

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

|                   |                                                                                                                                                                                           |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 題目(和文)            | 二層地盤の力学性状に関する解析的研究                                                                                                                                                                        |
| Title(English)    |                                                                                                                                                                                           |
| 著者(和文)            | 木村 孟                                                                                                                                                                                      |
| Author(English)   |                                                                                                                                                                                           |
| 出典(和文)            | 学位:工学博士,<br>学位授与機関:東京工業大学,<br>報告番号:乙第232号,<br>授与年月日:1968年6月12日,<br>学位の種別:論文博士,<br>審査員:山口 柏樹                                                                                               |
| Citation(English) | Degree:Doctor of Engineering,<br>Conferring organization: Tokyo Institute of Technology,<br>Report number:乙第232号,<br>Conferred date:1968/6/12,<br>Degree Type:Thesis doctor,<br>Examiner: |
| 学位種別(和文)          | 博士論文                                                                                                                                                                                      |
| Type(English)     | Doctoral Thesis                                                                                                                                                                           |

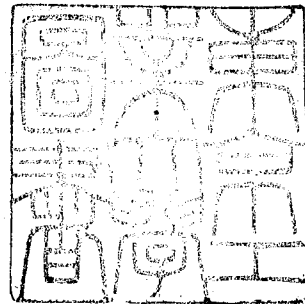
# 目次

## 第 I 章 序論

1

## 第 II 章 水平外力を受ける二層水平地盤の力学性状

|       |      |    |
|-------|------|----|
| 第 1 節 | 概論   | 19 |
| 第 2 節 | 解析結果 | 20 |
| 第 3 節 | 解析結果 | 44 |
| 第 4 節 | 考察語  | 46 |
| 第 5 節 | 結語   | 51 |



## 第 III 章 斜め地盤の応力性状

|       |      |    |
|-------|------|----|
| 第 1 節 | 概論   | 76 |
| 第 2 節 | 解析結果 | 77 |
| 第 3 節 | 解析結果 | 90 |
| 第 4 節 | 模型実験 | 91 |
| 第 5 節 | 考察語  | 93 |
| 第 6 節 | 結語   | 97 |

## 第 IV 章 水中有限層の接触応力と沈下性状

|       |      |     |
|-------|------|-----|
| 第 1 節 | 概論   | 109 |
| 第 2 節 | 解析結果 | 110 |
| 第 3 節 | 解析結果 | 124 |
| 第 4 節 | 模型実験 | 126 |
| 第 5 節 | 考察語  | 129 |
| 第 6 節 | 結語   | 134 |

## 第 V 章 くぼみを有する地盤の載荷問題

|       |      |     |
|-------|------|-----|
| 第 1 節 | 概論   | 149 |
| 第 2 節 | 解析結果 | 150 |
| 第 3 節 | 解析結果 | 154 |
| 第 4 節 | 考察語  | 164 |
| 第 5 節 | 結語   | 167 |

第Ⅵ章 現場実測値と理論値との比較

|     |         |     |
|-----|---------|-----|
| 第1節 | 概論      | 170 |
| 第2節 | 実測値との対比 | 173 |
| 第3節 | 考察      | 181 |
| 第4節 | 結語      | 185 |

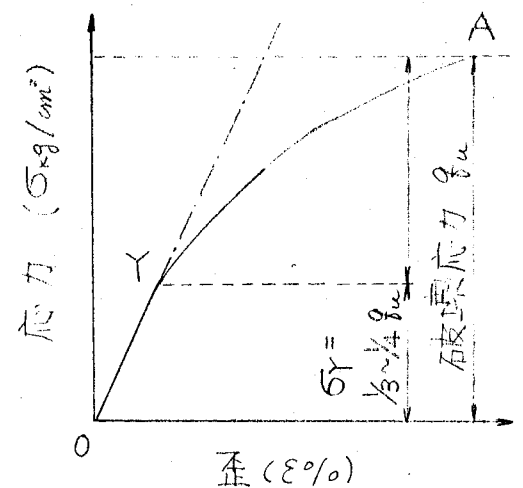
第Ⅶ章 結論 189

## 第 I 章 序 論

基礎地盤の力学においては、地盤の表面や内部に外力が加わったとき、地盤にどの程度の変形が生ずるかを予測することが重要な問題となっている。すなわち地盤の変形が上部構造に有害なものとなつてはならないからである。この問題は構造物基礎などを通じて与えられた接触力が地盤内にどのように分布するかということと密接な関係がある。もちろん応力そのものの評価も地盤の破壊の予知あるいは舗装構造の設計に見るごとくそれなりに大切なことである。

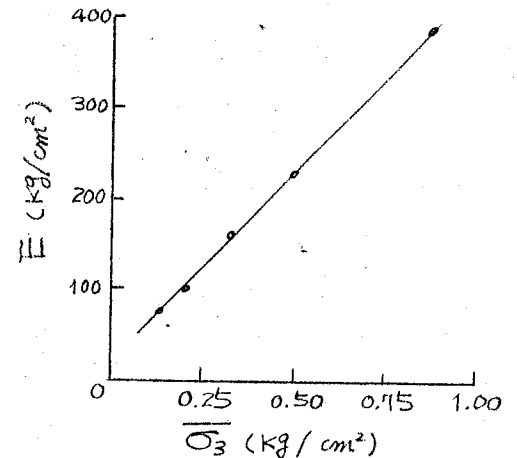
土の応力～歪の関係はきわめて複雑であつて、負荷と除荷とは同一経路をとらず、残留歪も無視しえない。したがつて応力値から変形を推定することは一般に容易ではない。しかし圧縮過程のみを対象とするような単純な負荷形式に対しては、小さい応力範囲で考える限り応力～歪の直線性は仮定してよいとされている。たとえば

(図-1)の OY 線以下では応力～歪の比例関係が保たれ、弾性として扱つてよい。比例限界に相当する応力  $\sigma_Y$  については、 $\sigma_Y = \frac{1}{3} \sim \frac{1}{4} \sigma_u$  とみなしうるといわれている (Kozdi, 1964)。他方圧密試験のように側



(図-1)一般的地盤の応力～歪曲線

方拘束のある場合には、応力～歪の関係は拘束圧力によって大きく影響を受け、一般に  $\sigma_y$  は拘束圧力とともに上昇し、同時に(図-2)に示すごとく圧縮弾性率も高くなる(Wu, 1966)。すなわち、この種の応力状態に対しては弾性的取扱いの適用性がより大きいことになる。



弾性力学におけると同じく、土の場合にも類似の定数を導入するが、土の応力～歪の挙動をより詳細に議論(図-2)拘束圧とヤング率との関係するためには、圧縮時と膨脹時とで弾性率を区別せねばならない(Skempton, 1948; Odenstad, 1948; Bjerrum, 1950)。しかしながら現在のところ具体的境界値向題に適用するまでに到っていない。ここでは簡単な実測例についてこの間の事情を考察してみたい。

側方拘束と非拘束状態のヤング率(見掛け圧縮弾性率)をそれぞれ  $E_c, E$  とすると

$$E = \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} E_c \quad (1.1)$$

である。ただし  $\nu$  はポアソン比。

一方、高さ  $h$ 、体積  $V$  の円筒供試体につき三軸排水試験を行ない、変化量  $\Delta h, \Delta V$  を測定すると

$$\nu = \frac{1-2\Delta V/V}{2\Delta h/h} \quad (1.2)$$

また原地盤で載荷実験を行なったときの表面沈下 $\Delta$ を与える弾性解は

$$\Delta = \frac{\pi(1-\nu^2)}{2E} a p_0 \quad (1.3)$$

である。 $a$ は載荷半径、 $p_0$ は荷重強度。

含水比の比較的高い関東ローム路床土について実測した結果を示すと(表~1)のごとくなる。なお(1.1)、(1.3)によって計算したポアソン比も示してある(竹下, 1955)。

(表~1) 土のポアソン比の実測値  
と計算値との比較

| NO. | 実 測 値               |                       |                            |                       | 計 算 値                 |                       |  |
|-----|---------------------|-----------------------|----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--|
|     | $E(\text{kg/cm}^2)$ | $E_c(\text{kg/cm}^2)$ | $P/\Delta (a=15\text{cm})$ | $\nu (1.2)\text{による}$ | $\nu (1.1)\text{による}$ | $\nu (4.3)\text{による}$ |  |
| 1   | 20.0                | 33.8                  | 1.73                       | 0.45                  | 0.361                 | 0.713                 |  |
| 2   | 23.0                | 27.0                  | 2.57                       | 0.45                  | 0.238                 | 0.787                 |  |
| 3   | 28.8                | 44.0                  | 3.36                       | 0.45                  | 0.338                 | 0.797                 |  |
| 4   | 26.4                | 53.7                  | 3.13                       | 0.45                  | 0.393                 | 0.801                 |  |
| 5   | 46.7                | 70.0                  | 4.76                       | 0.45                  | 0.333                 | 0.764                 |  |

実測したポアソン比は、弾性沈下式によって求めたものと大巾な相違が認められるが、これは弾性論による沈下の予測が困難なことを示すに他ならない。しかし後述するごとく、鉛直応力の値は理論値と実測値の間で比較的良く一致するという数多くの結果が知られている。この大きな理由として、鉛直応力に関してはその表示式中に何ら弾性定数を含んでいないことが考えられる。

このように沈下性状を議論する場合、弾性論の近似性が高いとはいえないが、応力分布に限れば弾性解の与える結果は相当信頼性があるのであって、弾性解析が基礎地盤の力学的挙動を解明する一つの有力な武器であることを否定することはできない。

以上述べたことから察知されるごとく、基礎地盤工学の分野においては、弾性論的手法を取り入れた研究は数多く見られる。これらの研究を基本的な形によって分類すると次の四つに大別される。すなわち

(1) 半無限体の表面における鉛直集中荷重に関するもので、いわゆる Boussinesq の問題といわれるもの (Love, 1944)

(2) 同じく表面に水平集中荷重が働くときの解で、Cerrutiによって与えられたもの (Love, 1944)

(3) 半無限体の内部に境界面と垂直な集中荷重が働く場合

(4) 同じく内部に境界面に平行な集中荷重が働く場合

である (大崎 1961)。(3)、(4) は Mindlin が解析し、それぞれ Mindlin の第 1 解、第 2 解として知られているが、これに数年先立って Melan が解を与えていることはあまり記憶されていないようである (Mindlin, 1936; Melan, 1932)。

ことに Boussinesq の解は最も基本的なものであって、地盤応力伝播に関するその後の多くの研究は、これを利用したも

のあるいは重ね合わせの理によって種々の場合に適用したものであるといっても過言ではない。

すなわち、鉛直荷重状態が円形等分布、長方形等分布、回転放物型分布、円錐型分布、有限線型分布などについて重ね合わせの結果が求められており、簡便に利用しうる図表、もしくは図式計算法も提示されている。

水平荷重の場合は、Cerrutiにより初めて扱われ、その後無岐が三次元非対称問題に対し、Hankel変換を導入して解く方法を与え、適用性が大きい点でとくに注目されている(牟岐, 1956)。また(2)に関しては、円上の求心的対称荷重に対する解も得られている(Barber, 1962)。

二次元問題として取扱う試みも多く、半無限体において線荷重、帯荷重、三角形荷重、台形荷重などの分布荷重に対する解析表示や、図表が整えられている。ことにMichellの論文はその応力表示が巧妙であって面白い(Michell, 1901)。クサビに関する研究も少なくない。この方面では、自重を考慮したBrahtzの研究は喧伝されているくらいがあり、むしろTranterによって導入されたMellin変換による解法が、この種の問題の解法としては秀れているように思われる(Brahtz, 1936 ; Tranter, 1948)。

以上一様な半無限体における弾性解法について略述した。

もちろん地盤を一樣半無限体と考えて実用上充分である場合も多い。しかしながら現実の地盤特性が均一であることはむしろ稀で、たとえば異方性地盤や異質性地盤を対象として理論を拡張しない限り實際的応用の道は少ない。この意味から等質等方 (homogeneous and isotropic) でない弾性体に関する研究も数多く試みられている。

等質異方性弾性体 (homogeneous and anisotropic) の仮定は、粘土地盤の堆積過程を通じて予想される異方性の近似として当然考えられるところである。板状粘土粒子の堆積中の配列の方向性については、実験的研究によってその特性が明確にされつつある (Hvorslev, 1960; Khera 他, 1967)。また突固めた粘性土の異方性も実験的に認められている (Seed 他, 1959; Livneh 他, 1967)。異方性弾性体の解析は主として直交異方性体で主軸が鉛直なものについて取扱われていたが、最近岩盤力学の発達によって主軸が地表面に対して傾斜した場合の解析も行なわれるようになった (川本, 1966)。なおこの方向に関連して Fröhlich の集中係数を導入した応力解がある (Fröhlich, 1934)。これは歪を考慮せず応力だけを対象としたものであるから、一般に適合条件を満たすものではない (Holl, 1940) が、粒状土中の応力特性を簡便に与えるものとして、サーチャージによる砂質裏込めの擁壁が受ける土圧の推定等利用さ

れている(市原, 1955(a), (b))。

また異質等方弾性体(*unhomogeneous and isotropic*)の問題に関しては, いわゆる多層地盤を対象とした研究が多く試みられている。とくに沖積地盤の典型であり, かつまた舗装構造のモデルとして重要な二層地盤についての研究はきわめて多い。

松村は主として, 弾性地盤の表面沈下という観点から二層系地盤を考察し, ある程度の数値解析を行なって基礎地盤の沈下計算にこれを利用している(松村, 1931)。残念ながらこの研究は国外的にはほとんど知られていない。しかし松村は, 弾性率が指数的に変化するときの半無限体の問題も解析しており, Gibson が最近同種の問題を事新しく扱っていることを思えば, その研究の質的高さは評価されるべきであろう(Gibson, 1966)。また Marguerre は二層の境界面が滑らかな場合について解を求め, 若干の数値計算を行なって境界面が粗であるときよりも計算が容易であると述べているが, 実際的应用面に欠けるきらいがある(Marguerre, 1931, 1933)。これに対して Burmister は, 弾性二層系地盤の表面に一様な鉛直力が作用した場合について多くの数値計算を行なって, 数表および図表を作製した(Burmister, 1943, 1945)。彼は, これをもちいて飛行場や道路についてくわしい解析を試み, 上層と下層との弾

性係数比を大きくすることによって下層へ伝達される応力を減らすことはできるが、その効果は載荷半径と上層の厚さとの比および弾性係数比の変化によって大きな影響を受けることを示した。また、彼は表面に垂直力が働いた場合に弾性体内に生ずるせん断応力を数値的に求め垂直応力との関係を示し、弾性係数比を大きくすることによって下層の応力を軽減しうるが、上層のせん断応力が増加し、上層がくり返し荷重によって破壊する危険があるので、舗装の構造としては、弾性係数比のあまり変わらない材料を順次積み上げていくのが望ましいと結論している (Burmister, 1962)。Fox はこの Burmister の解について数多くの数値解を与え、さらに *relaxation* 法をもちいて同種の問題の解を求め実際面への適用性を増大せしめた (Fox, 1948)。さらに Kezdi は応力の直進性を仮定し、光の屈折原理に基づいて応力伝播則を組み立て二層問題の近似解を与えている (Kezdi, 1957)。

有限深さの基礎地盤の問題も二層地盤の特殊な例と考えられるため、古くから多く人々によって研究が行なわれている。この種の問題を初めて取り扱ったのは Filon であり、矩形梁に対する厳密解を求めた (Filon, 1903)。剛性地盤と基礎地盤との接触状態が滑らかである場合、Melan は線荷重と帯荷重に対する解を示し、境界面が粗であるとき線荷重については

Marguerre が、帯荷重については Biot と Passer とが解析している (Melan, 1919; Marguerre, 1931; Biot, 1935; Passer, 1935)。Cummings は円形等分布荷重の中心軸上の鉛直応力を近似度の良い簡単な式で与えた (Cummings, 1941)。また表面変位は、Steinbrenner によって初めて取り扱われたが、この問題については植下が詳細に検討を加えている (Steinbrenner, 1934; 植下, 1967)。

以上二層地盤に関する従来の研究を概観したが、これらの研究は水平なる二層を対象としかつ鉛直荷重に関するものが大部分であって、層の形状や荷重の方向に対する考慮が充分であったとはいえない。

本論文はこの点に着目し

(I) 水平外力を受ける二層水平地盤の力学性状

(II) 斜め地盤の応力性状

(III) 水平有限層の接触応力と沈下性状

(IV) くぼみを有する地盤の載荷問題

の四つの問題を取り上げ、主として解析的あるいは数値的に研究を行なったものである。次にこれらについて研究の概要を述べる。

(I) 水平外力を受ける二層水平地盤の力学性状

二層水平地盤に関する従来の研究はその大部分が鉛直外力

のみを考慮したものである。地盤が地震時に水平外力を受け舗装が摩擦によって水平せん断力を及ぼされる頻度が少なくないにもかかわらず、水平力の影響を考慮した研究はあまり見当たらないようである。ことに舗装の場合には、二種類のせん断力が路面に働くことが Barber によって指摘されている (Barber, 1962)。すなわち車輛の空気タイヤは空気圧によって大きなプレストレスを受けているが、これが路面に接し車輛からの荷重を受けるとタイヤは横方向に伸びプレストレスが少なくなつて、路面にはタイヤの伸びた方向と逆方向つまり載荷面の中心に向つてせん断力が働く。また路面とタイヤの間にはかなりの摩擦があるから、ふつう車の進行方向あるいはこれとほぼ直角な方向に水平力すなわちせん断力が鉛直力によって引き起される。前者は求心的せん断力、後者は一方向せん断力と名づけられている。

路面に働く求心的せん断力は、車輛によって与えられる鉛直力とほぼ等しい大きさになりうることが報告されている (Marwick 他, 1941; Bonds 他, 1959)。また最近では、車輛が非常に高速化しているためにすべりに対する安全性が問題となり、舗装面に少しでも大きなすべり抵抗性を持たせようとする傾向にある。したがって路面の摩擦係数を測定したデータには 1.0 に非常に近い値があることも稀ではないといわれていること

から、曲線部を車輛が通過する際や、加速・制動を行なうときに路面に働く一方向せん断力も鉛直力と同じくらいの大さになるものと考えられる。このように鉛直力について解析を行なうことと同様に、表面にせん断力が作用する場合について解析することは地盤工学の総合的知識を備えるという点からも重要であろう。

本研究では、表面に一樣な一方向せん断力を受けた均一地盤に対する牟岐の解を、二層弾性体の場合に拡張し、応力および変位の解析解を求め、これについて具体的な数値を与えた。さらにこれらの数値に基づいて、二層地盤内の応力特性を把握するとともに、表面に鉛直力が加わったときの応力性状と比較して、舗装の破壊の一因として表面に作用するせん断力を考慮すべきことを明らかにした。またこれら理論値を地盤や路盤において行なわれた現場実測例と対比することによってその適用性を検討した。

