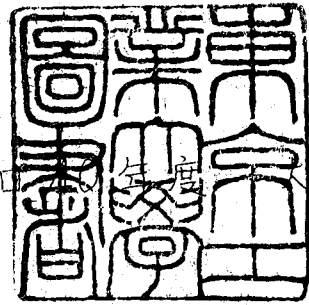


論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	応力波伝ぱに基づく衝撃応力の解析に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	松本浩之
Author(English)	
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第155号, 授与年月日:1966年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:中原 一郎
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第155号, Conferred date:1966/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



昭和35年度 大学院博士課程卒業論文

応力波伝ぱに基づく衝撃応力
の解析に関する研究

指導教官 中原一郎 教授

大博 3035 松本 浩之

215497

目 次

オ1章	緒 論	(1)
オ2章	応力波の一次元的伝ばに基づく縦衝撃の解析	(3)
2・1	緒 言	(3)
2・2	丸棒の縦圧縮衝撃によって生ずる応力とその伝ば	(7)
§ 2・2・1	衝撃応力の大きさ	(7)
§ 2・2・2	不連続面における弾性波の反射と透過	(8)
§ 2・2・3	衝撃面における接触状態の判定	(12)
§ 2・2・4	応力の時間的変動に関する図式解法	(15)
§ 2・2・5	実験結果と理論結果の比較	(21)
2・3	丸棒の縦引張衝撃によって生ずる応力とその伝ば	(22)
§ 2・3・1	衝撃応力とその伝ば	(22)
§ 2・3・2	実験結果と理論結果の比較	(25)
2・4	結 言	(27)
オ3章	応力関数による解析の基礎	(41)
3・1	緒 言	(41)
3・2	動弾性基礎方程式	(43)
3・3	応力関数の誘導 (三次元応力状態)	(45)
3・4	二次元応力状態における応力関数	(47)
3・5	応力関数と応力状態との関係	(49)
3・6	ラプラス変換による変位と応力の表示	(53)
3・7	結 言	(55)
オ4章	内外面に衝撃圧力をうける中空球	(71)
4・1	緒 言	(71)
4・2	球孔面に等分布衝撃圧力をうける無限体	(75)
4・3	等分布衝撃圧力をうける球	(77)
4・4	内外面に等分布ステップ状衝撃圧力をうける中空球	(81)
4・5	任意の変動圧力をうける中空球	(85)
4・6	結 言	(87)

第5章	内外面に衝撃圧力をうける円板および円筒	---	(102)
5.1	緒言	-----	(102)
5.2	円孔面に等分布衝撃圧力をうける無限板および無限体		(104)
5.3	側面に衝撃圧力をうける円板および円柱	---	(110)
5.4	内外面に等分布衝撃圧力をうける円板および円筒	--	(116)
5.5	任意変動圧力をうける円板および円筒	-----	(131)
5.6	結言	-----	(134)
第6章	内面に等分布衝撃圧力をうける組合円筒	-----	(136)
6.1	緒言	-----	(136)
6.2	等分布衝撃圧力をうける組合円筒の応力解析	---	(137)
6.3	ステップ状圧力によつて生ずる応力変動	-----	(143)
6.4	結言	-----	(153)
第7章	結論	-----	(155)

[参考文献] ----- (157)

[付録A] ----- (170)

a 三次元動弾性基礎方程式 ----- (170)

b ラプラス変換による波動方程式の変数分離解 ----- (174)

c 変位および応力のラプラス変換 ----- (176)

[付録B] ----- (188)

a ベッセル関数の漸近展開公式の有理化 ----- (188)

b 複素根をもつ振動数方程式 ----- (191)

c 実根をもつ振動数方程式 ----- (196)

d 実根をもつ超越方程式の漸近根の求め方 ----- (204)

記号

$\mathbf{U}(u_i, u_j, w_k)$	: 変位ベクトル	
u_i, u_j, w_k	: 変位成分	
	$(i, j, k) = (x, y, z)$	
	$= (r, \theta, z)$	
	$= (R, \theta, \varphi)$	
$\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$	: 垂直応力成分	
$\tau_{ij}, \tau_{jk}, \tau_{ki}$	: 剪断応力成分	
e	: 体積変化 ($= \text{div } \mathbf{U}$)	
$\Omega(\omega_i, \omega_j, \omega_k)$	: 回転ベクトル ($= (1/2) \cdot \text{rot } \mathbf{U}$)	
$\omega_i, \omega_j, \omega_k$	: 回転成分	
φ_0	: 応力関数	
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	: 応力関数	
ψ_1, ψ_2, ψ_3	: 応力関数	
χ	: 応力関数	
E	: 縦弾性係数	
G	: 横弾性係数	
ν	: ポアソン比	
κ	: 平面応力状態ならば $\kappa = 1 - \nu$	
	: 平面ひずみ状態ならば $\kappa = (1 - 2\nu) / (1 - \nu)$	
α	: 弾性縦波の反射率	
β	: 弾性縦波の透過率	
γ	: 単位体積当りの重量 (比重量)	
ρ	: 半径 (r, R) の無次元量	
t, τ	: 時間, 無次元化された時間	
g	: 重力加速度	
c	: 弾性波の伝ば速度	
c_0	: 細い棒中の縦波の伝ば速度	$c_0^2 = gE / \gamma$
c_1	: 無限体中の縦波の伝ば速度	$c_1^2 = \{2(1 - \nu) / (1 - 2\nu)\} \cdot gG / \gamma$
c_2	: 剪断波の伝ば速度	$c_2^2 = gG / \gamma$
c_3	: 薄い板中の縦波の伝ば速度	$c_3^2 = \{2 / (1 - \nu)\} \cdot gG / \gamma$

∇^2 : ラプラスの演算子

$\nabla_1^2, \nabla_2^2, \nabla_3^2$: $\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\nabla^2 - \frac{1}{c_3^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

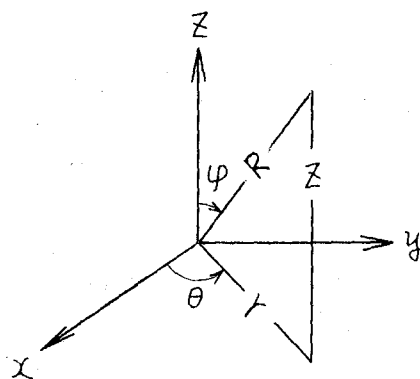
p : 時間 t に関するラプラス変換のパラメータ

α_i : $\alpha_i^2 = p^2 / c_i^2$ ($i = 1, 2, 3$)

$J_m(x), Y_m(x)$: 第1種, 第2種の m 次のベッセル関数

$I_m(x), K_m(x)$: 第1種, 第2種の m 次の変形ベッセル関数

$j_m(x), n_m(x)$: 第1種, 第2種の m 次の球ベッセル関数



座標系

第1章 緒 論

機械や構造物などの破壊はそれらに作用する荷重によって生ずる応力と材料の機械的性質に密接な関係があり、応力がその材料の許容応力をこえないように強度設計が行なわれることが多い。

しかし衝撃荷重のもとでは、材料の機械的諸性質の決定および応力解析は静荷重のもとにおけるよりも一般には困難であり、そのために衝撃荷重のもとで機械部品がしばしば破壊するにもかかわらず、応力解析はもちろん、材料の機械的性質も十分には明らかにされていない。そこで現状では強度設計上、衝撃破壊に対する十分な対策を立てることは難しいようである。

最近ようやく、高速の引張荷重あるいは圧縮荷重のもとにおける材料の諸性質、衝撃応力の測定や解析などに関する研究が活発になつてきたように思われる。

過去においては衝撃荷重が作用する場合には、動荷重係数あるいは安全率などによって衝撃荷重を静荷重に換算して衝撃応力を評価しようとする考え方が強度設計に取り入れられていた。しかし、これらの係数は経験によって定められたものであるから、その結果が実測値と矛盾する場合も多い。また静荷重による結果を基にして応力分布を仮定し、エネルギー保存の法則に基づいて衝撃応力を評価する方法もよく知られているけれども、この結果と実測値との比較については十分に検討されていない。これらに対して、物体に生ずる応力は物体内部粒子の変位速度と物体の形状が重要な因子になり、応力は波動として物体内を伝播し、形状あるいは材質の不連続面において応力の反射および透過が繰返され、それらを重ね合せたものが、特定の時間内に特定の点に生ずる応力になるという考え方がある。この考え方によれば、衝撃荷重のもとにおいては静荷重と同じような荷重を定義することに本質的な矛盾を生ずる。

本研究においては、まず衝撃荷重によって生ずる応力を明らかにするために、最も基本的な丸棒の縦圧縮および縦引張衝撃を対象として、一次元弾性波の反射と透過に基づく理論解析を行なった。そして複雑な断面変化のある丸棒の任意断面に生ずる応力の時間的変動を求めるために、この理論結果に基づいて簡単な図式解法を導いた。理論結果を実験的に確認する

ために、縦圧縮および縦引張衝撃について実験し、ひずみゲージによって衝撃応力を測定して、衝撃応力の伝ば現象ならびに外力と衝撃応力の絶対値との関係について検討した。

より複雑な衝撃荷重のもとでは、動弾性基礎方程式に基づいて衝撃応力を解析することが必要であろう。そのために三次元動弾性基礎方程式の解を応力関数によって一般的に表示し、ラプラス変換による衝撃応力問題の基本的な解析法について研究した。この解析法によって衝撃応力と弾性波の伝ば現象との関係を数値的に明らかにするためには振動数方程式の複素根を求めなければならない。しかし、この根を求める方法については十分に明らかにされていないために、衝撃応力の時間的変動が数値的に明らかにされた場合は少ない。そこで複素根の性質およびその求め方について研究して、衝撃応力を完全に解析し、衝撃応力の変動と固有振動との関係についても検討を加えた。

この解析法をまず内外面に衝撃圧力をうける円筒および中空球の問題に適用した。実際に円筒形、球形の構造物が衝撃圧力をうける場合は少なくないが、これらに生ずる衝撃応力は明らかにされていない。例えば各種の高圧容器、高圧配管系、ジェットエンジンやロケットエンジンの燃焼室等は静圧力だけでなく、大きな衝撃圧力をうけるためにこれらが破壊すれば大きな被害、人災を招くおそれがある。最近では、爆発成形、液中放電成形等の新しい加工技術の普及に伴って、型の内側に置かれた加工材の内面に作用する爆発圧力によって型に過大な衝撃応力を生じ、型の破壊を招くという問題も生じた。

高圧容器として耐蝕性あるいは耐磨耗性を考慮して、径の異なる同心円筒を組合せて作られた組合円筒が用いられる場合がある。このような異なる材質から作られた組合円筒に衝撃圧力が作用する場合には両円筒の境界面において応力波の反射と透過を伴い、応力状態は単一円筒の場合と異なるであろう。そこで本解析法を異なる二種の材料よりなる組合円筒に衝撃内圧が作用する場合に適用して、内外円筒の材質と最大応力との関係および応力変動と弾性波の伝ば現象との関係を求め、静圧力をうける場合と比較検討した。

第2章 応力波の一次元的伝ばに基づく縦衝撃の解析

2.1 緒言

通常、動的平衡状態においてもフックの法則が成立するものと仮定して、弾性体内に生ずる垂直応力はその作用方向における変位速度に比例すると考えられている。すなわち弾性棒の一端が急に v_0 の速度で変位すれば、その材料の縦弾性係数を E 、単位体積当りの重量を γ 、重力加速度を g として、その端面には

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} C v_0 \quad (2.1)$$

の大きさの応力を生じ、この応力は

$$C = C_0 = \sqrt{\frac{g E}{\gamma}} \quad (2.2)$$

の速度をもつ波として棒を伝ばする。そして固定端に達すると同符号の応力波として、自由端に達すると異符号の応力波として反射され、時間 t に任意の断面に生ずる応力はその時間にその断面に達した応力波を重ね合せたものとして表わされる。この結論は 1807 年 T. Young によって一次元の波動方程式をもとにして理論的にえられた。⁽⁷⁰⁾

その後 Saint-Venant および J. Boussinesq は剛体で衝撃された弾性棒に生ずる応力を解析して最大衝撃応力は v_0 に比例し、^{(1), (2)} 衝撃物体と弾性棒の重量比に關係することを示した。

これに対して材質および横断面積が異なる弾性棒の縦衝撃によって生ずる応力は C. Ramsauer (1909)⁽⁷⁾、W. Voigt (1915)⁽⁸⁾ によって解析されたが、当時は応力測定が発達していなかったために、理論結果を実験的に確認できなかった。応力測定の発達に伴い、これらに対する種々の実験的研究が行なわれるようになったのはかなり後である。

1940 年 R. Fanning & W. V. Bassett は炭素片ひずみゲージを用いて同径同質の丸棒の縦衝撃によって生ずる応力変動を測定し、この結果を J. S. Sears (1909)⁽⁶⁾ によって解析された衝撃端近傍について Hertz の接触理論を適用した一次元縦衝撃理論と比較して両者の傾向が定性的に一致することを確認した。⁽¹²⁾ また、E. A. Ripperger (1952) も全く同じような実験を行い、電気抵抗線ひずみゲージを用いて衝撃応力を測定して衝撃

応力の大きさおよび自由端あるいは固定端における反射は上述の法則に従うことを示し、さらに E・A・Ripperger & H・N・Abramson (1957) は不連続断面における弾性波の反射、透過の現象を実験的に確認している。^{(17),(18)} として 1960 年に高田氏は直径の異なる弾性棒の縦衝撃に Sears の解法を適用すれば、衝撃応力は衝撃速度に比例し、衝撃物体の重量に關係することを示し、抵抗線ひずみゲージによる測定結果と比較している。⁽²¹⁾⁽²⁴⁾

一方、動的弾性技術の発達に伴い、光弾性実験による応力波の伝播現象の研究も多くの人々によって行なわれた。1955 年 H・Schwieger は固定端の状態を実験的に再現するために、光弾性材料を鋼ブロックに固定すれば、理論結果と実験結果が定性的に一致することを示し、さらに同年に Schwieger は一端が鋼ブロックに固定され、他端を鋼棒で打撃された光弾性材料に生ずる応力は Saint-Venant らの理論結果にその傾向が一致することを確認している。⁽⁵⁹⁾⁽⁵⁸⁾

これらの実験によって一次元の弾性波の伝播に關する理論結果を定性的に確認できた。しかし上述の理論結果はすべて一次元の縦振動方程式の解を基にしているから有限な直径をもつ棒を伝播する弾性波に対する厳密な弾性理論解ではない。一次元の縦振動方程式の解が厳密な弾性理論解に一致するのは、(i) 無限に細い棒の縦衝撃、(ii) 半無限体の縦衝撃、(iii) 無限に薄い半無限板の縦衝撃、の場合に限られ、(2・1) 式および (2・2) 式に示された結果は (i) の場合にのみ正しい。(ii) の場合には生ずる応力は (2・1) 式に等しく、縦波の伝播速度 C はポアソン比を ν として

$$C = C_1 = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}} \sqrt{\frac{gE}{\delta}} \quad (2.3)$$

であり、(iii) の場合に生ずる応力は (2・1) 式に等しいけれども、 C は

$$C = C_3 = \sqrt{\frac{1}{1-\nu^2}} \sqrt{\frac{gE}{\delta}} \quad (2.4)$$

で与えられる。

有限な直径をもつ丸棒を伝播する応力を知るためには三次元弾性基礎方程式の解を求めなければならないが、これはかなり厄介な問題であり、断面一様な丸棒の縦衝撃についてさえも現在なお厳密な数値結果が求められていない。最近、この問題を解くための努力が若干の人々によって行なわ

れた。すなわち R・Skalak (1957)⁽³³⁾ は同一直径の半無限長弾性棒の縦衝撃を、R・Folk⁽³⁵⁾ らは半無限長弾性棒の端面の半径方向変位を拘束し、一様な圧力を加えた場合を、いずれもフーリエ・ラプラス変換によって解析し、解を積分変換の形で表わしているがその逆変換および十分な数値結果が示されていない。また、1963年 O・E・Jones らによって長方形断面棒の縦衝撃を対象にして同様な方法で二次元応力解析がなされたが^{(41), (42)} 厳密解はえられていない。しかし、Skalak および Folk らは衝撃後長時間経過した状態に対する近似解を数値積分して、波面近傍は散乱によって応力が振動するが、進行波面から十分に離れた位置に生じている応力は一次元縦振動方程式から導かれることを示し、Folk らはその結果がチタン酸バリウムひずみゲージによる測定結果とよく一致することを示している。

棒の縦衝撃による厳密解は容易に求められないために、Skalak らの漸近解に基づいて弾性波の一次元的伝ば現象を仮定して複雑な形状の丸棒の縦圧縮衝撃に関する広範な研究が1959年 E・C・Fischer によって行われた。⁽²³⁾ 彼は棒の表面上の任意の点における応力の時間的変動を De Juhasz の Graphodynamical Method⁽¹⁶⁾ を用いて求め、直径が異なる弾性丸棒の衝突によって生ずる応力を抵抗線ひずみゲージによる測定結果と比較した。しかし Fischer の用いた図式解法は複雑であるために、実際の衝撃応力を求める場合には不便であり、衝撃応力の絶対値については理論結果と測定結果の精しい比較はされていない。

材料の衝撃破損を対象にして衝撃応力の大きさを知るために弾性波の伝ば現象を定量的に確認する必要があるにもかかわらず、これが十分になされていない原因は測定技術の問題にあった。抵抗線ひずみゲージによる応力測定法は現在では著しく発達して、この方法によれば、静的応力および動的応力は容易に測定できるようになったけれども、非常に周波数の高い衝撃応力の測定においては現在においても測定精度の点で種々の問題がある。この種のゲージによって衝撃応力を測定する場合には、ひずみゲージによるゲージの抵抗変化が小さいために通常のブラウン管オシロスコープを作動させるためには前置増幅器を必要とし、そのために雑音が混入され易く正確な波形を記録することは技術上非常に難しい。また J・M・Kraut⁽²⁰⁾ (1954) が指摘したように、磁性材料を実験棒として用いれば、抵抗線ひずみゲージによる測定結果に Villari 効果が雑音として含まれる

ことがある。そして実際に、Ripperger, Fischer は波形の記録写真を示していない。

これに対し動的弾性実験は波動の伝ばする様子を調べるのに適しているが、技術的な面で高い測定精度は望めない。

最近、五十嵐氏は金属線ひずみゲージに比べて抵抗値およびゲージ率はるかに大きい Ge ひずみゲージ^{(47)~(50)}を用いることによって前置増幅器なしにブラウン管オシログラフを作動させ、正確な応力波が容易に測定できることを示した。^{(52), (53)}

本研究においては弾性波の伝ばに関する初等理論を基にして、まず縦圧縮衝撃を対象として複雑な形状の丸棒に生ずる衝撃応力を求めるために、エネルギー保存則の仮定のもとに、(a) 衝撃によって発生する応力の大きさ、(b) 不連続面における応力波の反射、透過および (c) 衝撃面における接触状態の判別条件を解析した。そして横断面および材質に不連続部をもつ丸棒の任意断面に生ずる衝撃応力の時間的変動を簡単に求めるために (a), (b), (c) の結果を基にした簡便な図式解法を導き、衝撃応力の大きさおよびその時間的変動について Ge ひずみゲージによって測定された実験値と理論値を比較した。

縦圧縮衝撃におけると同じような考え方は縦引張衝撃問題にも適用できるはずである。しかし、衝撃問題においては不連続断面における弾性波の反射と透過を伴うために、静的問題におけるように全く同一の結果にはならない。しかし、著者の知るかぎりにおいては、過去において弾性波の伝ば現象を考慮した引張衝撃問題はほとんど研究されていない。

そこで本研究においては、縦圧縮衝撃の場合における考え方や解法をより複雑な縦引張衝撃問題に適用し、不連続面における弾性波の反射と透過の現象を仮定して衝撃応力を求めるための図式解法を導いて、Ge ひずみゲージによる測定結果と比較した。

2.2 丸棒の縦圧縮衝撃によって生ずる応力とその伝ば⁽²⁵⁾

§ 2.2.1 衝撃応力の大きさ

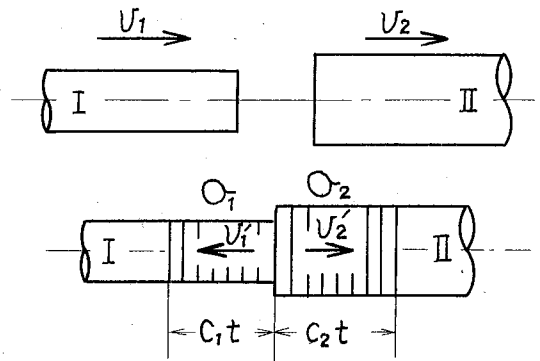
横断面積が一様な弾性棒の一端を直径あるいは材質が異なる弾性丸棒によって衝撃した場合には，両棒 I，II の横断面積，長さおよび単位体積の重量をそれぞれ $A_1, A_2; l_1, l_2; \gamma_1, \gamma_2$ ，衝撃前の速度を U_1, U_2 とすれば，衝突前における両棒の運動エネルギーの和 U_1 は

$$U_1 = \frac{1}{2} A_1 l_1 \frac{\gamma_1}{g} U_1^2 + \frac{1}{2} A_2 l_2 \frac{\gamma_2}{g} U_2^2 \quad (2.5)$$

によって表わされる。衝撃後にはオ 2.7 図に示されるように，衝撃面に生じた応力 σ_1, σ_2 はそれぞれ C_1 ，

C_2 の速度で棒を伝ばし，時間 t の後には $C_1 t$ ， $C_2 t$ の領域における変位速度

は棒の重心に対してそれぞれ U'_1, U'_2 になるから，これらの領域のエネルギー U'_2 はひずみエネルギーと運動エネルギーとからなり，両棒の縦弾性係数をそれぞれ E_1, E_2 とすれば次のよう



オ 2.7 図 衝撃応力の大きさ

に表わされる。

$$\begin{aligned} U'_2 = & \frac{1}{2} A_1 C_1 t \frac{\gamma_1}{g} (U_1 - U'_1)^2 + \frac{1}{2} A_1 C_1 t \frac{\sigma_1^2}{E_1} \\ & + \frac{1}{2} A_2 C_2 t \frac{\gamma_2}{g} (U_2 + U'_2)^2 + \frac{1}{2} A_2 C_2 t \frac{\sigma_2^2}{E_2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

弾性波が伝ばしていない領域には運動エネルギー U''_2 のみが存在し

$$U''_2 = \frac{1}{2} A_1 (l_1 - C_1 t) \frac{\gamma_1}{g} U_1^2 + \frac{1}{2} A_2 (l_2 - C_2 t) \frac{\gamma_2}{g} U_2^2 \quad (2.7)$$

である。

そこで衝撃によってエネルギーの損失がなく，衝撃中は接触面の変位速度が等しいと仮定すれば $U_1 = U'_2 + U''_2$ ， $U_1 - U'_1 = U_2 + U'_2$ であるから (2.5)，(2.6)，(2.7) 式より棒 I，II に生ずる応力 σ_1, σ_2 は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{\sigma_1 c_1}{g} U_1' = \frac{\sigma_1 c_1}{g} \frac{A_2 \sigma_2 c_2}{A_1 \sigma_1 c_1 + A_2 \sigma_2 c_2} (U_1 - U_2) \\
 &= \frac{A_2 \sqrt{E_2} \sigma_2}{A_1 \sqrt{E_1} \sigma_1 + A_2 \sqrt{E_2} \sigma_2} \sqrt{\frac{E_1 \sigma_1}{g}} (U_1 - U_2) \\
 \sigma_2 &= \frac{\sigma_2 c_2}{g} U_2' = \frac{\sigma_2 c_2}{g} \frac{A_1 \sigma_1 c_1}{A_1 \sigma_1 c_1 + A_2 \sigma_2 c_2} (U_1 - U_2) \\
 &= \frac{A_1 \sqrt{E_1} \sigma_1}{A_1 \sqrt{E_1} \sigma_1 + A_2 \sqrt{E_2} \sigma_2} \sqrt{\frac{E_2 \sigma_2}{g}} (U_1 - U_2)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

(2.8) 式から衝撃面に生ずる応力は静荷重をうけた場合と同様に $A_1 \sigma_1 = A_2 \sigma_2$ の条件を満足していることがわかる。

§ 2.2.2 不連続面における弾性波の反射と透過

弾性波の波面が材質あるいは断面積が変化した不連続面に到達すると、図 2.2 に示されるように、その一部 $\alpha \sigma$ は反射され、残りの $\beta \sigma$ はその面を透過するものと仮定する。

いま不連続面をはさむ両領域の横断面積、縦弾性係数および単位体積の重量をそれぞれ $A_1, A_2; E_1, E_2; \sigma_1, \sigma_2$ とすれば、弾性波 σ の波面が不連続面に到達したとき、長さ $c_1 t$ の領域に貯えられていたエネルギー $U_1 =$



図 2.2 不連続面における
反射率と透過率

$\sigma^2 A_1 c_1 t / E_1$ は t 時間後に反射波および透過波のエネルギーの和 $U_2 = (\alpha \sigma)^2 A_1 c_1 t / E_1 + (\beta \sigma)^2 A_2 c_2 t / E_2$ に変化するから、 $U_1 = U_2$ とおけば

$$1 - \alpha^2 = \frac{A_2 \sigma_1 c_1}{A_1 \sigma_2 c_2} \beta^2 \tag{2.9}$$

をうる。また、不連続面において両領域に生ずる応力はそれぞれ $\sigma_1 = (\sigma + \alpha \sigma)$ 、 $\sigma_2 = \beta \sigma$ によって表わされ、この面における変位速度は両領域において等しいから

$$\frac{g}{\sigma_1 c_1} (\sigma - \alpha \sigma) = \frac{g}{\sigma_2 c_2} \beta \sigma \tag{2.10}$$

である。そこで (2.9), (2.10) 式より α, β を求めれば

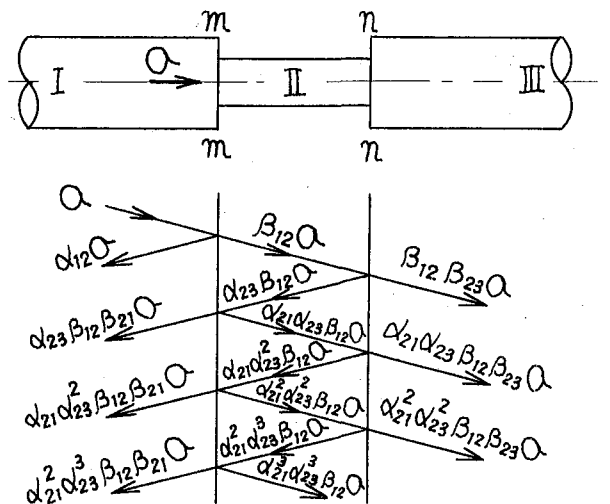
$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{A_2 \delta_2 C_2 - A_1 \delta_1 C_1}{A_2 \delta_2 C_2 + A_1 \delta_1 C_1} = \frac{A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} - A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}}{A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}} \\ \beta &= \frac{2 A_1 \delta_2 C_2}{A_2 \delta_2 C_2 + A_1 \delta_1 C_1} = \frac{2 A_1 \sqrt{E_2 \delta_2}}{A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}} \end{aligned} \right. \quad (2.11)$$

をうる。

そこで弾性波が不連続面を通過する場合にも，不連続面において $A_1(\sigma + \alpha\sigma) = A_2\beta\sigma$ すなわち $A_1\sigma_1 = A_2\sigma_2$ の条件が満足されていることがわかる。

2つの不連続面を通過する弾性波によって生ずる応力変動は同様な考え方によって求めることができる。

いま，オ2.3図において，領域I，II，IIIにおける横断面積，縦弾性係数および単位体積の重量をそれぞれ $A_1, A_2, A_3; E_1, E_2, E_3; \delta_1, \delta_2, \delta_3$ とすれば領域Iを伝播した弾性波の波面が不連続面 mm に到達すれば，その一部 $\alpha_{12}\sigma$ は領域Iに反射され，のこりの $\beta_{12}\sigma$ は領域IIに透過し， nn 断面に到達すれば，その一部 $\alpha_{23}\beta_{12}\sigma$ は領域IIに反射され，のこりの $\beta_{12}\beta_{23}\sigma$ は領域IIIに透過する。



オ2.3図 2つの不連続面を通過する弾性波

そして領域IIを伝播した反射波

$\alpha_{23}\beta_{12}\sigma$ が mm 断面に到達すれば， $\alpha_{21}\alpha_{23}\beta_{12}\sigma$ は領域IIに反射され，のこりの $\alpha_{23}\beta_{12}\beta_{21}\sigma$ は領域Iに透過する。

そこで各領域の応力はこれら反射波および透過波のために時間的に変動し，時間が十分に経過すれば，各領域における応力 $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ は次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_I &= \sigma + \alpha_{12}\sigma + \alpha_{23}\beta_{12}\beta_{21}\sigma \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{21}\alpha_{23})^n \\ \sigma_{II} &= \beta_{12}\sigma \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{21}\alpha_{23})^n + \beta_{12}\alpha_{23}\sigma \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{21}\alpha_{23})^n \end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} O_{III} &= \beta_{12} \beta_{23} O \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{21} \alpha_{23})^n \end{aligned} \right.$$

ここで

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{12} &= -\alpha_{21} = \frac{A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} - A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}}{A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}} \\ \alpha_{23} &= \frac{A_3 \sqrt{E_3 \delta_3} - A_2 \sqrt{E_2 \delta_2}}{A_3 \sqrt{E_3 \delta_3} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2}} \\ 1 + \alpha_{12} &= \frac{A_2}{A_1} \beta_{12} \\ 1 + \alpha_{21} &= \frac{A_1}{A_2} \beta_{21} \\ 1 + \alpha_{23} &= \frac{A_3}{A_2} \beta_{23} \end{aligned} \right. \quad (2.13)$$

であり，反射率 α の絶対値は1より小さいから (2.12) 式は収束し

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{O_I}{O} &= \frac{A_3}{A_1} \frac{\beta_{12} \beta_{23}}{1 - \alpha_{21} \alpha_{23}} \\ \frac{O_{II}}{O} &= \frac{A_3}{A_2} \frac{\beta_{12} \beta_{23}}{1 - \alpha_{21} \alpha_{23}} \\ \frac{O_{III}}{O} &= \frac{\beta_{12} \beta_{23}}{1 - \alpha_{21} \alpha_{23}} \end{aligned} \right.$$

そして

$$\frac{\beta_{12} \beta_{23}}{1 - \alpha_{21} \alpha_{23}} = \frac{A_1}{A_3} \frac{2 A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}}$$

の関係があるから，結局 (2.12) 式は

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{O_I}{O} &= \frac{2 A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \\ \frac{O_{II}}{O} &= \frac{A_1}{A_2} \frac{2 A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \\ \frac{O_{III}}{O} &= \frac{A_1}{A_3} \frac{2 A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \end{aligned} \right.$$

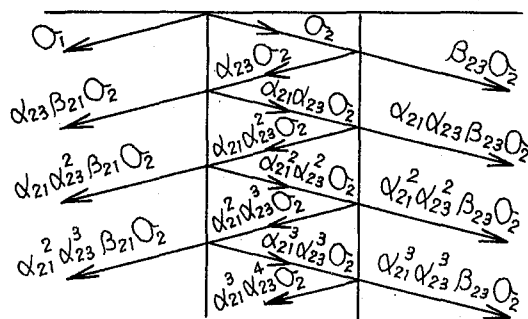
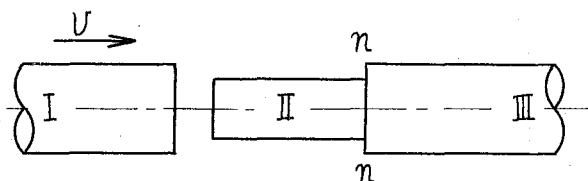
になる。

この結果，領域I，IIIに生ずる応力の最終値は領域IIの横断面積，材質に依存せず，IとIIIが直接に接触している場合の結果に一致する。そして

$A_1 \sigma_I = A_2 \sigma_{II} = A_3 \sigma_{III}$ の関係が成立するから、この場合においても不連続面における力の釣合条件が満足されることがわかる。

オ2.4図のように、棒Ⅰが U の速度で棒Ⅱを介して棒Ⅲを打撃すれば、棒Ⅰ、Ⅱの衝撃面には次式で与えられる応力

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{A_2 \sqrt{E_2 \delta_2}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2}} \sqrt{\frac{E_1 \delta_1}{\delta}} U \\ \sigma_2 = \frac{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2}} \sqrt{\frac{E_2 \delta_2}{\delta}} U \end{cases} \quad (2.14)$$



が生じ、応力 σ_2 は衝撃面および不連続面 nn において反射、透過をくり返すために、各棒の応力は時間的に変動し、衝撃後時間が十分に経過した後においては、各棒の応力は

オ2.4図 異質弾性体を介して打撃した場合に生ずる応力

$$\begin{cases} \sigma_I = \sigma_1 + \alpha_{23} \beta_{21} \sigma_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{21} \alpha_{23})^n \\ \sigma_{II} = \sigma_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{21} \alpha_{23})^n + \alpha_{23} \sigma_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{21} \alpha_{23})^n \\ \sigma_{III} = \beta_{23} \sigma_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{21} \alpha_{23})^n \end{cases} \quad (2.15)$$

になる。(2.13), (2.14)式を用いて(2.15)式を書き直せば

$$\begin{cases} \sigma_I = \frac{A_3}{A_1} \frac{\beta_{23}}{1 - \alpha_{21} \alpha_{23}} \sigma_2, & \sigma_{II} = \frac{A_3}{A_2} \frac{\beta_{23}}{1 - \alpha_{21} \alpha_{23}} \sigma_2 \\ \sigma_{III} = \frac{\beta_{23}}{1 - \alpha_{21} \alpha_{23}} \sigma_2 \end{cases}$$

そして

$$\frac{\beta_{23}}{1 - \alpha_{21} \alpha_{23}} \sigma_2 = \frac{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \sqrt{\frac{E_3 \delta_3}{\delta}} U$$

の関係があるから、結局(2.15)式は次のように表わせる。

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_I &= \frac{A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \sqrt{\frac{E_1 \delta_1}{g}} v \\ \sigma_{II} &= \frac{A_3}{A_2} \frac{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \sqrt{\frac{E_3 \delta_3}{g}} v \\ \sigma_{III} &= \frac{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \sqrt{\frac{E_3 \delta_3}{g}} v \end{aligned} \right.$$

この結果， σ_I ， σ_{III} は棒Ⅱの横断面積および材質に無関係になり，棒Ⅰが直接に棒Ⅲを打撃した結果に一致する。

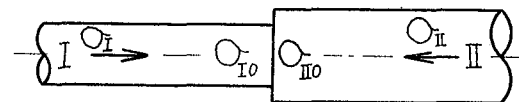
§ 2.2.3 衝撃面における接触状態の判定

静的平衡状態にある2つの物体の接触面は圧縮応力状態あるいは応力0の状態にはなりうるけれども，引張応力状態にはなり得ないと考えられる。そこで動的な接触状態においても静的な場合と同様に，接触面は引張応力状態にならないものと仮定すれば，接触面に任意の弾性波の入射後における接触状態を知ることができる。

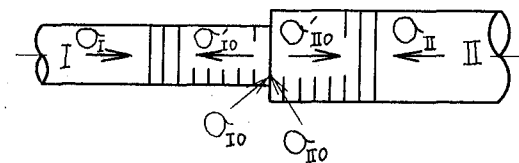
さて，図2.5図のように，棒Ⅰ，Ⅱが衝突した場合に衝撃面に生じた応力 σ_I ， σ_{II} は各棒を伝播して他端で反射され，再び衝撃面にもどってくる。この反射波を σ_{I0} ， σ_{II0} とする。いま反射波が到達する直前に衝撃面をはさむ各領域に生じていた応力を σ_{I0} ， σ_{II0} とすれば，衝撃面に到達した弾性波 σ_I ， σ_{II} は(2.11)式で示された割合で反射あるいは透過されるから，反射波が衝撃面に到達した後に衝撃面をはさむ各領域に新たに生ずる応力 σ'_{I0} ， σ'_{II0} は

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma'_{I0} &= \alpha_1 \sigma_I + \beta_2 \sigma_{II} \\ \sigma'_{II0} &= \beta_1 \sigma_I + \alpha_2 \sigma_{II} \end{aligned} \right. \quad (2.16)$$

になる。ただし

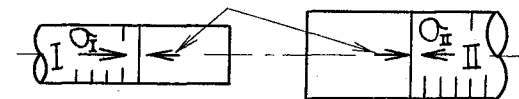


(a)



(b) $\sigma_D \leq 0$

除荷の弾性波



(c) $\sigma_D > 0$

図2.5図 接触状態の判定

$$(\sigma_D = \sigma_{I0} + (1 + \alpha_1) \sigma_I + \beta_2 \sigma_{II})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} - A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}}{A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_1 \sqrt{E_1 \delta_1}}, \quad 1 - \alpha_1 = \frac{\sqrt{E_1 \delta_1}}{\sqrt{E_2 \delta_2}} \beta_1 \\ \alpha_2 = -\alpha_1, \quad 1 - \alpha_2 = \frac{\sqrt{E_2 \delta_2}}{\sqrt{E_1 \delta_1}} \beta_2 \end{array} \right.$$

結局，反射波 O_I ， O_{II} が衝撃面に到達した後は，棒 I の衝撃面の応力 O_D は次のようになる。

$$O_D = O_{I0} + O'_{I0} + O_I = O_{I0} + (1 + \alpha_1) O_I + \beta_2 O_{II}$$

もしも $O_D > 0$ ならば，衝撃面圧力は負になるから，実際には入射波の一部 O'_I ， O'_{II} だけが (2.11) 式の割合で反射，透過されたとき衝撃面は自由端と同じ状態になり，このときに棒 I の衝撃面に生ずる応力を O'_D とすれば

$$O'_D = O_{I0} + (1 + \alpha_1) O'_I + \beta_2 O'_{II} = 0 \quad (2.17)$$

になる。そしてのこりの応力 $(O_I - O'_I)$ ， $(O_{II} - O'_{II})$ は衝撃面で全反射される。

そこで弾性波 O_I ， O_{II} が衝撃面に到達することによってこの面をはさむ各領域に新たに生ずる応力 O'_{I0} ， O'_{II0} は次式のようにになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} O'_{I0} = \alpha_1 O'_I + \beta_2 O'_{II} - (O_I - O'_I) \\ \quad = (1 + \alpha_1) O'_I + \beta_2 O'_{II} - O_I \\ O'_{II0} = \beta_1 O'_I + \alpha_2 O'_{II} - (O_{II} - O'_{II}) \\ \quad = \beta_1 O'_I + (1 + \alpha_2) O'_{II} - O_{II} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

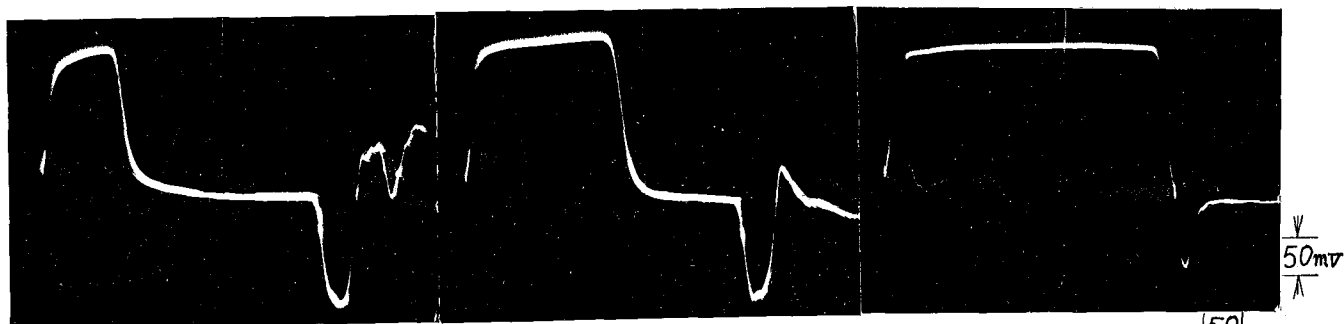
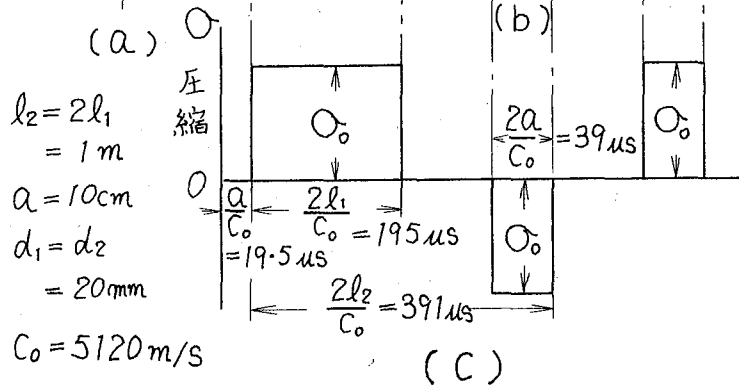
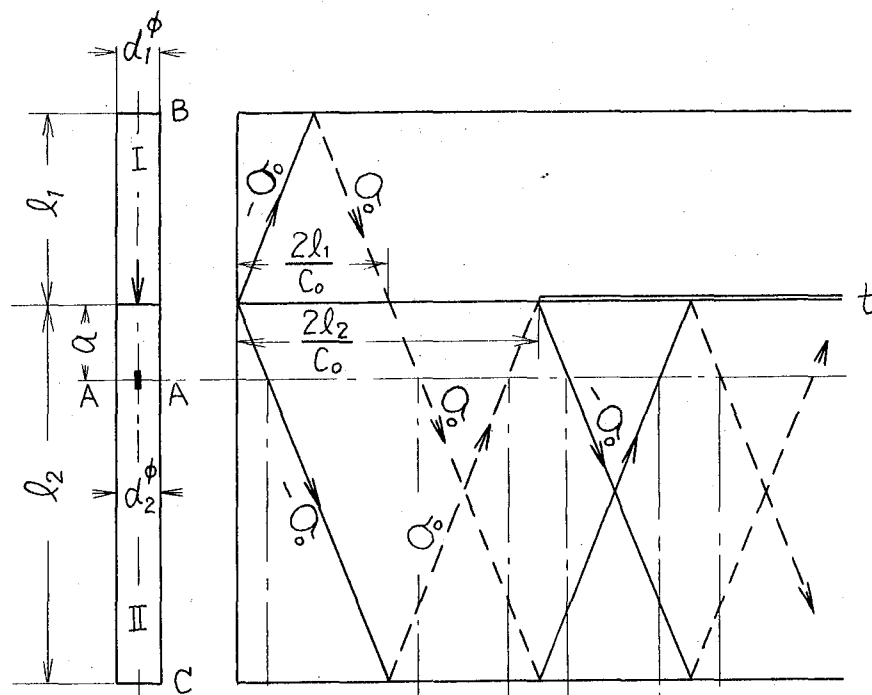
(2.17) 式を (2.18) 式に代入すれば

$$\left\{ \begin{array}{l} O'_{I0} = -O_I - O_{I0} \\ O'_{II0} = -O_{II} - \frac{A_1}{A_2} O_{I0} \end{array} \right.$$

になる。

§ 2.2.4 応力の時間的変動に關する図式解法

§ 2.2.1 に示された，衝突の瞬間に衝撃面に生ずる応力の大きさ，
§ 2.2.2 に示された，不連続断面における弾性波の反射と透過の割合，および § 2.2.3 に示された衝撃面における接触状態の判定条件，の 3 つを用いれば，オ 2.6 図 (a) のように棒 I，II の衝突によって任意断面に生ず



$l_1 = 25\text{ cm}$

$l_1 = 50\text{ cm}$

$l_1 = 95\text{ cm}$

(d) $v_0 = 7.0\text{ m/s}$ ($h = 2.5\text{ m}$)

※2.6図 同径同質の丸棒の縦衝撃によって生ずる応力
 (棒IIの下端が自由端の場合)

る応力の時間的変動を知ることができる。

オ2.6図(b)は静止している弾性丸棒Ⅱに、これと同じ材質および直径をもつ弾性丸棒Ⅰが速度 v_0 で縦方向に衝突した場合に、棒Ⅰ、Ⅱを弾性波が伝ばする様子を示したもので、縦軸は棒Ⅰ、Ⅱの横断面の位置、横軸は時間軸であり、実線は圧縮応力を、点線は引張応力を示している。

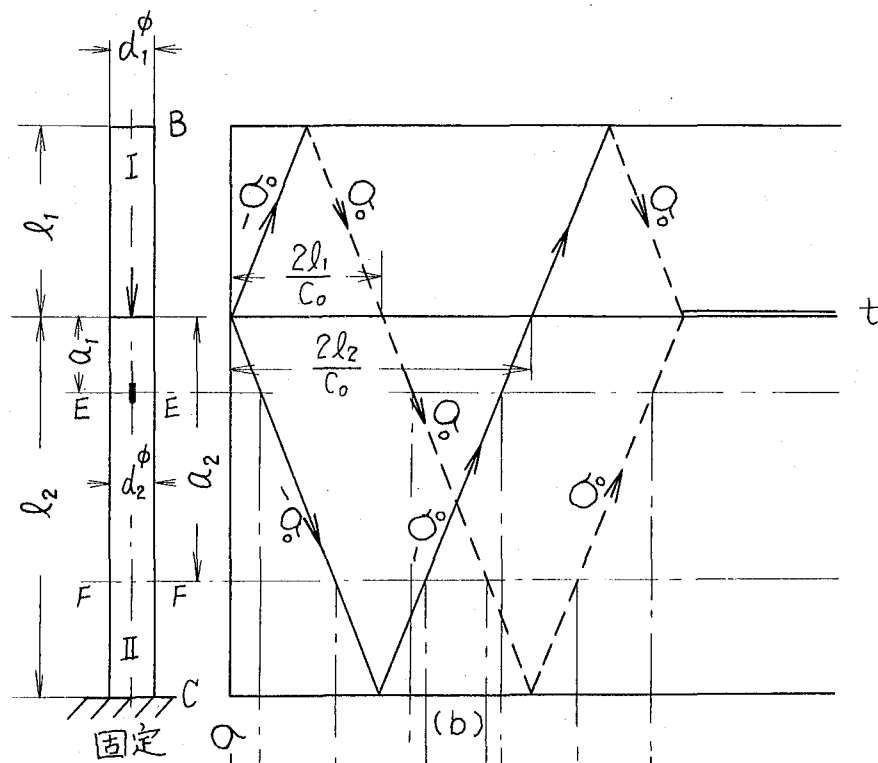
衝突の瞬間に衝撃面には $\sigma_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E\delta}{g}} v_0$ の圧縮応力を生じ、この応力は棒Ⅰ、Ⅱを伝ばして $t = l_1/c_0$ 、 $t = l_2/c_0$ の時間後にそれぞれの棒の他端B、Cに達し、B、Cが自由端ならば絶対値が等しい引張応力として反射される。

もしも $2l_1 < l_2$ ならば、棒Ⅰの自由端Bにおいて反射された引張応力は棒Ⅰを伝ばして、そこに生じていた圧縮応力を消失しながら衝撃端に向かって進み、 $2l_1/c_0$ 時間後に衝撃面に達し、さらに衝撃面を通過して棒Ⅱを伝ばし、そこに生じていた圧縮応力を消失しながらC端に向かって進む。したがって衝突後 $2l_1/c_0$ 時間以上経過すれば、見掛上は衝撃面における圧縮応力の発生はやむ。そして $t=0$ において棒Ⅱの衝撃面に発生した圧縮応力を先端とし、 $2l_1/c_0$ 時間において棒Ⅱの衝撃面に発生した圧縮応力を後端とする応力波のみが存在し、その先端が自由端Cに達すれば引張応力として反射され、衝撃面に達すればこの瞬間に棒Ⅰと棒Ⅱは離れ衝撃面は自由端になるから圧縮応力として反射され、 $2l_1$ の長さの応力波が $2l_2/c_0$ を周期として棒Ⅱを往復することになる。

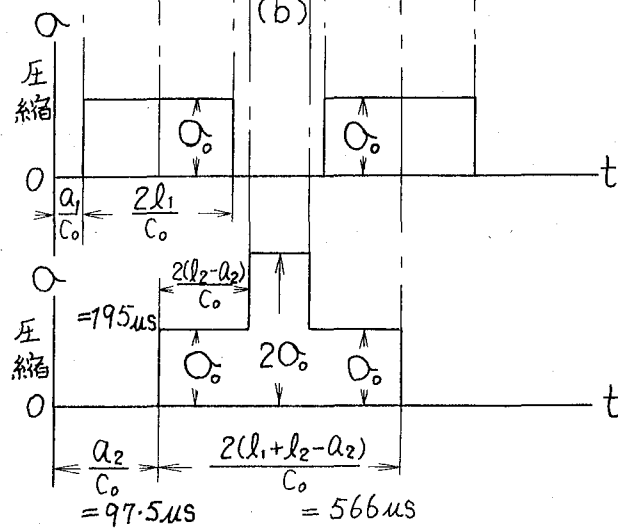
したがって衝撃面から α だけ離れた棒ⅡのAA面に生ずる応力の時間的変動はオ2.6図(c)のように表わされる。

オ2.7図(a)のように棒Ⅱの下端が固定端ならば、この面においては弾性波は同符号の応力として反射されるために、時間 $t = l_2/c_0$ に固定端で反射された圧縮応力は $t = 2l_2/c_0$ 時間後に衝撃面に達し、この面を通過してB端に向かって伝ばする。そしてオ2.7図(b)に示されるように、衝撃後 $t = 2(l_1 + l_2)/c_0$ 時間後には、B端およびC端から反射された引張応力が同時に衝撃端に到達し、この瞬間に両棒は離れ、両棒中にはこの時間以後には弾性波は存在しないことになる。

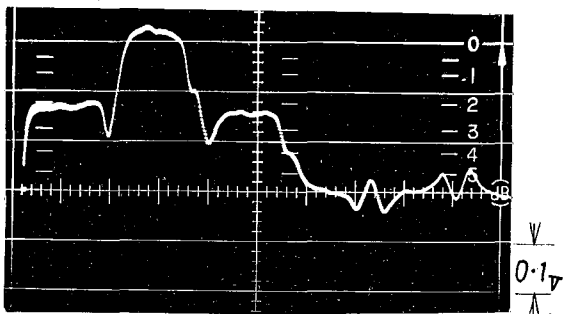
したがって衝撃端からそれぞれ α_1 、 α_2 だけ離れたEE断面およびFF断面に生ずる応力の時間的変動はオ2.7図(c)のようになり、棒Ⅱの最大応力は $2\sigma_0$ になる。



$l_1 = 95\text{cm}$
 $l_2 = 1\text{m}$
 $a_2 = 50\text{cm}$
 $d_1 = d_2$
 $= 20\text{mm}$
 $C_0 = 5120\text{m/s}$



(C)



(d) $l_1 = 95\text{cm}$, $v_0 = 5.4\text{m/s}$ ($h = 1.5\text{m}$)

※2.7 図

同径同質の丸棒の縦
衝撃によって生ずる
応力 (棒Ⅱの下端が
固定端の場合)

オ2・8図 (a) のように棒Ⅱに、これと同じ材質で直径が異なる弾性棒Ⅰが衝突する場合には、衝撃面には、両棒の横断面積を A_1, A_2 として、絶対値が

$$\sigma_1 = \frac{2A_2}{A_1 + A_2} \sigma_0, \quad \sigma_2 = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} \sigma_0 \quad (2.19)$$

で与えられる圧縮応力 $-\sigma_1, -\sigma_2$ が発生し、それぞれ等しい速度 c_0 で B, C 端に向って伝播する。そして棒Ⅰを伝播して $t = 2l_1/c_0$ 時間後に衝撃面に達した引張応力 σ_1 の一部 $\alpha_1 \sigma_1$ はこの面で反射され、のこりの $\beta_1 \sigma_1$ はこの面を透過して棒Ⅱを C 端に向って伝播する。ここで (2.11) 式から

$$\alpha_1 = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1}, \quad \beta_1 = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} \quad (2.20)$$

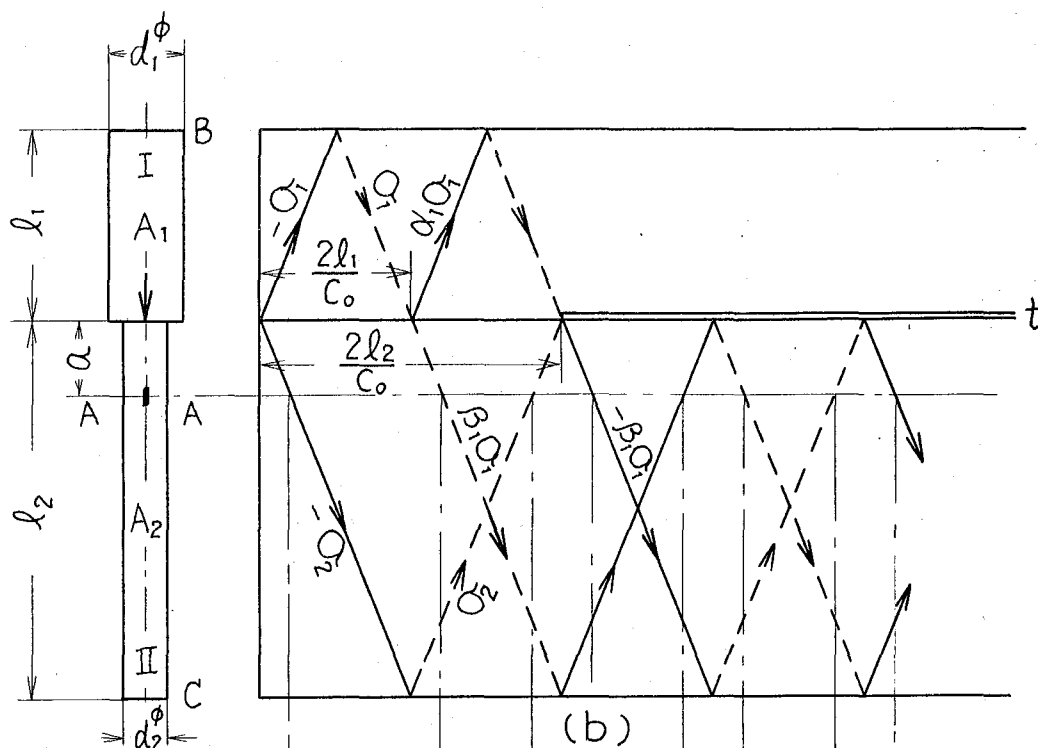
である。 $l_2 = 2l_1$ ならば、 $t = 2l_2/c_0$ 時間後に B 端で反射された応力 $-\alpha_1 \sigma_1$ と C 端で反射された引張応力 σ_2 が同時に衝撃面に到達するから、この瞬間に両棒が離れるとすれば、その後は長さ $2l_1$ 、絶対値 $\beta_1 \sigma_1$ の応力が棒Ⅱを周期 $T = 2l_2/c_0$ で往復する。したがって衝撃端から a だけ離れた AA 断面に生ずる応力の時間的変動は、オ2・8図 (c) のように表わされる。

オ2・9図 (a) のように、衝撃面の断面積が異なる段付棒Ⅰが棒Ⅱに衝突すれば、衝撃面に発生する応力は衝撃面の断面積に逆比例し (2.19) 式によって与えられる。したがって棒Ⅱに発生する応力 σ_2 は、両棒の衝撃面の断面積が等しい場合に発生する応力 σ_0 よりも小さい。しかし、衝撃面に発生した圧縮応力 σ_1 は棒Ⅰを伝播し、DD 面においてその一部 $\alpha \sigma_1$ が反射されて衝撃面にもどってくる。衝撃面に達したこの反射波の一部分 $\beta (\alpha \sigma_1)$ は衝撃面を透過し衝撃面に発生した応力 σ_2 に重ね合わされる。したがって $l_3/c_0 = t_3$ とおけば、AA 断面に生ずる応力は次のように表わされる。

$$0 \leq t < \frac{a}{c} \quad \text{においては} \quad \sigma = 0$$

$$\frac{a}{c} \leq t < \frac{a}{c} + 2t_3 \quad \text{においては} \quad \sigma = \sigma_2$$

$$\frac{a}{c} + 2t_3 \leq t < \frac{a}{c} + 4t_3 \quad \text{においては} \quad \sigma = \sigma_2 + \alpha\beta\sigma_1$$



(a)

$$l_2 = 2l_1 = 1\text{m}$$

$$a = 10\text{cm}$$

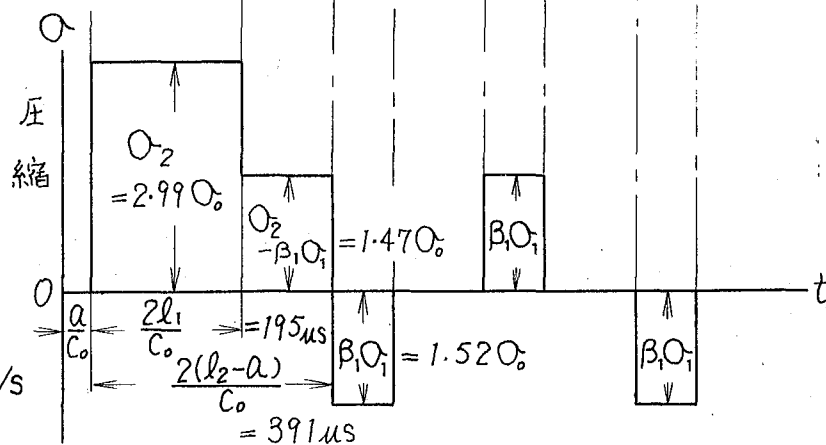
$$d_1 = 32.8\text{mm}$$

$$d_2 = 20\text{mm}$$

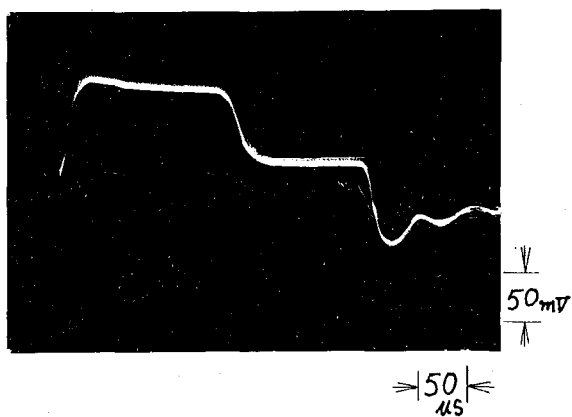
$$C_0 = 5120\text{m/s}$$

$$\alpha_1 = -0.46$$

$$\beta_1 = 1.46$$

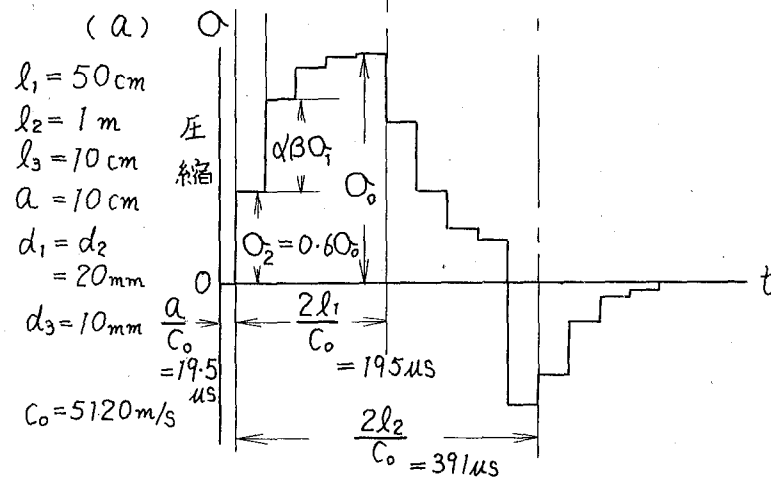
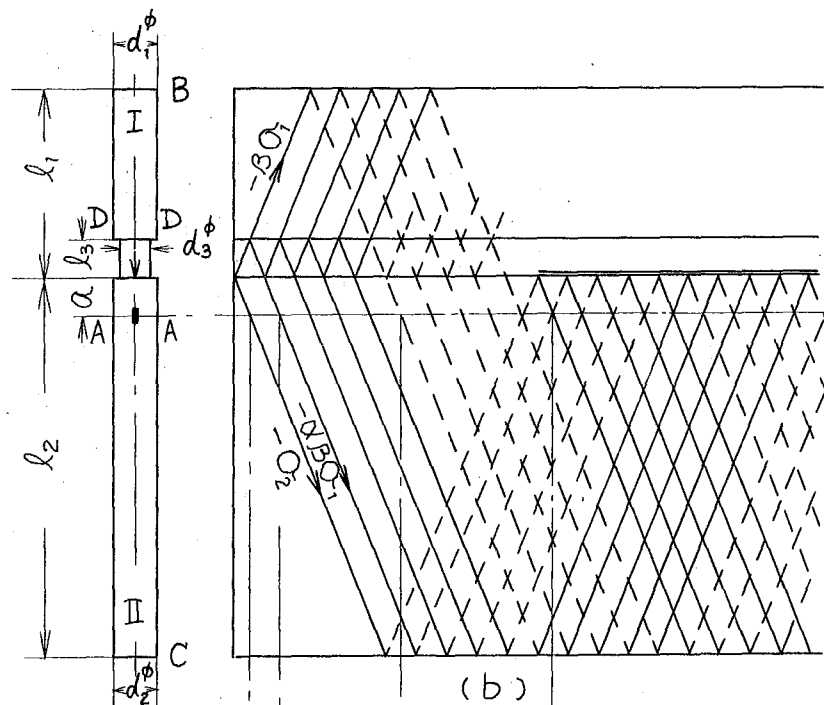


(c)



※2・8 図 同質異径の丸棒の縦
衝撃によって生ずる
応力

$$(d) \quad v_0 = 6.3\text{m/s} (\lambda = 2\text{m})$$



※2.9 図 段付棒の縦衝撃によっ
て生ずる応力

(d) $U_0 = 7 \text{ m/s}$, ($h = 2.5 \text{ m}$)

また衝撃面にもどってきた応力 αO_1 の一部分 $\alpha(\alpha O_1)$ は衝撃面で反射され、再び DD 面で反射され、 $\alpha^2(\alpha O_1)$ の応力が衝撃面にもどってきて、その一部 $\beta \alpha^3 O_1$ だけが衝撃面を透過して AA 面に達してそこに生じていた応力に重ね合わされ

$$\frac{a}{c} + 4t_3 \leq t < \frac{a}{c} + 6t_3 \quad \text{においては}$$

$$O = O_2 + \alpha \beta O_1 + \beta \alpha^3 O_1$$

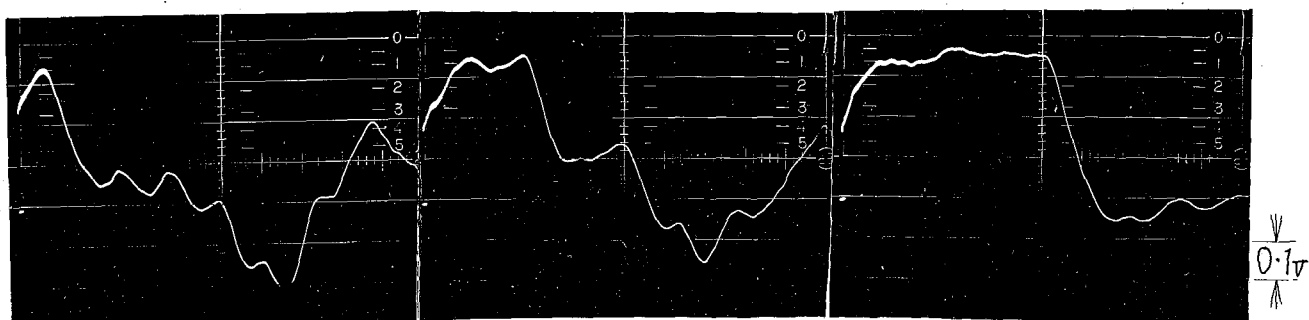
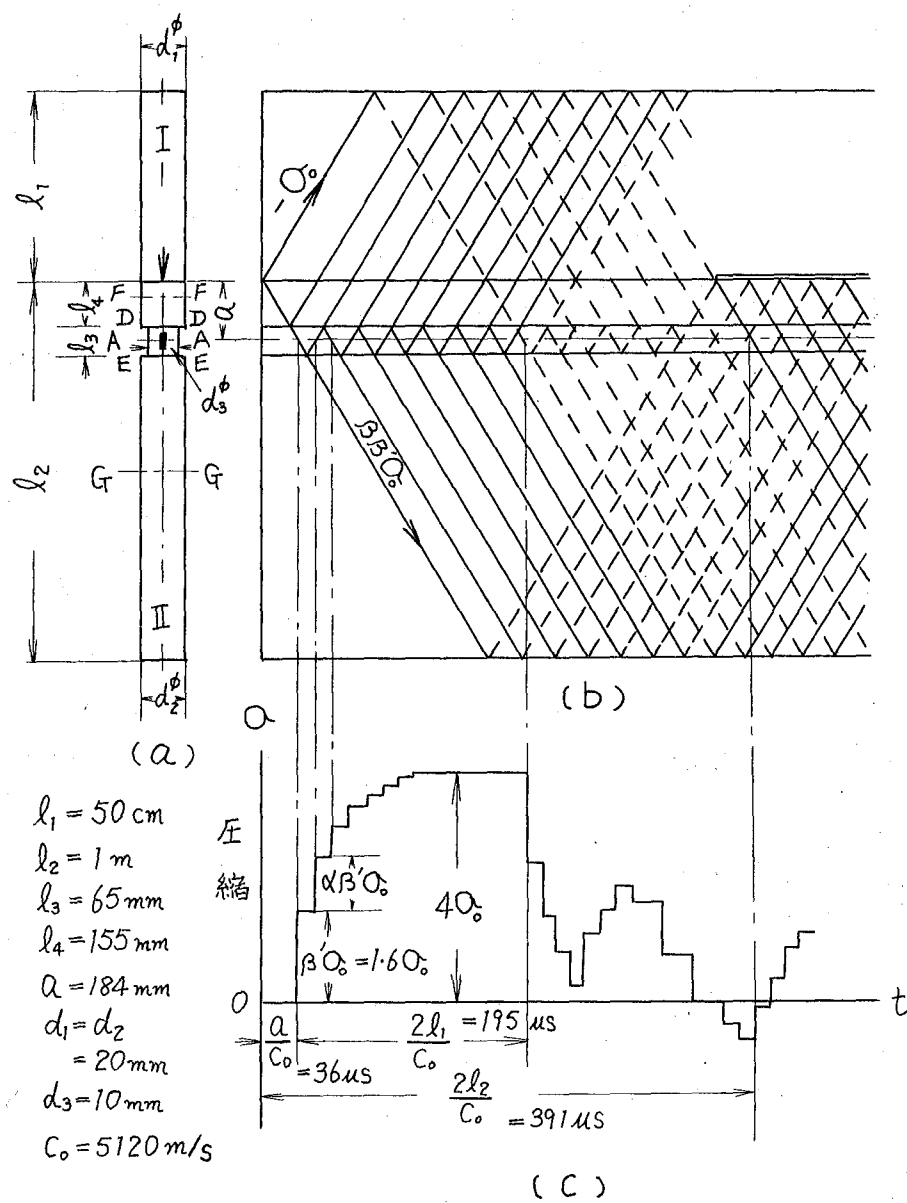
になり、時間の経過とともに AA 面に生ずる応力はオ 2.9 図 (C) のように階段的に増大する。そして両棒の他端からの反射波が AA 面に達しないうちは、衝撃面と DD 面において応力波の反射と透過がくり返され、その一部分は AA 面に達し

$$\frac{a}{c} + 2nt_3 \leq t < \frac{a}{c} + 2(n+1)t_3 \quad \text{においては}$$

$$O = O_2 + O_1 \alpha \beta \sum_{i=1}^n \alpha^{2(i-1)} = O_2 + \frac{\alpha(1-\alpha^{2n})}{1+\alpha} O_1$$

になる。B 端において反射された引張応力も同様に DD 面および衝撃面を通過するときその一部分は反射あるいは透過され、衝撃面を通過した引張応力は棒 II に生じていた圧縮応力に重ね合わされて、AA 面の応力はオ 2.9 図 (C) のように階段的に減少する。棒 I, II が無限に長いならば § 2.2.2 に示されたように、AA 面に生ずる応力は $t = \infty$ において、断面積が等しい一様な丸棒による衝撃応力 O_0 に一致する。 l_3 が l_1 に比べて十分小さくなければ、AA 面の圧縮応力が十分に大きくなるうちに B 端から伝ばしてきた引張応力が AA 面に達するから、一般には $O_{\max} \leq O_0$ である。

オ 2.10 図 (a) のように丸棒 II の一部が細くなっている場合には、これに静的圧縮荷重を加えたときに断面 FF および AA に生ずる応力 O_I , O_{II} は、その面の断面積 A_1 , A_3 に逆比例する。棒 II の上端に衝撃荷重を加えれば、衝撃面に発生する圧縮応力 O_0 は棒 II を伝ばして DD 面に達し、その一部 $\alpha' O_0$ はこの面で反射され、 $\beta' O_0$ はこの面を透過するけれども、 O_0 と $\beta' O_0$ は断面積 A_1 , A_3 に逆比例しない。しかし DD 面を透過した応力 $\beta' O_0$ は EE 面においてその一部 $\alpha(\beta' O_0)$ が反射され、 $\beta' O_0$ に重ね合わされる。その結果 AA 面に生ずる応力 O_{II} はオ 2.10 図 (C) に



(d) $U_0 = 3.1 \text{ m/s}$, ($h = 0.5 \text{ m}$)

オ2.10 図 縦衝撃をうける切欠試験片に生ずる応力

示されるように階段的に増大し，棒Ⅰ，Ⅱの他端からの反射波がAA面に達するならば階段的に減少する。

いま棒Ⅱの上端に衝撃荷重が作用した瞬間を $t=0$ とし， $l_3/c_0 = t_3$ ，
 $l_4/c_0 = t_4$ とすれば

$$0 \leq t < t_4 + \frac{1}{2}t_3 \quad \text{においては} \quad \sigma_{II} = 0$$

$$t_4 + \frac{2n+1}{2}t_3 \leq t < t_4 + \frac{2n+3}{2}t_3 \quad \text{においては}$$

$$\sigma_{II} = \beta' \sigma_0 \sum_{i=0}^n \alpha^i = \beta' \sigma_0 \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

同様にして，FF面に生ずる応力 σ_I は

$$0 \leq t < \frac{a_1}{c_0} \quad \text{においては} \quad \sigma_I = 0$$

$$\frac{a_1}{c_0} \leq t < 2t_4 - \frac{a_1}{c_0} \quad \text{においては} \quad \sigma_I = \sigma_0$$

$$2t_4 - \frac{a_1}{c_0} \leq t < 2t_4 + 2t_3 - \frac{a_1}{c_0} \quad \text{においては} \quad \sigma_I = (1 + \alpha')\sigma_0$$

$$2t_4 - \frac{a_1}{c_0} + 2(n+1)t_3 \leq t < 2t_4 - \frac{a_1}{c_0} + 2(n+2)t_3 \quad \text{においては}$$

$$\begin{aligned} \sigma_I &= (1 + \alpha' + \alpha\beta\beta' \sum_{i=0}^n \alpha^{2i}) \sigma_0 \\ &= (1 + \alpha' + \alpha\beta\beta' \frac{1 - \alpha^{2(n+1)}}{1 - \alpha^2}) \sigma_0 \end{aligned}$$

GG面に生ずる応力 σ_{III} は

$$0 \leq t < \frac{a_3}{c_0} \quad \text{においては} \quad \sigma_{III} = 0$$

$$\frac{a_3}{c_0} + 2nt_3 \leq t < \frac{a_3}{c_0} + 2(n+1)t_3 \quad \text{においては}$$

$$\sigma_{III} = \sigma_0 \beta\beta' \sum_{i=0}^n \alpha^{2i} = \sigma_0 \beta\beta' \frac{1 - \alpha^{2(n+1)}}{1 - \alpha^2}$$

である。

もしも両棒の長さ l_1, l_2 が l_3, l_4 に比して無限に長いならば
 §2.2.2に示されたように

$$(\sigma_I)_{t=\infty} = \sigma_0 = (\sigma_I)_{\max}, \quad (\sigma_{II})_{t=\infty} = \frac{A_1}{A_3} \sigma_0 = (\sigma_{II})_{\max}$$

$$(\sigma_{III})_{t=\infty} = \sigma_0 = (\sigma_{III})_{\max}$$

である。したがって $(\sigma_{II}/\sigma_I)_{t=\infty} = A_1/A_3$ ，すなわち両棒の長さ l_1, l_2 が切欠き長さ l_3 に比べて無限に長いならば，静荷重をうけた場合と同様に $(\sigma_{II})_{\max}$ と $(\sigma_I)_{\max}$ はそれらが生ずる断面積に逆比例する。

§ 2.2.5 実験結果と理論結果の比較

才2.11図は本研究に用いられた実験装置であって、垂直に立てられた高さ4mの支柱に固定された3本の案内丸棒の間を自由に落下した落下棒が鉛の支持台上に垂直に立てられた実験丸棒の上端を打撃するようになっている。そして3本の案内丸棒の間隔を調節することによって、直径20～60mmの2本の丸棒を十分正確に軸方向に衝突させることができる。

実験棒として直径20mm，長さ1mの軟鋼丸棒を用い，衝撃端から約10cmの位置に円周上等間隔に4枚のゲルマニウム（Ge）ひずみゲージをはりつけた。そしてそれらを直列に接続して直流ブリッジ回路の一辺に接続し，他辺には温度補償の目的でほぼ抵抗値の等しい，Geひずみゲージを接続した。本実験に使われたGeゲージの大きさは，長さ2～3mm，幅0.5～1mm，厚さ0.05～0.1mmで，1枚のゲージの抵抗値は約2k Ω ，ゲージ率は-100～-130であった。

