

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	低エミッタンス電子銃システムのビームダイナミクス解析手法に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	水野明彦
Author(English)	Akihiko Mizuno
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第9524号, 授与年月日:2014年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:堀田 栄喜,堀岡 一彦,長谷川 純,高山 健,林崎 規託
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第9524号, Conferred date:2014/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

学位論文

低エミッタンス電子銃システムの
ビームダイナミクス解析手法に関する研究

水野 明彦

2013年10月

目次

第 1 章	緒言	1
1.1	低エミッタンス電子銃システムの必要性とその歴史	1
1.1.1	放射光源	1
1.1.2	次世代の放射光源	3
1.1.3	高輝度低エミッタンス電子源の必要性	6
1.1.4	フォトカソード RF 電子銃	7
1.1.5	SPring-8 における RF 電子銃開発	9
1.2	ビームダイナミクスの解析手法	10
1.2.1	数値シミュレーションコード	10
1.2.2	解析的手法	11
1.3	本論文の目的と構成	11
	参考文献	13
第 2 章	ビームダイナミクス解析の基礎理論	15
2.1	電子の加速	15
2.1.1	理想的な DC 電場中における電子の加速	16
2.1.2	理想的な RF 空洞における電子の加速	17
2.1.3	RF 電子銃空洞のエネルギー特性	17
2.1.4	実際の空洞でのエネルギー計算	19
2.2	電子が誘起する電磁場	20
2.2.1	自由運動する電子が誘起する電磁場	20
2.2.2	短バンチ電子ビームが周囲に誘起する電磁場	22
2.3	まとめ	24
	参考文献	25
第 3 章	シミュレーションコードの開発	26
3.1	コードのアルゴリズム	26

3.2	空間電荷相互作用の計算	27
3.3	外部電磁場の読み込み	30
3.4	トラッキング方法	31
3.5	電子パンチの生成およびカソード近傍での処理	33
3.6	計算結果の処理と出力	38
3.6.1	ビームサイズ	39
3.6.2	エミッタンス	39
3.6.3	エネルギーおよび $\Delta E/E$	40
3.7	コードの精度検証	40
3.7.1	初期粒子分布生成法	41
3.7.2	ビームサイズとエミッタンスの初期粒子分布生成法および粒子数への依存性	42
3.7.3	他のシミュレーションコードとの比較	45
3.8	まとめ	46
参考文献		47
第 4 章	シミュレーションコードによる RF 電子銃装置のビームダイナミクス解析	48
4.1	装置の構成	48
4.1.1	電子銃空洞の構造	49
4.2	電子銃空洞内のビームダイナミクス	50
4.2.1	電子ビームエネルギーの初期 RF 位相依存性	50
4.2.2	電子銃空洞によるパンチ幅の圧縮	52
4.2.3	空洞内でのエミッタンスの振舞い	54
4.2.4	エミッタンスの粒子数依存性	55
4.2.5	初期 RF 位相とレーザーパルス幅	56
4.2.6	レーザースポットサイズと空間電荷制限領域	56
4.3	電子銃空洞内でのビームダイナミクスの非対称性	59
4.3.1	RF 電磁場非対称性のビームダイナミクスに及ぼす影響	59
4.3.2	レーザー入射角のビームダイナミクスに及ぼす影響	59
4.4	ソレノイドコイル部のビームダイナミクス	60
4.4.1	集束系によるエミッタンス補償の原理	61
4.4.2	ソレノイドコイルの構造	63
4.4.3	ソレノイド集束系によるエミッタンス補償の様子	63
4.5	加速管部のビームダイナミクス	65
4.5.1	加速管電磁場の計算法	66
4.5.2	加速管でのビーム集束効果	67
4.6	加速管部でのビームダイナミクスの非対称性	69

4.6.1	加速管カップラーの非対称構造がエミッタンスに及ぼす影響	69
4.6.2	カップラー部におけるエミッタンス増加のメカニズム	71
4.6.3	カップラー内の電磁場の歪み	72
4.6.4	ダブルフィードカップラー	74
4.7	まとめ	76
参考文献		77
第 5 章	多元連立ビームエンベロープ方程式	78
5.1	ビームエンベロープ方程式	79
5.1.1	径方向ビームエンベロープ方程式の基礎	79
5.1.2	短パルスビームに対応した径方向ビームエンベロープ方程式	80
5.1.3	長手方向ビームエンベロープ方程式	81
5.1.4	連立ビームエンベロープ方程式	82
5.1.5	エンベロープ方程式によるエミッタンスの算出	82
5.2	多元連立ビームエンベロープ方程式	83
5.2.1	多元連立ビームエンベロープ方程式の構築	83
5.2.2	径方向空間電荷効果の計算	85
5.2.3	各スライスが誘起する電場の足し合わせ	86
5.2.4	カソードからのビームエミッション、およびカソードでの鏡像効果の計算	87
5.3	多元連立ビームエンベロープ方程式を用いたビームダイナミクス解析	88
5.3.1	フリースペースでのビームダイナミクス解析	89
5.3.2	ビームエネルギー 6 MeV の場合のエミッタンスの分割数依存性	91
5.3.3	ビームエネルギー 1 MeV の場合のエミッタンスの分割数依存性	93
5.3.4	電子銃空洞内のビームダイナミクス解析	96
5.3.5	カソードでの空間電荷制限効果の解析	100
5.3.6	ソレノイドコイルおよび加速管中のビームダイナミクス解析	101
5.4	まとめ	104
参考文献		106
第 6 章	多元連立ビームエンベロープ方程式を用いたスライスエミッタンス減少メカニズ ムの解析	107
6.1	理想的な DC 連続ビームでのエミッタンスの減少	107
6.2	エミッタンス減少のメカニズム	109
6.2.1	トランスバース rms エミッタンスの保存	109
6.2.2	エミッタンスの増減	110
6.3	実際の電子銃でのエミッタンスの減少	113

6.3.1	SCSS の熱電子銃におけるエミッタンスの減少	113
6.3.2	SPring-8 の RF 電子銃空洞におけるエミッタンスの減少	115
6.3.3	BNL 型 RF 電子銃空洞におけるエミッタンスの減少	119
6.4	まとめ	121
参考文献		123
第 7 章	まとめと今後の展望	124
7.1	まとめ	124
7.2	ビームダイナミクス解析における今後の展望	126
謝辞		127

第 1 章

緒言

本論文は、電子線型加速器の電子銃付近におけるビームダイナミクス解析手法に関する研究について、特に RF 電子銃を用いた低エミッタンス電子銃システムを解析対象として記述するものである。本章では、まず、本論文で取り上げる低エミッタンス電子銃システムについて、歴史的観点を含めた概要を述べる。次に、これらシステムのための既存のビームダイナミクス解析手法について述べ、これらの方法と対比しながら、本研究の必要性について述べる。

なお、本論文で取り扱うビームダイナミクスとは、ビームサイズ、エネルギー、電子軌道、位相空間分布全般を指している。このうち、ビームサイズ、エネルギー、電子軌道等の計算は、比較的単純であり、どのような解析手法を用いても概ね一致する傾向にある。ところが、位相空間分布を含むエミッタンスの計算は、解析手法によって異なった結果となることが多い。これは、エミッタンスが、電子ビームに含まれている全ての電子の位置分布、および速度分布に依存するためであると考えられる。したがって、本論文ではエミッタンス解析に重点をおいて述べる。

1.1 低エミッタンス電子銃システムの必要性とその歴史

1.1.1 放射光源

放射光の存在は 1940 年台初頭より理論的に指摘され、ベータトロンにおいて観測が試みられていたが、実験的には観測されていなかった。1945 年になってシンクロトロンが発明され、これが契機となり、1946 年、世界で 2 番目に建設された米国、General Electric 社の 70 MeV シンクロトロンにおいて初めての放射光が観測された [1, 2]。

シンクロトロン等のリング加速器においては、このような放射光が放出されると、その分ビームエネルギーが減少する。放射光のパワーはビームエネルギーの 4 乗に比例することが知られており、エネルギーの高い加速器において、この影響は顕著である。放射光が発見された当初は、もっぱら、ビームのエネルギーロスの原因であり、高エネルギーの加速器設計において障害となる厄介者であった。

放射光の利用は、1965 年に、the Solid State Panel of the National Academy of Science が

利用に関する委員会を立ち上げたところから始まる。最初の実験は、1963年に米国のNBS (The National Bureau of Standards) において180 MeVのシンクロトロンを用いて行われた [3]。

1965年には、東京大学原子核研究所の電子シンクロトロンINS-ES (Institute for Nuclear Study - Electron Synchrotron, 750 MeV) を用いて極紫外線、軟X線領域での分光学的研究が行われ、放射光利用の先駆的な例となった [4]。ただし、この当時の放射光実験は、加速器から発生した「不要」な放射光を実験に転用したものである。

放射光利用専用に設計された加速器が世界で初めて登場したのは1974年のことで、INS-ESに付設して建設された東京大学物性研究所のSOR RING (Synchrotron Orbital Radiation RING, 380 GeV) である [5, 6]。この世代の放射光用加速器を、第2世代という。これに対し、原子核実験等の加速器を放射光利用に転用して用いていたものを第1世代という。

SOR RINGは軟X線領域までの放射光を発生するものであり、それを用いた分光学が主な用途であった。80年代に入ると、英国Daresbury LaboratoryのSRS(The Synchrotron Radiation Source)、高エネルギー物理学研究所(当時)のPF(Photon Factory)、米国Brookhaven National LaboratoryのNSLS(National Synchrotron Light Source)において、第2世代の放射光専用加速器を用いた硬X線によるX線結晶学が始まった。

このような放射光の特徴は、図1.1の赤線に示すように広い範囲の周波数成分を含んだ連続スペクトルとなっていることである。図1.2のように一様磁場中で電子が円運動をしているとする。電子には中心方向の加速度が生じ、その加速度に起因する電磁放射として放射光が発生する。放射光は相対論的効果により、電子進行方向に対して $1/\gamma$ (γ は電子の相対論的ファクタ)の角度を持って広がる。このため、点Oでは電子が点Aを通過してから点Bに到達するまでの間、放射光を観測できる。電磁放射による電場の向きは電子の加速度の方向と一致するため、点Oでは、電子が点Aから点Bに到達するまでの時間幅を持った電場のパルスを観測することとなる。このような電場パルスをフーリエ変換すると、図1.1の赤線に示すような連続スペクトルとなるのである。

連続スペクトルを有することの利点は、モノクロメータ等を用いることによって放射光利用者が使う波長を自由に選択できるということであるが、その反面、輝度が低くなるという欠点もある。図1.3に示すアンジュレータは、その欠点を補うものである。上下に規則正しく並べた磁石列により電子軌道を蛇行させることによって、蛇行軌道の波長分ずれた位置からそれぞれ放射される放射光は干渉し、特定の波長で強め合う。この結果、図1.1のように、特定の波長の輝度を強くすることが出来る。一般にアンジュレータは、磁石間隔を調整することによって磁場強度を変化させることが出来る。これによって蛇行軌道の振幅が変化、すなわち軌道の曲率が変化し、これに伴って生成される放射光の波長も変化させることができる。このアンジュレータに代表される挿入光源を用いる為に最適設計された放射光源を、第3世代の放射光施設という。ヨーロッパのESRF(European Synchrotron Radiation Facility, 6 GeV, 1994年)、米国のAPS(Advanced Photon Source, 6 GeV, 1996年)と並び、筆者の所属するSPring-8(Super Photon ring-8 GeV)は1997年より利用運転を開始した、所謂第3世代の放射光源である。

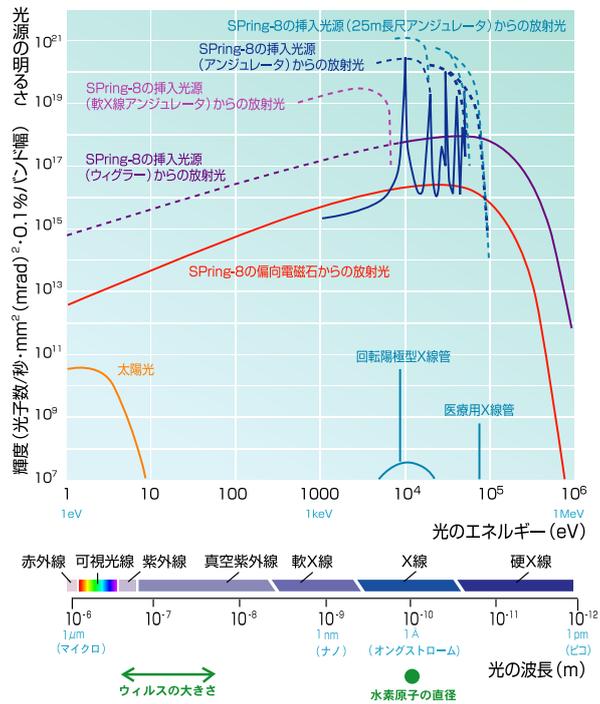


図 1.1 SPring-8 の放射光スペクトル

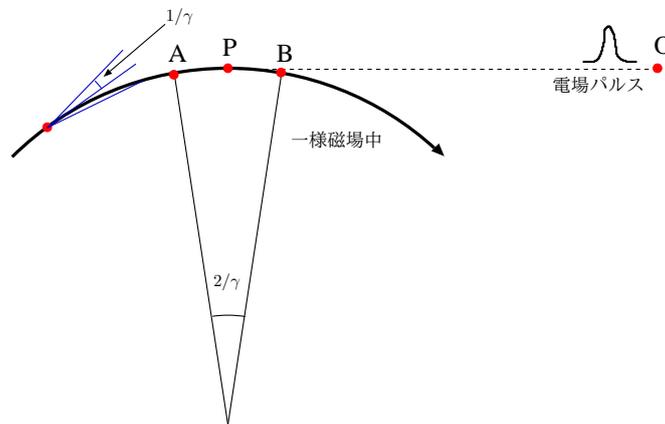


図 1.2 放射光の観測

1.1.2 次世代の放射光源

このような第3世代までのリング加速器を用いた放射光源の特徴は、高繰り返しの放射光を得られる点にある。これは、リング加速器内では、RF 周波数の波長毎に電子バンチが存在できる安定点 (RF パケット) が存在することによる。例えば SPring-8 では、RF 周波数は 508.58 MHz であり、それが電子バンチの繰り返し周波数となる。リング全周の全ての RF パケットに電子バンチを

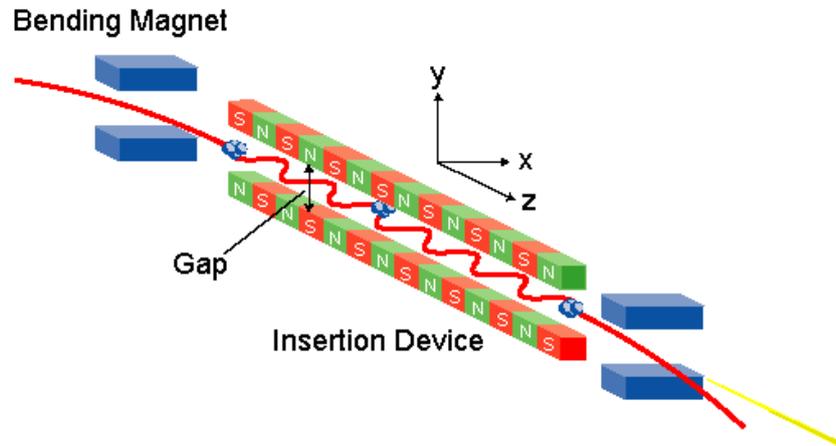


図 1.3 アンジュレータ

配置するとビーム不安定性等を引き起こすために、実際には電子バンチの繰り返し周波数が RF 周波数と同一ではありえないが、その程度の高繰り返しが可能である。したがって平均電流は高く、SPring-8 では 100 mA、一般的に数百 mA 程度である。

これに対し電子バンチ幅は、RF 周波数と、電磁石のラティス構造によって決まってしまう。これは、リング加速器内での電子の軌道が、入射加速器から入射直後の過渡的状态では入射器での特性を保っているものの、ダンピングタイム後の定常状態になると、リングの周期条件に束縛されることによって電子軌道が決定されるからである。したがって、RF の周期と比べてバンチ幅を極端に短くすることはできず、例えば SPring-8 では約 30 ps 程度である。

一方、電子線型加速器では、工学的には電子バンチの繰り返しに制限はあるものの、電子軌道はリング加速器における周期条件のような制約を受けない。平均電流はリング加速器に比べて劣るが、電子バンチ幅を数十～数百 fs のオーダーにすることは原理的に可能であり、第 3 世代のリング加速器から生成される放射光に比べてピーク輝度が 3~4 桁程度高い放射光を生成することが可能である。このような線型加速器の特性を利用した放射光源として、出来るだけ輝度が高く、放射光の空間コヒーレンス性を狙ったものとして SASE-FEL (Self Amplified Spontaneous Emission FEL) がある。また、同様に空間コヒーレンス性を狙うが、輝度は少し犠牲にしてその分平均強度の確保を狙った ERL (Energy Recovery Linac) 等がある。

SASE-FEL でも ERL でも、空間コヒーレンス性を持つ放射光の発生には長尺アンジュレータを用いる。電子バンチはアンジュレータ中を蛇行して進むが、このときに自身が放射する放射光と併走する。バンチ内の電子は放射光によってエネルギー変調を受けるため、電子バンチ内では放射光の波長と同じ周期のエネルギー分布が生じる。電子が蛇行しているために、エネルギーの高い電子と低い電子の行路差が生じ、結果的に電子バンチは放射光の波長と同じ間隔でマイクロバンチングされる。バンチングされた電子からは強力な放射光が発生される。電子バンチ内にこのようなバンチングが起こるには距離が必要であり、放射光の強度は図 1.4 のように徐々に上昇していくが、ある所で飽和する。これは、電子から放出される放射光のために電子のエネルギーが低下し、電子

バンチ内のエネルギー拡がりが大きくなることによってマイクロバンチングが緩和されるためである。このため、SASE-FEL では、放射光強度が飽和に達する距離よりも長いアンジュレータを使用する必要がある。

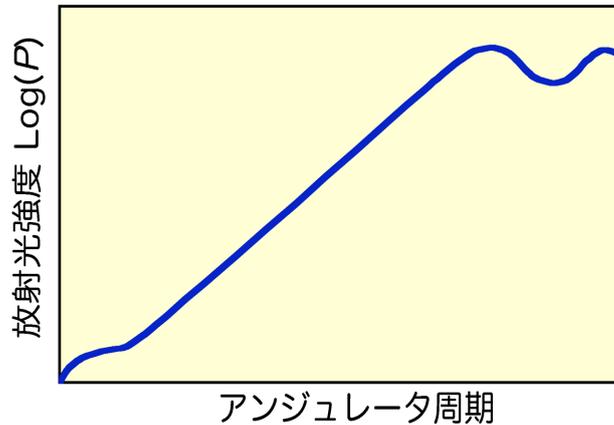


図 1.4 SASE に於ける放射光の飽和の様子

代表的な SASE-FEL には、米国の LCLS(Linac Coherent Light Source)[7]、ヨーロッパの European XFEL[8]、および SPring-8 の SACLA[9] (SPring-8 Angstrom Compact Free Electron Laser) がある。これらは全て、波長 1 Å 程度の放射光を発生させる計画である。

アンジュレータで輝度の高い放射光を生成するためには、基本的にはアンジュレータ内での電子密度を高く保つ必要がある。電子密度が高ければ強力なバンチングが出来るので放射光は早く飽和するし、密度が低ければより長いアンジュレータが必要である。電子密度を上げるには出来るだけビームを絞りこめば良く、このためには、空間電荷効果を小さくするという意味でエネルギーが高く、また、エミッタンスが小さいビームが必要である。一方、長いアンジュレータはアライメント精度が厳しくなる。これらのパラメータは相反するものが多いが、設計段階においては、どの計画も、 $\epsilon_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle (\gamma\beta x')^2 \rangle} - \langle x \cdot \gamma\beta x' \rangle^2$ と定義したノーマライズド rms トランスバースエミッタンス (3.6.2 節参照) において、電荷量が約 1 nC/bunch で約 1π mm·mrad 程度の電子ビームを要求していた*1。表 1.1 に、各 XFEL での設計パラメーター一覧を示す。

一方、ERL は図 1.5 に示すようなエネルギー回収型のシステムである。電子銃からのビームを初段加速器で加速した後、続く線型加速器によって加速する。そのビームは、アーク部、および直線部を經由して線型加速器の入り口まで戻してやり、RF 位相を 180 度ずらして線型加速器に再び入射する。このビームは線型加速器で減速され、ビームダンプに捨てられると同時に、ビームエネルギーは回収される。アンジュレータは直線部やアーク部に設置することが出来る。一般に線型加速器では大出力の RF エネルギーで電子を継続的に加速することが困難であるためにパルス運転となるが、この方式では RF エネルギーを回収して利用できるために CW 運転ができる。このた

*1 実際には、数百 pC/bunch 以下で運転を行っている。

表 1.1 SASE 計画の設計時におけるパラメータ

	LCLS	European XFEL	SACLA
ビームエネルギー	14.3 GeV	17.5 GeV	8.0 GeV
放射光波長	1 Å	1 Å	1 Å
Normalized rms Emittance	1.2 π mm·mrad	1.4 π mm·mrad	1.0 π mm·mrad
電荷量	1 nC/bunch	1 nC/bunch	1 nC/bunch
アンジュレータ長	121 m	133 ~ 174 m	90 m

め、線型加速器の特徴である短パルス、リングの特徴である高い平均強度を同時に満たすことが可能である。海外では米国 Cornell 大学の CHESS (Cornell High Energy Synchrotron Source, 5 GeV)[10] がある。わが国では高エネルギー物理学研究機構 (KEK) において ERL 計画が進められている [11]。これらの計画は、いずれも、波長 1 Å 程度の放射光を繰り返し周波数 1300 MHz で生成する計画であり、電子ビームの電荷量は 0.1 nC/bunch 以下である。ただし、例えば KEK では、エミッタンスは 5GeV における波長 1 Å の放射光の回折限界以下となるように計画されており、必要なノーマライズドエミッタンスは約 0.1 π mm·mrad とされている。

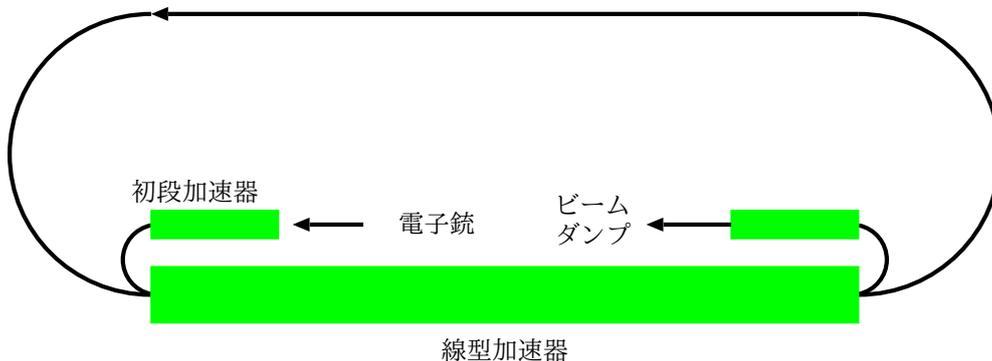


図 1.5 ERL 概念図

1.1.3 高輝度低エミッタンス電子源の必要性

第 3 世代までの放射光源では、放射光生成はリング加速器によるものであった。この場合、電子ビームのエミッタンスはリングのラティスによって決定されるため、線型加速器においては極端な低エミッタンスを要求されない。このため、電子源の方式は、一般的には 3 極管の構造を持った熱カソード電子銃とバンチングシステムの組み合わせが用いられてきた。例えば、この方式を採用した SPring-8 の入射用線型加速器のノーマライズドエミッタンスは数十 π mm·mrad である。

これに対し、前述のような次世代放射光源は、少なくとも 1 π mm·mrad のノーマライズドエミッタンスを要求する。ところで、位相空間上をビームが占める面積は保存量である。前ページ

で定義した rms エミッタンスも通常は減少することはない*²ので、低エミッタンス電子源を必要とする。

上述の次世代放射光源のうち、European XFEL と LCLS のような SASE-FEL の計画においては、短バンチ、高輝度、低エミッタンスビームを狙う目的からフォトカソード RF 電子銃を採用している。フォトカソード RF 電子銃とは、RF 空洞内壁面に設けたカソードにレーザーを照射することによって空洞壁で光電子を生成し、それを RF 電場によって一気に加速する方法である。空間電荷効果によるエミッタンス増加は、非相対論的エネルギー領域にあって顕著であるために、電子を RF で数 MeV まで素早く加速することによって空間電荷によるエミッタンスの増加を抑えることができる。更に、照射レーザーのパルス幅を RF 周波数の波長に対して十分に短くすることによって、熱カソード電子銃で必要であった RF によるバンチングシステムを省くことができ、RF 電磁場の時間依存性によるエミッタンス増加*³をも抑えることが出来る。

なお、SPring-8 の SACLA では、グリッド電極を持たない構造の熱カソード電子銃とバンチングシステムの組み合わせを電子源として採用している。グリッド電極を持たないため、それによるエミッタンス増加を排除でき、かつ、ロングパルスビームを出力することによって空間電荷が誘起する電磁場の非線形成分を抑えている。また、バンチングの過程で RF によるエミッタンスの増加が起らないように、ゆるやかにバンチングしていく工夫をしている [9]。

CEHSS、KEK における ERL 計画では、平均輝度を上げる目的から CW 運転を目指しており、RF パワーの面で常伝導の RF 空洞を使用することが難しいことなどからフォトカソード DC gun を採用する計画である。

1.1.4 フォトカソード RF 電子銃

高輝度低エミッタンス電子源のうち、短パルスレーザーを用いたフォトカソードタイプの RF 電子銃は、1987 年に米国 Los Alamos National Laboratory において、初めての実証実験が行われた [12]。RF 周波数 1300 MHz の単 Cell 空洞、Cs₃Sb カソード、Nd:YAG レーザーの 2 倍高調波 (レーザーパルス幅 53 ps) を用いており、ペーパーポット法で測定したノーマライズドエミッタンスは 10~30 π mm·mrad、この時の電荷量は 8~12 nC/bunch であった。

続いて、上記電子銃空洞を基として、米国、Brookhaven National Laboratory でも RF 空洞 [13] が設計され、低エミッタンス電子源実現のための研究がスタートした。

図 1.6 に BNL/SLAC/UCLA(Brookhaven National Laboratory/Stanford Linear Accelerator Center/University of California, Los Angeles) の RF 空洞を示す。S-band (2856 MHz) 1.6 セル空洞である。第 1 空洞は第 2 空洞の長さの 0.6 倍となっており、第 1 空洞の空洞壁が銅カソードとなっている。0.6 倍になっているのは、電子が第 1 空洞と第 2 空洞の間を通過するときの電界強度を最小にすることで、RF によるエミッタンス増加を避けるためである [13]。

*² 減少する例を第 6 章で示す。

*³ 電子バンチは長手方向に長さを持つため、バンチ内の電子は長手方向の位置によって RF 電磁場から受ける作用が異なる。この結果、バンチ全体としてのエミッタンスが増加する。

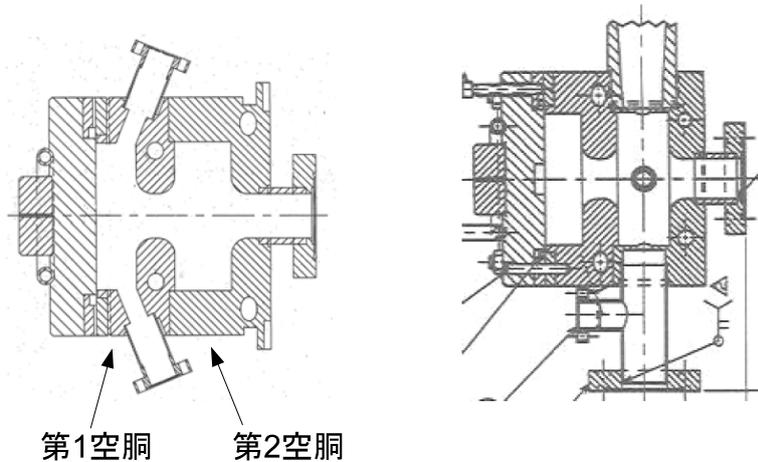


図 1.6 BNL/SLAC/UCLA 1.6 cell cavity

同時期に、プロジェクションエミッタンス^{*4}の増加を、電子銃空洞直後の磁気レンズで補償する方法を、米国 Los Alamos National Laboratory の B.E. Carlsten が理論的側面から発表 [14] している。各スライスエミッタンスの位相空間での傾きを、レンズの集束力を調整することによってレンズ後方で一致させることが出来るという理論であり、これによると、基本的には空間電荷が誘起する電磁場の線形成分によるプロジェクションエミッタンス増加を補償することが出来る。

BNL/SLAC/UCLA 型 RF 空洞を用いた低エミッタンスビーム生成実験は、レーザープロファイルの整形技術の発達とともに一連の成功を修め、1998 年に BNL においてダブルスリット法で、 0.9 nC/bunch 、 $2.4 \text{ } \pi\text{mm}\cdot\text{mrad}$ のエミッタンスを記録した [15]。続いて 2002 年に、住友重工業で同タイプの空洞を用いて 1 nC/bunch 、 $1.2 \text{ } \pi\text{mm}\cdot\text{mrad}$ を記録した [16]。これは、カソード表面電界強度 100 MV/m の RF 空洞から出力された 4 MeV の電子ビームを、後続の S-band 加速管 1 本で 14 MeV まで加速し、Q スキャン法で測定したものである。

BNL/SLAC/UCLA 型の 1.6cell 空洞は、LCLS が採用している他、日本においても、東大、早稲田大、KEK、阪大、産総研と様々な研究所に導入され、試験が行われている。

報告 [16] により、エミッタンスは SASE-FEL の目標値に到達したかと思われた。しかし、この測定では水平エミッタンスしか発表されていない。しかも用いたレーザープロファイルは水平方向と垂直方向のサイズ比がほぼ 2:1 の扁平ビームであり、垂直エミッタンスは水平エミッタンスに比べて大きかった可能性が考えられる。しかし、それらエミッタンス非対称性の原因を追求することなく、SASE の開発競争は、低エミッタンス競争からアンジュレータの発振波長の短波長化に焦点が移っている。

^{*4} 電子パンチを長手方向にスライスした時、スライス 1 つ分のエミッタンスをスライスエミッタンス、パンチ全体のエミッタンスをプロジェクションエミッタンスという。4.2.3 節を参照のこと。

1.1.5 SPring-8 における RF 電子銃開発

前述のような世界情勢の中から、SASE 用の高輝度低エミッタンス電子源を開発することを目標に、筆者のチームは 1996 年より SPring-8 においてフォトカソード RF 電子銃開発を始めた。

BNL 型の 1.6cell 空腔を用いることなく、図 1.7 に示す独自設計の S-band (2856 MHz) シングルセル RF 空腔を用いているのが最大の特徴である [17]。これは、第 1 セルと第 2 セルの間での RF 位相マッチングによるエミッタンス増加の問題を考慮しなくて良く、空腔内のビームダイナミクスを単純化できることでエミッタンス低減に寄与するだろうと考えたからである。空腔は、RF 電磁場非対称性によるエミッタンス増加を避けるために 2 つの RF ポートを持つ構造とし、対称性を確保している。このため、External Q の値が低く (2786 for RF input port)、フィリングタイムが短い ($0.31 \mu\text{s}$) ために高電界発生に有利である。更にカソード面の化学エッチング処理を行うことによって、カソード面最大電界強度 190 MV/m 、RF パルス幅 $0.7 \mu\text{s}$ の世界記録を実現している [18]。

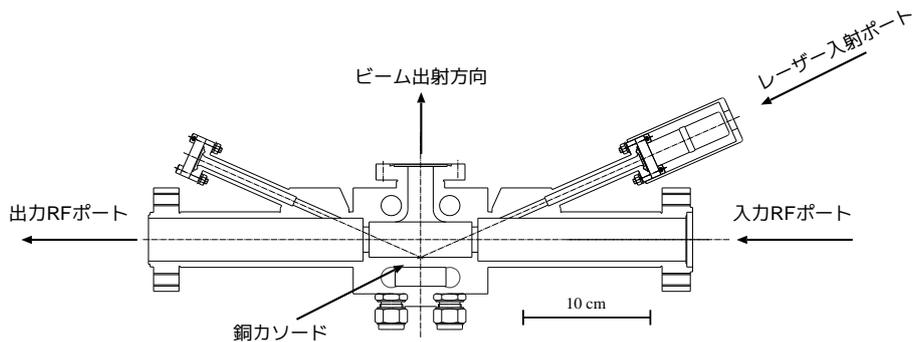


図 1.7 SPring-8 シングルセル RF 空腔

レーザーはオシレータとして Ti:Sapphire レーザーを使用し、Nd:YAG レーザー励起によって Ti:Sapphire 結晶で増幅した後に、その 3 倍高調波 ($\lambda=263 \text{ nm}$) を生成して使用している。レーザー整形の進展に伴ってエミッタンス測定値も向上し、2002 年は、シングルセル空腔 + エミッタンス補償用ソレノイドコイルの組み合わせで、ダブルスリット法によりエミッタンス測定実験を行い、 $2.3 \pi\text{mm}\cdot\text{mrad}$ 、 0.2 nC/bunch 、 3.1 MeV の結果を得ている [19]。その後、S-band 3 m 進行波加速管の追加設置工事を行い、2006 年には Q スキャン法において $1.4 \pi\text{mm}\cdot\text{mrad}$ 、 0.4 nC/bunch 、 26 MeV の結果を得た [20]。ただし、上記で測定されたエミッタンスはいずれも水平エミッタンスであり、垂直エミッタンスは水平エミッタンスよりも大きい。これらの結果は、前述の報告 [16] にも共通する所がある。

1.2 ビームダイナミクスの解析手法

フォトカソード RF 電子銃も含む、このような高輝度低エミッタンス電子銃を研究するには、空間電荷効果の扱いを含んだビームダイナミクスの理解が重要である。研究方法としては、解析的手法とシミュレーション的手法があるが、電子銃付近では電子ビームのエネルギーが非相対論領域と相対論領域の両方を含むことから、空間電荷効果の計算が難しく、実際のビームの振る舞いが理想的な解析解とは異なることも多い。このため、一般的には解析手法としてシミュレーション的手法が多用される。

1.2.1 数値シミュレーションコード

シミュレーションコードとして最も良く使われるのは、1980年に Los Alamos National Laboratory において original version が完成した PARMELA (Phase and Radial Motion in Electron Linear Accelerators) である [21]。当初は Los Alamos National Laboratory でのフォトカソード RF 電子銃の設計に用いられたものであるが、その後、様々なルーチンが付加され、加速器の低エネルギー部の計算ツールとして定評を得るに至っている。高輝度低エミッタンス電子源の設計においては、BNL で 1.6cell RF 電子銃の設計研究に使用され、その後、前述したほとんどの計画で設計ツールとして用いられてきた。

PARMELA では、粒子トラッキングは 3次元で行う。空間電荷効果は、参照電子のエネルギーを中心として計算粒子全体の座標を実験室系から静止系に変換し、静止系内で静電場の問題として計算を行う。このとき、各マクロ粒子をビーム進行方向軸を中心とした厚さ無限小のリングに置き換え、各リングからの電場を楕円関数による近似に従って計算する。一旦ローレンツ変換を行い静電場の問題として扱う事が出来るので、計算速度が速い反面、エネルギー広がり大きなビームでは正確な計算が出来ない恐れがある。

実際の加速器に即した計算を行うためには、3次元のコードが必要であるが、このリング近似での計算では3次元の空間電荷効果の計算はできない。オプションで Point-To-Point^{*5}での空間電荷計算を選択することにより3次元の計算も行えるようになっているが、計算ノイズが大きくあまり使われていない。3次元コードとしては、GPT (General Particle Tracer) [22]、ASTRA (A Space Charge Tracking Algorithm) [23] 等があるが、PARMELA と比べ、使用実績は多くは無い。^{*6}

また、粒子シミュレーションコードでは、エミッタンスの粒子数依存性という問題がある。粒子数を増やすと計算時間が増大する。また、粒子数を計算可能な範囲内で増やしても、エミッタンス計算結果が一定値に収束しない場合もある。

^{*5} 全マクロ粒子相互間の作用を計算することによって、空間電荷効果を計算する方法。

^{*6} 昨今では、GPT は PARMELA に替わり、標準コードとなりつつある。

1.2.2 解析的手法

解析的手法は、シミュレーションコードのように、実際の加速器に即した計算を行うことは難しいが、理論的なアプローチを行うことからビームダイナミクスの基礎的理解に適している。また、シミュレーション的手法に対し、エミッタンスの粒子数依存性を排除することが可能である。

解析的手法として、複数の論文が発表されている [24, 25, 26, 27]。これらは、基本的にはビームエンベロープ方程式を用いている。ビームエンベロープ方程式は、元々は電子1個の軌跡を表す微分方程式であるが、ここでは電子バンチのサイズを平均的に捉え、その平均的位置に対しての rms ビームエンベロープ方程式を導き、それを解くものが多い。ただし、このような方法では、粒子数依存性を排除することは可能であるが、電子バンチの正確な形状を計算することは難しい。このために、一般的にはシミュレーション的手法に比べて算出されるエミッタンスの精度は悪い傾向にある。

1.3 本論文の目的と構成

以上概観したように、昨今の放射光源には低エミッタンスの電子源を要求されるため、電子銃部分のビームダイナミクス解析が重要であるにも関わらず、解析法が十分には確立されていない。このため、本論文では新たな解析法を開発し、今後のビームダイナミクス研究に資することを目的とした。本論文の構成は以下のとおりである。

第2章では、ビームダイナミクス解析についての基礎理論を、RF電子銃を題材として述べる。

第3章では、新規に開発した3次元のトラッキングシミュレーションコードについて述べる。このコードは、実際の加速器の構造的な水平垂直非対称性に伴うビームダイナミクスの非対称性を計算できることを重視して開発した。また、出来るだけ仮定を排除して広範囲のエネルギー、ビーム形状に柔軟に対応できることを目標とした。また、加速器という巨大実験装置を扱うため、広い範囲のトラッキング計算が容易に出来ることも重視した。

第4章では、本コードを SPring-8 の RF 電子銃装置に適用し、3次元の非対称性に伴う効果も含め、現実に即したダイナミクス計算を行うことが可能であることを示した。ただし、エミッタンスの粒子数依存性という問題が残った。粒子数を増やすことによって精度を確保すると、長大な計算時間を必要とする。

第5章では、より正確なエミッタンス計算を行うため、シミュレーション的手法と解析的手法を組み合わせた多元連立ビームエンベロープ方程式の開発を行った。本手法は、電子バンチを長手方向および径方向に格子状に分割し、それぞれの交点上に電子を置いて、各電子の軌道をエンベロープ方程式で解くものである。バンチ内の複数の位置での軌跡を解析的に解くことにより、電子バンチの正確な形状が計算できることを示した。これにより、ビームエミッタンスをシミュレーションコードよりも短時間で正確に計算することが可能となった。

エミッタンスの正確な計算が可能になると、ビームダイナミクス上の新たな知見を得ることが可

能となる。例えば、電子銃直後のビームエミッタンスが、空間電荷効果によって減少する現象がある。第 6 章では、この計算結果と、エミッタンス減少のメカニズムを論じる。

第 7 章では、本論文のまとめと、本研究の今後の展望について記した。

参考文献

- [1] F. R. Elder *et al.*, “Radiation from Electrons in a Synchrotron”, *Phys. Rev.* **71**, 829(1947).
- [2] J. P. Blewett, “Synchrotron radiation - early history”, *J. Synchrotron Rad.* **5**, 135(1998).
- [3] R. P. Madden *et al.*, “Instrumental Aspects of Synchrotron XUV Spectroscopy”, *Applied Optics* **6**, 31(1967).
- [4] 小塩高, “シンクロトロン軌道放射”, *日本物理学会誌* **22**, 285(1967).
- [5] T.Miyahara *et al.*, “SOR-RING An Electron Storage Ring Dedicated to Spectroscopy”, *Particle Accelerators* **7**, 163(1976).
- [6] 佐々木泰三, “光源加速器の誕生..SOR-RING 建設のいきさつ”, *日本加速器学会誌* **2**, 433(2005).
- [7] “Linac Coherent Light Source (LCLS) Conceptual Design Report”, SLAC-R-593,(2002).
- [8] “The European X-Ray Free-Electron Laser Technical designreport”, DESY 2006-097,(2006).
- [9] “SCSS X-FEL Conceptual Design Report”, RIKEN Harima Institute/SPRING-8,(2005).
- [10] D.H. Bilderback *et al.*, “Energy-recovery linac project at Cornell University”, *J. Synchrotron Rad.* **10**, 346(2003).
- [11] 羽島良一、中村典雄、坂中章悟、小林幸則、 “コンパクト ERL の設計研究”, KEK Report 200707, JAEA-Research 2008-032 (2008).
- [12] J.S.Fraser, *et al.*, “Photocathodes in Accelerator Applications”, in *Proceedings of the 1987 Particle Accelerator Conference, Washington, DC, USA*, (1987), p.1705.
- [13] K. Batchelor, *et al.*, “Development of a High Brightness Electron Gun for the Accelerator Test Facility at Brookhaven National Laboratory”, in *Proceedings of EPAC 88, Rome, Italy*, (1988), p.954.
- [14] B.E.Carlsten, “New Photoelectric Injector Design for the Los Alamos National Laboratory XUV FEL Accelerator”, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **285**, 313(1989).
- [15] M.Babzien *et al.*, “Observation of self-amplified spontaneous emission in the near-infrared and visible wavelengths”, *Phys. Rev. E* **57**, 6093(1998).
- [16] J.Yang *et al.*, “Low-emittance electron-beam generation with laser pulse shaping in photocathode radio-frequency gun”, *J. Appl. Phys.* **92**, 1608(2002).

-
- [17] T. Taniuchi *et al.*, “Initial Results of RF gun experiment”, in *Proceedings of the 1999 Particle Accelerator Conference, New York, USA*, (1999), p.2015.
- [18] 富沢宏光 他, “Effects of Chemical Etching as a Surface Treatment for Accelerating Structures Made of Copper”, 第1回日本加速器学会年会プロシーディングス, 船橋, (2004), p.147.
- [19] H. Tomizawa *et al.*, “Reduction of Electron-beam Emittance with Shaping both Spatial and Temporal Profiles of UV-LASER Light Source for Photo-Cathode RF Gun”, in *Proceedings of EPAC2002, Paris, France*, (2002), p.1819.
- [20] 富沢宏光 他, “Development of reliable and sophisticated photo injector system and future plan”, 第4回日本加速器学会年会プロシーディングス, 和光, (2007), p.130.
- [21] L.M. Young, J.H. Billen, Los Alamos National Laboratory Report, LA-UR-96-1835, 2004.
- [22] Pulsar Physics, <http://www.pulsar.nl/gpt>
- [23] K. Flöttmann *et al.*, “3D Space Charge Calculations for Bunches in the Tracking Code ASTRA”, in *Proceedings of EPAC2006, Edinburgh, Scotland*, (2006), p.2203.
- [24] K.J. KIM, “RF and Space-Charge Effects in Laser-Driven RF Electron Guns”, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **275**, 201(1989).
- [25] L.Serafini *et al.*, “Envelope analysis of intense relativistic quasilaminar beams in rf photoinjectors: A theory of emittance compensation”, *Phys. Rev.* **E55**, 7565(1997).
- [26] C. K. Allen and M. Reiser, “Bunched beam envelope equations including image effects from a cylindrical pipe”, *Phys. Rev.* **E55**, 7591(1997).
- [27] M. Ferrario *et al.*, “Multi-bunch energy spread induced by beam loading in a standing wave structure”, *Part. Accel.* **52**, 1(1996).

