

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	PCM通信に対する最適波形とその伝送に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	辻井重男
Author(English)	Shigeo Tsujii
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第297号, 授与年月日:1970年1月21日, 学位の種別:論文博士, 審査員:川上 正光
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第297号, Conferred date:1970/1/21, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

PCM通信に対する最適波形
とその伝送に関する研究

山梨大学工学部
辻井重男

目 次

第1章 序 論	3
1.1 節 研究の背景と目的	3
1.2 節 研究の概要	3
本文中の主な記号	5
第2章 PCM通信における波形伝送について	8
2.1 節 PCM方式の現状	8
2.2 節 再生中継	8
2.3 節 符号構成と電力スペクトル	9
2.4 節 波形等化と符号誤り率	13
第3章 符号パルス列の電力スペクトルの計算	18
3.1 節 準 備	18
3.1.1 計算の対象とする符号列	18
3.1.2 電力スペクトルの基本公式	20
3.1.3 シグナルフローグラフによる電力スペクトルの計算方法	21
3.2 節 電力スペクトルの代数的計算方法	22
3.2.1 符号波形に関する計算	22
3.2.2 伝達関数の計算	23
3.2.3 連続スペクトルの計算公式	26
3.2.4 線スペクトルの計算公式	27
3.3 節 多値平衡符号の電力スペクトル	28
3.3.1 2項電力分解	28
3.3.2 一般公式	31
3.3.3 各種符号形式の電力スペクトル	34
3.4 節 むすび	38
第4章 符号間干渉の確率分布	39
4.1 節 連常多進符号の符号間干渉	39
4.1.1 符号構成とガウス近似波形等化	39
4.1.2 符号間干渉の確率密度関数	41
4.1.3 計算機シミュレーションの結果	43
4.1.4 数式計算の結果	44
4.1.5 等化波形と符号間干渉	46
4.2 節 通常多進符号の符号誤り率	47
4.2.1 符号誤り率特性	47
4.2.2 情報伝送速度	51
4.2.3 確率分布の形状と誤り率特性	54
4.3 節 平衡符号の符号間干渉と符号誤り率	57
4.3.1 バイポーラ符号の場合	57
4.3.2 その他の平衡符号の場合	60
4.4 節 むすび	62

第5章 最適波形の決定	6 3
5.1節 従来の研究結果	6 3
5.2節 前提条件	6 5
5.3節 2次計画問題としての定式化	6 5
5.3.1 等化波形に対する制約条件	6 5
5.3.2 評価関数(目的式)の定義	6 7
5.4節 同軸PCM方式の最適波形	7 0
5.4.1 伝送路の条件	7 0
5.4.2 対称波形の最適化	7 1
5.4.3 非対称波形の最適化	7 4
5.4.4 最適化の効果	7 5
5.5節 近距離PCM方式の最適波形	7 7
5.6節 むすび	7 9
第6章 波形整形伝達関数の近似	8 0
6.1節 波形整形伝達関数の一近似方法	8 1
6.1.1 問題の設定	8 1
6.1.2 分母多項式の決定	8 1
6.1.3 分子多項式の決定	8 3
6.2節 標本点零型波形をインパルス応答とする伝達関数	8 4
6.2.1 定式化	8 4
6.2.2 対称波形の場合	8 5
6.2.3 非対称波形の場合	8 8
6.3節 標本点零型波形を等化波形とする伝達関数	9 1
6.3.1 前提条件	9 1
6.3.2 等化波形に対する制約	9 1
6.3.3 定式化	9 2
6.3.4 設計例	9 3
6.6節 むすび	9 6
第7章 結 言	9 7
謝 辞	9 8
文 献	9 9

第 1 章 序 論

1.1 研究の背景と目的

波形伝送及び波形伝送回路網に関する研究は比較的早くから行なわれているが、PCM方式に焦点を合わせた研究は少ない⁽¹⁾⁽²⁾。

PCM方式すなわちパルス符号変調方式の発明は遠く1937年にさかのぼるが、トランジスタの発明、通信量に対する社会的需要の増大等、PCM方式が他の通信方式に比べて技術的にも経済的にも有利であると判断されるための環境が育つまでに多くの歳月を要した。

そして米国では1962年、わが国では1965年（昭和40年）に至って初めて近距離伝送用として実用化された⁽³⁾。

PCM方式における波形伝送とその回路網に関する総合的な研究が現在まで余り行なわれなかったのはこのようにPCM方式が実用化されたのが最近であり、波形伝送に関して掘り下げた研究を行なう余裕がなかったためと考えられる。

しかし、今後の情報革新の進展に伴うデータ通信の発展、あるいは伝送と交換の一体化の話題などを考えると、将来の通信網において、PCM方式の果たす役割は非常に大きいものと思われるので、PCM方式における情報伝送速度を向上せしめる観点から、波形伝送に関する研究は非常に重要であると云える。

そこで、本研究においては、PCM通信における波形伝送に関し、波形伝達関数の近似方法まで含む総合的な研究を行なった次第である。

1.2 研究の概要

本研究はPCM方式における最適波形の決定方法、及び波形整形回路網の伝達関数の近似方法の提案を中心とするものであるが、最適波形の決定と関連して符号パルス列の電力スペクトルの計算方法についても新しい方法を示し、また符号間干渉の確率分布の算出を行なった。

以下の各章についてその概要を次に述べる。

第2章（PCM方式における波形伝送の問題点）においては、PCM方式の現状について簡単に述べた後、最適波形を決定するに必要な研究事項及び第3章以下の各章間の関連などを明らかにする。

第3章（符号パルス列の電力スペクトルの計算）においては最適波形の決定に必要な、符号パルス列の電力スペクトルについて、従来の計算方法の難点を克服した新しい計算方法を提示する。

符号構成を定めた場合、その符号パルス列の電力スペクトルを求めることは波形伝送上重要な問題であり、従来、Hugginsの提案したシグナルフローグラフを用いる方法が便利であるとされて来た。

最近、PCM方式の情報伝送速度の向上を意図して種々の複雑な符号構成が提案されている。符号構成が複雑な場合、シグナルフローグラフによる方法では莫大な労力を要する。そこで筆者はこれに代る方法として代数的な計算方法について考察した。

まず、符号間の遷移確率行列の固有多項式と電力スペクトルの関係に関する1つの定理、及び2項電力分解と名づける定理を導き、これらの定理に基づいて電力スペクトルを求める数式を誘導した。また直流分のない平衡符号について、その電力スペクトルの一般式を求め、従来提案された種々の符号形式の電力スペクトルが、この一般式の特殊な場合として求める。

第4章（符号間干渉の確率分布）においては、最適波形の決定に必要な符号間干渉の確率分布を、種々の符号形式について求める。

まず、通常多進符号列の場合について、確率密度関数が、多値分布と正規分布のたたみこみ積分で求められること、正規分布の分散は伝送路の低域遮断を1桁下げると約1桁小さくなることなどを理論的に示し、これ等の結果を計算機シミュレーションで検証した。

ュレーションにより確かめた。

そして現在の変成器技術によつて可能な程度まで低域遮断周波数を低下させることにより低域遮断の影響を無視できること、多値分布はこれを最悪値に関する2値分布で置き換えても誤差は僅かであることを定量的に示す。次に、有限ブロック長の種々の平衡符号について、確率分布が多値分布となることを理論的に示し、かつ計算機シミュレーションによつて確める。さらにこれを最悪値に着目した2値分布で近似し得ることを示す。

第5章（最適波形の決定方法）においては再生中継器の最適波形を2次計画法を用いて決定する方法を示す。パルス通信における最適波形を古典的変分法により求めた例はあるが、この方法では伝送系の諸条件を考慮することが難しい。しかし伝送系の諸条件をすべて忠実に考慮しようとすれば非線形計画問題となつて、計算も面倒であり、また最適解を求め得るという数学的な保証もない。

これに対し、2次計画法は、目的式は未知変数の2次式、条件式はすべて線形に限られるという制約はあるが、不等号条件を付することができる点で変分法と比べて便利であり、かつ大域的な最適解を必ず、しかも比較的容易に求めることができる点で一般の非線形計画法より勝れている。

最適波形を決定する問題は、その定式化に当つて適当な工夫を行なうことにより、2次計画法を応用して解くことができる。

具体例として同軸PCM方式及び平衡対ケーブル方式の場合の最適波形について検討し、本方法を用いて決定した標本点零形波形が、従来符号伝送に適するとされていたガウス波形に比べ符号誤り率の点で格段に勝れていること或いは情報伝送速度が大幅に増大することを示す。

第6章（波形整形伝達関数の近似）においては、第5章で求めた最適波形を、インパルス応答波形、及び再生中継器の入力波形に対する等化波形として生ずる整形回路網の伝達関数の近似について述べる。まず、任意の入力波形に対する応答波形の振幅値に、いくつかの等号または不等号の条件を付した場合の伝達関数の有理関数による近似について、評価関数が、分子多項式の係数に関する2次式（非負値定符号）で表わされた場合を対象として考察する。

回路網に要求される位相特性が知られているものとして、まず分母多項式を、その逆数の位相特性が回路網に要求される位相特性に大略近似するように定めた後、分子多項式の係数を未知変数として、上に述べた条件付近似問題を2次計画法を用いて解く方法を提示する。

次に、この方法を応用して、第5章で求めた最適波形をインパルス応答とする回路網の伝達関数を、目的波形と応答波形の2乗積分誤差を評価関数とし、識別時点以外の標本点で零となることを付帯条件として決定する。さらに、同じく第5章で得た最適波形を等化波形とする波形整形回路網（等化増幅器）の伝達関数を、第5章と同様の評価関数を用いて求める。

本文中の主な記号

A_m	: 波形整形伝達関数の分子多項式の係数
A_k	: 遷移確率行列の固有多項式の係数
b	: 通常多進符号における多進数
B_n	: 波形整形伝達関数の分母多項式の係数
b	: 2次計画問題の評価関数における列ベクトル
C_i	: 等化波形の標本点における振幅値
C_k	: タップ付遅延線路の荷重係数
$C_m(t)$	: 波形整形回路網の応答波形の係数
$C_{m,r}$	: $C_m(t)$ の時刻 t_r における係数
C	: 2次計画問題の評価関数における非負値定符号行列
C_I	: 符号間干渉雑音に関する非負値定符号行列
C_G	: ガウス性雑音に関する非負値定符号行列
d_r	: 波形の振幅に関する制限値
$D(x)$	: シグナルフローグラフにおける伝達関数の分母多項式
$d_0(t)$	: 符号波形の中の振幅最小の波形
$D_0(s)$	: $d_0(t)$ のラプラス変換
d	: d_r を要素とする
D	: 波形に対する条件を行列表示したときの係数行列
E_k	: 通常多進符号列におけるパルスの振幅
E_{im}	: 符号波形を構成する各パルスの振幅
$E(j\omega)$	: 等化増幅器の伝達関数
e_i	: 第 i 番目の要素が 1 なる単位ベクトル
E	: 符号波形に関する行列
$f(\lambda)$	: 遷移確率行列の固有多項式
$F(j\omega)$	: 波形整形回路網に対する入力信号の周波数スペクトル
$g(t)$	: 波形整形回路網の出力波形
$g_i(t)$	: シグナルフローグラフの節点 i における符号波形
$G_i(s)$	: $g_i(t)$ のラプラス変換
$G_e(s)$	: フルビッツ多項式の偶関数部
$H(s)$	: フルビッツ多項式
k	: ボルツマン定数
$L(j\omega)$	: 線路の伝達関数
m	: 低域遮断次数
M	: 1ブロックを構成するディジット数
M	: 波形整形伝達関数の分子多項式の次数
M_0	: 漏話の誘導系の回線数
n	: 波形整形伝達関数の分母多項式の次数

$N(\omega)$	: 入力雑音の電力スペクトル
P_e	: 符号誤り率
$P(u)$	: 総合雑音振幅の確率密度関数
$P_I(v)$	: 符号間干渉の確率密度関数
$P_G(x)$	: ガウス性雑音振幅の確率密度関数
$P_T(x)$	: 熱雑音振幅の確率密度関数
$P_n(y_n)$	: 近端漏話雑音振幅の確率密度関数
$P_f(y_f)$	: 遠端漏話雑音振幅の確率密度関数
$P_1(v_1)$	: 1個先行したタイムスロットの等化パルスによる符号間干渉振幅の確率密度関数
$P_{Ie}(v)$	: 符号間干渉の等価確率密度関数
P	: 符号波形の生起確率ベクトル
Q	: 符号波形の種類の総数
$Q(s)$	: 波形整形伝達関数の分子多項式
$r(t)$	: 等化波形
$r_{ij}(j\omega_k)$	: シグナルフローグラフにおける伝達関数の留数
$R(j\omega)$	: 等化波数の周波数スペクトル
$R_o(\omega)$	: $R(j\omega)$ の振幅特性
S	: 複素角周波数
$\text{sgn}(t)$	: +1 または -1 (t の値によって決まる)
S	: +1 または -1 (v の値によって決まる)
$S(t)$	: 再生中断器送信波形
$S(j\omega)$	: $s(t)$ の周波数スペクトル
t_{ij}	: j 番目の符号波形から i 番目の符号波形への遷移確率
t_m	: 識別時点
T	: 1 タイムスロット間隔 (クロック周波数の逆数)
T_o	: ケーブルの絶対温度
T	: 遷移確率行列
u	: 総合雑音の瞬時振幅
$U_{ij}(t)$	: シグナルフローグラフの節点 i にデルタ関数を印加したときの節点 j の応答信号
$U_{ij}(s)$	: シグナルフローグラフにおける節点 i から j までの伝達関数 ($U_{ij}(t)$ のラプラス変換)
$U_h(s)$	: フルビッツ多項式の奇関数部
v	: 符号間干渉振幅
v_i	: 1個先行したタイムスロットの等化パルスによる符号間干渉振幅
V	: 情報伝送速度
w_o	: 荷重定数
$W(s)$	: ガウス近似有理関数形伝達関数
x	: 熱雑音の瞬時振幅
x	: 1 タイムスロットだけの遅延オペレータ
$x_j(s)$	: $U_{1j}(s)$ に同じ
$X_n(j\omega)$	: 近端漏話の伝達関数
$X_f(j\omega)$	: 遠端漏話の伝達関数

$\mathbf{x}$	: 2次計画問題における変数ベクトル
$\mathbf{X}$	: $X_j(s)$ を要素とする行ベクトル
y_n	: 近端漏話雑音の瞬時振幅
y_f	: 遠端漏話雑音の瞬時振幅
z	: ガウス性雑音の瞬時振幅
α_i	: 数値積分の係数
$\beta_i(t)$	: 同上
δ_{ij}	: クロネッカのデルタ
$\delta(v)$	: デルタ関数
λ_r	: ラグランジュ乗数
μ_i	: 生起確率
σ_G	: ガウス性雑音の実効値
σ_t	: 熱雑音の実効値
σ_n	: 近端漏話雑音の実効値
σ_f	: 遠端漏話雑音の実効値
$\phi(\omega)$	: 符号パルス列の電力スペクトル
$\phi_c(\omega)$	: 電力スペクトル中の連続成分
$\phi_d(\omega)$	: 電力スペクトル中の線成分
$\phi_i(\omega)$	: i 番目の符号波形のみより成る符号パルス列の電力スペクトル
$\phi_{i+j}(\omega)$	: i 番目と j 番目の2種類の符号波形より成る符号パルス列の電力スペクトル
ω_H	: 高域遮断角周波数
ω_L	: 低域遮断角周波数
ω_0	: クロック角周波数

第2章 PCM通信における波形伝送について

2.1 PCM方式の現状

PCM方式は1937年A. H. Reevesによって発明されたが、その当時は適当な実現方法が見当らず、第2次大戦後、発達したパルス技術に支えられて研究が開始された。1948年、米国において初めて実験用PCM装置が試作され、またわが国でも1951年頃から電々公社通研で基礎研究が行なわれるようになった。

その結果情報理論の立場からは勝れた通信方式であるとされながらも、真空管を数多く必要とする点で、経済性、信頼性において、アナログ通信方式より劣るものと判断せざるを得なかった。

しかし、その前後のトランジスタの発明とこれに続く半導体技術の進歩、及び電子計算機の発達に伴うデジタル技術の進歩によって、PCM方式は1960年頃に至り再び注目されるようになった。

一方この頃、社会的条件として、PCM方式の適用領域が開けてきた。それは近距離搬送回線である。すなわち電話の自動即時化の進展に伴い、局間ケーブルの多重使用が必要となってきたのである。

局間ケーブルは従来音声伝送のみの領域であり、FDM方式（周波数分割多重方式）を適用するとしても、ケーブルの漏話が悪いと、3通話路程度の多重化が限度とされていた。ここに雑音、漏話に強いというPCM方式の利点を生かし得るのではないかと考えられ、各方面で活発な研究が開始された。

1962年、米国ではベル研究所が中心となって近距離伝送用としてT-1方式が実用化された。

わが国でも1965年近距離24通話路PCM方式が実用化され、現在全国的な規模で商用化が進められている。

また、わが国独自の方式として、120通話路及至240通話路程度の多重度を有し、市外回線への適用を想定した方式の実用化研究が略終了している。

以上の諸方式においては、多重度が比較的小さいため再生中継器に対する経済的制約が大きく、中継器における波形整形回路も簡易なものとせざるを得なかった。(4)

このため、これ等の諸方式の研究に際しては、波形伝送に関する本格的な研究は殆んど行なわれなかった。上に述べたように、PCM方式は、比較的近距離の回線から実用化が行なわれたが、PCM方式の大きな利点の1つは再生中継を繰り返すことにより伝送品質を落さず相当長距離伝送可能なことであり、この意味で長距離回線にも適した方式であるといえる。

したがって電子交換、データ通信等の関連分野の技術の進歩と共に長距離超多重PCM方式に期待するところは大きい。

このような理由から、平衡対ケーブル、同軸ケーブル、ミリ波導波管などを伝送線路とする超多重PCM方式の研究が各所で進められている。本研究は平衡対ケーブル及び同軸ケーブルなどを伝送媒体とする基底帯域伝送の場合を扱っているので、この分野で現在波形伝送の面において問題となっている点を述べておこう。

同軸ケーブルのように減衰量がいわゆる $\sqrt{f}$ 特性で周波数と共に急激に増大する伝送線路に対しては、符号形式や等化波形の選定に留意して帯域幅を有効に利用し、情報伝送速度をできるだけ向上させることが必要である。

符号形式に関しては、2進符号に比べて情報量の大きい多進符号に関する研究が活発に行なわれ、種々の符号構成が提案されている。

等化波形の最適化についても、最近その重要性が認識され始め、いくつかの研究成果が報告されているが、波形整形回路網（等化増幅器）の近似方法まで含めた一貫性のある研究は、現在までのところ行なわれていないようである。

2.2 再生中継

PCM方式は周知の如く、音声、テレビ、あるいはデータ等の信号を、標本化、量子化及び符号化して送信し、中継伝送路において再生中継を繰返して、受信端局における復号化により原信号を得る伝送方式である。

この方式の大きな利点の1つは、再生中継器により、雑音あるいは漏話の影響を除去して伝送品質を殆んど落すことな

く多中継伝送が可能なことである。

符号構成の問題は次節で述べることとし、ここでは単一パルス（通常、矩形波）を伝送する場合について、再生中継伝送路のブロック図を図 2.1 に示す。

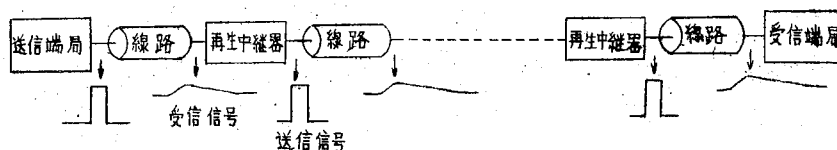


図 2.1 再生中継伝送路のブロック図

再生中継器の機能を一言で言えば、伝送線路で微少なレベルに減衰した波形^を $d(t)$ の有無の識別し、有りと判定した場合は、前段の再生中継器の送出パルスと同一のパルスを再生した線路に送出することである。

勿論、その際雑音によって誤った識別を行なう可能性があるのを、これを極力小さく抑えねばならない。このため再生中継器は通常 R と呼ばれる 3 つの機能、すなわち

- ① 等化増幅器による波形整形 (Reshaping)
- ② タイミング波の抽出 (Retiming)
- ③ 識別再生 (Regeneration)

を有している。図 2.2 にブロック図を示す。

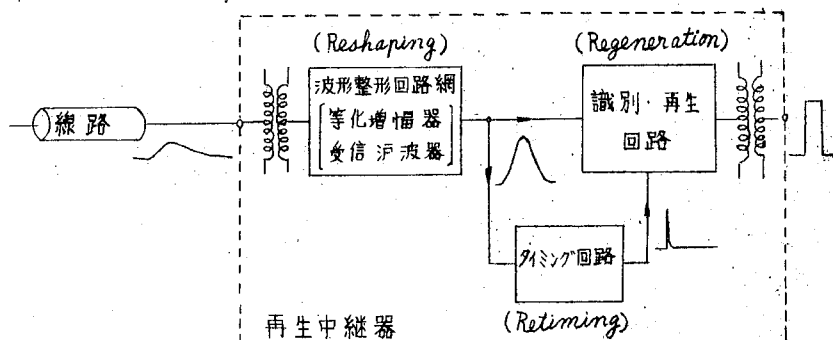


図 2.2 再生中継器 ブロック図

再生中継器の入力信号は、図 2 のように非常に小さくまた時間的に広がっているため、そのまま識別再生回路に加えることは不可能である。

そこでまず等化増幅器（線形回路）により時間域でまとまりのよい波形に整形すると共に、その尖頭値が識別回路に加えるのに適当な電圧となるように増幅する。

タイミング回路は、等化増幅された信号系列から、 Q の高いタンク回路により「クロック」周波数の正弦波を抽出し、適当に位相調整を行なった後、それを微分して、等化波形の振幅が最大となる時点と同位相のパルス列をつくり出すものである。等化波形の閾値以上の部分とタイミング波との論理積により識別を行ない、信号有りと識別された場合は、ブロッキング発振器あるいはフリップ回路^{フリップ}を駆動して送出パルスを発生する。これが識別再生回路の機能である。

2.3 符号構成と電力スペクトル

本節では現在各方面で議論を呼んでいる符号構成の問題について述べる。

2 進符号はもっとも単純でかつ基本的な形態であるが、伝送系の特性によっては多進符号が有利であることもあり、また情報としては 2 進であっても見かけ上 3 進（擬 3 進）に変形されることもある。

符号構成に際して考慮されるべき点は

- ① 情報量が大きいこと
- ② 雑音に強いこと
- ③ 低域遮断特性の影響を受けにくいこと
- ④ タイミング波の抽出が容易であること
- ⑤ 回線の監視が可能であること
- ⑥ 機器の構成が簡単であること

などである。

以上の諸点を近距離²4通話方式で実用になっているバイポーラ符号について考察する。バイポーラ符号とは、1, 0 から成る2進符号において、1が生起する毎にその極性を反転するものである。⁽⁵⁾

2進符号 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1

バイポーラ符号 1 0 0 -1 1 -1 0 1 0 0 -1

このような符号が考案されたのは、主に第③項を考慮したためであるが、第①項から順を追って説明する。

第①項：1と-1は同一情報を表わしているから見かけ上は3進であっても情報量の点からは2進符号と同じであり、情報量は小さい。

第②項：1と-1から成る2進符号より劣る。

第③項：再生中継器の動作に必要な直流電力は通常、信号と同一の線路を用いて伝送される。そのため図2.2に示すように再生中継器の入出力に、信号と電力を分離するための変成器が設けられ、これによる低域遮断の影響が問題となる。

これを防ぐ1つの方法としてバイポーラ符号が考案されたのである。バイポーラ符号は1が0をはさんでも連続することとは無く、符号列としての直流分は無い。このため低域遮断の影響を受けにくい符号となっている。

第④項：0が多数連続する可能性があり、このままではタイミング波の抽出に有利ではないが、近距離方式では8個以上0が連続しないように、バイポーラ^後変換前の2進系列を発生している。

第⑤項：中継回線に障害が起きた場合、これを簡単な方法で検知し得ることが保守の点から必要である。バイポーラ符号は1と-1が交互に生起するように構成されている。これをバイポーラルールと呼んでいる。このルールの破れる頻度が大きい場合は、回線に障害が起きていると判断される。このように第⑤項に対しては有利である。

第⑥項：比較的簡単である。

バイポーラ符号は要するに、情報量を犠牲にして、低域遮断に対する影響を強くし、かつ監視を容易にした符号形式であるといえよう。

つぎに第④項のタイミング波の抽出という点を特に考慮したPST符号について述べる。⁽⁶⁾ PSTはPaired Selected-Ternaryの略であり、1, 0から成る2進符号列を2個づつ1組にして、表2.1に示す対応関係に従って1, 0, -1から成る符号列に変換する。直流分のある符号に対して正負のモードを交互に生起させることにより、符号列の低周波成分を減少させる。すなわち第③項に対して考慮している。

表2.1 PST符号

分類番号	直流分	情報番号	+モード	-モード
I	0	1	+1, -1	+1, -1
		2	-1, +1	-1, +1
II	±1	3	+1, 0	-1, 0
		4	0, +1	0, -1

例えば

2進 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1

PST 1 0 0 -1 -1 1 0 1 1 -1 0 -1

のように変換される。

0 が 2 個以上連続して生起することは無いから、第④項のタイミング波の抽出に対して有利である。

1. 0 -1 を用いて 2 個を 1 組とすると、 $3^2 = 9$ 通りの符号をつくり得る。P S T 符号はその内 6 個を選んで、(1 1)，(-1 -1)，(0 0) の 3 個を捨てている。これは、第④項及び第③項を考慮したためである。

さらに 6 個の内、(1 0) と (-1 0)，(0 1) と (0 -1) は同一の情報を表わしている。したがって第①項の情報量の点ではバイポーラと全く同じである。

また第②、⑤及び⑥についてもバイポーラ符号と略同様と考えられる。

第③項の低域遮断の影響に対しては、上に述べたようにモード変換を行なうという考慮を払っているが、1 または -1 が 2 個連続して生起することがあるので、バイポーラ符号と比較すると不利である。

要するに、バイポーラ符号と比べ、タイミング波の抽出の点で勝れ、低域遮断の影響に対して劣っている。

以上述べたバイポーラ符号及び P S T 符号について、その符号列の遷移状態は、各々図 2.3. 及び図 2.4. に示すようなシグナルフローグラフで表わされる。

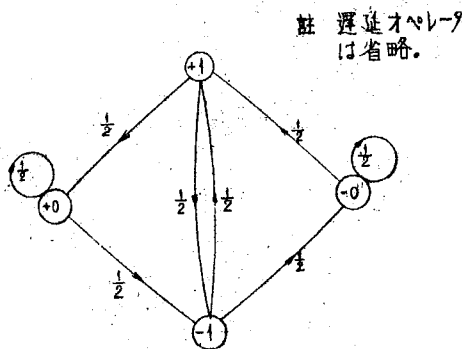


図 2.3 バイポーラ符号の遷移図

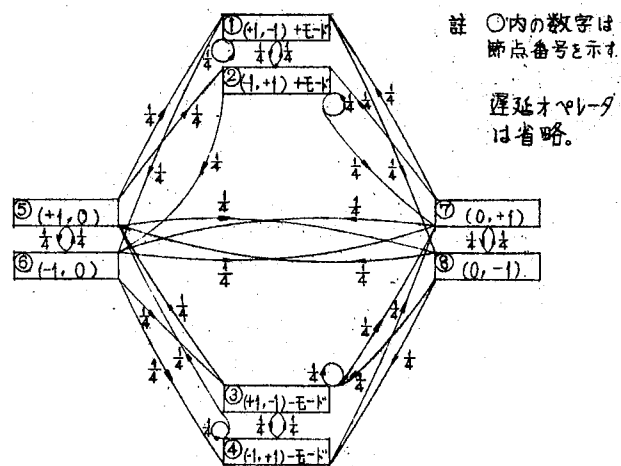


図 2.4 PST 符号の遷移図

シグナルフローグラフで表わすために、換言すれば単純マルコフ過程として表現するために、バイポーラ符号の場合は 0 を正モードの 0 と負モードの 0 に分けて考える必要があり、P S T 符号の場合も (1 -1) (-1. 1) について同様の考慮が必要となる。

さて、近距離方式の実用化に当っては、機器あるいは回路構成の簡単さ、低域遮断の原因となる変成器の比帯域に関する当時の部品技術の限界などを考慮して、バイポーラ符号形式が採用されたのであるが、将来の起多重長距離方式に対しては、より情報量の大きい符号構成を考えることが望ましい。

P S T 符号においては、低域遮断の影響、タイミング波の抽出に関する考慮から (1 1)，(0 0)，(-1 -1) なる組合せを使用しないこととしたが、情報量の点からは、これ等の組合せも利用する方が好ましい。その際、低域遮断の影響に対する考慮から (1. 1) と (-1 -1) は同一の情報を表わすものとし、交互に生起させることとする。したがって、表 2.1 に対応して表 2.2 のようになる。

表 2.2 3 値 2 デジジット符号

分類番号	直流分	情報番号	+モード	-モード
I	0	1	+1, -1	+1, -1
		2	-1, +1	-1, +1
		3	0, 0	0, 0
II	±1	4	+1, 0	-1, 0
		5	0, +1	0, -1
III	±2	6	+1, +1	-1, -1

形式が採用されたのであるが、将来の起多重長距離方式に対しては、より情報量の大きい符号構成を考えることが望ましい。

PST符号においては、低域遮断の影響、タイミング波の抽出に関する考慮から(1, 1), (0, 0), (-1, -1)なる組合せを使用しないこととしたが、情報量の点からは、これ等の組合せも利用の方が好ましい。

その際、低域遮断の影響に対する考慮から(1, 1)と(-1, -1)は同一の情報を表わすものとして、交互に生起させることとする。したがって、表2.1に対応して表2.2のようになる。

表2.1 PST符号

分類番号	直流分	情報番号	+モード	-モード
I	0	1	+1, -1	+1, -1
		2	-1, +1	-1, +1
II	±1	3	+1, 0	-1, 0
		4	0, +1	0, -1

表2.2 3値2ディジット符号

分類番号	直流分	情報番号	+モード	-モード
I	0	1	+1, -1	+1, -1
		2	-1, +1	-1, +1
		3	0, 0	0, 0
II	±1	4	+1, 0	-1, 0
		5	0, +1	0, -1
III	±2	6	+1, +1	-1, -1

PST符号の情報量は、各情報が等確率、かつ互いに独立であるとすれば、1ディジット(1タイムスロット)当り1ビットであるが、表2の符号構成の場合は、

$$\frac{1}{2} \log_2 6 = 1.29 \text{ (ビット/ディジット)} \quad (2.1)$$

に増大する。

表2.2のように、1, 0, -1の3つの値を用い、2ディジット宛の組合せをすべて用いて、その内直流分の有る組合せに対しては、互いに逆極性の組合せを対にして、この対に情報を付与し、かつ、直流分の等しい対をまとめて、それ等の対の間でモード変換を行なう符号形式を3値2ディジット符号と呼ぶこととする。⁽¹³⁾

3値3ディジットとすれば、更に情報量に増大する。

一般に3値Mディジット(M=1, 2, 3, ……)とすると、Mが大きい程、情報量が多い。M=1に相当する符号形式がバイポーラ符号である。

低域遮断の影響によって生ずる符号間干渉の大きさはMの値によって異なるが、これを無視し得たとすれば、雑音余裕はMの値によって変らないから、誤り率を一定としたときの情報伝送速度(情報量とクロック周波数の積)もMが大きい程、増大する。

タイミング波の抽出、低域遮断の影響に対してはMが大きい程不利となるから、このような符号形式を使用する場合には、変成器の性能、回路構成の難易等を考える必要がある。つぎに符号間拘束を全く設けない符号形式について考える。

+1, 0, -1の3つの値を用い、これ等を互いに独立に生起せしめる符号形式は通常3進符号と呼ばれている。+1, 0, -1の各々にそのまま情報を付与することができるので、通常3進符号と呼ばず、通常3進符号と呼んでいる。

通常3進符号列において、+1と-1の生起確率が等しい場合は、符号列の直流分は零である。このような通常3進符号を平衡のとれた通常3進符号と呼ぶこととする。これは、3値Mディジット符号において、Mを無限大とした符号形式すなわち無限大ブロック長3値平衡符号に相当している。

特に+1, 0, -1が等確率で生起する符号列においては、1ディジット当りの情報量は

$$\log_2 3 = 1.585 \text{ (ビット/ディジット)} \quad (2.2)$$

となり、バイポーラ符号の約1.6倍である。

以上、3進符号について考えてきたが、さらに4値以上の多値符号を用いれば、1ディジット当りの情報量は増大する。

しかし雑音余裕は減少するから、誤り率を一定としたときの情報伝送速度は多値数を増す程大きくなるわけではない。

最適多値数についても、最近、検討が行なわれているが、基底帯域伝送系においては、4値符号が最適に近く、かつ実現性もあるといわれている。⁽⁷⁾

通常3進符号に対応して、符号間拘束の無い多値符号は、通常多進符号と呼ばれている。これについては、第4章で詳

述する。

多値符号に対しても、先に述べた①～⑥項をすべて考慮する必要があり、将来のPCM方式に関して、どのような符号形式が望ましいか、という点について現在多くの研究者によって種々の角度から検討されている。

符号構成の研究に関連して重要なのは、符号列の電力スペクトルを知ることである。

たとえばある符号形式が低域遮断の影響を受け易いか否かということのを他の符号形式と比較する場合、あるいはタイミング波の周波数成分の大小を比較する場合、電力スペクトルの相違を見ればよい。

また方式設計上あるいは最適波形の追求に際して漏話雑音の値を求めることが必要であるが、それにはまず符号列の電力スペクトルを知ることが必要であるので、これについて第3章で検討する。

2.4 波形等化と符号誤り率

再生^継断器が大別して三つの回路、すなわち等化増幅器（波形整形回路）、タイミング波抽出回路、識別再生回路から構成されることを2.2節で述べた。

タイミング波抽出回路及び識別再生回路は本研究の範囲外であるからこれ以上述べることは差し控える。

本研究は、第 $(n-1)$ 番目の中^継断器の出力点から第 n 番目の中^継断器の等化増幅器出力点（信号識別点）までを扱うものであり、この区間を波形等化区間と呼ぶこととする。これを図2.5に示す。

伝送線路が平衡対ケーブルの場合は、漏話雑音が符号誤りの大きな原因となる。漏話には近端漏話と遠端漏話があり、図2.5はこれを説明するものである。

同軸ケーブルを用いる場合は漏話雑音は無視し得る。

そこで符号誤りの原因は

- ① 熱雑音
- ② 漏話雑音
- ③ 符号間干渉雑音

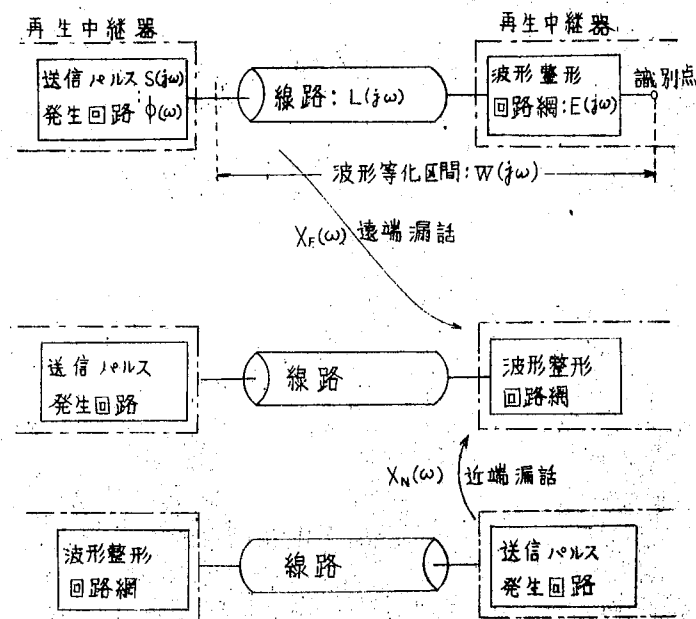


図2.5 波形等化区間と漏話の説明

となり、同軸ケーブルの場合は第②項を無視してよいということになる。

再生中継器の役割はできるだけ小さな誤り率で波形再生を行なうことであり、したがって波形等化も誤り率を最小にするという観点から行なわれるべきである。

第 (n-1) 番目の中継器送出波形、伝送線路の周波数^特特性、中継間隔、クロック周波数などの伝送系の諸条件を与えたとき、符号誤り率を最小ならしめる等化波形を最適波形と呼ぶこととする。

符号誤りの原因となる諸雑音はすべて統計的性質を有するものであるから、誤り率を求めるには先ずそれ等の統計的性質を知る必要がある。

熱雑音についてはその確率分布を正規分布と考えてよいことは理論的にも実験的にも確かめられており、周知の事実である。

またその分散（電力）は、 $F(\omega)$ を等化増幅器の雑音指数として

$$\sigma_t^2 = \frac{KT_0}{2\pi} \int_0^\infty F(\omega) |E(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.3)$$

で与えられる。

ここに k_B はボルツマン定数、 T_0 はケーブルの絶対温度である。また $E(j\omega)$ は等化増幅器の周波数特性である。

次に漏話雑音について述べる。回線数が多い場合、漏話雑音の瞬時振幅が正規分布で充分近似し得ることが理論と実験の両面から確かめられている。⁽⁸⁾⁽⁹⁾

近端漏話の場合、その分散（電力）は

$$\sigma_n^2 = \frac{M_0}{2\pi} \int_0^\infty \phi(\omega) |X_n(j\omega)|^2 |E(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.4)$$

$$\sigma_f^2 = \frac{M_0}{2\pi} \int_0^\infty \phi(\omega) |L(j\omega)|^2 |X_f(j\omega)|^2 |E(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.5)$$

で与えられる。

ここに

M_0 : 漏話の原因となる平衡対ケーブル（誘導系）の数

$\phi(\omega)$: 中継器送出符号列の電力スペクトル

$L(j\omega)$: 伝送線路（この場合平衡対ケーブル）の周波数特性

$X_n(j\omega)$: 近端漏話の伝達関数

$X_f(j\omega)$: 遠端漏話の伝達関数

$X_n(j\omega)$, $X_f(j\omega)$ については詳細な研究が行なわれており、その周波数特性も知られているがここでは省略する。

式 (2.4) , (2.5) から判るように漏話雑音の計算に際しては中継器送出符号列の電力スペクトルを求めておかねばならない。

最後に符号間干渉雑音について述べよう。符号間干渉とは、注目する（任意の）ディジット以外の等化波形の残留応答（注目するディジットの識別時点における）の総和をいう。したがって符号間干渉の統計的性質は符号形式と等化波形によって決まる。

簡単のため、符号形式を通常3進符号とし、伝送路に低域遮断がなく等化波形が図2.6に示されるものである場合は先行ディジットからの残留応答のみ考慮すればよく、1, 0, -1 が等確率（各々 $\frac{1}{3}$ ）で生起するものと仮定すれば、符号間干渉の確率密度関数は

$$P_I(v) = \frac{1}{3}\delta(v - C_1) + \frac{1}{3}\delta(v) + \frac{1}{3}\delta(v + C_1) \quad (2.6)$$

と表わされる。

ここに $\delta(v)$ はデルタ関数である。

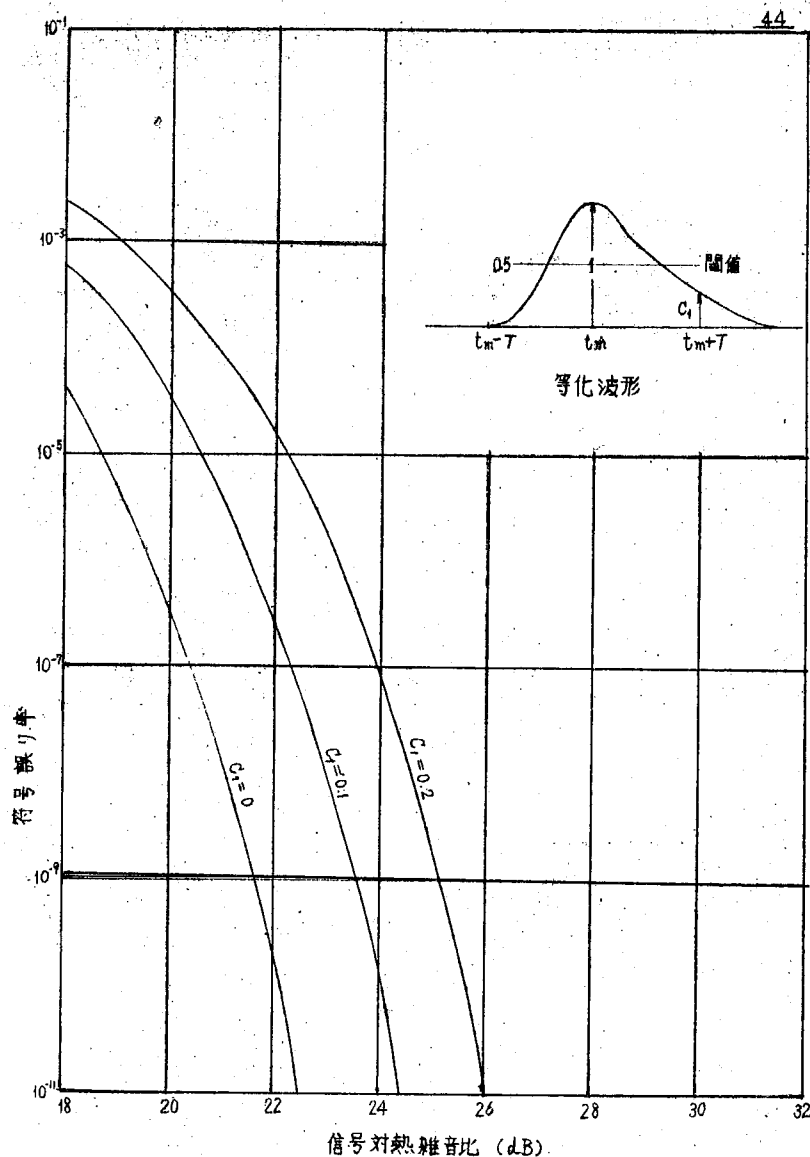


図 2.6 符号誤り率特性の一例

符号形式及び等化波形が異なり、かつ伝送路に低域遮断がある場合には、このように簡単に求まらないが、この問題は第 4 章で詳しい検討を行なう。

符号間干渉が式 (2.6) で表わされる場合について、符号誤り率 P_0 を求めておく。

熱雑音の確率密度関数は

$$P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta_t} \exp \left[-\frac{1}{2\delta_t^2} x^2 \right] \quad (2.7)$$

近端漏話雑音のそれは

$$P_n(y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta_n} \exp \left[-\frac{1}{2\delta_n^2} y_n^2 \right] \quad (2.8)$$

訂正 ($\delta \rightarrow \sigma$)

遠端漏話雑音について

$$P_f(y_f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta_f} \exp \left[-\frac{1}{2\delta_f^2} y_f^2 \right] \quad (2.9)$$

と表わすことができる。

ここで σ_t , σ_n , σ_f は各々式 (2.3), (2.4), (2.5) に示す通りである。

各々の雑音 x_i 互いに独立であるから、総合雑音の瞬時振幅を u とし、確率密度関数を $P(u)$ とすれば

$$P(u) = P_t(x) \times P_n(y_n) \times P_f(y_f) \times P(z) \quad (2.10)$$

で与えられる。

ここに $\times$ 印はたたみこみ積分を示す。

$$P_n(y_n) \times P_f(y_f) \times P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_t^2 + \sigma_n^2 + \sigma_f^2)}} \exp\left[-\frac{u^2}{2(\sigma_t^2 + \sigma_n^2 + \sigma_f^2)}\right] \quad (2.11)$$

となるから

$$\sigma_G^2 = \sigma_t^2 + \sigma_n^2 + \sigma_f^2 \quad (2.12)$$

とおくと式 (2.6) 及び (2.11) から

$$P(u) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sigma_G} \left\{ \exp\left[-\frac{(u-C_1)^2}{2\sigma_G^2}\right] + \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_G^2}\right] + \exp\left[-\frac{(u+C_1)^2}{2\sigma_G^2}\right] \right\} \quad (2.13)$$

