

論文 / 著書情報
Article / Book Information

| | |
|-------------------|---|
| 題目(和文) | ウィッテンゼータ関数とウィッテンL-関数について |
| Title(English) | On Witten zeta functions and Witten L-functions |
| 著者(和文) | 閔正媛 |
| Author(English) | Jeongwon Min |
| 出典(和文) | 学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第10051号, 授与年月日:2016年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:黒川 信重,内藤 聡,加藤 文元,水本 信一郎,鈴木 正俊 |
| Citation(English) | Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第10051号, Conferred date:2016/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,, |
| 学位種別(和文) | 博士論文 |
| Category(English) | Doctoral Thesis |
| 種別(和文) | 論文要旨 |
| Type(English) | Summary |

論文要旨

THESIS SUMMARY

| | | | | |
|--------------------------|-----|----|--|----------------------|
| 専攻 : Department of | 数学 | 専攻 | 申請学位 (専攻分野) : Academic Degree Requested | 博士 (理学) Doctor of |
| 学生氏名 : Student's Name | 関正媛 | | 指導教員 (主) : Academic Advisor(main) | 黒川信重 |
| | | | 指導教員 (副) : Academic Advisor(sub) | |

要旨 (和文 2000 字程度)

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters)

本稿ではウィッテンゼータ関数とウィッテン L -関数について考察する。ウィッテンゼータ関数はコンパクト位相群の表現に関する和として定義されるものであり、ウィッテン L -関数はウィッテンゼータ関数に正規化した指標を入れたものである。自明指標を入れたウィッテン L -関数はウィッテンゼータ関数と一致する。特に、リー群 $SU(2)$ に関数ウィッテンゼータ関数はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と一致する。

本稿は次のような構成となっている。前半の第1章から第3章までではリー群 $SU(2)$ と $SU(3)$ のウィッテンゼータ関数とウィッテン L -関数に関する研究成果について述べる。後半の第4章と第5章では有限群のウィッテンゼータ関数とウィッテン L -関数に関する研究成果を述べる。

まず、ウィッテンゼータ関数とウィッテン L -関数の零点と特殊値を調べる。リーマンゼータ関数は負の偶数を自明零点として持ち、正の偶数 m での値が π^m の有理数倍となるという性質を持つが、 $SU(2)$ に関するウィッテン L -関数の零点と特殊値についてもこれらの類似が言えることがわかる。さらに、指標を2つまで追加した $SU(2)$ のウィッテン L -関数は $s = -2$ を零点として持つが、3つ追加した場合は $s = -2$ での値が指標によって違ってくる。本稿ではそれらの性質について述べる。

また、 $SU(3)$ のウィッテンゼータ関数はすべての負の整数を零点として持つ (黒川・落合(2013))が、指標を1個だけ追加した $SU(3)$ のウィッテン L -関数も負の整数全体を零点として持つ。本稿ではこれを示す。

次に、 $SU(2)$ のウィッテン L -関数の零点と $SU(2)$ の共役類との関係について述べる。Jeffrey-Mare(2005)では $SU(2)$ の3つ以上の共役類の積からなる集合が単位元を含むための必要十分条件について述べている。特に指標を3つ入れたウィッテン L -関数の特殊値の分かれ目は、Jeffrey等が与えた条件とほぼ一致している。そこに着目し、本稿ではJeffrey等が与えた条件と $SU(2)$ のウィッテン L -関数の零点との関係を述べる。

さらに、 $SU(2)$ のウィッテン L -関数の平均値について述べる。Hardy-Littlewood(1918)はリーマンゼータ関数の虚部 t に関する平均値を考えた。しかし本稿では虚部に関する平均値ではなく、 $SU(2)$ の元 g によって与えられる指標に関する平均値について考える。特に本稿では、指標を1個

追加した $SU(2)$ のウィッテン L -関数の g に関する平均値について詳しく述べた。大体的場合、この平均値は $1, 0, \pm\infty$ となることがわかる。