## (II) 斜め地盤の応力性状

粘土層の多次元圧縮または圧密の問題に関しては、Biotの一般論を初めとして、Gibsonなどの半無限地盤における長方形載荷の解も与えられており、とくにサンドドレーンへの応用を含む軸対称圧密解析はBarron以来多くの研究者によって取上げられてきたことは周知の通りである。

しかしながら粘土地盤の下面が傾斜した硬い地盤上にあり、いわゆる扇形状に堆積している圧縮層の圧密論についてはあまり知られていないようであって、この種の斜めの粘土層が実際に現われる例が少なくないにもかかわらず、現在のところ計算法の手がかりが充分つかめていない状態である。したがって斜めの粘土層の圧縮を議論することの実用的価値は少ないものと思われる。

斜めの粘土層は無限に続く弾性クサビと見なすことができよう。クサビの側面に任意の鉛直外力が働くときの弾性解については二、三の研究がある。Shepherd は応力関数による解法を示し、表面の任意点に対称的な集中荷重が働いたときの応力分布を数値的に調べているが、変位については解を予想するに止まっている (Shepherd, 1935)。Tranter はこの問題に対しては Mellin 変換をもちいる方法を提案し、クサビの両面に頂点から有限中にわたって一様垂直荷重が加わったときの応力解を巧妙に与えているがやはり変位については何も触れていない (Tranter, 1948)。また色部らは Tranter の解法を応用して、地盤の底面の条件に応ずる応力、変位の Mellin 変換形を提示しているが、かんじんの逆変換形が求められていないので実用には供し難い (色部他, 1963)。

Tranter の応力解を重ね合わせることによって、クサビの

両面の任意区間に一様荷重が働いたときの応力解がえられるが、これはクサビの軸線上で周方向の変位とせん断応力が消失することを意味するから、このような解はクサビの半頂角の斜めの粘土層が岩盤または非圧縮性層の上にあつて、その境界での接合が微弱である場合の、帯状荷重による応力解に相当するものと考えられる。

本文では、上に述べた弾性応力解を種々の場合に数値計算によって求め応力の特性を調べた。またその結果をもちいて得られる平均主応力が初期過剰間隙圧に等しいとする近似仮定に基づいて、扇形域の圧密理論解の一般形式を与えた。

解析上の困難が克服されていないために、最終沈下の表示を与えることには成功していないが、ここに示す鉛直応力の分布特性は近似的に斜めの粘土層の圧縮量を評価する上で有効であると考えられる。

#### (Ⅲ) 水平有限層の接触応力と沈下性状

地盤に作用する荷重は、荷重の原因となりかつ荷重を伝達する構造物の剛性の大きさによつて撓み性荷重と剛性荷重とに大別される。

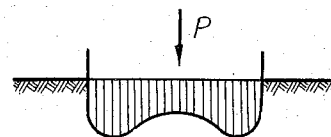
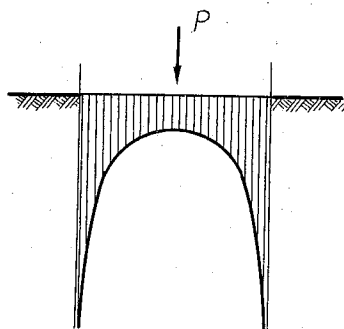
撓性荷重は剛性が小さく地表面の変形は応力分布をそれ程変えるものではない。したがつて接触応力はあらかじめ指摘されたものと考えてさしつかえない。車輛の輪荷重がこの種

の代表的なものであるが、薄いスラヴを介して伝達される床荷重もこの例と考えてよいであろう。

これに対して剛性荷重では、地盤に一樣な表面変位が生ずるが、逆にその接触応力の性質は一般に載荷構造物と地盤の剛性によって複雑な性状を示すのがふつうである。一樣半無限弾性体の場合このような分布について、二次元では Sadow-sky が、三次元では Boussinesq が解を与えている。(Timoschenko and Goodier, 1951)。これら理論的分布によれば、応力は荷重縁部で無限大となるが、実際には縁部附近では局部的降伏が生じ順次中央部へ荷重がうつって等分布形に近づく傾向にあると考えられる(図~3a)。Faber は砂地盤および粘土地盤において入念な実験を行ない、砂地盤における接触応力は端部附近で側方移動が生じ易いため Kögler らが報告したと同いく回転放物面状となるが、側方移動を拘束すると分布形が変わることを見出した(図~3b; Kögler 他. 1927, 1928, 1929; Faber, 1933)。また軟弱な粘土地盤においては一般に釣鐘状となるが、固結した粘土のような引張抵抗の大きい土においては周縁部で大きな応力が発生し理論分布の傾向に近いものとなることが確かめられた(図~3c)。なお深い基礎の底面における接触応力も等分布形に近くなることが知られている(図~3d; Kögler, 1936)。このように剛性荷重の接触応力は、

## (図-3) 接触応力分布と地盤との関係

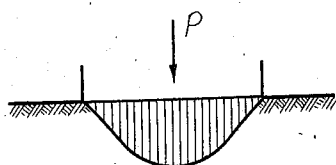
## (3-a) 理論的分布



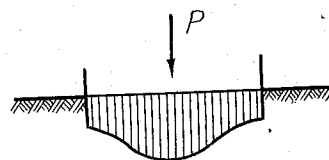
(3-a-2) 荷重縁部が降伏したとき

(3-a-1) Boussinesq (Sadowsky) による分布

## (3-b) 砂地盤における分布

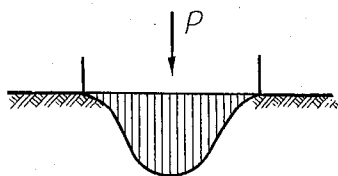


(3-b-1) 荷重縁部が拘束のないとき

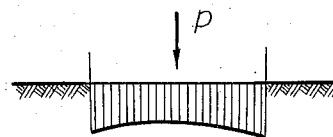


(3-b-2) 側方拘束のあるとき

## (3-c) 粘土地盤における分布

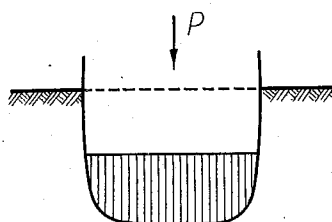


(3-c-1) 軟弱粘土



(3-c-2) 硬い粘土

## (3-d) 地中の構造物による分布



地盤の状態や載荷条件によって大きく影響を受けるものであるが、従来の研究は一樣な半無限地盤に関するものがほとんどで、二層地盤におけるいわゆるパンチング(punching)の問題を扱った研究はさきわめて数少ない。しかしながら岩盤やしまった砂礫層上に堆積した粘土地盤上に剛なる構造物を造る場合にはしばしば行なわれるものであり、最近の構造物の高層化現象とともにこの種のパンチングの問題は重要性を増しつつある現状である。

剛性荷重の接触応力ならびに沈下解析においては、後述するごとく分割的考察がしばしばもちいられるが、具体的計算においてはSteinbrennerなどの近似解をよりどころとするものが大部分である(Davis他, 1961)。本論文においては、有限深さの弾性体における厳密解を重ね合わせて剛性載荷条件を満たす接触応力の分布を求めると同時に、地盤内の応力性状を明らかにした。またフォームラバーによる模型実験を行ないその結果と比較検討し、土のような非弾性物体の載荷試験における変形係数のとり方に一つの手掛りを与えた。

#### (Ⅳ) くぼみを有する地盤の載荷問題

何らかの原因で道路の表面にくぼみがおけると、比較的短期間にその機能を失いがちであり、この傾向は砂利道のコルゲーションやアスファルト舗装の亀裂発生などに関連して突

際上しばしば経験されているところである。その理由としては、くぼみを通過する輪荷重の衝撃にもとづく荷重増大の効果に加えて、くぼみのあることによる応力分散の偏りが考えられる。

境界が直線でない二次元弾性問題の解法が試みられているものは二三にとどまらない。これは多く等角写像による二次元問題の解法である。Weber は周期的な波状境界を有する半無限板の問題を、多項式による写像関数を用いて応力解を与えるとともに、これに基づいて具体的な応力の数値を示している (Weber, 1942)。Neuber は放物線境界の問題を取り扱い、歯車のつけ根附近の応力状態を解析した (Neuber, 1962)。また色部は、Weber のもちいた写像関数を一般化することによって、任意の境界形状を有する半無限板の応力状態は理論的には解析し得ることを結論した (色部, 1966) が、実際問題に適用することは非常に困難なようである。その他、曲線境界の問題が Muskhelishvili の著書に、円凹欠きを有する半無限板の引張り問題に関する研究が Green らの著書に紹介されている (Muskhelishvili, 1953; Green 他, 1964)。

平面境界の一部に浅いなだらなくくぼみがあるような場合には、以上の研究を適用することが不可能であるように思われる。本論文では実用的意味から仮想境界法と呼ばれる一つ

の数値解法を提案した。

すなわち半無限体の表面のくぼみを無視した仮想水平面のくぼみで仕切られる範囲に未知の鉛直力および水平力を仮定する。これらの力による半無限体内の応力解を求め、考えるくぼみ面上の応力値が、あらかじめ与えられた境界力に等しくなるよう未知表面力を決定するのである。この方法によって、二三の放物線型くぼみ面上に指数的な分布荷重が作用したときの応力解を示し、これによって舗装面にくぼみが形成されると比較的短期間に舗装が破壊される理由の一端を明らかにした。

なお本論文においては引張り歪を正と考えた。

## 第Ⅱ章 水平外力を受ける二層水平地盤の力学性状

### 第1節 概 論

一様な一方向せん断力を受ける半無限体の問題は牟岐によって初めて解が与えられた。彼は円筒座標における変位成分を *Mitchell* ならびに *Boussinesq* の変位関数によって表わし、この関数を変数分離したものに *Hankel* 変換をほどき（牟岐，1956）。ちなみにこの牟岐の解は現在のところ、半無限体の三次元非対称問題の解としては唯一のものであるといわれている（宮本，1967）。

本章では、地盤が地震時に水平力を受け、舗装が摩擦によってせん断力を及ぼされる頻度が少なくないことを考慮し、上記牟岐の解を二層水平地盤の表面に一様な一方向せん断力が働いた場合に拡張して応力および変位の解析解を求め、これによって具体的な数値を与えた。さらにこれらの数値に基づいて、二層地盤内の応力特性を把握するとともに、表面に鉛直な力が加わったときの応力性状と対比して、舗装の破壊の原因を明らかにすることを試みた。

一般に二層地盤の問題においては、境界面の状態によって境界値問題としての取り扱い方がやや異なる。通常限界的な状態として、境界面が完全に滑らかである (*perfectly smooth*)

場合と完全に粗である (perfectly rough) 場合とが考慮されている。「滑らか」とは境界面でせん断応力が消滅し水平変位のずれが生じ得る状態をいい、「粗」とは境界面で応力および変位成分が連続である状態を示している。したがって現実の境界面はこれらの中間的状态にあるものと考えてさしつかえない。本章においてもこの二つの条件に対する解を示した。

## 第2節 解 析

2-1 基本解 三次元円筒座標による弾性方程式を変位成分によって表わすと次のごとくになる (図~4 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \left( \frac{v}{r} - 2 \frac{\partial u}{r \partial \theta} \right) &= 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ただし

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

は体積歪であり自重は考えないものとする。ここで Michell の変位関数  $\Phi$  と Boussinesq の変位関数  $\Psi$  によって変位成分を

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v &= -\frac{\partial^2 \Phi}{r \partial \theta \partial z} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ w &= 2(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

と表わし (宮本, 1961), (2.1)へ代入すれば

$$\nabla^4 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \Psi = 0 \quad (2.3)$$

がえられる (牟岐, 1956)。すなわち三次元弾性論においては、調和関数  $\Phi$  と重調和関数  $\Psi$  とによって変位成分が (2.2) のごとく表わせるのである。

応力と歪の関係によれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{2\mu} &= \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}) + \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial r} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ \frac{\sigma_\theta}{2\mu} &= \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}) - \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial r} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ \frac{\sigma_z}{2\mu} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} \\ \frac{\tau_{\theta z}}{2\mu} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \\ \frac{\tau_{rz}}{2\mu} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial z} \\ \frac{\tau_{\theta r}}{2\mu} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r \partial z} \left( \frac{\Phi}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

が得られる。ここで  $\mu (=G)$  はせん断剛性率である。

関数  $\Phi$ ,  $\Psi$  は一般性を失なうことなく Fourier 変換形式で

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(r, z) \cos m\theta \\ \Psi(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(r, z) \sin m\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

と表わせるから (2.3) は

$$\left. \begin{aligned} \nabla_m^4 \Phi_m &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \Phi_m = 0 \\ \nabla_m^2 \Psi_m &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_m = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

のごとくになる。

ここで Hankel 変換公式

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty r \nabla_m^4 \Phi_m J_m(\xi r) dr &= \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 \right)^2 \int_0^\infty r \Phi_m J_m(\xi r) dr \\ \int_0^\infty r \nabla_m^2 \Psi_m J_m(\xi r) dr &= \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 \right) \int_0^\infty r \Psi_m J_m(\xi r) dr \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

をもちい、 $\Phi_m$ ,  $\Psi_m$  の Hankel 変換形を

$$\left. \begin{aligned} G_m(\xi, z) &= \int_0^\infty r \Phi_m(r, z) J_m(\xi r) dr \\ H_m(\xi, z) &= \int_0^\infty r \Psi_m(r, z) J_m(\xi r) dr \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

と書く (Sneddon, 1951)。これによって (2.3) は

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 \right)^2 G_m(\xi, z) = 0, \quad \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 \right) H_m(\xi, z) = 0 \quad \dots (2.9)$$

なる常微分方程式に帰着される。この解は

$$\left. \begin{aligned} G_m(\xi, z) &= (A_m + B_m z) e^{\xi z} + (C_m + D_m z) e^{-\xi z} \\ H_m(\xi, z) &= E_m e^{\xi z} + F_m e^{-\xi z} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

ここに  $A_m, B_m, \dots, E_m, F_m$  は境界条件から定められる。かくのごとく  $G_m, H_m$  が確定すれば (2.8) の逆変換を行なうことによつて  $\Phi_m, \Psi_m$  を求めうるのである。これらは

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m(r, z) &= \int_0^\infty \xi G_m(\xi, z) J_m(\xi r) d\xi \\ \Psi_m(r, z) &= \int_0^\infty \xi H_m(\xi, z) J_m(\xi r) d\xi \end{aligned} \right\} (2.11)$$

ここに  $J_m(\xi r)$  は  $m$  次の第一種ベッセル関数である。

したがって (2.2) および (2.4) によってすべての変位ならびに応力成分が次のように決定できる。

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^\infty \left\{ (A_m \xi + B_m \overline{1+z\xi} + z E_m) e^{\xi z} \right. \right. \\ \left. \left. - (C_m \xi - D_m \overline{1-z\xi} - z F_m) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \right. \\ \left. - \int_0^\infty \left\{ (A_m \xi + B_m \overline{1+z\xi} - z E_m) e^{\xi z} \right. \right. \\ \left. \left. - (C_m \xi - D_m \overline{1-z\xi} + z F_m) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right] \cos m\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^\infty \left\{ (A_m \xi + B_m \overline{1+z\xi} + z E_m) e^{\xi z} \right. \right. \\ \left. \left. - (C_m \xi - D_m \overline{1-z\xi} - z F_m) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \right. \\ \left. + \int_0^\infty \left\{ (A_m \xi + B_m \overline{1+z\xi} - z E_m) e^{\xi z} \right. \right. \\ \left. \left. - (C_m \xi - D_m \overline{1-z\xi} + z F_m) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right] \sin m\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^\infty \left\{ (A_m \xi - B_m \overline{2(1-2\nu)} - z \xi^2) e^{\xi z} \right. \right. \\ \left. \left. + (C_m \xi + D_m \overline{2(1-2\nu)} + z \xi^2) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_m(\xi r) d\xi \right] \cos m\theta \end{aligned}$$

$$\sigma_r = 2\mu \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^\infty (A_m \xi + B_m \overline{1+2\nu} + z \xi^2) e^{\xi z} \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (C_m \xi - D_m \sqrt{1-2V} - z \xi) e^{-\xi z} \} \xi^3 J_m(\xi r) d\xi \\
& + \frac{m+1}{2r} \int_0^\infty \{ (A_m + B_m \sqrt{1+z\xi} + z F_m) e^{\xi z} \\
& - (C_m \xi - D_m \sqrt{1-z\xi} - z F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \\
& - \frac{m-1}{2r} \int_0^\infty \{ (A_m \xi + B_m \sqrt{1+z\xi} - z F_m) e^{\xi z} \\
& - (C_m \xi - D_m \sqrt{1-z\xi} + z F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \} \cos m\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta &= 2\mu \sum_{m=0}^\infty \left[ 2V \int_0^\infty \{ B_m e^{\xi z} + D_m e^{-\xi z} \} \xi^3 J_m(\xi r) d\xi \right. \\
& + \frac{m+1}{2r} \int_0^\infty \{ (A_m \xi + B_m \sqrt{1+z\xi} + z F_m) e^{\xi z} \\
& - (C_m \xi - D_m \sqrt{1-z\xi} - z F_m) e^{-\xi z} \} J_{m+1}(\xi r) d\xi \\
& + \frac{m-1}{2r} \int_0^\infty \{ (A_m \xi + B_m \sqrt{1+z\xi} - z F_m) e^{\xi z} \\
& - (C_m \xi - D_m \sqrt{1-z\xi} + z F_m) e^{-\xi z} \} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \left. \right] \cos m\theta \quad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= 2\mu \sum_{m=0}^\infty \left[ \int_0^\infty \{ (-A_m \xi + B_m \sqrt{1-2V} - z \xi) e^{\xi z} \right. \\
& + (C_m \xi + D_m \sqrt{1-2V} + z \xi) e^{-\xi z} \} \xi^3 J_m(\xi r) d\xi \left. \right] \cos m\theta
\end{aligned}$$

