

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	光波伝播における各種相互作用の定式化に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	小島賢二
Author(English)	
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第3438号, 授与年月日:2000年4月30日, 学位の種別:論文博士, 審査員:上羽 貞行
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第3438号, Conferred date:2000/4/30, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

光波伝播における各種相互作用の 定式化に関する研究

小島賢二

目 次	頁
第 1 章 序 論	4
1. 1 歴史的背景	4
1. 2 本研究の目的と背景	29
1. 3 研究の概要	30
第 2 章 境界回折理論の定式化	32
2. 1 緒言	32
2. 2 ベクトルポテンシャルの非存在	32
2. 3 新境界回折公式	34
2. 4 円形開口の新境界回折公式	35
2. 5 新境界回折公式の一般化	36
2. 6 電磁波の境界回折公式	37
2. 7 部分的コヒーレント波動の境界回折	39
2. 8 インコヒーレント波動の境界回折	41
2. 9 まとめ	41
第 3 章 曲面からの波動伝播の定式化	42
3. 1 緒言	42
3. 2 曲面からの波動伝播	42
3. 3 曲面からの部分的コヒーレント波動伝播	44
3. 4 一般化されたVanCittert-Zernike定理	47
3. 5 まとめ	48
第 4 章 等方媒質中の Raman-Nath 回折の一般化	49
4. 1 緒言	49
4. 2 非一様媒質中のMaxwell方程式	49
4. 3 超音波による光回折	50
4. 4 非一様媒質中の部分的コヒーレント光伝播の解析	55
4. 5 まとめ	56

第 5 章	異方非一様媒質中の 波動回折	5 7
5. 1	緒言	5 7
5. 2	異方非一様媒質中のMaxwell方程式	5 7
5. 3	異方非一様媒質中のRaman-Nath回折	5 9
5. 4	異方非一様媒質中のBragg回折と異常Bragg回折	6 1
5. 6	まとめ	6 4
第 6 章	重力波による光回折	6 5
6. 1	緒言	6 5
6. 2	光と重力波の相互作用方程式	6 5
6. 3	弱い重力波による光回折	6 5
6. 4	強い重力波による光回折	7 1
6. 5	位相関数法を使った重力波による光回折の解析	7 3
6. 6	まとめ	7 7
第 7 章	結 論	7 8
参 考 文 献		8 0
謝 辞		8 7
本研究に関する発表資料		8 8

第 1 章 序 論

1. 1 歴史的背景

1. 1. 1 回折理論の歴史

回折とは波動が物体によって進行方向を曲げられて、物体の後側に回り込む現象であると簡単に言える。この現象は Leonardo da Vinci により最初の報告があるとされている。1665 年 Grimaldi¹⁾ によって公式に本の形で記述されたが、回折の説明には至らなかった。一方、古典物理学の基礎を作った理論物理学者の Newton はレンズの作製中、今日 Newton リングとして知られている現象を発見したが、光の直進性を説明するために粒子説を支持したので、この光の干渉現象をうまく説明できなかった。これに対して Huygens は Hooke が唱えていた光の波動説を支持し、1678 年今日 "Huygens" の原理²⁾ として知られている光の波動説の根本原理を発表した。Huygens によると、図 1. 1 の中の光源 O から発した波はある時間の後 A'P'Q'B' なる波面を形成し、その波面の各点が次の波面の各要素になり、APQB なる包絡波面を形成するとされる。これにより、その当時 Snell の法則として知られた光の屈折現象を説明できた。しかし Newton の粒子説が強く支持され、光の波動説は異端説として厳しく非難を受け、約 100 年間ほど進歩がなかった。

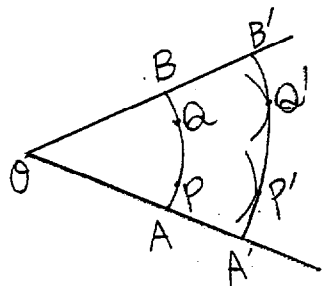


図 1. 1 Huygens の原理

19 世紀に入ると Young¹⁾ が図 1. 3 のようなスリットを使って光の干渉実験を行い、光の波動説の復活を試みた。光の波動説の基礎をなす重要な実験であるにもかかわらず、学会からは酷評され無視された。その十数年後 Fresnel はスリットから出て来る光の中に針金を置き、後方に生ずる回折縞を観測して、光の波動性を確認したが、Huygens の原理から出発して計算した値と数値的に一致しなかったので、二次波は一次波よりも位相が $\pi/2$ だけ遅れ、かつ傾斜因

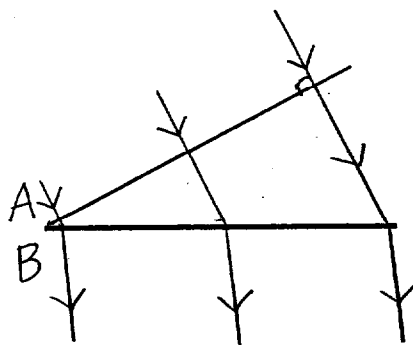


図 1. 2 光の屈折現象

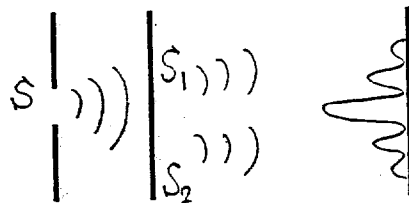


図 1. 3 Young による光の干渉実験

子Kが付け加わると仮定した。今日” Huygens-Fresnel の原理”³⁾と呼ばれているものである。数式で表すと

$$U(P) = \int \frac{A e^{-i\pi/2} e^{ik s}}{4\pi s} K(x) dS \quad (1.1)$$

ここでU(P)は点Pの波動場、sはPQの距離、Aは二次波の複素振幅、kは光の波数、

$$K(x) = (1 + \cos \theta) / 2, \quad (1.2)$$

である。Fresnelの回折理論はスリットによる光の干渉強度、ナイフエッジや針金による光の回折強度の計算に使われて、実験とよい一致を見ている。

Fresnelの回折式(1.1)に $\theta \rightarrow 0$ となる近軸近似を適用し、直交座標系を使って表すと

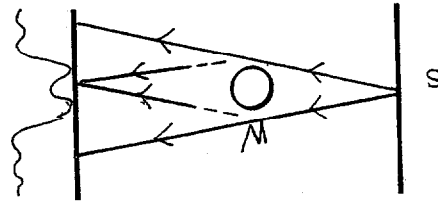


図1.4 針金による光の回折

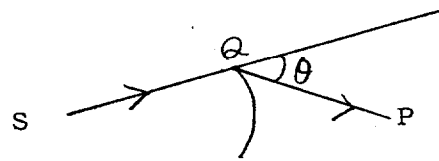


図1.5 Fresnelの回折

$$U(x, y; z) = \iint s f(\xi, \eta) \frac{e^{ik s} K}{4\pi s} d\xi d\eta, \quad (1.3)$$

となる。ここでfは境界面上の光の複素振幅である。さて距離sは

$$\begin{aligned} s &= \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\} \\ &= z + \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\} / 2z \\ &\quad + \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^2 / 8z \\ &\quad + \dots, \end{aligned} \quad (1.4)$$

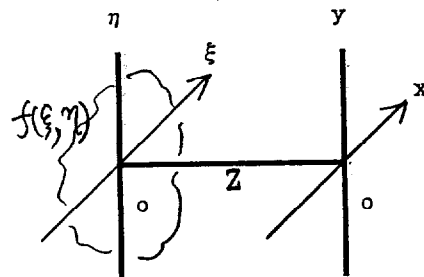


図1.6 Fresnel変換の座標系

と書ける。(1.3)式の分母のsは第1項までとる近似をし、分子の指数関数部は(1.4)式中の第2項までとる近似をすると、(1.3)式は

$$U(x, y; z) = (e^{ikz} / 2\pi z) \iint s d\xi d\eta f(\xi, \eta) \exp[ik \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\} / 2z], \quad (1.5)$$

(1. 5) 式は Fresnel 変換と呼ばれている。19 世紀には、すでに (1. 5) 式の形は導かれていて、よく使われた。数学的な性質が議論されるようになったのは、ごく最近のことである。(1. 5) 式は近軸近似から導かれているが、後の章で示すようにスペクトラム近似と呼ばれる別の方法から導くことができる。

一方 Maxwell は 1865 年その当時知られていた Ohm の法則、Ampere の法則、Faraday の法則等の電磁気現象を数学的に 4 つの式にまとめて光の電磁波説を打ち立てた。これにより光の横波性、干渉、反射、複屈折、分散などの性質がごく自然に説明できる様になった。光の電磁波説の根拠となる Maxwell 方程式は次の 4 つである。

$$\text{C u r l } H - \frac{\partial}{\partial t} D = J, \quad (1. 6 a)$$

$$\text{C u r l } E + \frac{\partial}{\partial t} B = 0, \quad (1. 6 b)$$

$$\text{d i v } D = \rho, \quad (1. 6 c)$$

$$\text{d i v } B = 0, \quad (1. 6 d)$$

ここで H, D, J, E, B, ρ はそれぞれ磁界ベクトル、電束ベクトル、電流ベクトル、電界ベクトル、磁束ベクトル、電荷密度を表す。 c u r l は回転を表す演算子で r o t とも書かれる。真空中では電荷、電流が存在しないので、 $J=0, \rho=0$ であり、 H と B, D と E とは透磁率 μ と誘電率 ϵ を使って

$$\mu H = B, \quad (1. 7 a)$$

$$\epsilon E = D, \quad (1. 7 b)$$

と表わされる。真空中では ϵ, μ も定数であるが、一般の媒質中では、場所に依存した 2 階テンソルである。(1. 6 b) 式の c u r l を採り、(1. 6 a) 式を代入すると

$$\text{c u r l } \text{c u r l } E + \frac{\partial}{\partial t} \mu \frac{\partial}{\partial t} \epsilon E = J, \quad (1. 8)$$

を得る。次の恒等式

$$\text{c u r l } \text{c u r l } E = -\nabla^2 E + \text{g r a d } \text{d i v } E \quad (1. 9)$$

に注意して、真空中である条件 $\rho=0, J=0$ を (1. 6 a) (1. 6 c) に適用すると、

$$(\nabla^2 - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) E = 0, \quad (1. 10)$$

を得る。同様に (1. 6 a) 式の curl と時間の一階微分をとって、
(1. 7) 式を考慮しながら、(1. 6 b) 式を代入すると、次の式

$$(\nabla^2 - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) H = 0, \quad (1. 11)$$

が得られる。(1. 10) (1. 11) 式は電場、磁場ともに速度 $c = 1/\mu\epsilon$ で伝播することを示している。偏光ベクトル ϵ を導入して $E = \epsilon V$ とすると、(1. 10) 式はスカラー波動方程式

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) V = 0, \quad (1. 12)$$

になる。(1. 12) 式の一般解は

$$V = u_1(r - ct) + u_2(r + ct), \quad (1. 13)$$

で与えられる事実は、よく知られている¹⁾。

u_1, u_2 は任意関数で

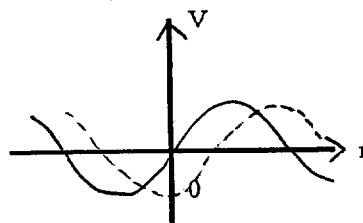


図 1. 7 波の伝播

$$r = \{x^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}, \quad (1. 14)$$

である。(1. 13) 式は、自由空間での解であり、ある曲面上 S に境界値を与えて、波動方程式を解く問題は、偏微分方程式論における境界値問題であって、別の方法で解かれている。

ここで単色波を仮定し、時間部分と空間部分とが

$$V = U(x, y, z) e^{i\omega t}, \quad (1. 15)$$

のように分解されて書けると、(1. 12) 式は次の Helmholtz 方程式

$$(\nabla^2 + k^2) U(x, y, z) = 0, \quad (1. 16)$$

になる。波動方程式よりも変数が少なくなっているので、境界値問題が解かれ易くなっている。3次元自由空間における Helmholtz 方程式は、完全系をなす球面関数 Y_{lm} 、Bessel 関数 J_n 、Laguerre 関数 L_n^n 、三角関数系などを用いて完全に解かれている。

1. 1. 2 Kirchhoff の回折理論の矛盾

Helmholtz 方程式 (1. 16) を積分形に表わして、境界値問題の解を与えたかのように見えた式が、Kirchhoff の回折公式¹¹⁾である。しかし、Kirchhoff の公式は、幾何光学近似に境界値を代入してみると、境界値を再生しない。この事実は、19世紀末 Poincare¹²⁾によりすでに指摘され

ていたにもかかわらず、多くの学者は注目せず、最近出版された本さえ Fresnel-Kirchhoff理論が数学的定理であるかのように書かれている¹³⁾。しかし Kirchhoffの公式が数学的に矛盾しているにもかかわらず、実験値をよく再生する理由は、正確な値と Kirchhoff公式から計算された値との差が境界面から離れるに従って、急激に零に近づくからである。従って Kirchhoffの公式を実験的に正しいとする学者は、誤差や回りからの影響（反射や実験装置の大きさに起因するもの）を無視しているからと推定される。多くの学者を誤った考えに導いてしまったこの Kirchhoffの回折公式がどのようにして導かれ、どのようにしたら矛盾がとり除かれるかを見よう。

微分方程式を積分方程式に書き換える一つの方法に Greenの定理がある。Greenの定理は、次のようである。”閉曲面 S で囲まれた領域 V においてスカラー連続関数を φ, ϕ とすると、次の2つの式が成り立つ。

$$\int_V (\phi \nabla^2 \varphi + \nabla \phi \cdot \nabla \varphi) dV = \int_S \phi \partial \varphi / \partial n dS, \quad (1.17)$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \phi) dV = \int_S (\phi \partial \varphi / \partial n - \varphi \partial \phi / \partial n) dS, \quad (1.18)$$

ただし n は法線ベクトル、 $\partial \varphi / \partial n$ 、 $\partial \phi / \partial n$ はそれぞれ曲面の内部から外部に向かって採った φ, ϕ の方向微分係数である。”スカラー関数は次元を指定していないので、2次元以上の有限次元空間内で Greenの定理は成立している。この定理を Helmholtz方程式 (1.16) に適用すると

$$\begin{aligned} \int_V (U \nabla^2 U' - U' \nabla^2 U) dV \\ = \int_S (U \partial U' / \partial n - U' \partial U / \partial n) dS, \end{aligned} \quad (1.19)$$

が得られる。ここで U は U' とは別の Helmholtz方程式を満たす連続関数である。(1.19) 式の左辺の被積分は、Helmholtz方程式を満たすため、至る所零になり

$$\int_S (U \partial U' / \partial n - U' \partial U / \partial n) dS = 0, \quad (1.20)$$

でなければならない。ここで U として

$$U'(s) = e^{-iks} / s, \quad (1.21)$$

を採る。 s は閉曲面上の点 x から閉領域内の一点 P までの距離である。点 P を中心として小さな半径 ε の球面 S' と、開口と呼ばれる面

A と、半径 R の半球面 S に閉曲面を分解しよう。図 1.8 回折理論における Sommerfeldの放射条件

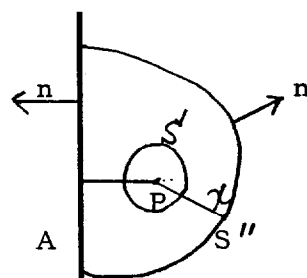


図 1.8 回折理論における
閉曲面

$$|U(s)| < \text{Const} / R, \quad |\partial U(s) / \partial R| < \text{Const.}, \quad (1.22)$$

を曲面 S に適用すると

$$\int_S \left\{ U(s) \frac{\partial e^{iks}}{\partial n s} - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS = 0, \quad (1.23)$$

が導かれるので、(1.20) 式は

$$(\int_A + \int_S) \left\{ U(s) \frac{\partial e^{iks}}{\partial n s} - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS = 0, \quad (1.24)$$

となる。曲面 S' に関する積分は、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_S \left\{ U(s) \frac{e^{iks}}{s} \left(ik - \frac{1}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS \\ &= \int_\Omega \left\{ U(s) \frac{e^{iks}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{iks}}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} \varepsilon^2 d\Omega, \end{aligned} \quad (1.25)$$

ここで Ω は立体角要素片である。極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ をとれば、(1.25) 式の積分第1項と第3項は零に収束し、第2項は $-4\pi U(P)$ を与えるので (1.24) 式は

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_A \left\{ U(s) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS, \quad (1.26)$$

となる。この式 (1.26) が Kirchhoff の回折公式と呼ばれている。Kirchhoff は証明をここで止めて、十分な吟味をしなかった。おそらく (1.26) 式は、明かに境界値を再生すると考えたのであろう。しかし Poincare により指摘されたように、(1.26) 式は境界値を再生しないのである。

今、面 A を $z=0$ の平面としよう。法線微分 $\partial/\partial n$ は $-\partial/\partial z$ となるので (1.26) 式は、直交座標系 (x, y, z) で表わすと

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ -U(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial z} U(\xi, \eta, z) \right\} d\xi d\eta, \quad (1.27)$$

となる。ここで

$$r = \{ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \}^{1/2}, \quad (1.28)$$

である。 $z \rightarrow 0$ なる極限をとると $-(1/2\pi)(\partial/\partial z)(e^{ikr}/r)$ は $\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$ になる。この事実は、次の式からわかる。

$$\begin{aligned}\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) &= \lim_{z \rightarrow 0} (2\pi)^{-2} \int \int \exp \left[i \left\{ (x-\xi)u + (y-\eta)v + z \sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \right\} \right] du dv \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} (2\pi)^{-2} \int d\rho \int d\varphi \exp \left[i r \rho \cos(\theta - \varphi) + z \sqrt{k^2 - \rho^2} \right], \quad (1.29)\end{aligned}$$

ここで極座標 (r', θ) (ρ, φ)

$$\begin{aligned}x - \xi &= r' \cos \theta, & u &= \rho \cos \varphi, \\ y - \eta &= r' \sin \theta, & v &= \rho \sin \varphi,\end{aligned} \quad (1.30)$$

に変換している。(1.29)式は角度 φ に関する積分が、Bessel関数 $J_0(r'/\rho)$ になるので

$$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) = \lim_{z \rightarrow 0} (2\pi)^{-1} J_0(r' \rho) \int \exp[i z \sqrt{k^2 - \rho^2}] \rho d\rho, \quad (1.31)$$

となる。Bessel関数の定積分公式

$$\int_0^\infty \frac{\rho J_0(r' \rho)}{\sqrt{k^2 - \rho^2}} d\rho = \frac{\exp[i z \sqrt{k^2 - \rho^2}]}{\sqrt{r'^2 + z^2}}, \quad (1.32)$$

を利用すると、(1.31)式は

$$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) = \lim_{z \rightarrow 0} (2\pi)^{-1} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (1.33)$$

となる。よって(1.27)式の積分第1項は、 $1/2U(x, y, 0)$ になる。一方、その積分第2項は、 $x=\xi$ 、 $y=\eta$ の点で発散してしまうので、必ずしも $1/2U(x, y, 0)$ になるとは限らない。故に、Kirchhoffの回折公式は、一般に境界値を再生しないのである。その上、Kirchhoff式は U が境界面近傍で値に不連続を生じているため、Greenの定理の適用条件を破っている。このように矛盾した式となっている。このような矛盾式が導かれる理由は、Helmholtz方程式が楕円型であり、双曲型の偏微分方程式でないからである。楕円型偏微分方程式の境界値問題では、境界値とその一階微分値を同時に指定することができない。もし同時に指定すると、Kirchhoffの式のような境界値を再生しない式が導かれることになる。スカラー波のKirchhoff回折公式を電磁波の回折に適用したKottlerの式¹⁵⁾

$$\begin{aligned}E(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ -E(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikr}}{r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial z} E(\xi, \eta, z) \right\} |_{z=0} d\xi d\eta,\end{aligned} \quad (1.34)$$

も明かに矛盾した式になっている。

1. 1. 3 Rayleigh の回折理論

矛盾した Kirchhoff の回折公式を正しい理論に修正する多くの努力がなされ Rayleigh¹⁶⁾ が最初に成功した。Kirchhoff が U として (1. 21) 式のようにとって矛盾した式 (1. 26) を導いてしまったので、Rayleigh は U として

$$U = \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks^*}}{s^*}, \quad (1. 35)$$

を採った。ここで s は閉曲面上の点 x から閉領域内の一点 P までの距離 s^* は点 x から P の鏡像点 P' までの距離である。Rayleigh 回折公式は 19 世紀末に導かれていたにもかかわらず、20 世紀中ごろまでほとんど注目されなかった。

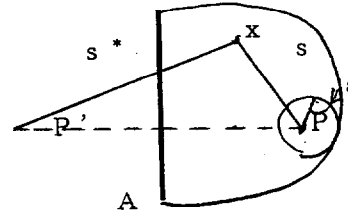


図 1. 9 Rayleigh 回折公式を導く閉曲面と鏡像点

しかし、Luneberg¹⁷⁾ は "Rayleigh 回折公式が Helmholtz 方程式 (1. 16) の境界値問題の唯一の解である" という命題の証明に成功し、急速に注目を浴びる様になった。Rayleigh 回折公式の証明は、次の様にしてなされる。 Helmholtz 方程式を積分形に書き直すために、Green の定理を使うことは Kirchhoff と同じである。境界面上の点 x と点 P との距離が零に近づいても U が発散しない様に (1. 35) 式のような形の関数を取り、かつ Sommerfeld の放射条件 (1. 22) 式を適用すると

$$\int_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks^*}}{s^*} \right) - \left(\frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks^*}}{s^*} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS = 0, \quad (1. 36)$$

が導かれるので、(1. 20) 式は

$$(\int_A + \int_S) \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks^*}}{s^*} \right) - \left(\frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks^*}}{s^*} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS = 0, \quad (1. 37)$$

となる。 S は半径 ϵ の小球面を表し、これに関する積分 I は

$$I = \int_\Omega \left\{ U e^{iks} \left(ik - \frac{1}{\epsilon^2} \right) - \frac{e^{iks}}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} \epsilon d\Omega + \int_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks^*}}{s^*} - \frac{e^{iks}}{s} \right) - \left(\frac{e^{iks^*}}{s^*} - \frac{e^{iks}}{s} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS = 0, \quad (1. 38)$$

と分解できる。 $\epsilon \rightarrow 0$ なる極限をとると、積分第 1 項は $-4\pi U$ に収束し、

積分第2項は零となる。 x が平面A上にあることから $s = s^*$ に注意すると (1. 37) 式は、次の様になる。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi} \int_A U(x) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks^*}}{s^*} \right) \\ &= \frac{-2}{4\pi} \int_A U(x) \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} dS \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_A U(x) \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikr}}{r} dS, \end{aligned} \quad (1. 39)$$

注目すべきは、 $\partial U / \partial n$ なる境界値の一階微分値がないことである。Rayleigh 回折公式は回折場が境界値だけで決定されることを示している。U を (1. 35) 式のように採らないで

$$U' = \frac{e^{iks}}{s} + \frac{e^{iks^*}}{s^*}, \quad (1. 40)$$

の様にとると

$$U = \frac{-1}{2\pi} \int_A \frac{\partial U}{\partial z} \frac{e^{ikr}}{r} dS, \quad (1. 41)$$

なる式が導れる。(1. 41) は Rayleigh の第2回折公式と呼ばれ、境界値の一階微分値だけで回折場が決定されることを示している。これに対して (1. 39) 式は、Rayleigh の第1回折公式と呼ばれている。

(1. 39) 式が $z \rightarrow 0$ としたとき、境界値を再生することは (1. 33) 式より、明かである。伝播核について

$$|\partial U' / \partial z| < 2(1 + |k|) z / r^2, \quad (1. 42)$$

なる不等式と、境界値 $U(\xi, \eta)$ が

$$\begin{aligned} |U| &< \text{Const} / R, \quad |\partial U / \partial \xi| < \text{Const} / R, \\ |\partial U / \partial \eta| &< \text{Const} / R, \end{aligned} \quad (1. 43)$$

なる条件を考慮すると、(1. 39) 式は $R \rightarrow \infty$ のときも収束する。伝播核 $K = -(1/2\pi) (\partial / \partial z) (e^{ikr}/r)$ が Helmholtz 方程式を満たすことは、明かである。以上3つの事実より、Rayleigh 回折公式は Helmholtz 方程式の境界値問題の唯一の解であることがわかる。

電磁波回折公式は、Rayleigh 回折公式を使って表すことができる。Maxwell 方程式 (1. 16) から、真空中では $\text{div } E = 0$ であるから、ベクトルの成分 E_x, E_y, E_z は独立ではない。今、 E_x, E_y を独立に与えるとき E_z が

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = - \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y}, \quad (1.44)$$

で与えられることに注意すると、電磁波の回折式は次の様になる。

$$E_x(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \iint_A E_x(\xi, \eta) \frac{\partial U}{\partial z} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta \quad (1.45a)$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \iint_A E_y(\xi, \eta) \frac{\partial U}{\partial z} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta \quad (1.45b)$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \iint \{ \xi E_x(\xi, \eta) + \eta E_y(\xi, \eta) \} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta, \quad (1.45c)$$

Rayleigh回折公式からFresnel回折公式が近似式として容易に導かれる。伝播核は

$$K = \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{r} e^{ikr} \frac{ik}{2\pi} \frac{z}{r^2} e^{ikr}, \quad (1.46)$$

で表される。(1.46)式の第1項は

$$r \gg 1/k = \lambda/2\pi, \quad (1.47)$$

の条件下で無視できるので、(1.46)式の伝播核は、近似伝播核K

$$K = - \frac{ik}{2\pi} \frac{z}{r} e^{ikr} = - \frac{ik}{2\pi} \cos \theta \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.48)$$

と書ける。Fresnelの仮定した位相の遅れ $-i$ と傾斜因子 $z/r = \cos \theta$ が自動的に導かれる。 θ が小さいとすると、 $\cos \theta \sim 1$ よりHygensの伝播核 e^{ikr}/r が得られる。このようにしてHygensにより始められFresnelによって改良され、Rayleighにより最終的な解決をみた波動回折問題は全てが解決されたわけではなく、非一様な媒質中を伝播する光、曲がった空間(Riemann空間、又は重力が存在する空間)を伝播する光の振舞いの解析などの複雑な未解決問題が残されている。

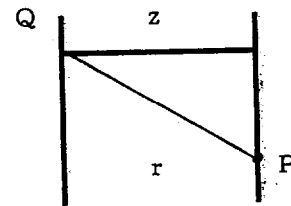


図 1. 10 Fresnel回折

1. 1. 4 宮本-Wolfの境界回折理論とその矛盾点

回折理論はFresnelの考えのもとに発展してきたが、Fresnelよりも先に光の波動性を実験的に確認したYoungは入射波が境界面上にある物体の端により乱されて、回折波が生ずると仮定した。すなわち、回折波は境界面上の回折端の線要素の局所的なふるまいだけによるとした。この考えは1888年Maggi¹⁸⁾によって、取り上げられた。Maey¹⁹⁾やSommerfeld²⁰⁾の博士論文にもYoungの考えが取り上げられている。

1917年Rubinowiczは平面波や球面波について、Kirchhoffの波動運動を論じている。その後、Kottler²¹⁾、LaporteとMeixner²²⁾らは電磁波について、Kirchhoffの波動運動を考察している。1955年Ingarden²³⁾は球面入射波に対して適当な近似をしながら境界回折波の理論をうちたてた。一般の入射波に対しては1962年宮本とWolfがベクトル解析におけるStokesの公式を利用して境界回折理論を展開した。しかし、彼らはHelmholtz方程式(1.16)の境界値問題の解にKirchhoffの回折公式(1.26)を採ったため、数学的に矛盾した式を導いてしまった。正確な境界回折理論を構築するために、宮本-Wolf理論について検討してみよう。

境界回折理論は、境界面上の閉曲線上の境界値から、回折場を計算しようとするものである。境界上の点Qと回折場の点Pとの距離をrとすると、Kirchhoffの回折公式は

$$U(P) = \int_S V_K(P, Q) n dS_Q, \quad (1.49)$$

と書き直せる。ここで

$$V_K(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \nabla_Q U(Q) - U(Q) \nabla_Q \frac{e^{ikr}}{r} \right\}, \quad (1.50)$$

