

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	震源断層と地盤構造の三次元モデルを用いた地震動シミュレーション手法の開発
Title(English)	
著者(和文)	片岡正次郎
Author(English)	
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第3358号, 授与年月日:1996年9月30日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第3358号, Conferred date:1996/9/30, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

震源断層と地盤構造の三次元モデルを用いた
地震動シミュレーション手法の開発

1996年9月

東京工業大学大学院総合理工学研究科

社会開発工学専攻

片岡正次郎

内容梗概

本論文は、「震源断層と地盤構造の三次元モデルを用いた地震動シミュレーション手法の開発」と題し、7章より成っている。

第1章「序論」では、本研究の背景と目的を述べ、理論的手法による地震動シミュレーションに関する既往の研究を概観している。その中で、従来よりも精度のよい強震動予測のために、境界要素法および有限要素法と境界要素法の結合解法（以下、FE-BE法）を三次元空間に適用した手法を開発する意義を明らかにしている。

第2章「三次元空間における弾性波動方程式とその基本解」では、三次元空間の弾性波動方程式を誘導し、周波数領域における三次元弾性波動方程式の基本解を解析的に導出している。また、得られた基本解が特異項と正則項に分解できることを示し、変位の基本解は弱い特異性をもつが広義積分可能であること、表面力の基本解は強い特異性を持ち Cauchy の主値の意味で積分を評価する必要があることなどを示している。

第3章「不整形地盤を対象とした三次元地震動シミュレーション手法」では、三次元有限要素法および直接法に基づく三次元境界要素法の定式化を行っている。その際、この2つの手法を結合するためには、三次元空間における特異積分と free-term の直接的な評価が望ましいこと、近年提案された方法によってそれが可能であることを論じ、この直接評価に基づいて境界条件を完全に満たして有限要素法と境界要素法を結合する手法を提示している。また、単純なモデルを用いた地盤地震動解析を行い、既往の研究との比較を通じて、上記の特異性を直接評価した三次元境界要素法が妥当な計算結果を与えるものであることを確認している。

第4章「震源断層モデルの導入」では、震源近傍の不整形地盤を対象とした地震動シミュレーションを行うために、前章で定式化した手法に震源断層モデルを導入している。その際、断層面境界に関する基本解を核とする積分は、断層を小断層に分割することで評価できることを示している。次に、震源断層モデルを導入した三次元FE-BE法による数値解析を行い、断層のごく近傍に位置する点においても精度のよい計算波形が得られることを確認している。

第5章「1994年 Northridge 地震のシミュレーション」では、1994年 Northridge 地震の震源断層および San Fernando 谷をモデル化し、三次元FE-BE法に震源断層モデルを導入した手法を用いて地震動シミュレーションを行っている。その結果、二次元モデルよりも三次元モデルを用いた

場合の方が、時刻歴とスペクトルの双方において観測記録とよく一致した結果が得られることを示している。また、計算結果から Northridge 地震の際の San Fernando 谷における地表最大速度分布図を描き、地震動強さが地盤構造、および観測点と断層との位置関係に大きく影響されること、全般的傾向においては観測記録に基づく最大速度分布図とも一致することを確認している。

第6章「1995年兵庫県南部地震のシミュレーション」では、神戸市周辺の地盤を二層地盤にモデル化し、推定された1995年兵庫県南部地震の震源過程を取り入れて、三次元直接境界要素法による地震動シミュレーションを行っている。その結果、神戸大学や尼崎で観測された速度記録の約2秒以上の周期成分がよく再現できていること、断層の近傍では観測記録、計算結果ともに断層直交方向成分が卓越した粒子軌道を描くことを確認している。また、水平動合成波形の最大速度分布および地震動強さの分布の時間的変化を示し、震度VIIの地域内の地震動や大阪平野で観測された表面波が、深い基盤構造と断層の破壊伝播の双方に密接に関連していることを明らかにしている。

第7章「結論」では、以上で得られた結論を総括して述べている。

以上を要するに、本論文は従来よりも精度のよい強震動予測のために、境界要素法およびFE-BE法を三次元空間に適用するとともに、対象領域内に震源断層モデルを導入することによって震源近傍における地震動のシミュレーション手法を開発し、それらの手法を用いて近年発生した2つの地震のシミュレーションを行い、開発手法の妥当性、有用性を検証したものである。そしてそれらを通じて、理論的アプローチによる震源近傍における強震地動の定量的予測の可能性を拓けたものである。

目次

第1章	序論	1
1.1	本研究の背景と目的	1
1.2	理論的地震動シミュレーションに関する既往の研究	4
1.2.1	水平成層地盤を対象とした計算手法	4
1.2.2	不整形地盤を対象とした計算手法	4
1.3	本研究の位置づけ	7
1.4	本論文の構成	9
第2章	三次元空間における弾性波動方程式とその基本解	10
2.1	はじめに	10
2.2	弾性波動方程式	11
2.2.1	弾性波動方程式の誘導	11
2.2.2	弾性波動方程式の境界条件	12
2.3	基本解の導出と特異性に関する検討	13
2.3.1	変位の基本解の導出	13
2.3.2	表面力の基本解の導出	17
2.3.3	基本解の特異項と正則項への分解	18
2.3.4	基本解の特異性と境界に関する特異積分	20
2.4	まとめ	22
第3章	不整形地盤を対象とした三次元地震動シミュレーション手法	23
3.1	はじめに	23
3.2	三次元有限要素法	24
3.2.1	重み付き残差法による仮想仕事の原理式の導出	24
3.2.2	有限要素による離散化	25
3.2.3	動的問題への適用	29
3.3	直接境界要素法	31
3.3.1	重み付き残差法によるSomigliana恒等式の導出	31
3.3.2	境界積分方程式	32
3.3.3	入射波の影響	33
3.4	三次元空間を対象とした有限要素法と境界要素法の結合解法	34
3.4.1	有限要素法と境界要素法の結合に関する検討	34
3.4.2	境界要素による境界積分方程式の離散化	36
3.4.3	マトリクス方程式の結合	37
3.5	三次元直接境界要素法による不整形地盤の震動解析例	41
3.5.1	二層地盤を対象とした三次元境界要素法のマトリクス方程式	41
3.5.2	計算モデルと計算結果	42
3.6	まとめ	45

第 4 章	震源断層モデルの導入	46
4.1	はじめに	46
4.2	三次元境界要素法への震源断層モデルの導入	47
4.2.1	震源断層モデルを含む境界積分方程式	47
4.2.2	断層面の分割による積分の評価	48
4.3	震源断層モデルを導入した三次元FE-BE法による数値計算例	50
4.3.1	計算モデル	50
4.3.2	計算結果の比較	50
4.4	まとめ	54
第 5 章	1994年Northridge地震のシミュレーション	55
5.1	はじめに	55
5.2	断層モデルと地盤モデルの設定	56
5.2.1	1994年Northridge地震の断層モデル	56
5.2.2	San Fernando谷の地盤構造とそのモデル化	59
5.3	計算結果と考察	63
5.3.1	観測記録との比較	63
5.3.2	San Fernando谷における地震動強さの分布	68
5.4	まとめ	71
第 6 章	1995年兵庫県南部地震のシミュレーション	72
6.1	はじめに	72
6.2	断層モデルと地盤モデルの設定	73
6.2.1	1995年兵庫県南部地震の断層モデル	73
6.2.2	神戸市周辺の地盤構造とそのモデル化	77
6.3	計算結果と考察	81
6.3.1	観測記録との比較	81
6.3.2	地震動の特性に関する検討	87
6.4	まとめ	104
第 7 章	結論	105
付録A	Gaussの発散定理による重み付き残差表示式の変形	107
付録B	三次元境界要素法における特異積分の評価	109
付録C	三次元境界要素法におけるfree-termの評価	115
参考文献		121

第1章

序論

1.1 本研究の背景と目的

1995年兵庫県南部地震は、M7クラスの地震ながら、その震源域直上の大都市、特に神戸市に甚大な人的・物的被害を生じさせた。近年の耐震性能の向上により、構造物の倒壊は減少傾向にあったが、この地震では予想以上に多発し、それが6千名以上にのぼる犠牲者を出す大きな原因となった[1]。このことは、地震動がいかに激烈なものであったかを物語っている。実際、いままでわが国ではみられなかった破壊形式を示した構造物が非常に多く報告された[2, 3]。高架橋をはじめとした都市施設も多数崩壊し、その後の救援・復興活動を遅らせる一因となった。

1994年Northridge地震も同じように大都市の直下で発生し、61名の犠牲者を出し、高架橋が崩壊するなどの被害があった[4]。近代的大都市直下での地震の発生は危惧されてはいたものの、この2つの地震以前には例が少なく、実際にどの程度の広がりをもってどのような被害が出るのかといった点に関しては、不明のことが多かった。震源近傍において非常に強い地震動が起こりうることは、わずかに得られた観測記録や伝承されている地震被害から知られていたが、例えば1993年釧路沖地震の際に約1gの加速度が観測された釧路地方気象台の被害が小破にすぎなかった[5] ことなどもあり、強い地震動と被害との関連は明らかにされていなかった。

阪神・淡路大震災で崩壊した構造物の多くには、設計時の想定よりも大きな地震力が作用したと考えられる。したがって、被害を最小限に食い止めるためには、このような直下地震を想定して構造物の動的応答解析を行い、その結果に基づいて耐震設計を行うことが望ましい[6, 7]。この場合、直下地震を想定するとは、1) どのような地震がどこで発生するのかを予測し、2) その地震の際に構造物に入力する地震動を推定する、ということの意味している。しかし、この1), 2)は双方とも非常に困難な課題である。

兵庫県南部地震の後、活断層の調査がトレンチ掘削などによって行われているが、これによって仮に地震発生位置や最終的なすべり量、すなわち震源断層の静的パラメータが予測可能になったとしても、その地震がどのような震源過程をもつのか、すなわち動的パラメータまで予測することは現状では困難であるといわざるを得ない。しかし、2)で推定される入力地震動は、この動的パラメータに大きく左右されるため、何らかの根拠をもって設定する必要がある。したがって、現時点では過去の地震に関するデータから経験的に設定することが妥当と考えられるが、これも重要な課題である。

対象とする震源断層が定まった場合にも、その近傍における地震動を推定することはまた困難である。地震は個々に多様な特性を有しており、それに比較すれば、震源近傍で得られている地

震記録は未だ少なく、経験的予測には不十分である。この点を補充するために、翠川・小林[8, 9]は震源が点とみなせる場合についての地震基盤からの入射波スペクトルを経験的に求め、それを断層の破壊過程を考慮して重ね合わせることで、震源近傍での地震動スペクトル、さらに最大加速度分布の予測を行っている。しかし、表層の増幅効果をSH波の増幅率で代表させているため、表面波の影響が無視できないやや長周期帯域における推定には難がある。また、過去のデータに依存するために結果が平均化され、対象とする地震、地域に特徴的な現象を見逃してしまうおそれがある。

一方、過去に発生した比較的小規模な地震の観測記録を重ね合わせることで、将来発生する大地震の際の地震動を予測するという手法がHartzell[10]によって提案され、現在では工学的にも広く応用されている。この手法は小地震の地震波形を震源特性、伝播特性、増幅特性が反映された一種のGreen関数と考えることから、経験的Green関数法、あるいは半経験的手法などもよばれている。地震規模のスケールリングや地震記録を重ね合わせる方法についても多くの研究がなされており、地震記録が精度よく再現された例もある[11]。しかし、よく指摘されるように、想定している大地震と共通した発震機構をもつ地震の記録が得られている必要があるため、この手法が適用できる地点は限られている。

これら過去の地震記録を利用する方法に対して、震源断層、地盤構造をモデル化して理論的に地震動を計算する試みが活発になってきている。均質全無限弾性体中のくい違い震源のモデル化[12, 13]に始まり、均質半無限弾性体の応答が解析的に求められ[14, 15]、近年では計算機を利用することにより、複雑な断層モデル、地盤モデルに基づいた地震動シミュレーションが可能となっている。このような理論的手法には、地盤構造が分かっているという大きな制約が伴うが、様々な状況を任意に設定して地震動を合成できる利点がある。そのため、専ら地震波の伝播、増幅、減衰といった現象を解明し、理解するために用いられてきた。1970年のAki and Lernerの研究[16]に始まり、1985年Michoacán地震を契機として盛んに行われた、堆積盆地の地盤震動特性に関する研究[17-28]はその好例である。

その一方で、先に述べたような背景から、理論的手法によって強震動を予測しようという気運も高まっており、その足掛かりとして強震記録の再現が試みられている[29-40]。これらの研究は、理論的手法の利点、すなわち、地震記録が得られていない地点や場合についても適用できること、および震源近傍における地震動を計算可能であることなどに注目したものと思われる。

本研究も、ここに挙げた理論的手法の利点を生かした、より精度のよい強震動予測のための地震動シミュレーション手法の開発を目指すものである。このような地震動シミュレーションには、波線法、差分法、有限要素法、境界要素法、Aki-Lerner法などが現在までに用いられており、それぞれに計算時間や精度などにおいて長所と短所がある。本研究では計算精度と自由度の高さを重視して、境界要素法および有限要素法と境界要素法の結合解法を三次元空間に適用することに

した。その意義を述べ、あわせて本研究の特徴を明らかにするために、次節では理論的地震動シミュレーションに関する既往の研究を概観する。

1.2 理論的地震動シミュレーションに関する既往の研究

モデル化された震源断層と地盤構造に基づいて、地震波の発生、伝播を理論的に数式を用いて表現し、計算した結果得られる地震動は理論地震動とよばれる。このような理論地震動の合成は、1960年代後半のAki[41]、Haskell[42]の研究に始まる。Aki[41]は均質全無限体中のくい違い点震源の解[12]を重ね合わせることで、1966年Parkfield地震のシミュレーションを行った。得られた変位波形は観測波形のS波主要動をよく説明し、その後の理論地震動の研究を促すことになった。

1.2.1 水平成層地盤を対象とした計算手法

地表で観測される地震動は、媒体である地盤の特性に大きく影響される。したがって、より実際に近い地震動を合成するためには、地盤構造を詳細にモデル化する必要がある。その第一近似として、水平成層構造（一次元構造）を仮定したモデル化が考えられる。

点震源から放射される弾性波動の波動関数は、SommerfeldおよびWeylの積分表示によれば、水平方向の波数に関する無限積分で表すことができる[43]。これらはそれぞれ空間に関するHankel変換およびFourier変換に対応しており、水平成層構造を仮定した場合、境界条件としては波数スペクトルのみを考えればよいので、Haskellマトリクス[44]を用いて簡単に連続条件やつり合い条件を導入することができる[45]。

このように境界条件の取り扱いが簡単であるため、地盤構造を水平成層と考えると理論地震動を合成する研究は広く行われてきた。応答の陽な表現を得るためには波数積分を実行する必要があるが、これは解析的には非常に困難である[46, 14]が、計算機の発達により、数値的に実行することが可能となった。水平成層構造を対象とした数値解析手法のうち、代表的なものとしては、薄層要素法[47]、離散化波数法[48, 49]、およびそれらを組み合わせた方法[50, 51]が挙げられる。これらの手法を用いた実地震のシミュレーションは、主に1970年代後半から1980年代前半にかけて行われ、観測波形を大局的には再現できることが実証された[52]。

1.2.2 不整形地盤を対象とした計算手法

(a) 二次元地盤モデルを用いた研究

しかし、実際の地盤構造は水平成層ではあり得ないから、近似が困難な場合、すなわち地盤の不整形性が強い場合には別の手法を用いる必要がある。1970年代から1980年代にかけて不整形地盤の震動特性に関する基礎的な研究が行われ、Aki-Larner法[16, 53, 54, 55]、差分法[56]、境界積分方程式法[57]、有限要素法[58]、境界要素法[59]、Gaussian beam法[60]などが用いられた。

この不整形地盤、特に堆積盆地における理論地震動の研究に拍車をかけたのが、1985年Michoacán地震の際に得られた地震記録とMexico市が受けた甚大な被害である。同市内では初動に続いて周

期2~4秒の振幅の大きい後続波群が観測され、これが多数の中低層ビル崩壊の要因と考えられている [61]. 盆地端で発生した表面波が反射を繰り返す、堆積盆地における地震動の継続時間が長くなるということは Bard and Bouchon [54, 55] によってこの地震の以前から指摘されており、地震後行われた検討によっても同様の現象が確認された [17, 18, 19, 22].

これらの研究によって堆積盆地の地盤震動特性が定性的に解明されるとともに、より現実的な地盤モデルを用いたシミュレーションも行われ、定量的な議論がなされるようになった. Vidale and Helmberger [30] は差分法に震源を導入した手法 [62] を用い、1971年 San Fernando 地震の際の San Fernando 谷、Los Angeles 盆地における地震動のシミュレーションを行った. 震源時間関数の設定が恣意的であるという指摘もある [63] が、計算された速度波形は観測波形とかなりよい一致を示した. また、久田 他 [20] は境界要素法に震源断層モデルを導入した手法を用い、震源の位置によって盆地における地震動が大きく変化することを示した. 山本 他 [23], Yamamoto *et al.* [26] も同様の手法を用いて関東平野および Los Angeles 盆地におけるやや長周期地震動のシミュレーションを行い、観測記録とある程度一致する結果を得た. しかし、これらの研究では、震源断層については近似的に三次元の効果が導入されているものもあるが、地盤モデルとしては全て二次元モデルが用いられているため、特に後続波群に理論地震動と観測波形の不一致がみられ、三次元的な地盤構造の影響が指摘された [30, 23].

(b) 三次元地盤モデルを用いた研究

実際の地盤は三次元的な構造であるから、実現象とより一致する理論地震動の合成を目指すならば、地盤構造についても三次元モデルを構築して用いる必要がある. 土岐・澤田 [29] は三次元有限要素法にジョイント要素によって震源断層モデルを導入し、1971年 San Fernando 地震のシミュレーションを行った. その結果、震源近傍の数地点において観測波形とある程度一致する理論地震動を得た. 佐藤 [31] は三次元薄層要素-軸対称有限要素の結合解法を用いて1961年北美濃地震のシミュレーションを行い、神戸、大阪気象台で観測された波形の違いを大阪気象台周辺の地盤構造の影響として説明した. Uebayashi *et al.* [25] は三次元 Aki-Larner 法に震源断層モデルを導入した手法により、簡単な三次元盆地モデルにおける地震動のシミュレーションを行った. そして、水平成層モデル、二次元盆地モデルを用いた場合と比較して、最大振幅が大きく、継続時間が長くなる傾向にあることを示した.

これらの研究では、二次元的な、あるいは単純化された形状の地盤モデルが用いられたが、近年では計算機の発達と相まって、三次元地盤構造を詳細にモデル化した実地震のシミュレーションも行われている.

Toshinawa and Ohmachi [27] は自由度を小さくするために鉛直方向の補間関数を工夫した簡略化有限要素法を用いて、1990年の伊豆大島近海地震のシミュレーションを行った. 観測記録を補正して入射波に用いているため、理論地震動とはいえないが、三次元的な基盤構造を考慮するこ

とにより、川崎で観測された後続波群を再現した。

Frankel and Vidale[32]は差分法を用いて1989年Loma Prieta地震の余震のシミュレーションを行った。ただし、震源がモデルの外側に位置しているため、点震源から放射される変位をモデルの境界に与えることで震源断層からの入射波を表現している。特に上下動成分において観測波形と理論地震動の不一致は大きく、入射波や地盤のモデル化の精度には疑問があるが、この研究により、差分法が三次元的に広がる大規模な地盤モデルを用いたシミュレーションに適していることが示された。

Kato *et al.*[35]およびHisada *et al.*[36]は、表面波を計算するためにGaussian beam法、境界要素法をそれぞれ改良し、1980年の伊豆半島東方沖地震のシミュレーションを行った。これらの手法によって実体波を含む震源近傍の地震動を精度よく計算できるかどうかは不明であるが、いずれも関東平野で卓越する周期約8秒の表面波をある程度再現した。

Yomogida and Etgen[33], Olsen *et al.*[37], Graves[38], Olsen and Archuleta[40]は、いずれもstaggered-gridの差分法[64]を用いて、San Fernando谷、Los Angeles盆地の地震動シミュレーションを行った。これらは節点数が数百万から一千万をこえる非常に大規模な地盤モデルを用いており、およそ100km×100kmの広い範囲を伝播する理論地震動を、周期1~2秒以上の成分について作り出すことに成功している。

このように現在は、震源断層、地盤構造を詳細に三次元モデル化した地震動シミュレーションが差分法を中心に押し進められている状況であるが、観測波形と理論地震動の対応をみる限り、高精度な強震動予測を行う段階には至っていない。

1.3 本研究の位置づけ

前節で述べたように、理論的地震動シミュレーションに関する研究は、はじめに均質全無限体および半無限体、次いで水平成層構造、二次元不整形構造を対象として展開され、近年になって三次元不整形構造というように、実際に観測された現象や計算機の発達に刺激され、より現実的な地盤構造に対象が移ってきている。本研究でも、地震動をより精度よく再現、予測するために、三次元的に変化する地盤構造をモデル化できる手法を用いることにする。そのような手法として、前節では差分法、Aki-Larner法、Gaussian beam法、有限要素法、境界要素法を挙げたが、それぞれの特徴を以下にまとめてみる。

差分法は、対象領域に格子状に節点をおき、微分演算を差分近似することで差分方程式を得る手法である。概念が単純なため、あらゆる微分方程式に用いることができ、応用範囲は非常に広い。また、陽解法が使えるために大規模な計算に向いていることも、地震動シミュレーションを行う上では大きな利点である。ただし、差分格子は直線直交格子が基本となるため、複雑な構造のモデル化には不向きであるし、震源断層のモデル化にも技巧を要する。また、解に数値的な分散が混入したり [32]、無限に広がる領域のモデル化ができないために消波境界 [65] が用いられるなど、計算精度が低下する場合も多い。

Aki-Larner法は、水平成層を仮定した場合の解を試行関数とし、重み付き残差法を用いて境界条件式を解く手法である。波動の放射条件を厳密に考慮することができ、震源断層の導入 [53, 25] も簡単であるため、基礎的な研究によく用いられている。しかし、地盤の不整形性が強い場合には近似的な解しか与えない可能性があり [45]、特に三次元問題では大きな記憶容量を必要とするため、実際の地盤を対象とした計算例はほとんどない [66]。

Gaussian beam法は、不整形地盤に通常波線法を用いた場合に起こる波動の回折が表現できないなどの問題を解決するために、エネルギーを Gauss 分布させた波線を用いる手法である。他の手法と比較して計算量が少ないという利点があるが、波線法とそこから派生した手法に共通の欠点として、短波長近似であり、位相選択の際に観測点に到来する位相を見落とす危険性をもっている。

有限要素法は、問題となる微分方程式に等価な積分方程式を、対象領域を有限要素に分割することで離散化して解く手法である。要素の大きさや配置を任意に設定し、要素ごとに異なる物性をもたせることができるため、複雑な形状や不均質な媒質のモデル化が容易に行える。さらに非線形問題への適用も可能と、汎用性に優れていることが特徴である。しかし、差分法と同じく領域型の解法であるために、震源断層や無限に広がる領域のモデル化に工夫を要する。

境界要素法は、問題となる微分方程式を境界積分方程式に変換し、境界を要素分割することで離散化して解く手法である。複雑な形状のモデル化に適しており、境界のみを離散化すればよいので、無限に広がる領域や震源断層のモデル化も容易である。しかし、もとの微分方程式の Green

関数を必要とするため、基本的には均質な領域を対象とした線形問題にしか適用できないという制限がある。また、密な係数行列を扱うため、対象とする問題によっては多大な記憶容量と計算量を必要とする。

このようにみても、震源断層と不整形地盤を三次元的にモデル化して、精度のよい地震動シミュレーションを行うためには、境界要素法が適していることが分かる。すなわち、境界要素法には計算精度の低下を招くような定式上の近似がなく、地盤のように無限に広がるとみなされ、複雑な構造を成すもののモデル化に適し、震源断層を取り入れることも容易である。

しかし、特に地下深部の岩盤などは均質な線形弾性体とみなせるものの、表層地盤は一般に不均質であるため、境界要素法は適さない。この場合には、境界要素法に有限要素法を結合し、不均質な領域を有限要素でモデル化することが有効である [67, 68]。そこで本研究では、無限に広がり、均質とみなされることが多い基盤領域は境界要素でモデル化し、表層領域については、均質な場合は境界要素で、不均質な場合は有限要素でモデル化することを考える。このように対象に応じて解析手法を使い分けることで、精度のよいモデル化、計算が可能となる。

以上のことから、本研究は想定した震源断層および対象地域の地盤構造に基づいた、高精度の地震動シミュレーションを行う手法を開発することで、従来よりも信頼性のある強震動予測に資するものと位置づけられる。

1.4 本論文の構成

本論文は以下の7章より成っている。

第1章「序論」では、本研究の目的と既往の研究について述べている。

第2章「三次元空間における弾性波動方程式とその基本解」では、次章以降で有限要素法、境界要素法を適用する際の基礎として、三次元弾性波動方程式の誘導過程を示すとともに、境界要素法を理解する上で必要となる基本解を導出し、特異性を中心にその性質を述べる。

第3章「不整形地盤を対象とした三次元地震動シミュレーション手法」では、不整形地盤を対象とした地震動シミュレーションのための、三次元境界要素法の定式化を行う。その際、地盤の不均質性にも対応できるように有限要素法と結合することを前提とし、両者の結合解法についても議論する。特に、有限要素法と結合するためには境界積分方程式がどのように離散化されるべきかを考察し、三次元空間を対象とするときに特に問題となる特異積分および隅角部の処理などについて述べる。さらに、近年提案された方法を用いることでそれらの問題が解決され、境界条件を完全に満たした両手法の結合が可能であることを示す。

第4章「震源断層モデルの導入」では、第3章で示した手法に震源断層モデルを導入することにより、震源近傍に位置する三次元不整形地盤を対象とした地震動シミュレーションを可能にする。ここでは震源が近い場合を想定し、断層を小断層に細分することで、断層面内の破壊伝播が表現できることを示す。

第5章「1994年Northridge地震のシミュレーション」では、三次元FE-BE法を用いて1994年Northridge地震の際のSan Fernando谷における地震動のシミュレーションを行い、観測記録や最大速度分布の再現を試みる。

第6章「1995年兵庫県南部地震のシミュレーション」では、神戸市周辺の地盤を三次元モデル化し、断層の破壊過程を再現して1995年兵庫県南部地震のシミュレーションを行う。三次元的な基盤構造と断層破壊に注目してシミュレーションを行い、神戸市周辺の地震動特性および震災の帯との関連を議論する。

第7章「結論」では、本研究で得られた成果を総括して述べる。

第 2 章

三次元空間における弾性波動方程式とその基本解

2.1 はじめに

理論的地震動シミュレーションにおいて、地盤は一般に弾性体として扱われる。その場合、理論的地震動シミュレーションとは、弾性体中を伝わる波動の支配方程式、すなわち弾性波動方程式を、設定した境界条件のもとで解くことであるともいえる。ここでは、次章以降で有限要素法、境界要素法を適用する際の基礎として、この弾性波動方程式の誘導過程を示す。また、境界要素法を理解する上で必要となる基本解を導出し、特異性を中心にその性質を述べる。

2.2 弾性波動方程式

2.2.1 弾性波動方程式の誘導

三次元空間に x_1 - x_2 - x_3 Cartesian 座標系を考えると、静的なつり合い状態にある弾性体内では、次の平衡方程式が成り立つ。

$$\sigma_{ij,j} + \bar{b}_i = 0 \quad (2.1)$$

ここで、 σ_{ij} は応力テンソル、 \bar{b}_i は物体力であり、物体力は静的に働くものとする。また、 $a_{,j}$ は a の x_j 方向への微分

$$a_{,j} = \frac{\partial a}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

を示し、くり返す指標について総和規約を用いている。

弾性体内で波動が伝播する状態を考え、慣性力の影響を考慮すると、式(2.1)は次のようになる。

$$\sigma_{ij,j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \bar{b}_i = 0 \quad (2.3)$$

ここで、 ρ は質量密度、 u_i は変位、 t は時間を表している。

微小変位場、すなわち変位の1階の導関数が十分小さい状態を仮定すると、歪テンソルは次のように表される。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

また、応力テンソルと歪テンソルの関係式は、等方均質線形弾性体に対しては次式で表される。

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.5)$$

ここで、 λ 、 μ は Lamé の定数とよばれ、等方材料ではこの二つの定数とその材料を厳密に特性づける。また、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

式(2.4)、(2.5)を式(2.3)に用いると、変位を未知量とする弾性波動方程式が得られ、次式となる。

$$(\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \bar{b}_i = 0 \quad (2.6)$$

周波数領域での解析のためには、式(2.6)を Fourier 変換した変換面における弾性波動方程式

$$(\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + \rho \omega^2 u_i + \bar{b}_i = 0 \quad (2.7)$$

を対象とすることになる。ここで、 ω は角振動数であり、 u_i 、 \bar{b}_i はそれぞれ Fourier 変換された変位と物体力を表す。特に混乱はないと思われるので、本論文ではこのように時間領域と周波数領域の変数を区別しないで表記する。

2.2.2 弾性波動方程式の境界条件

地盤はある形状をもっており、その境界は自由である場合もあれば、拘束されている場合もある。また、異なる性質をもつ地盤が境界面で相互に作用する場合もある。これらの状況は、弾性波動方程式を解く際の境界条件となり、変位とその空間に関する微分係数に相当する表面力を与えることで表現される。ただし、本論文では全て周波数領域で解析を行うため、時間に関しては調和な定常状態を仮定し、初期条件、終期条件などの境界条件は設定しない。

いま、対象とする領域を Ω 、その全境界を Γ とする。表面力 τ_i は境界 Γ 上で定義されるベクトル量で、応力テンソルを用いて次のように表される。

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.8)$$

ここで、 n_i は境界 Γ 上での外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} の x_i 方向成分である。

この表面力と変位で与えられる弾性波動方程式に対して、空間に関する境界条件は次のように表される。

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) &= \bar{u}_i(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ \tau_i(\mathbf{x}) &= \bar{\tau}_i(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_\tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここで、 \bar{u}_i 、 $\bar{\tau}_i$ は境界条件として与える変位および表面力、 \mathbf{x} は三次元空間内での位置を表す位置ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ である。また、 Γ_u 、 Γ_τ はそれぞれ変位、表面力が規定される境界を表す。

通常、境界では変位あるいは表面力のどちらか一方が規定される。ただし、二つの媒質が境界 Γ_I で接しているような場合、 Γ_I 上では変位、表面力とも相互作用の結果定まるため、どちらも規定されない。この場合の境界条件は、変位の連続条件および表面力のつり合い条件となる。

2.3 基本解の導出と特異性に関する検討

媒質内のある時空点に単位衝撃力を加えると波動が発生し、伝播して他の時空点で観測される。この観測波形は、媒質の性質、境界条件および衝撃力を加えた点（作用点）と観測された点（観測点）の時空間位置に依存し、Green 関数とよばれる。

媒質を等方均質なものに限っても、任意の境界条件に対して Green 関数を解析的に求めることは不可能である。そのため、最も求めやすいものとして、境界面がなく、媒質が無限に広がっている場合を考える。この無限体に対する Green 関数は基本解とよばれることがあり、後で示すように解析的に陽な形式で求められる。

Brebbia[69]によれば、境界要素法は基本解を重み関数とした、重み付き残差法に基づく微分方程式の一解法である。これは数学的な解釈である。境界要素法の物理的解釈は、波動伝播に関する Huygens の原理—ある瞬間の波面上の全ての点を波源とする要素波の重ね合わせで次の瞬間の波面が形成される—から類推される。すなわち、任意の境界条件に対する微分方程式の解は、境界面上の全ての点を波源とし、その波源に対する基本解を重ね合わせることで得られる。これを言い換えれば、微分方程式の解は基本解を核とした積分方程式で表現することができる。

境界要素法は、このような基本解の重ね合わせを表現する境界積分方程式を、境界の要素分割によって離散化して解く手法である。したがって境界要素法を理解する上で、基本解を具体的に求め、その性質を調べることは重要と考えられる。そこで、本節では三次元周波数領域の基本解を解析的に導出し、その重要な性質である特異性について簡単に検討してみることにする。

2.3.1 変位の基本解の導出

式(2.7)に対応する基本解の支配方程式は、基本解テンソルを $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ とすれば次式で表される [70].

$$(\lambda + \mu)U_{kj,ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \mu U_{ij,kk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \rho\omega^2 U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\delta_{ij}\delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.10)$$

ここで、 δ_D は Dirac のデルタ関数である。基本解テンソル $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ は、時間的に調和な単位力が作用点 \mathbf{x}_0 に x_j 方向に作用したときの、観測点 \mathbf{x} における x_i 方向の変位を表している。つまり、単位力の方向と変位の方向の全ての組み合わせを表現するために、基本解はテンソル形式で定義されている。後に述べる表面力の基本解と区別するため、 U_{ij} は変位の基本解とよばれる。

式(2.10)は無限領域で定義された方程式であるから、作用点を原点にとっても一般性を失わない。したがって、ここでは次式から基本解 $U_{ij}(\mathbf{x})$ を求める。

$$(\lambda + \mu)U_{kj,ik}(\mathbf{x}) + \mu U_{ij,kk}(\mathbf{x}) + \rho\omega^2 U_{ij}(\mathbf{x}) = -\delta_{ij}\delta_D(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

式(2.11)は、空間の関数 $g(\mathbf{x})$ を用いて表示した次式と等価である [71, 72].

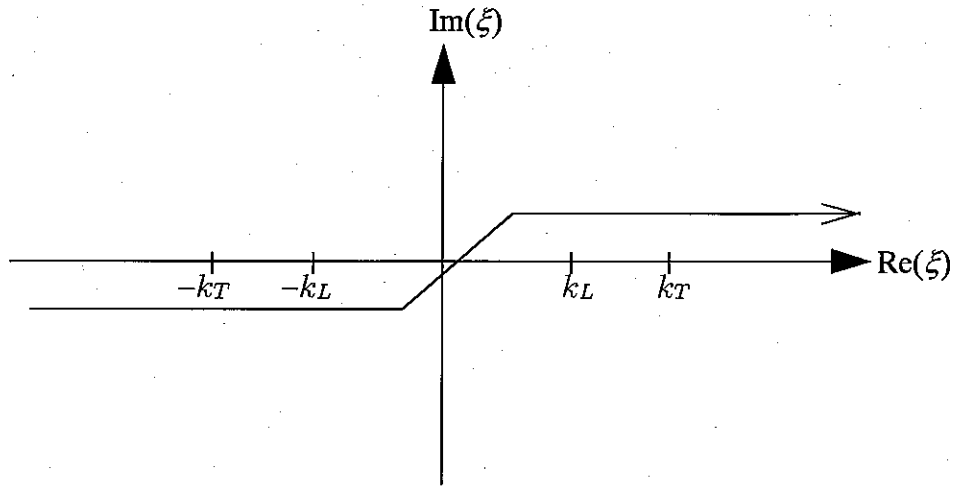


図-2.1: 積分路

$$2\mu U_{ij}(\mathbf{x}) = 2(1-\nu)(\nabla^2 + k_L^2)g(\mathbf{x})\delta_{ij} - g_{,ij}(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

ただし、 $g(\mathbf{x})$ は Galerkin ベクトル [71] を元にして得られる関数で、次式を満たす必要がある。

$$(1-\nu)(\nabla^2 + k_L^2)(\nabla^2 + k_T^2)g(\mathbf{x}) = -\delta_D(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

ここで、 ν はポアソン比であり、 ∇ は勾配演算子を表す。また、 k_L と k_T はそれぞれ P 波と S 波の波数であり、P 波速度 c_L 、S 波速度 c_T を用いて

$$k_L = \frac{\omega}{c_L}, \quad k_T = \frac{\omega}{c_T} \quad (2.14)$$

で表される。

式(2.13)を解いて得られる関数 $g(\mathbf{x})$ を式(2.12)に代入すれば、周波数領域の基本解が得られる。ここで、式(2.13)を解くために、次式で定義される空間に関する Fourier 変換を施す。

$$F(\boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}}d\mathbf{x} \quad (2.15)$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{\xi})e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}}d\boldsymbol{\xi}$$

ここで、 $\boldsymbol{\xi}$ は波数ベクトルであり、三次元空間を対象としているので、式(2.15)中の積分は3重 Fourier 積分である。

この空間に関する Fourier 変換により、式(2.13)は次式となる。

$$(1-\nu)(\xi^2 - k_L^2)(\xi^2 - k_T^2)G(\boldsymbol{\xi}) = -1 \quad (2.16)$$

ただし、 $G(\boldsymbol{\xi})$ は $g(\mathbf{x})$ に空間に関する Fourier 変換を施した関数であり、 ξ は波数ベクトルの大きさ $\xi = |\boldsymbol{\xi}|$ を表す。

式(2.16)の解として未定の係数 c を用い、

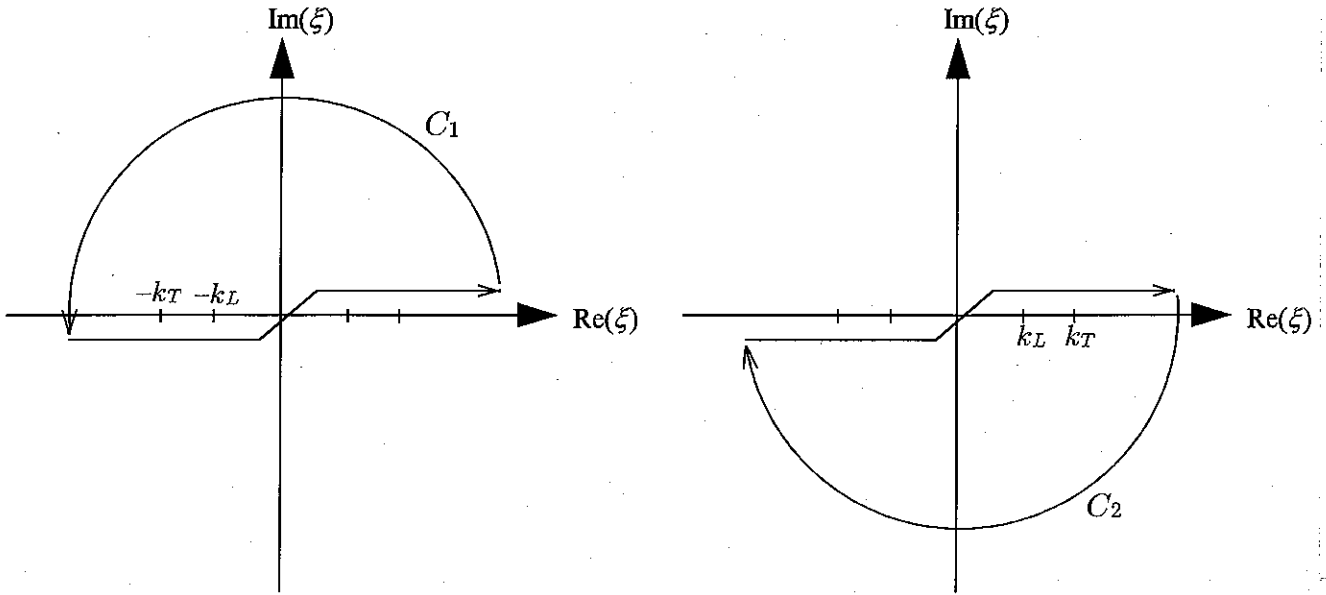


図-2.2: 周回積分への変換

$$G(\xi) = \frac{-1}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - k_L^2} + c\delta_D(\xi^2 - k_L^2) \right\} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - k_T^2} + c\delta_D(\xi^2 - k_T^2) \right\} \quad (2.17)$$

をとる [73]. 式(2.17)において, c の代表的な選択として $c = -i\pi$ をとり [73], ε を無限小の正数とすると,

$$G(\xi) = \frac{-1}{1-\nu} \frac{1}{(\xi^2 - k_L^2 + i\varepsilon)(\xi^2 - k_T^2 + i\varepsilon)} \quad (2.18)$$

となる. これは, $G(\xi)$ の ξ に関する積分を行うときに, 図-2.1のように極を避けた積分路をとることを意味する.

$G(\xi)$ を空間領域の関数に戻すためには, 式(2.18)を空間に関して Fourier 逆変換する必要がある. ξ に関する極座標系で $G(\xi)$ を Fourier 逆変換して変形する [73] と,

$$g(r) = \frac{i}{8\pi^2(1-\nu)r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(e^{i\xi r} - e^{-i\xi r})}{(\xi^2 - k_L^2 + i\varepsilon)(\xi^2 - k_T^2 + i\varepsilon)} d\xi \quad (2.19)$$

が得られる. ただし, $r = |\mathbf{x}|$ である.

式(2.19)の第1項は複素波数平面の上半面で指数関数的に減少し, 同様に第2項は下半面で指数関数的に減少する. したがって, 図-2.2のように, 十分大きな半円の積分路をつけ加えてもよい.

ここで, 第1項と第2項をそれぞれ

$$G_1(\xi) = \frac{\xi}{(\xi^2 - k_L^2 + i\varepsilon)(\xi^2 - k_T^2 + i\varepsilon)} e^{i\xi r} \quad (2.20)$$

$$G_2(\xi) = \frac{\xi}{(\xi^2 - k_L^2 + i\varepsilon)(\xi^2 - k_T^2 + i\varepsilon)} e^{-i\xi r}$$

とおくと, 対応する積分路を C_1, C_2 として, 留数定理から

$$\oint_{C_1} G_1(\xi) d\xi = 2\pi i (\text{Res}[g_1, -k_T] + \text{Res}[g_1, -k_L]) \quad (2.21)$$

$$\oint_{C_2} G_2(\xi) d\xi = -2\pi i (\text{Res}[g_2, k_T] + \text{Res}[g_2, k_L])$$

を導くことができる。ただし、 $\text{Res}[f, a]$ は関数 f の点 a における留数を表す。

式(2.21)において、極は全て一位の極であるから、

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} G_1(\xi) d\xi &= \frac{\pi i}{k_T^2 - k_L^2} (e^{-ik_T r} - e^{-ik_L r}) \\ \oint_{C_2} G_2(\xi) d\xi &= \frac{-\pi i}{k_T^2 - k_L^2} (e^{-ik_T r} - e^{-ik_L r})\end{aligned}\quad (2.22)$$

となり、よって式(2.19)から、関数 $g(r)$ が次のように得られる。

$$g(r) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \frac{e^{-ik_T r} - e^{-ik_L r}}{k_T^2 - k_L^2}\quad (2.23)$$

式(2.23)を式(2.12)に代入して整理すると、

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \frac{e^{-ik_T r}}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{e^{-ik_T r}}{r} - \frac{e^{-ik_L r}}{r} \right) \right\}\quad (2.24)$$

となる。さらに式(2.24)中の空間微分を実行すると、最終的に U_{ij} は次式で表される。

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho} \left(\Phi_1^{(T)} + \Phi_2^{(T)} - \Phi_2^{(L)} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi\rho} \left(\Phi_3^{(T)} - \Phi_3^{(L)} \right) r_{,i} r_{,j}\quad (2.25)$$

Φ は波動関数 [68] であり、ここでは次のように定義する。

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(p)} &= \frac{1}{c_p^2} \frac{e^{-ik_p r}}{r} \\ \Phi_2^{(p)} &= -\frac{1}{c_p^2} \left(\frac{1}{k_p^2 r^2} + \frac{i}{k_p r} \right) \frac{e^{-ik_p r}}{r} \\ \Phi_3^{(p)} &= \frac{1}{c_p^2} \left(1 - \frac{3}{k_p^2 r^2} - \frac{3i}{k_p r} \right) \frac{e^{-ik_p r}}{r}\end{aligned}\quad (2.26)$$

ただし、上式で p は L または T をとり、これらはそれぞれ波動関数が P 波、S 波に関するものであることを示している。

このように波動関数で展開したことにより、式(2.25)における三次元周波数領域の基本解は、東平が提示した二次元時間領域のもの [72] と同じ形式で表されている。時間領域の基本解は式(2.25)を時間に関して Fourier 逆変換することで、また二次元面内波動場に対する基本解は空間に関して無限積分することで得られる [74]。これらの操作は個々の波動関数に対して行えばよいので、二次元周波数領域、あるいは三次元時間領域の基本解も同じ形式で表すことができる。

式(2.25)は式(2.11)に対して求めた基本解であるが、位置に関しては r のみの関数であることが分かる。したがって、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ と定義すれば、式(2.10)に対する基本解となる。

式(2.25)から明らかのように、変位の基本解は次のような相反性をもつ。

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = U_{ji}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})\quad (2.27)$$

この式は、点 \mathbf{x}_0 で x_j 方向に調和な単位力を与えたときの点 \mathbf{x} での x_i 方向の変位は、点 \mathbf{x} で x_i 方向に調和な単位力を与えたときの点 \mathbf{x}_0 での x_j 方向の変位に等しいことを意味している。

このことに関連して、基本解を式(2.11)の代わりに次式で定義することが可能である [72].

$$(\lambda + \mu)U_{ik,jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \mu U_{ij,kk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \rho\omega^2 U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\delta_{ij}\delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.28)$$

ただし、式(2.28)での空間微分は、点 \mathbf{x}_0 に関して行うことに注意する。つまり、式(2.11)は作用点 \mathbf{x}_0 を固定し、観測点 \mathbf{x} を移動させたときの微分方程式であり、式(2.28)は観測点 \mathbf{x} を固定し、作用点 \mathbf{x}_0 を移動させたときの微分方程式である。基本解が相反性を満たすために、2つの微分方程式の解は一致することになる。

2.3.2 表面力の基本解の導出

式(2.25)の変位の基本解を用いると、表面力の基本解 T_{ij} は次のように表される。

$$T_{ij} = \left\{ \lambda U_{im,m}\delta_{jk} + \mu(U_{ij,k} + U_{ik,j}) \right\} n_k \quad (2.29)$$

したがって、 T_{ij} を得るためには U_{ij} を空間微分する必要がある。この空間微分も個々の波動関数に対して行えばよく、例えば $\Phi_1^{(p)}$ は次のように微分することができる。

$$\frac{\partial \Phi_1^{(p)}}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_1^{(p)}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{1}{c_p^2} \left(ik_p + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-ik_p r}}{r} \cdot r_{,i} = \Phi_4^{(p)} \cdot r_{,i} \quad (2.30)$$

同様に波動関数 $\Phi_2^{(p)}$ 、 $\Phi_3^{(p)}$ を微分し、式(2.29)に用いれば次のようになる。

$$T_{ij} = \tilde{C}(r)\delta_{ij}r_{,n} + \tilde{C}(r)r_{,j}n_i + \tilde{D}(r)r_{,i}n_j + \tilde{E}(r)r_{,i}r_{,j}r_{,n} \quad (2.31)$$

ここで、 $r_{,n}$ は T_{ij} を定義している面の法線方向に関して r を微分することを意味し、

$$r_{,n} = r_{,k}n_k \quad (2.32)$$

の関係がある。また、関数 \tilde{C} 、 \tilde{D} 、 \tilde{E} は波動関数によって次のように表される。

$$\begin{aligned} \tilde{C}(r) &= \frac{c_T^2}{4\pi} \left(\Phi_4^{(T)} - \frac{2}{r}\Phi_3^{(T)} + \frac{2}{r}\Phi_3^{(L)} \right) \\ \tilde{D}(r) &= \frac{c_L^2 - 2c_T^2}{4\pi} \Phi_4^{(L)} - \frac{c_T^2}{2\pi} \left(\frac{1}{r}\Phi_3^{(T)} - \frac{1}{r}\Phi_3^{(L)} \right) \\ \tilde{E}(r) &= -\frac{c_T^2}{2\pi} \left(\Phi_4^{(T)} - \Phi_4^{(L)} - \frac{5}{r}\Phi_3^{(T)} + \frac{5}{r}\Phi_3^{(L)} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

変位の基本解の場合と同様に、三次元周波数領域における表面力の基本解も、二次元時間領域のもの [72] と同じ形式で表されていることが式(2.31)、(2.33)から分かる。

2.3.3 基本解の特異項と正則項への分解

本節のはじめに述べたように、基本解は境界積分方程式の被積分関数である。ところが、式(2.26)から明らかなように、波動関数は $r \rightarrow 0$ の極限で発散する特異性をもっており、したがって基本解 U_{ij} , T_{ij} も同様の特異性をもつ。そのため、境界積分方程式には特異積分が含まれることになるが、その評価は一般に困難である。

ここでは変位、表面力の基本解がそれぞれどのような特異性をもっているのかを調べるために、基本解を特異性を示す項（特異項）とそれ以外の項（正則項）に分解してみる[75]。

(a) 変位の基本解の分解

まず、式(2.24)を次のように表す。

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \Psi^{(T)} \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\Psi^{(T)} - \Psi^{(L)}) \right\} \quad (2.34)$$

ここで、

$$\Psi(r) = \frac{e^{-ik_T r}}{r} \quad (2.35)$$

である。

式(2.34)の右辺第1項を級数展開すると、

$$\begin{aligned} \Psi^{(T)} &= \frac{1}{r} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik_T r)^n}{n!} \right\} = S_1 + R_1 \\ S_1 &= \frac{1}{r}, \quad R_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik_T)^n}{n!} \cdot r^{n-1} \end{aligned} \quad (2.36)$$

と表せる。ここで、 S_1 は $O(1/r)$ の特異性をもち、 R_1 は $k_T \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ 以外で正則であることに注意する。