Geゲージはエポキシ樹脂接着剤（ボンドE₃）によって測定面に接着され，80℃の温度に約1時間保たれ接着剤を十分に硬化させた。そしてひずみゲージはセロファンを介して接着されたから使用後，溶剤によって容易にはがされうる。

ひずみゲージを実験丸棒に接着した後，これに直接圧縮荷重を加えてひずみゲージの感度を検定した。金属線ひずみゲージに比べて抵抗値およびゲージ率は大きいためDC 7.5Vのブリッジ電圧のもとでも 10^{-4} のひずみによって0.02Vの出力電圧がえられ，前置増幅器なしに直接シンクロスコープ〔岩崎通信機製 SS5151；最大感度0.05V/cm，周波数帯域DC～15Mc/Sec〕を動作させることができた。

§ 2.2.4における理論結果を実験的に確認するためには，棒I，IIを外部から拘束しないで正しく縦方向に衝突させる必要がある。

しかし水平につられた2本の丸棒を縦方向に衝突させた場合と，本実験のように鉛の支持台上に垂直に立てた丸棒に落下棒を衝突させた場合とについては，棒IIに生ずる応力の時間的变化はきわめてよく一致する。

才2.11図において支持台が鉛，ゴムの場合には丸棒IIのAA面に生ずる応力の時間的变化は才2.12図に示されるように丸棒の下端Cを自由端として解析した結果とよく一致する。そこで自由端の状態を実験的に再現させるために，直径40mm，高さ40mmの鉛を支持台として用いた。

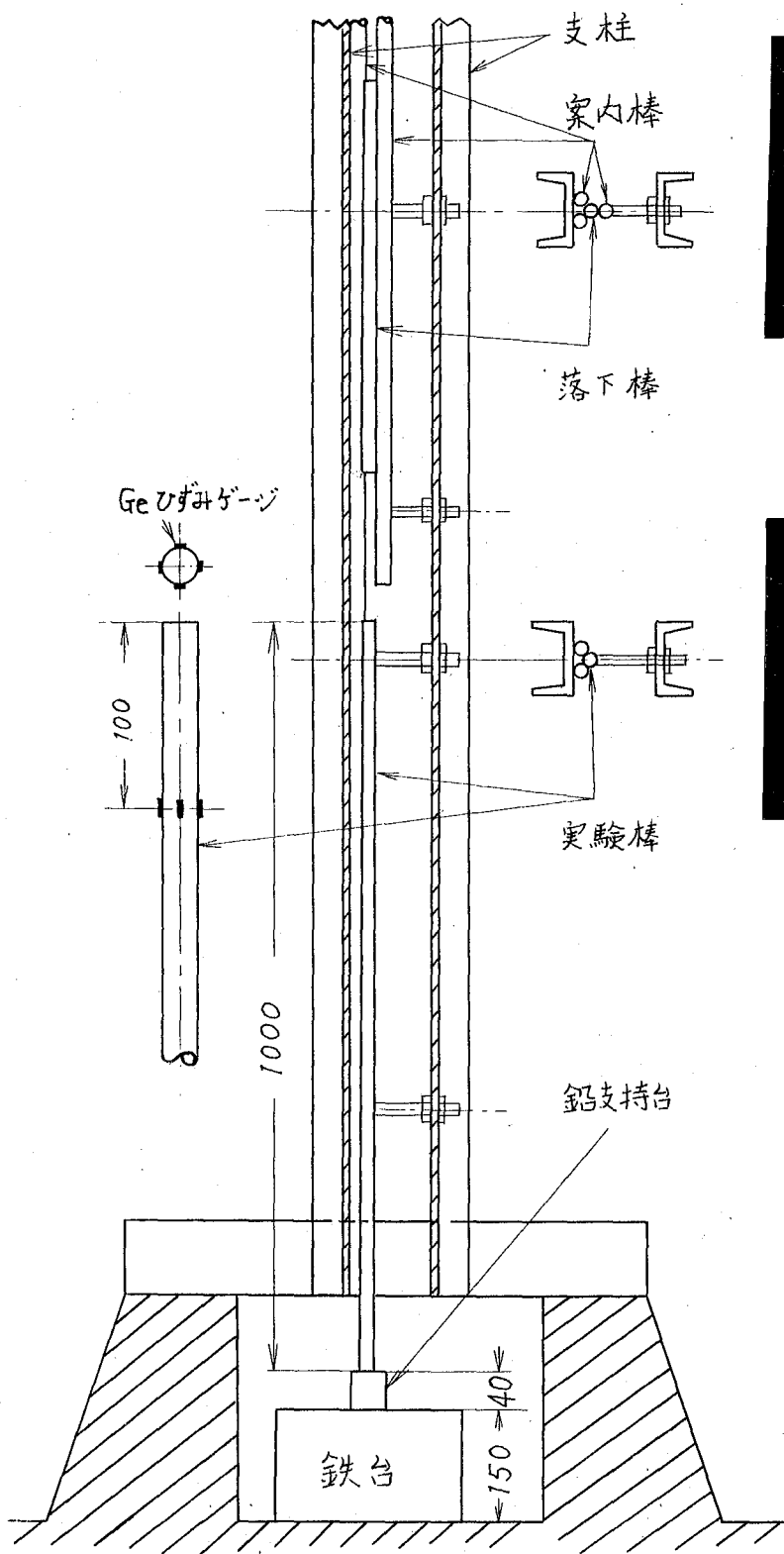
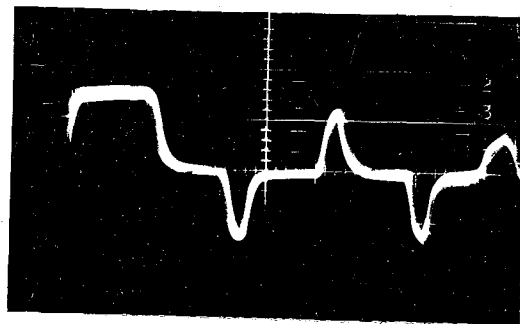
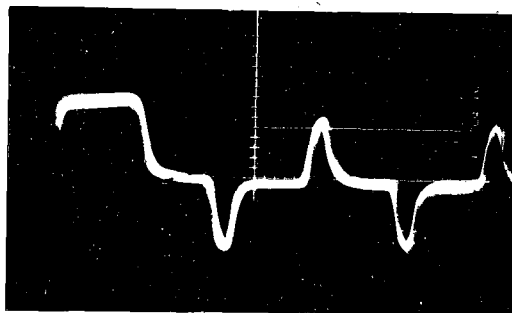


図 2-11 落下式縦圧縮試験装置



鉛



ゴム

図 2-12 支持台の影響

まず、直径 20 mm、長さ 1 m の軟鋼丸棒を実験棒とし、長さ 25, 50, 75, 95 cm の同径同質の軟鋼丸棒を落下棒 I として用い、これらを種々の高さから落下させて、実験棒 II の衝撃面から 10 cm の位置に生ずる応力の時間的变化を測定した。

※2.6 図 (d) は落下高さ $h = 2.5 \text{ m}$ (衝撃速度 $U_0 = \sqrt{2gh} = 7 \text{ m/s}$) として落下棒の長さを変えたときに測定点に生ずる応力の時間的变化を示したもので、理論的に求められた結果ときわめてよく一致している。測定点の応力は衝撃面に発生した圧縮応力 O_0 が測定点に達してから、落下棒の上端において反射された引張応力が測定点に達するまでは一定値に保たれ、その大きさは落下棒の長さに無関係である。

また、実験棒の下端は完全な自由端ではないが、支持面から反射された引張応力は約 $-(0.7 \sim 0.8) O_0$ であつたから、下端は近似的に自由端と考えてよいであろう。したがって測定点に生ずる最大圧縮応力は衝撃端に発生した応力 O_0 に等しく、実験棒のいずれの断面についても最大衝撃応力は O_0 に等しいことが理論結果からわかる。また下端が自由な場合には実験棒のいずれの点に生ずる最大圧縮応力も O_0 に等しいことが Ripperger⁽¹⁷⁾ の実験によって確認されている。

※2.13 図は 50 cm の長さの落下棒を用いて落下高さを変えた場合に、測定点に生ずる応力変動を示したもので、落下高さとともに衝撃面に生ずる応力 O_0 、すなわちこの棒に生ずる最大圧縮応力は増大している。

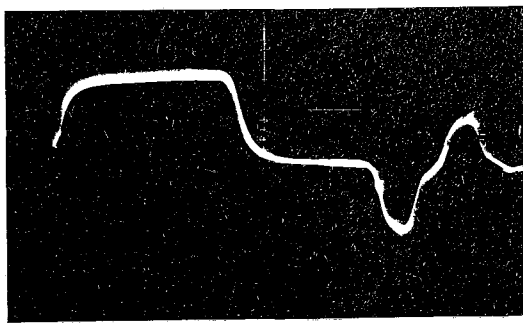
※2.14 図は衝撃速度を $U_0 = \sqrt{2gh}$ として

$$O_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E\delta}{g}} U_0 \quad (2.21)$$

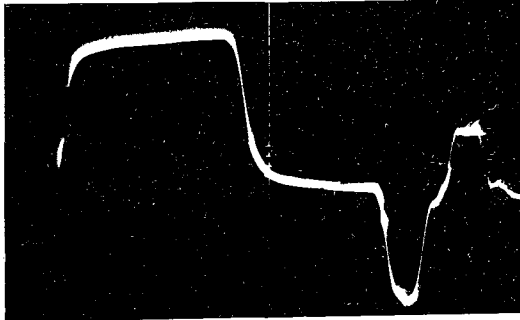
ただし $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, $\delta = 7.86 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$

によって計算した理論値と測定値とを比較したものである。(2.21) 式は無限に細い棒の縦衝撃によって生ずる応力を示しており、細い棒を伝わる縦波の伝ば速度を $C_0 = \sqrt{Eg/\delta}$ に等しいとして (2.8) 式から導いた結果である。一方、無限体中の縦波の伝ば速度 C_1 はポアソン比を ν として

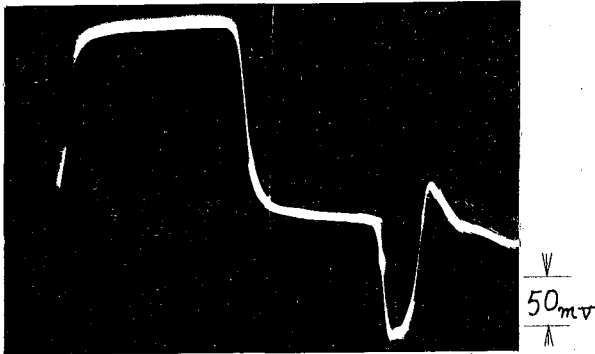
$$C_1 = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}} C_0 \quad (2.22)$$



$U_0 = 3.1 \text{ m/s}$ ($h = 0.5 \text{ m}$)

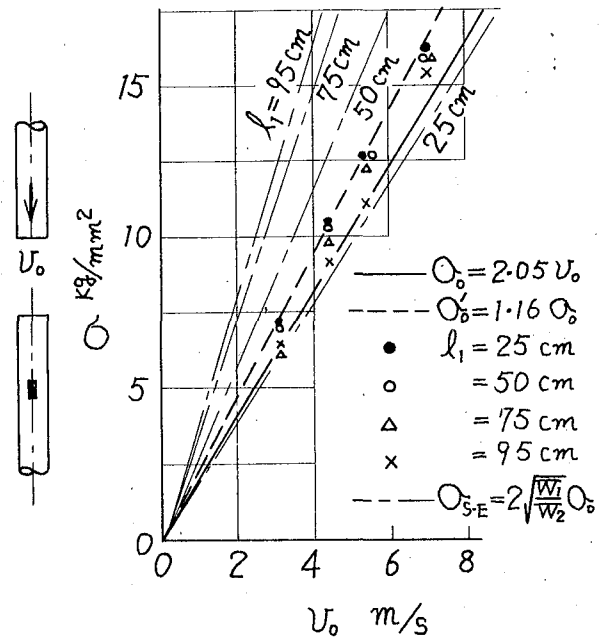


$U_0 = 5.4 \text{ m/s}$ ($h = 1.5 \text{ m}$)



$U_0 = 7.0 \text{ m/s}$ ($h = 2.5 \text{ m}$) $\approx 50 \mu\text{s}$

※ 2.13 図 衝撃応力と衝撃速度 U_0 との関係 ($l_1 = 50 \text{ cm}$)



※ 2.14 図 同径同質の丸棒の縦衝撃によって生ずる圧縮応力 O と衝撃速度 U_0 の関係 (W_1, W_2 ; 棒 I, II の重量)

で与えられ、同質の半無限体の縦衝撃によって生ずる応力は

$$O'_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}} \sqrt{\frac{E\delta}{g}} U_0 \quad (2.23)$$

になるから、 $\nu = 0.3$ とすれば

$$O'_0 = 1.16 O_0 \quad (2.24)$$

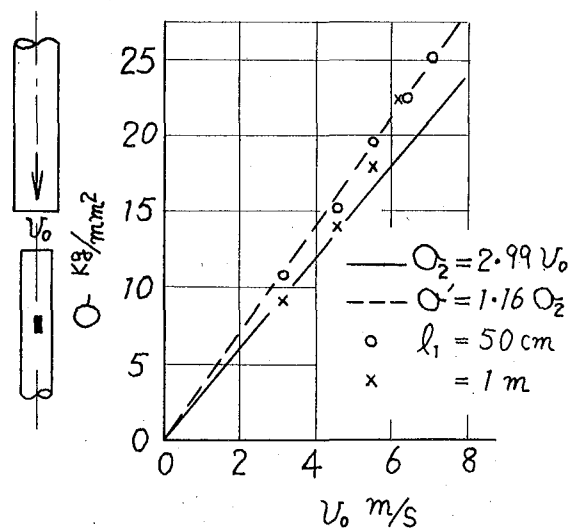
である。(2.24)式による理論値を図中点線で示した。この結果、直径 20 mm の丸棒の測定結果は (2.21) 式による結果と (2.24) 式による結果の間にある。この場合初等材料力学によって与えられる衝撃応力は落下棒の重量に関係し、図中一点鎖線のように表わされるから、測定値とは全く一致しない。すなわち、ひずみエネルギーを考慮して導かれた結果は剛体の落下棒を用いて剛体の支持台上に固定された弾性棒を衝撃した場合について求められたものであるから、その結果を本実験のような場合に適用

することは適當ではない。しかし実験棒が光弾性材料で作られている場合には、これに比べて落下棒および固定台は近似的に剛体とみなされ、固定端から大きさが等しい同符号の応力が反射され O_0 が最大応力でないことが確認されている。^{(58), (59)}

オ2.7図 (d) は実験棒に比べて横断面積、質量が大きい物体に下端を固定した場合に、衝撃端から 50 cm の位置に生ずる応力の時間的变化を示したもので、理論結果とよく一致し、固定端から大きさが等しい同符号の応力が反射されるために最大応力は $2O_0$ になることがわかる。

オ2.6図 (d) に示されたと同じ軟鋼丸棒を実験棒として用い、落下棒として直径 32.8 mm、長さ 50 cm の軟鋼棒を用いた場合には、測定点の応力はオ2.8図 (d) のように変化した。いま落下棒および実験棒の衝撃面に生ずる応力をそれぞれ O_1 , O_2 とすれば、理論的には (2.19) 式より $O_1 = 1.11 U_0$, $O_2 = 2.99 U_0$ がえられ、実験棒に生ずる最大圧縮応力は O_2 に等しい。

オ2.15図は O_2 の理論値と実測値を比較したもので、両結果はよく一致する。



オ2.15図 同質異径の丸棒の縦衝撃によって生ずる応力

オ2.9図に示されるように、落下棒の下端の直径 α_2 を太い部分の直径 α_1 の $1/2$ にすれば、落下棒および実験棒の衝撃面に生ずる圧縮応力 O_1 , O_2 は (2.19) 式より $O_1 = 1.6 O_0$, $O_2 = 0.4 O_0$ である。そして弾性波が細い部分から太い部分に通過するときには、(2.20) 式より $\alpha = 3/5$, $\beta = 2/5$ になるから、測定点に生ずる応力は §2.2.4 より

$$0 \leq t < 19.5 \mu s \quad \text{においては} \quad O = 0$$

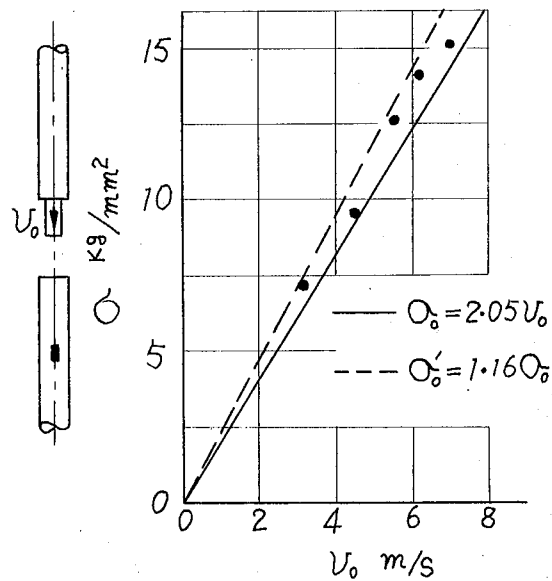
$$19.5 \mu s \leq t < 58.5 \mu s \quad O = 0.4 O_0$$

$$(2n+1)19.5 \mu s \leq t < (2n+3)19.5 \mu s \quad O = 0.78 O_0$$

$(2n+1)19.5\mu s \leq t < (2n+3)19.5\mu s$ においては

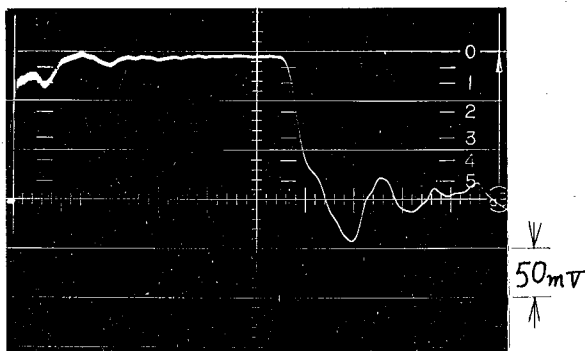
$$\sigma = \{1 - (0.6)^{2n+1}\} \sigma_0$$

そして $215\mu s$ 後に落下棒の上端からの反射波が測定点に達したときには $\sigma = 0.99\sigma_0 = \sigma_{max}$ であるから、この場合には落下棒が無限に長いときに測定点に生ずる最大応力 σ_0 にほとんど一致している。そこで $\sigma_{max} = \sigma_0$ として σ_{max} と U_0 との関係を示せば、オ2・16図のように理論値と測定値はよく一致する。



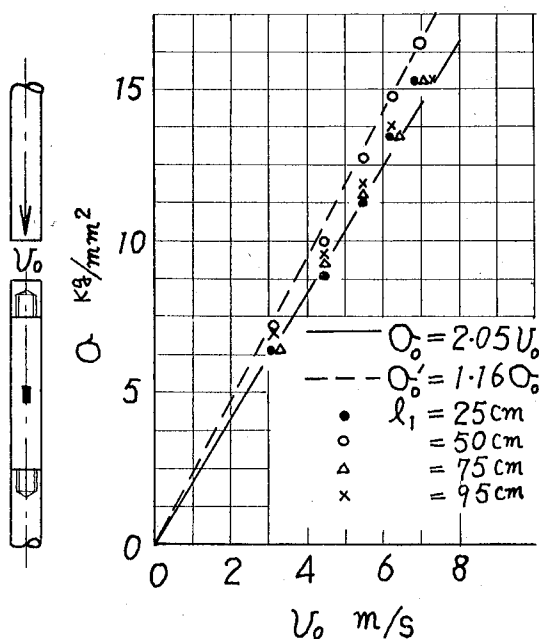
オ2・16 図 段付丸棒の縦衝撃によって生ずる応力

実験棒の一部に直径が等しい軟鋼棒をねじによって固定すれば、ねじ締付部を弾性波が通過するとき、ねじ穴の底部およびねじ山面で弾性波の反射と透過が行なわれるために、測定点に生ずる応力はねじ締付部がない場合とは異なる。そこで実験棒と同質、同径の試験片をその中間にねじで固定して、試験片の中央にGeヒズミゲージをは



$U_0 = 5.4 \text{ m/s}$ ($h = 1.5 \text{ m}$)

オ2・17 図 ねじ締付部の影響



オ2・18 図 ねじ締付部を有する丸棒の縦衝撃によって生ずる応力

りつけ、実験棒の上端を同質、同径の落下棒によって衝撃した。このとき測定点に生ずる応力は図2-17に示されるように、ねじ締付部がないときのようになめらかに変化しないが、試験片中央に生ずる最大応力 σ_{max} は図2-18に示されるようにねじ締付部がない場合とほとんど等しい。

図2-10 (a) のように中央部を細くした試験片を実験棒の中間にねじで固定し、実験棒の上端を同径、同質の落下棒によって衝撃した。このとき試験片の中央断面に生ずる応力は、図2-10 (d) に示されるように変化し、ねじ締付部の影響を考慮するとき、その傾向は理論結果とよく一致する。この場合には、太い部分の直径 d_2 は、細い部分の直径 d_3 の2倍であるから、応力波が太い断面から細い断面に進むときには $\alpha' = -0.6$, $\beta' = 1.6$, 細い断面から太い断面に進むときには $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.4$ であるから、試験片中央面 AA に生ずる応力 σ_{II} は

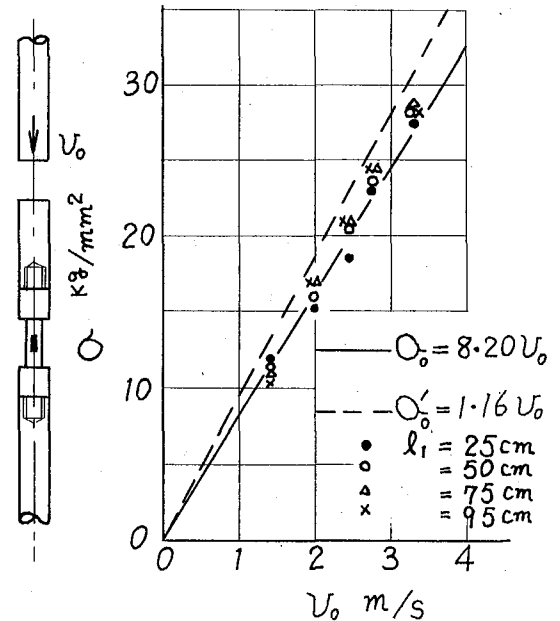


図2-19 縦衝撃をうける切欠試験片に生ずる応力

$$\begin{aligned} 0 \leq t < 36.7 \mu s & \quad \text{においては} \quad \sigma_{II} = 0 \\ 36.7 \mu s \leq t < 49.5 \mu s & \quad \text{においては} \quad \sigma_{II} = 1.6 \sigma_0 \\ (36.7 + 12.8n) \mu s \leq t < (49.5 + 12.8n) \mu s & \quad \text{においては} \\ \sigma_{II} &= 4 \{ 1 - (0.6)^{n+1} \} \sigma_0 \end{aligned}$$

そして衝撃面に生じた応力が落下棒の上端において反射されて AA 面に達する時間は、落下棒の長さ l_1 が 25 cm ならば $133 \mu s$, 50 cm ならば $266 \mu s$ であるから、このとき AA 面に生じていた応力はそれぞれ $\sigma_{II} = 3.56 \sigma_0$, $4 \sigma_0$ である。 l_1 が小の場合には AA 面に生ずる応力が十分に増大しないうちに落下棒上端において反射された引張応力が AA 面に達し、 σ_{II} は $4 \sigma_0$ より小さくなる。

図2-19 は $\sigma_{max} = (A_1/A_3) \sigma_0 = (d_1/d_3)^2 \sigma_0 = 4 \sigma_0$ として計算した理論値と測定値を比較したものである。

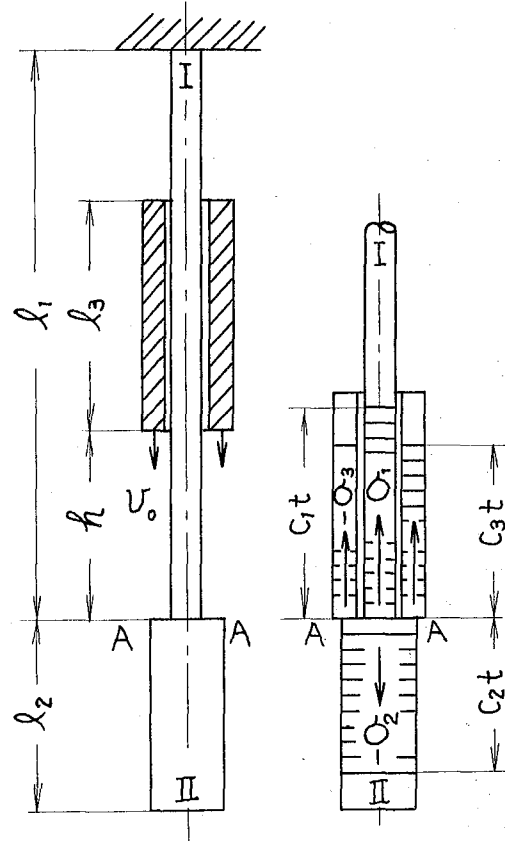
2.3 丸棒の縦引張衝撃によって生ずる応力とその伝ば⁽²⁶⁾

§ 2.3.1 衝撃応力とその伝ば

2.2は最も単純な2本の棒の縦圧縮衝撃を対象としたものであるけれども、同じような考え方は縦引張衝撃問題にも適用できるはずである。しかし衝撃問題においては、不連続面における弾性波の反射と透過を伴うために、静的問題におけるように全く同一の結果にはならない。

例2.20図のような段付弾性棒Ⅰ、Ⅱの段部に円筒状の弾性体Ⅲが U_0 の速度で衝突した場合には、衝突の瞬間に衝撃面をはさむ各領域にはそれぞれ一定の大きさの応力 $\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3$ が生じ、それらは一定の伝ば速度 $c_i = \sqrt{E_i/\rho_i}$ をもつ弾性波として各領域を伝ばする。ここで E は縦弾性係数、 ρ は単位体積当りの重量、 g は重力加速度であり、棒Ⅰ、Ⅱおよび円筒Ⅲについての値にはそれぞれ添字 i ($= 1, 2, 3$)をつけて区別することにする。

圧縮衝撃におけると同様に、衝撃によってエネルギー損失がなく、衝撃中は衝撃面の変位速度が等しいと仮定し、各領域の運動エネルギーとひずみエネルギーの和は与えられたエネルギーに等しいとして、棒Ⅰ、Ⅱ、Ⅲに生ずる弾性波の大きさ σ_i を求めれば次式のように表わされる。



例2.20 図

縦引張衝撃によって生ずる応力

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{A_3 \sqrt{E_3 \rho_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + A_2 \sqrt{E_2 \rho_2} + A_3 \sqrt{E_3 \rho_3}} \sqrt{\frac{E_1 \rho_1}{g}} U_0 \\ \sigma_2 = \frac{A_3 \sqrt{E_3 \rho_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + A_2 \sqrt{E_2 \rho_2} + A_3 \sqrt{E_3 \rho_3}} \sqrt{\frac{E_2 \rho_2}{g}} U_0 \\ \sigma_3 = \frac{A_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + A_2 \sqrt{E_2 \rho_2}}{A_1 \sqrt{E_1 \rho_1} + A_2 \sqrt{E_2 \rho_2} + A_3 \sqrt{E_3 \rho_3}} \sqrt{\frac{E_3 \rho_3}{g}} U_0 \end{cases} \quad (2.25)$$

ここで σ_1 は引張応力、 $-\sigma_2, -\sigma_3$ は圧縮応力である。

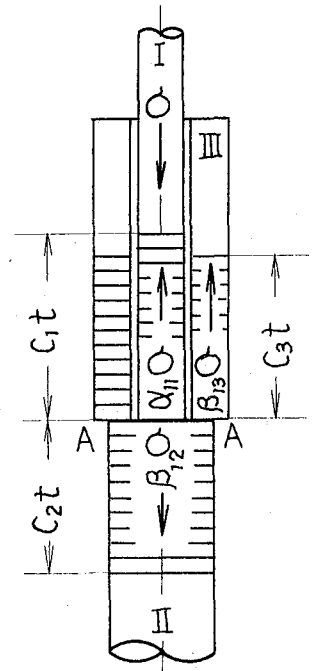
(2.25)式においては、衝撃面に生ずる応力は静荷重をうけた場合と同様

に $A_1 O_1 + A_2 O_2 = A_3 O_3$ の条件を満足している。

棒Ⅰを伝ばする弾性波○の波面が、オ 2・21 図のように、材質あるいは断面積の変化した不連続面 AA に到達すると、応力○の一部 α_{11} ○は反射されて棒Ⅰを伝ばし、のこりの β_{12} ○, β_{13} ○はその面を透過してそれぞれ棒Ⅱ, Ⅲを伝ばすると仮定する。

いま反射, 透過によってエネルギー損失がなく、不連続面をはさむ各領域の変位速度が等しいとすれば、反射率 α_{11} , 透過率 β_{12} , β_{13} は次式のように表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} = \frac{-A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \\ \beta_{12} = \frac{2A_1 \sqrt{E_2 \delta_2}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \\ \beta_{13} = \frac{-2A_1 \sqrt{E_3 \delta_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \end{array} \right. \quad (2.26)$$



オ 2・21 図 不連続面における弾性波の反射と透過

ここで α , β の添字のうち、最初の数字は入射波○が伝ばする領域を、次の数字は反射波あるいは透過波の伝ばする領域を示している。

棒Ⅱを伝ばする弾性波○の波面が不連続面 AA に到達すれば、同様にし、反射率 α_{22} , 透過率 β_{21} , β_{23} は次式のように表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{22} = \frac{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} - A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \\ \beta_{21} = \frac{2A_2 \sqrt{E_1 \delta_1}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \\ \beta_{23} = \frac{2A_2 \sqrt{E_3 \delta_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

また、円筒Ⅲを伝ばする弾性波○の波面が不連続面 AA に到達すれば、同様にし、反射率 α_{33} , 透過率 β_{31} , β_{32} は次式のように表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{33} = \frac{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} - A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \\ \beta_{31} = \frac{-2 A_3 \sqrt{E_1 \delta_1}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \\ \beta_{32} = \frac{2 A_3 \sqrt{E_2 \delta_2}}{A_1 \sqrt{E_1 \delta_1} + A_2 \sqrt{E_2 \delta_2} + A_3 \sqrt{E_3 \delta_3}} \end{array} \right. \quad (2.28)$$

いずれの場合においても、弾性波が不連続面に到達したときには、この面における力の釣合条件式

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 (1 + \alpha_{11}) O + A_3 \beta_{13} O = A_2 \beta_{12} O \\ A_1 \beta_{21} O + A_3 \beta_{23} O = A_2 (1 + \alpha_{22}) O \\ A_1 \beta_{31} O + A_3 (1 + \alpha_{33}) O = A_2 \beta_{32} O \end{array} \right.$$

が満足されている。

以上の結果は衝撃面において円筒Ⅲと棒Ⅱが接触しているときのみ適用でき、接触面圧力が負になったとき円筒Ⅲと棒Ⅱは離れると仮定する。

さて、第2.20図のように、棒Ⅰ、Ⅱの段部AAを円筒Ⅲで衝撃した場合に、衝撃面に生じた応力 O_1 、 $-O_2$ 、 $-O_3$ は各棒を伝播して他端で反射され、再び衝撃面にもどってくる。この反射波を O_I 、 O_{II} 、 O_{III} とする。いま反射波が到達する直前に衝撃面をはさむ各領域に生じていた応力を O_{I0} 、 O_{II0} 、 O_{III0} とすれば、衝撃面に到達した弾性波 O_I 、 O_{II} 、 O_{III} は(2.26)、(2.27)、(2.28)式で示された割合で反射あるいは透過されるから、反射波が衝撃面に到達した後に、衝撃面をはさむ各領域に新たに生ずる応力 O'_{I0} 、 O'_{II0} 、 O'_{III0} は

$$\left\{ \begin{array}{l} O'_{I0} = \alpha_{11} O_I + \beta_{21} O_{II} + \beta_{31} O_{III} \\ O'_{II0} = \beta_{12} O_I + \alpha_{22} O_{II} + \beta_{32} O_{III} \\ O'_{III0} = \beta_{13} O_I + \beta_{23} O_{II} + \alpha_{33} O_{III} \end{array} \right. \quad (2.29)$$

になる。結局、反射波が衝撃面に到達した後は、円筒衝撃面の応力 O_D は次のようになる。

$$\begin{aligned} O_D &= O_{III0} + O_{III} + O'_{III0} \\ &= O_{III0} + \beta_{13} O_I + \beta_{23} O_{II} + (1 + \alpha_{33}) O_{III} \end{aligned} \quad (2.30)$$

もしも $\sigma_D > 0$ ならば，衝撃面圧力は負になるから，実際には入射波の一部 σ_I' ， σ_{II}' ， σ_{III}' だけが (2.26)，(2.27)，(2.28) 式の割合で反射，透過されたとき円筒衝撃面は自由端と同じ状態になり，このときにこの面に生ずる応力 σ_D は

$$\sigma_D = \sigma_{III0} + \beta_{13} \sigma_I' + \beta_{23} \sigma_{II}' + (1 + \alpha_{33}) \sigma_{III}' = 0$$

になる。

(2.31)

そしてのこりの応力 $(\sigma_I - \sigma_I')$ ， $(\sigma_{II} - \sigma_{II}')$ は衝撃面を通過するとき棒 I あるいは II にのみ反射あるいは透過され， $(\sigma_{III} - \sigma_{III}')$ は衝撃面で全反射される。

そこで弾性波 σ_I ， σ_{II} ， σ_{III} が衝撃面に到達することによって，この面をはさむ各領域に新たに生ずる応力 σ_{I0}' ， σ_{II0}' ， σ_{III0}' は次式のように表わせる。

$$\begin{cases} \sigma_{I0}' = (\alpha_{11} - \alpha_1) \sigma_I' + (\beta_{21} - \beta_2) \sigma_{II}' + \beta_{31} \sigma_{III}' + \alpha_1 \sigma_I + \beta_2 \sigma_{II} \\ \sigma_{II0}' = (\beta_{12} - \beta_1) \sigma_I' + (\alpha_{22} - \alpha_2) \sigma_{II}' + \beta_{32} \sigma_{III}' + \beta_1 \sigma_I + \alpha_2 \sigma_{II} \\ \sigma_{III0}' = \beta_{13} \sigma_I' + \beta_{23} \sigma_{II}' + (1 + \alpha_{33}) \sigma_{III}' - \sigma_{III} \end{cases} \quad (2.32)$$

(2.31) 式を (2.32) 式に代入すれば， σ_{I0}' ， σ_{II0}' ， σ_{III0}' は次式のようになる。

$$\begin{cases} \sigma_{I0}' = \alpha_1 \sigma_I + \beta_2 \sigma_{II} - \frac{\beta_{31}}{1 + \alpha_{33}} \sigma_{III0}' \\ \sigma_{II0}' = \beta_1 \sigma_I + \alpha_2 \sigma_{II} - \frac{\beta_{32}}{1 + \alpha_{33}} \sigma_{III0}' \\ \sigma_{III0}' = -\sigma_{III} - \sigma_{III0}' \end{cases}$$

ただし

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{A_2 \sqrt{E_2} \gamma_2 - A_1 \sqrt{E_1} \gamma_1}{A_1 \sqrt{E_1} \gamma_1 + A_2 \sqrt{E_2} \gamma_2} \\ 1 + \alpha_1 = \frac{A_2}{A_1} \beta_1, \quad 1 + \alpha_2 = \frac{A_1}{A_2} \beta_2 \end{cases}$$

以上の結果を用いれば，第 2.22 図 (a) のような円筒の衝突によって棒 I の任意断面に生ずる応力の時間的変動は，圧縮衝撃の場合と同様に図式的に求めることができる。

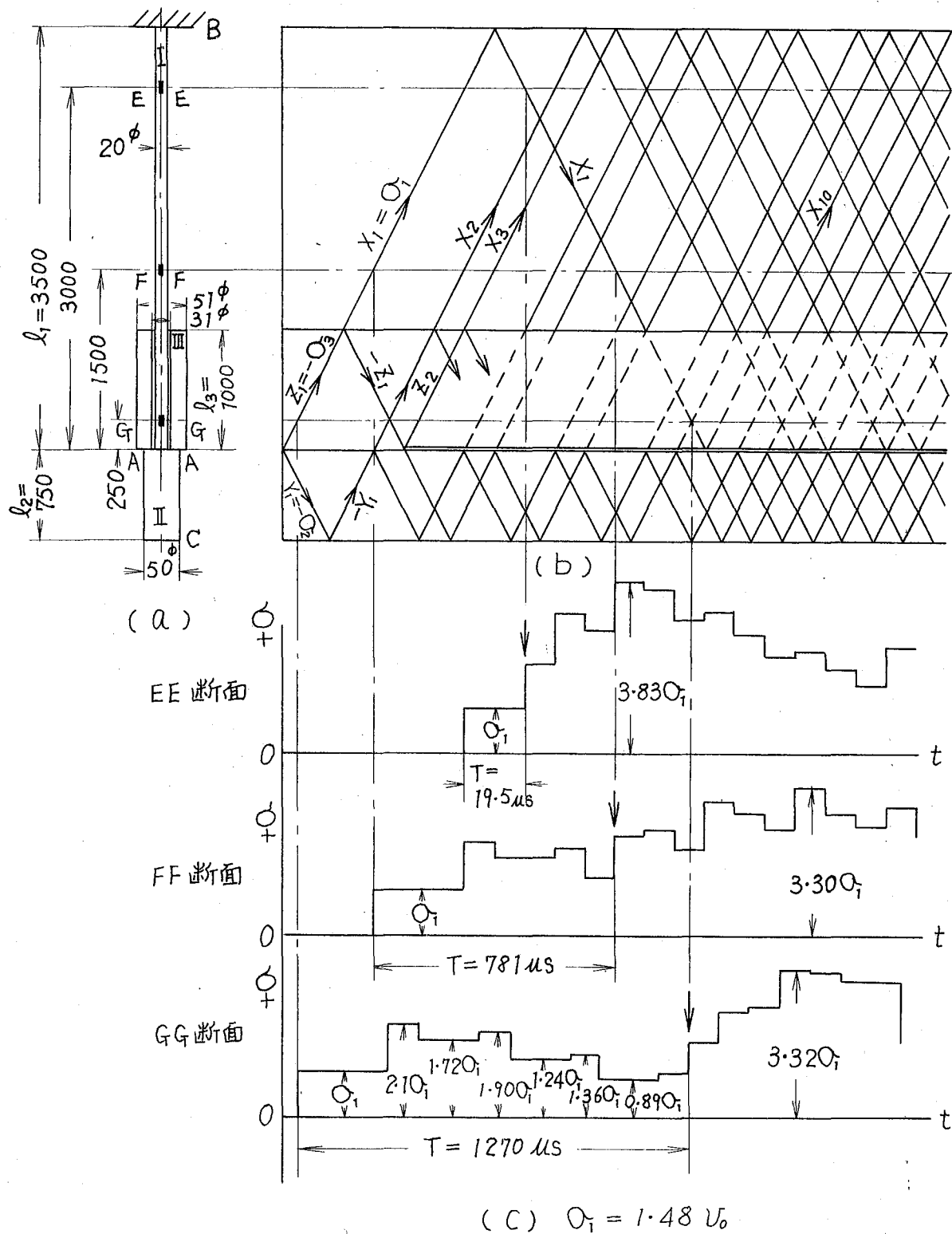


図 2-22 丸棒の縦引張衝撃によって各測定点に生ずる応力変動

オ2.22 図 (b) は段付棒 I, II の段部 AA に, これと同質の円筒が高さ h から自然落下して $v_0 = \sqrt{2gh}$ の速度で縦方向に衝突した場合に, 棒 I, II および円筒中を弾性波が伝はる様子を示したもので, 縦軸は棒 I, II および円筒の横断面の位置を, 横軸は時間軸を示したものである。

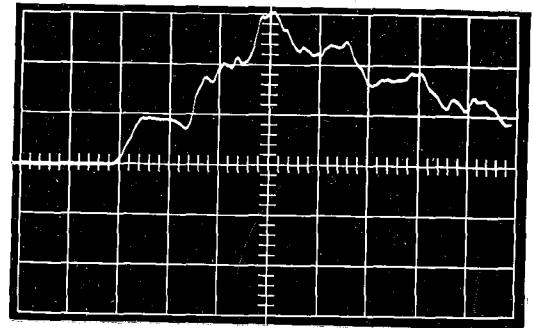
まず衝突の瞬間に棒 I, II および円筒の衝撃面には, それぞれ (2.25) 式で与えられる応力 $X_1 = O_1$, $Y_1 = -O_2$, $Z_1 = -O_3$ が生じ, それぞれ等しい速度 $C_0 = \sqrt{gE/\rho}$ で固定端 B および自由端 C, D に向かって伝はる。

棒 I, II および円筒 III の長さを l_1 , l_2 , l_3 とすれば, 時間 $t = l_1/C_0$, l_2/C_0 , l_3/C_0 の後には, X_1 は同符号の応力 O_1 として, Y_1 , Z_1 は絶対値が等しい異符号の応力 O_2 , O_3 として反射され, 衝撃面 AA に向かって伝はる。

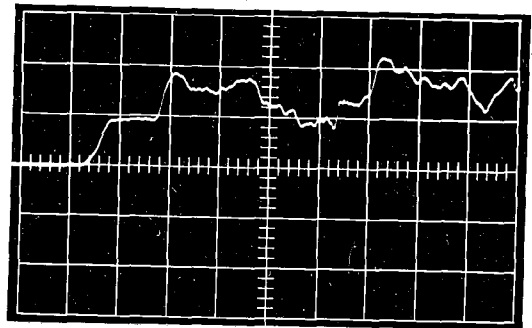
もしも $l_3 > l_2$ であって, l_1 が l_2 , l_3 に比べて十分に長いならば,

まず棒 II の下端 C において反射された応力 O_2 は, そこに生じていた圧縮応力 $-O_2$ を消失しながら衝撃端に向かって進み, $2l_2/C_0$ 時間後に衝撃面に到達して円筒に透過する。そして円筒における応力が $-O_3 + \beta_{23} O_2 \leq 0$ の条件を満足していれば, その後も棒 II と円筒は接触を保ち, 衝撃面をはさむ各領域には $X_2 = \beta_{21} O_2$, $Y_2 = \alpha_{22} O_2$, $Z_2 = \beta_{23} O_2$ の大きさの応力が生じ, それぞれ B, C, D 端に向かって伝はる。

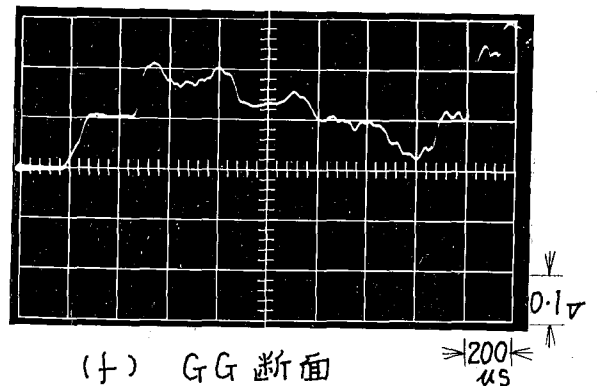
$t = 2l_3/C_0$ 時間後には, D 端からの反射波 O_3 が衝撃面に到達する。もしもこのとき $\alpha_{33} O_3 + \beta_{23} O_2 > 0$ ならば O_3 の到達によって円筒は棒 II を離れる。そして衝撃面をはさむ各領域には



(d) EE 断面



(e) FF 断面



(f) GG 断面

オ2.22 図 測定結果の写真 ($h = 1m$)

$$\left\{ \begin{array}{l} X_3 = \frac{\beta_{31}}{1 + \alpha_{33}} (\sigma_3 - \beta_{23} \sigma_2) \\ Y_3 = \frac{\beta_{32}}{1 + \alpha_{33}} (\sigma_3 - \beta_{23} \sigma_2) \\ Z_3 = -\beta_{23} \sigma_2 \end{array} \right.$$

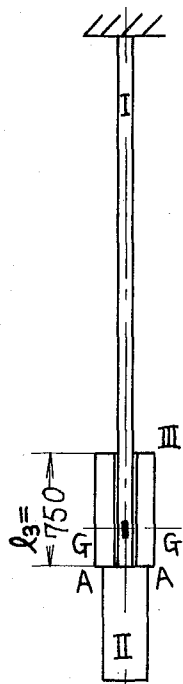
の応力が生ずる。

その結果， $t = 2l_3/c_0$ 時間後に衝撃面の応力は消失して，円筒と棒Ⅱの接触面は自由端の状態になり，この時間以後は引張応力も圧縮応力もすべてこの面で全反射される。それゆえにC端で反射されて $t = 4l_2/c_0$ の瞬間に衝撃面AAに達した応力 $-Y_2$ の一部はこの面で反射されて $Y_4 = -\alpha_2 (\alpha_{22} \sigma_2)$ の応力が棒ⅡをC端に向かって進み，のこりの部分はAA面を透過して $X_4 = -\beta_2 (\alpha_{22} \sigma_2)$ の応力が棒ⅠをB端に向かって伝ばする。固定端Bで反射され，時間 $2l_1/c_0$ に到達した引張応力 σ_1 の一部

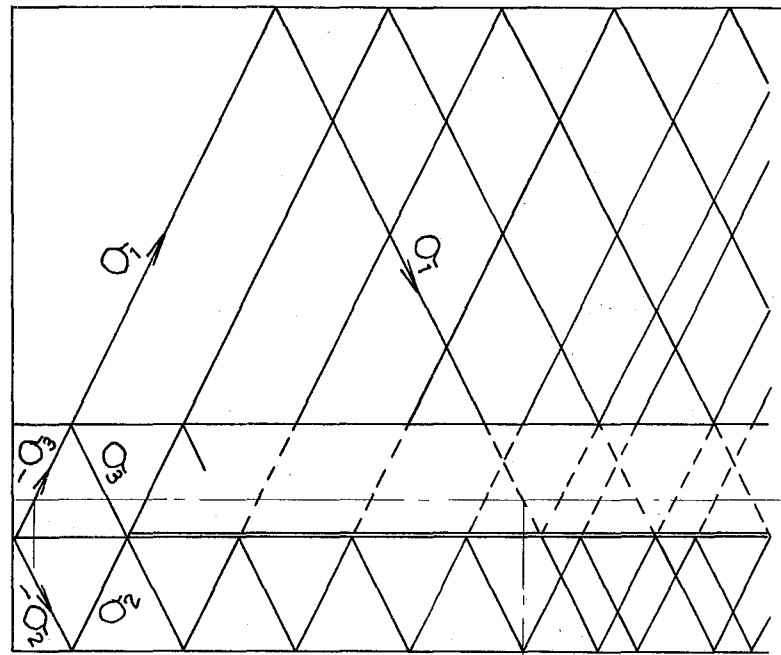
$X_n = \alpha_1 \sigma_1$ はAA面で反射されてB端に向かい，のこりの部分 $Y_n = \beta_1 \sigma_1$ はAA面を透過して自由端Cに向かう。したがって棒Ⅰを種々の大きさの応力が伝ばするから，棒Ⅰの各断面に生ずる応力は時間的に変動する。

オ2.22 図(C)は棒ⅠのEE，FF，GG断面に生ずる応力の時間的変動を示したものである。

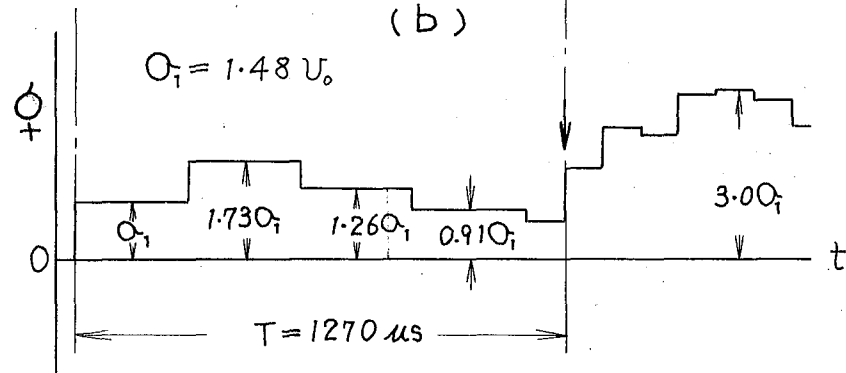
オ2.23 図はオ2.22 図の場合と円筒長さ l_3 のみ異なる場合について，GG断面に生ずる応力の時間的変動を示したものである。



(a)

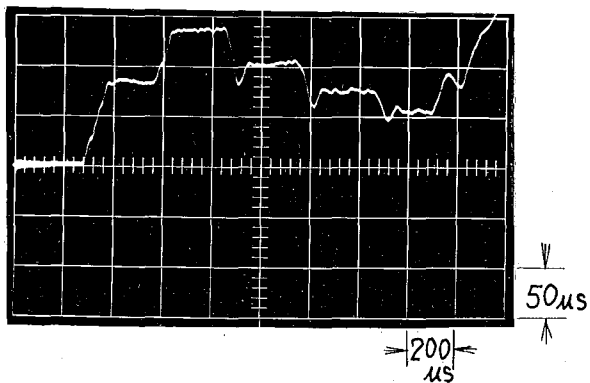


(b)



(c)

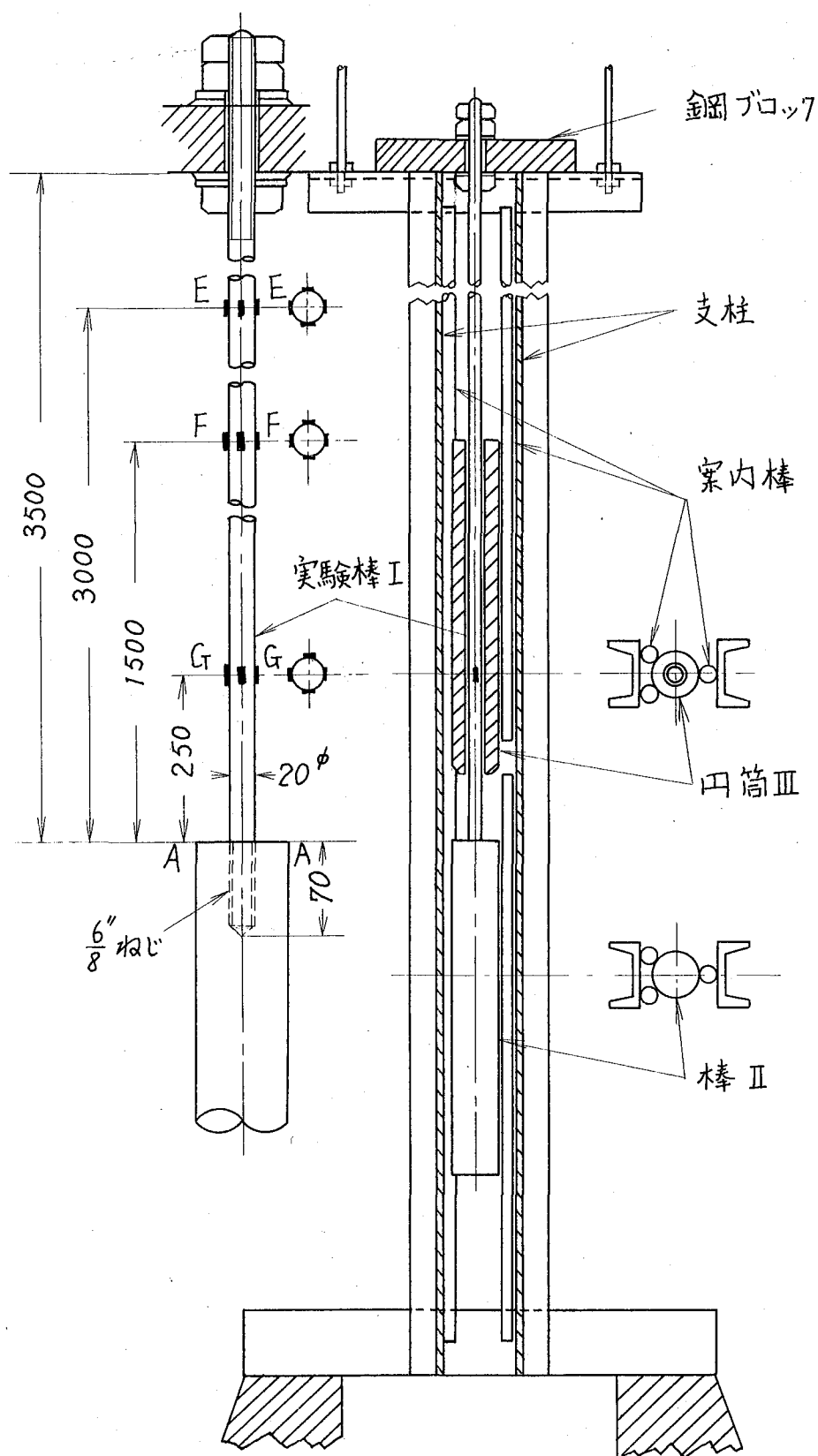
お 2.23 図 $l_3 = 75 \text{ cm}$ の場合の
GG 断面の応力変
動



(d) $l_3 = 75 \text{ cm}$, $h = 0.5 \text{ m}$

§ 2・3・2 実験結果と理論結果の比較

オ2・24 図は縦圧縮衝撃試験機を改造して作られた縦引張衝撃装置の概略を示したものであって、垂直に立てられた高さ4mの支柱に固定された



オ2・24 図 縦引張試験装置

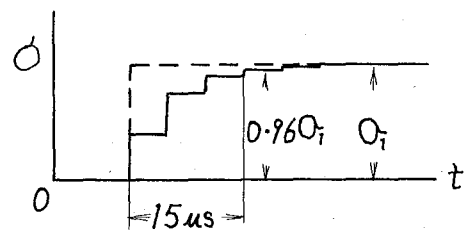
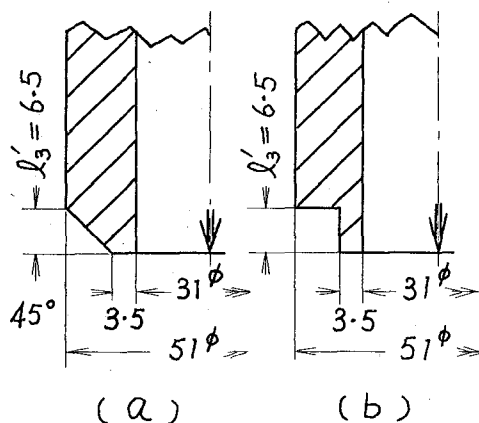
3本の案内丸棒の間を自由に落下した軟鋼製円筒が、実験棒Ⅰにねじ止めされた棒Ⅱの上端を正しく軸方向に衝撃するようになっている。

実験棒Ⅰはその上部にねじが切られており、支柱上端に固定された縦、横、高さがそれぞれ15 cm, 30 cm, 5 cmの鋼ブロックにナットで締付けられ、案内棒の間に鉛直につられている。

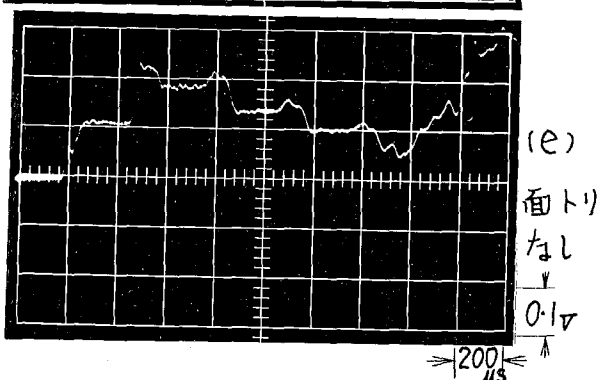
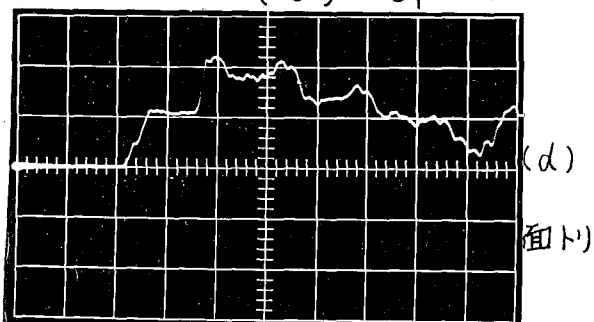
実験棒としては直径20 mm, 長さ3.5 mの軟鋼丸棒を用い、衝撃端からそれぞれ25 cm, 1.5 m, 3 m離れた表面にGeひずみゲージをはり付け、縦圧縮衝撃におけると同様な方法によって衝撃応力を測定した。

§ 2.3.1における解析結果を実験的に確認するためには円筒を棒Ⅱに正しく縦方向に衝突させると同時に、円筒および棒Ⅱを面衝突させる必要がある。

円筒の内外径比が比較的小さく、棒Ⅱの上端を中心近くで打撃する場合には、測定された応力波形の再現性は良好であった。しかし円筒の内外径比が大きく、棒Ⅱの上端を中心から離れて打撃する場合には円筒衝撃端の外縁を



(c) $\sigma_i = 1.48 \sigma_0$

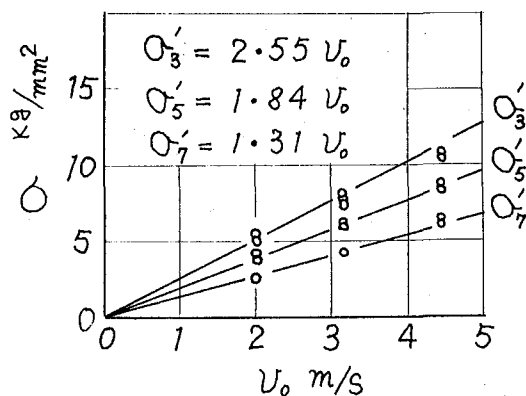
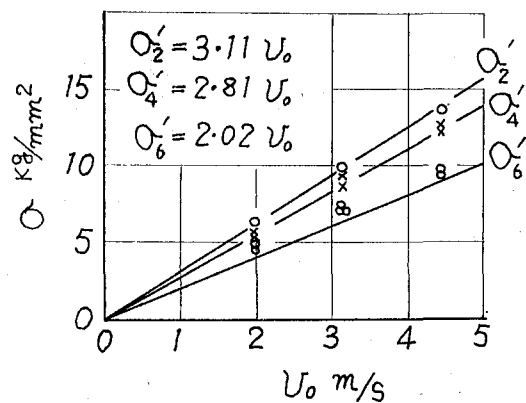


※ 2.25 図 波形の立上りに及ぼす衝撃端の面トリの影響 ($h = 1 \text{ m}$)

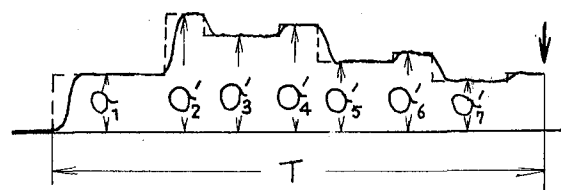
波形におよぼす面トリの影響を知るために、円筒下端には※ 2.25 図 (b) のような段がついているものとして波形の立上りを解析した。その結果、※ 2.25 図 (c) のように、弾性波は時間とともに階段状に立上り、最終的には段がない場合の一定値 σ_i に一致することになる。したが

って面とりによって波形の立上りはいくぶん悪くなるけれども、面とり部分の長さ l_3 が棒Ⅰ、Ⅱおよび円筒の全長に比して十分に短いならば、応力波の高さにはほとんど影響がなくなり、オ2・25図（b）の場合では、衝撃後15 μ sでほぼ一定値に達し、面とりがある場合とない場合についての波形写真においては、オ2・25図（d）、（e）のようにほとんど差異が認められない。

オ2・22図、オ2・23図は図式解析結果と測定結果を比較したもので、図式解析においては上端は完全な固定端とみなしており、図中の矢印は棒Ⅰの上端からの反射波が測定点に到達した瞬間を示している。弾性波が固定端に達すれば絶対値が等しい同符号の波として反射されるから、この反射波が測定点に到達すれば、理論的には引張応力は増大する。しかし棒Ⅰの上端はねじで固定され、完全な固定端ではないから、理論と実験の結果の比較は固定端からの反射波が測定点に到達するまでにおいて意味があり、両結果はよく一致している。上端からの反射波が測定点に到達後には、両結果は完全には一致しないけれども、定性的にはほぼ一致する。



オ2・26図は、オ2・22図の場合にGG断面に生ずる応力と衝撃速度との関係について、解析結果と実験結果とを比較したものである。



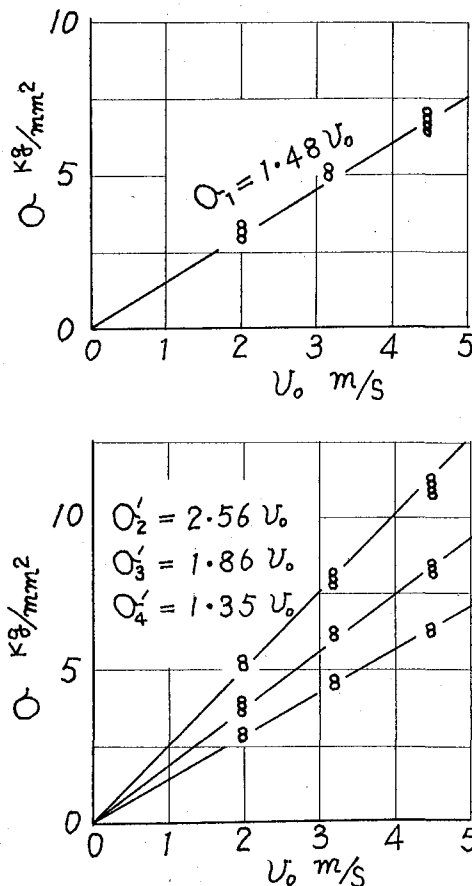
オ2・27図は、オ2・22図の各測定点に生ずる初期応力 σ_1 および最大応力 σ_{max} と衝撃速度との関係について解析結果と実験結果を比較したもので

オ2・26図 GG断面の応力変動に対する測定値と理論値の比較 ($l_3 = 1m$)

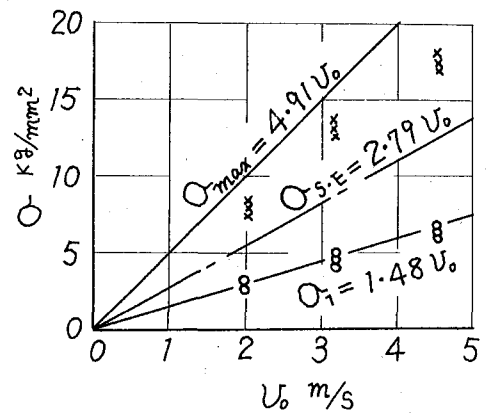
のについては両結果はよく一致した。

この実験においては最大衝撃応力 σ_{max} は棒 I の固定端からの反射波が測定点に到達後に生じ、そのために棒 I の上端を完全な固定端と仮定して解析した結果に比べれば、 σ_{max} の実験値は理論値よりかなり小さかった。

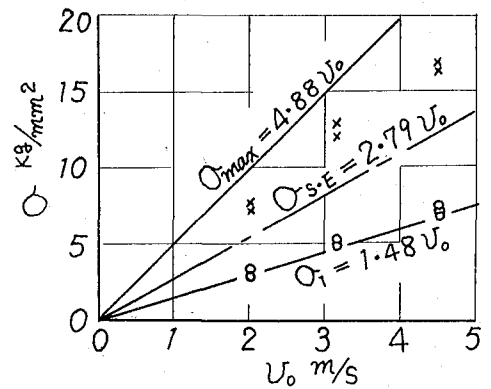
オ 2.28 図は長さ $l_3 = 75 \text{ cm}$ の円筒を用いた場合に、GG 断面に生ずる応力について実験値と解析結果を比較したもので、両者はよく一致している。



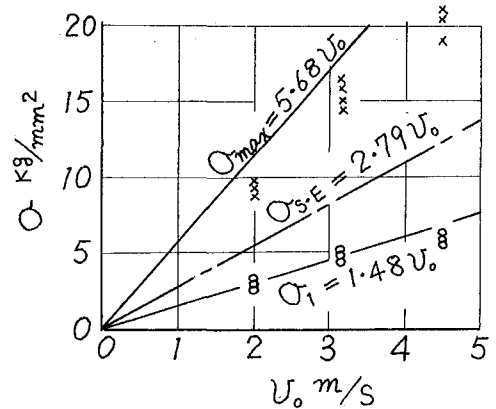
オ 2.28 図 $l_3 = 75 \text{ cm}$ の場合



(a) GG 断面



(b) FF 断面



(c) EE 断面

オ 2.27 図 応力 σ_1 , σ_{max} の

測定値と理論値の比較

($\circ$ 印は σ_1 の測定値
($\times$ 印は σ_{max} の測定値)

(2.33) 式の $\sigma_{s.e.}$ において

$W_1 = 8.51 \text{ kg}$, $W_2 = 11.45 \text{ kg}$,

$W_3 = 9.68 \text{ kg}$

ここで得られた結果は通常の教科書の結果とは、定性的にも定量的にも一致しない。なぜならば、通常の教科書においては、衝突の瞬間に一様な応力を生じ、落下円筒のもつエネルギーが弾性棒Ⅰのひずみエネルギーに変換されると仮定しているからである。

いま衝撃中は棒Ⅰの変位速度分布は直線的であると仮定して棒Ⅰの質量 W_1/δ に対する相当質量 $W_1/3\delta$ を求めて、これを棒Ⅱに付加する。そして円筒および棒Ⅱを剛体として、それらの重量をそれぞれ $W_3, W_2+W_1/3$ とし、衝撃直前の円筒の運動エネルギーに等しいひずみエネルギーが棒Ⅰにたくわえられると仮定して、棒Ⅰに生ずる最大応力 $\sigma_{s,E}$ を求めれば次の結果が得られる。

$$\sigma_{s,E} = \sqrt{\frac{W_3}{W_1} \frac{1}{1 + \frac{W_1 + 3W_2}{3W_3}}} \sqrt{\frac{E\delta}{g}} U_0 \quad (2.33)$$

ここで $U_0 = \sqrt{2gh}$ は衝撃速度， E, δ は棒Ⅰの縦弾性係数，単位体積当りの重量， g は重力加速度，そして h は落下高さである。

$\sigma_{s,E}$ は U_0 に比例するけれども、衝撃物体の重量に依存する。この実験においては、 $W_1 = 8.51 \text{ kg}$ ， $W_2 = 11.45 \text{ kg}$ ， $W_3 = 9.68 \text{ kg}$ であるから、(2.33) 式によって $\sigma_{s,E}$ を計算して表 2.27 図に記入すれば一点鎖線に示されるようになり、実験値とはかなり相違する。

2.4 結 言

材質あるいは断面積の異なる 2 本の有限直径の丸棒の縦圧縮衝撃においても、弾性波の一次元的伝ば現象を仮定し、衝撃によってエネルギーの損失がなく、衝撃中は接触面の変位速度が等しいと仮定して、衝撃の瞬間に衝撃面に生ずる応力の大きさを求める簡単な理論式を導いた。その結果、衝撃の瞬間に衝撃面に生ずる応力は衝撃速度に比例し、その比例定数は衝撃物体の材質および断面積によって決まり、衝撃物体の重量には無関係であることがわかった。しかし、通常、衝撃の瞬間に衝撃面に生じた応力がこの棒に生ずる最大応力ではない。応力は波動として棒を伝ばし、材質、形状などの不連続部に達すれば、その符号あるいは大きさが異なる応力波に

変化し、任意の時間に任意の断面に生ずる応力は、その瞬間にその断面を通過する応力波の大きさを重ね合せたものに等しい。そこで材質あるいは断面積が変化する不連続面に到達した弾性波の挙動を知るために、不連続面に達した弾性波の一部分はこの面を透過し、残りは反射されると考え、エネルギー保存則のもとに、反射される弾性波と透過される弾性波の割合を求めた。また、弾性波が衝撃面を何回か通過するうちに、衝撃面において両物体が離れる瞬間があり、事実上、この瞬間までの衝撃現象が重要である。衝撃面における両物体の接触状態の判定は、衝撃面における変位速度の考察によって可能になり、その判別条件を導いた。

以上の3つの主要な結果すなわち(a)衝撃面に生ずる応力の大きさ、(b)不連続面における弾性波の反射、透過の割合、(c)衝撃面における接触状態の判別条件、に基づいて、一端を支持された丸棒の縦圧縮衝撃によって棒中の任意の断面に任意の瞬間に生ずる応力を求めることができる。

しかし、棒の形状が複雑になるにつれて、その計算は煩雑になるために、棒の任意断面に生ずる応力の時間的変動の簡便な図式解法を示した。この理論結果をひずみゲージによる実験結果と比較すれば、両者は定性的にも定量的にもよく一致した。そして、ひずみゲージとしてGe ひずみゲージを採用したために雑音がほとんど混入することなしに複雑な応力波の挙動についても十分に研究することができた。

同様な考え方を、一端を固定して鉛直につるした段付棒の段部を落下円筒で打撃する縦引張衝撃の問題に適用して図式的に衝撃引張応力を求めた。その結果、衝撃応力は落下円筒の衝撃速度に比例するが、落下円筒の重量には直接関係しない。そしてGe ひずみゲージによる実測結果と理論結果はよく一致し、本研究で導いた図式解法は複雑な衝撃問題に対してはとくに有用である。

一般に最大応力は衝撃の瞬間に衝撃面に生ずる応力よりもかなり大きく、最大応力とそれを生ずる時間は衝撃物体および被衝撃物体の形状などによって、また断面の位置によって異なるけれども、物体の重量には関係せず初等材料力学による理論結果は実測値と定性的にも定量的にも一致しない。この原因は、初等材料力学においては衝撃後実験棒に沿って一様に応力が分布すると仮定して衝撃応力を求めているけれども、実際には応力は波動として伝ばし、応力は棒の全長を通じて一様に分布しないことにある。

3.1 緒 言

衝撃荷重をうける物体に生ずる応力を解析するためには、慣性力を考慮して導かれた動弾性基礎方程式を基にする必要がある。

動弾性問題の解法としては、従来から次の方法が知られている。

- (1) 応力の釣合式および適合条件に基づく方法
- (2) 体積変化 ϵ と回転成分 ω に関する方程式を解く方法
- (3) 変位の方程式を解く方法

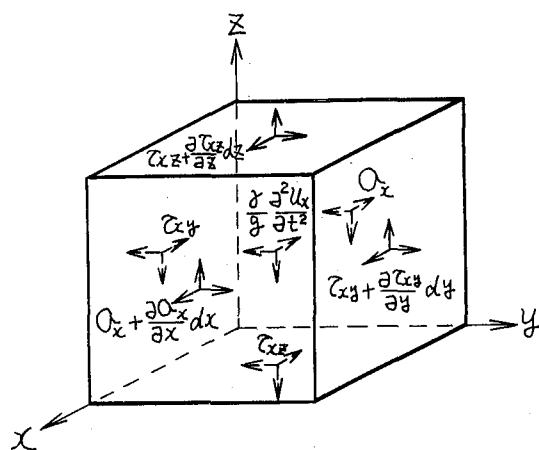
このうち一般には(1)の方法に従うことは極めて困難である。これに対して(2)の方法は ϵ と ω が互いに独立な波動方程式で表示されるために、過去においては動弾性問題において、この方法がしばしば用いられていた。しかし ϵ および ω から変位および応力を求めることに難点がある。一方、変位の方程式の解が求まれば変位を微分することによって応力が求められるから、静的三次元弾性問題においては(3)の方法に従ってある関数の微分形によって変位を表示し、弾性基礎方程式の解を求める方法が用いられてきた。このような関数は変位関数あるいは応力関数と呼ばれている。同様な方法は動弾性問題においても断片的には適用されたことがあるが、^{(71)~(74),(76)}そのために必要な応力関数については十分に明らかにされていない。

本研究では(3)の方法によって衝撃問題を解析するために、まず変位の方程式の解を応力関数を用いて一般的に表示して、これらの応力関数からえられる応力および変位の性質について検討し、衝撃応力の解析に当て必要になる基礎式を導いた。

3.2 動弾性基礎方程式

動荷重をうける等方等質の弾性体の運動方程式を求めるために，弾性体内に微小直方体を考え， Fig. 3.1 のように直角座標 (x, y, z) を選べば弾性体が動的平衡状態にあるためには， x, y, z 軸方向の変位を u_x, u_y, u_z として，次式が成立する。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right. \quad (3.1)$$



ここで ρ は比重量， g は重力加速度である。

さらに応力は次の適合条件式を満たさねばならない。

Fig. 3.1 微小六面体に作用する応力

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (3.2)$$

ここで $S = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ， $\nabla^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ， $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

そして $C_2^2 = \frac{G}{\rho}$ であり， G は横弾性係数， ν はポアソン比である。

フックの法則を用いて応力をひずみで表わし，これにひずみと変位の関係を代入すれば，応力は変位を用いて表わすことができるから，これを (3.1) 式に代入すれば，変位の方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u_x + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \nabla^2 u_y + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

が得られる。

変位ベクトルを $\mathbf{U} (u_i, u_j, u_k)$ とすれば， $e = \text{div } \mathbf{U}$ であるから (3.3) 式は $\mathbf{U}$ で次のようにも表わされる。

