

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	ウェーブトラップトホーンによる超音波振動工具の振動モード制御
Title(English)	
著者(和文)	足立和成
Author(English)	
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第2093号, 授与年月日:1989年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第2093号, Conferred date:1989/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

ウェーブトラップトホーンによる

超音波振動工具の振動モード制御

1989年 1月

電子システム専攻

足立 和成

Modal Vibration Control
of
Ultrasonic Tools
Using Wave-Trapped Horns

January 1989

Kazunari Adachi

A thesis
submitted to Tokyo Institute of Technology
as a part of requirement for the degree of Doctor of Engineering.

ウェーブトラップトホーンによる

超音波振動工具の振動モード制御

To my beloved parents

目次

序章	研究の背景	5
第1章	弾性体の振動モード制御	9
1-1	概説	9
1-2	振動モード制御とは	9
1-3	共振系の振動モード制御	10
1-4	多点強制駆動系の振動モード制御と そのGreen関数の重ね合わせによる数学的定式化 及び駆動力の計算方法	12
1-5	付加振動体によるリアクティブな駆動力の物理的実現方法	16
1-6	本手法の適用限界	18
第2章	低振幅駆動時の振動モード制御実験	19
2-1	概説	19
2-2	実験の目的	19
2-3	実験装置と計算及び実験手順	19
2-4	実験結果	25
2-5	低振幅駆動実験によって明らかになった 本手法の実用上の問題点	34

第 3 章	振動モード制御の実用上の諸問題とその解決手法	35
3 - 1	概説	35
3 - 2	不安定性係数の導入	35
3 - 3	不安定性係数の有意性の実験的確認	37
3 - 4	不安定性係数を減少させる振動系構成上の工夫	47
3 - 5	金属弾性振動体における固有振動モードの温度安定性	51
3 - 6	温度変化のシミュレーション	54
3 - 7	固有振動モードの温度安定性に関する若干の考察	59
第 4 章	高振幅駆動時の振動モード制御実験	61
4 - 1	概説	61
4 - 2	高振幅駆動時の振動モード制御に伴う問題	61
4 - 3	実験装置	62
4 - 4	実験結果	64
第 5 章	大型超音波振動系の構成手法	71
5 - 1	概説	71
5 - 2	大型超音波振動系の設計に課せられる実用上の要求	71
5 - 3	振動系設計の手順	72

第 6 章	考察	75
第 7 章	結論	79
7 - 1	前章までのまとめ	79
7 - 2	結論	80
7 - 3	今後の課題	80
あとがき	－謝辞にかえて－	82
参考文献		84
関連発表		85
付録 1	弾性波動の支配方程式における解の一意性について	87
付録 2	弾性振動体の Green 関数とその固有関数展開	95
付録 3	本研究のために制作された有限要素解析システム	99
付録 4	一次元波動近似によるウェーブトラップトホーンの長さの算出	105
付録 5	不安定性係数の算出について 本文中で触れなかった超音波振動工具	112
付録 6	温度変化が弾性振動体の固有振動モードに与える影響の 摂動法による数学的定式化	115
付録 7	弾性振動系の設計可能性に関する問題の数学的定式化 (参考文献 4 からの抜粋)	122

人間のすることにはいろいろな面がある。暇に見えて効果のある仕事もあり、徒労のように見えながら、それを持続し積み重ねることによって効果のあらわれる仕事もある。おれの考えること、して来たことは徒労かもしれないが、おれは自分の一生を徒労にうちこんでもいいと信じている。

山本周五郎「赤ひげ診療譚」‘徒労に賭ける’より

序章 研究の背景

強力超音波の分野に用いられる振動系の設計は従来、専ら解析的に共振時の振動モードが分かっている弾性振動体を組み合わせることによって行われてきた。時に数十マイクロンに達する振動振幅を必要とするこの分野においては、振動系の共振を利用しなければならず、複雑な境界条件を考えることを避け、簡便な設計を行う上で、これは適切な手法であったと言える。しかしながら、研究の発展に伴って、既知の共振系の組合せによっては解決出来ない設計上の問題が注目されるようになってきた。

例えば、強力超音波の応用の一つにプラスチックの溶接がある。この手法は、大振幅の超音波によるプラスチック部品同志の接触面での発熱を利用しており、有毒かつ可燃性の有機溶媒を用いずに済むことから、工場の生産ラインにおいて、自動車のテールランプのカバーのような大型のプラスチック部品を短時間のうちに大量に組み立てるのに適している。Fig.0-1 に示すのがこの目的に用いられる金属製（通常アルミニウムかジュラルミン製）の振動工具の典型的な形状である。通常、その縦の一边が細棒を伝搬する縦振動の波長の半分になっており、その上端面の一点を電気機械振動変換器と適当な機械振動変成器とを組み合わせたものによって駆動することで全体として縦振動を行なわせ、下部の放射面から強力な超音波をそれに接したプラスチックの部品に放射するようになっている。

こうした超音波プラスチック溶接では、上述のカバーのように工作の正確さや水密性を要求される場合が多く、溶着面での均一で良好な仕上がりを期さねばならない。従って、このような工具の放射面は緊目のない滑らかなものでなければならず、しかもその上で平坦な振動変位分布を実現しなければならない。

その目的のために実に様々な形状の工夫がこの種の工具に加えられてきた。図中のスリットもその一つであり、これは Poisson 比の影響を排除し、横方向の結合振動を抑圧して、工具に純粋な縦振動をさせることによってその放射面で平坦な分布を得ようとするものである。その他にも Fig.0-2 に示すよ

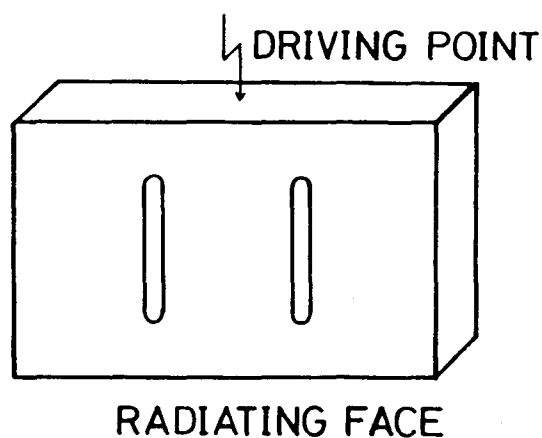
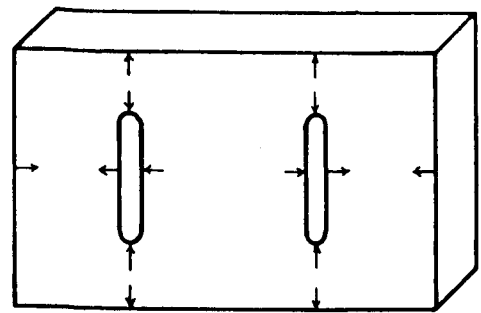


Fig.0-1 A typical ultrasonic plastic welding tool with slots.

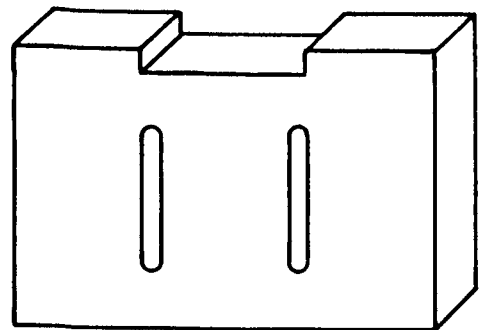
うに (a) 工具各部の寸法比を変えるとか、(b) 工具上端面に段差を設ける、或は(c) 付加振動体を取り付けるといった工夫が報告されている。

しかし、放射面が縦振動の波長に比べて広くなってくると、そうした数々の工夫にもかかわらず、平坦な振動変位分布を得ることは困難になる。これは、工具の放射面の形状は溶着しようとするプラスチックの部品毎に変わるのにも拘らず、上述のような工夫はいずれも直感的な思いつきの域を出ず、放射面において平坦な分布が得られるか否かについては何ら理論的裏付けを持たなかったためである。さらに近年、より一層良好な仕上がりを得るため高周波強力超音波によるプラスチック溶接が試みられていることから、こうした工具の放射面は波長に比べてさらに広くなる傾向にあり、平坦な振動変位分布を得ることがますます難しくなっている。

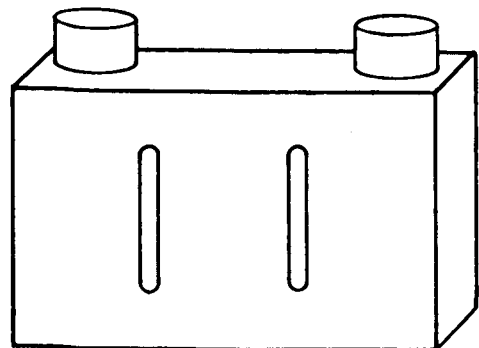
このように、強力超音波の応用においては、固体ホーン等の機械振動変成器や振動工具といった弾性体の、共振時の振動モードが問題となることが多い。そして、既知の共振系の組合せという自由度の小さい従来の設計手法では、こうした問題を解決することは極めて難しい。にも拘らず、振動モードに関する要求に理論的にはっきりした形で答える弾性振動体の新しい設計手法は、今まで全くと言って良い程提案されてこなかった。筆者の知り得る限り、僅かにEisnerの固体ホーンに関する



(a)



(b)



(c)

Fig.0-2 Devices of configuration for the realization of flat amplitude distributions at the radiating faces of large ultrasonic tools.

る研究⁽¹⁾や、伊藤らによる見かけ弾性率法を用いた振動方向変換体の研究⁽²⁾があるに過ぎない。それらも、その関心は振動変成比の合理的な達成や振動エネルギーの集中にあり、与えられた振動変位分布そのものを弾性振動体の一部で実現しようとするものではない。従って、そうした弾性振動体の一般的で実用的な「振動モード制御」の手法を提案することは、実際の応用の立場からのみならず、学問上も意義のあることだと筆者は考える。

そこで本研究では、弾性振動体の共振時の振動モード制御の可能性について調べ、その具体的手法を考案し、それを上述のプラスチック溶接用アルミニウム製スリット付き大型超音波振動工具に適用した実験結果について考察することにした。これは見方を変えるならば、形状の与えられた波長に比べて非常に広い放射面において平坦な振動変位分布を実現する共振系の形状は如何にあるべきかという一種の逆問題に関して、適応範囲には制限があるものの実際的な解決法を提示することと考えることも出来よう。

以下に本論文の大まかな構成について述べておくことにする。

第1章「弾性体の振動モード制御」では、まず本論文が主張する振動モード制御の概念を明確化するとともに、制御手法の数学的定式化を行う。その上で必要な計算手法を提案し、物理的な実現の方法について具体的に述べることにする。

第2章「低振幅駆動時の振動モード制御実験」の目的は、第1章で提案した振動モード制御手法の原理的な有効性を、上述の大型超音波振動工具の低振幅駆動実験で確認することにある。そしてそれら実験結果から、本手法における幾つかの実用上の問題点を整理していく。

第3章「振動モード制御の実用上の諸問題とその解決手法」においては、第2章で明かにされた問題点とともに、本手法における振動モードの温度安定性について考察する。さらに踏み込んで、それらの問題をどの様に克服するかについても、理論的考察、実験及びシミュレーションの結果をもとに、明らかにする。

第4章「高振幅駆動時の振動モード制御実験」では、実用に供せられるような高振幅での大型振動工具の駆動実験とその結果を、前章までに確立した幾つかの判断規準との関連で明らかにしてゆく。

第5章「大型超音波振動系の構成手法」においては、前章までの成果を考慮しながら、波長に比べて非常に広い放射面において平坦な振動変位分布を実現しなければならない大型超音波振動系の、一般的な構成法を一つ提案する。

第6章「考察」では、本振動モード制御手法全般に関するに包括的な考察を行う。

第7章「結論」では、前章までの内容をまとめるとともに結論を導き、振動モード制御に関わる今後に残された課題について述べる。

第 1 章 弾性体の振動モード制御

1 - 1 概説

弾性体の「振動モード制御」とは、与えられた周波数で振動する弾性体の、形状の与えられた一部の表面において、一定の要求を満たす振動変位分布を実現することをいう。ここではまず、振動モード制御の概念を明らかにした後、Green 関数の重ね合わせによる多点強制駆動系の振動モード制御の原理について述べ、次にその原理に基づいた付加振動体を用いた共振系の振動モード制御の具体的な手法について説明する。そしてそれら付加振動体のあるものを以後ウェーブトラップトホーンと呼ぶことにする。

1 - 2 振動モード制御とは

「振動モード制御」(modal vibration control) という言葉は筆者の造語であり、その正確な意味はまだ一般に認知されているわけではない。そこであらかじめこの言葉に正確な意味を与えておく必要がある。

まず振動モード(vibration mode)という言葉は、共振、非共振の如何を問わず、一定の周波数で調和的に振動している系の振動の有様の幾何学的な特徴を指すものとする。なお特に断わらない限り、ここで言う振動とは微小振動ことであり、従って系の線形性は完全に保たれているものとする。また、系内の損失による振動エネルギーの消散は無視し、振動振幅は時間的に変化しないものとする。これらの仮定の実際的な意味での妥当性については、第 6 章で詳しく述べる。

さて、与えられた一定の周波数で振動する弾性体があるとする、弾性体の波動方程式の解の一意性から、その全ての表面上での振動変位分布を定めることは同時にその全ての表面上での表面応力(traction)の分布を決定することになってしまう。また逆に、全ての表面上での表面応力の分布を定めることは同時にその全ての表面上での振動変位分布を剛体運動の自由度だけを残して決定することになってしまう(付録 1 参照)。ここでは、無損失の共振系(つまり、その全ての表面上で表面応力のない弾性振動系)の振動モードを制御することを考えているわけであるから、そのような形式では「振動モード制御」の問題を定式化出来ないし、またその実用的な意味もない。そこで、本研究では弾性体の「振動モード制御」の意味を次の様に定義することにする。

振動モード制御の定義

与えられた周波数で振動する弾性体の、形状の与えられた一部の表面において、一定の要求を満たす振動変位分布を実現すること

これは強制振動の場合も含めた包括的な弾性体の振動モード制御の定義となっているが、これから考えようとしている共振系の振動モード制御に適用しても不都合は生じない。

1 - 3 共振系の振動モード制御

共振系の振動モードは、数学的には一定の基本及び自然境界条件の下における弾性体の微小（線形）振動を表す支配微分方程式の固有関数である。従来の手法のように振動モード制御を微分方程式の固有値問題の解法を含むものと考えてしまうと、振動系の形状を変化させる以外にその方法はなく、結局振動解析を繰り返しながら試行錯誤的に適当な形状を見つけることになる。従って、多かれ少なかれ、計算機利用を前提とした最適化手法の助けを借りざるを得ない。

ところが、最適化手法を共振系の振動モード制御に適用するにあたっては、いくつかの問題点がある。まず、実現したい振動モードと現在のものとの違いを表す適当な評価関数の設定が微妙な問題であり、仮に適当な評価関数が見つかったとしても、振動系の形状を表すパラメータを独立変数とするその関数の陽な解析的形式が分からないため、大局的な意味での最適化がこの場合難しいことである。要するに、殆どの非線形最適化手法においては最適化すべき評価関数は凸関数でなければならず、パラメータの定義域も凸集合が仮定されているため、最悪の場合パラメータの初期値やその他の設定の違いが全てを決定してしまうことになりかねないのである。そして最も深刻にして本質的な欠点は、莫大な計算時間がかかる可能性がある上に、結果の見ようしが悪いことだろう。つまり、果して何回の計算の繰り返し（iteration）が必要なのか、いったい評価関数が収束するのかについての予測がつかないのである。

上のようなことから、共振系の振動モード制御の問題を支配微分方程式の固有値問題の解法を含むものという形で捉える限りにおいて、その一般的な手法を見い出すことは困難であることがわかる。そこで、共振系は外部との振動エネルギーのやり取りを行わない系であることから、この問題をその表面の一部において一定の要求を満たす振動変位分布を実現する共振系の「構成」と考え

てみることにしよう。

弾性振動体の一部に他の複数の弾性振動体を幾つかの点で機械的に密に接触させてやると、その固有振動のモードが変化することは明らかである。この場合、固有モードを変化させるものは、付加振動体の接触によって弾性振動体との接触点に生ずる振動エネルギーの移動を伴わないリアクティブ (reactive) な力であり、 Fig.1-1はそのような付加振動体の効果を模式的に示したもので

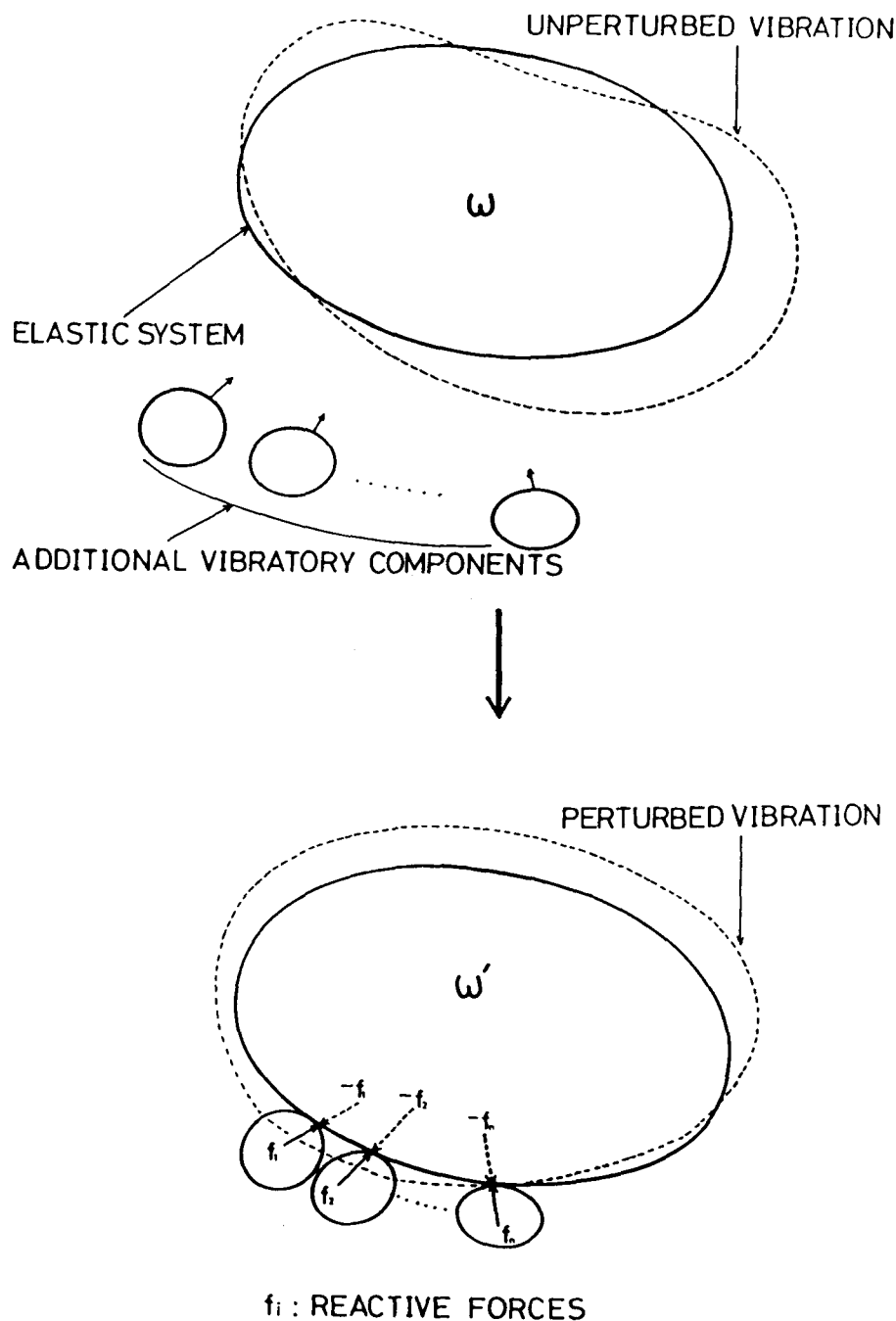


Fig.1-1 Effects of additional vibratory components upon the vibration mode of an elastic system.

ある。この様な方法で、欲しい共振系を組み上げることは出来ないのだろうか。実際、このことを利用した振動モード制御の試みは古くから行われており、前章のFig.0-2(c)に示したのもその一例である。さらにこの手法には最大の長所として、単に受動的な振動素子を接続するだけという簡便さがあり、実用的なもののように思われる。

しかしながら、どの様な付加振動体をモード制御したい弾性振動体のどこに取り付ければ所望の振動変位分布が得られるかについては、過去のそうした方法はいずれも、なんら理論的指針を与えるものではなかった。

本論文で筆者が提案する手法は、本質的にはそれらの方法と異なることがないと考えることが出来る。ただ、付加すべき振動体の設計と、それを制御したい振動体のどこに取り付けることで所望の振動変位分布を実現できるかについて、明確な理論的根拠と計算手法を提案しているところが、従来の方法とは全く異なるのである。

1-4 多点強制駆動系の振動モード制御とそのGreen関数の重ね合わせによる数学的定式化及び駆動力の計算方法

前節で述べたように、損失を伴わない付加振動体を接続した弾性振動体の接合部に於いてはリアクティブな力が働く。そこで、ここではまず共振点付近の周波数において多数のリアクティブな駆動力によって振動させられる無損失の弾性振動系の振動モード制御を考え、その後必要な駆動力を発生する付加振動体の設計を考えることにする。

Fig.1-2は、そうした多数のリアクティブな駆動力によって、与えられた角周波数 ω で強制振動させられている弾性振動系の模式図である。この場合、振動モードはその系のGreen関数の重ね合わせと捉えることが出来る。

いま、この様な系の一部の表面 S_r において特定の振動変位分布を実現することを考えよう。そのため、まず S_r 上の n 個の点 x_i でその分布を良く近似するように振動変位の値 u_i を定めてやり、それらの値を実現するように別に定めたやはり n 個の駆動点 y_j

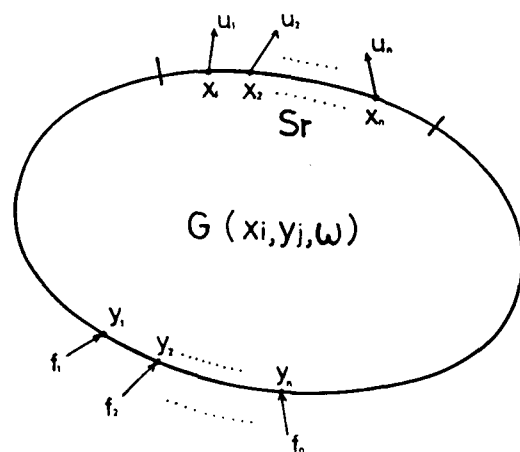


Fig.1-2 A schematic explanation of modal vibration control of elastic systems by superposition of Green's functions.

に適当に重み付けされた調和的な駆動力 f_j を加えるものとする。変位を指定する点を細かく取ってやれば、近似の度合を上げることが出来ることは直感的に明らかであろう。ここで変位を指定する点と駆動点の個数は同じなのだから、変位の値 u_i と駆動力 f_j は ω を独立変数として含むこの系の Green 関数によって次式のように関係づけられる。

$$\begin{pmatrix} G(x_1, y_1, \omega) & G(x_1, y_2, \omega) & \cdots & G(x_1, y_n, \omega) \\ G(x_2, y_1, \omega) & G(x_2, y_2, \omega) & \cdots & G(x_2, y_n, \omega) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ G(x_n, y_1, \omega) & G(x_n, y_2, \omega) & \cdots & G(x_n, y_n, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1-1)$$

ここで、 x_i 、 y_j 、 u_i や f_j はベクトル量であり、Green 関数 $G(x, y, \omega)$ は、系の m 次の固有角周波数を ω_{m0} 、それに対応する固有関数（固有振動モード）を U_{m0} とすると次式で表されるようなテンソル量である（付録 2 参照）。

$$G(x, y, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_{m0}(x) \times U_{m0}(y)}{\rho(\omega_{m0}^2 - \omega^2)} \quad (1-2)$$

ただしここで記号 $\times$ はベクトル同志のテンソル積と呼ばれる演算を表し、各固有関数は規格化されている。即ち、

$$\int U_{m0}(x) \cdot U_{n0}(x) dV = \delta_{mn} \quad (1-3)$$

ドット ($\cdot$) はもちろんベクトルの内積を表し、 δ_{mn} は Kronecker のデルタである。 dV は体積素で、積分領域は弾性振動体全体である。

この様に考えることの最大の利点は、従来の固有値問題の解法を含んだ手法と異なり、重ね合わせの原理に依っていることから、系の設計における自由度が大きくなることである。つまり線形連立方程式 (1-1) を f_j について解

くだけで、与えられた変位 u_i を S_r 上で実現する駆動力を簡単に求めることが出来ることなのである。また共振点付近に駆動周波数を選ぶのは、後で詳しく述べるように、制御を容易にするためである。ところがここに一つの計算上の問題が持ち上がる。

任意の弾性振動系について、解析的にGreen関数の形を求めることは不可能である。そこで適当な数値解法を用いて計算することになるが、各駆動点毎にいちいちその形を陽に求めなければならないとすると、駆動点の数が増えてくると従って、計算量が極めて大きくなることが予想される。弾性体の広い表面で平坦な振動変位分布を得ようとするの変位を指定する点がかなり多くなることも予想されるから、最適化手法の場合ほど深刻ではないが、これは厄介な問題である。そこで筆者は有限要素法における離散定式化の手法を利用した簡便な計算手法を提案する

多点強制駆動により調和的に振動させられる無損失の弾性振動体の運動方程式は、有限要素法においては以下のように離散定式化される⁽³⁾。

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1-4)$$

ここで $\mathbf{M}$ 及び $\mathbf{K}$ はそれぞれこの系の質量及び弾性マトリクス、 $\mathbf{u}$ 及び $\mathbf{f}$ は変位ベクトル及び駆動力ベクトルである。

角周波数 ω は与えられるから $\mathbf{A} = -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}$ とおけて式 (1-4) は

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1-5)$$

と簡単に書き直すことが出来る。

ベクトル $\mathbf{u}$ と $\mathbf{f}$ は $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_d, \mathbf{u}_o)$ 、 $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_s, \mathbf{f}_d, \mathbf{f}_o)$ のように各々三つの部分に分けて考えることが出来る。ここで添え字の s 、 d そして o は弾性体の、変位が指定される点、駆動点及びその他の点をそれぞれ表している。もちろん $\mathbf{u}_s$ と $\mathbf{f}_d$ は同じ次数のベクトルである。そうすると、 $\mathbf{A}$ もそれに従って分割することが出来て、(1-5) 式は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ss} & \mathbf{A}_{sd} & \mathbf{A}_{so} \\ \mathbf{A}_{sd} & \mathbf{A}_{dd} & \mathbf{A}_{do} \\ \mathbf{A}_{so} & \mathbf{A}_{do} & \mathbf{A}_{oo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_d \\ \mathbf{f}_o \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

のように書ける。 $\mathbf{f}_s = \mathbf{0}$ 及び $\mathbf{f}_o = \mathbf{0}$ とおいて全ての未知数を左辺に移項すると、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{sd} & \mathbf{A}_{so} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{A}_{dd} & \mathbf{A}_{do} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{do} & \mathbf{A}_{oo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_d \\ \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{ss}\mathbf{u}_s \\ -\mathbf{A}_{sd}\mathbf{u}_s \\ -\mathbf{A}_{so}\mathbf{u}_s \end{pmatrix} \quad (1-7)$$

を得る。この式を $\mathbf{f}_d$ 、 $\mathbf{u}_d$ 及び $\mathbf{u}_o$ について解いてやりさえすれば、振動モード制御に必要な駆動力とそのときの全体の振動モードをいっぺんに求めることが出来る。こうなると、我々はもはやGreen関数の形を駆動点毎に陽な形で求めることにわずらわされることはなく、計算上の問題は駆動点の個数に拘らずここに解消する。もちろん、一般的な非線形最適化手法などとは異なり、計算は常に有限回数で終了するから、収束性の吟味などは不要である。

もっとも、(1-7) 式を構成しこれを解くためには、その計算量の多さや必要な記憶容量の大きさから、大型計算機を用いなければならない。通常の有限要素解析システムにおいては、ここで述べたような計算を行うための機能はサポートされていないため、本研究では上の計算を実行するための簡単な有限要素解析システムを自作した(付録3参照)。

ここでこの計算手法の利点を整理しておこう。

- (1) 駆動点、振幅を与える点ともに自由に選べる。
- (2) 画面表示と組み合わせれば、直感的な方法で振動系が設計できる。
- (3) 固有値計算を繰り返して形状の最適化を行うわけではなく、一組の連立一次方程式を解くだけであるから、計算が容易であり、計算時間も短くコストを低くできる。
- (4) 一回の計算で全部の駆動力と振動モードが分かる。

これらの利点は殆ど自明なものばかりだが、(2) については第2章で再び具体的に述べる。

次の節では、こうして計算で求められたリアクティブな駆動力を、前節で述べたような付加振動体によって如何に物理的に実現するかについて議論する。

1-5 付加振動体によるリアクティブな駆動力の物理的实现方法

力係数や共振周波数、共振鋭度（ Q ）等の物理的性質が殆ど同じ電気機械振動変換器を得ることは実際上はきわめて困難である。従って、もし多数の変換器を用いたシステムを振動モード制御に用いようとするれば、我々はそれらの物理定数の違いからくる問題に直面せざるを得ない。具体的には、変換器が与える駆動力の、大きさや位相の違いを補正しなければならないのである。

対象としている系の振動エネルギーの消散を考えなくてもよい場合は、既に述べたように、振動モード制御に必要な駆動力はリアクティブなものである。幸いにして、ほとんどの超音波振動工具は損失の少ない金属で作られており、消散なしの条件は事実上満たされていると考えてもよい。この事実を利用すれば、実質的に同じ物理的性質を持った等価駆動力源が実現できる。

例えば、Fig.1-3に示す様な特定の周波数で強制的に縦振動させられている損失なしの片端自由の金属棒を考えてみよう。駆動力はもう一方の端に加えられるものとする。図に示した棒内の応力及び変位分布から、この棒の長さを変化させることで駆動端において任意の大きさのリアクティブな機械インピーダンスを実現できることが分かる。これは、駆動端に曲げモーメントが働かないという条件の下でなら、振動系に接続されたこうした棒がリアクティブな駆動

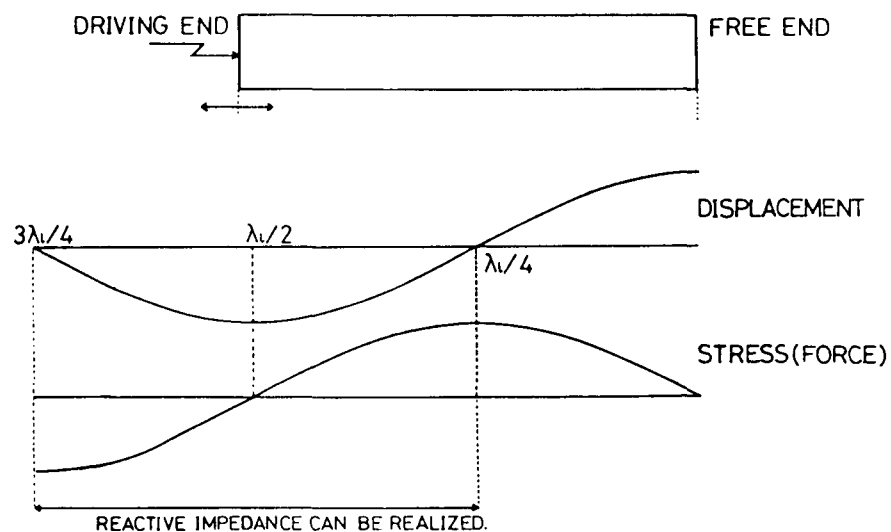


Fig.1-3 Principle of physical realization of reactive force using a bar in longitudinal vibration.