である。 V_K はベクトルであり、明かに

$$\text{div}_Q V_K(P, Q) = 0, \quad (1.51)$$

が成り立つ。従って、ベクトル解析から知られているように

$$V_K(P, Q) = \text{curl}_Q W_K(P, Q), \quad (1.52)$$

なるベクトル $W_K(P, Q)$ が存在する。(1.52)式を(1.46)式

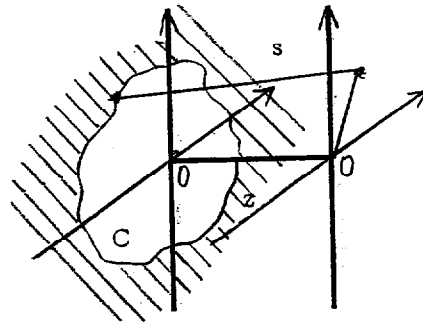


図 1. 11 境界回折理論の座標系

に代入すると

$$U(P) = \int_S \text{curl}_Q W_K(P, Q) \cdot n \, dS_Q, \quad (1.53)$$

が得られる。ベクトル解析における Stokes の公式

$$\int_S \text{curl}_Q W_K(P, Q) \cdot n \, dS_Q = \int_C W_K \, ds_Q, \quad (1.54)$$

を (1.53) 式に適用すると

$$U(P) = \int_C W_K \, ds_Q, \quad (1.55)$$

が得られる。(1.55) 式は、境界面上の閉曲線 C 上である適当なベクトル W_K を積分すれば、回折場が計算できることを示している。 W_K は

$$W_K(P, Q) = (1/4\pi) \int_V \text{curl}_Q V(P, Q') R'^{-1} d\tau'_Q, \quad (1.56)$$

と表わされる。ここで $d\tau'_Q$ は、 Q' についての体積要素を表わし、 $R' = QQ'$ である。(1.56) 式に、(1.50) 式を代入すると

$$W_K(P, Q) = \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{1}{R'} (\nabla_Q \cdot \frac{e^{ikR'}}{s}, \nabla_Q \cdot U(Q')) d\tau'_Q \quad (1.57)$$

が得られる。ここで $s' = PQ$ である。しかし (1.57) 式は、ベクトル W が Helmholtz 方程式の解の積分になっていて、このままでは (1.55) 式は、単なる積分方程式にすぎない。宮本-Wolf は入射波の平面波分解より出発して、ベクトルポテンシャル W に

$$W_K(P, Q) = -i \cdot x \frac{1}{4\pi s_Q} \left[\int_{Q_0} e^{ikR} \nabla_Q U(Q) \, ds + e^{ikR} U(P, Q_0) \right], \quad (1.58)$$

なる式を与えた。ここで $i \cdot x$ は $r = PQ$ に向いた単位ベクトルである。宮本-Wolf の与えたベクトルポテンシャル W の表現も Helmholtz 方程式の解の積分であり、自己撞着の形になっているので、真の境界回折理論と言えない。

Rubinowicz²⁰⁾ は、ベクトル解析の手段を利用して (1.58) 式をより簡単な方法で導いている。ここで問題が 2 つ存在している。1 つは、境界回折理論を展開する際、Helmholtz 方程式の境界値問題の解として、数学的に矛盾した Kirchhoff の回折公式を使っていることであり、もう 1 つはベクトルポテンシャル W_K が Helmholtz 方程式の解を使って表現されていることである。

MarchandとWolf²⁷⁾は、第1項の誤りに気づき、Kirchhoffの回折公式にとってかわり、Rayleigh回折公式を使ってベクトル V_R を

$$V_R(P, Q) = V_K(P, Q) - V_K(P^*, Q), \quad (1.59)$$

のように採った。ここで P は P の鏡像点である。ベクトルポテンシャル W_R

$$W_R(P, Q) = W_K(P, Q) - W_K(P^*, Q), \quad (1.60)$$

と改正される。しかしながら W_R は依然として、Helmholtz方程式の解の積分として表わされているので、自己撞着な表現でしかない。

Stokesの定理を利用した境界回折理論の基礎は、ベクトルポテンシャル W_K 又は W_R の存在を仮定している点にある。この W の存在を保証するには、(1.50) 又は (1.59) 式のような発散のないベクトル V_K 又は V_R の存在が不可欠である。にもかかわらず、Rayleigh回折公式 (1.39) を

$$U(P) = \frac{-1}{2\pi} \int_S U(x) \left(\nabla_Q \frac{e^{ikx}}{s} \right) n dS, \quad (1.61)$$

のように書き直して、ベクトル V を

$$V_{R'}(P, Q) = - (1/2\pi) U(Q) \nabla_Q (e^{ikx}/s), \quad (1.62)$$

とおいてみると、 $V_{R'}$ は必ずしも (1.51) 式を満たす発散のないベクトルでない。MarchandとWolfがRayleigh回折公式を使って (1.51) 式を満たすベクトル V_R を作り得た理由は、境界面上で零になり、かつHelmholtz方程式の解となるようなベクトル V をうまく付け加えたからである。(1.59) 式を具体的に書くと

$$V_R = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ U(Q) \nabla_Q \left(\frac{e^{ikx}}{s} - \frac{e^{ikx^*}}{s^*} \right) - \left(\frac{e^{ikx}}{s} - \frac{e^{ikx^*}}{s^*} \right) \nabla_Q U(Q) \right\}, \quad (1.63)$$

であり、第2項は境界面で零であり、かつHelmholtz方程式を満たしている。今

$$V_{R'} = \frac{1}{4\pi} \left\{ U(Q) \nabla_Q \left(\frac{e^{ikx}}{s} - \frac{e^{ikx^*}}{s^*} \right) - \alpha \left(\frac{e^{ikx}}{s} - \frac{e^{ikx^*}}{s^*} \right) \nabla_Q U(Q) \right\}, \quad (1.64)$$

のように $V_{R'}$ を定義する。ここで α は任意定数で、 $\alpha=1$ の時、(1.64) 式 (1.63) 式に一致する。この $V_{R'}$ を (1.63) 式の代わりに使っても、確かにRayleigh回折公式を満足する。故に、 $V_{R'}$ も

Rayleigh回折公式から導かれる1つのベクトルで、しかも発散をとると零とならない。この意味でRayleigh回折公式から導かれるベクトルは不定である。もし本当にベクトルポテンシャルが何の付加条件もなしに存在したら、2次元上で定義された連続関数は、その平面上の閉曲線C上の値によって決定されてしまう。なぜなら、正確な境界回折理論は、必ず境界値を再生するので、点Pを境界面上の点とすると、もはや2次元上の解析関数問題に帰してしまうからである。こうしてStokesの定理を使った境界回折理論は挫折し、新しい考えが必要であることがわかる。第3章では、境界値に拘束条件を付加して、矛盾のない新しい境界回折理論を展開する予定である。

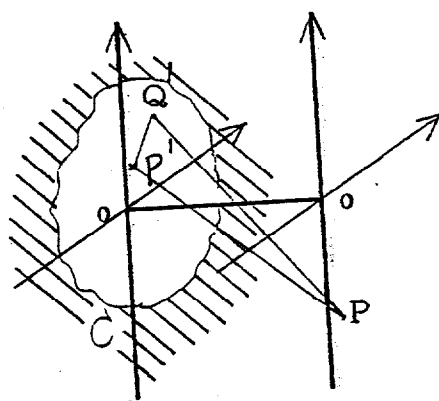


図 1. 1 2 正確な境界回折理論の境界値再生問題

1. 1. 5 部分的コヒーレント波動伝播

自然に放射される光は、人工的なレーザー光と違って、位相がそろっていることはまずまれであり、いわゆる干渉度が悪い。スペクトル線幅は、どんなに鋭くとも遷移時間が有限である限り、必ず有限の幅をもっているし、その上物理的な光源は、点光源でなく有限な広がりをもっているからである。この多色光はFourier展開により単色光の重ね合わせで記述できるが、位相の変動が激しくて、その観測ができない場合もある。こういう時には、観測点上の光の複素振幅の時間的平均量とか、分散量とかいう統計的な値が有効観測量として、大きな意味をもってくる。この多色光による波動場をうまく記述する方法に、異なる2点PとP'の波動の相関量をとる方法がある。この相関量で波動の定性的な性質、つまりコヒーレント、部分的コヒーレント、インコヒーレント波動を定義する。ごく接近した2点の波源があって、前者は干渉縞が最も鋭くである時であり、後者は干渉縞が最も不鮮明になる時で、その中間状態が部分的コヒーレントと呼ばれている。

最初の部分的コヒーレンスの題目に値する研究は、Verdet²⁸⁾によりなされ、その後Michelson²⁹⁾は観測面上の干渉縞の鮮明度と強度分布についての関係を確立した。定量的な扱いはLave³⁰⁾により導入され、Berek³¹⁾が顕微鏡像形成に相関の概念を使った。vanCittert³²⁾は光の擾乱に対して、確率の概念を持込み、広がった光源からの光の強度分布を与えた。別の重要な部分的コヒーレンスに対する試み、つまり光の波動場のコヒーレンス度の概念がZernike³³⁾により導入された。Zernikeのコヒーレンス度は、vanCittertの相関因子と同等のものである。これらは準単色波について考えられてきたが、もっと複雑な場合についてWolf³⁴⁾が研究し、それとは独立にBlanc-LapierreやDumonte³⁵⁾により一般的な相関関数が導入された。Wolfは電磁場の相関テンソルを定義して、それらの満たす微分方程式を示し、その解を与えたが、Kirchhoffの回折公式を利用したため数学的に矛盾した解になっている。その後Parrent³⁶⁾とWolfはRayleigh回折公式を使った正しい解を示している。しかしParrentの式は、平面を境界とする場合のみについて解析的に示され、曲面を境界とする境界値問題に対しては、形式的なGreen関数を使って表現されているにすぎない。

簡単のため、光をスカラー波としよう。ベクトル波に拡張するためには、偏光ベクトルを係数として加えればよいので、特殊な場合を除いてスカラー理論はかなりの光伝播の様子を記述できる。定常的な光の波動場を $V(x, t)$ とすると、 r, r で指定される2点上の波動場の時間的平均で表わされる相互コヒーレンス関数 Γ は、

$$\Gamma(r_1, r_2; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T V(r_1, t+\tau) V^*(r_2, t) dt, \quad (1.65)$$

で定義される。 V^* は V の複素共役である。2点が一致するとき、 Γ はその点の波動強度を表わす。定常的な場は時間差 τ だけにより、観測時に依らないので、非定常的な場に比べ扱いはたいへん簡単になる。 V は光の場で波動方程式(1.14)を満足するので、相互コヒーレンス関数 Γ は微分方程式

$$(\nabla_1^2 - \partial^2 / \partial \tau^2) \Gamma(r_1, r_2; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T (\nabla_1^2 - \partial^2 / \partial \tau^2) V(r_1, t+\tau) V^*(r_2, t) dt = 0, \quad (1.66)$$

を満たす。 ∇_1 は第1座標 r に関するLaplacianである。一方、(1.65)式は

$$\Gamma(r_1, r_2; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T V(r_1, t) V^*(r_2, t-\tau) dt, \quad (1.67)$$

のように書き直せるので、第2座標系に関して、次の微分方程式

$$(\nabla_2^2 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}) \Gamma(r_1, r_2; \tau) = 0, \quad (1.68)$$

を満たす。(1.66) (1.68) 式の微分方程式は τ に関する Γ の Fourier 変換

$$\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \int \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (1.69)$$

を適用すると、次の Helmholtz 方程式

$$(\nabla_j^2 + k^2) \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = 0, \quad (j = 1, 2) \quad (1.70)$$

になる。Wolf は Kirchhoff の回折公式 (1.26) を利用して、(1.70) 式の解として

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = & (4\pi)^{-2} \int_{S_1} \int_{S_2} \widetilde{\Gamma}_S(\xi_1, \xi_2; \omega) \left(\frac{\partial}{\partial n_1} \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \right) \\ & \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right) - \frac{e^{-ik(r_1+r_2)}}{r_1 r_2} \frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2} \widetilde{\Gamma}_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) \Big] dS_1 dS_2, \end{aligned} \quad (1.71)$$

を与えた。ここで n 、 dS は j ($=1, 2$) 番目の座標系の単位法線ベクトル、境界面の単位面積要素をそれぞれ表す。 Γ は境界面 S 、 S 上の 2 点の相互コヒーレンス関数である。1.2 節で述べたように Kirchhoff の回折公式は、よい近似であるにもかかわらず数学的に矛盾しているので、Wolf の導いた (1.71) 式は境界値を再生しない数学的に矛盾した式である。正しい解は Rayleigh 回折公式 (1.39) を使って

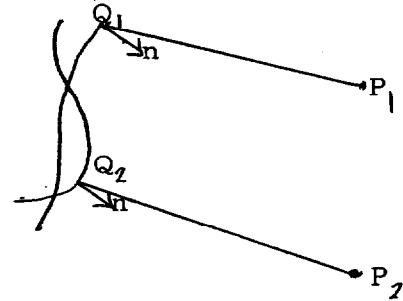


図 1.13 コヒーレンス関数伝播。S、S はそれぞれ第 1、第 2 座標系の境界曲面を表す。

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = & (2\pi)^{-2} \int_{S_1} \int_{S_2} \widetilde{\Gamma}_S(\xi_1, \xi_2; \omega) \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial n_1} \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial n_2} \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right) dS_1 dS_2, \end{aligned} \quad (1.72)$$

と表わされる。境界が平面のときには

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = & (2\pi)^{-2} \int_{A_1} \int_{A_2} \widetilde{\Gamma}_S(\xi_1, \xi_2; \omega) \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right) d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2, \end{aligned} \quad (1.73)$$

となる。ここで

$$r_i = \{ (x_i - \xi_i)^2 + (y_i - \eta_i)^2 + z_i^2 \}^{1/2}, \quad (1.74)$$

である。しかしながら境界面が曲面のときには、(1.72)式で表わされるコヒーレンス関数は形式解にすぎない。なぜなら伝播関数が解析的な形ではつきり与えられていないからである。

境界面上の点Qから観測点Pまでの距離が多色波の波長の最大値より十分大きいと(1.47)式が成立するとき、伝播核はFresnelが与えた(1.48)式に近似できるので、(1.73)式は次のような近似式で表わされる。

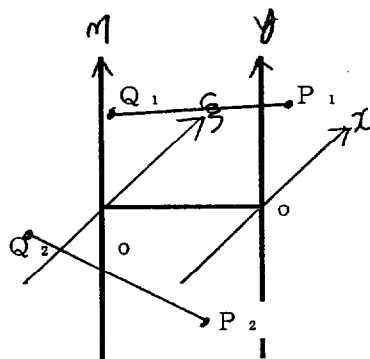


図1.14 Fresnel回折式を利用した部分的コヒーレント波動伝播

$$\tilde{\Gamma}(r_1, r_2; \omega) = (2\pi)^{-2} k^2 \int_{A_1} \int_{A_2} [\Gamma_s(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \times (e^{ik(r_1 - r_2)} / r_1 r_2)] d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2, \quad (1.75)$$

(1.75)式は計算しづらいので、もう少し近似度を悪くした式

$$\tilde{\Gamma}(r_1, r_2; \omega) = \frac{k^2 e^{ik(z_1 - z_2)}}{(2\pi)^2 z_1 z_2} \int_{A_1} \int_{A_2} [\Gamma_s(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \exp \{ i k \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2 z_1} - \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2 z_2} \}] d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2, \quad (1.76)$$

がよく使われる。近似条件は $\cos \theta \sim 1$ 、分母の距離 $r_i \sim z_i$ 、指数関数の距離は

$$r_i = z_i \left\{ 1 - \frac{(x_i - \xi_i)^2 + (y_i - \eta_i)^2}{2 z_i} \right\}, \quad (1.77)$$

である。

境界面上の2点間の波動場に全く相関がない準単色インコヒーレント波動が放射されているときには、Hopkinsが初めて導入した近似

$$\tilde{\Gamma}_s(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2; \omega) = \delta(\omega - \omega_0) \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(\eta_1 - \eta_2) \times I(\xi_1, \eta_1), \quad (1.78)$$

が成り立つ。ここで ω_0 は準単色光の中間角周波数、 δ はDiracのデルタ関数、 I は波動の強度を表わす。境界面 S_1, S_2 が同じであるとき、(1.78)式を(1.73)式に代入し、 ω に関するFourier逆変換をとると

$$\Gamma(r_1, r_2; \tau) = e^{i\omega\tau} \int_A I(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right) dx d\xi d\eta, \quad (1.79)$$

が得られる。ここで

$$r_i = \{ (x_i - \xi_i)^2 + (y_i - \eta_i)^2 + z_i^2 \}^{1/2}, \quad (1.80)$$

である。これはインコヒーレント波動からでも、コヒーレンス度のある部分的コヒーレンス関数が得られるという重要な事実で、vanCittert-Zernikeの定理として良く知られている。普通、この定理は近軸近似 Fresnel回折式を利用した強度分布の Fourier変換

$$\Gamma(r_1, r_2; \tau) = \frac{e^{i\omega\tau} k e^{ik(z_1 - z_2)}}{z_1 z_2} \int_A I(\xi, \eta) \exp \left[ik \left\{ \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z_1} - \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z_2} \right\} \right] d\xi d\eta, \quad (1.81)$$

がよく利用されている。

1. 1. 6 等方非一様媒質中の波動伝播

前節までの回折理論は、一様媒質中、特に真空中でのコヒーレント波動、又は部分的コヒーレント波動の振舞いを記述するものである。しかし、光が物質中を伝播するときには、物質との相互作用があつて波長により伝播速度が違ふ分散特性や、偏光の向きによつて伝播方向速度が変わる偏光特性などが存在して問題が複雑になり、特殊な条件下での厳密な理論は存在するが、一般的な伝播理論は存在しない。実用的な見地から、等方的で非一様媒質中の光の伝播が、Tatarski³⁹⁾ Strohbehn⁴⁰⁾、Cliffordらにより摂動法を使つて解析された。これらは第1近似、又はせいぜい第2近似までである。揺らぎの小さい場合の高次項まで取り入れた理論が、朝永、Schwinger、Feynman、Dyson⁴¹⁾によつて展開された量子電気力学⁴²⁾に使われている摂動論的な解放の類似から、Brownにより提出された。ランダムな媒質中を散乱しながら伝播する波動の解析が立居場⁴⁴⁾によりなされている。

非一様媒質で、電荷電流がなく、透磁率 μ が真空中の μ と一致するような時、電磁場を記述するMaxwell方程式は、次のように表わされる。

$$\text{curl } \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (1.82a)$$

$$\text{curl } H - \frac{\partial D}{\partial t} = 0, \quad (1.82b)$$

$$\text{div } H = 0, \quad (1.82c)$$

$$\text{div } D = 0, \quad (1.82d)$$

(1.9) 式に注意しながら、(1.82) 式をまとめると³⁹⁾

$$\nabla^2 E - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon E) + \nabla (E \cdot \ln \epsilon) = 0, \quad (1.83)$$

が得られる。誘電率 ϵ の変化は、 E の変化に比べて緩やかである場合が多いので、(1.83) 式の第3項は、第1、2項に比べて著しく小さく、無視できるので

$$\nabla^2 E - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon E) = 0, \quad (1.84)$$

なる方程式が導かれる。結晶のようなテンソル型の誘電率の時には、電磁波の方向と結晶軸の向きとが複雑にからみあってくるので、簡単に解くことはできない。ここでは ϵ がスカラー関数であるとする。電場の向きによって、伝播特性が変化することはないので (1.84) 式は、 $E = \epsilon_1 g(r) e^{i\omega t}$ を導入することにより、スカラー方程式

$$(\nabla^2 + k^2 \epsilon - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} i \omega + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2}) g(r) = 0, \quad (1.85)$$

になる。特に、媒質の誘電率 ϵ が時間的に一定であるかどうか、又は、光の伝播する時間中に ϵ がゆっくり変化して、ほとんど一定と見なしうると仮定できる場合には、(1.85) 式は

$$(\nabla^2 + k^2 \epsilon(r)) g(r) = 0, \quad (1.86)$$

となる。 ϵ が空間的に変化しない定数である時には、(1.86) 式は Helmholtz 方程式 (1.16) に一致する。一般には、(1.86) 式は時間に独立な Schrodinger 方程式であり、 ϵ が特定な関数、例えば放物型 ($\epsilon = b - a r^2$) とか、双曲型 ($\epsilon = \text{Const.} / r$) とかの場合にのみ固有値問題として解かれているにすぎない。一般的な ϵ に対しては、その値が小さいとして半群の摂動論を利用して形式的に解くことができる。誘電率 ϵ を一定値 ϵ_0 と変化分に分離して

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \epsilon_1(r)), \quad (1.87)$$

とする。この時、入射波 $E_0 = a \exp \{i(\omega t - k r)\}$ ($\omega = c k / \epsilon_0$) なる平面波とすると、摂動法による第1近似解 E は、Helmholtz方程式のGreen関数を使って

$$E^{(1)}(r) = E^{(0)} - \frac{1}{4\pi} \int_V E^{(0)}(r') \frac{\epsilon(r) e^{ik(r-r')}}{|r' - r|} d^3 r', \quad (1.88)$$

で与えられる。積分領域 V は、境界面から観測面までであるが、誘電体の変動が鋭く、入射波の反射を考慮しなければならない場合には、もっと複雑になり、高次の摂動項を入れた連立量み込み積分方程式を解かねばならない。ランダムに変動する媒質中を伝わる波動の振舞いについては、Tatarski他多くの研究者⁴⁵⁾によって研究され、実験値とほぼ一致する結果が得られている。

非一様媒質で、特に有名で多くの応用がなされている例に、超音波によって引き起こされる誘電率変動がある。超音波による光回折の研究はRayleigh、Brillouin⁴⁶⁾、DebyeとSears⁴⁷⁾、LucasとBiquarl⁴⁸⁾、RamanとNath⁴⁹⁾、ExtermannとWannier⁵⁰⁾、Willardによりなされた。特に、RamanとNathの業績が著しく、Raman-Nath回折と呼ばれている。その解析法は、平面波展開であり、入射光と超音波共に単色の時には、割と簡単に波動式(1.84)の近似解が得られる。今

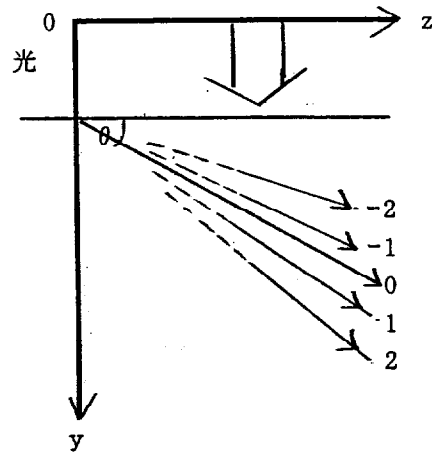


図1.15 超音波による光回折

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \alpha \cos(\Omega t - Ky)), \quad (1.89)$$

とする。入射光が x 方向に完全に偏光し、 $y-z$ 平面上を z 軸に対して角度 θ で入射する単色平面波である時、入射電界ベクトルは、次のように表わされる。

$$E^{(0)}_x = a \exp \{i(\Omega t - k y \sin \theta - k z \cos \theta)\}, \quad (1.90)$$

解を平面波の重ね合わせで

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(z) \exp i \{(\omega + n\Omega)t - (k \sin \theta + nK)y - k z \cos \theta - \pi n/2\}, \quad (1.91)$$

と表わし、波動式(1.84)に代入すると、 U_n に関する次の漸化微分方程式

$$\frac{d U_n(z)}{d z} + \frac{\alpha k}{2 \cos \theta} (U_{n-1} - U_{n+1}) = i \frac{n K}{2 k \cos \theta} \left(1 - \frac{2 k}{K} \sin \theta\right) U_n, \quad (1.92)$$

が得られる。右辺は $|n| < K/k \ll 1$ の条件下に無視すると、(1.92) 式の解は整数次の Bessel 関数 $J_n(k \alpha z \sec \theta / 2)$ で与えられる。Klein-Cook⁵¹⁾ による解は、(1.92) 式の右辺第1項を無視し、 $J_n(k \alpha \sin(K z \sin \theta / 2) / K \sin \theta)$ で与えられる。しかしこの解は Raman-Nath の解と角度依存性に不一致点が残る。この平面波展開法では超音波が多色波であったり、入射波が部分的コヒーレント光である時には、大変複雑な漸化微分方程式を解く必要にせまられて、あまり良い方法とは言えない。

さらに一般の誘電率を持つ等方非一様媒質中の波動伝播の解析には、Tatarski³⁹⁾ による位相関数法 (WKB 法と似ている解析法) Bethe-Salpiter 方程式を導き、一種の摂動法である Chow⁵²⁾ による関数空間積分法、Pattanyak⁵³⁾、Wolf⁵⁴⁾、鈴木⁵⁵⁾ らによる Ewald-Oseen 消滅定理⁵⁶⁾ から Maxwell 方程式の積分表現を得る方法などがある。Wolf、鈴木が示した式は、単なる微積分方程式に過ぎず、非一様場中の波動回折公式、又は非一様場に対する境界値問題の解と呼ぶわけにはいかない。なぜなら、1.14 節で示したように Kirchhoff 回折公式は、矛盾しているからである。第6章では、位相関数法と Rayleigh 回折のスペクトラム表現とを使って非一様媒質中の近似回折公式を示す。特に、入射光が単色平面波で誘電率変動が三角関数である時、簡単に Raman-Nath 回折式が得られる。離散的スペクトルを持つ多色波超音波による光回折から、容易に 0、+1、+2 次の回折光振幅が示される。

1.1.7 異方媒質中の波動伝播

結晶のような異方性媒質では、光の偏光面によって、波動の伝播速度が異なるために、複屈折現象等の種々の複雑な様相を帯びてくる。これらの物質中での波動伝播の解析⁵⁷⁾ は、(1.8

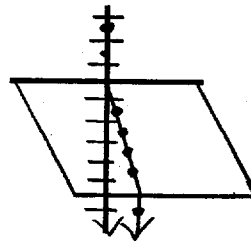


図 1.16 複屈折現象

2) 式の Maxwell 方程式を解くことに より、Fresnel、Felsen⁵⁹⁾、Bergstein と Zachos⁶⁰⁾、Lalor⁶¹⁾、Stamnes と Shermann⁶²⁾ らによってなされている。これらの研究は、異方ではあるが、一様な媒質でのものであって、単純な場合での成果である。結晶に歪や音波を与えることで、非一様性を誘起すると前節に展開した Tatarski らの解析はそのままでは、適用できない。異方性によって偏光面が回転して、互いに影響を及ぼしあう 2 つの独立した偏光状態の連立微分方程式を解く必要があるからである。

透磁率 μ がスカラーで、電流や電荷が無いとき、(1.82) 式より

$$(\text{curl curl} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon) E(r, t) = 0, \quad (1.93)$$

となる。ベクトルの恒等式 (1.9) より、(1.93) 式は

$$-\nabla^2 E + \nabla (\nabla E) + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon E = 0, \quad (1.94)$$

となる。 ϵ がテンソル、つまりマトリクスのような表現を有する時

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}(r, t) & \epsilon_{21}(r, t) & \epsilon_{31}(r, t) \\ 0 & \epsilon_{12}(r, t) & \epsilon_{22}(r, t) & \epsilon_{32}(r, t) \\ 0 & \epsilon_{13}(r, t) & \epsilon_{23}(r, t) & \epsilon_{33}(r, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0(r, t) \\ E_1(r, t) \\ E_2(r, t) \\ E_3(r, t) \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

が左辺第3項の意味である。電荷がないので $\text{div } \epsilon E = 0$ が異方性媒質でも成り立つから、 E は2つが独立で、他は従属している。従って入射平面波は

$$E_{(1n)} = \sum_{j=1}^2 a_j e_j \exp i(\omega t - k_j r_j + \phi), \quad (1.96)$$

で表現される。ここで a_j は実振幅、 e_j は互いに直交する偏極ベクトル、つまり

$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ 、 ω は光の角振動数、 k_j は波数ベクトルである。図1.17に電磁波の成分である磁場 H 、波数ベクトル k 、偏極ベクトル e_j の関係を示す。異方性媒質であるため、必ずしも直交しているわけではない。

この媒質中に超音波を発生させる時に光回折が起こるわけであるが、その波数 K は、光の波数 k_j に比べて十分小さい。つまり $K \ll k_j$ であるから、(1.94) 式はある程度簡単な式に還元せられる。図1.18にその概略を示す。偏光面に依存して回折角度や回折振幅が違っていることに注意してほしい⁽³³⁻³⁵⁾。詳しい解析は、位相関数法を用いて、第7章でなされる。