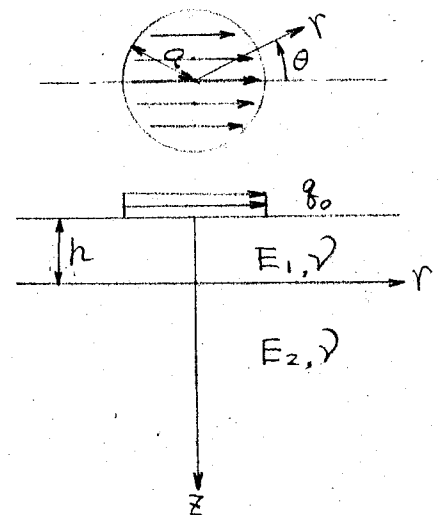
$$\begin{aligned}
\tau_{\theta z} &= \mu \sum_{m=0}^\infty \left[ \int_0^\infty \{ (A_m \xi + B_m \sqrt{1+z\xi} + F_m) e^{\xi z} \right. \\
& + (C_m \xi - D_m \sqrt{1-z\xi} - F_m) e^{-\xi z} \} \xi^3 J_{m+1}(\xi r) d\xi \\
& + \int_0^\infty \{ (A_m \xi + B_m \sqrt{1+z\xi} - F_m) e^{\xi z} \\
& + (C_m \xi - D_m \sqrt{1-z\xi} + F_m) e^{-\xi z} \} \xi^3 J_{m-1}(\xi r) d\xi \left. \right] \sin m\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = \mu \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \left\{ (A_m \xi + B_m \sqrt{1+z\xi} + F_m) e^{\xi z} \right. \right. \\ \left. \left. + (C_m \xi - D_m \sqrt{1-z\xi} - F_m) e^{-\xi z} \right\} \xi^3 J_{m+1}(\xi r) d\xi \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \left\{ (A_m \xi + B_m \sqrt{1+z\xi} - F_m) e^{\xi z} \right. \right. \\ \left. \left. + (C_m \xi - D_m \sqrt{1-z\xi} + F_m) e^{-\xi z} \right\} \xi^3 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right] \cos m\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = z\mu \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} (E_m e^{\xi z} + F_m e^{-\xi z}) \xi^3 J_m(\xi r) d\xi \right. \\ \left. - \frac{m+1}{2r} \int_0^{\infty} \left\{ (A_m \xi + B_m \sqrt{1+z\xi} + zF_m) e^{\xi z} \right. \right. \\ \left. \left. - (C_m \xi - D_m \sqrt{1-z\xi} - zF_m) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m+1}(\xi r) d\xi \right. \\ \left. + \frac{m-1}{2r} \int_0^{\infty} \left\{ (A_m \xi + B_m \sqrt{1+z\xi} - zF_m) e^{\xi z} \right. \right. \\ \left. \left. - (C_m \xi - D_m \sqrt{1-z\xi} + zF_m) e^{-\xi z} \right\} \xi^2 J_{m-1}(\xi r) d\xi \right] \sin m\theta \end{aligned}$$

2-2 二層半無限体に対する解 外力として図-4 に示す  
一様な一方向せん断力を考える。上層の関数，定数にはサフツ  
クス1を，下層のそれらにはサフツ  
クス2をつけて表わすことにする。

無限遠 ( $z \rightarrow \infty$ ) では，応力および変  
位成分が消滅してしまわねばならな  
いから，(2.10) の解は各層に対して  
つぎのごとくにとられねばならな  
い。すなわち，



(図-4) 二層地盤

○ 上層

$$\left. \begin{aligned} G_{m1}(\xi, z) &= (A_{m1} + B_{m1}z)e^{\xi z} + (C_{m1} + D_{m1}z)e^{-\xi z} \\ H_{m1}(\xi, z) &= E_{m1}e^{\xi z} + F_{m1}e^{-\xi z} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

○ 下層

$$\left. \begin{aligned} G_{m2}(\xi, z) &= (C_{m2} + D_{m2}z)e^{-\xi z} \\ H_{m2}(\xi, z) &= F_{m2}e^{-\xi z} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

2-2+1境界面が粗であるとき 境界条件は、表面でせん断応力が与えられ鉛直応力が働かないことおよび境界面で応力、変位の成分が連続であることから次のように考えられる。すなわち

$$z = -h \text{ で } \left. \begin{aligned} \sigma_{z1} &= 0, \quad \left. \begin{aligned} \tau_{\theta z1} \\ \tau_{rz1} \end{aligned} \right\} = \begin{cases} \pm q_0 \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right); & r < a \\ 0 & ; r > a \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.15a)$$

$$z = 0 \text{ で } u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2 \quad (2.15b)$$

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \quad \tau_{\theta z1} = \tau_{\theta z2}, \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2}$$

これらの条件により (2.13), (2.14) に含まれる9個の未知数を定める一次方程式が得られる。それらは上層と下層とのポアソン比が等しいと仮定し  $v_1 = v_2 = \nu$  とすると

$$(-A_{m1}\xi + B_{m1}\overline{1-2\nu+h\xi})e^{-\xi h} + (C_{m1}\xi + D_{m1}\overline{1-2\nu-h\xi})e^{\xi h} = 0$$

$$(A_{m1}\xi + B_{m1}2\sqrt{-\xi}h - E_{m1})e^{-\xi h} + (C_{m1}\xi - D_{m1}2\sqrt{\xi}h + F_{m1})e^{\xi h} = -\frac{ag_0}{\mu_1\xi^{\frac{3}{2}}}J_1(a\xi)$$

$$(A_{m1}\xi + B_{m1}2\sqrt{-\xi}h + E_{m1})e^{-\xi h} + (C_{m1}\xi - D_{m1}2\sqrt{\xi}h - F_{m1})e^{\xi h} = 0$$

$$(A_{m1} + C_{m1})\xi - 2(1-2\nu)(B_{m1} - D_{m1}) = C_{m2}\xi + 2(1-2\nu)D_{m2}$$

$$\mu_1\left\{\xi(-A_{m1} + C_{m1}) + (1-2\nu)(B_{m1} + D_{m1})\right\} = \mu_2\left\{C_{m2}\xi + (1-2\nu)D_{m2}\right\}$$

$$\mu_1\left\{\xi(A_{m1} + C_{m1}) + 2\nu(B_{m1} - D_{m1}) + (E_{m1} - F_{m1})\right\} = \mu_2\left\{C_{m2}\xi - 2\nu D_{m2} - F_{m2}\right\}$$

$$\mu_1\left\{\xi(A_{m1} + C_{m1}) + 2\nu(B_{m1} - D_{m1}) - (E_{m1} - F_{m1})\right\} = \mu_2\left\{C_{m2}\xi - 2\nu D_{m2} + F_{m2}\right\}$$

$$\xi(A_{m1} - C_{m1}) + (B_{m1} + D_{m1}) + 2(E_{m1} + F_{m1}) = -C_{m2}\xi + D_{m2}\xi + 2F_{m2}$$

$$\xi(A_{m1} - C_{m1}) + (B_{m1} + D_{m1}) - 2(E_{m1} + F_{m1}) = -C_{m2}\xi + D_{m2}\xi - 2F_{m2}$$

(2.16)

となる。境界条件(2.15a)から明らかに  $m=1$  としてよいから

(2.16) をとけば

$$B_{11} = -\frac{ag_0}{2\mu_1\xi^{\frac{3}{2}}}\Delta'_R\left[(1-2\xi h)e^{\xi h} + \varepsilon'e^{-\xi h}\right]J_1(a\xi)$$

$$D_{11} = \frac{ag_0}{2\mu_1\xi^{\frac{3}{2}}}\Delta'_R\left[(1+2\xi h)e^{-\xi h} + \varepsilon e^{\xi h}\right]J_1(a\xi)$$

$$C_{11}\xi + (1-2\nu)D_{11} = \frac{ag_0}{4\mu_1\xi^{\frac{3}{2}}}\Delta'_R\left[(1+2\xi h)e^{-\xi h} - \varepsilon\varepsilon'e^{-\xi h} + 2\varepsilon\xi h e^{\xi h}\right]J_1(a\xi)$$

$$-A_{11}\xi + (1-2\nu)B_{11} = \frac{ag_0}{4\mu_1\xi^{\frac{3}{2}}}\Delta'_R\left[-(1-2\xi h)e^{\xi h} + \varepsilon\varepsilon'e^{\xi h} + 2\varepsilon'\xi h e^{-\xi h}\right]J_1(a\xi)$$

$$D_{12} = \frac{f(1+\varepsilon')ag_0}{2\mu_1\xi^{\frac{3}{2}}}\Delta'_R\left[(1+2\xi h)e^{-\xi h} + \varepsilon e^{\xi h}\right]J_1(a\xi)$$

$$C_{12}\xi + (1-2\nu)D_{12} = \frac{ag_0}{2\mu_1\xi^{\frac{3}{2}}}\Delta'_R\left[2\xi h \cosh \xi h + (\varepsilon\varepsilon' - 1)\sinh \xi h\right.$$

$$\left. + \xi h(\varepsilon e^{\xi h} + \varepsilon'e^{-\xi h})\right]J_1(a\xi)$$

(2.17)

$$F_{11} = -\frac{a q_0}{2\mu_1 \xi^3} \frac{K}{e^{\xi h} - K e^{-\xi h}} J_1(a\xi)$$

$$F_{11} = -\frac{a q_0}{2\mu_1 \xi^3} \frac{1}{e^{\xi h} - K e^{-\xi h}} J_1(a\xi)$$

$$F_{12} = -\frac{a q_0}{2\mu_1 \xi^3} \frac{K+1}{e^{\xi h} - K e^{-\xi h}} J_1(a\xi)$$

が得られる。ただし

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad k = 3-4\nu, \quad \varepsilon = \frac{k+f}{1-f}, \quad \varepsilon' = \frac{1-f}{f+\nu k}, \quad K = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\Delta_R'} = 1 + 4\xi^2 h^2 + \varepsilon \varepsilon' + \varepsilon e^{2\xi h} + \varepsilon' e^{-2\xi h}$$

よって応力および変位の表示式は,

$$\xi h = \lambda, \quad \frac{a}{h} = \alpha, \quad \frac{r}{h} = s, \quad \frac{z}{h} = \zeta, \quad \Delta_R = e^{2\lambda} \Delta_R' \quad (2.19)$$

と表わすと次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{u_1}{v_1} \right\} &= -\frac{a q_0}{8\mu_1} \frac{(\cos \theta)}{\sin \theta} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\varepsilon' \{ 2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta) \} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ &\quad + (3+\varepsilon\varepsilon'-4\nu-6\lambda+8\nu\lambda+2\lambda\zeta-4\lambda^2\zeta) e^{2\lambda\zeta} \\ &\quad + (-3-\varepsilon\varepsilon'+4\nu-6\lambda+8\nu\lambda+2\lambda\zeta+4\lambda^2\zeta) e^{-2\lambda} \\ &\quad \left. + 2\varepsilon \{ 2(\nu-1) + \lambda(1+\zeta) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \{ J_2(s\lambda) \mp J_0(s\lambda) \} J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ &\quad - \frac{a q_0}{2\mu_1} \frac{(\cos \theta)}{\sin \theta} \int_0^\infty \frac{1+K e^{2\lambda\zeta}}{1-K e^{-2\lambda}} e^{-\lambda(1+\zeta)} \{ J_2(s\lambda) \pm J_0(s\lambda) \} \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda \\ w_1 &= -\frac{a q_0}{4\mu_1} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\varepsilon' \{ 1-2\nu - \lambda(1+\zeta) \} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ &\quad \left. + (3-\varepsilon\varepsilon'-4\nu+6\lambda-8\nu\lambda+2\lambda\zeta+4\lambda^2\zeta) e^{2\lambda\zeta} \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$+ (3 - \varepsilon \varepsilon' - 4\nu + 6\lambda - 8\nu\lambda + 2\lambda\zeta - 4\lambda^2\zeta) e^{-2\lambda}$$

$$+ 2\varepsilon \{1 - 2\nu + \lambda(1 + \zeta)\} \Big] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{\Sigma_1} = \frac{\alpha g_0}{2} \cos \theta \int_0^\infty \Delta_R \left[ 2\varepsilon' \lambda(1 + \zeta) e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{2\lambda(1 + \zeta) + \varepsilon \varepsilon' - 1 - 4\lambda^2\zeta\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. + \{1 - \varepsilon \varepsilon' + 2\lambda(\zeta + 1) + 4\lambda^2\zeta\} e^{-2\lambda} + 2\varepsilon \lambda(1 + \zeta) \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{\eta_1} = -\frac{\alpha g_0}{2} \cos \theta \int_0^\infty \Delta_R \left[ 2\varepsilon' \{ \lambda(1 + \zeta) + 2 \} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ \left. + (3 + \varepsilon \varepsilon' - 6\lambda + 2\lambda\zeta - 4\lambda^2\zeta) e^{2\lambda\zeta} + (-3 - \varepsilon \varepsilon' - 6\lambda + 2\lambda\zeta + 4\lambda^2\zeta) e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + 2\varepsilon \{ \lambda(1 + \zeta) - 2 \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$+ \frac{\alpha g_0}{2\zeta} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\varepsilon' \{ 2(1 - \nu) + \lambda(1 + \zeta) \} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ \left. + (3 + \varepsilon \varepsilon' - 4\nu - 6\lambda + 8\nu\lambda + 2\lambda\zeta - 4\lambda^2\zeta) e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. + (-3 - \varepsilon \varepsilon' + 4\nu - 6\lambda + 8\nu\lambda + 2\lambda\zeta + 4\lambda^2\zeta) e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + 2\varepsilon \{ \lambda(1 + \zeta) - 2(1 - \nu) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$+ \frac{2\alpha g_2}{\zeta} \cos \theta \int_0^\infty \frac{1 + K e^{2\lambda\zeta}}{1 - K e^{-2\lambda}} e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

(Z.200)

$$\sigma_{\theta_1} = -2\alpha g_0 \nu \cos \theta \int_0^\infty \Delta_R \left[ \varepsilon' e^{2\lambda(\zeta-1)} + (1 - 2\lambda) e^{2\lambda\zeta} - (1 + 2\lambda) e^{-2\lambda} - \varepsilon \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ - \frac{\alpha g_0}{2\zeta} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\varepsilon' \{ 2(1 - \nu) + \lambda(1 + \zeta) \} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ \left. + (3 + \varepsilon \varepsilon' - 4\nu - 6\lambda + 8\nu\lambda + 2\lambda\zeta - 4\lambda^2\zeta) e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. + (-3 - \varepsilon \varepsilon' + 4\nu - 6\lambda + 8\nu\lambda + 2\lambda\zeta + 4\lambda^2\zeta) e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + 2\varepsilon \{ \lambda(1 + \zeta) - 2(1 - \nu) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$+ 2\varepsilon \left\{ \lambda(1+\zeta) - 2(1-\nu) \right\} \left] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \right. \\ \left. - 2 \frac{\alpha g_0}{s} \cos \theta \int_0^\infty \frac{1+K e^{2\lambda\zeta}}{1-K e^{-2\lambda}} e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z_1} \right\} &= -\frac{\alpha g_0}{4} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \int_0^\infty \Delta_R \left[ 2\varepsilon' \left\{ \lambda(1+\zeta) + 1 \right\} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ &\quad \left. + (1+\varepsilon\varepsilon' + 2\lambda\zeta - 2\lambda - 4\lambda^2\zeta) e^{2\lambda\zeta} + (1+\varepsilon\varepsilon' + 2\lambda - 2\lambda\zeta - 4\lambda^2\zeta) e^{-2\lambda} \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon \left\{ 1 - \lambda(1+\zeta) \right\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \left\{ J_2(s\lambda) \pm J_0(s\lambda) \right\} J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ &\quad + \frac{\alpha g_0}{2} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \int_0^\infty \frac{1-K e^{2\lambda\zeta}}{1-K e^{-2\lambda}} e^{-\lambda(1+\zeta)} \left\{ J_2(s\lambda) \mp J_0(s\lambda) \right\} J_1(\alpha\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$\tau_{\theta r_1} = -\frac{\alpha g_0}{2} \sin \theta \int_0^\infty \frac{1+K e^{2\lambda\zeta}}{1-K e^{-2\lambda}} e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ + \frac{\alpha g_0}{2} \sin \theta \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\varepsilon' \left\{ 2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta) \right\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + (3+\varepsilon\varepsilon' - 4\nu - 6\lambda + 8\nu\lambda + 2\lambda\zeta - 4\lambda^2\zeta) e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. + (-3-\varepsilon\varepsilon' + 4\nu - 6\lambda + 8\nu\lambda + 2\lambda\zeta + 4\lambda^2\zeta) e^{-2\lambda} + 2\varepsilon \left\{ \lambda(1+\zeta) - 2(1-\nu) \right\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ + \frac{\alpha g_0}{s} \sin \theta \int_0^\infty \frac{1+K e^{2\lambda\zeta}}{1-K e^{-2\lambda}} e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_2}{v_2} \right\} &= -\frac{f \alpha g_0}{4 \mu_1} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \left\{ (1+\varepsilon') (1+2\lambda\lambda\zeta - 2+2\nu) + (1+\varepsilon') \lambda - \frac{\varepsilon\varepsilon'-1}{2} \right\} e^{-2\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (1+\varepsilon') \varepsilon (\lambda\zeta - 2+2\nu) + (1+\varepsilon') \lambda + \frac{\varepsilon\varepsilon'-1}{2} \right\} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} \left\{ J_2(s\lambda) \mp J_0(s\lambda) \right\} J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ &\quad - \frac{\alpha g_0}{2 \mu_1} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \int_0^\infty \frac{1+K}{1-K e^{-2\lambda}} e^{-\lambda(\zeta+1)} \left\{ J_2(s\lambda) \pm J_0(s\lambda) \right\} \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

$$w_2 = -\frac{f \alpha g_0}{2 \mu_1} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \left\{ (1+2\lambda)(1+\varepsilon') (1-2\nu + \lambda\zeta) + (1+\varepsilon') \lambda - \frac{\varepsilon\varepsilon'-1}{2} \right\} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + \left\{ (1+\varepsilon') \varepsilon (1-2\nu + \lambda\zeta) + (1+\varepsilon') \lambda + \frac{\varepsilon\varepsilon'-1}{2} \right\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_z = \alpha q_0 \cos \theta \int_0^\infty \Delta_R \left[ \lambda (1+\varepsilon') \lambda + (1+2\lambda) \lambda \zeta - \frac{\xi \xi' - 1}{2} \right] e^{-2\lambda} \\ + \left[ (1+\varepsilon) \lambda + (1+\varepsilon') \varepsilon \lambda \zeta + \frac{\xi \xi' - 1}{2} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{r_2} = -\alpha q_0 \cos \theta \int_0^\infty \Delta_R \left[ -(1+\varepsilon')(1+2\lambda)(2-\lambda\zeta) + (1+\varepsilon')\lambda - \frac{\xi \xi' - 1}{2} \right] e^{-2\lambda} \\ + \left[ -(1+\varepsilon')\varepsilon(2-\lambda\zeta) + (1+\varepsilon)\lambda + \frac{\xi \xi' - 1}{2} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ + \frac{\alpha q_0}{s} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \lambda (1+\varepsilon')(1+2\lambda)(\lambda\zeta - 2 + 2\lambda) + (1+\varepsilon')\lambda - \frac{\xi \xi' - 1}{2} \right] e^{-2\lambda} \\ + \left[ (1+\varepsilon')\varepsilon(\lambda\zeta - 2 + 2\lambda) + (1+\varepsilon)\lambda + \frac{\xi \xi' - 1}{2} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ - 2 \frac{\alpha q_0}{s} \cos \theta \int_0^\infty \frac{1+K}{f(1-Ke^{-2\lambda})} e^{-\lambda(\zeta+1)} J_2(s\lambda) \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

$$\sigma_{\theta_2} = 2\alpha q_0 \sin \theta \int_0^\infty (1+\varepsilon') \Delta_R \left[ (1+2\lambda) e^{-2\lambda} + \varepsilon \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ - \frac{\alpha q_0}{s} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \lambda (1+\varepsilon')(1+2\lambda)(\lambda\zeta - 2 + 2\lambda) + (1+\varepsilon')\lambda - \frac{\xi \xi' - 1}{2} \right] e^{-2\lambda} \\ + \left[ (1+\varepsilon')\varepsilon(\lambda\zeta - 2 + 2\lambda) + (1+\varepsilon)\lambda + \frac{\xi \xi' - 1}{2} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ + 2 \frac{\alpha q_0}{s} \cos \theta \int_0^\infty \frac{1+K}{f(1-Ke^{-2\lambda})} e^{-\lambda(\zeta+1)} J_2(s\lambda) \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta r_2} \\ \tau_{r z_2} \end{aligned} \right\} = \frac{\alpha q_0}{2} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \int_0^\infty \Delta_R \left[ \lambda (1+\varepsilon')(1+2\lambda)(\lambda\zeta - 1) + (1+\varepsilon')\lambda - \frac{\xi \xi' - 1}{2} \right] e^{-2\lambda} \\ + \left[ (1+\varepsilon')\varepsilon(\lambda\zeta - 1) + (1+\varepsilon)\lambda + \frac{\xi \xi' - 1}{2} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} \{ J_2(s\lambda) \pm J_0(s\lambda) \} J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ + \frac{\alpha q_0}{2} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \int_0^\infty \frac{1+K}{f(1-Ke^{-2\lambda})} e^{-\lambda(\zeta+1)} \{ J_2(s\lambda) \mp J_0(s\lambda) \} J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\tau_{\theta r_2} = -\frac{\alpha q_0}{2} \cos \theta \int_0^\infty \frac{1+K}{f(1-Ke^{-2\lambda})} e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