第 2 章

ビームダイナミクス解析の基礎理論

本章では、第 3 章以降で展開する議論の準備として、ビームダイナミクス解析の基礎理論を、主に RF 電子銃を題材として示す。対象とするビームは、本論文で述べる電子銃近傍の低エネルギー、かつ短バンチビームである。すなわち、相対論的な扱いを必要とするが、電子の光速に対する速度比 β に対して、 $\beta \approx 1$ を仮定できないような領域の電子ビームである。

2.1 電子の加速

まず、電場で加速される電子の速度を計算する。実際の電子ビームは大きさを持っており、また空間電荷効果によってエネルギー拡がりを生ずるが、本節では、電子 1 個の場合を考える。すなわち、空間電荷効果は考えない。運動方程式は、電気素量を $-e$ 、電子の速度を v 、電場を E 、磁場を B 、電子の運動量を P 、電子の静止質量を m_0 、電子のローレンツファクタを γ とすると、次のように表される。

$$-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m_0 \frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} \quad (2.1)$$

ところで、電子の運動エネルギーを W_k とすると、真空中の光速を c として、

$$\gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + W_k \quad (2.2)$$

である。両辺を微分して

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1}{m_0 c^2} \frac{d(m_0 c^2 + W_k)}{dt} \\ &= \frac{1}{m_0 c^2} \frac{dW_k}{dt} \\ &= -\frac{e}{m_0} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

したがって、式 (2.1) は

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} &= m_0 \left\{ \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} + \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\} \\ &= m_0 \left\{ -\frac{e}{m_0} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \mathbf{v} + \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる。これより、電子の加速度は次の微分方程式で表される。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{\gamma m_0} \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})}{c^2} \mathbf{v} \right) \quad (2.5)$$

なお、電子素量を $-e$ で表したので、電場 \mathbf{E} が負の時に電子は加速される。式 (2.5) に負号が付いているのはこのためである。

2.1.1 理想的な DC 電場中における電子の加速

一様電場 (DC 電場) 中における式 (2.5) の解について示す。電場 E_0 が z 方向のみに存在するとし、磁場は存在しないとする。このとき、

$$E_e = \frac{e}{m_0} E_0 \quad (2.6)$$

とおくと、式 (2.5) の z 成分は

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{\gamma^3 m_0} E_0 = -\left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{3/2} E_e \quad (2.7)$$

となる。 $t = 0$ の時の電子速度を v_{z0} として積分を行うと

$$v_z(t) = \sqrt{\frac{E_e^2 t^2 - 2\gamma v_{z0} E_e t + \gamma^2 v_{z0}^2}{c^2 + E_e^2 t^2 - 2\gamma v_{z0} E_e t + \gamma^2 v_{z0}^2}} \cdot c \quad (2.8)$$

$v_{z0} = 0$ の場合は簡単になり

$$\begin{cases} v_z(t) &= -\frac{E_e t}{\sqrt{c^2 + E_e^2 t^2}} \cdot c \\ z(t) &= -\frac{c}{E_e} \left(\sqrt{c^2 + E_e^2 t^2} - c \right) + z_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

式 (2.9) より電子の位置および速度を計算できる。

2.1.2 理想的な RF 空洞における電子の加速

理想的な pill-box タイプのシングルセル空洞を考え、この空洞内部における式 (2.5) の解を示す。ここではエネルギーを問題にしているため B_θ は無視する。また、電子ビーム径は十分に小さいと考え、 z 方向電場は r 方向に一様と仮定する。すなわち $E_z = E_0 \cos(\omega t - \phi_0)$ 、(ω は RF の角周波数、 ϕ_0 は RF 初期位相) とする。このとき、式 (2.5) の z 成分は

$$\frac{dv_z}{dt} = - \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2} \right)^{3/2} E_e \cos(\omega t - \phi_0) \quad (2.10)$$

となり、 $v_{z0} = 0$ として積分すると

$$v_z(t) = - \frac{E_e (\sin(\omega t - \phi_0) + \sin \phi_0)}{\sqrt{c^2 \omega^2 + E_e^2 (\sin(\omega t - \phi_0) + \sin \phi_0)^2}} \cdot c \quad (2.11)$$

となる。これより、電子のエネルギーを求めることができる。

2.1.3 RF 電子銃空洞のエネルギー特性

式 (2.11) より、pill-box タイプのシングルセル RF 電子銃空洞のエネルギー特性がほぼ導かれることを示す。

RF による電子の加速では、電子は初速度 0 から空洞内で加速される。このとき、電子は RF に対して位相スリップする。したがって、電子が減速されないためには、図 2.1 の様に空洞の電場が反転するまでに電子が空洞を通過しなければならない。

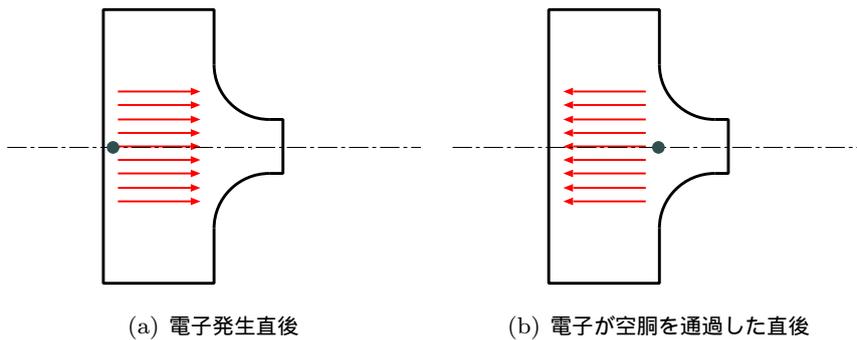


図 2.1 RF 電子銃空洞における電子の位置と電場反転のタイミング。電子は電場により矢印の方向に加速されるとする。(b) の様に、電場が反転するまでに電子が空洞を通過する必要がある。

一方、pill-box タイプの RF 空洞においては、セル長を任意に設計することができるため、次に示すように加速に最適な設計を行うことができる。

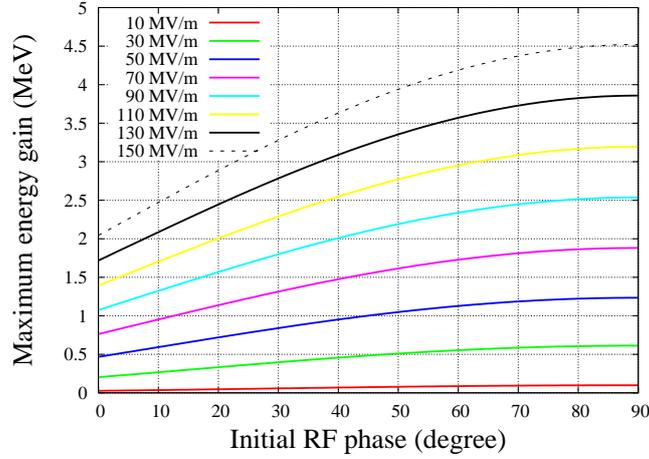


図 2.2 シングル cell で可能な最大エネルギーゲイン

電場反転時の位相は $\omega t - \phi_0 = \pi/2$ であるので、シングルセル空洞で加速可能な電子の最大速度は式 (2.11) より

$$v_{max} = -\frac{E_e (\sin \phi_0 + 1)}{\sqrt{c^2 \omega^2 + E_e^2 (\sin \phi_0 + 1)^2}} \cdot c \quad (2.12)$$

となる。

式 (2.12) より、各 RF 初期位相 ϕ_0 、各カソード表面最大電界強度 E_0 において、シングルセルで可能な最大エネルギーゲインを計算することができる。これを図 2.2 に示す。ただし、RF 周波数は 2856 MHz (S バンド) としている。

電場がちょうど反転するタイミングにおける空洞長を求めるには、式 (2.11) を電場反転のタイミングまで t で積分してやれば良い。代数的には積分できないので、数値積分によって図 2.2 の各初期位相に対応する空洞長を算出することができる。これを図 2.3 に示す。

図 2.2 より、RF 電子銃においては、初期位相が 90° 付近、すなわち、カソード面上の電界強度が 0 に近くなるタイミングで電子を生成したとき、電子エネルギーが最大となることが分かる。

電子生成時のエミッタンス増加を避ける目的で、初期位相を 0° に近付けて生成時の電界強度を高くすることはできるが、その場合は電子エネルギーが低くなる。また、空洞長を短く設計しなくてはならない。更に、実際の電子ビームは長手方向に長さを持っており、S バンド RF 電子銃の場合、標準的に 5 ps ~ 20 ps 位である。これは、 $5 \sim 20^\circ$ に相当する。したがって図 2.2 から分かるように、初期位相 0° 付近で電子ビームを生成した場合、ビームのエネルギー拡がり (ΔE) は大きくなる。RF 電子銃空洞出口のようなエネルギーの低く空間電荷効果が顕著な段階で ΔE を大きくすると、その後のトランスポート設計が難しく、通常はこのような設計は行わない。したがって、RF 電子銃においては、電界強度が 0 に近くなるタイミングで電子を生成することになる。

SPring-8 ではシングルセル空洞を用いて実験を行っているが、空洞長は 28 mm、カソード表面

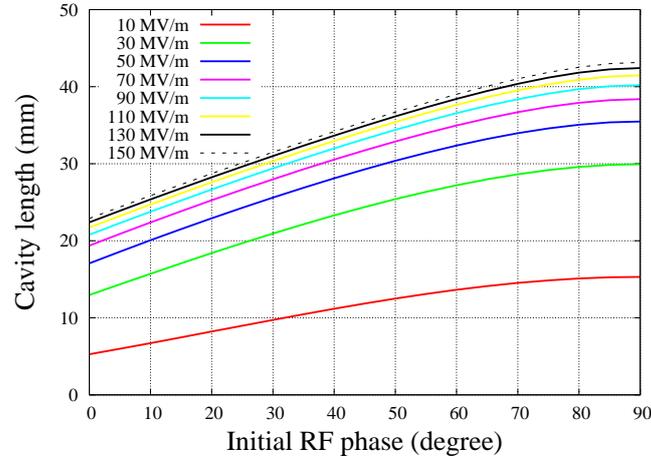
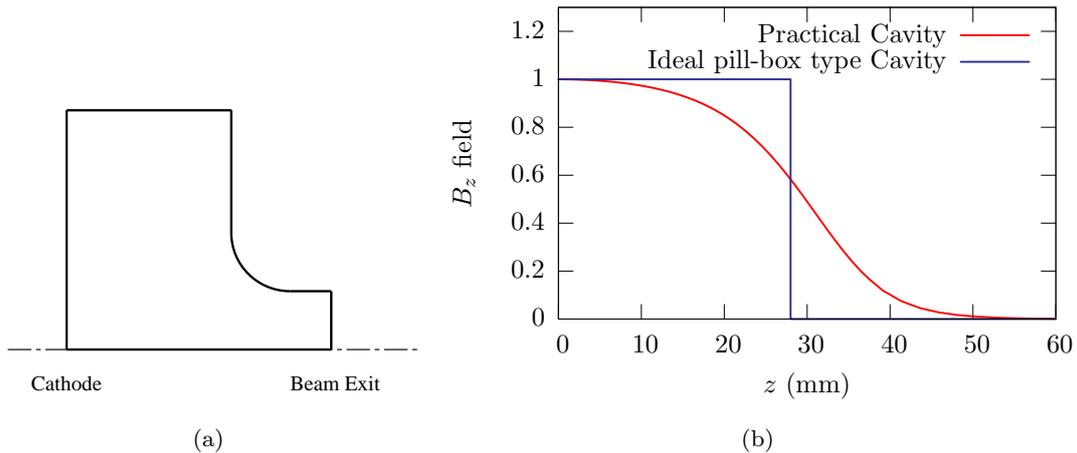


図 2.3 最大可能な空洞長

電界強度は 100~160 MV/m 程度、初期 RF 位相は 85° で設計しており、図 2.2、図 2.3 に示した特性を参照すると、 ΔE が小さく、エネルギーの稼げる適正なポイントでオペレーションしているのが分かる。

これら考察はシングルセルの空洞で行ったものであるが、多セル空洞でもほぼ同様の議論展開ができる。何故なら、第 2 セル以降のセルでは、電子エネルギーが高くなっているために、位相スリップが第 1 セルと比較して極端に小さくなるからである。

2.1.4 実際の空洞でのエネルギー計算

図 2.4 (a):実際の空洞形状と、(b): z 方向電磁場強度の分布

実際の RF 空洞形状は、例えば SPring-8 の RF 電子銃空洞の例を示すと、図 2.4(a) の様にビームの出口があり、そのために z 方向電界強度は一樣ではない。図 2.4(b) の様にビーム出口付近の

電界強度が減少する。このように電界強度が z の関数になっている場合、すなわち式 (2.10) で E_e を $E_e(z)$ とした場合は、なんらかの方法で $E_e(t)$ が求まらない限り、解析的にエネルギーを計算するのは困難である。したがって、このような場合には後述するような方法で数値計算を行う必要がある。

2.2 電子が誘起する電磁場

次に、電子が誘起する電磁場の取り扱いについて記述する。ここでは、 $\beta \approx 0$ または $\beta \approx 1$ のような近似は用いないこととする。

2.2.1 自由運動する電子が誘起する電磁場

まず、自由運動する電子が誘起する電磁場の扱いについて記述する。電子が誘起する電磁場の表式を導出するのは本論文の目的ではないので、導出そのものについては電磁気の教科書に譲る。

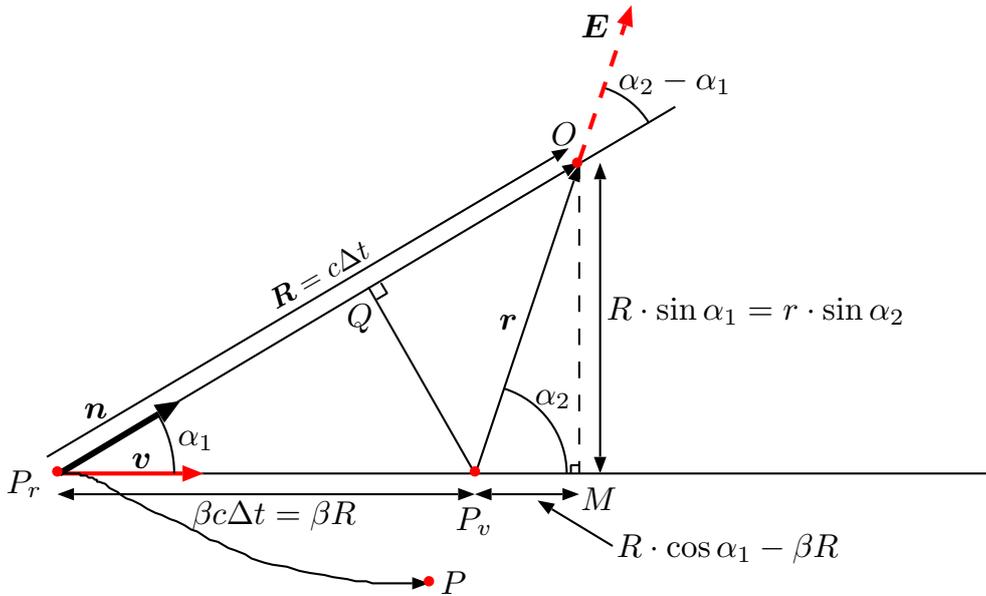


図 2.5 現在位置、遅延位置、電磁場計算位置の位置関係

図 2.5 のように、現在位置 P において自由運動する電子を考え、その電子が点 O に誘起する電磁場を求める式を示す。ここで、点 P_r は「電子の遅延位置」である。遅延位置に電子が存在した時刻と、現在時刻との差を Δt とし、電子が遅延位置に存在した時刻の速度を維持して遅延位置から Δt の間進んだとした場合に電子が到達する点を、「電子の virtual な現在位置」点 P_v とする。

図 2.5 中の各変数の定義を

- r 「電子の virtual な現在位置」から「点 O 」へのベクトル
- R 「電子の遅延位置」から「点 O 」へのベクトル

- n ベクトル R と平行な、単位ベクトル
 v 電子の遅延位置、遅延時刻における速度ベクトル
 β v を光速で規格化した速度ベクトル
 $\dot{\beta}$ 電子の遅延位置、遅延時刻における β の時間微分

とすれば、自由運動する電子が点 O に誘起する電磁場は、文献 [1] より Liénard-Wiechert potentials から導くことが出来て、

$$\begin{cases} \mathbf{E} &= \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}-\beta}{\gamma^2(1-\beta\cdot\mathbf{n})^3 R^2} \right]_{ret} + \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\beta)\times\dot{\beta}\}}{(1-\beta\cdot\mathbf{n})^3 R} \right]_{ret} \\ \mathbf{B} &= \frac{[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]_{ret}}{c} \end{cases} \quad (2.13)$$

と表される。式 (2.13) で ret と記載したのは、用いる変数が全て遅延時刻で定義されていることを示すためであり、微分も遅延時刻に於けるものである。式 (2.13) 上式右辺第 1 項はクーロン場であり、第 2 項は放射場である。

式 (2.13) は、一般的に成り立つ式であるが、遅延時刻での変数で記述されているために、たとえ電子が等速直線運動していたとしても遅延位置を算出して R と n を計算しなければならず、大変扱いにくい。等速直線運動をする電子では、現在位置、点 P は点 P_v と一致するので、 r は電子の現在位置から点 O までのベクトルと一致する。したがって、式 (2.13) を r の関数として表すことが出来れば都合が良い。

図 2.5 を参照し、 $P_r Q$ は $\beta R \cos \alpha_1 = \beta \cdot n R$ である。したがって、 OQ は $(1 - \beta \cdot n) R$ である。三角形 $P_v Q O$ と $P_v Q P_r$ から、 $[(1 - \beta \cdot n) R]^2 = r^2 - (P_v Q)^2 = r^2 - \beta^2 R^2 \sin^2 \alpha_1$ である。ところで、 $R \sin \alpha_1 = MO = r \sin \alpha_2$ であるので、 $r^2 - \beta^2 R^2 \sin^2 \alpha_1 = r^2 - \beta^2 r^2 \sin^2 \alpha_2 = |\mathbf{r}|^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}|^2$ となる。すなわち、

$$[(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) R]^2 = |\mathbf{r}|^2 - \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{r}|^2}{c^2} \quad (2.14)$$

となる。また、

$$(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{\beta} R}{R} = \frac{\mathbf{r}}{R} \quad (2.15)$$

である。

式 (2.14) と式 (2.15) より、式 (2.13) の電場については

$$\mathbf{E} = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{r}}{\gamma^2 \left[|\mathbf{r}|^2 - \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{r}|^2}{c^2} \right]^{3/2}} \right\}_{ret} + \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \frac{\mathbf{R} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})}{\left[|\mathbf{r}|^2 - \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{r}|^2}{c^2} \right]^{3/2}} \right\}_{ret} \quad (2.16)$$

となり、クーロン場については R および n を含まない式に変形できる。

磁場については、図 2.5 に示すように点 O に誘起される電場の向きが r と平行な場合、すなわちクーロン場 (式 (2.16) 参照) に限っては、以下の等式が成り立つ。

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{c} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \quad (2.17)$$

これは次のように証明出来る。

$$\begin{cases} |\mathbf{n} \times \mathbf{E}| &= E \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = E(\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1) \\ \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c} \right| &= |\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}| = \beta E \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (2.18)$$

が成り立つ。ここで、図 2.5 の三角形 MOP_v から $\tan \alpha_2 = \sin \alpha_2 / \cos \alpha_2 = R \sin \alpha_1 / (R \cos \alpha_1 - \beta R)$ であるので、 $\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 = \beta \sin \alpha_2$ である。したがって、式 (2.18) の 2 式は等しく、式 (2.17) は証明できた。

電子が任意の自由運動をしている場合は、電場は式 (2.16)、磁場は放射場も含めて計算する必要があるので式 (2.13) の第 2 式より計算する必要がある。これに対し、等速直線運動をしている電子の場合、電磁場はクーロン場のみとなり、以下の様に表される。

$$\begin{cases} \mathbf{E} &= \frac{-e}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{\mathbf{r}}{[r^2 - \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{r}|^2}{c^2}]^{3/2}} \\ \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \end{cases} \quad (2.19)$$

点 P が点 P_v と一致するため、式 (2.19) での各変数は、以下のように現在位置、現在時刻で定義できる。

- r 「電子の現在位置」から「点 O 」へのベクトル
- v 電子の現在位置における速度

式 (2.19) は、次章以降のビームダイナミクス解析の基礎となる式である。なお、本節で示したように、電子が等速直線運動をしていない場合に電子が誘起する電磁場の計算は大変複雑である。したがって、これ以降の議論は、特に断らない限り電子が等速直線運動をしていることを仮定する。なお、等速直線運動と仮定する根拠は、3.2 節、および 3.5 節で述べる。

2.2.2 短バンチ電子ビームが周囲に誘起する電磁場

式 (2.19) より、短バンチ電子ビームが周囲に誘起する電磁場について導く。

図 2.6 のように、 z 方向に長さ L で 1 次元に電子が一様に並んだ、ペンシルビームのような電子バンチが、 z 方向に速度 v で等速直線運動をしている場合を考える。電子バンチ全体の電荷量は Q であり、エネルギーは $\gamma m_0 c^2$ である。観測点 $O(z_0, R)$ に、赤色で示す dz 内に存在する電荷が誘

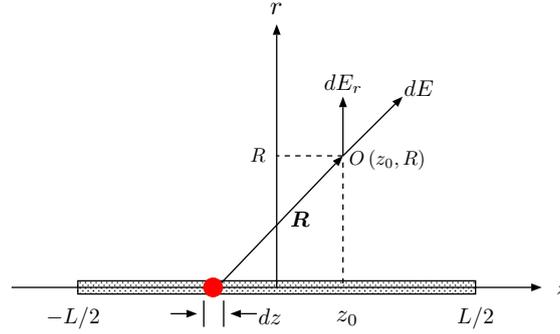


図 2.6 等速直線運動をしている短バンチ電子の周囲に誘起される電磁場を計算するためのモデル

起する電場 $dE_r(z_0, R)$ は、変数の定義が図 2.5 とは異なっていることに注意して、

$$dE_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \cdot \frac{Q}{L} dz \cdot \frac{R}{\left[(z_0 - z)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}\right]^{3/2}} \quad (2.20)$$

となる。したがって、バンチ全体が誘起する電場は

$$\begin{aligned} E_r(z_0, R) &= \int_{-L/2}^{L/2} dE_r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 LR} \left(\frac{z_0 - L/2}{\sqrt{(z_0 - L/2)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}}} - \frac{z_0 + L/2}{\sqrt{(z_0 + L/2)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}}} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる。

図 2.7 に、バンチ幅 L を 3 mm とし、ビーム軸から r 方向に 5 mm 離れた場所でビーム軸に平行な線上の誘起電場をプロットして示した。電子バンチのエネルギーが高くなる程、電場の拡がりや小さくなっていることが分かる。

バンチ中心での電場の r 方向成分、 $E_{r,center}$ は、式 (2.21) で $z_0 = 0$ とすれば求まる。

$$E_{r,center} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{R^2}{\gamma^2}}} \quad (2.22)$$

$\frac{R^2}{\gamma^2} \ll \frac{L^2}{4}$ の時、すなわち、 $\gamma L \gg 2R$ (R がバンチ半径に相当するとすれば、バンチ幅に γ を乗じた値が、バンチ直径よりも大変長い場合) の時、式 (2.22) は以下の様になる。

$$E_r = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 RL} \quad (2.23)$$

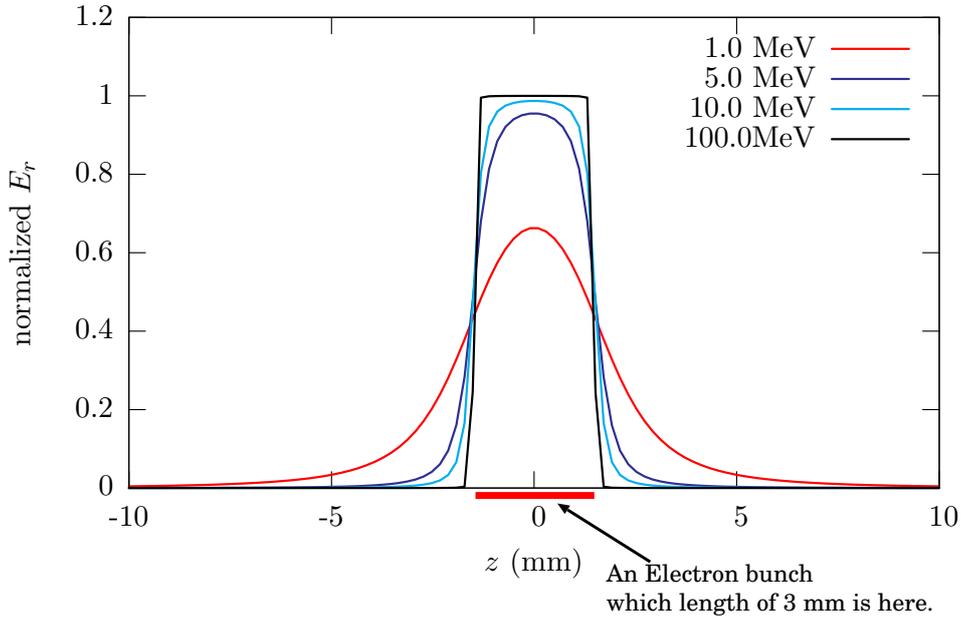


図 2.7 長さ 3 mm のバンチが、ビーム軸から r 方向に 5 mm 離れたところに誘起する電場。ビームエネルギーが無限大、若しくはバンチ幅が無限大のときに誘起される電界強度を 1 とし規格化している。

電子バンチを電流と考えると、 $I = v_z Q / L$ である。したがって、バンチ中心での磁場は

$$B_\theta = \frac{v_z}{c^2} E_r = -\frac{v_z Q}{2\pi\epsilon_0 R c^2 L} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (2.24)$$

となる。電子の電荷量を $-e$ と定義したために負号が付いているが、式 (2.24) はアンペアの周回積分の法則 ($\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$) より導いた磁場と一致する。

2.3 まとめ

本章では、次章以降で述べるビームダイナミクス解析の準備として、まず、RF 電子銃空洞内の電子の加速の様子について単一電子の軌道を解析的に示した。また、解析的に示せる範囲内で、空洞内のビームダイナミクスの初期 RF 依存性、空洞長の初期 RF 依存性等について示した。大まかな特性は計算できるものの、これらを詳しく解析するには、次章以下で詳しく述べる数値解析が不可欠である。

電子同士の空間電荷相互作用計算の基礎として、単一電子が周囲に誘起する電磁場を解析的に算出した。これを用い、任意のエネルギーの短バンチペンシルビームが周囲に誘起する電磁場の算出手法を示した。単一電子が周囲に誘起する電磁場の式は、第 3 章で述べるシミュレーションコードの空間電荷相互作用の計算に用いられるものであり、ペンシルビームが誘起する電磁場は、第 5 章で述べるビームエンベロープ方程式の基礎となるものである。

参考文献

- [1] J.D.Jackson, "Classical Electrodynamics, third edition", John Wiley & Sons, Inc., (1998), p.664.

第3章

シミュレーションコードの開発

本章では、ビームダイナミクスのシミュレーション的研究手法の一環として、SPring-8のRF電子銃用に開発したシミュレーションコード [1] の概要について述べる。短パルス、高輝度電子源用に開発したものであるが、基本的には任意の低エネルギー電子ビームに適用可能なアルゴリズムとなっている。また、実際の電子ビームを解析するために必要であることから3次元のビームトラッキングコードとなっており、これが本コードの大きな特徴である。PIC(Particle In Cell) 法を採用し、マクスウェル方程式を有限要素法等を用いて直接解くと、3次元空間での大規模な計算には大量のメモリが必要で時間もかかる。このため、本コードでは各マクロ粒子間の相互作用を全て計算する方法を採用した。

3.1 コードのアルゴリズム

本コードは、粒子間の相互作用を全て計算する Point-To-Point 法を採用しているが、当然のことながら「粒子」として電子そのものを扱うわけにはいかない。Point-To-Point 法においては計算時間がほぼ粒子数の2乗に比例するので、計算時間が莫大なものになる。したがって、粒子としてはマクロ粒子を採用している。

本コードにおいてマクロ粒子とは、複数電子の集合体である。また、マクロ粒子の集合体で1つの電子バンチを表す。マクロ粒子内の電子数は、一連のトラッキング中において一定である。マクロ粒子数を n 、バンチの電荷量を Q 、電気素量を e とすると、マクロ粒子1個の電荷量は Q/n であり、マクロ粒子内の電子数は Q/ne となる。図 3.1 に、シミュレーションコードのアルゴリズムを示す。

本コードは、 xyz 直交座標系を用いている。SPring-8の線型加速器で座標を扱うときは、通常、 z 方向をビーム進行方向、 x 方向をビーム進行方向を見込んで水平右方向、 y 方向を垂直上方向と表している。しかしながら、このような座標系は左手系となり、コードを記述する際に特殊なベクトル演算を行う必要があることから見通しが悪い。このため、 x 方向を垂直上方向、 y 方向を水平右方向とし、 z 方向は通常と同じくビーム進行方向とすることによって、右手系を採用している。

本コードでは、各マクロ粒子は位置、および速度の計6次元 (x, y, z, v_x, v_y, v_z) で管理しており、

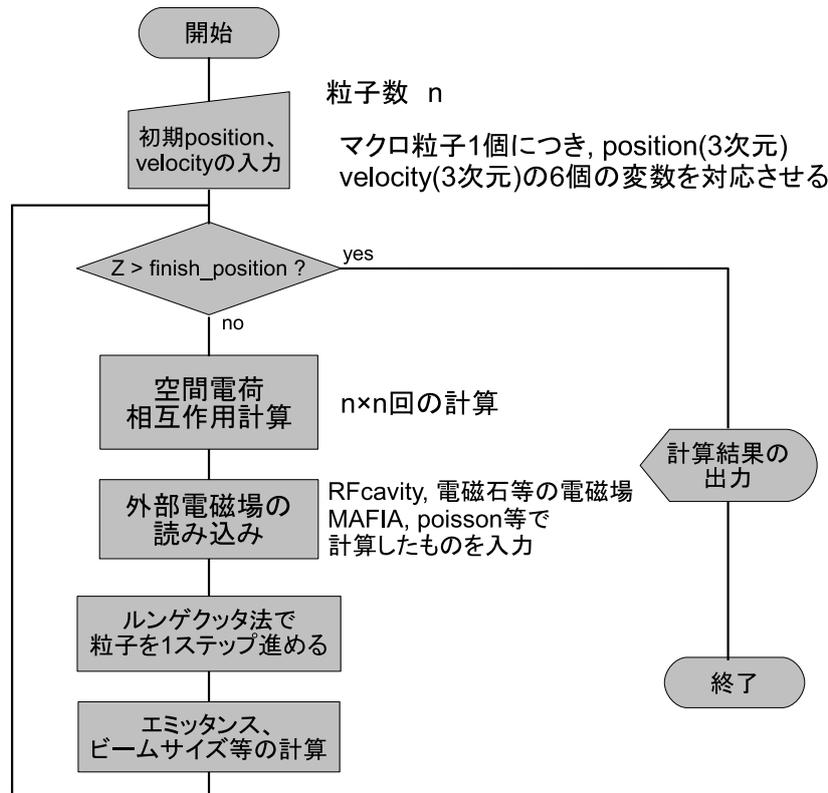


図 3.1 SPring-8 の RF 電子銃用に開発したシミュレーションコードのアルゴリズム

乱数等によってこの 6 次元物理量を与えることにより、初期電子バンチを生成する。バンチは、ある空間中に生成することもできるし、カソードから発生する電子ビームをシミュレートすることもできる。

バンチ生成後の各マクロ粒子は、マクロ粒子間相互作用、すなわち空間電荷効果による電磁場、および RF 空洞、加速管、電磁石等による電磁場の影響を受けながら 4 次精度のルンゲクッタ法によってトラッキングする。

アルゴリズムは基本的にはトラッキングと電磁場計算の繰り返しであり、必要な距離のトラッキングを終えると計算を終了する。なお、本コードは fortran90 を用いて記述している。

次節以下に、図 3.1 に示す各処理の詳細を述べる。

3.2 空間電荷相互作用の計算

マクロ粒子間の相互作用計算はトラッキングの各ステップ毎に行うが、その計算方法としてまず考えられるのは、実験室系からマクロ粒子の重心系に移動し、重心系において相互作用の問題を解く方法である。この場合、マクロ粒子の平均速度を用いてローレンツ変換を行うことにより重心系に移動する。実際には各々のマクロ粒子の速度は異なるので、重心系においてもそれぞれのマクロ粒子はある速度を持つ。しかし、重心系に移動する目的は相互作用の問題を静電場の問題として簡

略化して解くことであるから、各粒子の速度は無視する。重心系において各粒子に働く電場を計算した後、その電場を式 (3.1) のようにローレンツ変換によって実験室系に戻してやれば、トラッキングに用いる電磁場を求めることができる。ここで、マクロ粒子は z 方向に平均速度 v で運動しており、' を付した電磁場が実験室系のものとする。

$$\begin{cases} E'_z = E_z \\ E'_x = \frac{E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ E'_y = \frac{E_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} B'_z = 0 \\ B'_x = -\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_x}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} \\ B'_y = -\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_y}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \quad (3.1)$$

この方法は PARMELA で用いられており、利点は計算が簡単になることである。したがって計算速度の点から見ると有用であるが、全粒子が同一速度を持っていることを仮定しているために、カソード直後などエネルギー拡がり大きな場所では誤差を生じる可能性がある。

これに対し、本コードでは実験室系において直接相互作用の問題を解く方法を採用した。自由運動する電子が、その電子から r の位置に誘起する電磁場は、第 2 章の式 (2.13) と式 (2.16) から以下のように表される。

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{r}}{\gamma^2 [|\mathbf{r}|^2 - \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{r}|^2}{c^2}]^{3/2}} \right\}_{ret} + \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \frac{\mathbf{R} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})}{[|\mathbf{r}|^2 - \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{r}|^2}{c^2}]^{3/2}} \right\}_{ret} \\ \mathbf{B} = \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{ret}}{c} \end{cases} \quad (3.2)$$

式 (3.2) は、導出の際、如何なる仮定も必要としない完全な式であるが、計算を行うためにはマクロ粒子の遅延位置を計算する必要がある。しかし、遅延位置の計算には複数の手順が必要であり、かつ、過去のマクロ粒子の位置をメモリーに記憶しておかなければならない。このために、長大な計算時間と大きなメモリー空間を必要とする。マクロ粒子相互間の計算は、基本的には式 (3.2) のような計算を n^2 回行う必要があるため、計算時間は、ほぼ、この部分によって決まってしまう。したがって、如何に簡潔な式を用いるかが重要である。

ここで、2.2.1 節で述べたように電子が等速直線運動をしていると仮定すると、式 (3.2) は式 (3.3) のように簡略化される。

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{\mathbf{r}}{[|\mathbf{r}|^2 - \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{r}|^2}{c^2}]^{3/2}} \\ \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \end{cases} \quad (3.3)$$

式 (3.3) では、式 (3.2) の上式右辺第 2 項の放射場は無くなり、クーロン場のみとなっている。計算される電磁場は全て電子の現在位置、現在速度のみで表されており、遅延位置を計算する必要がないことから計算が高速化される。このため、本コードでは、マクロ粒子が誘起する電磁場を計算する際、マクロ粒子が加速度運動をしているか否かに拘らず、近似的に等速直線運動をしているものと仮定している。

放射場を無視することの妥当性は次の様に評価される。放射場のクーロン場に対する比率は、式 (3.2) より、次の様に表される。

$$\frac{E_{rad}}{E_{coulomb}} = \frac{\gamma^2 R \dot{v}}{c^2} \quad (3.4)$$

ここで、 z 方向に一樣な DC 電場によって加速すると仮定して \dot{v} を評価すると、式 (2.7) より負号を省いて

$$\dot{v} = \frac{e}{\gamma^3 m_0} E_{DC} \quad (3.5)$$

と表される。ただし、 E_{DC} は DC 加速電界強度である。したがって、

$$\frac{E_{rad}}{E_{coulomb}} = \frac{e E_{DC} R}{\gamma m_0 c^2} \quad (3.6)$$

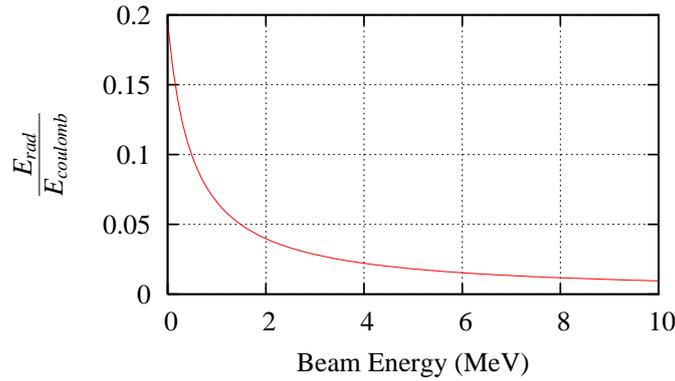


図 3.2 放射場のクーロン場に対する比率のビームエネルギー依存性

である。図 3.2 に、放射場のクーロン場に対する比率をビームエネルギーの関数として示す。 E_{DC} は、電子銃システムとして必要十分な値である 100 MV/m^{*1}とした。 R は、電子の遅延位置から相互作用の相手粒子までの距離であるが、電子銃直後では短いと見積もられることから 1 mm とした。放射場の割合は電子銃直後では大きいですが、それでもクーロン場よりもかなり小さく、また、少し加速すると急激に小さくなることから、放射場を無視しても問題ないと考えられる。なお、クーロン場の項で等速直線運動を仮定できる根拠は 3.5 節で例を挙げて示す。

さて、式 (3.3) の上式右辺分母は図 2.5 に於ける幾何学的考察から導かれた外積で表されておりこのままでは計算手順が長くなるが、この部分は $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}}$ を用いることによって、以下

*1 SPring-8 の RF 電子銃ではカソード面最大電界強度は 157 MV/m で運用しているが、電子がカソードから放出されるタイミングでの電界強度は 14 MV/m 程度である。

のように内積を用いた簡単な形に変換できる。

$$|\mathbf{r}|^2 - \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{r}|^2}{c^2} = \frac{|\mathbf{r}|^2}{\gamma^2} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2}{c^2} \quad (3.7)$$

式 (3.7) をそのまま用いても良いが、速度の z 方向成分は、数 MeV 程度の低エネルギー領域に於いても他の成分に比べ概ね $10^3 \sim 10^4$ 程度大きく、通常は z 方向のみを相対論的に扱えば十分である。したがって、実際にプログラムで使用する電場の計算式は、デザイン軌道がカーブしていない限り、 v_x 、 v_y を無視して次式を採用している。

$$\begin{cases} \mathbf{E} &= \frac{-e}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{\mathbf{r}}{\left[\frac{x^2+y^2}{\gamma^2} + z^2\right]^{3/2}} \\ B_x &= -\frac{v_z}{c^2} E_y \\ B_y &= \frac{v_z}{c^2} E_x \\ B_z &= 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

これより、あるマクロ粒子 A が他の全ての粒子から受ける電磁場は、以下のように他の全ての粒子からの電磁場の足し合わせで計算される。

$$\begin{cases} \mathbf{E}_A &= \sum_{i(i \neq A)} \mathbf{E}_{i \rightarrow A} \\ \mathbf{B}_A &= \sum_{i(i \neq A)} \mathbf{B}_{i \rightarrow A} \end{cases} \quad (3.9)$$

式 (3.8) を用いて 2 つのマクロ粒子、A と B の相互作用を計算する場合、A が B の位置に誘起する電磁場と、B が A の位置に誘起する電磁場は一般的には異なる。これは、相互作用を実験室系で見ているためである。ローレンツ変換によって重心系で計算する方法では、これらの相互作用は等しくなるため、計算回数は $n^2/2$ 回で良いが、本コードの方法では n^2 回の計算を行う必要がある。実際には、A から B と、B から A の相互作用には共通項があるので、その分は若干計算時間を短縮できる。

3.3 外部電磁場の読み込み

マクロ粒子に与えられる電磁場は、前項の空間電荷相互作用以外に、電磁石、および RF 空洞によるものがある。本コードは有限要素法等のルーチンを持っていないので、簡単に式であらわすことのできる理想化した電磁場、または空芯コイル等は計算できるものの、実際の電磁石磁場や RF 電磁場は計算できない。したがって、別途、電磁場計算コードで計算した電磁場データファイルを読み込むことにより、電磁石、RF 空洞等の電磁場計算を実現している。通常は空間を直方体 (2 次元コードでは長方形) のメッシュに切り、そのメッシュ交点でのデータをファイルに記録しておく。本コードではそのデータから線形補間等によって任意の点における電磁場データを計算する。

線型加速器の用途では、電磁石は普通は DC 磁場として用いるので、本コード内では線形補間で得られるデータをそのまま用いることができる。

RF 電子銃空洞等に用いる定在波型 RF 電磁場の場合は、データファイルとして、電磁場の最大値 $E_0(x, y, z)$ 、 $B_0(x, y, z)$ を位置の関数として用意しておく。例えば、SPring-8 の RF 電子銃空洞のデータ例は、図 2.4 の赤線である。任意の時間に於ける電磁場は、 E_0 、 B_0 を元にして定在波を構成すればよいので、

$$\begin{cases} \mathbf{E}(t) &= -\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \phi_0) \\ \mathbf{B}(t) &= \mathbf{B}_0 \sin(\omega t - \phi_0) \end{cases} \quad (3.10)$$

として計算できる。ここで、 ϕ_0 は RF 初期位相である。RF 電子銃空洞の計算を行う際には、バンチ先頭のマクロ粒子がカソードの表面より放出される時点での位相を ϕ_0 としている。

進行波型加速管の場合は、以下のように扱う。一般に、進行波 (TW) は 90 度位相の異なる定在波 (SW) を足し合わせることで得られる。

$$\begin{cases} SW1 &= A \sin(\omega t) \sin(kz) \\ SW2 &= A \cos(\omega t) \cos(kz) \\ TW &= SW1 + SW2 = A \cos(\omega t - kz) \end{cases} \quad (3.11)$$

任意の時間に於ける進行波型加速管の電磁場は、式 (3.11) を用いて求めることができる。ある時間 t_0 に於ける加速管の電磁場 $f(x, y, z, \omega t_0)$ 、および位相 90 度分だけ時間が異なる電磁場 $f(x, y, z, \omega t_0 + \pi/2)$ をあらかじめデータファイルとして用意しておく。 f は任意の波形になることが考えられるが、 z 方向に周期関数であるため、 z で展開して三角関数の和として表すことができる。したがって、 $f(x, y, z, \omega t_0)$ 、 $f(x, y, z, \omega t_0 + \pi/2)$ が式 (3.11) の $\sin(kz)$ 、 $\cos(kz)$ に対応するものと考えれば、以下の様に任意の時間に於ける進行波型加速管の電磁場が計算できる。

$$\begin{aligned} TW(x, y, z, \omega t) &= \sin(\omega t) \cdot f(x, y, z, \omega t_0) + \cos(\omega t) \cdot f(x, y, z, \omega t_0 + \pi/2) \\ &= \sin(\omega t) \sum_i A_{xyi} \sin(k_{xyi} z) + \cos(\omega t) \sum_i A_{xyi} \cos(k_{xyi} z) \\ &= \sum_i A_{xyi} [\cos(\omega t - k_{xyi} z)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.4 トラッキング方法

電子の軌道は、式 (2.5) より、次の微分方程式で表すことができる。

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{e}{\gamma m_0} \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})}{c^2} \mathbf{v} \right) \end{cases} \quad (3.13)$$

式 (3.13) をマクロ粒子の軌道に対応させた場合、 e および m_0 はそれぞれマクロ粒子の電荷量と静止質量となる。これらは、1つのマクロ粒子に含まれる電子の個数、すなわち、シミュレーションで設定する粒子数によって変化する。しかし、式 (3.13) で扱うのは比電荷 e/m_0 であり、これは設定粒子数によらず一定であるため、粒子数によって運動方程式を変更する必要はない。従って、トラッキングコードでは式 (3.13) を用いて、次のステップの位置、および速度の6次元パラメータを計算する。

E および B には空間電荷効果による電磁場、および、電磁石、RF 空洞等の電磁場を各ステップごとに代入する。

実際のトラッキングは、式 (3.13) を4次精度のルンゲクッタ法で解くことにより行う。4次精度ルンゲクッタ法では、 x_i 、 y_i および $y' = f(x)$ が既知であるとき、 h をステップ幅として次の様に4段階の手順によって y_{i+1} を求める。

$$\begin{cases} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2) \\ x_{i+1} &= x_i + h \\ k_4 &= hf(x_{i+1}, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \end{cases} \quad (3.14)$$

まず、速度 v については、式 (3.14) の各パラメータはそれぞれ以下のように対応する。

$$\begin{cases} x &\rightarrow t \\ y &\rightarrow v \\ f &\rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{e}{\gamma m_0} \left(v \times B + E - \frac{(E \cdot v)}{c^2} v \right) \\ h &\rightarrow \Delta t \end{cases} \quad (3.15)$$

式 (3.14) で $k_1 \sim k_4$ を計算するとき、 k_2 および k_3 は時刻 $t_i + \Delta t/2$ 、 k_4 については時刻 $t_i + \Delta t$ において計算する必要がある。 k は f 、すなわち $\frac{dv}{dt} = -\frac{e}{\gamma m_0} \left(v \times B + E - \frac{(E \cdot v)}{c^2} v \right)$ の関数であるから、例えば k_2 、 k_3 を計算するときは時刻 $t_i + \Delta t/2$ に於ける v 、 E 、 B が分かっている必要がある。本コードでは、これらのうち、 v については簡単に計算できることから時刻 $t_i + \Delta t/2$ の値を用いている。 E 、 B についても計算を行うとすれば、 n^2 回の演算をこの時点で行う必要があり、計算処理が非常に煩雑となる。 Δt を小さくすれば E 、 B の変化は小さく抑えられることから、これらについては時刻 t_i での値を近似的に用いている。

位置 r について式 (3.14) との対応は以下の様になり、速度 v の計算過程で $v(t_i + \Delta t/2)$ およ

び $v(t_i + \Delta t)$ は算出できることから同じくルンゲクッタ法で解くことが出来る。

$$\begin{cases} x & \rightarrow t \\ y & \rightarrow \mathbf{r} \\ f & \rightarrow \mathbf{v} \\ h & \rightarrow \Delta t \end{cases} \quad (3.16)$$

Δt は、それを 10 倍してもエミッタンスの計算結果にほぼ変化がないことを目安に決定しており、RF 電子銃のシステムを計算する場合、カソードから 0.8 mm 以内の領域では 0.1 ps、RF 電子銃空洞内では 0.5 ps、その他の部分においては 1.0 ps に設定している。

なお、速度をパラメータとしてトラッキングしているために、高エネルギーになると、速度の変化量がわずかになる事によって、計算精度が悪くなる。本コードは速度、および位置を 32 ビットの倍精度実数型で扱っているが、概ね 300 MeV を越えると、マクロ粒子のエネルギー増加分が解析的に求めたエネルギー増加分と一致しなくなる。したがって、高エネルギービームを扱う際には、トラッキングのパラメータを例えば運動量等に変更するなどの工夫が必要がある。ただし、本論文で目的とする数 10 MeV 以下の電子銃システムの解析には、なんら問題はない。

3.5 電子バンチの生成およびカソード近傍での処理

初期電子バンチ内の各マクロ粒子の位置は、3.7.1 節で述べるような方法により生成する。任意の位置に生成することが可能であるが、ここでは、カソードより電子バンチを放出する場合の処理について示す。

まず、カソード内部にバンチを模擬的に生成する。そのときのバンチ幅は、フォトカソード電子銃をシミュレーションする場合はレーザーパルス幅と同一に設定しておく。カソード内においては、 $v_x = v_y = 0$ 、 v_z は光速とし、マクロ粒子間相互作用を計算せずにトラッキングを行う。カソード表面を各マクロ粒子が横切った時点で $v_z = 0$ とし、空間電荷効果による電磁場および、外部電磁場を適用して通常のトラッキングを開始する。フォトカソード電子銃においては、電子放出直後のバンチ進行方向の空間的な長さは、電子エネルギーが低いためにレーザーパルス幅に比べて極端に短くなる。例えば図 3.3 に示すように、標準的なフォトカソード RF 電子銃のパラメータである、レーザーパルス幅 10 ps = 3 mm、カソード表面最大電場強度 100 MV/m の時、カソード表面での電子バンチ幅は 0.13 mm となる。このような現象も、これら処理を行うことによって容易にシミュレーション可能である。

ただし、このようにバンチ幅が圧縮されてしまうので、マクロ粒子同士が接近しすぎてしまう場合がある。粒子同士の距離が短くなれば、その相互作用は急激に大きくなるので、ある程度以上接近した場合には、相互作用を計算しない等、何らかの処理を行う必要がある。本コードでは、カソードから 10 mm の範囲内においてのみ、相互距離が 30 μm 以内に近づいた場合、または、相互作用による電界強度が 1 GV/m を越えた場合、相互作用を計算しないこととしている。

マクロ粒子がカソードから放出される瞬間は、特別な扱いが必要である。マクロ粒子はカソード

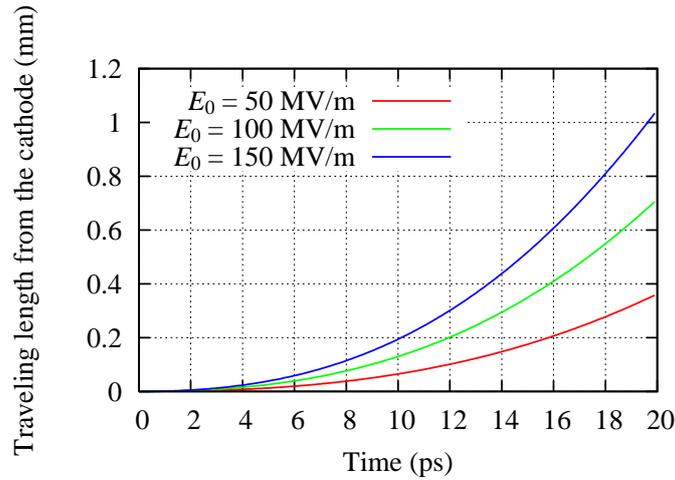


図 3.3 カソード表面でエネルギー 0 のマクロ粒子を RF 電場 $E_0 \cos(\omega t - \phi_0)$ によって加速した場合の粒子のカソードからの距離を、時間の関数として示した。初期 RF 位相 $\phi_0 = 85^\circ$ とし、式 (2.11) を用いて計算を行った。

内においてもタイムステップ Δt ごとに移動させるため、あるステップ終了時の位置が丁度カソード表面と一致することは期待出来ない。このまま計算を行うと、カソード表面を超えたステップ終了時の位置で $v_z = 0$ となってしまう、エネルギー計算に誤差を生じる。このエネルギー誤差はわずかであるが、カソード表面ではマクロ粒子自体のエネルギーが小さいため、大きな計算誤差となってしまう。

これを回避するため、図 3.4 に示すように、カソード表面を横切るときのみ、1つのステップ Δt を Δt_1 と Δt_2 に分けて 2 ステップでトラッキングを行う。

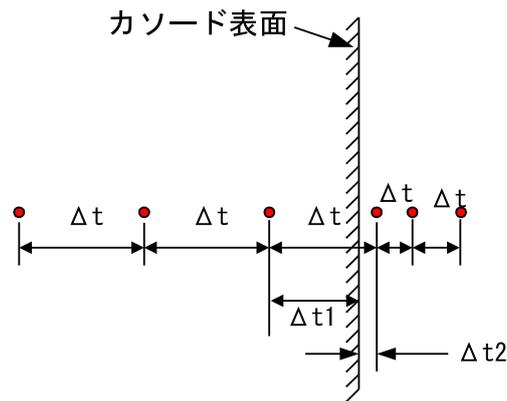


図 3.4 マクロ粒子がカソード表面を横切る際のトラッキング処理

カソード近傍の空間電荷効果を計算する際には、カソードによる鏡像効果の寄与を考慮する必要がある。本コードは基本的には電子バンチ周囲の導体によるウェイクフィールドは計算出来ないが、カソード鏡像効果は、鏡像電子を導入することによって計算を実現している。

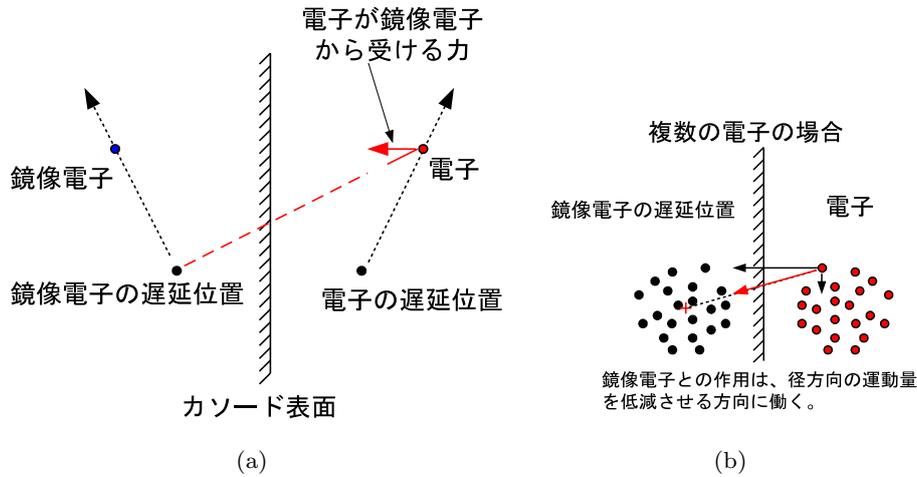


図 3.5 カソードによる鏡像効果計算の概念図

鏡像計算を行う際、カソード面上ではカソード面に対して垂直な電場のみが存在する事実を用いるのは静電場の場合と同一である。それを実現するため、図 3.5(a) のように、鏡像マクロ粒子も、実のマクロ粒子と同様に等速直線運動をしていると仮定して計算を行う。すなわち、鏡像マクロ粒子の位置は、 x と y は実粒子と同一で、 z については符号が異なる。速度についても、 v_z のみ符号が異なる。本コードでは、カソードから 10 mm の範囲内において、このような鏡像の計算を行っている。10 mm という数値は、カソード直後でのバンチ幅、0.1 ~ 1 mm のオーダーに比べ、十分に長い値として設定した。

