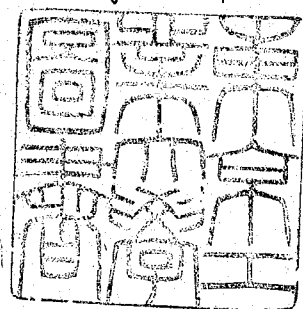


論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	統計的推定による速度計測の理論的研究
Title(English)	
著者(和文)	片山卓也
Author(English)	
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第397号, 授与年月日:1971年12月15日, 学位の種別:論文博士, 審査員:榎本 肇
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第397号, Conferred date:1971/12/15, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

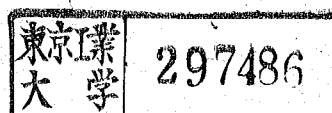
統計的推定による速度計測の

理論的研究



東京工業大学工学部電子物理工学科

片山卓也



目 次

第1章 序論

1.1 研究の背景	1
1.2 本研究の目的及び問題の記述	2
1.3 論文の構成	3

第2章 μ ラが2次線形過程で近似される場合の解析

2.1 緒言	5
2.2 推定量の導出	5
2.3 推定量の評価及び物理的意味	12
2.3.1 Taylor展開による $\hat{v}$ の評価の正当性	12
2.3.2 高次積率の評価	17
2.3.3 $\hat{v}$ の評価及び最適な α の決定	23
2.3.4 $\hat{v}$ の物理的意味	28
2.3.5 観測雑音の影響の検討	29
2.3.6 デジタル計算機によるシミュレーション	36
2.4 パラメータ α の実測	40
2.4.1 μ ラの記録波形が事前に入手可能なとき	40
2.4.2 μ ラの記録波形が事前に入手不可能なとき	41
2.4.3 合成微分による速度計測の可能性	43
2.5 2章のまとめ	48

第3章 μ ラが単純マルコフ過程で近似される場合の解析

3.1 緒言	49
--------	----

3.2	推定法について	50
3.3	観測雑音の存在しない時の速度の推定	51
3.3.1	推定量 $\hat{v}_s$ の導出	51
3.3.2	$\hat{v}_s$ の評価	53
3.4	弱い観測雑音を伴う場合の速度の推定	56
3.4.1	推定量 $\hat{v}_{s+N}$ の導出	56
3.4.2	$\hat{v}_{s+N}$ の評価	59
3.5	強い観測雑音を伴う場合の速度の推定	62
3.6	デジタル計算機によるシミュレーション	66
3.7	分布に関する未知パラメータの影響	69
3.8	パラメータ α の決定	74
3.9	時間的に連続な観測データへの取扱い	76
3.10	3章のまとめ	78

第4章 曲線あてはめ法による速度計測のシミュレーション 79

4.1	緒言	79
4.2	曲線あてはめ法による速度計測	79
4.3	シミュレーション・モデルの選定	83
4.4	シミュレーションの方法	86
4.5	シミュレーションの結果	90
4.6	4章のまとめ	93

第5章 結言 94

参考文献 98

付録 101

第1章 序論

1.1 研究の背景

帯状物体の移動速度を、それに人工的なマークをつけずに、かつ、非接触で測定しようとするのが考えられ、非接触速度計測として、幾つかの研究が行なわれている。この方法は、物体上に自然に存在するムラの波形を観測することにより、これから速度を求めようとするものであり、実用上の興味だけでなく、非常に限られた観測量から情報を抽出しようとする試みとして理論的にも興味ある問題である。

このような方法のうちで現在までに知られている代表的なものは、Butterfieldの相関法^{4),5)}とAforの空間フィルタ法^{6),7)}である。

Butterfieldの方法は、物体を一定距離だけ離れた2点で観測し、それらの観測信号の相互相関⁴⁾数が最大になるように一方の信号を遅延させ、その遅延量と2点間の距離から速度を求めようとするものである。彼はこの方法によって鉄板の走行速度を測定した。一方、Aforの方法は、物体を適当な選択波数を持った空間フィルタ(スリット列)を通して観測し、観測信号の周期とフィルタの波数から速度を求めようとするものであり、これは、はじめに飛行機の対地速度の測定に用いられた。これらの方法で特徴的なことは、ムラ波形のみの観測と若干の統計量の計算から速度を求めようとしていることである。

さて、ひるがえり、考えてみると、物体上のムラは不規則なものであり、ある確率過程に属するサンプル函数と考えるのが最も適当であり、したがってこのような考え方に立って速度の測定を行なうことが出来る筈であり、本論文ではこれについて考察する。

1.2 本研究の目的及び問題の記述

帯状物体上のムラの波形を $W(\xi)$ (ξ は適当な原点から測った距離) とするとき、これが速度 v を一方向に動くときに観測される信号は $X(t) = W(vt)$ となる。このとき、 $W(\xi)$ が確率過程であれば $X(t)$ も又確率過程となるが、明らかにこの確率過程の統計的性質は v によって変化する。したがって $X(t)$ についての観測量 $\mathcal{X} = \{X(t); t \in T\}$ が与えられると、これから物体の移動速度 v を統計的に推定することにより非接触速度計測が可能となる。本研究の目的は、このような立場から非接触速度計測を見直し、新しい原理による計測法が可能であることを理論的に調べることである。なお、このような研究は単に非接触速度計測にとどまらず、確率的現象の変化の速度を統計的に推定するという意味でも興味あるものである。しかし、具体的な計測装置の開発は本研究の目的ではない。

さて、本論文で扱う問題は、次のように定式化される。

“ $W(\xi)$ をムラを表わす確率過程、 $n(t)$ を観測雑音とし、

$$X(t) = W(vt) + n(t)$$

とするとき、観測データ

$$\mathcal{X} = \{X(t); t \in T\}$$

から、 v を統計的に推定せよ”

このように問題を設定したとき、推定量 $\hat{v}$ の構成法及びその推定誤差の理論的検討が本論文の主目的である。

1.3 論文の構成

さて、この問題を、ムラ、雑音の統計的性質が全く任意の場合について解析するのは困難であり、又、それ程面白い結果が得られるとは限らない。更に、現実の多くの場合、ムラは単純マルコフ過程あるいは、二次線形過程で又、観測雑音は白色雑音で近似され、^{4), 23), 24)}それはともに正規型であることが多く、このような場合には、推定量の導出及びその誤差評価を明確に行なうことが出来る。

したがって、本論文では、主にこの2つの場合を理論的に解析し、それによって統計的推定による非接触速度計測法の有効性を確かめた。又、デジタル計算機によるシミュレーションによってこれらのモデルが必ずしも適用出来るとは限らない場合についての解析を行なった。

以下本論文の構成について述べる。

第2章では、ムラが二次線形過程で近似され、観測が時間的に連続であり、かつ観測雑音が存在しない場合について論じてある。最尤推定法を使って、速度推定量の導出を行ない、その平均相対誤差、相対偏り率が調べられている。その結果、これが現実の条件のもとでは十分に意味のある推定量であること、及びこれが速度の測定法として基本的意味をもつものであることが明らかにされる。又、実際の測定条件との関連について、特に、ムラの統計的性質が既知でない場合の処理について、いっくらか考察がなされている。

第3章では、ムラが正規単純マルコフ過程で近似され、観測が、主に時間的に離散的である場合について、速度推定量を最尤推定法に抽出し、その漸近誤差をCramér-Rao Boundによって評価している。特に観測雑音の存在する場合についても調べられたが、通常の条件では雑音は十分に除去可能であることが明

らかにされた。又、ムラに含まれる未知パラメータの影響についても調べられている。

第4章では、より現実的な場合への応用として、統計的性質が未知のムラから、雑音を伴う時間的に連続な観測量が得られる場合の曲線あてはめ法による速度計測のシミュレーションが述べられる。推定量の導出方法として、ムラの自己相関関数を2次式で近似し、これと実測された観測信号の自己相関関数の値から速度を求める方法がとられている。デジタル計算機上で帯域制限白色型のムラを発生させ、これから上の方法で速度を求めるというシミュレーションを行ない、この方法の実用性について検討された。

なお、本論文を通して、数学的諸結果の証明等はなるべく付録として文末にまとめ、本文中ではその結果のみを挙げた。

第2章 ムラが2次線形過程で近似される

場合の解析

2.1 緒言

ここでは、ムラ $W(\xi)$ が2次線形過程で近似されるような正規定常確率過程であり、観測雑音を伴わない時間的に連続な観測量

$$X = \{X(t); X(t) = W(vt), 0 \leq t \leq T\} \quad (2-1)$$

が得られる場合について、速度推定量 $\hat{v}$ を導き、 $\hat{v}$ の統計的性質を調べることにより、通常の測定条件のもとでは、これが十分に満足ゆくものであることを明らかにする。特に、 $T \rightarrow \infty$ の時の $\hat{v}$ について調べることにより、 $\hat{v}$ が速度計測上基本的意味をもつものであることを明らかにする。又、 $W(\xi)$ に含まれる未知パラメータの実測に関連していくらかの考察を行なう。

なお、 $X(t)$ は必ずしも平均値 0 とは限らないが、その平均値について

$$E[X(t)] = E[W(\xi)] \quad (2-2)$$

が成立し、 v に無関係であり、これを予め $X(t)$ から差し引いておくことが出来る。よって以下では、 $X(t)$ は平均値 0 であるとして話を進める。

2.2 推定量の導出

実際に観測されるムラ $W(\xi)$ の自己相関関数 $R_W(\eta)$ は通常 η と共に減衰振動的に減少する。ここでは、この事実及び推定量をなるべく簡単な形で求めたいという計測装置としての要求を考えて、ムラのモデルとして次の2次線形過程を採用した。

$$\begin{cases} \frac{d^2 W}{d\xi^2} + a \frac{dW}{d\xi} + bW = Z(\xi) \\ E[Z(\xi)Z(\xi+\eta)] = \sigma^2 \delta(\eta) \end{cases} \quad (2-3)$$

この際、 a, b, σ^2 はムラの性質から何らかの方法により決定しなければならないが、これは次章において相対誤差

$$\sqrt{E\left[\left(\frac{v-\hat{v}}{v}\right)^2\right]}$$

が最小になるように決定された。ここでは

これらが求められたものとして話をすすめる。

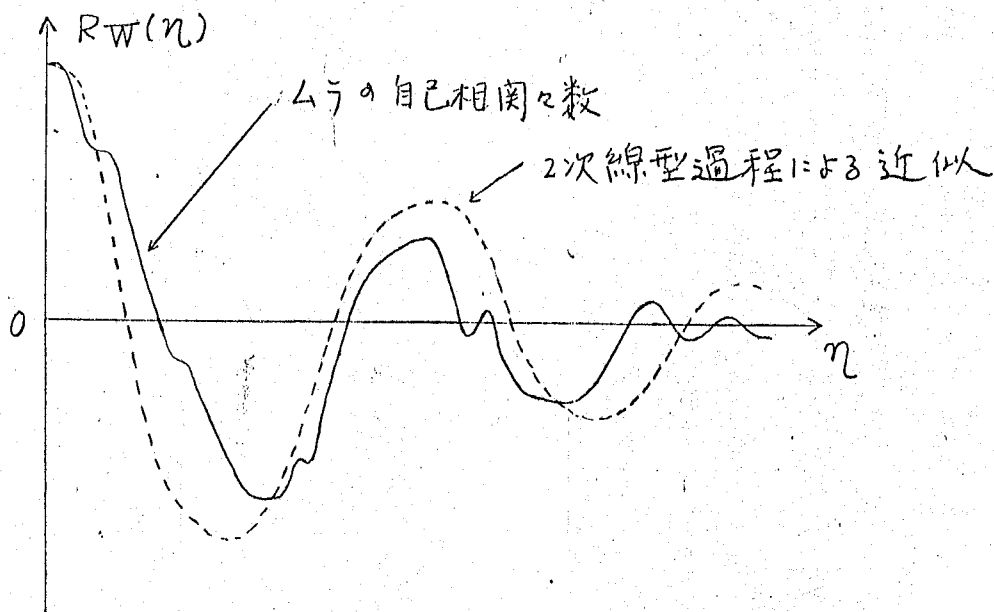


Fig 2-1. 物体上のムラの自己相関関数と、その2次線型過程による近似

このようにムラのモデルを定めたとき、 $X(t) = W(vt)$, $\delta(vt) = \delta(t)/v$ に注目すると、観測信号については次式が成立していることがわかる。

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} + \lambda \frac{dX}{dt} + \mu X = Y(t) \\ E[Y(t)Y(t+\tau)] = \rho^2 \delta(\tau) \\ \lambda = av, \mu = bv^2, \rho^2 = v^3 \sigma^2 \end{cases} \quad (2-4)$$

したがって、速度 v を求めるということは、線型システム(2-4)に含まれる未知パラメータ v を同定することと同値であることになるが、連続系では扱いにくいので、(2-4)式を次のような方法により離散化する。即ち、白色雑音 $Y(t)$ のスペクトル密度のうち、周波数が B cps以上の部分を切り捨て、帯域制限白色雑音 $Y_B(t)$ と定義し、これを $Y(t)$ の代りに(2-4)式の右辺に加える。更に、微分を差分で置きかえるとすれば、(2-4)式の離散モデルとして次式を得る。^{*}

$$\frac{X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n}{\Delta^2} + \lambda \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta} + \mu X_n = Y_n \quad (2-5)$$

ただし、 $\Delta = 1/2B$, $X_n = X(n/2B)$, $Y_n = Y_B(n/2B)$

このとき、 $Y_B(t)$ のスペクトル密度 $\Phi_{Y_B}(\omega)$ は、

$$\Phi_{Y_B}(\omega) = \begin{cases} \rho^2 & |\omega| \leq 2\pi B \\ 0 & |\omega| > 2\pi B \end{cases}$$

であるからその自己相関関数 $R_{Y_B}(\tau)$ は、

$$R_{Y_B}(\tau) = \int_{-B}^B \rho^2 e^{-j2\pi f\tau} df = \frac{\sin(2\pi B\tau)}{\pi\tau} \rho^2$$

となり、したがって次式が成立する。

$$E[Y_n Y_m] = R_{Y_B}((n-m)/2B) = 2B\rho^2 \delta_{m,n}$$

即ち、 $\{Y_n\}$ は分散が $2B\rho^2$ の独立過程である。よって、離散データ $\{X_n\}$ に対する同時確率分布は次式で与えられる。

$$p(X_3, X_4, \dots, X_{2TB}) = \frac{\partial[Y_1, Y_2, \dots, Y_{2TB-2}]}{\partial[X_3, X_4, \dots, X_{2TB}]} \cdot p(Y_1, Y_2, \dots, Y_{2TB-2})$$

ここで Jacobian $\partial[Y]/\partial[X]$ は (2-5)式より、

^{*}本来は(2-4)式を z -変換すべきであるが、最終的には $B \rightarrow \infty$ の場合しか問題にしないので、(2-5)式でも構わない。

$$\frac{\partial [Y_1, Y_2, \dots, Y_{2TB-2}]}{\partial [X_3, X_4, \dots, X_{2TB}]} = (\Delta^{-2})^{2TB-2} = (4B^2)^{2TB-2}$$

故に、

$$P(X_3, X_4, \dots, X_{2TB}) = (4B^2)^{2TB-2} (4\pi B\rho^2)^{-\frac{2TB-2}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4B\rho^2} \cdot\right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{2TB-2} \left(\frac{X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n}{\Delta^2} + \lambda \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta} + \mu X_n \right)^2 \right\} \quad (2-6)$$

したがって、 $\{X_3, X_4, \dots, X_{2TB}\}$ にもとづく ρ^2, λ, μ の最尤推定量は次の L を最小にする。

$$L = (2TB-2) \log \rho^2 + \frac{1}{2B\rho^2} \sum_{n=1}^{2TB-2} \left(\frac{X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n}{\Delta^2} + \lambda \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta} + \mu X_n \right)^2$$

故に λ, μ の最尤推定量は

$$\partial L / \partial \lambda = 0 \quad \partial L / \partial \mu = 0$$

より次式を得る。

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2TB-2} \left(\frac{X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n}{\Delta^2} + \lambda \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta} + \mu X_n \right) (X_{n+1} - X_n) = 0 \\ \sum_{n=1}^{2TB-2} \left(\frac{X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n}{\Delta^2} + \lambda \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta} + \mu X_n \right) X_n \Delta = 0 \end{cases} \quad (2-7)$$

ここで $B \rightarrow \infty$ とき、

$$\sum \frac{X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n}{\Delta^2} (X_{n+1} - X_n) \rightarrow \int_0^T \dot{X}(t) d\dot{X}(t)$$

及び他の項についても同様に考えることにより、 $B \rightarrow \infty$ とき、

λ, μ の満たすべき方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \int_0^T \dot{X} d\dot{X} + \lambda \int_0^T \dot{X} dX + \mu \int_0^T X dX = 0 \\ \int_0^T X d\dot{X} + \lambda \int_0^T X dX + \mu \int_0^T X^2 dt = 0 \end{cases}$$

これより μ を求めると、連続データ $\{X(t); 0 \leq t \leq T\}$ に対する $\hat{\mu}$ が次のようになる。

$$\hat{\mu} = \frac{\int_0^T \dot{X} dX \int_0^T X d\dot{X} - \int_0^T X dX \int_0^T \dot{X} d\dot{X}}{\int_0^T \dot{X}^2 dt \int_0^T \dot{X} dX - \left(\int_0^T X dX \right)^2}$$

とこから

$$\int_0^T X dX = \frac{1}{2} [X^2(T) - X^2(0)]$$

$$\int_0^T \dot{X} d\dot{X} = \frac{1}{2} [\dot{X}^2(T) - \dot{X}^2(0)]$$

$$\int_0^T \dot{X} dX = \int_0^T \dot{X}^2(t) dt$$

$$\int_0^T X d\dot{X} = [\dot{X}(T)X(T) - \dot{X}(0)X(0)] - \int_0^T \dot{X}^2(t) dt$$

が成立するから、 $\hat{\mu}$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{\left[\int_0^T \dot{X}^2(t) dt \right]^2 - [\dot{X}(T)X(T) - \dot{X}(0)X(0)] \int_0^T X^2(t) dt}{\int_0^T X^2(t) dt \int_0^T \dot{X}^2(t) dt - \frac{1}{4} [X^2(T) - X^2(0)]} \\ &= \frac{\frac{1}{4} [X^2(T) - X^2(0)] [\dot{X}^2(T) - \dot{X}^2(0)]}{\int_0^T X^2(t) dt \int_0^T \dot{X}^2(t) dt - \frac{1}{4} [X^2(T) - X^2(0)]} \end{aligned}$$

$X(t)$ に微分可能性を仮定すれば

$$\int_0^T X^2(t) dt, \int_0^T \dot{X}^2(t) dt = O(T)$$

であるから、 T が十分に大きければ、 $\hat{\mu}$ を次のように簡単化出来る。

$$\hat{\mu} = \frac{\int_0^T \dot{X}^2(t) dt}{\int_0^T X^2(t) dt} \quad (2-9)$$

なお、(2-8)式から、(2-9)式への簡単化が行えるための条件を、 $W(\xi)$ が帯域制限白色雑音である場合について調べてみると、 $W(\xi)$ の帯域中を ω_c とすると、 $E[W^2(\xi)] = 1$ とし

$$E\left[\int_0^T X^2 dt\right] = T$$

$$E\left[\int_0^T \dot{X}^2 dt\right] = \frac{1}{3} \omega_c^2 v^2 T$$

$$E[\dot{X}^2(t)] = \frac{1}{3} \omega_c^2 v^2$$

であるから、(2-8)式の分母の各項を別々にその平均値について評価すると、

$$\omega_c v T \gg 1$$

であれば、簡単化を行ってもよいことが容易にわかる。

通常の測定系ではこの条件は満たされている。

((2-24)式 についての説明を参照のこと)

一方、 μ と v の間には、 $\mu = bv^2$ なる関係が成立するから、 $\alpha \equiv \sqrt{b}$ とあくと、 v の推定量として次式を採用することが出来る。

$$\hat{v} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\int_0^T \dot{X}^2(t) dt}{\int_0^T X^2(t) dt}} \quad \text{ただし、} \alpha = \sqrt{b} \quad (2-10)^*$$

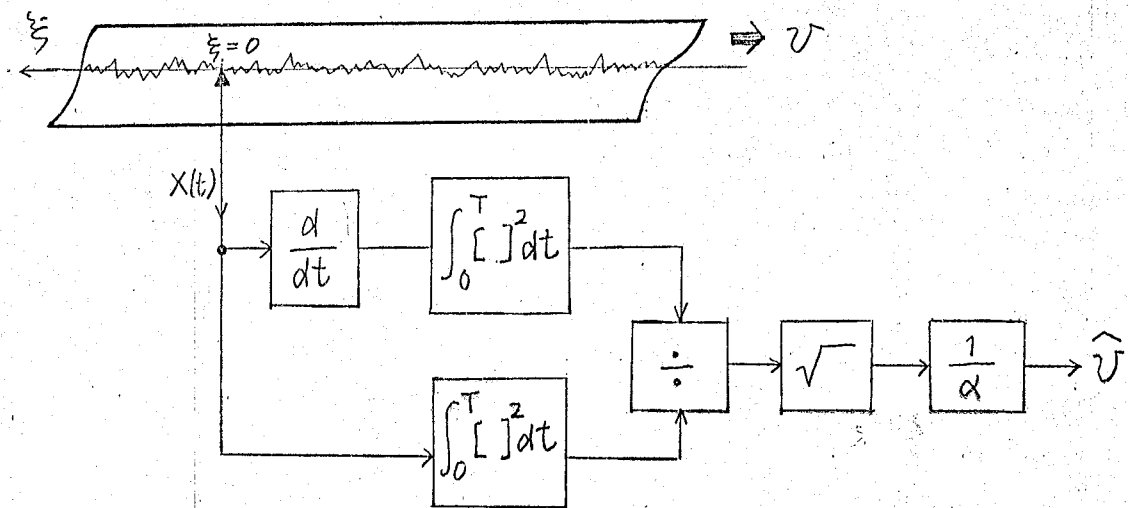


Fig 2-2. μ の統計量が既知の場合の速度測定法

* $\hat{\mu}$ は最尤推定量であるが、この $\hat{v}$ は最尤推定量ではない。勿論 $\partial L / \partial v = 0$ より最尤推定量を求めることが出来るし、又、 $\partial L / \partial \lambda, \partial L / \partial \rho^2 = 0$ からも $\hat{v}$ を求めることが出来る。しかしながら、これらの $\hat{v}$ は2次線型モデル(2-3)に対して良い推定量であるが、2階微分の存在するような実際の μ に対しては、必ずしも適当な推定量にはなっていない。

2.3 推定量の評価及び物理的意味

ここでは(2-10)式で与えられる $\hat{v}$ の統計的性質を調べ、最適な α の値を決定する。2.2では、 α の値が求められたという条件のもとで $\hat{v}$ を求めたが、(2-10)式をみても明らかなように、 α の決定は $\hat{v}$ の精度に直接影響する重要な問題である。

α を決定する一つの方法は、2次線型過程(2-3)の自己相関函数と $RW(\eta)$ との差の自乗積分を最小にするように α を決めることであるが、これでは得られる α の値と $\hat{v}$ の最適性の基準が直接関係せず面白くない。

以下では、 $\hat{v}$ の自乗平均誤差及び偏りを評価することにより、観測時間 T が長い場合について、ほぼ最適である α の値を決定した。

2.3.1 Taylor 展開による $\hat{v}$ の評価の正当性

$$x = \frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt \quad y = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}^2(t) dt$$

とみると、

$$\hat{v} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$\hat{v}$ を直接評価するのは困難であるので、ここではこれと $m_x = E[x]$,

$m_y = E[y]$ のまわりで Taylor 展開して行う。こゝで x, y は確率変数であるから、これにはいくつかの注意が必要である。

以下では、この Taylor 展開による評価が可能であるための条件について考察する。

[定義] $x_1, x_2, \dots$: 確率変数列
 $r_1, r_2, \dots$: 正数列

とあるとき、もし

$$\frac{x_n}{r_n} \rightarrow 0 \text{ in Prob. 即ち } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{x_n}{r_n}\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ for } \forall \varepsilon > 0$$

が成立するならば、次のような記法を用いる。

$$x_n = o_p(r_n)$$

—— 定義終り ——

このとき、次の定理の成立する、ことが知られている。⁹⁾

[定理 1] 実函数 $f(x, y, \dots)$ が $(x_0, y_0, \dots)$ のまわりで s 回連続微分可能とする。更に、確率変数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \dots$ について

$$x_n = x_0 + o_p(r_n), \quad y_n = y_0 + o_p(r_n), \dots$$

とすれば次式が成立する。

$$f(x_n, y_n, \dots) = \sum_{\nu=0}^{s-1} \frac{1}{\nu!} \left[(x_n - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - y_0) \frac{\partial}{\partial y} + \dots \right]^\nu f(x_0, y_0, \dots) + o_p(r_n^s)$$

—— 定理終り ——

この定理をもとに、Taylor 展開による $\hat{\mu}$ の評価の妥当性について述べる。

[補題 1] 平均 0 の正規定常過程 $X(t)$ の自己相関関数 $R_X(\tau)$ について、

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_X^2(\tau) d\tau, \quad \int_{-\infty}^{\infty} R_X''^2(\tau) d\tau < \infty$$

が成立すると仮定する。このとき、

$$x_n = \frac{1}{n} \int_0^n \dot{X}^2(t) dt, \quad y_n = \frac{1}{n} \int_0^n X^2(t) dt$$

とすると、 $0 < \forall \delta < \frac{1}{2}$ に対して

$$x_n = E[\dot{X}^2(t)] + o_p\left(\frac{1}{n^\delta}\right)$$

$$y_n = E[X^2(t)] + o_p\left(\frac{1}{n^\delta}\right)$$

(証明-補題 1)

$$\begin{aligned} E\{y_n - E[X^2(t)]\}^2 &= \frac{1}{n^2} \int_0^n \int_0^n E[(X^2(t) - E[X^2]) (X^2(s) - E[X^2])] dt ds \\ &= \frac{1}{n^2} \int_0^n \int_0^n (E[X^2(t) X^2(s)] - E^2[X^2(t)]) dt ds \end{aligned}$$

$X(t)$ の正規性を使うと、

$$= \frac{2}{n^2} \int_0^n \int_0^n R_X^2(t-s) dt = \frac{2}{n} \int_{-n}^n R_X^2(\tau) d\tau$$

よって、

$$E\left[\left(\frac{y_n - E[X^2(t)]}{\frac{1}{n^\delta}}\right)^2\right] = \frac{2}{n^{1+2\delta}} \int_{-n}^n R_X^2(\tau) d\tau$$

$1-2\delta > 0$ であり、又、 R_X についての仮定から、 $n \rightarrow \infty$ のとき、上式右辺は 0 に収束する。更に、平均収束 $\Rightarrow$ 確率収束がいえるから次式を得る。

$$y_n = E[X^2(t)] + o_p\left(\frac{1}{n^\delta}\right)$$

x_n についても同様である。

— 証明終り —

したがって、このとき $Y_n = \frac{1}{n^\delta}$ に対し、定理 1 の条件が満足されるから、 $f(x, y)$ を s 回連続微分可能な任意の実函数とすると、

$$\begin{aligned} f(x_n, y_n) &= \sum_{v=0}^{s-1} \frac{1}{v!} \left[(x_n - m_x) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - m_y) \frac{\partial}{\partial y} \right]^v f(m_x, m_y) \\ &\quad + o_p\left(\frac{1}{n^{\delta s}}\right) \end{aligned}$$

ここで

$$m_x = E[\dot{X}^2(t)], \quad m_y = E[X^2(t)]$$

ところが、確率収束 $\Rightarrow$ 法則収束がいえるから、次式を得る。

[定理 2]

$$\begin{aligned} E[f(x_n, y_n)] &= \sum_{v=0}^{s-1} \frac{1}{v!} E \left[(x_n - m_x) \frac{\partial}{\partial x} + (y_n - m_y) \frac{\partial}{\partial y} \right]^v f(m_x, m_y) \\ &\quad + o\left(\frac{1}{n^{\delta s}}\right) \end{aligned}$$

ところから、

$$f(x, y) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{x}{y}}$$

は無限回微分可能であり、又、 $X(t)$ の自己相関関数は補題1の条件を満たしているから、結局 $\hat{v}$ の評価に Taylor 展開を用いても漸近的 ($T \rightarrow \infty$) には正しい。

形式的に $\hat{v}$ を (m_x, m_y) のまわりで展開すると、

$$\begin{aligned} \hat{v} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m_y}{m_x}} & \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x-m_x}{m_x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y-m_y}{m_y} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{x-m_x}{m_x} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{x-m_x}{m_x} \right) \left(\frac{y-m_y}{m_y} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{y-m_y}{m_y} \right)^2 + \sum_{i+j \geq 3} \delta_{ij} \left(\frac{x-m_x}{m_x} \right)^i \left(\frac{y-m_y}{m_y} \right)^j \right\} \end{aligned}$$

よって今迄しうべしまたことより、 T が十分大ければ、

$$\begin{aligned} E[\hat{v} - v] &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m_y}{m_x}} - v \\ &+ \frac{1}{4\alpha} \sqrt{\frac{m_y}{m_x}} \left\{ 3 E \left(\frac{x-m_x}{m_x} \right)^2 - E \left(\frac{x-m_x}{m_x} \right) \left(\frac{y-m_y}{m_y} \right) - E \left(\frac{y-m_y}{m_y} \right)^2 \right\} \\ &+ \sum_{i+j \geq 3} \delta_{ij} E \left(\frac{x-m_x}{m_x} \right)^i \left(\frac{y-m_y}{m_y} \right)^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(\hat{v} - v)^2] &= \left(\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m_y}{m_x}} - v \right)^2 \\ &+ \frac{1}{4\alpha^2} \frac{m_y}{m_x} \left\{ E \left(\frac{x-m_x}{m_x} \right)^2 - 2 E \left(\frac{x-m_x}{m_x} \right) \left(\frac{y-m_y}{m_y} \right) + E \left(\frac{y-m_y}{m_y} \right)^2 \right\} \\ &+ \sum_{i+j \geq 3} \delta_{ij} E \left(\frac{x-m_x}{m_x} \right)^i \left(\frac{y-m_y}{m_y} \right)^j \end{aligned}$$

2.3.2 高次積率の評価

上記導いた式によって $E[\hat{v}-v]$, $E[(\hat{v}-v)^2]$ を求めるには、積率 $E\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right)^i \left(\frac{y-m_y}{m_y}\right)^j$ の値を調べる必要がある。

ここでは、一般に、 $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ を平均 0 のガウス過程とし、更に、

$$x_i = \frac{1}{T} \int_0^T X_i^2(t) dt \quad m_i = E[x_i] \quad i=1, 2, \dots, n$$

とするとき、次の M の大きさを評価する。

$$M = E \left[\frac{(x_1 - m_1) \dots (x_n - m_n)}{m_1 \dots m_n} \right] \quad (2-11)$$

$X_i(t)$ の分散を σ_i^2 とすると、 $m_i = \sigma_i^2$, よって次式が成立する。

$$\begin{aligned} & E[(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) \dots (x_n - m_n)] \\ &= \frac{1}{T^n} \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T E[(X_1^2(t_1) - \sigma_1^2)(X_2^2(t_2) - \sigma_2^2) \dots (X_n^2(t_n) - \sigma_n^2)] dt_1 \dots dt_n \end{aligned} \quad (2-12)$$

このとき、上式の右辺の被積分函数について次の[補題2]が成立する。

[補題2]

$X_1, X_2, \dots, X_n$ を平均 0, 分散 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ の正規分布に従う確率変数とすると次式が成立する。

$$\begin{aligned} E[(X_1^2 - \sigma_1^2)(X_2^2 - \sigma_2^2) \dots (X_n^2 - \sigma_n^2)] &= \sum E[X_{\lambda_1} X_{\mu_1}] E[X_{\lambda_2} X_{\mu_2}] \dots E[X_{\lambda_n} X_{\mu_n}] \\ &\quad (\lambda_i, \mu_i) \in P\{1, 1, \dots, n, n\} \\ &\quad \lambda_i + \mu_i \end{aligned} \quad (2-13)$$

ここで、 $P\{a_1, a_2, \dots, a_{2n}\}$ は、 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ と重複を許さずに、 n の unordered pair $(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_n, \mu_n)$ に分割する方法 $(\lambda, \mu) = [(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_n, \mu_n)]$ の集合とする。
たとえば、 $P\{1, 2, 3, 4\} = \{[(1, 2), (3, 4)], [(1, 3), (2, 4)], [(1, 4), (2, 3)]\}$

[証明]

(2-13)式の左辺の $[]$ のなかを展開する。

$$\begin{aligned} E[(X_1^2 - \sigma_1^2)(X_2^2 - \sigma_2^2) \dots (X_n^2 - \sigma_n^2)] \\ = \sum_{p=0}^n (-1)^p \sum_{\substack{k_i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ k_i \neq k_j}} \sigma_{k_1}^2 \sigma_{k_2}^2 \dots \sigma_{k_p}^2 E[X_{k_{p+1}}^2 \dots X_{k_n}^2] \quad (2-14) \end{aligned}$$

ところが、一般に、 ξ_i を平均値 0 の正規分布に従う確率変数とすると、次式が成立することが知られている。⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} E[\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{2n}] = \sum_{\substack{\lambda_i, \mu_i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \lambda_i \neq \mu_i, \lambda_i \neq \lambda_j, \mu_i \neq \mu_j}} E[\xi_{\lambda_1} \xi_{\mu_1}] E[\xi_{\lambda_2} \xi_{\mu_2}] \dots E[\xi_{\lambda_n} \xi_{\mu_n}] \quad (2-15) \end{aligned}$$

