

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	同時転換自己回帰モデルを用いた経済時系列における非対称性の研究
Title(English)	
著者(和文)	佐藤整尚
Author(English)	
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第3493号, 授与年月日:2000年12月31日, 学位の種別:論文博士, 審査員:宮川
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第3493号, Conferred date:2000/12/31, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

同時転換自己回帰モデルを用いた経済時系列における
非対称性の研究

佐藤 整尚

目次

第1章	序章	3
1.1	目的	3
1.2	背景	3
1.3	各章の概略	4
1.4	謝辞	5
第2章	SSARモデルの導出とその性質	6
2.1	経済時系列における非対称性	6
2.2	不均衡計量モデルの時系列的再解釈	9
2.3	同時転換自己回帰モデル	15
2.3.1	非線形時系列モデル	15
2.3.2	整合条件	16
2.3.3	SSAR(1)モデルのシミュレーション	18
2.3.4	SSAR(1)モデルとTAR(1)モデルとの関係	20
2.4	SSARモデルの統計的性質	20
2.4.1	多変量SSARモデル	20
2.4.2	エルゴード性	21
2.4.3	定常分布とモーメント	26
2.5	2章の数学的付録	29
第3章	SSARモデルのパラメータ推定	36
3.1	同時転換自己回帰モデルの推定	36
3.2	最小2乗推定量のバイアス	36
3.3	最尤推定量とその漸近的性質	39
3.4	ML推定量の分布表	43
3.5	3章の数学的付録	54
第4章	操作変数法による推定	62
4.1	最尤推定と操作変数法を使った推定	62
4.1.1	最尤法 (ML) を用いた推定と検定	62

4.1.2	操作変数法 (IV) を用いた推定と検定	63
4.2	シミュレーションによる比較	65
4.2.1	推定量の比較	66
4.2.2	検定の比較	68
4.3	4章の数学的付録	81
第5章	非定常 SSAR モデル	83
5.1	非定常な市場モデル	83
5.2	非定常 SSAR モデル	84
5.2.1	SSAR モデルの拡張	84
5.2.2	非定常 SSAR モデルの性質	87
5.2.3	非定常 SSAR モデルの最尤推定	90
5.2.4	条件付分散不等性と非対称性	92
5.3	5章の数学的付録	95
第6章	SSAR モデルを用いた応用	104
6.1	金融データへの応用	104
6.1.1	金融時系列	104
6.1.2	株式価格の変動モデル	106
6.1.3	株価現物指数と先物指数の実証分析	108
6.2	市場データへの応用例	112
6.3	その他の応用例	120
6.3.1	最尤法と操作変数法の比較	120
6.3.2	日本の貸出市場の不均衡性	122
第7章	まとめと展望	126
7.1	まとめ	126
7.2	残された問題	127

第1章 序章

1.1 目的

本論文の目的は、経済時系列が持つと考えられる上昇・下降における非対称性を表現するモデルを導出し、その統計的性質を調べることである。

これまでに使われている時系列モデルのほとんどが線形 ARMA モデルである。この時系列モデルの最大の特徴は、モデルの線形性である。そこで基本的問題として、現実には観察される経済時系列は、こうした線形時系列モデルによって記述するのが可能であるかどうかを考える。そして、上昇局面と下降局面で、非対称な動きを表すことのできる新たな非線形時系列モデルを提案することにする。ここで提案される同時転換自己回帰モデル (SSAR モデル) は、不均衡市場における計量モデルから導出されるもので、非対称的なマーケット・メカニズムに対するモデリングである。これまで経済データに適用された時系列モデルは、経済学的な議論に基づくものというよりも、むしろ他の分野のモデルを応用したものが多かったといえる。一方、本論文で提案する SSAR モデルは、経済学的な考え方をバックグラウンドにしている点が特徴である。ここでは、SSAR モデルの性質、パラメータ推定、およびその応用について議論していく。

1.2 背景

経済データの解析において、時系列モデルが適用されるようになってからかなりの期間が経つ。その間、Box-Jenkins 流の ARIMA モデルに始まり、最近の ARCH, GARCH モデルに代表される非線形モデルに至るまで、様々な時系列モデルが提案されてきた。その過程で経済時系列の持つ様々な特徴が明らかになってきている。

そもそも、計量経済学においては 1950 年代から 1960 年代にかけて、計量経済モデルと呼ばれている統計モデルの理論的検討が盛んに行なわれ、多くの計量経済モデルが計測された。また 1970 年代後半から 1980 年代にかけていくつかの新しい動きがみられたことは、今日ではよく知られている所である。特に、この時期から統計的時系列分析の方法が盛んに利用されるようになった。こうした時系列分析の方法が、計量経済学にとり入れられるようになった要因は多岐に及ぶと考えられるが、ここでは以下の 3 つの点を指摘しておこう。

第1には統計的時系列分析そのものが発展し、Box=Jenkins (1976) によって線形ARIMA (自己回帰移動平均) モデルが導入されたことを挙げる事ができよう。このモデルの中でもっとも簡単なAR(1)モデルは以下のように表される。

$$y_t = ay_{t-1} + u_t \quad (1.1)$$

この統計モデルはそれまで考えられていた時系列モデルに比べると、取り扱いがはるかに容易で、きわめて実用的である所にその特徴がある。特に、それまで開発された計量経済モデルが当初に期待していたよりもはるかに予測力が低かったこともあり、この時系列モデルにより比較的簡単な構造で予測がうまくいくと、何人かの計量経済分析家により主張された。

第2には時系列分析は、同じ頃に提唱された動学的経済理論の記述及び検証に適していたことを挙げる事ができよう。マクロ経済学に典型的にみられるように、経済主体の動学的最適化の必要条件や予想形成の分析から、経済時系列の変動構造にある種の制約を考えることが多い。これらを従来の統計分析で現われるモデルで表現することが困難であったため、その代用として時系列モデルがしばしば用いられたのである。

第3には、計量経済モデルが経済理論上の様々な仮定に基づいて構築されていたのに対して、時系列モデルでは、そのような先験的な仮定なしにもモデルが構築できるという点である。この点については理論無き計量という批判を招くことになったが、計量経済モデルを補完する役割として、一定の評価を与えることができる。

こうした時系列分析を計量経済学に導入する試みは、当初は従来の方法に取って代わるように提唱する研究者もいたので、大きな論争をも引き起こすことになった。さらにこうした議論を背景とした研究を通じて、従来の計量経済分析において無視されてきたいくつかの問題も明かとなるとともに、計量経済モデル及び時系列モデルの関係についても明らかになってきた。本研究では、これまでに時系列モデルを用いた計量経済分析では、ほとんど注目されてこなかった時系列における非対称性について基本的問題を提起する。そして、計量経済モデルと時系列モデルの融合を考えることにする。

1.3 各章の概略

各章の内容は以下の通りである。

まず2章では、経済時系列の非対称性について考察した後、同時転換自己回帰 (SSAR) モデルの導入と、その統計的性質について議論する。このSSARモデルは、不均衡計量経済モデルを、時系列分析の立場から再解釈することによって導出される。その最大の特徴は、現在の局面 (状態) が同時点のノイズに依存するという点である。これにより、モデルの一意性を保証する整合条件が必要になり、他のモデルには見られない特色を持つ。また、SSARモデルが定常になるための必要十分条件は、単純な場合

には得られるものの、その定常分布などは解析的に求まらない。これらの議論を通じて、線形モデルには無い特徴を明らかにする。

次に3章では、定常SSARモデルに対するパラメータの推定について考察する。まず、最小2乗法を単純に用いた方法を考え、その推定値が理論的にバイアスを持つことを示す。また、このことがシミュレーションにおいても確認される。一方、誤差項に正規分布を仮定し、最尤法を使ってパラメータ推定を行うと、一致性を持つ推定値を与えることがわかる。さらに小標本のケースにおいても、シミュレーションによって、同様な結果が得られる。

続く4章では、まず、非対称な分布に従う誤差項を仮定した場合、正規尤度に基づく最尤推定値に、バイアスが生じることをシミュレーションによって示す。そこで新たに操作変数法による推定を提案する。この方法は、1期前の時系列の値と現在の誤差項が独立であるという仮定のみを使って導かれる推定量で、誤差項に特別の分布を仮定しなくとも推定できる。シミュレーションによる分析では、提案した操作変数法による推定が、頑健的な結果を与えることが分かる。ただし、最尤法ほど効率性に優れてはいないので、2つの方法を併用することを提案している。

以上までに議論したSSARモデルは、すべて定常データを対象にしたものであった。しかしながら、実際の経済時系列は、そのほとんどが非定常時系列である。そこで5章では、非定常版のSSARモデルを導入し、その性質を調べている。その結果、定常の場合と同様な性質が導き出される。

6章では、実際のデータに対してSSARモデルを推定した結果が示されている。第1節では、株価指数のデータに非定常SSARモデルを適用し、市場の非対称性の有無を調べる。さらに次の節では、農産物市場のデータに対して多変量SSARモデルを適用し、不均衡市場における需要曲線と供給曲線を推定する。最後の節では、金利スプレッドのデータおよび河川の水量データに対して、1変量定常SSARモデルを当てはめた結果と銀行の貸出市場のデータに非定常SSARモデルを適用した例を示す。これらの解析を通じて、経済時系列における、このSSARモデルの有効性が示されている。

最後に7章では、まとめと今後の課題について議論している。

1.4 謝辞

本論文をまとめるにあたって、国友直人教授（東京大学）、藤井光昭教授（大学入試センター）、宮川雅巳教授（東京工業大学）、間瀬茂教授（東京工業大学）の先生方を筆頭に多くの方々にお世話になりました。この場をお借りして感謝の意を表します。

第2章 SSARモデルの導出とその性質

2.1 経済時系列における非対称性

景気循環のさまざまな局面において、GDPの成長率や失業率などの周期的変動をする系列はしばしばある種の非対称的動きをするといわれている。特に上昇局面の長さは下降局面のそれに比べてしばしば長いと多くのエコノミストが指摘するところである。Neftici(1984)ではアメリカのマクロ時系列に関して2つの違った局面を持つことをあげている。さらに古くでは、Burns and Michell(1946)が経済時系列の変動にはいわば非対称V字型と呼びうるような変動パターンが広く存在していると主張していた。(詳しくは Neftici(1993)を参照)

こうした主張は日本のマクロ時系列データについても主張されることも少なくない。表2.1では経済企画庁が発表している戦後の日本の景気循環を示した。この表から景気の拡張期と後退期の期間を観察すると明らかに前者の期間のほうが後者の期間よりも長いことが多い。このような非対称性はアメリカで主張された経済時系列の非対称性が日本でも支持されることを示す1つの例といえるだろう。

こうした経済時系列についての観察事実は興味深いが、他方では最近の時系列分析では定常ARMAモデル、あるいはARIMAモデルを使うことが一般的である。それではこうした時系列モデルによって上昇局面と下降局面の非対称性、あるいは非対称V字型の変動パターンなどを表現することはできるであろうか？ 答えは否定的である。ここでは簡単化のために1次の自己回帰モデル(AR(1))を使ってこの問題を考えてみる。観察される系列を $\{y_t\}$ とすると、このモデルは

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + v_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

と表すことができる。ここで、 ϕ_1 は未知の係数で、 $\{v_t\}$ は互いに独立に平均0、分散 σ^2 の同一分布に従う確率変数系列とする。このAR(1)モデルの定常条件は良く知られているように

$$|\phi_1| < 1 \quad (2.2)$$

である。そこで、 $\{y_t\}$ の確率過程の実現パスがこれまで述べた非対称性を持つことはあるだろうか考えてみたい。まず、(2.1)式で y_{t-1} と y_t のマイナスをとった系列を考える。そうすると新しい確率過程 $y_t^* = -y_t$ は

$$y_t^* = \phi_1 y_{t-1}^* - v_t \quad (2.3)$$

表 2.1: 景気の基準日付

循環	谷	山	谷	拡張期	後退期
第1循環		1951.6	1951.10		4ヶ月
第2循環	1951.10	1954.1	1954.11	27ヶ月	10ヶ月
第3循環	1954.11	1957.6	1958.6	31ヶ月	12ヶ月
第4循環	1958.6	1961.12	1962.10	42ヶ月	10ヶ月
第5循環	1962.10	1964.10	1965.10	24ヶ月	12ヶ月
第6循環	1965.10	1970.7	1971.12	57ヶ月	17ヶ月
第7循環	1971.12	1973.11	1975.3	23ヶ月	16ヶ月
第8循環	1975.3	1977.1	1977.10	22ヶ月	9ヶ月
第9循環	1977.10	1980.2	1983.2	28ヶ月	36ヶ月
第10循環	1983.2	1985.6	1986.11	28ヶ月	17ヶ月

と書くことができる。もし $\{v_t\}$ が原点に関して対称な分布にしたがっていると仮定すると、 $\{y_t^*\}$ の分布は $\{y_t\}$ の分布とまったく同じものになる。したがって、確率過程 $\{y_t^*\}$ は $y = 0$ をはさんで対称であるといえる。次に AR(1) で時間軸を逆転させた AR(1) モデル

$$y_t^{**} = \phi_1^* y_{t+1}^{**} + v_t^{**}, \quad t = T-1, T-2, \dots \quad (2.4)$$

を考える。(2.4) 式において $\{v_t^{**}\}$ は互いに独立に平均 0, 分散 σ^{*2} の同一分布に従う確率変数系列とする。また、この AR(1) モデルにおいて定常条件

$$|\phi_1^*| < 1, \quad (2.5)$$

を仮定すると確率過程 $\{y_t^{**}\}$ の自己相関構造を調べることができる。時系列分析では良く知られているように $\phi_1 = \phi_1^*$ とおけば確率過程 $\{y_t\}$ の自己相関構造と一致する。したがって一般にある自己相関構造をもつ AR(1) モデルに対して常に時間の流れを反対とする AR(1) モデルを考えることができる。こうしたことから AR(1) モデルで定められる時系列の実現系列は時間軸に対してある種の対称性を示していると見ることができよう。ここまでは簡単な AR モデルの場合であったが、同じような議論は Brockwell and Davis (1991) の 3 章にあるように一般的な ARMA モデルについてもできる。

定常 ARMA モデルの時系列として特に大切な特徴は線形性である。線形時系列では、現在の y_t の値は互いに無相関な攪乱項の線形結合によって表される。

$$y_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s v_{t-s}, \quad (2.6)$$

ただし,

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s^2 < +\infty, \quad (2.7)$$

であり, 係数 $\{c_s\}$ は時点 t に依存しないものである. (2.6) 式で表される線形時系列モデルは ARMA モデルによって良く近似される事がわかっている. したがって, 線形時系列モデルによって上昇・下降に関する非対称性を表すのは困難であるといえる.

次にデータ解析の視点から経済時系列の非対称性について考えたい. そのために, ここでは東京の市場で取引される農産物品のデータを使う. AR(1) モデルに外生変数を加えて次のような非線形モデルをつくる.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1^+ \Delta y_{t-1}^+ + \beta_1^- \Delta y_{t-1}^- + \gamma' z_t^* + v_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

ただし, y_t は被説明変数, z_t^* は外生変数ベクトル, $\{v_t\}$ は平均 0, 分散 $\sigma^2 > 0$ の誤差項である. 右辺の説明変数には次のような符号で異なるラグ付変数を

$$\Delta y_{t-1}^+ = \begin{cases} \Delta y_{t-1} & \text{if } \Delta y_{t-1} \geq 0 \\ 0 & \text{if } \Delta y_{t-1} < 0 \end{cases}, \quad (2.9)$$

および,

$$\Delta y_{t-1}^- = \begin{cases} 0 & \text{if } \Delta y_{t-1} \geq 0 \\ \Delta y_{t-1} & \text{if } \Delta y_{t-1} < 0 \end{cases}, \quad (2.10)$$

を用いた. ただし, 差分オペレーター Δ は $\Delta y_{t-1} = y_{t-1} - y_{t-2}$ を意味する. また, (2.8) 式の β_0, β_1^+ と β_1^- はスカラーの係数で γ' は係数ベクトルである. とくに, もし (2.8) 式で $\beta_1^+ = \beta_1^-$ とすると, 非対称な項は消えてしまい, 外生変数付の AR(2) モデルに帰着する.

ここでは東京市場の豚肉と鶏卵の価格と数量のデータを使ってこのモデルにあてはめてみる. 外生変数としては需要サイドのものとして可処分所得を, 供給サイドのものとして飼料の価格指数を採用した. (これらデータはまた後程使うことにする.) このデータから最小 2 乗推定した結果, 推定された係数は表 2.2 にまとめた. この表をみると価格モデル及び数量モデルの β_1^+ の係数と β_1^- の係数はかなり違う.

この表からは推定された価格方程式及び数量方程式はいずれの場合にも 2 つのパラメータ β_1^+, β_1^- の推定値が異なっていることがわかる. 2 つの市場データによってそれぞれ係数の有意性は違っている. 豚肉の場合は数量方程式の係数推定値のほうが, 鶏卵の場合は価格方程式の係数推定値のほうが他の係数推定値と比較して違いが大きいことが観察できよう. いずれの場合にもモデルフィットの意味で赤池情報規準 (AIC) の値は非対称性の導入により改善された. このことから, この簡単な時系列モデルにより何らかの意味での時系列の非対称性を検出していると考えることができよう.

表 2.2: 豚肉市場と鶏卵市場の推定結果

(i) 豚肉の価格		
	β_1^+	β_1^-
推定値	0.6162	0.5300
標準偏差	0.2204	0.2459

(ii) 豚肉の数量		
	β_1^+	β_1^-
推定値	-0.3062	0.3362
標準偏差	0.1851	0.1800

(iii) 鶏卵の価格		
	β_1^+	β_1^-
推定値	0.4796	-0.0114
標準偏差	0.2977	0.2592

(iv) 鶏卵の数量		
	β_1^+	β_1^-
推定値	0.2683	-0.0095
標準偏差	0.3061	0.2087

2.2 不均衡計量モデルの時系列的再解釈

前節では農産物市場のデータ例を使って時系列の非対称性を簡単に調べる方法を考えた。経済時系列においてはこうした非対称性、あるいはより一般的には非線形性を観察することができるが、非対称性を導くような経済的なメカニズムを考えることができるであろうか？

この問題に対するアプローチはさまざまなものが考えられるが、ここでは不均衡計量経済モデルに焦点を当てて考えてみたい。不均衡計量経済モデルはもともと Fair and Jaffee (1972) が次のような計量モデルを提示したことから研究がはじまった。その後いろいろなモデルが登場したが、(詳しくは Maddala (1983) の10章や Quandt (1988) を参照。) ここで取り上げるのは Laffont and Garcia (1977) によって提案されたモデルである。今、ある市場において、時点 t における需要量を D_t 、供給量を S_t とするとき

需要関数と供給関数がそれぞれ次のように表されるものとしよう。

$$\begin{cases} D_t = \beta_1 p_t + \gamma_1' z_{1t}^* + u_{1t} \\ S_t = \beta_2 p_t + \gamma_2' z_{2t}^* + u_{2t} \end{cases}, \quad (2.11)$$

ここで、 p_t は価格、 z_{1t}^* と z_{2t}^* はそれぞれ需要側、供給側に関する外生変数である。需要側のショックや供給側のショックは u_{1t} 、 u_{2t} の攪乱項で表されている。 $\beta_1, \beta_2, \gamma_1$ ($K_1 \times 1$ ベクトル)、及び γ_2 ($K_2 \times 1$ ベクトル) は未知パラメータである。

経済学の教科書などでは $q_t = D_t = S_t$ となることが市場の均衡条件だとしている。 q_t は時点 t の取引数量である。(2.11)式を使うと、観測される数量 q_t と価格 p_t は時点 t において同時に決まったと解釈できる。この均衡条件の代わりに Fair and Jaffee (1972) が導入したのは以下のような不均衡条件である。

$$q_t = \min(D_t, S_t) \quad (2.12)$$

この条件を図 2.1 を用いて説明すると、もし時点 t において $D_t > S_t$ となっているとすると供給可能水準は需要量を下回っているので市場での取引数量は供給関数 ($S - S'$) 上で実現される。逆に $D_t < S_t$ となっている場合には需要量は供給量を下回っているので市場での取引数量は需要関数 ($D - D'$) 上で実現されることになる。したがって実際にデータとして市場において観察される価格と取引数量は図 2.1 の折れ線 (DES) 上となる。ここで均衡条件を不均衡条件 (2.12) により置き換えるときに統計モデルとしては完結していないことに注意しよう。需要関数と供給関数 (2.11) 及び不均衡条件式 (2.12) では所与の価格 p_t の下で取引数量 q_t が決定することを意味しているにすぎない。したがって、この統計モデルを完結させるには価格変数について仮定が必要である。価格変数については様々な定式化が可能であるが (例えば Maddala (1983) 10 章を参照)、ここでは Laffont and Garcia (1977) によって提案された簡単な価格変動モデルを考えよう。

いま時点 t において市場では $D_t > S_t$ となっているとすると、超過需要が発生していることになる。したがって市場における供給サイドの圧力から価格は上昇傾向にあると考えられる。他方、市場において $S_t > D_t$ となっていれば、超過供給が発生しており、このとき市場では需要サイドの圧力から、価格は下降傾向にあると考えられる。このような価格の調整メカニズムを線形関数によって単純化してみよう。ここで時点 $t+1$ における価格変化 $\Delta p_{t+1} = p_{t+1} - p_t$ を t 時点における超過需要 (あるいは超過供給) の関数として

$$\Delta p_{t+1} = \begin{cases} \delta_1 (D_t - S_t) & \text{if } D_t \geq S_t \\ \delta_2 (D_t - S_t) & \text{if } D_t < S_t, \end{cases} \quad (2.13)$$

と表すモデルを考える。係数 δ_1 と δ_2 はそれぞれ上昇局面と下降局面とでの価格の調整速度を表しており、必ずしも一致しないとしておくのが現実的であろう。なお、 $\delta_i > 0 (i = 1, 2)$ である。

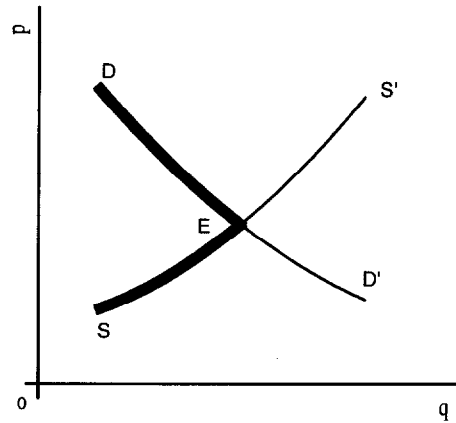


図 2.1: 市場モデル

さて、(2.11), (2.12), (2.13) 式で表される不均衡計量経済モデルを考えてきたが、これらのモデルを時系列モデルとして再解釈してみたい。計量経済の分野ではこのようなアプローチはこれまでなされてこなかったもので、ここからが本論文の特徴的な部分になる。

まずはじめに価格のみに注目して1変量モデルを導出する。(2.11) 式を簡略化して、外生変数が攪乱項に含まれるような需要関数、供給関数を持つ市場を考える。

Demand :

$$D_t = \beta_1 p_t + u_{1t} \quad (2.14)$$

Supply :

$$S_t = \beta_2 p_t + u_{2t} \quad (2.15)$$

ただし,

$$u_{1t} \sim i.i.d., \quad u_{2t} \sim i.i.d. \quad (2.16)$$

で, $\{u_{1t}\}$ と $\{u_{2t}\}$ は互いに独立であるとする.

(2.13) 式に上記の (2.14) 式と (2.15) 式を代入すると

$$p_{t+1} = \begin{cases} \{1 - \delta_1(\beta_2 - \beta_1)\}p_t + \delta_1(u_{1t} - u_{2t}) & (\Delta p_{t+1} \geq 0) \\ \{1 - \delta_2(\beta_2 - \beta_1)\}p_t + \delta_2(u_{1t} - u_{2t}) & (\Delta p_{t+1} < 0) \end{cases} \quad (2.17)$$

となる. そして, 上式の係数を置き換え, 時点を1期ずらすと,

$$p_t = \begin{cases} Ap_{t-1} + \sigma_1 v_t & (\Delta p_t \geq 0) \\ Bp_{t-1} + \sigma_2 v_t & (\Delta p_t < 0) \end{cases} \quad (2.18)$$

というモデルが導出される. ただし,

$$A = 1 - \delta_1(\beta_2 - \beta_1), \quad B = 1 - \delta_2(\beta_2 - \beta_1), \quad (2.19)$$

$$\sigma_1 = \delta_1 \sqrt{\text{Var}(u_{1,t-1} - u_{2,t-1})}, \quad \sigma_2 = \delta_2 \sqrt{\text{Var}(u_{1,t-1} - u_{2,t-1})}, \quad (2.20)$$

$$v_t = \frac{u_{1,t-1} - u_{2,t-1}}{\sqrt{\text{Var}(u_{1,t-1} - u_{2,t-1})}} \sim i.i.d. \quad (2.21)$$

である. また, v_t と p_{t-1} とは互いに独立であると仮定する.

ところで, (2.18) 式では, すべての p_{t-1}, ϵ_t に対して一意に p_t が決定されなければならない. (2.18) 式より,

$$\begin{aligned} \Delta p_t \geq 0 &\Leftrightarrow Ap_{t-1} + \sigma_1 v_t - p_{t-1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow v_t \geq \frac{1-A}{\sigma_1} p_{t-1} \\ \Delta p_t < 0 &\Leftrightarrow Bp_{t-1} + \sigma_2 v_t - p_{t-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow v_t < \frac{1-B}{\sigma_2} p_{t-1} \end{aligned}$$

である. v_t と p_{t-1} とは互いに独立であることより, すべての p_{t-1} に対して,

$$\frac{1-A}{\sigma_1} p_{t-1} = \frac{1-B}{\sigma_2} p_{t-1}$$

が成り立たなくてはならない. 従ってモデルが一意に決まるための整合条件

$$\frac{1-A}{\sigma_1} = \frac{1-B}{\sigma_2} = r \quad (2.22)$$

が必要になる。なお、もとの (2.17) 式はこの条件を満たしている。

また、係数条件は $\beta_1 < \beta_2$ を仮定すると

$$A < 1, B < 1, 0 < \sigma_1, \sigma_2 \quad (2.23)$$

と表せる。

さて、(2.13) 式の調整モデルの代わりに以下のようなモデルを考えてみる。

$$\Delta p_t = p_t - p_{t-1} = \begin{cases} \delta_1(D_t - S_t) & (D_t \geq S_t) \\ \delta_2(D_t - S_t) & (D_t < S_t) \end{cases} \quad (2.24)$$

不均衡計量経済分析ではこちらのほうのモデルも良く使われている。やはり、同じようにして、上式に (2.14) , (2.15) 式を代入すると、

$$p_t = \begin{cases} \frac{1}{1 + \delta_1(\beta_2 - \beta_1)} p_{t-1} + \frac{\delta_1}{1 + \delta_1(\beta_2 - \beta_1)} (u_{1t} - u_{2t}) & (\Delta p_t \geq 0) \\ \frac{1}{1 + \delta_2(\beta_2 - \beta_1)} p_{t-1} + \frac{\delta_2}{1 + \delta_2(\beta_2 - \beta_1)} (u_{1t} - u_{2t}) & (\Delta p_t < 0) \end{cases} \quad (2.25)$$

となる。これを次のように書き直す。

$$p_t = \begin{cases} A p_{t-1} + \sigma_1 v_t & (\Delta p_t \geq 0) \\ B p_{t-1} + \sigma_2 v_t & (\Delta p_t < 0) \end{cases} \quad (2.26)$$

ただし、

$$A = \frac{1}{1 + \delta_1(\beta_2 - \beta_1)}, B = \frac{1}{1 + \delta_2(\beta_2 - \beta_1)}, \quad (2.27)$$

$$\sigma_1 = \frac{\delta_1}{1 + \delta_1(\beta_2 - \beta_1)} \sqrt{\text{Var}(u_{1t} - u_{2t})}, \quad \sigma_2 = \frac{\delta_2}{1 + \delta_2(\beta_2 - \beta_1)} \sqrt{\text{Var}(u_{1t} - u_{2t})}, \quad (2.28)$$

$$v_t = \frac{u_{1t} - u_{2t}}{\sqrt{\text{Var}(u_{1t} - u_{2t})}} \sim i.i.d. \quad (2.29)$$

である。また、 v_t と p_{t-1} とは互いに独立であると仮定すると同様にして、

$$\frac{1 - A}{\sigma_1} = \frac{1 - B}{\sigma_2} = r \quad (2.30)$$

という整合条件が必要になる。

なお、(2.27) 式、(2.28) 式は上式を満たしている。(2.24) 式で表せる価格調整モデルでも同様な形の時系列モデルに帰着した。ただし、係数条件は $\alpha < \beta$ を仮定すると

$$0 < A, B < 1, 0 < \sigma_1, \sigma_2 \quad (2.31)$$

となり、先ほどの場合と比べて強くなっている。

ここで述べた2つのモデルは同じ式で表せるが、係数のとりうる範囲が違っている。どちらのタイプの調整モデルが妥当であるかをデータから判定することはできない。マーケットの構造から決定する以外に方法はない。本論文では係数の条件がより緩い(2.13)式のモデルを採用する。

さて、今度はやや一般化し、数量も含めた多変量のモデルを考えることにする。いま、 1×2 の内生変数のベクトル $\mathbf{y}'_t = (q_t, p_{t+1})$ と $1 \times K$ の外生変数のベクトル $\mathbf{z}'_t = (z_{1t}, z_{2t})$ を考える。もし p_t が上昇局面であったとしたら、 $\Delta p_{t+1} \geq 0$, $q_t = S_t$ となるから、

$$D_t = q_t + (D_t - S_t) = q_t + \frac{1}{\delta_1} \Delta p_{t+1} \quad , \quad (2.32)$$

となる。したがって、需要関数、供給関数のシステムは

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta_1^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1^{-1} + \beta_1 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \mathbf{y}_{t-1} + \begin{pmatrix} \gamma'_1 & 0 \\ 0 & \gamma'_2 \end{pmatrix} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{u}_t \quad , \quad (2.33)$$

のように書きなおせる。ただし、 $\mathbf{u}'_t = (u_{t1}, u_{t2})$ は 1×2 の誤差項のベクトルである。この(2.33)式を \mathbf{y}_t に関して解いてやると、(2.33)式の誘導形は

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \\ 0 & 1 + \delta_1(\beta_1 - \beta_2) \end{pmatrix} \mathbf{y}_{t-1} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma'_2 \\ \delta_1 \gamma'_1 & -\delta_1 \gamma'_2 \end{pmatrix} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{v}_t^{(1)} \quad , \quad (2.34)$$

となる。ただし、誤差項のベクトルは

$$\mathbf{v}_t^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta_1 & -\delta_1 \end{pmatrix} \mathbf{u}_t \quad . \quad (2.35)$$

のようにして与えられる。(2.34)式の係数行列を $\Pi_1^{(1)}$ および $\Pi_*^{(1)}$ とおけば、(2.34)式は

$$\mathbf{y}_t = \Pi_1^{(1)} \mathbf{y}_{t-1} + \Pi_*^{(1)} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{v}_t^{(1)} \quad . \quad (2.36)$$

と書きなおせる。

同じようにして価格 p_t が下降局面にあるとする。この時、 $\Delta p_{t+1} < 0$, $q_t = D_t$ および、

$$S_t = q_t - \frac{1}{\delta_2} \Delta p_{t+1} \quad , \quad (2.37)$$

となる。

よって、需要関数と供給関数からなるシステムは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\delta_2^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 - \delta_2^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{y}_{t-1} + \begin{pmatrix} \gamma'_1 & 0 \\ 0 & \gamma'_2 \end{pmatrix} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{u}_t \quad . \quad (2.38)$$

と書くことができる。(2.34), (2.35) 式と同じ議論をすれば, 誘導形方程式は

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 + \delta_2(\beta_1 - \beta_2) \end{pmatrix} \mathbf{y}_{t-1} + \begin{pmatrix} \gamma'_1 & 0 \\ \delta_2 \gamma'_1 & -\delta_2 \gamma'_2 \end{pmatrix} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{v}_t^{(2)}, \quad (2.39)$$

というように与えられる。ただし, この場合の誘導形の誤差ベクトルは

$$\mathbf{v}_t^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta_2 & -\delta_2 \end{pmatrix} \mathbf{u}_t. \quad (2.40)$$

によって与えられる。

(2.39) 式の係数行列をそれぞれ $\Pi_1^{(2)}$ と $\Pi_*^{(2)}$ というように置くことにする。そうすると, (2.39) 式は

$$\mathbf{y}_t = \Pi_1^{(2)} \mathbf{y}_{t-1} + \Pi_*^{(2)} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{v}_t^{(2)}. \quad (2.41)$$

と書き改められる。そして, $\mathbf{e}'_2 = (0, 1)$ となるような 1×2 ベクトルを考える。そうすると, $\Delta p_{t+1} \geq 0$ は

$$\mathbf{e}'_2 \mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_2 \mathbf{y}_{t-1}. \quad (2.42)$$

と同値である。

以上より (2.11), (2.12), (2.13) の各式をまとめると,

$$\mathbf{y}_t = \begin{cases} \Pi_1^{(1)} \mathbf{y}_{t-1} + \Pi_*^{(1)} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{v}_t^{(1)} & (\text{if } \mathbf{e}'_2 \mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_2 \mathbf{y}_{t-1}) \\ \Pi_1^{(2)} \mathbf{y}_{t-1} + \Pi_*^{(2)} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{v}_t^{(2)} & (\text{if } \mathbf{e}'_2 \mathbf{y}_t < \mathbf{e}'_2 \mathbf{y}_{t-1}) \end{cases}. \quad (2.43)$$

と表現される。この表現でもっと重要な特徴は内生変数が局面によって違った値を取り得るということである。時系列解析の分野において, このようなタイプのモデルは *switching model* とよばれ, その1つである *threshold model* (閾値自己回帰モデル) と似た形をとっている。しかしながら, 通常, *threshold model* においては, 時点 t における局面が $t-1$ 時点において決定されるという意味で同時性を持たない。一方, (2.43) 式で表される時系列モデルは内生変数と t における局面が同時に決定されるので, 同時転換自己回帰モデル (*simultaneous switching autoregressive model*) と新たに呼ぶことにする。この同時性は重要な経済学的解釈に基づくだけでなく, 非線形時系列モデルの新しい方向性を示している。

2.3 同時転換自己回帰モデル

2.3.1 非線形時系列モデル

(2.43) 式で表される同時転換自己回帰モデルでは, 内生変数ベクトル \mathbf{y}_t は誤差項 $\mathbf{v}_s^{(j)}$ ($j = 1, 2, s \leq t$) の過去の値の線形結合で書くことは一般にはできない。つまり, 非線

形マルコフスイッチングモデルの一種といえる。一般的にはこのような時系列モデルはいかようにも一般化できる。しかしながら、ここでは (2.43) 式を拡張する方向で考えることにする。

\mathbf{y}_t を $m \times 1$ の内生変数ベクトルとし、次のような式を考える。

$$\mathbf{y}_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^p \Pi_i^{(1)} \mathbf{y}_{t-i} + \Pi_*^{(1)} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{v}_t^{(1)} & (\text{局面 } S_t^{(1)}) \\ \sum_{i=1}^p \Pi_i^{(2)} \mathbf{y}_{t-i} + \Pi_*^{(2)} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{v}_t^{(2)} & (\text{局面 } S_t^{(2)}) \end{cases}, \quad (2.44)$$

ただし、 \mathbf{z}_t^* は $K \times 1$ の外生変数ベクトルとし、 $\Pi_i^{(j)}$ ($i = 1, \dots, p; j = 1, 2$) と $\Pi_*^{(j)}$ ($j = 1, 2$) はそれぞれ $m \times m$ 、 $m \times K$ 未知係数行列である。また、 \mathbf{z}_t^* の第一成分を定数項をおいても一般性を欠かない。観測できない誤差項 $\{\mathbf{v}_t^{(j)}, j = 1, 2\}$ は絶対連続な確率変数で

$$E(\mathbf{v}_t^{(j)} | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{0}, \quad (2.45)$$

とする。ただし、 \mathcal{F}_{t-1} は $\{\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_{s+1}^*, s \leq t-1\}$ から作られる σ -集合体とする。

このモデルで局面を分ける状態 $S_t^{(j)}$ ($j = 1, 2$) は次のように定める。

$$\begin{cases} S_t^{(1)} = \{\mathbf{c}'_0 \mathbf{y}_t \geq \mathbf{c}'_1 \mathbf{y}_{t-1} + c_*\} \\ S_t^{(2)} = \{\mathbf{c}'_0 \mathbf{y}_t < \mathbf{c}'_1 \mathbf{y}_{t-1} + c_*\} \end{cases}, \quad (2.46)$$

ただし、 \mathbf{c}_0 と \mathbf{c}_1 は $m \times 1$ の既知の定数ベクトル、 c_* は既知の定数である。従って、この定式化では、局面 $S_t^{(j)}$ が内生変数の過去の値だけ出なく、現在の値にも依存していることがわかる。(2.44) 式のモデルで現れるこの同時性は統計学的にみても興味深いゆえ、このモデルを同時転換時系列モデル (*simultaneous switching time series model*) と呼ぶことにする。特に、(2.44) 式で $m = 2, p = 1, \mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_2, c_* = 0$ とすると、(2.43) 式に帰着される。また、 $m = 1, \mathbf{c}_0 = 0, \mathbf{c}_1 \neq 0, \Pi_*^{(j)} = O \cdot (j = 1, 2)$ とすると閾値自己回帰モデル (threshold autoregressive (TAR) model) が得られる。TAR モデルは自己回帰 (AR) モデルのひとつの拡張であり、非線形時系列モデルの中でも近年、注目を集めている。上記の定式化で \mathbf{z}_t^* がないか、または定数や i.i.d. の確率変数になる時、(2.44) 式で表されるモデルを狭義の同時転換自己回帰モデル (*simultaneous switching autoregressive (SSAR) model*) と呼ぶことにする。次節以降、このモデルについてその統計的な性質を詳しく調べる。

2.3.2 整合条件

(2.44) 式で表される新しい非線形時系列モデルを導入したが、実は、統計モデルとして論理的に整合性がとれているか検討を要する。そのためには、これから示すように、

未知パラメータについてある条件が必要である。ここではこの問題を整合問題と呼ぶ。なお、この問題についてはすでに Gourieroux, 他 (1980) によって不均衡計量経済モデルの分析のなかで体系的に論じられている。時点 t において過去の得られるすべての情報を σ -field $\mathcal{F}_{t-1} = \{\mathbf{y}_s, \mathbf{z}_{s+1}^*, s \leq t-1\}$ によって表すことにする。 \mathcal{F}_{t-1} のもとで、 t 時点において起こりうる局面は $S_t^{(j)}$ ($j = 1, 2$) の2つがあり、そのどちらかが起きるか過去の情報だけでは確定しない。 \mathcal{F}_{t-1} を与えた時、 $S_t^{(1)}$ が起こる確率は

$$\begin{aligned} & P\{S_t^{(1)} | \mathcal{F}_{t-1}\} \\ &= P\{\mathbf{c}'_0 \mathbf{v}_t^{(1)} + \sum_{i=1}^p \Pi_i^{(1)} \mathbf{y}_{t-i} + \Pi_*^{(1)} \mathbf{z}_t^* \geq \mathbf{c}'_1 \mathbf{y}_{t-1} + c_* | \mathcal{F}_{t-1}\} \\ &= P\{\mathbf{c}'_0 \mathbf{v}_t^{(1)} \geq (\mathbf{c}'_1 - \mathbf{c}'_0 \Pi_1^{(1)}) \mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{c}'_0 \sum_{i=2}^p \Pi_i^{(1)} \mathbf{y}_{t-i} - (\mathbf{c}'_0 \Pi_*^{(1)} - c_* \mathbf{e}'_1) \mathbf{z}_t^* | \mathcal{F}_{t-1}\}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

と表される。ただし、 $\mathbf{e}'_1 = (1, 0, \dots, 0)$ である。同様にして \mathcal{F}_{t-1} のもとで $S_t^{(2)}$ が起こる確率は

$$\begin{aligned} & P\{S_t^{(2)} | \mathcal{F}_{t-1}\} \\ &= P\{\mathbf{c}'_0 \mathbf{v}_t^{(2)} < (\mathbf{c}'_1 - \mathbf{c}'_0 \Pi_1^{(2)}) \mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{c}'_0 \sum_{i=2}^p \Pi_i^{(2)} \mathbf{y}_{t-i} - (\mathbf{c}'_0 \Pi_*^{(2)} - c_* \mathbf{e}'_1) \mathbf{z}_t^* | \mathcal{F}_{t-1}\}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

となる。 t においてとりうる局面は $S_t^{(1)}$ と $S_t^{(2)}$ だけなので、(2.47) 式と (2.48) 式とで表される確率の和はどのようなパラメータ、どのような過去の値であっても、1 にならなくてはならない。(2.48) のモデルの整合問題を考える上で誤差項 $\mathbf{v}_t^{(j)}$ ($j = 1, 2$) について以下の仮定を置く。

(A1) 確率変数 $\mathbf{c}'_0 \mathbf{v}_t^{(j)}$ ($j = 1, 2$) は時間に関して独立でその分布関数は $F^{(j)}(\cdot)$ ($j = 1, 2$) で表される。

この条件のもと、直ちに以下の整合問題に関する結果が導かれる。

定理 2.1 : (A1) を満たしているとする。、そして、(A2) \mathbf{y}_{t-1} と \mathbf{z}_t^* の定数を除くすべての要素は 0 と 1 をとりうる。この時以下の 2 つの条件 (i) または (ii) のどちらかが成り立てば (2.44) 式で表されるモデルは整合的である。(i) $\mathbf{c}_0 = 0$, (ii) $\mathbf{c}_0 \neq 0$ で $\mathbf{e}'_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ($j = 1, \dots, m$) に対して、

$$F^{(1)}(\mathbf{e}'_j (\mathbf{c}_1 - \Pi_1^{(1)' } \mathbf{c}_0)) = F^{(2)}(\mathbf{e}'_j (\mathbf{c}_1 - \Pi_1^{(2)' } \mathbf{c}_0)), \quad (2.49)$$

$$F^{(1)}(\mathbf{e}'_j (\Pi_i^{(1)' } \mathbf{c}_0)) = F^{(2)}(\mathbf{e}'_j (\Pi_i^{(2)' } \mathbf{c}_0)) \quad (i = 2, \dots, p), \quad (2.50)$$

$$F^{(1)}(\mathbf{e}'_j (\Pi_*^{(1)' } \mathbf{c}_0 - \mathbf{e}_1 c_*)) = F^{(2)}(\mathbf{e}'_j (\Pi_*^{(2)' } \mathbf{c}_0 - \mathbf{e}_1 c_*)) \quad (2.51)$$

条件 (i) が満たされる時, 2つの局面に関する同時性の問題はなくなるので整合問題を考える必要がなくなる. さらに, もし外生変数 $\{z_t^*\}$ がいない場合, (2.44) 式は p -次の多変量 TAR モデルに帰着される.

次に (2.44) 式の誤差項が 2 次のモーメントを持つ場合を考える. $v_t^{(j)}$ ($j = 1, 2$) の分散共分散行列を $\Omega^{(j)}$ ($j = 1, 2$) とおく. そして, $c_0' v_t^{(j)}$ の分散が $\sigma_j^2 = c_0' \Omega^{(j)} c_0$ ($j = 1, 2$) によって与えられるとする. また, 分布関数 $F^{(j)}$ が次のように書き表せると仮定する.

$$G\left(\frac{x}{\sigma_j}\right) = F^{(j)}(x) \quad (j = 1, 2) \quad . \quad (2.52)$$

さて, $c_* = 0$ の時, 定理 2.1 の条件 (ii) は条件 (ii)' として次のように書き直せる.

$$\frac{1}{\sigma_1}(c_1' - c_0' \Pi_1^{(1)}) = \frac{1}{\sigma_2}(c_1' - c_0' \Pi_1^{(2)}) \quad , \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{\sigma_1} c_0' \Pi_j^{(1)} = \frac{1}{\sigma_2} c_0' \Pi_j^{(2)} \quad (j = 2, \dots, p) \quad , \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{\sigma_1} c_0' \Pi_*^{(1)} = \frac{1}{\sigma_2} c_0' \Pi_*^{(2)} \quad . \quad (2.55)$$

誘導形の誤差項 $\{v_t^{(j)}, j = 1, 2\}$ は構造型の誤差項 $\{u_t\}$ の線形結合になっている. したがって定理 2.1 より次の結果が得られる.