同様に、式(2.34)の右辺第2項を級数展開して変形すると次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\Psi^{(T)} - \Psi^{(L)}) &= S_2 + R_2 \\ S_2 &= \frac{-1}{4(1-\nu)} \cdot r_{,ij}, \quad R_2 = \frac{1}{k_T^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-i)^n (k_T^n - k_L^n)}{n!} \cdot (r^{n-1})_{,ij} \end{aligned} \quad (2.37)$$

ここでも、 S_2 は $O(1/r)$ の特異性をもち、 R_2 は正則である。

式(2.34), (2.36), (2.37)から、変位の基本解 U_{ij} を特異項 $U_{ij}^{(s)}$ と正則項 $U_{ij}^{(r)}$ に分解し、

$$U_{ij} = U_{ij}^{(s)} + U_{ij}^{(r)} \quad (2.38)$$

のように表せることが分かる。特異項は次のようになり、静的問題の基本解、いわゆる Kelvin 解に一致する。

$$U_{ij}^{(s)} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \{(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\} \quad (2.39)$$

すなわち、動的な影響を表す部分は特異性を示さない。したがって、時間領域の基本解についても、その特異性を示す部分のみをとりだせば式(2.39)と一致する。

また、正則項は次のようになる。

$$\begin{aligned} U_{ij}^{(r)} &= \frac{1}{4\pi\mu} (\alpha\delta_{ij} + \beta r_{,i}r_{,j}) \\ \alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik_T)^n}{n!} \cdot r^{n-1} + \frac{1}{k_T^2} \sum_{n=3}^{\infty} a_n(n-1)r^{n-3} \\ \beta &= \frac{1}{k_T^2} \sum_{n=4}^{\infty} a_n(n-1)(n-3)r^{n-3} \end{aligned} \quad (2.40)$$

ただし、

$$a_n = \frac{(-i)^n(k_T^n - k_L^n)}{n!} \quad (2.41)$$

である。

実際に式(2.40)を用いて計算する場合、波数や r が比較的大きいときには級数の収束が遅くなり、考慮すべき項数が増加することに注意する必要がある。

(b) 表面力の基本解の分解

表面力の基本解 T_{ij} も同様に、特異性をもつ部分 $T_{ij}^{(s)}$ と正則な部分 $T_{ij}^{(r)}$ に分けることができる。

$$T_{ij} = T_{ij}^{(s)} + T_{ij}^{(r)} \quad (2.42)$$

まず、式(2.38)を式(2.29)に代入すれば、容易に次式が得られる。

$$T_{ij}^{(q)} = \left\{ \lambda U_{im,m}^{(q)} \delta_{jk} + \mu (U_{ij,k}^{(q)} + U_{ik,j}^{(q)}) \right\} n_k \quad (2.43)$$

ここで q は s または r をとるものとするが、上式から得られる $T_{ij}^{(s)}$ に正則項が含まれないことや、 $T_{ij}^{(r)}$ に特異項が含まれないことは保証し難いため、結果を確認する必要がある。

式(2.39)の $U_{ij}^{(s)}$ を式(2.43)に代入して整理すれば、

$$T_{ij}^{(s)} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,n} + r_{,j}n_i - r_{,i}n_j) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,n} \right\} \quad (2.44)$$

が得られる。上式は明らかに特異項のみからなっており、特異性のオーダーは $O(1/r^2)$ である。また、変位の基本解についてと同様に、 $T_{ij}^{(s)}$ は静的問題における表面力の基本解に一致する。

また、式(2.40)の $U_{ij}^{(r)}$ を式(2.43)に代入して整理すると、

$$T_{ij}^{(r)} = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_3}{2} \right) (\delta_{ij}r_{,n} + r_{,j}n_i) + \left\{ \frac{\lambda}{\mu} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \gamma_3 \right\} r_{,i}n_j + 2(\gamma_2 - \gamma_3)r_{,i}r_{,j}r_{,n} \right] \quad (2.45)$$

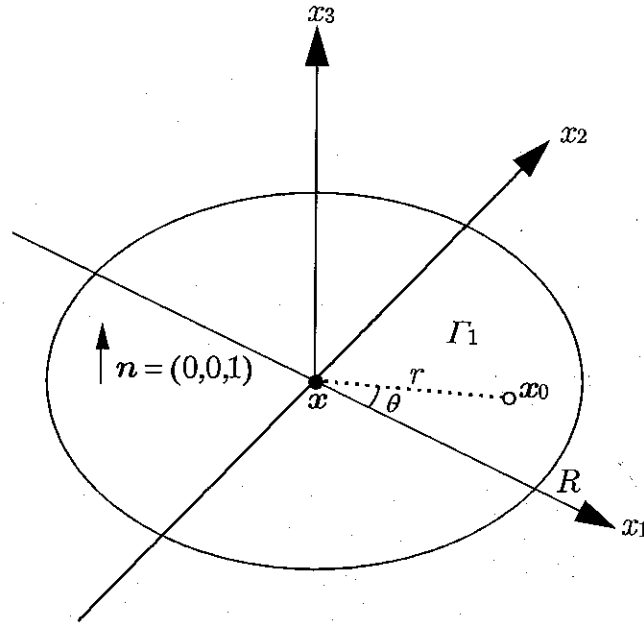


図-2.3: 特異点周辺の要素分割

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{(-ik_T)^n}{n!} \cdot r^{n-2} + \frac{1}{k_T^2} \sum_{n=4}^{\infty} a_n (n-1)(n-3) r^{n-4} \\
 \gamma_2 &= \frac{\partial \beta}{\partial r} = \frac{1}{k_T^2} \sum_{n=4}^{\infty} a_n (n-1)(n-3)^2 r^{n-4} \\
 \gamma_3 &= \frac{2\beta}{r} = \frac{2}{k_T^2} \sum_{n=4}^{\infty} a_n (n-1)(n-3) r^{n-4}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

であり、 $T_{ij}^{(r)}$ は正則であることが分かる。

2.3.4 基本解の特異性と境界に関する特異積分

三次元空間における弾性波動方程式の変位と表面力の基本解は、それぞれ $O(1/r)$, $O(1/r^2)$ の特異性をもつことを前小節で示した。この特異性のオーダーの違いは、これらの基本解を核とした境界積分を解析的あるいは数値的に行う際に、注意する必要がある。本小節では次章の準備を兼ねて、簡単な例題を通してこの問題に触れておくことにする。

図-2.3に示すように、座標軸で区切られた1/4円形の要素を4つ用いて、半径 R の円形の境界 Γ を要素分割した状態を考える。座標系の原点を観測点 $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ として、要素上の作用点 $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, x_3)$ に関する基本解の境界積分を行う。簡単のため、全境界が x_1 - x_2 平面上にあるとし、外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ とする。また、角度 θ を図のようにとる。

式(2.39)から係数を除外し、変位の基本解の特異性を示す部分を次式の u_{ij} で代表させる。

$$u_{ij} = \frac{1}{r} (\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}) \tag{2.47}$$

u_{ij} を被積分関数として、要素1に関して境界積分を行う。

$$\int_{\Gamma_1} u_{ij} d\Gamma = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r} (\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}) r d\theta dr$$

$$= \int_0^R \int_0^{\pi/2} (\delta_{ij} + r_i r_j) d\theta dr \quad (2.48)$$

ここで、観測点は原点にあるため、 r_i は次のように表せる。

$$r_i = \frac{\partial \sqrt{\chi_k \chi_k}}{\partial \chi_i} = \frac{\chi_i}{r} = \begin{cases} \cos \theta & (i=1) \\ \sin \theta & (i=2) \\ 0 & (i=3) \end{cases} \quad (2.49)$$

式(2.48)、(2.49)から、この積分は簡単に行うことができ、例えば $(i, j) = (1, 1)$ の場合には次式となる。

$$\int_{\Gamma_1} u_{ij} d\Gamma = \int_0^R \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 \theta) d\theta dr = \frac{3}{4} \pi R \quad (2.50)$$

以上より、変位の基本解はそれぞれの要素についての積分が可能であり、その積分の和から全境界に関する積分値を得ることができると推測される。

次に、表面力の基本解についても同様に考え、式(2.44)から係数を除外し、特異性を示す部分を次式の T_{ij} で代表させる。このとき、平面要素を用いるならば $r_n = 0$ であることを考慮する。

$$T_{ij} = \frac{1}{r^2} (r_j n_i - r_i n_j) \quad (2.51)$$

T_{ij} を被積分関数として、要素1に関して境界積分を行う。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} T_{ij} d\Gamma &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r^2} (r_j n_i - r_i n_j) r d\theta dr \\ &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r} (r_j n_i - r_i n_j) d\theta dr \end{aligned} \quad (2.52)$$

式(2.52)より明らかに、 $i = j$ のときには積分値は0である。しかし、例えば $(i, j) = (1, 3)$ の場合を考えると、

$$\int_{\Gamma_1} T_{13} d\Gamma = - \int_0^R \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{r} d\theta dr = - \int_0^R \frac{1}{r} dr \quad (2.53)$$

となり、この積分は発散する。すなわち要素1に関する表面力の基本解の積分は存在しないため、変位の基本解の場合のように、要素に関する積分の和をもって全境界に関する積分値を求めることはできない。

この場合には、全境界に関する積分を考えれば、次のように積分値が得られる。

$$\oint_{\Gamma} T_{13} d\Gamma = - \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} d\theta dr = 0 \quad (2.54)$$

ただし、この積分は主値積分とよばれ、通常の積分の定義を拡張したものである。最左辺の積分記号は、ここで示したような特異点を含む積分を主値積分で評価することを示す記号である。図-2.3のように簡単な境界でなくとも、必ずCauchyの主値の意味で T_{ij} に関する積分は存在することが確かめられている [76]。

2.4 まとめ

本章では、まず三次元空間の弾性波動方程式を誘導し、次に周波数領域における三次元弾性波動方程式の基本解を解析的に導出した。これは次章以降に述べる解析手法、特に境界要素法を理解する上での基礎となることである。

また、得られた基本解が特異項と正則項に分解できることを示し、変位と表面力それぞれの基本解がもつ特異性の違いについて論じた。すなわち、簡単な境界積分を例にとり、変位の基本解は弱い特異性をもつが広義積分可能であること、表面力の基本解は強い特異性を持ち、Cauchyの主値の意味で積分を評価する必要があることを示した。これらは、境界要素法において特異性をもつ境界積分を評価する際に、重要となる性質である。

第3章

不整形地盤を対象とした三次元地震動シミュレーション手法

3.1 はじめに

本章では、不整形地盤を対象とした地震動シミュレーションのための、三次元境界要素法の定式化を行う。その際、地盤の不均質性にも対応できるように有限要素法と結合することを前提とし、両者の結合解法についても議論する。このために本章では以下の構成をとる。

まず、有限要素法を三次元空間を占める弾性体に適用し、六面体要素を用いた場合を例にとり、仮想仕事の原理式を離散化してマトリクス方程式を得る過程を示す。ここでは静的問題に対する定式化について述べた後、動的問題にも簡単に適用できることを示す。

次に、前章で導出した弾性波動方程式の基本解を用いて、三次元弾性体の周波数領域応答に関する Somigliana 恒等式、次いで境界積分方程式を導く。また、有限要素法と結合するためにはその境界積分方程式がどのように離散化されるべきかを考察し、三次元空間を対象とするときに特に問題となる特異積分、隅角部の処理について述べる。さらに、近年提案された方法を用いることでそれらの問題が解決され、境界条件を完全に満たした両手法の結合が可能であることを示す。

最後に、本章で展開される三次元境界要素法を用いた数値計算を行い、既往の研究結果と比較することでその妥当性を確認する。有限要素法との結合解法については、次章で震源断層モデルを導入した解析を行い、別の研究結果と比較する。

3.2 三次元有限要素法

有限要素法は弾性力学に関する問題に適した手法であり，構造物の応答解析だけでなく，第1章で述べたように地震動シミュレーションに適用された例も多い．これは基礎研究に限ったことではなく，有限要素法を用いた解析プログラムや，有限要素解析を前提とした自動要素分割プログラム，解析結果の可視化を含めそれらを統合したシステムなども，多くが実務者のために開発されている．したがって，境界要素法と結合するために有限要素法をあまり大きく修正すると，これらの実用的な成果を利用できなくなってしまう．そこで，本節では弾性連続体について一般に用いられている変位法(displacement formulation)[77]に基づき，三次元有限要素法の定式化を示す[78]．

3.2.1 重み付き残差法による仮想仕事の原理式の導出

図-3.1のように，境界 Γ 内の領域 Ω を占める弾性体を考える．この弾性体に物体力 \bar{b}_i および境界 Γ_τ 上で表面力 $\bar{\tau}_i$ が作用し，境界 Γ_u では既知の変位 \bar{u}_i が与えられ，平衡状態が保たれているとする．このとき，Cartesian座標系での平衡方程式と境界条件は，前章でも述べたように次式で表される．

$$\sigma_{ij,j} + \bar{b}_i = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{\tau}_i \quad \text{on } \Gamma_\tau \quad (3.2)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3.3)$$

ただし，境界 Γ_u と Γ_τ は次の関係を満たす．

$$\Gamma_u \cup \Gamma_\tau = \Gamma, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\tau = \emptyset \quad (3.4)$$

ここで， \emptyset は空集合を意味する．

以上の式に関して，式(3.3)は厳密に成立するものとして，式(3.1)，(3.2)に重み付き残差法を適用する．変位場 u_i の許容関数 (Γ_u 上で同次境界条件を恒等的に満たし，十分連続な関数) を δu_i とし，式(3.1)，(3.2)それぞれの重み関数として $-\delta u_i$ ， δu_i を用いるとすると，次のような重み付き残差表示式が得られる．

$$-\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + \bar{b}_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_\tau} (\sigma_{ij}n_j - \bar{\tau}_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3.5)$$

第1項を変形して Gauss の発散定理 (付録A 参照) を適用すると，

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{b}_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \delta u_i n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_\tau} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_\tau} \bar{\tau}_i \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

ここで， Γ_u 上では $\delta u = 0$ であることと，歪テンソルと変位の関係式(2.4)を用いると，次式が得られる．

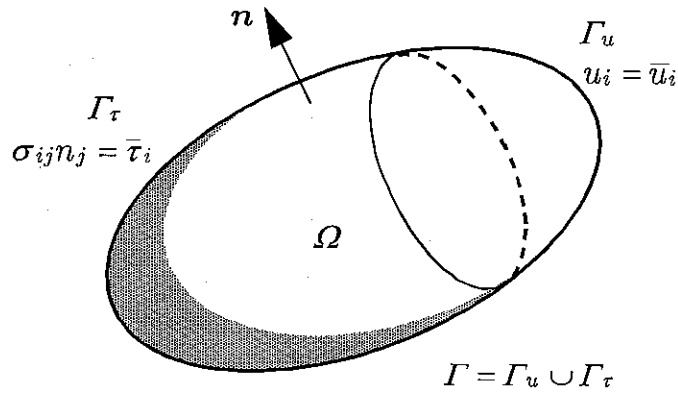


図-3.1: 対象領域とその境界条件

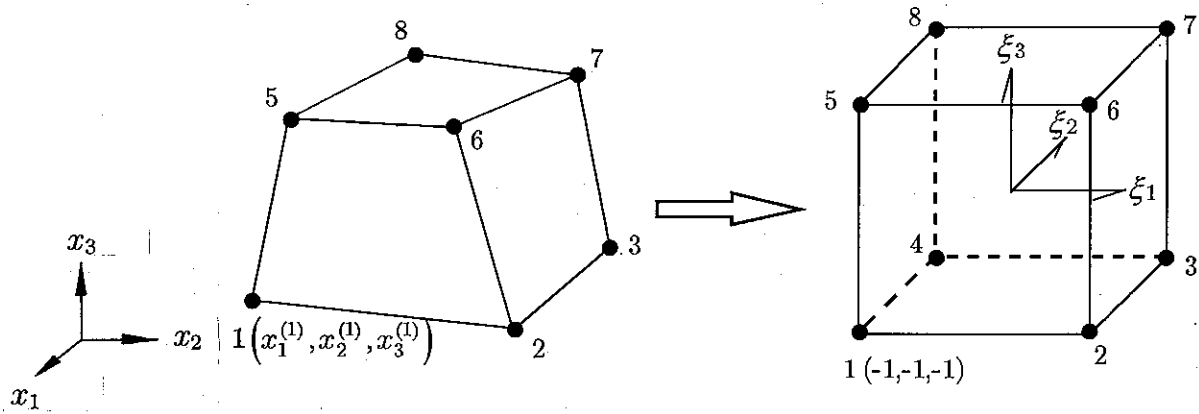


図-3.2: 六面体1次要素の局所座標系への写像

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{b}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\tau}} \bar{\tau}_i \delta u_i d\Gamma \quad (3.7)$$

式(3.7)は仮想仕事の原理式に一致し[78], これまでの過程から明らかなように, 応力-歪関係によらず成立する. すなわち, 二次元平面応力・平面歪問題, 三次元問題などの全てにおいて, 式(3.7)は有限要素法の出発点となる式である.

3.2.2 有限要素による離散化

式(3.7)を数値的に解くために, 領域 Ω を M 個の有限要素に離散化する. ここでは Ω を三次元空間を占める領域とし, 六面体1次要素を用いた場合を考える. なお, 他の要素を用いる場合でも, 後述の補間関数等が異なるだけで, 基本的には以下と同様に考えればよい.

図-3.2のように, ある要素 e を x_1 - x_2 - x_3 全体座標系から ξ_1 - ξ_2 - ξ_3 局所座標系に写像する. 図の節点 $i = 1, 2, \dots, 8$ の全体座標を $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$, 局所座標を $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)})$, 節点変位を $(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)})$ とおき, 要素節点変位ベクトル $\{u^e\}$ を

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_2^{(8)} \\ u_3^{(8)} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

とすると、要素 e 内の任意点 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) における変位 $u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ は、近似的に

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [N]\{u^e\} \quad (3.9)$$

と表せる。ここで $[N]$ は補間関数マトリクスであり、六面体1次要素の場合には

$$[N] = [\phi_1 I \ \phi_2 I \ \cdots \ \phi_8 I] \quad (3.10)$$

となる。ここで、 $[I]$ は 3×3 の単位マトリクスである。補間関数 ϕ_i は、節点局所座標を用いると次のように表される。ただし、次式では総和規約を用いない。

$$\phi_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_1^{(i)} \xi_1)(1 + \xi_2^{(i)} \xi_2)(1 + \xi_3^{(i)} \xi_3) \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (3.11)$$

式(3.9)と同様に、式(2.4)、(3.9)から歪を節点変位ベクトルで表すと、

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon\} = [B]\{u^e\} \quad (3.12)$$

となる。ここでは1次要素を用いているため、要素内で歪は一定である。歪ベクトルと節点変位ベクトルを関係づけるマトリクス $[B]$ は、部分マトリクス $[B_i]$ を用いれば

$$[B] = [B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_8] \quad (3.13)$$

と表すことができる。ただし、 $[B_i]$ は次のようなマトリクスである。

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \phi_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{i,2} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{i,3} \\ \phi_{i,2} & \phi_{i,1} & 0 \\ 0 & \phi_{i,3} & \phi_{i,2} \\ \phi_{i,3} & 0 & \phi_{i,1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

また、等方均質線形弾性体における応力テンソルと歪テンソルの関係式(2.5)は、マトリクスを用いると

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.15)$$

のように表せる。ここで応力と歪の関係を表すマトリクス $[D]$ は、三次元の等方均質線形弾性体の場合は

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

である。式(3.12), (3.15)から、応力も節点変位ベクトルで表すことができ、

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u^e\} \quad (3.17)$$

となる。

式(3.13), (3.14)によれば、マトリクス $[B]$ は補間関数の空間微分を成分としているが、偏微分の連鎖公式[79]から次の関係があることが分かる。

$$\begin{Bmatrix} \partial_{\xi_1} \phi_i \\ \partial_{\xi_2} \phi_i \\ \partial_{\xi_3} \phi_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{\xi_1} x_1 & \partial_{\xi_1} x_2 & \partial_{\xi_1} x_3 \\ \partial_{\xi_2} x_1 & \partial_{\xi_2} x_2 & \partial_{\xi_2} x_3 \\ \partial_{\xi_3} x_1 & \partial_{\xi_3} x_2 & \partial_{\xi_3} x_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{i,1} \\ \phi_{i,2} \\ \phi_{i,3} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \phi_{i,1} \\ \phi_{i,2} \\ \phi_{i,3} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

ここで、 ∂_{ξ_1} などは、下付きの添字で偏微分を行うことを示している。

式(3.18)のマトリクス $[J]$ は、全体座標系から局所座標系への変換に関するマトリクスであり、Jacobianとよばれる。式(3.18)を右辺のベクトルについて解き、式(3.13)に代入すればマトリクス $[B]$ が得られる。

ここで用いている六面体1次要素は、節点量の補間関数 ϕ_i が座標変換を表す形状関数と等しい isoparametric 要素である。すなわち、要素内の任意点の座標 (x_1, x_2, x_3) は補間関数 ϕ_i と節点 i の全体座標 $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ を用いて

$$\begin{aligned}
x_1 &= \phi_k x_1^{(k)} \\
x_2 &= \phi_k x_2^{(k)} \\
x_3 &= \phi_k x_3^{(k)}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

のように表される。したがって、 ξ_i 方向の微分は

$$\begin{aligned}
\partial_{\xi_i} x_1 &= \partial_{\xi_i} \phi_k \cdot x_1^{(k)} \\
\partial_{\xi_i} x_2 &= \partial_{\xi_i} \phi_k \cdot x_2^{(k)} \\
\partial_{\xi_i} x_3 &= \partial_{\xi_i} \phi_k \cdot x_3^{(k)}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

となるから、結局 Jacobian $[J]$ の ij 成分 J_{ij} は次式から求めることができる。

$$J_{ij} = \partial_{\xi_i} x_j = \partial_{\xi_i} \phi_k \cdot x_j^{(k)} \tag{3.21}$$

以上で、仮想仕事の原理式(3.7)をマトリクス方程式とするために必要な全てのマトリクス $[N]$, $[B]$, $[J]$ を、補間関数と節点座標を用いて陽に表すことができた。ただし、これらはある1つの要素 e に対して求められているので、式(3.7)中の領域積分・境界積分を、要素 e に関する積分で表す必要がある。

まず、式(3.7)中の領域 Ω に関する積分は、要素 e が占める領域 Ω^e に関する積分の総和で表される。

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega &= \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \\
\int_{\Omega} \bar{b}_i \delta u_i d\Omega &= \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \bar{b}_i \delta u_i d\Omega
\end{aligned} \tag{3.22}$$

これまでの式と、全体座標系と局所座標系の積分変数の関係

$$d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3 = |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \tag{3.23}$$

から、式(3.22)の領域 Ω^e に関する積分は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^e} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega^e} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \{\delta u^e\}^T [B]^T [D] [B] \{u^e\} d\Omega \\
&= \{\delta u^e\}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \{u^e\}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^e} \bar{b}_i \delta u_i d\Omega &= \int_{\Omega^e} \{\delta u^e\}^T [N]^T \{\bar{b}\} d\Omega \\
&= \{\delta u^e\}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{\bar{b}\} |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3
\end{aligned} \tag{3.25}$$

また、式(3.7)の右辺第2項も、 Γ_τ の一部を占める要素境界 Γ_τ^e に関する境界積分の総和で表され、

$$\int_{\Gamma_\tau} \bar{\tau}_i \delta u_i d\Gamma = \sum_e^{\Gamma_\tau \cap \Gamma^e \neq \emptyset} \int_{\Gamma_\tau^e} \bar{\tau}_i \delta u_i d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_e^{\Gamma_\tau \cap \Gamma^e \neq \emptyset} \int_{\Gamma_\tau^e} \{\delta u^e\}^T [N]^T \{\bar{\tau}\} d\Gamma \\
&= \sum_e^{\Gamma_\tau \cap \Gamma^e \neq \emptyset} \{\delta u^e\}^T \int_{\Gamma_\tau^e} [N]^T \{\bar{\tau}\} d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.26}$$

となる。

以上の式(3.22),(3.24),(3.25),(3.26)を式(3.7)に代入し、これが任意の仮想節点変位 $\{\delta u^e\}$ について成り立つことを考えると、最終的に次のマトリクス方程式が得られる。

$$[K]\{u\} = \{\bar{f}\} \tag{3.27}$$

ここに、

$$[K] = \sum_{e=1}^M [K^e] \tag{3.28}$$

$$\{\bar{f}\} = \sum_{e=1}^M \{\bar{f}^e\} + \sum_e^{\Gamma_\tau \cap \Gamma^e \neq \emptyset} \{\bar{s}^e\} \tag{3.29}$$

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \tag{3.30}$$

$$\{\bar{f}^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{\bar{b}\} |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \tag{3.31}$$

$$\{\bar{s}^e\} = \int_{\Gamma_\tau^e} [N]^T \{\bar{\tau}\} d\Gamma \tag{3.32}$$

であり、 $\{u\}$ は全体節点変位ベクトル、 $\{\bar{f}\}$ は全体節点力ベクトルである。また、 $[K]$ は全体系の剛性マトリクス、 $[K^e]$ は要素剛性マトリクスとよばれる。ただし、式(3.28)、(3.29)中の総和記号は、全体系での自由度番号が一致する成分に関しての足し合わせを表すものとする。実際の手順は文献[77, 78]などに詳しい。このように、全体系のマトリクスあるいはベクトルが要素に関するそれらの集合で表されることが有限要素法の重要な特徴であり、不均質な媒質のモデル化を可能とするものである。

3.2.3 動的問題への適用

これまでは物体力を静的な力としてきたが、これを動的な力とみれば、平衡方程式は運動方程式となる。物体力 \bar{b}_i を動的なものとし、それ以外に慣性力が作用すると考えたとき、式(3.1)は前章で示した弾性波動方程式となる。

$$\sigma_{ij,j} - \rho \partial_t^2 u_i + \bar{b}_i = 0 \tag{3.33}$$

ここで

$$\tilde{b}_i = -\rho \partial_t^2 u_i + \bar{b}_i \tag{3.34}$$

とおくと、物体力 \tilde{b}_i について式(3.27)~(3.32)は全く同様に成り立つので、式(3.34)を式(3.25)に用いることにより、このときの節点力ベクトル $\{\tilde{f}^e\}$ は次のように表せる。

$$\{\tilde{f}^e\} = -\rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \{\ddot{u}^e\} + \{f^e\} \quad (3.35)$$

ここに、 $\{\ddot{u}^e\}$ は要素節点加速度ベクトルである。これにより、 $\{\ddot{u}\}$ を全体節点加速度ベクトルとすると、式(3.27)は

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{\tilde{f}\} \quad (3.36)$$

となり、一般的な運動方程式型のマトリクス方程式が得られる。ただし、

$$[M] = \sum_{e=1}^M [M^e] \quad (3.37)$$

$$[M^e] = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (3.38)$$

である。 $[M]$ は全体系の質量マトリクス、 $[M^e]$ は要素質量マトリクスとよばれる。

なお、動的解析でよく用いられる速度比例型の内部減衰力を考慮する場合は、次式を用いる。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{\tilde{f}\} \quad (3.39)$$

ここに、 $[C]$ は減衰マトリクス、 $\{\dot{u}\}$ は全体節点速度ベクトルである。

本研究では周波数領域で解析を行うため、式(3.39)を変換した次式を用いる。

$$[Z]\{u\} = \{\tilde{f}\} \quad (3.40)$$

ただし、ここでの $\{u\}$, $\{\tilde{f}\}$ はそれぞれ Fourier 変換された変位ベクトル、節点力ベクトルを表し、マトリクス $[Z]$ は

$$[Z] = [-\omega^2 M + i\omega C + K] \quad (3.41)$$

から求められる。

3.3 直接境界要素法

境界要素法は直接法と間接法に分類することができ、近年は取り扱う変数の物理的意味が明白であることから、直接法がよく用いられている [70]. 次節で検討するように、有限要素法と結合するためには直接法の方が都合が良いため、本論文でもこの直接境界要素法を三次元波動場に適用することにする.

3.3.1 重み付き残差法による Somigliana 恒等式の導出

境界要素法も有限要素法と同様に、重み付き残差法を数学的な基盤としている. 前章でも述べたように、基本解 U_{ij} を重み関数として、Fourier 変換面における弾性波動方程式 (2.7) に、領域 Ω について重み付き残差法を適用する. このとき、 $d\Omega(\mathbf{x}_0)$ を作用点 \mathbf{x}_0 における微小体積要素 (二次元問題の場合は面積要素) とすれば、ある角振動数 ω について重み付き残差表示式は次のようになる.

$$\int_{\Omega} \left\{ (\lambda + \mu) u_{k,jk}(\mathbf{x}_0) + \mu u_{j,kk}(\mathbf{x}_0) + \rho \omega^2 u_j(\mathbf{x}_0) + \bar{b}_j(\mathbf{x}_0) \right\} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\Omega(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (3.42)$$

上式を2回部分積分して Gauss の発散定理を適用すると、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ (\lambda + \mu) U_{ik,jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \mu U_{ij,kk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \rho \omega^2 U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \right\} u_j(\mathbf{x}_0) d\Omega(\mathbf{x}_0) \\ & - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \tau_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \\ & + \int_{\Omega} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \bar{b}_j(\mathbf{x}_0) d\Omega(\mathbf{x}_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

となる. ただし、 $d\Gamma(\mathbf{x}_0)$ は作用点 \mathbf{x}_0 における微小面積要素 (二次元問題の場合は線要素) である. 式 (3.42) から式 (3.43) を導く過程は付録 A に示す.

式 (3.43) の左辺第1項に式 (2.28) を代入すれば、デルタ関数の性質から

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ (\lambda + \mu) U_{ik,jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \mu U_{ij,kk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \rho \omega^2 U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \right\} u_j(\mathbf{x}_0) d\Omega(\mathbf{x}_0) \\ & = \int_{\Omega} \left\{ -\delta_{ij} \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right\} u_j(\mathbf{x}_0) d\Omega(\mathbf{x}_0) \\ & = \begin{cases} -u_i(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \Omega) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin \Omega) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.44)$$

となるので、これを式 (3.43) に代入すれば、次式が得られる.

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \tau_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) + \int_{\Omega} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \bar{b}_j(\mathbf{x}_0) d\Omega(\mathbf{x}_0) \\ & = \begin{cases} u_i(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \Omega) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin \Omega) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.45)$$

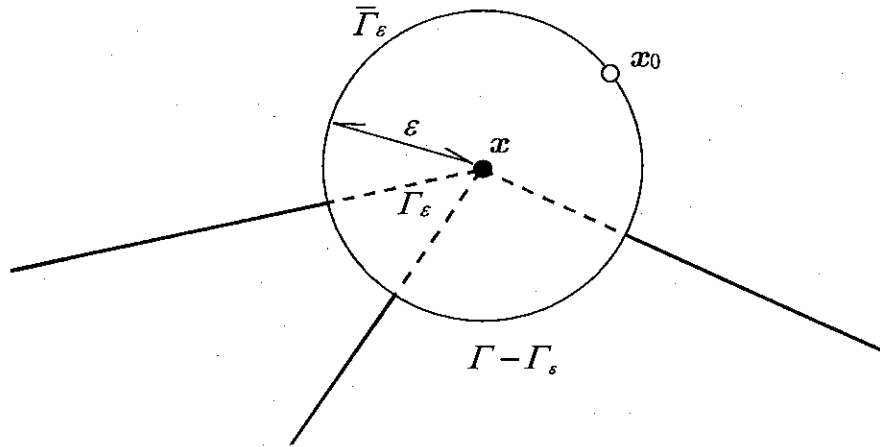


図-3.3: 微小球面 $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ を付加した境界

式(3.45)はSomigliana恒等式とよばれる。これは、領域 Ω 内の物体力と境界 Γ 上の変位、表面力が全て与えられたとき、領域 Ω 内の任意点の変位を陽に表した式である。 $x \notin \Omega$ の場合の式は、特にSomiglianaの内部相反式とよばれる。

3.3.2 境界積分方程式

簡単のため、物体力がない場合を考えると、式(3.45)は次のように表せる。

$$-\int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \tau_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} u_i(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \Omega) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin \Omega) \end{cases} \quad (3.46)$$

式(3.46)において観測点 \mathbf{x} を境界 Γ 上にとれば、境界上の変位と表面力のみに関する積分方程式、すなわち境界積分方程式が得られる。ただし、このとき \mathbf{x} が境界上の作用点 \mathbf{x}_0 に一致する場合が生じ、被積分関数である基本解 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ が無限大に発散してしまう。

この問題を解決するためには、図-3.3のように境界の外側に観測点 \mathbf{x} を中心とする半径 ε の微小球面 $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ (二次元問題の場合には微小円弧) を付加することがよく行われる [80]。このとき、図のように全境界は $\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon$ となり、点 \mathbf{x} は領域 Ω 内の点であるから、次式が成り立つ。

$$u_i(\mathbf{x}) = -\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \tau_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \quad (3.47)$$

ここでは一般性をもたせるために、図-3.3のように点 \mathbf{x} が境界の隅角部になっている場合を考える。このとき変位と表面力がHölder連続 [70] であるとすれば、式(3.47)の $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると、 \mathbf{x}_0 と \mathbf{x} がともに境界 Γ 上に位置する次の境界積分方程式が得られる [80]。

$$c_{ij}(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) - \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \tau_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Gamma) \quad (3.48)$$

ここで、前章で示したように、左辺第2項の積分はCauchyの主値の意味で評価する必要がある。また、係数 c_{ij} はfree-termとよばれ、ここでは次式で定義される。

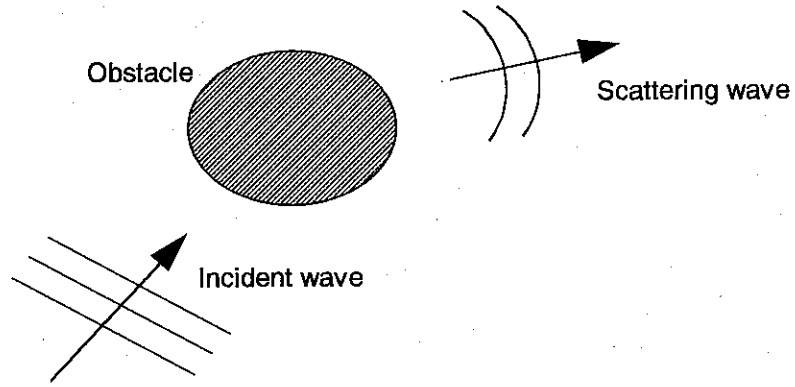


図-3.4: 半無限弾性体中の入射波と散乱波

$$c_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \quad (3.49)$$

直接境界要素法を三次元空間に適用する際、上に示した特異積分と free-term の評価が二次元の場合と比較して非常に困難になる。この問題については次節で議論する。

3.3.3 入射波の影響

領域内に入射波が存在する場合には、その影響を表す項を $\bar{\psi}_i(\mathbf{x})$ として次式を考える。

$$c_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)u_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) - \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\tau_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) = \bar{\psi}_i(\mathbf{x}) \quad (3.50)$$

ここで、入射波が半無限弾性体中の障害物に作用して散乱波が発生する、図-3.4に示すような波動場について $\bar{\psi}_i(\mathbf{x})$ を求めてみる。

散乱波を $u_i^{(S)}$ 、半無限均質弾性体の応答を $u_i^{(F)}$ 、全波動場を u_i とし、対応する表面力をそれぞれ $\tau_i^{(S)}$ 、 $\tau_i^{(F)}$ 、 τ_i とすれば、これらには次の関係がある [59]。

$$\begin{aligned} u_i^{(S)} &= u_i - u_i^{(F)} \\ \tau_i^{(S)} &= \tau_i - \tau_i^{(F)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

この散乱波に無限遠における放射条件 [70] を仮定すれば、散乱波動場は次の境界積分方程式を満たす。

$$c_{ij}(\mathbf{x})u_j^{(S)}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)u_j^{(S)}(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) - \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\tau_j^{(S)}(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (3.52)$$

式(3.52)に式(3.51)を代入して式(3.50)と比較すれば、 $\bar{\psi}_i(\mathbf{x})$ は次式で表せることが分かる。

$$\bar{\psi}_i(\mathbf{x}) = c_{ij}(\mathbf{x})u_j^{(F)}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)u_j^{(F)}(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) - \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\tau_j^{(F)}(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) \quad (3.53)$$

例えば平面波入射に対する半無限均質弾性体の応答は、弾性波動論に基づいて解析的に求められる [81] ので、 $\bar{\psi}_i(\mathbf{x})$ は既知量として扱うことができる。したがって入射波を考えた場合にも、境界積分方程式(3.50)は式(3.48)と同様に全波動場 u_i 、 τ_i が境界 Γ 上でとる値のみを未知量とする。

3.4 三次元空間を対象とした有限要素法と境界要素法の結合解法

3.4.1 有限要素法と境界要素法の結合に関する検討

直接境界要素法を用いる場合、三次元空間における特異積分と free-term の評価が困難であることを前節で述べた。二次元空間では境界積分が線積分であるため、特異積分や式(3.49)の積分は解析的に行うことができる。これに対し、三次元空間における境界積分は面積分であり、任意の場合について解析的に積分を実行することは不可能である。また、立体角は2以上の任意数の面で構成されるため、あらゆる場合について式(3.49)の積分区間を定めて free-term を計算することは困難である。そのため、これらを直接評価した三次元境界要素法を用いた例はほとんどない。従来まで用いられている三次元境界要素法は、有限要素法との結合を前提とすれば、次のように評価される。

(a) 間接境界要素法を用いる方法

三次元波動場を扱った境界要素法については、境界積分方程式法を含めて間接法もよく用いられている [82, 83, 84]。直接法の境界積分方程式(3.48)に対して、間接法では次式を用いる [85]。

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \varphi_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \quad (3.54)$$

ここで、 φ_i は未知の分布密度関数である。

式(3.54)より明らかなように、間接法に基づく場合には特異積分も free-term も評価する必要がなく、この点が三次元波動場に対して間接法がよく用いられている理由と考えられる。しかし、式(3.54)を解く際に、一般には選点法を用いて最小自乗法で境界条件を合わせるため、境界形状が急激に変化するような場合（地盤の不整形性が強い場合）には精度が低くなるか、多数の点を計算する必要が生じる。また、有限要素法との結合を考えても、二つの領域間の境界条件が完全には満たされない。そのため、周波数領域では三次元解析が行われた例もある [86] が、時間領域での計算を行うと誤差が蓄積され、解が発散する可能性がある。

(b) 一定要素を用いる方法

境界要素として一定要素を用いるとすれば、節点はその図心に一つ置かれる。そのため、節点は常に滑らかな境界上にあることになり、よく知られているように $c_{ij} = \delta_{ij}/2$ となる [80]。この方法は、高次要素を用いるよりも精度が低くなる恐れはあるが、境界要素法のみを用いるならば特に問題はない。しかし、一般に用いられている有限要素は、前出のような要素の頂点に節点を置くものである。したがって、簡単に二次元的に表せば図-3.5のようになるが、連続条件やつり合い条件が平均的にしか満たされなくなる。そのため、この方法(b)も方法(a)と同様に、周波数領域の解析は行うことができる [87] が、時間領域への発展には不安がある。一定要素だけでなく、同じく隅角部を避けるために用いられている非適合要素 [70] についても同じことがいえる。

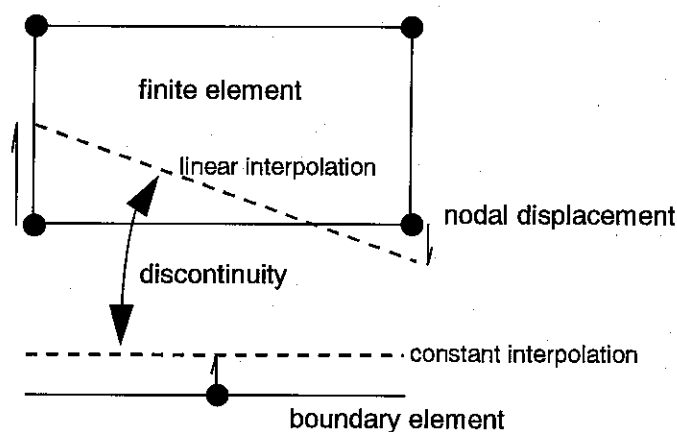


図-3.5: 一定要素を用いた場合に考えられる境界条件の不適合

(c) 剛体変位条件を用いる方法

物体の変位が弾性変位を伴わず、剛体変位（並進や回転）のみである場合を考えると、特異積分と free-term を直接計算することなく、間接的に評価することができる [70]。しかし、半無限体に対して剛体変位条件を適用するためには、自由表面を無限にモデル化する必要が生じる。Banerjee *et al.* [88] はこのために半無限要素を用いているが、計算量の増加を伴うため、現在まであまり用いられた例はない。しかし、適用例はないものの、この方法は有限要素法との結合は容易に行うことができると考えられる。ここで、均質半無限体の Green 関数を基本解として用いる方法もあるが、見かけの固有振動数の問題 [20] が生じるため、本研究ではこれを用いないことにした。

以上のように、従来の方法には有限要素法との結合や計算量の点で問題がある。したがって二次元の場合のように、特異積分と free-term を直接計算することができればそれが最良の方法であると考えられ、そのためにいくつかの研究がなされてきた [89, 76, 90]。そして、特異積分については Guiggiani and Gigante [91] が、要素を局所極座標に写像することで特異性を取り除き、数値積分で評価する手法を提案した。また、free-term については Mantić [92] が、Hartmann [76] の研究を発展させ、任意の形状をもつ隅角部に対して計算できることを示した。そこで本論文では、境界条件を完全に満たした結合を行うために、有限要素、境界要素とも一般的な isoparametric 線形要素を用いることとし、特異積分は Guiggiani and Gigante [91]、free-term は Mantić [92] に従って直接評価する。この2つの手法については本論文の付録 B と C で詳しく説明する。なお、前章で述べたように U_{ij} にも弱い特異性があるため、式 (3.48) の左辺第3項の積分には、Lachat and Watson [89] のサブ要素分割法とよばれる方法を用いる。その他の境界積分は特異性をもたないため、数値積分で評価する。

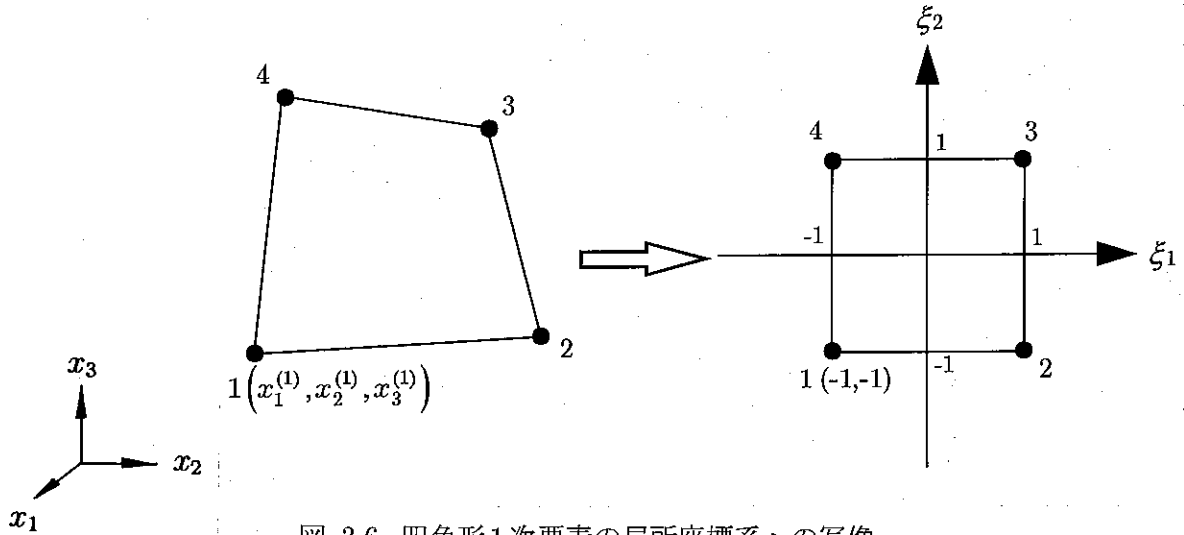


図-3.6: 四角形1次要素の局所座標系への写像

3.4.2 境界要素による境界積分方程式の離散化

ここでは、図-3.6に示すような四角形1次要素を用いるとし、境界 Γ を M 個の境界要素に離散化する。全体系の節点番号 k の点（座標 \mathbf{x}_k ）を観測点と考え、境界 Γ に関する積分を要素 e の境界 Γ^e に関する積分の総和で表すと、式(3.50)は次のようになる。

$$c_{ij}(\mathbf{x}_k)u_j(\mathbf{x}_k) + \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma^e} T_{ij}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)u_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) - \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma^e} U_{ij}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\tau_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) = \bar{\psi}_i(\mathbf{x}_k) \quad (3.55)$$

有限要素法の場合と同様、図の節点 $i=1, 2, 3, 4$ の全体座標を $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ 、局所座標を $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$ 、節点変位、節点表面力を $(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)})$ 、 $(\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}, \tau_3^{(i)})$ とおき、要素節点変位ベクトル $\{u^e\}$ と表面力ベクトル $\{\tau^e\}$ を

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_2^{(4)} \\ u_3^{(4)} \end{Bmatrix}, \quad \{\tau^e\} = \begin{Bmatrix} \tau_1^{(1)} \\ \tau_2^{(1)} \\ \vdots \\ \tau_2^{(4)} \\ \tau_3^{(4)} \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

とする。このとき、要素 e 内の任意点 (ξ_1, ξ_2) における変位 $u_i(\xi_1, \xi_2)$ 、表面力 $\tau_i(\xi_1, \xi_2)$ は補間関数マトリクス $[N]$ を用いて

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [N]\{u^e\}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{Bmatrix} = [N]\{\tau^e\} \quad (3.57)$$

のように近似できる。ただし、

$$[N] = [\phi_1 I \ \phi_2 I \ \phi_3 I \ \phi_4 I], \quad \phi_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_1^{(i)}\xi_1)(1 + \xi_2^{(i)}\xi_2) \quad (3.58)$$

である。上式では総和規約を用いない。ここでは変位と表面力に関して同じ補間関数マトリクスを用いるが、問題に応じて異なるものを用いてもよい。

式(3.57)を式(3.55)に用いて積分変数を変換すれば次式となる。

$$[c]\{u_k\} + \sum_{e=1}^M [\bar{T}] \{u^e\} - \sum_{e=1}^M [\bar{U}] \{\tau^e\} = \{\bar{\psi}_k\} \quad (3.59)$$

ここで、

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11}(\mathbf{x}_k) & c_{12}(\mathbf{x}_k) & c_{13}(\mathbf{x}_k) \\ c_{21}(\mathbf{x}_k) & c_{22}(\mathbf{x}_k) & c_{23}(\mathbf{x}_k) \\ c_{31}(\mathbf{x}_k) & c_{32}(\mathbf{x}_k) & c_{33}(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix}, \{u_k\} = \begin{Bmatrix} u_1(\mathbf{x}_k) \\ u_2(\mathbf{x}_k) \\ u_3(\mathbf{x}_k) \end{Bmatrix}, \{\bar{\psi}_k\} = \begin{Bmatrix} \bar{\psi}_1(\mathbf{x}_k) \\ \bar{\psi}_2(\mathbf{x}_k) \\ \bar{\psi}_3(\mathbf{x}_k) \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

である。また、マトリクス $[\bar{U}]$, $[\bar{T}]$ は次式で表される。

$$[\bar{U}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [U][N]J|d\xi_1 d\xi_2, \quad [\bar{T}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [T][N]J|d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.61)$$

ここで、 $[U]$ と $[T]$ は基本解テンソルをマトリクス表示したもので、それぞれ $U_{ij}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)$ と $T_{ij}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)$ を ij 成分としている。

式(3.59)は節点 k を作用点とする境界積分方程式を、節点量に関するマトリクス方程式に離散化したものである。全ての節点が作用点となった場合を考えれば、節点数と同じ数のマトリクス方程式が得られるので、それらを連立すれば次式が得られる [80]。

$$[H]\{u\} - [G]\{\tau\} = \{\bar{\psi}\} \quad (3.62)$$

ここで、 $\{u\}$, $\{\tau\}$, $\{\bar{\psi}\}$ はそれぞれ変位、表面力、入射波項の全体ベクトルであり、 $[H]$ は $[c]$ と $[\bar{T}]$ を、 $[G]$ は $[\bar{U}]$ を部分マトリクスとしている。ただし、 $[c]$ は前述したように作用点と観測点一致する場合に T_{ij} が示す特異性に起因して発生する項であるから、 $[H]$ の対角部分にのみ存在する。

領域内に入射波がない場合には、式(3.62)の右辺を $\{0\}$ にすればよい。

3.4.3 マトリクス方程式の結合

(a) 分布マトリクス

以上で周波数領域の三次元波動場における FEM, BEM それぞれのマトリクス方程式が得られたが、FEM に基づく式(3.40)は変位と節点力の関係式であり、BEM に基づく式(3.62)は変位と表面力の関係式となっている。したがってこれらを結合するためには、FEM 領域と BEM 領域の境界 Γ_I における節点力と表面力の関係を明らかにする必要があるが、これは以下に示すように仮想仕事の概念を用いて導かれる。

境界 Γ_I 上における仮想仕事 δW は、BEM 領域の表面力と仮想変位を用いて次のように表される。

$$\delta W = \int_{\Gamma_I} \delta u_i \tau_i d\Gamma \quad (3.63)$$

式(3.57)を用いて上式を離散化すれば次式となる.

$$\delta W = \sum_e^{\Gamma_I \supset \Gamma^e} \{\delta u^e\}^T \int_{\Gamma^e} [N]^T [N] d\Gamma \{\tau^e\} \quad (3.64)$$

一方, BEM 領域についても FEM 領域と同様の要素節点力ベクトル $\{f^e\}$ を境界 Γ 上で考えれば, 仮想仕事 δW は

$$\delta W = \sum_e^{\Gamma_I \supset \Gamma^e} \{\delta u^e\}^T \{f^e\} \quad (3.65)$$

と表すこともできるから, 式(3.64), (3.65)より, 節点力ベクトルと表面力ベクトルの関係式

$$\{f\} = [\Upsilon_I] \{\tau\} \quad (3.66)$$

が得られる. ここで, $[\Upsilon_I]$ は次式で定義される分布マトリクス (distribution matrix) である [80].

$$[\Upsilon_I] = \sum_e^{\Gamma_I \supset \Gamma^e} \int_{\Gamma^e} [N]^T [N] d\Gamma \quad (3.67)$$

(b) 結合解法のマトリクス方程式

図-3.7のように, FEM 領域と BEM 領域が Γ_I を境界として接し, Γ_I 以外の BEM 領域の境界は自由表面であるとしよう. マトリクスと入射波項に関して混乱はないであろうから, 変位, 節点力, 表面力についてのみ上付きの (F) , (B) をもってそれぞれの領域に属する量を区別する. これに従って2つのマトリクス方程式(3.40), (3.62)を改めて記せば次のようになる. ただし, この場合 FEM 領域の節点力 $\{f^{(F)}\}$ は BEM 領域との相互作用から生じるため, 未知量として取り扱われるので, 既知量を表す '-' をはずして示す.

$$[Z] \{u^{(F)}\} = \{f^{(F)}\} \quad (3.68)$$

$$[H] \{u^{(B)}\} - [G] \{\tau^{(B)}\} = \{\bar{\psi}\} \quad (3.69)$$

まず式(3.69)を変形すれば次式が得られる.

$$\{\tau^{(B)}\} = [L] \{u^{(B)}\} - \{\bar{\phi}\} \quad (3.70)$$

ここで,

$$[L] = [G]^{-1}[H] \quad , \quad \{\bar{\phi}\} = [G]^{-1}\{\bar{\psi}\} \quad (3.71)$$

である.