超音波でなく原子自信の並びによって、異方性と非一様性が自然に存在する結晶のような媒質で、電磁波、特にX線が反

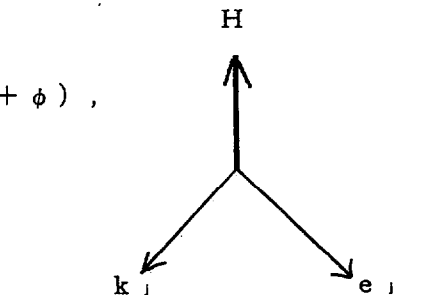


図1.17 H 、 e_j 、 k_j の異方媒質中の関係

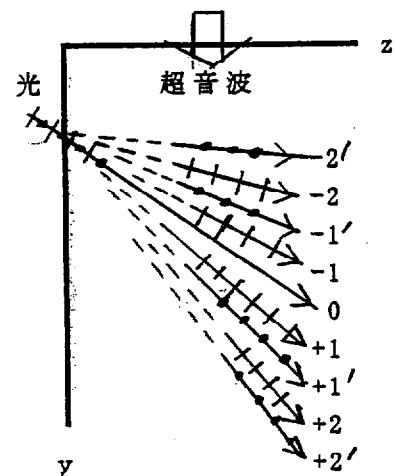


図1.18 異方非一様媒質中の光回折

射と干渉を起こすことが、Bragg回折⁵⁷⁾として良く知られている。図1.19にその様子を示す。間隔 d 、波長 λ 、角度 θ で入射するX線に対するBragg反射条件は

$$\cos \theta = \frac{n \lambda}{2 d}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1.97)

である。つまり、(1.97)式を満たす角度に強くX線が反射される。この解析は単純であり、Bragg反射角度 θ の近傍で、電磁波がどのようにふるまうかを与える情報が全くない。もっと詳しい情報を知るには、時間変動のない条件下で(1.94)式の解を求める事が一番てっとり早い方法である。K $\sim$ kであるから、位相関数法が適用出来ないので、直接法で(1.94)式の解を与える。第6章に、その解析がなされている。

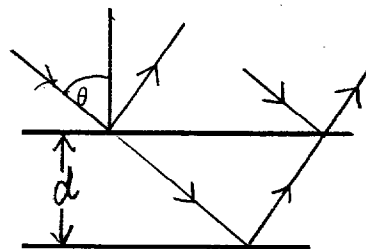


図1.19 Bragg反射

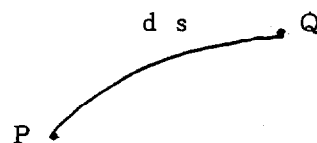
1.1.8 Riemann空間中の波動方程式

Riemann空間⁶⁶⁾とは平坦なEuclid空間に対して、一般に曲がった空間をさしている。この曲がった空間では、長さの微小要素 ds が

$$ds = \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (1.98)$$

で与えられる。 $g_{\mu\nu}$ は二階の対称テンソルと呼ばれて、座標 x の関数である。和は空間の次元 N までとられる。上付きと下付きの添字は、それぞれ反変、共変テンソルを意味し、上下に二度でてくる添字について、通常Einsteinの規約に従って和の記号 Σ を略すことがある。

図1.20 Riemann空間中の線素



この空間は数学的で全く抽象的なものであるとされてきたが、1915年ころEinsteinにより、一般相対性理論⁶⁷⁾の構築に応用され物理的に重要なものであることがわかった。Einstein⁶⁸⁾の重力理論によると、 $g_{\mu\nu}$ は重力ポテンシャルを表しているので、Newtonのスカラー重力理論と全く違っている。しかし弱い重力場では、近似的にNewton理論に一致している^{69,70)}。

Riemann空間では、ベクトル v^{μ} の平行移動に関してEuclid空間

と違っているので、普通の微分 $\partial / \partial x^\mu$ (以下 ∂_μ と表記する) が一般座標変換に対して共変にならない。そこで共変微分 と呼ばれるベクトルが次のように定義される。

$$\nabla_\mu v^\lambda = \partial_\mu v^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\nu, \quad (1.99)$$

ここで $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は接続係数とよばれるもので、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を使って

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 1/2 g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}), \quad (1.100)$$

で表わされる。 $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ とは違っていて

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad (1.101)$$

の関係があり、 $g_{\mu\nu}$ の逆マトリクスとみなしてよい。共変微分 と計量 g とは可換であるが、共変微分どうしは非可換で次の関係がある。

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) v^\lambda = R_{\mu\nu}^\lambda v^\mu, \quad (1.102)$$

$R_{\mu\nu}^\lambda$ は Riemann の曲率テンソルと呼ばれていて、

$$R_{\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\lambda, \quad (1.103)$$

で定義される。Einstein は Riemann の曲率テンソルに存在する 3 つの Bianchi の恒等式から、重力場が満たすべき方程式

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2 = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (\kappa: \text{重力定数}) \quad (1.104)$$

を導いた。 $R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソルで、(1.103) 式の Riemann テンソルを $g_{\mu\nu}$ で縮約したもので

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha} R_{\mu\alpha\nu}^\lambda, \quad (1.105)$$

のように定義される。 T は物質のエネルギー運動量テンソルであり、重力場の源で、電磁気学での電荷に相当している。

通常、重力場は弱く、平坦な Minkowski 計量 (Euclid 計量と似ているが、一致してはいない) $\eta_{\mu\nu}$ と弱い重力場 $\sqrt{\kappa} h_{\mu\nu}$ の和

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{\kappa} h_{\mu\nu}, \quad (1.106)$$

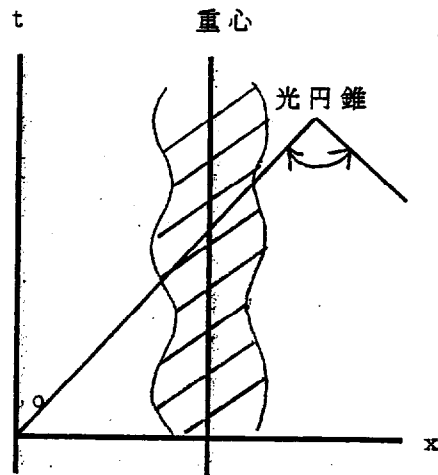


図 1. 21 重力波の放射

で表わされる。ここで $|\sqrt{\kappa} h_{\mu\nu}| \ll 1$ である。このような条件下で κ 以上の高次項が大変小さいことから、これらを見捨てる近似を行って、(1. 106) 式を (1. 104) 式に代入すると

$$\square h_{\mu\nu} = 2\sqrt{\kappa} T_{\mu\nu}, \quad (1. 107)$$

が得られる。は波動作用素である。(1. 107) 式は、重力場が波動となって伝わることを、つまり重力波⁷¹⁾の存在を意味している。真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ であるので、電磁場の波動方程式 (1. 10) (1. 11) と形式的に一致している。電磁場がベクトルであるのに対して、重力波は2階のテンソルであることが違っている。重力場の拘束条件

$$\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0, \quad g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu, \quad (1. 108)$$

を (1. 101) 式に代入し、 κ まで残す近似をすると、次の近似拘束条件

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0, \quad \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 0, \quad (1. 109)$$

が導かれる。(1. 109) 式より、見かけ上10個の自由度が2個に減る。この自由度は電磁波の偏光に相当するもので図1. 18にz方向に伝播する平面重力波の、2つの偏極状態を示す。座標の回転により、両状態は互いに他の状態に移すことができる。重力波は回転する棒、振動する円柱、レーザー光によって励起

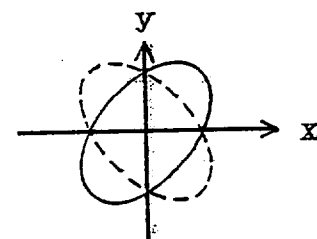
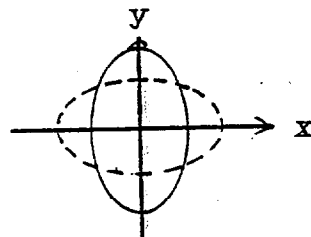


図1. 22 z方向に伝播する平面重力波の偏極状態

された板状物体、強い磁場中に入射された光の転換、それに素粒子の衝突によって放出されるが、なにせ重力定数 κ ($\sim 2 \times 10^{-43}$ MKSA単位) が著しく小さいため、極めて小さな量でしかない。現在、超新星や銀河の中心からやって来ると推定されている重力波を検出する、さまざまな試みがなされているが⁷²⁾、未だ確認されていない。

Riemann 空間中、つまり重力が存在する空間中では、物理測定諸量が Minkowski 空間中とは違っているため、電磁現象を記述する Maxwell 方程式が、そのままでは成立しない。Maxwell 方程式を一般座標変換に対して、共変にするには、微分 ∂_μ を ∇_μ に、 $\eta_{\mu\nu}$ で縮約されていた量を $g_{\mu\nu}$ に、それぞれ置き換えるようにすればよい。(1. 6) 式で表わされる量に対して、Maxwell のベクトルポテンシャル A_μ を

$$A_0 = \phi, \quad E_k = \partial_k A_0 - \partial_0 A_k, \quad H = \text{curl } A_k, \quad (1. 110)$$

で定義すると、(1. 6) 式は

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (1.111)$$

と表わされる。ただし、 $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ で、Lorentz条件

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0, \quad (1.112)$$

を使っている。故に、真空 Riemann 空間中では、(1.111)

(1.112) 式は

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \nabla_{\mu} (\nabla^{\mu} A^{\nu} - \nabla^{\nu} A^{\mu}) = 0, \quad (1.113)$$

$$\nabla_{\mu} A^{\mu} = 0, \quad (1.114)$$

となる。(1.102) 式で示したように、共変微分が可換でないことに注意すると、(1.111) 式は

$$g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} A^{\lambda} + R_{\mu}^{\lambda} A^{\mu} = 0, \quad (1.115)$$

となる。真空中でも電磁場が存在すると、周りに重力場を誘起し、Einstein 方程式 (1.104) に従い、Ricciテンソル $R_{\mu\nu}$ が零でなくなる。しかしその値は (1.115) 式左辺第1項に比べて十分小さいので、通常無視できる。(1.115) 式は重力場 (重力波を含む) と電磁場 (電磁波を含む) との相互作用を表わしている。 $g_{\mu\nu}$ は一種のテンソル誘電率と見なせるので、前節のような非一様媒質中の波動回折の解析が応用できる。しかしスカラー誘電率でないことから、電磁波の偏光面の回転が起こり、取扱いはかなりむづかしくなる。第8章では、電磁波と重力波との相互作用によって、光が重力波により回折される現象を、種々の方法で解析し、多くの近似回折公式を導く。

1.2 本研究の目的と構成

コヒーレント光であるレーザー光を利用して、種々の像形成、映像変換などを行う光情報処理では、Kirchhoff公式が長い間使われて来たが、Luneburgが示した様に、Helmholtz方程式の境界値問題の唯一の解は、Rayleigh回折である。しかしながら、このRayleigh回折公式はユニタリー変換でないため、近軸近似であるFresnel回折公式が、光情報処理では多用されている。これらは、個別にその性質が論議されていた。しかし、その方法はあまり能率的でない。映像形成、再生の応用上、できるだけ統一的に取り扱う方が望ましい。

2つ目の理由は、宮本-Wolfの境界回折理論は、Kirchhoff公式が応用されているため、矛盾している。これを無矛盾の形式に書き換える必要がある。

3つ目の理由は、滑らかな曲った面上に境界値を指定して、そこから放射される波動の回折場の計算方法、つまり境界値問題が未だに開発されていないことである。部分的コヒーレント光、又はインコヒーレント光を利用して、映像形成や像の推定をする際、この問題の解があれば、大変便利である。

4つ目の理由は、Raman-Nath回折は、単色超音波による光回折公式である。彼らが適用した平面波展開法は、多色、又は連続スペクトラムを有する超音波による光回折を導出には、難しすぎる。超音波の情報を光情報に変換する際、この問題を解決して、映像形成や像の推定をしたいのである。

5つ目の理由は、異方性（結晶中）のRaman-Nath回折が全くなされていないことである。普通の等方媒質中で起こるRaman-Nath回折が、結晶中에서도起こるであろうと推定されてはいたが、テンソル誘電率を有する異方性媒質では、取り扱いが大変難しく、未だに近似的にも解かれていなかった。さらに、光の波長と同じ位の変動がある時、光の偏光面が回転する異常Bragg回折が知られていた。これらは、光の波数と超音波のそれとの関係を示したのみで、Maxwell方程式を解いて、求めたものではなかった。やはり取り扱いが大変難しからであった。

6つ目の理由は、曲った空間での光伝播で、静的計量が与えられた時のみ、詳しく解析されてきた。しかしながら、ダイナミックに変動する空間での光の振る舞い、つまり重力波の存在する空間での光回折は、全く解析されたことがなかった。重力波の検出や、重力波通信の実現のためにも、どの程度の回折が起こるのかを確かめる必要がある。

以上6つ理由から、本研究を行った。

1. 3 研究の概要

第2章では、境界平面中の閉曲線上の境界値から、回折場が計算できる境界回折理論について論ずる。境界値が調和的、つまり2次元Laplace方程式を満たす条件の下で、Poissonの公式とRayleigh回折公式とを組み合わせ、新境界回折公式を示す。境界平面中の一般の閉曲線上の境界値の問題では、その境界値が何らかの微分方程式をみたすと仮定して、この問題がDirichlet問題と等価であることを示した上で、Rayleigh回折公式を組み合わせ、形式的な新境界回折公式を示す。さらにLorentz拘束条件がついた電磁波についても、新境界回折公式を示す。又、波動の性質を拡張して、部分的コヒーレント波動のケースについて、新境界回折公式を求める。

第3章では、境界面を滑らかで開いた曲面に拡張した時の境界値問題について考える。2重積分表示のRayleigh回折公式中の1つのパラメーターを別の関数に置き換えるだけで、この問題の解が与えられることを示す。この考えを、

部分的コヒーレント波動のケースに適用して、曲面からの回折場を与え、特に、インコヒーレント波動の場合、一般化されたVanCittert-Zernikeの定理の具体的な表示を与える。

第4章では、Raman-Nath回折の一般化について考える。非一様媒質中に単色平面波が入射した時、Maxwell方程式に位相関数法を適用して、媒質の変動が光のそれよりも十分小さいという仮定の下で、近似的に解き、 n 次の回折光が、超音波の n 重相関で表されることを示す。部分的コヒーレント波動のケースについても解析して、似た様な公式を示す。

第5章では、異方性（結晶）媒質中での光回折を2つのケースについて考察する。単色平面波が結晶中に入射した時、テンソル誘電率を有するMaxwell方程式をまず近似した上で、結晶の変動が光のそれよりも十分小さいという仮定の下で、位相関数法を適用して、近似的に解き、 n 次の回折光が n 次のBessel関数で与えられ、かつ2の n 乗個現れることを示す。超音波の波長が光波のそれと同じ位の時、別の近似方法を適用して、光の偏光面が保存されるBragg回折と、光の偏光面が回転する異常Bragg回折とが混在していること、さらにその回折条件を求める。

第6章では、Maxwell-Einstein方程式を近似的に解くことで、弱い重力波による光回折の1次成分を計算し、光の偏光面が回転する現象が起こることを示す。又、重力波の波長が光のそれよりも十分小さいという仮定の下で、位相関数法を適用して、光回折公式を求め、角度依存性が結晶中のそれと違っていることを示す。

第7章では、本研究でわかったことの総括を行い、これらの公式の利用点、まだ残されている問題や新しい解決法のいくつかをあげる。

第 2 章

境界回折理論の定式化

2. 1 緒言

序論で述べた様に境界回折理論¹⁾では 3 次元空間中の 2 次元境界面上に閉領域があって、その閉曲線上の境界値から回折された波動の複素振幅を計算することにある。宮本-Wolf²⁾が Stokes の公式を使って定式化したように見えた境界回折理論は重大な矛盾を含んでいた。Marchand と Wolf³⁾が修正したかのように見えた理論も又矛盾していた。

本章では、宮本-Wolf 境界回折理論に登場するベクトルポテンシャルなる量が一般には存在しないことを示す。そして別の観点から新しい境界回折公式を導く。観測点から境界面に近づくにつれて、一致するような特別な場合を考えると、2 次元平面上の閉曲線上の値から、内点での値を求める問題に帰着される。任意の関数について閉曲線上の値から内点の値が求まれば、解析学に矛盾してしまうので、境界回折理論に於てはなんらかの拘束条件が必要になる。本研究では、まず境界値が解析的である仮定、つまり 2 次元平面を複素座標化したとき複素数値をもつ境界値が Cauchy-Riemann の関係式⁴⁾を満たすという条件のもとに、Cauchy の積分公式を利用して新境界回折公式を導く。特に、境界の開口が円形の場合には Cauchy の公式よりも Poisson の公式の方が、より解析的な新境界回折公式を導くことを示す。境界値が解析的でない場合でも境界値が 2 次元 Dirichlet 問題⁵⁾の解となっているときには、Dirichlet 問題の Green 関数を使って、形式的な新境界回折公式が導かれることを示す⁶⁾。

以上のスカラー波に対する解析をベクトル波である電磁波に拡張し、Luneberg の回折公式⁷⁾を利用した境界回折公式⁸⁾を示す。電磁波は 3 つの自由度があるように見えるが、Lorentz の拘束条件より 2 つの自由度に減る。従って、2 つの関数が独立に境界値として指定できるのみで、スカラー波の境界回折と比べて少し違った従属ベクトル成分が生ずる。

2. 2 ベクトルポテンシャルの非存在

Kirchhoff の回折公式を使った宮本-Wolf 境界回折理論は、明かに矛盾しているので、Rayleigh 回折公式を使った Marchand と Wolf の理論についてその矛盾点を考える。Helmholtz 方程式の解を

$$U(P) = \int V(P, Q) n dS, \quad (2.1)$$

と置く。ここで n は曲面 S での法線ベクトルであり

$$\begin{aligned} V(P, Q) = & U(Q) \nabla_Q G(P, Q) \\ & - G(P, Q) \nabla_Q U(Q), \end{aligned} \quad (2.2)$$

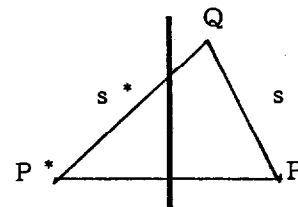


図 2. 1 Rayleigh 回折に於ける鏡像

である。Green関数を2つの部分

$$G_{RI}(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks^*}}{s^*} \right), \quad (2.3a)$$

$$G_{RII}(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{iks}}{s} + \frac{e^{iks^*}}{s^*} \right), \quad (2.3b)$$

に分ける。 s, s^* は図2.1のように点Qから点Pと、その鏡像点P'までの距離をそれぞれ表わす。KirchhoffのGreen関数G は

$$G_K(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{iks}}{s}, \quad (2.4)$$

であるので、Rayleigh回折において Helmholtz方程式の解ベクトルV は

$$V_R(P, Q) = V_K(P, Q) \pm V_K(P, Q), \quad (2.5)$$

となる。複号は(3.3)式のII、Iの場合に対応している。従って、 $\text{div } \mathbf{v}(P, Q) = 0$ ($Q \neq P$) の仮定の下に

$$V_R(P, Q) = \text{Curl } \mathbf{v} W_R(P, Q), \quad (2.6)$$

なる $W_R(P, Q)$ が存在し

$$W_R(P, Q) = W_K(P, Q) \pm W_K(P, Q), \quad (2.7)$$

となる。以上の MarchandとWolf の議論の中でおかしい点は、 $\text{div } \mathbf{v}(P, Q) = 0$ としている点にある。前章で述べたように Rayleigh回折は、ユニタリー変換でないので、一部の入射波動が境界面又はその近傍で反射されている。従って

$$V_R = U(P, Q) - \frac{1}{2\pi} \nabla \mathbf{v} \frac{e^{iks}}{s}, \quad (2.8)$$

と書ける V_R の発散が零となることはない。MarchandとWolfの理論で $\text{div } V_R = 0$ となった理由は、Helmholtz方程式を満たし、かつ境界面上で零となるようなベクトル V_x を勝手につけ加えたからであり、 αV_x (α :定数)を付け加えてもRayleigh回折公式になんら支障がない以上、このような加算は、不定であると言わざるを得ない。もしMarchandとWolf理論が正しく、ベクトルポテンシャルが自己無撞着に存在するならば、我々

は2次元閉曲線上の値から閉曲線内の値がわかってしまい、解析学に矛盾している。なぜなら、Rayleigh回折場では、境界値が正確に再生されるからである。

このようにして、ベクトルポテンシャルなるものは一般には存在しないことがわかったが、平面波とかの比較的簡単で、特別な入射波に対しては、このようなベクトルポテンシャルが近似的に存在している。Wolfが示した近似解は、特別な場合に正しいに過ぎない。

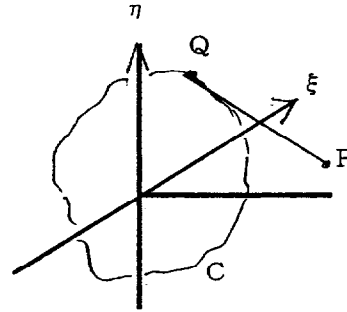


図 2. 2 境界回折の座標系

2. 3 新境界回折公式

新しい境界回折公式を導くために、新しい変数 $\zeta = \xi + i\eta$, $w = x + iy$ を導入し、境界面と観測面ともに複素座標としよう。この考えはすでにコヒーレンス関数の観測から、元の像を再生しようとする理論に採り入れられている^{9, 10)}。ここで境界値 $f(\zeta)$ が、解析的であると仮定しよう。この条件の下に Cauchy の積分定理

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta')}{\zeta - \zeta'} d\zeta', \quad (2. 9)$$

が成り立つ。これを Rayleigh 回折 (1. 39) に代入すると

$$\begin{aligned} g(w; z) &= \iint_D \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta')}{\zeta - \zeta'} d\zeta' \cdot \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} d(\operatorname{Re} \zeta)(\operatorname{Im} \zeta) \\ &= \frac{-1}{(2\pi)} \oint f(\zeta') \left\{ \iint_D \frac{1}{\zeta - \zeta'} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} d(\operatorname{Re} \zeta)(\operatorname{Im} \zeta) \right\} d\zeta' \end{aligned} \quad (2. 10)$$

となり、閉曲線上の値から回折場が計算でき、境界回折の主旨にあっている。さらに新変数 $w = r e^{i\theta}$ 、 $\zeta = \rho e^{i\phi}$ を導入すると、(2. 10) 式は次のように書き直せる。

$$g(r e^{i\theta}; z) = \frac{-1}{(2\pi)} \oint f(\zeta') \left\{ \iint_D \frac{1}{\zeta - \zeta'} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s}, \rho d\rho d\phi d\zeta', \right. \quad (2. 11)$$

ここで $s' = \{|r e^{i\theta} - \rho e^{i\phi}|^2 + z^2\}^{1/2}$ である。境界値 f が解析的であることを確認するためには、 f が Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{Re} f = \frac{\partial}{\partial \eta} \operatorname{Im} f, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \operatorname{Re} f = -\frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{Im} f, \quad (2.12)$$

を満足するか、又はMorareの定理

$$\oint_C f'(\zeta) d\zeta = 0, \quad (2.13)$$

が閉領域D中のすべての閉曲線Cで成立することを示せばよい。普通は f が $\Delta f = 0$ を満たす調和関数である条件で十分である。

2.4 円形開口の新境界回折公式

この節では、前節の特別な場合、すなわち、閉曲線Cが半径aの円である場合を考える。このときにはCauchyの積分公式を利用するよりも、Poissonの公式

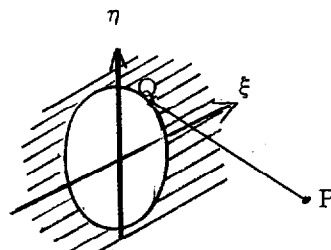


図 2.3 円形開口からの境界回折の座標系

$$f(\rho e^{i\chi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a-\rho)f(ae^{i\alpha})}{a^2 - 2a\rho \cos(\chi-\alpha) - \rho^2} d\alpha, \quad (2.14)$$

を利用する方が適節である。Rayleigh回折公式に(2.14)式を代入すると

$$\begin{aligned} g(\rho e^{i\chi}; z) &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} f(ae^{i\alpha}) \left\{ \int_0^{2\pi} d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\rho(a^2 - \rho^2)}{a^2 - 2a\rho \cos(\chi-\alpha) - \rho^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{i k s}}{s} \right\} d\chi, \quad (2.15) \end{aligned}$$

を得る。これが円形開口での新境界回折公式である。もし境界値 $f(\zeta)$ が連続関数であるときには、別のPoissonの公式

$$\begin{aligned} f(\rho e^{i\chi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(ae^{i\alpha}) \frac{ae^{i\alpha} + \rho e^{i\chi}}{ae^{i\alpha} - \rho e^{i\chi}} d\alpha \\ &\quad + i \operatorname{Im} f(0), \quad (\rho < a) \quad (2.16) \end{aligned}$$

が存在するので、Rayleigh回折公式(1.39)すると

$$g(r e^{i\theta}; z) = \int \frac{-\operatorname{Re} f(a e^{ix})}{(2\pi)^2} \left\{ \int_0^{2\pi} d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{a e^{ix} + \rho e^{i\phi}}{a e^{ix} - \rho e^{i\phi}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} \right\} dx + \frac{-i}{2\pi} \operatorname{Im} f(0) \int_0^{2\pi} d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} \} x, \quad (2.17)$$

を得る。これは境界値 $f(\xi)$ の実部と中心の虚部 $\operatorname{Im} f(0)$ を知れば、回折場が計算できることを示している。真の意味の境界回折公式にはならないが、円周上の値から、大部分の回折場が計算できるので、付け加えて良いであろう。

2.5 新境界回折公式の一般化

前節までは境界値が解析的であると仮定してきたが、必ずしも調和的でない境界値に対しては、境界回折公式がないであろうか。このような疑問に対しては、ある条件があれば、境界回折公式が存在すると答えることができる。この条件とは境界値 $f(\xi, \eta)$ が 2 次元 Dirichlet 問題の解となっていることである。Dirichlet 問題とは、与えられた閉曲線上の値から、ある偏微分方程式を満たす解を与えることであり、境界値問題の主旨にかなった問題である。いま、Dirichlet 問題の Green 関数を G とおくと、解 f は

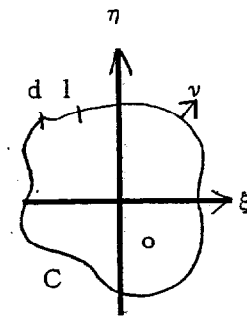


図 2.4
Dirichlet 問題

$$f(\xi, \eta) = \oint_C f(\xi', \eta') \frac{\partial G_D(\xi, \eta; \xi', \eta')}{\partial \nu} dl, \quad (2.18)$$

と表わされる。ここで dl は閉曲線 C に沿った線素、 ν は閉曲線上の 2 次元放線である。この式を Rayleigh 回折式 (1.39) に代入すると

$$g(x, y; z) = \oint_C f(\xi, \eta) \iint_D \frac{\partial}{\partial \nu} G_D(\xi, \eta; x, y) dx dy + \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} \} d\xi d\eta dl, \quad (2.19)$$

を得る。これが一般化された新境界回折の公式である。しかし Green 関数 G の解析的な表現がえられていないため、(2.19) 式は形式的な公式であり、実際の応用が困難である。

今までなされてきた平面上の境界値を曲面上の境界値に拡張したい場合には、2.10 節で示したように、 $\partial/\partial z$ の代わりに $\partial/\partial(z+h)$ 、 s の代わりに $s = [r e^{i\theta} - \rho e^{i\phi}]^2 + \{z+h(\rho e^{i\phi})^2\}^{1/2}$ と置き換えればよい。境界回折公式は、2 次元分布している境界値を 1 次元化できるので、コンピューターで回折場を計算する際に、入力データ数が少なく済ませられる利点を有している。又、回折された波動場を観測して、元の像を再生しようと試みる手法に於て、観測点数を大幅に減らせることから、今後多く利用されよう。

2. 6 電磁波の境界回折公式

前節までのすから一波に対する境界回折公式をベクトル波である電磁波に拡張する。電磁波には Lorentz 条件が存在していて、ベクトルの3成分のうち2成分が独立で、他の成分は従属している。従って、単なるスカラー波の拡張では、境界回折公式は導かれぬ。Maxwell 方程式 (1. 6) においてベクトルポテンシャル A_μ ($\mu=0, 1, 2, 3$) 中 $A=0$ と仮定する。これは静電場が存在しないという条件である。 A は普通の波動方程式 $\Delta A = 0$ と Lorentz 条件 $\Sigma \partial_\mu A_\mu = 0$ との両方を満足せねばならない。単色波の仮定の下に波動方程式は、Helmholtz 方程式に還元せられる。 $z=0$ 平面上に境界値 f を指定したときの回折公式は、Luneberg によって次のように与えられた。

$$A_\mu(x, y; z, t) = e^{i\omega t} \iint f(\xi, \eta) \left\{ \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} \right\} d\xi d\eta, \quad (\mu=1, 2) \quad (2. 20)$$

$$A_3(x, y; z, t) = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} f(\xi, \eta) \right\} \frac{e^{ikz}}{s} d\xi d\eta, \quad (2. 21)$$