力源とみなせるということに他ならない。そこで本研究では、こうした棒を駆動力源として採用し、棒内にとどまる縦波の定在波にちなんでこれをウェーブトラップトホーンと呼ぶことにした。

もし、制御したい弾性振動系の駆動点において振動方向が駆動力のそれと一致するなら、一次元波動近似の下で波動方程式の境界値問題を解くことで、その系に接続すべきウェーブトラップトホーンの長さは簡単に求めることが出来る（付録4参照）。

一様断面のウェーブトラップトホーン長さ L を求めてやると、

$$L = \frac{1}{k} \tan^{-1} \left(\frac{F_1}{U_1 k Y A_0} \right) + \frac{\pi}{k} \quad (1-8)$$

となる。ここで、 k は波数で、

$$k = \omega (\rho / Y)^{1/2} \quad (1-9)$$

で表される。 F_1 は駆動力、 U_1 は駆動点における変位、 A_0 はホーンの断面積、そして Y と ρ はそれぞれ使われている材料のYoung率と密度である。

ホーンの断面積はその長さ方向に一様である必要はないから、エクスポネンシャルに断面積の変わるウェーブトラップトホーンを上述の考え方にしたがって設計することも出来る。理論的には、如何なる損失なしの弾性体も、制御したい系の駆動点におけるのとおなじ大きさで位相差 180 度の機械インピーダンスを持つものであれば、リアクティブな駆動力源として用いることが出来る。ウェーブトラップトホーンはそうした付加振動体のうちの特殊なものとも考えることも出来る。

こうして設計されたホーンを制御したい弾性振動体に接続してやれば、Fig. 1-1に示した様にその接合部には必要なリアクティブな駆動力が働き、目的の振動変位分布が形状の与えられた表面で実現されることになる。そして、そのようにして組み立てられた系全体としては外部とのエネルギーのやり取りはなく、これはまさしく1-3節で述べた共振系の「構成」になっている。つまり、強制振動させられる多数の駆動点を持つ弾性振動系及び複数の付加振動体の組合せによって、予め与えられた要求に答える共振系を組み上げることが出来たわけである。これは見方をかえれば、その表面の一部で与えられた振動変位分布を実現する共振系を設計する逆手法とも考えることが出来る。

当然のことながら、実際には如何なる振動系でも多少は振動エネルギーの消

散があるから、外から振動エネルギーを補ってやらなければならない。従って、原理的には、この手法を用いて要求を満たす共振系を構成した後、それを適当な電気機械振動変換器などを用いて駆動してやることになる。

1 - 6 本手法の適用限界

本手法はきわめて一般性の高い共振系の振動モード制御の手法であるが、如何なる振動系に課せられた如何なる振動変位分布に関する要求にも答えられるというものではない。本手法に本質的な適用限界が存在する。これまでの議論でそれは十分明らかだが、ここでもう一度まとめて述べることにする。

まず、本手法を支えるもっとも大きな仮定は、定められた駆動点において振動変位の方向と必要な駆動力の方向がほぼ一致しているということである。そうでないと、縦振動するウェーブトラップトホーンによっては必要な等価的駆動力を得ることが出来ない。もちろん、特殊なモードで振動する損失のない弾性体を付加振動体として接続することでそうした力を発生させることは、不可能ではないだろう。しかし、問題が複雑になり実用的ではない。言い替えれば、上の条件を満たさないような振動変位分布に関する要求には答えられないということであり、逆にそうした条件を満たすような工夫が制御される弾性振動体の側に必要だということになる。

次に上で述べたこととも関連するが、ウェーブトラップトホーンは正しく縦振動をしなくてはならない。曲げ振動（ベンディング）などが励起されれば、ホーンの接続された駆動点に不要な力が生じ、振動モードを乱す可能性がある。従って、制御したい弾性振動体からの曲げモーメントの伝搬を極力抑えるような工夫を、その振動体及びウェーブトラップトホーン自身に施す必要がある。例えば、駆動点で振動変位と駆動力の方向が一致するような振動体の形状を選ぶこともその一つである。

以上が理論上、本手法に本質的な適用限界である。次の章では実際の振動モード制御の具体的な適用として、本研究の主たる目的であるスリット付き大型超音波振動工具の同相縦振動のモードに関する実験を行い、その原理的な有効性を確かめることにする。

第2章 低振幅駆動時の振動モード制御実験

2-1 概説

第1章で述べたウェーブトラップトホーンによる振動モード制御手法の原理的な有効性を確かめるため、いくつかの実験をスリット付き大型超音波振動工具について行った。それら実験によって、振動工具の低振幅駆動における本手法の有効性が概ね確認出来ると同時に、本手法におけるいくつかの実用上の問題点が浮かび上がってきた。一つにはホーンに不要な曲げ振動が励起されると工具の振動モードの乱れることであり、もう一つはホーンの長さの僅かな変化にたいして振動モードが大きく変化する可能性があることであった。これら問題点の具体的な解決は後の章に譲ることにする。

2-2 実験の目的

ここでの実験の目的は、第1章で述べた振動モード制御の原理的な有効性を確かめることにある。そのため、序章で述べたように超音波プラスチック溶接によく用いられるスリット付き大型超音波振動工具を実験の対象とし、その波長に比べて幅の広い放射面における鉛直方向の振動変位分布を平坦にすることを試みた。実際のプラスチック溶接では、振動工具の振幅が場合によっては数十 μm に達するが、ここではあくまで原理的な有効性の確認を目的とすることから、実験に伴う機械的強度等の実際上の問題を簡単にするため、最高 $0.5 \mu\text{m}$ 程度に振幅を抑えた実験を行なった。そして、それらの結果を踏まえて実用化に関わる問題点を整理する。次の節では、実験装置と数値計算及び実験の手順を、一つの超音波振動工具を例に取って具体的に説明してゆく。

2-3 実験装置と計算及び実験手順

Fig. 2-1に、この章の実験で実際に使用したアルミニウム製のウェーブトラップトホーンの全ての形状を示す。それらホーンの振動系に接続される側の先端はテーパもしくは段差がつけられており、系との接触面積をなるべく小さくするように工夫されている。これは、計算においては駆動力が弾性振動体の表面の幾つかの点に加えられると仮定されているためであるが、工具からホーンへの曲げモーメントの伝搬を防ぐ意味もある。ホーンは交換が容易なように小

小さな真鍮製の結合ネジ（直径 5 mm、メートル並目）で制御すべき振動系に接続されるようになっている。小さなネジを用いたのは、その質量を振動モード制御の計算では考慮していないため、不要な慣性力の影響をなるべく小さくしたかったからだ。もちろんこうした細いネジでは、実際のプラスチック溶接の場合の様な大振幅での駆動には耐えられない。

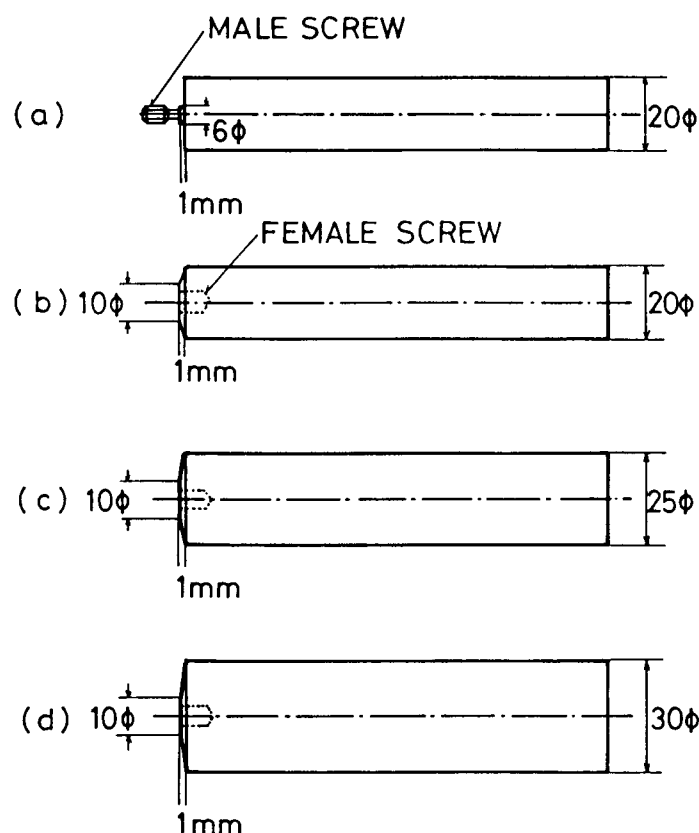


Fig.2-1 The types of wave-trapped horns used in the experiments of low amplitude operation.

Fig. 2-2 は実験の対象となった幾つかのスリット付きの超音波大型振動工具のうちのひとつを示している。材料はホーンと同じアルミニウム（Young率 $6.85 \times 10^{11} \text{ dyne/cm}^2$ 、Poisson比 0.34、密度 2.7 g/cm^3 ）で、工具の高さは $\lambda_1/2$ 即ち 20 kHzにおける細棒内の縦振動の半波長（約 12.6 cm）になっている。工具の各駆動点には振動子やホーンの接続のために直径 5 mm 深さ 11 mm 以下のネジ穴が設けられている。他の実験との比較のため、工具形状を表す三つのパラメータ即ち柱の幅 W 、スリットの幅 S 、橋部の厚み T を定めた。以下、この工具を例にとって、ウェーブトラップトホーンを用いた超音波振動工具のモード制御に関する実験の手順を具体的に説明してゆくことにしよう。

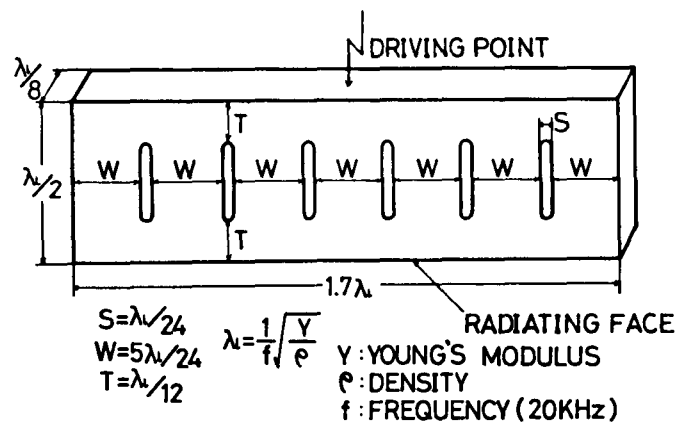
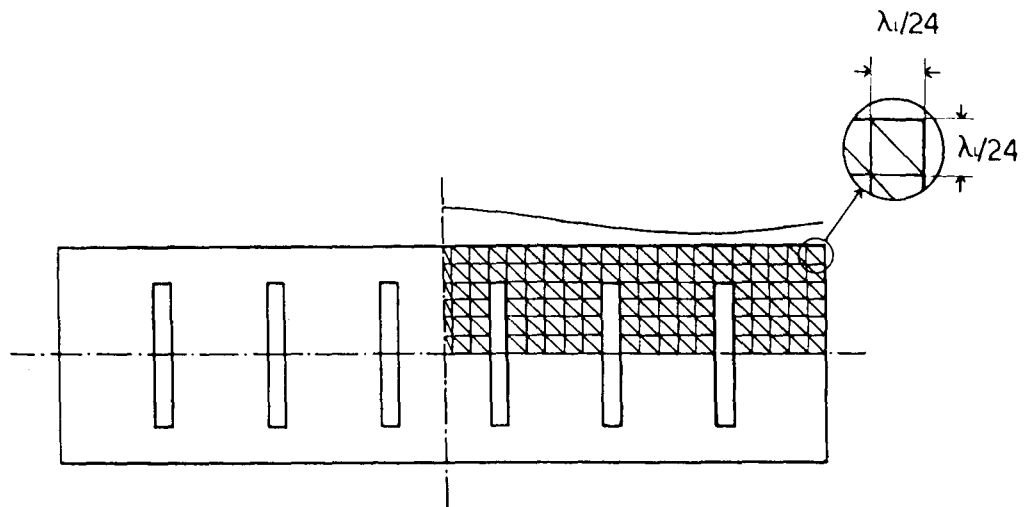


Fig.2-2 One of the tools for which the method was examined.

まず最初に、シミュレーションによってこの工具の放射面で同相の縦振動変位分布を与える固有振動モードを探す。工具の厚みが $\lambda_1/8$ と波長に比べて小さいことからこれを平面応力系と見なし、Fig. 2-3に示す様な有限要素表示でその振動モード解析を行った。ここで、2つの直角二等辺三角形からなる正方形は $\lambda_1/24 \times \lambda_1/24$ の大きさであり、実用的には十分な精度で解析が出来ると見なせる大きさになっている⁽⁴⁾。この有限要素分割の仕方はこの後述べる全ての場合に関して同様である。解析は工具の対称性から全体の四分の一の部分について行った。工具の寸法から予想されるように19 kHz付近の周波数にめざすモードが見つかった。この時の放射面での振動変位分布を、やはりFig. 2-3に実線で示す。その最大振幅と最小振幅の比はこの場合36.7%に過ぎない。

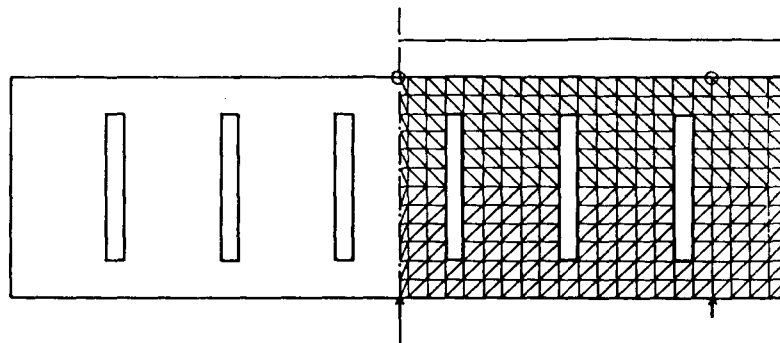
次に、第1章で述べた方法を用いて、放射面における平坦な振動変位分布を、その同相縦振動のモードの共振点付近の周波数で実現することを考える。Fig. 2-4は、そのモード制御の計算に使った工具の有限要素表示である。上と同じ有限要素を用いているが、共振時の振動モードを調べたときと異なり、計算は工具の半分について行っている。そして、図中の小さな円で囲まれた点における鉛直方向の振動変位が等しくなるよう、その直下の矢印で示す駆動点に加えられるべき力を系全体の振動モードと共に算出した。

そうした設定を選んだ理由は、有限要素解析システムが画面表示した同相縦振動の固有振動モードで、これらの点での鉛直方向の変位の値が大きく異なっていたことから、それを矯正してやろうと考えたためである。以後本研究では特に断わらない限り、変位を指定する点（駆動点）の選択はこの工具の場合と同様な直感的方法で行っている。なお実験においてホーンに曲げ振動が励起され



NATURAL FREQ.≐19.05 KHz

Fig.2-3 The finite element representation of the tool for finding the resonance mode. The solid line shows the amplitude distribution at the radiating face of the mode.



DRIVING FREQ.=19.05 KHz

Fig.2-4 The finite element representation of the tool for the calculation of driving forces. The values of displacement are the same at the points surrounded by the circles. The arrows indicate the driving points.

るのを防ぐため、各駆動点は横方向の振動が小さくなることを確認して選んでいる。また駆動周波数はその付近でなるべく平坦な振動変位分布が得られるように設定している。計算の結果、Fig. 2-4に実線で示す様に放射面での最大振幅と最小振幅との比は、適当な長さのウェーブトラップトホーンをこの工具に着けることによって、約92%にも達することが予測された。

そこで Fig.2-5で示すように、Fig. 2-1(d)のタイプのウェーブトラップトホーンによって工具の両側の駆動点にリアクティブな力を加え、一個のボルト締めLangevin型振動子（日本特殊陶業製 D4420PC、直径40mm、20kHz用）で中央の駆動点を駆動する実験を行った。このLangevin型振動子の先端には、Fig.2-6に示すように直径16mmの結合ネジでアルミニウム製のアダ

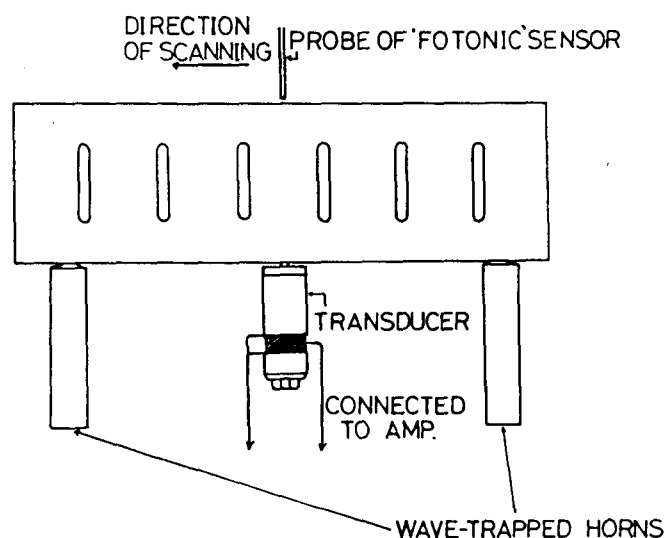


Fig.2-5 The experimental setup and the method for measuring the normal amplitude distribution at the radiating face of the tool.

プタが取り付けられているが、これは振動子と組合わせたものの共振周波数を計算時の駆動周波数に近づけ、その駆動点での機械インピーダンスを無視できる程度に抑えるとともに、工具との接触面積を出来るだけ小さくする役割を持っている。言い替えれば、振動子を純粋な駆動力源と見なせるようにするための工夫である。ただし実験では、組上がった振動系全体の実際の共振周波数で駆動した。

Langevin型振動子は、出力インピーダンスが無視できる程度に小さいトランジスタ電力増幅器（ケンウッド L-16M: 55 Hzでの出力インピーダンス $4 \times 10^{-4} \Omega$ 以下）につなぎ、その増幅器の入力に接続されたCR発振器の交流信号を増幅して振動子の電極に加えている。その駆動電圧は2ないし3Vである。そして振動子に加える駆動電圧を一定にした時の入力電流が最大となる

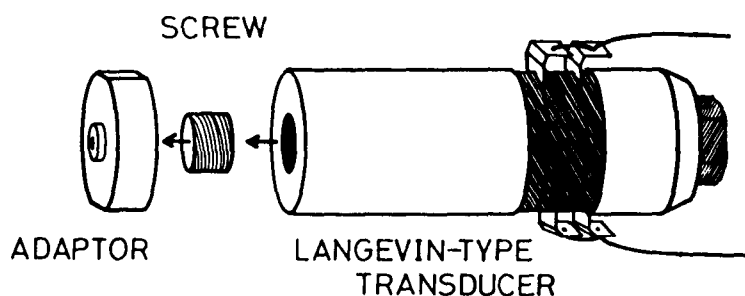


Fig.2-6 The Langevin-type transducer and the adaptor for resonance adjustment.

周波数を、系全体の共振周波数とした。こうした条件の下での共振時の放射面における振動振幅の最大値は、 $0.5\mu\text{m}$ (尖頭値) 越えることはない。従って、上述のような細いネジを用いても、機械的な強度の点で問題はない。

もちろん厳密に言えば、中央の駆動点に働く力も適当な長さのウェーブトラップトホーンを用いて実現し、全体として完全な共振系を構成してから、それを能動的な電気機械振動変換器で駆動すべきであろう。しかしながら、中央の力は他の力と比較して一般にその大きさが小さいことから、上述のアダプタをつけたLangevin型振動子で駆動しても、理想的な場合と比較して系全体の共振周波数はたいして変化せず、差し支えはないと考えられる。これは駆動周波数を工具の同相縦振動のモードの共振周波数付近に設定しているためであろう。

放射面の振動変位分布は商標でフォトニックセンサ (Fotonic Sensor) と呼ばれる光学的微小変位計を用いて測定した。この微小変位計は、その光ファイバが束ねられたプローブの先端を測定物体表面に垂直に近づけたときそこに出て来る小さなギャップの変化を、先端から測定点に入射した光の反射光量の変化から検出するものである。だから、測定したい物体の表面の反射率の変化に対する入力特性の校正がその度に必要で、実験でも各測定点毎に校正を行っている。各測定点は有限要素解析における節点に対応するように選んだ。

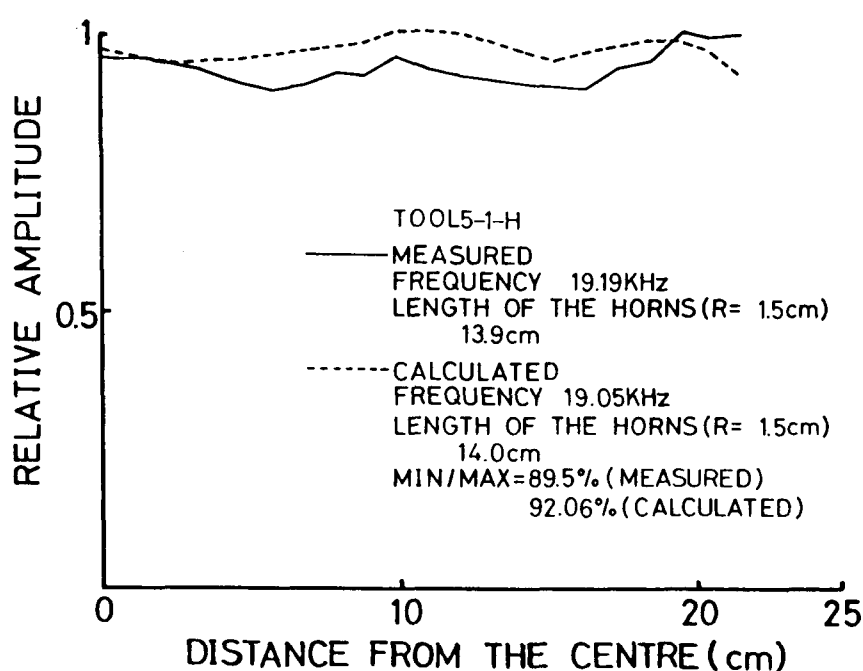


Fig.2-7 The comparison between the predicted result in the calculation and the final experimental outcome with respect to the amplitude distribution, natural frequency and the length of wave-trapped horns of the type(d). R represents the radius of wave-trapped horns.

また実験では、ウェーブトラップトホーンの長さを調節することで、駆動点に加わるリアクティブな力を調節し、計算で予測された放射面での振動変位分布になるべく近いものを実現するようにしている。ホーンの長さ調節は専ら同型のホーンで長さが少しずつ異なるものをたくさん用意し、それらを付け替えることで行った。

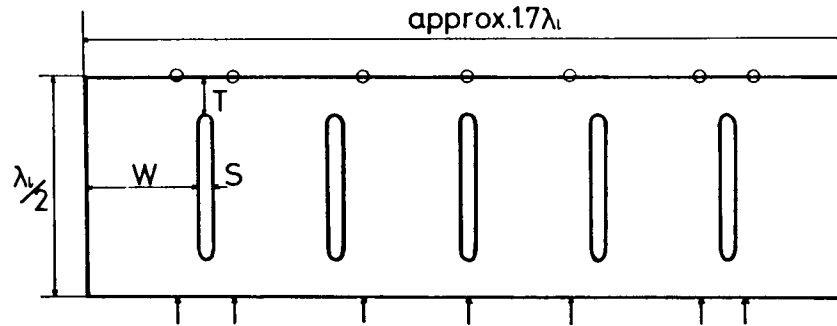
Fig. 2-7に計算での予測と最終的な実験結果との比較を示す。振動変位分布のグラフは各点について2回ずつ振動変位の大きさを測定し、それを平均した値を示している。振動変位分布、共振周波数、そしてホーンの長さのいずれについても、良く似た結果が得られていることが分かる。図中の補間は、グラフを見易くするためのものであり特に意味はない。

以上、実験装置の概要と一連の計算及び実験手順のあらましを一つの工具を例に取って具体的に説明した。次節以降では、同様な実験を多くのスリット付き大型超音波振動工具について行った結果と、そこから分かってきた幾つかの実用上の問題点を説明する。

2 - 4 実験結果

同一の工具について駆動点の個数（即ちウェーブトラップトホーンの本数）を変えながら、上の場合と同様(d)のタイプのホーンを用いて振動モード制御の実験を幾つか行った。Fig. 2-8及び2-9は、振動系の平面構成とその放射面における鉛直方向の振動変位分布、ホーンの長さ及び共振周波数に関する計算と実験の結果を比較したものである。この工具の厚み及び放射面の幅はFig. 2-2の工具と全く同じで、スリットの本数のみが異なる。なお、本研究で実験の対象となった工具の厚みはすべて $\lambda_1/8$ に統一されている。図中の丸印及び矢印の意味は、Fig. 2-4と同様それぞれ垂直方向の変位を等しく指定する点及び駆動点を示しており、それらの設定の仕方も前に述べたのとおりである。グラフ上の各振動変位の値も上の場合と同じように、各点毎に2回ずつ測定したものの平均値を示している。

Fig. 2-8は中心のものを含めて駆動点が七つ、Fig. 2-9は五つである。中心部の駆動点にはやはりアダプタをつけたLangevin型振動子を配し、両側の駆動点に与えるべき駆動力はウェーブトラップトホーンで与えるようにした。いずれの場合も計算と実験の非常に良い一致が見られる。ただ後者の場合は、ホーンの長さを少し調節するだけで振動モードが大きく変化し、ここに示した結果を得るまでに少なくとも5回以上の調節を行わなければならなかった。それに対してFig. 2-8の場合は、計算値の長さのウェーブトラップトホーンを付けただ



TOOL4-1-B

$$S = \lambda_L / 24$$

$$W = \lambda_L / 4$$

$$T = \lambda_L / 12$$

NUMBER OF
DRIVING POINTS=7

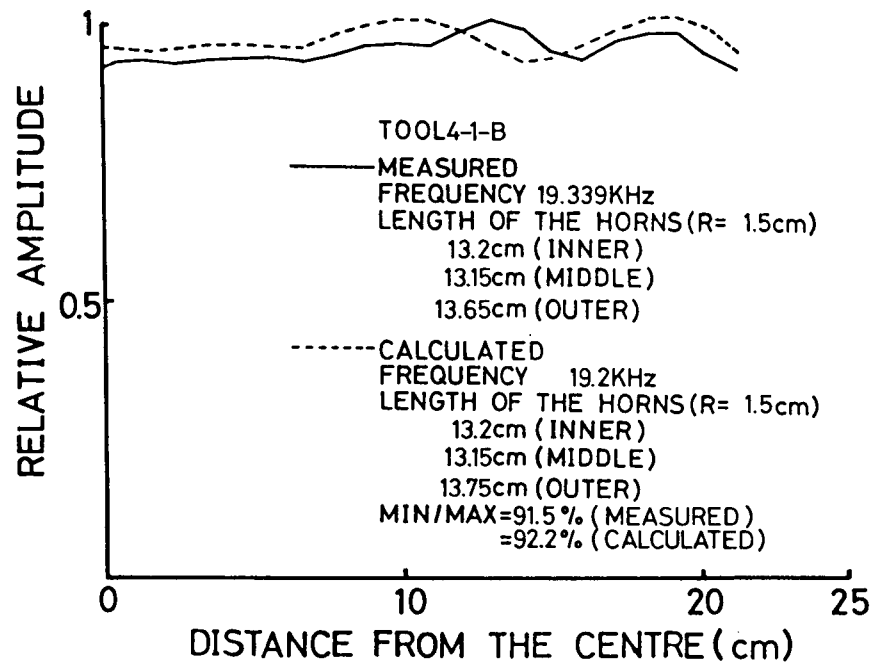
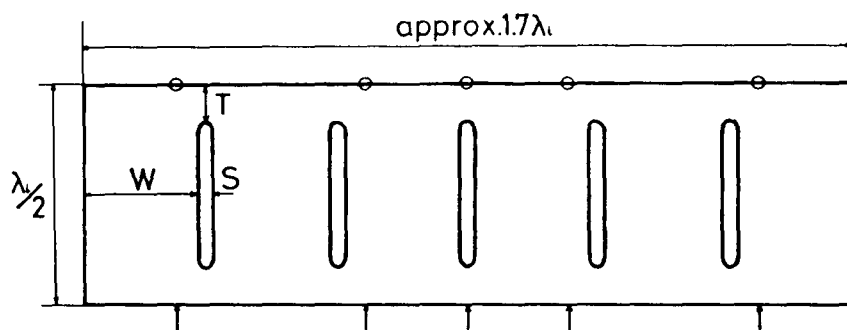


Fig.2-8 The plane configuration of the vibrating system including a 5-slot tool for which the method was examined and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 7.



TOOL4-1-B
 $S = \lambda/24$
 $W = \lambda/4$
 $T = \lambda/12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=5

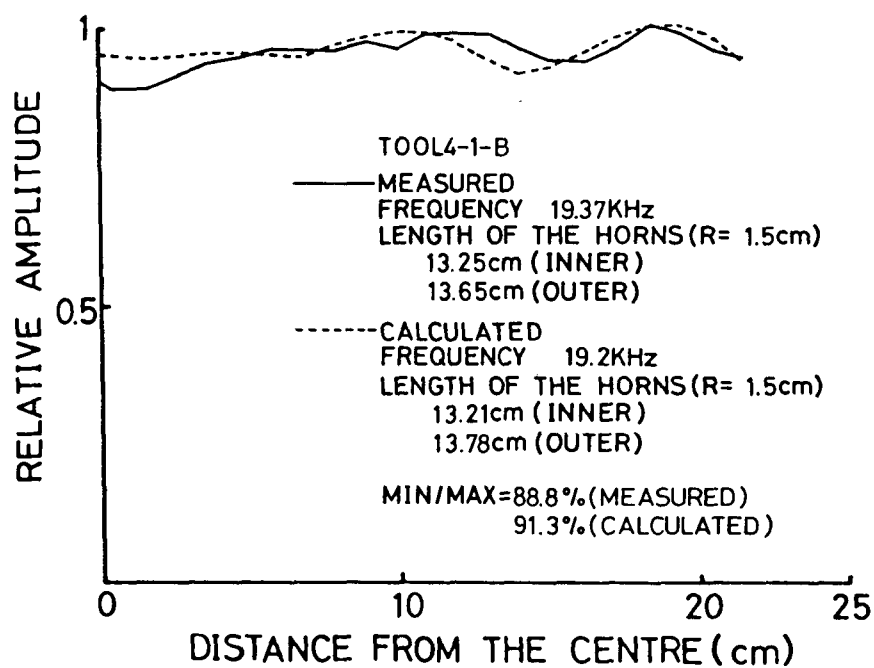


Fig.2-9 The plane configuration of the vibrating system including the same 5-slot tool as shown in Fig.2-8 and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 5.

けで、ほぼここに示したのと同様な結果を得ており、ホーンの長さの調節も最外側のホーンについて一回だけ行ったに過ぎない。ホーンの長さの誤差も前者の方が小さくなっている。

そこで、駆動点の数をFig. 2-10に示す様に三つに減らして実験を行ったところ、振動モードがホーンの長さ変動に対して極端に不安定で、ごく僅かホーンの長さを調節しただけで放射面での振動変位分布は大きく波うつように変化し、計算で予測されたような分布を実現することが出来なかった。

上の三つの場合について、Fig. 2-1に示した他のタイプのウェーブトラップトホーンも使って実験してみた。すると、いずれの場合もホーンの長さをいくら調節しても、計算されたような結果を得ることが出来なかった。しかも振動モードはホーンの長さに対して不安定ではなく、調節を行っても振動モードが急変するようなことはなかった。この結果はFig. 2-10の場合とは明かに異なると考えられたため、タイプ(c)のホーンとタイプ(d)のホーンについて、その側面に垂直な方向の振動変位分布をその長さ方向に沿ってフォトニックスンサで測定し、比較してみた。その結果がFig. 2-11である。図で縦軸は変位の絶対値を表していることに注意されたい。タイプ(d)のホーンでは殆ど振動が検出されないのに対して、タイプ(c)では大きくたわんでいる。このことから、明かに細いホーンには曲げ振動が励起されてしまっていることが分かる。

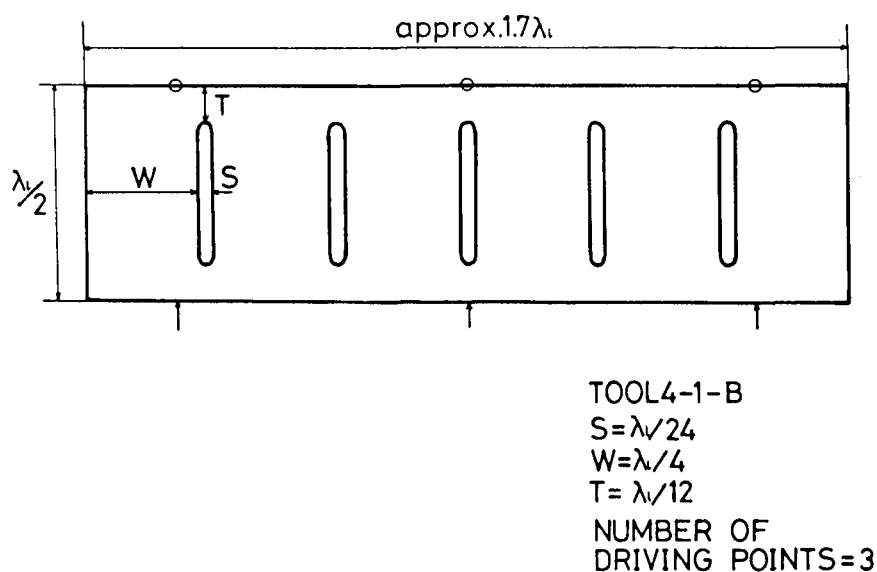


Fig.2-10 The plane configuration of the vibrating system including the same 5-slot tool shown in Fig.2-8 with only 3 driving points.

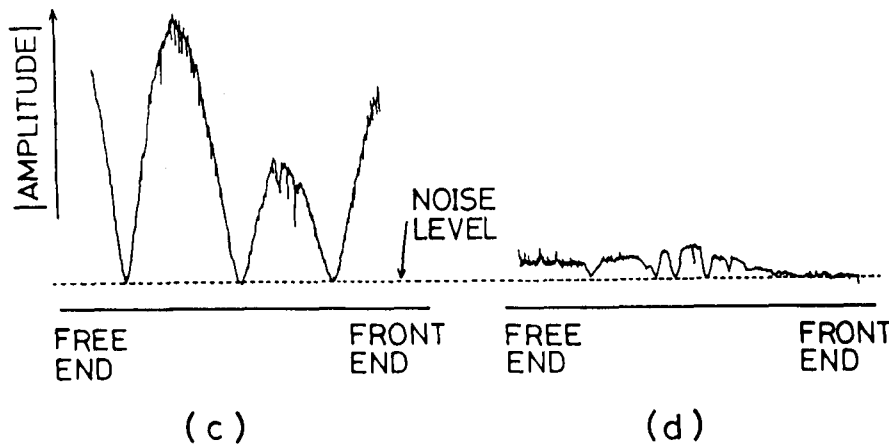
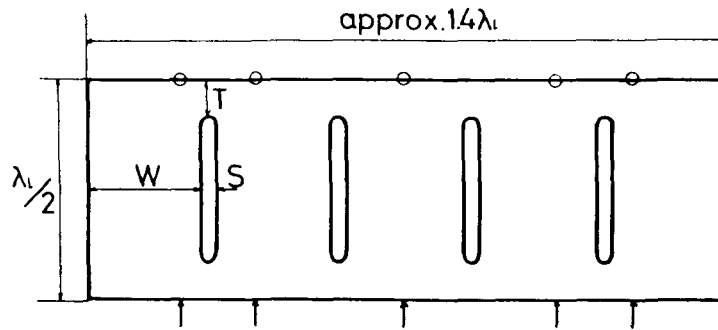


Fig.2-11 The amplitude distributions on the sides of the horns of the types (c) and (d) used for the modal vibration control of the tool shown in Fig.2-8.