いま, 式(3.70)のマトリクスとベクトルについて, 自由表面に関する部分に下付きの添字 G を, それ以外すなわち境界 Γ_I に関する部分に I をつけ, 境界条件によって分割して表せば次のようになる.

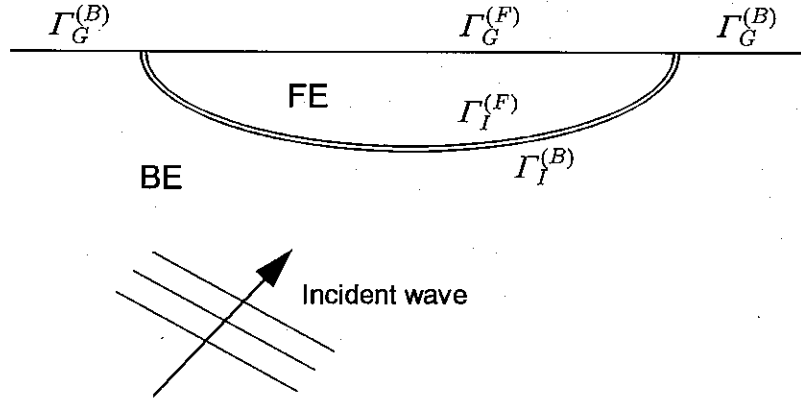


図-3.7: 対象とするモデルの領域分割

$$\begin{Bmatrix} \tau_I^{(B)} \\ \tau_G^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{II} & L_{IG} \\ L_{GI} & L_{GG} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I^{(B)} \\ u_G^{(B)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_I \\ \bar{\phi}_G \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

自由表面上では表面力がゼロであるから,

$$\{\tau_G^{(B)}\} = \{0\} \quad (3.73)$$

を式(3.72)に用いると, 次式が得られる.

$$\{\tau_I^{(B)}\} = [L_{II} - L_{IG}L_{GG}^{-1}L_{GI}] \{u_I^{(B)}\} - \{\bar{\phi}_I - L_{IG}L_{GG}^{-1}\bar{\phi}_G\} \quad (3.74)$$

両辺に分布マトリクス $[\Upsilon_I]$ をかけると, 式(3.66)から

$$\{f_I^{(B)}\} = [\mathcal{L}]\{u_I^{(B)}\} - \{\bar{\varphi}\} \quad (3.75)$$

となる. ただし,

$$[\mathcal{L}] = [\Upsilon_I] [L_{II} - L_{IG}L_{GG}^{-1}L_{GI}] \quad , \quad \{\bar{\varphi}\} = [\Upsilon_I] \{\bar{\phi}_I - L_{IG}L_{GG}^{-1}\bar{\phi}_G\} \quad (3.76)$$

である.

一方, 式(3.68)のマトリクスとベクトルについても同様に, 境界 Γ_I に関する部分に添字 I を, それ以外の部分に S をつけて分割して表せば次のようになる.

$$\begin{bmatrix} Z_{SS} & Z_{SI} \\ Z_{IS} & Z_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_S^{(F)} \\ u_I^{(F)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_S^{(F)} \\ f_I^{(F)} \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

ここで, 境界 Γ_I における変位と節点力の適合条件は

$$\begin{aligned} \{u_I^{(F)}\} &= \{u_I^{(B)}\} \\ \{f_I^{(F)}\} &= -\{f_I^{(B)}\} \end{aligned} \quad (3.78)$$

であるから、これを用いて式(3.75)と式(3.77)を連立すれば、有限要素法と境界要素法の結合解法のマトリクス方程式が得られ、上付きの添字を略すれば

$$\begin{bmatrix} Z_{SS} & Z_{SI} \\ Z_{IS} & Z_{II} + \mathcal{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_S \\ u_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_S \\ \bar{\varphi} \end{Bmatrix} \quad (3.79)$$

と表せる。上式は、FEMのマトリクス方程式(3.77)に、BEM領域との相互作用と入射波の影響を組み入れたものとなっており、自由表面の境界条件を導入して簡潔にまとめられている。漸化式とならないこと、合積演算の必要がないことから、時間領域で結合された式[68]と比して非常に単純な形式をとっている。以下では、この結合解法をFE-BE法とよぶ。

3.5 三次元直接境界要素法による不整形地盤の震動解析例

上に示したように、有限要素法との結合に関しては一般的な方法を用いているため、まず境界要素法の妥当性を確かめることが重要と考えられる。ここでは、先に示した三次元直接境界要素法を用いて実際に数値計算を行い、既往の研究結果と比較することで、特異積分およびfree-termが正しく評価されているかどうかを調べる。ただし本章のはじめに述べたように、三次元FE-BE法に関しても次章でその妥当性の確認を行う。

3.5.1 二層地盤を対象とした三次元境界要素法のマトリクス方程式

図-3.8のように、上層と下層が Γ_I を境界として接し、 Γ_I 以外の境界が自由表面である二層地盤を考え、境界要素でモデル化する。上層と下層それぞれの領域に属するマトリクスとベクトルを上付きの (A) 、 (B) をもって区別すれば、前節で示したマトリクス方程式は次のように表せる。

$$\begin{aligned} [H^{(A)}]\{u^{(A)}\} - [G^{(A)}]\{\tau^{(A)}\} &= \{0\} \\ [H^{(B)}]\{u^{(B)}\} - [G^{(B)}]\{\tau^{(B)}\} &= \{\bar{\psi}\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

式(3.80)のマトリクスとベクトルについて、自由表面に関する部分に下付きの添字 G を、境界 Γ_I に関する部分に I をつけ、分割して表せば次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_G^{(A)} & H_I^{(A)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_G^{(A)} \\ u_I^{(A)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_G^{(A)} & G_I^{(A)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_G^{(A)} \\ \tau_I^{(A)} \end{Bmatrix} &= \{0\} \\ \begin{bmatrix} H_I^{(B)} & H_G^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I^{(B)} \\ u_G^{(B)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_I^{(B)} & G_G^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_I^{(B)} \\ \tau_G^{(B)} \end{Bmatrix} &= \{\bar{\psi}\} \end{aligned} \quad (3.81)$$

ここで、境界 Γ_I における節点量の適合条件から、 $\{u_I\}$ と $\{\tau_I\}$ を

$$\begin{aligned} \{u_I\} &= \{u_I^{(A)}\} = \{u_I^{(B)}\} \\ \{\tau_I\} &= -\{\tau_I^{(A)}\} = \{\tau_I^{(B)}\} \end{aligned} \quad (3.82)$$

とおき、 $\{\tau_G^{(A)}\} = \{0\}$ 、 $\{\tau_G^{(B)}\} = \{0\}$ を考慮すると、式(3.81)は次のようにまとめられる。

$$\begin{bmatrix} H_G^{(A)} & H_I^{(A)} & G_I^{(A)} & 0 \\ 0 & H_I^{(B)} & -G_I^{(B)} & H_G^{(B)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_G^{(A)} \\ u_I \\ \tau_I \\ u_G^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\psi} \end{Bmatrix} \quad (3.83)$$

式(3.83)は二層地盤の震動解析のためのマトリクス方程式である。三層以上の多層地盤についても、定式化は複雑になるが、全く同様にマトリクス方程式を求めることができる。

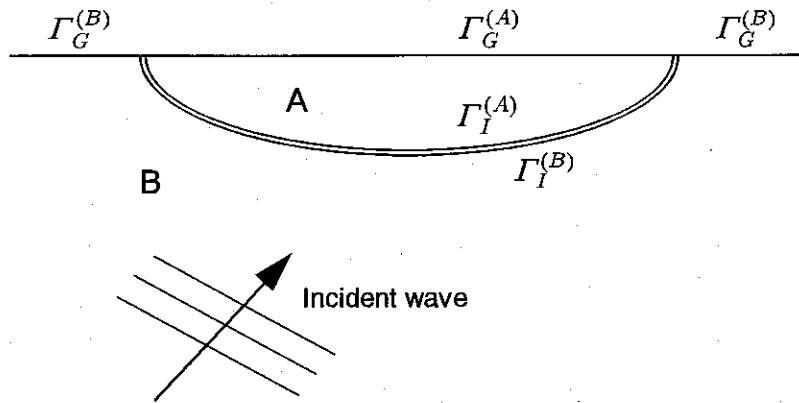


図-3.8: 二層地盤モデルの概念図

3.5.2 計算モデルと計算結果

式(3.83)を用いて、図-3.9に示すような半径1kmの半球形盆地の震動解析を行う。これは、軸対称仮定を導入した間接境界積分方程式法を用いて、*Sánchez-Sesma et al.*[82]が計算したモデルと同じものである。*Sánchez-Sesma et al.*[82]は計算に用いたパラメータを無次元化して表しているが、ここでは次元を与えて示す。図のように30°傾斜した平面SH波が入射する状態を想定し、周波数が0.5Hzの場合について、直線 $y=0$, $x=0$, $x=y$ 上での地表の変位振幅を計算する。このときのS波の波長は上層において1.8km, 下層において4.0kmである。地盤は三角形と四角形の isoparametric 線形要素を用いて図-3.10のようにモデル化した。上層と下層の節点間隔はそれぞれ80~150m, 150~300m程度である。

このモデルを用いて三次元直接境界要素法で計算した結果を点で示し、*Sánchez-Sesma et al.*[82]による結果を線で示すと図-3.11のようになる。図の横軸は地表面での位置、縦軸は応答と入射波との振幅比を表している。図-3.11によれば、両者は3成分ともほぼ一致していることが分かる。このことから、前節で述べた特異積分や free-term の評価が正しく行われ、この三次元直接境界要素法によって不整形地盤における地震動を精度良く計算できることが確かめられた。

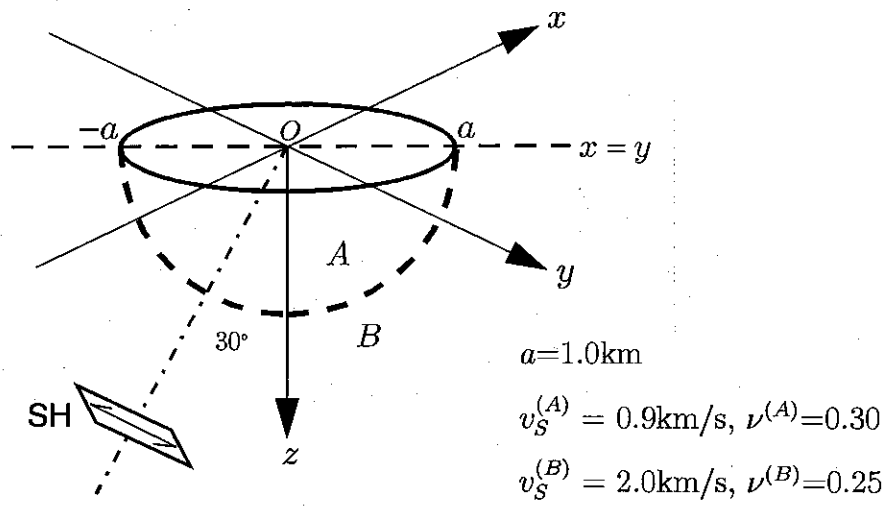


図-3.9: 平面SH波が入射する半球型二層地盤

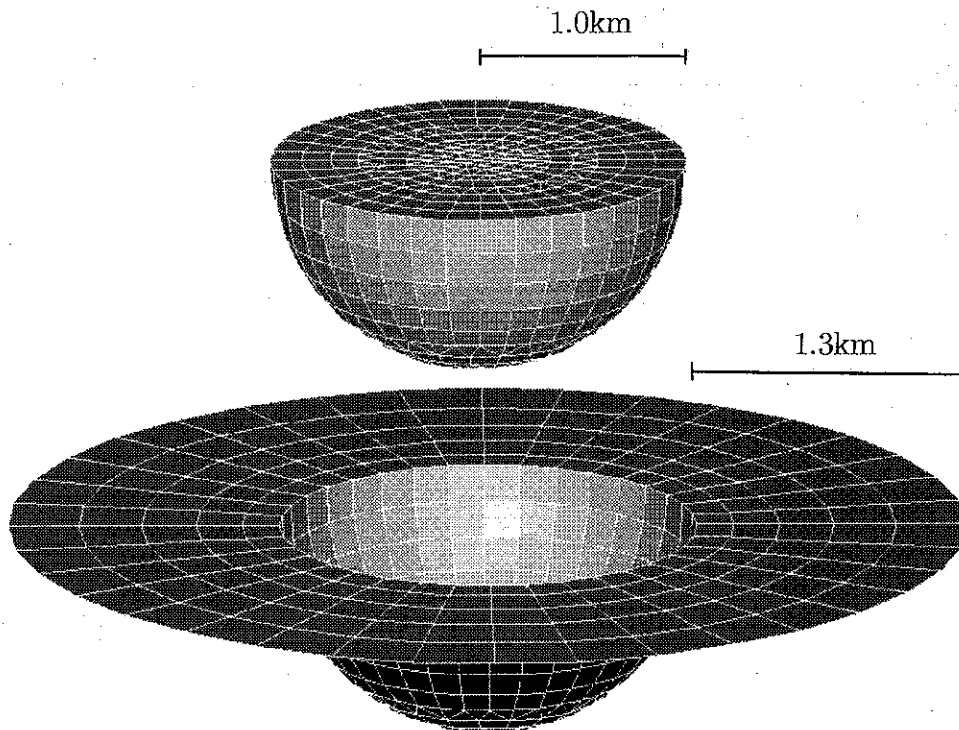


図-3.10: 計算に用いた境界要素モデル

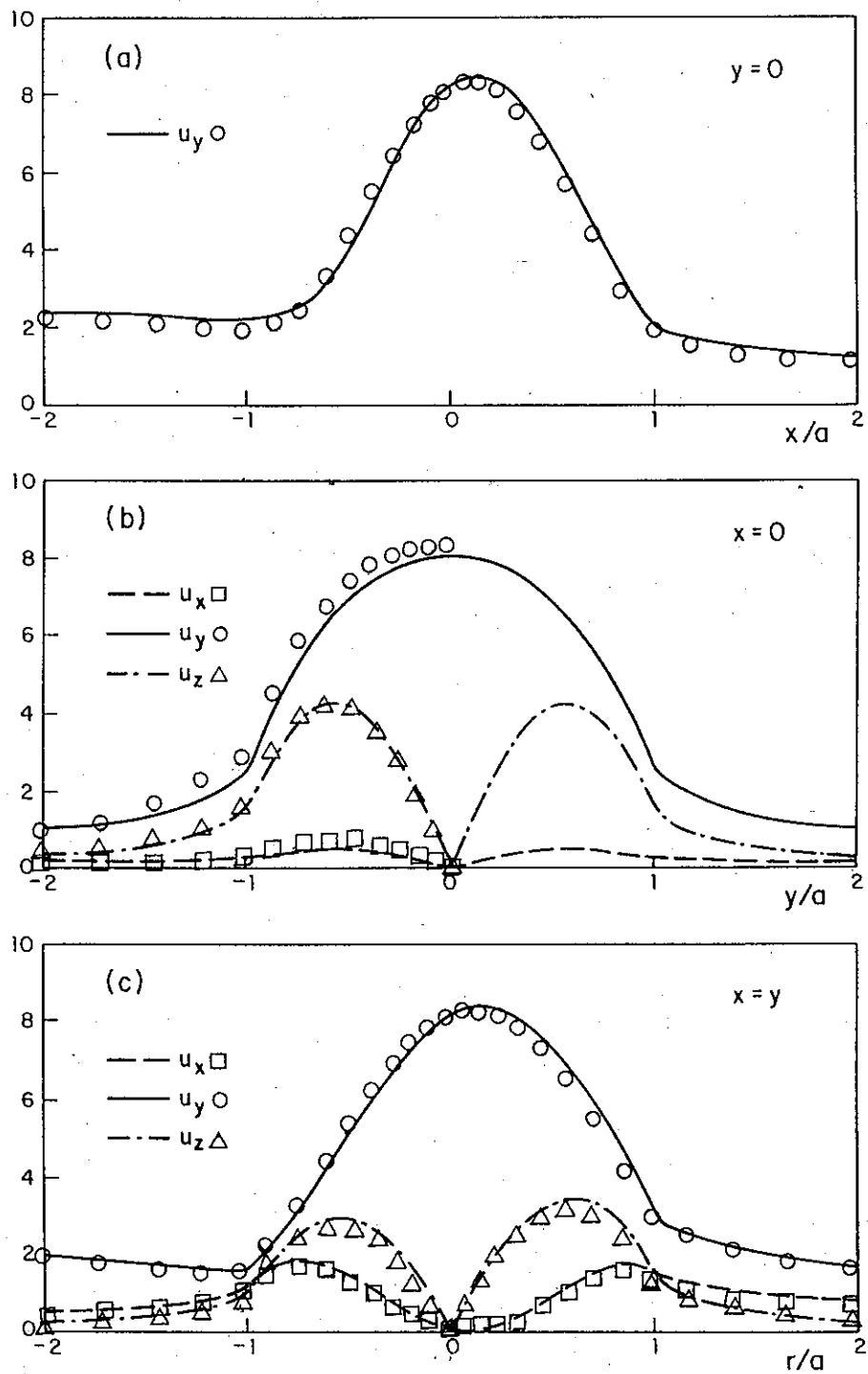


図-3.11: 計算結果の比較

3.6 まとめ

本章ではまず，三次元有限要素法および直接法に基づく三次元境界要素法の定式化を行った．次に既往の研究を検討し，この2つの手法を結合するためには，三次元空間における特異積分と free-term の直接的な評価が望ましいこと，近年提案された方法によってそれが可能であることを論じた．ここで定式化した三次元FE-BE法は，この直接評価に基づいて，連続条件，つり合い条件を完全に満たして有限要素法と境界要素法を結合していることが特徴である．

また，二層地盤をモデル化するための三次元境界要素法のマトリクス方程式を示し，これを用いて平面SH波が入射する半球形盆地の震動解析を行った．その結果は既往の研究とほぼ一致し，本章で示した三次元直接境界要素法が妥当な計算結果を与えるものであることを確認した．

第4章

震源断層モデルの導入

4.1 はじめに

前章では有限要素法と結合するための三次元直接境界要素法について検討し、FE-BE法と境界要素法のマトリクス方程式を導いた。また半球形二層地盤をモデル化し、実際に三次元境界要素法による震動解析を行った。その際、平面SH波を入射波として用いたが、震源近傍における地震動を予測したり、その強さの分布や伝播特性を把握したりするためには、地震の発生源、すなわち震源断層から放射される波動を考え、対象領域に入射する必要がある。

そこで本章では、前章で示した手法に震源断層モデルを導入することにより、震源近傍に位置する三次元不整形地盤を対象とした地震動シミュレーションを可能にする。震源断層モデルを導入した境界要素法は久田 他[20]によって定式化されているが、比較的震源が遠い場合が想定されているため、ここでは震源が近い場合に対する定式化を行う。そして、三次元FE-BE法に震源断層モデルを導入した手法を用いて数値計算を行い、既往の研究結果と比較する。これは、定式化の過程で断層面におけるくい違いや破壊伝播が適切に表現できているかどうかの検討を行うと同時に、前章で示した有限要素法と境界要素法の結合が適切に行われていることの確認を目的としている。

4.2 三次元境界要素法への震源断層モデルの導入

図-4.1に示すように、不整形地盤の基盤領域内に震源断層を想定し、断層面境界 Γ_F^+ と Γ_F^- がくい違いを生じるとする。また、 Γ_F^+ と Γ_F^- 上の変位、表面力をそれぞれ u_i^+ , τ_i^+ および u_i^- , τ_i^- とおく。このとき、断層面境界における変位のくい違い d_i と表面力のくい違い δ_i は、

$$d_i(\mathbf{x}) = u_i^+(\mathbf{x}) - u_i^-(\mathbf{x}) \quad , \quad \delta_i(\mathbf{x}) = \tau_i^+(\mathbf{x}) - \tau_i^-(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

で表される。

この断層面境界間における変位と応力のくい違いに関して、kinematic model (運動学的モデル) と dynamic model (動学的モデル) という2種類のモデル化がなされている。Haskellモデル[93]に代表される kinematic model は、断層面境界においても応力は連続であるものとし、変位のくい違いの時間変化や破壊伝播形式を仮定して先験的に与えるモデルである。一方、dynamic model は媒質の強度や初期応力状態を与えておくことにより、自動的に破壊を伝播させるモデルであり、応力のくい違いをも考慮するものである。恐らくは dynamic model の方が実際の現象に即したモデルであると考えられるが、現実の断層面およびその周辺の初期応力状態がどのようなものであるのかはほとんど分かっていない[29]ため、dynamic model を用いて地震動シミュレーションを行うことは現時点では困難である。そのため、本章でも、比較的良好に用いられている kinematic model に基づいて震源断層をモデル化する。

4.2.1 震源断層モデルを含む境界積分方程式

基盤領域の断層面以外の境界を Γ とし、前述の記号を用いれば、断層面境界を含む境界積分方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)u_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) - \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\tau_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) \\ = \int_{\Gamma_F^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)d_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) - \int_{\Gamma_F^-} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\delta_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで、断層面境界とそれ以外の境界が接することはないと仮定しており、そのため右辺第1項の積分は特異積分ではない。

Kinematic model に基づくならば、応力、すなわち表面力は断層面上で連続であり、変位のくい違いは既知量として扱われるので、式(4.2)を次のように表すことができる。

$$c_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)u_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) - \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\tau_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) = \bar{\psi}_i(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

$$\bar{\psi}_i(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_F^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\bar{d}_j(\mathbf{x}_0)d\Gamma(\mathbf{x}_0) \quad (4.4)$$

ここで、 $\bar{\psi}_i$ は前章と同様、入射波の影響を表す項である。

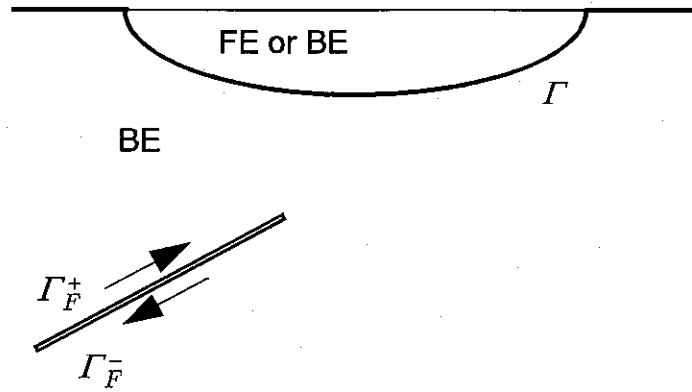


図-4.1: 不整形地盤と震源断層の概念図

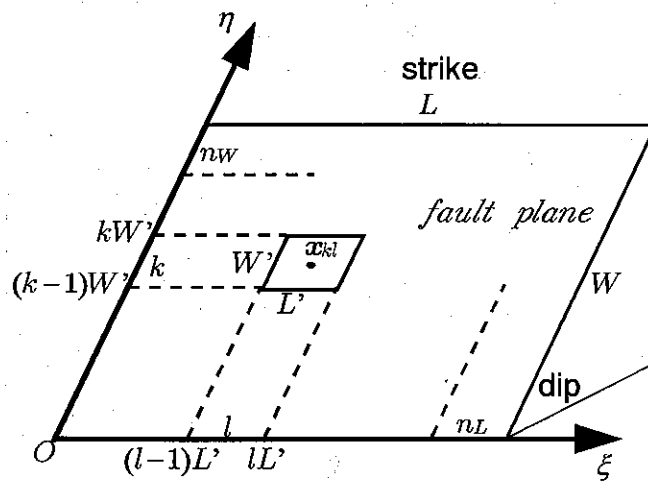


図-4.2: 断層の小断層への分割

4.2.2 断層面の分割による積分の評価

第2章に示した T_{ij} の形式から、式(4.4)の断層面境界に関する積分を解析的に行うことは非常に困難であることが分かる。久田 他[20]は断層の大きさに比較して震源距離が十分に大きい場合、断層面内では T_{ij} の値が一定であるとみなせることから、 T_{ij} を積分の外に出して式(4.4)を計算している。しかし、本論文では震源近傍の地震動を対象としているので、この「断層面内で T_{ij} が一定」という仮定は成り立たない。そこで、断層を多くの小断層に分割することを考える。震源近傍の地点に対しても、その震源距離に対して十分に小さい断層を考えれば、その小断層面内では T_{ij} が一定であるとみなすことができよう。また、その十分小さい断層面内においては、くい違いが一定であると仮定することも適当な近似と考えられる。

ここでは、図-4.2に示す長さ L 、幅 W の Haskell モデルの矩形震源断層を考える。断層の分割数を長さ方向に n_L 、幅方向に n_W とし、 $n_L \times n_W$ 枚の大きさの等しい小断層に関して、それぞれの小断層面内では T_{ij} と \bar{d}_i が一定であるとする。図-4.2のように断層面に関する局所座標 (ξ, η) をおくと、長さ方向に速度 c_r で破壊が伝播する場合、 ψ_i は次式で表される。

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_i(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^{n_L} \sum_{k=1}^{n_W} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{kl}) \bar{d}_j(\mathbf{x}_{kl}) \cdot \int_{(l-1)L'}^{lL'} \int_{(k-1)W'}^{kW'} d\eta \exp\left(-i\omega \frac{\xi}{c_r}\right) d\xi \\
&= i \frac{c_r}{\omega} W' \sum_{l=1}^{n_L} \sum_{k=1}^{n_W} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{kl}) \bar{d}_j(\mathbf{x}_{kl}) \cdot \left\{ \exp\left(-i\omega \frac{lL'}{c_r}\right) - \exp\left(-i\omega \frac{(l-1)L'}{c_r}\right) \right\} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

ここで、 L' 、 W' はそれぞれ小断層の長さおよび幅であり、 \mathbf{x}_{kl} は小断層面上の代表点である。

また、破壊が幅方向に伝播する場合は次式で表される。

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_i(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^{n_W} \sum_{l=1}^{n_L} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{kl}) \bar{d}_j(\mathbf{x}_{kl}) \cdot \int_{(k-1)W'}^{kW'} \int_{(l-1)L'}^{lL'} d\xi \exp\left(-i\omega \frac{\eta}{c_r}\right) d\eta \\
&= i \frac{c_r}{\omega} L' \sum_{k=1}^{n_W} \sum_{l=1}^{n_L} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{kl}) \bar{d}_j(\mathbf{x}_{kl}) \cdot \left\{ \exp\left(-i\omega \frac{kW'}{c_r}\right) - \exp\left(-i\omega \frac{(k-1)W'}{c_r}\right) \right\} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

このように、 T_{ij} を積分の外に出すことにより、断層面に関する積分は非常に容易になることが分かる。なお、点震源を扱う場合にはこの積分を行う必要はなく、その点震源が \mathbf{x}_0 に位置する場合、 $\bar{\psi}_i$ は次式で表される。

$$\bar{\psi}_i(\mathbf{x}) = T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \bar{d}_j(\mathbf{x}_0) \quad (4.7)$$

非常に複雑な震源過程をもつ断層は、点震源の集合としてモデル化することが有効となる場合もある。

片岡・大町[94]は式(3.53)の表現に基づき、離散化波数法[48]を用いて震源断層に対する半無限弾性体の応答 $u_i^{(F)}$ 、 $\tau_i^{(F)}$ を計算することで、震源断層モデルを導入した地震動シミュレーションを行っている。この手法では不整形地盤のモデル化に無関係に $\bar{\psi}_i$ を求めることになるため、モデル化した領域外に断層がある場合にも適用できる利点がある。しかし、二次元解析を行って検討してみた結果、モデル化した領域内に断層があるならば、この2つの方法はほぼ同じ結果を与えるものの、離散化波数法を用いる方がやや計算量が多かった。そこで本論文では、本節で示したように、断層面境界に関する積分を含めた境界積分方程式を用いることで、震源断層モデルを導入した地震動シミュレーションを行う。

式(3.53)の代わりに式(4.5)または式(4.6)を用いれば、第3章での議論はそのまま成立するので、マトリクス方程式(3.79)、(3.83)により、震源断層モデルを導入した三次元FE-BE法あるいは三次元境界要素法による地震動シミュレーションを行うことができる。

4.3 震源断層モデルを導入した三次元FE-BE法による数値計算例

4.3.1 計算モデル

ここでは、簡単な数値計算を行い、以上に述べた震源断層モデルの導入や、前章で行った有限要素法と境界要素法の結合が適切に行われていることを示す。図-4.3はKawasaki[95]がCagniard法で均質半無限弾性体の変位応答を計算した地点と、用いた地盤・断層モデルを示している。これは、1966年のParkfield地震の際に得られた強震記録の再現を試みたものであり、観測点は断層から80mと非常に近い。断層は右横ずれで、実際には長さが30km、幅が10kmと推定されているが、図-4.3に示した2km×3kmの部分以外の寄与は小さいことがAki[41]によって示されている。ここではKawasaki[95]の結果と比較するために、図-4.4に示す領域をモデル化し、図中の点Aでの変位応答を計算した。モデルの点A周辺の拡大図を図-4.5に、FE部とBE部を分離して示す。このFE部とBE部の物性値を等しくすることで、均質半無限弾性体のモデルとした。

なお、FE-BE法では0~16Hzの周波数を0.5Hz間隔で計算した。また、震源時間関数は両者ともライズタイムが0.1秒のramp functionである。

4.3.2 計算結果の比較

両者の計算結果を図-4.3に示した3成分について比較すると、図-4.6のようになる。縦軸は断層のすべり量で除して無次元化した変位である。3成分とも両者はほぼ一致しており、本手法でも高い精度で計算できていることが分かる。ただしKawasaki[95]の計算では、parallel componentの永久変位が0.5よりも若干大きくなっているが、直感的にも分かるように、この値が0.5を超えることはない。これは計算機が未発達であったために、十分な計算ができなかったことによる誤差と思われる[96]。なお、Kawasaki[95]の計算では断層が地表に達しているが、本手法による計算では特異積分を回避するために、断層上端の深さを1mとした。地表に達してはいないが、非常に浅くしているため、深さ1mよりも浅い部分のくい違いを無視した影響は波形にはほとんど見られない。

図-4.6に示した結果は $n_L = 200$ 、 $n_W = 300$ の場合であり、断層を非常に多くの小断層に分割している。この分割数を少なくし、 $n_L = 20$ 、 $n_W = 30$ とした場合と比較すると図-4.7のようになる。これによると、全体的には両者は一致しているが、分割数が少ない場合には波形が滑らかでなくなり、計算精度が低くなっている。これは小断層が大きくなるにつれて、さきに述べた「小断層内では基本解の値が一定」という仮定が成り立たなくなるためである。分割数を大きくすればそれだけ計算量が大きくなるため、小断層の大きさは断層とモデル化した領域との距離、計算する周波数や計算機的能力等を考慮して適当に設定する必要がある。

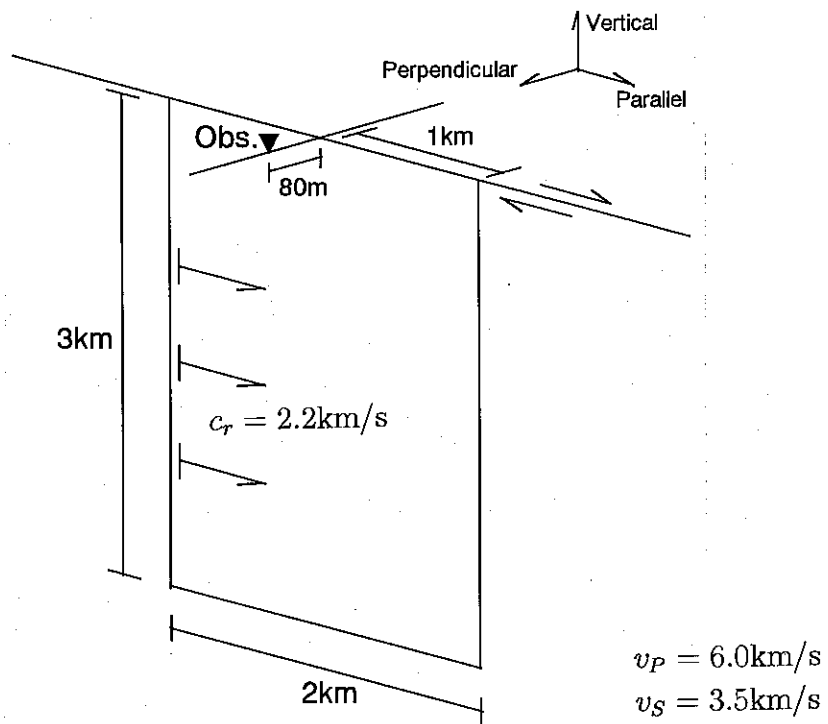


図-4.3: Kawasaki[95]が用いた断層モデルと計算地点

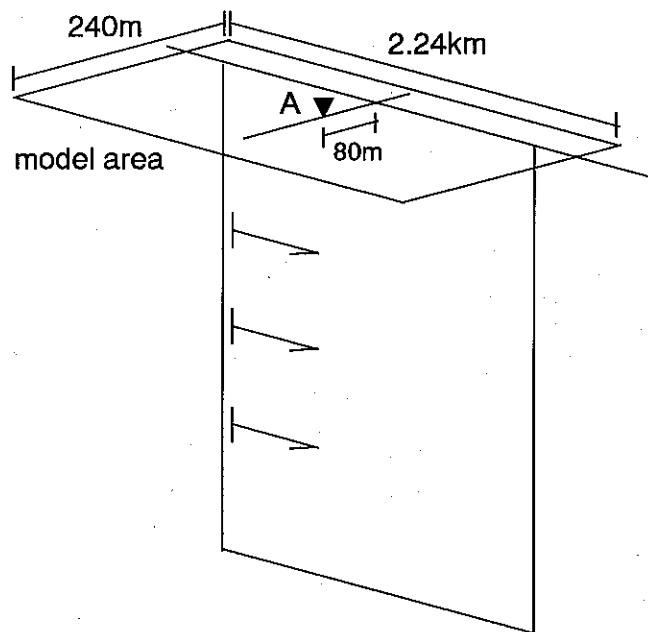


図-4.4: 本手法による計算領域と計算地点

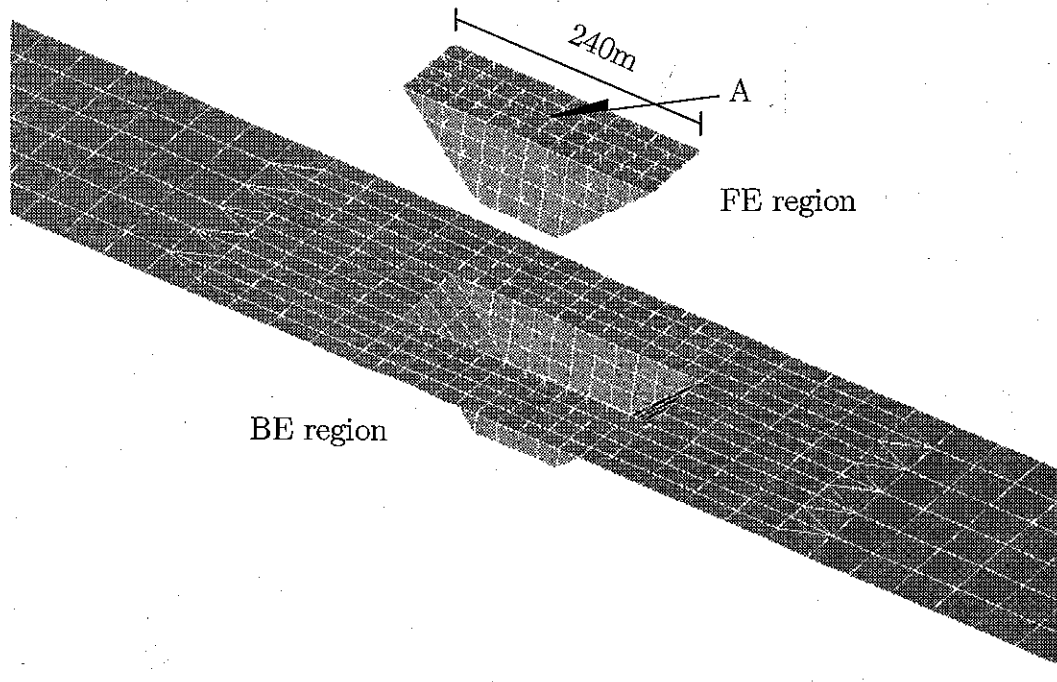


図-4.5: 計算地点付近の拡大図

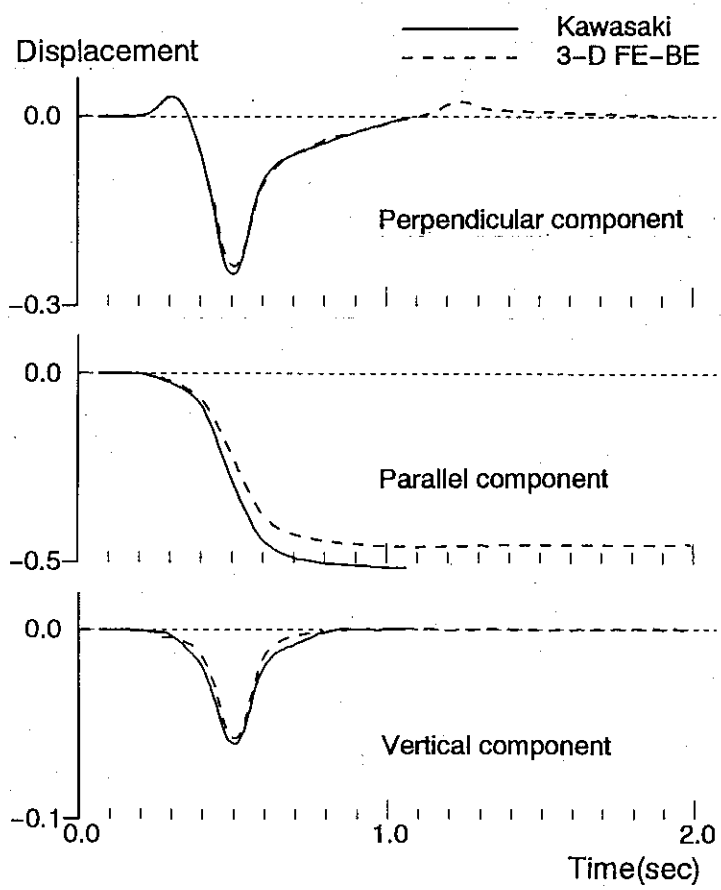


図-4.6: Kawasaki[95] の計算結果との比較

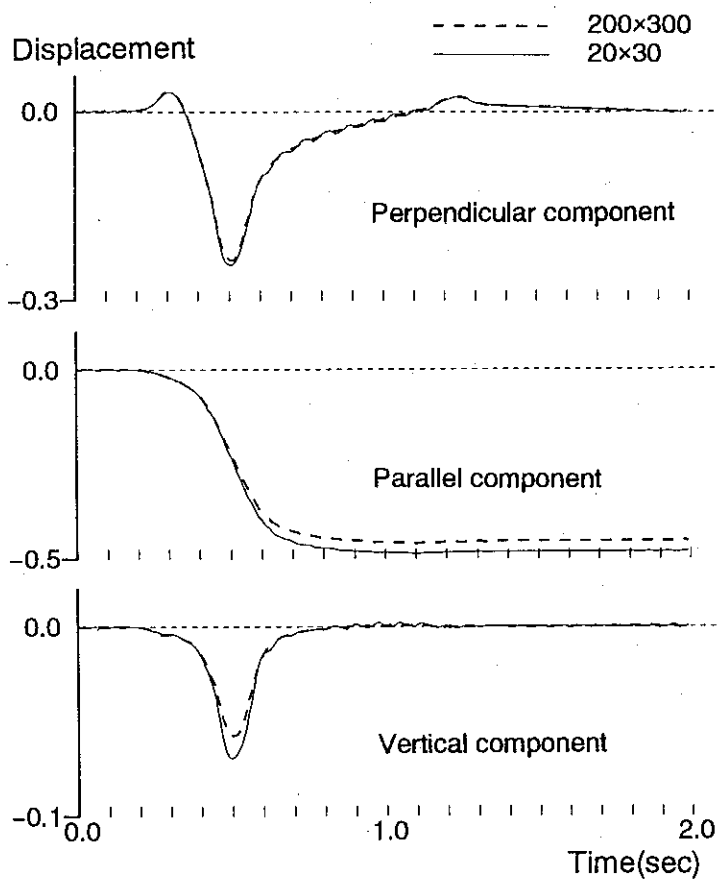


図-4.7: 断層の分割数による変位応答の変化

4.4 まとめ

本章では、震源近傍の不整形地盤を対象とした地震動シミュレーションを行うために、前章で定式化した手法に震源断層モデルを導入した。その際、断層面境界に関する基本解を核とする積分は、断層を小断層に分割することで評価することにした。そして、震源断層モデルを導入した三次元FE-BE法による数値計算を行った結果、断層のごく近傍に位置する点においても精度の良い計算波形が得られた。このことから、くい違い移動震源が適切に導入されていること、断層を十分多くの小断層に細分すれば断層面境界に関する積分を評価できること、有限要素法と境界要素法の結合が適切になされていること、を確認することができた。

第5章

1994年Northridge地震のシミュレーション

5.1 はじめに

第3章では三次元的な不整形性を有する地盤を対象として、三次元直接境界要素法、および三次元FE-BE法の定式化を行った。また、第4章では、震源が対象地域の近傍に位置する場合を想定し、これらの手法に震源断層モデルを導入した。その際、既往の研究結果との比較を行い、実際に精度のよい計算を行うことができることを確認してきた。

しかし、定式化の過程をみても分かるように、これらの手法を用いるとき、地盤や断層は極度に理想化される。すなわち、実際には非線形の挙動を示し、ときには粒状体や流体として扱われるような地盤がすべて等方均質線形弾性体とみなされる。また、プレート運動や火山活動によって岩石が破壊し、その破壊が伝播していく現象である断層運動は、弾性体内を伝わる変位のくい違いに近似される。

このように理想化された地盤モデル、断層モデルを用いて、どの程度まで実際に起こった現象を説明することができるのかを調べ、手法の適用性や今後の課題を見出すことが本章と次章の目的である。本章では1994年Northridge地震のシミュレーションを行い、観測記録や最大速度分布の再現を試みる。後述するように、対象とするSan Fernando谷の表層地盤は閉じた構造になっており、物性が不均質であるため、第1章1.3での議論からここでは三次元FE-BE法を用いることにする。

5.2 断層モデルと地盤モデルの設定

地震動の短周期成分は断層運動の不均一性に起因して発生し[97, 98], 地表で観測されるときには浅い軟弱な地盤の影響を大きく受けている. 微視的な断層モデルの推定は, 地震学の分野で近年活発になってきてはいるが, それでも1秒以上の周期を対象としているに過ぎず, 推定精度にも疑問がある. また, 有限要素法や境界要素法では, 波長の短い波動を計算するためには非常に細かい要素分割が必要になるため, 特に三次元モデルを用いる場合, 計算機の容量による制限を受けやすい. そのため, 浅い地盤構造まで十分細かくモデル化し, 断層の不均一性まで取り入れて地震動シミュレーションを行うことは, 現時点では困難である. したがって, ここではやや長周期の地震動を対象として, 既往の研究に基づいて断層と地盤をモデル化する.

5.2.1 1994年Northridge地震の断層モデル

1994年Northridge地震($M_w=6.7$)は現地時間で1月17日の午前4時30分にSan Fernando谷直下で発生し, その際, CSMIPによって配置された193地点を中心に, 多数の強震記録が得られた[99]. 震央距離5kmのTarzanaや同19kmのPacoimaダムで2gに近い最大加速度が記録されたほか, 同15kmのSylmarでは非常に大きな最大速度(NS:129cm/s), 最大変位(NS:33cm)が観測された. 前述のように, 本章ではやや長周期地震動を対象とするため, 長周期成分が卓越していると考えられるSylmarでの観測記録と計算結果とを比較する.

Wald and Heaton[100]は余震分布から断層位置を定め, 強震記録, 遠地実体波, 測地データの線形インバージョン[101]から, 断層パラメータおよび断層面内のすべり量分布をそれぞれ表-5.1, 図-5.1のように与えている. なお, 逆解析の際には, 同心円状の破壊伝播を仮定し, 地盤を均質半無限弾性体としている.

ここでは表-5.1に基づいて断層のモデル化を行った. まず, 断層は震源よりも深い部分と浅い部分に分けられるが, 震源よりも深い幅2kmの部分の寄与は, 簡単に計算した結果から非常に小さいことが分かったので, 震源よりも浅い部分にある幅18kmの部分のみを考慮し, unilateralの破壊伝播を仮定した.

表-5.1および図-5.1によれば, 断層面内ではライズタイム, すべり量とも変動しているが, ここではすべり量を1.2m, ライズタイムを0.9秒として, とともに断層面内では一定であると仮定した. これは, 長周期地震動を対象とすることからも, 次に述べる地盤のモデル化の精度からも妥当な仮定であると考えられる. なお, 断層の分割数は $n_L = 35$, $n_W = 45$ とした. 図-5.2に推定されている震央と断層, およびSylmar観測点の位置を示す.