A_3 は Lorentz 拘束条件により、 A_1, A_2 によって表わされている。

電磁波に対する新境界回折公式を見つけるために、まず境界値 f_1, f_2 ともに解析的であるとしよう。この条件下で $\zeta = \xi + i\eta, w = x + iy$ とおくと、Cauchy の積分公式より

$$f_\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta')}{\zeta - \zeta'} d\zeta', \quad (\mu=1, 2) \quad (2. 22)$$

が成り立つので、Luneberg 公式に代入すると、次式が得られる。

$$A_\mu(w; z, t) = \frac{i e^{i\omega t}}{(2\pi)} \oint f(\zeta) \left\{ \frac{-1}{\zeta - \zeta} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} \right\} d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta d\zeta, \quad (\mu=1, 2) \quad (2. 23)$$

$$A_3(w; z, t) = -\frac{i e^{i\omega t}}{2\pi} \oint \{ f(\zeta) + i f(\zeta) \} \left\{ \frac{-1}{(\zeta' - \zeta)^2} \frac{e^{ikz}}{s} \right\} d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta d\zeta, \quad (2. 24)$$

ただし $s = \{|w - \zeta|^2 + z^2\}^{1/2}$ である。

特に、境界面上の閉曲線が半径 a の円であるときには、2. 4 節と同じように Poisson の公式 (3. 14) が利用でき、Luneberg 公式に代入すると、

$$A_\mu(w; z, t) = \frac{-e^{i\omega t}}{(2\pi)^2} \int f(a e^{i\chi}) \left\{ \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{2\pi} d\rho \right. \\ \left. \times \frac{\rho(a^2 - \rho^2)}{a^2 - 2a\rho \cos(\chi - \chi') + \rho^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} \right\} d\chi, \quad (\mu=1, 2) \quad (2. 25)$$

$$A_3(w; z, t) = \frac{e^{i\omega t}}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} [f_1(ae^{i\chi}) \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^a d\rho \frac{\partial}{\partial(\rho \cos)} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho \cos(\chi - \chi') + \rho^2} \frac{e^{ikz}}{s} + f_2(ae^{i\chi}) \{ \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^a d\rho \frac{\partial}{\partial(\rho \sin)} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho \cos(\chi - \chi') + \rho^2} \frac{e^{ikz}}{s} \}] d\chi, \quad (2.26)$$

なる境界回折公式が得られる。さらに f_1, f_2 とも連続関数であるときには、別の Poisson の公式 (3.16) が利用でき、次の公式が得られる。

$$A_\mu(w; z, t) = \frac{-e^{i\omega t}}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \text{Re} f_\mu(ae^{i\chi}) \times \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^a d\rho \rho \frac{ae^{i\chi} + \rho e^{i\chi'}}{ae^{i\chi} - \rho e^{i\chi'}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} d\chi' + \frac{i}{(2\pi)^2} \text{Im} f_\mu(0) \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^a d\rho \rho \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s}, \quad (\mu=1,2) \quad (2.27)$$

$$A_3(w; z, t) = \frac{-e^{i\omega t}}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \text{Re} f_1(ae^{i\chi}) \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^a d\rho \rho \times \frac{\partial}{\partial(\rho \cos)} \frac{ae^{i\chi} + \rho e^{i\chi'}}{ae^{i\chi} - \rho e^{i\chi'}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} \} + \text{Re} f_2(ae^{i\chi}) \times \{ \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^a d\rho \rho \frac{\partial}{\partial(\rho \sin)} \frac{ae^{i\chi} + \rho e^{i\chi'}}{ae^{i\chi} - \rho e^{i\chi'}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} \}] d\chi, \quad (2.28)$$

境界値 f_1, f_2 とも非調和関数のときには、上記の公式が適用できないが、 f_1, f_2 が 2 次元 Dirichlet 問題の別の解になっているときには、前節のように境界回折公式が得られる。ここで別の解という意味は、 f_1, f_2 が異なる偏微分方程式を満たし、異なる Green 関数 G, G_2 を持つことを指している。境界値が

$$f_\mu(\xi, \eta) = \oint f_\mu(\xi', \eta') \partial G_\mu(\xi, \eta, \xi', \eta') / \partial \nu d l, \quad (\mu=1,2) \quad (2.29)$$

のように表わされるとき、Luneberg 公式に代入すると、電磁波に対する一般化された境界回折公式

$$A_\mu(x, y; z, t) = e^{i\omega t} \oint f_\mu(\xi, \eta) \iint_D \frac{\partial}{\partial \nu} G(\xi, \eta, \xi', \eta') \frac{-1}{(2\pi)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikz}}{s} d\xi' d\eta', \quad (2.30)$$

$$A_s(x, y; z, t) = \frac{e^{i\omega t}}{(2\pi)^2} \oint [f_1(\xi', \eta') \times \left\{ \iint_D \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} G_1(\xi, \eta, \xi', \eta') \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}}}{s} \right\} d\xi d\eta + f_2(\xi', \eta') \left\{ \iint \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} G_2(\xi, \eta, \xi', \eta') \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}}}{s} d\xi d\eta \right\}] d\mathbf{l}, \quad (2.31)$$

が得られる。

Maxwellの4元ポテンシャルA を用いてきたが、電場Eと磁場Hを得るには

$$E_\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_\mu - \frac{\partial}{\partial x} A_\mu, \quad (2.32)$$

$$H_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} A_\alpha \right), \quad (2.33)$$

なる関係を利用すればよい。

2. 7 部分的コヒーレント波動の境界回折

前節で展開した境界回折理論 を部分的コヒーレント波動回折に適用してみる。部分的コヒーレンス関数の境界値 Γ に対して、座標系 (ξ, η) (ξ, η) で 解析的、つまりCauchy-Riemannの関係式

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \text{Re } \Gamma_s = \frac{\partial}{\partial \eta} \text{Im } \Gamma_s, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \text{Re } \Gamma_s = -\frac{\partial}{\partial \xi} \text{Im } \Gamma_s, \quad (2.34)$$

が成り立つと仮定する。このような仮定は、コヒーレンス関数の観測から、元のイメージを再生しようとするMehtaらの試にすでに見受けられる。複素変数 $(j=1, 2)$ を導入し、Cauchyの積分公式を利用すると

$$\Gamma_s(\zeta_1, \zeta_2; \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_c \oint_c \frac{\Gamma(\zeta'_1, \zeta'_2; \omega)}{(\zeta'_1 - \zeta_1)(\zeta'_2 - \zeta_2)} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (2.35)$$

と表わされる。上式を部分的コヒーレント波動回折公式(1.73)に代入すると

$$\begin{aligned} \Gamma_s(\zeta_1, \zeta_2; z_1, z_2, \omega) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \oint \frac{\Gamma(\zeta'_1, \zeta'_2; \omega)}{(\zeta'_1 - \zeta_1)(\zeta'_2 - \zeta_2)} \\ & \times \left\{ \oint_c \oint_c \frac{\partial^2}{\partial(z_1 + h_1) \partial(z_2 + h_2)} \frac{e^{2\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}}{R_1 R_2} d(\text{Re } \zeta_1) \right. \\ & \left. \times d(\text{Im } \zeta_1) d(\text{Re } \zeta_2) d(\text{Im } \zeta_2) \right\} d\zeta'_1 d\zeta'_2, \quad (2.36) \end{aligned}$$

を得る。波動伝播核に近似化された式 (1. 75) を代入すると、傾斜因子を取り除いた Fresnel 回折式による境界回折公式

$$\begin{aligned} \Gamma_s(\xi_1, \xi_2; z_1, z_2, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \oint_C \oint_{C'} \frac{\Gamma(\xi'_1, \xi'_2; \omega)}{(\xi'_1 - \xi_1)(\xi'_2 - \xi_2)} \\ &\quad \times \left\{ \iint_D \frac{k(z_1 + h_1)(z_2 + h_2)}{R_1^2 R_2^2} d(R e \xi_1) \right. \\ &\quad \left. \times d(Im \xi_1) d(R e \xi_2) d(Im \xi_2) \right\} d\xi'_1 d\xi'_2, \quad (2. 37) \end{aligned}$$

を得る。

特に、境界が平面で閉曲線 C と C' が一致する円の場合には、Poisson の公式 (3. 14) を利用すると

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho_1 e^{i\chi_1}, \rho_2 e^{i\chi_2}; \omega) &= \int_0^{2\pi} d\chi_1 \int_0^{2\pi} d\chi_2 \\ &\quad \times \frac{(a^2 - \rho_1^2)(a^2 - \rho_2^2) \Gamma_s(\rho_1 e^{i\chi_1}, \rho_2 e^{i\chi_2}; \omega)}{(2\pi)^2 \{a^2 - 2a\rho_1 \cos(\chi_1 - \chi_2) - \rho_1^2\} \{a^2 - 2a\rho_2 \cos(\chi_1 - \chi_2) - \rho_2^2\}}, \quad (2. 38) \end{aligned}$$

と表わされるので、(2. 5) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \Gamma(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}; z_1, z_2, \omega) &= \int_0^{2\pi} d\chi_1 \int_0^{2\pi} d\chi_2 \Gamma_s(a e^{i\chi_1}, a e^{i\chi_2}; \omega) \int_0^{2\pi} d\rho_1 \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\rho_2 \frac{\rho_1 \rho_2 (a^2 - \rho_1^2)(a^2 - \rho_2^2)}{(2\pi)^2 \{a^2 - 2a\rho_1 \cos(\chi_1 - \chi_2) - \rho_1^2\} \{a^2 - 2a\rho_2 \cos(\chi_1 - \chi_2) - \rho_2^2\}} \\ &\quad \times \frac{\partial^2}{\partial(z_1 + h_1) \partial(z_2 + h_2)} \frac{e^{2k(R_1 - R_2)}}{R_1 R_2} \quad (2. 39) \end{aligned}$$

を得る。

境界値が解析的でないときには、上述の公式は利用できないが、2次元 Dirichlet 問題の解となっているときには、部分的コヒーレント波動回折に対する形式的な境界回折公式が導ける。 ν_1 を 2次元法線ベクトル、 G_1 を Green 関数とすると

$$\begin{aligned} \Gamma_s(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2; \omega) &= \oint_C \oint_{C'} \frac{\Gamma_s(\xi'_1, \eta'_1, \xi'_2, \eta'_2; \omega)}{\partial} \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \nu_1} G_1(\xi_1, \eta_1, \xi'_1, \eta'_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu_2} G_2^*(\xi_2, \eta_2, \xi'_2, \eta'_2) dl_1 dl_2, \quad (2. 40) \end{aligned}$$

と形式的に表わされる。 dl_1 は閉曲線 C_1 に沿った線素である。(2. 40)

式を (3. 36) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2; z_1, z_2, \omega) &= \oint_C \oint_{C'} \Gamma_s(\xi'_1, \eta'_1, \xi'_2, \eta'_2; \omega) \int_{D_1} \int_{D_2} \frac{\partial}{\partial \nu_1} G_1(\xi_1, \eta_1, \xi'_1, \eta'_1) \\ &\quad \times (2\pi) \frac{\partial}{\partial \nu_2} G_2^*(\xi_2, \eta_2, \xi'_2, \eta'_2) \frac{\partial}{\partial(z_1 + h_1) \partial(z_2 + h_2)} \frac{e^{2k(R_1 - R_2)}}{R_1 R_2} dl_1 dl_2, \quad (2. 41) \end{aligned}$$

を得る。

2. 8 インコヒーレント波動の境界回折

特に、準単色インコヒーレント波動が、 $h=h=h$ で表わされる境界曲面から放射されているときには、もう少し簡単な公式が導かれる。波動強度 I が解析的関数であるときには、Cauchyの積分公式を利用して、(2. 18) 式に代入すると

$$\Gamma(\zeta_1, \zeta_2; z_1, z_2, \tau) = e^{i\omega\tau} \oint_C I(\zeta) \frac{-i}{(2\pi)^3} \left\{ \iint_D \frac{1}{(\zeta' - \zeta)} \right. \\ \times \left. \frac{\partial}{\partial(z_1 + h_1)R_1} \frac{e^{ik_0 R_1}}{\partial(z_2 + h_2)R_2} \frac{\partial}{\partial(z_2 + h_2)R_2} e^{-ik_0 R_2} d(Re \zeta) d(Im \zeta) \right\} d\zeta, \quad (2. 42)$$

を得る。回折開口が半径 a のときには、Poissonの公式(2. 14)を利用して

$$\Gamma(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, z, \tau) \\ = \frac{e^{i\omega\tau}}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} I(a e^{i\chi}) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho \cos(\chi - \phi) - \rho^2} \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial(z_1 + h_1)R_1} \frac{e^{ik_0 R_1}}{\partial(z_2 + h_2)R_2} \frac{\partial}{\partial(z_2 + h_2)R_2} e^{-ik_0 R_2} \rho d\rho d\phi \right\} d\chi, \quad (2. 43)$$

を得る。波動強度 I が非調和関数であるときには、上式が使えないが、Dirichlet問題の解となっているとき、次の形式的なインコヒーレント波動境界回折公式

$$\Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2; z, \tau) \\ = \frac{e^{i\omega\tau}}{(2\pi)^3} \oint_C I(\xi', \eta') \left\{ \iint_D \frac{\partial}{\partial \nu} G(\xi, \eta, \xi', \eta') \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial(z_1 + h_1)R_1} \frac{e^{ik_0 R_1}}{\partial(z_2 + h_2)R_2} \frac{\partial}{\partial(z_2 + h_2)R_2} e^{-ik_0 R_2} d\xi d\eta \right\} d\Gamma, \quad (2. 44)$$

を得る。

以上の部分的コヒーレント波動回折公式、インコヒーレント波動回折公式、部分的コヒーレント波動境界回折公式、インコヒーレント波動境界回折公式は、相関を利用した像再生に応用できると思われる。

2. 9 まとめ

宮本-Wolfの境界回折公式に替えて、新境界回折公式を提案した。境界面上の閉曲線が円形で、境界値が調和的(Laplace方程式を満たす)な場合、Poissonの公式を利用して、解析的な新境界回折公式を導いた。境界値が一般のケースでは、Dirichlet問題の解を利用して、形式的な新境界回折公式を導いた。また、波動が部分的コヒーレントな場合でも、解析的な新境界回折公式や、形式的な新境界回折公式を導いた。これらわ、計算機による、回折場の高速計算に応用でき、コンピュータープログラムの作成、映像形成、評価に役立つ公式である。

第 3 章 曲面からの波動伝播の定式化

3. 1 緒言

Rayleigh回折を一般化して、曲面上に境界値を指定する問題¹⁻⁴⁾は Helmholtz方程式の境界値問題として、知られている。波動回折場は、線形であるから、多くの小開口からの波動回折は、各々の小開口からの重ね合わせで与えられる事実に着目し、この開口和の極限を取る操作を行い、開いた曲面から放射される波動回折場を計算する公式を与える⁵⁾。この際、2重積分表示による回折公式が積極的に利用される。

さらに、この考え方を部分的コヒーレント波動^{6, 7)}に適用して、曲面から放射される部分的コヒーレント波動回折公式を導く⁸⁾。特に境界が平面になっている場合、部分的コヒーレント波動回折公式は2パラメーター半群になっていることを示す。特別な場合として、曲面からインコヒーレント波動^{9, 10)}が放射されているときの波動相関に関する法則、いわゆる一般化された vanCittert-Zernikeの定理を導出する。

3. 2 曲面からの波動伝播

前章までは、境界面が平面である場合について、Helmholtz の境界値問題の解である Rayleigh 回折を一般化した回折変換について考えてきた。フィルムのような平面物体から回折される光については、上記の解析が適用できるが、ホログフィーに使われる3次元物体の表面から反射した光の回折、又は伝播の解析には適用できない。つまり境界値問題をもう少し拡張して、曲面上に境界値を指定した場合の解析的解を見出す必要にせまられる。本節では、Rayleigh回折のスペクトラム表示法を利用して、この問題の解を与えよう。さらに逆回折問題についても考察する。

パラメーター関数 ϕ を適当にとることによって Rayleigh回折や近軸近似 Fresnel回折、その他の物理現象を表わす積分式が与えられるので、 ϕ をそのまま使うことにしよう。今、境界平面上の点 (p, q) に小開口をあけて、そこから光が回折されてくるとする。つまり、境界値 $f(\xi, \eta)$ は

$$f(\xi, \eta) = \begin{cases} A e^{i\delta} / 4\epsilon, & (p - \epsilon \leq \xi \leq p + \epsilon, q - \epsilon \leq \eta \leq q + \epsilon) \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (3.1)$$

で表わされたとする。A は実定数、 δ は波動の位相、 ϵ は小開口の大きさの半分である。回折された光の複素振幅 $g(x, y; z)$ は Rayleigh回折式

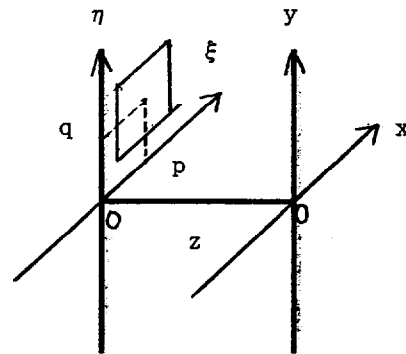


図 3. 1 小開口からの光回折

から計算される。スペクトラム表示法を利用すれば、解は次のように表わされる。

$$G(u, v; z) = F(u, v) \exp \{ i z \phi(u, v) \}, \quad (3.2)$$

ここで

$$\phi(u, v) = \begin{cases} k^2 - u^2 - v^2, & k^2 > u^2 - v^2 \text{ の時} \\ u^2 + v^2 - k^2, & k^2 \leq u^2 - v^2 \text{ の時} \end{cases} \quad (3.3)$$

である。さらに

$$F(u, v) = A e^{i\delta} \frac{\sin(\varepsilon u)}{\varepsilon u} \frac{\sin(\varepsilon v)}{\varepsilon v} e^{i(pu + qv)}, \quad (3.4)$$

であるから、(3.2)式は簡単な式となる。ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ なる極限をとると

$$G(u, v; z) = \lim F(u, v) \exp \{ i z \phi(u, v) \} \\ = A \exp \{ -i(pu + qv - \delta) + z \phi(u, v) \}, \quad (3.5)$$

となる。(2.138)は、点光源からの回折場を表わしている。離散的な点集合の場合、 A 、 δ は必ずしも一定でなく、点の位置 (p_i, q_i) に依存していて

$$F(u, v) = \sum A_i \exp \{ -i(p_i u + q_i v - \delta_i) \}, \quad (3.6)$$

となるので、回折場は次のように表わされる。

$$G(u, v; z) = \sum A_i \exp \{ -i(p_i u + q_i v - \delta_i) + z \phi(u, v) \}, \quad (3.7)$$

以上の考察より、点 (p, q) の近傍点からの回折場は

$$\delta G(u, v; z) = \sum A \exp [i \{ (p(n_x - u) + q(n_y - v) + \delta) \\ + h(p, q) \phi(u, v) \}] dS, \quad (3.8)$$

となる。ここで n_x 、 n_y はそれぞれ、点 (p, q) 上の曲面の法線の x 、 y 方向への射影成分であり、 h は曲面の形状を表わす一価正則関数とする。次の関係式

$$dS = \{ 1 + (\partial h / \partial p)^2 \\ + (\partial h / \partial q)^2 \}^{1/2} dp dq, \quad (3.9)$$

を(3.8)式に代入し

$$C(p, q) = A(p, q) \{ 1 + (\partial h / \partial p)^2 + (\partial h / \partial q)^2 \} \\ \exp i \{ p n_x(p, q) + q n_y(p, q) + \delta(p, q) \}, \quad (3.10)$$

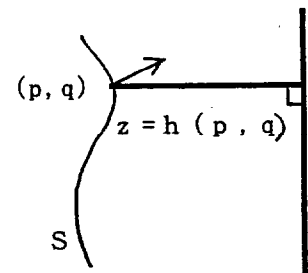


図 3. 2 曲面からの光回折

とおくと

$$\delta G(u, v; z) = C(p, q) \exp \{-i(pu + qv - h(p, q)\phi(u, v)\}] dp dq, \quad (3.11)$$

を得る。曲面が一価正則であることから、(3.11)式を p, q について積分すると

$$G(u, v; z) = \int \int C(p, q) \exp \{-i(pu + qv + (z - h(p, q))\phi(u, v)\}] dp dq, \quad (3.12)$$

なる回折式を得る。Helmholtz方程式の x, y についての Fourier 変換式

$$(-u^2 - v^2 + \partial^2 / \partial z^2 + k^2) \hat{\phi}(u, v; z) = 0, \quad (3.13)$$

を考える時、 ϕ を (3.3) 式のようにとると、(3.12) 式は明かに (3.13) 式を満たしている。 $z = -h(p, q)$ と採れば、境界値を再生することがわかる。従って、Rayleigh 回折場の拡張された解析的式が得られたことになる。 ϕ を適当に採ることにより、Fresnel 回折場やその他の物理現象を表わす式の拡張になっていることがわかる。(3.12) 式実空間での表現は、 u, v について Fourier 逆変換することにより次のように表わされる。

$$g(x, y; z) = \int \int dp dq C(p, q) (2\pi)^{-2} \int \int_{-\infty}^{\infty} du dv \exp [i\{(x-p)u + (y-q)v + (z+h(p, q))\phi(u, v)\}] dp dq, \quad (3.14)$$

これが一価正則関数 $h(p, q)$ で表わされる境界曲面上に境界値 $C(p, q)$ を指定した時の解であり、回折変換式の拡張になっている。

もし境界曲面が正則でない時は、各素面に分割してから (3.14) 式を適用する手続きが必要である。境界曲面が閉じている場合には、上記のような形で回折公式を導けないので、別の方法が必要となろう。

逆回折問題は、平面上で観測された波動の複素振幅から、曲面上の点への元の複素振幅を求める問題である。逆 Rayleigh 変換より、平面から平面への振幅変換は容易に求められるが、(3.14) 式で与えられる変換の逆変換は容易に求まらない。なぜなら (4.14) 式は畳み込み型変換でない上、対称変換等によく知られた型になっていないからである。この曲面上の境界値から観測平面上の値への変換は、一種の線型変換 L で表わされるから、逆変換の存在は関数ノルムが有界であることを示すことにより証明される。Schwarz の不等式

$$|\int f(x) g^*(x) dx|^2 < \int |f(x)|^2 dx \cdot \int |g(x)|^2 dx, \quad (3.15)$$

を先の線型変換式 (2.9) に適用すると

$$|G(u, v)|^2 < \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq |C(p, q)|^2 \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp[-i\{pu + qv + h(p, q)\phi(u, v)\}] \right\}^2$$

が導かれる。Gのノルムに関して

$$\begin{aligned} \|G\|^2 &< \|C(p, q)\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp[-i\{pu + qv + h(p, q)\phi(u, v)\}] \\ &= \|C(p, q)\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq [\pi k^2 + \iint_R du dv] \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp[-i h(p, q)\sqrt{u^2 + v^2 - k^2}] \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。ここでRは領域 $u^2 + v^2 > k^2$ を表す。従って

$$\|G\|^2 < \|C(p, q)\|^2 \iint dp dq \pi \{2k^2 + h(p, q)^{-2}\}^{1/2}, \quad (3.16)$$

となり、有界であることが言える。故に、逆変換は存在するが、今の所解析的に表すことができない。

3.3 曲面からの部分的コヒーレント波動伝播

スカラー波動を $V(r, t)$ とするとき、相互コヒーレンス関数 Γ は

$$\Gamma(r_1, r_2; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V(r_1, t + \tau) V^*(r_2, t) dt \quad (3.17)$$

で定義される。 V^* は V の複素共役を表す。 V が波動方程式を満たすことから、 Γ も同じ波動方程式を満たしている。ただし、時間 t に関する微分は、時間差 τ に関する微分に置きかわっていて、次のようになる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Gamma(r_1, r_2; \tau) = 0, \quad (3.18)$$

で表わされる。序論で述べたように (3.18) 式の積分式を導くには、 τ に関する Γ の Fourier 変換

$$\tilde{\Gamma}(r_1, r_2; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(r_1, r_2; \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3.19)$$

を導入し、(3.18) 式を Helmholtz 方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \tilde{\Gamma}(r_1, r_2; \omega) = 0, \quad (3.20)$$

に還元し、曲面上に境界値 Γ_s を指定する必要がある。図 4. 1 に示すように相関関数では、座標系が r_1 と r_2 の 2 つあって、独立に境界曲面が採用できる。直交座標系で境界曲面を $-h_1(z_1)$ 、 $-h_2(z_2)$ とするとき、第 2 節で示した曲面からのコヒーレント波動回折公式 (3. 13) を利用すると、Helmholtz 方程式 (3. 20) の解が次のように与えられる。

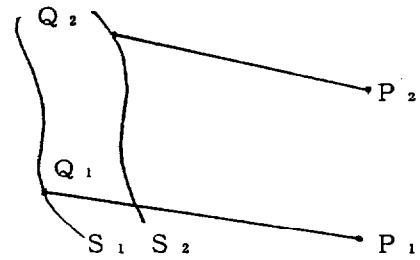


図 3. 3 曲面からの部分的コヒーレント波動の回折

$$\Gamma(x_1, z_1, x_2, z_2; \omega) = \iint dp_1 dq_1 \iint dp_2 dq_2 \times \Gamma(p_1, q_1, p_2, q_2; \omega) (2\pi)^2 \frac{\partial^2}{\partial(z_1+h_1)\partial(z_2+h_2)} \frac{e^{ik(R_1-R_2)}}{R_1 R_2}, \quad (3. 21)$$

ここで $R_i = [(x_i - p_i)^2 + (y_i - q_i)^2 + \{z_i + h(z_i)\}^2]^{1/2}$ である。伝播核を次のように近似しよう。

$$\frac{\partial}{\partial(z+h)} \frac{e^{ikR}}{R} \sim \frac{ik(z+h)}{R^2} e^{ikR}, \quad (3. 22)$$

これは部分的コヒーレント波動の波数 k よりも、波動伝播距離 $z+h$ が十分大きい仮定の下に、良い近似になっている。(3. 6) 式を (3. 6) 式中の伝播関数に替えて代入すると

$$\Gamma(x_1, z_1, x_2, z_2; \omega) = \iint dp_1 dq_1 \iint dp_2 dq_2 \times \Gamma(p_1, q_1, p_2, q_2; \omega) \frac{k^2(z_1+h)(z_2+h)}{(2\pi)^2 R_1 R_2} e^{ik(R_1-R_2)}. \quad (3. 23)$$

を得る。この式は傾斜因子を取り除いた Fresnel 回折式を、部分的コヒーレント波動回折に適用したとき得られる式と一致する。コヒーレンス関数 Γ を得るには、(4. 21) 式 又は (4. 23) 式の Fourier 逆変換を採ればよい。

特に、境界が平面であるときには、 $h_1=h_2=0$ と置くことにより、部分的コヒーレント波動の回折式が導かれる。今、回折を一種の線型演算と考え

$$\Gamma = T(z_1, z_2) \Gamma_s, \quad (3. 24)$$

と置くと、Rayleigh 回折場が 1 パラメーター半群を形成していると同様に、演算子 $T(z, z)$ は 2 パラメーター半群

$$T(0, 0) \Gamma = \Gamma, \quad (3. 25 a)$$

$$T(z_1, z_2) T(z'_1, z'_2) \Gamma = T(z_1+z'_1, z_2+z'_2) \Gamma_s, \quad (z_1, z_2, z'_1, z'_2 \geq 0) \quad (3. 25 b)$$

$$||T(z_1, z_2) \Gamma|| < ||\Gamma_s|| \quad (3. 25 c)$$

を形成していることがわかる。ただしコヒーレンス関数のノルムは

$$||\tilde{\Gamma}_s|| = \int \int d x_1 d y_1 \int \int d x_2 d y_2 \int_x |\Gamma_s(x_1, y_1, x_2, y_2; z_1, z_2, \omega)|^2 \}^{1/2}, \quad (3.26)$$

で定義するものとする。(3.25)式から部分的コヒーレント波動回折式は、境界値 Γ を再生し、 z 方向に一様に伝播し、かつ波動エネルギーは発散せず一定値以下になっている諸性質が容易にわかる。(3.25)式の証明は、線型演算子 $T(z_1, z_2)$ の空間座標についてのFourier変換

$$\mathcal{F}[\Gamma] = \int \int d x_1 d y_1 \int \int d x_2 d y_2 \Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2; z_1, z_2, \tau) \exp[-i(x_1 u_1 + y_1 v_1 - x_2 u_2 - y_2 v_2)], \quad (3.27)$$

を利用すると

$$\mathcal{F}[T(z_1, z_2) \tilde{\Gamma}_s] = \mathcal{F}[\tilde{\Gamma}_s] \exp[i\{z\phi(u, u) - z\phi(u, u)\}], \quad (3.28)$$

