

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	センサーネットワークの長寿命化に向けた統計力学的手法による検討
Title(English)	A study for extending operating life of sensor-networks by statistical mechanics
著者(和文)	白木善史
Author(English)	Yoshifumi Shiraki
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第10008号, 授与年月日:2015年9月25日, 学位の種別:課程博士, 審査員:樺島 祥介,渡邊 澄夫,高安 美佐子,青西 亨,瀧ノ上 正浩
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第10008号, Conferred date:2015/9/25, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	要約
Type(English)	Outline

センサーネットワークの長寿命化に向けた
統計力学的手法による検討

A study for extending operating life of
sensor-networks by statistical mechanics

白木 善史

2015 年 8 月 31 日

本 pdf ファイルについて

この pdf ファイルは, 博士論文「センサーネットワークの長寿命化に向けた統計力学的手法による検討」の全文公開に先立って, 博士論文の内容の一部を公開するために作成されたものである. 第 1 章, 第 2 章, 第 3 章および第 5 章については博士論文とほぼ同じ内容である. 第 4 章については概要のみを記した.

概要 (Abstract)

In this study, we developed guidelines to realize long lifetime sensor networks, in which many sensors gather some information and send them to a fusion center, in most cases, via wireless communication. In the last two decades, sensor networks have attracted great attention for the application of monitoring environment, infrastructures, temperature in farm, and other engineering areas. One of important issues in the sensor network technology is to prolong their lifetime, and much effort has been made to fabricate low cost and high capacity batteries, low power consumption sensors, energy efficient network operating protocols and so on. Here, we report two results as guidelines for designing long lifetime sensor networks by using statistical mechanics methods. One is about robustness of random network, which can be utilized for estimating lifetime and coverage of sensor networks with respect to failures of sensors and other defects. The other work reveals typical reconstruction performance of distributed compressed sensing (DCS), which can compress data with low computational cost and can reduce communication traffic, and accordingly contributes to realize long lifetime sensor network.

To evaluate robustness of random networks, we develop a scheme for evaluating the size of the largest connected subnetwork (giant component) in random networks when sites (nodes) and/or bonds (edges) are removed from the networks. For this purpose, we employed the cavity method from statistical mechanics of disordered systems. The random network is fairly regarded as a model of sensor networks, and removal of sites and bonds corresponds to run out of batteries of sensor nodes and blocks of communications between sensor nodes, respectively. An advantage of our scheme is the capability of handling targeted attacks on sites/bonds in the presence of degree correlations beyond naive analyses on random failures (crashes) in networks of no degree correlations. We apply our scheme particularly to random networks of bimodal degree distribution (two-peak networks), which have been proposed in earlier

studies as robust networks against random failures of site and/or targeted (random degree-dependent) attacks on sites. Our analysis indicates that the correlations among degrees affect a network's robustness against targeted attacks on sites or bonds non-trivially depending on details of network configurations. In addition, the size of giant component and the percolation threshold, which means such a critical ratio of failures that the size of giant component vanishes as $N \rightarrow \infty$, do not have the same tendency especially when we consider influences of bond attacks with various degree correlations.

To investigate how we can reduce communication traffic of sensor networks, we study DCS problem with noiseless measurement. The DCS framework provides an efficient and low computational cost compression scheme of multichannel signals that are sparse and highly correlated with one another. Especially, a signal model called the joint sparse model 2 (JSM-2) or multiple measurement vector problem, in which all sparse signals share their support, is important for dealing with practical problems such as array acoustic sensors, magnetic resonance imaging and magnetoencephalography. We here investigate typical reconstruction performance of two representative signal reconstruction schemes for JSM-2 problems. One is $\ell_{2,1}$ -norm minimization reconstruction and the other is Bayesian optimal reconstruction. Employing the replica method of statistical mechanics, we show that the reconstruction performance of both schemes which exploit the knowledge of the sharing of the signal support, overcomes that of their corresponding approaches for single-channel compressed sensing problem. We also develop a computationally feasible approximate algorithm for performing the Bayes optimal based on the belief propagation (BP) framework scheme to validate our theoretical prediction. Our replica-based analysis numerically indicates that a fundamental reconstruction limit can be achieved by the BP-based approximate algorithm in a practical time, when the number of channels is sufficiently large, for example 10. The results of numerical experiments of the both reconstruction schemes excellently agree with the theoretical evaluation.

To reveal the reconstruction performance of DCS problem in more realistic situation, we also investigate JSM-2 problem with noisy measurements for $\ell_{2,1}$ -norm regularized least square and the Bayesian optimal reconstruction scheme in terms of mean square error. Employing the replica method, we show that the performance of the schemes, which exploit the knowledge of the sharing of the signal support, overcomes that of their corresponding methods for the single-channel compressed sensing problem. The results of numerical experiments with a computationally feasi-

ble approximation algorithm we developed for this study agree with the theoretical prediction.

In conclusion, we revealed the robustness of the random networks and the reconstruction performances of the DCS problem, which can serve guidelines for designing long lifetime sensor networks. We showed the degree correlations in the random networks significantly contribute to its robustness when the networks are suffered by random failure and removal of important components, which corresponds to hub sensor nodes and their communication paths in sensor networks. In addition, we clarified that increasing number of channels (sensors) contributes to enhancing the reconstruction performances of DCS problems in both noiseless and noisy scenarios. By combining these two results, we can design energy effective scheduling of activating sensor nodes.

目次

第 1 章	序論	1
1.1	センサーネットワーク	1
1.2	統計力学と情報処理	6
1.3	本論文の構成	20
第 2 章	ランダムネットワークの頑健性	23
2.1	はじめに	23
2.2	ランダムネットワークの概説	26
2.3	Cavity 法によるパーコレーション解析	30
2.4	進んだ設定の解析: 次数相関のある二極分布ネットワークへの攻撃	38
2.5	まとめ	45
第 3 章	ノイズなしの分散圧縮センシング	47
3.1	はじめに	47
3.2	関連研究	49
3.3	問題設定	50
3.4	統計力学的アプローチ	52
3.5	信念伝搬法にもとづくベイズ最適な復元アルゴリズム	57
3.6	復元限界と数値実験による妥当性の検証	62
3.7	本章のまとめ	67
第 4 章	ノイズありの分散圧縮センシング	69
4.1	概要	69
第 5 章	結論	71
5.1	結果のまとめ	71
5.2	センサーネットワークの長寿命化への指針	74

5.3	本研究の学術的な位置づけと展開	76
付録 A	第 3 章の計算の詳細	79
A.1	$\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元法の自由エネルギーの導出	79
A.2	ベイズ最適な復元法の自由エネルギー密度の導出	81
A.3	式 (3.33) の導出	82
参考文献		85

第 1 章

序論

1.1 センサーネットワーク

1.1.1 センサーネットワークの概観と重要性

たくさんのセンサーを環境中に配置しそれらから得られる情報をネットワークを介して収集するセンサーネットワークが注目されている [1, 2, 3, 4]. 環境中にちりばめられたセンサーをセンサーノード, センサーからのデータを収集し処理する側をフュージョンセンター (FC) とよぶのが一般的である. 近年, モバイルネットワークの発展とともにあらゆるモノ同士をインターネットにつなげてしまおうとする Internet of Things (IoT) が提唱されており, これらの一部もセンサーネットワークの一種とみなすことができる [5, 6, 7]. 我が国においては, 1960 年代から 1970 年代の高度経済成長期に整備されたインフラストラクチャーがいよいよ寿命を迎えてきており, 道路や橋, トンネルなどのヘルスマonitoringをおこなうことが急務となっている [8]. さらに, 無線ネットワークを利用したガスメータの検針 [9], 農業への応用のため温度や CO₂ 濃度を測るシステム [10] などの比較的広い範囲をカバーするものから, 室内の効率的な温度管理のためのネットワーク [11] や住居内の見守りシステム [12] などの屋内を対象とするものまで幅広い分野でセンサーネットワークの利用が期待されている. このようにいわば社会の神経ネットワークに相当する機能として, センサーネットワークの重要性は今後ますます高まっていくであろう.

このような背景のもと, 過去数十年にわたり様々な側面からセンサーネットワークに関する研究が進められている [1]. センサーデバイスの面からはセンサー自身の研究 [13, 14] にくわえ, 電池ないセンサーデバイス [14, 15] や, 電力効率の高い通信方法の研究 [16, 17] などのセンサーの長寿命化を意図した研究がおこないわれている. さらに, 通信量の削減を意図した情報源符号化の研究も盛んにおこなわれている [11]. ネットワーク構築の側面からは, マルチホップネットワークなど通信プロトコルの研究 [18] やセンサーの配置方法

に関する研究 [19, 20, 21] もおこないわれている。センサーで収集した情報を利用するという観点からは、近年非常に多くの注目を集めるビッグデータの研究 [22, 23] をあげることができる。これらの研究はセンサーネットワーク分野のみならず、モバイルネットワークやその他の工学分野でも重要であることから盛んに研究が進められている。

1.1.2 センサーネットワークの用語と評価指標

ここでは、本論文で扱うセンサーネットワークの用語を簡単に説明する。まず、主要な話題であるセンサーネットワークの寿命について述べる。本論文で述べる寿命とは、次の 2 つのどちらかを意味する。ひとつは、センサーネットワーク全体が、設計者の意図通りに完全に動作することができる、すなわち、運用当初となんら変わりのない機能を果たすことできる時間のことである [24]。このことは運用開始当初存在していたすべてのセンサーが正常に動作する時間を指すのではないことに注意すべきである。ふたつめは、センサーネットワーク全体が完全にその機能を失うまでの時間である。実際の場合では、たとえばいくつかのセンサーノードが機能を失ったとしてもいくらかの目的を達成できる場合がある。しかしながら、例えばすべてのセンサーの情報が一切 FC に届かなくなったときは、センサーネットワークの機能は完全に失われたと考えるべきであろう。

センサーネットワークの機能の特徴づける 2 つの要素として、センサーノードの被覆率 (sensor coverage, 収容率また、connectivity, 接続率などともいう) とターゲットの被覆率 (target coverage) がある [18, 21, 25, 26]。センサーノードの被覆率は、空間中に配置したセンサーノードのうちどの程度の割合のセンサーノードが FC と通信可能であるかをあらわす指標である [26]。例えば、すべてのセンサーノードが各々直接 FC と通信可能な状況は被覆率 100% である。一方で、いくつかのセンサーノードが FC へのアクセスを失った場合は、その割合に応じた被覆率となる。後述するマルチホップ通信を利用するセンサーネットワークにおいては、中継するのノードに到達しないなどの理由でいくつかのセンサーの情報が得られないという状況が考えられる。また、ターゲットの被覆率とは、センサーネットワークが監視すべき範囲にたいしてどの程度の割合を監視できているかをあらわす指標である [27, 28]。本論文で扱うのは主に前者である。

マルチホップネットワークは、センサーネットワークなどでもちいられる通信方式のひとつである [29]。この通信方式では、センサーネットワーク中の各センサーノードは FC と直接通信せず、ほかのセンサーノードを中継して最終的に FC にデータを伝える。無線技術の発達により以前よりも重要性は低下しているとはいえ、通信可能な範囲を小さくすることで消費電力を小さくすることできることや、電波法に抵触しないなど設計の自由度が高いことから依然として興味深い方法である [1]。この方式をより柔軟にしたものとしてはアドホックネットワーク [27, 30] がある。本論文では扱わないが、マルチホップネッ

ネットワークにおける制御プロトコルの主要な話題はルーティング問題であり、センサーネットワークの寿命を考えるうえでも重要である [31, 32].

情報圧縮は、センサーネットワークに限らずあらゆる通信を伴う系において重要な話題である。一般に、通信量と必要な電力との間には密接な関係があり [33], データを伝えるために必要な通信量を削減することができれば消費電力を減らすことが可能である。情報源符号化はこのようなあるデータ (情報源) をいかに効率よく伝えるか、を探索する研究分野である。

1.1.3 センサーネットワークの中心的課題

活発に続けられるセンサーネットワークの研究の中でも、ネットワークの長寿命化は中心的課題のひとつである [31, 34]. センサーにおける計算量, 伝送可能な情報量と電池寿命の間にはトレードオフ関係がある。電池を無尽蔵に搭載できる場合や電源の供給が容易な用途を除けば, 少ない計算量でどのように情報を効率的に伝送するのか, という課題は重要である [24, 35]. また, ネットワークの制御プロトコルの観点からは, 個々のセンサーの電池を偏りなく使用し, ネットワークの寿命を延ばすことを目指した研究がおこなわれている [36]. くわえて, 限られた電源資源の制約のもとでセンサーネットワークがカバーできる範囲, 例えば監視の範囲, を最大化する方法も研究されている [25, 37]. これらの研究成果はセンサーネットワークを構築するうえで重要な指針となる。

センサーネットワークの長寿命化をはかるうえで, ネットワークの構成や運用方法によってどの程度の寿命が実現可能かどうかを知ることは重要である [38]. Bhardwaj ら [37] は通信にかかる電力コストを含めたネットワーク運用に係る諸々の消費電力を勘案し, ネットワークの構成によってどの程度の寿命を達成可能か, また, 監視可能な範囲や収容可能なセンサーノードの数がどのように変化するのかを検討した。またネットワークの制御プロトコルを最適化することでネットワークの寿命を長くするための試みもおこなわれている [24, 39, 40].

センサーネットワークの寿命を考察するうえで, 監視可能な範囲や収容可能なセンサーノードの数を増加させるための効率の良いセンサーの配置についての研究も重要である。Wang ら [25] はセンサーの幾何的な配置を考慮し, 監視可能な範囲と通信可能なセンサーノードの数の両方を増加させるためのプロトコルを提案している。Liu ら [41] はパーコレーション解析をもちいて, 単純に監視対象の範囲をカバーするのではなく, 対象のパスをカバーする方法を導入し, 監視ターゲットを効率よくセンシングする方法を研究した。

このようにセンサーネットワークのネットワーク構成や運用方法とその寿命や性能に関する研究は盛んである。一方で, 特にマルチホップネットワークにおけるセンサー同士をつながり方, 例えばひとつの中継センサーノードにいくつかのセンサーノードを接続すべ

きか、中継センサーノード同士のつながりをどのように構成するか、が寿命に及ぼす影響は十分わかっているとはいいいがたい。これは、ここにあげた先おこない研究が、現実のセンサーネットワークの運用を意識しており、二次元平面上にセンサーノードをある密度で配置しているという状況を想定したものであるがゆえ、数理的な扱いが困難であることも一因である。我々が知る限り、このような物理的制約の下にセンサーネットワークのつながり方と寿命の関係については少数の研究がおこなわれているのみである [42]。一方で、各センサーノードがつながるセンサーノードの数の分布などのより抽象的なネットワークの構成とその寿命の関係をするための研究として、ランダムネットワークのような解析が容易な系についてのものがある [43, 44, 45, 46]。このような解析をおこない潜在的なネットワークの性能をすることは、センサーネットワークを構築するうえで参考になる。

情報圧縮をおこない送信すべきデータ量を小さくすることで個々のセンサーの電力消費量を抑えることができる。この観点の研究はセンサーネットワーク分野に限らず、情報源符号化として長年にわたって研究が重ねられてきた [33]。また、情報源が複数ある状況では、それぞれの情報源を個別に圧縮する場合と比較して、互いの相関（チャンネル間相関）を利用することで効率よく圧縮できる場合がある [47]。驚くべきことに、適当な条件のもとでは復号の段階でのみチャンネル間相関を考慮することで、個別のセンサーでの圧縮率をあげることができる [48]。分散情報源符号化とよばれるこれらの方法はセンサーネットワークの研究においても多くもちいられてきた [49, 50]。ところが、一般に圧縮率と圧縮にかかる計算量との間にはトレードオフ関係がある。さらに、従来の圧縮方法はある程度の計算コストがかかることから、センサーデバイスのコストも上昇してしまうという欠点もある。

上記の問題を踏まえ、センサーネットワークの研究においては従来の枠組みと異なる情報圧縮の研究も進められている [11, 51]。この中でも圧縮センシング (compressed/compressive sensing, CS) とよばれる、新しい情報圧縮の枠組みが近年盛んに研究されている [51, 52, 53]。特にセンサーネットワークにおいてはたくさんのチャンネルの情報を扱うことから、分散情報源符号化に対応する分散圧縮センシング [54] が重要な役割を果たす。一方で、これら新しい枠組みについては情報の特徴と圧縮率および復元性能の間の関係が明確に解明されているとはいいいがたい。電力効率のよいセンサーネットワークの構築を試みる際には、これらの関係についての知見が必要になるであろう。

1.1.4 本研究が取り組む問題

前節の議論を踏まえて、本研究では以下の 2 つ問題を扱い、センサーネットワークの長寿命化のための指針を得ることを試みる。

1. 次数相関があるランダムネットワークの頑健性評価: センサーネットワークを模したネットワークとしてセンサーに対応するサイト同士をランダムにつないだランダムネットワーク [55] に着目し, その頑健性を評価する. ここでは頑健性を, サイトあるいはサイト間をつなぐボンド (直接情報のやり取りをおこなう 2 つのセンサー間の通信経路に対応する) のうちいくつかが故障あるいは外部からの攻撃により使用できなくなっている場合について考える. 具体的には, 正常に動作しているサイト同士が形成する故障あるいは攻撃により分離した個々のクラスターのうち最大数のサイトを含むものがどの程度のサイズであるかを, あるいは系全体の大きさ (サイトの数と同等) が無限大の極限において最大のクラスターのサイズと系の大きさの比が 0 になる際の使用できなくなっているサイトまたはボンドの割合を評価することによって頑健性の指標とする. 本研究では故障と攻撃の両方に頑健であるといわれている二極次数ランダムネットワーク [56, 57, 58] を扱い, 特に次数相関と頑健性の関係性を明らかにする.
2. 分散圧縮センシングによる情報圧縮の性能評価: 線形観測により信号を圧縮する方法である圧縮センシング [51, 52] を多チャネルに拡張した分散圧縮センシング [54] に着目し, 圧縮および復元性能を評価する. ここで線形観測とは, 信号をベクトルとみなしたときにおこない列を掛けた結果として得られるベクトルを観測結果 (観測ベクトル) としてもちいる方法である. 圧縮センシングの理論は, 信号ベクトルが疎性 (sparseness) をもつ, すなわちベクトルの長さにたいして非零要素の数が少ない信号であれば, 適当な条件下で元の信号よりも短い長さの観測結果をもちいて原信号ベクトルを完全に復元可能であることを示したものである [51, 52]. 本論文では二種類の異なる信号復元方法, $\ell_{2,1}$ ノルム最小化とベイズ最適方法, にたいして分散圧縮センシングの復元性能を次の 2 つの観点から評価する. ひとつめは, 上記の完全に復元可能な条件を非零要素の割合と観測数, すなわち観測ベクトルのサイズ, さらにチャネル数との 3 つのパラメータについて明らかにすることである. ふたつめは, 完全に復元可能でない場合および観測時にノイズが含まれる場合に原信号と観測ベクトルから得られた復元信号との間の誤差を評価することである.

マルチホップネットワークを利用するセンサーネットワークの設計指針として, 次数相関があるランダムネットワークの頑健性を評価することは重要である. まず, 電池の消費や経年劣化などによって故障したセンサーノードを含むセンサーネットワークにおける収集可能な範囲を明らかにすることができる. くわえて, 本研究ではネットワーク上の重要ノードを狙い撃ちする攻撃についても頑健性を明らかにすることができる. これはマルチホップネットワーク上でハブの役割をする, すなわち頻繁に通信をおこなうノードの電力消費量がほかのノードと比較して高くなり停止してしまう場合に対応している. 本研究で

は特に、ネットワークの次数相関と頑健性の関係に着目し、通信の設定やセンサーノード同士のつなぎ方についての設計指針を与えることを目標とする。最大のクラスターのサイズともとのセンサーノードの数との比はセンサーノードの被覆率に、この比がもとのセンサーノードの数が無限大の極限で 0 になる故障ないし停止率は センサーネットワークが完全に機能を失うことに、それぞれ対応している。

特に電力消費量の面から分散圧縮センシングによる情報圧縮の性能評価はセンサーネットワークの情報収集方法を設計するうえで重要な指針となる。第一に、センサー情報をネットワーク上に送信する際に情報圧縮をおこなうことで送信コストを低減できる。さらに圧縮センシングによる圧縮は従来の圧縮技術によるものと比較して計算コストを低く抑えられる場合がある。特に、原信号ベクトルがセンサーが測定する基底とは異なる線形基底でスパースである場合、適当な条件下では圧縮過程を単なる間引きに置き換えることが可能であり演算コストの大幅な低下を期待できる。本研究ではさらに、復元が完全には成功しない場合および観測自体にノイズが含まれる場合においても復元性能を明らかにすることで、より現実的なシナリオにおけるセンサーネットワークの情報収集の設計指針を与える。

上記 2 点にくわえて本論文は、ランダムネットワークの頑健性評価と分散圧縮センシングの復元性能評価の両方を扱うことにより、センサーの運用スケジュールについての設計指針を与えることを目指す。圧縮が時系列の原信号を時間的に間引くことによっておこなわれる場合においては、観測をおこなうセンサーのみを通信させることで全体の電力消費量を低減することができる。観測をおこなうセンサーの数と信号復元の精度および情報収集をおこなうことが可能な範囲との関係を明らかにすることで、着目するセンサーネットワークと情報収集の対象におけるボトルネックを発見することが可能である。

我々はこれら 2 つの問題について次節で取り上げる統計力学を利用した方法をもちいることで、センサーネットワークの構築について新たな知見を得ることを目指す。

1.2 統計力学と情報処理

1.2.1 統計力学と情報処理

統計力学は興味のあるシステムのミクロ的な性質を指定し、それをカノニカル分布とよばれる確率分布をもちいて表現することでシステムのマクロ的な性質を明らかにする学問分野である。たとえば、温度と圧力、体積などのマクロな気体の性質を個々の分子の質量などのミクロな性質を指定することで導くことが可能であり、さらにそれらの結果はマクロな科学である熱力学の知見とも一致する [59]。統計力学は磁性体、ゴムの弾性、半導体などについて新たな知見を生み出してきた [60]。さらに、近年統計力学を情報処理分野に応用

する試みがある。連想記憶やパーセプトロン学習 [61], 誤り訂正符号 [62], 圧縮センシング [63] などの数多くの成功例があり, 両者の親和性が高いことがわかってきた。これは情報処理分野における確率推論手法と統計力学との間には推論のための計算量が着目するシステムのサイズについて指数関数的に増大するという共通の問題を抱えているためである [61, 64]。

統計力学の情報処理分野への応用の詳細な説明に入る前に, キーワードに触れながら統計力学の枠組みを簡単に紹介する [59]。注目する系のミクロな状態 S を指定した際に, ある関数 $H(S)$ によってあらわされる量をハミルトニアンとよぶ。統計力学では, あるミクロな状態が実現する確率 $p(S)$ がガノニカル分布,

$$p(S) = \frac{e^{-\beta H(S)}}{Z(\beta)}, \quad (1.1)$$

にしたがうと仮定する。ここで, $\beta = (k_B T)^{-1}$ は系の逆温度をあらわし, T は系の絶対温度, k_B はボルツマン定数をそれぞれあらわす。また, 分母にあらわれる規格化定数 $Z(\beta)$ は分配関数とよばれ, 着目する系のミクロ状態が連続的あるいは離散的に記述できる場合についてそれぞれ, $Z(\beta) = \int dS e^{-\beta H(S)}$, $Z(\beta) = \sum_S e^{-\beta H(S)}$ によって計算される。両者を含む表現として, 以下では $Z(\beta) = \text{Tr}_S e^{-\beta H(S)}$ と書く。

我々が興味があるのは (1.1) であらわされる確率分布関するマクロな物理量の期待値である。例えば, ハミルトニアンについての期待値 $\langle H \rangle_\beta$ は,

$$\langle H \rangle_\beta = \text{Tr}_S H(S) p(S) = \text{Tr}_S H(S) \frac{e^{-\beta H(S)}}{Z(\beta)}, \quad (1.2)$$

のようにあらわされる。さらに, 右辺の最後の式は対数関数の微分の性質を使うことで,

$$\langle H \rangle_\beta = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \text{Tr}_S p(S) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F), \quad (1.3)$$

と書き換えられることがわかる。ここで, ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -\beta^{-1} \ln Z(\beta)$ を導入した。あとでもみるように, 注目する系についてこの自由エネルギーあるいは, 分配関数を評価することが統計力学の中心的課題のひとつである。

ここでは, イジング模型とよばれる磁性体をモデル化した系 [65] に着目し, 第3章以降でもちいる手法の紹介をおこなう。イジング模型とは図 1.1 のような格子上に小さな磁石の役割をする 2 値のスピン変数 $S_i \in \{-1, 1\}$ をとるようなスピンが存在し, それぞれのスピン同士が相互作用している系のことである。この模型のハミルトニアンは,

$$H(S) = -J \sum_{(i,j)} S_i S_j, \quad (1.4)$$

のように書くことができる。ただし, (i, j) の和の組合せはここでは特に指定しない。ここで J はスピン同士の相互作用の大きさをあらわし, $J > 0$ であれば強磁性, $J < 0$ であれば

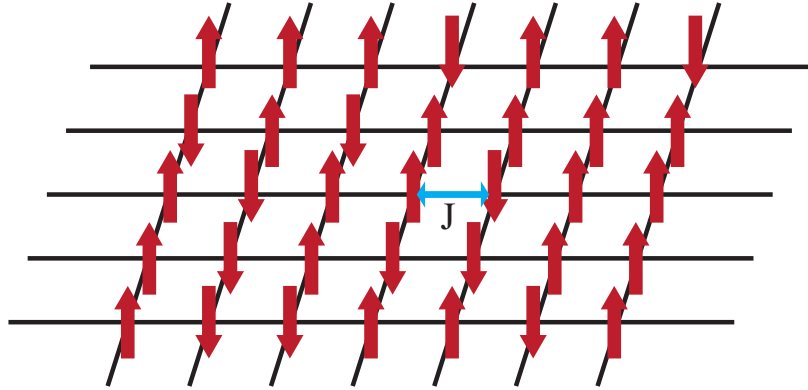


図 1.1 二次元格子上的イジング模型. 赤い矢印で描かれる各スピンは上向きか下向きの状態をとり, J で相互採用している.

ば反強磁性の系であるという. これは, カノニカル分布 (1.1) のかたちからわかるように, β が大きいときにはハミルトニアンが小さな値になるようなスピンの組 $\{S_i\}$ が実現しやすく, $J > 0$ であれば, これは相互作用するスピンの向きがそろいやすいことを意味するからである. 相互作用するスピンの向きがそろえば, 注目する系のマクロな磁化 $\langle S_i \rangle$ が 0 でない値をもつと期待できる. さて, カノニカル分布 (1.1) とハミルトニアン (1.4) が決まったので, 逆温度 β を指定してしまえば, m のようなマクロな変数の期待値が求まるはずである. しかしながら, 統計力学が着目する系は一般にアボガドロ定数程度 (10^{23}) のミクロ変数を持ち, イジング模型のような 2 値変数であってもそのすべての組合せを計算しようとするのは $2^{10^{23}}$ という途方もない数を相手にする必要がある. このような計算はあまり現実的とはいえない.

このような困難を回避するために, 様々な工夫がおこないわれてきた. ここでは, 問題 (1.4) を扱いやすく変更したうえで, (ナイーブな) 平均場近似という考え方を導入しこの問題を回避する方法を紹介する [61, 65]. はじめに (1.4) のハミルトニアンを

$$H(\mathbf{S}) = -\frac{J}{N} \sum_{i>j} S_i S_j, \quad (1.5)$$

のように以下の 2 つの点につうて書き換えをおこなう. ひとつめは和の組合せ (i, j) をすべてのスピン同士をしたことである. ふたつめはあとで $N \rightarrow \infty$ の極限をとることを考慮して, ほかのスピンからの相互作用全体のオーダーを $\mathcal{O}(1)$ とするため, J を J/N に置き換えたことである. ひとつめのような模型は無限レンジ模型とよばれ, どのスピン同士も同じだけの大きさで相互作用するような系を考えることに相当している. 現実の三次元の世界の物理を念頭に置くと, この模型では距離が離れたスピンも近いスピンも平等に扱うことになるので違和感があるものの, ここではいったん受け入れるものとする. 無限レンジ版のイジング模型は平均場近似をもちいて厳密に評価できることが知られている [65].

式 (1.5) は $m = N^{-1} \sum_{i=1}^N S_i$ をもちいると,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{S}) &= -\frac{J}{N} \sum_{i>j} S_i S_j = -\frac{NJ}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \right)^2 + \frac{J}{2N} \sum_{i=1}^N S_i^2 \\ &= -\frac{NJ}{2} m^2 + \frac{J}{N} \simeq -\frac{NJ}{2} m^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

のように書ける. ただし, 最後の近似は 2 番目の項が N が大きい極限において 1 番目の項に比べて無視できるほど小さいことによる. 式 (1.6) には最早ミクロな変数 $\{S_i\}$ はあらわれておらず m のみの式になっている. このように, 個々に相互作用をしているミクロな確率変数を平均で置き換えてしまう方法を平均場近似とよぶ.

無限レンジ版のイジング模型のハミルトニアンが (1.6) のように簡単に書くことができたので具体的に自由エネルギーを求める. m が -1 から 1 の値をもつ連続的な数であることと, $m = N^{-1} \sum_{i=1}^N S_i$ を考慮すると分配関数は,

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= N \int_{-1}^1 dm \text{Tr} \mathbf{S} e^{-\beta H(\mathbf{S})} \times \delta \left(\sum_{i=1}^N S_i - Nm \right) \\ &= N \int_{-1}^1 dm \exp \left\{ \frac{\beta NJ m^2}{2} \right\} \times \text{Tr} \mathbf{S} \delta \left(\sum_{i=1}^N S_i - Nm \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

と書ける. ただし, $\delta(x)$ は関数 $f(x)$ について $f(x_0) = \int dx \delta(x - x_0) f(x)$ となるようなディラックのデルタ関数である. さて, $N \rightarrow \infty$ の極限においては鞍点法とよばれる方法をもちいてデルタ関数を,

$$\text{Tr} \mathbf{S} \delta \left(\sum_{i=1}^N S_i - Nm \right) \simeq \text{extr}_{\hat{m}} \left\{ \exp \left\{ \hat{m} \left(\sum_{i=1}^N S_i - Nm \right) \right\} \right\}, \quad (1.8)$$

のように書き換えることができる. ここで, $\text{extr}_{\hat{m}}$ は変数 $\hat{m}$ に関する極値評価をあらわす. また, $\hat{m}$ のような変数は m の共役変数とよばれる. さらに $\text{Tr} \mathbf{S} \exp \{ \hat{m} \sum_{i=1}^N S_i \} = (e^{\hat{m}} + e^{-\hat{m}}) = (2 \cosh \hat{m})^N$ に注意して, 式 (1.7) を (1.8) に代入すると,

$$Z(\beta) = N \int_{-1}^1 dm \text{extr}_{\hat{m}} \left\{ \exp \left\{ N \left(\frac{\beta N m^2}{2} - \hat{m} m + \ln 2 \cosh \hat{m} \right) \right\} \right\}, \quad (1.9)$$

を得る. 式 (1.9) の被積分関数が $\exp \{ N \times \mathcal{O}(1) \}$ のようになっていることから, m の積分についても鞍点法を適用することができる. よって, $N \rightarrow \infty$ の極限における 1 自由度あたりの自由エネルギー,

$$f(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} \ln Z(\beta) = -\frac{J m^{*2}}{2} + \frac{\hat{m}^* m^*}{\beta} - \frac{1}{\beta} \ln 2 \cosh \hat{m}^*, \quad (1.10)$$

が得られる。ただし, $m^*, \hat{m}^*$ は鞍点方程式,

$$\hat{m} = \beta J m, \quad m = \tanh \hat{m}, \quad (1.11)$$

の解である。

ここまでは, マクロな変数 $m = N^{-1} \sum_{i=1}^N S_i$ とその共役変数 $\hat{m}$ を便宜的に導入し, 鞍点法をもちいることで自由エネルギーの評価をおこなうことができた。一方で, 無限レンジ版のイジング模型において我々が興味をもっているのは自由エネルギーの値そのものではなくマクロな物理変数, 特に磁化 $\langle S_i \rangle$ である。実は, $\langle S_i \rangle = m$ であることが簡単な考察からわかる。このように問題によっては自由エネルギーをマクロな変数とその共役変数によって表現し, その鞍点方程式を導くことができれば, たちどころに興味がある物理量をすることができる。元の問題は (1.4) のように 2^N 通りの組合せについて計算をおこなう必要があったが, 統計力学の手法を導入することにより (1.11) のような非線形方程式を解く問題におとすことができた。本論文で扱う分散圧縮センシングの問題もこのようなタイプの問題になっている。

統計力学の手法が N が大きな系について力を発揮することはわかったが, 上記のような議論をそのまま情報処理の問題に援用することできない [64]。ここでは簡単に上記で扱った統計力学における典型的な問題と情報処理分野で興味をもたれる問題の違いについて簡単に触れる。式 (1.4) や (1.5) で与えられる問題では, いずれもパラメータ J によってあらかじめ定められた系においてスピン変数 $\{S_i\}$ についてのトレース和をとることによりマクロな物理量を得ることができる。一方で, 情報処理分野における誤り訂正符号や情報源符号化などの問題は, 一般的に下記のようなかたちで記述することができる。 x^0, y をそれぞれ送信機側がもつ原情報, 受信機側が得た情報とする。受信機側では y にもとづいて元の情報を復元しようとするので, 推定された情報は $\hat{x}(y)$ のように y の関数として書くことができる。情報処理の分野ではしばしば, ある定まった唯一の種類の情報 x^0 に対する性能を評価するのではなく, 原情報と送信プロセスが, それぞれなんらかの確率分布 $p(x^0), p(y|x^0)$ によって規定される問題設定における平均的な性能を評価することが必要になる。さらに, 受信機においてもなんらかの確率分布 $p(\hat{x}|y)$ にもとづいた確率推論をおこなうとするならば, この性能評価には 2 つの確率変数, すなわち原情報を含む y と与えられた情報にもとづく推定結果 $\hat{x}$ についていわば二重の平均をとることが必要になる。この原情報を含む y についての平均をとる, というプロセスは上記のイジング模型の考察には含まれていない。

統計力学においては, 情報処理分野のように二重平均を必要とするような問題の評価は不規則系とよばれる問題設定で扱われる。上記で扱ったイジング模型ではすべてのスピン同士が同様の相互作用をしている, すなわち注目している系は 1 種類の分子のみを含む規則的な系であるとみなすことができる。これに対し Sherrington Kirkpatrick 模型 (SK 模

型) は, ハミルトニアンとして,

$$H(\mathbf{S}|\mathbf{J}) = - \sum_{i>j} J_{ij} S_i S_j, \quad (1.12)$$

のように相互作用 J_{ij} が各々のスピンの間によって異なる不規則な系である. このような系は 2 種類以上の分子, たとえば強磁性を示すものと反強磁性を示すもの, をランダムに含んでいるとみなすことができる. ここでは特に J_{ij} が平均 J_0/N , 分散 J^2/N のガウス分布,

$$P(J_{ij}) = \sqrt{\frac{N}{2\pi J^2}} \exp \left\{ - \frac{N}{2J^2} \left(J_{ij} - \frac{J_0}{N} \right)^2 \right\}, \quad (1.13)$$

から生成されるものとする. SK 模型では, スピンの状態 $\mathbf{S}$ は相互作用 J_{ij} の実現値 $\mathbf{J}$ に依存する. この構造は, 推定結果の情報 $\hat{\mathbf{x}}$ が受信した情報 $\mathbf{y}$ に依存することと同様の構造ととらえることができる. 以下では, この SK 模型を例にとり不規則系の統計力学を概観する.