もう少し小型の工具ではどうだろうか。Fig. 2-12とFig. 2-13に二つの例を示す。ここではタイプ(a)の細いウェーブトラップトホーンを使っているにも拘らず、良好な結果を得ていることが分かる。そこで振動モード制御の計算における駆動点の横方向の変位を調べてみたところ、いずれも上の場合と比較して小さな値となっており、曲げ振動が励起されにくくなっていることが判明した。Fig. 2-12とFig. 2-13の工具の違いは、後者の橋部の厚み T が、前者のそれより $\lambda_1/24$ だけ大きくなっていることだけである。橋部の厚みの薄い方がウェーブトラップトホーンの長さに関しては誤差が小さくなっていることから、横方向の結合振動の影響が、本振動モード制御手法において重要なことが分かる。また、これらの場合においてはホーンの長さの誤差が上の場合と比べて大きいように見えるが、式(1-8)から分かるようにホーンの断面積 A_0 が小さくなると駆動力 F_1 の計算上の僅かの差がホーンの長さ L の値に大きな影響を及ぼすことになることから、駆動力に換算した誤差はそれほど大きくはない。

次に形状パラメータの異なる二つの場合について、その結果を Fig. 2-14と Fig. 2-15示しておく。これらはいずれもタイプ(d)のウェーブトラップトホーンを用いた場合であるが、結果は余り芳しくない。つまりFig. 2-10の場合程ではないにしろ、やはりホーンの長さの変化に対して振動モードが敏感に変化するため、その調節によって計算で期待されたような結果を実現することが出来ないのである。

いずれの工具の場合も、放射面での最大振幅は高々 $0.5 \mu\text{m}$ 程度であり、実験の再現性は良好で、ウェーブトラップトホーンの頻繁な取り替えによる結果の違いは見られなかった。



TOOL3-1-B
 $S = \lambda_i / 24$
 $W = \lambda_i / 4$
 $T = \lambda_i / 12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=5

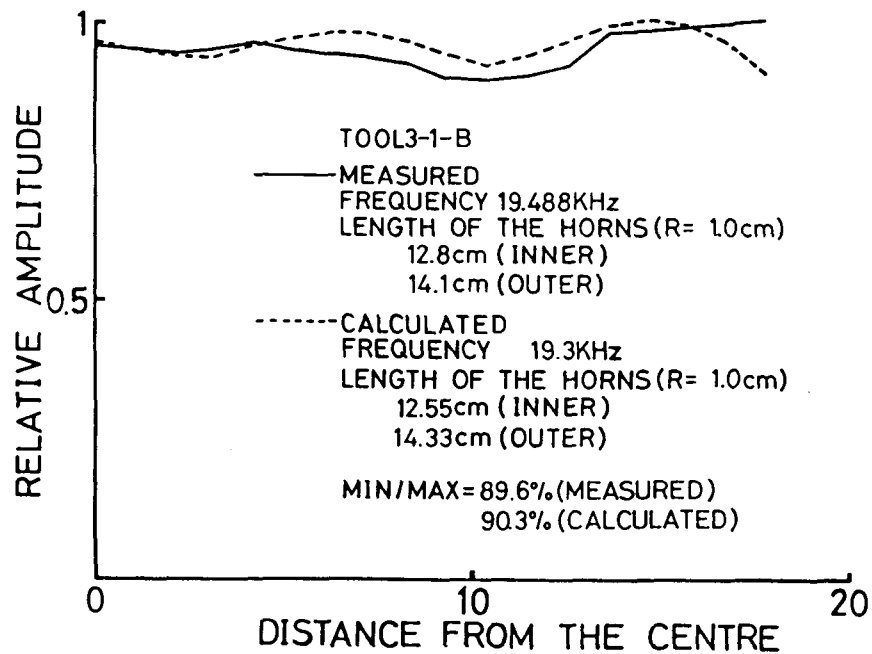
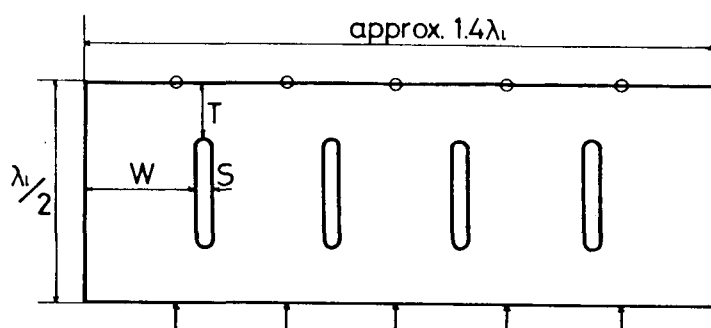


Fig.2-12 The plane configuration of the vibrating system including a 4-slot tool for which the method was examined and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 5. The horn type is (a).



TOOL3-1-C
 $S = \lambda_i / 24$
 $W = \lambda_i / 4$
 $T = \lambda_i / 8$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=5

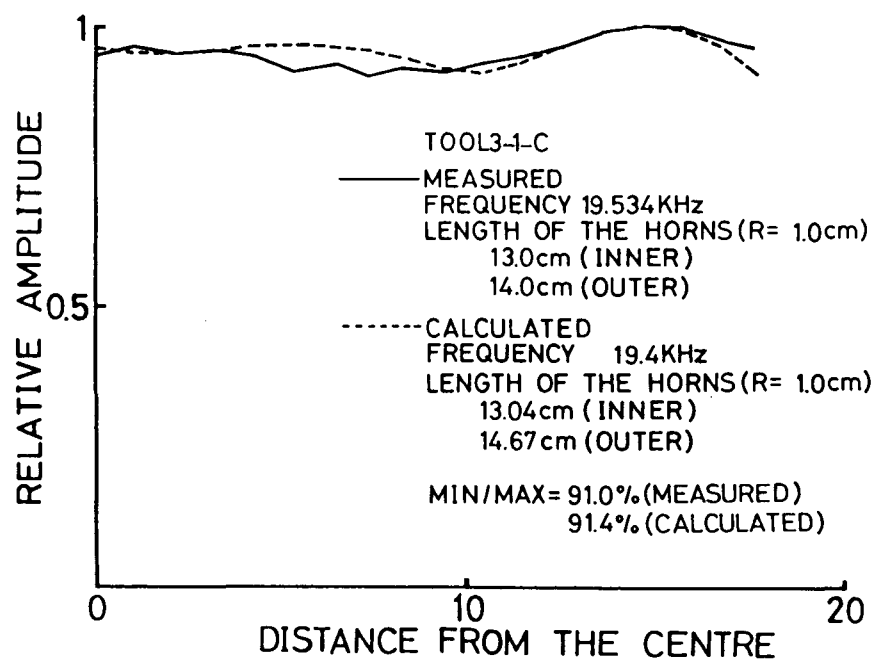
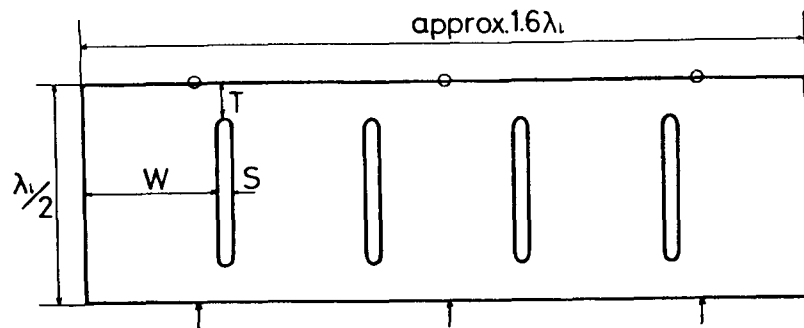


Fig.2-13 The plane configuration of the vibrating system including a 4-slot tool for which the method was examined and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 5. The horn type is (a).



TOOL3-1-T
 $S = \lambda_1 / 24$
 $W = 7\lambda_1 / 24$
 $T = \lambda_1 / 12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=3

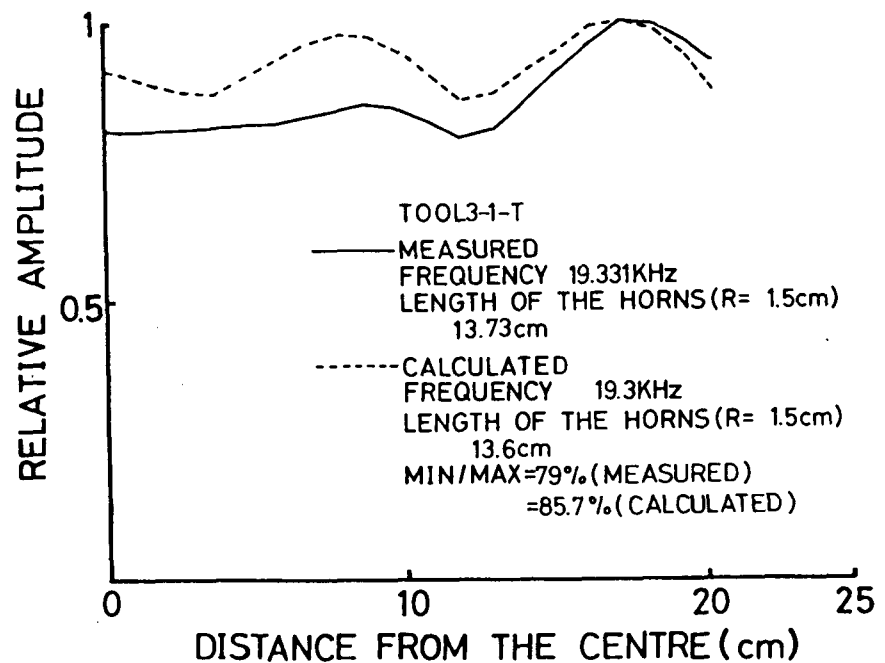
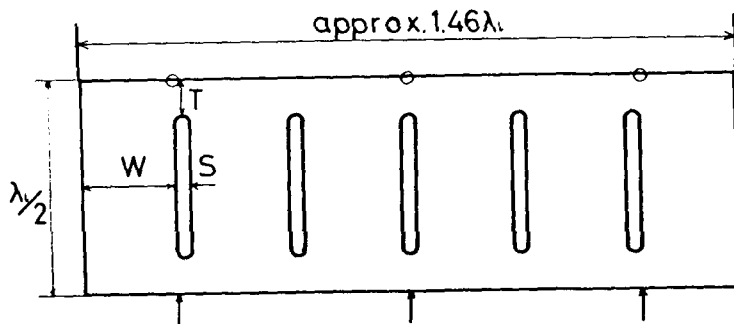


Fig.2-14 The plane configuration of the vibrating system including a 4-slot tool for which the method was examined and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 3. The horn type is (d).



TOOL4-1-H
 $S = \lambda/24$
 $W = 5\lambda/24$
 $T = \lambda/12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=3

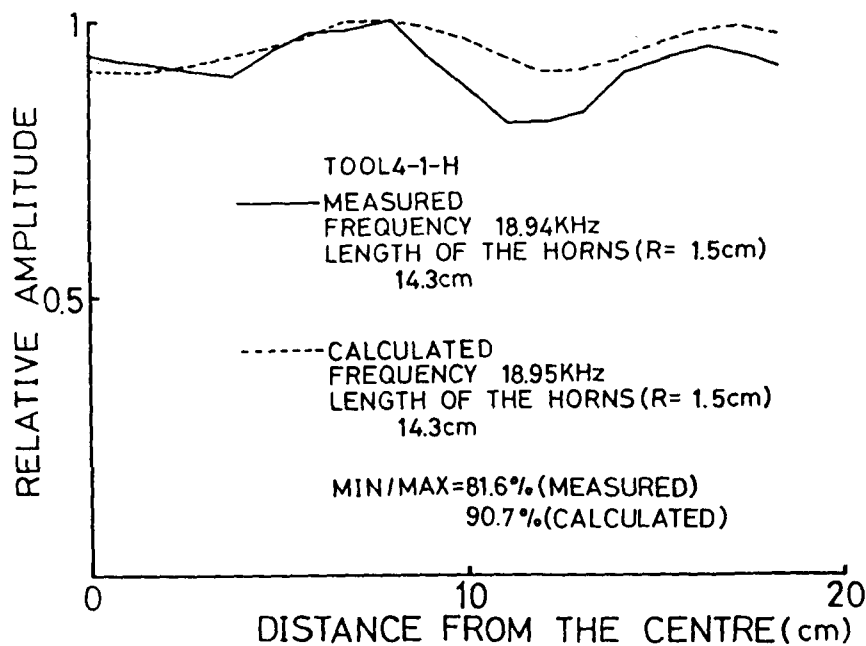


Fig.2-15 The plane configuration of the vibrating system including a 5-slot tool for which the method was examined and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 3. The horn type is (d).

2 - 5 低振幅駆動実験によって明らかになった本手法の実用上の問題点

これらの実験結果から、振動モード制御の手段としての本手法の原理的な有効性は、概ね確かめられたと考えても良いであろう。しかしながら、この手法を実際に使われている超音波振動工具に適用する場合の問題点が、ここで得られた結果から浮かび上がってきたとも言える。

ウェーブトラップトホーンの曲げ振動が振動モードに悪影響を与えることは確かだろう。前の章でも述べたように、本手法ではホーンが単純な縦振動をしているという仮定の下にその設計を行っていることから、これはある意味で当然の結果である。曲げ振動を抑えるには、駆動点における振動変位と駆動力の方向がほぼ一致することが望ましい。そのためには横方向の結合振動を抑圧してやらなければならないから、スリットの存在が重要になってくる。従って、スリットを全く持たないような大型振動工具に本手法を適用することは難しいことが分かる。ただ実験結果によれば、この問題はウェーブトラップトホーンの直径が $\lambda_1/8$ 未満の場合に限られるから、モード制御される工具の形状が適当（スリットが十分狭い間隔で入っている）ならホーンを太くしてやることで解決出来そうである。

いま一つの問題は、ホーンの長さ変動に対して制御の対象としている同相縦振動のモードが極端に不安定になる場合が存在するということである。本手法ではウェーブトラップトホーンの長さを調節することで計算での仮定と現実との隔たりを補正するようになってはいるが、この様な場合その補正は事実上不可能であり、本手法の実用性を考える上で看過出来ない事実である。にもかかわらず、その原因と現実的な解決の方法は一見したところ明かではない。

そこで次の章では、このことを中心に実用上の問題の解決について論じる。これ以後特に断わらない限り、振動モード制御の対象とするのは、ここの実験で扱ったようなスリット付きの大型超音波振動工具の同相縦振動のモードに限ることにする。

第3章 振動モード制御の実用上の諸問題とその解決手法

3-1 概説

ここでは、前の章で明らかになった実用上の問題点に加えて、振動モードの温度安定性に関する考察を行う。その結果幾つかの有意義な結論を得た。まず、ウェーブトラップトホーンの長さ変動に対する同相縦振動モードの不安定性については、その系固有の「不安定性係数」という指標によって計れることを明らかにした。その結果を受けて、不安定性係数を小さくする振動系構成上の工夫についても幾つかの提案を行う。また、金属製の弾性振動体の振動モードが温度変化に対して本質的に極めて安定であることを理論的な考察によって明らかにし、そのことを本手法に即してシミュレーションで確かめた。

3-2 不安定性係数の導入

ウェーブトラップトホーンの長さ変化に対する同相縦振動モードの不安定性が、当該振動系のどのような性質によって決定されるかを定量的に明らかにすることは困難であろう。そこで、振動系の同相縦振動モードの不安定性を表す簡単な数値指標を提案する事を考える。そうすれば、計算によって不安定性を事前に判断出来るわけだから、振動系の構成に関する実用上の問題は解消出来る。ここではそのような数値指標を不安定性係数 (instability coefficient) と呼び、結論を先に述べるなら、これはウェーブトラップトホーンの長さの微小な変化に対する超音波振動工具の放射面での振動変位分布の変動の度合を表す係数である。従って、この値が大きければ大きいほど、振動系全体としてはホーンの長さ変化に対して敏感な系ということになる。以下、不安定性係数をどのように定義するかについて論じることにする。

まず本題にはいる前に、本研究で提案している振動モード制御の手法が、本質的には、その表面の一部に課せられた振動変位分布に関する条件を満足

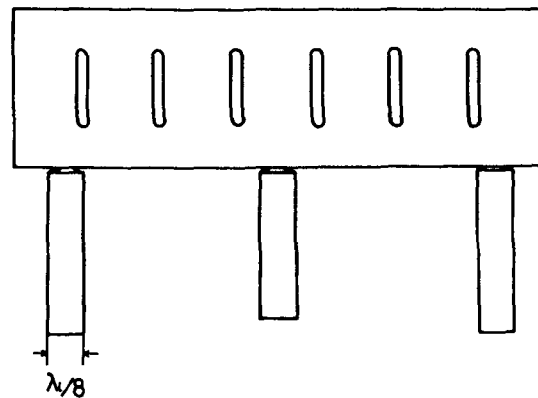


Fig.3-1 The ideal resonator for definition of the 'instability coefficient'.

させるような、エネルギー消散を伴わない弾性共振系の構成であることを再度確認したい。言うまでもなく、現実には系内で消費された振動エネルギーをなんらかの方法で外部から補給してやらなければならないが、ここでは、各々の振動系の同相縦振動のモードの不安定性を判断するべく簡単な指標を定義するため、スリット付きの大型超音波振動工具とその振動モード制御に必要な駆動力を発生するウェーブトラップトホーンからなる、Fig.3-1のような理想的な無損失の共振系を考えることにする。

次に放射面における振動変位分布の平坦さを定量的に評価してやらなければならない。ここでは前の章の実験でのやり方に倣って、放射面での最小振幅の最大振幅に対する比を平坦度と定義する。

既に述べたが、振動モード及びウェーブトラップトホーンの長さの計算において、駆動周波数は通常制御したい工具のホーンを外した時の同相縦振動のモードの共振周波数の付近に設定される。当然のことだが、異なる駆動周波数を設定することは平坦度及びホーンの最適長を変化させることになる。ということは、ホーンの長さの微少な変化に対する平坦度の変化の割合を調べることで、当該モードのホーンの長さの変化に対する不安定性を判断することが実用上妥当だと考えられる。なぜなら、駆動周波数を計算上変化させることでそれらの値を容易に評価出来るからである。

そこで、まず駆動周波数に対する平坦度の変化率を、ある一定の狭い駆動周波数範囲において次のように定義する。

$$Cf = (\text{最大平坦度} - \text{最小平坦度}) / \text{最大平坦度} \quad (3-1)$$

同様にして、ウェーブトラップトホーンの長さの駆動周波数に対する変化率も、

$$Ch = (\text{最大長} - \text{最小長}) / \text{最大長} \quad (3-2)$$

の様に定められよう。但しこれらの定義を一般的なものにするため、上式の計算においては、ウェーブトラップトホーンの太さを $\lambda_1/8$ に統一して考える。これら二つの係数の値は計算を行う駆動周波数範囲によって変わる。ここでは便宜上、工具の設計駆動周波数を中心としてその前後 $\pm 1.0 \sim 1.25\%$ の範囲で周波数を計算上変化させるものとした。既に述べたが、設計駆動周波数は放射面での変位分布の平坦度を最大にするように設定される。注意すべきは、計算上で変化させる駆動周波数の範囲をより広く設定することが、上の二つの係数をより大きくすることである。

ところで、幾つかのウェーブトラップトホーンの対が振動系のモード制御に必要なときが有り得る。そのような場合はもちろん、 C_f の値をそれぞれの対毎に計算しなくてはならない。

さて、以上の約束の下に、全てのホーンの長さが上で定義された周波数範囲の全領域で単調に減少するとき、振動モードのホーンの長さ変化に対する不安定性に関して、以下の値をその指標として用いることにしよう。

$$C_i = C_f / \text{その振動系の中で最も小さな } C_h \text{ の値} \quad (3-3)$$

そして以後、この値を当該振動系の不安定性係数 (instability coefficient) と呼ぶことにする。

ホーンの長さの単調減少領域が中心周波数 (設計駆動周波数) の片側にしか取れない場合は、規格化のため、その単調減少している半分の領域で (3-1) 式の値を計算した後、それを二倍して C_h の値とする。これは、上述のような狭い周波数範囲では、駆動周波数に対してホーンの長さがほぼ線形に減少するという仮定に基づいている。その時、 C_f の値も当然その半分の領域で計算するが、二倍にする必要はない。なぜなら、中心周波数は常に平坦度を最大にするように設定する上、平坦度がその中心周波数に対して概ね線対称に変化するからである。

以上のことについては、後でもう一度具体的な例をあげて説明する (付録5 参照)。重要なのは、不安定性係数 C_i とは、ウェーブトラップトホーンの長さの変動に対する超音波振動工具の放射面での振動変位分布の不安定性を表す指標である、ということである。

3-3 不安定性係数の有意性の実験的確認

不安定性係数が果して物理的に意味を持つか否かについては、実験的に確かめてやらなければならない。幸いなことに、スリット付き大型超音波振動工具の低振幅駆動実験の結果が前章で明かになっているから、そこで得られた経験的な知識を用いてその有意性を確かめることにしよう。

Fig. 3-2から3-9までの図は、第2章で実験の対象となったスリット付き超音波振動工具を含む振動系の平面構成、ホーンの長さ及び平坦度の周波数依存性と不安定性係数の値を示したものである。個々の工具についての検討を行う前に、前の節で説明した不安定性係数の具体的な計算の仕方をFig. 3-2上の図の工具を例に取って説明する。断わるまでもないが、ここでは共振系の構成とし

ての本手法の性質を問題にしているから、Fig. 3-1で示した様に、中心の駆動力をもウェーブトラップトホーンからのリアクティブな力に依っていると考えていることを再度確認しておく。

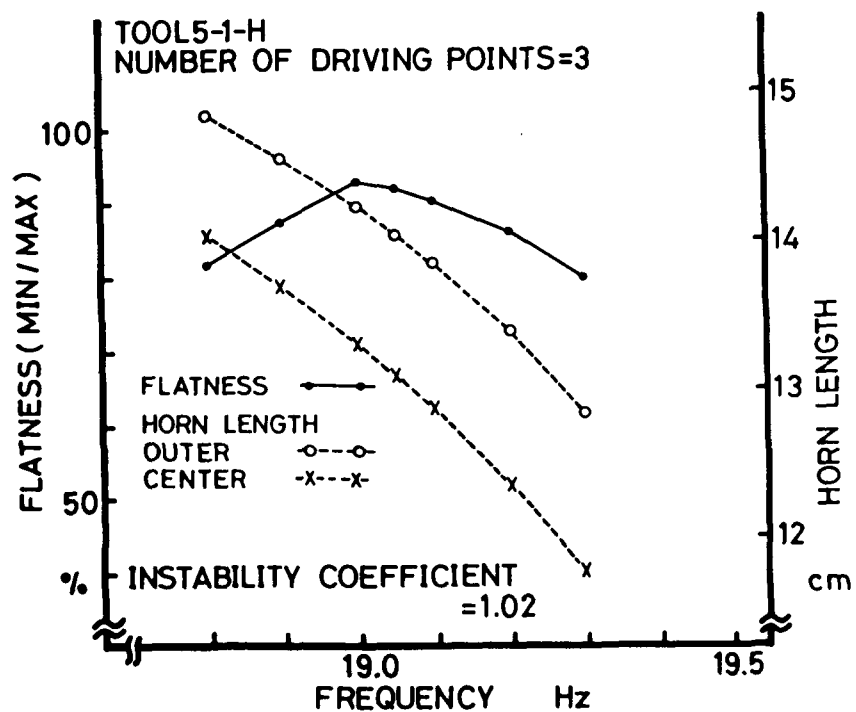
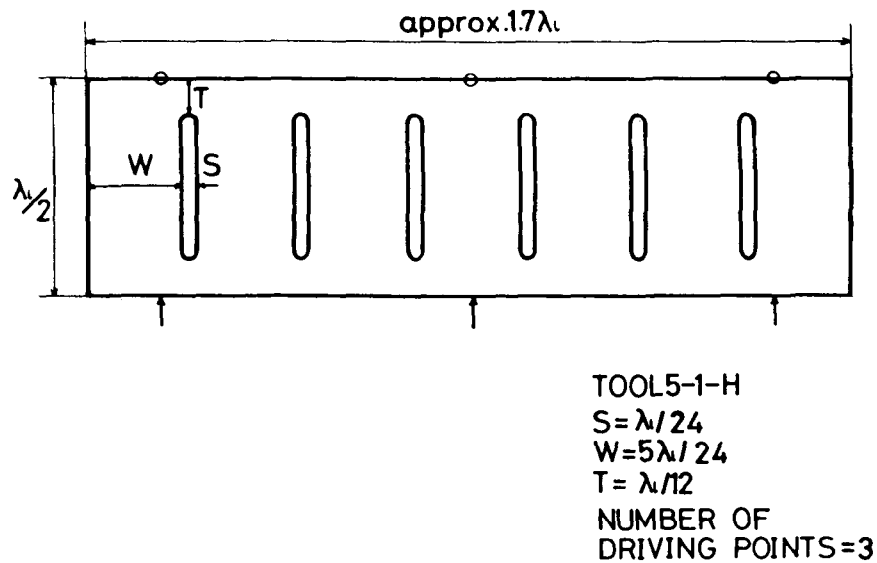


Fig.3-2 The plane configuration of a vibrating system and the evaluation of the instability coefficient for it.

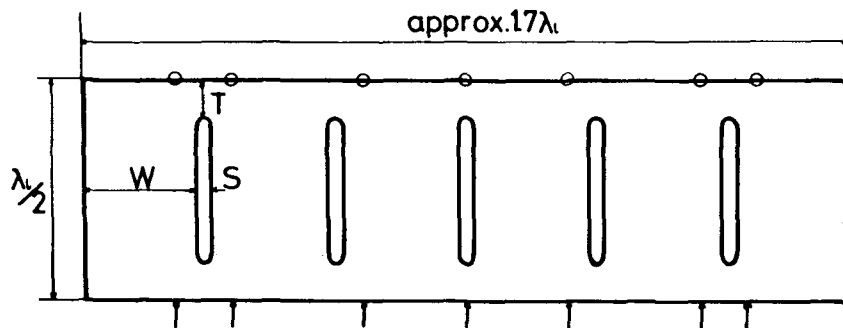
Fig. 3-2の下図は、Fig. 2-2に示した工具について計算上駆動周波数を変化させたときのホーンの長さ及び平坦度の変化のグラフである。図中の補間はグラフを見易くするためのもので、特に統計的な意味があるわけではない。この計算結果から、両端のホーンについてまずホーンの長さの変化率を求めてみると、最大値14.84 cm 及び最小値12.85 cmから $C_h = 0.134$ になる。次に中心のホーンについてはやはり最大値及び最小値から $C_h = 0.160$ の値を得る。次に平坦度の変化率 C_f は最大値が92.96 %、最小値が80.14 %だから $C_f = 0.138$ となる。従って(3-3)式により不安定性係数は、平坦度の変化率 C_f とホーンの長さの変化率 C_h の小さい方の値を用いて、 $C_i = 1.02$ と求められる。この工具の場合、計算上の中心駆動周波数は19.05 kHzに取られており、厳密にはその周波数で最大平坦度を与えていない。ただ、実際にはこの周波数で設計が行われたことから、この設定で計算を行った。

第2章の個々の実験結果を、不安定性係数の値との関連で見直してみよう。低振幅駆動実験においてウェーブトラップトホーンの長さの調節で良好な結果を得ているのは、Fig. 2-2 (Fig. 3-2) や Fig. 2-8 (Fig. 3-3)、Fig. 2-9 (Fig. 3-4)、Fig. 2-12 (Fig. 3-6) 及び Fig. 2-13 (Fig. 3-7) などに示された振動系の場合である。これらの実験結果から分かることは良い結果を最終的に得られた振動系は不安定性係数の値が1.52以下にとどまっていることである。

このうち最も不安定係数の大きいFig. 2-9 (Fig. 3-4) の場合、振動モードがかなり不安定で、少なくとも5回以上、ホーンの長さを調節をしなければならなかったことを考慮すると、安定かつ良好に動作するのは不安定性係数が1.2未満の場合に限られていることが分かる。

これらの結果から、不安定性係数は、ウェーブトラップトホーンの長さの変動に対する放射面での振動変位分布の不安定性を表す有効な指標であると考えても良いであろう。実際、Fig. 2-10 (Fig. 3-5) に示す振動系(不安定性係数5.19)の場合に最も低振幅駆動時の振動モード制御が難しく、Fig. 2-14 (Fig. 3-8) の振動系(同1.77)の場合やFig. 2-15 (Fig. 3-9) の振動系(同1.49)の場合がそれに次いで制御しにくかった。言い直せば、不安定性係数が高いと、与えられた振動変位分布を実現するのに何回ものホーンの長さの調節が必要になり、甚だしい場合には振動モードの制御が事実上不可能な程になったのである。

不安定性係数の有意性は実験的に確認されたと考えても良いであろう。



TOOL4-1-B
 $S = \lambda_L / 24$
 $W = \lambda_L / 4$
 $T = \lambda_L / 12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=7

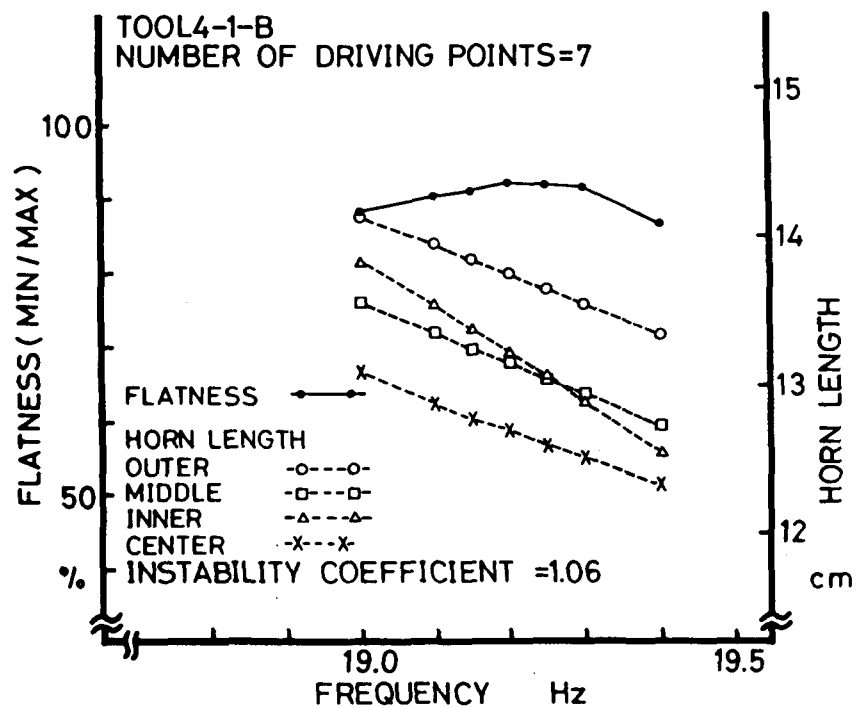
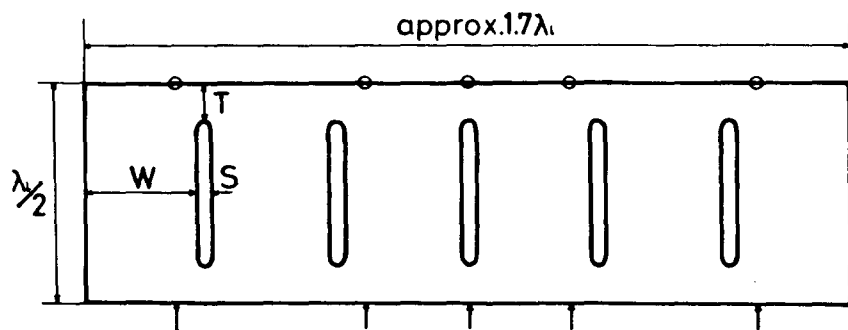


Fig.3-3 The plane configuration of a vibrating system and the evaluation of the instability coefficient for it.



TOOL4-1-B
 $S = \lambda_v/24$
 $W = \lambda_v/4$
 $T = \lambda_v/12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=5

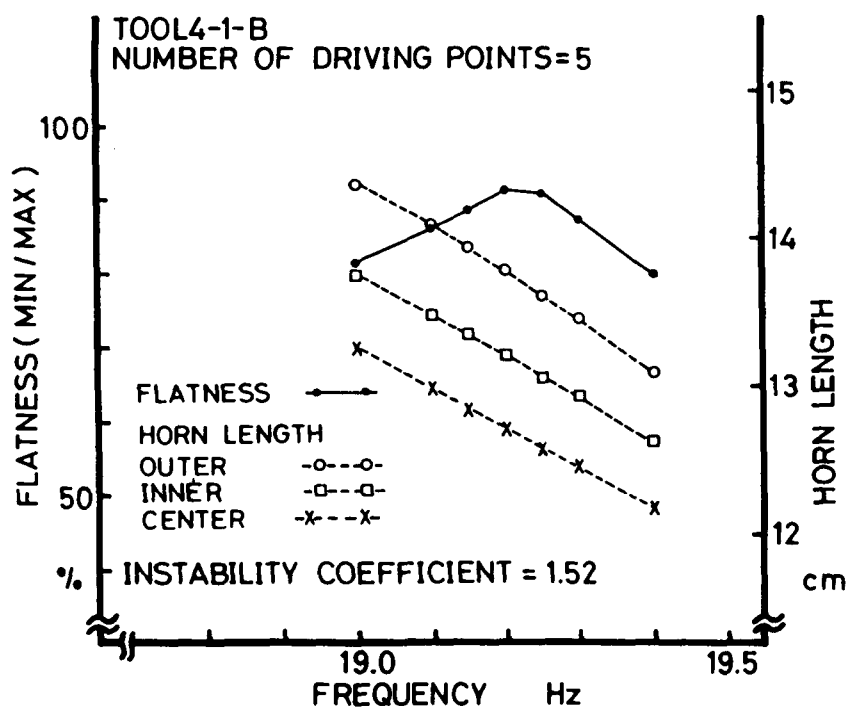
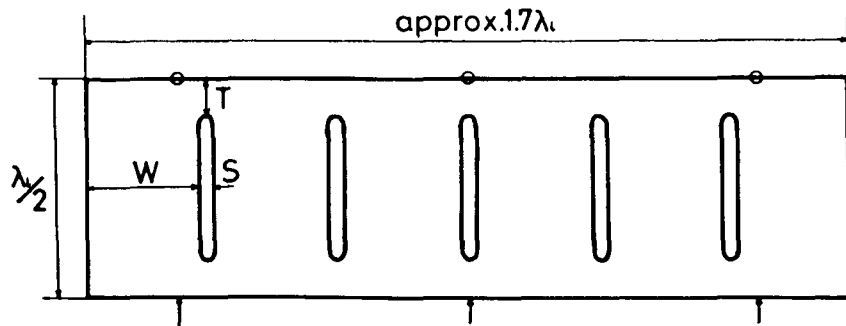


Fig.3-4 The plane configuration of a vibrating system and the evaluation of the instability coefficient for it.



TOOL4-1-B
 $S = \lambda/24$
 $W = \lambda/4$
 $T = \lambda/12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=3

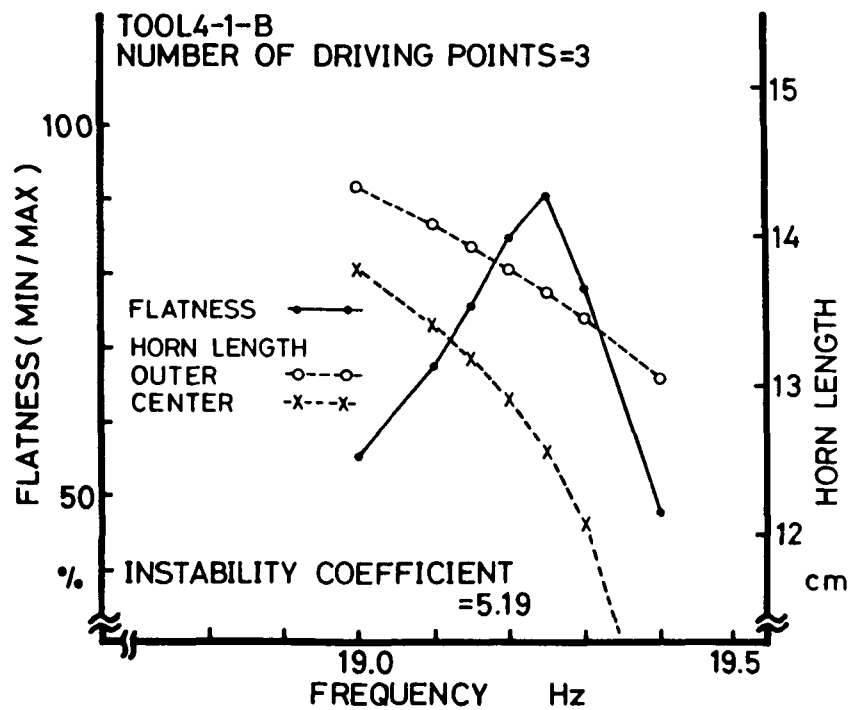
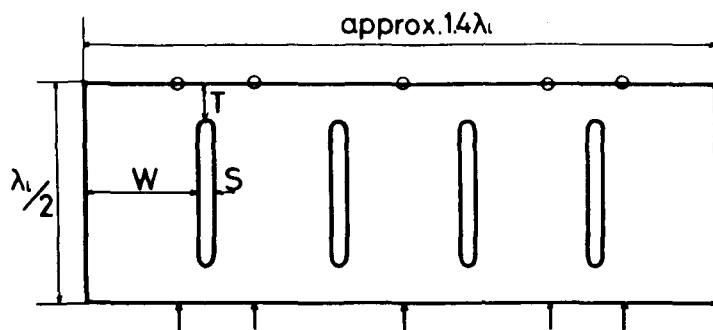


Fig.3-5 The plane configuration of a vibrating system and the evaluation of the instability coefficient for it.