が得られる。

訂正 ($\delta \rightarrow \sigma$)

図 2.6 に示すように α を 0.5 とすると符号誤り率は

$$P_e = \frac{1}{3} \int_{-0.5}^{-\infty} P(u) \alpha u + \left[\frac{1}{3} \int_{-0.5}^{-\infty} P(u) \alpha u + \frac{1}{3} \int_{0.5}^{+\infty} P(u) \alpha u \right] + \frac{1}{3} \int_{0.5}^{+\infty} P(u) \alpha u \quad (2.14)$$

である。ここに

第1項: $1 \rightarrow 0$ または -1 に誤る確率

第2項: $0 \rightarrow 1$ または -1 に誤る確率

第3項: $-1 \rightarrow 0$ または 1 に誤る確率

を示す。式 (2.13) より

$$P(u) = P(-u) \quad (2.15)$$

であるから

$$P_e = \frac{4}{3} \int_{0.5}^{+\infty} P(u) du = \frac{4}{3\sqrt{2\pi}\sigma_G} \int_{0.5}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(u-C_1)^2}{2\sigma_G^2}\right] + \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_G^2}\right] + \exp\left[-\frac{(u+C_1)^2}{2\sigma_G^2}\right] \right\} du$$

となる。

(2.16)

図 2.6 はこの関係を説明するものである。誤り率を小さくするには、 C_1 及び σ_G の双方を小さくすることが望ましい。

$E(f)$ と σ_G の関係は式 (2.3), (2.4), (2.5) 及び (2.12) によって示される。これから判るように C_1 と σ_G の双方を同時に小さくすることは、 $E(f)$ に対して矛盾した要求を課す。すなわち C_1 を小さくしようとすれば $E(f)$ の高周波における値 (増幅度) を大きくせざるを得ず、そうすると σ_G も増大する。

そこで妥協点を求めることが必要となる。これが最適波形を求めるということの意味である。

本研究はこの最適波形を中心とするものであるが、ここで第3章以下の各章の間に関係について述べておく。最適波形を決定するには、漏話雑音を求めねばならないが、その為には式 (2.4), (2.5) から明らかなように符号列の電力スペクトル $\phi(\omega)$ を計算せねばならない。第3章で電力スペクトルの簡便な新しい計算法を提案する。

なお電力スペクトルを求めることは、前節に述べたように、最適波形の決定以外に、種々の点から必要である。

$x_n(j\omega)$ 及び $x_f(j\omega)$ は前に述べたように知られているから、 $\phi(\omega)$ が求めれば σ_n , σ_f は $E(f)$ の関数で表

わされる。

次に最適波形の決定には符号間干渉に関する検討が必要であるから、これを第4章で述べる。

第5章では最適波形の決定方法と計算結果を示す。

第6章では、第5章で求めた最適波形をインパルス応答及び再生中継器における等化波形とする波形整形回路網の伝達関数について近似方法と計算結果を詳述する。

第3章 符号パルス列の電力スペクトルの計算

符号形式を選定するに当って、電力スペクトルを計算しておくことは、前章で述べたように、その符号形式の諸特性を他の符号形式と周波数領域で比較検討するに際にも、また伝送線路として平衡対ケーブルを用いる場合には最適波形を決定する上でも、必要な事項である。

一方、将来の超多重PCM方式に対しては、情報伝送速度の向上を意図して、種々の多値符号が提案されている。

バイポーラ符号のように符号構成が比較的簡単な場合には、Huggins の提案したシグナルフローグラフ (Signal-Flow Graph, 以下SFGと略記する) による電力スペクトルの計算方法⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾が便利である。

しかし符号構成が複雑となるにしたがってこれを簡略するのに莫大な時間と労力が必要となり、SFGによる従来の方法で電力スペクトルを求めることは実際上不可能な場合が多い。

このような難点を、本章では、SFGの簡略に相当する計算を代数的に行なう方法、および2項電力分解と名付ける方法を併用することにより解決した。^{(12)~(15)}

次に本章の概要を述べる。

まず対象とする符号列について説明した後、与えられた符号間遷移確率行列の固有多項式の係数とHuggins が導いた伝達関数との関係^係を考察し、二、三の公式を得た。

つぎに、大型の遷移確率行列を適当に分割して計算を簡易ならしめるに必要な2項電力分解の定理を導いた。

これらの結果に基づいて、多値平衡符号の一般式を誘導し、計算例を示した。

最後に、従来提案された種々の平衡符号、例えばバイポーラ符号列あるいはPST符号列の電力スペクトルは、この一般式の特殊な場合として求められることを示した。

3.1 節 準 備

3.1.1 計算の対象とする符号列

計算の対象とする符号列は、符号間の遷移確率が与えられているもの、換言すれば単純マルコフ過程として表現できるものである。

たとえばPST符号列において、各情報^{1~4}(表2.1において情報番号①~④)が等確率、すなわち $\frac{1}{4}$ で生起する場合、前章で述べたように図2.4に示すSFGが得られる。

図2.4のSFGを遷移確率行列で表わせば、行及び列の順序を図2.4の節点番号順として

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{matrix} \\ \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \\ ⑥ \\ ⑦ \\ ⑧ \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mu & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ \mu & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \mu & 0 & \mu & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \mu & \mu & 0 & \mu & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \mu & \mu & 0 & \mu & 0 & \mu \\ \mu & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \mu & 0 & \mu & 0 & \mu \\ \mu & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mu = \frac{1}{4} \quad (3.1)$$

となる。ここに i 行 j 列要素はSFGにおける状態 j から状態 i への遷移確率である。

さて、ここではPST符号を一般化して次のような場合を考察する。

各ディジットの符号は多値符号とし、多値数を L とする。1ディジット当りの時間間隔を T で示す。 M ディジットで1ブロックが構成されているものとし、以後各ブロックの波形全体を符号波形と呼ぶこととする。

4値3ディジットの符号波形の一例を図3.1に、また一般の場合を図3.2に示す。

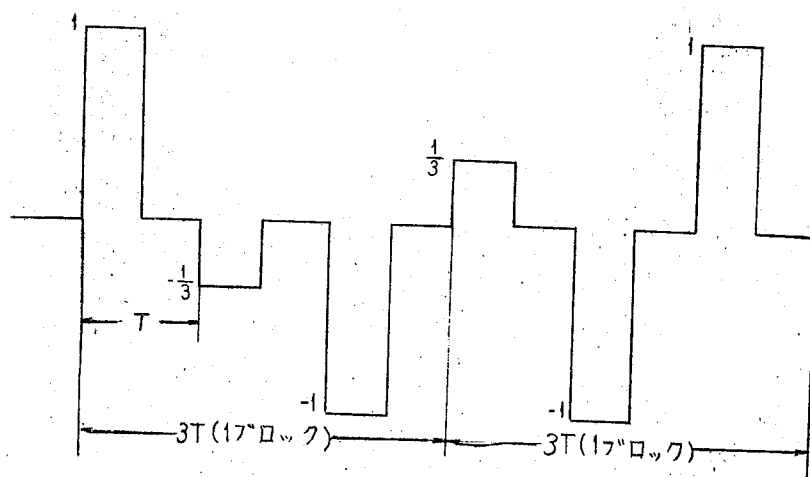


図3.1 4値3ディジット符号

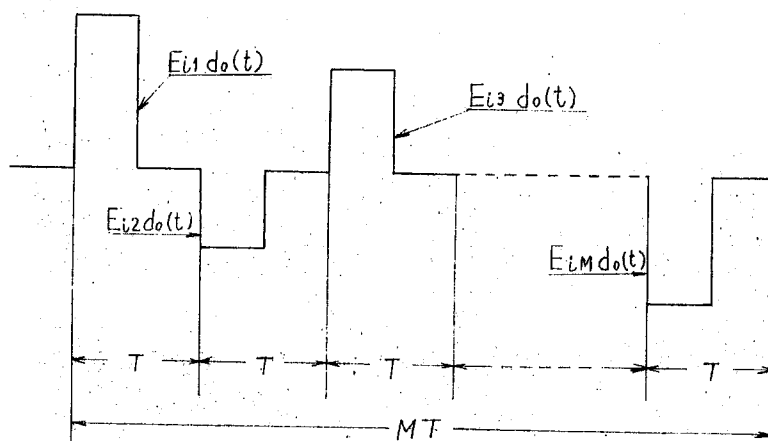


図3.2 符号波形の一例

図3.1及び図3.2では各ディジットの波形を方形波としたが、一般には任意の相似波形とし、振幅最小の波形を $d_0(t)$ そのラプラス変換を $D_0(s)$ とする。 E_{im} ($m=1,2,\dots,M$)は比例定数である。

また符号波形の総数を N とする。これはSFGの節点数あるいは遷移確率行列の次数に等しい。したがって、実際には同じ波形であっても、正モードの符号波形と負モードのそれとは別の符号波形と考える。

たとえば、PST符号では実在する波形は6種類であるが符号波形の総数は8である。

つぎに符号波形の総数 N と多値数 L の関係について述べておく。ブロック長 M に対して L^M 種類の波形をつくり得る。PST符号の場合、 $3^2 (=9)$ 種類のうち不適当なものを除いて6種類としたように、一般に L^M 個の波形をすべて用いるとは限らない。すべての波形を用いる符号形式を L 値 M ディジット符号と呼ぶこととする。 L 値 M ディジット符号の場合は、正モード、負モードの各々の符号波形の存存を考えると、 $N > L^M$ となる。

ここで、つぎに示す N 行 M 列の行列 E

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & \cdots & E_{1M} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & \cdots & E_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{i1} & E_{i2} & E_{i3} & \cdots & E_{iM} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{j1} & E_{j2} & E_{j3} & \cdots & E_{jM} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{N1} & E_{N2} & E_{N3} & \cdots & E_{NM} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

を考えると各符号波形は行列 $\mathbf{E}$ の 1 つの行ベクトルに対応している。

SFG の節点 i における符号波形を $g_i(t)$, そのラプラス変換を $G_i(S)$ とすると

$$G_i(S) = D_0(S) \sum_{m=1}^M E_{im} e^{-(m-1)ST} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.3)$$

で表わせる。

つきに各符号波形の生起確率が与えられているものとし、生起確率ベクトル $\mathbf{P}$ を

$$\mathbf{P} = [P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_1 \ \cdots \ P_j \ \cdots \ P_N]^t \quad (3.4)$$

訂正 ($P_1 \sim P_N \rightarrow \mu_1 \sim \mu_N$)

で示す。

ここに μ_i は 1 番目の符号波形 $g_i(t)$ の生起確率であり、 t は行列 (この場合ベクトル) の転置を表す。

また、 $g_j(t)$ から $g_i(t)$ への遷移確率を t_{ij} とすると、各符号波形間の遷移確率行列 $\mathbf{T}$ は

$$\mathbf{T} = [t_{ij}] \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

となる。

(3.5)

3.1.2 電力スペクトルの基本公式

本節では、解析の出発点となる電力スペクトルの基本公式を示す。これは、Huggins¹⁾, Zadeh, 及び Barnard によって導かれたものである。⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹⁶⁾

いま、時刻 $t=0$ において、 $g_1(t)$ が生起したとすると $t=nMT$ (n は自然数) における $g_1(t)$ の生起確率は与えられた遷移確率から計算できる。

このことを、式 (3.2) に対応する SFG について考えよう。ある現象が $t=0$ で確率 1 で生起する場合、その確率密度関数はデルタ関数 $\delta(t)$ で表わされる。それ故 $t=0$ で $g_1(t)$ が生起するということは、SFG の節点 i に $\delta(t)$ が加えられる事であると考えてよい。

節点 i に $\delta(t)$ が印加されたときの、節点 j における応答が、 $t=nMT$ の各時刻における $g_j(t)$ の生起確率を示す。

節点 j における応答 $u_{ij}(t)$ は

$$u_{ij}(t) = q_1 \delta(t-MT) + q_2 \delta(t-2MT) + \cdots \quad (3.6)$$

と表わされる。ここで $q_1, q_2, \dots$ は各 $t=MT, t=2MT, \dots$ における $g_j(t)$ の生起確率を示すのであるが、信号伝達にたとえれば信号の減衰率を表わすと考えられる。

したがって節点 i から節点 j までの伝達関数 $U_{ij}(s)$ は、式 (3.6) をラプラス変換して

$$U_{ij}(s) = q_1 e^{-MST} + q_2 e^{-2MST} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{-nMST} \quad (3.7)$$

となる。Sは複素角周波数である。

さらに節点jには、 $g_j(t)$ をインパルス応答とする波形整形回路が接続されていると考えると、その波形整形回路の伝達関数は $G_j(s)$ であるから、節点iからその出力までの伝達関数は $U_{ij}(s) G_j(s)$ となる。

さて、Huggins及びZadehによれば、符号パルス列の電力スペクトルの連続成分 $\phi_c(\omega)$ は

$$\phi_c(\omega) = \frac{1}{MT} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_i(-j\omega) G_j(j\omega) \left[\mu_i U_{ij}(j\omega) + \mu_j U_{ji}(-j\omega) - \mu_i \delta_{ij} \right] \quad (3.8)$$

で表わされる。⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ここに δ_{ij} はクロネッカのデルタである。

したがって伝達関数 $U_{ij}(s)$ が求まれば、連続成分は簡単に計算できる。

また

$$U_{ij}(s) = \frac{F_{ij}(s)}{1 - F_{jj}(s)} + \delta_{ij} \quad (3.9)$$

とおくと、線スペクトルはBarnardにより

$$\phi_d(\omega) = \frac{1}{(MT)^2} \left\{ \left| \sum_{i=1}^N \mu_i G_i(j\omega) \right|^2 \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2n\pi}{MT} \right) \right] + \sum_{k=1}^{K-1} \left\{ \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu_i \mu_j G_i(-j\omega) G_j(j\omega) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \cdot F_{ij} \left(\frac{2\pi k}{KMT} \right) \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2n\pi}{MT} - \frac{2k\pi}{KMT} \right) \right] \right\} \right\} \quad (3.10)$$

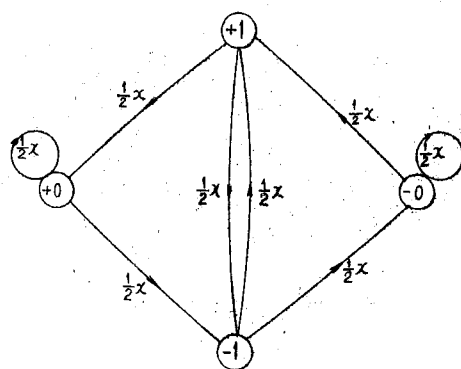
で与えられる。⁽¹⁶⁾ただし、i番目の符号波形 $g_i(t)$ が生起してから少くとも $K_1 MT$ 時間を経たのちでなければ、再びi番目の符号波形は生起しないものとしたとき、 $K_1 (i=1, 2, \dots, N)$ の最大公約数をKとする。

3. 1. 3. シグナルフローグラフによる電力スペクトルの計算方法

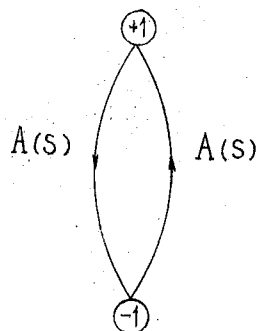
前節で示したように、電力スペクトルを計算するには、伝達関数 $U_{ij}(s)$ を求めねばならないが、HugginsはこれをSFGを簡略する方法で求めている。これを代数的に計算する方法を示すのが本章の主眼の1つであるが、本節ではそれに先立って、バイポーラ符号を例にとって、その電力スペクトルをHugginsの方法で求めておく。

バイポーラ符号列に変換する前の2進符号列において、1と0が等確率で生起するものとする。

このとき、SFGは図2.3で示されるが、これを図3.3(a)として再記する。



(a) バイポーラ符号のSFG



(b) (a)を簡略したSFG

図 3.3 バイポーラ符号のSFGの簡略

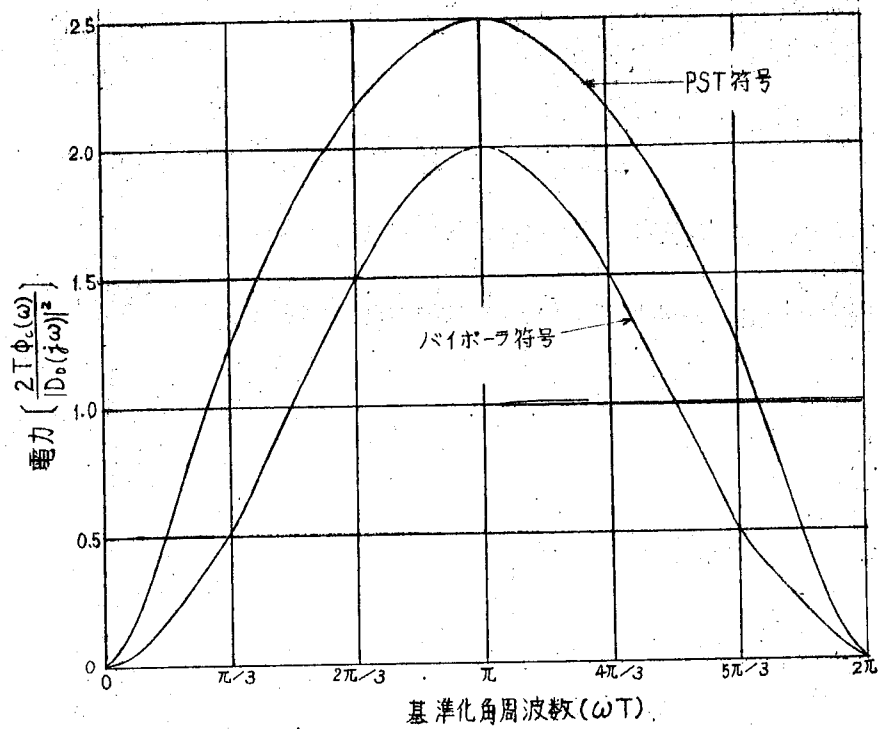


図3.4 バイポーラ及びPST符号の電力スペクトル

$G_3(s)$, $G_4(s) = 0$ であるから U_{11} , U_{12} , U_{21} 及び U_{22} を求めればよい。したがって、節点 3 及び 4 を消去すると同図 (b) を得る。(b) における $A(s)$ は

$$A(s) = \frac{\frac{1}{4}\chi}{1 - \frac{3}{4}\chi} \quad (3.11)$$

ただし

$$\chi = e^{-ST} \quad (3.12)$$

となる。また式 (3.13) 及び (3.14) が得られることは明らかである。

$$U_{11}(s) = U_{22}(s) = \frac{1}{1 - A^2(s)} \quad (3.13), \quad U_{12}(s) = U_{21}(s) = \frac{A(s)}{1 - A^2(s)} \quad (3.14)$$

さらに

$$G_1(s) = -G_2(s) = \frac{1}{s} \left(1 - e^{-\frac{ST}{2}} \right) \quad (3.15)$$

が成り立つ。ただし占有率 50% の矩形波を用いるものとする。

これ等の関係を式 (3.8) に代入して

$$\phi_c(\omega) = \frac{1 - \cos \omega T}{2T} |G_1(\omega)|^2 \quad (3.16)$$

$$\text{または, } = \frac{(1 - \cos \omega T) \left(1 - \cos \frac{\omega T}{2} \right)}{\omega^2 T} \quad (3.17)$$

が得られる。

線スペクトルについては、式 (3.10) において $K = 1$ とおき、かつ式 (3.15) を用いれば $\phi_d(\omega) = 0$ となることが判る。

図 3.4 は

$$\frac{2S_c(\omega)}{|G_1(\omega)|^2} = \frac{1 - \cos \omega T}{T} \quad (3.18)$$

を描いたものである。なお式 (3.8) 及び (3.10) は負の周波数領域にもスペクトルが存在するものとして導かれているが、図 3.4 では正の周波数領域にのみ存在するものとした。

3.2 節 電力スペクトルの代数的計算方法

3.2.1. 符号波形に関する計算

本節では符号波形に関して成立する一般的な関係式を導いておく。式 (3.8) によれば、 $G_1(-j\omega)G_j(j\omega)$ を求めなければならない。

$$G_1(-j\omega)G_j(j\omega) = |D_0(j\omega)|^2 [R_{1j}(\omega) + jX_{1j}(\omega)] \quad (3.19)$$

とくと、式 (3.3) より

$$R_{1j}(\omega) = \left[\sum_{m=1}^M R_{1jm} \cos(m-1)\omega T \right] \quad (3.20)$$

$$X_{1j}(\omega) = \left[\sum_{m=2}^M X_{1jm} \sin(m-1)\omega T \right] \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{1j1} &= E_{11} E_{j1} + E_{12} E_{j2} + \dots + E_{1M} E_{jM} \\ R_{1j2} &= (E_{11} E_{j2} + E_{12} E_{j3} + \dots + E_{1(M-1)} E_{jM}) + (E_{j1} E_{12} + E_{j2} E_{13} + \dots + E_{j(M-1)} E_{1M}) \\ R_{1jM} &= E_{1M} E_{jM} + E_{jM} E_{1M} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 X_{1j2} &= (E_{j1} E_{12} + E_{j2} E_{13} + \dots + E_{j(M-1)} E_{1M}) \\
 &\quad - (E_{11} E_{j2} + E_{12} E_{j3} + \dots + E_{1(M-1)} E_{jM}) \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 X_{1jM} &= E_{j1} E_{1M} - E_{1M} E_{jM}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

の諸式が得られる。

また、式(3.20)～(3.23)において i と j を交換して

$$R_{ji}(\omega) = R_{ij}(\omega), \quad X_{ji}(\omega) = -X_{ij}(\omega) \quad (3.24)$$

となるから

$$G_j(-j\omega) G_i(j\omega) = |D_0(j\omega)|^2 \left[R_{ij}(\omega) - j X_{ij}(\omega) \right] \quad (3.25)$$

を得る。

3.2.2 伝達関数の計算

バイポーラ符号のごとく符号構成が簡単な場合には、4.4節に示したように、SFGの簡略により容易に符号列の電力スペクトルを求めることができる。

しかしPST符号の場合は、SFGの簡略が容易でないことが、図2.4から想像できよう。SipressはSFGの簡略によりPST符号列の電力スペクトルを求めており、その計算が面倒であったことを記している。⁽⁶⁾

第2章で述べたような、さらに複雑な構成を有する符号列に対しては、SFGの簡略により、その電力スペクトルを求めることは實際上不可能に近い。

そこで本節では、与えられた遷移確率行列から代数的な計算によって伝達関数を求める方法を示す。

この方法によれば、たとえば式(3.1)に示すPST符号列の場合のごとく行列に規則性がある場合には、伝達関数の数式計算は比較的簡単であり、また規則性がない場合にも計算機による自動計算に適している。

さて、式(3.5)に対応するSFGの節点 i に δ 関数を加えた場合、各節点における応答のラプラス変換を

$$x_1(s), x_2(s), \dots, x_i(s), \dots, x_j(s), \dots, x_N(s)$$

とし、

$$x = e^{-sMT} \quad (3.26)$$

$$X = (x_1(s), x_2(s), \dots, x_i(s), \dots, x_j(s), \dots, x_N(s)) \quad (3.27)$$

$$Tx = \begin{bmatrix} t_{1j} x \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots, 0) \text{ (第 } i \text{ 列が } 1 \text{)} \quad (3.29)$$

とおくと

$$X^t = TX^t + e_i^t \quad (3.30)$$

が成立する。

クラメルの公式を用いて

$$U_{ij}(x) = x_j(s) = \frac{N_{ij}(x)}{D(x)} \quad (3.31)$$

を得る。ここに

$$D(x) = |1 - Tx| \quad (3.32)$$

$$N_{ij}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-t_{11}\lambda & -t_{12}\lambda & \cdots & -t_{1j}\lambda & \cdots & -t_{1N}\lambda \\ -t_{21}\lambda & 1-t_{22}\lambda & \cdots & -t_{2j}\lambda & \cdots & -t_{2N}\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -t_{i1}\lambda & -t_{i2}\lambda & \cdots & 1-t_{ij}\lambda & \cdots & -t_{iN}\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -t_{j1}\lambda & -t_{j2}\lambda & \cdots & -t_{jj}\lambda & \cdots & -t_{jN}\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -t_{N1}\lambda & -t_{N2}\lambda & \cdots & -t_{Ni}\lambda & \cdots & 1-t_{NN}\lambda \end{vmatrix} \quad (3.33)$$

であり、 $\mathbf{1}$ は N 行 N 列の単位行列、 $N_{ij}(\lambda)$ は第 j 列が単位ベクトルとなる行列式である。

伝達関数 $U_{ij}(\lambda)$ の分母多項式 $D(\lambda)$ は λ の N 次多項式であり、行列 $\mathbf{T}$ の固有多項式との関係を考えることからの定理を得る。

定理 3.1 伝達関数の分母多項式 $D(\lambda)$ の k 次の係数は遷移確率行列 $\mathbf{T}$ の固有多項式 $f(\lambda)$ の $(N-k)$ 次の係数と一致する。

すなわち $f(\lambda)$ を

$$f(\lambda) = \lambda^N + A_1 \lambda^{N-1} + A_2 \lambda^{N-2} + \cdots + A_k \lambda^{N-k} + \cdots + A_N \quad (3.34)$$

とすると $D(\lambda)$ は

$$D(\lambda) = 1 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \cdots + A_k \lambda^k + \cdots + A_N \lambda^N \quad (3.35)$$

と表わされる。

証明

$$h(\lambda, \lambda) = |\lambda \mathbf{1} - \mathbf{T}\lambda| \quad (3.36)$$

とおくと、これは、

$$h(\lambda, \lambda) = \lambda^N + A_1 \lambda^{N-1} \lambda + A_2 \lambda^{N-2} \lambda^2 + \cdots + A_k \lambda^{N-k} \lambda^k + \cdots + A_N \lambda^N \quad (3.37)$$

となる。式 (3.37) において $\lambda = 1$ とおくと

$$h(\lambda, 1) = f(\lambda) = \lambda^N + A_1 \lambda^{N-1} + A_2 \lambda^{N-2} + \cdots + A_k \lambda^{N-k} + \cdots + A_N \lambda^N \quad (3.38)$$

を得、 $\lambda = 1$ とおくと

$$h(1, \lambda) = D(\lambda) = 1 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \cdots + A_k \lambda^k + \cdots + A_N \lambda^N \quad (3.39)$$

を得る。(証明終)

つぎに分子多項式 $N_{ij}(\lambda)$ において考察する。

まず $(i \neq j)$ なる場合、式 (3.33) において行と列の入れ換えを適当に行なうと

$$N_{ij}(\lambda) = -(|N_{\lambda 1}| - |N_{\lambda 2}|) \quad (3.40)$$

$$N_{\lambda 1} = \left[\begin{array}{c|cccc} 1-t_{ji}\lambda & -t_{j1}\lambda & -t_{j2}\lambda & \cdots & -t_{jN}\lambda \\ -t_{i1}\lambda & & & & \\ \vdots & & & & \\ -t_{Ni}\lambda & & & & \end{array} \right] \quad (3.41)$$

$$N_{\lambda 2} = [1 - \mathbf{T}_{iijj} \lambda] \quad (3.42)$$

となる。ここに $\mathbf{T}_{iijj}$ は行列 $\mathbf{T}$ より i 行 i 列および j 行 j 列を除いた行列である。

$|N_{\lambda 1}|$ は $(N-1)$ 次、 $|N_{\lambda 2}|$ は $(N-2)$ 次の多項式で、分母多項式の場合と同様に考えて、行列 $\mathbf{T}$ を式 (3.41)

及び (3.42) に対応して変形した行列の固有多項式 $f_{N-1}(\lambda)$ 、および $f_{N-2}(\lambda)$ よりその係数を決定できる。すなわち、

$$f_{N-1}(\lambda) = \lambda^{N-1} + b_{1j1} \lambda^{N-2} + \dots + b_{1j(N-2)} \lambda + b_{1j(N-1)} \quad (3.43)$$

$$f_{N-2}(\lambda) = \lambda^{N-2} + c_{1j1} \lambda^{N-3} + \dots + c_{1j(N-3)} \lambda + c_{1j(N-1)} \quad (3.44)$$

とくと、分子多項式 $N_{1j}(\lambda)$ は

$$N_{1j}(\lambda) = B_{1j1} \lambda + B_{1j2} \lambda^2 + \dots + B_{1j(N-2)} \lambda^{N-2} + B_{1j(N-1)} \lambda^{N-1} \quad (3.45)$$

と表わせる。ここに

$$\left. \begin{aligned} B_{1j1} &= -(b_{1j1} - c_{1j1}) \\ B_{1j2} &= -(b_{1j2} - c_{1j2}) \\ &\dots\dots\dots \\ B_{1j(N-2)} &= -(b_{1j(N-2)} - c_{1j(N-2)}) \\ B_{1j(N-1)} &= -b_{1j(N-1)} \end{aligned} \right\} (i \neq j) \quad (3.46)$$

である。

式(3.35), (3.45)を用いると伝達関数 $U_{1j}(s)$ は

$$U_{1j}(s) = \frac{B_{1j1} s + B_{1j2} s^2 + \dots + B_{1j(N-1)} s^{N-1}}{1 + A_1 s + A_2 s^2 + \dots + A_{N-1} s^{N-1} + A_N s^N} \quad (i \neq j) \quad (3.47)$$

となる。($i = j$) の場合は T より 1 行 i 列を除いた行列 T_{1i} を用いて

$$N_{1i}(\lambda) = |1 - T_{1i} \lambda| \quad (3.48)$$

より分子多項式を求めることができる。 T_{1i} の固有多項式を

$$f_{N-1}(\lambda) = \lambda^{N-1} + b_{1i1} \lambda^{N-2} + \dots + b_{1i(N-2)} \lambda + b_{1i(N-1)} \quad (3.49)$$

とすると

$$U_{1i}(s) = \frac{1 + B_{1i1} s + B_{1i2} s^2 + \dots + B_{1i(N-1)} s^{N-1}}{1 + A_1 s + A_2 s^2 + \dots + A_{N-1} s^{N-1} + A_N s^N} \quad (3.50)$$

となる。

式(3.47)及び(3.50)をまとめて、

$$U_{1j}(s) = \frac{B_{1j0} + B_{1j1} s + B_{1j2} s^2 + \dots + B_{1j(N-1)} s^{N-1} + B_{1jN} s^N}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \dots + A_{N-1} s^{N-1} + A_N s^N} \quad (3.51)$$

と書くこととする。ここに

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1, \\ B_{1j} &= 0, \quad i \neq j \\ &= 1, \quad i = j \\ B_{1jN} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

である。

3.2.3 連続スペクトルの計算公式

連続スペクトル即ち電力スペクトルの連続成分は式(3.8)で表わされるが、複素数計算を避けるため、次のように変形する。

$$\phi_c(\omega) = \frac{1}{MT} \left[\sum_{i=1}^n G_i(-j\omega) G_i(j\omega) \mu_i \{ U_{i1}(j\omega) + U_{i1}(-j\omega) - 1 \} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n \left\{ G_i(-j\omega) G_j(j\omega) \right. \right. \\ \left. \left. \{ \mu_i U_{ij}(j\omega) + \mu_j U_{ji}(-j\omega) \} + G_j(-j\omega) G_i(j\omega) \{ \mu_j U_{ji}(j\omega) + \mu_i U_{ij}(-j\omega) \} \right\} \right] \quad (3.53)$$

式(3.19)および(3.25)を用いると

$$\phi_c(\omega) = \frac{|D_0(j\omega)|^2}{MT} \left[\sum_{i=1}^n R_{i1}(\omega) \mu_i \{ U_{i1}(j\omega) + U_{i1}(-j\omega) - 1 \} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n \left\{ R_{ij}(\omega) \{ \mu_i (U_{ij}(j\omega) + U_{ij}(-j\omega)) + \mu_j (U_{ji}(j\omega) + U_{ji}(-j\omega)) \} \right. \right. \\ \left. \left. + j X_{ij}(\omega) \{ \mu_i (U_{ij}(j\omega) - U_{ij}(-j\omega)) + \mu_j (U_{ji}(j\omega) - U_{ji}(-j\omega)) \} \right\} \right] \quad (3.54)$$

と変形できる。

式(3.54)において、伝達関数の和と差の項は、式(3.51)を用いるとつぎのように表わされる。

$$U_{ij}(j\omega) + U_{ij}(-j\omega) = \frac{\sum_{m=0}^n K_{ijm} \cos m\omega T}{\sum_{m=0}^n R_m \cos m\omega T} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} R_0 &= A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 \\ R_1 &= 2 [A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n] \\ R_2 &= 2 [A_0 A_2 + A_1 A_3 + \dots + A_{n-2} A_n] \\ &\dots \dots \dots \\ R_n &= 2 A_0 A_n \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} K_{ij0} &= 2 [A_0 B_{ij0} + A_1 B_{ij1} + \dots + A_n B_{ijn}] \\ K_{ij1} &= 2 [A_0 B_{ij1} + A_1 B_{ij0} + \dots + A_{n-1} B_{ijn} + A_n B_{ij(n-1)}] \\ K_{ij2} &= 2 [A_0 B_{ij2} + A_2 B_{ij0} + \dots + A_{n-2} B_{ijn} + A_n B_{ij(n-2)}] \\ &\dots \dots \dots \\ K_{ijn} &= 2 [A_0 B_{ijn} + A_n B_{ij0}] \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$U_{ij}(j\omega) - U_{ij}(-j\omega) = j \frac{\sum_{m=1}^n W_{ijm} \sin m\omega T}{\sum_{m=0}^n R_m \cos m\omega T} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
W_{1j1} &= 2 \left[(A_0 B_{1j1} - A_1 B_{1j0}) + \dots + (A_{n-1} B_{1jn} - A_n B_{1j(n-1)}) \right] \\
W_{1j2} &= 2 \left[(A_0 B_{1j2} - A_2 B_{1j0}) + \dots + (A_{n-2} B_{1jn} - A_n B_{1j(n-2)}) \right] \\
&\dots \dots \dots \\
W_{1jn} &= 2 \left[A_0 B_{1jn} - A_n B_{1j0} \right]
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$U_{ji}(j\omega) + U_{ji}(-j\omega)$ は式 (3.55) および (3.57) で i と j を交換すればよい。 $U_{ji}(j\omega) - U_{ji}(-j\omega)$ についても同様である。

以上の結果を用いると、式 (3.53) は

$$\begin{aligned}
\phi_c(\omega) &= \frac{|D_0(\omega)|^2}{MT} \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{m=1}^M R_{1im} \cos(m-1)\omega T \right\} \mu_i \left\{ \frac{\sum_{k=0}^N K_{11} \cos kM\omega T}{\sum_{k=0}^N H_k \cos kM\omega T} - 1 \right\} \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=2}^N \left\{ \sum_{m=1}^M R_{1jm} \cos(m-1)\omega T \cdot \frac{\mu_i \sum_{k=0}^N K_{1jk} \cos kM\omega T + \mu_j \sum_{k=0}^N K_{jik} \cos kM\omega T}{\sum_{k=0}^N H_k \cos kM\omega T} \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{m=1}^M X_{1jm} \sin(m-1)\omega T \cdot \frac{\mu_j \sum_{k=0}^N W_{jik} \cos kM\omega T - \mu_i \sum_{k=0}^N W_{ijk} \cos kM\omega T}{\sum_{k=0}^N H_k \cos kM\omega T} \right\} \right] \tag{3.60}
\end{aligned}$$

となる。式 (3.56), (3.57), (3.59) および (3.60) より連続スペクトルを求めることができる。

3.2.4 線スペクトルの計算公式

線スペクトルは式 (3.10) により与えられるが、 $F_{ij}(s)$ を改めて遷移確率行列から求めることは面倒であるので、伝達関数 $U_{ij}(s)$ の計算式 (3.51) を利用することを考える。

星子等は、伝達関数 $U_{ij}(s)$ の特異点における留数を用いて、線スペクトルを表示している⁽¹⁷⁾。特異点は実角周波数軸上にのみ存在し、それ等を $j\omega_k$ ($k=0, 1, 2, \dots, N$) とおいて、Barnard の結果と合わせると

$$r_{ij}(j\omega_k) = \frac{P_j}{MT} F_{ij}(j\omega_k) \tag{3.61}$$

が成り立ち、また式 (3.10) の K を用いて、

$$\frac{\omega_k}{W_k} = \frac{2\pi k}{KMT} \tag{3.62}$$

となる。ここに $r_{ij}(j\omega_k)$ は $S = j\omega_k$ における伝達関数の留数であり、式 (3.31) より

$$r_{ij}(j\omega_k) = \left[\frac{N_{ij}(s)}{D'(s)} \right]_{s=j\omega_k} \tag{3.63}$$

である。

$$\mu_i r_{ij}(j\omega_k) = V_{ij}(j\omega_k) + jU_{ij}(j\omega_k) \tag{3.64}$$

とおくと

$$\mu_j r_{ji}(j\omega_k) = V_{ij}(j\omega_k) - jU_{ij}(j\omega_k) \tag{3.65}$$

となる。また式 (3.63) および (3.51) より

$$r_{1j}(j\omega_k) = -\frac{1}{MT} \frac{\sum_{k=0}^N B_{1jk} \cos kM\omega_k T + j \sum_{k=1}^N B_{1jk} \sin kM\omega_k T}{\sum_{k=1}^N kA_k \cos(k-1)M\omega_k T + j \sum_{k=2}^N kA_k \sin(k-1)M\omega_k T} \quad (3.66)$$

が得られる。

式(3.63)～(3.66)を用いて式(3.10)を変形すると

$$\begin{aligned} \phi_1(\omega) = & \frac{|D_0(j\omega)|^2}{(MT)^2} \left\{ \left| \sum_{i=1}^N \mu_i R_i(\omega) \right|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{MT}\right) \right. \\ & + \sum_{k=1}^{K-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu_i \mu_j \left\{ X_{1j} \frac{N_{cij}(\omega_k) D_{sij}(\omega_k) - N_{sij}(\omega_k) D_{cij}(\omega_k)}{(D_{cij}(\omega_k))^2 + (D_{sij}(\omega_k))^2} \right\} \right. \\ & \left. \left. - R_{1j}(\omega_k) \frac{N_{cij}(\omega_k) D_{cij}(\omega_k) + N_{sij}(\omega_k) D_{sij}(\omega_k)}{(D_{cij}(\omega_k))^2 + (D_{sij}(\omega_k))^2} \right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{MT} - \frac{2\pi k}{KMT}\right) \right\} \quad (3.67) \end{aligned}$$

を得る。ここに

$$\left. \begin{aligned} N_{cij}(\omega_k) &= \sum_{\nu=0}^N B_{\nu} \cos \nu M\omega_k T \\ N_{sij}(\omega_k) &= \sum_{\nu=1}^N B_{\nu} \sin \nu M\omega_k T \\ D_{cij}(\omega_k) &= \sum_{\nu=1}^N \nu A_{\nu} \cos(\nu-1)M\omega_k T \\ D_{sij}(\omega_k) &= \sum_{\nu=2}^N \nu A_{\nu} \sin(\nu-1)M\omega_k T \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

で与えられる。また $R_{1j}(\omega_k)$, $X_{1j}(\omega_k)$ については式(3.19)～(3.23)を参照されたい。

3.3 節 平衡符号の電力スペクトル

3.3.1 2項電力分解

前節までに述べたように、伝達関数 $U_{1j}(s)$ を代数的に計算することによって、連続スペクトルあるいは線スペクトルは比較的簡単に求められるが、遷移確率行列の次数が大きい場合には、あらかじめ行列 $\mathbf{T}$ を分割しておくことにより全体の計算はさらに容易になる。

まず、2項および単項電力スペクトルなる概念を導入する。

定義 2項(単項)電力スペクトル: Q 種類の符号波形から成る符号列より第 i 番目および第 j 番目の2種類(第1番目の1種類)の符号波形のみ残して他の符号波形を零とみなした符号列の電力スペクトル $\phi_{(i+j)}(\omega)$ ($\phi_i(\omega)$) を2項(単項)電力スペクトルと定義する。

これを用いるとつぎの定理が得られる。

定理3.2 符号パルス列の電力スペクトル $\phi(\omega)$ はあらゆる組合せの2項電力スペクトルの総和から単項電力スペクトルの総和の $(Q-2)$ 倍を差引いたものに等しい。すなわち

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^{Q-1} \sum_{j=2}^Q \phi_{i+j}(\omega) - (Q-2) \sum_{i=1}^Q \phi_i(\omega) \quad (3.69)$$

($i < j$)

が成立する。

証明 与えられた符号列を $Y(t)$, 第1番目の符号波形のみから成る符号列を $Y_1(t)$ で表わすと

$$Y(t) = \sum_{i=1}^Q Y_i(t) \quad (3.70)$$

である。また $Y_{Ti}(t)$ をつぎのように定める。

$$\begin{aligned} Y_{Ti}(t) &= Y_i(t) & |t| \leq \frac{T}{2} \\ &= 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{aligned} \quad (3.71)$$

$Y_{Ti}(t)$ のフーリエ変換を $Y_T(j\omega)$ 、集合平均をとる操作を E で表わすと、周知の通り

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^Q S_{ij}(j\omega) \quad (3.72)$$

$$S_{ij}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left| \frac{1}{T} Y_{Ti}(j\omega) \overline{Y_{Tj}(j\omega)} \right| \quad (3.73)$$

となる。ただし $\overline{Y_{Tj}(j\omega)}$ は $Y_{Tj}(j\omega)$ の複素共役関数である。

一方、2項電力スペクトル $S_{(i+j)}(\omega)$ は定義により

$$S_{(i+j)}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left| Y_{Ti}(j\omega) + Y_{Tj}(j\omega) \right|^2 \quad (3.74)$$

($i \neq j$)

である。ここで

$$\sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^Q \left| Y_{Ti}(j\omega) + Y_{Tj}(j\omega) \right|^2 = 2Q \sum_{i=1}^Q \left| Y_{Ti}(j\omega) \right|^2 + 2 \sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^Q [Y_{Ti}(j\omega) \overline{Y_{Tj}(j\omega)}] \quad (3.75)$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^Q \left\{ Y_{Ti}(j\omega) \overline{Y_{Tj}(j\omega)} \right\} = \sum_{i=1}^{Q-1} \sum_{j=2}^Q \left| Y_{Ti}(j\omega) + Y_{Tj}(j\omega) \right|^2 - (Q-2) \sum_{i=1}^Q \left| Y_{Ti}(j\omega) \right|^2 \quad (3.76)$$

($i < j$)

が成り立つから、式(3.72)、(3.73)および(3.76)と合せて式(3.69)を得る。 (証明終)

この定理は符号構成の複雑な場合(たとえばSFGの節点数20以上の場合)に適用して効果をもつものであるが、ここでは説明の便宜上PST符号に対する応用について考える。

PST符号の場合、表2.1から判るように $Q=6$ であって(Q は実在する符号波形の種類の数であって与えられた行列の次数とは必ずしも一致しない。)、 $C_2=15$ 通りの2項電力スペクトルと6通りの単項電力スペクトルが存在するが、これらを表3.1のように分類すると各類毎に1つの遷移確率行列またはSFGが定まる。たとえば表3.1のA類に対するSFGは図3.5に示すようになる。

表3.1 PST符号の分類

種 類	内 容	各類の個数
A 類	I 類より2種類	1
C 類	I, II 類より各1種類	8
D 類	II 類より2種類	6
E 類	I 類より1種類	2
F 類	II 類より1種類	4

注. ○内の数字は節点番号を示す.