無限レンジ版のイジング模型についておこなったのと同様にハミルトニアン (1.12) にもとづく自由エネルギー密度,

$$\begin{aligned} [f(\mathbf{J})]_{\mathbf{J}} &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} \left[\ln \text{Tr}_{\mathbf{S}} e^{-\beta H(\mathbf{S}|\mathbf{J})} \right]_{\mathbf{J}} \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} \left[\ln Z(\mathbf{J}, \beta) \right]_{\mathbf{J}}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

を求めたい. ただし, $[\cdots]_{\mathbf{J}}$ は $\mathbf{J}$ についての配位平均とよばれる平均操作をあらわす. 残念ながら, この $\mathbf{J}$ についての平均を直接にとることは, $\text{Tr}_{\mathbf{S}} e^{-\beta H(\mathbf{S}|\mathbf{J})}$ の計算に比べると $[\cdots]_{\mathbf{J}}$ 内の関数が対数を含むため困難である [66]. この問題を回避する方法として, 恒等式,

$$\left[\ln Z(\mathbf{J}, \beta) \right]_{\mathbf{J}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{[Z(\mathbf{J}, \beta)^n]_{\mathbf{J}} - 1}{n}, \quad (1.15)$$

をもちいる. このようにすることで, 分配関数の対数関数の配位平均を分配関数のべき乗の配位平均,

$$[Z(\mathbf{J}, \beta)^n]_{\mathbf{J}} = \int d\mathbf{J} p(\mathbf{J}) \text{Tr}_{\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \dots, \mathbf{S}^n} \exp \left\{ - \beta \sum_{a=1}^n H(\mathbf{S}^a | \mathbf{J}) \right\} \quad (1.16)$$

に置き換えることができる. このような置き換えは, 着目している系を n 個複製した系を扱うことからレプリカ法とよばれ, 不規則系の統計力学における強力な手法となっている [66].

以下では、レプリカ法による $[Z(\mathbf{J}, \beta)^n]_{\mathbf{J}}$ の計算を進めていく [61, 66]. マクロな変数 $m_a = N^{-1} \sum_{i=1}^N S_i^a$ および, $q_{ab} = N^{-1} \sum_{i=1}^N S_i^a S_i^b$ をもちいると,

$$\begin{aligned} [e^{-\beta \sum_{a=1}^n H(\mathbf{S}^a | \mathbf{J})}]_{\mathbf{J}} &= \exp \left\{ \frac{J^2}{2N} \left(\sum_{i>j} \sum_{a=1}^n S_i^a S_j^a \right)^2 + \sum_{i>j} \frac{\beta J_0}{N} \sum_{a=1}^n S_i^a S_j^a \right\} \\ &\simeq \exp \left\{ \frac{N\beta J_0}{2} \sum_{a=1}^n m_a^2 + \frac{N\beta^2 J^2}{2} \left(\frac{n}{2} + \sum_{a>b} q_{ab}^2 \right) \right\} \\ &\equiv \exp \{ -N\beta e_n(m_a, q_{ab}) \} \end{aligned} \quad (1.17)$$

を得る. さらに, 無限レンジ版のイジング模型でおこないったのと同様に, m_a, q_{ab} の定義が満たす制約を鞍点法で評価すると,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \dots, \mathbf{S}^n} \prod_{a=1}^n \delta \left(\sum_{i=1}^N S_i^a - N m_a \right) \prod_{a>b} \delta \left(\sum_{i=1}^N S_i^a S_i^b - N q_{ab} \right) \\ \simeq \text{extr}_{\hat{m}_a, \hat{q}_{ab}} \left\{ \left(\text{Tr}_{\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \dots, \mathbf{S}^n} e^{\sum_{a=1}^n \hat{m}_a S^a + \sum_{a>b} \hat{q}_{ab} S^a S^b} \right)^N \right. \\ \left. \times e^{-N \sum_{a=1}^n \hat{m}_a m_a - N \sum_{a>b} q_{ab} \hat{q}_{ab}} \right\} \\ \equiv \text{extr}_{m_a, \hat{m}_a, q_{ab}, \hat{q}_{ab}} \{ \exp \{ N s_n(m_a, \hat{m}_a, q_{ab}, \hat{q}_{ab}) \} \}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

を得る. ただし, $\hat{m}_a, \hat{q}_{ab}$ はそれぞれ m_a, q_{ab} の共役変数である. 式 (1.17) と (1.18) を合わせて m_a, q_{ab} についての積分により (1.16) を評価することができる. この積分については, 無限レンジ版のイジング模型の (1.9) の考察と同様に $\exp \{ N \times \mathcal{O}(1) \}$ となっていることから, m_a, q_{ab} についても再び鞍点法をもちいることができ, 結局

$$\frac{1}{N} \ln [Z(\mathbf{J}, \beta)^n]_{\mathbf{J}} = \text{extr}_{m_a, \hat{m}_a, q_{ab}, \hat{q}_{ab}} \left\{ -\beta e_n(m_a, q_{ab}) + s_n(m_a, \hat{m}_a, q_{ab}, \hat{q}_{ab}) \right\} \quad (1.19)$$

を得る.

レプリカ系の自由エネルギーの評価が (1.19) により与えられることがわかったので, いよいよ, 元の系の自由エネルギーの評価をおこなう. ここでは, 各レプリカにおけるマクロ変数が

$$m_a = m, \quad \hat{m}_a = \hat{m}, \quad q_{ab} = q, \quad \hat{q}_{ab} = \hat{q}, \quad (1.20)$$

のような条件を満たすと仮定して議論を進める. このような仮定はレプリカ対称仮定とよばれ, SK 模型の場合低温においては正しくないことが知られている [66] が, 簡単のためここではこの仮定の下に議論を進める. 式 (1.17) に条件 (1.20) を代入すると,

$$e_n^{\text{RS}}(m, q) = \frac{nJ_0}{2} m^2 - \frac{n\beta J^2}{4} (1 + (n-1)q^2) \quad (1.21)$$

を得る. 同様に, 条件 (1.20) と恒等式

$$\exp \left\{ \hat{q} \sum_{a>b} S^a S^b \right\} = \int Dz \exp \left\{ \sqrt{\hat{q}} \sum_{a=1}^n S^a - \frac{n\hat{q}}{2} \right\}, \quad (1.22)$$

をもちいると, (1.18) については,

$$s_n^{\text{RS}}(m, q, \hat{m}, \hat{q}) = \ln \left\{ \int Dz (2 \cosh(\sqrt{\hat{q} + \hat{m}}))^n \right\} - n\hat{m}m - \frac{n(n-1)}{2} \hat{q}q - \frac{n}{2} \hat{q} \quad (1.23)$$

を得る. ただし, $Dz = dz e^{-z^2/2} / \sqrt{2\pi}$ である. なお, 式 (1.22) のように, 二体問題を一体問題に置き換える方法を Hubbard-Stratonovich 変換 [67] とよぶ. 最後に, (1.19) に (1.21) と (1.23) を代入し, (1.15) にならって $n \rightarrow 0$ とすると, レプリカ自由エネルギー,

$$f^{\text{RS}}(m, q, \hat{m}, \hat{q}) = -\frac{J_0 m^2}{2} - \frac{\beta J^2}{4} (1 - q^2) + \frac{\hat{m}m}{\beta} + \frac{\hat{q}(1 - q)}{2\beta} - \frac{1}{\beta} \int Dz \ln 2 \cosh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{m}), \quad (1.24)$$

を得る. 無限レンジ版のイジング模型の場合と同様に, (1.24) の鞍点解を求めることで, レプリカ対称仮定におけるマクロな物理量の平均を得ることができる.

本節では, 無限レンジ版のイジング模型と SK 模型を例にとり, 規則系, 不規則系の統計力学における手法について述べた. 特に不規則系の統計力学は, 情報処理分野との関連について配位平均=個別の原情報および処理プロセスの平均, 物理量の平均=確率推論の結果の平均, という共通の構造をもつことから本論文でも重要な役割を果たす.

1.2.2 ベーテ近似

1.2.1 では, 知りたい量を求めるために必要な計算量が対象のサイズ N の指数に比例するような問題にたいして, 平均場近似という方法をもちいてこの計算量の困難を回避する方法を紹介した. この近似方法は無限レンジ模型のような特殊な系については系のサイズ N が無限大の極限で厳密な結果を与えるものの, 現実の物理の問題を扱う方法としてはいささか大胆過ぎる近似法であるといえる. ここでは, 前節で導入したナイーブな平均場近似を一步進めてより現実的な物理系に近づけた近似法であるベーテ近似 [68] を紹介する.

ベーテ近似は様々な問題に応用されてきた. ここで例として紹介するイジングスピンの問題 [65] やパーコレーション解析 [69] にももちいられている. 本論文でもベーテ近似の考え方をさらに一般化した cavity 法をランダムネットワークのパーコレーション解析にもちいる. また, あとに述べる信念伝搬法もベーテ近似の考え方にもとづくこととみなすことができる.

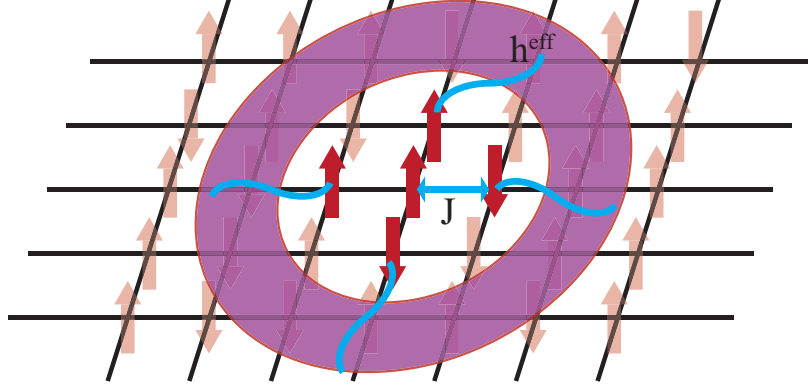


図 1.2 二次元格子上的イジング模型をベータ近似した様子をあらわす概念図. 着目する中心スピンと最隣接する 4 つのスピンとの相互作用は厳密に評価する一方で, それ以外のスピンからの影響は場 h^{eff} で置き換える.

前節で紹介した平均場近似においては, ある着目する要素があったときに, その周辺の要素をまとめてひとつの場としてみなしたのに対し, ベータ近似の基本的な考え方は, ある着目する要素に隣接する要素との相互作用については厳密に扱い, 隣接する要素へのこれらの要素以外からの相互作用については平均場近似と同様に場として扱うというものである (図 1.2). この方法で相互作用をすべて一体分布であらわしてしまう前節の平均場近似と比較してより問題によってはより正確な近似となることが期待される. ここでは再びイジング模型を対象に, ベータ近似の概要を説明する.

式 (1.4) のイジング模型のハミルトニアンを着目するスピン i とそのほかのスピン $j \in \partial_i$ にわけて,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{S}) &= -J \sum_{(ij)} S_i S_j = -J S_i \sum_{j \in \partial_i} S_j - J \sum_{(k \neq i, l \neq i)} S_k S_l \\ &= -J S_i \sum_{j \in \partial_i} S_j + H_{\setminus i}(\{S_j\}_{\setminus i}), \end{aligned} \quad (1.25)$$

のように記述することができる. ここで ∂_i はスピン i と直接相互作用するスピンの集合であり, $H_{\setminus i}(\{S_j\}_{\setminus i})$ は系からスピン i に関する影響を取り除いた系のハミルトニアンをあらわしている. このままでは, 元のハミルトニアンを単にスピン i が直接相互作用するスピンとそれ以外のスピンにわけただけである.

ベータ近似では, $H_{\setminus i}(\{S_j\}_{\setminus i})$ を $j \in \partial_i$ のスピンとそれらに影響を考慮した場 h^{eff} によって近似する. h^{eff} は, 系から i の影響をより除いた系を近似する場であるので cavity 場 (cavity field, cavity は空乏を意味する) とよばれる. これをもちいて, (1.25) は,

$$H(\mathbf{S}) \approx H_{\text{Bethe}}(S_i, \{S_j\}_{j \in \partial_i}) = -J S_i \sum_{j \in \partial_i} S_j - h^{\text{eff}} \sum_{j \in \partial_i} S_j \quad (1.26)$$

のように近似することができる。ここでは、スピン S_i および $\{S_j\}_{j \in \partial_i}$ の結合分布を (1.26) のカノニカル分布をもちいて、

$$P(S_i, \{S_j\}_{j \in \partial_i}) \propto \exp^{-\beta H_{\text{Bethe}}(S_i, \{S_j\}_{j \in \partial_i})}, \quad (1.27)$$

とあらわし、さらに計算を進め S_i の一様分布 $P(S_i) = \sum_{\{S_j\}_{j \in \partial_i} \in \{+1, -1\}^k} P(S_i, \{S_j\}_{j \in \partial_i})$ を求めよう。ここで、 k は S_i と直接相互作用するスピンの数であり、配位数または次数ともよばれる。 $S_j \in \{+1, -1\}, \forall j \in \partial_i$ より、

$$\begin{aligned} P(S_i) &\propto \exp \left\{ \beta \frac{k}{\beta} \ln \left[2 \cosh \{ \beta (JS_i + h^{\text{eff}}) \} \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ \beta \frac{k}{2\beta} \ln \left[\frac{\cosh \{ \beta (J + h^{\text{eff}}) \}}{\cosh \{ \beta (-J + h^{\text{eff}}) \}} \right] S_i \right\}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

が得られる。さらに、 $S \in \{+1, -1\}, A \in \mathbb{R}$ にたいして、 $e^{AS} = 2 \cosh A \times (1 + S \tanh A)/2$ であることと、 $x \in \mathbb{R}$ にたいして $\ln \{(1+x)/(1-x)\}/2 = \tanh^{-1} x$ から、

$$P(S_i) = \frac{1 + S_i \tanh(\beta k \hat{h}^{\text{eff}})}{2} \quad (1.29)$$

である。ここで、

$$\hat{h}^{\text{eff}} = \frac{1}{\beta} \tanh^{-1} (\tanh(\beta J) \tanh(\beta h^{\text{eff}})), \quad (1.30)$$

とした。 $\hat{h}^{\text{eff}}$ は cavity バイアス (cavity bias) とよばれる。式 (1.29) をもちいて、 S_i の平均値 $\langle S_i \rangle = m$ は、

$$m = \sum_{S_i \in \{+1, -1\}} S_i P(S_i) = \tanh(\beta k \hat{h}^{\text{eff}}), \quad (1.31)$$

と書くことができる。

ここまでは、cavity 場の具体的な求め方には触れなかったが、以上の議論と同様の方法を S_i を取り除いた系についてもちいることでこれを得ることができる。元の系から S_i を取り除いた系についてスピン S_i に隣接するスピン $\{S_j\}_{j \in \partial_i}$ に着目する。このような系においては S_j はそれぞれ $k-1$ 個のスピン $S_k \in \partial_{j \setminus i}$ と直接相互作用している。上記の議論を踏まえると S_j の熱平均値 $\langle S_j \rangle$ は、 S_i を取り除いたことで次数がひとつ減るので、(1.31) の k を $k-1$ に置き換えることで得られることがわかる。一方で、 $\langle S_j \rangle$ は場 h^{eff} のみで決まる値、 $\langle S_j \rangle = \sum_{S_j \in \{+1, -1\}} S_j e^{\beta h^{\text{eff}} S_j} / (e^{-\beta h^{\text{eff}}} + e^{\beta h^{\text{eff}}}) = \tanh(\beta h^{\text{eff}})$ とあらわすことできるのでこれら 2 つの値が一致する必要がある。ここから、自己無撞着な方程式 (self-consistent equation)、

$$h^{\text{eff}} = (k-1) \hat{h}^{\text{eff}} = \frac{1}{\beta} (k-1) \tanh^{-1} (\tanh(\beta J) \tanh(\beta h^{\text{eff}})), \quad (1.32)$$

が得られる。これにより, cavity 場 h^{eff} を具体的に求めることができる。

ベータ近似は例えば二次元正方格子についてもちいる際には厳密な解を与えないが, いくつかの例において厳密な解を与えることが知られている。例えば, 中心となる格子点から k 本の辺を伸ばし, それぞれの端点を新たな格子点とし, そこからさらに $k - 1$ 本の辺を伸ばすことを繰り返すことによって得られる構造は次数 k のケーリーツリーとよばれ [70], ツリー構造をもつ。このケーリーツリー上のイジング模型はベータ近似によって解くことが可能である [71]。また, 格子点同士を各格子点の次数が k になるようにランダムにつなぐことで得られるランダムにランダムネットワークも次数 k が系のサイズ N に比べて小さい場合, すなわち $k \mathcal{O}(1)$ の場合には厳密な結果を与えることが知られている。これは, 第 2 章でも述べるように, このようなネットワークではループの長さが系のサイズ無限大の極限でやはり無限大になることによる [72]。この性質をもちい, 本論文でもランダムネットワークのパーコレーション解析にベータ近似を一般化した cavity 法 [73, 74] をもちいる。また, ここで導入したベータ近似の考え方は, 次に説明する確率伝搬法とも密接な関係がある。

1.2.3 統計力学と信念伝搬法

本研究では信号の復元アルゴリズムとして確率推論手法の一種である信念伝搬法 (belief propagation) をもちいる。信念伝搬法は確率伝搬法 (probability propagation) はともよばれ, 確率変数と確率分布で規定されるファクターグラフとよばれるグラフ上での推論をおこなう方法のひとつである。確率伝搬法は元々, [75] により提唱され, ターボ符号の復号アルゴリズムとの等価性が指摘されるととも [76] に, 誤り訂正符号の一種である低密度パリティチェック検査符号の復号 [76, 77], 圧縮センシングの信号復元 [78] などに応用されている。オリジナルの提案 [75] においては, 信念伝搬法はファクターグラフがツリー構造をもつ場合に適用されており, この場合には厳密な解を与えることが示されている [79]。くわえて, ループ構造がある場合についても成功例が示されており [78], 特に loopy belief propagation などとよばれる。

ここでは, 着目する系の結合分布が,

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_a \psi_a(\mathbf{x}_a) \quad (1.33)$$

と書けるとする。ここで, Z は規格化定数であり, $\psi_a(\mathbf{x}_a)$ はポテンシャル関数, $\mathbf{x}_a$ はポテンシャル関数 $\psi_a(\mathbf{x}_a)$ に含まれる確率変数を, それぞれあらわす。例えば, (1.4) の強磁性イジング模型に対応させれば, a はスピン変数 (S_i, S_j) の組みに, ポテンシャル関数は $e^{\beta J S_i S_j}$ にそれぞれ対応し, Z は規格化定数である。

このようにあらわされる結合分布の構造は, 確率変数とそれらの分布を規定するポテン

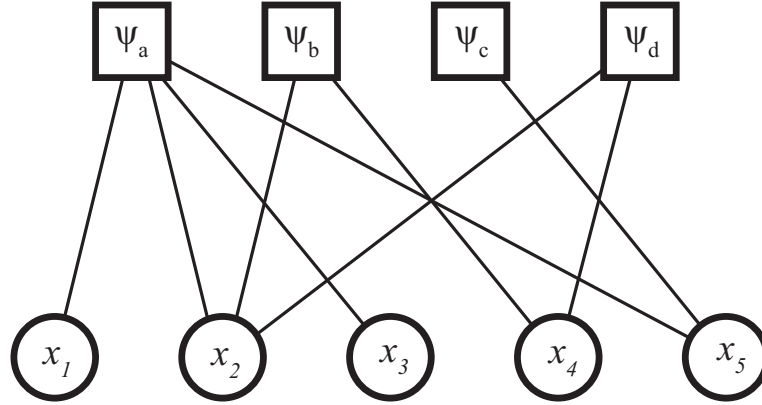


図 1.3 $\mathbf{x}_a = (x_1, x_2, x_3, x_5)$, $\mathbf{x}_b = (x_2, x_4)$, $\mathbf{x}_c = (x_5)$, $\mathbf{x}_d = (x_2, x_4)$ の場合のファクターグラフ。

シャル関数はファクターグラフをもちいるとわかりやすく理解することができる。確率変数の各要素を $\bigcirc$ で、各ポテンシャル関数を $\square$ であらわす。 ∂_i を確率変数 x_i を含むポテンシャル関数の集合、 ∂_a をポテンシャル関数 $\psi_a(\mathbf{x}_a)$ に含まれる確率変数の集合とすると、ファクターグラフは各 x_i に対応する $\bigcirc$ から ∂_i に含まれる $\square$ に辺をつなげる、あるいは逆に各ポテンシャル関数に対応する $\square$ から ∂_a に含まれる $\bigcirc$ に辺をつなげることで描くことができる。図 1.3 にその一例を記した。

一般的に、確率推論の目標は確率変数 $\{x_i\}_{i=1}^N$ の結合分布 $P(\mathbf{x})$ にもとづいて、 $\{x_i\}_{i=1}^N$ のある実現値を具体的に求めることである。このためにはしばしば、周辺分布 $P_i(x_i) = \text{Tr}_{\mathbf{x} \setminus x_i} P(\mathbf{x})$ を評価する必要がある。有効ポテンシャルをもちいてこの周辺分布を具体的に書き下すために、 $P(\mathbf{x})$ を x_i に関する部分とそうでない部分にわけて、

$$P(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{a \in \partial_i} \psi_a(\mathbf{x}_a) \prod_{b \notin \partial_i} \psi_b(\mathbf{x}_b)}{\text{Tr}_{\mathbf{x}} \prod_{a \in \partial_i} \psi_a(\mathbf{x}_a) \prod_{b \notin \partial_i} \psi_b(\mathbf{x}_b)}, \quad (1.34)$$

とあらわし、分子と分母を定数 $\text{Tr}_{\mathbf{x} \setminus x_i} \prod_{b \notin \partial_i} \psi_b(\mathbf{x}_b)$ で割り、

$$P(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{a \in \partial_i} \psi_a(\mathbf{x}_a) P_{\setminus x_i}(\mathbf{x} \setminus x_i)}{\text{Tr}_{\mathbf{x}} \prod_{a \in \partial_i} \psi_a(\mathbf{x}_a) P_{\setminus x_i}(\mathbf{x} \setminus x_i)}, \quad (1.35)$$

を得る。ここで、 x_i を取り除いた残りの確率変数の結合分布、

$$P_{\setminus x_i}(\mathbf{x} \setminus x_i) = \frac{\prod_{b \notin \partial_i} \psi_b(\mathbf{x}_b)}{\text{Tr}_{\mathbf{x} \setminus x_i} \prod_{b \notin \partial_i} \psi_b(\mathbf{x}_b)}, \quad (1.36)$$

を導入した。式 (1.35) を整理して、

$$P_i(x_i) = \text{Tr}_{\mathbf{x} \setminus x_i} P(\mathbf{x}) = \frac{\langle \prod_{a \in \partial_i} \psi_a(\mathbf{x}_a) \rangle_{\setminus x_i}}{\text{Tr}_{x_i} \langle \prod_{a \in \partial_i} \psi_a(\mathbf{x}_a) \rangle_{\setminus x_i}}, \quad (1.37)$$

を得る. ただし, $\langle \cdots \rangle_{\setminus x_i}$ は (1.36) に関する平均をあらわし, $\langle \prod_{a \in \partial_i} \psi_a(\mathbf{x}_a) \rangle_{\setminus x_i}$ は x_i の有効なポテンシャル $\psi_i^{\text{eff}}(x_i)$ を意味する. この表式は一般的な確率分布について成り立つ.

残念なことに, 一般的な確率分布については, $P_{\setminus x_i}(\mathbf{x} \setminus x_i)$ もまた $P(\mathbf{x})$ と同程度に複雑な確率変数間の依存性を持ち, その計算量は少なくない. このことから, (1.37) をもちいて確率推論をおこなうことは一般的には困難である. 一方で, $P(\mathbf{x})$ をあらわすファクターグラフが木構造をもつ, すなわちループがない場合には, $\psi_i^{\text{eff}}(x_i)$ および $P_i(x_i)$ を効率的に計算することが可能である. これは下記の 2 つの理由による.

1. $a, b, c, \dots \in \partial_i$ について, 各ポテンシャル $\psi_a(\mathbf{x}_a), \psi_b(\mathbf{x}_b), \psi_c(\mathbf{x}_c), \dots$ に含まれる確率変数 $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_c, \dots$ に共通して含まれる確率変数が x_i のみである.
2. x_i に対応する $\bigcirc$ をファクターグラフから取り除くと, ∂_i に含まれる $\square$ はそれぞれ自身を含む部分木に分離する.

ファクターグラフ上で部分木に分離した確率変数同士は互いに独立であるので, x_i を取り除いた系である cavity 系についてはそれぞれ独立に平均評価をおこなうことが可能になる.

以下ではもう少し具体的にファクターグラフが木構造をもつ確率分布 $P(\mathbf{x})$ であらわされる系について, 周辺分布 $P_i(x_i)$ を求める方法をみていこう. $a \in \partial_i$ なる a について $\mathcal{M}_{j \rightarrow a}(x_j)$ を, $\psi_a(\mathbf{x}_a)$ を除いた a -cavity 系についての $x_j \in \partial_a$ の周辺分布関数とする. 現在着目している系ではこの周辺分布関数の評価を上述したように独立におこなうことが可能である. このことから,

$$\begin{aligned} \psi_i^{\text{eff}}(x_i) &= \text{Tr}_{\mathbf{x} \setminus x_i} \left(\prod_{a \in \partial_i} \psi_a(\mathbf{x}_a) \right) P_{\setminus x_i}(\mathbf{x} \setminus x_i) \\ &= \prod_{a \in \partial_i} \left(\text{Tr}_{\mathbf{x}_a \setminus x_i} \psi_a(\mathbf{x}_a) \prod_{j \in \partial_a \setminus i} \mathcal{M}_{j \rightarrow a}(x_j) \right), \end{aligned} \quad (1.38)$$

が厳密に成り立つ. また, a -cavity 系の有効ポテンシャルを $\psi_{i \rightarrow a}^{\text{eff}}(x_i)$ とあらわすと,

$$\psi_{i \rightarrow a}^{\text{eff}}(x_i) = \prod_{b \in \partial_i \setminus a} \left(\text{Tr}_{\mathbf{x}_b \setminus x_i} \psi_b(\mathbf{x}_b) \prod_{j \in \partial_b \setminus i} \mathcal{M}_{j \rightarrow b}(x_j) \right), \quad (1.39)$$

もまた厳密な評価になっている. ところで, $\mathcal{M}_{i \rightarrow a}(x_i)$ はその定義から, 上記の有効ポテンシャル $\psi_{i \rightarrow a}^{\text{eff}}(x_i)$ をもちいて

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow a}(x_i) = \frac{\prod_{b \in \partial_i \setminus a} \left(\text{Tr}_{\mathbf{x}_b \setminus x_i} \psi_b(\mathbf{x}_b) \prod_{j \in \partial_b \setminus i} \mathcal{M}_{j \rightarrow b}(x_j) \right)}{\text{Tr}_{x_i} \prod_{b \in \partial_i \setminus a} \left(\text{Tr}_{\mathbf{x}_b \setminus x_i} \psi_b(\mathbf{x}_b) \prod_{j \in \partial_b \setminus i} \mathcal{M}_{j \rightarrow b}(x_j) \right)}, \quad (1.40)$$

のように規格化をおこなうことで計算することができる。また、上記の式を 2 つにわけた表現,

$$\mathcal{M}_{a \rightarrow i}(x_i) = \frac{1}{z_{a \rightarrow i}} \text{Tr}_{\mathbf{x}_a \setminus x_i} \psi_a(\mathbf{x}_a) \prod_{j \in \partial_a \setminus i} \mathcal{M}_{j \rightarrow a}(x_j) \quad (1.41)$$

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow a}(x_i) = \frac{1}{z_{i \rightarrow a}} \prod_{b \in \partial_i \setminus a} \mathcal{M}_{b \rightarrow i}(x_i), \quad (1.42)$$

を得ることができる。ここで、 $z_{a \rightarrow i}$ および $z_{i \rightarrow a}$ はそれぞれ $\text{Tr}_{x_i} \mathcal{M}_{a \rightarrow i}(x_i) = 1$ および $\text{Tr}_{x_i} \mathcal{M}_{i \rightarrow a}(x_i) = 1$ とするための規格化定数である。これらの表現から周辺分布 $P_i(x_i)$ は,

$$P_i(x_i) = \frac{1}{z_i} \prod_{a \in \partial_i} \mathcal{M}_{a \rightarrow i}(x_i), \quad (1.43)$$

と書くことができる。ここで、 z_i は $\text{Tr}_{x_i} P_i(x_i) = 1$ とするための規格化定数である。式 (1.41) および (1.42) によって $\mathcal{M}_{a \rightarrow i}(x_i)$ および $\mathcal{M}_{i \rightarrow a}$ を更新するアルゴリズムを信念伝搬法 (belief propagation) とよぶ。

ここまでの議論では、 a -cavity 系における x_j の周辺分布 $\mathcal{M}_{j \rightarrow a}(x_j)$ が与えられたもとで周辺分布 (1.43) が厳密に計算可能であることをみてきた。このままでは、どのようにアルゴリズムを実装すべきかわからないので、ひとまず各 $\mathcal{M}_{i \rightarrow a}(x_i)$ の初期値を x_i の各実現値についての一様分布としよう。実は、このような条件のもとで、ファクターグラフが木構造をもつ場合には任意の 2 つのグラフ上の要素の最大距離より大きな回数、各要素の対について (1.41) および (1.42) を反復すると、ある固定点に収束することと、固定点に達した $\mathcal{M}_{a \rightarrow i}$ から得られる周辺分布 (1.43) は厳密であることが示されている [79]。

ファクターグラフが木構造をもつ場合に、周辺分布が厳密に計算できることがわかったのでここではさら信念伝搬法の実おこないに必要な計算量についてみていこう。式 (1.41), (1.42) をみると、これらの式の評価にはそれぞれ $\mathcal{O}(|\partial_i|)$ および $\mathcal{O}(|\partial_a|)$ 程度の計算が必要であることがわかる。さらに系全体を考慮するとファクターグラフ上の辺で結ばれる要素の対 (i, a) にたいして $\mathcal{M}_{i \rightarrow a}$ および $\mathcal{M}_{a \rightarrow i}$ の 2 つの計算が必要なことから、辺の数に $\mathcal{O}(|\partial_i|) + \mathcal{O}(|\partial_a|)$ を乗じた程度の計算が必要になることがわかる。したがって、 $\mathcal{O}(|\partial_i|)$ および $\mathcal{O}(|\partial_a|)$ が $\mathcal{O}(1)$ 程度であれば、すなわちファクターグラフの次数が $\mathcal{O}(1)$ 程度であれば、(1.41), (1.42) および周辺分布 (1.43) の計算がすべての対 (i, a) について実おこない可能であるといえる。

以下では系の確率変数 $\mathbf{x}$ の結合分布 $P(\mathbf{x})$ が一般の場合、すなわちファクターグラフが木構造をもたない場合の信念伝搬法について簡単に考察する。改めて、式 (1.41) および (1.42) の計算の様子を図 1.4 のように整理すると、これらの計算が局所的な構造のみに依存すること、すなわち、例えば $\mathcal{M}_{a \rightarrow i}(x_i)$ を評価するためには $\{\mathcal{M}_{j \rightarrow a}(x_j)\}_{j \in \partial_a \setminus i}$ をあら

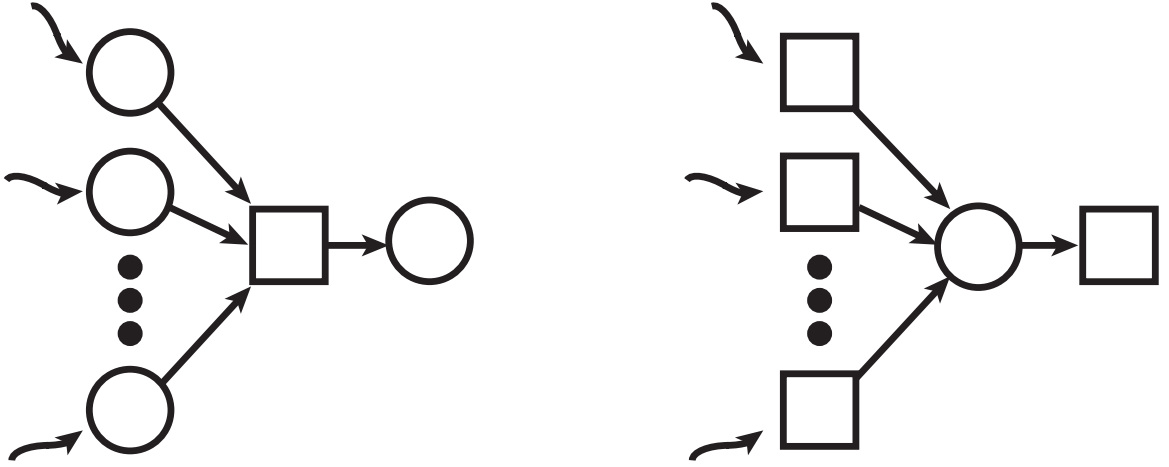


図 1.4 左は $\mathcal{M}_{a \rightarrow i}$ を更新するために必要な要素であり, 右は $\mathcal{M}_{i \rightarrow a}$ を更新するために必要な要素である. 図にあらわれる要素以外は明示的にはそれぞれの更新にあらわれない.