(2.20b)

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha g_0}{2S} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta R}{\lambda} \left[ \left\{ (1+\varepsilon')(1+2\lambda)(\lambda\zeta-2+2\nu) + (1+\varepsilon')\lambda - \frac{\varepsilon\zeta'-1}{2} \right\} e^{-2\lambda} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ (1+\varepsilon')\varepsilon(\lambda\zeta-2+2\nu) + (1+\varepsilon)\lambda + \frac{\varepsilon\zeta'-1}{2} \right\} e^{-\lambda(\zeta+1)} \right] J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
& - \frac{\alpha g_0}{S} \cos \theta \int_0^\infty \frac{1+K}{f(1-Ke^{2\lambda})} e^{-\lambda(\zeta+1)} J_2(s\lambda) \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda
\end{aligned}$$

2-2-2境界面が滑らかであるとき 表面条件は (2.15a) と  
 同じでよいが接触面においては

$$\left. \begin{aligned}
z=0 \text{ で } \quad w_1 &= w_2, \quad \sigma_{z1} = \sigma_{z2} \\
\tau_{rz1} &= \tau_{rz2} = 0, \quad \tau_{\theta z1} = \tau_{\theta z2} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

とせねばならない。境界面が粗である場合と同様に, (2.12) へ  
 境界条件を入れて定数を決定すればよい。  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$  の場合の  
 結果は,

$$N = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}, \quad \frac{1}{\Delta S} = N e^{-\lambda} - \left\{ N(2\lambda^2 + 2\lambda + 1) + (2\lambda^2 - 2\lambda + 1) \right\} e^{-2\lambda} + 1 \quad (2.22)$$

として

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned}
\frac{u_1}{v_1} \right\} &= \frac{\alpha g_0}{4\mu_1} (\cos \theta) \int_0^\infty \frac{\Delta S}{\lambda} \left[ N \left\{ 2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta) \right\} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\
& \quad + \left\{ N\lambda(1-2\nu) + \lambda\zeta + (\lambda-1)(2-2\nu) + \lambda\zeta \right\} e^{2\lambda\zeta} \\
& \quad + \left\{ N(\lambda+1)(2-2\nu-\lambda\zeta) + \lambda(1-2\nu-\lambda\zeta) \right\} e^{-2\lambda} \\
& \quad \left. + \left\{ 2(\nu-1) + \lambda(1+\zeta) \right\} e^{-\lambda(1+\zeta)} \right] \left\{ J_2(s\lambda) \mp J_0(s\lambda) \right\} J_1(\alpha\lambda) d\lambda
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha g_0}{2\mu_1} \cos \theta \int_0^\infty \frac{e^{2\lambda\zeta} + 1}{e^{2\lambda} - 1} \{J_2(s\lambda) \mp J_0(s\lambda)\} \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

$$\begin{aligned} w_1 = & \frac{\alpha g_0}{2\mu_1} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ N \{1 - 2\nu - \lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ & + \{(\lambda-1)(1-2\nu-\lambda\zeta) + N\lambda(2-2\nu-\lambda\zeta)\} e^{2\lambda\zeta} \\ & - \{N(\lambda+1)(1-2\nu+\lambda\zeta) + \lambda(2-2\nu+\lambda\zeta)\} e^{-2\lambda} \\ & \left. + \{1-2\nu+\lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z_1} = & \alpha g_0 \cos \theta \int_0^\infty \Delta s \left[ N\lambda(1+\zeta) e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{N(\lambda\zeta-1) + (\lambda-1)\zeta\} \lambda e^{2\lambda\zeta} \right. \\ & \left. - \{N(\lambda+1)\zeta + (1+\lambda\zeta)\} e^{-2\lambda} + \lambda(1+\zeta) \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta} = & -\alpha g_0 \cos \theta \int_0^\infty \Delta s \left[ N \{2 + \lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{N\lambda(1+\lambda\zeta) + (\lambda-1)(2+\lambda\zeta)\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ & \left. + \{N(\lambda+1)(2-\lambda\zeta) + \lambda(1-\lambda\zeta)\} e^{-2\lambda} + \{\lambda(1+\zeta) - 2\} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\alpha g_0}{S} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ N \{2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ & + \{N\lambda(1-2\nu+\lambda\zeta) + (\lambda-1)(2-2\nu+\lambda\zeta)\} e^{2\lambda\zeta} \\ & + \{N(\lambda+1)(2-2\nu-\lambda\zeta) + \lambda(1-2\nu-\lambda\zeta)\} e^{-2\lambda} \\ & \left. + \{2(\nu-1) + \lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$- 2 \frac{\alpha g_0}{S} \cos \theta \int_0^\infty \frac{e^{2\lambda\zeta} + 1}{e^{2\lambda} - 1} e^{-\lambda(\zeta+1)} J_2(s\lambda) \frac{J_1(s\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

(2.23a)

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_1} = & -2\alpha g_0 \nu \cos \theta \int_0^\infty \Delta s \left[ N e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{\lambda(N+1) - 1\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ & \left. + \{\lambda(N+1) + N\} e^{-2\lambda} - 1 \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha g_0}{S} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ N \{ 2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta) \} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\
& + \{ N\lambda(1-2\nu + \lambda\zeta) + (\lambda-1)(2-2\nu + \lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \\
& + \{ N(\lambda+1)(2-2\nu - \lambda\zeta) + \lambda(1-2\nu - \lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} \\
& \left. + \{ 2(\nu-1) + \lambda(1+\zeta) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
& + 2 \frac{\alpha g_0}{S} \int_0^\infty \frac{e^{2\lambda\zeta} + 1}{e^{2\lambda} - 1} e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \begin{matrix} \tau_{\theta z_1} \\ \tau_{rz_1} \end{matrix} \right\} &= \frac{\alpha g_0}{2} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \int_0^\infty \Delta s \left[ N \{ 1 + \lambda(1+\zeta) e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\
& + \{ N\lambda\zeta + (\lambda-1)(1+\lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} + \{ \lambda\zeta + N(\zeta-1)(\lambda+1) \} e^{-2\lambda} \\
& \left. + \{ 1 - \lambda(1+\zeta) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \{ J_2(s\lambda) \pm J_0(s\lambda) \} J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
& - \frac{\alpha g_0}{2} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \int_0^\infty \frac{e^{2\lambda\zeta} - 1}{e^{2\lambda} - 1} e^{-\lambda(1+\zeta)} \{ J_2(s\lambda) \mp J_0(s\lambda) \} J_1(\alpha\lambda) d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta\theta} &= \alpha g_0 \sin \theta \int_0^\infty \frac{e^{2\lambda\zeta} + 1}{e^{2\lambda} - 1} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
& + \frac{\alpha g_0}{S} \sin \theta \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ N \{ 2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta) \} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\
& + \{ N\lambda(1-2\nu + \lambda\zeta) + (\lambda-1)(2-2\nu + \lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \\
& + \{ N(\lambda+1)(2-2\nu - \lambda\zeta) + (\lambda-2\nu - \lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} \\
& \left. + \{ 2(\nu-1) + \lambda(1+\zeta) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
& - \frac{\alpha g_0}{S} \sin \theta \int_0^\infty \frac{e^{2\lambda\zeta} + 1}{e^{2\lambda} - 1} e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda
\end{aligned}$$

$$u_z = -\frac{\alpha g_0}{4\mu_1} (\cos \theta) \int_0^\infty (1+N) \Delta_s (1-2\gamma-\lambda\zeta) (e^{-2\lambda}-1) e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$w_z = \frac{\alpha g_0}{2\mu_1} \cos \theta \int_0^\infty (1+N) \Delta_s (2-2\gamma-\lambda\zeta) (e^{-2\lambda}-1) e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{z2} = -\alpha g_0 \cos \theta \int_0^\infty (1-N) \Delta_s (1+\lambda\zeta) (e^{-2\lambda}-1) e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{rz} = -\alpha g_0 \cos \theta \int_0^\infty (1-N) \Delta_s (e^{-2\lambda}-1) \lambda e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$+ \frac{\alpha g_0}{S} \cos \theta \int_0^\infty (1-N) \Delta_s (1-2\gamma-\lambda\zeta) (e^{-2\lambda}-1) e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \quad (2.27b)$$

$$\sigma_{\theta z} = -2\alpha g_0 \gamma \cos \theta \int_0^\infty (1-N) \Delta_s (e^{-2\lambda}-1) e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$- \frac{\alpha g_0}{S} \cos \theta \int_0^\infty (1-N) \Delta_s (1-2\gamma-\lambda\zeta) (e^{-2\lambda}-1) e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z_2} \\ \tau_{rz_2} \end{aligned} \right\} = \frac{\alpha g_0}{2} \left( \frac{\rho \sin \theta}{\cos \theta} \right) \int_0^\infty (1-N) \Delta_s \lambda^2 \zeta (e^{-2\lambda}-1) e^{-\lambda(1+\zeta)} \{ J_2(s\lambda) \pm J_0(s\lambda) \} J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\tau_{\theta r_2} = \frac{\alpha g_0}{S} \left( \frac{\rho \sin \theta}{\cos \theta} \right) \int_0^\infty (1-N) \Delta_s (1-2\gamma-\lambda\zeta) (e^{-2\lambda}-1) e^{-\lambda(1+\zeta)} J_2(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

となる

2-3鉛直荷重に対する解      ここで、水平荷重に対する解

と比較検討を行ないさらに二層問題について整理を行なう意味で、鉛直荷重が加わったときの解をも示しておく。記号は2-2におけると同じものを持ちいる。

2-3-1境界面が粗であるとき

境界条件は一様な鉛直荷重  $P$  が半径  $a$  の円の内部に働くとき

$$z=-h \text{ で } \quad \sigma_{z1} = \begin{cases} -P_0 & ; r < a \\ 0 & ; r > a \end{cases}, \quad \tau_{rz_1} = 0. \quad (2.24a)$$

$$\left. \begin{aligned} z=0 \text{ 上 } \quad u_1 &= u_2, \quad w_1 = w_2 \\ \sigma_{z1} &= \sigma_{z2}, \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2} \end{aligned} \right\} \quad (2.24b)$$

で表わされる。ただし  $p_0 = P/\pi a^2$  である。このとき応力および変位の表示式は次のごとくになる。

$$u_1 = -\frac{\alpha p_0}{4\mu_1} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\varepsilon' \{1-2\nu + \lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{(1+2\lambda)(3-4\nu+2\lambda\zeta) - \varepsilon\varepsilon'\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. + \{(1-2\lambda)(3-4\nu-2\lambda\zeta) - \varepsilon\varepsilon'\} e^{-2\lambda} + 2\varepsilon \{1-2\nu - \lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(5\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$w_1 = -\frac{\alpha p_0}{4\mu_1} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\varepsilon' \{2(1-\nu) - \lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{(1+2\lambda)(3-4\nu-2\lambda\zeta) + \varepsilon\varepsilon'\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. - \{(1-2\lambda)(3-4\nu+2\lambda\zeta) + \varepsilon\varepsilon'\} e^{-2\lambda} - 2\varepsilon \{2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(5\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{z1} = -\frac{\alpha p_0}{2} \int_0^\infty \Delta_R \left[ 2\varepsilon' \{1 - \lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{(1+2\lambda)(1-2\lambda\zeta) + \varepsilon\varepsilon'\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. + \{(1-2\lambda)(1+2\lambda\zeta) + \varepsilon\varepsilon'\} e^{-2\lambda} + 2\varepsilon \{1 + \lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(5\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{r1} = -\frac{\alpha p_0}{2} \int_0^\infty \Delta_R \left[ 2\varepsilon' \{1 + \lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{(1+2\lambda)(2\lambda\zeta+3) - \varepsilon\varepsilon'\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. + \{(1-2\lambda)(3-2\lambda\zeta) - \varepsilon\varepsilon'\} e^{-2\lambda} + 2\varepsilon \{1 - \lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(5\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \quad (2.25a)$$

$$+ \frac{\alpha p_0}{2S} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\varepsilon' \{1-2\nu + \lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{(1+2\lambda)(3-4\nu+2\lambda\zeta) - \varepsilon\varepsilon'\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. + \{(1-2\lambda)(3-4\nu-2\lambda\zeta) - \varepsilon\varepsilon'\} e^{-2\lambda} + 2\varepsilon \{1-2\nu - \lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(5\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{\theta 1} = \alpha p_0 \int_0^\infty 2\nu \Delta_R \left[ \varepsilon' e^{2\lambda(\zeta-1)} + (1+2\lambda) e^{2\lambda\zeta} + (1-2\lambda) e^{-2\lambda} + \varepsilon \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(5\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$+ \frac{\alpha P_0}{2S} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\varepsilon' \{1-2\nu+\lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{(1+2\lambda)(3-4\nu+2\lambda\zeta)-\varepsilon\varepsilon'\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. + \{(1-2\lambda)(3-4\nu-2\lambda\zeta)-\varepsilon\varepsilon'\} e^{-2\lambda} + 2\varepsilon \{1-2\nu-\lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\tau_{rz_1} = -\frac{\alpha P_0}{Z} \int_0^\infty \Delta_R \left[ 2\varepsilon' \lambda(1+\zeta) e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{(1+2\lambda)(1+2\zeta\lambda-\varepsilon\varepsilon') e^{2\lambda\zeta} \right. \\ \left. - \{(1-2\lambda)(1-2\lambda\zeta)-\varepsilon\varepsilon'\} e^{-2\lambda} + 2\varepsilon\lambda(1+\zeta) \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$u_2 = -\frac{\alpha P_0}{4\mu_2} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \{(1+\varepsilon')(1-2\lambda)(2\lambda\zeta-3+4\nu) + \varepsilon'(1+\varepsilon)\} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + \varepsilon\varepsilon'(2\lambda\zeta+4\nu-3) + 2\varepsilon \{ \lambda(1+\zeta) - 1 + 2\nu \} + (1+2\lambda) \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$w_2 = -\frac{\alpha P_0}{4\mu_2} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \{(1+\varepsilon')(1-2\lambda)(2\lambda\zeta-3+4\nu) + \varepsilon'(1+\varepsilon)\} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + \varepsilon\varepsilon'(2\lambda\zeta+3-4\nu) + 2\varepsilon \{ \lambda(1+\zeta) + 2(1-\nu) \} + 1 + 2\lambda \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha P_0}{Z} \int_0^\infty \Delta_R \left[ \{(1+\varepsilon')(1-2\lambda)(1+2\lambda\zeta) + \varepsilon'(1+\varepsilon)\} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + \varepsilon\varepsilon'(1+2\lambda\zeta) + 2\varepsilon \{ 1 + \lambda(1+\zeta) \} + 1 + 2\lambda \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{rz} = \frac{\alpha P_0}{Z} \int_0^\infty \Delta_R \left[ \{ \varepsilon'(1+\varepsilon) + (\varepsilon'+1)(2\lambda-1)(3-2\lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} + \{ \varepsilon(1+\varepsilon')(2\lambda\zeta-3) + (1+\varepsilon)(1+2\lambda) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ - \frac{\alpha P_0}{2S} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \{ \varepsilon'(1+\varepsilon) + (\varepsilon'+1)(2\lambda-1)(3-4\nu-2\lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} - \{ \varepsilon(1+\varepsilon')(3-4\nu-2\lambda\zeta) - (1+\varepsilon)(1+2\lambda) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{\theta z} = -\frac{\alpha P_0}{Z} \int_0^\infty 2\nu \Delta_R \left[ \{(1-2\lambda) e^{-2\lambda} + \varepsilon \{ (1+\varepsilon') \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ + \frac{\alpha P_0}{2S} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \{ \varepsilon'(1+\varepsilon) + (\varepsilon'+1)(2\lambda-1)(3-4\nu-2\lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} - \{ \varepsilon(1+\varepsilon')(3-4\nu-2\lambda\zeta) - (1+\varepsilon)(1+2\lambda) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\tau_{yz_2} = \frac{\alpha P_0}{Z} \int_0^\infty \Delta_R \left[ \{(1+\varepsilon')(1-2\lambda)(2\lambda\zeta-1) + \varepsilon'(1+\varepsilon)\} e^{-2\lambda} \right.$$

$$+ \varepsilon \varepsilon' (2\lambda \zeta - 1) + 2\varepsilon \lambda (1 + \zeta) + 1 + 2\lambda \Big] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

2-3-2境界面が滑らかであるとき 境界における条件は  
表面にせん断力が働いたときと同じく

$$Z=0 \text{ で } w_1 = w_2, \quad \sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2} = 0 \quad (2.26)$$