表-5.1: 断層パラメータ [100]

date	January 17, 1994
origin time	12:30 55.2 GMT
hypocentral depth	18.5km
seismic moment	1.23×10^{26} dyne · cm
strike	122°
dip	42°
rake	109°
effective fault length	14km
effective fault width	20km
fault depth range	6.0-20.0km
average slip	1.2m
rupture velocity	2.8km/sec
rise time	0.6-1.2sec

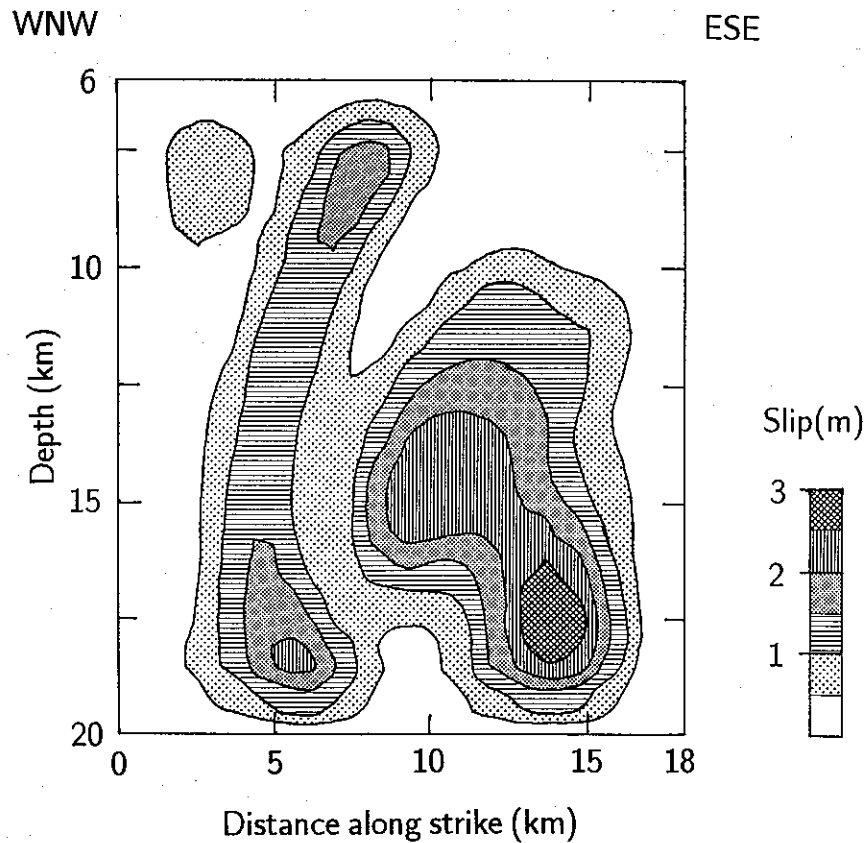


図-5.1: 推定されている断層面内のすべり量分布 [100]

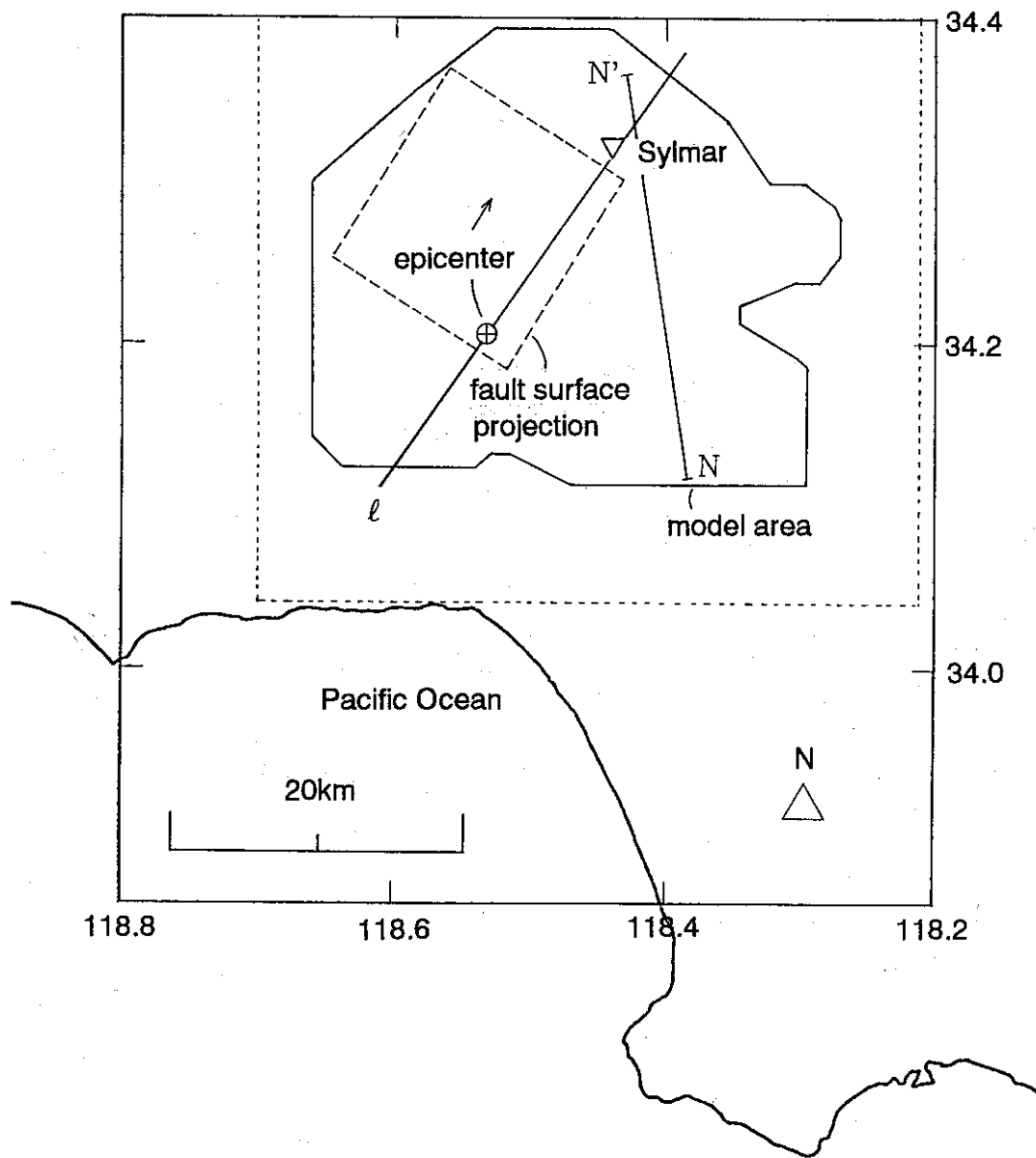


図-5.2: Northridge地震の断層等の位置図

5.2.2 San Fernando 谷の地盤構造とそのモデル化

San Fernando 谷の三次元地盤構造は Magistrale *et al.* [102] によって 0.5km 程度の空間分解能で推定されている。推定の手順は、まず P 波速度を堆積年代と深さとの経験式から推定し、次に密度を P 波速度との関係式から求め、Poisson 比を密度との関係式から求め、P 波速度と Poisson 比から S 波速度を求めるというものである。例として、図-5.2 中の直線 N-N' における P 波速度構造は図-5.3 のように推定されている。ある点の緯度、経度および深さを入力すれば、その点における地盤の P 波速度、S 波速度、密度が出力されるプログラムが作成されており、インターネット経由で 0.5km 間隔の三次元地盤データの提供をうけた。

この地盤データをもとに、図-5.2 の点線が示す南北 40km、東西 45km の範囲で S 波速度 3.0km/s の境界面を描いたものが図-5.4 である。ここではこの境界面を基盤と表層の境界とした。すなわち、S 波速度が 3.0km/s 以上の領域を物性が一様な基盤とみなし、境界面を境界要素でモデル化した。Magistrale *et al.* [102] が推定した物性値はこの領域内でも若干変動しているため、平均的にこの領域の S 波速度を 3.5km/s、P 波速度を 6.1km/s、質量密度を 2.7t/m^3 と定めた。

その内側の領域は有限要素でモデル化し、それぞれの要素に対して物性値を与えた。また、Vidale and Helmberger [30] は San Fernando 谷と Los Angeles 盆地における地震動を差分法を用いてシミュレーションしているが、この研究では Q 値として 25 が用いられているため、これを参考に FE 部には 2% 程度の Rayleigh 減衰を与えた [94]。

前述したように、計算機の能力による制限が大きく、十分に細かくモデル化することはできないため、ここでは節点間隔を 1km 程度にとった。設定した計算モデルを図-5.5 に示す。モデル化した領域は図-5.2 中の実線で囲まれた、およそ南北に 32km、東西に 35km の範囲である。

Sylmar は震央から N35E の方向に位置しているが、断層は走行が N122E の逆断層と推定されているため、この方向はおおよそ断層の運動方向に一致している。そこで、三次元シミュレーションとの比較のために、図-5.2 中の実線 l における断面を二次元モデル化し、Sylmar における地震動を二次元面内波動場に近似してシミュレーションを行ってみることにした。その際、図-5.6(a), (b) のように、三次元モデルと同程度の粗いモデル A と、さらに細かく分割したモデル B の二つのモデルを用いて計算を行った。モデル A の節点間隔は 1km 程度、モデル B の節点間隔は 300m 程度である。なお、この二次元シミュレーションでは、断層も面外方向に無限に長い二次元断層とした。

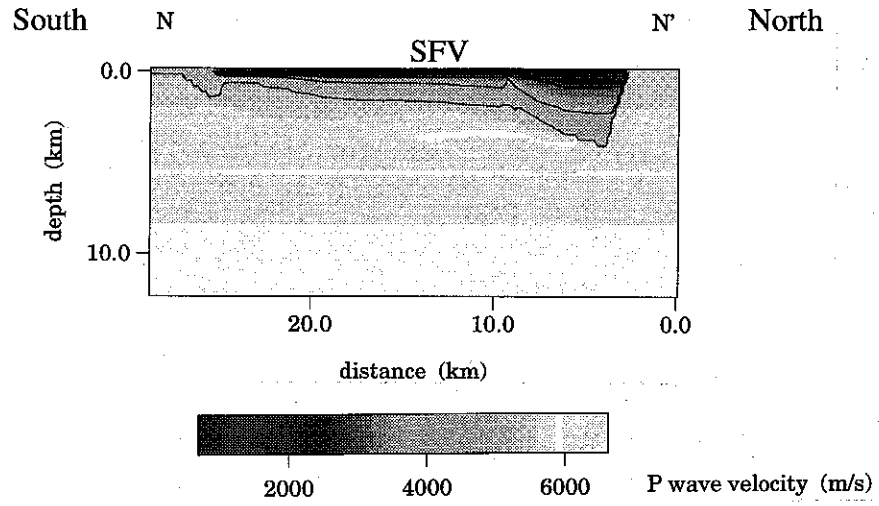


図-5.3: 図-5.2中のN-N'断面におけるP波速度構造[102]

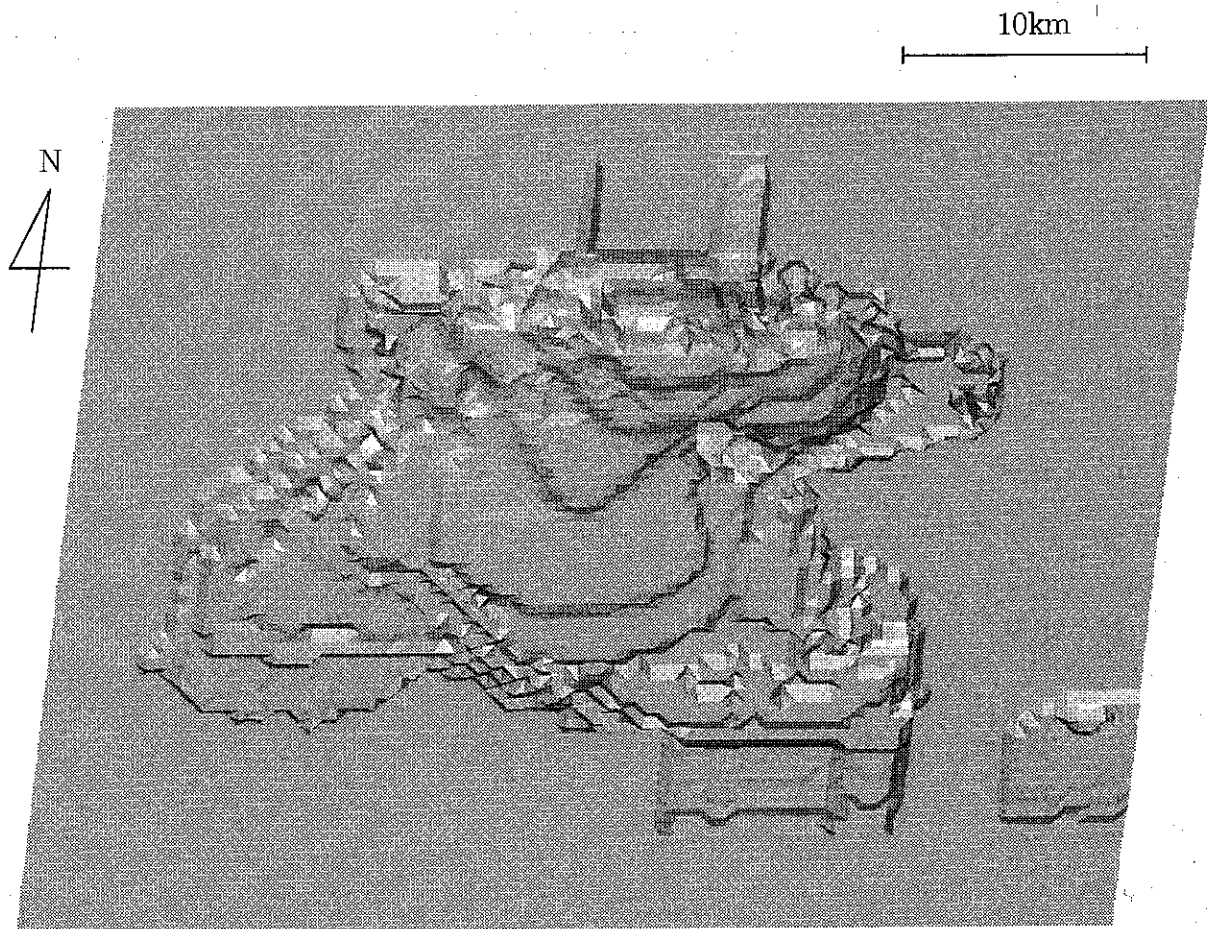


図-5.4: S波速度3.0km/sの等値面図

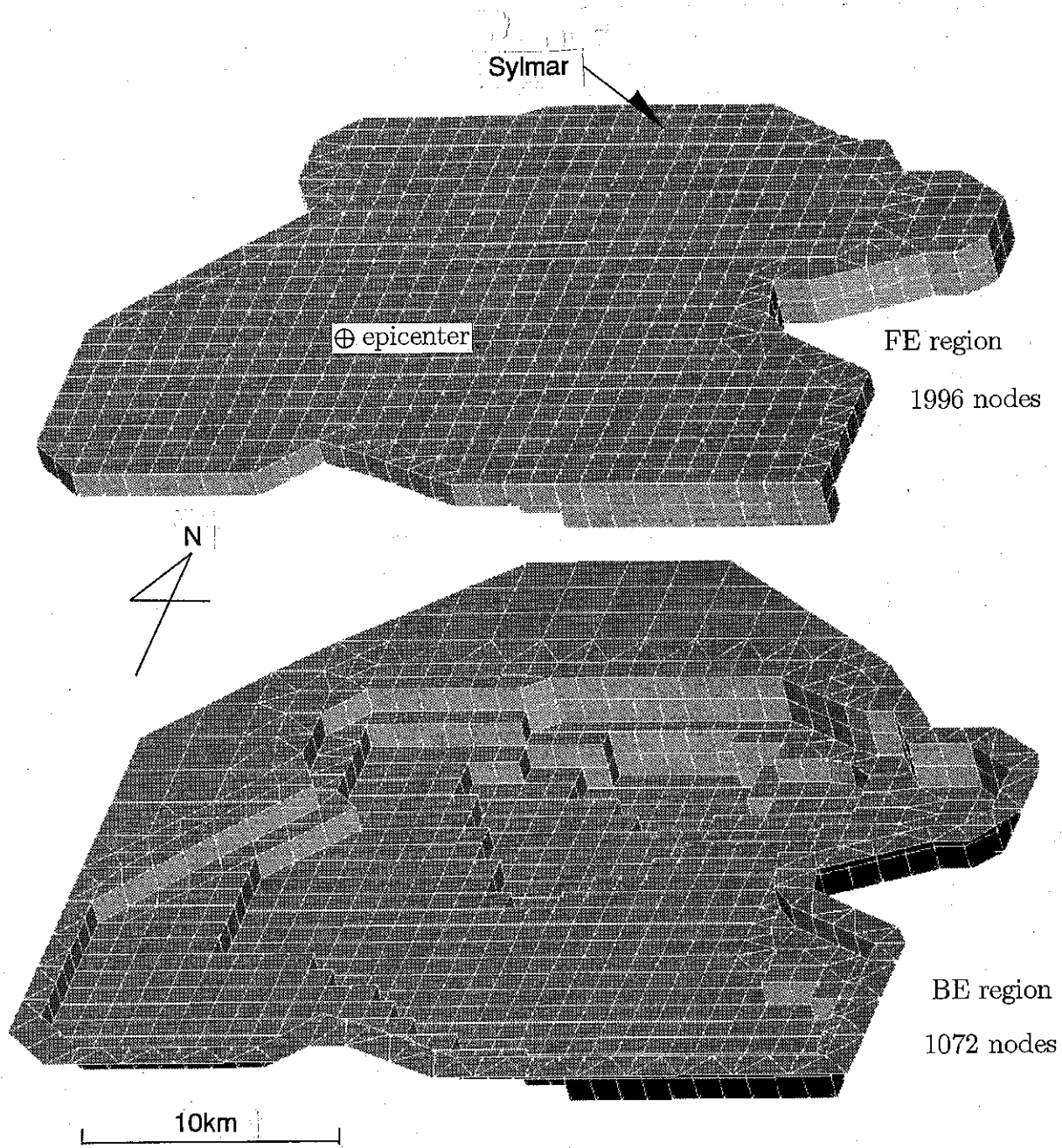
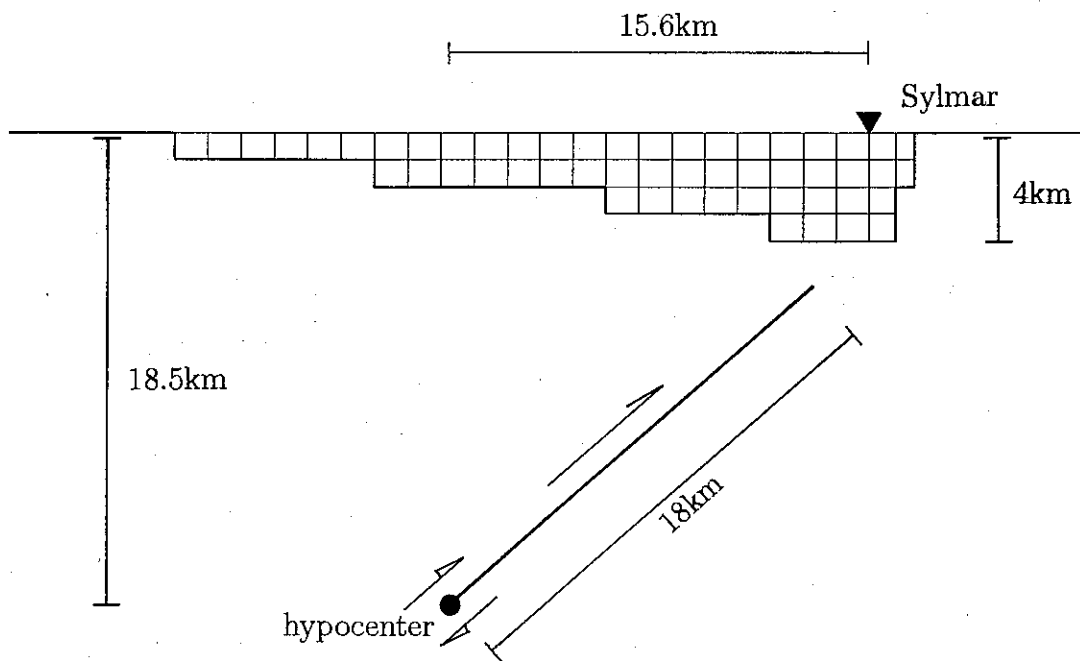
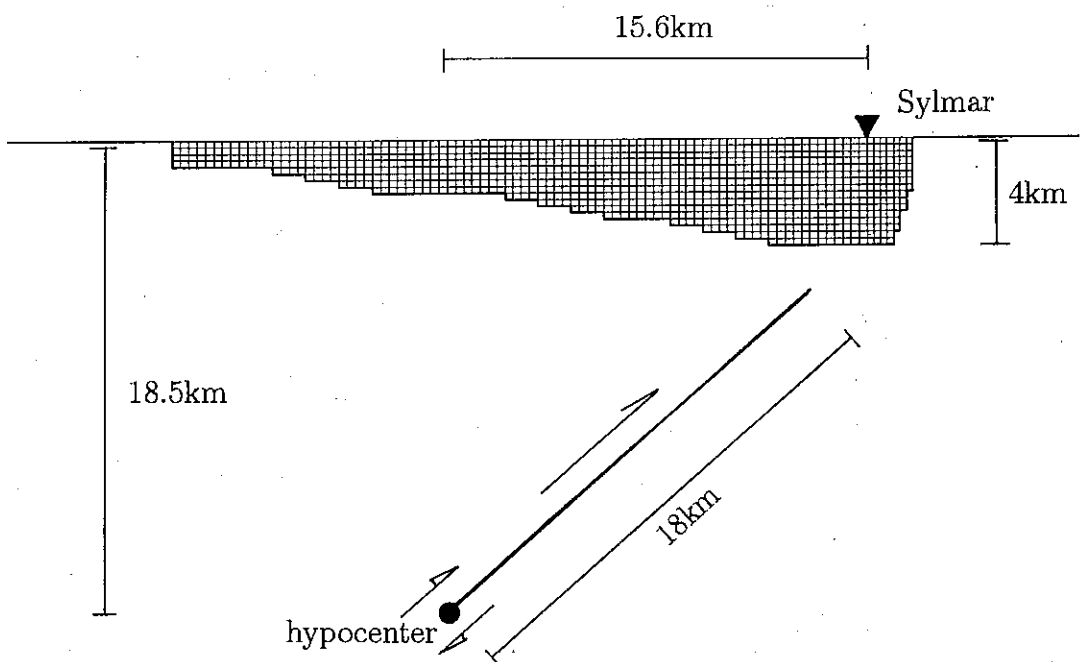


図-5.5: 三次元シミュレーションに用いたモデル



(a) モデルA (節点間隔1km程度)



(b) モデルB (節点間隔300m程度)

図-5.6: 二次元シミュレーションに用いたモデル

5.3 計算結果と考察

5.3.1 観測記録との比較

前述のモデルを用い、三次元シミュレーション、二次元シミュレーションとも、0~1Hzの周波数を1/64Hz間隔で計算した。

観測波形には図-5.7に示すバンドパスフィルタが施されている[103]ため、計算波形にも同じフィルタをかけ、また観測波形にもさらに1Hzのローパスフィルタをかけて両者を比較したものが図-5.8, 5.9, 5.10である。計算波形は破壊が開始した時刻を時間ゼロとしているが、表-5.1に示したように、Wald and Heaton[100]が定めたorigin timeはGMTで12時30分55.2秒、観測記録のtrigger timeはUTCで12時31分00.2秒なので、観測記録は5秒遅らせて示してある。

図-5.8はN35E成分、すなわち断層の運動方向の変位時刻歴を比較している。これによると、最大変位は三次元の方が二次元よりも観測記録との一致がよいことが分かる。また、二次元のモデルAとBでは最大変位はほぼ同じであるが、モデルBの方が短周期の波動を再現できており、観測記録とも比較的一致している。したがって、さらに細かく要素分割した三次元モデルで計算することができれば、より観測記録に近い計算波形が得られると考えられる。

図-5.9はN125E成分を示しており、二次元シミュレーションとの比較はできないが、N35E成分よりも振幅がかなり小さく計算されている。これは観測記録にみられる傾向と一致し、Sylmarでの地震動が断層運動のdirectivityに強く支配されていることが分かる。

図-5.10では上下動を比較しているが、いずれの計算波形も観測記録との対応はあまり見られない。また、最大変位も観測記録よりかなり大きく計算されている。図-5.1から分かるように、断層の上端付近では比較的小さいすべり量が推定されている。それに対してここではすべり量を一定としたため、断層上端付近のすべり量は過大評価されている。また、この付近ではライズタイムが平均の0.9秒よりも長い可能性があり[104]、ライズタイムを一定としたことも短周期成分の過大評価につながっているとみられる。

また、水平動とも共通しているが、三次元モデルおよび二次元モデルAの計算波形には、観測波形にはあまりない振幅の大きな後続位相がみられる。これは、節点間隔が粗いために、FE部とBE部の境界において波動の透過が十分になされないことが原因とも考えられる。また、前述のように断層の上端付近のすべり量を過大評価しているために、表面波が実際よりも大きく励起された可能性がある。

次に水平動のN35E成分について、スペクトルを比較する。図-5.11は二次元モデルを用いた場合および観測記録のスペクトルを示している。粗いモデルAを用いた場合、周期2.5秒以下の短周期成分はほとんど計算されないのに対し、細かいモデルBを用いた場合には、1.8秒程度の周期までは計算されている。したがって、明らかにモデルAの節点間隔は0.9秒のライズタイムに対しては大きすぎ、三次元シミュレーションの結果も周期2~3秒以下の短周期成分は信頼できないと考

えられる。

図-5.12は観測記録と三次元シミュレーションの結果を比較しているが、二次元のモデルAの場合と同様、周期2.5秒以下は計算できていない。ただし、観測記録にみられる周期1.5秒付近のピークを再現するためには、節点間隔を小さくするだけでなく、震源時間関数を断層面上の位置によって変化させる必要もある。

以上のように、三次元モデルおよび二次元モデルAを用いたシミュレーションの結果を比較すると、三次元シミュレーションを行った方が観測記録との一致がよい。ただし、Sylmarでのやや長周期地震動には地盤構造の影響はあまりなく、断層運動に支配されているとみられる[94]ので、2つの結果の違いは主に二次元シミュレーションにおいて断層を面外方向に無限に長くとしたことにあると考えられる。

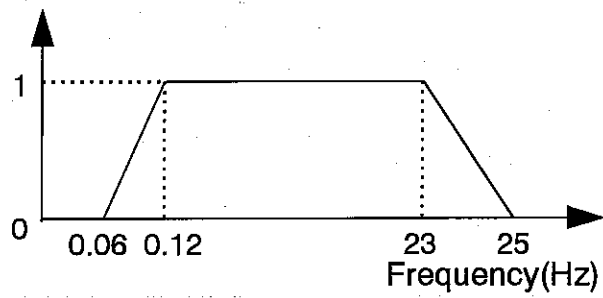


図-5.7: 観測記録に施されているバンドパスフィルタ

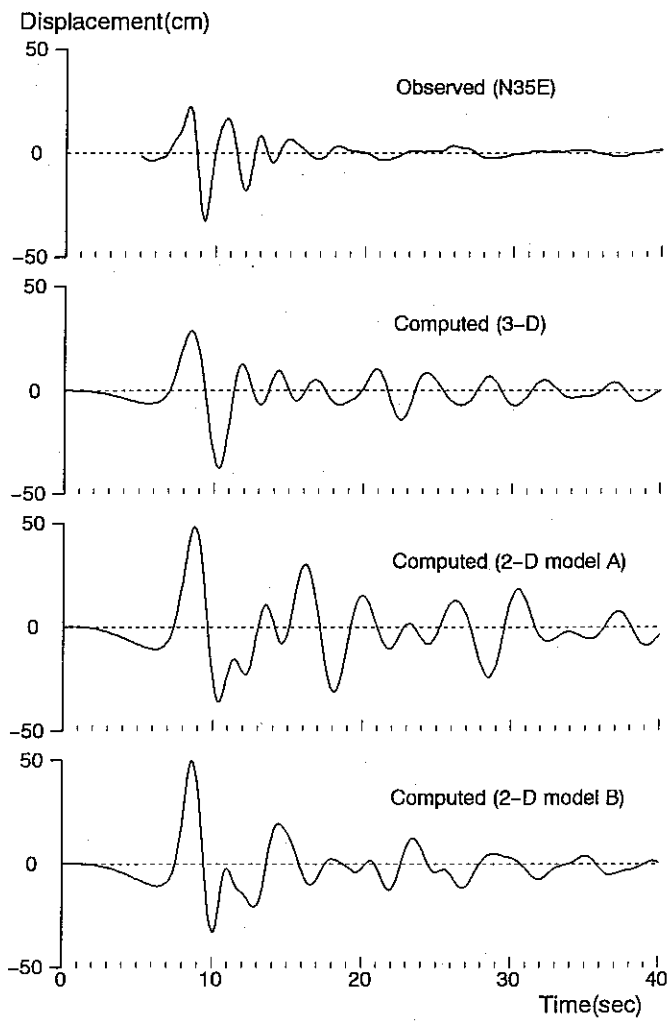


図-5.8: 時刻歴波形の比較 (N35E成分)

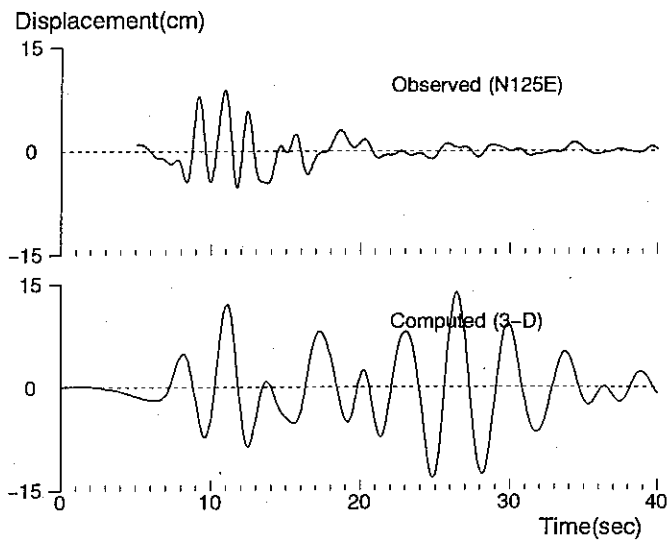


図-5.9: 時刻歴波形の比較 (N125E成分)

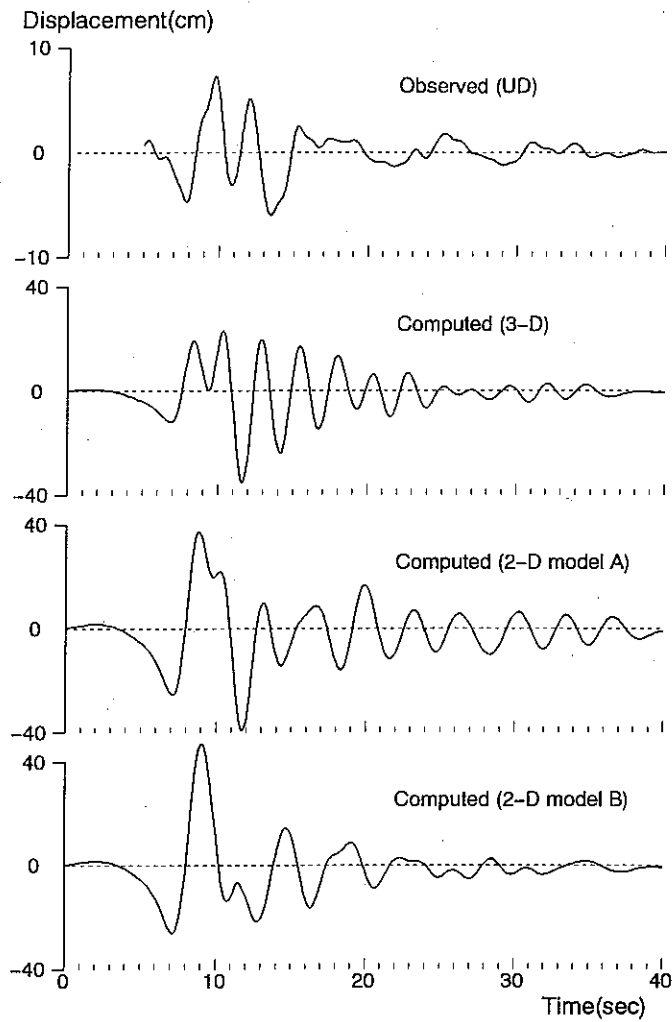


図-5.10: 時刻歴波形の比較 (UD成分)

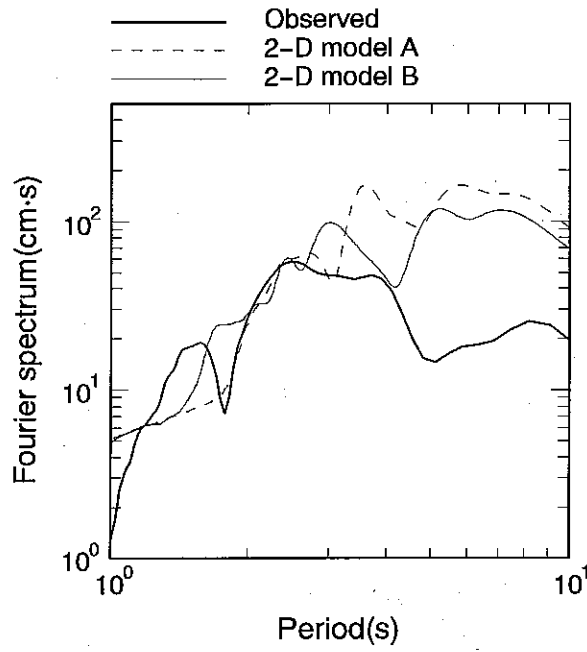


図-5.11: 観測記録と二次元モデルを用いた計算結果の振幅スペクトルの比較 (N35E成分)

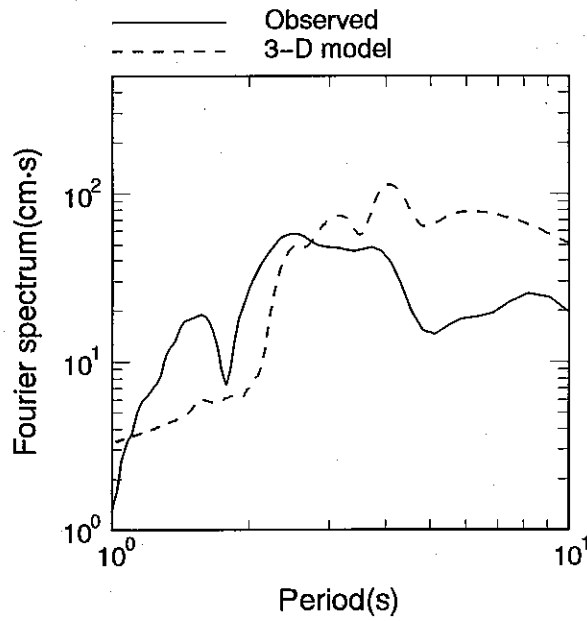


図-5.12: 観測記録と三次元モデルを用いた計算結果の振幅スペクトルの比較 (N35E成分)

5.3.2 San Fernando谷における地震動強さの分布

以上で述べたように、今回のシミュレーションではモデルの粗さ、断層の破壊過程を単純化したことなどの理由から、観測記録を十分に説明することはできなかった。しかし、水平動の振幅レベルは二次元モデルを用いた場合よりも観測記録とよく一致した。

そこで、約3秒以上の周期を対象として、水平2成分合成波形の最大速度の分布を描いたものが図-5.13である。図中の破線はモデルの等深度線であり、20cm/sと50cm/sの等値線も示してある。これによると、震源からの入射波振幅が断層破壊伝播のdirectivity効果によって大きくなり、さらに厚い堆積層で増幅された地点で最大速度が大きくなっていることが分かる。

比較のために、Wald *et al.* [104] が強震記録から描いた最大速度分布図を図-5.14に示す。シミュレーションでは短周期成分が計算できていないため、絶対的な値を議論することはできないが、震央よりも北方の地域において大きな最大速度が観測されており、シミュレーションの結果と同様にdirectivityの影響を大きく受けている。

ただし、最大速度がもっとも大きいとみられる地点は図-5.13と図-5.14では異なっている。この原因としては、破壊伝播方向の違いが考えられる。シミュレーションではunilateralの破壊伝播を仮定したが、逆解析からは同心円状に近い破壊伝播が推定されている [104]。さらに、図-5.1にみられるアスペリティの存在や、浅い地盤構造の影響も図-5.13と図-5.14の分布形状の違いに関与しているものと考えられる。

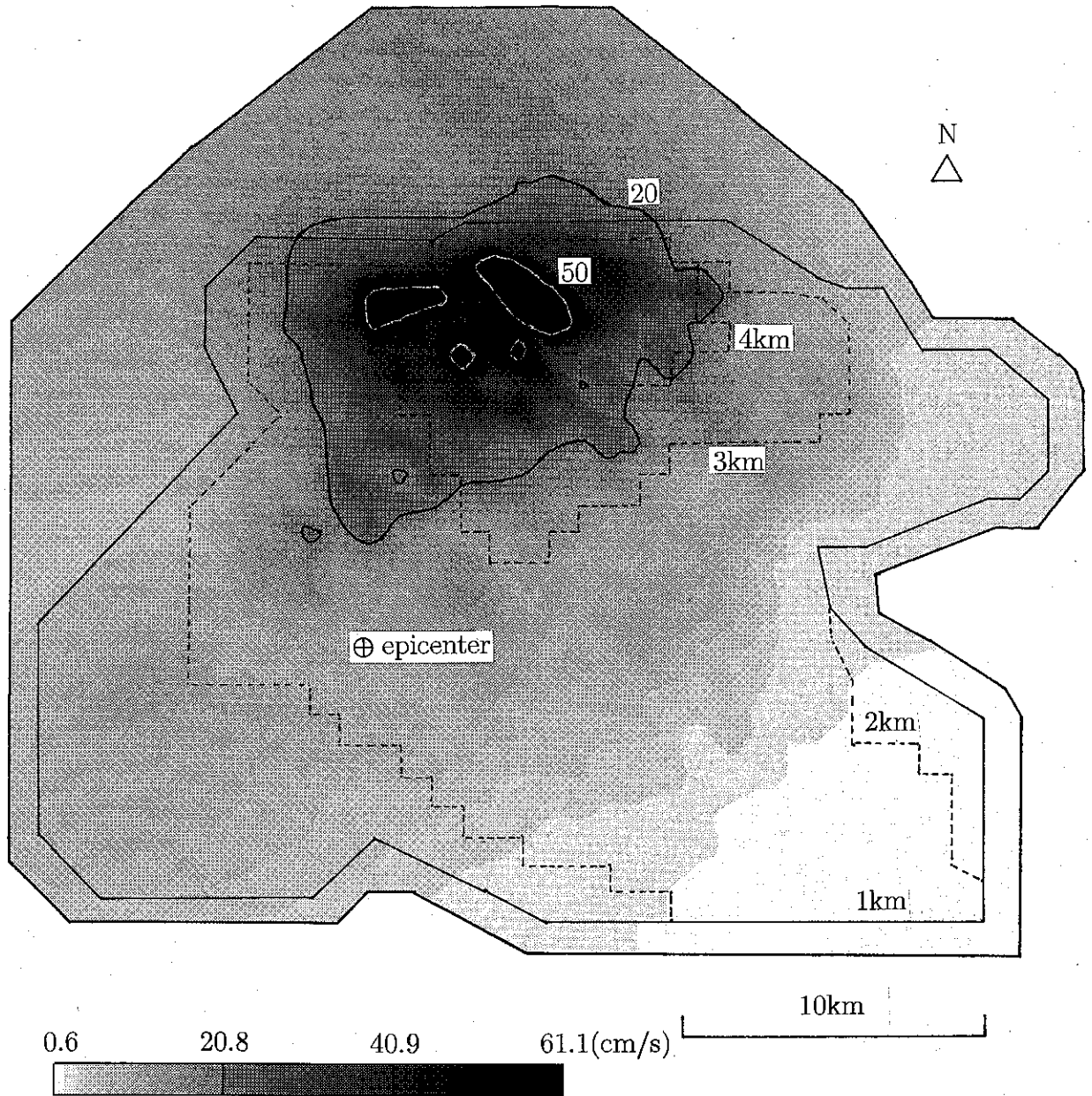


図-5.13: 計算結果から描いた水平2成分合成波形の最大速度の分布

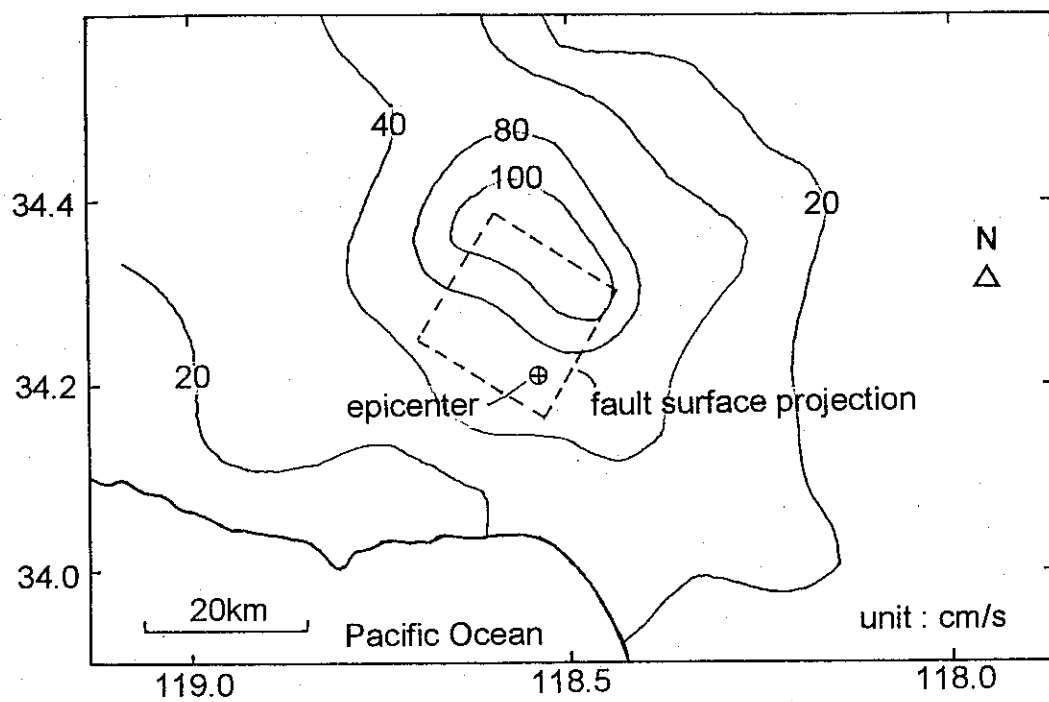


図-5.14: 強震記録に基づく水平2成分合成波形の最大速度の分布 [100]

5.4 まとめ

本章では、既往の研究結果に基づいて1994年Northridge地震の震源断層およびSan Fernando谷をモデル化し、三次元FE-BE法に震源断層モデルを導入した手法を用いて地震動シミュレーションを行った。

その結果、水平動の振幅レベルについては、二次元モデルよりも三次元モデルを用いた場合の方が観測記録とよく一致した。ただし、地盤のモデル化の粗さ、震源過程の単純化などの理由からと思われるが、特に上下動については観測記録を十分に再現することはできなかった。2つの二次元モデルを用いた比較の結果から、より細かい要素分割を行った三次元モデルを用いれば、観測記録とよく一致する可能性があることが分かった。

また、計算結果からNorthridge地震の際のSan Fernando谷における地表最大速度分布図を描き、地震動強さが地盤構造、および観測点と断層との位置関係に大きく影響されることを確認した。やはり上と同様の理由から、細部にわたって実際の現象を再現するには至らなかったものの、大まかな傾向においては強震記録に基づく最大速度分布とも一致した。

なお、三次元シミュレーションには東京工業大学総合情報処理センターCRAY C916/12256を使用し、要したCPU時間は約58時間であった。

第6章

1995年兵庫県南部地震のシミュレーション

6.1 はじめに

1995年兵庫県南部地震(M=7.2)は震源の浅い内陸型の地震であり、神戸市を中心に非常に大きな被害をもたらした。なかでも、神戸市から西宮市に至る震度VIIの区域に被害が集中し、「震災の帯」とよばれている。被害集中区域が細長い帯状となった原因の解明は重要な課題であり、現在までに次のような試みがなされている。

源栄・永野[105]は、移動震源から放射される波動が、不整形な基盤構造によってある狭い範囲で増幅することを、数値実験的に示している。佐藤[106]は、断層の破壊伝播を考慮した経験的Green関数法[107]を用いて基盤での地震動スペクトルを求め、表層の増幅特性を掛け合わせることで、地表面における最大加速度分布が帯状になることを示している。林・川瀬[108]は神戸海洋気象台での観測記録から逆算した基盤波を用いて三宮地区の地盤震動解析を行い、断層から450~1250mの範囲で1自由度系モデルの最大塑性率が大きくなることを示している。Pitarka *et al.*[109]は差分法に震源を導入した手法を用いて葺合を通る断面の地盤震動を計算し、同様に狭い範囲で地震動が増幅することを示している。

このなかで、佐藤[106]は基盤への入射波を三次元波動場で求めているが、基盤の不整形性を考慮したものではない。それ以外は二次元的な解析を行い、ある断面における地震動の局所的な増幅を再現したものである。しかし、地震動強さの平面的な分布を再現するためには、三次元シミュレーションを行う必要がある。またその際、断層の破壊過程、基盤の不整形性、表層の地盤特性をできる限り精密に取り入れることが望ましい。

そこで本章では、神戸市周辺の地盤を三次元モデル化し、断層の破壊過程を再現して1995年兵庫県南部地震のシミュレーションを行う。前章のように、対象とした地域の地盤データが点として与えられ、そのばらつきが大きいときには、不均質性を簡単に考慮できる差分法や有限要素法を用いることになる。しかし、神戸市周辺の地盤が層構造で与えられている[110, 111]こと、モデル化する範囲内では表層が閉じた構造にならないことを考慮して、ここでは表層にも境界要素法を適用する。

前章と同様に、計算機の容量による制限から、浅い層まで十分に細かくモデル化することはできない。そのため、三次元的な基盤構造と断層破壊に注目してシミュレーションを行い、神戸市周辺の地震動特性および震災の帯との関連を議論する。

6.2 断層モデルと地盤モデルの設定

6.2.1 1995年兵庫県南部地震の断層モデル

兵庫県南部地震の際には、震源近傍を含め数多くの強震記録が得られており、これらをもとに詳細な断層モデルがいくつか提案されている。

Wald[112]は、まず鷹取、神戸海洋気象台、神戸大学の3地点で得られた強震記録から1秒以下の短周期成分を取り除いて逆解析を行い、次にその他の100km以内の15観測点での記録から周期2秒以下の成分を取り除いて逆解析した結果を加えて最終的なすべり量分布を求めている。吉田 他[113]は強震記録に遠地地震記録や地殻変動を加えて、またSekiguchi *et al.*[114]は予想される粒子軌跡から断層の位置を決定して逆解析を行っている。Ide *et al.*[115]は150km以内の強震記録を用い、逆解析にABIC[116]を導入して震源過程を一意的に求めている。

ここでは、すべり方向が示されていることと、一意的に定められたものであることから、Ide *et al.*[115]が提案している断層モデルを用いることにした。推定されている断層位置を図-6.1に震度VIIの分布とともに示す。この断層モデルは走行がN232E、傾斜角が85度の右横ずれである。震度VIIの地域は断層の南東に分布し、北東に進むほど断層から離れていくことが分かる。

Ide *et al.*[115]は予備的な解析を行った結果から、45km×20kmの断層面を5km×5kmの小断層に分け、表-6.1に示す水平成層構造を仮定し、図-6.2のように最終的なすべり量をモーメントで与えた。逆解析においては、各小断層の中央においた点震源で小断層を代表させている。破壊は震源から同心円状に速度3.0km/sで伝播するとし、各小断層の境界に破壊フロントが到達した時間を点震源の破壊開始時間としている。そして、点震源の震源時間関数(moment rate function)を三角波の足し合わせで表し、その三角波の重み係数をパラメータとして逆解析を行っている。このように求められた各小断層の震源時間関数と破壊開始時間を図-6.3に示す。

ここでは、図-6.2のすべり量分布に従い、断層をモデル化する。ただし、簡単のために図-6.3のように複雑な破壊の時間変化は考慮せずに、全ての点震源のすべりに関し、ライズタイムが等しいramp functionの変化を仮定した。これは、Ide *et al.*[115]が表-6.1に示すような水平成層構造を用いて逆解析しているのに対し、本章では後述するように不整形な二層構造の地盤モデルを用いるため、細部に至るまで推定断層モデルに従う意味が薄いからである。

本論文のように震源近傍の地震動を対象とする場合には、5km×5kmの断層を1点で代表させることは困難であると考え、さらに小断層を4等分し、2.5km×2.5kmの小断層の中心に点震源を置くことにした。また、断層の震源より淡路島側に位置する部分は、神戸市側の地震動に対する寄与が小さいと考えられるので、ここでは扱わないことにした。本章で用いるすべり量分布と各小断層の破壊開始時間をそれぞれ図-6.4、6.5に示す。すべり量は、図-6.2のモーメントを、後述する基盤領域の物性値を考慮して変位に変換したものである。また、破壊開始時間は前述したIde *et al.*[115]と同じ方法で、2.5km×2.5kmの小断層に関して求めたものである。