TOOL3-1-B
 $S = \lambda_1 / 24$
 $W = \lambda_1 / 4$
 $T = \lambda_1 / 12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=5

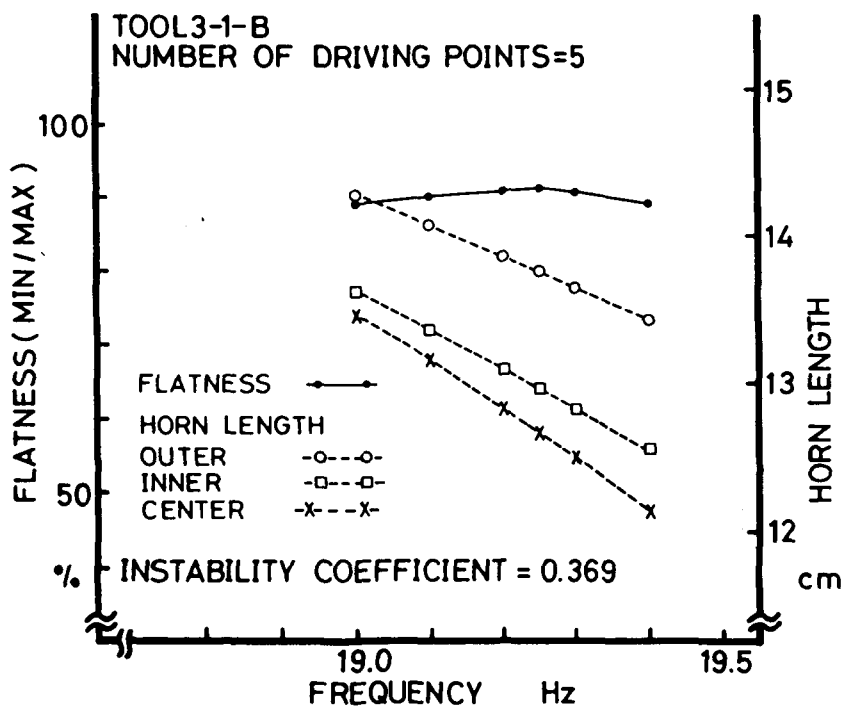
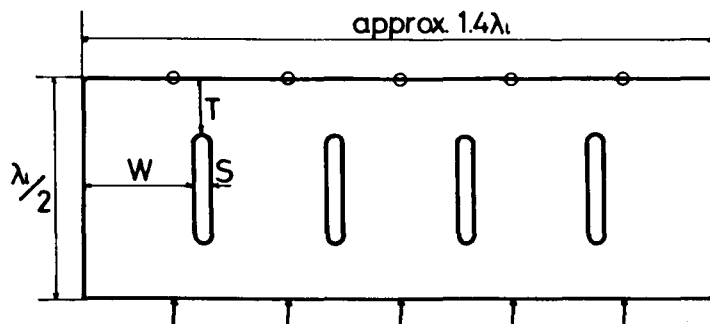


Fig.3-6 The plane configuration of a vibrating system and the evaluation of the instability coefficient for it.



TOOL3-1-C

$$S = \lambda_i / 24$$

$$W = \lambda_i / 4$$

$$T = \lambda_i / 8$$

NUMBER OF
DRIVING POINTS=5

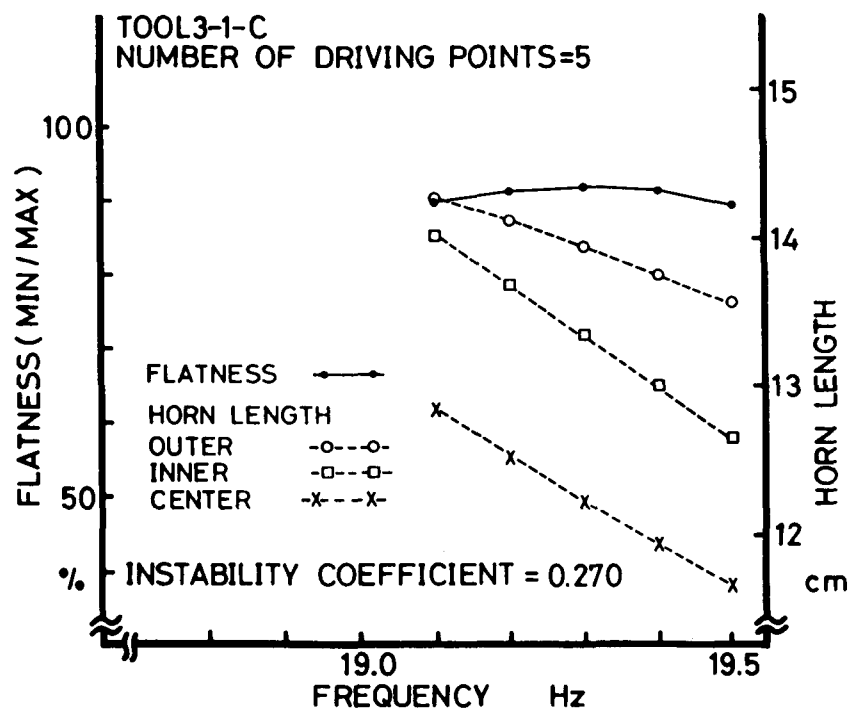
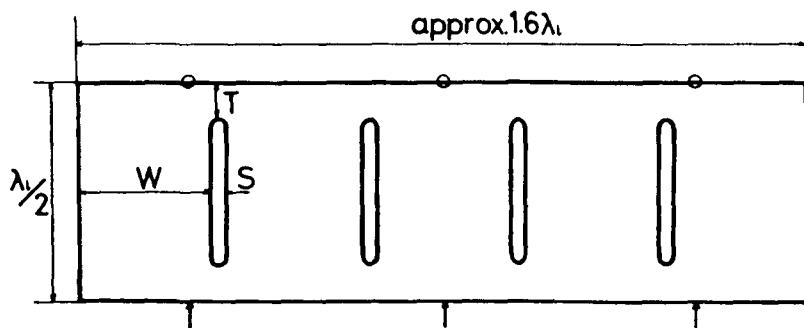


Fig.3-7 The plane configuration of a vibrating system and the evaluation of the instability coefficient for it.



TOOL3-1-T
 $S = \lambda_1 / 24$
 $W = 7\lambda_1 / 24$
 $T = \lambda_1 / 12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=3

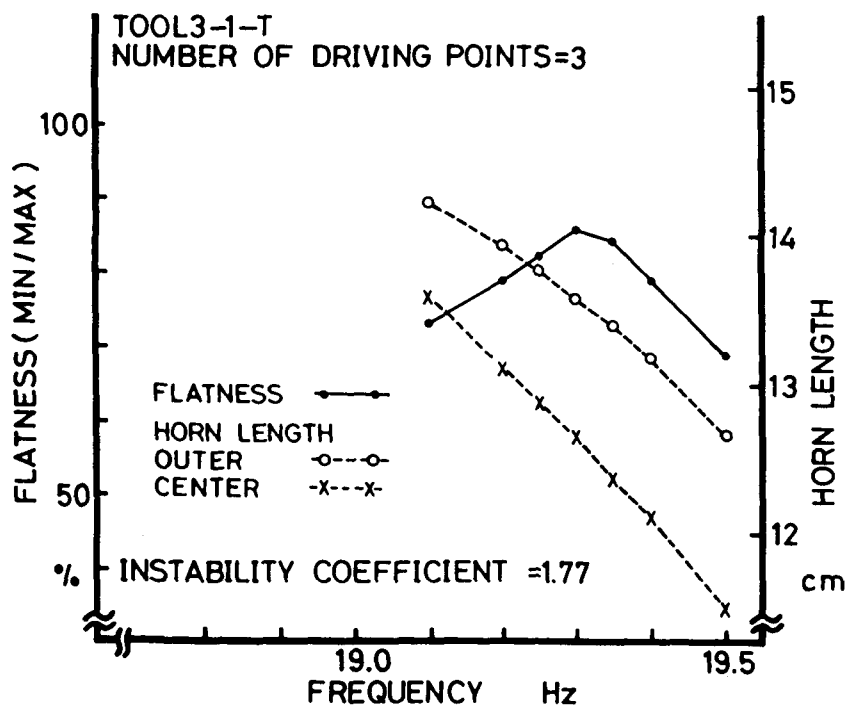
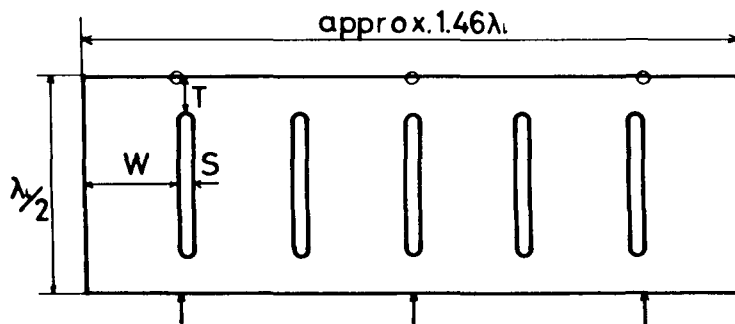


Fig.3-8 The plane configuration of a vibrating system and the evaluation of the instability coefficient for it.



TOOL4-1-H
 $S = \lambda/24$
 $W = 5\lambda/24$
 $T = \lambda/12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=3

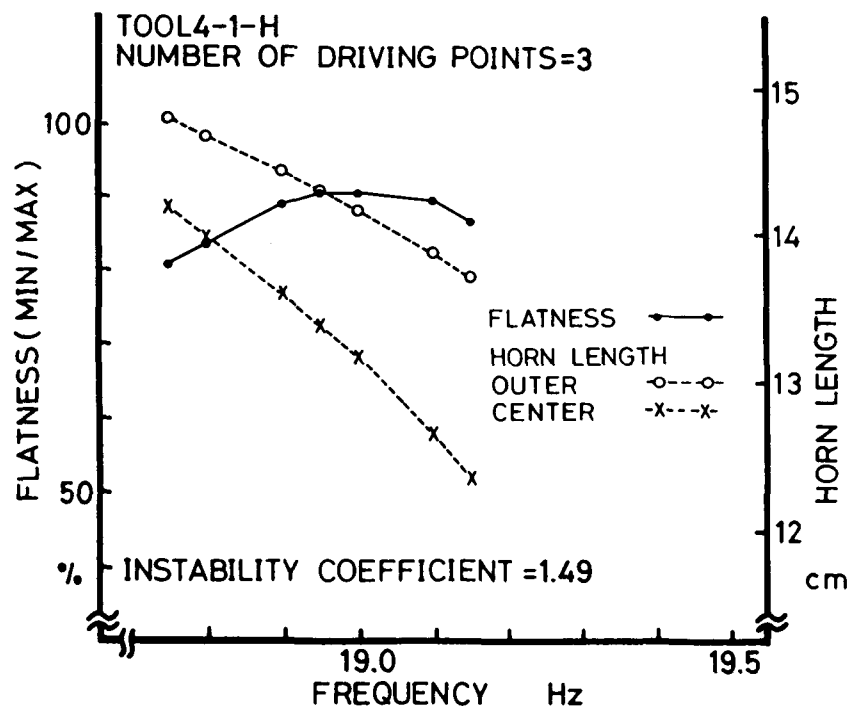


Fig.3-9 The plane configuration of a vibrating system and the evaluation of the instability coefficient for it.

3 - 4 不安定性係数を減少させる振動系構成上の工夫

さて、不安定性係数がウェーブトラップトホーンの長さ変動に対する振動系の同相縦振動のモードの不安定性を良く表す数値指標であることは分かったが、次の問題は、どの様にしたらこの係数の値を小さくすることが出来るかということである。

上の節で示した計算結果から最初に気が付くのは、駆動点（変位を指定する点）の個数を増やすことの効果だろう。Fig. 3-10は、Fig. 3-3から3-5までの同じ工具を用いた三種類の振動系の構成について、駆動点の個数と不安定性係数の値との関係を調べたものだが、駆動点が増えるにしたがって不安定性係数が減少して行く傾向がはっきり分かる。

このことは確かめるために、Fig. 3-6の工具について、内側の二つの駆動点を間引くことが不安定性係数にどのような影響を与えるか、を計算で確かめてみた。その結果がFig. 3-11である。やはり不安定性係数は、駆動点の個数を減らすことで著しく増加している。以上の結果から、不安定性係数を減少させるうえで、駆動点の個数を増加させることが効果的なことは明かであろう。

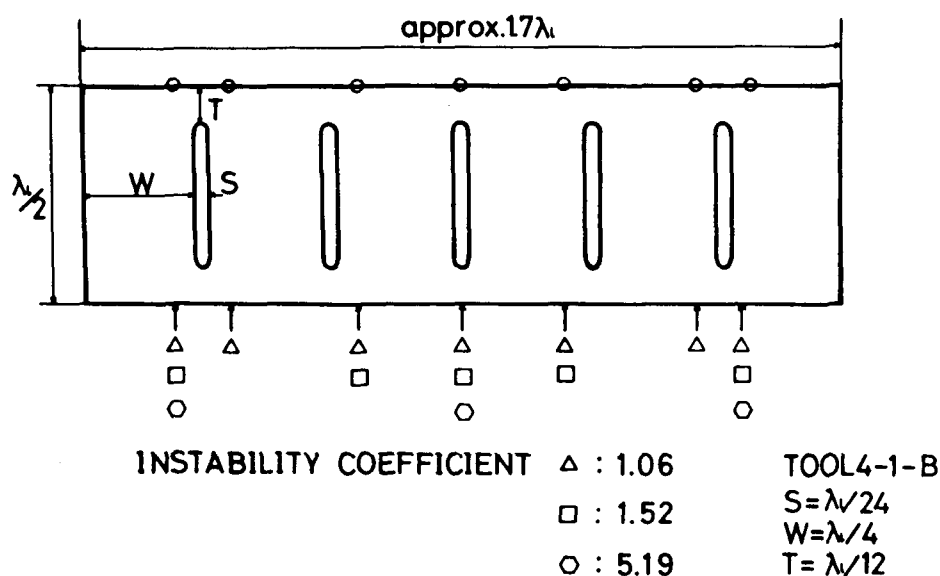


Fig.3-10 The influence of an increase in the number of driving points upon the value of the instability coefficient for the vibrating system including a 5-slot tool.

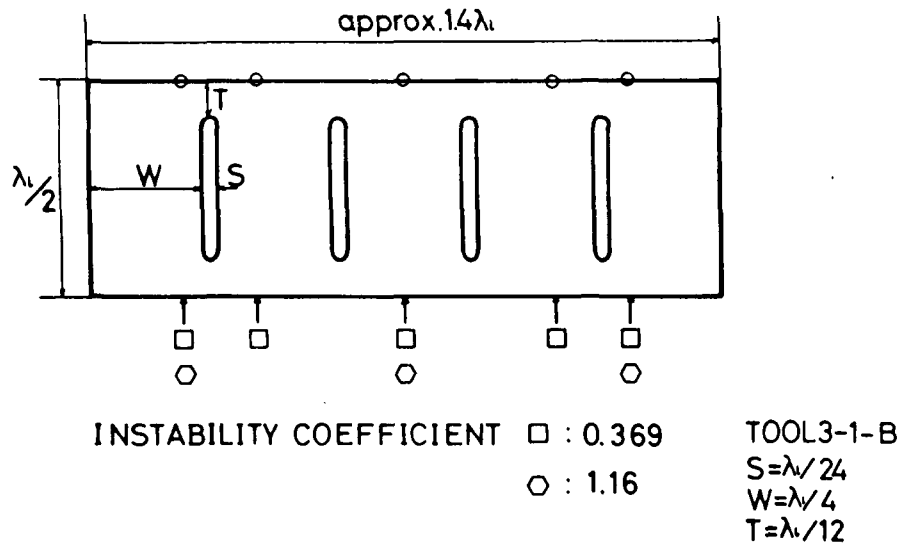


Fig.3-11 The influence of an increase in the number of driving points upon the value of the instability coefficient for the vibrating system including a 4-slot tool.

次に分かることは、放射面の幅あたりのスリットの本数が不安定性係数に及ぼす影響だろう。Fig. 3-12にそのことが顕著に現れている。これは、Fig. 3-2及びFig. 3-5の同じ広さの放射面を持つがスリットの本数だけは異なる工具に、同じ個数の駆動点のを配した二つ振動系の構成について、不安定性係数の大きさを比べてみた結果である。この場合、スリットの本数を増加させることの効果は絶大である。

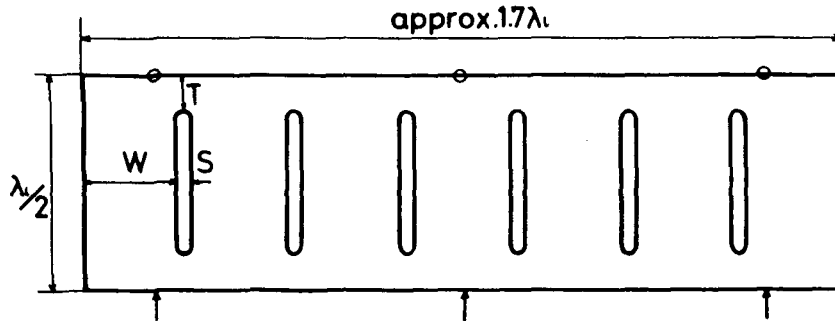
他の計算結果にも目を向けてみよう。Fig. 3-5とFig. 3-9の振動系の不安定性係数の値を比較してみる。そうするとFig. 3-13に示す様に、スリットの本数が同じで駆動点の個数が同じ場合、放射面の狭い方が不安定性係数が小さくなっていることが分かる。これらの結果から言えることは、放射面の幅あたりのスリットの数が多くなると、不安定性係数が小さくなる傾向があるということだ。

さて、上に述べた事柄をまとめると、不安定性係数を小さくするためには、

- (1) 駆動点（変位を指定する点）の個数を増やす。
- (2) 工具に設けるスリットの本数を増やす。

の二つの対策があるということになる。これらが何故、不安定性係数を減少させる上で効果があるかについて以下定性的に考えてみよう。

INSTABILITY COEFFICIENT=1.02



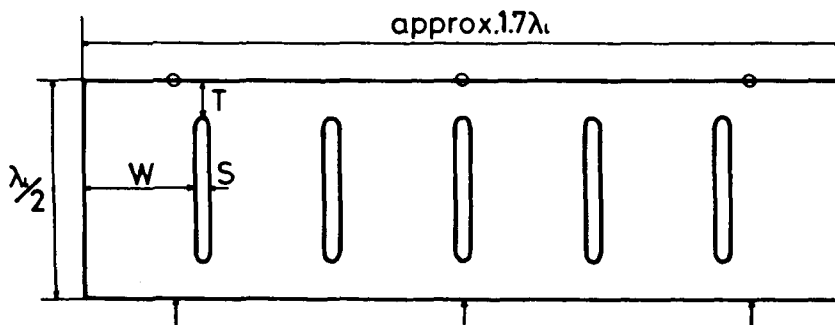
TOOL5-1-H

$$S = \lambda/24$$

$$W = 5\lambda/24$$

$$T = \lambda/12$$

INSTABILITY COEFFICIENT=5.19



TOOL4-1-B

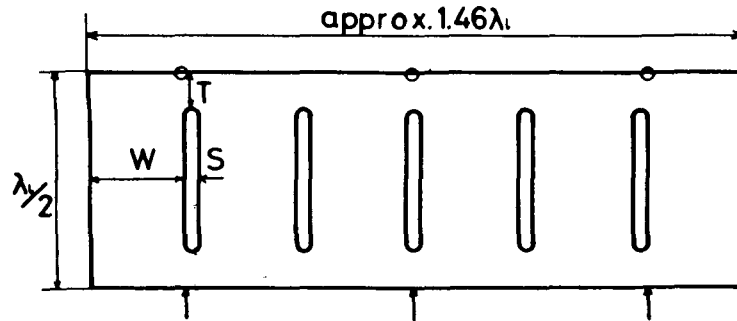
$$S = \lambda/24$$

$$W = \lambda/4$$

$$T = \lambda/12$$

Fig.3-12 The influence of an increase in the number of slots upon the value of the instability coefficient.

INSTABILITY COEFFICIENT=1.49



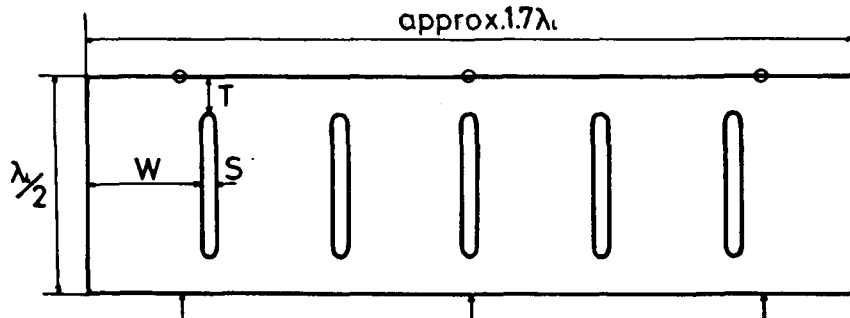
TOOL4-1-H

$$S = \lambda/24$$

$$W = 5\lambda/24$$

$$T = \lambda/12$$

INSTABILITY COEFFICIENT=5.19



TOOL4-1-B

$$S = \lambda/24$$

$$W = \lambda/4$$

$$T = \lambda/12$$

Fig.3-13 The influence of an increase in the width of the radiating face upon the value of the instability coefficient.

駆動点の個数を増やすということは、放射面において変位の値を指定する点を増やすということである。駆動周波数を僅かしか変化させないという前提に立てば、弾性波の波長に大きな変化はない。ということは、放射面で変位が等しく指定されている点の個数が多くなれば、駆動周波数が変化してもそこでの変位分布が波うつこともなく平坦なままであることは当然の事である。

さて、スリットの本数が増えることによる不安定性係数減少の効果は何に起因するものであろうか。スリットは序章でも述べたようにPoisson比の効果による工具横方向の結合振動を断つ働きをする。従って、工具にスリットを多く入れることで、その各部がそれぞれ独立に縦振動し易くなると考えられる。その結果、振動系全体は多数の強制駆動力によって容易に制御が行えるものになり、周波数変化に対してその同相縦振動のモードが安定しているのであろう。ただ、その効果の度合は、弾性波の結合という現象の複雑さを考えると、場合によって大きく変わるであろう事は容易に想像がつく。

いずれにせよ、程度の差こそあれ、不安定性係数を減少させる手段がここに二つ見いだせたことになる。

3-5 金属弾性振動体における固有振動モードの温度安定性

通常の生産現場の作業環境においては、温度変化は強力超音波振動系への避けられない外乱である。とすると、先に述べたウェーブトラップトホーンの長さ変化に対する振動モードの安定性と並んで、その温度変化に対する安定性は本振動モード制御手法において極めて重要な事柄であることは間違いない。例えば、超音波プラスチック溶接においては、加工物に生じた熱によって振動モードが乱される可能性が考えられる。そこで筆者は振動モードの温度安定性について調べてみた。但しここでは、その興味の対象を金属製の超音波振動工具に絞って考えることにする。

まず、損失の少ない金属で構成された弾性系の固有振動モードの温度安定性について、理論的かつ一般的な議論を展開する。良く知られるように、線形無損失の弾性媒質の波動方程式は変位ベクトルを $\mathbf{u}$ とすると

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3-4)$$

である。ここで λ , μ 及び ρ はそれぞれ媒質の二つの Lamé の弾性定数及び密度を表す。 t はもちろん時間である。上式の左辺第一項の $\text{grad div } \mathbf{u}$ は体積波

(bulk wave) と呼ばれる波の成分に対応し、第二項の $\text{rot rot } \mathbf{u}$ は剪断波 (shear wave) と呼ばれる波の成分に対応する。丸棒の捻れ振動という特殊な場合を除けば、通常この二つの波は様々な度合で結合しており、分離して考えることは出来ない。しかし、振動モードによってはどちらか一方の成分が他方に比べて非常に大きくなるときがある。このことについては、3-7節において振動モードの温度安定性との関連で再びふれることにする。

ここでの興味は弾性系の固有振動モードであるから、調和的な時間変化を仮定して $\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{x}) \exp(j\omega t)$ とおけば、(3-4)式は

$$\{(\lambda + 2\mu) \text{grad div} - \mu \text{rot rot}\} \mathbf{U} = -\rho \omega^2 \mathbf{U} \quad (3-5)$$

と書き直せる。 $\mathbf{x}$ はもちろん位置ベクトルである。Laméの定数は他の独立などんな二つの弾性定数でも表すことが出来るから、Young率とPoisson比を使って上式を変形すると、

$$(D \text{grad div} - \text{rot rot}) \mathbf{U} = -\omega^2 E \mathbf{U} \quad (3-6)$$

$$D = \frac{2-2\nu}{1-2\nu} \quad (3-7)$$

$$E = \frac{2\rho(1+\nu)}{Y} \quad (3-8)$$

ここで、 Y 及び ν はそれぞれ媒質のYoung率及びPoisson比を表す。

同じようにして、自然境界条件も

$$\begin{pmatrix} D \varepsilon_x + F \varepsilon_y + F \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & D \varepsilon_y + F \varepsilon_z + F \varepsilon_x & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{yz} & D \varepsilon_z + F \varepsilon_x + F \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \dots \dots (3-9)$$

の様に書き表すことが出来て、ここで

$$F = \frac{2\nu}{1-2\nu} \quad (3-10)$$

であり、 l , m , n はそれぞれ境界面に垂直な外向きの単位ベクトルの x , y , z 方向成分、また、 ε_x , ε_y , ε_z はそれぞれ x , y , z 方向の伸び歪、 γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} はそれぞれ $x-y$, $y-z$, $z-x$ 平面に平行な面内での剪断歪である。ここで歪の定義はそれぞれ、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (3-11)$$

及び

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (3-12)$$

である。もちろん U_i はベクトル U の i 方向成分。

式 (3-6) から式 (3-10) までを見て分かるのは、パラメータ E の変化は、固有振動周波数を変移させることはあっても、固有振動モードにはなんら影響を及ぼさないということである。しかしながら、Poisson比のみの関数であるパラメータ D 及び F は、振動モードの温度安定性に深く関与している。言い替えれば、Poisson比の温度変化のみが固有振動モードの温度安定性に影響を与え、Young率や密度の温度変化は固有振動周波数を変移させるだけということになる。

ところで、一般に金属材料では温度上昇に伴うPoisson比の変化はYoung率のそれほど大きくない傾向がある。⁽⁵⁾ 実際、ここで研究の対象となっているアルミニウムの場合、Young率の温度係数が常温で $-4.98 \times 10^{-4}/\text{deg}$ 程度であるのに対して、Poisson比のそれは $7.16 \times 10^{-5}/\text{deg}$ に過ぎない。と

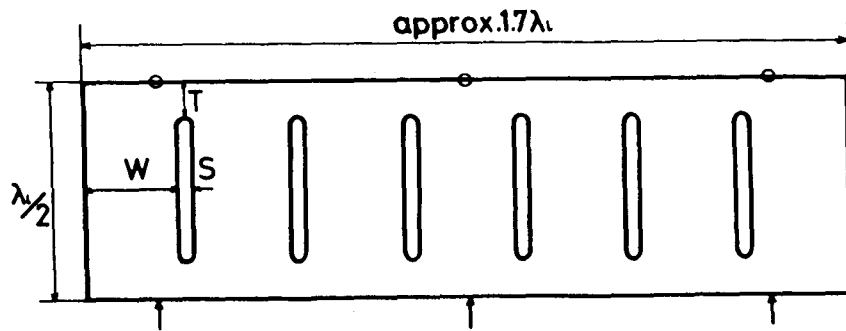
いうことは仮に 100°C もの温度上昇が起こったとしても、パラメータ D 及び F はそれぞれ 1.16 及び 2.27% 増加するに過ぎないことになる。

以上のことから、式 (3-6) 左辺の偏微分演算子と式 (3-9) の自然境界条件に関する限りにおいて、金属弾性体の振動モードは本質的に温度変化に対して極めて安定な性質を持っていると考えられそうである。しかし厳格に言えば、上で述べた事から、特定の振動モードの温度安定性を理論的に保証することは出来ない。そこで、スリット付き超音波振動工具とウェーブトラップトホーンからなる振動系の温度安定性をシミュレーションによって確かめてみることにした。

3-6 温度変化のシミュレーション

Fig. 3-14 から 3-16 までの図は、そのシミュレーションの対象となったスリット付き超音波振動工具の平面形状と、温度上昇による各々の工具の放射面における振動変位分布の変化を示したグラフである。いずれも第 2 章で実験の対象となった工具形状で、それぞれ Fig. 3-14 が Fig. 2-2 (Fig. 3-2) に、Fig. 3-15 が Fig. 2-8 (Fig. 3-3) に、Fig. 3-16 が Fig. 2-12 (Fig. 3-6) に対応する。図中の丸印及び矢印の意味も第 2 章と同じで、垂直方向の振動変位の値を等しく指定する点及び駆動点を示している。工具はアルミニウム製とし、シミュレーションにおける温度の上昇は 100°C を仮定した。もちろんこれは本手法の温度安定性を厳しく確認するためで、このように大きな温度上昇が実際の生産現場で起こることはあり得ない。材料定数は第 2 章で計算に使ったものを採用し、線膨張係数は $2.313 \times 10^{-5}/\text{deg}$ を用いた。弾性定数の温度係数は前の節で既に述べた通りのものを使っている。このシミュレーションにおいても、Fig. 3-1 の様な理想的な共振系を考えており、駆動周波数も第 2 章同様、各温度での工具の同相縦振動のモードの共振周波数付近に取っている。さらに、Table 3-1 から 3-3 には各工具に接続すべき直径 $\lambda_1/8$ のウェーブトラップトホーンの長さを示した。

シミュレーションの結果から一目瞭然のように、 100°C もの温度上昇があっても、共振周波数こそ大きく変移するが、放射面における振動変位分布には全く影響がないことが分かる。各駆動点に接続すべき直径 $\lambda_1/8$ のウェーブトラップトホーンの長さも、常温時に換算すれば殆ど変化がない。これらの結果から、温度変化の振動モードに与える影響は極めて小さいと考えて良いであろう。



TOOL5-1-H
 $S = \lambda/24$
 $W = 5\lambda/24$
 $T = \lambda/12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=3

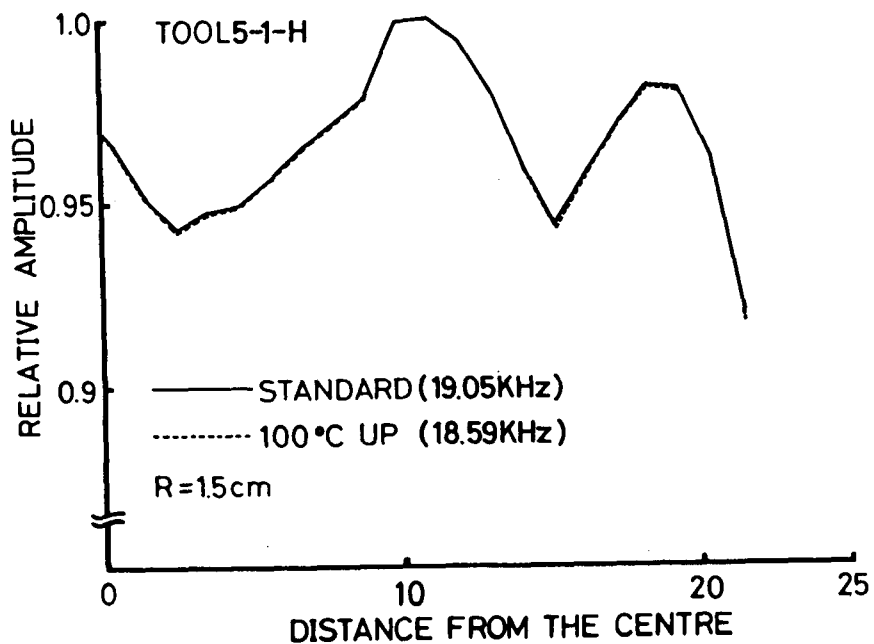
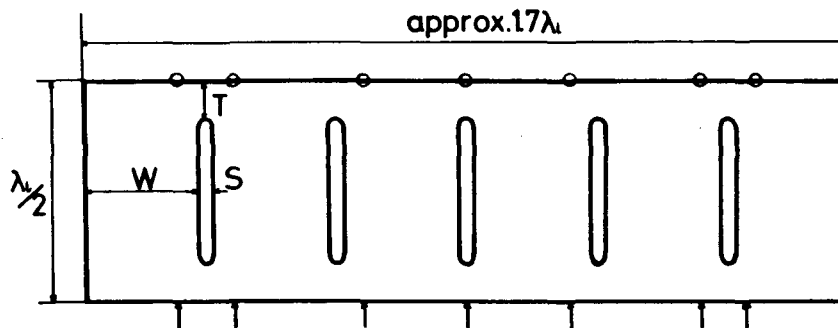


Fig.3-14 The plane configuration of a vibrating system and the influence of temperature change upon the amplitude distribution at the radiating face of the tool.