系 2.1 : (2.11), (2.12), (2.13) 式で与えられる不均衡計量経済モデルは整合問題に関して, (ii)' の条件を満足している. ただし, $\delta_i > 0$ ($i = 1, 2$), 誤差項 $\{u_t\}$ が互いに独立で $E[\|u_t\|^2] < +\infty$. と仮定する.

Gourieroux, 他 (1980) は整合問題に関して一般的な定理を考えており, 上の結果もそこから導くことができる. しかしながら, ここでは時系列モデルとしての枠組みで議論した.

2.3.3 SSAR(1) モデルのシミュレーション

(2.44) 式によって定義される一般の同時転換時系列モデルはやや複雑なものとなっている. ここでは, その典型的な特徴を見るために, 一番簡単な場合について考える. 前節の議論で, 定数項以外の外生変数をなくして, 価格 p_t のみに注目すると,

$$y_t = \begin{cases} Ay_{t-1} + \sigma_1 v_t & (\text{if } y_t \geq y_{t-1}) \\ By_{t-1} + \sigma_2 v_t & (\text{if } y_t < y_{t-1}) \end{cases} \quad , \quad (2.56)$$

という1変量SSAR(1)モデルが得られることを紹介した. なお, A, B, σ_i ($i = 1, 2$) は未知パラメータで, $\{v_t\}$ は誤差項である. このSSAR(1)モデルの整合条件は

$$\frac{1-A}{\sigma_1} = \frac{1-B}{\sigma_2} \quad (2.57)$$

というように与えられる. いま, $\{v_t\} \sim i.i.d.N(0, 1)$ とし, $(1-A)/\sigma_1 = r$ とおいて, シミュレーションで実際にこのSSAR(1)モデルに従う $\{y_t\}$ を発生してみた. いくつかのパラメータ値で行った中で, 3つのケースを図2.2にプロットしてみた. 真中のグラ

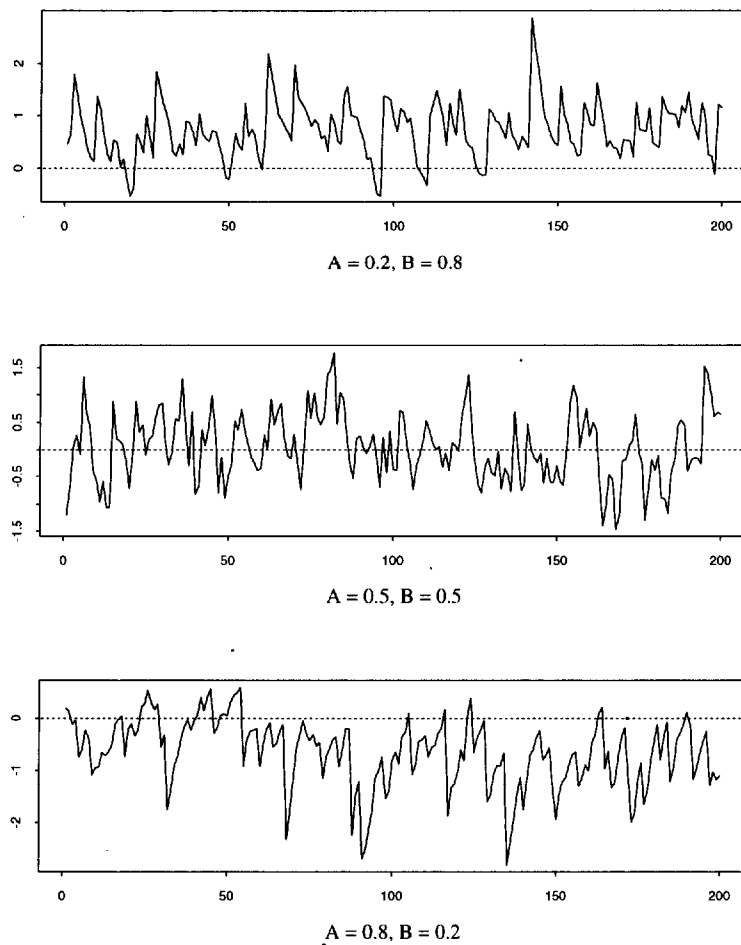


図 2.2: SSAR モデルのサンプルパス

は $A = B = 0.5$ のときのサンプルパスで, この場合, SSAR(1)モデルはAR(1)モデルに帰着される. よって, モデルは線形になり非対称性も見られない. しかし, 一番上と一番下のようには, $A \neq B$ の時には, 上昇・下降で非対称性が見られる. 実際の経済

時系列を見る上で、 $A = 0.8$ かつ $B = 0.2$ の時が興味深いと思われる。この時はゆっくり上がって、急激に下がる、という非対称性が見られる。このような非常に簡単な SSAR モデルでも、ARMA モデルなどの線形時系列では表せないような非対称性を表現することができるのである。

2.3.4 SSAR(1) モデルと TAR(1) モデルとの関係

(2.56) 式で表される SSAR(1) モデルは 1 階の閾値自己回帰モデル (TAR(1)) とは違ったものになるが、この 2 つにスイッチングモデルには以下のような関係が成り立つ。まず、確率変数 w_t を以下のように定義する。

$$w_t = v_t - r y_{t-1}, \quad (2.58)$$

この時 (2.56) 式から、確率過程 $\{w_t\}$ は

$$w_t = \begin{cases} A w_{t-1} + v_t - v_{t-1} & (\text{if } w_{t-1} \geq 0) \\ B w_{t-1} + v_t - v_{t-1} & (\text{if } w_{t-1} < 0). \end{cases} \quad (2.59)$$

という TAR(1) モデルに従うことが分かる。なお、この $\{w_t\}$ を使うと $\{y_t\}$ の階差系列は

$$\Delta y_t = \begin{cases} \sigma_1 w_t & (\text{if } w_t \geq 0) \\ \sigma_2 w_t & (\text{if } w_t < 0), \end{cases} \quad (2.60)$$

と表される。ここで、 $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ である。

これらの表現から SSAR(1) モデルと TAR(1) モデルの間にある興味深い関係が明らかになった。ただし、一般のケースに関してはもっと複雑になってしまう。

2.4 SSAR モデルの統計的性質

2.4.1 多変量 SSAR モデル

この章では多変量 SSAR モデルの基本的な統計的性質を調べる。 y_t を $m \times 1$ のベクトルとする。ここで扱うモデルは

$$\mathbf{y}_t = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Sigma}_1^{1/2}\mathbf{u}_t & \text{if } \mathbf{e}'_m\mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_m\mathbf{y}_{t-1} \\ \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{B}\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Sigma}_2^{1/2}\mathbf{u}_t & \text{if } \mathbf{e}'_m\mathbf{y}_t < \mathbf{e}'_m\mathbf{y}_{t-1} \end{cases}, \quad (2.61)$$

のような形であるとする。ただし、 $\mathbf{e}'_m = (0, \dots, 0, 1)$ と $\boldsymbol{\mu}'_i$ ($i = 1, 2$) は $1 \times m$ の定数ベクトル、 \mathbf{A}, \mathbf{B} , 及び $\boldsymbol{\Sigma}_i^{1/2}$ ($i = 1, 2$) は $m \times m$ の行列とする。誤差項 $\{\mathbf{u}_t\}$ は

$$E(\mathbf{u}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{0}, \quad (2.62)$$

かつ

$$E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}'_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{I}_m. \quad (2.63)$$

というように分布する。また、それらは絶対連続な確率変数で、その密度関数は $g(\mathbf{u})$ は \mathbf{R}^m で常に正であると仮定する。

ところで、このようなモデルを $\text{SSAR}_m(1)$ と表し、 $\text{SSAR}_1(1)$ モデルを $\text{SSAR}(1)$ モデルと書くことにする。標準的なマルコフ表現では p -次の SSAR モデルは $\text{SSAR}_m(1)$ で書くことが可能である.. したがって、(2.61) 式で表されるモデルを検証すれば良い。

条件 $\mathbf{e}'_m\mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_m\mathbf{y}_{t-1}$ と $\mathbf{e}'_m\mathbf{y}_t < \mathbf{e}'_m\mathbf{y}_{t-1}$ は

$$\mathbf{e}'_m\boldsymbol{\Sigma}_1^{1/2}\mathbf{u}_t \geq \mathbf{e}'_m(\mathbf{I}_m - \mathbf{A})\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{e}'_m\boldsymbol{\mu}_1, \quad (2.64)$$

のように書き直せる。また、

$$\mathbf{e}'_m\boldsymbol{\Sigma}_2^{1/2}\mathbf{u}_t < \mathbf{e}'_m(\mathbf{I}_m - \mathbf{B})\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{e}'_m\boldsymbol{\mu}_2, \quad (2.65)$$

であり、 $\boldsymbol{\Sigma}_i^{1/2}$ ($i = 1, 2$) が正定値であると、整合問題に関する必要十分条件は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_1}[\mathbf{e}'_m(\mathbf{I}_m - \mathbf{A}), -\mathbf{e}'_m\boldsymbol{\mu}_1] &= \frac{1}{\sigma_2}[\mathbf{e}'_m(\mathbf{I}_m - \mathbf{B}), -\mathbf{e}'_m\boldsymbol{\mu}_2] \\ &= \mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.66)$$

ただし、 $\sigma_j^2 = \mathbf{e}'_m\boldsymbol{\Sigma}_j\mathbf{e}_m = \mathbf{e}'_m\boldsymbol{\Sigma}_j^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}_j^{1/2}\mathbf{e}_m$ ($j = 1, 2$) とする。

2.4.2 エルゴード性

まずはじめに扱うトピックは、(2.61) 式のモデルがエルゴード的（定常的）かどうかという問題である。(2.61) 式で定義される SSAR モデルはマルコフ的な時系列モデルで

ある。このモデルが含まれる非線形時系列モデルのクラスを考えると、次のようなものとして表現できる。

$$\mathbf{y}_t = T(\mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t) , \quad (2.67)$$

ここで $T(\cdot)$ は $\mathbf{R}^{2m} \rightarrow \mathbf{R}^m$ となる写像である。この表現で重要な点は \mathbf{y}_{t-1} と \mathbf{u}_t を加法的に分離できないことである。これは t の局面が過去の値 \mathbf{y}_{t-1} だけでなく t 時点の誤差項 \mathbf{u}_t にもかかわってくるからである。

(2.61) 式のモデルが離散時間の非線形なマルコフ型スイッチング確率過程であることから分かるように、このモデルのエルゴード性（定常性）についての議論はやさしいものではない。この点からみると線形時系列モデルと非線形時系列モデルには大きな隔たりがある。ここでは、連続な状態空間をもつ（離散時点の）マルコフチェーンの理論を使ってこの問題を考えることにする。まず、(2.66) 式の整合条件を満たしているという仮定のもとに以下の定理を考える。

定理 2.2 : (2.66) 式を満たしている時、(2.61) 式で表される $SSAR_m(1)$ モデルは状態変数 $\mathbf{y}_{t-1} = x$ に関して弱連続である。

連続状態をとるマルコフチェーンの連続性の概念にはいくつかの種類がある。ここで扱うモデルは不可算な状態をとるマルコフ過程であるので、ある種の連続性に関する条件が必要になる。離散時間のマルコフ過程 $\{\mathbf{y}_t\}$ が弱連続であることと、すべての有界連続関数 $h(\cdot)$ に対して、

$$E[h(\mathbf{y}_t) | \mathbf{y}_{t-1} = x] \quad (2.68)$$

が状態ベクトル x に関して連続になることは同値である。この時、 $\{\mathbf{y}_t\}$ は（弱）Feller チェーンになるという。なお、定数項付きの TAR モデルは一般には弱連続にはならない。したがって TAR モデルは Feller チェーンではない。（Meyn and Tweedie (1993) に連続状態をとるマルコフチェーンの理論が詳細に載っている。）

定理 2.2 より弱連続性が示されたので、Meyn and Tweedie (1993) の定理 15.0.1 による幾何的エルゴード性（geometrically ergodic）の十分条件に関する定理が使えることになる。

まず $m = 1$ の時を考える。

定理 2.3 : (i) (2.66) 式の整合条件を満たす。 (ii) $\{u_t\}$ の密度関数 $g(u)$ が \mathbf{R}^1 上で常に正の値を取り、かつ

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} u^2 g(u) = 0 , \quad (2.69)$$

および $E[|u_t|] < +\infty$ となるとする。

この条件が成立している時、(2.61) 式で表される $m = 1$ のマルコフチェーンが幾何的エルゴード性をもつ必要十分条件は

$$A < 1, B < 1, AB < 1. \quad (2.70)$$

である。

なお、正規分布に対して (2.69) 式の条件は満たされている。図 2.3 では SSAR(1) のエルゴード性が成り立つ領域を示している。この図で興味深いのは $|A| < 1$ かつ $|B| < 1$

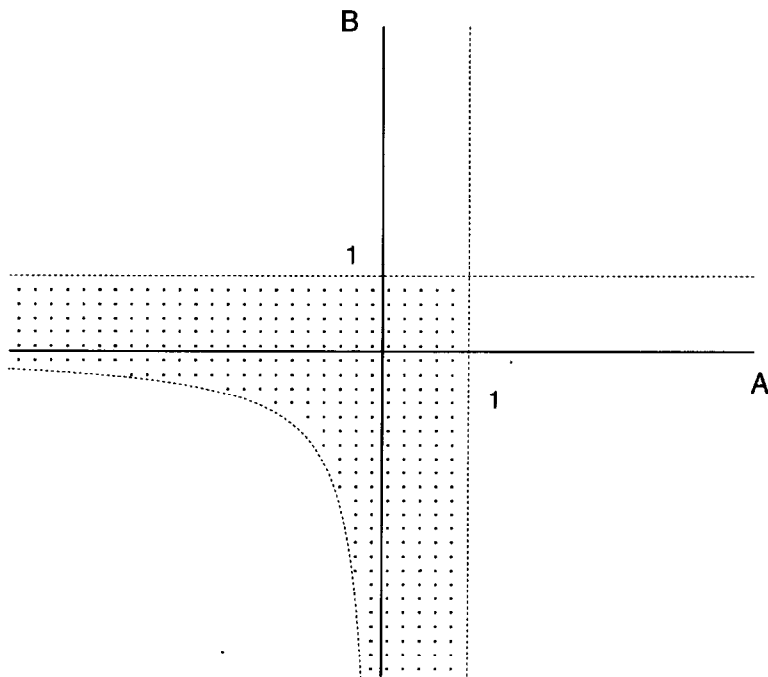


図 2.3: SSAR モデルの定常領域

という条件は強すぎるということである。また、 $A > 0$ または $B > 0$ のときはもう片方の係数はいくらでも小さくすることができる。不均衡計量経済モデルの観点から考えてみると、このようなケースでは市場において過剰反応が起こっていると解釈でき、大変興味深い。

また、ここで示したエルゴード性の条件は以下の TAR(1) モデルの条件と同じになる。

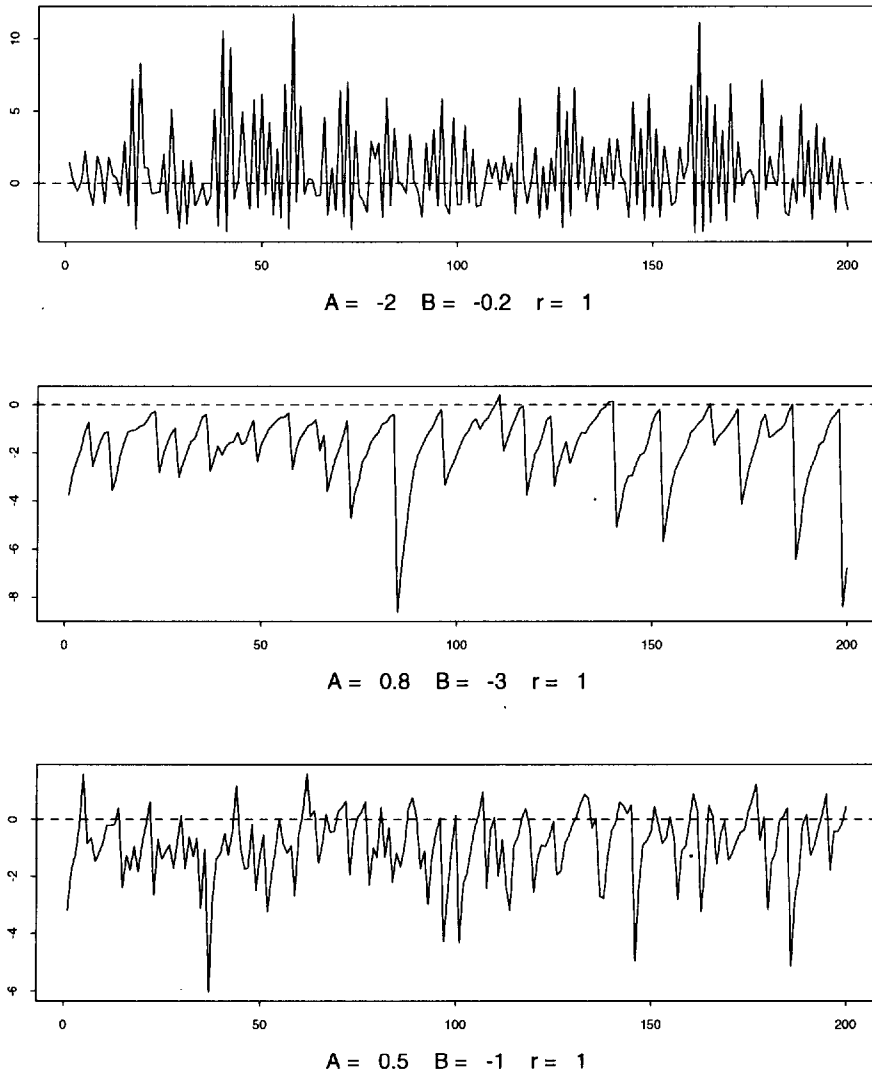


図 2.4: いろいろな SSAR モデルのサンプルパス

$$y_t = \begin{cases} Ay_{t-1} + u_t & \text{if } y_{t-1} \geq 0 \\ By_{t-1} + u_t & \text{if } y_{t-1} < 0 \end{cases} . \quad (2.71)$$

この TAR(1) に関する条件は Petrucelli and Woolford (1984) によって研究されている。

より一般的に (2.61) 式で $m > 1$ の時は、エルゴード性に関する必要十分条件を求めるのは困難である。ここではいくつかの十分条件を紹介する。これらの証明については定理 2.3 の前半と同様であるので省略する。

定理 2.4 : $m \geq 1$ の時, (i) (2.61) 式のモデルが整合条件を満たしている, および (ii) $i = 1, \dots, m$ に対して $E[|u_{it}|] < +\infty$ ($\mathbf{u}_t = (u_{it})$) で, $g(\mathbf{u}_t)$ が \mathbf{R}^m において常に正の値をとる. このとき, (2.61) 式のモデルに対するエルゴード性が成り立つ十分条件は,

$$\max_j \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \sum_{i=1}^m |b_{ij}| \right\} < 1 , \quad (2.72)$$

または,

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^m |a_{ij}|, \sum_{j=1}^m |b_{ij}| \right\} < 1 , \quad (2.73)$$

が成り立つことである。ここで $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ である。

この定理 2.4 で示された条件はかなりきついもので、多くの応用では満たさないことが多い。たとえば、つぎのような p -次の 1 変量 SSAR モデルを考える。

$$y_t = \begin{cases} A_0 + \sum_{j=1}^p A_j y_{t-j} + \sigma_1 u_t & \text{if } y_t \geq y_{t-1} \\ B_0 + \sum_{j=1}^p B_j y_{t-j} + \sigma_2 u_t & \text{if } y_t < y_{t-1} \end{cases} , \quad (2.74)$$

ただし, $\{A_j\}$ と $\{B_j\}$ ($j = 0, \dots, p$) は未知の係数である。このモデルは (2.61) 式の形に書き直すことができる。 $p \times 1$ のベクトル \mathbf{y}_t と $\boldsymbol{\mu}_i$ ($i = 1, 2$) をつぎのように定義する。

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{pmatrix} B_0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (2.75)$$

そして, $p \times p$ の行列を

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \cdots & A_p \\ 1 & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & \cdots & B_p \\ 1 & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

のように定義すると, (2.74) 式はマルコフ表現を用いて (2.61) 式の形で書き直せる. しかしながら, この場合定理 2.4 の条件は満たさない. よって, 2 次以上の 1 変量 SSAR モデルに対してはエルゴード性に関する別の十分条件が必要である.

定理 2.5 : (2.74) 式で $p \geq 1$ の時, (i) 整合条件が満たされている, (ii) $E[|u_t|] < +\infty$ および $g(u_t)$ が \mathbf{R}^1 において常に正の値をとるとする. この時, (2.74) 式のエルゴード性を満たすための 1 つの十分条件は

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^p |A_i|, \sum_{i=1}^p |B_i| \right\} < 1. \quad (2.77)$$

で与えられる. 上記の条件は, Chan and Tong (1985) が定数項のない p -次の 1 変量 TAR モデルに対して出した Lemma 3.1 と同じであるので, ここでは証明は省略する. より最近では Brockwell, Liu, and Tweedie (1992) 一般の多変量 TAR モデルに対する新たな形の十分条件を提示している. これらの十分条件は $\text{SSAR}_m(1)$ に対する条件と密接にかかわっていると思われる.

2.4.3 定常分布とモーメント

(2.61) 式のモデルがエルゴード性の条件を満たしているとき, つぎに関心があるのが定常分布の性質である. しかしながら, ARMA モデルなどとは違い, この場合は詳しく調べるのは困難である.

$\{\mathbf{y}_t\}$ の密度関数を $f(\mathbf{y})$ とする. この時,

定理 2.6 : (i) (2.61) 式のモデルに関する整合条件, エルゴード条件を満たしている, また, (ii) $|\Sigma_i| \neq 0$ ($i = 1, 2$), とする. そうすると, $\{\mathbf{y}_t\}$ の定常分布の密度関数は次の式を満たす.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) = & \int_{y_m \geq z_m} \Sigma_1^{-1/2} g \left[\Sigma_1^{-1/2} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_1) \right] f(\mathbf{z}) dz \\ & + \int_{y_m < z_m} \Sigma_2^{-1/2} g \left[\Sigma_2^{-1/2} (\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_2) \right] f(\mathbf{z}) dz, \end{aligned} \quad (2.78)$$

ただし, $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_m)$ 及び $\mathbf{z}' = (z_1, \dots, z_m)$ である.

一般に, (2.78) 式は積分方程式になり, 仮に $g(\mathbf{u})$ が多変量正規分布の密度関数だったとしても定常分布に対する解析解を得ることはできない. したがって, ここでは, 解析的な解の代わりに数値的に分布を求めてみる. $f_t(\mathbf{y}_t)$ を σ -集合体 \mathcal{F}_{t-1} で条件付けられた, \mathbf{y}_t の条件付分布とする. $m = 1$, $\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{0}$ ($i = 1, 2$) のケースで, 確率過程 $\{\mathbf{y}_t\}$ のエルゴード性は条件付分布 $f_t(y)$ が $t \rightarrow +\infty$ の時 $f(y)$ に収束することを示している. $f_t(y)$ は以下のように,

$$f_t(y) = \int_{y \geq z} \frac{1}{\sigma_1} g \left[\frac{y - Az}{\sigma_1} \right] f_{t-1}(z) dz \quad (2.79)$$

$$+ \int_{y < z} \frac{1}{\sigma_2} g \left[\frac{y - Bz}{\sigma_2} \right] f_{t-1}(z) dz .$$

逐次変わっていく. よって, 適切な密度関数 $f_0(y)$ から出発して何回か繰り返しを行うと, 数値積分の繰り返しから密度関数が得られる. $g(x)$ を標準正規分布の密度関数とした時の結果を図 2.5 に示した. この図で初期分布 $f_0(y) = n(0, 1)$ は破線で描かれている. ここで示した定常分布は $A < B$ の時のものであった. 従って, 条件付分布 $f_t(y)$ は右に寄った分布となりその定常分布 $f(y)$ の中心は正になり分散は 1 より小さい.

次に正常分布のモーメントについても調べてみたい. モーメントの存在に関する十分条件は Tweedie (1983a) の定理から直接導かれる.

定理 2.7 : (2.61) 式のモデルで, (i) 整合条件とエルゴード条件を満たしている, (ii) $j = 1, \dots, k$ ($\mathbf{u}_t = (u_{it})$) に対して $E[|u_{it}|^j] < +\infty$, の時, 定常分布のモーメントは k 次まで存在する.

ここでは, $m = 1, r = 1, \mu_1 = \mu_2 = 0$ および誤差項に正規分布を仮定して, 数値計算によって求めた 1 次から 4 次のモーメントを紹介する. 各 A, B について求めた平均, 分散, 歪度, 尖度の値は表 2.3 にまとめた. この表より, まず分かるのは, 平均と歪度が $A \neq B$ の時 0 から外れることである. 良く知られているように $A = B$ のとき, 平均と歪度は理論的に 0 になり, 尖度は 3 になる. 分散については A と B によって変わっている. また, $|A| < 1$ かつ $|B| < 1$ のとき, 尖度は 3 からそんなに離れていない. しかしながら, $A < 0 < B$ のときその乖離は大きくなっており, 定常分布も正規分布から大きく異なっているものと考えられる. よって, 定常分布のモーメントに関しても, ガウス分布をする ARMA モデルに比べて大きく異なっていることが分かった.

表 2.3: SSAR(1) モデルのモーメント

(i) 平均					
	$B = 0.8$	$B = 0.5$	$B = 0.2$	$B = -0.2$	$B = -2$
$A = 0.8$	0.000	-0.399	-0.622	-0.837	-1.484
$A = 0.5$	0.399	0.000	-0.227	-0.449	-1.147
$A = 0.2$	0.624	0.227	0.000	-0.227	-0.990
$A = -0.2$	0.840	0.450	0.227	0.000	-1.016
$A = -2$	1.489	1.147	0.990	1.018	NA
(ii) 分散					
	$B = 0.8$	$B = 0.5$	$B = 0.2$	$B = -0.2$	$B = -2$
$A = 0.8$	0.111	0.201	0.298	0.449	1.520
$A = 0.5$	0.201	0.333	0.475	0.700	2.406
$A = 0.2$	0.298	0.475	0.667	0.985	3.702
$A = -0.2$	0.449	0.700	0.985	1.500	8.570
$A = -2$	1.513	2.408	3.708	8.593	NA
(iii) 歪度					
	$B = 0.8$	$B = 0.5$	$B = 0.2$	$B = -0.2$	$B = -2$
$A = 0.8$	0.000	-0.210	-0.409	-0.668	-1.487
$A = 0.5$	0.210	0.000	-0.212	-0.513	-1.535
$A = 0.2$	0.410	0.212	0.000	-0.330	-1.493
$A = -0.2$	0.669	0.513	0.330	0.000	-1.117
$A = -2$	1.490	1.537	1.495	1.117	NA
(iv) 尖度					
	$B = 0.8$	$B = 0.5$	$B = 0.2$	$B = -0.2$	$B = -2$
$A = 0.8$	3.000	3.080	3.313	3.820	6.477
$A = 0.5$	3.079	3.000	3.090	3.498	6.503
$A = 0.2$	3.311	3.089	3.000	3.195	5.842
$A = -0.2$	3.816	3.496	3.194	3.000	4.097
$A = -2$	6.481	6.501	5.839	4.089	NA

* NA の部分は元の SSAR(1) モデルがエルゴード的でないケースである。

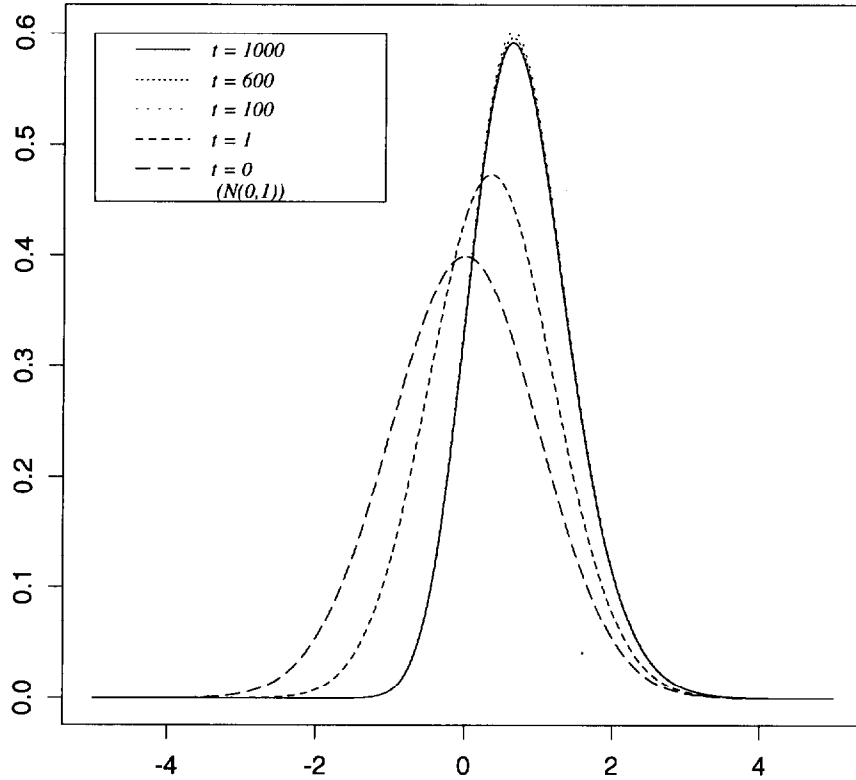


図 2.5: SSAR モデルの定常分布

2.5 2章の数学的付録

定理 2.2 の証明: 簡単化のために $\mu_i = 0$ ($i = 1, 2$) としているが, 同様の議論を展開できる. $v_t^{(i)} = (1/\sigma_i) \Sigma_i^{1/2} \mathbf{u}_t$ ($i = 1, 2$) というように置くと, $\mathbf{e}'_m \mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_{t-1}$ という条件は

$$v_{mt}^{(1)} \equiv \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{e}'_m \Sigma_1^{1/2} \mathbf{u}_t \geq \mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1} \quad (2.80)$$

と書くことができる. また, $h(\cdot)$ を任意の有界連続関数とすると, ある $m \times 1$ のベクトル \mathbf{c} に対して,

$$E[h(\mathbf{y}_{t+1}) | \mathbf{y}_t = \mathbf{x} + \mathbf{c}] - E[h(\mathbf{y}_{t+1}) | \mathbf{y}_t = \mathbf{x}] \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{v_m \geq \mathbf{r}'(\mathbf{x} + \mathbf{c})} h[\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{c}) + \sigma_1 \mathbf{v}] dG^{(1)}(\mathbf{v}) - \int_{v_m \geq \mathbf{r}'\mathbf{x}} h[\mathbf{A}\mathbf{x} + \sigma_1 \mathbf{v}] dG^{(1)}(\mathbf{v}) \\
&+ \int_{v_m < \mathbf{r}'(\mathbf{x} + \mathbf{c})} h[\mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{c}) + \sigma_2 \mathbf{v}] dG^{(2)}(\mathbf{v}) - \int_{v_m < \mathbf{r}'\mathbf{x}} h[\mathbf{B}\mathbf{x} + \sigma_2 \mathbf{v}] dG^{(2)}(\mathbf{v}) ,
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $G^{(i)}(\mathbf{v})$ は $\{\mathbf{v}_t^{(i)} \mid i = 1, 2\}$ の分布関数、 v_m は \mathbf{v} の第 m 成分である。そして、(2.81) 式のはじめの2項は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
&\int_{v_m \geq \mathbf{r}'\mathbf{x}} \{h[\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{c}) + \sigma_1 \mathbf{v}] - h[\mathbf{A}\mathbf{x} + \sigma_1 \mathbf{v}]\} dG^{(1)}(\mathbf{v}) \quad (2.82) \\
&+ \int_{\mathbf{r}'\mathbf{x} \leq v_m < \mathbf{r}'(\mathbf{x} + \mathbf{c})} h[\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{c}) + \sigma_1 \mathbf{v}] dG^{(1)}(\mathbf{v}) .
\end{aligned}$$

したがって、(2.82) 式の最後の項の絶対値は $\mathbf{r}'\mathbf{c} \rightarrow 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{r}'\mathbf{x} \leq v_m < \mathbf{r}'(\mathbf{x} + \mathbf{c})} |h[\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{c}) + \sigma_1 \mathbf{v}]| dG^{(1)}(\mathbf{v}) \quad (2.83) \\
&\leq M [G_m^{(1)}(\mathbf{r}'(\mathbf{x} + \mathbf{c})) - G_m^{(1)}(\mathbf{r}'\mathbf{x})] \rightarrow 0
\end{aligned}$$

というように押えられる。ただし、 M は有限な定数値、 $G_m^{(1)}(v_m)$ は $v_{mt}^{(1)}$ の分布関数でルベーグ測度の意味で絶対連続なものである。また、(2.82) 式の残りの項はルベーグ収束定理により、

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mathbf{c} \rightarrow 0} |((2.82) \text{ 式の第1項})| \quad (2.84) \\
&\leq \int_{v_m \geq \mathbf{r}'\mathbf{x}} \lim_{\mathbf{c} \rightarrow 0} |h[\mathbf{A}\mathbf{x} + \sigma_1 \mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{c}] - h[\mathbf{A}\mathbf{x} + \sigma_1 \mathbf{v}]| dG^{(1)}(\mathbf{v}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

と押えることができる。同じ議論を(2.81)式の第3項、第4項についても行えば、以下のような連続性の性質を導くことができる。

$$\lim_{\mathbf{c} \rightarrow 0} E[h(\mathbf{y}_{t+1}) \mid \mathbf{y}_t = \mathbf{x} + \mathbf{c}] = E[h(\mathbf{y}_{t+1}) \mid \mathbf{y}_t = \mathbf{x}] \quad (2.85)$$

□

定理 2.3 の証明: $m = p = 1$ の時, $y_t \geq y_{t-1}$ という条件は次の条件と同値である.

$$u_t \geq r y_{t-1} , \quad (2.86)$$

ただし, $r = (1 - A)/\sigma_1 = (1 - B)/\sigma_2$ とする. これより遷移確率密度関数が次のように表せる.

$$p(x, y) = \frac{1}{\sigma_1} g\left(\frac{y - Ax}{\sigma_1}\right) I(y \geq x) + \frac{1}{\sigma_2} g\left(\frac{y - Bx}{\sigma_2}\right) I(y < x) , \quad (2.87)$$

ただし, $I(\cdot)$ は定義関数である. ここからは, Petruccielli and Woolford (1984) による定数項なしの TAR(1) に対して行った方法と類似の方法を使うことにする. しかしながら, 必要性の証明については若干異なっている.

(i) 十分性: 十分性を示すために, 以下のような評価関数を考える.

$$h(y) = \begin{cases} k_1 y & \text{if } y \geq 0 \\ k_2 |y| & \text{if } y < 0 \end{cases} , \quad (2.88)$$

ただし, $k_i > 0$ ($i = 1, 2$) である. そして, どんな $x > 0$ に対しても

$$\begin{aligned} Q &\equiv \int P(x, y) h(y) dy \\ &= \frac{k_1}{\sigma_1} \int_{y \geq x} g\left(\frac{y - Ax}{\sigma_1}\right) y dy + \frac{k_1}{\sigma_1} \int_{0 \leq y < x} g\left(\frac{y - Bx}{\sigma_2}\right) y dy \\ &\quad - \frac{k_2}{\sigma_2} \int_{y < 0} g\left(\frac{y - Bx}{\sigma_2}\right) y dy . \end{aligned} \quad (2.89)$$

となる.

y を u に変数変換すると, たとえば, Q の第 1 項は次のように書き直せる.

$$k_1 Ax \int_{u \geq rx} g(u) du + k_1 \sigma_1 \int_{u \geq rx} u g(u) du . \quad (2.90)$$

なぜなら $E[|u_i|] < +\infty$ という仮定より, (2.90) 式の第 2 項が押えられるからである. 同様に y を u に変換し, オーダーの小さい項を無視すれば, Q を支配する項は

$$k_1 Ax \int_{u \geq rx} dG(u) + k_1 Bx \int_{-\frac{Bx}{\sigma_2} \leq u < rx} dG(u) - k_2 Bx \int_{u < -\frac{Bx}{\sigma_2}} dG(u) , \quad (2.91)$$

となる。ここで $G(u)$ は $\{u_t\}$ の分布関数である。

また、 $A < 1, B < 1$, 及び $AB < 1$ より、 $1 > A > -k_1^{-1}k_2$ かつ $1 > B > -k_2^{-1}k_1$ となるような $k_1 > 0, k_2 > 0$ をとることができる。この時 (2.91) 式は

$$k_1 \left\{ Ax[1 - G(rx)] + Bx \left[G(rx) - G\left(-\frac{Bx}{\sigma_2}\right) \right] + \eta x G\left(-\frac{Bx}{\sigma_2}\right) \right\}, \quad (2.92)$$

より小さい。ただし、 $0 < \eta < 1$ 及び $r > 0$ である。そこで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x[1 - G(x)] = 0$ という関係と (2.69) 式の条件より、 $x > M > 0$ とある $\epsilon > 0$ に対して以下の式を満たす $M > 0$ が存在することがいえる。

$$Q \leq (1 - \epsilon)h(x). \quad (2.93)$$

同様に、 $x < -M < 0$ に対して、

$$Q \leq (1 - \epsilon)h(x). \quad (2.94)$$

となる $M > 0$ をとることができる。

また、(2.61) 式で定義されるマルコフ連鎖が φ -既約で、周期的でないことより、正の Harris チェーンになる。以上のことから、定理 5.1 と Meyn and Tweedie (1993) の定理 15.0.1 を適用することにより、 $m = 1$ の時の (2.61) 式で表せるマルコフ連鎖は幾何的エルゴード的である。

(ii) 必要性:

(ii-a) まず $A \geq 1$ の場合について考える。もし $A = 1$ ならば、(2.57) 式の整合条件より $B = 1$ となり y_t はランダムウォークに従う。したがって $A > 1$ の場合を考えればよい。また、 $B > 1$ のケースも同じようにして考えられる。

最初に $A > \eta > 1$ となるような η をとる。そして $y_{t-1} > M > 0$ となるケースに対して、次のような不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & P \left\{ y_t \leq \frac{\eta + 1}{2} y_{t-1} \mid y_{t-1} \right\} \\ & \leq P \left\{ -u_t \geq \frac{1}{\sigma_1} \left(A - \frac{\eta + 1}{2} \right) y_{t-1}, -r y_{t-1} \geq -u_t \mid y_{t-1} \right\} + P \{ u_t < r y_{t-1} \mid y_{t-1} \} \\ & \leq P \left\{ |u_t| \geq \frac{\eta - 1}{2\sigma_1} y_{t-1} \mid y_{t-1} \right\} + P \{ |u_t| \geq -r y_{t-1} \mid y_{t-1} \} \\ & \leq 2P \{ |u_t| \geq k_3 y_{t-1} \mid y_{t-1} \}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

ただし $k_3 = \min\left[\frac{\eta - 1}{2\sigma_1}, -r\right] > 0$ および $r < 0$ である。そしてマルコフの不等式より、この確率は

$$2 \frac{E[|u_t|]}{k_3 y_{t-1}} \leq \left[\frac{2E[|u_t|]}{k_3} \right] \frac{1}{M} = c < 1. \quad (2.96)$$

より小さい.

もし大きな $M > 0$ をとってくると, 任意の小さな c に対して

$$P \left\{ y_t > \frac{\eta + 1}{2} y_{t-1} \mid y_{t-1} \right\} \geq 1 - c \quad (2.97)$$

が成立する. 次に (2.97) 式から

$$\begin{aligned} & P \left\{ y_t > \frac{\eta + 1}{2} y_{t-1}, y_{t-1} > \frac{\eta + 1}{2} y_{t-2} \mid y_{t-2} \right\} \quad (2.98) \\ & \geq \int_{y_{t-1} > \frac{\eta + 1}{2} y_{t-2}} \left[1 - \frac{2E[|u_t|]}{k_3 y_{t-1}} \right] P(y_{t-2}, dy_{t-1}) \\ & \geq (1 - \beta c) P \left\{ y_{t-1} > \frac{\eta + 1}{2} y_{t-2} \mid y_{t-2} \right\} \\ & \geq (1 - \beta c)(1 - c), \end{aligned}$$

という不等式を得る. ただし, $\beta = 2/(\eta + 1) < 1$ である.

よって, 上のような評価を繰り返せば,

$$\begin{aligned} & P \left\{ y_{i+1} > \frac{\eta + 1}{2} y_i \mid i = 1, \dots, t \mid y_1 \right\} \quad (2.99) \\ & \geq \prod_{i=1}^t (1 - \beta^{i-1} c) \\ & \geq (1 - c)^{\frac{1}{1-\beta}} > 0. \end{aligned}$$

となる. 任意の t に対して最後の不等式は SSAR(1) モデルによって表されるマルコフ連鎖がエルゴード的でないことを示している.

(ii-b) 次に $A < -1$ かつ $AB > 1$ の場合を考えてみる. なお, $B < -1$ かつ $AB > 1$ の場合についても同様な証明ができる.

まず, $y_{t-2} < -M < 0$ となるような大きな M をとる. y_{t-2} が与えられている時の $\{y_{t-1}, y_t\}$ に関して4つのフェイズがあることに注意して, 再び, マルコフの不等式を使うと, 次の確率

$$P \{ u_{t-1} < r y_{t-2} \mid y_{t-2} \} \leq \frac{E[|u_{t-1}|]}{rM}, \quad (2.100)$$

はいくらでも小さくなりうる。次に $A^2 > \eta > 1$ かつ $AB > \eta > 1$ となるような η をとれば,

$$\begin{aligned} & P \left\{ y_t \geq \frac{\eta+1}{2} y_{t-2} \mid y_{t-2} \right\} \\ & \leq P \left\{ A^2 y_{t-2} + (A\sigma_1 u_{t-1} + \sigma_1 u_t) \geq \frac{\eta+1}{2} y_{t-2} \mid y_{t-2} \right\} \\ & + P \left\{ AB y_{t-2} + (B\sigma_1 u_{t-1} + \sigma_2 u_t) \geq \frac{\eta+1}{2} y_{t-2} \mid y_{t-2} \right\} \\ & + P \{ u_{t-1} < r y_{t-2} \mid y_{t-2} \}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

となる。(2.101) 式の右辺の第一項は次のような不等式で評価できる。

$$\begin{aligned} & P \left\{ |A\sigma_1 u_{t-1} + \sigma_1 u_t| \geq \left(\frac{\eta+1}{2} - A^2 \right) y_{t-2} \mid y_{t-2} \right\} \\ & \leq \frac{\sigma_1(|A|+1)}{k_4 M} E[|u_t|], \end{aligned} \quad (2.102)$$

ただし, $k_4 = A^2 - \frac{\eta+1}{2}$ は正の定数である。よって, (2.102) 式はいくらでも小さくできる。

同様な議論をすると (2.101) 式の右辺の第3項もいくらでも小さくなりうる。よって,

$$P \left\{ y_t < \frac{\eta+1}{2} y_{t-2} \mid y_{t-2} \right\} \geq 1 - c, \quad (2.103)$$

となり, c は任意に小さくすることができる。あとは, (ii-a) で行った議論と同様である。

(ii-c) 最後に $AB = 1$ かつ $A < 0$ のケースを扱う。この場合, SSAR(1) の過程がエルゴード的でないことを示すには Chan, 他 (1985) の Lemma 2.3 の証明で使われた方法をやや修正して使う必要がある。彼らの証明において, $\phi(1,1) = A, \phi(1,l) = B, \phi(0,1) = \phi(0,l) = 0$, とおき直して多変量 threshold AR(1) に対するのと同様な議論を行えばよい。積分の評価は (ii-a) と (ii-b) で行った導出のように (2.69) 式の条件を使うこと以外はほぼ同様なので, 詳細は省略する。

□

定理 2.7 の証明:

$m = 1$ のときのみ考える。定常分布の k -次のモーメントの存在を示すために, 次のような評価関数を考える。

$$h(x) = \begin{cases} k_1^k x^k + 1 & \text{if } x \geq 0 \\ k_2^k |x|^k + 1 & \text{if } x < 0 \end{cases}, \quad (2.104)$$

ただし, $k_1 > 0$ かつ $k_2 > 0$ である.

