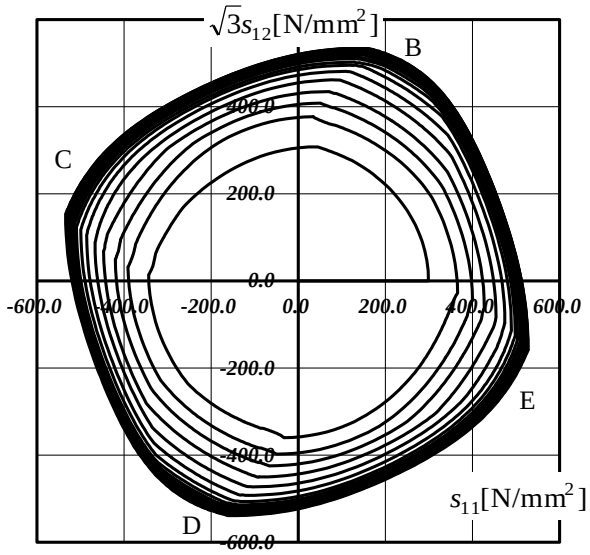
Fig.6-3 Comparison between the sub-layer model and macroscopic models for stress field (Case: S-1)



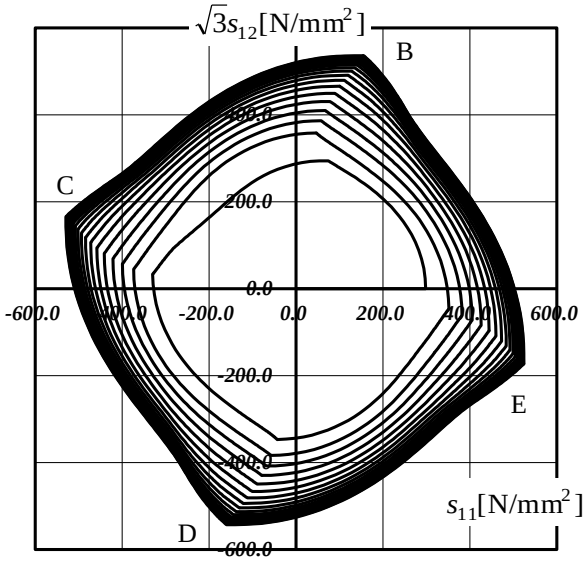
(a) Sub-layer model



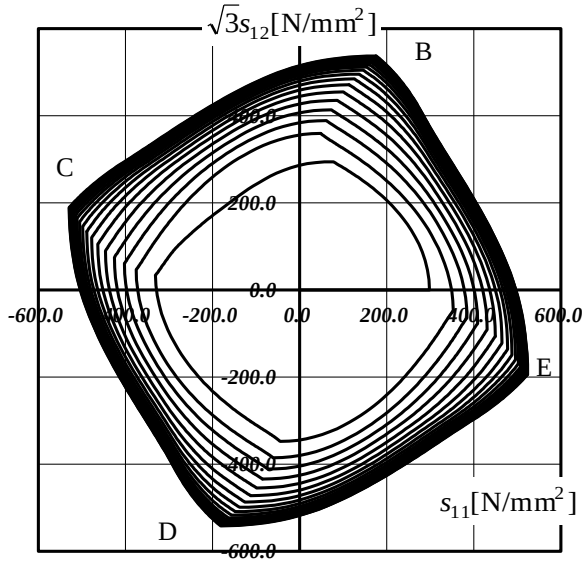
(b) Conventional macroscopic model



(c) Modified macroscopic model(typeA)

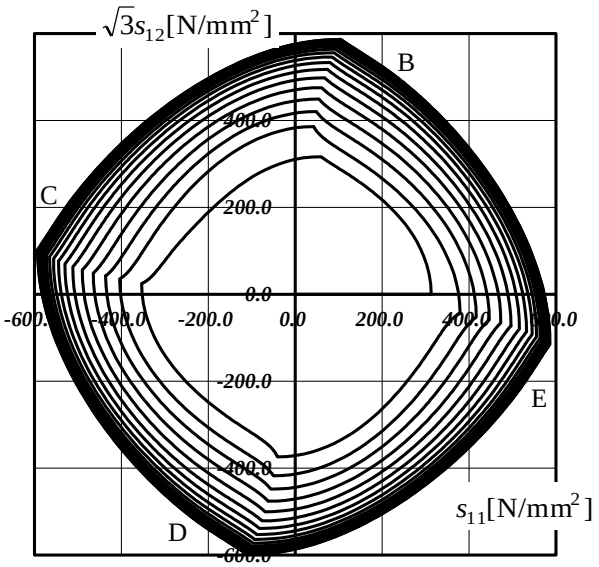


(d) Modified macroscopic mode l(typeB: number of partitions is 2)

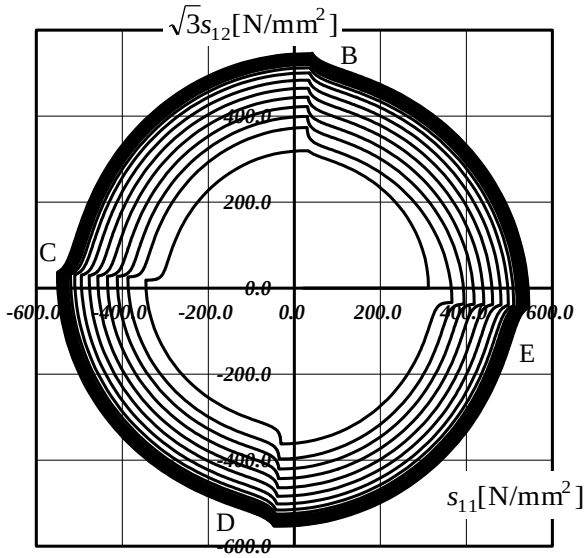


(e) Modified macroscopic model(typeB: number of partitions is 3)

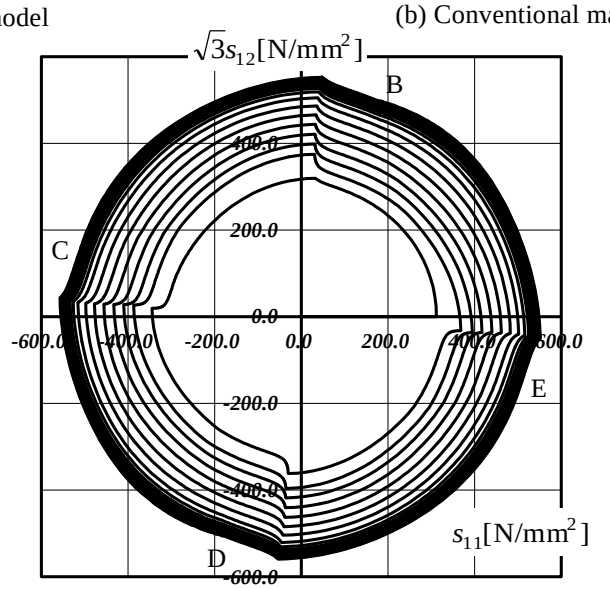
Fig.6-4 Comparison between the sub-layer model and macroscopic models for stress field (Case: S-2)



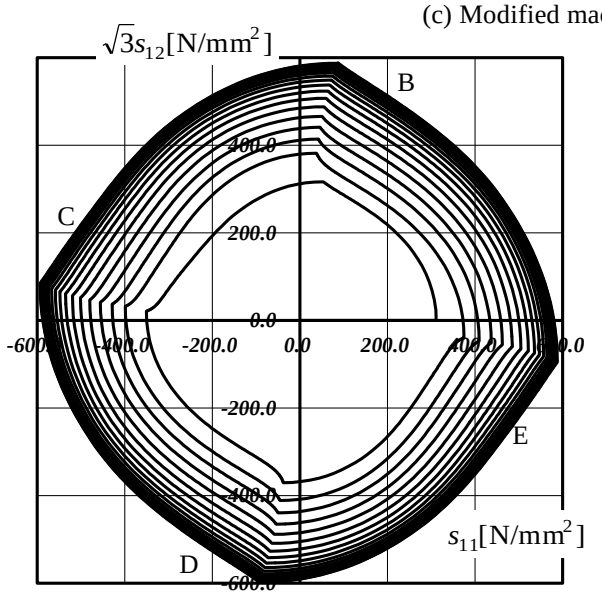
(a) Sub-layer model



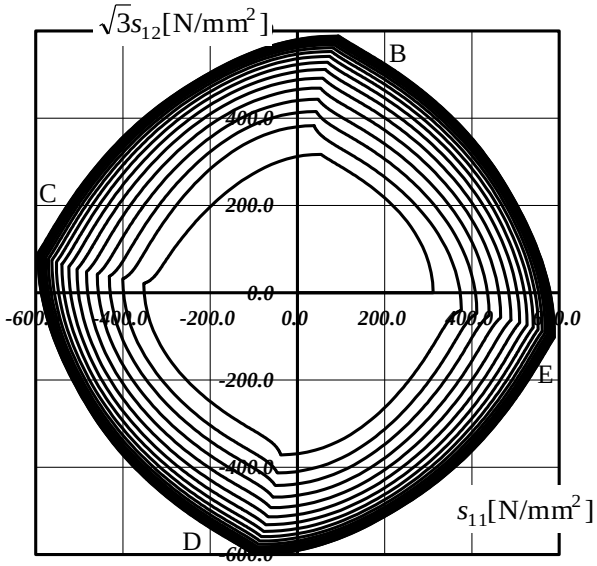
(b) Conventional macroscopic model



(c) Modified macroscopic model(typeA)

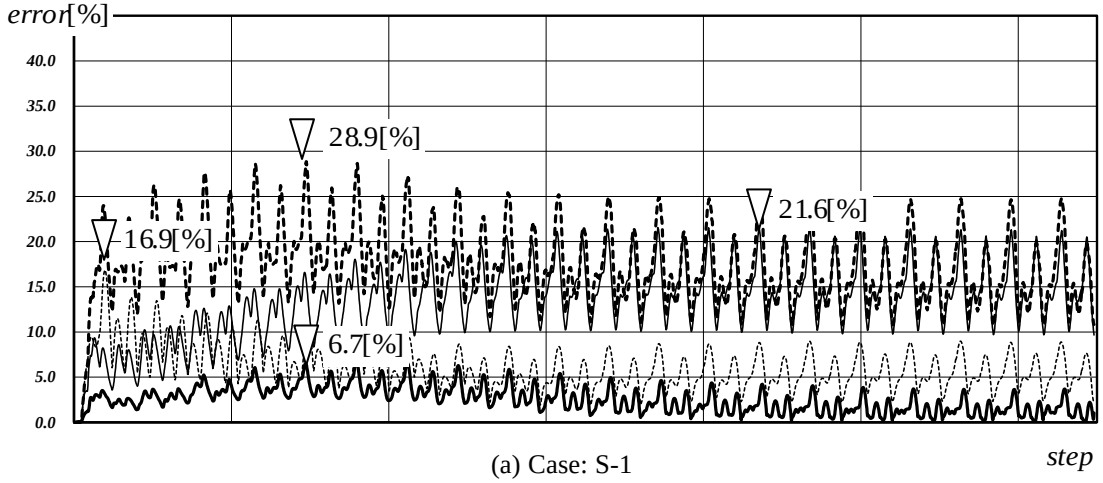


(d) Modified macroscopic mode l(typeB: number of partitions is 2)