TOOL4-1-B
 $S = \lambda / 24$
 $W = \lambda / 4$
 $T = \lambda / 12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=7

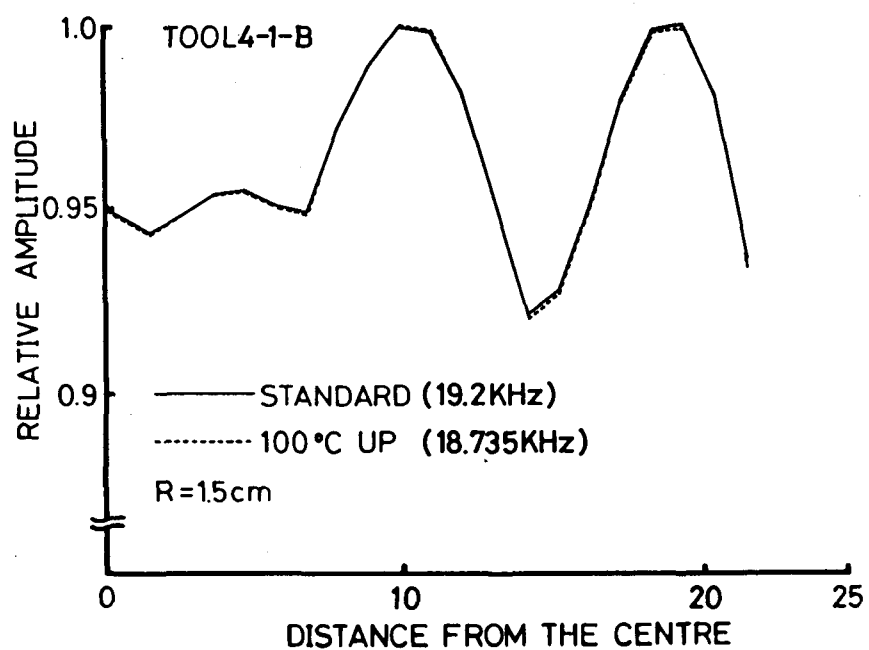
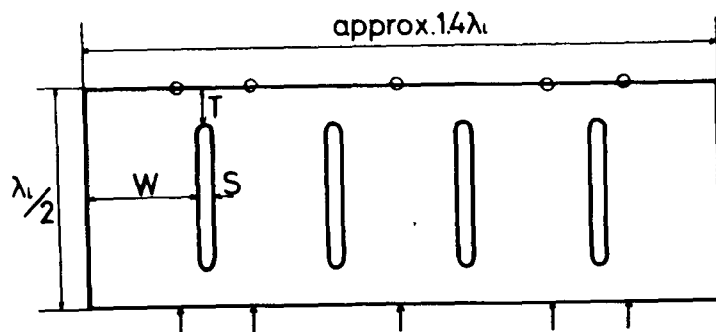


Fig.3-15 The plane configuration of a vibrating system and the influence of temperature change upon the amplitude distribution at the radiating face of the tool.



TOOL3-1-B

$$S = \lambda_v / 24$$

$$W = \lambda_v / 4$$

$$T = \lambda_v / 12$$

NUMBER OF
DRIVING POINTS=5

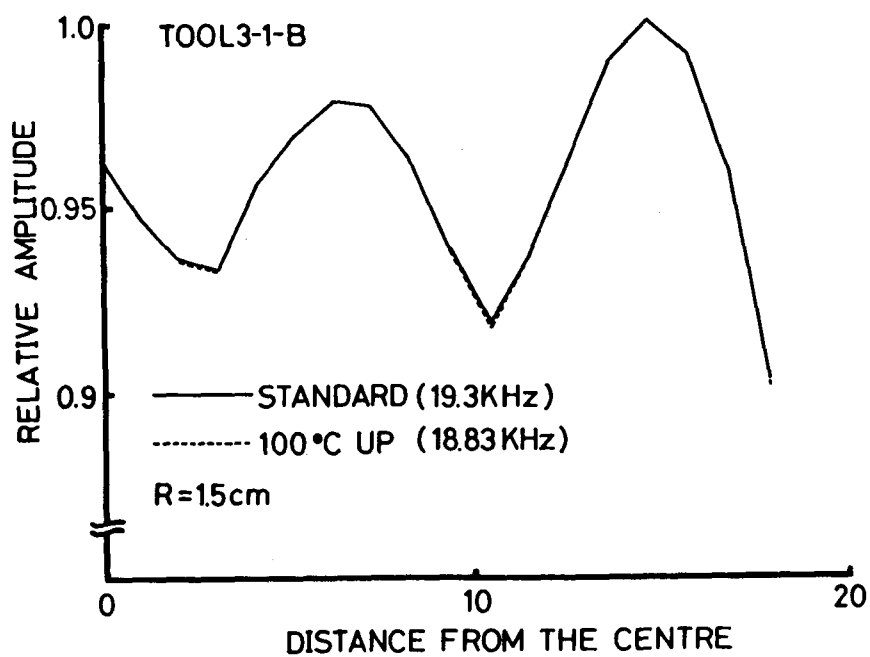


Fig.3-16 The plane configuration of a vibrating system and the influence of temperature change upon the amplitude distribution at the radiating face of the tool.

TOOL 5 - 1 - H

RADIUS = 1.5 cm

	ROOM TEMPERATURE	100°C UP (EQ. VALUE AT ROOM TEMP.)
CENTRE	13.10	13.13 (13.10)
OUTER	14.00	14.09 (14.05)

UNIT = cm

Table 1 The influence of temperature change upon the horn lengths in the case of the vibrating system configuration shown in Fig.3-14.

TOOL 4 - 1 - B

RADIUS = 1.5 cm

	ROOM TEMPERATURE	100°C UP (EQ. VALUE AT ROOM TEMP.)
CENTRE	12.70	12.73 (12.70)
INNER	13.20	13.26 (13.23)
MIDDLE	13.15	13.19 (13.16)
OUTER	13.75	13.79 (13.76)

UNIT = cm

Table 2 The influence of temperature change upon the horn lengths in the case of the vibrating system configuration shown in Fig.3-15.

TOOL 3 - 1 - B

RADIUS = 1.5 cm

	ROOM TEMPERATURE	100°C UP (EQ. VALUE AT ROOM TEMP.)
CENTRE	12.50	12.54 (12.51)
INNER	12.82	12.87 (12.84)
OUTER	13.64	13.68 (13.65)

UNIT = cm

Table 3 The influence of temperature change upon the horn lengths in the case of the vibrating system configuration shown in Fig.3-16.

3-7 固有振動モードの温度安定性に関する若干の考察

弾性体の固有振動モードの温度安定性について、理論的にもう少し突っ込んで考えてみよう。温度変化の振動モードに及ぼす影響は、式(3-6)の左辺の偏微分演算子及び式(3-9)の自然境界条件にパラメータD及びFの小さな変化によって引き起こされる摂動として、定式化できる。 ξ 及び ζ をその絶対値が十分小さな実数とすると、微分演算子の摂動は、 $\xi D \text{grad div}$ のように表され、自然境界条件の摂動はベクトルの形で

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -(\rho/E) (\xi D \varepsilon_x + \zeta F \varepsilon_y + \zeta F \varepsilon_z) & 1 \\ -(\rho/E) (\xi D \varepsilon_y + \zeta F \varepsilon_z + \zeta F \varepsilon_x) & m \\ -(\rho/E) (\xi D \varepsilon_z + \zeta F \varepsilon_x + \zeta F \varepsilon_y) & n \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

と表される。ここで ξ や ζ の高次の項は十分小さく、無視出来るものとする。ベクトル $\mathbf{s}$ の物理的な意味は、自然境界条件の摂動によって生じた残差表面応力を補償する新たな表面応力と考えることが出来る。

もし無摂動時の固有関数(固有振動モード)に縮退がないならば、量子力学などでよく用いられる摂動法⁽⁶⁾に従って、摂動をうけたこの系のn次の固有関数 U_n とその固有値 ω_n^2 とは、無摂動時の固有関数 U_{n0} とその固有値 ω_{n0}^2 の系列によって次のように表される(付録6参照)。

$$U_n = U_{n0} + \xi \sum_{m \neq n} L_{mn} U_{m0} / (\omega_{m0}^2 - \omega_{n0}^2) + \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_n) \cdot \mathbf{s} \, dS$$

..... (3-14)

$$\omega_n^2 = (\omega_{n0}^2 - \xi L_{nn}) / \theta \quad (3-15)$$

ここで θ は任意の正の実数で、温度変化によるパラメータEの変化を表す。即ち温度変化後のEの値を E' とすると、 θ は E'/E である。 dS は面積素で、積分範囲は摂動を生じる自然境界面である。また、

$$\begin{aligned}
L_{mn} &= (D/E) \int U_{mo} \cdot \text{grad div } U_{no} \, dV \\
&= (1/E) \int U_{mo} \cdot \text{rot rot } U_{no} \, dV \quad (3-16)
\end{aligned}$$

とした。 $G(x, y, \omega_n)$ は無摂動時の系のGreen関数を表すテンソル量で、式(1-2)のように、無摂動時の固有関数及び固有値で表される。 x 及び y は観測点及び駆動力源(この場合は摂動を生じる自然境界面)の座標を表すベクトルである。もちろん全ての固有関数は式(1-3)のように規格化されている。念を押すが、ここではどやどの高次の項は無視している。

式(3-14)から(3-16)及び式(1-2)をみて分かることは、互いに近接する共振周波数がなく、かつ当該振動モードに3-5節でふれた体積波(bulk wave)と剪断波(shear wave)の強い結合がない(つまりどちらか一方の成分が他に比べて大きいいため L_{mn} の値が小さい)限りにおいて、そのモードの温度安定性は高いということである。前の節のシミュレーションの結果は、ここで関心が持たれている工具の同相縦振動のモードがそうした条件が満たしているということを示唆している。

さて、工具に設けられているスリットの存在は横方向の結合振動を断ち、工具全体が純粋な縦振動に近いモードで振動し易くする働きがある。その結果としてスリットは体積波と剪断波の結合を小さくし、体積波の成分を相対的に大きくしていることになる。ということはそれらスリットを、温度安定性が高いという同相縦振動のモードの性質をもたらす一つの要因として、考えることが出来ることになる。スリットには不安定性係数を小さくするばかりではなく、温度安定性を高める効果もあると考えて良いであろう。

次の章では、実用化を念頭においた高振幅駆動での大型超音波振動工具のモード制御の実験を行い、その結果を不安定性係数との関わりで整理することによって、高振幅駆動に伴う問題を解決する。

第4章 高振幅駆動時の振動モード制御実験

4-1 概説

プラスチック溶接などに用いる大型超音波振動工具は最大数十 μm の振幅で振動させる必要がある。この様な高振幅で駆動される工具の振動モード制御を行う上で、二つの実用的な問題が予測される。その一つは、高応力に対処するため接合部に用いる大きな径のネジの質量による慣性力や、振動子の機械インピーダンスによる反力など、計算では考慮されなかった余分な力が駆動点に発生し、振動モードが乱される可能性があること。もう一つは、ネジの口径を大きくするにしたがってウェーブトラップトホーン先端の工具との接触面の面積を広げざるを得ず、そのために工具から曲げモーメントが伝わり、ホーンに曲げ振動が励起される可能性である。ここでは、スリット付きの大型超音波振動工具の高振幅での振動モード制御実験を行い、その結果をその系の不安定性係数の値との関連で整理することにより、前者については不安定性係数が小さければ問題にならないことを示し、後者についてはホーンの径をさらに大きくしてやることで解決出来ることを明かにした。

4-2 高振幅駆動時の振動モード制御に伴う問題

第2章の実験は、本手法の原理的な有効性を確かめるためのものであったため、放射面における最大振幅はせいぜい0.5 μm 程度であった。しかし、実際の超音波によるプラスチック溶接などでは、尖頭値にして数十 μm にも及ぶ振動振幅が要求される。従って、大きな振幅を実現するため、Langevin型振動子などの能動的な振動源を十分な変成比を持ったエクスポネンシャルホーンなどの機械振動変成器を介して工具に接続する必要がある。また高応力に対処するため、振動系の各部の接合には低振幅駆動時と比べて、径の大きなネジを用いなければならない。そのため、以下に示すような問題が本手法による振動モード制御に生じる可能性がある。

- (1) 計算では考慮していなかったネジの質量による慣性力や能動的な振動子の機械インピーダンスによる反力などの余分な力が、工具とウェーブトラップトホーンとの接合部（駆動点）に生じ、振動モードが乱れる。

(2) ネジの径が大きくなることによって必然的にウェーブトラップトホーン先端の工具との接触面積も広がり、ホーンに曲げ振動が励起される。

(2) については、第2章で分かったようにウェーブトラップトホーンの径を大きくすることで、解決出来そうである。それでは、(1) についてはどのように考えたら良いのであろうか。

第3章で提案した不安定性係数は、ウェーブトラップトホーンの長さ変動が振動モードに及ぼす影響の度合を表したものであるが、これはちょうど回路理論における素子感度に相当する概念と考えることも出来る。即ち、不安定性係数は、振動系の一部を構成しているウェーブトラップトホーンという振動素子の機械インピーダンスの誤差が全体の振動モードに与える影響の大きさを表す指標であって、その誤差の原因には何の関わりも無い。従って損失が無視出来るのなら、ネジの慣性力も能動的な振動子の機械インピーダンスも、ウェーブトラップトホーンの長さ変動と同様リアクティブな駆動力の変化(機械インピーダンスの変化)と捉えることが出来るから、不安定性係数が小さい振動系を構成してやれば、そうした摂動に対しても振動モードが「鈍感な」系になっているはずである。

そこで、高振幅での駆動の可能な大型振動工具を含む振動系を構成し、実験によって以上の事柄を確認することにした。

4-3 実験装置

実験装置と計算及び実験の手順は、基本的には第2章と変わるところはない。ここでは、高振幅駆動実験に必要な実験装置における第2章との相違点のみを述べることにする。

Fig. 4-1に、この章の実験に用いられたアルミニウム製のウェーブトラップトホーンの全ての形状を示す。先端のテーパは第2章で用いられたものより緩やかになっており、接触面の面積もおおよそ2倍になっている。そのためホーンの径は曲げ振動を防ぐため、全体的に太くなっている。接続ネジは直径、長さともに10 mmの鋼鉄製の結合ネジ(メートル細目)で、第2章の真鍮製のものに比べて4倍の断面積を持っている。工具との接続にあたっては、5 kgm以上のトルクで締め付けるようにした。工具に開けられたネジ穴の深さはすべて9 mm以下にしている。

Fig. 4-2は、実験の対象となったスリット付き大型超音波振動工具を含む振動系の一例である。第2章の実験とは異なり、大型のLangevin形振動子(日本

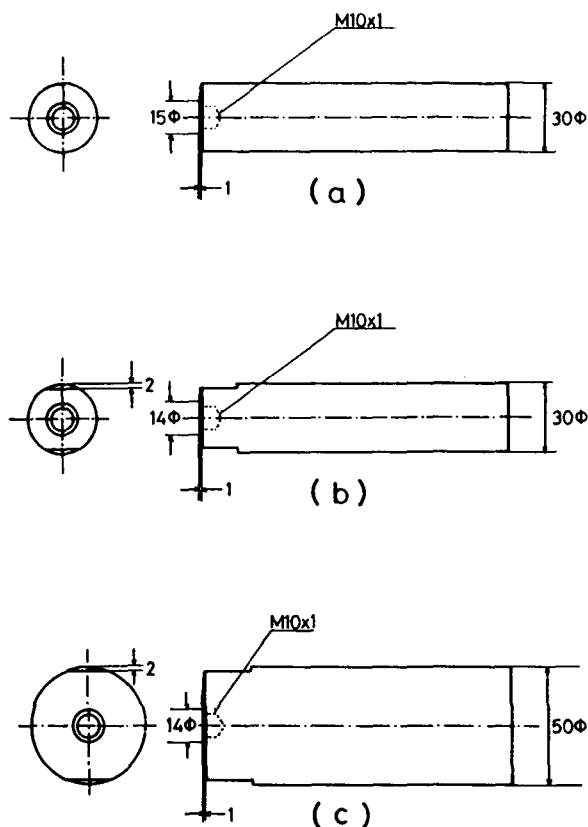
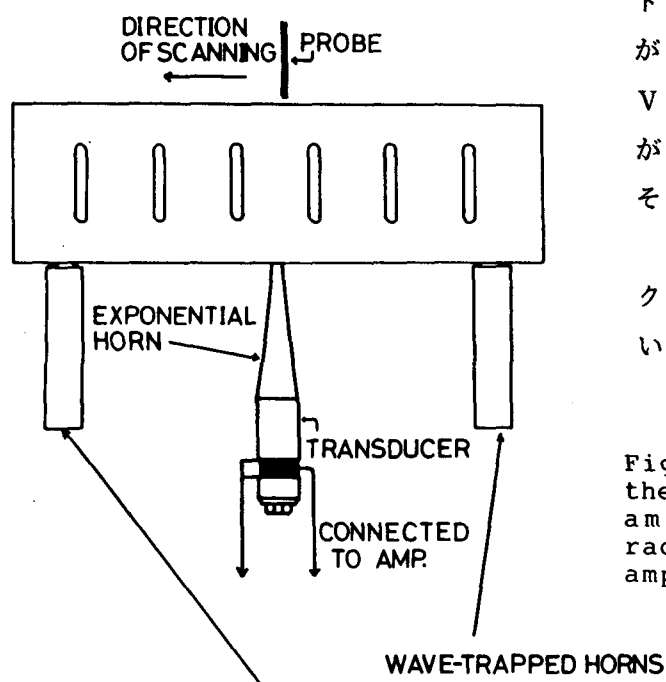


Fig.4-1 The types of wave-trapped horns used in the experiments of high amplitude operation.



特殊陶業製 D 4 5 2 0 P C、直径 5 0 mm、2 0 kHz 用) が変成比 3 倍程度のアルミニウム製エクスポネンシャルホーンを介して工具中央の駆動点に接続されている。エクスポネンシャルホーンと Langevin 形振動子との接続には直径 1 8 mm 長さ 3 0 mm の鋼鉄製の結合ネジ (メートル細目) を、エクスポネンシャルホーンと工具との接続にはウェーブトラップトホーンと同じ直径 1 0 mm の結合ネジを用いた。エクスポネンシャルホーンの長さは、Langevin 形振動子と組み合わせたものの共振周波数が、おおよそ計算での設定駆動周波数に等しくなるように定めている。またその先端の工具との接触面の大きさはウェーブトラップトホーンとほぼ同じ (直径 1 4 mm) である。

Langevin 形振動子の駆動には、第 2 章と同じ出力インピーダンスの小さなトランジスタ電力増幅器を用いているが、高振幅駆動のため駆動電圧は 3 0 V に一定させた。ここでも、入力電流が最大となる周波数を共振周波数とし、そこで振動系を駆動している。

変位の大きさも、やはりフォトニックスенсаを用いて、非接触で測定している。

Fig.4-2 The experimental setup and the method for measuring the normal amplitude distribution at the radiating face of the tool in high amplitude operation.

4 - 4 実験結果

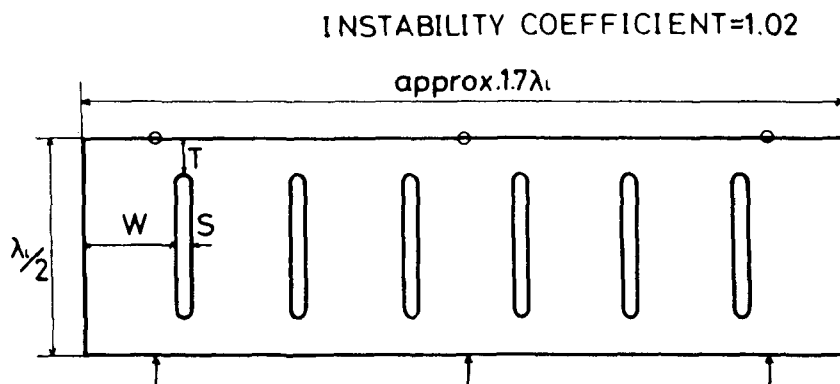
Fig. 4-3から4-7まで図は、振動系の平面構成と、高振幅駆動時の放射面における鉛直方向の振動変位分布、ホーンの長さ及び共振周波数に関する計算と実験の結果を比較したものである。各図中には、平面構成図の上にその振動系の不安定性係数の値を、各グラフの縦軸の横に放射面での最大振幅の絶対値（尖頭値）を、表示してある。丸印、及び矢印の意味は第2章と同様、垂直方向の変位の大きさを等しく指定する点、及び駆動点（振動子やウェーブトラップトホーンが装着される点）である。Rはもちろんウェーブトラップトホーンの半径を示す。グラフ上の測定値は第2章と同じく、各点毎に2回測定したものの平均値である。

さて、これらの実験結果を不安定性係数やホーンの径との関連でみてゆくことにしよう。

Fig. 4-3から4-5の振動系にはFig. 4-1の(c)のタイプのホーンを用いて実験を行っている。グラフからすぐに分かるように、不安定係数が1.52と他の振動系よりも高くなっているFig. 4-4の場合を除けば、良好な結果を得ている。

Fig. 4-4の系はFig. 2-9に示したように、低振幅駆動実験ではウェーブトラップトホーンの長さを何回も調節することで辛うじて計算で予測されていた振動変位分布を得ていた。ところが、太いネジ、大きな振動子とエキスポネンシャルホーンといった高振幅駆動のための機構上の工夫を系に施してしまうと、ホーンの長さをいくら調節しても、振動モードが極端に不安定で、計算で予測されたような結果を得ることが出来なかった。

それに対して、Fig. 4-3や4-5といった系では、ウェーブトラップトホーンの長さを調節する必要は殆どなかったし、ホーンの長さ変動に対する振動変位分布の安定性も高かった。Fig. 4-3の例はFig. 2-7に示したように、低振幅駆動実験でも良好な結果を得ているから、この結果はある意味で当然と考えられる。しかしFig. 4-5の例では、工具の固有振動モードの中に同相縦振動のモードが存在せず、Fig. 4-3の工具の固有振動解析の結果から類推して設計時の設定駆動周波数を決めており、その上放射面の幅が 2.2λ にもなろうというのに、きわめて良好な結果を得ている。不安定性係数の小さいことが、如何にその振動系構成に於ける振動モード制御を確実なものにするかが、この実験例からよく分かる。ちなみに、この工具の場合、放射面において変位を等しく指定する点は、設定駆動周波数に近接した二つの固有振動モードで逆相に振れているところに選んだ。



TOOL5-1-H
 $S = \lambda/24$
 $W = 5\lambda/24$
 $T = \lambda/12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=3

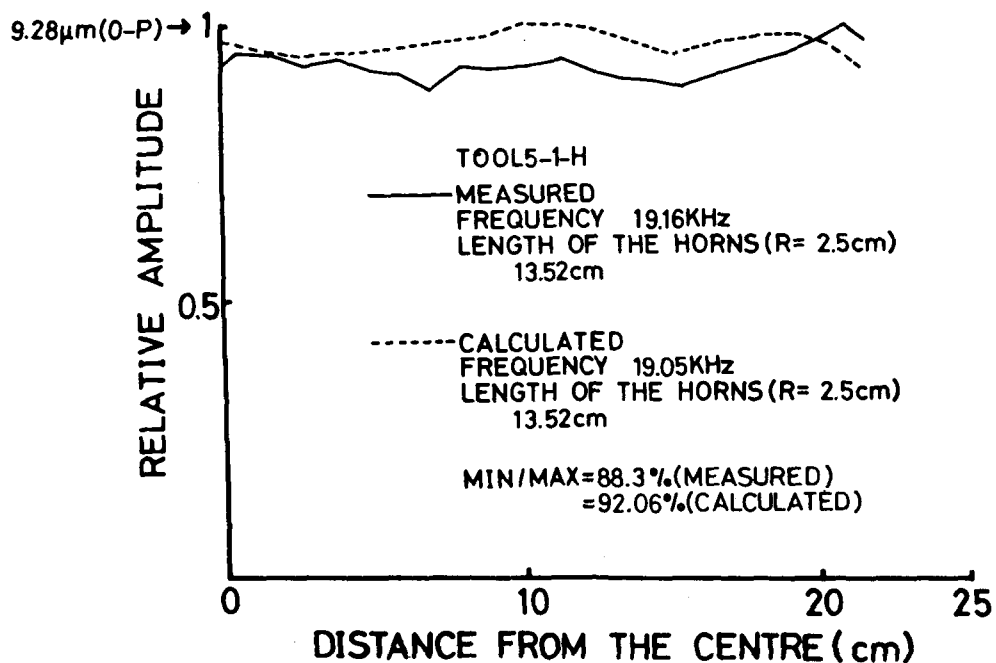
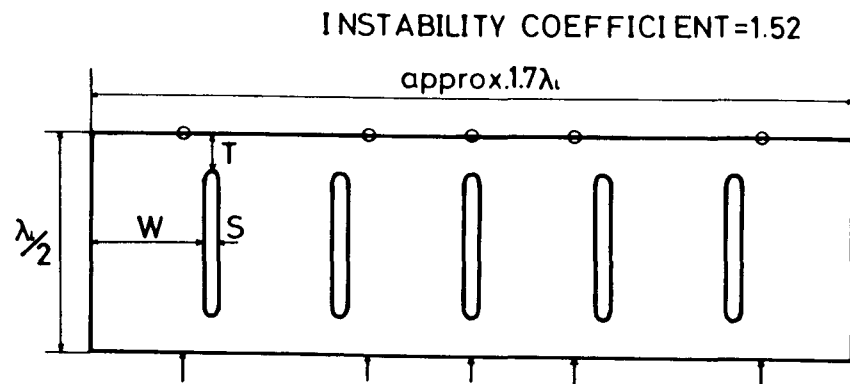


Fig.4-3 The plane configuration of the vibrating system including a 6-slot tool for which the method was examined and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 3. The horn type is (c) shown in Fig.4-1.



TOOL4-1-B
 $S = \lambda/24$
 $W = \lambda/4$
 $T = \lambda/12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=5

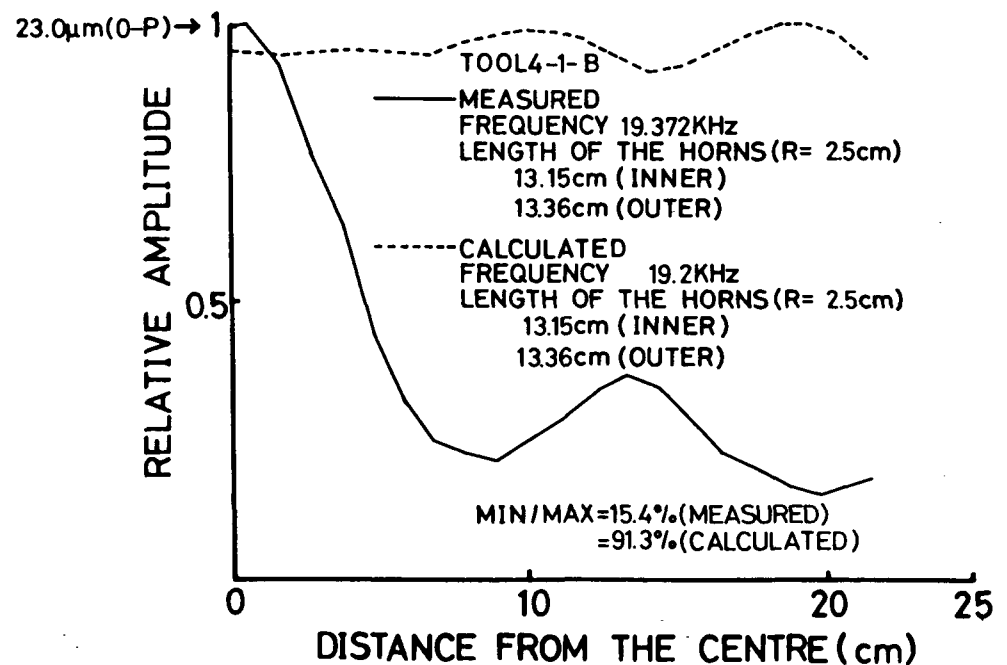


Fig.4-4 The plane configuration of the vibrating system including a 5-slot tool for which the method was examined and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 5. The horn type is (c).

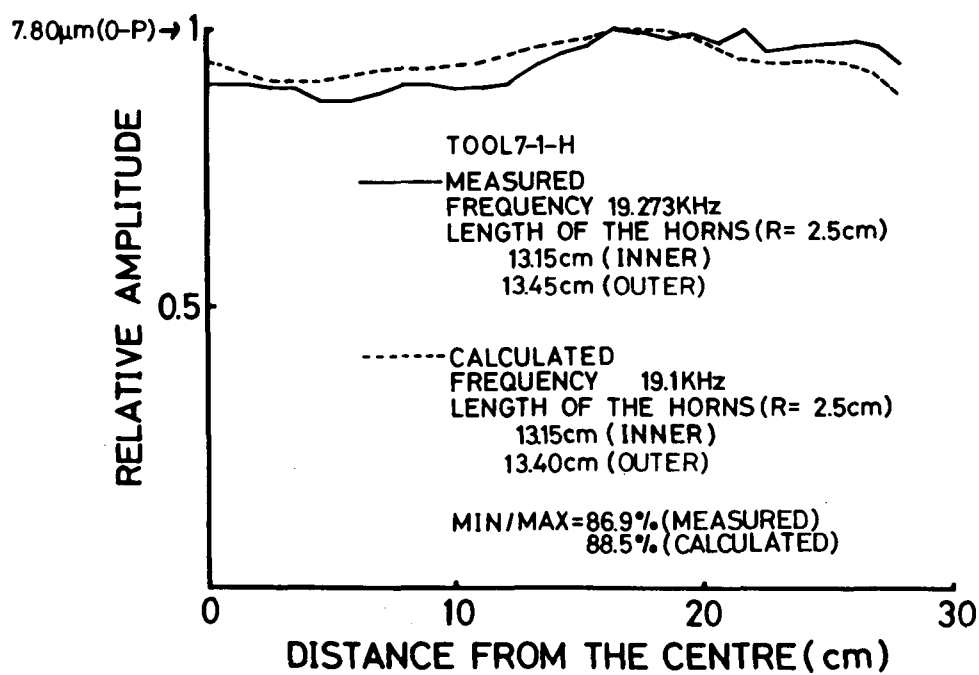
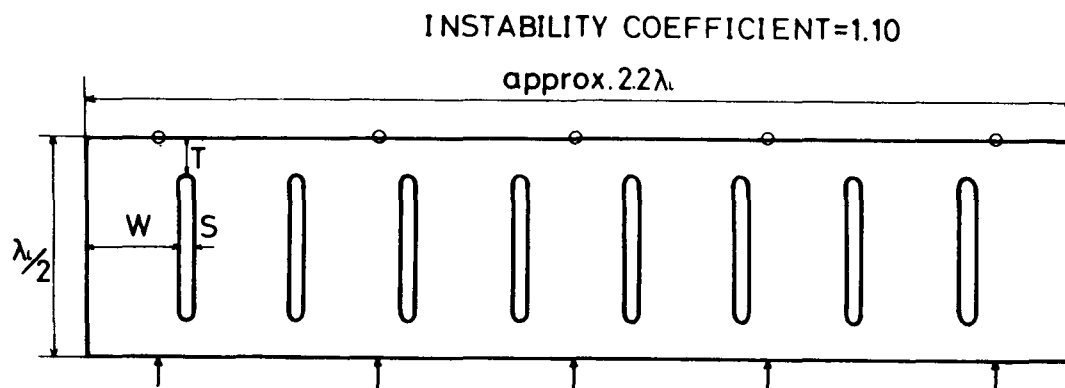


Fig.4-5 The plane configuration of the vibrating system including a huge 8-slot tool for which the method was examined and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 5. The horn type is (c).

Fig. 4-6は、駆動点が近接しているためFig. 4-1(a)のタイプのホーンを用いた例である。ここでは出来るだけ計算と実験との条件の相違を小さくするため、ホーンにレンチかけを設けずプライヤで締め付けを行っている。実験結果は他の例と比べると、振動変位分布に関する限り余りよい結果とは言えない。しかし、振動モードはホーンの長さ変動に対して極めて安定であり、工具の同相縦振動の固有モードにおける放射面での振動変位分布の平坦度が高々34.3%に過ぎないことを考えると、実用的には十分な効果があらわれていると言えるだろう。この場合の結果が、小さな不安定性係数の値にも拘らず、他の結果に比べて思わしくない理由には次の二つが考えられる。

一つには、接合用の太いネジが工具の大きさに比較してかなり数多く入っていることから、不安定性係数の計算で仮定したリアクティブな力以外の不必要な摂動の影響が生じ易いことである。つまりネジ結合における振動エネルギーの損失が振動モードに影響している可能性がある。

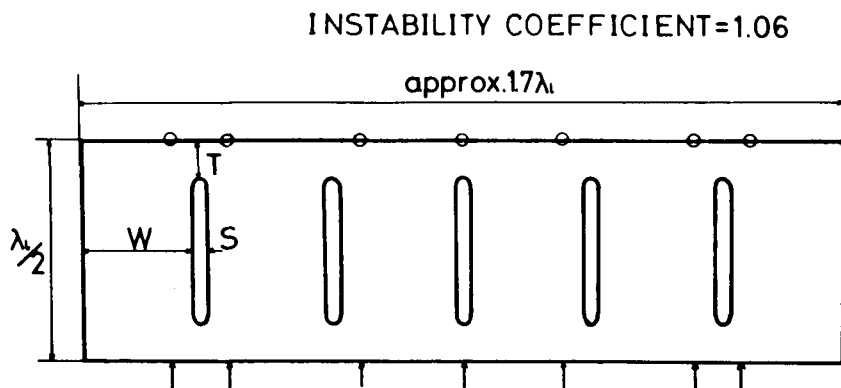
次に考えられるのは、やはりネジ穴が頻繁に入っていることから、スリットなどの近傍で計算では考慮していなかった極端な応力集中が起き、そのことが振動モードに乱れを生じさせた可能性である。実際この例では、最外側のスリットの下端近傍に、二つの駆動点（つまりウェーブトラップトホーンを接続するネジ穴）が集中している。

以上のことから、駆動点を増加させることに過度に頼って不安定性係数を低下させるようにすることは、実用的な見地からは良好な結果をもたらさないと考えても良いであろう。

Fig. 4-7はFig. 4-1(b)のタイプのホーンを用いた例である。ホーンの直径がFig. 4-3や4-5の場合と比べて小さいにも拘らず、その長さを調節すると振動モードがよく変わる点が、上の例と比べるとやや振動モードの不安定さを感じさせる。しかし、ホーンの長さを全く調節しなくても（計算で求めた長さのホーンを付けても）平坦度の誤差は4%程度であった。

上のいずれの場合においても共振周波数の誤差は高々1.2%であった。また顕著なホーンの曲げ振動は観察されなかった。

以上の結果から言えることは、不安定性係数が小さければ4-2節の(1)の問題点は考えなくても良いこと、(2)のウェーブトラップトホーンの曲げ振動はその径を大きくしてやれば防げること、である。



TOOL4-1-B
 $S = \lambda_1 / 24$
 $W = \lambda_1 / 4$
 $T = \lambda_1 / 12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=7

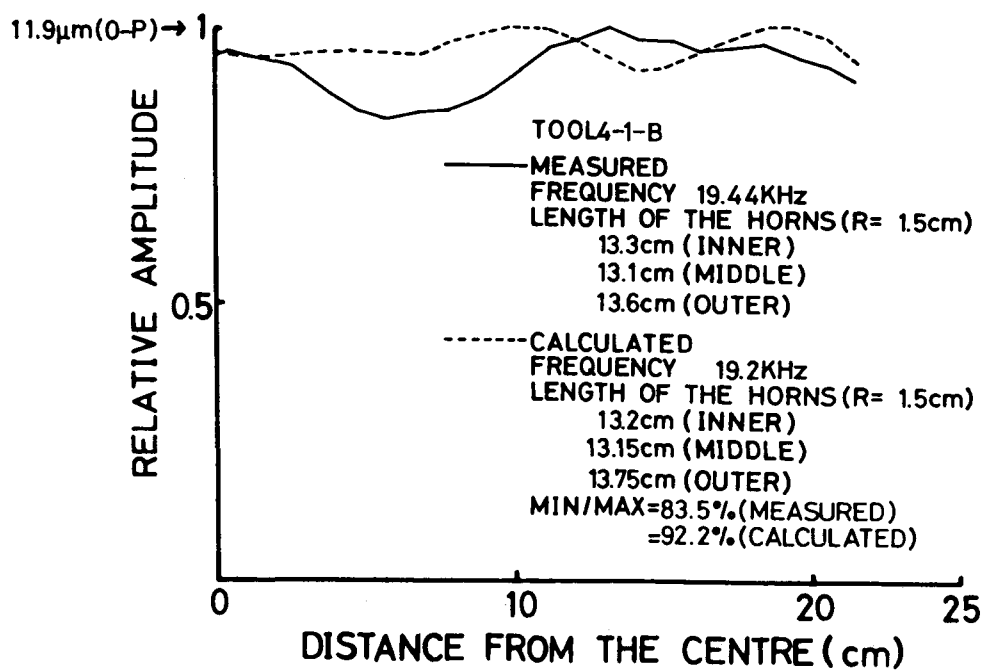


Fig.4-6 The plane configuration of the vibrating system including a 5-slot tool for which the method was examined and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 7. The horn type is (a).