はじめ知ってさえすればよく, ∂_a に含まれない要素について考慮する必要がないということがわる. これはファクターグラフにループが含まれている場合においても信念伝搬法の計算自体は実おこない可能であることを意味している. このような性質を使い, 本論文の中でも分散圧縮センシングの信号復元問題に信念伝搬法をもちいる.

1.3 本論文の構成

本論文の本章以降の構成は下記の通りである. 第 2 章では次数相関のあるランダムネットワークの頑健性評価をおこなう. 特に次数相関を容易に扱うこと可能にした cavity 法をもちいたパーコレーション解析の手法を示し, ネットワークへの攻撃およびランダムな故障が頑健性に与える影響と次数相関との関係を明らかにする. 第 2 章の内容は Physical Review E 誌に 2010 年に発表した論文 [80] の内容を踏襲したものである. 第 3 章と第 4 章ではいずれも分散圧縮センシングの復元性能評価をおこなう. ここでは従来の圧縮センシングについてのレプリカ法による解析手法を多チャンネルに拡張した結果を示し, さらに数値実験の結果と比較しその妥当性を示した. 解析の対象とした復元手法は $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による手法とベイズ最適な手法の 2 つである. 第 3 章ではノイズがない場合の観測を, 第 4 章ではノイズがある場合の観測をそれぞれ扱う. 第 3 章, 第 4 章の内容は Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 誌に 2015 年に発表した論文 [81] と, その一部をノイズがある場合に拡張したものとをそれぞれ扱う. 第 5 章では第 2 章から第 4 章までのランダムネットワークの頑健性評価および分散圧縮センシングの復元性能評価の結果を踏まえ, 本研究の結論として効率的に情報の収集をおこなうセンサーネットワーク

構築の指針を述べる.

第 2 章

Cavity 法をもちいたランダムネットワークの攻撃に対する頑健性解析: 次数相関の影響^{*1}

2.1 はじめに

過去 10 年にわたり, ネットワーク結合の法則する多くの研究がおこなわれてきた [82, 83, 84, 44, 85]. 本論文の研究対象であるセンサーネットワーク, インターネット, 電力網, 航空機のルートなどは, その構成要素であるノードやノードをつなぐリンクの喪失に対する頑健性が要求される現実のネットワークの好例である. 一方でむしろネットワークの弱点を明らかにし, これを分断することを目標とするという意味で, 人間や動物のネットワークにおける伝染病の感染のひろがりの様子もまたネットワーク結合の法則の研究の対象である.

Erdős-Rényi 型のランダムネットワーク (またはランダムグラフ) [55, 86] とその派生系についての研究は上記のようなネットワークの頑健性解明に多くの知見を提供してきた. もっとも基本的なランダムネットワークはサイト (あるいはノードともよばれる) の組を確率 p で結ぶことによって生成される. あるサイトのそのサイトとほかのサイトとを結合するボンド (あるいはエッジとよばれる) の数は次数とよばれ, 基本的なランダムネットワークにおいてはポアソン分布となり, 平均から大きく離れた大きな次数は実用上は無視することができる. 一方で, 現実世界のネットワークに関する研究によれば, インター

^{*1} 本章の内容は, 本論文の著者らによる下記の論文 [80] の内容を日本語に翻訳し, 本論文の内容に即したかたちで一部加筆修正をおこなったものである. Yoshifumi Shiraki and Yoshiyuki Kabashima, “Cavity analysis on the robustness of random networks against targeted attacks: Influences of degree-degree correlations,” Phys. Rev. E 82, 036101. ©American Physical Society

ネットには非常に大きな次数が存在していることを示唆していることが知られており、次数分布が適当な指数 α をもつべき分布 $p(k) \propto k^{-\alpha}$ となるスケールフリーネットワークでモデル化される。

次数分布にくわえて、ネットワークの構成を特徴付ける量がいくつかある。次数分布のナイーブな拡張として、次数相関、すなわちある次数をもつサイトがある次数のサイトと結合する傾向が強いかわるいは弱いかを規定する量を導入することができる。また、次のふたつの量も広く使われている。ひとつは平均パス長とよばれる量であり、任意のランダムに選ばれたサイト同士の間にあるサイトの数の平均をあらわす。ランダムに構成されたネットワークは典型的に Cartesian 格子（正方形または立方体で構成される格子）よりも短い平均パス長をもつことが知られている [45]。ふたつめはクラスター係数とよばれる量であり、ある任意のサイトにつながるサイトの集合からランダムに選ばれたサイト同士が直接結合している確率をあらわす。日常的な例として、ある人物の友人からランダムに選ばれた2人のペアもまた友人同士である傾向の強さをあらわすことができる [87, 88]。

いくつかの早期の研究は、パーコレーション現象の研究で得られた特徴量をもちいてネットワーク結合の頑健性を明らかにしてきた [43]。Cohen らはランダムネットワークの構成物のランダムな排除に対するパーコレーション閾値を明らかにし、その知見をスケールフリーネットワークの頑健性の議論にもちいた [44]。このような解析をおこなううえで最も強力な手法のひとつは生成関数法とよばれる方法である。この手法にもとづいて、Newman らはあらゆる次数分布のランダムネットワークについて、巨大コンポーネントとよばれる分断されネットワークの中で最大のネットワークの大きさ、パーコレーション閾値、平均パス長などの量をシステマティックに求める方法を開発した [46]。彼らの研究によれば、スケールフリーネットワークはランダムなサイトの排除にたいして非常に頑健であり、特に指数 $\alpha > 3$ の場合、すべてのサイトを排除しない限りにおいて、スケールフリーネットワークは崩壊しない。Newman らはランダムネットワークにおける次数相関の影響についても研究をおこなった [89]。Golstev らはさらに、次数相関がランダムネットワークのパーコレーション閾値に与える影響を詳細に検討した [90]。彼らは、次数相関が正である、いわゆる assortative mixing ランダムネットワークが次数相関が0であるネットワークに比べて、高い頑健性をもつことを示した [91, 92]。これらの詳細はあとの節で述べる。ランダムなサイトの排除は、ネットワーク構成物の故障に対応した現象と考えることができる。センサーネットワークにおいては、時間の経過によるノードの機能喪失がこれに対応する。一方で、本章ではランダム次数依存攻撃とよぶ、狙い撃ちのかたちでサイトを排除した場合の頑健性についてもいくつかの研究がおこなわれている [93, 94, 95]。このような攻撃は、センサーネットワークにおいてノード間の通信を媒介するハブとよばれるノードに電力消費が集中し、ほかのノードに比べて早期に機能を喪失してしまう現象と同様であるとみなすことができる。これらのような多様な障害にたいして頑健性を高め

るようランダムネットワークの構成を最適化が検討されている [58, 96]. Valente ら [56] と Paul ら [57] はふたつまたはみっつのピークをもつ次数分布にしたがって生成されるランダムネットワークが攻撃とランダムな排除の両者にたいして最も頑健性が高いことを示した.

このような研究背景のもと, 我々はハブとなるノードのが早期に機能を失うことに対応するサイト攻撃とそれらハブノード同士の通信が断絶することに対応するボンド攻撃に対するランダムネットワークの頑健性の評価をおこなう. より具体的には, 上記のようにサイト攻撃への頑健性に優れる二極次数分布をもつランダムネットワークの性質をより詳細に明らかにする. これをおこなうために, もともと不規則系の統計力学において提案された cavity 法にもとづいたランダムネットワークの解析手法を提案する [73, 74].

ここでは, 大きなランダムネットワークの特質を解析するために, ベーテ格子上で厳密な結果を与えるメッセージ伝搬法 (message passing algorithm) を近似的にもちいた cavity 法の考え方を導入する. ただし, ランダムネットワークの大きな極限ではこの近似法が正しい結果を与えるものと仮定する. ベーテ格子の研究は, パーコレーション問題を解析的に解くことができる数少ない例のひとつとして長い歴史をもつ [69]. また, 多くの不規則系の統計力学の問題においてランダムネットワークの大きな極限についての解析結果とベーテ格子についての解析結果が一致することが知られている [74]. この観点から, 我々の手法は従来の研究における手法をより進んだ設定, すなわち次数相関があるランダムネットワークの故障と攻撃の多様な組合せに対する頑健性解析, に応用したものであるとみなすことができる.

あとで示すように, 我々の方法は様々なケースにおいて生成関数法が示す結果 [43, 46] と一致する解析結果を再現する. これらの手法の関係は完全には明らかになってはいないものの, このことはこれらふたつの手法が潜在的には等しいものであることを示唆している. しかしながら, cavity 法は物理学的な直観とよく一致するために, 我々の手法における変数や方程式の物理的な意味はより一層理解しやすいものとなっているだろう.

本章は下記のように構成されている. 次節では, 本章でもちいる表記および, 比較対象になるランダムネットワークについての従来研究の結果を振り返る. 特に, ネットワーク結合の頑健性を考察するうえで, あとで重要な役割を果たす二極次数分布モデルの最適性についても詳細に触れる. 2.3 節では, パーコレーションの特徴量を導出するために cavity 法にもとづいた方法を提案する. 2.4 節では, 二極次数分布モデルにおける進んだ設定に我々の手法応用し, さらに数値実験によってこの有効性を確かめる. 最終節では本章の結論とまとめを述べる.

2.2 ランダムネットワークの概説

この節では、本章でもちいる表記およびランダムネットワークについての従来研究の結果を振り返る。また、本章で扱うモデルについても紹介する。

2.2.1 ランダムネットワークと次数分布

一般的に、ランダムネットワークはサイト（ノードあるいは点などともいう）とそれらサイトをランダムに結ぶボンド（エッジあるいはリンクなどともいう）、によって構成される。あるサイトとつながっているボンドの数を、サイトの次数 k という。着目するネットワークにおける次数 k をもつサイトの頻度をあらわす次数分布 $p(k)$ はランダムネットワークを特徴づけるものとして広くもちいられている。また、この逆にある与えられた次数分布 $p(k)$ にもとづいてランダムネットワークを生成することがしばしば必要とされる。ここで、 d_i をインデックス i ($i = 1, 2, \dots, N$, N はネットワークに含まれるサイトの数) のサイトの次数とする。 $k = 1, 2, \dots$ にわたり、 $i = 1, 2, \dots, N$ のインデックスにたいして $d_i = k$ を $Np(k)$ を割り当てる。ランダムネットワークの生成は実用的には [97] にしたがって下記のようになる：

- (P) それぞれのインデックス i が d_i 回出現するようインデックス集合 U を生成する。続いて、(C1)–(C3) を反復する。
- (C1) 集合 U よりふたつの異なる要素ペアをランダムに選択する。ここではそれらのインデックスを i, j と書く。
- (C2) $i \neq j$ かつ選ばれたペア i および j がまだその時点で選ばれていない場合、サイトインデックス i と j とを結び U からそれらふたつのインデックスを取り除く。そうでない場合、 i, j を集合 U に戻す。
- (C3) 集合 U が空になったとき、反復を終える。または、(C1) および (C2) によってこれ以上ボンドを生成することができなくなった場合、(P) に戻る。

次数分布 $p(k)$ に関連して、ベイズの公式により導かれる、あるランダムに選択されたボンドの片端が次数 k をもつ確率

$$r_k = \frac{kp(k)}{\sum_l lp(l)} = \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} \quad (2.1)$$

を必要に応じて使用する。ここで、 $\langle k \rangle = \sum_l lp(l)$ ランダムネットワークの平均次数をあらわす。

2.2.2 次数相関

次数の頻度にくわえて、ランダムに選んだ直接結合するふたつのサイトの次数が k および l である確率をあらわす次数の同時分布 $r(k, l)$ から導くことができる次数相関もまた、ランダムネットワークを特徴付ける量として採用することができる。我々は、本章で均一的なネットワーク、すなわちあらゆる次数のペア k および l について $r(k, l) = r(l, k)$ が成り立つネットワークに着目する。

$r(k, l)$ は $p(k)$ や r_k に比べて、より多くの情報をもっている。例えば、 r_k はすべての次数 k について同時確率 $r(k, l)$ をもちいて

$$\sum_l r(k, l) = \frac{kp(k)}{\sum_l lp(l)} = r_k \quad (2.2)$$

のようにあらわすことができる。さらに、同時分布 $r(k, l)$ をもちいてランダムネットワークの次数相関をあらわすことができる。一般に、ランダムに選ばれたボンドの片端のサイトの次数が l があったとき、もう一方の端のサイトの次数が k であるような条件付き確率は

$$r_{kl} = \frac{r(k, l)}{r_l} = \frac{\langle k \rangle r(k, l)}{lp(l)} \quad (2.3)$$

のように $r(k, l)$ から計算することができる。ランダムネットワークのうち

$$r_{lk} = r_{kl} \quad \forall k, l, \quad (2.4)$$

を満たすようなネットワークを一般的に無相関のランダムネットワークとよぶ。

さて、次数分布 $p(k)$ が与えられたもとでランダムネットワークを生成することを考えるよう。次数分布 $p(k)$ が定まったもとであっても、条件付き確率 r_{kl} を設計することで次数相関を制御することができる。この設計の自由度は、生成するランダムネットワークにおける最大の次数 $k_{\max}$ をもちいて

$$\begin{aligned} F &= k_{\max}^2 - \frac{k_{\max}(k_{\max} - 1)}{2} - k_{\max} \\ &= \frac{1}{2}(k_{\max}^2 - k_{\max}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

のように導くことができる。これは $k_{\max}^2$ 個の正の数が $r_{kl}r_l = r_{lk}r_k$, $\forall k, l$ および $\sum_l r_{kl}r_l = r_k$, $\forall k$ を満たすために、 r_{kl} に割り当てており、ここからそれぞれ $k_{\max}(k_{\max} - 1)/2$ 個および $k_{\max}$ 個の制約が導かれるためである。

上記で紹介したネットワークの生成法をそのまま使用した場合、理想的には次数相関を生み出すことはない。自明でない次数相関をもつランダムネットワークを作るために多く

の方法が提案されてきた [89, 98, 99]. 本章における数値実験において我々は [89] で提案された方法をもちいる. これは, ランダムに選ばれた両端のサイトの次数 j および k の同時分布が希望する値 e_{jk} なるようにネットワークを生成する方法である. より具体的にはこの方法は下記のようにまとめられる:

- (I) 与えられた次数分布 $p(k)$ にしたがって, 元となるランダムネットワークを先の方法にしたがって生成する. 続いて, 以下の (D1)–(D3) を十分に反復する.
- (D1) 両端のサイトのペアが (v_1, w_1) および (v_2, w_2) によって表される, ふたつのボンドをランダムに選択する.
- (D2) 上記のふたつのサイトペアにおける残りの次数 (j_1, k_1) および (j_2, k_2) を評価する.
- (D3) 確率 $\min(1, (e_{j_1 j_2} e_{k_1 k_2}) / (e_{j_1 k_1} e_{j_2 k_2}))$ にしたがってサイトのペア (v_1, v_2) および (w_1, w_2) のようにボンドを置き換える.

ここで $\min(x, y)$ は x と y のより小さい値をあらわす. マクロな観点から次数相関を定量化するために, 測度

$$R = \frac{1}{\sigma_q^2} \sum_{jk} jk (e_{jk} - q_j q_k),$$

がよくもちいられる [89]. ここで

$$\sigma_q^2 = \sum_k k^2 q_k - \left(\sum_k k q_k \right)^2$$

$$q_k = \frac{(k+1)p(k+1)}{\sum_j j p(j)},$$

とである. 上の式の R が 0 であるときは, ランダムネットワークは完全にランダムであり, 次数相関はない. 一方で, 正 (負) の R は, 大きな次数のサイトは大きな次数 (小さな次数) のサイトと, 小さな次数のサイトは小さな次数 (大きな次数) のサイトとそれぞれつながりやすい傾向にあることを示唆しており, このような特徴を assortative (disassortative) mixing とよぶ.

2.2.3 ネットワークの結合と頑健性

本章では, 我々は主にネットワーク結合の働きについて調べていく. そこで, ここではこのネットワーク結合についての表現を定義する.

インデックス i と j が少なくともひとつのボンド経路で結ばれているとき, またそのときに限り, i と j が結合しているという. それ以外の場合, これらふたつのサイトが分離されているという. あるネットワークにおいて, サブネットワーク中のすべてのサイトペアが結合されている場合に, このネットワークを結合されたサブネットワークとよぶ. 特に,

結合されたサブネットワークのうち、元のネットワークのサイトを最も多く含むようなサブネットワークを巨大コンポーネントよぶ。

サイトまたはボンド、その両方が元のネットワークから排除されたとき、巨大コンポーネントの大きさは小さくなる。そのような排除は、現実世界のネットワークにおける機械や結線の事故的あるいは故意的な障害に対応するとみなすことができる。それらの問題に対するネットワーク結合の頑健性を理論的に評価するために、本章では次の2種類の障害の原因を考える。ランダムな故障は、統計的に独立な、サイトまたはボンドあるいはその両方のある確率にしたがったランダムな排除をモデル化したものである。ターゲット攻撃もまた、統計的に独立な、サイトまたはボンドあるいはその両方のある確率にしたがったランダムな排除のモデル化ではあるが、排除の対象をある閾値よりも大きな次数のサイトを含むものに限ったものである。

ランダムネットワークにおいて、 W_i をあるサイト i が巨大コンポーネントに所属していない、また同等に結合していない確率をあらわすものとする。このようにしたとき、巨大コンポーネントは

$$S = N^{-1} \sum_i (1 - W_i), \quad (2.6)$$

によって特徴づけられる。ネットワークが上で述べたような様々な原因（故障や攻撃）による欠損にさらされたとき、 S の典型的な値はその欠損の割合の高さにしたがって小さくなってしまふ。 S が 0 になる、すなわち巨大コンポーネントのサイズが N に比べて無視できる大きさになるような臨界指数をパーコレーション閾値とよび、本章においてはネットワーク結合の頑健性を測る尺度とする。

2.2.4 二極次数分布ランダムネットワーク

本論に入る前に、ランダムネットワークについて先行研究から得られるふたつの知見に言及する。

ふたつの先行研究、[56] および [57] は二峰性次数ネットワーク、あるいは二極次数分布ネットワークともよばれるネットワークが、次数分布で特徴付けられるランダムネットワークの集合において、サイトのランダムな故障と攻撃への耐性が最も強いことをそれぞれ独立に示した^{*2}。これらふたつのモデルはいずれも二極次数分布のネットワークであるが、ネットワークサイズの大きい極限における、大きな次数のスケールの振る舞いが異なる。

^{*2} ただし、これらふたつの研究には多少の違いがある。Paul ら [57] は、ランダムな故障あるいは攻撃のどちらかのみが起こる場合については二極次数分布のネットワークが、ランダムな故障と攻撃の両方が起こる場合では三極の次数分布をもつネットワークが、それぞれ最も頑健なネットワークになると主張している。

Valente ら [56] は次数の範囲の制約 $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$ ($0 \leq k_{\min} \leq k_{\max}$) および平均次数 $\langle k \rangle$ が有限かつ一定のもとで最適なネットワーク構成を探った. 彼らはランダム故障にたいして最適な次数分布は $p(k_1)$ および $p(k_2)$ が有限でかつほかの次数の頻度 $p(k)$ が 0 であることを明らかにした. ここで $k_1 = k_{\min}$ および $(k_{\min} \leq) k_2 (\leq k_{\max})$ は次数の平均 $\langle k \rangle$ を一定に保ったまま, 次数の自乗の平均を最適化することによって得られる次数である.

一方で, Paul ら [57] はランダムな故障とターゲット攻撃の両方に最適なネットワークとして, 別のタイプの二極次数分布のネットワークを示している. 彼らはふたつの次数のうち小さな次数をもつサイトがランダムネットワークのほとんどを占め, 大きな次数をもつ“ハブノード”とよばれるサイトが非常に少ない数存在していると仮定した. サイトの数 N および次数平均 $\langle k \rangle$ 一定の制約下で, 彼らによればランダムネットワークの頑健性は下記の条件が満たされる場合に最大化される [100]:

$$\begin{aligned} k_1 &\approx \langle k \rangle \\ k_2 &\approx \sqrt{\langle k \rangle N} \\ p(k_1) &= 1 - p(k_2) \\ p(k_2) &= \left(\left\{ \frac{2\langle k \rangle^2 (\langle k \rangle - 1)^2}{2\langle k \rangle - 1} \right\}^{2/3} / \langle k \rangle N \right)^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

このネットワーク構成においては N が大きいほど頑健性が高まる. ここで, k_2 は, 同一のサイトペアの間にふたつ以上のボンドがないという構成においては, 次数平均 $\langle k \rangle$ およびネットワークの数 N の制約のもとで許される最大の値になる [101].

これ以降, 前者を Valente-Sarkar-Stone (VSS) モデル, 後者を Paul-Tanizawa-Havlin-Stanley (PTHS) モデルとそれぞれよぶ.

2.3 Cavity 法によるパーコレーション解析

この節では, 不規則系の統計力学において発展してきた cavity 法 [73, 74] にもとづいてランダムネットワークの確率的な攻撃や故障に対する頑健性の解析方法について述べる. 不規則系の統計力学についての多数の研究によれば, cavity 法は次数分布が与えられた場合 [74] またさらに, その次数分布の台が有限でない場合についても [102, 103, 104], それらによって定められるランダムネットワークについて適当なシステムサイズ無限大の極限において厳密な解を与えることが示唆される. さらに, 最近の研究によれば, 非自明な次数相関がある場合についても cavity 法が使用できることがかわっている [105, 106, 107]. したがって, 数学的に厳密な証明を与えることは困難であるが, 下記における我々の解析手法もまた厳密な解を与えるものと期待する. ここでは, 我々の手法を先行研究によりす

で知られている手法から得られる結果との比較と、数値実験との結果との比較をおこなうことによりその有効性を確認する。

2.3.1 ツリー近似と cavity 場

ここでは、ネットワークの頑健性を明らかにするため、巨大コンポーネント (式 (2.6) による) のサイズを評価する解析的手法を開発する。これをおこなうため、次数分布の分散が有限である場合、ランダムに選ばれたふたつのサイトの閉じた経路の長さが典型的には N が大きくなるにしたがって $O(\ln N)$ で長くなっていくというランダムに構成されたネットワーク [72] の一般的な特性に着目する。次数相関がある場合においても、極端な場合を除いてそのような相関がパスの長さにたいして指数的に減少していくため、この閉じた経路の長さの特性は変わらないと考えられる。この性質をもちい、巨大コンポーネントサイズ (2.6) を近似的に評価するにあたって、局所的なサイト同士のつながりをループの無い系、すなわちツリー構造であるとして扱ってよいと仮定する。

この取り扱いについて説明するため、 ∂_i をサイト i と直接つながっているサイトのインデックス l の集合をあらわすとする。また、ここでサイト i を元の系から取り除いた系である i -cavity 系における指標 $c_{l \rightarrow i} = 0$ または 1 を導入する; $c_{l \rightarrow i} = 0$ および $c_{l \rightarrow i} = 1$ は、 i -cavity 系においてサイト l が巨大コンポーネントにつながっていることおよびつながっていないことをそれぞれ示唆する。この $c_{l \rightarrow i}$ のような変数を一般的に cavity 場とよぶ [73, 74]。ツリー構造の一般的かつ特徴的な点は、集合 $l \in \partial_i$ に含まれるサイトはサイト i を取り除くことで分離してしまいうことである。このことは、サイト $j \in \partial_i$ へのボンド $\langle ij \rangle$ を取り除いたまま i -cavity 系においてサイト i を挿入すると、巨大コンポーネントにつながっているか否かをあらわす指標は $\prod_{l \in \partial_i \setminus j} c_{l \rightarrow i}$ のように計算することができることを意味する。ここで、 $X \setminus j$ は集合 X から要素 j を取り除いた集合をあらわす。さらに、もともと考えていたツリー構造のネットワークの場合、サイト i および j のペアはボンド $\langle ij \rangle$ によってのみつながっているため、ここで得られた指標は j -cavity 系における i の cavity 場にほかならない (図 2.1 の左側)。上記の議論から

$$c_{i \rightarrow j} = \prod_{l \in \partial_i \setminus j} c_{l \rightarrow i}, \quad (2.7)$$

を得る。適当な初期条件および境界条件が与えられた元で、すべての cavity 場 $c_{l \rightarrow i}$ は上記の式をネットワーク全体に適用することによって得られる。すべての cavity 場が得られたのち、サイト i が元の系において巨大コンポーネントにつながっていない確率 o_i は、隣接するサイトの影響を考慮して、

$$o_i = \prod_{l \in \partial_i} c_{l \rightarrow i} \quad (2.8)$$

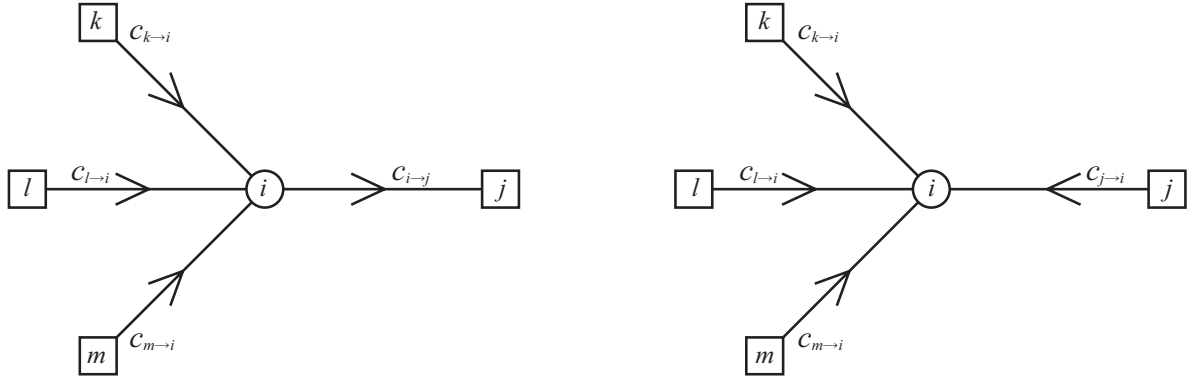


図 2.1 cavity 法の簡単なブロック図*. 正方形 k, l, m , および j は i -cavity 系におけるサイトをそれぞれあらわす. 左の図は (2.7) に対応している. $c_{k \rightarrow i}, c_{l \rightarrow i}$, および $c_{m \rightarrow i}$ は, i -cavity 系にサイト i を挿入した場合の i に向けた cavity 場をあらわす. サイト i と j を結ぶボンドを取り除いたままにすることで, それらの cavity 場から j -cavity 系におけるサイト i の cavity 場 $c_{i \rightarrow j}$ を形成する. サイト i に向けたすべての cavity 場が決定されたのちに, (2.8) にしたがって o_i を求めることができる (右の図).

*筆者らの論文 [80] より引用 ©American Physical Society

のように評価することができる (図 2.1 の右側).

2.3.2 マクロな観点からの技術

次の結果は我々の解析手法を特徴づけるうえで重要な役割を果たす. ネットワーク中のサイトを次数 k にしたがってクラス分けし, u_k を次数 k をもつサイト i の二値の cavity 場 $c_{l \rightarrow i}$ が 1 をとる頻度をあらわすとする. すなわち, u_k は $u_k = (\sum_i \delta_{|\partial i|, k})^{-1} \sum_i (\delta_{|\partial i|, k} \sum_{l \in \partial i} c_{l \rightarrow i})$ のように定義される. ここで, $|\partial i|$ サイト i の次数をあらわし, $x = y$ のとき $\delta_{x, y} = 1$, そうでない場合は 0 である. $N \rightarrow \infty$ の極限において, 頻度 u_k は典型的にそのネットワーク生成についての平均に収束すると期待することができる. このようなマクロな系における確率変数の特徴を自己平均とよぶ [73]. 現在扱っている系において, 次数 k をもつサイトに隣接するサイトの次数が l になる確率を r_{mk} とあらわす. ツリー近似のもとでは, 隣接するサイトの cavity 場の影響はネットワーク生成構造にたいして独立に平均化することができる. このことは, (2.8) で与えられるアルゴリズムはマクロな観点から

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_1 \frac{(k-1)!}{l_1! l_2! \dots} (r_{1k} u_1)^{l_1} (r_{2k} u_2)^{l_2} \dots \\ &= \left(\sum_m r_{mk} u_m \right)^{k-1}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

のように書けることを意味している. ここで, $\sum_l$ は $\sum_t l_t = k - 1$ の制約のもとでの和 $\sum_{l_1} \sum_{l_2} \cdots$ をあらわす.

本論文においては, ランダムな故障およびターゲット攻撃は, ランダムネットワークのサイトやボンドのランダムな排除として扱うことができると仮定する. これを扱うため, s_m と b_{mk} を次数 m をもつサイトの, および次数 m と次数 k をもつサイト同士のボンドの排除率をそれぞれあらわすものとしよう. そのようなランダムな排除がある系を考えたとき, サイト i を i -cavity 系に挿入したとき, サイト i は隣接するサイト $l \in \partial i \setminus j$ との間のボンド $\langle li \rangle$ を通しては巨大コンポーネントに接続されていないとしよう. これが起こるためには, 下記の 3 条件のうち少なくともひとつが成り立っている必要がある:

1. サイト l が巨大コンポーネントに接続されていない.
2. l が排除されている.
3. ボンド $\langle li \rangle$ が排除されている.