この式を使うと、

$$E[X_{k_{p+1}}^2 \dots X_{k_n}^2] = \sum_{r=0}^{n-p} \sum_{i_s \in \{k_{p+1}, \dots, k_n\}} \sigma_{i_1}^2 \dots \sigma_{i_r}^2 \sum_{(\lambda', \mu') \in P(K)} E[X_{\lambda_{r+1}} X_{\mu_{r+1}}] \dots E[X_{\lambda_{n-p}} X_{\mu_{n-p}}] \quad (2-16)$$

$$\text{ただし、} (\lambda', \mu') = [(\lambda_{r+1}, \mu_{r+1}), \dots, (\lambda_{n-p}, \mu_{n-p})]$$

$$K = \{k_{p+1}, k_{p+1}, \dots, k_n, k_n\} - \{i_1, i_1, \dots, i_r, i_r\}$$

(2-16) を (2-14) 式に代入して、(2-14) 式を $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ を変数とする多項式とみたて、 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ の係数 $C_1, C_2, \dots, C$ を求めると $(\lambda'', \mu'') = [(\lambda_{l+1}, \mu_{l+1}), \dots, (\lambda_n, \mu_n)]$ として

$$C_{12 \dots e} = \sum_{p=0}^e (-1)^p {}_e C_p \sum_{(\lambda, \mu) \in P\{e+1, e+1, \dots, n, n\}} E[X_{\lambda_{e+1}} X_{\mu_{e+1}}] \dots E[X_{\lambda_n} X_{\mu_n}]$$

$$= \begin{cases} (1-1)^e \sum E[X_{\lambda_{e+1}} X_{\mu_{e+1}}] \dots E[X_{\lambda_n} X_{\mu_n}] = 0 & \text{for } e \neq 0 \\ \sum_{\substack{(\lambda, \mu) \in P\{1, 1, \dots, n, n\} \\ \lambda_i \neq \mu_i}} E[X_{\lambda_1} X_{\mu_1}] E[X_{\lambda_2} X_{\mu_2}] \dots E[X_{\lambda_n} X_{\mu_n}] & \text{for } e = 0 \end{cases}$$

したがって、(付8)式について次式が成立する。

$$E[(X_1^2 - \sigma_1^2)(X_2^2 - \sigma_2^2) \dots (X_n^2 - \sigma_n^2)] = \sum_{\substack{(\lambda, \mu) \in P\{1, 1, \dots, n, n\} \\ \lambda_i \neq \mu_i}} E[X_{\lambda_1} X_{\mu_1}] E[X_{\lambda_2} X_{\mu_2}] \dots E[X_{\lambda_n} X_{\mu_n}]$$

——証明終り——

更に、(2-13)式の右辺の和を次に述べるように分割する。

$\{1, 1, \dots, n, n\}$ の分割の仕方の集合

$$P^n \equiv \{(\lambda, \mu) \mid (\lambda, \mu) \in P\{1, 1', 2, 2', \dots, n, n'\}, \lambda_i \neq \mu_i\}$$

を互に素な部分集合 $P_0, P_1, P_2, \dots$ に分ける。

$$P^n = \bigcup_{i=0} P_i \quad P_i \cap P_j = \phi \quad (i \neq j) \quad (2-17)$$

ただし、上式において、 P_i は 相等しい 2^i の pair が丁度 i 対あるような分割の集合とする。このとき、

(λ, μ) が P_i の上を動くときの和を $\sum_i \equiv \sum_{(\lambda, \mu) \in P_i}$ とすると

$$\sum_{(\lambda, \mu) \in P^n} = \sum_0 + \sum_1 + \sum_2 + \dots \quad (2-18)$$

(2-18) 式を使って (2-13) を書き直すと、

n が偶数のときには、(付ク) は次のようになる。($n=2k$)

$$\begin{aligned}
 & E[(X_1^2 - \sigma_1^2)(X_2^2 - \sigma_2^2) \cdots (X_n^2 - \sigma_n^2)] \\
 &= \sum_k E^2[X_{\lambda_1} X_{\mu_1}] E^2[X_{\lambda_2} X_{\mu_2}] \cdots E^2[X_{\lambda_k} X_{\mu_k}] \\
 &+ \sum_{k=2} E^2[X_{\lambda_1} X_{\mu_1}] \cdots E^2[X_{\lambda_{k-2}} X_{\mu_{k-2}}] E[X_{w_1} X_{w_2}] E[X_{w_2} X_{w_3}] \\
 &+ \cdots E[X_{w_3} X_{w_4}] E[X_{w_4} X_{w_1}] \\
 &+ \sum_0 E[X_{w_1} X_{w_2}] E[X_{w_2} X_{w_3}] \cdots E[X_{w_n} X_{w_1}] \quad (2-19)
 \end{aligned}$$

したがって、 $X_{\lambda}(t)$, $X_{\mu}(t)$ の自己相関関数を

$$E[X_{\lambda}(t) X_{\mu}(s)] = R_{\lambda\mu}(t-s)$$

とおき (2-19) 式を使うと (2-12) 式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 & E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2) \cdots (X_n - m_n)] \cdot T^n \\
 &= \sum_k \left[\int_0^T \int_0^T R_{\lambda_1 \mu_1}^2(t-s) dt ds \right] \left[\int_0^T \int_0^T R_{\lambda_2 \mu_2}^2(t-s) dt ds \right] \cdots \left[\int_0^T \int_0^T R_{\lambda_k \mu_k}^2(t-s) dt ds \right] \\
 &+ \sum_{k=2} \left[\int_0^T \int_0^T R_{\lambda_1 \mu_1}^2(t-s) dt ds \right] \cdots \left[\int_0^T \int_0^T R_{\lambda_{k-2} \mu_{k-2}}^2(t-s) dt ds \right] \left[\int_0^T \int_0^T \int_0^T R_{w_1 w_2}(t_1 - t_2) \right. \\
 &\quad \cdot R_{w_2 w_3}(t_2 - t_3) R_{w_3 w_4}(t_3 - t_4) R_{w_4 w_1}(t_4 - t_1) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \\
 &\quad + \cdots \\
 &\quad \left. + \sum_0 \int_0^T \cdots \int_0^T R_{w_1 w_2}(t_1 - t_2) R_{w_2 w_3}(t_2 - t_3) \cdots R_{w_n w_1}(t_n - t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_n \right] \quad (2-20)
 \end{aligned}$$

一方、上式中の多重積分について、次の評価式が成立する。

[補題 3]

$$R_{\lambda\mu}(\tau) = 0 \text{ for } |\tau| > \Delta t, \quad \Delta t \ll T$$

とすると、

$$I_r = \int_0^T \int_0^T \cdots \int_0^T R_{12}(t_1 - t_2) R_{23}(t_2 - t_3) \cdots R_{r1}(t_r - t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_r$$

$$\leq k_{12} \cdots r \cdot \Delta t^{r-1} T, \quad k_{12} \cdots r : T, \Delta t \text{ によらない定数}$$

[証明]

被積分函数は、 r 次元空間中の領域

$$I_r = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_r) \mid |t_1 - t_2| \leq \Delta t, \dots, |t_r - t_1| \leq \Delta t, 0 \leq t_1, \dots, t_r \leq T \right\}$$

の外側では恒等的に0である。よって、 I_r の中での最大値を $k_{12} \cdots r$ とし、又、 I_r の体積を $\text{vol}(I_r)$ とすると、

$$I_r \leq k_{12} \cdots r \cdot \text{vol}(I_r)$$

このとき、

$$k_{12} \cdots r = R_{12}(0) R_{23}(0) \cdots R_{r1}(0)$$

であるから、 $k_{12} \cdots r$ は $T, \Delta t$ によらない定数である。

又 I_r の体積は $T \gg \Delta t$ のもとでは、 $T \Delta t^{r-1}$ と考えてよいから、結局

$$I_r \leq k_{12} \cdots r T \Delta t^{r-1}$$

—— 証明終り ——

これを (2-20) 式に代入すると、

n が偶数のときは、

$$E[(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) \cdots (x_n - m_n)] \cdot T^n \\ \leq a_{12 \cdots n} \Delta_t^{\frac{n}{2}} T^{\frac{n}{2}} + b_{12 \cdots n} \Delta_t^{\frac{n}{2}+1} T^{\frac{n}{2}-1} + \cdots + c_{12 \cdots n} \Delta_t^{n-1} T$$

n が奇数のときにも同様の式が成立し、これらをまとめると結局次式を得る。

$$E[(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) \cdots (x_n - m_n)] \cdot T^n \\ \leq a_{12 \cdots n} \Delta_t^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} T^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + b_{12 \cdots n} \Delta_t^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1} T^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} + \cdots + c_{12 \cdots n} \Delta_t^{n-1} T$$

$\lceil \cdot \rceil$: ガウス記号

したがって、 $T \gg \Delta_t$ であれば M について2次の評価式が成立する。

[定理3]

$$M = O\left(\left(\frac{\Delta_t}{T}\right)^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}\right) \quad (2-21)$$

ここに特に、

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) = \cdots = x_i(t) \equiv x(t) \\ x_{i+1}(t) = \cdots = x_{i+j}(t) \equiv \dot{x}(t) \end{cases}$$

とあくとき

$R_X(z) = 0$ ($|z| > \Delta_t$) であるから、 $R'_X(z), R''_X(z) = 0$ ($|z| > \Delta_t$) であり、[Lemma 3] の条件は満たされる。

したがって、 $\Delta_t = \Delta e / v$, $n = i + j$ に注意して次式を得る。

[系]

$$E\left[\left(\frac{x - m_x}{m_x}\right)^i \left(\frac{y - m_y}{m_y}\right)^j\right] = O\left(\left(\frac{\Delta e}{vT}\right)^{\lceil \frac{i+j+1}{2} \rceil}\right) \quad (2-22)$$

2.3.3 $\hat{v}$ の評価及び最適な α の決定

通常の測定系では、条件

$$\begin{cases} R_W(\xi), R'_W(\xi), R''_W(\xi) = 0 & \text{for } |\xi| > \Delta_L \\ \Delta_L \ll vT \end{cases}$$

は満足されており、したがって、(2-22) 式より 3 次以上の積率は省略しても構わない。

事実、4 ラが遮断角波数 $\omega_c^{\text{rad/m}}$ の帯域制限白色型があるとき、即ち、そのスペクトル密度 $\Phi_W(\omega)$ が

$$\begin{aligned} \Phi_W(\omega) &= 0 & \text{for } |\omega| > \omega_c \\ &= \Phi_0 & \text{for } |\omega| \leq \omega_c \end{aligned} \quad (2-23)$$

の時には、

$$\omega_c vT \geq 400 \quad (2-24)$$

なる条件のもとで、3 次及び 4 次の積率は 2 次の積率の 10% 弱であることが示されるが、その詳細については付録 1 を参照されたい。

例えば、 $v = 10 \text{ m/sec}$ 、 $T = 0.1 \text{ sec}$ とすると、(2-14) 式は、

$$\omega_c \geq 400 \text{ rad/m}$$

となるが、通常の紙やある程度滑らかな金属表面等はこの条件を満たしている。(4), (7), (24)

したがって以下では 3 次以上の積率を無視して $E[\hat{v}-v]$, $E[(\hat{v}-v)^2]$ を計算する。

4 ラ $W(\xi)$ 及びその微分 $W'(\xi)$ の分散を σ_W^2 , $\sigma_{\dot{W}}^2$ とすると、

$X(t) = W(vt)$ より

$$m_x = \sigma_W^2, \quad m_y = v^2 \sigma_{\dot{W}}^2 \quad (2-25)$$

更に

$$E[(x-m_x)^2] = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[X^2(t)X^2(s)] dtds - m_x^2$$

$X(t)$ がガウス過程であるから.

$$E[X^2(t)X^2(s)] = 2E^2[X(t)X(s)] + E^2[X^2(t)]$$

したがって,

$$\begin{aligned} E[(x - m_x)^2] &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T (2E^2[X(t)X(s)] + E^2[X^2(t)]) dt ds - m_x^2 \\ &= \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_x^2(t-s) dt ds + \sigma_w^4 - m_x^2 \\ &= \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_x^2(t-s) dt ds \\ &= \frac{2}{v^2 T^2} \int_0^{vT} \int_0^{vT} R_w^2(\xi - \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

より一般的な,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^T \cdots \int_0^T R_1(\tau_1 - \tau_2) R_2(\tau_2 - \tau_3) \cdots R_n(\tau_n - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\omega) \Phi_2(\omega) \cdots \Phi_n(\omega) d\omega \end{aligned}$$

where

$$R_i(\tau) = 0 \quad \text{for } |\tau| > T$$

Φ_i : R_i の Fourier 変換

が成立することからわかるので (付録 2 参照), $E[(x - m_x)^2]$ は次のようになる。

$$E[(x - m_x)^2] = \frac{1}{\pi v T} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_w^2(\omega) d\omega$$

故に.

$$E\left[\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right)^2\right] = \frac{1}{\pi v_T \sigma_{\dot{W}}^4} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\dot{W}}^2(\omega) d\omega \quad (2-26)$$

こゝで.

$$\begin{cases} E[\dot{X}(t)X(s)] = R_{\dot{X}}(t-s) \\ E[\dot{X}(t)\dot{X}(s)] = -R_{\dot{X}}''(t-s) \end{cases}$$

に注意すると、(2-26)式と同様に次の2式が成立することがわかる。

$$E\left[\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right)\left(\frac{y-m_y}{m_y}\right)\right] = \frac{1}{\pi v_T \sigma_{\dot{W}}^2 \sigma_{\dot{W}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \Phi_{\dot{W}}^2(\omega) d\omega \quad (2-27)$$

$$E\left[\left(\frac{y-m_y}{m_y}\right)^2\right] = \frac{1}{\pi v_T \sigma_{\dot{W}}^4} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \Phi_{\dot{W}}^2(\omega) d\omega \quad (2-28)$$

したがって、ここで求めた諸式(2-25)~(2-28)を使うと、 $v_T \gg \Delta l$ なる条件のもとで次式が成立する。

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\hat{v}-v}{v}\right] &= \left(\frac{\sigma_{\dot{W}}}{\alpha \sigma_{\dot{W}}} - 1\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi v_T} \left(\frac{\sigma_{\dot{W}}}{\alpha \sigma_{\dot{W}}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{\sigma_{\dot{W}}^4} - \frac{\omega^2}{\sigma_{\dot{W}}^2 \sigma_{\dot{W}}^2} - \frac{\omega^4}{\sigma_{\dot{W}}^4}\right) \Phi_{\dot{W}}^2(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (2-29)$$

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2\right] &= \left(\frac{\sigma_{\dot{W}}}{\alpha \sigma_{\dot{W}}} - 1\right)^2 \\ &+ \frac{1}{4\pi v_T} \left(\frac{\sigma_{\dot{W}}}{\alpha \sigma_{\dot{W}}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_{\dot{W}}^2} - \frac{\omega^2}{\sigma_{\dot{W}}^2}\right)^2 \Phi_{\dot{W}}^2(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (2-30)$$

以上で(2-10)式で与えられる $\hat{v}$ の偏り率及び相対誤差を求めることが出来た。前にも述べた通り、 $\hat{v}$ を導いた時には定数 α は与えられたものとしたのであるが、以下においては(2-29)、(2-30)式を使、 α の値を決定する。

(2-29), (2-30) 式をみて明らかのように、 $\hat{v}$ の偏り率及び相対誤差はともに二項よりなり、その第一項は観測時間には依存せず、第二項は T に反比例して減少する。故に観測時間が長い場合には、その第一項が消えるように α を選ぶのが得策である。

$$\frac{\sigma_{\dot{w}}}{\alpha \sigma_w} = 1$$

即ち、

$$\alpha = \frac{\sigma_{\dot{w}}}{\sigma_w} = \sqrt{\frac{-R''_w(0)}{R_w(0)}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \Phi_w(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_w(\omega) d\omega}} \quad (2-31)$$

このときには、 $\hat{v}$ 及びその偏り率、相対誤差は次式のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{v} &= \frac{\sigma_w}{\sigma_{\dot{w}}} \sqrt{\frac{\int_0^T \dot{x}^2(t) dt}{\int_0^T x^2(t) dt}} \\ E\left[\frac{\hat{v}-v}{v}\right] &= \frac{1}{4\pi v T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{\sigma_w^4} - \frac{\omega^2}{\sigma_w^2 \sigma_{\dot{w}}^2} - \frac{\omega^4}{\sigma_{\dot{w}}^4} \right) \Phi_w^2(\omega) d\omega \quad (2-32) \\ E\left[\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2\right] &= \frac{1}{4\pi v T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_w^2} - \frac{\omega^2}{\sigma_{\dot{w}}^2} \right)^2 \Phi_w^2(\omega) d\omega \end{aligned} \right.$$

これで $vT \gg \Delta t$ なる範囲で有効な速度の推定量及びその偏り率、相対誤差を評価することが出来た。その結果、 $\hat{v}$ の偏り率及び相対誤差は、速度 v 及び観測時間 T あるいはその平方根に反比例して減少することがわかる。本来 (2-10) 式の $\hat{v}$ は μ が 2 次線型過程に十分に近いという仮定で導いたものであるが、(2-32) 式で見る限り、 $vT \gg \Delta t$ なる条件を満足する μ に対してはかなり良い性質の推定量になっている。

特に μ が band-limited white のときについて計算すると、

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \Phi_0 d\omega = \frac{\omega_c \Phi_0}{\pi}, \quad \sigma_{\dot{w}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \omega^2 \Phi_0 d\omega = \frac{\omega_c^3 \Phi_0}{3\pi} \quad T \text{ から}$$

$$\begin{cases} E\left[\frac{\hat{v}-v}{v}\right] = -\frac{\pi^2}{15 \omega_c v T} \\ E\left[\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2\right] = \frac{2\pi}{5 \omega_c v T} \end{cases} \quad (2-33)$$

即ち、速度、測定時間が大きい程、又ムラがこまかい程 $\hat{v}$ の誤差が小さい。更に $\omega_c v T = 2000$ ((2-14) 式についての説明を参照のこと) とすると

$$E\left[\frac{\hat{v}-v}{v}\right] = 0.05\%, \quad \sqrt{E\left[\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2\right]} = 2.5\%$$

となり、 $\hat{v}$ が速度の推定量としてほぼ満足すべきものであることがわかる。

更に、(2-32) 式の $\hat{v}$ は微分が存在するような任意の定常なムラに対して、一致推定量になっていることが次のようにして確かめられる。このことは、たとえムラがガウス型でなくとも、定常で滑らかでさえあれば $\hat{v}$ を推定量として用いることができることを示している。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{v} = \sqrt{\frac{R_W(0)}{-R_W''(0)}} \cdot \sqrt{\frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}^2(t) dt}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}^2(t) dt}}$$

観測信号の自己相関数を $R_X(\tau)$ とすると、

$$= \sqrt{\frac{R_W(0)}{-R_W''(0)}} \cdot \sqrt{\frac{-R_X'(0)}{R_X(0)}} \quad \text{with prob. 1} \quad (2-34)$$

$$= v \quad (\because R_X(\tau) = R_W(v\tau))$$

2.3.4 $\hat{v}$ の物理的意味

Rice⁸⁾ によれば、定常ガウス過程(平均値0) $G(t)$ の単位時間当りの平均零点交叉回数 ν_G は次式により与えられる。

$$\nu_G = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{-R_G''(0)}{R_G(0)}}$$

ただし、

$R_G(\tau)$: $G(t)$ の自己相関函数

したがって、ムラ $W(\xi)$ の単位長さ当りの平均零点交叉回数を ν_W 、観測信号 $X(t)$ の単位時間当りのそれを ν_X とすると、(2-24) 式より次式が成立していることがわかる。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{v} = \frac{\nu_X}{\nu_W} = \frac{1}{\nu_W} \cdot \nu_X \quad (2-35)$$

上式において $1/\nu_W$ がムラの零点間の平均距離を表わすことを考えると、 $\hat{v}$ の物理意味が明らかとなる。即ち、この $\hat{v}$ は、観測時間が十分に長いときには、物体が単位時間内に動く距離を、単位時間内に観測ヘッドを通過するムラの零点の個数と零点間の平均距離から求めて速度を算出していることになる。帯状物体の速度を観測するときよく用いられる方法に、物体の長さ方向に一定間隔で多数のマークをつけ、観測点を単位時間内に通過するマークの数から速度を求める方法があるが、人為的にマークをつけずに自然に存在するムラを利用したのが、 $T \rightarrow \infty$ における $\hat{v}$ に相当している。

このように速度計測法として基本的意味をもつものが、統計的推定におけるある種の最適条件(最尤法)から導かれるということは、興味深い。

なお、速度計測の他の方法に、ある間隔で2個のマークをつけ、観測点をこれらのマークが通過する際の時間差から速度を求める方法があるが、これをムラを利用して行なったものが、いわゆる相関法^{4),5)}であることはいうまでもない。

2.3.5 観測雑音の影響の検討

現在までの考察では観測雑音の影響を無視してきた。これは、雑音も考慮した場合の推定量を統一的に、かつ、陽な形で求めるのが困難であるからであった。

しかし、現実の測定環境では多くの場合雑音が存在するので、本章で求めた推定量が雑音に対してどのような特性を示すかということについて一応の考察を払っておく必要があるし、又、もし可能なら雑音に対する補正ということを考えることも重要である。以下ではこれらについて述べる。

(I) 雑音が存在する場合の推定誤差

雑音 $n(t)$ が加わった場合の観測信号 $X(t)$ は、

$$X(t) = W(vt) + n(t)$$

したがって、 $n(t)$ のスペクトル密度を $\Phi_n(\omega)$ とし、ムラ、雑音の独立性を仮定すると、 $X(t)$ のスペクトル密度 $\Phi_x(\omega)$ は、

$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{v} \Phi_w\left(\frac{\omega}{v}\right) + \Phi_n(\omega)$$

よって、(2-32)式で与えられる $\hat{v}$ の相対誤差は、2.3.3での議論と同様にして次のように求まる。

$$E\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{dv} \sqrt{\frac{m_y}{m_x}} - 1\right)^2 + \frac{m_y}{v^2 d^2 m_x} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{m_x} - \frac{\omega^2}{m_y}\right) \Phi_x^2(\omega) d\omega$$

ただし、

$$m_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \Phi_x(\omega) d\omega, \quad m_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) d\omega, \quad d^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \Phi_w(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_w(\omega) d\omega}$$

したがって.

$$\|\Phi\| = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega, \quad \varphi_n(\omega) = v \Phi_n(v\omega)$$

とすると、上式は次のようになる。

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{\|\omega^2(\Phi_w + \varphi_n)\| \cdot \|\Phi_w\|}{\|\omega^2\Phi_w\| \cdot \|\Phi_w + \varphi_n\|}} - 1 \right)^2 + \frac{\pi}{vT} \cdot \frac{\|\omega^2(\Phi_w + \varphi_n)\| \cdot \|\Phi_w\|}{\|\omega^2\Phi_w\| \cdot \|\Phi_w + \varphi_n\|} \\ &\quad \left\{ \frac{\|(\Phi_w + \varphi_n)^2\|}{\|\Phi_w + \varphi_n\|^2} - 2 \cdot \frac{\|\omega^2(\Phi_w + \varphi_n)^2\|}{\|\Phi_w + \varphi_n\| \cdot \|\omega^2(\Phi_w + \varphi_n)\|} + \frac{\|\omega^4(\Phi_w + \varphi_n)^2\|}{\|\omega^2(\Phi_w + \varphi_n)\|^2} \right\} \\ &= \lambda^2 + \frac{\pi}{vT} \cdot \mu \end{aligned}$$

雑音が存在しない場合の上式において、 $\varphi_n \equiv 0$ に相当するから雑音による誤差の増加は

$$\lambda^2 + \frac{\pi}{vT} \left(\mu - [\mu]_{\varphi=0} \right)$$

である。

このとき、SN比が余り大きくなければ、 λ^2 と $\mu - [\mu]_{\varphi=0}$ とは同程度の大きさになると考えられるから、通常の測定系のようにTが十分に大きい場合には、第一項 λ^2 による影響は大きいと考えられる。

一般の Φ_w, Φ_n については、この辺の事情が必ずしも明らかでないので、以下では、 μ は、雑音ともに帯域制限白色雑音である場合に、具体的に計算を行ってみる。

即ち、

$$\Phi_w(\omega) = \begin{cases} \Phi_0 & \text{--- } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{--- } |\omega| > \omega_0 \end{cases}, \quad \Phi_n(\omega) = \begin{cases} \Phi_1 & \text{--- } |\omega| \leq \omega_n \\ 0 & \text{--- } |\omega| > \omega_n \end{cases}$$

とすると、相対誤差は次のようになる。

$$E\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon v^2}{1+\varepsilon}} - 1\right)^2 + \frac{\pi}{10 \omega_c v T} \left(\frac{1+\varepsilon v^2}{1+\varepsilon}\right) \cdot \left\{ 5 \frac{1+2\frac{\varepsilon}{v} + \frac{\varepsilon^2}{v^2}}{(1+\varepsilon)^2} - 10 \frac{1+2\frac{\varepsilon}{v} + v\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon v^2)} + 9 \frac{1+2\frac{\varepsilon}{v} + v^3\varepsilon^2}{(1+\varepsilon v^2)^2} \right\}$$

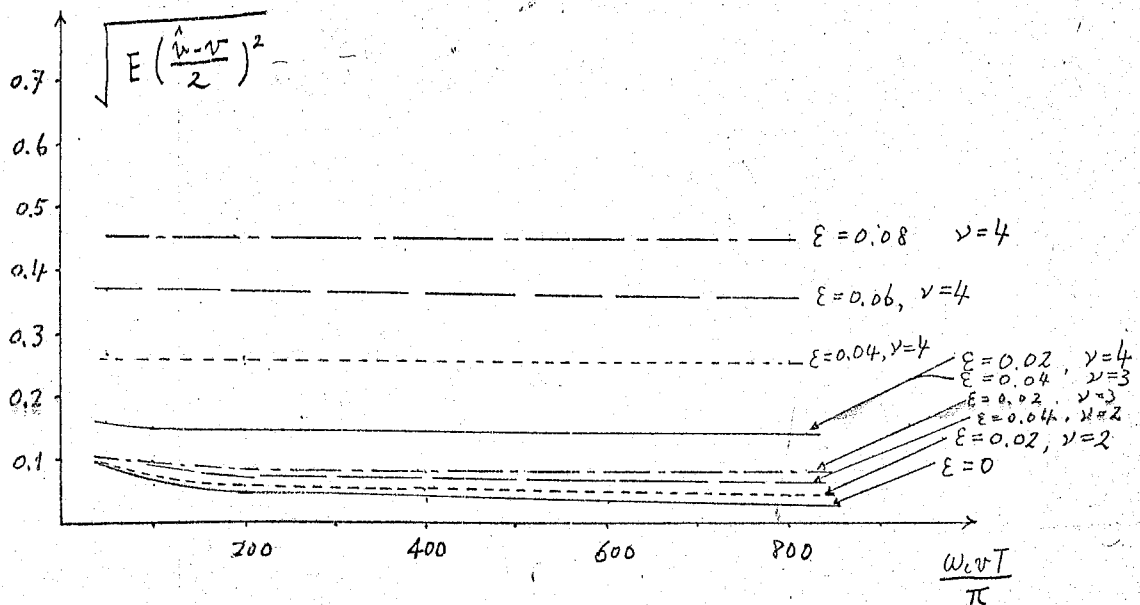
ただし、

$$\varepsilon = \frac{\omega_n \Phi_1}{\omega_c \Phi_0} : \text{NS比}$$

$$v = \frac{\omega_n}{v \omega_c} : \text{雑音 } n(t) \text{ とムラ信号 } W(vt) \text{ の帯域幅の比}$$

この式の値を種々の $\omega_c v T$, ε , v について計算しグラフに普くと次の図のようになる。

この図より、 ε, v が十分に小さい ($\varepsilon < 0.04$, $v < 3$) うち雑音による影響に左程大きくなく、(2-32)式の $\hat{v}$ を速度推定量とすることが出来るが、 ε, v 特に v 、即ち雑音の帯域幅が信号成分のそれに比して大きい時には、誤差のうちの第1項 δ^2 による影響が非常に大きく、何らかの形の補正が必要である。



(II) 雑音に対する補正

雑音が強い時には、(2-32)式の $\hat{v}$ は不十分であることが明らかとなったので、ここではその補正について述べる。本来は補正という形をとらずに、雑音を考慮した上での最適な推定量を導くべきであるが、このような方法では、明確の形で推定量を得るのが困難であるので、ここでは補正という方法によった。

T が十分に大きいと、

$$\frac{\int_0^T \dot{X}^2(t) dt}{\int_0^T X^2(t) dt} = \frac{\|\omega^2 \Phi_x(\omega)\|}{\|\Phi_x(\omega)\|} = \frac{v^2 \|\omega^2 \Phi_w\| + \|\omega^2 \Phi_n\|}{\|\Phi_w\| + \|\Phi_n\|}$$

この式から v を求めると、

$$\hat{v}_* = \sqrt{\frac{\|\Phi_w\| + \|\Phi_n\|}{\|\omega^2 \Phi_w\|} \cdot \frac{\int_0^T \dot{X}^2(t) dt}{\int_0^T X^2(t) dt} - \frac{\|\omega^2 \Phi_n\|}{\|\omega^2 \Phi_w\|}}$$

この $\hat{v}_*$ を雑音が存在する場合の推定量として採用する。雑音の存在しない場合の推定量 $\hat{v}$ との関係については、

$$\hat{v}_* = \sqrt{(1+\varepsilon) \hat{v}^2 - \delta} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\alpha^2} \cdot \frac{\gamma}{x} - \delta}$$

が成立する。ここで

$$\varepsilon = \frac{\|\Phi_n\|}{\|\Phi_w\|}, \quad \delta = \frac{\|\omega^2 \Phi_n\|}{\|\omega^2 \Phi_w\|}$$

である。

次に、この補正された推定量 $\hat{v}_*$ の推定誤差について調べてみる。

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\alpha^2} \cdot \frac{y}{x} - \delta}$$

とある。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-(1+\varepsilon) \frac{y}{x^2}}{2f\alpha^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(1+\varepsilon) \frac{1}{x}}{2f\alpha^2}$$

したがって、 $\hat{v}$ に対する議論と同様にして、 $\hat{v}_*$ と m_x, m_y のまわりで展開すると、

$$\begin{aligned} \hat{v}_* &= f(m_x, m_y) - \frac{(1+\varepsilon) \frac{m_y}{m_x^2}}{2f(m_x, m_y)\alpha^2} (x - m_x) + \frac{(1+\varepsilon) \frac{1}{m_x}}{2f(m_x, m_y)\alpha^2} (y - m_y) \\ &\quad + \sum_{i+j \geq 2} c_{ij} (x - m_x)^i (y - m_y)^j \end{aligned}$$

したがって、 T から $\hat{v}_*$ への変換は、

$$E(\hat{v}_* - v)^2 = [f(m_x, m_y) - v]^2 + \frac{(1+\varepsilon)^2}{4f^2(m_x, m_y)\alpha^4} \left(\frac{m_y}{m_x} \right)^2 \cdot$$

$$\left\{ E \left(\frac{x - m_x}{m_x} \right)^2 - 2E \left(\frac{x - m_x}{m_x} \right) \left(\frac{y - m_y}{m_y} \right) + E \left(\frac{y - m_y}{m_y} \right)^2 \right\}$$

とある。

$$f(m_x, m_y) = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\alpha^2} \cdot \frac{m_y}{m_x} - \delta}$$

$$= \sqrt{\frac{\|\Phi_w\| + \|\Phi_n\|}{\|\omega^2 \Phi_w\|} \cdot \frac{v^2 \|\omega^2 \Phi_w\| + \|\omega^2 \Phi_n\|}{\|\Phi_w\| + \|\Phi_n\|} - \frac{\|\omega^2 \Phi_n\|}{\|\omega^2 \Phi_w\|}} = v$$

$$\left(\frac{m_y}{m_x} \right) = \frac{v^2 \|\omega^2 \Phi_w\| + \|\omega^2 \Phi_n\|}{\|\Phi_w\| + \|\Phi_n\|} = v^2 \frac{\|\omega^2 \Phi_w\| + \|\omega^2 \Phi_n\|}{\|\Phi_w\| + \|\Phi_n\|}$$

$$\frac{1+\varepsilon}{\alpha^2} = \frac{\|\Phi_w\| + \|\Phi_n\|}{\|\omega^2 \Phi_w\|}$$

だから、(I) において $\hat{v}$ の推定誤差を求めたのと同様の方法により、 $\hat{v}_*$ のそれと求めると、

$$E \left(\frac{\hat{v}_* - v}{v} \right)^2 = \frac{\pi}{vT} \cdot \left(\frac{\|\omega^2 \Phi_w\| + \|\omega^2 \Phi_n\|}{\|\omega^2 \Phi_w\|} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{\|(\Phi_w + \Phi_n)^2\|}{\|\Phi_w + \Phi_n\|^2} - 2 \frac{\|\omega^2 (\Phi_w + \Phi_n)^2\|}{\|\Phi_w + \Phi_n\| \cdot \|\omega^2 (\Phi_w + \Phi_n)\|} + \frac{\|\omega^4 (\Phi_w + \Phi_n)^2\|}{\|\omega^2 (\Phi_w + \Phi_n)\|^2} \right\}$$

したがって、 $\hat{v}_*$ の推定誤差には、 $\hat{v}$ のそれのように T に無関係な項は存在せず、よって、 T を十分に大きくとれば、誤差は十分に小さくすることが出来る。