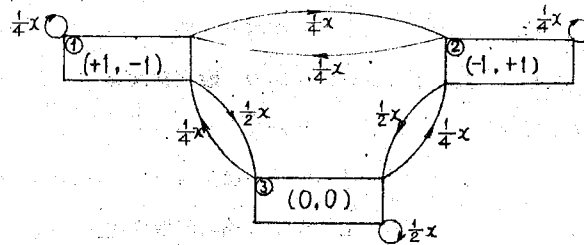


図3.5 PST符号のA類のSFG

節点③の(0, 0)は(+1, -1), (-1, +1)以外の符号波形を零とみなすことを意味している。図3.5に対応する行列 T_A は

$$T_A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

である。この行列 T_A について、伝達関数 $U_{ij}(s)$ を求め、式(3.8)に従って(+1, -1), (-1, +1)なる組合せに対する電力スペクトルを計算する。表3.1よりA類はこれだけであるから、この電力スペクトルを $S_A(\omega)$ で表わす。

C類については符号波形の組合せは8通り存在するが、伝達関数はC類に対して定まる行列について1つだけ求めておけばよい。C類に属する8個の2項電力スペクトルの総和を $S_C(\omega)$ とし、D, E, F類についても同様に考えると、PST符号列の電力スペクトルは

$$\phi(\omega) = [\phi_A(\omega) + \phi_C(\omega) + \phi_D(\omega)] - 4 [\phi_E(\omega) + \phi_F(\omega)] \quad (3.78)$$

となることは定理3.2から明らかである。

以上のような計算法で $\phi(\omega)$ を求めると、

$$\phi(\omega) = \frac{1}{8T} |D_0(\omega)|^2 (1 - \cos \omega T) (7 + 4 \cos \omega T + 2 \cos^2 \omega T) \quad (3.79)$$

が得られ、SipressがSFGを用いて求めた結果⁽⁶⁾と一致する。

3. 3. 2 一般公式

伝送路に低域遮断がある場合に対して、符号列の電力スペクトルの低周波成分を減少せしめるような符号構成が種々提案されており^{(17)~(20)}、このように構成された符号形式を平衡符号と呼んでいる。

本節ではPST符号を拡張した平衡符号の電力スペクトルの一般式を誘導し、従来提案された種々の平衡符号の電力スペクトルが、この一般式の特殊な場合として求まることを示す。

まず符号構成について述べる。各ディジットは多値数 L の多値符号とし、正負対称とする。 M 個のディジットで1ブロックを構成すると L^M 個の符号波形をつくり得る。 L^M 個より適当に取捨選択した符号波形のなかで、直流分の無いものに対してはそのまま情報を付与し、直流分のあるものに対しては互いに逆極性のものを対として各対に情報を付与する。4値2ディジット符号(第2章で述べたように、2ディジットで1ブロックが構成され、 $4^2=16$ 個のすべての符号波形を用いるものとする。図3.6、および3.7の他の符号についても同様である。)について例示すると表3.2のようになり、一般の場合は表3.3のように示される。

表3.2 4値2ディジット符号

分類番号	直流分	情報番号	+モード	-モード
I 類	0	1	+1, -1	+1, -1
		2	-1, +1	-1, +1
		3	$+\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$
		4	$-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}$
II 類	$+\frac{2}{3}$	5	+1, $-\frac{1}{3}$	-1, $+\frac{1}{3}$
		6	$-\frac{1}{3}, +1$	$+\frac{1}{3}, -1$
		7	$+\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$
III 類	$+\frac{4}{3}$	8	+1, $+\frac{1}{3}$	-1, $-\frac{1}{3}$
		9	$+\frac{1}{3}, +1$	$-\frac{1}{3}, -1$
IV 類	± 2	10	+1, +1	-1, -1

表3.3 多値平衡符号

分類番号	直 流 分	各 類 の 個 数	情報番号
I 類	0	$n(I)$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_I \end{matrix}$
II 類	$\pm D_{II}$	$n(II)$	$\begin{matrix} n_I + 1 \\ \vdots \\ n_{II} \end{matrix}$
-----	-----	-----	-----
J 類	$\pm D_J$	$n(J)$	$\begin{matrix} n_{J-1} + 1 \\ \vdots \\ n_J \end{matrix}$
-----	-----	-----	-----
K 類	$\pm D_K$	$n(K)$	$\begin{matrix} n_{K-1} + 1 \\ \vdots \\ n_K \end{matrix}$
-----	-----	-----	-----
Z 類	$\pm D_Z$	$n(Z)$	$\begin{matrix} n_{Z-1} + 1 \\ \vdots \\ n_Z \end{matrix}$

符号別の直流分を除去するため、同一直流分を有する波形については、正負のモードが交互に発生するように各類毎に共通にモード変換を行なう。直流分零の符号波形が生起してもモードは変わらない。各情報は互いに独立に、与えられた確率で生起するものとする。以上の構成規則から遷移確率行列を書き下すことができる。

しかし L および M がある程度以上大きくなると行列の次数 N も急激に増大する。たとえば4値4ディジットの場合 $N = 300$ となり、SFGの簡略はもとより、3.2節の代数的方法によっても伝達関数の計算は容易でない。そこで前節で述べた2項電力分解の方法を用いて計算の簡易化を行なう。表3.1に示すPSTの場合と同様の分類を行なうと表3.4を得る。 L および M が如何に大きくとも、各類の遷移確率行列の次数は各々表3.4に示す一定値に制限される。

表3.4 多値平衡符号の分類

種 類	内 容	最大行(列)数
A 類	I 類より2種類の符号波形も抽出	3
B 〃	J および K 類より各1種類を抽出	20
C 〃	I および K 類より各1種類 〃	8
D 〃	J 類より2種類 〃	8
E 〃	I 類より1種類 〃	2
F 〃	J 類より1種類 〃	4
ただし $J = II, III \cdots Z$, $K = II, III \cdots Z$		

これは、2種類（または1種類）の符号波形以外のそれを零としているからである。したがって符号列全体の行列を書く必要はなく、各類の行列を書いて、これから伝達関数を求めればよい。 L および M が大きくなっても符号波形の組合せが増加するだけである。

各情報が等確率 (n_z^{-1}) で生起する場合について、前節に例示したPST符号と同様の計算手順により、多値平衡符号の連続スペクトルを求めると、表3.3の記号を用いて

$$\begin{aligned}
\phi_c(\omega) = & \frac{1}{n_z M T} \left[\left(1 - \frac{1}{n_z}\right) \sum_{i=1}^{n_I} |G_i(j\omega)| \right. \\
& - \frac{2}{n_z} |D_0(\omega)|^2 \sum_{i=1}^{n_I-1} \sum_{j=2}^{n_I} R_{ij}(\omega) + \sum_{J=II}^Z \left\{ \phi_1(\omega) \sum_{i=n_J-1+1}^{n_J} |G_i(j\omega)|^2 \right. \\
& \left. \left. + 2\phi_2(\omega) |D_0(j\omega)|^2 \sum_{i=n_J-1+1}^{n_J-1} \sum_{j=n_J-1+2}^{n_J} R_{ij}(\omega) \right\} \right] \quad (3.81)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
\phi_1 = & \phi_D^{-1}(\omega) \left[\left(1 + n_z^{-1} - 2n_z^{-1} n(J)\right) \cos 2M\omega T - 4 \left(1 - n_z^{-1} n(J)\right) \left(1 + n_z^{-1} - n_z^{-1} n(J) \cos M\omega T \right. \right. \\
& \left. \left. + (3 + 3n_z^{-1} - 6n_z^{-1} n(J) - 4n_z^{-2} n(J) + 4n_z^{-2} n^2(J)) \right) \right] \quad (3.82)
\end{aligned}$$

$$\phi_2(\omega) = \phi_D^{-1}(\omega) n_z^{-1} \left[\cos 2M\omega T + 4 \left(n_z^{-1} n(J) - 1\right) \cos M\omega T + (3 - 4n_z^{-1} n(J)) \right] \quad (3.83)$$

$$\phi_D(\omega) = \left(1 - 2n_z^{-1} n(J)\right) \cos 2M\omega T - 4 \left(1 - n_z^{-1} n(J)\right)^2 \cos M\omega T + (3 - 6n_z^{-1} n(J) + 4n_z^{-2} n^2(J)) \quad (3.84)$$

である。なお、本符号形式では式(3.1.0)におけるKが1であって第1項のみ考えればよく、また各情報を等確率と仮定しているので、線スペクトルは含まれていない。

3値および4値平衡符号について、 $D_0(\omega)=1$ とした場合を式(3.81)～(3.84)より求めると図3.6および3.7のようになる。

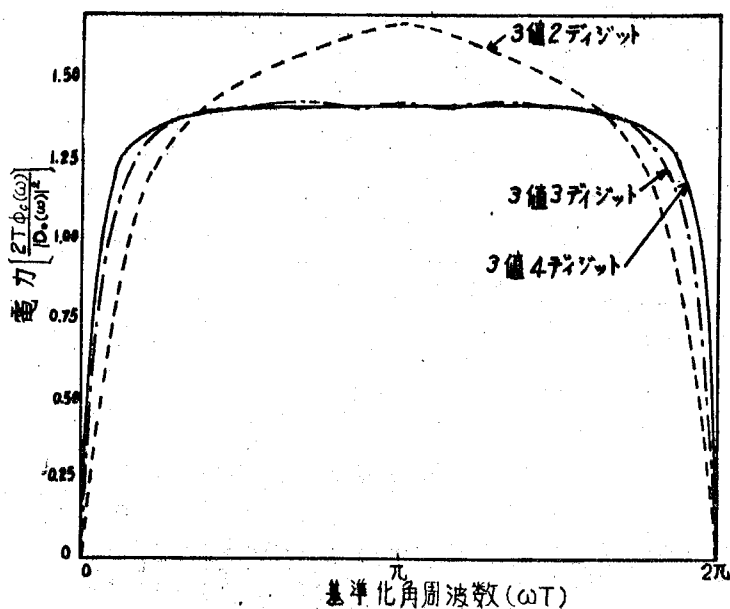


図3.6 3値平衡符号の電力スペクトル

式の誘導は負の周波数領域にも電力スペクトルが存在するものとして行なったが、図3.6および3.7では負領域には存在しないものとして示した。

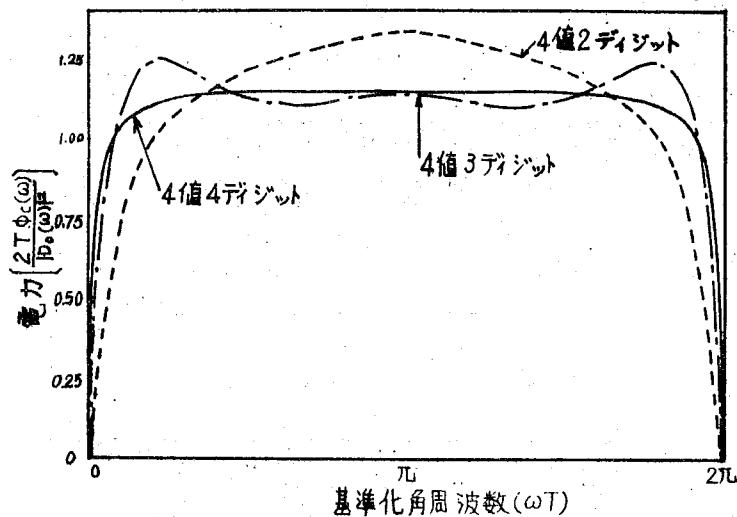


図3.7. 4値平衡符号の電カスペクトル

3.3 各種符号列の電力スペクトル

従来多くの研究者によって提案された種々の符号形式の電力スペクトルは、各情報が等確率で生起する場合、前節で求めた多値平衡符号の電力スペクトルの一般式、すなわち式(3.81)～式(3.84)の特別の場合として求められることを次に示す。

(i) バイポーラ符号

$$M=1, \quad Z=2, \quad n(I)=1, \quad n(II)=1, \quad n_Z=2 \quad (3.85)$$

とおくことにより

$$\phi_c(\omega) = \frac{|D_0(j\omega)|^2}{2T} (1 - \cos \omega T) \quad (3.86)$$

を得、シグナルフローグラフを簡略する方法で求めた結果すなわち式(3.16)と一致する。

尚、この場合、式(3.3)より

$$G_1(j\omega) = D_0(j\omega) \quad (3.87)$$

が成立している。

(ii) PST符号

$$M=2, \quad Z=2, \quad n_Z=4, \quad n(I)=2, \quad n(II)=2 \quad (3.88)$$

とおくことにより、

$$\phi_c(\omega) = \frac{1}{8T} |D_0(j\omega)|^2 (1 - \cos \omega T) (7 + 4 \cos \omega T + 2 \cos^2 \omega T) \quad (3.89)$$

が得られ、式(3.79)あるいは Sipress が求めた結果⁽⁵⁾と一致する。

(iii) 荒谷等の提案せる符号⁽¹⁸⁾

表3.2に示す4値2ディジット符号において、情報番号9, 10を除去した符号形式⁽¹⁸⁾について電力スペクトルを求める。

$$M=2, \quad n_Z=8, \quad n(I)=4, \quad n(II)=2, \quad n(III)=2, \quad Z=3 \quad (3.90)$$

といて、

$$\phi_c(\omega) = \frac{|D_0(j\omega)|^2}{3.6T} \left[1.0(1 - \cos \omega T) + \frac{5}{4 \cos 2\omega T - 5} (\cos 3\omega T + 1.0 \cos 2\omega T - 1.1) \right] \quad (3.91)$$

を得る。これを図 3.8 に示す。

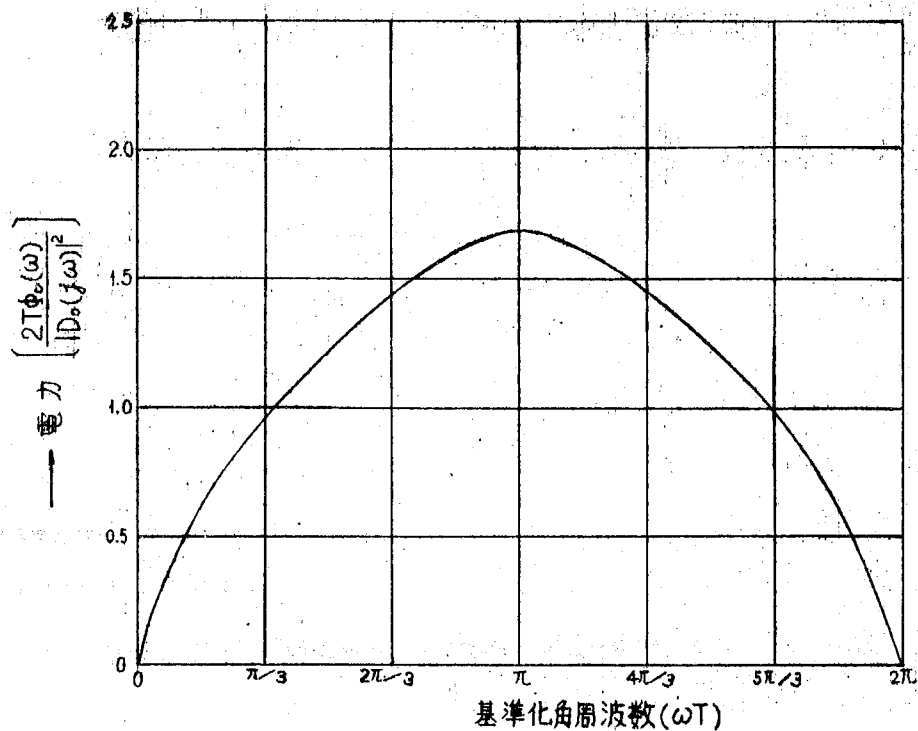


図 3.8 荒谷等の提案セル符号の電力スペクトル

但し、上式は負の周波数領域にもスペクトルが存在するものとして導かれたものであるが、図 3.8 では正領域のみを考えて、式 (3.91) の値を 2 倍している。

式 (3.91) は、シグナルフローグラフによる方法と 3.9 に提示した 2 項電力分解の方法を併用して求めた結果⁽¹⁵⁾と一致している。また太平等は、計算機シミュレーション (乱数より擬似符号列を発生し、その自己相関関数を求めてフーリエ変換する。) による方法を提案し、本符号形式に適用した結果を発表しているが⁽²¹⁾両者は良く一致している。各ディジットのパルス波形を矩形波とする場合についてこれを図 3.9 に示す。

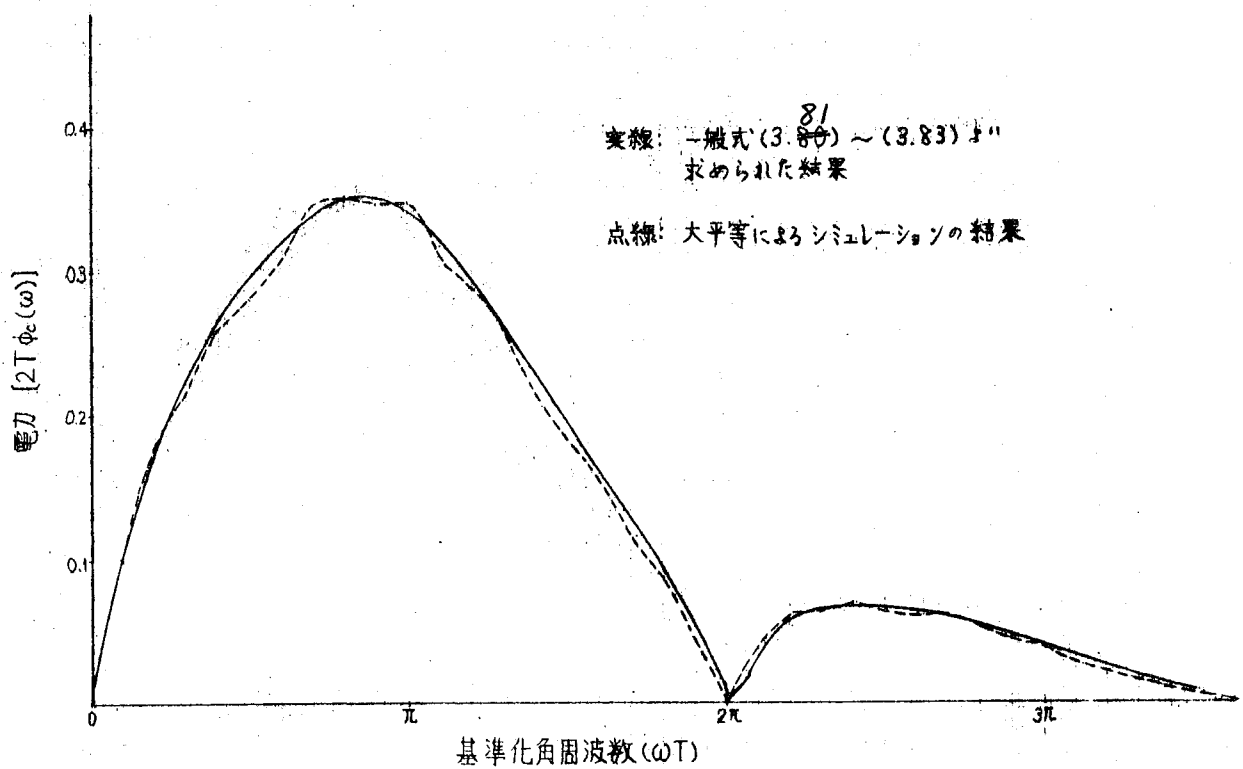


図3.9 荒谷等の提案せる符号の電力スペクトル

(IV) 中込等の提案せる符号⁽¹⁹⁾

中込等は表3.3に示す平衡符号においてⅡ類以下を使用せず、Ⅰ類のみすなわち各ブロックの直流分が零となる符号波形のみを用いる符号形式を提案している。

3値符号について、ブロック長が2の場合

$$M=2, \quad Z=I, \quad n(I)=3, \quad n_Z=3, \quad (3.92)$$

とにおいて、

$$\phi_c(\omega) = \frac{2 |D_0(j\omega)|^2}{3T} (1 - \cos \omega T) \quad (3.93)$$

となる。またブロック長が3の場合、

$$M=3, \quad Z=I, \quad n(I)=7, \quad n_Z=7 \quad (3.94)$$

とにおいて、

$$\phi_c(\omega) = \frac{4 |D_0(j\omega)|^2}{21T} (3 - 2 \cos \omega T - \cos 2 \omega T) \quad (3.95)$$

となる。これ等を図3.10に示す。

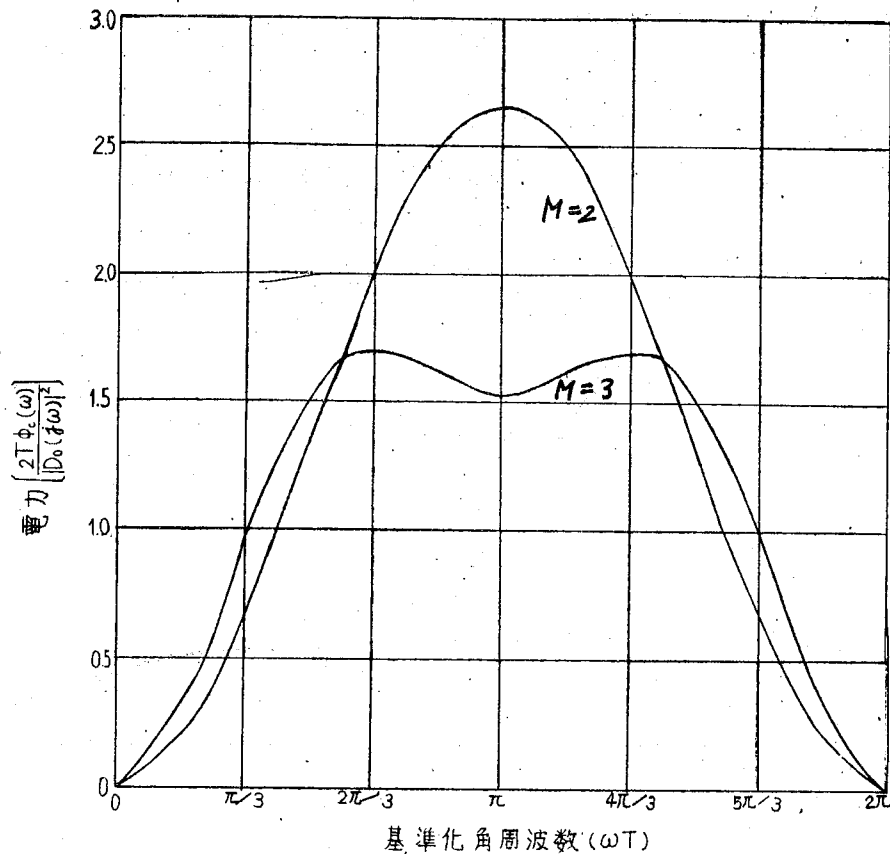


図 3.10 中込等の提案せる符号の電力スペクトル

この結果は中込等が、各々の場合について条件付確率を求めて自己相関関数を計算し、その結果をフーリエ変換して得たもの⁽¹⁹⁾と一致している。

(V) 通常多進符号⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾

各情報が等確率で生起する通常多進符号は、ブロック長無限大の平衡符号に相当しているが、符号間拘束が無いため、遷移確率行列は、ブロック長 M を 1 と考えると表 3.4 における A 類と同様である。正負のモード変換を行なう有限ブロック長の平衡符号については、表 3.3 において I 類は直流分が零なる符号波形の集合としたが、一般式は、I 類の符号波形がどのようなものであっても有効であることは、一般式の誘導過程に符号波形が直接関係しないことから明らかである。

したがって、式 (3.81) の第一項のみ考えればよく、通常 3 進、4 進及び 5 進符号の電力スペクトルは、

通常 3 進符号：($n_z = 3$, $n_I = 3$)

$$\phi(\omega) = \frac{4}{9T} |D_0(j\omega)|^2 \quad (3.96)$$

通常 4 進符号：($n_z = 4$, $n_I = 4$)

$$\phi(\omega) = \frac{5}{12T} |D_0(j\omega)|^2 \quad (3.97)$$

通常 5 進符号：($n_z = 5$, $n_I = 5$)

$$\phi(\omega) = \frac{2}{5T} |D_0(j\omega)|^2 \quad (3.98)$$

となる。 $d_0(t)$ を図 3. に示す矩形波とすると

$$|D_0(j\omega)| = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \frac{\omega T}{2}) \quad (3.99)$$

である。正の周波数領域のみ考え、この結果を2倍にして、図3.11に示す。

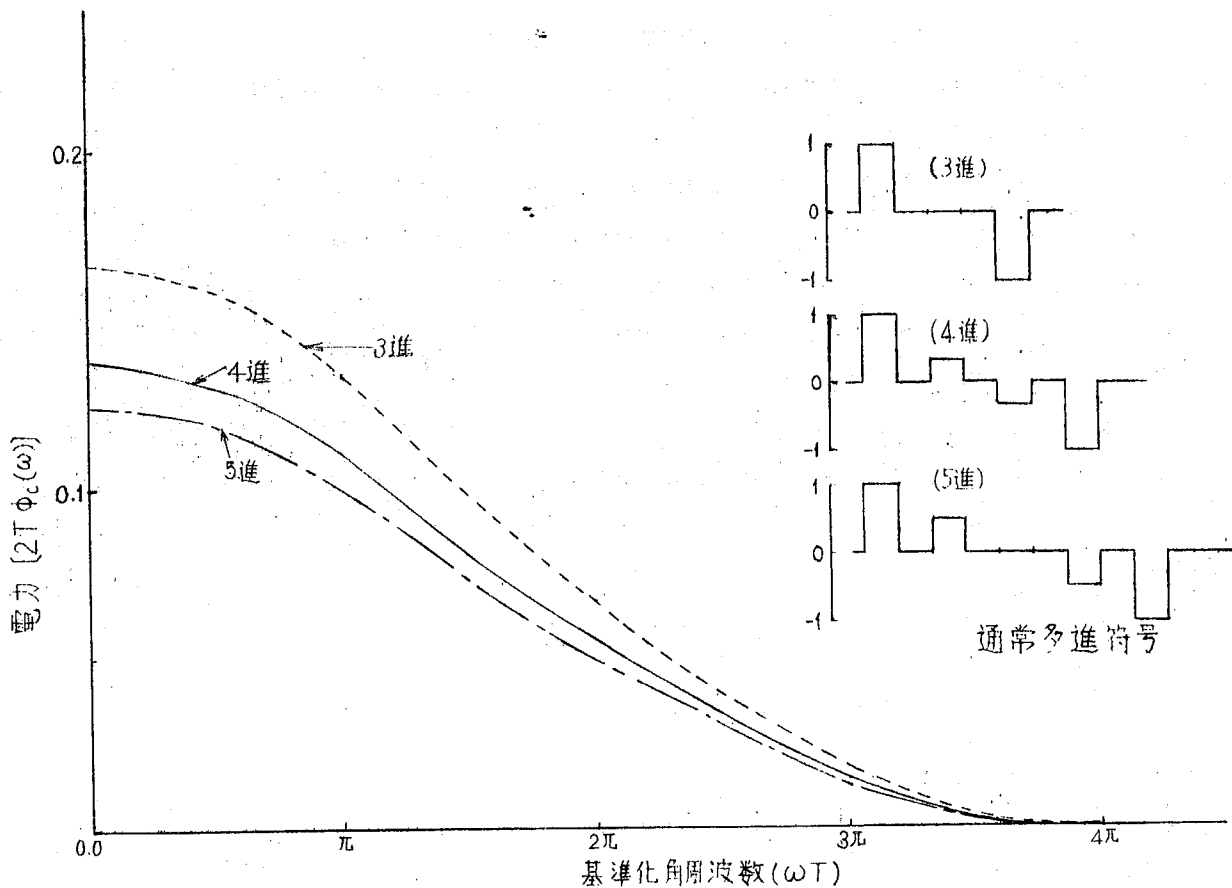


図3.11 通常多進符号の電力スペクトラム

以上の、(i)~(v)の符号形式においては、線スペクトルは勿論含まれていない。

3.4 節 むすび

符号パルス列の電力スペクトルの計算に対し、能率の良い方法を示し、種々の符号形式について計算を行なった。PCM通信において符号形式を定めるに当たり、その特性の周波数領域における表現であるところの電力スペクトルを知ることには、理論的に興味があり、またタイミング波の抽出及び伝送路の低域遮断の影響などに関連して必要であり、更に最適波形の決定に対して漏話雑音の大きさを求めねばならない点から直接必要である。

最近、PCM通信における情報伝送速度の向上を意図して、種々の複雑な符号形式が提案されている。複雑な符号構成を行なった場合、シグナルフローグラフによる従来の方法では莫大な時間と労力を必要とする。このような難点を、本文では、シグナルフローグラフの簡略に相当する計算を代数的に行なう方法、及び2項電力分解と名付ける方法を併用することにより解決した。このような計算方法に基づいて、PST符号を一般化した多値平衡符号の電力スペクトルの一般式を誘導した。そして、従来提案された種々の平衡符号、例えばバイポーラ符号、PST符号、平衡のとれた通常多進符号、中込等の提案せる符号及び荒谷等により提案された符号等の電力スペクトルを、この一般式の特別の場合として求めた。また3値2ディジット~4ディジット符号及び4値2ディジット~4ディジット符号と呼ぶ新しい符号形式についても計算結果を示した。

第 4 章

符号間干渉の確率分布

符号間干渉は符号誤りの重要な要因であるのでその統計的性質を明らかにしておくことが必要である。

符号間干渉の確率分布は符号形式によって異なるから バイポーラ符号, P S T 符号, あるいは通常 3 進符号等の各々について, 確率分布を求めておかねばならない。

従来, 符号間干渉については, 最悪値に着目する方法が採られていたが, 最近, その統計的性質を明らかにすることの重要性が認識され始め, 種々の符号形式について, 符号間干渉の平均値, 分散を求める方法が発表されている。^{(22) (23)}

しかし, 確率分布については, バイポーラ符号について若干の数値例が報告されているのみで,⁽²⁴⁾ 殆んど解明されていない。

本章では, まず, 通常多進符号について, その確率分布が多値分布と正規分布とのたたみ込み積分で求められることを示し, 伝送路 (波形等化区間) の低域遮断周波数と正規分布の分散との関係を述べる。^{(25)~(27)}

従来, 通常多進符号による基底帯域伝送は低域遮断のため不可能と考えられていたが, 等振幅逆極性の符号パルスが略等確率で生起するならば, 伝送可能であることを, 符号間干渉の確率分布に関する検討結果に基づいて明らかにする。

また, バイポーラ符号, P S T 符号, およびその他の平衡符号についても, 確率分布の計算結果を示す。

4.1 節 通常多進符号の符号間干渉

4.1.1 符号構成と等化波形

まず通常多進符号の構成について述べる。

多進数を b とし, b 個の状態を表すパルスの振幅を, 最大レベルから順に,

$$E_1, E_2, \dots, E_k, \dots, E_b, \quad (b \geq 3) \quad (4.1)$$

と表わす。ここに

$$E_k = E_1 \left(1 - 2 \frac{k-1}{b-1} \right), \quad (k=1, 2, \dots, b) \quad (4.2)$$

とする。すなわち, 隣接レベルのパルス振幅の差が互いに等しく, 振幅零に関し対称な振幅構成とする。特別な場合として, $A_1 = 1$, 占有率 $\frac{1}{2}$ なる場合の再生中継器送信パルス構成を図 4.1 に示した。

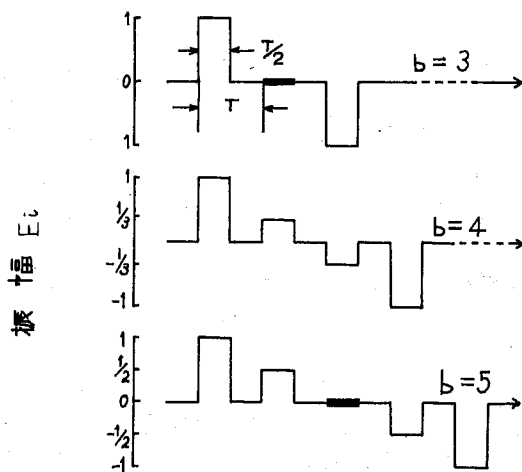


図 4.1 通常多進符号構成

符号間干渉の確率分布は, 等化波形によっても当然異なるので, ここでは次に示す簡単な等化波形について考察する。他の等化波形については, その結果から容易に推論できる。

図 4.1 に示す占有率 $\frac{1}{2}$, 振幅 1(V) の方形送信パルスを, 総合伝達関数が

$$W(s) = \frac{K}{\left(1 + \frac{\omega_L}{s}\right)^m \left(1 + \frac{s}{\omega_H}\right)^n}$$

(4.3)

なる伝送路（波形等化区間）に加えたときの応答波形を、中継器識別点における等化波形とする。⁽²³⁾ここに、 s は複素角周波数であり、 K は定数で等化波形の尖頭値が1(V)になるように選ぶものとする。

また、 ω_L および ω_H はそれぞれ低域および高域遮断角周波数、 m および n は各々遮断次数で、等化波形の占有率（半値巾）が1に近い値をとるように、これらの定数を選定するものとする。

上記の波形等化による等化波形の計算例を
図4・2および図4・3に示した。これらの
図で T はパルス繰返し周期、 f_0 はクロック
周波数（ $=\frac{1}{T}$ ）を表わす。

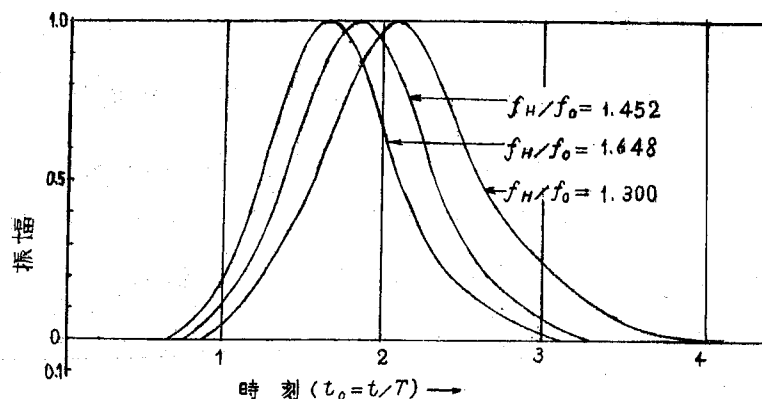


図4.2 カウス近似有理関数形等化波形

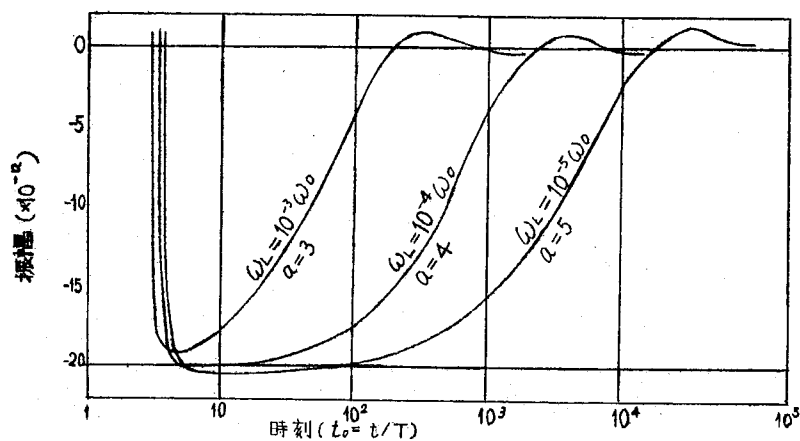


図4.3 低域遮断による残留応答

さて、等化波形が尖頭値をとる時点 t_m を
識別時点とし、尖頭値1(V)の等化波形による
他のタイムスロットの識別時点における残留応答を、図4・4に示す如く、

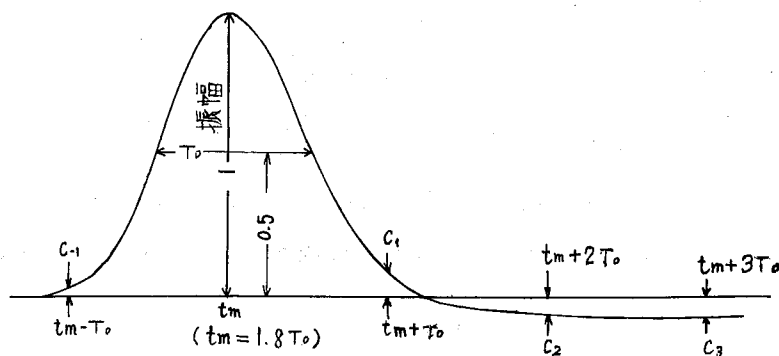


図4.4 低域遮断による残留応答

$$C_{-1}, C_1, C_2, C_3,$$

とする。

$$\text{図 4.3 および図 4.4 から } m \leq 3, \omega_L \leq 10^{-3} \omega_0 \quad (4.4)$$

$$\text{が成立する場合には, } |C_1| \gg |C_{-1}|, |C_2|, |C_3|, \dots \quad (4.5)$$

$$\text{あるいは } |C_1| \gg |C_{-1}| \gg |C_2|, |C_3|, \dots \quad (4.6)$$

が成立し、残留応答が殆んど零に収束するまでに少くとも数百タイムスロットを要することが判る。

また、図 4.3 は、低域遮断周波数を 1 桁低下すれば、残留応答の振幅が 1 桁小さくなり、収束に要する時間が略 1 桁大きくなることを示している。

4.1.2 符号間干渉の確率密度関数

以上述べたような符号構成と等化波形について、符号間干渉の確率分布を求めよう。

通常多進符号列において、振幅 A_k なる符号パルスのはじり確率を μ_k 注目する識別時点から i 個先行したタイムスロットの等化パルスによる符号間干渉振幅を x_i 、 x_i の確率密度関数を $P_i(x_i)$ とすれば、

$$P_i(v_i) = \sum_{k=1}^b \mu_k \delta(v_i - C_i E_k) \quad (i = -1, 1, 2, 3, \dots) \quad (4.7)$$

が成立する。ここに

$$\sum_{k=1}^b \mu_k = 1 \quad (4.8)$$

であり、 $\delta(v)$ はデルタ関数記号である。

通常多進符号列における符号間干渉の確率密度関数 $P_I(x)$ は、符号列に符号間拘束が存在しないことから、式 (4.7) のたたみ込みによって

$$P_I(v) = P_{-1}(v) * P_1(v) * P_2(v) * P_3(v) * \dots \quad (4.9)$$

で与えられる。ここに

$$v = v_{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} v_i \quad (4.10)$$

である。

伝送路において式 (4.3) が成立し、等化波形の残留応答に関し、式 (4.6) が成り立つものとして、式 (4.9) を

$$P_I(v) = \left[P_{-1}(v) * P_1(v) \right] * \left[P_2(v) * P_3(v) * \dots \right] \quad (4.11)$$

と変形する。 $P_{-1}(v)$ 、 $P_1(v)$ は、式 (4.7) により

$$P_{-1}(v) * P_1(v) = \sum_{k=1}^b \sum_{h=1}^b \mu_k \mu_h \delta(v_d - C_{-1} E_k - C_1 E_h) \quad (4.12)$$

なる b^2 値分布である。(たとえば、通常 3 進符号に対しては 9 進分布である。) ここに、

$$v_d = v_{-1} + v_1 \quad (4.13)$$

である。 $P_2(v) * P_3(v) * \dots$ については、符号間拘束が存在しないこと、(各ディジットの符号が互いに独立に生起すること) ならびに残留応答の収束が、図 4.3 に見られるごとく、きわめて緩慢であることから、中心極限定理が成立するものとして近似式を誘導する。

いま、 v_i の平均値を $\bar{v}_i$ 、分散を σ_i^2 とすれば、

$$\bar{v}_i = C_i \sum_{k=1}^b \mu_k E_k \quad (4.14)$$

$$\sigma_i^2 = C_i^2 \left\{ \sum_{k=1}^b \mu_k E_k^2 - \left(\sum_{k=1}^b \mu_k E_k \right)^2 \right\} \quad (4.15)$$

である。よって

$$P_2(v_2) * P_3(v_3) * \dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v_c - \bar{v}_c}{\sigma_I}\right)^2\right\} \quad (4.16)$$

なる近似式を得る。ここに、

$$v_c = \sum_{i=2}^{\infty} v_i \quad (4.17)$$

$$\bar{v}_c = \sum_{i=2}^{\infty} \bar{v}_i = \sum_{k=1}^b \mu_k E_k \sum_{i=2}^{\infty} C_i \quad (4.18)$$

$$\sigma_I^2 = \sum_{i=2}^{\infty} \sigma_i^2 = \left\{ \sum_{k=1}^b \mu_k E_k^2 - \left(\sum_{k=1}^b \mu_k E_k \right)^2 \right\} \sum_{i=2}^{\infty} C_i^2 \quad (4.19)$$

である。よって、通常多進符号列における符号間干渉の確率密度関数 $P(v)$ は、式(4.11) (4.12) および(4.16)から、近似的に

$$P_I(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \sum_{k=1}^b \sum_{h=1}^b \mu_k \mu_h \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \bar{v}_c - C_1 E_k - C_1 E_h}{\sigma_I}\right)^2\right\} \quad (4.20)$$

となる。ここに、 $v = v_d + v_c$ である。

特に

$$\sum_{k=1}^b \mu_k E_k = 0 \quad (4.21)$$

が成立する場合、式(4.18)および(4.19)から

$$\bar{v}_c = 0, \quad \sigma_I^2 = \sum_{k=1}^b \mu_k E_k^2 \sum_{i=2}^{\infty} C_i^2 \quad (4.22)$$

となる。

式(4.20)の更に特別の場合として、

$$\mu_k = \frac{1}{b} \quad (k=1, 2, \dots, b) \quad (4.23)$$

なるとき、すなわち、すべてのパルスの生起確率が等しいとき、式(4.20)は

$$P_I(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I b^2} \sum_{k=1}^b \sum_{h=1}^b \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v - C_1 E_k - C_1 E_h}{\sigma_I}\right)^2\right\} \quad (4.24)$$

と簡略化される。このとき σ_I は式(4.18)より

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b E_k^2 \sum_{i=2}^{\infty} C_i^2 \quad (4.25)$$

で与えられる。

たとえば通常3進符号の場合

$$\mu_k = \frac{1}{3} \quad (k=1, 2, 3) \quad (4.26)$$

かつ、図4・1のように

$$E_1 = 1, E_2 = 0, E_3 = -1 \quad (4.27)$$

ならば

$$P_I(v) = \frac{1}{9\sqrt{2\pi}\sigma_I^2} \left\{ \exp\left\{-\frac{(v - C_1 - C_{-1})^2}{2\sigma_I^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(v - C_1)^2}{2\sigma_I^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(v - C_1 + C_{-1})^2}{2\sigma_I^2}\right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \exp \left\{ -\frac{(v - C_{-1})^2}{2 \sigma_I^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{v^2}{2 \sigma_I^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(v + C_{-1})^2}{2 \sigma_I^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(v + C_1 - C_{-1})^2}{2 \sigma_I^2} \right\} \\
& + \exp \left\{ -\frac{(v + C_1)^2}{2 \sigma_I^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(v + C_1 + C_{-1})^2}{2 \sigma_I^2} \right\} \Bigg] \quad (4.28)
\end{aligned}$$

となる。ここに

$$\sigma_I^2 = \frac{2}{3} \sum_{i=2}^N C_i^2 \quad (4.29)$$

である。

通常 4 進符号についても式 (4.28)，および (4.29) に対応する式を導びくことは容易である。

4.1.3 計算機シミュレーション

数式計算の具体例を図示する前に，以上の考え方を計算機シミュレーションによって確かめておく。⁽²⁷⁾ 4.2.1 で述べた総合伝達関数すなわち，式 (4.3) において，パラメータが $m=3$ ， $n=15$ ， $\omega_L=10^{-4}\omega_0$ ， $\omega_H=1.452\omega_0$ であり各レベルのパルスが等確率で生起する場合について計算する。計算時間短縮のため，31 タイムスロット以降の残留応答をすべて零とした。

一様乱数より通常 3 進符号列を発生し，標本数を 20000 個として，図 4.5 に示す確率分布を得た。この結果は，同一条件に対し，式 (4.28) から求めた確率分布とよく一致しているといえよう。