この範囲内では、通常の粒子に加えて鏡像粒子分が増加するため、最大 $2n$ 個の粒子間相互作用を計算する必要がある。図 3.6 に、このようにして計算した、カソード近傍の電子バンチの周囲に誘起される電場分布を示す。電場がカソードに垂直となっているのが分かる。

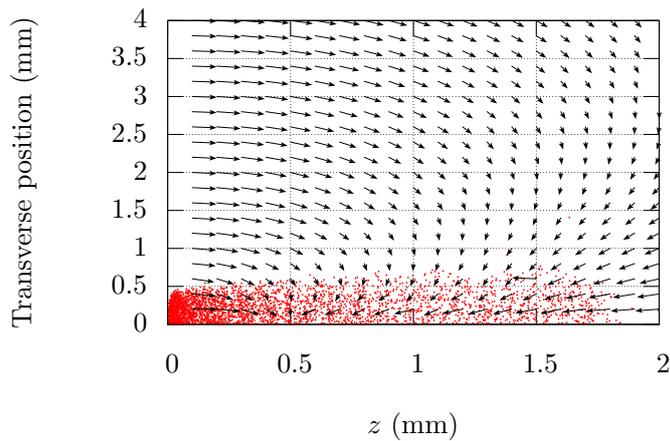


図 3.6 カソード近傍に於ける電子バンチ周囲の電場。横軸左端がカソード表面であり、電場がカソードに対し垂直になっている。

カソードから放出された電子バンチは、実マクロ粒子同士での空間電荷反発力によって運動量の

径方向成分が増加する。これに対し鏡像粒子とは、図 3.5(b) のように、鏡像粒子のバンチ中心に向かう力が放出された電子に作用する。この力は、図 3.5(b) のように運動量の径方向成分を減少させる効果がある。すなわち、鏡像効果は放出直後の電子バンチのトランスバースエミッタンス増加を抑える働きをしている。図 3.7 に、鏡像効果を計算しなかった場合と計算した場合の、エミッタンスの違いを示す。この例では、鏡像効果を計算しない場合ではエミッタンスが約 3 倍に増加している。このように、電子銃近傍のシミュレーションを行う際、カソードの鏡像効果は無視してはならないものである。

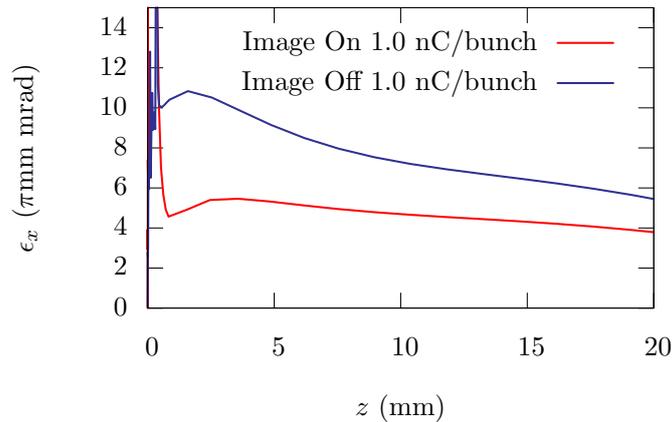


図 3.7 カソード鏡像効果を計算した場合としない場合の、カソード近傍でのエミッタンス計算例。SPring-8 の RF 電子銃において、カソード表面最大電界強度 157 MV/m, 初期位相 85 度で 1 nC のビームを引き出した場合の計算で、カソードから 20 mm の範囲内を示している。

以上示したようにカソードからの粒子の放出を計算するが、粒子によっては先に放出した粒子が誘起する電磁場によってビーム進行方向逆向きに速度が与えられる場合がある。このようなマクロ粒子は、速度が負数になった時点でトラッキングより排除することとしている。この処理は、空間電荷制限領域に於ける電子ビームの発生を模擬していると考えられる。図 3.8 にカソードからの引出し電流の電荷量依存性を一例として示す。

なお、本コードでは、3.2 節で記述したように、等速直線運動を仮定することによって、空間電荷効果をマクロ粒子の現在位置の関数として表しており、各マクロ粒子の遅延位置を計算していない。これは計算時間の節減のためであり、カソード近傍においてもこの方法を適応している。しかしながら、カソード近傍のマクロ粒子 A が他のマクロ粒子 B に作用する場合、A の B に対する遅延位置がカソード面より上流側になる可能性がある。この場合、その遅延時刻においてマクロ粒子 A は存在していないこととなり、本来ならば相互作用を計算してはならない。正しく計算するにはマクロ粒子 A の遅延位置を求め、式 (3.2) を用いて相互作用を計算すれば良く、その際、遅延位置がカソード上流になる場合には、相互作用および鏡像効果を計算しない選択をするべきである。

遅延位置を解析的に求めるには、原理的には粒子 A の位置が時間の関数として表現できることが必要である。この関数を $Z_a(t)$ とする。遅延時刻を t_{ret} 、任意の時刻の粒子 A の位置から粒子

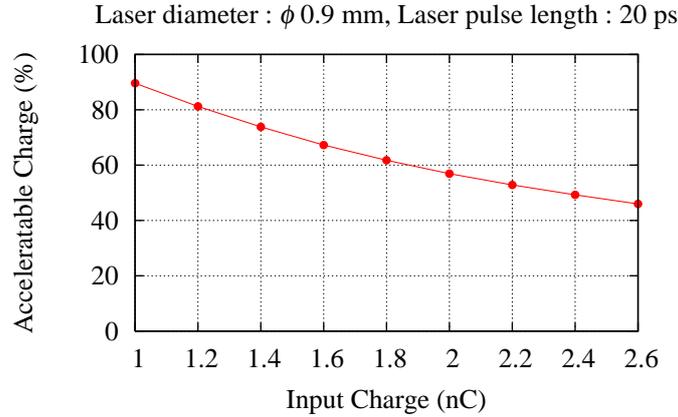


図 3.8 SPring-8 の RF 電子銃において、カソード表面最大電界強度 157 MV/m, 初期位相 85 度で計算した、カソードからの引出し電流の初期電荷量依存性。電荷量が多くなるほど、引き出される粒子の割合が小さくなる状況が計算されている。

B の現在位置へのベクトルを $\overrightarrow{Z_a(t)Z_{b.now}}$ 、光速を C とすれば、遅延時刻は

$$\Delta t = t_{now} - t_{ret} = \frac{|\overrightarrow{Z_a(t_{ret})Z_{b.now}}|}{C} \quad (3.17)$$

において t_{ret} を解くことによって得られる。しかしながら、一般的には $Z_a(t)$ を陽関数として表現できないから、電子の過去の位置を全てメモリに記憶しておく必要がある。メモリに記憶される過去の位置は計算のタイムステップ間隔になるため、それ以下の細かな遅延位置の変化を正確に求めるにはデータの補間等をする必要があり、時間もかかって難しい。RF 電磁場での加速の場合はこのような問題が生じる。これに対し、DC 電場によって加速する場合には、 $Z_a(t)$ は式 (2.9) によって表されるので比較的簡単に遅延位置を求めることが出来る。

このような方法で、DC 電場中において、遅延位置を求めて式 (3.2) よりクーロン場と放射場を共に計算した場合と、等速直線運動を仮定し、放射場を無視して式 (3.3) より計算した場合とで、カソード直後の電子バンチ周囲に誘起される電場分布を計算して比較した。これを図 3.9 に示す。カソード以降、DC 電場を定常的に 60 MV/m 印加している。初期バンチ幅は 10 ps、初期バンチ直径は ϕ 1.6 mm、電荷量は 1 nC/bunch である。等速直線運動を仮定した場合は、電場の長手方向成分が最小になる点が、等速直線運動を仮定せず、放射場も含めて計算した場合に比べ、若干カソード側に寄っている。これは、等速直線運動を仮定した場合において、粒子の遅延位置がカソードの上流側になる場合でも鏡像粒子として計算に含めているために、実際よりも鏡像効果を大きく見積もってしまっていることを示している。

図 3.10 に、両者のエミッタンスの時間発展を比較した。バンチ周囲の電場分布には違いが認められるものの、エミッタンスの値は両者ほぼ同一である。電荷密度が大きくなると結果が異なってくることも考えられるが、RF 電子銃を考えた通常の場合では、カソード近傍に於いても、等速直線運動の仮定は大きな問題とはならないと考えられる。また、カソードから離れるに従って、現在

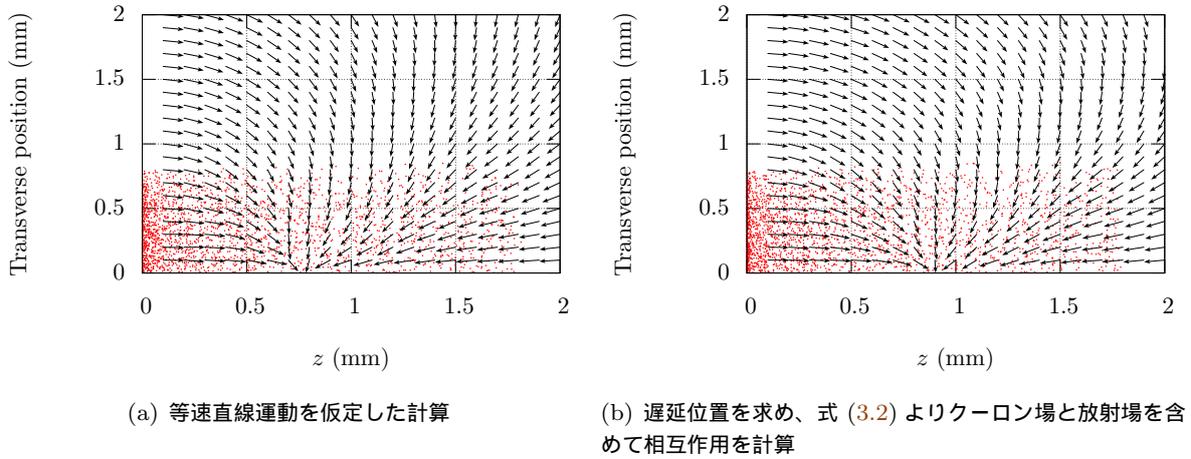


図 3.9 DC 電場でカソードから電子を引き出した場合のバンチ周囲の電場分布。等速直線運動を仮定した場合と、仮定しない場合との比較を示す。DC 電場は 60 MV/m であり、 $z = 2 \text{ mm}$ でのビームエネルギーは、図 3.7 の場合と同一である。

速度と遅延位置における速度差、 Δv と、現在速度との比 $\Delta v/v$ は小さくなるので、全体に渡って等速直線運動を仮定することに問題はないと考えられる。放射場については、図 3.2 に示したとおり、ビームが偏向しない条件ではエネルギーが高くなるほど無視できるので、電子銃近傍で無視出来れば全体を無視しても問題ない。

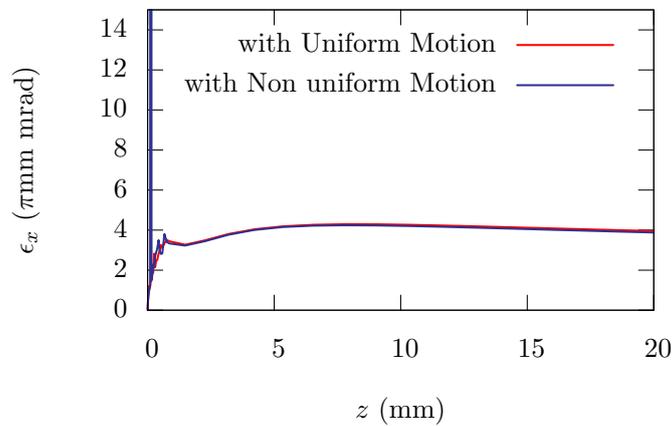


図 3.10 等速直線運動を仮定した場合と、遅延位置を計算した場合のカソード直後のエミッタンスの比較

3.6 計算結果の処理と出力

本コードでは、前述のように各マクロ粒子を 6 次元パラメータで管理しているため、これらから必要な物理量を計算することができる。また、任意の時刻において、6 次元パラメータをファイルとして出力することも可能である。以下に示す物理量は、コード内で 10 ステップ毎に計算処理し

て、ファイルとして出力するようにしている。

3.6.1 ビームサイズ

径方向および長手方向のビームサイズは、 x 、 y または z の期待値 (1σ) のことであり、以下の様に計算する。(y 、 z も同様。)

$$\sqrt{\langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}} \quad (3.18)$$

なお、 $\langle A \rangle$ は、時間 t における、電子ビーム全体の A の平均値である。

3.6.2 エミッタンス

トランスバース rms エミッタンスは、通常、次式のように定義される。

$$\epsilon_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x \cdot x' \rangle^2} \quad (3.19)$$

ここで、運動量の x 成分と z 成分をそれぞれ P_x 、 P_z として、

$$x' = \frac{P_x}{P_z} \quad (3.20)$$

である。

上記トランスバースエミッタンスは、一般に、径方向に働く力、 $F_x(x)$ または $F_y(y)$ が、 x または y に対して線形である場合、不変量である。しかし、式 (3.19) の定義では、加速を伴う場合には不変量とはならない。これは、 x' が z 方向の加速によって変化する為である。式 (3.19) のようなエミッタンスをナチュラルエミッタンスという。これに対し、本コードでは、加速を伴っても不変量であるエミッタンスとして、線型加速器において良く用いられるノーマライズドエミッタンスを採用している。これは、 x 、 $\gamma\beta x'$ で構成される位相空間分布から定義される rms エミッタンスである。これが z 方向の加速に依らないことは、以下の様に示される。

式 (3.20) において、 z 方向に加速する場合、 P_z は変化するが P_x は一定である。このとき、

$$\gamma\beta x' = \gamma\beta \frac{P_x}{P_z} = \gamma\beta \frac{P_x}{\gamma m_0 \beta c} = \frac{P_x}{m_0 c} = const. \quad (3.21)$$

となり、加速に関わらず $\gamma\beta x'$ は一定となる。したがって、

$$\epsilon_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle (\gamma\beta x')^2 \rangle - \langle x \cdot \gamma\beta x' \rangle^2} \quad (3.22)$$

と定義されたノーマライズドエミッタンスは加速を伴う場合でも不変量となる。ただし、式 (3.22) は、各粒子のエネルギーが分からないと計算できないから、実験的には測定出来ない。本コードでは、実験とシミュレーションを比較できる、という観点から、

$$\epsilon_x = \langle \gamma \rangle \langle \beta \rangle \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x \cdot x' \rangle^2} \quad (3.23)$$

をノーマライズドエミッタンスの定義として採用している。

式 (3.23) の各々のパラメータは、実際には以下の様に算出する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_i = \frac{\sqrt{v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2}}{c} \\ \langle \beta \rangle = \sum_i \beta_i / n \\ \langle \gamma \rangle = \sum_i \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} / n \\ \langle x^2 \rangle = \sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2 / n \\ \langle x'^2 \rangle = \sum_i (v_{xi}/v_{zi} - \langle v_x/v_z \rangle)^2 / n \\ \langle x \cdot x' \rangle = \sum_i (x_i - \langle x \rangle) (v_{xi}/v_{zi} - \langle v_x/v_z \rangle) / n \end{array} \right. \quad (3.24)$$

3.6.3 エネルギーおよび $\Delta E/E$

エネルギーは以下の様に計算する。

$$E_i = m_0 c^2 (\gamma_i - 1) \quad \langle E \rangle = \sum_i E_i / n \quad (3.25)$$

これより、 $\Delta E/E$ は

$$\Delta E/E = \frac{\sum_i (E_i - \langle E \rangle)}{n} \bigg/ \langle E \rangle \quad (3.26)$$

で計算される。

3.7 コードの精度検証

シミュレーションコードでは、一般に、物理現象に対して様々な仮定を行ってモデルを立て、それを元に計算する。本コードでも、前節までの記述のように多くの仮定を用いているが、仮定は極力少なくなるように配慮している。とくに、自由空間においては、マクロ粒子同士の相互作用を計算しながらルンゲクッタ法で電子軌道の微分方程式を解いているだけである。しかしながら、本シミュレーションコードにおける最大の仮定は、マクロ粒子を採用し、Point-To-Point で相互作用を計算していることそのものである。このために、計算されるエミッタンスに粒子数依存性が現れ

る。本節では、自由空間でトラッキングを行う場合の、エミッタンスの粒子数依存性について述べる。

なお、マクロ粒子を仮定せず、実電子の個数で計算するシミュレーションコードは、現段階では存在しない*2)ので、この問題は粒子シミュレーションコード一般に存在するものである。

3.7.1 初期粒子分布生成法

本節における自由空間でのトラッキングにおいては、カソードを仮定せず、トラッキングの初期においては、ある一定のエネルギーを持った電子バンチが空間上に存在することを仮定する。ビーム径は $\phi 1 \text{ mm}$ の一様分布、バンチ幅は 3 mm の一様分布で、電荷量は 1 nC とし、初期エネルギー 1 MeV または 6 MeV を与えて、 100 mm のトラッキングを行う。

初期粒子分布は乱数で与える方法もあるが、粒子分布が均一とはならないために、粒子間距離が近接している場合と、離れている場合が起こり得る。このため、これらの電子バンチが誘起する電磁場分布に、粒子ノイズとも呼べるようなムラができ、エミッタンスの粒子数依存性の原因となる。文献 [2] によると、PARMELA において、Hammersley's Sequence を用いて初期粒子分布を与えると、粒子数依存性が小さくなることが報告されている。

Hammersley's Sequence とは、区間 $[0, 1)$ の間を埋める低食い違い量列の 1 種である。粒子数を N としたとき、 $1 \leq n \leq N$ である整数 n に対し、その根基逆関数 $\Phi_b(n)$ を対応させることによって、数列を生成する。

まず、 n を b 進法で表し、その時の j 桁目の数字を $a_j(n)$ とする。すなわち、

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(n) b^{j-1} \quad (3.27)$$

この時、 n の根基逆関数は次のように表すことができる。

$$\Phi_b(n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(n) b^{-j} \quad (3.28)$$

すなわち、 b 進法で表した根基逆関数とは、 n を b 進法で表したときの数字を、小数点の位置で対称に折り返したものとなる。したがって、 $0 \leq \Phi_b(n) < 1$ は自明である。

本コードに Hammersley's Sequence を適用する場合、 x 方向の位置は $\Phi_2(n)$ 、 y 方向の位置は $\Phi_3(n)$ によって生成する。 z 方向については、 $\Phi_1(n) = n/N$ によって生成する。これは、 $b = 1$ の場合の Hammersley's Sequence の定義である。

図 3.11 に、初期粒子分布を乱数で生成した場合と Hammersley's Sequence で生成した場合を比較して示す。Hammersley's Sequence で生成した場合の方が、明らかに粒子位置の偏りが少ないことが分かる。

*2) 計算機の進歩によって、遠からず実現すると考えられる。

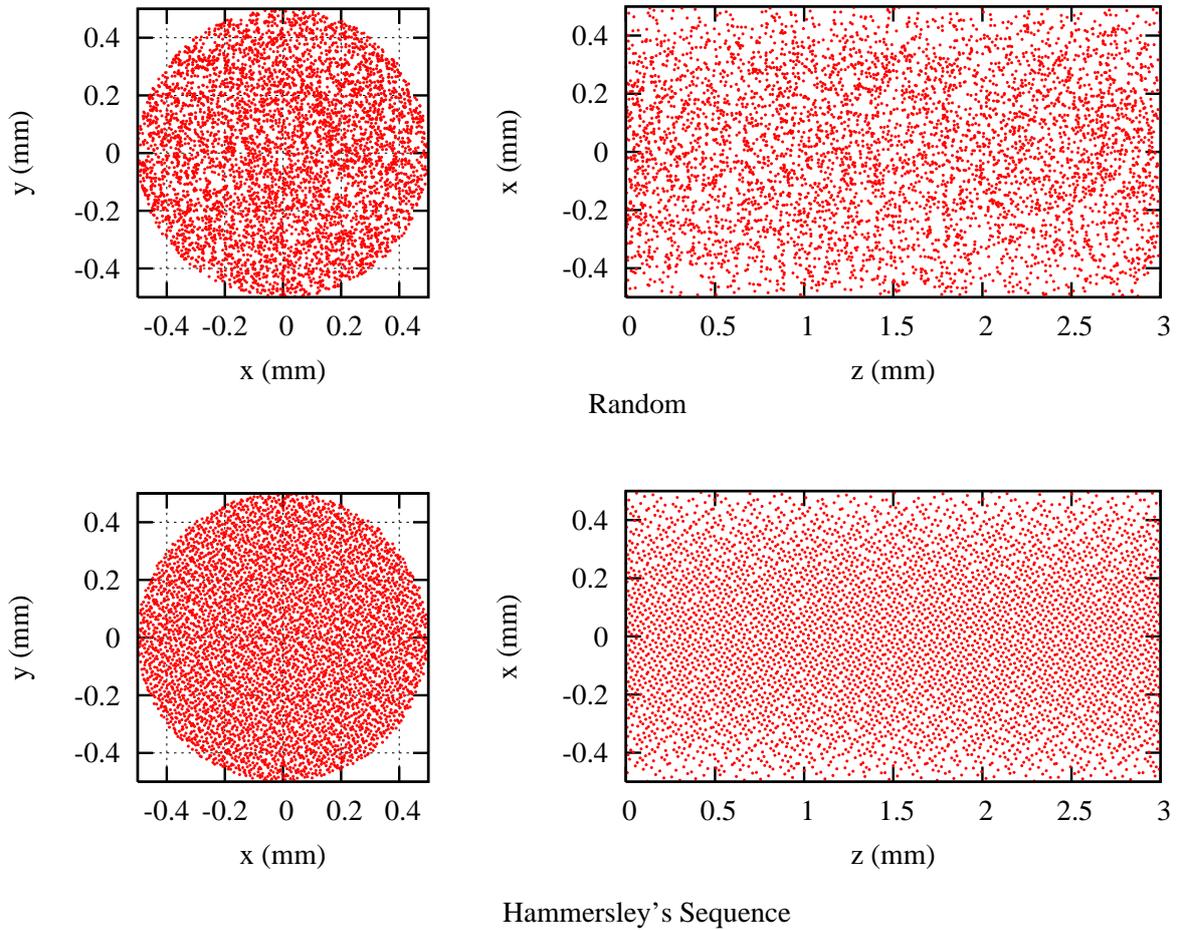


図 3.11 初期分布を乱数で生成した場合と Hammersley's Sequence で生成した場合との比較。粒子分布が分り易いように、粒子数 5000 個でプロットしている。

3.7.2 ビームサイズとエミッタンスの初期粒子分布生成法および粒子数への依存性

図 3.12 に、ビームサイズとエミッタンスの時間発展を、ビームエネルギーが 1 MeV と 6 MeV の場合について示す。粒子数は 20 万個として、初期粒子分布を Hammersley's Sequence で与えたものである。ビームサイズとしては、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ をプロットしている。自由空間でのトラッキング結果であるので、ビームサイズもエミッタンスも単調増加となっており、エネルギー 6 MeV の場合には、ビームサイズ、エミッタンスとも、1 MeV の場合よりも小さくなっている。

このような自由空間でのトラッキングについて、 $z = 100$ mm でのビームサイズの初期粒子分布生成法と粒子数への依存性を図 3.13 に、エミッタンスの依存性を図 3.14 に、それぞれ示す。図 3.13 のビームサイズ、および図 3.14 のエミッタンスは、粒子数が 10 万個、初期粒子分布生成法が Hammersley's Sequence の場合の値で規格化している。

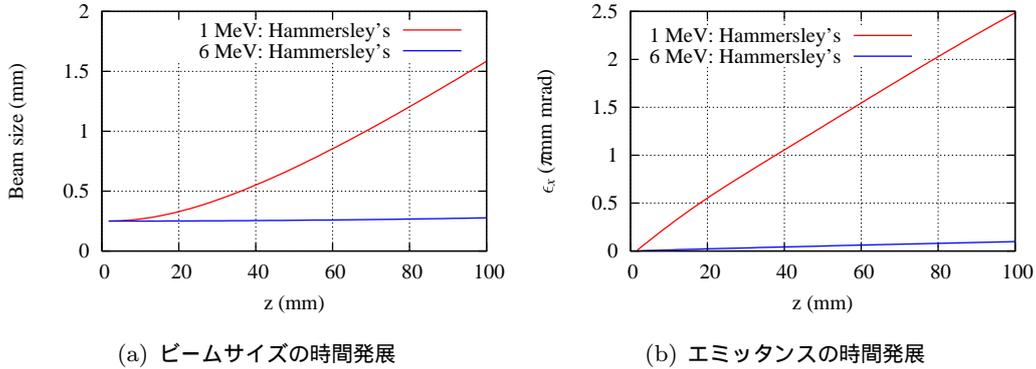


図 3.12 粒子数 20 万個を Hammersley's Sequence で与えた場合の、自由空間におけるビームサイズとエミッタンスの時間発展。

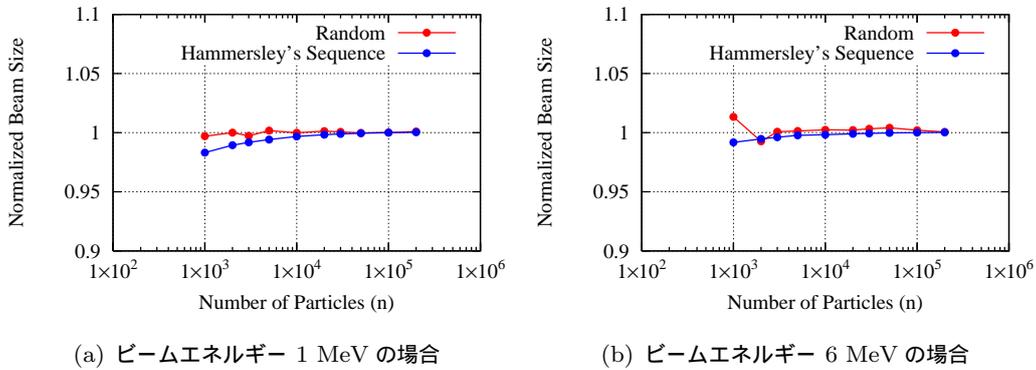


図 3.13 ビームサイズの初期粒子分布生成法と粒子数への依存性

ビームサイズについては、若干の変化があるものの、初期粒子分布生成法と粒子数への依存性は共に小さい。これに対し、エミッタンスでは、ビームエネルギー 6 MeV の場合において、大きな依存性がある。図 3.14(b) より、Hammersley's Sequence を用いて初期粒子分布を生成したほうが、明らかに粒子数依存性が小さくなる。したがって、本コードでは初期粒子分布生成法として Hammersley's Sequence をデフォルトとしている。ただし、Hammersley's Sequence を用いた場合に於いても、エミッタンスの値は粒子数 20 万個でも収斂していない。一方、ビームエネルギーが 1 MeV の場合においては粒子数が数万個程度で収斂している。これは、6 MeV の場合においてはビームサイズが小さいため、粒子密度が大きくなり、この結果、粒子位置の偏りの度合いが 1 MeV の場合よりも大きくなるためであると考えられる。

図 3.15 に、エミッタンスの粒子数依存性と、粒子密度の関係について示す。横軸は、 $z=100$ mm の位置での粒子密度であり、最も右側のデータ (6 MeV の場合) の密度で規格化している。縦軸は、 $z=100$ mm での粒子数 10 万個でのエミッタンスと、粒子数 5000 個でのエミッタンスの比であり、1 に近いほどエミッタンスの粒子数依存性が小さい。グラフの両端が 1 MeV と 6 MeV のデータ点で、その間を、エネルギーと初期ビーム径を変化させて補間した。エミッタンスの粒子数

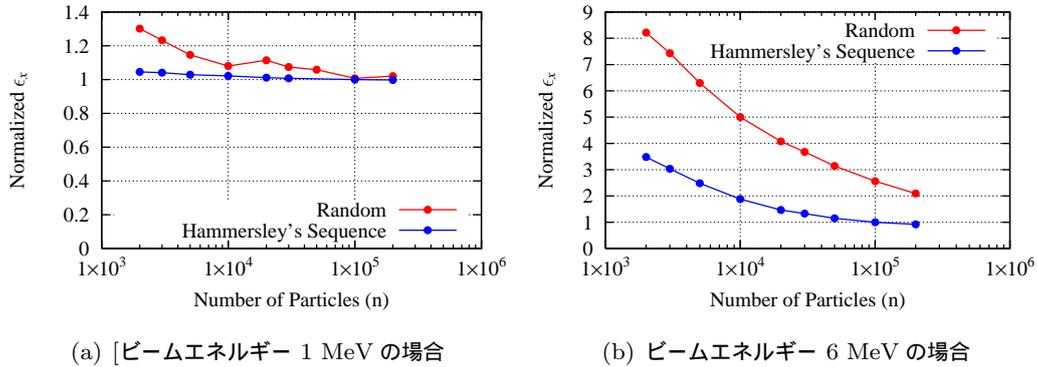


図 3.14 エミッタンスの初期粒子分布生成法と粒子数への依存性

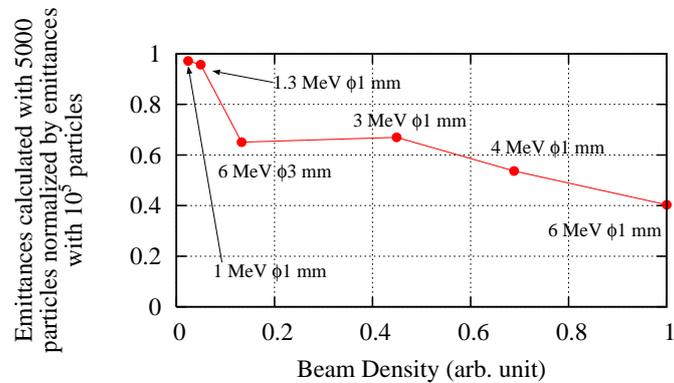


図 3.15 エミッタンスの粒子数依存性の粒子密度との関係

依存の程度はエネルギーにも関係するので図 3.15 では単調減少とはなっていないが、バンチ内の粒子密度が大きいほど、エミッタンスの粒子数依存性が大きくなる傾向にある。

なお、計算時間について触れておく。計算時間は CPU のタイプ、およびコア数によって決まるものであり、新型の CPU が発売されれば速くなるものであるが、ここでは本論文執筆時のものについて記す。

計算環境は Linux OS (CentOS release 5.5) を使用しており、CPU は Intel Xeon W5590 3.33GHz である。quad core CPU であり、2 個搭載しているの、トータルのコア数は 8 個である。コードは OpenMP を用いて並列化しており、8 個のコアを同時に使用して計算するシステムとなっている。コンパイラは、Intel Fortran Compiler Version 11.0 である。

この条件で自由空間を 100 mm トラッキングするのに、粒子数 20 万個で 18 時間 37 分かかっている。シミュレーションでは 100 mm 以上の距離を計算することが多く、この時間は実用的なものとは言えない。しかし、1 万個での計算時間は 3 分程度である。エネルギー 1 MeV の場合では、図 3.14(a) に示すようにこの粒子数でも十分な精度を確保することができる。このように、粒子数依存性は計算条件によっては無視できる場合もあるので、計算精度が十分に得られる実用的な粒子数を確認しておくことが重要である。

3.7.3 他のシミュレーションコードとの比較

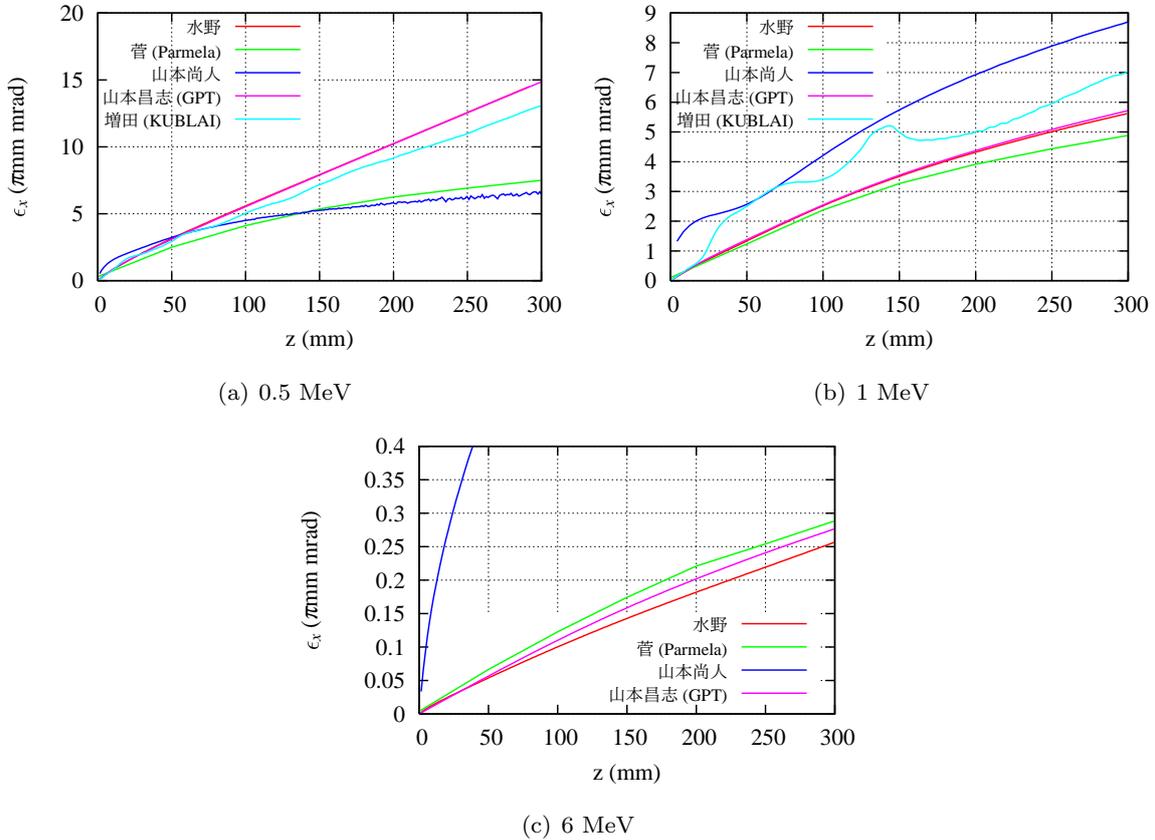


図 3.16 他のシミュレーションコードとの比較結果

図 3.16 に、 freespace でのトラッキングにおいて、エミッタンスの時間発展を他のコードと比較した結果を示す。エネルギーは、0.5 MeV、1 MeV、6 MeV の各場合について行った。 $z = 300$ mm まで計算している。比較は、菅氏 (大阪大学)、山本尚人氏 (名古屋大学)、山本昌志氏 ((株) アキュセラ、計算当時は秋田高専)、増田氏 (京都大学) に協力頂いて行った。

各コードで、粒子数、初期粒子分布生成法、空間電荷計算方法等が異なる。PALMELA(菅氏)では、粒子数は 5001 個であり、パンチ全幅を長手方向に等間隔な 5000 の平面に分け、各平面に 1 個の粒子を配置している。配置する時の径方向位置は乱数で決めている。なお、PARMELA では参照電子と呼ぶ特別な粒子が 1 個必要であり、このために粒子数が 5001 個となっている。空間電荷効果の計算は 2 次元で行っている。

山本尚人氏自作のコードは、空間電荷効果計算法については、本章で記述したシミュレーションコードとほぼ同様な取り扱いを行っている。粒子数は 5000 個であり、初期粒子分布は乱数によって決定している。

GPT(山本昌志氏)では、空間電荷効果計算法として、Point-To-Point、および、Particle-in-cell

が選択可能である。この計算では、3次元の Particle-in-cell を用いて計算している。粒子数は 10 万個であり、初期粒子分布は、Hammersley's Sequence を用いて決定している。

KUBLAI(増田氏自作)は、空間電荷効果の計算を Particle-in-cell で行っている。また、2次元シミュレーションコードである。粒子数は 8704 個であり、規則正しく並べている。すなわち、長手方向には等間隔、径方向には中心から離れるにしたがって間隔を大きくし、3次元での均一分布を実現している。

水野(筆者のコード)は、本章で記述したシミュレーションコードの結果であり、粒子数 20 万個、初期粒子分布生成法は Hammersley's Sequence を用いている。

山本尚人氏のコードについては、粒子数が少なく、乱数で計算していることから、精度が出ていないものと考えられる。KUBLAI は、メモリーサイズの制限もあって、広範囲の計算が苦手のようなのである。

本章で記述したシミュレーションコードによる結果は、GPT と良く一致している。特に、0.5 MeV と 1 MeV の場合、GPT の計算結果とほぼ完全に重なり、グラフでは判別しづらい。これに対し 6 MeV の計算では、両者はわずかであるが一致しなくなる。これは、エネルギーが高く粒子密度が大きいほど、エミッタンスの粒子数依存性が大きくなることと関連していると考えられる。両者とも完全にはエミッタンスが収斂しておらず、このため、エネルギーが高いほど、差異を生じる。空間電荷効果計算方法が異なる両者で良く一致していることから、両者共に精度が良いことを示していると考えられる。

PARMELA は、1 MeV と 6 MeV の場合は、本章で記述したシミュレーションコード、および GPT と比較的良く一致しているものの、0.5 MeV の場合は大きく様子が異なる。エネルギー拡がりの大きなビームの計算精度が悪いのかもしれない。

3.8 まとめ

本節では、ビームダイナミクスのシミュレーション的研究手法の一環として、SPring-8 の RF 電子銃用に開発したシミュレーションコードの概要について述べた。

まず、Point-To-Point 法を用いる本コードのアルゴリズムについて述べた。次に、空間電荷相互作用の計算方法について述べ、外部電磁場、とくに加速管電磁場の取り扱いについて述べた。また、ルンゲクッタ法によるトラッキング方法、および、カソード近傍での計算処理法について述べた。次いで、コードの計算精度について、エミッタンスの粒子数依存性と、Hammersley's Sequence を用いた精度向上について述べた。

最後に、 freespace でのエミッタンスの時間発展を、他のシミュレーションコードと比較検討した。GPT とほぼ同等の結果を得ることが確認できた。

本コードの特徴の一つは 3次元コードであることであるが、これについては、第 4 章で詳述する。

参考文献

- [1] A. Mizuno *et al.*, “Three-dimensional simulation code for SPring-8 RF gun system”, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A **528**, 387(2004).
- [2] J. Gonichon *et al.*, ”Quiet Start and Autotasking for PARMELA”, in *Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference, Washington, DC, USA*, (1993), p.2696.

第 4 章

シミュレーションコードによる RF 電子銃装置のビームダイナミクス解析

本章では、SPring-8 で開発研究を行った高輝度低エミッタンス電子銃システムを題材とし、そのビームダイナミクスを第 3 章で述べたシミュレーションコードを用いて解析する。

本シミュレーションコードの特徴は、完全な 3 次元計算が可能なことである。実際の装置では、構造的な非対称性が存在し、SPring-8 の RF 電子銃装置も例外ではない。これらの非対称性に起因するビームダイナミクスの非対称性を、シミュレーションを用いて示すことを本章の主題とする。

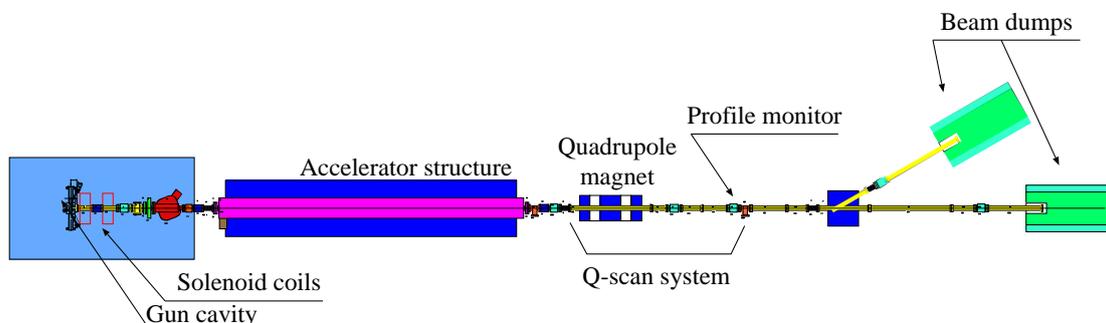


図 4.1 RF 電子銃装置の構成

4.1 装置の構成

SPring-8 における RF 電子銃装置を図 4.1 に示す。

本装置は、電子銃部、および後続の加速管等から構成される。電子銃部は、S-band(2856 MHz) シングルセル RF 空洞、エミッタンス補償用およびビーム集束用ソレノイドコイル 2 台よりなる。電子銃空洞出口のビームエネルギーを測定する為に偏向電磁石 1 台を設置しており、これによって 45 度偏向されたビームラインの終端にはファラディカップを設置している。ソレノイドコイル

下流は、3 m 長の S-band 進行波型加速管、エミッタンス測定用の四極電磁石 (Q トリプレット) とプロファイルモニタ、エネルギー測定用偏向電磁石、およびビームダンプから構成される。加速可能な電子ビームエネルギーは 30.0 MeV である。レーザーは、Ti-Sapphier の 3 倍高調波 (263 nm) を用いている。

4.1.1 電子銃空洞の構造

電子銃空洞 [1] は 1.1.5 節で述べたようにシングルセル空洞であり、図 4.2(a) のように RF ポートを 2 ポート持つことが特徴である。このため、外部 Q 値が低くフィリングタイムが短いことから高電界発生に有利である。また、電磁場の対称性を確保できる。空洞は無酸素銅で製作しており、ビーム引出し口の反対側の空洞壁を銅カソードとして使用する。レーザー入射用に、カソードへの法線に対して斜め 66° の角度で入射できるポートを用意している。この角度はビームダイナミクスの最適化を狙ったものではなく、空洞の構造的設計から決めたものである。なお、空洞下流に設置したミラーによりカソードに対しほぼ垂直にレーザーを入射することもできる。

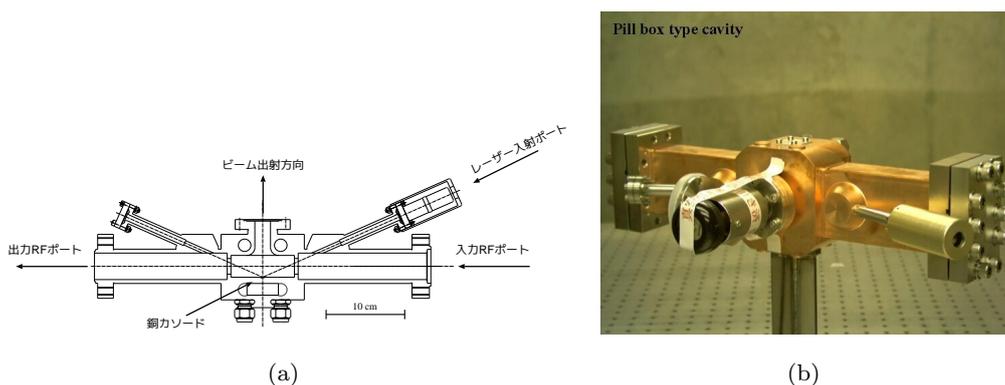


図 4.2 SPring-8 シングルセル RF 電子銃空洞

図 4.3 に、電子銃空洞の RF 波形を示す。電子銃空洞の RF 出力導波管に設置した方向性結合器 (結合度 70 dB) より取り出した RF 透過波をクリスタルダイオードで検波したものである。クライストロンへの入力 RF パルス幅は $0.7 \mu\text{s}$ であり、 $0.7 \mu\text{s}$ で 250 mV まで立ち上がる。この時点で、空洞内電磁場は未だ過渡の状態にあるが、電界強度としては十分であるので、立ち上がり開始から $0.7 \mu\text{s}$ の時点でレーザーを入射している。

図 4.4 に、空洞内電場の長手方向成分計算値 (以下、 z 方向) を示す。本電子銃装置では、RF ポートを有する平面が水平 (以下、 x 方向) になるように設置しているが、図 4.4(a) は、カソード面における、水平、垂直方向 (以下 y 方向) それぞれの E_z の径方向分布の違いを示したものである。カソード面でのレーザースポットサイズが $\phi 1\sim 2 \text{ mm}$ であることを考えると、十分に対称性が確保されている。

RF ポートの無い理想的なシングルセル空洞内部の z 方向電場 E_z は、径方向においては空洞壁部で 0 になる必要があるため、0 次ベッセル関数で表される。このため、空洞の径方向サイズは 0

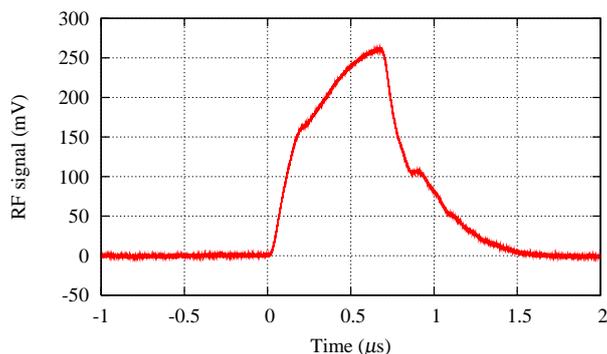
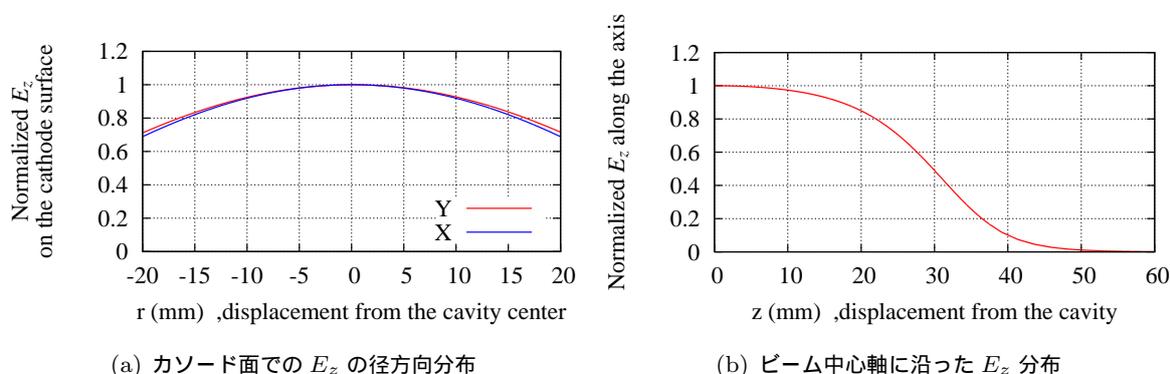


図 4.3 電子銃空洞の RF 透過波波形

(a) カソード面での E_z の径方向分布(b) ビーム中心軸に沿った E_z 分布図 4.4 電子銃空洞内の E_z 分布

次ベッセル関数の根として与えられる。これに対し、長手方向サイズには制限が無い。長手方向サイズは、カソードより生成された電子を効率良く加速し、かつ、逆転位相に入らないように選ぶ必要があり、2.1.3 節で示したように 28 mm としている。

表 4.1 に、電子銃空洞の緒元を示す。

4.2 電子銃空洞内のビームダイナミクス

RF 電子銃装置においては、運転時の調整パラメータは少ない。電子銃空洞出口までのビームダイナミクスは、空洞形状とカソードが与えられているとすれば、次の 5 つのパラメータで記述される。カソード面電界強度、初期 RF 位相、レーザースポット径とそのプロファイル、レーザパルス幅とプロファイル、および電荷量である。これらの内、カソード面電界強度は高電界ほど良いことが自明であり、技術的観点から決定される。本節では、電子銃空洞内のビームダイナミクスを、これらのパラメータと関連付けながら述べる。

4.2.1 電子ビームエネルギーの初期 RF 位相依存性

2.1.3 節の図 2.2 に、理想的な pill-box タイプのシングルセル空洞において可能な最大エネル

表 4.1 電子銃空洞緒元

周波数	2856	MHz
セル数	1	
セル長	28	mm
空洞出口ボア径	20	mm
内部 Q 値	13000	
output port による外部 Q 値	3684	
input port による外部 Q 値	2786	
負荷 Q 値	1414	
Coupling	1.02	
Filling time	0.31	μs
Shunt impedance (for $\beta = 1$)	1.16	$\text{M}\Omega$