$\hat{v}_*$ 、 $\hat{v}$ の推定誤差の間には次の関係が成立する。

$$E \left(\frac{\hat{v}_* - v}{v} \right)^2 = (1+\varepsilon)(1+\frac{\delta}{v^2}) \left\{ E \left(\frac{\hat{v} - v}{v} \right)^2 - \lambda^2 \right\}$$

特に、 ω 、雑音がともに帯域制限白色雑音の時には、

$$E \left(\frac{\hat{v}_* - v}{v} \right)^2 = \frac{\pi}{10 \omega_c v T} (1+\varepsilon v^2)^2 \left\{ 5 \frac{1+2\frac{\varepsilon}{v} + \frac{\varepsilon^2}{v^2}}{(1+\varepsilon)^2} - 10 \frac{1+2\frac{\varepsilon}{v} + v\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon v^2)} + 9 \frac{1+2\frac{\varepsilon}{v} + v^3\varepsilon^2}{(1+\varepsilon v^2)^2} \right\}$$

となる。次にこの式の値と、雑音が存在しない場合の推定誤差と比較するために、

$$m(\varepsilon, v) = \sqrt{E \left(\frac{\hat{v}_* - v}{v} \right)^2 / E \left(\frac{\hat{v}_* - v}{v} \right)^2_{\varepsilon=0}} \\ = \frac{1+\varepsilon v^2}{2} \left\{ 5 \frac{1+2\frac{\varepsilon}{v} + \frac{\varepsilon^2}{v^2}}{(1+\varepsilon)^2} - 10 \frac{1+2\frac{\varepsilon}{v} + v\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon v^2)} + 9 \frac{1+2\frac{\varepsilon}{v} + v^3\varepsilon^2}{(1+\varepsilon v^2)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

として、 $m(\varepsilon, v)$ のグラフを書くと次のようになる。

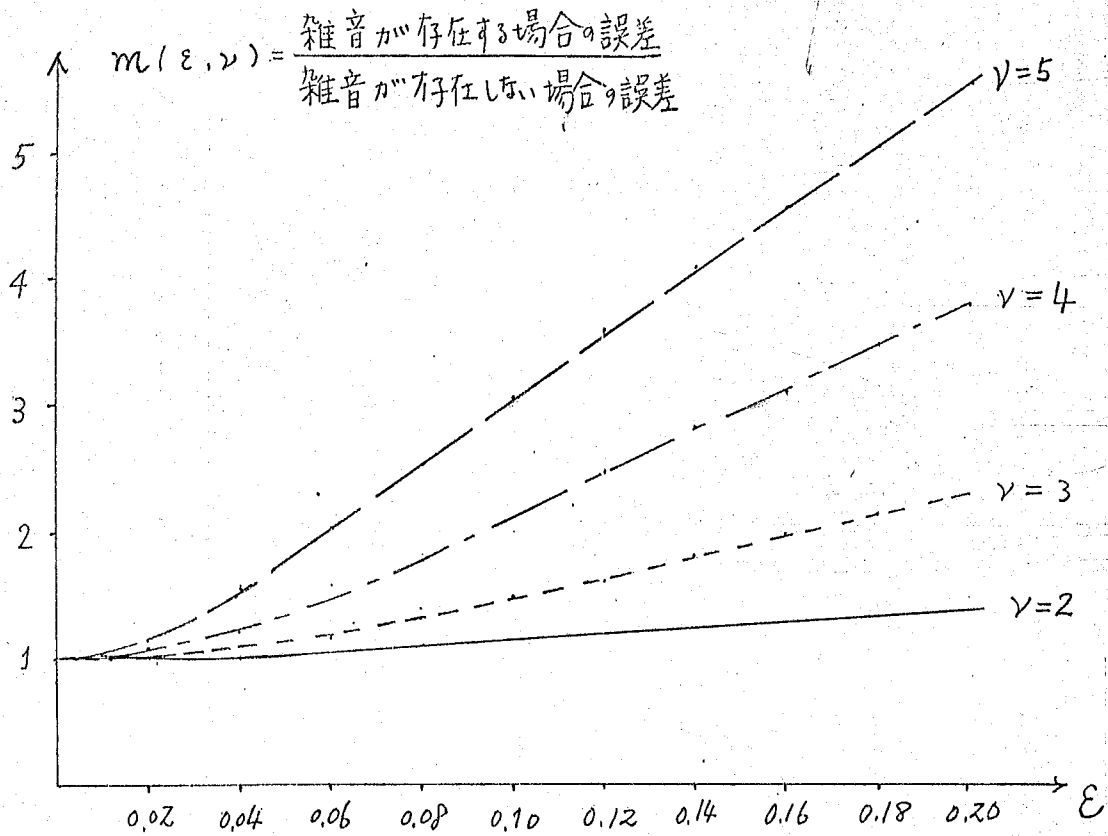


Fig 2-3

このグラフより、推定量 $\hat{v}_*$ は雑音の影響を十分に除去しており、通常の測定条件では、ほぼ満足なものであることがわかる。

2.3.5 デジタル計算機によるシミュレーション

ここでは、今まで調べてきた方法、即ち、Fig 2-2 によって速度を求める方式とシミュレーションによって調べ、この方法の良否を実験的に調べる。特に理論的に導かれた推定誤差の式 (2-32) がどの程度実際の推定誤差と一致するかを考察する。

(i) ムラ、雑音のモデル及びその発生

このシミュレーションで使用するムラ $W(\xi)$ 、雑音 $n(t)$ はともに帯域制限白色雑音であるとし、これはサンプリング定理によって次式にしたがって計算機上で合成する。

$$W(\xi) = \sum_{n=-N+1}^N w_{n+\lceil \xi/\xi_0 \rceil} \phi_n \left(\frac{\xi}{\xi_0} - \left\lceil \frac{\xi}{\xi_0} \right\rceil \right)$$

ここで、

N : $W(\xi)$ の合成に用いる項の数 / 2

$\xi_0 = \pi/\omega_c$, ω_c : 遮断角波数

$\{w_i\}$: 正規分布 $N(0,1)$ にしたがう擬乱数

$$\phi_n(t) = \sin \pi(t-n) / \pi(t-n)$$

$W(\xi)$ を発生させるための具体的アルゴリズム、その誤差解析については、付録 6 を参照されたい。 $n(t)$ についても同様である。

このようにして $W(\xi)$ 、 $n(t)$ を発生させた時、観測信号 $X(t)$ は、

$$X(t) = W(vt) + n(t)$$

として求められる。

シミュレーションを行うには、 $\dot{X}(t)$ が必要になり、それには、 $\dot{W}(\xi)$, $\dot{n}(t)$ を発生させなければならないが、これは、

$$\dot{W}(\xi) = \frac{1}{\xi_0} \sum_{n=-N+1}^N w_{n+\lceil \frac{\xi}{\xi_0} \rceil} \left\{ -\frac{\sin \pi \left(\frac{\xi}{\xi_0} - \lceil \frac{\xi}{\xi_0} \rceil - n \right)}{\pi \left(\frac{\xi}{\xi_0} - \lceil \frac{\xi}{\xi_0} \rceil - n \right)^2} + \frac{\cos \pi \left(\frac{\xi}{\xi_0} - \lceil \frac{\xi}{\xi_0} \rceil - n \right)}{\frac{\xi}{\xi_0} - \lceil \frac{\xi}{\xi_0} \rceil - n} \right\}$$

によって合成する。

(ii) シミュレーションの方法

長さ T の $X(t)$, $\dot{X}(t)$ のセグメントを M 個

$$\left\{ \dot{X}_1(t), \dot{X}_1(t) \mid 0 \leq t \leq T \right\}, \left\{ X_2(t), \dot{X}_2(t) \mid 0 \leq t \leq T \right\}$$

$$\dots \left\{ X_M(t), \dot{X}_M(t) \mid 0 \leq t \leq T \right\}$$

を上述の方法にしたがって発生させ、

$$v_i = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\int_0^T \dot{X}_i^2(t) dt}{\int_0^T X_i^2(t) dt}}$$

によって速度 $v_1, v_2, \dots, v_M$ を計算し、これから

$$\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{v_i - \bar{v}}{\bar{v}} \right)^2}$$

を求め、これを $\hat{v}$ の相対推定誤差 $E\left[\left(\frac{\hat{v} - v}{v}\right)^2\right]$ として採用する。以上のことを種々の ω_c, v, T , $\varepsilon = E[n^2(t)]/E[W^2(vt)]$ について調べ、相対がこれらのパラメータとともにどのように変化するかを調べる。

このとき、 $\hat{v}$ の統計的性質は、

$\omega_c v T$, ε , ω_n ($n(t)$ の遮断角周波数) にのみ依存するから、 $v=1$, $\omega_c=\pi$ としてシミュレーションを行う。

(iii) $N=50$ としてムラ、雑音が発生させ、これを用いて $\hat{v}_i$ を求めた。平均を求める際の項数 M は $M=20$ としたが、以下にその結果を示す。

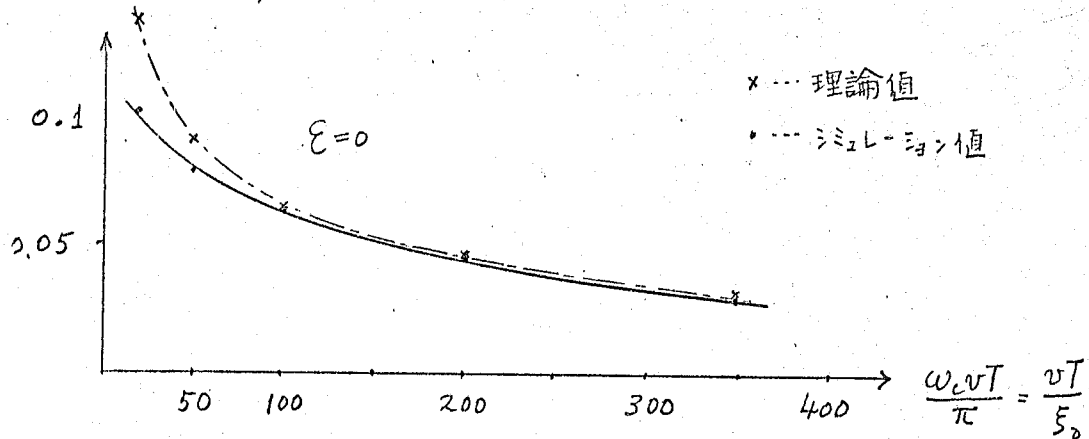


Fig 2-4

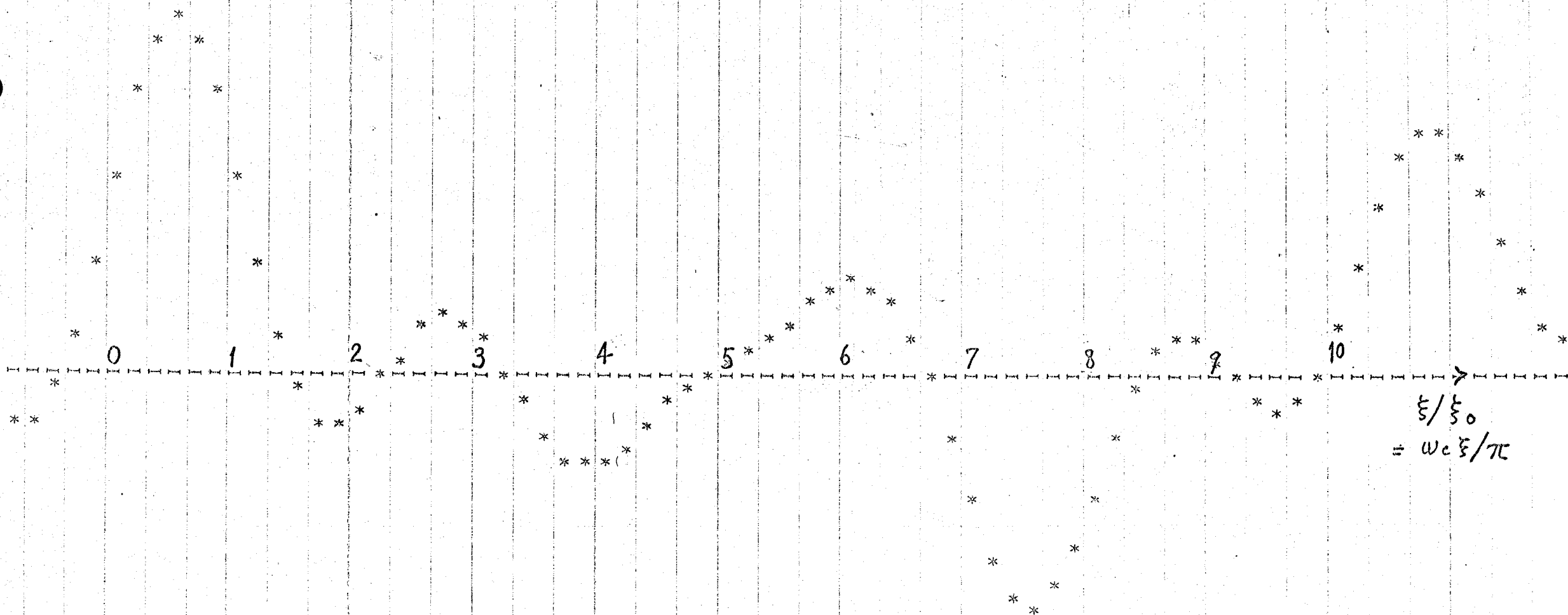
Fig 2-4 は雑音が存在しない場合に、相対誤差が $\omega_c v T$ と共にどのように変化するかを示したものである。

図中“•”印はシミュレーションによって求められた値を、又“x”印は、(2-33)式による理論値を示す。

この図より、 $\omega_c v T > 200$ であれば、理論値とシミュレーション値は極めてよい一致を示すことがわかるが、これは 2.3.3 で行、てきた $\hat{v}$ の評価法が妥当なものであることと実験的に示したものであると考えられ、 $\hat{v}$ が速度推定量として適当なものであることがシミュレーションによっても明らかにされたことになる。

$\varepsilon \neq 0$ の時にも同様の結果をうるが、これについては省略する。

帯域制限白色雑音の波形



2.4 パラメータ α の実測

今までは4ラ $W(\xi)$ の自己相関函数 $R_W(\eta)$ が与えられているという立場に立って話を進めて来た。この場合には最適な α の値は(2-21)式を使うことにより求めることが出来るが、一般には必ずしも $R_W(\eta)$ が既知とは限らないので、以下ではこれが与えられていない場合の α の求め方について述べる。

2.4.1 4ラの記録波形が事前に入手可能なとき

4ラの記録波形 $\{W(\xi); 0 \leq \xi \leq L\}$ が入手可能なときには、これから α を求めることが出来る。このとき、記録波形から $R_W(\eta)$ を計算し、それから(2-21)式に従って α を求めることも出来るが、それよりはむしろ、記録波形から σ_W^2 , $\sigma_{\dot{W}}^2$ を標本統計量として求め、これから α を求める方が簡単である。即ち、

$$\hat{\sigma}_W^2 = \frac{1}{L} \int_0^L W^2(\xi) d\xi, \quad \hat{\sigma}_{\dot{W}}^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{W}^2(\xi) d\xi$$

より、

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\sigma}_{\dot{W}}}{\hat{\sigma}_W} = \frac{\sqrt{\int_0^L \dot{W}^2(\xi) d\xi}}{\sqrt{\int_0^L W^2(\xi) d\xi}} \quad (2-36)$$

このとき、この $\hat{\alpha}$ が α の良い推定量となっていることは、 $\hat{\nu}$ の評価を行なったと同様の方法により示すことが出来る。即ち、 $L \gg \Delta t$ なる条件のもとでは、 $\hat{\alpha}$ の誤差は次式で与えられる。

$$E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2] = \frac{1}{4\pi L} \left(\frac{\sigma_{\dot{W}}}{\sigma_W} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_W^2} - \frac{\omega^2}{\sigma_{\dot{W}}^2} \right) \Phi_W^2(\omega) d\omega \quad (2-37)$$

したがって、十分に長いデータ $\{W(\xi); 0 \leq \xi \leq L\}$ が得られる場合には、 $\hat{\alpha}$ はほぼ最適な α の値を与える。 $\hat{\alpha}$ の誤差の大体の大きさについて、(2-23) において vT を L で置き換えた式が成立することはいうまでもない。

なお、 $\hat{\alpha}$ を次のように解釈することも出来る。

記録波形 $\{W(\xi); 0 \leq \xi \leq L\} \equiv \{W(1 \cdot t); 0 \leq t \leq T \leq L\}$ は速度 1 で動くムラから観測信号と考えることが出来るが、(2-10) 式の $\hat{v}$ がこの観測データに対して正しい速度を与えるように α を決定すれば、

$$1 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\int_0^L \dot{W}^2(\xi) d\xi / \int_0^L W^2(\xi) d\xi}$$

となり、結局 (2-26) 式の $\hat{\alpha}$ は速度 1 の観測信号に (2-10) 式をあてはめること (fitting) により、求められたものと解釈することが出来る。

2.4.2 ムラの記録波形が事前に入手不可能なとき

ムラの記録波形が事前に入手不可能なときや、ムラに非定常性があるときには、 α の値をオンラインで測定しなければならない。

この場合にも (2-36) 式を使って α を求める訳であるが、この際、問題になるものはムラの微分 $\dot{W}(\xi)$ をどのようにして求めるかである。

ムラの空間微分が直接とれる場合は別として、通常は、 $\dot{W}(\xi)$ を差分 $(W(\xi + \Delta\xi) - W(\xi)) / \Delta\xi$ で置き換えるのが適当である。即ち、 α 測定用として新たに 2 個の観測点を $\Delta\xi$ 離して設け、そこから $X_1(t) = W(vt + \xi_0)$, $X_2(t) = W(vt + \xi_0 + \Delta\xi)$ を取り出し、次のようにすればよい。($L = vT$)

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{\int_0^T \left(\frac{X_2(t) - X_1(t)}{\Delta\xi} \right)^2 dt}{\int_0^T X_1^2(t) dt}}$$

したがってこれを(2-10)式と結びつけることにより、 $\hat{v}$ は次のようになる。

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{\int_0^T X_1'^2(t) dt}{\int_0^T \left(\frac{X_2(t) - X_1(t)}{\Delta \xi} \right)^2 dt}} \cdot \sqrt{\frac{\int_0^T \dot{X}^2(t) dt}{\int_0^T X^2(t) dt}} \quad (2-38)$$

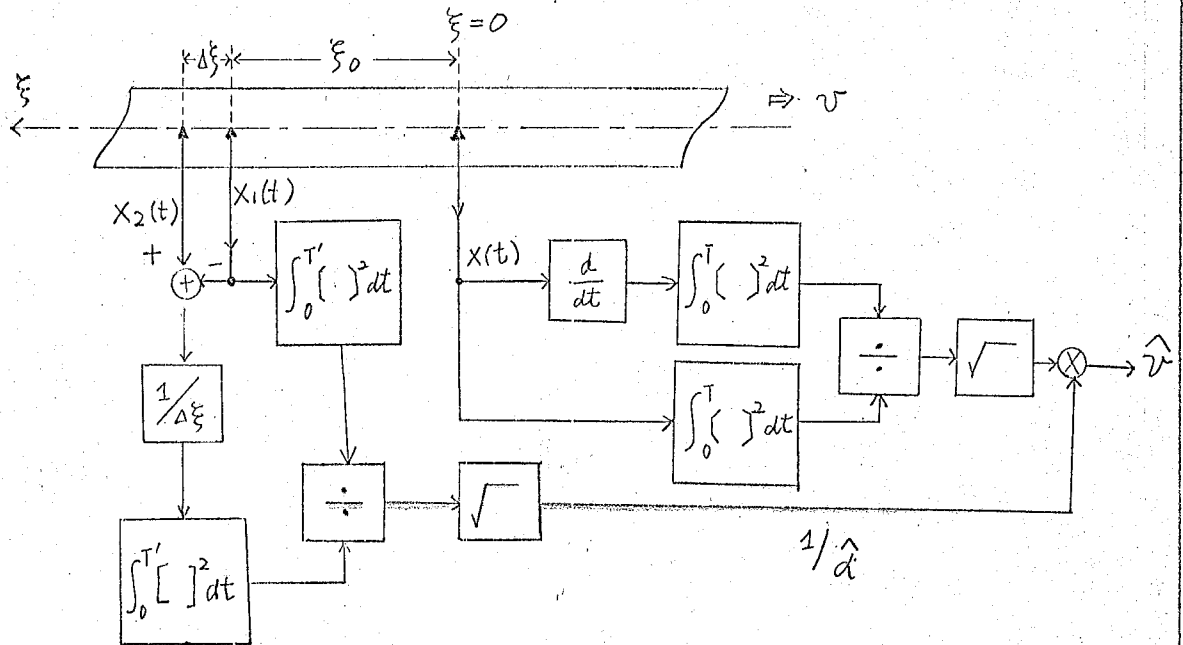


Fig 2-5 ムラの統計量が未知の場合の速度測定法

このとき $\Delta \xi$ はなるべく小さいことが望ましく、その許される最大値 $\Delta \xi_{\max}$ はムラのこまかさの度合によることはいうまでもない。

一方、2つの観測ヘッドが近接した2点から信号を取り得るためには、その2点間の距離がある程度以上あることが技術的に必要である。これが $\Delta \xi_{\max}$ より小さい場合は問題はないが、大きいときには微分を差分で置き換えることにより生ずる誤差が問題となる。

これを防ぐためには μ の観測を適当な空間低域フィルタ、例えば光学系ではスリット、を通して行ない。等価的に μ を粗いものにし、 $\Delta\xi_{\max}$ を大きくすればよい。勿論このようにすると、 μ の等価的帯域幅が狭くなり、(2-33)式でも見たように $\hat{v}$ の統計量としての本来の分散が大きくなるから、最終的な意味での $\hat{v}$ の誤差が最小になるように空間低域フィルタの通過帯域幅(スリット幅)を決定する必要がある。(2-38)式をもとにして、これらの事柄を議論することが出来るが、ここではそれを省略する。

2.4.3 合成微分による速度計測法の可能性

また、(2-28)式において、 $\xi=0$, 即ち $X_1(t)=X(t)$, $T=T'$ とすることが可能であるが、このときには $\hat{v}$ は次のようになる。

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{\int_0^T \dot{X}_1^2(t) dt}{\int_0^T \left(\frac{X_2(t) - X_1(t)}{\Delta\xi} \right)^2 dt}} \quad (2-39)$$

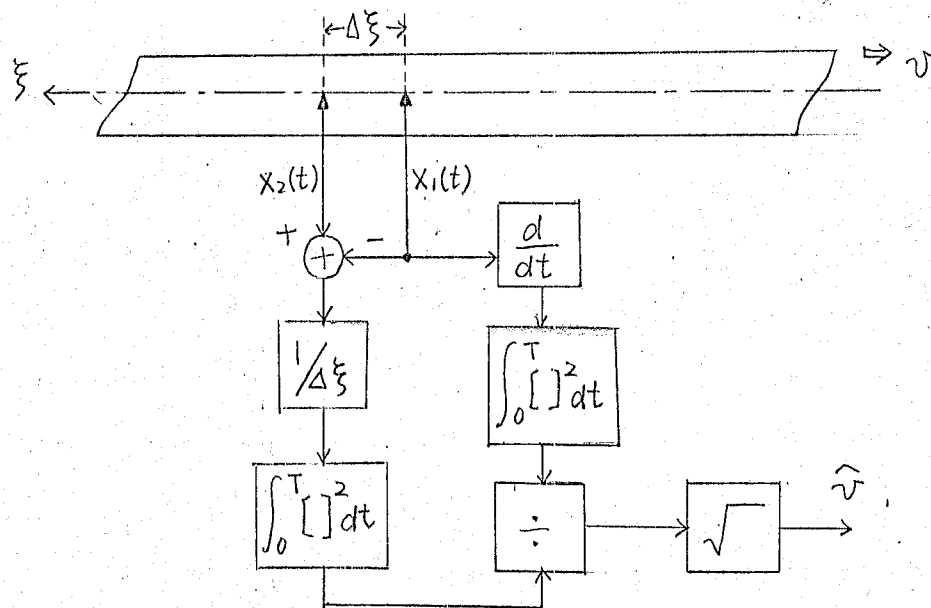


Fig2-6 合成微分の原理と応用した速度測定法

この $\hat{v}$ と (2-38) 式の $\hat{v}$ について、その分散を比較すると興味ある事実が明らかとなる。

即ち、(2-38) 式では、 $X_1(t), X_2(t)$ と $X(t)$ が独立であるために、 $\hat{X}$ の分散と、 $\sqrt{\int_0^T \dot{X}^2(t) dt} / \sqrt{\int_0^T X^2(t) dt}$ の分散が加法的に $\hat{v}$ の分散に寄与している。

これに反し、(2-29) 式では、 $\Delta \xi$ が十分に小さければ

$$\int_0^T \dot{X}_1^2(t) dt, \int_0^T \left(\frac{X_2(t) - X_1(t)}{\Delta \xi} \right)^2 dt$$

がほとんど同一の確率変数となり、それらの分散の影響は、商をとることにより $\hat{v}$ にはあまり入ってこないと考えられる。

事実 $\Delta \xi \rightarrow 0$ とすると、たとえ T が有限でも $\hat{v} = v$ となる。

(2-39) 式は (2-38) 式より導かれたのであり、したがって統計的推定として求められたのであるが、以上の事柄を考えると、この $\hat{v}$ は次の合成微分の公式

$$\dot{X}(t) = \dot{W}(vt) = v W'(vt) \quad (2-40)$$

を使、 v を求めたと考える方が自然である。

即ち、(2-40) 式において、“ 0 ” を割ることを避ける意味で $\dot{X}(t)$, $\dot{W}(vt)$ をその r, m, s 値

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}^2(t) dt}, \quad \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \dot{W}^2(vt) dt}$$

で置き換え、更に $\dot{W}(vt)$ を $(X_2(t) - X_1(t)) / \Delta \xi$ で近似した上で v を求めたものとして (2-39) 式を解釈することが出来る。

(2-40) 式はたとえ $W(\xi)$ が非定常でも成立するし、又観測時間 T は積分値がある程度の大きさになるように選ばばよいのだが、短かくてよい。したがって (2-39) 式は速度の計測法として

優れた性質をもつことが予想される。しかし、 T が小さいところでの理論的解析は非常に困難であるので、ここでは(2-39)式の $\hat{v}$ の分散を(2-10)式を評価したのと同じ方法によって、したがって T が長い場合について調べ、上の予想の正しさを示すにとどめる。

改めて $X_1(t)$ を $X(t)$ と書くことにし、又次のように $\Delta X(t)$, y , z を定義する。

$$\Delta X(t) = X(t + \frac{\Delta \xi}{v}) - X(t), \quad y = \int_0^T \dot{X}^2(t) dt, \quad z = \int_0^T \left(\frac{\Delta X(t)}{\Delta \xi} \right)^2 dt$$

このとき

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{y}{z}}$$

前と同様に、 $\hat{v}$ を $m_y = E[y]$, $m_z = E[z]$ の周りで Taylor 展開し、 $T \gg \Delta t$ という条件のもとで3次以上の項を省略すると、

$$\begin{aligned} E[(\hat{v} - v)^2] &= \left(\sqrt{\frac{m_y}{m_z}} - v \right)^2 + \frac{m_y}{4m_z} \left\{ E\left[\left(\frac{z - m_z}{m_z} \right)^2 \right] - 2E\left[\left(\frac{z - m_z}{m_z} \right) \left(\frac{y - m_y}{m_y} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + E\left[\left(\frac{y - m_y}{m_y} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-41)$$

一方、 $\Delta X(t)$ の自己相関関数は $R_{\Delta X}(\tau)$ は、

$$\begin{aligned} R_{\Delta X}(\tau) &= E\left[(X(t + \tau + \frac{\Delta \xi}{v}) - X(t + \tau)) (X(t + \frac{\Delta \xi}{v}) - X(t)) \right] \\ &= 2R_W(v\tau) - R_W(v\tau + \Delta \xi) - R_W(v\tau - \Delta \xi) \end{aligned}$$

故に、そのスペクトル密度 $\Phi_{\Delta X}(\omega)$ は、

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [2R_W(v\tau) - R_W(v\tau + \Delta \xi) - R_W(v\tau - \Delta \xi)] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{4}{v} \sin^2\left(\frac{\omega \Delta \xi}{2v}\right) \cdot \Phi_W\left(\frac{\omega}{v}\right) \end{aligned}$$

又.

$$m_z = \frac{T}{\Delta^2 \xi} E \left[\left(X(t + \frac{\Delta \xi}{v}) - X(t) \right)^2 \right] = \frac{2T}{\Delta^2 \xi} (R_W(0) - R_W(\Delta \xi))$$

$$= \frac{2T}{\pi \Delta^2 \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta \xi}{2} \right) \Phi_W(\omega) d\omega$$

よ、て、(2-26)式を評価したのと同じ方法によると.

$$E \left[\left(\frac{z - m_z}{m_z} \right)^2 \right] = \frac{4\pi}{vT} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sin^4 \left(\frac{\omega \Delta \xi}{2} \right) \Phi_W^2(\omega) d\omega}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta \xi}{2} \right) \Phi_W(\omega) d\omega \right\}^2} \quad (2-42)$$

同様の仕方により、

$$E \left[\left(\frac{z - m_z}{m_z} \right) \left(\frac{y - m_y}{m_y} \right) \right], \quad E \left[\left(\frac{y - m_y}{m_y} \right)^2 \right]$$

を $\Phi_W(\omega)$ で表わし、これらを(2-41)式に代入すると、 $\hat{v}$ の誤差について次式を得る。

$$E \left[\left(\frac{\hat{v} - v}{v} \right)^2 \right] = \left\{ \frac{\Delta \xi}{2} \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \Phi_W(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta \xi}{2} \right) \Phi_W(\omega) d\omega}} - 1 \right\}^2$$

$$+ \frac{\pi \Delta^2 \xi}{4vT} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \Phi_W(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta \xi}{2} \right) \Phi_W(\omega) d\omega} \cdot \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sin^4 \left(\frac{\omega \Delta \xi}{2} \right) \Phi_W^2(\omega) d\omega}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta \xi}{2} \right) \Phi_W(\omega) d\omega \right\}^2} \right.$$

$$\left. - 2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta \xi}{2} \right) \Phi_W^2(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta \xi}{2} \right) \Phi_W(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \Phi_W(\omega) d\omega} + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \Phi_W^2(\omega) d\omega}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \Phi_W(\omega) d\omega \right\}^2} \right] \quad (2-43)$$

これで一応 $\hat{v}$ の相対誤差の式が導けたことになるが、次にムラが帯域制限白色雑音である場合について、その値を計算し、大体の目安を得ることにする。

$\Phi_w(\omega)$ の遮断角波数を ω_c とすると、(2-43) 式は、

$$E\left[\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2\right] = \left\{ \sqrt{\frac{\gamma^3}{6(\gamma - \sin \gamma)}} - 1 \right\}^2 + \frac{\pi \Delta \xi}{6vT} \cdot R(\gamma) \quad (2-44)$$

ただし、

$$R(\gamma) = \frac{\gamma^3}{\gamma - \sin \gamma} \left\{ \frac{\sin(2\gamma) - 8\sin \gamma + 6\gamma}{8(\gamma - \sin \gamma)^2} - \frac{\gamma^3 - 3(\gamma^2 - 2)\sin \gamma - 6\gamma \cos \gamma}{\gamma^3(\gamma - \sin \gamma)} + \frac{9}{10\gamma} \right\}, \quad \gamma = \omega_c \Delta \xi$$

γ が十分に小さいものとして、(2-44) 式を γ の Taylor 級数に展開し高次の項を省略すると、 $\gamma < 1$ の範囲で次式が成立する。

$$E\left[\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2\right] = 10^{-2} \cdot \gamma^4 + 1.1 \times 10^{-3} \cdot \frac{\Delta \xi \gamma^3}{vT} \quad (2-45)$$

例えば、 $\omega_c = 1 \text{ rad/mm}$, $\Delta \xi = 0.1 \text{ mm}$ (即ち、 $\gamma = 0.1$), $v = 10 \text{ m/sec}$ とすると、

$$E\left[\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2\right] = 10^{-6} + \frac{1.1 \times 10^{-11}}{T}$$

となり、相対誤差は観測時間 $T^{(\text{sec})}$ にほとんどよらないことがわかる。更にムラの帯域幅が狭い程、即ち、ムラが滑らかな程、又 2 つの観測ヘッド間の間隔 $\Delta \xi$ が短い程測定誤差は小さい。

前者については、前にも述べた通り適当な幅のスリットを通してムラを観測することにより、必要なだけムラを等価的に滑らか

にすることが出来るし、後者については、 $\Delta \xi = 0.1^{mm}$ 位にとることとはさ程困難ではないと考えられる。

以上を考えると、合成微分を用いる非接触速度計測法が十分に可能であることがわかるが、観測雑音を含めた形での詳しい議論は将来の問題である。

2.5 2章のまとめ

観測雑音を伴わない時間的に連続な観測量から速度を求める方法について論じた。その方法は、 u を $W(\xi)$ を2次線形過程で近似し、それに対して最尤推定法を用いて速度推定量 $\hat{v}$ を求めるというものであった。

次に、Taylor 展開を用いて、この $\hat{v}$ の統計的性質を調べ、これが通常の測定条件のもとで十分に良い性質を持つこと、及び、それが速度の計測法として基本的性質を持つものであることを確かめた。