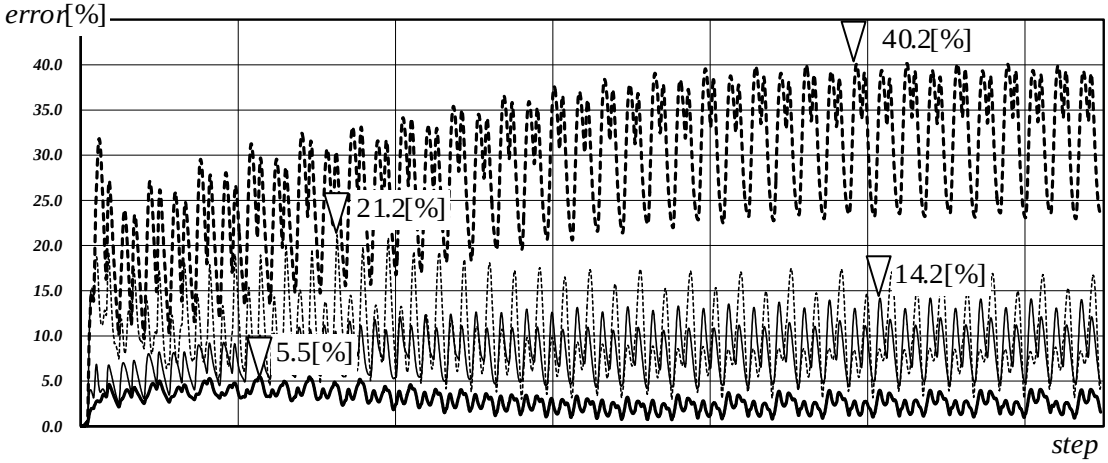


(e) Modified macroscopic model(typeB: number of partitions is 3)

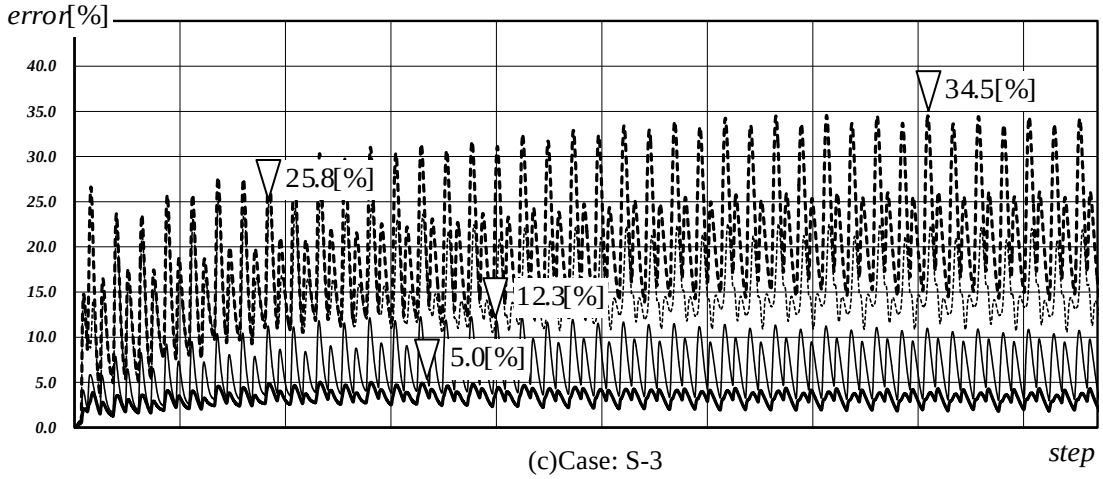
Fig.6-5 Comparison between the sub-layer model and macroscopic models for stress field (Case: S-3)



(a) Case: S-1



(b)Case: S-2



(c)Case: S-3

(Thick dotted line: Conventional macroscopic model, Thin dotted line: Modified macroscopic model (typeA), Thin solid line: Modified macroscopic model (typeB: number of partitions is 2), Thick solid line: Modified macroscopic model (typeB: number of partitions is 3))

Fig.6-6 Error-step relation (S-1,S-2,S-3)

Table6-3 Maximum error

Case	Conventional	TypeA	TypeB: 2 partitions	TypeB: 3 partitions
S-1	28.9[%]	16.9[%]	21.6[%]	6.7[%]
S-2	40.2[%]	21.2[%]	14.2[%]	5.5[%]
S-3	34.5[%]	25.8[%]	12.3[%]	5.0[%]

第 7 章　結論および今後の課題

本論文では、一軸応力状態および多軸応力状態における金属系材料の実現象を再現するため材料構成則として修正サブレイヤーモデルの提案を行うとともにサブレイヤーモデルの欠点である多大な計算負荷を克服するためにその巨視的評価手法の提案を行った。本研究によって得られた結論および今後の課題を以下に示す。

＜結論＞

1.　一軸応力状態に対して実現象を表現可能な修正サブレイヤーモデルの提案を行った。はじめに、一軸応力状態に対して古典的サブレイヤーモデルの欠点を指摘し、その欠点を克服可能な硬化則の提案を行った。また、実現象を表現するためには、新たな硬化則のみでは不十分であることから非硬化領域の概念をサブレイヤーモデルに適用した。その中で、非硬化領域の概念を定式化の際に諸式の単純化を図るために微係数間の関係を定義した。以上により構築された修正サブレイヤーモデルが、一軸応力状態にて一組のパラメータにより複数の実現象を再現可能であることを実験結果との比較を通して検証した。(2章)

2.　一軸応力状態において提案したサブレイヤーモデルの多軸応力状態への拡張および改善を行った。その中で、多軸応力状態に対する拡張は、スカラー量をテンソル量として定義することにより実行可能であることを示し、一軸応力状態に対するサブレイヤーモデルと理論的整合性を有することを示した。また、一軸から多軸応力状態かへの単純な拡張では、多軸応力状態での実現象の再現には不十分であることから、修正サブレイヤーモデルの改善案を示した。さらに、修正サブレイヤーモデルと多軸応力状態における実験結果との比較を通してモデルの妥当性を検証した。(3 章)

3.　一軸応力状態に対して修正サブレイヤーモデルの巨視的評価手法を提案した。本手法は、無限のレイヤーを有するサブレイヤーモデルを想定し、その微視的変数を積分し、巨視的変数として取り扱うことにより、サブレイヤーモデルの欠点である多大な計算負荷を低減させる手法である。その結果として、一軸応力状態に対する巨視的定式化では、巨視的モデルとサブレイヤーモデルの結果が一致することを示し、解析的に巨視的定式化が可能であることを示した。(4 章)

4.　多軸応力状態に対してサブレイヤーモデルの巨視的評価手法の提案を行った。定式化に際して、一軸

応力状態に対する巨視的定式化とは異なり、解析的に定式化が不可能な箇所が存在することから二つの近似式を導入することにより多軸応力状態に対する巨視的モデルを構築した。その際に、熱力学の第二法則と最大塑性散逸の原理といった普遍的な仮説のみを用いて定式化を行い、巨視的モデルの理論的完成度の高さを証明した。二つの近似式の妥当性を巨視的モデルとサブレイヤーモデルとの比較により検証し、ひずみ経路によっては、巨視的モデルとサブレイヤーモデルに大きな差異が生じることを明らかにした。(5 章,6 章)

5. 巨視的モデルの近似式の精度について検討し、巨視的モデルの修正手法を提案した。その中で、巨視的定式化の際に用いた微視的諸量に対する近似式が両モデルの差異の原因であるを明らかにし、その近似式の精度を高める手法の提案を行った。本手法の妥当性はサブレイヤーモデルとの比較により検証した。(5 章,6 章)

6. 巨視的モデルの実用性を考慮し、増分形に整合性を有する接線係数テンソルの導出を行った。また、シェル要素への適用および多軸応力状態に対する実験結果との比較のために巨視的モデルを平面応力状態および軸・せん断応力状態へと縮約した。(5,6 章)

7. 巨視的モデルを再定式化することによって Bounding surface モデルとの類似性を検討した。その中で、巨視的モデルの二つの係数を導入し、投影応力の方向を再定義することを提案した。係数毎に巨視的モデルの変化率を検討することによって､巨視的モデルが Prager 型 Bounding surface モデルと Philip 型 Bounding surface モデルと類似性を有していることを明らかにした。さらに、それらをサブレイヤーモデルと比較することにより金属系材料の実現象の表現には、Prager 型 Bounding surface モデルと類似した巨視的モデルが最適であることを示した。(5 章)

＜今後の課題＞

1.　本論文にて提案された修正サブレイヤーモデルにおいて、材料定数の決定が試行錯誤的に行われていることから、実用性の観点から材料定数を決定する合理的な手法についての検討が必要である。(2 章,3 章)

2.　本論文にて提案された修正サブレイヤーモデルは、一軸および多軸応力状態にて応力振幅の飽和現象の再現について高精度な再現性を有するが、降伏棚、ラチェッティング、リラクゼーションおよび後続降伏曲面の変化等を表現することができない。従って、これらの実現象の再現性に対しては、実験結果の整備も含めて検討が必要である。(2 章,3 章)

3.　材料構成則は金属系材料以外にもコンクリートや地盤材料等にも適用されていることから金属系材料以外の巨視的モデルの適用性に対する検討が必要である。(5 章)

4.　本論文にて提案された巨視的モデルの修正方法に対する有効性は、数値解析結果を通して検証されたものの最適であるとは言えず、未だ改良の余地がある。(5 章,6 章)

本研究に関連して著者が発表した論文

＜本研究に関連して著者が発表した論文＞

[ ]内は共著者名を表す。

学術雑誌(査読あり)

(1) 金属系材料の応力ひずみ関係に対するサブレイヤーモデルの巨視的評価手法　その 2 完全弾塑性体から成るサブレイヤーモデルの多軸応力状態における巨視的評価手法

[元結正次郎]

日本建築学会構造系論文集、第 79 巻、第 695 号、pp.67-74、2014.1

(2) 硬化則を有するサブレイヤーモデルの一軸応力状態における巨視的評価手法

[元結正次郎]

構造工学論文集、vol.60B、pp.219‐224、2014.3

(3) 一軸応力状態における非硬化領域の概念を有する修正サブレイヤーモデルの提案

[元結正次郎]