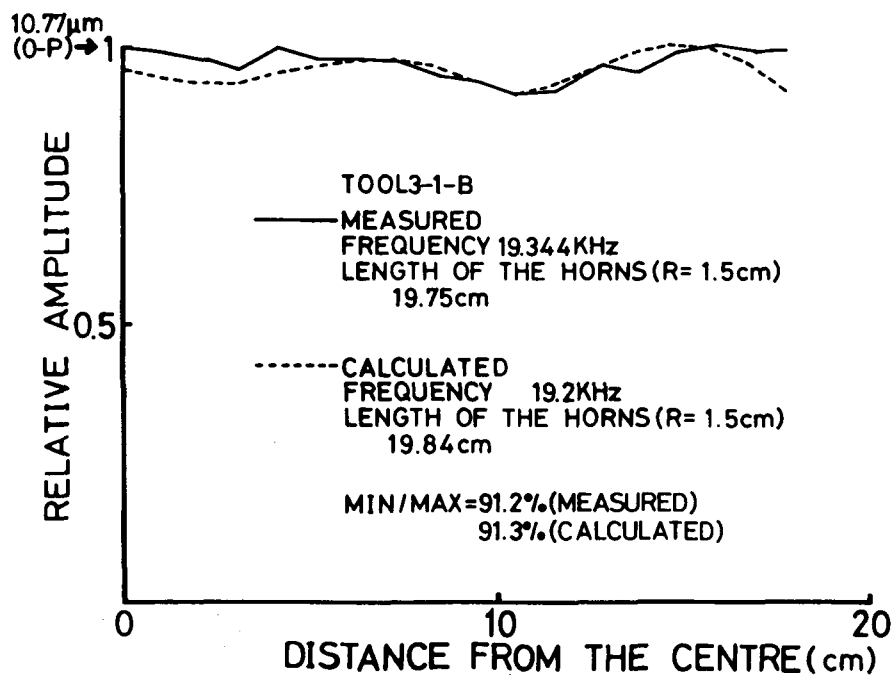
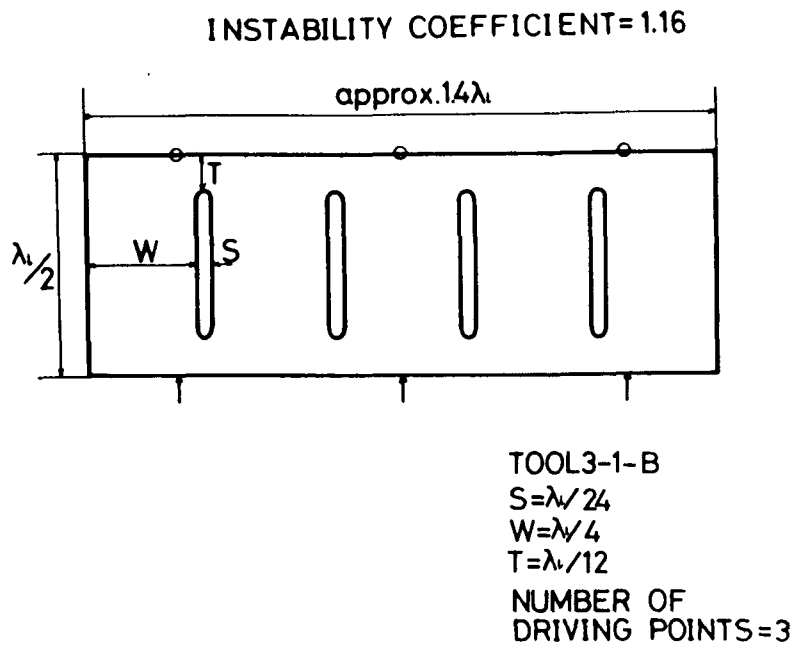


Fig.4-7 The plane configuration of the vibrating system including a 4-slot tool for which the method was examined and the comparison between the predicted result and the final experimental outcome. The number of driving points is 3. The horn type is (b).

第5章 大型超音波振動系の構成手法

5-1 概説

第4章までで、本振動モード制御手法の実用性が確かめられた。この短い章では、これまでに明らかになった知見をもとに、波長に比べて非常に広い放射面で平坦な振動変位分布を実現しなければならない大型超音波振動系の、ウェーブトラップトホーンを用いた一般的な構成の手順を提案する。

5-2 大型超音波振動系の設計に課せられる実用上の要求

大型超音波振動系の構成手順を提案する前に、そうした振動系に課せられる実用上の問題について整理しておく。

大型超音波振動系のモード制御の手法が実際に必要とされるのは、今のところ超音波プラスチック溶接の分野のみと言って良いであろう。その理由は、水密性や加工精度の高さ、場合によっては肌触りの良さといった品質を加工品に求める傾向が、他の強力超音波応用の分野に比べて圧倒的に大きいからだ。それらの要求に答える必要から、緊目のない滑らかな放射面に於て平坦な振動変位分布を実現しなければならないことに関しては、序章で述べた通りである。従って、以下の議論では、特に断わらなくても暗黙のうちにプラスチック溶接に用いる大型超音波振動系を考えている。

超音波プラスチック溶接に用いられる大型超音波振動工具は、まずその放射面の形状が溶接したいプラスチックの部品の表面形状と一致していなければならない。本研究では測定の便宜のため、平らな放射面の形状をもった工具しか取り扱ってこなかったが、このような単純な放射面の形状をもった工具は現実には希である。

またそうした工具を含む大型超音波振動系は、汎用の超音波プラスチック溶接の装置に取り付けられなければならない。そうした装置は通常、プラスチック部品を置く工作台、油圧等によって超音波振動工具を工作台の上におかれた部品に押し付ける装置、電気機械振動変換系、及び発振器や電力増幅器から成る電気系の装置等から構成されている。その中で大型超音波振動系が接続される電気機械振動変換系は、通常Langevin型振動子をはじめとする電気機械振動変換器、及びエキスポネンシャルホーンもしくはステップホーンをなどの機械振動変成器で構成されており、一系統しかないのが普通である。さらに大

振幅（20 kHz程度の周波数で数十 μm ）での駆動が要求される。ということは、大型超音波振動系は原理的には一点駆動される共振系でなければならない。当然のことだが、その外形寸法も装置全体の形状に当然依存する。

また、大振幅での駆動に耐えるだけの機械的強度が、こうした振動系には与えられなければならない。もちろん、平坦な振動変位分布を工具の放射面で実現する必要がある。

大型超音波振動系の設計にあたっての要求は、上記以外にも幾つか考えられるが、ここでは以上の事柄だけを考慮することにする。

5 - 3 振動系構成の手順

前章までに得られた知見及び前節で整理した実用上の要求から、波長に比べて非常に広い放射面で平坦な振動変位分布を実現しなければならない大型超音波振動系の、ウェーブトラップトホーンを用いた一般的な構成の手順を考えてみた。以下にそれを示す。

- (1) 最初におおよその駆動周波数を決定する。15 kHzから高くても90 kHzまでの範囲で、用途に応じて決定すればよいであろう。
- (2) 次に大型超音波振動工具の形状を定める。まず、放射面の形状を要求仕様に従って決める。工具の縦の一辺はおおよそその周波数で細棒内を伝搬する縦振動の波長の半分になるように定め、スリットを十分狭い間隔（ $\lambda/4$ 以下）で、かつ強度上の要求を満たす範囲内で出来るだけ長く、縦に入れてやる。その他にも必要と思われる工夫を工具形状に施すと良いだろう。例えば、放射面が著しく変化に富んだ形状のものである場合には、工具各部の縦の寸法の半波長からの逸脱を小さくするため、Fig.5-1に示す様にその反対側の面の形状を放射面と相似の形状にしてやったほうが、全体としては同相縦振動のモードで振動し易くなることが考えられる。
- (3) その工具形状について有限要素法を用いた振動モード解析を行い、同相縦振動のモードを探し、その周波数の近傍に新たな駆動周波数を設定し直す。該当するモードがない場合には、当初の駆動周波数に近接する固有振動モードの共振周波数から適当に定めてやる。

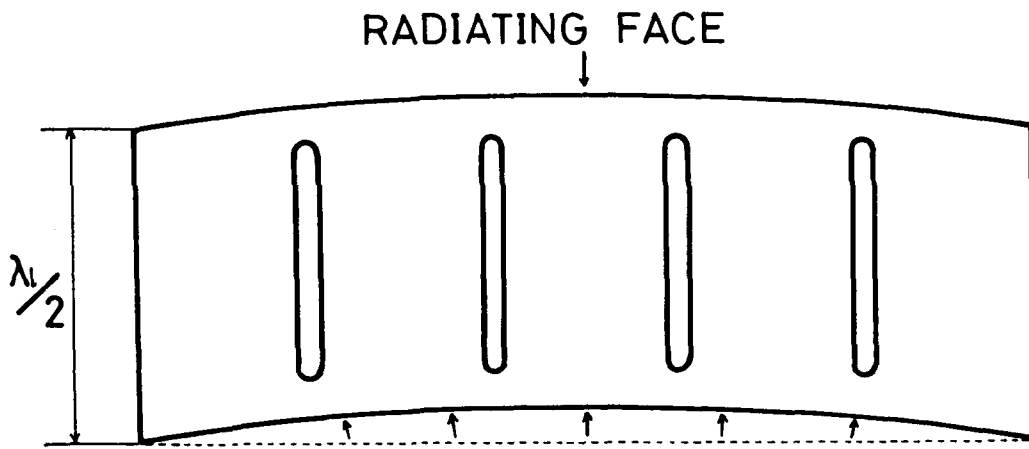


Fig.5-1 A device of configuration for maintaining longitudinal vibration.

- (4) 次に、放射面上に垂直な方向の振動変位を等しく指定する点を選び、第1章で述べた方法に従って計算上での振動モード制御を試みる。変位を指定する点の選び方は、放射面の中心と、その他はなるべく同相縦振動のモードで最大振幅を与えていたところと最小振幅を与えていたところを選ぶ。同相縦振動のモードのない場合には、互いに逆相で振れていたところを選ぶことにする。駆動点はその反対側の面で変位を指定する点に最も近いところ（直下）に機械的に定める。ただし、そこに取り付けるべきウェーブトラップトホーンの実際の太さを十分考慮にいれておく必要がある。駆動点の横方向の振動変位が大きい場合は、変位を指定する点と駆動点の設定をやり直す。出来ればここで応力解析も行い、極端な応力集中が起きる場合には工具の形状に適当な変更を施し、(3)の段階に戻って計算をやり直す。
- (5) そうしたら、変位を等しく指定する点及び駆動点の位置をそのままにして、計算上で駆動周波数を上下させ、放射面での振動変位分布がより平坦になるよう駆動周波数を再び設定し直す。
- (6) 同時に、その駆動周波数を中心周波数にしてその振動系の不安定性係数を計算する。もし不安定性係数の値が大きい場合は工具のスリットの数を増やすか、駆動点（変位を指定する点）を増やすかの対策を施した後、(3)の段階に戻ってもう一度上の手順をやり直す。

- (7) 十分小さな不安定性係数が得られることが分かったら、その工具形状に決定し、ウェーブトラップトホーンの長さを中心周波数でのそれに設定する。

以上が筆者がここで提案する大型超音波振動系の構成手法であるが、これが最適な手法であるということではない。ただ、この研究で得られた知見から妥当と思われる構成手法を一つ提案したことになる。

第6章 考察

ここでは、現状での本手法の問題点や、今後に残された課題について考えてみたい。まず簡単な事柄から始めることにしよう。

従来の共振系の組合せによる振動系設計と比較すれば、本手法において試行錯誤的に決定される部分は随分少なくなっている。しかし皆無ではない。特に変位を指定する点（駆動点）の選択は、何回かの計算結果から適当な場所を直感的に選ぶのであって、決して最適な点を選択しているわけではない。

もちろん有限要素法を離散定式化の手法として用いているわけだから、線形計画問題におけるシンプレックス法などを用いれば、特定の駆動周波数での最適な駆動点は離散定式化の精度の範囲内で有限回の計算によって導き出すことは出来る。ただ、そうしてしまうと、本手法の持っている最大の長所の一つである簡便さが損なわれてしまうことになるのである。本研究で最適な駆動点の設定という問題を敢えて取り上げなかった理由はここにある。

本研究では第2章及び第5章で断わったように、変位を指定する点及び駆動点は画面表示された同相縦振動のモードから直感的に定めている。即ち、同相縦振動のモードにおいて振動変位が小さかった放射面上の点と放射面中央の点の垂直方向の振動変位が等しくなるように、それらの点の直下に設定した駆動点に加えるべき力を計算しているのである。このような点の選び方は果して妥当なものであろうか。一つの工具を例に取って簡単に考えてみたい。

Fig. 6-1は第2章の冒頭（Fig. 2-2）で紹介した実験用スリット付大型超音波振動工具について、変位を指定する点（とその直下の駆動点）の位置と、放射面における振動変位分布の平坦度との関係を計算で調べてみた結果だ。図では駆動周波数一定の条件の下で、1点を放射面の中央に固定し、他の2点（振動系の対称性から図では片方しか示していないが）を動かした場合の平坦度の変化を示している。図で各点の間隔は $\lambda_1/24$ である。

図から分かることは、第2章で行ったようにFig. 2-3に示した同相縦振動のモードで垂直方向の変位が最小になっている場所の付近にその点を設定したとき、最大の平坦度が得られていることである。また、そのときの駆動点の横方向の変位は垂直方向に比べて十分小さなものであった。他の工具でもこれと同様な計算を行ったところ同じ様な傾向が見受けられた。これらのことから、前章で定めた手続きは実用的には概ね妥当なものであると考えても良いだろう。ただ、前章でも断わったが、このことがそうした駆動点設定の手法が最適であることを意味しない点に注意を払う必要がある。

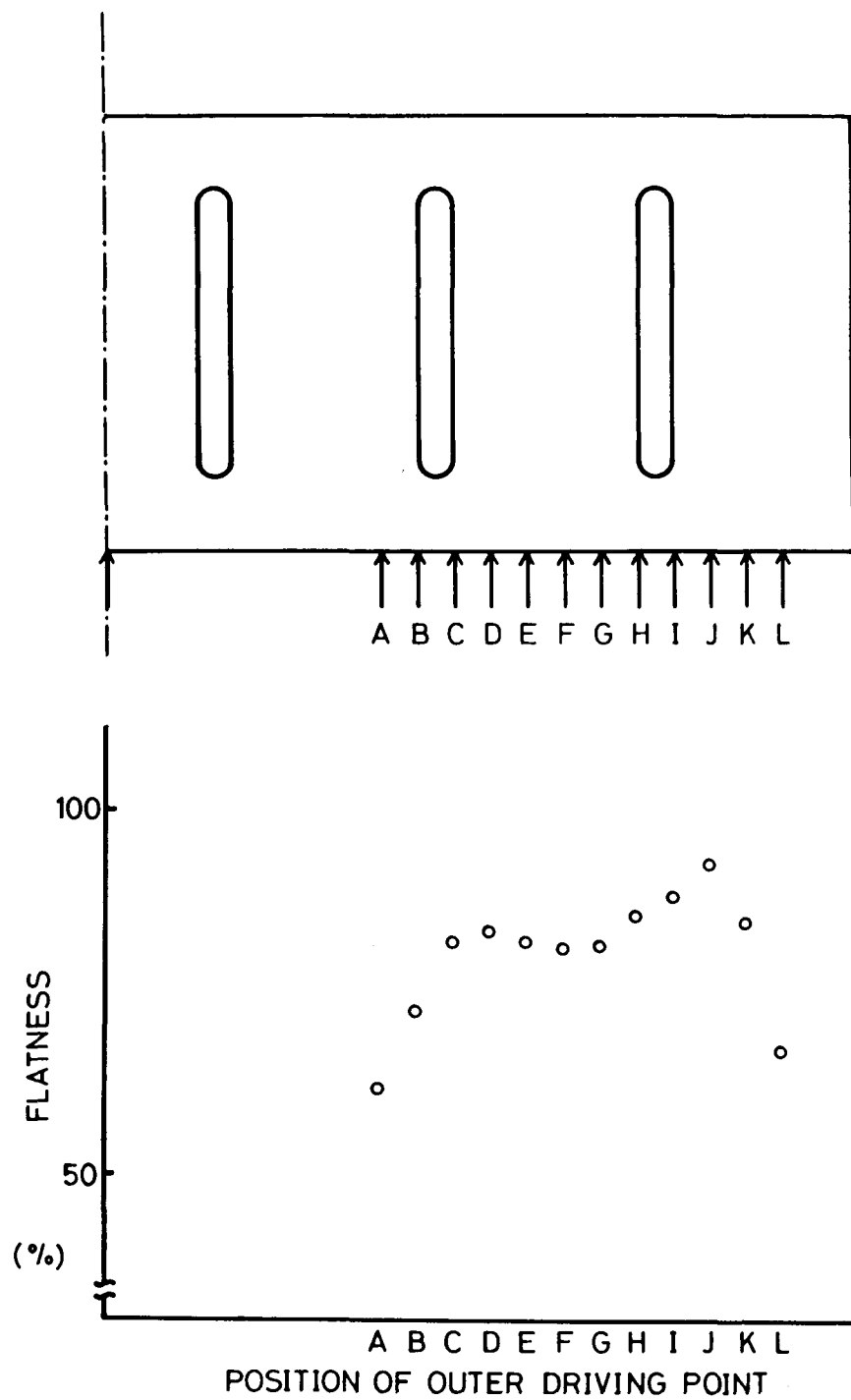


Fig.6-1 The relationship between the flatness and the positions of the outer driving points for the 6-slot tool shown in Fig.2-2.

さて、第1章のはじめに、本研究では「系の線形性は完全に保たれているものとする。また、系内の損失による振動エネルギーの消散は無視し、振動振幅は時間的に変化しないものとする。」という二つの仮定をした。この二つの仮定の現実的な妥当性について考えてみる。

まず線形性の仮定から吟味してみよう。弾性体の変形の非線形性は、動的な場合にせよ静的な場合にせよ次の二つが考えられる。その第一は幾何学的な非線形と呼ばれるもので、これは、弾性体の変形が微小変形から逸脱すること、即ち有限変形 (finite deformation) がもたらすものである。そして第二は物理的な非線形と呼ばれるもので、これは、応力と歪の間にある線形関係が崩れるような大応力によって生じ、物質の力学的性質に依存する。いわゆる有限歪 (finite strain) がもたらすものである。

本研究の対象となったアルミニウム製のプラスチック溶接用大型超音波振動工具の場合、実用に供せられるような大振幅でもその大きさはせいぜい数十 μm であり、縦振動の波長との比較では変形は無視できるほど小さいと考えて良いであろう。従って有限変形による非線形性は問題にならない。またアルミニウムでは、変位 $20\ \mu\text{m}$ 駆動周波数 $20\ \text{kHz}$ として、おおよそ $4.0 \times 10^7\ \text{N/m}^2$ 程度の最大応力が変位の節の位置に生じるが、文献⁽⁵⁾によれば、これと同じ静水圧が弾性体全体に加わった時の弾性係数の通常値からの変化は、約 0.3% 程度に過ぎない。ということは、有限歪による非線形性も考慮する必要はないことが分かる。

次に、系内の振動エネルギーの消散を無視していることについて考えてみよう。金属内を伝搬する弾性波の損失は一般に極めて小さいから、工具が常識的に考えられる大きさにとどまる限りにおいて、これが振動モードに与える影響を無視することには問題はなかろう。考えなければならないのは、放射面からの音響放射による影響である。本研究では放射面からの音響放射をゼロと見なしていることになるが、実際の工具ではそこにプラスチックの部品が接することになる。従ってプラスチックの音響インピーダンスによって決まる放射抵抗が大きいと、これが振動モードに及ぼす影響は無視出来なくなる可能性がある。ただ文献⁽⁷⁾によると、比較的硬い有機ガラスのようなプラスチック材料でも、 $20\ \text{kHz}$ 付近の音響インピーダンスはアルミニウムの音響インピーダンスの高々 $1/5$ 程度であることから、ほとんどの場合、音響放射が振動モードに及ぼす影響は大きくないと考えられる。別の見方をすれば、金属溶接のように放射抵抗が極めて大きくなる場合には、ここで提案している振動モード制御の手法は使えないことになる。気を付けるべきことは、ここで振動エネルギーの消散を無視しているのは、振動モードへの関わりにおいてであって、決

して実際のプラスチック溶接においてエネルギーの消費が小さいことを意味するものではない。

さて、上で考慮した全ての仮定が完全に満たされているとして、本振動モード制御手法は、果して何処まで有効なのであろうか。予測される限界について考えてみよう。あくまで原理的には、いくらでも広い放射面で平坦な振動変位分布を得ることが出来ることは間違いない。しかし、まだ考慮されていない現実的な障害要因が他に幾つかある。その一つは、振動系（特に工具）自身の自重による静的変形がもたらす影響であり、もう一つはネジ結合の部分に局所的に現れる非線形の効果である。

まず前者については、有限要素法による予測と対処が可能である。つまり、まず自重によって変形した時の振動系の形状を有限要素法で計算し、その変形後の形状に対して前章で提案した手法を適用すれば良い。問題は後者である。つまり、ある程度以上の振動振幅に達したとたんに、ウェーブトラップトホーンに大きな曲げ振動が励起され、その影響が無視出来なくなる可能性が考えられる。この現象を事前に計算で予測することは、ネジ結合の動的機構の十分な把握が困難である現時点では至難である。このことに関してはまだまだ多くの実験的検討が加えられなければならないだろう。

第 7 章 結論

7-1 前章までのまとめ

前章までに明らかになった事柄をまとめると以下のようなになるであろう。

- (1) 従来系統的な手法が存在しなかった大型超音波振動工具の振動モード制御手法として、ウェーブトラップトホーンと呼ばれる付加振動体を用いた方法を提案し、その波長に比べて非常に広い放射面において平坦な振動変位分布が実現できるようになった。
- (2) この手法は理論的には、工具を多数のリアクティブな駆動力で多点強制駆動される弾性体とみなすことで、振動モードをGreen関数の重ね合わせとして捉える自由度の高い手法である。しかしながら、最終的には一個の共振系を構成する手法である。
- (3) 本手法は本質的に温度に対して安定な手法であると考えられる。
- (4) ホーンに曲げ振動が励起されるのを防ぐためにはその直径が $\lambda_1/8$ 以上でなければならないことを見いだした。
- (5) ホーンの長さ変動に対する同相縦振動のモードの不安定性を克服するため、不安定性係数という数値指標を提案し、それが 1.2 以下なら概ねモードは安定であり、本手法が実用に耐えることを実験的に確認した。
- (6) 不安定性係数を小さくするには、
 - a. 駆動点（変位を指定する点）の個数を増やす。
 - b. 工具に設けるスリットの本数を増やす。の二つの手段があることを見いだした。
- (7) 高振幅駆動のための機構上の工夫を施しても、ホーンが十分太く、振動系の不安定性係数が小さければ、実用上問題はないことが分かった。

(8) 以上の知見をもとに、波長に比べて非常に広い放射面で平坦な振動変位分布を実現しなければならない大型超音波振動系の、ウェーブトラップトホーンを用いた一般的な構成の手順を提案した。

7-2 結論

弾性振動体の共振時の振動モード制御の一般的な手法として、ウェーブトラップトホーンと呼ばれる付加振動体を用いた方法を考案した。この手法によって、プラスチック溶接用スリット付大型超音波振動工具の、縦振動の波長に比べて非常に広い放射面において平坦な振動変位分布を系統的に実現することが、初めて可能になった。また、本手法に伴う幾つかの実用上重要な問題点と、それを克服する手段も見いだした。この手法はその理論的な明快さと実用上の簡便さから、まだ実験的検討の余地はあるものの、超音波溶接の応用範囲を広げる上で極めて有効な手段と考えられる。

7-3 今後の課題

本研究において提案された手法は、本質的にはその表面の一部に課せられた振動変位分布に関する条件を満足させるような、エネルギー消散を伴わない弾性共振系の構成に他ならない。現実的には何等かの方法で系の振動を励振してやらなければならないのだが、本研究ではそこで用いられる能動的な電気機械振動変換器そのものについては理論的には全く考慮していない。そうした変換器の物理特性の違いが振動モードに及ぼす影響を考慮することが必要だろう。

さて、ここでは計算機的能力等の実際的な問題から、一次元的な広がりを持つ放射面において平坦な振動変位分布を実現することに話題を限ってきた。しかし、本手法を二次元的な広がりを持つ放射面に適応することは比較的容易であろうし、実的な点から考えて、そうした研究は極めて有用なものになるはずである。ただ、その際放射面からの音響放射を考慮した振動モード制御の手法が必要になってくる可能性がある。

さらに各振動素子間の機械的な結合に関する総合的な研究が望まれる。特にネジ結合の動的な挙動の把握が、現状での振動モード制御には不可欠である。さらに、計算結果と実験結果に大きな食い違いを生じさせず、かつ実用に耐え得る新しい機械的な結合の手法が考え出されれば、振動モード制御にとって大きな福音となるであろう。

それだけではない。弾性学の理論上本質的な、そして最大の問題が残ってい

る。それは、振動モード制御の定義である「与えられた周波数で振動する弾性体の、形状の与えられた一部の表面において、一定の要求を満たす振動変位分布を実現すること」が果して理論的にどこまで可能なのかという問題である。

本研究では、大型超音波振動工具の波長に比べて広い放射面において平坦な振動変位分布を実現することを具体的な目標としてきた。しかし、第1章や第6章で指摘したいくつかの前提条件が満足されれば、ここで提案した手法で様々な振動変位分布を実現することも本質的には可能なはずである。従って、超音波工学、そのなかでもとりわけ強力超音波の分野の発展を考えるならば、上で提起した問題は看過出来ない性質のものだ。

筆者は自身の修士論文⁽⁴⁾の中で、極めて不完全な形ながらこの問題の数学的定式化を行っている（付録7参照）。だが、それは振動変位分布に関する要求を解析関数の形で与えることを暗黙の了解としており、本研究における上述問題との対応を完全な形ではつけづらい。また、その論文の具体的な数値計算の部分では、一次の偏微分係数まで境界で連続な有限要素を用いなければならない点を見落している（その観点からは境界要素を用いるべきであろう。）。しかしながら、その発想は本質的に本研究と同じであり、筆者は依然としてその定式化の理論上の意義を認めている。ただ、放射場の解の一意性の問題における「放射条件」のような、便利な数学的口実がこの場合は存在しないことから、解の解析的な一意性に固執する限り、修士論文で行った形のままではこの議論に決着をつけることが難しいと現在では考えている。

ところで、こうした抽象的、理論的な考察から出発して、それを少しずつ具象化することで具体的な問題解決の手法としようとする発想は、試行錯誤的手法に比して工学全般において乏しいように思われる。その危険性を指摘する向きもあろう。だが実際、本研究はそうした筋道を辿って行われており、その上で一応の成果をあげるに至った。このことは、逆問題的な発想で工学上の問題を捉え、解決する上でこうした態度が有効な場合もあることを示唆していると考えられる。もちろん、抽象的理論はあくまでも真理の骸骨であり、肉付けの仕方を誤れば、似ても似つかない学理上の化物を作り出してしまう恐れがあることに、注意してし過ぎることはないであろう。

いずれにせよ、どの様にして上述の問題を解決可能な形で定式化し得るかが、今後も振動モード制御のみならず、超音波工学全般にとって大きな問題の一つとなっていくであろうと思われる。

平坦な振動変位分布を共振時にその波長に比べて非常に広い放射面において実現する弾性振動系の構成、という着想を得たのは、筆者が英国UMISTに交換学生として留学していた頃のことだった。スリット付きの大型超音波振動工具が考案されてから、恐らくすでに数十年は経過していただろう。しかし、そうした要求を満たす振動系設計の一般的な手続きを与えようとする研究は、当時全く存在していなかった。そしてこのことが、筆者をして気負い込ませることになった。だから、この研究の見通しの悪さを心配された指導教官の上羽貞行助教授が研究課題の再考をうながす助言をされた時、生来の頑固さも手伝って筆者はこの課題に固執した。

思い返せば筆者の側に相当傲慢不遜な思い込みがあったにも拘らず、こうして研究の成果をまとめ上げることが出来たのも、生意気な学生の言い分に耳を傾けて下さった上羽先生の円満なお人柄と度量の大きさに負うところが大きい。またそうした点では、筆者が学部4年生の時に卒業研究で配属されて以来7年間、先生にはご心配をかけ続けてきたことになる。ここに心からお礼の言葉を申し上げたい。

ところで、こうした実験を主体とした研究を進めるには、筆者は少々不器用でありすぎた。その結果実験用の超音波振動工具の制作に関しては、その殆どを精電舎電子工業の中島孝次長に助けて頂くことになった。思うに中島氏のご援助がなければ、筆者がこの様な研究を行うことは不可能であっただろう。また氏は、現場からの要請に疎くなりがちな筆者に、終始実用的な見地からの助言を惜しまれなかった。氏のご親切には感謝の言葉もない。

それでも、筆者自身が工作を行わなければならないことも決して少なくはなかった。そのため、金子幸二助手や和田選技官をはじめとする精密工学研究所機械工場の皆さんには大変お世話になった。遅ればせながらここに感謝の意を表したい。

日常的な討論の相手に恵まれたことも、筆者にとっては幸いであった。特に助手の黒沢実氏、博士2年の王寧氏という有能な人物が身近にいてくれたことで、筆者がどれほど助けられたか分からない。例えば、本論文第3章の摂動法による考察は王氏の助言に依るところが大きいし、同じ章の不安定性係数の提案は黒沢氏の指摘に触発された。

さらに、特に日常的にお世話になり、またご迷惑をおかけすることが多かった上記以外の方たちのご芳名も以下に記して感謝の印としたい。

精密工学研究所の大浦宣徳助教授、倉持内武助手。お二人にはお忙しい中、学問的な事柄でよく相談にのって頂いた。特に大浦先生には何かとご迷惑をおかけすることが多かったことを明記しておきたい。所長の奥島基良教授には、論文中に補足されるべき事項についてのご教示を賜った。大槻茂雄助教授には論旨の展開に関する学問的なご指摘を頂いている。教育工学開発センタの清水康敬教授にも本研究の細部にわたってご意見やご指摘を頂いた。上羽研究室では、技官の飯田治久氏、修士2年の里信純氏、中村健太郎氏、修士1年の杉本恒美氏、西田一仁氏、学部4年の松浦功氏、芝浦工大からの研究生の嶽間沢昌秀氏、アルプス電気からの研究生の梅田幹雄氏。これらの方たちは、狷介な気性の筆者と公私にわたって毎日辛抱強くつきあって下さった。

この他にも多くの方たちに助けられ、励まされてこの研究をまとめ上げることが出来た。ここにその方達の全てのお名前を記すことが出来ないのが残念だが、ご親切には厚く感謝申し上げる次第である。

振り返ってみて、当初の意気込みとは裏腹に研究の成果は全くささやかなものとなってしまっていることに気づかされる。自ら修士論文でその必要性を力説した弾性振動系の設計可能性に関する理論に関しても、何等の実質的な議論も出来ないままこの論文を書き終えようとしている。これも自らの浅学非才のしからしむところかもしれないが、あえて肯定的な見方をするならば、弾性体の振動モード制御には解決しなければならない本質的な問題がまだ山積しているとも考えられる。この新しいが奥深く困難な課題に、一人でも多く筆者などより学問的見識に長けた人物が取り組まれることを希望してやまない。

1989年1月 長津田の研究室にて

参考文献

- (1) E.Eisner: ' The Design of Resonant Vibrator' Physical Acoustics, Vol. I Part B, Edited by W.P.Mason, Academic Press, 1964, P.353-365
- (2) 伊藤 勝彦, 森 栄司: 「振動方向変換体の研究」, 日本音響学会誌 28巻 3号, 1972年, p.127-135
- (3) 例えば O.C.Zienkiewicz: ' The Finite Element Method' 3rd edition, Mcgraw-hill, 1977, Chapter 20 p.558
- (4) 足立 和成: 「有限要素法による大型超音波プラスチックウェルダール工具の研究」, 修士学位論文, 東京工業大学, 1986年2月
- (5) 日本機械学会編: 「金属材料の弾性係数」, 1980年, p.159及びp.161
- (6) Morse, Feshbach: ' Methods of Theoretical Physics' , Mcgraw-Hill, 1953, Chapter 9, p.1001-1064
- (7) 実吉, 菊池, 能本, 監修: 「超音波技術便覧」, 新訂版, 日刊工業新聞社, 1978, p.1353
- (8) A.E.H.Love: ' A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity' , Dover, 1944, Chapter VII p.170-171

関連発表

論文

- (1) K.Adachi, S.Ueha: 'Modal Vibration Control of Elastic Systems Using Wave-Trapped Horns', Proc. 8th Sym. Ultrasonic Electronics Tokyo 1987, Jpn. J. Appl. Phys. 27 (1988) Suppl. 27-1, p.183
- (2) K.Adachi, S.Ueha: 'Modal Vibration Control of Large Ultrasonic Tools with the use of Wave-Trapped Horns'
[to be published in J. Acoust. Soc. Am.]
- (3) K.Adachi, S.Ueha: 'Modal Vibration Control of Large Ultrasonic Tools in High Amplitude Operation'
[to be published in Jpn. J. Appl. Phys.]