とすればよいから結果は

$$\begin{aligned} u_1 = & -\frac{\alpha p_0}{2\mu_1} \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ N \{ 1 - 2\nu + \lambda(1 + \zeta) \} e^{2\lambda(\zeta - 1)} \right. \\ & - \{ N(1 + \lambda)(1 - 2\nu + \lambda\zeta) + \lambda(Z - 2\nu + \lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \\ & - \{ N\lambda(\lambda\zeta - 2 + 2\nu) + (\lambda - 1)(\lambda\zeta - 1 + 2\nu) \} e^{-2\lambda} \\ & \left. + \lambda(1 + \zeta) - (1 - 2\nu) \right] e^{-\lambda(1 + \zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 = & -\frac{\alpha p_0}{2\mu_1} \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ N \{ Z(1 - \nu) - \lambda(1 + \zeta) \} e^{2\lambda(\zeta - 1)} \right. \\ & + \{ N(1 + \lambda)(\lambda\zeta - 2 + 2\nu) + \lambda(\lambda\zeta - 1 + 2\nu) \} e^{2\lambda\zeta} \\ & + \{ N\lambda(2\nu - 1 - \lambda\zeta) + (1 - \lambda)(2 - 2\nu + \lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} \\ & \left. + Z(\nu - 1) - \lambda(1 + \zeta) \right] e^{-\lambda(1 + \zeta)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & -\alpha p_0 \int_0^\infty \Delta s \left[ N \{ 1 - \lambda(1 + \zeta) \} e^{2\lambda(\zeta - 1)} + \{ N(\lambda\zeta - 1)(\lambda + 1) + \lambda^2\zeta \} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ & \left. + \{ N\lambda^2\zeta + (\lambda\zeta + 1)(\lambda - 1) \} e^{-2\lambda} + 1 + \lambda(1 + \zeta) \right] e^{-\lambda(1 + \zeta)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta} = -\alpha p_0 \int_0^\infty \Delta s \left[ N \{ 1 + \lambda(1 + \zeta) \} e^{2\lambda(\zeta - 1)} - \{ N(\lambda + 1)(\lambda\zeta + 1) + \lambda(\lambda\zeta + 2) \} e^{2\lambda\zeta} \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ 1 - \lambda(\zeta - 1) + (N+1)\lambda(\lambda\zeta - 2) \right] e^{-2\lambda} + \lambda(1+\zeta) - 1 \Big] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
& + \frac{\alpha p_0}{s} \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ N \{ 1 - 2\lambda + \lambda(1+\zeta) \} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\
& \quad - \{ N(1+\lambda)(-1+2\lambda-\lambda\zeta) - \lambda(2-2\lambda+\lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \\
& \quad + \{ N\lambda(2-2\lambda-\lambda\zeta) - (1-\lambda)(1-2\lambda-\lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} \\
& \quad \left. + \{ 1-2\lambda - \lambda(1+\zeta) \} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta_1} = & -\alpha p_0 \int_0^\infty 2\lambda \Delta s \left[ N e^{2\lambda(\zeta-1)} - \{ N(\lambda+1) + \lambda \} e^{2\lambda\zeta} + \{ N\lambda + \lambda - 1 \} e^{-2\lambda} + 1 \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
& - \frac{\alpha p_0}{s} \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ N \{ 1 - 2\lambda + \lambda(1+\zeta) \} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\
& \quad + \{ N(1+\lambda)(-1+2\lambda-\lambda\zeta) - \lambda(2-2\lambda+\lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \\
& \quad + \{ N\lambda(2-2\lambda-\lambda\zeta) - (1-\lambda)(1-2\lambda-\lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} \\
& \quad \left. + \{ 1-2\lambda - \lambda(1+\zeta) \} \right] e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz_1} = & -\alpha p_0 \int_0^\infty \Delta s \left[ N(1+\zeta) e^{2\lambda(\zeta-1)} - \{ N(1+\lambda)\zeta + (1+\lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \right. \\
& \quad \left. - \{ N(1-\lambda\zeta) + (1-\lambda)\zeta \} e^{-2\lambda} + (1+\zeta) \right] \lambda e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda
\end{aligned}$$

$$u_z = -\frac{\alpha p_0(1-N)}{2\mu_z} \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ (\lambda-1)e^{-2\lambda} + (\lambda+1) \right] (1-2\lambda-\lambda\zeta) e^{-\lambda(\zeta+1)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$w_z = -\frac{\alpha p_0(1-N)}{2\mu_z} \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ (\lambda-1)e^{-2\lambda} + (\lambda+1) \right] (2\lambda-2-\lambda\zeta) e^{-\lambda(\zeta+1)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{z_z} = -\alpha p_0(1-N) \int_0^\infty \Delta s \left[ (\lambda-1)e^{-2\lambda} + (\lambda+1) \right] (1+\lambda\zeta) e^{-\lambda(\zeta+1)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rz} &= -\alpha p_0(1-N) \int_0^\infty \Delta s \left[ (\lambda-1)e^{-2\lambda} + (\lambda+1) \right] (1-\lambda\zeta) e^{-\lambda\zeta(1+\zeta)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
 &\quad + \frac{\alpha p_0(1-N)}{s} \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ (\lambda-1)e^{-2\lambda} + (\lambda+1) \right] (1-2\lambda-\lambda\zeta) e^{-\lambda\zeta(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
 \sigma_{\theta z} &= -\alpha p_0(1-N) \int_0^\infty 2\lambda \Delta s \left[ (\lambda-1)e^{-2\lambda} + (\lambda+1) \right] e^{-\lambda\zeta(1+\zeta)} J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
 &\quad - \frac{\alpha p_0(1-N)}{s} \int_0^\infty \frac{\Delta s}{\lambda} \left[ (\lambda-1)e^{-2\lambda} + (\lambda+1) \right] (1-2\lambda-\lambda\zeta) e^{-\lambda\zeta(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\
 \tau_{rz} &= -\alpha p_0(1-N) \int_0^\infty \Delta s \left[ (\lambda-1)e^{-2\lambda} + (\lambda+1) \right] \lambda \zeta e^{-\lambda\zeta(1+\zeta)} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{2.27b}$$

で与えられる。

2-4 結果の検討 前項で求めた表示式について少しく検討を行なう。\$z-z-1\$ の境界面が粗である二層地盤に水平荷重が働いたときの解を例にとれば \$z=-h\$ すなわち \$\zeta=-1\$ とおくと (2.20a) より

$$\sigma_{z1} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z1} \\ \tau_{rz1} \end{aligned} \right\} = F \alpha g_0 \left( \begin{array}{c} \sin \theta \\ \cos \theta \end{array} \right) \int_0^\infty J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda$$

となるが、ベッセル関数の積分公式 (Watson, 1922) により

$$\int_0^\infty J_0(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda = \begin{cases} 1/\alpha & ; s < \alpha \\ 0 & ; s > \alpha \end{cases}$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z1} \\ \tau_{rz1} \end{aligned} \right\} = F \left( \begin{array}{c} \sin \theta \\ \cos \theta \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} g_0 : r < a \\ 0 : r > a \end{array} \right.$$

が得られる。また  $T: Z=0$  ( $\xi=0$ ) とおくと  $(Z, Z_0 a), (Z, Z_0 b)$  となり

$$\begin{aligned} \sigma_{z_1} = \frac{\alpha q_0}{2} \cos \theta \int_0^\infty \Delta_R \left[ \{ Z(1+\xi')\lambda + 1 - \xi\xi' \} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + Z(1+\xi)\lambda - 1 + \xi\xi' \right] e^{-\lambda} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \equiv \sigma_{z_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \tau_{0z_1} \\ \tau_{rz_1} \end{aligned} \right\} = -\frac{\alpha q_0}{4} \left( \frac{\rho \sin \theta}{\cos \theta} \right) \int_0^\infty \Delta_R \left[ \{ 2\xi'(\lambda+1) + 1 + \xi\xi' + Z\lambda \} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + \{ 2\xi(1-\lambda) + 1 + \xi\xi' - Z\lambda \} \right] e^{-\lambda} \{ J_2(s\lambda) \pm J_0(s\lambda) \} J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ + \frac{\alpha q_0}{2} \left( \frac{\rho \sin \theta}{\cos \theta} \right) \int_0^\infty \frac{1-K}{1-Ke^{-2\lambda}} e^{-\lambda} \{ J_2(s\lambda) \mp J_0(s\lambda) \} J_1(\alpha\lambda) d\lambda \equiv \left\{ \begin{aligned} \tau_{0z_2} \\ \tau_{rz_2} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} u_1 \\ v_1 \end{aligned} \right\} = -\frac{\alpha q_0}{8\mu_1} \left( \frac{\cos \theta}{\rho \sin \theta} \right) \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \{ 2\xi'(2-2\nu+\lambda) - 3 - \xi\xi' + 4\nu - 6\lambda + 8\nu\lambda \} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + 2\xi(2\nu-2+\lambda) + 3 + \xi\xi' - 4\nu - 6\lambda + 8\nu\lambda \right] e^{-\lambda} \{ J_2(s\lambda) \mp J_0(s\lambda) \} J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ - \frac{\alpha q_0}{2\mu_1} \left( \frac{\cos \theta}{\rho \sin \theta} \right) \int_0^\infty \frac{1+K}{1-Ke^{-2\lambda}} e^{-\lambda} \{ J_2(s\lambda) \pm J_0(s\lambda) \} \frac{J_1(\alpha\lambda)}{\lambda} d\lambda \equiv \left\{ \begin{aligned} u_2 \\ v_2 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 = -\frac{\alpha q_0}{4\mu_1} \cos \theta \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \{ 2\xi'(1-2\nu-\lambda) + 3 - \xi\xi' - 4\nu + 6\lambda - 8\nu\lambda \} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + 2\xi(1-2\nu+\lambda) + 3 - \xi\xi' - 4\nu + 6\lambda - 8\nu\lambda \right] e^{-\lambda} J_1(s\lambda) J_1(\alpha\lambda) d\lambda \\ \equiv w_2 \end{aligned}$$

となる。よって境界条件 (2.15) は  $T=1$  かに満足されている。

次にこれら二層における解から一様半無限体に対する解を求めてみる。(2.20 a) 中の  $\tau_{0z_1}, \tau_{rz_1}$  を (2.19) で変換する前の形に戻して  $z = z' - h$  とおき  $h \rightarrow \infty$  とすれば

$$\left. \begin{matrix} \tau_{\theta z_1} \\ \tau_{rz_1} \end{matrix} \right\} = \frac{\alpha P_0}{2} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \left[ - \int_0^\infty (1 - \xi z') e^{-\xi z'} \{ J_2(r\xi) \pm J_0(a\xi) \} J_1(a\xi) d\xi \right. \\ \left. + \int_0^\infty e^{-\xi z'} \{ J_2(r\xi) \mp J_0(a\xi) \} J_1(a\xi) d\xi \right] \quad (2.28)$$

すなわち半無限体における牟岐の解となる。他の応力成分についても同様にして一層の場合の解が求められる。

応力成分  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  は (2.20) から明らかなごとく境界面において連続になっていない。これは、応力に関しては境界条件として  $z$  軸に垂直な面事に働く応力だけしか考慮していないことによるものと思われる。

また  $z-z-z$  において示した滑らかな境界面を有する二層地盤に水平荷重が作用するときの解 (2.23a) のうち、 $y$  および  $\theta$  方向の変位成分  $u, v$  は発散積分となって値が求められない。これは境界面においてせん断応力が存在しないことを考えれば当然のことであるが、弾性論においては、積分表示による変位成分が不確定となる場合には、このように積分の下限で被積分関数が発散する形になることが認められ興味深い。

ここで鉛直力とせん断力とが鋪装に与える影響がどのように異なるかを検討するために、境界面が粗である場合について載荷中に軸上における最大せん断応力の表示式を求めてみた。

水平力が作用するときには、軸上では (2.20) より明らかに

$\sigma_z = \sigma_r = \sigma_\theta = 0$  であるから最大せん断力は  $\theta = 0$  面で考えると  $\tau_{rz}$  となり、鉛直力の場合には軸上で  $\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$  であるから  $(\sigma_z - \sigma_r)/2$  で与えられる。よってポアソン比が 0.5 のときには (2.20) および (2.23) より、載荷軸上の最大せん断応力は一層の場合とともに次式で示される。

i) 水平力が働くとき

$$\text{一層 ; } \tau_{max} = \frac{q_0}{2} \int_0^\infty (2 - \lambda \delta^4) e^{-\lambda \delta} J_1(\alpha \lambda) d\lambda \quad (2.29a)$$

$$\begin{aligned} \text{二層} \left\{ \begin{aligned} \text{上層 ; } \tau_{max} &= \frac{\alpha q_0}{2} \int_0^\infty \bar{\Delta}_R \left[ N^2 \{ 1 + \lambda(1+\zeta) \} e^{2\lambda(\zeta-1)} + N \{ (2\lambda^2\zeta + \lambda - \lambda\zeta - 1) e^{2\lambda\zeta} \right. \\ &\quad \left. + (2\lambda^2\zeta - \lambda + \lambda\zeta - 1) e^{-2\lambda} \} + \{ 1 - \lambda(1+\zeta) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(\alpha \lambda) d\lambda \\ &\quad + \frac{\alpha q_0}{2} \int_0^\infty \frac{1 - N e^{2\lambda\zeta}}{1 - N e^{-2\lambda}} e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(\alpha \lambda) d\lambda \\ \text{下層 ; } \tau_{max} &= \frac{\alpha q_0}{2} (1-N) \int_0^\infty \bar{\Delta}_R \left[ N e^{-2\lambda} (2\lambda^2\zeta + \lambda\zeta - \lambda - 1) \right. \\ &\quad \left. - (\lambda\zeta + \lambda - 1) \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(\alpha \lambda) d\lambda \\ &\quad + \frac{\alpha q_0}{2} (1-N) \int_0^\infty \frac{1}{1 - N e^{-2\lambda}} e^{-\lambda(1+\zeta)} J_1(\alpha \lambda) d\lambda \end{aligned} \right. \quad (2.29b) \end{aligned}$$

ただし

$$\delta = \frac{z}{a}, \quad \bar{\Delta}_R = N^2 e^{-4\lambda} - 2N(2\lambda^2 + 1) e^{-2\lambda} + 1 \quad (2.30)$$

ii) 鉛直力が働くとき

$$\text{一層 ; } \tau_{max} = p_0 \int_0^\infty (1 + \lambda \delta^4) e^{-\lambda \delta} J_1(\alpha \lambda) d\lambda \quad (2.31a)$$

$$\begin{aligned}
 \text{二層} \left\{ \begin{aligned}
 &\text{上層; } \tau_{\max} = \frac{3\alpha P_0}{4} \int_0^\infty \bar{\Delta}_R \left[ N^2 \lambda (1+\zeta) e^{\frac{2\lambda(\zeta-1)}{1+\zeta}} - N \left\{ (2\lambda^2 \zeta + \lambda + \lambda \zeta) e^{\frac{2\lambda \zeta}{1+\zeta}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (2\lambda^2 \zeta - \lambda - \lambda \zeta) e^{\frac{-2\lambda}{1+\zeta}} - \lambda (1+\zeta) \right\} e^{-\frac{\lambda(1+d)}{1+\zeta}} J_1(\alpha \lambda) d\lambda \right] \\
 &\text{下層; } \tau_{\max} = \frac{3\alpha P_0}{4} (1-N) \int_0^\infty \bar{\Delta}_R \left[ N (2\lambda^2 \zeta - \lambda - \lambda \zeta) e^{\frac{-2\lambda}{1+\zeta}} + \lambda (1+\zeta) \right] e^{-\frac{\lambda(1+d)}{1+\zeta}} J_1(\alpha \lambda) d\lambda
 \end{aligned} \right\} \quad (2.31b)
 \end{aligned}$$

### 第3節 解析結果

本節では、表面に働くせん断力の地盤内における分布を明らかにするために、前節で求めた境界面が粗であるときの  $\tau_{0z}$ ,  $\tau_{rz}$  について行なった数値計算の結果を示す。

計算は次の18の場合について数値積分法によって行なった。  
すなわち

$$\alpha = \frac{a}{h} = \frac{1}{2}, 1, 2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = 2, 5, 10, 50, 100, 1000$$

である。積分は台形公式により大型計算機 HITAC 5020E (東京大学大型計算機センター) を利用したが、その区間および間隔は三段階に分け

$$0 \leq 0.001 \leq z \quad ; \quad z \leq 0.01 \leq z z \quad ; \quad z z \leq 0.1 \leq z z z$$

とした。したがって一個の応力値を得るのに被積分関数の値 6000 個を計算したのであるが、これに要した時間は 2.5~3 秒

程度であった。

被積分関数の収束度は(2.20a)から認められるごとく  $z = -h$  ( $z = -1$ ) のときに、収束性を支配する指数項が消失するために最悪となる。よって数値積分の精度は表面に近い所の値において急激に下がるものと考えられる。ことに二つのベッセル関数に含まれるパラメーターが等しくなるときすなわち荷重縁部附近の値の計算に対してはさらに収束が悪くなるため、積分区間を延長するなどの注意が必要であろう。

また変位などの被積分関数では、積分の下限すなわち  $\lambda = 0$  でその極限值が 0 とならない場合には、 $\lambda = 0$  近辺での関数の勾配が大きくなることが認められているので、数値計算上の取扱いには充分注意せねばならない。

本節で計算した応力値について表面における値の一例を示すと次のごとくである。

(表~2)・表面における応力の計算例 ( $\eta/h = 1$ )

| $r/h$ | 0      | 0.2    | 0.6    | 1.0    | 1.2    | 1.5    |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 計算値   | 1.0052 | 1.0019 | 0.9892 | 0.5006 | 0.0235 | 0.0077 |
| 真 値   | 1.0    | 1.0    | 1.0    | 0.5    | 0      | 0      |

その他の例においても結果は上の表に示す値と大きな差がないことから、本計算の誤差は約2%程度であるものと考え

られる。

計算の結果はまとめて(図-6(a)-(c))に圧力球根の形で示した。図中、中央線の左半分は $\sigma_{\theta z}$ 、右半分は $\sigma_{rz}$ の分布を示している。また同時に

$$\alpha/h = 1 \quad E_1/E_2 = 5, 50$$

に対して鉛直応力 $\sigma_z$ および表面変位 $u, w$ の値を計算し(図-6(d), (e))にまとめた。さらに境界面が滑らかであって水平荷重が作用した場合および鉛直荷重が作用した場合についても、せん断応力、鉛直応力および表面変位を求めて(図-7, 8, 9)に示した。(図-5)には一様地盤の表面に水平荷重および鉛直荷重が働いたときの応力分布性状を示し、上記二層地盤の応力分布特性との対比を試みた。

最後に、(2.30)および(2.31)の軸上の応力式を

$$\alpha/h = 1, 2 \quad ; \quad E_1/E_2 = 1, 2, 10, 100$$

について積分し、結果を(図-10)に示した。

#### 第4節 考 察

表面に作用するせん断力によるせん断応力の二層地盤内における分散形状に関しては

(1) 境界面が粗であるときと滑らかであるときとでは、ほと

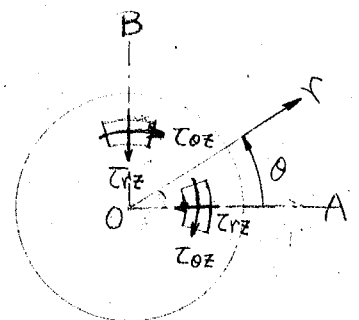
んど差違がみられない。ことに上層と下層との弾性率比  $E_1/E_2$  が大きいときこの傾向が著しい。また滑らかである場合にはせん断応力の分布形状はポアソン比  $\nu$  によらないことが (2.23) から結論される。

(2) 鉛直荷重が働いた場合の鉛直応力の分散形状 (図-7a, 8a 参照) と異なり, せん断荷重によるせん断応力は深さ方向へはあまり分散せず, むしろ表面に近いところで著しく横方向に分散している。これは境界 (表面) で与えられた応力が地盤内では境界力の方向に拡がって行くことを意味している。