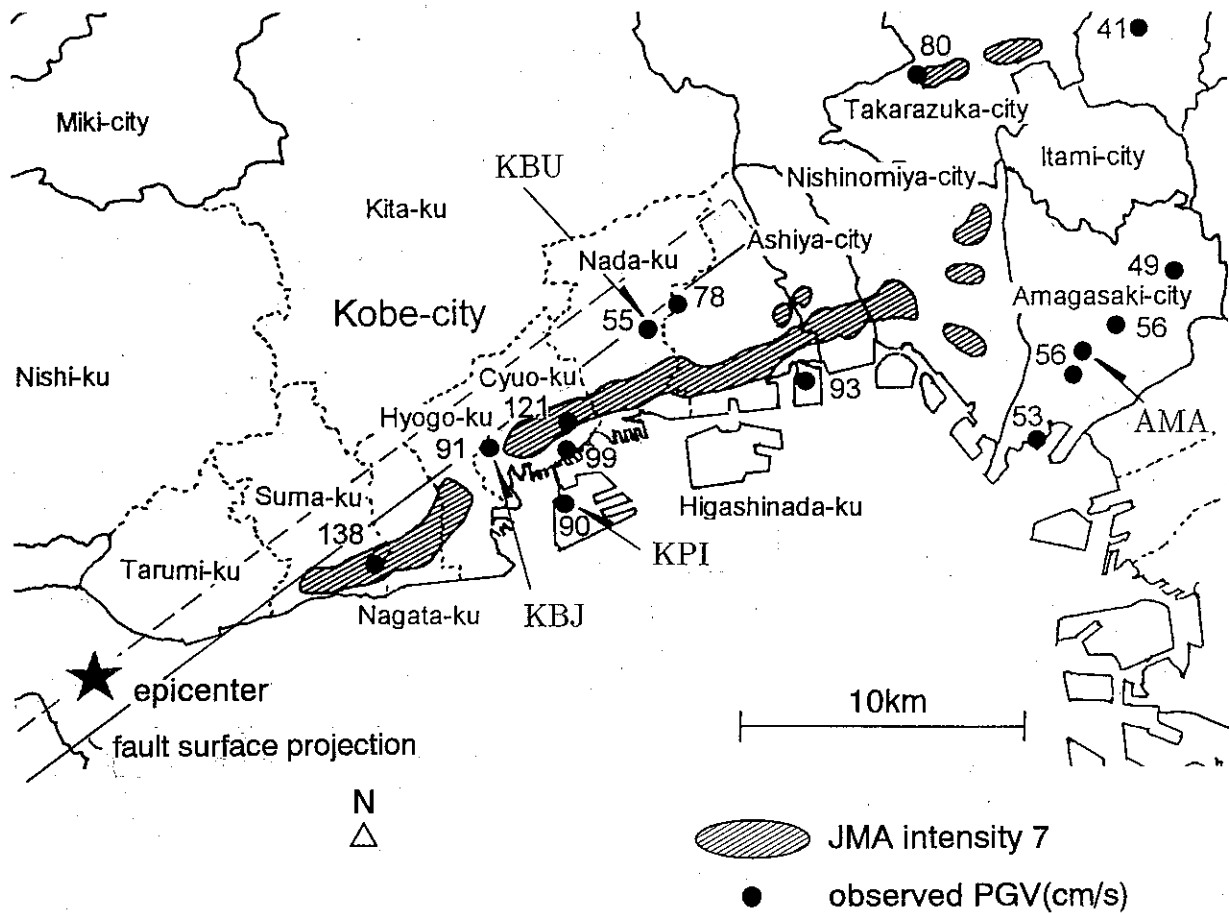


図-6.1: 推定されている断層位置と震度VIIの分布

表-6.1: Ide *et al.*[115]が逆解析に用いた速度構造

Layer No.	v_P (km/s)	v_S (km/s)	ρ (g/cm^3)	h (km)	Q_P	Q_S
1	5.5	3.2	2.5	0.0	400	200
2	6.0	3.5	2.7	3.0	600	300
3	6.6	3.8	3.0	22.0	800	400
4	7.8	4.5	3.2	31.0	1000	500

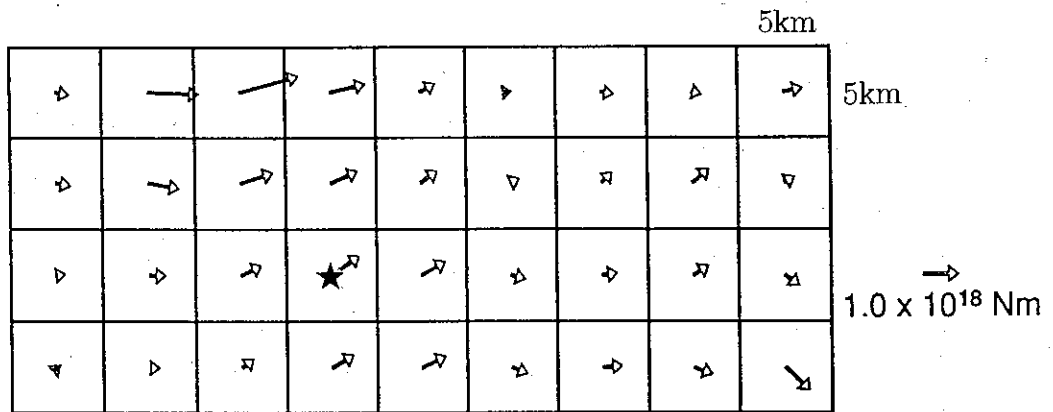


図-6.2: 推定されたすべり量ベクトル [115]

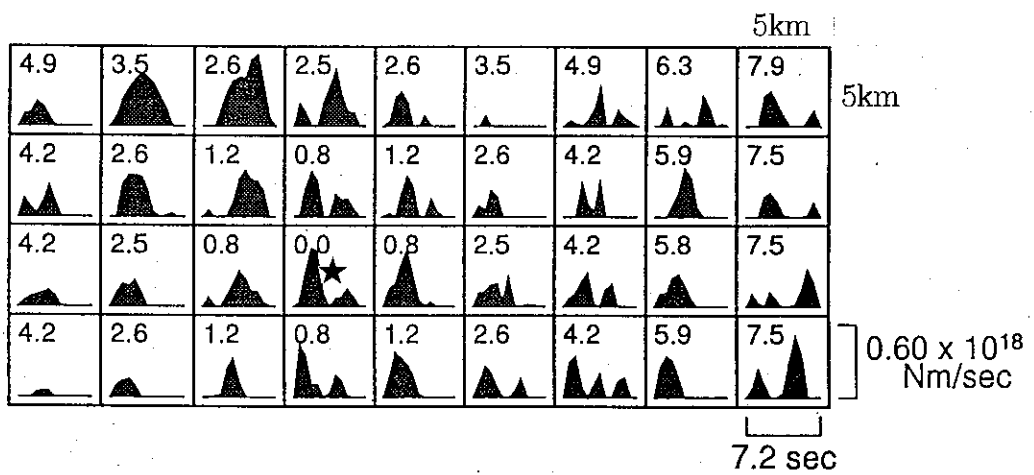


図-6.3: 推定された震源時間関数 [115]

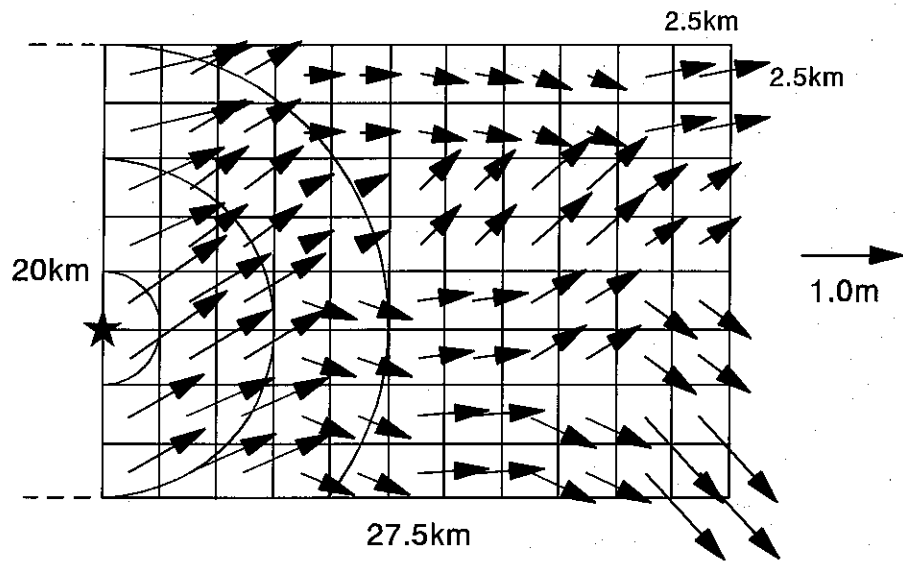


図-6.4: シミュレーションに用いる断層のすべり量分布

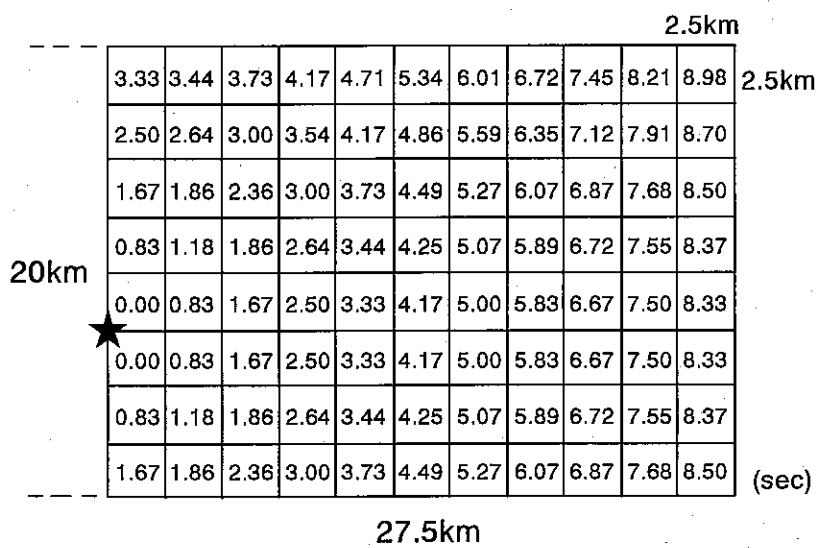


図-6.5: 各小断層の破壊開始時間

6.2.2 神戸市周辺の地盤構造とそのモデル化

大阪堆積盆地では、1988年の北港発破実験を端緒として、反射法地震探査、重力探査、常時微動アレー観測、深層ボーリング等の深部地盤調査が行われ、図-6.6に示した地点において基盤の深さが推定されている[117]。香川・堀江[117]はこれらのデータをもとに、3次スプライン補間から図-6.7のように基盤層の深さを推定している。また表層をA, B, C層に分け、基盤層をD層として表-6.2のように物性値を推定している。図-6.7から、神戸市周辺の基盤は約10度のほぼ一定な傾斜をもっていることが読みとれる。しかし、図-6.6から分かるように、神戸市周辺にはあまり測定点がないため、この地域の地盤構造についてはおおよその傾向が示されているものと考えられる。

神戸市周辺の地盤構造は、地震後精力的に調査されており、局所的には非常に複雑な層構造を成していることが分かってきている[118]。全体的には、基盤は一様になだらかに傾斜しているわけではなく、六甲山地のふもとでは大きな段差があると推定されている。しかし、詳細に調査されている地域は限定されており、神戸市全域にわたってなされているわけではない。

Nakagawa *et al.*[111]は、4800点のBouguer重力異常データから図-6.8のように大阪盆地の基盤深さを推定している。重力異常に基づく方法は、他の地盤探査法に比較して簡便に広い領域の地盤構造を推定することができる。本章の目的やモデル化の精度から、図-6.8に従って地盤モデルを作成することが妥当と考え、図-6.9に示す二層地盤モデルを作成した。モデル化は図-6.8に示した台形の範囲で行い、表層の節点間隔は0.6km、基盤層の節点間隔は1km程度である。図中に示す表層と基盤層の物性値は、表-6.2に示したC層とD層のものを用いた。これは、C層とD層のコントラストが最も大きいため、二層地盤でもある程度近似できると考えたからである。なお、信頼できるデータがないため、地盤の材料減衰は考慮していない。

表-6.2: 大阪盆地の地盤層の推定物性値 [117]

	P波速度 (km/s)	S波速度 (km/s)	密度 (t/m ³)
A層	1.60	0.35	1.7
B層	1.80	0.55	1.8
C層	2.50	1.00	2.1
D層(基盤)	5.40	3.20	2.7

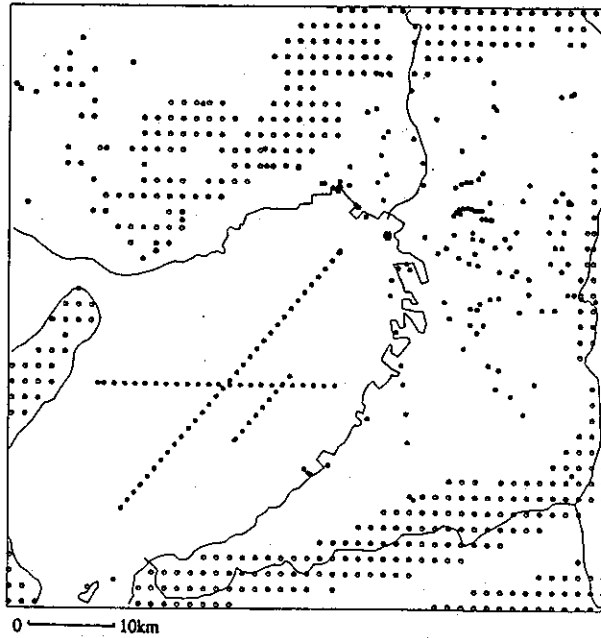


図-6.6: 基盤岩深度の与えられた地点 [117]

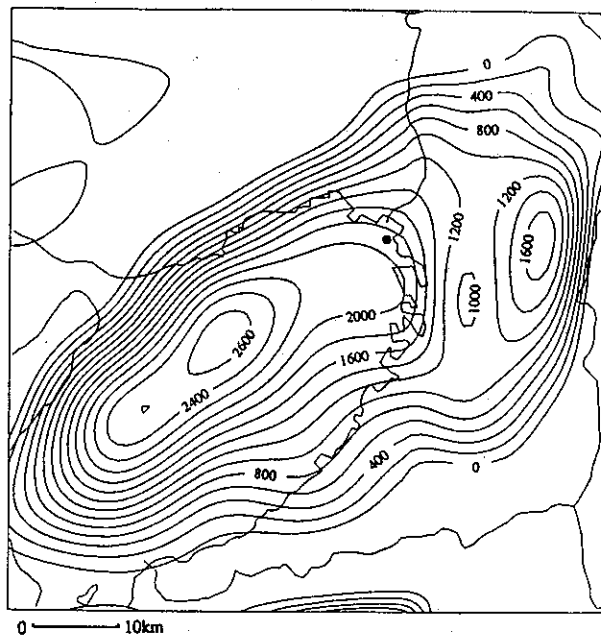


図-6.7: 基盤岩深度コンター図 [117]

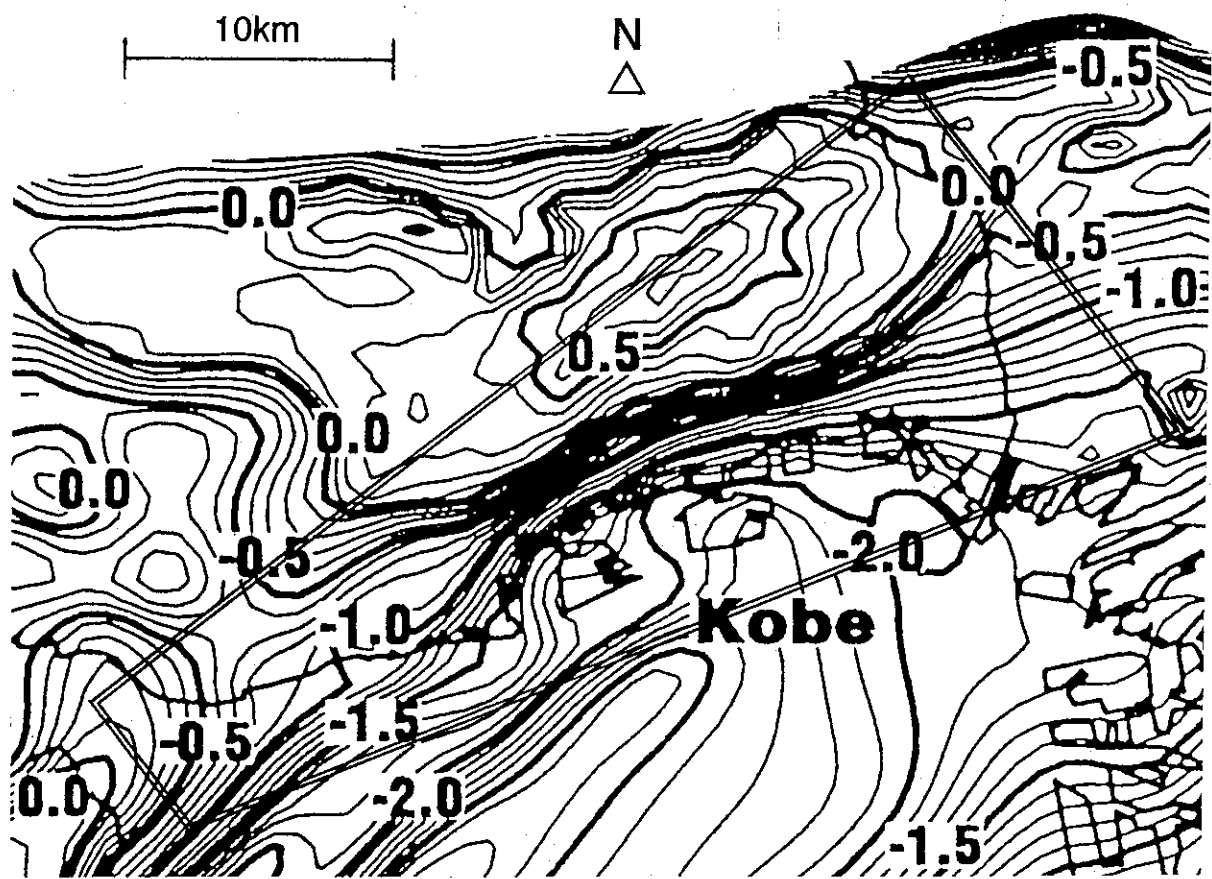


図-6.8: Bouguer 重力異常から推定された大阪盆地の基盤深さ [111]

Subsurface: $v_P = 2.5\text{km/s}$, $v_S = 1.0\text{km/s}$, $\rho = 2.1\text{t/m}^3$, 1726 nodes
 Basement: $v_P = 5.4\text{km/s}$, $v_S = 3.2\text{km/s}$, $\rho = 2.7\text{t/m}^3$, 513 nodes

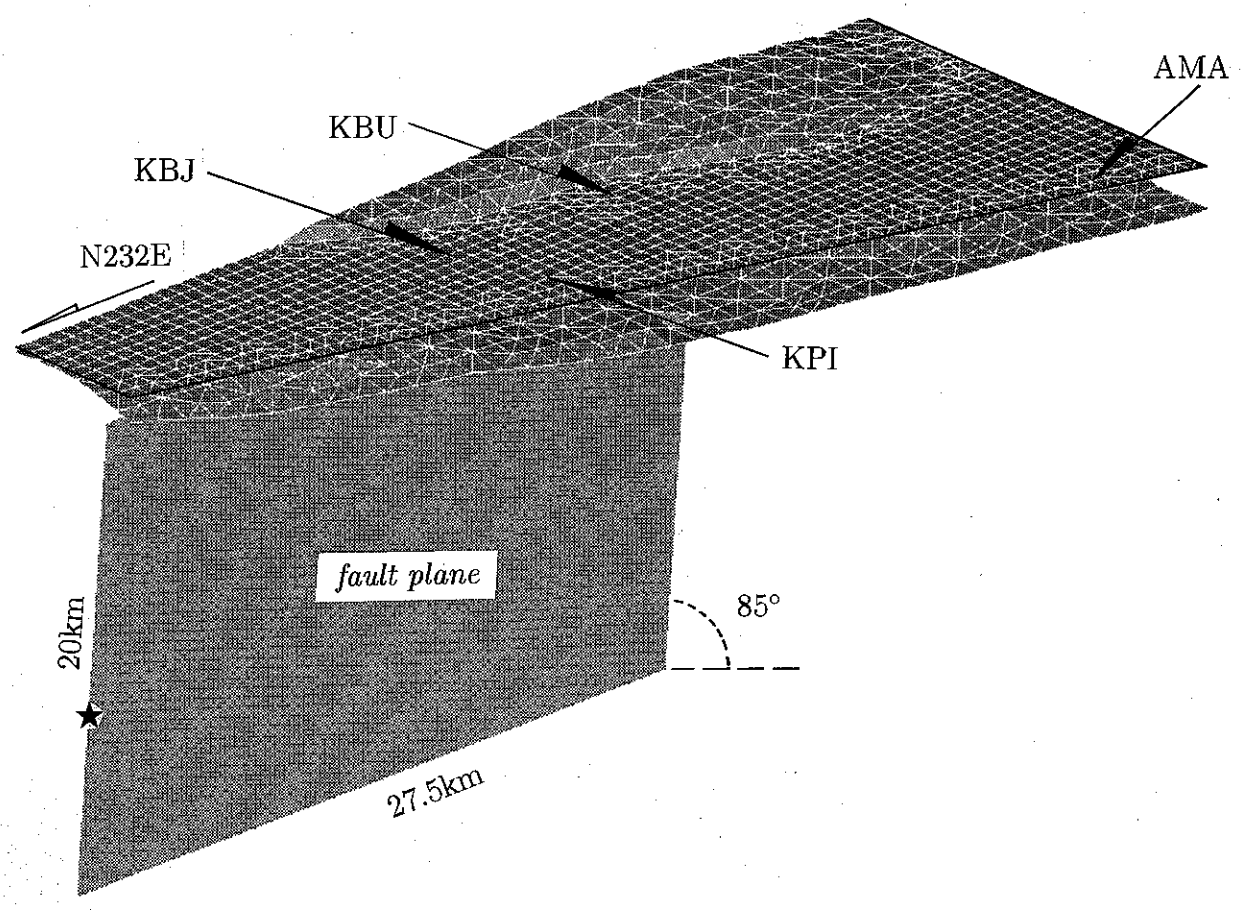


図-6.9: 神戸市周辺の二層地盤モデル

6.3 計算結果と考察

6.3.1 観測記録との比較

前節でも述べたように、震源時間関数はライズタイムが1.0秒のramp functionとし、計算は0~1Hzの周波数に関して0.01Hz間隔で行った。

はじめに、速度記録として得られており、比較的長周期成分が卓越していることから、神戸大学(KBU)および尼崎(AMA)で観測された記録(関西地震観測研究協議会による)と計算結果との比較を行う。両地点の地図上、モデル上の位置はそれぞれ図-6.1と図-6.9に示してある。

図-6.10はKBUで観測された速度波形と比較したものである。観測記録の補正は行っていない。図中の時間ゼロは破壊が始まった時間(5時46分52.0秒)であり、観測波形もそれに合わせてある。この図から、特に破壊開始後10秒前後のパルス的な波動が再現できており、計算波形は観測波形とよく一致していることが分かる。これらのFourierスペクトルを比較したものが図-6.11であるが、水平動では約2秒以上の周期においてよく一致している。上下動はあまり一致していないが、記録状況が不安定であったという報告もあり[119]、比較は難しい。

図-6.12はAMAで観測された速度記録と比較したものである。この観測記録の水平動は約40cm/sで振り切れている。この図によると、水平動の包絡形状はある程度一致しているが、短周期成分については計算できていない。一方、上下動の25~40秒に現れる表面波はよく再現することができている。また、図-6.13におけるスペクトルの比較では、3成分ともに約2秒以上の周期において計算結果と観測記録はかなりよい一致を示している。

次に、神戸海洋気象台(KBJ, 気象庁による)とポートアイランド(KPI, 神戸市による)で観測された加速度記録に0.2秒~20秒のバンドパスフィルタをかけ、積分して得られた速度波形と計算結果とを比較する。ただしKPIの記録は、液状化の影響が少ないと考えられる地下83mで得られたものを用いる。この両地点の地図上、モデル上の位置もそれぞれ図-6.1と図-6.9に示してある。速度波形とその振幅スペクトルで比較して図-6.14~図-6.17に示すが、やはり短周期成分はほとんど再現できていない。また、やや長周期成分についても、KPIの観測波形EW成分にみられる後続波群は計算波形には現れていない。この後続波群はここでモデル化していない浅い表層の影響で発生するものと考えられるが、今後検討が必要である。一方、KBJの上下動成分については、観測波形と計算波形はよく一致している。また、スペクトルについても、全ての成分についてある程度の一致がみられる。観測記録と計算結果の水平動速度波形から、粒子軌跡を描いたものが図-6.18である。これより、計算結果の方がやや単純な軌跡を描くものの、両者とも震源近傍において断層と直交する方向に地震動が卓越することを示している。また、震源からやや遠い尼崎ではその方向性はあまりみられない。

以上のことから、二層地盤モデルを用い、単純な震源時間関数を仮定しているが、このシミュレーションはおおむね実際の現象を再現することができていると考えられる。

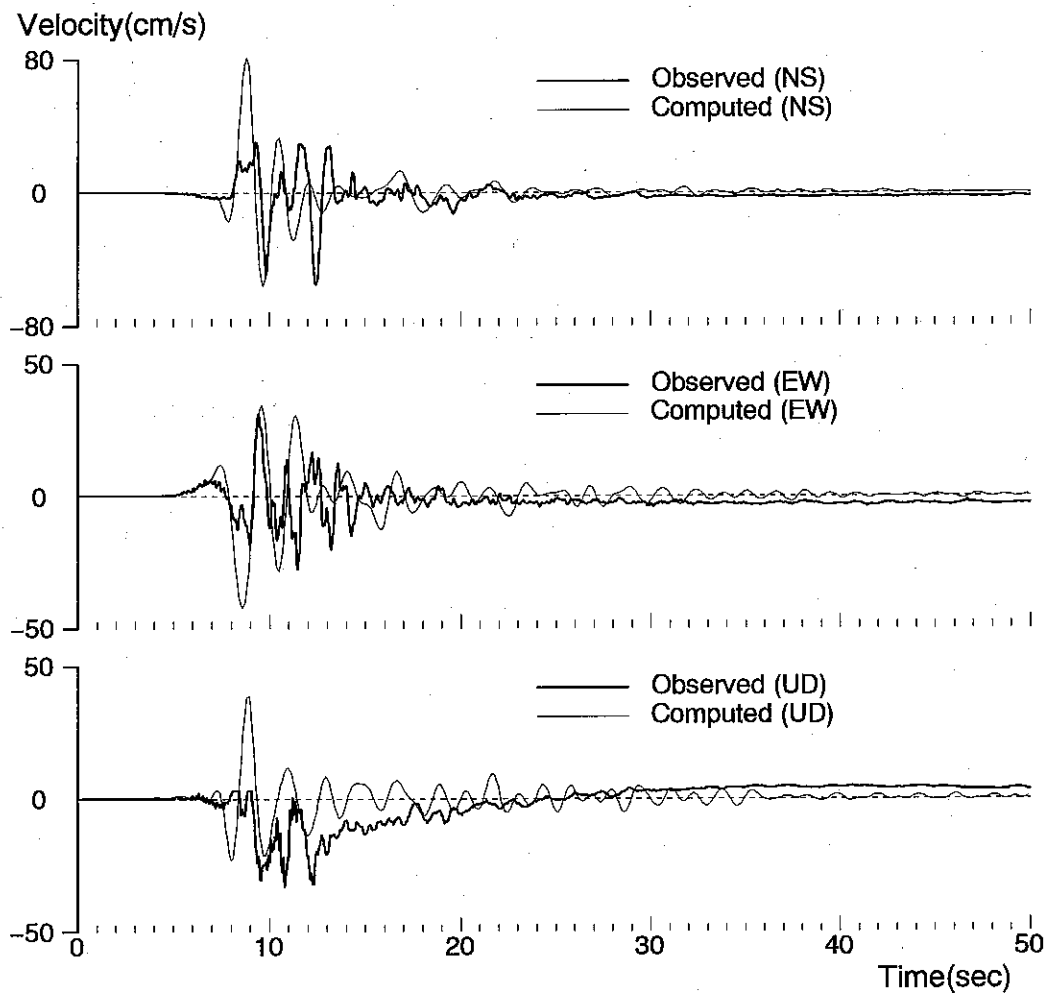


図-6.10: 神戸大学(KBU)で観測された強震記録と計算結果の速度波形による比較

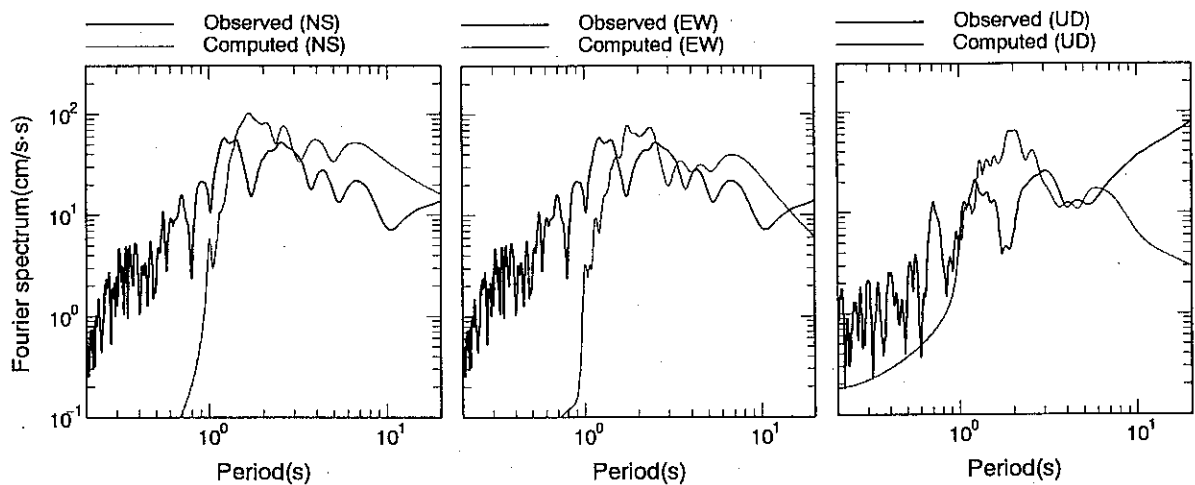


図-6.11: 神戸大学(KBU)で観測された強震記録と計算結果の振幅スペクトルによる比較

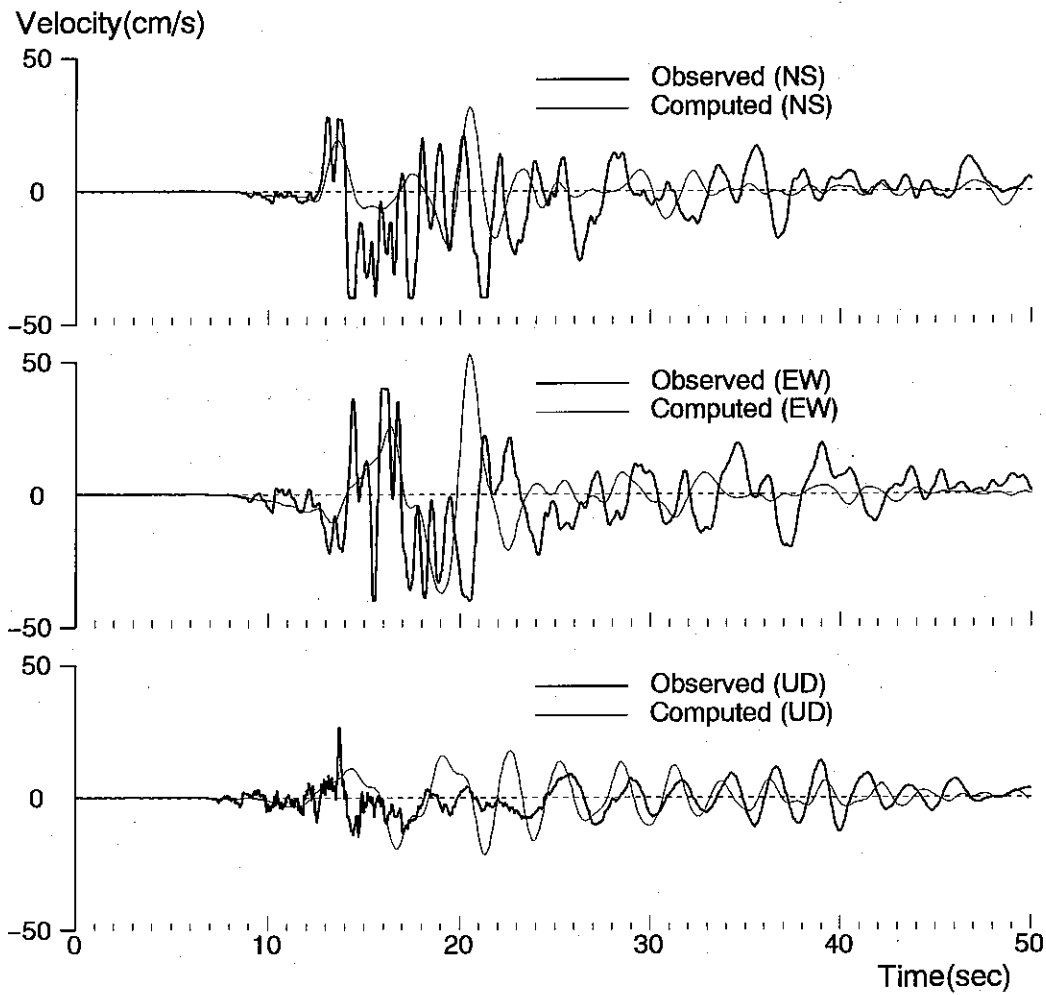


図-6.12: 尼崎 (AMA) で観測された強震記録と計算結果の速度波形による比較

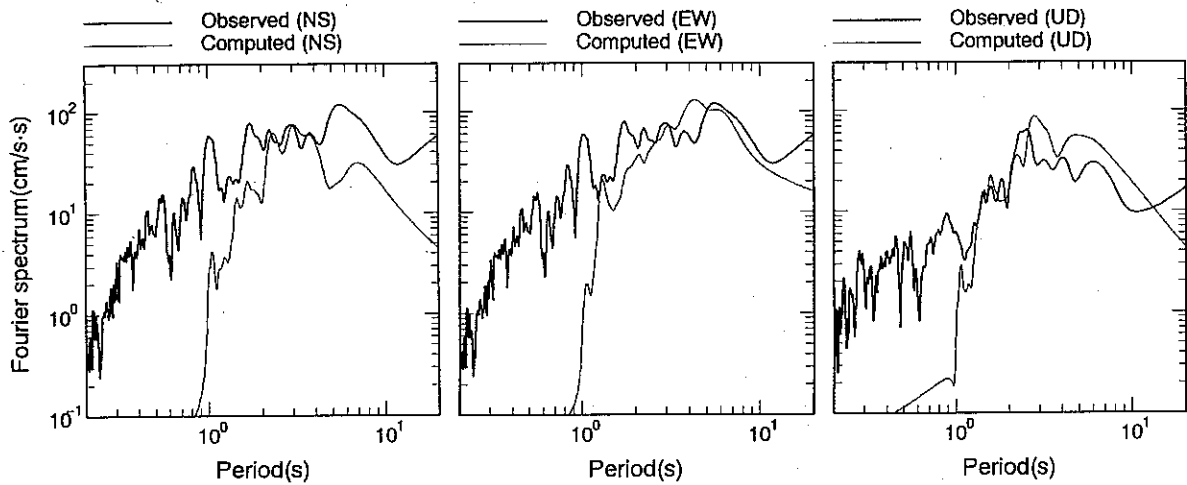


図-6.13: 尼崎 (AMA) で観測された強震記録と計算結果の振幅スペクトルによる比較

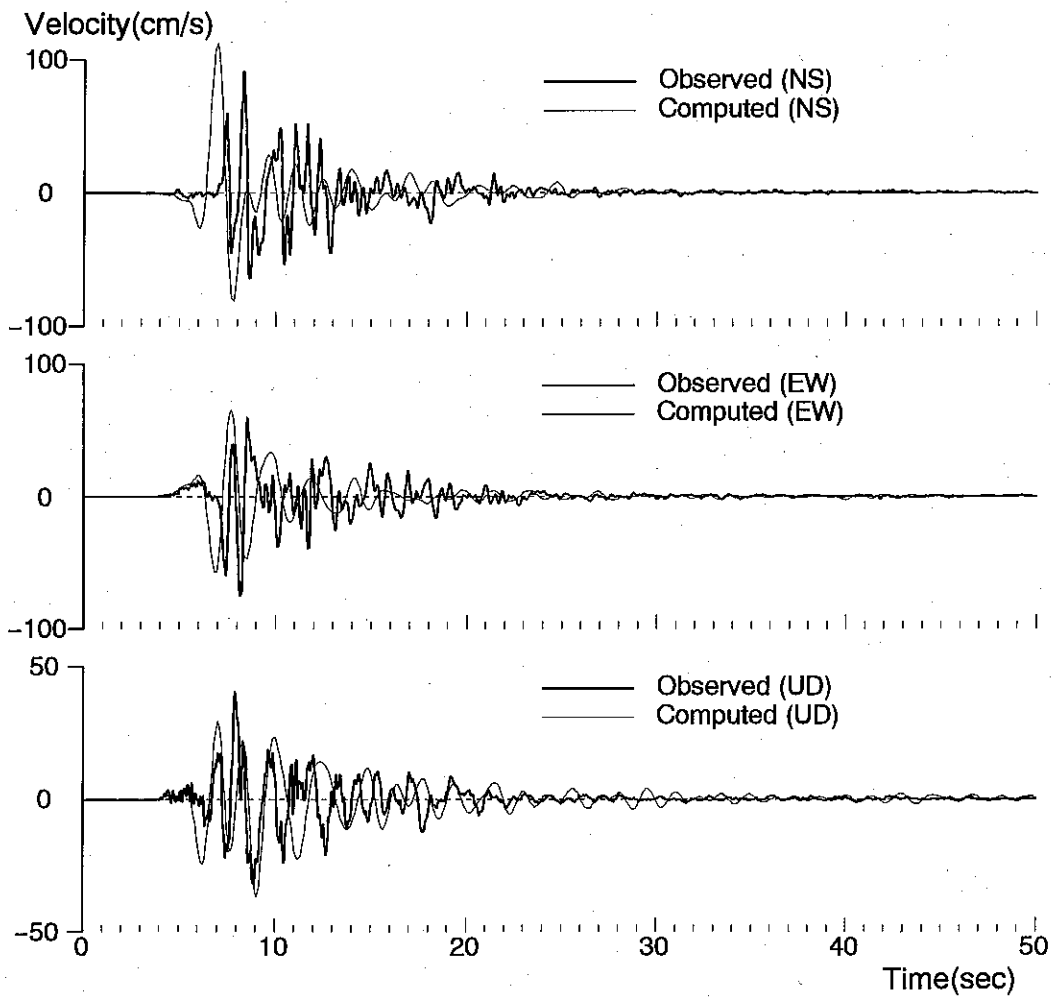


図-6.14: 神戸海洋气象台(KBJ)で観測された強震記録と計算結果の速度波形による比較

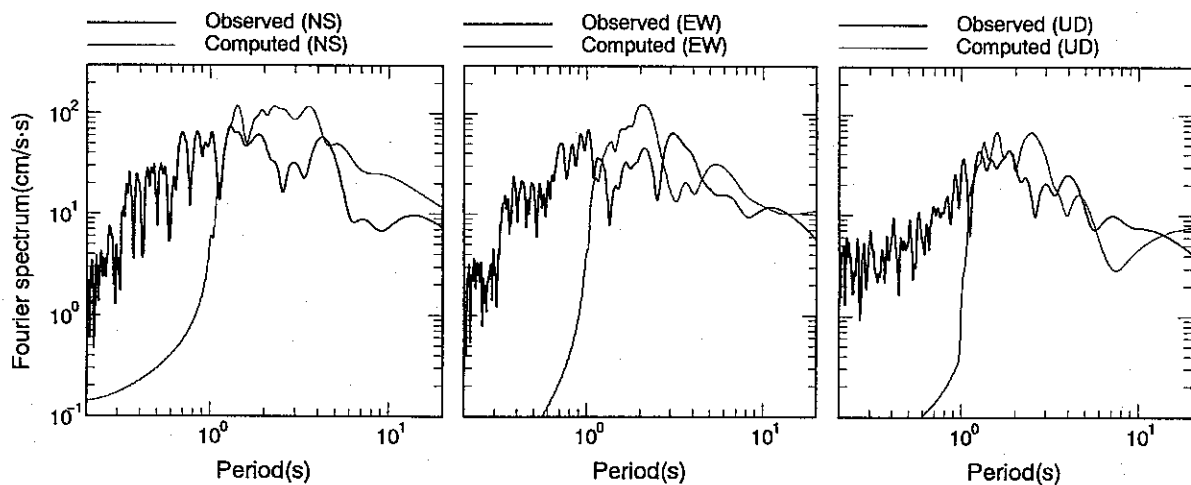


図-6.15: 神戸海洋气象台(KBJ)で観測された強震記録と計算結果の振幅スペクトルによる比較

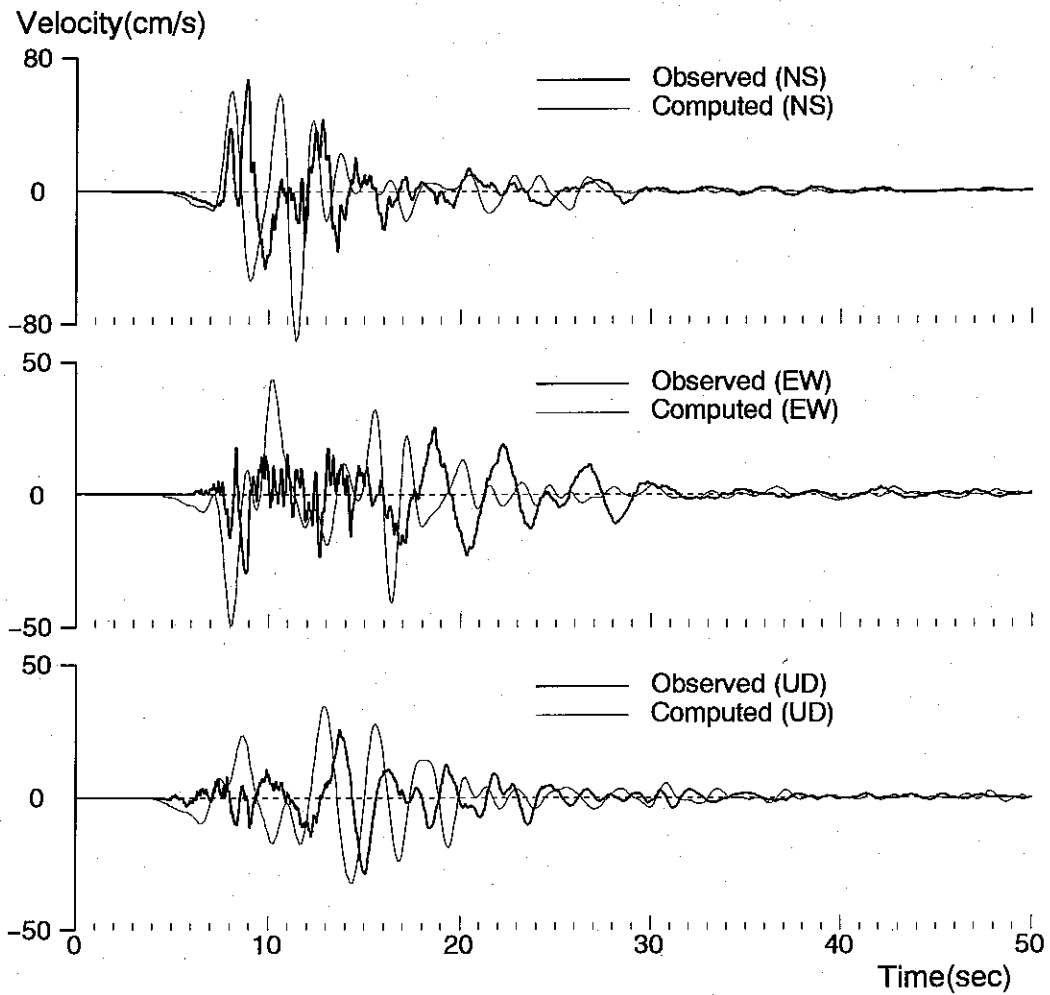


図-6.16: ポートアイランド(KPI)で観測された強震記録と計算結果の速度波形による比較

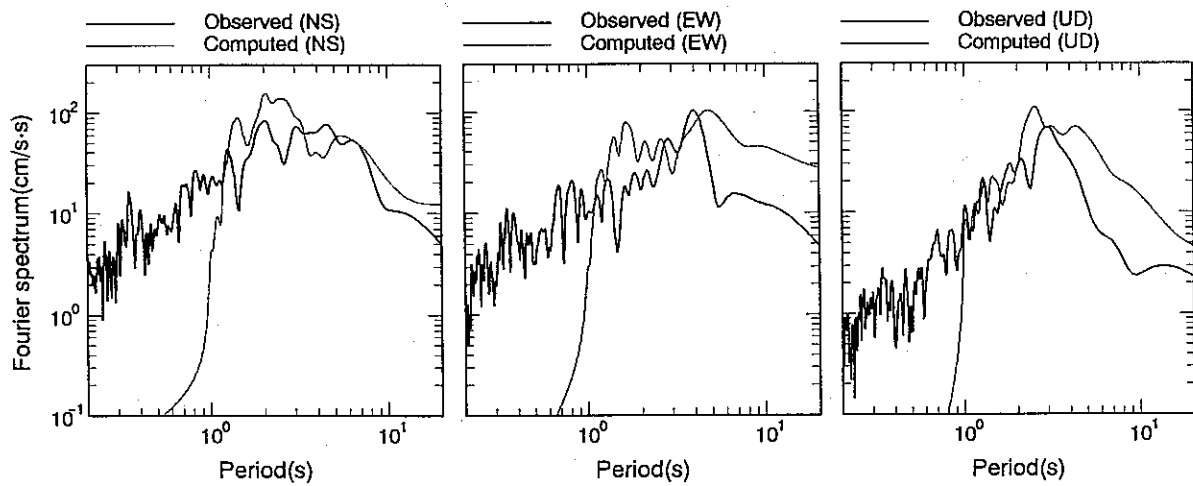
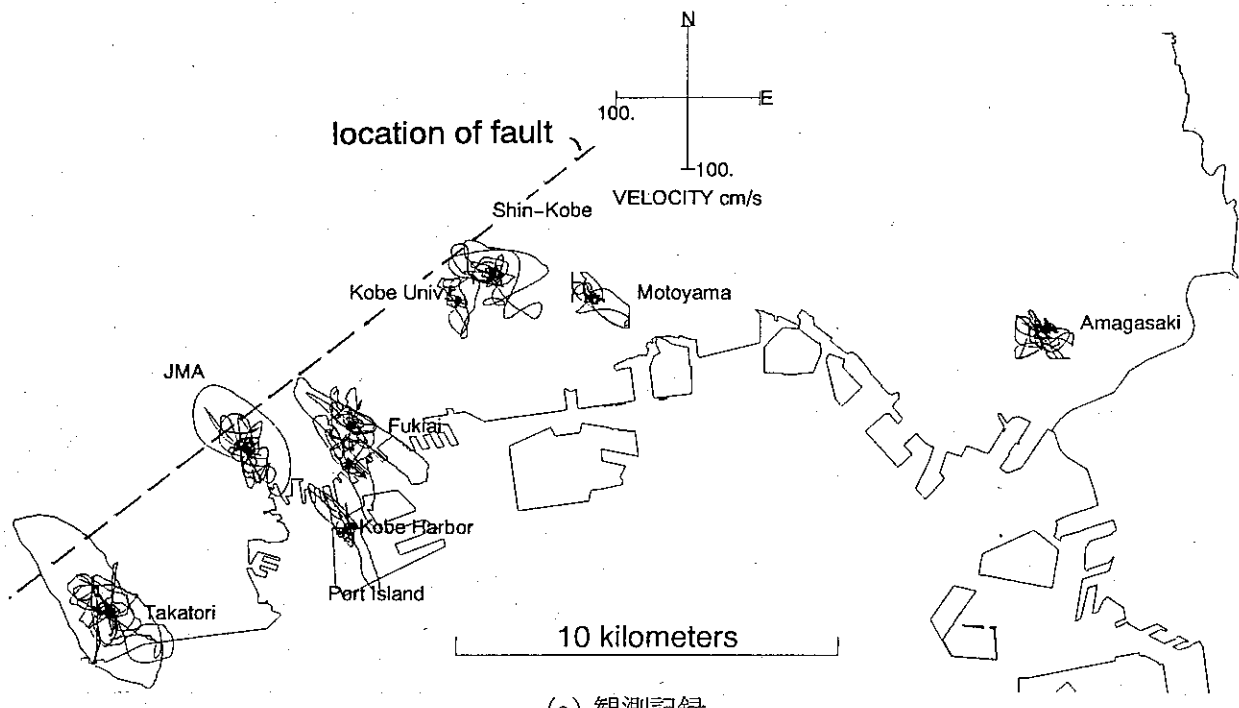
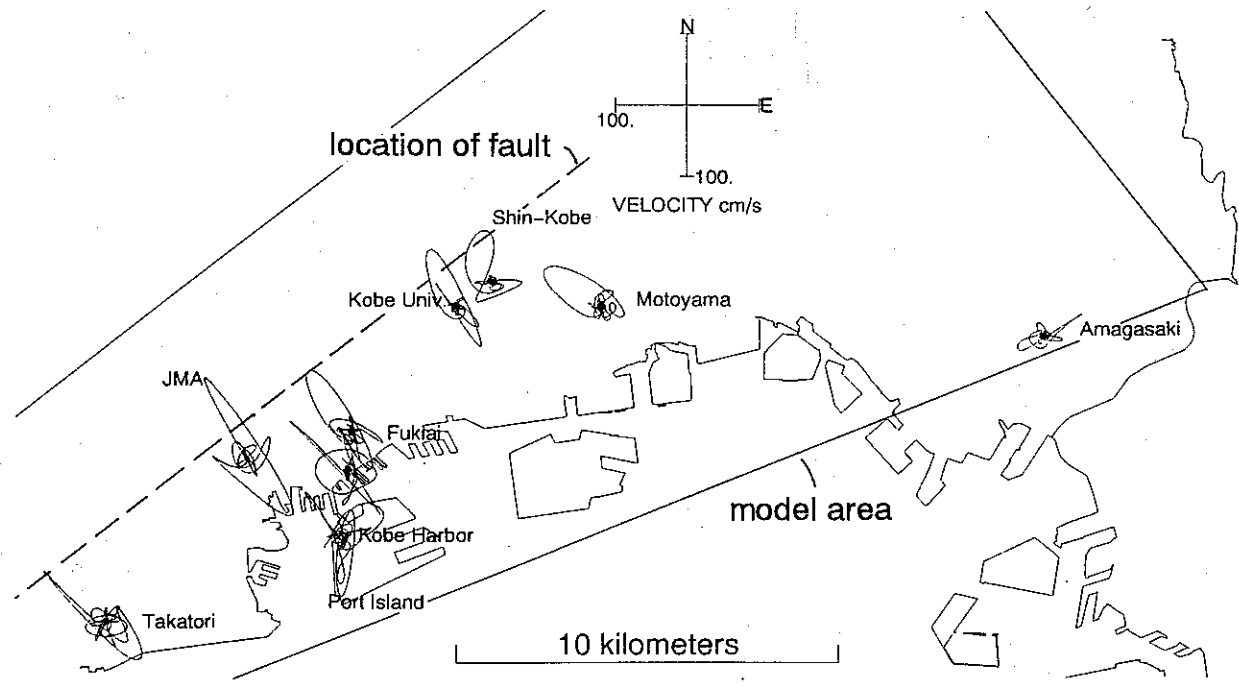


図-6.17: ポートアイランド(KPI)で観測された強震記録と計算結果の振幅スペクトルによる比較



(a) 観測記録



(b) 計算結果

図-6.18: 水平動速度波形から描いた粒子軌跡

6.3.2 地震動の特性に関する検討

図-6.19のように断層と平行な方向(N52E)に x 座標, 直交する方向(N38W)に y 座標を置き, 計算結果から図中の20地点における速度波形を示したものが図-6.20~図-6.23である. 水平動の波形もここではN52E成分, N38W成分を示してある.