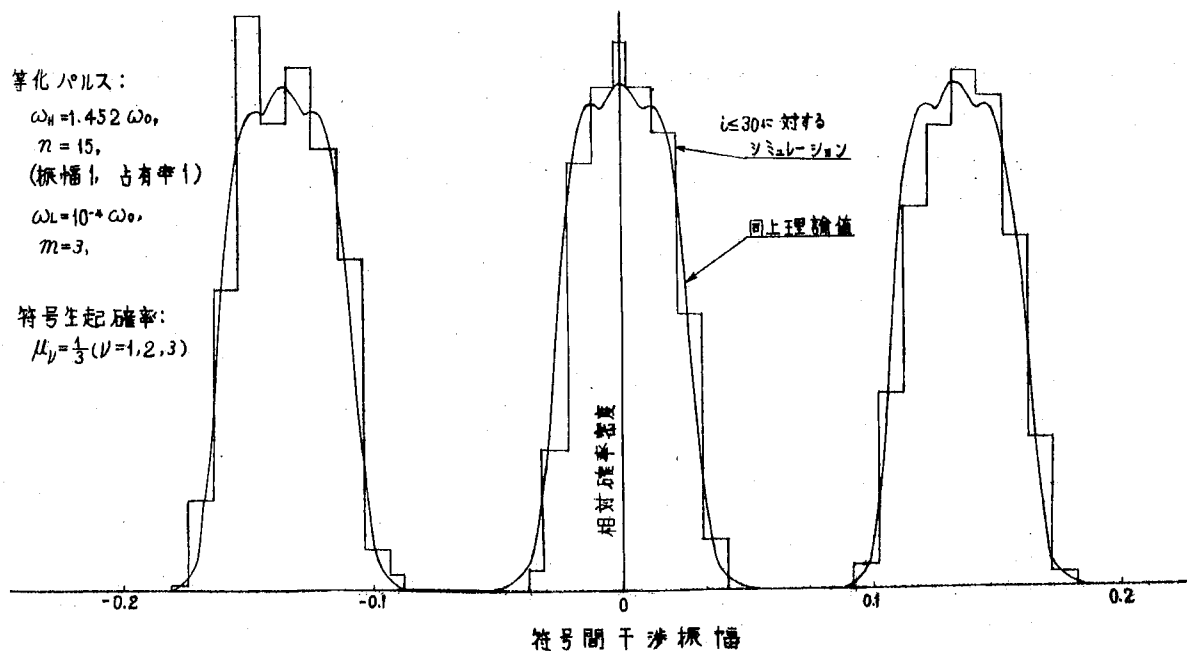


図 4.5 通常 3 進符号列における符号間干渉の確率分布 (計算機シミュレーション)

すなわち、残留応答の継続時間をただか30タイムスロットとしても、中心極限定理を前提とした式(4・37)が近似的に成立することを示している。実際には、上記の波形等化における残留応答の継続時間を、図4・3から約7000タイムスロットと考えてよく、中心極限定理の適用による誤差は充分小さいと期待できる。

尚、頻度の小さい部分については、標本数をより大きくしてシミュレーションを行なって、式(4・~~37~~²⁸)が近似的に成立することを確認せねばならないが、これは計算時間の点で不可能である。そこで、つぎのような方法で式(4・28)の妥当性を確かめた。

いま、+1, 0, -1を要素とする10個の系列を考える。系列の種類は 3^{10} 個すなわち約5万個存在する。各系列の代数和の頻度分布を数式的に求めると図4・6を得る。これは同図に実線で示す正規分布(両者の面積を一致させた)と頻度の小さい部分でもよく一致している。

以上の計算結果から式(4・28)が近似的に成立すること、及び誤り率の算出に対しては安全側と考えられることがいえる。

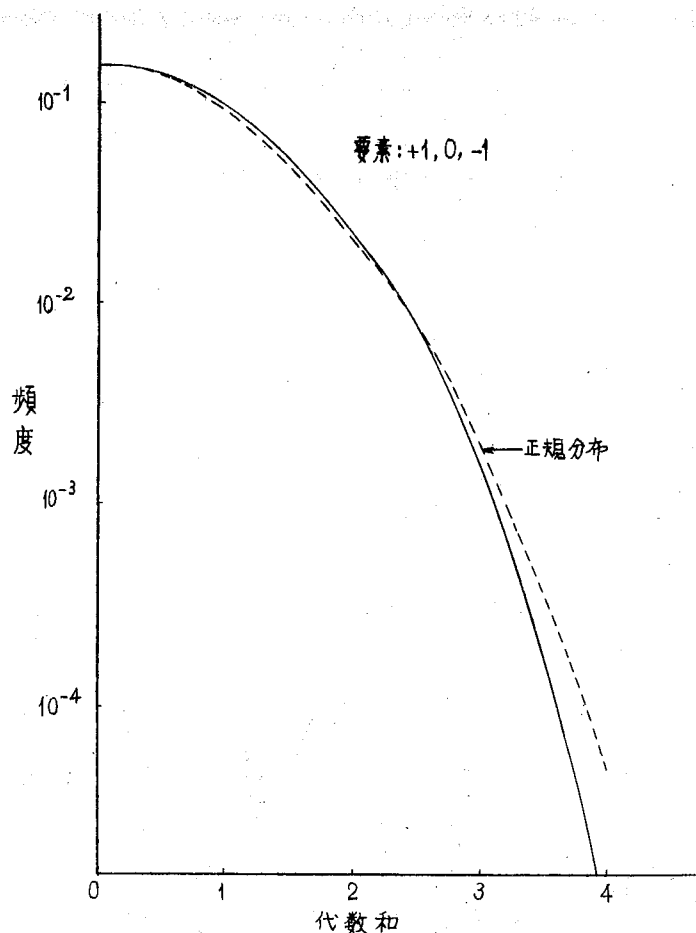


図4.6 長さ10の系列の代数和の頻度分布

4.1.4 数式計算の結果

各レベルのパルスの生起確率が互いに等しい通常3進及び通常4進符号列について、式(4・~~37~~²⁴)を用いて確率密度関数を求める。波形等化のパラメータを $m=3$, $n=15$, $f_H=1.452f_0$ とし、 $\omega_L=10^{-4}\omega_0$ 及び $\omega_L=10^{-5}\omega_0$ の2通りの場合について計算した。通常3進符号列の場合を図4・7に、通常4進符号列の場合を図4・8に示す。

等化パルス:

$\omega_H = 1.452 \omega_0$,
 $\eta = 15$,
 (振幅1, 占有率1)

$m = 3$,

符号生起確率:
 $\mu_\nu = \frac{1}{3} (\nu = 1, 2, 3)$

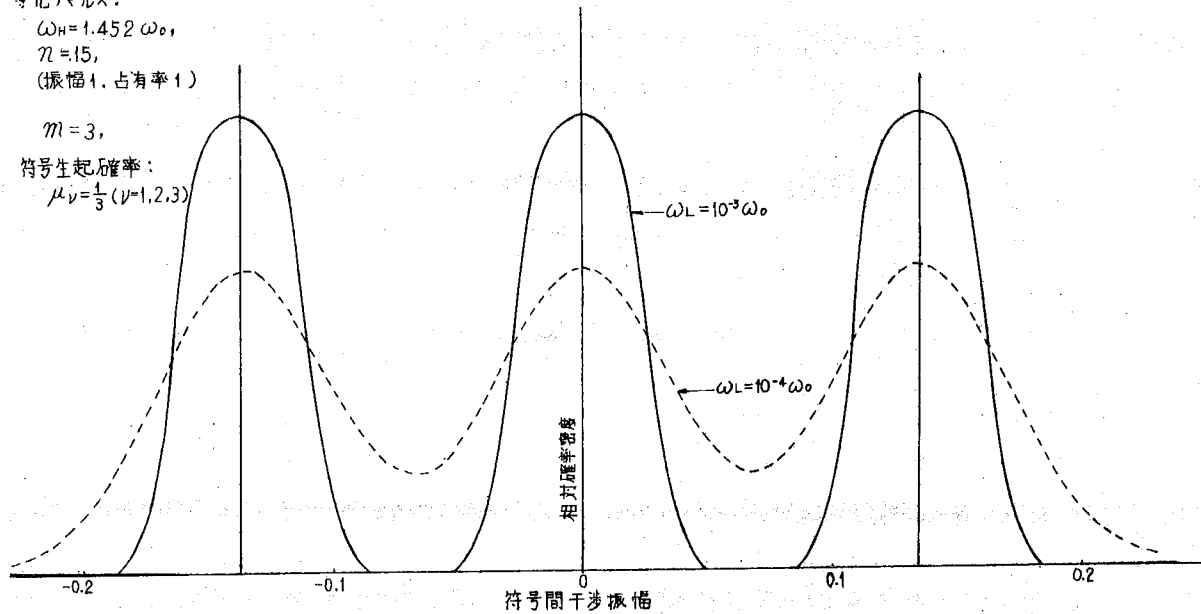


図4.7 通常3進符号列における符号間干渉の確率分布(理論値)

等化パルス: $f_H = 1.452 f_0$, $\eta = 15$, (振幅1, 占有率1), $m = 3$
 符号生起確率 $\mu_\nu = \frac{1}{4} (\nu = 1, 2, 3, 4)$

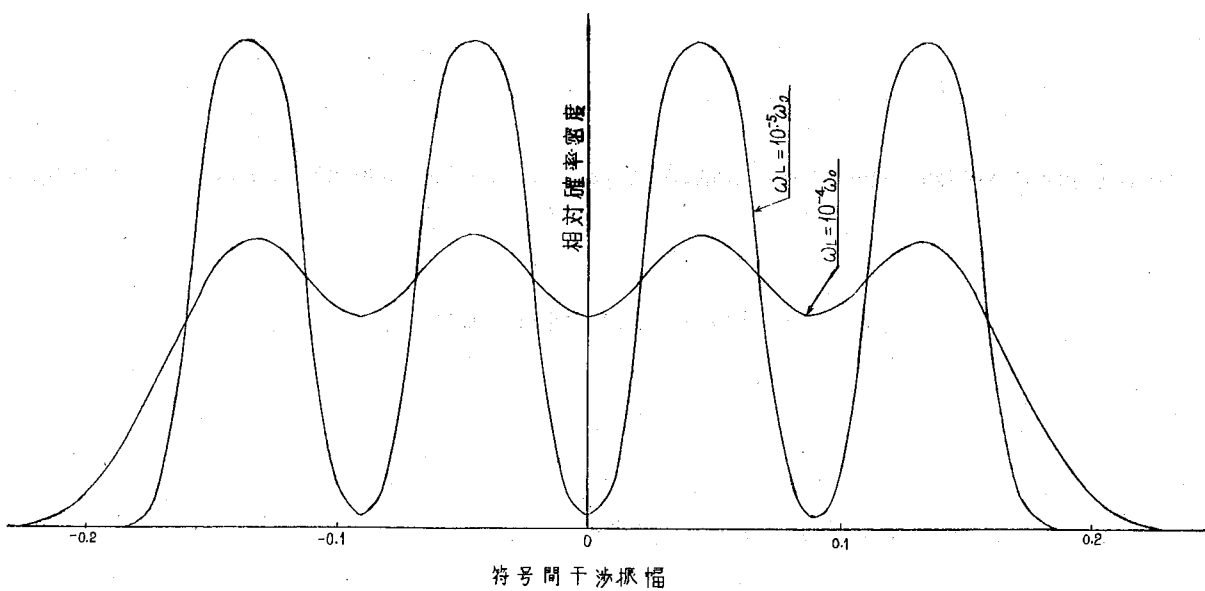


図4.8 通常4進符号列における符号間干渉(理論値)

これ等の図は、低域遮断周波数を低下させることにより、確率分布の孤立性が高まることを示している。この性質は4・2・1で述べた残留応答特性ならびに、式(4・1.8)から、低域遮断周波数を1桁低下させれば、分散 σ_I^2 も1桁低下することによる。

符号間拘束を伴う符号列においては、明らかに、符号間干渉の有限な最悪値が存在するが、通常多進符号列においても有限の大きさの最悪値が存在する。すなわち、等化パルスに直流分は含まれないから低域遮断周波数と無関係に、等化パルスの正の面積と負の面積は等しく、符号間干渉の最悪値の絶対値は、底 b に無関係に、最大レベルの等化パルス振幅1にほぼ等しい。

4・1・5 等化波形と符号間干渉

4・2・2では、4・1・1で述べたガウス近似形等化波形を前提として、通常多進符号列における符号間干渉の確率分布を b^2 値分布と正規分布の“たたみこみ”によって近似できることを示した。ところで、任意の波形等化においても波形等化区間の低域遮断に基づく等化パルスの残留応答は、高域遮断特性に殆んど無関係である。したがって、通常多進符号列における符号間干渉の確率分布を、一般に、多値分布とガウス分布の“たたみこみ”によって近似できると考えてよい。

具体例として図4・9に示すような、識別時点以外の標本点で零となる波形(標本点零型波形と呼ぶ)を用いた場合について考える。

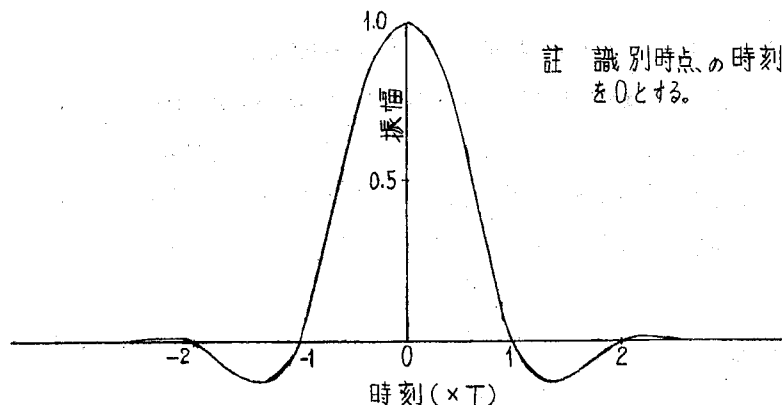


図4.9 標本点零形対称波形

低遮断が無ければ、ジッタ(識別時点の位相変動)零のとき符号間干渉も勿論零であり、ジッタが、一例として、 $\pm 30^\circ$ のとき、通常3進符号列における符号間干渉の確率分布は、図4・10に示すようになる。

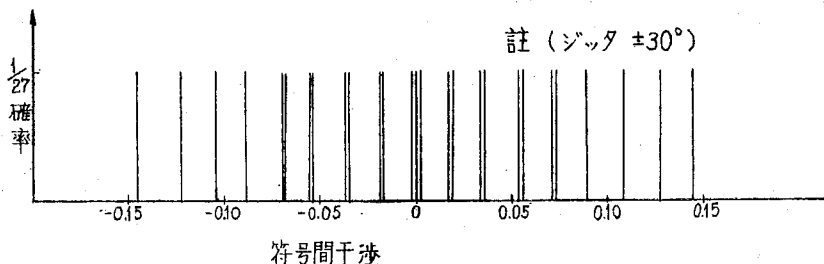


図4.10 通常3進符号列における符号間干渉の確率分布

つぎに、低域遮断が有る場合、たとえば、 $\omega_L = 10^{-4} \omega_0$ としたとき、残留応答は図4・11のようになり、図4・3と比較して判るように、低域遮断周波数 ω_L が等しければ、低域遮断に基づく残留応答特性は、ガウス近似型等化波形のそれに等しいと考えて差支えない。

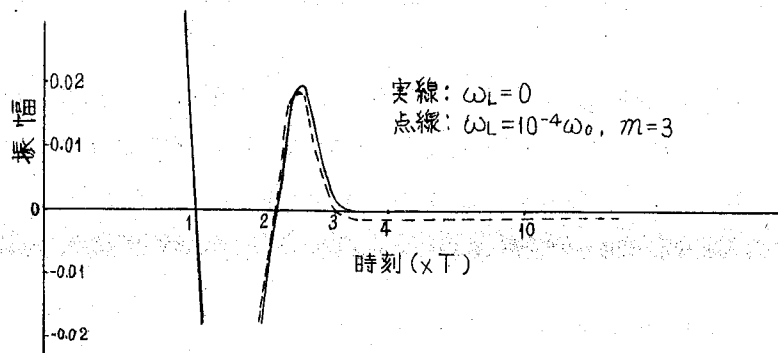


図4.11 標本点零形波形の低域遮断による残留応答

したがって、符号間干渉の確率分布は、図4.10に示す多値分布と、残留応答による正規分布の“たたみ込み”によって近似し得る。

4.2 通常多進符号の符号誤り率

4.2.1 符号誤り率特性

前節の結果、従来明らかにされていなかった符号間干渉の確率分布が求まったので、符号誤り率を計算することができる。

同軸PCM方式では、符号誤り率は符号間干渉の確率密度関数と熱雑音振幅の確率密度関数とのたたみ込み積分から求められる。平衡対ケーブルを用いるPCM方式では熱雑音を漏話雑音に置き換えればよい。

熱雑音および漏話雑音の振幅分布は共に正規分布としてよいことが知られている。いま熱雑音あるいは漏話雑音の実効電圧値を σ_G とすれば、それらの確率密度関数は、

$$P_G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_G} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma_G^2}\right\} \quad (4.30)$$

で与えられる。

符号間干渉と熱雑音（あるいは漏話雑音）は互いに独立であるから、両者が同時に存在する場合の総合雑音の確率密度関数は、式(4.20)と式(4.30)の“たたみ込み”により、

$$\begin{aligned} P(u) &= \int_{-\infty}^u P_I(v) P_G(u-v) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \sum_{k=1}^b \sum_{h=1}^b \mu_k \mu_h \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{u - \bar{v}_0 - C_{-1} E_k - C_1 E_h}{\sigma} \right)^2\right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

となる。ここに

$$u = v + z \quad (4.32)$$

$$\sigma^2 = \sigma_I^2 + \sigma_G^2 \quad (4.33)$$

である。

閾値を相隣接するパルス振幅の中央に設定すれば、閾値は

$$E_k = \frac{E_1}{b-1}, \quad (k=1, 2, \dots, b-1)$$

である。すなわち、等化パルス振幅 A_k とこれに隣接する閾値との振幅差は k に無関係に

$$\pm \frac{E_1}{b-1}$$

である。例えば 4 進符号では閾値は $2/3$, 0 , $-2/3$ であり, 振幅が 1 , $1/3$, $-1/3$, -1 なる等化パルスとそれ等に隣接する閾値との差は $1/3$ である。

したがって, 総合雑音振幅 z が

$$\pm \frac{E_1}{b-1}$$

を越えるとき符号誤りが発生するから, 通常多進符号列における符号誤り率 P_e は, 式 (4.31) を用いて

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_{k=1}^{b-1} \mu_k \int_{-\infty}^{-\frac{E_1}{b-1}} P(u) du + \sum_{k=2}^b \mu_k \int_{\frac{E_1}{b-1}}^{\infty} P(u) du \\ &= (1-\mu_b) \int_{-\infty}^{-\frac{1}{b-1}} P(u) du + (1-\mu_1) \int_{\frac{E_1}{b-1}}^{\infty} P(u) du \end{aligned} \quad (4.34)$$

で与えられる。ここに第 1 項は自己より低レベルのパルスの誤り率を表わし, 第 2 項は自己より高レベルのパルスへの誤り率を表わす。特に各符号パルスの生起確率が等しい場合, すなわち式 (4.22) が成立する場合は, $P(z)$ の対称性から

$$P_e = 2(1-\mu_1) \int_{\frac{E_1}{b-1}}^{\infty} P(u) du \quad (4.35)$$

が成立する。

以上, 通常多進符号列の誤り率について一般式を示したが, 通常 3 進符号および通常 4 進符号について具体的に誤り率を表わす式を次に記す。

まず, 通常 3 進符号については, 閾値は ± 0.5 となり

$$P_e = \frac{4}{3} \int_{0.5}^{\infty} P(u) du, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left[\exp\left\{-\frac{(u-C_1-C_{-1})^2}{2\sigma^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(u-C_1)^2}{2\sigma^2}\right\} \right. \\ &\quad \left. + \exp\left\{-\frac{(u+C_1)^2}{2\sigma^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(u+C_1+C_{-1})^2}{2\sigma^2}\right\} \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

で与えられる。

つぎに通常 4 進符号については, 閾値は上に述べたように $2/3$, 0 , $-2/3$ であり,

$$P_e = \frac{3}{2} \int_{\frac{2}{3}}^{\infty} P(u) du \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} P(u) &= \frac{1}{16\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left[\exp\left\{-\frac{(u-C_1-C_{-1})^2}{2\sigma^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(u-C_1-\frac{C_{-1}}{3})^2}{2\sigma^2}\right\} \right. \\ &\quad \left. + \exp\left\{-\frac{(u-C_1+\frac{C_{-1}}{3})^2}{2\sigma^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(u+C_1-C_{-1})^2}{2\sigma^2}\right\} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

で与えられる。

式(4.36)～(4.39)を用いて、通常3進および4進符号列の誤り率と熱雑音(あるいは漏話雑音)の実効値に対するSN比との関係を、伝送路の低域遮断角周波数 ω_L をパラメータとして図示すると図4.12及び図4.13のようになる。

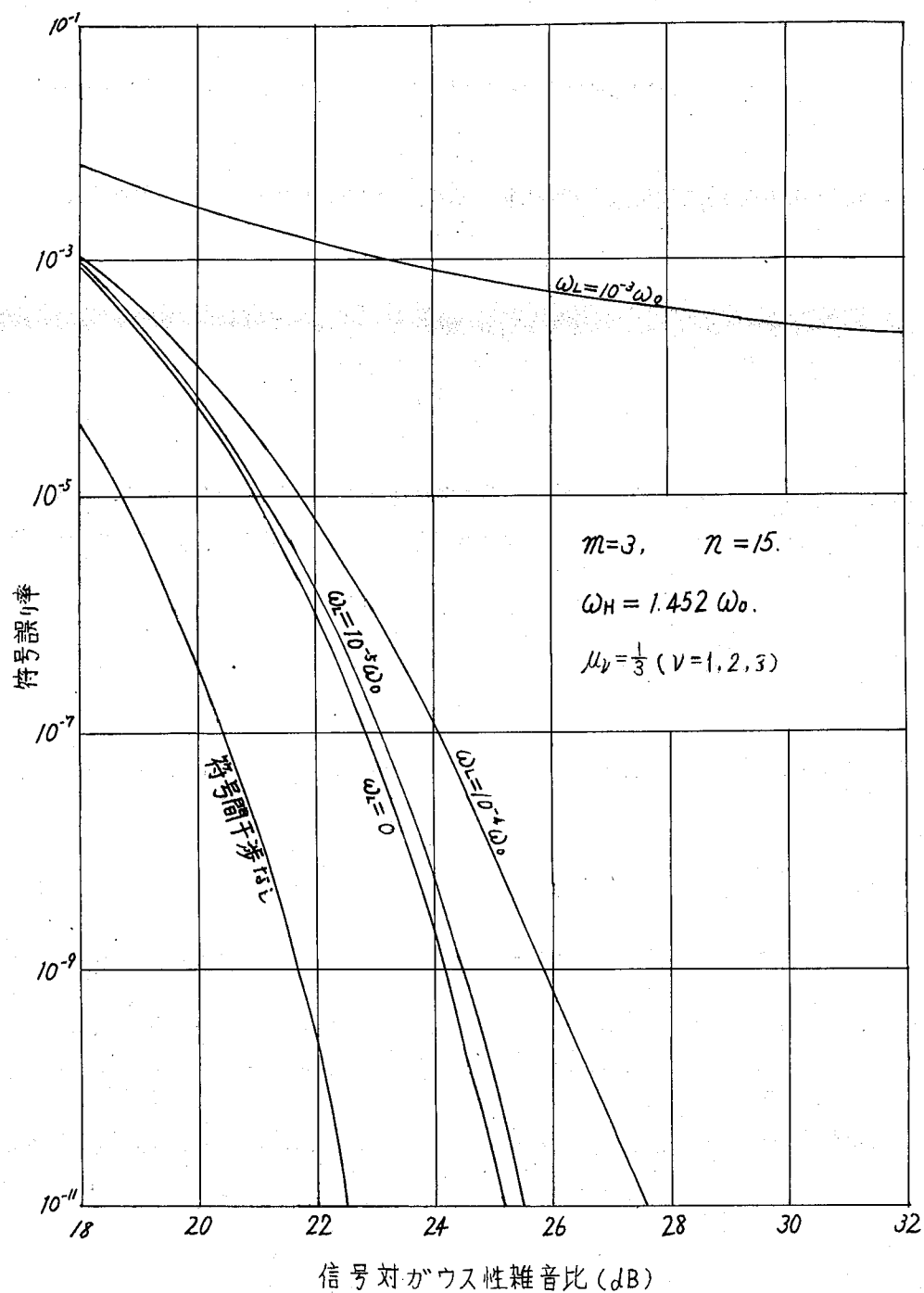


図4.12 通常3進符号の符号誤り率特性

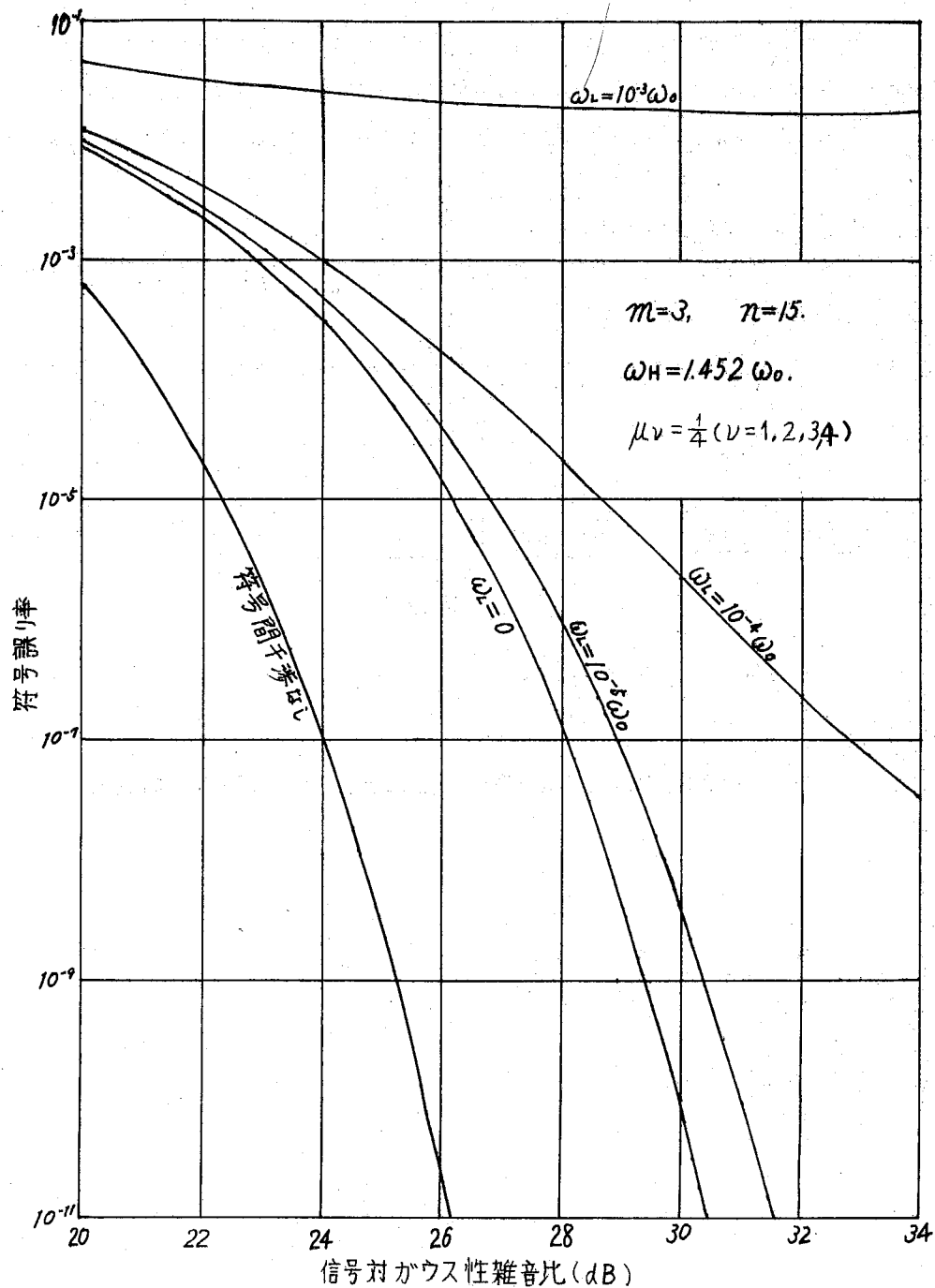


図4.13 通常4進符号の符号誤り率特性

ω_L を定めると σ_I^2 が決まるから、誤り率が大きい場合には、 σ^2 に占める σ_I^2 の比率が小さく、逆に誤り率が小さい場合にはその比率が大きいことを考えると f_L による曲線の相違が理解できる。 $\omega_L = 0$ の曲線は低域遮断が無い場合を示しており、3進符号においては f_L の余り大きくない場合（たとえば $f_L \leq 3 \times 10^{-3} f_0$ ）のバイポーラ符号の特性に略一致している。

図4.1.2から、 $f_L = 10^{-5} f_0$ 程度であれば、低域遮断の影響は殆んど無視できるものと推察されるが、これについては4.3.2で具体的かつ定量的に述べることにする。

4.2.2 情報伝送速度

符号形式、送信波形、伝送線路、中継間隔及び等化波形を固定し、符号誤り率を伝送規格として与えると、それに対して伝送可能なクロック周波数 f_0 が一義的に定まる。(漏話が存在する伝送系では収容システム数も固定するものとする。)

1 デジタル当りのとり得る最大情報量とクロック周波数との積、すなわち単位時間当りの伝送可能な情報量を情報伝送速度と呼ぶこととする。

多進数が b なる通常多進符号の場合、情報伝送速度は

$$V = f_0 \log_2 b \quad (\text{bits/sec}) \quad (4.40)$$

である。

いま、同軸PCM方式について伝送系の条件を図4.14に示すように定めた場合について、情報伝送速度を求める。

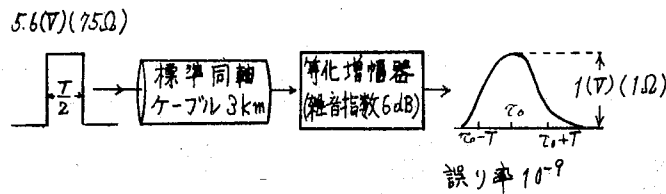


図4-14 伝送系の条件

まず、クロック周波数をパラメータとして等化増幅器の所要利得特性を計算する。これを図4.15に示す。

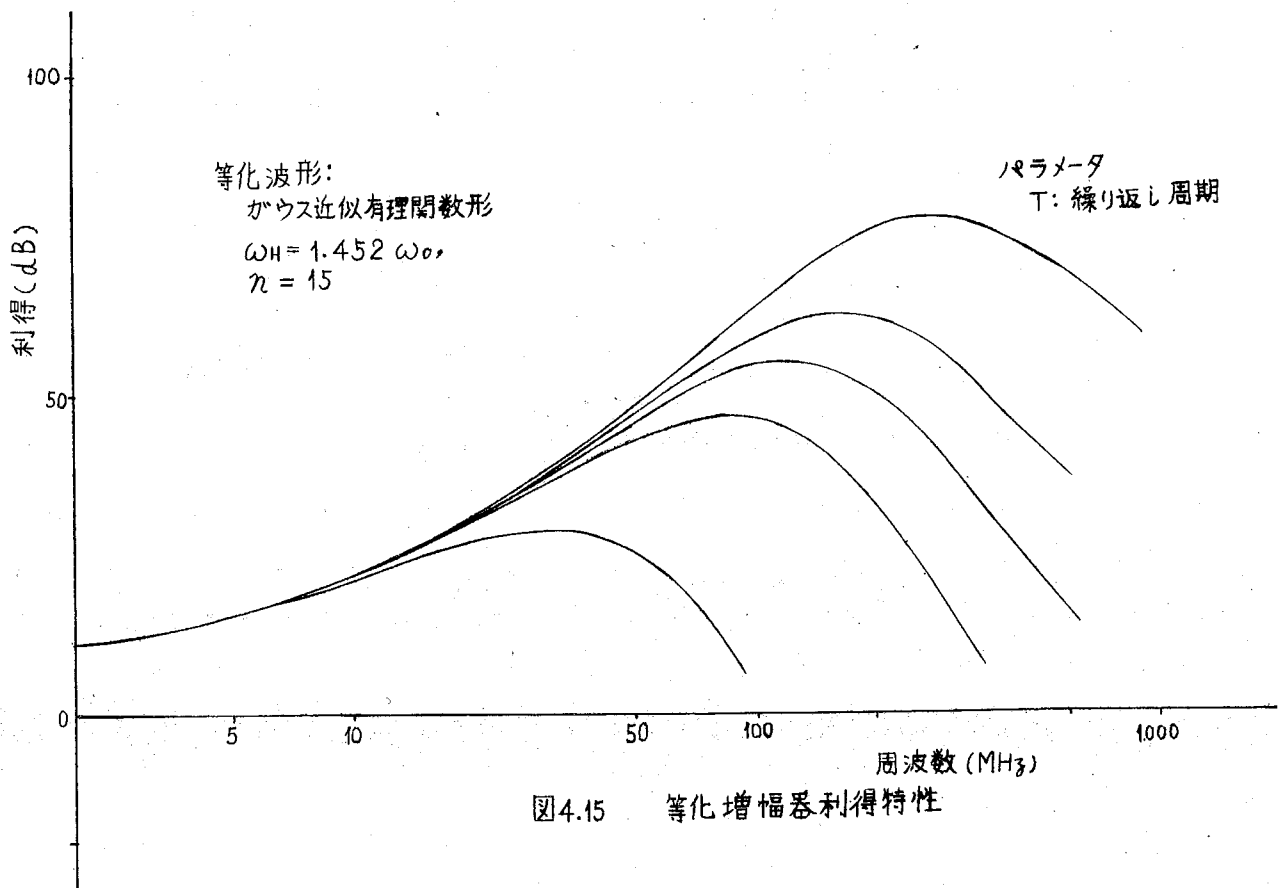


図4.15 等化増幅器利得特性

各クロック周波数について、熱雑音の実効値を式(2.3)を用いて求める。これよりクロック周波数と熱雑音の関係が図4.16のように得られる。

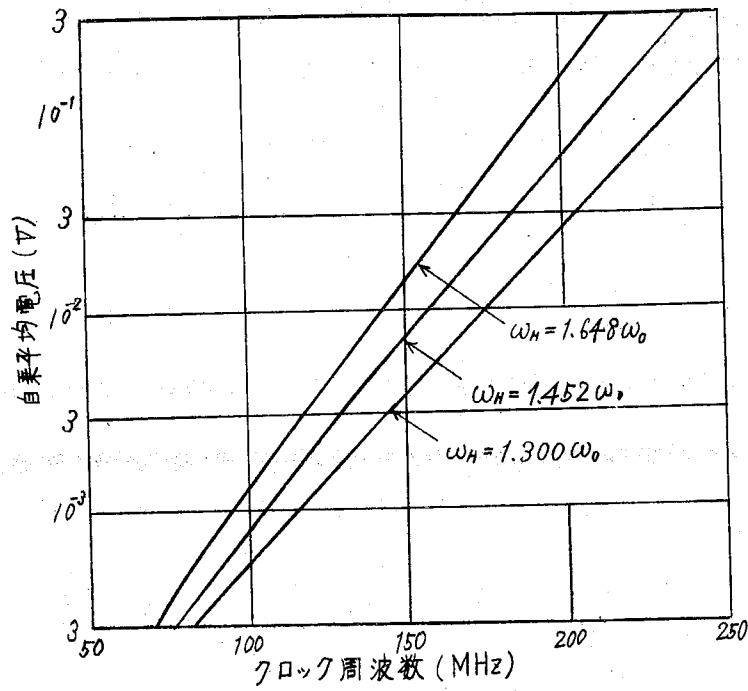


図4-16 識別点における熱雑音特性

図4.12, 4.13と図4.16を併用すると、情報伝送速度は、表4.1のように求められる。

表4.1 情報伝送速度

単位: Mb/s

総合伝達関数		符号形式		
ω_H/ω_0	ω_L/ω_0	バイポーラ	通常3進	通常4進
1.300 (占有率 1.1)	0	215 (1.00)	342 (1.59)	378 (1.76)
	10^{-5}	〃	340 (1.58)	366 (1.70)
	10^{-4}	〃	323 (1.50)	不可能
	10^{-3}	〃	不可能	〃
1.452 (占有率 1.0)	0	202 (1.00)	320 (1.58)	374 (1.85)
	10^{-5}	〃	318 (1.58)	372 (1.84)
	10^{-4}	〃	313 (1.55)	326 (1.61)
	10^{-3}	〃	不可能	不可能
1.648 (占有率 0.9)	0	183 (1.00)	290 (1.58)	343 (1.88)
	10^{-5}	〃	〃	342 (1.87)
	10^{-4}	〃	284 (1.55)	331 (1.81)
	10^{-3}	〃	不可能	不可能

註: ()内は 同じ条件のバイポーラ符号の情報伝送速度に対する相対情報伝送速度

表 4・1 から、通常 3 進符号に対しては $\omega_L = 10^{-4} \omega_0$ 、通常 4 進符号に対しては $\omega_L = 10^{-5} \omega_0$ とすることにより低域遮断の影響を殆んど無視できることが判る。

また、図 4・16 は、クロック周波数の増大に対して、熱雑音が急激に増大すること、逆の表現をすれば、熱雑音の増加に対してクロック周波数の変化はゆるやかであることを示している。これは、同軸ケーブルの減衰量が、いわゆる $\sqrt{f}$ 特性で、周波数の増加と共に、急減に増大することから直観的にも明らかであろう。

4.2.3 確率分布の形状と誤り率特性

伝送路の低域遮断が、符号誤り率特性あるいは情報伝送速度に及ぼす影響は、低域遮断周波を低下させることにより、無視できることが明らかとなったので、低域遮断は無いものとして、符号間干渉の確率分布の形状と符号誤り率特性あるいは情報伝送速度の関係について検討する。

そのとき、通常多進符号の符号間干渉の確率分布は多値分布となるが、これを他の分布で置き換えた場合について考える。等化波形として、図4.2に示すガウス近似有理関数形($f_H = 1.452 f_o$, $n = 15$)を用いると、確率分布は通常3進符号の場合は図4.17(a)で、通常4進符号の場合は同図(b)で示される。

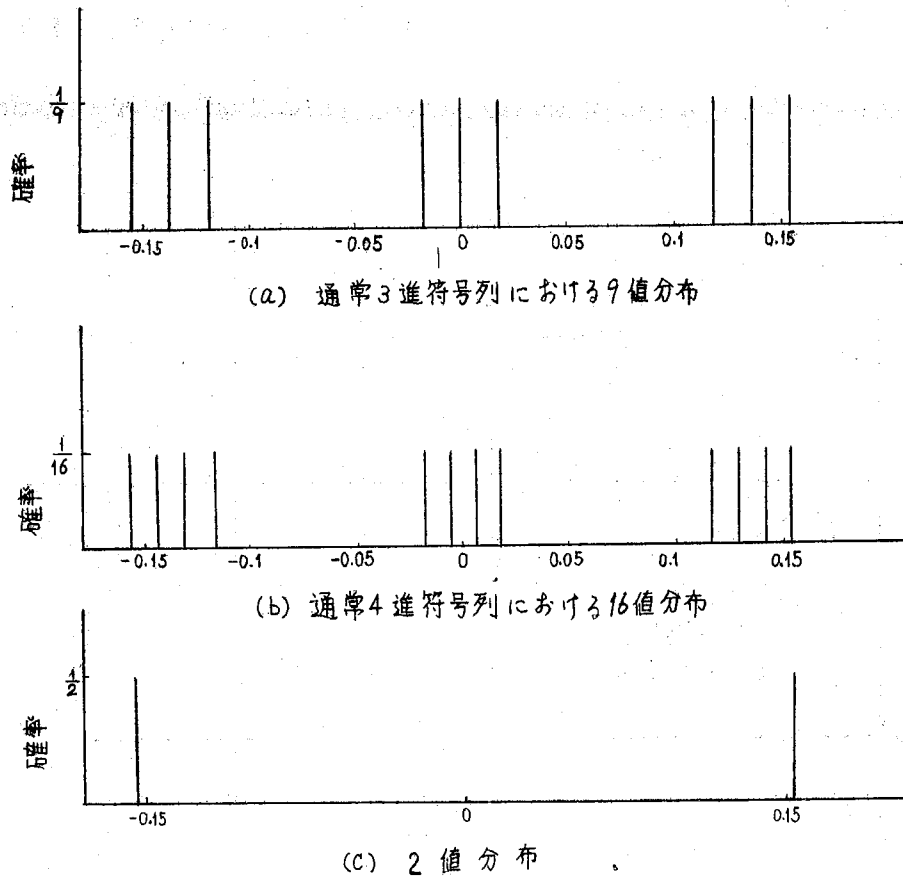


図4.17 確率分布の諸形状(横軸:符号間干渉)