このことは, サイト i および j の次数がそれぞれ m および k であると仮定したとき, (2.9) の右辺に表れる u_m は $1 - (1 - s_m)(1 - b_{mk})(1 - u_m)$ に置き換えられるべきであることを示唆している. 最後に, (2.9) にこれを代入することで, cavity 場の頻度を決定する自己無撞着な方程式として,

$$u_k = \left(1 - \sum_m r_{mk}(1 - s_m)(1 - b_{mk})(1 - u_m)\right)^{k-1} \quad (2.10)$$

を得る.

w_k を次数 k をもつサイトが巨大コンポーネントにつながっていない確率とすると, 次数 k をもつサイト i について $W_i = w_k$ と書ける. $(\sum_i \delta_{|\partial i|, k})^{-1} \sum_i \delta_{|\partial i|, k} o_i$ をネットワークの生成構造にしたがって平均化することで, (次数に相関がある場合も含めた) サイトやボンド排除にたいして, w_k は, $u_k \quad \forall k = k_{\min}, \dots, k_{\max}$ を上記の方程式によって決定したのちに,

$$w_k = \left(1 - \sum_m r_{mk}(1 - s_m)(1 - b_{mk})(1 - u_m)\right)^k, \quad (2.11)$$

のように評価することができる. したがって, 巨大コンポーネントのサイズは

$$S = \sum_k p(k)(1 - s_k)(1 - w_k), \quad (2.12)$$

のように見積もることができる. 本章における主な結果はこれらの方程式によって導かれる.

2.3.3 既存の知見による本方法の検証

式 (2.10) および (2.11) は次数分布のみでなく, 次数の同時分布 $r(m, k)$ によって特徴づけられるランダムネットワークについても一般的に成り立っている. しかしながら, これらの方程式の導出方法とその表式は従来知られているものとは異なっており, 我々の方法がこれら既存の研究とどのような関係にあるのかは必ずしも明らかではない. この関係を明らかにするために, 最初にみつつの例における巨大コンポーネントについての知見を, 本章で導いた方法をもちいて再現する.

例 1: 次数相関のないランダムネットワークにおけるランダムな故障

はじめに, $r_{mk} = r_k$, $\forall m, k$ に従って生成される次数相関のないランダムネットワークについての結果に着目する. ボンドの排除率 b_{mk} が次数に依存しない ($b_{mk} = b_m$) 場合, (2.10) は下記のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} u_k &= \left(1 - \sum_m r_m (1 - s_m) (1 - b_m) (1 - u_m)\right)^{k-1} \\ &= (1 - U)^{k-1} \quad \forall k, \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで $U = \sum_m r_m (1 - s_m) (1 - b_m) (1 - u_m)$ である. この結果をもちいて U についての自己無撞着な方程式,

$$U = \sum_m r_m f_m (1 - (1 - U)^{m-1}), \quad (2.14)$$

を得ることができる. ここで f_m はサイトとボンドの故障率の積 $(1 - s_m)(1 - b_m)$ をあらわす. ここから, 次数相関のないランダムネットワークの巨大コンポーネントの大きさ S は, U をもちいて,

$$S = (1 - s) \sum_k p(k) \left(1 - (1 - U)^k\right), \quad (2.15)$$

とあらわすことができる. ここで $p(k)$ はランダムネットワークの次数分布である. この表式は先行研究における結果 (例えば [43]) と一致している.

式 (2.15) は次数相関のないランダムネットワークのパーコレーション閾値を求めるために使うことができる. サイトとボンドのランダムな故障については, f_m はサイトの次数 m には依存せず, したがって,

$$f = \frac{U}{\sum_m r_m (1 - (1 - U)^{m-1})} \quad (2.16)$$

とあらわすことができる。この表現は巨大コンポーネントは U が 0 になるとき消失することを意味している。ここから、上の方程式にたいして極限 $U \rightarrow 0$ についてロピタルの定理をもちいるとパーコレーション閾値、

$$\begin{aligned} f_c &= \frac{1}{\sum_m r_m(m-1)} \\ &= \frac{1}{\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

を得る。この結果もまた先行研究による結果（例えば, [46]）と一致する。

例 2: 次数相関のないランダムネットワークに対するターゲット攻撃

ふたつ目の例として、次数相関のないランダムネットワークに対するターゲット攻撃についての巨大コンポーネントの大きさとパーコレーション閾値を求めることにする。ターゲット攻撃をあらわすため、

$$b_{mk} = \begin{cases} b_m, & m > m', \\ 0, & m \leq m', \end{cases}, \quad (2.18)$$

を仮定する。これは、 m' より大きな次数のサイトに対するターゲット攻撃を意味する。ここで、 f_a と f_r をそれぞれターゲット攻撃とランダム故障の割合をあらわすとする。 $f_r = 0$ 、すなわち次数 $m \leq m'$ のサイトおよびボンドへの攻撃がない場合は、 f_a について、

$$f_a = \frac{U - \sum_m r_m \{1 - (1 - U)^{m-1}\}}{\sum_M r_M \{1 - (1 - U)^{M-1}\}}, \quad (2.19)$$

を得る。ここで、 $\sum_m = \sum_{k_{\min}}^{m'}$ および $\sum_M = \sum_{m'+1}^{k_{\max}}$ である。再び極限 $U \rightarrow 0$ をとると、パーコレーション閾値

$$f_{a_c} = \frac{1 - \sum_m r_m(m-1)}{\sum_M r_M(M-1)}, \quad (2.20)$$

を得ることができる。

すべての大きな次数のサイトが排除された状況、すなわち $f_a = 1$ においても、巨大コンポーネントが消失しないケースを考えることができる。そのような場合、ターゲット攻撃による排除後のランダム故障によるパーコレーション閾値は

$$f_{r_c} = \frac{1}{\sum_m r_m(m-1)}, \quad (2.21)$$

によって評価することができる。このターゲット攻撃がある場合の次数相関のないネットワークにおいて巨大コンポーネントの大きさは、(2.15) の s を次数 k に依存するかたちで

s_k として, (2.15) を,

$$S = \sum_k p(k) (1 - s_k) \left(1 - (1 - U)^k\right), \quad (2.22)$$

のように書き換えることで評価することができる.

例 3: 次数相関のあるネットワーク

我々の手法を検証するための最後の例として, ランダム故障に対する次数相関のあるランダムネットワークについて解析をおこなう. 残念なことに, 次数相関のあるネットワークについてのパーコレーション閾値を解析的にあらわすことは難しい. しかしながら, 閾値の評価は, 計算機で扱うことのできるふたつの式

$$w_k = \left(1 - \sum_m r_{mk} (1 - s)(1 - b)(1 - u_m)\right)^k, \quad (2.23)$$

$$u_k = \left(1 - \sum_m r_{mk} (1 - s)(1 - b)(1 - u_m)\right)^{k-1}, \quad (2.24)$$

$$S = (1 - s) \sum_l p(l) (1 - w_k), \quad (2.25)$$

を数値的に解くことによって得ることができる.

式 (2.11) および (2.10) をもちいることでボンド攻撃に対するパーコレーション閾値を求めることができる. ここで $f = (1 - s)(1 - b)$ および $y_k = 1 - u_k$ とする. これらと (2.10) をもちいると

$$1 - y_k = \left(1 - f \sum_m r_{mk} y_m\right)^{k-1}, \quad (2.26)$$

を導くことができる. パーコレーション閾値の近傍では, $y_k \ll 1$ であり, これにより上の式の右边を

$$y_k = f \sum_m (k - 1) r_{mk} y_m, \quad (2.27)$$

のように展開することができる. これを行列によってあらわすと

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} f \mathbf{y}, \quad (2.28)$$

のようになる. ここで,

$$A_{ij} = (i - 1) r_{ij},$$

である. パーコレーション閾値は (2.28) が非自明な解をもつ条件によって決定付けられる. この問題は行列 $\mathbf{A}$ の固有値問題と扱うことができ, 一般的には最大固有値がパーコレーション閾値に対応する.

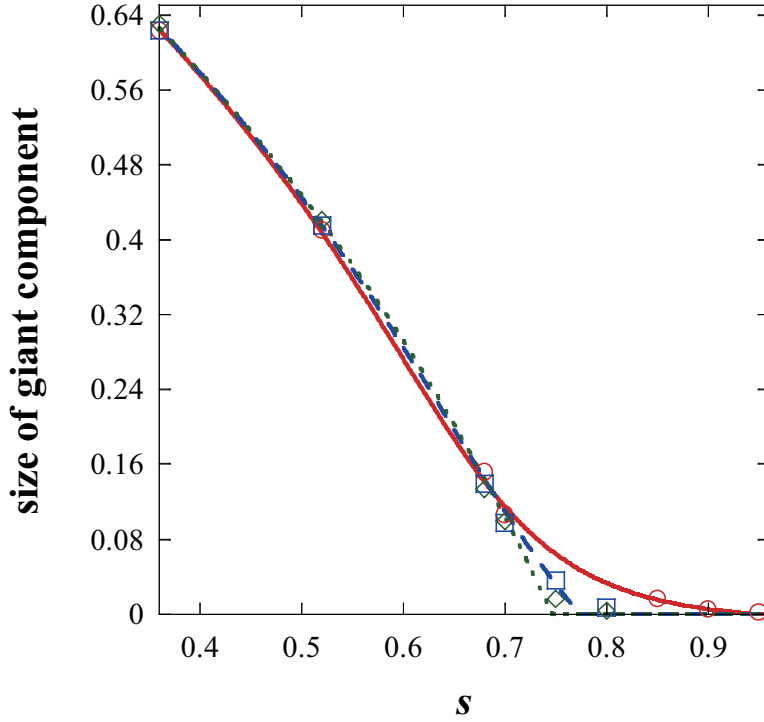


図 2.2 式 (2.10) と (2.11) により推定した、二極次数分布ランダムネットワークのランダム故障に曝された巨大コンポーネントサイズ^{*}。 s はサイトのランダムな排除率をあらわす。赤の実線は最適化された二極次数分布ランダムネットワーク ($k_1 = 4$, $k_2 = 200$) で $R \approx 0$ (すなわち次数相関がない) の場合の理論的な予測値である。また、同様に $k_1 = 4$ および $k_2 = 10$ の二極次数分布ランダムネットワークで、 $R \approx -0.1$ の場合は緑の短い破線、 $R \approx 0.2$ の場合を長い青い破線によってそれぞれあらわしている。マーカーは数値実験の結果をあらわし、理論的な予測とよく一致していることがわかる。^{*}筆者らの論文 [80] より引用 ©American Physical Society

我々の解析手法を検証するために、(2.25) によって推定される巨大コンポーネントの大きさと数値実験による結果を比較する。数値実験は、 $k_1 = 4$, $k_2 = 200$ および次数平均 4.4702 の二極次数分布ネットワークについておこなった。また、実験にもちいたネットワークのサイズは $N = 10000$ である。この設定は、 $k_{\min} = 4$, $k_{\max} = 200$ および $\langle k \rangle = 4.4702$ の制約下での Valenter ら [56] の方法によって最適条件求めた結果をもちいたものである。また、同一の設定は $k_1 = 4$ および $N = 10000$ の制約下において、ランダム故障にたいして Paul ら [57] の方法をもちいて最適化した結果としても得ることができる。これら先行研究の方法によって最適化された二極次数分布ネットワークにくわえ、比較のため $k_1 = 4$, $k_2 = 10$, $\langle k \rangle = 4.4702$ および $N = 10000$ の非最適な二極次数分布ランダムネットワークについても数値実験をおこなった。

二極次数分布ランダムネットワークにおいては、相関の測度 R と次数分布 $p(k)$ とを合わせて、残りの次数の同時次数分布 e_{jk} を得ることができる。よって、2.2.2 節で述べた

[89] において提案されている方法を, 2.2.1 節のアルゴリズムによって生成された元のネットワークに適用することで相関 R を制御することができる. 与えられた e_{jk} の集合から条件付き次数分布 r_{mk} を解析的に求めることは困難である. そこで, 我々は生成された次数相関のあるネットワークから実験的に r_{mk} を求め, 巨大コンポーネントの大きさ S を評価するために (2.23) および (2.24) に代入した. 方法論上の関係は明らかではないものの, 本章で提案した手法によるこれらの理論的な推測の結果は先行研究 [90] の結果と高い精度で数値的に一致する.

図 2.2 では先行研究にしたがって最適化された, およびされていない二極次数分布ランダムネットワークの巨大コンポーネントのサイズについて理論予測の結果と数値実験の結果を比較している. この実験および理論予測の結果は Newman [89] が述べるように次数相関 R が増加することにより, ランダムネットワークの頑健性が上昇することを示唆している.

2.4 進んだ設定の解析: 次数相関のある二極分布ネットワークへの攻撃

この節では, 我々の知りうる限りでは先行研究では調べられていない, より進んだ設定における我々の方法の有用性を示す. より正確には, 次数相関のある二極次数分布ランダムネットワークに対するサイトやボンドのターゲット攻撃の影響について考察する. 我々の方法独自の長所は, 従来の方法では技術的に難しいと思われる, 次数に相関するサイトやボンドへの攻撃および次数相関のなるネットワークに直接適用できる点である. ここでは, この長所をいかし, 次数相関のない場合において, ランダム故障とターゲット攻撃の両者に最適であるとされる二極次数分布ランダムネットワークについて, 次数相関と頑健性の関係性を評価することを試みる.

2.4.1 次数に相関のある欠損の統一的な扱い

進んだ設定における我々の方法について明らかにするために, 次数相関のある二極次数分布ランダムネットワークにおけるサイトやボンドへのターゲット攻撃を考察する. ここで, f_{mk} は $(1 - s_k)(1 - b_{mk})$ を意味するとしよう. これをもちいて, (2.10) は

$$u_l = \left(1 - \sum_m r_{ml} f_{ml} (1 - u_m)\right)^{l-1}, \quad (2.29)$$

とあらわすことができ, ここから行列 (2.28) による表現

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y} \quad (2.30)$$

を得る. ここで,

$$B_{mk} = A_{mk}f_{mk}. \quad (2.31)$$

確率変数の組である f_{mk} によるパーコレーション閾値は, 前節における議論と同様に, 上記の式に非自明な解の存在に対応付けることができる. すなわち, パーコレーション閾値は,

$$\det[\mathbf{B} - \mathbf{E}] = 0, \quad (2.32)$$

を f_{mk} について数値的に解き, その解のうちひとつを選ぶことによって得られる.

2.4.2 次数に相関のあるサイト攻撃

一般的に, 上記の方程式を満たす解は複数の存在する. しかしながら, 二極次数分布ランダムネットワークによる制約を導入することで, パーコレーション閾値の解析的な表現を得ることができる. その一例として, ネットワークに含まれるすべてのサイトにわたる欠損率が s である制約の下, 大きな次数をもつサイトの方が優先的に攻撃される場合について考えよう. そのような場合においては, $f_a = f_{k_1 k_2} = f_{k_2 k_2}$ および $f_r = f_{k_1 k_1} = f_{k_2 k_1}$ であることが一般的にいえる. これらのパラメータは s と

$$s = \begin{cases} (1 - f_a)p(k_2), & 0 \leq s \leq p(k_2), \\ p(k_2) + (1 - f_r)p(k_1), & s > p(k_2), \end{cases} \quad (2.33)$$

のような関係にある. 式 (2.33) の一番目の場合, すなわち $0 \leq s \leq p(k_2)$ が満たされる場合とは, 大きな次数をもつサイトの一部が欠損している一方で, 小さな次数のサイトおよび大きなサイトの残りの部分に欠損がない状況を意味している. この場合については, (2.32) はパーコレーション閾値

$$s_c = \left(1 - \frac{A_{11} - 1}{A_{22}(A_{11} - 1) - A_{12}A_{21}}\right) p(k_2), \quad (2.34)$$

を与える. 一方の場合, すなわち $s > p(k_2)$ が満たされる場合は 大きな次数をもつすべてのサイトが取り除かれているにもかかわらず巨大コンポーネントが存在している状況に対応し, そのようなとき (2.32) はパーコレーション閾値

$$s_c = p(k_2) + \left(1 - \frac{1}{A_{11}}\right) p(k_1), \quad (2.35)$$

を与える.

図 2.3 は 2.2.4 節で紹介した VSS モデルおよび PTHS モデルについて得られたパーコレーション閾値をあらわしている. この VSS モデルのネットワークは, $k_{\min} = 4$,

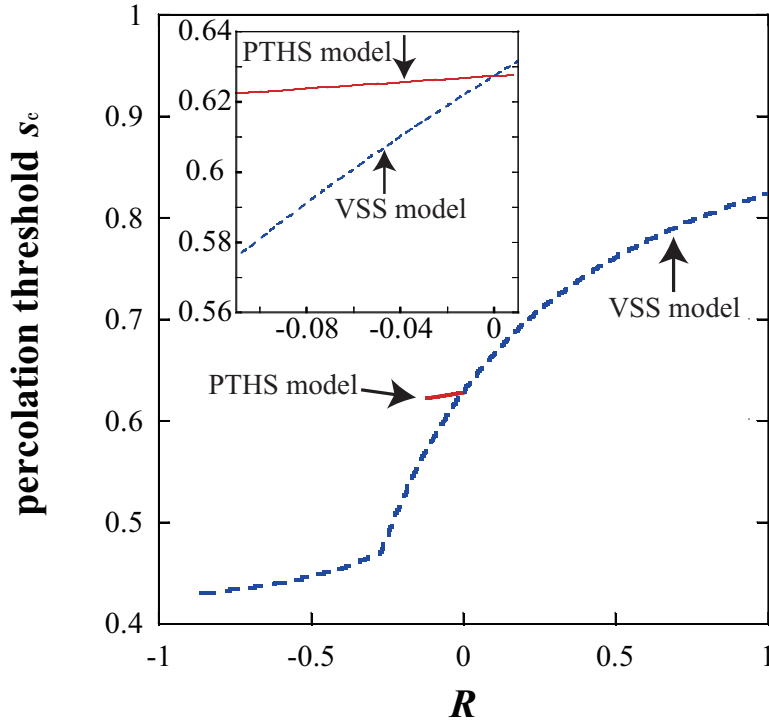


図 2.3 サイトターゲット攻撃率 s_c に対するパーコレーション閾値と次数相関 R の関係*. 赤の実線および青の点線は PTHS モデルおよび VSS モデルのパーコレーション閾値をそれぞれあらわしている. 差し込み図は, 同じデータの $R = 0$ 近くでの様子を拡大したものをあらわす. ふたつの曲線は $R = 0$ で交差する. PTHS モデルの次数相関 R の範囲が限られているのは, 大きな次数 $k_2 = 200$ をもつサイトの数が非常に少ないために, ネットワークを R の広い範囲に組み換えることが難しいためである. *筆者らの論文 [80] より引用 ©American Physical Society

$k_{\max} = 200$, および次数平均 $\langle k \rangle = 4.4702$ の制約下で Valente ら [56] の方法によってサイトへのターゲット攻撃に最適化して得られたふたつの次数 $k_1 = 4$, $k_2 = 5$ をもつ. 一方で, この PTHS モデルは $k_1 = 4$, $N = 10000$ の制約下で Paul ら [57] の方法によって最適化して得られたふたつの次数 $k_1 = 4$, $k_2 = 200$, 次数平均 $\langle k \rangle = 4.4702$ をもつ.

二極次数分布ネットワークについては, パーコレーション閾値はふたつのモデルの間で $R = 0$ において一致することが (2.21) により保証されている. 先行研究は, サイトやボンドのランダムな故障にたいしては assortiveness とよばれる同じ次数のサイト同士のつながりの多さが頑健性に寄与し, そのような欠損にたいしては, R が大きくなるにつれパーコレーション閾値も上昇することを示している. 図 2.3 はサイトに対する意図的な攻撃についてもこのことが成り立っていることを示唆している. VSS モデルについては, パーコレーション閾値 s_c は (2.33) によって定まる. すなわち, 巨大コンポーネントは大きな次数のサイトがすべて欠損したのちも消失していない. 一方で, PTHS モデルは十分

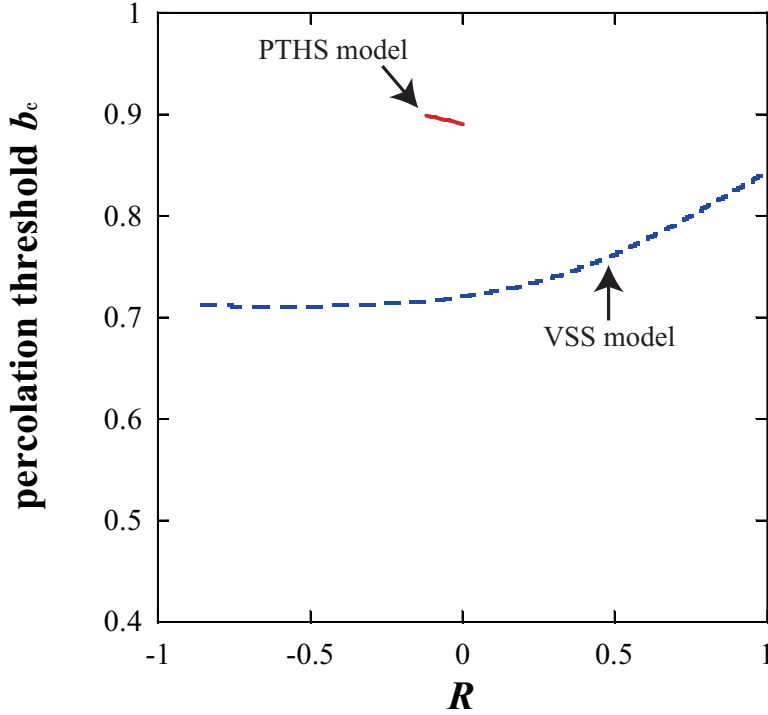


図 2.4 ボンドへのターゲット攻撃率 b_c についてのパーコレーション閾値と次数相関 R の関係*. 赤の実線および青の点線は PTHS モデルおよび VSS モデルのパーコレーション閾値をそれぞれあらわしている. PTHS モデルのパーコレーション閾値は R が増加するにつれやはり増加している. PTHS モデルの R の範囲が限られてる理由は図 2.3 で説明したのと同様である. *筆者らの論文 [80] より引用 ©American Physical Society

に小さな次数相関 $R(< -0.27)$ においては, 大きな次数のサイトがある程度数消失すると巨大コンポーネントが消失してしまう. R が 0 より小さい場合, 異なる次数をもつサイト同士がより多く接続されていることになる. このことは, 大きな次数をもつサイトが小さな次数をもつサイトのネットワーク同士を結ぶ糊のような役割を果たしていることを示唆する. もしこの糊が失われてしまうと, ネットワークはバラバラになってしまうだろう. この構造こそが, PTHS モデルにおいてある一部の大きな次数をもつサイトのみの除去により巨大コンポーネントが消えてしまう理由であろう.

図 2.3 もまた, R の影響が PTHS モデルにおいてよりも VSS モデルにおいてより重要であることを示唆している. これは下記のような考察によって理解できるだろう. PTHS モデルにおいては, 大きな次数 k_2 をもつサイトの数, $Np(k_2)$ は $O(N^{1/4})$ にしたがって大きくなる. この大きさは, サイト同士を直接に結ぶボンドの数, $k_2 Np(k_2) \sim O(N^{3/4})$ に比べると非常に小さい. そのようなネットワークにおいては, R を調整したとしても次数 k_1 をもつサイトと大きな次数をもつサイトを分離させることができず, それゆえ大きな構造

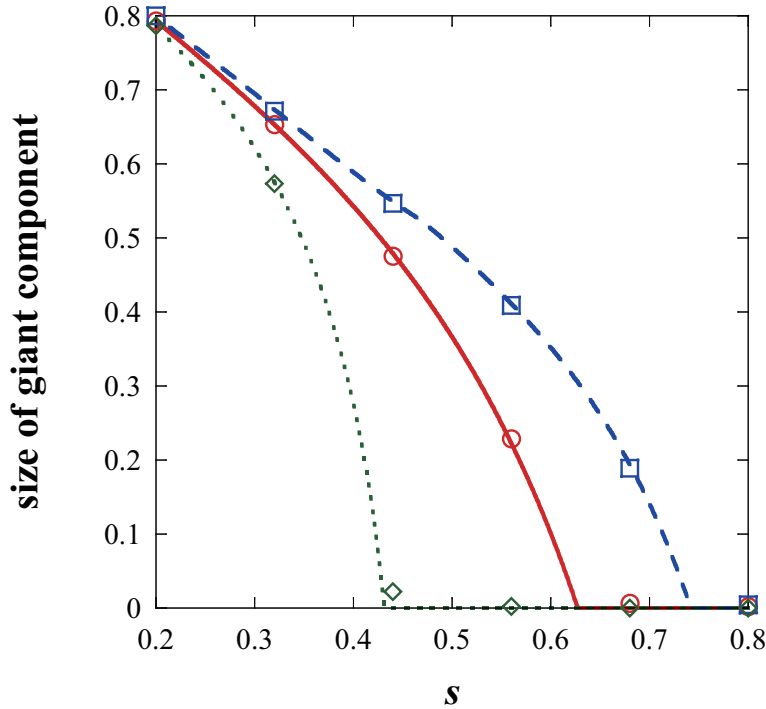


図 2.5 サイト攻撃に対する巨大コンポーネントの大きさの変化*. $R \approx 0$ における PTHS モデルの (解析的な推定の結果: 赤の実線/数値実験の結果: 丸) および, $R \approx 0.4$ (青の破線/□) と $R \approx -0.8$ (緑の点線/ひし形) の VSS モデルによるネットワークのそれぞれの巨大コンポーネントの変化. 数値実験におけるネットワークの大きさは $N = 10000$ としている. エラーバーの大きさはまーかよりも小さい. *筆者らの論文 [80] より引用 ©American Physical Society

的变化を得ることができない. この考察は図 2.3 が示すようなパーコレーション閾値が R への依存性の低い様子とも一致する. これとは対照的に, VSS モデルにおいては大きな次数 k_2 のサイトの数とボンドの数がそれぞれ $Np(k_2) \sim O(N)$ および $k_2 Np(k_2) \sim O(N)$ のように同等のオーダーとなっている. このことは, R が十分大きな正の値であるとき, 大きな次数をもつサイトが小さな次数をもつサイトからほとんど独立したネットワークを形成できることを意味している. また, R が負の値のときはこれとは反対に, これらふたつの異なる次数のサイト同士のつながりが増える. そのようなネットワークではその頑健性が R に大きく依存し, 実際, 図 2.3 にこの比較的強い R への依存性が表れている.

2.4.3 次数に相関のあるボンド攻撃

別の例として, ネットワークに含まれるすべてのボンドにわたる欠損率が b である制約のもと, 大きな次数をもつサイト同士を結ぶボンドが優先的に攻撃される場合について考えよう. サイト攻撃についての考察のときと同様, $f_a = f_{k_2 k_2}$ および

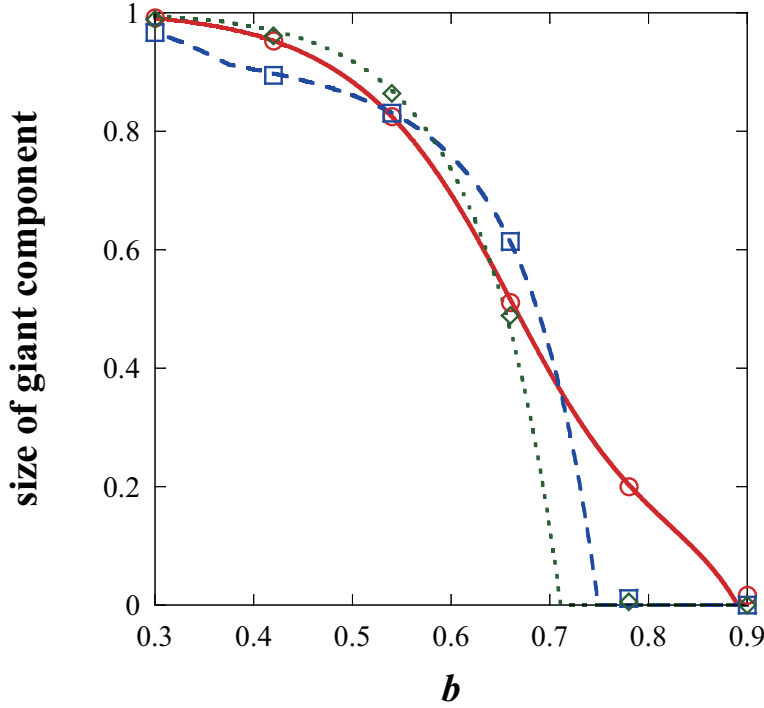


図 2.6 ボンド攻撃に対する巨大コンポーネントの大きさの変化*. $R \approx 0$ における PTHS モデルの (解析的な推定の結果: 赤の実線/数値実験の結果: 丸) および, $R \approx 0.4$ (青の破線/□) と $R \approx -0.8$ (緑の点線/ひし形) の VSS モデルによるネットワークのそれぞれの巨大コンポーネントの変化. 数値実験におけるネットワークの大きさは $N = 10000$ としている. エラーバーの大きさはマーカーよりも小さい. *筆者らの論文 [80] より引用 ©American Physical Society

$f_r = f_{k_1 k_1} = f_{k_2 k_1} = f_{k_1 k_2}$ としよう. ここから,

$$b = \begin{cases} (1 - f_a)r(k_2, k_2), & 0 \leq b \leq r(k_2, k_2), \\ r(k_2, k_2) + (1 - f_r)(1 - r(k_2, k_2)), & b > r(k_2, k_2), \end{cases} \quad (2.36)$$

を導くことができる. 式 (2.36) の一番目の場合, すなわち $0 \leq b \leq r(k_2, k_2)$ が満たされる場合とは, 大きな次数をもつサイト同士を結ぶボンドの一部が欠損している一方で, そのほかのボンドには欠損がない状況を意味している. この場合については, (2.32) はパーコレーション閾値

$$b_c = \left(\frac{(A_{11} - 1)(A_{22} - 1) - A_{12}A_{21}}{A_{22}(A_{11} - 1)} \right) r(k_2, k_2), \quad (2.37)$$

を与える. 一方の場合, すなわち $b > r(k_2, k_2)$ が満たされる場合は 大きな次数をもつサイト同士を結ぶボンドがすべて取り除かれているにもかかわらず巨大コンポーネントが存

在している状況に対応し, そのようなとき (2.32) はパーコレーション閾値

$$b_c = r(k_2, k_2) + b_{r_c}(1 - r(k_2, k_2)), \quad (2.38)$$

が導かれる. ここで,

$$b_{r_c} = \left(\frac{2A_{12}A_{21} + A_{11} - \sqrt{A_{11}^2 + 4A_{12}A_{21}}}{2A_{12}A_{21}} \right), \quad (2.39)$$

である.

図 2.4 は VSS モデルが PTHS モデルほど頑健でないことを示唆している. このことは下記のように理解できるだろう. ボンド攻撃の場合, 大きな次数 k_2 をもつサイト同士を結ぶボンドが優先的に削除される. PTHS モデルにおいては, 次数 k_2 をもつサイトの数は VSS モデルのそれに比べて非常に小さい. このことは, PTHS モデルにおいてはそのような少数の大きい次数をもつサイトを結ぶボンドが攻撃にさらされるので, そのようなボンドの欠損がネットワークの接続に与える影響が, VSS モデルに対するその影響に比べると小さい. PTHS モデルのもうひとつの特筆すべき性質は次数相関 R が大きくなるにつれてパーコレーション閾値が小さくなることである. R が負の値であるときは, 異なる次数のサイト同士を結ぶボンドの数が増える. 負の次数相関は一方で大きい次数のサイト同士を結ぶボンドの数を減少させ, 一般的にはパーコレーション閾値を低下させる要因となる. しかしながら, 同時に異なる次数のサイト同士を結ぶボンドの増加がネットワークの接続を強化する. ここに示されているパーコレーション閾値の R 依存性は, PTHS モデルにおいては後者の影響が前者のそれを上回っていることを示唆している.

2.4.4 数値実験による妥当性の確認

この節で得られた結果に信頼性を与えるため, ここでは 2 種類の次数相関のある二極次数分布ネットワークについて数値実験をおこなう. 数値実験におけるランダムネットワークの生成方法は 2.3.3 節説明したとおりである.

図 2.5 および図 2.6 はネットワークサイズ $N = 10000$ の VSS モデルと PTHS モデルに対するサイトおよびボンド攻撃に対する巨大コンポーネントのサイズを示している. ネットワークの構成については 2.4.2 節で述べたとおりである. いずれの条件でも解析的に得られた推定結果と数値実験の結果がよい精度で一致していることが確認できる.