なる関係式が得られることから、直接達成される。

3.4 一般化されたVanCittert-Zernikeの定理

vanCittertとZernikeは境界平面上の2点間で全く相関のない準単色インコヒーレント波動が放射されていても、観測面では部分的コヒーレント状態になる解析的式を示した。ただし、部分的コヒーレント波動が観測される領域は

$$|R_1 - R_2| \ll v(\Delta v)^{-1}, \quad (3.29)$$

なる範囲に限られる。 $R_j (j=1,2)$ は、放射点 Q から観測点までの距離、 v は波動速度、 Δv は準単色波のスペクトル幅である。このような拘束条件は、時間間隔 Δt と周波数幅 Δv との不確定性関係

$$\Delta t \cdot \Delta v > 1/2, \quad (3.30)$$

より導かれる。逆に言うと、 $\Delta t < (2\Delta v)^{-1}$ の極短い時間内では、干渉が起こり、波動の相関が存在しているのである。準単色波の中間角周波数を ω とすると、(3.3)式からスペクトラム密度の近似式

$$\rho(\omega) \sim \delta(\omega - \omega_0), \quad (3.31)$$

を代入すると

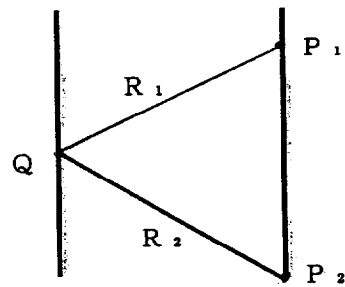


図3.4 コヒーレント波動伝播

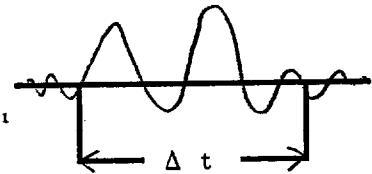


図3.5 インコヒーレント波の波形

$$\Gamma(r_1, r_2; \tau) \sim \Gamma(r_1, r_2; 0) e^{i\omega_0 \tau}, \quad (3.32)$$

を得る。インコヒーレントの条件は、近似式

$$\Gamma(x_1, x_2; \tau) \sim \delta(x_1, x_2) x I(x_1), \quad (3.33)$$

で表わされるので、(4.5)式に代入すると

$$\Gamma(x_1, x_2; z, \tau) = e^{i\omega_0 \tau} \int I(p, q) (2\pi)^{-2} \frac{\partial}{\partial(z_1+h)} \frac{e^{ikR_1}}{R'_1} \frac{\partial}{\partial(z_2+h)} \frac{e^{-ikR_2}}{R'_2} dp dq, \quad (3.34)$$

を得る。ただし $R'_1 = [(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 + \{z_1 + h(z_1)\}^2]^{1/2}$ であり、 I はインコヒーレント波動強度である。(3.34)式が曲面からインコヒーレント波が放射されている場合 vanCittert-Zernike の定理に対する解析的表示である。不確定性の範囲内で部分的コヒーレント波の観測ができる領域が決まるので

$$|R'_1 - R'_2| \ll \lambda (\Delta \nu)^{-1} \quad (3.35)$$

なる拘束条件がかせられることになる。 $h=0$ のときは明かに vanCittert-Zernike 定理に一致している。もし波動伝播距離 R が、平均波長 λ よりも、かなり大きい場合には (4.6) 式のような近似が成り立つので、

$$\Gamma(x_1, x_2; z, \tau) = e^{i\omega_0 \tau} \int I(p, q) \frac{k_0^2 (z+h)^2 e^{ik_0(R_1-R_2)}}{(2\pi)^2 R'_1 R'_2} dp dq, \quad (3.36)$$

なる近似式が導かれる。この式は、傾斜因子を取り除いた Fresnel 回折式を準単色インコヒーレント波動回折式に適用したもの的一致している。

3.5 まとめ

滑らかで開いた曲面上に境界値を指定した時の、Helmholtz 方程式の境界値問題の解を、回折変換の 2 重積分表示中の 1 パラメーターを修正することにより与えた。波動の性質を部分的コヒーレントに変えた場合にも、曲面上に境界値を指定した時の波動伝播の様子を記述する公式を得た。特にインコヒーレント波動が、曲面から放射されている時、一般化された vanCittert-Zernike の定理を示した。これらの公式は、映像再生、形成、像の推定などの、光情報処理に役にたつものと思われる。

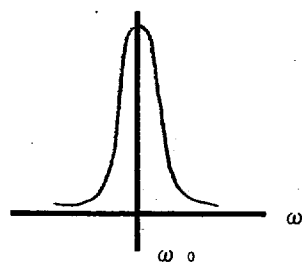


図 3.6 準単色波のスペクトラム

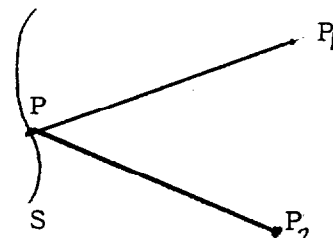


図 3.7 曲面からのインコヒーレント波の放射

第 4 章 R a m a n - N a t h 回折の一般化

4. 1 緒言

本章では、誘電率が時間的空間的に変動する等方媒質中を伝播する電磁波¹⁻³⁾について、Tatarski⁴⁾ が示した位相関数法を用いて研究する。電磁波の変動に比べて誘電率の変動が滑らかで小さいという仮定の下に、単色平面入射波に対する媒質中の波動方程式の近似解を与える。特に、誘電率変動が単色平面超音波によって引き起こされる時、近似解が Raman-Nath 回折公式⁵⁾ に一致することを Bessel 関数の母関数の性質を使って示す。得られた近似回折公式⁶⁾ を利用すると、離散的スペクトルを持つ多色平面超音波による光回折の 0、+1、+2 次回折振幅が容易に示される。さらに Raman-Nath 回折公式の適用範囲が新しく示される。

次に非一様媒質中の境界値問題の近似解が位相関数法と Rayleigh 回折のスペクトラム表示を用いて与えられる。さらに時間的変動のない非一様媒質中の部分的コヒーレント波動回折に対する近似公式を、同じ様な手法で明かにする。特に、境界面からインコヒーレント波が空間的変動のみを有する非一様媒質中に放射されている時、van Cittert-Zernike 定理の近似表現式を与える。

4. 2 非一様媒質中の Maxwell 方程式

第 1 章第 1. 1. 6 節で示した様に、誘電率 ϵ の媒質中の波動方程式は

$$\nabla^2 E + \nabla (E \nabla \ln \epsilon) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon E), \quad (4. 1)$$

で表わされる。 E は光又は電磁波の電界ベクトルである。多くの媒質では、音波速度が光速より十分小さいので（その比は 10^{-4} から 10^{-8} 程度）、電磁波の波数 k が媒質の変動波数の上限よりも十分大きいという仮定の下に (4. 1) 式の左辺第 2 項は無視でき、かつ右辺の展開式中の $c^{-2} \partial^2 \epsilon / \partial t^2 \cdot E$, $c^{-2} \partial \epsilon / \partial t \cdot \partial E / \partial t$ も無視できる。従って、(5. 1) 式は近似的に

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E, \quad (4. 2)$$

さらに入射電磁波が単色平面波が

$$E = a \exp \{ i (k_x \sin \theta \cos \phi + k_y \sin \theta \sin \phi + k_z \cos \theta - \omega t) \}, \quad (4. 3)$$

とする。 a は定ベクトルである。誘電率 ϵ を定数 ϵ_0 と変動分 $\epsilon_1(r, t)$ に分離し

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \{ 1 + \varepsilon_1(r, t) \}, \quad (4.4)$$

としよう。 χ 、 S なる実関数を導入し、媒質中の電磁波が

$$E = a \exp \{ \chi + i k \cdot r + S - \omega t \}, \quad (4.5)$$

であると仮定して、波動方程式 (4.2) に代入し、 $|\nabla S| \ll k$ の条件下で近似すると

$$2k \cdot \nabla S = k \varepsilon_1(r, t), \quad (4.6a)$$

$$\nabla S + 2k \cdot \nabla \chi = 0, \quad (4.6b)$$

を得る。入射電磁波の波数ベクトルは

$$k = (k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi, k \cos \theta) \quad (4.7)$$

であるから、(4.6) 式は解きづらい形になっている。そこで $k' = (0, 0, k)$ つまり新しい座標系で z 方向に電磁波が進行するように座標回転

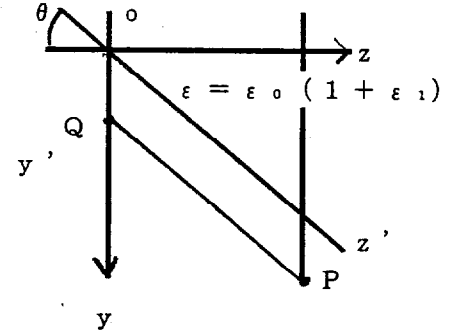


図 4. 1 非一様媒質中の平面電磁波の伝播

$$r' = L r, \quad (4.8)$$

を行うと、(4.6) 式は次の様になる。

$$\partial S / \partial z' = 1/2 k \varepsilon_1, \quad (4.9a)$$

$$\partial \chi / \partial z' = -\Delta S / 2 k, \quad (4.9b)$$

これらの方程式は簡単に解けて、次の様な解が得られる。

$$S = 1/2 k \int_0^P \varepsilon_1(r'', t) dz'', \quad (4.10a)$$

$$\chi = 1/2 \int_0^P dz \int_0^z dz' \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \varepsilon_1(r', t), \quad (4.10b)$$

4. 3 超音波による光回折

(4.10a) 式は平面波の媒質伝播中の位相変化を求めるには、直線上に変動誘電率 ε を積分すればよいことを示している。

(4.10b) 式は入射電磁波の波数 k が入っていないため、一般に S よりも小さいが、特別な場合には S と同じくらいになるために考慮されているものであり、変動誘電率の 2 次変動について経路積分する

ことにより求められる。 χ は ε_1 が準単色波で記述され、その波数 k_x 、 k_y 、 k_z について $k_x \sim k_y \sim k_z$ の時には、およそ ε_1 の実振幅 α 程度の大きさで、 S の大きさ $\alpha k/k$ に比べて無視できる。

座標系を元に戻すと、(4.10)式は次の様に表わされる。

$$S = (k/2\cos\theta) \int_0^z \varepsilon_1(x - (z-z')\tan\theta \cos\theta, y - (z-z')\tan\theta \sin\theta, z', t) dz', \quad (4.11a)$$

$$\chi = -\frac{1}{2\cos^2\theta} \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varepsilon_1(x - (z-z')\tan\theta \cos\theta, y - (z-z')\tan\theta \sin\theta, z', t), \quad (4.11b)$$

波面の進行方向は、 $\mathbf{k} + \nabla S$ であるから媒質中では一定でなく、ふらふらしながら観測点に到着することになる。

次に誘電率変動が単色超音波によって引き起こされる特別な場合を考えてみよう。

$$\varepsilon_1(r, t) = \alpha \cos(Ky - \Omega t), \quad (4.12)$$

で表わされ、入射光は $z=0$ 境界平面に角度 $\theta = \pi/2$ で入るとする。このとき S と χ はそれぞれ

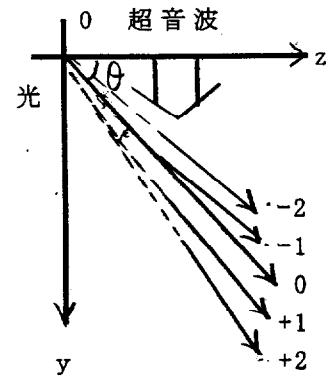


図4.2 超音波による光回折

$$\begin{aligned} S &= (\alpha k/2\cos\theta) \int_0^z \cos(Ky + K(z-z')\tan\theta - \Omega t) dz' \\ &= (\alpha k/2K\sin\theta) \{ \sin(Ky\cos\theta - \Omega t) - \sin(ky + Kz\tan\theta - \Omega t) \} \\ &= (\alpha k/K\sin\theta) \cos(ky + 1/2Kz\tan\theta - \Omega t) \sin(1/2Kz\tan\theta), \end{aligned} \quad (4.13a)$$

$$\begin{aligned} \chi &= (\alpha K/2\cos\theta) \int_0^z \int_0^{z'} \cos(Ky + K(z-z'')\tan\theta - \Omega t) dz'' dz' \\ &= (\alpha/2\sin\theta) \{ \cos(Ky + 1/2Kz\tan\theta - \Omega t) - \cos(Ky - \Omega t) \} - (\alpha Kz/2\cos\theta \sin\theta) \\ &\quad \times \sin(Ky + \Omega t) \\ &= (\alpha/2\sin\theta) \sin(Ky + 1/2Kz\tan\theta - \Omega t) \sin(1/2Kz\tan\theta) \\ &\quad - (\alpha Kz/2\cos\theta \sin\theta) \sin(Ky - \Omega t), \end{aligned} \quad (4.13b)$$

で表わされる。正確には、 χ が考慮されなければならないが、 $z \ll \sin\theta/|\alpha|k$ 、 $|\alpha| \ll 1$ の条件の下で S だけを取入れ、(4.13a)式を(4.5)式に代入した後、Bessel関数の母関数の性質⁷⁾

$$e^{ip \cos\theta} = \sum_n e^{in\pi/2} J_n(p) e^{in\theta}, \quad (4.14)$$

を利用すると、次のような近似解がえられる。

$$E = a \sum e^{i n \pi / 2} J_n(w) \exp [i \{ (k \sin \theta + n K) y + (k \cos \theta + (n K / 2) \tan \theta) z - (\omega + n \Omega) t \}], \quad (4.15)$$

ここで

$$w = \frac{\alpha k}{K \sin \theta} \sin(1/2 K z \tan \theta), \quad (4.16)$$

である。角度依存性について Klein と Cook⁸⁾ が解析したものと少々違っている。なぜなら Klein-Cook の論文では $w = (\alpha k / K \sin \theta) \sin(1/2 K z \sin \theta)$ となっているからである。しかしながら $\sin \theta \sim \tan \theta$ となる $\theta \ll 1$ の角度では、ほぼ一致することが容易にわかる。(4.16) 式の w は、もし $|1/2 K z \tan \theta| \ll 1$

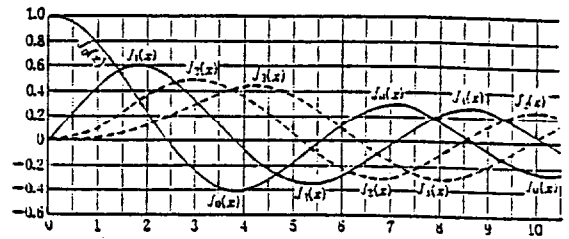


図 4.3 超音波による
光回折の振幅

の条件を課すと、 $1/2 \alpha k \sec \theta$ になり、平面は展開法によって最初 Raman-Nath が求めた近似回折公式と完全に一致する。故に、 n 次回折光強度は J_n で与えられることがわかる。 $\theta \rightarrow 0$ のときには (4.13b) 式が発散する様に見えるが、正確に計算すると

$$x \rightarrow 0 = 1/2 \alpha z \cos(Ky - \Omega t), \quad (4.17)$$

となり、 $z \ll (K \alpha / 2)^{-1}$ の範囲ならば、ほぼ無視できる。従って、近似解 (4.15) は、 $z \ll \sin \theta / (\alpha K)$ ($|\sin \theta| > \alpha / 2$ のとき) 又は $z \ll 1 / (K \alpha / 2)$ ($|\sin \theta| < \alpha / 2$ のとき) の領域で正しいことがわかる。

ここで求めた位相関数法による近似解を適用すると、平面波展開法によって求めることがむづかしかった離散的スペクトルを有する、超音波による光回折の高次回折振幅が、容易に得られる。今、超音波が

$$\varepsilon_1(r, t) = \sum \alpha_m \cos(K_m y - \Omega_m t + \delta_m), \quad (4.18)$$

で表わされるときには、重ね合わせの原理より

$$S = \sum (\alpha_m k / K_m \sin \theta) \cos(K_m y + 1/2 K_m z \tan \theta - \Omega_m t + \delta_m) \times \sin(1/2 K_m z \tan \theta), \quad (4.19)$$

が導かれる。 $x \rightarrow 0$ として (4.15) 式に代入すると、媒質中の光の電界 E は

$$E = a \prod \sum e^{i n \pi / 2} J_n(w_m) \exp [i \{ (k \sin \theta + n K_m) y + (k \cos \theta + 1/2 n K_m \tan \theta) z - (\omega + n \Omega_m) t + n \delta_m \}], \quad (4.20)$$

で表わされる。ただし

$$w_m = \frac{\alpha_m k}{K_m \sin \theta} \sin(1/2 K z \tan \theta), \quad (4.21)$$

である。これより 0, +1, +2 次回折光の電界 $E_{(0)}$, $E_{(\pm 1)}$, $E_{(\pm 2)}$ は以下の様に表わされる。

$$E_{(0)} = a \prod_{m=1}^M J_0(w_m) \exp[i\{k(y \sin \theta + z \cos \theta) - \omega t\}], \quad (4.22a)$$

$$E_{(\pm 1)} = i E_{(0)} \sum_{m=1}^M J_1(w_m) J_0(w_m)^{-1} \exp[i\{(K_m y - 1/2 K_m z \tan \theta - \Omega_m t + \delta_m)\}], \quad (4.22b)$$

$$E_{(\pm 2)} = E_{(0)} \sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^M J_1(w_l) J_1(w_m) J_0(w_l)^{-1} J_0(w_m)^{-1} \right. \\ \left. + J_0(w_m) J_0(w_m)^{-1} \right] \exp[i\{(K_m y - 1/2 K_m z \tan \theta - \Omega_m t + \delta_m)\}], \quad (4.22c)$$

1 次回折光は w が小さければ、ほぼ超音波の振幅に比例した回折光振幅を有している。ところが 2 次回折光では、超音波スペクトルの相関がでてきて、式が複雑になる。高次回折では、高次相関がでてきて、さらに複雑な式になる。

超音波が連続スペクトル $\rho(K)$ を有して $|w| \ll 1$ のとき、近似式

$$J_0(w) = 1 - w^2/8, \quad J_1(w) = w/4, \quad (4.23)$$

より、 ± 1 次回折式は近似的に

$$E_{(\pm 1)} \sim a k \int_D \frac{\sin(1/2 K z \tan \theta)}{K \sin \theta} \rho(k') \exp[i(K y - 1/2 K z \tan \theta - \Omega t + \delta)] dk', \quad (4.24)$$

で表わされる。積分領域 D は、超音波の存在し、かつ上述の波数についての近似が成り立つ範囲である。

入射電磁波が平面波でなく、一般の単色の場合には、 $z=0$ に境界値 $f(x, y)$ を指定して波動方程式 (4.1) を解かねばならない。この非一様媒質中の境界値問題^{10, 11)}は、一見難問のように見えるが、誘電率変動が小さく、かつ滑らかであるという条件下に、Rayleigh 回折のスペクトラム表示¹²⁻¹⁴⁾と、前節の位相関数法を利用して近似的に解くことができる。境界値 f の空間周波数分解

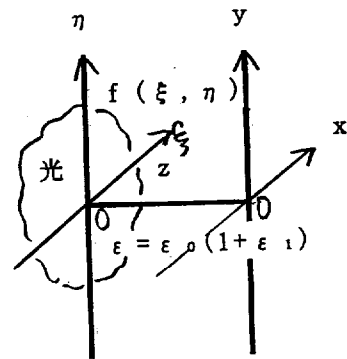


図 4.4 非一様媒質中の波動伝播の座標系

$$f(u, v) = \int \int f(\xi, \eta) e^{-i(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta, \quad (4.25)$$

より、角度 $(\theta, \quad)$ で入射する電磁波の成分が分かる。ここで

$$u = k \sin \theta \cos \quad, \quad v = k \sin \theta \sin \quad, \quad (4.26)$$

の関係式がある。入射電磁波の境界面 $z=0$ にほぼ平行に伝播する成分が他の成分に比べて十分小さいとすれば、(4.11b) 式で与えられる x は無視でき、考慮されるべきは、(4.11a) 式の S だけである。(4.26) 式より

$$\cos \theta = k^2 - u^2 - v^2 / k, \quad (4.27)$$

であるので、境界値問題の近似解は、以下のように表わされる。

$$E \sim e^{i\omega t} \int \int d\xi d\eta f(\xi, \eta) (2\pi)^{-2} \int \int du dv \\ \exp [i \{ (x - \xi)u + (y - \eta)v + z \phi(u+v) \\ - (k^2 / \phi(u+v)) \int_0^z \varepsilon_1(Lr', t) dz' \}], \quad (4.28)$$

ここで $\varepsilon_1(Lr, t)$ は経路積分させるように変数変換したもので

$$\varepsilon_1(Lr', t) = \varepsilon(x - (z - z')\phi(u+v)u / (u^2 + v^2), \\ y - (z - z')\phi(u+v)v / (u^2 + v^2), z, t), \quad (4.29)$$

である。近似解は、空間周波数が k を越える波については適用できないが、観測点の距離 z が波長 λ よりも十分大きければ、高周波成分は消失してしまい、実際の回折光は(4.28)式に近くなると思われる。

レーザー光のような単色ガウス型ビームを誘電率変動媒質中に入射させると、等位相波面がゆがみ、進行方向又はビームの向きが場所によって変化することがわかる。正確に議論するには(4.28)式の積分を実行しなければならないが、誘電率の一般性と、関数の複雑性によりかなり困難である。もし空間的にのみ変動する媒質中を伝わるコヒーレント波動によってホログラムを作製すれば、誘電率変化の積分が記録される。従って、歪又は変形によるわずかな光路差の違いも二重露光ホログラフィー手法で検出できる。このことは、すでに実証済であるので、今さら言うまでもないことである。超音波場を視覚化してみようとする試みに対しても応用が期待できるが、誘電率の積分をいかに簡単に分解して、任意点の誘電率を求める問題が残されている。

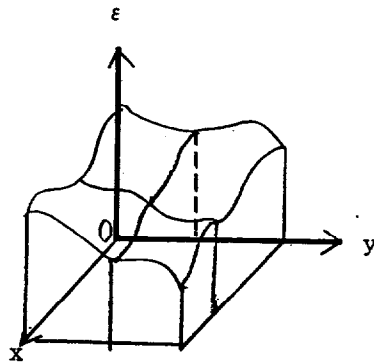


図 4. 5 誘電率の空間的变化

4. 4 非一様媒質中の部分的コヒーレント光伝播の解析

第1章で示したように部分的コヒーレント光¹⁵⁾の解析には、2点間の相関が使われている。コヒーレンス関数 $\Gamma(r_1, r_2; \tau)$ は、時間的変動のある誘電体中ではうまく定義できない。なぜなら媒質中で波動は

$$\Delta V(r, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon(r, t) V(r, t)), \quad (4.30)$$

を満たし、相関関数の定義より右辺の時間平均が時間に依存したような形になってしまうからである。もし、 ϵ の変動と V のその時間平均が独立に採ればよいが、そのようにできる条件はかなり複雑である。そこで、ここでは誘電率 ϵ に空間的変動のみがあると仮定しよう。この時コヒーレンス関数 Γ に対する波動方程式は、次のように表わされる。

$$\Delta_r \Gamma(r_1, r_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \epsilon(r_1) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma(r_1, r_2, \tau), \quad (4.31)$$

ただし $\epsilon(r_1)$ は実関数とする。

上式(4.31)の境界値問題を解く方法は、前節と同様である。 τ に関する Γ のFourier変換 $\tilde{\Gamma}$ を

$$\tilde{\Gamma}(r_1, r_2; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(r_1, r_2, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (4.32)$$

で定義し、 $z_1 = z_2 = 0$ の境界面で境界値 $\Gamma(r_1, r_2; \omega)$ を指定する時、(4.31)式の近似解は、コヒーレント光に対する近似解(4.28)を使って以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, z_1, x_2, z_2; \tau) &= (2\pi)^{-1} \int d\omega e^{-i\omega\tau} \int d^2\xi_1 \int d^2\xi_2 \Gamma(\xi_1, \xi_2; \omega) (2\pi)^{-4} \int d^2u_1 \\ &\quad d^2u_2 \exp [i \{ (x_1 - \xi_1)u_1 - (x_2 - \xi_2)u_2 + z_1\phi(u_1) - z_2\phi(u_2) \\ &\quad + k^2(2\phi(u_1))^{-1} \int_0^{z_1} \epsilon(Lr'_1) dz'_1 \\ &\quad - k^2(2\phi(u_2))^{-1} \int_0^{z_2} \epsilon(Lr'_2) dz'_2 \}], \end{aligned} \quad (4.33)$$

次に、準単色波の場合を考えると

$$\tilde{\Gamma}_s(\xi_1, \xi_2; \omega) = 2\pi \Gamma(\xi_1, \xi_2; \omega_0) \delta(\omega - \omega_0), \quad (4.34)$$

なる近似式が成り立つので、(4.33)式に代入すると、 Γ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, z_1, x_2, z_2; \tau) &= e^{-i\omega_0\tau} \int d^2\xi_1 \int d^2\xi_2 \Gamma(\xi_1, \xi_2; \omega_0) (2\pi)^{-4} \int d^2u_1 \int d^2u_2 \\ &\quad \exp [i \{ (x_1 - \xi_1)u_1 - (x_2 - \xi_2)u_2 + z_1\phi(u_1) - z_2\phi(u_2) \\ &\quad + k^2(2\phi(u_1))^{-1} \int_0^{z_1} \epsilon(Lr'_1) dz'_1 \\ &\quad - k^2(2\phi(u_2))^{-1} \int_0^{z_2} \epsilon(Lr'_2) dz'_2 \}], \end{aligned} \quad (4.35)$$

特に、 $z_1 = z_2 = 0$ の境界面から準単色インコヒーレント光が放射されている時

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2; \omega) = 2\pi I(\xi; \omega_0) \delta^2(\xi_1 - \xi_2), \quad (4.36)$$

の近似ができるので、(4.35)式に代入して $\tau=0$ と置くと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \Gamma(x_1, z_1, x_2, z_2; \tau) \\ &= e^{-i\omega\tau} \int d^2\xi I(\xi; \omega) (2\pi)^{-4} \int d^2u_1 \int d^2u_2 \\ & \quad \exp \left[i \left\{ (x_1 - \xi_1)u_1 - (x_2 - \xi_2)u_2 + z_1\phi(u_1) - z_2\phi(u_2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + k^2(2\phi(u_1))^{-1} \int_0^{z_1} \varepsilon(L, r'_1) dz'_1 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - k^2(2\phi(u_2))^{-1} \int_0^{z_2} \varepsilon(L, r'_2) dz'_2 \right\} \right], \quad (4.37) \end{aligned}$$

これがインコヒーレント光から、部分的コヒーレント光が得られるというvanCittert-Zernikeの定理の、非一様場中の表現式である。ただし波の干渉は、スペクトル幅 $\Delta\nu$ と伝播時間の間の不確定性関係内で存在するので、次の条件

$$\begin{aligned} & |r_1 - r_2 + k^2(2\phi(u_1))^{-1} \int_0^{z_1} \varepsilon(L, r'_1) dz'_1 \\ & \quad - k^2(2\phi(u_2))^{-1} \int_0^{z_2} \varepsilon(L, r'_2) dz'_2| < c(\Delta\nu)^{-1}, \quad (4.38) \end{aligned}$$

が(4.37)式に課せられる。ただし u は放射点Qと観測点Pとを結ぶ直線と、 z 軸がなす角度を(4.26)式のように表わしたものである。

非一様場中の部分的コヒーレント光伝播の解析のきわだった応用は、今の所見いだされていないが、後章で述べるように重力ポテンシャルの測定に役立つかもしれないことを付け加える。

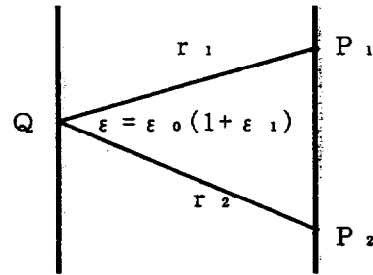


図4.6 非一様場中の経路差

4.5 まとめ

Raman-Nath回折の一般化を目的に、平面入射光の場合、非一様場中のMaxwell方程式を、位相関数法を適用して、近似的に解いた。超音波がマルチスペクトラムの場合、 n 次の回折光は、超音波の n 重相関で表されることを、解析的に示した。部分的コヒーレント光伝播のケースも取り扱った。これらの公式は、実時間の超音波の多重相関の生成や、映像再生、形成、像の質の評価、その誤差解析に有用である。