またガウス性雑音に対するSN比と符号誤り率の関係は先に求めた通りであって、これを再び図4.18及び図4.19に示す。

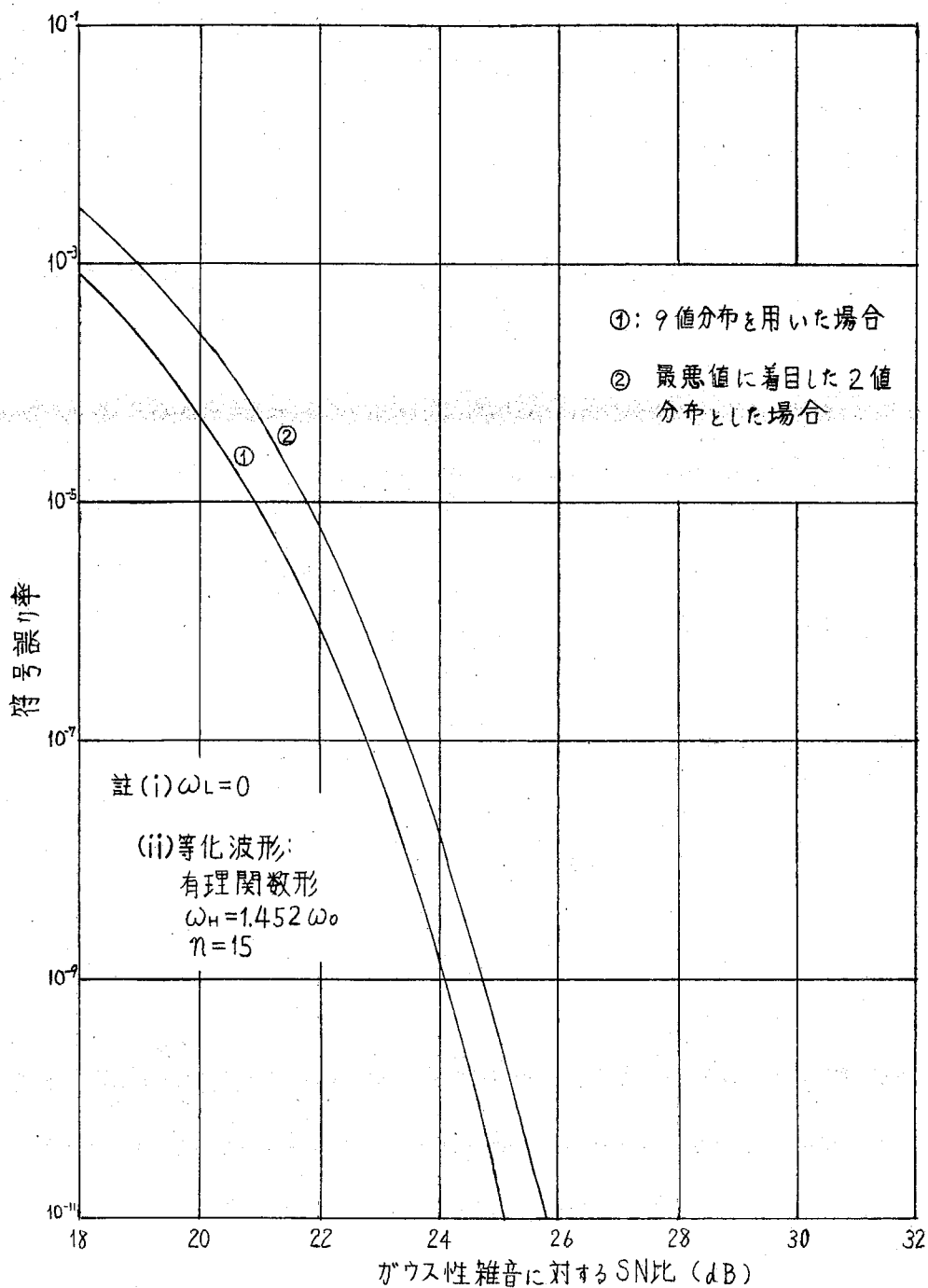


図4.18 通常3進符号の誤り率特性

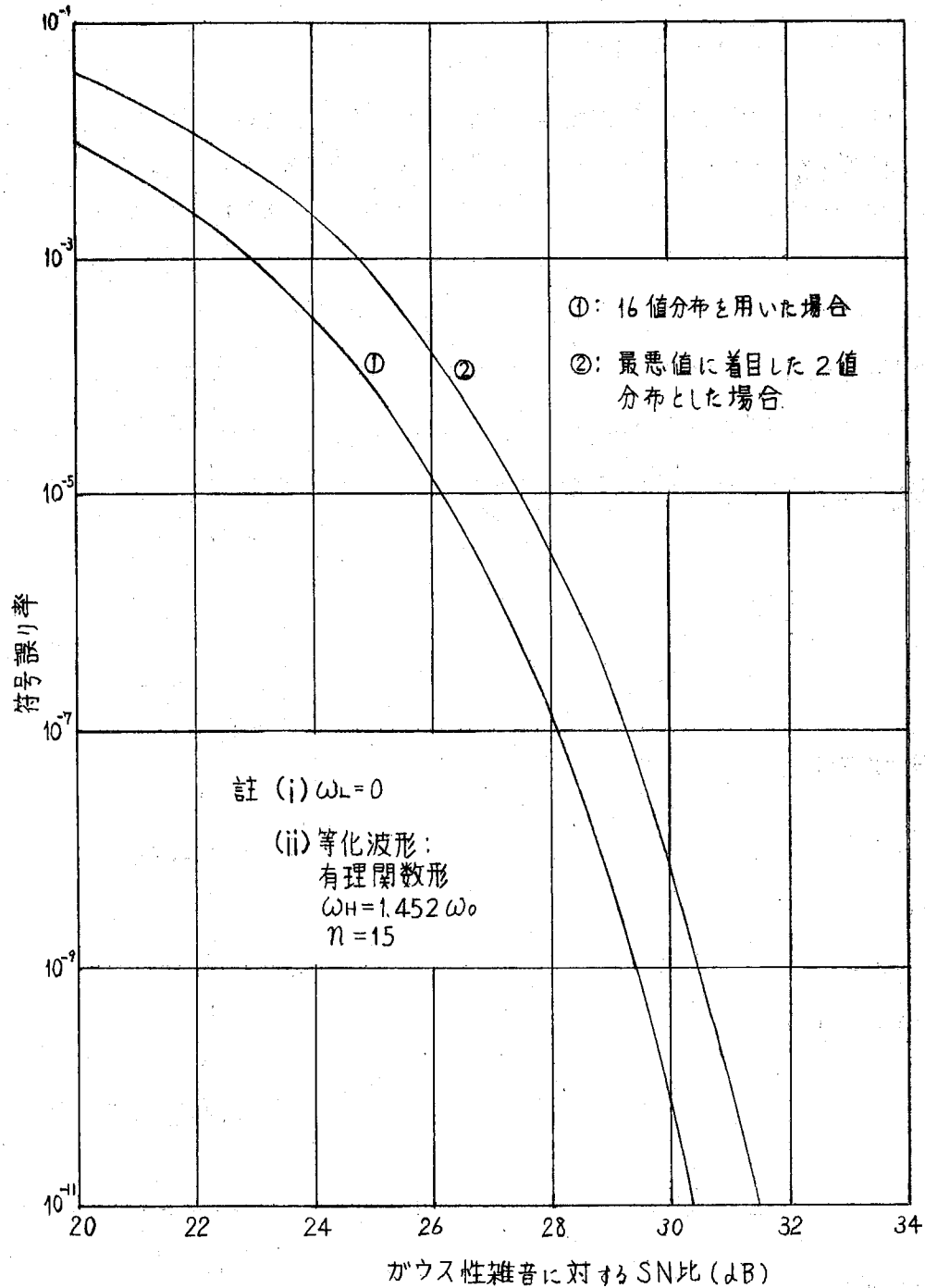


図 4.17 通常 4 進符号の誤り率特性

これ等の多値分布を、図 4.17(c)(d)に示すような 2 値分布 (最悪値) で置き換えたときの、SN 比と誤り率の関係を、多値分布の場合と比較して図 4.18 に示す。同図より、多値分布を最悪値に着目した 2 値分布で置き換えても、その誤差は僅かであることがわかる。たとえば、通常 3 進符号の場合、符号誤り率 10^{-9} に対する所要 SN 比の相違は 0.6 dB であり、またこの誤差を情報伝送速度という観点から視ると、伝送系の諸条件が図 4.14 に示されるような同軸 PCM 方式の場合、誤り率 10^{-9} に対する情報伝送速度の相異は約 0.7% であることが、図 4.16 及び図 4.18 より示される。

上に例示した同軸 PCM 方式の場合に限らず、熱雑音あるいは漏話雑音が、広帯域化に伴って急激に増大する伝送系においては、符号間干渉の確率分布を、最悪値に着目した 1 値分布としても、あるいは一様分布としても、同一誤り率に対する情報伝送速度の相違は非常に小さいと考えられる。

4.3 平衡符号の符号間干渉と符号誤り率

4.3.1 バイポーラ符号

バイポーラ符号の符号間干渉は、岩橋により、符号列群なる概念を用いて、考察されている。⁽²⁴⁾ ここでは、この考え方を発展させて、符号誤りを計算する場合に有効な、符号間干渉の等価的な確率密度関数を求めることとする。

バイポーラ符号は、その符号構成上の拘束によって、図 4.20 に示されるような符号列群に分類される。⁽²⁴⁾

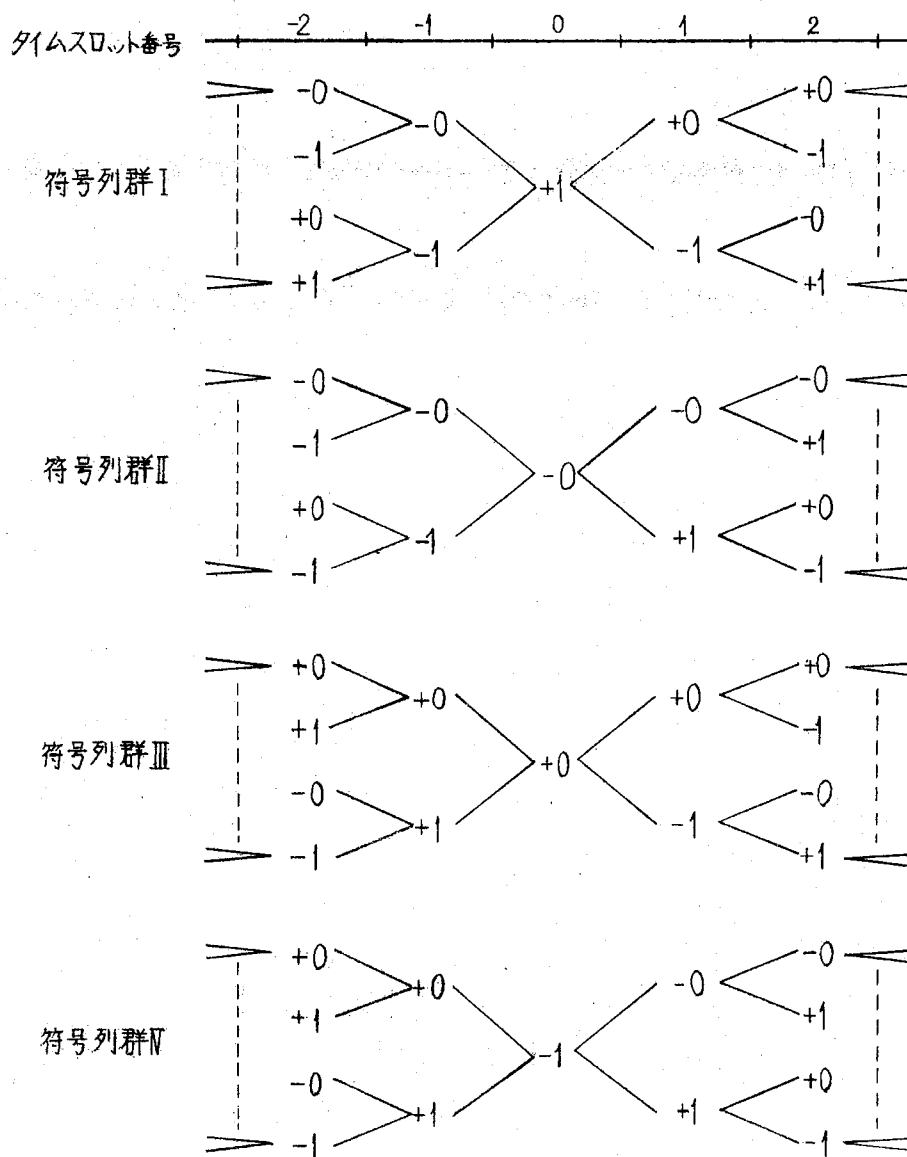


図4.20 バイポーラ符号列の符号列群

ここで(+0)および(-0)は、各々、+1のあと0、および-1のあと0を表わす。一般に、各符号列群の符号間干渉は、お互いに異っている。ただし、図 4.20 において、タイムスロット番号 $N=0$ に着目している。

いま、着目するタイムスロットの符号間干渉の確率密度関数を、符号列群 I~IV に対応して、 $P_{I,+1}(\nu)$, $P_{I,-0}$, $P_{I,+0}$, $P_{I,-1}$ とすれば、

$$P_{I,+1}(v) = P_{I,-1}(-v), \quad P_{I,+0}(v) = P_{I,-0}(-v) \quad (4.41)$$

が成立する。つきにガウス性雑音の確率密度関数を $P_G(z)$ とすれば、

$$P_G(z) = P_G(-z) \quad (4.42)$$

であるから、識別時点の信号振幅を1、閾値を0.5として、+1または-1の生起確率を μ_1 、+0または-0の生起確率を μ_0 で表わせば、符号誤り率は、式(4.41)、(4.42)の対称性に注意すれば、

$$P_e = \int_{0.5}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_G(u-v) \left[\mu_1 P_{I,-1}(v) + \mu_0 (P_{I,+0}(v) + P_{I,-0}(v)) \right] dv du \quad (4.43)$$

となる。したがって、符号間干渉の確率密度関数は Q_0 を定数として、等価的に

$$P_{Ie}(u) = Q_0 \left[\mu_1 P_{I,-1}(v) + \mu_0 (P_{I,+0}(v) + P_{I,-0}(v)) \right] \quad (4.44)$$

となる。 Q_0 は $P_{Ie}(u)$ の積分値が1となるよう定める。次に $P_{Ie}(u)$ を具体的に求める。

変成器技術の進歩によって、伝送路の低域遮断周波数 f_L を、クロック周波数 f_0 に対して、充分低く ($f_L \leq 10^{-4} f_0$) することができるようになったので、低域遮断の影響を無視して考える。この仮定は、符号間拘束のない通常多進符号の場合すら、成立する(この場合、正負の平衡性が保たれていることが必要である。)ことから、充分妥当であろう。ただし、バイポーラ符号の場合は、符号間拘束の効果によって、生起確率 μ_1 および μ_0 の如何なる値に対しても、(勿論、 $0 < \mu_1, \mu_0 < 1$, かつ $\mu_0 + \mu_1 = 1$) この仮定が成立する。

図4.2の②に示す等化波形を用いるものとすれば、図4.20を参照して

$$P_{I,-1}(v) = \mu_0^2 \delta(v) + \mu_0 \mu_1 \left[\delta(v - c_1) + \delta(v - c_{-1}) \right] + \mu_1^2 \delta(v - c_1 - c_{-1}) \quad (4.45)$$

$$P_{I,+0}(v) = \mu_0^2 \delta(v) + \mu_0 \mu_1 \left[\delta(v - c_1) + \delta(v + c_{-1}) \right] + \mu_1^2 \delta(v - c_1 + c_{-1}) \quad (4.46)$$

$$P_{I,-0}(v) = \mu_0^2 \delta(v) + \mu_0 \mu_1 \left[\delta(v + c_1) + \delta(v + c_{-1}) \right] + \mu_1^2 \delta(v + c_1 - c_{-1}) \quad (4.47)$$

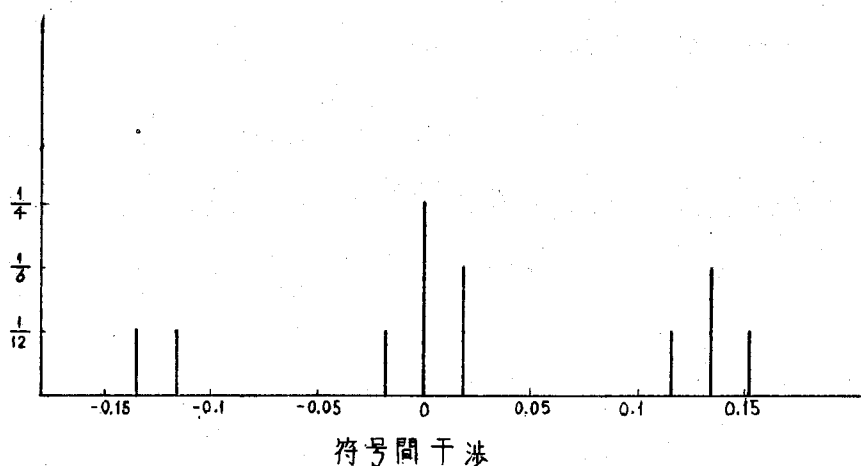
が得られる。式(4.45)、(4.46)および(4.47)を式(4.44)に代入して、等価確率密度関数は

$$P_{Ie}(u) = Q_0 \left[\mu_0^2 (1 + \mu_0) \delta(v) + \mu_0 \mu_1 \delta(v - c_1) + \mu_0 \mu_1 \delta(v - c_{-1}) + \mu_0^2 \mu_1 \delta(v + c_1) + \mu_0^2 \mu_1 \delta(v + c_{-1}) + \mu_1^3 \delta(v - c_1 - c_{-1}) + \mu_0 \mu_1^2 \delta(v - c_1 + c_{-1}) + \mu_0 \mu_1^2 \delta(v + c_1 - c_{-1}) \right] \quad (4.48)$$

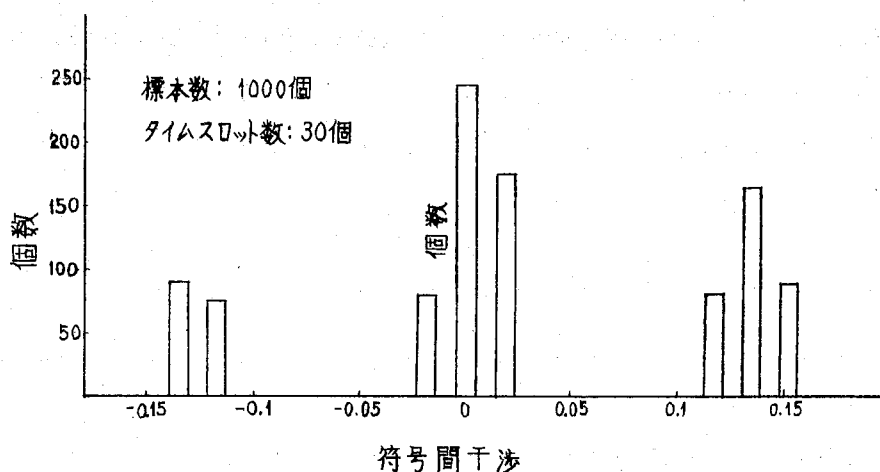
となる。特に、 $\mu_1 = \mu_0 = 0.5$ のとき、

$$P_{Ie}(u) = \frac{2}{3} \left[\frac{3}{8} \delta(v) + \frac{1}{4} \delta(v - c_1) + \frac{1}{4} \delta(v - c_{-1}) + \frac{1}{8} \delta(v + c_1) + \frac{1}{8} \delta(v + c_{-1}) + \frac{1}{8} \delta(v - c_1 - c_{-1}) + \frac{1}{8} \delta(v - c_1 + c_{-1}) + \frac{1}{8} \delta(v + c_1 - c_{-1}) \right] \quad (4.49)$$

である。これを図4.21(a)に示す。これはまた、計算機シミュレーションによって確かめられる。その結果を、計算条件と共に図4.21(b)に示す。



(a) 式(4.58)による等価確率密度関数



(b) 計算機シミュレーションの結果

図4.21 バイポーラ符号列における符号間干渉の確率分布

$P_{Ie}(u)$ が求まると、符号誤り率は、式(4.43)を用いて計算できる。ガウス性雑音に対するSN比と符号誤り率の関係は、図4.22の実線の通りである。また、等価確率密度関数を、最悪値に着目して、

$$P_{Ie}(u) = \delta(v - c_1 - c_{-1}) \quad (4.50)$$

なる2値分布で近似した場合の特性を、図4.22の点線で示す。最悪値のみに着目しても、同一符号誤り率に対する所要SN比の相違は、誤り率 10^{-9} 付近において0.6 dB程度である。

また、符号間拘束を無視して、確率密度関数を、生起確率のみに着目して求めると、通常多進符号の場合と同様に、

$$P_I = \sum_{k=-1}^1 \sum_{k'=-1}^1 \mu'_k \mu'_{k'} \delta(v - c_{-1} A_k - c_1 A_k) \quad (4.51)$$

で与えられる。ここに

$$\mu'_1 = \mu'_{-1} = \frac{1}{2} \mu_1, \quad \mu'_0 = \mu_0 \quad (4.52)$$

$$A_1 = A_{-1} = 1, \quad A_0 = 0 \quad (4.53)$$

である。特に $\mu_1 = \mu_0 = 0.5$ の場合について計算し、これより符号誤り率特性を求めると、図4.22の鎖線のようになる。

図4.22から、符号間拘束については、これを忠実に考慮する必要がないことが知られる。

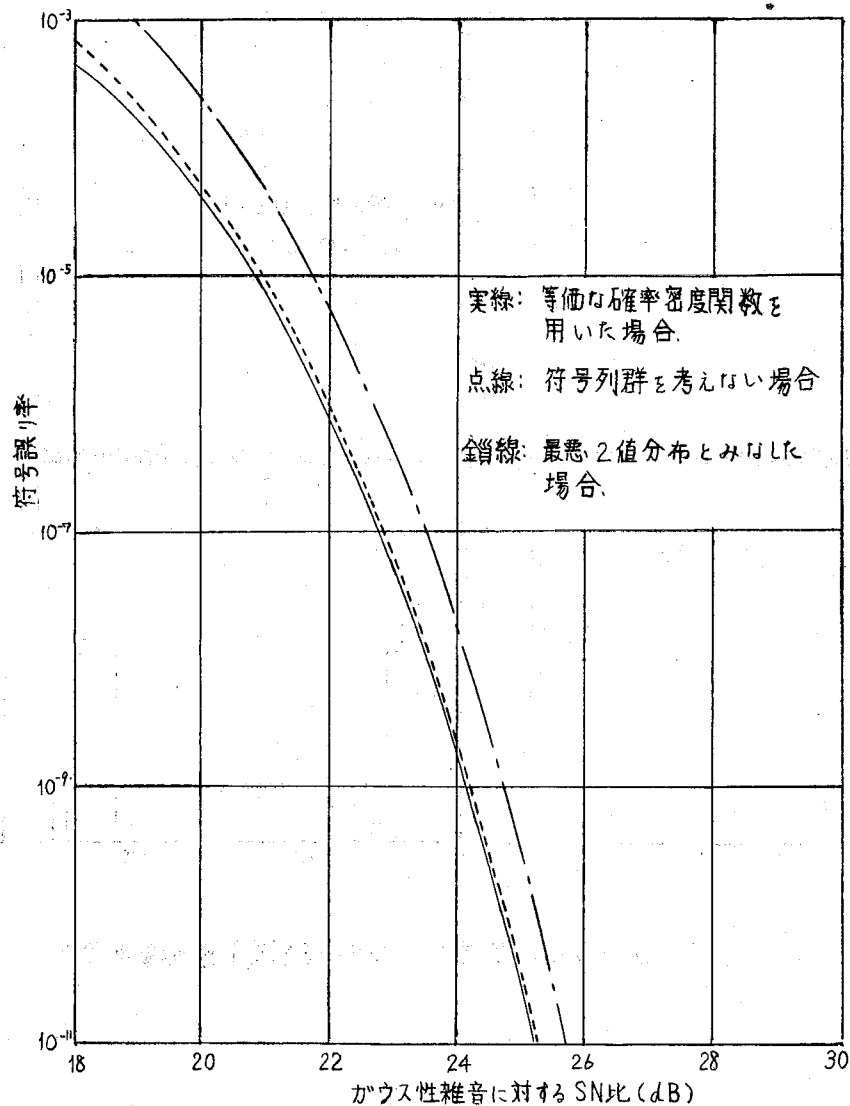


図 4.22 バイポーラ符号の誤り率特性

4.2.2 その他の平衡符号

バイポーラ符号以外の、有限ブロック長の 3 値平衡符号については、その符号間干渉の確率分布特性が、通常 3 進符号とバイポーラ符号の両特性の中間的なものとなることは、それ等の符号構成から考えて明らかである。

通常 3 進符号についても、またバイポーラ符号についても、低域遮断の無い場合の符号間干渉の確率分布を、最悪値に着目した 2 値分布で近似できること、及び両者の最悪値が等しいことは前述した通りである。

その他の 3 値平衡符号についても、低域遮断のない場合の符号間干渉の最悪値が、バイポーラ符号のそれと等しいことは勿論であるが、低域遮断の有る場合も殆んど等しいことが、平衡符号の構成法と図 4.3 から結論できる。たとえば、 $f_L = 10^{-4} f_0$ のとき、ブロック長 3 の 3 値平衡符号列においては、最悪値がバイポーラ符号列の場合より僅か 0.008 だけ増大するに過ぎない。そしてこのことは、各符号波形の生起確率の如何を問わない。

参考のため、 $\omega_L = 10^{-4} \omega_0$ の場合、ブロック長 3 の 3 値平衡符号列における符号間干渉の確率分布を、計算機シミュレーションによって、求めた結果を図 4.23 に示す。

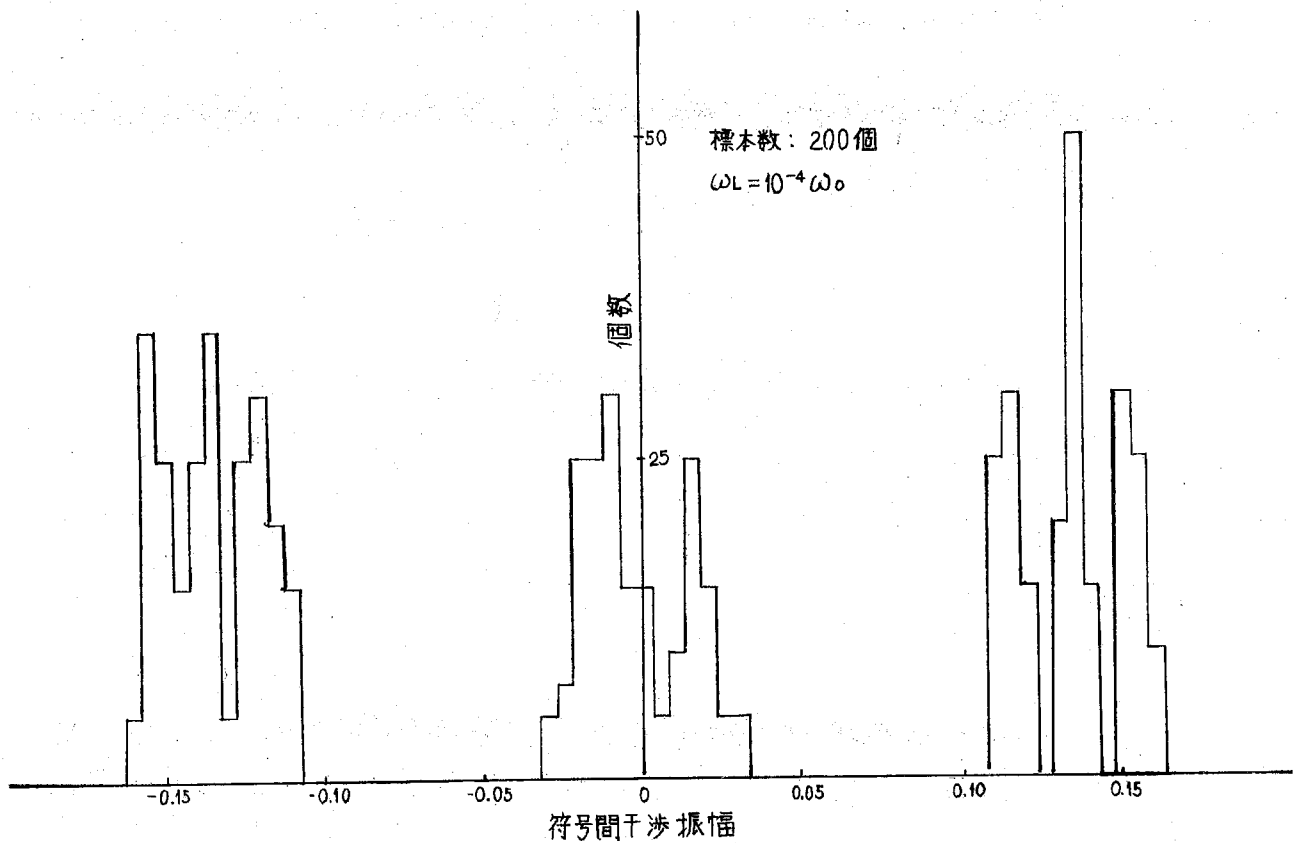


図4.23 3値3ディジット符号列における符号間干渉の確率分布

つぎに、4値平衡符号について考察する。この場合も、低域遮断の無いとき、符号間干渉の最悪値は、バイポーラ符号の場合と同様、 $(c_1 + c_{-1})$ であり、確率分布の形状は、より一様分布のそれに近づくことが推察される。また低域遮断の有る場合の最悪値の増加量は3値平衡符号の場合と同様である。

$f_L = 10^{-4} f_0$ の場合について、ブロック長3の4値平衡符号列(4値3ディジット平衡符号列)における符号間干渉の確率分布を、計算機シミュレーションによって求めた結果を図4・24に示す。

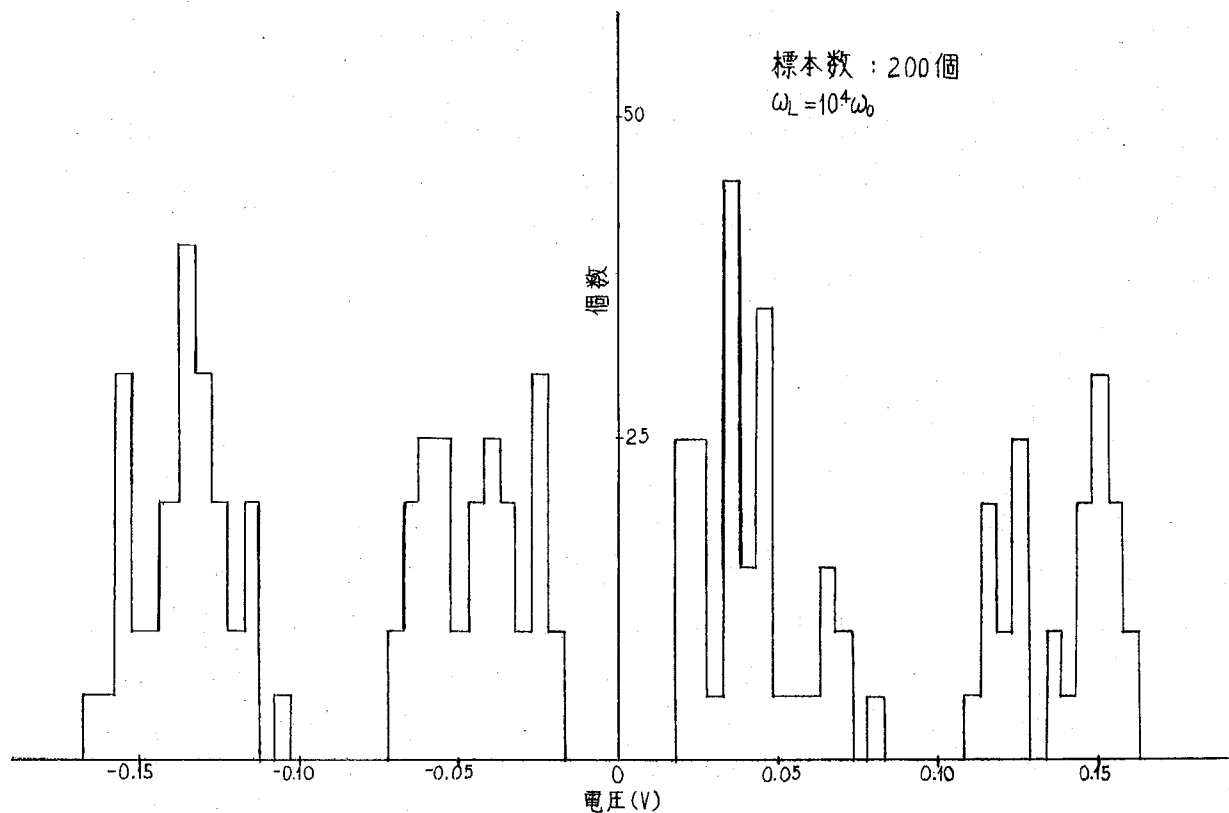


図4.24 4値3ディジット符号列における符号間干渉の確率分布

これらの計算例と、4.3.3の結果から、3値乃至4値平衡符号の確率分布を最悪値に着目した2値分布とみなしても差支えないことがわかる。

4. ⁴/₃ む す び

符号間干渉の確率分布について考察したが、主な結果を列記すると次の通りである。

- (1) 通常多進符号列における符号間干渉の確率密度関数は、多値^{分布}符号と正規分布の“たたみこみ積分”で近似し得る。正規分布の分散は、伝送路の低域遮断周波数を1桁下げると約1桁小さくなる。
- (2) したがって、低域遮断が符号誤り率あるいは情報伝送速度に及ぼす影響は、低域遮断周波数を低下させることにより、これを無視し得る。たとえば、通常3進符号を用いる場合、低域遮断周波数をクロック周波数の 10^4 分の1とすることにより、低域遮断の影響を殆んど無視できる。低域遮断の影響を無視すると、通常多進符号列における符号間干渉の確率分布は多値分布となる。
- (3) 符号間干渉の確率分布を、最悪値の等しい多値分布、または2値分布のい^すれとしても、符号誤り率特性及び情報伝送速度は殆んど同一である。
- (4) ブロック長が数ディジット以下の平衡符号列における符号間干渉の確率分布も多値分布となる。

第 5 章 最適波形の決定

本章では基底帯域伝送系の最適等化波形（以下、最適波形と呼ぶ）を決定する方法と具体的な計算結果を示す。

最適波形とは伝送系の諸条件の下で、合理的に定めた評価関数（目的式）を最大または最小ならしめるような波形という意味である。

最適波形の決定方法としては伝送系の諸条件を自由に考慮に入れることができ、かつ、評価関数を任意に選べる方法が望ましい。勿論その際、最適解が必ず求まるという数学的な保証のあることが必要である。

最適化の手法として、これ等の要求をすべて満たすものは残念ながら現在のところ見出されていない。

いま、最適化の手法を次のように大別して考える。

1. 古典的変分法

2. 数値計画法

- 線形計画法（LP）
- 2次計画法（QP）
- 非線形計画法（NP）

最急傾斜法、あるいは最大原理などは便宜上非線形計画法に含ませて考えることとする。

従来、最適波形を古典的変分法を用いて決定した例は多い^{(29)~(34)}が、この方法は伝送系の諸条件を考慮することが難しい。特に不等号条件を付すことができず、時間域における広がりを抑えたい場合には不向きである。

数値計画法には多くの方法があり、種々の分野に応用されているが、最適波形の決定に応用された例は無いようである。

非線形計画法は条件式および目的式を任意に定められるという点で勝れているが、最適解が求まるという保証がなく、一般には局所的な最大または最小しか求まらない場合が多い。

これに対し線形計画法あるいは2次計画法は、条件式はすべて線形、目的式は線形あるいは2次式（定正值）という制限はあるが、変分法に比べれば可成り自由であり、かつ大域的な最適解が必ず求まり、計算も比較的容易である。

上記の点を考慮に入れて、本章では最適波形を決定する問題を2次計画問題として定式化した。

具体例として同軸ケーブルおよび平衡対ケーブルを用いたPCM方式について最適波形の計算結果を示した。また求められた最適波形の伝送特性上の有利性を、ガウス形波形と比較することにより明らかにした。^{(35)~(38)}

5.1 節 従来の研究結果

符号通信に適すると考えられている波形として、まずガウス波形を挙げることができる。いま、波形を $g(t)$ 、そのフーリエ変換を $G(j\omega)$ で表わし、占有時間幅、及び占有周波数帯域幅を各々

$$t_d = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t g(t)^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 dt} \quad (5.1)$$

$$\omega_d = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega G(j\omega)^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)^2 d\omega} \quad (5.2)$$

で定義すると、 $t_d \cdot \omega_d$ を最小ならしめる波形 $g(t)$ はいわゆるガウス波形となる。⁽³⁹⁾

符号通信においては、時間領域においても周波数領域においても、まとまりのよい波形が好ましい場合が多く、この観点からガウス波形が符号通信に適するものとされてきた。しかし、時間領域及び周波数領域におけるまとまりの度合を、各々式(5.1)及び式(5.2)で定義した場合に、両者の積が最小になる波形がガウス波形であり、これは一つの代表的な波形ではあるが、これが常に、実際の伝送路における最適波形であるという根拠は無い。

余弦自乗波も符号通信の分野における重要な波形の一つであるが、これは時間域制限を行ない角周波数帯域幅 ω_d を式(5.2)で定義したとき、 ω_d を最小ならしめる波形である。したがって、これもガウス波形と同様、具体的な伝送路における最適波形と直接の関係は無い。

つきに、符号伝送系において瞬時識別を行なう場合に、符号間干渉無しで伝送し得る波形として、標本化関数形波形がよく知られている。この波形は、厳密な意味では実現の可能性が無いこと、及び僅かのジッタ(識別時点の位相変動)に対しても符号誤りを生ずることの二つの点で実際に使用することはできないが、理論上、重要な波形である。

さて、PCM伝送に対する最適波形について、具体的に検討を行なっている文献として、まず、D. W. Tufts の論文を挙げる事ができる。⁽²⁹⁾

いま、ジッタが無いものとする、符号間干渉を零ならしめる条件の下で、受信器(波形整形回路網)の出力における雑音の2乗平均値を最小ならしめるような受信器の特性 $E(j\omega)$ が、D. W. Tufts によって、つぎのように求められている。すなわち符号間干渉が零となる条件

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) D(j\omega) e^{jm\omega t} d\omega = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m=\pm 1, \dots, \pm(N-1) \end{cases} \quad (5.3)$$

の下で、雑音の2乗積分値

$$N_a^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega) E(j\omega) E(j\omega) d\omega \quad (5.4)$$

を最小にする解 $E_0(j\omega)$ は、変分法を用いて

$$E_0(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{N(\omega)} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} C_k e^{-j\omega k t} \quad (5.5)$$

で与えられる。ただし C_k は

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{C_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(j\omega) D(j\omega)}{N(\omega)} e^{j(n-k)\omega t} d\omega = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n=\pm 1, \dots, \pm(N-1) \end{cases} \quad (5.6)$$

より定められる。

式(5.5)から判る通り、最適受信器は、整合器(matched Filter)と $(2N-1)$ 個のタップを有する遅延線路との継続接続となり、図5.2に示す構成となる。

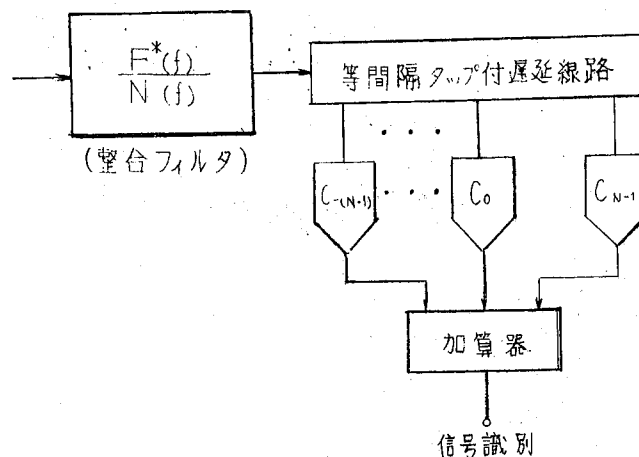


図5.2 D. W. Tufts の最適受波器

上に述べた結果は重要なものと考えられるが、ジッタが考慮すること及び受信器の有理関数近似が問題として残る

であろう。

最近我国においても、符号通信に対する最適波形の追求が各方面で行われ始めたが、具体的な成果は未だ得られていないように思われる。^{(33)~(34)}

5.2 節 前 提 条 件

基底帯域伝送路の任意の1中継区間において、再生中継器出力点よりつぎの中継器の信号識別点すなわち等化増幅器出力点まで(波形等化区間)を考察の対象とする。なお図2.5を参照されたい。

主な前提条件を列記するとつぎの通りである。

- ① 伝送媒体：同軸ケーブルまたは平衡対ケーブルを用いる場合について考察する。
- ② 符号形式：バイポーラ符号、通常4進符号など種々の符号形式を用いる場合について考察する。
- ③ 伝送路の低域遮断：前章に述べたように変成器技術の進歩により低域遮断周波数は充分低く($f_L \leq 10^{-4} f_0$)抑える事ができる。したがって、いづれの符号形式を用いるにせよ、低域遮断に基づく符号間干渉は無視することとする。
- ④ 再生中継器送出波形：与えられているものとする。通常、占有率50%の矩形波が用いられているので、具体例の計算にはこれを使用する。
- ⑤ 信号識別方法：各ディジット毎に瞬時識別を行なうものとする。
- ⑥ 等化増幅器出力点の信号電圧：最適波形の決定に直接関係がないので、尖頭値(多値符号の場合は最大振幅の等化パルスの尖頭値)を1Ωの抵抗負荷に対して1Voltとする。
- ⑦ タイミング時点の位相変動(ジッタ)：ジッタは種々の原因によって起きるが、その大きさには限度があるので、最悪値が与えられているものとし、正規の識別時点からの最大のずれを $\tau(\text{Sec})$ とする。

5.3 節 2 次計画問題としての定式化

5.3.1 等化波形に関する制約条件

有線PCM方式における線路の減衰特性は、同軸ケーブルおよび平衡対ケーブルの両者共、いわゆる $\sqrt{f}$ 特性に近く、周波数が高くなるに従い、減衰量も急激に増大する。

したがって、信号識別点におけるガウス性雑音を小さく抑えるためには、受信増幅器の帯域をできるだけ狭くすること、換言すれば、等化波形のスペクトルの広がり小さくすることが望ましい。それ故、この点からは、標準化関数形の等化波形が勝れているが、この波形は、僅かのジッタに対しても、符号間干渉が極めて大きくなることが知られている。また、このような等化波形を得るための、波形整形回路網は、厳密な意味では、実現可能でない。

そこで、本研究では、等化波形に対して、

- ① ジッタがない場合の符号間干渉が零であること。
- ② 各タイムスロットにおける極性が、図5.2に示すようになること。

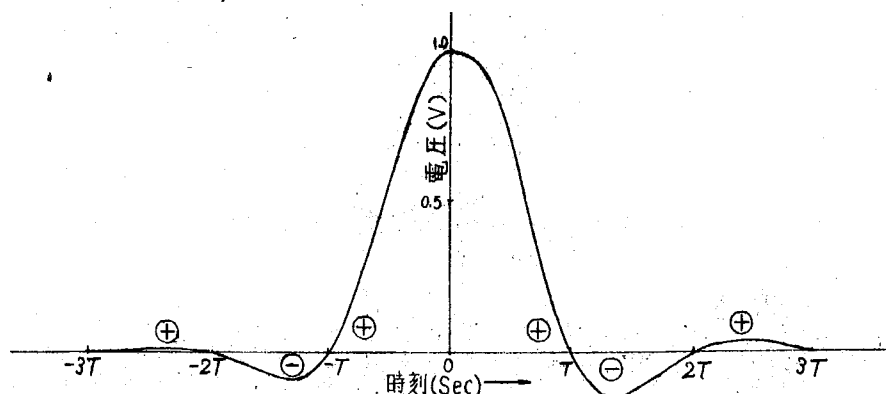


図5.2 等化波形に対する制約条件

③ 識別時点，すなわち等化波形が尖頭値をとる時刻を中心とする有限な時間範囲外では，実用上無視し得る程度の振幅となること。

を条件として課すこととする。

さて，等化波形 $r(t)$ が周波数帯域 W で制限されているものとすれば，標本化定理により

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r\left(\frac{n}{2w}\right) \frac{\sin \pi(2wt-n)}{\pi(2wt-n)} \quad (5.7)$$

が成立している。ここに n は整数である。さらに，実用上差支えない程度の誤差範囲で

$$r(t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} r\left(\frac{n}{2w}\right) \frac{\sin \pi(2wt-n)}{\pi(2wt-n)} \quad (5.8)$$

と近似しうる。ここに N_1 および N_2 は適当な整数である。

したがって， $r(t)$ を未知関数とする代りに $r(t)$ の $(N_2 - N_1 + 1)$ 個の標本点を未知変数として用いることができる。

等化波形の各時点に対する制限条件は，式 (5.8) を用いれば，線形制約として表現できる。まず，

$$r_n = r\left(\frac{n}{2w}\right) \quad (n = N_1, N_1 + 1, \dots, N_2) \quad (5.9)$$

とおき，変数ベクトル $\mathbf{X}$ を

$$\mathbf{X} = (r_{N_1}, r_{N_1+1}, \dots, r_{N_2})^t \quad (5.10)$$

で定義する。 $\mathbf{X}$ は $(N_2 - N_1 + 1)$ 次元の列ベクトルで， t はベクトルの転置を示す。

つぎに，条件を付す時刻を t_j ($j = 1, 2, \dots, R$) として，係数行列 $\mathbf{D}$ を

$$\mathbf{D} = [D_{j,n}] \quad (5.11)$$

ここに，

$$D_{j,n} = \frac{\sin \pi(2wt_j - n)}{\pi(2wt_j - n)} \quad (5.12)$$

とする。また時刻 t_j における制限値を d_j として，

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_R)^t \quad (5.13)$$

で R 次元の列ベクトル $\mathbf{d}$ を定義すれば

$$r(t_r) \geq d_r \quad (r = 1, 2, \dots, R) \quad (5.14)$$

なる条件式は

$$\mathbf{DX} \geq \mathbf{d} \quad (5.15)$$

と表わされる。ここに， $\geq$ なる記号は $\geq$ ，または $=$ ，または $\leq$ のいずれかであることを意味する。

このようにして，先に述べた等化波形に関する条件①～③は，すべて線形な条件式で表わされる。

また，等化波形を対称と仮定する場合には，等化波形のスペクトル $R(f)$ を未知関数にしても，条件式①～③は，すべて線形な条件式となる。つぎにこれを示す。

$$R(j\omega) = R_0(\omega) e^{j\theta_R(\omega)} \quad (5.16)$$

とおく。一般性を失うことなく，等化波形の尖頭値を時間軸の原点とし，

$$\theta_R(\omega) = 0 \quad (5.17)$$

とおき，周波数帯域が W で制限されているものとする

$$r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W R(j\omega) \cos \omega t d\omega \quad (5.18)$$

となる。フーリエ積分を精度よく行なう方法として、Filonの方法が知られている。この方法を用いると、周波数帯域 $0 \sim W$ を $2N$ 等分して

$$R_i = R_0 \left(\frac{2\pi i W}{2N} \right) \quad (5.19)$$

とおくと、数値積分の係数 $\beta_i(t)$ を用いて

$$r(t) = \sum_{i=0}^{2N} \beta_i(t) R_i \quad (5.20)$$

と近似できる。そこで変数ベクトル $\mathbf{X}$ を

$$\mathbf{X} = (R_0, R_1, \dots, R_{2N})^t \quad (5.21)$$

なる $(2N+1)$ 次元の列ベクトルとし、式 (5.11) に相当する係数行列 $\mathbf{D}$ を

$$\mathbf{D} = [\beta_i(t_j)], \quad (j=1, 2, \dots, R, i=0, 1, \dots, 2N) \quad (5.22)$$