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{U} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

また，ベクトルの関係式

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \text{grad div } \mathbf{U} - \text{rot rot } \mathbf{U}$$

を用いれば (3.4) 式は次のようにも表わせる。

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{U} - \text{rot rot } \mathbf{U} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

一方，回転ベクトル $\Omega (\omega_i, \omega_j, \omega_k)$ は， $2\Omega = \text{rot } \mathbf{U}$ であるから，体積変化 e と回転ベクトル Ω を用いれば，(3.4) 式は次のようにも表わせる。

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \text{grad } e - 2 \text{rot } \Omega = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

弾性体の変形は伸縮を伴う体積変化の変形とせん断変形を伴う体積変化のない回転変形とが重ね合ったものと考えられるから，変形をこれらの2つに分離するために，(3.6) 式に div を乗ずれば

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \text{div grad } e - 2 \text{div rot } \Omega = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

になり，ベクトルの関係式

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div grad } e = \nabla^2 e \\ \text{div rot } \Omega = 0 \end{array} \right.$$

を用いれば (3.7) 式は

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla^2 e = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad \text{すなわち} \quad \nabla^2 e = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

ただし $C_1^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{gG}{\sigma}$ 。そこで体積変化 e は C_1 の速度の波動として弾性体内を伝ばすることになる。

また (3.6) 式に rot を乗ずれば

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \text{rot grad } e - 2 \text{rot rot } \Omega = \frac{2}{C_2^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

になり、これにベクトルの関係式

$$\begin{cases} \text{rot grad } e = 0 \\ \text{rot rot } \Omega = \text{grad div } \Omega - \nabla^2 \Omega \end{cases}$$

および

$$\text{div } \Omega = \frac{1}{2} \text{div rot } \mathbf{U} = 0$$

を用いれば $\text{rot rot } \Omega = -\nabla^2 \Omega$ の関係が成立するから、

(3.9) 式は

$$\nabla^2 \Omega = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \quad (\text{div } \Omega = 0) \quad (3.10)$$

と表わすことができる。そこで回転 Ω は C_2 の速度の波動として弾性体内を伝ばすることになる。

ここで導かれた (3.4), (3.5), (3.8), (3.10) 式はすべての直交曲線座標 (i, j, k) について成立し、直角座標, 円柱座標, 球座標についての弾性基礎方程式は一括して付録 A-a にまとめである。

変位ベクトル $\mathbf{U} (u_x, v_y, w_z)$ の性質を調べるために、変位の方程式 (3.4) 式を書き直せば

$$\nabla_2^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad } e = 0 \quad (3.11)$$

と表わされ、この両辺に $\nabla_1^2 \equiv \nabla^2 - (1/C_1^2) \partial^2 / \partial t^2$ を乗ずれば

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla_1^2 \text{grad } e = 0$$

になり、(3.8) 式の関係を用いれば

$$\nabla_1^2 \text{grad } e = \text{grad } \nabla_1^2 e = 0$$

であるから次の関係が成立する。

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 U = 0$$

また垂直応力の和を $S = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ とすれば、フックの法則から

$$e = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)G} S$$

であるから (3.8) 式より $\nabla_1^2 S = 0$ になる。

また応力の適合条件 (3.2) 式の両辺に ∇_1^2 を乗ずれば $\nabla_1^2 S = 0$ の関係を用いて、次の結果がえられる。

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = 0$$

この結果、静的平衡状態においては

$$\begin{cases} \nabla^2 e = \nabla^2 S = 0 \\ \nabla^4 (u_x, v_y, w_z) = 0 \\ \nabla^4 (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = 0 \end{cases}$$

すなわち e, S は調和関数であり、変位および応力は重調和関数であるのに対して、動的平衡状態においては

$$\begin{cases} \nabla_1^2 e = \nabla_1^2 S = 0 \\ \nabla_1^2 \nabla_2^2 (u_x, v_y, w_z) = 0 \\ \nabla_1^2 \nabla_2^2 (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = 0 \end{cases}$$

になり、 e, S は調和関数ではなく、変位および応力成分は重調和関数ではないことがわかる。

3.3 応力関数の誘導 (三次元応力状態)

任意のベクトル量 U は一般にヘルムホルツの定理によってスカラー量 φ_0 とベクトル量 $\Psi (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ を用いて

$$U = \text{grad } \varphi_0 + \text{rot } \Psi \quad (3.12)$$

で表わせる。そこで (3.12) 式で表わされるベクトル U が変位の方程式の解であるために φ_0, Ψ が満足すべき条件を求めよう。

(3.12) 式を用いれば体積変化 e は

$$\begin{aligned} e &= \text{div } U = \text{div grad } \varphi_0 + \text{div rot } \Psi \\ &= \nabla^2 \varphi_0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

になり、(3.12), (3.13) 式を変位の方程式 (3.11) 式に代入して整理すれば

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \operatorname{grad} \nabla_1^2 \varphi_0 + \operatorname{rot} \nabla_2^2 \Psi = 0$$

そして φ_0, Ψ に未定定数を含めれば

$$\operatorname{grad} \nabla_1^2 \varphi_0 + \operatorname{rot} \nabla_2^2 \Psi = 0 \quad (3.14)$$

と表わしてもよい。

(3.14)式の解は

$$\begin{cases} \operatorname{grad} \nabla_1^2 \varphi_0 = 0 \\ \operatorname{rot} \nabla_2^2 \Psi = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

を満足する φ_0, Ψ からなる。そして (3.15)式は

$$\begin{cases} \nabla_1^2 \varphi_0 = 0 \\ \nabla_2^2 \Psi = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

あるいは任意のスカラー量 χ を用いて

$$\begin{cases} \nabla_1^2 \varphi_0 = 0 \\ \nabla_2^2 \Psi = \operatorname{grad} \chi \end{cases} \quad (3.17)$$

とおくことによって満足される。

直角座標 (x, y, z) においては

$$\Psi = \left(\frac{1}{2} x \chi, \frac{1}{2} y \chi, \frac{1}{2} z \chi \right)$$

とおけば

$$\nabla_2^2 \Psi = \operatorname{grad} \chi + \frac{1}{2} (x \nabla_2^2 \chi, y \nabla_2^2 \chi, z \nabla_2^2 \chi)$$

になるから、 $\nabla_2^2 \chi = 0$ ならば (3.17)式のオ2式は満足される。

したがって変位の方程式 (3.11)式の解は、直角座標においては

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} + z \frac{\partial \chi}{\partial y} - y \frac{\partial \chi}{\partial z} \\ v_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} + x \frac{\partial \chi}{\partial z} - z \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ w_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + y \frac{\partial \chi}{\partial x} - x \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\nabla_1^2 \varphi_0 = 0, \quad \nabla_2^2 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \chi) = 0$$

で表わせる。

また (3.18)式において

$$\lambda_2 = -\frac{\partial \psi_3}{\partial x}, \quad \lambda_1 = \frac{\partial \psi_3}{\partial y}$$

とおけば

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} \\ v_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \\ w_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \nabla^2 \psi_3 \\ \nabla_z^2 \psi_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.19)$$

同様にして次のような解も存在することがわかる。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y}, \quad v_y = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} - \nabla^2 \psi_2, \quad w_z = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} \\ \nabla_z^2 \psi_2 = 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \nabla^2 \psi_1, \quad v_y = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y}, \quad w_z = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} \\ \nabla_z^2 \psi_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

変位とひずみ，ひずみと応力の関係を用いれば，応力を応力関数の微分形で表わすことができる。

以上のようにして直角座標における変位の方程式の解が応力関数 φ_0 ， λ_1 ， λ_2 ， λ_3 ， ψ_1 ， ψ_2 ， ψ_3 ， χ の微分形によって表わされた。一般に (3.12) 式から (3.17) 式までの関係は任意の直交曲線座標について成立するから，直角座標の場合と同様に応力関数 φ_0 ， λ_1 ， λ_2 ， λ_3 等によって変位の方程式の解を表わすことができる。しかし任意の直交座標 (i ， j ， k) においては， $\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ をベクトルとして

$$\nabla^2 \Psi \neq (\nabla^2 \lambda_1)i + (\nabla^2 \lambda_2)j + (\nabla^2 \lambda_3)k$$

であるから (3.12) 式と (3.16) 式から直接に直角座標以外の座標系における結果を求めても，その結果は応力解析に便利な形で表わされない。

そこで直角座標で得られた結果を座標変換して，他の座標系に対する結

果を求めた。

直角座標，円柱座標，球座標の場合について，応力成分と応力関数の関係が以下にまとめて示してある。ここで応力関数をスカラーポテンシャルと考えれば，応力関数は座標系によって変らないから，いずれの座標系においても次の波動方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ \text{ただし } \phi = \varphi_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \chi \end{array} \right. \quad (3.22)$$

を満す関数であればよい。

応力と応力関数の関係

直角座標による表示

$$u = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}; \quad e = \nabla^2 \varphi_0, \quad \nabla_1^2 \varphi_0 = 0$$

$$\frac{\sigma_x}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\sigma_y}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\sigma_z}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y \partial z}$$

$$u = 0, \quad v = \frac{\partial \lambda_1}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}; \quad e = 0, \quad \nabla_2^2 \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\sigma_x}{2G} = 0$$

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\sigma_y}{2G} = \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{2G} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\sigma_z}{2G} = -\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} \right)$$

$$u = -\frac{\partial \lambda_2}{\partial z}, \quad v = 0, \quad w = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}; \quad e = 0, \quad \nabla_z^2 \lambda_2 = 0$$

$$\frac{O_x}{2G} = -\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{O_y}{2G} = 0$$

$$\frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{O_z}{2G} = \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial y}$$

$$u = \frac{\partial \lambda_3}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \lambda_3}{\partial x}, \quad w = 0; \quad e = 0, \quad \nabla_z^2 \lambda_3 = 0$$

$$\frac{O_x}{2G} = \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{O_y}{2G} = -\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{O_z}{2G} = 0$$

$$\frac{\tau_{yz}}{2G} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x \partial z}$$

$$u = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \nabla^2 \psi_1, \quad v = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y}, \quad w = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z}; \quad e = 0, \quad \nabla_z^2 \psi_1 = 0$$

$$\frac{O_x}{2G} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \nabla^2 \psi_1 \right)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_1 \right)$$

$$\frac{O_y}{2G} = \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_1 \right)$$

$$\frac{O_z}{2G} = \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial z^2}$$

$$\frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$u = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y}, \quad v = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} - \nabla^2 \psi_2, \quad w = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z}; \quad e = 0, \quad \nabla_z^2 \psi_2 = 0$$

$$\frac{O_x}{2G} = \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_2 \right)$$

$$\frac{O_y}{2G} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} - \nabla^2 \psi_2 \right)$$

$$\frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$\frac{O_z}{2G} = \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y \partial z^2}$$

$$\frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_2 \right)$$

$$u = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y \partial z}, \quad w = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \nabla^2 \psi_3; \quad e = 0, \quad \nabla_z^2 \psi_3 = 0$$

$$\frac{O_x}{2G} = \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x^2 \partial z}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$\frac{O_y}{2G} = \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial y^2 \partial z}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_3 \right)$$

$$\frac{O_z}{2G} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \nabla^2 \psi_3 \right)$$

$$\frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_3 \right)$$

$$u = y \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad v = z \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}, \quad w = x \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

$$e = 0, \quad \nabla_z^2 \chi = 0$$

$$\frac{O_x}{2G} = y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} - z \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = z \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} - x \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{O_y}{2G} = z \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{G} = y \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{O_z}{2G} = x \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} - y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\tau_{yz}}{G} = x \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} - y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

円柱座標による表示

$$u = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}, \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta}, \quad w = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}; \quad e = \nabla^2 \varphi_0, \quad \nabla_1^2 \varphi_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{O_r}{2G} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 & \frac{\tau_{\theta z}}{2G} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta \partial z} \\ \frac{O_\theta}{2G} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 & \frac{\tau_{rz}}{2G} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial z} \\ \frac{O_z}{2G} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 & \frac{\tau_{r\theta}}{2G} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \left(\frac{\varphi_0}{r} \right) \end{aligned}$$

$$u = \sin \theta \frac{\partial \lambda_1}{\partial z}, \quad v = \cos \theta \frac{\partial \lambda_1}{\partial z}, \quad w = -\sin \theta \frac{\partial \lambda_1}{\partial r} - \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta}$$

$$e = 0, \quad \nabla_2^2 \lambda_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{O_r}{2G} &= \sin \theta \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial r \partial z} \\ \frac{O_\theta}{2G} &= \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta \partial z} \\ \frac{O_z}{2G} &= -\sin \theta \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial r \partial z} - \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta \partial z} \\ \frac{\tau_{\theta z}}{2G} &= \frac{1}{2} \cos \theta \left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{2} \sin \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial r \partial \theta} \right) \\ \frac{\tau_{rz}}{2G} &= \frac{1}{2} \sin \theta \left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{2} \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial r \partial \theta} \right) \\ \frac{\tau_{r\theta}}{2G} &= \frac{1}{2} \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{2} \cos \theta \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial r \partial z} \end{aligned}$$

$$u = -\cos \theta \frac{\partial \lambda_2}{\partial z}, \quad v = \sin \theta \frac{\partial \lambda_2}{\partial z}, \quad w = \cos \theta \frac{\partial \lambda_2}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta}$$

$$e = 0, \quad \nabla_2^2 \lambda_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{O_r}{2G} &= -\cos \theta \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r \partial z} \\ \frac{O_\theta}{2G} &= \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta \partial z} \\ \frac{O_z}{2G} &= -\sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta \partial z} + \cos \theta \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r \partial z} \\ \frac{\tau_{\theta z}}{2G} &= \frac{1}{2} \sin \theta \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{2} \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\tau_{rz}}{2G} &= \frac{1}{2} \sin \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{1}{2} \cos \theta \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\tau_{r\theta}}{2G} &= \frac{1}{2} \sin \theta \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial r \partial z} - \frac{1}{2} \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta \partial z} \end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{\partial \lambda_3}{\partial r}, \quad w = 0; \quad e = 0, \quad \nabla^2 \lambda_3 = 0$$

$$\frac{O_r}{2G} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\lambda_3}{r} \right)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{2G} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r \partial z}$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\lambda_3}{r} \right)$$

$$\frac{\tau_{rz}}{2G} = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \theta \partial z}$$

$$\frac{O_z}{2G} = 0$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{2G} = \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial z^2} - \nabla^2 \lambda_3 \right)$$

$$u = \sin \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \nabla^2 \psi_1 \right)$$

$$v = \sin \theta \left(\nabla^2 \psi_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} \right) + \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right)$$

$$w = -\sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial z} + \cos \theta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z}$$

$$e = 0, \quad \nabla^2 \psi_1 = 0$$

$$\frac{O_r}{2G} = \sin \theta \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} - \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi_1 \right)$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \sin \theta \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta \partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right)$$

$$+ \cos \theta \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r \partial \theta^2} \right)$$

$$\frac{O_z}{2G} = -\sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta \partial z^2} + \cos \theta \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r \partial z^2}$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{2G} = \sin \theta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z \partial \theta^2} \right) + \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r \partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial z} \right)$$

$$\frac{\tau_{rz}}{2G} = \sin \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r \partial \theta \partial z} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi_1 \right)$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{2G} = \sin \theta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r \partial \theta^2} \right)$$

$$+ \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi_1 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right)$$

$$u = \sin \theta \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} - \nabla^2 \psi_2 \right) + \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right)$$

$$v = \sin \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) + \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} - \nabla^2 \psi_2 \right)$$

$$w = \sin \theta \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial z} + \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial z}$$

$$e = 0, \quad \nabla_z^2 \psi_2 = 0$$

$$\frac{O_r}{2G} = \sin \theta \left(\frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r^3} - \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi_2 \right) + \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{O_\theta}{2G} = & \sin \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^2 \partial r} \right) \\ & + \cos \theta \frac{1}{r} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta \partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{O_z}{2G} = \sin \theta \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r \partial z^2} + \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta \partial z^2}$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{2G} = \sin \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r \partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial z} \right) + \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^2 \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi_2 \right)$$

$$\frac{\tau_{rz}}{2G} = \sin \theta \left(\frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi_2 \right) + \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r \partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{r\theta}}{2G} = & \sin \theta \left(-\frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \psi_2 \right) \\ & + \cos \theta \left(\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial r \partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$u = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r \partial z}, \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \theta \partial z}, \quad w = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \nabla^2 \psi_3$$

$$e = 0, \quad \nabla_z^2 \psi_3 = 0$$

$$\frac{O_r}{2G} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} + \nabla^2 \psi_3 \right)$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right)$$

$$\frac{O_z}{2G} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \nabla^2 \psi_3 \right)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{2G} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_3 \right)$$

$$\frac{\tau_{rz}}{2G} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_3 \right)$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{2G} = \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta \partial z} \left(\frac{\psi_3}{r} \right)$$

$$u = -\frac{z}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad v = -r \frac{\partial \chi}{\partial z} + z \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial \chi}{\partial \theta}; \quad e = 0, \quad \nabla^2 \chi = 0$$

$$\frac{O_r}{2G} = \frac{z}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta}$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{G} = -r \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial \chi}{\partial r} + z \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = -\frac{z}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial z} + \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta}$$

$$\frac{\tau_{rz}}{G} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial z}$$

$$\frac{O_z}{2G} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial z}$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{G} = z \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} - \frac{z}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r}$$

球座標による表示

$$u = \frac{\partial \varphi_0}{\partial R}, \quad v = \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta}, \quad w = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi}; \quad e = \nabla^2 \varphi_0, \quad \nabla_1^2 \varphi_0 = 0$$

$$\frac{O_R}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial R^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\frac{\tau_{R\theta}}{2G} = \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial R \partial \theta} - \frac{1}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta}$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{\tau_{R\varphi}}{2G} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi}$$

$$\frac{O_\varphi}{2G} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\frac{\tau_{\theta\varphi}}{2G} = \frac{1}{R^2 \sin \varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \varphi \partial \theta} - \cot \varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \right)$$

$$u = -\frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} - \cos \theta \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta}, \quad w = \sin \theta \frac{\partial \lambda_1}{\partial R} + \cos \theta \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta}$$

$$v = \cos \theta \left(\cos \varphi \frac{\partial \lambda_1}{\partial R} - \sin \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} \right), \quad e = 0, \quad \nabla^2 \lambda_1 = 0$$

$$\frac{O_R}{2G} = \sin \theta \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R \partial \varphi} \right) + \cos \theta \left(\frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} - \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R \partial \theta} \right)$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \cos \theta \left(\frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R \partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \varphi \partial \theta} \right)$$

$$\frac{O_\varphi}{2G} = \sin \theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} \right) + \cos \theta \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \varphi \partial \theta} - \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\tau_{R\theta}}{2G} = \frac{\sin \theta}{2} \left(\frac{\cot \varphi}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta \partial \varphi} \right)$$

$$+ \frac{\cos \theta}{2} \left(\cos \varphi \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R^2} - \cos \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_1}{\partial R} - \sin \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\frac{\tau_{R\varphi}}{2G} = \frac{\sin \theta}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_1}{\partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\cos \theta}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R \partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} - \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta \partial \varphi} \right)$$

$$\frac{\tau_{\theta\varphi}}{2G} = \frac{\sin \theta}{2} \left(\frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R \partial \theta} - \frac{1}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\cos \theta}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{R} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R \partial \varphi} + \frac{1}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$u = \cos \theta \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varphi} - \sin \theta \cot \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta}$$

$$v = \sin \theta \left(\cos \varphi \frac{\partial \lambda_2}{\partial R} - \sin \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varphi} \right)$$

$$w = \sin \theta \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial \lambda_2}{\partial R}$$

$$e = 0, \quad \nabla_2^2 \lambda_2 = 0$$

$$\frac{O_R}{2G} = \sin \theta \left(\frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} - \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial R \partial \theta} \right) + \cos \theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varphi} \right)$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \sin \theta \left(\frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial R \partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta \partial \varphi} \right)$$

$$\frac{O_\varphi}{2G} = \sin \theta \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} \right) + \cos \theta \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial R \partial \varphi} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{R\theta}}{2G} = & \frac{\sin \theta}{2} \left(\cos \varphi \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial R^2} - \frac{\cos \varphi}{R} \frac{\partial \lambda_2}{\partial R} - \frac{\sin \varphi}{R} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\cot \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta^2} \right) \\ & + \frac{\cos \theta}{2} \left(\frac{1}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\cot \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{R\varphi}}{2G} = & \frac{\sin \theta}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial R \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\cos 2\varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} - \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) \\ & + \frac{\cos \theta}{2} \left(-\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_2}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \varphi^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta\varphi}}{2G} = & \frac{\sin \theta}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{R} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial R \partial \varphi} - \frac{\sin \varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \theta^2} \right) \\ & + \frac{\cos \theta}{2} \left(\frac{1}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} - \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial R \partial \theta} \right) \end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}, \quad v = -\sin \varphi \frac{\partial \lambda_3}{\partial R} - \cos \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi}, \quad w = \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}$$

$$e = 0, \quad \nabla_2^2 \lambda_3 = 0$$

$$\frac{O_R}{2G} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial R \partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial R \partial \theta} - \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}$$

$$\frac{O_\varphi}{2G} = \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cot^2 \varphi}{R^2} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}$$

$$\frac{\tau_{R\theta}}{2G} = -\frac{\sin \varphi}{2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial R^2} + \frac{\sin \varphi}{2R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial R} - \frac{\cos \varphi}{2R} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial R \partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{R^2} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi} + \frac{1}{2R^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\tau_{R\varphi}}{2G} = \frac{\cot \varphi}{2R} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial R \partial \theta} - \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \theta \partial \varphi}$$

$$\frac{\tau_{\theta\varphi}}{2G} = -\frac{\sin \varphi}{2R} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial R \partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{2R^2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2R^2 \sin \varphi} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi} + \frac{1}{2R^2} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \theta^2}$$

$$U = \sin\theta \left(\frac{1}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{R \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \theta} \right) + \cos\theta \left(\sin\varphi \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R^2} - \sin\varphi \nabla^2 \psi_1 + \frac{\cos\varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \varphi} - \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right)$$

$$V = \sin\theta \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} \right) + \cos\theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \theta} + \frac{\cot\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{1}{R^2 \sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right)$$

$$W = \sin\theta \left(\frac{1}{R^2} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi} \right)$$

$$+ \cos\theta \left(\frac{\sin\varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \varphi} - \frac{\sin\varphi}{R^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos\varphi}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} - \cos\varphi \nabla^2 \psi_1 \right)$$

$$e = 0, \quad \nabla^2 \psi_1 = 0$$

$$\frac{O_R}{2G} = \sin\theta \left(\frac{2}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \theta} - \frac{1}{R \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^2 \partial \theta} - \frac{2}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right)$$

$$+ \cos\theta \left(\sin\varphi \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^3} - \sin\varphi \frac{\partial}{\partial R} \nabla^2 \psi_1 + \frac{\cos\varphi}{R} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^2 \partial \varphi} - \frac{2\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \varphi} + \frac{2\cos\varphi}{R^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right)$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \sin\theta \left(\frac{1}{R \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^2 \partial \theta} - \frac{1}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \theta} + \frac{1}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi^2} - \frac{2}{R^3} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{2}{R^3 \sin^3\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right)$$

$$+ \cos\theta \left(\frac{\sin\varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R^2} - \frac{\sin\varphi}{R^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} + \frac{2\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \varphi} + \frac{1}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \theta^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$- \frac{\cos\varphi(1+2\sin^2\varphi)}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta^2 \partial \varphi} - \frac{2}{R^3 \sin^3\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\frac{O_\varphi}{2G} = \sin\theta \left(\frac{2\cos\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{1}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi^2} - \frac{2\cos^2\varphi}{R^3 \sin^3\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \theta} \right)$$

$$+ \cos\theta \left(\frac{\sin\varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R^2} - \frac{\sin\varphi}{R^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} + \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \varphi} + \frac{\sin\varphi}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \varphi^2} - \frac{1+\sin^2\varphi}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$- \frac{\cos\varphi}{R} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^2 \partial \varphi} + (\cot^2\varphi - 1) \frac{\cos\varphi}{R^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{\cos\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta^2 \partial \varphi} + \frac{2}{R^3} \frac{\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\frac{T_{R\theta}}{2G} = \frac{\sin\theta}{2} \left(\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \varphi^2} - \frac{\cot\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^2 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \theta^2} - \frac{2}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{2\cot\varphi}{R^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right)$$

$$+ \frac{2}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\cos\theta}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^2 \partial \theta} + \frac{2\cot\varphi}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \theta \partial \varphi} - \frac{2(1+2\sin^2\varphi)}{R^2 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \theta} - \frac{5\cot\varphi}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi} \right)$$

$$- \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi^2} + \frac{4}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta^3} \right)$$

$$\frac{T_{R\varphi}}{2G} = \frac{\sin\theta}{2} \left(\frac{2}{R^2} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \theta} - \frac{2}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \theta \partial \varphi} + \frac{4}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{4\cos\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right)$$

$$+ \frac{\cos\theta}{2} \left(\sin\varphi \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^2 \partial \varphi} - \frac{1+5\sin^2\varphi}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \varphi^2} - \cos\varphi \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^3} - \frac{1}{R^2} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \theta^2} \right)$$

$$- \frac{\sin\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta^2 \partial \varphi} + \frac{4\cos\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \frac{\sin\varphi}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \varphi^3} - \frac{3\cos\varphi}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{3+2\sin^2\varphi}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right)$$

$$\frac{T_{\theta\varphi}}{2G} = \frac{\sin\theta}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \theta^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \varphi^3} - \frac{\cot\varphi}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta^2 \partial \varphi} + \frac{2\cos\varphi}{R^3 \sin^3\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} \right)$$

$$+ \frac{\cos\theta}{2} \left(\frac{2}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cot\varphi}{R} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^2 \partial \theta} - \frac{2\cot\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \theta} - \frac{4+\cos^2\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\cot\varphi}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta \partial \varphi^2} \right)$$

$$- \frac{\cos\varphi}{R^3 \sin^3\varphi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta^3} + \frac{4}{R^4} \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
U &= \sin\theta \left(\sin\varphi \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R^2} - \sin\varphi \nabla^2 \psi_2 + \frac{\cos\varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \varphi} - \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right) + \cos\theta \frac{1}{R \sin\varphi} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) \\
V &= \sin\theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \theta} + \frac{\cot\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{1}{R^2 \sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) - \cos\theta \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} \right) \\
W &= \sin\theta \left(\frac{\cos\varphi}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial R} + \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} - \cos\varphi \nabla^2 \psi_2 + \frac{\sin\varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \varphi} - \frac{\sin\varphi}{R^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right) \\
&\quad + \cos\theta \left(\frac{1}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos\varphi}{R^2 \sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) \\
e &= 0, \quad \nabla^2 \psi_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{O_R}{2G} &= \sin\theta \left(\sin\varphi \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^3} - \sin\varphi \frac{\partial}{\partial R} \nabla^2 \psi_2 + \frac{\cos\varphi}{R} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^2 \partial \varphi} - \frac{2\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \varphi} + \frac{2\cos\varphi}{R^3} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right) \\
&\quad + \cos\theta \left(\frac{1}{R \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^2 \partial \theta} - \frac{2}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \theta} + \frac{2}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{O_\theta}{2G} &= \sin\theta \left(\frac{\sin\varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R^2} - \frac{\sin\varphi}{R^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial R} + \frac{2\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \varphi} + \frac{1}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R \partial \theta^2} + \frac{\cos^2\varphi}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{R^3} \frac{\cos\varphi(1+2\sin^2\varphi)}{\sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^3} \frac{\cot\varphi}{\sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^2 \partial \varphi} - \frac{2}{R^3 \sin^3\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} \right) \\
&\quad + \cos\theta \left(-\frac{1}{R \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \theta} - \frac{1}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi^2} + \frac{2 \cot\varphi}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{2}{R^3 \sin^3\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{O_\varphi}{2G} &= \sin\theta \left(\frac{\sin\varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R^2} - \frac{\sin\varphi}{R^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial R} + \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \varphi} + \frac{\sin\varphi}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R \partial \varphi^2} - \frac{1+\sin^2\varphi}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} - \frac{\cos\varphi}{R} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^2 \partial \varphi} \right. \\
&\quad \left. + (\cot^2\varphi - 1) \frac{\cos\varphi}{R^3} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} - \frac{\cos\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^2 \partial \varphi} + \frac{2}{R^3} \frac{\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} \right) \\
&\quad + \cos\theta \left(\frac{1}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \theta} + \frac{1}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi^2} - \frac{2 \cos\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{2 \cos^2\varphi}{R^3 \sin^3\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{T_{R\theta}}{2G} &= \frac{\sin\theta}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^2 \partial \theta} + \frac{2 \cot\varphi}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R \partial \theta \partial \varphi} - \frac{2(1+2\sin^2\varphi)}{R^2 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \theta} - \frac{5 \cot\varphi}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^3} \right) \\
&\quad + \frac{\cos\theta}{2} \left(-\frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^3} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R \partial \varphi^2} + \frac{\cot\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \varphi} + \frac{1}{R^2 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R \partial \theta^2} + \frac{2}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} - \frac{2 \cot\varphi}{R^3} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} - \frac{2}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{T_{R\varphi}}{2G} &= \frac{\sin\theta}{2} \left(-\cos\varphi \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^3} + \frac{\sin\varphi}{R} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^2 \partial \varphi} - \frac{1+5\sin^2\varphi}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R \partial \varphi^2} - \frac{\cos\varphi}{R^2 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R \partial \theta^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin\varphi}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \varphi^3} - \frac{3\cos\varphi}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} + \frac{3+2\sin^2\varphi}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} - \frac{\sin\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^2 \partial \varphi} + \frac{4\cos\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} \right) \\
&\quad + \frac{\cos\theta}{2} \left(-\frac{2\cos\varphi}{R^2 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \theta} + \frac{2}{R^2 \sin\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R \partial \theta \partial \varphi} - \frac{4}{R^3 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{4\cos\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{T_{\theta\varphi}}{2G} &= \frac{\sin\theta}{2} \left(\frac{2}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R \partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cot\varphi}{R} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^2 \partial \theta} - \frac{2 \cot\varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R \partial \theta} - \frac{4+\cos^2\varphi}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\cot\varphi}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta \partial \varphi^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{R^3} \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^3} + \frac{4\cos\varphi}{R^3 \sin^3\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) \\
&\quad - \frac{\cos\theta}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial R^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \varphi^3} - \frac{\cot\varphi}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^3 \sin^2\varphi} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^2 \partial \varphi} + \frac{2\cos\varphi}{R^3 \sin^3\varphi} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} \right)
\end{aligned}$$

$$u = \sin \varphi \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi} \right) + \cos \varphi \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R^2} - \nabla^2 \psi_3 \right)$$

$$v = \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \theta \partial \varphi}$$

$$w = \sin \varphi \left(\nabla^2 \psi_3 - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_3}{\partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2} \right) + \cos \varphi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \right)$$

$$e = 0, \quad \nabla^2 \psi_3 = 0$$

$$\frac{O_R}{2G} = \sin \varphi \left(\frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R^2 \partial \varphi} - \frac{2}{R^3} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \right) + \cos \varphi \left(\frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R^3} - \frac{\partial}{\partial R} \nabla^2 \psi_3 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{O_\theta}{2G} &= \frac{\cos \varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R^2} - \frac{\cos \varphi}{R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial R} + \frac{\cos 2\varphi}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi} - \frac{\cos 2\varphi}{R^3 \sin \varphi} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \frac{\cot \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R \partial \theta^2} - \frac{1}{R^3 \sin \varphi} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial \theta^2 \partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\frac{O_\varphi}{2G} = \sin \varphi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi_3 - \frac{3}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial \varphi^3} + \frac{2}{R^3} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \right)$$

$$+ \cos \varphi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial R} - \frac{2}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R \partial \varphi^2} \right)$$

$$\frac{T_{R\theta}}{2G} = \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R^2 \partial \theta} - \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \theta} - \frac{\cot \varphi}{2R} \nabla^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R \partial \theta \partial \varphi} + \frac{2}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \theta \partial \varphi}$$

$$\frac{T_{R\varphi}}{2G} = \frac{\sin \varphi}{2} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R^3} + \frac{\cos \varphi}{R} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R^2 \partial \varphi} - \frac{\sin \varphi}{2R^2} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R \partial \varphi^2} - \frac{3}{2} \frac{\cos \varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi}$$

$$+ \frac{1}{2R^2 \sin \varphi} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R \partial \theta^2} + \frac{\sin \varphi}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \varphi}{R^3} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{2R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi_3 - \frac{1}{R^3 \sin \varphi} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{T_{\theta\varphi}}{2G} = \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R \partial \theta \partial \varphi} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial \theta \partial \varphi^2} - \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \theta} + \frac{1}{2R} \nabla^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta}$$

$$u = 0, \quad v = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}, \quad w = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}; \quad e = 0, \quad \nabla^2 \chi = 0$$

$$\frac{O_R}{2G} = 0$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cot \varphi}{R \sin \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}$$

$$\frac{O_\varphi}{2G} = \frac{\cot \varphi}{R \sin \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial \varphi}$$

$$\frac{T_{R\theta}}{G} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}$$

$$\frac{T_{R\varphi}}{G} = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial R \partial \theta} + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}$$

$$\frac{T_{\theta\varphi}}{G} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} - \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}$$

円柱座標による表示 (軸対称)

$$u = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} , \quad v = 0 , \quad w = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} ; \quad e = \nabla^2 \varphi_0 , \quad \nabla_1^2 \varphi_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{O_r}{2G} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 & \frac{\tau_{rz}}{2G} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial z} \\ \frac{O_\theta}{2G} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 & \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta z} = 0 \\ \frac{O_z}{2G} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 \end{aligned}$$

$$u = 0 , \quad v = -\frac{\partial \lambda_3}{\partial r} , \quad w = 0 ; \quad e = 0 , \quad \nabla_2^2 \lambda_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{O_r}{2G} &= O_\theta = O_z = 0 & \frac{\tau_{\theta z}}{2G} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r \partial z} \\ \tau_{rz} &= 0 & \frac{\tau_{r\theta}}{2G} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial z^2} - \nabla^2 \lambda_3 \right) \end{aligned}$$

$$u = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r \partial z} , \quad v = 0 , \quad w = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \nabla^2 \psi_3 ; \quad e = 0 , \quad \nabla_2^2 \psi_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{O_r}{2G} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} + \nabla^2 \psi_3 \right) & \frac{\tau_{rz}}{2G} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_3 \right) \\ \frac{O_\theta}{2G} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) & \tau_{r\theta} &= 0 \\ \frac{O_z}{2G} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \nabla^2 \psi_3 \right) & \tau_{\theta z} &= 0 \end{aligned}$$

$$u = 0 , \quad v = -r \frac{\partial \chi}{\partial z} + z \frac{\partial \chi}{\partial r} , \quad w = 0 ; \quad e = 0 , \quad \nabla_2^2 \chi = 0$$

$$\begin{aligned} O_r &= O_\theta = O_z = 0 & \frac{\tau_{r\theta}}{G} &= z \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{z}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} \\ \tau_{rz} &= 0 & \frac{\tau_{\theta z}}{G} &= \frac{\partial \chi}{\partial r} + z \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} - r \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

球座標による表示 (軸対称)

$$u = \frac{\partial \varphi_0}{\partial R}, \quad v = 0, \quad w = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi}; \quad e = \nabla^2 \varphi_0, \quad \nabla_1^2 \varphi_0 = 0$$

$$\frac{O_R}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial R^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\frac{\tau_{R\varphi}}{2G} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi}$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial R} + \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\tau_{R\theta} = 0$$

$$\frac{O_\varphi}{2G} = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\tau_{\theta\varphi} = 0$$

$$u = 0, \quad v = -\sin \varphi \frac{\partial \lambda_3}{\partial R} - \cos \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi}, \quad w = 0; \quad e = 0, \quad \nabla_2^2 \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\tau_{R\theta}}{2G} = -\frac{\sin \varphi}{2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial R^2} + \frac{\sin \varphi}{2R} \frac{\partial \lambda_3}{\partial R} - \frac{\cos \varphi}{2R} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial R \partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{R^2} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\tau_{\theta\varphi}}{2G} = -\frac{\sin \varphi}{2R} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial R \partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{2R^2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2R^2 \sin \varphi} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi}$$

$$O_R = O_\theta = O_\varphi = \tau_{\theta\varphi} = 0$$

$$u = \sin \varphi \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi} \right) + \cos \varphi \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R^2} - \nabla^2 \psi_3 \right), \quad v = 0$$

$$w = \sin \varphi \left(\nabla^2 \psi_3 - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_3}{\partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2} \right) + \cos \varphi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \right)$$

$$e = 0, \quad \nabla_2^2 \psi_3 = 0$$

$$\frac{O_R}{2G} = \sin \varphi \left(\frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R^2 \partial \varphi} - \frac{2}{R^3} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \right) + \cos \varphi \left(\frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R^3} - \frac{\partial}{\partial R} \nabla^2 \psi_3 \right)$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \frac{\cos \varphi}{R} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R^2} - \frac{\cos \varphi}{R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi} - \frac{\cos 2\varphi}{R^3 \sin \varphi} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{O_\varphi}{2G} = \sin \varphi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi_3 - \frac{3}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial \varphi^3} + \frac{2}{R^3} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \right)$$

$$+ \cos \varphi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi_3}{\partial R} - \frac{2}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R \partial \varphi^2} \right)$$

$$\frac{\tau_{R\varphi}}{2G} = \frac{\sin \varphi}{2} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R^3} + \frac{\cos \varphi}{R} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R^2 \partial \varphi} - \frac{\sin \varphi}{2R^2} \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial R \partial \varphi^2} - \frac{3}{2} \frac{\cos \varphi}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial R \partial \varphi}$$

$$+ \frac{\sin \varphi}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \varphi}{R^3} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{2R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi_3$$

$$\tau_{R\theta} = \tau_{\theta\varphi} = 0$$

$$u=0, \quad v=\frac{\partial \chi}{\partial \varphi}, \quad w=0; \quad e=0, \quad \nabla^2 \chi=0$$

$$\sigma_R = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = 0$$

$$\frac{\tau_{\theta\varphi}}{G} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} - \frac{\cot \varphi}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}$$

$$\tau_{R\varphi} = 0$$

$$\frac{\tau_{R\theta}}{G} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}$$

球座標による表示 (点対称)

$$u = \frac{\partial \varphi_0}{\partial R}, \quad v=0, \quad w=0; \quad e = \nabla^2 \varphi_0, \quad \nabla_1^2 \varphi_0 = 0$$

$$\frac{\sigma_R}{2G} = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial R^2} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial R}$$

$$\tau_{R\theta} = \tau_{R\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0$$

$$\frac{\sigma_\theta}{2G} = \frac{\sigma_\varphi}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial R^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_0}{\partial R}$$

3.4 二次元応力状態における応力関数

平面ひずみ状態における応力関数は以下のようにして3.3節における結果から直接に求められる。

平面ひずみ状態においては、z軸方向の変位は一樣であるから、 $w_z = 0$ と考えれば変位の方程式は

$$\begin{cases} \nabla^2 u_x + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \nabla^2 u_y + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\text{ここで } e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

であり、(3.3)式において $w_z = 0$, $\partial/\partial z = 0$ としてえられる結果に一致する。そこで(3.23)式の解は(3.3)式の解(3.18)式、(3.19)式、(3.20)式において $w_z = 0$, $\partial/\partial z = 0$ とおけば、

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} \\ v_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\text{ここで } \nabla^2 \varphi_0 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_3 = 0$$

である。すなわち、平面ひずみ状態における変位および応力は伝ば速度 C_1 および C_2 をもつ波動を表わす関数で与えられる。

これに対して、平面応力状態における変位の方程式は

$$\begin{cases} \nabla^2 u_x + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \nabla^2 v_y + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.25)$$

であり、これは (3.23) 式においてポアソン比 ν のかわりに $\nu/(1+\nu)$ とおいてえられる結果に一致する。そこで、(3.24) 式における波動方程式

$$\nabla^2 \varphi_0 = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, \quad C^2 = C_1^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{gG}{\rho}$$

において $\nu \Rightarrow \nu/(1+\nu)$ として、 $C = C_1$ のかわりに

$$C^2 = C_3^2 = \frac{2}{1-\nu} \frac{gG}{\rho}$$

とおけば、(3.24) 式はそのまま (3.25) 式の解になる。そこで平面応力状態においては、変位および応力は伝ば速度 C_3, C_2 の波動の重ね合せで表わせる。

平面ひずみ状態および平面応力状態における応力と応力関数の関係を、 ν の関数 κ を用いて、以下にまとめた。

平面問題における応力と応力関数の関係

$$\text{平面応力状態においては} \quad \kappa = 1-\nu, \quad C^2 = C_3^2 = \frac{2}{1-\nu} \frac{gG}{\rho}$$

$$\text{平面ひずみ状態においては} \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa &= \frac{1-2\nu}{1-\nu}, \quad C^2 = C_1^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{gG}{\rho} \\ \text{直角座標において} \quad \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \text{極座標において} \quad \sigma_z &= \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \end{aligned} \right.$$

直角座標による表示

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$u = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}; \quad e = \nabla^2 \varphi_0, \quad \nabla^2 \varphi_0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{2}{\kappa} c_2^2$$

$$\frac{O_x}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{O_y}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \nabla^2 \varphi_0$$

$$u = \frac{\partial \lambda_3}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \lambda_3}{\partial x}; \quad e = 0, \quad \nabla_2^2 \lambda_3 = 0$$

$$\frac{O_x}{2G} = \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x \partial y}, \quad \frac{O_y}{2G} = -\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x^2}$$

極座標による表示

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$u = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}, \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta}; \quad e = \nabla^2 \varphi_0, \quad \nabla^2 \varphi_0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{2}{\kappa} c_2^2$$

$$\frac{O_r}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{2G} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta}$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta^2} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \nabla^2 \varphi_0$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{\partial \lambda_3}{\partial r}; \quad e = 0, \quad \nabla_2^2 \lambda_3 = 0$$

$$\frac{O_r}{2G} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{G} = -\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}$$

極座標による表示 (軸対称)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$u = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}, \quad v = 0; \quad e = \nabla^2 \varphi_0, \quad \nabla^2 \varphi_0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{2}{\kappa} c_2^2$$

$$\frac{O_r}{2G} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \nabla^2 \varphi_0, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

$$\frac{O_\theta}{2G} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \nabla^2 \varphi_0$$

$$u = 0, \quad v = -\frac{\partial \lambda_3}{\partial r}; \quad e = 0, \quad \nabla^2 \lambda_3 = 0$$

$$O_r = O_\theta = 0, \quad \frac{\tau_{r\theta}}{G} = -\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda_3}{\partial r}$$

3.5 応力関数と応力状態との関係

8種の応力関数 $\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \chi$ を用いて変位の方程式の解を表示したけれども、動弾性問題を解く場合に、上述の応力関数をすべて用いる必要はない。必要な応力関数の数は取扱う弾性体の領域および境界を指定するのに必要な座標の数だけあれば十分である。そして、必要な応力関数は弾性体の形状および荷重の種類によって決まるから、上に示された8種の応力関数をそれらからえられる応力状態に基づいて分類しよう。

まず、応力関数 φ_0 を用いればすべての回転成分が0になるから、 φ_0 は回転変形を伴わない伸縮変形を与える応力関数である。応力関数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \chi$ を用いれば $e = 0$ になるから、これらは体積変化がないせん断変形を与える。ここで円柱座標表示の変位と応力関数の関係から $\lambda_1, \lambda_2, \psi_1, \psi_2$ は非軸対称変形にしか適用できないけれども、のこりの $\varphi_0, \lambda_3, \psi_3, \chi$ は軸対称変形にも用いることができ、このうち φ_0 はねじりのない変形を与え、 λ_3, χ は z 軸周りのねじりの応力関数であり、 ψ_3 は z 軸周りのねじれがなく、この軸に垂直な断面の湾曲 (warping) を与える応

力関数である。また平面問題においては前節に示されたように φ_0 , λ_3 を用いられたい。点対称な応力状態においては、球座標表示の応力関数 φ_0 を用いられたい。

以上の結果から、特殊な応力状態に対しては次のような応力関数が適していることになる。

- | | |
|------------------------|------------------------|
| (1) ねじりのない軸対称問題においては | φ_0, ψ_3 |
| (2) 軸対称ねじり問題においては | λ_3, χ |
| (3) 非軸対称平面問題においては | φ_0, λ_3 |
| (4) ねじりのない軸対称平面問題においては | φ_0 |
| (5) 軸対称ねじりの平面問題においては | λ_3 |
| (6) 点対称問題においては | φ_0 |

3.3 および 3.4 の結果から、応力関数は次に示される波動方程式

$$\nabla^2 \varphi_0 = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, \quad C_1^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{gG}{\rho} \quad (3.26)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad C_2^2 = \frac{gG}{\rho} \quad (3.27)$$

ここで $\Phi = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \chi$

$$\nabla^2 \varphi_0 = \frac{1}{C_3^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, \quad C_3^2 = \frac{2}{1-\nu} \frac{gG}{\rho} \quad (3.28)$$

を満す解であり、(3.26)式は弾性体中を縦波が C_1 の速度で伝ばすることを示し、(3.27)式はせん断波が C_2 の速度で伝ばすることを示している。そして(3.28)式は、平面応力状態においては縦波は C_3 の速度で伝ばすることを示している。

そこで衝撃荷重をうける弾性体には基本的には速度 C_1 をもつ縦波と C_2 の速度をもつせん断波が存在し、変位および応力はこれらの速度をもつ波動として伝ばし、弾性体に生ずる変位および応力はこれらの波動を重ね合せたものとして表わされる。

3.6 ラプラス変換による変位と応力の表示

ラプラス変換^{(79)~(86)}による変位と応力の一般的表示を求めるためには、まず応力関数のラプラス変換を知る必要がある。

いま時間 $t = 0$ 以前において物体は静止しているとすれば (3.22) 式において

$$(\phi)_{t=0} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad (3.29)$$

ならば初期条件

$$(u)_{t=0} = (v)_{t=0} = (w)_{t=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

は満足されるから (3.29) 式のもとで (3.22) 式をラプラス変換すれば

$$\nabla^2 \bar{\phi} = \alpha^2 \bar{\phi} \quad (3.30)$$

になる。ただし $\alpha^2 = p^2/c^2$, $\bar{\phi} = \int_0^\infty \phi e^{-pt} dt$ である。

(3.30) 式の一般解は変数分離法によって容易に求めることができ、 α を実数として各座標系について求めた結果を付録 (A-b) に示した。

応力関数で表わされた変位および応力を (3.29) 式の条件のもとでラプラス変換し、これに上に求めた結果を代入すれば変位および応力のラプラス変換の一般形が求まり、3.5 に示された特殊な応力状態 (1) ~ (6) について求められた結果を付録 (A-c) にまとめた。

3.7 結 言

慣性項を考慮した変位の方程式を解いて、その解を8種の応力関数の微分形で表示し、直角座標、円柱座標、球座標のもとで、変位および応力成分をこれらの応力関数の微分形で表わした。そして基本的な応力状態とこれらの応力関数との関係について研究して、与えられた境界条件に対する応力関数の選択を容易にした。結局、衝撃荷重をうけた弾性体には、基本的には速度 $C_1 = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)} \cdot \sqrt{gG/\gamma}$ をもつ縦波（平面応力状態では $C_3 = \sqrt{2/(1-\nu)} \cdot \sqrt{gG/\gamma}$ ）と $C_2 = \sqrt{gG/\gamma}$ の速度をもつせん断波のみが存在し、変位および応力などはこれらの速度をもつ波動として弾性体を伝ばし、弾性体内に生ずる変位および応力はこれらの波動を重ね合せたものとして表わされることになる。

応力関数は調和関数でも重調和関数でもないけれども、すべて同一の波動方程式の解であるから、波動方程式にラプラス変換を適用し、変数分離法によってその解を求めれば、静的弾性問題におけると同様にして動弾性問題を解くことができる。上述の三つの座標系のもとで、波動方程式の解を付録（A-b）に示し、特殊な場合として、軸対称応力状態、平面応力状態、球対称応力状態については変位および応力成分のラプラス変換の一般形をベッセル関数、球ベッセル関数等で表示した。

第4章 内外面に衝撃圧力をうける中空球

4.1 緒 言

無限体中の球孔面に衝撃圧力が作用する問題は地震による振動を対象として、1930年頃に妹沢氏、西村氏ら東大地震研の人々によって解析されたが^{(95)~(97)}球孔面あるいは無限遠方における変位を対象としていて応力については解析されなかった。1953年 H.L. Selberg⁽⁸⁹⁾は球孔面の圧力がステップ状に変動する場合を、1957年 A.C. Eringen⁽⁹⁸⁾は球孔面にパルス状圧力が作用する場合を、ともに衝撃応力の立場から解析し、完全な数値結果を求めている。

内外面に衝撃圧力をうける中空球の問題は 1942年 C.J. Tranter によって解析されたことがある。⁽¹⁰²⁾しかしこの研究では内面に周期的に変動する圧力をうける場合に生ずる変位をラプラス変換によって解析する方法を示していて衝撃応力については明らかにしていない。

一般にこの種の問題では形式的な解をうることができても数値結果をうることは必ずしも容易ではない。衝撃破損を対象とするときには、応力状態を数値的に明らかにすることが必要である。

最近、鈴木氏(1965)は Tranter と同様に変位の方程式を直接に積分する方法を用い、変位の一般解を初等関数で表示し、振動数方程式の根はすべて実根であると仮定して Trial Method によって根を求め、衝撃圧力をうける中空球の内外面に生ずる応力変動を解析した。⁽¹⁰⁹⁾

しかし衝撃荷重によって弾性体に生ずる応力を解析する場合にはどのような解法を用いても、振動数方程式の根を求める必要があるけれども、この根の性質およびその値を明確に求める方法についてはこれまでの研究においては十分に明らかにされていない。

一方、衝撃圧力の特徴は負荷直後における圧力変動すなわち圧力の立上り時間の長短にあるが、過去の研究においては立上り時間と応力変動の関係については明らかにされておらず、圧力変動の周期と負荷後十分に時間が経過した後における応力変動との関係についても十分に研究されていない。

本研究においては、まず応力関数による一般的な解法を示し、この方法によれば球孔面に等分布衝撃圧力をうける無限体や表面に等分布衝撃圧力をうける中実球の応力などは明白に解析できる。

この解法を内外面に等分布衝撃圧力をうける中空球の応力解析に適用した。そのために、振動数方程式の根を簡単に求めるための漸近近似式を導いて、応力の時間的変動を完全に解析し、この結果をもとにして衝撃圧力の立上り時間と応力変動の関係および圧力変動と応力変動の周期との関係について検討した。

4.2 球孔面に等分布衝撃圧力をうける無限体

無限体中の球孔面に等分布衝撃圧力 $p(t)$ が作用すれば変形は点対称になり、境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{cases} (\bar{O}_R)_{R=a} = -p(t), & (\bar{\tau}_{R\varphi})_{R=a} = 0 \\ (\bar{\tau}_{R\theta})_{R=a} = 0, & (\bar{\sigma}_r)_{R=\infty} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

そこで半径 $R \rightarrow \infty$ において変位および応力が 0 になることを考慮して、球孔を除いた無限体の領域において特異点のない関数を用いて応力関数のラプラス変換 $\bar{\varphi}_0$ を

$$\bar{\varphi}_0 = A \frac{e^{-\alpha_1 R}}{\alpha_1 R} \quad \text{ただし} \quad \alpha_1 = \frac{p}{c_1}$$

とおけば、変位および応力のラプラス変換は付表(A-C-(4))から

$$\begin{cases} \bar{u} = -A\alpha_1 \frac{\alpha_1 R + 1}{\alpha_1^2 R^2} e^{-\alpha_1 R} \\ \frac{\bar{O}_R}{2G} = A\alpha_1^2 \frac{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 R^2 + 2\alpha_1 R + 2}{\alpha_1^3 R^3} e^{-\alpha_1 R} \\ \frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \frac{\bar{O}_\varphi}{2G} = -A\alpha_1^2 \frac{\frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 R^2 + \alpha_1 R + 1}{\alpha_1^3 R^3} e^{-\alpha_1 R} \end{cases} \quad (4.2)$$

になる。そこで(4.1)式をラプラス変換してこれに(4.2)式を代入すれば、圧力がスラッパ関数状に変動する場合には $\bar{p} = p_0/p$ になるから次式が成立する。

$$A\alpha_1^2 \frac{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 a^2 + 2\alpha_1 a + 2}{\alpha_1^3 a^3} e^{-\alpha_1 a} = -\frac{1}{2G} \frac{p_0}{p}$$

これを解けば未定定数 A は次のようになる。

$$A = -\frac{p_0}{2G} \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\alpha_1^3 a^3}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 a^2 + 2\alpha_1 a + 2} \frac{e^{\alpha_1 a}}{p} \quad (4.3)$$

(4.3)式を(4.2)式に代入すれば変位および応力のラプラス変換は次のように表わされる。

$$\begin{cases} \frac{2G}{p_0} \frac{\bar{u}}{a} = \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{\alpha_1 R + 1}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 a^2 + 2\alpha_1 a + 2} \frac{1}{p} e^{-\alpha_1(R-a)} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\bar{O}_R}{P_0} &= -\left(\frac{a}{R}\right)^3 \frac{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 R^2 + 2\alpha_1 R + 2}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 a^2 + 2\alpha_1 a + 2} \frac{1}{P} e^{-\alpha_1(R-a)} \\ \frac{\bar{O}_\theta}{P_0} &= \frac{\bar{O}_\varphi}{P_0} = \left(\frac{a}{R}\right)^3 \frac{-\frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 R^2 + \alpha_1 R + 1}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 a^2 + 2\alpha_1 a + 2} \frac{1}{P} e^{-\alpha_1(R-a)} \end{aligned} \right. \quad (4.4)$$

いま無次元量 $\lambda = a\alpha_1$, $P = R/a$, $\tau = C_1 t/a$ を導入して (4.4) 式を逆変換すれば

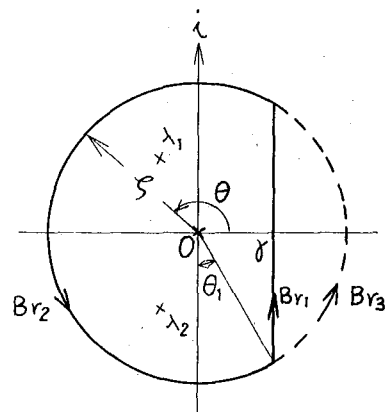
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{P_0} \frac{U}{a} &= \frac{1}{P^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\lambda P + 1}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \lambda^2 + 2\lambda + 2} e^{\lambda(\tau-P+1)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{\bar{O}_R}{P_0} &= \frac{1}{P^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \lambda^2 P^2 + 2\lambda P + 2}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \lambda^2 + 2\lambda + 2} e^{\lambda(\tau-P+1)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \frac{\bar{O}_\theta}{P_0} &= \frac{\bar{O}_\varphi}{P_0} = \frac{1}{P^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{-\frac{\nu}{1-2\nu} \lambda^2 P^2 + \lambda P + 1}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \lambda^2 + 2\lambda + 2} e^{\lambda(\tau-P+1)} \frac{d\lambda}{\lambda} \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

(4.5) 式の右辺の被積分項は λ の一価関数であり、これの分母を 0 とおけば、 $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{1,2} = \{-(1-2\nu) \pm i\sqrt{1-2\nu}\}/(1-\nu)$ は 1 位の極である。そこでオ 4.1 図の反転積分路を採用すれば、(4.5) 式の右辺の複素線積分を計算できる。(4.5) 式の右辺の複素線積分を

$$I_{Br} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \bar{f}(\lambda) e^{\lambda(\tau-P+1)} d\lambda$$

で表わせば、 $\lambda = \varsigma e^{i\theta}$ とおき $\varsigma \rightarrow \infty$ にすれば $\lim_{\varsigma \rightarrow \infty} |\bar{f}(\lambda)| = 0$ になるから、ジョルダンの定理から $\tau > P-1$ ならばオ 4.1 図において円弧 Br_2 に沿っての積分 I_{Br_2} は 0 になる。⁽⁸³⁾

$\tau < P-1$ ならば円弧 Br_3 に沿っての積分 I_{Br_3} において、 $\varsigma \rightarrow \infty$ にすれば次のようになる。



オ 4.1 図 反転積分路 ($\lambda = \varsigma e^{i\theta}$)

U については

$$\begin{aligned} \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} I_{Br_3} &= \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-(\frac{\pi}{2}-\theta_1)}^{\frac{\pi}{2}-\theta_1} \frac{\varsigma e^{i\theta} P + 1}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \varsigma^2 e^{2i\theta} + 2\varsigma e^{i\theta} + 2} e^{\varsigma(\tau-P+1)(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

O_R については

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} I_{Br_3} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\rho^2}{2\pi} \int_{-(\frac{\pi}{2}-\theta_1)}^{\frac{\pi}{2}-\theta_1} e^{\xi(\tau-P+1)(\cos\theta+i\sin\theta)} d\theta$$

$$= 0$$

O_θ および O_ϕ については

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} I_{Br_3} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(-\frac{\nu}{1-\nu}\right) \frac{\rho^2}{2\pi} \int_{-(\frac{\pi}{2}-\theta_1)}^{\frac{\pi}{2}-\theta_1} e^{\xi(\tau-P+1)(\cos\theta+i\sin\theta)} d\theta$$

$$= 0$$

(4.6)

そこで $\tau > P-1$ ならば, Br_1, Br_2 よりなる閉曲線を積分路として採用し, コーシの留数定理を適用すれば変位および応力は閉曲線内の極 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ における留数の和 $\sum_{i=0}^2 \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} (\lambda - \lambda_i) \bar{f}(\lambda) e^{\lambda(\tau-P+1)}$ から求まり, 次のようになる。

$$\frac{2G}{P_0} \frac{U}{a} = \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=0}^2 \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} \left\{ (\lambda - \lambda_i) \frac{\lambda^P + 1}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \lambda^2 + 2\lambda + 2} \frac{e^{\lambda(\tau-P+1)}}{\lambda} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\rho^2} \left[1 - e^{-\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\tau-P+1)} \left\{ \cos \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu}(\tau-P+1) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sqrt{1-2\nu} (2P-1) \sin \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu}(\tau-P+1) \right\} \right]$$

$$-\frac{O_R}{P_0} = \frac{1}{\rho^3} \sum_{i=0}^2 \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} \left\{ (\lambda - \lambda_i) \frac{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \lambda^2 \rho^2 + 2\lambda \rho + 2}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \lambda^2 + 2\lambda + 2} e^{\lambda(\tau-P+1)} \frac{1}{\lambda} \right\}$$

$$= \frac{1}{\rho^3} \left[1 + e^{-\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\tau-P+1)} \left\{ (\rho^2-1) \cos \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu}(\tau-P+1) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sqrt{1-2\nu} (P-1)^2 \sin \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu}(\tau-P+1) \right\} \right]$$

$$\frac{O_\theta}{P_0} = \frac{O_\phi}{P_0} = \frac{1}{\rho^3} \sum_{i=0}^2 \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} \left\{ (\lambda - \lambda_i) \frac{-\frac{\nu}{1-2\nu} \lambda^2 \rho^2 + \lambda \rho + 1}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \lambda^2 + 2\lambda + 2} \frac{e^{\lambda(\tau-P+1)}}{\lambda} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\rho^3} \left[1 - e^{-\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\tau-P+1)} \left\{ \left(1 + \frac{2\nu}{1-\nu} \rho^2\right) \cos \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu}(\tau-P+1) \right. \right.$$

$$-\sqrt{1-2\nu} (2\rho-1 + \frac{2\nu}{1-2\nu} \rho^2) \sin \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-2\nu} (\tau-\rho+1) \}]$$

(4.7)

そして入平面の右半分には特異点がないからコーシの定理によって Br_1 に沿った積分は Br_3 に沿った積分に等しく、 $\tau < \rho-1$ ならば(4.6)式から積分は0になるから

$$u = O_R = O_\theta = O_\varphi = 0$$

である。

この結果、変位および応力は一定速度の波動として伝ばすることがわかる。すなわち、 τ は負荷後 C_1 の速度をもつ縦波が任意時間までに伝ばした距離に対応し、 $\rho-1$ は球孔面から任意点までの距離を表わすから、この点に波動が到達する時間 $\tau = \rho-1$ 以前においては変位および応力は0であり、波面が到達した時間以後はこの点には(4.7)式で示された変位および応力が生ずる。

$\tau = \rho-1$ は弾性波面に対応し、ステップ状圧力によって生ずる波面の応力は不連続的に変動する。そしてラプラス変換の定理によれば、不連続関数の逆変換においては不連続点における値はその点における上限と下限の平均値を与え、一ち(4.5)式の右辺の Br_3 に沿った積分は(4.6)式の右辺の ρ 1式からそれぞれ 0 , $\rho^2/2$, $\{-\nu/(1-\nu)\} \cdot (1/2\rho)$ になるから、波面における変位および応力の大きさは

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2G}{P_0} \frac{u}{a} = 0 \\ -\frac{O_R}{P_0} = \frac{1}{\rho} \\ \frac{O_\theta}{P_0} = \frac{O_\varphi}{P_0} = -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\rho} \end{array} \right. \quad (4.8)$$

になり、この値は(4.7)式において $\tau = \rho-1$ とおいてえられる結果に一致する。

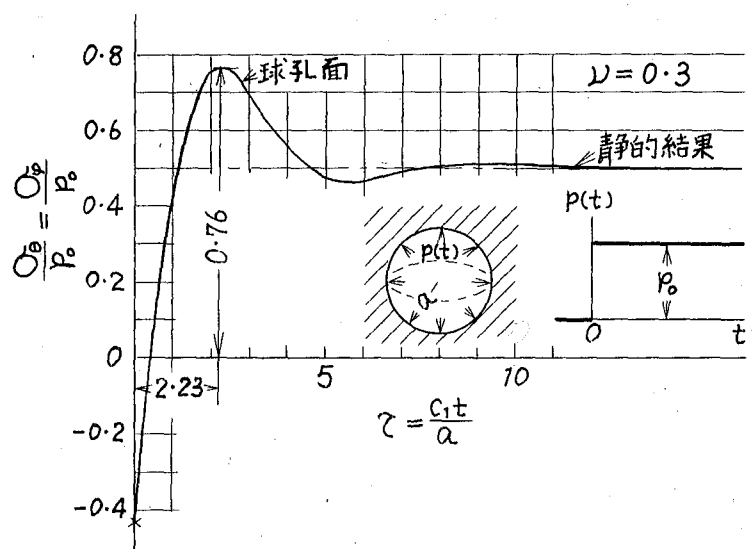
この結果、球孔面に等分布圧力が作用すれば、静的応力は $1/\rho^3$ で減衰するのに対して、弾性波の波面は $1/\rho$ で減衰することがわかる。そして静的応力は ν に関係しないけれども、弾性波の波面の応力は ν に関係する。特殊な場合として(4.7)式において $\rho=1$ とおけば、球孔面における変

位と応力が求まり

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G(U)_{P=1}}{P_0 a} &= \frac{1}{2} \left[1 - e^{-\frac{1-2\nu}{1-\nu} \tau} \left\{ \cos \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \tau - \sqrt{1-2\nu} \sin \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \tau \right\} \right] \\ -\frac{(O_R)_{P=1}}{P_0} &= 1 \\ \frac{(O_\theta)_{P=1}}{P_0} &= \frac{(O_\varphi)_{P=1}}{P_0} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1+\nu}{1-\nu} e^{-\frac{1-2\nu}{1-\nu} \tau} \left\{ \cos \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \tau - \sqrt{1-2\nu} \sin \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \tau \right\} \right] \end{aligned} \right. \quad (4.9)$$

になる。

オ 4.2 図は, (4.9) 式においてポアソン比 $\nu=0.3$ として, 球孔面に等分布ステップ状圧力をうける無限体に生ずる応力の時間的変動を計算した結果を示しており, 負荷初期においては O_φ は圧縮応力であるけれども, 時間が経過すれば引張応力になる。



オ 4.2 図 球孔面に等分布ステップ状圧力をうける無限体に生ずる応力変動。

そして (4.9) 式から $(O_\theta)_{P=1}$ の最大値 $\{(O_\theta)_{P=1}\}_{max}$ を求めれば

$$\frac{\{(O_\theta)_{P=1}\}_{max}}{P_0} = \frac{1}{2} \left[2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} e^{-\frac{1-2\nu}{1-\nu} \tau_0} \right] \quad (4.10)$$

になる。ここで τ_0 は最大応力が生ずる時間に等しく, 次式

$$\tan \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \tau_0 = - \frac{\sqrt{1-2\nu}}{\nu}$$

を満足する絶対値最小の正根である。

いま $\nu=0.3$ とすれば, $\tau_0 = 2.229$ になり

$$\frac{\{(O_{\theta})_{p=1}\}_{\max}}{p_0} = 0.7598$$

である。

一方，静荷重による結果は $\{(O_{\theta})_{p=1}\}_{st} / p_0 = 0.5$ であり，ステップ状圧力をうけた場合に生ずる応力は負荷後時間が十分に経過すれば，静的結果を中心にして減衰振動し，その最終値すなわち (4.9) 式の右辺において $t \rightarrow \infty$ とした結果は静的結果に一致する。そこで $\{(O_{\theta})_{p=1}\}_{\max}$ の絶対値は加えられた圧力よりも小さいけれども引張応力であって静的結果の約 1.5 倍になる。

4.3 等分布衝撃圧力をうける球

半径 a の球の表面に等分布衝撃圧力 $p(t)$ が作用すれば，境界条件は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} (O_R)_{R=a} = -p(t), \quad (\tau_{R\varphi})_{R=a} = 0 \\ (\tau_{R\theta})_{R=a} = 0, \quad (\text{応力})_{R=0} = \text{有限} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

いま応力関数 φ_0 のラプラス変換 $\bar{\varphi}_0$ を α_1 種の球ベッセル関数 $j_0(x)$ を用いて

$$\bar{\varphi}_0 = A j_0(i\alpha_1 R)$$

とおけば，付表 (A-C-(4)) から， $\kappa = (1-2\nu)/(1+\nu)$ として

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = -A i\alpha_1 j_1(i\alpha_1 R) \\ \frac{\bar{O}_R}{2G} = A\alpha_1^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} j_0(i\alpha_1 R) - 2 \frac{j_1(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\} \\ \frac{\bar{O}_{\theta}}{2G} = \frac{\bar{O}_{\varphi}}{2G} = A\alpha_1^2 \left\{ \frac{j_1(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} + \frac{1-\kappa}{\kappa} j_0(i\alpha_1 R) \right\} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

であり，(4.11) 式のラプラス変換に (4.12) 式を代入すれば圧力 $p(t)$ がステップ状に変動すれば， $\bar{p} = p_0 / p$ であるから次式が成立する。

$$A\alpha_1^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} \dot{\phi}_0(i\alpha_1 a) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\alpha_1 a)}{i\alpha_1 a} \right\} = -\frac{P_0}{2G} \frac{1}{p}$$

これを解けば未定定数Aが決まり

$$A = -\frac{P_0}{2G} \frac{1}{\alpha_1^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} \dot{\phi}_0(i\alpha_1 a) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\alpha_1 a)}{i\alpha_1 a} \right\}} \frac{1}{p} \quad (4.13)$$

になる。そこで(4.12)式に(4.13)式を代入し逆変換すれば、 $\lambda = \alpha_1 a$, $p = R/a$, $\tau = C_1 t/a$ とおいて

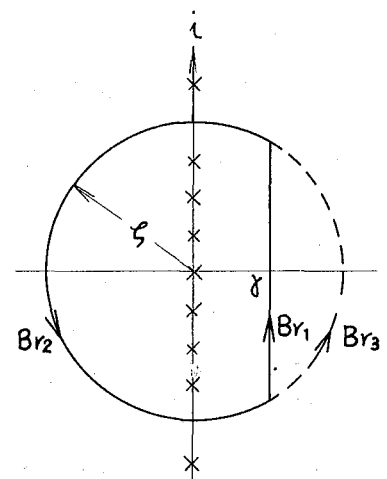
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{P_0} \frac{u}{a} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda p)}{i\lambda \left\{ \frac{1}{\kappa} \dot{\phi}_0(i\lambda) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda)}{i\lambda} \right\}} e^{\lambda \tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \frac{O_R}{P_0} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\frac{1}{\kappa} \dot{\phi}_0(i\lambda p) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda p)}{i\lambda p}}{\frac{1}{\kappa} \dot{\phi}_0(i\lambda) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda)}{i\lambda}} e^{\lambda \tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \frac{O_\theta}{P_0} = \frac{O_\varphi}{P_0} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\frac{1-\kappa}{\kappa} \dot{\phi}_0(i\lambda p) + \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda p)}{i\lambda p}}{\frac{1}{\kappa} \dot{\phi}_0(i\lambda) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda)}{i\lambda}} e^{\lambda \tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \end{aligned} \right. \quad (4.14)$$

そして球ベッセル関数 $\dot{\phi}_0(x)$, $\dot{\phi}_1(x)$ は三角関数を用いて次式

$$\dot{\phi}_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \dot{\phi}_1(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$$

で与えられ、これらは一価関数であるから(4.14)式の右辺の被積分関数は λ の一価関数であり、 λ 平面の虚軸上に無限個の1位の極がある。(付録B-C-(iv)参照)。それらを $0, \pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2, \pm i\lambda_3, \dots$ ただし

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ とし、第4.3図の反転積分路を採用すれば(4.14)式の右辺の積分は(4.5)式の右辺の複素線積分の場合と同様にして、 $\tau > 0$ ならば Br_2 にそっての積分は $\tau \rightarrow \infty$ のときジョルダンの定理から0になり、 $\tau < 0$ ならば $\tau \rightarrow \infty$ において Br_3 にそっての積分が0になる。そこで $\tau > 0$ の場合に Br_1 と Br_2 よりなる閉曲線を積分路として採用し、コーシーの留数定理を適用すれば、変位および応力は閉曲線内の極 $0, \pm i\lambda_n$, ($n=1, 2, 3, \dots$)



第4.3図 反転積分路

における留数の和から求まり次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2G}{P_0} \frac{u}{a} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{\dot{\phi}_1(i\lambda p)}{i\lambda}}{\frac{1}{K} \dot{\phi}_0(i\lambda) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda)}{i\lambda}} e^{\lambda \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{\dot{\phi}_1(i\lambda p)}{i\lambda} e^{\lambda \tau}}{\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{K} \dot{\phi}_0(i\lambda) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda)}{i\lambda} \right)} \right]_{\lambda = \pm i\lambda_n} \\ -\frac{O_R}{P_0} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{K} \dot{\phi}_0(i\lambda p) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda p)}{i\lambda p}}{\frac{1}{K} \dot{\phi}_0(i\lambda) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda)}{i\lambda}} e^{\lambda \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{1}{K} \dot{\phi}_0(i\lambda p) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda p)}{i\lambda p}}{\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{K} \dot{\phi}_0(i\lambda) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda)}{i\lambda} \right)} e^{\lambda \tau} \right]_{\lambda = \pm i\lambda_n} \\ -\frac{O_\theta}{P_0} = -\frac{O_\varphi}{P_0} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{1-K}{K} \dot{\phi}_0(i\lambda p) + \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda p)}{i\lambda p}}{\frac{1}{K} \dot{\phi}_0(i\lambda) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda)}{i\lambda}} e^{\lambda \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{1-K}{K} \dot{\phi}_0(i\lambda p) + \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda p)}{i\lambda p}}{\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{K} \dot{\phi}_0(i\lambda) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(i\lambda)}{i\lambda} \right)} e^{\lambda \tau} \right]_{\lambda = \pm i\lambda_n} \end{aligned} \right.$$

結局、変位および応力は

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2G}{P_0} \frac{u}{a} &= \frac{K}{3-2K} \rho + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\dot{\phi}_1(p\lambda_n)}{\lambda_n}}{\left\{ \frac{1}{2K} \left(6 - \frac{\lambda_n^2}{K} \right) - 2 \right\} \dot{\phi}_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{O_R}{P_0} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{K} \dot{\phi}_0(p\lambda_n) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(p\lambda_n)}{p\lambda_n}}{\left\{ \frac{1}{2K} \left(6 - \frac{\lambda_n^2}{K} \right) - 2 \right\} \dot{\phi}_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{O_\theta}{P_0} = -\frac{O_\varphi}{P_0} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1-K}{K} \dot{\phi}_0(p\lambda_n) + \frac{\dot{\phi}_1(p\lambda_n)}{p\lambda_n}}{\left\{ \frac{1}{2K} \left(6 - \frac{\lambda_n^2}{K} \right) - 2 \right\} \dot{\phi}_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \end{aligned} \right. \quad (4.15)$$

になる。ただし λ_n は次式を満足する根である。

$$\frac{1}{K} \dot{\phi}_0(\lambda_n) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(\lambda_n)}{\lambda_n} = 0 \quad (4.16)$$

すなわち λ_n は $\tan \lambda_n = \frac{2\lambda_n}{2 - \frac{1}{K} \lambda_n^2} \quad (4.17)$

の正根である。

(4.15)式の右辺の無限級数は特定の時間すなわち波面が球の表面に到達するとき収束が悪い。そこで球ベッセル関数 $\dot{\phi}_s(x)$ とベッセル関数 $J_{s+\frac{1}{2}}(x)$ の関係

$$\dot{\phi}_s(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{s+\frac{1}{2}}(x)$$