第 5 章

異方非一様媒質中の 波動回折

5. 1 緒言

本章では、誘電率がスカラーでなく、テンソルつまり方向によって異なる媒質（異方性媒質）¹⁾ 中を伝播する電磁波について、前章と同様な方法、つまり Tatarski が示した位相関数法²⁾ を適用することで、解析する。入射する平面単色電磁波の偏光面に依存して、回折される入射波の振幅や回折角度が変化する様子を、Maxwell 方程式を近似的に解くことで示す。電磁波の変動に比べて、異方性媒質の変動が小さいという条件下で、異方性媒質中の

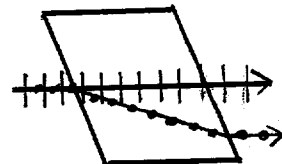


図 5. 1 異方性媒質中での複屈折

Raman-Nath 回折式³⁾ を与える。又、多色媒質波による光回折式を導く。さらに異方性媒質と入射波の波数が、ほぼ一致する場合、偏光面が保存する Bragg 回折と、偏光面が回転する異常 Bragg 回折⁴⁾ と呼ばれている現象を解析し、反射条件や近似回折公式を与える。

時間変動のない異方性媒質中に部分的コヒーレント光が入射した時、同様の方法で、それらの波動回折に対する近似回折公式⁵⁾ を示す。特に、境界面からインコヒーレント波が放射されている時、異方性非一様媒質中の van Cittert-Zernike の定理の近似表現式を導く。

5. 2 異方非一様媒質中の Maxwell 方程式

第 1 章第 1. 1. 7 節で述べたような、誘電率がテンソル（つまりマトリクス表現される量）である異方性媒質（例えば結晶）に対する Maxwell 方程式は、(1. 6 a) (1. 6 b) 式より

$$(\nabla \times \nabla \times + \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon) E(r, t) = 0, \quad (5. 1)$$

で与えられる。ここで $\nabla \times$ は、回転作用素を意味する。通常、透磁率 μ は、スカラーであることが多いから、本論でもそのように仮定する。一方、誘電率 ϵ はテンソルで、次のように分解する。

$$\epsilon(r, t) = \epsilon^{(c)} \{ 1 + \epsilon^{(v)}(r, t) \}, \quad (5. 2)$$

ここで $\epsilon^{(c)}$ は定テンソル、 $\epsilon^{(v)}$ は小さな変動分のテンソルである。(5. 2) 式を (5. 1) 式に代入すると

$$(\nabla \times \nabla \times + \mu \epsilon^{(c)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (1 + \epsilon^{(v)}) E(r, t) = 0, \quad (5. 3)$$

が得られる。今、単色平面電磁波が入射し、(5.3)式の解を

$$E(r, t) = \sum \{a_j + b_j(r, t)\} e_j \exp\{i(\omega t - k_j r)\}, \quad (5.4)$$

とする。ここで a_j, e_j, ω, k_j はそれぞれ、定振幅、互いに直交する単位ベクトル、角周波数、波数ベクトルを表わす。次の式

$$E_{(1n)}(r, t) = \sum a_j e_j \exp\{i(\omega t - k_j r)\}, \quad (5.5)$$

で表わす入射波は、(5.1)式の解であるから

$$(\nabla \times \nabla \times + \mu \epsilon(\omega) \frac{\partial^2}{\partial t^2}) E_{(1n)}(r, t) = 0, \quad (5.6)$$

を満たしている。さて(5.4)式を(5.3)式に代入すると、次の式

$$\sum e_j \{-\Delta b_j + 2i k_j \nabla b_j + (a_j + b_j) k_j^2 \epsilon(\omega) e_j + (\nabla - i k_j)(e_j \nabla b_j) - i \nabla b_j (k_j e_j) - k_j (k_j e_j) b_j\} \exp\{i(\omega t - k_j r)\} = 0, \quad (5.7)$$

が導かれる。ここでベクトルの外積に関する恒等式

$$A \times B \times C = B(A \cdot C) - C(A \cdot B), \quad (5.8)$$

を利用した。(5.7)式に単位ベクトル e を掛けて、直交関係式 $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ を使うと、(5.7)式は

$$\begin{aligned} & -\Delta b_j + 2i k'_j \nabla b_j + (e_j \cdot \nabla)(e_j \nabla b_j) + (e_j \cdot k_j)^2 b_j \\ & + (a_j + b_j) k_j^2 e_j \epsilon(\omega) e_j + \{e_j (\nabla - 2i k_j)(e_j \cdot \nabla b_j) \\ & - i(e_j \cdot k_j)(e_j \cdot \nabla b_j) - (k_j \cdot e_j)(k_j \cdot e_j) b_j \\ & + (a_j + b_j) k_j^2 e_j \epsilon(\omega) e_j\} \exp\{i(k_j - k'_j) r\} = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

となる。ここで

$$k'_j = k_j - e_j(k_j \cdot e_j), \quad (5.10)$$

であり、 k'_j は k_j からつくられる有効波数ベクトルである。図5.1に磁場 H 、誘電定テンソル ϵ 、有効波数ベクトル k の関係を示す。(5.7)式の最初の5項は、偏光方向が変化しないことを意味している。指数関数が掛けられている項は、異方性媒質によって偏光面が回転していることを、意味している。

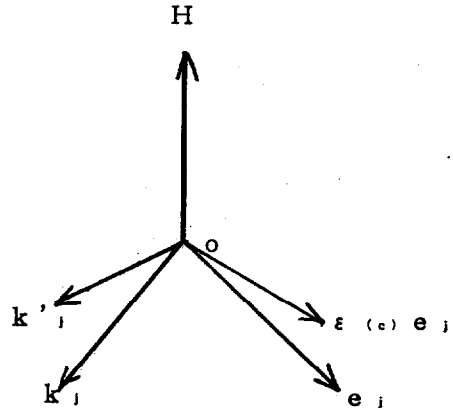


図5.2 異方性媒質中の磁場 H 、誘電定テンソル $\epsilon(\omega)$ 、有効波数ベクトル k_j の関係

5. 2 異方非一様媒質中のRaman-Nath回折

次に異方性媒質の変動が十分小さいという条件

$$|\nabla \ln \varepsilon| \ll k_1, \quad (5.11)$$

の下で、Raman-Nath回折が導かれることを示そう。

$$S_1 = \ln(1 + b_1/a_1), \quad (5.12)$$

で定義される複素変数 S を導入して、(6.7)式に代入すると

$$\begin{aligned} -\Delta S_1 - (\nabla S_1 - 2ik_1) \cdot \nabla S_1 + (e_1 \cdot \nabla)(e_1 \cdot \nabla S_1) \\ + (e_1 \cdot \nabla S_1) + k_1^2 e_1 \varepsilon(\nu) e_1 + \{ (e_1 \cdot (\nabla - ik_1))(e_1 \cdot \nabla S_1) \\ - i(e_1 \cdot k_1)(e_1 \cdot \nabla S_1) - (e_1 \cdot \nabla S_1)(e_1 \cdot \nabla S_1) \\ + k_1^2 e_1 \varepsilon(\nu) e_1 \} (a_1/a_1) \exp\{i(k_1 - k_1) \cdot r + S_1 - S_1\} = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

が得られる。条件式(5.11)を使うと、(5.13)式は

$$2ik'_1 \nabla S_1 + k_1^2 e_1 \varepsilon(\nu) e_1 + k_1^2 e_1 \varepsilon(\nu) e_1 (a_1/a_1) \exp\{i(k_1 - k_1) \cdot r\} = 0, \quad (5.14)$$

となる。ただし、この式は $|\nabla S_1| \ll k_1$ 、 $|S_1 - S_2| \ll 1$ でしか正しくない。(5.13)式は容易に積分できて

$$S_1 = i(2k'_1)^{-1} \int_0^s [k_1^2 e_1 \varepsilon(\nu)(s, t) e_1 + k_1^2 e_1 \varepsilon(\nu)(s, t) \exp\{i(k_1 - k_1) \cdot s\}] ds, \quad (5.15)$$

となる。 ds は入射電磁波の方向である。これは入射方向に誘電率の積分を行う、いわゆる経路積分を意味している。図5.3に、その様子を示す。(5.15)式右辺第2項が異方媒質中の回折の特徴を表わしていて、入射振幅や波数ベクトルの差に依存する事実が明確に示されている。

特に、入射波が平面波状態である時、Raman-Nath回折の形がどのようなになるかを、解析してみよう。 α をテンソルとする時、

$$\varepsilon(\nu)(r, t) = \alpha \cos(\Omega t - Ky), \quad (5.16)$$

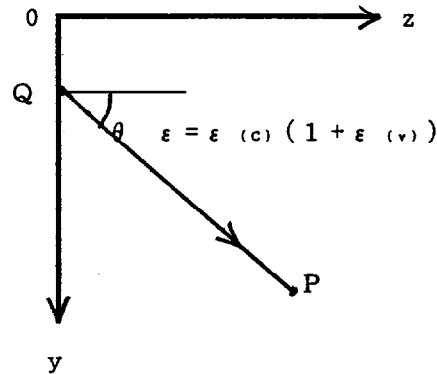


図5.3 異方性媒質中での電磁波の回折

を (5. 15) 式に代入し、 $y-z$ 平面を回転して、前章で示したように、 QP の線分が z となるようにした後、経路積分をする。座標を元に戻すと

$$S_i = i(2k'_i)^{-1} z \sec \theta [k_i^2 e_i \alpha e_i \sin(1/2 K z \tan \theta) \cos(\Omega t - K y + 1/2 k_i^2 (e_i \alpha e_i) (a_i/a_i)) \{ \text{sinc}((K \tan \theta + \Delta k) z/2) \exp i(\Omega t - K y + (K \tan \theta + \Delta k) z/2) + \text{sinc}((K \tan \theta - \Delta k) z/2) \exp i(\Omega t - K y + (K \tan \theta - \Delta k) z/2) \}], \quad (5. 17)$$

が導かれる。ただし

$$\Delta k = (k_i - k_i) k'_i / |k'_i|, \quad (5. 18)$$

である。Bessel関数の展開公式

$$e^{ix \cos \theta} = \sum J_n(x) e^{in\theta}, \quad (5. 19)$$

を利用すると、回折された光の電界ベクトルは

$$E_z(r, t) = \sum a_i e_i \sum (-1)^n J_n(w) \exp [i \{ (\omega + n \Omega) t - k'_i \cdot r + (k'_i \varepsilon_{(c)} e_i)(e_i \varepsilon_{(c)} e_i) e_i r + n K y + 1/2 K z \tan \theta \}], \quad (5. 20)$$

と表わされる。ただし

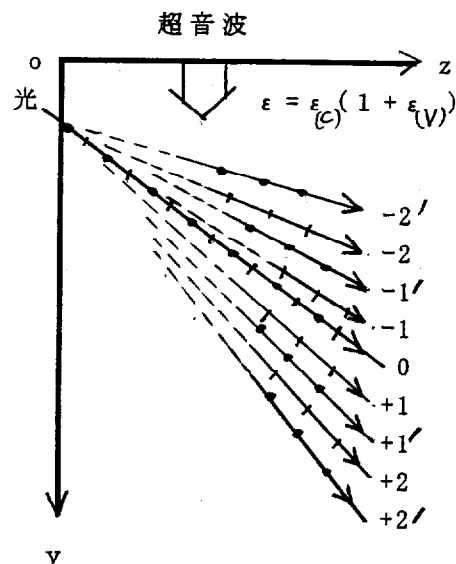


図 5. 4 異方媒質中の平面超音波による光回折

$$w = (2k'_i)^{-1} z \sec \theta [k_i^2 e_i \alpha e_i \text{sinc}(1/2 K z \tan \theta) + 1/2 k_i^2 e_i \alpha e_i (a_i/a_i) \{ \text{sinc}((K \tan \theta + \Delta k) z/2) + \text{sinc}((K \tan \theta - \Delta k) z/2) \}], \quad (5. 21 a)$$

$$k'_i = (0, k'_i \sin \theta_i, k'_i \cos \theta_i), \quad (5. 21 b)$$

である。(5. 20) 式は、偏光面が回転して他の成分に移る作用があることを意味している。図 6. 4 にその回折の様子を示す。(5. 21) 式は、 w が入射振幅 a 、波数ベクトルの差 Δk 、及び誘電率テンソル α に依存していることを示している。ここに異方性媒質の特徴が現れている。 α が一定になると $\Delta k=0$ 、 $e \alpha e = \delta$ となって、前章で示した等方非一様媒質中での、超音波による光回折近似公式に一致することは、言うまでもない。(5. 20) (5. 21) 式の公式は

$$z \ll 2k'_i{}^2 \{ k_i^2 (e_i \alpha e_i) + k_i^2 (e_i \alpha e_i) (a_i/a_i) \} \cos \theta_i, \\ x \text{ Min } \{ K^{-1}, |k_i - k_i|^{-1} \}, \quad (5. 22)$$

なる領域でしか適用できない。ただし $\text{Min}\{\dots\}$ は、括弧内の最小値を表わす。

同様の方法を、平面多色超音波に対しても適用可能である。変動が波数ベクトルに比べて十分小さければ、エネルギー方向に沿った異方誘電率の積分で表わされるが、適用領域を正確に求めるには難しすぎるので、具体的な形を示さないでおこう。

5. 4 異方非一様媒質中の Bragg 回折と異常 Bragg 回折

空間的変動が、入射光の波数ベクトルに近い、それよりも大きい場合には、位相関数法が適用できない。このような場合には、散乱理論で頻ぱんに使われている、Born 近似が良い。(5. 7) 式で $|b| \ll |a|$ なる条件を課すと

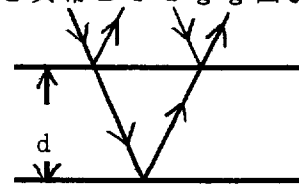


図 5. 7 高空間周波数を有する異方媒質中での Bragg 回折

$$\begin{aligned}
 & -\Delta b_1 + 2i k_1 \nabla b_1 + (e_1 \nabla)(e_1 \nabla b_1) \\
 & + (e_1 k_1)^2 b_1 + a_1 k_1^2 (e_1 \varepsilon_{(v)} e_1) + \{e_1 (\nabla - 2i k_1)(e_1 \nabla b_1) \\
 & - (e_1 \nabla b_1)(e_1 k_1) - (e_1 k_1)(e_1 k_1) b_1 - a_1 k_1 e_1 \varepsilon_{(v)} e_1\} \\
 & \times \exp\{i(k - k_1)r\} = 0, \quad (5. 23)
 \end{aligned}$$

となる。(5. 23) 式は、定係数の線型方程式であるから、 r について b を Fourier 変換すると、次の連立方程式

$$\begin{aligned}
 B_{11}(u) \tilde{b}_1(u, t) + B_{12}(u - k_1 - k_2) \tilde{b}_2(u - k_1 - k_2, t) \\
 = -C_1(u, t), \quad (5. 24 a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{21}(u + k_1 - k_2) \tilde{b}_1(u + k_1 - k_2, t) + B_{22}(u) \tilde{b}_2(u, t) \\
 = -C_2(u, t), \quad (5. 24 b)
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで

$$\tilde{b}_1(u, t) = \int b_1(r, t) e^{-i u \cdot r} d^3 r, \quad (5. 25 a)$$

$$B_{11}(u) = |u|^2 - 2k_1' u - (e_1 k_1)(e_1 u) + (e_1 k_1), \quad (5. 25 b)$$

$$B_{12}(u - k_1 - k_2) = ((k_2 - u) e_1)((k_1 - k_2) e_2), \quad (5. 25 c)$$

$$B_{21}(u + k_1 - k_2) = ((k_1 - u) e_1)((k_1 - k_2) e_2), \quad (5. 25 d)$$

$$\begin{aligned}
 C_1(u, t) &= a_1 k_1^2 e_1 \varepsilon_{(v)}(u, t) e_1 \\
 &+ a_1 k_1^2 e_1 \varepsilon_{(v)}(u - k_1 - k_2, t) e_1, \quad (5. 25 e)
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{(v)}(u, t) = \int \varepsilon_{(v)}(r, t) e^{-i u \cdot r} d^3 r, \quad (5. 25 f)$$

である。Fourier 逆変換を (5. 25) に施すと

$$b_1(r, t) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{B_{12}(u) C_2(u-k_1-k_2, t) - B_{22}(u-k_1-k_2) C_1(u, t)}{B_{11}(u+k_1-k_2) B_{22}(u) - B_{12}(u)^2} x e^{i u \cdot r} du, \quad (5.26a)$$

$$b_2(r, t) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{B_{21}(u) C_1(u+k_1-k_2, t) - B_{11}(u+k_1-k_2) C_2(u, t)}{B_{11}(u+k_1-k_2) B_{22}(u) - B_{12}(u)^2} x e^{i u \cdot r} du, \quad (5.26b)$$

が得られる。 $|k_1-k_2|/|k_1|$ は、無視できる程小さい上、 k_1-k_2 と e_1 はほぼ直交するので、(5.26) 式は

$$b_1(r, t) \sim \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{C_1(u, t)}{B_{11}(u)} e^{i u \cdot r} du, \quad (5.27)$$

となる。特に、近似式(5.27)を調べるため、誘電率テンソル $\epsilon_{(v)}(u, t)$ が

$$\epsilon_{(v)}(u, t) = (2\pi)^2 (2u)^{-1} \delta(u_1) \{ \delta(u_2+K) e^{-i\Omega t} + \delta(u_3-K) e^{-i\Omega t} \}, \quad (5.28)$$

で与えられる時を考える。 u_1, u_2, u_3 は u の成分である。(5.28) 式を(5.27)式に代入すると

$$b_1(r, t) \sim \int \frac{a_1 k_1^2 e_1 \alpha e_1 \exp\{i(\Omega t - Ky + u_z)\} du_3}{4\pi u(u-2k'_1 u'_1 \cos\theta + K + 2k_1 K \sin\theta)} - \int \frac{a_1 k_1^2 e_1 \alpha e_1 \exp\{i(\Omega t + \Delta k r - Ky + u'_3 z)\} du'_3}{4\pi u'_3 \{u-2k'_1 u'_1 \cos\theta + (K - (\Delta k)_2) + 2k_1 (K - (\Delta k)_1) \sin\theta + (\Delta k)_1\}} + (K \rightarrow -K, \Omega \rightarrow -\Omega), \quad (5.29)$$

が得られる。ここで $\Delta k = k_1 - k_1$, $u'_3 = u - (\Delta k)_3$ であり、 $(K \rightarrow -K, \Omega \rightarrow -\Omega)$ は、積分項の K, Ω にそれぞれ $-K$ と $-\Omega$ を代入することを意味する。

次の条件

$$\sin\theta_1 = -K/2k'_1, \quad (5.30)$$

は、通常 Bragg 条件と呼ばれていて、(5.40) 式の右辺第 1 項の積分が u に関して 2 重極を持つ。この時、Bragg 反射は

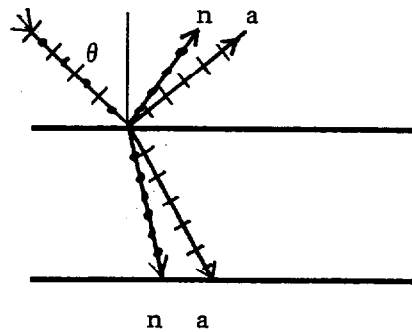


図 5. 8 Bragg 反射と屈折 (n: 通常, a: 異常)

$$b_1(r, t) \sim (1/4) a_1 e_1 \alpha e_1 (k_1^2/k'_1) \sec \theta_1 \exp \{i(\Omega t + k_1 y \sin \theta_1)\}, \quad (5.31)$$

で与えられ、成立領域は

$$|z| \ll 4k'_1 (e_1 \alpha e_1 k_1)^{-1} \cos \theta_1, \quad (5.32)$$

である。他の2重極条件は

$$\sin \theta_1 = 1 - K/2k'_1, \quad (5.33)$$

であり、これはBragg屈折に対応している。この屈折波の電界Eは

$$E(r, t) \sim \Sigma (1/2) a_1 e_1 \alpha e_1 k'_1 z \sec \theta_1 \exp i \{(\Omega t + k'_1 y + (k'_1 \varepsilon_{(c)} e_1)(e_1 \varepsilon_{(c)} e_1)^{-1} e_1 r)\}, \quad (5.34)$$

で表わされる。(5.40)式の右辺第2項の積分が、2重極を持つ条件は

$$\sin \theta_1 = -\frac{K - (\Delta k)_s}{2k'_1} - \frac{(\Delta k)_1^2}{2k_1^2 (K - (\Delta k)_s)}, \quad (5.35)$$

であり、Bragg異常反射に対応している。その波動は

$$b_1(r, t) \sim (1/4) a_1 e_1 \alpha e_1 (k_1/k'_1) z \sec \theta_1 \exp \{i(\Omega t - \Delta k r - K y)\}, \quad (5.36)$$

で与えられる。これは偏光面が回転することを意味していて、

$$|z| \ll 4a_1 k'_1 (e_1 \alpha e_1 k_1^2 a_1)^{-1} \cos \theta_1, \quad (5.37)$$

の領域で成り立つ。もう一つの2重極条件は

$$\sin \theta_1 = \frac{(\Delta k)_s - K}{2k'_1} + \sqrt{1 + \left(\frac{(\Delta k)_1}{k}\right)^2}, \quad (5.38)$$

で与えられる。これはBragg異常屈折に対応していて、その屈折波の電界ベクトルは

$$E(r, t) \sim \Sigma (1/2) a_1 e_1 e_1 \alpha e_1 (k_1^2/k'_1) z \sec \theta_1 \exp i \{(\Omega t + \Delta k r + (k_1 \varepsilon_{(c)} e_1)(e_1 \varepsilon_{(c)} e_1)^{-1} e_1 r - ((\Delta k)_s + \sqrt{k'_1 \sin^2 \theta_1 - (\Delta k)^2}) y\}, \quad (5.39a)$$

$$k'_1 = (0, k'_1 \sin \theta_1, k'_1 \cos \theta_1), \quad (5.39b)$$

で与えられる。やはり偏光面の回転が起こり、かつ(5.34)式で表わされる通常波とは、違った方向に伝播していることがわかる。Bragg条件を満たさない角度で入射する波動は、約 k 分の1位であって、大部分の波動が透過してしまう。上述の解析は、($K \rightarrow -K$, $\Omega \rightarrow -\Omega$)の場合にも適用でき、似たような結果が得られる。このようにBragg異常回折は、異方性媒質の一つの特徴である。では反射波と入射波がほぼ同量で混ざりあっている時は、どうなるか？これについては、Kogelnikによって展開された対波方法が良いであろう。

入射波の波数が、変動媒質の波数よりも十分大きい時と、ほぼ同じ位の時を、各々の近似法を適用して、種々の結果を得た。このような性質は、3次元ホログラムで回折や反射される光の解析、光通信での偏光面の合成や分離の解析に応用できるであろう。Maxwell方程式は、線型ではあるが、連立偏微分方程式であるため、厳密な解析解を与えずらい。そのため入射波の波数が、変動媒質のそれよりあまり大きくない、つまり先の2つのケースの中間状態では、うまい近似法が今の所みつからない。今後の問題の1つである。

5. 5 まとめ

異方(結晶)非一様媒質中での、単色平面波入射光の振る舞いを、Maxwell方程式を近似的に解くことで、解析した。超音波の波長で場合分けをした。超音波の波長が光のそれより十分大きい時、Raman-Nath回折が起こることを、位相関数法を利用して示した。 n 次の回折光は、2種の偏光面の存在により、2の n 乗個あり、 n 次のBessel関数 J_n で与えられることを導いた。一方、超音波の波長が光のそれと同じ位の時、偏光面を保存する通常のBragg回折と、偏光面の回転が起こる異常Bragg回折が起こり、各々その起こる条件つまり光の波数と超音波のそれとの関係を導いた。これらの公式は、結晶中の超音波の映像の形成、実時間の多重相関の作成、結晶の誘電率の推定、Bragg回折像の角度依存性の解析に役立つものである。

第 6 章 重力波による光回折

6. 1 緒言

前章までは平坦なユークリッド空間中の波動の振舞いについて考えてきた。何もない 3 次元空間中では、波動は Hygens の原理に従って伝播してゆくが、歪んだ空間中つまり重力が存在する空間では、必ずしも球面波になって広がっていかない。歪んだ媒質の例は、超音波が存在する誘電体とか回折格子に見られるが、この章では今まで解析されなかった重力波を取り上げる。重力波は、Einstein¹⁻⁴⁾ が一般相対性理論の中で時空の様子を表す方程式を近似することによって 1917 年発見したものであるが、電磁相互作用定数に比べて重力相互作用定数が小さいため Weber^{5, 6)} らの多くの研究者の努力にもかかわらず、未だ実験的に確認されていない。しかしながら、他の 4 つの観測事実によって Einstein 理論の正しさが実証されていて、重力波の存在に疑問の余地はないと思われる。光がベクトル場で記述されるのに対して、テンソル場で記述される重力波⁷⁻¹³⁾ は、光速度で伝播し偏向面が 2 つあって進行方向に垂直である。この重力波光との相互作用は Maxwell-Einstein (M-E)¹⁾ 方程式により記述されるので、重力波の存在する空間中で光がどのように伝播していくかを調べるには、M-E 方程式を解けばよいことになる。重力との相互作用は、スカラーとベクトルでは全く異なるので光をスカラー波として取り扱うわけにはいかないが、超音波による光回折¹⁴⁾ の類推からほぼ同様の近似法により、重力波による単色光回折の解析がなされる。¹⁵⁾ ごく弱い重力波によって回折される光強度は重力波強度に比例している。一方、強い重力波によって回折される光の振幅は、重力波の波数が光の波数に比べて十分小さいという仮定の下に、整数時の Bessel 関数で表わされる。この点 Raman-Nath 回折とよく似ているが、入射角度依存性が少し違う。光の偏光面を回転させる光回折も存在するが、回転しない光回折に比べて小さい。前章で述べた位相関数法¹⁶⁾ による解析を適用すると、平面波展開法による解析よりも簡単に光回折振幅が得られることを示す。

6. 2 光と重力波の相互作用方程式

重力波を扱うには、計量空間の知識が不可欠となる。計量テンソルを $g_{\mu\nu}$ 、背景となる計量テンソルを $\gamma_{\mu\nu}$ 、重力波を表す摂動テンソルを $\varepsilon h_{\mu\nu}$ (ε : 小定数) とすると

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}, \quad (6.1)$$

と表される。一方、Einstein の重力場方程式は次のように与えられる。

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (6.2)$$

(6.1) 式を (6.2) 式に代入し

$$\phi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} h \quad (h = \gamma^{\mu\nu} h_{\mu\nu}), \quad (6.3)$$

を導入して、 $T_{\mu\nu} = 0$ なる真空条件とから

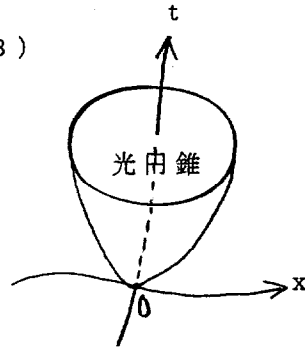
$$\gamma^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi_{\alpha\beta} + 2 R_{\mu\alpha\beta\nu} \phi^{\mu\nu} + R_{\alpha\mu} \phi^{\mu\beta} + R_{\beta\nu} \phi^{\nu\alpha} = 0, \quad (6.4)$$

を得る。 $R_{\mu\alpha\beta\nu}$ は Riemann の曲率テンソルである。(6.4) 式は Isaacson によって導かれた。 $\phi_{\alpha\beta}$ が重力波を記述することから、次の拘束条件

$$\nabla_\nu \phi^{\mu\nu} = 0, \quad (6.5)$$

$$\gamma_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} = 0, \quad (6.6)$$

図 6.1 曲がった空間を伝播する重力波



が (6.4) 式に課せられる。

背景重力場と重力波が存在している空間での電磁場方程式を分解して相互作用項を分離してみよう。プライムのついた量は、例えば ∇'_μ は計量 $g_{\mu\nu}$ についての共変微分、プライムのない記号は背景計量 γ^μ についての量と約束する。接続係数 $\Gamma'^{\mu\nu\lambda}$ は (6.1) 式から ε^2 以上の項を無視する近似で次の様に表わされる。

$$\begin{aligned} \Gamma'^{\mu\nu\lambda} &= 1/2 (\gamma^{\lambda\tau} + \varepsilon h^{\lambda\tau}) \{ \partial_\mu \gamma_{\nu\tau} + \partial_\nu \gamma_{\mu\tau} - \partial_\tau \gamma_{\mu\nu} \\ &\quad + \varepsilon (\partial_\mu h_{\nu\tau} + \partial_\nu h_{\mu\tau} - \partial_\tau h_{\mu\nu}) \} \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \varepsilon H_{\mu\nu}^{\lambda}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

ただし

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{\lambda} &= 1/2 h^{\lambda\tau} (\partial_\mu \gamma_{\nu\tau} + \partial_\nu \gamma_{\mu\tau} - \partial_\tau \gamma_{\mu\nu}) \\ &\quad + 1/2 \gamma^{\lambda\tau} (\partial_\mu h_{\nu\tau} + \partial_\nu h_{\mu\tau} - \partial_\tau h_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (6.8)$$