有限群のウィッテンゼータ関数やウィッテン L -関数についても研究した。有限群の場合は、指標の直交性から指標を1個だけ追加したウィッテン L -関数の $s = -2$ の特殊値がわかる。その指標が非自明な場合は $s = -2$ を零点として持ち、自明な場合は $s = -2$ での特殊値と与えられた群の位数が一致する。そこで、有限群のウィッテン L -関数の $s = -2$ での零点の位数を計算した。まず、有限群のウィッテンゼータ関数やウィッテン L -関数の $s = -2$ での位数は、群の直積によっていくらかでも増やせることを示す。また、有限群の最も簡単な場合の一つである対称群のウィッテン L -関数に着目する。

最後に、共役ウィッテン L -関数と **unified** ウィッテンゼータ関数 $Z(s, w)$ を考える。今まで考えたウィッテンゼータ関数は、指標全体に関する和となっているので、指標表(**character table**)の「縦方向の和」となっている。それに対して、共役ウィッテン L -関数は、共役に関する和として定義されるものなので、指標表の「横方向の和」としてとらえられる。これらを全て足し合わせたものが **unified** ウィッテンゼータ関数となっている。

Solomon(1961)は指標表を全部足し合わせる指標表和(**character table sum**)を考えた。特に、彼はベキ零度が2以下の群の **character table sum** はちょうど与えられた群の位数と一致することを示した。指標和は **unified** ウィッテンゼータ関数の $(-1, 0)$ における特殊値となるが、本稿では、上で述べた条件にもう一つの条件を加えると、すべての複素数の組 (s, w) について **unified** ウィッテンゼータ関数の特殊値がちょうど与えられた群の位数と一致することを示した。また、2個以下の表現の次数を持つ有限群の **unified** ウィッテンゼータ関数も計算した。

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note : Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

(博士課程)
Doctoral Program

論文要旨

THESIS SUMMARY

専攻： 数学 専攻
Department of
学生氏名： 関正媛
Student's Name

申請学位(専攻分野)： 博士 (理学)
Academic Degree Requested Doctor of
指導教員(主)： 黒川信重
Academic Advisor(main)
指導教員(副)：
Academic Advisor(sub)

要旨 (英文 300 語程度)
Thesis Summary (approx.300 English Words)

In this thesis we study the Witten zeta functions and Witten L -functions. The Witten zeta function is defined by the summation over the unitary dual of a compact topological group. In addition, the Witten L -function is defined by adding the elements of the group in the Witten zeta function.

Firstly, we study zeros and special values of Witten zeta functions and Witten L -functions. We calculate zeros of the Witten zeta function and Witten L -functions for $SU(2)$. We see the algebraicity of Witten L -functions for $SU(2)$ at every even integer. Furthermore, we prove that the Witten L -function for $SU(3)$ with one character also has zeros at all negative integers.

Secondly, we refer to the relation between the product of conjugacy classes of $SU(2)$ and vanishing of the Witten L -functions for $SU(2)$. Jeffrey-Mare(2005) studied the set of the product of conjugacy classes of $SU(2)$ including the identity. We discuss the relation between the results of Jeffrey and Mare and zeros of the Witten L -functions for $SU(2)$.

Thirdly, we investigate the mean values of the Witten L -functions for $SU(2)$. Hardy-Littlewood(1918) studied mean values of the Riemann zeta function. It can be considered as a " t -aspect" mean value, where t is the imaginary part of s of $\zeta(s)$. Here, we consider another mean value, so-called " g -aspect" mean value, where g is an element of the group $SU(2)$.

Furthermore, we consider Witten zeta functions and Witten L -functions for some finite groups. We see that Witten L -functions for finite groups have a zero at $s = -2$ if its character is nontrivial by the orthogonality of irreducible characters. Here we focus on the order of the zero of Witten L -functions for finite groups at $s = -2$.

Finally, we introduce the unified Witten zeta function. We give a generalization of Solomon(1961)'s result on the character table sum of finite groups. Especially we study the unified Witten zeta functions for finite groups with two character degrees.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).