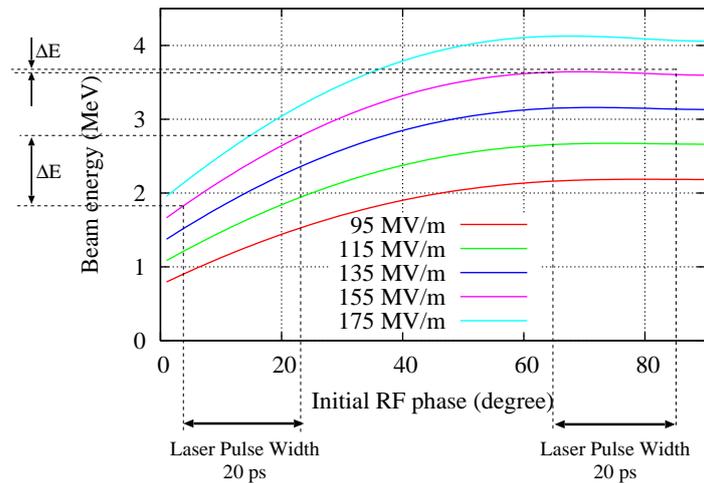


図 4.5 電子銃空洞出口のビームエネルギーの RF 初期位相依存性

ギーゲインを、初期 RF 位相の関数として解析的に示した。図 2.2 では空洞長を可変としていたが、実際の空洞長は固定である。空洞長固定の場合の空洞のエネルギーゲインも、図 2.2 と同じような特性を示す。

図 4.5 に、シミュレーションコードで計算した電子銃空洞出口でのビームエネルギーの初期 RF 位相依存性を示す。このシミュレーションは電子 1 個で計算したものである。したがって、レーザーのカソードに対する入射角には依存しない。初期位相 ϕ_0 の定義は 2.1.3 節と同じであり、空洞内の電場を E_z としたときに

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - \phi_0) \quad (4.1)$$

である。

本 RF 電子銃においては、1.1.5 節で述べたようにカソード面最大電界強度は 190 MV/m を達成

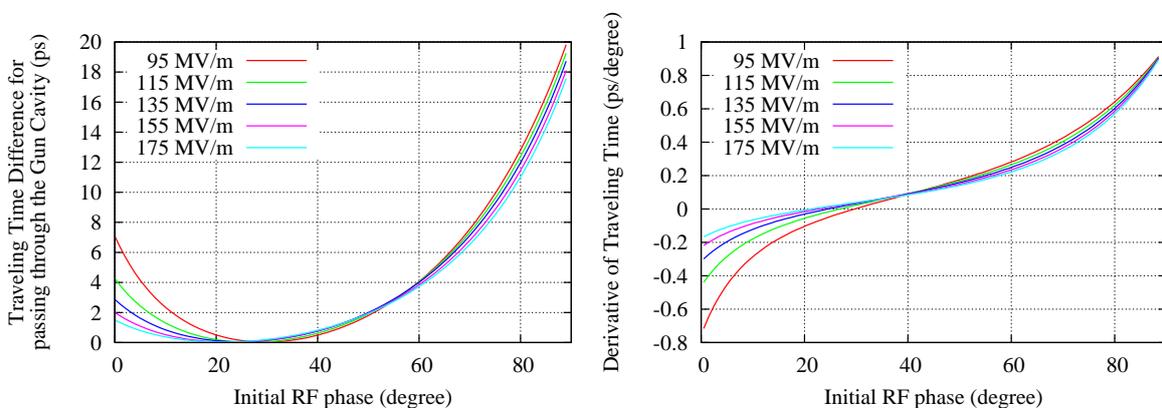
しているが、安定的に RF を入射できる値として 157 MV/m で通常の運転を行っている。図 4.5 では 157 MV/m をカバーする範囲でカソード面最大電界強度を選んでいる。

エネルギーは初期位相が 90° に近づく程高くなる。 90° とは、電子がカソードからエミッションされる時点での E_z が 0 となる位相である。このような位相よりも、0 度付近の位相、すなわち、エミッション時の E_z が最大となる位相で電子を引き出した方が良いようにも思えるが、この場合は電子の到達エネルギーが低くなる。これは、0 度付近で電子を引き出した場合、空洞内電場の向きが反転するまでの時間が短い為に、電子が逆位相に載って減速されてしまうからである。

実際の RF 電子銃では入射レーザーは時間幅を持っているので、入射位相によって電子ビームのエネルギー幅 ΔE が変化する。RF 電子銃においては、電子銃空洞出口でソレノイドコイル等の集束系を用いる必要があるが、 ΔE が大きい場合はエネルギーによって焦点距離に差が出来てしまうため、4.4.3 節で述べる集束系によるエミッタンス補償が適切に行えない。したがって、 ΔE の小さなビームを実現する必要がある。図 4.5 より分かるように、レーザーパルス幅が例えば 20 ps の場合、初期位相が 0 度に近い位置でエミッションさせると ΔE が大きくなる。バンチ先頭の初期位相が 90° 付近になるように設定して ΔE を小さくする必要がある。

4.2.2 電子銃空洞によるバンチ幅の圧縮

電子がエミッションされる時点でのカソード表面電界強度は初期位相によって変化するので、電子のカソード近傍での速度も初期位相によって変化する。初期位相 90° 付近では速度が遅くなり、初期位相が 0 度に近づくにしたがって速度は速くなる。このため、電子が電子銃空洞通過に要する時間は初期位相に依存する。図 4.6(a) に、シミュレーションコードで電子 1 個をトラッキングすることにより計算した、電子銃空洞通過に要する時間の初期位相依存性を示す。図 4.4(b) を参照し、電子銃空洞の z 方向電場がほぼ 0 となる、カソードから 60 mm の位置まで到達するのに要する時間を計算したものである。位相による時間差を評価するのが目的であるので、縦軸は、通過に要する時間が最も短い場合を 0 として規格化している。



(a) 電子銃空洞通過所要時間の初期位相依存性

(b) 空洞通過所要時間の位相に対する微分係数

図 4.6 初期 RF 位相に対する、電子がカソードより電子銃空洞出口に到達するまでに要する時間

初期位相が 90 度に近づくほど、エミッション直後の電子の速度が遅いので、空洞通過に時間がかかる。初期位相 0 度付近で所要時間が少し長くなっているのは、 z 方向電場の向きが反転した後に電子が非相対論領域まで減速されるためである。図 4.6(a) のような特性のため、初期位相約 30 度以上でエミッションした場合、バンチ先頭の電子よりもバンチ後方の電子の方が速く進むのでバンチ圧縮が起こる。図 4.6(b) に、図 4.6(a) を初期位相で微分したものを示す。初期位相 90 度付近では、ほぼ 1 ps/degree となる。周波数 2856 MHz では位相差 1 度がほぼ 1 ps に相当するため、この場合はバンチ幅 0 まで圧縮される。ただし、空間電荷効果を見逃した議論である。初期位相が減少するにつれてバンチ圧縮効果は緩和され、図 4.6(b) より分かるように、初期位相が約 30 度以下の領域では、バンチ幅は伸長する。

電子銃空洞を通過した後もバンチ幅は変化するので、それについてもここで触れておく。図 4.7 に、SPring-8 の RF 電子銃装置において加速管の入口であるカソードから 1.4 m の位置まで、電子ビームが到達するのに要する時間の初期 RF 位相依存性を示す。図 4.6(a) と同じく、縦軸は最も所要時間の短い場合を 0 として規格化している。初期位相が 90 度付近においては、位相に対する所要時間の変化が図 4.6(a) とほぼ変わらず、電子銃空洞出口のバンチ幅は圧縮されたまま加速管出口まで形状を維持できる。しかし、60 度以下ではバンチ幅は急激に伸長する。これは、図 4.5 より分かるように、この領域では ΔE が大きく、また、エネルギーが十分に相対論的領域に達していないため、バンチ先頭と後方に速度差が生まれるためである。この結果、バンチが伸長したまま加速管に侵入すると、 ΔE は更に大きくなってしまい、その後のビームトランスポートが困難になる。

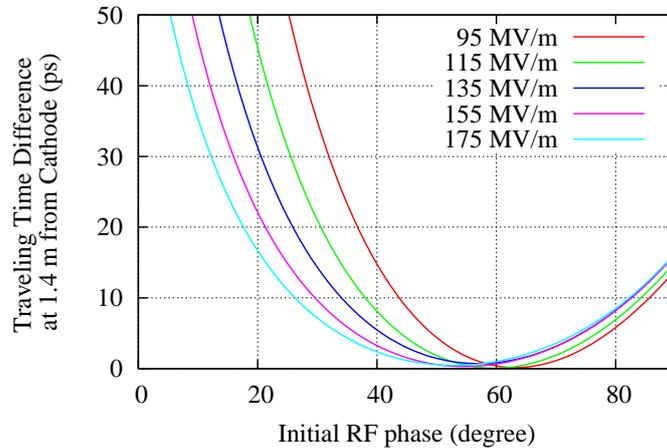


図 4.7 初期 RF 位相に対する、電子がカソードより加速管入口に到達するまでに要する時間

これらの結果からも、4.2.1 節で述べたように初期 RF 位相を ΔE が小さくなる値に設定する必要がある。

4.2.3 空洞内でのエミッタンスの振舞い

本節からの議論は、電子1個の計算ではなく、電子バンチを扱う。特に断らない限り、空間電荷効果、および、第3章で扱ったカソード近傍における鏡像効果などの取扱いを含む。なお、初期レーザービームプロファイルは、時間方向、空間方向共に均一なフラットトップ形状とし、初期RF位相は、バンチ先頭の電子がエミッションされる時点での位相で定義する。マクロ粒子数は、5000個である。粒子数のエミッタンス計算精度への影響については、次節で述べる。

図4.8(a)に、電子銃空洞内でのノーマライズド x エミッタンスの時間発展の様子を示す。初期レーザースポット径： $\phi 1.4$ mm、初期レーザーパルス幅：20.0 ps、カソード表面最大電界強度157 MV/m、初期RF位相85度、電荷量1.0 nC/Bunchであり、電子銃空洞の電磁場の影響がなくなる、カソードから60 mmの位置まで計算している。図4.8(a)に示すように、エミッタンスは、一度減少し、セル長28 mmの電子銃空洞出口あたりで極小となり、以後増加に転じている。

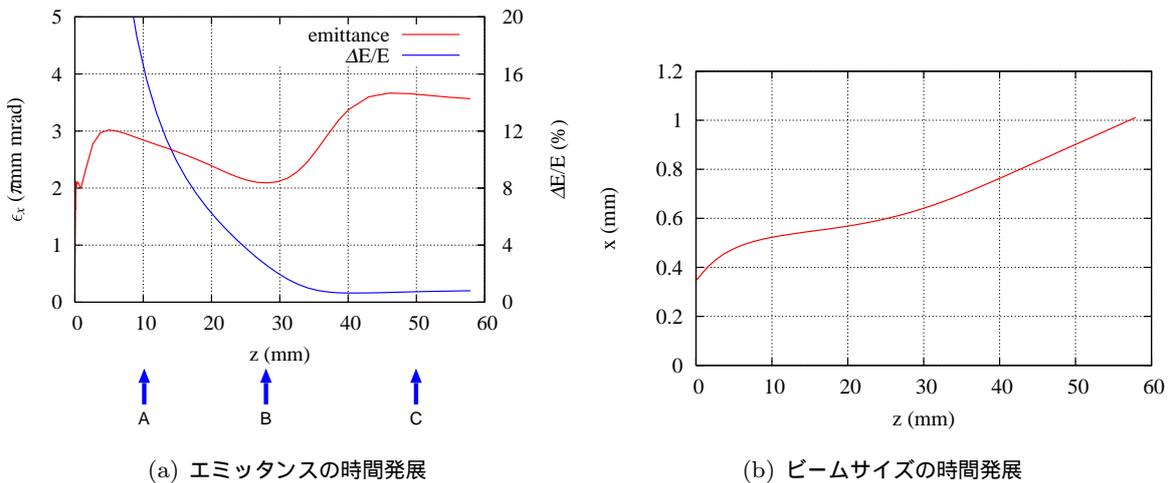


図 4.8 電子銃空洞内でのエミッタンスの振舞

始め、エミッタンスが減少するのは、図4.8(a)に示すように $\Delta E/E$ が変化する為である。 $z < 28$ mmの電子銃空洞内部では、バンチ先頭が後方よりもエネルギーが高い。この為に生ずる $\Delta E/E$ は、空洞出口に近づくにつれて分母が増加し分子が減少するために小さくなる。このとき、図4.8(a)のA、B、C点それぞれの位置において、バンチを長手方向に5つに分け、先頭、中間、後方の各スライス部分を位相空間上にプロットしたのが図4.9である。

バンチの径方向ビームサイズは、図4.8(b)に示すようにカソード直後から広がっているが、これは空間電荷効果に依るものである。したがって、エネルギーの低い部分の方がより広がる傾向にある。A点では、 $\Delta E/E$ が大きいために、後方スライス部分(エネルギー低)は先頭スライス部分(エネルギー高)よりも大きく広がる。その結果、図4.9(a)のように、後方スライス部分の位相空間上の傾きが、先頭スライス部分の傾きより大きくなる。図4.9に示すような各々のスライス部分が構成するエミッタンスをスライスエミッタンスという。A点では、スライス部分の回転角が相互

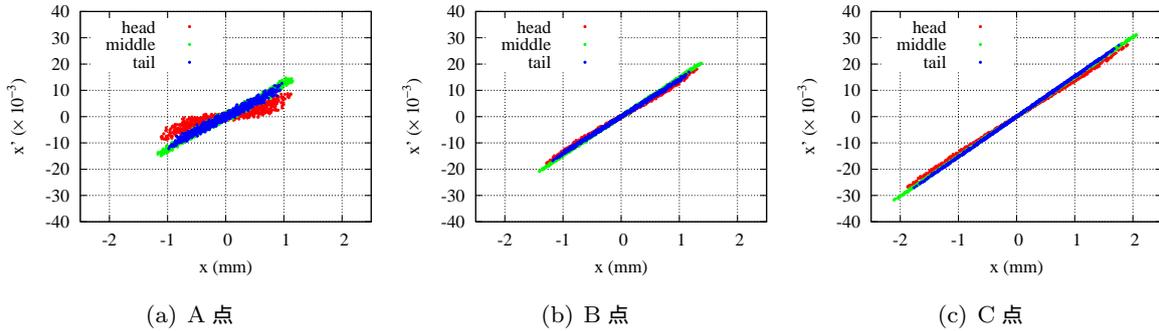


図 4.9 電子銃空洞内でのスライスエミッタンスの振舞

異なる状態で重なり合うことにより、プロジェクションエミッタンス (トータルのエミッタンス) が大きくなる。これに対し、空洞出口である B 点では先頭と後方のエネルギー差が小さくなり、スライス部分相互の傾きがほぼ一致するため、図 4.9(b) のようにプロジェクションエミッタンスが小さくなる。

C 点では、図 4.9(c) に示すように各スライス部分の傾きに再び差が生じてくるため、図 4.8(a) のようにエミッタンスは再び増加する。これは、図 4.8(b) に示すように、C 点でも径方向サイズが増加しているためであるが、この増加が空間電荷効果のみの寄与であれば、この部分は $\Delta E/E$ が小さいために、各スライスエミッタンスの傾きに差はほとんど生じないはずである。

この場合の傾きの差は、電子銃空洞出口に於ける空洞の θ 方向磁場によるものである。空洞出口では、 B_θ によって必ずビームが発散されるが、 B_θ は時間とともに変化するため、各スライス部への寄与が異なってくる。

このように、電子銃空洞内部のエミッタンスの増減は、スライスエミッタンス相互の位相空間での傾きの違いによる部分が大きいいため、ビームサイズが大きくバンチ幅が長いほど増減が顕著である。

4.2.4 エミッタンスの粒子数依存性

前節のシミュレーションは、Hammersley's Sequence を用い、粒子数 5000 個で行った。図 4.10 に、図 4.8(a) の B 点 (エミッタンス極小点) における、エミッタンスの粒子数依存性を示す。Hammersley's Sequence を用い、粒子数が 20 万個の場合の値でエミッタンスを規格化して示している。

3.7.2 節で示した様に、Hammersley's Sequence を用いると、乱数で粒子の初期分布を与えるよりも早く、粒子数が 10 万個程度でエミッタンスが収斂している。ただし、10 万個でシミュレーションを行った場合の計算時間は、後に示す電子銃空洞下流のソレノイドコイルおよび加速管までを含めた計算では、3.7.2 節で示した環境を用いて 4 日半である。本章の目的は真のエミッタンスを求めることではないので、これ以後のシミュレーションは粒子数 5000 個で行う。なお、エミッタンスの粒子数依存性への対処法については、第 5 章で述べる。

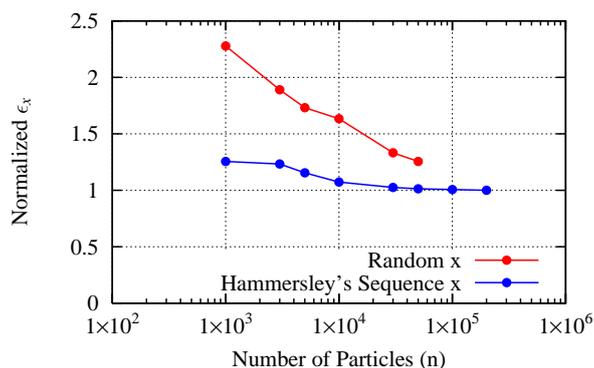


図 4.10 エミッタンスの粒子数依存性

4.2.5 初期 RF 位相とレーザーパルス幅

本節では、電子銃空洞内のビームダイナミクスを決定する初期パラメータのうち、初期 RF 位相とレーザーパルス幅について述べる。

図 4.11 に、ノーマライズド x エミッタンス、パンチ幅、および $\Delta E/E$ の、初期 RF 位相とレーザーパルス幅に対する依存性を示す。エミッタンスは、図 4.8(a) の B 点での値、すなわち極小値である。また、パンチ幅と $\Delta E/E$ は電子銃空洞出口における $\pm 1\sigma$ の値である。カソード面最大電界強度は 157 MV/m、レーザースポットサイズは $\phi 1.4$ mm、電荷量は 1.0 nC/bunch である。

図 4.11(a) より、エミッタンスは初期 RF 位相が 60 度付近が最も良い。しかし、図 4.11(c) によれば、4.2.1 節で述べたように、初期 RF 位相が 90 度に近い場所で $\Delta E/E$ が最小になる。 $\Delta E/E$ が大きいビームは、電子銃空洞下流での輸送が困難となるので、4.2.3 節では初期 RF 位相を 85 度を選んでいる。

図 4.11(b) より、電子銃空洞出口では、初期 RF 位相 85 度において、レーザーパルス幅が長いほどパンチ幅が短くなっている。これは、電子銃空洞のパンチ圧縮効果によるものであり、レーザーパルス幅が長いほど、カソード直後での空間電荷効果によるパンチ幅の伸張が少なくなるためである。グラフで示した範囲では、レーザーパルス幅が 30 ps の時が、エミッタンス、パンチ幅ともに最も小さくなるが、 $\Delta E/E$ は、レーザーパルス幅が 20 ps より大きくなると増加する。したがって、4.2.3 節ではレーザーパルス幅を 20 ps に選んだ。

このようなパラメータの最適化は一例であり、電荷量やレーザースポットサイズによって、すなわち初期の電荷密度によって異なるものである。

4.2.6 レーザースポットサイズと空間電荷制限領域

3.5 節の図 3.8 で述べたように、カソードからの引出し電荷量は、先にエミッションされた電子によって制限されることがある。これを空間電荷制限領域でのエミッションという。4.2.3 節では、レーザーパルス幅が 20 ps の時にエミッションが制限されない値として、レーザースポットサイズ

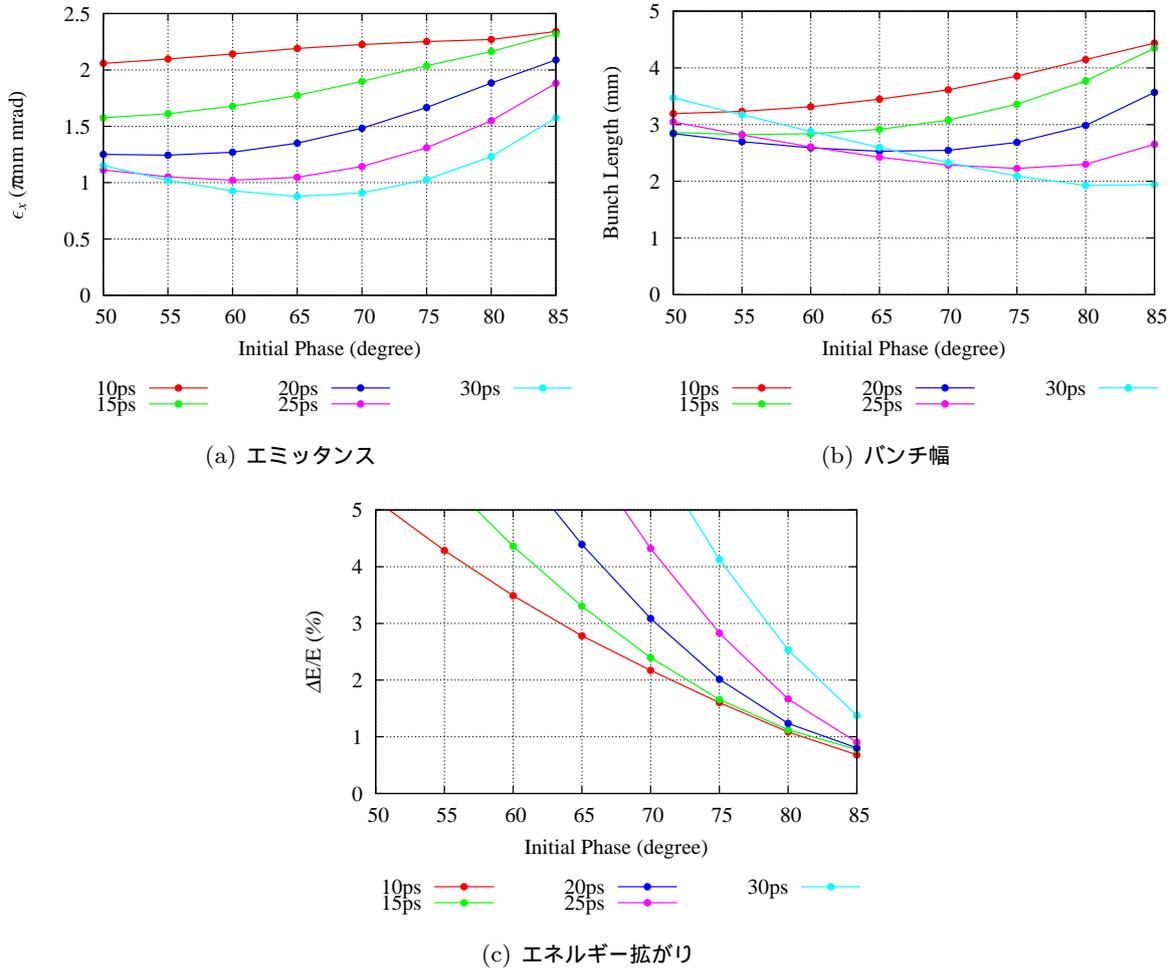


図 4.11 初期 RF 位相とレーザーパルス幅のビームダイナミクスに対する影響

を $\phi 1.4$ mm に選んだ。シミュレーションにおいては、レーザースポットサイズをこれよりも絞ると、エミッションが制限される。しかし、実際の測定においては、 $\phi 1.4$ mm より絞ってもエミッションが制限されないことが観測されている。図 4.12 に、そのような例におけるシミュレーションと実測値を、比較して示す。レーザースポットサイズは $\phi 0.8$ mm、レーザーパルス幅は 5 ps、カソード面最大電界強度は 150 MV/m である。

実験では、ビーム電流を図 4.1 に示す最下流のビームダンプ出力信号により算出した。100 ショットを計測し、その平均をプロットしている。エラーバーの範囲は、100 ショットの 1 シグマとした。レーザーパワーは、レーザープロファイルモニターで測定したものであり、同様に測定中の 100 ショットを平均してプロットしている。エラーバーも同様である。シミュレーションにおいては、初期 RF 位相が 85 度の場合には、0.2 nC 以上で、70 度の方は 0.5 nC 以上でエミッションが制限されている。初期位相が 70 度の方が制限が緩和されるのは、エミッション時のカソード電界強度が大きくなるからである。これに対し、実験では、全くエミッションが制限されていない。

シミュレーションでは、初期電荷密度分布は、長手方向および径方向に均一である。実験でもそ

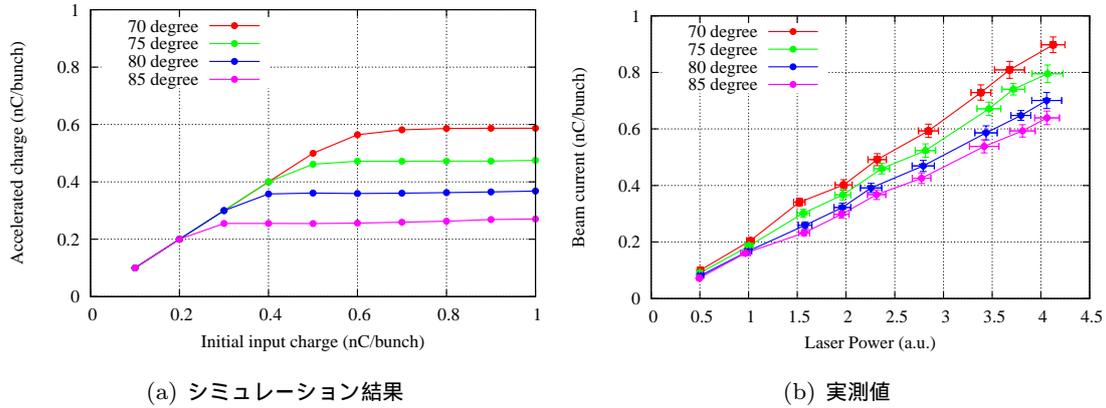


図 4.12 空間電荷効果によるエミッションの制限

のように調整しているが、完全には均一にならない。しかしながら、均一でなく局部的に密度が高い部分がある方が、エミッションが制限される可能性が高い。したがって、実験における初期電荷密度の不均一性は、シミュレーションと測定データの不一致の説明にはならない。

シミュレーションでは、カソードは完全導体として鏡像効果を計算しているが、実際には、銅カソード内の電子の移動応答時間は、レーザー 1 波長分の周期、 $263 \times 10^{-9}/c$ よりも遅いことが分かっている。このため、完全導体としてシミュレーションすることが間違いであるとも言える。

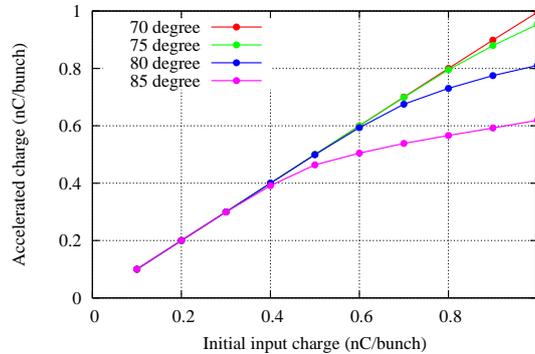


図 4.13 カソードでの鏡像効果を考慮せずにシミュレーションした空間電荷効果によるエミッションの制限

図 4.13 に、カソードでの鏡像効果を計算せずにシミュレーションした結果を示した。エミッションの制限は大きく緩和されているが、図 4.12(b) の実測値は全く制限されておらず、両者の結果は一致しない。

シミュレーションでのエミッション過程では、特にバンチ先頭部分においては粒子数が少なくなるために、エミッションしようとしているマクロ粒子が先にエミッションしたマクロ粒子から受ける力は、カソード面上で不均一になっていると考えられる。しかしながら、均一電荷分布で電子がエミッションされる場合は、力もほぼ均一になっている必要がある。したがって、エミッション時の計算精度に問題のある可能性がある。本件については再度第 5 章で議論することとし、これ以後の計算は、エミッションが制限されない領域で行うものとする。

4.3 電子銃空洞内でのビームダイナミクスの非対称性

本節では、電子銃空洞内のビームダイナミクスの非対称性について記す。

4.3.1 RF 電磁場非対称性のビームダイナミクスに及ぼす影響

電子銃空洞は、非対称性が小さくなるように、2つのRFポートを有する構造としているが、図4.4(a)に示すように、電子銃空洞内のRF電磁場には若干の非対称性がある。図4.14に、この非対称性に起因するビームダイナミクスの非対称性を示す。シミュレーションの初期パラメータは、図4.8と同一である。若干の非対称性はあるものの、4.6節で述べる加速管部での非対称性に比べれば十分小さいことが分かる。

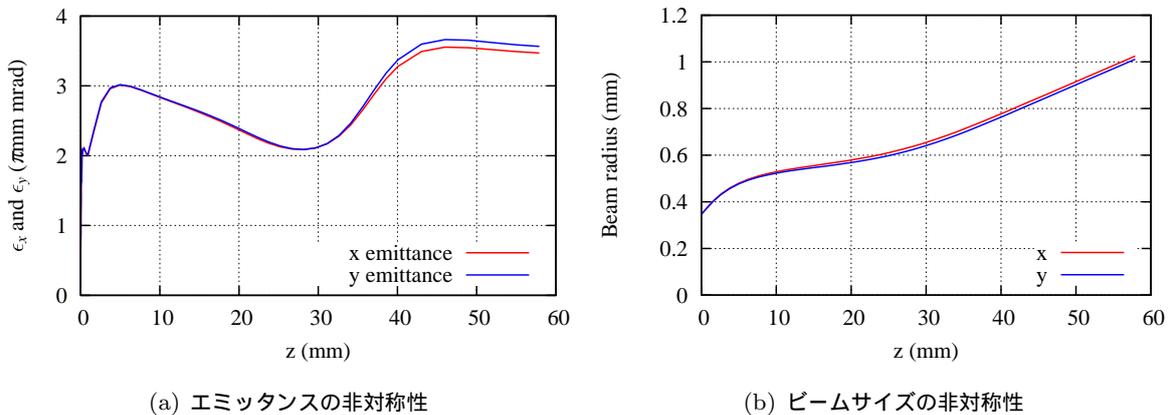


図 4.14 電子銃空洞内 RF 電磁場の非対称性によるビームダイナミクスの非対称性

4.3.2 レーザー入射角のビームダイナミクスに及ぼす影響

4.1.1 節に示したように、電子銃空洞のレーザー入射用ポートはカソードへの法線に対して斜め 66 度となっている。このため、エミッタンスに非対称性が現れることが予想される。このような入射角度でシミュレーションを行うには、図 4.15(a) のようにカソード内に初期電子を配置し、電子がカソード面に到達するまでは斜め 66 度方向に電子が移動するようにしてやれば良い。

図 4.15(b) に、エミッタンス非対称性のレーザー入射角依存性を示す。シミュレーションの初期パラメータは、図 4.8 と同一である。エミッタンスは、電子銃空洞内の極小値をプロットしている。レーザーは、図 4.15(a) に示すように z - x 平面内で斜め入射としており、それに対応して x エミッタンスが y エミッタンスに比べて大きくなっている。非対称性は、入射角 66 度では大変大きいですが、垂直入射 (入射角 0 度) に近づくに従って緩和していく。

非対称となる原因は、斜め入射の為にレーザー光の波面がカソードを斜めに横切ること、すなわち、同一レーザー波面上の光子が同時にはカソード面に到達しないこと、および、カソード面での

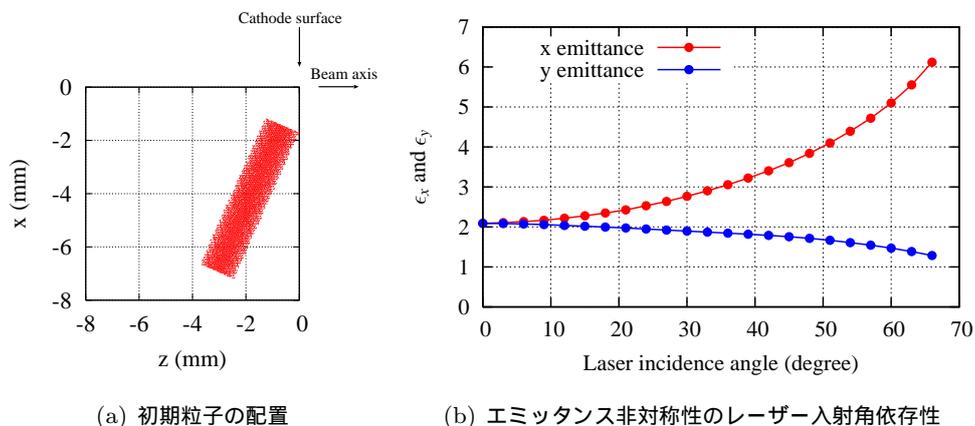


図 4.15 レーザーの斜め入射がエミッタンスの非対称性に及ぼす影響

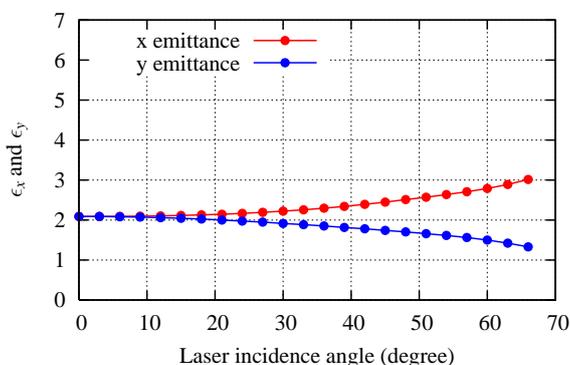


図 4.16 スポット形状が楕円のレーザーを垂直入射した場合のエミッタンス非対称性。横軸の入射角に対応する楕円スポットを設定している。

レーザースポット形状が楕円になることの2つがある。図 4.16 に、斜め入射の角度に相当する楕円形レーザーを垂直入射した場合のエミッタンス非対称性を示す。非対称性は図 4.15(b) に比べて半分以下となっており、非対称性の主な原因は、レーザー波面がカソードに対して斜めとなる為であることが分かる。

本電子銃空洞を用いた通常の実験では、斜め入射ポートは使用しておらず、図 4.17 の様に、ソレノイドコイル下流に位置するレーザー入射用ミラーを用いて入射を行っている。入射角は 3.6 度となるが、図 4.15(b) より、この入射角でのエミッタンスの非対称性はほぼ無視できる。

4.4 ソレノイドコイル部のビームダイナミクス

図 4.18 に、レーザーパルス幅 20 ps、レーザースポットサイズ $\phi 1.4$ mm の場合の、電子銃空洞出口後の径方向ビームサイズの時間発展を示す。空洞より下流側はフリースペースである。電荷量は、1.0 nC/Bunch とし、空間電荷効果を計算しない場合と比較した。

図 4.18 のように、電子銃空洞後では空間電荷反発力を計算しない場合でもビームサイズが径方

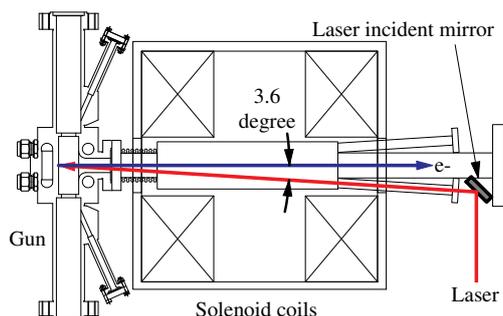


図 4.17 ソレノイドコイル下流側からのレーザー入射方法

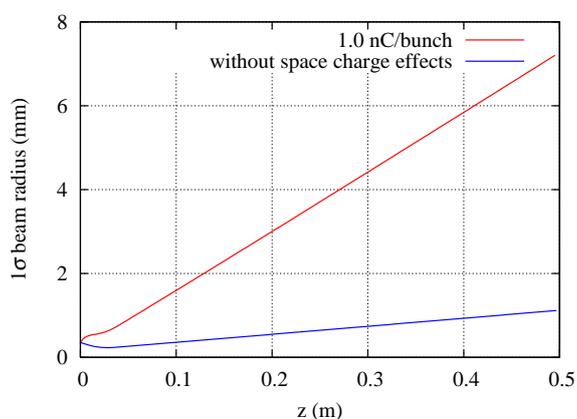


図 4.18 電子銃空洞下流がフリースペースである場合の、径方向ビームサイズの時間発展

向に拡がる。これは、空洞出口における RF による B_θ の影響である。空間電荷反発力を考慮すると更に大きく拡がるので、電子銃空洞下流ではビーム集束系が必須となる。

4.4.1 集束系によるエミッタンス補償の原理

電子銃空洞下流でビーム径が増大するとき、一般的に r 方向に働く発散力には r に対し線形な成分と非線形な成分が存在し、それらがエミッタンスに影響を与える。スライスエミッタンスは、非線形成分では多くの場合増加するが、線形成分では変化せず、一定である。しかしながら、4.2.3 節で述べたように、空洞出口の B_θ による発散力がスライスごとに異なる事や、長手方向電荷密度不均一性やエネルギーの違いによる発散効果の違い等により、各スライス部分の位相空間プロットは相互に回転角がずれた状態で重なり合い、結果としてプロジェクションエミッタンスを増加させる。ただし、このような線形成分によるプロジェクションエミッタンスの増加は、1.1.4 節でも述べたように集束系によって補償出来ることが B.E. Carlsten によって示されている (第 1 章 [14])。ここでは、その基本原理を紹介する。

電子銃空洞を出た後、集束系に入る前のバンチ内の座標を図 4.19 のように定義する。進行方向を ξ 、径方向を ρ で表し、バンチ自身は ξ に平行な z 方向に進むものとし、初期径方向ビームサイ

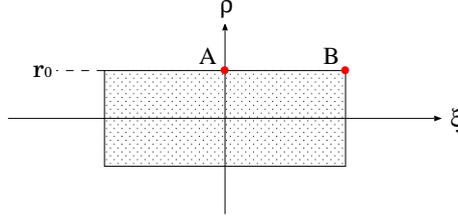


図 4.19 集束系に入る前の電子バンチ

ズを $\rho = r_0$ とする。電子に対する空間電荷等による径方向発散力は、 z に依らず ξ と ρ にのみ依るものとし、図 4.19 の点 A および点 B のような、径方向エッジに位置する電子に対する発散力を $m_0\lambda(r_0, \xi)$ とする。ただし、 m_0 に適当な比例定数を含ませている。バンチは発散力を受けながら、線形レンズの位置まで距離 z_1 だけ freespace を進むとすると、レンズ位置でのビームサイズ r および r' は

$$\begin{aligned} r(\xi) &= r_0 + \lambda(r_0, \xi) z_1^2 / 2 \\ r'(\xi) &= \lambda(r_0, \xi) z_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。レンズ位置を $z = 0$ とし、レンズの焦点距離を $1/\alpha_L$ とすれば、レンズ以後の任意の位置 z において、

$$\begin{aligned} r(\xi) &= r_0 + \lambda(\xi) (z_1 + z)^2 / 2 - \alpha_L [r_0 z + \lambda(\xi) z_1^2 z / 2] \\ r'(\xi) &= \lambda(\xi) (z_1 + z) - \alpha_L [r_0 + \lambda(\xi) z_1^2 / 2] \end{aligned} \quad (4.3)$$

である。スライス位相空間での傾きは $r'(\xi)/r(\xi)$ で表され、これは $\lambda(\xi)$ の関数となる。図 4.19 の A 点と B 点では、作用する空間電荷反発力が $\lambda(A)$ と $\lambda(B)$ で異なるので、スライスエミッタンスの傾きも異なる。しかし、

$$\alpha_L = 2 \frac{z_1 + z}{z^2} \quad (4.4)$$

を満たす位置 z においては、

$$\begin{aligned} r(\xi) &= \frac{z + 2z_1}{2z} (\lambda(\xi) (z^2 - z_1^2) - 2r_0) \\ r'(\xi) &= \frac{z + z_1}{z^2} (\lambda(\xi) (z^2 - z_1^2) - 2r_0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

となり、

$$\frac{r'(\xi)}{r(\xi)} = \frac{2(z + z_1)}{z(z + 2z_1)} \quad (4.6)$$

となって、 $r'(\xi)/r(\xi)$ は空間電荷発散力 $m_0\lambda$ に無関係となる。したがって、この位置 z において、パンチ内の各スライスエミッタンスの傾きは全て一致し、エミッタンスは極小値を示す。

集束系としては四極磁場やソレノイド磁場が考えられるが、四極磁場を用いると、通常は xy 両方向の径方向ビームサイズの時間発展を同一にすることは難しく、その結果、式 (4.4) を満たす z が x 方向と y 方向で異なってしまうため、 x エミッタンスと y エミッタンスに差が生じる可能性がある。このため、ソレノイド磁場を集束系として用いることが多い。

4.4.2 ソレノイドコイルの構造

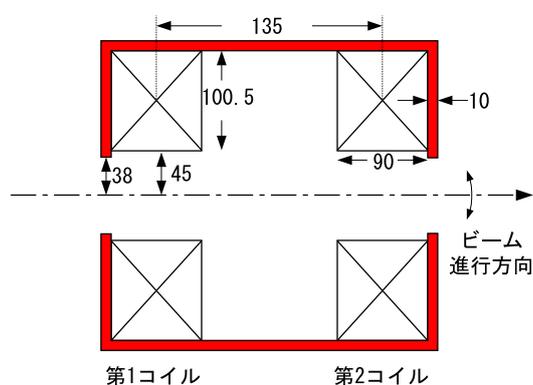


図 4.20 ソレノイドコイル

本 RF 電子銃装置で使用しているソレノイドコイルを図 4.20 に示す。調整の自由度を確保するため、2 台のコイルを 135 mm 離して並べ、カソード面に磁場が洩れるのを防ぐために、全体を 10 mm 厚のヨークで覆っている。1 つのコイルは 670 ターンであり、それぞれ独立に 50 A 程度まで電流を流すことができる。図 4.20 に矢印で示しているように、アライメント調整の為、中心軸に対し、水平、垂直両方向に ± 1 度程度、傾きをリモートで調整することができる。

4.4.3 ソレノイド集束系によるエミッタンス補償の様子

4.4.1 節で述べたエミッタンス補償原理は、 r に対して線形であり、かつ、集束系全体に渡って一定の発散力 $m_0\lambda$ が働く場合に成り立つものである。実際の発散力には非線形成分もあり、また、4.2.3 節で述べたような空洞の B_θ による発散力等は集束系全体に渡るものではなく、局所的に働くものである。したがって、エミッタンスが補償される位置は、正確にはシミュレーションによって求める必要がある。

図 4.21(a) に、レーザーパルス幅 20 ps、スポットサイズ $\phi 1.4$ mm、電荷量 1.0 nC/Bunch の場合の、ソレノイド集束系部分での典型的なエミッタンスの時間発展を示す。図 4.21(b) はその時のソレノイド磁場分布である。第 1 コイルに 28 A、第 2 コイルに 24 A を流している。ソレノイドコイルの位置は、実際の RF 電子銃装置において構造的に可能なかぎりカソードに近付けてお

り、カソード表面から第 1 コイル中心までの距離は 0.16 m である。

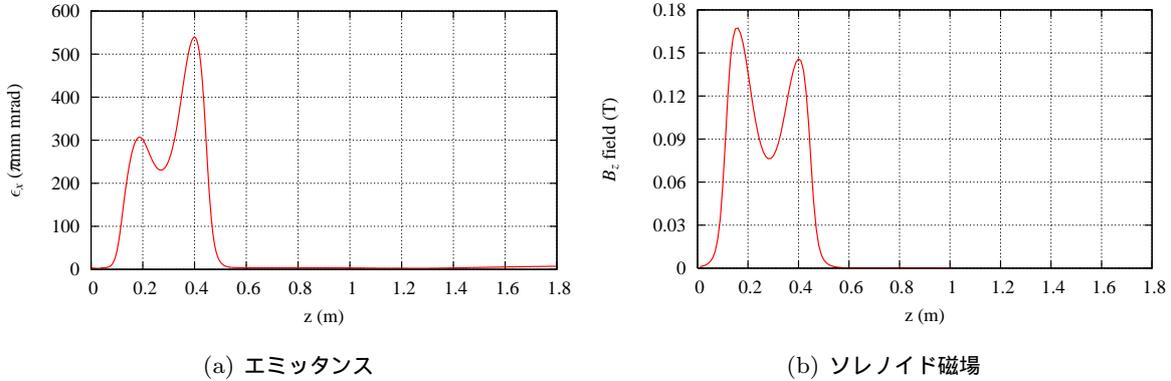


図 4.21 ソレノイド集束系部分でのエミッタンスの時間発展

エミッタンスはカソードから 0.6 m の位置まで非常に大きく変動している。これは、ソレノイド磁場が存在する部分で、 x 方向と y 方向の運動が相互にカップリングしていることから、一次元エミッタンスが保存量とならないことによる。

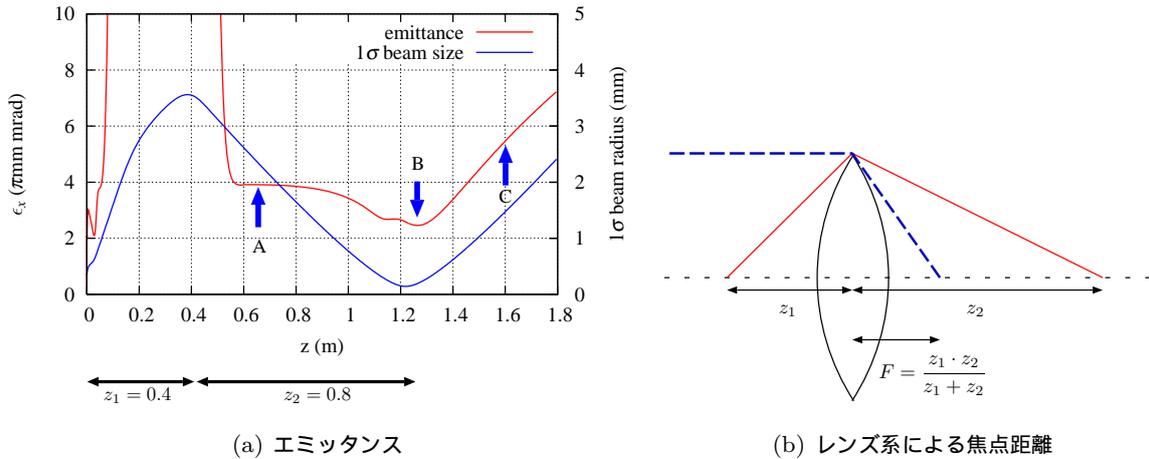


図 4.22 ソレノイド集束系下流のエミッタンスとビームサイズの時間発展

図 4.22(a) に、図 4.21(a) の縦軸を拡大して示す。同時に、ビームサイズの時間発展を示す。

エミッタンスは、 $z = 0.6$ m 以後では xy カップリングが無くなるために、 x エミッタンスとして物理的に意味のある値を示すようになる。エミッタンスは徐々に減少して B 点で極小値をとり、その後上昇に転じる。ビームサイズも B 点付近で極小となる。図 4.22(b) のように、ソレノイドコイルの上流側の焦点距離を z_1 、下流側の焦点距離を z_2 とし、平行ビームがソレノイドコイルに入射した場合の焦点距離を $F = z_1 \cdot z_2 / (z_1 + z_2)$ とする。図 4.22(a) からソレノイドコイルによる各パラメータが $z_1 = 0.4$ 、 $z_2 = 0.8$ 、 $1/F = 3.75 = \alpha_L$ であるとすると、エミッタンス極小点 z

は式 (4.4) より

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 + 2z_1\alpha_L}}{\alpha_L} = 0.8 \quad (4.7)$$

式 (4.4) での z の定義はレンズ位置からの距離であったから、エミッタンスはカソードから 1.2 m の位置で極小となるはずであり、図 4.22(a) とほぼ一致する。

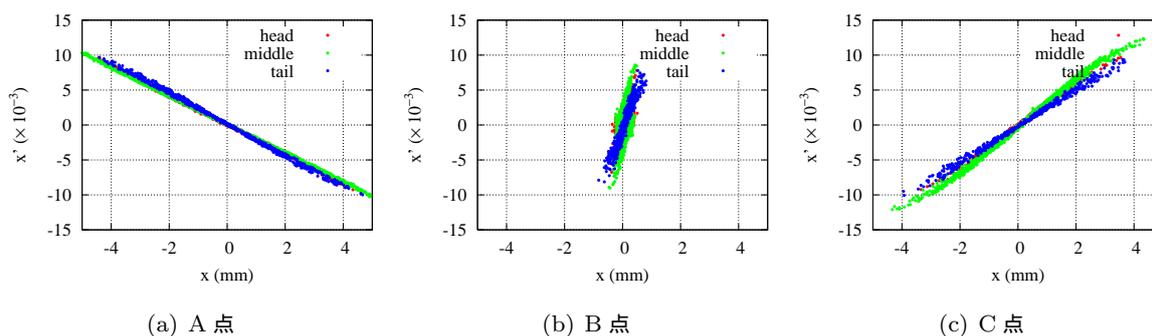


図 4.23 ソレノイド集束系下流でのスライスエミッタンスの様子

図 4.22(a) の A、B、C 各点における位相空間でのスライスエミッタンスをそれぞれプロットして図 4.23 に示す。B 点において、スライスエミッタンスそのものが幅をもっているが、各スライスは重なりあっている。これに対し、A 点、および C 点では各スライスの傾きが異なっており、エミッタンス補償原理どおりのメカニズムによって B 点でエミッタンスが極小となっていることがわかる。