次に $|x| > M > 0$ に対して

$$\int p(x, y)h(y)dy \leq (1 - \epsilon)h(x), \quad (2.105)$$

となる十分大きな $M > 0$ と, ある $\epsilon > 0$ をとることができる. そこで Tweedie (1983a) の定理 3 を適用することによりこの場合のモーメントの存在の証明ができる. \square

第3章 SSARモデルのパラメータ推定

3.1 同時転換自己回帰モデルの推定

この章ではSSARモデルのパラメータ推定について調べていきたい。 \mathbf{y}_t を $m \times 1$ の内生変数ベクトルとする時、本章で対象にするモデルは以下の通り。

$$\mathbf{y}_t = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_t & \text{if } \mathbf{e}'_m\mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_m\mathbf{y}_{t-1} \\ \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{B}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{D}_2\mathbf{u}_t & \text{if } \mathbf{e}'_m\mathbf{y}_t < \mathbf{e}'_m\mathbf{y}_{t-1} \end{cases}, \quad (3.1)$$

ただし、 $\mathbf{e}'_m = (0, \dots, 0, 1)$ と $\boldsymbol{\mu}'_i$ ($i = 1, 2$)は $1 \times m$ の定数ベクトルで、 \mathbf{A}, \mathbf{B} 及び \mathbf{D}_i ($i = 1, 2$)は $m \times m$ の行列である。誤差項 $\{\mathbf{u}_t\}$ は

$$E(\mathbf{u}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

かつ

$$E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}'_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{I}_m, \quad (3.3)$$

というように分布すると考える。なお、 \mathcal{F}_{t-1} は $\{\mathbf{y}_s, s \leq t-1\}$ から作られる σ -集合体である。この場合、 $\mathbf{D}_i\mathbf{u}_t$ の分散共分散行列は \mathcal{F}_{t-1} で条件付けられたとき $\boldsymbol{\Sigma}_i$ ($= \mathbf{D}_i\mathbf{D}'_i, i = 1, 2$), と書け、正定値行列になる。また、 $\{\mathbf{u}_t\}$ は絶対連続な確率変数で、その確率密度関数 $g(\mathbf{u})$ は \mathbf{R}^m において常に正である。

さらに次のような仮定を置くことにする。

仮定 I: (3.1)式で表されるSSARモデルは整合条件を満たし、かつエルゴード的である。

3.2 最小2乗推定量のバイアス

(3.1)式において、 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$, $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2$ とすると、このSSARモデルは多変量自己回帰 (AR) モデルに帰着される。ARモデルに対してはそのパラメータの推定に対して最小2乗法が良く用いられるので、SSARモデルに対しても最小2乗法を試す

ことはごく自然なことであろう。しかしながら、本節で示されるように、SSAR モデルに対して最小2乗法を適用すると、バイアスをもった推定値になってしまうのである。

簡単化のため $\mu_i = 0$ ($i = 1, 2$) とする。このとき、観測値 $\{\mathbf{y}_t, 0 \leq t \leq T\}$ に基づく最小2乗推定量を、次の目的関数を最小にするものとする。

$$S_T(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \left\{ \mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1}I_t^{(1)} - \mathbf{B}\mathbf{y}_{t-1}I_t^{(2)} \right\}' \times \left\{ \mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1}I_t^{(1)} - \mathbf{B}\mathbf{y}_{t-1}I_t^{(2)} \right\}, \quad (3.4)$$

ただし、 $I_t^{(1)}$ および $I_t^{(2)} = 1 - I_t^{(1)}$ は定義関数で

$$I_t^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_{t-1} \\ 0 & \text{if } \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_t < \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_{t-1} \end{cases}. \quad (3.5)$$

である。 $\boldsymbol{\theta}$ は未知パラメータを集めたベクトルである。

さて、(3.1) 式を書き直すと、

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1}I_t^{(1)} + \mathbf{B}\mathbf{y}_{t-1}I_t^{(2)} + \mathbf{w}_t, \quad (3.6)$$

となる。ただし、

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_t I_t^{(1)} + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}_t I_t^{(2)}. \quad (3.7)$$

である。また、 $\hat{\mathbf{A}}_{LS}$ と $\hat{\mathbf{B}}_{LS}$ をそれぞれ \mathbf{A} 、 \mathbf{B} の最小2乗推定量とする。これより、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_{LS} - \mathbf{A} &= \left(\sum_{t=1}^T \mathbf{w}_t \mathbf{y}'_{t-1} I_t^{(1)} \right) \left(\sum_{t=1}^T \mathbf{y}_{t-1} \mathbf{y}'_{t-1} I_t^{(1)} \right)^{-1} \\ &= \mathbf{D}_1 \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{u}_t \mathbf{y}'_{t-1} I_t^{(1)} \right) \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_{t-1} \mathbf{y}'_{t-1} I_t^{(1)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

というふうに表現できる。標本数 T を増やしていくと、この値は次のところに収束していく。

$$\hat{\mathbf{A}}_{LS} - \mathbf{A} \xrightarrow{P} \mathbf{D}_1 \left[E(\mathbf{u}_t \mathbf{y}'_{t-1} I_t^{(1)}) \right] \left[E(\mathbf{y}_{t-1} \mathbf{y}'_{t-1} I_t^{(1)}) \right]^{-1}, \quad (3.9)$$

ただし、(3.9) 式において右辺の期待値の存在は仮定しておく。同様にして、

$$\hat{\mathbf{B}}_{LS} - \mathbf{B} \xrightarrow{P} \mathbf{D}_2 \left[E(\mathbf{u}_t \mathbf{y}'_{t-1} I_t^{(2)}) \right] \left[E(\mathbf{y}_{t-1} \mathbf{y}'_{t-1} I_t^{(2)}) \right]^{-1}. \quad (3.10)$$

が得られる。

(3.9) 式と (3.10) 式において重要な点は、一般的に $\{\mathbf{u}_t\}$ と $\{\mathbf{y}_{t-1} I_t^{(i)}\}$ とは同時相関を

持つということである。この最小2乗推定量のバイアスを詳しく調べるために、次のように誤差項 $\{\mathbf{u}_t\}$ にガウス分布を仮定する。

仮定 II: (3.1)式に含まれる確率変数 $\{\mathbf{u}_t\}$ は独立に $N_m(0, \mathbf{I}_m)$ に従う。

そして、

$$\mathbf{v}_t^{(i)} = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{D}_i \mathbf{u}_t \quad (i = 1, 2), \quad (3.11)$$

また

$$v_{mt}^{(i)} = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{e}_m' \mathbf{D}_i \mathbf{u}_t \quad (i = 1, 2). \quad (3.12)$$

とおく。

この時 (3.5) 式から、事象 $I_t^{(1)} = 1$ は $v_{mt}^{(1)} \geq \mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}$ と同値である。 $\{\mathbf{u}_t\}$ が正規分布に従うことから

$$E \left[\mathbf{v}_t^{(1)} | v_{mt}^{(1)} \right] = \frac{1}{\sigma_1} \sum_1 \mathbf{e}_m v_{mt}^{(1)} \quad (3.13)$$

及び

$$\begin{aligned} & E \left[\mathbf{D}_1 \mathbf{u}_t I_t^{(1)} | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= \sigma_1 E \left\{ E \left[\mathbf{v}_t^{(1)} | v_{mt}^{(1)} \right] I(v_{mt}^{(1)} \geq \mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1} \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \sum_1 \mathbf{e}_m \phi(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

が得られる。ただし、 $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数である。同様にして、

$$\begin{aligned} & E \left[\mathbf{y}_{t-1} \mathbf{y}_{t-1}' I_t^{(1)} | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= \mathbf{y}_{t-1} \mathbf{y}_{t-1}' \left(1 - \Phi(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}) \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

が得られる。ここで、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数とする。そうすると、 $\hat{\mathbf{A}}_{LS}$ 及び $\hat{\mathbf{B}}_{LS}$ の漸近的なバイアスは次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} ABIAS(\hat{\mathbf{A}}_{LS}) &= \frac{1}{\sigma_1} \sum_1 \mathbf{e}_m \left\{ E \left[\phi(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}) \mathbf{y}_{t-1}' \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ E \left[(1 - \Phi(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1})) \mathbf{y}_{t-1} \mathbf{y}_{t-1}' \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

および、

$$\begin{aligned} ABIAS(\hat{\mathbf{B}}_{LS}) &= -\frac{1}{\sigma_2} \sum_2 \mathbf{e}_m \left\{ E \left[\phi(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}) \mathbf{y}_{t-1}' \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ E \left[\Phi(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}) \mathbf{y}_{t-1} \mathbf{y}_{t-1}' \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

よって、最小二乗 (LS) 推定量の漸近バイアスに関する結果が次のような定理にまとめられる。

定理 3.1 : 仮定 I のもと, A , B の最小二乗推定量, \hat{A}_{LS} , \hat{B}_{LS} は

$$E[u_t y'_{t-1} I_t^{(1)}] \neq 0. \quad (3.18)$$

の時一貫性をもたない. さらに, 仮定 II もおくと, \hat{A}_{LS} と \hat{B}_{LS} の漸近バイアスはそれぞれ, (3.16), (3.17) 式で与えられる.

たとえば, $A = B$ で $\Sigma_1 = \Sigma_2$ のとき, $\{y_t\}$ の分布は原点对称になる. したがって, このとき, 漸近バイアスは 0 になる. しかしながら, $A \neq B$ で $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ の時, 確率変数 $\{u_t\}$ と $\{y_{t-1} I_t^{(1)}\}$ は同時相関をもち, (3.18) 式の条件を満たす.

さらに詳しく最小二乗推定量のバイアスを調べるために, 以下のようなシミュレーションを行った.

1. まずはじめに, $\{u_t\}$ に対応する標準正規乱数の列を発生させる.
2. この $\{u_t\}$ の系列を使って, $m = 1$ の SSAR(1) モデルに従う時系列データを作る.
3. A , B の最小二乗推定量 \hat{A}_{LS} , \hat{B}_{LS} を計算する.
4. 以上を 5000 回繰り返して各推定量の平均を求める.

このシミュレーションをいくつかの真のパラメータ値において行った. その値は $\{A, B\} = \{0.8, 0.5, 0.2, 0.0, -0.2, -0.5, -1.5\}$ でサンプルサイズは $T = 100,500$ にした.

表 3.1, 3.2 は最小二乗推定量の標本平均を示している. この値がそれぞれの真の値に近ければバイアスは小さいといえる. 真のパラメータが $A = B$ のとき, 最小二乗推定量のバイアスはほぼ無視できるくらい小さい. このケースではそもそも最小二乗推定量の漸近バイアスは 0 で一貫性を持つことから, この結果は期待通りであるといえる. しかしながら, $A \neq B$ のとき, 状況は一変し, 最小二乗推定量のバイアスはかなり大きくなる. 特に, A, B の絶対値が大きい場合, 推定された係数の値は定常になる領域すら越えてしまうことがある. さらに興味深いことは, 推定値の符号が真の値の符号と必ずしも同じにならないことである. これらのことから, SSAR モデルを推定する時に, ここで紹介した単純な最小二乗法を使うと, その推定値にバイアスが発生し, 適切な推定法ではないということがわかった. 図 3.1 では $A = 0.2$ かつ $B = 0.8$ のケースの最小二乗推定量のヒストグラムを描いている. この図を見ても上記で示した事実が読み取れる.

3.3 最尤推定量とその漸近的性質

この節では (3.1) 式で表される SSAR $_m$ (1) モデルの最尤推定について論じる. さて, この SSAR $_m$ (1) モデルがマルコフ過程であることより, y_0 を与えた時の同時密度関数

表 3.1: 最小 2 乗推定値の平均^{1,2}

(i) T = 100

		B = 0.8	B = 0.5	B = 0.2	B = 0.0	B = -0.2	B = -0.5	B = -1.5
A = 0.8	\hat{A}_{LS}	0.8055 (0.143)	0.7152 (0.094)	0.7479 (0.059)	0.7601 (0.046)	0.7687 (0.037)	0.7767 (0.029)	0.7889 (0.017)
	\hat{B}_{LS}	0.7978 (0.141)	1.2359 (0.759)	1.4515 (1.268)	1.5603 (1.577)	1.6583 (1.877)	1.8087 (2.331)	2.3009 (3.843)
A = 0.5	\hat{A}_{LS}	1.2328 (0.757)	0.4972 (0.133)	0.4361 (0.099)	0.4405 (0.086)	0.4519 (0.073)	0.4636 (0.058)	0.4848 (0.034)
	\hat{B}_{LS}	0.7160 (0.092)	0.4974 (0.135)	0.4297 (0.331)	0.3904 (0.492)	0.3317 (0.651)	0.2766 (0.916)	-0.0320 (1.708)
A = 0.2	\hat{A}_{LS}	1.4507 (1.267)	0.4329 (0.331)	0.1966 (0.133)	0.1729 (0.107)	0.1720 (0.092)	0.1790 (0.073)	0.1931 (0.045)
	\hat{B}_{LS}	0.7477 (0.059)	0.4360 (0.099)	0.1976 (0.131)	0.0353 (0.181)	-0.1269 (0.236)	-0.3824 (0.321)	-1.2837 (0.574)
A = 0.0	\hat{A}_{LS}	1.5623 (1.580)	0.3874 (0.495)	0.0380 (0.180)	-0.0019 (0.134)	-0.0071 (0.108)	-0.0051 (0.086)	0.0028 (0.050)
	\hat{B}_{LS}	0.7601 (0.046)	0.4424 (0.085)	0.1752 (0.107)	-0.0037 (0.136)	-0.1927 (0.168)	-0.4831 (0.221)	-1.5317 (0.387)
A = -0.2	\hat{A}_{LS}	1.6645 (1.884)	0.3538 (0.668)	-0.1276 (0.232)	-0.1912 (0.167)	-0.2049 (0.136)	-0.1982 (0.103)	-0.1913 (0.054)
	\hat{B}_{LS}	0.7689 (0.037)	0.4517 (0.072)	0.1744 (0.088)	-0.0074 (0.110)	-0.2017 (0.135)	-0.5009 (0.173)	-1.5537 (0.267)
A = -0.5	\hat{A}_{LS}	1.8091 (2.332)	0.2625 (0.896)	-0.3910 (0.316)	-0.4814 (0.218)	-0.5020 (0.170)	-0.4972 (0.123)	-0.4891 (0.046)
	\hat{B}_{LS}	0.7768 (0.029)	0.4644 (0.058)	0.1817 (0.073)	-0.0035 (0.086)	-0.1943 (0.102)	-0.4960 (0.125)	-1.4874 (0.125)
A = -1.5	\hat{A}_{LS}	2.3123 (3.856)	-0.0295 (1.697)	-1.2830 (0.577)	-1.5303 (0.388)	-1.5517 (0.268)	-1.4913 (0.125)	NA (NA)
	\hat{B}_{LS}	0.7889 (0.017)	0.4846 (0.034)	0.1941 (0.045)	0.0042 (0.053)	-0.1910 (0.055)	-0.4887 (0.047)	NA (NA)

¹ 括弧の中は真の値からの標準誤差を表す。

² “NA” になっているケースは真の係数がエルゴード性を満たさない場合で、シミュレーションは行っていない。

表 3.2: 最小 2 乗推定値の平均 (続き)

(ii) T = 500

		B = 0.8	B = 0.5	B = 0.2	B = 0.0	B = -0.2	B = -0.5	B = -1.5
A = 0.8	\hat{A}_{LS}	0.7984 (0.064)	0.7205 (0.081)	0.7511 (0.050)	0.7625 (0.039)	0.7704 (0.031)	0.7781 (0.023)	0.7899 (0.012)
	\hat{B}_{LS}	0.8010 (0.063)	1.2453 (0.749)	1.4465 (1.249)	1.5496 (1.552)	1.6429 (1.846)	1.7806 (2.284)	2.2351 (3.742)
A = 0.5	\hat{A}_{LS}	1.2476 (0.751)	0.4989 (0.059)	0.4387 (0.070)	0.4457 (0.060)	0.4554 (0.051)	0.4668 (0.039)	0.4856 (0.020)
	\hat{B}_{LS}	0.7208 (0.081)	0.4968 (0.058)	0.4369 (0.259)	0.3991 (0.421)	0.3633 (0.587)	0.2968 (0.823)	0.0274 (1.570)
A = 0.2	\hat{A}_{LS}	1.4484 (1.251)	0.4398 (0.261)	0.2007 (0.058)	0.1769 (0.051)	0.1774 (0.044)	0.1821 (0.036)	0.1935 (0.021)
	\hat{B}_{LS}	0.7511 (0.050)	0.4387 (0.069)	0.1988 (0.058)	0.0404 (0.088)	-0.1199 (0.127)	-0.3785 (0.179)	-1.2688 (0.331)
A = 0.0	\hat{A}_{LS}	1.5489 (1.552)	0.4044 (0.425)	0.0452 (0.090)	0.0007 (0.060)	-0.0094 (0.049)	-0.0054 (0.039)	0.0013 (0.022)
	\hat{B}_{LS}	0.7627 (0.039)	0.4448 (0.062)	0.1779 (0.050)	0.0000 (0.060)	-0.1870 (0.076)	-0.4827 (0.099)	-1.5224 (0.171)
A = -0.2	\hat{A}_{LS}	1.6439 (1.847)	0.3577 (0.581)	-0.1189 (0.127)	-0.1855 (0.077)	-0.1993 (0.060)	-0.1989 (0.046)	-0.1937 (0.025)
	\hat{B}_{LS}	0.7706 (0.031)	0.4548 (0.051)	0.1772 (0.045)	-0.0077 (0.050)	-0.2020 (0.059)	-0.5013 (0.076)	-1.5503 (0.124)
A = -0.5	\hat{A}_{LS}	1.7801 (2.284)	0.2921 (0.819)	-0.3759 (0.180)	-0.4810 (0.098)	-0.5020 (0.076)	-0.4989 (0.055)	-0.4965 (0.020)
	\hat{B}_{LS}	0.7781 (0.023)	0.4666 (0.039)	0.1821 (0.036)	-0.0062 (0.039)	-0.1986 (0.046)	-0.4989 (0.054)	-1.5048 (0.054)
A = -1.5	\hat{A}_{LS}	2.2297 (3.736)	0.0239 (1.567)	-1.2639 (0.334)	-1.5243 (0.172)	-1.5532 (0.128)	-1.5046 (0.054)	NA (NA)
	\hat{B}_{LS}	0.7899 (0.011)	0.4857 (0.020)	0.1936 (0.020)	0.0015 (0.023)	-0.1944 (0.025)	-0.4962 (0.020)	NA (NA)

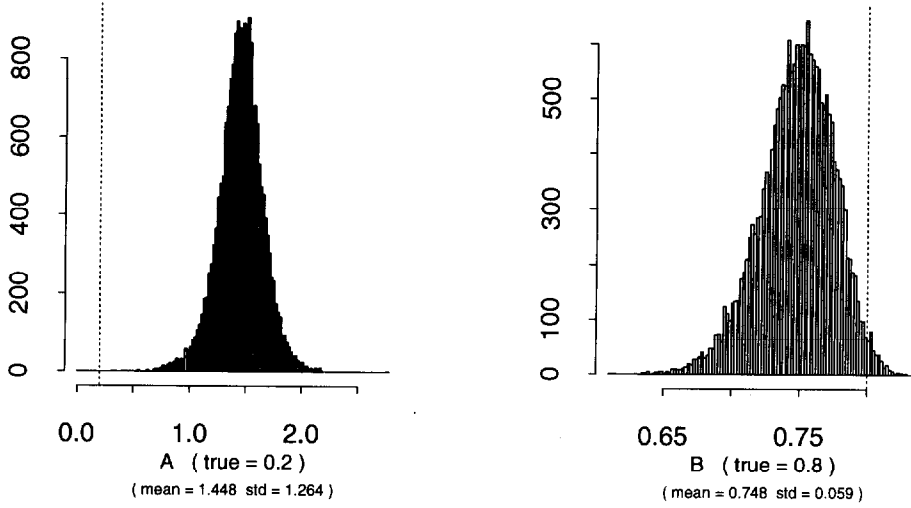


図 3.1: 最小 2 乗推定値のヒストグラム

$p(\mathbf{y}_T, \mathbf{y}_{T-1}, \dots, \mathbf{y}_1)$ は

$$p(\mathbf{y}_T, \mathbf{y}_{T-1}, \dots, \mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_0) = p(\mathbf{y}_T | \mathbf{y}_{T-1}) p(\mathbf{y}_{T-1} | \mathbf{y}_{T-2}) \cdots p(\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_0), \quad (3.19)$$

というように書き直せる。ただし、 $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1})$ は \mathbf{y}_{t-1} を与えた時の \mathbf{y}_t の条件付分布である。これより、前節の仮定 II のもとで、 $|\Sigma_i| \neq 0$ ($i = 1, 2$) のとき、 \mathbf{y}_0 を与えた時の $\{\mathbf{y}_t, 1 \leq t \leq T\}$ の条件付対数尤度関数は

$$\begin{aligned} \log L_T(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{Tm}{2} \log 2\pi & (3.20) \\ &- \frac{1}{2} \log |\Sigma_1| \sum_{t=1}^T I(\mathbf{e}'_m \mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_t \mathbf{y}_{t-1}) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_1 - \mathbf{A} \mathbf{y}_{t-1})' \Sigma_1^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_1 - \mathbf{A} \mathbf{y}_{t-1}) I(\mathbf{e}'_t \mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_{t-1}) \\ &- \frac{1}{2} \log |\Sigma_2| \sum_{t=1}^T I(\mathbf{e}'_m \mathbf{y}_t < \mathbf{e}'_t \mathbf{y}_{t-1}) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_2 - \mathbf{B} \mathbf{y}_{t-1})' \Sigma_2^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_2 - \mathbf{B} \mathbf{y}_{t-1}) I(\mathbf{e}'_t \mathbf{y}_t < \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_{t-1}), \end{aligned}$$

ただし、 $\boldsymbol{\theta}$ は $\text{SSAR}_m(1)$ に含まれる未知パラメータである。また、パラメータ空間 Θ はこれに対応して定められるとする。よって、ここで提案する ML 推定量は、整合条

件を満たす中で $\log L_T(\boldsymbol{\theta})$ を最大化する $\boldsymbol{\theta}$ とする. この ML 推定量は解析的に解くのが難しいので, 数値的最適化によって求めることにする. この推定量の性質は以下の定理にまとめられる.

定理 3.2 : (3.1) 式で与えられる $SSAR_m(1)$ モデルに対して, 整合条件, エルゴード条件が満たされており, 誤差項と $\{\mathbf{u}_t\}$ が独立に $N(0, I_m)$ (ただし, $|\Sigma_i| \neq 0 (i = 1, 2)$) に従っていると仮定する. さらに, 真のパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ がパラメータ空間 Θ の内点に存在しているとする. この時, 未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$ は一致性を持つ. さらに漸近的に以下のような正規分布に分布収束する.

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} N[0, I(\boldsymbol{\theta})^{-1}] \quad , \quad (3.21)$$

ただし,

$$I(\boldsymbol{\theta}) = \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[-\frac{\partial^2 \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \right] \quad , \quad (3.22)$$

とし, $I(\boldsymbol{\theta})$ は正則であることを仮定する.

定理 3.2 の仮定より $\{\mathbf{y}_t\}$ の 2 次のモーメントの存在がいえる. (定理 2.7 より) したがって, (3.22) 式の情報行列は well-defined である.

3.4 ML 推定量の分布表

本節では $m = 1$ の時の SSAR(1) モデルのみを考える. この場合 (3.1) 式のモデルは

$$y_t - \mu = \begin{cases} A(y_{t-1} - \mu) + \sigma_1 u_t & \text{if } y_t \geq y_{t-1} \\ B(y_{t-1} - \mu) + \sigma_2 u_t & \text{if } y_t < y_{t-1} \end{cases} \quad , \quad (3.23)$$

というように書き直せる. ただし, μ は定数項に対するパラメータである. このケースではこれまで見てきたように, 整合条件は必要十分条件として

$$r = \frac{1-A}{\sigma_1} = \frac{1-B}{\sigma_2} \quad (3.24)$$

及び,

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1} = \frac{\mu_2}{\sigma_2} \quad (3.25)$$

というように与えられる. (3.1) 式と (3.23) 式を比べると, (3.25) の式は $r\mu$ にし等しくなる. したがって, $y_t^* = y_t - \mu$ という確率変数を導入すれば, $\mu = 0$ という仮定をはじめからおいて議論しても一般性を欠かない.

仮定 II と $\sigma_i > 0$ ($i = 1, 2$) ということから, y_0 を与えた時の $\{y_t, 1 \leq t \leq T\}$ の条件付対数尤度関数は

$$\begin{aligned} \log L_T(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{T}{2} \log 2\pi \\ &- \frac{1}{2} \log \sigma_1^2 \sum_{t=1}^T I_t^{(1)} - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{t=1}^T (y_t - Ay_{t-1})^2 I_t^{(1)} \\ &- \frac{1}{2} \log \sigma_2^2 \sum_{t=1}^T I_t^{(2)} - \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=1}^T (y_t - By_{t-1})^2 I_t^{(2)} \quad , \end{aligned} \quad (3.26)$$

のように書き直せる. ただし, $\boldsymbol{\theta} = (r, \sigma_1, \sigma_2)'$ で,

$$I_t^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{if } y_t \geq y_{t-1} \\ 0 & \text{if } y_t < y_{t-1} \end{cases} \quad , \quad (3.27)$$

$$I_t^{(2)} = 1 - I_t^{(1)} \quad . \quad (3.28)$$

とする. 有限標本においてこの ML 推定量の分布は解析的に求まらないので, モンテカルロ・シミュレーションによってその性質を明らかにしていく. まず, 誤差項 $\{u_t\}$ に対応する標準正規乱数をつくり, SSAR(1) に従う時系列 $\{y_t\}$ を発生させる. そして, 上記で示した ML 推定量を求める. 表 3.3, 3.4 はそれぞれの真のパラメータに対してこのようなことを 5000 回繰り返して求めた ML 推定値の標本平均を示している. サンプルサイズは $T = 100, 500$ である. 表 3.1, 3.2 で示した最小 2 乗推定量の結果と比較すると, 表 3.3, 3.4 で示された ML 推定量のバイアスは $A \neq B$ のときであっても非常に小さく, 実用上無視できる水準であると思われる.

次に $T = 100, 1000$ のとき, ML 推定量の経験分布関数を表 3.5, 3.6, 3.7 にまとめた. これは推定量の分布がどのようになっているかを調べる目的で, 比較のために対応する正規分布の値も載せてある. それぞれの推定量について以下のように標準化した値を計算して, それにもと基づいた分布を求めた.

$$\hat{\theta}'_i = \frac{\hat{\theta}_i - m_\theta}{\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N^{(sim)}} (\hat{\theta}_j - m_\theta)^2}{N^{(sim)} - 1}}} \quad , \quad (3.29)$$

ただし, $\hat{\theta}_i$ は i 番目の推定値である. また, $m_\theta = (1/N^{(sim)}) \sum_{j=1}^{N^{(sim)}} \hat{\theta}_j$ では繰り返しの回数である. このシミュレーションでは $N^{(sim)} = 20000$ とした. また, 表には経験分布関数のパーセント点も表示しておいた. この表を見ると, $T = 100$ のときは少し分布が歪んでいるように思われるが, $T = 1000$ のときは正規分布にかなり近くなっている. Kolmogorov-Smirnov 統計量を使って標本分布関数の誤差の 99% 信頼区間を考えると約 0.01 となるので, $T = 1000$ のときは, ほぼ, 前節で論じた漸近正規性が成り

表 3.3: 最尤推定値の平均^{1,2}

T = 100

		B = 0.8	B = 0.5	B = 0.2	B = 0.0	B = -0.2	B = -0.5	B = -1.5
A = 0.8	\hat{A}	0.7783 (0.071)	0.7930 (0.037)	0.7969 (0.025)	0.7964 (0.023)	0.7982 (0.020)	0.7986 (0.017)	0.7995 (0.012)
	\hat{B}	0.7777 (0.072)	0.4726 (0.130)	0.1718 (0.182)	-0.0368 (0.221)	-0.2354 (0.266)	-0.5354 (0.323)	-1.5500 (0.551)
A = 0.5	\hat{A}	0.4744 (0.127)	0.4829 (0.097)	0.4911 (0.072)	0.4941 (0.062)	0.4952 (0.054)	0.4972 (0.046)	0.4992 (0.031)
	\hat{B}	0.7930 (0.036)	0.4813 (0.098)	0.1820 (0.143)	-0.0218 (0.172)	-0.2218 (0.201)	-0.5252 (0.248)	-1.5321 (0.400)
A = 0.2	\hat{A}	0.1661 (0.186)	0.1807 (0.142)	0.1869 (0.112)	0.1936 (0.096)	0.1955 (0.084)	0.1979 (0.070)	0.2007 (0.045)
	\hat{B}	0.7960 (0.026)	0.4915 (0.072)	0.1888 (0.112)	-0.0155 (0.137)	-0.2103 (0.159)	-0.5130 (0.195)	-1.5191 (0.322)
A = 0.0	\hat{A}	-0.0347 (0.220)	-0.0187 (0.173)	-0.0128 (0.136)	-0.0082 (0.117)	-0.0064 (0.104)	-0.0029 (0.084)	0.0010 (0.051)
	\hat{B}	0.7975 (0.022)	0.4944 (0.062)	0.1926 (0.096)	-0.0072 (0.116)	-0.2065 (0.141)	-0.5154 (0.168)	-1.5190 (0.272)
A = -0.2	\hat{A}	-0.2322 (0.263)	-0.2275 (0.205)	-0.2135 (0.159)	-0.2093 (0.135)	-0.2036 (0.119)	-0.2003 (0.096)	-0.1965 (0.053)
	\hat{B}	0.7983 (0.020)	0.4954 (0.054)	0.1959 (0.083)	-0.0054 (0.102)	-0.2034 (0.119)	-0.5073 (0.145)	-1.4995 (0.215)
A = -0.5	\hat{A}	-0.5451 (0.326)	-0.5252 (0.246)	-0.5154 (0.197)	-0.5118 (0.167)	-0.5031 (0.143)	-0.4974 (0.111)	-0.4906 (0.046)
	\hat{B}	0.7982 (0.017)	0.4972 (0.046)	0.1971 (0.071)	-0.0016 (0.084)	-0.1973 (0.095)	-0.4972 (0.109)	-1.4798 (0.122)
A = -1.5	\hat{A}	-1.5685 (0.563)	-1.5450 (0.407)	-1.5251 (0.321)	-1.5163 (0.272)	-1.5044 (0.214)	-1.4788 (0.121)	NA (NA)
	\hat{B}	0.7993 (0.012)	0.4986 (0.031)	0.1995 (0.045)	0.0020 (0.051)	-0.1963 (0.053)	-0.4919 (0.045)	NA (NA)

¹ 括弧の中は真の値からの標準誤差を示す。

² “NA” になっているケースは真の係数がエルゴード性を満たさない場合で、シミュレーションは行っていない。

表 3.4: 最尤推定値の平均 (続き)

T=500

		B = 0.8	B = 0.5	B = 0.2	B = 0.0	B = -0.2	B = -0.5	B = -1.5
A = 0.8	\hat{A}	0.7951 (0.028)	0.7985 (0.015)	0.7997 (0.011)	0.7993 (0.009)	0.7998 (0.008)	0.7998 (0.007)	0.7999 (0.005)
	\hat{B}	0.7949 (0.029)	0.4952 (0.054)	0.1950 (0.078)	-0.0094 (0.096)	-0.2056 (0.112)	-0.5064 (0.137)	-1.5076 (0.238)
A = 0.5	\hat{A}	0.4932 (0.055)	0.4958 (0.041)	0.4974 (0.032)	0.4984 (0.027)	0.4988 (0.024)	0.4995 (0.020)	0.4997 (0.014)
	\hat{B}	0.7983 (0.015)	0.4962 (0.042)	0.1946 (0.063)	-0.0034 (0.074)	-0.2050 (0.089)	-0.5044 (0.108)	-1.5074 (0.178)
A = 0.2	\hat{A}	0.1940 (0.078)	0.1961 (0.062)	0.1974 (0.049)	0.1985 (0.042)	0.1995 (0.038)	0.1992 (0.032)	0.1998 (0.020)
	\hat{B}	0.7992 (0.011)	0.4978 (0.031)	0.1970 (0.049)	-0.0032 (0.060)	-0.2022 (0.071)	-0.5035 (0.087)	-1.5038 (0.143)
A = 0.0	\hat{A}	-0.0028 (0.093)	-0.0039 (0.077)	-0.0020 (0.060)	-0.0013 (0.052)	0.0001 (0.044)	0.0004 (0.037)	0.0002 (0.022)
	\hat{B}	0.7997 (0.009)	0.4991 (0.027)	0.1979 (0.042)	-0.0020 (0.052)	-0.2012 (0.061)	-0.5004 (0.074)	-1.5028 (0.118)
A = -0.2	\hat{A}	-0.2061 (0.112)	-0.2039 (0.088)	-0.2025 (0.071)	-0.2007 (0.062)	-0.2006 (0.053)	-0.2003 (0.043)	-0.1991 (0.023)
	\hat{B}	0.7998 (0.009)	0.4988 (0.024)	0.1997 (0.037)	-0.0006 (0.045)	-0.2008 (0.052)	-0.5005 (0.063)	-1.5010 (0.094)
A = -0.5	\hat{A}	-0.5043 (0.139)	-0.5031 (0.106)	-0.5026 (0.085)	-0.5013 (0.075)	-0.4992 (0.064)	-0.4984 (0.049)	-0.4979 (0.019)
	\hat{B}	0.7997 (0.007)	0.5000 (0.020)	0.1991 (0.031)	-0.0006 (0.038)	-0.1990 (0.043)	-0.4985 (0.048)	-1.4953 (0.051)
A = -1.5	\hat{A}	-1.5106 (0.244)	-1.5050 (0.176)	-1.5030 (0.140)	-1.5023 (0.118)	-1.5004 (0.093)	-1.4951 (0.052)	NA (NA)
	\hat{B}	0.7999 (0.005)	0.4997 (0.014)	0.2002 (0.020)	0.0006 (0.023)	-0.1995 (0.023)	-0.4984 (0.019)	NA (NA)

表 3.5: ML 推定量の分布関数

(i) $A = 0.4, B = 0.8, \sigma_1 = 0.6, \sigma_2 = 0.2$

x	正規分布	$T = 100$				$T = 1000$			
		\hat{A}	\hat{B}	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	\hat{A}	\hat{B}	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$
-3.0	0.001	0.006	0.006	0.000	0.001	0.002	0.002	0.000	0.001
-2.5	0.006	0.015	0.015	0.002	0.004	0.008	0.009	0.004	0.005
-2.0	0.023	0.034	0.035	0.013	0.020	0.027	0.027	0.020	0.022
-1.4	0.081	0.088	0.089	0.070	0.076	0.084	0.085	0.079	0.080
-1.0	0.159	0.154	0.151	0.156	0.160	0.157	0.161	0.159	0.159
-0.8	0.212	0.198	0.197	0.218	0.216	0.207	0.211	0.213	0.212
-0.6	0.274	0.254	0.250	0.287	0.281	0.271	0.268	0.273	0.277
-0.4	0.345	0.318	0.313	0.362	0.351	0.337	0.331	0.348	0.346
-0.2	0.421	0.387	0.386	0.444	0.429	0.413	0.408	0.426	0.426
0.0	0.500	0.466	0.463	0.519	0.507	0.491	0.485	0.506	0.503
0.2	0.579	0.547	0.545	0.601	0.586	0.569	0.566	0.587	0.582
0.4	0.655	0.628	0.630	0.673	0.661	0.648	0.645	0.662	0.658
0.6	0.726	0.709	0.712	0.739	0.729	0.721	0.722	0.730	0.726
0.8	0.788	0.782	0.784	0.797	0.792	0.785	0.786	0.790	0.790
1.0	0.841	0.846	0.849	0.844	0.842	0.840	0.844	0.843	0.840
1.4	0.919	0.938	0.940	0.912	0.918	0.921	0.925	0.916	0.919
2.0	0.977	0.991	0.991	0.968	0.973	0.982	0.982	0.975	0.976
2.5	0.994	1.000	0.999	0.989	0.992	0.996	0.996	0.992	0.992
3.0	0.999	1.000	1.000	0.996	0.998	1.000	1.000	0.997	0.999
Q(2.5)	-1.960	-2.225	-2.217	-1.781	-1.905	-2.036	-2.043	-1.909	-1.951
Q(25)	-0.674	-0.612	-0.600	-0.700	-0.691	-0.661	-0.663	-0.680	-0.682
Q(50)	0.000	0.085	0.086	-0.050	-0.018	0.027	0.039	-0.014	-0.009
Q(75)	0.674	0.714	0.704	0.635	0.663	0.679	0.682	0.663	0.675
Q(97.5)	1.960	1.706	1.720	2.116	2.035	1.876	1.872	1.997	1.984
IQR	1.348	1.326	1.304	1.335	1.354	1.340	1.345	1.343	1.357
BIAS	—	-0.029	-0.006	0.000	-0.002	-0.003	-0.001	0.000	0.000
STD	—	0.142	0.031	0.077	0.018	0.043	0.009	0.024	0.006

1. $Q(p)$ は p パーセンタイルを示す.
2. “IQR” は四分位点を示す.
3. “BIAS” は真の値からのバイアスを示す.
4. “STD” は標準誤差を示す.