とおくと、条件式は、式 (5.15) と同じ形で表わされる。

5.3.2 評価関数 (目的式) の定義

中継器における符号誤りの要因は、ガウス性雑音と、符号間干渉である。

まずガウス性雑音について考察する。ガウス性雑音の分散 N_G^2 は

$$N_G^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty N(\omega) |E(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.23)$$

で与えられる。送信波形のスペクトルを $S(j\omega)$ 、線路の伝達関数を $L(j\omega)$ とすると

$$E(\omega) = \frac{R(j\omega)}{S(j\omega)L(j\omega)} \quad (5.24)$$

が成立つから

$$N_G^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{N(\omega)}{|S(j\omega)L(j\omega)|^2} |R(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.25)$$

となる。 $r(t)$ を未知関数として、前節に述べたように、これを $(N_2 - N_1 + 1)$ 個の未知変数 $r_n (n=N_1, N_1+1, \dots, N_2)$ で表わすと

$$\begin{aligned} |R(j\omega)|^2 &= \left| \frac{1}{2W} \sum_{n=N_1}^{N_2} r\left(\frac{n}{2W}\right) e^{-j\frac{n\omega}{2W}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4W^2} \sum_{\ell=N_1}^{N_2} \sum_{m=N_1}^{N_2} \cos \frac{\pi(\ell-m)f}{W} r_\ell r_m \end{aligned} \quad (5.26)$$

を得る。上式を式 (5.2) に代入して

$$N_G^2 = \frac{1}{2W^2} \sum_{\ell=N_1}^{N_2} \sum_{m=N_1}^{N_2} \left(\int_0^\infty \frac{\cos \frac{\pi(\ell-m)f}{W}}{|S(f)L(f)|^2} df \right) r_\ell r_m \quad (5.27)$$

となる。いま、 $(N_2 - N_1 + 1)$ 次の正方行列 $\mathbf{C}_Q$ を

$$\mathbf{C}_Q = [C_{\ell, m}], \quad (5.28)$$

$$C_{\ell, m} = \frac{1}{W^2} \int_0^\infty \frac{\cos \frac{\pi(\ell-m)f}{W}}{|S(f)L(f)|^2} df \quad (5.29)$$

で定義すると

$$N_G^2 = \frac{1}{2} X^t C_G X \quad (5.30)$$

と表わされる。 X は前節の式(5.10)で定義した変数ベクトルである。

つぎに符号間干渉雑音について検討する。符号間干渉の確率分布は、前章に述べたように、低域遮断の影響を無視し得る場合は、符号形式の如何に拘らず、多値分布と考えてよい。したがって、符号誤り率は、たとえば式(4.38)(4.39)から判るように X の非線形(2次以外の)関数となる。それ故、符号誤り率を評価関数とすると、最適解を求めることが困難となる。

そこで本研究では、評価関数を

$$N = N_G^2 + N_I^2 \quad (5.31)$$

で定義する。ここに

$$N_I = \frac{w_0}{2\tau} \sum_{\substack{\nu=-m_1 \\ (\nu \neq 0)}}^{m_2} \int_{\nu T - \tau}^{\nu T + \tau} |r(t)| dt \quad (m_1, m_2 = 1, 2, \dots) \quad (5.32)$$

である。ただし、 w_0 は荷重係数である。この式の意味は前後 $(m_1 + m_2)$ 個の等化パルスからのジッタを考慮した符号間干渉の最悪値に、重み w_0 を乗じたものを N_I とするということである。 w_0 は多値数を考慮して妥当な値に定めるものとする。このように評価関数を定めることは、符号間干渉の確率分布を、 N_I^2 を分散とする正規分布とみなすことに相当する。つぎに N_I^2 が、 N_G^2 と同様、 X の2次形式となることを示す。まず $r(t)$ を未知関数とする場合について述べる。

式(5.32)および(5.18)から

$$N_I = \frac{w_0}{2\tau} \sum_{\substack{\nu=-m_1 \\ (\nu \neq 0)}}^{m_2} \int_{\nu T - \tau}^{\nu T + \tau} \left| \sum_{\substack{n=-N_I \\ n \neq 0}}^{N_I} r_n \frac{\sin \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)} \right| dt \quad (5.33)$$

となる。絶対値の記号は、等化波形に対する極性の制約を考慮して、+1または-1を乗じた後、とりはずすことができる。そこで、

$$N_I = \sum_{n=-N_I}^{N_I} \left[\frac{w_0}{2\pi} \sum_{\substack{\nu=-m_1 \\ (\nu \neq 0)}}^{m_2} S_\nu \int_{\nu T - \tau}^{\nu T + \tau} \frac{\sin \pi(2wt - n)}{\pi(2wt - n)} dt \right] r_n \quad (5.34)$$

と変形できる。 S_ν は ν の値に従って+1または-1をとるものとする。いま、

$$h_n = \frac{w_0 \pi}{2\tau} \sum_{\substack{\nu=-m_1 \\ (\nu \neq 0)}}^{m_2} S_\nu \int_{\nu T - \tau}^{\nu T + \tau} \frac{\sin \pi(2wt - n)}{\pi(2wt - n)} dt \quad (5.35)$$

とおくと、

$$N_I = \sum_{n=-N_I}^{N_I} h_n r_n \quad (5.36)$$

であるから、式(5.8)より

$$N_I^2 = \frac{1}{2} X^t C_I X \quad (5.37)$$

と表わすことができる。

ただし C_I は

$$C_I = (2h \ell^h_m), \quad \ell, m = N_1, N_1+1, \dots, N_2 \quad (5.38)$$

なる $(N_2 - N_1 + 1)$ 次元の正方行列である。したがって、評価関数は、式 (5.26), (5.27) および (5.33) より

$$N = \frac{1}{2} X^t C X, \quad (5.39)$$

$$C = C_G + C_I \quad (5.40)$$

と表わされる。

等化波形を対称波形に限定する場合には、そのスペクトル $R_0(\omega)$ を未知関数として、評価関数を表わすことができる。すなわち、 R_i を式 (5.18) で定義して

$$N_G^2 = \sum_{i=0}^{2N} G_i R_i^2 \quad (5.41)$$

$$G_i = \alpha_i N(\omega_i) \frac{1}{|S(j\omega)L(j\omega)|} \Delta\omega \quad (5.42)$$

となる。ここに α_i は数値積分に関する係数である。 N_I^2 については、式 (5.28) より

$$N_I^2 = \left[w_0 \sum_{\substack{\nu=-m_1 \\ (\nu \neq 0)}}^{m_2} \int_{\nu T - \tau}^{\nu T + \tau} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_0(\omega) \cos \omega t d\omega \right| dt \right]^2 \quad (5.43)$$

となるが、式 (5.18) より

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_0(\omega) \cos \omega t d\omega = \sum_{i=0}^{2N} \frac{\alpha_i}{2} \beta_i(t) R_i = \sum_{i=0}^{2N} \frac{\alpha_i}{\pi} (\cos \omega_i t) R_i \Delta\omega \quad (5.44)$$

において

$$N_I^2 = \sum_{i=0}^{2N} \sum_{j=0}^{2N} I_{i,j} R_i R_j \quad (5.45)$$

$$I_{i,j} = \left(\frac{w_0 \Delta\omega}{\pi} \right)^2 \alpha_i \alpha_j \left[\sum_{\nu=-m_1}^{m_2} \int_{\nu T - \tau}^{\nu T + \tau} \text{sgn}(t) \cos \omega_i t dt \right] \left[\sum_{\nu=-m_1}^{m_2} \int_{\nu T - \tau}^{\nu T + \tau} \text{sgn}(t) \cos \omega_j t dt \right] \quad (5.46)$$

を得る。ここで、 $\text{sgn}(t)$ は時刻 t における $r(t)$ の極性に関する制約条件 (図 5.2 参照) より

$$\begin{aligned} \text{sgn}(t) &= 1 : r(t) > 0 \\ \text{sgn}(t) &= -1 : r(t) < 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

と定める。また式 (5.37), (5.39) 及び式 (5.44) において、 $\Delta\omega$ は周波数きざみ幅で

$$\Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_i, \quad (i=0, 1, 2, \dots, \frac{2N-1}{2}) \quad (5.48)$$

である。いま、

$$C_G = \begin{bmatrix} 2G_0 & & 0 \\ & 2G_1 & \\ 0 & & 2G_{2N} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

及び

$$C_I = \left\{ 2 \alpha_i \alpha_j I_{i,j} \right\}, \quad (i, j=0, 1, 2, \dots, 2N) \quad (5.50)$$

とおき、変数ベクトルを (5.21) で定義すると、評価関数は、式 (5.38) のように表わされる。

さて、一般に、 X を $(2N+1)$ 次元ベクトル変数、 D を R 行 $(2N+1)$ 列の行列、 d を R 次元ベクトル、 b を

(2N+1)次元ベクトル, C を(2N+1)次の非負値定符号行列とし, ベクトルの転置を t で示すとき,

「条件

$$DX \geq d \quad (\geq \text{は} \geq \text{または} \leq \text{を示す})$$

(5.51)

の下で, 評価関数

$$N = \frac{1}{2} X^t C X - b^t x$$

(5.52)

を最小(最大)ならしめる問題」

は2次計画問題と呼ばれる。⁽⁴⁰⁾

本章で扱う問題は, 式(5.15)の条件の下で式(5.36)を最小ならしめる問題であるから, 2次計画問題であることがわかる。

5.5 節 同軸PCM方式の最適波形

5.5.1 伝送路の条件

- ① 線路雑音: 本方式では, 漏話雑音を無視することができるので, 線路雑音としては熱雑音のみ考慮すればよい。熱雑音は分散が

$$N_G^2 = \frac{1}{4\pi} k T_0 \int_{-\infty}^{\infty} N_F(\omega) |E(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.53)$$

なるガウス性雑音である。ここに

k : ボルツマン定数 $1.37 \times 10^{-23} \text{ (Joule/}^\circ\text{K)}$

T_0 : 絶対温度

$N_F(\omega)$: 等化増幅器の雑音指数

- ② 線路特性: 伝送線路として振幅特性が

$$|L(j\omega)| = \exp \left[- \left(0.2715 \sqrt{f_M} + 0.00023 f_M \right) \ell_k \right] \quad (5.54)$$

で示される標準同軸ケーブルを用いる

こととする。ここに,

f_M : MHz 単位で表わした周波数

ℓ_k : km 単位で表わした伝送距離

である。1 Km 当りの減衰特性を図 5.3 に示す。

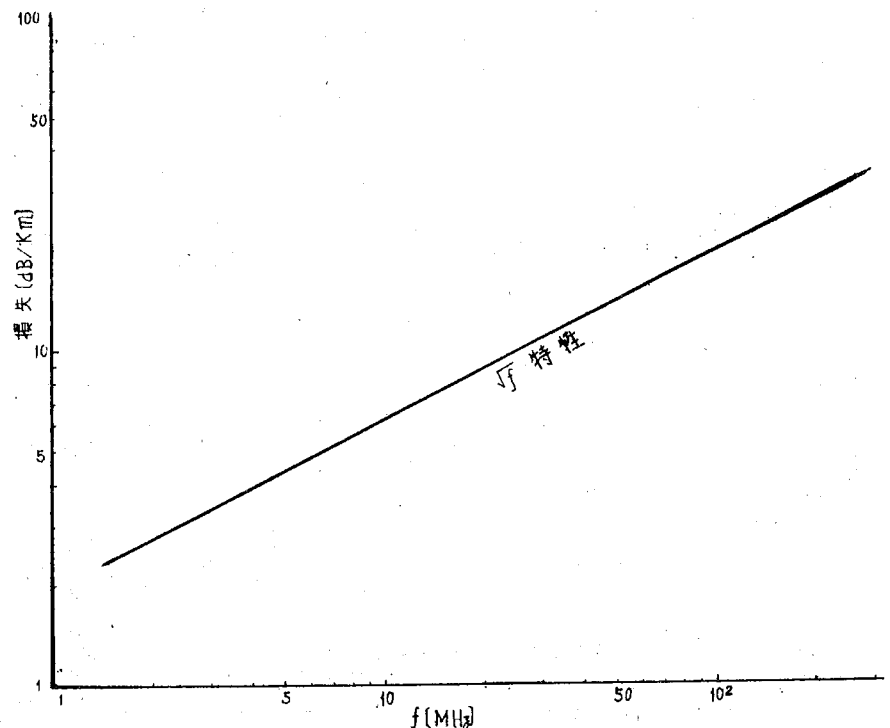


図 5.3 同軸ケーブル 損失周波数特性

- ③ 中継距離及びクロック周波数：パラメータとして与え、種々の値について計算する。
- ④ 送信波形：最大振幅矩形パルスの尖頭値を 7.5Ω の負荷に対し $5.6V_p$ ，すべての矩形パルスの占有率を 50% とする。最大振幅パルスが連続した場合の平均電力は 0.2 Watt である。
- ⑤ 等化増幅器の雑音指数：周波数特性は平坦とし、 6 dB [$N_p(\omega) = \frac{4}{\omega}$] の場合について求める。

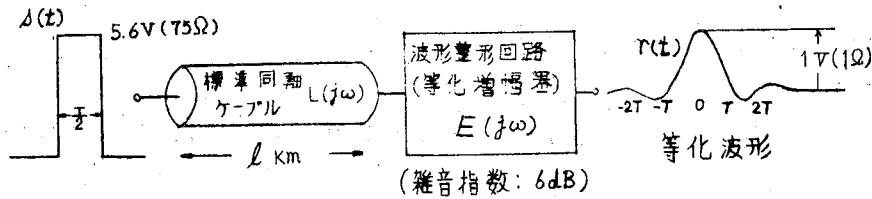


図5.4 伝送路の条件

その他の条件は 5.2 に述べた通りである。なお、図 5.4 を参照された。

5.4.2 対称波形の最適化

識別時点を等化波形の時間軸原点にとれば、式 (5.17) が成立つから、 R_i を未知変数として計算を行なう。等化波形に対する制約条件は正の時間領域 (原点を含む) のみで規定できる。ここではそれを次のように定める。

$$\begin{aligned}
 r(t) &= 1.0 & ; & \quad t = 0 \\
 |r(t)| &\leq 0.001 & ; & \quad t = nT, (n=1,2,3) \\
 5T &\geq t \geq \frac{17}{6}T \\
 r(t) &\geq 0 & ; & \quad T \geq t > 0, \quad \frac{17}{6}T > t > 2T \\
 r(t) &\leq 0 & ; & \quad 2T \geq t > T
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

周波数領域における標本点間隔 Δf ($\Delta\omega = 2\pi\Delta f$) は $\frac{f_0}{10}$ (f_0 : クロック周波数) として数値積分 (フーリエ変換) を行なう。周波数帯域を制限しているので、等化波形 $r(t)$ は厳密には無限の広がりをもつ。条件式においてこの残留応答を規制するわけであるが、規制する範囲は $|t| \leq \frac{1}{2\Delta f}$ で充分であり、また、この範囲は必要である。

$$\Delta f = \frac{f_0}{10} \text{ のとき, } \tag{5.55}$$

$$\frac{1}{2\Delta f} = \frac{10}{2f_0} = 5T$$

実線: $l=38\text{ km}$
 点線: $l=34\text{ km}$

となり、式 (5.54) の第 2 式を得る。

まず、平衡値符号について、
 クロック周波数を 200 MHz
 として計算を行ない、図 5.5
 に示す最適波形を得た。

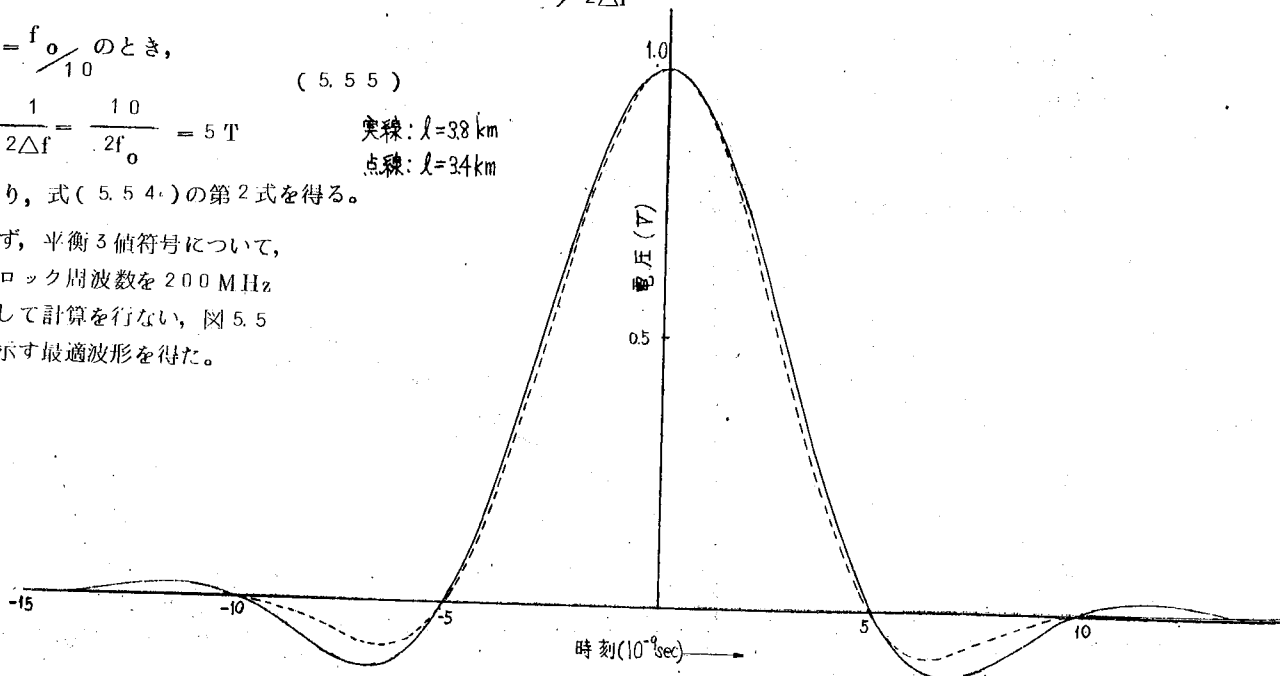


図5.5 3値符号に対する最適(対称)波形

なお、式(5.32)における w_0 を 0.5 また式(5.54)から判るように m_1, m_2 を2とした。最適波形の振幅スペクトル及び等化増幅器の利得特性 $|E(f)|$ を各々図5.6及び図5.7に示す。

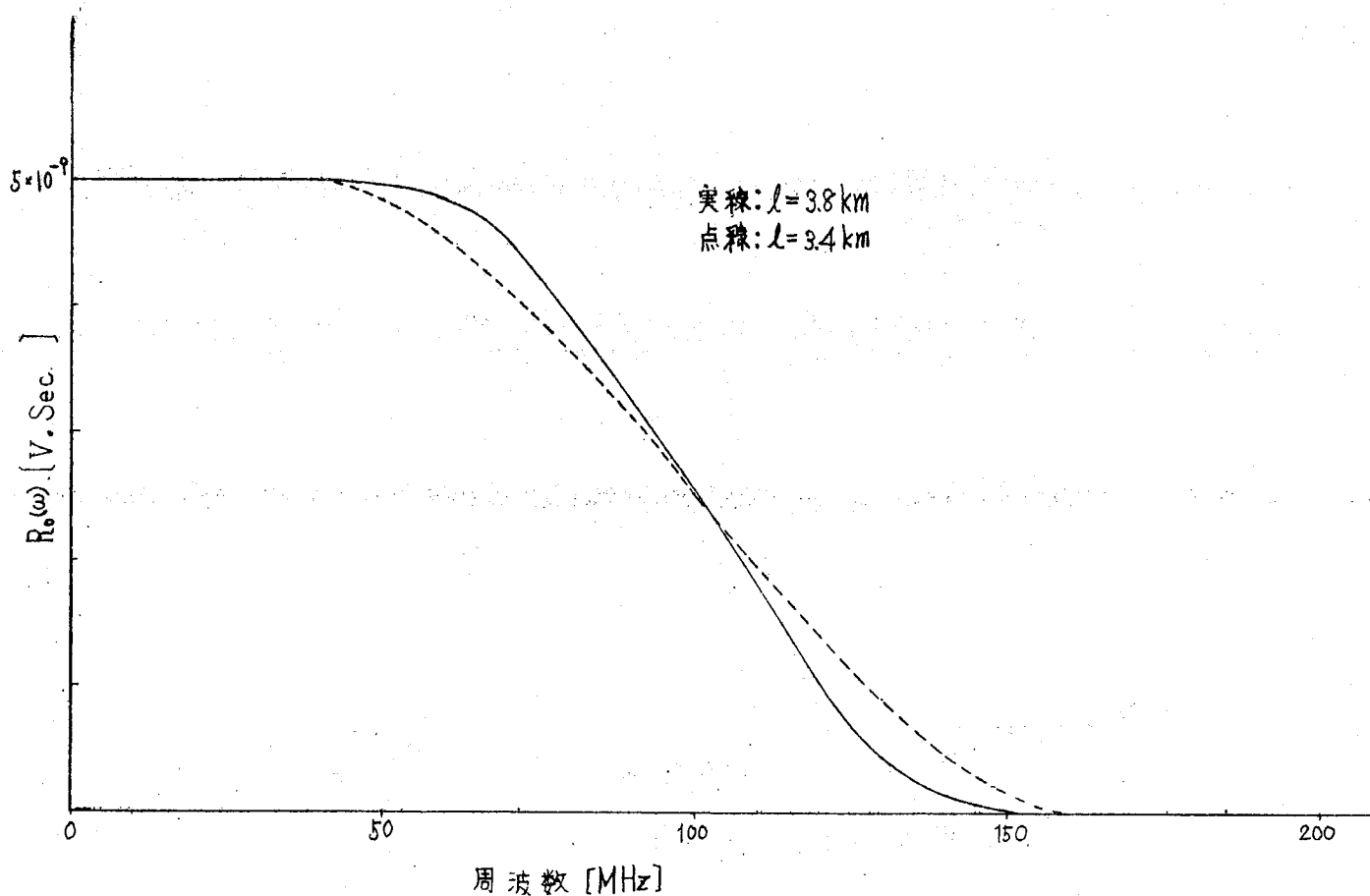


図5.6 最適波形の振幅スペクトル

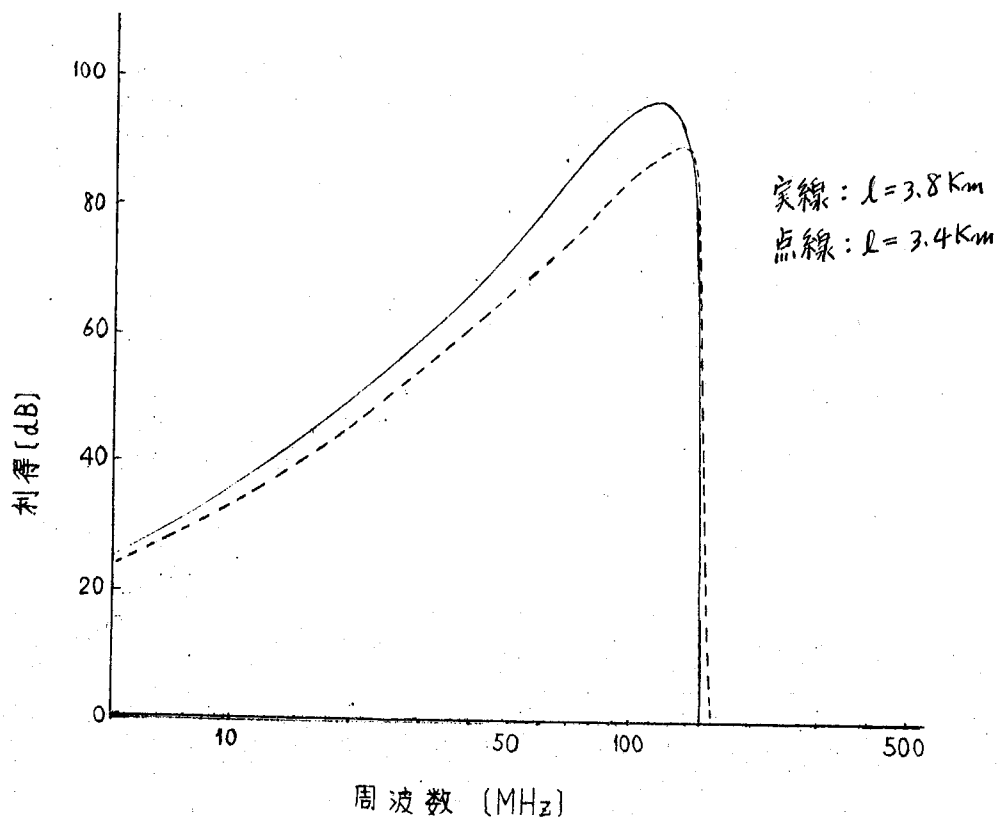


図5.7 等化増幅器の利得特性

次に平衡4値符号について、クロック周波数を同じく200MHz、 ω_0 を5.0、 $m_1 = m_2 = 2$ として計算を行ない、図5.8に示す最適波形を得た。

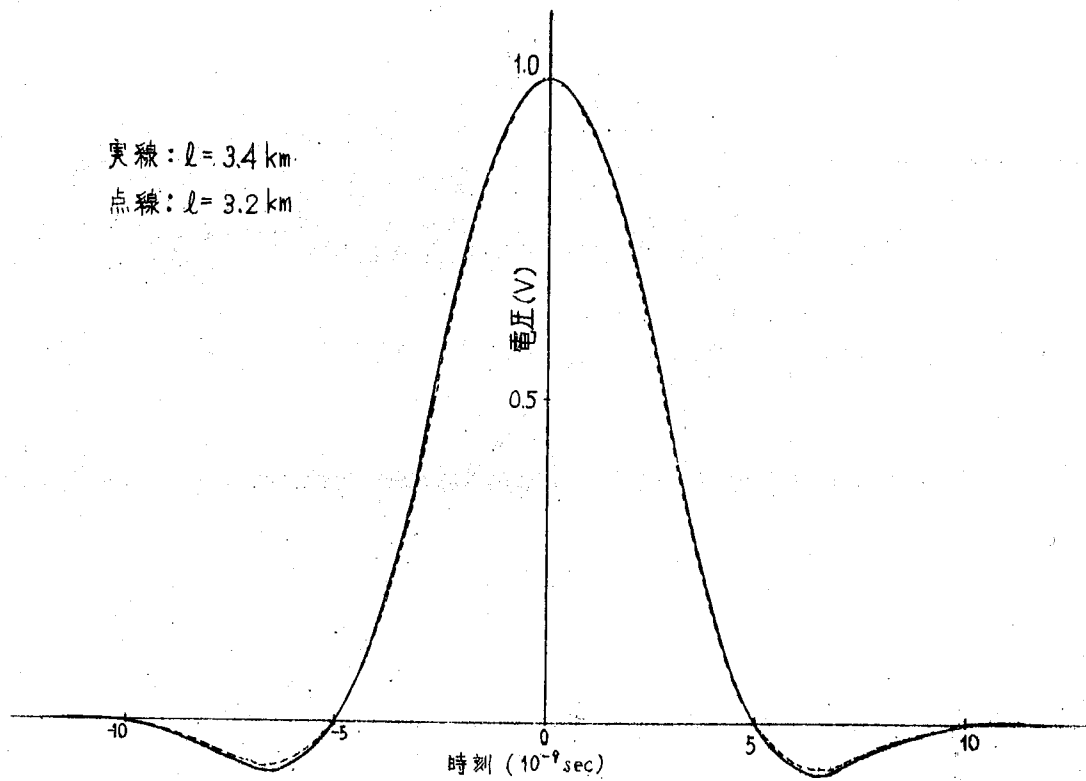


図5.8 4値符号に対する最適(対称)波形

周波数スペクトルを図5.9に、等化増幅器利得特性を図5.10に示す。

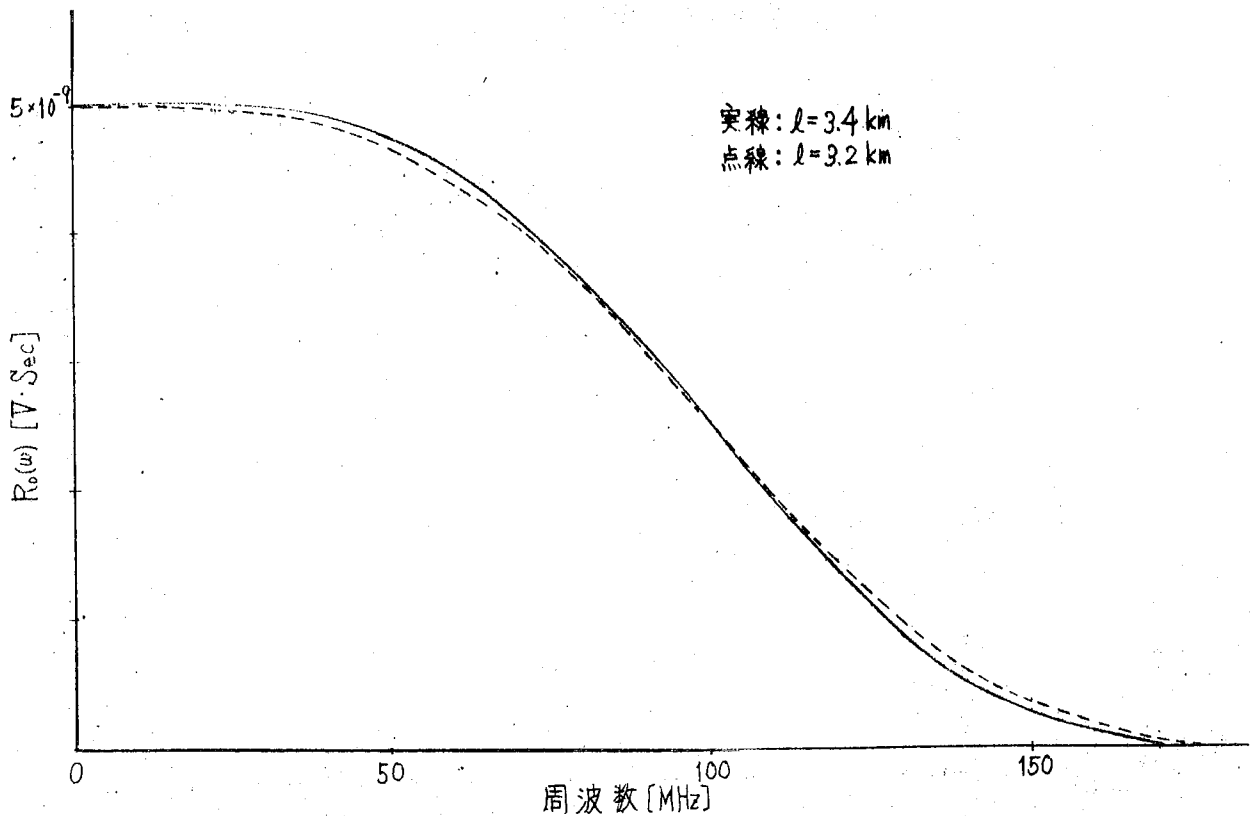


図5.9 最適波形の振幅スペクトル

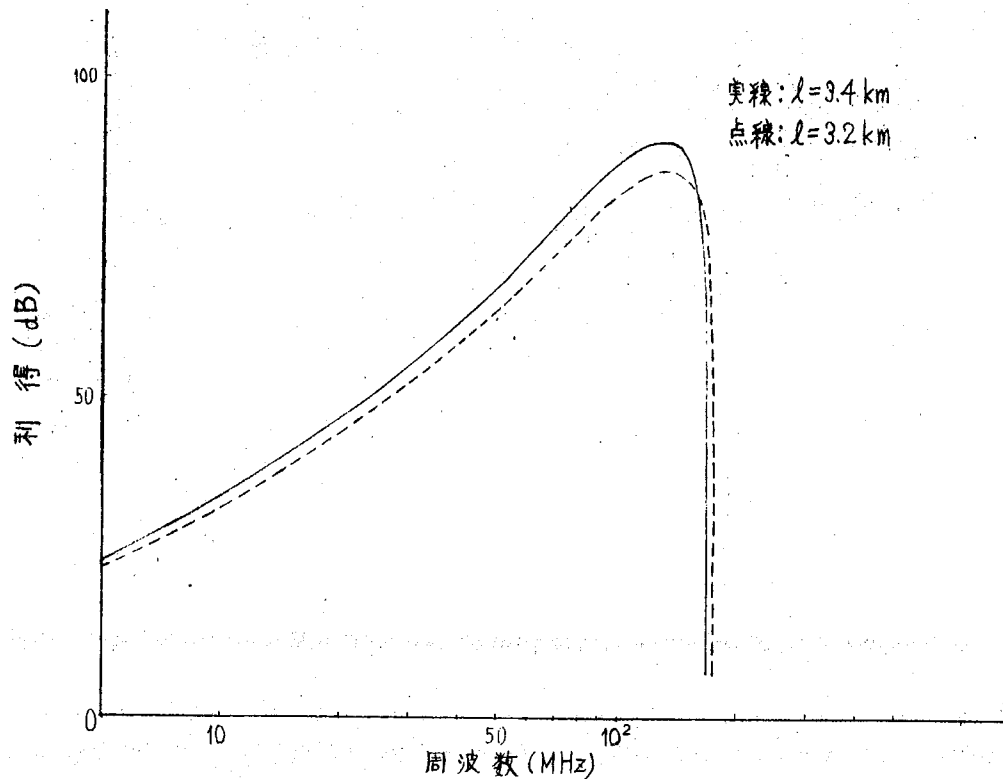


図 5.10 等化増幅器の利得特性

5.5.2 非対称波形の最適化

対称波形の場合と同様、時間軸原点を等化波形の識別時点に定め、式(5.9)における r_n を未知変数として計算を行なう。等化波形に対する制約を

$$r(t) = 1.0 \quad ; \quad t = 0$$

$$|r(t)| \leq 0.001 \quad ; \quad t = nT, \quad (n = -2, -1, 1, 2)$$

$$t \leq -\frac{11}{6}T$$

$$t \geq \frac{17}{6}T$$

$$r(t) \geq 0 \quad ; \quad T \geq t \geq -\frac{T}{6}, \quad \frac{17}{6}T > t \geq 2T$$

$$-\frac{T}{6} > t > -\frac{11}{6}T$$

$$r(t) \leq 0 \quad ; \quad 2T > t > T, \quad -T > t > -\frac{11}{6}T \quad (5.55)$$

~~と、~~

とし、クロック周波数が 200 MHz の場合について、標本点間隔を 1.25 ns (400 MHz で帯域制限されるものとする。)として最適波形を、3 値平衡符号について求めた。 $w_0 = 0.5$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ としたときの結果を図 5.11 に示す。

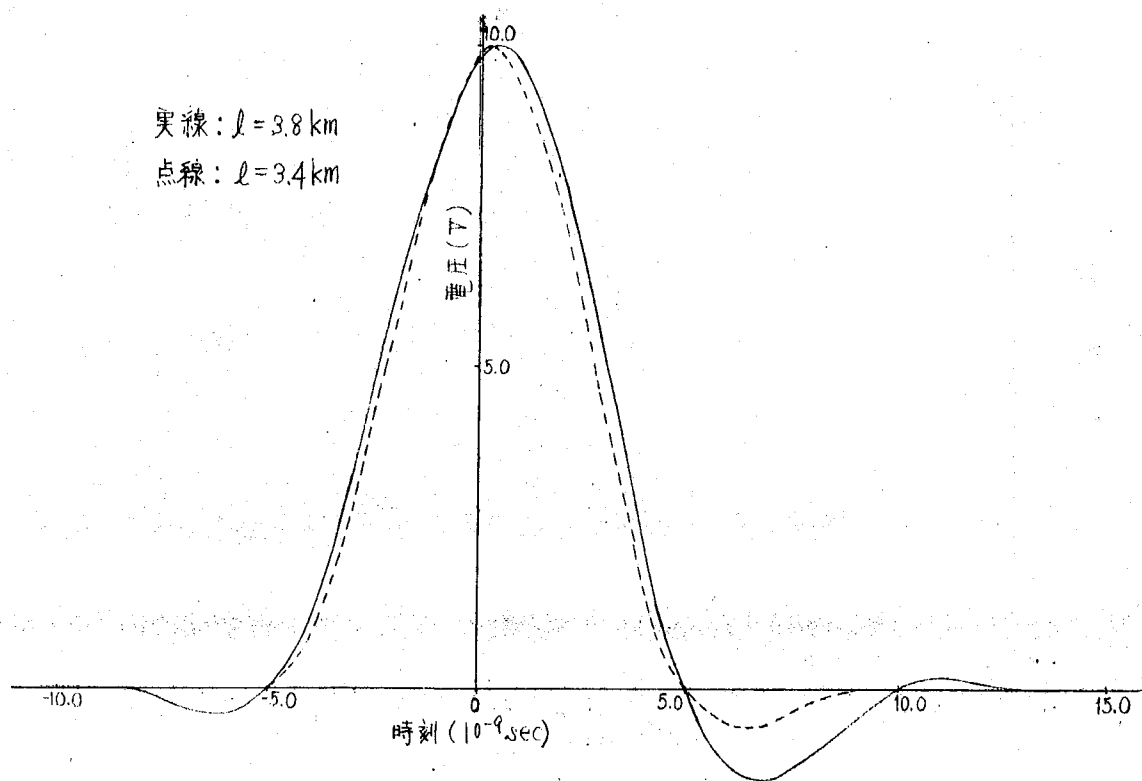


図5.11 3値符号に対する最適非対称波形

非対称波形は、対称波形に比べて情報伝送の観点から特性が劣るので、これ以上の詳細は省略する。

5.4.4 最適化の効果

以上のように求められた最適波形を、理想的なガウス波形、及び既に実用化が行われたPCM方式において使用されているガウス近似有理関数形等化波形と、ガウス性雑音に対するSN比の比較を行なうと図5.12が得られる。

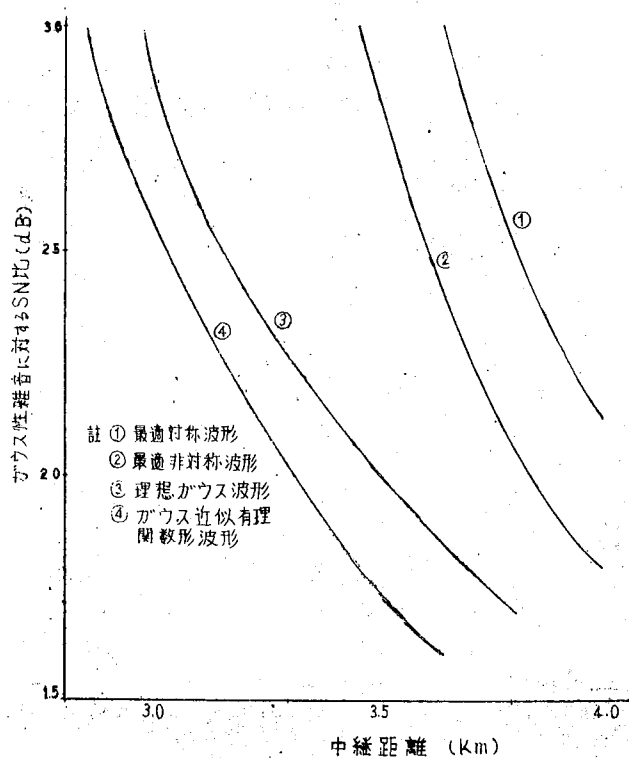


図5.12 最適化による改善効果

理想的なガウス波形については、各中継距離に対してSN比が最大となるように波形の広がりを選んだ。ガウス近似有理関数形等化波形については第4章で説明したが、ここでは式(4.3)において $\omega_H = 1.452\omega_0$ 、 $n = 15$ 、 $\omega_L = 0$ 、 $(m = 0)$ とし、中継距離によらず一定とした。

図5.12において、符号誤り率は、ジッタの大きさによって変化するが、 $\pm 3^\circ$ 及び $\pm 6^\circ$ の場合につき、誤り率を 10^{-9} 一定として、中継距離を比較すると表5.1を得る。

200MHzのクロック周波数に対し、最適対称波形の中継距離は理想的なガウス波形あるいは、ガウス近似有理関数形等化波形の約1.2倍となっていることが表5.1から判る。なお図5.12は3値符号について描いたものである。

次に、中継距離及び符号誤り率を一定として、クロック周波数について比較してみよう。4値符号も含めて比較するため、符号形式を、各情報の生起確率の等しい通常3進符号及び通常4進符号とし、情報伝送速度についても比較を行なうと表5.2を得る。但しジッタが $\pm 3^\circ$ 、及び $\pm 6^\circ$ の場合について求めた。

表5.2は、最適波形の情報伝送速度は、有理関数形等化波形の約1.5倍以上であることを示している。

非対称波形については、予想される通り、対称波形に比べて特性が可成り劣ることが図5.12より明らかとなったので、表5.1及び表5.2では省略した。

なお、最適化の計算に際しては、 $\frac{w_0}{\omega_0}$ の値を適当に定めることが必要であるが、この値を変えて計算した結果、5.4.2及び5.4.3に示す値で誤り率が略最小となったが、この値を2倍または2倍しても最適解の変化は僅かであることが判った。

表5.1 最適化による中継距離の増大

等化波形	符号 ジッタ	3値平衡符号	4値平衡符号
最適対称波形	$\pm 3^\circ$	3.87	3.63
	$\pm 6^\circ$	3.67	3.36
理想的ガウス波形	$\pm 3^\circ$	3.17	2.97
	$\pm 6^\circ$	3.13	2.91
ガウス近似有理関数形波形	$\pm 3^\circ$	2.99	2.80
	$\pm 6^\circ$	2.95	2.75

- 註 ① 単位: Km
② クロック周波数: 200MHz
③ 誤り率: 10^{-9}

表5.2 最適化による情報伝送速度の増大

等化波形	符号 ジッタ	通常3進符号	通常4進符号
最適対称波形	$\pm 3^\circ$	504	570
	$\pm 6^\circ$	468	512
理想的ガウス波形	$\pm 3^\circ$	356	416
	$\pm 6^\circ$	347	384
ガウス近似有理関数形波形	$\pm 3^\circ$	315	368
	$\pm 6^\circ$	307	340

- 註 ① 単位: M bits/sec.
② 距離: 3Km
③ 誤り率: 10^{-9}

5.5 節 近距離 2 4 通話路方式の最適波形

この方式では、線路雑音として近端漏話雑音のみ考慮すればよい。等化波形は対称波形とし、制約条件は図 5.2 と同様に定め、表 5.3 に示す条件の下で計算を行なった。

0.65 mm 紙ケーブルの損失周波数特性を図 5.13 に示す。

計算結果は図 5.14～図 5.16 の通りである。
同一誤り率に対して、収容可能システム数をガウス近似有理関数形等化波形と比較すると約 2 倍に増大している。

表 5.3 伝送系の条件

項 目	摘 要
クロック周波数	1.544MHz
伝 送 線 路	0.65 mm 紙ケーブル
中 継 距 離	2 Km
収容システム数	1000 回線
符 号 形 式	バイポーラ符号
送信波形	短形波 (3V _p duty50%)
等化波形	尖頭値 1V _p (1Ω)