日本建築学会構造系論文集、第 80 巻、第 709 号、pp.401-409、2015.3

国際会議における発表(査読あり)

(4) A modified overlay model under uni-axial cyclic loading

[元結正次郎]

Computational Engineering and Science for Safety and Environmental Problems, pp.460-463, Sendai, Miyagi, 2014.4

国内学会・シンポジウム等における発表(査読なし)

(5) 完全弾塑性体から成るサブレイヤーモデルの多軸応力状態における巨視的評価手法 その 1 巨視的モデルの定式化

[元結正次郎、天川達志]

日本建築学会大会学術講演梗概集　pp.259-260, 東京、2012.7

(6) 完全弾塑性体から成るサブレイヤーモデルの多軸応力状態における巨視的評価手法 その２
数値解析
[元結正次郎]
日本建築学会大会学術講演梗概集、pp.261-262、東京、2012.7

(7) 全弾塑性体から成るサブレイヤーモデルの多軸応力状態における巨視的評価手法 その３
平面応力状態への縮約
[元結正次郎]
日本建築学会大会学術講演梗概集、pp.333-334, 北海道、2013.7

(8) 一軸応力状態における硬化則を考慮したサブレイヤーモデルの巨視的評価手法の提案
[元結正次郎、天川達志]
日本建築学会大会学術講演梗概集、北海道、pp.339-340, 2013.7

(9) 全弾塑性体から成るサブレイヤーモデルの多軸応力状態における巨視的評価手法 その 4
バウンディングサーフェイスモデルとの相似性
[元結正次郎]
日本建築学会大会学術講演梗概集、兵庫、2014.7

参考文献

赤澤資貴、松岡祐一、吹田啓一郎、山田哲、島田侑子：実大 4 層鉄骨構造建物の完全崩壊実験、その 4　非構造部材の損傷と挙動、日本建築学会近畿支部研究報告集、第 48 号、pp.449-452、2008.5

秋葉博、宮村倫司、大崎純、小檜山雅之、山下拓三、磯部大吾郎、堀宗朗、梶原浩一：ハイブリッド並列化による E-simulator の高速化、日本機械学会計算力学講演会誌、pp.594-596、2011.10

秋山宏、高橋誠 : 鋼構造剛接骨組の耐震性に及ぼすバウシンガー効果の影響、日本建築学会構造系論文集、第 418 号、pp.49-57、1990.12

飯田憲一、森迫清貴、石田修三：構造物の動的解析における増分摂動法の打ち切り誤差制御技法、構造工学論文集、Vol.41B、pp.361-368、1995.3

池田聡、桑原利彦：2 軸引張応力下における IF 鋼板および低炭素鋼板の加工硬化挙動、鉄と鋼、vol.90、No.12、pp.1016-1022、2004

石川博將、佐々木克彦 : 繰返し負荷を受ける SUS304 材の降伏曲面、日本機械学会論文集(A 編)、第 54 巻、第 501 号、pp.1116-1123、1988.5

石田修三、森迫清貴：増分摂動法を導入した一次元複合非線形有限要素法、日本建築学会構造系論文集、第 397 号、pp.73-82、1989.3

井根達比古、弓削康平、伊藤景詩、梶原浩一：有限要素法による鉄骨構造の動的崩壊解析　その 1　シェル要素による動的崩壊解析コードの開発(定式化を中心に)、日本建築学会九州支部研究報告集、第 46 号、pp.573-576、2007.3

井根達比古、弓削康平、伊藤景詩、梶原浩一：有限要素法による鉄骨構造の動的崩壊解析　その 2　方杖ダンパーの動的弾塑性解析、日本建築学会九州支部研究報告集、第 46 号、pp.577-580、2007.3

井根達比古、吉田典充、弓削康平、梶原浩一：有限要素法による鉄骨構造の動的崩壊解析　その 3　座屈拘束材と接触を考慮した方杖ダンパーの繰り返し載荷解析、日本建築学会九州支部研究報告集、第 47 号、pp.525-528、2008.3

井根達比古、弓削康平、高山史、橋本祐太、吉田典充、梶原浩一：局部座屈を考慮した角形鋼管柱の繰り返し曲げ挙動の有限要素解析　その 1　軸力を受ける単一柱材の繰り返し曲げ挙動、日本建築学会九州支部研究報告集、第 47 号、pp.517-520、2008.3

井根達比古、弓削康平、高山史、橋本祐太、吉田典充、梶原浩一：局部座屈を考慮した角形鋼管柱の繰り返し曲げ挙動の有限要素解析　その 2　S 造 1 層骨組の地震時動的崩壊挙動、日本建築学会九州支部研究報告集、第 47 号、pp.521-524、2008.3

井根達比古、磯部大吾郎、片平直樹、梶原浩一：ASI-Gauss 法による鉄骨構造の動的地震崩壊解析　その 1　動的地震崩壊解析コードの開発(定式化を中心に)、日本建築学会関東支部研究報告集、pp.165-168、2006

鵜飼真、白奇烈、元結正次郎：Bounding surface モデルと Sub-layer モデルとの関連 その 3　例題による巨視的定式化の妥当性、日本建築学会大会学術講演梗概集、B-1 分冊、pp.765-766、2003.7

大橋義夫、田中栄一、大岡昌博 : 位相差ひずみサイクルを受ける 316 ステンレス鋼の塑性変形挙動、日本機械学会論文集(A 編)、第 51 巻、第 461 号、pp.38-46、1985.1

大野信忠：非硬化ひずみ領域を考慮した繰り返し塑性構成式、日本機械学会論文集(A 編)、48 巻 434 号、pp.1342-1350、1982.10

大野信忠、王建定：温度変動下の塑性構成式 (限界曲面に基づく定式化および多曲面モデルへの変換)、日本機械学会論文集(A 編)、第 56 巻、第 523 号、pp.662-668、1990.3

大野信忠、王建定 : 動的回復の臨界状態を考慮した移動硬化則 (第 1 報、定式化および基本的特徴)、日本機械学会論文集(A 編)、第 58 巻、第 547 号、pp.488-495、1992.3

小野徹郎、上之郷貴重、吉田文久、岩田衛、林賢一：金属系素材の素材特性及び履歴挙動に関する研究、日本建築学会構造系論文集、第 498 号、pp.137-143、1997.8

笠井和彦、山崎久雄、小澤秀充、金子洋文、貞末和史、小野善信：繰返し応力を受ける鋼材の曲線履歴型モデル　その 7　解析モデルの改良、日本建築学会大会学術講演梗概集(中国)、pp.907-908、2008.7

笠井和彦、引野剛、伊藤浩資、大木洋司、元結正次郎、加藤史人、馬場勇樹：実験の全体概要および非制振状態での応答性状　3 次元振動台による実大 5 層制振鋼構造建物の実験研究　その 1、日本建築学会構造系論文集、第 663 号、pp.997-1006、2011.5

笠井和彦、馬場勇樹、西沢恵二、引野剛、伊藤浩資、大木洋司、元結正次郎：鋼材のダンパーを有する試験体の実験結果　3 次元振動台による実大 5 層制振鋼構造建物の実験研究　その 2、日本建築学会構造系論文集、第 673 号、pp.499-508、2012.3

M .A.KARIM、大野信忠：室温における 316FR 鋼の単軸ラチェット特性(第 2 報、構成式によるシミュレーション)、日本機械学会論文集(A 編)、第 64 巻、第 628 号、pp.2983-2989、1998.12

川島紘一郎：繰返し負荷の初期におけるアルミニウムの応力-ひずみ曲線、「材料」、第 29 巻　第 319 号、pp.351-356、1980.4

倉田正志、佐藤崇、宇佐美勉、吉野廣一：構造用アルミニウム合金へ適用した修正 2 曲面モデル、名城大学理工学部研究報告、No.49、pp.124-131、2009

桑原利彦：金属板材の異方性降伏関数の実験検証手法、塑性と加工、第 41 巻　第 471 号、pp.313-318、2000.4

桑原利彦、山田修也、飯塚栄治、比良隆明：2 軸引張り試験による各種鋼板の塑性変形特性の測定と解析、鉄と鋼、vol.87、No.4、pp.198-204、2001.4

桑原利彦、池田聡：平面ひずみ引張を受ける鋼板の加工硬化特性の測定と解析、鉄と鋼、vol.88、No.6、pp.334-339、2002.6

小高真希、元結 正次郎、酒井 新吉、笠井 和彦：鉄骨ブレース構造におけるガセットプレートが架構剛性に及ぼす影響に関する研究、E-ディフェンス鋼構造建物実験研究 その 84 、日本建築学会大会学術講演梗概集、pp.1163-1164、2011.7

小橋知季、笠井和彦、元結正次郎、松田和浩、松田頼征、米谷壮央：制振構造における合成梁・柱・ガセットプレート接合部の挙動に関する研究-その 2 、E-ディフェンス鋼構造建物実験研究その 83、日本建築学会大会学術講演梗概集、pp.1161-1162、2011.7

佐々木克彦、石川博將：ハイブリッド繰返し塑性構成式の sinusoidal 負荷への適用、日本機械学会論文集(A 編)、第 56 巻、第 532 号、pp.2536-2542、1990.12

貞末和史、笠井和彦、山崎久雄、小野喜信、金子洋文：繰返し応力を受ける鋼材の曲線履歴モデル、その 4　実験概要および材料特性値の同定、日本建築学会大会学術講演梗概集、C-1 分冊、pp.937-938、2006.7

島田侑子、松岡祐一、吹田啓一郎、山田哲、赤澤資貴：実大 4 層鉄骨造建物の完全崩壊実験、その 3　完全崩壊挙動、日本建築学会近畿支部研究報告集、第 48 号、pp.445-448、2008.5

島田侑子、吹田啓一郎、山田哲、松岡祐一、多田元英、大崎純、笠井和彦：震動台実験における倒壊挙動、実大 4 層鉄骨造建物の完全崩壊実験　その 3、日本建築学会構造系論文集、第 653 号、pp.1351-1360、2010.7

白鳥英亮、池上皓三、金子堅司、高田純：降伏曲面に及ぼす繰返し前負荷の影響、日本機械学会論文集(第 1 部)、第 42 巻、第 363 号、pp.3340-3347、1976.11

吹田啓一郎、松岡祐一、山田哲、島田侑子、赤澤資貴：実大 4 層鉄骨造建物の完全崩壊実験、その 1　実験方法及び応答の概要、日本建築学会近畿支部研究報告集、第 48 号、pp.437-440、2008.5

吹田啓一郎、松岡祐一、山田哲、島田侑子、赤沢資貴：実大 4 層鉄骨造建物の完全崩壊実験、その 2　崩壊までの応力の詳細、日本建築学会近畿支部研究報告集、第 48 号、pp.441-444、2008.5