これらの図は, R の変化が, パーコレーション閾値よりも削除率が相当量低い状況において巨大コンポーネントの大きさに小さいながらも無視できない変化をもたらすことを示している. しかしながら, これらの図は, R が大きくなるにつれて巨大コンポーネントが一般的には小さくなることを示唆している. くわえて, ネットワーク構成要素の排除にたいしてより頑健な (パーコレーション閾値の大きい) ネットワークが排除率が小さい領

域ではより小さな巨大コンポーネントをもつ傾向があることわかる。このことは、頑健なネットワークを構成するためには、パーコレーション閾値のみならず、巨大コンポーネントの大きさも考慮する必要があることを示唆している。

2.5 まとめ

この章では、あらゆる次数分布もつランダムネットワークの特徴を解析するために、不規則系の統計力学において発展してきた cavity 法にもとづいた方法を開発した。対象となるネットワークの局所的な構造がツリー構造であると近似的にみなし、元のランダムネットワークを切り離すことによって得られるサブネットワークの中で最も大きなネットワークである巨大コンポーネントに着目しているサイトが接続されているかどうかの確率を近似的に評価する方法を確立した。この方法の特筆すべき性質は、次数相関がある系においても、サイトやボンドへの様々なタイプのターゲット攻撃やランダム故障に対するランダムネットワークの性質を明らかにすることが可能であるということである。我々の方法の妥当性と有用性は、既知の結果の再現や次数相関のある二極次数分布ネットワークについての様々な攻撃に対する頑健性の解析や、その数値実験による確認によって示すことができた。

この方法のさらなる発展の方向として、より現実的なネットワークの解析にもちいることがあるだろう。また、ボンドが多重化されているネットワークや、方向性をもつネットワークの解析も興味深い。

サイトへのターゲット攻撃はセンサーネットワークのハブノードがほかのノードに比べて消費電力が大きくなることで早期に機能を失ってしまうことに対応しており、これに対するランダムネットワークの頑健性解析の結果をセンサーネットワークの長寿命化の検討にもちいることができる。

第 3 章

$\ell_{2,1}$ ノルムの最小化とベイズ最適な方法による分散圧縮センシングの典型的な復元性能^{*1}

3.1 はじめに

圧縮センシング (compressed または, compressive sensing, CS) は高次元の疎な信号, すなわちある基底において信号の次元にたいして非零の要素の数が少ない信号, を取得するために必要なサンプル数を削減することを目的とするセンシング手法である [51, 52, 108, 109]. CS はセンサーノードにおける複雑性の低い信号圧縮方法を与え, ネットワークの長寿命化および通信量の削減を実現する. くわえて, 多チャネルのシステムを扱うために, CS は分散圧縮センシング (distributed compressed sensing, DCS) へと拡張されてきた [54, 110, 111, 112]. DCS はチャネル間の相関を利用することで単チャネルの CS と比較してより効率よく信号を圧縮することができる. これらの理由から, DCS は多チャネルのセンシングシステムを構築する目的で研究されてきた [113].

結合疎モデル (joint sparse model, JSM) は DCS における標準的な信号モデルとして知られている [54]. JSM には主に 3 つの派生型が存在する. JSM-1 および JSM-3 の 2 つもモデルは, それぞれのチャネルの信号が共通のコンポーネントと疎な個別のコンポーネントの和によってあらわすことができると仮定したものである. 共通のコンポーネントは, 例えばセンサーネットワークにおいてはある場所において支配的な信号を, ビデオ信号の

^{*1} 本章の内容は, 本論文の著者らによる下記の論文 [81] の内容を日本語に翻訳し, 本論文の内容に即したかたちで一部加筆修正をおこなったものである. Yoshifumi Shiraki and Yoshiyuki Kabashima, “Typical reconstruction limits for distributed compressed sensing based on $\ell_{2,1}$ -norm minimization and Bayesian optimal reconstruction,” J. Stat. Mech. (2015) P05029.

圧縮であれば、映像中に含まれる背景のような信号に対応するものである。一方で個別のコンポーネントは、それぞれの問題において、局所的に影響を及ぼす変化の様子や、動体に対応するものである。

複数観測ベクトル (multiple measurement vector, MMV) 問題 [110, 111] としても知られている JSM-2 問題は、多チャネルセンシングシステムをあつかうために提案された上記のふたつとはまた異なった信号モデルである [114, 115]。このモデルにおいては、複数の信号が共通の台をもつ、すなわちそれらの非零要素の位置がすべてのチャネルの信号で同一であると仮定する。このような信号モデルはそれぞれのセンサーがフーリエ基底において共通の構造をもつがマルチパスの影響でそれぞれの強度や位相が異なる信号を観測している、アレイ信号処理問題、例えば MIMO 通信 (multi-input multi-output communication)、マイクロフォンアレーなどに適している [54]。JSM-2 はまた、音源位置推定問題 [116] や、核磁気共鳴問題 [117]、そのほかのイメージング問題 [110, 118] などに応用されており、幅広い技術分野に応用可能な信号モデルであるといえる。

理論および工学の両面から CS や DCS の復元限界、すなわちそれぞれの復元方法について正確な信号復元のためにどれだけの観測数が必要であることを明らかにすることは重要である。単チャネル CS 問題については、多くの研究が復元限界を様々な条件について評価してきた [52, 109, 63]；一方で、我々が知りうる限りでは、DCS 問題の復元限界については少数の限られた復元方法についてのもの [54, 111] を除けば十分に研究されているとは言いがたい。くわえて、これらの先行研究は最悪評価をおこなっている一方で、最悪評価と典型的なふるまいの評価との間には違いがあることが知られており、実用上も、典型的な性能の解析は重要である [63]。

この章では、JSM-2 復元問題にたいして $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による方法とベイズ最適な方法の2つの方法の典型的な復元限界に着目した。これを明らかにするため、我々は情報科学における複雑な現象 [61, 119, 120]、機械学習 [121]、および信号処理、特に CS 問題 [63]、を解明してきた強力な武器であるレプリカ法 [122] を使う。くわえて、我々は復元限界のみならず、原信号との自乗誤差 (mean square error, MSE) の意味での復元性能についても調べる。また、 $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元は実用的な時間内でおこなうことが可能である一方で、ベイズ最適な方法の厳密な実行は計算量の観点から困難である。この問題を解決するため、信念伝搬法 (belief propagation, BP) [79] にもとづく実時間で実行可能なベイズ最適な方法の近似アルゴリズムを開発した。MSE を理論的な予測結果および数値実験の結果について比較することによって、レプリカ法による我々の解析手法の妥当性を検証した。

本章の残りの部分は以下のような構成になっている。次の節では、いくつかの関連する先行研究に触れ、我々の寄与について詳細に述べる。3.3 節では、DCS の先行研究に触れながら JSM-2 (MMV) 問題とその復元方法を定義する。そののち、JSM-2 の復元問題に

おける $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による方法とベイズ最適な方法についてそれぞれの復元限界をレプリカ法によって評価する (3.4 節). 3.5 節では, ベイズ最適な方法を実行するための BP にもとづいたアルゴリズムについて述べる. さらに, レプリカ法による解析手法と開発した復元アルゴリズムの妥当性を評価するため数値実験をおこなう (3.6 節). 最後の節は本章の結論とまとめを述べる.

3.2 関連研究

いくつかの先行研究は CS および DCS の問題について大きな貢献をしてきた. 樺島ら [63] は単チャネル CS 問題にたいしてレプリカ法をもちい ℓ_1 ノルム最小化による信号復元方法の典型的な復元性能を明らかにした. 文献 [123] の研究は, CS 問題の拡張の一つであり, DCS 問題の JSM-2 とも関連があるブロック疎信号復元問題において相転移が起こることを明らかにした. この研究は一般的な信号生成分布にたいして, 数学的に厳密な方法である状態発展解析 (state evolution method) をもちいて $\ell_{2,1}$ ノルム最小化と James-Stein ブロックノイズ除去法 [124] にもとづいた近似的なメッセージ伝搬法 (approximate message passing, AMP) について相転移点を明らかにした. ここでは, 本章における我々の研究成果と [123] の相違点について述べる: 第一に, 我々の問題設定, すなわち JSM-2 においては, それぞれのチャネルで信号は独立して観測されるが, [123] の問題設定においては信号全体がひとつの観測者によって取得される状況を扱っている. この違いは [123] を我々の問題に直接適応することを困難にしている. くわえて, 我々の研究は, 完全な信号復元ができない状況において重要である MSE の評価を含んでいる. 文献 [78, 125] はまた, 空間的に連結した観測行列 (spatially-coupled sensing matrix) をもちいることで, 根本的な復元限界を達成する方法を提案している. しかしながら, これらの方法は単チャネルの CS 問題を扱っており, その DCS への応用可否については非自明である. さらに, 根本的な復元限界は, 空間的に連結したブロックの数とブロックの大きさが無限大の極限において達成されることは示されている一方で, 我々の方法は有限サイズのサブシステム (我々の設定ではチャネル数) において根本的な復元限界を達成することが示唆されている.

アルゴリズムの観点からは, 一般的な強度相関のある MMV 問題を復元可能な AMP-MMV アルゴリズムが文献 [126] において提案されていることに言及すべきだろう. 3.6.2 節において, AMP-MMV と我々の方法を詳細に比較する.

3.3 問題設定

3.3.1 分散圧縮センシング

CS [51, 52] は単チャネルの信号を取得するために必要な標本の数減らすことができるシステムを、構築するための効果的な方法である。CS の文脈においては、関心のある信号、 $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 、が疎であること、すなわち、多くの信号要素が 0 であること、が仮定される。信号 $\mathbf{x}^0$ の非零要素の数が $\rho N = K$ であるとき、そのような信号を K -sparse 信号であるという。ここで ρ は非零要素の割合をあらわす。送信すべきデータ $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ は少数の線形写像:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}^0, \quad (3.1)$$

によって得ることができる。ここで $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ は観測行列をあらわし、観測割合 α をもちいて $M = \alpha N$ は観測数をあらわす。 $\mathbf{y}$ と $\mathbf{A}$ が与えられたもと、原信号 $\mathbf{x}^0$ を復元したい。これを実行するためのもっともよくもちいられている方法の一つは ℓ_1 ノルム最小化問題、

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

を解くことである。ここで $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^N |\mathbf{x}[i]|$ と $\mathbf{x}[i]$ は、 ℓ_1 ノルムと i ベクトル $\mathbf{x}$ の i 番目の要素をそれぞれあらわす。適切な条件下では、この方法により $M < N$ の場合であっても正確に原信号を推定することができる [51]。ここで、CS 復元問題の根本的な復元限界は $\alpha = \rho$ 、すなわち観測の数と未知のパラメータの数が同一である場合であることを注意しておきたい。

次に DCS 問題について考えよう。この問題は JSM [54] を導入することでよく整理される。単チャネルの CS 問題と同様に、DCS における観測は、

$$\mathbf{y}_g = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g^0, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (3.3)$$

のように書くことができる。DCS 問題の目標は、全チャネル $g = 1, 2, \dots, G$ にわたる観測ベクトル $\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G$ および観測行列 $\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G$ から、それらチャネル間の相関についての知識を使って、信号 $\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G$ を復元することである。分散情報源符号化 [48] と同様に、適当な条件下では、単チャネル CS 問題で必要な数に比べて少ない数の観測によって、原信号をただしく推定することができる [54]。特に、JSM-2 はすべてのチャネルの信号 $\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G$ が共通の台をもつこと、すなわち、非零要素の位置が同じであることを仮定する信号モデルである。言い換えれば、JSM-2 信号の要素は多次元の疎な確率分布、

$$P_0(x_1, x_2, \dots, x_G) = (1 - \rho) \prod_{g=1}^G \delta(x_g) + \rho \prod_{g=1}^G \psi_g(x_g), \quad (3.4)$$

により生成されているということである。ここで、 $\delta(x)$ と $\psi_g(x)$ はディラックのデルタ関数と各チャネルの信号の非零要素の確率分布をそれぞれあらわす。

$\ell_{2,1}$ ノルム最小化問題 [127]

$$\min_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_G} \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{g=1}^G (\mathbf{x}_g[i])^2}, \text{ s.t. } \mathbf{y}_g = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g, \quad \forall g = 1, 2, \dots, G, \quad (3.5)$$

は ℓ_1 ノルム最小化法 (3.2) の JSM-2 復元問題の自然な拡張としてとらえることができる。この最小化問題は、非線形計画法 (nonlinear programming, NP) やその他の凸最適化法により多項式時間で解くことができ、実用上便利な方法である。

しかしながら、 $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元法は、信号復元の精度の意味で必ずしも最適な方法とはいえない。信号の生成分布 (3.4) を事前分布としてもちいることができる場合、ベイズ最適な方法により得られる復元信号

$$\mathbf{x}_g^{\text{Bayes}} \equiv \int \prod_{\xi=1}^G d\mathbf{x}_\xi \mathbf{x}_g P(\{\mathbf{x}_\xi\}_{\xi=1}^G | \{\mathbf{y}_\xi\}_{\xi=1}^G, \{\mathbf{A}_\xi\}_{\xi=1}^G), \quad (3.6)$$

ここで

$$P(\{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G, \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G) = \frac{P(\{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G, \{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G)}{P(\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G)},$$

および $P(\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G) = \int \prod_{g=1}^G d\mathbf{x}_g P(\{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G, \{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G)$, は最小自乗誤差 (minimum mean square error, MMSE),

$$\text{MMSE} = N^{-1} \left\langle \left| \{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G \right|^2 \right\rangle - \int \prod_{g=1}^G d\mathbf{y}_g P(\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G) \left| \left\langle \{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G \right\rangle_{|\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G} \right|^2 \right\rangle_g, \quad (3.7)$$

を達成することが、この方法が計算量の面から厳密に実行することが難しいものの、保障されている。ここで、 $\langle \dots \rangle$ と $\langle \dots \rangle_{|\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G}$ は事後分布 $P(\{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G) = \prod_{i=1}^N P_0(\{x[i]_g\}_{g=1}^G)$ と $P(\{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G, \{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G)$ による平均をそれぞれあらわしており、 $\langle \dots \rangle_g$ は全チャネルにわたる平均を表している。

以下では、計算量の面からも実用上も実行可能な方法である (3.5) による信号復元の性能評価をおこなう。これにくわえ、JSM-2 信号復元問題の潜在的な性能を評価するため、ベイズ最適な方法 (3.6) による信号復元の性能についても評価をおこなう。さらに、(3.6) を BP 法にもとづいて近似することで、計算量的な問題を解決したアルゴリズムを提案する。

3.4 統計力学的アプローチ

3.4.1 $\ell_{2,1}$ ノルム最小化法の自由エネルギー

$\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元方法の典型的性能評価を直接的におこなう方法は、(3.5) の解と原信号 $\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G$ の MSE をあらゆる $\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G$ および $\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G$ について平均することである。しかしながら、このような直接的方法を実行することは技術的に困難である。これを回避するため、我々はこの制約項付の最適化問題 (3.5) を逆温度 β の事後分布、すなわち

$$P_{\beta}^{\ell_{2,1}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_G | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_G) = \frac{e^{-\beta \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{g=1}^G (\mathbf{x}_g[i])^2}} \prod_{g=1}^G \delta(\mathbf{A}_g \mathbf{x}_g - \mathbf{y}_g)}{Z^{\ell_{2,1}}(\beta, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_G)}, \quad (3.8)$$

に置き換える。ここで $Z^{\ell_{2,1}}(\beta, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_G)$ は分配関数をあらわす。式 (3.8) は $\beta \rightarrow \infty$ の極限において、一般的に問題 (3.5) の解の一様分布に収束する。このことから、 $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元法の性能評価は、 $\beta \rightarrow \infty$ の極限における事後分布 (3.8) 上の確率変数のマクロな振る舞いについて調べることによっておこなうことができる。

今扱おうとしている問題の特筆すべき性質は、(3.8) がクエンチされた確率変数 $\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G$ および $(\mathbf{y}_g = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g^0, \forall g = 1, 2, \dots, G$ を通して) $\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G$ に依存していることである。この事実は、自由エネルギーを求めるために、 $f^{\ell_{2,1}} \equiv -(\beta N)^{-1} [\ln Z^{\ell_{2,1}}(\beta; \{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G)]$ のようにそのような確率変数にわたって、対応する分配関数の対数の平均をとることが必要であることを意味している。ここで、 $[\dots]$ はクエンチされた確率変数 $\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G$ と $\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G$ についての平均、すなわち配位平均をあらわす。残念なことに、このような分配関数の対数の平均を厳密に評価することは一般的には困難である。これを解決するために、我々はレプリカ法 $(\beta N)^{-1} [\ln Z^{\ell_{2,1}}(\beta; \{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G)] = \lim_{n \rightarrow 0} (\partial / \partial n) (\beta N)^{-1} \ln [(Z^{\ell_{2,1}}(\beta; \{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G))^n]$ [122] を導入する。

この自由エネルギー密度を評価するために、最初に分配関数の n 次モーメント、

$$(Z^{\ell_{2,1}}(\beta, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_G))^n = \int \prod_{g=1}^G \prod_{a=1}^n d\mathbf{x}_g^a \prod_{a=1}^n \left(e^{-\beta \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{g=1}^G (\mathbf{x}_g^a[i])^2}} \right) \prod_{g=1}^G \prod_{a=1}^n \delta(\mathbf{A}_g \mathbf{x}_g^a - \mathbf{y}_g), \quad (3.9)$$

について計算をおこなう。ここで $\mathbf{x}_g^a, \forall g = 1, 2, \dots, G, \forall n = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}$ は各チャネルの複製された信号をあらわす。式 (3.9) の $\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G$ および $\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G$ に関する平均は、マクロな変数 $Q_g^{ab} = N^{-1} \mathbf{x}_g^a \cdot \mathbf{x}_g^b, a, b = 0, 1, 2, \dots, n; g = 1, 2, \dots, G$ についての鞍点方程式

の評価に帰着する. ここで $a = 0$ で示される複製信号は原信号をあらわす. 特に, レプリカ対称 (replica symmetry, RS) 解のもとでは, 支配的な鞍点は

$$Q_g^{ab} = \begin{cases} Q_g, & (a = b = 1, 2, \dots, n) \\ q_g, & (a > b = 1, 2, \dots, n; b > a = 1, 2, \dots, n) \\ m_g, & (a = 1, 2, \dots, n, b = 0; a = 0, b = 1, 2, \dots, n) \\ \rho, & (a = b = 0) \end{cases}. \quad (3.10)$$

のようなかたちをとる. 式 (3.4) の非零要素の生成分布 $\psi_g(x_g)$ が標準ガウス分布 $\phi_g(x_g) = e^{-x_g^2/2}/\sqrt{2\pi}$ であるとき, マクロなパラメータは $Q = Q_g$, $q = q_g$ および $m = m_g$ のように全チャネルで共通になる. これが満たされている場合, 典型的な自由エネルギー密度は $\beta \rightarrow \infty$ および $N \rightarrow \infty$ の極限において,

$$\begin{aligned} \bar{f}^{\ell_2,1} = \text{extr}_{\Theta} & \left\{ \frac{G\alpha(Q - 2m + \rho)}{2\chi} + G\hat{m}m - \frac{G\hat{Q}Q}{2} + \frac{G\hat{\chi}\chi}{2} \right. \\ & \left. + (1 - \rho) \int \prod_{g=1}^G Dz_g \phi(\sqrt{\hat{\chi}}\mathbf{z}; \hat{Q}) + \rho \int \prod_{g=1}^G Dz_g \phi(\sqrt{\hat{\chi} + \hat{m}^2}\mathbf{z}; \hat{Q}) \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

のように書くことができる. ここで, $\text{extr}_X \{\mathcal{G}(X)\}$ は X についての関数 $\mathcal{G}(X)$ の極値評価, $\Theta = \{Q, m, \chi, \hat{Q}, \hat{m}, \hat{\chi}\}$, $Dz_g \equiv dz_g e^{-z_g^2/2}/\sqrt{2\pi}$ はガウス測度, $\mathbf{z} \equiv (z_1, z_2, \dots, z_G)^T \in \mathbb{R}^{G \times 1}$ をあらわす. また,

$$\phi(\mathbf{h}, Q) = \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{\hat{Q}}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{h}^T \mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|_2 \right\}, \quad (3.12)$$

であり, $\min_X \{\mathcal{G}(X)\}$ は関数 $\mathcal{G}(X)$ の最小化をあらわす. 式 (3.11) の導出の詳細は A.1 に記した.

式 (3.11) の極値評価により下記の方程式が得られる.

$$Q = \frac{1-\rho}{2\hat{Q}^2} \int \prod_{g=1}^G Dz_g \left\{ \left(\|\sqrt{\hat{\chi}}\mathbf{z}\|_2 - 1 \right)^2 \Theta \left(\|\sqrt{\hat{\chi}}\mathbf{z}\|_2 - 1 \right) \right\} \\ + \frac{\rho}{2\hat{Q}^2} \int \prod_{g=1}^G Dz_g \left\{ \left(\|\sqrt{\hat{\chi} + \hat{m}^2}\mathbf{z}\|_2 - 1 \right)^2 \Theta \left(\|\sqrt{\hat{\chi} + \hat{m}^2}\mathbf{z}\|_2 - 1 \right) \right\}, \quad (3.13)$$

$$m = -\frac{\rho\hat{m}}{\hat{Q}} \int \prod_{g=1}^G Dz_g \left\{ \mathbf{z}^T \mathbf{z} \left(\frac{1}{\|\sqrt{\hat{\chi} + \hat{m}^2}\mathbf{z}\|_2} - 1 \right) \Theta \left(\|\sqrt{\hat{\chi} + \hat{m}^2}\mathbf{z}\|_2 - 1 \right) \right\}, \quad (3.14)$$

$$\chi = -\frac{2(1-\rho)}{\hat{Q}} \int \prod_{g=1}^G Dz_g \left\{ \mathbf{z}^T \mathbf{z} \left(\frac{1}{\|\sqrt{\hat{\chi}}\mathbf{z}\|_2} - 1 \right) \Theta \left(\|\sqrt{\hat{\chi}}\mathbf{z}\|_2 - 1 \right) \right\} \\ - \frac{2\rho}{\hat{Q}} \int \prod_{g=1}^G Dz_g \left\{ \mathbf{z}^T \mathbf{z} \left(\frac{1}{\|\sqrt{\hat{\chi} + \hat{m}^2}\mathbf{z}\|_2} - 1 \right) \Theta \left(\|\sqrt{\hat{\chi} + \hat{m}^2}\mathbf{z}\|_2 - 1 \right) \right\}, \quad (3.15)$$

$$\hat{Q} = \frac{\alpha}{\chi}, \quad \hat{m} = \frac{\alpha}{\chi}, \quad \hat{\chi} = \frac{\alpha(Q - 2m + \rho)}{\chi^2}. \quad (3.16)$$

ここで $\Theta(X)$ はステップ関数

$$\Theta(X) = \begin{cases} 1, & X \geq 0 \\ 0, & \text{その他の場合,} \end{cases} \quad (3.17)$$

をあらわす. 極値点においては, (3.11) の Q および m は $N^{-1}\langle\langle|\mathbf{x}_g|^2\rangle\rangle_g$ および $N^{-1}\langle\langle|\mathbf{x}_g^0 \cdot \mathbf{x}_g\rangle\rangle_g$ をそれぞれ意味する. よって, 要素ごとの MSE の全チャンネルにわたる平均, $\text{mse} \equiv N^{-1}\langle\langle|\mathbf{x}_g^0 - \mathbf{x}_g|^2\rangle\rangle_g$, は

$$\text{mse} = Q - 2m + \rho, \quad (3.18)$$

のように表現することができ, (3.13) から (3.16) を解くことで MSE を推定することが可能である.

$\beta \rightarrow \infty$ で正解信号 $\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G$ が (3.8) において支配的であるとき, $Q = m = N^{-1}|\mathbf{x}_g^0|^2 = \rho$ であると仮定することができる. この性質をもちいて, 極値問題 (3.11) を成功解が支配しているか否かを評価することで, 典型的な復元の成功率について議論することができる. 実際, 十分に大きい α については, 鞍点方程式を数値的に解いた結果は成功解のみになる. しかしながら, α が小さくなるにつれて, 鞍点方程式の解はある臨界点 $\alpha_c(\rho)$ で失敗解へと連続的に分岐していく. したがって, 成功解の局所安定性を議論することで, 方法 (3.5) の典型的な復元限界を特徴づける $\alpha_c(\rho)$ を知ることができる.

式 (3.13), (3.14) および (3.15) を (3.16) に代入し, 上記の条件を考慮すると, G が奇

数であるとき, 成功解についての $\hat{\chi}$ の閉じた方程式:

$$0 = (1 - \rho) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{G!!} \left\{ e^{-\frac{1}{2\hat{\chi}}} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\frac{G-1}{2}} \xi(G, k) \hat{\chi}^{-\frac{G-2k-2}{2}} - \sum_{k=1}^{\frac{G-3}{2}} \xi(G-1, k) \hat{\chi}^{-\frac{G-2k-2}{2}} \right) \right\} - \sqrt{2\pi} \xi \left(G-1, \frac{G-3}{2} \right) H \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\chi}}} \right) \right\} - \frac{\rho}{G}, \quad (3.19)$$

が得られる. ここで, $H(x) = \int_x^\infty Dt$ であり, $k!!$ と関数 $\xi(k, l)$ は二回階乗関数と $\xi(k, l) = (k-1)!!/(k-2l-1)!!$ をそれぞれあらわす. 上記の方程式を解き $\hat{\chi}$ を得たのち, 臨界点は, (3.15) と χ の成功解における振る舞いを考慮した結果得られる方程式:

$$\alpha_c(\rho) = (1 - \rho) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{G!!} \left\{ e^{-\frac{1}{2\hat{\chi}}} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{G-1}{2}} (\xi(G+1, k) - \xi(G, k)) \hat{\chi}^{-\frac{G-2k-2}{2}} \right\} + \sqrt{2\pi} \xi \left(G+1, \frac{G-1}{2} \right) H \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\chi}}} \right) \right\} + \rho, \quad (3.20)$$

に解 $\hat{\chi}$ を代入することで得ることができる.

一方で, G が偶数のとき, $\hat{\chi}$ についての閉じた方程式は以下のようにあらわすことができる:

$$0 = \frac{1 - \rho}{2^{\frac{G}{2}} \left(\frac{G}{2} \right)!} \left\{ e^{-\frac{1}{2\hat{\chi}}} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{G}{2}-1} (\xi(G, k) - \xi(G-1, k)) \hat{\chi}^{-\frac{G-2k-2}{2}} \right\} + \sqrt{2\pi} \hat{\chi} \xi \left(G, \frac{G}{2} - 1 \right) H \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\chi}}} \right) \right\} - \frac{\rho}{G}. \quad (3.21)$$

上記の方程式を解き $\hat{\chi}$ を得たのち, 臨界点は解 $\hat{\chi}$ を下記の方程式,

$$\alpha_c(\rho) = \frac{1 - \rho}{2^{\frac{G}{2}} \left(\frac{G}{2} \right)!} \left\{ e^{-\frac{1}{2\hat{\chi}}} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{G}{2}-1} (\xi(G+1, k) - \xi(G, k)) \hat{\chi}^{-\frac{G-2k-2}{2}} \right\} - \sqrt{\frac{2\pi}{\hat{\chi}}} \xi \left(G, \frac{G}{2} - 1 \right) H \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\chi}}} \right) \right\} + (1 - \rho) e^{-\frac{1}{2\hat{\chi}}} + \rho, \quad (3.22)$$

に代入することによって得られる.

3.4.2 ベイズ最適な方法の自由エネルギー

ベイズ最適な方法 (3.6) の復元性能は $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による方法におこなったのと同様な方法でおこなうことができる. すなわち, レプリカ法をもちいて自由エネルギー密度

$f^{\text{Bayes}} \equiv -N^{-1}[\ln Z^{\text{Bayes}}(\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G)]$ を評価することが必要である. RS 仮定および, マクロなパラメータが全チャネルで共通であるという仮定のもとでは, 自由エネルギー密度は

$$\begin{aligned} \bar{f}^{\text{Bayes}} = \text{extr}_{\Theta} & \left\{ \frac{G\alpha(q - 2m + \rho)}{2(Q - q)} + \frac{G\alpha}{2} \ln(Q - q) + G\hat{m}m - \frac{G\hat{Q}Q}{2} - \frac{G\hat{q}q}{2} \right. \\ & - \int \prod_{g=1}^G dx_g^0 P_0(\{x_g^0\}_{g=1}^G) \prod_{g=1}^G Dz_g \\ & \left. \times \ln \left\{ \int \prod_{g=1}^G dx_g P(\{x_g\}_{g=1}^G) \exp \left(-\frac{\hat{Q} + \hat{q}}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + (\sqrt{\hat{q}} \mathbf{z} + \hat{m} \mathbf{x}^0)^T \mathbf{x} \right) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

のように書くことができる. ここで, $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_G^0)^T$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_G)^T$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_G)^T$, $\Theta = \{Q, q, m, \hat{Q}, \hat{q}, \hat{m}\}$ および

$$Q^{ab} = \begin{cases} Q, & (a = b = 1, 2, \dots, n) \\ q, & (a > b = 1, 2, \dots, n; b > a = 1, 2, \dots, n) \\ m, & (a = 1, 2, \dots, n, b = 0; a = 0, b = 1, 2, \dots, n) \\ \rho, & (a = b = 0) \end{cases}, \quad (3.24)$$

とした. 式 (3.23) の導出は A.2 で述べる.

自由エネルギー密度を評価する際, 非零の要素の割合 ρ および非零要素の生成分布がわかっているとき, すなわち $P(\{x_g\}_{g=1}^G) = P_0(\{x_g\}_{g=1}^G)$ であるとき, $P^{\text{Bayes}}(\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G)$ は周辺尤度 (すなわち分配関数) を意味するだけでなく, $\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G$ が与えられたもとで $\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G$ の平均をとるための $\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G$ の条件付密度を意味する. この分配関数とクエンチされたランダム変数の分布の一致は一般的にスピングラス理論における西森条件 [61] とよばれ, ここから等式,

$$\begin{aligned} & \left[(P^{\text{Bayes}}(\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G))^n \right]_{\{\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G\}, \{\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G\}} = \\ & \int \prod_{g=1}^G (d\mathbf{A}_g P(\mathbf{A}_g)) (d\mathbf{y}_g (P^{\text{Bayes}}(\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G))^{n+1}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

を得る. このことはレプリカ計算において, 原信号, $\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G$, とほかの n 個の複製された信号, $\{\mathbf{x}_g^1\}_{g=1}^G, \{\mathbf{x}_g^2\}_{g=1}^G, \dots, \{\mathbf{x}_g^n\}_{g=1}^G$, とを同等に扱うことができることを示唆している. この考察から新たに 4 つの制約 $Q = \rho$, $q = m$, $\hat{Q} = 0$, および $\hat{q} = \hat{m}$ を得ることができ, RS 解 (3.24) をより単純なカタチで表現することができる. $n \rightarrow 0$ において, この

$n + 1$ のレプリカにおける高位のレプリカ対称性は (3.23) の極値条件は非線形方程式,

$$m = (1 - \rho) \int dr P_{\chi^2}(r; G) \frac{r}{G} \left(\frac{\rho}{(1 - \rho)\sqrt{1 + \hat{m}}^G e^{-\hat{m}r/(2(1 + \hat{m}))} + \rho} \right)^2 \frac{\hat{m}}{(1 + \hat{m})^2} \\ + \rho \int dr P_{\chi^2}(r; G) \frac{r}{G} \left(\frac{\rho}{(1 - \rho)\sqrt{1 + \hat{m}}^G e^{-(\hat{m} + \hat{m}^2)r/(2(1 + \hat{m}))} + \rho} \right)^2 \frac{\hat{m} + \hat{m}^2}{(1 + \hat{m})^2}, \quad (3.26)$$

$$\hat{m} = \frac{\alpha}{\rho - m}, \quad (3.27)$$

のようにまとめることができる. ここで, $P_{\chi^2}(r; G)$ は自由度 G の r の χ^2 分布をあらわす.

MSE と典型的な復元限界は α と ρ とを与えられたもとで上記の方程式を解くことによって得ることができる. 式 (3.18) および $Q = \rho$ と $q = m$ との性質によって $mse = \rho - m$ が導かれ, (3.26) と (3.27) とを解くことによって評価できる. 文献 [78] の結果と同様に, 自由エネルギー密度 (3.23) は, 成功解 $m = \rho$ において, $\alpha > \rho$ では大域的な最小値 $-\infty$ を取る一方で, $\alpha < \rho$ では自由エネルギー密度の値は無限大に発散する. このことはベイズ最適な方法は観測数と未知のパラメータの数の比較によって得られる根本的な復元限界である $\alpha_c(\rho) = \rho$ を達成可能なことを意味している. しかしながら, 一般的には, α がスピノーダル点とよばれる別の臨界点 $\alpha_s(\rho) > \alpha_c(\rho) = \rho$ よりも小さいときは, しばしば準安定状態が存在する. よく知られている多項式時間で実行可能な方法は準安定状態が存在するとき, そこにトラップされてしまう. このことは, 実効的な復元限界は (3.26) と (3.27) から得られる $\alpha_s(\rho)$ を評価することによって議論できることを示唆している.