図 4.22(a) の例ではエミッタンス極小点とビームサイズの極小点はほぼ一致している。この 2 点一致する条件は、

$$\alpha_L = 2 \frac{z_1 + z}{z^2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} \quad (4.8)$$

を $z = z_2$ の条件で解くことにより、 $z_2 = 2z_1$ となる。図 4.22(a) の例ではこの条件を満たしている。

4.5 加速管部のビームダイナミクス

ソレノイド集束系によってビームの拡がりを抑え、かつ、エミッタンス補償を行った後は、空間電荷効果が効かない内に素早く加速管で加速してやる必要がある。本節では、加速管内のビームダイナミクスについて述べる。

4.5.1 加速管電磁場の計算法

本 RF 電子銃装置で用いている加速管は、全長 3 m の S バンド $2\pi/3$ モード進行波型タイプであり、SPring-8 の 1 GeV 電子線型加速器で使用しているものと同一である。加速管は、加速管前後の RF 入力カップラセル、および出力カップラセルそれぞれ 1 つずつを含んで、全 83 セルで構成される。1 つのノーマルセルの長さは $\lambda/3 = 35$ mm である。

加速管内電磁場の計算法 [2] は、基本的には 3.3 節に示したとおりであるが、83 セル分を一度に計算するのは困難である。そこで、カップラセル部分とその他のノーマルセル部分に分けて計算を行う。両端のカップラセルは、カップラセル部分とノーマルセル半セル分の計 1.5 セルで計算する。本加速管は定勾配型加速管であるので、ノーマルセル部分の $2a$ (ビーム通過部アパーチャー直径) は下流に進むにつれて徐々に小さくなっていく。しかし、シミュレーションでは簡単化のために同じ構造の繰り返しだと仮定し、半波長にあたる 1.5 セル分の電磁場を計算して、それを 52 回足し合わせることで構成する。このようにすると、全セル数が 81 となって実際と若干異なるが、ビームダイナミクスの問題はないと判断した。

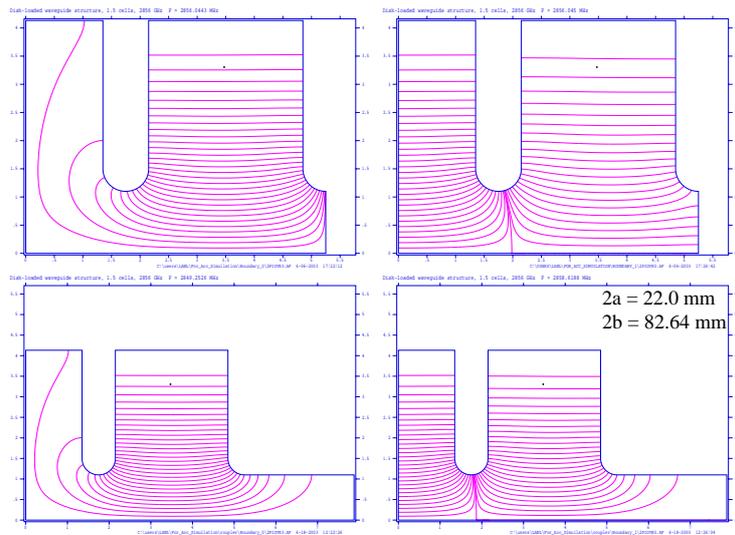


図 4.24 POISSON SUPERFISH で計算した加速管内電場。左上：ノーマルセル Neumann Boundary、右上：ノーマルセル Dirichlet Boundary、左下：入出力カップラ Neumann Boundary、右下：入出力カップラ Dirichlet Boundary。2a はビーム通過部アパーチャー直径、2b は各セルの直径。

図 4.24 に 2 次元コードである POISSON-SUPERFISH で計算した電場分布の例を示す。両端 Neumann 条件で計算したデータを $N(z)_{Elec}$ 、 $N(z)_{Mag}$ 、両端 Dirichlet 条件のものを $D(z)_{Elec}$

$D(z)_{Mag}$ とすれば、3.3 節で述べたように、カップラーセル部分、ノーマルセル部分それぞれ

$$\begin{cases} E_z = N_{Elec}(z) \cos(\omega t) - D_{Elec}(z) \sin(\omega t) \\ B_\theta = N_{Mag}(z) \sin(\omega t) + D_{Mag}(z) \cos(\omega t) \end{cases} \quad (4.9)$$

で電磁場を求めることが出来る。全体の電磁場は、カップラーセル部分とノーマルセル部分をスミーズにつないでやれば良い。

4.5.2 加速管でのビーム集束効果

加速管は、ビームを加速する以外にビームを集束する効果を伴う [2, 3]。この効果は後述するエミッタンスの振舞に大きな影響を及ぼす。

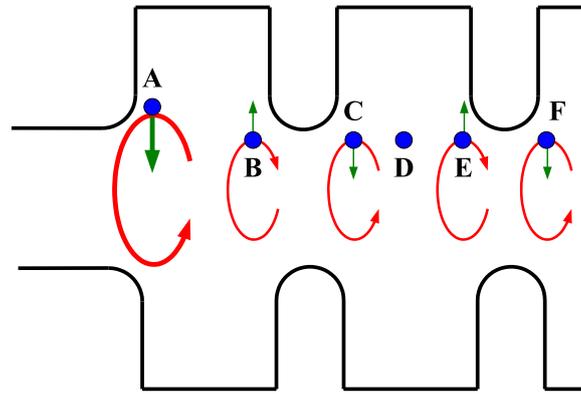


図 4.25 加速管におけるビーム集束効果の概念図。

4.2.3 節でも述べたように、RF 空洞内の電磁場は、 E_z とともに電子の径方向運動に作用する B_θ および E_r を伴う。電子が加速管内の z 方向 RF 電場のクレストに乗っているとすれば、図 4.25 の点 D のように、セルの中心を電子が通過する時は径方向の力を受けない。これに対し、セルの入口 (C 点) では E_r および赤線で示した B_θ により集束力を受け、セルの出口 (E 点) では発散力を受ける。ノーマルセル部分では隣り合うセルの構造が同一であるために、C 点で受ける集束力は B 点での発散力と打ち消し合い、E 点の発散力は F 点での集束力と打ち消し合う。従って径方向にはほとんど力を受けない。ところが、入力カップラー部分の A 点における集束力は、構造上、他の点よりも大きく、また、隣り合う発散力がないため、加速管の入口において電子は大きな集束力を受ける。

図 4.26 に、ソレノイドコイル後方の加速管で電子ビームを加速した場合の集束力の様子を示す。計算条件は、電荷量 1.0 nC/bunch、レーザーパルス幅 20 ps、レーザースポットサイズ $\phi 1.4$ mm、初期 RF 位相 85 度である。計算開始時の初期電子分布を与える際、その分布中、バンチの長手方向中央で $r = 0.7$ mm 付近の電子に着目し、青線でその電子の径方向軌道、また赤線で加速管電磁場によりその電子が受ける r 方向の集束の程度 ($dv_r/dt = -e/\gamma m_0 \cdot (-v_z B_\theta + E_r)$) を、加速管入

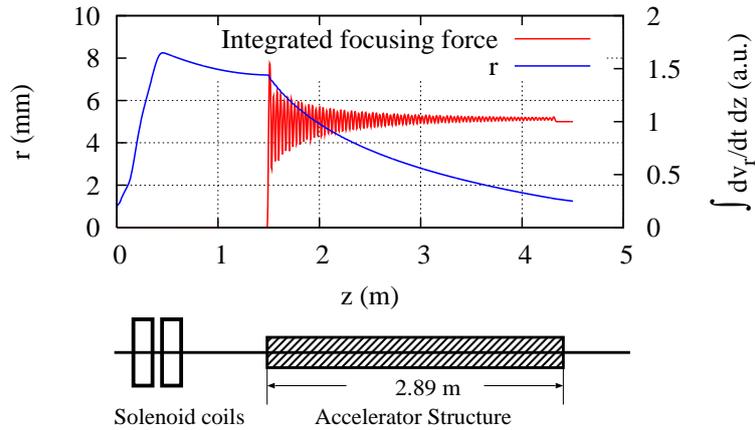


図 4.26 加速管中で電子が加速管電磁場より受ける r 方向の集束力を加速管入口から積分して示した。

口から積分して示している ($\int_0^z \frac{dv_r}{dt} dz$)。この積分値は規格化している。ビームエネルギーは、加速管入口で 3.7 MeV、加速管出口で 26.0 MeV である。

dv_r/dt の積分値は $z = 1.5$ m 付近の加速管入口で急激に大きくなり、後は振動して一定値を保ち、加速管出口で少し小さくなっている。したがって、集束作用はほぼ入力カップラーの部分に集中している。入口で急激に大きな値をもつのは、図 4.25 で示した、A 点での集束効果であり、振動は BC 点や EF 点で集束力がキャンセルされることを示している。出力カップラーでは図 4.25 と同様の原理によって電子は入力カップラーと同等の発散力を受けるが、電子のエネルギーが高くなっている為に発散効果は小さい。

B_θ および E_r は、ほぼ r に比例すると考えてよいので、集束力は光学レンズのように働く。図 4.26 では、集束効果が良く分かるように、ソレノイドコイルでの集束力を弱く設定して、加速管入口のビームサイズを大きくしている。(第 1 コイル:28 A、第 2 コイル:18 A)

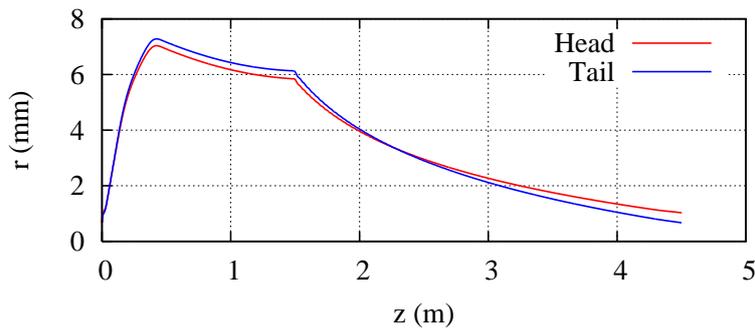


図 4.27 バンチの先頭と後方での、集束力の違い。

なお、この効果は RF によるものであるので、時間とともに集束力が変化する。図 4.27 に、図 4.26 で示した計算例での、バンチ先頭付近と後方付近の電子の軌道を示す。先頭と後方では加速管入口を通過するタイミングが異なる (この例では約 10 ps 程度で、位相では約 10°) ので、集束効果が異なることが分かる。この結果、バンチ先頭と後方でのスライスエミッタンスの位相空間

での回転角に差異が生じ、後述するようなエミッタンス増加の原因の一つとなる。

4.6 加速管部でのビームダイナミクスの非対称性

4.6.1 加速管カップラーの非対称構造がエミッタンスに及ぼす影響

前節までのシミュレーションは、加速管の構造がビーム軸対称であることを仮定したものである。加速管の RF 入力カップラーおよび出力カップラーは、RF 導入用ポートが無い軸対称カップラーであるものとして RF 電磁場を計算し、シミュレーションを行った。これに対し、RF 電子銃装置で用いている実際のカップラー（シングルフィードカップラー）は、図 4.28 に示すように垂直方向片方から RF を導入するためのポートが有り、機械的構造がビーム軸に対して非対称である。このため、エミッタンスにも非対称性が現れる [4, 5]。

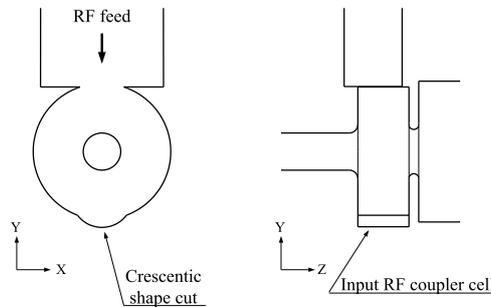


図 4.28 シングルフィードカップラー

図 4.29 に、理想的軸対称カップラーの電磁場を用いて計算した場合と、実形状であるシングルフィードカップラーの電磁場を用いて計算した場合のエミッタンスの時間発展を示す。非軸対称カップラーの電磁場計算は、3次元コードである MW STUDIO [6] を用いて行なった。シミュレーションの初期パラメータは、前項の図 4.26 と同一である。

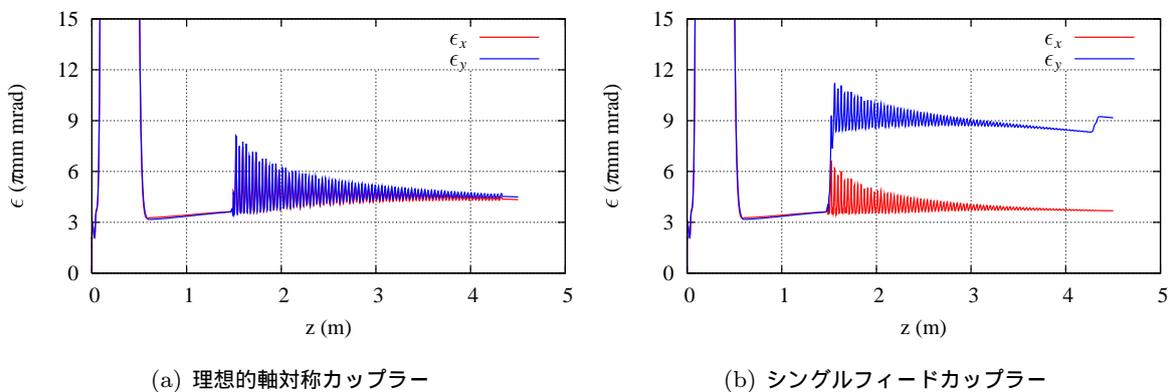


図 4.29 理想的軸対称カップラーの電磁場で計算した場合と、実形状のシングルフィードカップラーの電磁場で計算した場合の、エミッタンス時間発展の違い。

図 4.29(a) において、ソレノイドコイル下流では十分にエミッタンス補償されていることが分かる。 $z = 1.5$ m から始まる加速管内においては、エミッタンスが振動している。これは、図 4.25 に示すように、加速管の各セル毎にビームが集束と発散を繰り返すためである。この、集束発散力は時間的に変化するので、パンチ内の各スライスが位相空間内で回転角が異なることとなり、結果としてエミッタンスの増減が現れる。ただし、加速管に入る前と加速管から出た後のプロジェクションエミッタンスに、大きな差はない。

これに対し、実際のシングルフィードカップラーの電磁場を用いて計算した図 4.29(b) においては、RF ポートのある垂直 (y) 方向において、加速管入口と出口でエミッタンスが大きく増加している。水平方向はほとんど増加していないため、加速管通過後のエミッタンスは非対称になる。

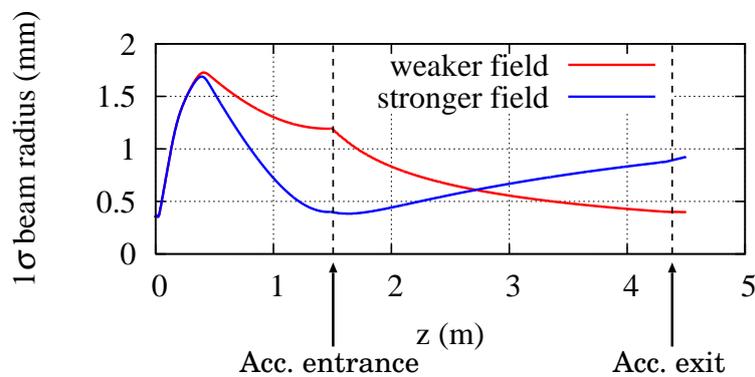


図 4.30 ビームサイズの時間発展がソレノイドコイル励磁量に依存する様子。

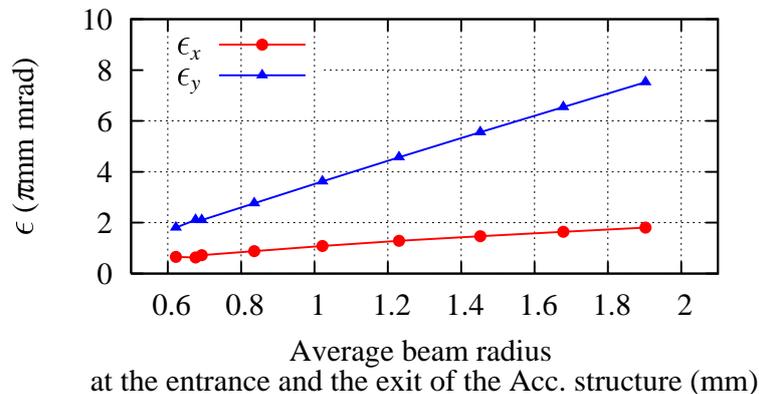


図 4.31 シングルフィードカップラーによるエミッタンス非対称性の、前後カップラー部ビーム径平均値への依存性。

このエミッタンス非対称性は、加速管の入力、および出力カップラー部でのビーム径に依存する。図 4.30 に示すように、ソレノイドコイルの励磁量を適当に変化させることによって、2つのカップラー部でのビーム径を変化させることができる。このような方法でビーム径を変化させた場合のシミュレーションを複数回繰り返し、各々の場合の、入力および出力カップラーに於けるビーム径の平均値を横軸に取り、それに対応する加速管出口でのエミッタンスを縦軸にプロットしたもの

を図 4.31 に示す。エミッタンス非対称性の程度は両カップラーでのビーム径の平均値に比例している。

4.6.2 カップラー部におけるエミッタンス増加のメカニズム

図 4.32 に、改めてエミッタンスの時間発展の様子を示す。このシミュレーションは電荷量 0.3 nC/bunch で行ったものであるが、その他の初期パラメータは図 4.29(b) のものと同一である。後で述べるが、カップラー部における RF 電磁場によるエミッタンス増加は、基本的には電荷量に依らない。したがって、通常の空間電荷効果によるエミッタンス増加が小さいほうがメカニズムが判りやすいので、低電荷量でのシミュレーション結果を示している。

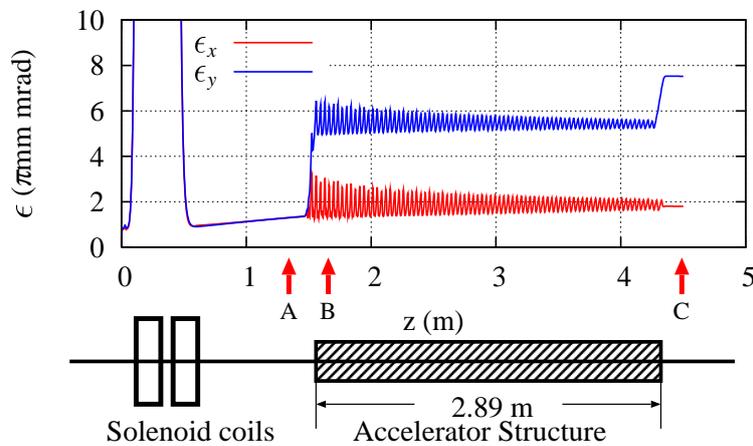


図 4.32 シングルフィードカップラーによるエミッタンス増加の様子。電荷量は 0.3 nC/bunch である。

図 4.33 に、入力カップラーの前後 (A 点 B 点)、および出力カップラー後 (C 点) における、 $\gamma\beta y' - y$ 位相空間上の各スライスのプロットを示す。各スライス、バンチを長手方向に 5 分割しており、そのうち、バンチ先頭、中央、および後方の 3 つのスライスをプロットしている。左上の図に示すように赤がバンチ先頭である。A 点では各スライスは位相空間上でほぼ重なっている。しかし、入力カップラー通過後の B 点では、各スライスの回転角度の違いと y' 方向へのシフト量の違いによってプロジェクションエミッタンスが大きくなっている。各スライスの回転角度が違うのは、加速管による集束効果が時間依存性を持っているからである。 y' 方向へのシフトは、カップラーの非対称な電磁場のためにビームがキックを受けた為である。もちろん、このキック量にも時間依存性があるために、プロジェクションエミッタンスが大きくなったと考えられる。

B 点でのビームエネルギーは 3.7 MeV で、出力カップラー後の C 点では 26.0 MeV である。C 点ではエネルギーが高いにも関わらず、さらに位相空間上でスライスが回転、およびキックを受け、プロジェクションエミッタンスが増加している。これは、カップラーでの RF 電磁場によるノーマライズドエミッタンスの増加がエネルギーに依らないためである。なぜなら、カップラーで

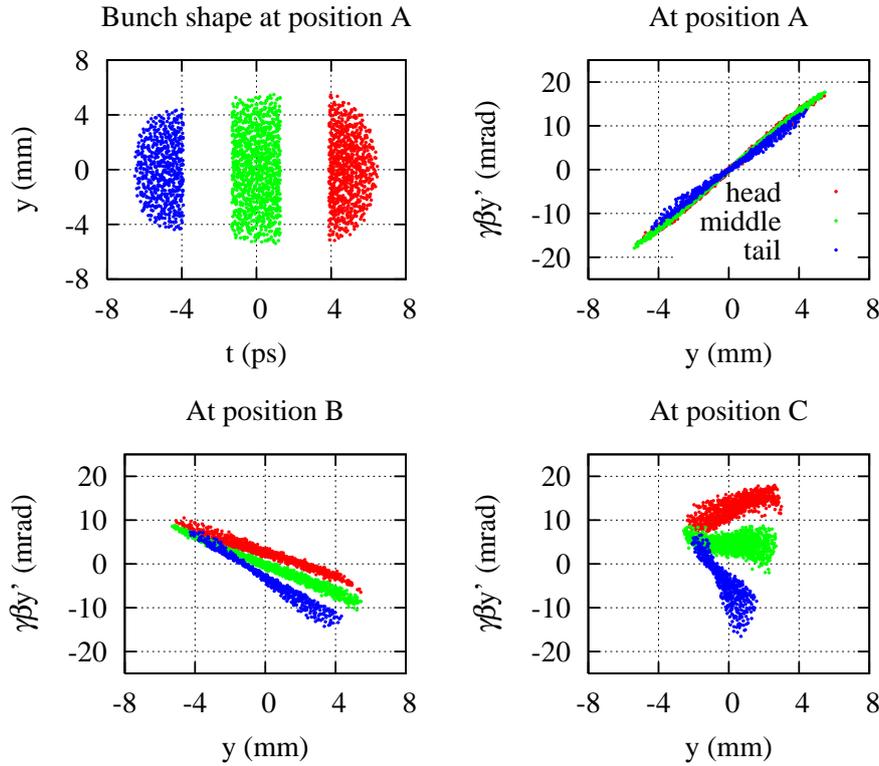


図 4.33 図 4.32 の A-C 各点に於ける位相空間上での各スライスの重なり具合

のキック力または集束力を f とすれば、

$$\Delta\gamma\beta y' = \gamma\beta \frac{\Delta P_y}{P_z} = \gamma\beta \frac{\Delta P_y}{\gamma m_0 \beta c} = \frac{\Delta P_y}{m_0 c} \propto f \quad (4.10)$$

となるため、 $\gamma\beta y'$ の変化量はエネルギーに依らず、加速管の電磁場強度のみに依存することが分かる。

エミッタンスの変化は、 $\Delta\gamma\beta y'$ だけではなく、 y 、すなわちビーム径に比例する。したがって、同一加速管の入力、出力カップラーで電磁場強度が同一であるとすれば、カップラーでのエミッタンスの増加量はビーム径に比例する。図 4.31 でエミッタンスの増加量が前後のカップラーでのビーム径の平均値に比例しているのは、このためである。

4.6.3 カップラー内の電磁場の歪み

非対称カップラー内でのキック力は、カップラーの構造的な非対称性と、RF パワーの流れによって生じる。図 4.34 に、入力カップラーセルの長手方向中心位置での xy 断面における磁力線図を示す。図に示す RF Phase が 0 deg とは、この部分を通過した電子が、後続の加速管ノーマルセルの長手方向中心において、RF のクレストに載るタイミングであることを示す。また、二重丸は、 B_θ の回転中心を示す。

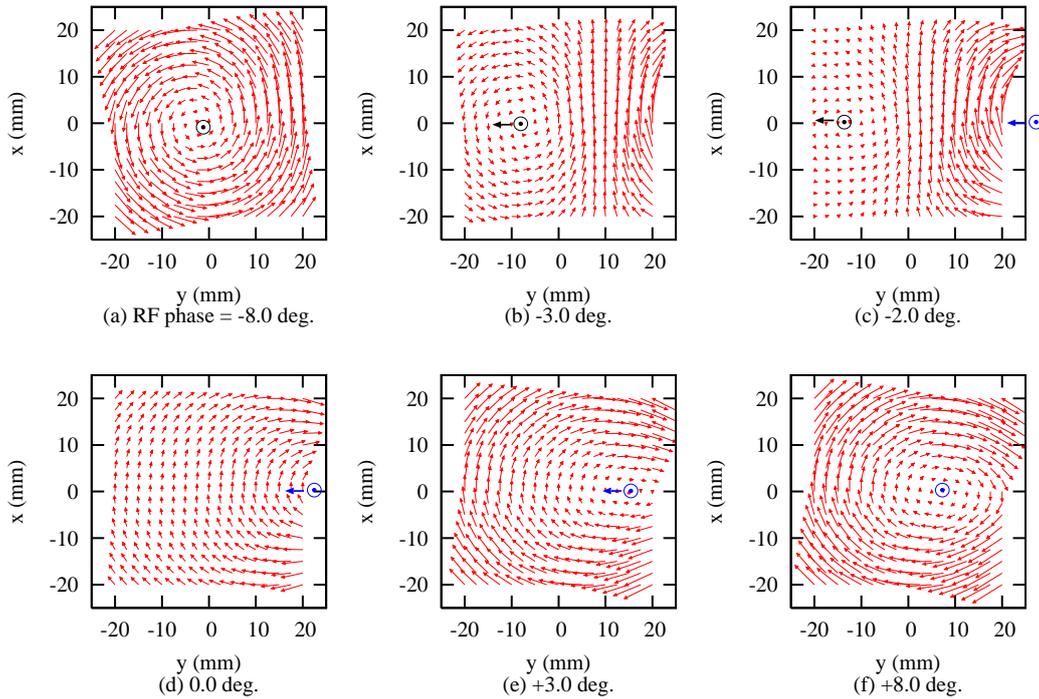


図 4.34 入力カップラーの長手方向中心位置での xy 断面における、 B_θ の磁力線図。磁力線は二重丸を中心に回転しており、中心位置は RF パワーの流れに伴って時間とともに右から左へ動いている。

RF パワーは $y+$ 側から $y-$ 側に流れており、カップラーの軸中心において 90 度進行方向を変える。この流れと共に、 B_θ の回転中心も $y+$ 側から $y-$ 側に移動していく。このため、理想的な軸対称のカップラーとは異なり、軸中心においても磁場の成分が現れ、これにより電子はキックを受ける。キック力が時間と共に変化することも、図から容易にイメージできる。

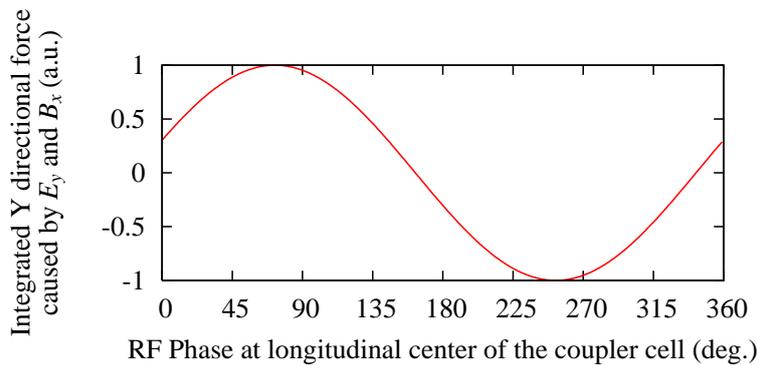


図 4.35 電子が、カップラーセルの入口から第 3 セルの出口までセルの軸中心に沿って進む際に受ける力の積分値。

図 4.35 に、電子が、入力カップラーセルの入口から 3 番目のセルの出口まで、セルの中心軸に沿って進む間に y 方向に受ける力を積分したものを示す。横軸は RF 位相で、図 4.34 の定義と同

一である。RF が時間変化するので、図 4.35 に示すように電子が受けるキック力は RF 位相に依存する。加速の適正位相である 0 deg においては、キック力の時間依存性が大きいことが分かる。サインカーブの頂点の位置は 90 度 ではなく 72.4 度 であるから、この位置に於いても電子は少しなら加速可能であり、なおかつ、キック力の時間変化が最小であるためエミッタンスの増加は少ない。ただし、この位置で加速すると、ビームのエネルギー拡がり非常に大きくなる。

4.6.4 ダブルフィードカップラー

シングルフィードカップラーに対し、 y_+ 、 y_- の両方から RF パワーを供給する方式のダブルフィードカップラーでは、 B_θ の中心が移動することなく、常にセル中心に一致する。したがって、このようなカップラーを用いれば、キック力によるエミッタンス増加は起きないことが予想される。

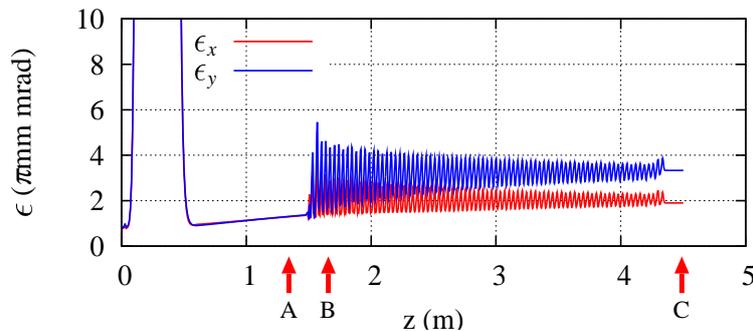


図 4.36 ダブルフィードカップラーによるエミッタンス増加の様子。

図 4.36 に、エミッタンスの時間発展の様子を示す。シングルフィードカップラーに比べエミッタンスの増加が抑えられているが、RF パワーを供給している y 軸方向のほうが、 x に比べエミッタンスの増加が大きい。

図 4.37 に、A-C 各点における各スライスの位相空間プロットを示す。シングルフィードカップラーと比べ、 y' 方向のシフトが無くなっている。ただし、集束力の時間依存性による各スライスの回転角のばらつきは残っており、これがエミッタンス増加の原因となっている。RF 入射ポートの構造上、 y 方向の集束力が x 方向よりも大きく、このためにエミッタンスに非対称性が残っている。

図 4.38 に、ダブルフィードカップラーの場合のエミッタンス非対称性の、入力出力カップラー部位置でのビームサイズ平均への依存性を示す。シングルフィードカップラーに比べ、非対称性が大きく改善されている。

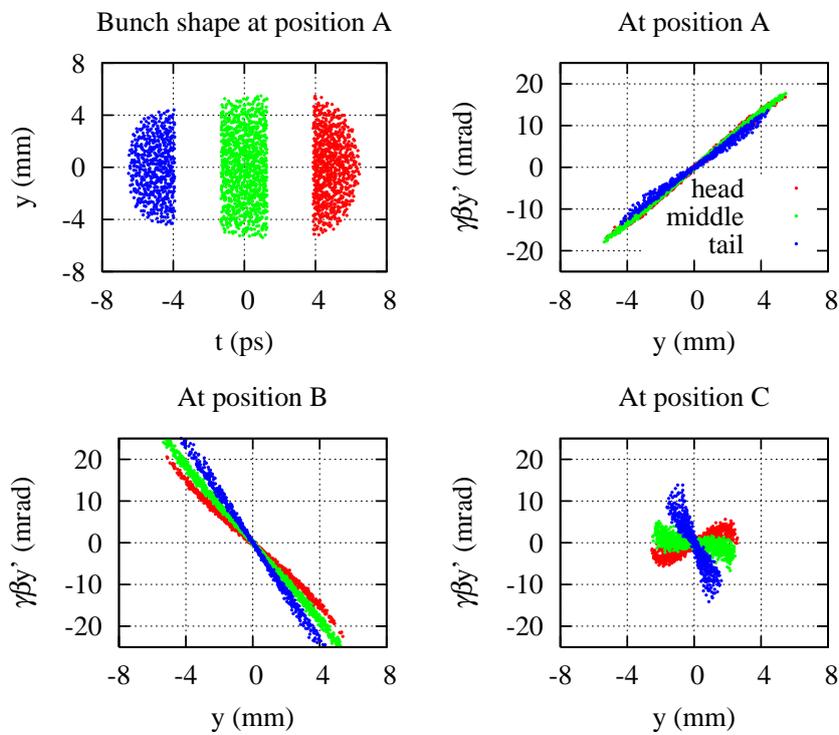


図 4.37 図 4.36 の A-C 各点に於ける位相空間上での各スライスの重なり具合

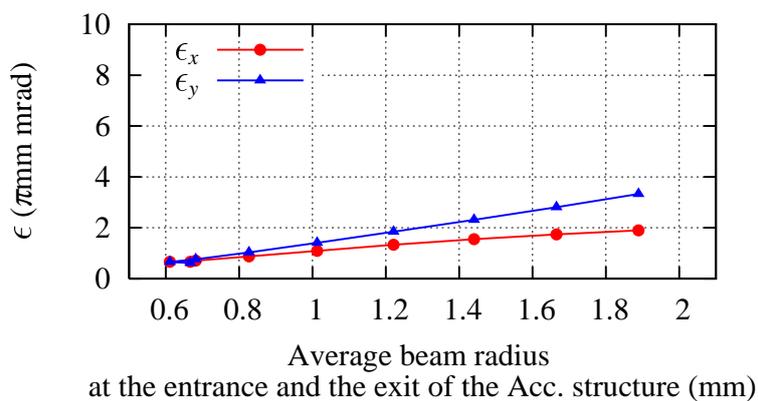


図 4.38 ダブルフィードカップラーによるエミッタンス非対称性の、入出力カップラー部におけるビーム径平均値への依存性。

4.7 まとめ

第 3 章で開発した 3 次元シミュレーションコードを用いて、SPring-8 の RF 電子銃装置を題材として、ビームダイナミクス計算を行った。電子銃空洞内部の計算では、まず電子 1 個でトラッキングを行うことにより、エネルギーの初期 RF 位相依存性や、パンチ幅圧縮の原理等の、電子銃空洞の基本特性について述べた。その後、複数の電子を用いてシミュレーションを行い、電子銃空洞内部でのエミッタンスの振る舞いについて述べた。また、電子銃空洞の構造的非対称性と、レーザーの斜め入射がエミッタンス非対称性に及ぼす影響について述べた。

電子銃空洞下流のソレノイドコイル部では、エミッタンス補償の原理を紹介し、実際にシミュレーションを行って、この原理が成り立っていることを示した。

それに続く加速管部では、加速管電磁場をシミュレーションに取り込む具体的手法について述べ、加速管によるビーム集束効果についてシミュレーションにより説明した。

次に、実際の SPring-8 の装置で用いている、非対称なシングルフィードカップラーを有する加速管の電磁場を用いてシミュレーションを行った。この結果から、エミッタンスの xy 非対称性および増加が起こるメカニズムを明らかにした。RF 入力および出力用のカップラー部ではビームの集束発散効果がある。この効果は RF に起因するものであるため、時間依存性がある。このため、パンチ内各スライスには位相空間上で互いに回転角が異なり、結果としてプロジェクションエミッタンスの増加を招く。シングルフィードカップラーの場合は、構造的非対称性のためにカップラー部でビームはキックを受ける。キックにも時間依存性があり、位相空間上の各スライスをシフトさせる。これら、シフトと回転の相乗効果によって、プロジェクションエミッタンスが増加する。このメカニズムによるエミッタンス増加が、1.1.5 節で述べた、RF 電子銃装置のエミッタンス非対称性の原因になっている可能性が高い。

増加のメカニズムはビームエネルギーに依らないため、大型線型加速器下流部のビームエネルギーが高いところでもエミッタンス増加の可能性はある。ただし、通常はビームエネルギーが高いほどビーム径が小さくなるために、高エネルギー部でのエミッタンス増加は目立たない。

このように、本シミュレーションコードによって RF 電子銃装置のビームダイナミクスがほぼ計算でき、また、実際の装置に起因する構造的非対称性のビームダイナミクスへの影響も解析できることを示した。しかし、以下のような課題が残った。

カソードからのエミッションに関しては、空間電荷制限領域でのエミッションの計算結果が、実験事実とは一致しなかった。エミッタンス計算においては、粒子数依存性が存在する。これを排除するにはエミッタンスの値が収斂するまで粒子数を増やせば良いが、計算時間は粒子数の 2 乗に比例して長くなる。

これらの問題点については、第 5 章で再び議論する。

参考文献

- [1] T. Taniuchi, *et al.*, “Characteristics of A Photocathode RF Gun in Higher Field Gradient”, in *Proceedings of LINAC2002, Gyeongju, Korea*, (2002), p.683.
- [2] 水野 明彦 他, “Focusing Effects on the S-band Acceralator Structure”, 第 2 回日本加速器学会年会プロシーディングス, 鳥栖, (2005), p.126.
- [3] J.Rosenzweig and L.Serafini, “Transverse particle motion in radio-frequency linear accelerators”, *Phys. Rev. E* **49**, 1599(1994).
- [4] A.Mizuno, H.Dewa, T.Taniuchi, H.Tomizawa and H.Hanaki, “Effects on Emittance Asymmetry Caused by Asymmetry Fields of Traveling Wave Accelerator Structure”, in *Proceedings of FEL2009, Liverpool, UK*, (2009), p.273.
- [5] Zenghai Li, Feng Zhou, Arnold Vlieks and Chris Adolphsen, “On the importance of symmetrizing RF coupler fields for low emittance beams”, in *Proceedings of PAC2011, New York, USA*, (2011), p.2044.
- [6] <https://www.cst.com/Products/CSTS2>

第 5 章

多元連立ビームエンベロープ方程式

第 3 章で述べた 3 次元のシミュレーションコードは、第 4 章で示したように、水平垂直の構造的な非対称性に起因するビームダイナミクスの非対称性の解析に対して大きな威力を発揮した。しかしながら、3.7.2 節や 4.2.4 節で示したように、計算されるパラメータ、特にエミッタンスに対して粒子数依存性が現れる。これを克服するためには粒子数を増加させる必要があるが、計算時間は粒子数の 2 乗に比例して長くなるので、現実的ではない。また、4.2.6 節で示したように、カソードからのエミッションを計算する際には、鏡像効果を計算しない範囲を設定する必要があるが、範囲を理論的に決定することが困難であるため、この点については精度良い計算が行われているのかどうかを確認する術がない。これらの問題点は基本的には任意の 2 つの粒子が接近しすぎた場合の扱いが困難なためである。接近しすぎると、相互作用が異常に大きくなり、結果として計算誤差を招く。

これらの問題を克服するには、シミュレーションではなく、解析的にビームダイナミクスを解く必要がある。1.2.2 節で示したように、解析的手法としてはエンベロープ方程式を用いるのが一般的であるが、電子バンチのサイズを平均的に捉え、その平均的位置に対しての rms ビームエンベロープ方程式を導き、それを解くものが多い (第 1 章 [24, 25, 26, 27])。このような手法では、電子バンチの形状を正確に計算することが難しく、その結果、一般的に、エミッタンスの精度は悪い傾向にある。

これらの問題に対処するため、ビームエンベロープ方程式の手法にシミュレーションの手法を取り入れ、解析的にビームダイナミクスを解きながら、なおかつ短い計算時間で計算精度を確保する新手法を開発した [1]。電子バンチを長手方向、および径方向それぞれに分割し、各交点に電子をおく。各電子の軌道は、他の電子との相互作用を考慮したエンベロープ方程式によって表される。これらのエンベロープ方程式を連立して解くものである。空間電荷相互作用の計算において、後述するような工夫をすることによって各電子の軌道計算精度を高め、電子バンチ形状を正確に計算することが可能となった。これにより、エミッタンスを短時間で高精度に算出することに成功した。本章では、この新手法について記す。

5.1 ビームエンベロープ方程式

5.1.1 径方向ビームエンベロープ方程式の基礎

電子ビームは実際には径方向のビームサイズを持っているが、ここではサイズを持たない1次元ペンシルビームを考える。径方向のビームエンベロープ方程式は、図 5.1 に示すように、ペンシルビームによる空間電荷効果を考慮し、ペンシルビームから R 離れた二重丸の位置にある電子の軌道方程式を導出することにより得られる。

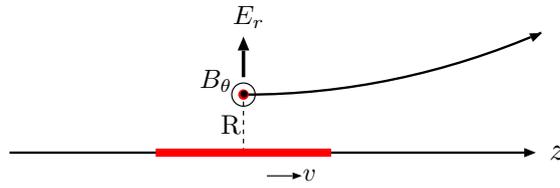


図 5.1 径方向ビームエンベロープ方程式導出のためのモデル

電子の運動方程式は次のように表される。

$$\frac{d(\gamma m_0 \mathbf{v})}{dt} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \quad (5.1)$$

ここで、 e は電子の電荷、 \mathbf{v} は電子の速度、 $\gamma m_0 \mathbf{v}$ は電子の運動量、 \mathbf{E} と \mathbf{B} は電場および磁場である。式 (5.1) は式 (2.1) と同一であり、2.1 節で既述したように次式に変形できる。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{\gamma m_0} \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{c^2} \mathbf{v} \right) \quad (5.2)$$

ここで、 c は真空中における光速である。空間電荷効果としては $E_{r.sc}$ と $B_{\theta.sc}$ のみを考え、 E_{θ} 、 B_z および $(\frac{v_r}{c})^2$ を無視すると、式 (5.2) の r 成分は、 $B_{\theta.sc} = \frac{\beta}{c} E_{r.sc}$ を用いて次の様になる。

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{e}{\gamma^3 m_0} E_{r.sc} - \frac{e}{\gamma m_0} \left(E_r - \beta c B_{\theta} - \frac{\beta}{c} \frac{dR}{dt} E_z \right) \quad (5.3)$$

ここで、 $\beta = v_z/c$ であり、 E_r 、 B_{θ} および E_z は空間電荷効果以外の外部電磁場である。連続ビームの場合、 $B_{\theta.sc}$ は、アンペールの法則よりビーム電流を I として

$$B_{\theta.sc} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (5.4)$$

と表される。したがって、式 (5.3) は次のように変形される。

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{eI}{2\pi\epsilon_0 m_0 \beta \gamma^3 c R} - \frac{e}{\gamma m_0} \left(E_r - \beta c B_{\theta} - \frac{\beta}{c} \frac{dR}{dt} E_z \right) \quad (5.5)$$

式 (5.5) の右辺第 1 項は空間電荷の寄与を表しており、連続ビームを仮定した Lawson のビームエンベロープ方程式 [2] の空間電荷の項と一致する。

5.1.2 短パルスビームに対応した径方向ビームエンベロープ方程式

短パルスビームに対応したビームエンベロープ方程式を導出するには、短パルスビームが周囲に誘起する電場を導出する必要があるが、これは既に 2.2.2 節で導いている。式 (5.6) に結果を再掲する。

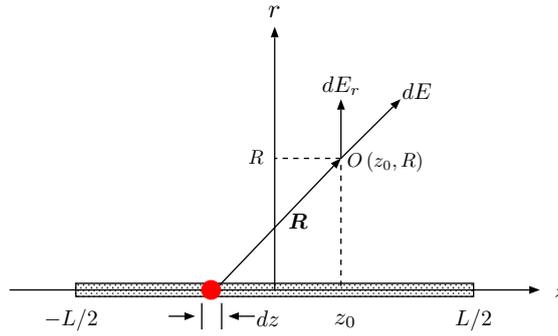


図 5.2 短パルスビームが周囲に誘起する電磁場を計算するためのモデル

実験系において速度 v で等速直線運動する電子が、図 5.2 のように長さ L の区間に渡って 1 次的に均一分布しているとき、パンチ全体の電荷量を Q とすると、観測点 $O(z_0, R)$ にパンチ全体より誘起される電場の r 方向成分は、 $dE_r(z_0, R)$ を $-L/2$ から $L/2$ まで積分することによって、

$$E_{r.sc}(z_0, R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 LR} \left(\frac{z_0 - L/2}{\sqrt{(z_0 - L/2)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}}} - \frac{z_0 + L/2}{\sqrt{(z_0 + L/2)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}}} \right) \quad (5.6)$$

である。電子パンチの長手方向中心位置での電場は、式 (5.6) に $z_0 = 0$ を代入することにより、

$$E_{r.sc}(0, R) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{R^2}{\gamma^2}}} \quad (5.7)$$

である。したがって、電子パンチ中央に於ける径方向ビームエンベロープ方程式は次のように導出される。

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 m_0 \gamma^3 R} \frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{R^2}{\gamma^2}}} - \frac{e}{\gamma m_0} \left(E_r - \beta c B_\theta - \frac{\beta}{c} \cdot \frac{dR}{dt} E_z \right) \quad (5.8)$$

$\gamma L \gg 2R$ の時は $\frac{R^2}{\gamma^2}$ を無視することができる。したがって、この場合の式 (5.8) は、 $I = \frac{Q}{L} \beta c$ を用いると式 (5.5) に一致する。

5.1.3 長手方向ビームエンベロープ方程式

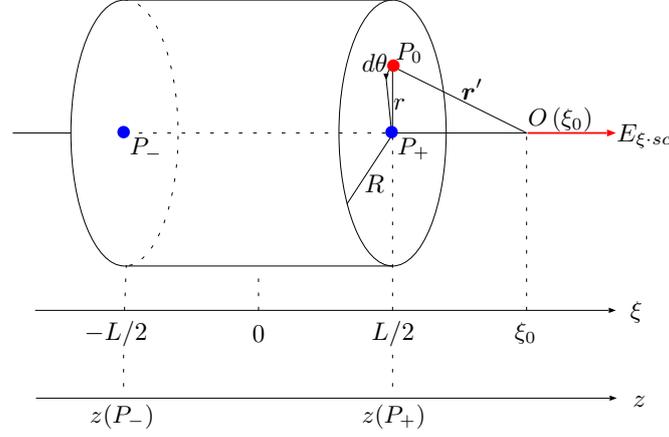


図 5.3 円柱ビームから誘起される電場を計算するためのモデル

長手方向のビームエンベロープ方程式を導出するためには、ペンシルビームではなく、図 5.3 に示すようなエネルギー $\gamma m_0 c^2$ で z 方向に進んでいる長さ L 、半径 R の円柱ビームを仮定する。電荷は密度 ρ で均一分布しており、円柱全体の電荷量は Q である。ビームの進行に際し、円柱の長手方向の両端面は歪まず、常に円柱ビームとしての形状を保つものとする。すなわち、ビーム中心軸に直交する任意の $r - \theta$ 平面内に存在する各電子の長手方向速度は同一であると仮定する。また、この円柱モデルには、 z 軸とは別に、円柱と共に進む座標軸 ξ を導入する。長手方向のビームエンベロープ方程式は、円柱両端のビーム軸上に位置する P_+ と P_- の 2 つの電子の軌道を考えることによって導出することができる。

式 (5.2) からスタートし、径方向ビームエンベロープ方程式を導出した時と同様に変形を行う。 $v_r = v_\theta = 0$ を仮定すると、式 (5.2) の z 方向成分は、

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e}{\gamma^3 m_0} (E_{\xi.sc} + E_z) \quad (5.9)$$

となる。ここで、 $E_{\xi.sc}$ は空間電荷が誘起する電場であり、 E_z はその他の電場である。

次に、 $E_{\xi.sc}$ を求める。点 P_0 周辺の微小体積、 $rd\theta drd\xi$ 内の電子が、点 $O(\xi_0)$ に誘起する電場 $dE_{\xi.sc}$ は、式 (2.19) を用いて以下のように表せる。

$$dE_{\xi.sc}(\xi_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{-\rho(\xi_0 - \xi)}{\left((\xi_0 - \xi)^2 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right)^{3/2}} rd\theta drd\xi \quad (5.10)$$

$E_{\xi.sc}$ は、式 (5.10) を θ, r, ξ で積分することによって求めることができる。全電荷 Q は、 $\pi R^2 L \rho$

であることから、 $E_{\xi \cdot sc}$ は次の様に求まる。

$$\begin{aligned} E_{\xi \cdot sc}(\xi_0) &= \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} dE_{\xi \cdot sc}(\xi_0) \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2 L} \left(-\sqrt{\left(\xi_0 - \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}} + \sqrt{\left(\xi_0 + \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}} + \left|\xi_0 - \frac{L}{2}\right| - \left|\xi_0 + \frac{L}{2}\right| \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

したがって、電子 P_+ および P_- の位置での $E_{\xi \cdot sc}$ は、それぞれ

$$\begin{cases} E_{\xi \cdot sc}(P_+) &= \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 R^2 L} \left(L + \frac{R}{\gamma} - \sqrt{L^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}} \right) \\ E_{\xi \cdot sc}(P_-) &= -E_{\xi \cdot sc}(P_+) \end{cases} \quad (5.12)$$