次に、 u に含まれる未知パラメータの決定法について考え、これと関係して合成微分法による非接触速度計測について触れた。

なお、ここでは観測が時間的に連続であるような場合のみを考えたが、それが離散的であるときには、積分を適当な和で置き換えればよいことはいうまでもない。

第3章 ムラが単純マルコフ過程で近似される場合の解析

3.1 緒言

前章では、時間的に連続な観測データが得られる場合について、ムラを二次線形過程によって近似することにより解析したが、観測が時間的に離散なときには、更に簡単なモデルによって解析することが多くの場合許され、それによって、一般の場合についての洞察を得ることが出来る。

即ち、時間的に離散な場合には、ムラのモデルとして単純マルコフ過程を採用出来ることが多いが、このモデルについては、最尤法を用いたときの誤差解析を明確に行える利点がある。よって、本章では、ムラが正規定常マルコフ過程、即ち、その自己相関関数 $R_W(\xi)$ が、

$$R_W(\xi) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\xi|) \quad (3-1)$$

であるような正規過程で近似されるとき、これから得られる Δ 時間毎の離散観測データ ($X_i \equiv X(i\Delta)$)

$$X = \{X_i = W(i\nu\Delta) + n_i; i=1, 2, \dots, N\}$$

から速度 ν を推定することを考える。

ここで、 n_i は正規性観測雑音で、その独立性及びムラ信号 $W(i\nu\Delta)$ との無相関性を仮定する。即ち、

$$E[n_i n_j] = \sigma^2 \delta_{ij}, \quad E[n_i W(j\nu\Delta)] = 0 \quad (3-2)$$

又、 $W(\xi)$, n_i とともに平均値 0 とする。

3.2 推定法について

観測データ $X_1, \dots, X_N$ から ν を推定する方法としては色々のものが考えられるが、ここでは、推定量 $\hat{\nu}$ の漸近的評価が割合簡単に行なえるという利点を考慮して最尤法を用いた。

これは、 $X_1, \dots, X_N$ の同時分布を $P(X_1, \dots, X_N; \nu)$ とするとき、これを最大にするような ν を $\hat{\nu}$ として選ぶ方法であるが、同時分布 P に関する適当な正則条件^{*}のもとで最尤推定量

$$\hat{\nu} = \hat{\nu}(X_1, \dots, X_N)$$

は ν の一致推定量 ($\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\nu} = \nu$ with prob. 1) 及び漸近有効推定量であり、 $\hat{\nu}$ の漸近的分散に関し 2 次式が成立する。

$$E[(\hat{\nu} - \nu)^2] \sim 1/E\left[-\frac{\partial^2 \log P(X_1, \dots, X_N; \nu)}{\partial \nu^2}\right] \text{ as } N \rightarrow \infty \quad (3-3)$$

上式の右辺は特に Cramer-Rao Bound と呼ばれるが、現実の観測条件ではサンプル数 N を十分に大きくとれ、かつ通常は分布に関する正則条件は満たされるので（勿論、本論文で扱うような場合も）、本論文では推定量の評価には Cramer-Rao Bound を用いた。

なお、最尤法によって ν を推定する際、分布 P に含まれる ν 以外のパラメータ (α, σ^2, ρ^2) が既知であることが望ましい。これらのうちには ν と同時に推定可能なものと、そうでないものがあるが、それらの処理については 3.7, 3.8 で扱うことにし、それまでは全てのパラメータが既知であるとして話を進める。

*付録 3 参照

3.3 観測雑音の存在しない時の速度の推定

3.3.1 推定量 $\hat{v}_S$ の導出

$n_i = 0$ であるから

$$X_i = W(i\nu\Delta)$$

よ、(3-1)式より

$$\begin{aligned} E[X_i X_j] &= E[W(i\nu\Delta) W(j\nu\Delta)] = \sigma^2 e^{-|i-j|\alpha\nu\Delta} \\ &= \sigma^2 \gamma^{|i-j|} \end{aligned}$$

ただし

$$\gamma = e^{-\alpha\nu\Delta} \quad (3-4)$$

したがって、 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T$ の共分散行列 $\mathbf{K}$ は

$$\mathbf{K} = \sigma^2 \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \dots & \gamma^{N-1} \\ \gamma & 1 & \dots & \gamma^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{N-1} & \gamma^{N-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

一方、 $W(\xi)$ は正規かつ、zero-mean であるから、 $\mathbf{X}$ に対する対数尤度関数 L は次のようになる。

$$\begin{aligned} L &= \log p(\mathbf{X}) \\ &= -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\sigma^2 \mathbf{S}| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{X}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X} \end{aligned} \quad (3-6)$$

ところが、 $\partial L / \partial \nu = -\alpha \gamma \Delta \partial L / \partial \gamma$ であるから、求めるべき ν の最大推定量 $\hat{v}_S$ は次の方程式の根である。

$$f(\gamma) = \sigma^2 \frac{d}{d\gamma} \log |\mathbf{S}| + \mathbf{X}^T \frac{d\mathbf{S}^{-1}}{d\gamma} \mathbf{X} = 0 \quad (3-7)$$

一方、正規化共分散行列 S については、その逆行列及び行列式が次式で与えられることがわかっている。

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & & 0 \\ -\gamma & 1+\gamma^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1+\gamma^2 & -\gamma \\ & & & -\gamma & 1 \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

$$|S| = (1-\gamma^2)^{N-1} \quad (3-9)$$

これを使、て $f(\gamma)$ を計算し、

$$R_i = \sum_{k=1}^{N-i} X_k \cdot X_{k+i}$$

とかくと、この尤度方程式は次のようになる。

$$(N-1)\sigma^2\gamma^3 - R_1\gamma^2 + \{2R_0 - X_1^2 - X_N^2 + (N-1)\sigma^2\}\gamma - R_1 = 0 \quad (3-10)$$

この方程式は N が十分に大きければ、唯一の $0 < \gamma < 1$ なる根を持つが、これを $\hat{\gamma}_S$ とすると、求めるべき $\hat{v}_S$ は (3-4) 式より次のように与えられる。

$$\hat{v}_S = -\frac{1}{\alpha\Delta} \log \hat{\gamma}_S \quad (3-11)$$

一応これで推定量 $\hat{v}_S$ が求められたが、 N が十分に大きいという仮定のもとで、これを明確に表現することが可能である。

即ち、
$$\frac{R_0}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2$$

が σ^2 の一致推定量であるから、 $N \rightarrow \infty$ のもとに、

$$2R_0 - X_1^2 - X_N^2 \rightarrow 2\sigma^2 N, \quad N-1 \rightarrow N$$

なる置き換えを方程式 (3-10) で行なうと、(3-10) 式は

$$\sigma^2 N \gamma^3 - R_1 \gamma^2 + \sigma^2 N \gamma - R_1 = 0$$

これより γ を求めると、

$$\hat{\gamma}_\infty = \frac{R_1}{\sigma^2 N} = \frac{1}{\sigma^2 N} \sum_{k=1}^{N-1} X_k X_{k+1}$$

故に、 N が十分に大きければ、 $\hat{v}_s$ は次のようになる。

$$\hat{v}_\infty = -\frac{1}{\alpha \Delta} \log \frac{\sum_{k=1}^{N-1} X_k X_{k+1}}{\sigma^2 N} \quad (3-12)$$

3.3.2 $\hat{v}_s$ の評価

ここでは、サンプル数 N が十分に大きいという仮定のもとで、 $E[(\hat{v}_s - v)^2]$ を Cramer-Rao Bound から求め、これによって今求めた $\hat{v}_s$ の評価を行なう。

(3-6)式より、

$$E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2}\right] = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\gamma^2} \log |S| - \frac{1}{2\sigma^2} E\left[\mathbf{x}^T \frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} \mathbf{x}\right]$$

ところが一般に、 $\mathbf{x}$ の共分散行列を K とすると、

$$E[\mathbf{x}^T A \mathbf{x}] = \text{tr}[KA], \quad \text{tr: trace} \quad (3-13)$$

が成立するから、今の場合 $K = \sigma^2 S$ に注意すると、

$$E\left[\mathbf{x}^T \frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} \mathbf{x}\right] = \text{tr}\left[\sigma^2 S \frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2}\right] = \sigma^2 \text{tr}\left[S \frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2}\right]$$

故に、

$$E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2}\right] = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\gamma^2} \log |S| - \frac{1}{2} \text{tr}\left[S \frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2}\right]$$

$\therefore$ (3-5), (3-8), (3-9) 式より、

$$\log |S| = (N-1) \log (1-\gamma^2)$$

$$\frac{dS^{-1}}{d\gamma} = \frac{2\gamma}{1-\gamma^2} S^{-1} + \frac{1}{1-\gamma^2} P$$

(3-14)

$$\frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} = 2 \frac{1+3\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} S^{-1} + \frac{4\gamma}{(1-\gamma^2)^2} P + \frac{1}{1-\gamma^2} Q$$

where

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 2\gamma & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & -1 \\ & & & 2\gamma & \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

よって..

$$\frac{d^2}{d\gamma^2} \log |S| = -2(N-1) \frac{1+\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[S \frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} \right] &= \frac{2(1+3\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^2} \text{tr}(E) + \frac{4\gamma}{(1-\gamma^2)^2} \text{tr}[SP] + \frac{1}{1-\gamma^2} \text{tr}[SQ] \\ &= \frac{2N(1+3\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^2} - \frac{8\gamma}{(1-\gamma^2)^2} + \frac{2(N-1)}{1-\gamma^2} \end{aligned}$$

したがって、2. N が十分大に大きければ

$$E \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} \right] = -N \frac{1+\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2}$$

と3.が、

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} = \alpha^2 \Delta^2 \gamma^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} + \alpha^2 \Delta^2 \gamma \frac{\partial L}{\partial \gamma}$$

$$E \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma} \right] = 0$$

が成立するから、

$$E\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\right] = N\alpha^2 \Delta^2 \gamma^2 \frac{1+\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2}.$$

したがって、3.2 で述べたように $\hat{v}_s$ の漸近的相対誤差 B_s は次のようになる。

$$\begin{aligned} B_s &= \sqrt{E\left[\left(\frac{\hat{v}_s - v}{v}\right)^2\right]} = \frac{1}{v \sqrt{E\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\right)}} = \frac{1-\gamma^2}{\sqrt{N} \alpha v \Delta \gamma \sqrt{1+\gamma^2}} \\ &= \frac{1 - e^{-2\alpha v \Delta}}{\sqrt{N} \alpha v \Delta e^{-\alpha v \Delta} \sqrt{1 + e^{-2\alpha v \Delta}}} \quad (3-15) \end{aligned}$$

この B_s を見て明らかなように、 $\hat{v}_s$ の相対誤差はサンプル数 N と共に $1/\sqrt{N}$ の割合で減少する。

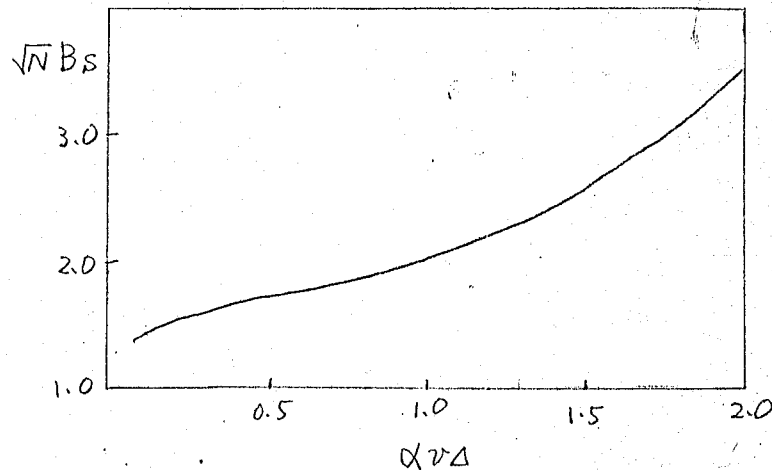


Fig 3-1. Asymptotic estimation error
(noiseless case)

更に、 $\alpha v \Delta$ を横軸にとりて $\sqrt{N} B_s$ のグラフを書くと Fig 3-1 のようになるが、これを見て明らかなように、 $\alpha v \Delta$ が小さい程相対誤差が小さいことがわかる。

したがって、ムラ波形の変化が激しく (α :大)、速度が速い (v :大) 程サンプル間隔は短い方が望ましいが、現実のムラに対してこの方法を適用するときには Δ の値をあまりに小さくし過ぎることについて若干の注意が必要である。

即ち、3.8 で示されるように、 $\Delta \rightarrow 0$ にすることにより、現実のムラと正規定常マルコフ過程というモデルとの差が大きく現われること、及び、たとえこの事実がなくても、一般に Cramer-Rao Bound が意味ある誤差を与えるに必要なサンプル数 N が、 $\Delta \rightarrow 0$ と共に増大することである。

3.4 弱い観測雑音を伴う場合の速度の推定

前章では観測に際して雑音を加わらない場合について考えたが、通常の観測系では観測雑音加わることが多く、したがって、前もってこれを考慮した上で推定を行なうことが重要である。ここでは、信号成分に比して十分に弱い離散的白色雑音が加法的に重畳する場合、速度推定量及びその相対誤差が、雑音が存在しない場合に比して、どのように変化するかを調べる。

3.4.1 推定量 $\hat{v}_{S+N}$ の導出

観測信号 x_i について、

$$x_i = W(iv\Delta) + n_i$$

が成立し、雑音の白色性、雑音とムラの独立性(3-2)式を仮定してあるので、 x の共分散行列 K は、

$$K = \sigma^2 S + \rho^2 E \quad E: N \times N \text{ 単位行列}$$

したがって、 x に対する対数尤度 L は、

$$L = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\sigma^2 S + \rho^2 E| - \frac{1}{2} x^T (\sigma^2 S + \rho^2 E)^{-1} x \quad (3-15)$$

この $\mathcal{L}$ を最小にするように ρ を決定すれば良い訳であるが、行列 $(\sigma^2 S + \rho^2 I)^{-1}$ の評価が簡単でないこと、及び、現実には SN 比が十分に大きい場合が多いので、ここでは、 $\sigma^2 \gg \rho^2$ として話を進める。

$\varepsilon = \rho^2 / \sigma^2$ とすると上の仮定より $\varepsilon \ll 1$ 、このとき、行列 εS^{-1} の固有値も十分に小さいと考えよいかから、次の展開式が成立する*。

$$\begin{aligned} (\sigma^2 S + \rho^2 E)^{-1} &= [(\sigma^2 S)(E + \varepsilon S^{-1})]^{-1} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-\varepsilon)^m [S^{-1}]^{m+1} \end{aligned} \quad (3-16)$$

更に行列式の評価について一般に次式が成立することが知られている。

$$|E + \lambda A| = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \lambda^m \text{tr}(A^m) \right\}$$

したがって、

$$\log |\sigma^2 S + \rho^2 E| = \log |\sigma^2 S| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \varepsilon^m \text{tr}(S^{-m}) \quad (3-17)$$

(3-16), (3-17) を (3-15) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\sigma^2 S| - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{X}^T S^{-1} \mathbf{X} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \varepsilon^m \left[\frac{\mathbf{X}^T S^{-(m+1)} \mathbf{X}}{\sigma^2} - \frac{1}{m} \text{tr}(S^{-m}) \right] \end{aligned} \quad (3-18)$$

よって、弱い観測雑音が存在する場合の速度推定量 $\hat{v}_{S+N}$ は、次の方程式の根である。

* 付録 4 参照

$$\sigma^2 \frac{d}{d\gamma} \log |S| + X^T \frac{dS^{-1}}{d\gamma} X + \varepsilon \left\{ \sigma^2 \operatorname{tr} \left(\frac{dS^{-1}}{d\gamma} \right) - X^T \frac{dS^{-2}}{d\gamma} X \right\} + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3-19)$$

これより $\hat{v}_{S+N}$ を explicit に求めることは出来ないが、NS比 ε が十分に小さければ、これが雑音の存在しない場合の推定量 $\hat{v}_S$ からどの程度異なるものであるかを求めることが出来る。

$$g(\gamma) = \sigma^2 \operatorname{tr} \left(\frac{dS^{-1}}{d\gamma} \right) - X^T \frac{dS^{-2}}{d\gamma} X \quad (3-20)$$

とおくとき、(3-19) 式の $f(\gamma)$ を使うと方程式 (3-19) は、

$$f(\gamma) + \varepsilon g(\gamma) + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3-21)$$

ここで、 $f(\gamma)$, $g(\gamma)$ の解析性及び $f(\hat{\gamma}_S) = 0$ に注意すると、 $\varepsilon \ll 1$ のとき $\hat{\gamma}_{S+N} = \exp(-\alpha \hat{v}_{S+N} \Delta)$ は次のように ε の級数に展開出来る。

$$\hat{\gamma}_{S+N} = \hat{\gamma}_S + \varepsilon \gamma_1 + \dots$$

これを (3-21) に代入し、 ε で展開し、 ε^2 以上の項を無視すると、

$$\varepsilon \gamma_1 f'(\hat{\gamma}_S) + \varepsilon g(\hat{\gamma}_S) = 0.$$

$$\therefore \gamma_1 = - \frac{g(\hat{\gamma}_S)}{f'(\hat{\gamma}_S)}$$

したがって $\hat{v}_{S+N}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{v}_{S+N} &= -\frac{1}{\alpha \Delta} \log(\hat{\gamma}_S + \varepsilon \gamma_1) = -\frac{1}{\alpha \Delta} \log \hat{\gamma}_S - \frac{\varepsilon}{\alpha \Delta} \frac{\gamma_1}{\hat{\gamma}_S} \\ &= \hat{v}_S + \varepsilon \frac{g(\hat{\gamma}_S)}{\alpha \Delta \hat{\gamma}_S f'(\hat{\gamma}_S)} \end{aligned} \quad (3-22)$$

雑音に対する補正量 $\delta v = \hat{v}_{s+N} - \hat{v}_N$ を explicit に求めると次のようになる。

$$\delta v = \frac{2\varepsilon}{d\Delta} \frac{R_1 \hat{\gamma}_s^4 - (N\sigma^2 + 3R_0 + R_2) \hat{\gamma}_s^3 + 6R_1 \hat{\gamma}_s^2 + (N\sigma^2 - 3R_0 - R_2) \hat{\gamma}_s + R_1}{\hat{\gamma}_s (1 - \hat{\gamma}_s^2) (3N\sigma^2 \hat{\gamma}_s^2 - 2R_1 \hat{\gamma}_s + 2R_0 - N\sigma^2)}$$

N が十分に大きい場合には、この δv の値はほぼ $-\varepsilon/(1+\gamma^2)$ 程度である。

又、雑音の存在しない場合の推定量 $\hat{v}_s$ には、0, 1 だけ離れたところとの相関 R_0, R_1 しか含まれていないが、 $\hat{v}_{s+N}$ にはその他に R_2 も含まれており、更に、雑音が大きくなると (3-18) 式の展開式の ε の高次の項まで考慮しなければならない時には、更に離れたところとの相関を考えなければならぬのは興味深い。

3.4.2 $\hat{v}_{s+N}$ の評価.

(3-18) 式で ε の 2 次以上の項を省略する。

$$L = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\sigma^2 S| - \frac{1}{2\sigma^2} x^T S^{-1} x \\ - \frac{1}{2} \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sigma^2} x^T S^{-2} x - \text{tr}(S^{-1}) \right\}$$

よって

$$E \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} \right] = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\sigma^2} \log |S| - \frac{1}{2\sigma^2} E \left[x^T \frac{d^2 S^{-1}}{d\sigma^2} x \right] \\ - \frac{1}{2} \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sigma^2} E \left[x^T \frac{d^2 S^{-2}}{d\sigma^2} x \right] - \text{tr} \left[\frac{d^2 S^{-1}}{d\sigma^2} \right] \right\}$$

ここで

$$E[xx^T] = \sigma^2 S + P^2 E$$

に注意すると.

$$E \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} \right] = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\gamma^2} \log |S| - \frac{1}{2} \text{tr} \left[(S + \varepsilon E) \frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} \right] \\ + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \text{tr} \left[(S + \varepsilon E) \frac{d^2 S^{-2}}{d\gamma^2} \right] - \text{tr} \left[\frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} \right] \right\}$$

$\therefore$ (2)

$$2 \text{tr} \left[\frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} \right] - \text{tr} \left[S \frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} \right] = -2 \text{tr} \left[S \left(\frac{dS^{-1}}{d\gamma} \right)^2 \right]$$

に注意すると、 ε の 2 次の項を省略して.

$$E \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} \right] = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\gamma^2} \log |S| - \frac{1}{2} \text{tr} \left[S \frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} \right] + \varepsilon \text{tr} \left[S \left(\frac{dS^{-1}}{d\gamma} \right)^2 \right]$$

$\therefore$ (2) (3-14) 式を用いると.

$$\text{tr} \left[S \left(\frac{dS^{-1}}{d\gamma} \right)^2 \right] = \left(\frac{2\gamma}{1-\gamma^2} \right)^2 \text{tr} [S^{-1}] + \frac{4\gamma}{(1-\gamma^2)^2} \text{tr} [p] + \frac{1}{(1-\gamma^2)^2} \text{tr} [sp^2] \\ = \frac{2N(1+4\gamma^2-\gamma^4)}{(1-\gamma^2)^3} \quad \text{for large } N$$

よって.

$$E \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} \right] = -N \frac{1+\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} + 2\varepsilon N \frac{1+2\gamma^2-\gamma^4}{(1-\gamma^2)^3}$$

したがって、

$$E\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\right] = \alpha^2 \Delta^2 \gamma^2 N \left\{ \frac{1+\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} - 2\varepsilon \frac{1+4\gamma^2-\gamma^4}{(1-\gamma^2)^3} \right\}$$

よって、(3-3)を使うと $\hat{v}_{S+N}$ の漸近的相対誤差 B_{S+N} は次のようになる。

$$\begin{aligned} B_{S+N} &= \frac{1+\gamma^2}{\sqrt{N} \alpha v \Delta \gamma \sqrt{1+\gamma^2}} \left(1 + \varepsilon \frac{1+4\gamma^2-\gamma^4}{1-\gamma^4} \right) \\ &= \frac{1-e^{-2\alpha v \Delta}}{\sqrt{N} \alpha v \Delta e^{-\alpha v \Delta} \sqrt{1+e^{-2\alpha v \Delta}}} \left(1 + \varepsilon \frac{1+4e^{-2\alpha v \Delta}-e^{-4\alpha v \Delta}}{1-e^{-4\alpha v \Delta}} \right) \end{aligned} \quad (3-24)$$

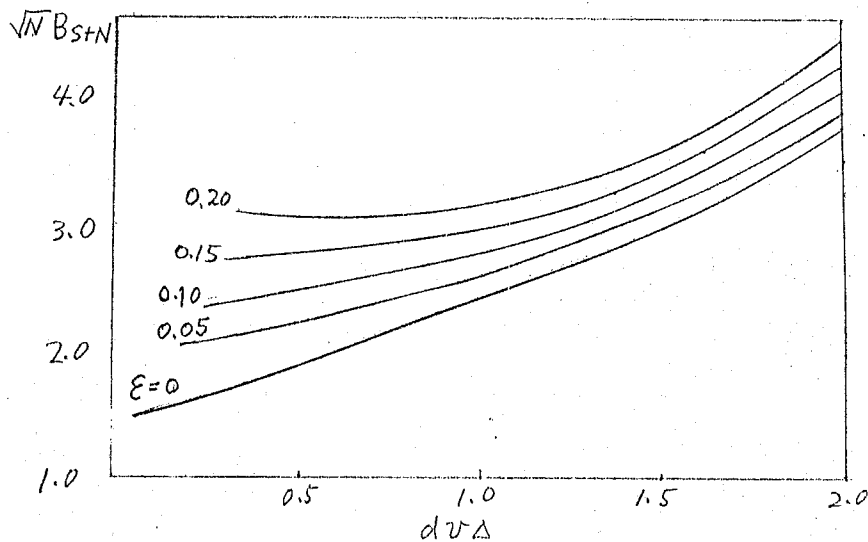


Fig 3-2 推定誤差の漸近値

(雑音が弱い場合; ε : 雑音信号比)

次に B_{S+N} を雑音が存在しない場合の漸近相対誤差 B_S と比較してみると、

$$\frac{B_{S+N}}{B_S} = 1 + \varepsilon \frac{1+4\gamma^2-\gamma^4}{1-\gamma^4}$$

となるが、これを見て明らかのように、 γ があまりに 1 に近くないかぎり、即ち $\alpha\sqrt{\Delta}$ があまりに小さくなければ、雑音による相対誤差の増加は NS 比と程度、であることがわかる^{*}。又、次節 3.5 では雑音が信号と同程度の強度を持つ場合について、 N が十分に大きいという仮定のもとで、今までは別の方法によって解析するが、それによると、そのような場合でも雑音による相対誤差の増加は雑音-信号比位であることがわかる。

これは、たとえ観測に際して雑音を加わる場合でも、ムラ及び雑音の統計的性質を十分に考慮して推定を行なうことにより、雑音に強い速度の推定が可能であることを示すものであり、統計的推定による非接触速度計測のひとつの利点を示すものである。

3.5 強い観測雑音を伴う場合の速度の推定

ここでは、前節 3.4 の方法を修正して、 N が十分に大きい場合の対数尤度 L の評価を行ない、これによって雑音が強い場合の推定誤差について調べる。

観測信号 $\{x_i\}$ の離散スペクトル密度を $\Phi_X(z)$ とすると、

$$\Phi_X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[X_R X_{R+n}] z^{-n}$$

* (3-24) 式が有効なのは、付録 5 より $\varepsilon < (1-\gamma)/(1+\gamma)$ であるからこのような ε については

$$\frac{B_{S+N}}{B_S} < 1 + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \cdot \frac{1+4\gamma^2-\gamma^4}{1-\gamma^4} \leq 2$$

となり、 $\gamma \rightarrow 1$ としなくても $B_{S+N}/B_S \rightarrow \infty$ にはならない。

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sigma^2 e^{-d\sqrt{\lambda} |n|} + \rho^2 \delta_{n,0} \right] z^{-n} \\
&= \frac{\sigma^2 (1-\gamma^2)}{(1-\gamma z)(1-\gamma z^{-1})} + \rho^2 = \beta^2 \frac{(1-\lambda z)(1-\lambda z^{-1})}{(1-\gamma z)(1-\gamma z^{-1})}
\end{aligned}$$

ただし、 $\sigma^2, \rho^2, \beta^2, \gamma, \lambda$ の間に次の関係が成立する。

$$\begin{cases} (1+\lambda^2)\beta^2 = \sigma^2(1-\gamma^2) + \rho^2(1+\gamma^2) \\ \lambda\beta^2 = \rho^2\gamma, \quad |\lambda| < 1 \end{cases}$$

これより、 λ, β^2 を求めると、

$$\lambda = \frac{1}{2\rho^2\gamma} \left\{ \sigma^2(1-\gamma^2) + \rho^2(1+\gamma^2) - \sqrt{[\sigma^2(1-\gamma^2) + \rho^2(1+\gamma^2)]^2 - 4\rho^4\gamma^2} \right\}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sigma^2(1-\gamma^2) + \rho^2(1+\gamma^2) + \sqrt{[\sigma^2(1-\gamma^2) + \rho^2(1+\gamma^2)]^2 - 4\rho^4\gamma^2} \right\}$$

したがって、 $\{X_i\}$ は、強さ β^2 の独立過程 $\{Y_i\}$ ($E[Y_i Y_j] = \beta^2 \delta_{ij}$) をデジタル・フィルタ

$$H(z) = \frac{1-\lambda z^{-1}}{1-\gamma z^{-1}}$$

に加えた時の出力と考えることが出来る。即ち、

$$X_n - \gamma X_{n-1} = Y_n - \lambda Y_{n-1} \quad (3-25)$$

この式は、いわば定常状態に於て成立する式であり、 $t=-\infty$ で $\{Y_i\}$ が H に印加されて、その結果 $\{X_i\}$ が得られたものと解釈することが出来る。

観測データ $\{X_1, \dots, X_N\}$ が得られたとき、これは上のような形で独立過程 $\{Y_i\}$ と結びつけられるが、 $0 < \gamma < 1$ であるから、サンプル数 N が十分に大きければ、これらのデータは時刻 $t=0$ で $\{Y_i\}$ が H に加えられた時の出力と考えることもよい。即ち

(3-25) 式に於て.

$$Y_{-k} = 0, \quad X_{-k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

としても漸近的にはかまわない。

この仮定のもとに (3-25) 式を Y_n について解くと.

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} (X_k - \gamma X_{k-1})$$

このとき, Jacobian $\partial[Y]/\partial[X]$ について

$$\frac{\partial(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)}{\partial(X_1, X_2, \dots, X_N)} = I$$

が成立するから.

$$L = \log P(X) = \log p(Y)$$

$$= -\frac{N}{2} \log(2\pi\beta^2) - \frac{1}{2\beta^2} \sum_{n=1}^N \left[\sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} (X_k - \gamma X_{k-1}) \right]^2$$

(漸近) 最尤推定量 $\hat{v}$ を explicit に求めることは困難であるが、 $\hat{v}$ の漸近相対誤差 B については、それを 3.4 と同様に、

Cramér-Rao Bound を用いて評価したが、その導出は極めて面倒であるので、ここでは結果のみを示す*。

$$B = \frac{1}{\sqrt{N} \alpha v \Delta \gamma D(\gamma, \frac{\sigma^2}{\rho^2})} \quad (3-26)$$

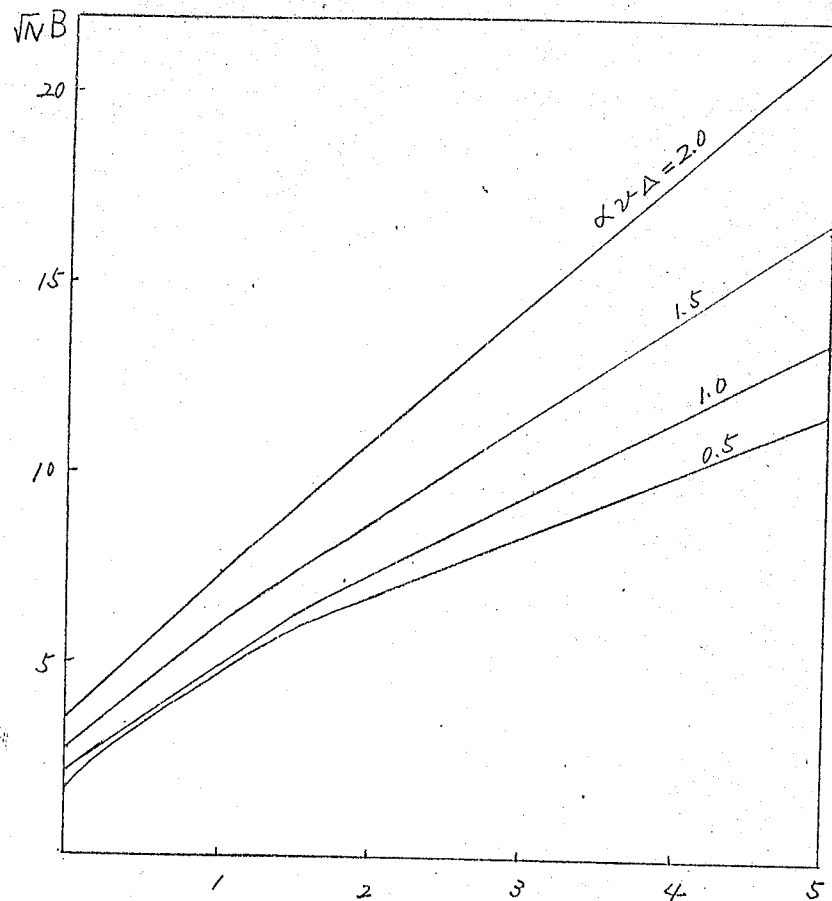
ただし.

$$D(\gamma, \frac{\sigma^2}{\rho^2}) = \left\{ \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{1-\lambda^2} - \frac{2q}{1-\gamma\lambda} + \frac{\lambda}{\gamma} \frac{1-\gamma\lambda + \frac{\sigma^2}{\rho^2}(1+\gamma\lambda)}{(1-\lambda^2)(1-\gamma\lambda)} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$p = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2} - \frac{\lambda}{\gamma} \right)$$

* B の導出については、付録5を参照されたい。

$$\xi = 2 \left(\frac{\sigma^2}{\rho^2} - 1 \right) \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} + \frac{\lambda(1 + \lambda^2)}{\delta(1 - \lambda^2)}$$



ϵ : 雑音信号比

Fig 3-3 推定量の漸近値
(雑音が強い場合)

雑音-信号比 $\epsilon = \rho^2/\sigma^2$ を横軸にとって $\sqrt{N}B$ のグラフを書くと、Fig 3-3 のようになるが、これを見ると、雑音が非常に大きな場合でも、それによる ν の推定誤差の増加の割合が ϵ 程度であることは興味深い。

なお、 $\epsilon \ll 1$ として、(3-26) 式を ϵ の Taylor 級数に展開することにより、(3-24) 式の B_{S+N} が得られることは勿論である。

3.6 デジタル計算機によるシミュレーション

ここでは、単純マルコフ型の4ラの速度推定と、雑音が存在しない場合、及び、弱い雑音が存在する場合について、即ち、3.3, 3.4で理論的に考察したことをデジタル計算機によるシミュレーションによって調べる。

(i) 4ラ信号, 雑音の発生

4ラ信号 $W(i\Delta)$, $i=1, 2, \dots, N$ は単純マルコフ過程であることから、正規乱数 $\{Y_i\}$ と次の関係によって結ばれる。

$$\begin{cases} W((i+1)\Delta) - \gamma W(i\Delta) = Y_i \\ E[Y_i Y_j] = (1-\gamma^2) \delta_{ij} \end{cases}$$

したがって、正規乱数 $\{Y_i\}$ を計算機上で発生させ、これを使って上式のようにして $W(i\Delta)$ を作ればよい。

又、雑音 $\{n_i\}$ は正規乱数を用いる。

正規乱数は、一様乱数を合同法によって発生させ、これを正規型に変換させればよいが、そのアルゴリズムについては、付録6を参照されたい。

観測信号 $\{X_i\}$ の発生方法は下図のようになる。

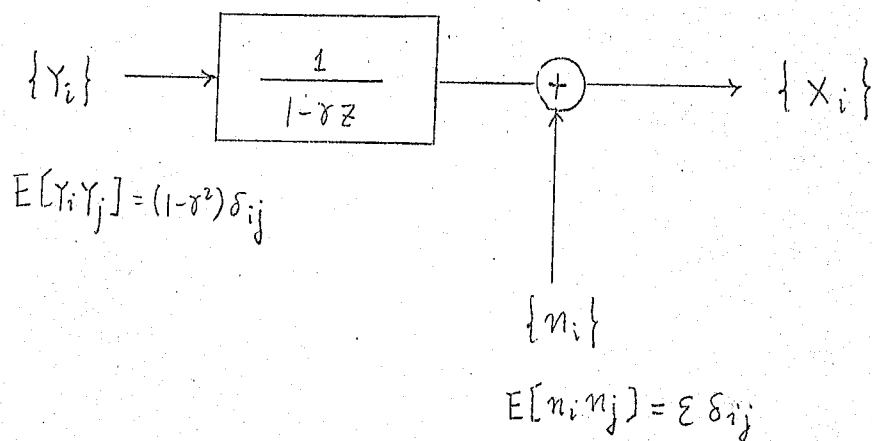


Fig 3-4

(ii) シミュレーションの方法

前述した方法により $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ を発生させ. (3-10)
(3-11), (3-22) 式にしたがって, 即ち.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_{s+N} = \hat{v}_s + \delta v \\ (N-1)\sigma^2 \hat{\gamma}_s^3 - R_1 \hat{\gamma}_s^2 + \{2R_0 - X_1^2 - X_N^2 - (N-1)\sigma^2\} \hat{\gamma}_s - R_1 = 0 \\ \hat{v}_s = \log \hat{\gamma}_s / \alpha \Delta \\ \delta v = \frac{2\varepsilon \{R_1 \hat{\gamma}_s^4 - (N\sigma^2 + 3R_0 + R_2) \hat{\gamma}_s^3 + 6R_1 \hat{\gamma}_s^2 + (N\sigma^2 - 3R_0 - R_2) \hat{\gamma}_s + R_1\}}{\alpha \Delta \hat{\gamma}_s (1 - \hat{\gamma}_s^2) (3N\sigma^2 \hat{\gamma}_s^2 - 2R_1 \hat{\gamma}_s + 2R_0 - N\sigma^2)} \end{array} \right.$$

により $\hat{v}_{s+N}$ を計算する実験を繰返し, 20~40 回の算術平均を

$$E \left[\left(\frac{\hat{v}_{s+N} - v}{v} \right)^2 \right]$$

を計算すると, 種々の $\alpha \Delta v$, N , ε について行った.