3.5 信念伝搬法にもとづくベイズ最適な復元アルゴリズム

$\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元法は NP などの従来からある凸最適化の手法をもちいることで簡単に実装することができる. 一方で, ベイズ最適な復元方法を厳密に実行することは計算量的な側面から難しい. この問題を解決するために, 系のサイズが無限大の極限で漸近的に厳密になるとされている, BP にもとづいた近似的復元アルゴリズムを開発する. BP は, 我々が扱っているような推定問題, 例えば, CDMA マルチユーザ検出問題 (code division multiple access multiuser detection) [128], 標準的な単チャネル CS 問題 [78], また 1-Bit CS 問題 [129], などに適用され, 非常に高い精度で復元性能をもつことを示してきた. ここでは, 我々の理論的な推定結果の妥当性を検証するために, JSM-2 信号復元問題を扱うために BP を使うこととする. なお, [126] では, チャネル間の強度相関のある JSM-2 (MMV) 信号にたいする, より一般的な復元アルゴリズムが示されている. 本

章では、単にそれを単純化することと同等ではなく、ベイズ最適な復元法をオリジナルの JSM-2 (MMV) 問題に適用するために特化した設計をおこなっている。

確率測度 $P(\{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G, \{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G)$ にたいする BP は、

$$\mathcal{M}^{i \rightarrow \mu}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{Z^{i \rightarrow \mu}} P(\mathbf{x}_i) \prod_{\nu \neq \mu} \mathcal{M}^{\nu \rightarrow i}(\mathbf{x}_i) \quad (3.28)$$

$$\mathcal{M}^{\mu \rightarrow i}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{Z^{\mu \rightarrow i}} \int \prod_{j \neq i} d\mathbf{x}_j \mathcal{M}^{j \rightarrow \mu}(\mathbf{x}_j) P(\mathbf{y}_\mu | \{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G, \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G), \quad (3.29)$$

のように書くことができる。ここで、 $\mathcal{M}_{i \rightarrow \mu}(x_i)$ および $\mathcal{M}_{\mu \rightarrow i}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$; $\mu = 1, 2, \dots, M$ は $2MN$ 個のメッセージであり、 $Z^{i \rightarrow \mu}$ および $Z^{\mu \rightarrow i}$ は $\int d\mathbf{x}_i \mathcal{M}^{i \rightarrow \mu}(\mathbf{x}_i) = \int d\mathbf{x}_i \mathcal{M}^{\mu \rightarrow i}(\mathbf{x}_i) = 1$ とするための正規化項である。また、ベクトル $\mathbf{x}_i$ は各チャネルの信号の i 番目の要素からなるベクトル、 $(x_1[i], x_2[i], \dots, x_G[i])$ である。これらのメッセージは信念とよばれ、(3.29) を

$$\mathcal{M}^i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{Z^i} P(\mathbf{x}_i) \prod_{\mu} \mathcal{M}^{\mu \rightarrow i}(\mathbf{x}_i), \quad (3.30)$$

のようにもちいることで周辺分布、 $P(\mathbf{x}_i | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G, \{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G) = \int \prod_{j \neq i} d\mathbf{x}_j P(\{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G | \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G, \{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G)$ の近似を与える。また、 Z^i は正規化項である。これ以降、正しい事前分布 $P_0(\mathbf{x}_i)$ を (3.28) の $P(\mathbf{x}_i)$ としてもちい、 $\sigma_{g\mu} \rightarrow 0$ の極限におけるガウスノイズモデル、

$$\prod_{\mu, g} \left[\left\{ e^{-(y_{g\mu} - \sum_i A_{g\mu i} x_{gi})^2 / (2\sigma_{g\mu}^2)} \right\} / \sqrt{2\pi\sigma_{g\mu}^2} \right]$$

を (3.29) の $P(\mathbf{y}_\mu | \{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G, \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G)$ としてもちいる。くわえて、表記の簡便化のために、確率分布 $\mathcal{M}_{i \rightarrow \mu}(x_i)$ の平均および分散、

$$a_g^{i \rightarrow \mu} = \int d\mathbf{x}_i x_{gi} \mathcal{M}^{i \rightarrow \mu}(\mathbf{x}_i), \quad (3.31)$$

$$v_g^{i \rightarrow \mu} = \int d\mathbf{x}_i x_{gi}^2 \mathcal{M}^{i \rightarrow \mu}(\mathbf{x}_i) - a_g^{i \rightarrow \mu}{}^2, \quad (3.32)$$

を導入する。

いくつかの式変形ののち、

$$\mathcal{M}^{\mu \rightarrow i}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\tilde{Z}^{\mu \rightarrow i}} \prod_{g=1}^G \exp \left\{ -\frac{J_g^{\mu \rightarrow i}}{2} x_{gi}^2 + h_g^{\mu \rightarrow i} x_{gi} \right\}, \quad (3.33)$$

を得ることができる。ここで $\tilde{Z}_{\mu \rightarrow i}$ は正規化項であり、また

$$J_g^{\mu \rightarrow i} = \frac{A_{g\mu i}^2}{\sum_{j \neq i} A_{g\mu j}^2 v_g^{j \rightarrow \mu}}, \quad (3.34)$$

$$h_g^{\mu \rightarrow i} = \frac{A_{g\mu i}(y_{g\mu} - \sum_{j \neq i} A_{g\mu j} a_g^{j \rightarrow \mu})}{\sum_{j \neq i} A_{g\mu j}^2 v_g^{j \rightarrow \mu}}, \quad (3.35)$$

である。式 (3.33) の詳しい導出方法は A.3 に記した。

これにくわえて, (3.28) に (3.34) と (3.35) を代入することで, $\tilde{Z}^{i \rightarrow \mu}$ を正規化項として,

$$\mathcal{M}^{i \rightarrow \mu}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\tilde{Z}^{i \rightarrow \mu}} P_0(\mathbf{x}_i) \prod_{g=1}^G \exp \left\{ -\frac{\sum_{\nu \neq \mu} J_g^{\nu \rightarrow i}}{2} x_{gi}^2 + \sum_{\nu \neq \mu} h_g^{\nu \rightarrow i} x_{gi} \right\}, \quad (3.36)$$

を得る。一般的に, (3.31), (3.32), (3.34) および (3.35) をもちいることで閉じたかたちのメッセージ伝搬アルゴリズムを得ることができ, さらに, チャンネル g の復元信号の i 番目の要素, $\hat{x}_{gi}$ として,

$$\hat{x}_{gi} = a_{gi} = \int d\mathbf{x}_i x_{gi} \frac{1}{Z_i} P_0(\mathbf{x}_i) \prod_{\mu} \mathcal{M}^{\mu \rightarrow i}(\mathbf{x}_i), \quad (3.37)$$

を得る。

前節と同様に, 事前分布の非零要素の生成分布 $\psi_g(x_{gi})$ として標準ガウス分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ を採用する。このとき, (3.31), (3.32), (3.37), および

$$v_{gi} = \int d\mathbf{x}_i x_{gi}^2 \frac{1}{Z_i} P_0(\mathbf{x}_i) \prod_{\mu} \mathcal{M}_{\mu \rightarrow i}(\mathbf{x}_i) - a_{gi}^2,$$

の積分を解析的に実行することができ,

$$a_g^{i \rightarrow \mu} = f_a \left(\sum_{\nu \neq \mu} \mathbf{J}^{\nu \rightarrow i}, \sum_{\nu \neq \mu} \mathbf{h}^{\nu \rightarrow i}, g \right), \quad (3.38)$$

$$a_{gi} = f_a \left(\sum_{\mu} \mathbf{J}^{\mu \rightarrow i}, \sum_{\mu} \mathbf{h}^{\mu \rightarrow i}, g \right), \quad (3.39)$$

$$v_g^{i \rightarrow \mu} = f_v \left(\sum_{\nu \neq \mu} \mathbf{J}^{\nu \rightarrow i}, \sum_{\nu \neq \mu} \mathbf{h}^{\nu \rightarrow i}, g \right), \quad (3.40)$$

$$v_{gi} = f_v \left(\sum_{\mu} \mathbf{J}^{\mu \rightarrow i}, \sum_{\mu} \mathbf{h}^{\mu \rightarrow i}, g \right), \quad (3.41)$$

を得る. ここで, 関数,

$$f_a(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, g) \equiv \frac{\rho Y_g}{1 + X_g} \times \left\{ (1 - \rho) \prod_{\xi=1}^G \sqrt{1 + X_\xi} \exp \left\{ -\frac{Y_\xi^2}{2(1 + X_\xi)} \right\} + \rho \right\}^{-1} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} f_v(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, g) &\equiv \left\{ \frac{\rho}{1 + X_g} \left(1 + \frac{Y_g^2}{1 + X_g} \right) \right\} \\ &\times \left\{ (1 - \rho) \prod_{\xi=1}^G \sqrt{1 + X_\xi} \exp \left\{ -\frac{Y_\xi^2}{2(1 + X_\xi)} \right\} + \rho \right\}^{-1} - f_a^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, g), \end{aligned} \quad (3.43)$$

を定義した. また,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{\mu \rightarrow i} &= (J_1^{\mu \rightarrow i}, J_2^{\mu \rightarrow i}, \dots, J_G^{\mu \rightarrow i}), \quad \mathbf{h}^{\mu \rightarrow i} = (h_1^{\mu \rightarrow i}, h_2^{\mu \rightarrow i}, \dots, h_G^{\mu \rightarrow i}), \\ \sum_{\nu \neq \mu} \mathbf{J}^{\nu \rightarrow i} &= \left(\sum_{\nu=1}^G J_1^{\nu \rightarrow i}, \sum_{\nu=1}^G J_2^{\nu \rightarrow i}, \dots, \sum_{\nu \neq \mu}^G J_g^{\nu \rightarrow i}, \dots, \sum_{\nu=1}^G J_G^{\nu \rightarrow i} \right), \end{aligned}$$

および

$$\sum_{\nu \neq \mu} \mathbf{h}^{\nu \rightarrow i} = \left(\sum_{\nu=1}^G h_1^{\nu \rightarrow i}, \sum_{\nu=1}^G h_2^{\nu \rightarrow i}, \dots, \sum_{\nu \neq \mu}^G h_g^{\nu \rightarrow i}, \dots, \sum_{\nu=1}^G h_G^{\nu \rightarrow i} \right)$$

である. これらの方程式をもちいて, 信号の生成分布が一般的な場合に比べてより速くパラメータの更新をおこなうことができる.

これ以降, 行列の各要素 $A_{g\mu i}$ が分布 $\mathcal{N}(0, 1/M)$ より生成されたと仮定する. 系の大きさ N が大きい場合, メッセージ $a_g^{i \rightarrow \mu}$ および $v_g^{i \rightarrow \mu}$ はインデックス μ についてほとんど独立になるとみなすことができる. これくわえて, [130] のようにフルコネクト系に与える自分自身の影響をあらわすオンサーガー項を慎重に扱う必要がある. ここで,

$$K_{gi} \equiv \sum_{\mu} J_g^{\mu \rightarrow i}, \quad H_{gi} \equiv \sum_{\mu} h_g^{\mu \rightarrow i}, \quad (3.44)$$

$$\omega_{g\mu} \equiv \frac{y_{g\mu} - \sum_i A_{g\mu i} a_g^{i \rightarrow \mu}}{\sum_i A_{g\mu i}^2 v_g^{i \rightarrow \mu}}, \quad V_{g\mu} \equiv \sum_i A_{g\mu i}^2 v_g^{i \rightarrow \mu}. \quad (3.45)$$

を定義する. 大きな N の場合の近似を考えると,

$$K_{gi} = \sum_{\mu} \frac{A_{g\mu i}^2}{V_{g\mu} - A_{g\mu i}^2 v_g^{i \rightarrow \mu}} \simeq \sum_{\mu} \frac{A_{g\mu i}^2}{V_{g\mu}}, \quad (3.46)$$

$$H_{gi} = \sum_{\mu} \frac{A_{g\mu i} (y_{g\mu} - \sum_{j \neq i} A_{g\mu j} a_g^{j \rightarrow \mu})}{V_{g\mu} - A_{g\mu i}^2 v_g^{i \rightarrow \mu}} \simeq \sum_{\mu} A_{g\mu i} \omega_{g\mu} + \sum_{\mu} \frac{A_{g\mu i}^2 a_g^{i \rightarrow \mu}}{V_{g\mu}}. \quad (3.47)$$

を得る. 近似式

$$\begin{aligned} a_g^{i \rightarrow \mu} &= f_a(\mathbf{K}_i - (J_g^{\mu \rightarrow i})_g, \mathbf{H}_i - (h_g^{\mu \rightarrow i})_g, g) \\ &\simeq f_a(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g) - J_g^{\mu \rightarrow i} \frac{\partial f_a}{\partial X}(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g) - h_g^{\mu \rightarrow i} \frac{\partial f_a}{\partial Y}(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g), \end{aligned} \quad (3.48)$$

と $J_{\mu \rightarrow i}$ および $h_{\mu \rightarrow i}$ の定義を合わせると, (3.47) は,

$$H_{gi} \simeq \sum_{\mu} A_{g\mu i} \omega_{g\mu} + f_a(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g) \sum_{\mu} \frac{A_{g\mu i}^2}{V_{g\mu}}, \quad (3.49)$$

とあらわすことができる. ここで $\mathbf{K}_i = \{K_{gi}\}_{g=1}^G$, $\mathbf{H}_i = \{H_{gi}\}_{g=1}^G$ である. 同様の方法で,

$$\begin{aligned} \omega_{g\mu} &\simeq \frac{y_{g\mu} - \sum_i A_{g\mu i} f_a(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g)}{V_{g\mu}} + \frac{\omega_{g\mu}}{V_{g\mu}} \sum_i A_{g\mu i}^2 \frac{\partial f_a}{\partial Y}(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g) \\ &= \frac{y_{g\mu} - \sum_i A_{g\mu i} f_a(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g)}{V_{g\mu}} + \omega_{g\mu}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

を得る. くわえて, $V_{g\mu}$ は

$$\begin{aligned} V_{g\mu} &\simeq \sum_i A_{g\mu i}^2 \left\{ f_v(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g) - J_{\mu \rightarrow i} \frac{\partial f_v}{\partial X}(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g) - h_{\mu \rightarrow i} \frac{\partial f_v}{\partial Y}(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g) \right\} \\ &\simeq \sum_i A_{g\mu i}^2 f_v(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, g), \end{aligned} \quad (3.51)$$

のように計算することができる. これらから, (3.46), (3.49), (3.50) および (3.51) をもちいることで各反復につきわずか $\mathcal{O}(N + M)$ ステップで各変数を更新することができる.

さらに, 大数の法則から, これらの方程式に含まれる $A_{g\mu i}^2$ は実効的には $1/M$ に置き換えることができ, ここから, (3.46), (3.51), および (3.49) の第一項以外に含まれる μ についての和はもはや実装する必要がない. これを明示的にあらわすために, 分散 v_{gi} の要素インデックス i にわたる平均 $\bar{\chi}_g$ および, $K_g = \alpha/\bar{\chi}_g$ を導入する. これらの近似によりさらにアルゴリズムを速くすることができる.

上記のアルゴリズムをそのまま実行しても一般的にはよい収束性を示さない. そこで, ダンピング因子 γ を導入し, a_{gi} and $\bar{\chi}$ を $a_{gi}^{\text{updated}} = (1 - \gamma)a_{gi}^{\text{old}} + \gamma a_{gi}^{\text{new}}$ のようなまた, $\bar{\chi}_g^{\text{updated}} = (1 - \gamma)\bar{\chi}_g^{\text{old}} + \gamma \bar{\chi}_g^{\text{new}}$, のように更新する. ここで導出したこれらの近似を含んだアルゴリズムは 3.5.1 にまとめた.

Algorithm 3.5.1 BP にもとづくベイズ最適な復元アルゴリズム

Require: $\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G, \{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G$, set $k = 0$, choose $\mathbf{a}_g^{(0)}, \omega_g^{(0)}, \bar{\chi}_g^{(0)}, \bar{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{H}_g^{(0)}, \forall g = 1, 2, \dots, G$.

- 1: **while** stopping criteria are not satisfied **do**
- 2: **for** $g = 1, \dots, G$ **do**
- 3: $\omega_g^{(k+1)} = \bar{K}^k(\mathbf{y}_g - \mathbf{A}_g \mathbf{a}_g^{(k)}) + \omega_g^{(k)}$
- 4: $\mathbf{H}_g^{(k+1)} = \mathbf{A}_g^T \omega_g^{(k)} + \bar{K}^k \mathbf{a}_g^{(k)}$
- 5: **end for**
- 6: **for** $g = 1, \dots, G$ **do**
- 7: **for** $i = 1, \dots, N$ **do**
- 8: $a_{gi}^{\text{new}} = f_a(\mathbf{K}^{(k)}, \mathbf{H}_i^{(k+1)}, g)$
- 9: $v_{gi}^{\text{new}} = f_v(\mathbf{K}^{(k)}, \mathbf{H}_i^{(k+1)}, g)$
- 10: **end for**
- 11: $\mathbf{a}_g^{(k+1)} = (1 - \gamma) \mathbf{a}_g^{(k)} + \gamma \mathbf{a}_g^{\text{new}}$
- 12: $\bar{\chi}_g^{\text{new}} = \sum_i v_{gi}^{\text{new}} / N$
- 13: $\bar{\chi}_g^{(k+1)} = (1 - \gamma) \bar{\chi}_g^{(k)} + \gamma \bar{\chi}_g^{\text{new}}$
- 14: $K_g^{(k+1)} = \alpha / \bar{\chi}_g^{(k+1)}$
- 15: **end for**
- 16: $\bar{K}^{(k+1)} = \sum_{g=1}^G K_g^{(k+1)} / G$
- 17: $k \leftarrow k + 1$
- 18: **end while**

3.6 復元限界と数値実験による妥当性の検証

3.6.1 $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による信号復元の復元限界と数値実験の結果

式 (3.19) および (3.21) を様々な条件に付いて解いた。図 3.1 (a) はチャンネル数 $G = 2, 5, 10$ の JSM-2 信号について $\ell_{2,1}$ ノルム最小化にもとづく信号復元の典型的な復元限界を示している。まず、臨界圧縮率 α_c がチャンネル数が大きくなるにつれて、小さくなっていることがわかる。すなわち、台を共有することによって信号復元に正の影響があることを意味している。一方で、 G が十分に大きい場合でも、この臨界曲線は根本的な復元限界 $\alpha = \rho$ に届くことはなさそうである。

レプリカ法による理論的な予測の正当性を確認するために、広範にわたる数値実験をおこなった。それぞれの試行における正解信号, $\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G$, は長さ N で $K = \rho N$ 個の非零

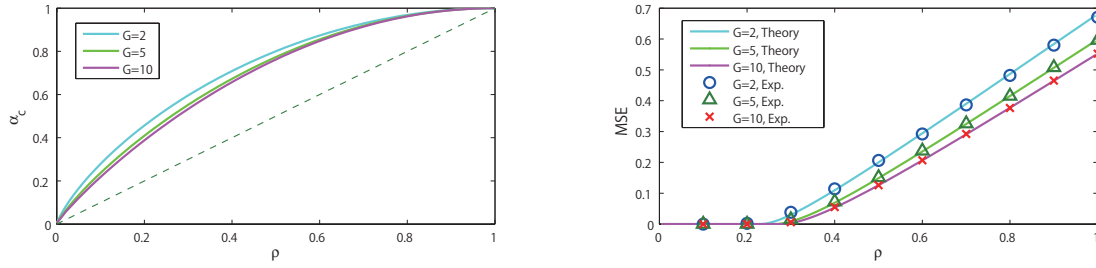


図 3.1 * (a) チャンネル数 $G = 2, 5, 10$ の JSM-2 信号について $\ell_{2,1}$ ノルム最小化にもとづく信号復元の典型的な復元限界の比較. それぞれの曲線は, 非零要素の存在割合にたいする典型的な臨界圧縮率 $\alpha_c(\rho)$ の RS 仮定のもとでの推定値を表している. 典型的には, $\alpha > \alpha_c(\rho)$ であれば, 取得したい信号を正確に復元することができる. 点線は根本的な復元限界である $\alpha = \rho$ をあらわす. (b) $\ell_{2,1}$ ノルム最初化による JSM-2 信号復元問題における, MSE と $\rho = K/N$ の関係. シアン, 緑, およびマゼンダの曲線はそれぞれ $G = 2, 5$ および $G = 10$ の RS 仮定のもとでのレプリカ法に理論的な推定値を表している. 丸, 三角および十字のマーカーはそれぞれ $G = 2, 5$ および $G = 10$ の数値実験の結果をあらわす. すべての NP による数値実験において, 観測割合 α は 0.5 および信号サイズ N を 50 に固定した. *筆者らの論文 [81] より引用 ©IOP Publishing

要素をもつ. K 個の非零要素の位置はそれぞれの試行でランダムに選び, すべてのチャンネルで共通とした. また, 非零要素の値は標準ガウス分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ にしたがってそれぞれ独立に生成した. 上記の方法によって信号を生成したのちに, 各チャンネルの信号の平均を 0 に ℓ_2 ノルムを K にそれぞれするために, $\mathbf{s}_g^0 \leftarrow \mathbf{s}_g^0 - \bar{\mathbf{s}}_g^0$, $\mathbf{s}_g^0 \leftarrow \sqrt{K} \mathbf{s}_g^0 / \|\mathbf{s}_g^0\|_2$ および $\mathbf{x}_g^0(\mathcal{I}_s) \leftarrow \mathbf{s}_g^0$ のように原信号を置き換えた. ここで, $\mathcal{I}_s$ は信号 $\mathbf{x}_g^0$ の非零要素のインデックス集合であり, $\mathbf{s}_g^0 \equiv \mathbf{x}_g^0(\mathcal{I})$, と書ける. また $\bar{\cdot}$ はベクトルの要素にわたる平均値をあらわす. 上記の操作によってすべての試行の実験条件を整えることができる. 大きさ $M \times N$ の観測行列, $\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G$, は下記のように生成した: はじめに, 大きさ各チャンネルの $N \times N$ の行列を各要素独立にガウス分布 $\mathcal{N}(0, 1/M)$ から生成した. 続いて, 生成した行列の $M = \alpha N$ 個の行をランダムに選択し, 観測行列 $\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G$ を得る. すべての試行で実験条件を同じにするために, 上記の方法で観測行列を作ったのちに, それぞれの列の要素にわたる平均を 0 に, ℓ_2 ノルムを 1 にそろえる. 最後に, 長さ M の観測ベクトル, $\{\mathbf{y}_g\}_{g=1}^G$, を線形観測, $\mathbf{y}_g = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g^0$, によって得る.

$\ell_{2,1}$ ノルム最小化 (3.5) による信号復元の実験においては, 各パラメータを $N = 50$, $K = 25$, および $G = 2, 5, 10$ に設定し, 様々な観測数 M にたいして各条件 1000 試行の実験をおこなった. 式 (3.5) によって定義される問題を実際に解くために, MATLAB® の fmicon パッケージに含まれる NP アルゴリズムを使用し, 復元アルゴリズムの性能を

測るために, MSE を

$$\text{MSE}(g) = \frac{\|\mathbf{x}_g^0 - \hat{\mathbf{x}}_g\|_2^2}{\|\mathbf{x}_g^0\|_2^2}, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (3.52)$$

のように計算した. ここで, $\hat{\mathbf{x}}_g$ は復元結果として得られるチャネル g の信号である. すべてのチャネルの MSE の平均を各条件ごとにすべての試行にわたって平均値を求め, それをレプリカ法による理論的な予測値と比較した.

図 3.1 (b) はレプリカ法による理論的な推定値と数値実験の MSE との比較を表している. 数値実験の結果と理論予想による曲線の一致は, 実験的にレプリカ理論の妥当性を支持しているといえる. ここで, 我々の数値実験は信号のサイズを $N = 50$ としたにも拘わらず, $N \rightarrow \infty$ の極限で得られるレプリカ法による評価と非常によく一致していることを指摘しておかなければならない.

3.6.2 ベイズ最適な方法による信号復元の復元限界と数値実験の結果

ベイズ最適な方法による信号復元性能の理論的な推定をするために, 鞍点方程式 (3.26) と (3.27) を解いた. 図 3.2 (a) は, これらの方程式を $G = 2, 5, 10$ について解いた結果を示しており, これらは BP にもとづく復元方法の復元限界をあらわす, スピノダル点 $\alpha_s(\rho)$ に対応している. $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元方法のときと同様に, チャネル数が大きくなるにつれ, このスピノダル点の値が小さくなることが示されており, このことはベイズ最適な方法による復元においても台の共有が復元に正の影響を与えていることを示唆している. 特に, $G = 5$ の一部の領域と $G = 10$ のすべての領域において, スピノダル点は根本的な復元限界 $\alpha_c(\rho) = \rho$ に一致することが示されており, このことは実時間で実行可能な BP によりベイズ最適な方法による復元が有限のチャネル数においても最大の復元性能を達成できることを示唆している. このことを確かめるために, $G = 2, 5$ および 10 において, $\alpha = 0.5$ と様々な ρ について, ベイズ最適な方法による復元についての理論的な性能予測を MSE の変化を図 3.2 (b) に示した. $G = 2$ および 5 については, スピノダル点 $\rho_s(\alpha)$ において MSE は 0 から有限の値に非連続的に変化し, 一方で, $G = 10$ においてはスピノダル点 $\rho_s(\alpha)$ は相転移点 $\rho_c(\alpha) = \alpha$ に一致し, 連続であることが示唆される.

図 3.2 (b) は, 理論予測と実験のよい一致を示しており, このことは数学的には厳密ではないレプリカ法の妥当性を支持するものである. 特に, $G = 10$ については, 実時間で実行可能な BP により, 実際にベイズ最適な方法が根本的な復元限界を達成していることが示されている. 数値実験においては, 前節で述べた $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による実験におけるのと同様に $\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G$ および $\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G$ を生成した. また, パラメータは $N = 1000$, $K = 500$, $G = 2, 5$, および 10 とし, 様々な M についてそれぞれ 1000 回の試行をおこ

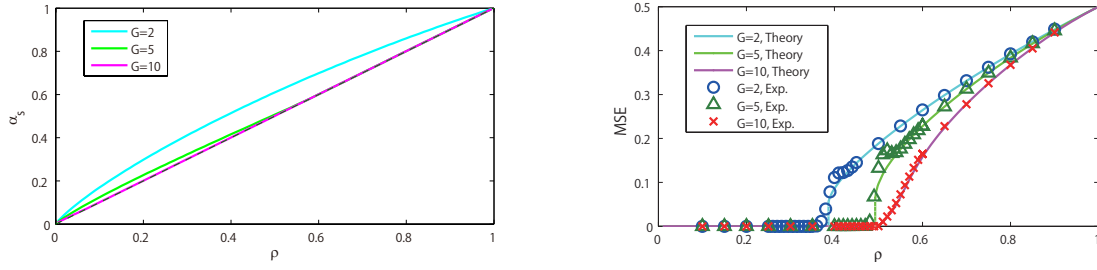


図 3.2 * (a) チャンネル数 $G = 2, 5$, および 10 について, JSM-2 信号にたいするベイズ最適な方法による復元の復元限界を示している. それぞれの曲線はスピノダル点 $\alpha_s(\rho)$ の RS 解にもとづく推定値を非零要素の割合についてプロットしたものである. 典型的には, $\alpha > \alpha_s(\rho)$ の領域においては信号を完全に復元することができる. 点線は根本的な復元限界 $\alpha = \rho$ を表している. (b) チャンネル数 $G = 2, 5$, および 10 , $\alpha = 0.5$ と様々な ρ についての JSM-2 信号復元問題にたいしてベイズ最適な方法を適用した場合の MSE の理論的な推定値を表している. シアン, 緑, およびマゼンダの曲線はそれぞれ $G = 2, 5$ および $G = 10$ の RS 仮定のもとのレプリカ法に理論的な推定値を表している. 丸, 三角および十字のマーカーはそれぞれ $G = 2, 5$ および $G = 10$ の数値実験の結果をあらわす. すべての評価において観測割合 α は 0.5 に固定し, 数値実験についてはさらに信号サイズ N を 1000 に固定した. くわえて, ダンピング因子は $\gamma = 0.5$ をもちいた. $G = 2$ および 5 の場合は, $\rho = \rho_s(\alpha)$ における非連続的な相転移がみられるが, 一方で $G = 10$ については, $\rho_s(0.5) = \rho_c(0.5) = 0.5$ であり, 相転移は連続的である. これらのいくつかの G についての設定においては, 数値実験の結果と理論的な推定の結果がよく一致している. *筆者らの論文 [81] より引用 ©IOP Publishing

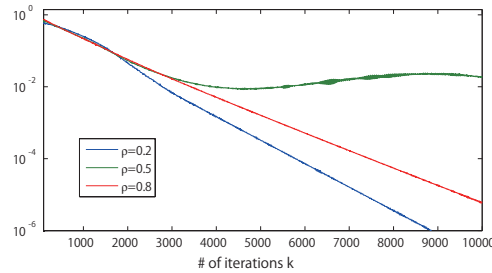


図 3.3 * 正規化された更新後の推定信号とその直前の推定信号の差 $\left\langle \frac{\|\mathbf{x}_g^{(k+1)} - \mathbf{x}_g^{(k)}\|_2}{\|\mathbf{x}_g^{(k+1)}\|_2} \right\rangle_g$ を反復回数についてプロットしたものである. 実験条件は $G = 5$, α は 0.5 固定, そして $\rho = 0.2, 0.5$, および 0.8 である. *筆者らの論文 [81] より引用 ©IOP Publishing

なった. また, アルゴリズムの収束を早めるために, 特別な調整はおこなっていない値ではあるが $\gamma = 0.5$ とした. $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元の数値実験における N よりも大きな信号サイズを採用したのは, アルゴリズム 3.5.1 が N が大きい極限の近似を含むためである.

図 3.3 は反復回数ごとの正規化された更新後の推定信号とその直前の推定信号の差

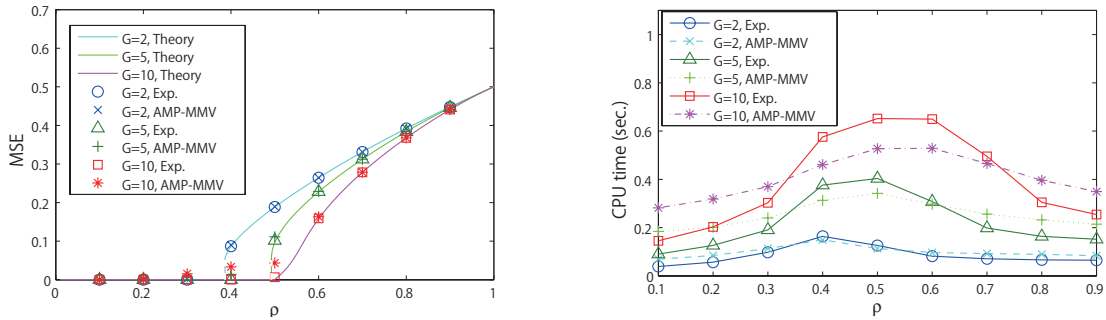


図 3.4 (a)* アルゴリズム 3.5.1 と AMP-MMV に MSE の比較. シアン, 緑, およびマゼンダの曲線は $G = 2, 5$, および 10 のレプリカ法による RS 仮定のもとでの理論的な推定値を表している. 丸, 三角, および四角のマーカーはダンピング因子を $\gamma = 0.9$ に設定した我々のアルゴリズムの数値実験の結果であり, 一方で, バツ印, 十字および星印のマーカーは $G = 2, 5$, および 10 における AMP-MMV による数値実験の結果である. すべての数値実験において, α は 0.5, 信号のサイズ N は 1000 である. AMP-MMV の実験結果については, MSE が 1 を上回っている外れ値を平均から取り除いている. (b)* 2 つのアルゴリズムの平均計算時間を表している. *筆者らの論文 [81] より引用 ©IOP Publishing

$\left\langle \|\mathbf{x}_g^{(t)} - \mathbf{x}_g^{(t-1)}\|_2 / \|\mathbf{x}_g^{(t-1)}\|_2 \right\rangle_g$ を表している. ここで, $\mathbf{x}_g^{(t)}$ はチャンネル g の t 回目の反復で推定された信号である. ρ がスピノダル点 $\rho_s(\alpha)$ から遠い場合には, このアルゴリズムは速く収束するが, 一方で $\rho \approx \rho_s(\alpha)$ の場合, 収束性はあまりよくないことがわかる. この結果として, 図 3.2 (b) が示しているような臨界点近くにおける理論的な推定値と実験結果の間の小さな差異が生まれるものと考えられる.

最後に, 我々のアルゴリズムと [126] で提案されている AMP-MMV アルゴリズムの比較をおこなう. AMP-MMV は二重ループのアルゴリズムであり, 内側のループでは非零要素の値を AMP アルゴリズムによって推定し, ある要素が非零であるか否かの確率を外側のループで推定している. AMP-MMV アルゴリズムは各チャンネルの信号をひとつのセンサーから得られる信号の時間発展の時間窓ごとの結果としてとらえ, チャンネル間の要素ごとの強度にも相関がある信号をあつかうために提案されたが, この相関を取り除いてしまえば我々のアルゴリズムと不動点が一致する. それゆえ, 本章で採用している信号の生成を前提にした場合, 両者の主な違いは, 更新の方法, すなわち単ループであるか二重ループであるか, であるといえる. 両者を比較するために, [131] から入手することができる AMP-MMV の MATLAB®コードをもちいた数値実験をおこなった. 数値実験の設定は先ほどと同様である. AMP-MMV については, 内側のループと外側のループの最大反復回数をそれぞれ 15 および 5 とし, 強度に相関のない JSM-2 信号に合わせるために相関因子パラメータを $1 - 10^{-16}$ とした. 一方で, 我々のアルゴリズムについては AMP-MMV に合わせるため最大反復回数を 15×5 とし, 収束を速くするためにダンピン

グ因子を $\gamma = 0.9$ とした.