をベッセル関数の積の積分に関するロシメルの公式に代入して、 λ_n , λ_m を (4.16)式の相異なる根として次のような $\dot{\phi}_1(p\lambda_n)$ に関する直交関係式

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^1 \rho^2 \dot{\phi}_1(\rho\lambda_n) \dot{\phi}_1(\rho\lambda_m) d\rho &= \frac{1}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2} [\lambda_m \dot{\phi}_0(\lambda_m) \dot{\phi}_1(\lambda_n) - \lambda_n \dot{\phi}_0(\lambda_n) \dot{\phi}_1(\lambda_m)] \\ &= 0 \\ \int_0^1 \rho^2 \dot{\phi}_1^2(\rho\lambda_n) d\rho &= \frac{1}{2} \left\{ (\dot{\phi}_0(\lambda_n) - \frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}_1(\lambda_n)}{\lambda_n})^2 + (1 - \frac{9}{4} \frac{1}{\lambda_n^2}) \dot{\phi}_1^2(\lambda_n) \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2\kappa} (6 - \frac{\lambda_n^2}{\kappa}) - 2 \right\} \dot{\phi}_0^2(\lambda_n) \end{aligned} \right.$$

を導いて (4.15) 式の右辺の初項を級数展開して次式をえた。

$$\rho = -\frac{2(3-2\kappa)}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\dot{\phi}_1(\rho\lambda_n)}{\lambda_n}}{\left\{ \frac{1}{2\kappa} (6 - \frac{\lambda_n^2}{\kappa}) - 2 \right\} \dot{\phi}_0(\lambda_n)} \quad (4.18)$$

(4.18) 式は (4.15) 式において $(u)_{\tau=0} = 0$ としてえられる結果に一致し, (4.18) 式を用いて (4.15) 式を書き直せば, 波面が表面に達したときすなわち $\tau = 2m$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) において収束のよい次式がえられる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{\rho_0} \frac{u}{a} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\dot{\phi}_1(\rho\lambda_n)}{\lambda_n}}{\left\{ \frac{1}{2\kappa} (6 - \frac{\lambda_n^2}{\kappa}) - 2 \right\} \dot{\phi}_0(\lambda_n)} (1 - \cos\lambda_n\tau) \\ -\frac{O_R}{\rho_0} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\kappa} \dot{\phi}_0(\rho\lambda_n) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{\left\{ \frac{1}{2\kappa} (6 - \frac{\lambda_n^2}{\kappa}) - 2 \right\} \dot{\phi}_0(\lambda_n)} \cos\lambda_n\tau \\ -\frac{O_\theta}{\rho_0} = -\frac{O_\varphi}{\rho_0} &= 1 - \kappa + 2(1 - \kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\kappa} \dot{\phi}_0(\rho\lambda_n) - 2 \frac{\dot{\phi}_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{\left\{ \frac{1}{2\kappa} (6 - \frac{\lambda_n^2}{\kappa}) - 2 \right\} \dot{\phi}_0(\lambda_n)} \cos\lambda_n\tau \\ &\quad - 2(3-2\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\dot{\phi}_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{\left\{ \frac{1}{2\kappa} (6 - \frac{\lambda_n^2}{\kappa}) - 2 \right\} \dot{\phi}_0(\lambda_n)} (1 - \cos\lambda_n\tau) \end{aligned} \right. \quad (4.19)$$

(4.17) 式の根 λ_n は n が小ならば Trial Method により, n が大ならば Reversion の公式 (付録 B-d 参照) を適用して次の漸近式を導き λ_n を求めた。

$$\lambda_n \sim \beta - \frac{k_1}{\beta} - \frac{k_1^2 + k_3}{\beta^3} - \frac{2k_1^3 + 4k_1k_3 + k_5}{\beta^5} - \frac{5k_1^4 + 15k_1^2k_3 + 3k_3^2 + 6k_1k_5 + k_7}{\beta^7} - \dots \quad (4.20)$$

ただし $\beta = (n-1)\pi$

$$f_0 = -2\kappa$$

$$f_1 = -f_0$$

$$f_1 = -(2\kappa)^2$$

$$f_3 = -(f_1 - f_0^3/3)$$

$$f_2 = -(2\kappa)^3$$

$$f_5 = -(f_2 - f_0^2 f_1 + f_0^5/5)$$

$$f_3 = -(2\kappa)^4$$

$$f_7 = -(f_3 - f_0^2 f_2 - f_0 f_1^2 + f_0^4 f_1 - f_0^7/7)$$

オ 4.1 表には $\nu = 0.3$ の場合について λ_n の値が示してある。

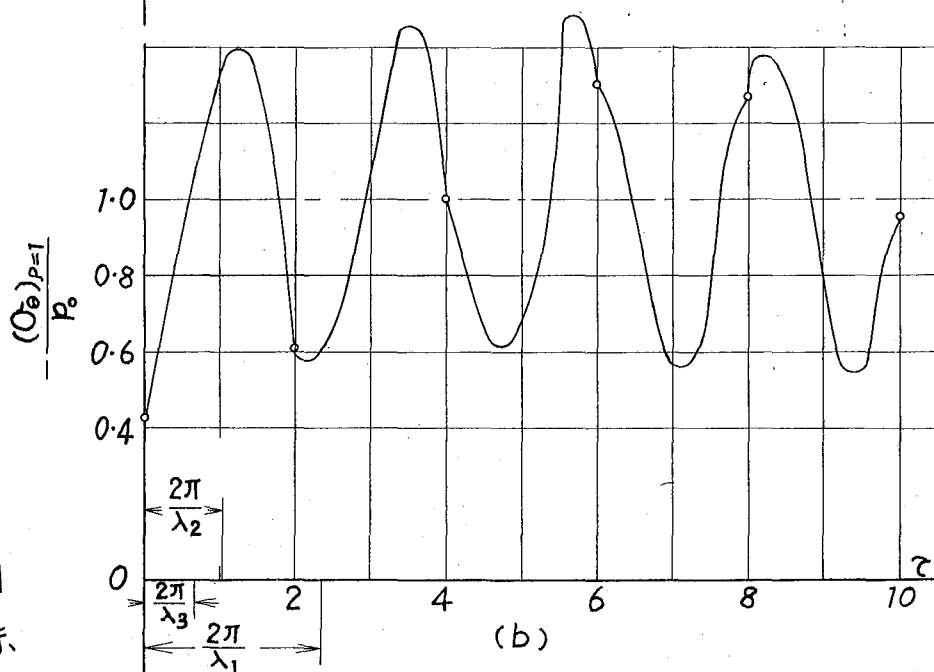
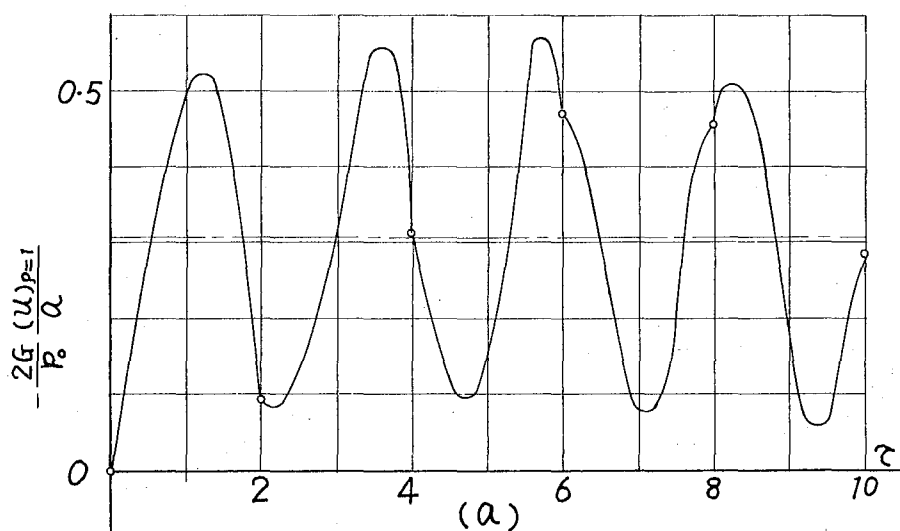
オ 4.1 表

(4.17) 式の根 λ_n 。

中実球 ($\nu = 0.3$)

n	λ_n
1	2.670 2*
2	6.092 0
3	9.300 9
4	12.474 3
5	15.634 7
6	18.788 6
7	21.939 0
8	25.087 1
9	28.233 8
10	31.379 5
11	34.524 4
12	37.668 8
13	40.812 8
14	43.956 3
15	47.099 6
16	50.242 7
17	53.385 7
18	56.528 4
19	59.671 1
20	62.813 7

*印は Trial Method
による計算結果を示
し、他は漸近近似
(4.20) 式による結果
を示す。



オ 4.4 図 ステップ状圧力をうける中実球の
外面に生ずる変位および応力。

($\nu = 0.3$, 一点鎖線は静的結果を
示す。)

オ 4.4 図は $\nu = 0.3$ の場合にオ 4.1 表の結果を用いて (4.15), (4.19) 式によって等分布ステップ状圧力をうける中空球の表面に生ずる変位および応力の時間的変動を解析した結果を示しており, 弾性波が球の表面と中心の間を一定速度 C_1 の波動として伝ばするために, 波面が表面に到達する時間 $\tau = 2m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) において変位および応力は不連続的に変動するが, 全体として見れば静的結果を中心にして振動し, その周期はオ一次の固有振動の周期 $t_1 = (2\pi/\lambda_1) \cdot (a/C_1)$ に対応するけれども両者は完全には一致しない。応力 σ_r の最大値は圧縮応力であって応力変動の最初の数山だけを対象にすれば, その大きさは静的結果の約 1.48 倍である。

4.4 内外面に等分布ステップ状衝撃圧力をうける中空球

オ 4.5 図 (a) のように内外半径がそれぞれ a, b の中空球の内面に等分布圧力 $p(t)$ が作用する場合には, 境界条件は次のようになる。

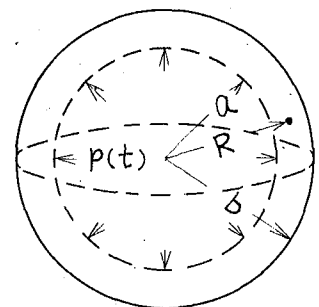
$$\left\{ \begin{array}{ll} (\bar{\sigma}_r)_{R=a} = -p(t) & (\bar{\sigma}_r)_{R=b} = 0 \\ (\bar{\tau}_{r\theta})_{R=a} = 0 & (\bar{\tau}_{r\theta})_{R=b} = 0 \\ (\bar{\tau}_{r\varphi})_{R=a} = 0 & (\bar{\tau}_{r\varphi})_{R=b} = 0 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

オ 4.5 図 (b) のように $p(t)$ がステップ関数状に変動する場合には (4.21) 式のラプラス変換は次のようになる。

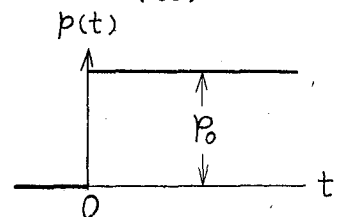
$$\left\{ \begin{array}{ll} (\bar{\sigma}_r)_{R=a} = -\frac{p_0}{p} & (\bar{\sigma}_r)_{R=b} = 0 \\ (\bar{\tau}_{r\theta})_{R=a} = 0 & (\bar{\tau}_{r\theta})_{R=b} = 0 \\ (\bar{\tau}_{r\varphi})_{R=a} = 0 & (\bar{\tau}_{r\varphi})_{R=b} = 0 \end{array} \right. \quad (4.22)$$

いま応力関数 φ のラプラス変換 $\bar{\varphi}$ を球ベッセル関数 $j_0(x), n_0(x)$ を用いて

$$\bar{\varphi} = A j_0(i\alpha_1 R) + B n_0(i\alpha_1 R)$$



(a)



(b)

オ 4.5 図 等分布衝撃圧力をうける中空球

とおけば，付表 (A-C-(4)) から，変位および応力のラプラス変換は

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u} &= -i\alpha_1 [A \phi_1(i\alpha_1 R) + B n_1(i\alpha_1 R)] \\ \frac{\bar{O}_R}{2G} &= \alpha_1^2 \left[A \left\{ \frac{1}{\kappa} \phi_0(i\alpha_1 R) - 2 \frac{\phi_1(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\} + B \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\alpha_1 R) - 2 \frac{n_1(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\} \right] \\ \frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \frac{\bar{O}_\varphi}{2G} &= \alpha_1^2 \left[A \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} \phi_0(i\alpha_1 R) + \frac{\phi_1(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\} + B \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} n_0(i\alpha_1 R) + \frac{n_1(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\} \right] \\ \bar{\tau}_{R\theta} = \bar{\tau}_{R\varphi} = \bar{\tau}_{\theta\varphi} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (4.23)$$

になるから，これを (4.22) 式に代入すれば次式がえられる。

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1^2 \left[A \left\{ \frac{1}{\kappa} \phi_0(i\alpha_1 a) - 2 \frac{\phi_1(i\alpha_1 a)}{i\alpha_1 a} \right\} + B \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\alpha_1 a) - 2 \frac{n_1(i\alpha_1 a)}{i\alpha_1 a} \right\} \right] &= -\frac{P_0}{2G} \frac{1}{p} \\ \alpha_1^2 \left[A \left\{ \frac{1}{\kappa} \phi_0(i\alpha_1 b) - 2 \frac{\phi_1(i\alpha_1 b)}{i\alpha_1 b} \right\} + B \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\alpha_1 b) - 2 \frac{n_1(i\alpha_1 b)}{i\alpha_1 b} \right\} \right] &= 0 \end{aligned} \right.$$

これを解けば未定定数 A, B が決まり

$$\left\{ \begin{aligned} A &= -\frac{1}{\alpha_1^2} \frac{P_0}{2G} \left[\frac{1}{\kappa} n_0(i\alpha_1 b) - 2 \frac{n_1(i\alpha_1 b)}{i\alpha_1 b} \right] \frac{1}{pF} \\ B &= \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{P_0}{2G} \left[\frac{1}{\kappa} \phi_0(i\alpha_1 b) - 2 \frac{\phi_1(i\alpha_1 b)}{i\alpha_1 b} \right] \frac{1}{pF} \end{aligned} \right. \quad (4.24)$$

ただし

$$F = \left\{ \frac{1}{\kappa} \phi_0(i\alpha_1 a) - 2 \frac{\phi_1(i\alpha_1 a)}{i\alpha_1 a} \right\} \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\alpha_1 b) - 2 \frac{n_1(i\alpha_1 b)}{i\alpha_1 b} \right\} \\ - \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\alpha_1 a) - 2 \frac{n_1(i\alpha_1 a)}{i\alpha_1 a} \right\} \left\{ \frac{1}{\kappa} \phi_0(i\alpha_1 b) - 2 \frac{\phi_1(i\alpha_1 b)}{i\alpha_1 b} \right\}$$

である。

いま (4.23) 式に (4.24) 式を代入し， $\lambda = a\alpha_1$ ， $p_1 = b/a$ ， $p = R/a$ ， $\tau = Ct/a$ において (4.23) 式を逆変換すれば，変位および応力成分は

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2G}{P_0} \frac{u}{a} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} p \frac{L_1}{F} e^{\lambda\tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{O_R}{P_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{L_2}{F} e^{\lambda\tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{O_\theta}{P_0} = -\frac{O_\varphi}{P_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{L_3}{F} e^{\lambda\tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \end{aligned} \right. \quad (4.25)$$

ただし

$$F(\lambda) = \left\{ \frac{1}{\kappa} \delta_0(i\lambda) - 2 \frac{\delta_1(i\lambda)}{i\lambda} \right\} \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\rho\lambda) - 2 \frac{n_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \\ - \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\lambda) - 2 \frac{n_1(i\lambda)}{i\lambda} \right\} \left\{ \frac{1}{\kappa} \delta_0(i\rho\lambda) - 2 \frac{\delta_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\}$$

そして

$$\left\{ \begin{aligned} L_1(\rho\lambda) &= \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\rho\lambda) - 2 \frac{n_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \frac{\delta_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} - \left\{ \frac{1}{\kappa} \delta_0(i\rho\lambda) - 2 \frac{\delta_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \frac{n_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \\ L_2(\rho\lambda) &= \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\rho\lambda) - 2 \frac{n_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \left\{ \frac{1}{\kappa} \delta_0(i\rho\lambda) - 2 \frac{\delta_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{\kappa} \delta_0(i\rho\lambda) - 2 \frac{\delta_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\rho\lambda) - 2 \frac{n_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \\ L_3(\rho\lambda) &= \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\rho\lambda) - 2 \frac{n_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} \delta_0(i\rho\lambda) + \frac{\delta_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{\kappa} \delta_0(i\rho\lambda) - 2 \frac{\delta_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} n_0(i\rho\lambda) + \frac{n_1(i\rho\lambda)}{i\rho\lambda} \right\} \end{aligned} \right.$$

である。

(4.25)式の右辺の被積分関数は λ の一価関数であり、 $\lambda=0$ は1位の極である。さらに超越方程式 $F(\lambda)=0$ の根はすべて単根であって、複素平面の虚軸上のみに無数にある。(付録B-C-(V)参照)。

他ち、第4.3図の円弧 B_{r_1} に沿っての積分は $r \rightarrow \infty$ のとき0になるから、コーシーの留数定理によって(4.25)式の右辺の複素積分は虚軸上の極における留数の総和として与えられ、虚軸上の極を $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm\lambda_3, \dots$ とすれば、変位および応力は

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{\rho_0} \frac{u}{a} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\frac{\kappa}{3-2\kappa} \rho^3 + \frac{1}{2} \rho_1^3}{\rho_1^3 - 1} - 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{M_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{D_1} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{O_R}{\rho_0} &= \frac{1}{\rho^3} \frac{\rho_1^3 - \rho^3}{\rho_1^3 - 1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\kappa} M_0(\rho\lambda_n) - 2 \frac{M_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{D_1} \cos \lambda_n \tau \\ \frac{O_\theta}{\rho_0} = \frac{O_\varphi}{\rho_0} &= \frac{1}{\rho^3} \frac{\rho^3 + \frac{\rho_1^3}{2}}{\rho_1^3 - 1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1-\kappa}{\kappa} M_0(\rho\lambda_n) + \frac{M_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{D_1} \cos \lambda_n \tau \end{aligned} \right. \quad (4.26)$$

ここで

$$D_1 = \frac{\lambda_n}{M_1(\lambda_n)} \left[\rho_1^3 \left(\frac{1}{\kappa} - 2 \frac{3-2\kappa}{\rho_1^2 \lambda_n^2} \right) M_1^2(\rho\lambda_n) - \left(\frac{1}{\kappa} - 2 \frac{3-2\kappa}{\lambda_n^2} \right) M_1^2(\lambda_n) \right]$$

そして

$$M_5(x) = \frac{\frac{1}{\kappa} n_0(\lambda_n) - 2 \frac{n_1(\lambda_n)}{\lambda_n}}{\frac{1}{\kappa} \delta_0(\lambda_n) - 2 \frac{\delta_1(\lambda_n)}{\lambda_n}} \delta_5(x) - n_5(x) \quad (4.27)$$

であり, λ_n は

$$\frac{1}{\kappa} M_0(\rho_1 \lambda_n) - 2 \frac{M_1(\rho_1 \lambda_n)}{\rho_1 \lambda_n} = 0 \quad (4.28)$$

の正根であって, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \dots$ である。

(4.26)式の右辺の第1項は $\lambda=0$ における留数から得られ, 静圧をうけた場合の結果を示している。

(4.26)式における級数は特定の時間すなわち波頭が内面に到達したとき $\tau_m = 2m(\rho_1 - 1)$, ($m=0, 1, 2, \dots$)において収束が悪いから (4.27)式で定義された関数 $M_1(\rho \lambda_n)$ の直交関係式

$$\left\{ \begin{aligned} \int_1^{\rho_1} \rho^2 M_1(\rho \lambda_n) M_1(\rho \lambda_m) d\rho &= \frac{1}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2} [\rho \{ \rho \lambda_m M_0(\rho \lambda_m) M_1(\rho \lambda_n) - \rho \lambda_n M_0(\rho \lambda_n) M_1(\rho \lambda_m) \}]_1^{\rho_1} \\ &= 0 \\ \int_1^{\rho_1} \rho^2 M_1^2(\rho \lambda_n) d\rho &= \frac{\kappa}{2} \left[\rho_1^3 \left\{ \frac{1}{\kappa} - 2 \frac{3-2\kappa}{\lambda_n^2 \rho^2} \right\} M_1^2(\rho_1 \lambda_n) - \left\{ \frac{1}{\kappa} - 2 \frac{3-2\kappa}{\lambda_n^2} \right\} M_1^2(\lambda_n) \right] \end{aligned} \right.$$

を導いて (4.26)式の第1項をフーリエ級数に展開すれば

$$\left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{2(3-2\kappa)}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\rho_1^2 \frac{M_1(\rho \lambda_n)}{M_1(\lambda_n)} - 1 \right] \frac{\frac{M_1(\rho \lambda_n)}{\lambda_n}}{D_1} \\ \frac{1}{\rho^2} &= -4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\rho_1} \frac{M_1(\rho \lambda_n)}{M_1(\lambda_n)} - 1 \right] \frac{\frac{M_1(\rho \lambda_n)}{\lambda_n}}{D_1} \end{aligned} \right.$$

そして

$$\frac{1}{\rho^3} \frac{\frac{\kappa}{3-2\kappa} \rho^3 + \frac{1}{2} \rho_1^3}{\rho_1^3 - 1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{M_1(\rho \lambda_n)}{\rho \lambda_n}}{D_1} \quad (4.29)$$

になる。(4.29)式を用いて(4.26)式を書き直せば

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{\rho_0} \frac{u}{a} &= 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{M_1(\rho \lambda_n)}{\rho \lambda_n}}{D_1} (1 - \cos \lambda_n \tau) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
-\frac{O_R}{P_0} &= \frac{1}{\rho^3} \frac{\rho_1^3 - \rho^3}{\rho_1^3 - 1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\kappa} M_0(\rho \lambda_n) - 2 \frac{M_1(\rho \lambda_n)}{\rho \lambda_n}}{D_1} \cos \lambda_n \tau \\
\frac{O_\theta}{P_0} = \frac{O_\varphi}{P_0} &= -(1-\kappa) \frac{1}{\rho^3} \frac{\rho_1^3 - \rho^3}{\rho_1^3 - 1} - 2(1-\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\kappa} M_0(\rho \lambda_n) - 2 \frac{M_1(\rho \lambda_n)}{\rho \lambda_n}}{D_1} \cos \lambda_n \tau \\
&\quad + 2(3-2\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{M_1(\rho \lambda_n)}{\rho \lambda_n}}{D_1} (1 - \cos \lambda_n \tau)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

になる。

(4.26) 式, (4.30) 式は球ベッセル関数を用いて表わされた変位と応力である。これらは次に示される球ベッセル関数と三角関数の関係式

$$\begin{cases} j_0(x) = \frac{\sin x}{x} & , & j_1(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \\ n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} & , & n_1(x) = -\frac{\cos x + x \sin x}{x^2} \end{cases}$$

を用いれば, これらの結果は初等関数で表わすことができ, (4.26) 式は次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{2G}{P_0} \frac{U}{a} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\kappa \rho^3 + \frac{\rho_1^3}{2}}{3-2\kappa \rho^3 - 1} - \frac{2}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_1(\lambda_n)}{D_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{O_R}{P_0} = \frac{1}{\rho^3} \frac{\rho_1^3 - \rho^3}{\rho_1^3 - 1} + \frac{2}{\rho^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_2(\lambda_n)}{D_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \\ \frac{O_\theta}{P_0} = \frac{O_\varphi}{P_0} = \frac{1}{\rho^3} \frac{\rho^3 + \frac{\rho_1^3}{2}}{\rho_1^3 - 1} - \frac{2}{\rho^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_3(\lambda_n)}{D_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \end{cases} \tag{4.31}$$

ここで

$$\begin{aligned}
D_0(\lambda_n) &= \lambda_n^2 \left[(\rho_1 - 1) \left\{ \frac{2}{\kappa} (\rho_1^2 + 3\rho_1 + 1) - 4\rho_1 - \frac{\rho_1^2 \lambda_n^2}{\kappa^2} \right\} \cos \lambda_n (\rho_1 - 1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\kappa} \frac{1}{\lambda_n} \left\{ 2(1-\kappa)(1+\rho^2) - \rho_1 \lambda_n^2 \left(\frac{2}{\kappa} \rho_1 + (\rho_1 - 1)^2 \right) \right\} \sin \lambda_n (\rho_1 - 1) \right]
\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}
l_1(\lambda_n) &= - \left\{ 2(\rho_1 - \rho) + \frac{\rho \rho_1^2 \lambda_n^2}{\kappa} \right\} \cos \lambda_n (\rho_1 - \rho) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_n} \left\{ 2 + 2\rho \rho_1 \lambda_n^2 - \frac{\rho_1^2 \lambda_n^2}{\kappa} \right\} \sin \lambda_n (\rho_1 - \rho)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2(\lambda_n) &= 2(\rho_1 - \rho) \left\{ 2 + \frac{1}{\kappa} \rho \rho_1 \lambda_n^2 \right\} \cos \lambda_n (\rho_1 - \rho) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda_n} \left\{ \left(2 - \frac{\rho_1^2 \lambda_n^2}{\kappa} \right) \left(2 - \frac{\rho^2 \lambda_n^2}{\kappa} \right) + 4 \rho \rho_1 \lambda_n^2 \right\} \sin \lambda_n (\rho_1 - \rho) \\
l_3(\lambda_n) &= \left\{ \rho \left(2 - \frac{\rho_1^2 \lambda_n^2}{\kappa} \right) - 2 \rho_1 \left(1 + \frac{1-\kappa}{\kappa} \rho^2 \lambda_n^2 \right) \right\} \cos \lambda_n (\rho_1 - \rho) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_n} \left\{ \left(2 - \frac{\rho_1^2 \lambda_n^2}{\kappa} \right) \left(1 + \frac{1-\kappa}{\kappa} \rho^2 \lambda_n^2 \right) + 2 \rho \rho_1 \lambda_n^2 \right\} \sin \lambda_n (\rho_1 - \rho)
\end{aligned}$$

同様にして (4.20) 式は

$$\begin{aligned}
\frac{2G}{\rho_0} \frac{U}{a} &= \frac{2}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_1(\lambda_n)}{D_0(\lambda_n)} (1 - \cos \lambda_n \tau) \\
-\frac{Q_R}{\rho_0} &= \frac{1}{\rho^3} \frac{\rho_1^3 - \rho^3}{\rho_1^3 - 1} + \frac{2}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_2(\lambda_n)}{D_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \\
\frac{Q_\theta}{\rho_0} = \frac{Q_\varphi}{\rho_0} &= -(1-\kappa) \frac{1}{\rho^3} \frac{\rho_1^3 - \rho^3}{\rho_1^3 - 1} - (1-\kappa) \frac{2}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_2(\lambda_n)}{D_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \\
&\quad + \frac{2(3-2\kappa)}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_1(\lambda_n)}{D_0(\lambda_n)} (1 - \cos \lambda_n \tau)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

と表わせる。また λ_n が満足すべき方程式 (4.28) 式は

$$\tan (\rho_1 - 1) \lambda_n = \frac{2(\rho_1 - 1) \lambda_n \left(2 + \frac{1}{\kappa} \rho_1 \lambda_n^2 \right)}{\frac{1}{\kappa^2} \rho^2 \lambda_n^4 + 2 \left\{ 2\rho_1 - \frac{1}{\kappa} (\rho_1^2 + 1) \right\} \lambda_n^2 + 4} \tag{4.33}$$

と書き直せる。

超越方程式 (4.33) 式の根は n が小ならば Trial Method により, n が大ならば Reversion の公式を適用して次のような漸近式を導いて λ_n を計算した。(付録 B-d 参照)。

$$\begin{aligned}
\lambda_n \sim \beta &- \frac{k_1}{\beta} - \frac{k_1^2 + k_3}{\beta^3} - \frac{2k_1^3 + 4k_1 k_3 + k_5}{\beta^5} \\
&- \frac{5k_1^4 + 15k_1^2 k_3 + 3k_3^2 + 6k_1 k_5 + k_7}{\beta^7} - \dots
\end{aligned} \tag{4.34}$$

ここで

$$\beta = \frac{n-1}{\rho_1-1} \pi$$

そして

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -\frac{1}{\rho_1-1} f_0, & k_5 &= -\frac{f_2 - f_0^2 f_1 + \frac{f_0^5}{5}}{\rho_1-1} \\
 k_3 &= -\frac{f_1 - \frac{f_0^3}{3}}{\rho_1-1}, & k_7 &= -\frac{f_3 - f_0^2 f_2 - f_0 f_1^2 + f_0^4 f_1 - \frac{f_0^7}{7}}{\rho_1-1} \\
 f_0 &= 2\kappa \frac{\rho_1-1}{\rho_1}, & \frac{f_2}{f_0} &= -a_1 b_1 + (b_1^2 - b_2) \\
 \frac{f_1}{f_0} &= a_1 - b_1, & \frac{f_3}{f_0} &= (b_1^2 - b_2) a_1 + (2b_1 b_2 - b_1^3) \\
 a_1 &= 2 \frac{\kappa}{\rho_1} \\
 b_1 &= 2 \frac{\kappa^2}{\rho_1^2} \left\{ 2\rho_1 - \frac{1}{\kappa} (\rho_1^2 + 1) \right\}, & b_2 &= 4 \frac{\kappa^2}{\rho_1^2}
 \end{aligned}$$

である。

※ 4.2 表には $\rho_1 = 5, 2, 1.25$ の場合についての λ_n の値を示してある。

※4.2 表 (4.33) 式の根 λ_n . ($\nu = 0.3$)

$\rho_1 = 5$		$\rho_1 = 2$		$\rho_1 = 1.25$	
n	λ_n	n	λ_n	n	λ_n
1	0.514 7 *	1	1.010 3 *	1	1.301 4 *
2	1.108 5 *	2	3.332 5 *	2	12.639 5
3	1.740 6 *	3	6.375 6	3	25.169 2
4	2.462 8 *	4	9.485 8	4	37.723 4
5	3.218 7 *	5	12.612 0	5	50.283 7
6	3.987 5 *	6	15.744 4	6	62.846 4
7	4.762 3 *	7	18.879 9	7	75.410 4
8	5.540 2 *	8	22.017 2	8	87.975 0
9	6.320 1	9	25.155 5	9	100.540 1
10	7.101 3	10	28.294 6	10	113.105 4
11	7.883 4				
12	8.666 1				
13	9.449 2				
14	10.232 7				
15	11.016 5				

* 印は Trial Method による計算結果を示し, 他は漸近近似 (4.34) 式による計算値である。

オ 4・2 表に示された λ_n の値を用い, (4・31), (4・32) 式によって $\rho_1 = 1.25, 2, 5$ の場合に $\nu = 0.3$ として内面に等分布ステップ状圧力をうける中空球に生ずる変位と応力の時間的変動を計算した。

オ 4・6 図は $\rho_1 = 1.25, 2, 5, \infty$ の場合に内外面に生ずる変位および応力 σ_0 の時間的変動を示したもので, ステップ状圧力によって生ずる変位は負荷直後においては 0 から増大するのに対して応力 σ_0/ρ_0 は負荷の瞬間に圧縮応力になり, その大きさは球の内外径比に無関係に $\nu/(1-\nu) = 0.43$ で与えられ, 時間が経過すれば徐々に引張応力になる。そして弾性波が C_1 の速度で半径方向に伝ぱし, 内外面に到達すれば反射されるために, 図中丸印で示されるように一定時間ごとに不連続的に変化するが全体的には静的結果を中心にして振動する。

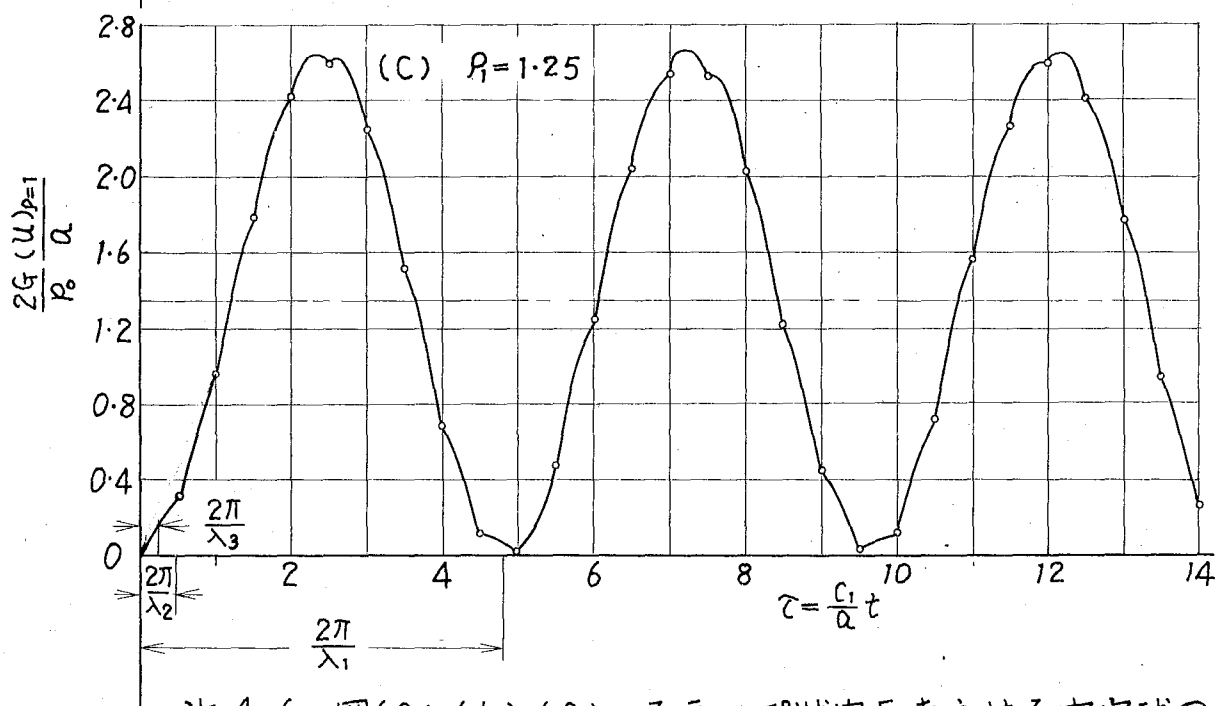
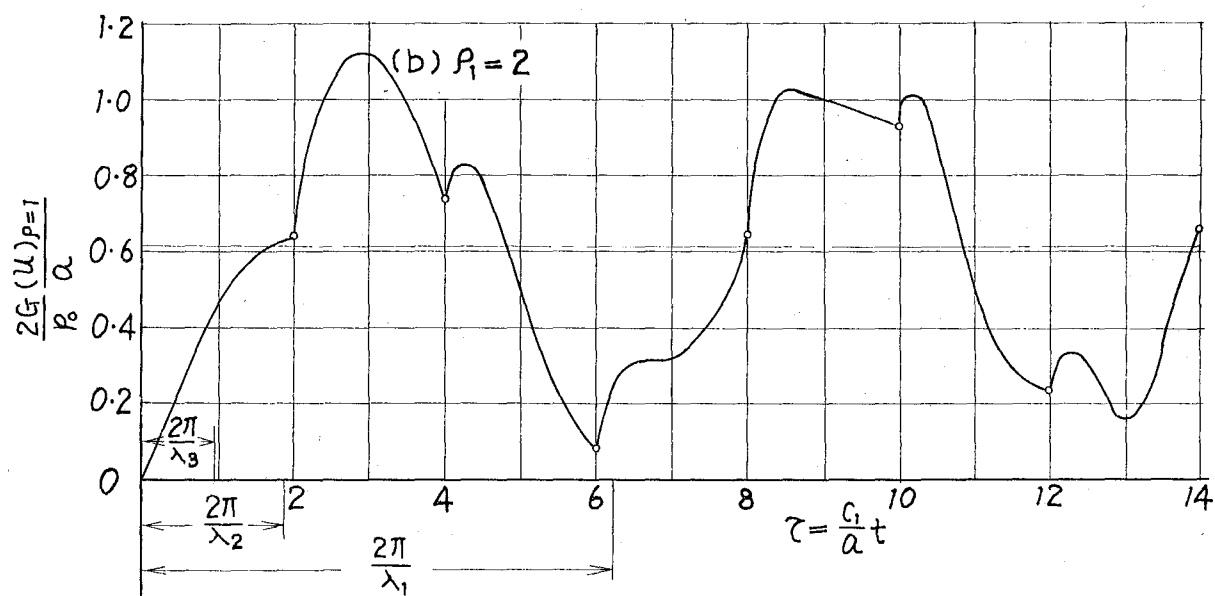
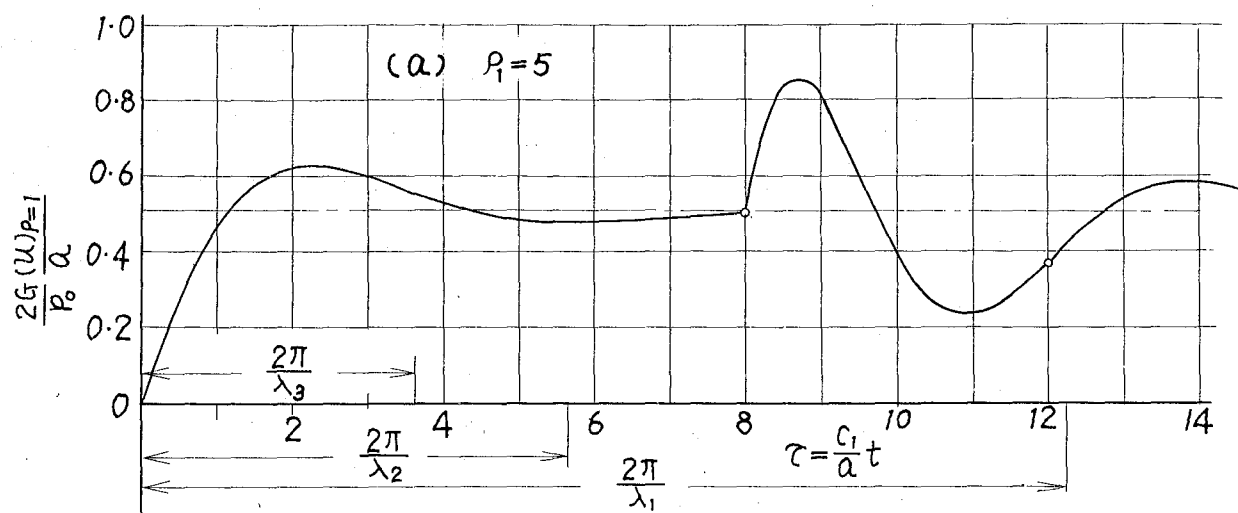
オ 4・6 図 (d) は内外径比 $\rho_1 = b/a = 5$ の場合について内面および外面に生ずる応力 σ_0 の時間的変動を示したもので, 内面の応力は時間で $\tau = 8$ において外面からの最初の反射波の到達のために不連続的に変動するが, その時間以前においては外面からの影響が全くないために連続的に変化し, 図中 $b/a = \infty$ として示される球孔面に等分布ステップ状圧力をうける無限体の結果に全く一致する。また外面に生ずる σ_0 は負荷後弾性波がこの面に到達する時間 $\tau = 4$ 以前においては 0 であり, この時間以後にはじめて応力を生ずるが, その最大値は内面に生ずる最大引張応力に比してはるかに小さい。

オ 4・6 図 (d), (e), (f) を比べれば, 球の肉厚が薄くなれば内外面に生ずる最大引張応力はともに増大するが内面に生ずる応力が最大応力である。

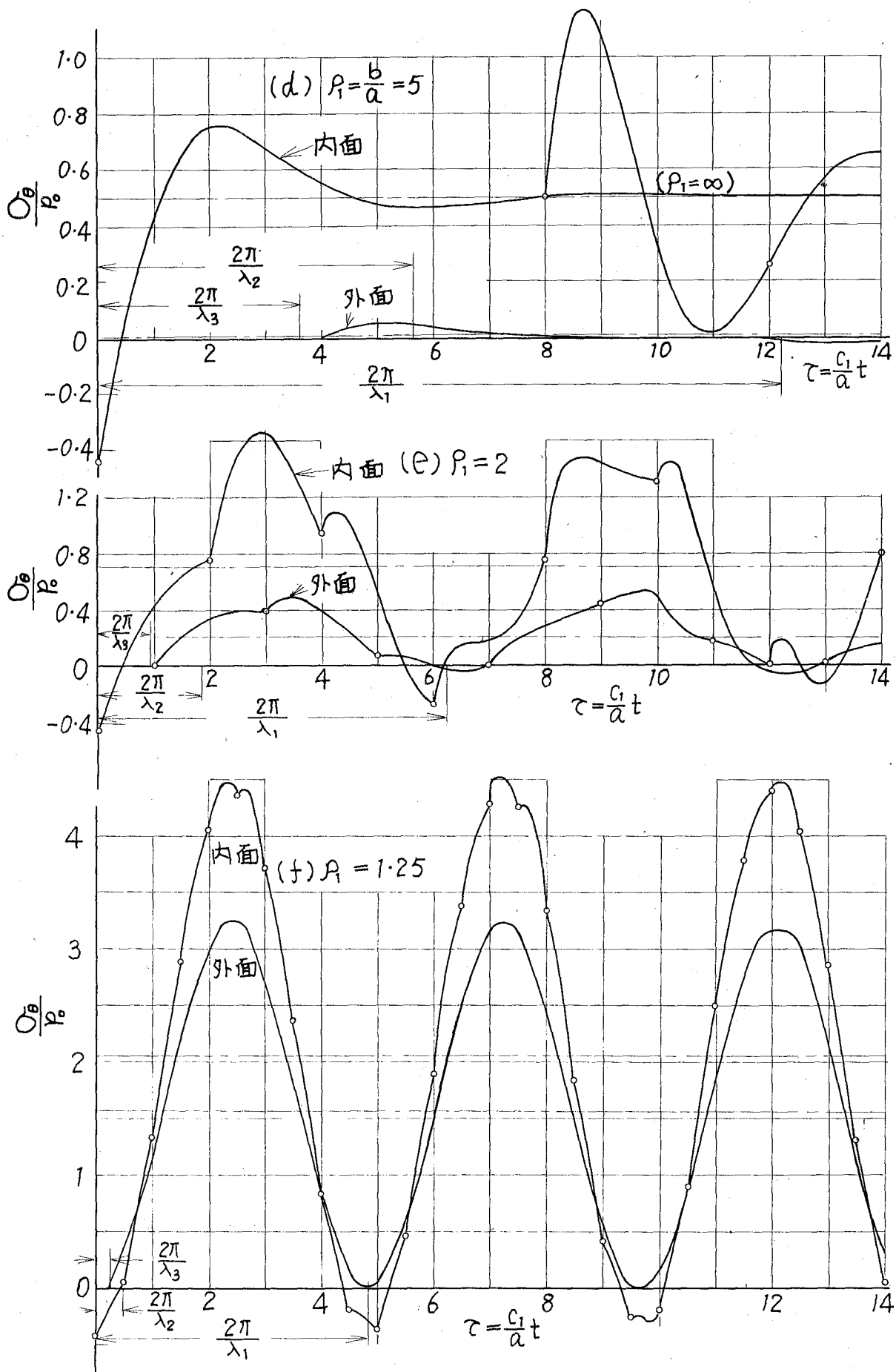
また, 応力変動と固有振動との関係を示すために, 図中に $\tau = (a/C_1) \cdot (2\pi/\lambda_1)$, $(a/C_1) \cdot (2\pi/\lambda_2)$, $(a/C_1) \cdot (2\pi/\lambda_3)$, --- に相当する時間を示した。これらはオ一次, オ二次, オ三次の固有振動の周期であり, 応力変動の周期に完全には一致しない。極限の場合として, 中空球が球殻に一致すれば応力は静的結果を中心にして振動し, その振動数は

$$f_0 = \frac{\sqrt{2k(3-2k)}}{2\pi} \frac{C_1}{a}$$

に等しい。



※ 4.6 図(a),(b),(c) ステップ状内圧をうける中空球の変位の時間的変動。(○印は外面における反射波が到達した時間)



第4.6図 (d), (e), (f)

ステップ状内圧をうける中空球
の応力変動 ($\nu = 0.3$)。 (一点
鎖線は静的結果を示す。)

そして中空球に対する結果と球孔を有する無限体の結果を比較すれば、中空球の場合は変位および応力が静的結果を中心にして振動するのに対して、無限体においては他端からの反射波が存在しないために応力は減衰振動し、負荷後時間が十分に経過すれば、応力は静的結果に一致する。

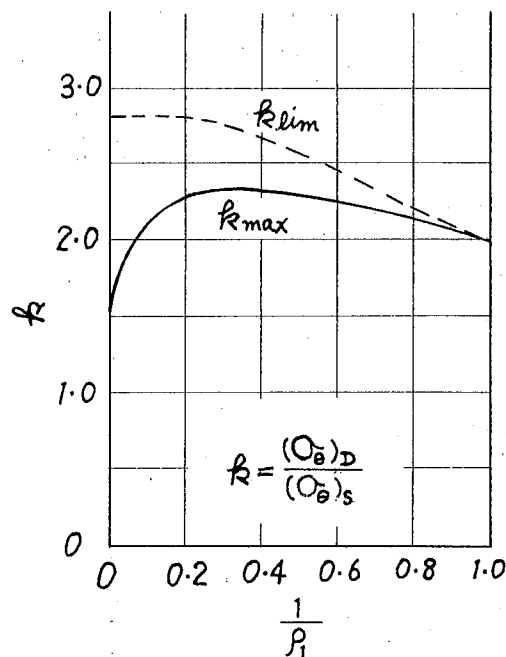
衝撃圧力をうける中空球に生ずる最大応力 $(\sigma_\theta)_D$ は、絶対値が等しい静圧力をうける場合に生ずる最大応力 $(\sigma_\theta)_S$ よりもはるかに大きい。

両最大応力の比

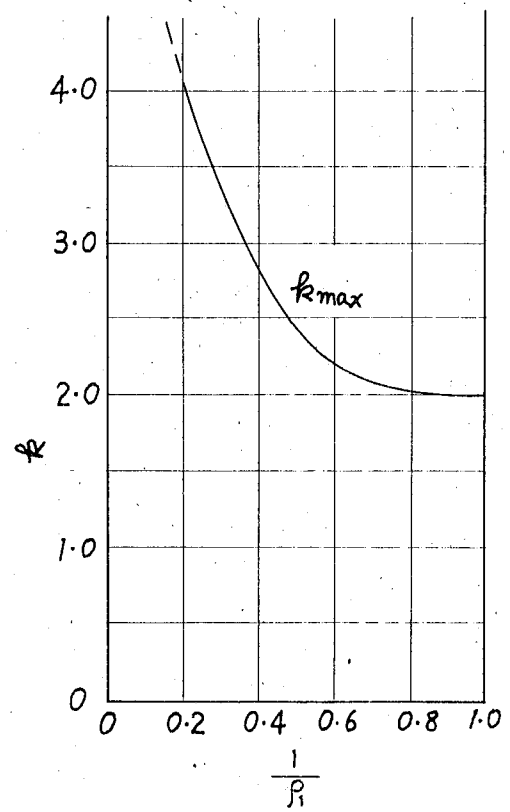
$$k = \frac{(\sigma_\theta)_D}{(\sigma_\theta)_S} \quad (4.35)$$

は、中空球の内外径比 $\rho_1 = b/a$ によって図 4.7 のように変動する。

$\nu = 0.3$ ならば内面の応力を対象とすると、球殻 ($\rho_1 = b/a = 1$) においては $k = 2$ 、球孔を有する無限体 ($\rho_1 = \infty$) においては $k = 1.52$ になり、 $\rho_1 = 3$ の場合に k は最大値 2.35 に達する。



(a) 内面



(b) 外面

図 4.7 ステップ状内圧をうける中空球の k
($\nu = 0.3$, $\rho_1 = b/a$)

オ 4.7 図における $(O_\theta)_D$ は (4.31), (4.32) 式で計算した応力波形の最初の数山を対象としたもので、必ずしも最大応力に等しいとは限らない。

そこで内面における $(O_\theta)_D$ の限界値を求めるために、(4.26) 式において $P=1$ とすれば

$$\frac{(O_\theta)_{P=1}}{P_0} = \frac{\frac{P_1^3}{2} + 1}{P_1^3 - 1} - 2(3-2\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{M_1(\lambda_n)}{\lambda_n}}{D_1} \cos \lambda_n \tau$$

になり、右辺の無限級数に含まれる $M_1(\lambda_n)/(\lambda_n D_1)$ はすべての n に対して同符号であり、一方 (4.29) 式が成立するから $|\cos \lambda_n \tau| \leq 1$ なることを考慮すれば

$$\frac{(O_\theta)_{P=1}}{P_0} \leq \frac{(2-\kappa)P_1^3 + 1 + \kappa}{P_1^3 - 1}$$

が成立する。そして

$$\frac{(O_\theta)_S}{P_0} = \frac{\frac{1}{2}P_1^3 + 1}{P_1^3 - 1}$$

であるから

$$r \leq r_{lim} = 2(2-\kappa) - \frac{6(1-\kappa)}{P_1^3 + 2} \quad (4.36)$$

になり、オ 4.7 図 (a) において点線で示されるように表わされる。

オ 4.7 図 (b) は外面における r の値を示しており、球殻において r は最小値 2 であり、肉厚が大になるにしたがって r の値は増大し、 $a/b = 0$ すなわち球孔を有する無限体においては $r = \infty$ になる。無限体において $r = \infty$ になるのは静荷重による応力は半径方向に $1/P^3$ で減少するのに対して弾性波の波面の応力は $1/P$ で減少することに原因がある。

そして r の値は外面における値が内面におけるよりも大きくなるけれども、前述のように最大引張応力は内面に生じ、実用上は内面における r の値がより重要である。

オ 4.7 図 (a) の実線は応力変動の計算結果の最初の数山を対象にして求めたものである。図中の点線は (4.36) 式による r の限界値 r_{lim} の値を示しており、 $r_{lim} \geq r_{max}$ の関係があり、肉厚が薄ければ r_{lim} は r_{max} によく一致し $P_1 = b/a < 1.5$ の範囲では 10% 以下の誤差で r_{lim}

から k_{max} を推定できる。

ステップ状外圧が作用する場合には (4.31), (4.32) 式において $\rho_1 = b/a$, $\rho = R/b$ とし, u/a のかわりに u/b とおきかえて表 4.2 表に示された根 λ_n は $(a/b)\lambda_n$ を表わしていると考えれば (4.31), (4.32) 式はそのまま外圧をうける解になる。

表 4.8 図は $b/a = 1.25, 2, 5$ の場合に $\nu = 0.3$ としてステップ状外圧をうける中空球の内外面に生ずる σ_θ の時間的変動を示したもので, 内圧をうける場合と同様に弾性波の伝播のために応力は他端からの反射波が到達するときに不連続的に変動し, 全体的にはほぼ一次の固有振動の周期で振動する。

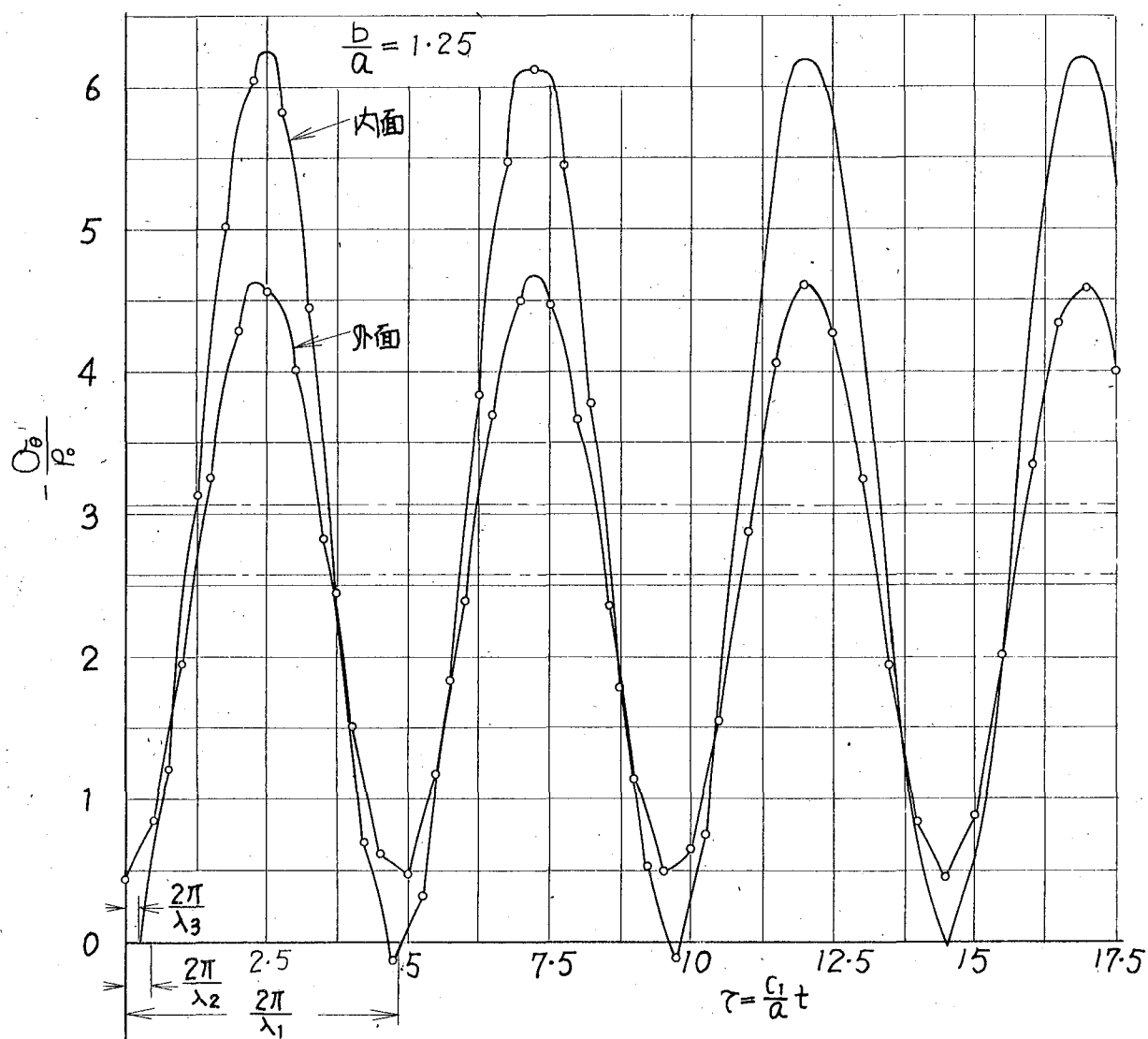
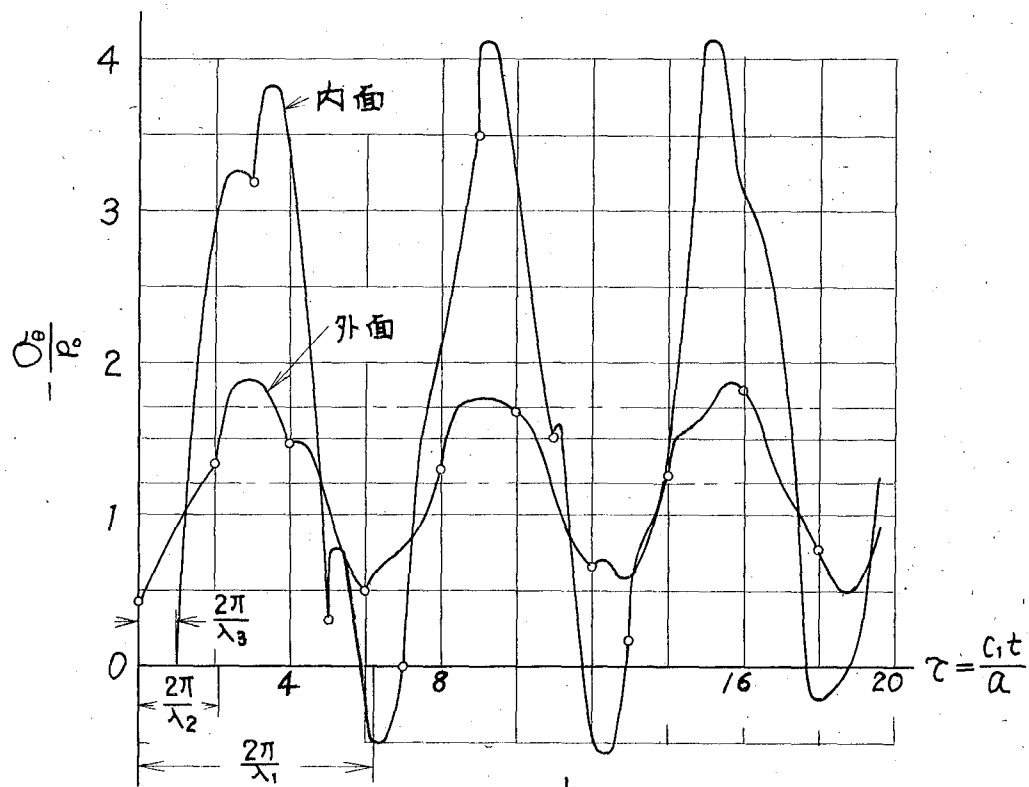
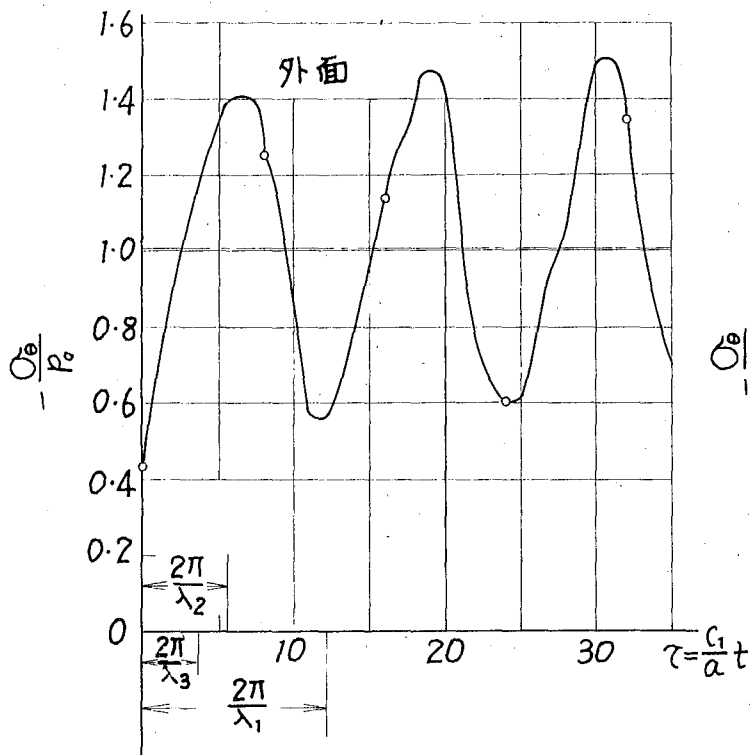


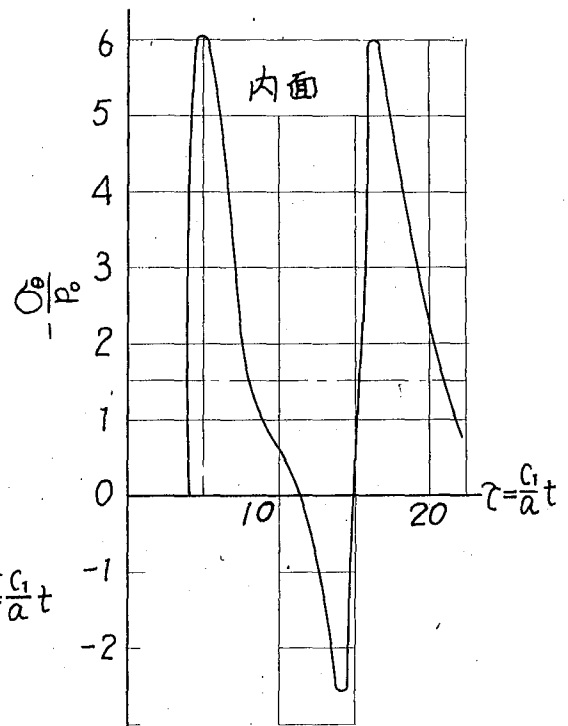
表 4.8 図 (a) ステップ状外圧をうける中空球に生ずる応力変動 ($\nu = 0.3$) (一点鎖線は静的結果) を示す。



(b) $\frac{b}{a} = 2$



(c) $\frac{b}{a} = 5$



(d) $\frac{b}{a} = 5$

オ 4・8 図 (b), (c), (d) ステップ状外圧を受ける中空球に生ずる応力変動 ($\nu = 0.3$)。

しかし内圧によって生ずる最大応力は引張応力であるが、外圧によって生ずる最大応力は圧縮応力であってその最大値は内面に生ずる。そして図 4.8 図 (a), (b), (c) を比較すれば内面に生ずる最大圧縮応力は球殻においては ∞ であり、肉厚が増すにしたがって減少するけれども、肉厚がさらに増大すれば再び増加して、球孔径が外径に比して非常に小さければ内面の応力は非常に大きくなる。

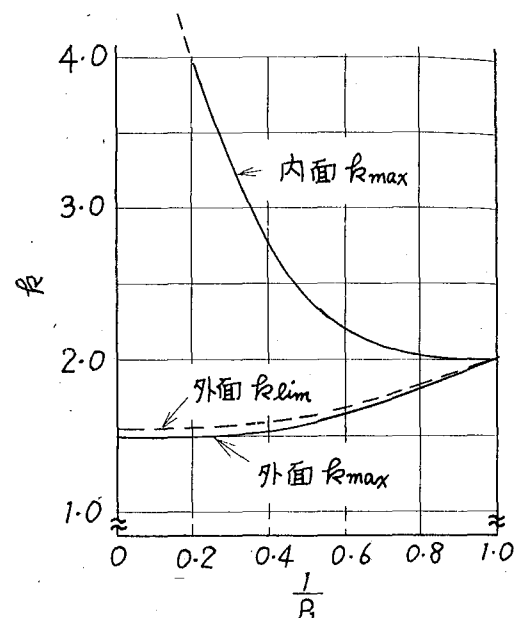


図 4.9 ステップ状圧力を受ける中空球の k ($\nu=0.3$)

また、衝撃圧力と静圧力とによって生ずる最大応力の比 k を (4.35) 式のように定義すればステップ状外圧を受ける中空球の k の値は図 4.9 図の実線のようになる。外面においては k の値は球殻において 2 であり、肉厚が増大すれば単調に減少し中実球において k の値は 4.3 節に示されたように約 1.5 になる。内面においては、肉厚が大きいほど k は大きく、中実球に近づけばその値は無限に大きくなる。図中の点線は (4.36) 式によって計算した外面における k の限界値 k_{lim} を示しており、 k_{lim} は k_{max} によく一致し、内外径比 $p_1 = b/a$ の任意な値についても、 k_{lim} を用いれば 6% 以下の誤差で k_{max} を推定できる。

4.5 任意の変動圧力を受ける中空球

ステップ状圧力に対する解は最も基本的なもので、この解を基にすれば種々の圧力変動に対する解をデュアメル積分によって導くことができる。いま任意の変動圧力 $p(t)$ を受ける場合の結果を $O(t)$ 、ステップ状圧力を受けた場合の結果を $O_0(t)$ とすれば次式が成立する。

$$O(t) = p(0) O_0(t) + \int_0^t p'(\xi) O_0(t-\xi) d\xi \quad (4.37a)$$

$$= p(0)O_0(t) + \int_0^t p'(t-\xi)O_0(\xi)d\xi \quad (4.37b)$$

$$\text{ただし } p'(t) = \frac{dp(t)}{dt}$$

(4.37) 式を用いれは任意の圧力変動が与えられた場合の結果はラプラス逆変換積分をすることなしに，ステップ関数状に変動する衝撃圧力に対する解を重ね合せて得られる。

実際の衝撃圧力は有限の立上り時間をもつために，4.4節に示されたステップ状圧力をうけた場合の結果を直接に実際問題に適用することはできない。そこで，衝撃圧力の立上り時間が応力変動に及ぼす影響を調べた。

圧力変動が図4.10図に示されるよ

うに

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0(1 - e^{-kt}) \\ &= p_0(1 - e^{-\omega\tau}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

で与えられる場合の結果は，(4.26)式をデュアメル積分(4.37b)式に適用すれば $p(0) = 0$ であるから，次のようになる。

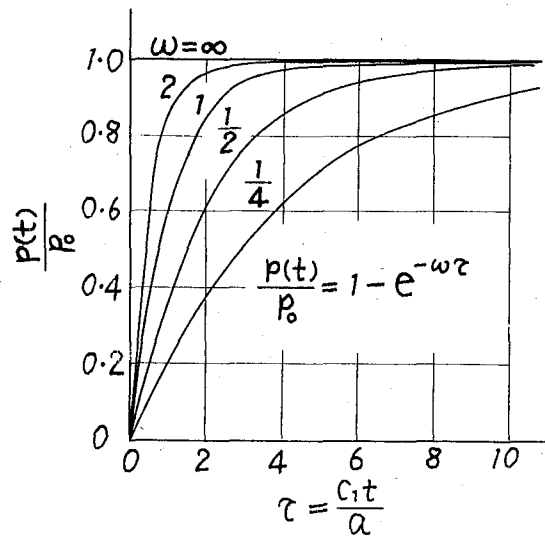


図4.10 圧力の時間的変動

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{p_0} \frac{u}{a} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\frac{\kappa}{3-2\kappa} \rho^3 + \frac{1}{2} \rho_1^3}{\rho_1^3 - 1} f_1(\tau) \\ &\quad - 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{M_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{D_1} f_2(\tau) \\ -\frac{O_R}{p_0} &= \frac{1}{\rho^3} \frac{\rho_1^3 - \rho^3}{\rho_1^3 - 1} f_1(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\kappa} M_0(\rho\lambda_n) - 2 \frac{M_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{D_1} f_2(\tau) \\ \frac{O_\theta}{p_0} = \frac{O_\varphi}{p_0} &= \frac{1}{\rho^3} \frac{\rho^3 + \frac{1}{2} \rho_1^3}{\rho_1^3 - 1} f_1(\tau) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1-\kappa}{\kappa} M_0(\rho\lambda_n) + \frac{M_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{D_1} f_2(\tau) \end{aligned} \right. \quad (4.39)$$

ここで

$$\frac{p(t)}{p_0} = f(\tau) = 1 - e^{-\omega\tau}$$

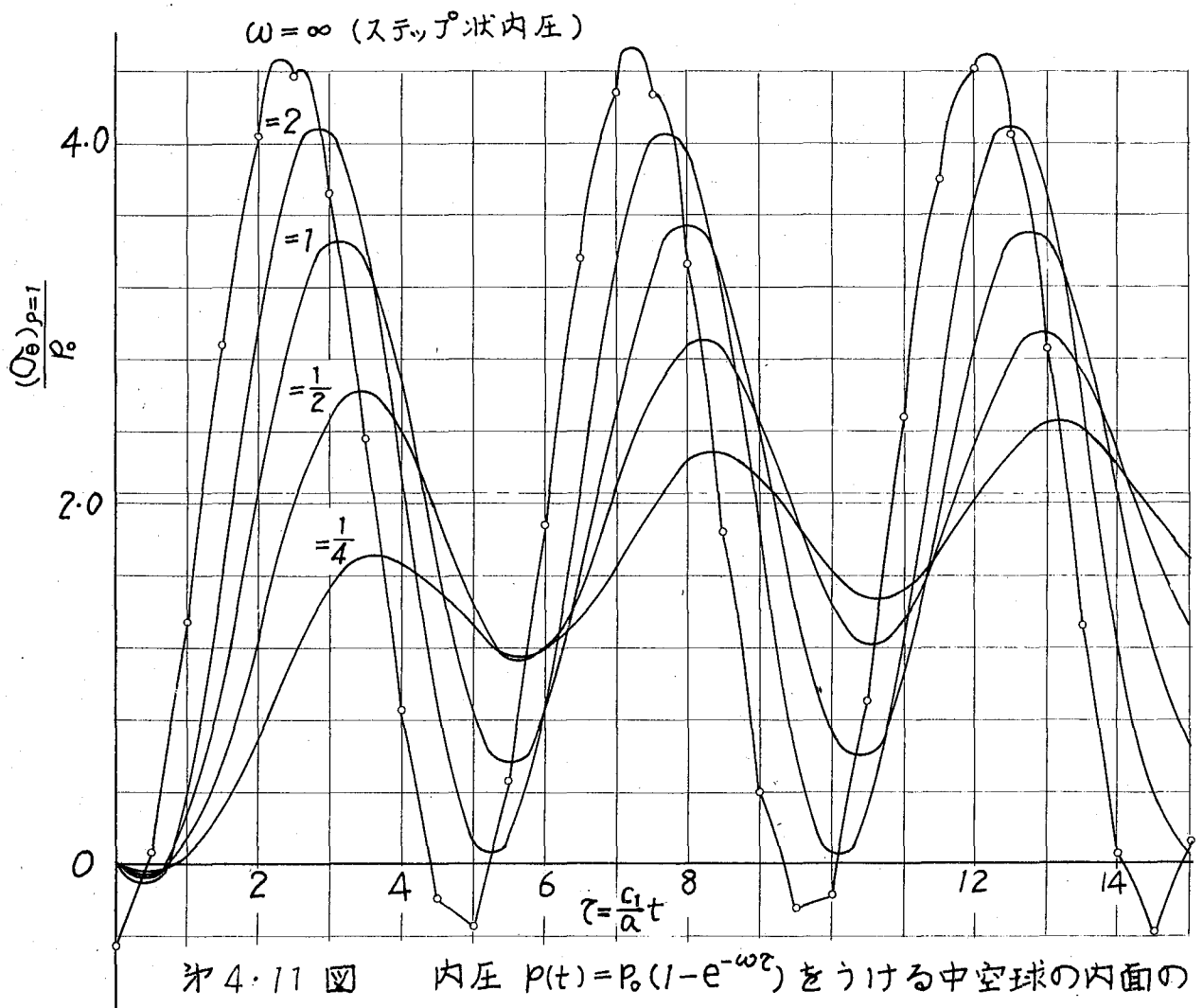
とおけば

$$f_1(\tau) = \int_0^\tau \frac{d f(\xi)}{d \xi} d \xi = f(\tau)$$

$$\begin{aligned} f_2(\tau) &= \int_0^\tau \frac{d f(\tau-\xi)}{d(\tau-\xi)} \cos \lambda_n \xi d \xi = \omega \int_0^\tau e^{-\omega(\tau-\xi)} \cos \lambda_n \xi d \xi \\ &= \frac{\omega}{\lambda_n^2 + \omega^2} [\omega \cos \lambda_n \tau + \lambda_n \sin \lambda_n \tau - \omega e^{-\omega \tau}] \end{aligned}$$

である。

※ 4・11 図は $P_1 = b/a = 1.25$, $\nu = 0.3$ の中空球内面に (4・38) 式で与えられる爆発圧力が作用する場合に, $\omega = 0.25, 0.5, 1, 2, \infty$ (ステップ状内圧) として, (4・39) 式を用いて荷重面に生ずる O_θ の時間的変動を計算した結果を示している。



この結果， $\omega = \infty$ すなわちステップ状圧力が作用すれば，時間 $t = 0$ において応力は不連続的に圧縮応力になり，時間が経過すれば徐々に引張応力になり，最終的には静的結果を中心にして ω 一次の固有振動をする。

一方， ω が小になれば，すなわち圧力の立上りがゆるやかになれば，時間 $t = 0$ において応力は0であり，時間が十分に経過した後においては，静的結果を中心にして固有振動するけれども，その振幅は ω が小さいほど小さくなり，圧力の立上りが無限にゆるやかになれば，応力は0から単調に増大し， $t \rightarrow \infty$ において静的結果に全く一致することがわかる。

4.6 結 言

内外面に等分布衝撃圧力をうける中空球に生ずる応力の時間的変動を解析して応力変動と波動の伝ば現象との関係を明らかにした。

まず応力関数のラプラス変換を球ベッセル関数で表示し，この関数の直交関係式をもとにして中空球に対する振動方程式が複素根をもたないことを示した。そして Reversion Method を適用してこの方程式の根に対する漸近近似式を導き，この式を用いることにより絶対値の大きな根を容易に求めることができた。

次いで応力の時間的変動を求め，応力は静的結果を中心にして一定の周期で振動することを示した。すなわち，無限体中の球孔面に入ステップ状圧力が作用すれば，生じた弾性波の波面は無限遠ちに伝ばするために負荷後時間が十分に経過すれば各点の応力は静的結果に一致するが，中空球にステップ状圧力が作用すれば生じた弾性波は内外面において反射をくり返すために，各点の応力は不連続的な時間的変動をくり返し，全体として見れば静的結果を中心にして振動することになる。その周期は ω 一次の固有振動の周期にほぼ一致し，弾性波が中空球の内外面間を1往復する時間は ω 二次の固有振動の周期にほぼ一致する。

応力の最大値を求めるためには，通常，負荷後十分に時間が経過した後までの応力変動を計算する必要があるけれども，本研究においては，球ベッセル関数のフーリエ級数展開の結果を利用して最大応力の上限を求める

ための近似式を導き、この近似式は中空球の肉厚が甚ければ、応力変動の最初の数山を対象にして求めた最大応力にほとんど一致することを示した。

一方、ステップ状圧力に対する結果を基にしてデュアメル積分を用いれば、任意変動荷重に対する結果がえられる。この方法によって衝撃圧力の立上り時間が最大応力および応力変動に及ぼす影響を調べた。この結果、有限な立上り時間をもつ衝撃圧力によって生ずる応力は静的結果を中心にして振動し、その振巾は立上り時間が長くなれば小さくなり、立上り時間が無限大ならば応力は静的結果に一致することがわかった。そして、任意の衝撃圧力によって生ずる最大応力は大きさが等しいステップ状圧力による最大応力をこえないことが明らかになった。