(3)  $\tau_{\theta z}/q_0 \sin \theta$  は  $\tau_{rz}/q_0 \cos \theta$  に比して横への分散のしかたがきわめて少ない。これは後者が荷重方向の応力であり,  $\theta=0$  のときには表面では載荷応力がそのまま  $\tau_{rz}$  になるためと考えられる。すなわち (図-11) に示すごとく, (図-5, 6) のせん断応力の分布は  $\tau_{\theta z}$  に関しては  $\theta=90^\circ$  面 (断面 OB),  $\tau_{rz}$  に関しては  $\theta=0^\circ$  面 (断面 OA) におけるものを表わしているといえることができる。したがってこのとき、

直交座標で考えれば  $\tau_{\theta z}$  と  $\tau_{rz}$  とは同じ方向の応力であるから, 当然  $\tau_{rz}$  の方が横方向への分散が大きいことが上図によっても推察される。

(4) 均一な層における分布形状とくら



(図-11) せん断応力成分  $\tau_{rz}$  と  $\tau_{\theta z}$  の関係

べると、二層の場合にははなはだしく上層へ応力集中を起しており、それが弾性率比  $E_1/E_2$  によって大きく影響を受けることは、鉛直荷重が働いたときの鉛直応力について Burmister が報告した結果と同じであるが、応力集中の程度は鉛直力が働いたときよりも著しいようである (Burmister, 1943)。また横方向への分散は  $E_1/E_2$  の値にそれ程大きな影響を受けていない。

(5) 載荷半径を一定と考えると、上層が薄い場合 ( $a/h$  が大きいとき) には、せん断応力の深さ方向への分散は少なくなるが横方向にはそれ程大きな差異が見られない。また  $E_1/E_2$  が大きくなると載荷半径の影響はほとんどなくなるようである。

(6)  $Er_2/g_0 \cos \alpha$  の圧力球根はある応力値以下になると、中心軸から少し離れたところつまり載荷円の端部附近で下にふくれているが、これはある深さの水平面上で考えると最大応力が中心軸からやや離れた場所が生ずることを示している。

Barber がすでに指摘しているように、この応力は舗装を層構造とした場合には層間の bond stress として働くと考えられるから、層間の接着性がこの応力を越えないように留意せねばならない (Barber, 1962)。

また最大せん断応力の分布形状に関しては

(1) せん断荷重の場合には、最大せん断応力は  $E_1/E_2$  の値のいかんにかかわらず上層に集中する傾向があり、ことに  $E_1/E_2$  が

大きくなると下層にはほとんど応力が働かなくなる。これに対して鉛直荷重のときには、最大せん断応力の集中の程度は  $E_1/E_2$  の値によってはなほ大きく影響を受けることが認められる。

(2) 鉛直荷重が働くときには、上層の応力は  $E_1/E_2$  の値にかかわらず、下層の応力は  $E_1/E_2$  値の大きいところで、層厚の影響をかなり受けるが、せん断荷重の場合には、層厚の影響はそれほど大きいものではない。したがって二層地盤においては、せん断荷重に対処するために上層の厚さを増しても効果が上がらないことが予想される。また鉛直荷重の場合には、 $E_1/E_2$  の値が大きくなると下層の応力は減少するが上層の応力が増加し、ことに上層の厚さが減ると応力が急激に増加する傾向があるから、弾性率の大きな材料を舗装に使用するからといって厚さを薄くすることは危険であるということができよう。

(3) 故竹下教授はアスファルト舗装厚の決定法の一つとして、均一弾性地盤の表面に鉛直応力  $P_0$  が働いたときの中心軸上の最大せん断応力を考え、その最大値の 80% の応力のところまでをアスファルト混合物の中に入れ、路盤中には最大応力の 80% 以上は働かせないという考え方を提案している(竹下, 1965)。この方法によって舗装厚を求めると  $1/a = h/a = 1.25$  程度となり、路盤中に生ずる最大応力はほぼ 0.23% となる。

つぎにこれを二層地盤の場合にあてはめてみると、アスファルト舗装では実用的には  $E_1/E_2 = 2 \sim 20$  と考えられるから、路盤中に働く最大せん断応力は  $0.15 \sim 0.18 p_0$  となり、竹下の示した値よりも小さくなっている。したがって舗装厚を  $1.25 a$  とするのはやや過大であり、図-10によれば  $h = a$  ぐらいが適当であるものと思われる。

(4) いま述べたごとく実用的にはアスファルト舗装では  $E_1/E_2 = 2 \sim 20$  であるのに対してコンクリート舗装では  $E_1/E_2 = 100 \sim 500$  程度と考えられるから、先に述べたごとく、外力の大きさがせん断力および鉛直力で等しいとすれば、アスファルト舗装はせん断荷重に対して危険であり、コンクリート舗装は鉛直荷重に対して危険であるといえることができる。したがってアスファルト舗装では、交叉点など車輛の始動・制動によるせん断荷重の多く働く場所で表面に波状変形を生じやすく破壊しやすいことも当然のことであると結論される。これに対する対策の一つとして、曲線部、勾配部および交叉点などにおいては、弾性率のとくに大きい種類の舗装混合物を使用することが考えられる。

(5) 舗装の簡便な補修法として、アスファルト混合物によるオーバーレーニング(overlaying)がさかんに行なわれているが破壊されている例がきわめて多い。これはオーバーレーニング

51

の厚さが薄いために在来舗装との接着面に大きなせん断応力が働くことが原因であると思われる。したがってこれを有効に行なうためには、接着性の良い材料をもちいるか厚さを増すかして大きなせん断応力に耐え得るような構造にする必要があるものと推察される。

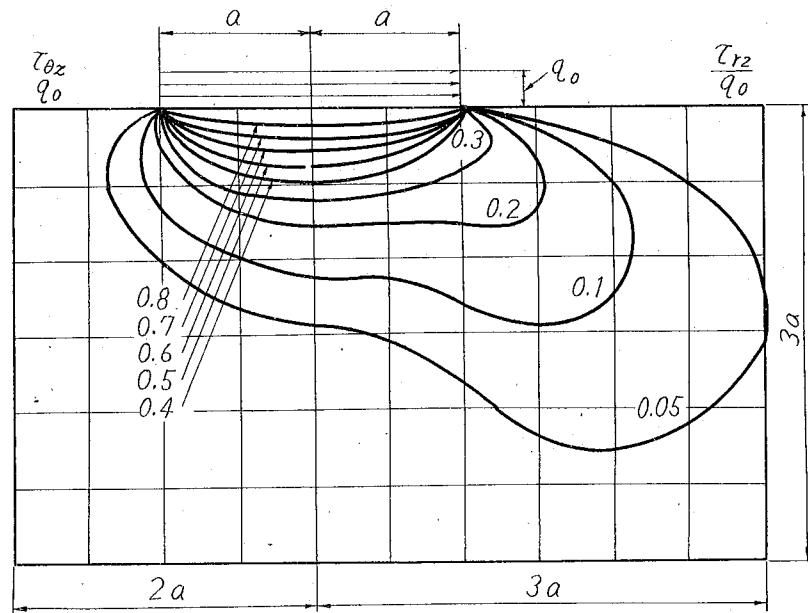
### 第5節 結 語

本章で得られた結論を要約する。

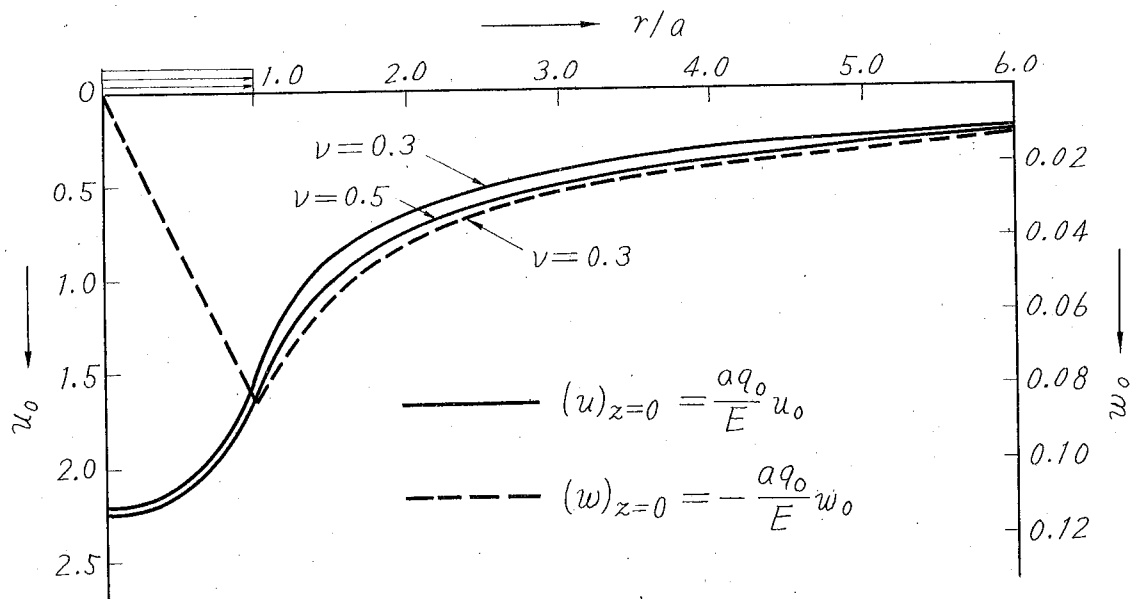
- (1) 境界面が滑らかなときには、せん断応力の分布形状はポアソン比によらない。また粗であるときとほとんど差違がない。
- (2) せん断荷重によるせん断応力は深さ方向へは分散せず、表面に近い所で著しく横方向に分散する。
- (3)  $\tau_{0z}$  は  $\tau_{rz}$  に比して横方向への分散のしかたがきわめて少ない。
- (4) せん断荷重によるせん断応力は上層へはなほ大きく集中し、その程度は鉛直荷重による鉛直応力におけるよりも著しい。また横方向への分散は  $E_1/E_2$  の値にそれ程大きく影響を受けない。
- (5) 載荷半径と上層厚さとの比が大きくなると深さ方向への分散は少なくなるが、横方向への分散はさ程影響を受けない。

- (6) 水平面上における  $\sigma_{rz}$  は、ある深さ以下になるとその最大値が荷重縁部の下附近で生ずる。
- (7) せん断荷重による最大せん断応力は弾性率比  $E_1/E_2$  のいかんにかかわらず上層に集中するが、鉛直荷重の場合には集中の程度は  $E_1/E_2$  によって大きく影響される。
- (8) せん断荷重による最大せん断応力においては上層の厚さの影響は少ないが、鉛直荷重においては大きな影響を有している。
- (9) せん断荷重と鉛直荷重の大きさが等しくなるものとするれば、アスファルト舗装は前者に対してより危険であり、コンクリート舗装では後者に対して充分な考慮を払う必要がある。

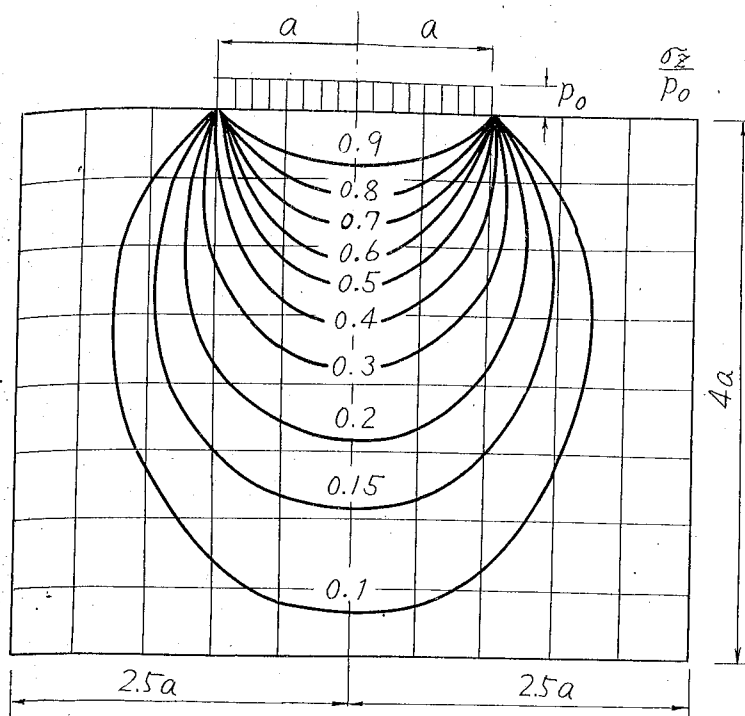
(図-5) 一様地盤における応力と変位:  
(5-a) 円形水平等分布荷重



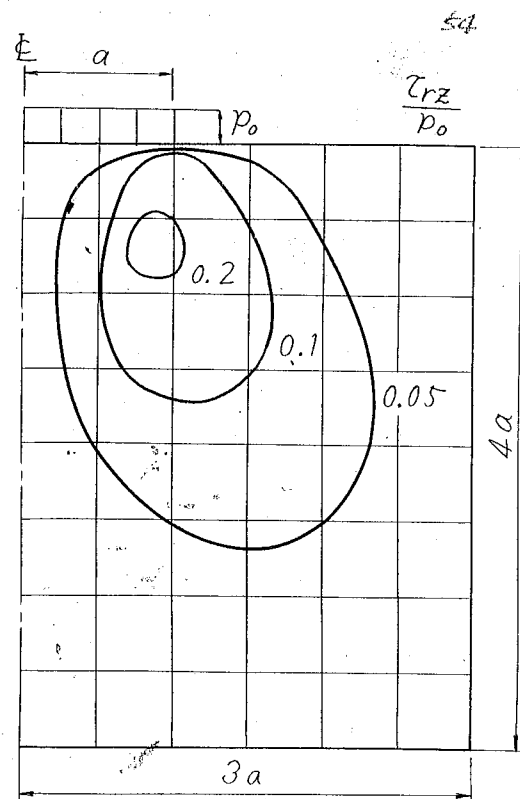
(5-a-1)  $\tau_{rz}/q_0, \tau_{\theta z}/q_0$



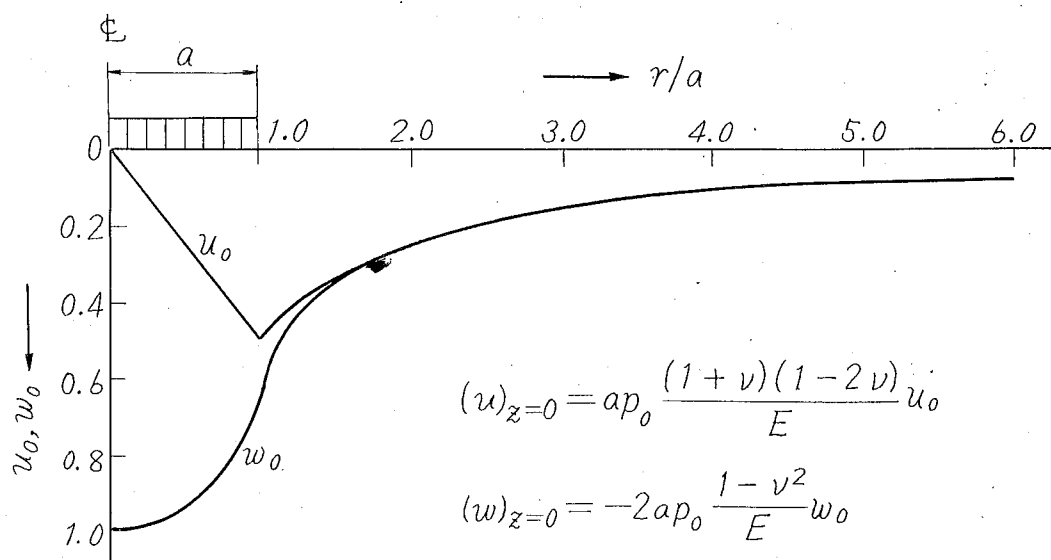
(5-a-2) 変位分布



(5-b-1)  $\sigma_z/p_0$

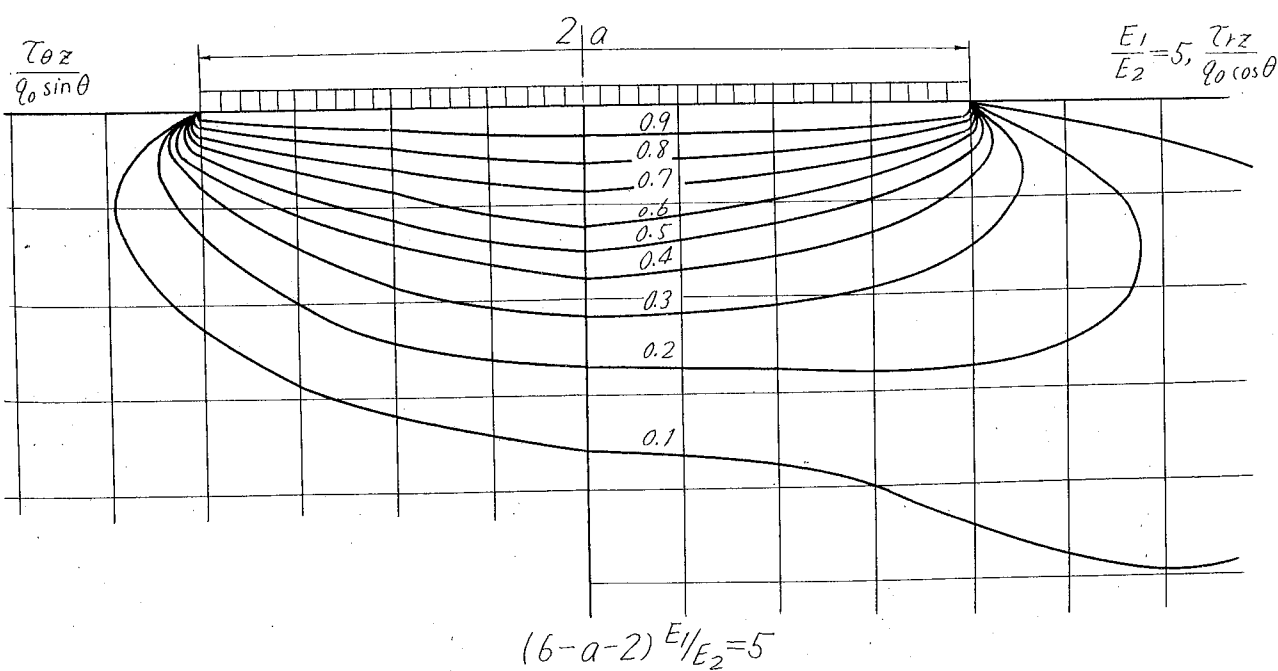
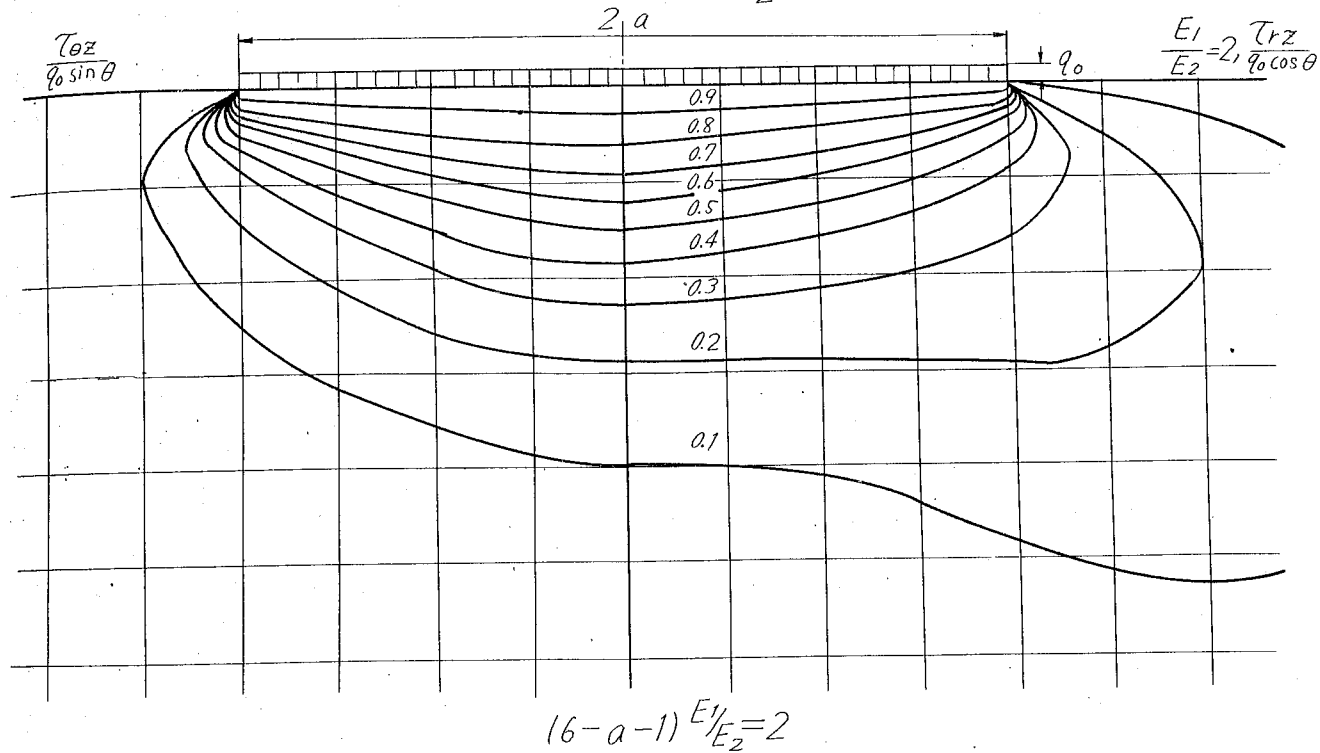