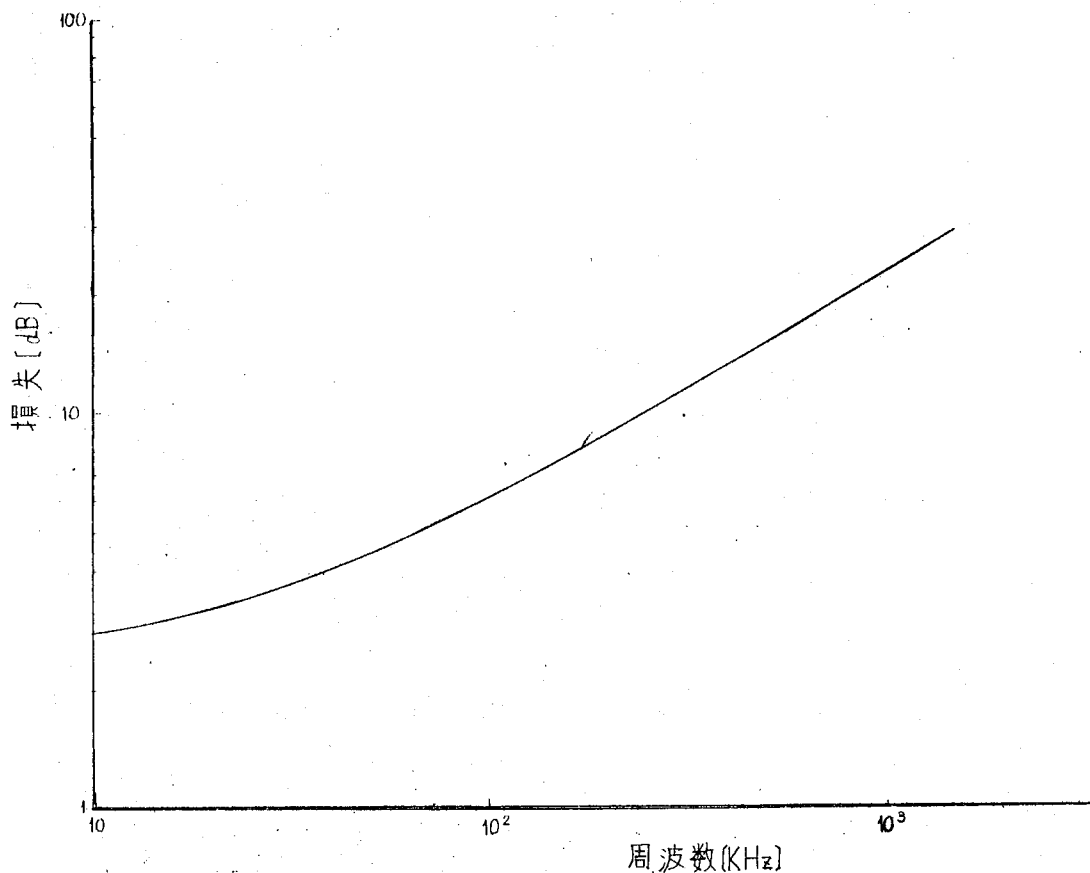


図 5.13 0.65 mm 紙ケーブル損失周波数特性

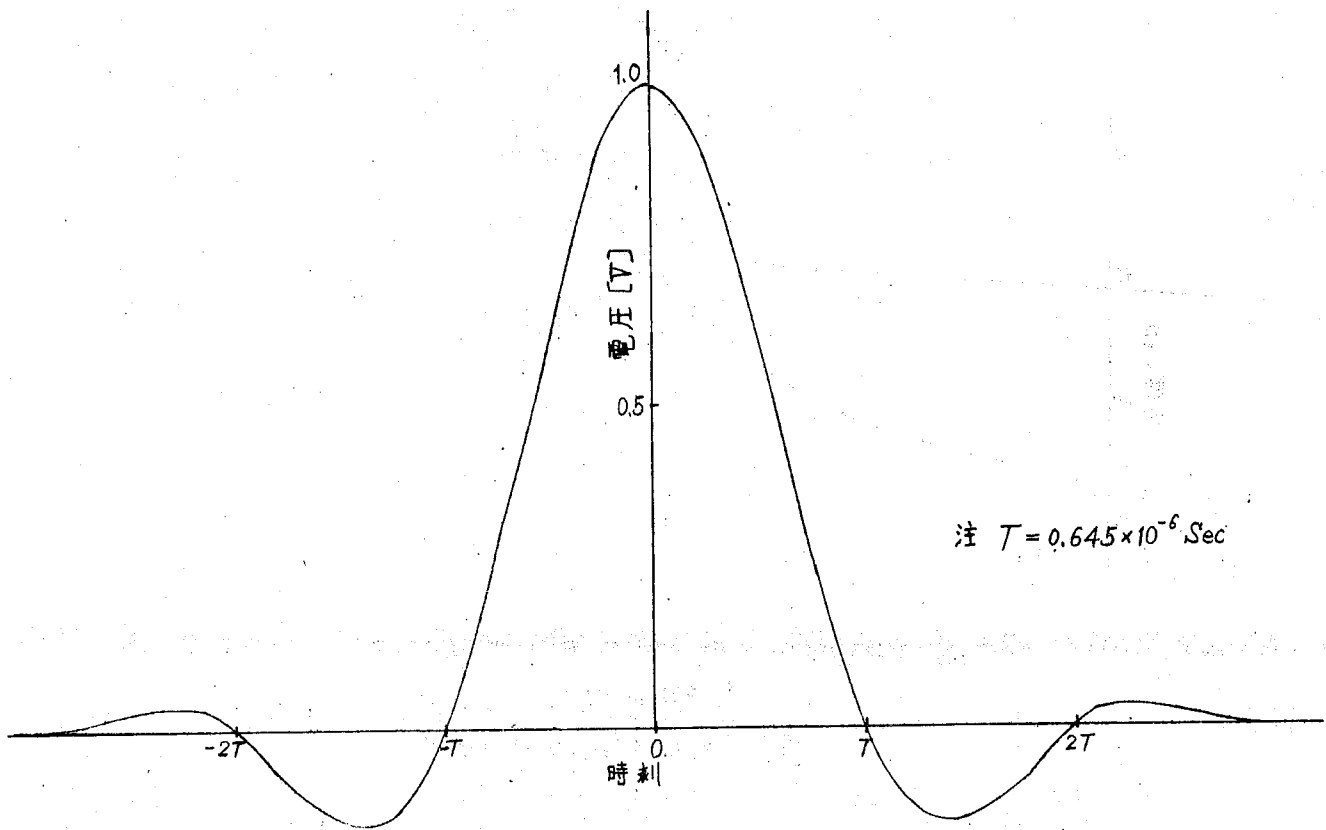


図5.14 24CH方式に対する最適波形

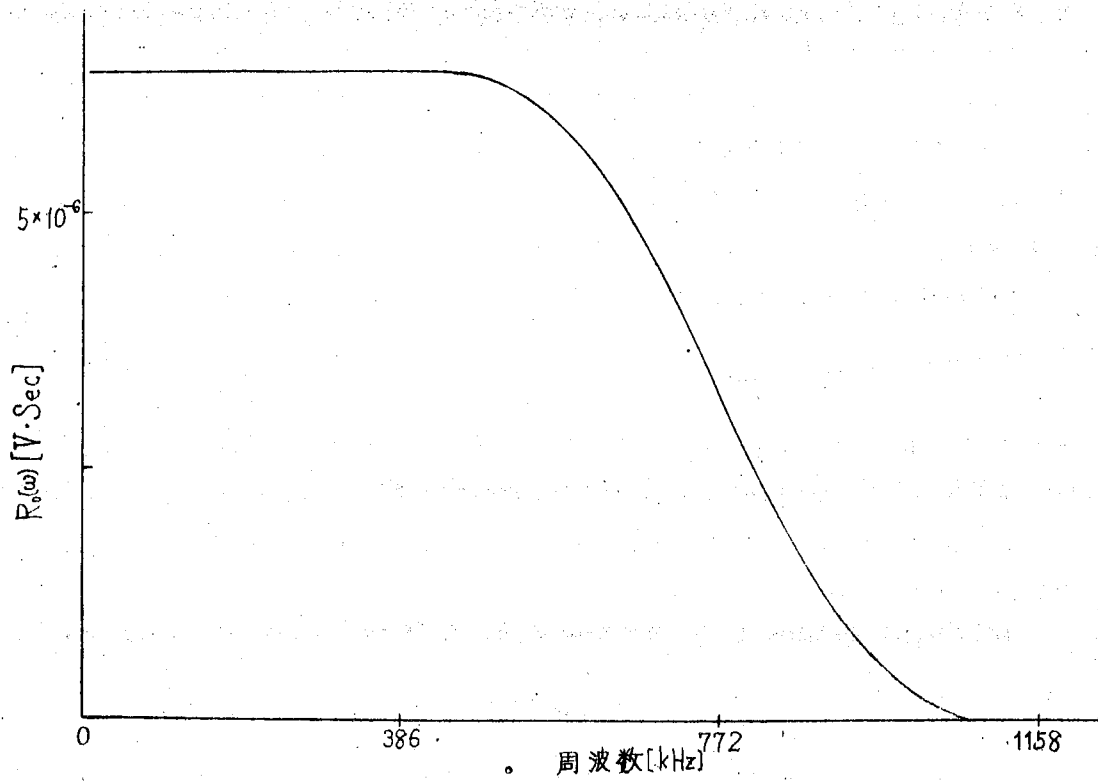


図5.15 最適波形の振幅スペクトル

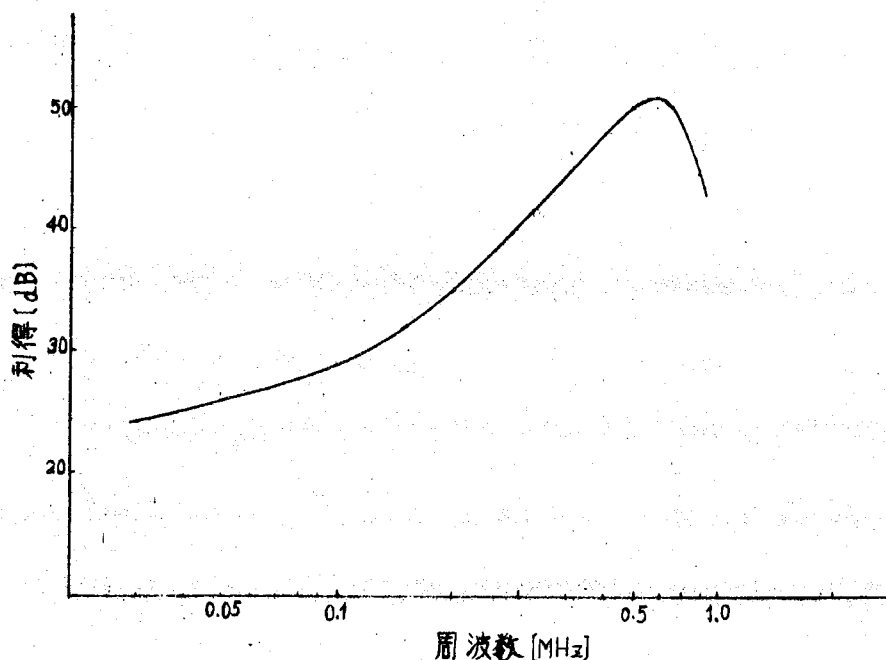


図5.16 等化増幅器の利得特性

5.6 節 む す び

P C M通信に対する最適波形に関して検討を行なった。主な結果を列記するとつぎの通りである。

(i) 等化波形に対し、標本点零型波形となるような条件を付した上で、ガウス性雑音及び符号間干渉雑音を考慮して定めた評価関数を最小ならしめるよう等化波形を決定する問題を、2次計画問題として定式化した。

(ii) 同軸P C M方式について、中継距離及び符号間隔をパラメータとし、それ等の種々の値に対する最適波形を求めた。符号誤り率及び中継距離などの条件を同一にして、求められた最適波形とガウス波形を情報伝送速度で比較すると、ジッタを±60としても、最適波形を用いた場合の速度はガウス波形を用いた場合の約1.5倍となることなど最適化の効果を定量的に示した。

(iii) 近端漏話雑音が問題となる近距離24通話路方式についても計算結果を示し、現在実用化されているガウス近似有理関数形等化波形を用いた場合と比較して、最適波形を用いた場合の収容可能な回線数は約2倍に増大することを述べた。

本章では、識別時点以外の標本点で零となる条件を等化波形に課した場合について、すなわち標本点零型波形を対象として検討したが、本文で用いた最適化の方法は、標本点零型に限らず、等化波形の振幅に任意の条件を付すことができる点で応用範囲が広いものと考えられる。

第 6 章 波形整形伝達関数の近似

本章では、波形整形伝達関数の条件付近似の一方法を提示したのち、これを用いて、前章で求めた最適波形すなわち標本点零型波形をインパルス応答および等化波形とする伝達関数を求める。

近似の対象とする波形は、識別時点以外の標本点で零となること、指定された時間域で定められた極性となることなどの条件が課せられたものであり、伝達関数の近似問題を条件付極値問題として扱う必要がある。

波形整形伝達関数の近似方法に関しては、すでに多くの研究がなされており、文献として、例えば(40)~(47)を挙げることができる。しかし、条件付極値問題として考察した論文は少なく、非線形計画法による検討を行なった(48)が挙げられる程度である。非線形計画問題は、解を求める計算が複雑であり、大域的な最適解が必ず求まるという保証がないのが欠点であろう。

本章では、波形の振幅値に関する制約を線形条件式とするため、伝達関数(有理多項式)の分母多項式を、その逆数の位相特性が、回路網に要求される位相特性にはば近似するように定め、応答波形を、分子多項式の係数に関する線形結合として表わした。

評価関数としては、標本点零型波形をインパルス応答とする回路網については 2 乗積分誤差を採用し、等化波形とする回路網(等化増幅器)については、第 5 章で定義した評価関数をそのまま用いた。これ等の評価関数は、いずれも分子多項式の係数に関する 2 次式で表わされるので、波形の振幅値に関する制約がすべて等号条件式のみの場合は、連立 1 次方程式を解くことにより、また不等号条件式を含む場合は、2 次計画法を用いて、最適解を求めることができる。

以下、本章の概要について述べる。

まず、6.2 においては、任意の人力波形に対する応答波形に、等号または不等号の制約を付した場合について、伝達関数の分子多項式の係数に関する 2 次式(非負値定符号)で表わされた評価関数を最小ならしめるような、波形整形伝達関数の有理多項式近似の問題を考察して、これを 2 次計画問題として定式化した。

6.3 では、標本点零型波形をインパルス応答とする回路網について、2 乗積分誤差を評価関数として、6.2 で示した方法を用いて伝達関数を求めた。

P C M 伝送路において実際に必要とされるのは、再生中継器における波形整形回路網であるが、これを 6.4 で検討するに先立って、標本点零型波形をインパルス応答とする伝達関数を求めておく理由は、従来ある意味で符号伝送に適するとされてきたガウス波形あるいは余弦自乗波についても、理論的な興味、符号伝送に関する種々の実験に対する必要性、および測定用機器からの要求などのため、これ等をインパルス応答とする回路網について、詳細な研究が行なわれた⁽⁴⁹⁾のと同じ意味で、標本点零型波形をインパルス応答とする伝達関数に関する検討が必要と考えられるからである。

6.4 においては、標本点零型波形を等化波形とする再生中継器の波形整形回路網の伝達関数を近似する方法と計算結果を示す。最適波形については、前章に述べたように米国および日本において比較的多くの研究が行なわれているが、伝達関数の近似方法に関する研究は国の内外を問わず少ない。

既に実用化されている近似離 2 4 通話路方式あるいは 1 6 M 方式の設計では、波形等化区間(線路+波形整形回路)の総合伝達関数の形を第 4 章の式(4.3)のように限定して論じている。また武部は、データ伝送を対象とし、インパルス応答波形について、符号間干渉を考慮して、伝達関数を定める問題を検討している。⁽⁴²⁾

しかし、波形整形回路の入力波形が任意に与えられたとき、符号間干渉をも含めた雑音を最小ならしめるように、伝達関数を最適化する方法について論じた文献は見当らない。

6.4 ではその一方法と計算結果を示しており、等化波形にいくつかの条件を付した上で、第 5 章で定義した評価関数(雑音)を最小ならしめるよう伝達関数を決定する問題に 6.2 で示した方法を応用して、これを 2 次計画問題として定式化した。特に等化波形が、標本点零型波形となる場合について計算を行ない、第 5 章で求めた最適波形の実現方法を示した。^{(49)~(57)}

6.1 節 波形整形伝達関数の一近似方法

6.1.1 問題の設定

回路網の伝達関数を $K(s)$ とし、これに $F(j\omega)$ なる周波数スペクトルを有する既知の入力波形 $f(t)$ が加えられたときの出力波形を $g(t)$ 、その周波数スペクトルを $G(j\omega)$ で表わす。 s は複素角周波数である。 $g(t)$ に対して規準となるべき波形（以下、目的波形と呼ぶ）は、与えられているとは限らないが、その位相特性に対する要求が、一定遅延を除いて与えられているものとする。

つぎに伝達関数を

$$K(s) = \frac{Q(s)}{H(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M A_m s^m}{\sum_{n=0}^N B_n s^n} \quad (6.1)$$

なる有理多項式とする。ただし、一般性を失なうことなく、 $B_N = 1$ とし、また M, N は与えられた自然数で、 $M < N$ とする。 $H(p)$ は当然 Hurwitz 多項式である。

このとき、出力波形 $g(t)$ は

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \sum_{m=0}^M \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(j\omega)}{H(j\omega)} (j\omega)^m e^{j\omega t} d\omega \right] A_m \end{aligned} \quad (6.2)$$

となり、 A_m ($m = 0, 1, 2, \dots, M$) に関する線形結合で表わされる。

さて、本節では

「出力波形に対し、 d_r を定数として

$$g(t_r) \leq d_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots, R) \quad (6.3)$$

なる条件が付されている場合について、分子多項式の係数 A_m に関する 2 次式（非負値定符号）で表わすことのできる評価関数を最小（最大）ならしめるよう、与えられた M, N に対して多項式の係数 B_n ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) および A_m ($m = 0, 1, 2, \dots, M$) を決定する」問題を考察する。ここに $\leq$ なる記号は $\leq$ 、または $\geq$ のいずれかであることを示す。

条件付極値問題を解くに当たって、一般に、条件式が未知変数に関して線形となることが、計算の簡易化のため望ましい。このことは評価関数の如何を問わない。ここでは、6.2.2 に示す方法によって分母多項式を予め効率良く定めることにより、 $g(t)$ を分子多項式の係数に関する 1 次式として表現した。

このとき、評価関数も A_m のみの関数となるが、特に A_m に関する 2 次式（非負値定符号）となる場合を考察の対象としているので、上に述べた問題は、第 5 章の記述からも推察されるように、2 次計画問題として定式化し得る。つぎに分母多項式の定め方について検討する。

6.1.2 分母多項式の決定

波形整形伝達関数の近似方法に関する論文のなかで、分母多項式を分子多項式に先立って決定しているものとして、文献(46)、(47)を挙げることができる。ただし、これ等は条件付近似を目的としたものではない。

文献(40)は、いわゆるモーメント法として知られているもので、余弦自乗波のような非振動形の対称波形をインパルス応答とする伝達関数の近似が狙いであり、対称波形という条件から、分母多項式として遅延最大平坦形多項式⁽⁵⁸⁾を用いている。遅延最大平坦形多項式を用いることは、回路網に要求される位相特性が直線に近い場合には有効な方法である。

文献(47)は計算の簡易化を目的としたもので、応答波形に対する要求の如何にかかわらず、分母多項式として、その根がすべてP平面の虚軸に平行に配置されたものを用いている。この方法は、多項式の次数を一定として最良近似を得るといふ観点からは効率が悪いと考えられる。

ここでは、回路網に要求される位相特性がはゞ直線と看做される場合と、非直線の場合に分けて考える。

(i) 回路網に要求される位相特性がはゞ直線と看做される場合は、遅延最大平坦形多項式を用いる。

(ii) 回路網に要求される位相特性が非直線の場合は、Hermiteの方法を用いて、分母多項式 $H(s)$ がHurwitz多項式となるための条件を満たすと共に、 $H^{-1}(s)$ の位相特性が回路網に要求される位相特性に近似するように $H(s)$ の係数を定める。

どの程度までを位相直線と看做するかについては、場合に応じて定めればよい。

さて、Hermiteの定理による位相特性の近似方法は既知の方法ではあるが、⁽⁵⁹⁾具体的に記された文献が見当たらないので、次に述べる。

Hermiteの定理によれば、実係数多項式、 $H(s)$ がHurwitz多項式であるための必要充分条件は、 $G_e(s)$ を偶多項式、 $U_n(s)$ を奇多項式として、

$$H(s) = G_e(s) + U_n(s) \quad (6.4)$$

とおいたとき、 $G_e(s) = 0$ 、および $U_n(s) = 0$ 、の根が

(i) 純虚数であり、(ii) 単根であり、(iii) 互いに他を隔離することである。

式(6.1)において、 N が奇数の場合を例にとると、

$$U_n(s) = s^N + B_{N-2}s^{N-2} + \dots + B_3s^3 + B_1s = 0 \quad (6.5)$$

の根がすべて単根で、 $0, \pm j\omega_2, \pm j\omega_4, \dots, \pm j\omega_{N-1}$ であり、

$$G_e(s) = B_{N-1} \left[s^{N-1} + \frac{B_{N-3}}{B_{N-1}} s^{N-3} + \dots + \frac{B_2}{B_{N-1}} s^2 + \frac{B_0}{B_{N-1}} \right] = 0 \quad (6.6)$$

の根がすべて単根で、 $\pm j\omega_1, \pm j\omega_3, \dots, \pm j\omega_{N-2}$ であり、かつ、 $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{N-2} < \omega_{N-1}$ ならば $H(s)$ はHurwitz多項式となる。

回路網に要求される位相特性において、図6.1に示すように位相遅れが $i\pi/2$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$)になる角周波

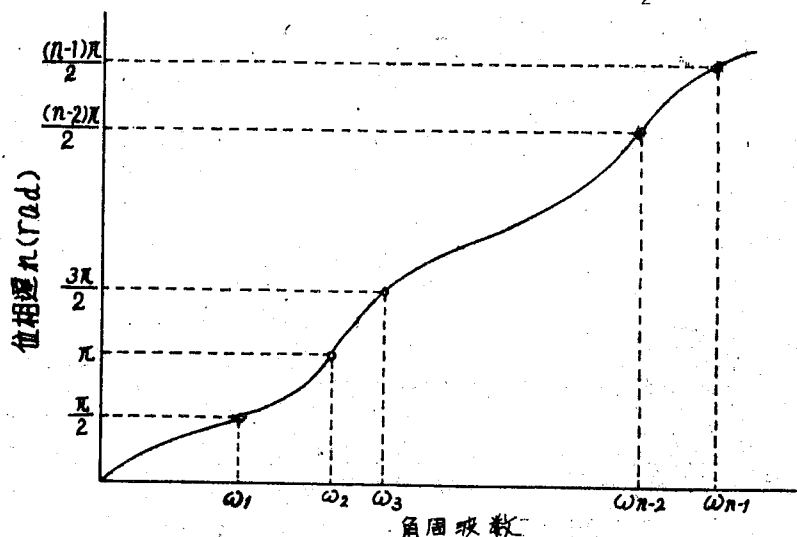


図 6.1 位相特性近似の説明

数を ω_i として, $\omega = \omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{N-2}$ で $G_e(s) = 0$, $\omega = \omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{N-1}$ で $U_n(\omega) = 0$ となるように多項式 $H(s)$ の係数を定めれば, その逆数の位相特性が, 回路網に要求される位相特性に近似した Hurwitz 多項式を得ることができる。なお B_{N-1} はこれだけでは定まらず自由度として利用できるので, 適当な角周波数, たとえば出力波形のスペクトル強度の大きく, かつ B_{N-1} が正となる角周波数を 1 点選んで, その点で位相角を合わせればよい。また回路網に要求される位相遅れが単調増加でない場合には, 一定遅延を付け加えることが必要である。

(イ)の場合に対しても, Hermite の定理を用いて近似した多項式を用いることは勿論可能であるが, この方法は, 近似位相曲線に多少波打ち現象があらわれるため, 応答波形にエコー(残留応答)を生ずるのが欠点であり, 遅延最大平坦形多項式を用いる方が良好な特性が得られよう。非直線な位相特性を近似することは直線の場合に比較して難かしく, 遅延最大平坦形多項式に相当する勝れた多項式を決定する方法が見出されていないが, Hermite の定理による方法は計算が比較的簡単であり, 6.3 に具体的に示すように, はば良好な結果を得ることができる。

6. 1. 3 分子多項式の決定

出力波形は, 式(6.2)より

$$C_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(j\omega)}{H(j\omega)} (j\omega)^m e^{j\omega t} d\omega \quad (6.7)$$

とにおいて

$$g(t) = \sum_{m=0}^M C_m(t) A_m \quad (6.8)$$

と表わされるが, 分母多項式 $H(s)$ が定まると, C_m ($m=0, 1, 2, \dots, M$) が求まるので, $g(t)$ は分子多項式の係数 A_m の線形結合となる。したがって, 式(6.3)の条件はすべて, 線形制約として表現される。

いま, 変数ベクトルを

$$X = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_M)^t \quad (6.9)$$

とおく。ただし, t はベクトルの転置を示す。また,

$$C_{m,r} = C_m(tr) \quad (6.10)$$

とにおいて,

$$D = (C_{m,r}^t, (m=0, 1, 2, \dots, M, r=1, 2, \dots, R)) \quad (6.11)$$

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_R)^t \quad (6.12)$$

で行列 D および列ベクトル d を定義すると, 式(6.3)は

$$DX \leq d \quad (6.13)$$

と表わされる。評価関数を X の 2 次式に限定しているのので, 分子多項式を定める問題は

$$[DX \leq d] \quad (6.14)$$

なる制約条件の下で, 評価関数

$$\Delta = \frac{1}{2} X^t C X - b^t X \quad (6.15)$$

を最小にするような X を求める問題」

すなわち, 2 次計画問題に定式化される。ここに, C は $(M+1)$ 次の非負値行列, b は $(M+1)$ 次元の列ベクトルである。

また, 条件式がすべて等号ならば $(M+R+1)$ 元の連立 1 次方程式を解くことにより, 分子多項式の係数を求めることができる。

6.2 節 標本点零型波形をインパルス応答とする伝達関数

6.2.1 定式化

第5章で求めた対称および非対称の標本点零型波形をインパルス応答とする伝達関数を求める。評価関数として、目的波形と出力波形の差の2乗積分値(ただし定数項を除く)を採用し、識別時点以外の標本点ではほぼ零となることを付帯条件として課することとする。

入力波形が δ 関数であるから、ラプラス変換を用いて計算できる。

目的波形が与えられているから、回路網に要求される位相特性も既知であり、前節で述べた方法により分母多項式を定めることができる。

分母多項式 $H(s)=0$ の根を S_i ($i=1, 2, \dots, N$)として、

インパルス応答波形、すなわち $K(s)$ の逆ラプラス変換は

$$g(t) = \sum_{i=1}^N \frac{Q(S_i)}{H'(S_i)} e^{S_i t} = \sum_{m=0}^M C_m(t) A_m \quad (6.16)$$

$$C_m(t) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i^m e^{S_i t}}{H'(S_i)} \quad (6.17)$$

となる。ただし、 $H(s)=0$ の根はすべて単根とする。

目的波形を $g_0(t)$ で表わすと、2乗積分誤差は

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \int_0^\infty [g(t) - g_0(t)]^2 dt \\ &= \int_0^\infty \left[\sum_{m=0}^M C_m(t) A_m \right]^2 dt - 2 \int_0^\infty g_0(t) \sum_{m=0}^M C_m(t) A_m dt + \int_0^\infty g_0^2(t) dt \end{aligned} \quad (6.18)$$

であるが、最後の項は定数であるから、これを除き、第1項および第2項を若干変形して、評価関数を

$$\Delta = \sum_{m=0}^M \ell \sum_{\ell=0}^M \left[\int_0^\infty C_m(t) C_\ell(t) dt \right] A_m A_\ell - 2 \sum_{m=0}^M \left[\int_0^\infty g_0(t) C_m(t) dt \right] A_m \quad (6.19)$$

とする。第(6.18)の右辺第1項、したがって(6.19)の右辺第1項は、 $C_m(t)$ が実数であるから、 A_m が如何なる実数値をとっても、非負値である。故に

$$\alpha_{m, \ell} = 2 \int_0^\infty C_m(t) C_\ell(t) dt \quad (6.20)$$

とし、

$$C = (\alpha_{m, \ell}) \quad (m, \ell = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (6.21)$$

$$b = \left(2 \int_0^\infty g_0(t) C_0(t) dt, 2 \int_0^\infty g_0(t) C_1(t) dt, \dots, 2 \int_0^\infty g_0(t) C_M(t) dt \right)^t \quad (6.22)$$

において、評価関数を式(6.15)のように表わしたとき、行列 C は非負値定符号である。

いま、条件式はすべて等号の場合を考えているので、

$$\sum_{m=0}^M C_m(t_r) A_m = d_r \quad (r = 1, 2, \dots, R) \quad (6.23)$$

および

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A_m} - \sum_{r=1}^R \lambda_r C_m(t_r) = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots, M) \quad (6.24)$$

から成る $(M+R+1)$ 元連立 1 次方程式を解くことにより、 A_m を求めることができる。ここに λ_r ($r=1, 2, \dots, R$) はラグランジュ定数である。

6.2.2 対称波形の場合

図 6.2 (実線) に示す波形、すなわち第 5 章の図 5.5 における実線に示す波形の時間軸を変更した波形を目的波形とする場合の伝達関数を求める。分母多項式として、遅延最大平坦形多項式を用いると、これによって波形の対称性および遅延時間は一応保証されるから、分子多項式を偶多項式とする。

$g(0)=0$ とするため、分母多項式 $H(s)$ の次数は分子多項式 $Q(s)$ の次数より 2 次以上高くなければならない。波形の対称性が保証されていることを考えて、条件式を

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\right) = 0, \quad g(1) = 1 \quad (6.25)$$

とする。分母多項式が 17 次、13 次および 11 次の 3 通りの場合について計算を行なった。その結果を図 6.3～図 6.5 に示す。 $H(s)$ を 13 次、 $Q(s)$ を 8 次とする程度で、良好な特性が得られることがわかる。

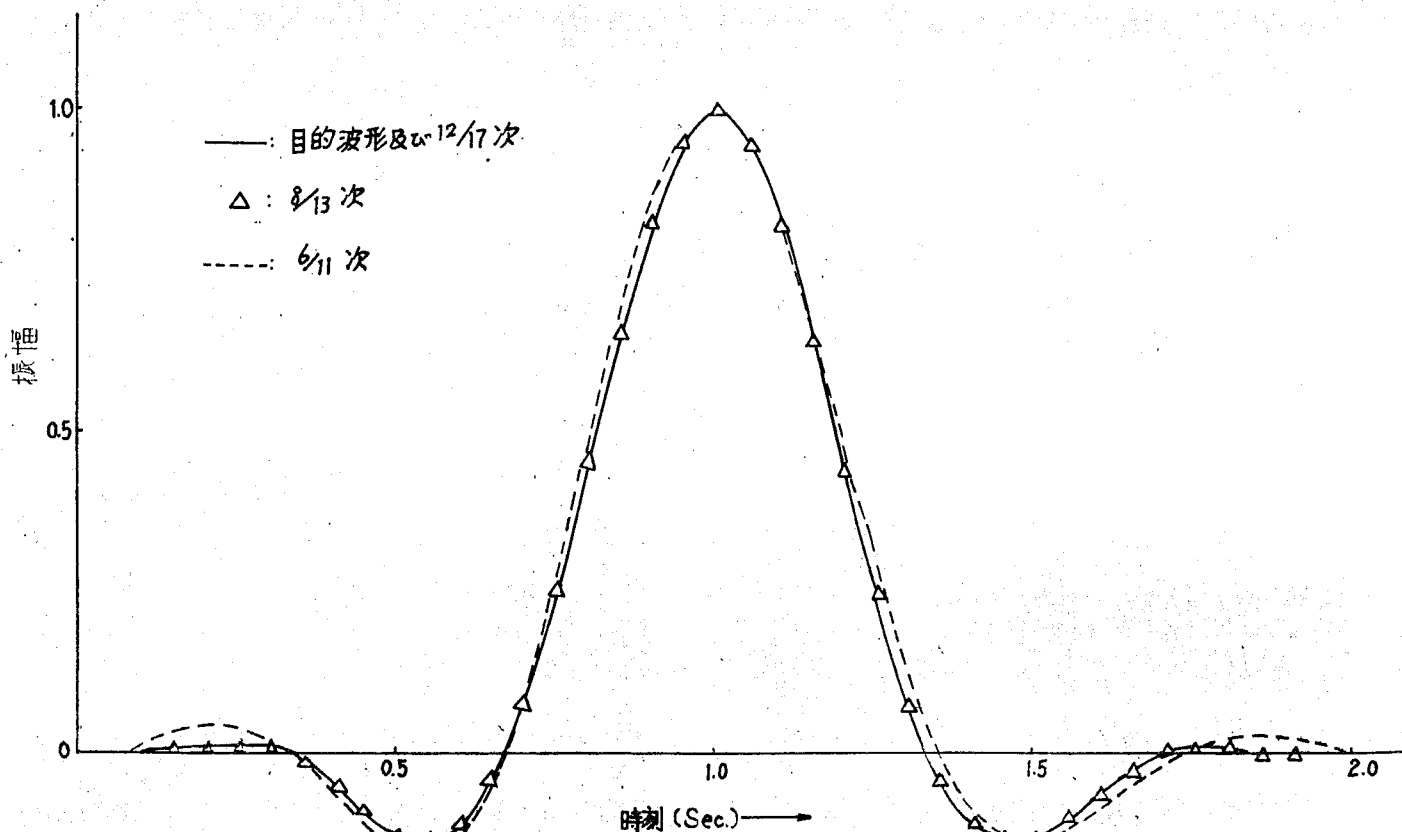


図 6.2 標本点零型対称波形の近似

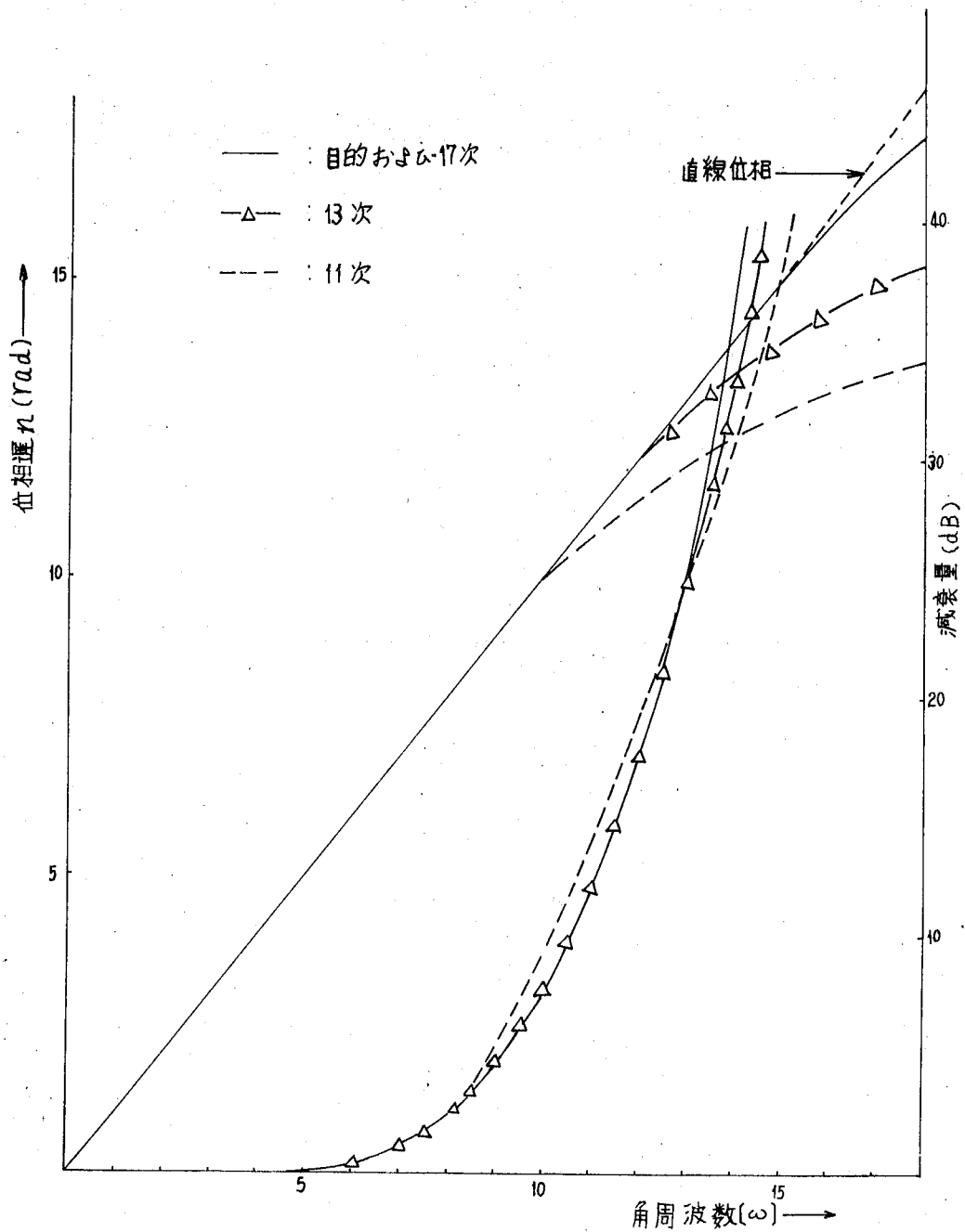


図6.3 図6.2の近似波形に対する振幅及び位相特性

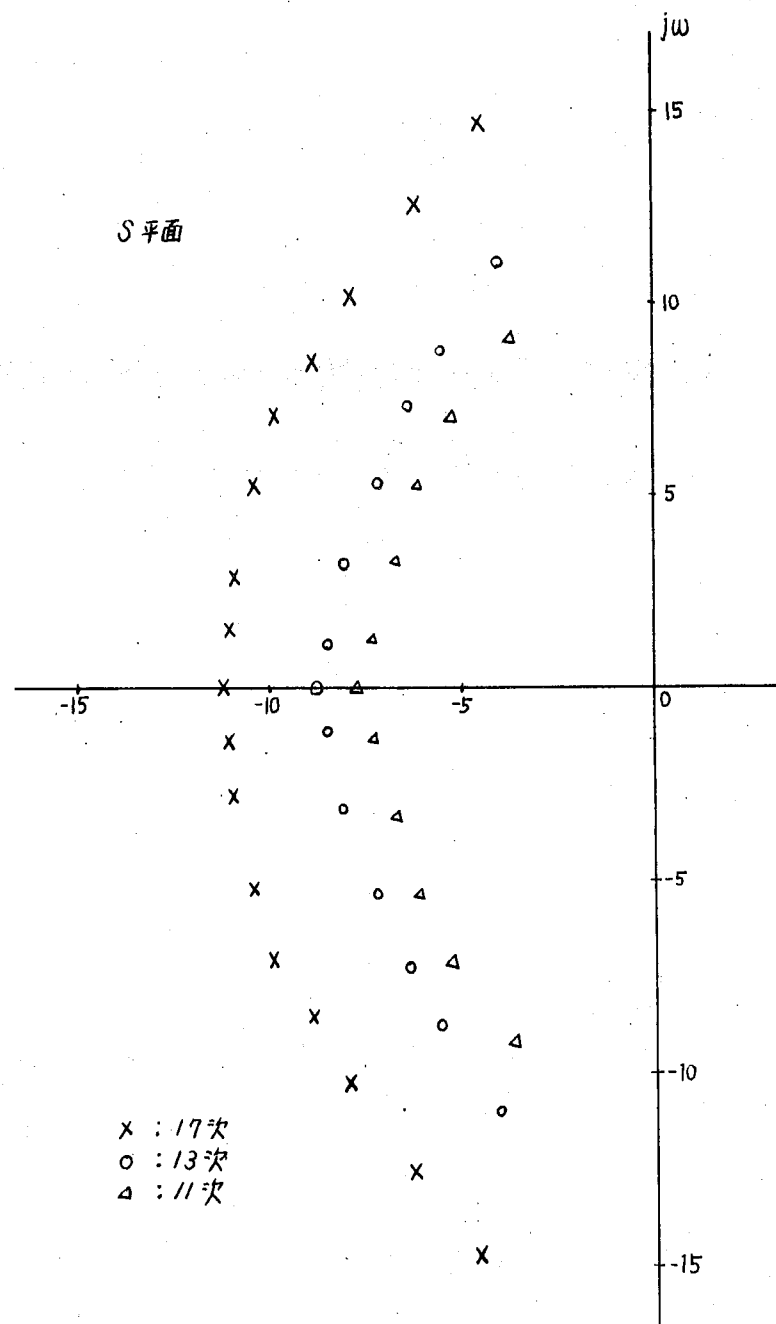


図 6.4 伝達関数の極の位置

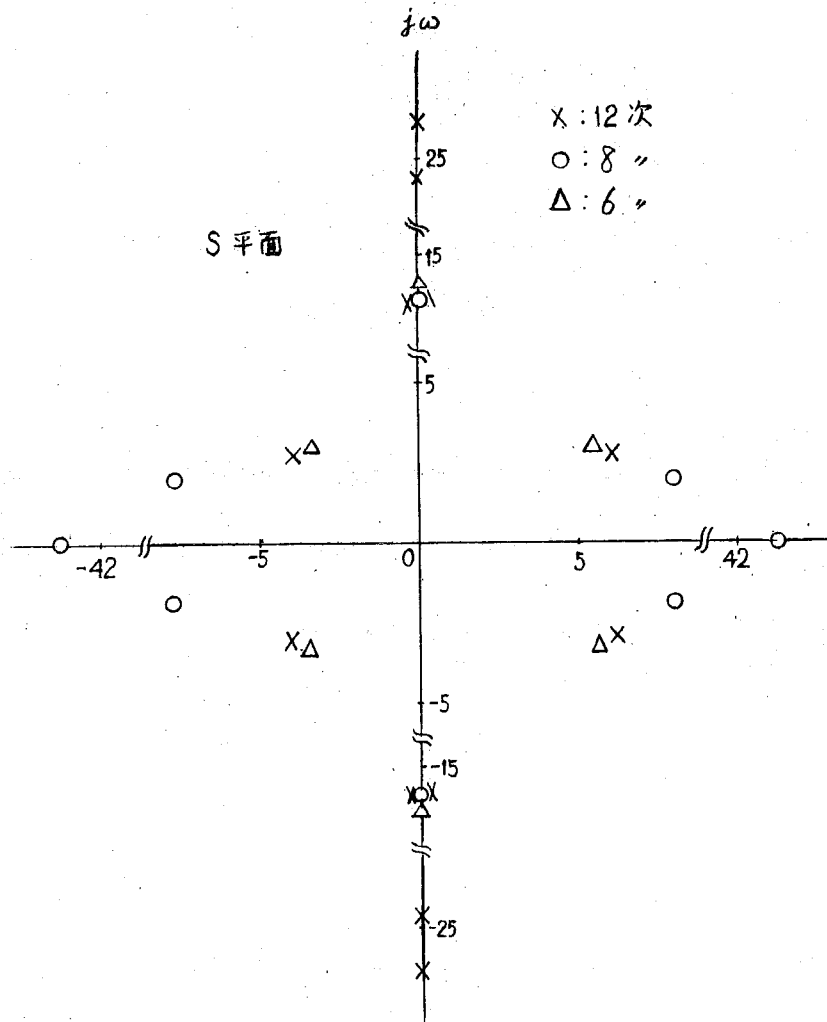


図6.5 伝達関数の零点の位置

6.2.3 非対称波形の場合

図6.6(実線)に示す波形すなわち第5章の図5.11(点線)に示す波形を目的波形とする場合について検討する。まず、目的波形の位相特性を求めると図6.7①のようになる。これをHermiteの定理による方法で、 $H(s)$ の次数を17次として近似すると、 $H^{-1}(s)$ の位相特性は図6.7②の曲線となる。条件式を

$$\left. \begin{array}{l} g(tr)=0; \quad tr=1, 3, 4, 5, 6 \text{ (Sec)} \\ g(2)=1 \end{array} \right\} \quad (6.2.6)$$

とする。分子多項式を12次の偶多項式としたときの応答波形を図6.6に示す。位相特性の近似が充分でないため、4秒以後に多少残留応答を生じているが、識別時点以外の標本点を零とする条件は勿論満たされている。