第5章 内外面に等分布衝撃圧力をうける円板および円筒

5.1 緒言

円孔面に等分布衝撃圧力をうける無限板あるいは無限体の問題は A. Kromm (1948), H. L. Selberg (1952), J. Miklowitz (1960), Y. L. Luke (1962) らによって解析が試みられ、現在においては、この現象を十分に説明する数値結果が与えられている。

すなわち、Kromm は円孔面に等分布ステップ状圧力あるいは一定の変位速度が作用する無限板に生ずる変位および応力の時間的変動を解析して完全な数値結果を与えているが、⁽⁸⁷⁾ その解法は煩雑である。

Selberg は円孔面に時間に亘りしてステップ状および指数関数的に減少する衝撃圧力が作用する無限体の問題をラプラス変換によって解析する方法を示し、振動方程式の複素根を Trial Method によって求めて応力の時間的変動を明らかにしている。⁽⁸⁹⁾

これに対して Miklowitz は Kromm が取扱ったと同様な問題をラプラス変換によって解析しているが、⁽⁹⁰⁾ Selberg が第5.2図に示される反転積分路を用いたのに対して、Miklowitz は第5.3図に示される反転積分路を用い、この方法によれば振動方程式の根を求めることなくに応力を求めうることを示している。しかしこの解法は Selberg の解法に比して時間が大きいときの数値計算には適さない。

いずれにしても、この種の問題の厳密な数値結果をうることはかなりやっかいである。円孔面に衝撃圧力をうける無限板あるいは無限体に生ずる応力は負荷後時間が十分に経過すれば静的結果に一致するから、負荷直後における応力変動が最も重要である。そこで Luke は Miklowitz の問題において負荷後の経過時間が短い場合の応力変動をベッセル関数の有理化された漸近近似式を用いて近似的に解析する方法を示し、その結果が厳密解とよく一致することを示している。⁽⁹¹⁾

これらに対して衝撃圧力をうける有孔円板あるいは円筒については、その現象を定性的にも定量的にも十分に説明しうる完全な解析が行なわれていないように思われる。

西村氏 (1934) は解を直交固有関数で展開する方法によって爆発圧力をうける円筒の応力を解析したことがあるが、⁽¹⁰¹⁾ その方法は煩雑であり、

Tranter (1942) は内面に周期的に変動する圧力が作用する円筒の変位をラプラス変換によって解析する方法を示しているが共に数値結果を与えていない。⁽¹⁰²⁾

最近、鈴木氏 (1964) はラプラス変換による解を数値計算する場合には振動数方程式の複素根を求めることの困難性を指摘し、変位の方程式の解を直接に固有関数からなる無限級数で表示し、エネルギー法を併用して、時間に関して指数関数的に減少する衝撃圧力をうける円筒に生ずる応力の時間的変動を解析しているが、⁽¹⁰⁷⁾ この解は厳密には円筒内外面の境界条件を満足していない。しかし近似結果としては十分な精度をもっていると述べ、応力の絶対値を対象にしていて、応力の時間的変動については十分に明らかにしていない。

本研究においては応力関数による方法を用い、振動数方程式の根を漸近近似法によって完全に求めて、内外面にステップ状圧力をうける円板および円筒に生ずる応力の時間的変動を解析した。そしてステップ状圧力に対する結果をもとにして、パルス状圧力、爆発圧力および周期的変動圧力をうける円板あるいは円筒の応力を求め、両者の結果を比較して応力変動に及ぼすポアソン比の影響および圧力変動と応力変動との関係について検討した。

5.2 円孔面に等分布衝撃圧力をうける無限板および無限体
 才 5.1 図のように, はじめに静止していた
 無限板中の半径 a の円孔面に等分布衝撃圧力
 $p(t)$ が作用すれば境界条件は

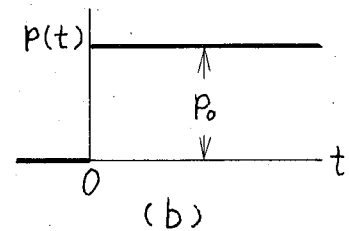
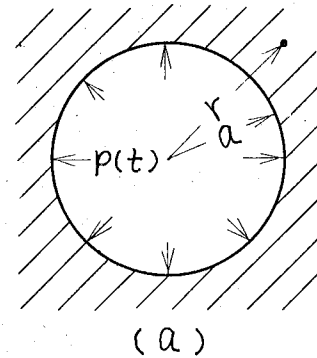
$$(\sigma_r)_{r=a} = -p(t), \quad (\tau_{r\theta})_{r=a} = 0 \quad (5.1)$$

になり, 無限遠方においては応力は 0 であるから, 応力関数 φ_0 のラプラス変換 $\bar{\varphi}_0$ を, 変形ベッセル関数 $K_s(x)$ を用いて

$$\bar{\varphi}_0 = A K_0(\alpha r), \quad \alpha = \frac{p}{c}$$

とおけば, 付表 (A-C-(3)) から

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = -A\alpha K_1(\alpha r) \\ \frac{\bar{\sigma}_r}{2G} = A\alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} K_0(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} K_1(\alpha r) \right\} \\ \frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = A\alpha^2 \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} K_0(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} K_1(\alpha r) \right\} \\ \bar{\tau}_{r\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (5.2)$$



才 5.1 図 円孔面に等分布ステップ状圧力をうける無限板あるいは無限体。

になり, (5.2) 式を (5.1) 式のラプラス変換に代入すれば

$$A\alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} K_0(\alpha a) + \frac{1}{\alpha a} K_1(\alpha a) \right\} = -\frac{\bar{p}}{2G}$$

したがって未定定数 A は次のように決る。

$$A = -\frac{\bar{p}}{2G} \frac{1}{\alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} K_0(\alpha a) + \frac{1}{\alpha a} K_1(\alpha a) \right\}} \quad (5.3)$$

いま, 圧力 $p(t)$ がステップ関数状に変動すれば

$$\bar{p} = \frac{p_0}{p} \quad (5.4)$$

であるから, (5.3) 式と (5.4) 式を (5.2) 式に代入し, 無次元量

$\lambda = a\alpha$, $\rho = r/\alpha$, $\tau = ct/\alpha$ を導入すれば変位および応力は逆変換公式を用いて次のように表わせる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{\rho_0} \frac{u}{\alpha} &= \frac{\kappa}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{K_1(\rho\lambda)}{\lambda K_0(\lambda) + \kappa K_1(\lambda)} e^{\lambda\tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{\sigma_r}{\rho_0} &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\lambda \rho K_0(\lambda\rho) + \kappa K_1(\lambda\rho)}{\lambda K_0(\lambda) + \kappa K_1(\lambda)} e^{\lambda\tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{\sigma_\theta}{\rho_0} &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(1-\kappa)\lambda \rho K_0(\lambda\rho) - \kappa K_1(\lambda\rho)}{\lambda K_0(\lambda) + \kappa K_1(\lambda)} e^{\lambda\tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \end{aligned} \right. \quad (5.5)$$

(5.5)式の被積分関数は、変形ベッセル関数 $K_s(x)$ を含んでいるから入の多価関数であり、原点は分岐点である。そして零点に関するコーツの定理(付録B-b 参照)を用いれば、 λ 平面内において超越方程式

$$\lambda K_0(\lambda) + \kappa K_1(\lambda) = 0 \quad (5.6)$$

には、 $\kappa > 2$, 3 象限内に1組の共役複素根 $\lambda_{1,2} = a_0 \pm ib_0$, ($a_0 < 0$) が存在することがわかる。

いま、(5.5)式の積分をコーツの留数定理を用いて計算するために、 $\kappa > 2$ の図のように負の実軸に沿って分岐切断を入れ、図のような反転積分路を採用すれば、 $\tau \rightarrow \infty$ ならば、ジョルダンの定理から、 $\tau > \rho - 1$ の場合には、円弧 Br_2 に沿っての積分が、そして $\tau < \rho - 1$ ならば Br_3 に沿っての積分が0になり、 $\tau = \rho - 1$ ならば Br_3 に沿っての積分は一定値に近づく。

そこで $\tau > \rho - 1$ の場合には、積分路として Br_1 , Br_2 , Γ および分岐切断に沿った L_1, L_2 よりなる閉曲線を選べば、閉曲線に沿っての一周積分は、閉曲線内の極 λ_1, λ_2 における留数の和 $\text{Res}(\lambda_1) + \text{Res}(\lambda_2)$ の $2\pi i$ 倍に等しく、 $\tau \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ ならば L_1, L_2 に沿っての矢印と逆向きの積分は実数積分になる。また円弧 Γ に沿って矢印と逆向きの積分は容易に計算できるから、コーツの留数定理を適用すれば、(5.5)式より、 $\tau > \rho - 1$ ならば

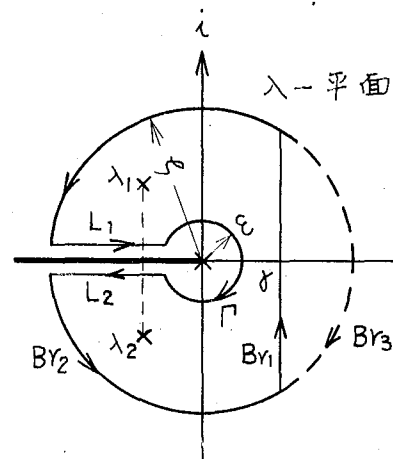


図 5.2 Selberg および著者が用いた反転積分路。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{\rho_0} \frac{u}{a} &= \frac{1}{\rho} + \kappa [\text{Res}_1(\lambda_1) + \text{Res}_1(\lambda_2) + \int_0^\infty B_1(x) \frac{e^{-x\tau}}{x} dx] \\ -\frac{O_r}{\rho_0} &= \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} [\text{Res}_2(\lambda_1) + \text{Res}_2(\lambda_2) + \int_0^\infty B_2(x) \frac{e^{-x\tau}}{x} dx] \\ \frac{O_\theta}{\rho_0} &= \frac{1}{\rho^2} - \frac{1-\kappa}{\rho} [\text{Res}_3(\lambda_1) + \text{Res}_3(\lambda_2) + \int_0^\infty B_3(x) \frac{e^{-x\tau}}{x} dx] \end{aligned} \right. \quad (5.7)$$

ここで $m = 1, 2$ とし

$$\text{Res}_1(\lambda_m) = \frac{K_1(\rho\lambda_m)}{\lambda_m(2-\kappa + \frac{1}{\kappa}\lambda_m^2)K_0(\lambda_m)} e^{\lambda_m\tau}$$

$$\text{Res}_2(\lambda_m) = \frac{\rho\lambda_m K_0(\rho\lambda_m) + \kappa K_1(\rho\lambda_m)}{\lambda_m(2-\kappa + \frac{1}{\kappa}\lambda_m^2)K_0(\lambda_m)} e^{\lambda_m\tau}$$

$$\text{Res}_3(\lambda_m) = \frac{\rho\lambda_m K_0(\rho\lambda_m) - \frac{\kappa}{1-\kappa} K_1(\rho\lambda_m)}{\lambda_m(2-\kappa + \frac{1}{\kappa}\lambda_m^2)K_0(\lambda_m)} e^{\lambda_m\tau}$$

そして

$$B_1(x) = \frac{K_1(\rho x) \{xI_0(x) - \kappa I_1(x)\} + I_1(\rho x) \{xK_0(x) + \kappa K_1(x)\}}{\{xK_0(x) + \kappa K_1(x)\}^2 + \pi^2 \{xI_0(x) - \kappa I_1(x)\}^2}$$

$$B_2(x) = \frac{\{xI_0(x) - \kappa I_1(x)\} \{\rho x K_0(\rho x) + \kappa K_1(\rho x)\} - \{xK_0(x) + \kappa K_1(x)\} \{\rho x I_0(\rho x) - \kappa I_1(\rho x)\}}{\{xK_0(x) + \kappa K_1(x)\}^2 + \pi^2 \{xI_0(x) - \kappa I_1(x)\}^2}$$

$$B_3(x) = \frac{\{xI_0(x) - \kappa I_1(x)\} \{\rho x K_0(\rho x) - \frac{\kappa}{1-\kappa} K_1(\rho x)\} - \{xK_0(x) + \kappa K_1(x)\} \{\rho x I_0(\rho x) + \frac{\kappa}{1-\kappa} I_1(\rho x)\}}{\{xK_0(x) + \kappa K_1(x)\}^2 + \pi^2 \{xI_0(x) - \kappa I_1(x)\}^2}$$

であり、(5.7)式の右辺の第1項は静荷重をうけた場合の結果を示す。

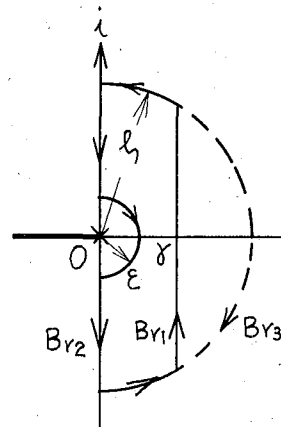
で $\rho = 1$ ならば、反転積分路として Br_1 , Br_3 とからなる閉曲線を選び、 $\tau \rightarrow \infty$ にすれば Br_3 に沿っての積分は0になるから、(5.5)式は

$$u = O_r = O_\theta = 0$$

になり、 $\tau = \rho = 1$ すなわち弾性波の波面においては、 $\tau \rightarrow \infty$ のとき Br_3 に沿って矢印と逆向きに積分すれば、(5.5)式の右辺は夫々 0 , $1/2 \cdot \sqrt{1/\rho}$, $\{(1-\kappa)/2\} \cdot \sqrt{1/\rho}$ になる。そして弾性波の波面においては O_r , O_θ は不連続になる。一方、4.2節に示されたようにラプラス逆変換においては不連続点における関数値は、その点における上限、下限の平均値を与えるから、

結局 $\sigma = \rho - 1$ ならば、波面の大きさは

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2G}{\rho_0} \frac{u}{a} = 0 \\ -\frac{\sigma_r}{\rho_0} = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \\ \frac{\sigma_\theta}{\rho_0} = -(1-\kappa) \sqrt{\frac{1}{\rho}} \end{array} \right.$$



※ 5.3 図

になる。そこで、圧力が静的に作用すれば、応力は Miklowitz が用いた $1/\rho^2$ で減衰するのに対して、弾性波頭の応力は $\sqrt{1/\rho}$ 反転積分路で減衰することがわかる。

(5.6) 式の根 λ_m を求めて (5.7) 式の留数計算および無限積分を計算することによって変位および応力が求まるが、計算が煩雑である。

ラプラス変換においては、時間 $t \rightarrow 0$ は変換パラメータ $p \rightarrow \infty$ に対応することに注目すれば、負荷初期における変位および応力は簡単な近似式で表わせる。そのために変数が大きい場合を対象にして、変形ベッセル関数 $K_s(x)$ を次のような有理化した漸近展開式で近似した⁽⁹¹⁾。(付録 B-a 参照)。

※1 近似式

$$K_0(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \frac{16x+7}{16x+9}, \quad K_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \frac{16x+11}{16x+5} \quad (5.8)$$

※2 近似式

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \frac{768x^2 + 1104x + 129}{768x^2 + 1200x + 225} \\ K_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \frac{768x^2 + 1296x + 393}{768x^2 + 1008x + 105} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

※ 5.1 図のように無限板中の円孔面に等分布ステップ状圧力が作用する場合には、※1 近似 (5.8) 式を (5.5) 式に代入してこれを近似的に逆変換すれば、 $\nu = 0.3$ したがって $\kappa = 1 - \nu = 0.7$ とすれば σ_θ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{O_{\theta}}{P_0} \sim & \frac{1}{PVP} \left[1 + 0.01029 \frac{P^3 + 3.11981P^2 - 10.79313P + 6.90301}{(P-0.61575)(P-1.10835)} e^{-0.50751(\tau+1-P)} \right. \\
& - 0.54545 \frac{P(P-1)(P-0.55556)}{(P-0.61575)(P^2-0.55218P+0.18308)} e^{-0.3125 \frac{\tau+1-P}{P}} \\
& + 0.24351 \frac{P(P-1)(P-1.8)}{(P-1.10835)(P^2-0.99393P+0.59319)} e^{-0.5625 \frac{\tau+1-P}{P}} \\
& - \left\{ 0.31029 \frac{P^5 + 0.15791P^4 - 0.78646P^3 + 1.51238P^2 - 0.75543P + 0.38644}{(P^2-0.55218P+0.18308)(P^2-0.99393P+0.59319)} \cos 0.55796(\tau+1-P) \right. \\
& \left. \left. - 0.05646 \frac{P^5 + 14.75896P^4 - 31.80632P^3 + 32.18437P^2 - 16.27023P + 3.67766}{(P^2-0.55218P+0.18308)(P^2-0.99393P+0.59319)} \sin 0.55796(\tau+1-P) \right\} e^{-0.47125(\tau+1-P)} \right] \\
& (5.10)
\end{aligned}$$

(5.8) 式の代りにオ2近似(5.9)式を用いれば $(O_{\theta})_{P=1}$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
\frac{(O_{\theta})_{P=1}}{P_0} \sim & 1 - 0.04806 e^{-0.20757\tau} + 0.18570 e^{-1.11144\tau} + 0.00196 e^{-1.30711\tau} \\
& + e^{-0.41194\tau} \{ 1.22189 \sin 0.42227\tau - 1.43960 \cos 0.42227\tau \} \quad (5.11)
\end{aligned}$$

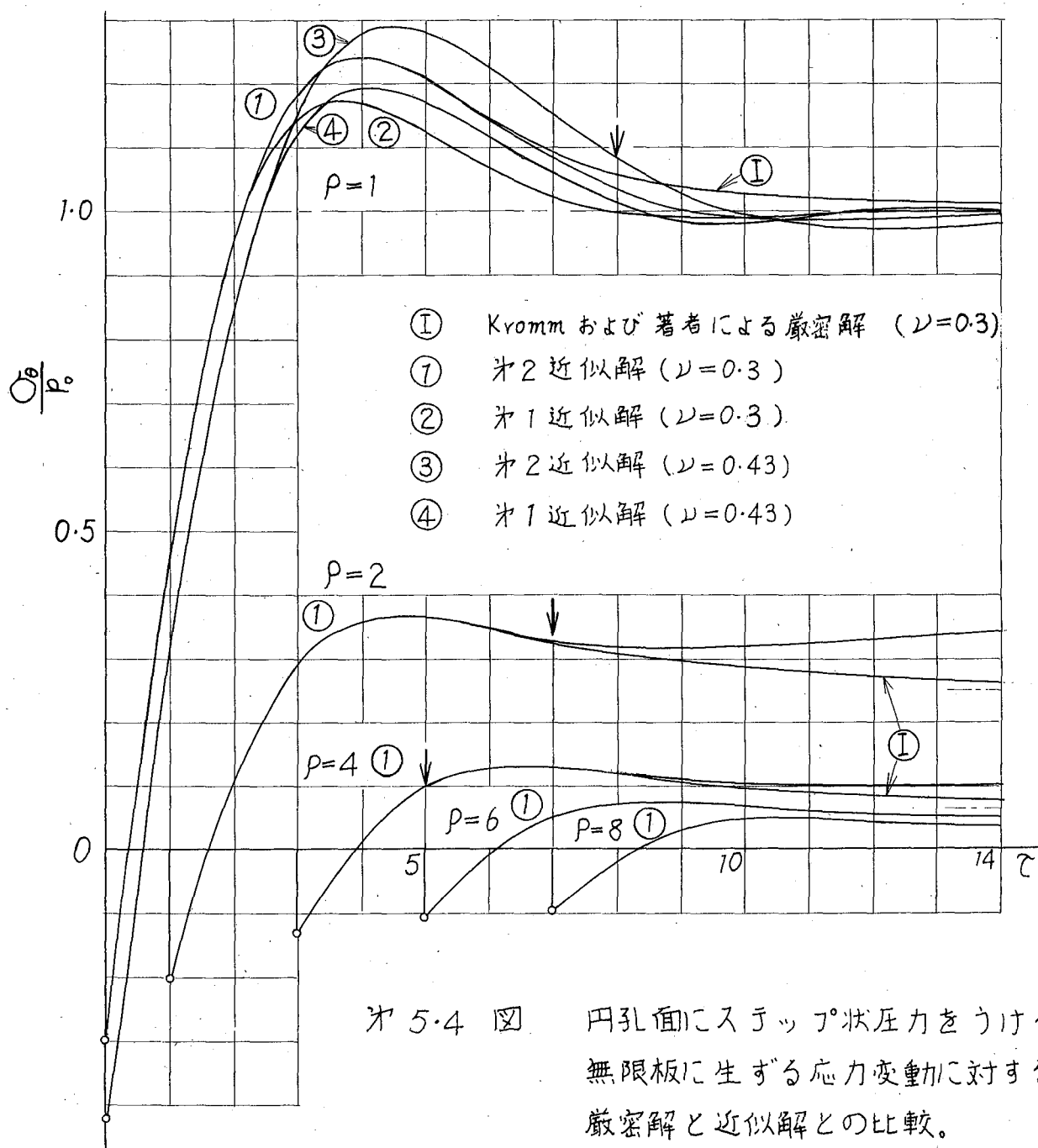
$\nu = 0.43$ の円板の応力は, $\nu = 0.3$ の円筒の応力に等しく, (5.8) 式を用いれば円筒の応力 $(O_{\theta})_{P=1}$ は

$$\begin{aligned}
\frac{(O_{\theta})_{P=1}}{P_0} \sim & 1 - 0.06349 e^{-0.50299\tau} + e^{-0.40922\tau} \{ 0.43301 \sin 0.52142\tau \\
& - 1.36508 \cos 0.52142\tau \} \quad (5.12)
\end{aligned}$$

になり, オ2近似(5.9)式を用いれば, 次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
\frac{(O_{\theta})_{P=1}}{P_0} \sim & 1 - 0.05909 e^{-0.20593\tau} + 0.12208 e^{-1.13665\tau} + 0.00179 e^{-1.30749\tau} \\
& + e^{-0.33568\tau} \{ 1.08564 \sin 0.40895\tau - 1.49335 \cos 0.40895\tau \} \\
& (5.13)
\end{aligned}$$

オ5.4 図は円孔面に等分布ステップ状圧力をうける無限板に生ずる応力の時間的変動について, これらの近似解と Kromm の厳密解を比較したもので, 時間が小さいならば, 両者はよく一致する。



(図中の矢印は内面に等分布入射波状圧力をうける内外径比 $\rho_1=5$ の円板の場合に外面からの反射波が任意半径の位置に到達する時間を示しており, その時間以前においては, 近似解を著者の厳密解 (図 5.11 図参照) と比較した。)

この結果，負荷初期における O_θ は圧縮応力であるが，時間が経過すれば引張応力になり，時間が十分に経過した後は静的結果に一致し，その傾向は球孔面に等分布スリップ状圧力をうける無限体の結果に一致する。そして，荷重面における最大引張応力 $(O_\theta)_{max}$ は大きさが等しい静的圧力による結果よりも大きく，その比は $\nu=0.3$ ならば球孔を有する無限体においては1.48であるのに対して，円孔を有する無限体においては1.30，円孔を有する無限板においては1.23である。

この近似解によって円板あるいは円筒のどちらか一方の結果から，他方の結果が推定できる。

5.3 側面に衝撃圧力をうける円板および円柱

半径 a の中実円板あるいは円柱の側面に等分布衝撃圧力 $p(t)$ を加えれば，境界条件は

$$(O_r)_{r=a} = -p(t), \quad (\tau_{r\theta})_{r=a} = 0 \quad (5.14)$$

になる。中心 $r=0$ において応力が有限になることを考慮して応力関数 ϕ_0 のラプラス変換 $\bar{\phi}_0$ を

$$\bar{\phi}_0 = A I_0(\alpha r) \quad (5.15)$$

とおけば，付表 (A-c-(3))から変位および応力のラプラス変換は

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = A \alpha I_1(\alpha r) \\ \frac{\bar{O}_r}{2G} = A \alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} I_0(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} I_1(\alpha r) \right\} \\ \frac{\bar{O}_\theta}{2G} = A \alpha^2 \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} I_0(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} I_1(\alpha r) \right\} \\ \bar{\tau}_{r\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (5.16)$$

になるから，(5.14)式のラプラス変換に(5.16)式を代入すれば未定定数 A は次のように決まる。

$$A = -\frac{\bar{p}}{2G} \frac{1}{\alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} I_0(\alpha a) - \frac{1}{\alpha a} I_1(\alpha a) \right\}} \quad (5.17)$$

圧力 $P(t)$ がステップ関数状に変動すれば

$$\bar{p} = \frac{P_0}{p} \quad (5.18)$$

であるから, (5.17)式と(5.18)式を(5.16)式に代入し無次元量 $\lambda = \alpha x$, $\rho = r/a$, $\tau = ct/a$ を導入すれば, 変位および応力の逆変換は次のようになる。

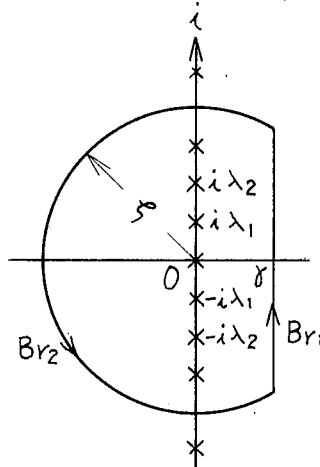
$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2G U}{P_0 a} &= \kappa \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{I_1(\rho\lambda)}{\lambda I_0(\lambda) - \kappa I_1(\lambda)} e^{\lambda\tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{Q_r}{P_0} &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\rho\lambda I_0(\rho\lambda) - \kappa I_1(\rho\lambda)}{\lambda I_0(\lambda) - \kappa I_1(\lambda)} e^{\lambda\tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{Q_\theta}{P_0} &= \frac{1-\kappa}{\rho} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\rho\lambda I_0(\rho\lambda) + \frac{\kappa}{1-\kappa} I_1(\rho\lambda)}{\lambda I_0(\lambda) - \kappa I_1(\lambda)} e^{\lambda\tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \end{aligned} \right. \quad (5.19)$$

(5.19) 式の被積分関数は λ の 1 価関数であり

$$\lambda I_0(\lambda) - \kappa I_1(\lambda) = 0$$

は λ 平面の虚軸上に単根の列をもつ。(付録 B-C-(i) 参照)。

亦 5.5 図に示した積分路を選び $\delta \rightarrow \infty$ にすれば Br_2 に沿っての積分は 0 になるから, コーツの留数定理を適用すれば, 変位および応力は虚軸上の極における留数の和として求まり次のようになる。



亦 5.5 図
反転積分路

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2G U}{P_0 a} &= \frac{\kappa}{2-\kappa} \rho - 2\kappa^2 \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{J_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{\{\lambda_n^2 - \kappa(2-\kappa)\} J_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{Q_r}{P_0} &= 1 - 2\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho\lambda_n) - \kappa \frac{J_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{\{\lambda_n^2 - \kappa(2-\kappa)\} J_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{Q_\theta}{P_0} &= 1 - 2\kappa(1-\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho\lambda_n) + \frac{\kappa}{1-\kappa} \frac{J_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{\{\lambda_n^2 - \kappa(2-\kappa)\} J_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \end{aligned} \right. \quad (5.20)$$

ただし λ_n は

$$\lambda_n J_0(\lambda_n) - \kappa J_1(\lambda_n) = 0 \quad (5.21)$$

の根であり, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \dots$ である。

(5.20)式の右辺の n 項は原点における留数の値から得られ, 大きさが等しい静荷重をうける円板に対する結果に等しい。

(5.20)式は特定の時間 $\tau = 2m$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) に対して収束が悪いために, ベッセル関数 $J_1(\rho\lambda_n)$ の直交性

$$\int_0^1 \rho J_1(\rho\lambda_m) J_1(\rho\lambda_n) d\rho = 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n)$$

を用いて (5.20)式の右辺の n 項を次のような級数に展開し

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(\rho\lambda_n) \quad (5.22)$$

$$A_n = \frac{\int_0^1 \rho^2 J_1(\rho\lambda_n) d\rho}{\int_0^1 \rho J_1^2(\rho\lambda_n) d\rho} = \frac{2\kappa(2-\kappa)}{\lambda_n \{ \lambda_n^2 - \kappa(2-\kappa) \} J_0(\lambda_n)}$$

(5.22)式を用いて (5.20)式を変形すれば

$$\left[\begin{aligned} -\frac{2G}{\rho_0} \frac{u}{a} &= 2\kappa^2 \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{J_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{\{ \lambda_n^2 - \kappa(2-\kappa) \} J_0(\lambda_n)} (1 - \cos \lambda_n \tau) \\ -\frac{Q_r}{\rho_0} &= 1 - 2\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho\lambda_n) - \kappa \frac{J_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{\{ \lambda_n^2 - \kappa(2-\kappa) \} J_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{Q_\theta}{\rho_0} &= 1 - \kappa - 2\kappa(1-\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho\lambda_n) - \kappa \frac{J_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{\{ \lambda_n^2 - \kappa(2-\kappa) \} J_0(\lambda_n)} \cos \lambda_n \tau \\ &\quad + 2\kappa^2(2-\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{J_1(\rho\lambda_n)}{\rho\lambda_n}}{\{ \lambda_n^2 - \kappa(2-\kappa) \} J_0(\lambda_n)} (1 - \cos \lambda_n \tau) \end{aligned} \right. \quad (5.23)$$

と書き直せる。応力波の波面が表面に到達したとき $\tau = 2m$ に対しては (5.23)式は (5.20)式に比べて収束がよい。

(5.21)式を満足する根 λ_n は、 n が小なうは Trial Method により、 n が大なうはベッセル函数 $J_0(x)$ の漸近展開式および Reversion の公式 (付録 B-d 参照) を用いて導いた以下に示す公式によつて計算した。

$$\lambda_n \sim \beta - \frac{k_1}{\beta} - \frac{k_1^2 + k_3}{\beta^3} - \frac{2k_1^3 + 4k_1k_3 + k_5}{\beta^5} - \frac{5k_1^4 + 15k_1^2k_3 + 3k_3^2 + 6k_1k_5 + k_7}{\beta^7} - \dots \quad (5.24)$$

こゝで

$$\beta = (n - \frac{1}{4})\pi$$

$$k_1 = e_1$$

$$k_3 = e_2 - \frac{e_1^3}{3}$$

$$k_5 = e_3 - e_2e_1^2 + \frac{e_1^5}{5}$$

$$k_7 = e_4 - e_3e_1^2 - e_1e_2^2 + e_2e_1^4 - \frac{e_1^7}{7}$$

$$e_1 = d_0$$

$$e_2 = d_2 - e_1d_1$$

$$e_3 = d_4 - e_2d_1 - e_1d_3$$

$$e_4 = d_6 - e_3d_1 - e_2d_3 - e_1d_5$$

$$d_0 = \kappa - 0.125$$

$$d_1 = -0.375\kappa - 0.070313$$

$$d_2 = 0.117188\kappa + 0.073242$$

$$d_3 = 0.102539\kappa + 0.112152$$

$$d_4 = -0.144196\kappa - 0.227108$$

$$d_5 = -0.227576\kappa - 0.572501$$

$$d_6 = 0.676593\kappa + 1.727727$$

表 5.1 表 (5.21)式

の根 λ_n 。($\nu = 0.3$)。

(a) 円板 (平面応力)

n	λ_n
1	2.048 9*
2	5.389 4*
3	8.571 9
4	11.731 8
5	14.883 8
6	18.032 2
7	21.178 6
8	24.323 7
9	27.468 0
10	30.611 7

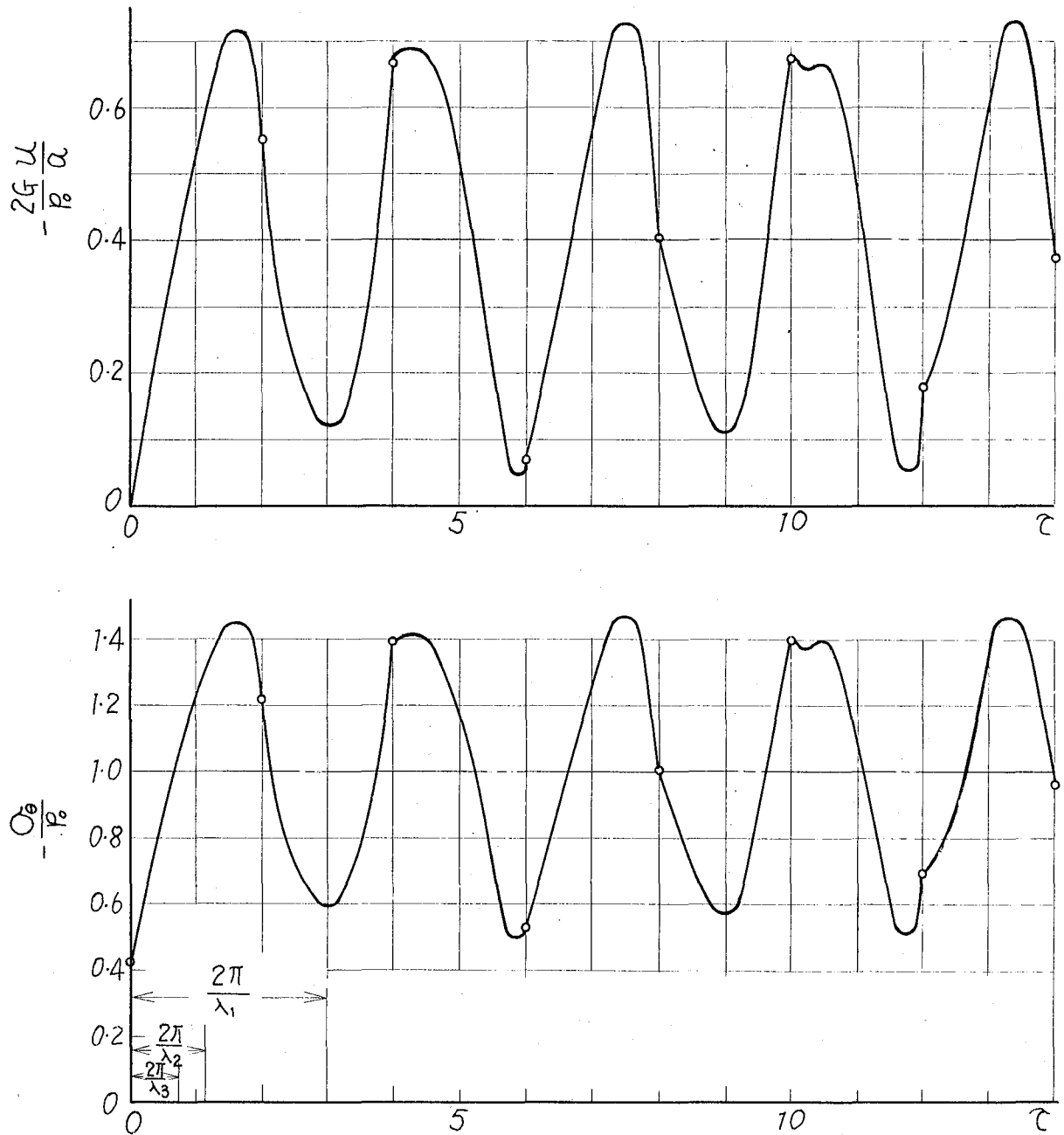
(b) 円柱 (平面ひずみ)

n	λ_n
1	2.125 8*
2	5.413 9*
3	8.587 0
4	11.742 8
5	14.892 5
6	18.039 4
7	21.184 7
8	24.329 0
9	27.472 7
10	30.615 9

*印は Trial Method による値。他は漸近近似 (5.24)式による計算値である。

表 5.1 表には $\nu = 0.3$ の場合について求めた λ_n の値が示してある。

等分布ステップ状圧力をうける円柱の表面に生ずる変位および応力の時間的変動をオ 5・1 表の λ_n の値を用いて (5・20) 式および (5・21) 式によって計算して、その結果をオ 5・6 図に示した。図中の丸印は負荷の瞬間で $=0$ に円柱表面に生じた弾性波の波面が、円柱の表面と中心の間を往復した後、円柱表面に到達した時間で $=2m$ ($m=0, 1, 2, 3, \dots$) に対応し、変位および応力はこの時間に不連続的に変動するが、全体として見れば図中一点鎖線で示される静的結果を中心にして振動する。



オ 5・6 図 等分布ステップ状圧力をうける円柱に生ずる変位および応力の時間的変動 ($\nu=0.3$)。

前節におけると同様にして負荷初期における応力の近似式をえるために、変形ベッセル関数 $I_0(x)$ を次のように有理化した漸近展開式で近似した。
(付録B-a 参照)。

オ1 近似式

$$I_0(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \frac{16x-7}{16x-9}, \quad I_1(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \frac{16x-11}{16x-5} \quad (5.25)$$

オ2 近似式

$$I_0(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \frac{768x^2 - 1104x + 129}{768x^2 - 1200x + 225} \quad (5.26)$$

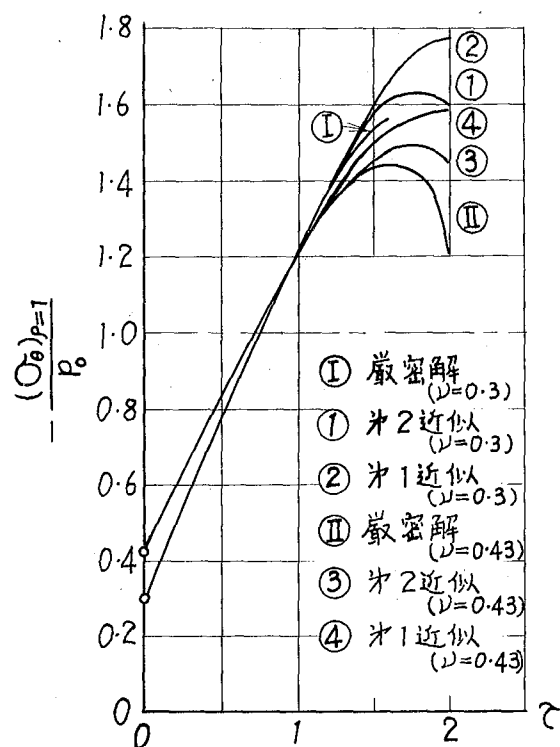
$$I_1(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \frac{768x^2 - 1296x + 393}{768x^2 - 1008x + 105}$$

(5.25) 式あるいは (5.26) 式を (5.19) 式に代入してこれを近似的に逆変換すれば“等分布ステップ状外圧をうける円柱の負荷初期における近似解がえられ、その結果は $\nu = 0.3$ ならば” (5.12) 式あるいは (5.13) 式において ν のかわりに $-\nu$ を代入してえられる結果に一致する。

オ5.7 図はステップ状外圧をうける円板あるいは円柱の表面の負荷初期における応力変動を近似解と厳密解について比較した結果を示している。

近似解と厳密解の比較は円柱中心からの最初の反射波が円柱表面に到達する時間 $\tau = 2$ 以前において意味があり、 $\tau = 1.5$ 以前においてはオ2 近似解は厳密解によく一致する。

オ5.7 図から、静的圧力による応力はポアソン比 ν に無関係であるのに対して、衝撃荷重による応力変動は ν に関係し、 ν が小さい方が円柱表面における最大圧縮応力が大きいことがわかる。



オ5.7 図 等分布ステップ状外圧をうける円板の表面に生ずる負荷初期の応力。

5.4 内外面に等分布衝撃圧力をうける円板および円筒

オ 5.8 図 (a) のように内外半径がそれぞれ a, b の有孔円板の内面に等分布圧力 $p(t)$ が作用する場合には, 境界条件は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{O}_r)_{r=a} = -p(t), \quad (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} = 0 \\ (\bar{O}_r)_{r=b} = 0, \quad (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=b} = 0 \end{array} \right. \quad (5.27)$$

オ 5.8 図 (b) のように $p(t)$ がステップ関数状に変動する場合には, (5.27) 式のラプラス変換は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{O}_r)_{r=a} = -\frac{p_0}{p}, \quad (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} = 0 \\ (\bar{O}_r)_{r=b} = 0, \quad (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=b} = 0 \end{array} \right. \quad (5.28)$$

いま応力関数 φ_0 のラプラス変換 $\bar{\varphi}_0$ を

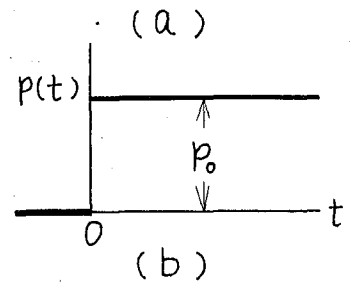
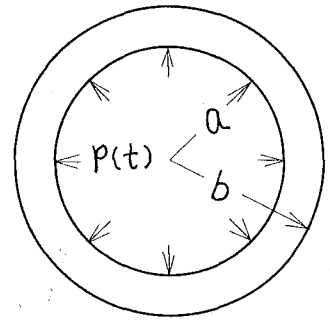
$$\bar{\varphi}_0 = A I_0(\alpha r) + B K_0(\alpha r)$$

とおけば, 変位および応力のラプラス変換は付表 (A-C-(3)) から

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = A \alpha I_1(\alpha r) - B \alpha K_1(\alpha r) \\ \frac{\bar{O}_r}{2G} = A \alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} I_0(\alpha r) - \frac{I_1(\alpha r)}{\alpha r} \right\} + B \alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} K_0(\alpha r) + \frac{K_1(\alpha r)}{\alpha r} \right\} \\ \frac{\bar{O}_\theta}{2G} = A \alpha^2 \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} I_0(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} I_1(\alpha r) \right\} + B \alpha^2 \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} K_0(\alpha r) - \frac{K_1(\alpha r)}{\alpha r} \right\} \\ \bar{\tau}_{r\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (5.29)$$

になるから, これを (5.28) 式に代入すれば未定定数 A, B が定まり,

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \kappa \frac{p_0}{2G} \frac{a}{\alpha} \left\{ \alpha b K_0(\alpha b) + \kappa K_1(\alpha b) \right\} \frac{1}{p \cdot F} \end{array} \right.$$



オ 5.8 図 内面に等分布衝撃圧力をうける円板および円筒。

$$B = -\kappa \frac{p_0}{2G} \frac{a}{\alpha} \{ \alpha b I_0(\alpha b) - \kappa I_1(\alpha b) \} \frac{1}{p \cdot F}$$

(5.30)

ここで

$$F = \{ \alpha b I_0(\alpha b) - \kappa I_1(\alpha b) \} \{ \alpha a K_0(\alpha a) + \kappa K_1(\alpha a) \} \\ - \{ \alpha a I_0(\alpha a) - \kappa I_1(\alpha a) \} \{ \alpha b K_0(\alpha b) + \kappa K_1(\alpha b) \}$$

である。

そこで (5.30) 式を (5.29) 式に代入し, $\lambda = a\alpha$, $p_1 = b/a$, $p = r/a$, $\tau = ct/a$ において変位および応力を逆変換すれば

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{p_0} \frac{u}{a} &= \frac{\kappa}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \left[\{ p_1 \lambda K_0(p_1 \lambda) + \kappa K_1(p_1 \lambda) \} I_1(p \lambda) + \{ p_1 \lambda I_0(p_1 \lambda) - \kappa I_1(p_1 \lambda) \} K_1(p \lambda) \right] \frac{e^{\lambda \tau}}{F(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{\sigma_r}{p_0} &= \frac{1}{p} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \left[\{ p_1 \lambda I_0(p_1 \lambda) - \kappa I_1(p_1 \lambda) \} \{ p \lambda K_0(p \lambda) + \kappa K_1(p \lambda) \} \right. \\ &\quad \left. - \{ p_1 \lambda K_0(p_1 \lambda) + \kappa K_1(p_1 \lambda) \} \{ p \lambda I_0(p \lambda) - \kappa I_1(p \lambda) \} \right] \frac{e^{\lambda \tau}}{F(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{\sigma_\theta}{p_0} &= \frac{1}{p} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \left[\{ p_1 \lambda I_0(p_1 \lambda) - \kappa I_1(p_1 \lambda) \} \{ (1-\kappa) p \lambda K_0(p \lambda) - \kappa K_1(p \lambda) \} \right. \\ &\quad \left. - \{ p_1 \lambda K_0(p_1 \lambda) + \kappa K_1(p_1 \lambda) \} \{ (1-\kappa) p \lambda I_0(p \lambda) + \kappa I_1(p \lambda) \} \right] \frac{e^{\lambda \tau}}{F(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda} \end{aligned} \right.$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

(5.31)

ここで

$$F(\lambda) = \{ p_1 \lambda I_0(p_1 \lambda) - \kappa I_1(p_1 \lambda) \} \{ \lambda K_0(\lambda) + \kappa K_1(\lambda) \} \\ - \{ p_1 \lambda K_0(p_1 \lambda) + \kappa K_1(p_1 \lambda) \} \{ \lambda I_0(\lambda) - \kappa I_1(\lambda) \} \quad (5.32)$$

である。

(5.31) 式の右辺の被積分関数は λ の一価関数であり, $\lambda = 0$ は 1 位の極である。さらに方程式 $F(\lambda) = 0$ の根はすべて単根であって, λ 平面の虚軸上に無数にある。(付録 B-C-(ii) 参照)。

他方、オ 5.5 図の円弧 Br_2 に沿っての積分は $r \rightarrow \infty$ のとき 0 になるからコーツの留数定理によって (5.31) 式の右辺の複素積分は虚軸上の極における留数の総和として与えられ、虚軸上の極を $\pm \lambda_1, \pm \lambda_2, \pm \lambda_3, \dots$ とすれば変位および応力は

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{\rho_0} \frac{u}{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\rho_1^2 + \frac{\kappa}{2-\kappa} \rho^2}{\rho_1^2 - 1} + 2\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(\rho \lambda_n)}{D_0} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{Q_r}{\rho_0} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho_1^2 - \rho^2}{\rho_1^2 - 1} + \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa M_1(\rho \lambda_n) - \rho \lambda_n M_0(\rho \lambda_n)}{D_0} \cos \lambda_n \tau \\ \frac{Q_\theta}{\rho_0} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho_1^2 + \rho^2}{\rho_1^2 - 1} + \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa M_1(\rho \lambda_n) + (1-\kappa) \rho \lambda_n M_0(\rho \lambda_n)}{D_0} \cos \lambda_n \tau \end{aligned} \right. \quad (5.33)$$

ここで

$$D_0 = \frac{1}{M_1(\lambda_n)} \left[\{ \lambda_n^2 - \kappa(2-\kappa) \} M_1^2(\lambda_n) - \{ \lambda_n^2 \rho_1^2 - \kappa(2-\kappa) \} M_1^2(\rho_1 \lambda_n) \right]$$

$$M_s(x) = \frac{\rho_1 \lambda_n Y_0(\rho_1 \lambda_n) - \kappa Y_1(\rho_1 \lambda_n)}{\rho_1 \lambda_n J_0(\rho_1 \lambda_n) - \kappa J_1(\rho_1 \lambda_n)} J_s(x) - Y_s(x) \quad (5.34)$$

そして $J_s(x), Y_s(x)$ はオ 1 種およびオ 2 種の S 次のベッセル関数であり、 λ_n は超越方程式

$$\kappa M_1(\lambda_n) - \lambda_n M_0(\lambda_n) = 0 \quad (5.35)$$

の根で $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \dots$ である。

(5.35) 式は半径方向に軸対称振動する有孔円板あるいは円筒の振動方程式に一致し、固有振動数 f_n は

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{a} \lambda_n \quad (5.36)$$

で与えられる。そして (5.33) 式の右辺のオ 1 項は静荷重による結果を示しているから、ステップ状に変動する衝撃圧力をうける円板に生ずる変位および応力は静的結果とすべての次数の固有振動による結果の総和として表わされる。

(5.33) 式における級数は特定の時間すなわち弾性波の波面が内面に到達したとき $\tau_m = 2m(\rho_1 - 1)$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) において収束が悪

い。そこで (5.34) 式で定義された円柱関数 $M_1(p\lambda_n)$ の直交性

$$\int_1^p \rho M_1(p\lambda_m) M_1(p\lambda_n) d\rho = 0$$

に基づいて (5.33) 式のオ 1 項を次のような級数に展開する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda_n \frac{M_0(p\lambda_n) - M_0(\lambda_n)}{M_1(\lambda_n)} \cdot \frac{M_1(p\lambda_n)}{D_0} \\ p = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{2-\kappa}{\kappa} \lambda_n \frac{M_0(\lambda_n) - p_1^2 M_0(p_1\lambda_n)}{M_1(\lambda_n)} \frac{M_1(p\lambda_n)}{D_0} \end{array} \right.$$

したがって

$$\frac{1}{p} \frac{p_1^2 + \frac{\kappa}{2-\kappa} p^2}{p_1^2 - 1} = -2\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(p\lambda_n)}{D_0} \quad (5.37)$$

になり, (5.37) 式は (5.33) 式において $(u)_{t=0} = 0$ とおいてえられる結果に一致する。

(5.37) 式を用いて (5.33) 式を書き直せば

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2G}{p} \frac{u}{a} = 2\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(p\lambda_n)}{D_0} (1 - \cos \lambda_n \tau) \\ -\frac{Q_0}{p_0} = (1-\kappa) \frac{1}{p^2} \frac{p_1^2 - p^2}{p_1^2 - 1} + \frac{2\kappa(2-\kappa)}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(p\lambda_n)}{D_0} (1 - \cos \lambda_n \tau) \\ \quad + \frac{2(1-\kappa)}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa M_1(p\lambda_n) - p\lambda_n M_0(p\lambda_n)}{D_0} \cos \lambda_n \tau \end{array} \right. \quad (5.38)$$

になる。

(5.33) 式の根 λ_n は n が小さければ Trial Method によって求め, n が大きい場合には (5.35) 式中のベッセル関数を漸近展開し Reversion の方法を適用して次の公式を導いて λ_n を計算した。(付録B-d 参照)

$$\lambda_n \sim \beta - \frac{k_1}{\beta} - \frac{k_1^2 + k_3}{\beta^3} - \frac{2k_1^3 + 4k_1k_3 + k_5}{\beta^5} - \frac{5k_1^4 + 15k_1^2k_3 + 3k_3^2 + 6k_1k_5 + k_7}{\beta^7} \dots \quad (5.39)$$

□□□

$$\beta = \frac{n-1}{p_1-1} \pi$$

$$k_1 = -\frac{t_1}{p_1-1}$$

$$t_1 = \frac{p_1-1}{p_1} d_0$$

$$k_3 = -\frac{t_3 - \frac{t_1^3}{3}}{p_1-1}$$

$$t_3 = (k_2 - g_2) t_1$$

$$k_5 = -\frac{t_5 - t_1^2 t_3 + \frac{t_1^5}{5}}{p_1-1}$$

$$t_5 = (k_4 - g_4) t_1 - g_2 t_3$$

$$k_7 = -\frac{t_7 - t_1^2 t_5 - t_1 t_3^2 + t_1^4 t_3 - \frac{t_1^7}{7}}{p_1-1}$$

$$t_7 = (k_6 - g_6) t_1 - g_2 t_5 - g_4 t_3$$

$$g_2 = \frac{p_1^2+1}{p_1^2} d_1 + \frac{1}{p_1} d_0$$

$$g_4 = \frac{p_1^2+1}{p_1^3} d_0 d_2 + \frac{p_1^4+1}{p_1^4} d_3 + \frac{1}{p_1^2} d_1^2$$

$$g_6 = \frac{p_1^4+1}{p_1^5} d_0 d_4 + \frac{p_1^6+1}{p_1^6} d_5 + \frac{p_1^2+1}{p_1^4} d_1 d_3 + \frac{1}{p_1^3} d_2^2$$

$$h_2 = \frac{p_1^3-1}{p_1^2(p_1-1)} \frac{d_2}{d_0} - \frac{1}{p_1} d_1$$

$$h_4 = \frac{p_1^5-1}{p_1^4(p_1-1)} \frac{d_4}{d_0} + \frac{1}{p_1^2} \frac{d_1 d_2}{d_0} - \frac{p_1^3-1}{p_1^3(p_1-1)} d_3$$

$$h_6 = \frac{p_1^7-1}{p_1^6(p_1-1)} \frac{d_6}{d_0} + \frac{p_1^3-1}{p_1^4(p_1-1)} \frac{d_1 d_4}{d_0} - \frac{1}{p_1^3} \frac{d_2 d_3}{d_0} - \frac{p_1^5-1}{p_1^5(p_1-1)} d_5$$

□□□

$$d_0 = \kappa - 0.125$$

$$d_4 = -0.144196\kappa - 0.227108$$

$$d_1 = -0.375\kappa - 0.070313$$

$$d_5 = -0.227576\kappa - 0.572501$$

$$d_2 = 0.117188\kappa + 0.073242$$

$$d_6 = 0.676593\kappa + 1.727727$$

$$d_3 = 0.102539\kappa + 0.112152$$

である。

※5・2 表には, $p_1 = 1.25, 1.5, 2, 5$ の場合についての λ_n の値が示してある。

表 5.2 (5.35) 式の根 λ_n (平面応力 $\nu=0.3$)

	$P_1=5$	$P_1=2$	$P_1=2$ (平面ひずみ)	$P_1=1.5$	$P_1=1.25$
n	λ_n	λ_n	λ_n	λ_n	λ_n
1	0.360 29*	0.661 6 *	0.633 27*	0.774 3 *	0.851 76*
2	0.949 62*	3.236 9 *	3.216 55*	6.345 1 *	12.603 12*
3	1.652 09*	6.329 6 *	6.319 30*	12.597 0 *	25.151 04
4	2.408 21*	9.455 4 *	9.448 65*	18.869 9	37.711 36
5	3.179 72*	12.589 1	12.584 20	25.148 0	50.274 64
6	3.957 10*	15.726 2	15.722 21	31.428 1	62.839 20
7	4.737 29*	18.864 8	18.861 42	37.709 3	75.404 32
8	5.519 03*	22.004 2	22.001 31	43.991 0	87.969 84
9	6.301 71*	25.144 2	25.141 63	50.273 1	100.535 52
10	7.085 01*	28.284 5	28.282 24	56.555 4	113.101 44
11	7.868 74*				
12	8.652 78*				
13	9.437 05*				
14	10.221 49*				
15	11.006 08*				

*印は Trial Method によって求めた結果を示し、
他は (5.39) 式による計算結果である。

応力変動を求めるに先だって (5.33) 式の右辺に含まれる無限級数の収束性を調べた。

表 5.9 図は $P_1=5$, $\kappa=1-\nu=0.7$ すなわち $\nu=0.3$ の円板の場合に、表 5.2 表に示した λ_n の値を用いて (5.33) 式の無限級数に含まれる項

$$F_n = -\frac{M_1(P\lambda_n)}{D_0} \quad , \quad G_n = -\frac{P\lambda_n M_0(P\lambda_n)}{D_0}$$

と n の関係を $\rho=r/a=1, 2, 3, 4, 5$ の場合について計算した結果を示している。

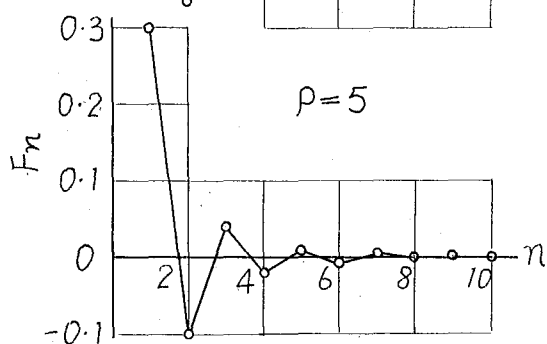
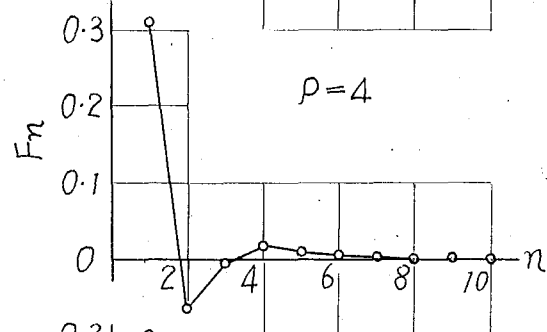
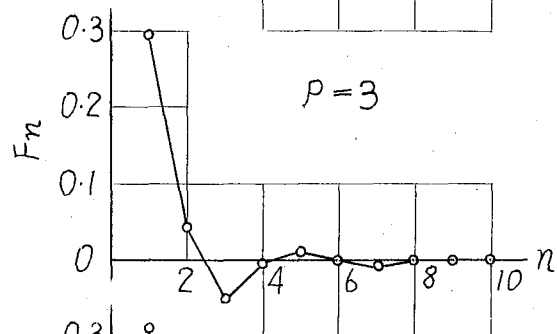
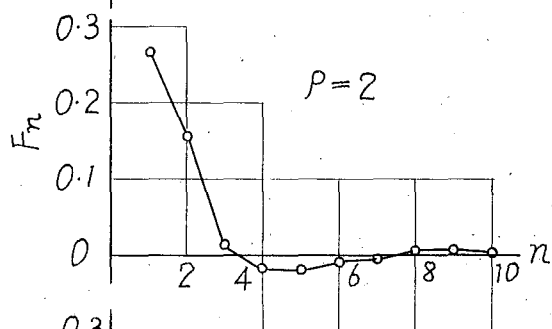
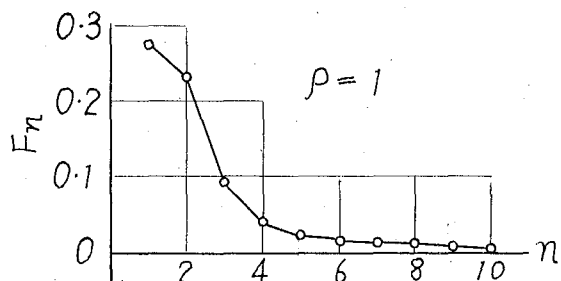
この結果 n が増大すれば、 F_n はすべての ρ に対して同程度の割合ですみやかに減少するのに対して、 G_n は $\rho=1, 5$ すなわち内外面においてはすみやかに減少するけれども、 $\rho=2, 3, 4$ においては減少の割合がゆるやかであり、級数の収束が悪いことを示している。

表 5.3 表は (5.37) 式の右辺の無限級数の収束を調べるために、50 項および 100 項で打ち切って計算した値を示したもので、 $\rho=1$ すなわち内面における収束が最も悪く、 ρ が大きくなるほどすなわち外面に近

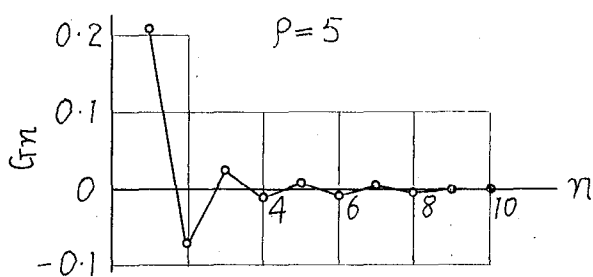
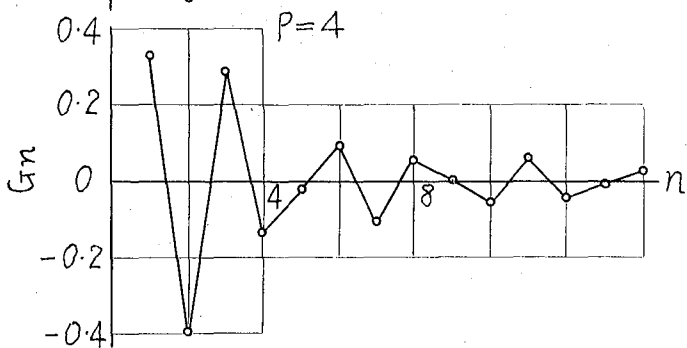
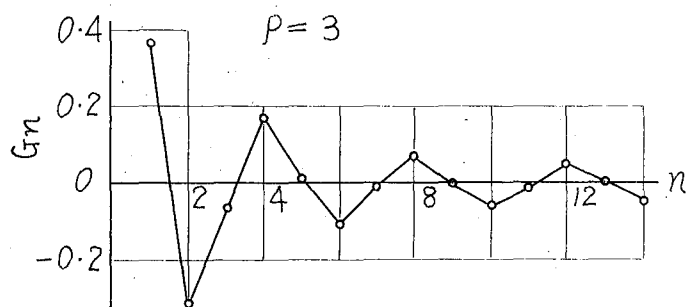
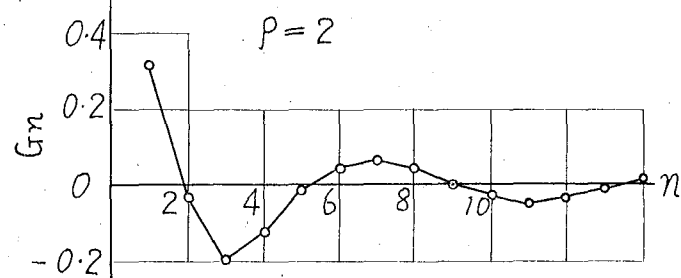
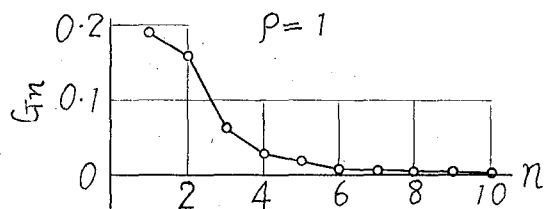
いほど収束が良いことがわかる。

表 5.3 表 級数和 $S_N = -2\kappa \sum_{n=1}^N F_n$
と ρ の関係。 ($\rho_1 = 5, \kappa = 1 - \nu = 0.7$)。
ただし $S_\infty = \frac{1}{\rho} \frac{\rho_1^2 + \frac{\kappa}{2} \rho^2}{\rho_1^2 - 1}$ 。

ρ	1	2	3	4	5
S_{50}	1.053	0.5659	0.4146	0.3501	0.3205
S_{100}	1.058	0.5657	0.4145	0.3502	0.3205
S_∞	1.064	0.5657	0.4145	0.3502	0.3205



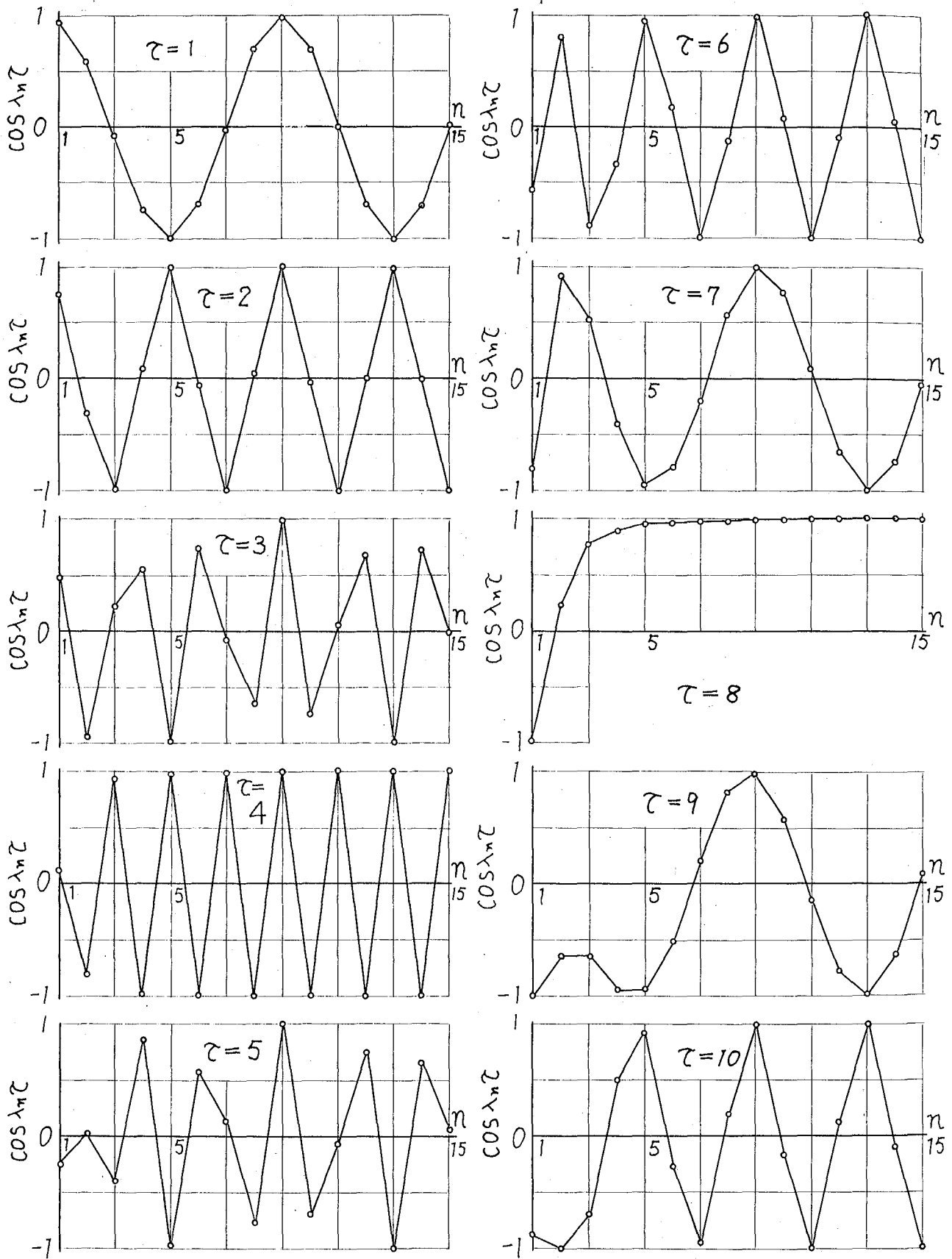
(a) $\rho_1 = 5, \kappa = 1 - \nu = 0.7$



(b) $\rho_1 = 5, \kappa = 1 - \nu = 0.7$

表 5.9 図 F_n, G_n と n の関係

オ 5・10 図は種々の時間 τ に対する $\cos \lambda_n \tau$ と n の関係を示したもので、



オ 5・10 図 $\cos \lambda_n \tau$ と n の関係

弾性波の伝播現象を考慮すれば

$$\tau = 0, 8, \quad 16, \quad \dots$$

$$\tau = 1, 7, 9, 15, \quad \dots$$

$$\tau = 2, 6, 10, 14, \quad \dots$$

$$\tau = 3, 5, 11, 13, \quad \dots$$

$$\tau = 4, \quad 12, \quad \dots$$

の各時間における $\cos \lambda_n \tau$ と n の関係は類似することがわかる。そして

$\tau_m = 2m(P_1 - 1)$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) に弾性波の波面が内面に到達し、この時間において $\cos \lambda_n \tau$ は n が増大すれば $+1$ に近づく。この結果 τ_m においては (5.33) 式のかわりに (5.38) 式を用いればよいことがわかる。

以上の結果をもとにして (5.33) 式および (5.38) 式によって $P_1 = b/a = 1.5, 2, 5$ の場合に, $\nu = 0.3$ として内面に等分布ステップ状圧力をうける円板に生ずる変位と応力の時間的変動を計算した。

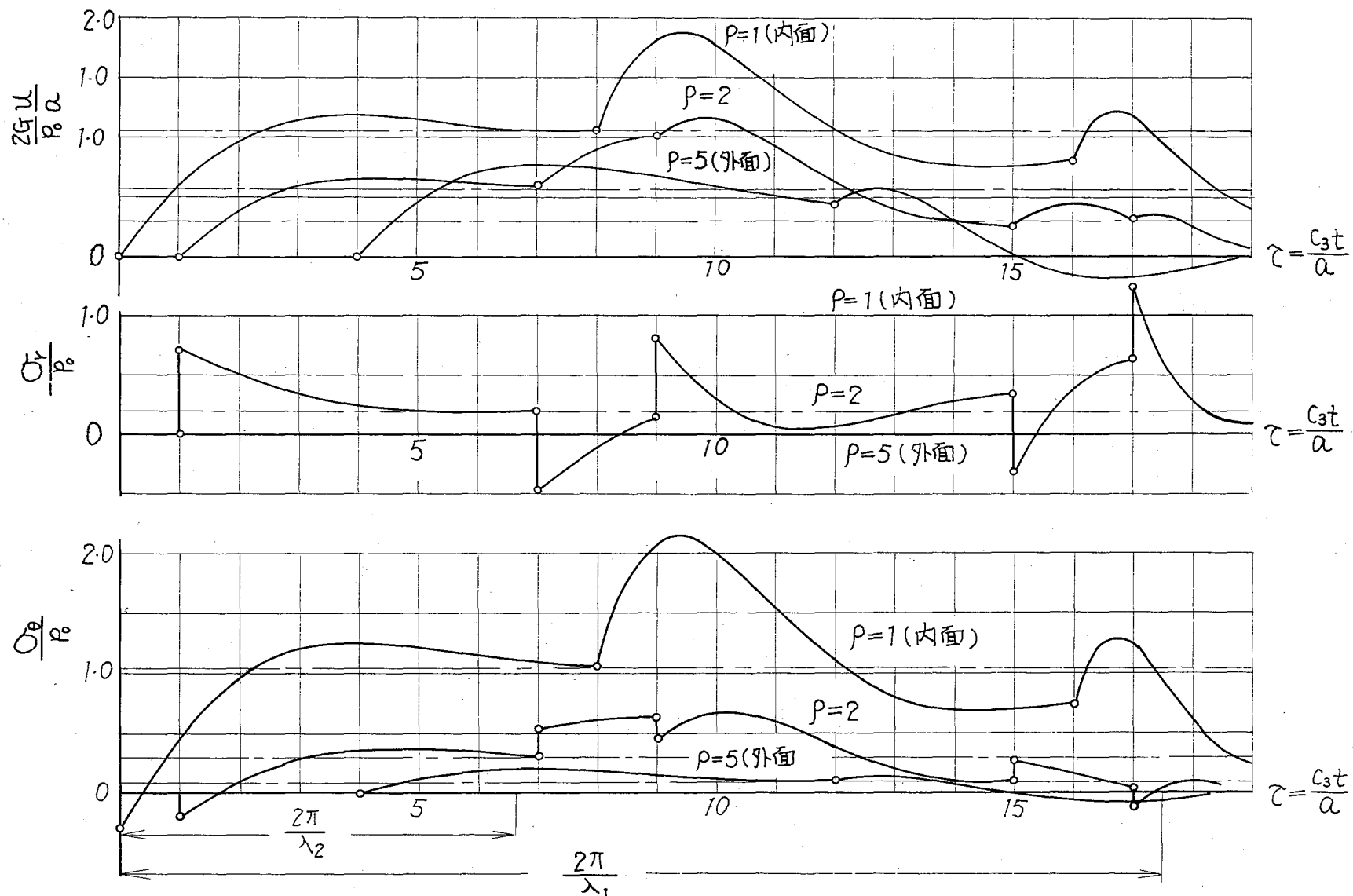
オ 5.11 図は $P_1 = 5$ の場合に $\rho = 1, 2, 5$ における変位および応力の時間的変動を (5.33) 式および (5.38) 式の右辺の無限級数を 50 項で打ち切って電子計算機によって計算した結果を示したもので、弾性波は C の速度で半径方向に伝播し、内外面に到達すれば反射されるために、一定時間ごとに変位および応力は不連続的に変化する。そして内面に最大引張応力を生じ、外面の応力が最小になる。

オ 5.12 図 (a) は $P_1 = 1.5, 2$ の場合に内外面に生ずる O_0 の時間的変動を示したもので、 P_1 が小になれば (5.33) 式および (5.38) 式の無限級数の収束はよく、 $P_1 = 1.5, 2$ いずれの場合においても、無限級数を 10 項までで打ち切って電動計算機によって計算した。