図 3.4 は 2 つのアルゴリズムの比較実験の結果を表している. サイト [131] で与えられている AMP-MMV のコードは相転移点近くで時折発散してしまう. そのような非典型的なデータの影響を取り除くために, AMP-MMV については MSE が 1 より大きい試行を, 結果をまとめる際に除外した. 一方で, 我々のアルゴリズムは特に発散しなかったのですべての数値実験の結果を含めた平均値をもちいている. 図 3.4 (a) は 2 つのアルゴリズムの性能は MSE の意味でほとんど一致していることを示しているが, AMP-MMV は相転移が連続である状況 ($G = 10$) でわずかながら改善の余地があるように見える. 図 3.4 (b) は 2 つのアルゴリズムの計算時間が典型的なデータについてはほとんど一致していることを示している. ただし, 我々のアルゴリズムは完全復元が可能な領域においては AMP-MMV よりも高速に復元をおこなうことができる.

3.7 本章のまとめ

本章では, 不規則系の統計力学の方法をもちいて, 分散圧縮センシング (distributed compressed sensing) のひとつのモデルである結合疎モデル 2 (joint sparse model-2, JSM-2) 問題の典型的な復元性能について詳細に調査した. 我々は, JSM-2 の信号復元問題にたいして 2 つの方法: $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による方法と信号生成の分布が完全にわかっている場合のベイズ最適な方法, に着目した. 分散情報源符号化のように, 完全な復元に必要なチャネルあたりの観測の数は単チャネルの圧縮センシングの問題よりも小さくなることを期待する.

ここでは 2 つの方法の典型的性能限界を理論的に評価し, さらに数値実験により MSE の意味でその妥当性を確認した. $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元においては, 典型的な復元限界 $\alpha_c(\rho)$, すなわち信号の長さ N と非零要素の割合 ρ にたいする臨界観測の割合のが, チャネル数が増えるにつれて小さくなることが明らかになった. また, 非線形計画法をもちいた数値実験の結果は理論的な推定値と一致することを示した. さらに, ベイズ最適な方法による復元の実用的な意味での復元限界をあらわすスピノーダル点 $\alpha_s(\rho)$ は $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元法による復元限界 $\alpha_c(\rho)$ より小さい傾向にあることを発見した. 特に, チャネル数が十分に大きいとき, (例えば 10 のとき) は, スピノーダル点 $\alpha_s(\rho)$ は根本的な復元限界 $\alpha_c(\rho) = \rho$ と一致しており, このことは系の大きさが有限であっても計算機で実行可能なアルゴリズムによりこの根本的な復元限界を達成しうることを示唆している. このことは, 信念伝搬法にもとづく計算機で実行可能なアルゴリズムにより数値実験で確かめることができた.

本章では, DCS の基本的な信号復元問題を扱った. しかしながら, 実データをあつかうために DCS の派生版が多く研究されている. 我々のアプローチはより一般的で複雑な

DCS モデル, 例えば [113] にも適用することが可能であるだろう.

第 4 章

$\ell_{2,1}$ ノルムの最小化とベイズ最適な方法による分散圧縮センシングの典型的な復元性能: ノイズの影響

4.1 概要

本章の内容は、現在論文誌への投稿を準備しておりインターネットで公表できないため、概要のみここに述べる。全文の公開は、公開が可能になったのちにおこなう。

第 3 章では、ノイズがない場合の分散圧縮センシングの問題を扱った。この章では、より現実の状況に近づけた問題を扱うためにノイズのある場合の分散圧縮センシングについてその性質を明らかにする。分散圧縮センシングの研究背景については、第 3 章で詳しく述べたが、ここではノイズを考慮した研究を中心に紹介する。

ノイズがある観測においては、理論的な面および工学的な面の両面から CS や DCS の復元性能を平均自乗誤差 (mean square error, MSE) を明らかにすることが重要である。単チャネル CS 問題については、多くの研究が復元性能を理論的に評価してきた [78, 132, 133]; 一方で、我々が知りうる限りでは、DCS 問題の復元性能については少数に限られた実験的なものに限られている [110, 111, 126]。ここで、JSM-2 および MMV 問題に近いブロック疎信号を扱ういくつかの理論的な研究に触れるべきであろう [133, 134]。特に、Vehkaperä ら [134] はブロック疎信号の復元性能を扱い、系が大きい極限においては非零要素の位置をあらかじめ知っている場合とそうでない場合で最小平均自乗誤差推定器 (minimum MSE estimators) がまったく同じ復元性能を示すことを示した。また、[123] ではブロック疎信号の $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元方法の正則化係数の最適な条件を扱っている。しかしながら、我々の問題設定、すなわち JSM-2 においては、それぞれのチャンネルで信号は独立して観測される。一方で、[123] や [134] は信号全体がひとつの観測

者によって取得される状況を扱っている。この違いは [123] や [134] を我々の問題に直接適応することを困難にしている。

以下では、本章に結果について簡単に述べる。統計力学の方法をもちいて、分散圧縮センシング分野の JSM-2 信号復元問題の復元性能を MSE を性能指標として調べた。本章では特に観測に際して加法的ノイズが存在する状況について、 $\ell_{2,1}$ ノルム最小化とベイズ最適な戦略のふたつの方法による JSM-2 信号の復元に着目し、その MSE の理論的な予測を試みた。ノイズがない場合について述べた第3章と同様に、チャネル数が大きい場合により原信号に近い信号を復元可能であることが明らかになった。また、同じ大きさのノイズにたいして、観測行列により復元性能が変わるかどうか調べたところ、行直交行列を使用した場合には、ランダムガウス行列を使用した場合に比べて MSE を性能指標としてよりよい復元性能を実現していることがわかった。また、ベイズ最適な方法による JSM-2 信号の復元を BP にもとづいた近似アルゴリズムにより実装した。このアルゴリズムをもちいた数値実験をおこない、レプリカ法に理論的な推定値と高い精度で一致することを確認した。

第 5 章

結論

5.1 結果のまとめ

本研究では、センサーネットワークの長寿命化を目指し、統計力学的手法をもちいて以下の 2 つについて検討をおこなった。ひとつめは第 2 章で述べた、次数相関のあるランダムネットワークの頑健性に関する評価である。もうひとつは、第 3 章および第 4 章で述べた、分散圧縮センシングの復元性能の評価である。この章では、これら 2 つの検討結果をまとめ、本論文の結論を述べる。さらに、本論文で得られた結果について、センサーネットワークへの応用の観点および学術的な観点からの位置づけについて改めて見直し、この分野の今後の発展の方向性について述べる。

第 2 章においては、センサーネットワークのモデルとして解析的な方法を適用することが容易なランダムネットワークに着目し、その頑健性評価をおこなった。ここで、頑健性評価とは、ネットワーク中に含まれるサイトやボンドをどの程度削除したときに元のネットワークのサイズと同じオーダーのサイズをもつ分離したサブネットワーク、これを巨大コンポーネントとよぶ、が消滅するか、あるいはそのようなサブネットワークが存在している場合にどの程度の大きさであるか、を明らかにするものである。また、巨大コンポーネントが消滅するときの削除率をパーコレーション閾値とよぶ。本論文では特に、二極次数分布ネットワーク、すなわちあるサイトがいくつかのサイトとつながっているかをあらわす次数が 2 つの値のみをもつランダムネットワークに着目した。この種類のネットワークは、その構成要素のランダムな故障と意図的な攻撃の両方に耐性があるとされている。また、設計指標として次数相関、すなわちある次数をもつサイトがどのような次数をもつサイトとつながりやすいかをあらわす量を指定したネットワークについて意図的な攻撃にたいしての頑健性について検討した。

ランダムネットワークの意図的な攻撃にたいする頑健性とセンサーネットワークの寿命の関係は下記のとおりである。マルチホップ通信をもちいるセンサーネットワークにおい

てはいくつかのセンサーノードは、ほかのセンサーノードの通信を媒介するハブノードとなる。ハブノードとなったセンサーノードはほかのノードに比べて消費電力が大きくなり、その結果より早く機能を停止してしまう。このことは、ランダムネットワークにおいて次数の大きなサイト、すなわちハブとなっているサイトを積極的に削除するという意味で攻撃と同等である。

頑健性評価をするために、統計力学の手法である cavity 法を応用したランダムネットワークのパーコレーション解析手法を開発した。これにより従来よりも簡潔に、次数分布および次数相関を扱うことを可能とした。また、数値実験によって cavity 法による解析結果の妥当性を検証した。この研究から得られた結果は下記の通りである。

1. 数学的な関係は明らかではないものの、メッセージ伝搬法をもちいた cavity 法によるパーコレーション解析手法は、従来の手法でも解析が可能なネットワーク構成について同じ結果を与えることがわかった。
2. サイト攻撃を受ける次数相関のある二極次数分布ネットワークについては、サイトの攻撃率にたいする巨大コンポーネントのサイズ変化と、パーコレーション閾値の両方の観点から、次数相関が大きい場合の方が頑健であることがわかった。
3. ボンド攻撃を受ける次数相関のある二極次数分布ネットワークについては、ボンドの攻撃率にたいする巨大コンポーネントのサイズ変化は次数相関について一貫した傾向はなかった。次数相関がないネットワークについてはパーコレーション閾値の意味で最も頑健だが、中庸な状況では巨大コンポーネントのサイズが最も小さかった。次数相関が負である場合は、攻撃率が低い場合に最も巨大コンポーネントが大きいが、パーコレーション閾値の意味では最も頑健性が低い。
4. 上記のいずれの結果についても、cavity 法による理論的な予想と数値実験の結果をよく一致している。このことは cavity 法がこの問題について妥当な結果を与えることを示している。

上記の結果は、サイト攻撃への頑健性については次数相関とランダムネットワークの頑健性の間には単純な関連があることを示している。ただし、ボンド攻撃にたいする巨大コンポーネントのサイズについては詳細に考慮する必要がある。これらの結果から得られるセンサーネットワークの設計指針についてはあとで述べる。

第3章および第4章では、センサーネットワークの各センサーノードの通信量を低減するための情報圧縮手段として、分散圧縮センシングの復元性能を評価した。圧縮センシングとは、関心のある信号がある基底において疎、すなわち非零要素の数 K が信号の長さ N にたいして少ないという仮定のもと、 N よりも少ない観測数 M から元の信号を復元する方法である。圧縮センシングを多チャンネル信号をあつかうために拡張した分散圧縮センシングは複数チャンネル（センサーノード）の観測結果の間の相関をもちいて各チャンネル

を独立に復元する場合に比べて効率的に復元することを目指すものである。ここで、復元性能の評価とは、圧縮率 $\alpha = M/N$ と疎性 $\rho = K/N$ の間の関係について、復元限界とよばれる完全復元条件を明らかにすること、および完全復元条件を満たさない場合に元の信号にどれだけ近いかを評価することである。本論文では特に、結合疎モデル (joint sparse model, JSM) -2 あるいは複数観測ベクトル (multi-measurement vector, MMV) 問題とよばれる、非零要素の位置が各信号で共通であるモデルに着目した。復元方法については、信号の生成モデルが未知の場合も適用可能な $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による方法と、生成モデルが既知の場合に最小自乗誤差を達成することが保証されているベイズ最適な方法を扱った。第3章ではノイズがない観測について、第4章ではノイズのある観測についてそれぞれあつかった。

圧縮センシングをもちいた情報圧縮によるセンサーネットワークの長寿命化への寄与について簡単に述べる。センサーネットワークにおけるセンサーノードの電力は主に通信に費やされる。それゆえ、もし少ない演算量で通信する情報量を削減することができればセンサーノードの消費電力を減らすことが可能である。圧縮センシングは演算量が小さい圧縮方法の一つであり、大まかには信号のサイズと同等のオーダーの演算量を必要とするのみである。このことは圧縮率に反比例する寿命を得られることを意味している。

復元性能評価のために、不規則系の統計力学の手法であるレプリカ法をもちいた単チャネルの圧縮センシングの解析手法を複数チャネル用に拡張した。また、ベイズ最適な方法による復元については、従来法にもとづくアルゴリズムを複数チャネルに拡張し、計算量的に実行可能な復元方法を開発し、理論的な予測の妥当性を検証した。これらの研究から得られた結果は下記のとおりである。

1. $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元方法とベイズ最適な復元方法のいずれの場合もチャネル数が増加するにつれ、復元性能が上昇することがわかった。このことは、この2つの方法がチャネル間の相関情報を利用可能であることを示している。
2. ノイズなしの場合、ベイズ最適な方法による復元性能は10チャネルの信号にたいしては原理的な限界 $\alpha = \rho$ を復元限界としてもつことが数値的にわかった。一方で、 $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元方法ではチャネル数を増やしても原理的な限界に達しないようであった。
3. ノイズがある場合、ベイズ最適な復元方法については同じ ρ にたいして α をある程度以上大きくするとほとんど同じ平均自乗誤差を達成することがわかった。ただし、それよりも小さい α にたいする平均自乗誤差の挙動はチャネル数が増加するにつれ改善している。
4. 上記のいずれの結果についても、レプリカ法による理論的な予想と数値実験の結果をよく一致している。このことはレプリカ法がこの問題について妥当な結果を与え

ることを示している.

これらの結果から, センサーネットワークで扱う信号が JSM-2 信号あるいはそれに近いとき, $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による方法およびベイズ最適な復元方法のいずれもが有効であることがわかった. また, $\ell_{2,1}$ ノルム最小化をもちいる復元方法については, チャンネル数を増やせば増やすほど復元性能が上がることが示唆されている.

5.2 センサーネットワークの長寿命化への指針

前節でまとめた結果を踏まえて, ここではセンサーネットワークの長寿命化に向けた指針を述べる. 始めにそれぞれ個別に得られる指針を述べる. まずは, ランダムネットワークの頑健性についての結果から以下の 2 つの指針が得られる.

1. ランダムネットワークの頑健性について, 2 番目の結果は, 多くの通信を仲介するハブノードが早期に機能消失する場合を模しているネットワークのサイト攻撃の結果から, このようなネットワークの場合は次数相関を増やすことでより頑健なネットワークを実現可能なことを示唆している. すなわち, センサーネットワークを構成する際には多くのセンサーとつながる能力のあるハブノードはなるべくハブノード同士で接続することにより, ネットワーク全体の通信機能を完全に失うことなく運用することができる時間が長くなる. さらに, サイト攻撃を受ける場合については巨大コンポーネントの大きさと次数相関との関係は単純であり, 通信可能な範囲, すなわちセンサーノードの被覆率の観点からも, 次数相関が大きくなることが有利に働く.
2. 一方で, ランダムネットワークの頑健性について, 3 番目の結果が示すように, 通信の遮断を模したボンド攻撃と次数相関の関係は複雑であり, パーコレーション閾値のみならず, 巨大コンポーネントのサイズに着目する必要性を示唆している. センサーネットワークの長寿命化の観点から, 通信の遮断は必ずしも中心的な話題ではないが, このような障害にたいしてもボンドの削除率の領域によっては次数相関が大きいことによりセンサーノードの被覆率が高くなっている場合があり, 大きく不利になっているのは削除率が高い領域のみである. このことから, 次数相関を高めることにより長寿命化したセンサーネットワークは通信遮断にたいしてもある程度頑健な運用が可能であることがわかる.

くわえて, 分散圧縮センシングの性能評価に関する研究から以下の 2 つの指針を得ることができる.

1. 分散圧縮センシングの研究から得られる結果から、信号生成分布を前提としないという意味でより実用的な $\ell_{2,1}$ ノルム最小化をもちいる復元方法については、チャネル数を増やせば増やすほど復元性能が上がることがわかった。疎性 ρ が小さい信号にたいしてはチャネル増加による圧縮率への寄与度が大きく、この結果通信量を削減しセンサーネットワーク上のセンサーノードの電力消費量をより小さくすることが可能である。
2. くわえて、センサーネットワークのようなたくさんのセンサーがシステムで、信号の生成分布がガウス分布、かつ疎性が ρ であることが既知であるとき、通信量を $\alpha = \rho$ 程度の割合までに小さくできることを意味している。圧縮センシングではセンサー側における圧縮に必要な演算コストはほとんど無視できるので、センシング自体の電力消費が通信に係る電力消費に比べて十分に小さい場合、このことは単純にセンサーノードひとつひとつの寿命を α^{-1} 倍することが可能であることを意味している。また、チャネル数 $G = 10$ 程度で最大の圧縮率を達成するので、センシングの対象となる信号が場所ごとに異なる性質をもっているような状況でも効率よく情報を収集することが可能である。

さらに、ランダムネットワークの頑健性に関する結果と分散圧縮センシングの復元性能に関する結果を合わせて、センサーネットワークの運用方法について下記の指針が得られる。

1. 分散圧縮センシングにより通信量を削減できるのにくわえて、一度のタイミングで起動するセンサーノードの数を削減することができる。一方で、センサーノードの被覆率の観点からは一定数以上の削減により互いが通信ができない状況が生まれてしまう。したがって、復元限界の意味ではより多くのセンサーを休ませることができる場合においても、ネットワークの構成によっては起動するセンサーノードを限界までは減らさずに、中継するために起動したままにしておく必要がある。
2. 次数相関が大きいネットワークを構成可能な状況では多くのセンサーノードを休止してもなおネットワークを維持することができる。一方で、分散圧縮センシングによれば完全な復元ができない場合でも平均自乗誤差の意味である程度の復元が可能な場合がある。したがって、情報の正確さよりも寿命の延長が重要である場合は、平均的な誤差の期待値の程度を事前に知った上で通信量を削減することによりこれを達成することができる。

以上のような指針のもと、センサーネットワークの設計および運用をおこなうことで寿命を長くすることが可能である。

5.3 本研究の学術的な位置づけと展開

前節および序論で述べた内容を踏まえ、本節では改めて本論文に記した研究の学術的な位置づけと展開について述べる。はじめに理学的な視点から得られる本研究の位置づけと今後期待する展開について簡単に述べ、さらにセンサーネットワークの長寿命化に向け工学的な視点から本研究の役割と今後の可能性について述べる。

本論文の第 2 章における次数相関をもつランダムネットワークの頑健性についての研究に関して、現時点での位置づけと今後の展開について述べる。2015 年時点においてもランダムネットワークの頑健性に関する研究は盛んに続けられており、第 2 章のもととなった論文 [80] は次数相関をもつランダムネットワークの基礎的な研究 [135, 136, 137] のみならず伝染病 [138, 139] やコンピュータネットワーク [140] といった応用分野の研究でも紹介されている。また、我々が文献 [80] を発あらわした時点においてはメッセージ伝搬法をもちいた cavity 法による方法と生成関数法とによる方法の直接的な関連は不明であったが、渡辺ら [141] は次数相関がない系については両者が等価であることと、次数相関がある場合については一変数の生成関数のかたちに帰着することはできないことを示した。このような事実から、ランダムネットワークの頑健性とその周辺分野において、第 2 章の研究は、特に次数相関と攻撃にたいする頑健性を明らかにしたという面から重要であるといえる。今後の展開として、一部明らかになりつつある木構造を仮定できない複雑ネットワークにおける [42] 次数相関の影響の解明や、有限サイズのネットワークと性質を調べることは興味深い課題である。これらの研究課題の解決は複雑ネットワークの物理学の発展に寄与するとともに、実世界の問題への応用がより広い範囲で可能になるだろう。

本論文の第 3 章と第 4 章では分散圧縮センシングの典型的な復元性能についてノイズがない場合とある場合についてそれぞれ明らかにした。本論文であつかった分散圧縮センシングの信号モデルは、すでに提案されている中では最も単純なモデルであるものの、我々の研究はその典型的復元限界と完全復元が不可能な場合の平均自乗誤差の意味での典型的復元性能を評価を初めて明らかにした。特に、ベイズ最適な復元が適用可能かつノイズがない場合はチャンネル数がある程度大きいと完全復元が可能な圧縮率と信号の非零要素の密度が一致する根本的な限界値を達成していることを示した。これまではチャンネル数に相当するようなシステムサイズが無限大の場合にそのような報告があつたのみであつたので [78]、このことは重要な意味をもつ。一方で、本論文でもちいた評価手法は圧縮センシングにおけるより複雑な信号モデルに応用することも可能であろう。また、復元アルゴリズムの観点からは、観測行列が行直交である行列の場合に適当に動作するアルゴリズムの発見することが必要である。すでにいくつかのアルゴリズムが単チャンネルの圧縮センシングにたいして提案されている [142] が、これらをさらに分散圧縮センシングの問題に適用する

課題が残されている。本論文では言及しなかったが、制約項の最小化問題として圧縮センシングの復元問題をとらえたとき、最適な制約項は非零要素の数を最小化することに相当する ℓ_0 擬ノルムである。一方で、 ℓ_0 擬ノルム最小化問題は一般に組合せ最適化問題であり実時間での実行が困難である。 ℓ_0 擬ノルム最小化問題を具体的に実行するアルゴリズムや、その近似アルゴリズムの発見、さらに復元性能の評価が可能になれば、圧縮センシングの性質をより明らかにすることができる。

情報統計力学の観点から、本論文に含まれる 2 つの研究の寄与と今後の課題について述べる。本論文ではランダムネットワークと圧縮センシングという異なった対象を扱ったが、そこでもちいられている手法はいずれも統計力学における平均場近似の考え方にもとづいたものである。特に、ランダムネットワークの頑健性の解析にもちいた手法と分散圧縮センシングの復元アルゴリズムとして導入した手法はいずれも cavity 法の考え方にもとづくメッセージ伝搬法である。このような意味で、本論文の研究結果はこれら従来の手法がより広い問題に応用可能であることを示している。一方で、圧縮センシングの典型的性能を明らかにすることができる方法のひとつである状態発展法 [123] と比較すると、レプリカ法は数学的に厳密な方法ではないという欠点がある。不規則系の統計力学の解析手法としてのレプリカ法について、自然数であるレプリカ数 $n \in \mathbb{N}$ を実数に解析接続することの正当性の数学的な証明を与えること、あるいはこの解析接続による不具合が生じないことの証拠を積み上げることは重要な課題である。

ここからは、本論文に含まれる研究の工学的な視点からの役割と今後の展開について述べる。パーコレーション解析のセンサーネットワークへの応用の観点では、本論文ではより次数相関が高い二極次数分布のネットワークを構成することでその寿命を長くすることが可能であると結論付けた。我々は、マルチホップ通信を使用するセンサーネットワークにおいてはハブとなるセンサーノードの電力消費が大きくなる点に着目し、これらが使用できなくなってしまった場合でもネットワークの機能を維持するための指針を示したという意味で、工学的な側面でセンサーネットワークの研究に寄与した。一方で、実際にセンサーネットワークを構築する場合にどのような方法により次数相関を高めることができるかは自明ではない。また、すでに述べたように本研究ではネットワークが木構造をもっていると仮定したが、実際のネットワークが必ずしもこれを満たすとは限らない。そのような意味で、二次元あるいは三次元の空間中にセンサーを配置するという制約のもとでネットワークの構成方法やパーコレーションの解析をおこなうことは重要であり、かつセンサーノードが作るネットワークの構造を考慮した解析結果は少数である [42] ため、挑戦的で工学的な価値が高い。

分散圧縮センシングのセンサーネットワークへの応用の観点から、我々の研究の寄与と今後の発展について述べる。前述したように、センサーネットワークの通信量を削減するという目的にたいして、我々は収集の対象となる信号が疎でありかつその台が共通する

場合には分散圧縮センシングをもちいることでこれが効率的におこなえることを示した。一方で、現実のセンサーネットワークにおいてあつかいたい信号は様々であり、本論文で扱った信号はその一例に過ぎない。センサーネットワークに分散圧縮センシングをより効果的に応用するためには、信号の性質を見極める技術、例えば辞書学習の活用、と組合せ、状況に応じた基底やアルゴリズムの利用を可能にすることが必要である。また、本研究では情報の収集そのものに着目していたが、収集した情報をどのように利用するかによって必要な精度は異なる。構築するセンサーネットワークの最終的な目的を含んだかたちで通信量を削減する枠組みを作っていくことはこれからも重要な課題である。

本論文ではセンサーネットワークの電力消費にたいする頑健性を高めることを目的としたパーコレーション解析と、その電力消費量自体を減らすための方法としての分散圧縮センシングの性能評価をおこなった。本論文の範囲では、これら 2 つの結果をそれぞれもちいることでセンサーネットワークの長寿命化が図ることが可能だと述べた。一方で、センサーノードで得られる情報各々の間の相関は、それらの配置に依存する。このことから、これらの同時最適化をおこなうことでより長寿命なセンサーネットワークを構築が可能になるといえる。今後の研究課題として、センサーノードの配置とそれぞれの間のネットワーク構造の決定を信号の発生源を考慮したうえで実行可能にすることが挙げられる。すなわち、上述した空間的制約にもとづいたセンサーの配置のみならず、信号制約にもとづいた配置の最適化をおこなうことで、センサーネットワークをより効率的に運用することができる。

付録 A

第 3 章の計算の詳細

A.1 $\ell_{2,1}$ ノルム最小化による復元法の自由エネルギーの導出

A.1.1 ディラックのデルタ関数 $\delta(\mathbf{A}_g \mathbf{x}_g^a - \mathbf{y}_g)$ の平均

ここでは、ディラックのデルタ関数 $\delta(\mathbf{A}_g \mathbf{x}_g^a - \mathbf{y}_g)$,

$$\prod_{a=1}^n \delta(\mathbf{A}_g \mathbf{x}_g^a - \mathbf{y}_g) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{1}{(\sqrt{2\pi\tau})^{nM}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \sum_{a=1}^n |\mathbf{A}_g (\mathbf{x}_g^0 - \mathbf{x}_g^a)|^2 \right] \quad (\text{A.1})$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{1}{(\sqrt{2\pi\tau})^{nM}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \sum_{\mu=1}^M \sum_{a=1}^n (u_{g\mu}^0 - u_{g\mu}^a)^2 \right], \quad (\text{A.2})$$

の巨視的な方程式を導出する．ここで、表現 $u_\mu^a = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_{g\mu i} x_g^a[i]$, $\mu = 1, 2, \dots, M$, および $a = 0, 1, \dots, n$ を導入する．

本文で大部分で仮定したのと同様に、 $\mathbf{A}_g$ をのそれぞれの要素を平均 0 および分散 $1/N$ の独立かつ同一の分布から生成される (independently and identically distributed, i.i.d.) のガウスランダム変数であるとする．すると、 $u_{g\mu}^a$ を平均 0 で、固定した集合 $\mathbf{x}_g^0, \mathbf{x}_g^1, \dots, \mathbf{x}_g^n$ について共分散 $[u_{g\mu}^a u_{g\nu}^b]_{\mathbf{A}_g} = Q_g^{ab} \delta_{\mu\nu}$ で特徴づけられる多変数ガウスランダム変数として扱うことができる．ここで $[\dots]_{\mathbf{A}_g}$ は $\mathbf{A}_g$ についての平均操作をあらわす． $\delta_{\mu\nu}$ は $\mu = \nu$ のとき 1 と等しく、それ以外では 0 である．レプリカ対称性仮定のもとでは、 $u_{g\mu}^a$ は $\mathcal{N}(0, 1)$ のガウスランダム変数 s_μ^a ($a = 0, 1, 2, \dots, n$) および t_μ をもちいて、 $u_{g\mu}^a = \sqrt{Q - q} s_\mu^a + \sqrt{q} t_\mu$ ($a = 1, 2, \dots, n$) および $u_{g\mu}^0 = \sqrt{\rho - m^2/q} s_\mu^0 + m/\sqrt{q} t_\mu$ のようにあらわすことが可能である．

これらの式をもちいて,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \ln \left[\prod_{g=1}^G \prod_{a=1}^n \delta(\mathbf{A}_g \mathbf{x}_g^a - \mathbf{y}_g) \right]_{\{\mathbf{A}_g\}_{g=1}^G} \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{G}{N} \ln \left\{ \frac{\int Dv \exp \{ (n(q - 2m + \rho)) / (2(\tau + Q - q)) v^2 \}}{(2\pi)^{n/2} (\tau + Q - q)^{n/2}} \right\} \\
&= -\frac{\alpha G}{2} \ln \left\{ \left(1 - \frac{n(q - 2m + \rho)}{Q - q} \right) (Q - q)^n (2\pi)^n \right\} \\
&\equiv \mathcal{T}_n(Q, q, m),
\end{aligned} \tag{A.3}$$

を得る.

A.1.2 式 (3.9) の正規化項の評価

ここでは, (3.9) の残りの部分の $\mathbf{x}_g^0$ についての平均を評価する. 式 (3.10) の RS の秩序変数による $\mathbf{x}_g^0$ の範囲の制約をあらわすために, デルタ関数,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\{\{\mathbf{x}_g^a\}_{g=1}^G\}_{a=1}^n, \{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G; Q, q, m) &\equiv \prod_{g=1}^G \left\{ \prod_{a=1}^n \{ \delta(|\mathbf{x}_g^a|^2 - NQ) \delta(\mathbf{x}_g^a \cdot \mathbf{x}_g^0 - Nm) \} \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{a>b} \delta(\mathbf{x}_g^a \cdot \mathbf{x}_g^b - Nq) \right\},
\end{aligned} \tag{A.4}$$

のようにもちいる. すると,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \left[\int \prod_{g=1}^G \prod_{a=1}^n d\mathbf{x}_g^a \prod_{a=1}^n \left(e^{-\beta \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{g=1}^G (\mathbf{x}_g^a[i])^2}} \right) \mathcal{I}(\{\{\mathbf{x}_g^a\}_{g=1}^G\}_{a=1}^n, \{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G; Q, q, m) \right]_{\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G} \\
&= \text{extr}_{\tilde{Q}, \tilde{q}, \tilde{m}} \left\{ \frac{nG\tilde{Q}Q}{2} - \frac{n(n-1)G\tilde{q}q}{2} - nG\tilde{m}m + \ln \Xi_n(\tilde{Q}, \tilde{q}, \tilde{m}; \beta) \right\} \\
&\equiv \mathcal{S}_n(Q, q, m),
\end{aligned} \tag{A.5}$$

を得る. ここで

$$\begin{aligned}
& \Xi_n(\tilde{Q}, \tilde{q}, \tilde{m}; \beta) \\
&\equiv \left[\int D\mathbf{z} \left(\int d\mathbf{x} \exp \left\{ -\frac{\tilde{Q} + \tilde{q}}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + (\sqrt{\tilde{q}} \mathbf{z} + \tilde{m} \mathbf{x}_0)^T \mathbf{x} - \beta \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \right\} \right)^n \right]_{\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G},
\end{aligned} \tag{A.6}$$

また, $D\mathbf{z} = \prod_{g=1}^G (Dz_g)$, $d\mathbf{x} = \prod_{g=1}^G (dx_g)$ および $\mathbf{x} = \{x_g\}_{g=1}^G$ である. 式 (A.3) および (A.5) を合わせて, $n = 1, 2, \dots$ について $N^{-1} \ln[Z^n(\beta; \{\mathbf{x}\}_{g=1}^G, \{\mathbf{A}\}_{g=1}^G)] =$

$\text{extr}_{Q,q,m}\{\mathcal{T}_n(Q,q,m) + \mathcal{S}_n(Q,q,m)\}$ を得る. 最終的には $\beta \rightarrow \infty$ の極限をとるので, 変数の発散を防ぐため, $\beta(Q - q) \equiv \chi$, $\beta^{-1}(\tilde{Q} + \tilde{q}) \equiv \hat{Q}$, $\beta^{-2}\tilde{q} \equiv \hat{\chi}$ および $\beta^{-1} \equiv \hat{m}$ を導入する. $N^{-1} \ln[Z^n(\beta; \{\mathbf{x}\}_{g=1}^G, \{\mathbf{A}\}_{g=1}^G)]$ の $n \in \mathbb{N}$ から $n \in \mathbb{R}$ への解析接続をとったのち, (3.11) を得る.