これらの図から, 表層上の点と基盤上の点を比較すると, 継続時間に大きな違いがある. 基盤上の点ではパルス的な波動が通過するのみであるが, 表層上の点では層内で反射をくり返す波動が現れている.

また, 基盤上の点を含め, 断層に近い $y = 1.5\text{km}$, $y = -1.5\text{km}$ の線上では断層に直交するN38W成分の振幅が比較的大きく, 図-6.18と同じ傾向を表しているが, 断層から遠ざかるにつれてN52E成分や上下動成分の振幅も大きくなる. さらに, 断層から遠い点では継続時間が長くなり, 最初のピークではなく, 2番目, 3番目のピークが最大になっていることが分かる.

$x = 23\text{km}$ の線上の4地点で比較すると, $y = 1.5\text{km}$ では基盤上のため振幅が小さく, $y = -1.5\text{km}$ から $y = -4.5\text{km}$ にかけて振幅が増大し, $y = -7.5\text{km}$ ではまた小さくなっている. これは, 図-6.1に示した帯状の被害にほぼ対応している.

このことを平面的に捉えるために, 水平動合成波形の最大速度分布を描いたものが図-6.24である. 図中の赤線は断層上端の位置を示している. この図によると, 白線で囲まれた 80cm/s よりも大きい最大速度を示した地点は, 断層から少し離れて海側に分布しており, 図-6.1の震度VIIの帯の分布と調和的な結果が得られている. この帯の幅は 5km ほどあり, 震度VIIの帯よりも広がっているが, 浅い地盤構造を無視してもこのような分布を示していることは重要であり, 深い基盤構造と断層の破壊伝播が「震災の帯」生成の一因となったことが推定できる.

震央に近い垂水区付近では, 被害程度に比較して非常に大きな最大速度が計算されているが, これは図-6.4に示したように, 直下の断層に対して大きなすべり量を設定しているためである. また, 図-6.3によれば, この断層ではくい違いに約7秒間要したと推定されているが, シミュレーションでは1秒間でくい違おうとしたことも, 過大評価に繋がっていると考えられる.

図-6.24はライズタイムが1.0秒の場合であるが, 試みにライズタイムを2.0秒にした場合について同様の図を描いたものが図-6.25である. 両者は全体的には同じような分布を示しているが, 図-6.25では帯が途切れているといった相違点もある. ライズタイムが1.0秒, 2.0秒の場合を図-6.9に示したKBU地点, AMA地点での速度波形とスペクトルと比較すると図-6.26~図-6.29のようになる. ここでは特に主要動の振幅に対してライズタイムの影響が大きく現れており, 断層に近いKBU地点の方がその傾向が強いことが分かる. したがって, 震源時間関数の設定は重要であり, ここでは単純な ramp function を用いたものの, 地盤モデルが精度よく推定され, 表層までモデル化することが可能ならば, より現実的な震源時間関数を用いたシミュレーションを行うべきであろう.

図-6.30～図-6.35は、破壊開始の4秒後から2秒毎のスナップショットである。図-6.30, 6.31は水平動の断層と平行な方向成分, 図-6.32, 6.33は水平動の断層に垂直な方向成分, 図-6.34, 6.35は上下動成分について描いたものであり, それぞれN52E, N38W, 鉛直上向きを正の向きとして, 赤いほど正の向きに, 青いほど負の向きに速度振幅が大きいことを示している。これらの図によると, いずれの成分についてみても, 振幅の大きい地点が断層の破壊伝播にともなって移動し, 地震動が基盤構造によって波面を歪められながら伝播していく様子が分かる。大阪平野の中心部で観測された周期3秒前後の上下動は, およそN30Wの方向から伝播してきたRayleigh波であることが観測記録の分析から示されている [120] が, 図-6.35の破壊開始後16秒あるいは18秒の図にみられる波面がほぼその方向から伝播していることから, この現象も基盤の不整形性に起因していると考えられる。

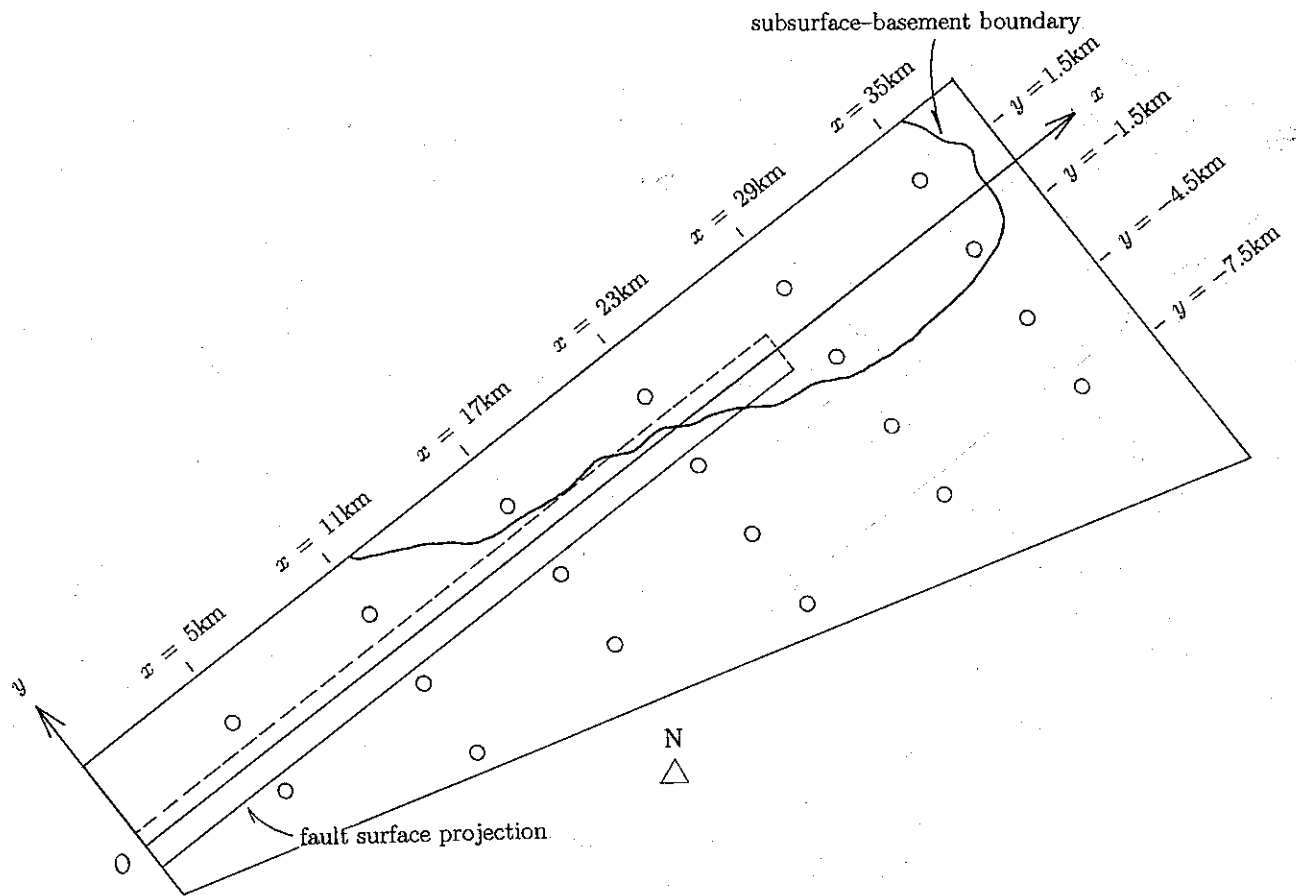


図-6.19: モデル上においた x - y 座標系と波形を図示する地点

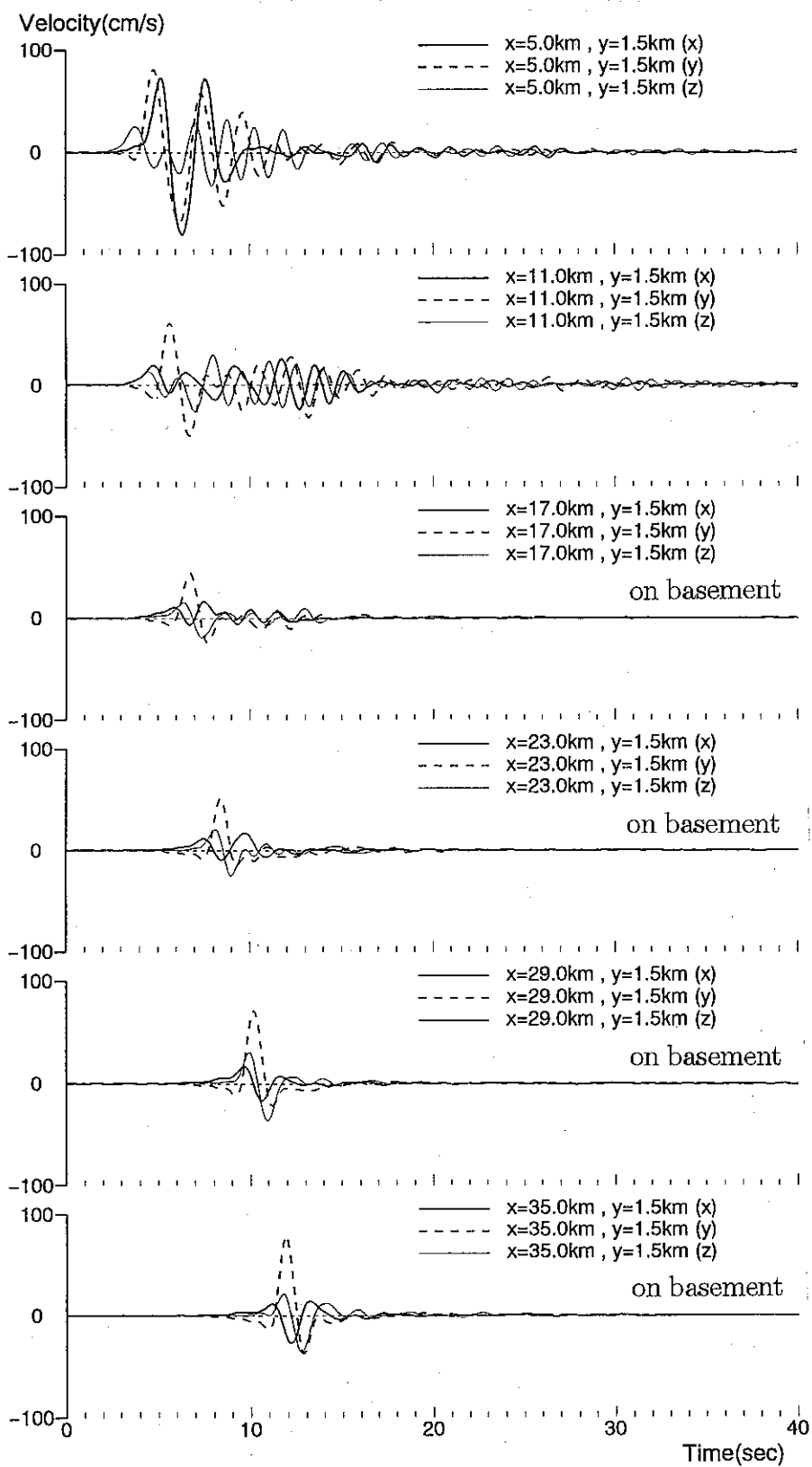


図-6.20: $y = 1.5\text{km}$ の線上での速度波形

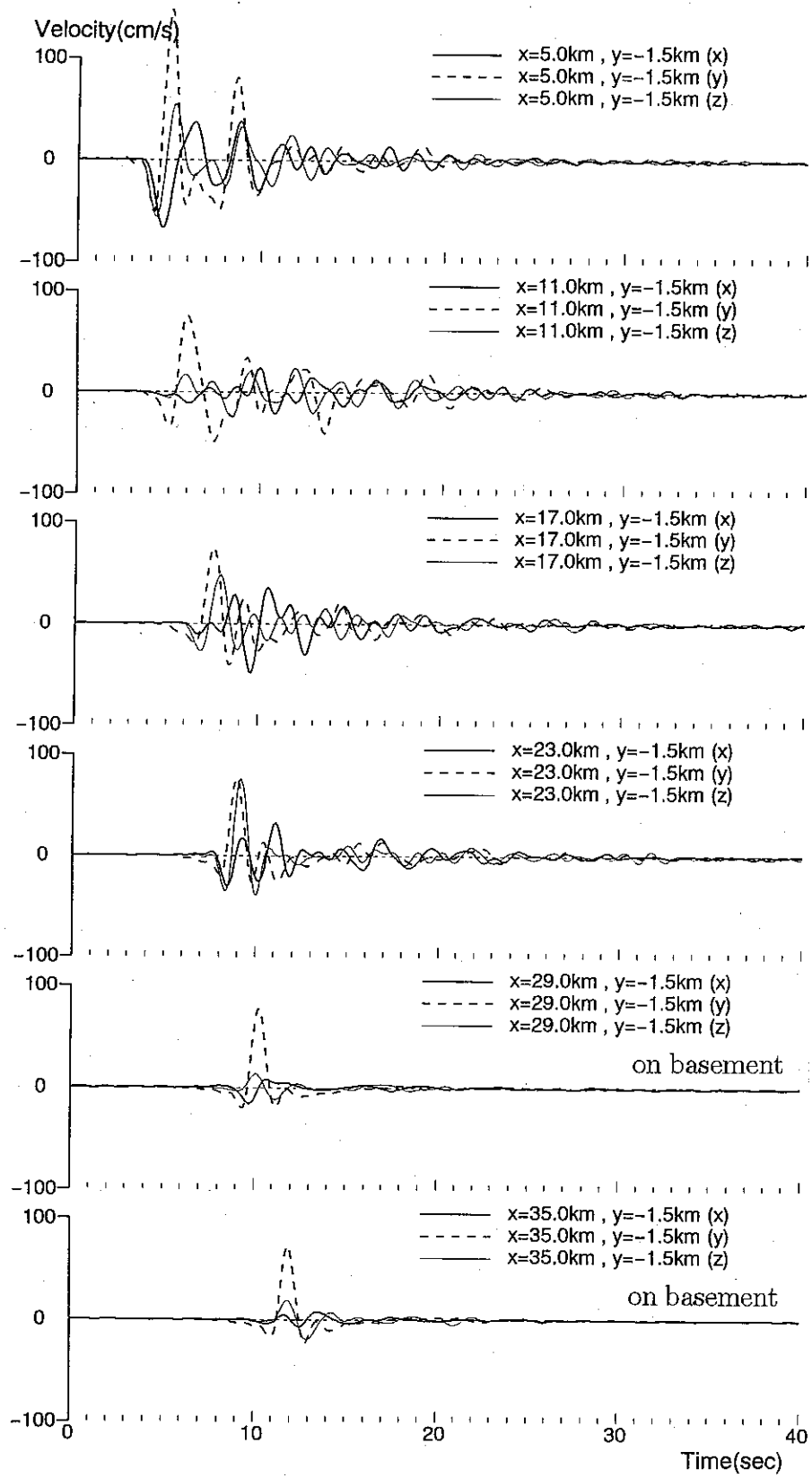


図-6.21: $y = -1.5\text{km}$ の線上での速度波形

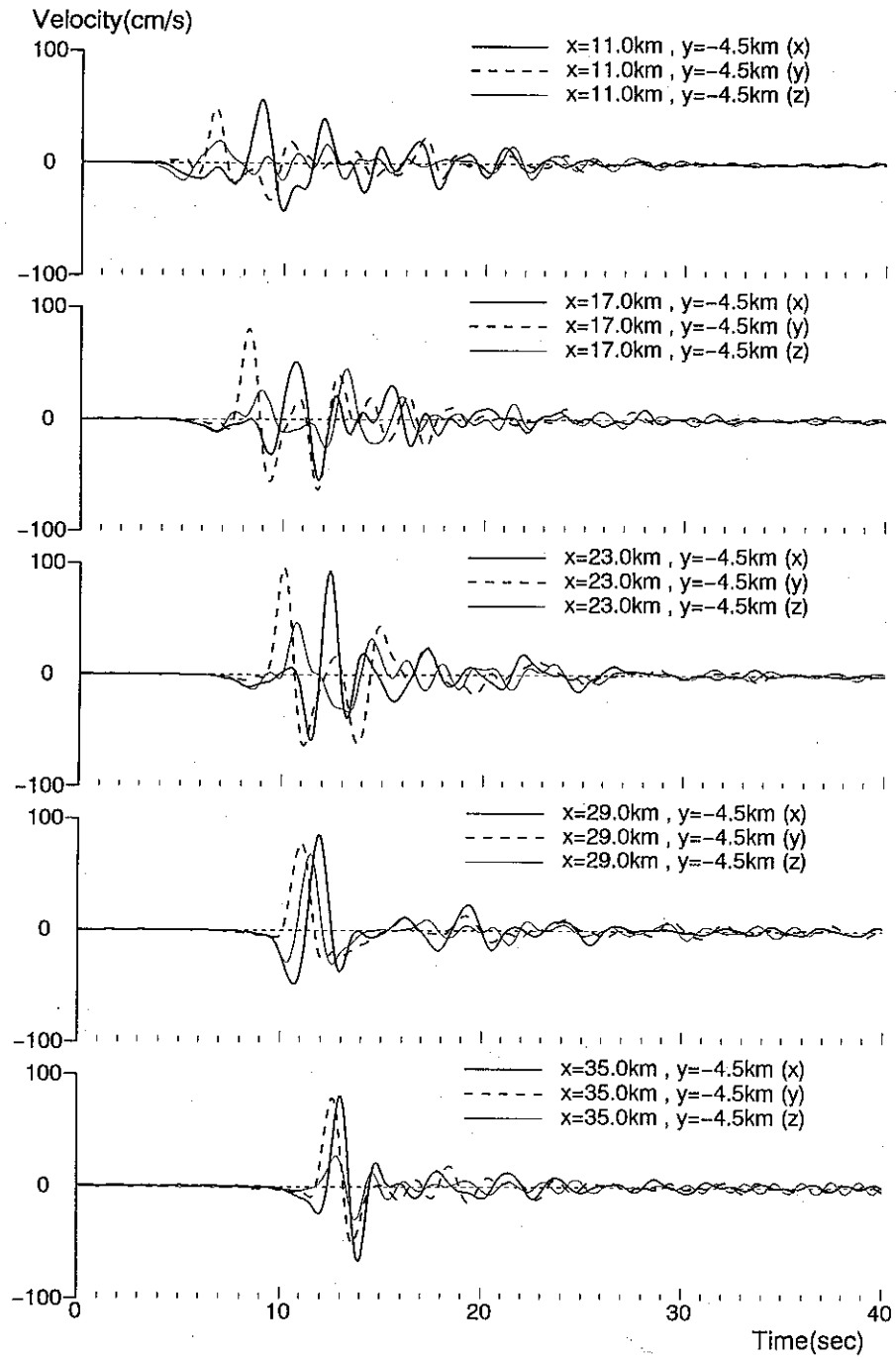


図-6.22: $y = -4.5 \text{ km}$ の線上での速度波形

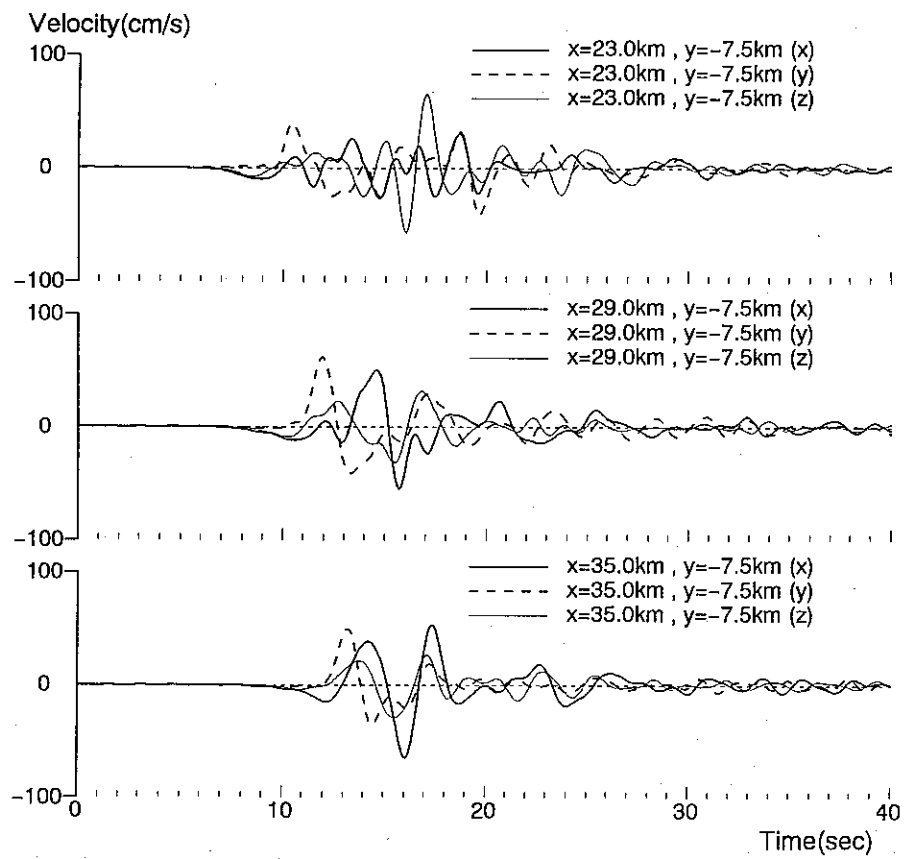


図-6.23: $y = -7.5\text{km}$ の線上での速度波形

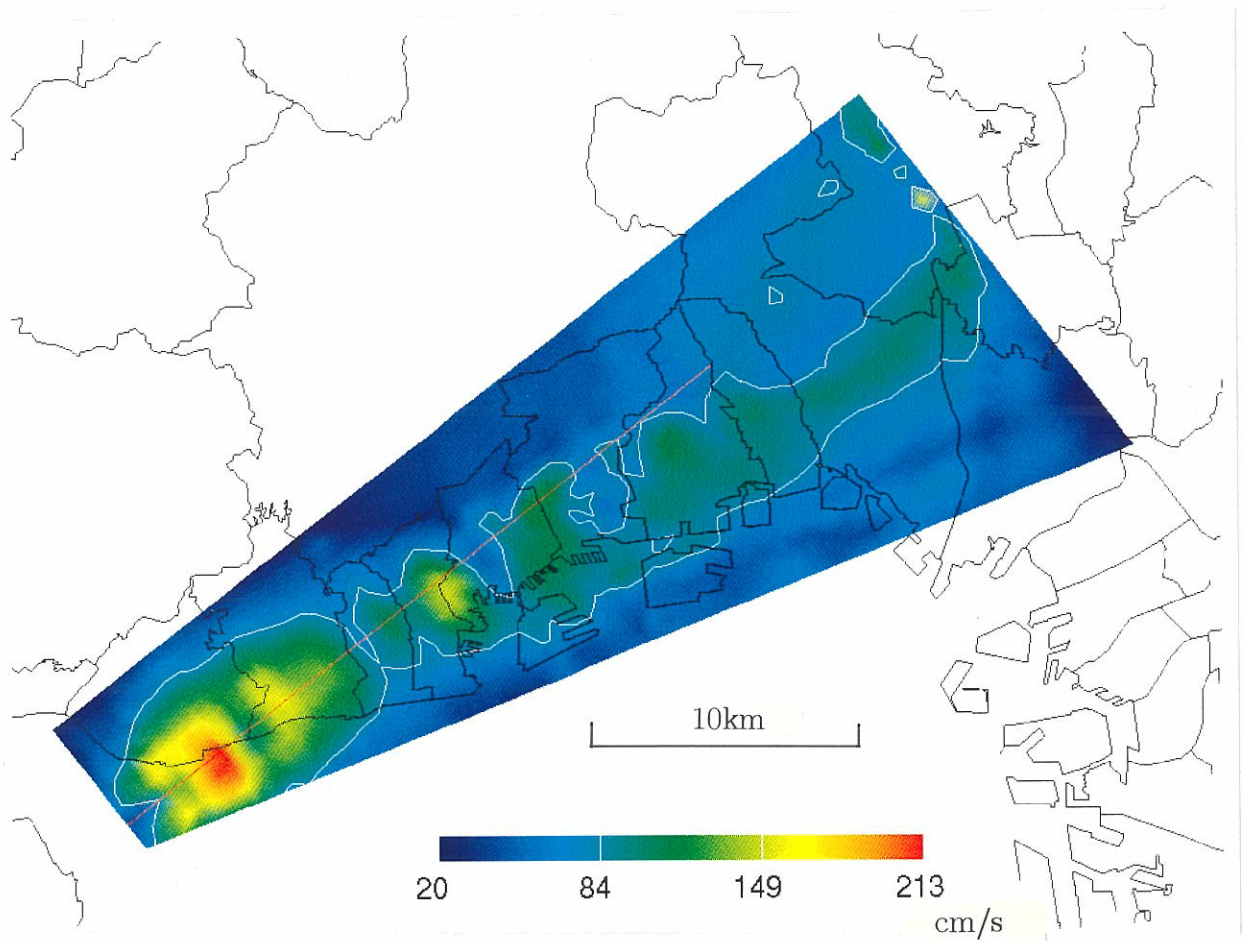


図-6.24: 水平動合成波形の最大速度分布図 (ライズタイム1.0s, 白線は80cm/s)

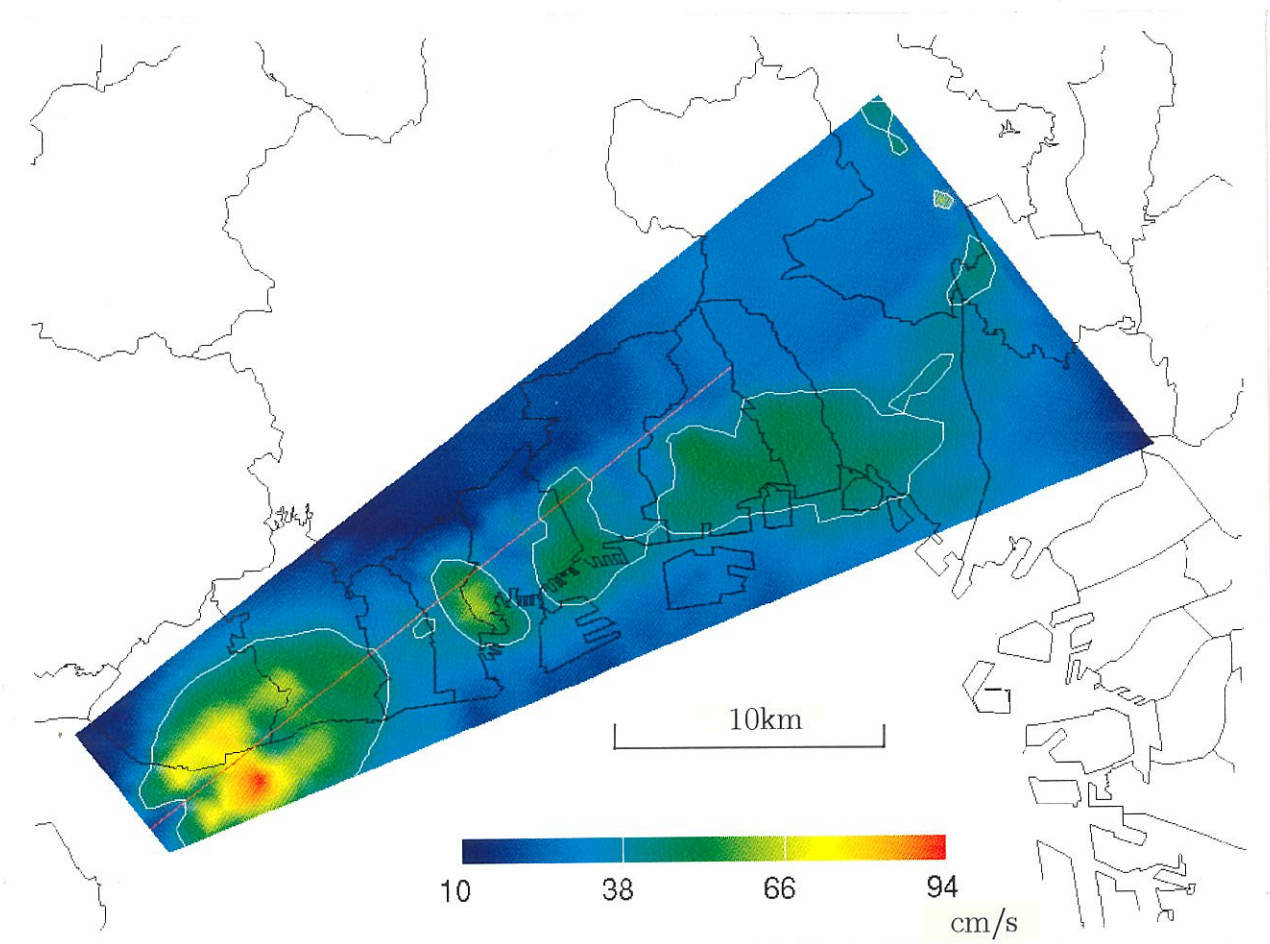


図-6.25: 水平動合成波形の最大速度分布図 (ライズタイム2.0s, 白線は40cm/s)

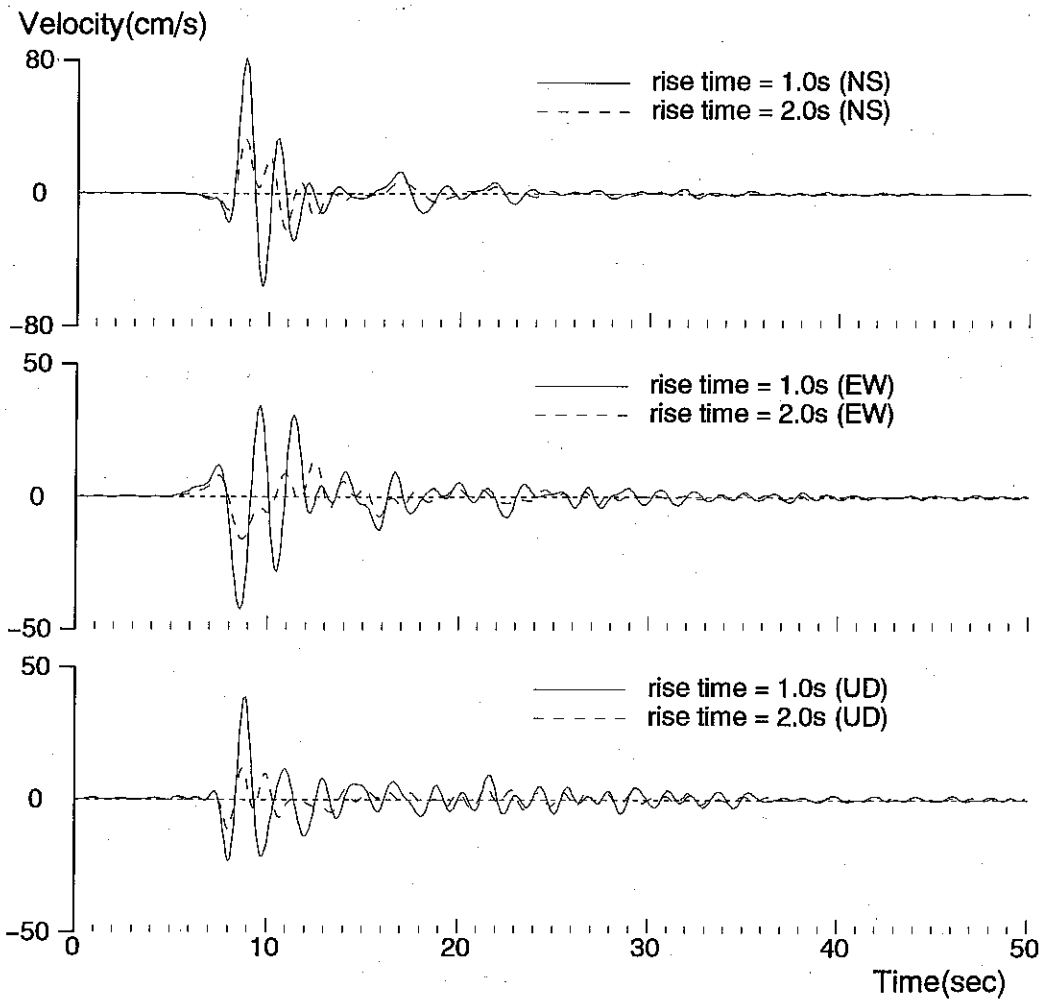


図-6.26: ライズタイムを1.0秒, 2.0秒とした計算結果の速度波形による比較(KBU)

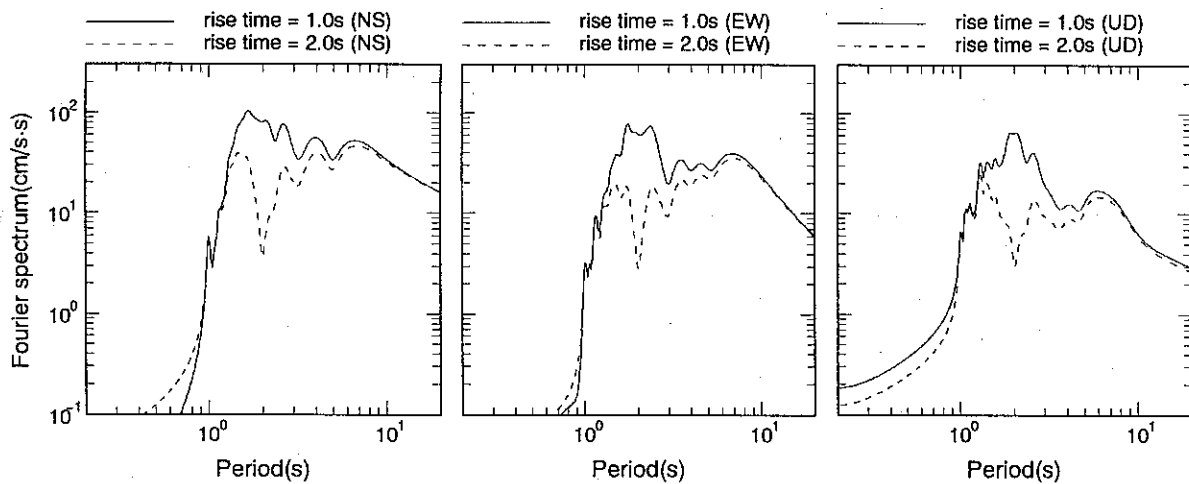


図-6.27: ライズタイムを1.0秒, 2.0秒とした計算結果の振幅スペクトルによる比較(KBU)

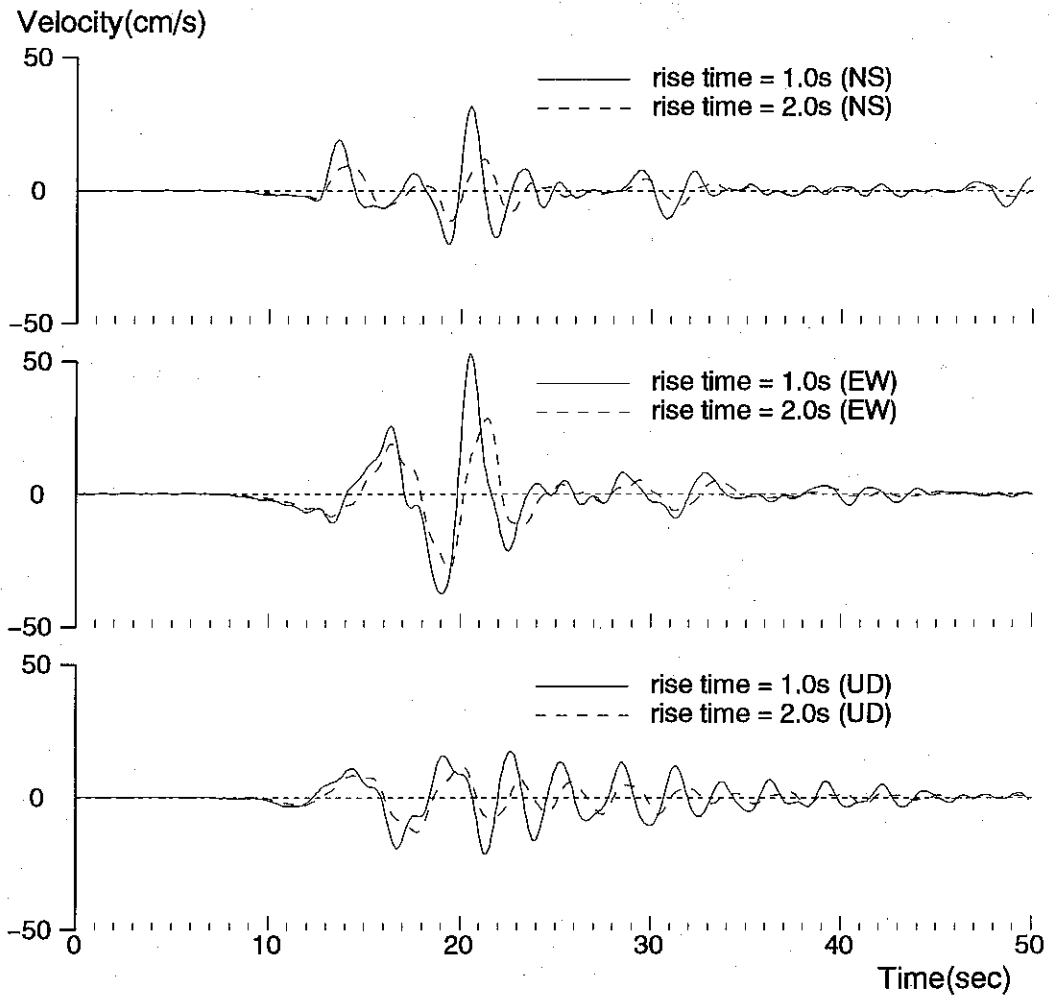


図-6.28: ライズタイムを1.0秒, 2.0秒とした計算結果の速度波形による比較(AMA)

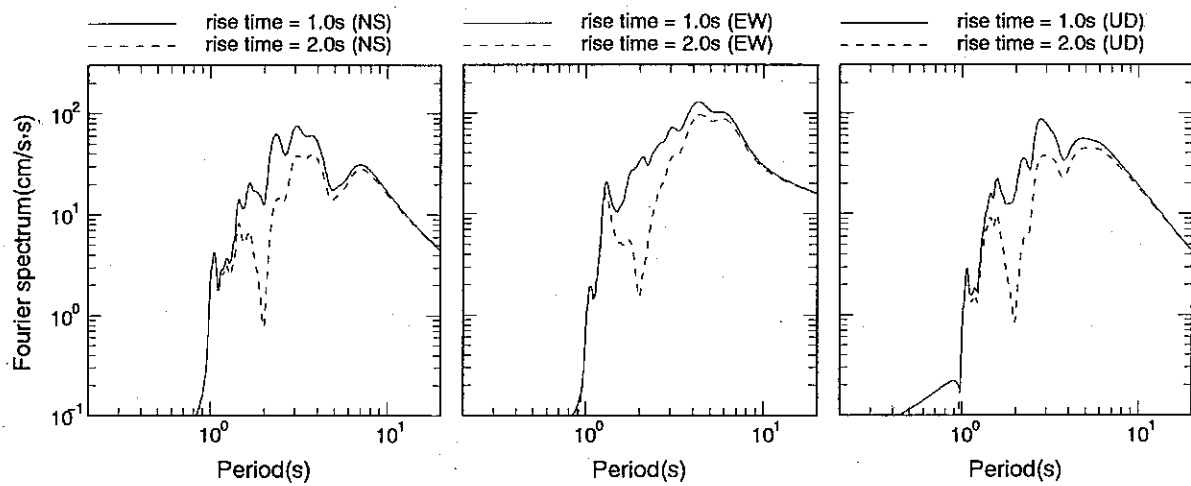


図-6.29: ライズタイムを1.0秒, 2.0秒とした計算結果の振幅スペクトルによる比較(AMA)

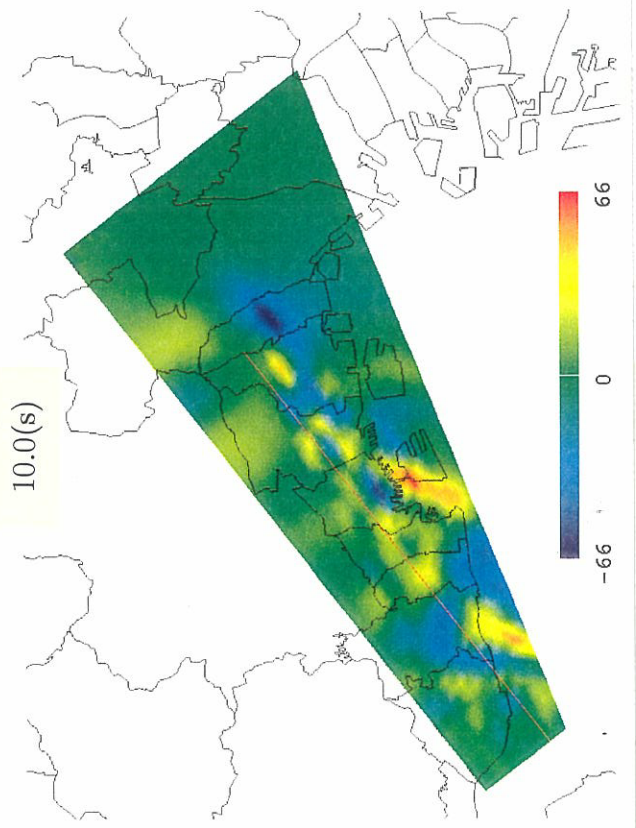
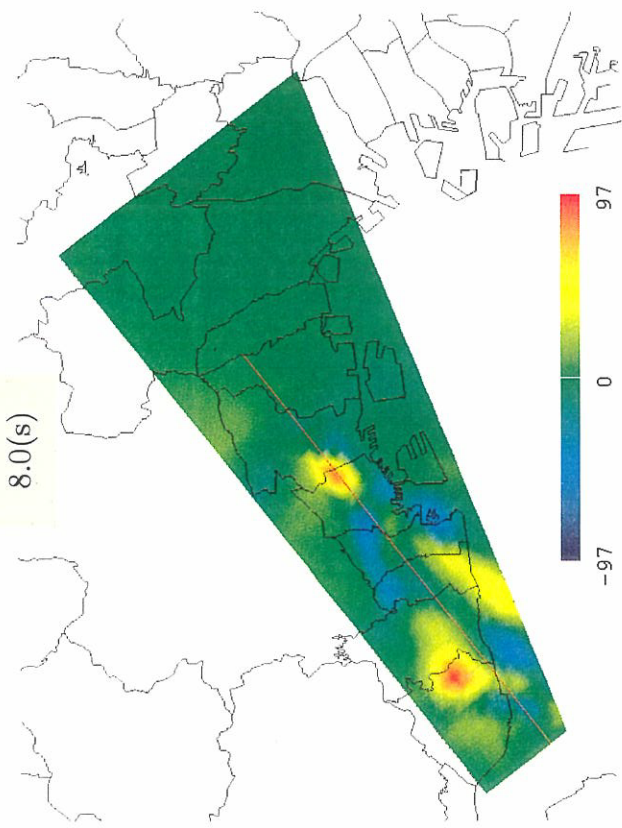
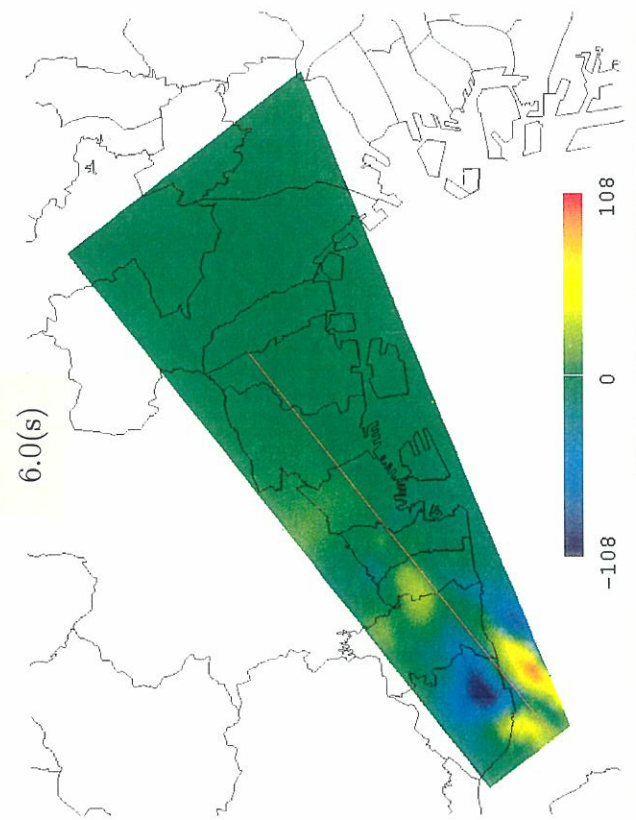
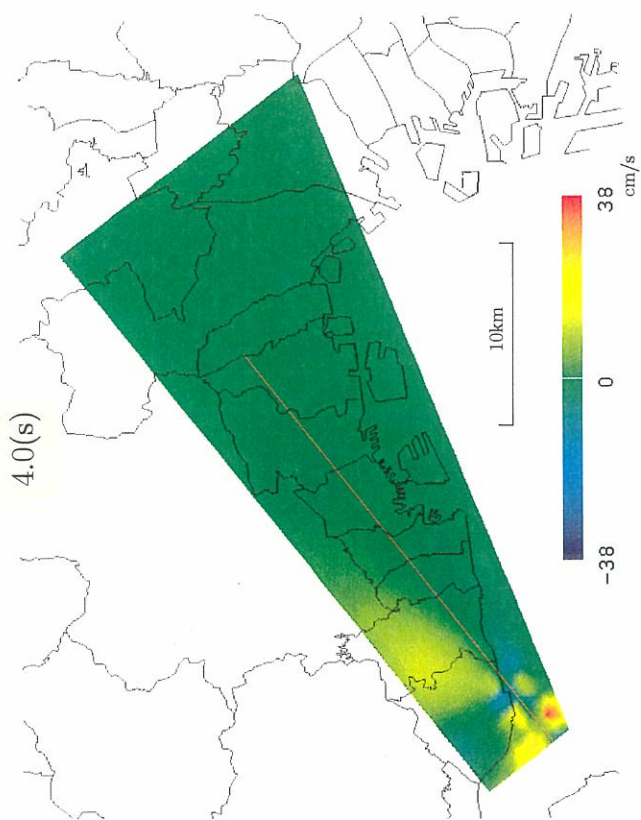