吹田啓一郎、松岡祐一、山田哲、島田侑子、多田元英、笠井和彦：震動台実験の概要と弾性応答特性、実大 4 層鉄骨造建物の完全崩壊実験　その 1、日本建築学会構造系論文集、第 635 号、pp.157-166、2009.1

鈴木章彦、土屋秋夫：改良形フラクションモデルと SUS304 のクリープ変形に対する適用、日本機械学会論文集(A 編)、第 50 巻、第 453 号、pp.1026-1034、1984.5

鈴木章彦：非硬化ひずみ領域を考慮した改良フラクションモデル、日本機械学会論文集(A 編)、第 52 巻、第 481 号、pp.2294-2301、1986.9

空處慎史、笠井和彦、貞末和史、山崎久雄、小野喜信、金子洋文：繰返し応力を受ける鋼材の曲線履歴型モデル、その 5　解析モデルの検証、日本建築学会大会学術講演梗概集、C-1 分冊、pp.939-940、2006.7

武田武信、陳中春、土屋学：off-axis ねじり試験による軟鋼の加工硬化、異方性およびバウシンガ効果の測定、材料、vol.49　No.5、pp.555-560、2000.5

武田武信、那須康雄：軸対称異方性を有する軟鋼の多軸降伏挙動、塑性と加工、第 28 巻　第 323 号、pp.1282-1288、1987.12

田中英一、村上澄男、大岡昌博：多軸非比例塑性ひずみサイクルにおける繰返し硬化のひずみ経路形状履歴依存性、日本機械学会論文集(A 編)、第 51 巻、第 468 号、pp.1941-1950、1985.8(a)

田中英一、村上澄男、大岡昌博：多軸非比例塑性ひずみサイクルにおける繰返し硬化の振幅履歴依存性、日本機械学会論文集(A 編)、第 51 巻、第 469 号、pp.2162-2171、1985.9(b)

田中英一、村上澄男、大岡昌博、永井考幸：多軸非比例塑性ひずみサイクルにおけるひずみ経路形状の等価性と繰返し硬化の回復、日本機械学会論文集(A 編)、第 52 巻、第 479 号、pp.1716-1723、1986.7

田中英一、奥地弘章：非比例繰返し硬化を考慮した粘塑性構成式モデルの定式化、日本機械学会論文集(A 編)、第 54 巻、第 504 号、pp.1588-1596、1988.8

田中英一、竹中友康：比例および非比例繰返し負荷のもとでの硬化/軟化挙動を記述できる粘塑性構成式の定式化、日本機械学会論文集(A 編)、第 57 巻、第 543 号、pp.2767-2774、1991.11

田中良仁、水野英二、沈赤、宇佐美勉：降伏棚を有する鋼材の繰返し弾塑性モデル、構造工学論文集、vol.37A、pp.1-14、1991.3

張福貴、青木博文：金属材料の繰返し応力～歪関係への Menegotto-Pinto モデルの適用性、日本建築学会大会学術講演梗概集(東北)、pp.1335-1336、1991.9

中込忠男、山田丈富、市川祐一、杉江篤司：アルミニウム合金の多軸応力状態における繰返し応力―歪関係の数理塑性モデル、日本建築学会構造系論文集、pp.227-232、第 558 号、2002.8

奈良敬、村上茂之、小西隆史：引張試験に基づく材料定数をパラメータとする鋼材の繰り返し構成則、第 3 回鋼構造物の非線形数値解析と耐震設計の応用に関する論文集、土木学会、pp.105-112、1999.11

西村宣男、小野潔、池内智行：単調載荷曲線を基にした繰り返し塑性履歴を受ける鋼材の構成式、土木学会論文集、No.513、pp.27-38、1995.4

久田俊明、野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用、丸善株式会社、2008

久田俊明：非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎、丸善株式会社、2010

藤本利昭：極低降伏点鋼を用いたせん断型パネルダンパーの履歴挙動、安藤建設技術所報、vol.12、pp.45-52、2006

藤本盛久、橋本篤秀、中込忠男、山田丈富：構造用鋼材の多軸応力状態における繰返し応力―ひずみ関係、繰返し力を受ける鋼構造溶接接合部の破壊挙動に関する研究-第 1 報、日本建築学会構造系論文集、pp.93-102、1985.10

白奇烈、元結正次郎：Bounding surface モデルと Sub-layer モデルとの関連、その 2　Sub-layer モデルの巨視的定式化、日本建築学会大会学術講演梗概集、B-1 分冊、pp.763-764、2003.7

白奇烈、鵜飼真、元結正次郎：Bounding surface モデルと Sub-layer モデルとの関連、その 4　繰り返し載荷における応力投影中心、日本建築学会大会学術講演梗概集、B-1 分冊、pp.785-786、2004.7

白奇烈、元結正次郎：Bounding surface モデルと Sub-layer モデルとの関連、その 5　ひずみ硬化を考慮した場合、日本建築学会大会学術講演梗概集、B-1 分冊、pp.819-820、2005.7

堀宗朗、野口裕之、井根達比古：E-Defense と連動させた数値震動台の開発計画、土木学会地震工学論文集、pp.1420-1425、2007.8

松田頼征、笠井和彦、元結正次郎、松田和浩、小橋知季、米谷壮央：制振構造における合成梁・柱・ガセットプレート接合部の挙動に関する研究-その1、E-ディフェンス鋼構造建物実験研究 その82、日本建築学会大会学術講演梗概集、pp.1159-1160、2011.8

松本由香、山田哲、**鄭景**洙、小川信行、秋山宏：多軸応力下における鋼材の履歴則に関する実験的研究、第4回構造物の破壊過程解明に基づく地震防災性向上に関するシンポジウム論文集、pp.153-158、2003.3

松本由香、**鄭景**洙、山田哲：繰返し複合応力を受ける構造用鋼材の履歴挙動に関する基礎実験、日本建築学会構造系論文集、第588号、pp.181-188、2005.2

水野英二、沈赤、宇佐美勉：鋼部材の繰り返しねじり実験と二曲面モデルによる数値シミュレーション、構造工学論文集、vol.39A、pp.221-234、1993.3

水野英二、沈赤、宇佐美勉：鋼構造に対する修正二曲面モデルの一般的定式化、構造工学論文集、vol.40A、pp.235-248、1994.4

水野衛、美馬保彦、Mohamed ABDEL-KARIM、大野信忠：室温における316FR鋼の単軸ラチェット特性(第1報、実験的検討)、日本機械学会論文集(A編)、第64巻、第627号、pp.2807-2812、1998.11

宮村倫司、大崎純、小檜山雅之、恩田邦蔵、磯部大吾郎、秋葉博、堀宗朗、梶原浩一、井根達比古：ソリッド要素を用いた鋼構造4層骨組の高精度有限要素解析、日本機械学会計算力学講演会誌、pp.218-219、2009.10

宮村倫司、大崎純、小檜山雅之、野口裕之、秋葉博、堀宗朗、梶原浩一、井根達比古：数値震動台の基盤となる並列有限要素解析コードによる超高層ビルの仮想震動実験、日本建築学会大会学術講演梗概集(中国)pp.363-364、2008.7

宮村倫司、大崎純、小檜山雅之、磯部大吾郎、秋葉博、堀宗朗、梶原浩一、井根達比古：数値震動台プロトタイプによる鋼構造超高層骨組および4層骨組の仮想震動実験、日本建築学会大会学術講演梗概集(東北)pp.399-400、2009.7

宮村倫司、磯部大吾郎、小檜山雅之、大崎純、堀宗朗、秋葉博、梶原浩一、井根達比古：E-Simulatorによる鋼構造超高層骨組みの仮想震動実験と骨組解析の比較、日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸)pp.291-292、2010.7

元結正次郎：Bounding surfaceモデルとSub-layerモデルとの関連、その1　sub-layerモデルの巨視的自由エネルギー、日本建築学会大会学術講演梗概集、B-1 分冊、pp.761-762、2003. 7

元結正次郎、白奇烈：金属系材料の多軸応力状態における応力-ひずみ関係の巨視的力学モデル、有限のサブレイヤーから成るモデルの巨視的評価手法、構造工学論文集、vol.52B、pp.77-84、2006.3

元結正次郎、白奇烈：完全弾塑性体から成るサブレイヤーモデルの1軸応力場に対する巨視的評価手法、金属系材料の応力ひずみ関係に対するサブレイヤーモデルの巨視的評価手法その1 、日本建築学会構造系論文集、第611号、pp.87-94、2007.1

山崎久雄、笠井和彦、小澤秀充、大木洋司、金子洋文：繰返し応力を受ける鋼材の曲線履歴型モデル　その8　歪速度、歪振幅依存性を考慮した極低降伏点鋼LY100の応力―歪関係、日本建築学会大会学術講演梗概集(中国)、pp.909-910、2008.7

山下拓三、大崎純、宮村倫司、小檜山雅之、張景耀、堀宗朗、秋葉博、梶原浩一：E-Simulatorによる合成梁の高精度コンポーネント解析、日本建築学会大会学術講演梗概集(関東)、pp.309-310、2011.7

山下拓三、大崎純、宮村倫司、小檜山雅之、堀宗朗、秋葉博、梶原浩一：E-Simulatorによる実大4層鋼構造骨組の震動台実験の高精度有限要素解析、日本建築学会大会学術講演梗概集(東海)、pp.333-334、2012.7

山田嘉昭、黄祐民：塑性変形のサブレイヤモデルについて、東京大学生産技術研究所　研究速報、第32巻、第10号、pp.464-467、1980.10

山田哲、今枝知子、岡田健：バウシンガー効果を考慮した構造用鋼材の簡潔な履歴モデル、日本建築学会構造系論文集、第559号、pp.225-232、2002.9

山田哲、吹田啓一郎、松岡祐一、島田侑子：震動第実験における弾塑性応答特性と崩壊メカニズムの形成　実大4層鉄骨造建物の完全崩壊実験　その2、日本建築学会構造系論文集、第644号、pp.1851-1859、2009.10

吉田総仁、上森武 : 大ひずみ繰返し塑性変形挙動を記述する構成式、日本機械学会論文集(A 編)、第 68 巻、第 667 号、pp.415-421、2002.3

I.N.Basuroychowdhury, G.Z.Voyiadjis : A Multiaxial Plasticity Model for Non-proportional Loading Cases, Int. J. Plasticity, vol.9, pp.855-870, 1998

J.F.Besseling : A Theory of Elastic, Plastic and Creep Deformation of anInitially Isotropic Material Showing Strain Hardening, Creep Recovery and Secondary Creep, J. Appl. Mech. ASME, vol.25, pp. 529-536, 1958.12

J.Bonet and R.D.Wood: Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Cambridge University Press, 2009

J.L.Chaboche K.D.Van, G.Codier : Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel, SMIRT-5, Division L, Berlin, 1979