国際会議

K.Adachi, S.Ueha, E.Mori: 'Modal Vibration Analysis of Ultrasonic Plastic Welding Tools Using the Finite Element Method',
Proc. Ultrasonics International 85, (1986), Butterworth, London,
p.727

電子情報通信学会技術研究報告 (音響学会超音波研究会資料)

- (1) 足立, 上羽: 「超音波プラスチックウェルダー用工具の設計法の検討」
昭和61年 2月
- (2) 足立, 上羽: 「ウェーブトラップトホーンによる超音波大型工具の振動モード制御」, 昭和63年 2月

音響学会研究発表会講演論文集

- (1) 足立, 上羽, 森:「有限要素法によるプラスチックウェルダ用工具に関する研究」, 昭和59年 10月
- (2) 足立, 上羽:「有限要素法によるプラスチックウェルダ用工具に関する研究(2)」, 昭和61年 3月
- (3) 紅林, 足立, 上羽:「有限要素法による高周波エクスポネンシャルホーンの設計」, 昭和61年 10月
- (4) 足立, 上羽:「ウェーブトラップトホーンによる超音波振動工具のモード制御」, 昭和62年 10月
- (5) 足立, 上羽:「ウェーブトラップトホーンによる超音波振動工具のモード制御(2)」, 昭和63年 3月
- (6) 足立, 上羽:「振動モードの温度安定性 ―ウェーブトラップトホーンによる超音波振動工具のモード制御(3)」, 昭和63年 10月
- (7) 足立, 上羽:「大振幅駆動される超音波振動工具のモード制御とその安定性 ―ウェーブトラップトホーンによる超音波振動工具のモード制御(4)」, 昭和63年 10月
- (8) 松浦, 里信, 足立, 上羽:「能動素子による超音波振動体のモード制御」
昭和63年 10月

付録 1 弾性波動の支配方程式における解の一意性について

調和振動を仮定した無損失の等方 (isotropic) 弾性媒質中の線形 (微小変位) 波動の支配方程式の解は、弾性体の表面全部で自然境界条件 (natural boundary condition) もしくは基本境界条件 (fundamental boundary condition) のいずれか一方が定められていれば、剛体運動の自由度を残して一意に定まる。ただし本研究では、境界条件によって定まる固有角周波数において、幾何学的な対称性から縮退している複数の固有関数についてはそれらを一つの解とみなしており、ここでいう一意とはその意味においてである。

この支配方程式は分類上は楕円型の偏微分方程式であるが、弾性波動がテンソル波であることから、自然境界条件の取り扱いがスカラー波の Helmholtz の波動方程式などの場合とはやや異なり、複雑である。ここでは、参考文献 8 の手法に倣ってその解の一意性を証明しておく。

まず、最初の場合わけをしよう。与えられた境界条件によってその弾性振動系の固有角周波数が決定される自由振動の場合は、解の一意性は上の定義から自明である。従って以下の議論は、特に断わらない限り、境界条件が弾性振動系の固有角周波数を決定しない、即ち強制振動の場合に限定する。

次に、支配微分方程式の数学的表現を単純にし、以下の議論を進めやすくするため、歪エネルギー関数 (strain-energy-function) と呼ばれる関数 W を定義しておこう。これは、線形歪によって蓄えられる弾性媒質の単位体積当りの力学的ポテンシャルエネルギーを表す常に非負の値をとる位置座標の関数で、

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \geq 0$$

. . . . (A 1 - 1)

と定義される。ここで σ_x , σ_y , σ_z はそれぞれ x , y , z 方向への伸びの応力、 τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} はそれぞれ $x-y$, $y-z$, $z-x$ 平面に平行な面内での剪断応力である。また、 ε_x , ε_y , ε_z 及び γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} は 3-5 節で述べた歪の成分であり、その定義は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (A 1 - 2)$$

及び

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{A 1 - 3}$$

であった。もちろん U_i は変位ベクトル U の i 方向成分で位置のみの関数。応力と歪の関係式は、よく知られているように

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_y + \lambda \varepsilon_z \\
 \sigma_y &= \lambda \varepsilon_x + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_y + \lambda \varepsilon_z \\
 \sigma_z &= \lambda \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_y + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_z
 \end{aligned} \tag{A 1 - 4}$$

及び

$$\tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \mu \gamma_{zx} \tag{A 1 - 5}$$

で与えられる。繰り返すようだが、ここで λ 及び μ は当該弾性媒質の Lamé の弾性定数である。

この歪エネルギー関数 W を用いると、問題となっている弾性波動の支配方程式は次のような簡単な形式で書き直すことが出来る。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \right) &= -\rho \omega^2 U_x \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \right) &= -\rho \omega^2 U_y \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \right) &= -\rho \omega^2 U_z
 \end{aligned} \tag{A 1 - 6}$$

ここで ρ と ω は、それぞれ当該弾性媒質の密度と角周波数を表す。もちろん上式に式 (A 1 - 1) から (A 1 - 5) までを代入すれば、式 (3 - 5) に示し

た通常の形式での支配方程式

$$\{ (\lambda + 2\mu) \text{grad div} - \mu \text{rot rot} \} \mathbf{U} = -\rho \omega^2 \mathbf{U}$$

が得られることは言うまでもない。また式 (A 1 - 1)、(A 1 - 4) 及び (A 1 - 5) より、Wには重要な性質として

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, & \sigma_y &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, & \sigma_z &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, & \tau_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \end{aligned} \quad (\text{A 1 - 7})$$

がある。(応力 σ_x 等が歪 ε_x 等の関数であることに注意。)

さて弾性学においては、式 (A 1 - 6) の自然境界条件が直接変位ベクトル $\mathbf{U}$ の微分係数で与えられることはなく、通常Cauchyの関係式と呼ばれる式

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} \quad (\text{A 1 - 8})$$

で与えられる。ここで T_i は表面応力 (traction) ベクトルの i 方向成分であり、 l, m, n はそれぞれ境界面に垂直な外向きの単位ベクトル $\mathbf{n}$ の x, y, z 方向成分である。このことが他の楕円型の偏微分方程式と数学的な取扱の点で最も異なるところである。式 (A 1 - 7) を用いて式 (A 1 - 8) を書き直してやると、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} & \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} \quad (\text{A 1 - 9})$$

となる。

ちなみに振動エネルギーの放射を伴わない自由共振系の場合、式 (A 1 - 8) で $T_i = 0$ ($i = x, y, z$) とおき、それに式 (A 1 - 4) 及び (A 1 - 5) を代入して、弾性定数間の関係式

$$\lambda = \frac{\nu Y}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1 + \nu)}$$

及び、式 (3 - 7)、(3 - 10) に示したパラメータ D 、 F の定義式

$$D = \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}, \quad F = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$$

を用いると、式 (3 - 9) に示した自然境界条件の表式

$$\begin{pmatrix} D \varepsilon_x + F \varepsilon_y + F \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & D \varepsilon_y + F \varepsilon_z + F \varepsilon_x & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{yz} & D \varepsilon_z + F \varepsilon_x + F \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。ただし上式の左辺を ρ/E 倍したものが式 (A 1 - 8) の左辺であることに注意しなければならない。もちろん E は式 (3 - 8)

$$E = \frac{2\rho(1 + \nu)}{Y}$$

で定義されるパラメータである。

今仮に、 (U_x', U_y', U_z') と及び (U_x'', U_y'', U_z'') とという変位ベクトルをそれぞれ与えられた基本及び自然境界条件を完全に満足する式 (A 1 - 6) の二組の解とする。そうすると式 (A 1 - 6) は線形の微分方程式であるから、 $(U_x' - U_x'', U_y' - U_y'', U_z' - U_z'')$ もまたその解となっていなければならない。そこで、以下の議論のために変位ベクトル U を新たに

$$\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)^t = (U_x' - U_x'', U_y' - U_y'', U_z' - U_z'')^t$$

と定義し直そう。

この $\mathbf{U}$ に関して、仮定より境界条件が基本境界条件の形で与えられているところでは

$$U_x = 0, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0 \quad (\text{A 1 - 1 0})$$

自然境界条件の形で与えられているところでは、式 (A 1 - 9) の形で

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} & \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} & \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} & \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} & \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A 1 - 1 1})$$

となっていなければならない。

式 (A 1 - 6) より、任意の ω に対して以下の恒等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \int \left[U_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \right) + \rho \omega^2 U_x \right\} \right. \\ & + U_y \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \right) + \rho \omega^2 U_y \right\} \\ & \left. + U_z \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \right) + \rho \omega^2 U_z \right\} \right] dV = 0 \end{aligned}$$

..... (A 1 - 1 2)

ここで dV は体積素、積分領域は弾性振動体全体である。

これからやろうとしていることは、上式に Green の公式 (部分積分の公式)

を適用し、その左辺を体積積分の項と境界面上の表面積分の項に分割することである。ただ、このままの形では式の変形の見通しが悪いので、まず以下の三つのベクトル量を定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \right)^t \\ \mathbf{F}_y &= \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \right)^t \\ \mathbf{F}_z &= \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \right)^t \end{aligned} \quad (\text{A 1 - 1 3})$$

これらを用いて式 (A 1 - 1 2) を書き換えてやると

$$\sum_i \int (U_i \operatorname{div} \mathbf{F}_i + \rho \omega^2 U_i^2) dV = 0 \quad (\text{A 1 - 1 4})$$

となる。ただし $i = x, y, z$ である。さて Green の公式を上式に即した形式で表現してやると

$$\int U_i \operatorname{div} \mathbf{F}_i dV = \int U_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} dS - \int \operatorname{grad} U_i \cdot \mathbf{F}_i dV$$

である。ここで dS は面積素、面積分の領域は境界面上である。上式を用いて式 (A 1 - 1 4) は

$$\sum_i \int U_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} dS - \sum_i \int (\operatorname{grad} U_i \cdot \mathbf{F}_i - \rho \omega^2 U_i^2) dV = 0$$

. . . . (A 1 - 1 5)

と部分積分が出来る。

ここで、まず式 (A 1 - 1 5) の左辺第一項を式 (A 1 - 1 3) を用いて展開してやると

$$\begin{aligned} \Sigma_i \int U_i F_i \cdot \mathbf{n} \, dS = \int \left\{ U_x \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} l + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} m + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} n \right) \right. \\ + U_y \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} l + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} m + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} n \right) \\ \left. + U_z \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} l + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} m + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} n \right) \right\} dS \\ \dots (A 1 - 1 6) \end{aligned}$$

ところが、式 (A 1 - 1 0) 及び (A 1 - 1 1) から、この項は明かに 0、さらに式 (A 1 - 1 5) の左辺第二項に式 (A 1 - 1 3) を代入して展開した後、歪の定義式 (A 1 - 2) と (A 1 - 3) を用いて式 (A 1 - 1 5) を歪の成分に関して整理すると

$$\begin{aligned} \Sigma_i \int (\mathbf{grad} U_i \cdot \mathbf{F}_i - \rho \omega^2 U_i^2) \, dV \\ = \int \left[\left\{ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \varepsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \varepsilon_y + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \varepsilon_z + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \gamma_{xy} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \gamma_{yz} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \gamma_{zx} \right\} - \rho \omega^2 (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) \right] dV \quad (A 1 - 1 7) \end{aligned}$$

そうすると、W の定義式 (A 1 - 1) 及び応力の定義式 (A 1 - 7) より、式 (1 - 1 7) の右辺の { } の部分は 2 W を全体積で積分したものになるから、最終的に式 (A 1 - 1 5) は

$$\int W \, dV = \int \frac{1}{2} \rho \omega^2 (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) \, dV \quad (A 1 - 1 8)$$

という恒等式に変形される。式 (A 1 - 1 8) はその左辺が弾性振動体の全ポ

テンシャルエネルギーに、右辺が同じく全運動エネルギーに対応し、これは固有角周波数を決定する周波数方程式に他ならない。従って、固有角周波数以外の ω で上式が成り立つのは、この式の両辺の値が0となる場合しかない。即ち、弾性振動体の全領域で $W = 0$ かつ $U_i = 0$ となるか、または $W = 0$ かつ $\omega = 0$ となるかのいずれかの場合である。

以上のことから、剛体運動（ $W = 0$ ， $\omega = 0$ での運動）の自由度を除いた同一の境界条件を満たす二つの解の存在は否定される。従ってここに支配微分方程式の解の一意性が証明された。

付録 2 弾性振動体のGreen関数とその固有関数展開

駆動力を考慮した損失のない弾性体の線形の波動方程式は

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{f} \quad (\text{A } 2 - 1)$$

ここで λ 及び μ は媒質の二つのLaméの弾性定数、 ρ は密度、 $\mathbf{u}$ は変位ベクトル、 $\mathbf{f}$ は単位体積あたりの駆動力ベクトルである。ここでは調和的な振動のみを考えるから、時間 t 、位置ベクトル $\mathbf{x}$ 、角周波数 ω として

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{x}) \exp(j\omega t) \quad (\text{A } 2 - 2)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \exp(j\omega t)$$

とおくと、(A 2 - 1) 式から

$$\{(\lambda + 2\mu) \text{grad div} - \mu \text{rot rot}\} \mathbf{U} = -\rho \omega^2 \mathbf{U} - \mathbf{F} \quad (\text{A } 2 - 3)$$

を得る。もちろん $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{F}$ は位置のみの関数である。さらに数式の表記を簡略にするため、

$$\mathcal{L} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div} - \mu \text{rot rot} \quad (\text{A } 2 - 4)$$

という空間的な偏微分演算子を導入する。そうすると(A 2 - 3) 式は、

$$\mathcal{L} \mathbf{U} = -\rho \omega^2 \mathbf{U} - \mathbf{F} \quad (\text{A } 2 - 5)$$

と書ける。

以下、駆動力が存在しない場合、即ち式(A 2 - 5) で $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ とおいた同次式の m 次の固有関数(固有振動モード) $\mathbf{U}_{m0}$ の系列で $\mathbf{F}$ 及び $\mathbf{U}$ を展開し、その後、それらの関係を固有関数 $\mathbf{U}_{m0}$ とその固有値 ω_{m0}^2 の系列を用いて表すことを考える。ここで各固有関数は式(1 - 3)にも示したように、

$$\int \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_{n0}(\mathbf{x}) dV = \delta_{mn} \quad (\text{A 2 - 6})$$

と規格化されているものとする。ドット (・) はベクトルの内積を表し、 δ_{mn} は Kronecker のデルタである。また、 dV は体積素で積分領域は弾性振動体全体である。

$\mathbf{F}$ 及び $\mathbf{U}$ をそれぞれ

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x}) \quad (\text{A 2 - 7})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x}) \quad (\text{A 2 - 8})$$

と表してやろう。 b_m 及び c_m は定数の系列である。

まずこの二つの定数の系列同志の関係を調べる。上の二つの式を (A 2 - 5) 式に代入すると、

$$\mathcal{L} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x}) = -\rho \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x}) - \sum_{m=1}^{\infty} c_m \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x})$$

となる。ここで $\mathcal{L} \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x}) = -\rho \omega_{m0}^2 \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x})$ だから、

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x}) = \rho \sum_{m=1}^{\infty} b_m (\omega_{m0}^2 - \omega^2) \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x}) \quad (\text{A 2 - 9})$$

となる。任意の自然数 n に関して、(A 2 - 9) 式の両辺で $\mathbf{U}_{n0}(\mathbf{x})$ との内積をとって系全体で積分すると、(A 2 - 6) 式の関係より、

$$c_n = \rho b_n (\omega_{n0}^2 - \omega^2) \quad (\text{A 2 - 10})$$

を得る。

そうすると、上式で $n \rightarrow m$ と置き換えた式と (A 2 - 7) 式より

$$U(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\rho(\omega_{m0}^2 - \omega^2)} U_{m0}(x) \quad (A2-11)$$

が得られる。さて c_n そのものは、やはり (A2-8) 式の両辺で $U_{n0}(x)$ との内積をとって系全体で積分することにより、(A2-6) 式の関係から

$$c_n = \int F(x) \cdot U_{n0}(x) dV \quad (A2-12)$$

と形式的に書ける。

ここで、変位に着目する点 x と駆動力が作用する点 y を区別して上式の積分に関わる独立変数を $x \rightarrow y$ と置き換え、添え字を $n \rightarrow m$ と置き換えても形式上は差し支えない。そこでそのようにした (A2-12) 式を (A2-11) 式に代入してやれば結局、

$$U(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int F(y) \cdot U_{m0}(y) dV}{\rho(\omega_{m0}^2 - \omega^2)} U_{m0}(x) \quad (A2-13)$$

を得る。ここで、総和と積分の演算の順序は交換可能だから、積分に関わる独立変数が y であることに気を付けて、

$$U(x) = \int \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_{m0}(x) \times U_{m0}(y)}{\rho(\omega_{m0}^2 - \omega^2)} F(y) dV \quad (A2-14)$$

と変形される。ここで $\times$ はベクトル同志のテンソル積もしくは dyadic と呼ばれる演算を表す。

$\times$ は具体的には、 $a = (a_1, a_2, a_3)^t$ 、 $b = (b_1, b_2, b_3)^t$ という二つのベクトルに対して

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

というテンソルを対応させる演算のことをいう。

Green関数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ の物理意味は、駆動点 $\mathbf{y}$ に角周波数 ω の調和的な駆動力 $\mathbf{F}$ を加えたとき、観察点 $\mathbf{x}$ での変位 $\mathbf{U}$ は $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \mathbf{F}$ で表されるということである。従ってここでの場合のような分布駆動力に対しては

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \mathbf{F} dV \quad (\text{A 2 - 1 5})$$

となる。ただし積分に関わる独立変数は $\mathbf{y}$ であることに注意しなければならない。ここで (A 2 - 1 4) 式と (A 2 - 1 5) 式を比較すれば、

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbf{U}_{m0}(\mathbf{x}) \times \mathbf{U}_{m0}(\mathbf{y})}{\rho (\omega_{m0}^2 - \omega^2)} \quad (\text{A 2 - 1 6})$$

が得られ、(1 - 2) 式が導出された。

ちなみに、Green関数の重要な性質として相反性と呼ばれる性質があるが、具体的には $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ の i 行 j 列成分を $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ としたとき

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = G_{ji}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega)$$

が成り立つことである (添え字の入れ替わりに注意)。

付録 3 本研究のために制作された有限要素解析システム

本文中でも述べたが、本研究で提案している振動モード制御の手法に必要な計算をサポートしている有限要素解析システムは存在しない。そこで筆者は、本研究に必要な機能を備えた簡単な有限要素解析システムを自作した。

本システムは日立製作所製の大型計算機HITAC-Mシリーズ(M-660K等)をハードウェアとするオペレーティングシステムVOS3の上で動くもので、ユーティリティ使用環境として数値計算副プログラムライブラリMSL II、汎用図形出力ルーチン集GPSL(いずれも日立製作所製)の存在を前提としている。また全ての処理は、TSS上で対話的に行われるため、LOGIN時に「LOGON S(4096)」のように入力して、占有記憶領域を4Mbyte取ることを宣言しなければならない。

本システムのロードモジュール及びソースプログラムは、1989年現在、東京工業大学精密工学研究所超音波工学部門に、磁気テープ及びソースリストの形態で保存されている。

まず最初に本システムの仕様を整理しておく。

記述言語 : Fortran 77

要素の種類 : 4種類で
平面応力一次要素
平面歪一次要素
変形平面応力(疑似3次元)要素
軸対称一次要素
がある。

機能 : 線形弾性体に関する以下の計算が出来る。
固有振動モード解析
強制振動モード解析(力、変位いずれの形でも指定可)
振動モード制御

最大節点数 : 400(固有振動モード解析の場合)
450(その他の場合)

最大要素数 : 9 0 0

最大着力点数 : 4 5 0 (強制振動解析の時のみ)

占有記憶領域 : 4 0 9 6 K byte (= 4 M byte)

さて本システムには以下のコマンドが用意されている。

データ取り込みと弾性及び質量マトリクスの生成 : PLANE, MPLANE, AXIAL

固有振動モード解析 : MODE

強制振動モード解析 : FORCED, MFORCED

振動モード制御 : TRACT

図形出力 : GRDL, GRDK, GRDKP, GRDT

入力割り当て : DDEVICE, ODEVICE, CDEVICE

次に各コマンドの書式と意味について述べておく。

1. PLANE

書式 PLANE 「出力データセット名」

機能 端末から平面応力または平面歪系の節点及び一次要素のデータを読み込んで、弾性及び質量マトリクスのデータを「出力データセット名」で表示されるデータセットに書き込む。

2. MPLANE

書式 MPLANE 「出力データセット名」

機能 端末から変形平面応力系の節点及び一次要素のデータを読み込んで、

弾性及び質量マトリクスのデータを「出力データセット名」で表示されるデータセットに書き込む。変形平面応力系とは、厚みが小さく、その変化はあるが緩やかであるような系をさす。

3. AXIAL

書式 AXIAL 「出力データセット名」

機能 端末から軸対称系の節点及び一次要素のデータを読み込んで、弾性及び質量マトリクスのデータを「出力データセット名」で表示されるデータセットに書き込む。

4. MODE

書式 MODE 「入力データセット名」 「出力データセット名」

機能 「入力データセット名」で表示されるデータセットからマトリクスのデータを読み込んで、固有振動モード解析（最低次から最大10個のモードまで計算可）を行った結果を「出力データセット名」で表示されるデータセットに書き込むと同時に、端末の画面に計算した全ての固有周波数とリターンコードを表示する。

5. FORCED

書式 FORCED 「入力データセット名」 「出力データセット名」

機能 「入力データセット名」で表示されるデータセットからマトリクスのデータを、端末から駆動力のデータを読み込んで、強制振動モード解析を行った結果を「出力データセット名」で表示されるデータセットに書き込むと同時に、端末の画面にリターンコードを表示する。

6. MFORCED

書式 MFORCED 「入力データセット名」 「出力データセット名」

機能 「入力データセット名」で表示されるデータセットからマトリクスのデータを、端末から駆動点における変位のデータを読み込んで、強制振動モード解析を行った結果を「出力データセット名」で表示されるデータセットに書き込むと同時に、端末の画面にリターンコードを表示する。

7. TRACT

書式 TRACT 「入力データセット名」 「出力データセット名」

機能 「入力データセット名」で表示されるデータセットからマトリクスのデータを、端末から変位を指定する点及び駆動点のデータを読み込んで、振動モード制御に必要な駆動力及びその時の強制振動時のモードのデータを「出力データセット名」で表示されるデータセットに書き込むと同時に、端末の画面にリターンコードを表示する。

8. GRDL

書式 GRDL 「入力データセット名」

機能 「入力データセット名」で表示されるデータセットから振動モードのデータを読み込んで、それをテクトロニクス製H-8844相当の端末の画面に表示し、ハードコピーをとる。

9. GRDK

書式 GRDK 「入力データセット名」

機能 「入力データセット名」で表示されるデータセットから振動モードのデータを読み込んで、それを漢字プリンタ（大岡山）に出力する。

10. GRDKP

書式 GRDKP 「入力データセット名」

機能 「入力データセット名」で表示されるデータセットから振動モードのデータを読み込んで、それをページプリンタ（長津田）に出力する。

1 1. GRDT

書式 GRDT 「入力データセット名」

機能 「入力データセット名」で表示されるデータセットから振動モードのデータを読み込んで、日立制作所製 T-560 の端末に表示する。

1 2. DDEVICE

書式 DDEVICE 「データセット名」

機能 マトリクスデータ生成のためのデータの入力先を、端末から「データセット名」で表示されるデータセットに割当直す。

1 3. ODEVICE

書式 ODEVICE 「データセット名」

機能 マトリクスデータ生成のためのデータの入力先を、端末から「データセット名」で表示されるデータセットに割当直す。マトリクスデータ生成時のエコーバック先を @RUB. DATA というデータセットに割り当て、その画面表示を行わないようにする。

1 4. CDEVICE

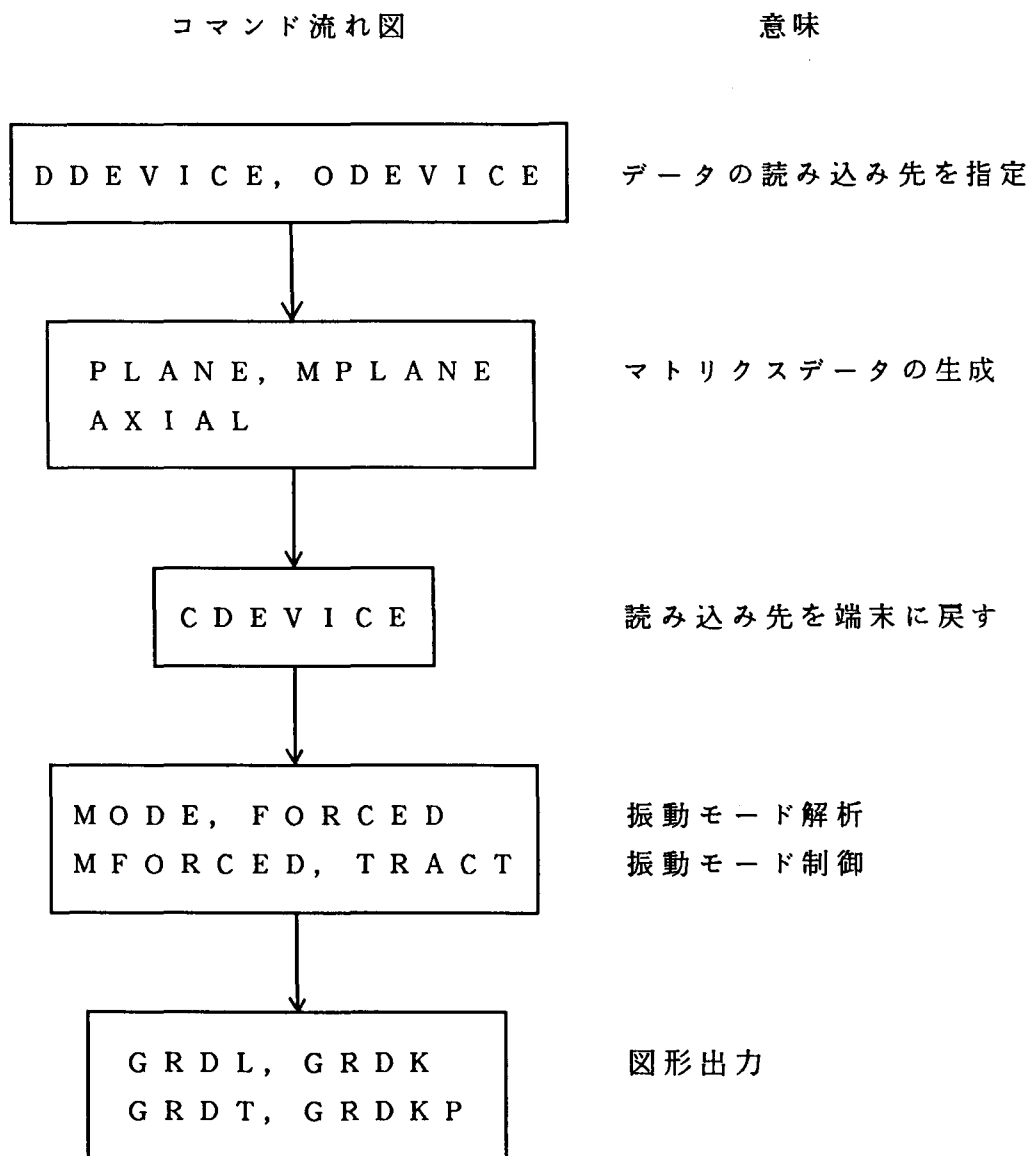
書式 CDEVICE （ノーオペランド）

機能 マトリクスデータ生成のためのデータの入力先を、端末に戻す。データセット @RUB. DATA を消去し、マトリクスデータ生成時のエコーバックの画面表示を復活させる。

このシステムを VOS3 にインプリメントするには、まず磁気テープから F

EM. CLIST, FEM. FORT, FEM. LOAD, GRDP. FORT, GRDP. LOADの各区分データセットをディスクに移す必要がある。その上で、「PROF PROC (FEM. CLIST)」のコマンドを実行してからLOGOFFすれば、次回のLOGON時から、本システムが使用可能になる。

以下に典型的なコマンド実行の流れ図を示す。



付録 4 一次元波動近似によるウェーブトラップトホーンの長さの算出

断面積がその長さ方向に変化する波長に比べて細い棒中を縦振動の弾性波が伝搬するとき、その挙動は、十分な近似の精度をもって、以下の微分方程式で記述出来ることが知られている。

$$Y A \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + Y \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (A 4 - 1)$$

ただし、ここで波は z 方向に伝搬するとしている。上式で、 t は時間、 Y 及び ρ はそれぞれ媒質（即ち細棒）の Young 率及び密度、 u_z は振動変位で z 及び t の関数、 A は断面積で z のみの関数である。当然、応力や振動変位は断面積内で一定とみなしている。ここでは断面積が

$$A = A_0 \exp(-2\beta z) \quad (A 4 - 2)$$

と指数関数的に変化する場合のみを考える。上式で A_0 は $z = 0$ での断面積、 β はテーパ定数 (taper constant) と呼ばれる定数である。さらに角周波数 ω の調和振動を仮定し、

$$u_z = U_z(z) \exp(j\omega t) \quad (A 4 - 3)$$

と u_z を変数分離する。式 (A 4 - 2) 及び (A 4 - 3) を式 (A 4 - 1) に代入すると、

$$\frac{d^2 U_z}{dz^2} - 2\beta \frac{d U_z}{dz} + k^2 U_z = 0 \quad (A 4 - 4)$$

を得る。ここで k は $k^2 = \rho \omega^2 / Y$ となる正の実数で、波数と呼ばれる。

式 (A 4 - 4) の一般解は解析的に簡単に得られて、

$$U_z = c_1 \exp(\beta z + j k' z) + c_2 \exp(\beta z - j k' z) \quad \dots (A 4 - 5)$$

である。ただし c_1 及び c_2 は任意定数、 k' は普通は

$$k'^2 = k^2 - \beta^2 = \rho \omega^2 / Y - \beta^2 \quad (\text{A 4 - 6})$$

であるような正の実数である。ここで注意すべきことは、上式で k' が零もしくは虚数となるような低い周波数 ($\omega^2 \leq Y \beta^2 / \rho$) では、通常の意味での波動の伝搬がなくなることである。即ち細棒の端付近のみが大きく振動し、そこから遠ざかるにつれてその振幅が指数関数的に減少するようなモードがその場合に対応する。そこで k' がちょうど零となるような周波数を cut-off 周波数と呼んでいる。

棒のある断面から先の部分に加わる力を f_z 、そこの振動速度を v_z とすると

$$f_z = -Y A \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{A 4 - 7})$$

$$v_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} \quad (\text{A 4 - 8})$$

式 (A 4 - 7) の右辺に負号がついているのは、その断面から先の部分に加わる力を考えているためであり、当該断面から後の部分に加わるその反力を考えるのならこの負号はいらない。振動変位と同様に調和振動を仮定して

$$f_z = F_z(z) \exp(j\omega t) \quad (\text{A 4 - 9})$$

$$v_z = V_z(z) \exp(j\omega t)$$

と変数分離すると、式 (A 4 - 5)、(A 4 - 7) 及び (A 4 - 8) より

$$F_z = -Y A_0 \cdot \exp(-\beta z) \cdot \{c_1(\beta + j k') \exp(j k' z) + c_2(\beta - j k') \exp(-j k' z)\}$$

$$V_z = j \omega \{c_1 \exp(j k' z) + c_2 \exp(-j k' z)\} \exp(\beta z)$$

$$\dots (\text{A 4 - 10})$$

を一般解として得る。

さて式 (A 4 - 1 0) は、確かに式 (A 4 - 4) から導かれる力 F_z 及び振動速度 V_z の分布の一般解である。しかし、これらの式には任意定数が含まれており、それらの値は境界条件によって後から決定されることになる。従って、このままの形式では境界条件によって変わる F_z や V_z の解の形及び両者の関係を考える上で不便である。以下の議論の目的は、それを容易にするため、任意定数の代わりに境界条件を陽な形で含む力と振動速度の関係式を式 (A 4 - 1 0) から導出することにある。ここでは、電気工学における伝送回路の解析やシステム解析に用いられる縦続行列の形式でそれを導くが、その利点は、力を電圧に、振動速度を電流に対応させることで機械振動系があたかも電気回路ようにみなせ、それを簡便な形で取り扱えることにある。いま、長さ L の細棒の一方の端 $z = 0$ において、境界条件が力 F_z 、振動速度 V_z の形で

$$\begin{aligned} F_z(0) &= F_0 \\ V_z(0) &= V_0 \end{aligned} \quad (\text{A 4 - 1 1})$$

と与えられるとする。式 (A 4 - 1 0) より

$$\begin{aligned} F_0 &= -Y A_0 \{ c_1 (\beta + j k') + c_2 (\beta - j k') \} \\ V_0 &= j \omega (c_1 + c_2) \end{aligned} \quad (\text{A 4 - 1 2})$$

を得る。これを行列の形で

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y A_0 (\beta + j k') & -Y A_0 (\beta - j k') \\ j \omega & j \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A 4 - 1 3})$$

と書き表してやることも出来る。そうすると逆行列は簡単に求められて

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 k' \omega Y A_0} \begin{pmatrix} j \omega & Y A_0 (\beta - j k') \\ -j \omega & -Y A_0 (\beta + j k') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A 4 - 1 4})$$

を得る。

次に $z = L$ において、境界条件が

$$F_z(L) = F_1$$

(A 4 - 1 5)

$$V_z(L) = V_1$$

と与えられるとする。やはり式 (A 4 - 1 0) より行列の形で

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y A_0 (\beta + j k') \exp(-\beta L + j k' L) \\ j \omega \cdot \exp(\beta L + j k' L) \\ -Y A_0 (\beta - j k') \exp(-\beta L - j k' L) \\ j \omega \cdot \exp(\beta L - j k' L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (A 4 - 1 6)$$

を得る。そうすると、式 (A 4 - 1 4) 及び (A 4 - 1 6) より c_1 と c_2 を消去することは、単に両式の二つの行列のかけ算を行うことになって、最終的に

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (A 4 - 1 7)$$

という形の関係式を得る。ただし

$$K_{11} = (1 / k') \{ k' \cos(k' L) + \beta \sin(k' L) \} \exp(-\beta L)$$

$$K_{12} = (-j Y A_0 / k' \omega) (k'^2 + \beta^2) \sin(k' L) \exp(-\beta L)$$

$$K_{21} = (-j \omega / k' Y A_0) \sin(k' L) \exp(\beta L)$$

$$K_{22} = (1 / k') \{ k' \cos(k' L) - \beta \sin(k' L) \} \exp(\beta L)$$

..... (A 4 - 1 8)

である。ここに、最初の目的であった、境界条件を陽な形で含む力と振動速度の関係式を導出することが出来た。細棒の断面積に変化がない ($\beta = 0$) 場合は、式 (A 4 - 1 7) はかなり簡単に

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kL) & \frac{-jkYA_0}{\omega} \sin(kL) \\ \frac{-j\omega}{kYA_0} \sin(kL) & \cos(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A 4 - 1 9})$$