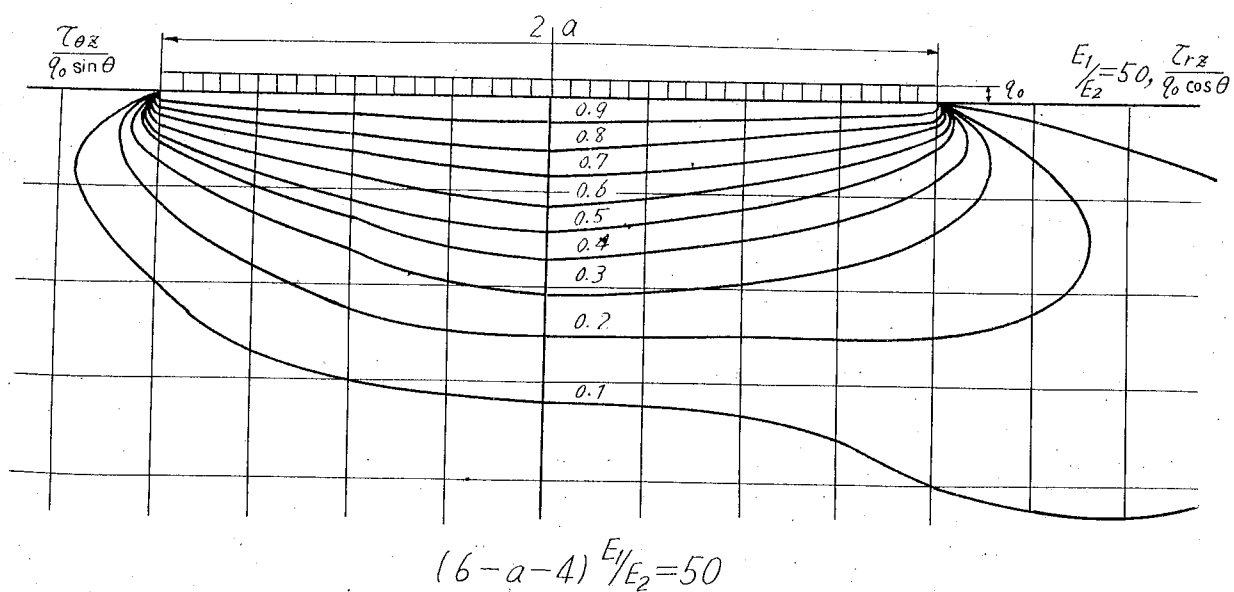
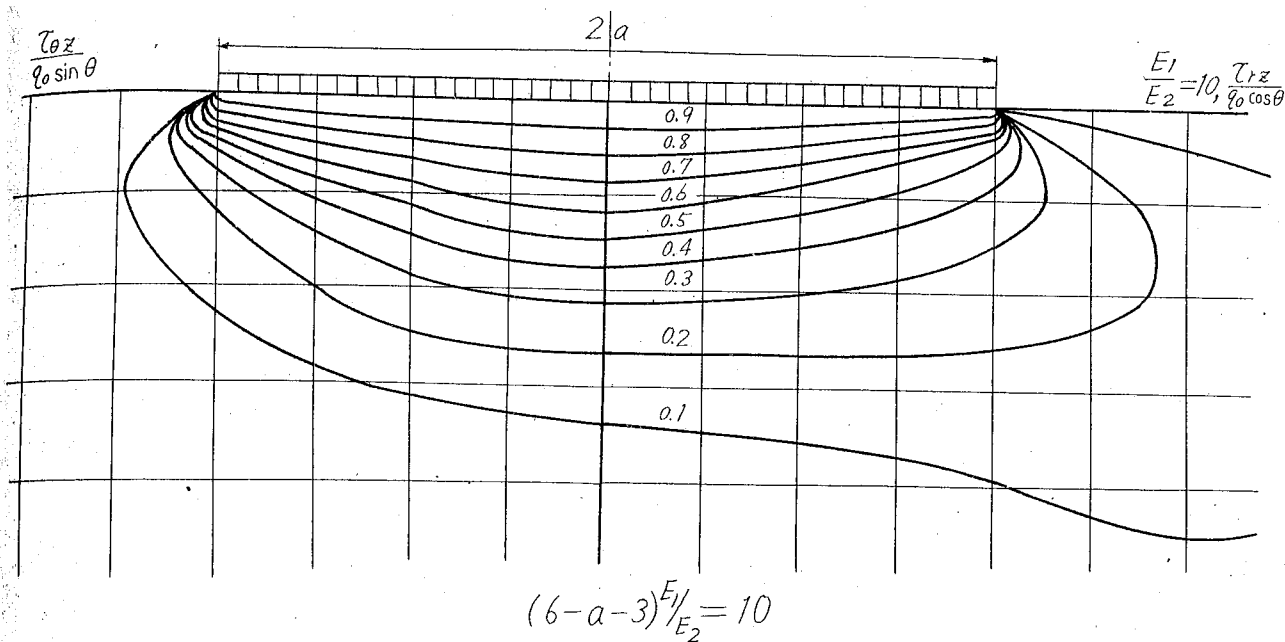
(5-b-2)  $\tau_{rz}/p_0$

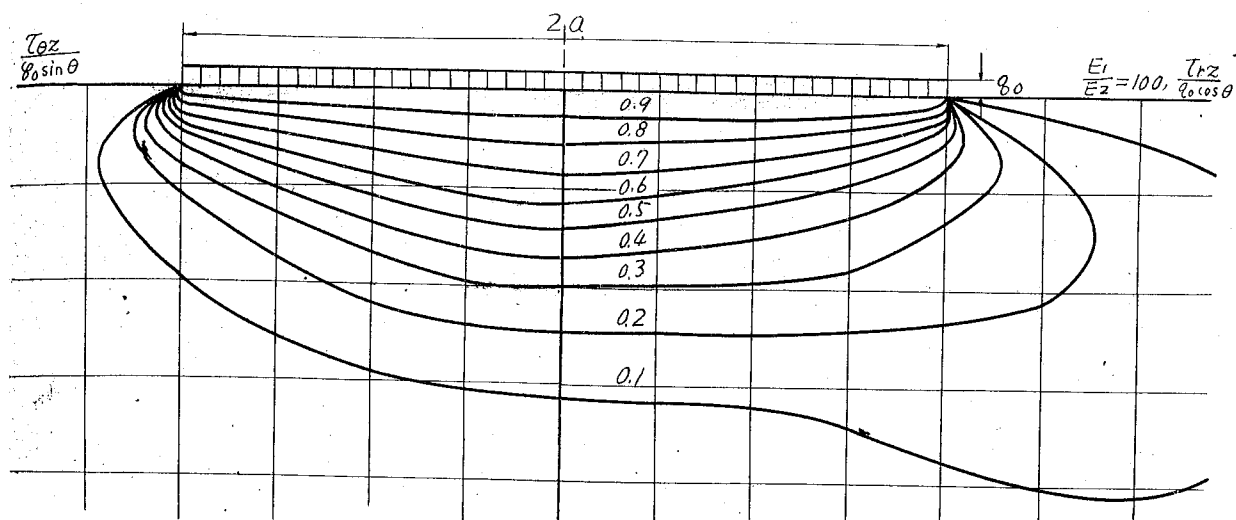


(5-b-3) 变位成分

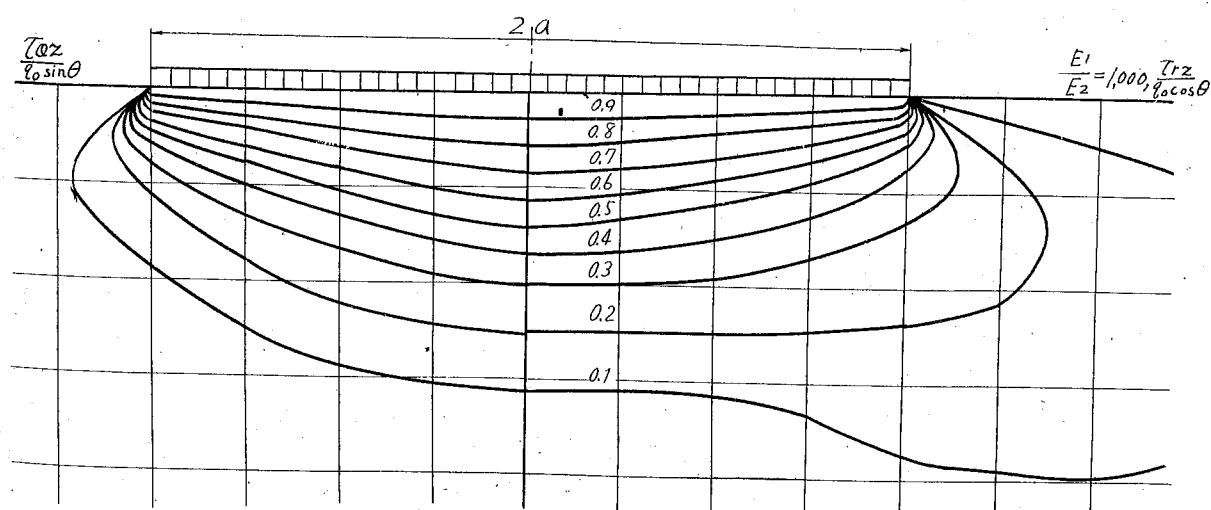
(図-6)境界面が粗である二層地盤の表面  
にせん断応力が作用したときの応力  
分布ならびに変位  
(6-a)  $p = a/h = \frac{1}{2}$



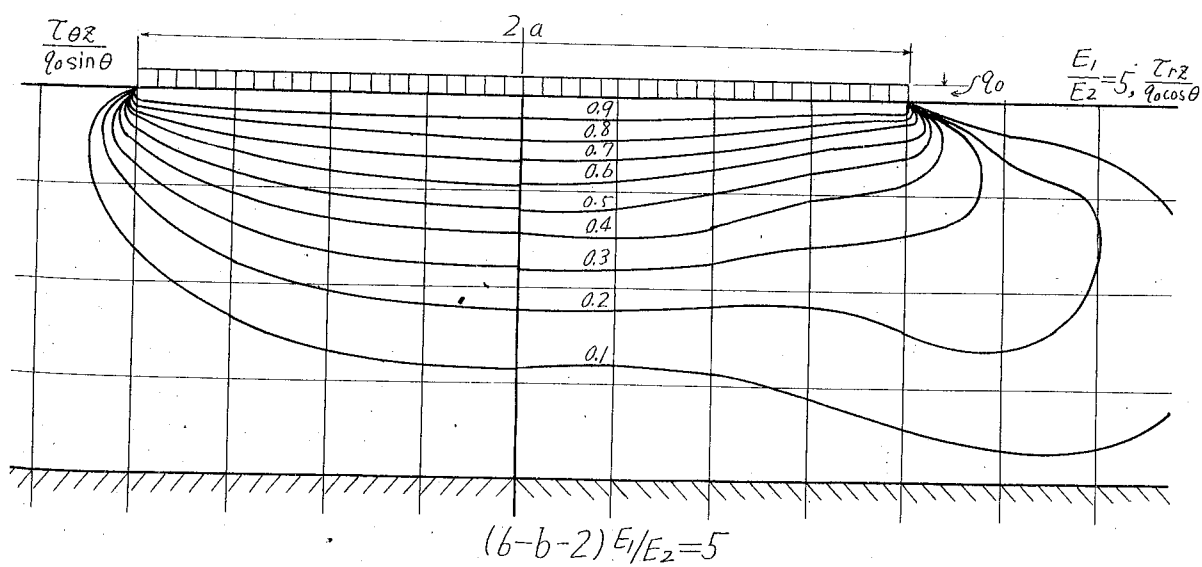
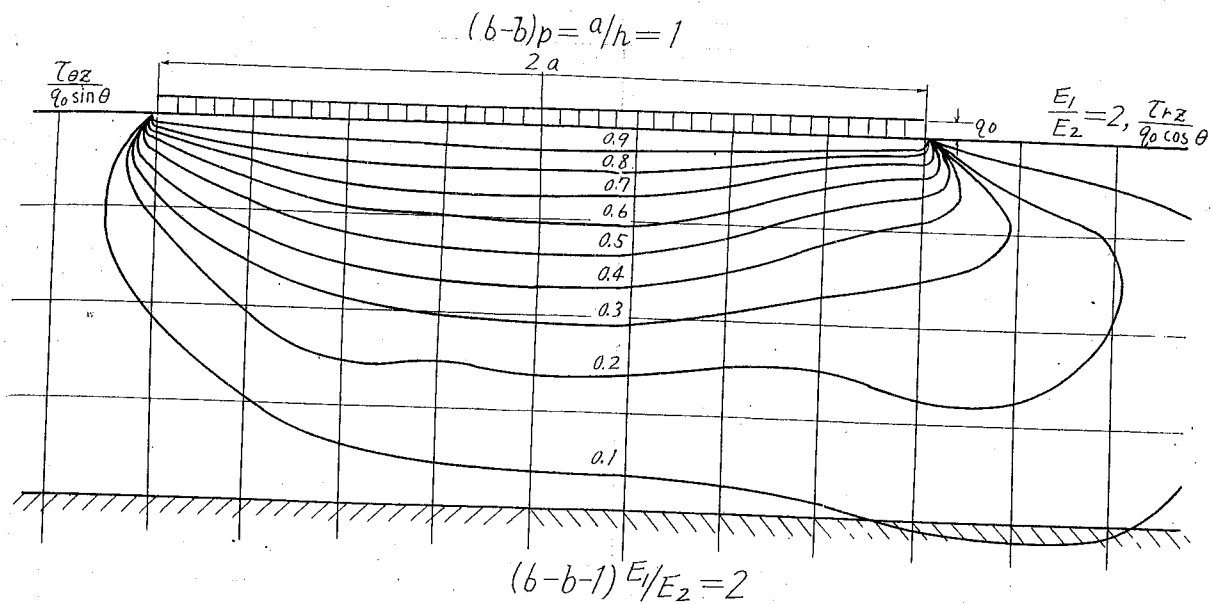


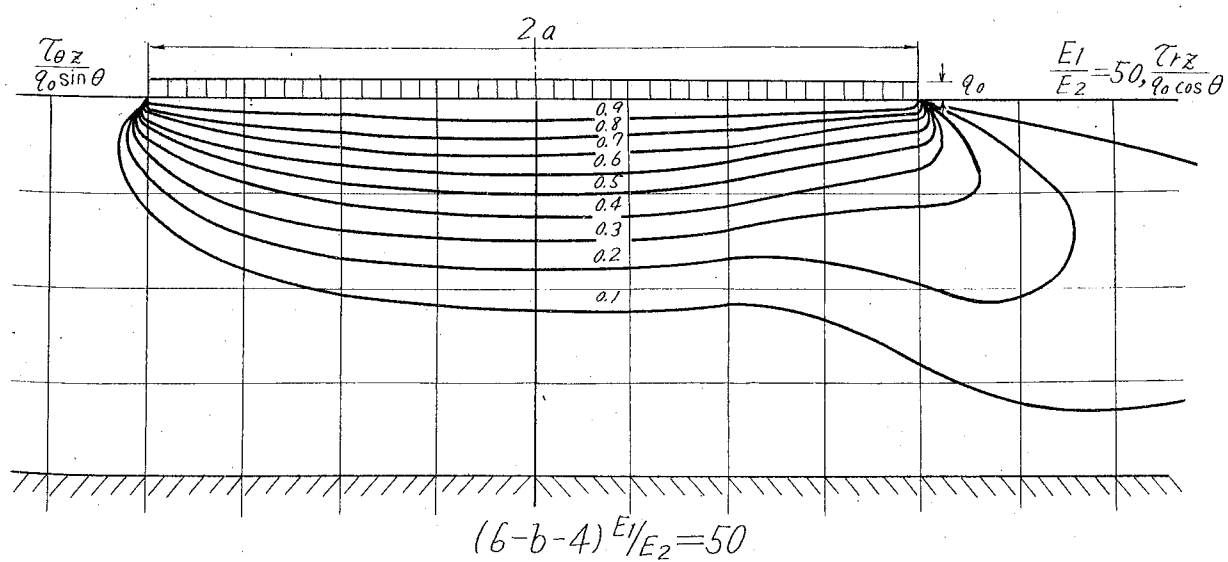
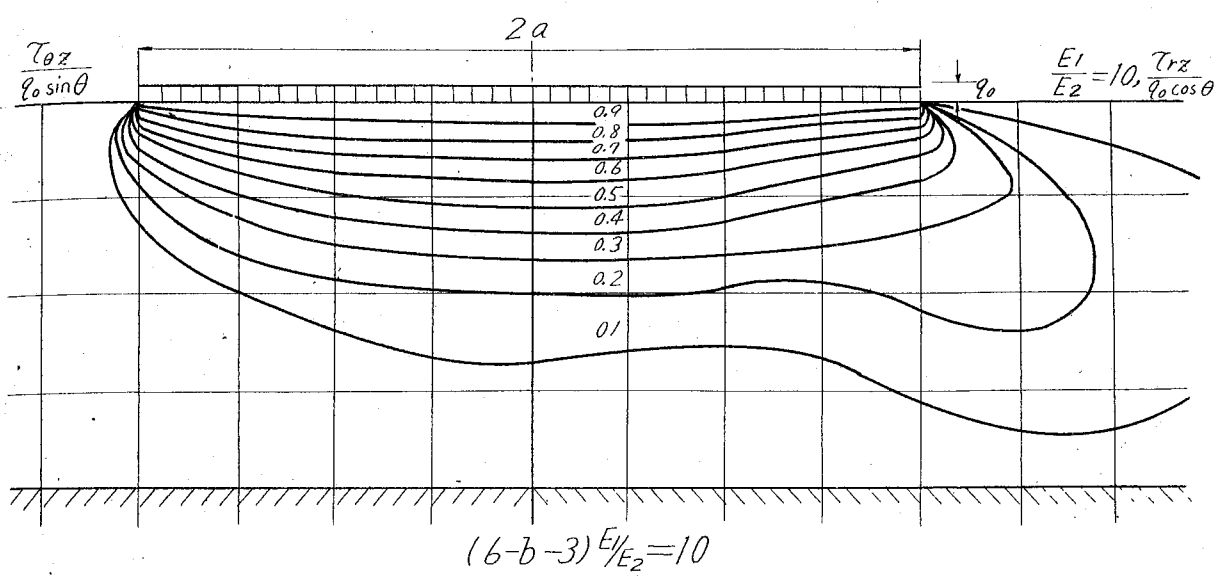