表 3.6: ML 推定量の分布関数 (続1)

(ii) $A = 0.2, B = -0.2, \sigma_1 = 0.8, \sigma_2 = 1.2$

x	正規分布	$T = 100$				$T = 1000$			
		\hat{A}	\hat{B}	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	\hat{A}	\hat{B}	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$
-3.0	0.001	0.003	0.004	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.001
-2.5	0.006	0.009	0.011	0.004	0.004	0.007	0.007	0.006	0.006
-2.0	0.023	0.028	0.030	0.020	0.018	0.023	0.025	0.021	0.022
-1.4	0.081	0.086	0.086	0.077	0.077	0.084	0.085	0.080	0.079
-1.0	0.159	0.158	0.159	0.158	0.159	0.156	0.158	0.159	0.158
-0.8	0.212	0.206	0.204	0.212	0.214	0.208	0.208	0.210	0.213
-0.6	0.274	0.266	0.262	0.280	0.280	0.268	0.268	0.274	0.273
-0.4	0.345	0.334	0.329	0.352	0.354	0.339	0.339	0.345	0.344
-0.2	0.421	0.406	0.402	0.430	0.430	0.417	0.413	0.424	0.422
0.0	0.500	0.486	0.481	0.509	0.509	0.501	0.496	0.504	0.501
0.2	0.579	0.568	0.562	0.588	0.590	0.579	0.574	0.581	0.580
0.4	0.655	0.647	0.643	0.666	0.664	0.653	0.651	0.658	0.656
0.6	0.726	0.720	0.715	0.732	0.733	0.726	0.723	0.728	0.729
0.8	0.788	0.787	0.784	0.791	0.791	0.788	0.788	0.791	0.793
1.0	0.841	0.841	0.842	0.841	0.841	0.841	0.842	0.841	0.846
1.4	0.919	0.925	0.928	0.918	0.917	0.920	0.922	0.920	0.919
2.0	0.977	0.983	0.985	0.972	0.972	0.979	0.979	0.975	0.975
2.5	0.994	0.997	0.997	0.991	0.991	0.994	0.995	0.993	0.993
3.0	0.999	0.999	1.000	0.998	0.998	0.999	0.999	0.998	0.998
Q(2.5)	-1.960	-2.046	-2.094	-1.896	-1.890	-1.966	-2.002	-1.936	-1.955
Q(25)	-0.674	-0.649	-0.640	-0.683	-0.689	-0.655	-0.658	-0.669	-0.672
Q(50)	0.000	0.032	0.049	-0.025	-0.023	-0.004	0.012	-0.008	-0.003
Q(75)	0.674	0.683	0.697	0.659	0.656	0.673	0.679	0.664	0.665
Q(97.5)	1.960	1.860	1.821	2.047	2.043	1.931	1.926	1.994	1.994
IQR	1.348	1.332	1.337	1.342	1.345	1.328	1.338	1.333	1.337
BIAS	—	-0.004	-0.013	-0.008	-0.008	0.000	-0.001	-0.001	-0.001
STD	—	0.083	0.159	0.071	0.116	0.026	0.049	0.022	0.037

表 3.7: ML 推定量の分布関数 (続 2)

(iii) $A = 0.4, B = 0.8, \sigma_1 = 6.0, \sigma_2 = 2.0$ ($r = 10.0$)

x	正規分布	$T = 100$				$T = 1000$			
		\hat{A}	\hat{B}	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	\hat{A}	\hat{B}	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$
-3.0	0.001	0.006	0.005	0.000	0.000	0.003	0.003	0.001	0.001
-2.5	0.006	0.014	0.013	0.002	0.003	0.009	0.009	0.005	0.006
-2.0	0.023	0.034	0.034	0.013	0.017	0.028	0.027	0.020	0.023
-1.4	0.081	0.088	0.088	0.070	0.079	0.085	0.086	0.077	0.079
-1.0	0.159	0.156	0.153	0.158	0.159	0.157	0.157	0.160	0.160
-0.8	0.212	0.201	0.201	0.217	0.214	0.208	0.204	0.213	0.217
-0.6	0.274	0.255	0.258	0.288	0.278	0.267	0.265	0.280	0.278
-0.4	0.345	0.318	0.321	0.361	0.351	0.334	0.331	0.351	0.346
-0.2	0.421	0.389	0.391	0.443	0.432	0.408	0.407	0.428	0.422
0.0	0.500	0.465	0.468	0.524	0.511	0.485	0.488	0.507	0.500
0.2	0.579	0.544	0.550	0.602	0.588	0.566	0.570	0.585	0.579
0.4	0.655	0.627	0.635	0.672	0.661	0.645	0.649	0.659	0.653
0.6	0.726	0.708	0.711	0.737	0.731	0.720	0.720	0.727	0.725
0.8	0.788	0.781	0.782	0.795	0.792	0.787	0.788	0.787	0.790
1.0	0.841	0.846	0.846	0.842	0.843	0.842	0.845	0.841	0.841
1.4	0.919	0.942	0.934	0.912	0.916	0.925	0.923	0.918	0.920
2.0	0.977	0.992	0.991	0.967	0.973	0.982	0.982	0.976	0.976
2.5	0.994	1.000	0.999	0.989	0.991	0.996	0.996	0.992	0.993
3.0	0.999	1.000	1.000	0.997	0.998	0.999	0.999	0.998	0.999
Q(2.5)	-1.960	-2.173	-2.176	-1.786	-1.887	-2.056	-2.048	-1.926	-1.960
Q(25)	-0.674	-0.617	-0.621	-0.701	-0.682	-0.654	-0.647	-0.686	-0.689
Q(50)	0.000	0.089	0.080	-0.057	-0.028	0.035	0.029	-0.018	0.001
Q(75)	0.674	0.715	0.705	0.647	0.656	0.688	0.681	0.673	0.673
Q(97.5)	1.960	1.692	1.738	2.109	2.044	1.884	1.885	1.987	1.967
IQR	1.348	1.331	1.325	1.348	1.339	1.342	1.328	1.359	1.362
BIAS	—	-0.027	-0.005	0.003	-0.018	-0.003	-0.001	-0.002	-0.002
STD	—	0.142	0.031	0.769	0.176	0.044	0.009	0.244	0.056

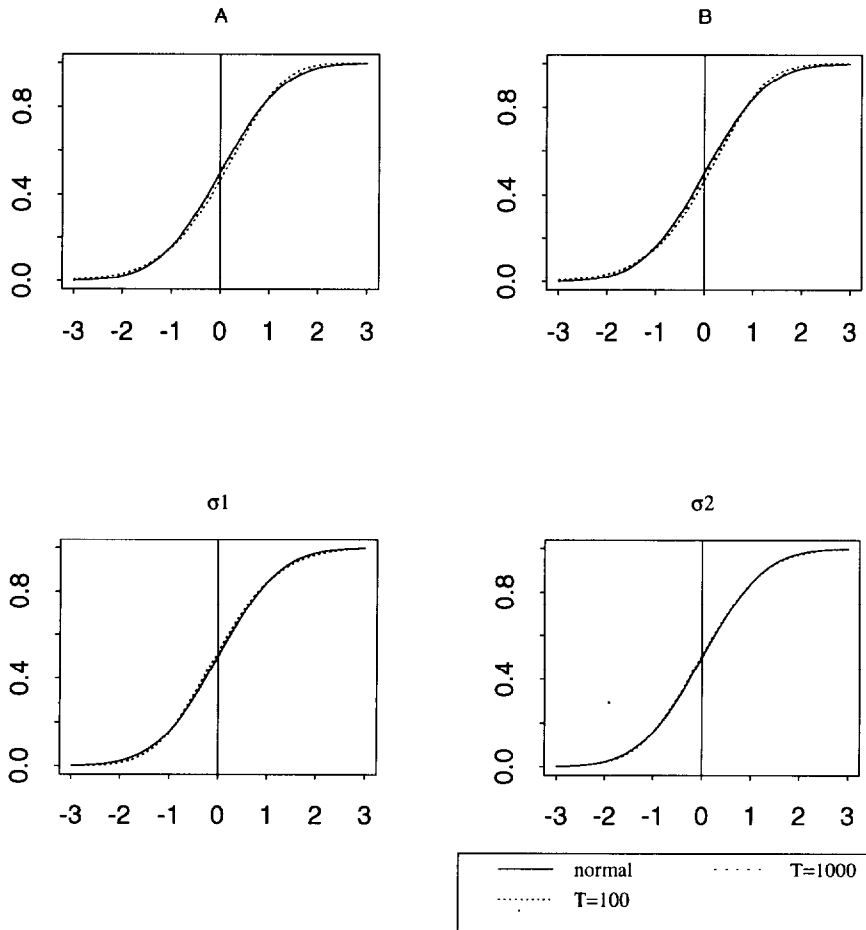


図 3.2: ML 推定値の分布関数

立っていると考えられる。また、 $A = 0.4$, $B = 0.8$, $\sigma_1 = 0.6$, $\sigma_2 = 0.2$ のケースについてはこの分布関数を図 3.2 に描いた。

図 3.3 ではこのようなシミュレーションで求めた ML 推定量のヒストグラムを表示した。これを見ても上記のことが確認できる。最後に、ここで提案された ML 推定量は正規尤度に基づくものであり、その頑健性について考えたい。そのために、次のようなモンテカルロ・シミュレーションを行う。 $\{u_t\}$ が正規分布に従わないケースに対して擬似最尤法による推定値を求める。つまり、 $\{u_t\}$ に関する仮定が崩れている場合について、それがあたかも正規分布をしていると思って推定量を求める。ここでは、 $\{u_t\}$ に対して以下のようなガウス和の分布をおく。

$$u_t \sim \begin{cases} N(0, \frac{1}{3}) & (\text{Prob. } 0.5) \\ N(0, \frac{5}{3}) & (\text{Prob. } 0.5) \end{cases} \quad (3.30)$$

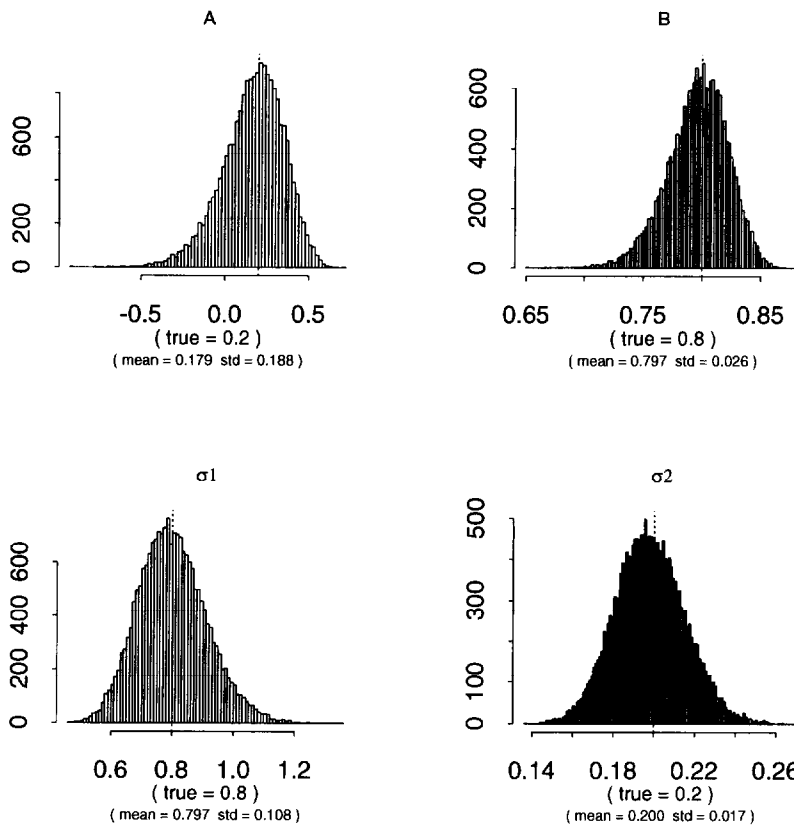


図 3.3: ML 推定値のヒストグラム

この分布に対するはじめの4つのモーメントは $E(u_t) = 0$, $Var(u_t) = 1$, $Skewness(u_t) = 0$ (歪度), および $Kurtosis(u_t) = 4 + \frac{1}{3}$ (尖度) となる。

前と同じようにこの時の擬似最尤推定量の標本平均を表3.8,3.9に示した。これから仮定が成立している時の最尤推定量とこの擬似最尤推定量を比較すると、それほど大きなバイアスが生じているわけではないことがわかった。したがって、ここで示した分布の場合では、誤差項の分布のそれほど気にすることもないといえる。しかしながら、このガウス和分布は左右対称な分布であった。そこで、次の章では誤差項の分布が非対称になるケースを扱う。

表 3.8: ノイズがガウス和の時の ML 推定値の平均

T = 100

		B = 0.8	B = 0.5	B = 0.2	B = 0.0	B = -0.2	B = -0.5	B = -1.5
A = 0.8	\hat{A}	0.7741 (0.075)	0.7910 (0.036)	0.7948 (0.025)	0.7953 (0.021)	0.7968 (0.019)	0.7979 (0.016)	0.7991 (0.011)
	\hat{B}	0.7742 (0.073)	0.4266 (0.161)	0.0771 (0.250)	-0.1708 (0.326)	-0.3930 (0.386)	-0.7589 (0.493)	-1.9379 (0.867)
A = 0.5	\hat{A}	0.4289 (0.159)	0.4779 (0.104)	0.4885 (0.076)	0.4938 (0.063)	0.4946 (0.054)	0.4963 (0.046)	0.4982 (0.031)
	\hat{B}	0.7911 (0.036)	0.4775 (0.105)	0.1589 (0.162)	-0.0532 (0.204)	-0.2695 (0.245)	-0.5923 (0.310)	-1.6555 (0.533)
A = 0.2	\hat{A}	0.0759 (0.249)	0.1547 (0.168)	0.1824 (0.123)	0.1879 (0.102)	0.1940 (0.087)	0.1942 (0.073)	0.2000 (0.045)
	\hat{B}	0.7944 (0.025)	0.4896 (0.073)	0.1828 (0.123)	-0.0197 (0.145)	-0.2286 (0.178)	-0.5341 (0.226)	-1.5575 (0.379)
A = 0.0	\hat{A}	-0.1578 (0.315)	-0.0574 (0.206)	-0.0270 (0.150)	-0.0155 (0.127)	-0.0082 (0.108)	-0.0059 (0.088)	0.0010 (0.052)
	\hat{B}	0.7961 (0.022)	0.4931 (0.064)	0.1882 (0.101)	-0.0124 (0.125)	-0.2144 (0.150)	-0.5187 (0.186)	-1.5231 (0.311)
A = -0.2	\hat{A}	-0.4031 (0.389)	-0.2746 (0.246)	-0.2260 (0.179)	-0.2142 (0.149)	-0.2091 (0.126)	-0.2044 (0.100)	-0.1992 (0.054)
	\hat{B}	0.7972 (0.018)	0.4939 (0.054)	0.1951 (0.088)	-0.0090 (0.106)	-0.2081 (0.127)	-0.5068 (0.152)	-1.5034 (0.230)
A = -0.5	\hat{A}	-0.7547 (0.496)	-0.5918 (0.310)	-0.5378 (0.224)	-0.5205 (0.191)	-0.5093 (0.151)	-0.5023 (0.117)	-0.4913 (0.045)
	\hat{B}	0.7978 (0.016)	0.4973 (0.045)	0.1950 (0.072)	-0.0060 (0.088)	-0.2034 (0.100)	-0.4992 (0.115)	-1.4798 (0.124)
A = -1.5	\hat{A}	-1.9115 (0.855)	-1.6634 (0.534)	-1.5655 (0.389)	-1.5222 (0.306)	-1.4908 (0.231)	-1.4794 (0.123)	NA (NA)
	\hat{B}	0.7987 (0.012)	0.4986 (0.031)	0.1993 (0.046)	0.0010 (0.051)	-0.1970 (0.054)	-0.4921 (0.044)	NA (NA)

表 3.9: ノイズがガウス和の時の ML 推定値の平均 (続き)

T=500

		B = 0.8	B = 0.5	B = 0.2	B = 0.0	B = -0.2	B = -0.5	B = -1.5
A = 0.8	\hat{A}	0.7945 (0.029)	0.7973 (0.015)	0.7982 (0.011)	0.7984 (0.009)	0.7985 (0.008)	0.7989 (0.007)	0.7994 (0.005)
	\hat{B}	0.7946 (0.029)	0.4561 (0.075)	0.1073 (0.133)	-0.1271 (0.174)	-0.3593 (0.214)	-0.7136 (0.282)	-1.8784 (0.500)
A = 0.5	\hat{A}	0.4545 (0.076)	0.4949 (0.043)	0.4995 (0.032)	0.4998 (0.027)	0.5002 (0.024)	0.4999 (0.020)	0.5000 (0.013)
	\hat{B}	0.7969 (0.015)	0.4949 (0.043)	0.1815 (0.072)	-0.0320 (0.091)	-0.2431 (0.112)	-0.5573 (0.140)	-1.6170 (0.247)
A = 0.2	\hat{A}	0.1055 (0.134)	0.1839 (0.070)	0.1960 (0.053)	0.1992 (0.044)	0.1994 (0.038)	0.2001 (0.031)	0.2005 (0.020)
	\hat{B}	0.7978 (0.011)	0.4993 (0.032)	0.1952 (0.052)	-0.0061 (0.066)	-0.2110 (0.078)	-0.5203 (0.099)	-1.5310 (0.163)
A = 0.0	\hat{A}	-0.1283 (0.175)	-0.0272 (0.091)	-0.0075 (0.065)	-0.0031 (0.055)	-0.0003 (0.046)	0.0000 (0.038)	0.0001 (0.023)
	\hat{B}	0.7983 (0.009)	0.5005 (0.027)	0.1988 (0.044)	-0.0031 (0.055)	-0.2043 (0.065)	-0.5062 (0.081)	-1.5046 (0.132)
A = -0.2	\hat{A}	-0.3578 (0.215)	-0.2413 (0.110)	-0.2115 (0.078)	-0.2048 (0.065)	-0.2035 (0.055)	-0.2007 (0.044)	-0.1999 (0.024)
	\hat{B}	0.7986 (0.008)	0.5001 (0.024)	0.2001 (0.038)	-0.0006 (0.047)	-0.2023 (0.055)	-0.5016 (0.068)	-1.4919 (0.103)
A = -0.5	\hat{A}	-0.7098 (0.279)	-0.5582 (0.139)	-0.5194 (0.099)	-0.5070 (0.081)	-0.5016 (0.067)	-0.5000 (0.051)	-0.4986 (0.019)
	\hat{B}	0.7991 (0.007)	0.5004 (0.020)	0.1999 (0.032)	0.0000 (0.038)	-0.2004 (0.044)	-0.4997 (0.051)	-1.4937 (0.053)
A = -1.5	\hat{A}	-1.8703 (0.494)	-1.6156 (0.249)	-1.5338 (0.166)	-1.5059 (0.135)	-1.4961 (0.103)	-1.4942 (0.053)	NA (NA)
	\hat{B}	0.7996 (0.005)	0.4999 (0.013)	0.2001 (0.020)	-0.0001 (0.023)	-0.1998 (0.024)	-0.4984 (0.019)	NA (NA)

3.5 3章の数学的付録

Lemma 3.1 : (3.20)式で表される対数尤度の確率過程を偏微分したもの, $\left\{ \frac{\partial \log L_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right\}$ はマルチンゲール過程である.

$$E \left[\frac{\partial \log L_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = \frac{\partial \log L_{t-1}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad (3.31)$$

ただし, \mathcal{F}_{t-1} は $\{\mathbf{y}_s, s \leq t-1\}$ によって生成される σ -集合体である.

次の2つの Lemma は部分行列を使って直接得られる結果であるので, 証明は省略する.

Lemma 3.2 : $p \times p$ の正定値行列 \mathbf{A} が $(q+(p-q)) \times (q+(p-q))$ の部分行列 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})$ に分解できるとする. この時, どんな $q \times r$ の行列 \mathbf{B} , $(p-q) \times r$ の行列 \mathbf{C} ($p-q > 0$), および $r \times r$ の行列 \mathbf{D} に対しても

$$\min_{\mathbf{B}} \operatorname{tr} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{D} (\mathbf{B}', \mathbf{C}') = \operatorname{tr} \mathbf{C}' (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}) \mathbf{C} \mathbf{D} \quad (3.32)$$

が成立する. ただし, 最小値は $\mathbf{B} = -\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{C}$ でとる.

Lemma 3.3 : $q \times q$ の正定値行列 \mathbf{C} が $(r+(q-r)) \times (r+(q-r))$ の部分行列 $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{ij})$ に分解できるとする. この時, どんな $p \times r$ の行列 \mathbf{A} および $p \times (q-r)$ の行列 \mathbf{B} ($q-r > 0$) に対しても

$$\min_{\mathbf{B}} \operatorname{tr} (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \operatorname{tr} \mathbf{A} (\mathbf{C}_{11} - \mathbf{C}_{12} \mathbf{C}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{21}) \mathbf{A}' \quad (3.33)$$

が成立する. ただし, 最小値は $\mathbf{B} = -\mathbf{A} \mathbf{C}_{12} \mathbf{C}_{22}^{-1}$ でとる.

定理 3.2 の証明: [i]: ここでは, 一般性を欠くことなく $\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{0}$ ($i = 1, 2$) と仮定してよい. 整合条件より $\mathbf{e}'_m \mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_{t-1}$ は $v_{mt}^{(1)} \equiv (1/\sigma_1) \mathbf{e}'_m \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_t \geq \mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}$ と同値である. これより, 定義関数 $I_t^{(i)}$ ($i = 1, 2$) は $I_t^{(1)} = I(v_{mt}^{(1)} \geq \mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1})$ および $I_t^{(2)} = I(v_{mt}^{(2)} < \mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1})$ と書き直せる.

ここで用いる目的関数は次のように与えられる.

$$Q_T(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^2 Q_{iT}(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.34)$$

ただし,

$$Q_{iT}(\boldsymbol{\theta}) = -\log |\boldsymbol{\Sigma}_i| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I_t^{(i)} \quad (3.35)$$

$$- \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \mathbf{A}_i \mathbf{y}_{t-1})' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{A}_i \mathbf{y}_{t-1}) I_t^{(i)},$$

で, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}$ である.

$\boldsymbol{\theta}_0$ を Θ の内部にある $\boldsymbol{\theta}$ の真の値とする. そして, $\boldsymbol{\Sigma}_i^{(0)}, \mathbf{A}_i^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)}, \sigma_i^{(0)}$ ($i = 1, 2$) も対応するパラメータの行列またはベクトルの真値だとする. \mathbf{y}_t を真のパラメータで表し, (3.1) 式を (3.35) 式に代入すると,

$$Q_{iT}(\boldsymbol{\theta}) = -\log |\boldsymbol{\Sigma}_i| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I_t^{(i)} \quad (3.36)$$

$$- \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [(\mathbf{A}_i^{(0)} - \mathbf{A}_i) \mathbf{y}_{t-1} + \sigma_i^{(0)} \mathbf{v}_t^{(i)}]' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} [(\mathbf{A}_i^{(0)} - \mathbf{A}_i) \mathbf{y}_{t-1} + \sigma_i^{(0)} \mathbf{v}_t^{(i)}] I_t^{(i)}.$$

となる. 同じようにして $I_t^{(i)}$, \mathbf{y}_{t-1} と $\mathbf{v}_t^{(i)}$ のモーメント行列も真の値 $\boldsymbol{\theta}_0$ で評価するとそれぞれ, $c^{(i)} = E [I_t^{(i)}]$, $\mathbf{C}_{yy}^{(i)} = E [\mathbf{y}_{t-1} \mathbf{y}_{t-1}' I_t^{(i)}]$, $\mathbf{C}_{vy}^{(i)} = E [\mathbf{v}_t^{(i)} \mathbf{y}_{t-1}' I_t^{(i)}]$, および $\mathbf{C}_{vv}^{(i)} = E [\mathbf{v}_t^{(i)} \mathbf{v}_t^{(i)' I_t^{(i)}]$. になる. 従って, $Q_{iT}(\boldsymbol{\theta})$ は以下のように $\boldsymbol{\theta}$ に関して一様に L^1 -収束する.

$$Q_i(\boldsymbol{\theta}) = -c^{(i)} \log |\boldsymbol{\Sigma}_i| - \text{tr} [(\mathbf{A}_i^{(0)} - \mathbf{A}_i)' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{A}_i^{(0)} - \mathbf{A}_i) \mathbf{C}_{yy}^{(i)}] \quad (3.37)$$

$$- 2\sigma_i^{(0)} \text{tr} [(\mathbf{A}_i^{(0)} - \mathbf{A}_i)' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{C}_{vy}^{(i)}] - \sigma_i^{(0)2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{C}_{vv}^{(i)}]$$

ここで, $Q(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^2 Q_i(\boldsymbol{\theta})$ が $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ において必ず最大値をとることを示せばよいが, $Q_i(\boldsymbol{\theta})$ が $\boldsymbol{\theta}$ について複雑な関数であるのでいくつかのステップに分けて考える.

まず, $Q_i(\boldsymbol{\theta})$ を $\mathbf{e}_j' \mathbf{A}_i$ ($j = 1, \dots, m-1$) について最大化する. $\mathbf{A}_i^{(0)}$ と \mathbf{A}_i を $((m-1) + 1) \times m$ の部分行列に分割すると

$$\mathbf{A}_i^{(0)} - \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1i}^{(0)} - \mathbf{A}_{1i} \\ \sigma_i \mathbf{r}' - \sigma_i^{(0)} \mathbf{r}^{(0)'} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

となるので, Lemma 3.2 を使うと, \mathbf{A}_{1i} に関して $Q_i(\boldsymbol{\theta})$ を最大化することができる. したがって,

$$Q_i(\boldsymbol{\theta}) \leq Q_i^*(\boldsymbol{\theta}) = -c^{(i)} \log |\boldsymbol{\Sigma}_i| \quad (3.39)$$

$$- \frac{1}{\sigma_i^2} \left[(\sigma_i \mathbf{r} - \sigma_i^{(0)} \mathbf{r}^{(0)})' - \sigma_i^{(0)} \mathbf{e}_m' \mathbf{C}_{vy}^{(i)} \mathbf{C}_{yy}^{(i)-1} \right]$$

$$\begin{aligned} & \times \mathbf{C}_{yy}^{(i)} \left[(\sigma_i \mathbf{r} - \sigma_i^{(0)} \mathbf{r}^{(0)}) - \sigma_i^{(0)} \mathbf{C}_{yy}^{(i)-1} \mathbf{C}_{yv}^{(i)} \mathbf{e}_m \right] \\ & - (\sigma_i^{(0)})^2 \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{C}_{vv.y}^{(i)} \right] , \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\mathbf{C}_{vv.y}^{(i)} = \mathbf{C}_{vv}^{(i)} - \mathbf{C}_{vy}^{(i)} \mathbf{C}_{yy}^{(i)-1} \mathbf{C}_{yv}^{(i)}$ である。また (3.39) 式の等号は

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{1i}^{(0)} - \mathbf{A}_{1i} - \sigma_i^{(0)} J_1' \mathbf{C}_{vy}^{(i)} \mathbf{C}_{yy}^{(i)-1} \\ & = \frac{\sigma_{12}^{(i)}}{\sigma_i^2} \left[(\sigma_i \mathbf{r} - \sigma_i^{(0)} \mathbf{r}^{(0)})' - \sigma_i^{(0)} \mathbf{e}_m' \mathbf{C}_{vy}^{(i)} \mathbf{C}_{yy}^{(i)-1} \right] , \end{aligned} \quad (3.40)$$

のときに成立する。ここで、 $J_1' = (I_{m-1}, 0)$ である。

次に、 $m \times m$ の行列 $\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}$ を $((m-1)+1) \times ((m-1)+1)$ の部分行列に分割する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} & = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{(i)} & \sigma_{12}^{(i)} \\ \sigma_{21}^{(i)} & \sigma_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ & = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_i^2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m' + \begin{pmatrix} I_{m-1} \\ -\frac{\sigma_{21}^{(i)}}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{(i)-1} \begin{pmatrix} I_{m-1} & -\frac{\sigma_{12}^{(i)}}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (3.41)$$

ただし $\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{(i)} = \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{(i)} - \sigma_{12}^{(i)} \sigma_{21}^{(i)} / \sigma_i^2$ である。この分散共分散行列は次のようにも表すことができる。

$$\boldsymbol{\Sigma}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{i1} \mathbf{D}_{i1}' & \sigma_i \mathbf{D}_{i1} \mathbf{d} \\ \sigma_i \mathbf{d}' \mathbf{D}_{i1}' & \sigma_i^2 \end{pmatrix} , \quad (3.42)$$

ただし、 \mathbf{D}_{i1} ($i=1, 2$) は $(m-1) \times m$ の行列である。そこで、一般性を失うことなく $\mathbf{d}' = (0, \dots, 0, 1)$ とおくことができる。このように基準化することにより、問題を未知パラメータ $\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{(i)}, \sigma_{12}^{(i)}$ および σ_i に関する $Q_i(\boldsymbol{\theta})$ の最大化と捉えることができる。従って、 $|\boldsymbol{\Sigma}_i| = |\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{(i)}| \sigma_i^2$ ということと、Anderson (1984) の Lemma 2.6.1 を援用して $\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{(i)}$ に関して $Q_i^*(\boldsymbol{\theta})$ を最大化すると、最大値は以下の時に起こる。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{(i)} = \frac{\sigma_i^{(0)2}}{c^{(i)}} \begin{bmatrix} I_{m-1} & -\frac{\sigma_{12}^{(i)}}{\sigma_i^2} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{vv.y}^{(i)} \begin{bmatrix} I_{m-1} \\ -\frac{\sigma_{21}^{(i)}}{\sigma_i^2} \end{bmatrix} . \quad (3.43)$$

また、Lemma 3.3 を使うと $\sigma_{12}^{(i)}$ に関して $-c^{(i)} \log |\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{(i)}|$ を最大化することができる。従って、以下のものの最大化問題を考えればよい。

$$\begin{aligned} & Q_i^{**}(\boldsymbol{\theta}) = -c^{(i)} \log \sigma_i^2 \\ & - \frac{1}{\sigma_i^2} \left[(\sigma_i \mathbf{r} - \sigma_i^{(0)} \mathbf{r}^{(0)})' - \sigma_i^{(0)} \mathbf{e}_m' \mathbf{C}_{vy}^{(i)} \mathbf{C}_{yy}^{(i)-1} \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & \times \mathbf{C}_{yy}^{(i)} \left[(\sigma_i \mathbf{r} - \sigma_i^{(0)} \mathbf{r}^{(0)}) - \sigma_i^{(0)} \mathbf{C}_{yy}^{(i)-1} \mathbf{C}_{yv}^{(i)} \mathbf{e}_m \right] \\ & - \frac{\sigma_1^{(0)2}}{\sigma_i^2} \mathbf{e}_m' \mathbf{C}_{vv.y}^{(i)} \mathbf{e}_m . \end{aligned}$$

なぜなら $Q_i^{**}(\boldsymbol{\theta})$ は σ_i の凹関数であり、それを σ_i に関して微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_i^{**}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_i} &= -2c^{(i)} \frac{1}{\sigma_i} \tag{3.45} \\ & - \frac{2}{\sigma_i^2} \left[\sigma_i^{(0)} \mathbf{r}^{(0)'} + \sigma_i^{(0)} \mathbf{e}_m' \mathbf{C}_{yy}^{(i)} \mathbf{C}_{yy}^{(i)-1} \right] \mathbf{C}_{yy}^{(i)} \\ & \quad \times \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\sigma_i^{(0)}}{\sigma_i} \mathbf{r}^{(0)} \right) - \frac{\sigma_i^{(0)}}{\sigma_i} \mathbf{C}_{yy}^{(i)-1} \mathbf{C}_{yv}^{(i)} \mathbf{e}_m \right] \\ & + 2 \frac{\sigma_1^{(0)2}}{\sigma_i^3} \mathbf{e}_m' \mathbf{C}_{vv.y}^{(i)} \mathbf{e}_m . \end{aligned}$$

が得られる. $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ とすることによって,

$$\left. \frac{\partial Q_i^{**}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_i} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = 0 , \tag{3.46}$$

となる. ただしここでは, $\{\mathbf{u}_t\}$ の正規性の仮定から

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_m' \mathbf{C}_{vv}^{(i)} \mathbf{e}_m - c^{(i)} - \mathbf{r}^{(0)'} \mathbf{C}_{yv}^{(i)} \mathbf{e}_m \tag{3.47} \\ & = E \left\{ [(v_{mt}^{(i)})^2 - 1 - (\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}) v_{mt}^{(i)}] I_t^{(i)} \right\} = 0 \end{aligned}$$

という関係を利用した.

最後に $Q^{**}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^2 Q_i^{**}(\boldsymbol{\theta})$ は $m \times 1$ ベクトル, \mathbf{r} の二次形式であることに注意すると, その最大値は

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \frac{\sigma_i^{(0)}}{\sigma_i} \mathbf{r}^{(0)} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma_i^{(0)}}{\sigma_i} \mathbf{C}_{yv}^{(i)} \mathbf{e}_m \tag{3.48} \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma_i^{(0)}}{\sigma_i} E \left[\mathbf{y}_{t-1} \cdot v_{mt}^{(i)} I_t^{(i)} \right] , \end{aligned}$$

で起こることが分かる. また, これは $\sigma_i = \sigma_i^{(0)}$ のとき, 0 になる. このことより, $Q(\boldsymbol{\theta}_0)$ は $Q(\boldsymbol{\theta})$ の唯一の最大値であることが言えた. したがって, Amemiya (1985) の定理 4.1.1 を適用すると, T を無限大にとぼしたとき, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$ が $\boldsymbol{\theta}_0$ に確率収束することが示せる.

[ii] : Let θ_j を $\boldsymbol{\theta}$ の j 番目の要素とする. 対数尤度関数から, その偏微分を考えると,

$$\frac{\partial \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^2 \partial L_{it}(\theta_j) \quad , \quad (3.49)$$

とかける. ただし,

$$\begin{aligned} \partial L_{it}(\theta_j) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \log |\boldsymbol{\Sigma}_i|}{\partial \theta_j} I_t^{(i)} + \sigma_i \mathbf{y}'_{t-1} \left(\frac{\partial \mathbf{A}'_i}{\partial \theta_j} \right) \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{v}_t I_t^{(i)} \\ &\quad - \frac{\sigma_i^2}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}}{\partial \theta_j} \mathbf{v}_t \mathbf{v}'_t I_t^{(i)} \right\} . \end{aligned} \quad (3.50)$$

である.

また, さらに2階の偏微分は

$$\frac{\partial^2 \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_k} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^2 \partial^2 L_{it}(\theta_j, \theta_k) \quad , \quad (3.51)$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned} \partial^2 L_{it}(\theta_j, \theta_k) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log |\boldsymbol{\Sigma}_i|}{\partial \theta_j \partial \theta_k} I_t^{(i)} - \mathbf{y}'_{t-1} \frac{\partial \mathbf{A}'_i}{\partial \theta_j} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \theta_k} \mathbf{y}_{t-1} I_t^{(i)} \\ &+ \sigma_i \left[\mathbf{y}'_{t-1} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'_i}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} + \mathbf{y}'_{t-1} \frac{\partial \mathbf{A}'_i}{\partial \theta_j} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}}{\partial \theta_k} + \mathbf{y}'_{t-1} \frac{\partial \mathbf{A}'_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}}{\partial \theta_j} \right] \mathbf{v}_t I_t^{(i)} \\ &- \frac{\sigma_i^2}{2} \mathbf{v}'_t \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \mathbf{v}_t I_t^{(i)} . \end{aligned} \quad (3.52)$$

である.

$\{\mathbf{v}_t^{(i)}\}$ が $N_m[0, (1/\sigma_i^2)\boldsymbol{\Sigma}_i]$ に従うことから, 次のように条件付期待値の計算ができる.

$$E[\mathbf{v}_t^{(i)} \mid v_{mt}^{(i)}] = \frac{1}{\sigma_i^2} \boldsymbol{\Sigma}_i \mathbf{e}_m v_{mt}^{(i)} \quad , \quad (3.53)$$

および

$$E[\mathbf{v}_t^{(i)} \mathbf{v}_t^{(i)'} \mid v_{mt}^{(i)}] = \frac{1}{\sigma_i^2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11,2}^{(i)} & 0 \\ 0' & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma_i^4} \boldsymbol{\Sigma}_i \mathbf{e}_m \mathbf{e}'_m \boldsymbol{\Sigma}_i v_{mt}^{(i)2} . \quad (3.54)$$

そして, この期待値計算を繰り返すと,

$$\begin{aligned} &E[\partial^2 L_{it}(\theta_j, \theta_k) \mid \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= E\{E[\partial^2 L_{it}(\theta_j, \theta_k) \mid v_{mt}^{(i)}] \mid \mathcal{F}_{t-1}\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log |\Sigma_i|}{\partial \theta_j \partial \theta_k} - \mathbf{y}'_{t-1} \frac{\partial \mathbf{A}'_i}{\partial \theta_j} \Sigma_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \theta_k} \mathbf{y}_{t-1} - \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial^2 \Sigma_i^{-1}}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \Sigma_i \right) \right] E \left[I_t^{(i)} \right] \\
 &+ \frac{1}{\sigma_i} \left[\mathbf{y}'_{t-1} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'_i}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \Sigma_i^{-1} + \mathbf{y}'_{t-1} \frac{\partial \mathbf{A}'_i}{\partial \theta_j} \frac{\partial \Sigma_i^{-1}}{\partial \theta_k} + \mathbf{y}'_{t-1} \frac{\partial \mathbf{A}'_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial \Sigma_i^{-1}}{\partial \theta_j} \right] \Sigma_i \mathbf{e}_m E \left[v_{mt}^{(i)} I_t^{(i)} \right] \\
 &- \frac{1}{2\sigma_i^2} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 \Sigma_i^{-1}}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \Sigma_i \mathbf{e}_m \mathbf{e}'_m \Sigma_i \right] E \left[(v_{mt}^{(i)})^2 - 1 \right] I_t^{(i)}.
 \end{aligned}$$

となる。

定理3.2の条件のもと、いくらかの計算を行うことで、漸近共分散行列が得られる。従って、以下のようなフィッシャー情報行列が求められる。

$$I(\boldsymbol{\theta}) = (I_{jk}) \quad , \quad (3.56)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 I_{jk} &= E \left[-\sum_{i=1}^2 \partial^2 L_{it}(\theta_j, \theta_k) \right] \\
 &= E \left[\sum_{i=1}^2 \partial L_{it}(\theta_j) \sum_{i=1}^2 \partial L_{it}(\theta_k) \right].
 \end{aligned} \quad (3.57)$$

である。

これより、 $\theta_j = r_j$ 、 $\theta_k = \sigma_1$ とおく。この場合、 $\frac{\partial^2 \log |\Sigma_i|}{\partial \theta_j \partial \theta_k} = 0$ 、 $\frac{\partial^2 \mathbf{A}_i}{\partial \theta_k \partial \theta_j} = -\mathbf{e}_m \mathbf{e}'_j$ 、 $\frac{\partial^2 \Sigma_i^{-1}}{\partial \theta_j \partial \theta_k} = 0$ 、および $\frac{\partial \Sigma_i^{-1}}{\partial \theta_k} = -2\sigma_1 \Sigma_i^{-1} \mathbf{e}_m \mathbf{e}'_m \Sigma_i^{-1}$ となることを利用すると、

$$\begin{aligned}
 &E \left[\partial^2 L_{it}(\theta_j, \theta_k) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] \\
 &= -\left(\frac{1}{\sigma_1} \right) (\mathbf{e}'_j \mathbf{y}_{t-1}) (\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}) \sigma_1^2 \mathbf{e}'_m \Sigma_1^{-1} \mathbf{e}_m E \left[I_t^{(1)} \right] \\
 &+ \frac{1}{\sigma_1} (\mathbf{e}'_j \mathbf{y}_{t-1}) (2\sigma_1^2 \mathbf{e}'_m \Sigma_1^{-1} \mathbf{e}_m - 1) E \left[v_{mt}^{(1)} I_t^{(1)} \right].
 \end{aligned} \quad (3.58)$$

となる。

一方、

$$\begin{aligned}
 &E \left[\sum_{i=1}^2 \partial L_{it}(\theta_j) \sum_{i=1}^2 \partial L_{it}(\theta_k) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] \\
 &= E \left\{ \left[-\mathbf{e}'_j \mathbf{y}_{t-1} \sum_{i=1}^2 \sigma_i^2 \mathbf{e}'_m \Sigma_i^{-1} \mathbf{v}_t^{(i)} I_t^{(i)} \right] [\partial L_{it}(\theta_k)] \mid \mathcal{F}_{t-1} \right\}
 \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\sigma_1^2 \mathbf{e}'_j \mathbf{y}_{t-1} E \left\{ \left(\mathbf{e}'_m \Sigma_1^{-1} \mathbf{v}_t \right) \left[\sigma_1^3 \left(\mathbf{e}'_m \Sigma_1^{-1} \mathbf{v}_t^{(1)} \right)^2 - \sigma_1 \left(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1} \right) \left(\mathbf{e}'_m \Sigma_1^{-1} \mathbf{v}_t \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sigma_1 \mathbf{e}'_m \Sigma_1^{-1} \mathbf{e}_m \right] I_t^{(1)} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right\} \\
 &= -\frac{1}{\sigma_1} \mathbf{e}'_j \mathbf{y}_{t-1} E \left\{ \left[w^3 - \left(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1} \right) w^2 - dw \right] I_t^{(1)} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right\} ,
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $w = \mathbf{e}'_m \Sigma_1^{-1} \mathbf{v}_t^{(1)}$ 、 $d = \sigma_1^2 \mathbf{e}'_m \Sigma_1^{-1} \mathbf{e}_m$ である。

さて、 $v = v_{mt}^{(1)}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix} \right], \quad (3.60)$$

であり、 $E[(w-v)^2 \mid v] = d-1$ 、 $E[(w-v)^3 \mid v] = 0$ となる。正規確率変数のこれらの関係から、次のような関係が導かれる、 $E[w \mid v] = v$ 、 $E[w^2 \mid v] = v^2 + d - 1$ 、 $E[w^3 \mid v] = 3v(d-1) + v^3$ 。従って、(3.59)の最後の式の括弧の部分はさらに、次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
 &E \left\{ E \left[w^3 - \left(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1} \right) w^2 - dw \mid v \right] I_t^{(1)} \right\} \\
 &= E \left\{ E \left[H_3(v) - \left(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1} \right) H_2(v) + 2dH_1(v) - d\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1} \mid v \right] I_t^{(1)} \right\} \\
 &= E \left[(2d-1)\phi(\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1}) - d\mathbf{r}' \mathbf{y}_{t-1} E \left(I_t^{(1)} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right) \right],
 \end{aligned} \quad (3.61)$$

ただし、 $H_j(v)$ はエルミート多項式である。(たとえば、 $H_3(v) = v^3 - 3v$ 、 $H_2(v) = v^2 - 1$ 、および $H_1(v) = v$ などである。) 従って、(3.58)式のマイナスをとったものと(3.59)式は同等であることがわかる。また、さらなる計算により(3.56)式のすべての要素が同様であることも示せる。また、定理 3.2 に仮定により

$$\begin{aligned}
 I(\boldsymbol{\theta}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[-\frac{1}{T} \frac{\partial^2 \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \frac{\partial \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{\partial \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right]
 \end{aligned} \quad (3.62)$$

である。

よって、

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Bigg|_{\boldsymbol{\theta}_0} \quad (3.63)$$

に対して、中心極限定理 (CLT) を適用できる。

さらに、Lemma 3.1 より対数尤度関数の偏微分がベクトル値マルチンゲール過程になり、かつ、定理 3.2 の条件下では条件付リンドバーグ条件を満たすことより、Dvoretzky

(1972) によるマルチンゲール中心極限定理が適用できる. 従って, 漸近理論の標準的な議論 (Amemiya (1985) の Section 4 など) を適用することによって定理の結果が得られる. \square

第4章 操作変数法による推定

4.1 最尤推定と操作変数法を使った推定

本章では以下のような定常非線形時系列モデルを扱う。

$$y_t = \begin{cases} \mu_1 + Ay_{t-1} + \sigma_1 \epsilon_t & (\Delta y_t \geq 0) \\ \mu_2 + By_{t-1} + \sigma_2 \epsilon_t & (\Delta y_t < 0) \end{cases} \quad (4.1)$$

ただし、 $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ で、 ϵ_t は独立に同一の分布に従い、 $E(\epsilon_t) = 0, E(\epsilon_t^2) = 1, E(\epsilon_t^4) < \infty, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ である。

上記は SSAR モデルのなかで一番簡単なケースである。 y_{t-1} と ϵ_t が互いに独立であるという仮定をすると、このモデルが一意性をもつために以下のような整合条件が必要である。

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1} = \frac{\mu_2}{\sigma_2} = r_\mu, \quad \frac{1-A}{\sigma_1} = \frac{1-B}{\sigma_2} = r \quad (4.2)$$

従って、独立なパラメータ数は4になる。

さて、標本 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{T-1}, Y_T\}$ が与えられた時のパラメータ推定と検定について2つの方法を提案する。

4.1.1 最尤法 (ML) を用いた推定と検定

(4.1) 式の ϵ_t が標準正規分布に従うと仮定し、標本 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_T\}$ が与えられた場合の最尤法による推定量を考える。

ΔY_t の正負についての情報を次のように表す。

$$I_t = \begin{cases} 1 & \Delta Y_t \geq 0 \\ 0 & \Delta Y_t < 0 \end{cases} .$$

前章で述べたようにガウス型条件付尤度は以下の通りである。

$$A_T = \{t | I_t = 1, t \leq T\}, \quad B_T = \{t | I_t = 0, t \leq T\} \quad (4.3)$$

とする時,

$$L(Y_T, Y_{T-1}, \dots | Y_1) = \prod_{t \in A_T} \frac{1}{\sigma_1} \phi \left(\frac{Y_t - \mu_1 - AY_{t-1}}{\sigma_1} \right) \\ \times \prod_{t \in B_T} \frac{1}{\sigma_2} \phi \left(\frac{Y_t - \mu_2 - BY_{t-1}}{\sigma_2} \right) \quad (4.4)$$

となる。ただし、 $\phi(\cdot)$ は $N(0, 1)$ の密度関数である。

従って,

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1} = \frac{\mu_2}{\sigma_2}, \quad \frac{1-A}{\sigma_1} = \frac{1-B}{\sigma_2} \quad (4.5)$$

という制約条件の下で尤度関数(4.4) を最大にするような $\mu_1, \mu_2, A, B, \sigma_1, \sigma_2$ を求めればよい。

次に SSAR モデルについて,

$$H_0 : A = B \quad (4.6)$$

$$H_1 : A \neq B \quad (4.7)$$

という検定を考える。つまり、SSAR モデルで $A = B$ (このとき整合条件(4.2)により、 $\sigma_1 = \sigma_2$) とすると AR(1) になる。そこで、AR(1) モデルとの比較をすることで非対称性が存在しているかを調べることができる。ここでも、ガウス尤度に基づいた尤度比検定で行なう方法が考えられる。具体的には

$$-2 \log \frac{\max L(A, B | A = B)}{\max L(A, B)} \quad (4.8)$$

が漸近的に $\chi^2(1)$ に従うことを用いる。

上記で示した方法はいずれも尤度に基づく方法であった。従って、誤差項 ϵ_t の分布形に依存することが予想される。

4.1.2 操作変数法 (IV) を用いた推定と検定

次に考える推定量は最尤法の弱点を補うために提案する方法で、誤差項の分布に依存しないように工夫されている。使っている性質は y_{t-1} と ϵ_t とが独立であるという点と、真のパラメータのもとでは u_t の分散が 1 となることである。具体的には標本 $\{Y_t\}, t = 1, \dots, T$ に対して以下のような目的関数を考える。

$$Q_T(\theta) = F_T(\theta)' \Phi_T^{-1} F_T(\theta) \quad (4.9)$$

ただし、 $\theta = (r, r_\mu, \sigma_1, \sigma_2)'$ とし,

$$F_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} u_t \\ u_t^2 - 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\Phi_T = \Omega \otimes \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \end{pmatrix}' \quad (4.11)$$

$$u_t = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1}(Y_t - \mu_1 - AY_{t-1}) & (\Delta Y_t \geq 0) \\ \frac{1}{\sigma_2}(Y_t - \mu_2 - BY_{t-1}) & (\Delta Y_t < 0) \end{cases} \quad (4.12)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1}\Delta Y_t - r_\mu - rY_{t-1} & (\Delta Y_t \geq 0) \\ \frac{1}{\sigma_2}\Delta Y_t - r_\mu - rY_{t-1} & (\Delta Y_t < 0) \end{cases} \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

$$\Omega = E \left[\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \epsilon_t^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_t & \epsilon_t^2 - 1 \end{pmatrix} \right] \quad (4.15)$$

ただし、 \otimes は Kronecker 積を表す。

真のパラメータのもとでは $f_t = (u_t, u_t^2 - 1)'$ と操作変数 $w_t = (1, Y_{t-1})'$ が直交関係にある。実際の推定では Ω が未知であるので、以下の行列で代用することにする。