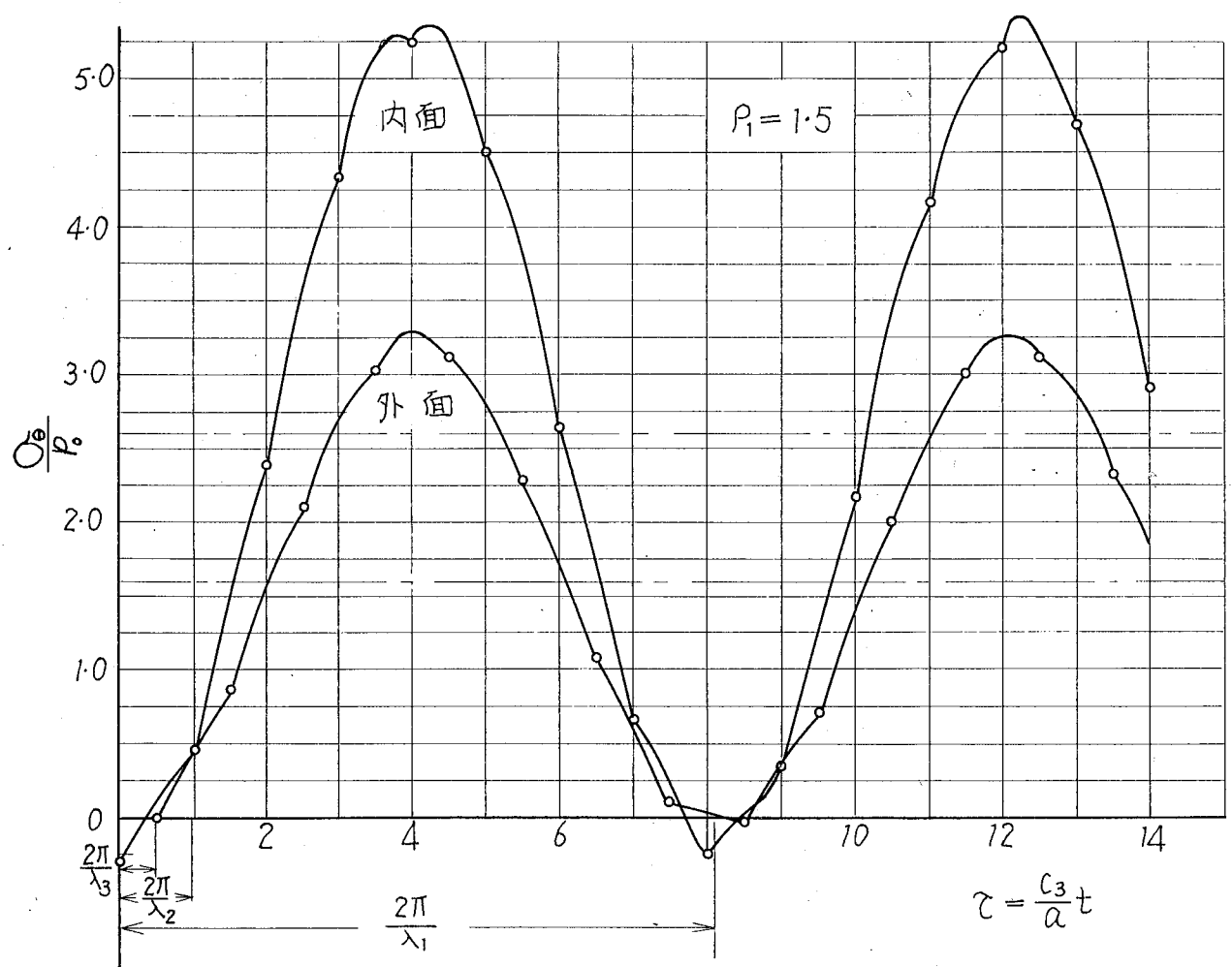
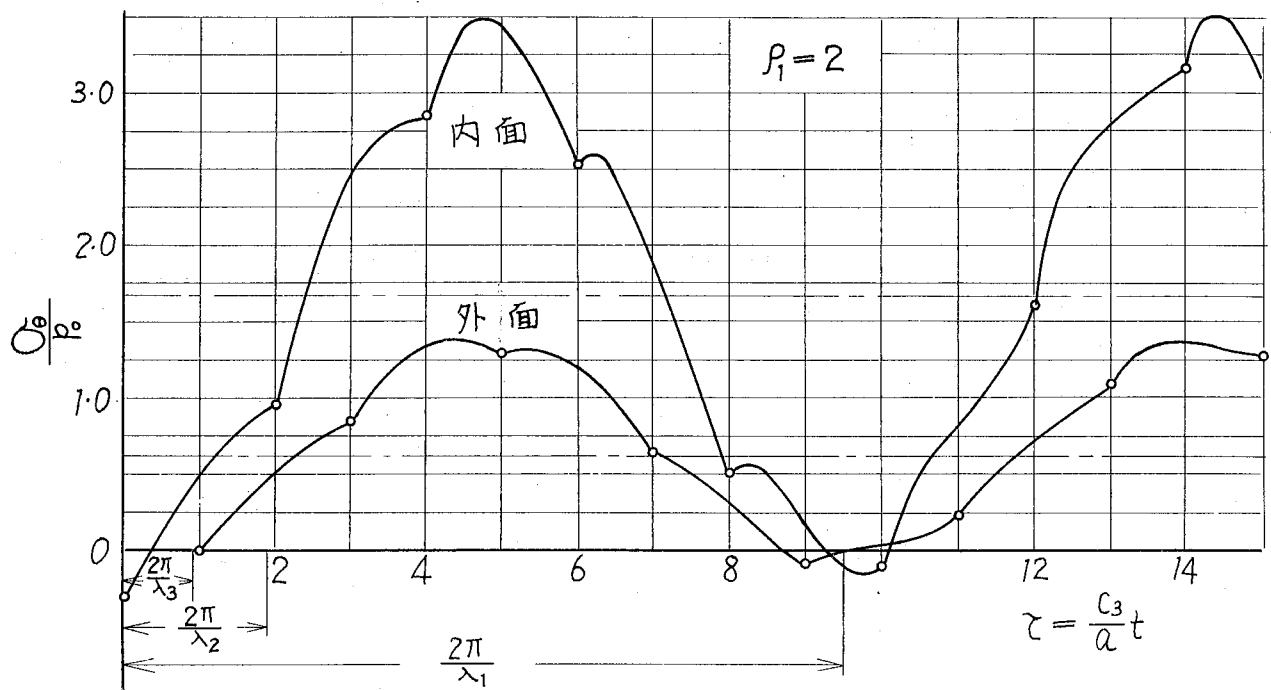
応力変動と固有振動との関係を示すために図中に $t = (a/C) \cdot (2\pi/\lambda_1)$, $(a/C) \cdot (2\pi/\lambda_2)$, $(a/C) \cdot (2\pi/\lambda_3)$ に相当する時間を示した。これらはオ一次, オ二次, オ三次の固有振動の周期であり、応力変動の周期に完全には一致しない。極限の場合として有孔円板が円輪に一致すれば、応力は静的結果を中心にして振動し、その振動数は

$$f_0 = \frac{\sqrt{2K - K^2}}{2\pi} \frac{C}{a}$$

に等しい。



例 5.11 図 ステップ状内圧をうける円板に生ずる変位と応力の時間的変動。
($\rho_1=5$, $\nu=0.3$)



例 5.12 図 (a) ステップ状内圧をうける円板に生ずる応力変動 ($\nu = 0.3$)。

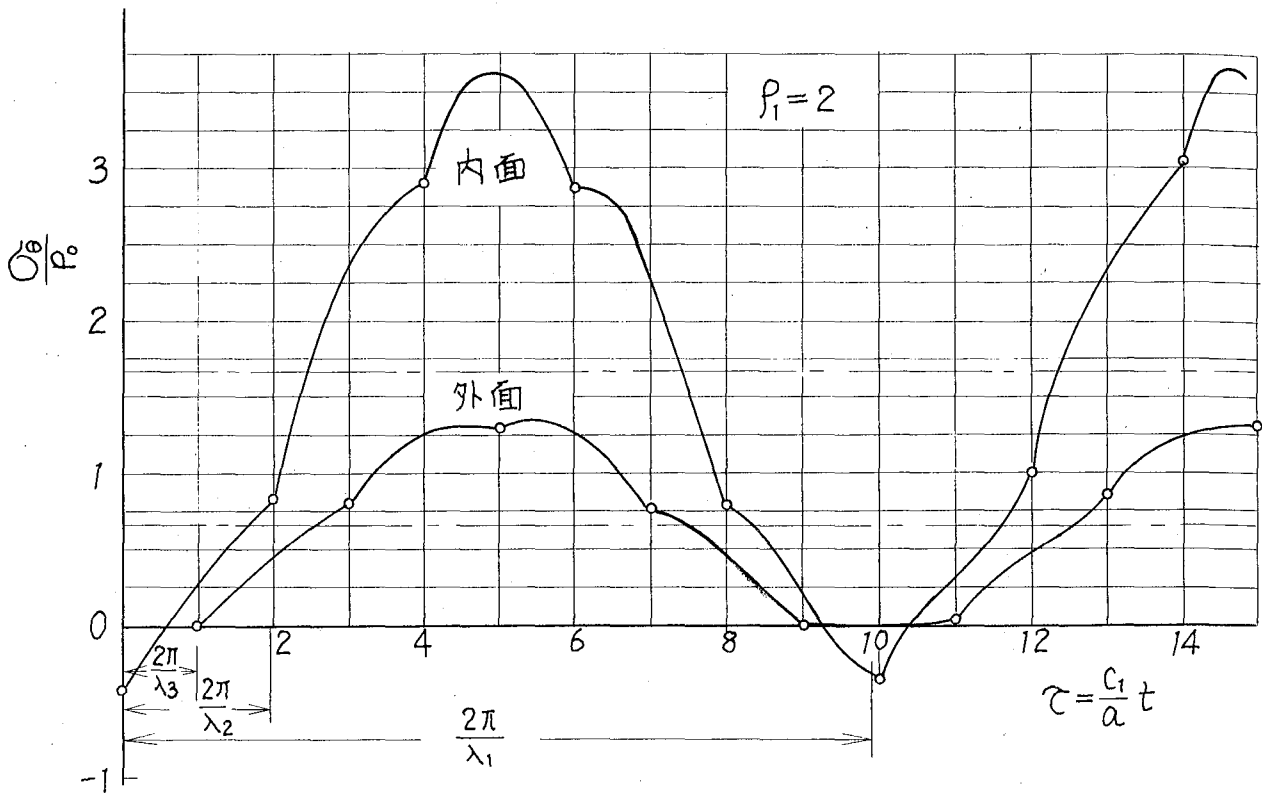


図 5.12 図 (b) ステップ状内圧をうける円筒に生ずる応力変動 ($\nu=0.3$)

図 5.12 図 (b) は $P_1=2$, $\nu=0.3$ の場合に, 円筒すなわち平面ひずみ状態における応力変動を示したもので, $\nu=0.3$ における平面ひずみ状態の結果は $\nu=0.43$ における平面応力状態すなわち円板の結果に等しく, 図 5.12 図 (a), (b) を比較すれば, ν が大ならば最大応力はわずかに増大し, 応力変動の周期もわずかに長くなる。

衝撃圧力をうける円板に生ずる最大応力 $(\sigma_\theta)_D$ は絶対値が等しい静圧力をうける場合に生ずる最大応力 $(\sigma_\theta)_S$ よりもはるかに大きい。

両最大応力の比 k を中空球におけると同様に

$$k = \frac{(\sigma_\theta)_D}{(\sigma_\theta)_S} \quad (5.40)$$

で表わせば, 円板の内外径比 $P_1 = b/a$ によって k は図 5.13 図のように変化する。 $\nu = 0.3$ ならば内面の応力を対象とするとき, 円輪 ($P_1 = 1$) においては $k = 2$, 円孔を有する無限板 ($P_1 = \infty$) においては $k = 1.24$ になり, $P_1 = 2$ の場合に k は最大値 2.1 に達する。

この結果を 4.4 節に示された中空球に対する結果と比較すれば, 等しい内外径比 P_1 の値に対する k は円板の場合よりも中空球の方が大きい。

オ 5.13 図における $(O_\theta)_D$ は (5.33), (5.38) 式で計算した応力波形の最初の数山を対象としたもので、必ずしも最大応力に等しいとは限らない。そこで中空球におけると同様な手法を用いて内面における $(O_\theta)_D$ の限界値を求めるために、(5.33) 式を用いて (5.38) 式を書直せば

$$\frac{(O_\theta)_{p=1}}{p_0} = \frac{p_1^2 + 1}{p_1^2 - 1} + 2\kappa(2 - \kappa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(\lambda_n)}{D_0} \cos \lambda_n \tau$$

になり、右辺の無限級数に含まれる $M_1(\lambda_n)/D_0$ はオ 5.9 図から明らかのようにすべての n に対して同符号であり、 $|\cos \lambda_n \tau| \leq 1$ であるから、(5.37) 式を用いれば次の関係が成立する。

$$\left| \frac{(O_\theta)_{p=1}}{p_0} \right|_D \leq \left| \frac{p_1^2 + 1}{p_1^2 - 1} + (2 - \kappa) \frac{p_1^2 + \frac{\kappa}{2 - \kappa}}{p_1^2 - 1} \right| = \left\{ (3 - \kappa) - \frac{2(1 - \kappa)}{p_1^2 + 1} \right\} \left| \frac{(O_\theta)_{p=1}}{p_0} \right|_s$$

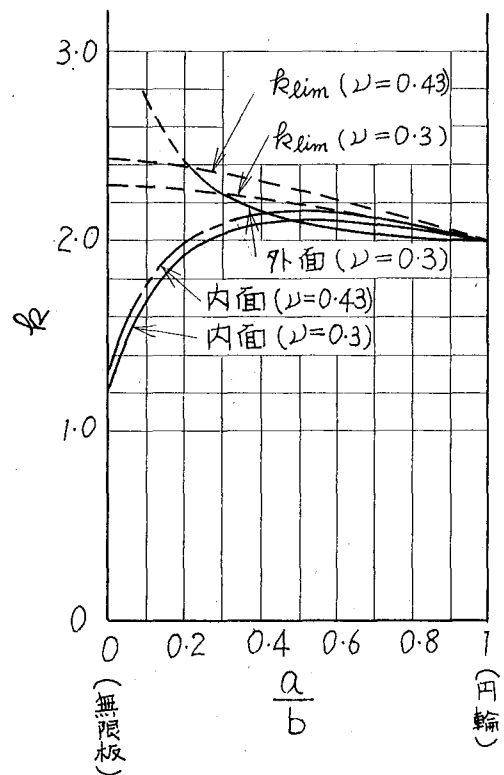
結局内面における θ の限界値 k_{lim} は

$$k_{lim} = (3 - \kappa) - 2(1 - \kappa) \frac{1}{p_1^2 + 1} \quad (5.41)$$

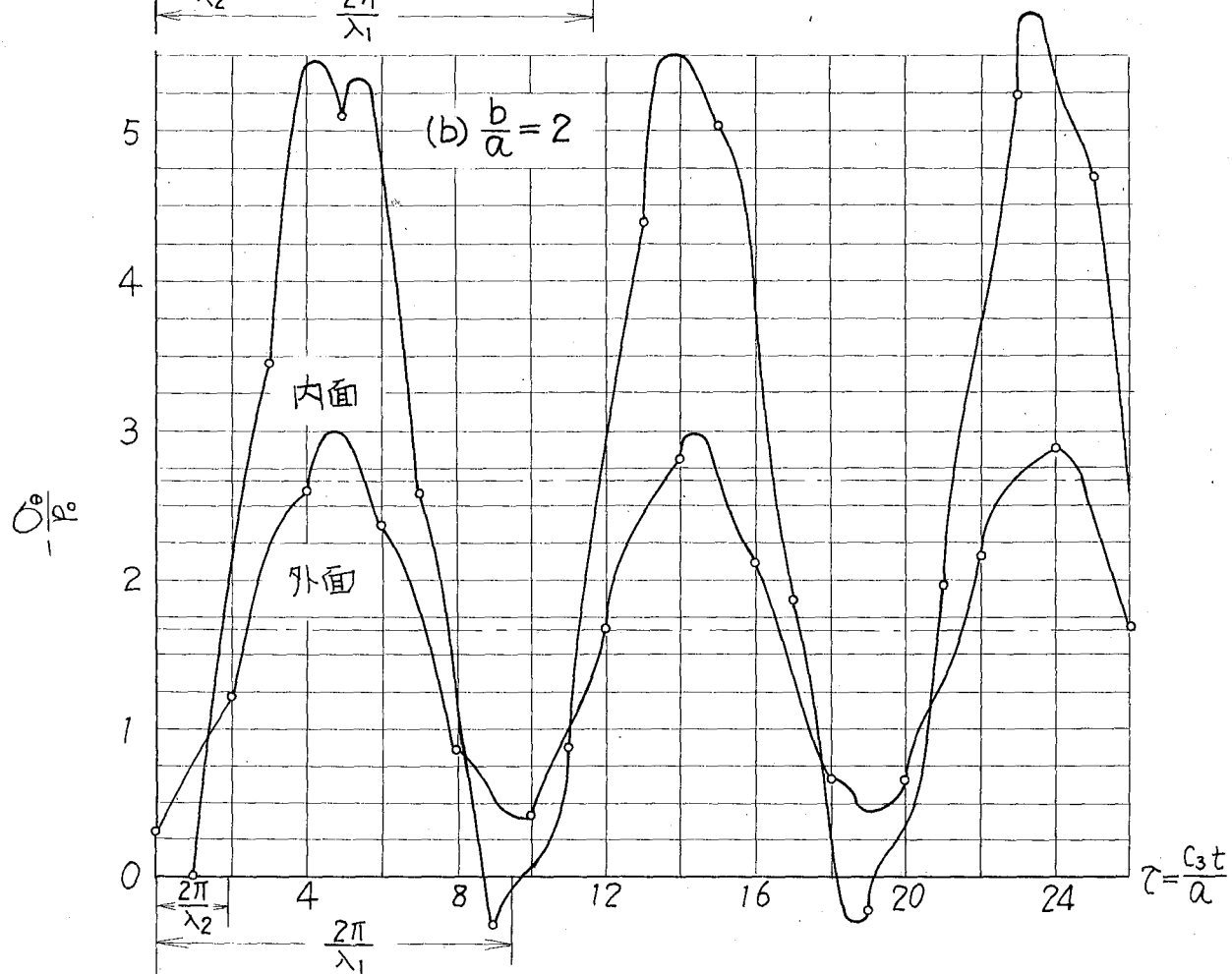
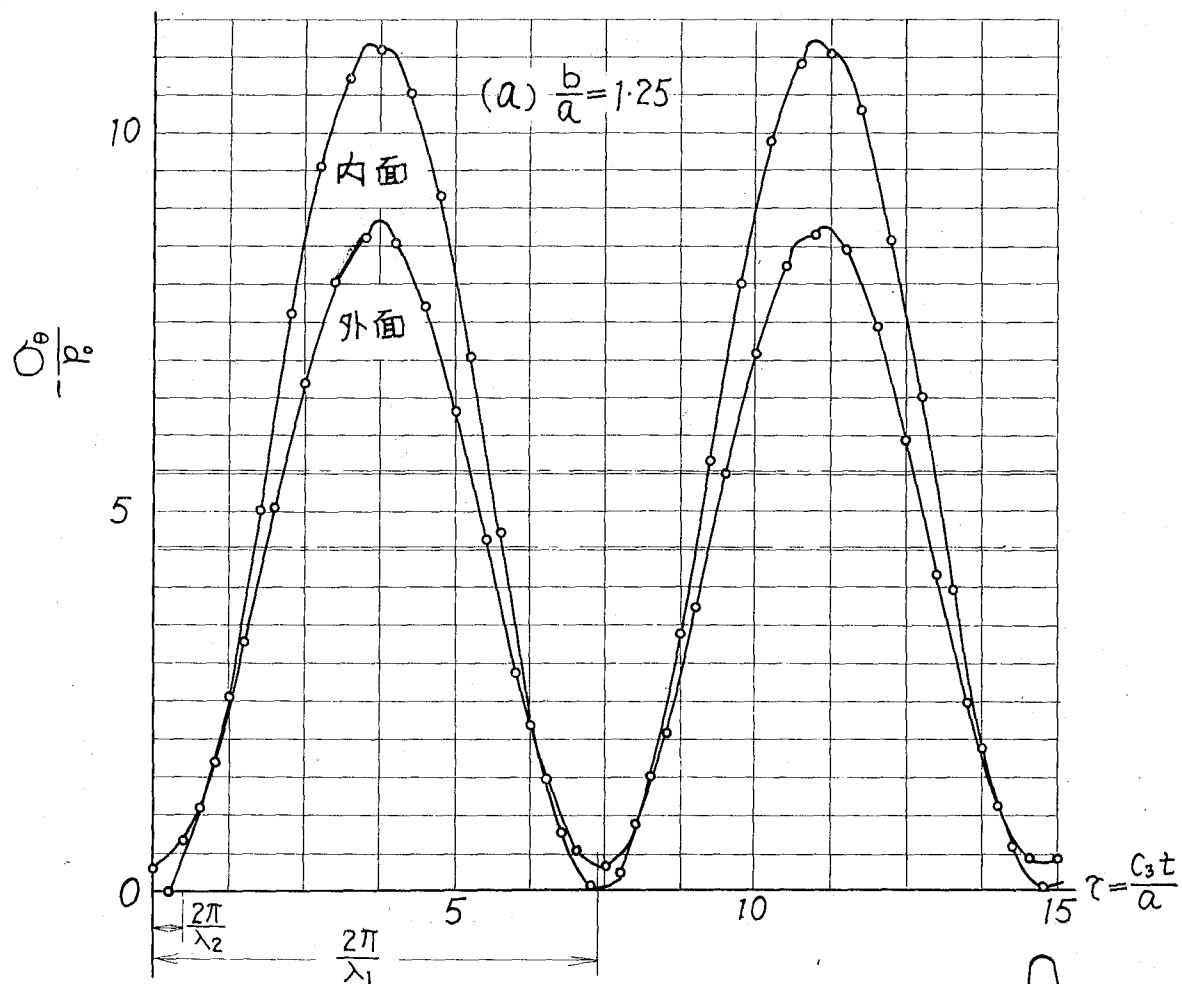
になり、オ 5.13 図において点線で示されるように表わされる。

ステップ状外圧が作用する場合には (5.33) 式および (5.38) 式において $p_1 = a/b$, $p = r/b$ とし、 u/a の代りに u/b とおきかえ、オ 5.2 表に示された根 λ_n の値は $(a/b) \cdot \lambda_n$ を表わしていると考えれば、(5.33), (5.38) 式はそのまま外圧をうける円板に対する解になる。

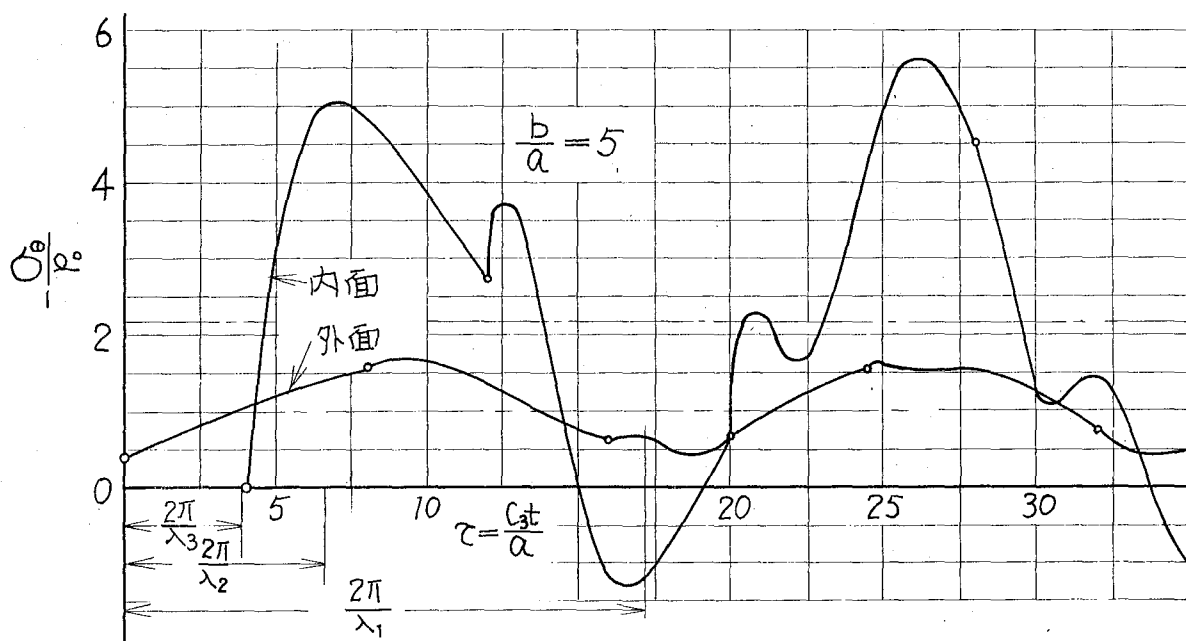
オ 5.14 図は $b/a = 1.25, 2, 5$ の場合に $\nu = 0.3$ としてステップ状変動圧力をうける円板の内外面に生ずる O_θ の時間的変動を示したもので内外面の最大応力はともに圧縮応力であって、内面には非常に大きな圧縮応力が生ずる。そして円板中を弾性波が伝ばし、内外面において反射



オ 5.13 図 ステップ状内圧をうける円板の θ



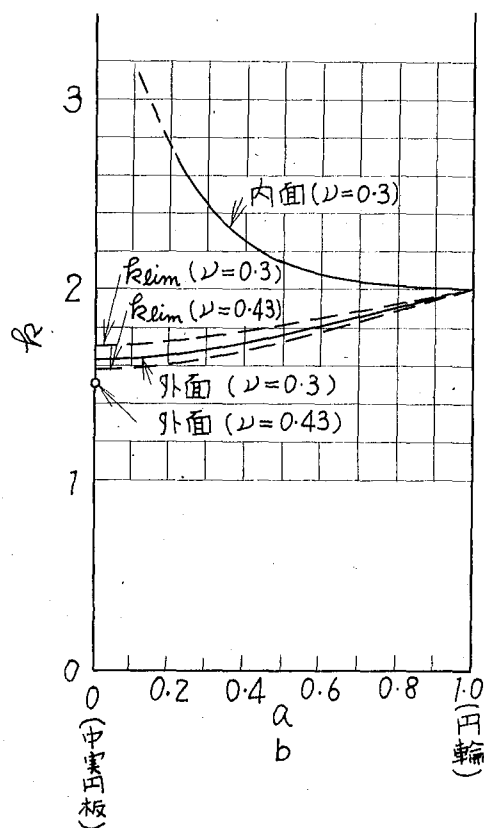
※ 5.14 図 (a), (b) ステップ状外圧を受ける円板の応力変動 ($\nu = 0.3$)



オ 5.14 図 (C) ステップ状外圧をうける円板に生ずる応力変動 ($\nu = 0.3$)。

をくり返すために，図中丸印で示されるように，円板の内外面に弾性波の波面が到達する時間 $\tau = 2m(b/a - 1)$ ， $(2m+1)(b/a - 1)$ ，($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) に変位および応力は不連続的に変動するが，ステップ状内圧をうけた場合と同様に，全体として見れば図中に一点鎖線で示される静的結果を中心にして振動し，その周期はオ一次の固有振動の周期にほぼ一致する。

また衝撃圧力と静圧力によって生ずる最大応力の比を (5.40) 式のように定義すれば，円板がステップ状外圧をうける場合にはオ 5.15 図の実線のようになる。外面における σ は円輪において最大値 2 であり，肉厚が増大して中実円板に近づくとつれて σ の値は

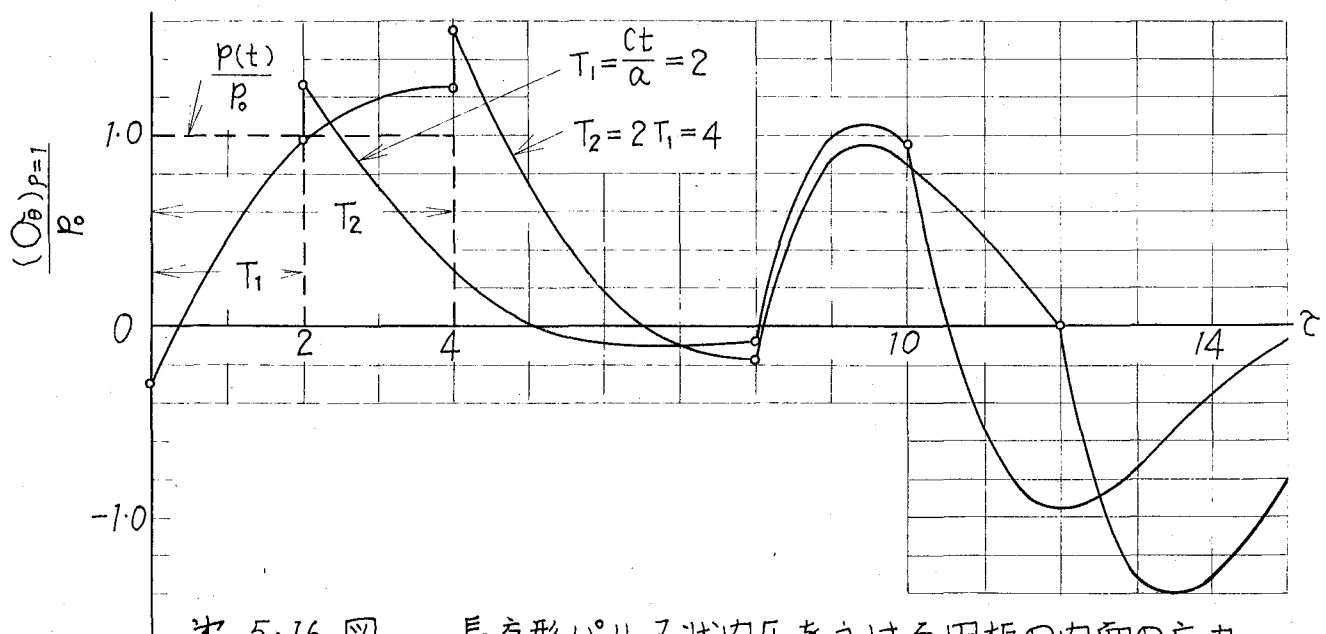


オ 5.15 図 ステップ状外圧をうける円板の σ

単調に減少する。図中の点線は(5.41)式から計算した外面の σ の上限 σ_{lim} を示し、 σ_{lim} は応力変動のはじめの敷山を対象にして求められた σ の値に6%以内の誤差で一致する。図中の丸印はステップ状外圧をうける円柱の外面の σ の値を $\sigma_{5.6}$ 図をもとにして求めた結果である。以上の結果から、ポアソン比 ν が小さいほどステップ状外圧をうける円板の外面の最大圧縮応力は大きいことがわかる。内面の σ は円孔が小さいほど大きく、その傾向はステップ状外圧をうける球の場合に一致する。

5.5 任意変動圧力をうける円板および円筒

長方形のパルス状内圧をうける円板の応力および変位はステップ状内圧をうけた円板に対する結果を重ね合せて求めることができる。 $\sigma_{5.16}$ 図は $\rho_1=5$ の場合に図中に点線で示されるようなパルス幅 $ct/a=2, 4$ のパルス状内圧をうけた円板の内面に生ずる σ_r の時間的変動を示したもので、内圧消滅後においても弾性波は円板の内外面間を往復し、図に示されるような応力変動を生ずる。



$\sigma_{5.16}$ 図 長方形パルス状内圧をうける円板の内面の応力変動 ($\rho_1=5, \nu=0.3$)

任意変動圧力をうける場合の結果は 4・4 節に示されたようにステップ状圧力に対する結果を基にしてデュアメル積分から計算できる。4・4 節においては中空球の場合について、衝撃圧力の立上り時間の大小が応力変動に及ぼす影響を調べたが、全く同様にして円板あるいは円筒に対する結果がえられる。

これに対して円板あるいは円筒の内面に爆発圧力が作用する場合には、圧力 $p(t)$ は図 5・17 図のように変動するから、これを

$$p(t) = p_0 k t e^{1-kt}$$

と仮定し、無次元量 $\tau = (c/a) \cdot t$ を導入すれば

$$p(t) = p_0 \omega \tau e^{1-\omega\tau} \quad (5.42)$$

$$\text{ただし} \quad \omega = (a/c) \cdot k$$

そして

$$p(0) = 0$$

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = p_0 \omega (1-\omega\tau) e^{1-\omega\tau}$$

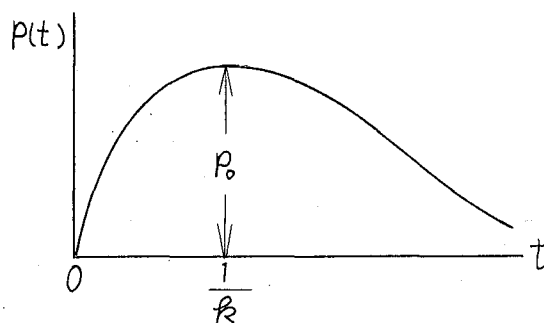


図 5・17 爆発圧力の時間的変動

になり、 $O_0(\tau)$ は (5.33) 式で与えられるから、(5.42) 式で与えられる爆発圧力を内面にうける円板の変位および応力はデュアメル積分 (4.37b) 式を用いて

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2G}{p_0} \frac{u}{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\rho_1^2 + \frac{\kappa}{2-\kappa} \rho^2}{\rho_1^2 - 1} F_1(\tau) + 2\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(\rho\lambda_n)}{D_0} F_2(\tau) \\ -\frac{O_r}{p_0} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho_1^2 - \rho^2}{\rho_1^2 - 1} F_1(\tau) + \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa M_1(\rho\lambda_n) - \rho\lambda_n M_0(\rho\lambda_n)}{D_0} F_2(\tau) \\ \frac{O_\theta}{p_0} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho_1^2 + \rho^2}{\rho_1^2 - 1} F_1(\tau) + \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa M_1(\rho\lambda_n) + (1-\kappa)\rho\lambda_n M_0(\rho\lambda_n)}{D_0} F_2(\tau) \end{aligned} \right. \quad (5.43)$$

ここで

$$F_1(\tau) = \frac{1}{p_0} \int_0^\tau p'(\xi) d\xi = \omega \tau e^{1-\omega\tau}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(\tau) &= \frac{1}{p_0} \int_0^\tau p'(\tau-\xi) \cos \lambda_n \xi d\xi \\
 &= \omega \int_0^\tau e^{1-\omega(\tau-\xi)} \{1-\omega(\tau-\xi)\} \cos \lambda_n \xi d\xi \\
 &= \frac{1}{\omega^2 + \lambda_n^2} \left[2\omega^2 \lambda_n^2 e \cos \lambda_n \tau + \omega \lambda_n (\lambda_n^2 - \omega^2) e \sin \lambda_n \tau \right. \\
 &\quad \left. - 2\omega^2 \lambda_n^2 e^{1-\omega\tau} + \omega^2 (\lambda_n^2 + \omega^2) \omega \tau e^{1-\omega\tau} \right]
 \end{aligned}$$

になる。

(5.43)式によつて円板内面に爆発圧力をうけるとき、荷重面に生ずる応力の変動を計算すれば図5.18図のようになる。爆発圧力による応力は減衰振動するけれども、負荷後時間が十分に経過しても応力は0にはならず振動する。そして応力の最大値はステップ状圧力をうける場合よりも小さくなることがわかる。

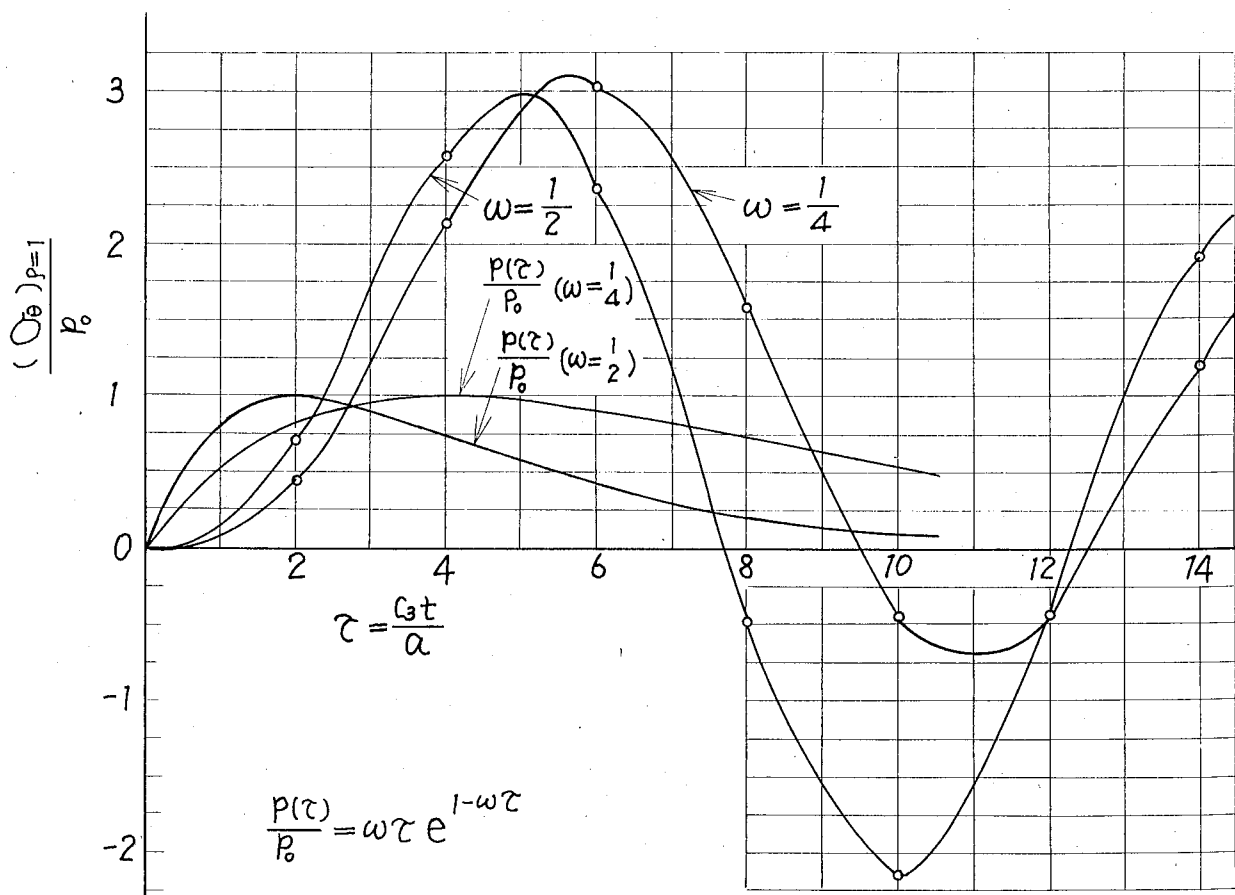


図 5.18 円板内面に爆発圧力をうける円板の内面に生ずる
応力変動 ($p_1=2$, $\omega=0.3$)

圧力 $P(t)$ が周期的に変動し

$$P(t) = P_0 \sin \lambda t$$

すなわち

$$P(\tau) = P_0 \sin \omega \tau$$

で与えられる場合にも，変位および応力は (5.43) 式で表わされ

$$F_1(\tau) = \sin \omega \tau$$

$$F_2(\tau) = \frac{\omega}{\lambda_n + \omega} \left[\sin (\lambda_n + 2\omega) \tau - \frac{1}{2} \sin \omega \tau \right] \\ + \frac{\omega}{\omega - \lambda_n} \left[\sin (2\omega - \lambda_n) \tau - \frac{1}{2} \sin \omega \tau \right]$$

になる。

もしも周期的外力の振動数 $(C/a) \cdot \omega$ が円板の固有振動数 $\lambda_n = (1/2\pi) \cdot (C/a) \cdot \lambda_n$ に一致すれば $F_2(\tau)$ は無限大になる。すなわち共振現象を起して応力は無限大になる。

5.6 結 言

内外面にステップ状衝撃圧力をうける円板および円筒に生ずる応力を応力関数による解法にしたがい，ラプラス変換法によって解析した。そして振動数方程式の根の漸近近似式を導くことによって従来からの解法に比して容易に応力の時間的変動を明らかにすることができた。また，ステップ状衝撃圧力による結果をもとにして，パルス状圧力，爆発圧力，周期的変動圧力による応力変動を求め，それらの結果の比較を行なった。その結果，円板および円筒の内外面に等分布ステップ状圧力が作用すれば，中空球におけると同様に，弾性波の伝播現象のために，応力は不連続的に変動するが全体としてみれば静的荷重による結果を中心にして振動し，その周期はほぼ第一次の固有振動の周期に等しい。そして圧力変動の周期が円板あるいは円筒の固有振動の周期に一致すれば共振現象を起して応力は無限大になる。

応力変動のはじめの数山を対象にして円板の内外面に生ずる最大応力と円板の内外径比との関係を求めれば、内圧によって内面に生ずる最大引張応力は静的結果の約2倍以下になり、この値は内外径比が等しい中空球における値よりも小さい。

荷重面に生ずる最大応力の上限を求めるための簡単な近似式を導き、この式は厳密解と比較して、円板の肉厚が小ならばよい近似を与えることを示した。

負荷初期の応力変動に対しては簡単な漸近近似式を導き、この式は厳密解と比較して反射波が到達するまでは適用できることを示すと同時に、これらの厳密解および近似解によって応力変動とポアソン比との関係を調べた結果、 ν が大きくなると振動の周期および最大応力がわずかに増大することが明らかになった。

第6章 内面に等分布衝撃圧力をうける組合円筒

6.1 緒 言

第5章の理論結果から、衝撃的内圧をうける円筒の内面に生ずる円周方向の引張応力は静荷重による応力よりもはるかに大きく、円筒の衝撃破損を防止するためには、この引張応力が許容応力以下になるように材料を選び、円筒の寸法を決める必要がある。

一般に円筒の肉厚を大きくすれば、内圧をうける円筒の内面に生ずる最大引張応力は小さくなるけれども、この最大引張応力の減少の割合は肉厚の増大の割合よりもかなり小さいために、これを大きくすることによって内面の最大応力を低下させる方法は経済上あるいは構造上の問題からあまり好ましくない。

これに対して、円筒が衝撃的内圧をうける場合には、単層円筒に比して径の異なる円筒を組合せて作られた組合円筒のちが破壊に対する抵抗が強いことが経験的に知られていて、最近では高圧容器あるいは高圧パイプなどに同種類の材料からなる組合円筒や耐蝕性、耐摩耗性などを考慮して、異種の材料からなる組合円筒が広く用いられている。

しかし、組合円筒に衝撃荷重が作用すれば円筒の内外面および接合面において弾性波の反射、透過がくり返されるために複雑な応力変動を生じ、著者の知るかぎりにおいては、この現象を定性的にも定量的にも十分に説明しうる実験的、理論的研究は行なわれていない。

一方、第5章の理論結果を適用すれば、衝撃荷重によって生ずる最大応力の分布状態はその傾向が静的結果に一致することがわかるけれども、衝撃破壊を対象とするとき、最大応力の大きさおよびその時間的変動を定量的に知ることが重要である。

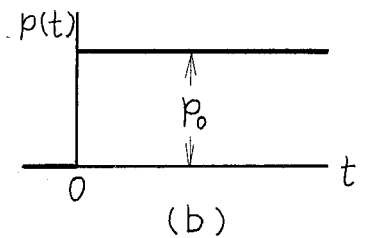
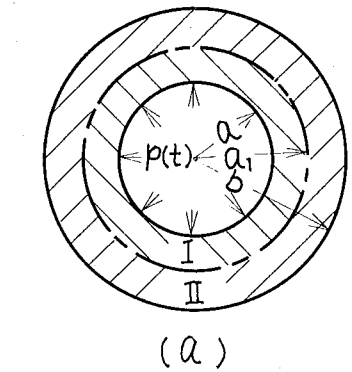
そこで本研究においては等分布のステップ状内圧をうける組合円筒に生ずる応力を明らかにするために、第5章の解法を相異なる二種の材料よりなる組合円筒に生ずる応力の解析に適用して、円筒内面に生ずる応力変動と二種の材料の横弾性係数、単位体積当りの重量との関係を明らかにした。

6.2 等分布衝撃圧力をうける組合円筒の応力解析

オ 6.1 図に示されるように，異なる材質 I, II よりなる無限長の組合円筒に等分布衝撃圧力が作用すれば，変形は軸対称平面状態になるから，5.4 節と同様にして変位および応力を求めることができる。

いまオ 6.1 図に示された組合円筒の接合面は完全に密着しており，この部分が離れることはないものとするれば，等分布衝撃内圧をうける場合には境界条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} (Q_r)_{r=a} = -p(t), \quad (u)_{r=a_1} = (u')_{r=a_1} \\ (Q_r')_{r=b} = 0, \quad (Q_r)_{r=a_1} = (Q_r')_{r=a_1} \end{array} \right. \quad (6.1)$$



オ 6.1 図 ステップ
状衝撃圧力をうける組
合円筒

になる。ただし外円筒 II における値には，' を付けることにする。

内円筒 I においては応力関数 φ のラプラス変換 $\bar{\varphi}$ を

$$\bar{\varphi} = A_1 I_0(\alpha r) + B_1 K_0(\alpha r)$$

と表わし，外円筒においては

$$\bar{\varphi}' = A_2 I_0(\alpha' r) + B_2 K_0(\alpha' r)$$

ここで

$$\alpha'^2 = \frac{p^2}{c'^2}, \quad c'^2 = \frac{2}{\kappa'} \frac{g G'}{\delta'}$$

と表わせば，変位および応力のラプラス変換は付表 (A-C-(3)) から，内円筒 I においては

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = A_1 \alpha I_1(\alpha r) - B_1 \alpha K_1(\alpha r) \\ \frac{\bar{Q}_r}{2G} = A_1 \alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} I_0(\alpha r) - \frac{I_1(\alpha r)}{\alpha r} \right\} + B_1 \alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} K_0(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} K_1(\alpha r) \right\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = A_1 \alpha^2 \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} I_0(\alpha r) + \frac{I_1(\alpha r)}{\alpha r} \right\} + B_1 \alpha^2 \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} K_0(\alpha r) - \frac{K_1(\alpha r)}{\alpha r} \right\} \\ \bar{\tau}_{r\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (6.2)$$

になり，外円筒Ⅱにおいては

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}' = A_2 \alpha' I_1(\alpha' r) - B_2 \alpha' K_1(\alpha' r) \\ \frac{\bar{\sigma}_r'}{2G'} = A_2 \alpha'^2 \left\{ \frac{1}{\kappa'} I_0(\alpha' r) - \frac{I_1(\alpha' r)}{\alpha' r} \right\} + B_2 \alpha'^2 \left\{ \frac{1}{\kappa'} K_0(\alpha' r) + \frac{K_1(\alpha' r)}{\alpha' r} \right\} \\ \frac{\bar{\sigma}_\theta'}{2G'} = A_2 \alpha'^2 \left\{ \frac{1-\kappa'}{\kappa'} I_0(\alpha' r) + \frac{I_1(\alpha' r)}{\alpha' r} \right\} + B_2 \alpha'^2 \left\{ \frac{1-\kappa'}{\kappa'} K_0(\alpha' r) - \frac{K_1(\alpha' r)}{\alpha' r} \right\} \\ \bar{\tau}_{r\theta}' = 0 \end{array} \right. \quad (6.3)$$

になる。

未定定数 A_1 , A_2 , B_1 , B_2 を定めるために，境界条件 (6.1) 式をラプラス変換し，これに (6.2) 式，(6.3) 式を代入すれば，次の係数方程式がえられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 f_2(\alpha a) + B_1 g_2(\alpha a) = -\frac{\bar{p}}{2G} \frac{1}{\alpha^2} \\ A_2 f_2'(\alpha' b) + B_2 g_2'(\alpha' b) = 0 \\ A_1 f_1(\alpha a_1) - B_1 g_1(\alpha a_1) - A_2 \frac{\alpha'}{\alpha} f_1'(\alpha' a_1) + B_2 \frac{\alpha'}{\alpha} g_1'(\alpha' a_1) = 0 \\ A_1 f_2(\alpha a_1) + B_1 g_2(\alpha a_1) - A_2 \frac{G'}{G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} f_2'(\alpha' a_1) - B_2 \frac{G'}{G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} g_2'(\alpha' a_1) = 0 \end{array} \right. \quad (6.4)$$

ただし

$$\begin{aligned} f_1(x) &= I_1(x) , & f_1'(x) &= f_1(x) \\ f_2(x) &= \frac{1}{\kappa} I_0(x) - \frac{I_1(x)}{x} , & f_2'(x) &= \frac{1}{\kappa'} I_0(x) - \frac{I_1(x)}{x} \end{aligned}$$

$$g_1(x) = K_1(x)$$

$$g_1'(x) = g_1(x)$$

$$g_2(x) = \frac{1}{K} K_0(x) + \frac{K_1(x)}{x}$$

$$g_2'(x) = \frac{1}{K} K_0(x) + \frac{K_1(x)}{x}$$

である。

(6.4) 式を A_1, A_2, B_1, B_2 について解けば

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{\bar{p}}{2G} \frac{d_1}{\alpha^2 D}, & B_1 = \frac{\bar{p}}{2G} \frac{d_2}{\alpha^2 D} \\ A_2 = -\frac{\bar{p}}{2G} \frac{d_3}{\alpha^2 D}, & B_2 = \frac{\bar{p}}{2G} \frac{d_4}{\alpha^2 D} \end{cases} \quad (6.5)$$

ここで D および d_1, d_2, d_3, d_4 は行列式によつて次のように定義された関数である。

$$D \equiv \begin{vmatrix} f_2(\alpha a) & g_2(\alpha a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2'(\alpha' b) & g_2'(\alpha' b) \\ f_1(\alpha a_1) & -g_1(\alpha a_1) & -\frac{\alpha'}{\alpha} f_1'(\alpha' a_1) & \frac{\alpha'}{\alpha} g_1'(\alpha' a_1) \\ f_2(\alpha a_1) & g_2(\alpha a_1) & -\frac{G'}{G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} f_2'(\alpha' a_1) & -\frac{G'}{G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} g_2'(\alpha' a_1) \end{vmatrix}$$

$$d_1 \equiv \begin{vmatrix} 0 & f_2'(\alpha' b) & g_2'(\alpha' b) \\ -g_1(\alpha a_1) & -\frac{\alpha'}{\alpha} f_1'(\alpha' a_1) & \frac{\alpha'}{\alpha} g_1'(\alpha' a_1) \\ g_2(\alpha a_1) & -\frac{G'}{G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} f_2'(\alpha' a_1) & -\frac{G'}{G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} g_2'(\alpha' a_1) \end{vmatrix}$$

$$d_2 \equiv \begin{vmatrix} 0 & f_2'(\alpha' b) & g_2'(\alpha' b) \\ f_1(\alpha a_1) & -\frac{\alpha'}{\alpha} f_1'(\alpha' a_1) & \frac{\alpha'}{\alpha} g_1'(\alpha' a_1) \\ f_2(\alpha a_1) & -\frac{G'}{G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} f_2'(\alpha' a_1) & -\frac{G'}{G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} g_2'(\alpha' a_1) \end{vmatrix}$$

$$d_3 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_2'(\alpha' b) \\ f_1(\alpha a_1) & -g_1(\alpha a_1) & \frac{\alpha'}{\alpha} g_1'(\alpha' a_1) \\ f_2(\alpha a_2) & g_2(\alpha a_1) & -\frac{G'}{G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} g_2'(\alpha' a_1) \end{vmatrix}$$

$$d_4 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & f_2'(\alpha' b) \\ f_1(\alpha a_1) & -g_1(\alpha a_1) & -\frac{\alpha'}{\alpha} f_1'(\alpha' a_1) \\ f_2(\alpha a_1) & g_2(\alpha a_1) & -\frac{G'}{G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} f_2'(\alpha' a_1) \end{vmatrix}$$

そこで (6.5) 式を (6.2) 式に代入すれば, 内円筒 I における変位および応力が求まり

$$\left[\begin{aligned} -\bar{u} &= \frac{\bar{p}}{2G} \frac{1}{\alpha} \frac{d_1 f_1(\alpha r) + d_2 g_1(\alpha r)}{D} \\ -\frac{\bar{\sigma}_r}{2G} &= \frac{\bar{p}}{2G} \frac{d_1 f_2(\alpha r) - d_2 g_2(\alpha r)}{D} \\ -\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} &= \frac{\bar{p}}{2G} \frac{d_1 f_3(\alpha r) - d_2 g_3(\alpha r)}{D} \\ \bar{\tau}_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6.6)$$

同様に (6.5) 式を (6.3) 式に代入すれば, 外円筒 II における変位および応力が次式のように求まる。

$$\left[\begin{aligned} -\bar{u}' &= \frac{\bar{p}}{2G} \frac{\alpha'}{\alpha^2} \frac{d_3 f_1(\alpha' r) + d_4 g_1(\alpha' r)}{D} \\ -\frac{\bar{\sigma}_r'}{2G} &= \frac{\bar{p}}{2G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} \frac{d_3 f_2'(\alpha' r) - d_4 g_2'(\alpha' r)}{D} \end{aligned} \right. \quad (6.7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\bar{\sigma}_\theta'}{2G'} &= \frac{\bar{p}}{2G} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} \frac{d_3 f_3'(\alpha' r) - d_4 g_3'(\alpha' r)}{D} \\ \bar{\tau}_{r\theta}' &= 0 \end{aligned} \right.$$

ただし (6.6) 式および (6.7) 式において

$$f_3(x) = \frac{1-\kappa}{\kappa} I_0(x) + \frac{I_1(x)}{x}$$

$$f_3'(x) = \frac{1-\kappa'}{\kappa'} I_0(x) + \frac{I_1(x)}{x}$$

$$g_3(x) = \frac{1-\kappa}{\kappa} K_0(x) - \frac{K_1(x)}{x}$$

$$g_3'(x) = \frac{1-\kappa'}{\kappa'} K_0(x) - \frac{K_1(x)}{x}$$

である。

圧力 $p(t)$ がステップ関数状に変動する場合には

$$\bar{p} = \frac{p_0}{p} \quad (6.8)$$

になるから, (6.8) 式を (6.6) 式に代入し, 無次元量 $\rho = r/a$, $\rho_0 = a_1/a$, $\rho_1 = b/a$, $\beta = c/c'$, $\tau = ct/a$ を導入すれば, 内円筒 I における変位および応力は (6.6) 式にラプラス逆変換公式を適用して次のように表わせる。

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2G}{p_0} \frac{u}{a} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{d_1 f_1(p\lambda) + d_2 g_1(p\lambda)}{D} e^{\lambda \tau} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \\ -\frac{\sigma_r}{p_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{d_1 f_2(p\lambda) - d_2 g_2(p\lambda)}{D} e^{\lambda \tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{\sigma_\theta}{p_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{d_1 f_3(p\lambda) - d_2 g_3(p\lambda)}{D} e^{\lambda \tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6.9)$$

同様にして、外円筒Ⅱにおける変位および応力は (6.7) 式にラプラス
逆変換公式を適用すれば

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2G}{P_0} \frac{u'}{a} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \beta \frac{d_3 f_1(\beta P\lambda) + d_4 g_1(\beta P\lambda)}{D} e^{\lambda \tau} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \\ -\frac{G}{G'} \frac{Q_y'}{P_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \beta^2 \frac{d_3 f_2'(\beta P\lambda) - d_4 g_2'(\beta P\lambda)}{D} e^{\lambda \tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ -\frac{G}{G'} \frac{Q_\theta'}{P_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \beta^2 \frac{d_3 f_3'(\beta P\lambda) - d_4 g_3'(\beta P\lambda)}{D} e^{\lambda \tau} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \tau_{r\theta}' &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6.10)$$

になる。

ただし (6.9) 式および (6.10) 式において

$$D \equiv \begin{vmatrix} f_2(\lambda) & g_2(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2'(\beta P\lambda) & g_2'(\beta P\lambda) \\ f_1(P_0\lambda) & -g_1(P_0\lambda) & -\beta f_1'(\beta P_0\lambda) & \beta g_1'(\beta P_0\lambda) \\ f_2(P_0\lambda) & g_2(P_0\lambda) & -\frac{G'}{G} \beta^2 f_2'(\beta P_0\lambda) & -\frac{G'}{G} \beta^2 g_2'(\beta P_0\lambda) \end{vmatrix}$$

そして

$$d_1 \equiv \begin{vmatrix} 0 & f_2'(\beta P\lambda) & g_2'(\beta P\lambda) \\ -g_1(P_0\lambda) & -\beta f_1'(\beta P_0\lambda) & \beta g_1'(\beta P_0\lambda) \\ g_2(P_0\lambda) & -\frac{G'}{G} \beta^2 f_2'(\beta P_0\lambda) & -\frac{G'}{G} \beta^2 g_2'(\beta P_0\lambda) \end{vmatrix}$$

$$d_2 \equiv \begin{vmatrix} 0 & f_2'(\beta P\lambda) & g_2'(\beta P\lambda) \\ f_1(P_0\lambda) & -\beta f_1'(\beta P_0\lambda) & \beta g_1'(\beta P_0\lambda) \\ f_2(P_0\lambda) & -\frac{G'}{G} \beta^2 f_2'(\beta P_0\lambda) & -\frac{G'}{G} \beta^2 g_2'(\beta P_0\lambda) \end{vmatrix}$$

$$d_3 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & g'_2(\beta \rho_1 \lambda) \\ f_1(\rho_0 \lambda) & -g_1(\rho_0 \lambda) & \beta g'_1(\beta \rho_0 \lambda) \\ f_2(\rho_0 \lambda) & g_2(\rho_0 \lambda) & -\frac{G'}{G} \beta^2 g'_2(\beta \rho_0 \lambda) \end{vmatrix}$$

$$d_4 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & f'_2(\beta \rho_1 \lambda) \\ f_1(\rho_0 \lambda) & -g_1(\rho_0 \lambda) & -\beta f'_1(\beta \rho_0 \lambda) \\ f_2(\rho_0 \lambda) & g_2(\rho_0 \lambda) & -\frac{G'}{G} \beta^2 f'_2(\beta \rho_0 \lambda) \end{vmatrix}$$

である。

(6.9)式および(6.10)式の右辺の複素線積分は、コーシの留数定理を用いて計算できる。

さて、(6.6)式および(6.10)式の右辺の被積分関数は入の一価関数であり、方程式 $D=0$ の根はすべて単根であって、 λ 平面の虚軸上に無数にある。(付録 B-C-(iii) 参照)。

そこで、オ 5.5 図に示された直線 Br_1 と円弧 Br_2 よりなる閉曲線を積分路として採用すれば、 $\tau \rightarrow \infty$ ならば円弧 Br_2 に沿っての積分は 0 になるから、 Br_1 に沿っての積分は虚軸上の極における留数の総和として与えられ、虚軸上の極を $\pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2, \pm i\lambda_3, \dots$ とすれば、内円筒 I における変位および応力は次式で与えられる。

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2G}{\rho_0} \frac{u}{a} &= \text{Res}_1(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(P\lambda_n)N_0(\lambda_n) - b_1(P\lambda_n)N_1(\lambda_n)}{\lambda_n^2 D_0} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{Q_r}{\rho_0} &= \text{Res}_2(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_2(P\lambda_n)N_0(\lambda_n) - b_2(P\lambda_n)N_1(\lambda_n)}{\lambda_n D_0} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{Q_\theta}{\rho_0} &= \text{Res}_3(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_3(P\lambda_n)N_0(\lambda_n) - b_3(P\lambda_n)N_1(\lambda_n)}{\lambda_n D_0} \cos \lambda_n \tau \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6.11)$$

そこで $\text{Res}(0)$ は原点 $\lambda = 0$ における留数を示し

$$\text{Res}_1(0) = -\frac{1}{p} \frac{(p_0^2 + \frac{2-\kappa'}{\kappa} p_1^2)(p^2 + \frac{2-\kappa}{\kappa} p_0^2) + \frac{G'}{G} \frac{2-\kappa'}{\kappa} (p_1^2 - p_0^2)(p_0^2 - p^2)}{\frac{2-\kappa}{\kappa} (p_0^2 - 1)(p_0^2 + \frac{2-\kappa'}{\kappa} p_1^2) + \frac{G'}{G} \frac{2-\kappa'}{\kappa} (p_1^2 - p_0^2)(p_0^2 + \frac{2-\kappa}{\kappa})}$$

$$\text{Res}_2(0) = +\frac{1}{p^2} \frac{\frac{2-\kappa}{\kappa} (p_0^2 - p^2)(p_0^2 + \frac{2-\kappa'}{\kappa} p_1^2) + \frac{G'}{G} \frac{2-\kappa'}{\kappa} (p_1^2 - p_0^2)(p_0^2 + \frac{2-\kappa}{\kappa} p^2)}{\frac{2-\kappa}{\kappa} (p_0^2 - 1)(p_0^2 + \frac{2-\kappa'}{\kappa} p_1^2) + \frac{G'}{G} \frac{2-\kappa'}{\kappa} (p_1^2 - p_0^2)(p_0^2 + \frac{2-\kappa}{\kappa})}$$

$$\text{Res}_3(0) = -\frac{1}{p^2} \frac{\frac{2-\kappa}{\kappa} (p_0^2 + p^2)(p_0^2 + \frac{2-\kappa'}{\kappa} p_1^2) + \frac{G'}{G} \frac{2-\kappa'}{\kappa} (p_1^2 - p_0^2)(p_0^2 - \frac{2-\kappa}{\kappa} p^2)}{\frac{2-\kappa}{\kappa} (p_0^2 - 1)(p_0^2 + \frac{2-\kappa'}{\kappa} p_1^2) + \frac{G'}{G} \frac{2-\kappa'}{\kappa} (p_1^2 - p_0^2)(p_0^2 + \frac{2-\kappa}{\kappa})}$$

であり,

$$D_0(\lambda_n) = \begin{vmatrix} a_5(\lambda_n) & b_2(\lambda_n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_2(\beta p_1 \lambda_n) & -b'_2(\beta p_1 \lambda_n) \\ -p_0 a_4(p_0 \lambda_n) & b_1(p_0 \lambda_n) & -\beta a'_1(\beta p_0 \lambda_n) & \beta b'_1(\beta p_0 \lambda_n) \\ p_0 a_5(p_0 \lambda_n) & b_2(p_0 \lambda_n) & -\frac{G'}{G} \beta^2 a'_2(\beta p_0 \lambda_n) & \frac{G'}{G} \beta^2 b'_2(\beta p_0 \lambda_n) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2(\lambda_n) & b_5(\lambda_n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_2(\beta p_1 \lambda_n) & -b'_2(\beta p_1 \lambda_n) \\ a_1(p_0 \lambda_n) & -p_0 b_4(p_0 \lambda_n) & -\beta a'_1(\beta p_0 \lambda_n) & \beta b'_1(\beta p_0 \lambda_n) \\ a_2(p_0 \lambda_n) & p_0 b_5(p_0 \lambda_n) & -\frac{G'}{G} \beta^2 a'_2(\beta p_0 \lambda_n) & \frac{G'}{G} \beta^2 b'_2(\beta p_0 \lambda_n) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2(\lambda_n) & b_2(\lambda_n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta p_1 a'_5(\beta p_1 \lambda_n) & -b'_2(\beta p_1 \lambda_n) \\ a_1(p_0 \lambda_n) & b_1(p_0 \lambda_n) & \beta^2 p_0 a'_4(\beta p_0 \lambda_n) & \beta b'_1(\beta p_0 \lambda_n) \\ a_2(p_0 \lambda_n) & b_2(p_0 \lambda_n) & -\frac{G'}{G} \beta^3 p_0 a'_5(\beta p_0 \lambda_n) & \frac{G'}{G} \beta^2 b'_2(\beta p_0 \lambda_n) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2(\lambda_n) & b_2(\lambda_n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_2(\beta p_1 \lambda_n) & -\beta p_1 b'_5(\beta p_1 \lambda_n) \\ a_1(p_0 \lambda_n) & b_1(p_0 \lambda_n) & -\beta a'_1(\beta p_0 \lambda_n) & -\beta^2 p_0 b'_4(\beta p_0 \lambda_n) \\ a_2(p_0 \lambda_n) & b_2(p_0 \lambda_n) & -\frac{G'}{G} \beta^2 a'_2(\beta p_0 \lambda_n) & \frac{G'}{G} \beta^3 p_0 b'_5(\beta p_0 \lambda_n) \end{vmatrix}$$

そして

$$N_0(\lambda_n) = \begin{vmatrix} 0 & a'_2(\beta \rho_1 \lambda_n) & b'_2(\beta \rho_1 \lambda_n) \\ b_1(\rho_0 \lambda_n) & -\beta a'_1(\beta \rho_0 \lambda_n) & -\beta b'_1(\beta \rho_0 \lambda_n) \\ b_2(\rho_0 \lambda_n) & -\frac{G'}{G} \beta^2 a'_2(\beta \rho_0 \lambda_n) & -\frac{G'}{G} \beta^2 b'_2(\beta \rho_0 \lambda_n) \end{vmatrix}$$

$$N_1(\lambda_n) = \begin{vmatrix} 0 & a'_2(\beta \rho_1 \lambda_n) & b'_2(\beta \rho_1 \lambda_n) \\ a_1(\rho_0 \lambda_n) & -\beta a'_1(\beta \rho_0 \lambda_n) & -\beta b'_1(\beta \rho_0 \lambda_n) \\ a_2(\rho_0 \lambda_n) & -\frac{G'}{G} \beta^2 a'_2(\beta \rho_0 \lambda_n) & -\frac{G'}{G} \beta^2 b'_2(\beta \rho_0 \lambda_n) \end{vmatrix}$$

ただし

$$a_1(x) = J_1(x), \quad b_1(x) = Y_1(x)$$

$$a_2(x) = \frac{1}{\kappa} J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, \quad b_2(x) = \frac{1}{\kappa} Y_0(x) - \frac{Y_1(x)}{x}$$

$$a_3(x) = \frac{1-\kappa}{\kappa} J_0(x) + \frac{J_1(x)}{x}, \quad b_3(x) = \frac{1-\kappa}{\kappa} Y_0(x) + \frac{Y_1(x)}{x}$$

$$a_4(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, \quad b_4(x) = Y_0(x) - \frac{Y_1(x)}{x}$$

$$a_5(x) = \frac{J_0(x)}{x} + \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{2}{x^2}\right) J_1(x), \quad b_5(x) = \frac{Y_0(x)}{x} + \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{2}{x^2}\right) Y_1(x)$$

$$a'_1(x) = J_1(x), \quad b'_1(x) = Y_1(x)$$

$$a'_2(x) = \frac{1}{\kappa'} J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, \quad b'_2(x) = \frac{1}{\kappa'} Y_0(x) - \frac{Y_1(x)}{x}$$

$$a'_3(x) = \frac{1-\kappa'}{\kappa'} J_0(x) + \frac{J_1(x)}{x}, \quad b'_3(x) = \frac{1-\kappa'}{\kappa'} Y_0(x) + \frac{Y_1(x)}{x}$$

$$a'_4(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, \quad b'_4(x) = Y_0(x) - \frac{Y_1(x)}{x}$$

$$a'_5(x) = \frac{J_0(x)}{x} + \left(\frac{1}{\kappa'} - \frac{2}{x^2}\right) J_1(x), \quad b'_5(x) = \frac{Y_0(x)}{x} + \left(\frac{1}{\kappa'} - \frac{2}{x^2}\right) Y_1(x)$$

であり, λ_n は超越方程式

$$\frac{N_0(\lambda)}{N_1(\lambda)} = \frac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)} \quad (6.12)$$

の正根であって, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \dots$ である。

い) 変位関数

$$M_s(x) = \frac{b_2(\lambda_n)}{a_2(\lambda_n)} J_s(x) - Y_s(x) = \frac{N_0(\lambda_n)}{N_1(\lambda_n)} J_s(x) - Y_s(x) \quad (6.13)$$

を導入し

$$F_0 = \frac{\lambda_n D_0(\lambda_n)}{N_1(\lambda_n)}$$

とおけば, (6.11) 式は次のように書ける。

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2G}{\rho_0} \frac{u}{a} &= \text{Res}_1(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(\rho \lambda_n)}{\lambda_n F_0} \cos \lambda_n z \\ -\frac{Q_r}{\rho_0} &= \text{Res}_2(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{K} M_0(\rho \lambda_n) - \frac{M_1(\rho \lambda_n)}{\rho \lambda_n}}{F_0} \cos \lambda_n z \\ -\frac{Q_\theta}{\rho_0} &= \text{Res}_3(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1-K}{K} M_0(\rho \lambda_n) + \frac{M_1(\rho \lambda_n)}{\rho \lambda_n}}{F_0} \cos \lambda_n z \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6.14)$$

そして λ_n が満足すべき方程式 (6.12) 式は

$$\frac{1}{K} M_0(\lambda) - \frac{M_1(\lambda)}{\lambda} = 0 \quad (6.15)$$

になり, (6.15) 式は次のようにも表わせる。

$$\beta \frac{1}{K'} \frac{G'}{G} \frac{\frac{b_2'(\beta \rho_1 \lambda)}{a_2'(\beta \rho_1 \lambda)} J_0(\beta \rho_0 \lambda) - Y_0(\beta \rho_0 \lambda)}{\frac{b_2'(\beta \rho_1 \lambda)}{a_2'(\beta \rho_1 \lambda)} J_1(\beta \rho_0 \lambda) - Y_1(\beta \rho_0 \lambda)} - \frac{1}{K} \frac{\frac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)} J_0(\rho_0 \lambda) - Y_0(\rho_0 \lambda)}{\frac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)} J_1(\rho_0 \lambda) - Y_1(\rho_0 \lambda)} = \frac{G' - 1}{\rho_0 \lambda} \quad (6.16)$$

(6.16) 式の根 λ_n を求めれば (6.14) 式によって変位と応力が計算できる。

全く同様に, 外円筒 II における変位および応力は (6.10) 式をラプラス逆変換してえられ, 次式で与えられる。

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2G}{P_0} \frac{U'}{a} &= \text{Res}'_1(0) + \frac{\pi B}{\kappa P_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M'_1(\beta P \lambda_n)}{\lambda_n F'_0} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{G}{G'} \frac{O'_r}{P_0} &= \text{Res}'_2(0) + \frac{\pi \beta^2}{\kappa P_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\kappa'} M'_0(\beta P \lambda_n) - \frac{M'_1(\beta P \lambda_n)}{\beta P \lambda_n}}{F'_0} \cos \lambda_n \tau \\ -\frac{G}{G'} \frac{O'_\theta}{P_0} &= \text{Res}'_3(0) + \frac{\pi \beta^2}{\kappa P_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1-\kappa'}{\kappa'} M'_0(\beta P \lambda_n) + \frac{M'_1(\beta P \lambda_n)}{\beta P \lambda_n}}{F'_0} \cos \lambda_n \tau \\ \tau'_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6.17)$$

ここで

$$M'_s(x) = \frac{b'_2(\beta P \lambda_n)}{a'_2(\beta P \lambda_n)} J_s(x) - Y_s(x)$$

$$F'_0 = \lambda_n^2 \frac{D_0(\lambda_n)}{a'_2(\beta P \lambda_n)}$$

であり、 λ_n は(6.16)式の根である。そして

$$\text{Res}'_1(0) = -\frac{2}{\kappa} \frac{P_0^2}{P} \frac{P^2 + \frac{2-\kappa'}{\kappa'} P_1^2}{\frac{2-\kappa}{\kappa} (P_0^2-1)(P_0^2 + \frac{2-\kappa'}{\kappa'} P_1^2) + \frac{G'}{G} \frac{2-\kappa'}{\kappa'} (P_1^2-P_0^2)(P_0^2 + \frac{2-\kappa}{\kappa})}$$

$$\text{Res}'_2(0) = \frac{2}{\kappa} \frac{2-\kappa'}{\kappa'} \frac{P_0^2}{P^2} \frac{P_1^2 - P^2}{\frac{2-\kappa}{\kappa} (P_0^2-1)(P_0^2 + \frac{2-\kappa'}{\kappa'} P_1^2) + \frac{G'}{G} \frac{2-\kappa'}{\kappa'} (P_1^2-P_0^2)(P_0^2 + \frac{2-\kappa}{\kappa})}$$

$$\text{Res}'_3(0) = -\frac{2}{\kappa} \frac{2-\kappa'}{\kappa'} \frac{P_0^2}{P^2} \frac{P_1^2 + P^2}{\frac{2-\kappa}{\kappa} (P_0^2-1)(P_0^2 + \frac{2-\kappa'}{\kappa'} P_1^2) + \frac{G'}{G} \frac{2-\kappa'}{\kappa'} (P_1^2-P_0^2)(P_0^2 + \frac{2-\kappa}{\kappa})}$$

である。

(6.14)式および(6.17)式の右辺の第1項 $\text{Res}'_i(0)$, $\text{Res}'_i(0)$,
($i=1, 2, 3$)は静荷重による結果を示しており、(6.16)式は組合円筒の軸対称振動の振動数方程式に一致するから、等分布衝撃圧力を受ける組合円筒に生ずる変位および応力は静的結果と各次数の固有振動の総和として表わされる。

6.3 ステップ状圧力によって生ずる応力変動

内面に等分布のステップ状圧力をうける組合円筒に生ずる変位と応力を (6.14) 式によって計算するために、まず (6.16) 式で表わされる振動数方程式の根 λ_n を電子計算機によって計算した。

表 6.1 表には、表 6.2 図の組合円筒において $P_1 = b/a = 2$, $P_0 = a_1/a = 1.5$ の場合に、 $\nu = \nu' = 0.3$ として、種々の G'/G , δ'/δ の値に対する λ_n を計算した結果が示してある。

表 6.1 表においては $G'/G = \delta'/\delta = 1$ は円筒 I, II の材質が等しい場合であって単層円筒に対応し、この場合には λ_n の値を n が小さいならば Trial Method により、 n が大ならば (5.39) 式に示された漸近近似式によって計算した。

表 6.1 表 (6.16) 式の根 λ_n ($P_1=2, P_0=1.5, \nu=\nu'=0.3$)

(a) $\frac{G'}{G}=3, \frac{\delta'}{\delta}=1$ $\beta=0.577\ 350$ (b) $\frac{G'}{G}=2, \frac{\delta'}{\delta}=1$ $\beta=0.707\ 107$ (c) $\frac{G'}{G}=1, \frac{\delta'}{\delta}=3$ $\beta=1.732\ 051$ (d) $\frac{G'}{G}=1, \frac{\delta'}{\delta}=1$ $\beta=1$				
n	λ_n	λ_n	λ_n	λ_n
1	0.825 367	0.736 473	0.440 314	0.633 265*
2	3.838 920	3.667 268	2.543 790	3.216 55*
3	8.344 205	7.579 908	4.436 981	6.319 30*
4	11.773 192	10.868 195	7.024 190	9.448 65*
5	15.883 747	14.907 468	9.268 863	12.584 20
6	20.245 108	18.330 182	11.343 252	15.722 21
7	23.584 464	22.079 102	13.990 967	18.861 42
8	28.017 029	25.898 412	16.031 046	22.001 31
9	32.037 207	29.271 410	18.324 256	25.141 63
10	35.537 226	33.333 432	20.900 500	28.282 24
11	40.120 428	36.654 231	22.832 123	
12	43.765 588	40.561 820	25.332 419	
13	47.605 611	44.212 049	27.735 356	
14	52.134 496	47.723 611	29.705 466	
15	55.520 444	51.728 284	32.333 041	
16	59.737 165	55.016 653	34.515 806	
17	64.020 647	59.036 382	36.652 180	
18	67.380 613	62.521 520	39.292 955	
19	71.874 834	66.201 822	41.290 693	
20	75.792 154	70.085 588	43.647 100	