(iii) 結果

以上の方法にしたがって行ったシミュレーションの結果を Fig 3-5, Fig 3-6, Fig 3-7 に示す.

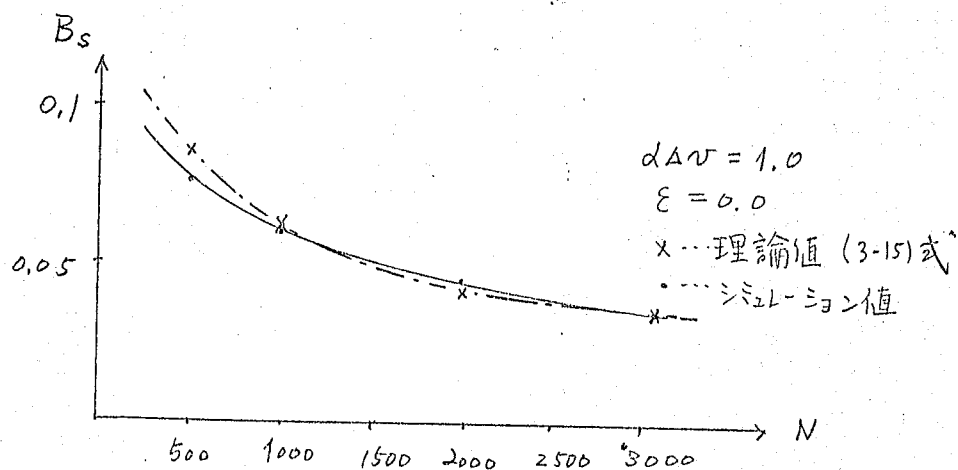


Fig 3-5

Fig 3-5 は推定誤差がサンプル数 N とともにどのように変化するかを示したものである。この結果は, その理論値 (3-15) 式, Fig 3-1

とよい一致を示しており、誤差が $1/\sqrt{N}$ の割合で減少していくことが実験的に確かめられた。又、 $N \geq 500$ であれば、(3-15)式が成立することが明らかとなった。

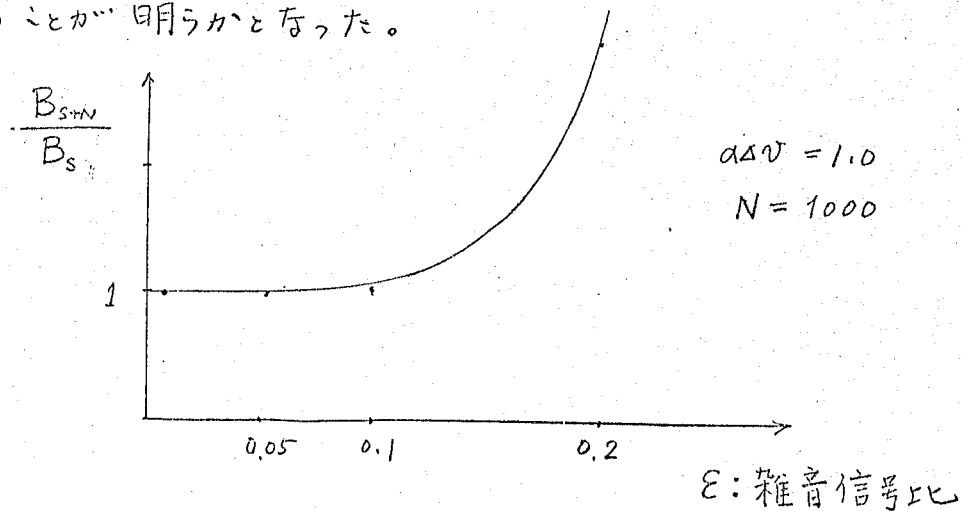


Fig 3-6

Fig 3-6 は観測雑音の混入によって、測定誤差が、雑音の存在しない場合に比べてどの程度増加するかを示したものである。

この結果より、NS比が 0.1 程度までは、(3-22)式の補正で十分に雑音による影響を除出することが明らかとなった。又、理論式(3-24)式との対比によれば、雑音による誤差の増加分が非常に小さい(0.01程度)ために、平均値を求める際の統計的変動にマスクされて直接には、その一致を調べることは出来ないが、(3-22)式による補正が十分に利いていることは、(3-22)式の正しさを間接的に証明するものと考えられる。

3.7 分布に関する未知パラメータの影響

今までは、 λ の分布に含まれるパラメータ α, σ^2 , 及び雑音の分散 ρ^2 が全く既知であるとして話を進めてきたが、実際には、これらのものが未知である場合が多い。ここではこのような状況のもとでの速度の推定について考える。

この問題は、 v を他のパラメータと同時に推定しようとする *multiple estimation* として考えれば何ら困難なことではなく、今までと同様の議論が可能である。

ただ、パラメータ α については、これが $X(t)$ の分布に対して常に αv という形でしか影響を及ぼさないため、 $X(t)$ から推定出来るのは αv であり、 α, v 単独の推定は不可能である。

この問題は計測上からは重要であるので次章において論ずることにし、ここでは、 α は既知であるとして上の考え方にもとづいて v の推定を行ない、その場合の相対誤差がどのようなになるかを調べる。

式 (3-18) において、 ε に ρ^2/σ^2 を代入したものとすると、 σ^2, ρ^2 が未知の場合の速度の最尤推定量は 3.2 で述べた事柄の自然な拡張として、

$$\frac{\partial L}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \rho^2} = 0$$

を満たす v によって与えられ、その Cramér-Rao Bound は

$$(I^{-1})_{11}$$

となる。ここで行列 I は Information Matrix であり

$$\theta_1 = v, \quad \theta_2 = \sigma^2, \quad \theta_3 = \rho^2$$

とおくとその要素 I_{ij} は次式で与えられる。

$$I_{ij} = E \left[- \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

以下 I_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) の評価を行う。

(3-18) 式より $\varepsilon = \rho^2 / \sigma^2$ とおくと

$$L = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\sigma^2 S| - \frac{1}{2\sigma^2} X^T S^{-1} X \\ - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\rho^2}{\sigma^2} \right)^m \left[\frac{X^T S^{-(m+1)} X}{\sigma^2} - \frac{1}{m} \text{tr}[S^{-m}] \right]$$

これを、 γ, σ^2, ρ^2 について 2 回微分し、 ρ^2 / σ^2 の 2 次以上の項を省略すると

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\gamma^2} \log |S| + \frac{1}{2\sigma^2} X^T \frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} X - \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2} X^T \frac{d^2 S^{-2}}{d\gamma^2} X - \text{tr} \left(\frac{d^2 S^{-1}}{d\gamma^2} \right) \right]$$

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial (\sigma^2)^2} = -\frac{N}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6} X^T S^{-1} X - \frac{\varepsilon}{\sigma^4} \left[\frac{3}{\sigma^2} X^T S^{-2} X - \text{tr}(S^{-1}) \right]$$

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial (\rho^2)^2} = -\frac{1}{2\sigma^4} \text{tr}[S^{-2}] + \frac{1}{\sigma^6} X^T S^{-3} X - \frac{\varepsilon}{\sigma^4} \left[\frac{3}{\sigma^2} X^T S^{-4} X - \text{tr}(S^{-3}) \right]$$

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma \partial \sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^4} X^T \frac{dS^{-1}}{d\gamma} X + \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} \left[\frac{2}{\sigma^2} X^T \frac{dS^{-2}}{d\gamma} X - \text{tr} \left(\frac{dS^{-1}}{d\gamma} \right) \right]$$

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma \partial \rho^2} = -\frac{1}{2\sigma^4} X^T \frac{dS^{-2}}{d\gamma} X + \frac{1}{2\sigma^2} \text{tr} \left(\frac{dS^{-1}}{d\gamma} \right) + \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} \left[\frac{2}{\sigma^2} X^T \frac{dS^{-3}}{d\gamma} X - \text{tr} \left(\frac{dS^{-2}}{d\gamma} \right) \right]$$

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \rho^2} = -\frac{1}{2\sigma^4} \text{tr}(S^{-1}) + \frac{1}{\sigma^6} X^T S^{-2} X - \frac{3}{\sigma^4} \left[\frac{3}{\sigma^2} X^T S^{-3} X - \text{tr}(S^{-2}) \right]$$

$\varepsilon = 3 \times 10^{-3}$

$$E[X^T X] = \sigma^2 (S + \varepsilon E)$$

2" があるから、 $E[X^T A X] = \text{tr}(E[X^T X] A)$ を利用すると、

$$E\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2}\right] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\sigma^2} \log |S| + \frac{1}{2} \text{tr}\left[S \frac{d^2 S^{-1}}{d\sigma^2}\right] - \varepsilon \text{tr}\left[S \left(\frac{dS^{-1}}{d\sigma}\right)^2\right]$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial (\sigma^2)^2}\right] = \frac{N}{2\sigma^4} - \frac{N}{\sigma^4} \text{tr}(S^{-1})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial (\rho^2)^2}\right] = \frac{N}{2\sigma^4} \text{tr}(S^{-2}) - \frac{\varepsilon}{\sigma^4} \text{tr}(S^{-3})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma \partial \sigma^2}\right] = -\frac{1}{2\sigma^2} \text{tr}\left(S \frac{dS^{-1}}{d\sigma}\right) + \frac{\varepsilon}{\sigma^2} \left[\text{tr}\left(S \frac{d^2 S^{-2}}{d\sigma}\right) - \text{tr}\left(\frac{dS^{-1}}{d\sigma}\right) \right]$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma \partial \rho^2}\right] = -\frac{1}{2\sigma^2} \text{tr}\left(S \frac{dS^{-2}}{d\sigma}\right) + \frac{1}{2\sigma^2} \text{tr}\left(\frac{dS^{-1}}{d\sigma}\right) + \frac{\varepsilon}{\sigma^2} \left[\text{tr}\left(S \frac{dS^{-3}}{d\sigma}\right) - \text{tr}\left(\frac{dS^{-2}}{d\sigma}\right) \right]$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \rho^2}\right] = \frac{1}{2\sigma^4} \text{tr}(S^{-1}) - \frac{\varepsilon}{\sigma^4} \text{tr}(S^{-2})$$

ここで、3.3.2 で行ったと同様に、(3-5)、(3-8) 式を使って上の諸式の各項を処理し、更に、 $\gamma = e^{-\alpha \Delta V}$ に注意すると、information matrix の各要素 I_{ij} について次の式の成立することがわかる。

$$I_{11} = N\alpha^2\Delta^2 \frac{\gamma^2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^2} - 2\varepsilon N\alpha^2\Delta^2 \frac{\gamma^2(1+4\gamma^2+\gamma^4)}{(1-\gamma^2)^3}$$

$$I_{22} = \frac{N}{2\sigma^4} - \frac{\varepsilon N}{\sigma^4} \cdot \frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}$$

$$I_{33} = \frac{N}{2\sigma^4} \cdot \frac{1+4\gamma^2+\gamma^4}{(1-\gamma^2)^2} - \frac{\varepsilon N}{\sigma^4} \cdot \frac{(1+\gamma^2)(1+8\gamma^2+\gamma^4)}{(1-\gamma^2)^3}$$

$$I_{13} = \frac{2N\alpha\Delta}{\sigma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} - \frac{6\varepsilon N\alpha\Delta}{\sigma^2} \cdot \frac{\gamma^2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^3}$$

$$I_{23} = \frac{N}{2\sigma^4} \cdot \frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2} - \frac{\varepsilon N}{\sigma^4} \cdot \frac{1+4\gamma^2+\gamma^4}{(1-\gamma^2)^2} \quad (3-27)$$

更に、この行列 I を ε を含まない部分 A と、含む部分 εB の和にわけて考えると、

$$I = A + \varepsilon B = A(E + \varepsilon A^{-1}B)$$

故に、 $\varepsilon \ll 1$ とし、 I の逆行列を求めると、

$$I^{-1} = (E + \varepsilon A^{-1}B)^{-1} A^{-1} = A^{-1} - \varepsilon A^{-1}BA^{-1} + O(\varepsilon^2)$$

よって Cramér-Rao Bound $(I^{-1})_{11}$ は

$$(I^{-1})_{11} = (A^{-1})_{11} - \varepsilon \sum_{j,k=1}^3 (A^{-1})_{1k} (A^{-1})_{1j} (B)_{kj}$$

(3-27) をもとに (2) 式の計算を行なうと

$$= \frac{1}{N\alpha^2\Delta^2} \cdot \frac{1-\gamma^2}{\gamma^4} (1+2\varepsilon)$$

故に、 σ^2, ρ^2 が未知の場合の速度推定量の漸近的相対誤差 B'_{S+N} は、

$$B'_{S+N} = \frac{1}{v} \sqrt{(I^{-1})_{11}} = \frac{1}{\sqrt{N}\alpha v \Delta} \cdot \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma^2} (1+\varepsilon) \quad (3-28)$$

ここで興味あることは、雑音の影響による相対誤差の増加の割合が丁度 NS 比とであり、 γ に依存しないことである。

次に σ^2, ρ^2 が未知であることが、 v の推定誤差にどの位影響するかを調べてみる。

$$\frac{B'_{S+N}}{B_{S+N}} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}} \left(1 - 4\varepsilon \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \right) \equiv \beta \quad (3-30)$$

となるが、この β を見るとわかるように、 σ^2, ρ^2 が未知であることによる影響は雑音が小さい時程、顕著に現われ特に $\varepsilon=0$ の場合を考えると、

$$\beta_0 = (\beta)_{\varepsilon=0} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}}$$

となるが、この β_0 について次の不等式が成立する。

$$\beta_0 \geq 1 + \sqrt{2} = 2.41 \dots$$

即ち、雑音が小さい場合を考えると、 σ^2, ρ^2 が未知であることは v の推定誤差を、それらが既知である場合に比して、数倍の大きさにすることがわかる。

勿論、 ε が増加すれば、即ち雑音が強くなれば、 β は減少する

が、このときには $B_s + N$ が増加するので、精度の良い推定を行なうためにはなるべく雑音を抑えた状態で観測を行なわなければならない。したがって、 σ^2, ρ^2 が未知であることは、 v の推定に非常に悪影響を及ぼしていることがわかる。

實際上、 σ^2, ρ^2 は v とは独立に推定出来る場合が多く、かつ、 v の推定は限られた時間内に行なわれるのが普通であるから、上の事柄を考えると、 σ^2, ρ^2 は v とは独立に、事前に十分時間をかけて推定しておき、 v を推定するときにはそれらが既知であるという状態にしておくことが極めて重要である。

3.8 パラメータ α の決定

3.7 で述べたように、パラメータ α は v と同時推定が可能でない。したがって v が推定可能であるためには、 α が既知である場合を除き、予め何らかの方法により α の値を決定しておかなければならない。

このとき、もしムラ $W(\xi)$ の記録波形が入手可能のときは、 α の決定は何ら問題なく、今まで述べてきた v の推定法をそのまま用いることが出来る。即ち、今までの議論に於いて、 $\alpha=1, W(\xi) \rightarrow X(t)$ としたときの v の値を α とすればよい。

問題なのは、そのようなデータが得られない場合であり、このときには α をオンラインで測定しなければならない。このとき、もしムラ上にいくつかの観測点を設けることが可能であれば、2.4 で述べたと同様の方法により、 α をいわば空間的に決定することが出来る。例えば、

$$e^{-\alpha \cdot \Delta \xi} = E[W(\xi + \Delta \xi) W(\xi)] / \sigma^2$$

を Fig 3-8 のような方法で測定することにより α を決出することが出来る。

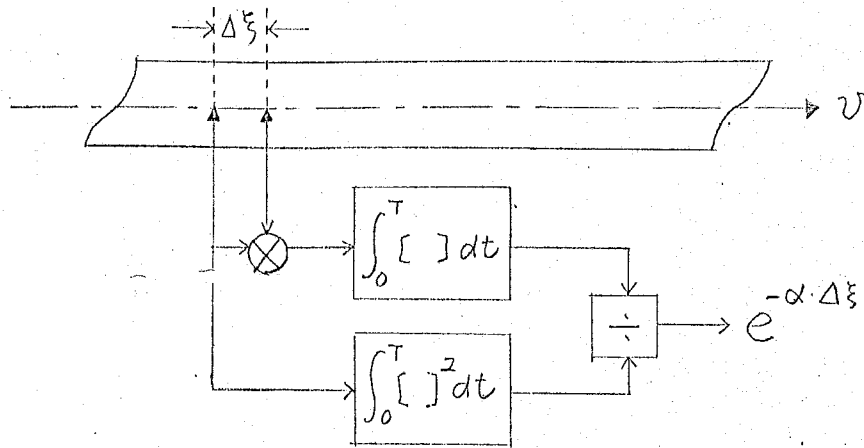


Fig 3-8 α のオンライン測定法

勿論、具体的にどのような方法をとるかは、その時の測定状況によって異なる。

しかしながら、このような形での α の決定も物理的条件によって不可能であるときには、もはや統計的推定によって速度を決定することは不可能である。

これはなにも正規定常マルコフ型ムラの場合だけの問題ではなく、統計的推定によって速度を推定する際の共通の問題である。

この問題と関連して空間フィルタ法による非接触速度計測を考^{6),7)}えることは興味ある。即ち、空間フィルタ法では、測定対象を空間フィルタを通して観測することにより、特定の空間周波数成分だけを取り出しているため、観測されるムラの分布のパラメータのうち v と同時推定不可能なものを人工的に特定の値に設定しうることである。かかる意味で、統計的推定を行なう時の前処理として空間フィルタを採用することは、もしそれが物理的に可能であれば、非常に有利であろう。これに関連して、フィルタの broadness 及び観測雑音を考慮に入れた上での最適な v の推定法の研究は有意義である。

3.9 時間的に連続な観測データの取扱い

今までは、観測データが時間的に離散な場合のみを考えただけだが、以下では、時間的に連続な場合については、正規定常マルコフ過程というモデルを現実問題に適用する際、若干の注意が必要であることを示す。

簡単のため観測雑音が存在しない場合のみを考え、又、観測データを $\{X(t) = W(vt); 0 \leq t \leq T\}$ とする。

このとき、 v の推定量 $\hat{v}_*$ を求めるために、3章の議論において、

$$N\Delta = T: \text{const} \quad (3-31)$$

という条件のもとで、 $\Delta \rightarrow 0$ としてみる。

$$y^k = e^{-\alpha v k \Delta} = 1 - \alpha v k \Delta + o(\Delta^2)$$

を尤度方程式 (3-10) に代入すると、

$$\{2(N-1)\sigma^2 + 2R_0 - X_1^2 - X_N^2 - 2R_1\} d v \Delta = 2R_0 - X_1^2 - X_N^2 - 2R_1 + o(\Delta^2)$$

ところが、 $\Delta \rightarrow 0$ のとき、

$$2R_0 - X_1^2 - X_N^2 - 2R_1 = \sum_{k=1}^N (X_k - X_{k+1})^2 \rightarrow 2\alpha v \sigma^2 T \text{ with prob. 1} \quad (3-32)$$

が示されるから⁽²⁾

$$2(N-1)\sigma^2 \gg 2R_0 - X_1^2 - X_N^2 - 2R_1$$

故に、

$$\hat{v}_* = \frac{1}{2\alpha\sigma^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2R_0 - X_1^2 - X_N^2 - 2R_1}{(N-1)\Delta} \quad (3-33)$$

$$= \frac{1}{2\alpha\sigma^2 T} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[2 \sum_{k=2}^N X_k (X_k - X_{k-1}) + X_1^2 - X_N^2 \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha\sigma^2 T} \int_0^T X(t) dX(t) + \frac{X^2(0) - X^2(T)}{2\alpha\sigma^2 T}$$

次に、この $\hat{v}_*$ の相対誤差については (3-33) 式の分子に再度 (3-32) 式を適用すれば

$$\hat{v}_* = v \quad \text{with prob. 1}$$

が示され、したがって $B_* = 0$ となる。

これで一応 v の推定量及びその誤差が導けたが、これを現実の μ にあてはめると、いささかの問題を生ずる。

即ち、 $\int_0^T X(t) dX(t)$ は、 μ が正確に定常マルコフ型であるときには適正な値となり、その結果 $\hat{v}_*$ も v の推定量として適当なものになるが、微分が存在するような現実の μ に対しては

$$\int_0^T X(t) dX(t) = \int_0^T X(t) \dot{X}(t) dt = \frac{1}{2} \{ X^2(T) - X^2(0) \}$$

となり、したがって $\hat{v}_* = 0$ 、よって、この $\hat{v}_*$ を v の推定量として採用することは出来ない。

更に、有限の観測時間 T に対して、推定誤差が完全に 0 になることも現実問題としては奇妙である。

これらの現象の原因は、実は、正規定常マルコフ過程の特異な性質¹³⁾ にもとづくものであり、 $\hat{v}_*$ がこの性質を受け継いでいることは、このような数学的モデルで μ を近似する際の注意を促すものである。

即ち、時間的に連続なデータを扱う場合には、 μ の分布に対してもっと insensitive な推定法、例えば $\int_0^T X(t) X(t+\tau) dt$ などを用いるべきであるし、又、離散的データの場合でも、サンプル間隔 Δ の決定には注意を要する。

即ち、全観測時間 $T = N\Delta$ が一定の時には、 Δ が小さい程推定誤差が減少するが、これがあまりに小さいと、現実の μ との差が大きくなるからである。

3.10 3章のまとめ

一定速度で動く正規定常マルコフ過程の速度を、白い観測雑音を伴う離散的データから推定する問題について考察した。この際、推定量の導出には最尤法を、又その評価には Cramér-Rao Bound を用いたが、その結果十分に意味のある推定量を得ることが出来た。特に観測雑音の影響については、それによる推定誤差の増加の割合が雑音-信号比程度であり、雑音が弱ければそれ程大きな問題とはならないことを確かめた。又、これにひきかえ、ムラや雑音の分布に含まれるパラメータが未知であることは、推定誤差を数倍の大きさにすることがわかった。更に、その微分が存在するようなムラに、ここで求められた推定法を適用する際には、サンプル間隔の選定に際しては若干の注意が必要であることを述べた。

第4章 曲線あてはめ法による速度計測の

シミュレーション

4.1 緒言

第2,3章では、統計的推定による速度計測を2つのモデルに適用して、特にその測定誤差について理論に検討を加えて来たが、いずれの場合でも、その結果は満足のものがあった。これから、一般の場合についての様子もある程度うかがい知ることが出来ると考えられるが、本章では、更に現実に近いようなモデルについて曲線あてはめ法による推定法を提案し、それをディジタル計算機上でのシミュレーションによって調べる。

4.2 曲線あてはめ法による速度計測

今までは、4つのモデルとして比較的簡単なものを用いていたために、最尤推定量を明確に求めることが出来たが、更に一般の4つに対しては、最尤法によって推定量を求めることは極めて困難である。又、速度計測という立場からは、4つの分布に含まれる未知パラメータの処理も非常に重要な問題であり、したがって、これらの事柄を考慮した上での推定法が望まれる。

このような方法のひとつとして、現実の測定系において有効であると思われる実際の推定法として、曲線あてはめ法を考えることが出来る。

第2章では、 $\hat{\mu}$ を求めるのに最尤法を用いた訳であるが、

そこで得られた $\hat{v}$ は、 T が十分に大きければ、

$$R_x''(0) = v^2 R_w''(0)$$

から v を求めていると考えることが出来る。又、第3章の γ_∞ も

$$\gamma R_x(0) = R_x(\Delta)$$

から γ を求めていると考えることが出来る。

これらの考えを一般化すると、4章及び観測信号の自己相関と数 $R_w(\xi)$, $R_x(\tau)$ を実測して、

$$R_x(\tau) = R_w(v\tau)$$

なる関係式から v を直接求める方法が考えられる。

本論文では、この方法を曲線あてはめ法と呼ぶことにする。

(i) $R_w(\xi)$ のモデル

実際の測定条件では、 $R_x(\tau)$, $R_w(\xi)$ とともに全ての ξ, τ について測定出来る訳ではなく、限られたサンプル値

$$R_x(\tau_i), R_w(\xi_i) \quad i=1, 2, \dots, I$$

だけから、曲線のあてはめを行わなければならない。

このためには、 $R_w(\xi)$ に対して適当なモデルを仮定し、これを有限個のパラメータで表現する必要がある。

この方法としては、 $R_w(\xi)$ を適当な関数系で展開することが考えられる。

(ii) 曲線あてはめ法

$R_x(\tau)$, $R_w(\xi)$ が求められた時にこれから v を求めるには、 $R_x(\tau)$ と $R_w(v\tau)$ の差が最小になるように v を決定しなくてはならない。

この方法は、 $R_W(\xi)$ のモデルによって大いに異ると同時に、測定条件、特に観測雑音の影響によっても変る。

即ち、一般には、観測に際して雑音が混入し、そのために、

$$R_X(\tau) \text{ は } R_X(\tau) = R_W(\nu\tau) + R_n(\tau) \quad (4-1)$$

となる。ここに、 $R_n(\tau)$ は雑音の相関々数である。

ところが、通常は、 $R_n(\tau)$ は測定可能ではなく、ただ、雑音について仮定出来ることは、その相関時間がムラ信号 $W(\nu\tau)$ のそれに比して極めて短いということである。

この事柄を考えると、曲線あてはめを行う際、雑音の影響を受けないような時間領域と利用しなければならないことになり、又、それによって雑音の除去が可能となる。

したがって、曲線あてはめの過程は、一般には、

$$\| M(\tau) [R_X(\tau) - R_W(\nu\tau)] \|$$

を最小にする ν を求める過程としてとらえることが出来る。

ここで、 $M(\tau)$ は利用すべき時間領域を指定するためのマスクであり、 $\| \cdot \|$ は適当なノルムである。

以上述べたことを図示すると、曲線あてはめ法による ν の測定は一般には次の図のようになる。

このとき、ムラのモデルにどのようなものを採用するか、又、どのようなあてはめを行うかは、測定条件、費用等によって異り、それによって実際に用いられるブロック図も異ってくることは勿論である。

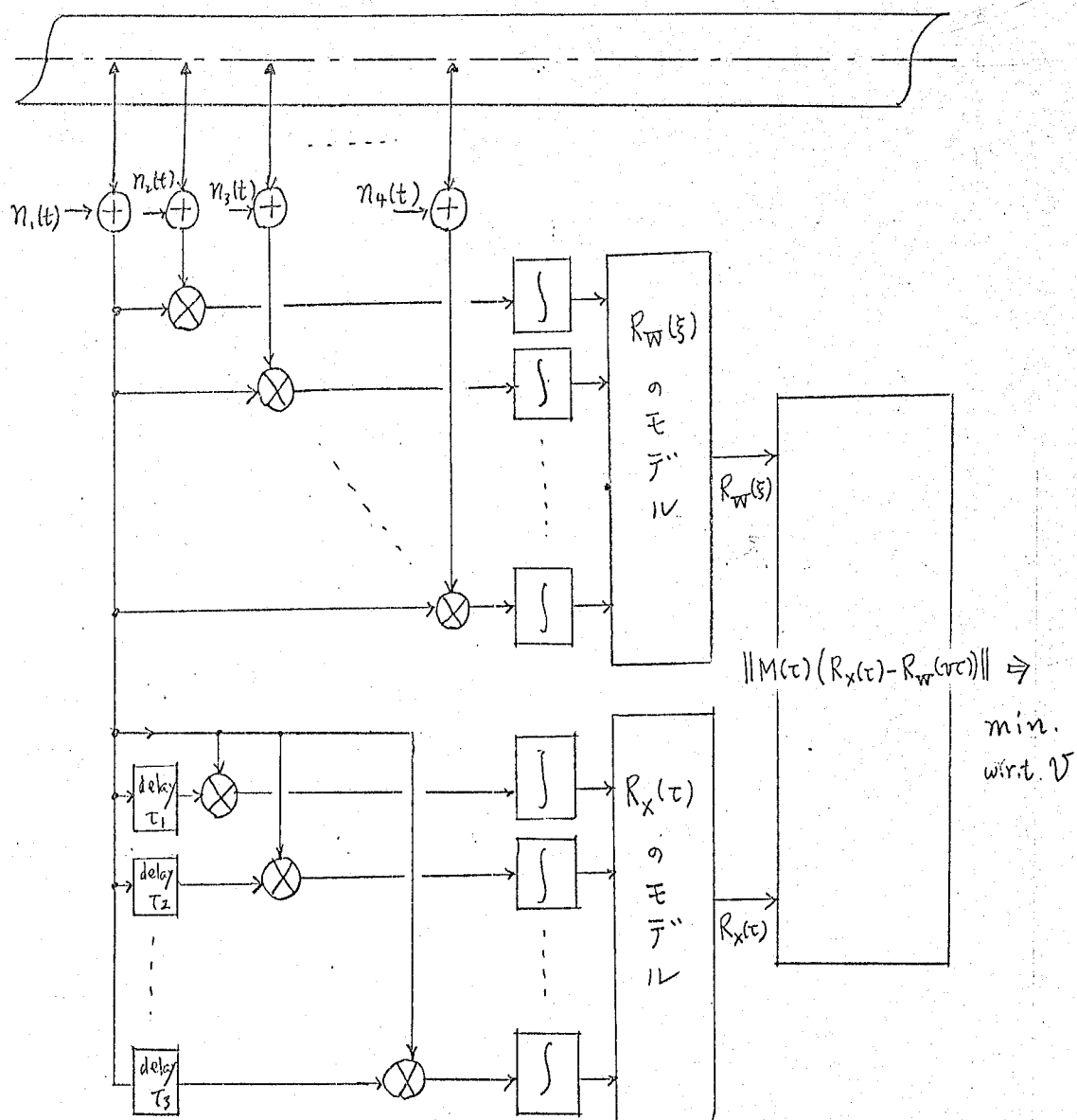


Fig 4-1

4.3 シミュレーション・モデルの選定

曲線あてはめ法による速度計測の能力を知るために簡単なシミュレーションをデジタル計算機上で行った。そこで用いられたシミュレーション・モデルについて述べる。

(i) ムラ、観測雑音の性質

- (a) ムラ $w(\xi)$, 雑音 $n(t)$ の統計的性質は未知であり、それらは互に無相関である。
- (b) ムラ上には必要に応じて、いくつかの観測ヘッドを設置することが出来、それによって、 $R_w(\xi)$ をオンラインで測定出来る。
- (c) 雑音 $n(t)$ の帯域幅は、ムラ信号 $w(t)$ のそれに比して十分に大きい。

以上の (a), (b), (c) を満たすムラ、雑音に対して有効なシミュレーションを行うが、実際には、ムラ、雑音ともに帯域制限白色雑音を用いる。これは、それが現実のよい近似になっていることと同時に、それを記述するパラメータの数が少なくてすみ、シミュレーションの実行上便利だからである。