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} \hat{v}_t^2 & \hat{v}_t(\hat{v}_t^2 - 1) \\ \hat{v}_t(\hat{v}_t^2 - 1) & (\hat{v}_t^2 - 1)^2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

とする。ただし、 \hat{v}_t は仮定 H_0 のもとで $\{Y_t\}$ に AR(1) モデルを当てはめたときの残差をその標準偏差で割ったものである。この $\hat{\Omega}$ については Hansen(1982) のような GMM 推定も考えられるが、以下の取り扱いにおいて、(4.16) 式の場合と比べて、あまり改善することにはならなかったので、(4.16) の形で用いることにする。

この目的関数 $Q_T(\theta)$ を最小にする θ を推定値 $\hat{\theta}_{IV}$ とする。この推定量の一致性と漸近正規性について以下の定理が成り立つ。(付録に略証を示した。)

定理 4.1 (4.1) 式の SSAR モデルが整合条件 (2.30) とこの時の定常条件 (2.70) を満たしているとする。パラメータ空間 Θ を真のパラメータ値 θ_0 の近傍とすると、(4.9) 式を最小にする $\theta = \hat{\theta}_{IV}$ は

$$\hat{\theta}_{IV} \xrightarrow{P} \theta_0 \quad (T \rightarrow \infty), \quad (4.17)$$

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IV} - \theta_0) \xrightarrow{L} N(0, V) \quad (T \rightarrow \infty), \quad (4.18)$$

となる。

ただし、

$$V = \frac{1}{2} \left(\text{plim} \left(\frac{\partial^2 Q(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \Big|_{\theta=\theta_0} \right)^{-1} \quad (4.19)$$

である。

つぎに、この推定量に基づく検定を考える。いま、検定すべきパラメータの制約を

$h(\theta)$ で表し、

$$H_0 : h(\theta) = 0 \quad (4.20)$$

とする。この制約について、Wald タイプの検定統計量を考える。

$$\lambda(\hat{\theta}_{IV}) = T h(\hat{\theta}_{IV})' \left[\frac{\partial h(\hat{\theta}_{IV})}{\partial \theta'} V \frac{\partial h(\hat{\theta}_{IV})}{\partial \theta} \right]^{-1} h(\hat{\theta}_{IV}) \quad (4.21)$$

とすると、 H_0 のもとでこの統計量は χ^2 分布（自由度は制約数になる。）に法則収束する。

ただし、今回は $h(\cdot), V$ に対して、以下のものを使った。

$$h(\theta) = (0, 0, 1, -1)\theta = \sigma_1 - \sigma_2, \quad (4.22)$$

$$V = \hat{V} = [\hat{D}' \Phi_T^{-1} \hat{D}]^{-1} \quad (4.23)$$

ただし、

$$\hat{D} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \frac{\partial f_t(\hat{\theta}_{IV})}{\partial \theta'} \otimes w_t \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} -1 & Y_{t-1} & -\frac{\Delta Y_t I_t}{\hat{\sigma}_1^2} & -\frac{\Delta Y_t I_t^C}{\hat{\sigma}_2^2} \\ -2\hat{u}_t & 2Y_{t-1}\hat{u}_t & -2\frac{\Delta Y_t I_t}{\hat{\sigma}_1^2} \hat{u}_t & -2\frac{\Delta Y_t I_t^C}{\hat{\sigma}_2^2} \hat{u}_t \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

である。ただし、 $I_t^C = 1 - I_t$ で、 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{u}_t$ は $\hat{\theta}_{IV}$ に基づいた推定値である。

以上の検定法を操作変数法 (IV) に基づく検定方式とする。これは先ほどの尤度比検定 (LR) に対応するものといえる。

4.2 シュミレーションによる比較

いくつかのモデルでデータを発生させ、2つの方法の性質を数値的に比較してみる。ここで用いたシュミレーションデータは次の3つである。

1. SSAR モデル

(4.1) 式で定義されたモデルで、 ϵ_t には標準正規分布を仮定し、 $r = 1, r_\mu = 0$ とした。すなわち、双方について理論的な仮定を満たすケースで、正しく推定できるかどうかを調べるためのデータである。なお、 $A = B$ のケースは正規分布に従う AR(1) を発生していることになる。

2. Log-normal を誤差項に持つ AR(1) モデル

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + e_t \quad (4.26)$$

$$\log(e_t) \sim i.i.d.N(0, \sigma^2) \quad (4.27)$$

ただし、 μ は $E(y_t) = 0$ となるように定めた。このモデルは非対称な分布に従う誤差項から生成される AR(1) モデルである。そのため、 $\{y_t\}$ も非対称な系列となる。非対称の度合いは σ が大きいほど大きい。SSAR モデルがダイナミクスに非対称性が入っているのに対して、このモデルは構造が線形ながら、誤差項の部分が非対称になっているのである。しかしながら、データを眺める程度ではどちらも似たような系列に見えてしまう。従って、この2つのモデルが区別できるかを調べてみる。

3. 2区分正規分布に従う誤差項を持つ AR(1) モデル

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + e_t \quad (4.28)$$

$$e_t = \begin{cases} \sigma n_t & (n_t \geq 0) \\ n_t & (n_t < 0) \end{cases} \quad (4.29)$$

$$n_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (4.30)$$

ただし、 μ は $E(y_t) = 0$ となるように定めた。ここで定義した2区分正規分布は John (1982) による、"Two-Piece Normal Distribution" を少し修正したものである。このモデルも非対称な誤差項をもつ線形時系列モデルで、 σ が1から離れるにつれて、非対称になっていく。2のモデルと比べると、こちらの方がSSARモデルに近い形をしている。

なお、これら3つのモデルに従うサンプルパスを図4.1に描いた。かなり似ていることが分かる。これら3つのモデルに従うデータをそれぞれの係数につき500回発生させて、MLタイプ、IVタイプの推定、検定を行った。推定量については表4.1-4.4にA、Bの推定値の平均をまとめた。括弧の中は標準偏差である。検定については、表4.5-4.7に各検定統計量の平均を掲載した。括弧の中は有意水準5%で検定を行ったときの棄却率である。サンプルサイズはSSARのケースで500の場合をやっているほかはすべて1500である。

4.2.1 推定量の比較

真のモデルがSSARのケース(表4.1,4.2)をみると、どちらの方法もほぼ正しい推定をしていることが分かる。真のAとBの差が大きいときに、小さい方の推定値が多少バイアスをもつことがあるが、これもデータ数が増えれば真の値に近づく。ただし、

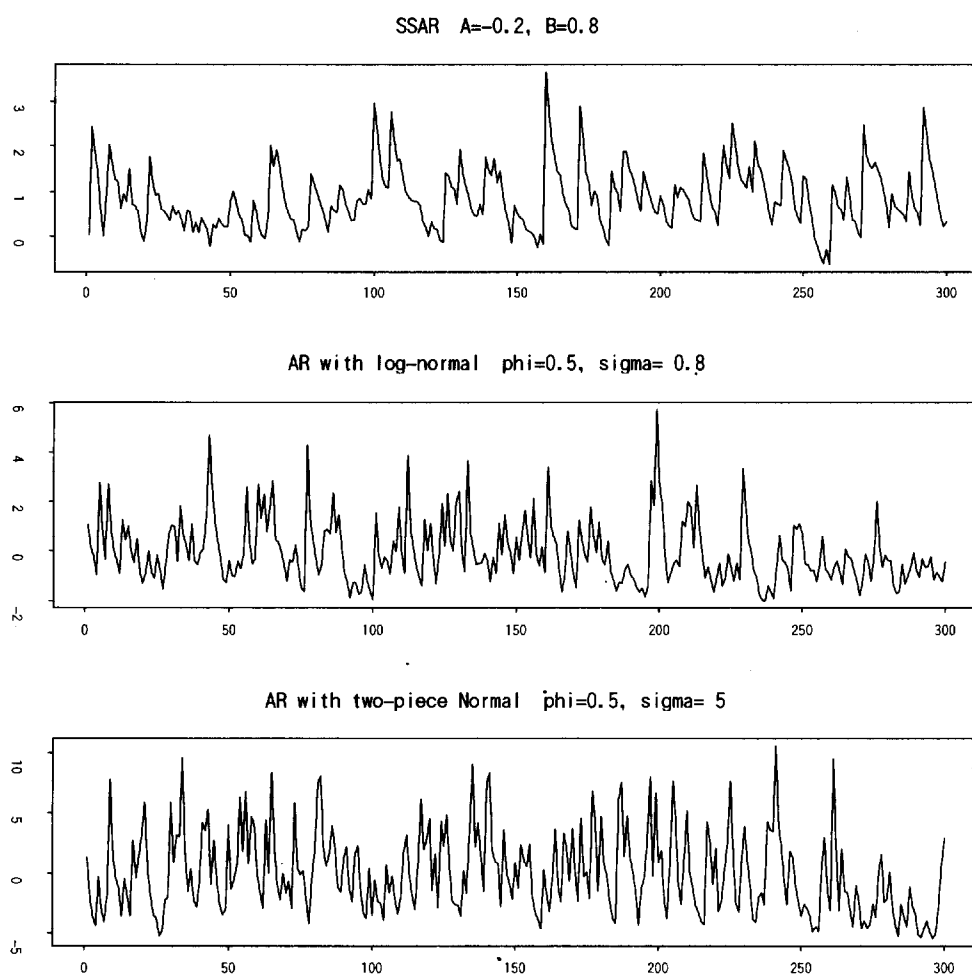


図 4.1: 各モデルのサンプルパス

標準偏差をみると ML の方が総じて小さい。 $T = 500$ の結果では、バイアスと標準偏差の面で ML に比べて操作変数法は劣っていた。これらの結果から操作変数法を用いる方法は最尤法に比べて効率が落ちることがわかった。

次に、真のモデルが非対称分布に従う誤差項をもつ AR(1) のケース (表4.3,4.4) をみてみる。この場合、真のモデルは AR(1) なので、SSAR モデルをあてはめても、 $A = B = \phi$ となることが期待される。しかしながら、ML の推定値はそれからかなり外れてしまう。 $A = B$ であるのに、明らかに $A \neq B$ であるという推定をしてしまう。例えば、表4.3で $\phi = -0.5, \sigma \geq 0.7$ のケースでは、 A と B の両方が真の ϕ の値から外れてしまっている。この傾向は、誤差項の非対称性が増すにつれて顕著に表れる。この結果は、ガウス尤度を使った最尤法には誤差項の非対称性に対する頑健性がないということを示している。これは、線形時系列モデルとの大きな違いである。なお、2区分正規分布に従うケースについては、 B の結果は、 A の結果の表を左右逆にしたような結果が出た。これは、 σ の値によって、誤差項の非対称性が逆転しているからだと考えられる。

それに対して、操作変数法 (IV 法) を使った推定では、ほぼ $A = B = \phi$ という結果が得られ、ML の時と好対照な結果が得られた。これより、IV 法は効率の面で ML 法に劣るものの、誤差項の分布に関する頑健性では、はるかに優れているといえる。実際の解析では、誤差項がどのような分布に従っているかは未知のケースが多く、今回提案した方法を試すことにより、最尤法の欠点を補完できると考えられる。

4.2.2 検定の比較

真のモデルが SSAR モデルのとき (表4.5) は、2つの検定方式、尤度比検定 (LR)、操作変数法に基づくワルド検定 (WIV) のどちらも、期待通りの結果となっている。つまり、棄却率が $A = B$ では有意水準と同じ 0.05 程度になっているが、それ以外は 1 に近い。しかしながら、 $A = 0.9, B = -0.9$ のケースで WIV での検出力が落ちている。これは、サンプルサイズに依存するようで、データ数が十分大きければ ($T=5000$) そのような問題が起こらないことが別のシミュレーションで分かっている。つまり、WIV については、サンプルサイズが小さいときに検出力が劣ってしまう欠点がある。

次に非対称分布に従う誤差項をもつ AR(1) のケース (表4.6,4.7) をみてみる。LR の場合、誤差項の非対称性が少ないケース以外は、すべて棄却してしまっている。つまり、LR を使うとこのように AR(1) に従っているにもかかわらず、誤って SSAR であると検定してしまう。これに対して WIV では、どちらの分布でも、有意水準程度の棄却率しかない。また、注目すべき点は χ^2 値の平均が 1 より小さくなることが多いということであろう。この原因については、あまりよくわかっていないが、 Ω のとり方の問題であるかもしれない。いずれにせよ、この結果を見る限り、検定においても操作変数法に基づいた方法が頑健であるといえる。

しかしながら、これをもって操作変数法が、最尤法にとって代わる方法と結論付け

るのは性急であろう。やはり、最尤法や尤度比検定が持っている高い検出力は捨てがたく、操作変数法は補助的な役割を担うことが期待されるのではないか。現実の分析においては二つの方法を行い、その結果が異なるときには、さらに詳しい分析を行うのが望ましいやり方であると考えられる。LRとWIVを併用することでモデルの特定化に関してだけでなく、誤差項の分布に対する仮定のチェックも行える。また、他の非線型モデルの可能性なども考慮する余地が残る。

表 4.1: (推定値の比較) 真のモデル: SSAR モデル ($T = 500$)

ML 法 : A の推定値の平均

	$B = -0.9$	$B = -0.5$	$B = -0.1$	$B = 0$	$B = 0.3$	$B = 0.6$	$B = 0.9$
$A = -0.9$	-0.902 (0.03)	-0.905 (0.07)	-0.911 (0.10)	-0.911 (0.10)	-0.902 (0.12)	-0.914 (0.14)	-0.755 (0.57)
$A = -0.5$	-0.500 (0.04)	-0.503 (0.06)	-0.504 (0.08)	-0.499 (0.08)	-0.510 (0.10)	-0.507 (0.11)	-0.428 (0.39)
$A = -0.1$	-0.103 (0.04)	-0.100 (0.05)	-0.096 (0.06)	-0.107 (0.06)	-0.108 (0.08)	-0.104 (0.09)	-0.106 (0.13)
$A = 0$	-0.001 (0.04)	-0.003 (0.04)	-0.002 (0.05)	-0.002 (0.06)	-0.012 (0.07)	-0.009 (0.08)	-0.014 (0.11)
$A = 0.3$	0.298 (0.03)	0.300 (0.03)	0.295 (0.04)	0.298 (0.04)	0.298 (0.05)	0.295 (0.06)	0.291 (0.09)
$A = 0.6$	0.599 (0.02)	0.599 (0.02)	0.596 (0.03)	0.599 (0.03)	0.599 (0.03)	0.595 (0.04)	0.588 (0.05)
$A = 0.9$	0.911 (0.03)	0.904 (0.02)	0.900 (0.01)	0.898 (0.01)	0.899 (0.01)	0.897 (0.01)	0.893 (0.02)

ML 法 : B の推定値の平均

	$B = -0.9$	$B = -0.5$	$B = -0.1$	$B = 0$	$B = 0.3$	$B = 0.6$	$B = 0.9$
$A = -0.9$	-0.895 (0.04)	-0.500 (0.04)	-0.099 (0.04)	-0.000 (0.04)	0.298 (0.03)	0.601 (0.02)	0.909 (0.03)
$A = -0.5$	-0.903 (0.07)	-0.505 (0.06)	-0.098 (0.05)	-0.005 (0.04)	0.297 (0.03)	0.598 (0.02)	0.905 (0.02)
$A = -0.1$	-0.907 (0.10)	-0.506 (0.08)	-0.104 (0.06)	-0.005 (0.05)	0.298 (0.04)	0.598 (0.03)	0.900 (0.01)
$A = 0$	-0.909 (0.11)	-0.509 (0.08)	-0.101 (0.06)	-0.000 (0.06)	0.297 (0.04)	0.598 (0.03)	0.899 (0.01)
$A = 0.3$	-0.903 (0.12)	-0.503 (0.09)	-0.105 (0.07)	-0.008 (0.07)	0.299 (0.05)	0.598 (0.03)	0.898 (0.01)
$A = 0.6$	-0.909 (0.15)	-0.504 (0.12)	-0.107 (0.09)	-0.006 (0.08)	0.295 (0.06)	0.593 (0.04)	0.898 (0.01)
$A = 0.9$	-0.702 (0.61)	-0.440 (0.34)	-0.115 (0.13)	-0.023 (0.12)	0.291 (0.09)	0.588 (0.06)	0.892 (0.02)

* 括弧の中は標準偏差を示す。

表 4.1: (続き)

IV 法 : A の推定値の平均							
	$B = -0.9$	$B = -0.5$	$B = -0.1$	$B = 0$	$B = 0.3$	$B = 0.6$	$B = 0.9$
$A = -0.9$	-0.905 (0.08)	-0.914 (0.11)	-0.922 (0.15)	-0.930 (0.16)	-0.926 (0.20)	-0.945 (0.29)	-1.138 (0.77)
$A = -0.5$	-0.506 (0.06)	-0.504 (0.08)	-0.507 (0.10)	-0.506 (0.11)	-0.516 (0.14)	-0.548 (0.24)	-0.638 (0.55)
$A = -0.1$	-0.102 (0.05)	-0.102 (0.06)	-0.100 (0.07)	-0.106 (0.08)	-0.110 (0.11)	-0.114 (0.14)	-0.196 (0.36)
$A = 0$	0.000 (0.05)	-0.003 (0.05)	-0.003 (0.07)	-0.001 (0.07)	-0.016 (0.10)	-0.021 (0.13)	-0.094 (0.35)
$A = 0.3$	0.300 (0.03)	0.302 (0.04)	0.294 (0.05)	0.296 (0.05)	0.299 (0.07)	0.292 (0.09)	0.243 (0.22)
$A = 0.6$	0.600 (0.02)	0.599 (0.03)	0.597 (0.03)	0.599 (0.03)	0.601 (0.04)	0.593 (0.05)	0.564 (0.12)
$A = 0.9$	0.900 (0.01)	0.900 (0.01)	0.900 (0.01)	0.899 (0.01)	0.900 (0.01)	0.898 (0.02)	0.892 (0.03)

IV 法 : B の推定値の平均							
	$B = -0.9$	$B = -0.5$	$B = -0.1$	$B = 0$	$B = 0.3$	$B = 0.6$	$B = 0.9$
$A = -0.9$	-0.897 (0.08)	-0.499 (0.06)	-0.099 (0.05)	0.001 (0.05)	0.300 (0.03)	0.601 (0.02)	0.900 (0.01)
$A = -0.5$	-0.901 (0.10)	-0.508 (0.08)	-0.099 (0.06)	-0.004 (0.05)	0.297 (0.04)	0.600 (0.02)	0.899 (0.01)
$A = -0.1$	-0.919 (0.14)	-0.509 (0.11)	-0.103 (0.07)	-0.007 (0.06)	0.297 (0.05)	0.599 (0.03)	0.900 (0.01)
$A = 0$	-0.926 (0.16)	-0.514 (0.11)	-0.104 (0.08)	-0.005 (0.07)	0.297 (0.05)	0.599 (0.03)	0.899 (0.01)
$A = 0.3$	-0.923 (0.19)	-0.524 (0.14)	-0.106 (0.09)	-0.010 (0.09)	0.296 (0.06)	0.597 (0.04)	0.899 (0.01)
$A = 0.6$	-0.956 (0.27)	-0.517 (0.20)	-0.121 (0.14)	-0.013 (0.12)	0.286 (0.09)	0.594 (0.05)	0.899 (0.02)
$A = 0.9$	-1.134 (0.78)	-0.722 (0.63)	-0.219 (0.39)	-0.102 (0.35)	0.222 (0.26)	0.554 (0.14)	0.890 (0.03)

* 括弧の中は標準偏差を示す。

表 4.2: (推定値の比較) 真のモデル: SSAR モデル ($T = 1500$)

ML 法 : A の推定値の平均

	$B = -0.9$	$B = -0.5$	$B = -0.1$	$B = 0$	$B = 0.3$	$B = 0.6$	$B = 0.9$
$A = -0.9$	-0.899 (0.02)	-0.897 (0.04)	-0.903 (0.06)	-0.900 (0.06)	-0.904 (0.07)	-0.907 (0.09)	-0.896 (0.13)
$A = -0.5$	-0.500 (0.02)	-0.502 (0.03)	-0.505 (0.04)	-0.502 (0.04)	-0.502 (0.06)	-0.498 (0.06)	-0.475 (0.24)
$A = -0.1$	-0.099 (0.02)	-0.099 (0.03)	-0.101 (0.03)	-0.102 (0.03)	-0.103 (0.04)	-0.105 (0.05)	-0.104 (0.09)
$A = 0$	-0.001 (0.02)	-0.000 (0.02)	-0.002 (0.03)	-0.001 (0.03)	-0.001 (0.04)	-0.004 (0.05)	-0.003 (0.07)
$A = 0.3$	0.299 (0.02)	0.300 (0.02)	0.301 (0.02)	0.299 (0.02)	0.298 (0.03)	0.299 (0.03)	0.293 (0.05)
$A = 0.6$	0.600 (0.01)	0.600 (0.01)	0.598 (0.01)	0.599 (0.02)	0.598 (0.02)	0.599 (0.02)	0.597 (0.03)
$A = 0.9$	0.900 (0.01)	0.900 (0.01)	0.900 (0.01)	0.900 (0.00)	0.900 (0.01)	0.899 (0.01)	0.898 (0.01)

ML 法 : B の推定値の平均

	$B = -0.9$	$B = -0.5$	$B = -0.1$	$B = 0$	$B = 0.3$	$B = 0.6$	$B = 0.9$
$A = -0.9$	-0.899 (0.02)	-0.501 (0.02)	-0.100 (0.02)	-0.001 (0.02)	0.300 (0.02)	0.599 (0.01)	0.900 (0.00)
$A = -0.5$	-0.902 (0.04)	-0.498 (0.03)	-0.099 (0.03)	0.002 (0.03)	0.299 (0.02)	0.600 (0.01)	0.902 (0.02)
$A = -0.1$	-0.902 (0.05)	-0.499 (0.04)	-0.101 (0.03)	-0.001 (0.03)	0.299 (0.02)	0.598 (0.01)	0.900 (0.01)
$A = 0$	-0.898 (0.06)	-0.504 (0.05)	-0.099 (0.04)	0.001 (0.03)	0.298 (0.02)	0.600 (0.02)	0.900 (0.00)
$A = 0.3$	-0.904 (0.07)	-0.502 (0.06)	-0.102 (0.04)	-0.000 (0.04)	0.298 (0.03)	0.598 (0.02)	0.899 (0.01)
$A = 0.6$	-0.903 (0.09)	-0.507 (0.07)	-0.102 (0.05)	-0.003 (0.04)	0.295 (0.04)	0.598 (0.02)	0.899 (0.01)
$A = 0.9$	-0.894 (0.17)	-0.498 (0.13)	-0.102 (0.09)	-0.007 (0.07)	0.299 (0.05)	0.595 (0.03)	0.898 (0.01)

* 括弧の中は標準偏差を示す。

表 4.2: (続き)

IV法 : Aの推定値の平均

	$B = -0.9$	$B = -0.5$	$B = -0.1$	$B = 0$	$B = 0.3$	$B = 0.6$	$B = 0.9$
$A = -0.9$	-0.901 (0.04)	-0.896 (0.06)	-0.910 (0.08)	-0.904 (0.09)	-0.914 (0.11)	-0.919 (0.16)	-0.947 (0.35)
$A = -0.5$	-0.499 (0.04)	-0.501 (0.04)	-0.507 (0.06)	-0.506 (0.06)	-0.507 (0.09)	-0.511 (0.11)	-0.557 (0.27)
$A = -0.1$	-0.100 (0.03)	-0.098 (0.03)	-0.103 (0.04)	-0.105 (0.05)	-0.106 (0.06)	-0.113 (0.08)	-0.140 (0.18)
$A = 0$	-0.001 (0.03)	0.001 (0.03)	-0.003 (0.04)	-0.001 (0.04)	-0.003 (0.05)	-0.006 (0.07)	-0.025 (0.16)
$A = 0.3$	0.300 (0.02)	0.300 (0.02)	0.300 (0.03)	0.299 (0.03)	0.299 (0.03)	0.295 (0.05)	0.281 (0.11)
$A = 0.6$	0.600 (0.01)	0.600 (0.01)	0.599 (0.02)	0.598 (0.02)	0.598 (0.02)	0.598 (0.03)	0.595 (0.06)
$A = 0.9$	0.900 (0.00)	0.900 (0.00)	0.900 (0.00)	0.900 (0.01)	0.900 (0.01)	0.899 (0.01)	0.898 (0.01)

IV法 : Bの推定値の平均

	$B = -0.9$	$B = -0.5$	$B = -0.1$	$B = 0$	$B = 0.3$	$B = 0.6$	$B = 0.9$
$A = -0.9$	-0.898 (0.04)	-0.502 (0.04)	-0.099 (0.03)	-0.001 (0.03)	0.301 (0.02)	0.599 (0.01)	0.900 (0.00)
$A = -0.5$	-0.907 (0.06)	-0.500 (0.04)	-0.100 (0.03)	0.002 (0.03)	0.299 (0.02)	0.601 (0.01)	0.900 (0.00)
$A = -0.1$	-0.903 (0.08)	-0.503 (0.06)	-0.099 (0.04)	0.000 (0.04)	0.300 (0.03)	0.599 (0.02)	0.900 (0.00)
$A = 0$	-0.904 (0.09)	-0.509 (0.06)	-0.099 (0.04)	0.001 (0.04)	0.298 (0.03)	0.600 (0.02)	0.900 (0.01)
$A = 0.3$	-0.913 (0.11)	-0.504 (0.08)	-0.102 (0.06)	-0.002 (0.05)	0.296 (0.04)	0.599 (0.02)	0.899 (0.01)
$A = 0.6$	-0.910 (0.16)	-0.515 (0.11)	-0.111 (0.08)	-0.001 (0.07)	0.293 (0.05)	0.598 (0.03)	0.899 (0.01)
$A = 0.9$	-0.959 (0.35)	-0.529 (0.26)	-0.126 (0.16)	-0.042 (0.15)	0.284 (0.10)	0.587 (0.06)	0.898 (0.02)

* 括弧の中は標準偏差を示す。

表 4.3: (推定値の比較) 真のモデル: Log-normal を誤差項に持つ AR(1) モデル ($T = 1500$)

ML 法 : A の推定値の平均								
	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.7$	$\sigma = 0.9$	$\sigma = 1$	$\sigma = 1.1$	$\sigma = 1.2$
$\phi = -0.9$	-0.905 (0.02)	-0.919 (0.02)	-0.934 (0.02)	-0.947 (0.02)	-0.967 (0.02)	-0.972 (0.02)	-0.980 (0.02)	-0.985 (0.02)
$\phi = -0.5$	-0.541 (0.04)	-0.637 (0.04)	-0.751 (0.06)	-0.885 (0.07)	-1.005 (0.08)	-1.061 (0.08)	-1.122 (0.09)	-1.165 (0.08)
$\phi = -0.1$	-0.156 (0.04)	-0.313 (0.06)	-0.534 (0.08)	-0.870 (0.15)	-1.313 (0.25)	-1.603 (0.34)	-1.953 (0.48)	-2.318 (0.63)
$\phi = 0$	-0.057 (0.04)	-0.214 (0.05)	-0.462 (0.08)	-0.805 (0.15)	-1.319 (0.26)	-1.631 (0.34)	-2.025 (0.60)	-2.538 (0.84)
$\phi = 0.3$	0.249 (0.03)	0.102 (0.05)	-0.114 (0.07)	-0.462 (0.12)	-0.948 (0.27)	-1.277 (0.36)	-1.617 (0.44)	-2.095 (0.64)
$\phi = 0.6$	0.564 (0.03)	0.465 (0.03)	0.310 (0.05)	0.081 (0.08)	-0.257 (0.15)	-0.494 (0.23)	-0.750 (0.34)	-1.085 (0.42)
$\phi = 0.9$	0.887 (0.01)	0.860 (0.02)	0.814 (0.02)	0.745 (0.03)	0.647 (0.08)	0.565 (0.08)	0.466 (0.12)	0.369 (0.16)

ML 法 : B の推定値の平均								
	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.7$	$\sigma = 0.9$	$\sigma = 1$	$\sigma = 1.1$	$\sigma = 1.2$
$\phi = -0.9$	-0.893 (0.02)	-0.881 (0.02)	-0.868 (0.02)	-0.855 (0.02)	-0.843 (0.02)	-0.838 (0.02)	-0.832 (0.01)	-0.829 (0.02)
$\phi = -0.5$	-0.467 (0.03)	-0.413 (0.03)	-0.378 (0.02)	-0.359 (0.02)	-0.350 (0.02)	-0.349 (0.02)	-0.350 (0.02)	-0.351 (0.02)
$\phi = -0.1$	-0.057 (0.03)	-0.004 (0.02)	0.021 (0.02)	0.021 (0.02)	0.008 (0.02)	-0.001 (0.02)	-0.013 (0.02)	-0.022 (0.02)
$\phi = 0$	0.040 (0.03)	0.095 (0.02)	0.115 (0.02)	0.116 (0.02)	0.101 (0.02)	0.092 (0.02)	0.082 (0.02)	0.071 (0.02)
$\phi = 0.3$	0.337 (0.03)	0.384 (0.02)	0.402 (0.02)	0.399 (0.02)	0.389 (0.02)	0.380 (0.02)	0.373 (0.02)	0.364 (0.02)
$\phi = 0.6$	0.624 (0.02)	0.656 (0.02)	0.670 (0.01)	0.673 (0.01)	0.667 (0.01)	0.661 (0.01)	0.656 (0.01)	0.651 (0.01)
$\phi = 0.9$	0.905 (0.01)	0.916 (0.01)	0.920 (0.01)	0.922 (0.01)	0.924 (0.01)	0.921 (0.01)	0.920 (0.00)	0.919 (0.00)

* 括弧の中は標準偏差を示す.

表 4.3: (続き)

IV法 : A の推定値の平均

	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.7$	$\sigma = 0.9$	$\sigma = 1$	$\sigma = 1.1$	$\sigma = 1.2$
$\phi = -0.9$	-0.898 (0.04)	-0.904 (0.07)	-0.905 (0.09)	-0.893 (0.09)	-0.900 (0.09)	-0.897 (0.09)	-0.894 (0.10)	-0.893 (0.10)
$\phi = -0.5$	-0.505 (0.05)	-0.502 (0.07)	-0.504 (0.11)	-0.513 (0.16)	-0.496 (0.20)	-0.499 (0.18)	-0.487 (0.18)	-0.483 (0.14)
$\phi = -0.1$	-0.101 (0.05)	-0.105 (0.08)	-0.099 (0.10)	-0.113 (0.17)	-0.102 (0.18)	-0.107 (0.21)	-0.105 (0.19)	-0.097 (0.17)
$\phi = 0$	-0.002 (0.05)	-0.002 (0.07)	-0.011 (0.11)	-0.003 (0.15)	-0.020 (0.19)	-0.013 (0.18)	-0.010 (0.17)	0.011 (0.18)
$\phi = 0.3$	0.300 (0.04)	0.295 (0.06)	0.300 (0.09)	0.286 (0.12)	0.285 (0.15)	0.285 (0.14)	0.303 (0.14)	0.293 (0.14)
$\phi = 0.6$	0.596 (0.04)	0.596 (0.05)	0.594 (0.06)	0.596 (0.08)	0.587 (0.09)	0.591 (0.10)	0.594 (0.09)	0.595 (0.08)
$\phi = 0.9$	0.896 (0.02)	0.897 (0.02)	0.893 (0.03)	0.890 (0.03)	0.890 (0.03)	0.892 (0.03)	0.891 (0.03)	0.892 (0.03)

IV法 : B の推定値の平均

	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.7$	$\sigma = 0.9$	$\sigma = 1$	$\sigma = 1.1$	$\sigma = 1.2$
$\phi = -0.9$	-0.901 (0.04)	-0.898 (0.05)	-0.901 (0.07)	-0.910 (0.08)	-0.907 (0.08)	-0.908 (0.09)	-0.914 (0.15)	-0.914 (0.11)
$\phi = -0.5$	-0.499 (0.04)	-0.502 (0.04)	-0.503 (0.05)	-0.505 (0.07)	-0.520 (0.14)	-0.510 (0.07)	-0.519 (0.11)	-0.523 (0.23)
$\phi = -0.1$	-0.101 (0.04)	-0.101 (0.03)	-0.102 (0.03)	-0.106 (0.06)	-0.105 (0.04)	-0.109 (0.05)	-0.106 (0.03)	-0.108 (0.04)
$\phi = 0$	-0.003 (0.04)	-0.002 (0.03)	-0.004 (0.04)	-0.005 (0.04)	-0.006 (0.05)	-0.004 (0.04)	-0.005 (0.04)	-0.007 (0.04)
$\phi = 0.3$	0.298 (0.03)	0.300 (0.03)	0.297 (0.03)	0.295 (0.03)	0.295 (0.05)	0.294 (0.03)	0.290 (0.11)	0.294 (0.03)
$\phi = 0.6$	0.599 (0.02)	0.597 (0.02)	0.596 (0.03)	0.596 (0.03)	0.597 (0.03)	0.597 (0.03)	0.597 (0.02)	0.599 (0.02)
$\phi = 0.9$	0.897 (0.01)	0.897 (0.01)	0.899 (0.01)	0.899 (0.01)	0.898 (0.01)	0.899 (0.01)	0.899 (0.01)	0.899 (0.01)

* 括弧の中は標準偏差を示す。

表 4.4: (推定値の比較) 真のモデル: 2 区分正規分布に従う誤差項を持つ AR(1) モデル ($T = 1500$)

ML 法 : A の推定値の平均								
	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.7$	$\sigma = 0.9$	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 10$
$\phi = -0.9$	-0.870 (0.02)	-0.878 (0.02)	-0.891 (0.02)	-0.898 (0.02)	-0.903 (0.02)	-0.914 (0.02)	-0.926 (0.02)	-0.930 (0.02)
$\phi = -0.5$	-0.372 (0.02)	-0.394 (0.02)	-0.455 (0.03)	-0.483 (0.03)	-0.527 (0.04)	-0.619 (0.04)	-0.744 (0.06)	-0.791 (0.06)
$\phi = -0.1$	0.017 (0.02)	0.015 (0.02)	-0.041 (0.03)	-0.080 (0.03)	-0.146 (0.04)	-0.297 (0.05)	-0.560 (0.08)	-0.659 (0.09)
$\phi = 0$	0.119 (0.02)	0.115 (0.02)	0.061 (0.03)	0.017 (0.03)	-0.046 (0.04)	-0.201 (0.05)	-0.507 (0.08)	-0.654 (0.10)
$\phi = 0.3$	0.415 (0.02)	0.405 (0.02)	0.353 (0.02)	0.318 (0.03)	0.261 (0.03)	0.104 (0.04)	-0.218 (0.08)	-0.415 (0.09)
$\phi = 0.6$	0.683 (0.01)	0.674 (0.01)	0.637 (0.02)	0.611 (0.02)	0.568 (0.02)	0.457 (0.04)	0.213 (0.05)	0.075 (0.07)
$\phi = 0.9$	0.923 (0.01)	0.921 (0.01)	0.910 (0.01)	0.902 (0.01)	0.888 (0.01)	0.852 (0.02)	0.778 (0.02)	0.741 (0.03)

ML 法 : B の推定値の平均								
	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.7$	$\sigma = 0.9$	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 10$
$\phi = -0.9$	-0.931 (0.02)	-0.922 (0.02)	-0.907 (0.02)	-0.902 (0.02)	-0.897 (0.02)	-0.884 (0.02)	-0.873 (0.02)	-0.870 (0.02)
$\phi = -0.5$	-0.790 (0.06)	-0.699 (0.05)	-0.560 (0.04)	-0.520 (0.04)	-0.475 (0.03)	-0.421 (0.03)	-0.381 (0.02)	-0.372 (0.02)
$\phi = -0.1$	-0.656 (0.09)	-0.457 (0.07)	-0.188 (0.04)	-0.126 (0.04)	-0.068 (0.03)	-0.008 (0.02)	0.019 (0.02)	0.018 (0.02)
$\phi = 0$	-0.661 (0.10)	-0.380 (0.07)	-0.092 (0.04)	-0.026 (0.03)	0.032 (0.03)	0.092 (0.02)	0.118 (0.02)	0.120 (0.02)
$\phi = 0.3$	-0.415 (0.09)	-0.081 (0.06)	0.212 (0.03)	0.278 (0.03)	0.330 (0.03)	0.384 (0.02)	0.411 (0.02)	0.414 (0.02)
$\phi = 0.6$	0.080 (0.07)	0.319 (0.04)	0.536 (0.03)	0.581 (0.02)	0.620 (0.02)	0.659 (0.02)	0.679 (0.01)	0.682 (0.01)
$\phi = 0.9$	0.743 (0.03)	0.810 (0.02)	0.878 (0.01)	0.893 (0.01)	0.904 (0.01)	0.916 (0.01)	0.922 (0.01)	0.923 (0.01)

* 括弧の中は標準偏差を示す.

表 4.4: (続き)

IV法 : Aの推定値の平均

	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.7$	$\sigma = 0.9$	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 10$
$\phi = -0.9$	-0.902 (0.05)	-0.903 (0.04)	-0.901 (0.04)	-0.904 (0.04)	-0.898 (0.04)	-0.899 (0.05)	-0.894 (0.07)	-0.896 (0.06)
$\phi = -0.5$	-0.500 (0.03)	-0.500 (0.03)	-0.503 (0.04)	-0.499 (0.04)	-0.501 (0.05)	-0.501 (0.06)	-0.505 (0.08)	-0.504 (0.09)
$\phi = -0.1$	-0.100 (0.02)	-0.100 (0.02)	-0.102 (0.03)	-0.100 (0.04)	-0.106 (0.05)	-0.104 (0.06)	-0.107 (0.08)	-0.107 (0.08)
$\phi = 0$	-0.000 (0.02)	-0.000 (0.02)	0.001 (0.03)	-0.005 (0.04)	-0.005 (0.05)	-0.001 (0.06)	-0.007 (0.08)	-0.005 (0.08)
$\phi = 0.3$	0.299 (0.02)	0.299 (0.02)	0.298 (0.03)	0.296 (0.03)	0.300 (0.04)	0.294 (0.05)	0.297 (0.06)	0.292 (0.07)
$\phi = 0.6$	0.600 (0.02)	0.598 (0.02)	0.597 (0.02)	0.597 (0.03)	0.597 (0.03)	0.596 (0.04)	0.596 (0.05)	0.596 (0.05)
$\phi = 0.9$	0.899 (0.01)	0.898 (0.01)	0.898 (0.01)	0.898 (0.01)	0.896 (0.02)	0.897 (0.02)	0.895 (0.02)	0.893 (0.03)

IV法 : Bの推定値の平均

	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.7$	$\sigma = 0.9$	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 2$	$\sigma = 5$	$\sigma = 10$
$\phi = -0.9$	-0.899 (0.07)	-0.897 (0.06)	-0.899 (0.05)	-0.897 (0.04)	-0.902 (0.04)	-0.900 (0.04)	-0.905 (0.05)	-0.904 (0.05)
$\phi = -0.5$	-0.504 (0.08)	-0.506 (0.08)	-0.502 (0.05)	-0.504 (0.05)	-0.499 (0.04)	-0.501 (0.03)	-0.499 (0.03)	-0.501 (0.03)
$\phi = -0.1$	-0.109 (0.09)	-0.105 (0.07)	-0.099 (0.05)	-0.104 (0.04)	-0.102 (0.04)	-0.102 (0.03)	-0.099 (0.02)	-0.099 (0.02)
$\phi = 0$	-0.008 (0.08)	-0.004 (0.07)	-0.002 (0.05)	-0.002 (0.04)	-0.002 (0.04)	-0.003 (0.03)	-0.001 (0.02)	-0.000 (0.02)
$\phi = 0.3$	0.297 (0.07)	0.296 (0.06)	0.296 (0.04)	0.302 (0.04)	0.298 (0.03)	0.300 (0.02)	0.300 (0.02)	0.299 (0.02)
$\phi = 0.6$	0.597 (0.05)	0.595 (0.04)	0.597 (0.03)	0.596 (0.03)	0.597 (0.03)	0.598 (0.02)	0.600 (0.01)	0.599 (0.01)
$\phi = 0.9$	0.894 (0.03)	0.898 (0.02)	0.897 (0.02)	0.897 (0.02)	0.897 (0.01)	0.897 (0.01)	0.898 (0.01)	0.899 (0.01)

* 括弧の中は標準偏差を示す。

表 4.5: (検定の比較) 真のモデル: SSAR モデル ($T = 1500$)

LR: χ^2 値の平均

	$B = 0.9$	$B = 0.6$	$B = 0.3$	$B = 0$	$B = -0.1$	$B = -0.5$	$B = -0.9$
$a = 0.9$	1.066 (0.07)	951.751 (1.00)	1807.613 (1.00)	2463.424 (1.00)	2637.458 (1.00)	3269.512 (1.00)	3791.961 (1.00)
$A = 0.6$	957.254 (1.00)	1.085 (0.07)	175.050 (1.00)	474.350 (1.00)	574.830 (1.00)	979.560 (1.00)	1360.615 (1.00)
$A = 0.3$	1808.886 (1.00)	175.265 (1.00)	1.016 (0.04)	78.242 (1.00)	123.458 (1.00)	370.241 (1.00)	640.884 (1.00)
$A = 0$	2469.529 (1.00)	469.666 (1.00)	77.625 (1.00)	1.041 (0.05)	7.051 (0.68)	118.138 (1.00)	309.105 (1.00)
$A = -0.1$	2644.967 (1.00)	575.946 (1.00)	125.174 (1.00)	7.042 (0.68)	1.005 (0.05)	72.345 (1.00)	239.441 (1.00)
$A = -0.5$	3274.077 (1.00)	981.945 (1.00)	367.240 (1.00)	117.775 (1.00)	72.011 (1.00)	0.956 (0.04)	66.703 (1.00)
$A = -0.9$	3799.118 (1.00)	1360.457 (1.00)	644.604 (1.00)	309.001 (1.00)	238.227 (1.00)	67.340 (1.00)	0.973 (0.04)

WIV: χ^2 値の平均

	$B = 0.9$	$B = 0.6$	$B = 0.3$	$B = 0$	$B = -0.1$	$B = -0.5$	$B = -0.9$
$A = 0.9$	0.680 (0.02)	12.770 (1.00)	9.633 (0.99)	7.401 (0.94)	6.416 (0.86)	4.636 (0.61)	3.493 (0.34)
$A = 0.6$	12.944 (1.00)	0.833 (0.04)	26.040 (1.00)	45.185 (1.00)	47.790 (1.00)	47.900 (1.00)	41.126 (1.00)
$A = 0.3$	9.845 (0.99)	25.781 (1.00)	0.909 (0.05)	21.054 (0.99)	31.550 (1.00)	64.905 (1.00)	76.268 (1.00)
$A = 0$	7.257 (0.93)	44.953 (1.00)	21.612 (0.99)	0.879 (0.04)	3.157 (0.33)	38.008 (1.00)	75.692 (1.00)
$A = -0.1$	6.643 (0.89)	48.074 (1.00)	32.246 (1.00)	3.198 (0.31)	0.763 (0.03)	25.254 (1.00)	66.989 (1.00)
$A = -0.5$	4.594 (0.64)	47.806 (1.00)	65.124 (1.00)	38.095 (1.00)	25.554 (1.00)	0.841 (0.04)	20.684 (0.99)
$A = -0.9$	3.476 (0.36)	41.245 (1.00)	76.514 (1.00)	75.527 (1.00)	66.932 (1.00)	21.397 (0.99)	0.717 (0.04)

* 括弧の中は有意水準 5% で検定したときの棄却率を示す。

表 4.6: (検定の比較) 真のモデル: Log-normal を誤差項に持つ AR(1) モデル ($T = 1500$)