となる。電子 P_+ および P_- の長手方向ビームエンベロープ方程式は、式 (5.12) を式 (5.9) に代入することによって求めることができる。

5.1.4 連立ビームエンベロープ方程式

式 (5.8)、(5.9)、(5.12) より、径方向、および長手方向のエンベロープ方程式を組み合わせ、常微分方程式としての連立ビームエンベロープ方程式を導出することができる。 L を $z(P_+) - z(P_-)$ とおくと、連立ビームエンベロープ方程式は次の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dt^2} &= -\frac{e}{\gamma^3 m_0} E_{r \cdot sc}(R, z(P_+), z(P_-)) - \frac{e}{\gamma m_0} \left(E_r - \beta c B_\theta - \frac{\beta}{c} \cdot \frac{dR}{dt} E_z \right) \\ \frac{d^2 z(P_+)}{dt^2} &= -\frac{e}{\gamma^3 m_0} E_{\xi \cdot sc}(R, z(P_+), z(P_-)) - \frac{e}{\gamma^3 m_0} E_z \\ \frac{d^2 z(P_-)}{dt^2} &= \frac{e}{\gamma^3 m_0} E_{\xi \cdot sc}(R, z(P_+), z(P_-)) - \frac{e}{\gamma^3 m_0} E_z \end{aligned} \quad (5.13)$$

ここで、 $E_{r \cdot sc}$ および $E_{\xi \cdot sc}$ は次のとおりである。

$$\begin{cases} E_{r \cdot sc}(R, z(P_+), z(P_-)) &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{\frac{(z(P_+) - z(P_-))^2}{4} + \frac{R^2}{\gamma^2}}} \\ E_{\xi \cdot sc}(R, z(P_+), z(P_-)) &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2 (z(P_+) - z(P_-))} \times \\ &\quad \left(z(P_+) - z(P_-) + \frac{R}{\gamma} - \sqrt{(z(P_+) - z(P_-))^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}} \right) \end{cases} \quad (5.14)$$

5.1.5 エンベロープ方程式によるエミッタンスの算出

エミッタンスは、基本的には次のようにしてエンベロープ方程式から求めることができる。図 5.4 に示すように、円柱ビームを径方向に n 分割し、 R_{i-1} と R_i の間の面積を S_i とする。ただ

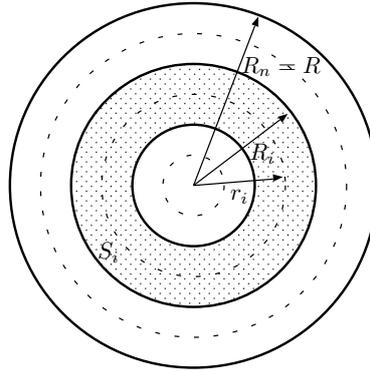


図 5.4 エンベロープ方程式からのエミッタンス算出用モデル。円柱ビームの $r - \theta$ 断面を示している。

し、 $i = 1 \dots n$ 、 $R_n = R$ である。また、 $r_i = (R_{i-1} + R_i) / 2$ とする。各 r_i および R に位置する電子の軌道をエンベロープ方程式で解くことによって、 S_i の時間発展、すなわち、径方向電子密度分布の時間発展が分かる。これよりエミッタンスが算出できる。

この連立エンベロープ方程式は、 $n + 3$ 個の独立変数を持つ。内訳は、式 (5.13) に示す R に位置する電子の径方向方程式と、ビーム軸上円柱両端に位置する電子の長手方向方程式、および、各 r_i に位置する電子に対応する径方向方程式である。これらの方程式のうち、各 r_i に位置する電子に対応する方程式を計算する際の電荷量 Q は、 $r_i < R$ であるために、パンチ全体の電荷量より少なく設定する必要がある。このため、電荷量 Q を算出するための修正関数を導入する必要がある。これについては 5.2.2 節で述べる。

各々の電子の軌道を解けば、 $\langle r^2 \rangle$ 、 $\langle r'^2 \rangle$ および $\langle r \cdot r' \rangle^2$ は、以下のように加重平均を用いて算出することができる。

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^n W_i \cdot A_i \quad (5.15)$$

ここで、 $W_i = S_i / (\pi R^2) = (2i - 1) / n^2$ である。これより、 $\epsilon_x \equiv 1/2 \sqrt{\langle r^2 \rangle \langle r'^2 \rangle - \langle r \cdot r' \rangle^2}$ 、すなわちエミッタンスを算出できる。

5.2 多元連立ビームエンベロープ方程式

5.2.1 多元連立ビームエンベロープ方程式の構築

前節までに述べたビームエンベロープ方程式は、径方向に対してはパンチ中央部分のビームサイズしか計算できない。したがって、5.1.5 節で示したエミッタンスは、パンチ中央のスライスエミッタンスに相当する。パンチ全体のプロジェクションエミッタンスを算出するためには、パンチを長手方向に分割して、それぞれの部分のエミッタンスを算出する必要がある。

図 5.5 に、長手方向に m パンチに分けたパンチ分割モデルを示す。径方向軌道を計算するため

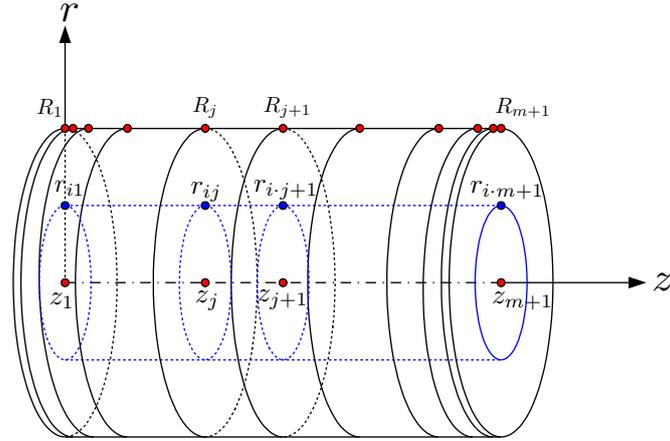


図 5.5 多元連立ビームエンベロープ方程式を導出するためのバンチ分割モデル。バンチの初期状態を示す。

の電子は、5.1節で行ったように各バンチスライスの長手方向中央に配置するのではなく、各スライスの長手方向両端に配置する。すなわち、隣り合ったスライスの境界に配置する。各スライスの径方向端、 $R_j (j = 1 \dots m+1)$ に配置する電子は、各スライスの外径を計算するためのものである。ビーム軸上の z_j に配置する電子は、長手方向軌道を計算するためのものである。バンチ内部の r_{ij} に配置する電子は、図 5.4 において r_i の位置に配置した電子に相当し、 R_j に配置する電子と同様、径方向軌道を計算するためのものである。図 5.5 における R_j と図 5.4 の R_i は異なるので、注意すること。

それぞれの位置の電子のエンベロープ方程式を連立して解くのであるが、各電子のエネルギーは、初期エネルギーを同一と設定したとしても、ビームが進むに連れて異なってくるはずである。したがって、各電子のエネルギーとして β_j を導入し、以下の方程式に従うものとする。

$$\frac{d\beta_j}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d^2 z_j}{dt^2}. \quad (5.16)$$

これらを合わせて、多元連立ビームエンベロープ方程式は、 R_j, r_{ij}, z_j と β_j の独立変数 $(n+3)(m+1)$ 個を持つ連立常微分方程式となる。ただし、 $i = 1 \dots n$ および $j = 1 \dots m+1$ である。プロジェクトンエミッタンスは、各計算パラメータの径および長手両方向の加重平均を計算することにより得られる。

なお、このモデルでは、各 r_{ij} の位置にある電子の長手方向位置は、ビーム軸上に位置する電子 z_j の長手方向エンベロープ方程式の解をもって決定する。したがって、任意のスライス境界 j に位置する電子の長手方向速度は i に依らず同一であって、 β_j は i に依存しない。すなわち、ビーム進行にあたり、各スライスには円柱形状を保持する必要があり、歪んではならない。

5.2.2 径方向空間電荷効果の計算

径方向にパンチが誘起する電磁場は、5.1節で示したように、ペンシルビームが誘起するとして計算している。このような計算は、 $\gamma L \gg 2R$ の条件下でのみ成り立つので、低エネルギーのパルスビームを解析するには、もっと精度の良いモデルが必要である。円柱ビームが誘起する電磁場を計算するのは大変なので、ここでは電磁場の修正関数を導入することにする。

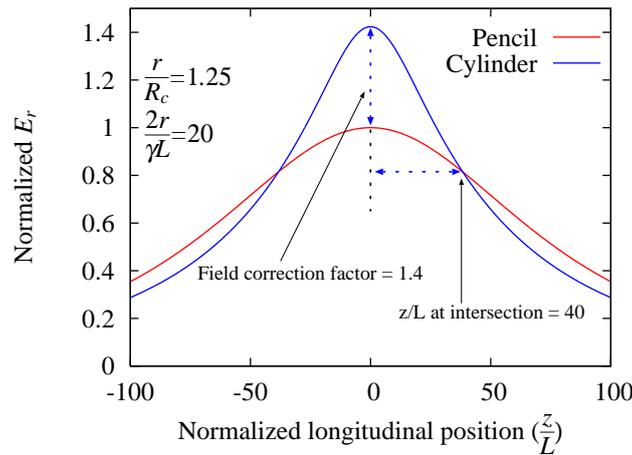


図 5.6 ペンシルビームと円柱ビームが誘起する E_r の長手方向強度分布。2 変数が、例えば $r/R_c = 1.25$ および $2r/\gamma L = 20$ であるとき、2 つの修正係数、すなわち、field correction factor と、長手方向中央から交点までの距離は図中に示すように一意に決定できる。この 2 つの修正係数を用いて、ペンシルビームの E_r から円柱ビームの E_r を算出することができる。なお、横軸はパンチ長 L で規格化している。すなわち、ビームは横軸で $-1/2 < z/L < 1/2$ の狭い範囲内のみ存在していることに注意のこと。

長さ L 、エネルギーが $\gamma m_0 c^2$ のペンシルビームと円柱ビームを考える。円柱ビームのビーム径は R_c とする。図 5.6 に、ビーム軸から r 離れた位置で、ビーム軸に沿ってペンシルビームと円柱ビームの E_r を観測したときの、 E_r の強度分布を示す。ビームの長手方向中心を $z = 0$ としている。ペンシルビームが誘起する E_r は、式 (5.6) より計算することができる。円柱ビームが誘起する E_r は、式 (5.6) を r および θ 方向に数値積分することにより算出した。

E_r の強度分布の違いは、 $E_r(0)_{cylinder}/E_r(0)_{pencil}$ で表される field correction factor と、長手方向中心から 2 つの E_r 分布の交点までの L による規格化距離の、2 つの修正係数によって、近似的に表すことができる。すなわち、長手方向中心を含む 2 つの交点間において円柱ビームが誘起する E_r とペンシルビームが誘起する E_r との比は、線形補間により求めることができる。このとき、これら 2 つの修正係数は、2 変数、 r/R_c と $2r/\gamma L$ の関数である。これは、次の理由による。

円柱ビームが誘起する電場は、式 (5.6) で表されるペンシルビームからの電場を R_c の内部で積分したものである。また、観測点と円柱ビームサイズの相対位置関係は、 r/R_c によって一意に決定できる。したがって、円柱ビームが誘起する電場とペンシルビームが誘起する電場の違い、す

なわち 2 つの修正係数は、明らかに r/R_c の関数となる。

また、式 (5.6) の分子と分母を L で割ると、電場の z/L に対する分布は、 $R/\gamma L$ の関数となるので、2 つの修正係数は、 $2R/\gamma L$ の関数でもある。

例えば図 5.6 においては、 $r/R_c = 1.25$ および $2r/\gamma L = 20$ であり、このとき、field correction factor が 1.4、また、中心から交点までの規格化距離 z/L が 40 と一意に求まる。

多元連立ビームエンベロープ方程式は大変複雑であるので、数値的に解く必要がある。したがって、2 つの修正係数の 2 次元マッピングデータをファイルで用意しておき、微分方程式を解く際に読み込んで以下のようにペンシルビームの電場を修正してやれば、円柱ビームの電場を用いてエンベロープ方程式を解くことができる。

$$E_{r\text{-cylinder}} = F_c \left(\frac{r}{R_c}, \frac{2r}{\gamma L}, \frac{z}{L} \right) \cdot E_{r\text{-pencil}} \quad (5.17)$$

ここで、 F_c は E_r の修正関数であり、マッピングデータファイルで与えられるものである。この方法を用いれば、5.1.5 節で述べたような、 r_{ij} に位置するビーム内部の電子に対しても径方向電場の修正が可能である。

また、RF 空洞の電磁場や電磁石の磁場などの外部電磁場は、 z と r の関数で表すことができるので、同様にマッピングデータファイルで与えることによって計算に含めることが可能である。

なお、多元連立ビームエンベロープ方程式を解く際に、図 5.6 の交点より長手方向外側では、径方向電場の修正を行っていない。この領域ではペンシルビームと円柱ビームとで違いが少なく、多元連立ビームエンベロープ方程式を解くにあたって影響が少ないと考えられるからである。

5.2.3 各スライスが誘起する電場の足し合わせ

多元連立ビームエンベロープ方程式で用いる空間電荷による電磁場は、各スライス k が誘起する電場の足し合わせとして実装する。式 (5.11) と式 (5.13) より、各トレース電子の位置に誘起される電場、 $E_{r_{ij}sc}$ 、 $E_{R_{j}sc}$ および $E_{\xi_{j}sc}$ は次のように表される。

$$E_{r_{ij}sc} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^m \frac{F_c \left(\frac{r_{ij}}{R(k)}, \frac{2r_{ij}}{\gamma(k)L(k)}, \frac{z_j - z(k)}{L(k)} \right) \cdot Q(k)}{r_{ij}L(k)} \times \left(\frac{z_j - z_{k+1}}{\sqrt{(z_j - z_{k+1})^2 + \frac{r_{ij}^2}{\gamma(k)^2}}} - \frac{z_j - z_k}{\sqrt{(z_j - z_k)^2 + \frac{r_{ij}^2}{\gamma(k)^2}} \right) \quad (5.18)$$

$$E_{R_j sc} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^m \frac{F_c \left(\frac{R_j}{R(k)}, \frac{2R_j}{\gamma(k)L(k)}, \frac{z_j - z(k)}{L(k)} \right) \cdot Q(k)}{R_j L(k)} \times \left(\frac{z_j - z_{k+1}}{\sqrt{(z_j - z_{k+1})^2 + \frac{R_j^2}{\gamma(k)^2}}} - \frac{z_j - z_k}{\sqrt{(z_j - z_k)^2 + \frac{R_j^2}{\gamma(k)^2}} \right) \quad (5.19)$$

$$E_{\xi_j sc} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^m \frac{Q(k)}{R(k)^2 L(k)} \times \left(-\sqrt{(z_j - z_{k+1})^2 + \frac{R(k)^2}{\gamma(k)^2}} + \sqrt{(z_j - z_k)^2 + \frac{R(k)^2}{\gamma(k)^2}} + |z_j - z_{k+1}| - |z_j - z_k| \right) \quad (5.20)$$

ここで、 k は各スライスの番号である。 $L(k)$ 、 $Q(k)$ 、 $R(k)$ 、 $z(k)$ および $\gamma(k)$ は次に示すようなスライス k のパラメータである。

$$\begin{cases} L(k) & \equiv z_{k+1} - z_k \\ Q(k) & \equiv \Delta t_k / T \cdot Q = \text{const.} \\ R(k) & \equiv (R_{k+1} + R_k) / 2 \\ z(k) & \equiv (z_{k+1} + z_k) / 2 \\ \gamma(k) & \equiv (\gamma_{k+1} + \gamma_k) / 2, \end{cases} \quad (5.21)$$

T は、時間単位で表したトータルバンチ幅であり、 Δt_k はスライス k のバンチ幅である。式 (5.18)、(5.19) および (5.20) を式 (5.14) の代わりに式 (5.13) に代入することによって、多元連立ビームエンベロープ方程式が導出される。

5.2.4 カソードからのビームエミッション、およびカソードでの鏡像効果の計算

カソードからのエミッションを計算する方法を記す。カソード表面の位置を $z = 0$ とする。初期状態では、全ての電子をカソード表面に配置する。図 5.5 に示すバンチ先頭の電子、すなわち、添字が $j = m + 1$ である電子 (電子 $j = m + 1$ と明記) は、 $t = t_{m+1} = 0$ のタイミングでカソードよりエミッションさせる。その他の後続の電子 $j \neq m + 1$ は、それぞれ $t = t_j = \sum_{k=j}^m \Delta t_k$ のタイミングでエミッションさせる。また、 $t < t_j$ の時には $\frac{dR_j}{dt}$ 、 $\frac{dr_{ij}}{dt}$ および $\frac{dz_j}{dt}$ がゼロとなるように設定する。

電子 $j + 1$ はエミッションされているが、電子 j はまだエミッションされていない状態を考える。すなわち、 $t_{j+1} < t < t_j$ の場合である。この時、式 (5.18)、(5.19) および (5.20) の $Q(k)$ を

次の様に設定する。

$$Q(k) \equiv \begin{cases} \Delta t_k/T \cdot Q & (k \geq j+1) \\ (t-t_{j+1})/T \cdot Q & (k=j) \\ 0 & (k \leq j-1). \end{cases} \quad (5.22)$$

このようにすれば、カソードからのエミッションがスムーズに計算できる。

カソードでの鏡像効果は、カソードが完全導体であると仮定した場合、正電荷を持つ鏡像電子を、カソードに対して実電子と対称な位置に配置することによって計算することができる。鏡像電子は、実電子と反対方向に移動する。このとき、鏡像スライスの変位を $-k$ として、 $Q(-k)$ を次のように設定すれば良い。

$$Q(-k) \equiv \begin{cases} -\Delta t_k/T \cdot Q & (k \geq j+1) \\ -(t-t_{j+1})/T \cdot Q & (k=j) \\ 0 & (k \leq j-1). \end{cases} \quad (5.23)$$

ただし、式 (5.18)、(5.19) および (5.20) では、 $k = -m$ から m ($k \neq 0$) の合計をとる必要がある。

5.3 多元連立ビームエンベロープ方程式を用いたビームダイナミクス解析

多元連立ビームエンベロープ方程式は、数值的に解くことが可能である。ここでは、数値解析ソフトである Octave [3] を用いる。Octave では "lsode" コマンドで常微分方程式を解析するが、このとき、解析オプションとして "non-stiff" を指定する。指定しない場合は、エンベロープ方程式を解く際に大変時間がかかる。5.2.1 節で述べたように、多元連立ビームエンベロープ方程式は独立変数 $(n+3)(m+1)$ 個を持つ連立常微分方程式となるが、このまま解くのは非常に複雑である。このため、 r_{ij} に位置する i の異なるバンチ内部の電子同士は相互作用を計算していないことを利用する。すなわち、5.2.2 節で既述したとおり、バンチ内部の電子 r_{ij} に寄与する E_r を計算する際も、ペンシルビームからの E_r を補正して円柱ビームからの E_r を算出している。この時、観測点である r_{ij} が円柱ビームのビーム径 R_j よりも小さくても構わない。このような計算方法であるので、独立変数の数は、あるスライス境界に対応する 4 変数、 r_{ij} 、 R_j 、 z_j 、 β_j が、長手方向に $m+1$ 個 (スライス境界の個数分) あることから、 $4(m+1)$ 個となる。ただし、エミッタンスを求めるには、 r_{ij} の全ての i に対応した位置での電子の軌道を計算する必要があることから、 $i = 1 \dots n$ に対応して n 回計算を繰り返す必要がある。

5.3.1 フリースペースでのビームダイナミクス解析

まず、単純なモデルとしてフリースペースでの電子バンチのトレース結果を示す。初期パラメータは 3.7.2 節で述べたものと同じであり、バンチ幅 3 mm、ビーム径 ϕ 1 mm、電荷量 1 nC/bunch、ビームエネルギーは 1 MeV である。初期電荷分布は、径および長手両方向共に均一分布とし、100 mm のトレースを行う。バンチ分割方法は図 5.5 に示すとおりであり、 $m = 10$ 、 $n = 10$ 、 $z_1 = 0$ および $z_{m+1} = 3$ mm である。バンチの長手方向両端のスライス、図 5.5 に示すように中間部のスライスよりも短く設定している。

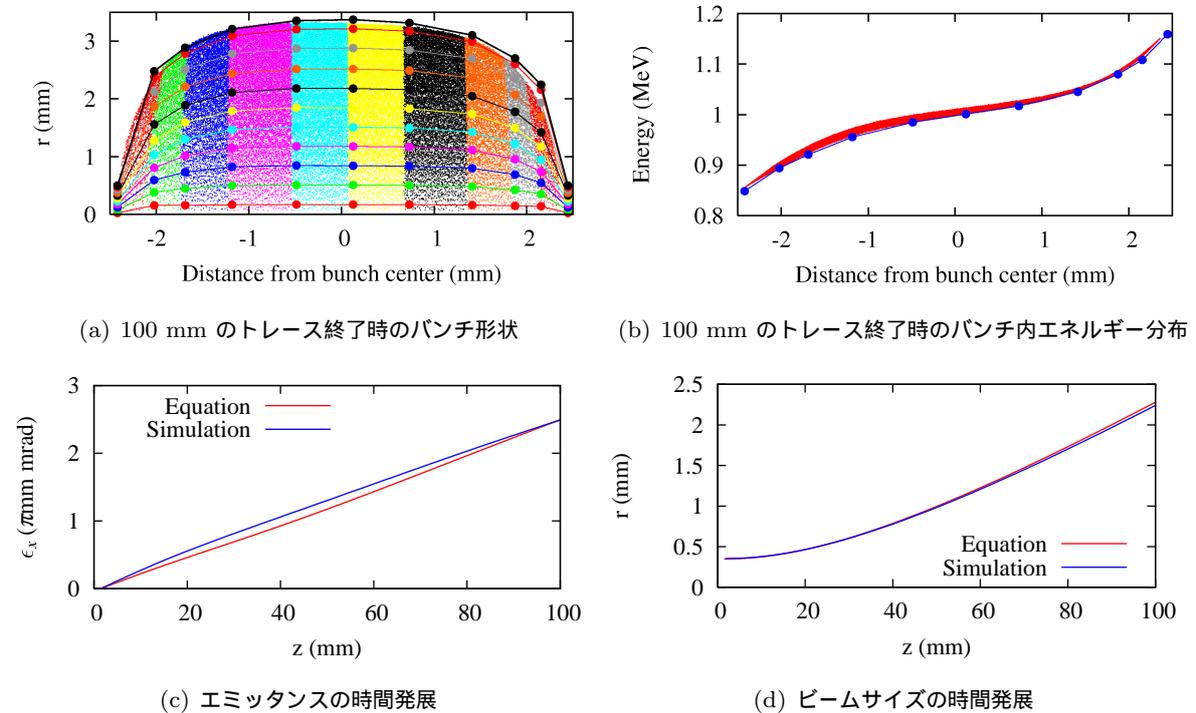


図 5.7 ビームエネルギー 1 MeV、電荷量 1.0 nC の場合の、フリースペースでのトレース結果

図 5.7 に、エンベロープ方程式での結果を、第 3 章で述べたシミュレーションコードで計算した結果と共に比較して示す。横軸は時間ではなく、エンベロープ方程式の結果を $z(t) = \int_0^t \beta(t) c \cdot dt$ によって変換して距離単位で示している。シミュレーションコードでは、初期粒子分布は 3.7.1 節で示した Hammersley's Sequence を用いて生成しており、粒子数は 10 万個である。

図 5.7(a) に、100 mm トレースした後のバンチ形状を示す。各点は多元連立ビームエンベロープ方程式でのトレース用の電子である。微小点は、シミュレーションコードでのマクロ粒子に対応している。これらのマクロ粒子は、多元連立ビームエンベロープ方程式の各スライスに対応して色分けしている。シミュレーションコードは 3 次元であるが、2 次元のエンベロープ方程式と比較するために縦軸は r で示している。

図 5.7(b) には、100 mm トレースした後のバンチ内のエネルギー分布を示している。各点がエ

ンベロープ方程式の結果である。

図 5.7(c) はエミッタンスの時間発展を示している。エミッタンスの定義は次のとおりである。

$$\begin{cases} \epsilon_x \equiv \langle \gamma \rangle \langle \beta \rangle \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x \cdot x' \rangle^2} & (\text{simulation}) \\ \epsilon_x \equiv \frac{1}{2} \langle \gamma \rangle \langle \beta \rangle \sqrt{\langle r^2 \rangle \langle r'^2 \rangle - \langle r \cdot r' \rangle^2} & (\text{equation}) \end{cases} \quad (5.24)$$

図 5.7(d) では、 1σ のビームサイズ、すなわち、 $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ の時間発展を比較している。

図 5.7(a) のバンチ形状において、 $2R/\gamma L$ は 0.46 であり、 $\gamma L \gg 2R$ の条件は十分には満たされていないので、短バンチ、低エネルギーでの空間電荷効果の取り扱いが必要な領域である。これに関わらず、エンベロープ方程式の結果はシミュレーションの結果と大変良く一致している。なお、3.7.2 節で述べたように、シミュレーションでは、粒子数 20 万個の場合、計算時間が 18 時間 37 分かかっているが、多元連立ビームエンベロープ方程式では、わずかに数分である。

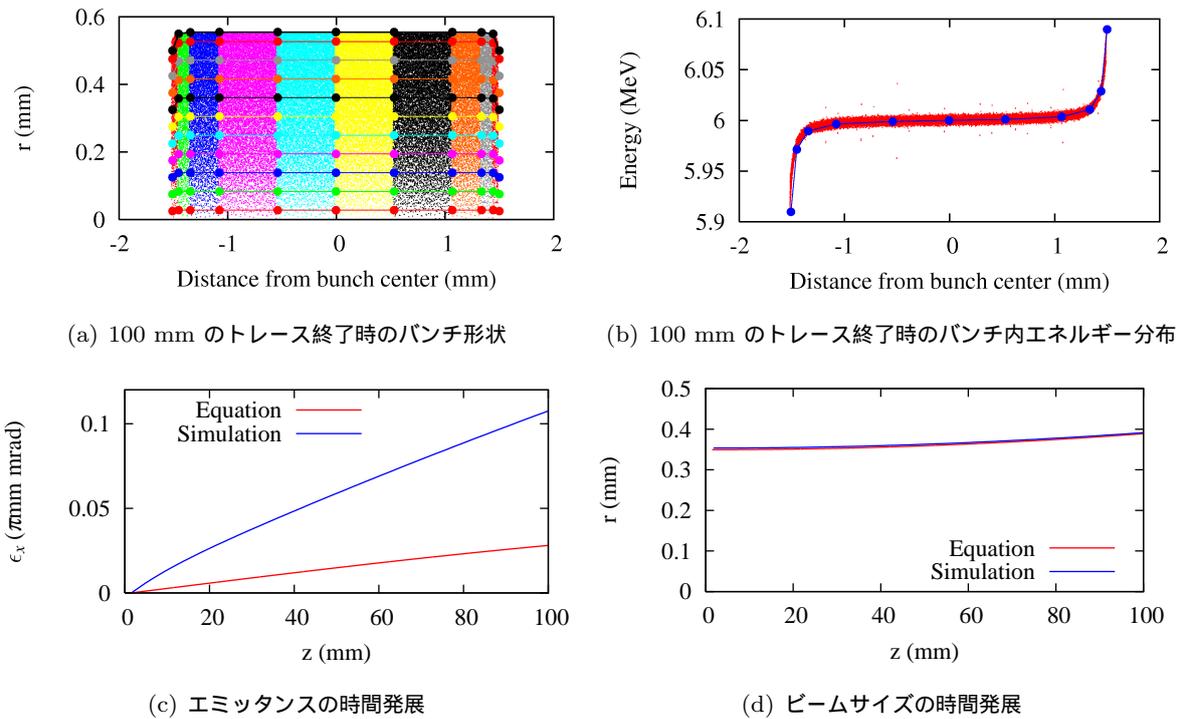


図 5.8 ビームエネルギー 6 MeV、電荷量 1.0 nC の場合の、 freespace でのトレース結果

次に、ビームエネルギー 6 MeV の場合のトレースの結果を、シミュレーションの結果と共に図 5.8 に示す。バンチ形状、エネルギー分布およびビームサイズについては、エンベロープ方程式とシミュレーションの結果は大変良く一致しているが、エミッタンスについては大きく異なる。

図 5.9 に、シミュレーションでのエミッタンスの粒子数依存性を示す。プロットしたのは $z = 100$ mm でのエミッタンスである。縦軸は、粒子数が 10 万個の場合のエミッタンスで規格化しており、図 3.14(a)、図 3.14(b) と同じものである。エネルギー 1 MeV の場合は、粒子数依存

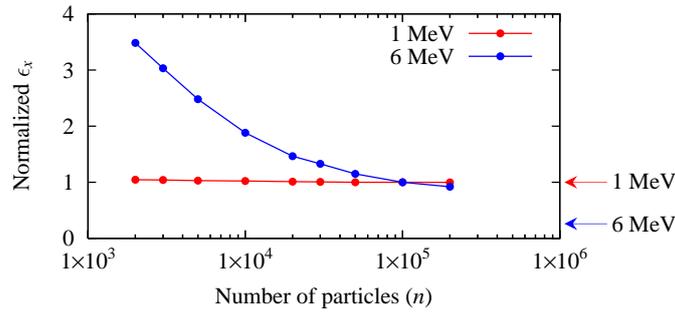


図 5.9 シミュレーションコードでの、エミッタンスの粒子数依存性。エミッタンスは、粒子数 10 万個の場合の値で規格化している。長手方向に 10 分割して計算したエンベロープ方程式でのエミッタンスを比較の為に矢印で示している。

性が少なく、エミッタンス計算値が収斂した先にエンベロープ方程式の結果があると考えられる。これに対し、エネルギー 6MeV の場合は、シミュレーションで収斂すると予想されるエミッタンスと、エンベロープ方程式の結果は大きく異なるように見える。

5.3.2 ビームエネルギー 6 MeV の場合のエミッタンスの分割数依存性

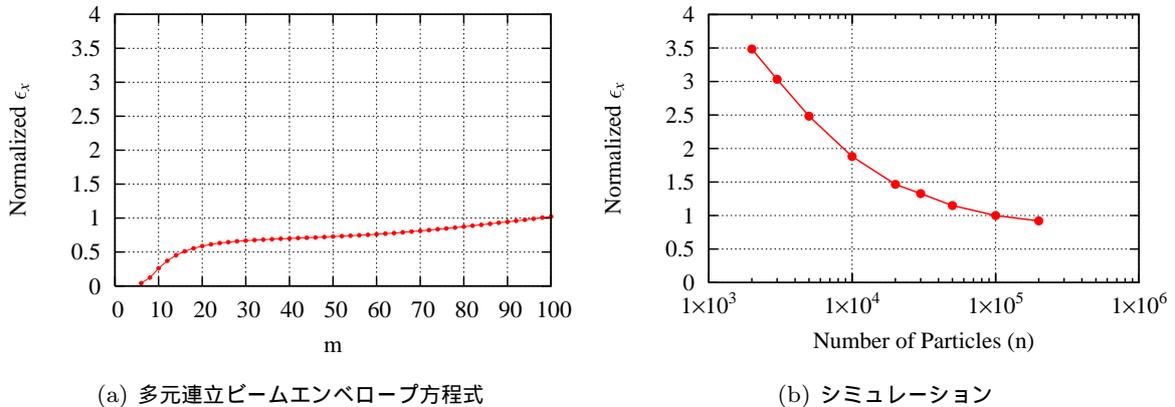


図 5.10 ビームエネルギー 6 MeV の場合の、(a) 多元連立ビームエンベロープ方程式での、エミッタンスの長手方向分割数依存性、および (b) シミュレーションでの、エミッタンスの粒子数依存性。エミッタンスは、粒子数 10 万個のシミュレーションでの値で規格化している。

6 MeV の場合におけるシミュレーションとエンベロープ方程式の結果の差異は、エンベロープ方程式のエミッタンス計算精度に原因がある。図 5.10(a) に、 $z = 100$ mm でのエンベロープ方程式によるエミッタンス計算値の、長手方向分割数 m への依存性を示す。パンチの初期分割方法は、全ての m 値に対し、パンチ中央部については長手方向に等分割している。パンチ両端のスライス幅は、中央部スライス幅の $1/10$ 、端から 2 番目のスライス幅は $1/5$ 、3 番目のスライス幅は $2/5$ に設定している。図 5.10(b) には、シミュレーションでの粒子数依存性を併せて示す。エミッタンスは、エンベロープ方程式、シミュレーション共に、シミュレーションでの粒子数 10 万個の値で

規格化している。 $m = 10$ 付近では、エミッタンスの値が大きく変化しているが、分割数を増やすに従ってエミッタンスは増加し、次第にシミュレーションでエミッタンスが収斂する値に向かって近づく。ただし、図 5.10(a) の例では、エミッタンスはシミュレーションでの収斂値を明らかに超えている。この理由については次節で考察する。

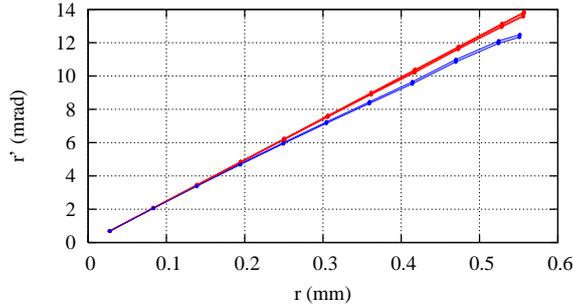
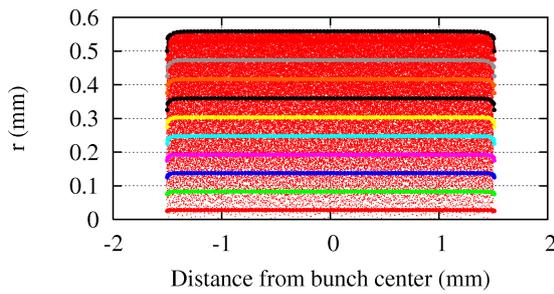
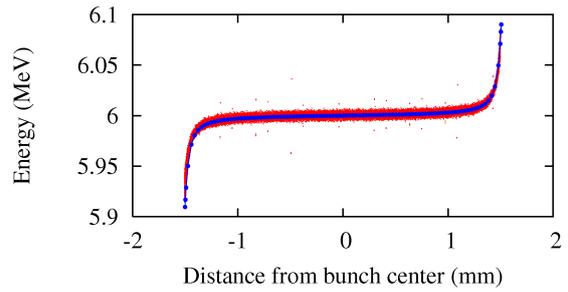


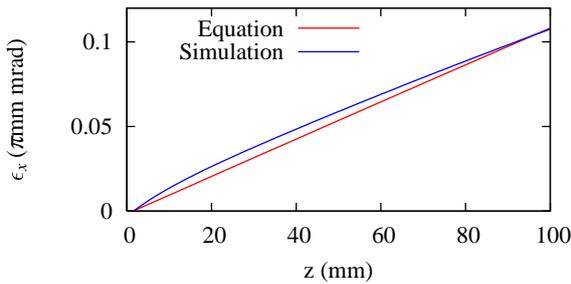
図 5.11 ビームエネルギー 6 MeV、 $m = 10$ の場合の、 $z = 100$ mm での各スライスの位相空間分布



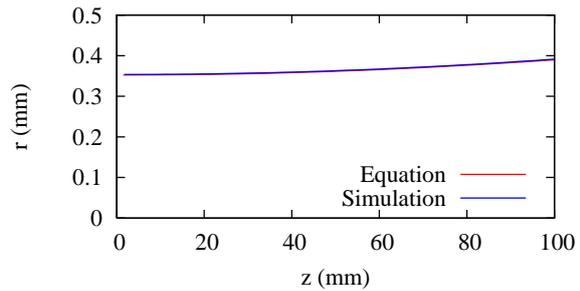
(a) 100 mm のトレース終了時のバンチ形状



(b) 100 mm のトレース終了時のバンチ内エネルギー分布



(c) エミッタンスの時間発展



(d) ビームサイズの時間発展

図 5.12 ビームエネルギー 6 MeV、電荷量 1.0 nC の場合の、 $m = 100$ とした時のフリースペースでのトレース結果

図 5.11 に、 $m = 10$ の場合の、 $z = 100$ mm における各スライスの $r-r'$ 位相空間分布を示す。6 MeV の場合では、相対論的にみてエネルギーが高いために、バンチ両端以外のバンチ中央部分に空間電荷によって誘起される電場は、長手方向成分が非常に小さい。また、バンチ内の初期電荷分布は均一になっているため、その径方向成分はほぼ等しい。この結果、図 5.11 に赤色で示す両

端以外のスライスほぼ直線で重なっており、 $m = 10$ の場合では、青色で示すバンチ両端の2つのスライスのみが、右下がりとなっている。したがって、バンチ中央部のエミッタンスはほとんどゼロに近く、バンチ両端の2つのスライスのみが、バンチ全体のプロジェクションエミッタンスを決定している。このため、 $m = 10$ の場合では明らかに精度不足である。分割数を増やすと、バンチ両端部分のスライス数が増え、複数のスライスが両端部のエミッタンスを決定し、延いてはプロジェクションエミッタンスを決定するようになる。したがって、エミッタンス精度が良くなるとともに値が増大する。

図 5.12 に、 $m = 100$ の場合のトレース結果をシミュレーションの粒子数 10 万個での結果と共に示す。 $m = 10$ の場合 (図 5.8) と比べ、エミッタンスは増加してシミュレーションの値と近くなっている。その他の結果については、 $m = 10$ の場合と比べ、大きな変化は無い。

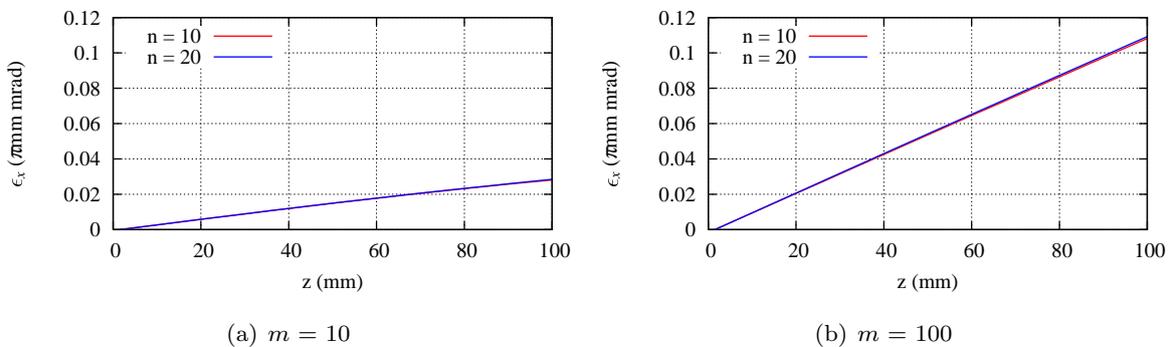


図 5.13 ビームエネルギー 6 MeV の場合のエミッタンスの径方向分割数 n 依存性。 n は 10 と 20 の場合を示している

図 5.13 に、エミッタンスの径方向分割数 n への依存性を示す。 m が 10 と 100 の各々の場合において、 n が 10 と 20 の場合を比較した。 n によるエミッタンスの値の違いはほとんどなく、 $n = 10$ で計算を行っても問題ないことが分かる。

5.3.3 ビームエネルギー 1 MeV の場合のエミッタンスの分割数依存性

ビームエネルギー 1 MeV の場合の $z = 100$ mm でのエミッタンスの長手方向分割数 m への依存性を図 5.14 に示す。 $m = 10$ 付近で少し変化しているものの、エミッタンスの値は長手方向分割数に依存せず、ほぼ一定である。

図 5.15 に、 $m = 10$ の場合の、 $z = 100$ mm における各スライスの $r-r'$ 位相空間分布を示す。エネルギーが 6 MeV の場合と異なり、1 MeV の場合は、バンチ中央部に空間電荷により誘起される電場は長手方向にも広がっており、電場の径方向成分は各スライスによって異なる。このため、図 5.15 のように、バンチ内各スライスの位相空間プロットはばらついており、6 MeV の場合のように、青色で示した両端の2つのスライスのみで全体のプロジェクションエミッタンスを決定するような状況にはない。このために、エミッタンスの長手方向分割数依存性が小さいと考えられる。

ただし、エミッタンスの値は m への依存性が少ないものの、バンチ形状は図 5.16 に示すように

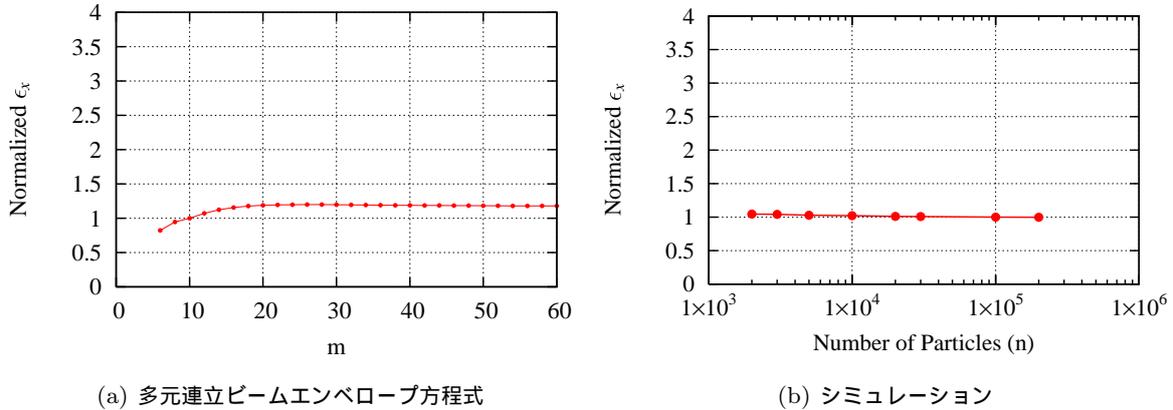


図 5.14 ビームエネルギー 1 MeV の場合の、(a) 多元連立ビームエンベロープ方程式での、エミッタンスの長手方向分割数依存性、および (b) シミュレーションでの、エミッタンスの粒子数依存性。エミッタンスは、粒子数 10 万個のシミュレーションでの値で規格化している。

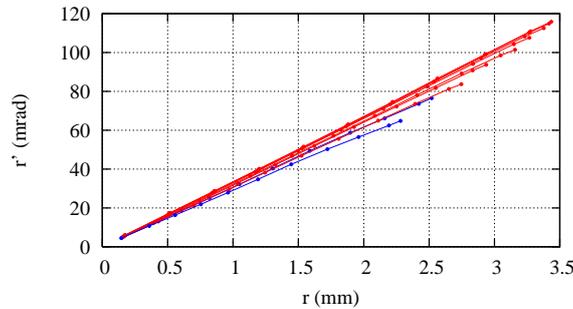


図 5.15 ビームエネルギー 1 MeV、 $m = 10$ の場合の、 $z = 100$ mm での各スライスの位相空間分布

m に伴って変化する。 $m = 10$ 付近ではシミュレーションのバンチ形状とほぼ一致しているが、 m が増加するにしたがって、バンチ両端が切り立つようになり、シミュレーションでのバンチ形状とは異なってくる。シミュレーションにおいては、バンチ形状はほとんど粒子数に依存しないので、 m が増加するにしたがって、エンベロープ方程式での計算精度が悪化してきていると考えられる。

これは、多元連立ビームエンベロープ方程式において、バンチ内各スライスが円柱形状を保ち、歪んではならない、と仮定していることに起因している。すなわち、 m が小さい場合は各スライス幅が大きく、それぞれが実際にもほぼ円柱形状を保っていると考えられるが、分割数を増やしてスライス幅が狭くなると、特にバンチ両端のスライスについては、実際には歪んでしまう。エンベロープ方程式では、ビーム軸上と、それより偏心した位置の長手方向電場 $E_{\xi.sc}$ を同一として取り扱っているが、それらは実際には異なるためである。バンチ両端のスライスが歪まない仮定で計算してしまうと、その結果としてバンチ両端が切り立ってその部分のビームサイズが大きくなる。このために、バンチ両端での径方向電場が実際よりも大きくなり、更にビームサイズが増加する事を繰り返すことによって、バンチ全体でもビームサイズが大きくなってしまふ。

バンチ形状がシミュレーションと一致しなくても、プロジェクションエミッタンスの値自身は一

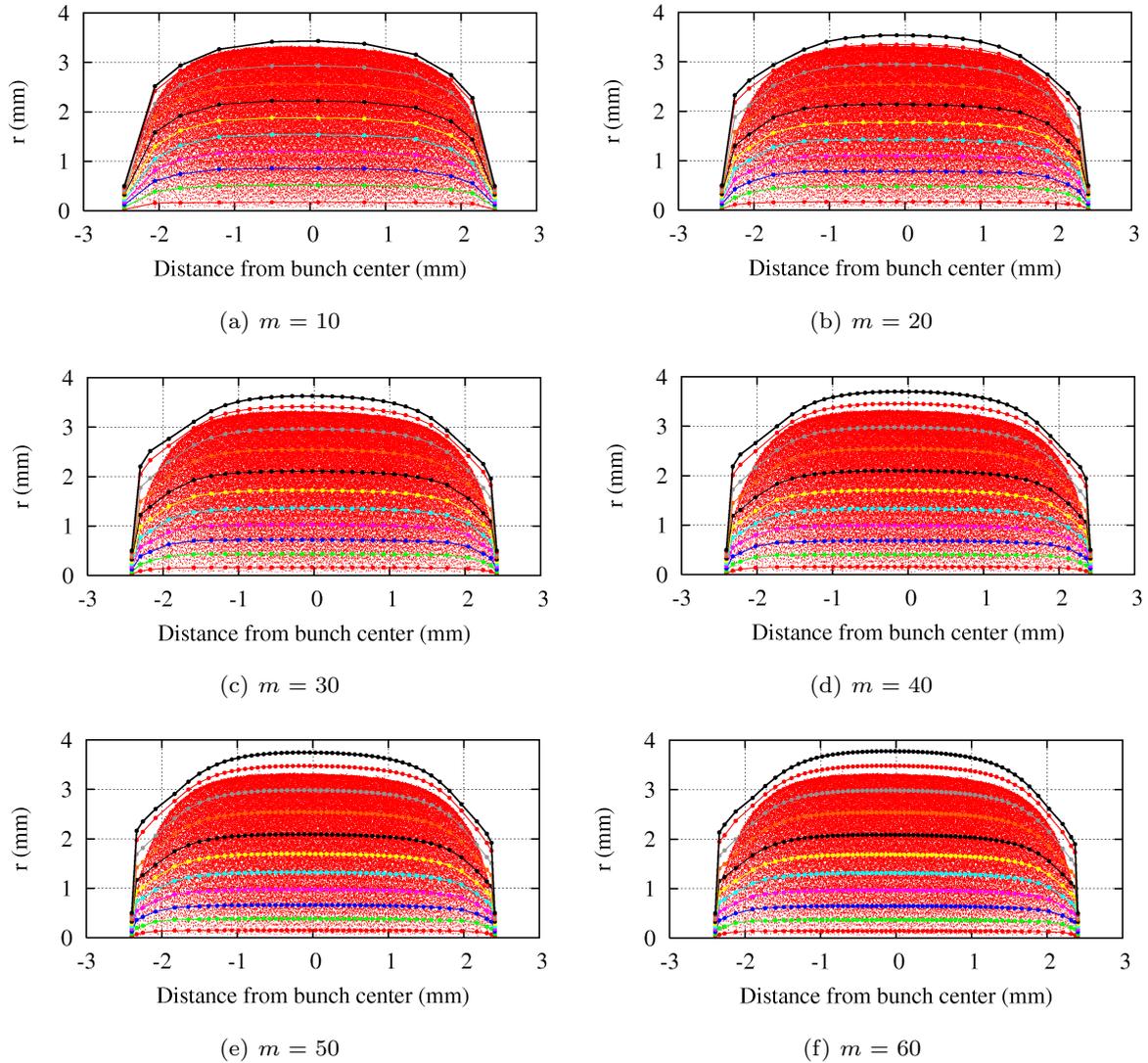


図 5.16 ビームエネルギー 1 MeV の場合の、100 mm トレース終了時バンチ形状の長手方向分割数 m 依存性

定値となり、ほぼ正確に計算できていると考えられる。ただし、 $m = 10$ 付近でのバンチ形状が最もシミュレーションと一致しており、そのため、エミッタンスの計算精度も良いと考えられる。

ビームエネルギー 1 MeV の例では m を増加させるとエミッタンスの値はほぼ一定となるが、5.3.2 節のビームエネルギー 6 MeV の例では m を増加させると、エミッタンスが一定になることはなく、単調増加していった。これは、6 MeV の場合では、プロジェクションエミッタンスを決定づけるのが、ほぼバンチ両端のスライスのみであること、および、バンチ両端のスライスが現実には最も歪み、エンベロープ方程式での形状と異なってくるためであると考えられる。