J.L.Chaboche, G. Rousselier : On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations-Part1:Rules Developed With Internal Variable Concept, J. Pres. Vess. Tech. ASME, vol.105, pp.153-158, 1983.5

J.L.Chaboche, G. Rousselier : On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations-Part2:Application of Internal Variable Concepts to the 316 Stainless Steel, J. Pres. Vess. Tech. ASME, vol.105, pp.159-164, 1983.5

J.L.Chaboche : Time-Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity, Int. J. Plasticity, vol.2, pp.149-188, 1986

J.L.Chaboche: A Review of Some Plasticity and Viscoplasticity Constitutive Theory, Int. J. Plasticity, vol.24, pp.1642-1693, 2008

D.Y.Chiang, J.L.Beck : A New Class of Distributed-Element Models for Cyclic Plasticity-I. Theory and Application, Int. J. Solids Structures vol.31, No.4, pp.469-484, 1994 (a)

D.Y.Chiang, J.L.Beck : A New Class of Distributed-Element Models for Cyclic Plasticity-Ⅱ. On Important Properties of Material Behavior, Int. J. Solids Structures vol.31, No.4, pp.485-496, 1994 (b)

D.Y.Chiang : A Phenomenological Model for Cyclic Plasticity, J. Eng. Mat. Tech. ASME, vol.119, pp.7-11, 1997.1 (a)

D.Y.Chiang : Modeling and Identification of Elatic-Plastic Systems Using the Distributed –Element model, J. Eng. Mat. Tech. ASME, vol.119, pp.332-336, 1997.10 (b)

D.Y.Chiang, K.H.Su, C.H.Liao : A Study on Subsequent Yield Surface Based on the Distributed –Element model, Int. J. Plasticity, bo.18, pp.51-70, 2002

D.Y.Chiang : Modeling and Characterization of Cyclic Relaxation and Ratcheting Using the Distributed-Element Model, Applied Mathematical modeling, vol.32, pp.501-513, 2008

Y.F.Dafalias, E.P.popov : A Model of Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loading, Acta Mechanica, vol.21, pp.173-192, 1975

Y.F.Dafalias, E.P.popov : Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity, J. Appl. Mech. ASME, vol.43, pp.645-651, 1976

Y.F.Dafalias, E.P.Popove: Cyclic,Loading For Material with a Vanishing Elastic Region, Nuclear Engineering and Design, vol.41, 293-302, 1977

Y.F.Dafalias, M.S.Ranjbari : Further Development, Multiaxial Formulation and Implementation of Bounding surface Plasticity Model For Metal, PhD thesis, department of civil engineering in U.C.Davis 1981

Y.F.Dafalias, L.R.Herrmann: Bounding Surface Plasticity, II: Application to Isotropic Cohesive Soils, J. Eng. Mech. ASCE, pp.1263-1291, 1986

O.S.Hopperstad, M.Langseth and S.Resmseth: Cyclic Stress-Strain Behavior of Alloy AA6060, Part I: Uniaxial Experiments and Modeling, Int. J. Plasticity, vol.11 No.6, pp.725-739, 1995a

O.S.Hopperstad, M.Langseth and S.Resmseth: Cyclic Stress-Strain Behavior of Alloy AA6060, Part 2: Biaxial Experiments and Modeling, Int. J. Plasticity, vol.11 No.6, pp.741-762, 1995b

G.A.Holzapfel: Nonlinear Solid Mechanics, Wiley, 2010

N.Inoue, T.Igari, F.Yoshida, A.Suzuki, S.Murakami : Inelastic Behavior of 2 1/4 Cr-1 Mo Steel Under Plasticity-Creep Interaction Condition , Nuclear Engineering and Design 90, pp.287-297, 1985

W.D.Iwan : A Distributed-Element Model for Hysteresis and Its Steady-State Dynamic Response, J. Appl. Mech. ASME, vol.33, pp.893-900, 1966

W.D.Iwan : On a Class of Models for the Yielding Behavior of Continuous and Composite Systems, J. Appl. Mech. ASME, vol.34, pp.612-617, 1967

Y.Jiang and J.Zhang: Benchmark Experiments and Characteristic Cyclic Plasticity Deformation, Int. J. Plasticity, pp.1481-1515, vol.24, 2008

R.D.Krieg : A Practical Two Surface Plasticity Theory, J. Appl. Mech. ASME, vol.42, pp.641-646, 1975

A.R.Khoei, N.Jamali: On the Implementation of A Multi-Surface Kinematic Hardening Plasticity and Its Application, Int. J. Plasticity, No21, pp.1741-1770, 2005

M.G.Lee, D.Kim, C.Kim, M.L.Wenner, R.H.Wagoner, K.Chung : A Practical Two-plasticity Model and Its Application to Springj-back Prediction, Int. J. Plasticity, vol.23, pp.1189-1212, 2007

H.S.Lamba, O.M.Sidebottom: Cyclic Plasticity for Nonproportional Paths: Part1 Cyclic Hardening, Erasure of Memory and Subsequent Strain Hardening Experiment, J. Eng. Mat. Tech. ASME, pp.96-103, 1978.1 (a)

H.S.Lamba, O.M.Sidebottom: Cyclic Plasticity for Nonproportional Paths: Part2 Comparison with Predictions of Three Incremental Plasticity Models, J. Eng. Mat. Tech. ASME, pp.104-111, 1978.1 (b)

D.L.Mcdowell : A Two Surface Model for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity Part1 Development of Appropriate Equation, J. Appl. Mech. ASME, vol.52, pp.298-302, 1985.6 (a)

D.L.Mcdowell : A Two Surface Model for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity Part2 Comparison of Theory with Experiments, J. Appl. Mech. ASME, vol.52, pp.303-308, 1985.6 (b)

D.L.Mcdowell : An Experimental Study of the Structure of Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Plasticity, J. Eng. Mat. and Tec, vol.107, pp.307-315, 1985 (c)

D.L.Mcdowell : Evaluation of Intersection Conditions for Two-surface Plasticity Model, Int. J. Plasticity, vol.5, pp.29-50, 1989

F.J.Montans : Bounding Surface Plasticity Model with Extended Masing behavior, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg, vol.182, pp.135-162, 2000

Z.Mroz : On the Description of Anisotropic Workhardening, J. Mech. Phys. Solids, vol.15, pp.163-175, 1967

Z.Mroz : An Attempt to Describe the Behavior of Metals under Cyclic Loads Using a More General Workhardening Model, Acta Mechanica 7, pp. 199-212 , 1969

M.Mahan, Y.F.Dafalias, M.Taibet, Y.Heo, S.K.Kunnath : SANISTEEL: Simple Anisotropic Steel Plasticity Model, J. Struct. Eng, vol.137, pp.185-194, 2011

S.Neto, D.Peric and D.R.J.Owen: Computational Methods for Plasticityk, Wiley, 2008

Y.Ohashi, E.Tanaka, M.Ooka : Plastic Deformation Behavior of Type 316 Steel Subject to Out-of-Phase Strain Cycles, J. Eng. Mat. Tech. ASME, vol.107, pp.286-292, 1985.10

N.Ohno, A Constitutive model of Plasticity With a Nonhardening Strain Region, J. Appl. Mech. ASME, vo.49, pp.721-727, 1982

M.Ortiz, E.P.Popov: Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations, Int. J. Numer. Meth. Eng., vol.21, 1561-1576,1985

J.C.Simo, R.L.Taylor : Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity, Comp. Mehods. Appl. Mech. Eng., vol.48, pp.101-118, 1985

J.C.Simo and T.J.R.Hughes: Computational Inelasticity, Springer, 1998

N.T.Tseng, G.C.Lee : Simple Plasticity Model of Two-Surface Type, J. Eng. Mech, ASCE, vol.109, pp.795-810, 1986

G.Z.Voyiadjis, T.M. Abu-Lebdeh: Plasticity Model for Concrete Using the Bounding Surface Concept, Int. J. Plasticity, vol.10, pp.1-21, 1994

G.Z.Voyiadjis, I.N.Basuroychowdhury : A Plasticity Model for Multiaxial Cyclic Loading and Ratcheting, Acta Mechanica, vol.126, pp.19-35, 1998

H.C.Wu, J.C.Yao and S.C.Chu: Investigation of Endochronic Constitutive Equation Subject to Plastic Strain-Controlled Axial Torsional Deformation, J. Eng. Mat. Tec. ASME, vol.108, pp.262-269, 1986.7

Y.Yokoo, T.Nakamura, T.Komiyama and Y.Kawada: Non-Stationary Hystretic Uniaxial Stress-Strain Relations of A Wide-Flange Steel Part1 Experimental Investigation, Trans. of AIJ, No259, 1977.9

F.Zarvel, D.Lee : Constitutive Relations for Nuclear Reactor Core Materials, J. Nuc. Mat, vol.75, pp.14-19, 1978

Appendix1,2,3

Appendix1　サブレイヤーモデルの数値解析結果に対するレイヤー数の影響度

サブレイヤーモデルの数値解析結果はレイヤーの数に依存する。ここでは、サブレイヤーモデルのレイヤー数をパラメータとした数値解析結果を実行し、レイヤー数の数値解析結果に対する影響度を検証する。仮想の座標系 ζ に対する降伏応力分布は、$\sigma_y = B/(A+\zeta)+C$ で表されるものとし、各定数は、A=0.56,B=80 ,C=0 と固定するものとする。Fig.A1-1 はレイヤー数をそれぞれ 5,10,20,50,200,1000 としたときの応力ひずみ関係であり、レイヤー数が多くなるにつれて弾塑性遷移過程が滑らかになることが理解され、レイヤー数が 50 程度であれば弾塑性遷移過程を滑らかに表現可能であることが分かる。従って、本論文では、実験結果とサブレイヤーモデルの結果を比較する際には、レイヤー数を 50 と設定している。また、レイヤー数が多くなるにつれて、全レイヤーが降伏するときの応力がある値に漸近していることが分かる。これは、Fig.A1-2 に示すように、サブレイヤーモデルとしての降伏応力は全レイヤーの降伏応力の平均として表されるためである。また、定数を適宜、調整することにより、全レイヤーが降伏するときの応力を調整することが可能であるが、先に述べたように本付録では議論の単純化のために定数 A,B ,C は固定して計算している。さらに、この結果を見ると、200 レイヤー以降はほぼ結果に差異がないことが分かる。従って、サブレイヤーモデルにおけるレイヤー数を 200 とすれば、レイヤー数をほぼ無限と近似可能であるとことが明らかである。以上のことから本論文において巨視的モデルとサブレイヤーモデルの結果の比較時には、200 レイヤーを持つサブレイヤーモデルを用いている。