LR: χ^2 値の平均								
	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.8$	$\sigma = 0.6$	$\sigma = 0.4$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$
$\phi = 0.9$	2049.226 (1.00)	1441.708 (1.00)	935.475 (1.00)	530.910 (1.00)	235.283 (1.00)	134.263 (1.00)	59.953 (1.00)	16.008 (0.98)
$\phi = 0.6$	1643.355 (1.00)	1168.305 (1.00)	738.682 (1.00)	422.251 (1.00)	187.362 (1.00)	107.025 (1.00)	47.903 (1.00)	12.787 (0.94)
$\phi = 0.3$	1331.383 (1.00)	936.099 (1.00)	587.698 (1.00)	332.938 (1.00)	145.622 (1.00)	83.021 (1.00)	37.190 (1.00)	9.675 (0.83)
$\phi = 0$	949.332 (1.00)	653.367 (1.00)	416.556 (1.00)	230.629 (1.00)	100.086 (1.00)	58.066 (1.00)	25.946 (1.00)	7.168 (0.71)
$\phi = -0.1$	769.018 (1.00)	549.855 (1.00)	344.962 (1.00)	198.942 (1.00)	86.514 (1.00)	49.229 (1.00)	23.164 (1.00)	6.197 (0.64)
$\phi = -0.5$	255.066 (1.00)	202.757 (1.00)	136.396 (1.00)	80.642 (1.00)	37.783 (1.00)	21.248 (0.99)	9.982 (0.86)	3.070 (0.31)
$\phi = -0.9$	30.378 (1.00)	22.024 (0.99)	12.933 (0.91)	7.007 (0.68)	3.489 (0.35)	2.335 (0.21)	1.488 (0.11)	1.144 (0.05)

WIV: χ^2 値の平均								
	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.8$	$\sigma = 0.6$	$\sigma = 0.4$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$
$\phi = 0.9$	0.182 (0.02)	0.229 (0.02)	0.320 (0.02)	0.492 (0.03)	0.504 (0.01)	0.588 (0.02)	0.572 (0.00)	0.593 (0.01)
$\phi = 0.6$	0.122 (0.00)	0.237 (0.01)	0.348 (0.02)	0.520 (0.02)	0.724 (0.02)	0.919 (0.04)	0.761 (0.03)	0.848 (0.05)
$\phi = 0.3$	0.105 (0.01)	0.140 (0.00)	0.406 (0.01)	0.652 (0.03)	0.762 (0.03)	0.783 (0.03)	0.796 (0.03)	0.871 (0.05)
$\phi = 0$	0.125 (0.00)	0.245 (0.01)	0.378 (0.01)	0.623 (0.02)	0.892 (0.06)	0.904 (0.03)	0.819 (0.04)	0.846 (0.04)
$\phi = -0.1$	0.101 (0.00)	0.205 (0.00)	0.428 (0.01)	0.686 (0.02)	0.831 (0.04)	0.791 (0.03)	0.767 (0.03)	0.839 (0.04)
$\phi = -0.5$	0.125 (0.00)	0.175 (0.00)	0.349 (0.01)	0.640 (0.02)	0.787 (0.04)	0.811 (0.04)	0.886 (0.05)	0.912 (0.04)
$\phi = -0.9$	0.039 (0.00)	0.129 (0.00)	0.268 (0.02)	0.403 (0.02)	0.631 (0.02)	0.589 (0.02)	0.791 (0.04)	0.717 (0.03)

* 括弧の中は有意水準 5% で検定したときの棄却率を示す。

表 4.7: (検定の比較) 真のモデル: 2区分正規分布に従う誤差項を持つ AR(1) モデル ($T = 1500$)

LR: χ^2 値の平均

	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 2$	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 0.9$	$\sigma = 0.7$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.1$
$\phi = 0.9$	677.607 (1.00)	513.931 (1.00)	161.042 (1.00)	14.253 (0.94)	5.080 (0.52)	48.958 (1.00)	370.443 (1.00)	678.149 (1.00)
$\phi = 0.6$	570.532 (1.00)	413.743 (1.00)	115.940 (1.00)	9.685 (0.85)	4.038 (0.41)	34.540 (1.00)	287.697 (1.00)	576.972 (1.00)
$\phi = 0.3$	433.919 (1.00)	299.747 (1.00)	79.974 (1.00)	7.270 (0.72)	3.176 (0.32)	24.473 (1.00)	200.072 (1.00)	432.436 (1.00)
$\phi = 0$	242.275 (1.00)	177.655 (1.00)	51.844 (1.00)	4.618 (0.48)	2.258 (0.18)	15.786 (0.95)	123.902 (1.00)	239.993 (1.00)
$\phi = -0.1$	169.896 (1.00)	135.541 (1.00)	43.135 (1.00)	4.099 (0.42)	2.024 (0.16)	13.182 (0.94)	98.504 (1.00)	169.826 (1.00)
$\phi = -0.5$	65.578 (1.00)	49.637 (1.00)	16.557 (0.98)	2.213 (0.21)	1.308 (0.08)	5.353 (0.55)	36.395 (1.00)	65.058 (1.00)
$\phi = -0.9$	4.196 (0.41)	3.726 (0.35)	1.905 (0.15)	1.112 (0.07)	0.927 (0.03)	1.352 (0.11)	3.050 (0.30)	4.408 (0.44)

WIV: χ^2 値の平均

	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 2$	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 0.9$	$\sigma = 0.7$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.1$
$\phi = 0.9$	0.776 (0.06)	0.670 (0.03)	0.688 (0.02)	0.660 (0.02)	0.650 (0.02)	0.660 (0.02)	0.736 (0.04)	0.707 (0.04)
$\phi = 0.6$	0.891 (0.04)	0.813 (0.05)	0.845 (0.03)	0.845 (0.04)	0.834 (0.04)	0.844 (0.03)	0.881 (0.05)	0.924 (0.05)
$\phi = 0.3$	0.773 (0.04)	0.908 (0.04)	0.784 (0.05)	0.919 (0.05)	0.890 (0.04)	0.862 (0.05)	0.801 (0.03)	0.817 (0.03)
$\phi = 0$	0.903 (0.05)	0.819 (0.03)	0.784 (0.03)	0.890 (0.05)	0.929 (0.05)	0.882 (0.05)	0.843 (0.04)	0.903 (0.06)
$\phi = -0.1$	0.988 (0.03)	0.863 (0.05)	0.949 (0.05)	0.884 (0.04)	0.802 (0.04)	0.869 (0.04)	0.837 (0.03)	0.859 (0.04)
$\phi = -0.5$	0.832 (0.04)	0.875 (0.05)	0.842 (0.04)	1.043 (0.06)	0.907 (0.06)	0.712 (0.03)	0.842 (0.04)	0.867 (0.04)
$\phi = -0.9$	0.667 (0.02)	0.762 (0.04)	0.767 (0.04)	0.764 (0.03)	0.697 (0.03)	0.801 (0.03)	0.745 (0.04)	0.631 (0.03)

* 括弧の中には有意水準 5% で検定したときの棄却率を示す。

4.3 4章の数学的付録

(定理 4.1 の略証)

$\{\epsilon_t\}$ が 4 次のモーメントを持つことより, y_t は 4 次のモーメントまでを持つ. (定理 2.7) 従って,

$$Q_T(\theta) = F_T(\theta)' \Phi_T^{-1} F_T(\theta) \quad (4.31)$$

$$\xrightarrow{P} Q^*(\theta) = F^*(\theta)' \Phi^{*-1} F^*(\theta) \quad (4.32)$$

と, $T \rightarrow \infty$ のとき確率収束する. ただし,

$$F^*(\theta) = E[f_t \otimes w_t] \quad (4.33)$$

$$\Phi^* = \Omega \otimes E[w_t w_t'] \quad (4.34)$$

である. ここで, Φ^* が正定値対称行列になるので, $Q^*(\theta)$ は $F^*(\theta) = 0$ のとき最小値 0 をとる. また,

$$F^*(\theta_0) = E \left[\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \epsilon_t^2 - 1 \end{pmatrix} \otimes w_t \right] = 0 \quad (4.35)$$

となり, θ_0 は $Q^*(\theta)$ の最小値を与える. よって, Amemiya(1985) の定理 4.1.2 より一貫性が示される.

次に漸近正規性を示す. $\hat{\theta}_{IV}$ が $Q_T(\theta)$ の最小値を与えていることより

$$\left. \frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_{IV}} = 0 \quad (4.36)$$

であるから, これを, $\theta = \theta_0$ のまわりでテーラー展開し, $\hat{\theta}$ は θ_0 に確率収束するから, $|\hat{\theta} - \theta_0|$ の十分小さいところで考えると,

$$\left. \frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} + \left. \frac{\partial^2 Q_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta=\theta_0} (\hat{\theta}_{IV} - \theta_0) \cong 0 \quad (4.37)$$

となる. 従って,

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IV} - \theta_0) \cong \sqrt{T} \left[- \left. \frac{\partial^2 Q_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta=\theta_0} \right]^{-1} \left[\left. \frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} \right] \quad (4.38)$$

が得られる. ここで,

$$\frac{\partial Q_T}{\partial \theta} = 2 \left[\frac{1}{T} \sum_t \frac{\partial f_t}{\partial \theta'} \otimes w_t \right]' \left[\Omega \otimes \frac{1}{T} \sum_t w_t w_t' \right]^{-1} \left[\frac{1}{T} \sum_t f_t \otimes w_t \right] \quad (4.39)$$

$$= 2D_T' \Phi_T^{-1} F_T \quad (4.40)$$

$$E \left[\frac{\partial Q_T}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial Q_T}{\partial \theta'} \right]_{\theta=\theta_0} = 4E \left[D_T' \Phi_T F_T F_T' \Phi_T^{-1} D_T \right]_{\theta=\theta_0} \xrightarrow{P} 4D^{*'} \Phi^{*-1} \Phi^* \Phi^{*-1} D^* \quad (4.41)$$

である。また,

$$\left. \frac{\partial^2 Q_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta=\theta_0} \xrightarrow{P} 2D^{*'} \Phi^{*-1} D^* \quad (4.42)$$

となるので,

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IV} - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, V) \quad (4.43)$$

となる。ただし,

$$V = (2D^{*'} \Phi^{*-1} D^*)^{-1} (4D^{*'} \Phi^{*-1} D^*) (2D^{*'} \Phi^{*-1} D^*)^{-1} \quad (4.44)$$

$$= (D^{*'} \Phi^{*-1} D^*)^{-1} \quad (4.45)$$

である。

第5章 非定常SSARモデル

5.1 非定常な市場モデル

前章まで扱った定常な SSAR モデルでは、その誤差項が互いに独立、同一であると仮定してきた。その結果として定常な SSAR モデルを導出できたのであった。しかしながら、現実の経済時系列が非定常性を強く示していることも少なくない。こうした場合には、この仮定はそぐわないと言えよう。そこで本節では、簡単な拡張をして1変量非定常時系列に対する SSAR モデルを考えてみる。

まず、よく行われている方法として、階差をとった系列を考え、これに定常モデルを適用するという方法が考えられる。しかしながら、元の系列の上昇、下降という局面の分け方と階差系列の上昇、下降では、まるで意味が異なる。このような方法が想定される場合としては、GDP 系列などのように、階差系列の方に関心がある場合だと思われる。

もう一つの考え方として、原系列の上昇、下降という局面の分け方を採用しつつ、和分過程を含むようなモデルが考えられる。このモデルは不均衡市場モデルにおける (2.11) 式の外生変数が、たとえば、ランダムウォークに従っている場合に相当している。以下、この場合にどのようなモデルが導出されるか考えてみる。

Demand :

$$D_t = w_{1,t-1} + \beta_1 p_t + u_{1t} \quad (5.1)$$

$$\Delta w_{1,t} = u_{1t}$$

Supply :

$$S_t = w_{2,t-1} + \beta_2 p_t + u_{2t} \quad (5.2)$$

$$\Delta w_{2,t} = u_{2t}$$

$$u_{1t} \sim i.i.d., u_{2t} \sim i.i.d. \quad (5.3)$$

また、 $\{u_{1t}\}$ と $\{u_{2t}\}$ とは独立で、 u_{1t}, u_{2t} と p_{t-i} ($i \geq 1$) とも独立であるとする。価格調整モデルは、同じ (2.13) 式を使うことにする。同じように代入して整理すると、

$$p_t = \begin{cases} Ap_{t-1} + \sigma_1 u_t & (\Delta p_t \geq 0) \\ Bp_{t-1} + \sigma_2 u_t & (\Delta p_t < 0) \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\Delta u_t = v_t \quad (v_t \sim i.i.d.) \quad (5.5)$$

と書き直せる。また、(5.4) 式の整合条件は、 v_t と u_{t-1}, p_{t-1} とが独立であることより、

$$\frac{1-A}{\sigma_1} = \frac{1-B}{\sigma_2} = r \quad (5.6)$$

となる。

このモデルのことを非定常 SSAR モデルと呼んでおり、現実の価格系列が非定常的な動きをしている時に適用されるモデルである。上記のモデルは1階のランダムウォークを採用しているが、次節から述べるように、高階のランダムウォークやドリフト付きランダムウォークに拡張することもできる。前に述べたように非定常 SSAR モデルは、単なる階差モデルとは異なり、非定常性を生み出すメカニズムにも非線形性が入っているモデルである。したがって、非定常 SSAR モデルに従う系列に階差を施しても、定常 SSAR モデルにはならない。

なお、このモデルはいろいろな経済データに適用可能だが、たとえば、ある時期の日本の GNP データの様に、右肩上がりのデータに対してあてはめても意味がないので注意が必要である。 $(\Delta p_t \geq 0)$ の局面しか推定できない)

本節では、非定常 SSAR モデルの最も簡単な例を導出することによって、そのアイディアを紹介した。次節からは SSAR モデルの一般化からこの非定常 SSAR モデルを導く。

5.2 非定常 SSAR モデル

5.2.1 SSAR モデルの拡張

まず本節では、誤差項に移動平均 (MA) モデルを加えた多変量同時転換自己回帰モデルを考えることにする。以下の表現では、自己回帰部分において1次のものしか考えないが、これはよく知られているように、マルコフ表現を用いて、 p 次の多変量 SSAR モデルが1次の多変量 SSAR モデルに帰着できるからである。

\mathbf{y}_t を $m \times 1$ のベクトル値時系列変数とする。ここで考えるモデルは以下の通りである。

$$\mathbf{y}_t = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_t & \text{if } \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_{t-1} \\ \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{B}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{D}_2\mathbf{u}_t & \text{if } \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_t < \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_{t-1} \end{cases}, \quad (5.7)$$

ただし、 $\mathbf{e}'_m = (0, \dots, 0, 1)$ で、 $\boldsymbol{\mu}'_i$ ($i = 1, 2$) は $1 \times m$ 定数ベクトルである。また、 \mathbf{A} と \mathbf{B} は $m \times m$ 行列、および、 \mathbf{D}_i ($i = 1, 2$) は $m \times n$ 行列である。

誤差項 $\{\mathbf{u}_t\}$ は $I(d)$ の系列とする。つまり、

$$\Delta^d \mathbf{u}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \mathbf{v}_{t-j}, \quad (5.8)$$

と書ける。ただし、 $\{\mathbf{v}_t\}$ はマルチンゲール過程の階差系列で、 $E(\mathbf{v}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{o}$ 、および、

$$E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t' | \mathcal{F}_{t-1}) = \boldsymbol{\Omega}_t \quad (a.s.), \quad (5.9)$$

である。なお、

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j E[\boldsymbol{\Omega}_{t-j}] \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j' \quad (5.10)$$

は正定値行列で、 $\mathbf{C}_0 = \mathbf{I}_n$ である。これまで出てきた記号を説明すると、 \mathcal{F}_{t-1} は $\{\mathbf{y}_s, \mathbf{u}_s; s \leq t-1\}$ から作られる σ -集合体、 Δ は階差演算子、 $I(d)$ は d 回の和分過程を示す、($d \geq 0$)。また、 $\boldsymbol{\Omega}_t$ は条件付共分散行列である。なお、MA 部分については次数が有限で、反転条件は満たされているとする。

$m = n$ のとき、これまでと同様の議論から、以下のように整合条件が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_1} [-\mathbf{e}'_m \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{e}'_m (\mathbf{I}_m - \mathbf{A})] &= \frac{1}{\sigma_2} [-\mathbf{e}'_m \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{e}'_m (\mathbf{I}_m - \mathbf{B})] \\ &= \mathbf{r}' \end{aligned} \quad (5.11)$$

ただし、 \mathbf{r}' は $1 \times (1+m)$ のベクトルで、 σ_i ($i = 1, 2$) は未知のスケールパラメータである。このパラメータの基準化のために $1 \times m$ のベクトル \mathbf{h}' を使って、

$$\frac{1}{\sigma_1} \mathbf{e}'_m \mathbf{D}_1 = \frac{1}{\sigma_2} \mathbf{e}'_m \mathbf{D}_2 = \mathbf{h}' \quad (5.12)$$

とする。これより、以下の定理が得られる。

定理 5.1 : 以下の3つの仮定、(i) $m = n$ 、(ii) $\sigma_i > 0$ ($i = 1, 2$)、 $|\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2| > 0$ 、及び、(iii) 条件 (5.11) と (5.12)、を満たすとする。この時、 \mathbf{R}^m で定義される2つの確率過程 $\{\mathbf{u}_t\}$ と $\{\mathbf{y}_t\}$ は初期条件 \mathcal{F}_0 のもと1対1対応する。

この命題が意味するところは、(5.7)、(5.8) と (5.10) 式で表される SSAR モデルは、定理 5.1 によって計量モデルとして整合的であるといえるということである。なお、 $m = n = 1$ のときは、条件 (5.12) を自動的に満たすので不要である。よって、この場合は $\sigma_i = \mathbf{D}_i > 0$ ($i = 1, 2$) と仮定して一般性を欠かない。

また、次のように定義関数を定義する。

$$I_t^{(1)} = 1_{\{\mathbf{e}'_m \mathbf{y}_t \geq \mathbf{e}'_m \mathbf{y}_{t-1}\}} \quad (5.13)$$

及び

$$I_t^{(2)} = 1_{\{e'_m y_t < e'_m y_{t-1}\}}, \quad (5.14)$$

ただし, $1_{\{\omega\}} = 1$ (もし事象 ω が起こったとき), $1_{\{\omega\}} = 0$ (それ以外). この記号を使って, (5.7) 式を以下のように書き直しておく.

$$y_t = \mu(t) + A(t)y_{t-1} + D(t)u_t, \quad (5.15)$$

ただし,

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^2 I_t^{(i)} \mu_i, \quad (5.16)$$

$$A(t) = A I_t^{(1)} + B I_t^{(2)}, \quad (5.17)$$

及び

$$D(t) = \sum_{i=1}^2 I_t^{(i)} D_i. \quad (5.18)$$

である. ここで計量経済の応用的な観点から, (5.15) 式に含まれる興味深いいくつかのモデルを例示したい.

例 1: $d = q = 0$ のときは, 前章までに考えてきた定常 SSAR モデルになる. これは最も簡単なケースであるといえる.

例 2: 多変量 SSAR モデルを用いた, より実用的なモデルを考える. そのために $d = 0, m = 2, \mu_1 = \mu_2 = o$, 及び $e'_1 A = e'_1 B = (1, 0)$, とするモデルを考える. このとき, (5.11) の整合条件から

$$\Delta y_t = \alpha(t) r' y_{t-1} + D(t) u_t, \quad (5.19)$$

と表せる. ただし, $\alpha(t)' = (0, -\sum_{i=1}^2 I_t^{(i)} \sigma_2^{(i)})$ で, 1×2 ベクトル r' と $\sigma_2^{(j)}$ ($j = 1, 2$) は未知パラメータである. さらに, $D(t) = (d_{ij}(t))$, $d_{11}(t) = \sigma_1$, $d_{22}(t) = \sigma_2^{(1)} I_t^{(1)} + \sigma_2^{(2)} I_t^{(2)}$, $d_{12}(t) = d_{21}(t) = 0$ とおく. このとき, ベクトル r は非線形の意味での共和分ベクトルになる. なぜなら,

$$x_t = r' y_t$$

という過程は

$$a < 1, b < 1, ab < 1, \quad (5.20)$$

のとき, 定常になるからである. ただし, $a = 1 - e'_2 r \sigma_2^{(1)}$ 及び $b = 1 - e'_2 r \sigma_2^{(2)}$ である. これより, 互いに共和分関係にある y_t のうち, 第1変数が線形 $I(1)$ 過程に従い, 2番目の変数が非線形 $I(1)$ 過程に従うような2次元 SSAR モデルが得られた. このような設定は金融時系列への応用として興味深いと思われる. また, $A = B$ 及び $D_1 = D_2$,

のとき, (5.19) 式の形は, いわゆる非定常線形時系列のエラー・コレクション表現になる.

例 3: $d = 1$ のとき, (5.7), (5.8), 及び (5.10) 式で定義される確率過程は非定常になる. 本章のこの後の解析では, 1 変量の非定常時系列に対応する $m = n = d = 1$ の SSAR モデルについて詳しく見ていきたい. このモデルは, 前章までに議論してきた定常 SSAR モデルの非定常クラスへの拡張モデルである. 線形非定常のクラスで有用な ARIMA モデルにならって, ここではこのモデルを SSARIMA モデルと呼ぶことにする. このようなモデルを導入することによって, 主に金融時系列への応用が期待できる. 次章ではそのような応用を考える中で, この SSARIMA モデルが金融の理論モデルから自然な形で導入できることも示す.

5.2.2 非定常 SSAR モデルの性質

(5.8) 式において $\{u_t\}$ が $I(1)$ 過程である時, 確率過程 $\{y_t\}$ はエルゴード的ではない. しかしながら, $d = 1$ の $\{y_t\}$ について考えておくべき問題がいくつかある. (5.15) 式の表現を用いると, $\{\Delta y_t\}$ に対する時系列モデルは以下のように表される.

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= D(t)\Delta[D(t)^{-1}\mu(t)] \\ &+ D(t)D(t-1)^{-1}\Delta y_{t-1} \\ &- D(t)[D(t)^{-1}(I_m - A(t))y_{t-1} - D(t-1)^{-1}(I_m - A(t-1))y_{t-2}] \\ &+ D(t)\Delta u_t. \end{aligned} \tag{5.21}$$

さらに, $m = 1$ のときは整合条件 (5.11) を用いて係数を簡単化できる. この場合, $r' = (r_0, r_1)$ として, $\mu(t) = -r_0 D(t)$ かつ $1 - A(t) = r_1 D(t)$ という関係が成り立つ. これを用いて, $\{\Delta y_t\}$ を表現する.

定理 5.2: $d = m = 1$ のとき, $\{\Delta y_t\}$ に関する次のような非線形変換を考える.

$$T(\Delta y_t) = D(t)^{-1}\Delta y_t. \tag{5.22}$$

これより, 変換後の系列 $\{T(\Delta y_t)\}$ は

$$T(\Delta y_t) = A(t-1)T(\Delta y_{t-1}) + \Delta u_t. \tag{5.23}$$

を満たす系列になる.

(5.23) 式によって定義される時系列モデルは、1 階の閾値自己回帰 (TAR) モデルと呼ばれるものである。したがって、 $\{\Delta y_t\}$ はよく知られている TAR(1) をやや変形したものであるということが分かった。

これまでの議論で、階差系列 $\{\Delta y_t\}$ の性質が分かってきた。これを使って、もとの1 変量非定常 SSAR モデルについて詳しく考える。次章で考える実証分析では SSAR モデルにトレンドを入れたものも使っている。そこで、次のようなモデルを考える。

$$y_t = \begin{cases} A_0 + A_1 t + A_2 y_{t-1} + \sigma_1 u_t & (y_t \geq y_{t-1}) \\ B_0 + B_1 t + B_2 y_{t-1} + \sigma_2 u_t & (y_t < y_{t-1}) \end{cases}, \quad (5.24)$$

ただし、 $\sigma_i > 0$ ($i = 1, 2$) で、 q は有限であることを仮定する。次に、(5.11) 式を導出したのと同様にこのモデルに対する整合条件を導くと、

$$-\frac{A_0}{\sigma_1} = -\frac{B_0}{\sigma_2} = r_0, \quad -\frac{A_1}{\sigma_1} = -\frac{B_1}{\sigma_2} = r_1, \quad \frac{1 - A_2}{\sigma_1} = \frac{1 - B_2}{\sigma_2} = r_2. \quad (5.25)$$

となる。

(5.24) 式で定義される時系列を調べるため、定義関数 $I_t^{(1)} = I(\Delta y_t \geq 0)$ 及び $I_t^{(2)} = I(\Delta y_t < 0)$ を使って、 $D(t) = \sigma_1 I_t^{(1)} + \sigma_2 I_t^{(2)}$ と書けば、誤差項 $\{u_t\}$ は

$$u_t = \frac{1}{D(t)} \Delta y_t + r_0 + r_1 t + r_2 y_{t-1}. \quad (5.26)$$

のように書き直せる。そこで、 $t - 1$ 時点の情報を与えると、 Δy_t に対する局面は $I_t^{(i)}$ と $I_{t-1}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) に応じて4つ考えることになる。(5.25) 式で両辺の階差をとれば、

$$\Delta y_t = D(t) \left\{ -r_1 + \left(-r_2 + \frac{1}{D(t-1)} \right) \Delta y_{t-1} + \Delta u_t \right\}. \quad (5.27)$$

となる。よって、 $\{\Delta y_t\}$ の系列は

$$\Delta y_t = \begin{cases} A_1 + A_2 \Delta y_{t-1} + \sigma_1 \Delta u_t & (\Delta y_{t-1} \geq 0, \Delta y_t \geq 0) \\ A_1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) B_2 \Delta y_{t-1} + \sigma_1 \Delta u_t & (\Delta y_{t-1} < 0, \Delta y_t \geq 0) \\ B_1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) A_2 \Delta y_{t-1} + \sigma_2 \Delta u_t & (\Delta y_{t-1} \geq 0, \Delta y_t < 0) \\ B_1 + B_2 \Delta y_{t-1} + \sigma_2 \Delta u_t & (\Delta y_{t-1} < 0, \Delta y_t < 0) \end{cases} \quad (5.28)$$

と表現することができる。この表現から SSARIMA モデルの階差系列 $\{\Delta y_t\}$ は、同時転換モデルの特徴と閾値モデルの特徴を両方持っているといえる。 $d = 1$ で q が有限のとき、 $\{\Delta y_t\}$ はマルコフ表現できる。また、 $\{u_t\}$ が $I(d)$ のとき、確率過程 $\{\Delta^d y_t\}$

も同様な特徴を持つ。さて、(5.28)式で定義される確率過程 $\{\Delta y_t\}$ に関して、以下の定理のように $q = 0$ のときのエルゴード性の条件が得られる。

定理 5.3 : 条件, (i) $\{\Delta u_t\}$ の MA 次数 q が有限の値である, (ii) (5.25) 式の整合条件を満たしている, (iii) $\{v_t\}$ が *i.i.d.* の系列で, その密度関数 $g(v)$ が連続で \mathbf{R}^1 において常に正である, (iv) $E[|v_t|] < +\infty$, を満たすとする。このとき (5.28) 式で定義されるマルコフチェーン $\{\Delta y_t\}$ の定常解が存在する必要十分条件は

$$A_2 < 1, B_2 < 1, A_2 B_2 < 1 . \quad (5.29)$$

である。さらに、条件 (i)-(iv) に加えて $q = 0$ ならば、条件 (5.29) は $\{\Delta y_t\}$ がエルゴード的になるための必要十分条件となる。

面白いことに、(5.29) 式の条件は、これまで議論してきた定常 SSAR(1) モデルのエルゴード性の条件と同じである。しかしながら、定常の時と比べると、 $\{v_t\}$ の分布に関する条件が不要になっている。

さらに、(5.28) 式の SSARIMA モデルにおいて定常解をもつとき、 $\{\Delta y_t\}$ のモーメントに関する以下のような定理が得られる。

定理 5.4 : (5.24) 式で表される SSARIMA モデルで、MA の次数 q が有限であるとす。条件, (i) (5.25) 式の整合条件, (ii) (5.29) 式で表されるエルゴード性の条件, 及び (iii) $k \geq 1$ に対して $\sup_{t \geq 1} E[|v_t|^k | \mathcal{F}_{t-1}] < +\infty$ という条件を満たす。この時

$$\sup_{t \geq 1} E[|\Delta y_t|^k] < +\infty . \quad (5.30)$$

となる。

(5.7) 式で表される非定常 SSAR モデルは、複雑な確率過程であるが、統計的な性質を見るには簡単な場合でシミュレーションをするのがよい。

$m = d = 1$ のとき、最も簡単な SSARIMA モデルは次のように書ける。

$$y_t - \mu = \begin{cases} A(y_{t-1} - \mu) + \sigma_1 u_t & \text{if } y_t \geq y_{t-1} \\ B(y_{t-1} - \mu) + \sigma_2 u_t & \text{if } y_t < y_{t-1} \end{cases} , \quad (5.31)$$

ここでは、 μ は位置に対するパラメータで、 σ_i ($i = 1, 2$) がスケールパラメータである。

(5.31) 式でのパラメータと (5.24) 式のパラメータの対応関係を示すと、 $A = A_2, B = B_2$ および $A_1 = B_1 = 0$ である。誤差項 $\{u_t\}$ は次のようなランダムウォークに従う。

$$u_t = u_{t-1} + v_t . \quad (5.32)$$

(5.32) 式における $\{v_t\}$ は独立，同一の標準正規分布に従う．なお，この場合の整合条件は

$$\frac{1-A}{\sigma_1} = \frac{1-B}{\sigma_2} = r . \quad (5.33)$$

というようになる．簡単化のためにこのシミュレーションでは $\mu = 0$ とする．(5.31) 式では A, B と σ_i ($i = 1, 2$) の4つの未知パラメータがあるが，整合条件により自由に動けるのは A, B 及び r の3つである．

図 5.1 ではいくつかの係数に設定して，シミュレーションによって発生させた系列をプロットしている．なお，乱数系列はどれも同じ系列を使っている．真中のケース (b) は $A = B = 0.5$ のときでこの場合は実は線形で ARIMA(1,1,0) になっている． $A \neq B$ のときはサンプルパスに非対称な動きが見られる．経済時系列に対しては， $A = 0.8$ ， $B = 0.2$ のときが興味深い．ここで用いた非定常 SSAR モデルは，とても簡単なものであるが，さまざまな興味深い非対称パターンがみられる．これらは，ARIMA モデルのような線形時系列では実現するのが難しいと思われる．しかしながら，系列の多くを占めているのがランダムウォークの部分であり，非対称なケースと対称なケースを見極めるのは，定常 SSAR モデルの時と比べて難しくなっている．

5.2.3 非定常 SSAR モデルの最尤推定

$m = n$ および $d \geq 1$ のときの SSAR モデルは，いろいろな点でやや複雑な統計モデルである．まずはじめは，閾値自己回帰モデルと類似した点があり，過去の値によって現在の状態が決まるという面を持っている．次に，現在の値と現在の状態が同時に決まるという面も持っている．また， $d \geq 1$ の SSAR モデルには，非定常的要素も入ってくる．定常 SSAR モデルの時に述べたように，単純な最小 2 乗法では正しいパラメータの推定はできない．この点は TAR モデルと違うところである．こうなる理由は，SSAR モデルにおいて同時性が重要であるためである．ここでも，最小 2 乗法の代わりに最尤法による推定を提案することにする．

今回も $m = n$ かつ $d = 1$ のケースを考察の対象とする．まず，初期条件を $v_0 = v_{-1} = \dots = v_{-q} = \mathbf{o}$ とし $\Delta \mathbf{y}_1$ は固定しておく．この時， $\{\Delta \mathbf{u}_t, 2 \leq t \leq T\}$ から $\{\Delta \mathbf{y}_t, 2 \leq t \leq T\}$ への変換のヤコビアンは

$$|J(\Delta \mathbf{u}_t \rightarrow \Delta \mathbf{y}_t)|_+ = \prod_{t=2}^T |D(t)|^{-1} . \quad (5.34)$$

というようになる．

また， $\{v_t, 2 \leq t \leq T\}$ から $\{\Delta \mathbf{u}_t, 2 \leq t \leq T\}$ への変換のヤコビアンは 1 である．ただし，(5.8) 式の MA モデルは反転条件を満たしているとする．誤差項 $\{v_t\}$ が独立に標準正規分布に従う時， $\{\Delta \mathbf{y}_t, 2 \leq t \leq T\}$ に対して，初期条件で条件付けた対数尤度関数は

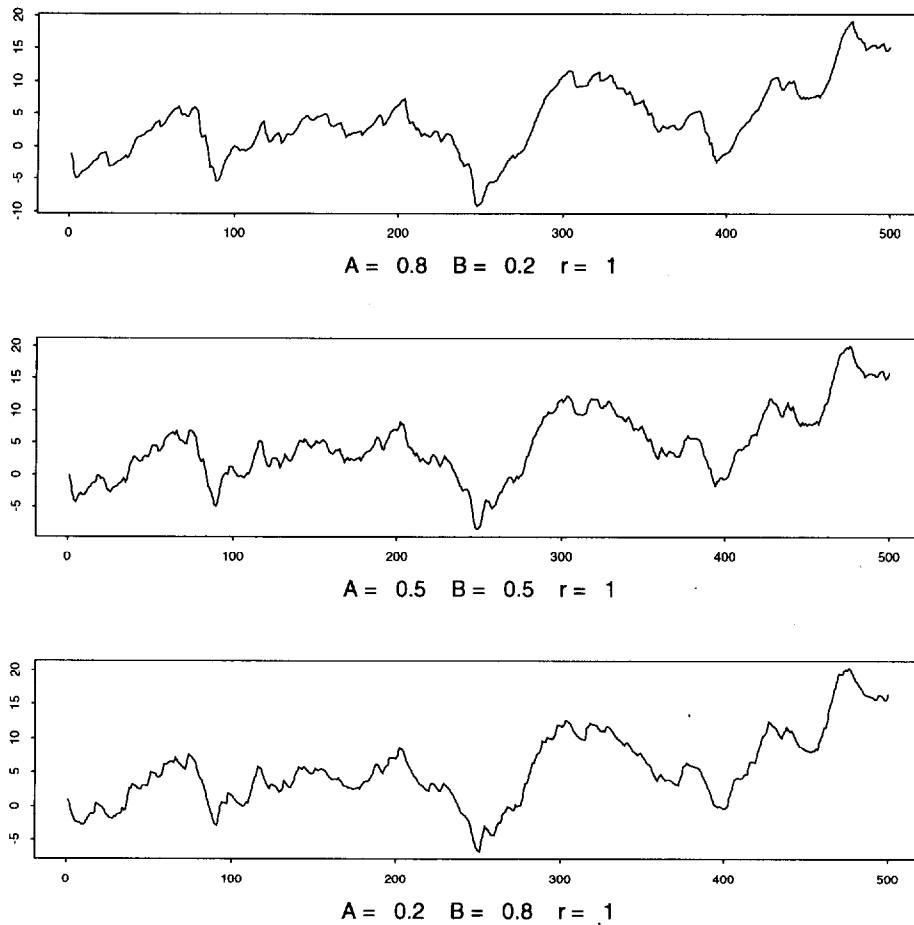


図 5.1: 非定常 SSAR モデルのサンプルパス

$$\begin{aligned}
 \log L_T(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{(T-1)m}{2} \log 2\pi \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \sum_{i=1}^2 I_t^{(i)} \log |D_i \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta}) D_i'| \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \mathbf{v}_t'(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta})^{-1} \mathbf{v}_t(\boldsymbol{\theta}),
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

というように書ける。ただし、 $\{\mathbf{v}_t(\boldsymbol{\theta})\}$ は (5.7) 式と (5.8) 式を使って、 $\{\mathbf{v}_t\}$ を $\{\Delta \mathbf{y}_t\}$ の関数となるように表現し直したものである。また、 $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta})$ は \mathbf{v}_t の共分散行列であるが、その対角成分はすべて 1 である。なお、 $\boldsymbol{\theta}$ は、はじめの SSAR モデルに現れる構造パラメータから成るベクトルである。 $m = n = 1$ の場合は $\sigma_i = D_i$ ($i = 1, 2$) と書くこと

にし、パラメータベクトルは $\theta' = (r_1, r_2, \sigma_1, \sigma_2, c_1, \dots, c_q)$ のようになる。

最尤 (ML) 推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は θ に含まれる未知パラメータに関して $\log L_T(\theta)$ を最大化するものである。ただし、パラメータ空間 Θ は、整合条件 (5.11) によって制限がかけられている。ただし、SSARIMA モデルの実際の推定は、数値的最適化を使って、対数尤度関数を最大化している。この ML 推定量の漸近的な性質は、 $m = n = d = 1$ で $q = 0$ のときのみ分かっている。

定理 5.5 : (5.24) 式によって与えられる非定常 SSAR モデルについて、以下を仮定する。(i) (5.25) 式の整合条件とエルゴード性に関する定理 5.3 を満たしている。(ii) 誤差項 $\{v_t\}$ は独立に $N(0, 1)$ に従う。(iii) $d = 1, q = 0$ かつ $\sigma_i > 0$ ($i = 1, 2$)。 (iv) 真のパラメータ θ_0 がパラメータ空間 Θ の内点に存在している。以上の条件が成り立っているとすると、この時、ML 推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は一貫性をもち、漸近的に正規分布に従う。

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0) \xrightarrow{d} N[0, I(\theta_0)^{-1}] \quad , \quad (5.36)$$

ただし、

$$I(\theta_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[-\frac{\partial^2 \log L_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] \Big|_{\theta = \theta_0} \quad (5.37)$$

である。また、 $q = 0$ のときの (5.37) 式の情報行列は次のような方式で求められる。

$$\frac{1}{T} \left[-\frac{\partial^2 \log L_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] \Big|_{\theta = \hat{\theta}_{ML}}$$

また、この ML 推定量について的小標本時の特性を調べるために、シミュレーションを行った。まず、 $d = m = 1$ かつ $q = 0$ のときの非定常 SSAR モデルに従う $\{y_t\}$ を発生させる。ここで、誤差項 $\{v_t\}$ に対しては標準正規乱数を用いた。このデータに対して、最尤法を使って推定値を求めるという作業を各 5000 回行い、その標本平均を表 5.1 にまとめた。サンプル数 T を 100,500 にして行い、小数点以下 2 桁まで求めた。この表を見ると、サンプル数が 100 でも ML 推定量のバイアスはほぼ無視できるくらい小さく、信頼できる推定量であるということが分かる。これらの性質は前に考察した定常 SSAR に対する ML 推定の性質とほぼ同様である。以上から、定常、非定常を通じて、SSAR モデルの推定には ML 推定が有効であるということが確認できた。

5.2.4 条件付分散不等性と非対称性

金融データに対する近年の計量分析においては、ARCH モデルに代表される分散不均一モデルがよく使われている。ARCH モデルは、もともと Engle (1982) によって提案されたが、それに対する批判として、金融時系列がもつ非対称なボラティリティ構

表 5.1: SSARIMA モデルの ML 推定値の平均*

T = 100

	B = 0.8		B = 0.2		B = 0.0		B = -0.2		B = -1.5	
	\hat{A}	\hat{B}	\hat{A}	\hat{B}	\hat{A}	\hat{B}	\hat{A}	\hat{B}	\hat{A}	\hat{B}
A = 0.8	0.792 (0.05)	0.792 (0.05)	0.794 (0.04)	0.184 (0.16)	0.793 (0.04)	-0.022 (0.20)	0.795 (0.03)	-0.218 (0.23)	0.798 (0.02)	-1.541 (0.47)
A = 0.2	0.179 (0.17)	0.791 (0.04)	0.196 (0.11)	0.201 (0.11)	0.194 (0.11)	-0.010 (0.14)	0.191 (0.10)	-0.200 (0.15)	0.203 (0.06)	-1.535 (0.33)
A = 0.0	-0.021 (0.20)	0.795 (0.04)	-0.006 (0.13)	0.194 (0.10)	-0.006 (0.13)	-0.004 (0.12)	-0.0008 (0.11)	-0.196 (0.14)	0.001 (0.07)	-1.513 (0.30)
A = -0.2	-0.215 (0.23)	0.797 (0.03)	-0.206 (0.15)	0.195 (0.09)	-0.195 (0.15)	-0.002 (0.12)	-0.203 (0.14)	-0.204 (0.13)	-0.193 (0.08)	-1.518 (0.29)
A = -1.5	-1.527 (0.45)	0.798 (0.02)	-1.506 (0.34)	0.203 (0.06)	-1.505 (0.30)	0.004 (0.07)	-1.493 (0.28)	-0.200 (0.08)	NA (NA)	NA (NA)

* この表で、 A と B は (5.24) 式の A_2 , B_2 に対応する。括弧の中の数値は標準誤差を表す。"NA"はエルゴード的でないケースを表す。

T = 500

	B = 0.8		B = 0.2		B = 0.0		B = -0.2		B = -1.5	
	\hat{A}	\hat{B}	\hat{A}	\hat{B}	\hat{A}	\hat{B}	\hat{A}	\hat{B}	\hat{A}	\hat{B}
A = 0.8	0.796 (0.02)	0.796 (0.02)	0.798 (0.01)	0.192 (0.07)	0.799 (0.01)	-0.001 (0.08)	0.799 (0.01)	-0.203 (0.10)	0.799 (0.01)	-1.497 (0.21)
A = 0.2	0.194 (0.07)	0.798 (0.02)	0.199 (0.05)	0.199 (0.05)	0.200 (0.04)	-0.001 (0.06)	0.199 (0.04)	-0.202 (0.06)	0.200 (0.02)	-1.507 (0.13)
A = 0.0	-0.004 (0.08)	0.798 (0.01)	-0.001 (0.06)	0.199 (0.04)	-0.006 (0.06)	-0.001 (0.05)	0.002 (0.05)	-0.199 (0.06)	-0.0002 (0.03)	-1.494 (0.13)
A = -0.2	-0.204 (0.10)	0.799 (0.01)	-0.199 (0.07)	0.198 (0.04)	-0.198 (0.06)	0.0004 (0.05)	-0.200 (0.06)	-0.196 (0.06)	-0.200 (0.03)	-1.500 (0.13)
A = -1.5	-1.514 (0.19)	0.799 (0.01)	-1.508 (0.14)	0.199 (0.02)	-1.501 (0.13)	-0.002 (0.03)	-1.503 (0.12)	-0.199 (0.03)	NA (NA)	NA (NA)

造をうまく表現できないという指摘がある。そこで、いくつか ARCH モデルを拡張したモデルが提案されている。(たとえば, Bollerslev (1986), Nelson (1991), Harvey and Shepard (1993) などである.)

この観点から, ここで提案した SSAR モデルを拡張してこのような分散不均一な性質をもたせることを考えてみる. $m = d = 1$, $q = 0$ のときに (5.7)-(5.10) 式で表現されるモデルで考える. この時 $\{\Delta y_t\}$ は

$$\Delta y_t = D(t) \left\{ -r_1 + \left(-r_2 + \frac{1}{D(t-1)} \right) \Delta y_{t-1} + v_t \right\}, \quad (5.38)$$

のように表される. ただし, $E(v_t) = 0$ である.

ここで, $\Omega_t (= E(v_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}))$ を $\{v_t\}$ の条件付分散を表す以下のようなモデルとする.

$$\Omega_t = 1 + \sum_{i=1}^p \alpha_i v_{t-i}^2 \quad (5.39)$$

未知係数 $\{\alpha_j, j = 1, \dots, p\}$ は定常で, $\{v_t\}$ の分散が正になるように制約がかけられているとする. SSAR モデルには, もともと分散項 (t) に非対称性が含まれているので, このような簡単な拡張で非対称な分散不均一モデルが導出できる. また, この ARCH 効果を入れたモデルの推定には, $m = n = d = 1$ のときの尤度関数 (5.35) を少し修正して, $D_i \Omega(\boldsymbol{\theta}) D_i'$, $\mathbf{v}_t(\boldsymbol{\theta})' \Omega(\boldsymbol{\theta})^{-1} \mathbf{v}_t(\boldsymbol{\theta})$ の代わりに, $\sigma_i^2 \Omega_t(\boldsymbol{\theta})$ ($i = 1, 2$), $v_t(\boldsymbol{\theta})^2 \Omega_t(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ とすればよい. この場合, 構造パラメータは $\boldsymbol{\theta}' = (r_1, r_2, \sigma_1, \sigma_2, c_1, \dots, c_q, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ になる.