(d) 列においては、

* 印は Trial Method

による値を示し、

他は漸近近似 (5.39)

式による計算結果で

ある。

$\rho_1 = 2$, $\rho_0 = 1.5$ の場合に種々の G'/G の値に対して $\gamma'/\gamma = 1$, $\nu = \nu' = 0.3$ として, 表 6.1 表に示された根 λ_n の値を用いて (6.14) 式によって等分布ステップ状内圧をうける組合円筒の荷重面に生ずる σ_θ の時間的変動を計算して, その結果を表 6.2 図～表 6.4 図に示した。

加えられたステップ状圧力によって負荷の瞬間 $t = 0$ に荷重面に生じた弾性波の波面は内円筒 I を一定速度 C で伝ばし, 負荷後, 時間 $t_1 = (a_1 - a)/C$ の瞬間に接合面に到達してその一部は円筒 I に反射され円筒 I の内面に向い, 時間 $T_1 = 2t_1$ にこの面に到達する。そしてのこりは接合面を透過して外円筒 II を $C' = C/\beta$ の速度で外面に向って伝ばし, $t_2 = (b - a_1)/C'$ として時間 $(t_1 + t_2)$ に外面に達し, この面で反射されて $T_2 = 2t_2$ として時間 $t = t_1 + T_2$ に接合面に到達し, その一部は円筒 II に反射され, のこりは円筒 I に透過する。

したがって弾性波の波面は円筒 I の内部においては周期 T_1 で, 円筒 II の内部においては周期 T_2 で往復し, 円筒 I, II の内外面に到達すれば反射透過をくり返すために, 円筒 I の内面に生ずる応力はこの面に弾性波の波面が到達する時間 $t = mT_1 + (n-1)T_2$, ($m, n = 1, 2, 3, \dots$) に不連続な応力変動をする。図中の丸印は円筒 I の内面に弾性波の波面が到達するとき $\tau = (C/a) \cdot t = m + (n-1)\beta$ を示している。

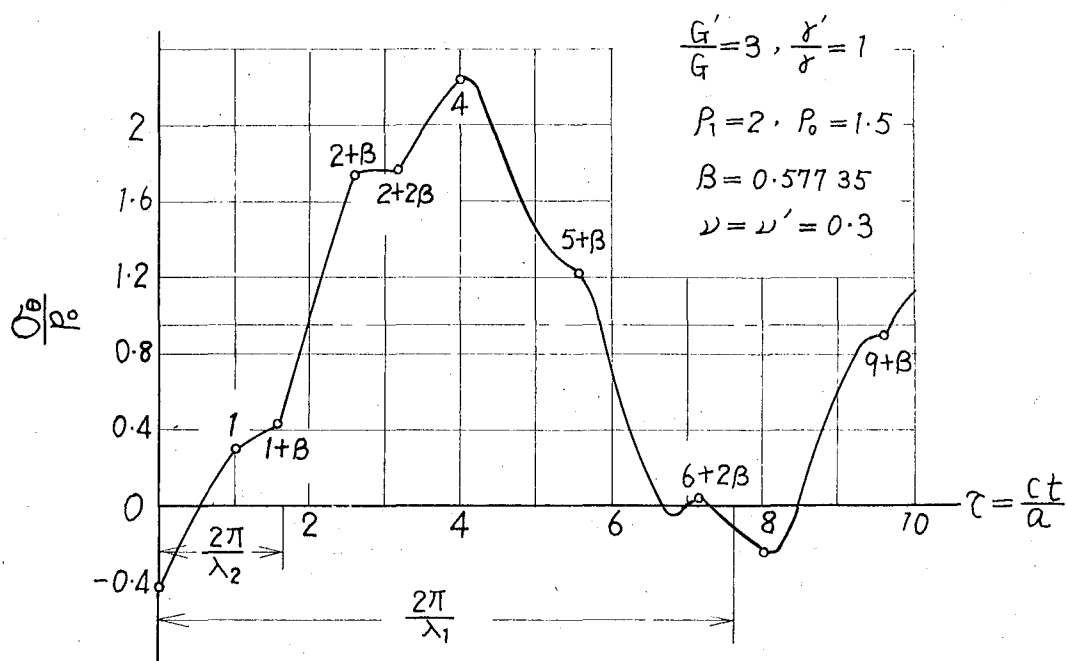


表 6.2 図 等分布ステップ状内圧をうける組合円筒の内面に生ずる応力変動。

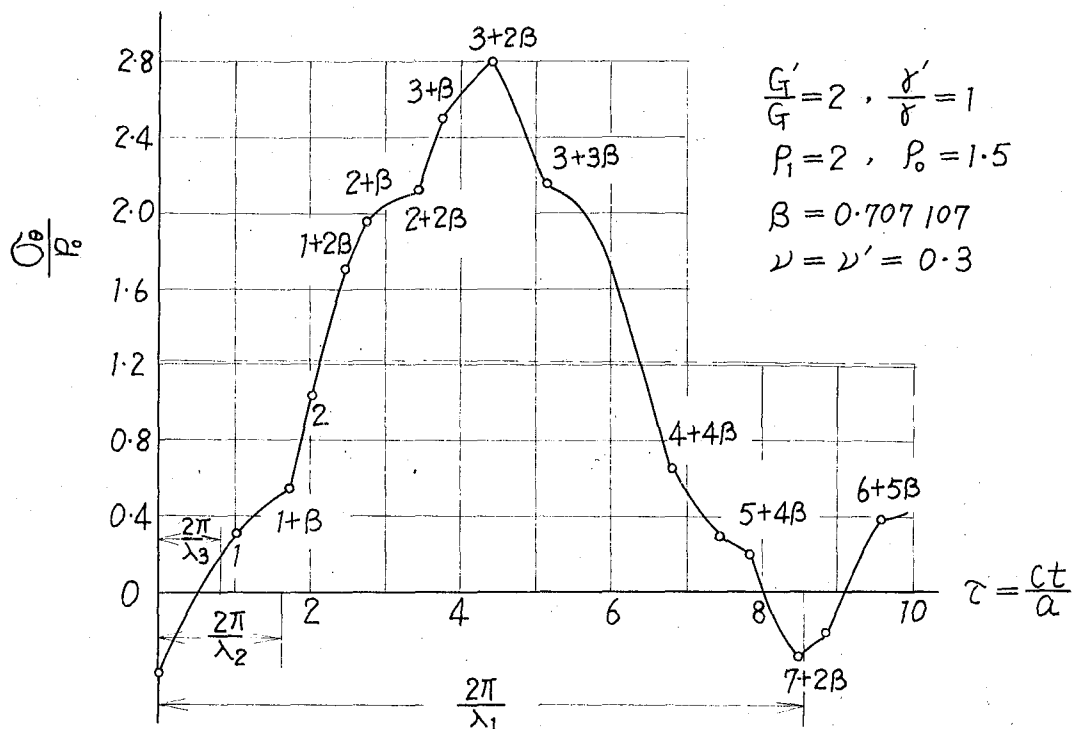


図 6.3 ステップ状内圧をうける組合円筒の内面に生ずる応力変動。

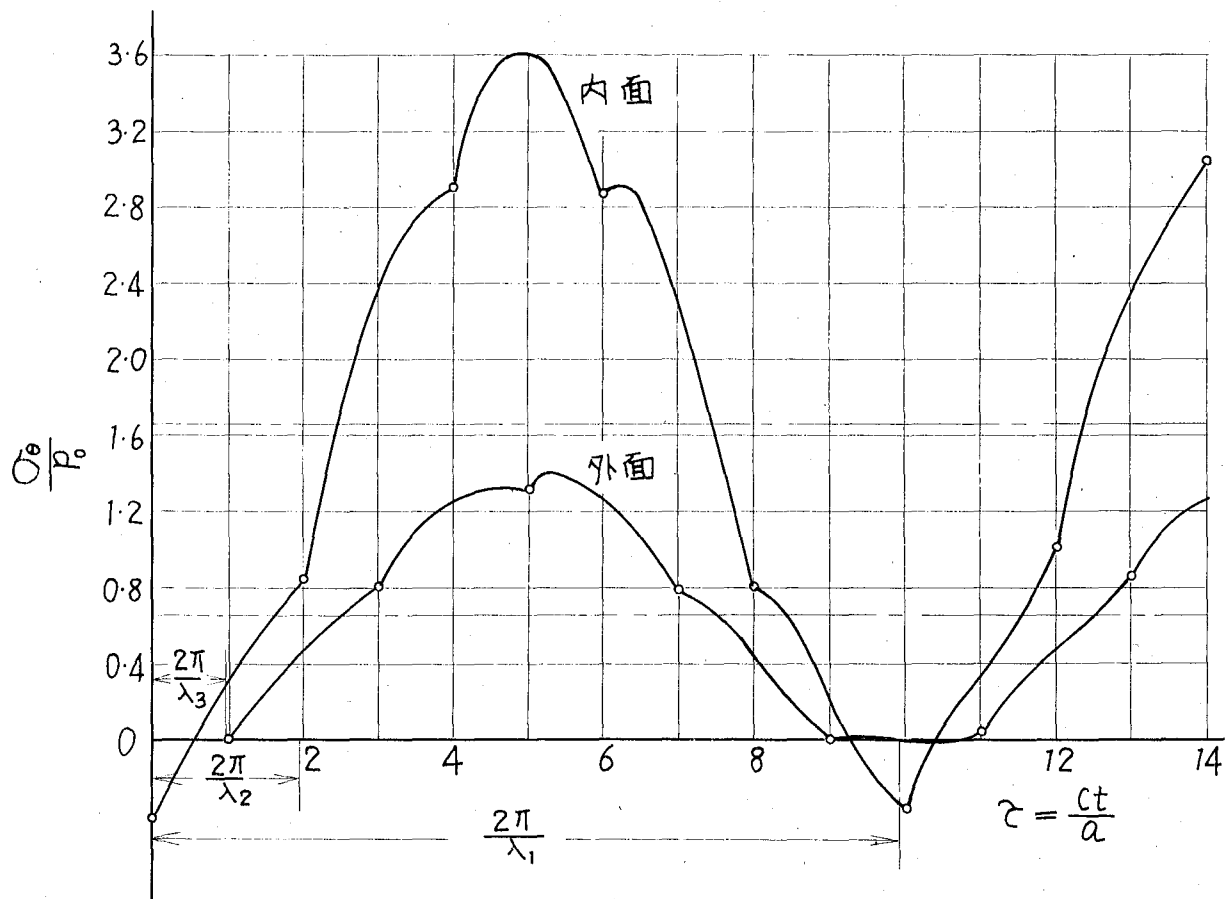
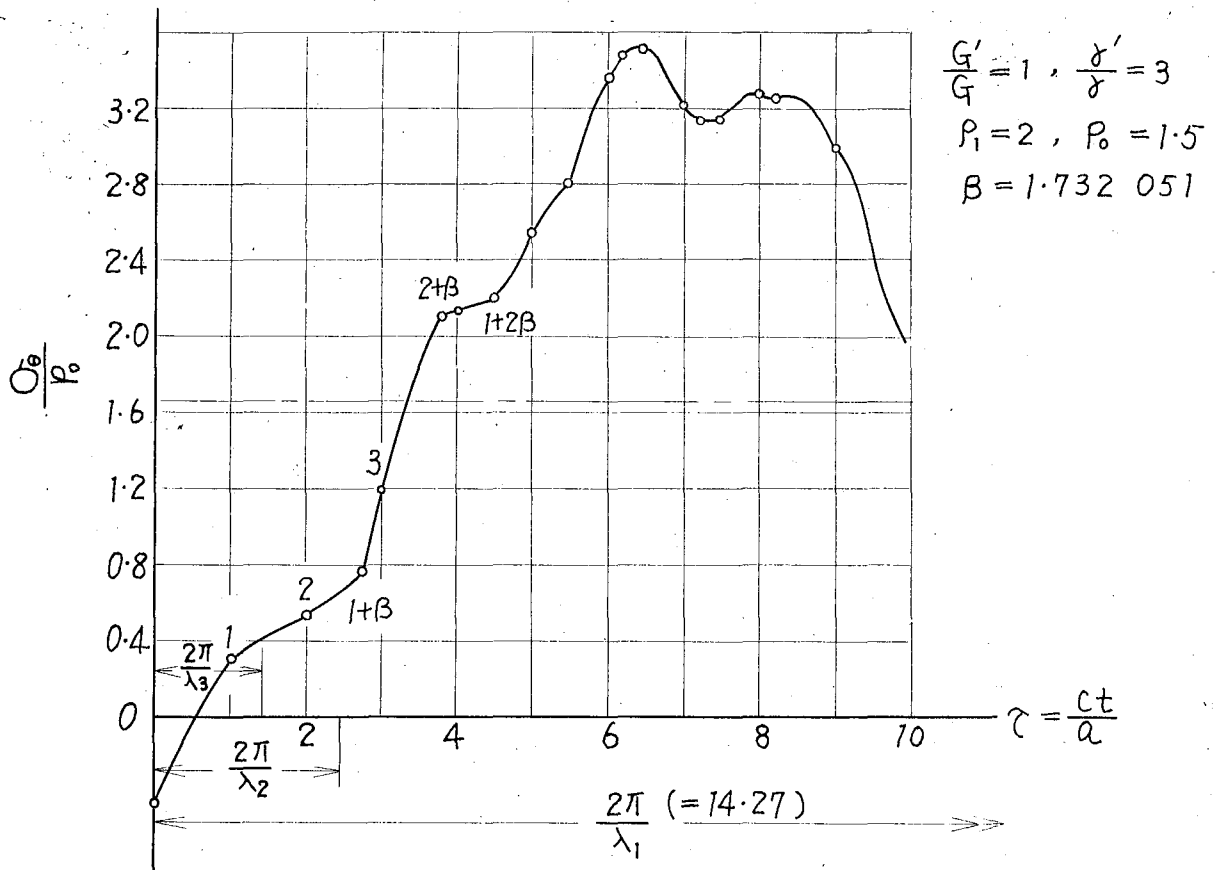


図 6.4 ステップ状内圧をうける円筒に生ずる応力変動。
 ($P_1 = 2, \nu = 0.3$)

しかし、接合面からの最初の反射波が円筒Ⅰの内面に到達する時間 T_1 ($\tau = 1$) 以前においては、この面の応力は円筒Ⅱに無関係であり、円孔面にステップ状圧力をうける無限体の円孔面に生ずる応力に一致する。

オ 6.5 図は、 $G'/G = 1$ 、 $\delta'/\delta = 3$ の場合に、円筒Ⅰの内面に生ずる σ_{θ} の時間的変動を示したものである。



オ 6.5 図 ステップ状内圧をうける組合円筒の内面に生ずる応力変動。

固有振動と応力変動との関係を示すために、オ 6.2 図～オ 6.5 図中にオ一次、オ二次、オ三次の固有振動の周期に相当する時間 $\tau = (a/c) \cdot (2\pi/\lambda_1)$ 、 $(a/c) \cdot (2\pi/\lambda_2)$ 、 $(a/c) \cdot (2\pi/\lambda_3)$ を示した。この結果、 σ_{θ} は静的結果を中心にしてほぼオ一次の固有振動の周期で振動することがわかる。

オ 6.2 図～オ 6.4 図の結果を比較すれば、 $\delta'/\delta = 1$ ならば G'/G が大きいほど内円筒内面に生ずる σ_{θ} の最大値は小さい。すなわち外円筒

の横弾性係数 G' が内円筒の横弾性係数 G よりも大きいならば、内円筒内面に生ずる最大引張応力は小になることがわかる。

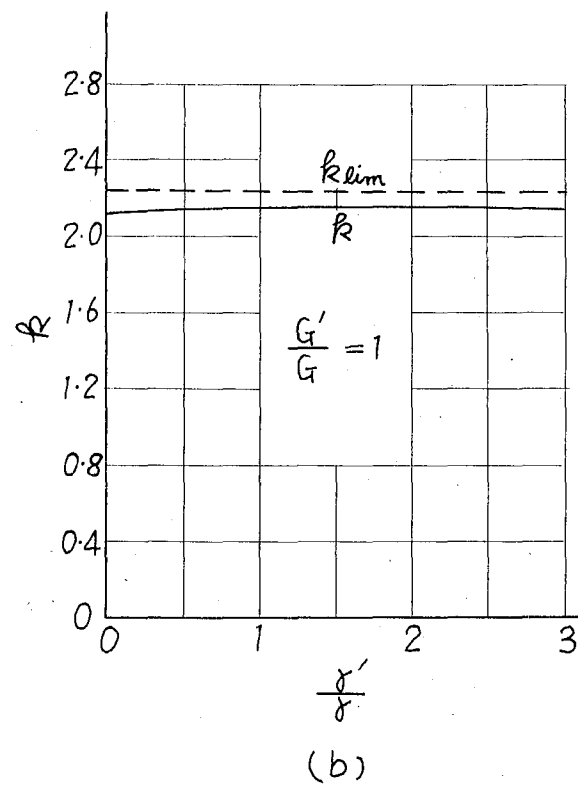
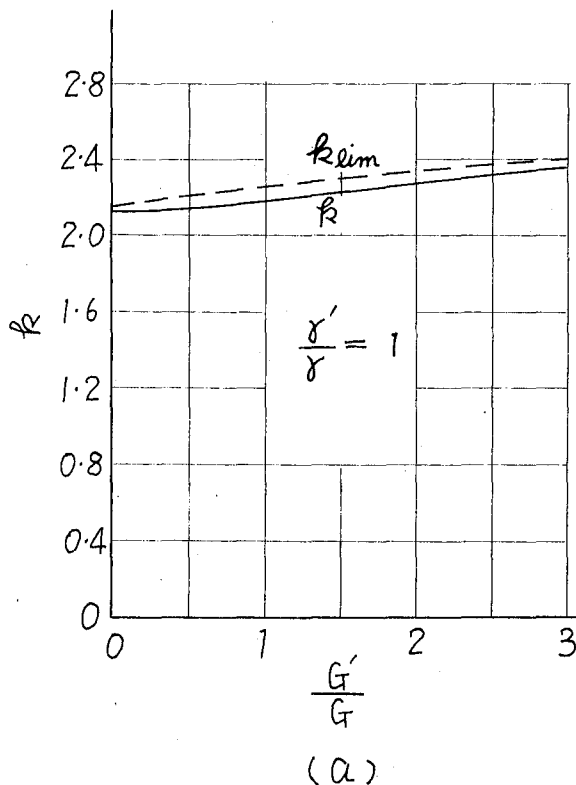
そしてオ 6.4 図とオ 6.5 図の結果を比較すれば、 $G'/G = 1$ ならば内円筒内面に生ずる σ_θ の最大値は δ'/δ の比にほとんど無関係に一定値をとることがわかる。

衝撃圧力をうける組合円筒の内面に生ずる最大引張応力 $(\sigma_\theta)_D$ は絶対値が等しい静圧力をうける場合に生ずる最大応力 $(\sigma_\theta)_S$ よりもはるかに大きい。

オ 6.6 図 (a) は $\nu = \nu' = 0.3$, $\delta'/\delta = 1$ の場合に G'/G の種々の値について $(\sigma_\theta)_D$ と $(\sigma_\theta)_S$ との比

$$k = \frac{(\sigma_\theta)_D}{(\sigma_\theta)_S}$$

を示したもので、図中 $G'/G = 0$ は外円筒 II がいない場合に相当し、 $G'/G = 1$ は内円筒 I と外円筒 II の材質が等しい場合で単層の円筒に相当する。この結果 k は G'/G が大きくなれば大きくなり、 $G'/G = 1$ ならば $k = 2.16$ であるのに対して $G'/G = 3$ ならば $k = 2.37$ になる。



オ 6.6 図 内圧をうける組合円筒の内面の k
 $(P_1 = 2, P_0 = 1.5, \nu = \nu' = 0.3)$

※ 6.6 図(b)は $G'/G = 1$ の場合に δ'/δ の種々の値について k の値を示したもので、 $\delta'/\delta = 0$ は外円筒Ⅱがない場合に相当する。 k の値は δ'/δ が変化してもほとんど変わらないことがわかる。

※ 6.6 図における $(O_0)_D$ は (6.14) 式で計算した応力波形の最初の数山を対象としたもので、必ずしも最大応力に等しいとは限らない。そこで 5.4 節と同様にして、内面における k の限界値 k_{lim} を求めよう。

さて、(6.14) 式は初期条件 $(u)_{t=0} = 0$ を満たさねばならないから、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \{M_1(P\lambda_n) / (\lambda_n \cdot F_0)\}$ は収束し

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(P\lambda_n)}{\lambda_n F_0} = -\text{Res}_1(0) \quad (6.19)$$

になる。そして $|\cos \lambda_n r| \leq 1$ であるから (6.19) 式および (6.15) 式の関係を (6.14) 式に適用すれば

$$k_{lim} = (3-k) - \frac{2}{k} (1-k)(2-k) \frac{\rho_0^2 + \frac{2-k'}{k'} \rho_1^2 - \frac{G'}{G} \frac{2-k'}{k'} (\rho_1^2 - \rho_0^2)}{\frac{2-k}{k} (\rho_0^2 + 1) (\rho_0^2 + \frac{2-k'}{k'} \rho_1^2) + \frac{G'}{G} \frac{2-k'}{k'} (\rho_1^2 - \rho_0^2) (\rho_0^2 - \frac{2-k}{k})} \quad (6.20)$$

になり、※ 6.6 図に点線で表わされるようになる。この結果、組合円筒の肉厚が薄ければ k_{lim} は応力変動から求められた k によく一致することがわかる。

6.4 結 言

異なる二種の材料からなる組合円筒の内面に衝撃圧力が作用した場合に生ずる応力変動を解析して、二種の材料の横弾性係数 G ，比重量 δ が応力変動に及ぼす影響を調べた。

材質および直径が異なる2つの円筒を組合せて作られた組合円筒の内面に等分布ステップ状圧力が作用すれば生じた応力は波動として伝ばし、2

の円筒の接合面においてその一部は反射され、のこりは透過されて他の円筒を伝へし、円筒の内外面において反射がくり返されるから、内面の応力は不連続的に変動し、単層の円筒に比べて応力は複雑に変動するけれども、全体的に見れば、単層円筒の場合と同様に、静的結果を中心にしてほぼ一次の固有振動の周期で振動する。

ステップ状圧力によつて内面に生ずる最大引張応力は静的結果の約2倍以下であり、その大きさは二種の材料の G によつて大きく影響され、その値にはほとんど無関係であり、内円筒の G が外円筒における値 G' に比して小ならば、最大引張応力は単層円筒におけるよりも小さく、その傾向は静的結果に一致する。

これに対して、応力変動の周期は δ によつて影響され、 G が G' に比して大きいほど、また内円筒の δ が外円筒の δ' に比して小さいほど、周期は長くなる傾向にある。

種々の組合円筒について振動数方程式の根を Trial Method で求めて応力変動を計算することはかなりや、かいである。そこで最大引張応力を近似的に求めるために、最大応力の限界値を示す簡単な近似式を導いた。この近似式と厳密解とを比較した結果、円筒の肉厚が荒ければ両者はよく一致することがわかった。

第7章 結 論

本研究においては，衝撃荷重によって生ずる応力を明らかにするために，まず丸棒の縦圧縮および縦引張衝撃における一次元弾性波の反射と透過の現象を解析し，任意断面に生ずる応力の時間的変動を求めるための簡単な図式解法を導いた。この結果をひずみゲージによる測定結果と比較して両者はよく一致し，通常の教科書に述べてあるひずみエネルギーに基づく衝撃応力の計算値とは定性的にも定量的にも一致しないことを明らかにした。この原因は初等材料力学においては軸に沿って一様に応力が分布すると仮定して衝撃応力を求めていることにある。実際には応力は波動として伝ばし，応力は棒の軸に沿って一様に分布しない。

衝撃面に生ずる応力は衝撃速度に比例し，衝撃物体の質量には無関係である。直径が一樣な棒の衝突において棒の他端が自由端ならば，衝撃面に生ずる応力が最大応力になるが，一般に衝撃面に生じた応力は波動として棒内を伝ばし，境界面で反射および透過が繰返されるから，両棒の材質，形状などによって最大応力は異なる。

二次元物体あるいは三次元物体に衝撃荷重が作用する場合には動弾性基礎方程式に基づいて，弾性波の伝ば現象と衝撃応力との関係を明らかにした。まず慣性項を含む変位の方程式の解を8種の応力関数の微分形で表示し，基本的な応力状態とこれらの応力関数の関係を明らかにした。その結果，衝撃荷重をうけた弾性体の変位および応力は波動として弾性体中を伝ばし，横弾性係数を G ，比重量を ρ ，ポアソン比を ν ，重力加速度を g として，基本的には速度 $C_1 = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)} \cdot \sqrt{gG/\rho}$ ，(平面応力状態では $C_3 = \sqrt{2/(1-\nu)} \cdot \sqrt{gG/\rho}$) をもつ縦波と $C_2 = \sqrt{gG/\rho}$ の速度をもつせん断波のみが存在し，弾性体内に生ずる応力はこれらの波動を重ね合せたものとして表わされる。

個々の問題に対して，応力関数の選択を容易にするために，直角座標，円柱座標，球座標を対象にして，応力関数による応力成分の表示式を導き，特殊な場合として点対称および軸対称応力状態に対しては波動方程式の特解から導かれる変位および応力成分を表示した。この結果を基にして等分布衝撃圧力をうける中空球および円筒に生ずる衝撃応力をラプラス変換によって解析し，逆変換に際して必要になる振動数方程式の複素根の性質に

について検討し，高次の根を求めるための漸近展開式を導いた。これらの根は円筒あるいは中空球の固有振動数に対応し，衝撃応力は静的結果と各次数の固有振動に基づく結果の和として表わされる。

中空球あるいは円筒の内外面に等分布スチッフ状圧力が作用するとき，応力は波動として弾性体内を伝ばし，内外面において反射を繰返すために，各点の応力は時間的に不連続な変動をするけれども，全体的に見れば静的結果を中心にして振動し，その周期はほぼオ一次の固有伸び振動の周期に対応する。しかし両者は完全には一致しない。そして弾性波が内外面間を1往復する時間は，オ二次の固有振動の周期に対応する。

スチッフ状内圧が作用すれば，内面の引張応力が最大応力になり，中空球あるいは円筒の内外径比を ρ_1 とし，最大引張応力を $(O_\theta)_{max}$ とするとき， ρ_1 が小すなわち肉厚が薄くなれば $(O_\theta)_{max}$ は増大し，肉厚が0になれば応力は ∞ になる。その傾向は静圧力をうける場合に一致するけれども，最大衝撃応力と最大静的応力との比を k とするとき， ρ_1 がある値のとき k は最大値 k_{max} になり， $\nu = 0.3$ ならば中空球においては $\rho_1 = 3$ において $k_{max} = 2.36$ ，円筒においては $\rho_1 = 2$ において $k_{max} = 2.16$ になる。これらは一次元のバネ・質量系における $k_{max} = 2$ よりもかなり大きく， $\rho_1 = 1$ ならばいずれの場合においても $k = 2$ である。

以上の結果は負荷直後の応力変動を対象とするものであるから，長時間経過後に荷重面に生ずるかも知れない最大応力の限界値と静的応力の比 k_{lim} を評価した。この結果

$$\text{中空球においては} \quad k \leq k_{lim} = \frac{2}{1-\nu} \left[1 - \frac{3\nu}{\rho_1^3 + 2} \right]$$

$$\text{円筒においては} \quad k \leq k_{lim} = \frac{2}{1-\nu} \left[\frac{2-\nu}{2} - \frac{1}{\rho_1^2 + 1} \right]$$

である。 k のかわりに k の限界値 k_{lim} を用いれば，中空球ならば $1 \leq \rho_1 \leq 1.5$ の範囲において，円筒ならば $1 \leq \rho_1 \leq 2.5$ の範囲において，10%以下の誤差で k の値が推定でき，しかも推定された最大応力は安全側にあるから，上式は設計式として用いる。ここで k および k_{lim} の値は ν によって変化し，中空球，円筒いずれの場合においても ν が増大すれば k の値も増大する傾向にある。

多くの場合衝撃圧力はステップ関数状には変化しない。しかしステップ状衝撃圧力に対する結果があれば、これをもとにして、Duhamelの定理によって任意の変動圧力に対する結果を導くことができる。本研究では実用的見地からパルス状圧力および種々の爆発圧力に対する結果を導いて、衝撃圧力の立上り時間および負荷時間による最大応力の変化について検討した。内面に作用する衝撃圧力の立上り時間が長くなれば生ずる最大応力は小さくなり、また、衝撃圧力の負荷時間が短くなれば最大応力の大きさは小さくなり、これらの関係を数値的に明らかにした。結局衝撃圧力をステップ関数で仮定することは、強度設計上、衝撃応力を安全側に評価することになる。

異なる二種の材質よりなる組合円筒の内面にステップ状衝撃圧力が作用すれば、内面に生ずる応力は波動として円筒内を伝播し、2つの円筒の接合面において反射、透過を繰返すために単層円筒の場合に比して、応力は複雑な変動をするけれども、全体的には静的結果を中心にしてほぼ一次の固有伸び振動の周期で振動する。そして応力変動の周期は内円筒の G が外円筒におけるよりも大きいほど、また内円筒の δ が外円筒におけるよりも小さいほど長くなる。内面に生ずる最大引張応力 $(\sigma_0)_{max}$ は内外円筒の δ にはほぼ無関係に、内円筒の G が外円筒におけるよりも小さいならば、単層円筒におけるよりも小さく、その傾向は静的圧力による結果に一致する。しかし $(\sigma_0)_{max}$ の大きさは静的圧力による結果よりはるかに大きく、これらの比較は内円筒の G が外円筒におけるよりも小さいならば増大する傾向にある。中空球および円筒の場合と同様にして、内円筒の内外径が $1, \rho_0$ 、外円筒の外径が ρ_1 の組合円筒について r_{lim} を求め次の結果をえた。

$$r \leq r_{lim} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} - \frac{2\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} \times \frac{\rho_0^2 + \frac{1}{1-2\nu} \rho_1^2 - \frac{G'}{G} \frac{1}{1-2\nu} (\rho_1^2 - \rho_0^2)}{\frac{1}{1-2\nu} (\rho_0^2 + 1) (\rho_0^2 + \frac{\rho_1^2}{1-2\nu}) + \frac{G'}{G} \frac{1}{1-2\nu} (\rho_1^2 - \rho_0^2) (\rho_0^2 - \frac{1}{1-2\nu})}$$

ただし、 r は外円筒における値を示し、他は内円筒における値である。この式は組合円筒の肉厚が抜ければ設計式として適用しうる。

衝撃圧力による応力分布が静圧力におけると同様の傾向にあることを考慮すれば、内面に等分布衝撃圧力をうける $\rho_0 = 1.5$ 、 $\rho_1 = 2$ の組合円筒は外円筒の G が内円筒における値の1.5～2倍において応力の分布状態が

最も均一化されて強度的に有利になり，衝撃圧力をうける単層円筒の衝撃破壊を対象とするときには，肉厚を大きくするよりも異種の材料を外側に補強した方が有利である。

[参 考 文 献]

一次元の縦衝撃

- (1) St. Venant ; Sue le Choc longitudinal de deux Barres élastiques. Journal de Liouville, T. XII (1867), 237-376
- (2) J. Boussinesq ; Du Choc longitudinal d'une Barre prismatique, fixée à un bout et heurtee à l'autre. Compt. Rend., 97 (1883), 154-157
- (3) W. Voigt ; Die Theorie des longitudinalen Stosses zylindrischer Stäbe. Ann. der Phys., 19 (1883), 44
- (4) M. Hamburger ; Untersuchungen über die Zeitdauer des Stosses elastischer zylindrischer Stäbe. Diss. Breslau, (1885)
- (5) V. Hausmaninger ; Zur Theorie des longitudinalen Stosses zylindrischer Stäbe. Ann. der Phys., 25 (1885), 189
- (6) J. E. Sears ; On the impact of bars with rounded ends. Trans. Camb. Phil. Soc., 21 (1909), 49
- (7) C. Ramsauer ; Experimentelle und theoretische Grundlagen des elastischen und mechanischen Stosses. Ann. der Phys., 30-4 (1909), 418-474
- (8) W. Voigt ; Zur Theorie des longitudinal Stosses zylindrischer Stäbe. Ann. der Phys., 46-4 (1915), 657-676
- (9) E. W. Tschudi ; Duration of impact of bars. Phys. Rev., Ser. 2, 18-6 (1921), 423-430
- (10) J. E. P. Wagstaff ; Experimentals on the duration of impacts, mainly of bars with rounded ends, in elucidation of the elastic theory. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 105 (1924), 544-570
- (11) W. A. Prowse ; The development of pressure waves during the longitudinal impact of bars. Phil. Mag., 22 (1936), 210-239
- (12) R. Fanning and W. V. Bassett ; Measurement of impact strains by Carbon-strip extensometer. J. Appl. Mech., 7-1 (1940), 24-28

- (13) L.A. Pipes ; The operational theory of longitudinal impact.
J. Appl. Phys., 13 (1942), 503-511
- (14) C.O. Dohrenwend & W.R. Mehattey ; Measurement of dynamic strain. J. Appl. Mech., 10-2 (1943), 85-92
- (15) T. Davison & J.H. Meier ; Impact on prismatical bars. Proc. SESA, 4-1 (1946), 88-110
- (16) K.J. DeJuhasz ; Graphical analysis of impact of bars stressed above the elastic range. J. Franklin Inst., 247 (1949), 15-48
- (17) E.A. Ripperger ; Longitudinal impact of bars. Proc. SESA, 10-1 (1952), 209-226
- (18) E.A. Ripperger ; The propagation of pulse in cylindrical bars. --- An experimental study. Proc. 1st Midwestern Conf. on Solid Mech., (1953), 29-39
- (19) E. Krainer ; Beitrag zur Theorie des Stosses von zylindrischen Stäben. Phys. Verhandlungen, 4 (1953), 172
- (20) J.M. Krattt ; Elimination of transient strain fluctuations which result from longitudinal impact of bars. Proc. SESA, 12-2 (1954), 173-180
- (21) E.A. Ripperger & H.N. Abramson ; Reflection and transmission of elastic pulses in a bar at a discontinuity in cross section. Proc. 3rd Midwestern Conf. Solid Mech., (1957), 135-145
- (22) H.N. Abramson, H.J. Plase & E.A. Ripperger ; Stress waves propagation in rods and beams. Advanc. in appl. Mech., Academic Press. Inc., 5 (1958), 111-194
- (23) H.C. Fischer ; On the longitudinal impact. Appl. Sci. Res., A-8 (1959), 105-138, 278-308 ; A-9 (1960), 9-42, 93-139, 213-247, 248-274
- (24) H. Shimizu & M. Takata ; Dynamic stresses in drilling rod. The Memoirs of Faculty of Engng. Kyushu Univ., 19-3 (1960), 115-152
- (25) 松本・三室・松森・中原 ; 縦衝撃をうけた丸棒に生ずる応力およびその伝は。機論, 29-197 (昭38), 49-59
- (26) 松本・荒井・中原 ; 縦引張衝撃によつて生ずる応力とその伝は。機論, 30-215 (昭39), 756-762

三次元の縦衝撃

- (27) D. Bancroft ; The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars. Phys. Rev., 59 (1941), 588-593
- (28) G. E. Hudson ; Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders. Phys. Rev., 63 (1943), 46-51
- (29) R. M. Davies ; A critical study of the Hopkinson pressure bar. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, 240 (1948), 375-457
- (30) H. Kolsky ; The propagation of longitudinal elastic waves along cylindrical bars. Phil. Mag., 45 (1954), 712-726
- (31) C. W. Curtis ; Second mode vibrations of the Pochhammer - Chree frequency equations. J. Appl. Phys., 25 (1954), 928
- (32) J. Miklowitz & C. R. Misewanger ; The propagation of compressional waves in a dispersive elastic rod.
Part I, Results from the theory. J. Appl. Mech., 24-2 (1957), 231-239
Part II, Experimental results and comparison with theory.
J. Appl. Mech., 24-2 (1957), 240-244
- (33) R. Skalak ; Longitudinal impact of a semiinfinite circular elastic bar. J. Appl. Mech., 24-1 (1957), 59-64
- (34) M. Redwood & J. Lamb ; On the propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders. Proc. Phys. Soc., B, 70 (1957), 136-143
- (35) R. Folk, G. Fox, C. A. Shook & C. W. Curtis ; Elastic strain produced by sudden applied of pressure to one end of a cylindrical bar.
I ; Theory , II ; Experiment observation
J. Acoust. Soc. Amer., 30 (1958), 552-563
- (36) R. D. Mindlin & H. D. McNiven ; Axially symmetric waves in elastic rods. Trans. ASME, Ser. E, 27-1 (1960), 145-151
- (37) R. D. Mindlin & E. A. Fox ; Vibrations and waves in elastic bars of rectangular cross section. Trans. ASME, Ser. E, 27-1 (1960), 152-158
- (38) J. R. Lloyd & J. Miklowitz ; On the use of double integral transforms in the study of dispersive elastic wave propagation.
Proc. 4th U. S. National Congress of Appl. Mech., ASME, New York, N. Y., (1962), 255-267

- (39) R.L. Rosenfeld & J. Miklowitz ; Wave fronts in elastic rods and plates. Proc. 4th U.S. National Congress of Appl. Mech., ASME, New York, N.Y., (1962), 293-303
- (40) M. Onoe, H.D. McNiven & R.D. Mindlin ; Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods. Trans. ASME, Ser. E, 29-4 (1962), 729-734
- (41) O.E. Jones & A.T. Ellis ; Longitudinal strain pulse propagation in wide rectangular bars. Part I, Theoretical Considerations. Trans. ASME, Ser. E, 30-1 (1963), 57-60
- (42) O.E. Jones & A.T. Ellis ; Longitudinal strain pulse propagation in wide rectangular bars. Part II, Experimental observations and comparisons with theory. Trans. ASME, Ser. E, 30-1 (1963), 61-69
- (43) H.M. Berkowitz ; Longitudinal impact of a semi-infinite elastic cylindrical shell. Trans. ASME, Ser. E, 30-3 (1963), 347-354
- (44) R.K. Kaul ; On the propagation of pressure pulses in circular rods. ZAMP, 14-6 (1963), 704-712
- (45) R.K. Kaul & J.J. McCoy ; Propagation of axisymmetric waves in a circular semi-infinite elastic rod. J. Acoust. Soc. Amer., 36-4 (1964), 653-660

Ge ひずみゲージ

- (46) W.P. Mason ; Bell Lab. Record , (1959-1), 7
- (47) 五十嵐 ; Ge の Piezoresistance 効果を利用した歪計。豊田研究報告, 氷15報 (1959), 30
- (48) 五十嵐 ; ゲルマニウム歪計。計測, 9-12 (1959), 748-753 , 10-7 (1960), 412-418
- (49) 五十嵐 ; ピエゾ抵抗効果を利用する歪計。非破壊検査, 9-5 (1960), 259-263
- (50) 五十嵐 ; Ge の Piezo 抵抗効果及びその歪計への応用。応用物理, 29-2 (1960), 73-78
- (51) W.P. Mason ; Semiconductor Devices as Pressure Transducers. Electronics , (1962-2), 34-39

- (52) 五十嵐・知久・佐藤 ; 半導体歪計による衝撃波の測定。
第12回応用力学連合講演会論文抄録集第1部, (1962-9), 39
- (53) 五十嵐 ; 半導体ひずみ計およびその応用。 機誌, 65-527 (1962), 1713
- (54) ストレングーズ調査研究分科会報告 (9. 衝撃ひずみの測定)。
機誌, 68-554 (昭40-3), 404

動的光弾性実験

- (55) M.M. Frocht ; Kinematography in photoelasticity. Trans. ASME, 54 (1932), 83-90
- (56) Z. Tuzi & M. Nishida ; Photoelastic study of stresses due to impact. Phil. Mag., 21-7 (1936), 448-473
- (57) D.A. Senior & A.A. Wells ; A photoelastic study of stress waves. Phil. Mag., 37-7 (1946), 463-469
- (58) H. Schwieger u. H. Dietz ; Polarisationsoptische Versuche zur elastischen Stosstheorie. Ann. der Phys., 16-6 (1955), 306-321
- (59) H. Schwieger ; Spannungsoptische Stossuntersuchung an dünn Glasstäben. Ann. der Phys., 16-6 (1955), 119-133
- (60) J.C. Feder, R.A. Gibbons, J.T. Gilbert & E.L. Offenbacher ; The study of the propagation of stress waves by photoelasticity. Proc. SESA, 14-1 (1956), 109-122
- (61) M.M. Frocht & P.D. Flynn ; Studies in dynamic photoelasticity. J. Appl. Mech., 23-1 (1956), 116-122
- (62) A.B. J. Clark ; Static and dynamic calibration of a photoelastic model materials. Proc. SESA, 14-1 (1956), 195-204
- (63) M.M. Frocht, P.D. Flynn & D. Laugsberg ; Dynamic photoelasticity by means of streak photography. Proc. SESA, 14-2 (1956), 81-90
- (64) A. J. Durelli & W.F. Riley ; Developments in the grid method of experimental stress analysis. Proc. SESA, 14-2 (1956), 91-100

- (65) A.J. Durelli & W.F. Riley ; Experiments for the determination of transient stress and strain distributions in two-dimensional problems. J. Appl. Mech., 24 (1957), 69-76
- (66) J.W. Dally, W.F. Riley & A.J. Durelli ; A photoelastic approach to transient stress problems employing low-modulus materials. Trans. ASME, Ser. E, 26-4 (1959), 613-620
- (67) A.J. Durelli, J.W. Dally & W.F. Riley ; Developments in the application of the grid method to dynamic problems. Trans. ASME, Ser. E, 26-4 (1959), 629-634
- (68) A.J. Durelli, J.W. Dally & W.F. Riley ; Photoelastic study of stress wave propagation in large plate. Proc. SESA, 17-2 (1959), 33-50
- (69) A.J. Durelli & W.F. Riley ; Application of Moire methods to the determination of transient stress and strain distribution. Trans. ASME, Ser. E, 29-1 (1962), 23-29

專門書

- (70) S. Timoshenko & T.N. Goodier ; Theory of elasticity. McGraw-Hill, (1951), 438.
- (71) H. Kolsky ; Stress waves in solids. Clarendon Press, Oxford, (1953), Dover Pub., (1963)
- (72) W.M. Ewing, W.S. Jardetzky & F. Press ; Elastic waves in layered media. McGraw-Hill, (1957)
- (73) M.R. Redwood ; Mechanical wave guides. Pergamon Press, (1960)
- (74) W. Goldsmith ; Impact. Edward Arnold Pub., (1960)
- (75) Edited by N. Davids ; Stress wave propagation in materials. Interscience Pub., New York, (1960)

応力関数

- (76) R.E.D. Bishop ; On dynamical problems of plane stress and plane strain. Quart. Mech. Appl. Math., 6 (1953), 250-254

前出 (71), P. 16

前出 (72), P. 8

前出 (73), P. 269

前出 (74), P. 78

動弾性基礎方程式の解の唯一性

- (77) A.E.H. Love ; A treatise on the mathematical theory of elasticity. Camb. Univ. Press., 4th ed. (1957), 176

- (78) スミルノフ 高等数学教程 (4), 共立出版 (昭37), 523

ラプラス変換および複素変数関数論

- (79) I.N. Sneddon ; Fourier Transforms. McGraw-Hill, (1951)

- (80) H.S. Carslaw & J.C. Jaeger ; Operational methods in applied mathematics. Oxford Univ. Press, (1953)

- (81) N.W. McLachlan ; Complex variable theory and transform calculus. Camb. Univ. Press, 2nd ed. (1955)

- (82) 武田 訳 ; G. ゴッテ 実用ラプラス変換, 森北出版, (昭34)

- (83) W.T. Thomson ; Laplace transformation. Maruzen Asian ed. Maruzen Co. LTD (1960)

- (84) 洪訳 ; R.V. チャーチル 応用ラプラス変換. 彰国社, (昭35)
- (85) 近藤 ; 演算子法. 培風館, (昭36)
- (86) 武田 ; 演算子法演習. 培風館, (昭36)

円孔面あるいは球孔面に等分布衝撃圧力をうける無限体。

- (87) A. Kromm ; Zur Ausbreitung von Stosswellen in Kreislochscheiben. Z. Angew. Math. und Mech., 28(1948), 104, 297
- (88) F. G. Blake ; Spherical wave propagation in solid media. J. Acoust. Soc. Amer., 24-2 (1952), 211-215
- (89) H. L. Selberg ; Transient compression waves from spherical and cylindrical cavities. Arkiv För Fysik, 5-7 (1953), 97
- (90) J. Miklowitz ; Plane-stress unloading waves emanating from a suddenly punched hole in a stretched elastic plate. Trans. ASME, Ser. E, 27-1 (1960), 165
- (91) Y. L. Luke ; On the approximate inversion of some Laplace transforms. Proc. 4th U.S. Natl. Cong. of Appl. Mech., ASME, New York, N.Y., (1962), 269-276
- (92) G. Eason ; Propagation of waves from spherical and cylindrical cavities. ZAMP, 14(1963), 12
- (93) H. L. Selberg ; Shock waves from spherical cavities in elastic materials of limited strength. Arkiv För Fysik, 22-40 (1963), 559-563
- (94) R. A. Scott & J. Miklowitz ; Transient compressional waves in an infinite elastic plate with a circular cylindrical cavity. Trans. ASME, Ser. E, 31-4 (1964), 627-634

円孔面あるいは球孔面に分布衝撃圧力をうける無限体。

- (95) K. Sezawa & K. Kanai ; Resonance phenomena and dissipation waves in the stationary vibration of the surface of a spherical cavity. Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo Univ., 15-1 (1937), 13-20
- (96) G. Nishimura ; On the elastic waves due to pressure variation on the inner surface of a spherical cavity in an elastic solid. Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo Univ., 15-3 (1937), 614-635
- (97) K. Sezawa & K. Kanai ; Transmission of arbitrary elastic waves from a spherical source solved with operational calculus. Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo Univ., 19-2 (1941), 151-161 ; 19-3 (1941), 417-442
- (98) A.C. Eringen ; Elasto-dynamic problem concerning the spherical cavity. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 10 (1957), 257-270
- (99) A.C. Eringen ; Propagation of elastic waves generated by dynamical loads on a circular cavity. Trans. ASME, Ser. E, 28-2 (1961), 218-222
- (100) H. Schwieger & J. Träger ; Polarisationsoptische Studie über den Randstoss auf eine Kreisscheibe. Z. angew. Phys., 14-6 (1962), 375-381

等分布衝撃圧力をうける円筒

- (101) 西村 ; 衝撃圧をうける中空円柱体の釣合。 火兵学会誌, 27-5 (昭9-1), 296
- (102) C.J. Tranter ; The application of the Laplace transformation to a problem on elastic vibrations. Phil. Mag., 33 (1942), 614
- (103) D.C. Gazis ; Exact analysis of the plane-strain vibrations of thick-walled hollow cylinders. J. Acoust. Soc. Amer., 30-8 (1958), 786-794

- (104) 井上・葉山・箕作・中井； 衝撃的水圧をうける円筒かくおよび層成円筒の強さについて。 機誌, 67-543 (昭39-4), 542-547
- (105) 鈴木； 内外縁に分布衝撃荷重をうける円環の応力集中について。 才14回 応力連合講演会論文抄録集才I部 (昭39-9), 9
- (106) C. J. Constantino ; The strength of thin-walled cylinders subjected to dynamic internal pressures. Trans. ASME, Ser. E, 32-1 (1965), 104-108
- (107) 鈴木； 内外縁にそって分布衝撃荷重をうける円環の応力集中について。 機論, 31-231 (昭40-11), 1571-1581

等分布衝撃圧力をうける中空球

前出 (102)

- (108) W. E. Baker ; The elastic-plastic response of thin spherical shells to internal blast loading. Trans. ASME, Ser. E, 27-1 (1960), 139-144
- (109) 鈴木； 内外面にそって等分布衝撃荷重をうける中空球の応力解析。 才15回 応力連合講演会論文抄録集才I部, (昭40-9), 9

Reversion Method による超越方程式の根の漸近近似式の求め方

- (110) J. McMahon ; On the roots of the Bessel and certain related functions. Annals of Mathematics, 9 (1895), 23
- (111) C. E. Van Orstrand ; Reversion of power series. Phil. Mag., 19-6 (1910), 366
- (112) W. G. Bickley & J. C. P. Miller ; Notes on the reversion of a series. Phil. Mag., 34-7 (1943), 35-36
- (113) A. C. Sim ; A generalization of reversion formulae with their application to non-linear differential equations. Phil. Mag., 42-7 (1951), 228-238

- (114) A. Gray & T.M. MacRobert ; A treatise on Bessel functions and their applications to physics. MacMillan and Co, Limited., 2nd ed., (1922), 86
- (115) P.M. Morse & H. Feshbach ; Methods of theoretical physics. Internatl. student ed., Kōgakusha CO., LTD., Part I, (1953), 411
- (116) N.G. de Bruijn ; Asymptotic methods in analysis. North-Holland Pub. Co., 2nd ed., (1961), 22
- (117) G.N. Watson ; A treatise on the theory of Bessel functions. Camb. Univ. Press, 2nd ed., (1962), 503
- (118) スミルノフ 高等数学教程 (6) , 共立出版, (昭37), 77
- (119) E.T. Whittaker & G.N. Watson ; Modern Analysis. Camb., 4th ed., (1963), 132

超越方程式の複素根について

- (120) E.C. Titchmarsh ; The theory of functions. Oxford Univ. Press, 2nd ed., (1939), 115, 117
- (121) A. Erdélyi & W.O. Kermack ; Note on the equation $f(z)K'_n(z) - g(z)K_n(z) = 0$. Proc. Camb. Phil. Soc., 41 (1945), 74
- 前出 (89) [Appendix の結果に疑問がある。]
- (122) R. Skalak & M.B. Friedman ; Reflection of an acoustic step wave from an elastic cylinder. J. Appl. Mech., 25-1 (1958), 103
- (123) G.N. Watson ; A treatise on the theory of Bessel functions. Camb. Univ. Press, 2nd ed., (1962), 511

[付 録 A]

a. 三次元動弾性基礎方程式

(I) 直角座標 (x, y, z) による表示

(1) 応力の釣合式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

(2) 変位の方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u_x + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \nabla^2 u_y + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

$$\text{ここで} \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

(3) 体積変化と回転成分の釣合式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} - 2 \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + 2 \frac{\partial \omega_y}{\partial z} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} - 2 \frac{\partial \omega_x}{\partial z} + 2 \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - 2 \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

あるいは

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \omega_x = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 e = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \omega_y = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \omega_z = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

(II) 円柱座標 (r, θ, z) による表示

(1) 応力の釣合式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = \frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

(2) 変位の方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \nabla^2 u_\theta + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \nabla^2 w_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

(3) 体積変化と回転成分の釣合式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial \omega_r}{\partial z} + 2 \frac{\partial w_z}{\partial r} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial (r\omega_\theta)}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

あるいは

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \omega_r - \frac{\omega_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \omega_z = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} \\ \nabla^2 e = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

(Ⅲ) 球座標 (R, θ, φ) による表示

(1) 応力の釣合式

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_R - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{R\varphi} \cot \varphi}{R} = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\tau_{R\theta} + 2\tau_{\theta\varphi} \cot \varphi}{R} = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{(\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \cot \varphi + 3\tau_{R\varphi}}{R} = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

(2) 変位の方程式

$$\left[\begin{array}{l} \nabla^2 u_R + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial R} - \frac{2}{R^2} (u_R + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + w_\varphi \cot \varphi) = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2} \\ \nabla^2 v_\theta + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \frac{2}{R^2} (\cot \varphi \frac{\partial w_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{v_\theta}{\sin^2 \varphi}) = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial t^2} \\ \nabla^2 w_\varphi + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{R} \frac{\partial e}{\partial \varphi} + \frac{2}{R^2} (\frac{\partial u_R}{\partial \varphi} - \frac{\cot \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{w_\varphi}{\sin^2 \varphi}) = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial}{\partial R}) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi})$$

$$e = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 u_R) + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (w_\varphi \sin \varphi)$$

(3) 体積変化と回転成分の釣合式

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial R} - \frac{2}{R \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (w_\theta \sin \varphi) + \frac{2}{R \sin \varphi} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2} \\ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial e}{\partial \theta} - \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R w_\varphi) + \frac{2}{R} \frac{\partial w_R}{\partial \varphi} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{1}{R} \frac{\partial e}{\partial \varphi} - \frac{2}{R} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial w_R}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R w_\theta) = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

あるいは

$$\left[\begin{array}{l} \nabla^2 w_R - \frac{2}{R^2} w_R - \frac{2}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2 \cot \varphi}{R^2} w_\varphi = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 w_R}{\partial t^2} \\ \nabla^2 w_\theta - \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} w_\theta + \frac{2}{R^2 \sin \varphi} \frac{\partial w_R}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \varphi}{R^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2} \\ \nabla^2 w_\varphi - \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} w_\varphi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial w_R}{\partial \varphi} - \frac{2 \cos \varphi}{R^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial w_\theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 e = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

(IV) 特殊な応力状態における変位の方程式

(1) ねじりなしの軸対称応力状態

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \nabla^2 w_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

(2) 軸対称ねじり応力状態

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

(3) 非軸対称平面問題

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u_r + \frac{2-\kappa}{\kappa} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \nabla^2 u_\theta + \frac{2-\kappa}{\kappa} \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\kappa = 1-\nu \text{ (平面応力状態)}, \quad (1-2\nu)/(1-\nu) \text{ (平面ひずみ状態)}$$

(4) ねじりなしの軸対称平面問題

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$C^2 = \frac{2}{\kappa} C_2^2, \quad \text{平面応力状態 } \kappa = 1-\nu, \quad C = C_3$$

$$\text{平面ひずみ状態 } \kappa = \frac{1-2\nu}{1-\nu}, \quad C = C_1$$

(5) 軸対称ねじりの平面問題

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

(6) 点対称な応力状態

$$\frac{\partial^2 u_R}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial u_R}{\partial R} - \frac{2}{R^2} u_R = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2}$$

b. ラプラス変換による波動方程式の変数分離解 ($\nabla^2 \bar{\phi} = \alpha^2 \bar{\phi}$)

(I) 直角座標(x, y, z)による表示 $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = \alpha^2 \bar{\phi}$

$$\bar{\phi} = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \text{ ならば } \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \alpha^2$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \alpha z}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos my \\ \sin my \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + m^2} z}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \cdot e^{\pm my} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - m^2} z}, \\ &= \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + n^2} z}, \quad e^{\pm nx} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - n^2} z}, \quad \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos my \\ \sin my \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + n^2 + m^2} z}, \\ &= \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix} \cdot e^{\pm my} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + n^2 - m^2} z}, \quad e^{\pm nx} \cdot \begin{pmatrix} \cos my \\ \sin my \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - n^2 + m^2} z} \\ &= e^{\pm nx} \cdot e^{\pm my} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - n^2 - m^2} z} \end{aligned}$$

(II) 円柱座標(r, θ, z)による表示 $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = \alpha^2 \bar{\phi}$

$$\bar{\phi} = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \text{ ならば } \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \alpha^2$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \log r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \alpha z}, \quad r^{\pm n} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \alpha z}, \quad \begin{pmatrix} J_0(mr) \\ Y_0(mr) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + m^2} z}, \\ &= \begin{pmatrix} I_0(\alpha r) \\ K_0(\alpha r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_0(mr) \\ K_0(mr) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - m^2} z}, \quad \begin{pmatrix} J_n(mr) \\ Y_n(mr) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + m^2} z}, \\ &= \begin{pmatrix} I_n(\alpha r) \\ K_n(\alpha r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_n(mr) \\ K_n(mr) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - m^2} z} \end{aligned}$$

(III) 球座標(R, θ, φ)による表示 $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \theta^2} = \alpha^2 \bar{\phi}$

$$\bar{\phi} = S(R) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi) \text{ ならば } \frac{1}{S} \frac{\partial^2 S}{\partial R^2} + \frac{2}{S} \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial R} + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = \alpha^2$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \left(\frac{e^{\pm \alpha R}}{R} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \log \tan \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\cosh \alpha R}{R} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \log \tan \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \left(R^{-\frac{1}{2}} I_0(\alpha R) \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{\frac{1}{2}}^n(\mu) \\ Q_{\frac{1}{2}}^n(\mu) \end{pmatrix}, \quad \left(R^{-\frac{1}{2}} I_{m+\frac{1}{2}}(\alpha R) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_m(\mu) \\ Q_m(\mu) \end{pmatrix} \\ &= \left(R^{-\frac{1}{2}} I_{m+\frac{1}{2}}(\alpha R) \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_m^n(\mu) \\ Q_m^n(\mu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで $P_m(\mu), Q_m(\mu)$ はルジャンドル関数
 $P_m^n(\mu), Q_m^n(\mu)$ はルジャンドル陪関数

(IV) 特殊な応力状態

(1) 軸対称応力状態 $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = \alpha^2 \bar{\phi}$

$\bar{\phi} = R(r) \cdot Z(z)$ ならば $\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \alpha^2$

$\bar{\phi} = \left(\frac{1}{\log r} \right) \cdot e^{\pm \alpha z}, \left(\frac{I_0(\alpha r)}{K_0(\alpha r)} \right) \cdot \left(\frac{1}{z} \right), \left(\frac{I_0(mr)}{K_0(mr)} \right) \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - m^2} z}$
 $= \left(\frac{J_0(mr)}{Y_0(mr)} \right) \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + m^2} z}$

(2) 軸対称応力状態 $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \varphi} = \alpha^2 \bar{\phi}$

$\bar{\phi} = S(R) \cdot \Phi(\varphi)$ ならば $\frac{1}{S} \frac{\partial^2 S}{\partial R^2} + \frac{1}{S} \frac{2}{R} \frac{\partial S}{\partial R} + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{\cot \varphi}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \alpha^2$

$\bar{\phi} = \left(\frac{e^{\pm \alpha R}}{R} \right) \cdot \left(\log \tan \frac{\varphi}{2} \right), \left(\frac{j_n(i\alpha R)}{n_n(i\alpha R)} \right) \cdot \left(\frac{P_m(\mu)}{Q_m(\mu)} \right)$

ここで $j_n(x), n_n(x)$ は球ベッセル関数である。

(3) 軸対称平面状態 $\frac{d^2 \bar{\phi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = \alpha^2 \bar{\phi}$

$\bar{\phi} = \left(\frac{I_0(\alpha r)}{K_0(\alpha r)} \right)$

(4) 点対称応力状態 $\frac{d^2 \bar{\phi}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\bar{\phi}}{dR} = \alpha^2 \bar{\phi}$

$\bar{\phi} = \left(\frac{e^{\pm \alpha R}}{R} \right), \left(\frac{\cosh \alpha R}{\sinh \alpha R} \right)$

$= \left(\frac{j_0(i\alpha R)}{n_0(i\alpha R)} \right), \left(\frac{h_0^{(1)}(i\alpha R)}{h_0^{(2)}(i\alpha R)} \right)$

ここで $h_s^{(1)}(x), h_s^{(2)}(x)$ は球ハンケル関数である。

C. 変位および応力のラプラス変換

(1) 軸対称応力状態

$$\bar{\phi} = e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\bar{\phi}_0 = e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\bar{u} = 0, \bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = \pm \alpha_1 e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_r}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_z}{2G} = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\chi} = e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{u} = 0, \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = \mp \alpha_2 r e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = -\frac{1}{2} \alpha_2^2 r e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z = 0$$

$$\bar{\psi}_3 = e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$$

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z = 0$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = \bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{\lambda}_3 = e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$$

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z = 0$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = \bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{\phi} = \log r e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\bar{\phi}_0 = \log r e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\bar{u} = \frac{e^{\pm \alpha_1 z}}{r}, \bar{w} = \pm \alpha_1 \log r e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_r}{2G} = -\frac{e^{\pm \alpha_1 z}}{r^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 \log r e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \frac{e^{\pm \alpha_1 z}}{r^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 \log r e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_z}{2G} = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 \log r e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = \pm \frac{\alpha_1}{r} e^{\pm \alpha_1 z}$$

$$\bar{\lambda}_3 = \log r e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{u} = 0, \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{r} e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = \mp \frac{1}{2} \frac{\alpha_2}{r} e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = \frac{1}{r^2} e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z = 0$$

$$\bar{\Psi}_3 = \log r e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{u} = \pm \frac{\alpha_2}{r} e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{v} = \bar{w} = 0$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \mp \frac{\alpha_2}{r^2} e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \pm \frac{\alpha_2}{r^2} e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = \frac{\alpha_2^2}{2r} e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{O}_z = \bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\chi} = \log r e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{u} = \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = \left(\mp \alpha_2 \frac{r}{\log r} + \frac{z}{r} \right) e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = \left(\frac{1}{r} \pm \frac{\alpha_2 z}{r} \right) e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = - \left(\frac{2z}{r^2} \pm \alpha_2 \right) e^{\pm \alpha_2 z}$$

$$\bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{\Phi} = I_0(\alpha r)$$

$$\bar{\varphi}_0 = I_0(\alpha_1 r)$$

$$\bar{u} = \alpha_1 I_1(\alpha_1 r)$$

$$\bar{v} = \bar{w} = 0$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = -\alpha_1^2 \frac{I_1(\alpha_1 r)}{\alpha_1 r} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 I_0(\alpha_1 r)$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \alpha_1^2 \frac{I_1(\alpha_1 r)}{\alpha_1 r} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 I_0(\alpha_1 r)$$

$$\frac{\bar{O}_z}{2G} = -\frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 I_0(\alpha_1 r)$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\chi}_3 = I_0(\alpha_2 r)$$

$$\bar{u} = \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = -\alpha_2 I_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = \alpha_2^2 \left(\frac{I_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} - \frac{1}{2} I_0(\alpha_2 r) \right)$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\bar{\Psi}_3 = I_0(\alpha_2 r)$$

$$\bar{u} = \bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = -\alpha_2^2 I_0(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = -\frac{1}{2} \alpha_2^3 I_1(\alpha_2 r)$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\bar{\chi} = I_0(\alpha_2 r)$$

$$\bar{u} = \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = \alpha_2 z I_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = \frac{1}{2} \alpha_2 I_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = z \alpha_2^2 \left\{ -\frac{I_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} + \frac{1}{2} I_0(\alpha_2 r) \right\}$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = \bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{\Phi} = K_0(\alpha_1 r)$$

$$\bar{\Phi}_0 = K_0(\alpha_1 r)$$

$$\bar{U} = -\alpha_1 K_1(\alpha_1 r)$$

$$\bar{V} = \bar{W} = 0$$

$$\frac{\bar{Q}_r}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{K_1(\alpha_1 r)}{\alpha_1 r} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} K_0(\alpha_1 r) \right\}$$

$$\frac{\bar{Q}_\theta}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ -\frac{K_1(\alpha_1 r)}{\alpha_1 r} + \frac{\nu}{1-2\nu} K_0(\alpha_1 r) \right\}$$

$$\frac{\bar{Q}_z}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 K_0(\alpha_1 r)$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = \bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{\chi}_3 = K_0(\alpha_2 r)$$

$$\bar{U} = 0, \quad \bar{W} = 0$$

$$\bar{V} = \alpha_2 K_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \frac{K_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} + \frac{1}{2} K_0(\alpha_2 r) \right\}$$

$$\bar{Q}_r = \bar{Q}_\theta = \bar{Q}_z = 0$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\Psi}_3 = K_0(\alpha_2 r)$$

$$\bar{U} = 0, \quad \bar{V} = 0$$

$$\bar{W} = -\alpha_2^2 K_0(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = \frac{1}{2} \alpha_2^3 K_1(\alpha_2 r)$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{Q}_r = \bar{Q}_\theta = \bar{Q}_z = 0$$

$$\bar{\chi} = K_0(\alpha_2 r)$$

$$\bar{U} = 0, \quad \bar{W} = 0$$

$$\bar{V} = -\alpha_2 z K_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = -\frac{1}{2} \alpha_2 K_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = z \alpha_2^2 \left\{ \frac{K_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} + \frac{K_0(\alpha_2 r)}{2} \right\}$$

$$\bar{Q}_r = \bar{Q}_\theta = \bar{Q}_z = \bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{\Phi} = z I_0(\alpha_1 r)$$

$$\bar{\Phi}_0 = z I_0(\alpha_1 r)$$

$$\bar{U} = \alpha_1 I_1(\alpha_1 r) z$$

$$\bar{W} = I_0(\alpha_1 r), \quad \bar{V} = 0$$

$$\frac{\bar{Q}_r}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ -\frac{I_1(\alpha_1 r)}{\alpha_1 r} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} I_0(\alpha_1 r) \right\} z$$

$$\frac{\bar{Q}_\theta}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{I_1(\alpha_1 r)}{\alpha_1 r} + \frac{\nu}{1-2\nu} I_0(\alpha_1 r) \right\} z$$

$$\frac{\bar{Q}_z}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 I_0(\alpha_1 r) z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = \alpha_1 I_1(\alpha_1 r)$$

$$\bar{\chi}_3 = z I_0(\alpha_2 r)$$

$$\bar{U} = 0, \quad \bar{W} = 0$$

$$\bar{V} = -\alpha_2 I_1(\alpha_2 r) z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = -\frac{1}{2} \alpha_2 I_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = \alpha_2^2 \left\{ \frac{I_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} - \frac{I_0(\alpha_2 r)}{2} \right\} z$$

$$\bar{Q}_r = \bar{Q}_\theta = \bar{Q}_z = \bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{\Psi}_3 = I_0(\alpha_2 r) z$$

$$\bar{u} = \alpha_2 I_1(\alpha_2 r) \quad , \quad \bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = -\alpha_2^2 I_0(\alpha_2 r) z$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha_2^2 \left\{ -\frac{I_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} + I_0(\alpha_2 r) \right\}$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \alpha_2^2 \frac{I_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r}$$

$$\frac{\bar{O}_z}{2G} = -\alpha_2^2 I_0(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = -\frac{1}{2} \alpha_2^3 I_1(\alpha_2 r) z$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\chi} = I_0(\alpha_2 r) z$$

$$\bar{u} = 0 \quad , \quad \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = -r I_0(\alpha_2 r) + \alpha_2 z^2 I_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = \frac{1}{2} \alpha_2^2 z^2 I_0(\alpha_2 r) - \left(\frac{\alpha_2^2 z^2}{\alpha_2 r} + \frac{1}{2} \alpha_2 r \right) I_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = \alpha_2 z I_1(\alpha_2 r)$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\bar{\Phi} = K_0(\alpha_1 r) \cdot z$$

$$\bar{\Phi}_0 = K_0(\alpha_1 r) z$$

$$\bar{u} = -\alpha_1 K_1(\alpha_1 r) z \quad , \quad \bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = K_0(\alpha_1 r)$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{K_1(\alpha_1 r)}{\alpha_1 r} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} K_0(\alpha_1 r) \right\} z$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ -\frac{K_1(\alpha_1 r)}{\alpha_1 r} + \frac{\nu}{1-2\nu} K_0(\alpha_1 r) \right\} z$$

$$\frac{\bar{O}_z}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 K_0(\alpha_1 r) z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = -\alpha_1 K_1(\alpha_1 r)$$

$$\bar{\chi}_3 = K_0(\alpha_2 r) z$$

$$\bar{v} = \alpha_2 K_1(\alpha_2 r) z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = \frac{1}{2} \alpha_2 K_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \frac{K_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} + \frac{1}{2} K_0(\alpha_2 r) \right\} z$$

$$\bar{u} = \bar{w} = 0$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\bar{\Psi}_3 = K_0(\alpha_2 r) z$$

$$\bar{u} = -\alpha_2 K_1(\alpha_2 r) \quad , \quad \bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = -\alpha_2^2 K_0(\alpha_2 r) z$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha_2^2 \left\{ \frac{K_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} + K_0(\alpha_2 r) \right\}$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = -\alpha_2^2 \frac{K_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} \quad , \quad \frac{\bar{O}_z}{2G} = -\alpha_2^2 K_0(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = \frac{1}{2} \alpha_2^3 K_1(\alpha_2 r) z$$

$$\bar{\chi} = K_0(\alpha_2 r) z$$

$$\bar{u} = 0 \quad , \quad \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = -r K_0(\alpha_2 r) - \alpha_2 z^2 I_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = -\alpha_2 z K_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = \left(\frac{\alpha_2^2 z^2}{\alpha_2 r} + \frac{\alpha_2 r}{2} \right) K_1(\alpha_2 r) + \alpha_2^2 z^2 K_0(\alpha_2 r)$$

$$\bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\bar{\Phi} = I_0(\lambda_1 r) \cos \beta z \quad (\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2)$$

$$\bar{\Phi}_0 = I_0(\lambda_1 r) \cos \beta z \quad (\lambda_1^2 = \alpha_1^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = \lambda_1 I_1(\lambda_1 r) \cos \beta z, \quad \bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = -\beta I_0(\lambda_1 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\sigma}_r}{2G} = \left\{ (\lambda_1^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2) I_0(\lambda_1 r) - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 r} I_1(\lambda_1 r) \right\} \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 I_0(\lambda_1 r) + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 r} I_1(\lambda_1 r) \right\} \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\sigma}_z}{2G} = \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 - \beta^2 \right) I_0(\lambda_1 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = -\lambda_1 \beta I_1(\lambda_1 r) \sin \beta z$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\lambda}_3 = I_0(\lambda_2 r) \cos \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = -\lambda_2 I_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = \frac{1}{2} \beta \lambda_2 I_1(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = \lambda_2^2 \left\{ \frac{I_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} - \frac{1}{2} I_0(\lambda_2 r) \right\} \cos \beta z$$

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z = 0$$

$$\bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{\Psi}_3 = I_0(\lambda_2 r) \cos \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = -\lambda_2 \beta I_1(\lambda_2 r) \sin \beta z, \quad \bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = -\lambda_2^2 I_0(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\sigma}_r}{2G} = -\lambda_2^2 \beta \left\{ -\frac{I_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} + I_0(\lambda_2 r) \right\} \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = -\beta \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 r} I_1(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\sigma}_z}{2G} = \beta \lambda_2^2 I_0(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = -\lambda_2 \left(\frac{\alpha_2^2}{2} + \beta^2 \right) I_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\chi} = I_0(\lambda_2 r) \cos \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = \beta r I_0(\lambda_2 r) \sin \beta z + \lambda_2 z I_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = \frac{1}{2} \left\{ \lambda_2 I_1(\lambda_2 r) \cos \beta z - \beta z \lambda_2 I_1(\lambda_2 r) \sin \beta z \right\}$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = \frac{1}{2} \left[\lambda_2^2 z \cos \beta z I_0(\lambda_2 r) + \left\{ \lambda_2 \beta r \sin \beta z - 2 \frac{\lambda_2 z}{r} \cos \beta z \right\} I_1(\lambda_2 r) \right]$$