図 5.17 に、エミッタンスの径方向分割数 n への依存性を示す。 m が 10 と 60 の各々の場合において、 n が 10 と 20 の場合を比較した。エミッタンスの値に違いはほとんどなく、径方向につ

いては、1 MeV の計算例でも $n = 10$ で計算を行って問題ないことが分かる。

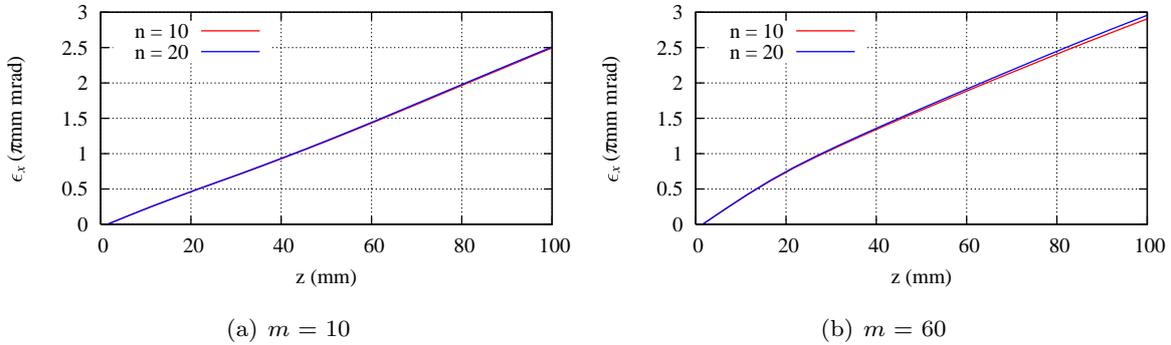


図 5.17 ビームエネルギー 1 MeV の場合のエミッタンスの径方向分割数 n 依存性。 n は 10 と 20 の場合を示している

5.3.4 電子銃空洞内のビームダイナミクス解析

次に、SPring-8 の電子銃空洞内部のビームダイナミクス解析について議論する。計算パラメータは、4.2.3 節と同一である。すなわち、初期レーザースポット径： $\phi 1.4$ mm、初期レーザーパルス幅：20.0 ps、カソード表面最大電界強度 157 MV/m、初期 RF 位相 85 度であり、長手方向、径方向共に電荷密度分布は均一である。カソード位置を $z = 0$ とし、カソード鏡像効果を含んで計算を行う。空洞を出た後は、集束系を用いず freespace とし、 $z = 100$ mm まで計算する。第 4 章でシミュレーションコードでのビームダイナミクス解析の際に仮定したのと同様、初期熱エミッタンスはゼロと仮定している。

図 5.18 に、電荷量 0.1 nC/bunch での計算結果を、シミュレーションコードでの計算結果と比較して示す。電子銃空洞内では、4.2.3 節で示したようにバンチ内各スライスが位相空間内でそれぞれに回転し、その結果全体のプロジェクションエミッタンスが決定されるので、位相空間内での各スライスはばらついている。このため、多元連立エンベロープ方程式の m への依存性は 5.3.3 節で示したエネルギー 1MeV での freespace の場合と同様であると考えられる。したがって、 $m = n = 10$ として計算した。シミュレーションコードでは、5.3.1 節と同様、粒子数 10 万個で計算を行っている。また、2次元のエンベロープ方程式と比較するため、電子銃空洞は RF ポートを省略したビーム軸対称のものを仮定し、その電磁場を用いて計算を行った。エンベロープ方程式とシミュレーションコードの計算結果は、エミッタンスの時間発展の様子を含め、大変良く一致している。

図 5.19 に、エンベロープ方程式の長手方向分割数依存性、およびシミュレーションのエミッタンスの粒子数依存性を示す。シミュレーションでは軸対称空洞で計算しているため、 ϵ_x と ϵ_y はほぼ等しくなっている。エミッタンスは、極小になる位置での値、すなわち、図 4.8(a) の B 点における値について比較した。エンベロープ方程式の長手方向分割数依存性は、エネルギー 1 MeV で freespace を計算した場合と同様、 $m = 10$ では少し変化しているが、 m を増加させるとほぼ

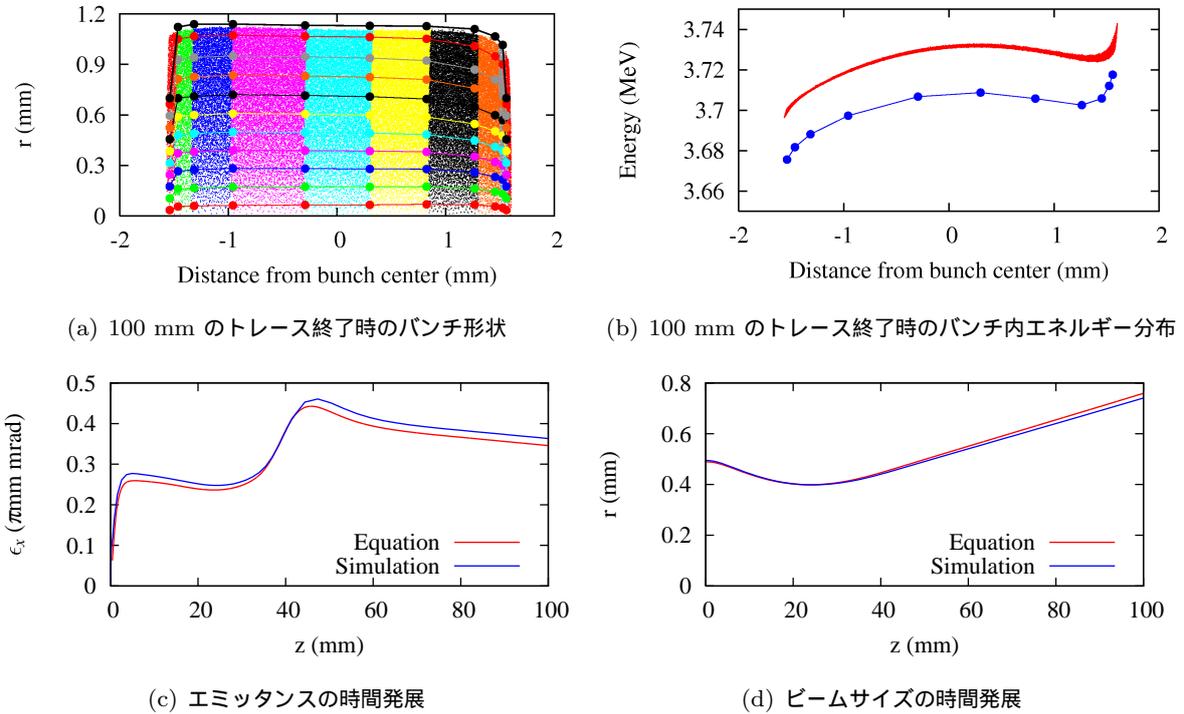


図 5.18 電荷量 0.1 nC/bunch の場合の、電子銃空洞を含むトレース結果

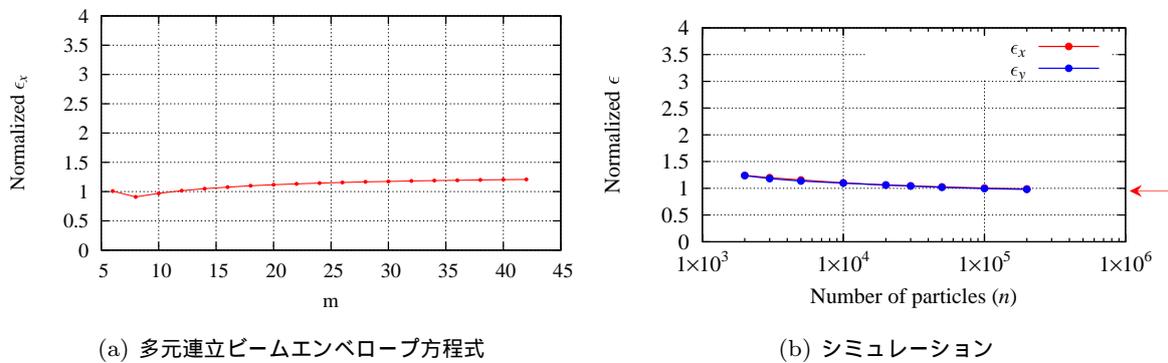


図 5.19 (a) 多元連立ビームエンベロープ方程式での、エミッタンスの長手方向分割数依存性、および (b) シミュレーションでの、エミッタンスの粒子数依存性。エミッタンスは、粒子数 10 万個のシミュレーションでの値で規格化している。(b) の欄外に、比較の為に $m = 10$ で計算したエンベロープ方程式の結果を矢印で示している。

一定値を示すようになる。ただし、図 5.20 に示すように、 $m = 20$ になると、バンチ両端が切り立ってきて、その影響でバンチ全体に渡ってビームサイズが大きく計算されていることから考えると、 $m = 10$ 付近のほうが精度良くエミッタンスを計算できていると考えられる。シミュレーションのエミッタンス値は、図 5.19(b) の右に矢印で示した $m = 10$ でのエンベロープ方程式の計算値に収斂しているように見える。

図 5.21 に、カソード鏡像効果を計算しない場合のエミッタンスの時間発展を、エンベロープ方

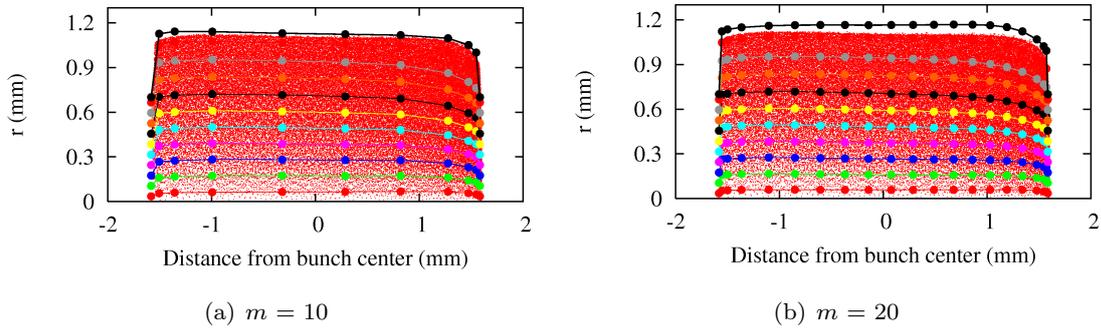


図 5.20 100 mm トレース終了時バンチ形状の長手方向分割数 m 依存性

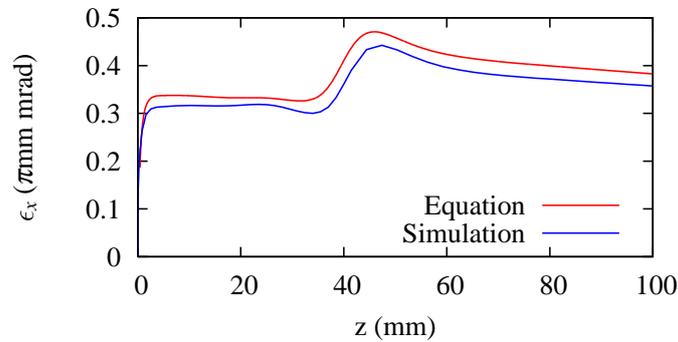


図 5.21 カソード鏡像効果を計算しない場合の、エミッタンスの時間発展。電荷量は 0.1 nC/bunch である。

程式の結果とシミュレーションの結果を比較して示す。この場合もエミッタンス変化の様子は大変良く一致している。

図 5.22 に、電荷量 1.0 nC/bunch の場合の計算結果を示す。電荷量以外のパラメータは図 5.18 と同じであり、カソードでの鏡像効果を含めて計算している。エンベロープ方程式では、 $m = n = 10$ で計算している。エミッタンスとビームサイズの時間発展、およびバンチ内のエネルギー分布は、エンベロープ方程式とシミュレーションの結果が大変良く一致しているが、バンチ形状については一致していない。これは、 freespace の計算において、長手方向分割数 m を増やすとバンチ両端が切り立ってきたのと同様、多元連立ビームエンベロープ方程式でバンチ内各スライスが円柱形状を保つと仮定していることに起因している。シミュレーションコードでの計算結果では各スライスが歪んでおり、また、このような電荷密度の大きい場合には、バンチ中央部のスライスも歪んでいる。ただし、エミッタンスについてはある程度正確に計算できていると考えられ、時間発展の様子もシミュレーションコードの結果とほぼ一致している。

図 5.23 に、エンベロープ方程式とシミュレーションコードで計算したエミッタンスの電荷量依存性を示す。エミッタンスは、電子銃空洞内の極小点の値を示している。シミュレーションコードにおいては、 ϵ_x と ϵ_y がほぼ等しく、グラフに両方記載しても重なってしまうので、 ϵ_x のみプロットした。エンベロープ方程式においては、分割数は $m = n = 10$ とした。両者は、電荷量が 0.4

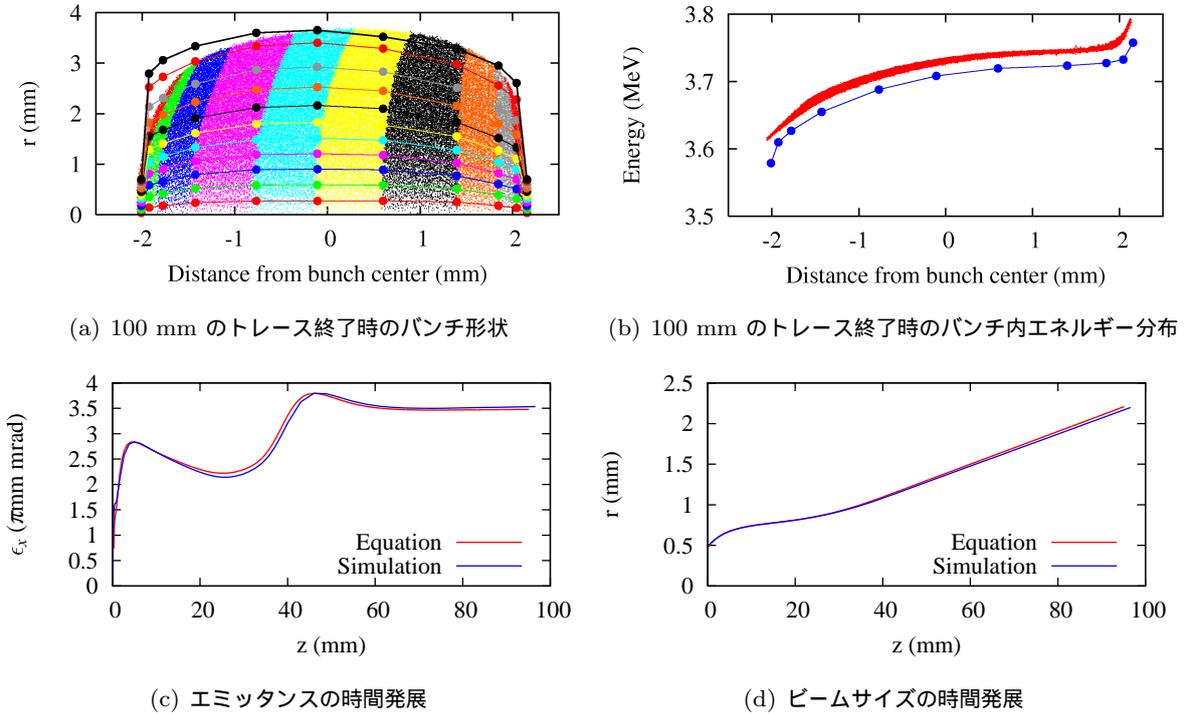


図 5.22 電荷量 1.0 nC/bunch の場合の、電子銃空洞を含むトレース結果

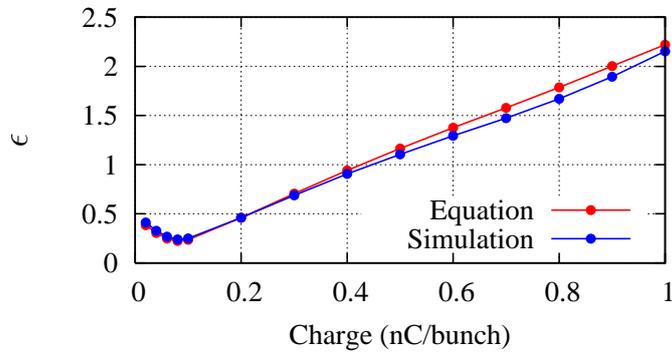


図 5.23 エンベロープ方程式で計算したエミッタンスの電荷量依存性。シミュレーションコードでの計算結果と比較して示している。

nC/bunch 以下ではほぼ等しい。電荷量が 0.1 nC/bunch 以下の領域では、エミッタンスが増加しているが、両者は一致している。これは、電荷密度が非常に低くて電子銃空洞入口においてビームが絞られすぎるため、結果として空間電荷効果が大きく働いてエミッタンスが増加したものである。これに対し、0.5 nC/bunch 以上では、エンベロープ方程式とシミュレーションコードで計算したエミッタンスはわずかに一致しない。

図 5.24 に、電荷量 0.5 nC/bunch での、100 mm トレース終了後のバンチ形状を示す。0.5 nC/bunch で、シミュレーションではバンチ中央部のスライスが少し歪んでおり、図 5.23 の 0.5 nC/bunch 以上でエミッタンスの値が少し一致しなくなるのは、この歪みが原因と考えられる。

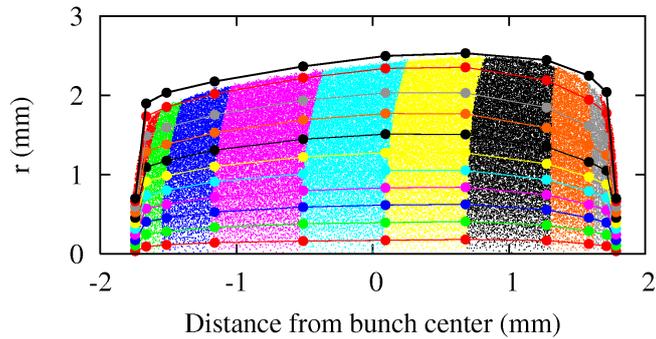


図 5.24 電荷量 0.5 nC/bunch の場合の、100 mm トレース終了後のバンチ形状

5.3.5 カソードでの空間電荷制限効果の解析

4.2.6 節で述べたように、カソードからの引き出し電流は、先にエミッションされた電子によって制限されることがある。4.2.6 節では、レーザースポットサイズ： ϕ 0.8 mm、レーザーパルス幅：5 ps、カソード面最大電界強度：150 MV/m の条件において、実験的にはエミッションの制限は起こらなかったが、シミュレーションコードでは制限が起こり、両者は一致しなかった。銅カソード表面の電子の応答時間がレーザーの 1 周期よりも遅いことから、鏡像効果を考慮しないシミュレーションを行なってみたが、この場合もエミッションが制限され、両者は一致しなかった。ここでは、この計算を、多元連立ビームエンベロープ方程式で行う。

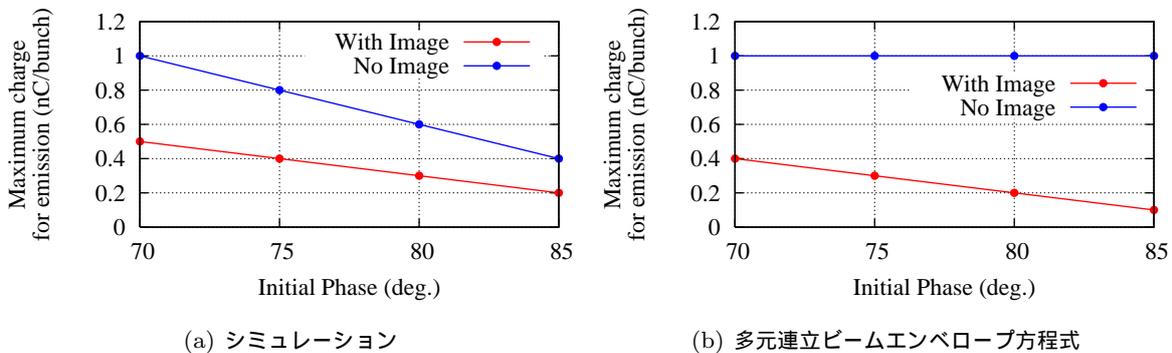


図 5.25 シミュレーションコードおよびエンベロープ方程式で、カソードでのエミッション時に空間電荷制限が起こる範囲

図 5.25 にシミュレーションとエンベロープ方程式の計算結果を示す。エンベロープ方程式では、空間電荷制限によってバンチの一部がエミッションされない場合、エンベロープ方程式自身の解が存在しない。したがって、全てエミッションされたか、否か、しか分からない。このため、図 5.25 には、縦軸に、全ての電子のエミッションが確認された最大の電荷量をプロットした。

図 5.25(b) より、エンベロープ方程式で計算しても、カソードでの鏡像効果を考慮した場合はエミッションの制限が起こる。これに対し、鏡像効果を考慮しない場合は、シミュレーションではエ

ミッション制限が起こるが、エンベロープ方程式では制限が起こらない。これは、実験結果と一致する。この一致がエンベロープ方程式の計算が高精度であるためだとすると、計算結果のみからの考察であるので早計には判断できないが、銅カソードで波長 263 nm のレーザーを用いてエミッションさせた場合、カソード表面の電子の応答時間がレーザーの 1 周期よりも遅いため、鏡像効果を計算する必要は無いものと考えられる。

ただし、本論文ではカソードからのエミッションメカニズムの詳細には立ち入らず、ビームダイナミクス計算方法について述べているので、これ以後の解析でもカソードにおける鏡像効果を含んで計算を行うこととする。

5.3.6 ソレノイドコイルおよび加速管中のビームダイナミクス解析

前節までは、電子銃空洞を出た後はフリースペースを仮定してビームダイナミクス解析を行った。ここでは、電子銃空洞下流のソレノイド磁場、および加速管中のビームダイナミクス解析を行う [4]。

ソレノイドコイル中では、電子は θ 方向に運動量を持つ。しかし、多元連立ビームエンベロープ方程式は $r - z$ の 2 次元である。 θ 方向の運動を r 方向の運動に帰着させる方法として、Busch's theorem [2] がある。これによると、ソレノイドコイルの中心軸上磁場を B_z としたとき、 r の位置にある電子がソレノイド磁場より受ける径方向集束力に関する項、 $\left(\frac{eB_z}{2m_0\gamma}\right)^2 r$ を、径方向のエンベロープ方程式に加えれば、ソレノイド磁場による集束効果は計算可能である。しかし、この方法では、集束点を超えると r の符号が反転してしまう。 $r - z$ の 2 次元座標においては、 $r < 0$ であるとはならないので、符号が反転する場合は r の絶対値をとる必要があるが、これでは符号反転の位置で微分不可能な点が生じてしまい、微分方程式が解けない。したがって、 θ 方向の方程式を追加する方法を採用することとした。

バンチ分割モデル、図 5.5 の各 r_{ij} および R_j に位置する電子の θ 方向位置を、それぞれ θ_{ij} および Θ_j とする。 θ 方向の方程式は空間電荷効果を含まないため、式 (5.2) より次式となる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta_{ij}}{dt^2} &= -\frac{e}{\gamma_j m_0 r_{ij}} \left(\beta_j c B_r - \frac{dr_{ij}}{dt} B_z + \frac{r_{ij} \beta_j}{c} E_z \frac{d\theta_{ij}}{dt} \right) - \frac{2}{r_{ij}} \frac{dr_{ij}}{dt} \frac{d\theta_{ij}}{dt} \\ \frac{d^2\Theta_j}{dt^2} &= -\frac{e}{\gamma_j m_0 R_j} \left(\beta_j c B_r - \frac{dR_j}{dt} B_z + \frac{R_j \beta_j}{c} E_z \frac{d\Theta_j}{dt} \right) - \frac{2}{R_j} \frac{dR_j}{dt} \frac{d\Theta_j}{dt}\end{aligned}\quad (5.25)$$

ここで、 B_r および B_z は、ソレノイド磁場であり、電子銃空洞と同様、データファイルで与えることが可能である。また、 θ 方向の方程式を追加した事により、 r_{ij} および R_j に関する径方向の方程式に、それぞれ次の項を追加する必要がある。

$$\begin{aligned}-\frac{e}{\gamma_j m_0} \cdot r_{ij} \frac{d\theta_{ij}}{dt} B_z + r_{ij} \left(\frac{d\theta_{ij}}{dt} \right)^2 \\ -\frac{e}{\gamma_j m_0} \cdot R_j \frac{d\Theta_j}{dt} B_z + R_j \left(\frac{d\Theta_j}{dt} \right)^2\end{aligned}\quad (5.26)$$

これら θ 方向方程式の追加により、多元連立ビームエンベロープ方程式の独立変数は、 $R_j, r_{ij}, \Theta_j, \theta_{ij}, z_j$ と β_j の $(2n + 4)(m + 1)$ 個となる。

加速管電磁場については、電子銃空洞に比べれば複雑であるが、4.5.1 節で述べた方法を用いてエンベロープ方程式に取り込むことが可能である。

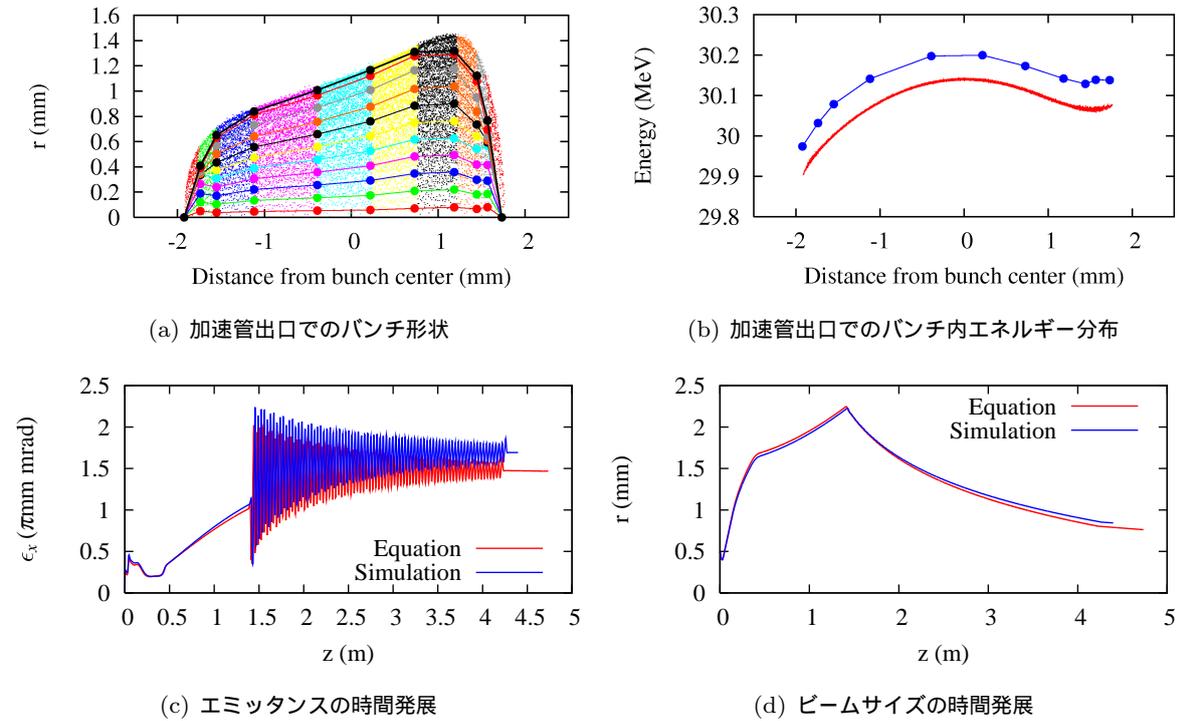


図 5.26 ソレノイド磁場および加速管を含んだトレース結果。電荷量は 0.1 nC/bunch であり、トレース中にビームの集束点が現れないように、ソレノイドの励磁を弱く設定している。

図 5.26 に、電子銃空洞後のソレノイドコイル、および加速管を含んで計算したビームダイナミクスの結果を示す。ソレノイドコイル、および加速管の位置は、第 4 章で示したものと同一である。2次元のエンベロープ方程式と比較するため、シミュレーションにおける加速管電磁場は、RF 導入ポートが無い理想的軸対称形状のものを仮定して算出したものを使用している。電子銃空洞出口でのビームエネルギーは 3.7 MeV であり、加速管出口では 30.0 MeV である。電荷量は、中央部スライスが歪まない状態で計算できる 0.1 nC/bunch に設定した。各パラメータは、レーザービーム径： ϕ 1.4 mm、レーザーパルス幅：20 ps、初期 RF 位相：85 度、カソード面最大電界強度：157.0 MV/m と、これまでの計算と同一に設定しており、カソードでの鏡像効果を含んで計算した。シミュレーションでの粒子数は 20 万個であり、エンベロープ方程式の分割数は $m = n = 10$ である。

図 5.26(d) に示すように、ソレノイドコイル部での集束効果を弱く設定（第 1 コイル：24 A、第 2 コイル：16 A）している。このため、加速管入口 ($z = 1.4$ m) において強力な集束効果が働いても、トレース計算中にビーム集束点が現れない。このような条件下では、ソレノイドコイルでの集

束効果と加速管による加速を含んだ計算においても、エンベロープ方程式とシミュレーションの結果は大変良く一致している。

なお、図 5.26(c) において、第 4 章で示したようにソレノイドコイル部でエミッタンスの値が増大していないのは、シミュレーションにおいて r エミッタンスを計算し、その $1/2$ の値を ϵ_x としてプロットしているからである。ソレノイドコイル部で ϵ_x の値が増大するのは、電子の x 方向と y 方向の運動が互いにカップリングしているからであり、 ϵ_r には、そもそもカップリングの概念がないので、エミッタンスが増大することはない。

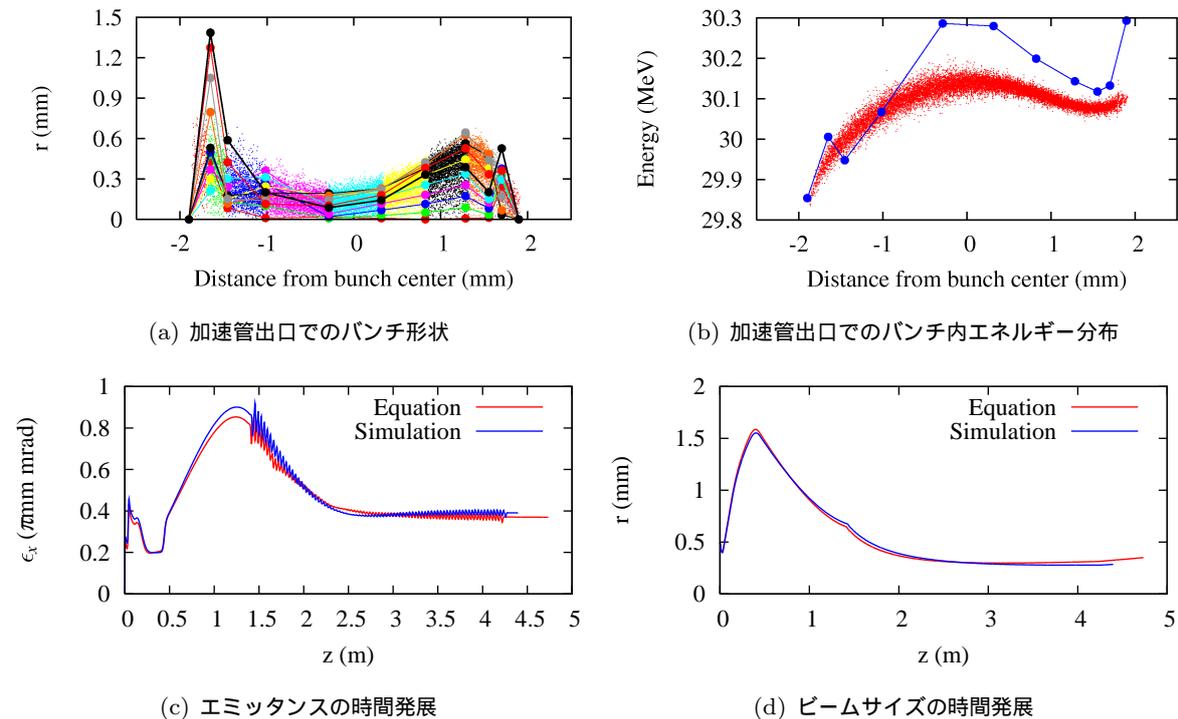


図 5.27 ソレノイド磁場および加速管を含んだトレース結果。電荷量は 0.1 nC/bunch であり、トレース中にビームの集束点が存在する条件での計算である。

以上の結果に対し、加速管内部でビーム集束点が現れる場合の計算結果を図 5.27 に示す。計算パラメータは、ソレノイドコイルでの集束力を強く設定 (第 1 コイル: 24 A 、第 2 コイル: 22 A) した以外は図 5.26 と同一である。

図 5.27(a) にトレース終了後のバンチ形状を示す。加速管内部のビーム集束点を通過した後のバンチ形状であるが、エンベロープ方程式の結果をみると、バンチ内部の各電子を結ぶ線が互いに交差している。これら各線は、図 5.5 に示すように、初期状態では交差することなく内側から順序良くなっていたものである。エンベロープ方程式におけるエミッタンスの計算法は、5.1.5 節に示すとおり、各線が内側から順序良く並んでいることを前提としたものであるので、この状態ではエミッタンスが正確に算出できない。この結果、バンチ内エネルギー分布においても、図 5.27(b) に示すように、エンベロープ方程式とシミュレーションで一致していない。

これらより、多元連立ビームエンベロープ方程式は、ビームが集束点を持つような系には対応できないと結論づけられる。

5.4 まとめ

シミュレーションコードにおける、エミッタンスの粒子数依存性の問題に伴う計算時間増大の問題に対処するため、ビームエンベロープ方程式の手法にシミュレーションの手法を取り入れた、多元連立ビームエンベロープ方程式によるビームダイナミクス解析の新技术を開発した。

まず、ビームエネルギーに依らず適応可能な、短パンチビームに対応した径方向ビームエンベロープ方程式と長手方向ビームエンベロープ方程式を導いた。両者を連立して解くことによって、短パンチ全体のビームエンベロープ方程式を得ることができる。ただし、これではパンチの正確な形状までは計算できない。

次に、パンチを、径方向、および長手方向にメッシュで分割し、その各交点に電子を置いて、各電子に対するエンベロープ方程式を全て連立して解く方法を開発した。径方向のエンベロープ方程式は、空間電荷相互作用を計算する際に、ペンシルビームを仮定しているため、このままでは正確な計算ができない。このため、ペンシルビームが誘起する電磁場を、円柱ビームが誘起する電磁場に変換する補正係数を数値的に与えることにより、高精度で各電子の軌道を計算することに成功した。エミッタンスは、各電子の軌道から算出できる。

freespaceにおけるビームダイナミクスを多元連立ビームエンベロープ方程式とシミュレーションコードでそれぞれ計算し、比較した。エネルギー 1 MeV の場合は両者は良く一致し、エンベロープ方程式で計算したエミッタンスは、シミュレーションコードで粒子数を増加させていった場合に収斂するだろう値に近い値を示した。エネルギー 6 MeV の場合はシミュレーションコードの収斂値に一致しなかった。これは、エミッタンス計算値に長手方向分割数依存性があるためである。6 MeV のようにエネルギーが相対論的に高い場合、パンチ中央部では各スライスが位相空間上で重なり、エミッタンスがほとんどゼロに近くなる。これに対し、パンチ両端部のスライスは他のスライスと重ならないために、この部分のみでエミッタンスが決定される。このため、分割数が少ないと精度不足となる。これに対し、分割数を増やすと、パンチ両端のスライスは実際には歪む。しかし、各スライスが歪まないことがエンベロープ方程式導出の仮定であるため、エミッタンスを決定する部分の形状が正確に計算できない。このため、分割数を増やしすぎても適正なエミッタンスが算出できない。したがって、分割数には適正值が存在し、パンチ両端形状がシミュレーションの結果と一致するように選べば良い。この意味では、エンベロープ方程式はシミュレーションと相互補完しながら使用する必要がある。なお、エンベロープ方程式の計算時間はシミュレーションと比べて圧倒的に短いため、十分にシミュレーションを補完できる。

多元連立ビームエンベロープ方程式を、RF 電子銃装置に適用した。電子銃空洞内のみの計算の場合、電荷量が少ない場合には高精度の計算ができた。0.4 nC/bunch を超える場合、シミュレーションでは、長手方向に区切ったパンチ内のスライスがパンチ中央部も含めて歪んでしまうのに対し、エンベロープ方程式では各スライスが歪まないため、パンチ形状の差異とともにエミッタ

ンスにも差異が生じた。このため、SPring-8 の RF 電子銃装置に対する適用可能範囲は、0.4 nC/bunch 以下であった。論文 [1] では、BNL 型電子銃空胴に対する適用範囲を論じたが、こちらでは空胴出口のエネルギーが SPring-8 の場合よりも高いことから 0.5 nC/bunch 以下と評価した。この電荷量は昨今の第 4 世代放射光源で運用されている標準的電荷量に一致するため、それらを十分な精度で計算することが可能である。

多元連立ビームエンベロープ方程式を用いると、カソードでの鏡像効果も精度良く計算できることから、4.2.6 節で示した空間電荷制限領域でのエミッションをエンベロープ方程式でも計算した。この結果、カソード鏡像を考慮しない場合においては、多元連立ビームエンベロープ方程式の結果は実験結果と一致した。シミュレーションコードでは、2 粒子が近づきすぎた場合の処理方法に問題があり、カソード近傍での計算精度の評価ができなかった。これに対し、空間電荷効果を点電荷からではなく、体積を持った各スライスから計算できるエンベロープ方程式を用いることにより、この問題を解決できた可能性が考えられる。ただし、エミッションの詳細なメカニズムについては別途検討する必要がある。

電子銃空胴後の、ソレノイドコイルと加速管を含んだ系でのビームダイナミクス計算も行った。ソレノイドコイルの励磁量を抑えて、計算区間途中でビームの集束点を設けない場合、高精度に計算ができた。しかし、区間途中で集束点を設けた場合、バンチ内部のメッシュが入れ子になり、エミッタンスが精度良く計算できないことが分かった。したがって、多元連立ビームエンベロープ方程式は、途中でビーム集束点がある系には適用できない。

従来のエンベロープ方程式を用いた解析的手法では、一般にエミッタンス計算精度はシミュレーションコードに劣る。この点において、多元連立ビームエンベロープ方程式の手法は、一線画するものである。

参考文献

- [1] A. Mizuno, H. Dewa, T. Taniuchi, H. Tomizawa, H. Hanaki and E. Hotta, “Multiple beam envelope equations for electron injectors using a bunch segmentation model”, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **15**, 064201 (2012).
- [2] J.D. Lawson, *The Physics of Charged-Particle Beam*, Oxford Science Publications, New York (1988).
- [3] <http://www.octave.org>
- [4] A. Mizuno, H. Dewa, T. Taniuchi, H. Tomizawa, H. Hanaki and E. Hotta, “Beam dynamics calculations for the SPring-8 photoinjector system using multiple beam envelope equations”, in *Proceedings of FEL2012, Nara, Japan*, (2012), p.157.

第 6 章

多元連立ビームエンベロープ方程式を用いたスライスエミッタンス減少メカニズムの解析

前章までに述べたような低エミッタンス電子銃システムにおいて、一種の空間電荷によって、スライスエミッタンスが減少する可能性のあることを新たに発見した [1]。この現象は、極低エミッタンスビームを扱う現象であることから、解析には高精度な計算手法が必須である。本章では、多元連立ビームエンベロープ方程式を用いてこの現象の解析を行う。

本論文で取り扱っている トランスバース rms エミッタンスは、4.4.1 節で述べたエミッタンス補償の原理によって減少することがあることは良く知られている。これは、バンチ内各スライスの位相空間内での実軸に対する角度が全て一致した場合、プロジェクションエミッタンスが極小になるという事であり、スライス自身のエミッタンスが減少する、ということではない。本章で指摘する現象は、スライスエミッタンスそのものが空間電荷効果によって減少する、という事象である。

6.2.1 節で述べるように、本章で扱うスライスエミッタンスは、 r に対し線形な力が電子に加わる場合は保存されることが数学的に示されているが、非線形な力が加わる場合は保存されない。この場合、一般的にはスライスエミッタンスは増加することが多いが、減少しても数学的に矛盾はない。このような現象がカソード直後で実際に起こる可能性があることを、以下に示す。

6.1 理想的な DC 連続ビームでのエミッタンスの減少

まずはじめに、径方向に一様分布した電子ビームが、理想的な平面カソードから DC 電場で連続的に一様に引き出される際のエミッタンスの時間発展を図 6.1 に示す。計算の初期条件は表 6.1 に示す。

初期熱エミッタンスを 0 と仮定した電子ビームを、完全導体である平坦な理想的カソード ($z = 0$ m) から連続的にエミッションさせる。エミッションはカソードの鏡像効果を含んで計算を行い、ビームエミッション後は一様電場 E_z によって連続的に加速する。

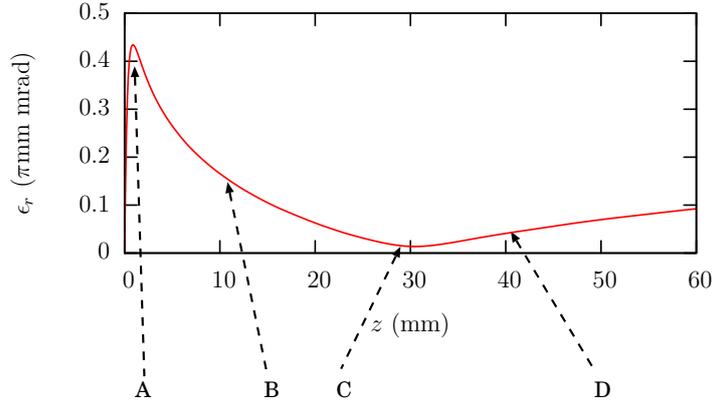


図 6.1 理想的な DC 連続ビームにおけるエミッタンスの減少

表 6.1 図 6.1 に示す計算の初期条件

カソードからの引き出し電流	40 A/cm ²
初期ビームスポット径	φ 2.0 mm uniform
ビーム引き出し電界強度, E_z	5.0 MV/m

この現象は、京都大学エネルギー理工学研究所の増田開氏によって発見され、有限要素法によってマクスウェル方程式を解く 2 次元コード、KUAD2 [2] を用いて計算されたものである。このコードは、粒子コードと違い広範囲の系を計算するのは苦手であるが、カソード近傍のような狭い系に限ると、連続ビームを鏡像効果を含めて精度良く計算可能である。

図 6.1 でのエミッタンスは次のように定義したものである。

$$\epsilon_r(z) = \sqrt{\langle r^2 \rangle_z \langle (\gamma\beta r')^2 \rangle_z - \langle \gamma\beta r r' \rangle_z^2}, \quad (6.1)$$

ここで、 $\langle \rangle_z$ は、各パラメータを、点 z を通過した時点の値で平均をとることを表す。したがって、この定義はプロジェクションエミッタンスというよりも、スライスエミッタンスの定義に近いものである。エミッタンスは、カソード直後で急激に上昇し、A 点に達した後、減少している。C 点 ($z = 30$ mm) で極小値を示し、その後は上昇する。

このようなエミッタンスの減少は、既に文献 [3, 4] により報告されている。ただし、文献では、インダクションライナックでのエミッタンスの大きな電子ビームに対するエミッタンス減少について示しており、後で本章の図 6.6 で示すような現象論的な記述はあるものの、そのメカニズムに対する解析的な説明は無い。

これに対し、本章では極低エミッタンスビームにおけるエミッタンス減少について取り扱っており、以下にそのメカニズムを述べる。

6.2 エミッタンス減少のメカニズム

6.2.1 トランスバース rms エミッタンスの保存

まず、エミッタンス保存の原理について述べる。6.2.2 節で述べる理由により、 x エミッタンス、または y エミッタンスの代わりに $r - r'$ 位相空間のエミッタンスを用いて説明する。

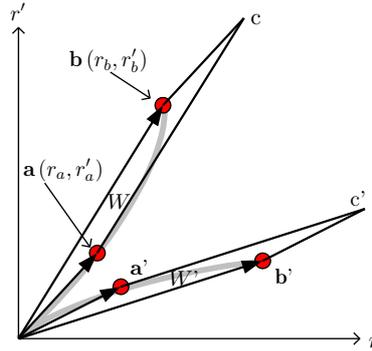


図 6.2 エミッタンス保存の概念図

図 6.2 に示すように、灰色曲線中の任意の 2 つの電子 a および b が、時刻 t に $r - r'$ 位相空間の図 6.2 に示す位置に存在し、ある時間後に、それぞれ a' および b' に移動するものとする。ベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} で形成される平行四辺形の面積を W とすると、 W の増減がエミッタンスの増減を表すことは自明である。なお、 W 、および式 (6.1) を算出する場合のベクトルの起点は、円柱軸対称ビームを仮定していることから、常に $r = r' = 0$ である。この条件において、 W は次の様に表される。

$$W = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = r_a r'_b - r'_a r_b \quad (6.2)$$

したがって、 W の微分は次のようになる。

$$\frac{dW(t)}{ds} = r_a r''_b - r''_a r_b \quad (6.3)$$

ここで、 s はビーム進行軸である。電子に r に対して線形の力が作用する場合は、 $r'' = Kr$ が成り立つので、この場合は式 (6.3) はゼロとなる。したがって、エミッタンスは保存される。なお、ここで述べるエミッタンスは原点を起点とした粒子分布のことであり、本論文で記述している rms エミッタンスである。粒子が位相空間内に占める面積そのものは、力が線形非線形に関わらず保存される。

6.2.2 エミッタンスの増減

$r'' \neq Kr$ の場合、エミッタンスは保存されない。この時、 W を正とすると、 $dW/ds > 0$ であればエミッタンスは増大し、 $dW/ds < 0$ であればエミッタンスは減少する。したがって、式 (6.2) の定義から、 W を正とするにはベクトル \mathbf{a} と r 軸が成す角度 θ_a が、常に $\theta_a < \theta_b$ となるようにベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} の位置関係を選ぶ必要がある。

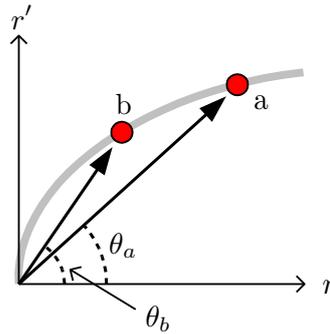


図 6.3 $r_a > r_b$ の場合の位相空間プロット

まず、図 6.3 に、 $r_a > r_b$ の場合の位相空間プロットを示す。電子ビームは、初期熱エミッタンスがゼロで軸対称な理想的ビームを考えているので、図 6.3 に示す様に、位相空間プロットは面積を持たない灰色の曲線となる。また、 $\theta_a < \theta_b$ であるので、この曲線は上に凸となる。このような条件下で、 K は一定ではないとし、 $r'' \equiv K(r)r$ とおく。この場合、位相空間での上凸の曲線は、電子が、 r 方向分布が $dK(r)/dr < 0$ で表される力を受けた結果生成されたものである。ビームの進行に伴い、通常は空間電荷効果によって電子密度の r 方向分布が r 方向に拡散されるが、この場合の位相空間プロットは、図 6.3 の様な上に凸の曲線となる。

この時、図 6.3 の電子 a と b にある力が加わった場合を考え、その力をそれぞれ

$$\begin{cases} r''_a \equiv K_a r_a \\ r''_b \equiv K_b r_b \end{cases} \quad (6.4)$$

で表す。この場合、 dW/ds は次のようになる。

$$\frac{dW}{ds} = (K_b - K_a) r_a r_b \quad (6.5)$$

したがって、 $K_b > K_a$ であれば、エミッタンスは増加する。これは、 $dK(r)/dr < 0$ を満たす力が電子に連続的に作用している状態を示しており、通常の空間電荷効果を伴ったビーム進行状態に当たる。

これに対し、 $K_b < K_a$ であれば、エミッタンスは減少する。この場合は、 $r_a > r_b$ であることが

ら、 $dK(r)/dr > 0$ を満たす力が電子に作用する場合であり、通常の freespace でのビーム進行状況においては、あり得ないと考えられる。

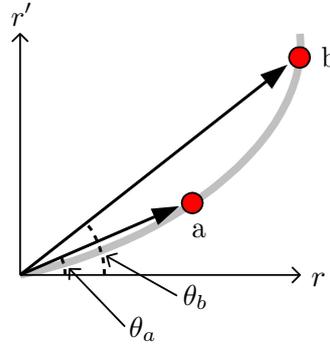


図 6.4 $r_a < r_b$ の場合の位相空間プロット

次に、図 6.4 に $r_a < r_b$ の場合を示す。この場合は、位相空間プロットは下に凸の曲線となる。この曲線は、電子が、 r 方向分布が $dK(r)/dr > 0$ で表される力を受けた結果生成されたものである。通常この形は、完全導体のカソード直後において鏡像効果によって実現される。なぜなら、図 6.5 に示すように、カソード表面では、ビームが誘起する電場の等電位線は表面に平行であるが、カソードから離れるに従って歪んでくる。したがって、カソード近傍において、電場の r 成分はビームの r 方向外側ほど強くなる。その結果、 $dK(r)/dr > 0$ を満たす力がビームに作用し、位相空間プロットは下に凸となる。図 6.1 はカソードからの連続エミッションを計算しており、この場合に当てはまる。