図-6.30: 破壊開始後4秒～10秒の断層平行方向水水平動のスナップショット

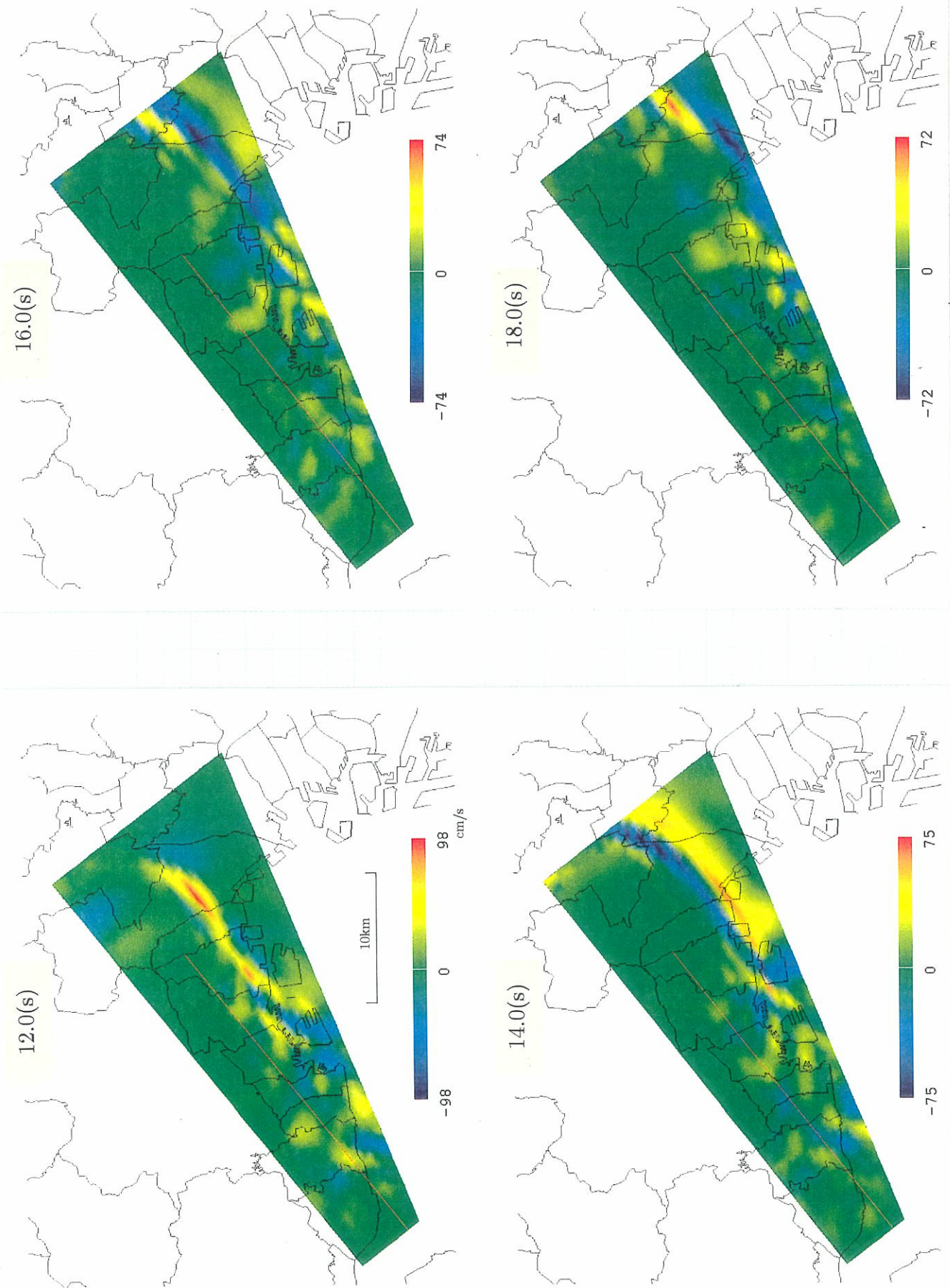


図-6.31: 破壊開始後12秒～18秒の断層平行方向水平動のスナップショット

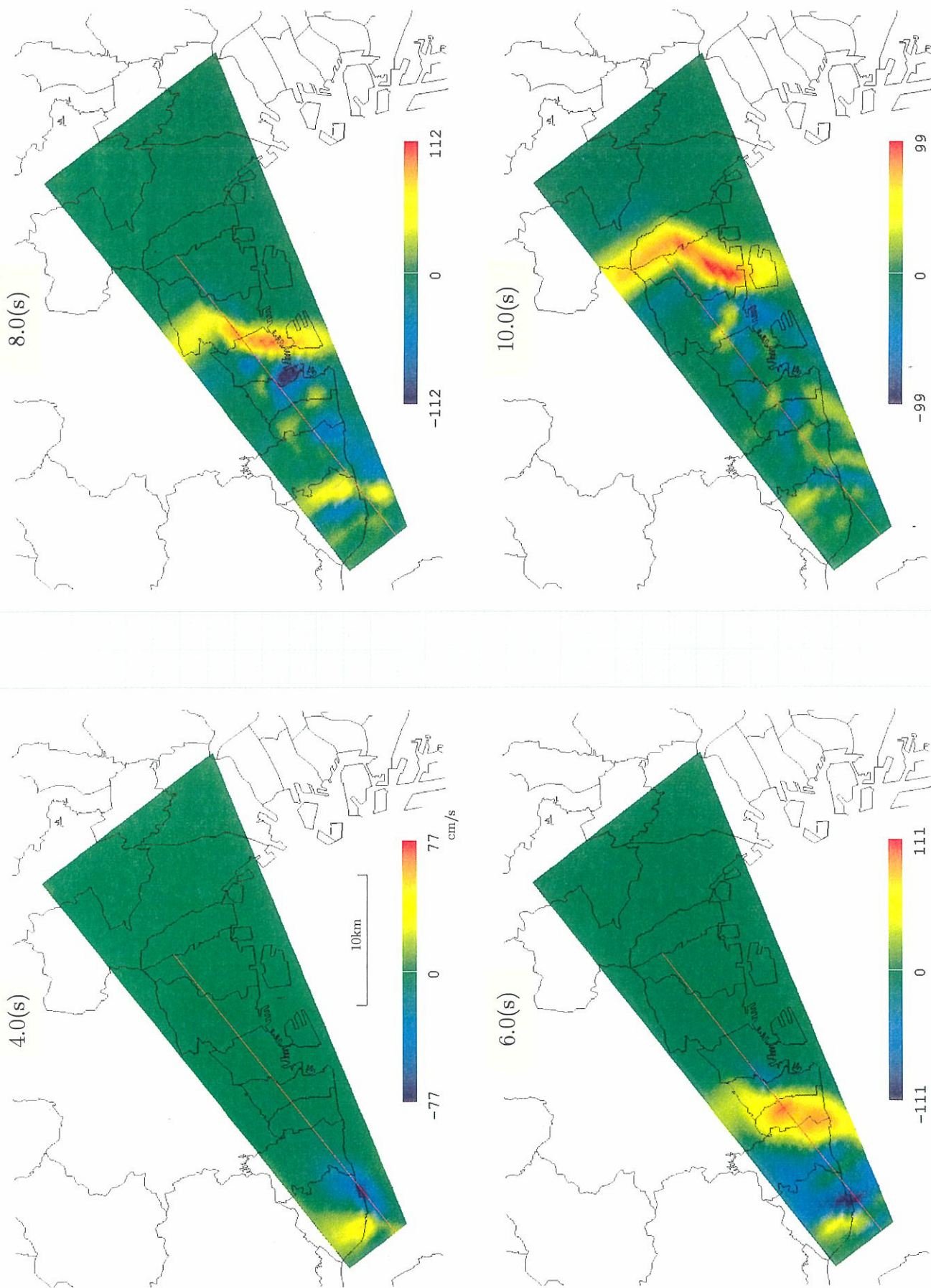


図-6.32: 破壊開始後4秒~10秒の断層直交方向水水平動のスナップショット

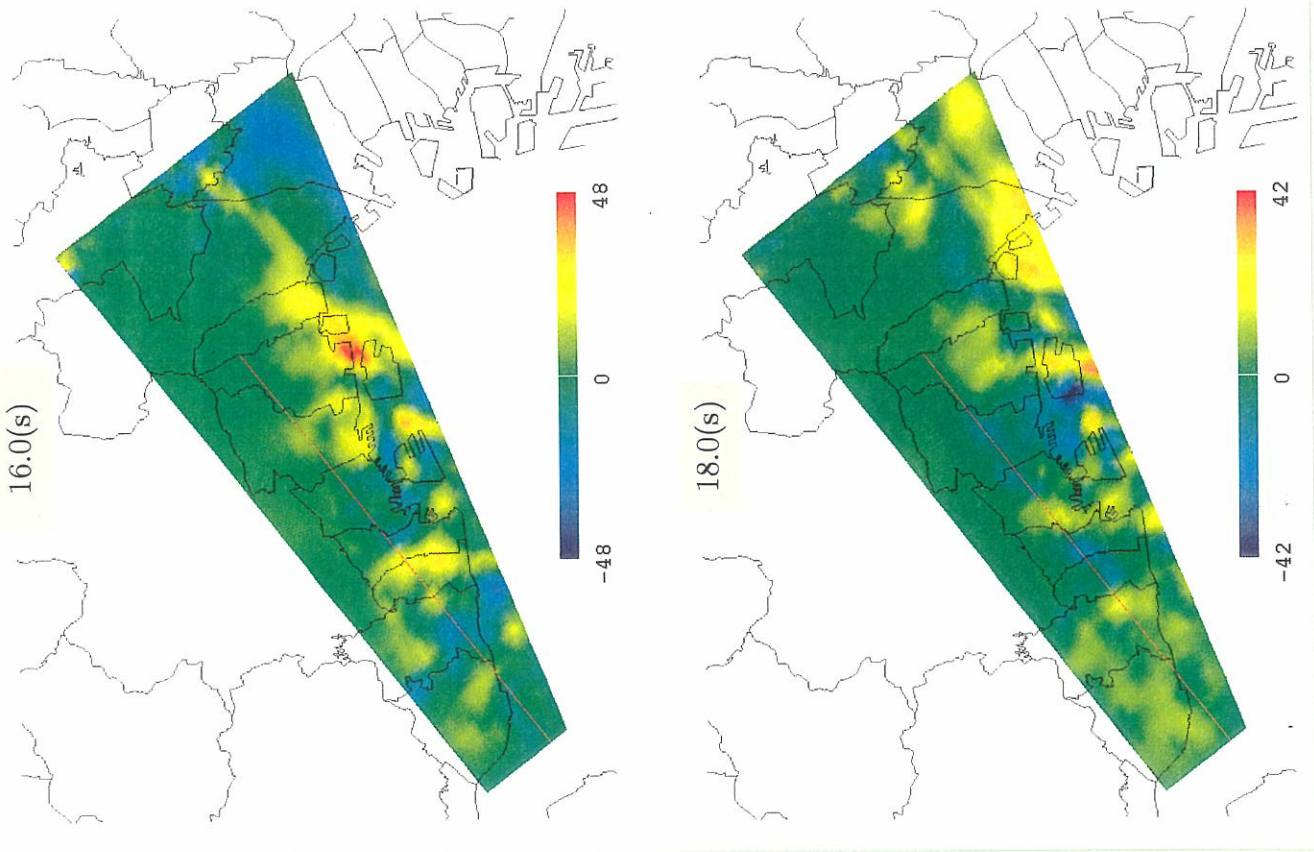
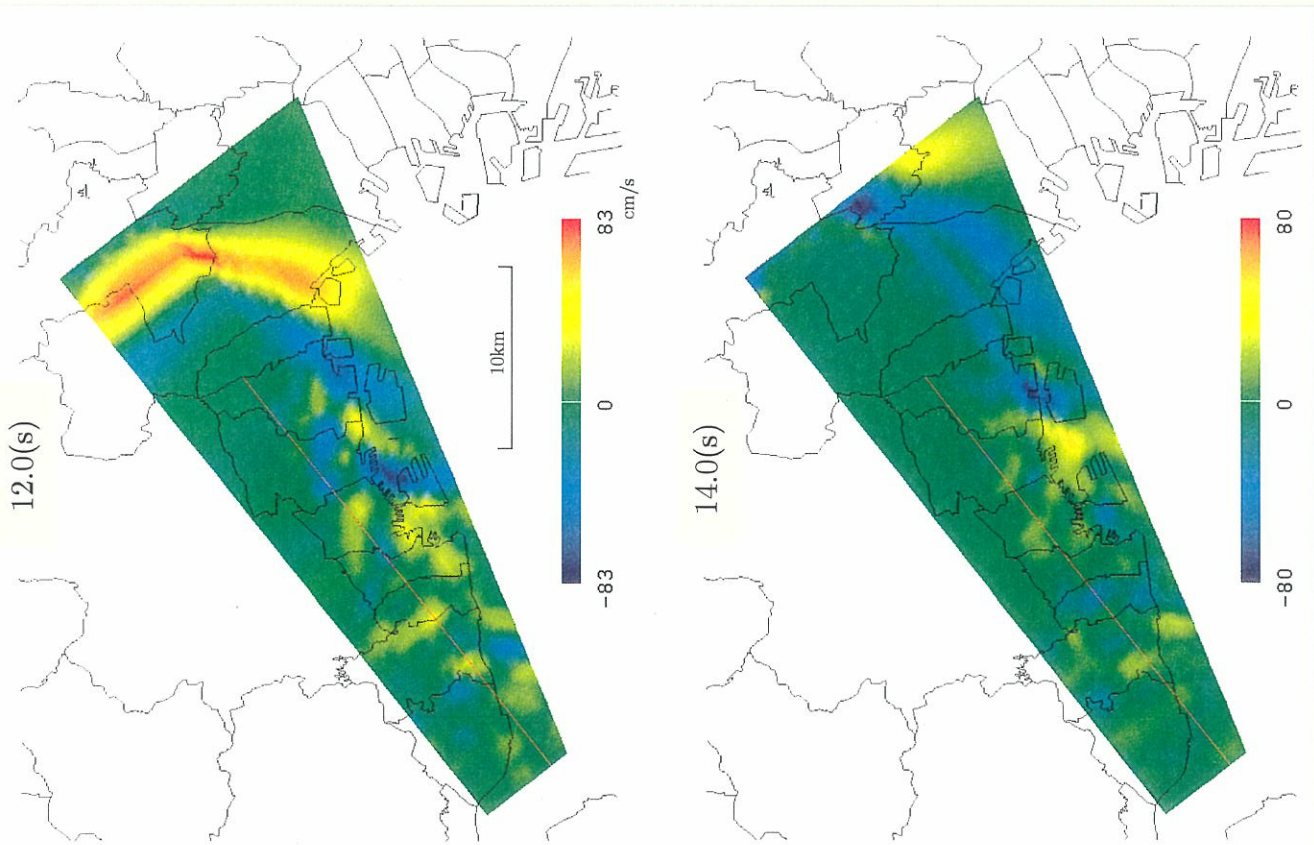


図-6.33: 破壊開始後12秒～18秒の断層直交方向水平動のスナップショット

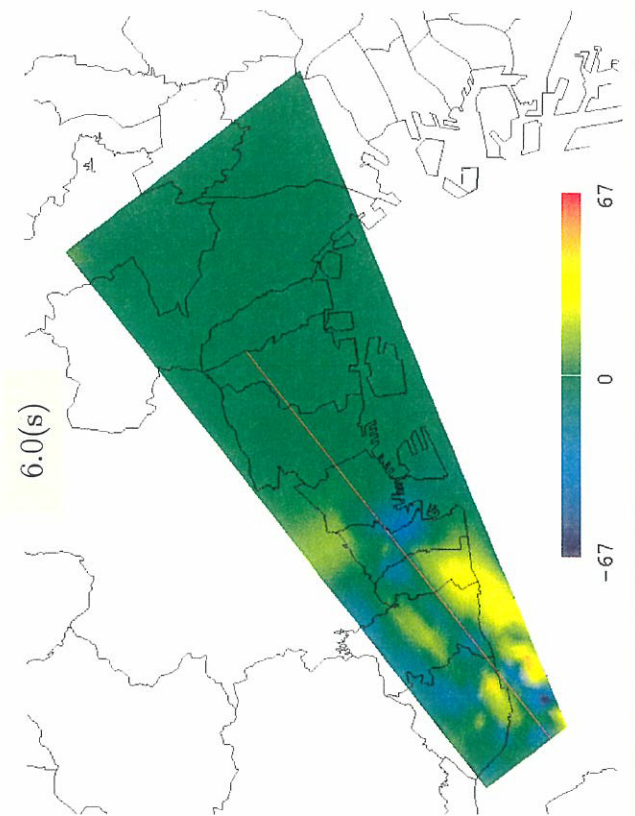
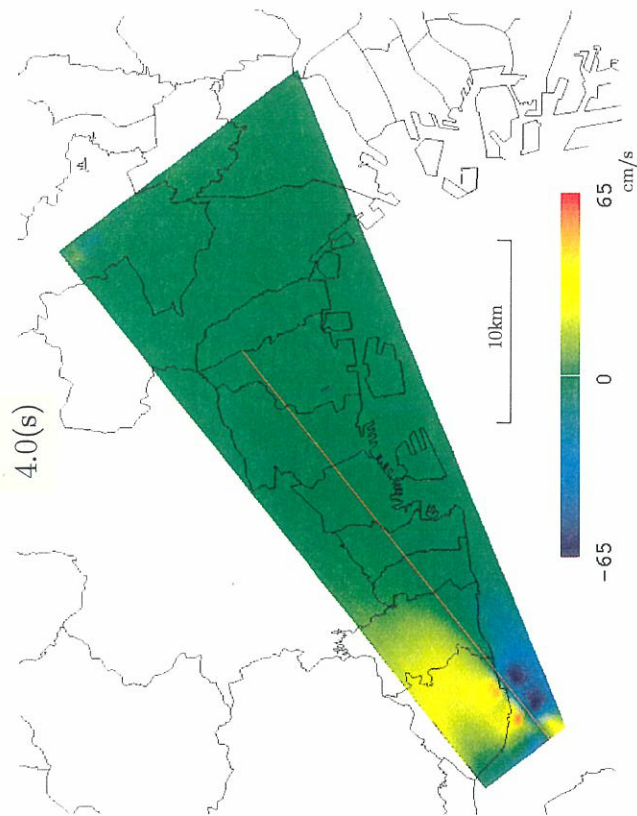
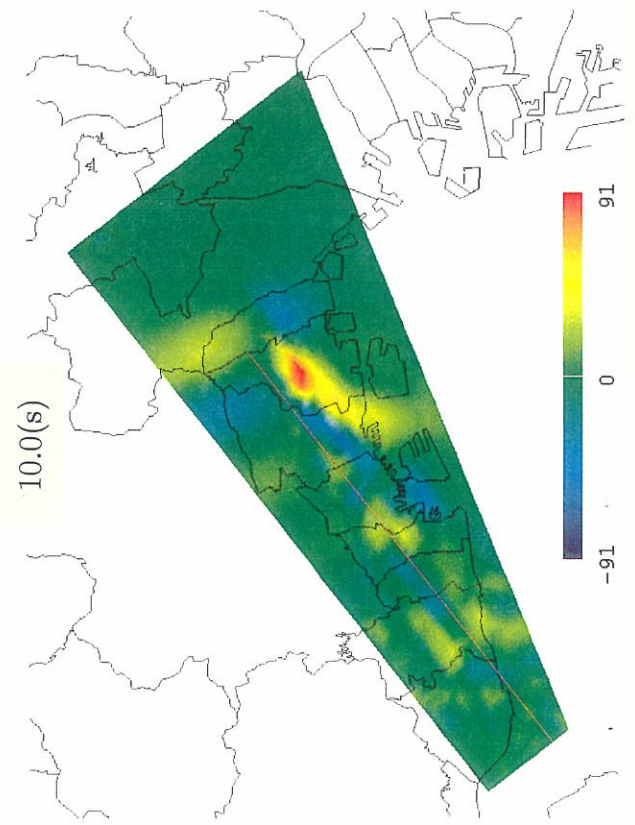
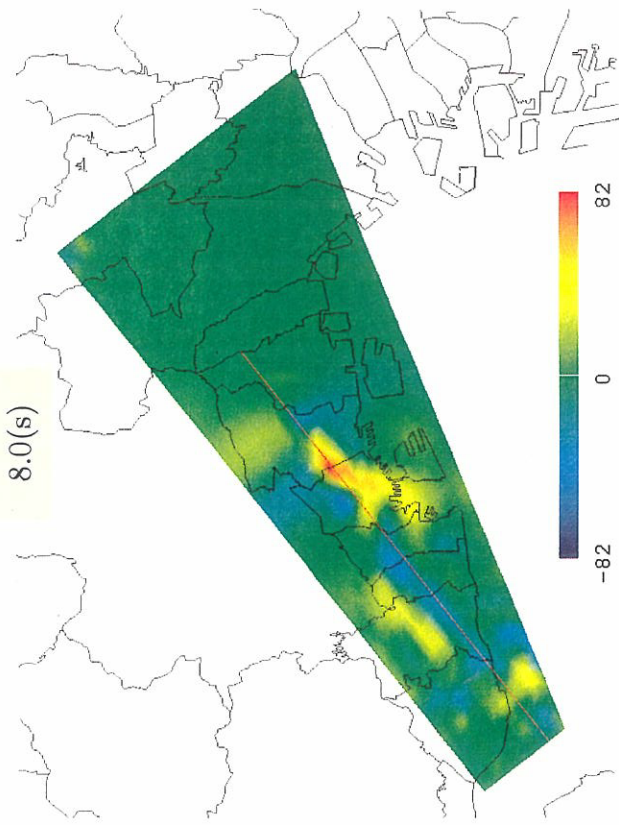


図-6.34: 破壊開始後4秒～10秒の上下動のスナップショット

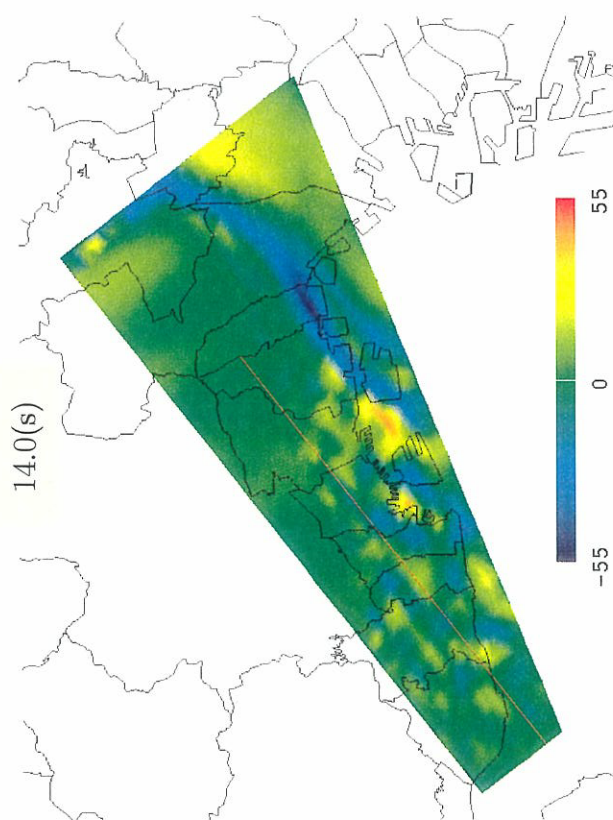
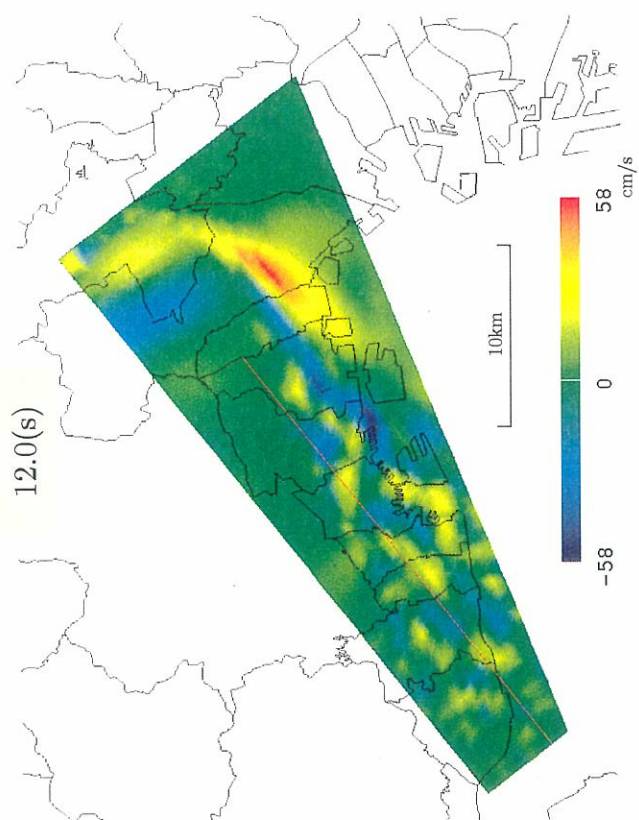
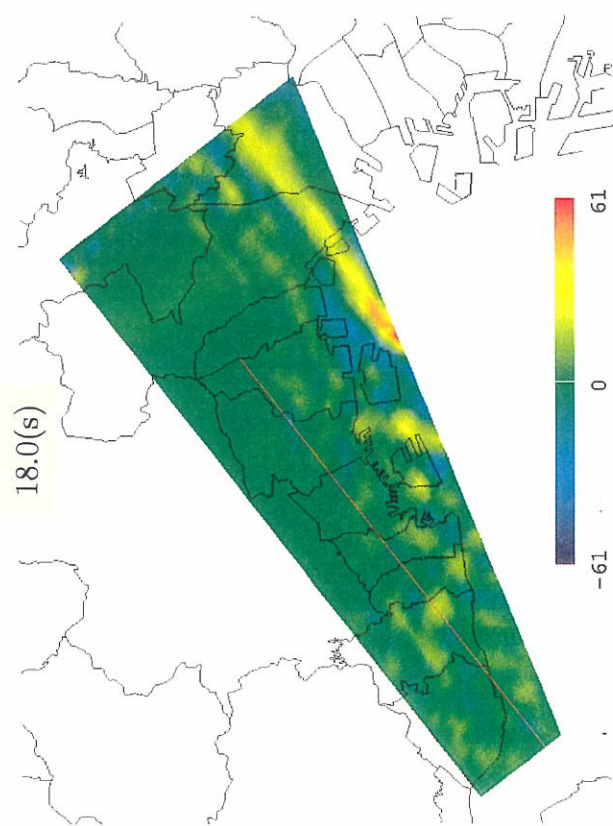
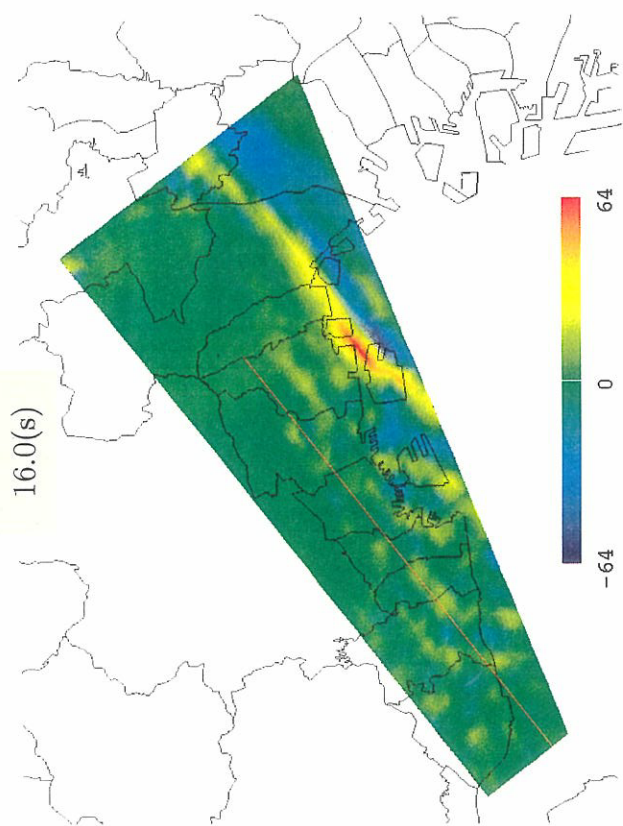


図-6.35: 破壊開始後12秒～18秒の上下動のスナップショット

6.4 まとめ

本章では、神戸市周辺の地盤を二層地盤にモデル化し、さらに逆解析で求められた震源過程を取り入れて境界要素法による三次元地震動シミュレーションを行った。

神戸大学や尼崎などで得られた観測記録と計算波形を比較し、約2秒以上の周期成分がよく再現できていることを示した。また、断層の近傍では、観測記録、計算結果ともに断層直交方向成分が卓越した粒子軌道を描いた。これらのことから、本章で行ったシミュレーションにより、実際の現象をある程度再現できていることが確認された。

計算結果から水平動合成波形の最大速度分布を描き、震度VIIの地域内の地震動が、浅い地盤だけでなく、深い基盤構造と断層の破壊伝播によっても増幅されたことを明らかにした。このことは従来の研究によっても指摘されてきたが、三次元シミュレーションを行い、平面的な地震動強さの分布を再現したという点で本章の結果は重要と考えられる。また、大阪平野で観測された表面波の伝播方向についても、観測記録と調和する結果を得た。

なお、計算には東京工業大学総合情報処理センターCRAY C916/12256を使用し、要したCPU時間は約56時間であった。

前章と本章で行った三次元地震動シミュレーションには、非常に高速な計算機を用いても50時間以上の計算時間を要した。境界要素法は密なマトリクスを用いて陰解法で解かれるため、必要な記憶容量も非常に大きい。このため、差分法で行われているような大規模な地盤モデルを用いたシミュレーション[32, 33, 37, 38, 40]を、通常境界要素法によって行うことは現時点では不可能に近い。

しかし、境界要素法の計算を高速に実行するための研究が近年盛んに行われており[121, 122, 123]、その成果を本研究で開発した手法に取り入れることによって、より大規模で細かい地盤モデルを用いた地震動シミュレーションが可能になると期待できる。

第7章

結論

本研究では、従来よりも精度のよい強震動予測のために、境界要素法およびFE-BE法を三次元空間に適用するとともに震源断層モデルを導入することによって、震源近傍における地震動のシミュレーション手法を開発した。また、開発した手法を用いて1994年Northridge地震、1995年兵庫県南部地震のシミュレーションを行い、観測記録等と比較することで手法の妥当性、有用性を検証した。これらを通じて得られた成果を以下に示す。

第1章では、理論的手法による地震動シミュレーションに関する既往の研究を概観し、その中で従来よりも精度のよい強震動予測のために、境界要素法およびFE-BE法を三次元空間に適用した手法を開発する必要性が高いことを述べた。

第2章では、三次元空間の弾性波動方程式を誘導し、次に周波数領域における三次元弾性波動方程式の基本解を解析的に導出した。また、得られた基本解が特異項と正則項に分解できることを示し、変位の基本解は弱い特異性をもつが広義積分可能であること、表面力の基本解は強い特異性をもち、Cauchyの主値の意味で積分を評価する必要があることを指摘した。

第3章では、三次元有限要素法および直接法に基づく三次元境界要素法の定式化を行った。その際、この2つの手法を結合するためには、三次元空間における特異積分とfree-termの直接的な評価が望ましいこと、近年提案された方法によってそれが可能であることを論じた。ここで定式化した三次元FE-BE法は、この直接評価に基づいて、境界条件を完全に満たして有限要素法と境界要素法を結合していることが最大の特徴である。また、単純なモデルを用いた地盤震動解析を行い、既往の研究と比較することで、特異性を直接評価した三次元境界要素法が妥当な計算結果を与えるものであることを確認した。

第4章では、震源近傍を対象とした地震動シミュレーションを行うために、前章で定式化した手法に震源断層モデルを導入した。その際、断層面境界に関する基本解を核とする積分は、断層を小断層に分割することで評価することを考えた。そして、震源断層モデルを導入した三次元FE-BE法による数値解析を行った結果、断層のごく近傍に位置する点においても精度のよい計算波形が得られた。このことから、くい違い移動震源が適切に導入されていること、断層を十分多くの小断層に細分すれば断層面境界に関する積分を十分に評価できること、有限要素法と境界要素法の

結合が適切になされていること，を確認することができた。

第5章では，1994年Northridge地震の震源断層およびSan Fernando谷をモデル化し，三次元FE-BE法に震源断層モデルを導入した手法を用いて地震動シミュレーションを行った。その結果，水平動の振幅レベルについては，二次元モデルよりも三次元モデルを用いた場合の方が観測記録とよく一致した。上下動の観測記録は再現できなかったが，これは地盤のモデル化の粗さ，震源過程の単純化などの理由によるものと思われる。次に，計算結果からNorthridge地震の際のSan Fernando谷における地表最大速度分布図を描き，地震動強さが地盤構造，および観測点と断層との位置関係に大きく影響されることを確認した。また，大まかな傾向においては強震記録に基づく最大速度分布図とも一致した。しかし，やはり同様の理由からと思われるが，細部にわたって実際の現象を再現するには至らなかった。

第6章では，神戸市周辺の地盤を二層地盤にモデル化し，推定された震源過程を取り入れて三次元直接境界要素法による地震動シミュレーションを行った。神戸大学や尼崎で得られた速度波形と計算波形を比較し，約2秒以上の周期成分がよく再現できていることを示した。また，断層の近傍では，観測記録，計算結果ともに断層直交方向成分が卓越した粒子軌道を描くことが確かめられた。さらに，水平動合成波形の最大速度分布を描き「震災の帯」と比較することによって，震度VIIの地域内の地震動が，浅い地盤だけでなく，深い基盤構造と断層の破壊伝播の双方と密接に関連していることを明らかにした。また，地震動強さの分布の時間的変化を図示し，大阪平野で観測された表面波の伝播方向について観測記録と調和する結果を得た。

以上，各章ごとに得られた成果をまとめた。特に第5章と第6章の成果から，開発した地震動シミュレーション手法の有用性を実証することができた。現時点では短周期成分の計算に制約があるが，手法としては計算時間が短縮できれば十分な実用性があるものといえる。したがって，本手法を用いて強震動予測を行う場合の課題は，地盤モデル，断層モデルを精度よく構築することである。

付録 A

Gauss の発散定理による重み付き残差表示式の変形

ここでは、第3章3.3.1に示した式(3.42)から式(3.43)への変形の過程を追っていく。式(3.42)の左辺の積分を I とおき、再度次式に示す。

$$I = \int_{\Omega} \{(\lambda + \mu)u_{k,jk}(\mathbf{x}_0) + \mu u_{j,kk}(\mathbf{x}_0) + \rho\omega^2 u_j(\mathbf{x}_0) + \bar{b}_j(\mathbf{x}_0)\} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\Omega(\mathbf{x}_0) \quad (\text{A.1})$$

この式は、基本解 U_{ij} を重み関数として、Fourier 変換面における弾性波動方程式(2.7)に、領域 Ω について重み付き残差法を適用したものである。

まず、被積分関数の第1項を次のように2通りに変形する。ただし、引数は省略して示す。

$$\begin{aligned} \lambda u_{k,jk} U_{ij} &= \lambda \{ (u_{k,k} U_{ij})_{,j} - u_{k,k} U_{ij,j} \} = \lambda \{ (u_{k,k} U_{ij})_{,j} - (u_k U_{ij,j})_{,k} + u_k U_{ij,jk} \} \\ \mu u_{k,jk} U_{ij} &= \mu \{ (u_{k,j} U_{ij})_{,k} - u_{k,j} U_{ij,k} \} = \mu \{ (u_{k,j} U_{ij})_{,k} - (u_k U_{ij,k})_{,j} + u_k U_{ij,jk} \} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

次の式は一般に Gauss の発散定理とよばれるもので、ある空間 Ω 内でベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の発散を総和すれば、その境界 Γ 上における \mathbf{a} の外向き法線方向成分の総和に等しいことを示している [124]。

$$\int_{\Omega} a_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} a_i n_i d\Gamma \quad (\text{A.3})$$

式(A.2)を考慮して式(A.3)を適用すれば、式(A.1)の第1項 I_1 は次のようになる。ただし、総和をとる添字は適宜変更している。

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} (\lambda + \mu) u_{k,jk}(\mathbf{x}_0) U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\Omega(\mathbf{x}_0) \\ &= (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u_k U_{ij,jk} d\Omega \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} \{ (u_{k,k} U_{ij})_{,j} - (u_k U_{ij,j})_{,k} \} d\Omega + \mu \int_{\Omega} \{ (u_{k,j} U_{ij})_{,k} - (u_k U_{ij,k})_{,j} \} d\Omega \\ &= (\lambda + \mu) \int_{\Omega} U_{ij,jk} u_k d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\lambda U_{ij,j} n_k + \mu U_{ij,k} n_j) u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} (\lambda u_{k,k} n_j + \mu u_{k,j} n_k) U_{ij} d\Gamma \\ &= (\lambda + \mu) \int_{\Omega} U_{ik,jk} u_j d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\lambda U_{im,m} \delta_{jk} + \mu U_{ik,j}) n_k u_j d\Gamma + \int_{\Gamma} (\lambda u_{m,m} \delta_{jk} + \mu u_{k,j}) n_k U_{ij} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

式(A.3)の Gauss の発散定理の応用として、スカラー関数 u, v およびその一階の偏微分係数が一価で連続であるとき、次の Green の定理が成り立つ [124]。

$$\int_{\Omega} uv_{,ii} d\Omega = \int_{\Omega} vu_{,ii} d\Omega + \int_{\Gamma} (uv_{,n} - vu_{,n}) d\Gamma \quad (\text{A.5})$$

このGreenの定理を式(A.1)の第2項 I_2 に適用し、方向微分に関する式(2.32)の関係を用いれば次のようになる。

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega} \mu u_{j,kk} U_{ij} d\Omega = \mu \int_{\Omega} U_{ij,kk} u_j d\Omega + \mu \int_{\Gamma} (u_{j,n} U_{ij} - U_{ij,n} u_j) d\Gamma \\ &= \mu \int_{\Omega} U_{ij,kk} u_j d\Omega + \mu \int_{\Gamma} (u_{j,k} n_k U_{ij} - U_{ij,k} n_k u_j) d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

式(A.4), (A.6)を式(A.1)に代入して整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} \left\{ (\lambda + \mu) U_{ik,jk} + \mu U_{ij,kk} + \rho \omega^2 U_{ij} \right\} u_j d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left\{ \lambda U_{im,m} \delta_{jk} + \mu (U_{ik,j} + U_{ij,k}) \right\} n_k u_j d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left\{ \lambda u_{m,m} \delta_{jk} + \mu (u_{j,k} + u_{k,j}) \right\} n_k U_{ij} d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij} \bar{b}_j d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

ここで、表面力の基本解 T_{ij} は式(2.29)に次のように定義されている。

$$T_{ij} = \left\{ \lambda U_{im,m} \delta_{jk} + \mu (U_{ij,k} + U_{ik,j}) \right\} n_k \quad (\text{A.8})$$

また、式(2.8)に式(2.4), (2.5)を代入すると、表面力 τ_i は変位によって次式で表されることが分かる。

$$\tau_i = \left\{ \lambda u_{m,m} \delta_{ik} + \mu (u_{i,k} + u_{k,i}) \right\} n_k \quad (\text{A.9})$$

式(A.8), (A.9)を式(A.7)に代入し、引数も示すと次式となる。

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} \left\{ (\lambda + \mu) U_{ik,jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \mu U_{ij,kk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \rho \omega^2 U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \right\} u_j(\mathbf{x}_0) d\Omega(\mathbf{x}_0) \\ &\quad - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \tau_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \\ &\quad + \int_{\Omega} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \bar{b}_j(\mathbf{x}_0) d\Omega(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

この式は式(3.43)の左辺そのものである。Greenの定理(A.5)をLaplace方程式にGaussの発散定理を適用したものとみれば、式(A.1)から式(A.10)への変形は、弾性波動方程式にGaussの発散定理を適用したものと考えることができる。つまり、この変形は弾性波動方程式に対するGreenの定理を表している。

付録B

三次元境界要素法における特異積分の評価

ここでは第3章3.4.1で述べたように, Guiggiani and Gigante[91]に従って三次元境界要素法における特異積分を直接評価する方法を示す.

物体力がない場合のSomigliana恒等式(3.46)において, 観測点 \boldsymbol{x} を境界 Γ 上にとり, 特異点の発生を防ぐために図-B.1のように境界の外側に観測点 \boldsymbol{x} を中心とする半径 ε の微小球面 $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ を付加する[80]. このとき, 図のように全境界は $\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon$ となり, 点 \boldsymbol{x} は領域 Ω 内の点であるから, 次式が成り立つ.

$$u_i(\boldsymbol{x}) = - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} T_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) u_j(\boldsymbol{x}_0) d\Gamma(\boldsymbol{x}_0) + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \tau_j(\boldsymbol{x}_0) d\Gamma(\boldsymbol{x}_0) \quad (\text{B.1})$$

式(B.1)の右辺第1項を I とおき, 半球の半径 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると,

$$I = c_{ij}(\boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) u_j(\boldsymbol{x}_0) d\Gamma(\boldsymbol{x}_0) \quad (\text{B.2})$$

のように主値積分で表される. c_{ij} はfree-termであり, その評価方法は付録Cで述べる.

図-B.2のように点 \boldsymbol{x} を含む要素 m の領域を Γ_p^m と表し, $\Gamma_p = \cup_k \Gamma_p^k$ として特異積分の部分分離する.

$$I = c_{ij}(\boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}) + \int_{\Gamma_p} T_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) u_j(\boldsymbol{x}_0) d\Gamma(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{\substack{e \\ e \neq m}} \int_{\Gamma_e} T_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) u_j(\boldsymbol{x}_0) d\Gamma(\boldsymbol{x}_0) \quad (\text{B.3})$$

右辺第3項の積分は特異積分ではないので, 数値積分で評価することができる. 右辺第2項を I_p とおくと, 式(2.42)から次のように表せる.

$$I_p = \int_{\Gamma_p} T_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) u_j(\boldsymbol{x}_0) d\Gamma(\boldsymbol{x}_0) + \int_{\Gamma_p} T_{ij}^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) u_j(\boldsymbol{x}_0) d\Gamma(\boldsymbol{x}_0) \quad (\text{B.4})$$

ここで, 右辺第2項は特異積分ではないので, これも数値積分で評価することができる. 右辺第1項を $I_p^{(s)}$ とおくと, 主値積分の定義から次のように表せる.

$$\begin{aligned} I_p^{(s)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_p - \Gamma_\varepsilon} T_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) u_j(\boldsymbol{x}_0) d\Gamma(\boldsymbol{x}_0) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{\Gamma_p^m - \Gamma_\varepsilon^m} T_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) u_j(\boldsymbol{x}_0) d\Gamma(\boldsymbol{x}_0) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

ここで, 式(2.44)より, 表面力の基本解の特異項 $T_{ij}^{(s)}$ は次式で表される.

$$T_{ij}^{(s)} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,n} + r_{,j}n_i - r_{,i}n_j) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,n} \right\} \quad (\text{B.6})$$

式(B.5)の要素に関する積分において, 平面要素を用いるならば作用点 \boldsymbol{x}_0 と観測点 \boldsymbol{x} は同一平面上にあるため, $r_{,n} = 0$ である. したがって, 式(B.6)から $I_p^{(s)}$ は次式で表される.

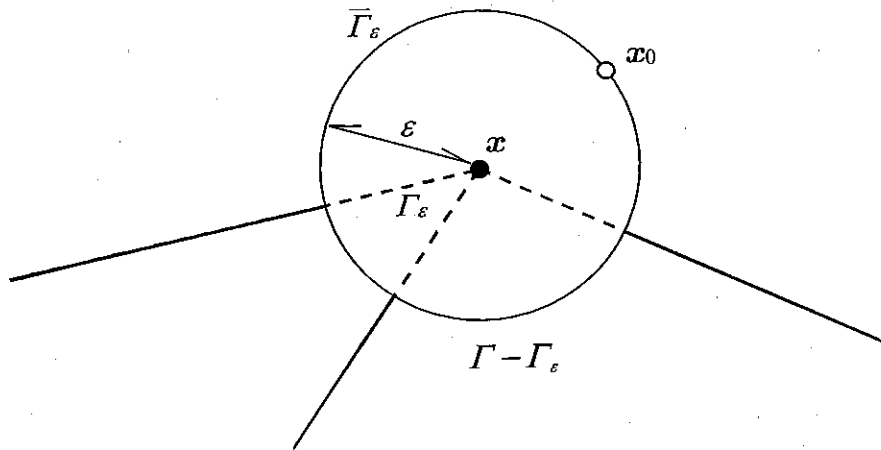


図-B.1: 微小球面 $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ を付加した境界

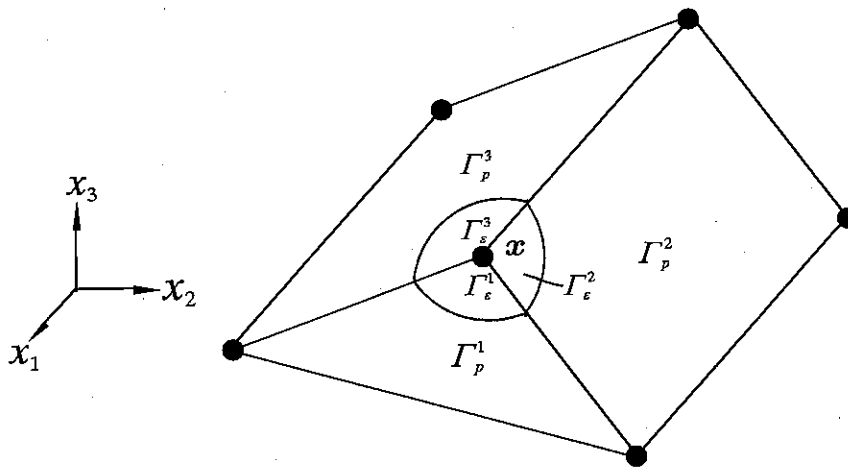


図-B.2: 特異点を含む要素と記号の定義

$$I_p^{(s)} = -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} l_i \quad (\text{B.7})$$

ここで,

$$l_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{\Gamma_p^m - \Gamma_\varepsilon^m} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \quad (\text{B.8})$$

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{r^2} (r_{,j} n_i - r_{,i} n_j) \quad (\text{B.9})$$

である。したがって、結局式(B.8)の積分が問題である。

まず、補間関数マトリクス $[N]$ と要素 m の節点変位ベクトル $\{u^m\}$ を用いて式(B.8)を節点変位で表し、マトリクス表示する。

$$\{\ell\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{\gamma_p^m - \gamma_\varepsilon^m} [T(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{x}_0(\xi))] [N(\xi)] J^m(\xi) d\xi \{u^m\} \quad (\text{B.10})$$

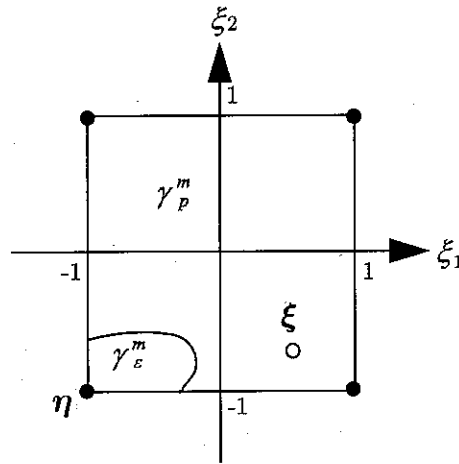


図-B.3: 要素 m の局所座標系への写像

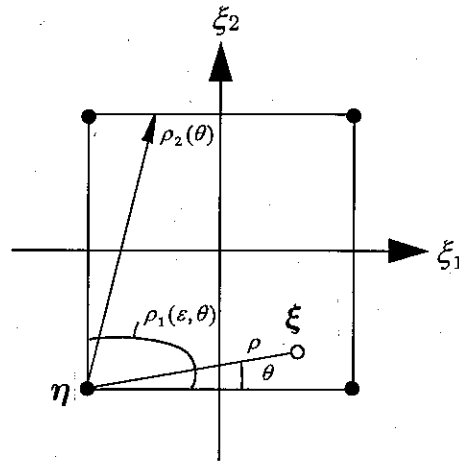


図-B.4: 局所直交座標系における極座標

ここで、図-B.3に示すように、要素は ξ_1 - ξ_2 局所座標系に写像され、同時に作用点 \mathbf{x}_0 は点 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ に、観測点 \mathbf{x} は点 $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ に写像されている。また、 γ_p^m は Γ_p^m の写像、 γ_ϵ^m は Γ_ϵ^m の写像であり、 $\{l\}$ は l_i を i 成分とする3行ベクトル、 $[T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)]$ は $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ を ij 成分とする 3×3 マトリクスを表す。図には四角形要素を用いた場合を示しているが、三角形要素を用いても全く同様である。

さらに観測点 \mathbf{x} の写像 η を原点とする極座標 (ρ, θ) を図-B.4のようにとると、 ξ_1 - ξ_2 座標系上の作用点 ξ は極座標を用いて

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\eta_1 + \rho \cos \theta, \eta_2 + \rho \sin \theta) \quad (\text{B.11})$$

と表せる。また、このとき

$$d\xi = d\xi_1 \xi_2 = \rho d\rho d\theta \quad (\text{B.12})$$

である。

これらの関係を用いて式(B.10)の積分の変数変換を行うと次式となる。

$$\{\ell\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_{\rho_1^m(\varepsilon, \theta)}^{\rho_2^m(\theta)} [F^m(\rho, \theta)] d\rho d\theta \{u^m\} \quad (\text{B.13})$$

ここで, $[F^m(\rho, \theta)]$ は次式で表される。

$$[F^m(\rho, \theta)] = [T(\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{x}_0(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta)))] [N(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta))] |J^m(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta))| \rho \quad (\text{B.14})$$

全体座標系における作用点と観測点の座標をそれぞれ $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ とすると, 観測点の近傍においては Taylor 展開により次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \chi_i - x_i &= \left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_1} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}} (\xi_1 - \eta_1) + \left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_2} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}} (\xi_2 - \eta_2) + O(\rho^2) \\ &= \rho \left(\left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_1} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}} \cos \theta + \left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_2} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}} \sin \theta \right) + O(\rho^2) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

ここで,

$$\begin{aligned} a_i(\theta) &= \left(\left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_1} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}} \cos \theta + \left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_2} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}} \sin \theta \right) \\ a(\theta) &= \sqrt{a_k(\theta) a_k(\theta)} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

とおくと,

$$\begin{aligned} r^2 &= |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|^2 = \rho^2 a^2(\theta) + O(\rho^3) \\ r_{,i} &= \frac{\chi_i - x_i}{r} = \frac{a_i(\theta)}{a(\theta)} + O(\rho) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

と表せる。したがって, 式(B.9)より $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ は (ρ, θ) を用いて次式で表される。

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0(\rho, \theta)) = \frac{1}{\rho^2} (A_{ij}(\theta) + O(\rho)) \quad (\text{B.18})$$

ここで,

$$A_{ij}(\theta) = \frac{a_j(\theta) n_i - a_i(\theta) n_j}{a^3(\theta)} \quad (\text{B.19})$$

である。さらに $[A(\theta)]$ を $A_{ij}(\theta)$ を ij 成分とする 3×3 マトリクスとすれば, 式(B.18), (B.19) から $[T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0(\rho, \theta))]$ は次式で表される。

$$[T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0(\rho, \theta))] = \frac{1}{\rho^2} ([A(\theta)] + O(\rho)) \quad (\text{B.20})$$

式(B.20)を式(B.14)に用いると, 観測点 \mathbf{x} の近傍では次式が成り立つことになる。

$$[F^m(\rho, \theta)] = \frac{1}{\rho} ([G^m(\theta)] + O(\rho)) \quad (\text{B.21})$$

ただし,

$$[G^m(\theta)] = [A(\theta)][N(\boldsymbol{\eta})]|J^m(\boldsymbol{\eta})| \quad (\text{B.22})$$

である。ここで、 $r \rightarrow 0$ のとき $\rho \rightarrow 0$ であるが、 $A_{ij}(\theta) \neq 0$ なので、 $[G^m(\theta)]$ の成分は全て正則な関数である。

ところで、図-B.2における要素 m 上の平面領域 Γ_ε^m の輪郭の一部をなす円弧は次式で与えられる。

$$\varepsilon^2 = (\chi_k - x_k)(\chi_k - x_k) \quad (\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \Gamma_p^m) \quad (\text{B.23})$$

この円弧は式(B.15)、(B.16)より、 ξ_1 - ξ_2 局所座標系では

$$\varepsilon^2 = \rho^2 a^2(\theta) + O(\rho^3) \quad (\text{B.24})$$

となる。この式は図-B.4に示した $\rho_1^m(\varepsilon, \theta)$ を表すものであるから、

$$\rho = \rho_1^m(\varepsilon, \theta) = \frac{\varepsilon}{a(\theta)} + O(\varepsilon^2) \quad (\text{B.25})$$

となる。

以上から、観測点 \mathbf{x} 近傍の積分区間 $\rho: 0 \rightarrow \rho_1^m(\varepsilon, \theta)$ では式(B.21)が成り立つので、式(B.13)より、

$$\begin{aligned} \{\ell\} &= \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_0^{\rho_2^m(\theta)} [F^m(\rho, \theta)] d\rho d\theta \{u^m\} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_0^{\rho_1^m(\varepsilon, \theta)} \frac{1}{\rho} [G^m(\theta)] d\rho d\theta \{u^m\} \\ &= \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_0^{\rho_2^m(\theta)} \left([F^m(\rho, \theta)] - \frac{1}{\rho} [G^m(\theta)] \right) d\rho d\theta \{u^m\} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_{\rho_1^m(\varepsilon, \theta)}^{\rho_2^m(\theta)} \frac{1}{\rho} [G^m(\theta)] d\rho d\theta \{u^m\} \\ &= \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_0^{\rho_2^m(\theta)} \left([F^m(\rho, \theta)] - \frac{1}{\rho} [G^m(\theta)] \right) d\rho d\theta \{u^m\} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} [G^m(\theta)] \ln \frac{\rho_2^m(\theta)}{\rho_1^m(\varepsilon, \theta)} d\theta \{u^m\} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

とすることができる。式(B.26)に式(B.25)を代入すると、

$$\begin{aligned} \{\ell\} &= \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_0^{\rho_2^m(\theta)} \left([F^m(\rho, \theta)] - \frac{1}{\rho} [G^m(\theta)] \right) d\rho d\theta \{u^m\} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} [G^m(\theta)] \ln \frac{a(\theta)\rho_2^m(\theta)}{\varepsilon} d\theta \{u^m\} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

となる。式(B.27)の右辺第2項は

$$\sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} [G^m(\theta)] \ln a(\theta)\rho_2^m(\theta) d\theta \{u^m\} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \varepsilon \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} [G^m(\theta)] d\theta \{u^m\} \right) \quad (\text{B.28})$$

となるが、第2項は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \varepsilon \sum_m \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} [G^m(\theta)] d\theta \{u^m\} \right) = 0 \quad (\text{B.29})$$

となる必要があるので、結局式(B.27)は次式で表される。

$$\begin{aligned} \{\ell\} = \sum_m \left\{ \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_0^{\rho_2^m(\theta)} \left([F^m(\rho, \theta)] - \frac{1}{\rho} [G^m(\theta)] \right) d\rho d\theta \right. \\ \left. + \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} [G^m(\theta)] \ln(a(\theta)\rho_2^m(\theta)) d\theta \right\} \{u^m\} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

この式(B.30)からは特異性が完全に取り除かれているため、数値積分で評価することができる。数値積分を行うために、もう一度変数変換を行う。すなわち、積分変数 ζ_1, ζ_2 を次式のようにおく。

$$\zeta_1 = \frac{2\rho}{\rho_2^m(\theta)} - 1, \quad \zeta_2 = \frac{2\theta - (\theta_2^m + \theta_1^m)}{\theta_2^m - \theta_1^m} \quad (\text{B.31})$$

これによって、積分区間が $\zeta_1: -1 \rightarrow 1, \zeta_2: -1 \rightarrow 1$ に変更される。なお、

$$d\rho = \frac{\rho_2^m(\theta)}{2} d\zeta_1, \quad d\theta = \frac{\theta_2^m - \theta_1^m}{2} d\zeta_2 \quad (\text{B.32})$$

である。

したがって、式(B.30)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{\ell\} = \sum_m \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left([F^m(\rho(\zeta_1), \theta(\zeta_2))] - \frac{1}{\rho} [G^m(\theta(\zeta_2))] \right) \frac{\rho_2^m(\theta(\zeta_2))}{2} d\zeta_1 \frac{\theta_2^m - \theta_1^m}{2} d\zeta_2 \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 [G^m(\theta(\zeta_2))] \ln(a(\theta(\zeta_2))\rho_2^m(\theta(\zeta_2))) \frac{\theta_2^m - \theta_1^m}{2} d\zeta_2 \right\} \{u^m\} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

ただし、

$$\rho(\zeta_1) = \frac{(1 + \zeta_1)\rho_2^m(\theta)}{2}, \quad \theta(\zeta_2) = \frac{(\theta_2^m - \theta_1^m)\zeta_2 + (\theta_2^m + \theta_1^m)}{2} \quad (\text{B.34})$$

である。

式(B.33)は Gauss の数値積分で計算することができる形式になっている。

付録C

三次元境界要素法における free-term の評価

ここでは第3章3.4.1および付録Bで述べたように, Hartmann[76]とMantić[92]に従って三次元境界要素法における free-term を直接計算する方法を示す.