である。M-E 方程式

$$g^{\mu\nu} \nabla'_\mu \nabla'_\nu A^\alpha + R_{\mu}^{\alpha} A^\mu = -4\pi\mu_0 J^\alpha, \quad (6.9)$$

に (6.7) 式の接続係数を代入し、 ε^2 以上の項を無視すると

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha + \varepsilon \{ h^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha - \gamma^{\mu\nu} (\nabla_\mu H_{\nu\lambda}^\alpha A^\lambda + H_{\mu\nu}^{\lambda} \nabla_\lambda A^\alpha \\ - H_{\mu\lambda}^\alpha A^\lambda) \} + R_{\mu}^{\alpha} A^\mu = -4\pi\mu_0 J^\alpha, \end{aligned} \quad (6.10)$$

を得る。今、真空中つまり電流源 J^α がなく、電磁場のエネルギー

運動量テンソル

$$R_{\mu\nu} = \kappa (1/4 g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha}), \quad (6.11)$$

が十分小さくて無視できるとする。ただし

$$F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}, \quad (6.12)$$

である。共変微分の展開式と (6.7) 式を使って (6.9) 式は

$$\gamma^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} A^{\alpha} + \varepsilon \{ h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} A^{\alpha} - \gamma^{\mu\nu} (2 H_{\nu\lambda}{}^{\alpha} A^{\lambda} + H_{\lambda\nu}{}^{\alpha} \nabla_{\mu} A^{\lambda} - H_{\mu\nu}{}^{\lambda} \nabla_{\lambda} A^{\alpha}) \} = 0, \quad (6.13)$$

となる。計量テンソルについての共変微分

$$\nabla'_{\mu} g^{\alpha\beta} = \nabla_{\mu} \gamma^{\alpha\beta} + \varepsilon (H_{\mu\lambda}{}^{\alpha} \gamma^{\lambda\beta} + H_{\mu\lambda}{}^{\beta} \gamma^{\lambda\alpha} + \nabla_{\mu} h^{\alpha\beta}) = 0, \quad (6.14)$$

より、次の恒等式

$$\nabla_{\mu} h^{\alpha\beta} + H_{\mu\lambda}{}^{\beta} \gamma^{\lambda\alpha} + H_{\mu\lambda}{}^{\alpha} \gamma^{\lambda\beta} = 0, \quad (6.15)$$

を得る。重力波の拘束条件 (6.5) 式を使って、 α と μ ついて縮約すると

$$\gamma^{\mu\nu} H_{\mu\nu}{}^{\alpha} + \gamma^{\mu\alpha} H_{\mu\nu}{}^{\nu} = 0, \quad (6.16)$$

が導かれる。(6.16) 式を (6.13) 式に代入すると

$$\gamma^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} A^{\alpha} + \varepsilon \{ h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} A^{\alpha} + \gamma^{\mu\nu} (2 H_{\nu\lambda}{}^{\alpha} A^{\lambda} + \nabla_{\mu} H_{\lambda\nu}{}^{\alpha} A^{\lambda} - H_{\mu\nu}{}^{\lambda} \nabla_{\lambda} A^{\alpha}) \} = 0, \quad (6.17)$$

を得る。特に、背景計量が Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ に一致する時には

$$H_{\mu\nu}{}^{\lambda} - 1/2 \eta^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} h_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} h_{\mu\nu}), \quad (6.18)$$

であり、 ∇_{μ} は ∂_{μ} となるから、拘束条件 (6.5) (6.6) 式に注意すると、(6.17) 式は

$$\eta_{\mu\nu} \partial^{\mu} \partial^{\nu} A^{\alpha} + \varepsilon \{ h^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} A^{\alpha} + \eta^{\mu\nu} (\partial_{\mu} h_{\nu}{}^{\alpha} + \partial_{\nu} h_{\mu}{}^{\alpha} - \partial^{\alpha} h_{\mu\nu}) \partial^{\lambda} A^{\lambda} \} = 0, \quad (6.19)$$

となる。第2項は偏向面非回転の光と重力波の相互作用、第3項以降は偏向面を回転させる相互作用である。

6. 3 弱い重力波による光回折

M-E方程式から導いた光と重力波の相互作用方程式(6. 13)は、たとえ背景計量を具体的に与えても、解くことが困難である。ましてや一般の背景計量に対して精度よい解析解を見つけるのは、不可能に近い。そこで我々は、最も簡単な背景場に一つであるMinkowski計量空間中で光と重力波の相互作用方程式(6. 19)の近似解について、検討することにしよう。

静電ポテンシャルAはなく、電磁波は直交座標系(x, y, z, t)でx = x方向に完全に偏り、かつ波数kのy-z平面上の単色平面波とすると、零でないMaxwellポテンシャルは

$$A(x, y, z, t) = a \exp \{ -i(\omega t + y k \sin \theta - z k \cos \theta) \}, \quad (6. 20)$$

だけとなる。aは光の実振幅である。一方、重力波はx² = y方向に伝播する波数pの単色平面波とする。重力波は偏極状態が2つあり、零でない成分は

$$- \varepsilon h_{11} = \varepsilon h_{33} = \alpha \cos p y - \Omega t, \quad (6. 21)$$

$$\varepsilon h_{13} = \varepsilon h_{31} = \beta \cos (p y - \Omega t), \quad (6. 22)$$

のみである。 α 、 β は重力波の実振幅である。上記の条件を(6. 19)式に代入すると、 A_2 に関する項は $h_{21} = 0$ と $\partial_2 h^{23} = 0$ 、 $\partial_2 h^{12} = 0$ により、初期状態でも仮定により零だから、相互作用によっても生じない。 A_3 項は、 A_1 項の偏向回転によって生じ、Aと同じ様な偏微分方程式

$$\square A_1 + \varepsilon \{ h^{33} \partial_3 \partial_3 A_1 + \eta^{00} (\partial_0 h_{11}) (\partial_0 A_1) + \eta^{33} (\partial_3 h_{11}) x (\partial_0 A_1) + \eta^{00} (\partial_0 h_{13}) (\partial_0 A_3) + \eta^{22} (\partial_0 h_{13}) (\partial_0 A_3) \} = 0, \quad (6. 23 a)$$

$$\square A_3 + \varepsilon \{ h^{33} \partial_3 \partial_3 A_3 + \eta^{00} (\partial_0 h_{11}) (\partial_0 A_3) + \eta^{33} (\partial_3 h_{11}) x (\partial_0 A_3) + \eta^{00} (\partial_0 h_{13}) (\partial_0 A_1) + \eta^{22} (\partial_0 h_{13}) (\partial_0 A_1) \} = 0, \quad (6. 23 b)$$

を満たす。(6. 21) (6. 22) 式を(6. 23) 式に代入すると次式を得る。

$$\square A_1 + \alpha \cos (p y - \Omega t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_1 + p \sin (p y - \Omega t) \left(\frac{\partial}{c \partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (\alpha A_1 - \beta A_3) = 0, \quad (6. 24 a)$$

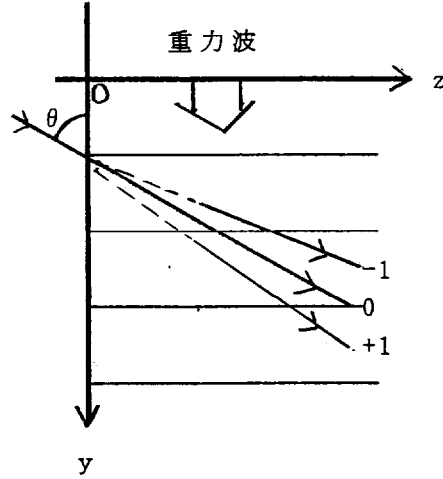


図 6. 2 平面重力波と完全偏極単色光との相互作用座標系

$$\square A_3 + \alpha \cos(p y - \Omega t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_3 + p \sin(p y - \Omega t) \left(\frac{\partial}{c \partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (\alpha A_3 - \beta A_1) = 0, \quad (6.24b)$$

ここで光の波数 k に比べて重力波の波数 p が十分小さく、かつ $\alpha \sim \beta$ とすると、(7.24) 式の第3項は、他の項に比べて無視できる。
一方、光について

$$A_1 = \sum U_n(z) \exp[i(k \sin \theta + n p) - (\omega + n \Omega) t], \quad (6.25a)$$

$$A_3 = \sum V_n(z) \exp[i(k \sin \theta + n p) - (\omega + n \Omega) t], \quad (6.25b)$$

なる平面波展開ができるものと仮定して (6.24) 式に代入すると、次の U_n 、 V_n についての漸化微分方程式

$$U''_n(z) + k \{ \cos \theta + 2(1 - \sin \theta) n p / k \} U_n(z) + 1/2 \alpha \{ U''_{n+1}(z) + U''_{n-1}(z) \} = 0, \quad (6.26a)$$

$$V''_n(z) + k \{ \cos \theta + 2(1 - \sin \theta) n p / k \} V_n(z) + 1/2 \alpha \{ V''_{n+1}(z) + V''_{n-1}(z) \} = 0, \quad (6.26b)$$

を得る。初期条件

$$U_0(0) = 1, \quad U_n(0) = 0 \quad (n \neq 0), \quad V_n(0) = 0, \quad (6.27)$$

を使うと $V_n(z) = 0$ となる。 $1 > 1$ に対して、 $U_1 \sim 0$ と置くと (6.26a) 式は

$$U''_{\pm 1}(z) + k^2 \{ \cos^2 \theta + 2(1 - \sin \theta) p / k \} U_{\pm 1}(z) + 1/2 \alpha U_0(z) = 0, \quad (6.28)$$

となる。 $U(z) = a \exp(i k \cos \theta z)$ を代入すると、(6.28) 式の解として

$$U_{\pm 1}(z) = \frac{\alpha k}{4p} (1 + \sin \theta) \left[1 - \exp \left\{ +i \frac{p \cos \theta}{1 + \sin \theta} - \frac{p^2 \cos \theta}{4k(1 + \sin \theta)} z \right\} \right] U_0(z) \quad (6.29)$$

を得る。もし $\alpha = 0$ で β だけが残るとき (7.24) 式は、次のようになる。

$$\square A_1 - \beta p \sin(p y - \Omega t) \left(\frac{\partial}{c \partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) A_3 = 0, \quad (6.30a)$$

$$\square A_3 - \beta p \sin(py - \Omega t) \left(\frac{\partial}{c \partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) A_1 = 0, \quad (6.30b)$$

上式に (7.25) 式を代入すると、次の式が得られる。

$$U''_{\pm n}(z) + k^2 \{ \cos^2 \theta + 2(1 - \sin \theta) np / k \} U_n(z) - 1/2 \beta k p (1 - \sin \theta) \{ V_{n+1}(z) - V_{n-1}(z) \} = 0, \quad (6.31a)$$

$$V''_{\pm n}(z) + k^2 \{ \cos^2 \theta + 2(1 - \sin \theta) np / k \} V_n(z) - (i/2) \beta k p (1 - \sin \theta) \{ U_{n+1}(z) - U_{n-1}(z) \} = 0, \quad (6.31b)$$

$\beta \ll 1$ の仮定と条件 (6.27) より、(6.31) 式の近似解は

$$V_{\pm 1}(z) = \frac{\beta}{4} \left[1 - \exp \left\{ +i \frac{p \cos \theta}{1 + \sin \theta} - \frac{p^2 \cos \theta}{4k(1 + \sin \theta)^2} \right\} \right] U_0(z), \quad (6.32)$$

で表わされる。波動強度は絶対値の2乗に比例するから、回折される光強度は、重力波強度に比例することを (6.29)、(6.32) 式が意味している。つまり回折される光強度をそれぞれ $I_{\pm 1}$ 、 $I_{(3)\pm 1}$ とすると

$$I_{\pm 1} = \left(\frac{|\alpha|}{4p} k \right)^2 (1 + \sin \theta)^2 \sin^2 \left[\left\{ \frac{p \cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{p^2 \cos \theta}{k(1 + \sin \theta)^2} \right\} \frac{z}{2} \right] I_0 \quad (6.33a)$$

$$I_{(3)\pm 1} = \frac{|\beta|^2}{6} \sin^2 \left[\frac{p \cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{p^2 \cos \theta}{k(1 + \sin \theta)^2} \right] \frac{z}{2} I_0, \quad (6.33b)$$

で表わされる。光の波長を $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ 、 $l = \Lambda/2$ (Λ : 重力波の波長) の長さで、1Wのレーザー光から1個の回折された光子が検出されるとする時、重力波束 S は

$$S = \frac{I_{\pm 1} \Lambda}{I_0 2c} \left(\frac{4p}{k} \right)^2 \frac{\Omega^2}{c \kappa} \sim 1.2 \times 10^{-17} \Omega^3 \text{ (W/m)}, \quad (6.34)$$

で与えられる。角波長 $\Omega = 2\pi \times 10^8 \text{ Hz}$ で $S = 5 \times 10^3 \text{ W/m}$ $\Omega = 2\pi \times 10^8 \text{ Hz}$ で $S = 5 \times 10^9 \text{ W/m}$ を与える。この値はWeberが円柱振動で与えた値よりも小さいが、しかし最近Kulakが $\Omega = 2\pi \times 10^8 \text{ Hz}$ で検出できるとした値 10^{-20} W/m よりも大幅に大きい。その上、レーザーノイズや周波数変動が測定に及ぼす影響があって、実際の応用上かなりの困難が伴う。

6. 4 強い重力波による光回折

強い弱いは相対的な言い方でしかないが、ここでは2次以上の光回折が起こりうる程度の強さを意味している。重力相互作用が極めて弱いため、光の高次回折が起こるためには、 $10^{30} \sim 10^{40} \text{ W/m}$ の大きなエネルギーの重力波が必要である。

高次の光回折強度を計算するには、荒い近似を必要とする。

(6. 25) 式を (6. 24) 式に代入すると、 U_n, V_n についての次の漸化微分式

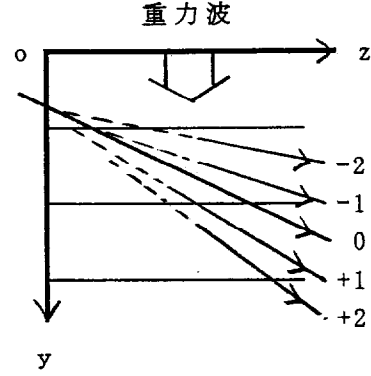


図 6. 3 強い重力波による光回折

$$U_n''(z) + \{k^3 \cos^3 \theta + 2(1 - \sin \theta) n k p\} U_n(z) + (\alpha/2) \{U_{n+1}''(z) + U_{n-1}''(z)\} + (i k p/2)(1 - \sin \theta) [\alpha \{U_{n+1}(z) - U_{n-1}(z)\} - \beta \{V_{n+1}(z) - V_{n-1}(z)\}] = 0, \quad (6. 35 a)$$

$$V_n''(z) + \{k^3 \cos^3 \theta + 2(1 - \sin \theta) n k p\} V_n(z) + (\alpha/2) \{V_{n+1}''(z) + V_{n-1}''(z)\} + (i k p/2)(1 - \sin \theta) \{V_{n+1}(z) - V_{n-1}(z)\} - \beta \{U_{n+1}(z) - U_{n-1}(z)\} = 0, \quad (6. 35 b)$$

$\Omega/\omega \ll 1$ 又は $p/k \ll 1$ を仮定すると、回折角度は $\theta = \theta + n p/k$ 波数は $k = k + n p$ となる。 $k = k + n p$ 、 $\theta = \theta + n p/k$ を導入し

$$U_n(z) = W_n(z) \exp \{i z (k \cos \theta - n \pi/2)\}, \quad (6. 36 a)$$

$$V_n(z) = X_n(z) \exp \{i z (k \cos \theta - n \pi/2)\}, \quad (6. 36 b)$$

と置くと、(7. 35) 式は次のようになる。

$$W_n(z) + 2i k \cos \theta W_n(z) + 2(1 - \sin \theta) n k p \{W_n(z) - (i \alpha/2) [\{W_{n+1}'(z) - W_{n-1}'(z)\} + 2i k \cos \theta \{W_{n+1}(z) - W_{n-1}(z)\}] - (k \cos \theta)^3 \{W_{n+1}(z) - W_{n-1}(z)\}\} - (i k p/2)(1 - \sin \theta) [\alpha \{W_{n+1}(z) - W_{n-1}(z)\} - \beta \{X_{n+1}(z) - X_{n-1}(z)\}] = 0, \quad (6. 37 a)$$

$$X_n(z) + 2i k \cos \theta X_n(z) + 2(1 - \sin \theta) n k p \{X_n(z) - (i \alpha/2) \{X_{n+1}'(z) + X_{n-1}'(z)\} + 2i k \cos \theta \{X_{n+1}(z) - X_{n-1}(z)\} - (k \cos \theta)^3 \{X_{n+1}(z) - X_{n-1}(z)\}\} - (i k p/2)(1 - \sin \theta) [\alpha \{X_{n+1}(z) - X_{n-1}(z)\} - \beta \{W_{n+1}(z) - W_{n-1}(z)\}] = 0, \quad (6. 37 b)$$

さらに

$$u = (z k \alpha/2) \cos \theta, \quad (6. 38)$$

を導入すると、(6. 37) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& 2W'_n(u) + W_{n+1}(u) - W_{n-1}(u) - 4i \operatorname{np} \{ \alpha k (1 - \sin \theta) \}^{-1} W_n(u) \\
& - i \alpha \{ (1/2) W''_n(u) - W'_{n+1}(u) + W'_{n-1}(u) \} - (\alpha/4) \{ W''_{n+1}(u) \\
& - W''_{n-1}(u) \} + p \{ (1 - \sin \theta) k \} [W_{n+1}(u) + W_{n-1}(u) \\
& - \alpha \beta \{ X_{n+1}(u) - X_{n-1}(u) \}] = 0,
\end{aligned} \tag{6. 39 a}$$

$$\begin{aligned}
& 2X'_n(u) + X_{n+1}(u) - X_{n-1}(u) - 4i \operatorname{np} \{ \alpha k (1 - \sin \theta) \} X_n(u) \\
& - i \alpha \{ (1/2) X''_n(u) - X'_{n+1}(u) + X'_{n-1}(u) \} - (\alpha/4) \{ X''_{n+1}(u) \\
& - X''_{n-1}(u) \} + p \{ (1 - \sin \theta) k \} [X_{n+1}(u) + X_{n-1}(u) \\
& - \alpha \beta \{ W_{n+1}(u) - W_{n-1}(u) \}] = 0,
\end{aligned} \tag{6. 39 b}$$

ここで $\alpha > \beta$ 、 $\operatorname{np}(\alpha k) \ll 1$ 、を仮定すると、第4項以上は第1、2、3項に比べて無視できるので、(6., 39)式は近似的に

$$2W'_n(u) + W_{n+1}(u) - W_{n-1}(u) = 0, \tag{6. 40 a}$$

$$2X'_n(u) + X_{n+1}(u) - X_{n-1}(u) = 0, \tag{6. 40 b}$$

のようになる。この解は超音波による光回折で、Raman-Nathにより示されたように、整数次のBessel関数 $J(u)$ でえ与えられる。従って、 n 次の回折強度は、 $\operatorname{np} \ll \alpha k$ の条件下で $|J(u)|^2 I$ になる。Raman-Nath回折の類推から、重力波の波長は $0.1\text{mm} \sim 10\text{cm}$ 位が適当であり、光の波長を $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ とすると、 $2 \times 10^{-4} \ll d$ の範囲を得る。重力波束 S は

$$S = \frac{|\alpha|^2 Q^2}{2\pi c}, \tag{6. 41}$$

で与えられるから
 $S \gg 3 \times 10^{14} \text{W/m}$ なる評価が得られる。実際にこんなに多くのエネルギーは存在しないから、重力波による光回折の高次過程は起こり得ないであろう。

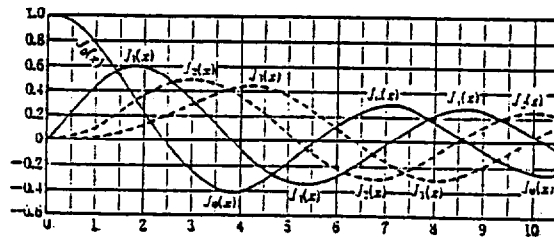


図6. 4 整数次のBessel関数形

重力波による光回折では、相互作用方程式が超音波による光回折と違っているが、Raman-Nath回折とよく似たような現象であることが、上記の解析でわかった。しかしそれらは2つの点で違っている。1つは(6. 36)式中の指数部の $-n\pi/2$ であり、Raman-Nath回折では $n\pi/2$ となっている。これはスカラー-ベクトル相互作用と、テンソル-ベクトル相互作用の違いから来ると思われる。もう1つは、Bessel関数中の $u = (z/2) k \alpha \cos \theta$ である。Raman-Nath回折では、 $u = (z/2) k \alpha' \sec \theta$ (α :超音波の振幅) となっている。 $\theta = \pi/2$ とすると重力波と光とは、相互作用がなくなる。両方とも光速で運動しているため衝突が起こらないからである。

6. 5 位相関数法を使った重力波による光回折の解析

第6章で示した位相関数法を利用すると、前節で行った平面波展開法による複雑さを避けることができる上、正確な角度依存式が導かれる。前節と同じように背景は平坦な空間で、弱い重力波の波長が光の波長よりも十分大きいと仮定使用。このような条件下で、接続係数 Γ 項は他の項よりも十分小さいので無視できて、真空中の Maxwell-Einstein 方程式は近似的に

$$g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu A \sim 0, \quad (6.42)$$

のようになる。単色平面波状態の光が入射し、(6.42) 式の解を

$$A_\mu = a_\mu \exp [i(k_\nu x^\nu + S) + \chi], \quad (6.43)$$

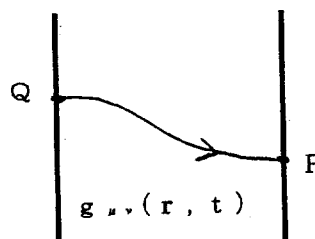


図 6. 4 重力場中の経路積分

とする。ここで a は実定ベクトル、 k は定波数ベクトル、 S, χ 実関数である。(6.43) 式を (6.42) 式に代入して、実部、虚部共に零になることから、次の2つの微分方程式

$$g^{\mu\nu} \{ -(k_\mu + \partial_\mu S)(k_\nu + \partial_\nu S) + \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi + \partial_\mu \partial_\nu \chi \} = 0, \quad (6.44a)$$

$$g^{\mu\nu} \{ (k_\mu + \partial_\mu S) \partial_\nu \chi + (k_\nu + \partial_\nu S) \partial_\mu \chi + \partial_\mu \partial_\nu S \} = 0, \quad (6.44b)$$

を得る。 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) のような弱重力場であるから、 S, χ 共に h に比例する小さな量で、 h の2次以上の項を無視すると (6.44) 式は

$$-\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu - h^{\mu\nu} k_\mu k_\nu - 2\eta^{\mu\nu} k_\mu \partial_\nu S = 0, \quad (6.45a)$$

$$2\eta^{\mu\nu} k_\mu \partial_\nu \chi + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu S = 0, \quad (6.45b)$$

となる。 $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$ であることを考えると (6.45a) 式は、波数ベクトル k_μ に沿った光円錐上の経路積分

$$S = - (1/2k) \int_{\text{path}} h^{\mu\nu}(s') k_\mu k_\nu ds', \quad (6.46)$$

で与えられる。同様に (6.45b) 式の解は、(6.46) 式を代入して、経路積分することにより、次の様に表わされる。

$$\chi = - (1/2k) \int_{\text{path}} \square h^{\mu\nu}(s') k_\mu k_\nu ds' ds', \quad (6.47)$$

h'' が重力を表わすことから、 $\square h''=0$ であるので $x=0$ となる。
しかしながら高次項をを考えると、必ずしも x は零となることはない。

ここで直交座標系をとり、 $z=0$ 平面で $S=0$ となるような境界条件を
付加すると、角度(θ ,)で入射する平面波光に対して

$$h''(s') = h''(x - (z - z')\tan\theta \cos, y - (z - z')\tan\theta \sin, z, \\ t - (z - z')\sec\theta / c), \\ ds' = dz \sec\theta, \quad (6.48)$$

である。特に、 $=\pi/2$ で $y-z$ 平面を伝播する x 方向に完全偏光した
光に対して、 y 方向に伝播する平面重力波の h 成分が

$$h_{33} = \alpha \cos(py - \Omega t), \quad (\alpha \ll 1) \quad (6.49)$$

で表わされる時、 S は次のようになる。

$$S = -(\alpha k/2)\cos\theta \int_0^z \cos(py - p(z - z')(1 - \sin\theta)\sec\theta - \Omega t) dz' \\ = -(\alpha k/p)(1 + \sin\theta) \cos(py - (p/2)z(1 - \sin\theta)\sec\theta - \Omega t) \\ \quad \times \sin(pz(1 - \sin\theta)\sec\theta/2), \quad (6.50)$$

Bessel関数の母関数の性質

$$\exp(iu \cos v) = \sum e^{in\pi/2} J_n(u) e^{in v},$$

を利用すると、回折された光ポテンシャルは次のように表わされる。

$$A_1 = a \sum e^{-in\pi/2} J_n(w) \exp[i\{(k \sin\theta + n p)y \\ + (k \cos\theta - (n p/2)(1 - \sin\theta)\sec\theta)z - \Omega t\}], \quad (6.51)$$

ここで

$$w = (\alpha k/p)(1 + \sin\theta) \sin(p(1 - \sin\theta)\sec\theta z/2), \quad (6.52)$$

である。もし

$$|p(1 - \sin\theta)\sec\theta z| < 1, \quad (6.53)$$

であれば、(6.52)式は近似的に $1/2\alpha k z \cos\theta$ となり、前節
の結果と一致する。(6.53)式の不等式は $0 < (1 - \sin\theta)\sec\theta < 1$
であることから、 z は重力波の波長 Λ よりも十分小さいことを意味して
いる。前節でも述べた様に、重力波と光とはきわめて小さな相互作用し
かないので、2次以上の高次回折光は無視される。重要なのは1次回折
光強度

$$a^2 J_1^2(w) - (a^2/16) \{ (\alpha k/p)(1+\sin\theta) \sin(p(1-\sin\theta)\sec\theta z/2) \}, \quad (6.54)$$

である。 $\theta=0$ の時、 (6.54) 式は

$$J_1^2(w) - (\alpha k/4p)^2 \sin^2(pz/2), \quad (6.55)$$

となり、 $z = \Lambda(n+1)/2$ の時最大になり、光ビームを能率的に回折させる。

重力波が離散的なスペクトルを持ち

$$h_{33} = \sum \alpha_m \cos(\Omega_m t - p_m y + \delta_m), \quad (6.56)$$

で表わされるとしよう。 δ は位相定数である。(6.46) 式に代入すると

$$S = \sum (\alpha_m k/p_m)(1+\sin\theta) x \cos(\Omega_m t - p_m y - p_m(1-\sin\theta)\sec\theta z/2 + \delta_m) x \sin(p_m(1-\sin\theta)\sec\theta z/2), \quad (6.57)$$

となる。これより x 方向に完全に偏光した光は

$$A(x, y, z, t) = a \prod \sum e^{-1/2} J_n(w_m) \exp[i\{(\omega + n\Omega_m)t - (k\sin\theta + n p_m)y + (k\cos\theta - (n p_m/2)(1-\sin\theta)\sec\theta)z + n\delta_m\}], \quad (6.58)$$

となる。ただし

$$w_m = (\alpha_m k/p_m)(1+\sin\theta) \sin(p_m(1-\sin\theta)\sec\theta z/2), \quad (6.59)$$

である。0、+1、+2 次の回折光振幅は、具体的に次のようになる。

$$A_{(0)} = a \prod J_0(w_m) \exp\{i(\omega t - k\sin\theta y - k\cos\theta z)\}, \quad (6.60a)$$

$$A_{(\pm)1} = +i A_{(0)} \sum J_1(w_m) J_0^{-1}(w_m) \exp[i\{(\Omega t - p y - p(1-\sin\theta)\sec\theta z/2)\}], \quad (6.60b)$$

$$A_{(\pm)2} = -A_{(0)} \sum [\sum J_1(w_m) J_1(w_1) J_0^{-2}(w_m) x \exp[+i\{(\Omega_m + \Omega_1)t - (p_m + p_1)y - p_m(1-\sin\theta)\sec\theta z/2\}] + J_2(w_m) J_0^{-1}(w_m) \exp[i\{(\Omega_m t - p_m y - p_m(1-\sin\theta)\sec\theta z/2\}]] \quad (6.60c)$$