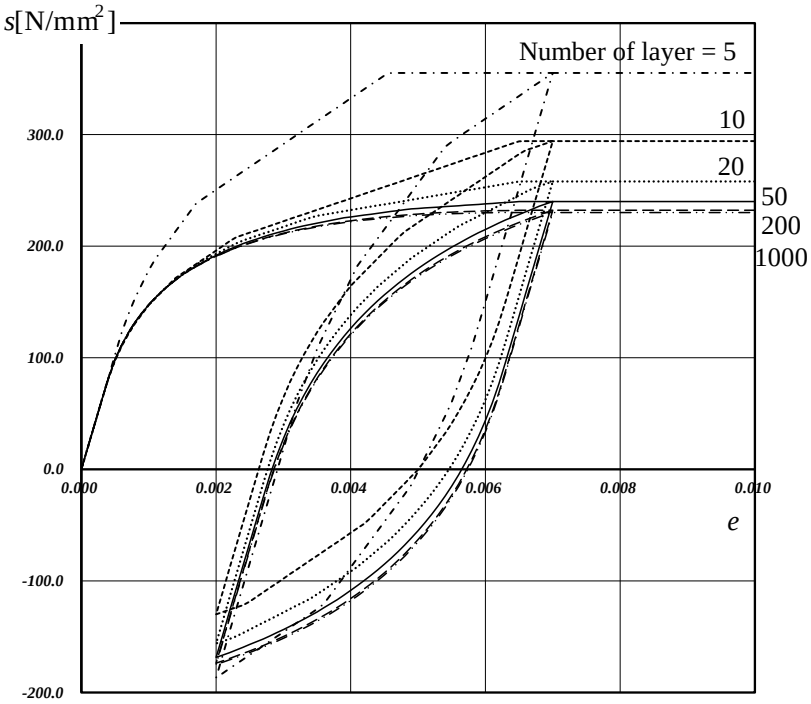


Fig.A1-1 Stress-strain relation for the sub-layer model

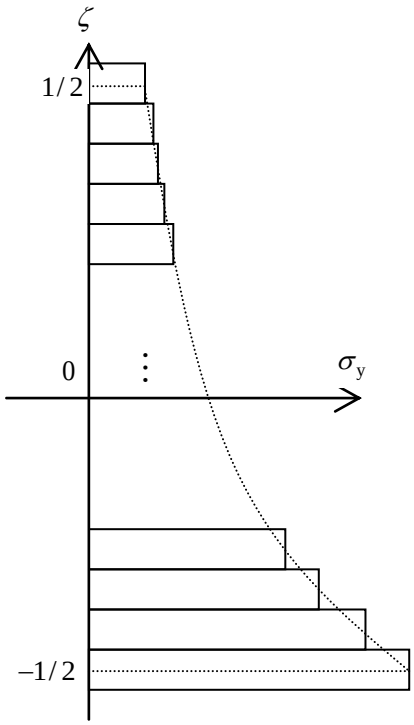


Fig.A1-2 Distribution of microscopic yield stress for the virtual coordinate

Appendix2　降伏応力分布関数および他の諸量について

巨視的モデルにおいて用いる変数 $s_y, \bar{s}_y, d_p$ を求める。降伏応力分布関数は、仮想の座標系 ζ 軸上において分数関数で表されるものとする。すなわち、降伏応力分布は次のように定義される。

$$\sigma_y = \frac{B}{A+\zeta} + C \tag{A2-1}$$

ここに A, B, C は定数である。また、定数 C は降伏応力分布の全レイヤー一律の増加を表している。このとき、$s_y, \bar{s}_y$ はその定義から次のように導出される。

$$s_y = \frac{1}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{B}{A+\zeta}+C\right)d\zeta = \frac{B}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\ln\left(\frac{A+\frac{1}{2}}{A+\zeta_p}\right)+C \tag{A2-2}$$

$$\bar{s}_y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{B}{A+\zeta}+C\right)d\zeta = B\ln\left(\frac{A+\frac{1}{2}}{A-\frac{1}{2}}\right)+C \tag{A2-3}$$

次に、変数 d_p を求める。$s_y + s_p^I = (1-d_p)(\bar{s}_y + s_p^I)$ を用いると、d_p は以下のように求められる。

$$d_p = 1 - \frac{\frac{B}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\ln\left(\frac{A+\frac{1}{2}}{A+\zeta_p}\right)+C+s_p^I}{B\ln\left(\frac{A+\frac{1}{2}}{A-\frac{1}{2}}\right)+C+s_p^I} \tag{A2-4}$$

なお、$\zeta_p \to 1/2$ の時は、式(A2-4)は、分母および分子はともに 0 となるためロピタルの定理を用いると、次式のように表される。

$$d = 1 - \lim_{\zeta_p \to \frac{1}{2}} \frac{\frac{B}{\frac{1}{2}-\zeta_p}\ln\left(\frac{A+\frac{1}{2}}{A+\zeta_p}\right)+C+s_p^I}{B\ln\left(\frac{A+\frac{1}{2}}{A-\frac{1}{2}}\right)+C+s_p^I} = 1 - \frac{\frac{B}{A+\frac{1}{2}}+C+s_p^I}{B\ln\left(\frac{A+\frac{1}{2}}{A-\frac{1}{2}}\right)+C+s_p^I} \tag{A2-5}$$

Appendix3　巨視的モデルの平面応力状態への縮約

＜各レイヤーの特性＞

ここでは、6 章で提案した硬化則を有する巨視的モデルの平面応力状態への縮約を行う。本節で用いる変数は、6 章にて定義した変数と同一の記号を用いる。平面応力状態の条件は次のように表される。

$$\sigma_{33}(\zeta)=\sigma_{23}(\zeta)=\sigma_{13}(\zeta)=\sigma_{33}^{K}(\zeta)=\sigma_{23}^{K}(\zeta)=\sigma_{13}^{K}(\zeta)=0 \tag{A3-1}$$

本項では、$[*]$を三次の正方行列、$\{*\}$は三次のベクトルを表すものとする。例えば、弾性構成則は式(A3-1)を用いると、次式のように表される。

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\zeta)\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}(\zeta)\\ \sigma_{22}(\zeta)\\ \sigma_{12}(\zeta)\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}(\zeta)-\varepsilon_{p11}(\zeta)\\ \varepsilon_{22}(\zeta)-\varepsilon_{p22}(\zeta)\\ 2\varepsilon_{12}(\zeta)-2\varepsilon_{p12}(\zeta)\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{D_e}]\left(\{\boldsymbol{\varepsilon}(\zeta)\}-\{\boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta)\}\right) \tag{A3-2}$$

$$[\boldsymbol{D_e}]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{A3-3}$$

本項では、式(A3-2)で示すようにひずみベクトルは、12 成分に 2 を乗ずるものとする。式(A3-1)を考慮すると、6.2.1 項における各レイヤーの特性は以下のように表される。

等方硬化則：$\dot{\sigma}^{I}(\zeta)=-p(\zeta-\zeta_c)\theta\dot{g}$ (A3-4)

移動硬化則：$$\begin{Bmatrix}\dot{\sigma}^{K}{}_{11}(\zeta)\\ \dot{\sigma}^{K}{}_{22}(\zeta)\\ \dot{\sigma}^{K}{}_{12}(\zeta)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\sigma}'^{K}{}_{11}(\zeta)\\ \dot{\sigma}'^{K}{}_{22}(\zeta)\\ \dot{\sigma}'^{K}{}_{12}(\zeta)\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{K\dot{g}-\dot{\sigma}^{I}(\zeta)}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{e}_{p11}\\ \dot{e}_{p22}\\ 2\dot{e}_{p12}\end{Bmatrix} \tag{A3-5}$$

降伏条件式：$$\phi(\zeta)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)\right):\left(\boldsymbol{\sigma}'(\zeta)-\boldsymbol{\sigma}'^{\boldsymbol{K}}(\zeta)\right)}-\left(\sigma_y(\zeta)+\sigma^{I}(\zeta)\right)\le 0 \tag{A3-6}$$

塑性流れ則：$$\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_{p11}(\zeta)\\ \dot{\varepsilon}_{p22}(\zeta)\\ 2\dot{\varepsilon}_{p12}(\zeta)\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\dot{\gamma}(\zeta)}{\sigma_y(\zeta)+\sigma^{I}(\zeta)}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}(\zeta)-\sigma_{11}^{K}(\zeta)\\ \sigma_{22}(\zeta)-\sigma_{22}^{K}(\zeta)\\ \sigma_{12}(\zeta)-\sigma_{12}^{K}(\zeta)\end{Bmatrix} \tag{A3-7}$$

塑性負荷条件：$\phi(\zeta)=\dot{\phi}(\zeta)=0$，　$\phi(\zeta)\dot{\gamma}(\zeta)=0$，　$\dot{\gamma}(\zeta)\ge 0$ (A3-8)

＜巨視的弾性構成則、巨視的応力および巨視的硬化則＞

平面応力状態に対する巨視的変数について述べる。巨視的な弾性構成則は、式(A3-2)を全領域において積分すると、巨視的応力 s_{ij} および巨視的塑性ひずみ e_{pij} により次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} s_{11}(\zeta) \\ s_{22}(\zeta) \\ s_{12}(\zeta) \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{D_e}] \begin{Bmatrix} e_{11}(\zeta) - e_{p11}(\zeta) \\ e_{22}(\zeta) - e_{p22}(\zeta) \\ 2e_{12}(\zeta) - 2e_{p12}(\zeta) \end{Bmatrix} \tag{A3-9}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{pij}(\zeta) d\zeta = e_{pij} \tag{A3-10}$$

ここに、サブレイヤーモデルの性質より $\varepsilon_{ij}(\zeta) = \text{constant} = e_{ij}$ を用いている。続いて、式(6-19)より平均塑性化応力 $\boldsymbol{s_p} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - \zeta_p} \int_{\zeta_p}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} d\zeta$ は次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} s_{p11} \\ s_{p22} \\ s_{p12} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{D_e}] \left(\begin{Bmatrix} {}^{cur}e_{11} \\ {}^{cur}e_{22} \\ 2{}^{cur}e_{12} \end{Bmatrix} - \frac{1}{1 - D_p d_p} \begin{Bmatrix} {}^{cur}e_{p11} \\ {}^{cur}e_{p22} \\ 2{}^{cur}e_{p12} \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} {}^{pre}s_{p11} \\ {}^{pre}s_{p22} \\ {}^{pre}s_{p12} \end{Bmatrix} \tag{A3-11}$$