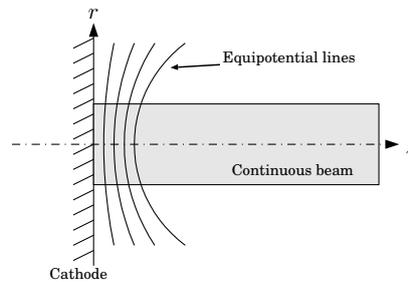


図 6.5 カソード付近の等電位線の概念図

図 6.6 に、図 6.1 で示した計算において、カソード直近 ($z = 0.1$ mm)、および点 A、B、C、D での位相空間プロットと r 方向電子密度分布を示す。カソード直近では電子密度分布は r 方向に均一となっているが、位相空間プロットは下に凸となっている。その後、均一だった r 方向電子密度分布は点 A (エミッタンス極大点) でビームの周囲 ($r = 1$ mm 付近) が極端に右下がりとなっている。これは $d(K)/dr > 0$ を満たすカソード鏡像効果に起因する力が電子に引き続き作用しているためである。点 A において位相空間プロットは図 6.6(b) に示すように下に凸、すなわち $r_a < r_b$ となっているため、ビームに作用する $d(K)/dr > 0$ を満たす力は $K_b > K_a$ で表される。式 (6.5)

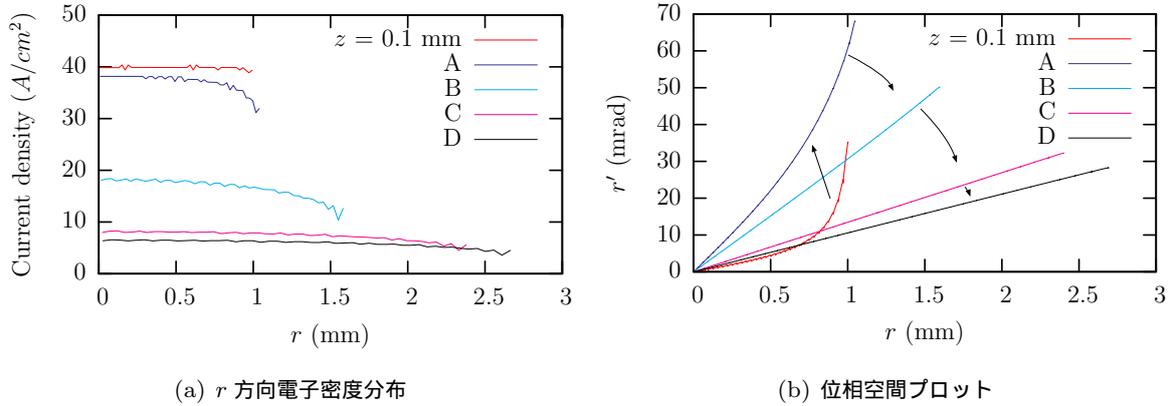


図 6.6 図 6.1 の各点における r 方向電子密度分布と位相空間プロット

は $r_b < r_a$ の場合と同様に成立するので、カソード直後から点 A までは、図 6.1 に示すように一旦エミッタンスが増加する。

点 A を過ぎるとカソード鏡像効果が小さくなり、点 B では r 方向電子密度分布は空間電荷効果のためにビーム中心から右下がりとなってくる。この状態では、 $d(K)/dr < 0$ を満たす力が電子に作用している。一方、位相空間プロットは下に凸を保っているので、 $r_a < r_b$ の状態を維持している。このため、電子に作用している力は $K_b < K_a$ で表される。したがって、エミッタンスは減少に転じる。ただし、点 B での位相空間プロットの曲がりは点 A と比べて緩やかになってくる。

エミッタンスは点 A 以降、減少し続けるが、点 C で極小となる。その時の位相空間プロットは直線となる。点 C 以降はエミッタンスが増加に転じる。このとき、点 D では引き続き空間電荷効果によって $d(K)/dr < 0$ を満たす力が電子に作用しており、電子密度分布は r 方向に拡散している。一方、位相空間プロットは上に凸に転じている。このため、電子に作用する力は $K_b > K_a$ で表されるので、エミッタンスが増加する。ただし、図 6.6(b) で点 B、C、D の位相空間プロットの曲がりは微妙で、どちらに凸か見分けがつかない。

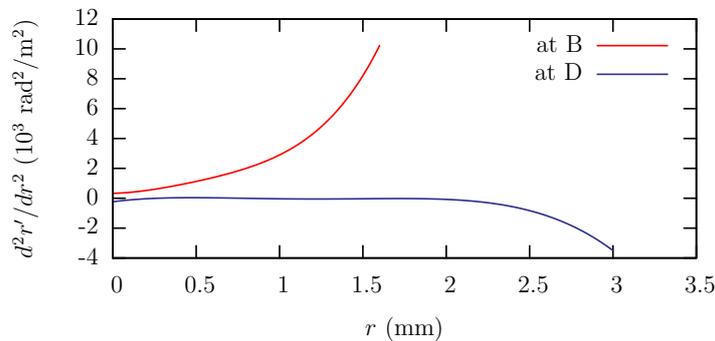


図 6.7 点 B と点 D における r' の r による 2 階微分

図 6.7 に、点 B と点 D において、 r' を r で 2 階微分したものを示す。点 B では、2 階微分が正となっており、位相空間プロットが下に凸となっているが、点 D では位相空間プロットが上に凸

に変化しているのがはっきり分かる。

なお、もし r エミッタンスの代わりに x 、または y エミッタンスを用いて議論すると、図 6.3、6.4 の灰色の一次元曲線は図 6.8 のような 2 次元の面積を持つ領域に対応する。さらに、この領域の形だけでは、上に凸か下に凸かの区別ができない。したがって、本節の議論は $r - r'$ 位相空間で行った。 x と y のカップリングが無いとすれば、 $\epsilon_x = 1/2 \cdot \epsilon_r$ であり、簡単に相互の変換が可能である。

また、初期熱エミッタンスは、 $r - r'$ 位相空間でプロットしても面積を持つ。したがって、本節で述べたようなメカニズムでは、初期熱エミッタンスが減少することは無い。

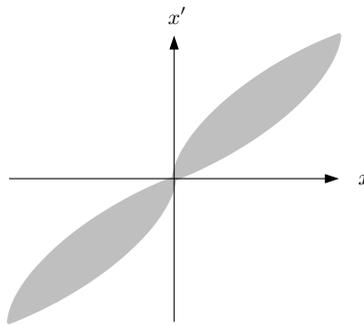


図 6.8 図 6.3、6.4 に示す $r - r'$ 位相空間プロットに対応する $x - x'$ 位相空間プロットの概念図

6.3 実際の電子銃でのエミッタンスの減少

ここでは、実際の電子銃においても、エミッタンスの減少が起こり得ることを、熱電子銃、RF 電子銃それぞれについて示す。

6.3.1 SCSS の熱電子銃におけるエミッタンスの減少

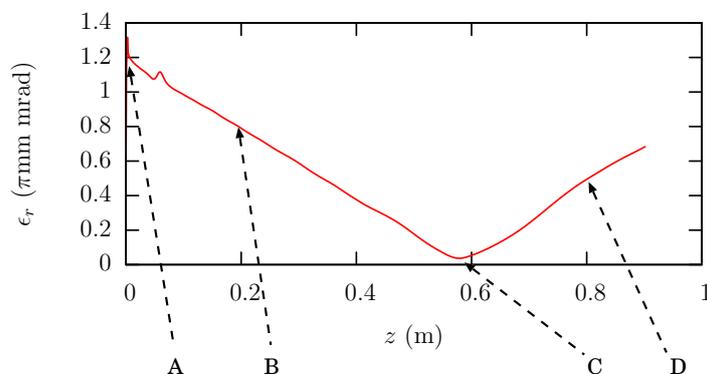


図 6.9 SCSS の熱電子銃におけるエミッタンス減少

表 6.2 図 6.9 に示す計算の初期条件

カソードからの引き出し電流	1.0 A
初期ビームスポットサイズ	ϕ 3.0 mm uniform
カソード-アノード間の電圧	500.0 kV
初期熱エミッタンス	0 mrad

SCSS の熱電子銃 [5] でのエミッタンスの時間発展を図 6.9 に示す。KUAD2 を用いて計算したものである。計算条件を、表 6.2 に示す。実際のビームパルス幅は $3.0 \mu\text{s}$ であるが、ビームサイズに対するパルス幅が十分に長いので、シミュレーションでは連続ビームとして計算している。計算では、完全導体のカソードが $z = 0$ にあるとし、カソード鏡像効果を含めて、連続ビームをカソード-アノード間に加えた DC 電場によって引き出している。 $z = 50 \text{ mm}$ にあるアノードを通過した後は、フリースペース中を $z = 0.9 \text{ m}$ までトラッキングしている。アノードの位置に対応して小さな突起があるものの、エミッタンスが減少しているのが明確に分かる。点 C でエミッタンスは極小となり、その後は増加に転じている。

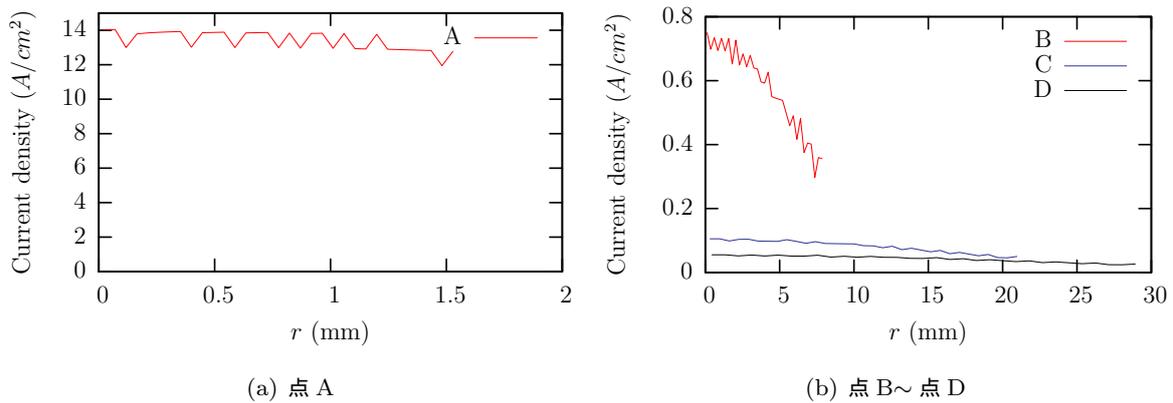
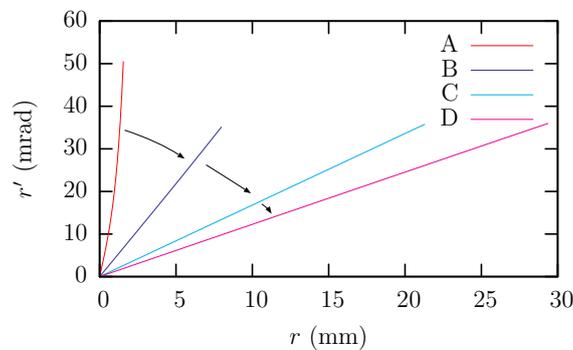
図 6.10 図 6.9 の各点における r 方向電子密度分布

図 6.11 図 6.9 の各点における位相空間プロット

図 6.10 に、図 6.9 の各点における r 方向電子密度分布を示す。カソード直後でエミッタンス極大を示す点 A とその他の点では、縦軸のスケールが大きく異なるので、別々のグラフとした。DC 連続ビームの場合と同様、エミッタンスが極大を示す点 A までは $d(K)/dr > 0$ で表されるカソード鏡像効果が電子に働いており、電子密度分布はビーム周囲の $r = 1.5$ mm 付近で右下がりとなっている。その後は、 $d(K)/dr < 0$ で表される空間電荷効果が主に働く様になり、図 6.10(b) に示すように、電子密度分布が中心部から r 方向に拡散している。図 6.11 に、各点での位相空間プロットを示す。点 A で下に凸の曲がりがあり、徐々にゆるかになる様子が確認できる。

したがって、6.2.1 節で述べた DC 連続ビームのものと同じのメカニズムによって、点 C まではエミッタンスが減少し、その後上昇に転じていると考えられる。

SCSS において、 $z = 0.5$ m でのノーマライズド x エミッタンスをダブルスリット法で測定した結果が文献 [5] で報告されている。それによると、初期の熱エミッタンス 0.4π mm mrad を含んだ 90 % コアエミッタンスが 0.6π mm mrad である。これに対し、図 6.9 に示すように、計算では熱エミッタンスを含まない値として $z = 0.5$ m で 0.3π mm mrad である。これは r エミッタンスであるので、 x エミッタンスに換算すると 0.15π mm mrad である。これに熱エミッタンスを加えると、2 乗和のルートから 0.43π mm mrad となる。これは、実測値よりもわずかに小さな値であり、計算結果は、測定値を大凡再現できていると考えられる。ただし、この比較は、詳細な実験パラメータや実験エラー等を考慮しているものではない。

6.3.2 SPring-8 の RF 電子銃空洞におけるエミッタンスの減少

次の 2 節では、RF 電子銃空洞における短パンチビームのエミッタンス減少について記述する。したがって、エミッタンスは、第 5 章までの定義と同様、プロジェクションエミッタンスとして扱う。すなわち、

$$\epsilon_r(\langle z \rangle_t) = \langle \gamma \rangle_t \langle \beta \rangle_t \sqrt{\langle r^2 \rangle_t \langle r'^2 \rangle_t - \langle r \cdot r' \rangle_t^2} \quad (6.6)$$

である。 $\langle \rangle_t$ は、時刻 t におけるパンチ全体の平均を表す。

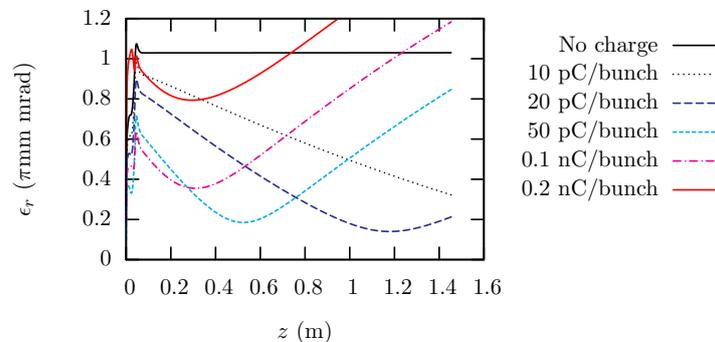


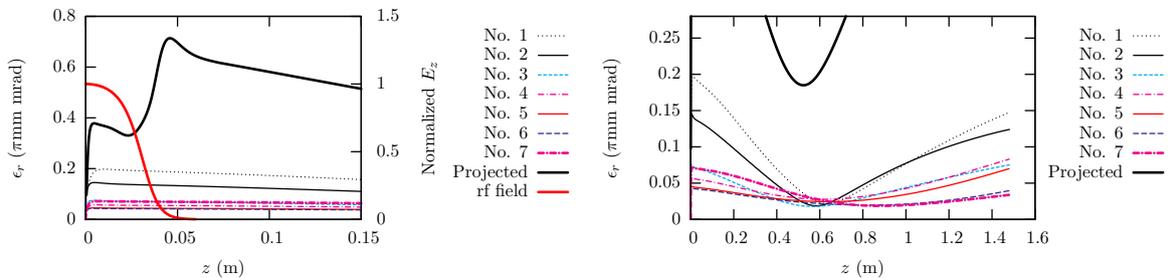
図 6.12 SPring-8 の RF 電子銃空洞におけるエミッタンス減少

表 6.3 図 6.12 に示す計算の初期条件

レーザーパルス幅	20 ps uniform
レーザースポットサイズ	ϕ 1.2 mm uniform
カソード面最大電界強度	157.0 MV/m
電子銃空洞出口でのビームエネルギー	3.6 MeV
初期 RF 位相	cos 85 deg.
初期熱エミッタンス	0 mrad

図 6.12 に、SPring-8 の RF 電子銃空洞でのエミッタンスの時間発展を示す。計算は、第 5 章で述べた多元連立ビームエンベロープ方程式で行った。計算の初期条件を表 6.3 に示す。計算はカソードの鏡像効果を含めて行っており、基本的には、第 5 章で示したものと同様であるが、電子銃空洞出口以降は、ソレノイドコイル等の集束系を用いず、 freespace 中で $z = 1.6$ m まで計算している。

図 6.12 の黒い線は、空間電荷効果を考慮せずに計算したものであり、電子銃空洞を出た後はエミッタンスが一定になっている。このエミッタンスは RF エミッタンスに相当する。その他の線は空間電荷効果を考慮して計算したものである。エミッタンスは、電子銃空洞を出た後、減少し、RF エミッタンスよりも小さくなっている。したがって、このエミッタンスの減少は空間電荷効果によるものである。エミッタンスは極小点を示し、その後、増加に転じる。



(a) RF 電子銃空洞中の各スライスエミッタンスの時間発展 (b) カソードから $z = 1.6$ m までの各スライスエミッタンスの時間発展

図 6.13 RF 電子銃空洞内と出口後のバンチ内各スライスエミッタンスの時間発展。No.1 がバンチ先頭のスライスであり、No.7 がバンチ後方のスライスである。

図 6.13 に、バンチ内各スライスのエミッタンスの時間発展を示した。電荷量は 50 pC/bunch である。図 6.13(a) に示したのは、RF 電子銃空洞内でのエミッタンスの振る舞いである。空洞の位置を示すために、空洞の z 方向電場を併せて示している。各スライスエミッタンスは、電子銃空洞内において減少し続けている。これに対し、プロジェクションエミッタンスの値は増減しており、双方に相関はない。したがって、RF 電子銃空洞内のプロジェクションエミッタンスの変化は、4.2.3 節で示したような、各スライス相互の位相空間での回転角の違いに対応するものである。

これに対し、図 6.13(b) に示すように、電子銃空洞を出た後では、各スライスエミッタンスもプロジェクトジョンエミッタンス (図 6.12 も参照のこと) も共に減少しており、それらは、ほぼ同じ位置で極小点を示す。このことから、電子銃空洞後のプロジェクトジョンエミッタンスの減少は、各スライスエミッタンス自身の減少に起因するものであると考えられる。

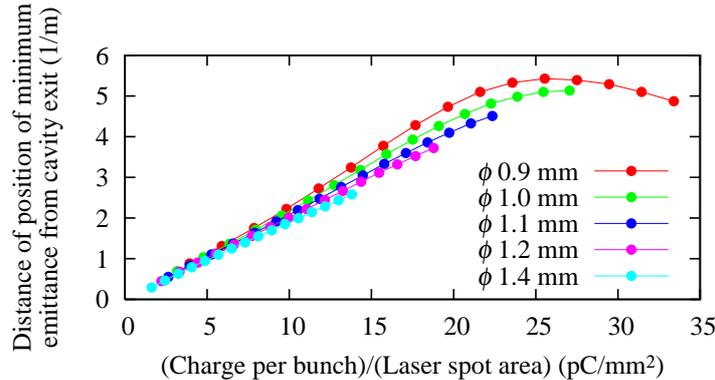


図 6.14 電子銃空洞出口からエミッタンス極小点までの距離の逆数を、初期電荷密度の関数としてプロットした。初期レーザースポットサイズも変化させている。

図 6.14 に、電子銃空洞出口からエミッタンス極小点までの距離の逆数を、初期電荷密度の関数としてプロットしたものを示す。初期レーザースポットサイズは、 $\phi 0.9$ mm から $\phi 1.4$ mm まで変化させている。初期電荷密度が 20 pC/mm^2 以下の場合、距離の逆数が初期電荷密度に比例しているのが特徴的である。 20 pC/mm^2 以上の場合、大きな空間電荷効果のために下に凸の位相空間分布がうまく形成されず、比例しなくなる。図 6.12 で電荷量 0.2 nC/bunch 以上でエミッタンスの減少がはっきりしなくなるのも、同じ理由であると考えられる。

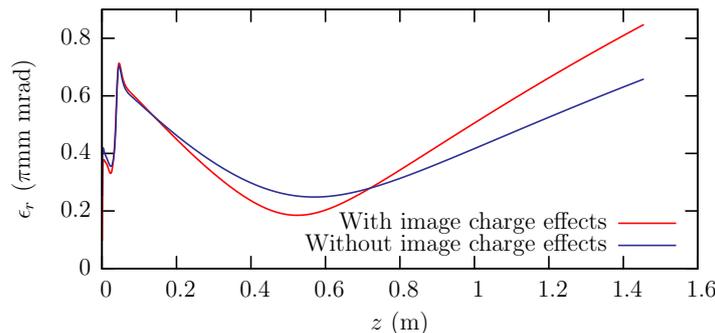


図 6.15 カソードでの鏡像効果を考慮せずに計算した、SPring-8 の RF 電子銃空洞におけるエミッタンス減少。鏡像を考慮した場合と一緒に示している。電荷量は 50 pC/bunch である。

図 6.15 に、カソード鏡像効果を考慮せずに計算した場合のエミッタンスの時間発展を、考慮して計算した場合と一緒に示す。電荷量は 50 pC/bunch である。カソード鏡像効果を考慮しない場合においても、考慮した場合よりも緩やかであるが、エミッタンスは減少している。したがって、下に凸の初期位相空間形状を形成する主たる原因は、鏡像効果以外にもあると考えられる。

無限長の連続ビーム、もしくはエネルギーの高い r 方向に均一分布したビームにおいては、空間電荷効果による作用は r 方向に対し線形となる。何故なら、ビームを、内側の円柱部分とそれを外側から囲む円筒部分に分けて考え、2つの部分の境界に電子 A を置いたとすれば、電子 A に作用するのは内側の円柱部分のみであり、外側の円筒部分が誘起する電磁場は、電子 A には作用しないからである。内側の円柱部分からの電界強度は円柱の半径に比例するため、電子 A に作用する力は r に対し線形である。

これに対し、低エネルギーのパルスビームでは、外側の円筒部分が電子 A に作用する。これは集束力として働き、円柱部分からの発散力をキャンセルする。キャンセルの程度はビームの内側ほど大きいいため、ビームに働く空間電荷効果による力の r 方向分布は $dK(r)/dr > 0$ となり、カソード近傍で下に凸の位相空間形状が形成されることとなる。

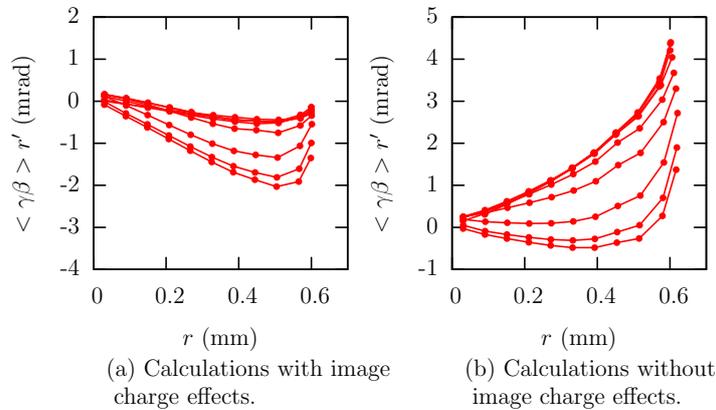


図 6.16 カソード直後の、 $z = 0.5$ mm での、各スライスの位相空間分布。鏡像効果を計算した場合と、計算しない場合を示した。電荷量は 50 pC/bunch である。

バンチ内各スライスの、カソード直後での位相空間分布を図 6.16 に示す。グラフにおいて、各曲線は各スライスに相当し、下側が先頭スライス、上側が後方スライスである。カソード鏡像効果を計算しない場合でも、下に凸となっており、この結果、エミッタンスが減少している。

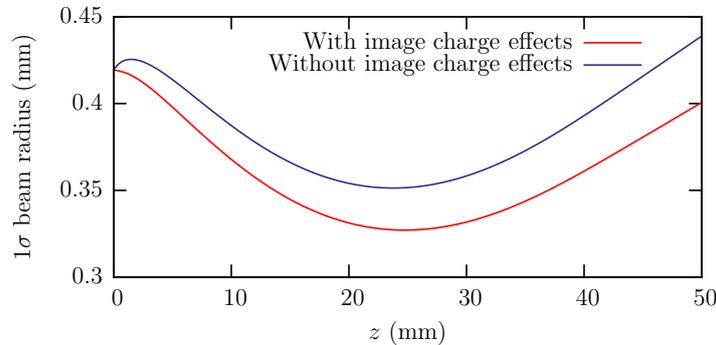


図 6.17 ビーム径の時間発展。カソードでの鏡像効果を計算した場合としない場合とを示している。電荷量は 50 pC/bunch である。

図 6.17 に、カソード近傍でのビーム径の時間発展を示す。カソードの鏡像効果は、ビームに対して集束力として働く。このため、鏡像効果を計算しない場合、一旦ビーム径は大きくなる。その後、鏡像効果の有無に関わらず、電子銃空洞の B_θ によってビームは集束される。多元連立ビームエンベロープ方程式では、ビーム径が空洞径に比べて十分に小さいことから、 B_θ を r に対して線形であると仮定している。しかし、ビームが集束されることによって、図 6.16 に示す位相空間の下に凸の曲線は圧縮され、非線形性が強調される。すなわち、電子銃空洞の集束力と鏡像効果による集束力によって、エミッタンス減少の程度は大きくなる。

なお、このような短パルスビーム自身の空間電荷効果による位相空間内での非線形形状の形成は、6.1 節で述べたような連続ビームでも起っている。何故なら、連続ビームと云えども、カソードからエミッションされる場合はビームの端が形成されているからである。しかし、連続ビームにおいては、この効果は鏡像効果と同一だと考えることもできる。

6.3.3 BNL 型 RF 電子銃空洞におけるエミッタンスの減少

次に、1.1.4 節の図 1.6 に示した、世界標準ともなっている BNL 型 1.6 セル電子銃空洞でのエミッタンスの減少について述べる。

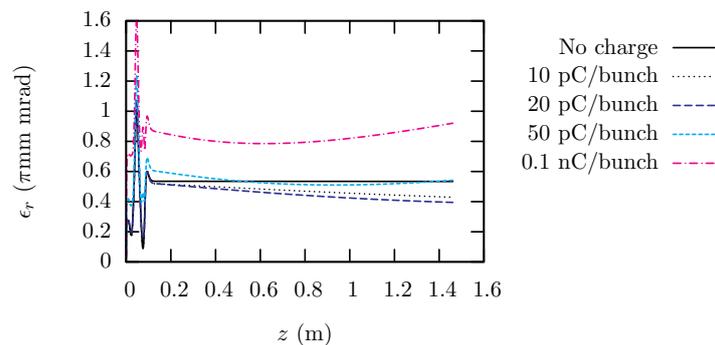


図 6.18 BNL 型 RF 電子銃空洞におけるエミッタンス減少

表 6.4 図 6.18 に示す計算の初期条件

レーザーパルス幅	10 ps uniform
レーザースポットサイズ	ϕ 1.3 mm uniform
カソード面最大電界強度	120.8 MV/m
電子銃空洞出口でのビームエネルギー	5.75 MeV
初期 RF 位相	cos 65 deg.
初期熱エミッタンス	0 mrad

図 6.18 に、エミッタンスの時間発展を示す。電子銃空洞は、 $z = 0$ から 77.67 mm の位置にある。表 6.4 に、計算の初期条件を示す。各パラメータは、文献 [6] のものを使用した。カソード

は完全導体を仮定し、鏡像効果を含んで、多元連立ビームエンベロープ方程式を用いて計算を行った。エミッタンスは減少しているが、SPring-8の電子銃空洞と比べて減少量が少ない。

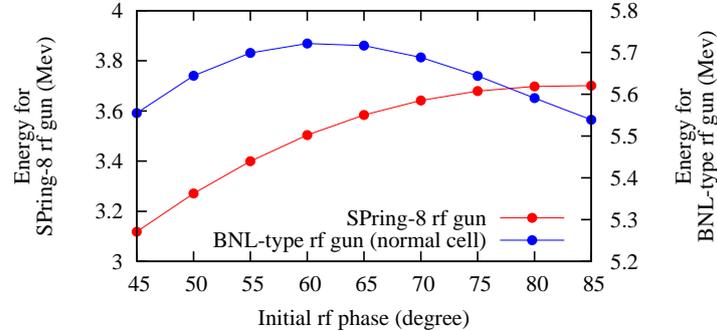


図 6.19 空洞出口でのビームエネルギーの、RF 初期位相依存性

図 6.19 に、電子銃空洞出口でのビームエネルギーの初期 RF 位相依存性を示す。SPring-8 型電子銃空洞の場合は、ビームエネルギーが最大となる位相が 85 度であるのに対し、BNL 型空洞では 65 度付近である。4.2.1 節で述べたように、ビームエネルギー最大の位相よりも進んだ位相(図 6.19 で左側)でエミッションされた電子は、電子銃空洞の E_z の向きが反転するまでの時間が短いために減速位相に載ってしまい、エネルギーが減少する。BNL 型空洞の第 1 セル空洞長は 23.1 mm であり、SPring-8 型空洞の空洞長、28.0 mm よりも短い。このため、例えば初期位相 70 度でエミッションされた電子は、SPring-8 型空洞では減速位相に載ってしまうが、BNL 型空洞では、SPring-8 型空洞と同じタイミングで E_z が反転したとしても、空洞長が短いために電子は既に空洞を通過しており、減速位相に載らない。このため、BNL 型空洞ではビームエネルギーが最大となる位相が左側にシフトしている。 ΔE を最小にする位相でエミッションさせる必要があるため、BNL 型空洞では初期位相を 65 度と設定している。このために、空洞の B_θ によるエミッション時の集束力が SPring-8 型空洞に比べて小さく、結果としてエミッタンスの減少量が少なくなったと考えられる。

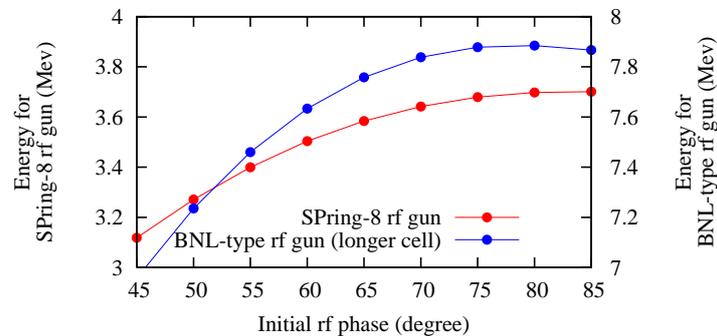


図 6.20 空洞出口でのビームエネルギーの、RF 初期位相依存性。BNL 型空洞の第 1 セル長は SPring-8 型空洞と同じ、28.0 mm に伸ばしている。

図 6.20 に、BNL 型空洞の第 1 セル長を SPring-8 型空洞と同じ長さ、すなわち、28.0 mm に

伸ばした場合の、ビームエネルギーの RF 初期位相依存性を示す。この場合、BNL 型修正空洞でビームエネルギーが最大となる初期 RF 位相は、SPring-8 型空洞と等しくなる。

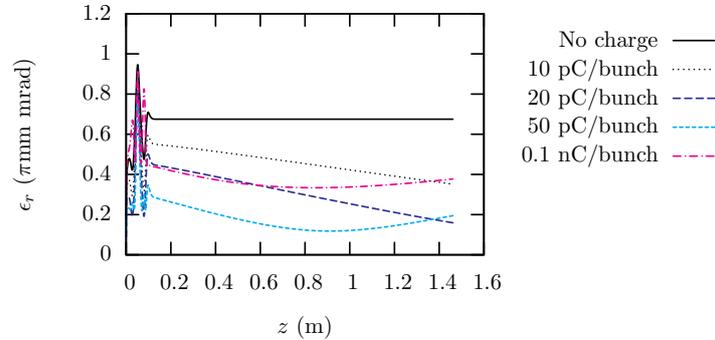


図 6.21 BNL 型修正空洞でのエミッタンスの減少。第 1 セルの長さを 28.0 mm としている。

表 6.5 図 6.21 に示す計算の初期条件

レーザーパルス幅	20 ps uniform
レーザースポットサイズ	ϕ 1.0 mm uniform
カソード面最大電界強度	157.0 MV/m
電子銃空洞出口でのビームエネルギー	7.87 MeV
初期 RF 位相	$\cos 85$ deg.
初期熱エミッタンス	0 mrad

図 6.21 に、セル長を伸ばした BNL 型修正空洞での、エミッタンス減少の様子を示す。計算の初期条件を、表 6.5 に示す。レーザーパルス幅、カソード面最大電界強度、および初期 RF 位相は、SPring-8 型空洞での計算と同一に設定した。したがって、空洞の B_θ による集束力は、空洞の径方向寸法が両者で異なることを考慮しても、両空洞でほぼ同一である。BNL 型空洞は 1.6 セルであるため、空洞出口のビームエネルギーは SPring-8 型空洞とは異なる。このため、エミッタンス減少の程度は図 6.12 と同じではないが、集束力が強くなったために、図 6.18 に示す修正前の BNL 型空洞と比べ、明らかに減少量が増加している。

6.4 まとめ

高精度な手法を用いたビームダイナミクス解析の一例として、低エミッタンス電子源の、カソード付近における、空間電荷効果によるスライスエミッタンスの減少について述べた。

まず、平面カソードから、径方向に一様分布した電子ビームを DC 電場で連続的に引き出す理想的条件において、カソード鏡像効果によってカソード直後でエミッタンスが減少し、極小値を示した後増加に転じることを示した。

次に、このエミッタンス減少のメカニズムを解析的に示した。電子ビームの径方向に働く力

を $r'' = K(r)r$ で表したとき、 $dK(r)/dr > 0$ で表される力が作用すると、 $r - r'$ 位相空間プロットは下に凸となる。このような、位相空間プロットが下に凸である状態において、ビームに $dK(r)/dr < 0$ で表される力が働くと、エミッタンスは減少する。この現象は、低エミッタンス源のカソード直後で見られる。

これとは逆に、ビームに $dK(r)/dr < 0$ で表される力が働くと、 $r - r'$ 位相空間プロットは上に凸となる。このような、位相空間プロットが上に凸である状態において、ビームに $dK(r)/dr > 0$ で表される力が働くと、エミッタンスは減少する。フリースペースにおいて空間電荷効果のみを考えた場合、ビームに $dK(r)/dr > 0$ で表される力が働くことは無いと考えられるが、何らかの外部電磁場を用いてこのような状態を実現することが出来れば、エミッタンスは減少するはずである。

このようなエミッタンスの減少が、実際の低エミッタンス電子源においても実現していることを、数値計算によって示した。まず、SCSS の熱カソード電子銃において、理想的連続ビームと同様なエミッタンス減少が起っていることを示した。なお、このような連続ビームの計算に多元連立エンベロープ方程式を適用する場合、パンチ幅が長い場合でも短い場合と同じ分割数で長手方向を分けると、1つのスライス中での先頭と後方のエネルギー差が大きくなる。しかし、多元連立ビームエンベロープ方程式では、1つのスライスに含まれる全ての電子のエネルギーが同一として空間電荷相互作用を計算するので、エミッタンス計算精度が悪い。これを回避するには、長手方向の分割数を多くすれば良いが、それと共に微分方程式の独立変数の数が大きく増大し、現実的ではない。このため、前記2例については、有限要素法を用いた2次元シミュレーションコードである、KUAD2を用いて計算を行った。

次に、RF電子銃空胴におけるエミッタンス減少の例を、多元連立ビームエンベロープ方程式を用いて計算した。SPring-8のRF電子銃空胴において、空胴出口以降フリースペースとして計算を行うと、プロジェクションエミッタンスの減少が見られ、連続ビームの場合と同様に極小値を示した後、増加に転じる。このとき、パンチ内各スライスのエミッタンスの変化は、空胴内においてはプロジェクションエミッタンスの変化と対応していないが、空胴出口後は対応していることが示された。このため、空胴出口後のプロジェクションエミッタンスの減少は、スライスエミッタンスそのものの減少に起因していることが分かった。

エミッタンスが減少するには、 $r - r'$ 位相空間の初期状態が下に凸になっている必要がある。パルスビームの場合には、下に凸の状態が、カソード鏡像効果のみに起因するのではなく、ビームの空間電荷効果の非線形性そのものから形成されていることが分かった。また、RF電子銃空胴の場合は、ビームエミッション時の空胴電磁場による集束力が下に凸の状態を強調し、エミッタンスの減少の程度が大きくなることが分かった。

BNL型電子銃空胴でのエミッタンス減少の様子も計算したが、エミッタンス減少量は、SPring-8型空胴よりも小さかった。これは、BNL型電子銃空胴とSPring-8型空胴の初期RF位相が違い、BNL型電子銃空胴のエミッション時の集束力が、SPring-8型空胴に比べて弱いためである。この点において、SPring-8型空胴はBNL型空胴に対して有利である。BNL型電子銃空胴の初期RF位相をSPring-8型空胴のものと同一に設定すると、BNL型電子銃空胴でもエミッタンス減少量が増加する。

参考文献

- [1] A. Mizuno and K. Masuda, submitted in Phys. Rev. ST Accel. Beams
- [2] K. Masuda, PhD thesis, Kyoto University (1997). Available online: <http://hdl.handle.net/2433/24255>
- [3] B. E. Carlsten, “Long-term, correlated emittance decrease in intense, high-brightness induction linacs”, Phys. Plasmas **6**, 3615(1999).
- [4] B. E. Carlsten, “Thermalization of an intense, space-charge-dominated electron beam in a long focusing channel”, Phys. Rev. E **60**, 2280(1999).
- [5] K. Togawa, T. Shintake, T. Inagaki, K. Onoe and T. Tanaka, “CeB₆ electron gun for low-emittance injector”, Phys. Rev. ST Accel. Beams **10**, 020703(2007).
- [6] R. Akre *et al.*, “Commissioning the Linac Coherent Light Source injector”, Phys. Rev. ST Accel. Beams **11**, 030703(2008).

第7章

まとめと今後の展望

本章では、本論文のまとめと、低エミッタンス電子銃システムのビームダイナミクス解析に対する今後の展望について述べる。

7.1 まとめ

本論文では、低エミッタンス電子銃システムのビームダイナミクス解析手法について述べた。

第2章では、ビームダイナミクス解析に必要な基礎的事項、すなわち、ビームの加速、および電子ビームが自身の周囲に誘起する電磁場について、解析的取り扱いを示した。

第3章では、ビームシミュレーションコードを開発した。3次元のシミュレーションコードであること、および Point-To-Point 法を用いており、任意のエネルギーの粒子が誘起する電磁場を実験室系で計算していること等、計算過程において何らの仮定を用いることなく、計算対象のモデル化を極力排除したシンプルなコードであることが特徴である。シミュレーションコードのアルゴリズム、および細部の計算方法について詳述した。また、エミッタンスの値に粒子数依存性の問題があることを示した。基本的な freespace でのトラッキングにおいて、他のコードと結果を比較し、エミッタンスについて GPT と同等な性能を確認した。

第4章では、ビームシミュレーションコードを用いて SPring-8 の RF 電子銃を用いた低エミッタンス電子銃システムの解析を行った。電子銃システム全体の特性を計算出来ることを示すと同時に、3次元の構造的非対称性がビームダイナミクスに及ぼす影響について、特に加速管カップラーによるエミッタンスの増加、およびエミッタンスの非対称性について、メカニズムを解明した。このように、3次元のビームシミュレーションコードには、実際のシステムを非対称性も含めて解析できる大きなメリットがある。ただし、カソードにおける空間電荷制限領域の計算については実験結果を説明できなかった。また、エミッタンスの粒子数依存性については freespace でのシミュレーションと同様、問題点として残った。

第5章では、ビームシミュレーションコードの問題点を克服するため、シミュレーションコードと解析的手法の利点を双方ともに取り入れた多元連立ビームエンベロープ方程式の手法を開発した。シミュレーションコードにおける粒子数依存性、およびカソード近傍での計算精度の低下は、

基本的には点電荷が誘起する電磁場を用いて空間電荷相互作用を計算していることに起因するものであり、エンベロープ方程式の手法では体積を持った領域が誘起する電磁場を用いていることから、これらの問題は回避できると考えられる。ただし、従来はエンベロープ方程式を用いてバンチ形状を正確に計算できるモデルが存在しなかったことから、一般に、エミッタンスの計算精度はシミュレーションコードに比べて悪かった。今回開発した多元連立ビームエンベロープ方程式では、バンチをグリッドメッシュに分けて、各交点に配置した電子のエンベロープ方程式を連立して解くこと、および、空間電荷相互作用を計算するための電磁場補正法を工夫することにより、高精度なバンチ形状の計算、およびエミッタンスの算出を実現した。多元連立ビームエンベロープ方程式で算出されるエミッタンスは、ビームシミュレーションコードにおいて、粒子数を増加させたときに収斂する値に近いものとなっている。さらに、シミュレーションコードと比べ、大幅に計算時間を短縮することができた。本手法のように精度良くエミッタンスを算出できる解析的手法は、従来なかったものである。

ただし、多元連立ビームエンベロープ方程式では、バンチ内の長手方向スライスが円柱形状を保つこと、すなわち、歪んではならないことを仮定している。このため、長手方向分割数を増やしてスライス幅が狭くなると、実際にはバンチ両端ではスライスがひずんでしまうにも関わらず、歪まない状態で計算してしまう。この結果、計算条件にも依るが、エミッタンスに長手方向分割数依存性が現れる。さらに、電荷密度が大きな場合は、実際にはバンチ中央付近のスライスまで歪むので、精度良い計算ができないという問題点が残る。同様に、ビームが集束された場合の集束点後においても、その点で電荷密度が大きくなるため、精度良い計算ができなかった。

第 6 章では、低エミッタンス電子銃のカソード付近で、スライスエミッタンスが空間電荷効果によって減少する可能性のあることを指摘した。通常は、スライスエミッタンスは空間電荷効果によって増加する場合が多く、減少する場合は非常に稀であるが、精密なビームダイナミクス計算手法によって、その可能性を示すことが可能となった。

理想的な連続ビームにおいて、カソード鏡像効果の影響によってスライスエミッタンスが減少する例を示した後、減少のメカニズムを解析的に示した。また、実際のシステムにおいても、SCSS の電子銃部分で連続ビームのエミッタンスが減少し、SPring-8、および BNL 型 RF 電子銃空洞で、パルスビームのエミッタンスが減少することを示した。連続ビームの計算は KUAD2 で行い、パルスビームの計算は多元連立ビームエンベロープ方程式で行い、両者ともエミッタンス計算精度が良いことから明確なエミッタンス減少を示すことができた。パルスビームの場合では、RF 電子銃空洞のビーム集束効果が大きいほどエミッタンス減少効果も大きい。この点において、SPring-8 の RF 電子銃空洞は、世界標準である BNL 型電子銃空洞よりもエミッタンス減少の効果が大きいことを示すことができた。

このエミッタンス減少の事実は、今後の低エミッタンス電子銃システムの設計思想を変えていく可能性がある。

7.2 ビームダイナミクス解析における今後の展望

本論文では、非対称性を伴う実際の電子銃システムを扱った場合の3次元ビームシミュレーションコードの優位性を認めながら、一方では、計算時間の短縮とさらなる計算精度を追求するために多元連立ビームエンベロープ方程式を開発した。短時間で精度良い計算を行うことによって、これまで知られていなかった現象を解析できる可能性がある。ただし、多元連立ビームエンベロープ方程式では3次元非対称性の解析はできない。また、各スライスが歪んではならないことから、計算条件によってはエミッタンスの長手方向分割数依存性が発生し、さらに、電荷密度の大きなビームの計算では精度が悪くなる。したがって、現時点で精度良いビームダイナミクス解析を行うには、両方で互いに補い合う必要がある。

次のステップとして、多元連立ビームエンベロープ方程式の考え方を踏襲し、かつ、各スライスが歪んでも計算可能な手法を実現することは可能であると考えている。本論文で述べた手法では、空間電荷効果によって径方向に誘起される電磁場は、円柱スライスが誘起するものとして計算した。これを、ドーナツ状スライスが誘起するものとして計算すれば良い。この時、ドーナツ型のビームが誘起する電磁場を計算する必要がある。これは、複雑になるものの、基本的には、円柱スライスが誘起する電磁場をペンシルビームが誘起する電磁場から補正して算出したのと同様な手順で算出可能である。ただし、ビームエンベロープ方程式の連立数が増加して解析的扱いは難しくなることが予想される。その場合は、メッシュ交点の各電子の軌道を、数値演算でトラッキングすることにより算出することも可能である。このような方法は、エンベロープ方程式の概念からは逸脱するが、解析的手法に準じた精度を持つことは、多元連立ビームエンベロープ方程式と変わらない。

このような取り扱いができると、電子密度の制限がなくなり、ビームを径方向や長手方向に強く圧縮した場合でも計算が可能になる。また、エミッタンスの長手方向分割数依存性も小さくなるに違いない。特に、RF電子銃においてパルス幅がfsオーダーの極短パルスレーザーを用いた場合に引き出されるビームのダイナミクス計算等が可能となる。このような、引き出されるビームの長手方向と径方向のアスペクト比が極端に大きなビームのダイナミクスを精度良く計算する方法は、現状では存在しない。したがって、精度良く計算することにより、新たなビーム物理が開けてくる可能性がある。

これらが実現出来れば、その次には、エンベロープ方程式の手法で得た高精度エミッタンス計算法をシミュレーションコードの手法にフィードバックし、3次元非対称性を計算でき、かつ、高精度にエミッタンスを計算できるようなコードを開発する必要があると考えている。

謝辞

まず始めに、東京工業大学大学院総合理工学研究科、創造エネルギー専攻の堀田栄喜教授には、私が1988年4月に東京工業大学大学院理工学研究科電子物理工学専攻の堀田研究室に修士課程学生として所属して以来、お世話になりました。修士課程終了後も、折に触れて博士の学位を取得するよう励まして頂きました。今回の博士論文提出に際しては、指導教官として有益なコメント等を頂き、大変お世話になりました。深く感謝致します。

本論文は、(公財)高輝度光科学研究センターにおけるRF電子銃装置での実験が基となっています。論文では実験結果にはほとんど触れず、ビームダイナミクス解析の手法について示しましたが、このような解析ができたのは、身近に実験装置があり、稼働していたからです。RF電子銃装置に関する研究の中心メンバーである、同僚の谷内務氏、出羽英紀氏、富澤宏光氏には厚くお礼申し上げます。

また、私の所属する(公財)高輝度光科学研究センター加速器部門第1加速器グループのメンバーには、前述のRF電子銃装置での実験サポート、博士論文執筆に関するサポート等、お世話になり、深く感謝致します。特に、私の直属の上司である花木博文氏は、博士論文の細部にまで目を通して頂き、また、有益なコメントを多数頂きました。当初、私は、多元連立ビームエンベロープ方程式の手法は、実際に構築するのは困難であると思っていましたが、挑戦してみるように助言頂いたことについては、大変感謝しています。

京都大学エネルギー理工学研究所の増田開准教授、大阪大学産業科学研究所の菅晃一氏、名古屋大学シンクロトロン光研究センターの山本尚人氏、(株)アキュセラの山本昌志氏とは、ビームシミュレーションコードに関するベンチマークテストを行わせて頂きました。また、シミュレーションに関する研究会を共に立ち上げて活発に議論を行い、議論の中からヒントを得たことが本論文執筆の上で大きな参考となりました。特に増田氏には、ビームダイナミクスに関する議論に関して大変お世話になりました。第6章で記述したエミッタンスリダクションは、氏が発見した現象であり、氏なくしては陽の目を見なかったものです。厚くお礼申し上げます。

名古屋大学大学院理学研究科、素粒子宇宙物理学専攻教授であられた、故、中西彊氏には、私が氏の研究室でビームダイナミクスに関する集中講義を行った際、博士学位を取得するよう、手続きその他を含め詳細なアドバイスを頂きました。私が博士論文を提出するきっかけとなったのは、氏のアドバイスです。ここに記載することで、ご報告に代えさせて頂きます。

最後に、個人的なことではありますが、博士の学位取得を父に報告したいと思います。父は20

年前に他界しましたが、生前、私が学生の時分に博士課程への進学を選択しなかったときにも、進学を望んでいました。若い頃の私は、博士はそのうち取れるだろうから大きな問題ではない、と思い込んでいたところがあります。しかしながら、このような考えでたくさんの方に迷惑をかけたことも事実です。それらも含め、改めて父に報告します。