5.3 5章の数学的付録

定理 5.1 の証明 : $\mathbf{Y}_{1|0}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) を \mathbf{y}_0 が与えられた時の \mathbf{R}^m で定義される \mathbf{y}_1 の標本空間の分割とする. これは定義関数 $I_1^{(i)}$ ($i = 1, 2$) によって定義される. これを繰り返すと, \mathbf{R}^{mt} にて定義される $\{\mathbf{y}_s, 1 \leq s \leq t\}$ の標本空間の分割を $\mathbf{Y}_{t|0}^{(j)}$ ($j = 1, \dots, 2^t$) とする. これは $I_s^{(i)}$ ($s = 1, \dots, t; i = 1, 2$) によって分けられるとする. このような標本空間の分割によって, 任意の $t > 0$ に対して $\cap_i \mathbf{Y}_{t|0}^{(i)} = \phi$ かつ $\cup_i \mathbf{Y}_{t|0}^{(i)} = \mathbf{R}^{mt}$ となる.

次に以下のような定義関数を考える.

$$J_t^{(1)} = 1_{\{\mathbf{e}'_m \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_t \geq \mathbf{e}'_m (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}) \mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{e}'_m \boldsymbol{\mu}_1\}} \quad (5.40)$$

及び,

$$J_t^{(2)} = 1_{\{\mathbf{e}'_m \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_t < \mathbf{e}'_m (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}) \mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{e}'_m \boldsymbol{\mu}_1\}} \quad (5.41)$$

また, 同様に \mathbf{y}_0 が与えられた時, \mathbf{R}^m において定義される \mathbf{u}_1 の標本空間を $\mathbf{U}_{1|0}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) のように分割されるとする. この分割は定義関数 $J_1^{(i)}$ ($i = 1, 2$) によって定義される. 同じように, \mathbf{R}^{mt} において定義される $\{\mathbf{u}_s, 1 \leq s \leq t\}$ の標本空間の分割 $\mathbf{U}_{t|0}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, 2^t$) が考えられる. ただし, 分割は $t > 0$ に対して, $J_s^{(i)}$ ($s = 1, \dots, t; i = 1, 2$) で決まる. 定理で述べた仮定のもと $\cap_i \mathbf{U}_{t|0}^{(i)} = \phi$, $\cup_i \mathbf{U}_{t|0}^{(i)} = \mathbf{R}^{mt}$ が成り立ち, $\mathbf{Y}_{t|0}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, 2^t$) と $\mathbf{U}_{t|0}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, 2^t$) とは 1 対 1 対応になる. □

定理 5.3 の証明 : この証明は 3 つのステップに分けて考える. はじめの 2 つのステップは, 誤差項が MA の場合の TAR(1) について, Liu and Susko (1992) が使った方法に似ている. 最後のステップは Tweedie (1983b) のマルコフチェーンについての基本的な結果に基づいて Chan, 他 (1985) が行った方法を使う. しかしながら, 非定常 SSAR 特有の問題もあるので注意しなければならない.

ステップ 1: $x_t = \Delta y_t$ とし, $(1+q) \times 1$ のベクトル \mathbf{X}_t を

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ v_t \\ v_{t-1} \\ \vdots \\ v_{t-q+1} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

のように定義する. そして, $\{\mathbf{X}_t\}$ のマルコフ表現を考える. 条件 $x_t \geq 0$ は $v_t \geq r_1 + \mathbf{a}'_{t-1} \mathbf{X}_{t-1}$ と同等である. ただし,

$$\mathbf{a}'_{t-1} = \left(r_2 - \frac{1}{D(t-1)}, -c_1, -c_2, \dots, -c_q \right) \quad (5.43)$$

で, $\{c_j, 1 \leq j \leq q\}$ は $\{\Delta \mathbf{u}_t\}$ に MA 係数である. (5.27) 式より,

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{H}(\mathbf{X}_{t-1}, v_t), \quad (5.44)$$

という表現ができる. ただし,

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}_{t-1}, v_t) = \begin{pmatrix} -D(t)r_1 - D(t)\mathbf{a}'_{t-1}\mathbf{X}_{t-1} + D(t)v_t \\ v_t \\ v_{t-1} \\ \vdots \\ v_{t-q+1} \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$

である.

ここで, 次のような評価関数

$$G(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{1+q} h(\xi_i), \quad (5.46)$$

を考える. ただし, $h(\xi_i) = |\xi_i|$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{1+q})$ である.

$K_n = [-n, n] \times \dots \times [-n, n], n = 1, 2, \dots$ となるコンパクト集合の系列を考えると, $n \rightarrow +\infty$ の時, $\inf_{\boldsymbol{\xi} \in K_n} G(\boldsymbol{\xi}) \rightarrow +\infty$ となる. この時, $E[|v_t|] < +\infty$ 及び k_1 が正の定数であるから, $t \geq q$ に対して,

$$\begin{aligned} E[G(\mathbf{X}_t) | \mathbf{X}_0] &= E[h(x_t) + \sum_{j=0}^{q-1} h(v_{t-j}) | \mathbf{X}_0] \\ &\leq k_1 + E[E[h(x_t) | \mathbf{X}_{t-1}] | \dots | \mathbf{X}_0] \end{aligned} \quad (5.47)$$

となる.

また,

$$\begin{aligned} Q_{t|t-1} &= E[h(x_t) | \mathbf{X}_{t-1}] \\ &= E\left\{h\left[-D(t)r_1 - D(t)\mathbf{a}'_{t-1}\mathbf{X}_{t-1} + D(t)v_t\right] | \mathbf{X}_{t-1}\right\}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

とする. まず, $x_{t-1} = x > 0$ のときを考える. この時, (5.28) 式より, $x > 0$ が与えられたとき, t 時点の2つの局面

$$\begin{aligned} Q_{t|t-1} &= \sigma_1 \int_{z \geq (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x - \mathbf{c}'\mathbf{z}_{t-1}} \left[-r_1 - (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x + \mathbf{c}'\mathbf{z}_{t-1} + z\right] g(z) dz \\ &\quad - \sigma_2 \int_{z < (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x - \mathbf{c}'\mathbf{z}_{t-1}} \left[-r_1 - (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x + \mathbf{c}'\mathbf{z}_{t-1} + z\right] g(z) dz, \end{aligned} \quad (5.49)$$

を得る。ただし、 $\mathbf{c}' = (c_1, \dots, c_q)$ および、 $\mathbf{z}_{t-1} = (v_{t-1}, \dots, v_{t-q})$ である。よって、(5.25) 式と条件 (iv) から、

$$Q_{t|t-1} \leq k_2 \left(1 + \sum_{i=1}^q |v_{t-i}|\right) + A_2 x \int_{z \geq (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x - \mathbf{c}' \mathbf{z}_{t-1}} g(z) dz \quad (5.50)$$

$$- \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) A_2 x \int_{z < (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x - \mathbf{c}' \mathbf{z}_{t-1}} g(z) dz,$$

が得られる。ただし、 k_2 は正の定数である。なお、 $A_2 B_2 < 1$ と整合条件 (5.25) より、

$$0 < r_2 < \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}. \quad (5.51)$$

が得られ、これから、以下の不等式が成り立つ。

$$-\frac{\sigma_2}{\sigma_1} A_2 < 1. \quad (5.52)$$

ここで、 $\delta_1 = \max\{A_2, -(\sigma_2/\sigma_1)A_2\}$ とおく。また、 $x_{t-1} = x < 0$ の時に同様な議論をして、 $\delta_2 = \max\{B_2, -(\sigma_1/\sigma_2)B_2\}$ とおく。さらに、 $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ とすると、次のような関係式が得られる。

$$E[G(\mathbf{X}_t)|\mathbf{X}_{t-1}] \leq k_3 \left(1 + \sum_{i=1}^q |v_{t-i}|\right) + \delta G(\mathbf{X}_{t-1}), \quad (5.53)$$

ただし、 $0 < \delta < 1$ で k_3 は正の定数である。このやり方を繰り返すと、

$$E[G(\mathbf{X}_t)|\mathbf{X}_0] \leq k_3 \sum_{k=0}^{t-1} \delta^k \left(1 + \sum_{j=1}^q \eta_{t-k-j}\right) + \delta^t G(\mathbf{X}_0), \quad (5.54)$$

が得られる。ただし、 $\eta_k = E[|v_k| I(k > 0) + |v_k| I(k \leq 0)]$ である。したがって、評価関数について有界であることが示せた。

$$\sup_{t \geq 1} E[G(\mathbf{X}_t)|\mathbf{X}_0] < +\infty. \quad (5.55)$$

次に Liu and Susko (1992) が行った議論のように、以下の Lemma を使って、(5.28) 式で定義されるマルコフチェーンが Liu and Susko (1992) の鍵となる条件を満たす。(Assumption 2.1) これより、Liu and Susko (1992) の定理 1.1 を使って、マルコフチェーン $\{\mathbf{X}_t\}$ に対して、有限な正の不変測度が存在することがいえた。

Lemma 5.1 : (5.28) 式で与えられる q が有限の SSARIMA モデルの誤差項 $\{v_t\}$ が独立に同一分布に従い、その密度関数 $g(v)$ が \mathbf{R} において常に正であるとする。この時、 $(\Delta y_{t-1}, v_{t-1}, \dots, v_{t-q}) = (z_0, z_1, \dots, z_q)$ が与えられた時の条件付確率

$$\Pr\{\Delta y_t \leq y | \Delta y_{t-1} = z_0, v_{t-1} = z_1, \dots, v_{t-q} = z_q\} \quad (5.56)$$

は $\mathbf{z}' = (z_0, z_1, \dots, z_q)$ の連続関数である。

ステップ 2 : 次に (5.29) 式の条件が必要条件であることを示す. 一般性を欠くことなく $q = 0$ とおける. この証明の中心は Chan, 他 (1985) が TAR(1) モデルに対して行った方法と同様なものである. ただし, こちらのモデルに対しては修正をしなければならぬ点がある.

パラメータが与えられた領域の境界にきている場合を考えなくてはならない. $A_2 = 1$, $A_1 < 0$ かつ $B_2 < 1$ のときを考える. 整合条件から, この場合は $1 - \sigma_1 r_2 = 1$, $-\sigma_1 r_1 < 0$ 及び $1 - \sigma_2 r_2 < 1$ となる. 従って, $\sigma_1 r_2 = 0$, $\sigma_1 r_1 > 0$ 及び $\sigma_2 r_2 > 0$ となる. しかしながら, これでは $\sigma_1 > 0$ および $\sigma_2 > 0$ という仮定に反することになる. 他の境界での場合も同様である.

ステップ 3 : $q = 0$ のとき, 評価関数を $G(x_t) = 1 + |x_t|$ というようにとる. そして, ステップ 1 と同じようにして,

$$E[G(X_t) | \mathbf{X}_{t-1} = \mathbf{x}] < k_3 + \delta G(\mathbf{x}). \quad (5.57)$$

となる δ ($0 < \delta < 1$) と k_3 ($k_3 > 0$) が存在する. また, (5.28) 式および $g(v)$ に関する条件 (iii) より, このマルコフチェーンが既約であることが示せる. そして, Chan, 他 (1985) のように Tweedie (1983b) の結果を使ってエルゴード性が言える. \square

定理 5.4 の証明 : この証明は定理 5.4 の十分性の証明に似ている. まずはじめに, $k = 2$ としたときに (5.57) 式が成り立つことを証明しよう. $x_t = \Delta y_t$ とおく. 仮定より, 定理 5.3 の (5.55) 式が成り立つから, $E[|x_t|] < +\infty$ となる. ここで, 評価関数を $g(\mathbf{X}_t) = |x_t|^2$ のようにとる. $x_{t-1} = x > 0$ のときを考え, $E[x_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$ を評価するのであるが, ある $M > 0$ をとり, $x_{t-1} > M$ という事象に切り取って考える.

$$\begin{aligned} & E[x_t^2 | x_{t-1}, v_{t-1}, \dots, v_{t-q}] \quad (5.58) \\ &= \sigma_1^2 \int_{z \geq (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x - \mathbf{c}' \mathbf{z}_{t-1}} \left[-r_1 - (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x + \mathbf{c}' \mathbf{z}_{t-1} + z \right]^2 g(z) dz \\ & \quad + \sigma_2^2 \int_{z < (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x - \mathbf{c}' \mathbf{z}_{t-1}} \left[-r_1 - (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x + \mathbf{c}' \mathbf{z}_{t-1} + z \right]^2 g(z) dz \\ &\leq k_4(M) \left[(1 + x_{t-1}) \left(1 + \sum_{i=1}^q |v_{t-i}| \right) + \sum_{i=1}^q v_{t-i}^2 \right] \\ & \quad + A_2^2 x_{t-1}^2 \int_{z \geq (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x_{t-1} - \mathbf{c}' \mathbf{z}_{t-1}, x_{t-1} > M} g(z) dz \\ & \quad + \left(-\frac{\sigma_2}{\sigma_1} A_2 \right)^2 x_{t-1}^2 \int_{z < (r_2 - \frac{1}{\sigma_1})x_{t-1} - \mathbf{c}' \mathbf{z}_{t-1}, x_{t-1} > M} g(z) dz, \end{aligned}$$

ただし, $k_4(M)$ は $M > 0$ に依存する正の定数である.

ここで, x_{t-1}^2 にかかる係数に関して 3 つの場合を考える. まず, $0 < r_2 < 1/\sigma_1$ の

ときは, $-\sigma_2/\sigma_1 < -(\sigma_2/\sigma_1)A_2 < 0$ 及び $1 > A_2 > 0$ となる. この場合は (5.58) 式の2番目の積分が, 十分大きな M に対して小さくなる. 次に, $r_2 = 1/\sigma_1$ のときは, $-(\sigma_2/\sigma_1)A_2 = A_2 = 0$ となる. 最後に $1/\sigma_1 < r_2 < (1/\sigma_1) + (1/\sigma_2)$ のときは, $0 < -(\sigma_2/\sigma_1)A_2 < 1$ 及び $0 > A_2 > -(\sigma_1/\sigma_2)$ となる. この時は (5.58) 式の1番目の積分が, 十分大きな M に対して小さくなる. よって, 十分に $M > 0$ を大きくすれば, $0 < \delta_1 < 1$ で,

$$\begin{aligned} & E[x_t^2 | x_{t-1}, v_{t-1}, \dots, v_{t-q}] \\ & \leq k_4(M) \left[(1 + x_{t-1}) \left(1 + \sum_{i=1}^q |v_{t-i}| \right) + \sum_{i=1}^q v_{t-i}^2 \right] + \delta_1 x_{t-1}^2. \end{aligned} \quad (5.59)$$

となる δ_1 が存在する.

同じようにして $x_{t-1} = x < 0$ の時も, $x_{t-1} < -M < 0$ の事象について (5.58) 式と同様な評価をすると, 上記と同様の不等式を満たす δ_2 ($0 < \delta_2 < 1$) が存在するから, $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ かつ $0 < \delta < 1$ とおく. 条件付期待値に関する同様の評価をすると

$$\begin{aligned} & E[x_t^2 | \mathcal{F}_0] \\ & \leq k_5(M) \sum_{k=0}^{t-1} \delta^k E \left[(1 + x_{t-1-k}) \left(1 + \sum_{i=1}^q |v_{t-i-k}| \right) + \sum_{i=1}^q v_{t-i-k}^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \delta^t x_0^2, \end{aligned} \quad (5.60)$$

となる. ただし, $k_5(M)$ は $M > 0$ に依存する正の定数である. よって, $E[|x_{t-1}v_{t-1}|]$ が有界であることが示せたから, 仮定より, $\sup_{t \geq 1} E[x_t^2] < +\infty$ を得る.

次に, 任意の $k > 2$ に対して, 評価関数を $G(\mathbf{X}_t) = |x_t|^k$ のようにとり, k に関して帰納法を使う. あとは $k = 2$ のときと同様である. \square .

定理 5.5 の証明 : (i) 一致性: $\{\Delta u_t(\boldsymbol{\theta})\}$ が以下のように定義されているとする.

$$\Delta u_t(\boldsymbol{\theta}) = D(t)^{-1} \Delta y_t + r_1 + [r_2 - D(t-1)^{-1}] \Delta y_{t-1}, \quad (5.61)$$

これは (5.27) 式の $\{\Delta u_t\}$ と同じである. パラメータ $\boldsymbol{\theta}' = (r_1, r_2, \sigma_1, \sigma_2)$ の真の値を $\boldsymbol{\theta}'_0 = (r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, \sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)})$ と書くことにする. $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ で評価した Δy_t を (5.61) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta u_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0) &= D(t)^{-1} D_t^{(0)} \Delta \mathbf{u}_t(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &+ [r_1 - D(t)^{-1} D_t^{(0)} r_1^{(0)}] \\ &+ [r_2 - D(t)^{-1} D_t^{(0)} r_2^{(0)}] \Delta y_{t-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &+ [D(t)^{-1} D_t^{(0)} D_{t-1}^{(0)-1} - D(t-1)^{-1}] \Delta y_{t-1}(\boldsymbol{\theta}_0), \end{aligned} \quad (5.62)$$

ここで、 $D_t^{(0)}$ は $\sigma_i = \sigma_i^{(0)}$ ($i = 1, 2$) のときの $D(t)$ 、また、 $\Delta y_{t-1}(\boldsymbol{\theta}_0)$ は $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ のときの Δy_{t-1} である。このとき、 $D(t)^{-1}D_t^{(0)} = (\sigma_1^{(0)}/\sigma_1)I_t^{(1)} + (\sigma_2^{(0)}/\sigma_2)I_t^{(2)}$ となる。

Meyn and Tweedie (1993) の 17 章にあるマルコフチェーンのエルゴード性に関する定理より、

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0) &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \sum_{i=1}^2 I_t^{(i)} \log \sigma_i - \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta u_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0)^2 \quad (5.63) \\ &= -E\left[\sum_{i=1}^2 I_t^{(i)} \log \sigma_i\right] - \frac{1}{2} E[\Delta u_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0)^2]. \end{aligned}$$

となる。ただし、(5.62) 式が $r_1, r_2, 1/\sigma_1, 1/\sigma_2$ の線形関数であることと、 $\boldsymbol{\theta}_0$ が Θ の内点であることから、 $\Theta_0 \subset \Theta$ のコンパクト集合 $\boldsymbol{\theta}$ に関して一様収束が言える。(たとえば、十分小さな c_i ($i = 1, 2$) に対して $\sigma_i \geq c_i > 0$ という Θ_0 をとればよい。) 次に目的関数 $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0)$ について考える。はじめに、 $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0)$ は (r_1, r_2) の二次形式であり、以下の Lemma 5.2 から (σ_1, σ_2) に関して凹形になっている点に注意しよう。そうすると、 $\boldsymbol{r}' = (r_1, r_2)$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{r}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} &= (-1)E\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \Delta y_{t-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \end{pmatrix} v_t(\boldsymbol{\theta}_0)\right] \quad (5.64) \\ &= 0. \end{aligned}$$

となる。 $\eta_i = 1/\sigma_i$ ($i = 1, 2$) とすれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \eta_1} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} & \quad (5.65) \\ &= E[I_t^{(1)}] \frac{1}{\eta_1} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} - E[\Delta u_t(\boldsymbol{\theta}_0)(I_t^{(1)} y_t(\boldsymbol{\theta}_0) - I_{t-1}^{(1)} y_{t-1}(\boldsymbol{\theta}_0))] \\ &= (-\sigma_1^{(0)}) E[I_s^{(1)} \{v_s(\boldsymbol{\theta}_0)^2 + \xi_{s-1}(\boldsymbol{\theta}_0) v_s(\boldsymbol{\theta}_0) - 1\}], \end{aligned}$$

と書ける。ただし、

$$\xi_{s-1}(\boldsymbol{\theta}_0) = -r_1^{(0)} + [-r_2^{(0)} + D_{s-1}^{(0)-1}] \Delta y_{s-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \quad (5.66)$$

である。

ここで $\{v_t\}$ が正規分布に従っていることを使うと、

$$\int_c^{+\infty} (v^2 - 1 - cv) \phi(v) dv = 0, \quad (5.67)$$

という関係が成り立つ。ただし、 c は定数で、 $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数である。 η_2 についても η_1 と同様な議論をすると、

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta_i} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (5.68)$$

のような結論を得る。従って、以下の Lemma5.3, 5.4 を使って、関数 $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0)$ が $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ において、唯一、最大値をとることがわかる。また、(5.63) 式の収束が Θ_0 にて $\boldsymbol{\theta}$ に関する一様収束であったから、Amemiya (1985) の定理 4.1.1 が適用できる。対数尤度関数 $\log L_T(\boldsymbol{\theta})$ がパラメータに関して凹関数であったのと、 Δy_t のモーメントが存在することにより、

確率

$$P(\log L_T(\boldsymbol{\theta}_0) \leq \sup_{\boldsymbol{\theta} \notin \Theta_0} \log L_T(\boldsymbol{\theta}))$$

を任意に小さくできる Θ_0 をとることができる。(たとえば、Amemiya (1985) の Section 4 の Condition Dなどを参照。) よって、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$ の一致性が言えた。

Lemma 5.2 : $g(\mathbf{x})$ を以下のように定義する。

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p a_i \log x_i - \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (5.69)$$

ただし、 $\mathbf{x} = (x_i)$ は $p \times 1$ のベクトル、また $x_i > 0, a_i > 0 (i = 1, \dots, p)$ であり、 \mathbf{A} は正定値行列である。この時、どんな $0 < c < 1$ に対しても

$$g(c\mathbf{x} + (1-c)\mathbf{y}) > cg(\mathbf{x}) + (1-c)g(\mathbf{y}) \quad (5.70)$$

となる。ただし、 $\mathbf{y} = (y_i)$ は $p \times 1$ のベクトルで、 $y_i > 0 (i = 1, \dots, p)$ である。

Lemma 5.3 : 以下で定義される行列、

$$I(\boldsymbol{\theta}_0) = -\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \quad (5.71)$$

は正定値行列になる。ここで、 $\boldsymbol{\theta}' = (r_1, r_2, \eta_1, \eta_2)$ 、 $\boldsymbol{\theta}_0' = (r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)})$ 、 $\eta_i^{(0)} = 1/\sigma_i^{(0)} (i = 1, 2)$ である。ただし、 $q = 0$ とする。

Lemma5.3 の証明 : 計算により

$$I(\boldsymbol{\theta}_0) = E \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \Delta y_{t-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ I_t^{(1)} \Delta y_t - I_{t-1}^{(1)} \Delta y_{t-1} \\ I_t^{(2)} \Delta y_t - I_{t-1}^{(2)} \Delta y_{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \Delta y_{t-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ I_t^{(1)} \Delta y_t - I_{t-1}^{(1)} \Delta y_{t-1} \\ I_t^{(2)} \Delta y_t - I_{t-1}^{(2)} \Delta y_{t-1} \end{pmatrix}' \right] \quad (5.72)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E[I_t^{(1)}]\eta_1^{(0)-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E[I_t^{(2)}]\eta_2^{(0)-2} \end{pmatrix}.$$

となる.

$E[I_t^{(i)}] > 0$ ($i = 1, 2$) であつ、以下の行列が

$$E\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \Delta y_{t-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \Delta y_{t-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \end{pmatrix}' \right] \tag{5.73}$$

正定値であるから、以下の Lemma5.4 を使って結論が言える. \square

Lemma 5.4 $(m+n) \times (m+n)$ の半正定値行列 \mathbf{A} を

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

のように分割する. ただし, \mathbf{A}_{11} は正定値行列とする. このとき, 任意の $m \times m$ の正定値行列 \mathbf{B}_{22} に対して,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \tag{5.74}$$

は正定値になる.

(ii) 漸近正規性: SSARIMA モデルに関する ML 推定量の漸近正規性を証明するに際して一番重要なステップは, 対数尤度関数の偏微分がマルチンゲールに従うことを示すことで, 以下の Lemma5.5 にて扱う. 第2のステップは, マルチンゲール中心極限定理を使うことである. (Basawa, Feigin, and Heyde (1976) または Hall and Heyde (1980), Anderson and Kunitomo (1992) など) あとは, 誤差項に正規分布を仮定し, 任意の k について定理 5.4 が使えるから, 通常の議論を行えばよい. たとえば, 対数尤度関数の 3 次微分の期待値,

$$\left| \frac{1}{T} \frac{\partial^3 \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \right|$$

は $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ の中の任意の i, j , および k に対して有界になる. また, 次の式もすぐ示せる.

$$E \left[-\frac{\partial^2 \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \right] = E \left[\frac{\partial \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \log L_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \right]. \tag{5.75}$$

従つて, このマルコフチェーンがエルゴード的であることと $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$ の一貫性より (5.36) 式の収束が言えた. \square

Lemma 5.5 : $\boldsymbol{\theta}$ を (5.27) 式で定義される SSARIMA モデルの未知パラメータとする。(ただし, r_0 は除く.) この時

$$E \left[\frac{\partial \log L_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big| \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \mathcal{F}_{t-1} \right] = \frac{\partial \log L_{t-1}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big| \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad (5.76)$$

が言える. ただし, \mathcal{F}_{t-1} は $\{\mathbf{y}_s, s \leq t-1; \mathbf{v}_s, s \leq t-1\}$ によって生成される σ -集合体である.

Lemma 5.5 の略証 : $\theta_1 = \sigma_1$ とする. この場合,

$$\frac{\partial \log L_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{\sigma_1} \sum_{s=1}^t I_s^{(1)} - \sum_{s=1}^t \Delta u_t(\boldsymbol{\theta}) \left[-\frac{1}{\sigma_1^2} I_s^{(1)} \Delta y_s + \frac{1}{\sigma_1^2} I_{s-1}^{(1)} \Delta y_{s-1} \right]. \quad (5.77)$$

となるから, (5.27) 式, (5.71) 式及び次の関係式,

$$\left(\frac{1}{\sigma_1} \right) I_s^{(1)} \Delta y_s = I_s^{(1)} (v_s(\boldsymbol{\theta}) + \xi_{s-1}(\boldsymbol{\theta})), \quad (5.78)$$

を使うと, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ において, 以下のようにマルチンゲールであることが言える.

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{\partial \log L_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1} \Big| \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= \frac{\partial \log L_{t-1}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1} E \left[(v_t(\boldsymbol{\theta})^2 - 1) I_t^{(1)} + \xi_{t-1}(\boldsymbol{\theta}) v_t(\boldsymbol{\theta}) I_t^{(1)} \Big| \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= \frac{\partial \log L_{t-1}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1} \end{aligned} \quad (5.79)$$

$\boldsymbol{\theta}$ の他のパラメータについても同様な計算で, (5.76) 式がいえる. \square

第6章 SSARモデルを用いた応用

6.1 金融データへの応用

6.1.1 金融時系列

非定常 SSAR モデルを導入した主な理由は、経済時系列データへの応用が容易だからである。特に最近では、時系列分析を用いた金融時系列データの分析に多くの関心が集まっている。また金融時系列にはいくつかの興味深い特徴がある。まず第1は、株価、債券価格、金利、為替、およびそれらの派生証券など多くの種類のデータが得られるが、これらのデータは、定常時系列モデルを使うには変動が激しい。従って、線形定常モデルを使った予測では、あまり良い結果は得られない。それゆえに、たとえば株価などは、マルチンゲールに従っていると考えられることもある。(Harrison and Kreps (1979)) 第2に、このような価格や利回りは、正規分布で近似するのがあまり良くないことがある。よく言われるのは、株価の収益率から計算される尖度は、3よりかなり大きいことである。第3に、多くの金融時系列に対してボラティリティを推定すると、時間に関して一定ではない。第4に、株価などでは、上昇と下降で非対称な動きをする系列がある。これらの特徴はよく使われる ARIMA モデルや ARCH モデルなどでは、すべてを説明することはできない。

前章で導入した非定常 SSAR モデルが持っている統計的性質は、これらの金融時系列がもつ特徴によく合っている。したがって、このモデルが金融時系列に対して有効であることが期待される。

さて非定常 SSAR モデルを使った実証結果を紹介する前に、日本の株価データに対して簡単なデータ解析を行い、非対称性について調べた。ここで用いたデータは、1985年の1月から1986年の3月までの日経225平均株価指数と、1990年1月から1991年8月までの日経平均先物である。詳しいデータの説明は後ほどする。まず、以下のような非線形回帰モデル¹

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1^+ \Delta y_{t-1}^+ + \beta_1^- \Delta y_{t-1}^- + v_t \quad (6.1)$$

ただし、 β_0 , β_1^+ , 及び β_1^- は未知の回帰係数で、 $\{v_t\}$ は $E(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ 及び $E(v_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2$ となるような誤差項である。

¹説明変数に $(\Delta y_{t-1}^+)^2$ や $(\Delta y_{t-1}^-)^2$ を入れたケースも推定したが、同様な傾向だった。

説明変数は

$$\Delta y_{t-1}^+ = \begin{cases} \Delta y_{t-1} & \text{if } \Delta y_{t-1} \geq 0 \\ 0 & \text{if } \Delta y_{t-1} < 0 \end{cases},$$

及び

$$\Delta y_{t-1}^- = \begin{cases} 0 & \text{if } \Delta y_{t-1} \geq 0 \\ \Delta y_{t-1} & \text{if } \Delta y_{t-1} < 0 \end{cases}.$$

のように定義する. 特に $\beta_1^+ = \beta_1^- = \beta_1$ のとき, 非対称性を表す項がなくなり, Δy_t は AR(1) モデルに従う.

日経平均のデータを使い, この (6.1) 式のモデルを最小 2 乗法を使って推定した結果が表 6.1 に示されている. この表を見ると, 日経平均の現物のデータに対しては, β_1^+ と β_1^- とは有意に違う. また, 帰無仮説

$$H_0: \beta_1^+ = \beta_1^-$$

に対する F 検定の値は 8.306 であった. また, 係数 β_1^+ は 0 と比べて有意に違っていたが, 係数 β_1^- は必ずしも有意とは言えなかった.

モデルの当てはまりを見るために, それぞれのケースについて AIC を計算した. このモデルに対する AIC は -4090.4 で, AR(1) に対する AIC は -4084.1 であった. 他の期間についても AIC で見る限り, 説明変数に Δy_{t-1}^+ と Δy_{t-1}^- が入っているほうが, Δy_{t-1} だけを説明変数とするモデルより, 当てはまりが良い.

一方, 先物指数の方では, 推定された β_1^+ と β_1^- は有意に違うとは言えなかった. 帰無仮説 $H_0: \beta_1^+ = \beta_1^-$ に対する F-値は 0.19 と低かった. また, このモデルに対する AIC の値は -3237.97 で, AR(1) に対する AIC, -3239.78 に比べて悪くなっている. (なお, AR の係数の t-値は 2.57 であった.) 他の期間についても同様の推定を行ったが, やはり説明変数に Δy_{t-1}^+ , Δy_{t-1}^- を入れるモデルよりも Δy_{t-1} だけを入れるモデルのほうが当てはまりが良かった. 以上のことから, 現物のデータと先物のデータでは違った非線形性をもっていると言えよう.

表 6.1: 非線形回帰の推定結果

	現物データ		先物データ	
	β_1^+	β_1^-	β_1^+	β_1^-
Estimate	0.3847	-0.0185	0.1626	0.0957
S.D.	0.0841	0.0864	0.0927	0.08955
t-value	4.572	-0.2137	1.7533	1.0683

6.1.2 株式価格の変動モデル

この節では、はじめに簡単な株式価格の計量モデルを取り上げ、このモデルから非定常 SSAR モデルが導かれることを示す。なお、以下の議論は厳密な金融理論を構築しようとしているわけではなく、単に SSAR モデルが様々な金融時系列に応用可能であることを示すのが目的である。

ここでは、Amihud and Mendelson (1987) によって提案された市場構造に関する金融経済モデルを少し修正したものを考える。証券の本源的価値を V_t 、観察される価格を P_t とする。このように、ここでは証券の本源的価値と観察される価格を区別して考える。この2つが異なる理由はいくつかあり、Amihud and Mendelson (1987) や最近の文献で議論されている。 V_t と P_t とが必ずしも同じでないとし、その乖離を調整するモデルを導入する。

$$P_t - P_{t-1} = \begin{cases} g_1(V_t - P_{t-1}) & \text{if } V_t - P_{t-1} \geq 0 \\ g_2(V_t - P_{t-1}) & \text{if } V_t - P_{t-1} < 0 \end{cases}, \quad (6.2)$$

ここで、 V_t と P_t は Log 変換されているものとし、調整係数 g_i は $g_i \geq 0$ ($i = 1, 2$) を満たすものとする。ただし、ここでは、Amihud and Mendelson (1987) で使われた調整過程を2点ほど修正している。第1点は、右辺に入っていた同時点ノイズを省略している。これはモデルが複雑になることを避けるためである。第2に、調整係数 g_i ($i = 1, 2$) が違う値になり得るとしている。これには以下のような直感的な経済学的理由が考えられるが、ほかにも制度的な理由として、税制、空売り規制、取引・仲介規則などによる歪みが考えられる。

金融市場において、時点 t に新しいショックやニュースが得られたとすると、 V_t は P_{t-1} から変動する。 $V_t \geq P_{t-1}$ のとき、 t 時点の本源的価値は前の時点に取引された価格を上って、主に需要サイドからの圧力で価格が上がり易くなる。逆に $V_t < P_{t-1}$ のときは、主に供給サイドの圧力で価格が下がりやすくなる。このように実際の価格決定において2つの違った力が働くと考えられるから、2つの係数 g_i ($i = 1, 2$) は異なることがあるとしておくのである。詳しい議論はしないが、この定式化によって、現実の市場におけるさまざまなケースを包含していると指摘しておく。もし、 $g_1 = g_2$ ならば、(6.2) 式は線形モデルに帰着される。さらに、 $g_1 = g_2 = 1$ のときは、 $V_t = P_t$ となり、本源的価値と実際の価格が一致していると見なせる。従って、(6.2) 式で用いた定式化を使うと実際のデータからこれらの仮説が妥当かどうかの検証ができる。

最近の金融経済学では、Log をとった本源的価値 $\{V_t\}$ がドリフト付和分過程 $I(1)$ に従うとされることが多い。

$$V_t = V_{t-1} + \sigma e_t + \mu, \quad (6.3)$$

ただし、 μ は期待収益率を示し、 $\{e_t\}$ は MA 表現を有するような線形定常な確率過程

であるとする。

(6.2) 式と (6.3) 式を組み合わせると、 ΔP_t の表現として以下のような式を得る。

$$\Delta P_t = g(t) \left[\frac{1}{g(t-1)} - 1 \right] \Delta P_{t-1} + g(t) [\mu + \sigma e_t], \quad (6.4)$$

ただし、 $g(t) = g_1 I_t^{(1)} + g_2 I_t^{(2)}$ とする。

この表現では、 $I_t^{(1)} = 1$ となるのは $V_t - P_{t-1} \geq 0$ のときのみである。しかし、(6.2) 式より $I_t^{(1)} = 1$ となるのは $\Delta P_t \geq 0$ のときのみであることが分かる。よって、(6.3) 式は前章で議論をした $m = n = d = 1$ のときの非定常 SSAR モデルになっていると言える。また、前章の定理 5.3 より、このモデルで $\{\Delta P_t\}$ がエルゴード的になる条件が分かる。その条件を係数 g_i ($i = 1, 2$) の領域という形で図示した結果が図 6.1 である。条

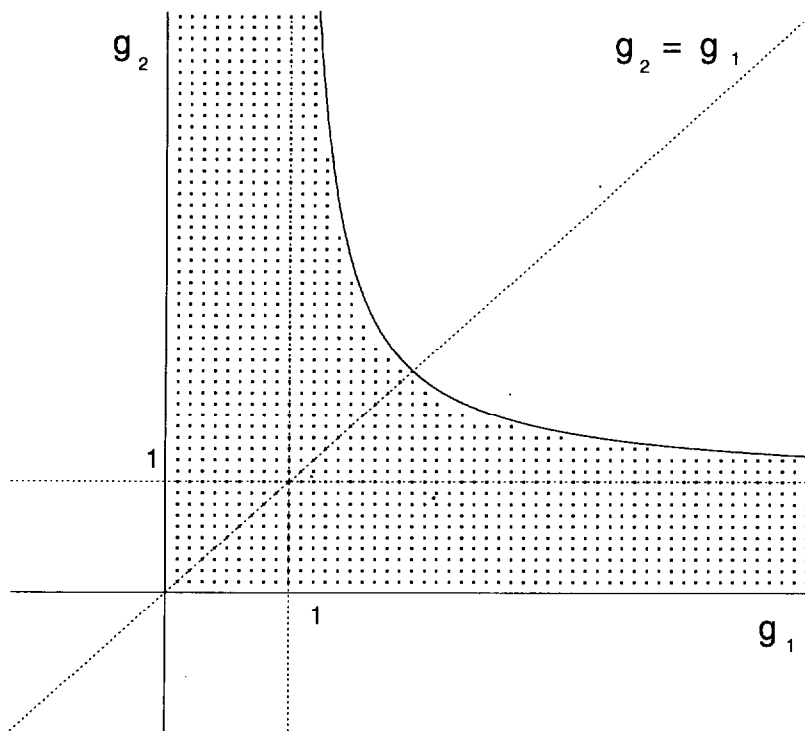


図 6.1: 定常領域

件を満たす領域を見ると、(線形モデルで表せる) $g_1 = g_2$ という領域より $g_1 \neq g_2$ の領域のほうが遥かに大きい。この図は実証結果を解釈する上でも役に立つ。

6.1.3 株価現物指数と先物指数の実証分析

この節では日本の金融市場の時系列データを用いた実証分析の結果を紹介する。この分析で用いたデータセットは、日本の代表的な株価指数である日経 225 株価指数のデータである。データの属性は、日経 225 の現物指数は 1985 年 1 月から 1994 年 12 月までの日次の終値を使っている。一方、日経平均の指数先物のほうは 1980 年代終わりから大阪株式市場で取引が開始されたもので、今回使ったデータは、1990 年 1 月から 1994 年 12 月までの中心限月の終値の日次データである。²すべてのデータは Log をとってから非定常 SSAR モデルをあてはめた。おそらく、このようにして先物の動きと現物の動きを比べるというのは、金融の専門家にとっても興味深いことと思われる。

これらのデータをいくつかの期間に区切って、(6.4) 式で表される 1 変量 1 次の非定常 SSAR モデルをあてはめることにする。ここで、このモデルのことを SSIAR(1) と書くことにしよう。SSIAR(1) モデルのパラメータ推定には ML 法を使い、誤差項には正規分布を仮定した。実際の推定では (5.25) 式の整合条件を満たすように非線形最適化を行った。また、誤差項には有意な自己相関が認められなかったので、 $q = 0$ で推定した。推定結果は表 6.2, 6.3 にまとめた。なお、 g_1 、 g_2 の推定値は $1 - A_2$ 、 $1 - B_2$ に相当し、LK は対数尤度を表す。また、線形モデルの ARIMA(1, 1, 0) と比較するために、尤度比検定の統計量 $LR(A = B)$ を計算している。この検定の帰無仮説は

$$H_0 : A_2 = B_2 .$$

である。

誤差項が正規分布という仮定のもと尤度比統計量 $LR(A_2 = B_2)$ は漸近的に $\chi^2(1)$ に従う。この統計量の結果は、これら株価の非対称性について有益な情報を与える。それらは表 6.2, 6.3 と図 6.2, 6.3 に記した。

さて、この結果を見るといくつか面白いことが観察できる。まず第 1 に、現物指数では時々上昇、下降で非対称な動きをしている。この現象は 1985 年からと 1987 年からの見られる。実際に 1987 年の 10 月には大きな株価の下落あった（ブラックマンデー）。このような下降局面では調整係数の推定値 $g_2 = 1 - B_2$ はしばしば 1 を超える。つまり株式市場で過剰反応があったことを示唆している。一方、上昇局面では、推定された係数 $g_1 = 1 - A_2$ は 1 より小さく、そのような過剰な反応は見られない。

第 2 に、先物データに対する χ^2 -値はいずれも大きくない。これが示すところは先物データには上昇・下降に関する非対称性がないということである。これには経済学的理由が考えられよう。つまり、現物に比べ、先物市場では空売りがしやすいという事情によることが考えられる。

²実際は、観測される先物価格を現在価値に割り引いておく必要がある。この計算に使った金利には月次のコールレートの平均を採用した。

表 6.2: 推定結果: 日経平均

現物 1985 - 1989

period	SSIAR(1,1)			ARIMA(1,1)		χ^2
	A_2	B_2	LK	$A_2(=B_2)$	LK	
1 1985.01.04-1985.09.10	0.207	-0.093	737.63	0.067	732.70	9.843 **
2 1985.09.11-1986.05.30	0.343	0.216	744.78	0.298	743.57	2.429
3 1986.05.31-1987.02.20	0.243	0.108	640.22	0.191	639.12	2.213
4 1987.02.23-1987.11.07	0.233	-0.951	555.16	-0.118	518.30	73.733 **
5 1987.11.09-1988.08.03	0.178	0.172	651.99	0.176	651.99	0.004
6 1988.08.04-1989.05.15	0.103	-0.093	732.00	0.027	730.34	3.326
7 1989.05.16-1989.12.29	-0.028	-0.074	605.20	-0.047	605.13	0.130

* 10% 有意 — $\chi^2(1)$ ** 1% 有意 — $\chi^2(1)$

表 6.3: 推定結果: 日経平均 (続き)

現物 1990 - 1994

period	SSIAR(1,1)			ARIMA(1,1)		χ^2
	A_2	B_2	LK	$A_2(=B_2)$	LK	
1 1990.01.04-1990.10.22	0.034	0.196	485.74	0.106	484.30	2.877
2 1990.10.23-1991.08.15	-0.026	0.072	565.59	0.020	565.15	0.878
3 1991.08.16-1992.06.11	-0.080	0.065	530.93	-0.005	530.00	1.847
4 1992.06.12-1993.03.31	-0.011	0.026	527.12	0.006	527.06	0.121
5 1993.04.01-1994.01.24	0.040	-0.069	570.08	-0.013	569.57	1.013
6 1994.01.25-1994.12.15	-0.151	0.066	693.63	-0.059	691.40	4.465 *

先物 1990 - 1994

period	SSIAR(1,1)			ARIMA(1,1)		χ^2
	A_2	B_2	LK	$A_2(=B_2)$	LK	
1 1990.01.04-1990.10.22	0.199	0.240	505.53	0.219	505.43	0.206
2 1990.10.23-1991.08.15	-0.020	-0.040	562.79	-0.030	562.77	0.035
3 1991.08.16-1992.06.11	0.076	0.172	551.36	0.126	550.83	1.045
4 1992.06.12-1993.03.31	0.059	0.006	538.57	0.033	538.45	0.236
5 1993.04.01-1994.01.24	-0.027	-0.084	565.06	-0.053	564.93	0.257
6 1994.01.25-1994.12.15	-0.103	-0.102	698.90	-0.103	698.90	0.000

第3に、日本の金融市場で日経平均に対する先物が取引されてから、80年代にみられた現物の非対称的動きは姿を消した。この期間で過剰反応を示すような調整係数は推定されなかった。