ここに、$\{\boldsymbol{\sigma}(\zeta)\} = [\boldsymbol{D_e}]\left(\{{}^{cur}\boldsymbol{e}\} - \{{}^{cur}\boldsymbol{\varepsilon_p}(\zeta)\}\right) + \{{}^{pre}\boldsymbol{\sigma}(\zeta)\}$、$\frac{1}{2} - \zeta_p = 1 - D_p d_p$ を用いている。投影応力 $\bar{s}_{ij}$ は式(6-21)より次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{s}_{11} \\ \bar{s}_{22} \\ \bar{s}_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - d_p} [\boldsymbol{D_e}] \left(\begin{Bmatrix} {}^{cur}e_{11} \\ {}^{cur}e_{22} \\ 2{}^{cur}e_{12} \end{Bmatrix} - \frac{1}{1 - D_p d_p} \begin{Bmatrix} {}^{cur}e_{p11} \\ {}^{cur}e_{p22} \\ 2{}^{cur}e_{p12} \end{Bmatrix} \right) + \frac{1}{1 - d_p} \begin{Bmatrix} {}^{pre}s_{p11} \\ {}^{pre}s_{p22} \\ {}^{pre}s_{p12} \end{Bmatrix} - \frac{d_p}{1 - d_p} \begin{Bmatrix} s_{p11}^K \\ s_{p22}^K \\ s_{p12}^K \end{Bmatrix} \tag{A3-12}$$

式(6-49)-(6-52)より巨視的移動硬化則および巨視的等方硬化則は次式のようになる。

$$\dot{s}_p^I = -p \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \zeta_p \right) - \zeta_c \right\} \theta \dot{g} \tag{A3-13}$$

$$\dot{s}^I = p \zeta_c \theta \dot{g} \tag{A3-14}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{s}_{p11}^K \\ \dot{s}_{p22}^K \\ \dot{s}_{p12}^K \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{K\dot{g} - \dot{s}_p^I}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} : \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e}_{p11} \\ \dot{e}_{p22} \\ 2\dot{e}_{p12} \end{Bmatrix} \tag{A3-15}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{s}_{11}^K \\ \dot{s}_{22}^K \\ \dot{s}_{12}^K \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{K\dot{g} - \dot{s}^I}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}} : \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e}_{p11} \\ \dot{e}_{p22} \\ 2\dot{e}_{p12} \end{Bmatrix} \tag{A3-16}$$

＜巨視的降伏条件および巨視的塑性流れ則＞

巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則について述べる。巨視的降伏条件式および巨視的塑性流れ則は式(6-48),(6-53)より次式のようになる。

$$\Phi_p = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right):\left(\boldsymbol{s}'_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right)} - \left(s_y + s_p^I\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left\{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\}^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\}} - \left(s_y + s_p^I\right) \le 0 \quad \text{(A3-17a)}$$

$$\overline{\Phi} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right):\left(\bar{\boldsymbol{s}}' - \boldsymbol{s}'^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right)} - \left(\bar{s}_y + s_p^I\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\}^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\}} - \left(\bar{s}_y + s_p^I\right) \le 0 \quad \text{(A3-17b)}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_{\boldsymbol{p}11} \\ \dot{e}_{\boldsymbol{p}22} \\ 2\dot{e}_{\boldsymbol{p}12} \end{Bmatrix} = \frac{3}{2}\frac{\dot{g}}{\bar{s}_y + s_p^I}\begin{Bmatrix} \bar{s}'_{11} - s'^K_{p11} \\ \bar{s}'_{22} - s'^K_{p22} \\ 2\bar{s}'_{12} - 2s'^K_{p12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\dot{g}}{\bar{s}_y + s_p^I}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{s}_{11} - s^K_{p11} \\ \bar{s}_{22} - s^K_{p22} \\ \bar{s}_{12} - s^K_{p12} \end{Bmatrix} = \frac{3}{2}\frac{\dot{g}}{\bar{s}_y + s_p^I}\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\}$$

(A3-18)

$$\left[\boldsymbol{P}\right] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(A3-19)}$$

ここで、数値解析アルゴリズム構築の関係上、巨視的降伏条件式を次式のように書きなおす。

$$\hat{\Phi}_p = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\}^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\} - \frac{1}{3}\left(s_y + s_p^I\right)^2 \le 0 \quad \text{(A3-20a)}$$

$$\hat{\overline{\Phi}} = \frac{1}{2}\left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\}^T\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\} - \frac{1}{3}\left(\bar{s}_y + s_p^I\right)^2 \le 0 \quad \text{(A3-20b)}$$

ここに、$\hat{\Phi}_p, \hat{\overline{\Phi}}$ は、$\Phi_p, \overline{\Phi}$ と区別を行うための記号であるが、本質的に両者は同一である。さらに、式(A3-20)を用いると、巨視的塑性流れ則は次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_{p11} \\ \dot{e}_{p22} \\ 2\dot{e}_{p12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{s}'_{11} - s'^K_{p11} \\ \bar{s}'_{22} - s'^K_{p22} \\ \bar{s}'_{12} - s'^K_{p12} \end{Bmatrix}\dot{\hat{g}} = \left[\boldsymbol{P}\right]\left\{\bar{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{p}}\right\}\dot{\hat{g}} \quad \text{(A3-21)}$$

ここに $\hat{g}$ は $\hat{\Phi}_p, \hat{\overline{\Phi}}$ における巨視的塑性進展パラメータである。従って、式(A3-18),(A3-21)より $\dot{\hat{g}}$ と $\dot{g}$ の関係は次式のようになる。

$$\dot{g} = \frac{2}{3}\left(\bar{s}_y + s_p^I\right)\dot{\hat{g}} \quad \text{(A3-22)}$$

さらに、式(A3-22)を用いると、巨視的移動硬化則および巨視的等方硬化則は次のように書きなおされる。

$$\dot{s}_p^I = -\frac{2}{3}p\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \zeta_p\right) - \zeta_c\right\}\theta\left(\bar{s}_y + s_p^I\right)\dot{\hat{g}} \quad \text{(A3-23)}$$

$$\dot{s}^I = \frac{2}{3}p\zeta_c\theta\left(\bar{s}_y + s_p^I\right)\dot{\hat{g}}\,, \quad \text{(A3-24)}$$

$$\begin{Bmatrix}\dot{s}_{p11}^{K}\\ \dot{s}_{p22}^{K}\\ \dot{s}_{p12}^{K}\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{K-\dfrac{ds_p^I}{dg}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}}}}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{e}_{p11}\\ \dot{e}_{p22}\\ 2\dot{e}_{p12}\end{Bmatrix}\frac{2}{3}\left(\bar{s}_y+s_p^I\right)\dot{\hat{g}}=\frac{2}{3}\left(K-\frac{ds_p^I}{dg}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}s_{p11}-s_{p22}^{K}\\ s_{p22}-s_{p22}^{K}\\ s_{p12}-s_{p12}^{K}\end{Bmatrix}\dot{\hat{g}}$$
$$=\left[\boldsymbol{R}_1\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}\dot{\hat{g}}$$

(A3-25)

$$\begin{Bmatrix}\dot{s}_{11}^{K}\\ \dot{s}_{22}^{K}\\ \dot{s}_{12}^{K}\end{Bmatrix}=\frac{2}{3}\left(K-\frac{ds^I}{dg}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}s_{p11}-s_{p22}^{K}\\ s_{p22}-s_{p22}^{K}\\ s_{p12}-s_{p12}^{K}\end{Bmatrix}\dot{\hat{g}}=\left[\boldsymbol{R}_2\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}\dot{\hat{g}} \qquad \text{(A3-26)}$$

$$\left[\boldsymbol{R}_1\right]=\frac{2}{3}\left(K-\frac{ds_p^I}{dg}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \left[\boldsymbol{R}_2\right]=\frac{2}{3}\left(K-\frac{ds^I}{dg}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad \text{(A3-27),(A3-28)}$$

＜数値解析アルゴリズム＞

前項で誘導した平面応力状態に対する巨視的モデルの基礎式を用いて数値計算アルゴリズムを構築する。時刻 t の諸量および ${}^{t+\Delta t}e_{11}, {}^{t+\Delta t}e_{22}, {}^{t+\Delta t}e_{12}$ は既知であり、時刻 $t+\Delta t$ における他の諸量を算定する手順を示す。ここで、時刻 t における諸量は ${}^{t}(\ )$ と表し、${}^{t+\Delta t}(\ )={}^{t}(\ )+\Delta(\ )$ とする。また、過去の諸量 ${}^{pre}(\ )$ についても既知であるとする。基本的な考え方は、Return mapping rule に準じている。降伏応力分布によって異なる $s_y, \bar{s}_y, D_p, d_p$ の求め方は、Appendix2 に記す。

<u>変数 ${}^{t+\Delta t}\zeta_p$ の算出</u>：変数 ${}^{t+\Delta t}\zeta_p$ の算出は、式(6-23)を ζ_p に対して解くことにより行われる。このとき、過去の微視的応力 ${}^{pre}\boldsymbol{\sigma}'$ を参照点毎に記憶するものとする。

<u>弾性予測子</u>：増分区間において、塑性化が進展しないもの $\left({}^{trial}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}={}^{t}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}\right)$ として各巨視的応力の試行値 ${}^{trial}(\ )$ を計算する。${}^{trial}\boldsymbol{s}, {}^{trial}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}, {}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}$ は次のようになる。

$$\left\{{}^{trial}\boldsymbol{s}\right\}=\begin{Bmatrix}{}^{trial}s_{11}\\ {}^{trial}s_{22}\\ {}^{trial}s_{12}\end{Bmatrix}=\left[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{e}}\right]\begin{Bmatrix}{}^{trial}e_{11}-{}^{t}e_{p11}\\ {}^{trial}e_{22}-{}^{t}e_{p22}\\ 2{}^{trial}e_{12}-2{}^{t}e_{p12}\end{Bmatrix}=\left[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{e}}\right]\left(\left\{{}^{trial}\boldsymbol{e}\right\}-\left\{{}^{t}\boldsymbol{e}_p\right\}\right) \qquad \text{(A3-29)}$$

$$\left\{{}^{trial}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}\right\}=\left[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{e}}\right]\left(\left\{{}^{t+\Delta t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e}\right)\right\}-\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p}\left\{{}^{t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}\right)\right\}\right)+\left\{{}^{pre}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}\right\} \qquad \text{(A3-30)}$$

$$\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}\right\}=\frac{\left[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{e}}\right]}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left(\left\{{}^{t+\Delta t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e}\right)\right\}-\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p}\left\{{}^{t}\left({}^{cur}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}\right)\right\}\right)+\frac{\left\{{}^{pre}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}\right\}}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}-\frac{d_p}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left\{{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\} \qquad \text{(A3-31)}$$

<u>弾塑性判定</u>：降伏条件式の試行値 ${}^{trial}\hat{\bar{\Phi}}$ を用いて弾塑性判定を行う。

$${}^{trial}\hat{\bar{\Phi}}=\frac{1}{2}\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}^{T}\left[\boldsymbol{P}\right]\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}-\frac{1}{3}\left(\bar{s}_y+{}^{t}\bar{s}^{I}\right)^2 \qquad \text{(A3-32)}$$