A.2 ベイズ最適な復元法の自由エネルギー密度の導出

ここでは, (3.23) に記した JSM-2 問題についてのベイズ最適な復元方法に対応する自由エネルギー密度を導出する. デルタ関数の評価部分については A.1 節で示したように復元方法に依存しないことに気づくことができる. よって, 残りの部分とマクロな秩序変数による $\{\mathbf{x}_g^a\}_{g=1}^G$ の範囲の制約をあらわす部分について, ベイズ最適な方法による復元を反映した評価をおこなえば十分であり,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left[\int \prod_{g=1}^G \prod_{a=1}^n d\mathbf{x}_g^a \prod_{a=1}^n P(\{\mathbf{x}_g\}_{g=1}^G) \mathcal{I}(\{\{\mathbf{x}_g^a\}_{g=1}^G\}_{a=1}^n, \{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G; Q, q, m) \right]_{\{\mathbf{x}_g^0\}_{g=1}^G} \\ = \text{extr}_{\hat{Q}, \hat{q}, \hat{m}} \left\{ \frac{nG\hat{Q}Q}{2} - \frac{n(n-1)G\hat{q}q}{2} - nG\hat{m}m + \ln \Xi_n^{\text{Bayes}}(\hat{Q}, \hat{q}, \hat{m}) \right\} \\ \equiv \mathcal{S}_n^{\text{Bayes}}(Q, q, m), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

を得る. ここで,

$$\begin{aligned} \Xi_n^{\text{Bayes}}(\hat{Q}, \hat{q}, \hat{m}) \\ \equiv \left[\int D\mathbf{z} \left(\int d\mathbf{x} P(\mathbf{x}) \exp \left\{ -\frac{\hat{Q} + \hat{q}}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + (\sqrt{\hat{q}}\mathbf{z} + \hat{m}\mathbf{x}_0)^T \mathbf{x} \right\} \right)^n \right]_{\{x_g^0\}_{g=1}^G}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$D\mathbf{z} = \prod_{g=1}^G (Dz_g)$, $d\mathbf{x} = \prod_{g=1}^G (dx_g)$ および $\mathbf{x} = \{x_g\}_{g=1}^G$ である. 式 (A.3) と (A.7) とを合わせて, $n = 1, 2, \dots$ について $N^{-1} \ln[Z^{\text{Bayes}}(\{\mathbf{x}\}_{g=1}^G, \{\mathbf{A}\}_{g=1}^G)^n] = \text{extr}_{Q,q,m}\{\mathcal{T}_n(Q,q,m) + \mathcal{S}_n^{\text{Bayes}}(Q,q,m)\}$ を得る. $N^{-1} \ln[Z^n(\{\mathbf{x}\}_{g=1}^G, \{\mathbf{A}\}_{g=1}^G)]$ について $n \in \mathbb{N}$ から $n \in \mathbb{R}$ への解析接続をとったのち, (3.23) を得る.

A.3 式 (3.33) の導出

ここでは, (3.33) の導出をおこなう. はじめに, Hubbard-Stratonovich 変換 [67] をもちいて, (3.29) を,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}^{\mu \rightarrow i}(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{Z^{\mu \rightarrow i}} \int d\mathbf{x}_j \prod_{j \neq i} \{ \mathcal{M}^{j \rightarrow \mu}(\mathbf{x}_j) \} \prod_{g=1}^G e^{-\frac{1}{2\sigma_{g\mu}} (y_{g\mu} - \sum_{j \neq i} A_{g\mu j} x_{gj} - A_{g\mu i} x_{gi})^2} \\
 &= \frac{1}{Z^{\mu \rightarrow i}} \prod_{g=1}^G \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{g\mu}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{g\mu}} (y_{g\mu} - A_{g\mu i} x_{gi})^2} \int d\zeta_g e^{-\frac{\zeta_g^2}{2\sigma_{g\mu}}} \right\} \\
 &\quad \times \int d\mathbf{x}_j \prod_{j \neq i} \left\{ \mathcal{M}^{j \rightarrow \mu}(\mathbf{x}_j) \prod_{g=1}^G e^{\frac{A_{g\mu i} x_{gj} (i\zeta_g + y_{g\mu} - A_{g\mu i} x_{gi})}{\sigma_{g\mu}}} \right\}. \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

のように簡素化する. 大きな N については, 上の式の最後の項にフーリエ展開を適用することができる. これにより

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}^{\mu \rightarrow i}(\mathbf{x}_i) &\simeq \frac{1}{Z^{\mu \rightarrow i}} \prod_{g=1}^G \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{g\mu}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{g\mu}} (y_{g\mu} - A_{g\mu i} x_{gi})^2} \int d\zeta_g e^{-\frac{\zeta_g^2}{2\sigma_{g\mu}}} \right\} \\
 &\quad \times \int d\mathbf{x}_j \prod_{j \neq i} \left\{ \prod_{g=1}^G e^{\frac{A_{g\mu i} x_{gj}^{j \rightarrow \mu} (i\zeta_g + y_{g\mu} - A_{g\mu i} x_{gi})}{\sigma_{g\mu}} + \frac{A_{g\mu i}^2 v_g^{j \rightarrow \mu} (i\zeta_g + y_{g\mu} - A_{g\mu i} x_{gi})^2}{2\sigma_{g\mu}}} \right\}, \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

を得る. ζ_g の積分を実行したのち, (3.33) を得る.

謝辞

本論文を作成するにあたり、指導教官の樺島祥介先生から、丁寧かつ熱心なご指導を賜りました。修士課程および博士課程における先生の指導にたいしまして感謝いたします。また、論文の審査を務めてくださいました、青西亨先生、高安美佐子先生、瀧ノ上正浩先生および渡辺澄夫先生に感謝申し上げます。

樺島研究室では多くの方にお世話になりました。第2章の研究は主に修士課程においておこないました。この間、現在茨城大学工学部の竹田晃人先生、現成蹊大学理工学部の高橋久尚先生、現一橋大学森有礼高等教育国際流動化センターの新里隆先生には数々のご助言を頂戴いたしました。また、同期入学の三屋諒太郎氏には公私ともに大変お世話になりました。さらに高知工業高等専門学校電気情報工学科の谷澤俊弘先生にはランダムネットワークについて数々のご助言を頂戴いたしました。あらためて感謝申し上げます。

第3章および第4章の研究は博士課程と日本電信電話株式会社コミュニケーション科学基礎研究所においておこないました。この間、樺島研究室の小淵智之先生、川本達郎博士、渡辺駿介氏、許インイン氏、日本電信電話株式会社コミュニケーション科学基礎研究所守谷特別研究室の原田登氏、パブロナバ・ガブリエル博士、佐藤尚博士からは貴重なご助言をいただきました。また、鎌本優博士および守谷健弘博士からは入社以来ご指導賜り、本論文のテーマの一部を与えてくださいました。感謝いたします。

修士課程から博士課程にわたるすべての期間、樺島研究室青西研究室の有江かおり氏からは多大なサポートを賜りました。お礼申し上げます。

最後に、弟善英、妹今日子、晴子、母邦子、父の故善尚に感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] 安藤繁, 田村陽介, 戸辺義人, 南正輝 編. センサネットワーク技術: ユビキタス情報環境の構築に向けて. 東京電機大学出版局, 2005.
- [2] I.F. Akyildiz, W. Su, Y. Sankarasubramaniam, and E. Cayirci. Wireless sensor networks: a survey. *Computer Networks*, 38(4):393 – 422, 2002.
- [3] I.F. Akyildiz, Weilian Su, Y. Sankarasubramaniam, and E. Cayirci. A survey on sensor networks. *Communications Magazine, IEEE*, 40(8):102–114, Aug 2002.
- [4] Jennifer Yick, Biswanath Mukherjee, and Dipak Ghosal. Wireless sensor network survey. *Computer Networks*, 52(12):2292 – 2330, 2008.
- [5] Luigi Atzori, Antonio Iera, and Giacomo Morabito. The internet of things: A survey. *Computer Networks*, 54(15):2787 – 2805, 2010.
- [6] Jayavardhana Gubbi, Rajkumar Buyya, Slaven Marusic, and Marimuthu Palaniswami. Internet of things (IoT): A vision, architectural elements, and future directions. *Future Generation Computer Systems*, 29(7):1645 – 1660, 2013.
- [7] Chun-Wei Tsai, Chin-Feng Lai, Ming-Chao Chiang, and L.T. Yang. Data mining for internet of things: A survey. *Communications Surveys Tutorials, IEEE*, 16(1):77–97, First 2014.
- [8] 中島募. 現実解に動くインフラ電装化. In 日経エレクトロニクス 2014/12/08 号, pages 25–39. 日経 BP 社, 12 2014.
- [9] 俊長秀紀, 西沢秀樹, 山岸明洋, 藤井孝司, 照日繁, 坪井秀幸, 柴田弘, 藤野洋輔. ユビキタス特区事業「次世代無線ネットワーク」の実証実験. 22(3), 2010.
- [10] Aqeel ur Rehman, Abu Zafar Abbasi, Noman Islam, and Zubair Ahmed Shaikh. A review of wireless sensors and networks' applications in agriculture. *Computer Standards and Interfaces*, 36(2):263 – 270, 2014.
- [11] Yasue Kishino, Yasushi Sakurai, Yutaka Yanagisawa, Takayuki Suyama, and Futoshi Naya. Svd-based hierarchical data gathering for environmental moni-

- toring. In *Proceedings of the 2013 ACM Conference on Pervasive and Ubiquitous Computing Adjunct Publication*, UbiComp '13 Adjunct, pages 9–12, New York, NY, USA, 2013. ACM.
- [12] Jihoon Hong, Shoichiro Tomii, and Tomoaki Ohtsuki. Cooperative fall detection using doppler radar and array sensor. In *Personal Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC), 2013 IEEE 24th International Symposium on*, pages 3492–3496, Sept 2013.
- [13] N. Ono, A. Saito, and S. Ando. Design and experiments of bio-mimicry sound source localization sensor with gimbal-supported circular diaphragm. In *TRANSDUCERS, Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems, 12th International Conference on, 2003*, volume 1, pages 935–938 vol.1, June 2003.
- [14] R. Konno, M. Mitsui, Hiroki Kuwano, S. Nagasawa, K. Sano, and J. Hayasaka. A highly sensitive strain sensor using surface acoustic wave and its evaluation for wireless battery-less sensor network. In *Sensors, 2007 IEEE*, pages 796–799, Oct 2007.
- [15] Marco Ferrari, Vittorio Ferrari, Michele Guizzetti, and Daniele Marioli. An autonomous battery-less sensor module powered by piezoelectric energy harvesting with rf transmission of multiple measurement signals. *Smart Materials and Structures*, 18(8):085023, 2009.
- [16] Andrew Wang, SeongHwan Cho, Charles Sodini, and Anantha Chandrakasan. Energy efficient modulation and mac for asymmetric rf microsensor systems. In *Proceedings of the 2001 International Symposium on Low Power Electronics and Design*, ISLPED '01, pages 106–111, New York, NY, USA, 2001. ACM.
- [17] M. Younis, M. Youssef, and K. Arisha. Energy-aware routing in cluster-based sensor networks. In *Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunications Systems, 2002. MASCOTS 2002. Proceedings. 10th IEEE International Symposium on*, pages 129–136, 2002.
- [18] Chong Liu, Kui Wu, Yang Xiao, and Bo Sun. Random coverage with guaranteed connectivity: joint scheduling for wireless sensor networks. *Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions on*, 17(6):562–575, June 2006.
- [19] Santosh Kumar, Ten H. Lai, and József Balogh. On k-coverage in a mostly sleeping sensor network. In *Proceedings of the 10th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking*, MobiCom '04, pages 144–158, New York, NY, USA, 2004. ACM.
- [20] Sanjay Shakkottai, R. Srikant, and Ness B. Shroff. Unreliable sensor grids:

-
- coverage, connectivity and diameter. *Ad Hoc Networks*, 3(6):702 – 716, 2005.
- [21] Mo Li, Zhenjiang Li, and A.V. Vasilakos. A survey on topology control in wireless sensor networks: Taxonomy, comparative study, and open issues. *Proceedings of the IEEE*, 101(12):2538–2557, Dec 2013.
 - [22] Xindong Wu, Xingquan Zhu, Gong-Qing Wu, and Wei Ding. Data mining with big data. *Knowledge and Data Engineering, IEEE Transactions on*, 26(1):97–107, Jan 2014.
 - [23] Min Chen, Shiwen Mao, and Yunhao Liu. Big data: A survey. *Mobile Networks and Applications*, 19(2):171–209, 2014.
 - [24] V.P. Mhatre, C. Rosenberg, D. Kofman, R. Mazumdar, and N. Shroff. A minimum cost heterogeneous sensor network with a lifetime constraint. *Mobile Computing, IEEE Transactions on*, 4(1):4–15, Jan 2005.
 - [25] Xiaorui Wang, Guoliang Xing, Yuanfang Zhang, Chenyang Lu, Robert Pless, and Christopher Gill. Integrated coverage and connectivity configuration in wireless sensor networks. In *Proceedings of the 1st International Conference on Embedded Networked Sensor Systems*, SenSys '03, pages 28–39, New York, NY, USA, 2003. ACM.
 - [26] Neelofer Tamboli and Mohamed Younis. Coverage-aware connectivity restoration in mobile sensor networks. *Journal of Network and Computer Applications*, 33(4):363 – 374, 2010.
 - [27] Mihaela Cardei and Jie Wu. Energy-efficient coverage problems in wireless ad-hoc sensor networks. *Computer Communications*, 29(4):413 – 420, 2006. Current areas of interest in wireless sensor networks designs.
 - [28] Chi-Fu Huang and Yu-Chee Tseng. The coverage problem in a wireless sensor network. *Mob. Netw. Appl.*, 10(4):519–528, August 2005.
 - [29] Christian Bettstetter. On the minimum node degree and connectivity of a wireless multihop network. In *Proceedings of the 3rd ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking & Computing*, MobiHoc '02, pages 80–91, New York, NY, USA, 2002. ACM.
 - [30] C. Savarese, J.M. Rabaey, and J. Beutel. Location in distributed ad-hoc wireless sensor networks. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings. (ICASSP '01). 2001 IEEE International Conference on*, volume 4, pages 2037–2040 vol.4, 2001.
 - [31] Fan Ye, G. Zhong, J. Cheng, Songwu Lu, and Lixia Zhang. Peas: a robust energy conserving protocol for long-lived sensor networks. In *Distributed Computing*

- Systems, 2003. Proceedings. 23rd International Conference on*, pages 28–37, May 2003.
- [32] Di Tian and Nicolas D. Georganas. A coverage-preserving node scheduling scheme for large wireless sensor networks. In *Proceedings of the 1st ACM International Workshop on Wireless Sensor Networks and Applications*, WSNA '02, pages 32–41, New York, NY, USA, 2002. ACM.
 - [33] シャノンクロード E , ワレンウィーバー著 , 植松友彦訳. 通信の数学的理論. Math & Science. 筑摩書房, 2009.
 - [34] Y.T. Hou, Yi Shi, H.D. Sherali, and S.F. Midkiff. On energy provisioning and relay node placement for wireless sensor networks. *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, 4(5):2579–2590, Sept 2005.
 - [35] Vibhav Kumar Sachan, Syed Akhtar Imam, and M. T. Beg. Article: Energy-efficient communication methods in wireless sensor networks: A critical review. *International Journal of Computer Applications*, 39(17):35–48, February 2012. Full text available.
 - [36] S. Soro and W.B. Heinzelman. Prolonging the lifetime of wireless sensor networks via unequal clustering. In *Parallel and Distributed Processing Symposium, 2005. Proceedings. 19th IEEE International*, pages 8 pp.–, April 2005.
 - [37] M. Bhardwaj, T. Garnett, and A.P. Chandrakasan. Upper bounds on the lifetime of sensor networks. In *Communications, 2001. ICC 2001. IEEE International Conference on*, volume 3, pages 785–790 vol.3, 2001.
 - [38] H.M. Ammari and S.K. Das. Integrated coverage and connectivity in wireless sensor networks: A two-dimensional percolation problem. *Computers, IEEE Transactions on*, 57(10):1423–1434, Oct 2008.
 - [39] Zhao Cheng, M. Perillo, and W.B. Heinzelman. General network lifetime and cost models for evaluating sensor network deployment strategies. *Mobile Computing, IEEE Transactions on*, 7(4):484–497, April 2008.
 - [40] H.R. Karkvandi, E. Pecht, and O. Yadid-Pecht. Effective lifetime-aware routing in wireless sensor networks. *Sensors Journal, IEEE*, 11(12):3359–3367, Dec 2011.
 - [41] Liang Liu, Xi Zhang, and Huadong Ma. Percolation theory-based exposure-path prevention for wireless sensor networks coverage in internet of things. *Sensors Journal, IEEE*, 13(10):3625–3636, Oct 2013.
 - [42] Zhenning Kong and E.M. Yeh. Resilience to degree-dependent and cascading node failures in random geometric networks. *Information Theory, IEEE Trans-*

- actions on*, 56(11):5533–5546, Nov 2010.
- [43] D. S. Callaway, M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts. Network robustness and fragility: Percolation on random graphs. *Phys. Rev. Lett.*, 85(25):5468, 2000.
 - [44] R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, and S. Havlin. Resilience of the internet to random breakdowns. *Phys. Rev. Lett.*, 85(21):4626, 2000.
 - [45] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Critical phenomena in complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 80(4):1275, 2008.
 - [46] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Phys. Rev. E*, 64(2):026118, 2001.
 - [47] 大濱靖匡. 多端子情報源符号化の研究と未解決問題. *IEICE ESS Fundamentals Review*, 2(2):40–52, 2008.
 - [48] D. Slepian and J. Wolf. Noiseless coding of correlated information sources. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 19(4):471 – 480, Jul. 1973.
 - [49] S.S. Pradhan and K. Ramchandran. Distributed source coding: symmetric rates and applications to sensor networks. In *Data Compression Conference, 2000. Proceedings. DCC 2000*, pages 363–372, 2000.
 - [50] Zixiang Xiong, A.D. Liveris, and S. Cheng. Distributed source coding for sensor networks. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 21(5):80–94, Sept 2004.
 - [51] E.J. Candes and M.B. Wakin. An introduction to compressive sampling. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 25(2):21 –30, Mar. 2008.
 - [52] D.L. Donoho. Compressed sensing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(4):1289 –1306, Apr. 2006.
 - [53] Shancang Li, Li Da Xu, and Xinheng Wang. Compressed sensing signal and data acquisition in wireless sensor networks and internet of things. *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, 9(4):2177–2186, Nov 2013.
 - [54] D. Baron, M. B. Wakin, M. F. Duarte, S. Sarvotham, and R. G. Baraniuk. Distributed compressed sensing. Technical Report TREE-0612, Rice University, Department of Electrical and Computer Engineering, Nov. 2006.
 - [55] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs I. *Publicationes Mathematicae*, 6:290, 1959.
 - [56] A. X. C. N. Valente, A. Sarkar, and H. A. Stone. Two-peak and three-peak optimal complex networks. *Phys. Rev. Lett.*, 92(11):118702, 2004.
 - [57] G. Paul, T. Tanizawa, S. Havlin, and H. E. Stanley. Optimization of robustness

- of complex networks. *Eur. Phys. J. B*, 38:187, 2004.
- [58] T. Tanizawa, G. Paul, R. Cohen, S. Havlin, and H. E. Stanley. Optimization of network robustness to waves of targeted and random attacks. *Phys. Rev. E*, 71(4):047101, 2005.
- [59] 田崎晴明. 統計力学第 1 巻. 新物理学シリーズ. 培風館, 2008.
- [60] 久保亮五. 大学演習熱学・統計力学〔修訂版〕. 裳華房, 1998.
- [61] Hidetoshi Nishimori. *Statistical physics of spin glasses and information processing*, volume 187. Oxford University Press Oxford, 2001.
- [62] Tatsuto Murayama, Yoshiyuki Kabashima, David Saad, and Renato Vicente. Statistical physics of regular low-density parity-check error-correcting codes. *Phys. Rev. E*, 62:1577–1591, Aug 2000.
- [63] Y Kabashima, T Wadayama, and T Tanaka. A typical reconstruction limit for compressed sensing based on l_p -norm minimization. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009(09):L09003, 2009.
- [64] 樺島祥介. 〈講義ノート〉”人工知能”のための統計力学. 物性研究・電子版, 3(1), Feb 2014.
- [65] 西森秀稔. 相転移・臨界現象の統計物理学. 新物理学シリーズ. 培風館, 2005.
- [66] 樺島祥介. 岩波講座物理の世界物理と情報: 物理と情報〈2〉学習と情報の平均場理論. 岩波講座物理の世界 / 佐藤文隆 [ほか] 編. 物理と情報. 岩波書店, 2002.
- [67] J. Hubbard. Calculation of partition functions. *Phys. Rev. Lett.*, 3:77–78, Jul 1959.
- [68] HA Bethe. Statistical theory of superlattices. In *Proc. Roy. Soc. London A*, volume 150, pages 552–575, 1935.
- [69] Dietrich Stauffer and Amnon Aharony. *Introduction to percolation theory, Second edition*. Taylor and Francis, 1994.
- [70] Rodney J Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Courier Corporation, 2007.
- [71] T. P. Eggarter. Cayley trees, the ising problem, and the thermodynamic limit. *Phys. Rev. B*, 9:2989–2992, Apr 1974.
- [72] B. Bollobás. *Random Graphs*. Academic Press, London, 1985.
- [73] M. Mezard, G. Parisi, and M.A. Virasoro. *Spin Glass Theory and Beyond* \ M. Mezard, G. Parisi, M.A. Vi rasoro (eds.). World Scientific lecture notes in physics. World Scientific, 1987.
- [74] M. Mézard and G. Parisi. The bethe lattice spin glass revisited. *Eur. Phys. J. B*, 10:217, 2001.

-
- [75] Judea Pearl. Reverend bayes on inference engines: A distributed hierarchical approach. In *Proceedings of the Second National Conference on Artificial Intelligence*, pages 133–136, 1982.
 - [76] R.J. McEliece, D.J.C. MacKay, and Jung-Fu Cheng. Turbo decoding as an instance of pearl’s ‘belief propagation’ algorithm. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 16(2):140–152, Feb 1998.
 - [77] D.J.C. MacKay. Good error-correcting codes based on very sparse matrices. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 45(2):399–431, Mar 1999.
 - [78] F. Krzakala, M. Mézard, F. Sausset, Y. F. Sun, and L. Zdeborová. Statistical-physics-based reconstruction in compressed sensing. *Phys. Rev. X*, 2:021005, May 2012.
 - [79] Marc Mezard and Andrea Montanari. *Information, physics, and computation*. Oxford University Press, 2009.
 - [80] Y. Shiraki and Y. Kabashima. Cavity analysis on the robustness of random networks against targeted attacks: Influences of degree-degree correlations. *Phys. Rev. E*, 82:036101, Sep 2010.
 - [81] Y. Shiraki and Y. Kabashima. Typical reconstruction limits for noiseless distributed compressed sensing based on $\ell_{2,1}$ -norm minimization and bayesian optimal reconstruction. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2015.
 - [82] S. H. Strogatz. Exploring complex networks. *Nature*, 410:268, 2001.
 - [83] E. Kenah and J. M. Robins. Second look at the spread of epidemics on networks. *Phys. Rev. E*, 76(3):036113, 2007.
 - [84] L. Huang, Y-C. Lai, K Park, and J. Zhang. Percolation and blind spots in complex networks. *Phys. Rev. E*, 73(6):066131, 2006.
 - [85] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, A. N. Samukhin, and A. Y. Zyuzin. Organization of modular networks. *Phys. Rev. E*, 78(5):056106, 2008.
 - [86] P. Erdős and A. Rényi. The evolution of random graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato’ Int. Közl.*, 5:17, 1960.
 - [87] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393:440, 1998.
 - [88] M. E. J. Newman, C. Moore, and D. J. Watts. Mean-field solution of the small-world network model. *Phys. Rev. Lett.*, 84(14):3201, 2000.
 - [89] M. E. J. Newman. Assortative mixing in networks. *Phys. Rev. Lett.*, 89(20):208701, 2002.

- [90] A. V. Goltsev, S. N. Dorogovtsev, and J. F. F. Mendes. Percolation on correlated networks. *Phys. Rev. E*, 78(5):051105, 2008.
- [91] A. Vázquez and M. Weigt. Computational complexity arising from degree correlations in networks. *Phys. Rev. E*, 67(2):027101, 2003.
- [92] A. Vázquez and Y. Moreno. Resilience to damage of graphs with degree correlations. *Phys. Rev. E*, 67(1):015101, 2003.
- [93] R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, and S. Havlin. Breakdown of the internet under intentional attack. *Phys. Rev. Lett.*, 86(16):3682, 2001.
- [94] M. Kurant, P. Thiran, and P. Hagmann. Error and attack tolerance of layered complex networks. *Phys. Rev. E*, 76(2):026103, 2007.
- [95] R. V. Solé, M. Rosas-Casals, B. Corominas-Murtra, and S. Valverde. Robustness of the european power grids under intentional attack. *Phys. Rev. E*, 77(2):026102, 2008.
- [96] A. A. Moreira, J. S. Andrade, H. J. Herrmann, and J. O. Indekeu. How to make a fragile network robust and vice versa. *Phys. Rev. Lett.*, 102(1):018701, 2009.
- [97] A. Steger and N. C. Wormald. Generating random regular graphs quickly. *Combinatorics, Probability & Computing*, 8(4), 1999.
- [98] S. Maslov and K. Sneppen. Specificity and stability in topology of protein networks. *Science*, 296:910, 2002.
- [99] R. Xulvi-Brunet and I. M. Sokolov. Reshuffling scale-free networks: From random to assortative. *Phys. Rev. E*, 70(6):066102, 2004.
- [100] Toshihiro Tanizawa, Gerald Paul, Shlomo Havlin, and H. Eugene Stanley. Optimization of the robustness of multimodal networks. *Phys. Rev. E*, 74:016125, Jul 2006.
- [101] M. Boguñá, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani. Cut-offs and finite size effects in scale-free networks. *Eur. Phys. J. B*, 38:205, 2004.
- [102] Francesco Guerra and FabioLucio Toninelli. The high temperature region of the Viana-Bray diluted spin glass model. *Journal of Statistical Physics*, 115(1-2):531–555, 2004.
- [103] Michel Talagrand. *Spin glasses: a challenge for mathematicians: cavity and mean field models*, volume 46. Springer Science & Business Media, 2003.
- [104] C. V. Giuraniuc, J. P. L. Hatchett, J. O. Indekeu, M. Leone, I. Pérez Castillo, B. Van Schaeybroeck, and C. Vanderzande. Trading interactions for topology in scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.*, 95:098701, Aug 2005.
- [105] C J Perez Vicente and A C C Coolen. Spin models on random graphs with

-
- controlled topologies beyond degree constraints. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(25):255003, 2008.
- [106] C J Perez-Vicente and A C C Coolen. Spin models on random graphs with controlled topologies beyond degree constraints. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(16):169801, 2009.
- [107] A C C Coolen and S Rabello. Generating functional analysis of complex formation and dissociation in large protein interaction networks. *Journal of Physics: Conference Series*, 197(1):012006, 2009.
- [108] E.J. Candes and T. Tao. Decoding by linear programming. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 51(12):4203 – 4215, dec. 2005.
- [109] E.J. Candes, J. Romberg, and T. Tao. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(2):489 – 509, feb. 2006.
- [110] S.F. Cotter, B.D. Rao, Kjersti Engan, and K. Kreutz-Delgado. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 53(7):2477 – 2488, Jul. 2005.
- [111] J. Chen and X. Huo. Theoretical results on sparse representations of multiple-measurement vectors. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 54(12):4634 – 4643, Dec. 2006.
- [112] R.G. Baraniuk, V. Cevher, M.F. Duarte, and C. Hegde. Model-based compressive sensing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 56(4):1982 – 2001, Apr. 2010.
- [113] W. Chen, M. R. D. Rodrigues, and I.J. Wassell. Distributed compressive sensing reconstruction via common support discovery. In *Communications (ICC), 2011 IEEE International Conference on*, pages 1 – 5, Jun. 2011.
- [114] Jong Min Kim, Ok Kyun Lee, and Jong Chul Ye. Compressive music: Revisiting the link between compressive sensing and array signal processing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 58(1):278 – 301, jan. 2012.
- [115] Kiryung Lee, Y. Bresler, and M. Junge. Subspace methods for joint sparse recovery. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 58(6):3613–3641, 2012.
- [116] Jonathan Le Roux, Petros T. Boufounos, Kang Kang, and John R. Hershey. Source localization in reverberant environments using sparse optimization. In *Proceedings of the ICASSP 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, May 2013.
- [117] Zhaoshui He, Andrzej Cichocki, Rafal Zdunek, and Jianting Cao. Cg-m-focuss

- and its application to distributed compressed sensing. In Fuchun Sun, Jianwei Zhang, Ying Tan, Jinde Cao, and Wen Yu, editors, *Advances in Neural Networks - ISNN 2008*, volume 5263 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 237–245. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [118] Wenbo Zhang, Cong Ma, Weiliang Wang, Yu Liu, and Lin Zhang. Side information based orthogonal matching pursuit in distributed compressed sensing. In *Network Infrastructure and Digital Content, 2010 2nd IEEE International Conference on*, pages 80–84, Sept 2010.
- [119] T Murayama and P Davis. Statistical mechanics of sensing and communications: Insights and techniques. *Journal of Physics: Conference Series*, 95(1):012010, 2008.
- [120] K. Takeda, S. Uda, and Y. Kabashima. Analysis of cdma systems that are characterized by eigenvalue spectrum. *EPL (Europhysics Letters)*, 76(6):1193, 2006.
- [121] Ayaka Sakata and Yoshiyuki Kabashima. Statistical mechanics of dictionary learning. *EPL (Europhysics Letters)*, 103(2):28008, 2013.
- [122] Viktor Dotsenko. *Introduction to the replica theory of disordered statistical systems*. Cambridge University Press, 2005.
- [123] David L. Donoho, Iain Johnstone, and Andrea Montanari. Accurate prediction of phase transitions in compressed sensing via a connection to minimax denoising. *CoRR*, abs/1111.1041, 2011.
- [124] W. James and Charles Stein. Estimation with quadratic loss, 1961.
- [125] D.L. Donoho, A. Javanmard, and A. Montanari. Information-theoretically optimal compressed sensing via spatial coupling and approximate message passing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 59(11):7434–7464, Nov 2013.
- [126] J. Ziniel and P. Schniter. Efficient high-dimensional inference in the multiple measurement vector problem. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 61(2):340–354, Jan 2013.
- [127] Wei Deng, Wotao Yin, and Yin Zhang. Group sparse optimization by alternating direction method. In *Proc. SPIE*, volume 8858, pages 88580R–88580R–15, 2013.
- [128] Yoshiyuki Kabashima. A cdma multiuser detection algorithm on the basis of belief propagation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(43):11111, 2003.
- [129] Yingying Xu, Yoshiyuki Kabashima, and Lenka Zdeborova. Bayesian signal reconstruction for 1-bit compressed sensing. *arXiv preprint arXiv:1406.3782*,

- 2014.
- [130] David L. Donoho, Arian Maleki, and Andrea Montanari. Message-passing algorithms for compressed sensing. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(45):18914–18919, 2009.
 - [131] Justin Ziniel and Philip Schniter. amp mmv v1. <http://www2.ece.ohio-state.edu/zinielj/mmv/download.html>.
 - [132] Y. Kabashima and M. Vehkaperä. Signal recovery using expectation consistent approximation for linear observations. In *IEEE International Symposium on Information Theory*, pages 226–230, June 2014.
 - [133] D.L. Donoho, I. Johnstone, and A. Montanari. Accurate prediction of phase transitions in compressed sensing via a connection to minimax denoising. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 59(6):3396–3433, June 2013.
 - [134] M. Vehkaperä, S. Chatterjee, and M. Skoglund. Analysis of MMSE estimation for compressive sensing of block sparse signals. In *IEEE Information Theory Workshop*, pages 553–557, Oct. 2011.
 - [135] Toshihiro Tanizawa, Shlomo Havlin, and H. Eugene Stanley. Robustness of onionlike correlated networks against targeted attacks. *Phys. Rev. E*, 85:046109, Apr 2012.
 - [136] T. Hasegawa, K. Konno, and K. Nemoto. Robustness of correlated networks against propagating attacks. *The European Physical Journal B*, 85(8), 2012.
 - [137] Peter Grassberger. Percolation transitions in the survival of interdependent agents on multiplex networks, catastrophic cascades, and solid-on-solid surface growth. *Phys. Rev. E*, 91:062806, Jun 2015.
 - [138] HAO ZHANG, ZHI-HONG JIANG, HUI WANG, FEI XIE, and CHAO CHEN. Role of edges in complex network epidemiology. *International Journal of Modern Physics C*, 23(09):1250059, 2012.
 - [139] Chao Chen, Hao Zhang, Yin-Hua Wu, Wei-Qiang Feng, and Jian Zhang. Analysis and optimization of cross-immunity epidemic model on complex networks. *International Journal of Modern Physics C*, 26(04):1550039, 2015.
 - [140] K. Suto, H. Nishiyama, N. Kato, T. Nakachi, T. Fujii, and A. Takahara. Thup: A p2p network robust to churn and dos attack based on bimodal degree distribution. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 31(9):247–256, September 2013.
 - [141] Shunsuke Watanabe and Yoshiyuki Kabashima. Cavity-based robustness analysis of interdependent networks: Influences of intranetwork and internetwork

- degree-degree correlations. *Phys. Rev. E*, 89:012808, Jan 2014.
- [142] Junjie Ma, Xiaojun Yuan, and Li Ping. Turbo compressed sensing with partial dft sensing matrix. *Signal Processing Letters, IEEE*, 22(2):158–161, Feb 2015.