連続的なスペクトルを持つ重力波によって回折される光は、重力波の波長に応じた方向に回折される。

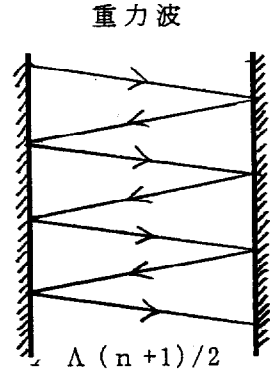


図 6. 5 単色重力波による光ビームの回折

次に単色光が重力波の存在する空間中をどのように伝播していくかを検討して見よう。これはMaxwell-Einstein方程式(6.19)の境界値問題の一種であり、第4章で論じたように取扱う。直交座標系で $z=0$ 平面上に境界値 $f(\xi, \eta)$ を指定したとき、境界値の空間周波数分解したのち、各成分について(5.46)式で示したような経路積分を施せばよい。

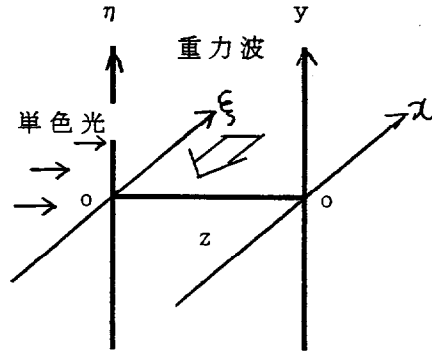


図6.6 M-E方程式の境界値問題の座標系

$$\begin{aligned} u &= k \sin \theta \cos \theta \\ v &= k \sin \theta \sin \theta \end{aligned}$$

を(7.48)式に代入すると

$$h^{\mu\nu}(Lr', t) = h^{\mu\nu}\left(x - \frac{(z-z')u}{\phi(u, v)}, y - \frac{(z-z')v}{\phi(u, v)}, z, t - \frac{(z-z')}{\phi(u, v)}\right) \quad (6.61)$$

となる。超音波による光回折と違っている点は、時間項に遅れが入っている点である。この原因は超音波の速度が光速より十分小さいので、遅れが無視されているのに対して、重力波は光速で伝播するため、遅れが無視できないからである。(6.61)式とRayleigh回折公式のスペクトラム表現とを利用すると、M-E方程式の境界値問題の近似回折公式

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu}(x, y, z, t) &= e^{i\omega t} \int \int d\xi d\eta f(\xi, \eta) (2\pi)^{-2} \int \int du dv \\ &\exp \left[i \left\{ (\xi - x)u + (\eta - y)v + z\phi(u, v) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1/2k) \int_0^{\omega} h^{\mu\nu}(Lr', t) k_{\mu} k_{\nu} \sec \theta dz' \right\} \right], \end{aligned} \quad (6.62)$$

が導かれる。重力相互作用定数が小さいため、上記の1次近似式で十分に通常の現象が記述されると思われる。もう少し厳密な解を求めたいならば、逐次近似を繰り返せばよい。但し次数が大きくなるにつれて、積分が複雑になってくる。

以上のように重力波による光回折の古典論では、入射重力波強度と光強度の積に比例した量の光が回折される。しかしながら、古典的解析はかなり大量の光と重力波が存在する場合の、平均値しか記述していないように思われ、この大量がどの程度なのかははっきりしない。重力波による光回折の真の記述は、場の量私論を使った方法で行われなくてはならない。重力場の量子は重力子と呼ばれ、電磁場の量子である光子が、重力子によって散乱されることで回折が生ずる。しかし、今迄多くの物理学者によって計算された重力子による光子散乱は、一粒子又は二粒子系のみで、コヒーレント状態に縮退した重力子と光子との相互作用は、未だ解析されていない。今後に残された問題の一つである。

6. 6 まとめ

重力波と光波の相互作用を記述するMaxwell-Einstein方程式を使って、単色平面光波が入射した時、どの様にどの位光が回折を起こすかを近似的に計算した。偏光面が必ず回転することが分かった。重力波の波長が光波のそれに比べて、十分大きい時、位相関数法を適用して計算し、Raman-Nath回折に似た光回折、すなわち n 次の回折光は n 次のBessel関数で記述されることを発見した。しかしながら、角度依存性は、物質中のRaman-Nath回折と違っている。これは重力波が光速度で伝播して行くことに原因がある。

第 7 章 結 論

7. 1 本研究で得られた結論

第 2 章では、宮本-Wolf の境界回折理論が 2 つの点で矛盾していることを示して、新しい形の境界回折公式を導いた。すなわち、境界値が解析的である条件の下に、複素関数論における Cauchy の積分公式と、Rayleigh 回折公式とを利用して、新境界回折公式を得た。特に開口が円形であるときには、Poisson の公式を利用して解析的な境界回折公式を導いた。境界値が調和的でなくても、Dirichlet 問題の解であれば形式的な Green 関数で表した境界回折公式が導けることを示した。さらにベクトル波である電磁波に対する Luneberg の回折公式を利用して、光に対する各々の場合に応じた境界回折公式を導いた。

第 3 章では、境界曲面が滑らかで一価正則関数で表わされる時、部分的コヒーレント波の伝播法則を表わす回折式を導いた。特に境界面が平面の時、部分的コヒーレント波回折公式は、2 パラメーター半群に属していることを明かにした。滑らかな曲面から、準単色インコヒーレント波が放射されている時の van Cittert-Zernike 定理の数式表現を与えた。

第 4 章では、時間的空間的に変動する媒質中を伝播する波動、特に光について、位相関数法による解析を行った。Maxwell 方程式の近似的な解を与え、超音波による光回折の新しい公式を得た。この公式は Klein-Cook が示した解よりも近似度がよく、特別名場合には、Raman-Nath 回折公式に移行するものである。離散的なスペクトルを持つ超音波によって回折された光の 0 次、+1 次、+2 次の振幅を示した。又、境界平面上に境界値を指定した時の、非一様媒質中の境界値問題の近似解を Rayleigh 回折のスペクトル表現を利用して与えた。この近似解より、非一様媒質中を伝播する部分的コヒーレント光に対する近似回折公式を導き、インコヒーレント光伝播に関する van Cittert-Zernike 定理の一般化された数式表現を示した。

第 5 章では、異方非一様媒質中での光回折について解析し、第 5 章と同じく位相関数法を適用して、近似回折公式を与えた。境界平面に境界値を与えた時、コヒーレント光と部分的コヒーレント光の両方について、境界値問題の近似解を導いた。入射光と同じ位の空間変動を有する異方媒質での振舞いを解析するため、Born 近似を適用した。その結果、Bragg 条件がある積分式の分母の極をつくる条件として判定され、常回折と異常回折の両方に対して、波動伝播式を導いた。

第 6 章では、今まで誰にも解析されなかった重力波による光回折について、平面波展開法と位相関数法の両方によって解析した。Raman-Nath 回折とよく似ていて、回折された光の振幅は、整数次数の Bessel 関数で表わされるが、入射角度依存性と位相変化の点について、違っていることがわかった。重力相互定数が小さいので、回折された光量はきわめて小さいことが、評価でわかった。位相関数法によって、もう少し詳しく角度依存性、近似式の成立する範囲と領域を調べ、離散的なスペクトルを有する重力波によって回折された、光の 0 次、+1 次、+2 次の振幅を求めた。

7. 2 今後の問題点

第2章の境界回折問題は、境界が円形開口でかつ境界値が調和的という条件の下で、Poisson公式を応用して、解析的解を与えた。一般のケースでは、Dirichlet問題のGreen関数が求まれば、回折場が計算できるという形式的解のみで終わった。今後解決すべき問題の1つである。さらに部分的コヒーレント波動の境界回折問題についても、同じ条件の下で、解析的解を与えた。やはり、一般的な条件の下では、形式的解しか与えられなかった。今後の問題の1つである。

第3章の曲面からの波動伝播では、滑らかで一価正則な関数で表される曲面の場合のみ、2重積分表示を利用して解析的解を与えることができた。この公式は、振動ホログラフィーの解析に応用できると思われる。しかしながら、観測面上の値から、曲面上の境界値を求める、いわゆる逆問題の解答を与えることはできなかった。今後の問題である。さらに部分的コヒーレント波動伝播の問題は、コヒーレント波動に対する解を利用して、解決できた。特にインコヒーレント波動が曲面から放射されている場合、一般化されたvanCittert-Zernikeの定理が導出された。この性質を使って像を再生しようとする手段に応用できるであろう。

第4章の非一様場中の波動回折の解析は、レーザーを利用して非一様媒質場や応力場の視覚化、音響場から光の場への変換の解析に応用できる。超音波の多重相関を実時間で計測したい場合、高次の回折光を観測すれば求まるので、それらに応用できるであろう。ここで示した公式は、回折トモグラフィにも応用できるであろう。

第5章の異方性媒質中の光回折は、2つのケースについて解析された。1つは、結晶中に歪やずれが光の波数よりも十分小さい場合で、一般化されたRaman-Nath回折が導出された。光の偏光面に依存した回折光が生ずることがわかった。全章と同じく、超音波のスペクトルの視覚化や、その多重相関の実時間処理に役に立つ公式である。もう1つのケースは、超音波の波数が光のそれとほぼ同じ場合であり、Maxwell方程式を近似的に解いて、散乱振幅の積分の中身が、2重極条件を満たす時、Bragg回折や偏光面が回転する異常Bragg回折が起こることを示した。これらの公式は、X線による像形成に利用されるBragg-Fresnellレンズの作成に応用できるであろう。しかしながら、中間のケースの解析は未だなされていない。今後の問題の1つである。

第6章の重力波による光回折は、新しい現象を取り扱った所に意義があるが、実際に応用しようとするとかかなりの困難が伴う。原因は2つあり、1つは重力波が現実の空間で極めて小量しか放射されていない上、人工的に大規模に作り出す技術がわかっていないこと、その2は高密度で周波数的に高安定なレーザー光を長時間閉じ込めておく技術が未だ確立されていないことによる。機械的な方法で重力波を測定できるのは、せいぜい10 Hzくらいが限度であり、これ以上の高い周波数の重力波を観測するには、電磁的方法が今後採られるであろうと思われる。

以上の12個以上の新しく導いた公式は、光通信、光情報による映像再生や形成、評価、画質の向上、画像の鮮明度の推定だけでなく、基礎物理学や天文学への多くの応用が期待できると思われる。

参考文献

第1章

- 1) 吉原邦夫：物理光学（共立，1966）
- 2) 久保田広：波動光学（岩波，1971）第III篇
- 3) M. Born and E. Wolf: Principles of Optics (Pergamon Press, New York, 1975) fifth ed. Ch. VIII.
- 4) 会田軍太夫：波動光学入門（東京電機大学出版局，1980）
- 5) G. Tyras: Radiation and Propagation of Electromagnetic Waves (Academic Press, New York, 1969)
- 6) 村田和美：光学（サイエンス社，1979）
- 7) 高橋健人：物理数学（培風館，1958）第III章
- 8) イ・ゲ・ペトロフスキー；吉田耕作校閲，渡辺毅約：偏微分方程式論（東京図書，1958）第2章
- 9) 寺沢寛一：数学概論（岩波，1960）A第3、4章
- 10) 小松勇作編：数学ハンドブック（朝倉，1973）A第3、4章.
- 11) M. Born and E. Wolf: Principles of Optics (Pergamon Press, New York, 1975) fifth ed. Ch. XI.
- 12) R. Barakat: Progress in Optics (ed. by E. Wolf, North-Holland Publi., Amsterdam, 1966) Vol. I p. 69.
- 13) 加野泰：コヒーレンス理論とその応用（岩波，1976）第1章
- 14) A. Sommerfeld: J. Ber. Deutsch. Math. 21 (1912) 309.
- 15) F. Kottler: Ann. Phys. 70 (1923) 405, 457.
- 16) Lord Rayleigh: Theory of Sound (Dover Publication, Inc., New York, 1969) 2nd ed., Vol. II p. 278.
- 17) R. K. Luneberg: Mathematical Theory of Optics (University of California Press, Berkeley, 1964) p. 319.
- 18) G. A. Maggi: Ann. Math. Pure Appl. 16 (1888) 21.
- 19) E. Maey: Wied. Ann. Phys. 49 (1893) 96.
- 20) A. Sommerfeld: Math. Ann. 47 (1896) 317.
- 21) F. Kottler: Ann. Phys. 70 (1923) 457.
- 22) O. Laporte and J. Meixner: Z. Phys. 153 (1958) 129.
- 23) R. S. Ingarden: Acta Phys. Polon. 14 (1955) 77.
- 24) K. Miyamoto: Proc. Phys. Soc. 79 (1962) 617.
- 25) K. Miyamoto and E. Wolf: J. Opt. Soc. Amer. 52 (1962) 615, 626.

- 26) A. Rubinowicz: Ann. Phys. 53 (1917) 257;
ibid., 73 (1924) 339; Acta Phys. Polan. 3
(1934); Phys. Rev. 54 (1934) 931;
Acta Phys. Polan. 12 (1953) 225; J. Opt.
Soc. Amer. 52 (1962) 717; (Progress in
Optics, ed. by E. Wolf (North-Holland Publ.,
Amsterdam, 1965) Vol. IV. p.199
- 27) E. W. Marchand and E. Wolf: J. Opt. Soc. Amer.
52 (1962) 761.
- 28) E. Verdet: L d'Opt. Phys. 1 (1869) 106.
- 29) A. A. Michelson: Phil. Mag. 30 (1890) 1; ibid.,
Astrophys. J. 51 (1920) 257.
- 30) M. von Laue: Ann. d. Physik, 23 (1907) 1, 795.
- 31) M. Berek: Z. Phys. 36 (1926) 675, 824;
37 (1926) 387.
- 32) P. H. van Cittert: Physica, 1 (1934) 201; ibid.,
6 (1939) 1129.
- 33) F. Zernike: Physica, 5 (1938) 785.
- 34) E. Wolf: Proc. Roy. Soc., A230 (1955) 246;
ibid., A225 (1954) 96; Nuovo Cimento 12
(1954) 884.
- 35) A. Blanc-Lapierre and P. Dumontet: Rev. d'Optique
34 (1955) 1.
- 36) G. B. Parrent, Jr.: J. Opt. Soc. Amer. 49
(1959) 787.
- 37) M. J. Beran and G. B. Parrent, Jr.: Theory of Partial
Coherence (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.,
1964) Chap. 3.
- 38) J. Perina: Coherence of Light (Van Nostrand Reinhold,
London, 1972) Chap. 3.
- 39) V. I. Tatarski: Wave Propagation in a Turbulent
Media (translated by R. A. Silverman; Dover
Publication, Inc., New York, 1961).
- 40) J. W. Strohbehn and S. F. Clifford: IEEE Trans.,
AP-15 (1967) 416.
- 41) F. J. Dyson: Phys. Rev. 75 (1949) 486.
- 42) K. Nishijima: Field and Particles (Benjamin, New
York, 1969) Chap. 4.
- 43) W. P. Brown, Jr: IEEE Trans., AP-15 (1967)
81.
- 44) 立居場光生: 電子通信学論文誌 48-B (1973) 1.
- 45) L. A. Chernov: Wave Propagation in a Random
Medium (Dover Publication, Inc., New York, 1967).
- 46) L. Brillouin: Ann. de Physique, 17 (1921) 103.

- 4 7) P. Debye and F. W. Sears: Proc. Nat. Acad. Sci., Wash., 18 (1932) 409.
- 4 8) R. Lucas and P. Biquard: J. Phys. Radium, 3 (1932) 464.
- 4 9) C. V. Raman and N. S. N. Nath: Proc. Ind. Acad. Sci., A2 (1935) 406, 413; ibid., A3 (1936) 75, 119.
- 5 0) R. Extermann and G. Wannier: Helv. Phys. Acta, 9 (1936) 520.
- 5 1) W. R. Klein and B. D. Cook: IEEE Trans., SU-14 (1967) 123.
- 5 2) P. L. Chow: J. Math. Phys. 13 (1972) 1224.
- 5 3) D. N. Pattanyak and E. Wolf: Opt. Commun., 6 (1972) 217.
- 5 4) E. Wolf: Coherence and Quantum Optics, ed. by L. Mandel and E. Wolf (Plenum, New York, 1973) p. 339.
- 5 5) T. Suzuki: J. Opt. Soc. Amer. 65 (1975) 679.
- 5 6) M. Born and E. Wolf: Principles of Optics (Pergamon Press, New York, 1975) fifth ed. Ch. p. 100.
- 5 7) 石黒、小川、小林、高崎、新関、山本、宅間: 結晶光学 (森北出版, 1970) 第2章
- 5 8) H. Kogelnik: Bell Sys. Tech. J. 48 (1969) 2909.
- 5 9) L. B. Felsen: Proc. Inst. Electr. Eng. 111 (1964) 445, 454.
- 6 0) L. Bergstein and T. Zachos: J. Opt. Soc. Amer. 56 (1966) 931.
- 6 1) E. Lalor: J. Math. Phys. 13 (1972) 437, 443.
- 6 2) J. J. Stamnes and G. C. Shermann: J. Opt. Soc. Amer. 66 (1976) 780; ibid., 68 (1978) 502.
- 6 3) D. W. Dixon: IEEE J. Quantum Electron. QE-3 (1967) 85.
- 6 4) N. Uchida: IEEE J. Quantum Electron. QE-7 (1971) 160.
- 6 5) N. Uchida and N. Niizeki: Proc. IEEE 61 (1973) 1073.
- 6 6) 矢野健太郎、武藤義夫: テンソル解析 (広川書店, 1968)
- 6 7) 山内恭彦、内山龍雄、中野重夫: 一般相対論および重力の理論 (裳華房, 1967)
- 6 8) A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl, and H. Minkowski: The Principle of Relativity (Dover Publication, Inc., New York, 1952) p. 153.
- 6 9) H. Weyl: Space Time Matter (Dover Publication, Inc., New York, 1952)
- 7 0) ランダウ、リフシッツ: 場の古典論 (商工出版, 1959) 第10章

- 7 1) J. Weber: General Relativity and Gravitational Waves
(Interscience Publishers, Inc., New York, 1961)
- 7 2) J. Weber: Phys. Rev. 117 (1960) 306; Phys.
Rev. Letters, 18 (1967) 498; ibid., 20
(1968) 1307; ibid., 21 (1968) 395;
22 (1969) 1320.

第2章

- 1) A. Rubinowicz: Progress in Optics, ed. by E. Wolf
(North-Holland Publ., Amsterdam, 1965) Vol.
I V. p. 199
- 2) K. Miyamoto and E. Wolf: J. Opt. Soc. Amer. 52
(1962) 615, 626.
- 3) E. W. Marchand and E. Wolf: J. Opt. Soc. Amer.
52 (1962) 761.
- 4) 小松勇作: 函数論 (朝倉, 1960)
- 5) イ・ゲ・ペトロフスキー; 吉田耕作校閲, 渡辺毅約: 偏微分方程式論
(東京図書, 1958) 第3章
- 6) K. Kojima: Jpn. J. Appl. Phys. 16 (1977) 1953.
- 7) R. K. Luneberg: Mathematical Theory of Optics
(University of California Press, Berkeley, 1964)
p. 319.
- 8) K. Kojima: Jpn. J. Appl. Phys. 18 (1979) 759.
- 9) C. L. Mehta: Nuovo Cimento 36 (1965) 202.
- 10) D. Kohler and L. Mandel: Coherence and Quantum Optics,
ed. by L. Mandel and E. Wolf (Plenum, New York, 1973)
p. 387.
- 11) L. V. Ahlfors: Complex Analysis (McGraw-Hill, New
York, 1966) p. 387.
- 12) 高橋秀俊: 電磁気学 (裳華房, 1960)

第3章

- 1) 高橋健人: 物理数学 (培風館, 1958) 第III章
- 2) イ・ゲ・ペトロフスキー; 吉田耕作校閲, 渡辺毅約: 偏微分方程式論
(東京図書, 1958) 第2章
- 3) 寺沢寛一: 数学概論 (岩波, 1960) A第3、4章
- 4) 小松勇作編: 数学ハンドブック (朝倉, 1973) A第3、4章.
- 5) K. Kojima: Jpn. J. Appl. Phys. 17 (1978) 497.
- 6) M. J. Beran and G. B. Parrent, Jr.: Theory of Partial
Coherence (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.,
1964) Chap. 3.
- 7) J. Perina: Coherence of Light (Van Nostrand Reinhold,
London, 1972) Chap. 3.
- 8) K. Kojima: Jpn. J. Appl. Phys. 17 (1978) 155.

- 9) P. H. van Cittert: Physica, 1 (1934) 201; ibid., 6 (1939) 1129.
- 10) F. Zernike: Physica, 5 (1938) 785.

第4章

- 1) L. A. Chernov: Wave Propagation in a Random Medium (Dover Publication, Inc., New York, 1967).
- 2) M. Born and E. Wolf: Principles of Optics (Pergamon Press, New York, 1975) fifth ed. Ch. VIII.
- 3) G. Tyras: Radiation and Propagation of Electromagnetic Waves (Academic Press, New York, 1969)
- 4) V. I. Tatarski: Wave Propagation in a Turbulent Media (translated by R. A. Silverman; Dover Publication, Inc., New York, 1961).
- 5) C. V. Raman and N. S. N. Nath: Proc. Ind. Acad. Sci., A2 (1935) 406, 413; ibid., A3 (1936) 75, 119.
- 6) K. Kojima: Jpn. J. Appl. Phys. 19 (1980) 647.
- 7) 森口繁一: 数学公式III (岩波, 1960) 第VI編
- 8) W. R. Klein and B. D. Cook: IEEE Trans., SU-14 (1967) 123.
- 9) D. N. Pattanyak and E. Wolf: Opt. Commun., 6 (1972) 217.
- 10) E. Wolf: Coherence and Quantum Optics, ed. by L. Mandel and E. Wolf (Plenum, New York, 1973) p. 339
- 11) Lord Rayleigh: Theory of Sound (Dover Publication, Inc., New York, 1969) 2nd ed., Vol. II p. 278.
- 12) G. C. Shermann: J. Opt. Soc. Amer. 57 (1967) 1490.
- 13) W. D. Montgomery: J. Opt. Soc. Amer. 58 (1968) 1112.
- 14) J. R. Shewell and E. Wolf: J. Opt. Soc. Amer. 58 (1968) 1596.
- 15) M. J. Beran and G. B. Parrent, Jr.: Theory of Partial Coherence (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964) Chap. 3.

第5章

- 1) 石黒、小川、小林、高崎、新関、山本、宅間: 結晶光学 (森北出版, 1970) 第2章
- 2) V. I. Tatarski: Wave Propagation in a Turbulent Media (translated by R. A. Silverman; Dover Publication, Inc., New York, 1961).

- 3) C. V. Raman and N. S. N. Nath: Proc. Ind. Acad. Sci., A 2 (1935) 406, 413; ibid., A 3 (1936) 75, 119.
- 4) M. Born and E. Wolf: Principles of Optics (Pergamon Press, New York, 1975) fifth ed. Ch. XIV.
- 5) K. Kojima: Jpn. J. Appl. Phys. 21 (1982) 1303.
- 6) G. Tyras: Radiation and Propagation of Electromagnetic Waves (Academic Press, New York, 1969)
- 7) H. Kogelnik: Bell Sys. Tech. J. 48 (1969) 2909.
- 8) L. B. Felsen: Proc. Inst. Electr. Eng. 111 (1964) 445, 454.
- 9) L. Bergstein and T. Zachos: J. Opt. Soc. Amer. 56 (1966) 931.
- 10) E. Lalor: J. Math. Phys. 13 (1972) 437, 443.
- 11) J. J. Stamnes and G. C. Shermann: J. Opt. Soc. Amer. 66 (1976) 780; ibid., 68 (1978) 502.
- 12) D. W. Dixon: IEEE J. Quantum Electron. QE-3 (1967) 85.
- 13) N. Uchida: IEEE J. Quantum Electron. QE-7 (1971) 160.
- 14) N. Uchida and N. Niizeki: Proc. IEEE 61 (1973) 1073.

第6章

- 1) 山内恭彦、内山龍雄、中野重夫：一般相対論および重力の理論 (裳華房, 1967)
- 2) ランダウ、リフシッツ：場の古典論 (商工出版, 1959) 第10章
- 3) A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl, and H. Minkowski: The Principle of Relativity (Dover Publication, Inc., New York, 1952) p. 153.
- 4) H. Weyl: Space Time Matter (Dover Publication, Inc., New York, 1952)
- 5) J. Weber: General Relativity and Gravitational Waves (Interscience Publishers, Inc., New York, 1961)
- 6) J. Weber: Phys. Rev. 117 (1960) 306; Phys. Rev. Letters, 18 (1967) 498; ibid., 20 (1968) 1307; ibid., 21 (1968) 395; 22 (1969) 1320.
- 7) J. Sinsky and J. Weber: Phys. Rev. Letters 18 (1967) 795.
- 8) 関英男：電子通信学会誌 53 (1970) 628.
- 9) 千葉二郎、佐藤利三郎：電子通信学会誌 57 (1974) 828; 930.
- 10) 武者利光、関根松夫：電気学会誌 94 (1974) 865.
- 11) R. K. Sachs: Proc. Roy. Soc. (London) A 270 (1962) 103.

- 1 2) D. R. Brill: Phys. Rev. 135 (1964) B271.
- 1 3) M. Carmeli: Phys. Rev. 158 (1967) 1243.
- 1 4) M. Born and E. Wolf: Principles of Optics (Pergamon Press, New York, 1975) fifth ed. Ch. XII.
- 1 5) 小島賢二: 東洋大学工学部研究報告 14 (1978) 135.
- 1 6) V. I. Tatarski: Wave Propagation in a Turbulent Media (translated by R. A. Silverman; Dover Publication, Inc., New York, 1961).

- 3) E. Wolf: Proc. Roy. Soc., A230 (1955) 246; ibid., A225 (1954) 96; Nuovo Cimento 12 (1954) 884.
- 4) G. B. Parrent, Jr.: J. Opt. Soc. Amer. 49 (1959) 787.
- 8) K. Yoshida: Functional Analysis (Springer, Berlin, 1965)
- 9) E. Hill and R. S. Phillips: Functional Analysis and Semi-Group (Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 1957 Vol. 31, p. 302, 566.
- 1 0) 吉田耕作、河田敬義、岩村聡: 位相解析の基礎 (岩波, 1960) 第2編の第8章
- 1 1) 田村孝行: 半群論 (共立, 1970)
- 1 2) A. Rubinowicz: Progress in Optics, ed. by E. Wolf (North-Holland Publ., Amsterdam, 1965) Vol. IV. p. 199
- 1 3) K. Kojima: Jpn. J. Appl. Phys. 18 (1979) 759.

謝 辞

本論文を書くにあたり、東京工業大学精密工学研究所の上羽貞行教授に大変お世話になりました。心より厚くお礼を申し上げます。また、東京工業大学の上田光宏教授、大津元一教授、渡辺澄夫助教授、中村健太郎助教授、高田助教授、それに東洋大学工学部情報工学科の米山正秀教授にも厚くお礼を申し上げます。

本研究に関する公表論文

I. 学術雑誌掲載論文

第2章

- 1) . K. Kojima: " New Formulation of Boundary Diffraction"
Jpn. J. Appl. Phys. 16 (1977) 1953-1956.
- 2) . K. Kojima: " Boundary Diffraction of Light",
Jpn. J. Appl. Phys. 18 (1979) 759-764.

第3章

- 3) . K. Kojima: " Wave Propagation from Curved Surface"
Jpn. J. Appl. Phys. 17 (1978) 497-502.
- 4) . K. Kojima: " Partially Coherent Wave Propagation and
Generalized Van Cittert-Zernike Theorem", Jpn. J. Appl.
Phys. 17 (1978) 155-160.

第4章

- 5) . K. Kojima: " On the Wave Propagation in an Inhomogeneous
Medium", Jpn. J. Appl. Phys. 19 (1980) 647-651.

第5章

- 6) . K. Kojima: " Diffraction of Light Waves in an
Inhomogeneous and Anisotropic Medium", Jpn. J. Appl.
Phys. 21 (1982) 1303-1307.

第6章

- 7) . 小島賢二: " Classical Theory of Diffraction of Light
by Gravitational Waves", 東洋大学工学部研究報告
14 (1978) 135-139.

本研究に関する公表論文

- 1) . K. Kojima and S. Yamaguchi: " Functional Analysis of
Diffraction Integral Transform I. ", Jpn. J. Appl. Phys.
14 (1975) 1799.
- 2) . K. Kojima and S. Yamaguchi: " Functional Analysis of
Diffraction Integral Transform II. ", Jpn. J. Appl. Phys.
15 (1976) 2181.
- 3) . K. Kojima: " Sampling Theorem in the Diffraction Integral
Transform", Jpn. J. Appl. Phys. 16 (1977) 817.