まず, 観測点 \mathbf{x} が対象領域 Ω の外側にある場合を考える. 図-C.1に示すように, \mathbf{x} を中心とした半径 ρ の球面 $K_\rho(\mathbf{x})$ による Ω の切断面を $S_\rho(\mathbf{x})$ とする. このとき, \mathbf{x} は Ω の外側にあるので, \mathbf{x} に関して Somigliana の内部相反式(3.45)が成り立つ. ただし物体力は考えない.

$$-\int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \tau_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (\text{C.1})$$

ここで, Γ は S_ρ を含めた全境界である.

$\rho \rightarrow 0$ の極限を考えると, 式(C.2)は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \\ &= - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \tau_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

ここでは左辺が問題なので, これを I とおく.

$$I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \quad (\text{C.3})$$

式(C.3)によると, T_{ij} が正則であれば $I = 0$ となるので, I の値は T_{ij} がもつ特異性による. したがって特異項のみを考えればよく, 式(2.44)から,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho} T_{ij}^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \\ &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho} \frac{1}{\rho^2} \left\{ (1-2\nu)(\delta_{ij} r_{,n} + r_{,j} n_i - r_{,i} n_j) + 3r_{,i} r_{,j} r_{,n} \right\} u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

と表せる.

ここで, \mathbf{x} を中心とした極座標 (ρ, θ, φ) を考える. S_ρ 上の積分を考えるならば,

$$d\Gamma(\mathbf{x}_0) = \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\mathbf{x}_0 \in S_\rho) \quad (\text{C.5})$$

の関係がある. また, $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とすると, 図-C.1から

$$x_i - x_i = -\rho n_i \quad (\text{C.6})$$

なので,

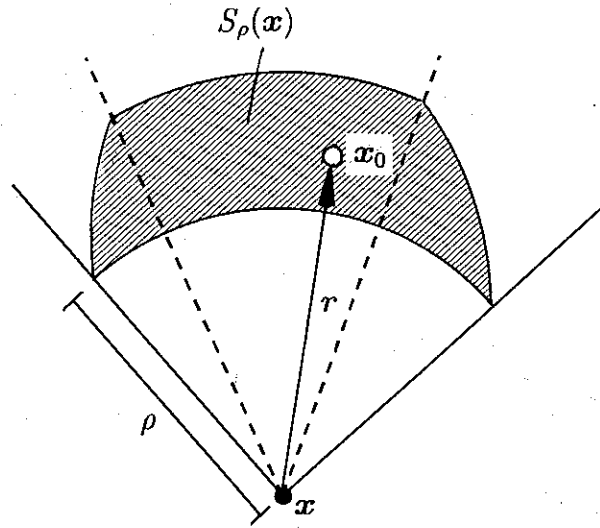


図-C.1: 切断面 S_ρ の定義

$$\begin{aligned}
 r_{,i} &= \frac{-\rho n_i}{\rho} = -n_i \\
 r_{,j} n_i - r_{,i} n_j &= n_j n_i - n_i n_j = 0 \\
 r_{,n} &= r_{,k} n_k = n_k n_k = -1
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

である。したがって、あるベクトル $\mathbf{w}(\varphi, \theta)$ ($|\mathbf{w}| = 1$) を考えて

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} + \rho \mathbf{w} \quad (\mathbf{x}_0 \in S_\rho) \tag{C.8}$$

と表し、式(C.5)、(C.7)を考慮すると、式(C.4)は次のようになる。

$$I = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho} \left\{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3n_i n_j \right\} u_j(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}) \sin \theta d\theta d\varphi \tag{C.9}$$

式(C.9)で、変位 u_j が \mathbf{x} の近傍でHölder連続[70]であるとすれば、

$$I = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho} \left\{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3n_i n_j \right\} \sin \theta d\theta d\varphi \cdot u_j(\mathbf{x}) \tag{C.10}$$

となるが、被積分関数が ρ に無関係になっているので、 $\rho = 1$ とすると、

$$I = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_{S_1} \left\{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3n_i n_j \right\} \sin \theta d\theta d\varphi \cdot u_j(\mathbf{x}) \tag{C.11}$$

と表せる。ただし、 $S_1 = S_\rho|_{\rho=1}$ である。

式(C.3)、(C.11)より、結果的に消去される項も含めて表すと、

$$I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) = c_{ij}(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) \tag{C.12}$$

$$c_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{S_1} T_{ij}^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\Gamma(\mathbf{x}_0) \tag{C.13}$$

となる。Hartmann[76]はこの $\rho = 1$ のときの切断面 S_1 を characteristic surface とよんでいる。すなわち、free-term は表面力の基本解の特異項を characteristic surface に関して積分することによって得られる。ここでは式(3.49)ではなく、式(C.13)から free-term を求めることにする。

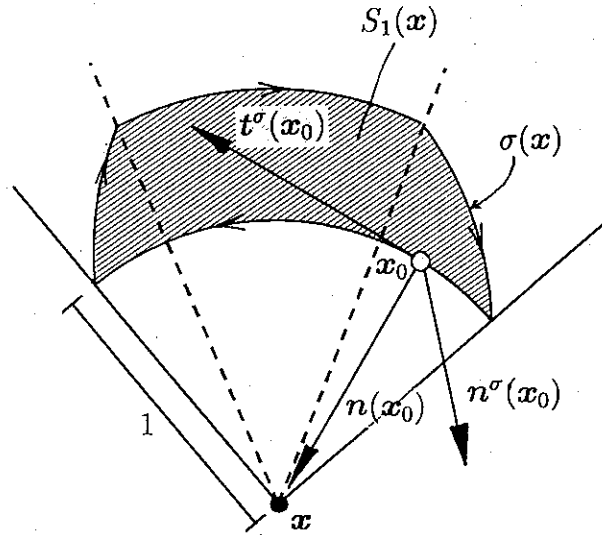


図-C.2: Characteristic surface S_1 と記号の定義

図-C.2のように, characteristic surface $S_1(x)$ の境界を $\sigma(x)$ とし, 点 x からみて反時計回りの $\sigma(x)$ の点 x_0 における単位接線ベクトルを $t^\sigma(x_0)$ とする. 点 x_0 から x へのベクトルは, $S_1(x)$ の点 x_0 における単位法線ベクトルであり, これを $n(x_0) = x - x_0$ とする. また, 点 x_0 における $\sigma(x)$ の法線ベクトルの一つ $n^\sigma(x_0)$ を

$$n^\sigma(x_0) = t^\sigma(x_0) \times n(x_0) \quad (x_0 \in \sigma(x)) \quad (\text{C.14})$$

と定義する.

点 x における立体角を $\phi(x)$ とすると, これは $S_1(x)$ の面積に等しく,

$$\phi(x) = \int_{S_1} d\Gamma(x_0) \quad (\text{C.15})$$

で表される. このことは, ある2直線のなす平面角が, その交点を中心とする半径1の円から2直線が切り取る円弧の長さに等しいことから類推できる.

ここで, $S_1(x)$ の近傍で C^1 級 (1回微分可能で1階導関数が連続) の任意関数を $f(x_0)$ とし, 次の微分演算子 D_{ij} を定義する.

$$D_{ij}(f(x_0)) = f_{,j}(x_0)n_i(x_0) - f_{,i}(x_0)n_j(x_0) \quad (\text{C.16})$$

このとき, $r_i = x_i - x_i$ として,

$$\begin{aligned} D_{ij}(r^{-1}) &= -\frac{1}{r^2}(r_{,j}n_i - r_{,i}n_j) \\ D_{ik}\left(\frac{r_j r_k}{r^3}\right) &= \frac{1}{r^2}(-\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j})r_{,n} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

である. また,

$$(r^{-1})_{,n} = (r^{-1})_{,k}n_k = -\frac{1}{r^2}r_{,n} \quad (\text{C.18})$$

であるから、式(C.17), (C.18)を代入すると、式(2.44)より $T_{ij}^{(s)}$ は次のように分解される。

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ 2(1-\nu)\delta_{ij}(r^{-1})_{,n} - D_{ik} \left(\frac{r_j r_k}{r^3} \right) + (1-2\nu)D_{ij}(r^{-1}) \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi}\delta_{ij}(r^{-1})_{,n} + \frac{1}{8\pi(1-\nu)} D_{ik}(P_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

ただし、

$$P_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = (1-2\nu)\delta_{jk}\frac{1}{r} - \frac{r_j r_k}{r^3} \quad (\text{C.20})$$

である。

また、 $S_1(\mathbf{x})$ と $\sigma(\mathbf{x})$ に関する Stokes の定理[124]から、 D_{ij} に関して次式が成り立つ。

$$\int_{S_1} D_{ij}(f(\mathbf{x}_0))d\Gamma(\mathbf{x}_0) = \int_{\sigma} \varepsilon_{ijk} f(\mathbf{x}_0) d\chi_k \quad (\text{C.21})$$

ここで、 ε_{ijk} は交代記号[71]である。

以上から、まず式(C.19)を式(C.13)に代入すると次式となる。

$$c_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\delta_{ij} \int_{S_1} (r^{-1})_{,n} d\Gamma(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_{S_1} D_{ik}(P_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0))d\Gamma(\mathbf{x}_0) \quad (\text{C.22})$$

$S_1(\mathbf{x})$ 上の点 \mathbf{x}_0 については $r=1$ なので、式(C.18)から

$$(r^{-1})_{,n} = 1 \quad (\mathbf{x}_0 \in S_1(\mathbf{x})) \quad (\text{C.23})$$

であることを考慮して、式(C.22)に式(C.15), (C.21)を用いると、

$$c_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\phi(\mathbf{x})}{4\pi}\delta_{ij} + \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_{\sigma} \varepsilon_{ikl} P_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\chi_l \quad (\text{C.24})$$

となる。さらに $\sigma(\mathbf{x})$ は必ず閉じているので

$$\int_{\sigma} d\chi_i = 0 \quad (\text{C.25})$$

となることから、式(C.20)を式(C.24)に代入すると、

$$c_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\phi(\mathbf{x})}{4\pi}\delta_{ij} - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_{\sigma} \varepsilon_{ikl} r_j r_k dr_l \quad (\text{C.26})$$

ただし、 $r_i = \chi_i - x_i$ より $d\chi_i = dr_i$ の関係を用いている。

ここで、 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, $d\mathbf{r} = (dr_1, dr_2, dr_3)$ をともに1行3列の行ベクトル、 \mathbf{I} を 3×3 の単位マトリクスとすると、式(C.26)は次式で表される。

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{\phi(\mathbf{x})}{4\pi}\delta_{ij} - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_{\sigma} \mathbf{r}^T (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \quad (\text{C.27})$$

ただし、 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ は $c_{ij}(\mathbf{x})$ を ij 成分とする 3×3 マトリクスである。

$\sigma(\mathbf{x})$ 上の点 \mathbf{x}_0 における微小線分を $dC(\mathbf{x}_0)$ とすると、

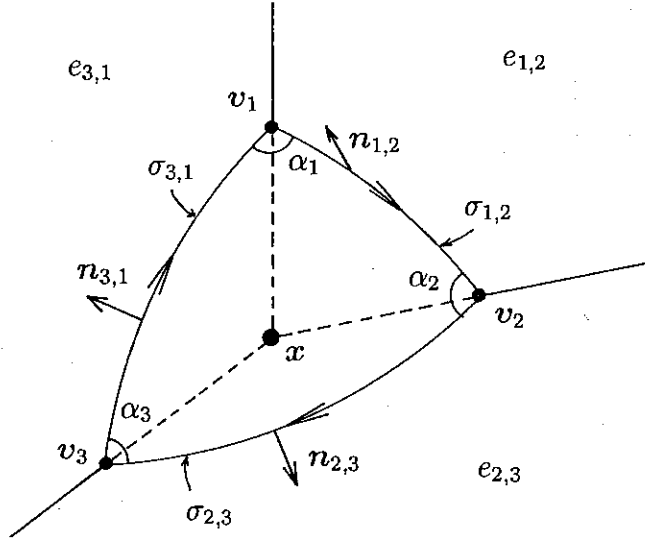


図-C.3: 頂点や法線ベクトル等の記号の定義

$$dr = t^\sigma(\mathbf{x}_0)dC(\mathbf{x}_0) \quad (\text{C.28})$$

であり, また

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{r}(\mathbf{x}_0) \quad (\mathbf{x}_0 \in \sigma(\mathbf{x})) \quad (\text{C.29})$$

であるから, これらと式(C.14)より,

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = -\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \times t^\sigma(\mathbf{x}_0)dC(\mathbf{x}_0) = \mathbf{n}^\sigma(\mathbf{x}_0)dC(\mathbf{x}_0) \quad (\text{C.30})$$

となる. これを式(C.27)に代入すると次式が得られる.

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{\phi(\mathbf{x})}{4\pi}\delta_{ij} - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_\sigma \mathbf{r}^T \mathbf{n}^\sigma(\mathbf{x}_0)dC(\mathbf{x}_0) \quad (\text{C.31})$$

次に, 点 \mathbf{x} が n 個 ($n > 2$) の平面境界要素の頂点になっている場合を考える. 図-C.3には $n = 3$ の場合を示す. $S_1(\mathbf{x})$ は球面多角形となり, その頂点を \mathbf{v}_i ($i = 1, \dots, n$) とおく. ただし, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_1$ とする.

また, 頂点 \mathbf{v}_i と \mathbf{v}_{i+1} 間の $S_1(\mathbf{x})$ の輪郭線を $\sigma_{i,i+1}$ とし, 要素 $e_{i,i+1}$ の外向き法線ベクトルを $\mathbf{n}_{i,i+1}$ とする. このとき,

$$\mathbf{n}^\sigma(\mathbf{x}_0) = \mathbf{n}_{i,i+1} \quad (\mathbf{x}_0 \in e_{i,i+1}) \quad (\text{C.32})$$

である. また, 頂点 \mathbf{v}_i における角度 α_i は $e_{i-1,i}$ と $e_{i,i+1}$ がなす角に等しく,

$$\alpha_i = \pi + \text{sgn}\{(\mathbf{n}_{i-1,i} \times \mathbf{n}_{i,i+1}) \cdot \mathbf{r}_i\} \cos^{-1}(\mathbf{n}_{i-1,i} \cdot \mathbf{n}_{i,i+1}) \quad (\text{C.33})$$

から求められる. ただし, $\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{x}$ とする. 立体角 $\phi(\mathbf{x})$ はこの α_i を用いて次式で表すことができる.

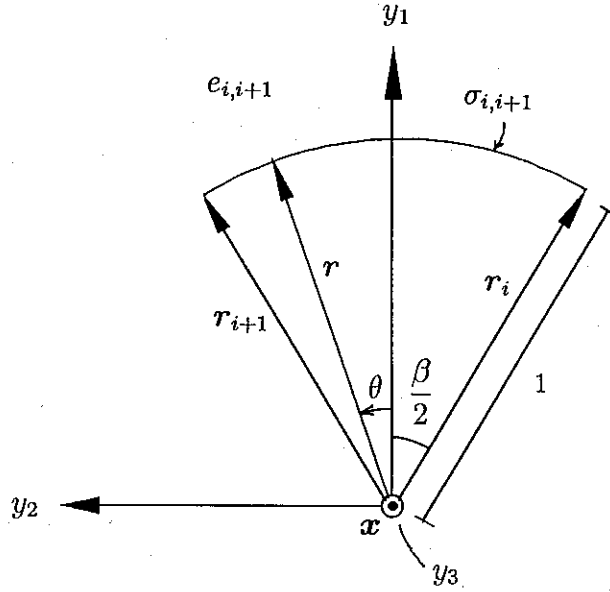


図-C.4: 要素 $e_{i,i+1}$ においた局所座標系

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi \quad (\text{C.34})$$

式(C.32)から,

$$\int_{\sigma} \mathbf{r}^T \mathbf{n}^{\sigma}(\mathbf{x}_0) dC(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \left(\int_{\sigma_{i,i+1}} \mathbf{r}^T dC(\mathbf{x}_0) \right) \mathbf{n}_{i,i+1} \quad (\text{C.35})$$

となるが, ここで図-C.4のように, \mathbf{x} を原点とする y_1 - y_2 - y_3 局所座標系をおくと,

$$\int_{\sigma_{i,i+1}} \mathbf{r}^T dC(\mathbf{x}_0) = \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} 2 \sin \frac{\beta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.36})$$

となる. さらに, この局所座標系において,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \left(\cos \frac{\beta}{2}, -\sin \frac{\beta}{2}, 0 \right) \\ \mathbf{r}_{i+1} &= \left(\cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2}, 0 \right) \\ \mathbf{n}_{i,i+1} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

となるから,

$$\int_{\sigma_{i,i+1}} \mathbf{r}^T dC(\mathbf{x}_0) = \{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{n}_{i,i+1}\}^T \quad (\text{C.38})$$

と表せることが分かる.

したがって, 式(C.33), (C.34), (C.35), (C.38)より, 式(C.31)を計算しやすい形で表すと次のようになる.

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}) &= \left[\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}\{(\mathbf{n}_{i-1,i} \times \mathbf{n}_{i,i+1}) \cdot \mathbf{r}_i\} \cos^{-1}(\mathbf{n}_{i-1,i} \cdot \mathbf{n}_{i,i+1}) \right] \mathbf{I} \\ &\quad - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \sum_{i=1}^n \{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{n}_{i,i+1}\}^T \mathbf{n}_{i,i+1} \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

参考文献

- [1] 読売新聞社：読売新聞，4月8日，1995.
- [2] 土木学会：阪神大震災震害調査緊急報告会資料，1995.
- [3] 日本建築学会：1995年兵庫県南部地震災害調査速報，1995.
- [4] 大町達夫（研究代表者）：1994年ロスアンジェルス地震と都市機能障害の調査研究，文部省科学研究費突発災害調査研究成果報告書，1994.
- [5] 和泉正哲，柴田明德，飛田潤，南忠夫，境有紀：建築構造物の被害に関する調査研究，1993年釧路沖地震による被害の調査研究，文部省科学研究費突発災害調査研究成果報告書（研究代表者：鏡味洋史），pp. 139-159，1993.
- [6] 土木学会：土木構造物の耐震基準等に関する提言，土木学会誌，Vol. 80，No. 7，pp. (3)-(7)，1995.
- [7] 土木学会：土木構造物の耐震基準等に関する「第二次提言」，土木学会誌，Vol.81，No. 2，pp. (1)-(10)，1996.
- [8] 翠川三郎，小林啓美：地震断層を考慮した地震動スペクトルの推定，日本建築学会論文報告集，No. 282，pp. 71-81，1979.
- [9] 翠川三郎，小林啓美：震源域及びその周辺での地表面最大加速度分布の推定，日本建築学会論文報告集，No. 290，pp. 83-94，1980.
- [10] Hartzell, S. : Earthquake aftershocks as Green's functions, *Geophysics Research Letters*, Vol. 5, pp. 1-4, 1978.
- [11] 理論地震動研究会：地震動 その合成と波形処理，鹿島出版会，1994.
- [12] Maruyama, T. : On the force equivalents of dynamical elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism, *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, Vol. 41, pp. 467-486, 1963.
- [13] Burridge, R. and Knopoff, L. : Body force equivalents for seismic dislocations, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 54, pp. 1875-1888, 1964.
- [14] Kawasaki, I. Suzuki, Y. and Sato, R. : Seismic waves due to a shear fault in a semi-infinite medium. Part I: point source, *Journal of Physics of the Earth*, Vol. 21, pp. 251-284, 1973.
- [15] Kawasaki, I. Suzuki, Y. and Sato, R. : Seismic waves due to a shear fault in a semi-infinite medium. Part II : moving source, *Journal of Physics of the Earth*, Vol. 23, pp. 43-61, 1975.

- [16] Aki, K. and Larner, K. L. : Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 75, pp. 933-953, 1970.
- [17] Sánchez-Sesma, F. J. , Chávez-Pérez, S. , Suárez, M. , Bravo, M. A. and Pérez-Rocha, L. E. : The Mexico earthquake of September 19, 1985 — On the seismic response of the valley of Mexico, *Earthquake Spectra*, Vol. 4, pp. 569-589, 1988.
- [18] Campillo, M. , Bard, P.-Y. , Nicollin, F. and Sánchez-Sesma, F. J. : The Mexico earthquake of September 19, 1985 — The incident wavefield in Mexico City during the great Michoacán earthquake and its interaction with the deep basin, *Earthquake Spectra*, Vol. 4, pp. 591-608, 1988.
- [19] Bard, P.-Y. , Campillo, M. , Chávez-García, F. J. and Sánchez-Sesma, F. J. : The Mexico earthquake of September 19, 1985 — A theoretical investigation of large- and small-scale amplification effects in the Mexico City valley, *Earthquake Spectra*, Vol. 4, pp. 609-633, 1988.
- [20] 久田嘉章, 山本俊六, 谷資信 : 境界要素法と断層震源モデルによる堆積盆地におけるSH波とLove波の地震波動解析, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 393, pp. 92-100, 1988.
- [21] Yamanaka, H. , Seo, K. and Samano, T. : Effects of sedimentary layers on surface-wave propagation, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 79, pp. 631-644, 1989.
- [22] Kawase, H. and Aki, K. : A study on the response of a soft basin for incident S, P, and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 79, pp. 1361-1382, 1989.
- [23] 山本俊六, 久田嘉章, 谷資信 : 関東平野におけるやや長周期地震動のシミュレーション, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 417, pp. 79-86, 1990.
- [24] 大堀道広, 瀨藤一起, 南忠夫 : 3次元AL法による堆積盆地の地震動解析, 地震研究所彙報, Vol. 65, pp. 433-461, 1990.
- [25] Uebayashi, H., Horike, M. and Takeuchi, Y.: Seismic motion in a three-dimensional arbitrarily-shaped sedimentary basin, due to a rectangular dislocation source, *Journal of Physics of the Earth*, Vol.40, pp. 223-240, 1992.
- [26] Yamamoto, S. , Hisada, Y. and Tani, S. : Simulations of long period strong ground motions during the 1990 Upland earthquake, California, *Proceedings of the 10th World Conference on Earthquake Engineering*, pp. 1127-1132, 1992.
- [27] Toshinawa, T. and Ohmachi, T. : Love wave propagation in a three-dimensional sedimentary basin, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 82, pp. 1661-1677, 1992.
- [28] Olsen, K. B. , Pechmann, J. C. and Schuster, G. T. : Simulation of 3D elastic wave propagation in the Salt Lake basin, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 85, pp. 1688-1710, 1995.

- [29] 土岐憲三, 澤田純男 : 3次元有限要素法による地震断層の破壊過程の解析, 京都大学耐震研究報告, No. 86-5, 1986.
- [30] Vidale, J. E. and Helmberger, D. V. : Elastic finite-difference modeling of the 1971 San Fernando, California earthquake, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 78, pp. 122-141, 1988.
- [31] 佐藤俊明 : 理論地震動による堆積盆地上のやや長周期地震動のシミュレーション—1961年北米濃地震(M7.0)の神戸と大阪の気象庁一倍変位強震計記録の例—, 第8回日本地震工学シンポジウム論文集, pp. 193-198, 1990.
- [32] Frankel, A. and Vidale, J. : A three-dimensional simulation of seismic waves in the Santa Clara valley, California, from a Loma Prieta aftershock, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 82, pp. 2045-2074, 1992.
- [33] Yomogida, K. and Etgen, J. T. : 3-D wave propagation in the Los Angeles basin for the Whittier-Narrows earthquake, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 83, pp. 1325-1344, 1993.
- [34] 阿部和久, 吉田裕, 中村智樹 : 時間領域境界要素法による三次元地震断層解析, 土木学会論文集, No. 471/I-24, pp. 125-133, 1993.
- [35] Kato, K., Aki, K. and Teng, T.-L. : 3-D simulations of surface wave propagation in the Kanto sedimentary basin, Japan — Part 1: Application of the surface wave gaussian beam method, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 83, pp. 1676-1699, 1993.
- [36] Hisada, Y., Aki, K. and Teng, T.-L. : 3-D simulations of surface wave propagation in the Kanto sedimentary basin, Japan — Part 2: Application of the surface wave BEM, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 83, pp. 1700-1720, 1993.
- [37] Olsen, K. B., Archuleta, R. J. and Matarrese, J. R. : Three-dimensional simulation of a magnitude 7.75 earthquake on the San Andreas fault, *Science*, Vol. 270, pp. 1628-1632, 1995.
- [38] Graves, R. W. : Simulating realistic earthquake ground motions in regions of deep sedimentary basins, 強地震動予測に関する総合的研究, 平成7年度科学研究費補助金研究成果報告書 (研究代表者: 入倉孝次郎), pp. 232-239, 1996.
- [39] Pitarka, A. and Irikura, K. : Basin structure effects on long-period strong motions in the San Fernando valley and the Los Angeles basin from the 1994 Northridge earthquake and an aftershock, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 86, pp. S126-S137, 1996.
- [40] Olsen, K. B. and Archuleta, R. J. : Three-dimensional simulations of earthquakes on the Los Angeles fault system, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 86, pp. 575-596, 1996.
- [41] Aki, K. : Seismic displacements near a fault, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 73, pp. 5359-5376, 1968.

- [42] Haskell, N. A. : Elastic displacements in the near-field of a propagating fault, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 59, pp. 865–908, 1969.
- [43] Aki, K. and Richards, P. G. : *Quantitative seismology: Theory and methods*, Vol. 1, W. H. Freeman and Company, 1980.
- [44] Haskell, N. A. : The dispersion of surface waves in multilayered media, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 43, pp. 17–34, 1953.
- [45] 額額一起 : 不整形地盤における地震動, 土木学会論文集, No. 437/I-17, pp. 1–18, 1991.
- [46] Lamb, H. : On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Ser. A, Vol. 203, pp. 1–42, 1904.
- [47] Lysmer, J. and Drake, L. A. : A finite element method for seismology, in *Methods of Computational Physics*, Bolt, B. A. (ed.), Vol. 11, Academic Press, pp. 181–216, 1972.
- [48] Bouchon, M. and Aki, K. : Discrete wave-number representation of seismic-source wave fields, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 67, pp. 259–277, 1977.
- [49] Bouchon, M. : Discrete wave number representation of elastic wave fields in three-space dimensions, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 84, pp. 3609–3614, 1979.
- [50] Olson, A. H. , Orcutt, J. A. and Frazier, G. A. : The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol. 77, pp. 421–460, 1984.
- [51] Touhei, T. : A discrete wavenumber and normal-mode superposition method for synthetic seismograms, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 84, pp. 1473–1483, 1994.
- [52] 久田嘉章 : 堆積盆地の地震動特性に関する研究, 早稲田大学博士学位論文, 1991.
- [53] Bouchon, M. and Aki, K. : Near-field of a seismic source in a layered medium with irregular interfaces, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol. 50, pp. 669–684, 1977.
- [54] Bard, P.-Y. and Bouchon, M. : The seismic response of sediment-filled valleys. Part 1: the case of incident SH waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 70, pp. 1263–1286, 1980.
- [55] Bard, P.-Y. and Bouchon, M. : The seismic response of sediment-filled valleys. Part 2: the case of incident P and SV waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 70, pp. 1921–1941, 1980.
- [56] Boore, D. M. : A note on the effect of simple topography on seismic SH waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 62, pp. 275–284, 1972.
- [57] Sánchez-Sesma, F. J. and Esquivel, J. A. : Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 69, pp. 1107–1120, 1979.

- [58] 座間信作：不規則構造に対する地震波の挙動，その4，地震研究所彙報，Vol. 57, pp. 379-399, 1982.
- [59] 丹羽義次，廣瀬壯一：傾斜層を有する地盤における理論的地震動解析，土木学会論文報告集，第337号，pp. 57-66, 1983.
- [60] Červený, V. : Synthetic body wave seismograms for laterally varying layered structures by the Gaussian beam method, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol. 73, pp. 389-426, 1983.
- [61] 地震予知総合研究振興会：1985年メキシコ地震の被害とその復旧，1986.
- [62] Alterman, Z. and Karal, F. C. : Propagations of elastic waves in layered media by finite-difference methods, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 58, pp. 367-398, 1968.
- [63] 川瀬博：表層地質が地震動に及ぼす影響に関する研究事例と今後の課題，第18回地盤震動シンポジウム，pp. 71-78, 1990.
- [64] Madariaga, R. : Dynamics of an expanding circular fault, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 66, pp. 163-182, 1976.
- [65] Clayton, R. and Engquist, B. : Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 67, pp. 1529-1540, 1977.
- [66] 額縁一起，大堀道広，東貞成：関東平野の3次元基盤構造とその震動特性，地震学会講演予稿集，No. 2, p. 152, 1991.
- [67] Kobayashi, S. and Kishima, T. : Dynamic analysis of non-homogeneous ground movements by the boundary integral equation-finite element hybrid method, *Proceedings of the 5th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, pp. 135-142, 1985.
- [68] 東平光生，吉田望：時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析，土木学会論文集，No.410/I-12, pp. 395-404, 1989.
- [69] Brebbia, C. A.: *The boundary element method for engineers*, Pentech Press, 1978.
- [70] 田中正隆，松本敏郎，中村正行：境界要素法，計算力学とCAEシリーズ2，培風館，1991.
- [71] Fung, Y. C. : 固体の力学／理論，大橋義夫，村上澄男共訳，培風館，1970.
- [72] 東平光生：地震応答解析のための時間領域FEM-BEM結合解法の開発，東京工業大学博士学位論文，1991.
- [73] 今村勤：物理とフーリエ変換，岩波書店，1976.
- [74] 今村勤：物理とグリーン関数，岩波書店，1978.
- [75] 境界要素法研究会編：境界要素法の理論と応用，コロナ社，1986.
- [76] Hartmann, F. : The Somigliana identity on piecewise smooth surfaces, *Journal of Elasticity*, Vol. 11, pp. 403-423, 1981.

- [77] Zienkiewicz, O. C. : *The finite element method*, Third edition, McGraw-Hill, 1977.
- [78] 矢川元基, 吉村忍 : 有限要素法, 計算力学とCAEシリーズ1, 培風館, 1991.
- [79] 吹田信之, 新保経彦 : 理工系の微分積分学, 学術図書出版社, 1987.
- [80] Brebbia, C. A., Tells, J. C. and Wrobel, L. C. : *Boundary element techniques—theory and applications in engineering*, Springer-Verlag, 1984.
- [81] 佐藤泰夫 : 弾性波動論, 岩波書店, 1978.
- [82] Sánchez-Sesma, F. J. , Pérez-Rocha, L. E. and Chávez-Pérez, S. : Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities. Part II , *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 79, pp. 101–112, 1989.
- [83] Mossessian, T. K. and Dravinski, M. : Scattering of elastic waves by three-dimensional surface topographies, *Wave Motion*, Vol. 11, pp. 579–592, 1989.
- [84] Luco, J. E., Wong, H. L. and De Barros, F. C. P. : Three-dimensional response of a cylindrical canyon in a layered half-space, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, pp. 799–817, 1990.
- [85] 鷲津久一郎, 田中正隆, 田中喜久昭 : 境界要素法—理論と応用, 丸善, 1982.
- [86] Mossessian, T. K. and Dravinski, M. : A hybrid approach for scattering of elastic waves by three-dimensional irregularities of arbitrary shape. *Journal of Physics of the Earth*, Vol. 40, pp. 241–261.
- [87] Gaitanaros, A. P. and Karabalis, D. L. : Dynamic analysis of 3-D flexible embedded foundations by a frequency domain BEM–FEM, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, pp. 653–674, 1988.
- [88] Banerjee, P. K., Ahmad, S. and Manolis, G. D. : Transient elastodynamic analysis of three-dimensional problems by boundary element method, Vol. 14, pp. 933–949, 1986.
- [89] Lachat, J. C. and Watson, J. O. : Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, pp. 991–1005, 1976.
- [90] Li, H. B., Han, G. M. and Mang, H. A. : A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct boundary element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 2071–2098, 1985.
- [91] Guiggiani, M. and Gigante, A. : A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method, *Transactions of the ASME*, Vol. 57, pp. 906–915, 1990.
- [92] Mantič, V. : A new formula for the C-matrix in the Somigliana identity, *Journal of Elasticity*, Vol. 33, pp. 191–201, 1993.
- [93] Haskell, N. A. : Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 54, pp. 1811–1841, 1964.

- [94] 片岡正次郎, 大町達夫: 不整形地盤における震源近傍地震動のシミュレーション手法と二次元面内波動場への適用, 土木学会論文集 (掲載予定).
- [95] Kawasaki, I. : On the dynamical process of the Parkfield earthquake of June 28, 1966, *Journal of Physics of the Earth*, Vol.23, pp. 127-144, 1975.
- [96] 川崎一朗: 私信, 1996.
- [97] Das, S. and Aki, K. : Fault planes with barrier: A versatile earthquake model, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 82, pp. 5658-5670, 1977.
- [98] Kanamori, H. and Stewart, G. S. : Seismological aspects of Guatemala earthquake of February 21, 1976, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 83, pp. 3427-3434, 1978.
- [99] Earthquake Engineering Research Institute : Northridge earthquake reconnaissance report, Vol. 1, *Earthquake Spectra*, Supplement C to Vol. 11, 1995.
- [100] Wald, D. J. and Heaton, T. H. : A dislocation model of the 1994 Northridge, California, earthquake determined from strong ground motions, *U.S.G.S. Open-File Report*, pp. 94-278, 1994.
- [101] Hartzell, S. H. and Heaton, T. H. : Inversion of strong ground motion and teleseismic waveform data for the fault rupture history of the 1979 Imperial Valley, California earthquake, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 73, pp. 1553-1583, 1983.
- [102] Magistrale, H. , McLaughlin, K. and Day, S. : A geology-based 3D velocity model of the Los Angeles basin sediments, *Bulletin of Seismological Society of America*, Vol. 86, pp. 1161-1166, 1996.
- [103] Darragh, R. , Cao, T. , Cramer, C. , Huang, M. and Shakal, A. : Processed CSMIP strong-motion records from the Northridge, California earthquake of January 17 1994: Release No.1, 1994.
- [104] Wald, D. J. , Heaton, T. H. and Hudnut, K. W. : The slip history of the 1994 Northridge, California, earthquake determined from strong-motion, teleseismic, GPS, and leveling data, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 86, pp. S49-S70, 1996.
- [105] 源栄正人, 永野正行: 神戸市の基盤不整形構造を考慮した地震動の増幅特性に関する解析的検討, 土と基礎, Vol. 43, pp. 15-20, 1995.
- [106] 佐藤忠信: 震度7の帯内における最大地動の推定, 土と基礎, Vol. 44, pp. 35-37, 1995.
- [107] Irikura, K. : Prediction of strong acceleration motion using empirical Green's function, *Proceedings of the 7th Japan Earthquake Engineering Symposium*, pp. 151-156, 1986.
- [108] 林康裕, 川瀬博: 1995年兵庫県南部地震における神戸市中央区の地震動評価, 日本建築学会構造系論文集, 第481号, pp. 37-46, 1996.
- [109] Pitarka, A. , Irikura, K. and Iwata, T. : Was the basin edge geometry responsible for the ground motion amplification in the disaster belt-like zone during January 17, 1995, Kobe (Hyogo-ken Nanbu), Japan earthquake?, *Seismological Research Letters* (submitting).

- [110] 香川敬生, 澤田純男, 岩崎好規, 南莊淳 : 大阪堆積盆地における深部地下構造のモデル化, 第22回地震工学研究発表会講演概要, pp. 199-202, 1993.
- [111] Nakagawa, K. , Shiono, K. , Inoue, N. and Sano, M. : Geological characteristics and problems in and around Osaka basin as a basis for assessment of seismic hazards, *Special Issue of Soils and Foundations*, pp. 15-28, 1996.
- [112] Wald, D. J. : A preliminary dislocation model for the 1995 Kobe (Hyogo-ken Nanbu), Japan, earthquake determined from strong motion and teleseismic waveforms, *Seismological Research Letters*, Vol. 66, pp. 22-28, 1995.
- [113] 吉田真吾, 瀬藤一起, 芝崎文一郎, 鷲谷威, 加藤照之, 吉田康弘 : 強震記録, 遠地実体波, 地殻変動データの同時インバージョンによる兵庫県南部地震の震源過程, 日本地震学会講演予講集, 1995.
- [114] Sekiguchi, H. , Irikura, T. , Iwata, T. , Kakehi, Y. and Hoshihara, M. : Minute locationing of fault planes and source process of the 1995 Hyogo-ken Nanbu(Kobe), Japan, earthquake from the waveform inversion of strong ground motion, *Journal of Physics of the Earth*, Vol. 44, 1996(in press).
- [115] Ide, S. , Takeo, M. and Yoshida, Y. : Source process of the 1995 Kobe earthquake: determination of spatio-temporal slip distribution by Bayesian modeling, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 86, pp. 547-566, 1996.
- [116] Akaike, H. : Likelihood and Bayes procedure, in *Bayesian Statics*, Bernardo, J. M. , DeGroot, M. H. , Lindley, D. V. and Smith, A. F. M. (eds.) , University Press, pp. 143-166, 1980.
- [117] 香川敬生, 堀江佳平 : 大阪堆積盆地深部地盤構造のモデル化 (その2) , 土木学会第50回年次学術講演会講演概要集第1部, pp. 1264-1265, 1995.
- [118] 岩田知孝, 入倉孝次郎, 土岐憲三, 笹谷努, 工藤一嘉, 瀬尾和大, 横井俊明 : 神戸市及びその周辺部の地下構造探査, 平成7年兵庫県南部地震の被害調査に基づいた実証的分析による被害の検証, 平成7年度文部省科学研究費研究成果報告書 (研究代表者 : 藤原悌三) , pp. 2-21-2-49, 1996.
- [119] 清水建設技術研究所 : 1995年兵庫県南部地震調査報告書, 1995.
- [120] 横田治彦, 片岡俊一, 趙文方 : 1995年兵庫県南部地震における大阪平野の地震動特性, 日本建築学会大会学術講演概要集, B-2, pp. 183-184, 1996.
- [121] 吉田裕, 阿部和久 : 面内波動問題時間領域型境界要素法の実用化に向けての一検討, 土木学会論文集, No. 416/I-13, pp. 265-274, 1990.
- [122] 渡辺修, 速水謙 : 多重極展開法を用いた境界要素法的高速化, 第4回BEMテクノロジーコンファレンス論文集, pp. 39-44, 1994.
- [123] Bouchon, M. , Schultz, C. A. and Toksöz, M. N. : A fast implementation of boundary integral equation methods to calculate the propagation of seismic waves in laterally varying layered media, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 85, pp. 1679-1687, 1995.
- [124] 寺沢寛一 : 自然科学者のための数学概論 (増訂版) , 岩波書店, 1983.

本研究に関連して発表した論文

1. Kataoka, S. and Ohmachi, T. : Synthetic earthquake motion of 2-D irregular ground in near-field, *Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering*, No. 1248, 1996.
2. 片岡正次郎, 大町達夫 : 不整形地盤における震源近傍地震動のシミュレーション手法と二次元面内波動場への適用, 土木学会論文集 (掲載予定) .
3. 片岡正次郎, 大町達夫 : 震源近傍の不整形地盤における地震動の三次元シミュレーション, 土木学会論文集 (投稿中) .
4. Kataoka, S. and Ohmachi, T. : 3-D simulation of near-field ground motion of the 1995 Hyogo-ken Nanbu earthquake, *Proceedings of the 6th U. S. - Japan Workshop on Earthquake Resistant Design of Lifeline Facilities and Countermeasures against Liquefaction*, 1996(in press).
5. 片岡正次郎 : 三次元境界要素法による1995年兵庫県南部地震のシミュレーション, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 54, 1996 (印刷中) .
6. 片岡俊一, 片岡正次郎, 大町達夫 : 観測記録と数値シミュレーションから見た1995年兵庫県南部地震の際の大阪湾東部におけるやや長周期地震動の伝播, 自然災害科学 (投稿中) .

本研究に関連して行った口頭発表

1. 片岡正次郎, 大町達夫 : 震源近傍の不整形地盤における地震動の2次元解析, 第23回地震工学研究発表会講演概要, pp. 173-176, 1995.
2. 片岡正次郎, 大町達夫, 茂木秀則 : 断層震源に対する不整形地盤の地震応答シミュレーション, 第45回応用力学連合講演会予稿集, pp. 19-20, 1995.
3. 片岡正次郎, 本多基之, 大町達夫 : 1995年兵庫県南部地震における神戸市域の三次元地震動シミュレーション, 土木学会第51回年次学術講演会講演概要集, 第1部(B), pp. 344-345, 1996.

その他の論文

1. Ohmachi, T. and Kataoka, S. : Dynamic interaction effects of dam-foundation-reservoir systems evaluated by an FE-BE method in the time domain, *Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Structures Technology, Advances in Finite Element Techniques*, pp. 99-106, 1994.
2. 大町達夫, 片岡正次郎 : 時間領域FE-BE結合解法によるダム-基礎-貯水系における動的相互作用の評価, 第9回日本地震工学シンポジウム論文集, pp. 1237-1242, 1994.
3. 大町達夫, 片岡正次郎 : 二次元ダム-基礎-貯水系における動的相互作用の評価, 土木学会論文集, 第519号/I-32, pp. 199-209, 1995.

謝辞

本研究を遂行するにあたり、終始懇切丁寧な御指導を賜りました東京工業大学大町達夫教授に深く感謝いたします。

本論文をまとめるにあたり、貴重な御教示を賜りました東京工業大学横山正明教授、瀬尾和夫教授、翠川三郎教授、山中浩明助教授、年縄巧助教授に深く感謝いたします。

東京理科大学東平光生講師には、度重なる質問に対する適切な御指導と御助言を頂きました。深く感謝いたします。

本研究に関して貴重な御意見を頂きました富山大学川崎一朗教授、工学院大学久田嘉章講師に厚く御礼申し上げます。

日頃から適切な御助言を頂きました清水建設福島美光氏、清水建設片岡俊一氏、芝浦工業大学紺野克昭講師、東京工業大学松岡昌志助手、埼玉大学茂木秀則助手に厚く御礼申し上げます。

嶋田みどり事務官、片山美穂子事務官および大町研究室の卒業生、学生諸氏には日頃から御支援を頂きました。厚く御礼申し上げます。

第5章で使用したSan Fernando谷の三次元地盤データは、San Diego State UniversityのHarold Magistrale博士に提供して頂いたものです。御協力に深謝いたします。

地震観測記録を使用させて頂いた関係各位に深謝いたします。

本研究で行った数値計算には、主に東京工業大学総合情報処理センターCRAY C916/12256を使用し、平成6年度には特別利用の援助も受けました。関係各位に深謝いたします。

著者は特別研究員（平成6, 7, 8年度）として日本学術振興会から援助を受けています。また本研究は文部省科学研究費（特別研究員奨励費）の援助を受けています。関係各位に深謝いたします。

最後に、長い学生生活を支え、励まして頂いた両親に御礼を申し上げます。