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z = 0$$

$$\bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{\Phi} = I_0(\lambda_1 r) \sin \beta z \quad (\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2)$$

$$\bar{\Phi}_0 = I_0(\lambda_1 r) \sin \beta z \quad (\lambda_1^2 = \alpha_1^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = \lambda_1 I_1(\lambda_1 r) \sin \beta z, \quad \bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = \beta I_0(\lambda_1 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \left\{ -\lambda_1^2 \frac{I_1(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} + \left(\lambda_1^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 \right) I_0(\lambda_1 r) \right\} \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \left\{ \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 r} I_1(\lambda_1 r) + \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 I_0(\lambda_1 r) \right\} \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_z}{2G} = \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 - \beta^2 \right) I_0(\lambda_1 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = \beta \lambda_1 I_1(\lambda_1 r) \cos \beta z$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\lambda}_3 = I_0(\lambda_2 r) \sin \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = -\lambda_2 I_1(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = -\frac{1}{2} \beta \lambda_2 I_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = \lambda_2^2 \left\{ \frac{I_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} - \frac{1}{2} I_0(\lambda_2 r) \right\} \sin \beta z$$

$$\bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\bar{\Psi}_3 = I_0(\lambda_2 r) \sin \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = \lambda_2 \beta I_1(\lambda_2 r) \cos \beta z, \quad \bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = -\lambda_2^2 I_0(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \beta \lambda_2^2 \left\{ I_0(\lambda_2 r) - \frac{I_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} \right\} \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \beta \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 r} I_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_z}{2G} = -\beta \lambda_2^2 I_0(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = -\lambda_2 \left(\frac{\alpha_2^2}{2} + \beta^2 \right) I_1(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\chi} = I_0(\lambda_2 r) \sin \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = -r \beta I_0(\lambda_2 r) \cos \beta z + \lambda_2 z I_1(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = \frac{1}{2} \lambda_2 I_1(\lambda_2 r) \sin \beta z + \frac{1}{2} \lambda_2 \beta z I_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = \frac{1}{2} \lambda_2^2 z \sin \beta z I_0(\lambda_2 r) - \left[\frac{\lambda_2 z}{r} \sin \beta z + \frac{1}{2} r \lambda_2 \beta \cos \beta z \right] I_1(\lambda_2 r)$$

$$\bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\bar{\Phi} = K_0(\lambda_1 r) \cos \beta z \quad (\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2)$$

$$\bar{\Phi}_0 = K_0(\lambda_1 r) \cos \beta z \quad (\lambda_1^2 = \alpha_1^2 + \beta^2)$$

$$\bar{U} = -\lambda_1 K_1(\lambda_1 r) \cos \beta z, \quad \bar{V} = 0$$

$$\bar{W} = -\beta K_0(\lambda_1 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \left\{ (\lambda_1^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}) \alpha_1^2 K_0(\lambda_1 r) + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 r} K_1(\lambda_1 r) \right\} \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 r} K_1(\lambda_1 r) \right\} \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_z}{2G} = \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 K_0(\lambda_1 r) - \beta^2 K_0(\lambda_1 r) \right\} \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{T}_{rz}}{2G} = \lambda_1 \beta K_1(\lambda_1 r) \sin \beta z$$

$$\bar{T}_{r\theta} = \bar{T}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\lambda}_3 = K_0(\lambda_2 r) \cos \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{U} = 0, \quad \bar{W} = 0$$

$$\bar{V} = \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{T}_{\theta z}}{2G} = -\frac{1}{2} \beta \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = -\lambda_2^2 \left\{ \frac{K_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} + \frac{1}{2} K_0(\lambda_2 r) \right\} \cos \beta z$$

$$\bar{T}_{rz} = 0$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\bar{\Psi}_3 = K_0(\lambda_2 r) \cos \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{U} = \lambda_2 \beta K_1(\lambda_2 r) \sin \beta z, \quad \bar{V} = 0$$

$$\bar{W} = -\lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = -\lambda_2^2 \beta \left\{ \frac{K_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} + K_0(\lambda_2 r) \right\} \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \lambda_2^2 \beta \frac{K_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_z}{2G} = \lambda_2^2 \beta K_0(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{T}_{rz}}{2G} = \left(\frac{\alpha_2^2}{2} + \beta^2 \right) \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\bar{T}_{r\theta} = \bar{T}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\chi} = K_0(\lambda_2 r) \cos \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{U} = 0, \quad \bar{W} = 0$$

$$\bar{V} = \beta r K_0(\lambda_2 r) \sin \beta z - \lambda_2 z K_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{T}_{\theta z}}{2G} = -\frac{1}{2} \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$+ \frac{1}{2} \lambda_2 \beta z K_1(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = \frac{1}{2} \lambda_2^2 z \cos \beta z K_0(\lambda_2 r)$$

$$- \frac{1}{2} [\lambda_2 r \beta \sin \beta z - 2 \frac{\lambda_2^2 z}{\lambda_2 r} \cos \beta z] K_1(\lambda_2 r)$$

$$\bar{T}_{rz} = 0$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\bar{\Phi} = K_0(\lambda_1 r) \sin \beta z \quad (\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2)$$

$$\bar{\varphi}_0 = K_0(\lambda_1 r) \sin \beta z \quad (\lambda_1^2 = \alpha_1^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = -\lambda_1 K_1(\lambda_1 r) \sin \beta z, \quad \bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = \beta K_0(\lambda_1 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \left\{ \lambda_1^2 \frac{K_1(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} + \left(\lambda_1^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 \right) K_0(\lambda_1 r) \right\} \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \left\{ -\lambda_1^2 \frac{K_1(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 K_0(\lambda_1 r) \right\} \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_z}{2G} = \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_1^2 - \beta^2 \right) K_0(\lambda_1 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = -\lambda_1 \beta K_1(\lambda_1 r) \cos \beta z$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\lambda}_3 = K_0(\lambda_2 r) \sin \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = \frac{1}{2} \beta \lambda_2 K_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = -\lambda_2^2 \left\{ \frac{K_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} + \frac{1}{2} K_0(\lambda_2 r) \right\} \sin \beta z$$

$$\bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

$$\bar{\Psi}_3 = K_0(\lambda_2 r) \sin \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = -\lambda_2 \beta K_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\bar{v} = 0$$

$$\bar{w} = -\lambda_2^2 K_0(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \lambda_2^2 \beta \left\{ \frac{K_1(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} + K_0(\lambda_2 r) \right\} \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = -\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 r} \beta K_1(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{O}_z}{2G} = -\lambda_2^2 \beta K_0(\lambda_2 r) \cos \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{2G} = \lambda_2 \left(\frac{\alpha_2^2}{2} + \beta^2 \right) K_1(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \bar{\tau}_{\theta z} = 0$$

$$\bar{X} = K_0(\lambda_2 r) \sin \beta z \quad (\lambda_2^2 = \alpha_2^2 + \beta^2)$$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0$$

$$\bar{v} = -\beta r K_0(\lambda_2 r) \cos \beta z - \lambda_2 z K_1(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{2G} = -\frac{1}{2} [\lambda_2 \sin \beta z + \lambda_2 \beta z \cos \beta z] K_1(\lambda_2 r)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{2G} = \frac{1}{2} \lambda_2^2 z K_0(\lambda_2 r) \sin \beta z$$

$$+ \frac{1}{2} \left[2 \frac{\lambda_2 z}{r} \sin \beta z + \lambda_2 \beta r \cos \beta z \right] K_1(\lambda_2 r)$$

$$\bar{\tau}_{rz} = 0$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = \bar{O}_z = 0$$

(2) 非軸対称平面状態

平面応力状態ならば $\kappa = 1 - \nu$, $C_3^2 = \frac{2}{1-\nu} \frac{gG}{r}$, $\alpha = \alpha_3 = \frac{p}{C_3}$

平面ひずみ状態ならば $\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{1-2\nu}{1-\nu}, \quad C_1^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{gG}{r}, \quad \alpha = \alpha_1 = \frac{p}{C_1}, \\ O_z = \nu(O_r + O_\theta) \end{array} \right.$

$$\bar{\Phi} = I_0(\alpha r) \cdot \theta$$

$$\bar{\varphi}_0 = I_0(\alpha r) \cdot \theta$$

$$\bar{u} = \alpha I_1(\alpha r) \theta, \quad \bar{v} = \frac{1}{r} I_0(\alpha r)$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} I_0(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} I_1(\alpha r) \right\} \theta$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \alpha^2 \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} I_0(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} I_1(\alpha r) \right\} \theta$$

$$\frac{\bar{r}_{\theta}}{2G} = \frac{\alpha}{r} I_1(\alpha r) - \frac{1}{r^2} I_0(\alpha r)$$

$$\bar{\chi}_3 = I_0(\alpha_2 r) \cdot \theta$$

$$\bar{u} = \frac{1}{r} I_0(\alpha_2 r), \quad \bar{v} = -\alpha_2 I_1(\alpha_2 r) \theta$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha_2^2 \left\{ \frac{1}{\alpha_2 r} I_1(\alpha_2 r) - \frac{1}{\alpha_2^2 r^2} I_0(\alpha_2 r) \right\}$$

$$= -\frac{\bar{O}_\theta}{2G}$$

$$\frac{\bar{r}_{\theta}}{2G} = \alpha_2^2 \left\{ \frac{1}{\alpha_2 r} I_1(\alpha_2 r) - \frac{1}{2} I_0(\alpha_2 r) \right\} \theta$$

$$\bar{\Phi} = K_0(\alpha r) \cdot \theta$$

$$\bar{\varphi}_0 = K_0(\alpha r) \cdot \theta$$

$$\bar{u} = -\alpha K_1(\alpha r) \theta, \quad \bar{v} = \frac{1}{r} K_0(\alpha r)$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} K_0(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} K_1(\alpha r) \right\} \theta$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \alpha^2 \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} K_0(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} K_1(\alpha r) \right\} \theta$$

$$\frac{\bar{r}_{\theta}}{2G} = -\frac{\alpha}{r} K_1(\alpha r) - \frac{1}{r^2} K_0(\alpha r)$$

$$\bar{\chi}_3 = K_0(\alpha_2 r) \cdot \theta$$

$$\bar{u} = \frac{1}{r} K_0(\alpha_2 r), \quad \bar{v} = \alpha_2 K_1(\alpha_2 r) \theta$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = -\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \frac{1}{\alpha_2 r} K_1(\alpha_2 r) + \frac{1}{\alpha_2^2 r^2} K_0(\alpha_2 r) \right\}$$

$$\frac{\bar{r}_{\theta}}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \frac{1}{\alpha_2 r} K_1(\alpha_2 r) + \frac{1}{2} K_0(\alpha_2 r) \right\} \theta$$

$$\bar{\Phi} = I_n(\alpha r) \cdot \sin n\theta$$

$$\bar{\Phi}_0 = I_n(\alpha r) \cdot \sin n\theta$$

$$\bar{u} = -\alpha \left\{ \frac{n}{\alpha r} I_n(\alpha r) - I_{n-1}(\alpha r) \right\} \sin n\theta$$

$$\bar{v} = \frac{n}{r} I_n(\alpha r) \cos n\theta$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} + \frac{1}{k} \right) I_n(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} I_{n-1}(\alpha r) \right\} \sin n\theta,$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = -\alpha^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} - \frac{1-k}{k} \right) I_n(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} I_{n-1}(\alpha r) \right\} \sin n\theta,$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = -\alpha^2 \left\{ \frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} I_n(\alpha r) - \frac{n}{\alpha r} I_{n-1}(\alpha r) \right\} \cos n\theta,$$

$$\bar{\lambda}_3 = I_n(\alpha_2 r) \cdot \sin n\theta$$

$$\bar{u} = \frac{n}{r} I_n(\alpha_2 r) \cdot \cos n\theta$$

$$\bar{v} = \alpha_2 \left\{ \frac{n}{\alpha_2 r} I_n(\alpha_2 r) - I_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \sin n\theta$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \frac{n^2+n}{\alpha_2^2 r^2} I_n(\alpha_2 r) - \frac{n}{\alpha_2 r} I_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \cos n\theta$$

$$= -\frac{\bar{O}_\theta}{2G}$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha_2^2 r^2} + \frac{1}{2} \right) I_n(\alpha_2 r) - \frac{1}{\alpha_2 r} I_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \sin n\theta$$

$$\bar{\Phi} = I_n(\alpha r) \cdot \cos n\theta$$

$$\bar{\Phi}_0 = I_n(\alpha r) \cdot \cos n\theta$$

$$\bar{u} = -\alpha \left\{ \frac{n}{\alpha r} I_n(\alpha r) - I_{n-1}(\alpha r) \right\} \cos n\theta$$

$$\bar{v} = -\frac{n}{r} I_n(\alpha r) \sin n\theta$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} + \frac{1}{k} \right) I_n(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} I_{n-1}(\alpha r) \right\} \cos n\theta,$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = -\alpha^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} - \frac{1-k}{k} \right) I_n(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} I_{n-1}(\alpha r) \right\} \cos n\theta,$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = \alpha^2 \left\{ \frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} I_n(\alpha r) - \frac{n}{\alpha r} I_{n-1}(\alpha r) \right\} \sin n\theta,$$

$$\bar{\lambda}_3 = I_n(\alpha_2 r) \cdot \cos n\theta$$

$$\bar{u} = -\frac{n}{r} I_n(\alpha_2 r) \sin n\theta$$

$$\bar{v} = \alpha_2 \left\{ \frac{n}{\alpha_2 r} I_n(\alpha_2 r) - I_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \cos n\theta$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha_2^2 \left\{ \frac{n^2+n}{\alpha_2^2 r^2} I_n(\alpha_2 r) - \frac{n}{\alpha_2 r} I_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \sin n\theta$$

$$= -\frac{\bar{O}_\theta}{2G}$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha_2^2 r^2} + \frac{1}{2} \right) I_n(\alpha_2 r) - \frac{1}{\alpha_2 r} I_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \cos n\theta$$

$$\bar{\Phi} = K_n(\alpha r) \cdot \sin n\theta$$

$$\bar{\Phi}_0 = K_n(\alpha r) \cdot \sin n\theta$$

$$\bar{u} = -\alpha \left\{ \frac{n}{\alpha r} K_n(\alpha r) + K_{n-1}(\alpha r) \right\} \sin n\theta$$

$$\bar{v} = \frac{n}{r} K_n(\alpha r) \cos n\theta$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} + \frac{1}{k} \right) K_n(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} K_{n-1}(\alpha r) \right\} \sin n\theta,$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = -\alpha^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} - \frac{1-k}{k} \right) K_n(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} K_{n-1}(\alpha r) \right\} \sin n\theta,$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = -\alpha^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} K_n(\alpha r) + \frac{n}{\alpha r} K_{n-1}(\alpha r) \right\} \cos n\theta,$$

$$\bar{\lambda}_3 = K_n(\alpha_2 r) \cdot \sin n\theta$$

$$\bar{u} = \frac{n}{r} K_n(\alpha_2 r) \cos n\theta$$

$$\bar{v} = \alpha_2 \left\{ \frac{n}{\alpha_2 r} K_n(\alpha_2 r) + K_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \sin n\theta$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \frac{n^2+n}{\alpha_2^2 r^2} K_n(\alpha_2 r) + \frac{n}{\alpha_2 r} K_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \cos n\theta$$

$$= -\frac{\bar{O}_\theta}{2G}$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha_2^2 r^2} + \frac{1}{2} \right) K_n(\alpha_2 r) + \frac{1}{\alpha_2 r} K_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \sin n\theta$$

$$\bar{\Phi} = K_n(\alpha r) \cdot \cos n\theta$$

$$\bar{\Phi}_0 = K_n(\alpha r) \cdot \cos n\theta$$

$$\bar{U} = -\alpha \left\{ \frac{n}{\alpha r} K_n(\alpha r) + K_{n-1}(\alpha r) \right\} \cos n\theta$$

$$\bar{V} = -\frac{n}{r} K_n(\alpha r) \sin n\theta$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} + \frac{1}{n} \right) K_n(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} K_{n-1}(\alpha r) \right\} \cos n\theta$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = -\alpha^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} - \frac{1-n}{n} \right) K_n(\alpha r) + \frac{K_{n-1}(\alpha r)}{\alpha r} \right\} \cos n\theta$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = \alpha^2 \left\{ \frac{n^2+n}{\alpha^2 r^2} K_n(\alpha r) + \frac{n}{\alpha r} K_{n-1}(\alpha r) \right\} \sin n\theta$$

$$\bar{\chi}_3 = K_n(\alpha_2 r) \cdot \cos n\theta$$

$$\bar{U} = -\frac{n}{r} K_n(\alpha_2 r) \sin n\theta$$

$$\bar{V} = \alpha_2 \left\{ \frac{n}{\alpha_2 r} K_n(\alpha_2 r) + K_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \cos n\theta$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha_2^2 \left\{ \frac{n^2+n}{\alpha_2^2 r^2} K_n(\alpha_2 r) + \frac{n}{\alpha_2 r} K_{n-1}(\alpha_2 r) \right\} \sin n\theta$$

$$= -\frac{\bar{O}_\theta}{2G}$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \left(\frac{n^2+n}{\alpha_2^2 r^2} + \frac{1}{2} \right) K_n(\alpha_2 r) + \frac{K_{n-1}(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} \right\} \cos n\theta$$

(3) 軸對稱平面問題

$$\bar{\Phi} = I_0(\alpha r)$$

$$\bar{\Phi}_0 = I_0(\alpha r)$$

$$\bar{U} = \alpha I_1(\alpha r) \quad , \quad \bar{V} = 0$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha^2 \left\{ \frac{1}{n} I_0(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} I_1(\alpha r) \right\}$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \alpha^2 \left\{ \frac{1-n}{n} I_0(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} I_1(\alpha r) \right\}$$

$$\bar{T}_{r\theta} = 0$$

$$\bar{\chi}_3 = I_0(\alpha_2 r)$$

$$\bar{U} = 0 \quad , \quad \bar{V} = -\alpha_2 I_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = \alpha_2^2 \left\{ \frac{I_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} - \frac{1}{2} I_0(\alpha_2 r) \right\}$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = 0$$

$$\bar{\Phi} = K_0(\alpha r)$$

$$\bar{\Phi}_0 = K_0(\alpha r)$$

$$\bar{U} = -\alpha K_1(\alpha r) \quad , \quad \bar{V} = 0$$

$$\frac{\bar{O}_r}{2G} = \alpha^2 \left\{ \frac{1}{n} K_0(\alpha r) + \frac{1}{\alpha r} K_1(\alpha r) \right\}$$

$$\frac{\bar{O}_\theta}{2G} = \alpha^2 \left\{ \frac{1-n}{n} K_0(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} K_1(\alpha r) \right\}$$

$$\bar{T}_{r\theta} = 0$$

$$\bar{\chi}_3 = K_0(\alpha_2 r)$$

$$\bar{U} = 0 \quad , \quad \bar{V} = \alpha_2 K_1(\alpha_2 r)$$

$$\frac{\bar{T}_{r\theta}}{2G} = -\alpha_2^2 \left\{ \frac{K_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} + \frac{1}{2} K_0(\alpha_2 r) \right\}$$

$$\bar{O}_r = \bar{O}_\theta = 0$$

(4) 点对称应力状态

$$\kappa = (1-2\nu)/(1+\nu)$$

$\bar{\varphi}_0 = \frac{e^{\alpha_1 R}}{\alpha_1 R}$ $\bar{u} = \alpha_1 \frac{\alpha_1 R - 1}{\alpha_1^2 R^2} e^{\alpha_1 R}$ $\frac{\bar{\sigma}_R}{2G} = \alpha_1^2 \frac{\frac{1}{\kappa} \alpha_1^2 R^2 - 2\alpha_1 R + 2}{\alpha_1^3 R^3} e^{\alpha_1 R}$ $\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \frac{\bar{\sigma}_\varphi}{2G} = \alpha_1^2 \frac{\frac{1-\kappa}{\kappa} \alpha_1^2 R^2 + \alpha_1 R - 1}{\alpha_1^3 R^3} e^{\alpha_1 R}$ $\bar{U} = \bar{W} = \bar{\tau}_{R\theta} = \bar{\tau}_{R\varphi} = \bar{\tau}_{\theta\varphi} = 0$	$\bar{\varphi}_0 = -\frac{e^{-\alpha_1 R}}{\alpha_1 R}$ $\bar{u} = \alpha_1 \frac{\alpha_1 R + 1}{\alpha_1^2 R^2} e^{-\alpha_1 R}$ $\frac{\bar{\sigma}_R}{2G} = -\alpha_1^2 \frac{\frac{1}{\kappa} \alpha_1^2 R^2 + 2\alpha_1 R + 2}{\alpha_1^3 R^3} e^{-\alpha_1 R}$ $\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \frac{\bar{\sigma}_\varphi}{2G} = \alpha_1^2 \frac{\frac{\kappa-1}{\kappa} \alpha_1^2 R^2 + \alpha_1 R + 1}{\alpha_1^3 R^3} e^{-\alpha_1 R}$ $\bar{U} = \bar{W} = \bar{\tau}_{R\theta} = \bar{\tau}_{R\varphi} = \bar{\tau}_{\theta\varphi} = 0$
$\bar{\varphi}_0 = \frac{\cosh \alpha_1 R}{\alpha_1 R}$ $\bar{u} = \alpha_1 \frac{\alpha_1 R \sinh \alpha_1 R - \cosh \alpha_1 R}{(\alpha_1 R)^2}$ $\frac{\bar{\sigma}_R}{2G} = \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1 R)^3} \left[\left(2 + \frac{1}{\kappa} \alpha_1^2 R^2 \right) \cosh \alpha_1 R - 2\alpha_1 R \sinh \alpha_1 R \right]$ $\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \frac{\bar{\sigma}_\varphi}{2G} = \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1 R)^3} \left[\left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \alpha_1^2 R^2 - 1 \right) \cosh \alpha_1 R + \alpha_1 R \sinh \alpha_1 R \right]$ $\bar{U} = \bar{W} = \bar{\tau}_{R\theta} = \bar{\tau}_{R\varphi} = \bar{\tau}_{\theta\varphi} = 0$	$\bar{\varphi}_0 = \frac{\sinh \alpha_1 R}{\alpha_1 R}$ $\bar{u} = \alpha_1 \frac{\alpha_1 R \cosh \alpha_1 R - \sinh \alpha_1 R}{(\alpha_1 R)^2}$ $\frac{\bar{\sigma}_R}{2G} = \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1 R)^3} \left[\left(2 + \frac{1}{\kappa} \alpha_1^2 R^2 \right) \sinh \alpha_1 R - 2\alpha_1 R \cosh \alpha_1 R \right]$ $\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \frac{\bar{\sigma}_\varphi}{2G} = \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1 R)^3} \left[\left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \alpha_1^2 R^2 - 1 \right) \sinh \alpha_1 R + \alpha_1 R \cosh \alpha_1 R \right]$ $\bar{U} = \bar{W} = \bar{\tau}_{R\theta} = \bar{\tau}_{R\varphi} = \bar{\tau}_{\theta\varphi} = 0$
$\bar{\varphi}_0 = j_0(i\alpha_1 R)$ $\bar{u} = -i\alpha_1 j_1(i\alpha_1 R)$ $\frac{\bar{\sigma}_R}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} j_0(i\alpha_1 R) - 2 \frac{j_1(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\}$ $\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \frac{\bar{\sigma}_\varphi}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{j_1(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} + \frac{1-\kappa}{\kappa} j_0(i\alpha_1 R) \right\}$ $\bar{U} = \bar{W} = \bar{\tau}_{R\theta} = \bar{\tau}_{R\varphi} = \bar{\tau}_{\theta\varphi} = 0$	$\bar{\varphi}_0 = n_0(i\alpha_1 R)$ $\bar{u} = -i\alpha_1 n_1(i\alpha_1 R)$ $\frac{\bar{\sigma}_R}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} n_0(i\alpha_1 R) - 2 \frac{n_1(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\}$ $\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \frac{\bar{\sigma}_\varphi}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} n_0(i\alpha_1 R) + \frac{n_1(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\}$ $\bar{U} = \bar{W} = \bar{\tau}_{R\theta} = \bar{\tau}_{R\varphi} = \bar{\tau}_{\theta\varphi} = 0$
$\bar{\varphi}_0 = h_0^{(1)}(i\alpha_1 R)$ $\bar{u} = -i\alpha_1 h_1^{(1)}(i\alpha_1 R)$ $\frac{\bar{\sigma}_R}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} h_0^{(1)}(i\alpha_1 R) - 2 \frac{h_1^{(1)}(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\}$ $\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \frac{\bar{\sigma}_\varphi}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{h_1^{(1)}(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} + \frac{1-\kappa}{\kappa} h_0^{(1)}(i\alpha_1 R) \right\}$ $\bar{U} = \bar{W} = \bar{\tau}_{R\theta} = \bar{\tau}_{R\varphi} = \bar{\tau}_{\theta\varphi} = 0$	$\bar{\varphi}_0 = h_0^{(2)}(i\alpha_1 R)$ $\bar{u} = -i\alpha_1 h_1^{(2)}(i\alpha_1 R)$ $\frac{\bar{\sigma}_R}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{1}{\kappa} h_0^{(2)}(i\alpha_1 R) - 2 \frac{h_1^{(2)}(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\}$ $\frac{\bar{\sigma}_\theta}{2G} = \frac{\bar{\sigma}_\varphi}{2G} = \alpha_1^2 \left\{ \frac{1-\kappa}{\kappa} h_0^{(2)}(i\alpha_1 R) + \frac{h_1^{(2)}(i\alpha_1 R)}{i\alpha_1 R} \right\}$ $\bar{U} = \bar{W} = \bar{\tau}_{R\theta} = \bar{\tau}_{R\varphi} = \bar{\tau}_{\theta\varphi} = 0$

[付 録 B]

a. ベッセル関数の漸近展開公式の有理化

ベッセル関数とウィテッカー関数 $W_{k,m}(z)$ の関係を利用して, $W_{k,m}(z)$ の有理化された漸近展開公式からベッセル関数の漸近展開の有理化近似式を導くことができる。

Luke は $W_{k,m}(z)$ の漸近展開式を次の有理式で近似した⁽⁹¹⁾。

オ1 近似式

$$W_{0,0}(2z) \sim e^{-z} \frac{16z+7}{16z+9}, \quad W_{0,1}(2z) \sim e^{-z} \frac{16z+11}{16z+5} \quad (B-1)$$

オ2 近似式

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{0,0}(2z) \sim e^{-z} \frac{768z^2+1104z+129}{768z^2+1200z+225} \\ W_{0,1}(2z) \sim e^{-z} \frac{768z^2+1296z+393}{768z^2+1008z+105} \end{array} \right. \quad (B-2)$$

一方, ベッセル関数 $J_n(z)$, $Y_n(z)$ および変形ベッセル関数 $I_n(z)$, $K_n(z)$ は $W_{k,n}(z)$ を用いて次のように表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} J_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \{ e^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})\pi i} W_{0,n}(2iz) + e^{-\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})\pi i} W_{0,n}(-2iz) \} \\ \hspace{25em} |\arg z| < \pi \\ Y_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-n\pi i} \cos n\pi \{ e^{\frac{1}{2}(n+\frac{3}{2})\pi i} W_{0,n}(2iz) + e^{-\frac{1}{2}(n+\frac{3}{2})\pi i} W_{0,n}(-2iz) \} \\ \hspace{25em} |\arg z| < \pi \\ I_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \{ W_{0,n}(-2z) + e^{-(n+\frac{1}{2})\pi i} W_{0,n}(2z) \} \\ \hspace{15em} -\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{1}{2}\pi \\ K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} W_{0,n}(2z) \\ \hspace{15em} |\arg z| < \frac{3}{2}\pi \end{array} \right. \quad (B-3)$$

そこで (B-3) 式に (B-1) 式および (B-2) 式を代入して, 次に示される $J_n(z)$, $Y_n(z)$ および $I_n(z)$, $K_n(z)$ に対する漸近展開の有理化近似式

を導いた。

ベッセル関数の有理化された漸近展開式 (オ1 近似式)

$$\left\{ \begin{aligned} J_0(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{256z^2+63}{256z^2+81} \cos(z-\frac{\pi}{4}) + \frac{32z}{256z^2+81} \sin(z-\frac{\pi}{4}) \right\} \\ J_1(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{256z^2+55}{256z^2+25} \sin(z-\frac{\pi}{4}) + \frac{96z}{256z^2+25} \cos(z-\frac{\pi}{4}) \right\} \\ Y_0(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{256z^2+63}{256z^2+81} \sin(z-\frac{\pi}{4}) - \frac{32z}{256z^2+81} \cos(z-\frac{\pi}{4}) \right\} \\ Y_1(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ -\frac{256z^2+55}{256z^2+25} \cos(z-\frac{\pi}{4}) + \frac{96z}{256z^2+25} \sin(z-\frac{\pi}{4}) \right\} \end{aligned} \right.$$

ベッセル関数の有理化された漸近展開式 (オ2 近似式)

$$\left\{ \begin{aligned} J_0(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{z^4+1.78515625z^2+0.04920959}{z^4+1.85546875z^2+0.08583069} \cos(z-\frac{\pi}{4}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.125z^3+0.15869141z}{z^4+1.85546875z^2+0.08583069} \sin(z-\frac{\pi}{4}) \right\} \\ J_1(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{z^4+1.56640625z^2+0.06969155}{z^4+1.44921875z^2+0.01869202} \sin(z-\frac{\pi}{4}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.375z^3+0.44091797z}{z^4+1.44921875z^2+0.01869202} \cos(z-\frac{\pi}{4}) \right\} \\ Y_0(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{z^4+1.78515625z^2+0.04920959}{z^4+1.85546875z^2+0.08583069} \sin(z-\frac{\pi}{4}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{0.125z^3+0.15869141z}{z^4+1.85546875z^2+0.08583069} \cos(z-\frac{\pi}{4}) \right\} \\ Y_1(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ -\frac{z^4+1.56640625z^2+0.06969155}{z^4+1.44921875z^2+0.01869202} \cos(z-\frac{\pi}{4}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.375z^3+0.44091797z}{z^4+1.44921875z^2+0.01869202} \sin(z-\frac{\pi}{4}) \right\} \end{aligned} \right.$$

変形ベッセル関数の有理化された漸近展開式 (オ1 近似式)

$$\left\{ \begin{aligned} I_0(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \frac{16z-7}{16z-9} - \frac{i}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z} \frac{16z+7}{16z+9} \\ I_1(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \frac{16z-11}{16z-5} + \frac{i}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z} \frac{16z+11}{16z+5} \\ K_0(z) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \frac{16z+7}{16z+9} \\ K_1(z) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \frac{16z+11}{16z+5} \end{aligned} \right. \quad (B-4)$$

変形ベッセル関数の有理化された漸近展開式（オ2近似式）

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \frac{768z^2 - 1104z + 129}{768z^2 - 1200z + 225} - i \frac{e^{-z}}{\sqrt{2\pi z}} \frac{768z^2 + 1104z + 129}{768z^2 + 1200z + 225} \\ I_1(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \frac{768z^2 - 1296z + 393}{768z^2 - 1008z + 105} + i \frac{e^{-z}}{\sqrt{2\pi z}} \frac{768z^2 + 1296z + 393}{768z^2 + 1008z + 105} \\ K_0(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \frac{768z^2 + 1104z + 129}{768z^2 + 1200z + 225} \\ K_1(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \frac{768z^2 + 1296z + 393}{768z^2 + 1008z + 105} \end{array} \right. \quad (B-5)$$

変形ベッセル関数について通常の漸近展開公式と有理化された漸近展開式の精度を比較して、その結果を付表1に示した。

付表1 変形ベッセル関数の漸近展開式の精度の比較

z	$I_0(z)$	$I_1(z)$	$K_0(z)$	$K_1(z)$
2	2.279 585	1.590 637	0.113 893 9	0.139 865 9
	2.307 493 -i0.036 253	1.567 349 +i0.044 524	0.113 874 5	0.139 892 7
	2.265 667 -i0.036 315	1.621 210 +i0.044 368	0.114 087 1	0.139 387 0
	2.285 023 -i0.036 381	1.587 017 +i0.044 362	0.114 292 6	0.139 368 6
	2.270 414 -i0.036 113	1.605 802 +i0.044 706	0.113 451 8	0.140 449 4
6	67.234 39	61.341 95	0.124 399 4 x 10 ⁻²	0.134 397 1 x 10 ⁻²
	67.231 05 -i0.000 396	61.346 27 +i0.000 428	0.124 398 6	0.134 393 0
	67.215 94 -i0.000 396	61.373 21 +i0.000 428	0.124 412 8	0.134 363 0
	67.230 59 -i0.000 396	61.346 45 +i0.000 428	0.124 402 0	0.134 388 6
	67.224 94 -i0.000 396	61.353 76 +i0.000 428	0.124 391 1	0.134 402 8
10	2815.716	2670.999	0.177 800 6 x 10 ⁻⁴	0.186 487 7 x 10 ⁻⁴
	2815.706 -i0.000 006	2671.002 +i0.000 006	0.177 800 3	0.186 487 9
	2815.590 -i0.000 006	2671.219 +i0.000 006	0.177 805 3	0.186 477 8
	2815.709 -i0.000 006	2670.999 +i0.000 006	0.177 800 9	0.186 487 2
	2815.676 -i0.000 006	2671.039 +i0.000 006	0.177 798 9	0.186 489 9

オ1列 厳密な値

オ2列 有理化した漸近展開のオ2近似(B-5)式

オ3列 有理化した漸近展開のオ1近似(B-4)式

オ4列 通常の漸近展開式において 1/z⁴ までで打切った場合。

オ5列 通常の漸近展開式において 1/z³ までで打切った場合。

b. 複素根をもつ振動数方程式

本論 5.2 節に示した円孔面に等分布衝撃圧力をうける無限板あるいは無限体の振動数方程式は変形ベッセル関数 $K_0(z)$ を含んだ超越方程式

$$z K_0(z) + \kappa K_1(z) = 0 \quad (\kappa > 0) \quad (B-6)$$

で表わされ、この根は後で示されるように複素数である。

一般に無限弾性体の振動数方程式の根は複素数であり、このことは無限体に衝撃的外力が作用すれば、生ずる応力は波動として無限遠方に伝ぱし、反射波が存在しないために、物体中の任意点の応力は減衰振動し、外力の作用後無限時間経過すれば、応力は絶対値が等しい静荷重によって生ずる応力に一致することを意味する。そこで衝撃荷重をうける無限体の応力解析に際して、通常、超越方程式の複素根を Trial に求める必要があるから、根の性質すなわち複素平面内における根の存在範囲およびその個数を知らねばならない。

そのために、次に示す零点に関するコーツの定理を用いれば、複素変数 z の方程式 $f(z) = 0$ の複素 z 平面内における根の個数とそれらの存在する領域を知ることができる。^{(120), (123)}

定理 I (コーツの定理)

$f(z)$ は境界 C の内区域 D で正則であり、境界 C 上では 0 にならないとする。 D の内部の $f(z)$ の零点を $z_1, z_2, \dots, z_m$ とし、その重複度をそれぞれ $k_1, k_2, \dots, k_m$ とすれば

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} |\arg f(z)|_C = \sum_{n=1}^m k_n$$

である。ここで $\arg f(z)$ は $f(z)$ の偏角である。

ここでは定理 I を用いて、次の方程式

$$f(z) = z K_n(z) + \kappa K_{n+1}(z) = 0 \quad (\kappa > 0) \quad (B-7)$$

の根の性質を調べた。

$f(z) = 0$ は z に関する実係数の方程式であるから, $z = \alpha + bi$ が根ならば, これと共役な $\bar{z} = \alpha - bi$ も根である。

そして純虚数の根はないことが次のようにしてわかる。いま $z = re^{\pm \frac{\pi}{2}i}$ とおけばベッセル関数の公式から

$$\begin{cases} K_n(re^{\frac{\pi}{2}i}) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{2}(n+1)\pi i} \{J_n(r) - i Y_n(r)\} \\ K_n(re^{-\frac{\pi}{2}i}) = \frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{2}(n+1)\pi i} \{J_n(r) + i Y_n(r)\} \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} f(re^{\frac{\pi}{2}i}) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{n}{2}\pi i} [\{rJ_n(r) - nJ_{n+1}(r)\} - i\{rY_n(r) - nY_{n+1}(r)\}] \\ f(re^{-\frac{\pi}{2}i}) = \frac{\pi}{2} e^{\frac{n}{2}\pi i} [\{rJ_n(r) - nJ_{n+1}(r)\} + i\{rY_n(r) - nY_{n+1}(r)\}] \end{cases}$$

になる。そこで $f(re^{\pm \frac{\pi}{2}i}) = 0$ ならば, 左辺の実部と虚部が共に 0 になり, r は次の連立方程式

$$\begin{cases} rJ_n(r) - nJ_{n+1}(r) = 0 \\ rY_n(r) - nY_{n+1}(r) = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$J_{n+1}(r)Y_n(r) - J_n(r)Y_{n+1}(r) = 0$$

を満す実数でなければならぬ。ところがベッセル関数の公式から

$$J_{n+1}(r)Y_n(r) - J_n(r)Y_{n+1}(r) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{r}$$

であるから, 結局 $f(re^{\pm \frac{\pi}{2}i}) \neq 0$ すなわち虚根がないことがわかる。

さらに, (B-7) 式の根は負の実数ではない。なぜならば $z = re^{\pm \pi i}$ とおけば, ベッセル関数の公式から

$$\begin{cases} K_n(re^{\pi i}) = e^{-n\pi i} K_n(r) - \pi i I_n(r) \\ K_n(re^{-\pi i}) = e^{n\pi i} K_n(r) + \pi i I_n(r) \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} f(re^{\pi i}) = e^{-(n+1)\pi i} \{rK_n(r) + nK_{n+1}(r)\} + \pi i \{rI_n(r) - nI_{n+1}(r)\} \\ f(re^{-\pi i}) = e^{(n+1)\pi i} \{rK_n(r) + nK_{n+1}(r)\} - \pi i \{rI_n(r) - nI_{n+1}(r)\} \end{cases}$$

(B-8)

になる。そこで $f(re^{\pm \pi i}) = 0$ とすれば

$$\begin{cases} r K_n(r) + \kappa K_{n+1}(r) = 0 \\ r I_n(r) - \kappa I_{n+1}(r) = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$K_{n+1}(r) I_n(r) + K_n(r) I_{n+1}(r) = 0$$

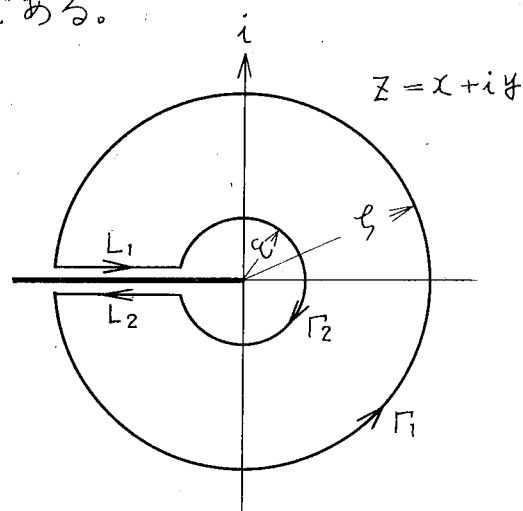
を満足する実数 r が存在しなければならない。ところがベッセル関数の公式から

$$K_{n+1}(r) I_n(r) + K_n(r) I_{n+1}(r) = \frac{1}{r}$$

であるから、 r が実数ならば $f(re^{\pm\pi i}) \neq 0$ すなわち負の実根はない。

ところで、(B-7) 式の $f(z)$ は z の多価関数であり、 $z=0$ は分岐点であるから、負の実軸に沿って分岐切斷を入れ、付図 1 の閉曲線を考えれば、閉曲線内では $f(z)$ は一価正則な関数である。

したがってコーシの定理から z 平面内における $f(z)$ の零点の個数 N は、 $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ の場合に z が閉曲線上を矢印の向きに 1 周したときの $f(z)$ の偏角の変化量の $1/2\pi$ に等しく、次式から計算できる。



付図 1 閉曲線

$$N = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi} [|\arg f(z)|_{\Gamma_1} + |\arg f(z)|_{\Gamma_2}$$

$$+ |\arg f(z)|_{L_1} + |\arg f(z)|_{L_2}] \quad (\text{B-9})$$

(B-9) 式の右辺の第 1 項目を求め

るために、 $|z| \rightarrow \infty$ とすれば変形ベッセル関数 $K_n(z)$ の漸近展開公式から

$$K_n(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad (|\arg z| < \frac{3}{2}\pi)$$

であるから

$$|z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \frac{3}{2}\pi$$

ならば

$$f(z) \sim \sqrt{\frac{\pi z}{2}} e^{-z}$$

になる。

そこで $z = \xi e^{i\theta}$ とおけば

$$\begin{aligned} f(\xi e^{i\theta}) &\sim \sqrt{\frac{\pi\xi}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-\xi(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &\sim \sqrt{\frac{\pi\xi}{2}} e^{-\xi\cos\theta} e^{i(\frac{\theta}{2} - \xi\sin\theta)} \end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} [\arg f(\xi e^{i\theta})]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\frac{\theta}{2} - \xi \sin\theta \right]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} = \pi$$

になる。

次に (B-9) 式のオ 2 項目を求めるために, $z \rightarrow 0$ とすれば, 変形ベッセル関数 $K_n(z)$ の定義式から

$$\begin{aligned} K_n(z) &\sim -\log \frac{z}{2} \quad (n=0) \\ &\sim \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

になり

$$|z K_n(z)| \ll |K_{n+1}(z)| \quad (n \geq 0)$$

の関係があるから, $z \rightarrow 0$ ならば

$$f(z) \sim \kappa \frac{n!}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} \quad (n \geq 0)$$

になる。そこで $z = \varepsilon e^{i\theta}$ とおけば

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\arg f(z)]_{\frac{\pi}{2}}^{-\pi} = [-(n+1)\theta]_{\pi}^{-\pi} = 2(n+1)\pi$$

である。

z が負の実軸に平行な直線 L_1, L_2 上にあれば $z = r e^{\pm \pi i}$ であり, (B-8) 式から

$$f(r e^{\pm \pi i}) = (-1)^{n+1} [r K_n(r) + \kappa K_{n+1}(r)] \pm \pi i [r I_n(r) - \kappa I_{n+1}(r)]$$

になる。そこで (B-9) 式のオ 3 項およびオ 4 項は

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\xi \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} [\arg f(z)]_{L_1} &= \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[\tan^{-1}(-1)^{n+1} \pi \frac{r I_n(r) - \kappa I_{n+1}(r)}{r K_n(r) + \kappa K_{n+1}(r)} \right]_{r=\varepsilon}^{r=\xi} \\ \lim_{\substack{\xi \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} [\arg f(z)]_{L_2} &= \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[\tan^{-1}(-1)^n \pi \frac{r I_n(r) - \kappa I_{n+1}(r)}{r K_n(r) + \kappa K_{n+1}(r)} \right]_{r=\varepsilon}^{r=\xi} \end{aligned}$$

になるから、これらの和は

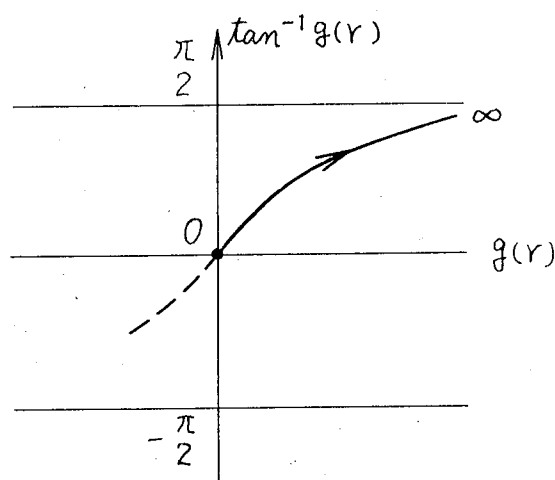
$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\xi \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} [[\arg f(z)]_{L_1} + [\arg f(z)]_{L_2}] \\ &= 2 \lim_{\substack{\xi \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[\tan^{-1}(-1)^n \pi \frac{r I_n(r) - \kappa I_{n+1}(r)}{r K_n(r) + \kappa K_{n+1}(r)} \right]_{r=\varepsilon}^{r=\xi} \quad (B-10) \end{aligned}$$

で表わされる。

いま (B-10) 式の右辺を計算するために

$$g(r) = \frac{r I_n(r) - \kappa I_{n+1}(r)}{r K_n(r) + \kappa K_{n+1}(r)}$$

とおけば、 $\kappa > 0$ ならば、 $r \geq 0$ に対して分母は正であり、分子は $r=0$ において 0、 $r=\infty$ において $+\infty$ になるから、 r が 0 から ∞ まで移動すれば $\tan^{-1} g(r) \sim g(r)$ 曲線は 付図 2 に示すように $-(\pi/2) < \tan^{-1} g(r) < \pi/2$ 間のみを移動し、原点から出発して $r \rightarrow \infty$ において $\tan^{-1} g(r) \rightarrow \pi/2$ になる。



したがって

$$\begin{aligned} & 2 \lim_{\substack{\xi \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[\tan^{-1}(-1)^n \pi g(r) \right]_{r=\varepsilon}^{r=\xi} \\ &= 2 \times \frac{\pi}{2} (-1)^n \\ &= (-1)^n \pi \end{aligned}$$

付図 2 偏角の変化

故に零点の総数 N は

$$N = \frac{1}{2\pi} [\pi + 2(n+1)\pi + (-1)^n \pi] = n+1 + \frac{1+(-1)^n}{2} \quad (B-11)$$

になる。

(B-11) 式において $n=0$ とおけば、(B-6) 式には 1 組の共役複素根があることがわかる。

ところで、物理現象と振動方程式の根の間には密接な関係があり、その根が複素数ならば、その実部の正負は次の定理によ、て容易に判別できる。

定理 II: ラプラス逆変換の複素線積分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp$$

において

(i) $\bar{f}(p)$ のすべての極が p 平面の虚軸の左側にあれば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

(ii) $\bar{f}(p)$ のすべての極が虚軸上およびその左側にのみあり、虚軸の極がすべて単極であれば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \text{有界}$$

(iii) 虚軸上に重複極があるか、又は虚軸の右側に1つでも極があれば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$$

になる。

円孔面に等分布衝撃圧力をうける無限板あるいは無限体に生ずる応力の最終値は静的結果に一致するから、定理Iから、(B-6)式の複素根はその実部が負すなわち $\sigma < 0$ 、 $\sigma < 0$ 象限内にある。

C. 実根をもつ振動数方程式

弾性体が有限ならば、衝撃荷重によって生ずる応力は波動として伝わり、弾性体表面において反射されるために、反射波が互いに干渉し、物体中の任意の点の応力は周期的に変動する。すなわち有限弾性体には弾性波の干渉のために一定の固有振動数があり、通常その数は無限にある。

固有振動数は振動数方程式の実根から決り、5.2節の有孔円板あるいは円筒の問題に関する振動数方程式の根は実根のみで、複素根がないことを以下に円柱関数の直交性を利用して証明した。

円柱関数の直交性は次に示すロンメル積分公式から導いた。

ロンメル積分公式： $M_s(x)$ を S 次の円柱関数とすれば

$$\int_a^b \rho M_s(\rho \lambda_m) M_s(\rho \lambda_n) d\rho = \frac{1}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \left[\rho \lambda_n M_{s-1}(\rho \lambda_n) M_s(\rho \lambda_m) - \rho \lambda_m M_{s-1}(\rho \lambda_m) M_s(\rho \lambda_n) \right]_a^b$$

($\lambda_m \neq \lambda_n$)
(B-12)

$$\int_a^b \rho M_s^2(\rho \lambda_n) d\rho = \left[\frac{1}{2} \rho^2 \left\{ M_s'^2(\rho \lambda_n) + \left(1 - \frac{s^2}{\rho^2 \lambda_n^2}\right) M_s^2(\rho \lambda_n) \right\} \right]_a^b$$

(B-13)

(i) 軸対称振動する中実円板あるいは円柱の振動数方程式

中実円板あるいは円柱の軸対称振動の振動数方程式は

$$\lambda J_0(\lambda) - \kappa J_1(\lambda) = 0 \quad (\text{B-14})$$

で与えられる。いま λ_m, λ_n を相異なる定数とし、円板あるいは円柱の外径を 1 とすれば (B-12) 式において $a = 0, b = 1$ とおき $M_s(\rho \lambda) = J_s(\rho \lambda)$ と考えれば次の関係が成立する。

$$\int_0^1 \rho J_1(\rho \lambda_m) J_1(\rho \lambda_n) d\rho = \frac{1}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} [\lambda_n J_0(\lambda_n) J_1(\lambda_m) - \lambda_m J_0(\lambda_m) J_1(\lambda_n)]$$

(B-15)

そして λ_m, λ_n を (B-14) 式の根とすれば、(B-15) 式の右辺は 0 になり、次の直交関係式がえられる。

$$\int_0^1 \rho J_1(\rho \lambda_m) J_1(\rho \lambda_n) d\rho = 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n) \quad (\text{B-16})$$

(B-16) 式を用いれば次のようにして (B-14) 式の根が複素根でないことを証明できる。

いま (B-14) 式の複素根を $\lambda_0 = a_0 + i b_0$ とすれば、(B-14) 式は実係数の方程式であるから、必ず共役複素根 $\bar{\lambda}_0 = a_0 - i b_0$ が存在する。

一方, $\lambda_n = \lambda_0$, $\lambda_m = \bar{\lambda}_0$ とすれば (B-15) 式が成立するから

$$\int_0^1 \rho J_1(\rho \lambda_0) J_1(\rho \bar{\lambda}_0) d\rho = 0 \quad (\text{B-17})$$

になり, 右辺は常に 0 である。ところが $U(\rho)$, $V(\rho)$ を実数として

$$J_1(\rho \lambda_0) = U(\rho) + i V(\rho), \quad J_1(\rho \bar{\lambda}_0) = U(\rho) - i V(\rho)$$

と表わせるから, (B-17) 式の左辺は

$$\int_0^1 \rho \{U^2(\rho) + V^2(\rho)\} d\rho \neq 0$$

になり矛盾を生ずる。この原因は複素根の存在を仮定したことにある。したがって (B-14) 式の根は複素数ではない。

(B-14) 式が重根をもたないことは (B-13) 式を用いて証明できる。

いま (B-14) 式が重根 λ_n をもつとすれば, λ_n は (B-14) 式の両辺を λ で微分してえられる方程式

$$\frac{d}{d\lambda} \{ \lambda J_0(\lambda) - \kappa J_1(\lambda) \} = (1 - \kappa) J_0(\lambda) + \frac{\kappa - \lambda^2}{\lambda} J_1(\lambda) = 0 \quad (\text{B-18})$$

を満たさねばならない。一方 (B-13) 式は

$$\int_0^1 \rho J_1^2(\rho \lambda_n) d\rho = \left[\frac{1}{2} \{ J_1'^2(\lambda_n) + (1 - \frac{1}{\lambda_n^2}) J_1^2(\lambda_n) \} \right] \quad (\text{B-19})$$

$$\text{ただし} \quad J_n'(\lambda_n) = \left[\frac{d J_1(\lambda)}{d \lambda} \right]_{\lambda = \lambda_n}$$

と表わせるから, λ_n が (B-14) 式, (B-18) 式の根ならば (B-19) 式の右辺は 0 になる。しかし (B-19) 式の左辺は正数の積分であるから 0 にはならない。この矛盾は (B-14) 式の根が重根であると仮定したことによる原因がある。したがって (B-14) 式の根は重根ではない。

(ii) 有孔円板あるいは円筒の軸対称振動の振動数方程式

内外径がそれぞれ 1, ρ である有孔円板あるいは円筒の振動数方程式は次式で表わせる。

$$\begin{aligned} & \{ \lambda J_0(\lambda) - \kappa J_1(\lambda) \} \{ \rho \lambda Y_0(\rho \lambda) - \kappa Y_1(\rho \lambda) \} \\ & - \{ \lambda Y_0(\lambda) - \kappa Y_1(\lambda) \} \{ \rho \lambda J_0(\rho \lambda) - \kappa J_1(\rho \lambda) \} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-20})$$

いま円柱関数 $M_s(x)$ を次式

$$M_s(x) = \frac{p_1 \lambda Y_0(p_1 \lambda) - \kappa Y_1(p_1 \lambda)}{p_1 \lambda J_0(p_1 \lambda) - \kappa J_1(p_1 \lambda)} J_s(x) - Y_s(x)$$

で定義すれば, (B-20)式は

$$\lambda M_0(\lambda) - \kappa M_1(\lambda) = 0 \quad (B-21)$$

と表わすことができ, (B-21)式の相異なる根を λ_m, λ_n とし (B-12)式を用いれば, 次の直交関係式

$$\int_1^{p_1} p M_1(p \lambda_m) M_1(p \lambda_n) dp = 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n) \quad (B-22)$$

がえられる。

そこで, (B-22)式を用いれば (i)と同様にして, (B-20)式の根は実数であり, 重根が含まれないことがわかる。

(iii) 軸対称振動する組合円筒の振動数方程式

相異なる二種の材質からなる組合円筒の内面に等分布衝撃圧力が作用する場合には, 振動数方程式は本論 6.2 節 (6.16)式で表わされ, この式の根が複素数でないことを (i)と同様な方法で証明した。

いま円柱関数として内円筒 I ($1 \leq p \leq p_0$) においては (6.13)式で定義された関数 $M_s(x)$ および外円筒 II ($p_0 \leq p \leq p_1$) においては (6.18)式で定義された関数 $M'_s(x)$ を考えれば, 振動数方程式は次式で表わせる。

$$\frac{G'}{G} \frac{\kappa}{\kappa'} \beta p_0 \lambda \frac{M'_0(\beta p_0 \lambda)}{M'_1(\beta p_0 \lambda)} - p_0 \lambda \frac{M_0(p_0 \lambda)}{M_1(p_0 \lambda)} = \kappa \left(\frac{G'}{G} - 1 \right) \quad (B-23)$$

いま λ_m, λ_n を相異なる定数とすれば (B-12)式から次の関係が成立する。

$$\left\{ \begin{aligned} \int_1^{p_0} p M_1(p \lambda_m) M_1(p \lambda_n) dp &= \frac{1}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} [p \lambda_n M_0(p \lambda_n) M_1(p \lambda_m) - p \lambda_m M_0(p \lambda_m) M_1(p \lambda_n)]_1^{p_0} \\ \int_{p_0}^{p_1} p M'_1(\beta p \lambda_m) M'_1(\beta p \lambda_n) dp &= \frac{1}{\beta^2 (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)} [\beta \lambda_n p M'_0(\beta p \lambda_n) M'_1(\beta p \lambda_m) \\ &\quad - \beta \lambda_m p M'_0(\beta p \lambda_m) M'_1(\beta p \lambda_n)]_{p_0}^{p_1} \end{aligned} \right. \quad (B-24)$$

一方, λ_m, λ_n を (B-23) 式の相異なる根とすれば $M_s(x), M'_s(x)$ の定義式より

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_m \frac{M_0(\lambda_m)}{M_1(\lambda_m)} = \lambda_n \frac{M_0(\lambda_n)}{M_1(\lambda_n)} = \kappa \\ \beta \rho_1 \lambda_m \frac{M'_0(\beta \rho_1 \lambda_m)}{M'_1(\beta \rho_1 \lambda_m)} = \beta \rho_1 \lambda_n \frac{M'_0(\beta \rho_1 \lambda_n)}{M'_1(\beta \rho_1 \lambda_n)} = \kappa' \end{array} \right. \quad (\text{B-25})$$

の関係が成立するから, (B-25) 式を (B-24) 式の右辺に代入すれば

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_1^{\rho_0} \rho M_1(\rho \lambda_m) M_1(\rho \lambda_n) d\rho = \frac{M_1(\rho_0 \lambda_m) M_1(\rho_0 \lambda_n)}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \left[\rho_0 \lambda_n \frac{M_0(\rho_0 \lambda_n)}{M_1(\rho_0 \lambda_n)} - \rho_0 \lambda_m \frac{M_0(\rho_0 \lambda_m)}{M_1(\rho_0 \lambda_m)} \right] \\ \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho M'_1(\beta \rho \lambda_m) M'_1(\beta \rho \lambda_n) d\rho = \frac{M'_1(\beta \rho_0 \lambda_m) M'_1(\beta \rho_0 \lambda_n)}{\beta^2 (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)} \left[\beta \rho_0 \lambda_m \frac{M'_0(\beta \rho_0 \lambda_m)}{M'_1(\beta \rho_0 \lambda_m)} - \beta \rho_0 \lambda_n \frac{M'_0(\beta \rho_0 \lambda_n)}{M'_1(\beta \rho_0 \lambda_n)} \right] \end{array} \right. \quad (\text{B-26})$$

になる。そして λ_m, λ_n を (B-23) 式の相異なる根とすれば

$$\begin{aligned} & \frac{G'}{G} \frac{\kappa}{\kappa'} \left[\beta \rho_0 \lambda_n \frac{M'_0(\beta \rho_0 \lambda_n)}{M'_1(\beta \rho_0 \lambda_n)} - \beta \rho_0 \lambda_m \frac{M'_0(\beta \rho_0 \lambda_m)}{M'_1(\beta \rho_0 \lambda_m)} \right] \\ &= \left[\rho_0 \lambda_n \frac{M_0(\rho_0 \lambda_n)}{M_1(\rho_0 \lambda_n)} - \rho_0 \lambda_m \frac{M_0(\rho_0 \lambda_m)}{M_1(\rho_0 \lambda_m)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B-27})$$

の関係があり, (B-26) 式と (B-27) 式から

$$\frac{\kappa'}{\kappa} \frac{\int_1^{\rho_0} \rho M_1(\rho \lambda_m) M_1(\rho \lambda_n) d\rho}{M_1(\rho_0 \lambda_m) M_1(\rho_0 \lambda_n)} + \frac{G'}{G} \beta^2 \frac{\int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho M'_1(\beta \rho \lambda_m) M'_1(\beta \rho \lambda_n) d\rho}{M'_1(\beta \rho_0 \lambda_m) M'_1(\beta \rho_0 \lambda_n)} = 0 \quad (\text{B-28})$$

が成立する。いま (B-23) 式の根 λ の 1 が複素根 $\lambda_0 = a_0 + ib_0$ である
と仮定すれば (B-23) 式は λ に関する実係数の方程式であるから, $\bar{\lambda}_0 =$
 $a_0 - ib_0$ も (B-23) 式の根である。そこで (B-28) 式において $\lambda_m = \lambda_0$,
 $\lambda_n = \bar{\lambda}_0$ とおけば, U, U', V, V' を実数として

$$\begin{aligned} M_1(\rho \lambda_m) &= U(\rho) + i V(\rho), & M_1(\rho \lambda_n) &= U(\rho) - i V(\rho) \\ M_1(\rho_0 \lambda_m) &= U(\rho_0) + i V(\rho_0), & M_1(\rho_0 \lambda_n) &= U(\rho_0) - i V(\rho_0) \\ M'_1(\beta \rho \lambda_m) &= U'(\rho) + i V'(\rho), & M'_1(\beta \rho \lambda_n) &= U'(\rho) - i V'(\rho) \\ M'_1(\beta \rho_0 \lambda_m) &= U'(\rho_0) + i V'(\rho_0), & M'_1(\beta \rho_0 \lambda_n) &= U'(\rho_0) - i V'(\rho_0) \end{aligned}$$

と表わせるから, (B-28) 式の左辺は

$$\frac{\kappa'}{\kappa} \frac{\int_1^{\rho_0} \rho \{U^2(\rho) + V^2(\rho)\} d\rho}{U^2(\rho_0) + V^2(\rho_0)} + \frac{G'}{G} \beta^2 \frac{\int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho \{U'^2(\rho) + V'^2(\rho)\} d\rho}{U'^2(\rho_0) + V'^2(\rho_0)}$$

になり0にはならない。この矛盾は複素根の存在を仮定したために生じたものであり、(B-23)式には複素根は存在しないことがわかる。

(iv) 点対称振動する球の振動数方程式

点対称振動する球の振動数方程式は次のように表わせる。

$$\lambda j_0(\lambda) - 2\kappa j_1(\lambda) = 0 \quad (\text{B-29})$$

ここで $j_s(x)$ は s 次の κ 1 種球ベッセル関数であり、 $j_{s+1/2}(x)$ は $(s+1/2)$ 次の κ 1 種球ベッセル関数を用いて次のように表わせる。

$$j_s(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{s+1/2}(x) \quad (\text{B-30})$$

そこで (B-30) 式の関係を (B-12) 式に適用して (B-29) 式の根 λ_n に関する球ベッセル関数の直交関係式を導いた。

すなわち (B-12) 式において $S = 3/2$ とすれば

$$\int_0^1 \rho J_{3/2}(\rho\lambda_n) J_{3/2}(\rho\lambda_m) d\rho = \frac{1}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} [\lambda_n J_{1/2}(\lambda_n) J_{3/2}(\lambda_m) - \lambda_m J_{1/2}(\lambda_m) J_{3/2}(\lambda_n)]$$

になり、これに (B-30) 式の関係を適用すれば次の積分公式をえる。

$$\int_0^1 \rho^2 j_1(\rho\lambda_n) j_1(\rho\lambda_m) d\rho = \frac{1}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} [\lambda_n j_0(\lambda_n) j_1(\lambda_m) - \lambda_m j_0(\lambda_m) j_1(\lambda_n)] \quad (\text{B-31})$$

そして λ_m, λ_n を (B-29) 式の相異なる根とすれば、(B-31) 式の右辺は0になり、次の直交関係式がえられる。

$$\int_0^1 \rho^2 j_1(\rho\lambda_m) j_1(\rho\lambda_n) d\rho = 0 \quad (\text{B-32})$$

(B-32) 式を用いれば、前と同様にして (B-29) 式の根が実数であることがわかる。

また (B-13) 式から次の公式

$$\int_0^1 \rho^2 j_1^2(\rho\lambda_n) d\rho = \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{-\frac{3}{2} j_1(\lambda_n) + \lambda_n j_0(\lambda_n)}{\lambda_n} \right\}^2 + \left(1 - \frac{9}{\lambda_n^2} \right) j_1^2(\lambda_n) \right] \quad (\text{B-33})$$

がえられる。そして λ_n を (B-29) 式の重根とすれば, λ_n は (B-29) 式の他に

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} [\lambda \dot{\phi}_0(\lambda) - 2\kappa \dot{\phi}_1(\lambda)] = (1-2\kappa) \dot{\phi}_0(\lambda) + \frac{4\kappa - \lambda^2}{\lambda} \dot{\phi}_1(\lambda) = 0$$

を満たさねばならないため, (B-33) 式の右辺は 0 になる。しかし (B-33) 式の左辺は正数の積分であるから 0 ではない。この矛盾は重根の存在を仮定したために生じたものであるから (B-29) 式には重根がないことが結論できる。

(V) 点対称振動する中空球の振動数方程式

内径 1, 外径 ρ_1 の中空球が点対称振動する場合の振動数方程式は次のように表わせる。

$$\rho_1 \lambda N_0(\rho_1 \lambda) - 2\kappa M_1(\rho_1 \lambda) = 0 \quad (\text{B-34})$$

ここで $N_S(x)$ は次式

$$N_S(x) = \frac{\lambda n_0(\lambda) - 2\kappa n_1(\lambda)}{\lambda \dot{\phi}_0(\lambda) - 2\kappa \dot{\phi}_1(\lambda)} \dot{\phi}_S(x) - n_S(x) \quad (\text{B-35})$$

で定義される関数であり, $\dot{\phi}_S(x)$, $n_S(x)$ は夫々 S 次の ϕ 1 種および ϕ 2 種の球ベッセル関数である。

(B-34) 式の根 λ_n が実数であることを証明するために (iv) と同様にしてまず関数 $\rho M_1(\rho \lambda_n)$ が直交性を有することを示した。(B-12) 式において $S = 3/2$ として $a = 1$, $b = \rho_1$ とおけば次式がえられる。

$$\begin{aligned} \int_1^{\rho_1} \rho M_{\frac{3}{2}}(\rho \lambda_m) M_{\frac{3}{2}}(\rho \lambda_n) d\rho &= \frac{1}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \left[\{ \rho_1 \lambda_n M_{\frac{1}{2}}(\rho_1 \lambda_n) M_{\frac{3}{2}}(\rho_1 \lambda_m) - \rho_1 \lambda_m M_{\frac{1}{2}}(\rho_1 \lambda_m) M_{\frac{3}{2}}(\rho_1 \lambda_n) \} \right. \\ &\quad \left. - \{ \lambda_n M_{\frac{1}{2}}(\lambda_n) M_{\frac{3}{2}}(\lambda_m) - \lambda_m M_{\frac{1}{2}}(\lambda_m) M_{\frac{3}{2}}(\lambda_n) \} \right] \end{aligned} \quad (\text{B-36})$$

ここで $M_S(x)$ は任意の円柱関数である。一方, 球ベッセル関数 $\dot{\phi}_S(x)$, $n_S(x)$ と $(S + 1/2)$ 次のベッセル関数 $J_{S+1/2}(x)$, $Y_{S+1/2}(x)$ との間に

$$\dot{\phi}_S(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{S+1/2}(x), \quad n_S(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{S+1/2}(x)$$

の関係があり,

$$M_{S+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} N_S(x)$$

と表わせる。そこで (B-36) 式を書き直せば次の積分公式がえられる。

$$\begin{aligned} & \int_1^{\rho_1} \rho^2 N_1(\rho \lambda_m) N_1(\rho \lambda_n) d\rho \\ &= \frac{1}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \left[\rho_1 \{ \rho_1 \lambda_n N_0(\rho \lambda_n) N_1(\rho \lambda_m) - \rho_1 \lambda_m N_0(\rho \lambda_m) N_1(\rho \lambda_n) \} \right. \\ & \quad \left. - \{ \lambda_n N_0(\lambda_n) N_1(\lambda_m) - \lambda_m N_0(\lambda_m) N_1(\lambda_n) \} \right] \quad (B-37) \end{aligned}$$

そして λ_m, λ_n を (B-34) 式の相異なる根とすれば, (B-34) 式および (B-35) 式から

$$\rho_1 \lambda_m \frac{N_0(\rho_1 \lambda_m)}{N_1(\rho_1 \lambda_m)} = \rho_1 \lambda_n \frac{N_0(\rho_1 \lambda_n)}{N_1(\rho_1 \lambda_n)} = 2\kappa$$

$$\lambda_m \frac{N_0(\lambda_m)}{N_1(\lambda_m)} = \lambda_n \frac{N_0(\lambda_n)}{N_1(\lambda_n)} = 2\kappa$$

の関係がえられ, これを (B-37) 式の右辺に代入すれば次の直交関係式がえられる。

$$\int_1^{\rho_1} \rho^2 N_1(\rho \lambda_m) N_1(\rho \lambda_n) d\rho = 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n) \quad (B-38)$$

$\lambda_m = \lambda_n$ の場合には (B-13) 式を用いれば同様にして次の公式がえられる。

$$\int_1^{\rho_1} \rho^2 N_1^2(\rho \lambda_n) d\rho = \frac{1}{2} \left[\rho^3 \left\{ N_0(\rho \lambda_n) - \frac{3}{2} \frac{N_1(\rho \lambda_n)}{\rho \lambda_n} \right\}^2 + \left(1 - \frac{9}{\rho^2 \lambda_n^2} \right) N_1^2(\rho \lambda_n) \right]_1^{\rho_1} \quad (B-39)$$

そこで (B-38) 式を用いれば (iv) と同様にして (B-34) 式の根はすべて実数であることがわかり, (B-39) 式を用いればこの根は単根であることがわかる。

d. 実根をもつ超越方程式の漸近根の求め方

前項の(i),(ii),(iv),(v) に示された振動方程式の根はすべて実数の単根であつてその数は無数にある。

いま, これらの根を λ_n ($n=1, 2, 3, \dots$)で表わし, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \dots$ とすれば, n が小なれば λ_n は Trial Method によつて, n が大ならば以下に導いた漸近近似式によつて計算できる。ここでは前項(i)に示した超越方程式

$$\lambda J_0(\lambda) - \kappa J_1(\lambda) = 0 \quad (B-40)$$

の漸近根の求め方を示した。

n が大きい場合の λ_n の漸近近似式を導くために, $\lambda_n \rightarrow \infty$ としてベッセル関数の漸近展開公式

$$J_0(\lambda_n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_n}} \left[P_0(\lambda_n) \cos\left(\lambda_n - \frac{\pi}{4}\right) - Q_0(\lambda_n) \sin\left(\lambda_n - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$J_1(\lambda_n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_n}} \left[P_1(\lambda_n) \sin\left(\lambda_n - \frac{\pi}{4}\right) + Q_1(\lambda_n) \cos\left(\lambda_n - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

こゝで

$$P_0(\lambda_n) \sim 1 - \frac{a_2}{\lambda_n^2} + \frac{a_4}{\lambda_n^4} - \frac{a_6}{\lambda_n^6} + \dots$$

$$P_1(\lambda_n) \sim 1 - \frac{b_2}{\lambda_n^2} + \frac{b_4}{\lambda_n^4} - \frac{b_6}{\lambda_n^6} + \dots$$

$$Q_0(\lambda_n) \sim -\frac{a_1}{\lambda_n} + \frac{a_3}{\lambda_n^3} - \frac{a_5}{\lambda_n^5} + \frac{a_7}{\lambda_n^7} - \dots$$

$$Q_1(\lambda_n) \sim -\frac{b_1}{\lambda_n} + \frac{b_3}{\lambda_n^3} - \frac{b_5}{\lambda_n^5} + \frac{b_7}{\lambda_n^7} - \dots$$

ただし

$$a_1 = 0.125$$

$$a_4 = 0.112 \ 152 \ 1$$

$$a_2 = 0.070 \ 312 \ 5$$

$$a_5 = 0.227 \ 108 \ 0$$

$$a_3 = 0.073 \ 242 \ 2$$

$$a_6 = 0.572 \ 501 \ 4$$

$$a_7 = 1.727 \ 727 \ 4$$

$$b_1 = -0.375$$

$$b_4 = -0.144 \ 195 \ 6$$

$$b_2 = -0.117 \ 187 \ 5$$

$$b_5 = -0.277 \ 576 \ 4$$

$$b_3 = -0.102 \ 539 \ 1$$

$$b_6 = -0.676 \ 592 \ 6$$

を (B-40) 式に代入して整理すれば

$$\cot(\lambda_n - \frac{\pi}{4}) \doteq \frac{\lambda_n Q_0(\lambda_n) + \kappa P_1(\lambda_n)}{\lambda_n P_0(\lambda_n) - \kappa Q_1(\lambda_n)} \quad (B-41)$$

になり、これに

$$\cot(\lambda_n - \frac{\pi}{4}) = -\tan(\lambda_n + \frac{\pi}{4})$$

の関係を代入すれば (B-41) 式は

$$\tan(\lambda_n + \frac{\pi}{4}) \doteq -\frac{\lambda_n Q_0(\lambda_n) + \kappa P_1(\lambda_n)}{\lambda_n P_0(\lambda_n) - \kappa Q_1(\lambda_n)} \quad (B-42)$$

と表わせる。そして (B-42) 式を書き直せば次のようになる。

$$\beta \doteq \lambda_n + \tan^{-1} \frac{\lambda_n Q_0(\lambda_n) + \kappa P_1(\lambda_n)}{\lambda_n P_0(\lambda_n) - \kappa Q_1(\lambda_n)} \quad (B-43)$$

ただし

$$\beta = (n - \frac{1}{4})\pi$$

ここで λ_n が大きければ

$$\lambda_n Q_0(\lambda_n) + \kappa P_1(\lambda_n) = d_0 + \frac{d_2}{\lambda_n^2} + \frac{d_4}{\lambda_n^4} + \frac{d_6}{\lambda_n^6} + \dots$$

$$\lambda_n P_0(\lambda_n) - \kappa Q_1(\lambda_n) = \lambda_n + \frac{d_1}{\lambda_n} + \frac{d_3}{\lambda_n^3} + \frac{d_5}{\lambda_n^5} + \dots$$

ただし

$$\begin{aligned} d_0 &= \kappa - a_1, & d_1 &= b_1 \kappa - a_2, & d_2 &= -b_2 \kappa + a_3 \\ d_3 &= -b_3 \kappa + a_4, & d_4 &= b_4 \kappa - a_5, & d_5 &= b_5 \kappa - a_6 \\ d_6 &= -b_6 \kappa + a_7 \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{\lambda_n Q_0(\lambda_n) + \kappa P_1(\lambda_n)}{\lambda_n P_0(\lambda_n) - \kappa Q_1(\lambda_n)} \doteq \frac{e_1}{\lambda_n} + \frac{e_3}{\lambda_n^3} + \frac{e_5}{\lambda_n^5} + \frac{e_7}{\lambda_n^7} + \dots$$

ただし

$$\begin{aligned} e_1 &= d_0, & e_5 &= d_4 - e_3 d_1 - e_1 d_3 \\ e_3 &= d_2 - e_1 d_1, & e_7 &= d_6 - e_5 d_1 - e_3 d_3 - e_1 d_5 \end{aligned}$$

と表わせる。

一方, $|x| \leq 1$, $x \neq \pm i$ ならば, 次の級数展開 (グレゴリの級数) が可能である。

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (\text{B-44})$$

(B-44)式を適用して (B-43)式のみ2項を級数展開すれば

$$\tan^{-1} \frac{\lambda_n Q_0(\lambda_n) + \kappa P_1(\lambda_n)}{\lambda_n P_0(\lambda_n) - \kappa Q_1(\lambda_n)} = \frac{k_1}{\lambda_n} + \frac{k_3}{\lambda_n^3} + \frac{k_5}{\lambda_n^5} + \frac{k_7}{\lambda_n^7} + \dots \quad (\text{B-45})$$

ただし

$$\begin{aligned} k_1 &= e_1, & k_5 &= e_5 - e_3 e_1^2 + e_1^5/5 \\ k_3 &= e_3 - e_1^3/3, & k_7 &= e_7 - e_5 e_1^2 - e_1 e_3^2 + e_3 e_1^2 - e_1^7/7 \end{aligned}$$

になる。そこで (B-45)式を (B-43)式の右边に代入すれば次式がえられる。

$$\beta \doteq \lambda_n + \frac{k_1}{\lambda_n} + \frac{k_3}{\lambda_n^3} + \frac{k_5}{\lambda_n^5} + \frac{k_7}{\lambda_n^7} + \dots \quad (\text{B-46})$$

(B-46)式に Reversion Method ^{(110)~(119)} を適用すれば, λ_n は β を用いて表わすことができる。すなわち (B-46)式の根 λ_n が

$$\lambda_n \doteq \beta + \frac{C_1}{\beta} + \frac{C_3}{\beta^3} + \frac{C_5}{\beta^5} + \frac{C_7}{\beta^7} + \dots \quad (\text{B-47})$$

と表わせると仮定すれば, (B-47)式を λ_n で微分して

$$1 = \beta' \left(1 - \frac{C_1}{\beta^2} - 3 \frac{C_3}{\beta^4} - 5 \frac{C_5}{\beta^6} - \dots - (2m+1) \frac{C_{2m+1}}{\beta^{2m+2}} - \dots \right)$$

そしてこの両辺に β^{2m+1} を掛ければ

$$\beta^{2m+1} = \beta' \left(\beta^{2m+1} - C_1 \beta^{2m-1} - \dots - (2m+1) \frac{C_{2m+1}}{\beta} - \dots \right) \quad (\text{B-48})$$

になる。

そこで (B-48)式の右边を λ_n で表わせれば $1/\lambda_n$ を含む項は β'/β の項から現われるだけであるから, 結局 β^{2m+1} を λ_n で表わしたときの $1/\lambda_n$ の係数は $-(2m+1)C_{2m+1}$ になる。そして β^{2m+1} に (B-46)式を代入して多項定理を適用し, $1/\lambda_n$ の係数を $-(2m+1)C_{2m+1}$ に等置すれば (B-47)式の係数 C_{2m+1} が k_{2i+1} を用いて次のように表わせる。

$$-C_1 = k_1$$

$$-C_3 = k_3 + k_1^2$$

$$-C_5 = k_5 + 4k_1k_3 + 2k_1^3$$

$$-C_7 = k_7 + 6k_1k_5 + 3k_3^2 + 15k_1^2k_3 + 5k_1^4$$

⋮

全く同様にして前項 (ii), (iv), (v) の場合について漸近根を求めることができた。