となる。

式 (A 4 - 1 7) や式 (A 4 - 1 9) は、エクスポネンシャルホーンや段付きホーンなどの機械振動変成器や振動工具及びそれらを組み合わせた振動系の、解析や設計に便利である。何故なら、一旦そうした各振動素子に対応する、境界条件を陽に含んだ上式のような形の線形システムとして表式を決定してしまえば、複雑な境界条件に悩まされることなく、それらが組み合わされた系全体を扱うことが出来るからだ。例えば、Fig. A4-1のようなエクスポネンシャルホーンの先端に円筒形の振動工具が取り付けられた振動系全体の共振周波数及び振動振幅変成比を求めたければ、それぞれの振動素子に対応する線形システムの表式 (A 4 - 1 7) や (A 4 - 1 9) を各々の寸法や材料定数から決定し、それらの行列部分を掛け合わせて系全体の線形システムの表式を構成すればよい。そうすれば両端自由 ($F_0 = 0$ 、 $F_2 = 0$) の条件から、出来上がった行列の右上の成分を 0 とおいた式がその系の周波数方程式に、右下の成分が系全体の振動振幅変成比を表している。

さて、本題に戻ろう。この項の目的は、与えられた角周波数 ω においてその先端で必要な駆動力と振動変位の比を実現するウェーブトラップトホーンの長さ L を算出することにある。本研究では一様断面のウェーブトラップトホーンを用いているので、式 (A 4 - 1 9) を使う。ここで振動変位 U_z と振動速度 V_z との間には $V_z = j\omega U_z$ の関係があることから、ホーン自由端の変位を U_0 、駆動端の変位 U_1 とすると、式 (A 4 - 1 9) に

$$\begin{aligned} V_0 &= j\omega U_0 \\ V_1 &= j\omega U_1 \end{aligned} \quad (\text{A 4 - 2 0})$$

を代入して、

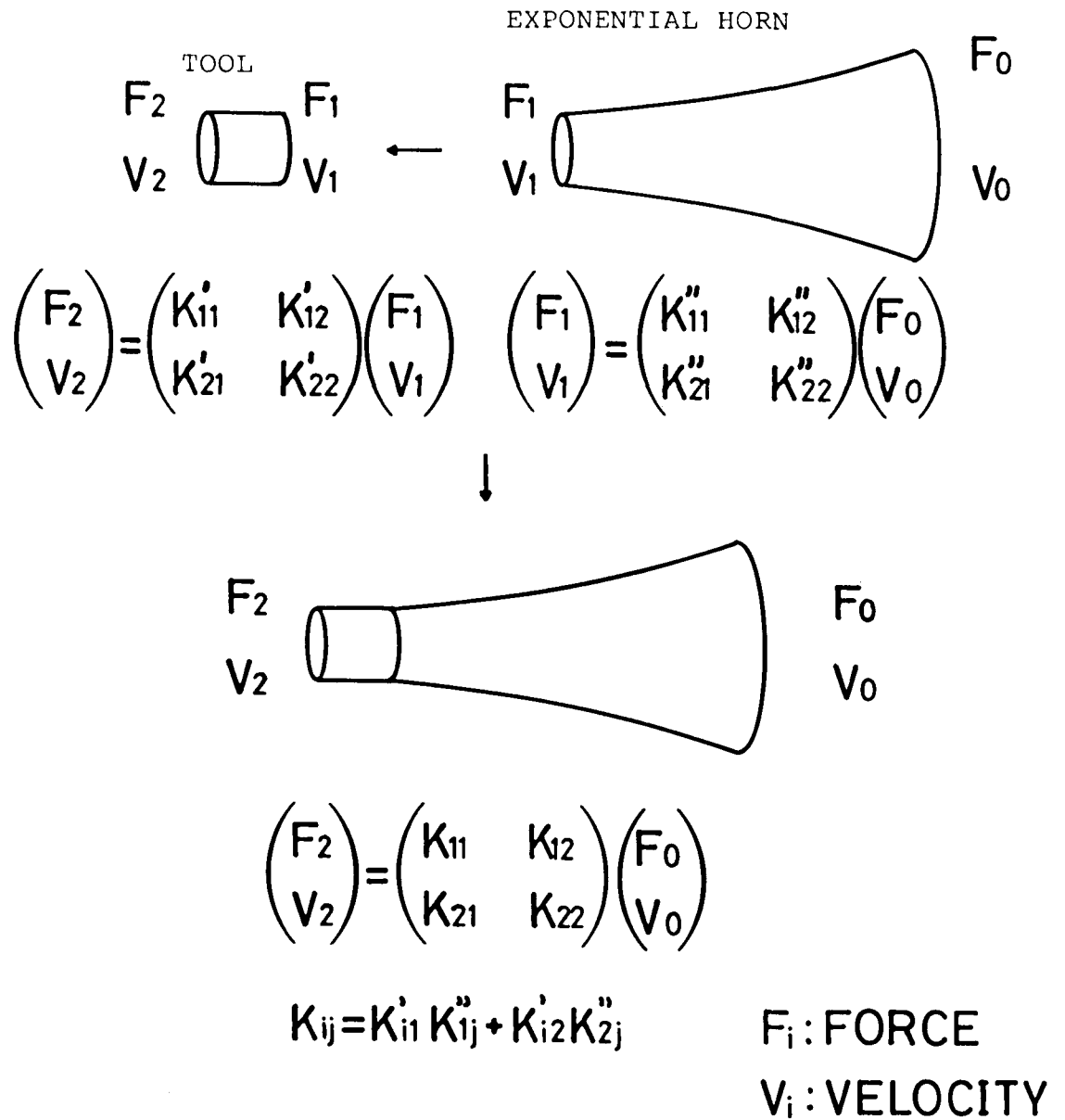


Fig.A4-1 The constructive method for deriving the matrix representation of a linear elastic system in longitudinal vibration comprising a tool and an exponential horn.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kL) & kYA \sin(kL) \\ -\frac{\sin(kL)}{kYA} & \cos(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ U_0 \end{pmatrix} \quad (A4-21)$$

を得る。ここで境界条件として自由端の力が零、即ち $F_0 = 0$ を上式に代入し、 F_1/U_1 の比を計算すると、

$$F_1/U_1 = kYA \tan(kL) \quad (A4-22)$$

を得る。これを L について解いてやればよいのだが、逆正接関数 $\tan^{-1}$ の主値は $-\pi/2$ から $\pi/2$ の範囲にとるから、ホーンの長さ L が常に正であることを考慮すれば、

$$L = \frac{1}{k} \tan^{-1} \left(\frac{F_1}{U_1 kYA} \right) + \frac{\pi}{k} \quad (A4-23)$$

が L の解として適当であることになる。これで式 (1-8) を導き出すことが出来たことになる。ただし式 (1-8) には、当然適用上の限界がある。即ち、式 (A4-1) は波が完全に一次元的に伝搬することを前提にしているわけだが、そのようにみなせるのは経験的に細棒の断面の最大寸法が $\lambda_1/4$ を越えない範囲に限られる。

また本文中では特に断わらなかったが、本研究において「ウェーブトラップトホーンの長さ」という場合、それはホーンの太い直線部分の長さのことある。つまり、先端の段やテーパの部分は長さに含めていないことに注意されたい。

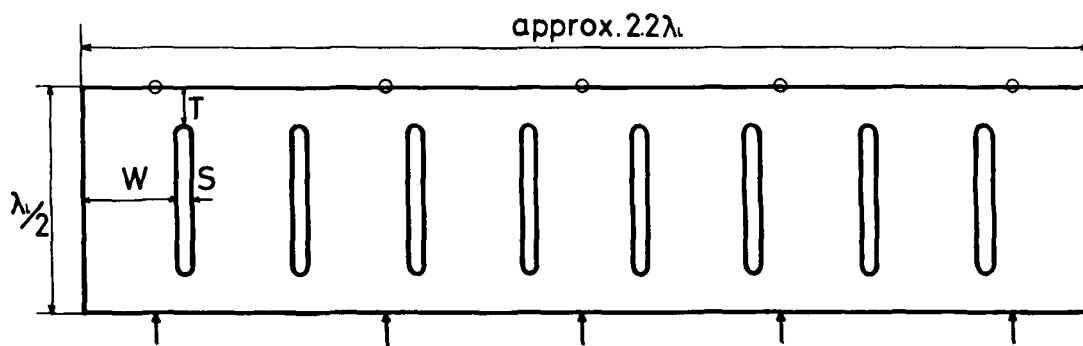
付録 5 不安定性係数の算出について本文中で触れなかった超音波振動工具

第4章の高振幅駆動実験の対象となった振動系構成のなかで、不安定性係数の具体的な算出に触れなかった二つの構成（Fig. 4-5及びFig. 4-7の振動系）についてここで補足しておく。

Fig. A5-1に示すのが、67頁のFig. 4-5の振動系について不安定性係数を算出したグラフである。この振動系が3-2節で述べたホーンの長さの単調減少領域が中心周波数（設定駆動周波数）の片側にしか取れない場合になっている。図からすぐ分かるように、中心周波数の上側半分の領域のホーンの長さ及び平坦度の変化だけを計算して不安定性係数を算出している。図には示されていないが、下側半分の領域では駆動周波数に対して全てホーンの長さが単調には変化してくれていない。

不安定性係数はウェーブトラップトホーンの長さの微少な変化（実験に即して言えば誤差）に対する同相縦振動のモードの安定性を表す数値指標であることは既に述べた通りである。計算の都合上駆動周波数を変化させてホーンの長さの変化を計算しているが、実際には逆にホーンの長さ変化によって共振周波数や振動モードが変化するのである。そこで、工具に取り付けられるホーンが同じタイプのものであるならば、取り付け部の結合ネジ、接触面積の広さ等に起因するその長さの誤差の現れ方は同じ傾向を示すはずだから、特定のホーンの長さが周波数変化に対して複雑な挙動を示す領域を不安定性係数の計算において考慮することは無意味であると考えて、第3章のようにこの係数の算出法を定義したのである。

Fig. A5-2は70頁のFig. 4-7の振動系の不安定性係数を算出したグラフである。この結果も3-4節のFig. 3-11に既に使われていた。



TOOL7-1-H
 $S = \lambda_L / 24$
 $W = 5\lambda_L / 24$
 $T = \lambda_L / 12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=5

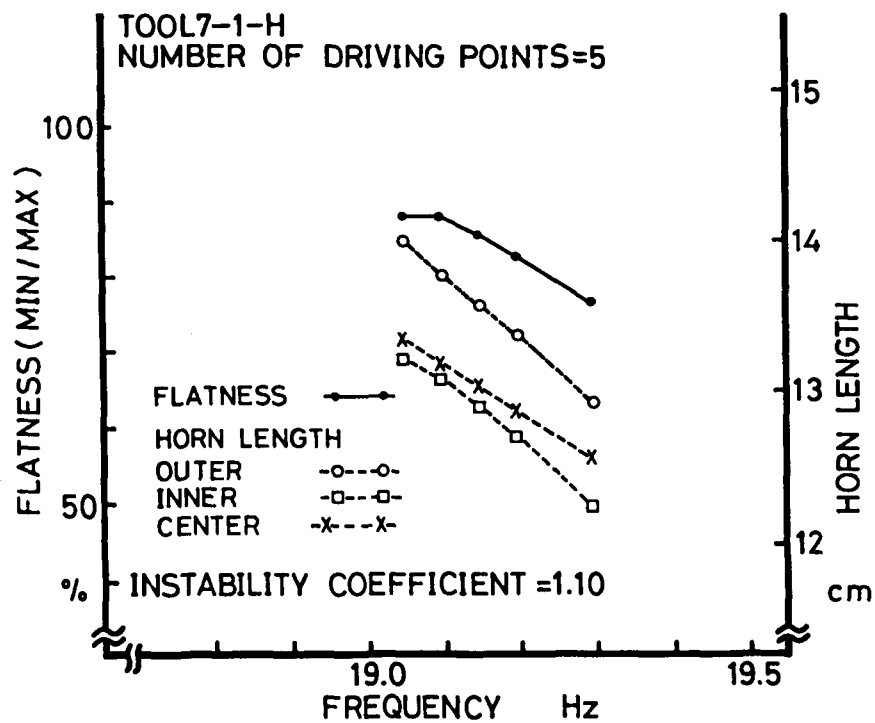
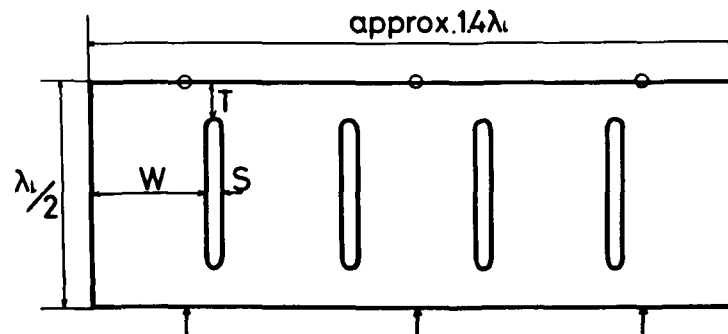


Fig.A5-1 The plane configuration of a vibrating system and the evaluation of the instability coefficient for it.



TOOL3-1-B
 $S = \lambda_v / 24$
 $W = \lambda_v / 4$
 $T = \lambda_v / 12$
 NUMBER OF
 DRIVING POINTS=3

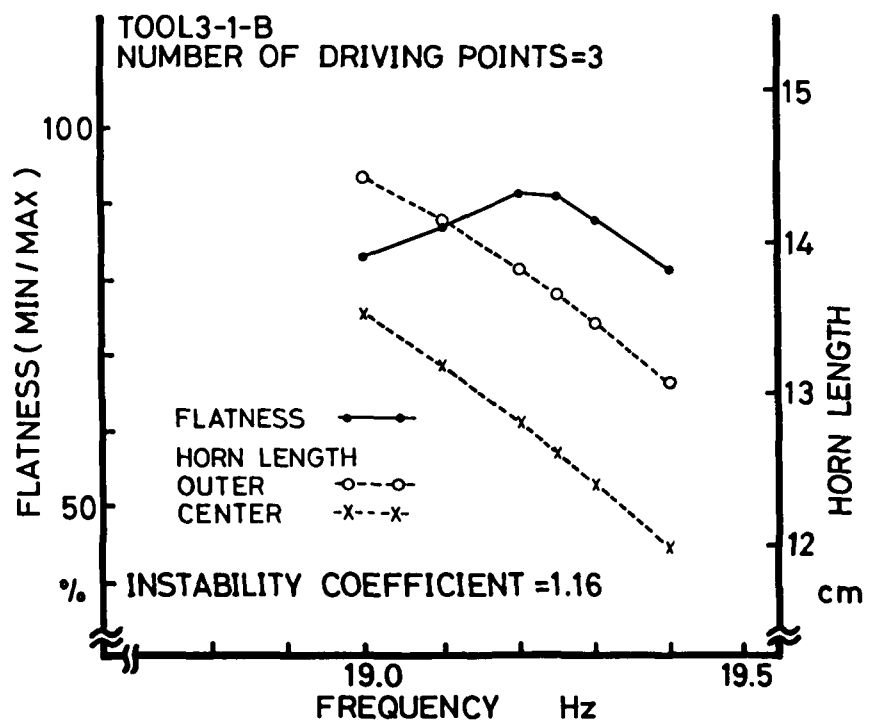


Fig.A5-2 The plane configuration of a vibrating system and the evaluation of the instability coefficient for it.

付録 6 温度変化が弾性振動体の固有振動モードに与える影響の
摂動法による数学的定式化

無損失の弾性体の調和振動の波動方程式 (3-5) は、弾性定数間の関係式

$$\lambda = \frac{\nu Y}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1 + \nu)}$$

を用いれば、式 (3-6) に示したように

$$(D \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot}) \mathbf{U} = -\omega^2 E \mathbf{U} \quad (\text{A 6-1})$$

と書き表せる。ここで各パラメータは

$$D = \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \quad (\text{A 6-2})$$

$$E = \frac{2\rho(1 + \nu)}{Y} \quad (\text{A 6-3})$$

であり、 Y 、 ν 及び ρ はそれぞれ媒質の Young 率、Poisson 比及び密度である。 $\mathbf{U}$ の定義は付録 2 の式 (A 2-2) と同じ。ここで、Poisson 比 ν はその性質上 0.5 以下の正の実数だから、パラメータ D 、 E は共に常に正である。

ここではまず、パラメータ D の温度変化による微分演算子の摂動の固有振動モードへの影響を調べ、その後で同じく自然境界条件の摂動の影響をそれに加味する形で議論を進める。

付録 2 に倣って空間的な偏微分演算子として

$$\mathcal{L} = D \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \quad (\text{A 6-4})$$

を定める。 δ を絶対値が十分小さな実数とすると、パラメータ D の温度変化による微少な変動が式 (A 6-1) 左辺の微分演算子に与える摂動は

$$\mathcal{L}_D = D \operatorname{grad} \operatorname{div} \quad (\text{A 6-5})$$

という新たな空間的偏微分演算子を定義して、 $\xi \mathcal{L}_D$ と定式化出来る。ここで、 U_{n0} を無摂動時の式 (A 6 - 1) の n 次の固有関数、 ω_{n0}^2 をそれに対応する固有値とし、 U_n を摂動時の式 (A 6 - 1) の n 次の固有関数、 ω_n^2 をそれに対応する固有値とすれば、当然

$$\mathcal{L} U_{n0} = -\omega_{n0}^2 E U_{n0} \quad (\text{A 6 - 6})$$

$$(\mathcal{L} + \xi \mathcal{L}_D) U_n = -\omega_n^2 E U_n \quad (\text{A 6 - 7})$$

となる。もちろん無摂動時の固有関数 U_{n0} は式 (1 - 3) のように

$$\int U_{m0} \cdot U_{n0} dV = \delta_{mn} \quad (\text{A 6 - 8})$$

と規格化されているものとする。ここで δ_{mn} は Kronecker のデルタ、ドット $(\cdot)$ はベクトルの内積、 dV は体積素で、積分範囲は弾性振動体全体。

U_n 及び ω_n^2 を ξ に関して Taylor 展開すると

$$U_n = U_{n0} + \xi U_{n1} + \xi^2 U_{n2} + \xi^3 U_{n3} + \xi^4 U_{n4} \cdots$$

$$\omega_n^2 = \omega_{n0}^2 + \xi \omega_{n1}^2 + \xi^2 \omega_{n2}^2 + \xi^3 \omega_{n3}^2 + \xi^4 \omega_{n4}^2 \cdots$$

と表せるが、ここでは ξ の値、即ち温度変化によるパラメータ D の変化が十分小さいわけだから、 ξ の 2 次以上の項を無視し

$$U_n = U_{n0} + \xi U_{n1} \quad (\text{A 6 - 9})$$

$$\omega_n^2 = \omega_{n0}^2 + \xi \omega_{n1}^2 \quad (\text{A 6 - 10})$$

と近似する。言い替えれば一次の摂動項までを考慮することになる。以下の議論ではすべて、一次の摂動項までしか考えない事を断わっておく

式 (A 6 - 9) 及び式 (A 6 - 10) を式 (A 6 - 7) に代入して ξ の 1 次の項を比較すると

$$\mathcal{L}_D \mathbf{U}_{n0} + \mathcal{L} \mathbf{U}_{n1} = -\omega_{n1}^2 E \mathbf{U}_{n0} - \omega_{n0}^2 E \mathbf{U}_{n1} \quad (\text{A 6 - 1 1})$$

を得る。さて $\mathbf{U}_{n1}$ を無摂動時の固有関数の系列 $\mathbf{U}_{k0}$ で展開すると

$$\mathbf{U}_{n1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} \mathbf{U}_{k0} \quad (\text{A 6 - 1 2})$$

ただし m は自然数で、

$$c_{mn} = \int \mathbf{U}_{m0} \cdot \mathbf{U}_{n1} dV \quad (\text{A 6 - 1 3})$$

ここで式 (A 6 - 1 2) を式 (A 6 - 1 1) に代入し、式 (A 6 - 6) の関係を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_D + \omega_{n1}^2 E) \mathbf{U}_{n0} &= - \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_{n0}^2 E + \mathcal{L}) c_{nk} \mathbf{U}_{k0} \\ &= - \sum_{k \neq n} E (\omega_{n0}^2 - \omega_{k0}^2) c_{nk} \mathbf{U}_{k0} \quad (\text{A 6 - 1 4}) \end{aligned}$$

を得る。この式の両辺に左から $\mathbf{U}_{n0}$ を内積の形でかけて全体積で積分すると、式 (A 6 - 8) より、

$$L_{nn} = -\omega_{n1}^2 \quad (\text{A 6 - 1 5})$$

を得る。ただしここで

$$L_{mn} = (1/E) \int \mathbf{U}_{m0} \cdot \mathcal{L}_D \mathbf{U}_{n0} dV \quad (\text{A 6 - 1 6})$$

と定義した。さらに $m \neq n$ のとき、式 (A 6 - 1 4) の両辺に左から $\mathbf{U}_{m0}$ を内

積の形でかけて全体積で積分すると、

$$L_{mn} = (\omega_{m0}^2 - \omega_{n0}^2) c_{mn}$$

を得、従って

$$c_{mn} = \frac{L_{mn}}{\omega_{m0}^2 - \omega_{n0}^2} \quad (A6-17)$$

である。ただし、 c_{nn} の値はまだ分からない。

ここで摂動時の固有関数 U_n も式 (A6-8) と同様

$$\int U_m \cdot U_n dV = \delta_{mn} \quad (A6-18)$$

と規格化されているとする。 $m=n$ として式 (A6-9) を上式に代入し、 ξ の絶対値が十分小さいとの仮定からその一次の項までを考慮すれば、式 (A6-8) 及び (A6-13) を用いて

$$\begin{aligned} \int U_n \cdot U_n dV &\approx \int U_{n0} \cdot U_{n0} dV + 2\xi \int U_{n0} \cdot U_{n1} dV \\ &= 1 + 2\xi c_{nn} \end{aligned} \quad (A6-19)$$

を得る。すると、この式が任意の微小な実数 ξ によって値が変わらないように

$$c_{nn} = 0 \quad (A6-20)$$

としなければ、式 (A6-18) の規格化は成立し得ないことがわかる。そこでこれを c_{nn} の値としなければならない。

式 (A6-9)、(A6-12)、(A6-17) 及び (A6-20) から

$$U_n = U_{n0} + \xi \sum_{m \neq n} \frac{L_{mn}}{\omega_{m0}^2 - \omega_{n0}^2} U_{m0} \quad (A6-21)$$

また、式 (A 6 - 1 0) 及び (A 6 - 1 5) より

$$\omega_n^2 = \omega_{n0}^2 - \xi L_{nn} \quad (\text{A 6 - 2 2})$$

を得る。

式 (A 6 - 2 1) 及び (A 6 - 2 2) は、温度変化による微分演算子の摂動 ξ (ただし、 $|\xi| \ll 1$) の影響のみを考慮したものである。つまりパラメータ D の変化だけを考えている。そこでまずパラメータ E の微少な変化が固有値に与える影響を考慮して、式 (A 6 - 2 2) を補正する事を考えてみよう。

温度変化によって $E \rightarrow E'$ とごく僅か変化したとする。即ち正の実数 θ を

$$\theta = E' / E \approx 1 \quad (\text{A 6 - 2 3})$$

と定める。繰り返すようだが、ここでは ξ の絶対値を十分小さいとしているから、式 (A 6 - 2 2) 右辺の L_{nn} の含まれるパラメータ E の変化は高次の摂動として無視出来る。ということは、単に波動方程式 (A 6 - 1) に立ち戻って、 $E \rightarrow E' = \theta E$ の変化が固有値 ω にもたらす影響を考えてやればよいことになる。式の形からこの変化が $\omega^2 \rightarrow \omega^2 / \theta$ と固有値をシフトさせることは自明であろう。従って式 (A 6 - 2 2) は

$$\omega_n^2 = (\omega_{n0}^2 - \xi L_{nn}) / \theta \quad (\text{A 6 - 2 4})$$

と補正され、式 (3 - 1 5) を得る。

次に温度変化による自然境界条件の摂動の影響を式 (A 6 - 2 1) に加味する事を考える。ここでは自由共振系を考えているから、自然境界条件は第 3 章の式 (3 - 9) にもあるように

$$\begin{pmatrix} D \varepsilon_x + F \varepsilon_y + F \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & D \varepsilon_y + F \varepsilon_z + F \varepsilon_x & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{yz} & D \varepsilon_z + F \varepsilon_x + F \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

..... (A 6 - 2 5)

の様に書き表すことが出来る。ここで、 l 、 m 、 n は境界上外向きの単位ベクトルの x 、 y 、 z 方向の成分、また

$$F = \frac{2\nu}{1-2\nu} \quad (\text{A 6 - 2 6})$$

が新たなパラメータとして導入されている。

今、さらに ξ を絶対値が十分小さい実数として定め、温度変化に対する $D \rightarrow (1 + \xi) D$ 、 $F \rightarrow (1 + \xi) F$ という変化を考える。式(A 6 - 2 5)が、本来の自然境界条件の式(A 1 - 8)を (ρ / E) で割って得られていることに注意すれば、温度変化は無摂動時の固有関数に対して境界面上で

$$- \mathbf{s} = \begin{pmatrix} (\rho / E) (\xi D \varepsilon_x + \xi F \varepsilon_y + \xi F \varepsilon_z) l \\ (\rho / E) (\xi D \varepsilon_y + \xi F \varepsilon_z + \xi F \varepsilon_x) m \\ (\rho / E) (\xi D \varepsilon_z + \xi F \varepsilon_x + \xi F \varepsilon_y) n \end{pmatrix} \quad (\text{A 6 - 2 7})$$

という残差表面応力(residual traction)の形での摂動を生じさせることが分かる。ここでは一次摂動までを考えているから、固有関数や固有値の摂動項への自然境界条件の摂動が与える影響は、高次の摂動としてこれを無視する。

実際には、力学的支持条件が変わらない限り自然境界条件は変化しないわけだから、上式の残差表面応力を打ち消すような自然境界面上に分布強制駆動力として存在する表面応力 $\mathbf{s}$ の無摂動時の固有関数に与える変化が、加味すべき自然境界条件の摂動による固有関数への影響ということになる。従って、温度変化による自然境界条件の摂動の固有関数への寄与分は加算的に

$$\int \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_n) \cdot \mathbf{s} \, dS \quad (\text{A 6 - 2 8})$$

と与えられるべきである。ここで $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_n)$ は式(1 - 2)の固有関数展開の形で与えられる無摂動時の系のGreen関数である。ただし、従属変数である角周波数が $\omega \rightarrow \omega_n$ と摂動時の固有角周波数になっている点に注意。また積分に関わる変数は $\mathbf{y}$ であり、 dS は面積素、積分範囲は摂動を生じる自然境界面

である。念を押すが、ここでは $|\xi| \ll 1$, $|\zeta| \ll 1$ であることから、Green関数自体の摂動は高次の項として無視している。

最終的に摂動時の固有関数の形は式 (A 6 - 2 1) 及び (A 6 - 2 8) より

$$U_n = U_{no} + \xi \sum_{m \neq n} L_{mn} U_{mo} / (\omega_{mo}^2 - \omega_{no}^2) + \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_n) \cdot \mathbf{s} \, dS$$

. (A 6 - 2 9)

と与えられ、式 (3 - 1 4) が導かれる。

ところで、式 (A 6 - 1) にその固有関数 U_{no} 及び固有値 ω_{no}^2 を代入し、その両辺に左から別の固有関数 U_{mo} を内積の形でかけて積分してみよう。そうすると $\mathcal{L}_D$ の定義式 (A 6 - 5)、式 (A 6 - 8) 及び (A 6 - 1 6) より

$$L_{mn} = (D/E) \int U_{mo} \cdot \text{grad div } U_{no} \, dV$$

$$= (1/E) \int U_{mo} \cdot \text{rot rot } U_{no} \, dV \quad (A 6 - 3 0)$$

と式 (3 - 1 6) が導ける。

付録 7 弾性振動系の設計可能性に関する問題の数学的定式化
(参考文献4の第4章31及び32頁からの抜粋)

筆者の考えでは、超音波工学において取り扱われる共振系設計の問題は一般的に次のような形の一種の逆問題として定式化出来る。

「あらかじめ与えられた滑らかな形状の曲面をその表面の一部として持つ角周波数 ω で共振する系において、その曲面上の変位分布が与えられる時、残りの表面形状をどのようにして決定するか。」

例えば本研究におけるプラスチックウェルダ用工具の場合、この問題は次のように読み換えることが出来る。

「与えられた形状の放射面において均一な変位分布を実現する共振周波数 ω の工具の他の部分の形状をどのようにして決定するか。」

また、この分野でしばしば用いられる機械的変成器いわゆるホーンと呼ばれる要素の設計も、上の問題の特殊な場合と見る事が出来る。即ち

「角周波数 ω で共振する面積比 n の両端面において振幅比 A を得るホーンの形状をどのようにして決定するか。」

が問題なのである。従って、上述の問題を少なくとも近似的に解く一般的な手続きを与えることが、我々が頭を悩ませている共振系設計の問題を根本的に解決する道だといってよい。

さて、そのような手続きは果して存在するのであろうか。ここに一つの接近を計ることにしよう。ことわるまでもないが、ここでは、弾性体の線型振動のみを考えている。

Fig. A7-1¹はその表面の一部 S_u に加わっている表面応力により角周波数 ω で振動している無損失、体積力なしの弾性系である。表面 S_{od} においては変位と表面応力の分布が与えられており、表面 S_{nbc} においては自然境界条件即ち表面応力が0、表面 S_{ebc} においては基本境界条件即ち変位が0、の境界条件がそれぞれ与えられているとする。このとき、もし残りの表面 S_u における変位及び表面応力の分布が一意に定まるならば、上述の問題を解く一般的な手続

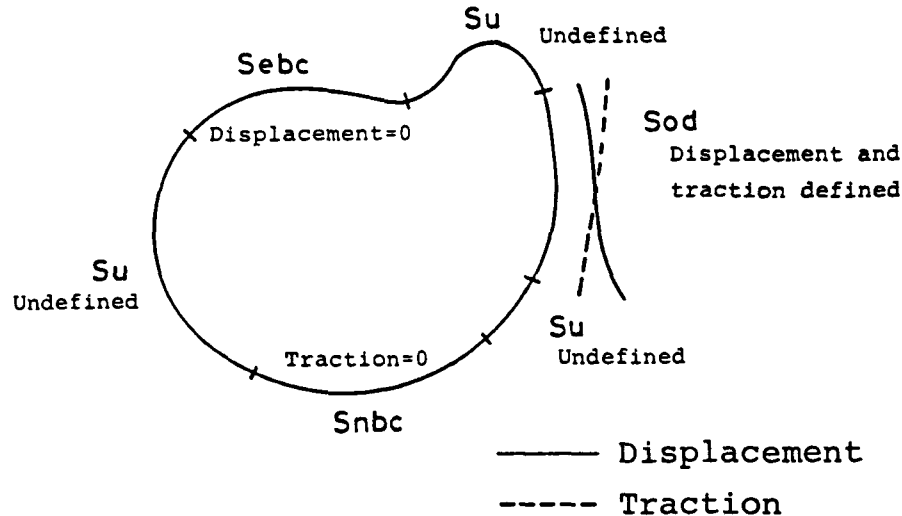


Fig.A7-1 A schematic explanation of a mathematical problem on vibrating system design.

きを与えることが可能になる。その理由を以下に述べる。

S_{od} における表面応力が0と与えられているとする。このとき S_u 上の変位と表面応力が一意に決まれば、この系の表面上の境界条件が全て定まることになる。すると、角周波数 ω が与えられているわけだから、支配微分方程式の解の一意性^{*2}よりその内部の応力状態も一意に定まる。このとき系内部に主応力の一つ^{*3}が0になる点の集合である曲線（三次元問題では曲面）がFig.A7-2^{*4}のように表面 S_{od} を含んで引ければ、そこで弾性体を切り取っても S_{od} 上での変位分布は変化しないはずである。（何故ならそれは自然境界面^{*5}に他ならない。）従って、この切り取られた部分が、与えられた表面 S_{od} 上で目的とする変位分布を実現する共振角周波数 ω の振動系の形状に他ならない。またそのような境界で弾性体を切り取ることが出来なければ、目的とする共振系の実現は与えられた範囲の空間では不可能であることになる。

（注）

*1 原文ではFig. 4-2

*2 本論文の付録1参照

*3 「主応力の成分の一つ」の意

*4 原文ではFig. 4-3

*5 引用したこの論文では暗黙のうちに自然境界条件とは表面応力0の境界条件を指すものとする慣用になっているが、本論文では筆者はその立場をとっていない。本論文の自然境界条件とは楕円型あるいは双曲型の微分方程式において未知関数の一次の微分係数（の線形結合）で表される境界条件の総称である。

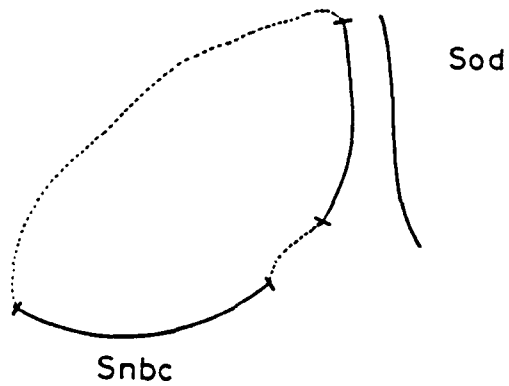
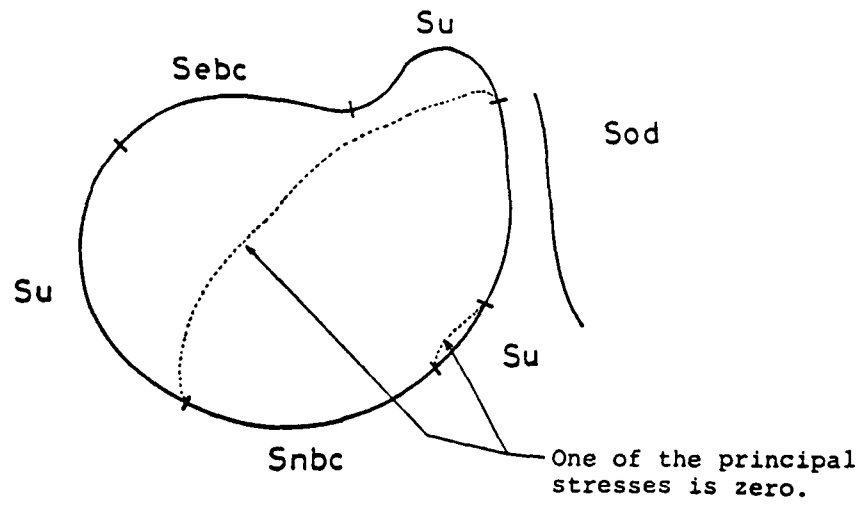


Fig.A7-2 A possible solution of the problem illustrated in Fig.A7-1.