${}^{trial}\hat{\Phi} < 0$ のとき、弾性状態であるので試行値を正解として終了。

${}^{trial}\hat{\Phi} \geq 0$ のとき、塑性変形が生じているので塑性修正子を実行する。

<u>塑性修正子</u>：増分区間で塑性化が進展していることが明らかとなったので、塑性化を考慮した真の巨視的応力を求める。時刻 $t+\Delta t$ における各巨視的応力は、次式のように表される。

$$\left\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s}\right\} = \left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}_p\right\} = \left\{{}^{trial}\boldsymbol{s}\right\} - \left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{\Delta\boldsymbol{e}_p\right\} \tag{A3-33}$$

$$\left\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p}\right\} = \left\{{}^{trial}\boldsymbol{s_p}\right\} - \frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p}\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{\Delta\boldsymbol{e_p}\right\} \tag{A3-34}$$

$$\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}}\right\} = \left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}\right\} - \frac{1}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left\{\Delta\boldsymbol{e_p}\right\} + \left(1-\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\right)\left\{\Delta\boldsymbol{s}^K\right\} \tag{A3-35}$$

式(A3-23)-(A3-27)より等方硬化則および移動硬化則は次式のように表される。

$$\Delta s_p^I = -\frac{2}{3}p\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+{}^{t+\Delta t}\zeta_p\right)-\zeta_c\right\}\theta\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)\Delta\hat{g}\,,\quad \Delta s^I = \frac{2}{3}p\zeta_c\theta\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}s_p^I\right)\Delta\hat{g} \tag{A3-36),(A3-37}$$

$$\left\{\Delta\boldsymbol{s_p^K}\right\} = \left[\boldsymbol{R}_1\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}\Delta\hat{g}\,,\quad \left\{\Delta\boldsymbol{s^K}\right\} = \left[\boldsymbol{R}_2\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}\Delta\hat{g} \tag{A3-38),(A3-39}$$

式(A3-21)より塑性流れ則は次式のように表される

$$\left\{\Delta\boldsymbol{e_p}\right\} = \left[\boldsymbol{P}\right]\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}\Delta\hat{g} \tag{A3-40}$$

式(A3-38),(A3-40)より $\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}$ が次のように導出される。

$$\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\} = \left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}} - {}^{t}\boldsymbol{s_p^K}\right\} - \left(\frac{1}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left[\boldsymbol{P}\right] + \frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left[\boldsymbol{R}_1\right]\right)\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\}\Delta\hat{g}$$

(A3-41)

式(A3-41)を整理すると次式が導かれる。

$$\left\{{}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{s}} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{s_p^K}\right\} = \left[\boldsymbol{A}\right]\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}} - {}^{t}\boldsymbol{s_p^K}\right\} \tag{A3-42}$$

$$\left[\boldsymbol{A}\right] = \left(\left[\boldsymbol{I}\right] + \left[\boldsymbol{B}\right]\Delta\hat{g}\right)^{-1} \tag{A3-43}$$

$$\left[\boldsymbol{B}\right] = \frac{1}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\left[\boldsymbol{D_e}\right]\left[\boldsymbol{P}\right] + \frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left[\boldsymbol{R}_1\right] \tag{A3-44}$$

ここで、$\left[\boldsymbol{D_e}\right],\left[\boldsymbol{P}\right],\left[\boldsymbol{R}_1\right]$ の固有ベクトルを求めると次式のようになる。

$$[\boldsymbol{Q}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A3-45}$$

式(A3-45)を用いると$[\boldsymbol{D_e}],[\boldsymbol{P}],[\boldsymbol{R}_1]$は次のように直交化できる。

$$[\boldsymbol{P}]^* = [\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{P}][\boldsymbol{Q}]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{A3-46}$$

$$[\boldsymbol{D_e}]^* = [\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{Q}]^T = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{A3-47}$$

$$[\boldsymbol{R}_1]^* = [\boldsymbol{R}_1][\boldsymbol{D_e}][\boldsymbol{R}_1]^T = \frac{2}{3}\left(K - \frac{ds_p^I}{dg}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A3-48}$$

従って、式(A3-46)-(A3-48)を用いると、$[\boldsymbol{A}]$は次式のように表される。

$$[\boldsymbol{A}]=\left([\boldsymbol{Q}]^T[\boldsymbol{Q}]+\frac{1}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}[\boldsymbol{Q}]^T[\boldsymbol{D_e}]^*[\boldsymbol{P}]^*[\boldsymbol{Q}]\Delta\hat{g}+\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}[\boldsymbol{Q}]^T[\boldsymbol{R}_1]^*[\boldsymbol{Q}]\Delta\hat{g}\right)^{-1}=[\boldsymbol{Q}]^T[\boldsymbol{A}]^*[\boldsymbol{Q}] \tag{A3-49}$$

$$[\boldsymbol{A}]^*=\left([\boldsymbol{I}]+\frac{1}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}[\boldsymbol{D_e}]^*[\boldsymbol{P}]^*\Delta\hat{g}+\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}[\boldsymbol{R}_1]^*\Delta\hat{g}\right) \tag{A3-50}$$

ここに、$[\boldsymbol{I}]$は三次の単位行列である。$[\boldsymbol{A}]$を展開すると次のようになる。

$$[\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^*_{11} & A^*_{12} & A^*_{13} \\ A^*_{21} & A^*_{22} & A^*_{23} \\ A^*_{31} & A^*_{32} & A^*_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(A^*_{11}+A^*_{22}\right) & \frac{1}{2}\left(A^*_{11}-A^*_{22}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(A^*_{11}-A^*_{22}\right) & \frac{1}{2}\left(A^*_{11}+A^*_{22}\right) & 0 \\ 0 & 0 & A^*_{33} \end{bmatrix} \tag{A3-51}$$

$[\boldsymbol{A}]^*$を展開すると次式のようになる。

$$[\boldsymbol{A}]^{*}=\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\frac{1}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\begin{bmatrix}\frac{E}{1-\nu}&0&0\\0&2G&0\\0&0&G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\Delta\hat{g}+\frac{2}{3}\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left(K-\frac{ds_p^I}{dg}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Delta\hat{g}\right)^{-1}$$

(A3-52)

従って、式(A3-52)より $[\boldsymbol{A}]^{*}$ の各成分は次式のように表される。

$$A^{*}{}_{11}=\frac{1}{1+\frac{E}{3\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)(1-\nu)}\Delta\hat{g}+\frac{2}{3}\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left(K-\frac{ds_p^I}{dg}\right)\Delta\hat{g}} \tag{A3-53}$$

$$A^{*}{}_{22}=A^{*}{}_{33}=\frac{1}{1+\frac{2G}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\Delta\hat{g}+\frac{2}{3}\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left(K-\frac{ds_p^I}{dg}\right)\Delta\hat{g}} \tag{A3-54}$$

式(A3-20)より、時刻 $t+\Delta t$ の降伏条件式 ${}^{t+\Delta t}\hat{\overline{\Phi}}$ は次式のようになる。

$${}^{t+\Delta t}\hat{\overline{\Phi}}=\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{3}\left(\bar{s}_y+{}^{t+\Delta t}\bar{s}_p^I\right)^2=0 \tag{A3-55}$$

$$\xi=\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}^{T}[\boldsymbol{A}]^{T}[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{A}]\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}=\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}^{*T}[\boldsymbol{A}]^{*2}[\boldsymbol{P}]^{*}\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}^{*} \tag{A3-56}$$

$$\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}^{*}=[\boldsymbol{Q}]\left\{{}^{trial}\bar{\boldsymbol{s}}-{}^{t}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{K}}\right\}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\left({}^{trial}\bar{s}_{11}-{}^{t}s_{p11}^{K}+{}^{trial}\bar{s}_{22}-{}^{t}s_{p22}^{K}\right)\\\frac{1}{\sqrt{2}}\left({}^{trial}\bar{s}_{22}-{}^{t}s_{p22}^{K}+{}^{trial}\bar{s}_{11}-{}^{t}s_{p11}^{K}\right)\\{}^{trial}\bar{s}_{12}-{}^{t}s_{p12}^{K}\end{Bmatrix} \tag{A3-57}$$

ξ を展開すると次式が導かれる。

$$\xi=\frac{1}{6}\left\{\frac{{}^{trial}\bar{s}_{11}-{}^{t}s_{p11}^{K}+{}^{trial}\bar{s}_{22}-{}^{t}s_{p22}^{K}}{1+\frac{E}{3\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)(1-\nu)}\Delta\hat{g}+\frac{2}{3}\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left(K-\frac{ds_p^I}{dg}\right)\Delta\hat{g}}\right\}^{2}+\frac{\frac{1}{2}\left({}^{trial}\bar{s}_{22}-{}^{t}s_{p22}^{K}+{}^{trial}\bar{s}_{11}-{}^{t}s_{p11}^{K}\right)^{2}+2\left({}^{trial}\bar{s}_{12}-{}^{t}s_{p12}^{K}\right)^{2}}{\left\{1+\frac{2G}{\left(1-{}^{t+\Delta t}d_p\right)\left(1-{}^{t+\Delta t}D_p\,{}^{t+\Delta t}d_p\right)}\Delta\hat{g}+\frac{2}{3}\frac{1}{1-{}^{t+\Delta t}d_p}\left(K-\frac{ds_p^I}{dg}\right)\Delta\hat{g}\right\}^{2}} \tag{A3-58}$$

従って、Newton-Raphson 法により、式(A3-55)を $\Delta\hat{g}$ について解き、収斂するまで計算を行う。なお、微係数についての詳細は割愛する。

<u>塑性ひずみ球の判定式</u>：ここで、$\Delta g_i=\Delta g$ と仮定し、${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}_{ci}$ および ${}^{t+\Delta t}e_{ri}$ を求め、

${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}_e = \left| {}^{t+\Delta t}e_p - {}^{t+\Delta t}e_{ci} \right| - {}^{t+\Delta t}e_{ri}$ により ${}^{t+\Delta t}e_p$ が塑性領域内外どちらに位置するかを判定する。

${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}_e < 0$ のとき、$\Delta g_i = \Delta g$, $\Delta g_o = 0$ である。

${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}_e \geq 0$ のとき、$\Delta g_o \neq 0$ であるので、Δg_i および Δg_o の真値を求める必要がある。従って、次式が成り立つ必要がある。

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}_e = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\Phi}_e = \frac{2}{3}\sqrt{\left({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e_p} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e^K}\right):\left({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e_p} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e^K}\right)} - {}^{t+\Delta t}e^I = 0 \qquad \text{(A3-59)} $$

$\Delta e_{11}^K, \Delta e_{12}^K, \Delta e^I$ は Δg_o の関数であるので、式(A3-58)を Newton-Raphson 法を用いて解く。得られた $\Delta g_o, \Delta g_i$ を基に各諸量を更新する。

以上により、平面応力状態に対する巨視的モデルの定式化が示された。なお、接線係数テンソルについては、軸・せん断応力状態の場合(6.3.5 項参照)と同一であるので詳細は割愛する。