(ii) 速度の推定法

$R_w(\xi)$ を $\xi=0$ のまわりで、 ξ の2次式で近似するというモデルによる曲線あてはめ法によって速度の推定を行う。

このとき仮定かつ

$$R_n(\tau)=0 \quad \text{for } |\tau| > \Delta\tau \quad \& \quad |R_w(\nu\Delta\tau)| \gg 0 \quad (4-2)$$

であるような $\Delta\tau$ が存在するから、雑音の影響を受けないような速度の計測法が可能となる。以下、ここで用いた推定法について述べる。

まず、 $R_W(\xi)$ を $\xi=0$ のまわりで展開する。

$$R_W(\xi) = \alpha + \beta \xi^2 + o(\xi^4) \quad (4-3)$$

このとき、(4-2) 式に注意すると、 $R_X(\Delta\tau) = R_W(v\Delta\tau)$ であるから

$$R_X(\Delta\tau) = \alpha + \beta v^2 \Delta\tau^2 \quad (4-4)$$

よ、こ、 α, β が既知であれば、観測データ $\{X(t); 0 \leq t \leq T\}$ から、 $R_X(\Delta\tau)$ を計算することにより、(4-4) 式より v を求めることが出来る。

ところが、このとき 3.7 の Fig 3-4 と同様に、適当な短かい距離 $\Delta, 2\Delta$ ずつ離れた観測ヘッドを使って、 $R_W(\Delta), R_W(2\Delta)$ をオンラインで測定することにより α, β を決定することが出来る。

$$R_W(\Delta) = \alpha + \beta \Delta^2 \quad (4-5)$$

$$R_W(2\Delta) = \alpha + 4\beta \Delta^2 \quad (4-6)$$

よ、こ、(4-4), (4-5), (4-6) より v を求めると、

$$\hat{v} = \frac{\Delta}{\Delta t} \sqrt{\frac{3R_X(\Delta\tau) + R_W(2\Delta) - 4R_W(\Delta)}{R_W(2\Delta) - R_W(\Delta)}} \quad (4-7)$$

となり、したがって、 $R_X(\Delta\tau), R_W(\Delta), R_W(2\Delta)$ の測定により v を求めることが出来る。ここでのシミュレーションでは、この方式によって速度を求めることにする。

(iii) 測定誤差

このような方法で速度の推定を行なう際に生ずる誤差の原因は、1) $R_x(\Delta t)$, $R_w(\Delta)$, $R_w(2\Delta)$ を求める際の統計的変動、2) 観測ヘッドに加わる観測雑音、3) 演算装置で発生される内部雑音、及び 4) 演算装置の系統誤差である。

このうち、演算装置の系統誤差は、このモデルに特有なものではなく、又、それだけで考えられるので、ここではこの影響は考えない。又、内部雑音は、これを観測雑音に等価的に置き換えて考えることにする。したがって、ここでのシミュレーションでは、1), 2) についてだけ考慮する。

以上の考察から、次の図で示されるシステムについてシミュレーションを行なう。

Fig 4-2 において、観測雑音 $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_3(t)$ は互いに独立であり、かつ、同じ分散を持つとする。

即ち、

$$E[n_i(t)n_j(t)] = 0, \quad E[n_i^2(t)] = E[n_j^2(t)]$$

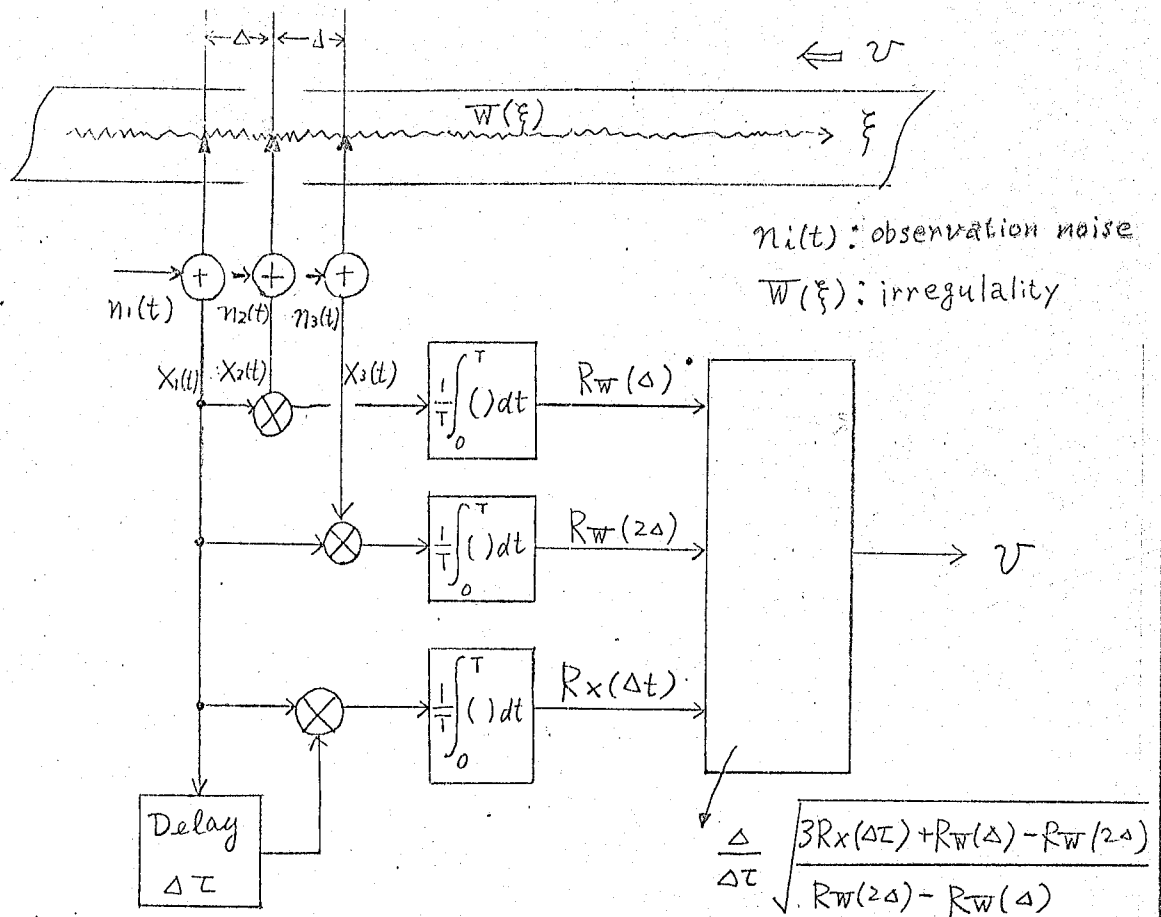


Fig 4-2 シミュレーション・モデル

4.4 シミュレーションの方法

(i) 時間離散化

4.3 のモデルは時間的に連続であるが、これをデジタル計算機上でシミュレートするためには、離散化をしなければならない。これは通常のように観測信号を適当な間隔でサンプリングし積分を和で置き換えればよい。ただ、雑音の取扱いについては、 $\Omega_n \gg \Omega_w$ が成立するのだから、サンプリング後に独立な雑音を加わるものとしてよく、ここでのシミュレーションはそうにした。

(ii) ムラ、観測雑音の生成

ムラや観測雑音は、計算機上で発生させた(擬偽)乱数又はそれをもとにして構成されたものを用いる。乱数の発生方法は、乗算合同法で発生させた一様乱数を適当な方法で正規乱数に変換したものである。又、ムラとして用いる帯域制限白色雑音は、それを標本化定理によって級数展開したものを適当な有限項で打ち切ったものを用いる。その方法については、次章で述べる。

(iii) パラメータの選定

シミュレーションの目的は、 $\nu, \Delta, \Delta\tau, T, \omega_w = \Omega_w \nu$: ムラの帯域幅 (rad/m), $\rho^2 = E[n^2(t)] / E[w^2(\xi)]$ が与えられたとき、

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{E[(\hat{\nu} - \nu)^2]}}{\nu}$$

がどのようになるかを調べることであるが、これらのパラメータ全てについて独立に調べるのでは、場合の数が多くなり大変であると同時にその必要もない。

事実、ムラが帯域制限白色雑音であることから、 $R_x(\Delta\tau)$, $R_w(\Delta)$, $R_w(2\Delta)$ の統計的性質は、 $\xi_0 = \pi/\omega_w = \pi/\nu\Omega_w$ とするとき、

$$\delta_x = \Delta/\xi_0, \quad \delta_\tau = \nu\Delta\tau/\xi_0, \quad \ell = \nu T/\xi_0, \quad \rho^2$$

にのみ依存する。又、

$$\varepsilon^2 = E\left[\left(\frac{\hat{\nu} - \nu}{\nu}\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{\Delta/\xi_0}{\nu\Delta\tau/\xi_0} \sqrt{\frac{3R_x(\Delta\tau) + R_w(2\Delta) - 4R_w(\Delta)}{R_w(2\Delta) - R_w(\Delta)}} - 1\right)^2\right]$$

であるから、相対誤差 ε も又これらのパラメータのみによっている。したがって、以後のシミュレーションではこれらのパラメータについてのみ調べればよい。

シミュレーション・アルゴリズム

以上の考察にしたがって、シミュレーションを行なうが、そのアルゴリズムについて述べる。

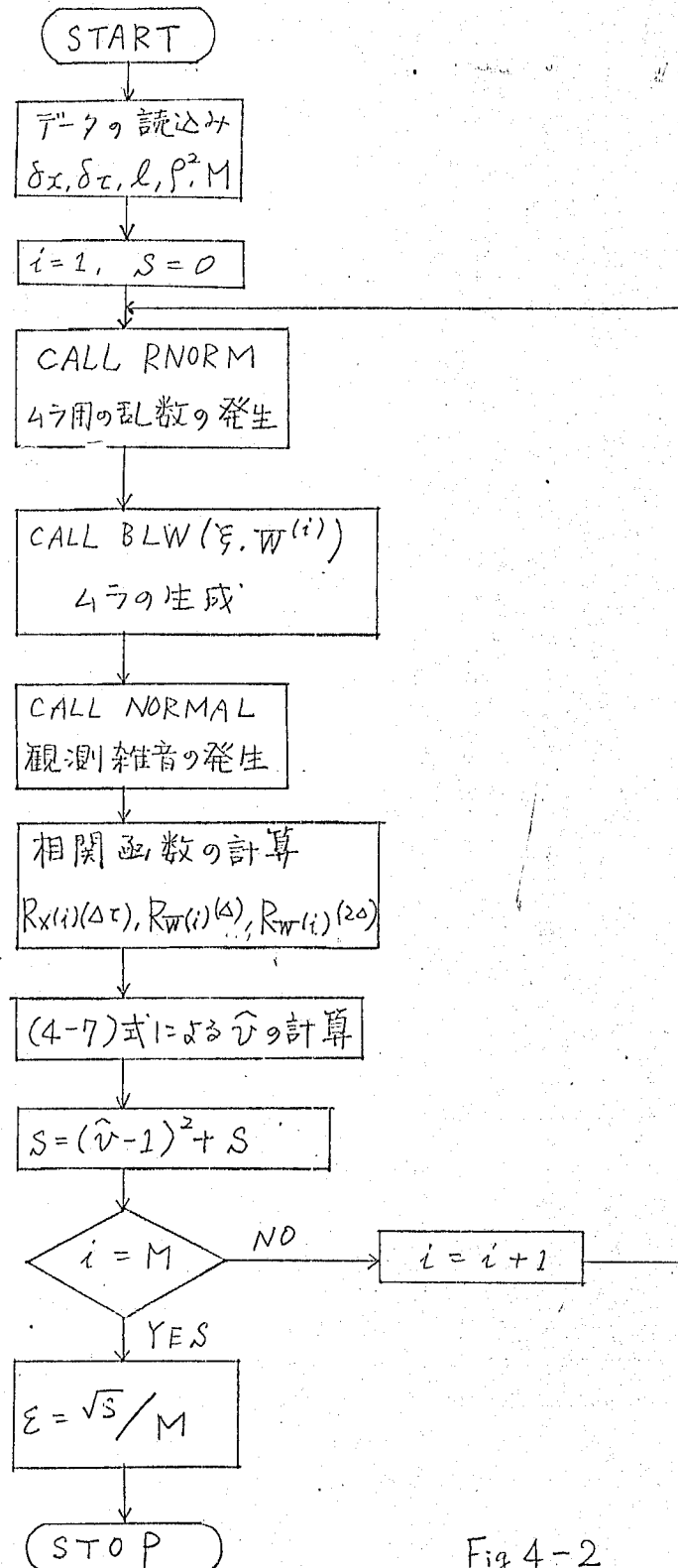


Fig 4-2

Fig4-2はそのためのフローチャートであるが、これは、 $\delta x, \delta \tau, \ell, P^2, M$ (平均操作Eのための繰返し数)を読み込んで、

$$\mathcal{E} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{\delta x}{\delta \tau} \sqrt{\frac{3R_X^{(i)}(\Delta \tau) + R_W^{(i)}(2\Delta) - R_W^{(i)}(\Delta)}{R_W^{(i)}(2\Delta) - R_W^{(i)}(\Delta)} - 1} \right)^2 \quad (4-8)$$

を出力するようにな、ている。ただし、 $X^{(i)}(t), W^{(i)}(\xi)$ は、 i 回目の繰返しの時に発生させた観測信号及びノイズを表わし、したがって、

$$R_X^{(i)}(\Delta \tau) = \frac{1}{T} \int_0^T X_1^{(i)}(t) X_1^{(i)}(t + \Delta \tau) dt$$

$$R_W^{(i)}(\Delta) = \frac{1}{T} \int_0^T X_1^{(i)}(t) X_2^{(i)}(t) dt$$

$$R_W^{(i)}(2\Delta) = \frac{1}{T} \int_0^T X_1^{(i)}(t) X_3^{(i)}(t) dt$$

又、このシミュレーションでは、既に述べた理由から、一般性を失うことなく、 $\nu=1, \xi_0=1$ 、即ち、 $\delta x=\Delta, \delta \tau=\Delta \tau, \ell=T$ としていい。Fig4-2のアルゴリズム4では3つのサブルーチンを使用しているが、それらは

(i) B L M (ξ, W)

ノイズ $W(\xi)$ の発生ルーチン、 $E[W(\xi)]=0, E[W^2(\xi)]=1$

(ii) R N O R M

$W(\xi)$ の生成に用いる正規乱数の発生ルーチン

(iii) N O R M A L (n)

観測雑音 $n(t)$ の発生ルーチン

4.5 シミュレーション結果

以上述べた方法によつて、パラメータ

$$\Delta/\xi_0, \quad v\Delta\tau/\xi_0, \quad vT/\xi_0, \quad \rho^2, \quad M$$

の種々の値に対する ε を求めたが、それらのうち代表的なものを Fig 4-3, 4-4, 4-5 に示す。

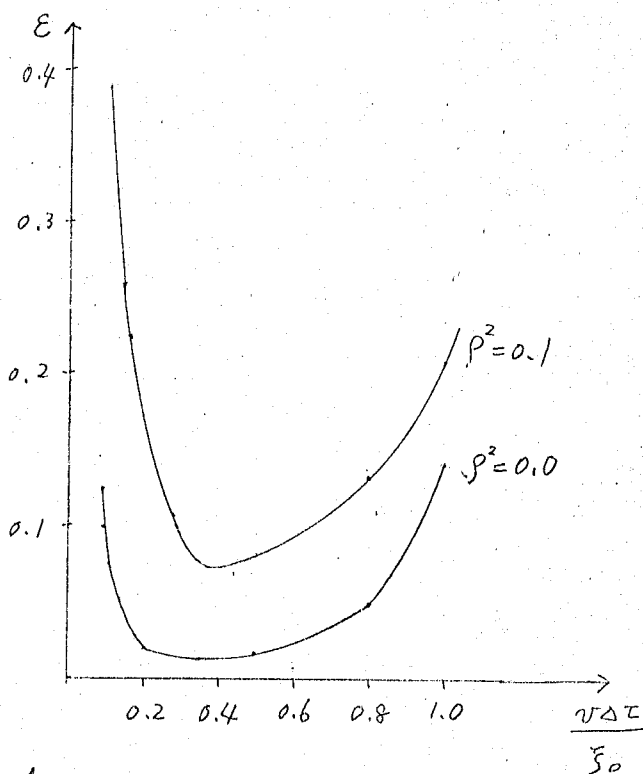


Fig 4-4

Fig 4-4 は、

$$\Delta/\xi_0 = 0.2, \quad vT/\xi_0 = 100, \quad \rho^2 = 0.0, 0.1$$

の場合について、 ε が $v\Delta\tau/\xi_0$ とともにどのように変化するかも示したものである。この図から、そのような条件のもとでは、

$$0.2 \leq \frac{v\Delta\tau}{\xi_0} \leq 0.8, \quad \text{即ち} \quad 0.2 \frac{\xi_0}{\Delta\tau} \leq v \leq 0.8 \frac{\xi_0}{\Delta\tau} \quad (4-9)$$

であれば、ほぼよい測定が出来ることがわかる。

例えば、 $\xi_0 = \pi \times 10^{-2} \text{ m}$ ($\omega_w = 100 \text{ rad/m}$, (2-14) 式の説明参照)

$$\Delta \tau = \pi \times 10^{-4} \text{ sec}$$

とすると、(4-9) 式は、

$$20 \leq v \leq 80 \text{ m/sec}$$

となるが、このような v に対しては、観測時間が

$$T \leq 100 \times \pi \times 10^{-2} / 20 = 0.16 \text{ sec}$$

で、数パーセントの誤差で測定が出来ることがわかる。

Fig 4-5 は、観測雑音の影響を調べたものである。

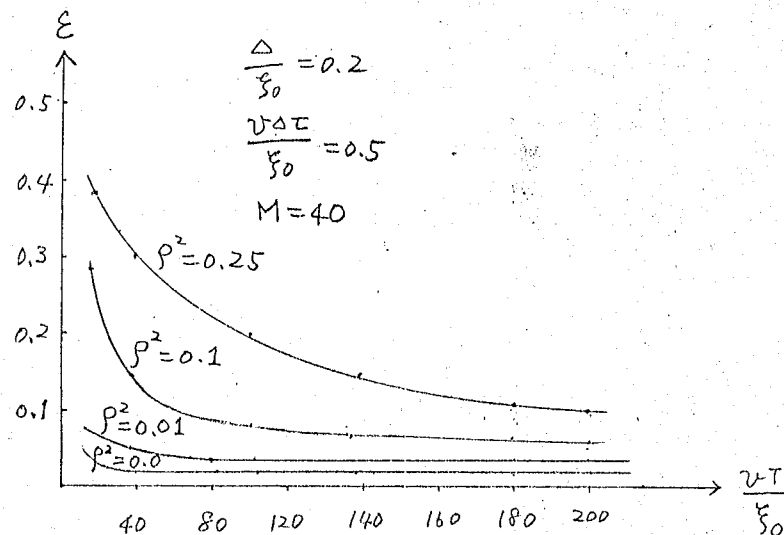


Fig 4-5

この図は、 $\Delta/\xi_0 = 0.2$, $v\Delta\tau/\xi_0 = 0.5$ としてあるが、それらの他の値についても、ほぼ同様の結果が得られる。

この図より、 $vT/\xi_0 \geq 200$ であれば、測定誤差に及ぼす観測雑音の影響は、NS比 p^2 程度又はそれ以下であり、したがって通常の場合には雑音影響を十分に取り除くことが出来ることがわかる。

次に Fig 4-6 は、観測ヘッド間の距離 Δ と誤差を調べるためのものである。

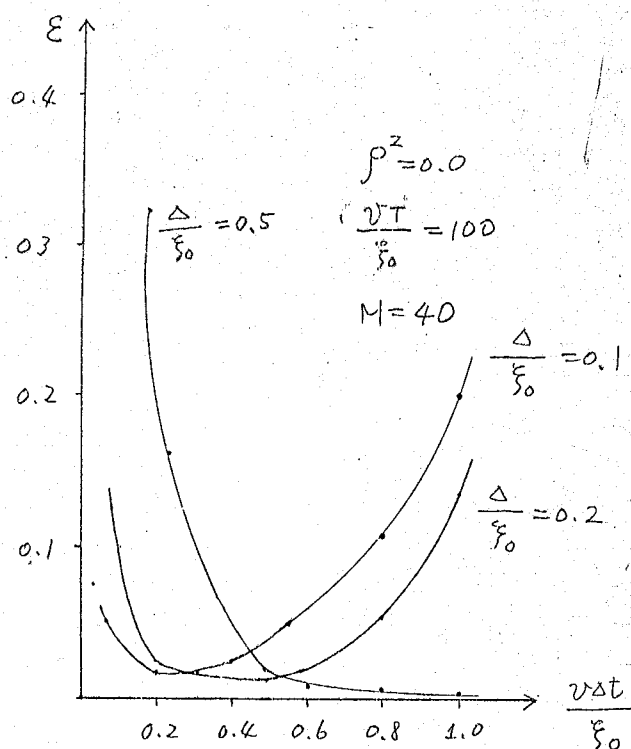


Fig 4-6

これより、観測誤差 ε が小さいためには、 $v\Delta t$ がある範囲

$$\Delta_1 \leq v\Delta t \leq \Delta_2$$

に入っていないことがわかる。

これは、(4-3) 式において、 $Rw(\xi)$ を ξ の 2 次式で近似した際の近似誤差によるものである。

Δ , $\Delta\varepsilon$ を適当に選べば、測定可能な v の範囲

$$\Delta_1/\Delta\varepsilon \leq v \leq \Delta_2/\Delta\varepsilon$$

は通常は満足すべきものとなると考えられる。しかし、速度の変化範囲がより広い時には、4-3 のモデル (4-3) 式を更に精密なものとしなければならないが、これは全ての速度測定法に共通の注意である。

以上、各パラメータの値の代表的な場合について調べてきたが、ここに用いた v の推定法は、簡単な割には推定誤差の少ないことがわかった。勿論、実際の場合には、その測定条件を十分に考慮して、4-3 のモデルの選定法及び推定法を考えなければ

ればならないが、このシミュレーションから、統計的推定による非接触速度計測が十分に実用性のある方法であることがわかった。

4.6 4章のまとめ

本章では、観測雑音を伴う、時間的に連続な観測量が得られる場合を、デジタル計算機によるシミュレーションによって調べた。

ここで用いた速度の推定法は、まず、4ラの自己相関関数 $R_w(f)$ を2次の2次式で近似し、その係数を $R_w(\Delta)$, $R_w(2\Delta)$ をオンラインで測定することにより決定し、次に、雑音の相関時間よりも大きな $\Delta\tau$ について、 $R_x(\Delta\tau)$ を測定し、それによって v を求めるという方式であった。

シミュレーションとしては、4ラとして帯域制限白色雑音を計算機上で発生させ、上の方法で v を計算するというこを、パラメータの種々の値について実行した。

その結果、この方式が、観測雑音の影響を良く取り除くことが出来、かつ、観測時間が短い割には測定誤差が少ないことがわかった。

第5章 結 言

統計的パラメータ推定論を応用した非接触速度計測の理論について述べた。本論文の主な内容を要約すれば次の通りである。

第2章では、 μ が正規2次線形過程で近似され、観測雑音を伴わない時間的に連続な観測信号が得られる場合について論じた。最尤法を用いて速度推定量を導き、次に、この推定量をTaylor展開し、このとき高次項からの寄与が通常の測定系では十分に小さいことを利用して、推定誤差、偏り率の評価式を得た。それによって、この推定量が満足すべきものであることがわかった。

更に、この推定量は、微分の存在するような任意の μ に対して一致推定量であり、かつ観測時間が十分に長い場合には、これは速度測定上基本的な物理的意味をもつものであることを明らかにした。

次に、 μ に含まれる未知パラメータの決定法に触れ、それと関連して、合成微分法による速度計測法の可能性について述べた。

第3章では、正規定常マルコフ型 μ から、時間的に離散な観測量が得られる場合について述べた。ここでは、推定量として最尤法を用い、その評価には、サンプル数が十分に大きいという仮定のもとに、Cramér-Rao Boundを用いた。

まず、観測雑音が存在しない場合の推定量を求め、その推定誤差を検討し、これが十分に小さいことを確かめた。次に、弱い独立な観測雑音が存在する場合について考えた。ここでは対数尤度函数を雑音-信号比で級数展開し、その高次項を切り捨てることにより、推定量の雑音に対する補正項を求め、次にその推定誤差について検討した。その結果、雑音による推定

誤差の増加分が雑音-信号比程度であることがわかった。

更に、強い観測雑音の存在する場合を漸近最尤法で解析し、この場合にも、雑音の影響は雑音-信号比位であることを確かめた。これらのことから、雑音の影響は十分に除去可能であることが明らかになった。

次に、 ω ラ及び雑音の分布に含まれるパラメータが未知である場合について調べたが、その推定誤差への影響は非常に大きく、それらが既知の場合に比して推定誤差が数倍の大きさになることがわかった。

又、時間的に連続な場合へ移行する時の注意について若干述べた。

第4章では、観測雑音を伴う、時間的に連続な場合について、曲線あてはめ法をシミュレーションによって調べた。

ここで用いた速度の推定法は、まず、 ω ラの自己相関関数 $R_w(\xi)$ を ξ の2次式で近似し、その係数を $R_w(\Delta)$, $R_w(2\Delta)$ をオンラインで測定することにより決定し、次に雑音の帯域幅が ω ラ信号のそれに比して十分に大きいという仮定のもとに、雑音の相関時間よりも大きい $\Delta\tau$ について、観測信号の相関関数 $R_x(\Delta\tau) \doteq R_w(v\Delta\tau)$ を測定し、これと、上の $R_w(\xi)$ のモデルから v を求めるというものであった。

シミュレーションとしては、 ω ラとして帯域制限白色雑音を計算機上で発生させ、上の方法で v を計算するということを、パラメータの種々の値について実行した。

その結果、この方式によって、観測時間が短い割には誤差の少ない測定が可能であることがわかった。又、観測雑音の影響を十分に取り除くことが出来ることが明らかとなった。

以上で、本論文の内容を簡単に述べたが、最後に本研究の意義について少し触れておきたい。

従来、非接触速度計測の方法としては、相関法、空間フィルタ法等が知られており、それらは、序論でも述べたように、不規則波形としてのムラを利用するという意味では統計的な方法といえるが、それらの発想は必ずしも系統的とはいえない。本論文の目的は、非接触速度計測を、統計学におけるパラメータ推定としてとらえ、その研究に統一的手法を与えることであった。

本研究はこのような立場で行なわれ、従来のものとは異なっていたいくつかの計測法が考えられたが、これによってその目的がある程度達せられたものと思われる。特に観測雑音の影響については、従来の方法については、その扱いは必ずしも明確な形で議論するのは困難であったが、本研究では、解析上の困難はあったにせよ、統計的パラメータ推定という立場から無理なく論じることが出来た。

なお、相関法、空間フィルタ法との直接的関係については、本文中で2,3の定性的議論しか行なわれていないが、それは本論文で扱ったモデルが本質的には、観測ヘッドを1つしか持たないようなものであったからである。

多数の観測ヘッドから得られる観測量からの速度の統計的推定は、相関法、空間フィルタ法との関係の研究も含めて、興味ある将来の問題であろう。

謝 辞

本研究を行う機会と与えられ、又、研究進行中は、いろいろと御指導、御鞭撻を下さいました榎本肇教授に感謝いたします。

又、大学院在学中、御指導いただき、本研究の芽をつくっていただいた内藤正教授に感謝いたします。

更に、本論文をまとめるにあたり御助言いただいた、

高井宏幸教授、長谷川健介助教授、佐藤拓宇助教授、
堂下修司助教授に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 片山, 榎本 : 統計的推定による非接触速度計測の理論,
計測と制御, 7-6, P 27~36 (1968)
- 2) 片山 : 一定速度で動く定常マルコフ形ムラの速度推定,
計測自動制御学会論文集, 5-4, P 92-100 (1969)
- 3) 片山 : デジタル計算機による帯域制限白雑音の発生,
計測自動制御学会論文集, 7-1, (1971)
- 4) Butterfield, M. N. et al : A New Method of Strip-Speed
Measurement Using Random Waveform Correlation,
Trans. of S I T, 13-2, P 111-123 (1961)
- 5) 柏木, 片岡 : 相関を応用した速度計測,
計測と制御, 12-1, P 41~48 (1963)
- 6) J. T. Ator : Image Velocity sensing with parallel
slit recticle,
Journal. Opt. Soc. of Amer, 53, 12 (Dec. 1963)
- 7) 内藤, 狼, 小林 : 空間フィルタによる速度計測,
計測と制御, 7-11, P 9~20 (1968)
- 8) Rice, S. O : Mathematical Analysis of Random Noise,
BSTJ, 23, P 288 (1944)

- 9) 日本数学会編：数学辞典，P228. 岩波書店 (1968)
- 10) Ridenour, L.N: Threshold Signals, MacGraw-Hill (1950)
- 11) Wald, A: Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimate of Unknown Parameters of a Discrete Stochastic Process,
Annals of Math. Statistics, vol XIX, No 1 (1948)
- 12) Mann, H.B: Introduction to the Theory of Stochastic Process Depending on a Continuous Parameter,
N.B.S Applied Math. Series No.24 (1953)
- 13) Bartlett, M.S: An Introduction to Stochastic Processes,
Cambridge Univ. Press (1962) P244.
- 14) 森口. 宇田川. 一松: 数学公式 II, P19. 岩波書店 (1959)
- 15) Jack Moakman: Random Number Generator, Mathematical Method for Digital Computers, vol 1, P249, Wiley (1967)
- 16) Samuel Gorenstein: Testing a Random Number Generator, CACM, 10-2, P111~118 (1967)
- 17) 情報処理学会編: 電子計算機ハンドブック P5-153. オーム社.
- 18) 森口. 宇田川. 一松: 数学公式 (III) P.9 岩波書店 (1959)

- 19) J. S. Bendat, A. G. Piercol : Measurement and Analysis of Random Data, P290. John Wiley and Sons (1966)
- 20) 片山, 榎本 : 統計的推定による速度情報の抽出
第7回計測自動制御学会学術講演会, P491 (1968)
- 21) 片山, 榎本, 内藤 : 最尤推定法による帯状物体の速度計測,
昭和43年電気四学会連合大会, P2650 (1968)
- 22) 片山 : 統計的手法による速度計測の基礎理論 (I)
第6回計測自動制御学会学術講演会, P429 (1967)
- 23) 島田 : 自動車用対地速度計の試作とその研究
東京工業大学制御工学科修士論文 (1968)
- 24) 山本 : 表面アラサ コロメータ (1959)
- 25) 内藤, 石神, 小林, 島田 : 自動車用対地速度計の研究 (I)
第8回計測自動制御学会学術講演会 (1969)

【付録1】 帯域制限白色ノイズの場合の積率の評価

ここでは、ノイズ $w(\xi)$ が 帯域制限白色雑音である場合について、 $\hat{v}$ の分散を考察し、 x, y の 3 次、4 次の積率からの寄与が、2 次のそれと比べて無視し得ることを示す。

$\alpha = \sigma_{\hat{w}} / \sigma_w$ とし、一般性を失わない。

このとき、(2-11) 式より

$$E\left[\left(\frac{\hat{v}-v}{v}\right)^2\right] = T_2 + T_3 + T_4 + \sum_{i+j \geq 5} \delta_{ij} E\left[\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right)^i \left(\frac{y-m_y}{m_y}\right)^j\right] \quad (\text{付1})$$

where

$$T_2 = \frac{1}{4} E\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right)^2 - \frac{1}{2} E\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right) E\left(\frac{y-m_y}{m_y}\right) + \frac{1}{4} E\left(\frac{y-m_y}{m_y}\right)^2 \quad (\text{付2})$$

$$T_3 = -\frac{3}{4} E\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right)^3 + E\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right)^2 E\left(\frac{y-m_y}{m_y}\right) - \frac{1}{4} E\left(\frac{y-m_y}{m_y}\right)^3 \quad (\text{付3})$$

$$T_4 = \frac{39}{16} E\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right)^4 - \frac{21}{8} E\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right)^3 E\left(\frac{y-m_y}{m_y}\right) - \frac{1}{16} E\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right)^2 E\left(\frac{y-m_y}{m_y}\right)^2 \\ - \frac{1}{8} E\left(\frac{x-m_x}{m_x}\right) E\left(\frac{y-m_y}{m_y}\right)^3 + \frac{7}{16} E\left(\frac{y-m_y}{m_y}\right)^4 \quad (\text{付4})$$

さて、以下では、 T_2, T_3, T_4 を実際に計算して、 $T_2 \gg T_3, T_4$ を示すのであるが、その前に $n=3, 4$ について (2-20) 式を具体的に計算しておく。

$n=3$ のとき、 P^3 に含まれる 3-tuple を書き下すと次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} [(1, 2), (1', 3), (2', 3')] & , \quad [(1, 2'), (1', 3), (2, 3')] \\ [(1, 2), (1', 3'), (2', 3)] & , \quad [(1, 2'), (1', 3'), (2, 3)] \\ [(1, 3), (1', 2), (2', 3')] & , \quad [(1, 3), (1', 2'), (2, 3')] \\ [(1, 3), (1', 2'), (2, 3')] & , \quad [(1, 3), (1', 2), (2', 3')] \end{array} \right.$$

故に、(2-20) 式より、

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T \int_0^T E[(X_1^2(t_1) - \sigma_1^2)(X_2^2(t_2) - \sigma_2^2)(X_3^2(t_3) - \sigma_3^2)] dt_1 dt_2 dt_3 \\ & = 8 \int_0^T \int_0^T \int_0^T R_{12}(t-\tau) R_{23}(\tau-p) R_{31}(p-\tau) dt d\tau dp \end{aligned}$$