表6.1 分子多項式系数

種類 次数	6 次	8 次	12 次
0	4.66052604×10^9	$2.615286308 \times 10^{12}$	$2.106586549 \times 10^{18}$
2	-1.062570252×10^8	$-6.232760803 \times 10^{10}$	$-3.194490990 \times 10^{16}$
4	2.540177613×10^6	3.560217956×10^8	$4.025486154 \times 10^{14}$
6	1.155897935×10^4	2.324778979×10^6	$8.308660111 \times 10^{12}$
8		-1.325757935×10^3	$3.832753503 \times 10^{10}$
10			6.608517266×10^7
12			3.856799889×10^4

表6.2 伝達関数の零点

次数	実 数 部	虚 数 部
6	0. 0	± 16.15280582
	± 5.472125364	± 3.060484162
8	± 43.39568904	0. 0
	0. 0	± 15.68787840
	± 7.857347257	± 1.871498529
12	0. 0	± 26.25030732
	0. 0	± 24.42628994
	± 6.204521984	± 2.970457931
	± 0.1286527754	± 15.60652784

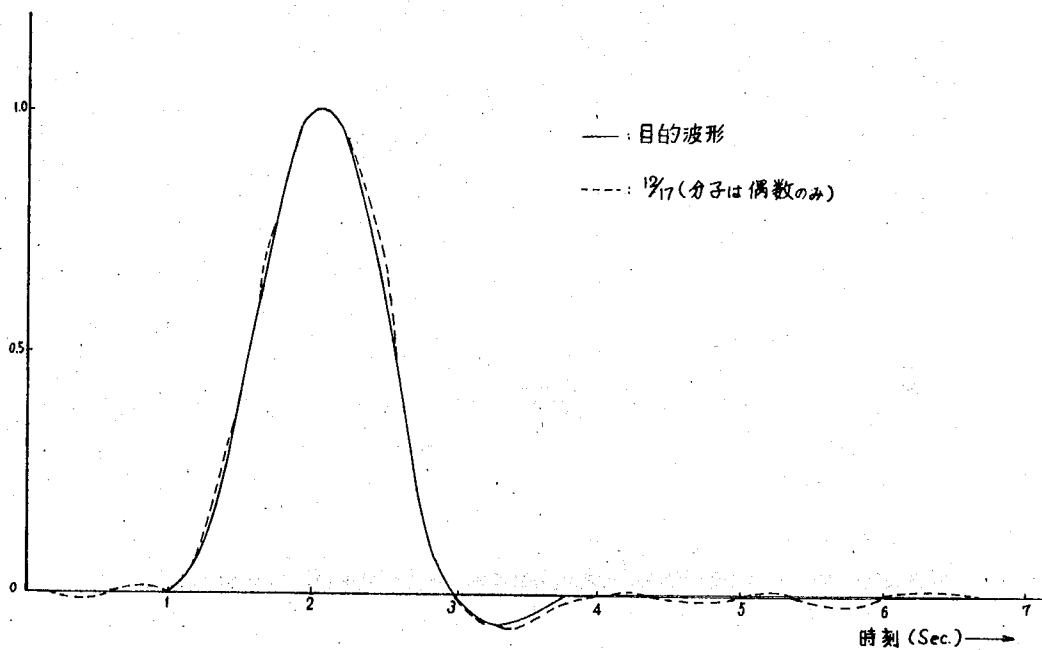


図 6.6 標本点零型非対称波形の近似例

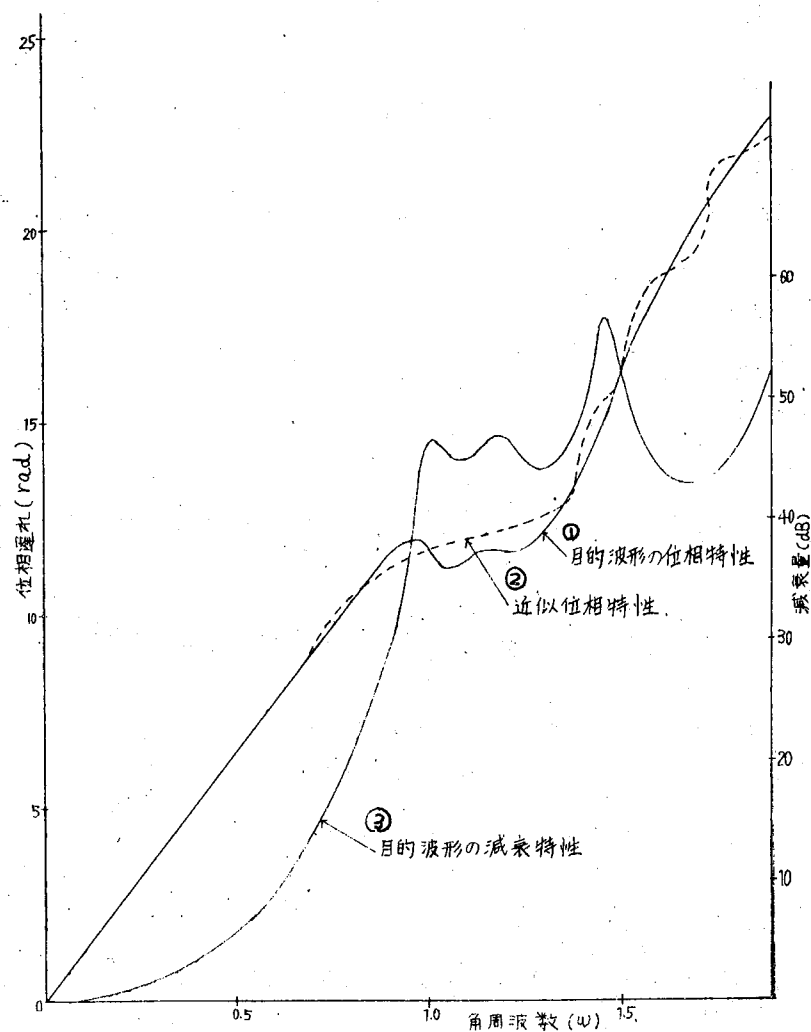
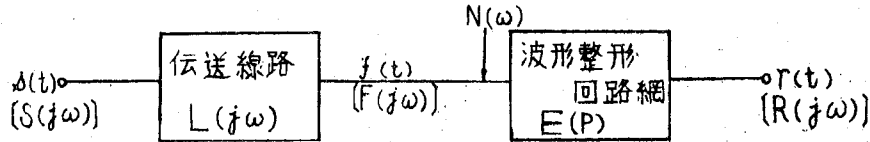


図 6.7 非対称波形に対する近似位相特性

6.3節 標本点零型波形を等化波形とする伝達関数

6.3.1 前提条件

同軸ケーブルまたは平衡対ケーブルを伝送媒体とする基底帯域伝送系における任意の1中継区間の波形整形について考察する。ブロック図および記号の説明を図6.8に示す。以下、波形整形回路網の伝達関数を求めるに当たり、前提とする条件について述べる。



$s(t)$:	再生中継器送信波形	t :	時間
$r(t)$:	受信等化波形	ω :	角周波数
$S(j\omega)$:	$s(t)$ のフーリエ変換	P :	複素角周波数
$R(j\omega)$:	$r(t)$ のフーリエ変換		
$L(j\omega)$:	線路の周波数特性		
$E(P)$:	波形整形回路網の伝達関数		
$N(\omega)$:	雑音の電力スペクトル		

図 6.8 伝送系のブロック図

- ① 再生中継器送信波形 $s(t)$ 、クロック周波数(あるいは符号間隔)、雑音の電力スペクトル $N(\omega)$ が与えられているものとする。
- ② 瞬時信号識別を行なうものとする。
- ③ 符号形式は、多値平衡符号とする。これには、ブロック長無限大の平衡符号という意味で、等振幅逆極性のパルスが等確率で生起するような通常多進符号も含めるものとする。
- ④ 伝送路の低域遮断周波数は充分低いものとする。

以上①～④の仮定は第5章において最適波形の決定に際して用いたものと同様である。

- ⑤ 波形整形回路網の伝達関数を式(6.1)、すなわち

$$K(s) = \frac{Q(s)}{H(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M A_m s^m}{\sum_{n=0}^N B_n s^n} \quad (6.27)$$

なる有理多項式とする。ただし、次数 M 、 N は予め定めるものとする。また、 $H(s)$ は当然 Hurwitz 多項式でなければならない。

これ等の前提条件の下で、等化波形に対し、6.3.2に示すような条件を付し、第5章と同様の評価関数を用いて、 A_m ($m=0, 1, 2, \dots, M$)、 B_n ($n=0, 1, 2, \dots, N-1$) を定めることとする。なお、 B_N は一般性を失うことなく1とする。

6.3.2 等化波形に対する制約

標本点零型波形としては、対称波形のみならず非対称波形も考えられるが第5章の図5.12に示したように、対称波形の

方がSN比が可成り良好なこと、回路網関数の近似の点からは、零本点零型波形をインパルス応答とする回路網の近似に関する検討結果(6.27)から推察されるように、非対称としても近似が容易とならないであろうと考えられることを考慮して、等化波形として対称波形を得ることを目標とする。

さらに等化波形に対する条件として、5.4.1の条件①、②、③を付することとする。

6.3.3 定式化

等化波形 $r(t)$ は、図 6.8 を参照して、式 (6.27) より

$$r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \sum_{m=0}^M \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(j\omega) E(j\omega)}{H(j\omega)} (j\omega)^m e^{j\omega t} d\omega \right] A_m \quad (6.28)$$

となる。したがって分母多項式 $H(P)$ が定まれば、 $r(t)$ は分子多項式の係数 A_m に関する線形結合として表わされる。すなわち、

$$r(t) = \sum_{m=0}^M C_m(t) A_m \quad (6.29)$$

$$C_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(j\omega) L(j\omega)}{H(j\omega)} (j\omega)^m e^{j\omega t} d\omega \quad (6.30)$$

と表わされ、 $C_m(t)$ を具体的に計算することができる。分母多項式は 6.2.2 に述べた方法、すなわち波形整形回路網に要求される位相特性に、その逆数の位相特性が近似するよう定める方法を用いる。等化波形は対称波形となることを目標としているので、その位相特性は直線となることが要求され、送信波形及び線路の位相特性が知られているから、波形整形回路網に要求される位相特性は、伝送路の関係式

$$S(j\omega) \cdot L(j\omega) \cdot E(j\omega) = R(j\omega) \quad (6.31)$$

より定められる。

一方、評価関数(目的式)は第5章と同様のもの、すなわち、式(5.31)を用いることとする。そこで、これを分子多項式の係数 A_m ($m=0, 1, 2, \dots, M$) の関数として表わすことを考える。まずガウス性雑音については、

$$N_G^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega) |E(j\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega) \left| \frac{\sum_{m=0}^M (j\omega)^m A_m}{H(j\omega)} \right|^2 d\omega \quad (6.32)$$

となるが、これは

$$N_G^2 = \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^M G_{\mu,\nu} A_{\mu} A_{\nu} \quad (6.33)$$

$$G_{\mu,\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\omega)}{|H(j\omega)|^2} (-1)^{\frac{\mu+\nu}{2}} \omega^{(\mu+\nu)} d\omega \quad (\mu, \nu: \text{偶数})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\omega)}{|H(j\omega)|^2} (-1)^{\frac{\mu+\nu}{2}} \omega^{(\mu+\nu)} d\omega \quad (\mu, \nu: \text{奇数})$$

$$= 0 \quad (\mu+\nu: \text{奇数}) \quad (6.34)$$

なる A_m ($m=0, 1, 2, \dots, M$) の 2 次形式で表わされる。つぎに、符号間干渉雑音は、式 (5.28) より

$$N_I^2 = \left[w_0 \sum_{i=-J}^J \int_{iT-\tau}^{iT+\tau} |r(t)|^2 dt \right]^2$$

$$= \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^M I_{\mu, \nu} A_{\mu} A_{\nu} \quad (6.35)$$

となり、 N_G^2 と同様 A_m ($m=0, 1, 2, \dots, M$) の 2 次形式となる。ここに、 $I_{\mu, \nu}$ は式 (6.30) の $C_m(t)$ を用いて、

$$I_{\mu, \nu} = w_0^2 \left[\sum_{i=-J}^J \int_{iT-\tau}^{iT+\tau} \text{sgn}(t) C_{\mu}(t) dt \right] \left[\sum_{i=-J}^J \int_{iT-\tau}^{iT+\tau} \text{sgn}(t) C_{\nu}(t) dt \right] \quad (6.36)$$

で表わされる。 $\text{sgn}(t)$ は式 (5.47) より 1 または -1 と定まる。

いま、変数ベクトル $\mathbf{X}$ を

$$\mathbf{X} = [A_0, A_1, A_2, \dots, A_M]^t \quad (6.37)$$

で、等化波形 $r(t)$ に関し、係数行列 D を

$$D = [C_{m,r}]^t, \quad (m=0, 1, 2, \dots, M \quad r=1, 2, \dots, R) \quad (6.38)$$

で定義する。ただし、

$$C_{m,r} = C_m(t_r) \quad (6.39)$$

である。つぎに、等化波形の制限値を要素とするベクトル $\mathbf{d}$ を

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_R)^t \quad (6.40)$$

で定義すると、等化波形に関する制約条件は

$$D\mathbf{X} \leq \mathbf{d} \quad (6.41)$$

と表わされる。一方、評価関数について、式 (6.33), (6.34), (6.35) 及び (6.36) より

$$C_G = [2G_{\mu, \nu}], \quad C_I = [2I_{\mu, \nu}]$$

$$(\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (6.42)$$

で、 $(M+1)$ 次の対称行列 C_G, C_I を定義する。

$$C = C_G + C_I \quad (6.43)$$

において、評価関数は

$$N = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t C \mathbf{X} \quad (6.44)$$

と表わされる。 A_m ($m=0, 1, 2, \dots, M$) が如何なる値をとろうとも N_G^2 及び N_I^2 は非負値であるから、 C_G 及び C_I が非負値定符号行列、したがって、 C が非負値定符号行列であることは明らかである。

結局、本節で扱う問題は、式 (6.41) の条件の下で、式 (6.44) を最小ならしめるような 2 次計画問題となる。

6.3.4 設 計 例

近距離 2 4 通話路方式において、伝送系の条件を表 5.3 のように定めた場合について、設計例を示す。

0.65mm紙ケーブル（擬似線路）の位相特性を、図6.9①に示す。送信波形（矩形波）の中心を時刻軸の原点として、等化波形が尖頭値をとる時刻を7T (Sec)とすると、等化波形の位相特性は図6.12②に示す直線となる。

したがって、波形整形回路網に要求される位相特性は同図③のようになる。これを19次の遅延平坦形多項式で近似すると同図④が得られる。伝達関数の位相特性としては、これに分子多項式の位相特性が加わるが、それは後に述べることにし、分母多項式は19次の遅延平坦形多項式と定める。

つぎに、等化波形に対し、

$$r(t) = 1.0 \quad ; t = 7T$$

$$|r(t)| \leq 0.001 \quad ; t = nT$$

$$(n = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12)$$

$$r(t) \geq 0 \quad ; 8T > t > 6T, \\ 10T > t > 9T, \\ 5T > t > 4T$$

$$r(t) \leq 0 \quad ; 4T > t > 3T, \\ 6T > t > 5T, \\ 9T > t > 8T, \\ 11T > t > 10T \\ (6.45)$$

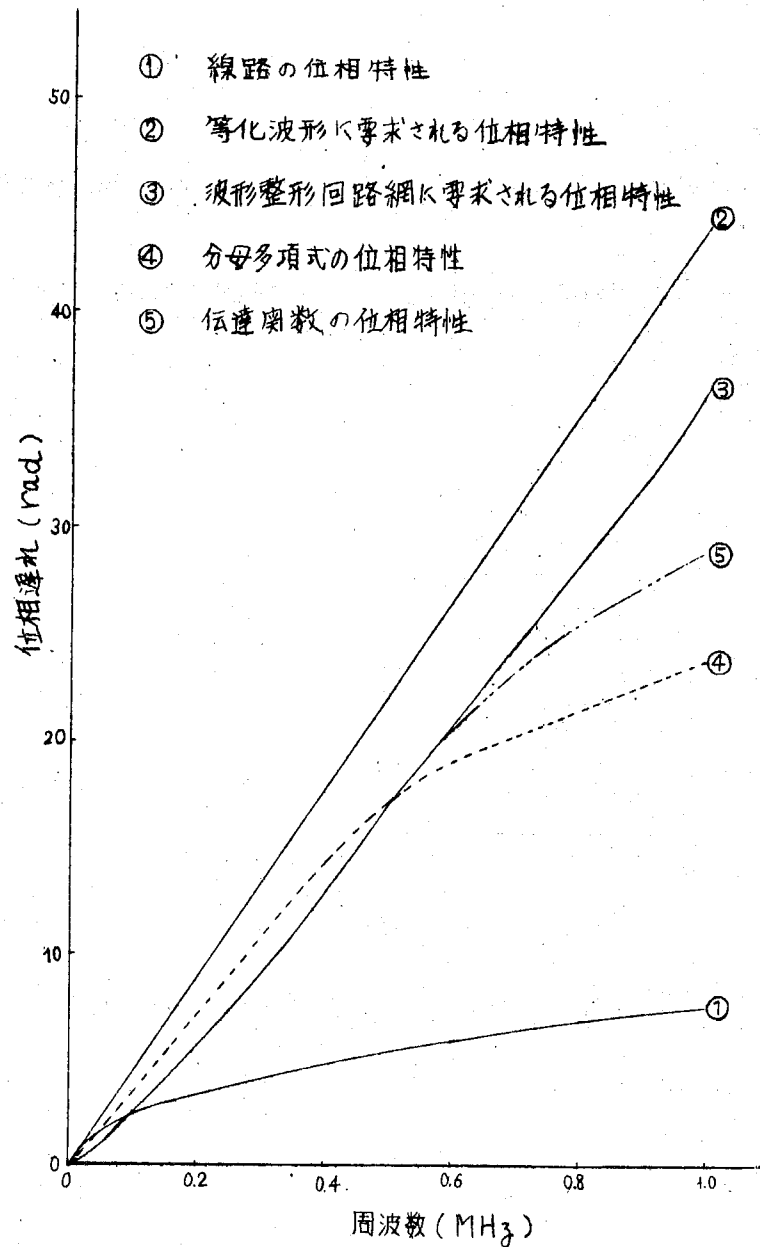


図6.9 位相特性の近似

なる制約条件を付すこととする。不等号条件は勿論有限個の時点に関する条件式で表わす。また式(6.35)におけるJは3とする。

評価関数において w_0 を5.4と同様0.5とし、分子多項式の次数を16として、伝達関数を計算した。その結果得られた分子多項式の係数を、分母多項式の係数と共に表6.3に示す。また伝達関数の伝送零点を図6.10に、振幅特性及び位相特性を各々図6.11及び図6.9⑤に示す。この伝達関数を用いて、等化波形を求めると図6.12が得られる。式(6.45)の条件は勿論満たしている。

表6.3 分子多項式の係数

次数	係数
0	$+1.222344321 \times 10^9$
1	$+5.055153360 \times 10^9$
2	-2.243207200×10^9
3	-4.696664561×10^9
4	-1.363211780×10^9
5	-3.467188436×10^9
6	$+5.572567300 \times 10^8$
7	-3.896276595×10^9
8	$+6.944824700 \times 10^8$
9	-1.276665344×10^9
10	$+1.764179740 \times 10^8$
11	-2.096959300×10^8
12	$+1.839611510 \times 10^7$
13	-1.441017295×10^7
14	$+7.955210000 \times 10^4$
15	-2.996266596×10^5
16	-2.969100120×10^4

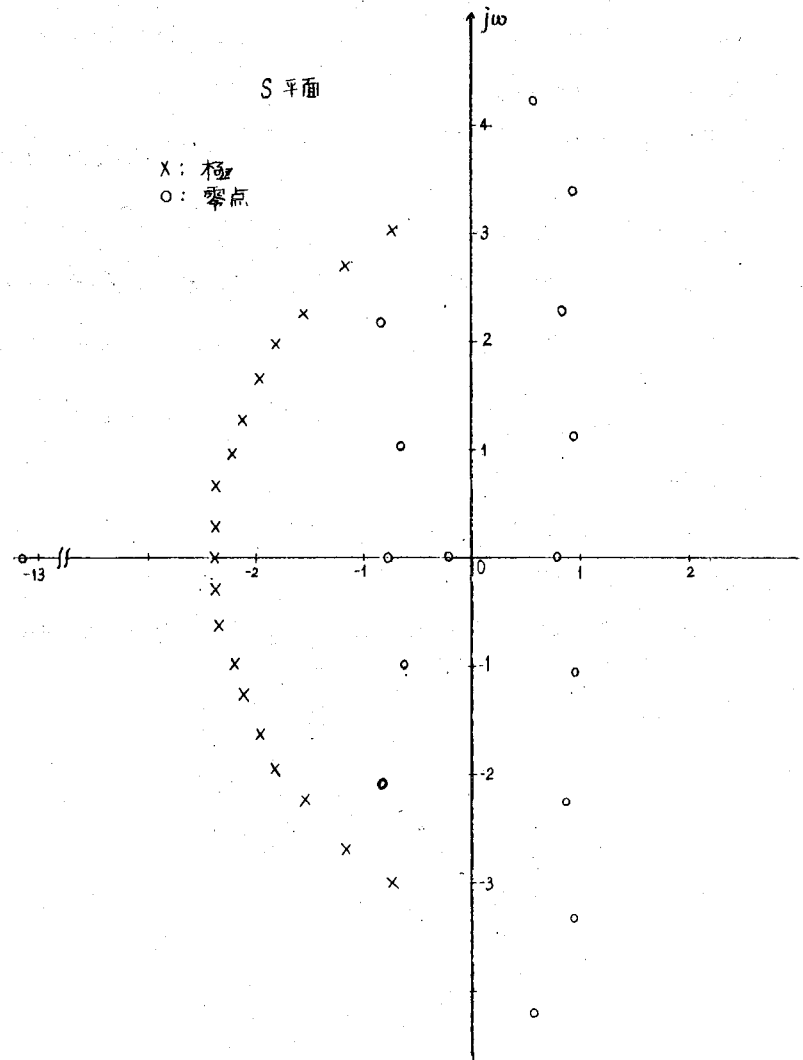


図6.10 伝達関数の極と零点の位置

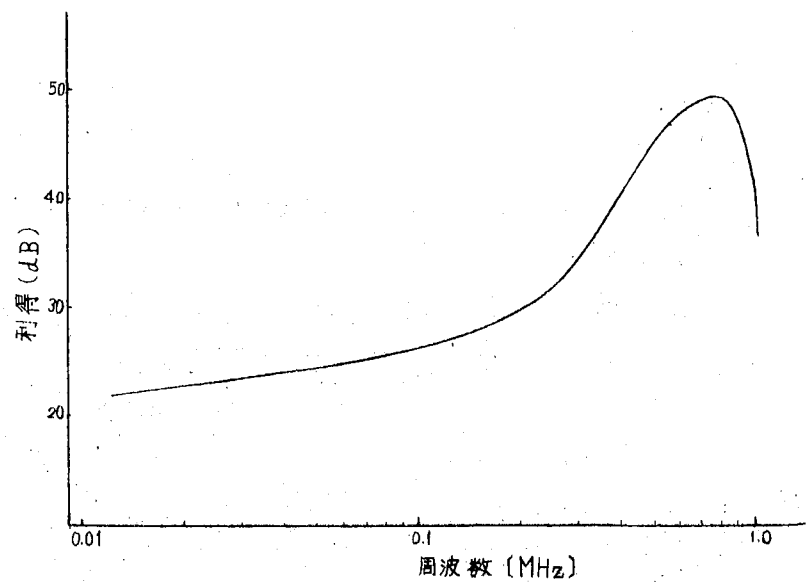


図6.11 等化増幅系利得特性

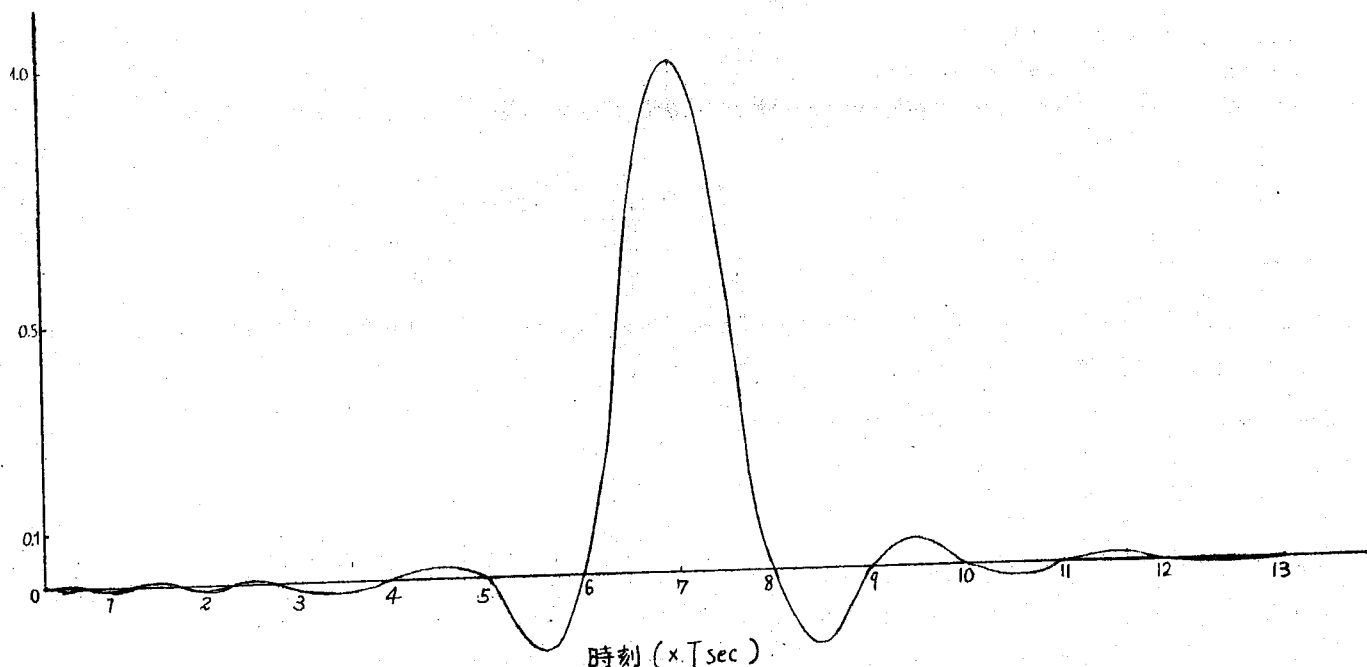


図 6.12 最適等化波形

6.4 節 む す び

前章で求めた最適波形すなわち標本点零型波形を、インパルス応答波形とする伝達関数、及び再生中継器の等化波形とする等化増幅器（波形整形回路網）の伝達関数を示した。

まず、任意の入力波形に対する応答波形に、等号または不等号の制約を付した場合について、伝達関数の分子多項式の係数に関する 2 次式（非負値定符号）で表わされた評価関数を最小ならしめるような、波形整形伝達関数の有理多項式近似について考察した。

そして、分母多項式を、その逆数の位相特性が、回路網に要求される位相特性に大略近似するよう予め決定し、回路網の応答波形を分子多項式の係数に関する線形結合として表わすことにより、上に述べた条件付近似問題を 2 次計画問題として定式化した。特に、応答波形に対する制約が等号条件のみの場合は連立 1 次方程式を解く問題となる。

次に、標本点零型対称波形または標本点零型非対称波形をインパルス応答とする伝達関数について、目的波形と応答波形との 2 乗積分誤差を評価関数として考察し、計算結果を示した。特に、第 5 章において、S/N 比の点から勝れた特性を有することが明らかにされた対称波形については詳細な結果を記載した。

最適波形をインパルス応答とする回路網については、理論的な興味、あるいは実験室用及び測定器用などの目的等のために検討したものであるが、更に、PCM 伝送路において実際に使用されるべき等化増幅器の伝達関数についても、第 5 章と同様の評価関数を用いて検討し、実現の可能性を示し、D. W. Tuf ts 等によって提起されていた、標本点零型波形を等化波形とする回路網の有理関数近似の問題に 1 つの解決方法を与えた。

本章に示した波形整形伝達関数の近似方法は、PCM 通信のみならず、波形伝送一般に広く応用され得るものと考えられる。

第 7 章 結 言

P C M 通信に対する最適波形とその伝送に関する基礎的な研究を行なった。本論文の主な内容を要約すれば次の通りである。

第 2 章においては、第 3 章以下の記述に対する準備として、P C M 通信方式の現状、再生中継、符号構成と電力カスペクトル及び波形等化などについて説明を行ない、P C M 通信における波形伝送上の問題点を明らかにした。

第 3 章においては、符号パルス列の電力スペクトルの新しい計算方法を提示し、それによる計算結果を示した。符号構成を定めたとき、その特性の周波数領域における表現であるところの電力スペクトルを知ることは、理論的に興味があり、またタイミング波の抽出及び伝送路の低域遮断の影響などに関連して必要であり、特に本研究においては、最適波形の決定に対して漏話雑音の大きさを求めねばならない点から直接必要である。

最近、P C M 通信における情報伝送速度の向上を意図して、種々の複雑な符号構成が提案されている。符号構成が複雑な場合、シグナルフローグラフによる従来の方法では莫大な時間と労力を必要とする。このような難点を、本文では、シグナクフローグラフの簡略に相当する計算を代数的に行なう方法、及び 2 項電力分解と名付ける方法を併用することにより解決した。このような計算方法に基づいて、多値平衡符号の電力スペクトルの一般式を誘導した。そして、従来提案された種々の平衡符号、たとえばバイポーラ符号、P S T 符号、平衡のとれた通常多進符号、中込等の提案せる符号及び荒谷によつて提案された符号等の電力スペクトルを、この一般式の特別の場合として求めた。また 3 値 2 デイジット～4 デイジット符号及び 4 値 2 デイジット～4 デイジット符号についても計算結果を示した。

第 4 章においては、種々の符号形式について、最適波形の決定に必要な符号間干渉の確率分布に関する検討を行なった。まず通常多進符号の符号間干渉について考察し、その確率分布が多値分布と正規分布の“たたみこみ積分”によつて近似できることを示した。正規分布の分散は、伝送路の低域遮断周波数を 1 桁下げると、約 1 桁小さくなるので、平衡のとれた通常多進符号列においては、ある程度まで低域遮断周波数を低下させることにより、低域遮断の影響を無視して符号誤り率あるいは情報伝送速度の算出が可能なることを定量的に明らかにした。

有限ブロック長の平衡符号については、低域遮断周波数を通常多進符号の場合と同程度まで低下させれば、当然乍ら低域遮断の影響を無視できて、符号間干渉の確率分布は多値分布となることを述べた。

こうして、平衡のとれた通常多進符号も含めたすべての平衡符号列における符号間干渉の確率分布は多値分布とみなしてよいことを示したが、さらに確率分布の形状と符号誤り率特性の関係について考察し、多値分布を、最悪値のみに着目した 2 値分布で近似しても差支えないことを述べた。また、すべての平衡符号について符号間干渉の最悪値が等しいことを示した。

このようにして、符号誤り率の計算を比較的簡単に行なえること、最適波形の決定に際しては、多値数が同じならば、符号間干渉に関する限りすべての平衡符号（平衡のとれた通常多進符号も含めて）について同様に扱えることを明らかにした。

第 5 章においては、再生中継器の波形整形回路網（等化増幅器）出力点すなわち信号識別点における最適波形について研究を行なった。従来一般に、ガウス波形あるいは余弦自乗波が符号通信に適すると考えられていたようであるが、ガウス性雑音が、等化増幅器の広帯域化に伴なつて急激に増大する同軸 P C M 方式及び平衡対ケーブル方式では、スペクトルの広がり比較的狭い標本点零型波形が良好な特性を有することを明らかにした。

等化波形の振幅に対し、いくつかの等号または不等号の条件を付すこと、及び識別時点の位相変動（ジッタ）を考慮して評価関数を定めることを考え、最適化の手法として 2 次計画法を用いた。

まず、最適波形に関する従来の研究状況に関して簡単に紹介した後、最適化の前提条件について説明し、2 次計画問題としての定式化を行なった。つぎに、同軸 P C M 方式に対する最適波形を、中継距離及びクロック周波数をパラメータとして求めた。符号誤り率及び中継距離などの条件を同一にして、求められた最適波形とガウス波形を情報伝送速度で比較

すると、ジッタを 60° としても、最適波形を用いた場合の速度はガウス波形を用いた場合の約 1.5 倍となることなど、最適化の効果を定量的に示した。さらに、近端漏話雑音が問題となる近距離 2 4 通話路方式についても計算結果を示し、現在実用化されているガウス近似波形を用いた場合と比較して、最適波形を用いた場合の収容可能な回線数は約 2 倍に増加することを明らかにした。

第 6 章においては、第 5 章で求めた最適波形を、インパルス応答波形、及び再生中継器の入力波形に対する等化波形として生ずる波形整形回路網の伝達関数の近似について述べた。まず、任意の入力波形に対する応答波形の振幅値に、いくつかの等号または不等号の条件を付した場合の伝達関数の有理関数による近似について、評価関数が、分子多項式の係数に関する 2 次式（非負値定符号）で表わされた場合を対象として考察した。

回路網に要求される位相特性が知られているものとして、まず分母多項式を、その逆数の位相特性が回路網に要求される位相特性に大略近似するように定めた後、分子多項式の係数を未知変数として、上に述べた条件付近似問題を 2 次計画法を用いて解く方法を提示した。

つぎに、第 5 章で求めた最適波形をインパルス応答とする伝達関数を、目的波形と応答波形との 2 乗積分誤差を評価関数とし、識別時点以外の標本点で零となることを付帯条件として求め、良好な結果を得た。

さらに同じく、標本点零型波形を等化波形とする波形整形回路網（等化増幅器）の有理関数近似について考察し、第 5 章で用いた評価関数すなわち、ジッタが有る場合の符号間干渉、及びガウス性雑音を考慮して定めた評価関数をそのまま使用し、また第 5 章と同様の条件を付す場合について伝達関数を求め、第 5 章で求めた最適波形が、中継伝送路における等化波形としても実現可能であることを明らかにした。標本点零型波形を等化波形とする伝達関数の有理多項式近似の問題は D.W. Tufts によつても提起されていたもので、第 6 章はその問題に一つの解決方法を与えたものとも云える。

また、第 6 章で提案した波形整形伝達関数の近似方法は PCM 通信のみならず、波形伝送一般に応用され得るものと考えられる。

以上の研究は、同軸ケーブル及び平衡対ケーブルを伝送媒体とする基底帯域伝送系について行なつたのであるが、本文で提示した電力スペクトルの計算方法、符号間干渉に関する検討結果、最適波形の決定方法、及び波形整形伝達関数の近似方法などは、無線 PCM 方式あるいはデータ伝送など他のデジタル通信にも利用し得るものと考えられる。

今後飛躍的に大容量のデジタル伝送系が必要になると予想されるが、本文に詳述した研究結果は将来のデジタル通信の発展に対し有益な寄与をなすものと期待される。

謝

辞

この研究を行なうに当り終始御指導並びに御鞭撻を戴き、常に研究上の便宜を御配慮下さつた東京工業大学川上正光教授、山梨大学相川孝作教授の両先生に対し心から感謝の意を表する。また本論文をまとめるに際し種々御検討戴き、適切な御教示を賜つた東京工大、岸源也教授はじめ榎本肇教授、柳沢健助教授、小野田真穂樹助教授に厚く御礼申し上げる。

さらに、実際の研究を行なうに当つて種々御配慮下さり、貴重な御助言をいただいた電々公社通研重井芳治博士、荒谷孝夫博士、岩橋栄治調査役、並びに本研究に協力された河西宏之君、林達城君等多くの山梨大学、大学院、学部卒業生に対しても深甚なる謝意を表する次第である。

文 献

- (1) 例えば Karl Küpfmüller: "Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung" S. HIRZEL VERLAG, 1952.
- (2) 岸, 辻井: "波形伝送" 信学誌 49. 11 P. 1991 (昭 41-11).
- (3) 猪瀬 博編: "PCM通信の基礎と新技術"
- (4) 藤井: "近距離PCM中継の波形等化", 研実報, 14, 9, P. 1729 (1965).
- (5) M. R. Aaron: "PCM transmission in the exchange plant", Bell Syst. tech. J., 41. 1, P. 99 (Jan. 1962).
- (6) J. R. Sipress: "A new class of selected ternary pulse transmission plans for digital transmission lines", IEEE Trans., CT-13. 3 (Sept. 1965).
- (7) 荒谷: "有線における多値符号伝送の考察", 信学誌, 51-A, 3, P. 103, (昭 43-03).
- (8) 熊谷, 松田, 倉橋, 荒谷: "近距離24通話路PCM方式", 通研研究発表会論文集 12, 1965, 10.
- (9) 岩橋: "バイポーラ符号伝送における符号誤り率の解析", 信学誌 50. 9, P. 1578 (昭 42-09).
- (10) W. H. Huggins: "Signal flow graphs and random signals", Proc. IRE, 45. 1 P. 74 (Jan. 1957).
- (11) L. A. Zadeh: "Signal flow graphs and random signals", Proc. IRE, 45. 0, P. 1413 (Oct. 1957).
- (12) 辻井, 河西: "符号パルス列の電力スペクトラムの自動計算", 信学会, 通信方式研資 CS67-15 (昭 42-09).
- (13) 辻井, 河西: "符号パルス列の電力スペクトルの代数的計算法", 信学誌 51-A. 7, P. 282 (昭 43-07).
- (14) S. Tsujii: "A New Computation Method of Power Spectra of Coded Pulse Trains", 山梨大学工学研究報告 第19号 (昭 43).
- (15) S. Tsujii, H. Kasai: "An Algebraic Computation Method of Power Spectra of Coded Pulse Trains" IEEE Trans., 投稿中.
- (16) R. D. Barnand: "On the discrete spectral densities of Markov pulse trains" Bell Syst. tech. J., 43. 1, P. 233 (Jan. 1964).
- (17) 星子, 金谷: "多進平衡符号変調の構成", 通研経資, 2078号 (昭 41-05).
- (18) 荒谷, 辻井: "同軸PCM中継における4値伝送の検討", 信学会, 通信方式研資 (昭 42-03).
- (19) 中込, 天野, 大田: "ディジットの代数和が限定された多値符号", 信学誌 51-A. 1, P. 37 (昭 43-03).
- (20) 川島, 樋下, 片桐: "超多重PCM方式の符号平衡化と同期化の検討", 信学誌, 49. 11, P. 2280 (昭 41-11).
- (21) 大平, 海老原: "疑似符号列の電力スペクトラムの計算" 昭和43年全大 1255.
- (22) 吹抜, 長田, 岩橋: "遷移確率行列による符号間干渉の解析", 昭和43年連大 2015.
- (23) 似鳥: "パルス伝送における符号間干渉の統計量", 昭和43年連大 2016.
- (24) 岩橋: "波形等化と符号間干渉について", 信学誌 49. 11, P. 2155 (昭 41-11).
- (25) 辻井, 岩橋: "通常多進符号の伝送特性", 信学会, 通信方式研資 CS68-14 (昭 43-06).
- (26) 岩橋, 辻井, 藤崎, 小宮: "通常多進符号の基底帯域伝送", 信学誌, 52-A. 4, P. 173 (昭 44-04).
- (27) E. Iwahashi, S. Tsujii, R. Komiya and K. Fujisaki: "Base Band Transmission of Arbitrary Multi-valued PCM Signals", IEEE Trans., 投稿予定.
- (28) 辻井, 河西, 藤井: "符号間干渉の確率分布について", 昭和43年連大 2014.
- (29) D. W. Tufts: "Nyquist problem-The joint optimization of transmitter and receiver in pulse amplitude modulation", Proc. IEEE, 53. 3, P. 248 (March 1965).
- (30) J. W. Smith: "The joint optimization of transmitted signal and receiving

- filter for data transmission systems", Bell Syst. tech. J., 44, 10, P. 2363 (Dec. 1965)
- (31) 金谷, 大友: "帯域制限における符号伝送波形最適構成", 信学会, 通信方式研資, (昭 42-01).
 - (32) 畑, 岩野: "無線符号伝送における最適伝送特性の考察", 信学会, 通信方式研資, CS68-21 (昭 43-07).
 - (33) 日向, 細野: "エネルギー検出方式に対する最適信号設計", 信学誌, 51-A, 8, P. 319, (昭 43-08).
 - (34) 千葉: "タイミングジッタに確率分布がある場合のパルス最適波形", 信学会, 通信方式研資, CS-68-39, (昭 44-01).
 - (35) 辻井, 山本, 大村: "同軸PCM方式の最適伝送波形について", 信学会, 通信方式研資, (昭 41-05).
 - (36) 辻井, 河西, 林: "同軸PCM方式の最適伝送波形について(補遺)", 昭和41年全大 1054.
 - (37) 辻井: "同軸PCM方式の最適波形に関する考察", 信学誌, 49, 11, P. 2147 (昭 41-11).
 - (38) 辻井, 河西: "PCM中継における非対称等化波形の最適化", 昭和42年全大, 1341.
 - (39) 例えば, 岸: "回路解析の基礎", 共立出版, P. 126, (昭 37-01).
 - (40) 例えば, 竹内, 啓: "二次計画法", 数学セミナー, 4, 9, (昭 40-09).
 - (41) 岸: "遅延の平担なる波回路網の1形式", 信学誌, 42, 3, P. 245, (昭 34-03).
 - (42) 武部: "符号伝送用パルス形成回路", 信学誌, 48, 7, P. 1190, (昭 40-07).
 - (43) E. Urbrich, H. Piloty: "Über den entwurf von allpässen, tiefpässen und bandpässen mit einer im tschebyscheffschen sinne approximierten konstanten gruppenlaufzeit", Arch. elekt. Übertragung, 14, 16, P. 451, (1961).
 - (44) J. Jess, W. Schüssler: "Über filter mit günstigem einschwingverhalten", Arch. elekt. Übertragung, 16, 3, P. 117, (1962).
 - (45) A. Meyer: "Über den Entwurf von Verzögerungsschaltungen im zeitbereich", Arch. elekt. Übertragung, 20, 11, (1966).
 - (46) W. E. Thomson: "The synthesis of a network to have a sine-squared impulse response", Proc. Instn Elect. Engrs, 99, Pt. III, P. 373, (1952).
 - (47) C. D. Vasiliiu: "A Practical Method for Time-Domain Network Synthesis, IEEE Trans, CT-12, 2, P. 234, (June 1965).
 - (48) L. E. McBride, H. W. Schaeffgen and K. Steiglitz: "Time-Domain Approximation by Iterative Methods", IEEE Trans., CT 13, 4, P. 381, (Dec. 1966).
 - (49) 辻井, 林: "PCM方式における波形成回路網の時間域合成", 昭和42年全大 1340.
 - (50) 辻井: "波形伝送回路網の一近似法", 信学会, 回路とシステム理論研資 CT67-23 (昭 42-11).
 - (51) 辻井, 河西, 細田: "2次計画法による回路網関数の近似", 第18号, (昭 42).
 - (52) 辻井: "波形整形回路網の一近似法", 昭和43年連大 19. 山梨大学工学研究報告
 - (53) 辻井, 林: "PCM中継における等化回路網の一設計法", 昭和43年連大 2020.
 - (54) 辻井, 林, 鎌田: "PCM伝送における波形整形回路網の最適設計", 信学会, 通信方式研資, CS68-40, (昭 44-01).
 - (55) 辻井, 林: "標本点零型等化波形を得るための増幅器の伝達関数" 昭和44年連大, 2650.
 - (56) 辻井, 林: "波形整形伝達関数の一近似方法とPCM通信への応用", 信学誌, 52-A, 4, P. 145, (昭 44-04).
 - (57) S. Tsujii: "Über die Approximation von Übertragungsfunktionen im Zeitbereich", 山梨大学工学研究報告 第20号 (昭 44), 投稿中.
 - (58) 喜安: "遅延回路の一設計法", 信学誌, 26, 8, P. 598, (昭 18-08).
 - (59) 永井, 神谷: "伝送回路網学", P. 367, コロナ社, (昭 31-06).