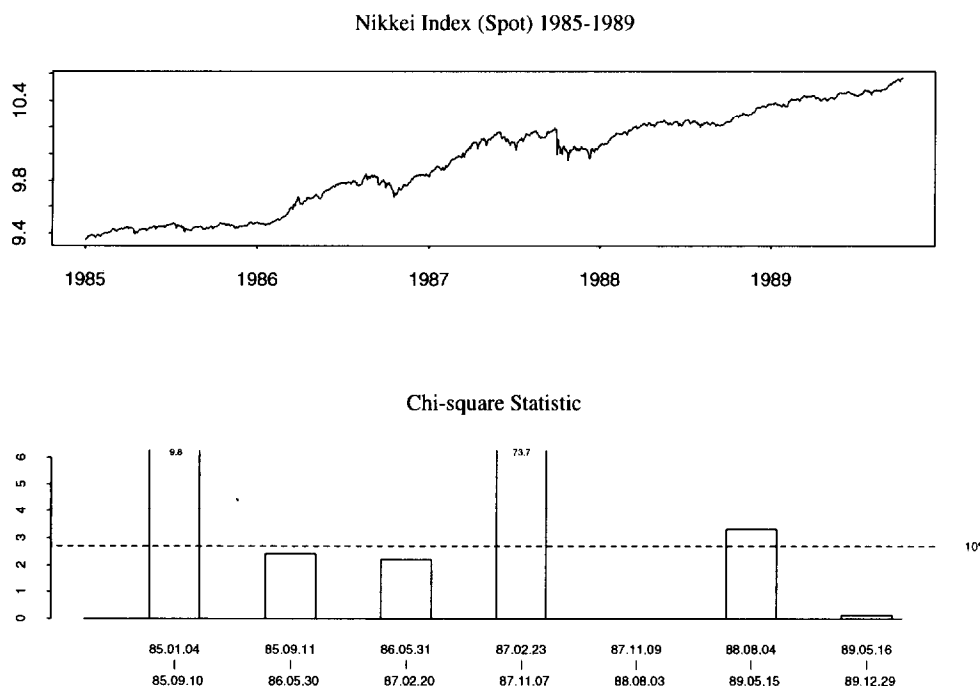


図 6.2: 日経 225 データの結果

SSAR モデルによる非対称性の推定に続いて、推定されたモデルの誤差項について検討した。このデータセットに対して、条件付不均一分散であるかどうかを調べるために、誤差項に 1 階の ARCH モデルをあてはめ、帰無仮説 $H_0 : \alpha_1 = 0$ に対する尤度比検定を行った。その結果、7 期間のうち、4 期間に関しては 1% の有意水準で ARCH 効果が有意であった。つまり日経データに対しては、ここで考えた非定常 SSAR モデルに、さらに ARCH モデルを加えたモデルを考えるのが適当であると予想される。前章で見たように、SSAR モデルに ARCH 効果を入れるのは簡単である。これは今後の課題といえる。

ここで得られた実証結果は金融の専門家にとっても有益なものであるといえるであろう。また、金融市場のデータに対してさらにいろいろな分析が行われる必要がある。そこではすでにある方法やモデルだけではなく、様々な新しい試みがなされるべきである。

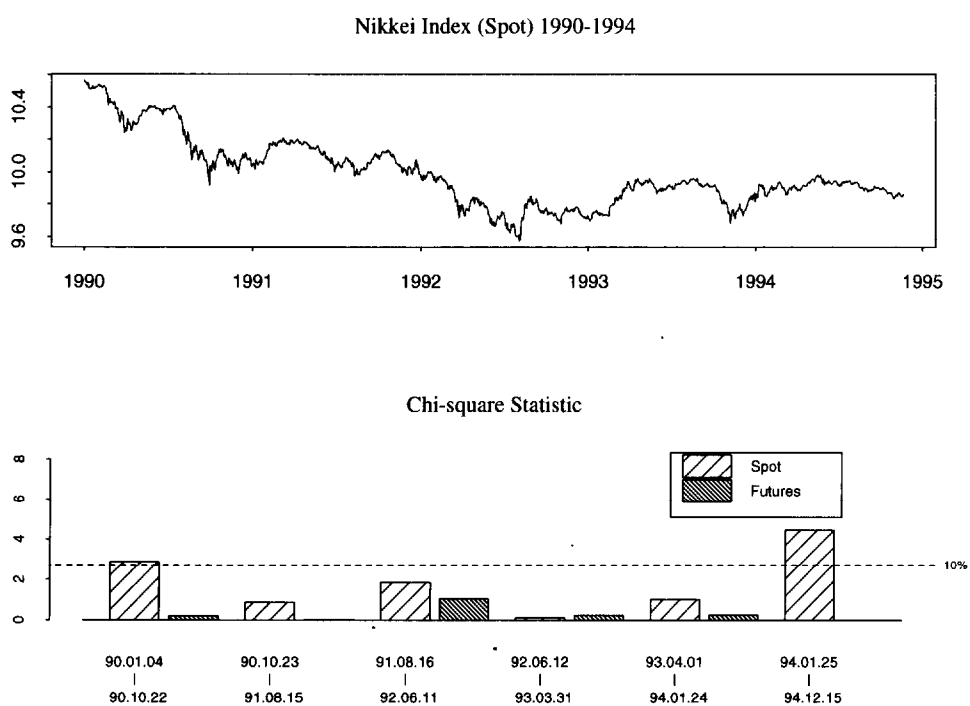


図 6.3: 日経 225 データの結果 (続き)

6.2 市場データへの応用例

本節では、多変量同時転換時系列モデルの応用例として、農産物市場データに不均衡計量モデルをあてはめた結果を報告する。これまでに、不均衡計量モデルをあてはめて計測した例は、マクロ・モデルや金融市場を中心として幾つか報告されている。しかしながら、農産物市場などミクロ・データに適用した例はあまり無いようである。ここでは、2章で導出した価格と数量の2変数同時転換時系列モデルを実際の農産物市場のデータに適用してみる。モデルの誘導形は(2.34), (2.39)式で表されているが、ここで、再掲しておく。

$$\begin{pmatrix} q_t \\ p_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \\ 0 & 1 + \delta_1(\beta_1 - \beta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{t-1} \\ p_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma'_2 \\ \delta_1 \gamma'_1 & -\delta_1 \gamma'_2 \end{pmatrix} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{v}_t^{(1)} \quad (\Delta p_{t+1} \geq 0) \quad (6.5)$$

$$\begin{pmatrix} q_t \\ p_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 + \delta_2(\beta_1 - \beta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{t-1} \\ p_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma'_1 & 0 \\ \delta_2 \gamma'_1 & -\delta_2 \gamma'_2 \end{pmatrix} \mathbf{z}_t^* + \mathbf{v}_t^{(2)} \quad (\Delta p_{t+1} < 0) \quad (6.6)$$

ここで、 β_1, β_2 はそれぞれ、需要関数、供給関数の傾きで、 δ_1, δ_2 は上昇、下降時の価格調整係数であった。なお、ここで報告する実証分析では攪乱項について以下のことを仮定する。

(仮定) (2.11)式における攪乱項 $\{u_t\}$ が2次元正規分布 $N_2(0, \Sigma)$ ($\Sigma = (\sigma_{ij})$) に従う。

この仮定の下では、誘導型方程式の攪乱項は

$$v_t^{(j)} \sim N_2(0, \Omega^{(j)}) \quad (j = 1, 2) \quad (6.7)$$

となる。但し、共分散行列は

$$\Omega^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta_j & -\delta_j \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 0 & \delta_j \\ 1 & -\delta_j \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2) \quad (6.8)$$

で与えられる。ここで構造方程式である(2.11)と(2.13)式に表れる母数をベクトル $\theta = (\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \Sigma_1, \Sigma_2)$ によって表そう。このとき、時点 $t-1$ までの情報を条件とする t 時点における内生変数 \mathbf{y}_t の密度関数は

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= n(\Pi_1^{(1)} \mathbf{y}_{t-1} + \Pi_*^{(1)} \mathbf{z}_t, \Omega^{(1)}) I[e'_2 \mathbf{y}_t \geq e'_2 \mathbf{y}_{t-1}] \\ &+ n(\Pi_1^{(2)} \mathbf{y}_{t-1} + \Pi_*^{(2)} \mathbf{z}_t, \Omega^{(2)}) I[e'_2 \mathbf{y}_t < e'_2 \mathbf{y}_{t-1}] \end{aligned} \quad (6.9)$$

となる。ただし $n(\mu, \Omega)$ は平均 μ 、共分散行列 Ω の2次元正規密度関数、 $I[A]$ は定義関数で

$$I[A] = \begin{cases} 1 & (A \text{ が成り立つとき}) \\ 0 & (A \text{ が成り立たないとき}) \end{cases} \quad (6.10)$$

である。したがって観測データが (z_t, y_t) ($t = 1, \dots, T$) について利用可能であるとき、尤度関数は

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^T f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) \quad (6.11)$$

$$= \prod_1 n(\Pi_1^{(1)} \mathbf{y}_{t-1} + \Pi_*^{(1)} z_t, \Omega^{(1)}) \prod_2 n(\Pi_1^{(2)} \mathbf{y}_{t-1} + \Pi_*^{(2)} z_t, \Omega^{(2)}) \quad (6.12)$$

である。ここで記号 \prod_1 と \prod_2 はそれぞれ状態 $\{e'_2 \mathbf{y}_t \geq e'_2 \mathbf{y}_{t-1}\}$ と $\{e'_2 \mathbf{y}_t < e'_2 \mathbf{y}_{t-1}\}$ に対応する積である。

尤度関数に表れる母数 $\Pi_i^{(j)}$ ($i, j = 1, 2$), $\Omega^{(j)}$ ($j = 1, 2$) は、いずれも構造方程式の母数 θ の簡単な関数なので、最尤推定量は尤度関数 $L(\theta)$ を母数ベクトル θ について最大化する値によって定義することができる。ただし、解析的にこの値を求めるのは困難なので、非線形最適化のプログラムを用いて数値的に求めた³。

今回、実証分析の対象としたのは、日本の豚肉市場と鶏卵市場である。サンプル期間は1982年1月から1991年12月で、すべて月次データである。(サンプル数は120である。) 観測値として用いたデータは次の通りである。

価格： 東京地区の卸売価格 (出典：農林水産統計月報)

数量： 全国の生産量 (出典：農林水産統計月報)

外生変数としては

需要側： 家計の可処分所得 (出典：総務庁統計局)

供給側： 飼料の価格指数 (出典：農林水産統計月報), 一期前の数量

を用いた。ただし、以上すべてのデータは季節調整を施した⁴上で対数変換している。これらの系列をプロットしたものを図6.4, 6.5に示しておく。

以上のようなデータを使って得られた係数の推定値を表6.4, 6.5にまとめておく。これらの表には、赤池情報規準 (AIC) を均衡モデル及び不均衡モデルについて計算した結果も含まれている。これを見るとき、いずれの市場でも均衡を仮定するモデルよ

³実際には係数の符合条件 $\beta_1 < 0, \beta_2 > 0, \delta_i > 0$ ($i = 1, 2$) を満たすように制約をつけた最適化をしている。

⁴ダミー変数を用いた季節調整をおこなった。

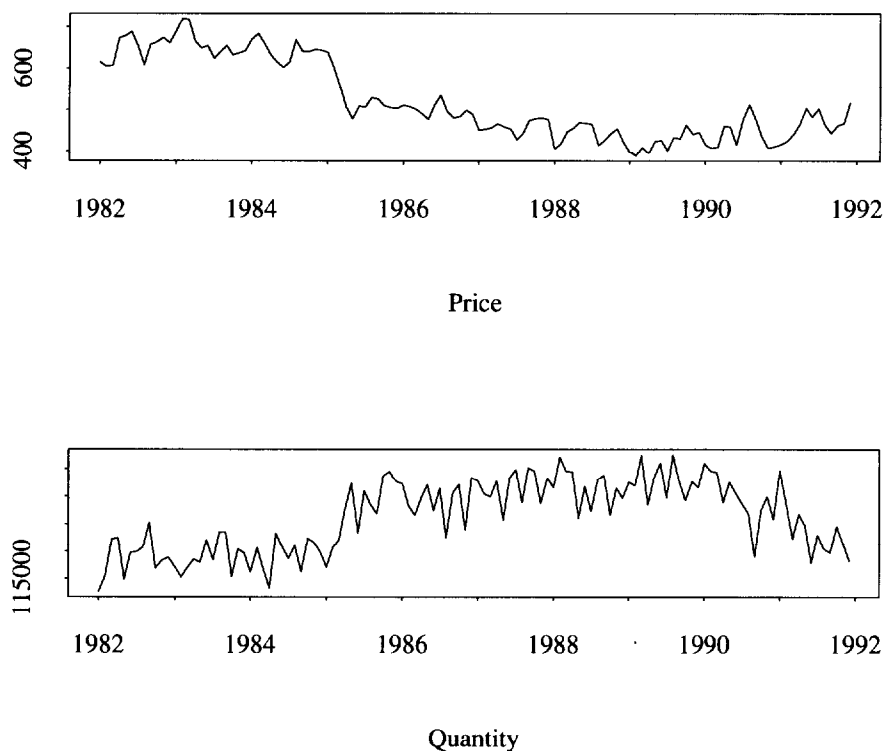


図 6.4: 豚肉市場のデータ

り、ここで考えている不均衡モデルの方が当てはまりが良いことが分かる。ただし、豚肉市場の場合、 β_2 の t -値が低く有意とはいえない。これは、データを見る限り、ほぼ需要関数上で価格と数量が決まっていると思われる。従って、供給曲線が識別不能になっているためであると考えられる。

比較的推定が良かった鶏卵市場の需要曲線と供給曲線を図 6.6 に示しておいた。図にはいくつか代表的な時点について推定された需要曲線と供給曲線を同時に示したが、実際に観測されたデータは、誤差項を除いてどちらかの曲線上にあると見なすことができ、実際の市場の状態を見る上で大変興味深いものと言える⁵。また、図 6.7 には価格変数の変化量 Δp_{t+1} を平滑化した系列をプロットした。ここで 0 より上きている期間は需要超過と見なせ、価格は供給側で決まっていると思われる。逆に、0 より下では供給超過と見なせ、需要側で決まって考えられる。なお、平滑化は移動平均法で行った。

⁵ 図 6.6 において、*の点は実際に取引が行われた価格と数量で、o の点は実現されなかった需要量または供給量を示すが、誤差項の部分は除いている。また実線の直線上で数量が決まっているとみなせる。

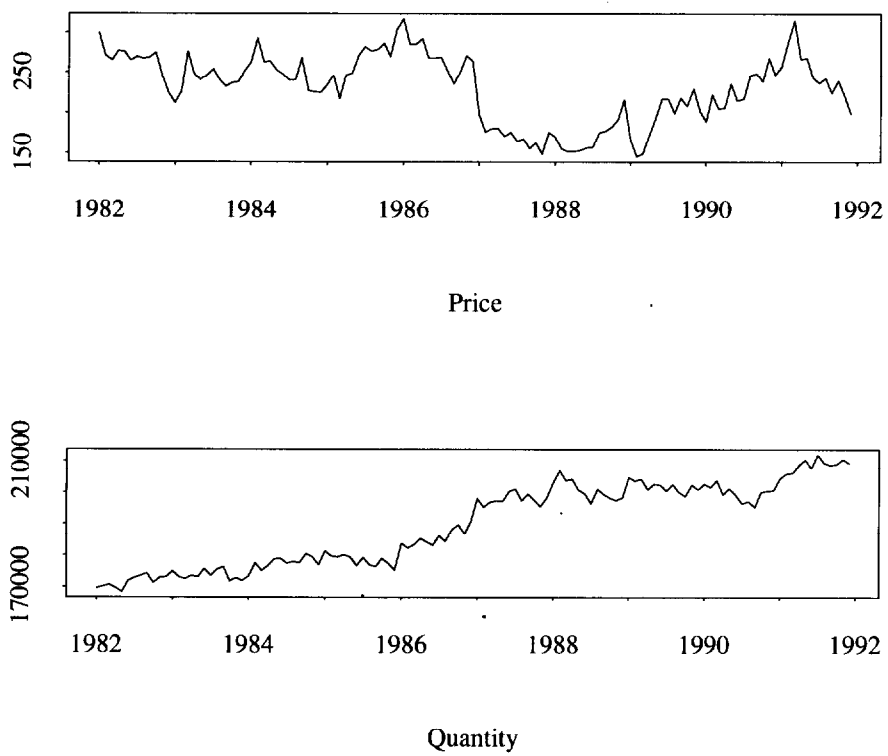


図 6.5: 鶏卵市場のデータ

表 6.4: 推定結果

(i) 豚肉市場

	推定値	標準偏差	t 値 (推定値 / 標準偏差)
δ_1	1.008	0.1166	8.641
δ_2	0.9741	0.1291	7.545
β_1	-0.3857	0.03231	11.94
γ_{11}	17.57	0.9041	19.43
γ_{12}	-0.6016	0.1299	4.631
σ_{11}	0.00124	0.00021	***
β_2	0.00002	0.00012	0.1987
γ_{21}	10.37	1.490	6.958
γ_{22}	-0.2178	0.04310	5.055
γ_{23}	0.2015	0.1146	1.758
σ_{22}	0.00204	0.00037	***
	AIC		-837.346
	-806.713 (均衡を仮定した時)		

* 標準偏差は数値的に求めた行列 $\left(\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}\right)$ をもとに計算したものである。

** 外生変数にかかる係数は以下の通りである。

γ_{11}	定数項	γ_{21}	定数項
γ_{12}	可処分所得	γ_{22}	飼料価格
		γ_{23}	一期前の数量

表 6.5: 推定結果 (続き)

(ii) 鶏卵市場

	推定値	標準偏差	t 値 (推定値 / 標準偏差)
δ_1	2.568	0.2635	9.746
δ_2	4.603	0.6521	7.059
β_1	-0.1300	0.00946	13.73
γ_{11}	5.144	0.2606	19.74
γ_{12}	1.369	0.04300	31.84
σ_{11}	0.00036	0.00006	***
β_2	0.04073	0.01161	3.507
γ_{21}	1.758	0.6688	2.629
γ_{22}	-0.1046	0.02612	4.004
γ_{23}	0.8760	0.04750	18.44
σ_{22}	0.00031	0.00005	***
	AIC		-921.293
	-909.777 (均衡を仮定した時)		

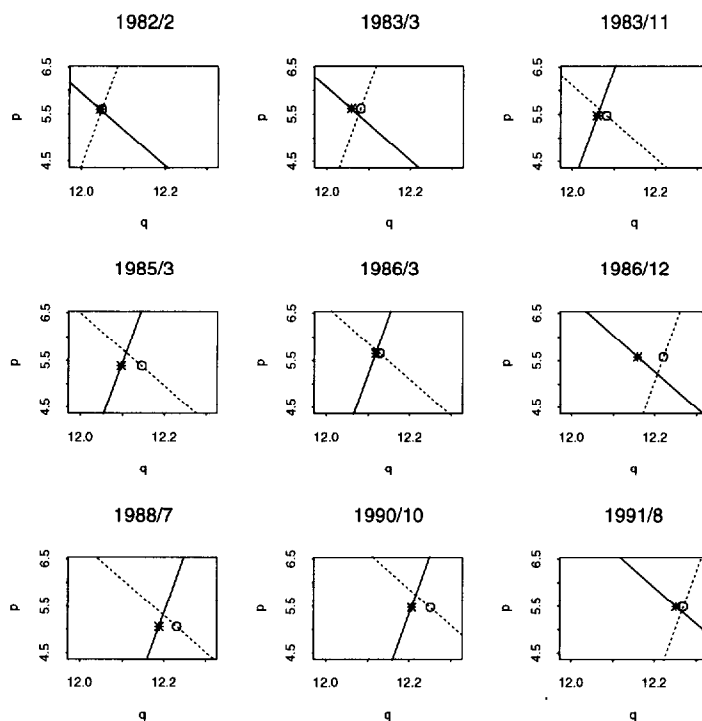


図 6.6: 推定された需要関数と供給関数（鶏卵市場）

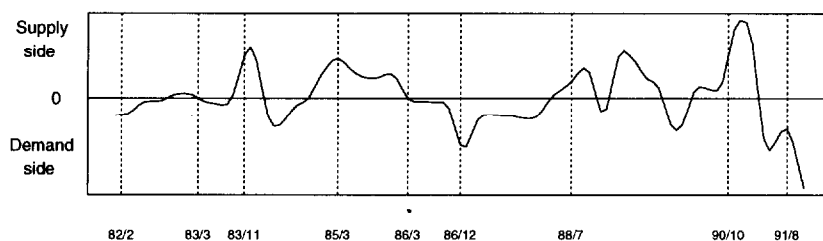


図 6.7: 平滑化された価格変化量（鶏卵市場）

ここで解析した農産物市場は需給の不一致が起りやすいということで不均衡市場の典型といえる。推定結果から非対称性について見てみると、まず、豚肉市場では、価格調整係数である δ_1, δ_2 の推定値が、ほぼ同じ値を示しており、非対称性は無いといえる。これに対して、鶏卵市場では δ_1, δ_2 の推定値が異なっており、非対称性が存在すると思われる。具体的には、 $\delta_1 < \delta_2$ となっており、これは、超過供給が存在しているときの方が調整が早いということを示している。つまり、供給が少なくてもあまり価格は上がらず、反対に供給過剰のときは暴落しやすいという結果になっている⁶。他方、豚肉市場の結果については、輸入肉や、冷凍肉の存在により、供給調整がしやすいという点が原因であると考えられる。

⁶これは、鶏卵が「物価の優等生」と呼ばれていることと整合的であると思われる。

6.3 その他の応用例

6.3.1 最尤法と操作変数法の比較

実際のデータに ML 法と操作変数法を使って定常 SSAR モデルをあてはめ、比較してみる。この節の目的は、2つの推定法の比較とその併用の仕方を述べるためであり、その結果からデータに関して、何らかの結論を導き出そうとするものではない。4章の議論の続いて、以下の2つのデータを用いて、2つの方法をどのように組み合わせることができるかを示すとともにどのような問題が存在するかを見ていくことにする。

a. 貸出金利と長期プライムレートとのスプレッド

これまでの不均衡市場の研究では、実証例として銀行の貸出市場が分析されてきた。計量経済的アプローチの研究としては伊藤 (1985)、浅子・内野 (1988) などがある。これまで見てきたようにこの不均衡計量モデルを時系列的なアプローチから考えると、SSAR モデルが導出される。貸出市場における価格系列は、貸出金利であるので、本節では、この系列に対して定常 SSAR モデルをあてはめてみる。図 6.8 で示したデータは、都銀長期貸出金利と長期プライムレート及びその2つの間のスプレッドである。(1977年1月-1998年月の月次データで、出典は日本銀行「経済統計月報」である。) ここでいうスプレッドは次のように4ヶ月遅れの長期プライムレートを引いている。

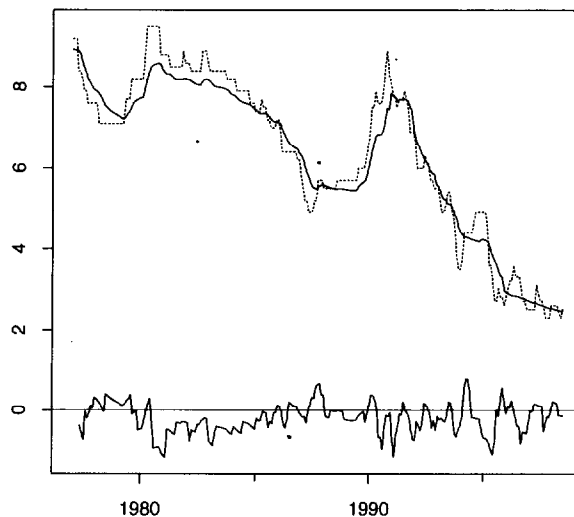


図 6.8: 長期貸出約定金利 (実線・上) と長期プライムレート (点線) 及び、それらのスプレッド (実線・下)

$$(t \text{ 期のスプレッド}) = (t \text{ 期の都銀長期貸出約定金利}) - (t-4 \text{ 期の長期プライムレート}) \quad (6.13)$$

このように4期遅らせた理由は、スプレッドをより定常にさせるためである。ここでは、このスプレッドに注目し、SSARモデルをあてはめてみる。その結果を表6.6にまとめた。これによると、 \hat{A} , \hat{B} についてどちらの方法の推定値もあまり変わっていない。

表 6.6: 金利スプレッドに対する SSAR モデルの適用

	\hat{A}	\hat{B}	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\mu}$	χ^2 値
MLによる推定	0.779	0.840	0.256	0.186	-0.272	10.19
IVによる推定	0.784	0.836	0.249	0.189	-0.257	1.037

なおかつ、尤度比検定の χ^2 値が高い値となっているので、SSAR(1)があてはまっていると考えられる。この結果は貸出市場が不均衡市場であることを示唆している。なお、IVに基づく検定統計量はあまり高くないが、これは A と B の差が小さく、サンプルサイズが小さいときに検出力がないことを考慮すると、やむを得ないと考えられる。

b. 神流川の水量データ

図6.9に示したデータは、ある地点の水量の日次データである。このデータは尾崎(1988)の14章で取り上げられたデータと同じである。この図を見ると明らかに上昇・下降で違う動きをしている。このデータに対して同じように2つの方法でSSARモデルを推定した。その結果は表6.7の通りである。これによると、MLを使うのとIVを

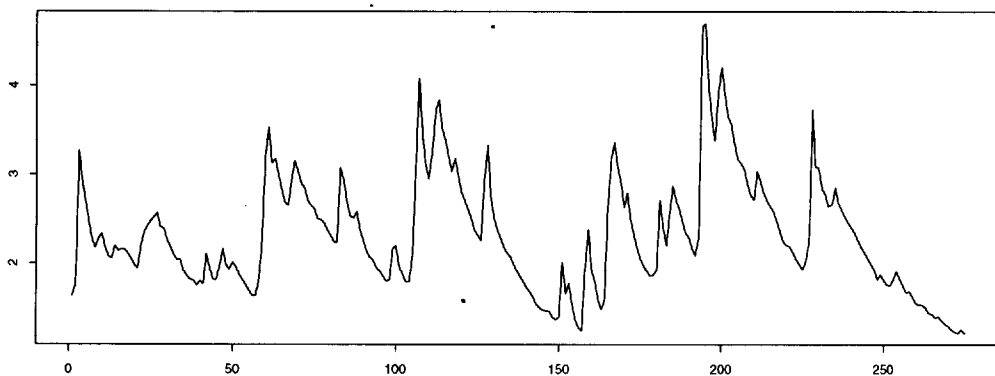


図 6.9: 神流川の水量データ

使うのとで結果が大きく異なる。MLでの推定値は A と B が異なるが、IVでの推定値

は両者がほぼ等しい結果になっている。IV の χ^2 が極端に小さいことを考えると、このケースは IV を使った結果の方が信頼できる考えられる。4章のシミュレーションでは、非対称分布に従う誤差項から発生される線形 AR モデルに対して、IV 法を適用すると、検定統計量が 1 よりかなり小さくなることが観察された。この現象がここでも起きている可能性がある。つまり、このデータに対しては、一見すると SSAR モデルが当てはまるように思われるが、IV 法を使うことによってそのような誤りが防げる例だと言える。この水量のデータに対しては、尾崎 (1988) で示されているような別の非線型モデルを考えるべきであろう。

表 6.7: 神流川水量データに対する SSAR モデルの適用

	\hat{A}	\hat{B}	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\mu}$	χ^2 値
ML による推定	0.509	0.907	0.610	0.115	1.261	269.7
IV による推定	0.897	0.892	0.292	0.307	0.819	0.0019

以上2つのデータについて、定常 SSAR モデルをあてはめた。ML 法と IV 法を併用する場合、2つの結果が変わらない場合には、問題が起こりにくいですが、異なった結果を示すケースにおいては、その取り扱いが難しい。この点からすると、上の2つのデータは、どちらも異なった結果を出した例である。a の例では χ^2 値だけが異なっていたので、小標本時の検出力の違いを理由に ML 法の結果を採用した。しかしながら、推定された \hat{A}, \hat{B} の差はあまりなく、IV 法のほうが推定量の誤差が大きいことを考えると、IV 法の結果を採用することも可能であると思われる。b の例では、ML 法と IV 法の結果が大きく異なっており、シミュレーションの結果を尊重して、IV 法の結果を採用した。ただし、データのプロットを見る限り、はっきりした非対称性が見られ、これが、誤差項の非対称性だけで説明するのは無理があるように思われる。この場合は、新しいモデルの可能性を探る必要があるだろう。

このように、ここで提案した SSAR モデルの推定についても、まだ、解決すべき問題があるといえる。

6.3.2 日本の貸出市場の不均衡性

前節において扱った銀行の貸出市場について、再度、取り上げてみたい。前節の解析では、金利のスプレッドをとって定常化し、モデルをあてはめた。この変換はやや恣意的であったので、本節では、直接、非定常 SSAR モデルをあてはめることにする。用いたデータは都銀の貸出約定平均金利⁷である。サンプル期間は 1965 年 1 月から 1984

⁷出典は日本銀行の「経済統計月報」である。

年12月であり、サンプル数は240である。このデータをプロットしたのが図6.10である。この期間の貸出市場については、均衡的であるか不均衡的であるかを検証したいくつかの研究があり(伊藤(1985), 浅子・内野(1988)など), 不均衡的であるという指摘がなされた。その理由として種々の規制等の影響で金利の調整能力が失われているとの指摘がある⁸。

貸出市場において、2章で議論した市場モデルを適用すると、価格に対するものは貸出金利になる。数量は企業側が借りる総融資額になるが、今回は用いていない。銀行はお金の出し手であるので、供給側に当たる。それに対して、一般の借り手企業は需要側である。

ここでは不均衡モデルを仮定し、その価格に関する誘導形であるSSARモデルを適用して、価格の非対称性を調べてみる。まず、定常SSARモデルを原系列に適用してみたが、 A, B ともに1にきわめて近くなり、非定常性が認められた。そこで、対数をとった系列に最も簡単なSSARIMA(1,1,0)モデルをあてはめてみた。結果が表6.8である。 χ^2 の値を見ると線形モデルよりSSARIMAモデルの方があてはまりが良いこ

表 6.8: 推定結果

	A	B	σ_1	σ_2	AIC	χ^2
IAR	0.8824	0.8824	0.0060	0.0060	-1758.97	—
$SSARIMA$	0.8440	0.9106	0.0080	0.0045	-1793.92	36.95

とが分かる。この結果、日本の貸出市場には非対称な調整過程が存在していると思われる。さらにSSARIMAの推定値において、 $A < B$ となっていることより、上昇局面に比べ下降局面の時の方が緩やかに変化しているといえる。金利情勢が上昇するときには、比較的早く貸出金利も追随するが、下降局面では、ゆっくりとしか下がらないという事を示している。つまりは、資金の供給側(銀行側)の意向が反映しやすい構造になっていることを示唆している。また、もし、市場が均衡的で、非対称性も無い場合のことを想定してみると、(5.1), (5.2)式で表される市場の均衡値 p_t^* は次のようにして求められる。

$$p_t^* = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} (w_{1t} - w_{2t})$$

⁸伊藤(1985)

$$= \frac{1}{r} u_t \quad (6.14)$$

この値をプロットしたものが図 6.11 である。(ただし, 対数をとった値で表されている。) これを見ると, 推定された均衡値は観測値とかなり乖離しており, その不均衡的



図 6.10: 日本の貸出約定平均金利 (1965年1月～1984年12月)

な様子がよく分かる。ここで得られた結果は, ほぼ伊藤 (1985), 浅子・内野 (1988) らの結果と同じである。特に後者の結果では, 複数の外生変数を取り入れた計量モデルを用いて, 均衡値を推定しているが, 本論で得られた図にかなり近いものとなっている。

なお, 図 6.11 における, 均衡系列のグラフと観測系列のグラフを比べると, 観測系列のほうが滑らかであり, なんらかの平準化作用が銀行システムに内在しているとも考えられる。したがって, ここで観察された非対称性はその平準化に対する何らかのコストとしてとらえることも可能である。

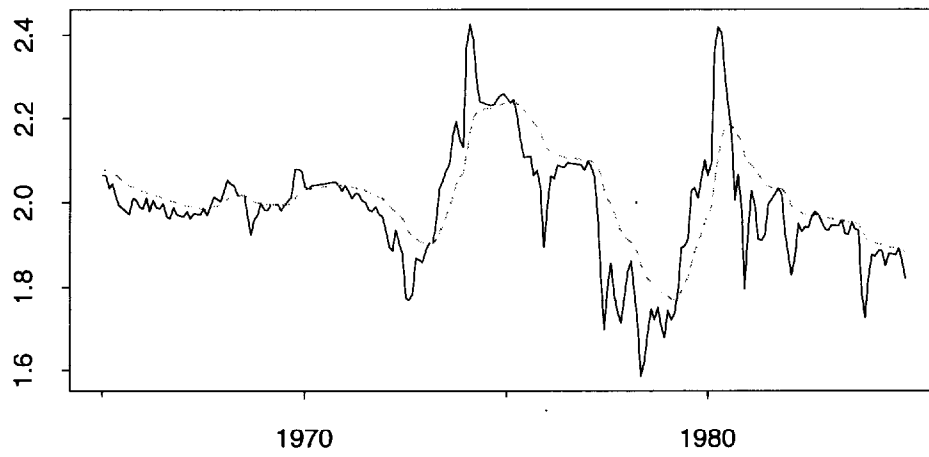


図 6.11: 推定された均衡値 (実線) と実際の系列 (破線)

第7章 まとめと展望

7.1 まとめ

本論文では、不均衡計量経済モデルを時系列モデルとして再解釈することによって、同時転換自己回帰モデル（SSAR モデル）を導出した。このモデルは、上昇・下降に関する非対称性を表すことができる新たな非線形時系列モデルである。その統計的な性質については、まずモデルの一意性を保証する整合条件が必要であることを示し、その条件を示した。次にもっとも単純な場合について定常条件を求めたが、これは、Threshold AR モデル（閾値 AR モデル）と同様な条件であった。また、その定常分布とモーメントについて数値的に計算した。続いて、推定の問題を考え、最尤法による推定を提案した。ただし、頑健性について問題があるので、他の方法も考察した。さらに、非定常版の SSAR モデルも導入し、その性質について調べた。最後に実際にデータに適用した例を紹介した。その結果、現実のデータにおいても、非対称性が存在することを確認した。この特徴は線形時系列モデルでは表せないため、このモデルの有効性を示したと言えよう。

最後になったが、SSAR モデルの持つ2つの特徴について、その経済学的な意味を考えてみたい。1つは上昇・下降における非対称性である。これは、不均衡計量経済モデルの価格調整式の非対称性から出てくる特徴である。このような非対称性が見られるということは、何らかの要因で市場が歪んでいるからであると考えられる。たとえば、6章の日経平均の例においては、買いと売りとの間に存在するコストの差が影響していると考えられる。

もうひとつは、SSAR モデルがもつ同時性である。これは、次の時点の局面が現在の値だけでは決まらず、同時的に決定されるということである。たとえば、Threshold モデルでは、現在の値によって次の時点の局面が決定されるという点で、SSAR モデルとは大きく異なる。この経済学的な意味は、経済システムにおいて、人々が合理的に行動するならば、将来の事象について完全には予測できないという性質を示しているということである。つまり、Threshold モデルのように、次の時点の局面があらかじめ分かっているという前提は、経済時系列において成り立つことが難しいと考える。この点で、SSAR モデルは、より現実的なスイッチングモデルであると言える。

7.2 残された問題

これまで、非対称性をもつ時系列に対するモデルとして、SSARモデルを導入し、その性質を調べた。ここでは、今後の課題について述べる。今回詳しく分析したSSARモデルは、最も簡単な場合のみであった。次の課題として、より次元の高いモデルの研究が必要である。特に、1変量1次モデル以外について、定常条件を求めることが要求される。

統計的な問題の中で、ここで取りあげなかったものとして、予測に関する問題がある。実際に、平均2乗誤差を基準にして、一期先の条件付期待値による予測を通常の線形モデルと比較すると、余り良くはなっていない。さらに踏み込んで、局面が分かっているとしたときの予測などを研究してみる必要がある。また、この考えを発展させることによってVaR(Value at Risk)などへの応用ができると考える。

非定常SSARモデルについても、いろいろなモデルの拡張が考えられる。たとえば、あるトレンドの上に定常SSARモデルが加わっているモデルなども提案できる。ただし、この場合は上昇・下降の局面が観測データからすぐに求まらないので、推定は格段に難しくなる。また、定常モデルに対して提案した頑健的な推定方法を、非定常版SSARモデルにも適用することは可能であり、これからの課題である。

本論文では、経済時系列に焦点を絞って非対称性を論じたが、他の分野においてもそのような非対称性は見られる。たとえば、医学・生物データには、上昇・下降で動きが顕著に異なるものがみられる。このような分野においても、SSARモデルの適用によって、有用な特性の発見に寄与することが期待される。今後は、適用範囲を広げ、いろいろなデータに対して当てはめてみる必要がある。

参考文献

- [1] Amemiya, T. (1985), *Advanced Econometrics*, Basil Blackwell.
- [2] Amihud, Y. and Mendelson, H. (1987), "Trading Mechanisms and Stock Returns : An Empirical Investigation", *Journal of Finance*, Vol.XLII, **3**, 533-555.
- [3] Anderson, T. W. (1984), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, 2nd. Edition*, John-Wiley.
- [4] Anderson, T.W. and Kunitomo, N. (1992), "Asymptotic Distributions of Regression and Autoregression Coefficients with Martingale Differences", *Journal of Multivariate Analysis*, **40**, 221-243.
- [5] Basawa, I.V., Feigin, P.D., and Heyde, C.C. (1976), "Asymptotic Properties of Maximum Likelihood Estimators for Stochastic Processes," *Sankhya*, **36**, 259-270.
- [6] Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- [7] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1976), *Time Series Analysis : Forecasting and Control, 2nd Edition*, Holden-Day.
- [8] Brockwell, P. and Davis, R.A. (1991), *Time Series : Theory and Methods, 2nd Edition*, Springer.
- [9] Brockwell, P.J., Liu, J. and Tweedie, R. L. (1992), "On the Existence of Stationary Threshold Autoregressive Moving-Average Processes", *J. Time Ser. Anal.*, **13**, 95-107.
- [10] Burns, A. and Mitchell, W. (1946), *Measuring Business Cycles*, National Bureau of Economic Research, Cambridge.
- [11] Chan, K.S. Petrucci, J.D., Tong, H., Woolford, S.W., (1985), "A multiple-threshold AR(1) model", *J. Appl. Prob.*, **22**, 267-279.

- [12] Chan, K.S. and Tong, H. (1985), "On the Use of the Deterministic Lyapunov Function for the Ergodicity of Stochastic Difference Equations", *Adv. Appl. Prob.*, **17**, 666-678.
- [13] Dvoretzky, A. (1972), "Asymptotic Normality for Sums of Dependent Random Variables", *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **2**, University of California Press, 513-535.
- [14] Engle, R. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variances of U.K. Inflation," *Econometrica*, **50**, 987-1008.
- [15] Engle, R. and Granger, C.W.J. (1987), "Cointegration and Error Correction: representation, estimation, and testing," *Econometrica*, **55**, 2, 251-276.
- [16] Fair, R.C. and Jaffee, D.M. (1972), "Methods of Estimation for Markets in Disequilibrium", *Econometrica*, **40**, 497-514.
- [17] Gourieroux, J., Laffont, J., and Monfort, A. (1980), "Coherency Conditions in Simultaneous Linear Equation Models with Endogenous Switching Regimes," *Econometrica*, **48**, 3, 675-695.
- [18] Hall, P. and Heyde, C. (1980), *Martingale Limit Theory and its Applications*, Academic Press.
- [19] Hamilton, J. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- [20] Hamilton, J. D. (1989), "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle", *Econometrica*, **57**, 357-384
- [21] Hansen, L. P. (1982), "Large sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators", *Econometrica*, **50**, 1029-1054.
- [22] Harrison, J.M. and Kreps, D.M. (1979), "Martingales and Arbitrage in Multi-period Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, **20**, 381-408.
- [23] Harvey, A.C. and Shephard, N. (1993), "Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model for Asset Returns," Unpublished manuscript.
- [24] John, S. (1982), "The Three-Parameter Two-Piece Normal Family of Distributions and Its Fitting", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **11**, 879-885.

- [25] Kunitomo, Naoto and Sato, Seisho, (1996), "Asymmetry in Economic Time Series and Simultaneous Switching Autoregressive Model", *Structural Change and Economic Dynamics*, **7**,1-34, Elsevier.
- [26] Kunitomo, Naoto and Sato, Seisho, (1999), "A Stationary and Non-stationary Simultaneous Switching Autoregressive Model with an Application to Financial Time Series", *The Japanese Economic Review*, **50**, 161-190.
- [27] Laffont, J. J. and Garcia, R. (1977), "Disequilibrium Econometrics for Business Loans", *Econometrica*, **45**, 1187-1204.
- [28] Liu, J. and Susko, E. (1992), "On Strict Stationarity and Ergodicity of a Non-linear ARMA Model", *Journal of Applied Probability*, **29**, 363-373.
- [29] Maddala, G.S. (1983), *Limited Dependent and Qualitative Variables in Econometrics*, Cambridge University Press.
- [30] McCulloch, R. and Tsay, R.S. (1992), "Statistical Analysis of Macroeconomic Time Series via Markov Switching Models", Unpublished.
- [31] Meyn, S.P. and Tweedie, R.L. (1993), *Markov Chain and Stochastic Stability*, Springer-Verlag.
- [32] Neftici, S. (1984), "Are Economic Time Series Asymmetric Over the Business Cycle?", *J. Political Econ.*, **92**, 307-328.
- [33] Neftici, S. (1993), "Statistical Analysis of Shapes in Macroeconomic Time Series: Is there a Business Cycle?"; *J. Bus. Econ. Stat.*, **11**, 215-224.
- [34] Nelson, D.B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, **59**, 2, 347-370.
- [35] Ozaki, T. and Oda, H. (1978), "Non-linear Time Series Model Identification by Akaike's Information Criterion", *Proceedings of IFAC Workshop on Information and Systems*, Campiegn, France.
- [36] Petrucci, J. D. and Woolford, S. W. (1984), "A Threshold AR(1) model", *J. appl. Probab.*, **24**, 207-286.
- [37] Quandt, R. (1988), *The econometrics of disequilibrium*, Basil Blackwell, Oxford.

- [38] Sato, Seisho and Kunitomo, Naoto (1996), "Some Properties of the Maximum Likelihood Estimator in Simultaneous Switching Autoregressive Model" *Journal of Time Series Analysis*, **17**, 287-307.
- [39] Tong, H. (1983), *Threshold Models in Non-linear Time Series Analysis*, Lecture Notes in Statistics No. 21, Springer, Heidelberg.
- [40] Tong, H. (1990), *Non-linear Time Series*, Oxford.
- [41] Tweedie, R. L. (1975), "Sufficient Conditions for Ergodicity and recurrence of Markov chain on a general state space", *Stochas. Process Appl.*, **3**, 385-403.
- [42] Tweedie, R. L. (1983a), "The Existence of Moments for Stationary Markov Chain", *J. Appl. Probab.*, **20**, 191-196.
- [43] Tweedie, R.L. (1983b), "Criteria for Rates of Convergence of Markov Chains with Application of Queueing Theory," In *Papers in Probability, Statistics, and Analysis*, Kingman, J.F. and G.E.H.Reuter ed., Cambridge.
- [44] 浅子和美・内野裕子 (1988). 「日本の銀行貸出市場 - 不均衡分析の新しい視点」, 『金融研究』, 第6巻1号, 61-98.
- [45] 伊藤 隆敏 (1985), 「不均衡の経済分析 - 理論と実証」, 東洋経済新報社
- [46] 尾崎 統 (1988), 「時系列論」, 放送大学教材.
- [47] 佐藤 整尚, (1996), "SSAR モデルを用いた非対称的な経済データの分析", 「統計数理」, 第44巻, 第2号, 251-262.
- [48] 佐藤 整尚, (1999), "操作変数法を用いた同時転換自己回帰モデルの推定", 「日本統計学会和文誌」, 第29巻, 第3号, 257-270.
- [49] 山本 拓 (1987), 「経済の時系列分析」, 創文社