したがって、 $T \gg \Delta t$ であれば [付録4] により次式が成立する。

$$E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)(X_3 - m_3)] = \frac{4T}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{12}(\omega) \Phi_{23}(\omega) \Phi_{31}(\omega) d\omega \quad (\text{付5})$$

ただし、

$\Phi_{ij}(\omega)$ は $X_i(t)$ と $X_j(t)$ の相互スペクトル密度とする。

次に、 $n=4$ について調べる。

このとき、 P^4 に含まれる 4-tuple は、(i) cycle 4 の 4-tuple か (ii) cycle 2 の 2-tuple が 2^4 よりなる。このことを考慮して P^4 を調べることにより次式が成立することがわかる。

$$\begin{aligned} & E[(X_1^2 - \sigma_1^2)(X_2^2 - \sigma_2^2)(X_3^2 - \sigma_3^2)(X_4^2 - \sigma_4^2)] \\ & = 2 \{ E^2[X_1 X_2] E^2[X_3 X_4] + E^2[X_1 X_3] E^2[X_2 X_4] + E^2[X_1 X_4] E^2[X_2 X_3] \} \\ & + 16 \{ E[X_1 X_2] E[X_2 X_3] E[X_3 X_4] E[X_4 X_1] \\ & + E[X_1 X_3] E[X_3 X_2] E[X_2 X_4] E[X_4 X_1] \\ & + E[X_1 X_2] E[X_4 X_2] E[X_4 X_3] E[X_3 X_1] \} \end{aligned}$$

したがって、(付5)式を求めたのと同様に2次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & E[(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)(x_3 - m_3)(x_4 - m_4)] \\
 &= \frac{T^2}{2\pi^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{12}^2(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{34}^2(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{13}^2(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{24}^2(\omega) d\omega \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{14}^2(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{23}^2(\omega) d\omega \right\} \\
 &+ \frac{8T}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{12}(\omega) \Phi_{23}(\omega) \Phi_{34}(\omega) \Phi_{41}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{13}(\omega) \Phi_{32}(\omega) \Phi_{24}(\omega) \Phi_{41}(\omega) d\omega \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{12}(\omega) \Phi_{24}(\omega) \Phi_{43}(\omega) \Phi_{31}(\omega) d\omega \right\} \quad (\text{付6})
 \end{aligned}$$

以上求めた(付5)、(付6)式を用いて、 T_3 、 T_4 の評価を行なう。
なお、以下において簡単のため、次のように記法を利用する。

$$\|\Phi\| = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega$$

$$\begin{aligned}
 \text{すなわち、} \\
 \Phi_{xx}(\omega) = \frac{1}{v} \Phi_w\left(\frac{\omega}{v}\right) = \begin{cases} \frac{1}{v} \Phi_0 & \text{--- } \left|\frac{\omega}{v}\right| \leq \omega_c \\ 0 & \text{--- } \left|\frac{\omega}{v}\right| > \omega_c \end{cases}
 \end{aligned}$$

とすると、

$$\Phi_{\dot{x}x}(\omega) = j\omega \Phi_{xx}(\omega), \quad \Phi_{x\dot{x}} = -j\omega \Phi_{xx}(\omega), \quad \Phi_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = \omega^2 \Phi_{xx}(\omega)$$

故に、 $\Phi_{xx} \equiv \Phi$ とかくと、(付5)式より、

$$E[(x - m_x)^3] = \frac{4T}{\pi} \|\Phi^3\| = \frac{4T}{\pi} \cdot \Phi_0^3 \cdot 2\omega_c v^{-2}$$

$$E[(x-m_x)^2(y-m_y)] = \frac{4T}{\pi} \|\omega^2 \Phi^3\| = \frac{4T}{\pi} \cdot \Phi_0^3 \cdot \frac{2}{3} \omega_c^3$$

$$E[(y-m_y)^3] = \frac{4T}{\pi} \|\omega^6 \Phi^3\| = \frac{4T}{\pi} \Phi_0^3 \cdot \frac{2}{7} \omega_c^7 v^4$$

更に、 $m_x = 2T \Phi_0 \omega_c$ 、 $m_y = \frac{2}{3} T \Phi_0 \omega_c^3 v^2$

よって、これらの式を(付3)式に代入し、整理すると、

$$T_3 = - \frac{40 \pi^2}{7 \omega_c^2 v^2 T^2} = -56.4 \frac{1}{\omega_c^2 v^2 T^2} \quad (\text{付7})$$

更に、同様に(付23)式を使、 $E[(x-m_x)^i (y-m_y)^j]$ $i+j=4$ 、を求め、これらの値を(付21)式に代入すると、

$$T_4 = \frac{19.74}{\omega_c^2 v^2 T^2} + \frac{1358.6}{\omega_c^3 v^3 T^3} \quad (\text{付8})$$

又、(2-33)式より、

$$T_2 = \frac{2\pi}{5 \omega_c v T} = \frac{1.256}{\omega_c v T}$$

であるから、結局次の評価式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{T_3 + T_4}{T_2} &= \frac{19.74 - 56.4}{1.256} \cdot \frac{1}{\omega_c v T} + \frac{1358.6}{1.256} \cdot \frac{1}{\omega_c^2 v^2 T^2} \\ &= \frac{-29.1}{\omega_c v T} + \frac{1078.2}{\omega_c^2 v^2 T^2} \end{aligned}$$

したが、 $\omega_c v T \geq 400$ ならば

$$\left| \frac{T_3 + T_4}{T_2} \right| \leq \frac{29.1}{400} + \frac{1078.2}{400 \times 400} < 0.1 \quad (\text{付9})$$

よって、このときには、2次の積率だけを考えればよい。

【付録 2】 多重積分 J の評価

ここでは、一般に函数 $R_1(\tau), \dots, R_n(\tau)$ が次の条件

$$R_i(\tau) = 0 \quad \text{for } |\tau| > T \quad i = 1, 2, \dots, n$$

を満足するとき、多重積分

$$J = \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T R_1(\tau_1 - \tau_2) R_2(\tau_2 - \tau_3) \dots R_n(\tau_n - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$$

の評価を行なう。

次のような変数変換を行なう。

$$\begin{cases} t_1 = \tau_1 - \tau_2 \\ t_2 = \tau_2 - \tau_3 \\ \vdots \\ t_{n-1} = \tau_{n-1} - \tau_n \\ t_n = t_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n \end{cases}$$

この変数変換の Jacobian は $\frac{\partial(t_1, \dots, t_n)}{\partial(\tau_1, \dots, \tau_n)} = n$ であることが容易に確かめられる。

よって

$$J = \int_0^{nT} dt_n \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T R_1(t_1) \dots R_{n-1}(t_{n-1}) R_n(-(t_1 + \dots + t_{n-1})) \frac{1}{n} dt_1 \dots dt_{n-1}$$

$R_i(t)$ の性質から

$$J = T \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} R_1(t_1) \dots R_{n-1}(t_{n-1}) R_n(-(t_1 + \dots + t_{n-1})) dt_1 \dots dt_{n-1}$$

$R_i(t)$ のフーリエ変換を $\Phi_i(\omega)$ とすると、

$$R_i(t_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(\omega_i) e^{+j\omega_i t_i} d\omega_i$$

この式を上の方の J の式に代入して、積分の順序を交換すると、

$$\begin{aligned} J &= \frac{T}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\omega_1) \cdots \Phi_n(\omega_n) d\omega_1 \cdots d\omega_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 t_1 + \cdots + \omega_{n-1} t_{n-1}) - j\omega_n(t_1 + \cdots + t_{n-1})} dt_1 \cdots dt_{n-1} \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\omega_1) \cdots \Phi_n(\omega_n) \delta(\omega_1 - \omega_n) \cdots \delta(\omega_{n-1} - \omega_n) d\omega_1 \cdots d\omega_n \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\omega) \Phi_2(\omega) \cdots \Phi_n(\omega) d\omega \quad (\text{付 10}) \end{aligned}$$

【付録3】 最尤推定量に対する Wald の正則条件

Wald¹⁾ は確率過程に含まれる未知パラメータの最尤推定量の漸近的性質について、次の定理を与えている。

〔定理4〕確率過程 $X(t)$ の同時分布 $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ に未知パラメータ θ が含まれており、これの真値が次の条件 1)~4) を満足する区間 A の内点であるならば、 θ の最尤推定量は、 θ の一致推定量であり、広義の漸近有効推定量である。

1) for $\forall \theta \in A$

$$\frac{\partial^i P(X_1, \dots, X_n)}{\partial \theta^i} \text{ が存在し、(almost everywhere)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{\theta \in A} \left| \frac{\partial^i P(X_1, \dots, X_n)}{\partial \theta^i} \right| dX_1 \dots dX_n < +\infty \quad (i=1, 2)$$

$$2) \text{ for } \forall \theta \in A \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{\partial \log P}{\partial \theta} \right)^2 \middle| \theta \right] = \infty$$

3) for $\forall \theta \in A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var} \left[\frac{\partial^2 \log P}{\partial \theta^2} \right]}{E^2 \left[\frac{\partial^2 \log P}{\partial \theta^2} \right]} = 0$$

4) for $\forall \theta \in A, \exists \delta > 0$;

$$E \left[\sup_{|\theta' - \theta| \leq \delta} \left| \frac{\partial^3 \log P(X_1, \dots, X_n, \theta')}{\partial \theta'^3} \right| \middle| \theta \right]$$

が n の有界関数となる。

$$E \left[\left(\frac{\partial \log P}{\partial \theta} \right)^2 \middle| \theta \right]$$

【付録4】 級数 $\sum_{m=0}^{\infty} (-\varepsilon S^{-1})^m$ の収束条件

行列 S^{-1} は対称かつ非負であるから、その固有値は全て実数かつ非負であり、したがって、この級数が収束するための必要十分条件は、 S^{-1} の最大固有値 λ_N について次式が成立することである。

$$\varepsilon \cdot \lambda_N < 1 \quad (\text{付11})$$

λ_N を explicit に求めるのが困難であったので、ここでは N が十分に大きいという仮定のもとで、次のようにしてこの条件を調べた。

S^{-1} と (1.1) 及び (N. N) 要素のみが異なる $N \times N$ 行列 $H = (h_{ij})$ を次のように定義する。

$$h_{ij} = \begin{cases} (1+\delta^2)/(1-\delta^2) & i=j \\ -\delta/(1-\delta^2) & |i-j|=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この行列 H については、固有値 μ_k , 固有ベクトル $\mathbf{x}_k$ を求めることは割合容易であり、その結果のみを示すと、次のようである。

$$\begin{cases} \mu_k = (1+\delta^2 - 2\delta \cos(k\theta)) / (1-\delta^2) \\ \mathbf{x}_k^T = (\sin(k\theta), \sin(2k\theta), \dots, \sin(Nk\theta)) \\ \text{where } \theta = \pi/(N+1), k=1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (\text{付12})$$

このとき、 H の最大固有値 μ_N に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}_N$ を $\mathbf{x}_N^T = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ とすると、(付12)式より

$$\frac{x_1^2 + x_N^2}{\mathbf{x}_N^T \mathbf{x}_N} = \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi N}{N+1}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi N^2}{N+1}\right) \right\} / \sum_{p=1}^N \sin^2\left(\frac{\pi p N}{N+1}\right)$$

ここで公式¹⁴⁾

$$\sum_{p=1}^N \sin^2(p\theta) = \frac{N}{2} - \frac{\cos(N+1)\theta \cdot \sin N\theta}{2 \sin \theta}$$

を使って、上式右辺の分母を処理すると、

$$\frac{x_1^2 + x_N^2}{x_N^T x_N} = \frac{2}{N-1} \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi N}{N+1}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi N^2}{N+1}\right) \right\} \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x_N^T H x_N}{x_N^T x_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x_N^T S^{-1} x_N}{x_N^T x_N} - \gamma^2 \frac{x_1^2 + x_N^2}{x_N^T x_N} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x_N^T S^{-1} x_N}{x_N^T x_N} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N \end{aligned} \quad (\text{付30})$$

更に、明らかに、 $x^T H x \geq x^T S^{-1} x$ が成立するから、

$$\mu_N \geq \lambda_N \quad (\text{付31})$$

故に、(付13)、(付14)式より

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N$$

したがって、(付12)式を利用すると、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos\left(\frac{\pi N}{N+1}\right)}{1 - \gamma^2} = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}$$

以上より、 N が十分に大きければ、(付11)式より、今考えたい級数は、

$$\varepsilon \cdot \frac{1+\delta}{1-\delta} < 1$$

(付15)

なる条件のもとに収束する。通常の観測系では、この条件が満足されていると考えてもよい。

[付録5] 漸近最尤法による Cramer-Rao Bound の評価

$$\begin{aligned}
 L(x) &= -\frac{N}{2} \log(2\pi\beta^2) - \frac{1}{2\beta^2} \sum_{n=1}^N \left[\sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} (x_k - \lambda x_{k-1}) \right]^2 \\
 &= -\frac{N}{2} \log(2\pi\beta^2) - \frac{1}{2\beta^2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \lambda^{2n-k-t} (x_k - \lambda x_{k-1})(x_t - \lambda x_{t-1})
 \end{aligned}$$

(付16)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \delta^2} = \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{\beta^4} \left(\frac{d\beta^2}{d\delta} \right)^2 - \frac{N}{2\beta^2} \cdot \frac{d^2\beta^2}{d\delta^2}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\delta^2} \left(\frac{1}{\beta^2} \right) \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \lambda^{2n-k-t} (x_k - \lambda x_{k-1})(x_t - \lambda x_{t-1})$$

$$-\frac{d}{d\delta} \left(\frac{1}{\beta^2} \right) \cdot \frac{d}{d\delta} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \lambda^{2n-k-t} (x_k - \lambda x_{k-1})(x_t - \lambda x_{t-1})$$

$$-\frac{1}{2\beta^2} \cdot \frac{d^2}{d\delta^2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \lambda^{2n-k-t} (x_k - \lambda x_{k-1})(x_t - \lambda x_{t-1})$$

∴

$$\begin{cases}
 F(k, t) = x_k x_t - \delta (x_{k-1} x_t + x_k x_{t-1}) + \delta^2 x_{k-1} x_{t-1} \\
 G(k, t) = -x_{k-1} x_t - x_k x_{t-1} + 2\delta x_{k-1} x_{t-1} \\
 H(k, t) = 2x_{k-1} x_{t-1}
 \end{cases}$$

(付18)

とあると、 $\partial^2 L / \partial \delta^2$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} &= \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{\beta^4} \left(\frac{d\beta^2}{d\gamma} \right)^2 - \frac{N}{2\beta^2} \cdot \frac{d^2\beta^2}{d\gamma^2} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2\beta^4} \cdot \frac{d^2\beta^2}{d\gamma^2} - \frac{1}{\beta^6} \cdot \left(\frac{d\beta^2}{d\gamma} \right)^2 \right\} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \lambda^{2n-k-t} F(k,t) \\
&+ \frac{1}{\beta^4} \cdot \frac{d\beta^2}{d\gamma} \sum_{n=2}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \left\{ (2n-k-t) \lambda^{2n-k-t-1} \frac{d\lambda}{d\gamma} F(k,t) + \lambda^{2n-k-1} G(k,t) \right\} \\
&- \frac{1}{2\beta^2} \sum_{n=2}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \left\{ (2n-k-t)(2n-k-t-1) \lambda^{2n-k-t-2} \left(\frac{d\lambda}{d\gamma} \right)^2 F(k,t) \right. \\
&\quad + (2n-k-t) \lambda^{2n-k-t} \cdot \frac{d^2\lambda}{d\gamma^2} F(k,t) \\
&\quad \left. + 2(2n-k-t) \lambda^{2n-k-t-1} \frac{d\lambda}{d\gamma} G(k,t) + \lambda^{2n-k-t} H(k,t) \right\} \\
&\quad (19)
\end{aligned}$$

次にこれをを用いて $E[\partial^2 L / \partial \gamma^2]$ を求める訳であるが、このために $E[F(k,t)]$, $E[G(k,t)]$, $E[H(k,t)]$ をまず求めておく。

これらは k, t について対称であるから、 $k \geq t$ についてだけ求めておけばよい。まず、 $E[F(k,t)]$ より調べる。

$\{x_i\}$ について

$$E[x_i x_j] = \begin{cases} \sigma^2 + \rho^2 & (i=j) \\ \sigma^2 \gamma^{|i-j|} & (i \neq j) \end{cases}$$

が成立するから、

(i) for $k > t+1$

$$E[F(k,t)] = \gamma^{k-t} \sigma^2 - \gamma \sigma^2 \gamma^{k-t+1} - \gamma \sigma^2 \gamma^{k-t+1} + \gamma^2 \sigma^2 \gamma^{k-t} \\ = 0$$

(ii) for $k = t+1$

$$E[F(k,t)] = \gamma \sigma^2 - \gamma^3 \sigma^2 - \gamma(\sigma^2 + \rho^2) + \gamma^3 \sigma^2 = -\gamma \rho^2$$

(iii) for $k = t$

$$E[F(k,t)] = (\sigma^2 + \rho^2) - \sigma^2 \gamma^2 - \sigma^2 \sigma^2 + \gamma^2 (\sigma^2 + \rho^2) \\ = (\sigma^2 + \rho^2) - (\sigma^2 - \rho^2) \gamma^2$$

したがって、 $E[F(k,t)]$ は結局次のようになる。

$$f(k,t) \equiv E[F(k,t)] = \begin{cases} 0 & \dots k > t+1 \\ -\gamma \rho^2 & \dots k = t+1 \\ \sigma^2 + \rho^2 - \gamma^2 (\sigma^2 - \rho^2) & \dots k = t \end{cases} \quad (1720)$$

同様に、 $E[G(k,t)]$, $E[H(k,t)]$ を求めると、

$$g(k,t) \equiv E[G(k,t)] = \begin{cases} \sigma^2 \gamma^{k-t-1} (\gamma^2 - 1) & \dots k > t+1 \\ \sigma^2 (\gamma^2 - 1) - \rho^2 & \dots k = t+1 \\ 2\gamma \rho^2 & \dots k = t \end{cases} \quad (1721)$$

$$h(k,t) \equiv E[H(k,t)] = \begin{cases} 2\sigma^2 \gamma^{k-t} & \dots k \geq t+1 \\ 2(\sigma^2 + \rho^2) & k = t \end{cases} \quad (1722)$$

次にこれらの f, g, h を用いて、(付19)式の $E[\partial^2/\partial \sigma^2]$ に現われる各項の処理を行う。

$$f_1(n) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \lambda^{2n-k-t} f(k, t)$$

$$= \left(\sum_{k=t=0} + 2 \sum_{k=t=1} + 2 \sum_{k=t=2} + \dots \right) \lambda^{2n-k-t} f(k, t)$$

今求めた $f(k, t)$ を使うと

$$= \left\{ (\sigma^2 + \rho^2) - \gamma^2 (\sigma^2 - \rho^2) \right\} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{2k} - 2\gamma\lambda\rho^2 \sum_{t=0}^{n-2} \lambda^{2t}$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2} \left\{ (\sigma^2 + \rho^2) - 2\gamma\lambda\rho^2 - (\sigma^2 - \rho^2)\gamma^2 \right\}$$

$$- \frac{1}{1-\lambda^2} \left\{ (\sigma^2 + \rho^2) - \frac{2\gamma\rho^2}{\lambda} - (\sigma^2 - \rho^2)\gamma^2 \right\} \lambda^{2n-2}$$

故に

$$f_1 \equiv E \left[\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \lambda^{2n-k-t} F(k, t) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^N f_1(n)$$

$$= \frac{N}{1-\lambda^2} \left\{ (\sigma^2 + \rho^2) - 2\gamma\rho^2\lambda - (\sigma^2 - \rho^2)\gamma^2 \right\}$$

$$- \left(\frac{1}{1-\lambda^2} \right)^2 \left\{ (\sigma^2 + \rho^2) - \frac{2\gamma\rho^2}{\lambda} - (\sigma^2 - \rho^2)\gamma^2 \right\} (1-\lambda^{2(N-1)})$$

よって $| \lambda | < 1$ であるから、 N が十分に大きければ、

$$f_1 = \frac{1}{1-\lambda^2} \left\{ \sigma^2(1-\gamma^2) + \rho^2(1-2\gamma\lambda+\gamma^2) \right\} \quad (\text{付23})$$

同様にして、 N が十分に大きければ、

$$f_2 \equiv E \left[\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n (2n-k-t) \lambda^{2n-k-t-1} F(k,t) \right]$$

$$= \frac{N}{(1-\lambda^2)^2} \left\{ \lambda(1-\gamma^2) \sigma^2 + (1-\gamma\lambda)(\lambda-\gamma) \rho^2 \right\} \quad (1724)$$

$$f_3 \equiv E \left[\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n (2n-k-t)(2n-k-t-1) \lambda^{2n-k-t-2} F(k,t) \right]$$

$$= \frac{2N}{(1-\lambda^2)^3} \left\{ (1+3\lambda^2)(1-\gamma^2) \sigma^2 + \rho^2 [(1+3\lambda^2)(1+\gamma^2) - 2\gamma\lambda(3+\lambda^2)] \right\}$$

$$g_1 \equiv E \left[\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \lambda^{2n-k-t} G(k,t) \right] \quad (1725)$$

$$= \frac{2N}{(1-\lambda^2)(1-\gamma\lambda)} \left\{ \rho^2(1-\gamma\lambda)(\gamma\lambda) + \sigma^2\lambda(\gamma^2-1) \right\}$$

$$g_2 \equiv E \left[\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n (2n-k-t) \lambda^{2n-k-t-1} G(k,t) \right]$$

$$= \frac{2N}{(1-\lambda^2)^2} \left\{ \rho^2(-1+2\gamma\lambda-\lambda^2) + \sigma^2 \frac{(1+\lambda^2-2\lambda^3\gamma)(\gamma^2-1)}{(1-\gamma\lambda)^2} \right\} \quad (1726)$$

$$h \equiv E \left[\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \lambda^{2n-k-t} H(k,t) \right]$$

$$= \frac{2N}{(1-\lambda^2)(1-\gamma\lambda)} \left\{ \rho^2(1+\gamma\lambda) + \sigma^2(1-\gamma\lambda) \right\} \quad (1727)$$

さて、これらの f_i, g_i, h を使うと、(1719) 式より、 $E[\partial^2 L / \partial \sigma^2]$ は次のようにかける。

$$\begin{aligned}
 E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2}\right] &= \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{\beta^4} \cdot \left(\frac{d\beta^2}{d\sigma}\right)^2 - \frac{N}{2\beta^2} \cdot \frac{d^2\beta^2}{d\sigma^2} \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{2\beta^2} \cdot \frac{d^2\beta^2}{d\sigma^2} - \frac{1}{\beta^6} \left(\frac{d\beta^2}{d\sigma}\right)^2 \right\} f_1 \\
 &\quad + \frac{1}{\beta^4} \cdot \frac{d^2\beta^2}{d\sigma} \left\{ \frac{d\lambda}{d\sigma} f_2 + g_1 \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2\beta^2} \left\{ \left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 f_3 + \frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} f_2 + 2 \frac{d\lambda}{d\sigma} g_2 + h \right\} \quad (1728)
 \end{aligned}$$

一方、 λ, β^2 は方程式

$$\begin{cases} (1+\lambda^2)\beta^2 = \sigma^2(1-\sigma^2) + \rho^2(1+\sigma^2) \\ \lambda\beta^2 = \rho^2\sigma \end{cases} \quad (1729)$$

を満足しているから、

$$f_1 = \frac{N}{1-\lambda^2} \left\{ (1+\lambda^2)\beta^2 - 2\lambda^2\beta^2 \right\} = N\beta^2$$

同様の簡単化を行えば、

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} f_2 + g_1 = 0$$

$$f_3 = \frac{2N\beta^2}{1-\lambda^2}, \quad g_2 = -\frac{2N\beta^2}{1-\sigma\lambda}$$

したがって、これらの結果を (付28) 式に代入して整理すると、

$$E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \delta^2}\right] = -\frac{N}{2\beta^4} \left(\frac{d\beta^2}{d\delta}\right)^2 - \frac{1}{(1-\lambda^2)(1-\gamma\lambda)} \left\{ (1-\gamma\lambda) \left(\frac{d\lambda}{d\delta}\right)^2 - 2(1-\lambda^2) \left(\frac{d\lambda}{d\delta}\right) + \frac{\sigma^2(1+\gamma\lambda) + \rho^2(1-\gamma\lambda)}{\beta^2} \right\}$$

一方、 $d\lambda/d\delta$, $d\beta^2/d\delta$ は (付29) 式より次のようになる。(付30)

$$p \equiv \frac{d\beta^2}{d\delta} = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2} \left\{ \left(1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}\right) - \frac{\lambda}{\delta} \right\}$$

$$q \equiv \frac{d\lambda}{d\delta} = -\left(1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}\right) \frac{2\lambda^2}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{\delta} \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}$$

故に、 $\gamma = e^{-\alpha\Delta v}$ に注意すると、 $N \rightarrow \infty$ のときの相対誤差 B は次式のようになる。

$$B = \frac{1}{\left(E\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \delta^2}\right] \cdot v^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\alpha\Delta v\delta} \cdot \frac{1}{\left(E\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \delta^2}\right]\right)^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{1}{\sqrt{N} \alpha\Delta v\delta D(\gamma, \sigma^2/\rho^2)} \quad (\text{付 31})$$

where

$$D(\gamma, \nu) = \left\{ \frac{p^2}{2} + \frac{\delta^2}{1-\gamma^2} - \frac{2\gamma}{1-\gamma\lambda} + \frac{\lambda}{\delta} \frac{1-\gamma\lambda + \nu(1+\gamma\lambda)}{(1-\lambda^2)(1-\gamma\lambda)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(付 32)

〔付録6〕

デジタル計算機による 帯域
制限白色雑音の発生

ここでは、2,4章のシミュレーションに用いた帯域制限白色雑音をデジタル計算機上で発生させる際の色々の問題について論じる。
ここでの内容は、一応非接触速度計測とは独立している。

1 緒言

不規則変動を伴うシステムの研究は、理論的にも実際問題としても重要であるが、これを現実の条件のもとで解析的に解くことは非常に困難であり、具体的な解が必要な時にはシミュレーションが行なわれることが多い。この際、どのようにして所定の不規則変動を作るかということが問題となるが、これには大別して、自然に存在する物理的現象を利用する方法と、計算機等によって人工的にそれを発生させる方法とがある。

これらは、夫々その用途によって使い分けられるべきであるが、最近のデジタル計算機の普及、システムの複雑化にともなって、デジタル計算機上で所定の統計的性質をもった確率過程を発生させることが重要となってきた。本章はこのような観点に立って、デジタル計算機上で帯域制限白色雑音を発生させる際のいくつかの問題について論じたものである。

発生の方法としては、標本化定理によってそれを無限級数に展開し、これを有限で打ち切るという方法をとったが、この打ち切りによる誤差及び独立確率変数列として用いた乱数の相関による誤差について解析を行なった。更に、実際にそれを計算機上で発生させて、ほぼ満足なものが出来ることを確かめた。

2 標本化定理による帯域制限白色雑音の発生

標本化定理によれば、定常確率過程 $x_N(t)$ のスペクトル密度 $\Phi(\omega)$ が、

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| > \omega_c \\ \text{一定} & |\omega| \leq \omega_c \end{cases}$$

を満たすとき、即ち $x(t)$ が帯域制限白色雑音のとき、 $x(t)$ は次のように展開される。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \phi_n\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (\text{付33})$$

ここで、 $t_0 = \pi / \omega_c$

$\{x_n \mid n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$: 独立確率変数列

$$\phi_n(t) = \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \quad : \text{サンプリング関数}$$

したがって、計算後上でこのような $x(t)$ を発生させるためには、(i) 確率変数列 $\{x_i\}$ を発生させ、(ii) これらを (付33) 式にしたがって合成すればよい。

このうち (i) については従来から色々の研究があり、通常の方法には十分のものが得られている。(ii) については、無限和を有限和で置きかえなければならないが、これは次のように行なえばよい。

即ち、サンプリング関数 $\phi_n(t)$ は $t=n$ で最大となり、その包絡線は $t=n$ を離れるにしたがって減少する。

したがって、ある時刻 t に対する $x(t)$ を作るには、 $n = [t/t_0]$, $[t/t_0] \pm 1, \dots$ 等の $\phi_n(t)$ からの寄与を順に考慮し、

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N+1}^N x_{\left[\frac{t}{t_0}\right] + n} \phi_{\left[\frac{t}{t_0}\right] + n} \left(\frac{t}{t_0} \right) \quad (付34)$$

のようにして、これから有限和への打ち切りを行なえばよい。
なお上式で、 $[\alpha]$ は α を越えない最大整数を表わす。

上式で、 $n = \left[\frac{t}{t_0}\right]$ を中心にして $2N$ 項で打ち切ったものを $x_N(t)$ と書くと

$$\phi_{n+m}(t) = \phi_n(t-m) \quad (付35)$$

に注意して、 $x_N(t)$ は次のようになる。

$$x_N(t) = \sum_{n=-N+1}^N x_{n+\left[\frac{t}{t_0}\right]} \phi_n\left(\frac{t}{t_0} - \left[\frac{t}{t_0}\right]\right) \quad (付36)$$

ここで、定数 N は $x_N(t)$ の統計的性質が、 $x(t)$ のそれに十分に近
いように選ばねばならないが、その選定は、乱数列 $\{x_i\}$ に存
在する相関が $x_N(t)$ に及ぼす影響とともに本章の主題であり、
順次、以下において論じられる。

3 打ち切り誤差の検討

ここでは、 $x(t)$ と $x_N(t)$ とを比較し、 N の値をとどの程度にす
れば $x_N(t)$ が実用上十分な帯域制限白色雑音になるかについて
検討する。

$x(t)$ と $x_N(t)$ を比較するとき、どのような基準によつて行な
うかが問題となるが、実際に問題となるのは $x(t)$ が正規性の
場合が多いので、以下では、それらの自己相関函数及びスペク
トル密度について調べた。又、波形上の差 $x_\infty(t) - x_N(t)$ につい
とも考えた。

この解析から、 $N=50$ であれば、実用上ほとんど問題のないこ

とがわかった。なお、以下では一般性を失なうことなく、
 $E[X(t)] = 0$, $E[X^2(t)] = 1$ であるとし、したがって $\{x_i\}$
 について、 $E[x_i] = 0$, $E[x_i x_j] = \delta_{ij}$ とする。

3.1 空間平均相関関数についての誤差

ここでは、 $x_N(t)$ の空間平均相関関数

$$R_N(t, s) = E[X_N(t) X_N(s)]$$

が $N \rightarrow \infty$ としたときのそれ

$$R(t, s) = R_\infty(t, s) = E[X(t) X(s)]$$

とどの位の差があるかについて調べる。

(付36) 式より

$$R_N(t, s) = \sum_{n, m = -N+1}^N E\left[x_{n+\left[\frac{t}{t_0}\right]} x_{m+\left[\frac{s}{t_0}\right]}\right] \phi_n\left(\frac{t}{t_0} - \left[\frac{t}{t_0}\right]\right) \phi_m\left(\frac{s}{t_0} - \left[\frac{s}{t_0}\right]\right)$$

$$E[x_i x_j] = \delta_{ij} \text{ より}$$

$$= \sum_{n, m = -N+1}^N \delta_{n+\left[\frac{t}{t_0}\right], m+\left[\frac{s}{t_0}\right]} \phi_n\left(\frac{t}{t_0} - \left[\frac{t}{t_0}\right]\right) \phi_m\left(\frac{s}{t_0} - \left[\frac{s}{t_0}\right]\right) \quad (5-5)$$

$$= \sum_n' \phi_n\left(\frac{t}{t_0} - \left[\frac{t}{t_0}\right]\right) \phi_{n+\left[\frac{t}{t_0}\right] - \left[\frac{s}{t_0}\right]}\left(\frac{s}{t_0} - \left[\frac{s}{t_0}\right]\right)$$

ここで、和 $\sum'$ は、

$$-N+1 \leq n \leq N, \quad -N+1 - \left[\frac{t}{t_0}\right] + \left[\frac{s}{t_0}\right] \leq n \leq N - \left[\frac{t}{t_0}\right] + \left[\frac{s}{t_0}\right]$$

の2条件を満たす n についてのものとする。

以下、一般性を失なうことなく、 $t \geq s$ と仮定する。

さて、上式において、

$$-N+1 < N - \left[\frac{t}{t_0}\right] + \left[\frac{s}{t_0}\right] \iff \left[\frac{t}{t_0}\right] - \left[\frac{s}{t_0}\right] < 2N-1$$

であるから、 $R_N(t, S)$ は次のようになる。

$$R_N(t, S) = \begin{cases} 0 & \text{for } [t/t_0] - [s/t_0] > 2N-1 \\ \sum_{n=-N+1}^{N-[t/t_0]+[s/t_0]} \phi_n\left(\frac{t}{t_0} - \left[\frac{t}{t_0}\right]\right) \phi_n\left(\frac{s}{t_0} - \left[\frac{t}{t_0}\right]\right) & \text{(付38)} \\ 0 & \text{for } [t/t_0] - [s/t_0] \leq -2N+1 \end{cases}$$

したがって、

$$u = \frac{t}{t_0} - \left[\frac{t}{t_0}\right], \quad v = \frac{s}{t_0} - \left[\frac{t}{t_0}\right], \quad \gamma = \left[\frac{t}{t_0}\right] - \left[\frac{s}{t_0}\right]$$

とおくと、 $\gamma \leq 2N-1$ について、

$$\begin{aligned} R_N(t, S) &= \frac{\sin \pi u \cdot \sin \pi v}{\pi^2} \sum_{n=-N+1}^{N-\gamma} \frac{1}{(u-n)(v-n)} \\ &= \frac{\sin \pi u \cdot \sin \pi v}{\pi^2 (v-u)} \sum_{n=-N+1}^{N-\gamma} \left(\frac{1}{u-n} - \frac{1}{v-n} \right) \quad \text{(付39)} \end{aligned}$$

一般の N, t, S について、この $R_N(t, S)$ を簡単にするのは困難であるが、 $R(t, S)$ の主要な部分は、 $|t-S|$ があまり大きくないところであり、かつ、 N を十分に大きくすれば、 $\gamma \ll N$ とすることが出来るので、以下ではこのような場合について $R_N(t, S)$ を簡単な式で表現することを考える。

$[t/t_0] - [s/t_0] \ll N$ の場合

$$I(u) \equiv \sum_{n=-N+1}^{N-\gamma} \frac{1}{u-n} = - \sum_{n=1}^{N-\gamma} \frac{1}{n-u} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+u}$$

ここで、¹⁸⁾ アイガンマ函数 $\psi(z)$ を導入すると、

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}$$

が成立するから.

$$\begin{aligned} I(u) &= - \sum_{n=1}^{N-\gamma} [\psi(n-u+1) - \psi(n-u)] + \sum_{n=0}^{N-1} [\psi(n+u+1) - \psi(n+u)] \\ &= \psi(N+u) - \psi(N-\gamma-u+1) + \psi(1-u) - \psi(u) \end{aligned}$$

これを(143)式に代入すると.

$$\begin{aligned} R_N(t, s) &= \frac{\sin \pi u \cdot \sin \pi v}{\pi^2 (v-u)} [\psi(N+u) - \psi(N+v) + \psi(N-\gamma-v+1) \\ &\quad - \psi(N-\gamma-u+1) + \psi(1-u) - \psi(u) - \psi(1-v) + \psi(v)] \end{aligned} \quad (144)$$

すなわち、 $\psi(z)$ については次の漸近展開が成立することが知られている。

$$\psi(z) \sim \log(z) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \dots \quad (145)$$

よって、 $N \gg a$ なら.

$$\psi(N+a) \sim \log N + \frac{a}{N} - \frac{1}{2N} + o(N^{-2})$$

更に $\psi(z)$ については関係式

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z)$$

が成立するから.

$$N \gg u, v, \gamma+v-1, \gamma+u-1$$

に注意すると、(5-8)式の $R_N(t, s)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 R_N(t, s) &= \frac{\sin \pi u \cdot \sin \pi v}{\pi^2 (v - u)} \left(\pi \cot \pi u - \pi \cot \pi v + 2 \frac{u - v}{N} + o(N^{-2}) \right) \\
 &= \frac{\sin \pi (u - v)}{\pi (u - v)} - \frac{2 \sin \pi u - \sin \pi v}{\pi^2 N} + o(N^{-2}) \\
 &= R(t, s) - \frac{2}{\pi^2 N} \sin \left(\frac{\pi t}{t_0} \right) \sin \left(\frac{\pi s}{t_0} \right) + o(N^{-2}) \quad (\text{付42})
 \end{aligned}$$

したがって、 $|t - s| \ll N t_0$ であれば、打ち切りによる空間平均
相関関数の誤差

$$E_N(t, s) = R(t, s) - R_N(t, s)$$

は次式で与えられる。

$$E_N(t, s) = \frac{2}{\pi^2 N} \sin \left(\frac{\pi t}{t_0} \right) \sin \left(\frac{\pi s}{t_0} \right) \quad (\text{付43})$$

この式より、 $N=50$ 位にとれば通常の目的には十分であることがわかる。又、 t または s が t_0 の整数倍の時には $E_N(t, s) = 0$ となるのは興味深い。

さて、通常は誤差式として(付43)式で十分であるが、与えられた $|t - s|$ に比して N がそれ程大きくない時には、 $\psi(x)$ の漸近展開式の更に高次の項まで考慮するか、(付39)式を直接評価しなければならない。

これと関連して $E_N(t, s)$ の式(付43)の有効の範囲を正確に定めることは重要であるが、これを解析的に求めるのは困難である。ここでは大体の目安を求めるために、(付39)式の $R_N(t, s)$ と $E_N(t, s)$ を直接数値計算し、それによつて(付43)式の有効範囲を決定したので、それについて簡単に述べる。

(付40)式に(付41)式を適用して $E_N(t, s)$ の式を得たわけであるが、このとき問題となるのは、 $u, v, v+u-1, v+v-1$ と N との大小関係である。ところが、

$$0 < u < 1, \quad v \doteq (s-t)/t_0, \quad -1 \leq v+v-1 < 0, \quad v+u-1 \doteq (t-s)/t_0$$

であるから、 $\Psi(z)$ の漸近展開を途中で打ち切る際問題となるのは、 N と $(t-s)/t_0$ との大小関係だけであると考えてよい。この事柄を考えれば、 $s = t_0/2, t = (k + 1/2)t_0$

($k=0, 1, 2, \dots$) なる t, s についてのみ $R_N(t, s)$ を求め、これを $E_N(t, s)$ の式と比較すれば十分である。

このような t, s については

$$R_N(t, s) = \frac{(-1)^k}{\pi^2} \sum_{n=-N+1}^{N-k} \frac{1}{(2n-1)(2n-2k-1)}, \quad E_N(t, s) = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2 N}$$

となるので、種々の N, k に対するこれらの値を計算したが、この結果より、

$$|t-s| \leq Nt_0/8$$

位の範囲では最大1割位 ($|t-s| \leq Nt_0/4$ で最大2割位) の誤差はあるが、 $R(t, s) - R_N(t, s)$ の目安として(付43)式の $E_N(t, s)$ を用いてもよいことがわかった。なお、参考までに、 $N=20, 40$ のときの $R(t, s) - R_N(t, s)$ と $E_N(t, s)$ の値を次の表に示す。

k	$[R(t,s) - R_N(t,s)] \times (-1)^{k+1}$	
	N = 20	N = 40
0	1.01206×10^{-2}	5.0654×10^{-2}
1	1.04193	5.1335
2	1.07928	5.2105
3	1.12745	5.2981
4	1.19013	5.3974
5	1.27328	5.5102
6	1.38726	5.6384
7	1.55216	5.7847
8	1.81459	5.9522
9	2.32655	6.1450
10	4.73364	6.3685
11	1.78028	6.6299
12	0.98042	6.9393
13	0.51016	7.3109
14	0.17614	7.7659
15	0.08941	8.3379
	$E_N(t,s) \times (-1)^k$	
	1.01321×10^{-2}	5.0661×10^{-2}

Table 付-1. Values of $R(t,s) - R_N(t,s)$ and $E_N(t,s)$ for $t = \frac{t_0}{2}$, $s = (k + \frac{1}{2})t_0$.

3.2 時間平均相関函数についての誤差

前節(5-11)式からわかるように、 N が有限のときには $x_N(t)$ は非定常になり、時間平均相関函数と空間平均相関函数が等しくなるとは限らない。又、通常のシミュレーションでは時間平均が問題になることが多い。したがってここでは、 $x_N(t)$ の時間平均相関函数 $R_N(\tau)$ について調べる。

$$R_N(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_N(t) x_N(t+\tau) dt \quad (付44)$$

ここに(5-4)式を代入すると、

$$\begin{aligned}
R_N(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{n,m=-N+1}^N x_{n+[\frac{t}{t_0}]} x_{m+[\frac{t+\tau}{t_0}]} \phi_n\left(\frac{t}{t_0} - [\frac{t}{t_0}]\right) \\
&\quad \times \phi_m\left(\frac{t+\tau}{t_0} - [\frac{t+\tau}{t_0}]\right) dt \\
&= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\gamma t_0} \sum_{i=-\gamma}^{\gamma-1} \int_{it_0}^{(i+1)t_0} \sum_{n,m} x_{n+[\frac{t}{t_0}]} x_{m+[\frac{t+\tau}{t_0}]} \phi_n\left(\frac{t}{t_0} - [\frac{t}{t_0}]\right) \\
&\quad \times \phi_m\left(\frac{t+\tau}{t_0} - [\frac{t+\tau}{t_0}]\right) dt
\end{aligned}$$

ここで、

$$\tau = jt_0 + \rho, \quad 0 \leq \rho < t_0, \quad j = [\tau/t_0]$$

とし、上式の積分区間を2つに分けて考える。

$$\begin{aligned}
R_N(\tau) &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\gamma t_0} \sum_{i=-\gamma}^{\gamma-1} \int_{it_0}^{(i+1)t_0 - \rho} \dots dt + \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\gamma t_0} \sum_{i=-\gamma}^{\gamma-1} \int_{(i+1)t_0 - \rho}^{(i+1)t_0} \dots dt \\
&\equiv R_N^{(1)}(\tau) + R_N^{(2)}(\tau)
\end{aligned}$$

次に $R_N^{(1)}(\tau)$ について考える。

$$\begin{aligned}
R_N^{(1)}(\tau) &\equiv \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\gamma t_0} \sum_{i=-\gamma}^{\gamma-1} \int_{it_0}^{(i+1)t_0 - \rho} \sum_{n,m=-N+1}^N x_{n+[\frac{t}{t_0}]} x_{m+[\frac{t+\tau}{t_0}]} \phi_n\left(\frac{t}{t_0} - [\frac{t}{t_0}]\right) \\
&\quad \times \phi_m\left(\frac{t+\tau}{t_0} - [\frac{t+\tau}{t_0}]\right) dt
\end{aligned}$$

ところが、 $it_0 \leq t < (i+1)t_0 - \rho$ なる範囲では、

$$\left[\frac{t+\tau}{t_0} \right] = \left[\frac{t+jt_0+\rho}{t_0} \right] = i+j.$$

よ、こ.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_N^{(1)}(\tau) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\nu t_0} \sum_{i=-\nu}^{\nu-1} \int_{it_0}^{(i+1)t_0-\rho} \sum_{m,n} x_{n+i} x_{m+i+j} \phi_n\left(\frac{t}{t_0}-i\right) \phi_m\left(\frac{t+\rho}{t_0}-i\right) dt \\
 &= \sum_{m,n} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0-\rho} \phi_n\left(\frac{t}{t_0}\right) \phi_m\left(\frac{t+\rho}{t_0}\right) \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\nu} \sum_{i=-\nu}^{\nu-1} x_{n+i} x_{m+i+j} \cdot dt
 \end{aligned}$$

ところが、 $\{x_i\}$ が独立であることから

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\nu} \sum_{i=-\nu}^{\nu-1} x_{n+i} x_{m+i+j} = \delta_{n, m+j} \quad (付45)$$

よ、こ.

$$\mathcal{R}_N^{(1)}(\tau) = \sum_{m,n} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0-\rho} \phi_n\left(\frac{t}{t_0}\right) \phi_m\left(\frac{t+\rho}{t_0}\right) \delta_{n, m+j} dt \quad (付46)$$

 $0 \leq t \leq t_0 - \rho$ では、 $\left[\frac{t}{t_0}\right] = 0$ であるから

$$\frac{t}{t_0} = \frac{t}{t_0} + \left[\frac{t}{t_0}\right], \quad n = n + \left[\frac{t}{t_0}\right]$$

また、 $(t+\rho)/t_0 = (t+\tau)/t_0 - j$ であるが、

$$\frac{\tau}{t_0} \leq \frac{t+\tau}{t_0} \leq \frac{t_0 - \rho + j t_0 + \rho}{t_0} = (j+1)$$

より、 $\left[\frac{t+\tau}{t_0}\right] = j$ が成立するから、

$$\frac{t+\rho}{t_0} = \frac{t+\tau}{t_0} - \left[\frac{t+\tau}{t_0}\right]$$

したがって、これらを(5-15)式に代入することにより、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_N^{(1)}(\tau) &= \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0-\rho} \sum_{m,n=-N+1}^N \delta_{n+\left[\frac{t}{t_0}\right], m+\left[\frac{t+\tau}{t_0}\right]} \phi_n\left(\frac{t}{t_0} - \left[\frac{t}{t_0}\right]\right) \\
 &\quad \times \phi_m\left(\frac{t+\tau}{t_0} - \left[\frac{t+\tau}{t_0}\right]\right) dt \quad (付47)
 \end{aligned}$$

これと (付37) 式を比較することにより、 $R_N^{(1)}(\tau)$ は空間平均相関函数 $R_N(t, s)$ によつて次のように表わされることがわかる。

$$R_N^{(1)}(\tau) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0-\tau} R_N(t, t+\tau) dt \quad (\text{付48})$$

$R_N^{(2)}(\tau)$ についても同様にして、

$$R_N^{(2)}(\tau) = \frac{1}{t_0} \int_{t_0-\tau}^{t_0} R_N(t, t+\tau) dt \quad (\text{付49})$$

したがって、 $R_N(\tau) = R_N^{(1)}(\tau) + R_N^{(2)}(\tau)$ より、 $R_N(\tau)$ と $R_N(t, s)$ の間に次の関係の成立することがわかる。

$$R_N(\tau) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} R_N(t, t+\tau) dt \quad (\text{付50})$$

$R_N(\tau)$ がこのように簡単な形で表わせるのは興味深い。

次に、 $|\tau| \ll N$ なる場合の $R_N(\tau)$ については、(5-12) 式を使うと、 $R(\tau) \equiv R_\infty(\tau)$ として

$$\begin{aligned} R_N(\tau) &= R(\tau) - \frac{2}{\pi^2 N t_0} \int_0^{t_0} \sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right) \sin\left(\frac{\pi t + \pi \tau}{t_0}\right) dt \\ &= R(\tau) - \frac{1}{\pi^2 N} \cos\left(\frac{\pi \tau}{t_0}\right) \end{aligned} \quad (\text{付51})$$

したがって、打ち切りが $x_N(t)$ の時間平均相関函数に及ぼす影響 $\varepsilon_N(\tau) = R(\tau) - R_N(\tau)$ は、

$$\varepsilon_N(\tau) = \frac{1}{\pi^2 N} \cos\left(\frac{\pi \tau}{t_0}\right) \quad \text{for } |\tau| \ll N \quad (\text{付52})$$

程度である。

3.3 波形上の誤差

ここでは、打ち切りによる波形上の差 $x_\infty(t) - x_N(t)$ がどの位になるかを、次の評価量によって調べる。

$$\begin{aligned} J &= E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_\infty(t) - x_N(t))^2 dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E[(x_\infty(t) - x_N(t))^2] dt \end{aligned}$$

さて、

$$E[(x_\infty(t) - x_N(t))^2] = E[x_\infty^2(t)] + E[x_N^2(t)] - 2E[x_\infty(t)x_N(t)]$$

$\{x_i\}$ が独立であるから、 $E[x_\infty(t)x_N(t)] = E[x_N^2(t)]$ 、故に

$$\begin{aligned} E[(x_\infty(t) - x_N(t))^2] &= E[x_\infty^2(t)] - E[x_N^2(t)] \\ &= R(t, t) - R_N(t, t) = E_N(t, t) \end{aligned}$$

したがって、 N が大きければ (付43) 式より、

$$J = \frac{2}{\pi^2 N} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2\left(\frac{\pi t}{t_0}\right) dt = \frac{1}{\pi^2 N}$$

故に、 $E[x_\infty^2(t)] = 1$ に注意すると、波形上の平均相対誤差は、

$$\frac{\sqrt{J}}{E[x^2(t)]} = \frac{1}{\pi \sqrt{N}} \quad \text{for } N \gg 1 \quad (\text{付53})$$

となる。なお、別の方法によれば N の一般の値に対して J を正確に求めることが出来る。この結果のみを書くと、

$$J = 1 - \frac{2}{\pi} Si(2\pi N) \quad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

3.4 スペクトル密度についての誤差

$x_N(t)$ が非定常であるので、そのスペクトル密度は double frequency spectrum $\Phi_N(\omega_1, \omega_2) = \iint R_N(t, s) \exp(j\omega_1 t - j\omega_2 s) dt ds$ 等によって測るのが適当であるかも知れないが、本章の目的が (定常な) 帯域制限白色雑音を発生させることであり、又、 N が十分に大きければ $x_N(t)$ は定常であると考えてもよいので、ここでは、このような仮定のもとに $R_N(\tau)$ のフーリエ変換について考える。

さて、 $R_N(\tau)$ は $|\tau| \ll N$ 及び $|\tau| > N$ なる部分についてしかその形がわからないから、そのフーリエ変換 $\Phi_N(\omega)$ を解析的に求めることは困難である。したがって、ここでは数値計算によって $\Phi_N(\omega)$ を求めた。

即ち、(付36) 式の $R_N(t, s)$ から数値積分によって (付41) 式の $R_N(\tau)$ を求め、これをやはり数値的に cosine 変換し、

$$\Phi_N(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_N(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

を求めた。

$N=5, 20, 50$ に対する $\Phi_N(\omega)$ の計算結果を Fig 付1 に示す。これより、 $N=50$ であれば実用上十分であるし、又、少しラフなシミュレーションなら、 $N=20$ 位でもよかるう。

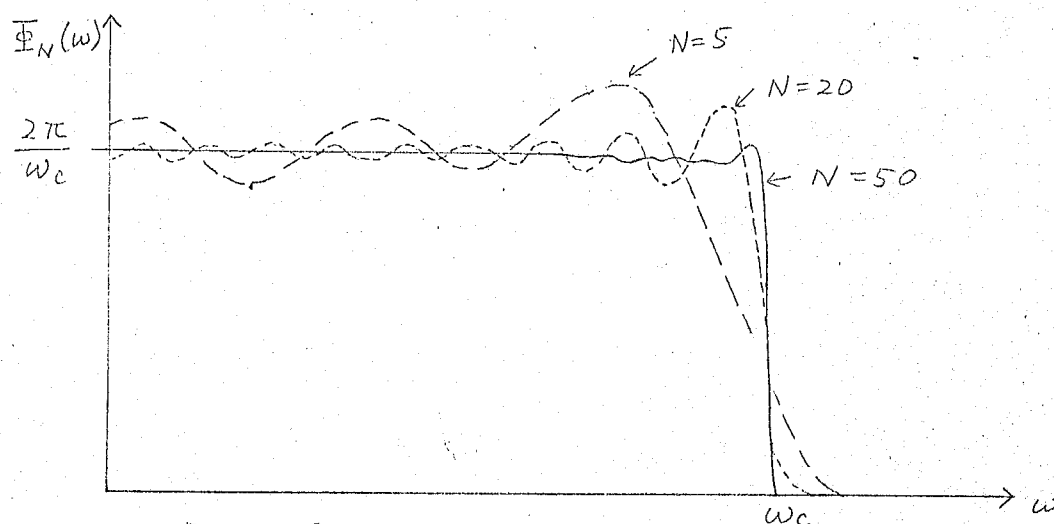


Fig 付1 Power Spectral Density of $x_N(t)$
(theoretical value)

4 乱数の相関による影響の検討

これまでの議論では、 $x(t)$ を発生させる時に用いた $\{x_i\}$ は無相関であるとしてきた。ところが、計算機上で発生させた乱数 $\{x_i\}$ には、多少ではあるが相関があるので、これをもとに $x(t)$ を作る際にはこの相関による影響を調べる必要がある。ここでは、これを $x(t)$ の相関函数、スペクトル密度について調べ、通常の場合にはこの影響がほとんどないことを示す。

ただ、計算機上で発生させた乱数列の相関については、その解析的性質がほとんどわかっていないが、ここでは、

$E[x_i x_j] = \rho^{|i-j|}$ の場合について調べた。又、これまでの議論から N が十分に大きければ、打ち切りによる影響はそれ程大きくないので、以下では簡単のための $N = \infty$ として考える。

(i) 相関函数への影響

空間平均相関函数 $R(t, s)$ については、

$$R(t, s) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} E[x_n x_m] \phi_n\left(\frac{t}{t_0}\right) \phi_m\left(\frac{s}{t_0}\right)$$

ここで、 $\{x_i\}$ に定常性を仮定すると、

$$E[x_n x_m] = \rho_{|n-m|} \quad (\rho_0 = 1 \text{ とする})$$

このとき、 $\rho_{-k} \equiv \rho_k \ (k > 0)$ とすると、

$$R(t, s) = \rho_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n\left(\frac{t}{t_0}\right) \phi_n\left(\frac{s}{t_0}\right) + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \rho_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{n+k}\left(\frac{t}{t_0}\right) \phi_n\left(\frac{s}{t_0}\right)$$

ところが一般に、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{n+k}(x) \phi_n(y) = \phi_k(x-y) \quad (1754)$$

が成立するから、

$$R(t, s) = \phi_0\left(\frac{t-s}{t_0}\right) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \rho_k \phi_k\left(\frac{t-s}{t_0}\right) \quad (\text{付55})$$

時間平均相関関数 $R(\tau)$ についても 3.2 と同じ方法で計算すると上と同じ結果、 $R(\tau) = R(t, s)$, $\tau = t - s$ が得られるので両者は区別する必要がない。

したがって、乱数の相関による誤差 $\lambda(\tau)$, $\tau = t - s$ は

$$\lambda(\tau) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \rho_k \phi_k\left(\frac{\tau}{t_0}\right) \quad (\text{付56})$$

となり、これは次の例からわかるように、大体 $\{x_i\}$ 中の相関程度であると考えられる。

$\rho_k = \rho^k$, $|\rho| < 1$ の場合を考える。

$$\lambda^2(\tau) \leq \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \rho_k^2 \right) \left(\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \phi_k^2\left(\frac{\tau}{t_0}\right) \right)$$

再び (付54) 式を利用すると、

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \phi_k^2\left(\frac{\tau}{t_0}\right) = \phi_0(0) - \phi_0^2\left(\frac{\tau}{t_0}\right) \leq 1$$

また、

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \rho_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{2k} = \frac{2\rho^2}{1-\rho^2}$$

故に、相関関数についての誤差 $\lambda(\tau)$ について次式が成立する

$$|\lambda(\tau)| \leq \sqrt{\frac{2\rho^2}{1-\rho^2}} \quad (\text{付57})$$

(ii) スペクトル密度への影響

(付55)式より、 $x(t)$ のスペクトル密度 $\Phi(\omega)$ は、

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\phi_0\left(\frac{\tau}{t_0}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left\{ \phi_0\left(\frac{\tau}{t_0} + k\right) + \phi_0\left(\frac{\tau}{t_0} - k\right) \right\} \right] e^{-j\omega\tau} d\tau$$

ここで、 $\{x_i\}$ が無相関のときのスペクトル密度を $\Phi_0(\omega)$ とすると、

$$\Phi_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0\left(\frac{\tau}{t_0}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

が成立するから、フーリエ変換の基本的性質より、

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \Phi_0(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left\{ e^{-j\omega k t_0} \Phi_0(\omega) + e^{+j\omega k t_0} \Phi_0(\omega) \right\} \\ &= \Phi_0(\omega) \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos(\omega k t_0) \right\} \end{aligned} \quad (\text{付58})$$

したがって、2 相対誤差 $\alpha(\omega)$ は

$$\alpha(\omega) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos(\omega k t_0)$$

ここで特に、 $p_k = p^k$ とおくと、

$$\alpha(\omega) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} p^k \cos(\omega k t_0) = 2 \frac{p \cos(\omega t_0) - p^2}{1 - 2p \cos(\omega t_0) + p^2} \quad (\text{付59})$$

ところが、

$$|\cos(\omega t_0) - p| \leq 1 + |p|, \quad |1 - 2p \cos(\omega t_0) + p^2| \geq (1 - |p|)^2$$

よって、スペクトル密度の誤差 $\alpha(\omega)$ について、

$$|\alpha(\omega)| \leq \frac{2|p|(1+|p|)}{(1-|p|)^2} \quad (\text{付60})$$

が成立する。

以上で、 $\{x_i\}$ に存在する相関が $x(t)$ の相関函数、スペクトル密度に及ぼす影響を調べる事が出来たが、それは、 p が十分に小さければ $2p$ 程度の大きさである。一般に、計算機で発生される乱数は、十分に相関が小さい¹⁶⁾ ので、この程度の誤差なら実用上問題がないと思われる。

5 $x_N(t)$ の発生及びその結果

これまでの考察から、十分に実用性のある帯域制限白色雑音を発生させることが出来ることがわかった。ここではこの事実にもとづき、(付36)式によって $x_N(t)$ を計算機上で発生させたので、その結果について述べる。

5.1 $x_N(t)$ 発生のアプローチ

$x_N(t)$ は、それをなるべく高速で発生させることが重要であるが、(付36)式のままではその点いくつかの問題がある。ここでは、 $x_N(t)$ 発生の高速化の2,3の方法について述べる。(付36)式を書き直すと、

$$x_N(t) = \sum_{n=N+1}^N x_{n+[\frac{t}{t_0}]} \frac{\sin \pi (\frac{t}{t_0} - [\frac{t}{t_0}] - n)}{\pi (\frac{t}{t_0} - [\frac{t}{t_0}] - n)} \quad (\text{付61})$$

となるが、このまま計算すると、1つの $x_N(t)$ の値を求めるのに $2N$ 回の $\sin$ の計算を行わなければならない。

ところが、 $\sin \pi (x+n) = (-1)^n \sin \pi x$ が成立するから、 $x_N(t)$ を次のように計算することにより、 $\sin$ の計算は1回で済むよ

うになる。

$$x_N(t) = \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{t_0} \right)}{\pi} \sum_{n=-N+1}^N x_{n+\left[\frac{t}{t_0}\right]} \frac{(-1)^{n+\left[\frac{t}{t_0}\right]}}{\frac{t}{t_0} - \left[\frac{t}{t_0}\right] - n} \quad (付62)$$

この際注意すべきことは、 $t = k t_0$ に対しては、 $\sin = 0$, $\Sigma = \infty$ となるから、 $x_N(k t_0) = x_k$ として別途その値を定めなければならない。

さて、任意の t について $x_N(t)$ の値が要求される場合は (付62) 式以上簡単にすることは困難であるが、現実には一定のサンプリング間隔ごとの $x_N(t)$ の値だけが必要である場合が多く、このような時には、(付62) 式を更に簡単に出来、これによって $x_N(t)$ 発生的大幅な高速化が図れる。

即ち、必要とされる $x_N(t)$ の値が t_0/M の整数倍の時刻

$$t = (t_0/M) k \quad M: \text{整数}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

だけであるとする。このとき、

$$k = \nu M + p \quad p = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

とすると、 $\left[\frac{t}{t_0}\right] = \nu$ であるから (5-31) 式より、

$$x_N(t) = S_p \sum_{n=-N+1}^N \frac{(-1)^n x_{n+\nu}}{p - M \cdot n}, \quad S_p = \frac{M}{\pi} \sin \left(\frac{p\pi}{M} \right) \quad (p \neq 0) \quad (付63)$$

この式で重要なことは、どのような t (又は k) についても、必要となる $\sin$ の値が、

$$\sin \left(\frac{\pi}{M} \right), \sin \left(\frac{2\pi}{M} \right), \dots, \sin \left(\frac{(M-1)\pi}{M} \right)$$

なる $M-1$ だけであることである。したがって、これらは

$S_1, S_2, \dots, S_{M-1}$ の値を事前に計算してテーブルにしておけばよく、シミュレーション実行時にその値を計算する必要がなくなる。
 更に、 $\sum$ の中の項の分母についていえば、これは、いわゆる整数モードで計算が出来るが、特に制御用小型計算機のように、浮動小数点演算をサブルーチンを用いて行なうことが多い場合には高速化上有利である。

なお、(付63)式においても、 $P=0$ の時は別途 $x_N(t) = x_v$ としなければならないことは勿論である。

更に、実際問題としては $M=2$ でのい場合も多いと考えられるが、このときは $P=1$ の場合だけを (付63)式で求めるようになるから、(付63)式は、

$$x_N(t) = S_1 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} (x_{-n+v+1} + x_{n+v}), \quad S_1 = \frac{2}{\pi} \quad (\text{付64})$$

となり、演算回数を約半分にすることが出来る。

又、(付63)式の $x_N(t)$ において、その右辺は t_0 には直接依存しないことがわかるが、これは

$$x_{vp} \equiv S_p \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n x_{n+v}}{p-Mn} \quad (P \neq 0), \quad x_{v0} \equiv x_v$$

とかくとき、どのような t_0 に対する $x_N(t)$ でも、

$$\{x_{00}, x_{01}, \dots, x_{0M-1}, \dots, x_{v0}, x_{v1}, \dots, x_{vM-1}, \dots\}$$

を適当な timing で出力することによって得られることを示している。したがって、もし磁気ドラムのような高速ファイルが使用出来るときには、off-line でこれらの値を計算しファイルしておくことにより、on-line では、ただそれを出力するだけでよく、 $x_N(t)$ の計算を行なう必要がないが、これは $x_N(t)$ 発生の高速化にとって有用である。

5.2 発生結果

(付63)式にしたがって正規性帯域制限白色雑音を発生させ、その自己相関函数及びスペクトル密度を測定した。このとき、 $x_N(t)$ を合成するのに用いた乱数は、乗算合同法¹⁵⁾、

$$R_{n+1} = (2^{18} + 3) R_n \pmod{2^{34}}, R_0 = 123457$$

で得た一様乱数 $u_n = R_n / 2^{34}$ を次の変換式

$$\begin{cases} x_n = \sqrt{-2 \log u_n} \cos(2\pi u_{n+1}) \\ x_{n+1} = \sqrt{-2 \log u_n} \sin(2\pi u_{n+1}) \end{cases}$$

によって正規乱数に直したものである。

$N=5, 10, 20, 50, 100$ について $x_N(t)$ を発生させ、その100,000もの長さのセグメントから時間相関函数 $R_N(\tau)$ を測定したが、 $N \geq 50$ ならば、それらの値と真値 $R(\tau)$ との値の差は 10^{-3} のオーダー以下であることが確かめられた。

又、その差 $R(\tau) - R_N(\tau)$ と(付52)式の $\varepsilon_N(\tau)$ とを比較した結果、 $N=5, 10$ については両者はほぼ一致をしたが、 $N \geq 20$ については良い一致を示さなかった。この原因は、 $R_N(\tau)$ を測定する際の統計的変動と $\{x_i\}$ に存在する相関の影響が約 10^{-3} のオーダーあり、これが $\varepsilon_N(\tau)$ の値 ($\varepsilon_N < 5 \times 10^{-3}$ for $N \geq 20$) をマスクしてしまうためと考えられる。

次に、 $N=5, 20, 50$ についてのスペクトル密度を測定したので Fig 付2 に示す。

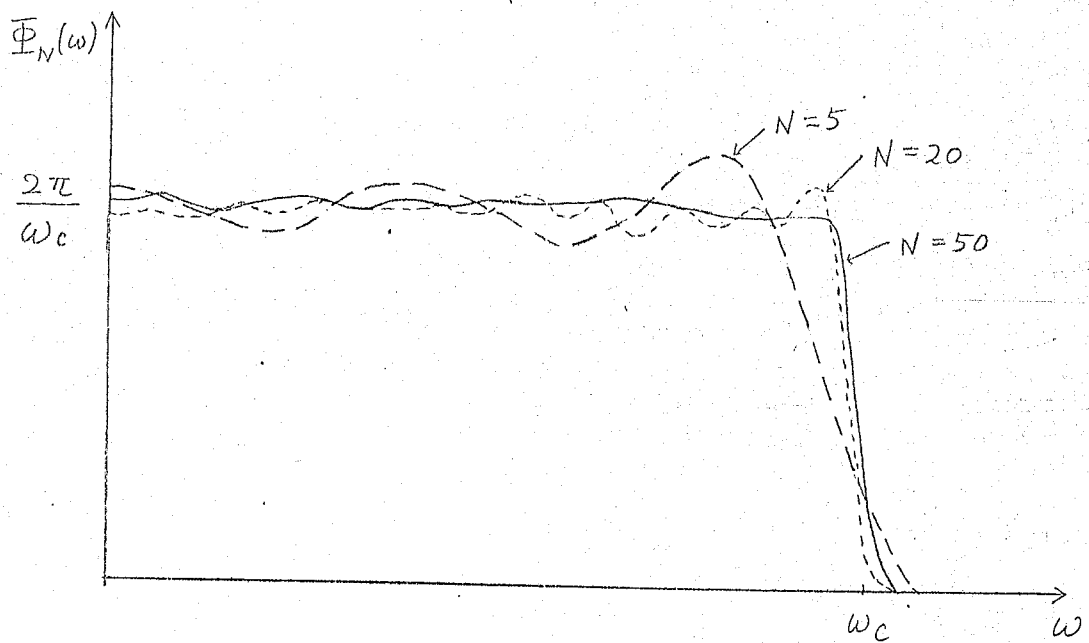


Fig 付2 Power Spectral Density of $X_N(t)$
(calculated from generated sample)

これは、やはり、長さ 100,000 の $X_N(t)$ のセグメントから $t_0/2$ 間隔で $X_N(\tau)$ を求めこれを cosine 変換したものであり、又、この際 lag window が用いられた。

これを理論値である Fig 付1 と比較すると、ほぼ所定のもので出来ていることがわかる。

以上の測定結果からも、 $N=50$ とすれば実用上満足な帯域制限白色雑音を発生出来ることが実験的に確かめられた。

6 ま と め

デジタル計算機で帯域制限白色雑音を発生させる方法について述べた。発生方法は標本化定理によったが、このとき問題となる無限級数の有限項での打ち切り、及び乱数列の相関が、発生させた帯域制限白色雑音の統計的性質にどのように影響するかを理論的に調べ、これが通常は問題にならないことを確かめた。

次に、発生アルゴリズムに検討を加え、かつ、そのアルゴリズムにしたがって発生させた雑音の相関函数、スペクトル密度を測定し、上の解析で得た結果を実験的に確かめた。

ここでの考察から、デジタル計算機によって帯域制限白色雑音を十分に実用的に発生出来ることがわかった。