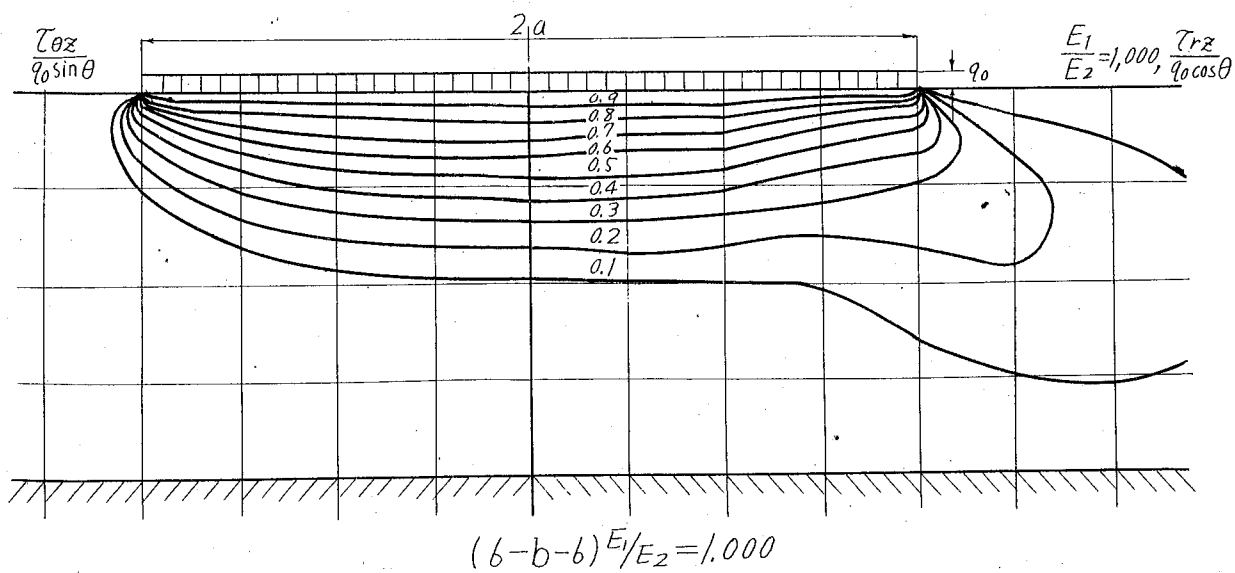
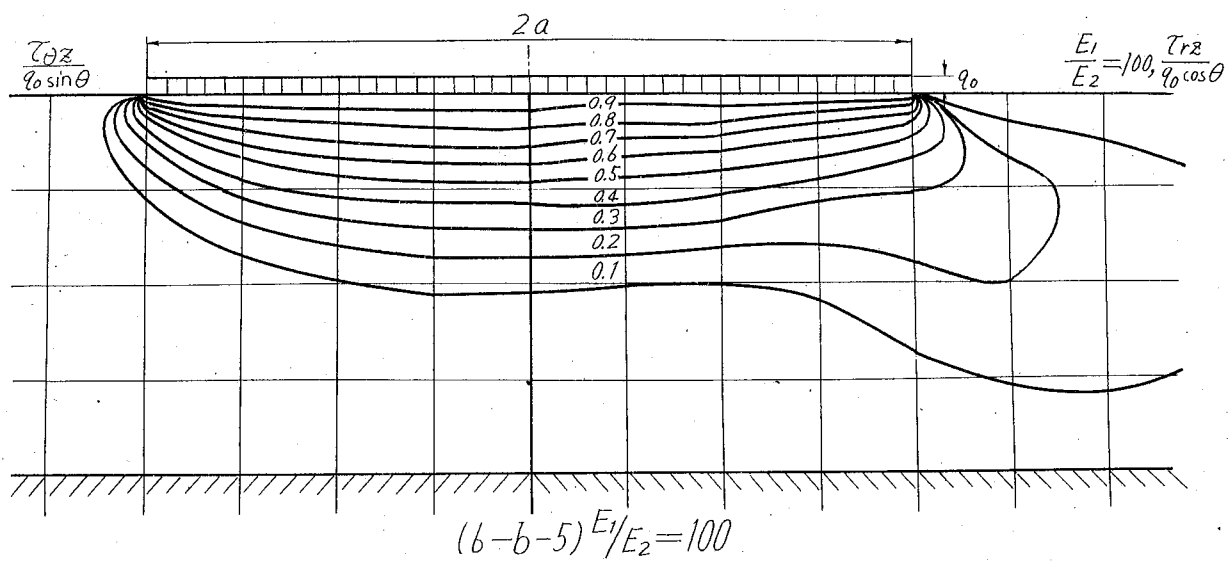
(6-a-5)  $E_1/E_2 = 100$

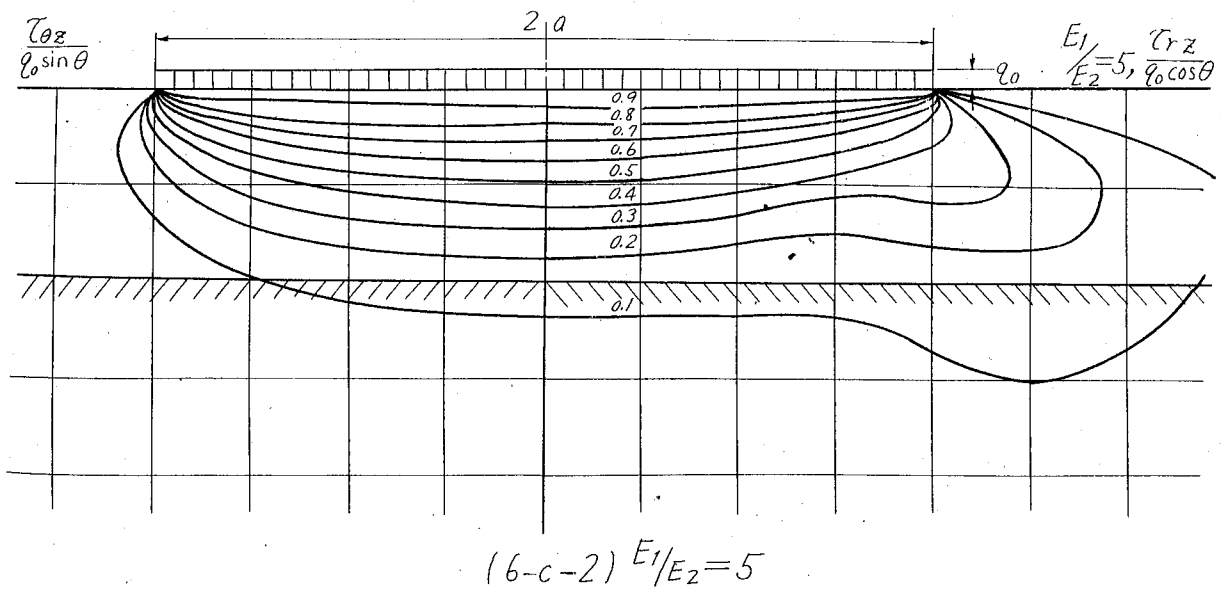
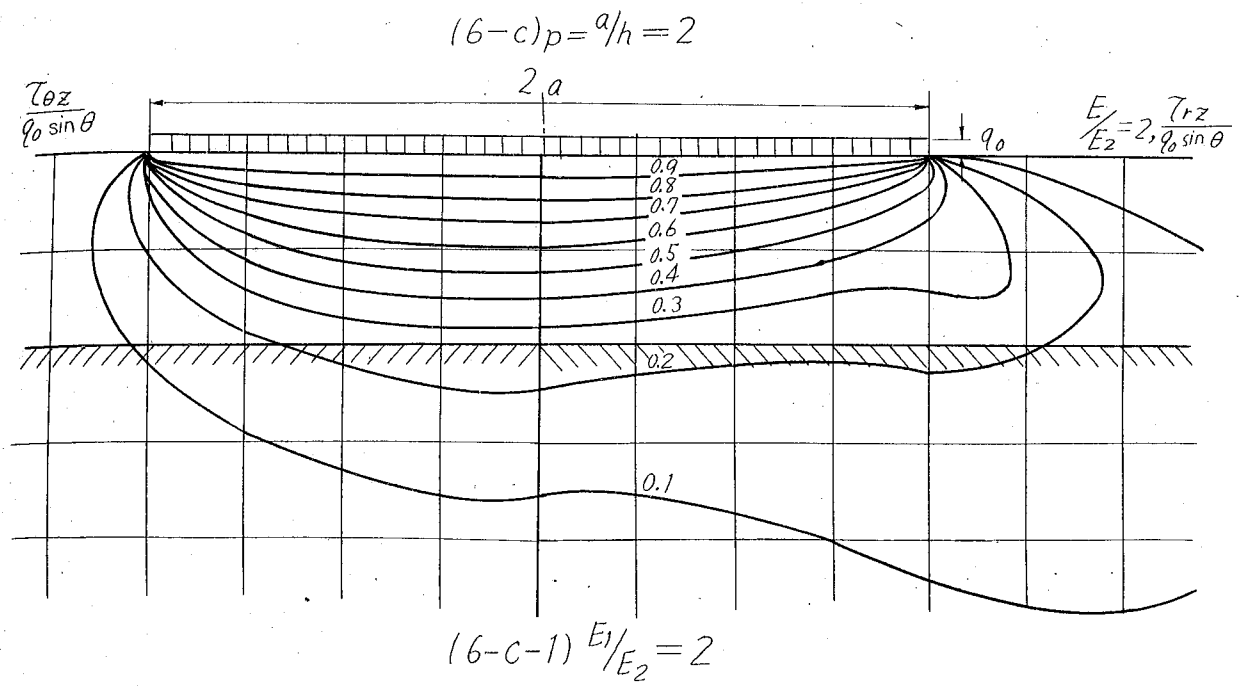


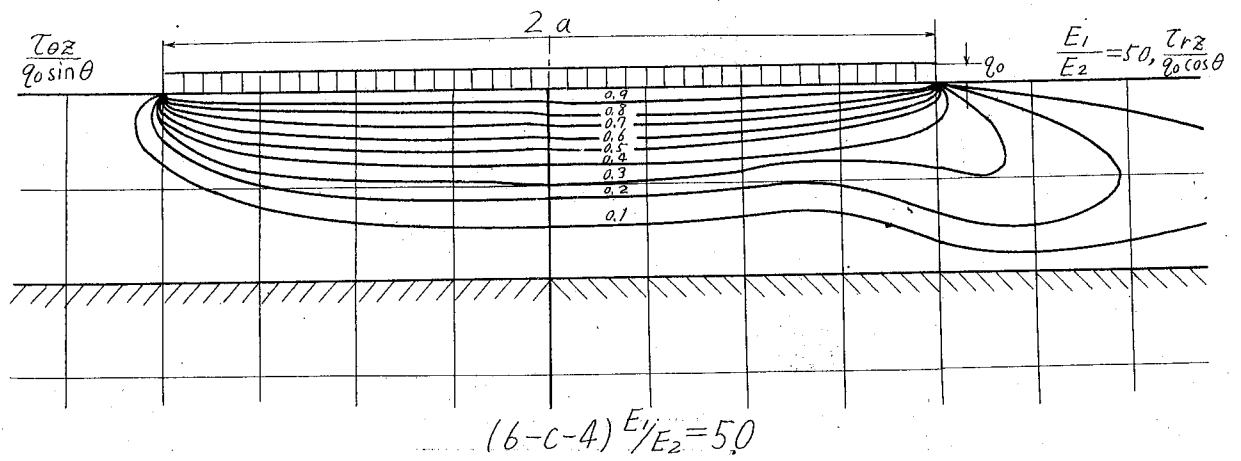
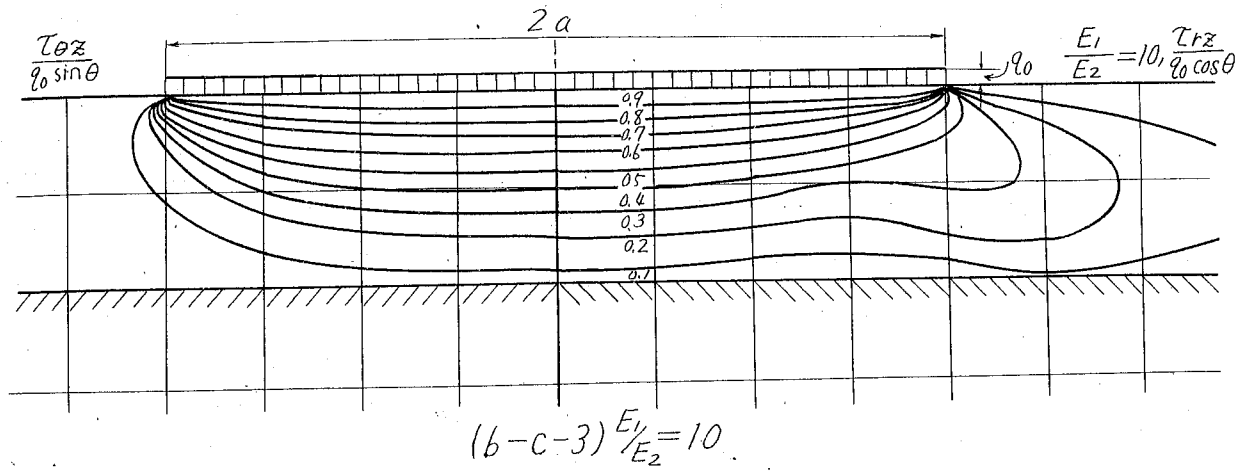
(6-a-6)  $E_1/E_2 = 1,000$

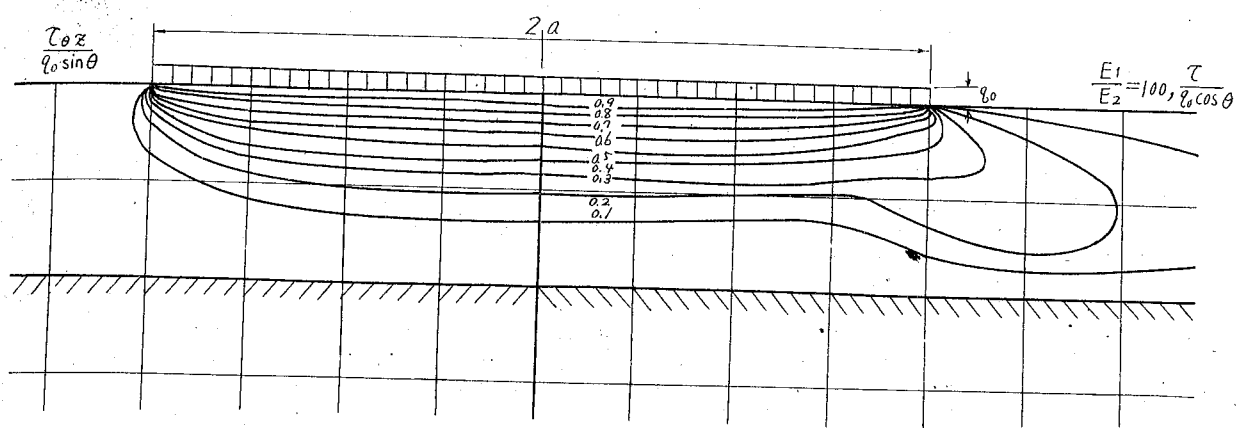




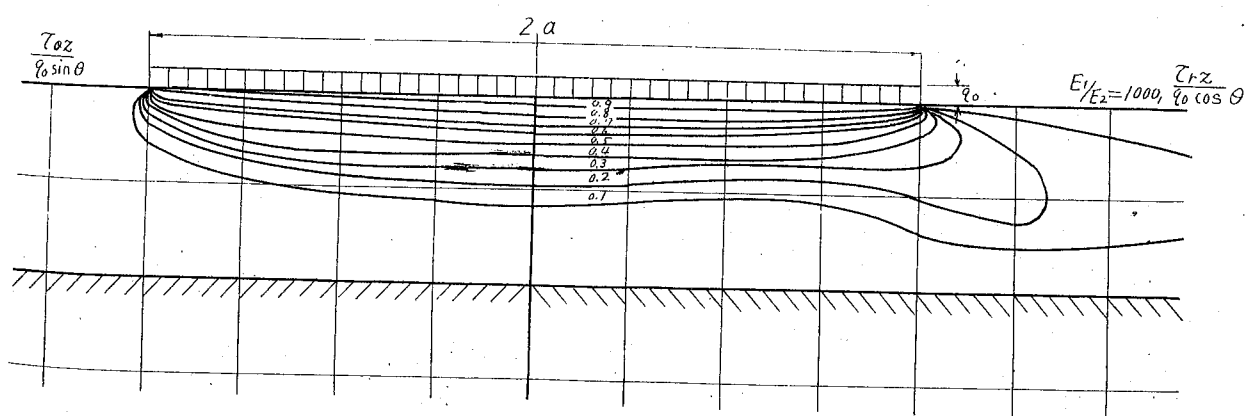






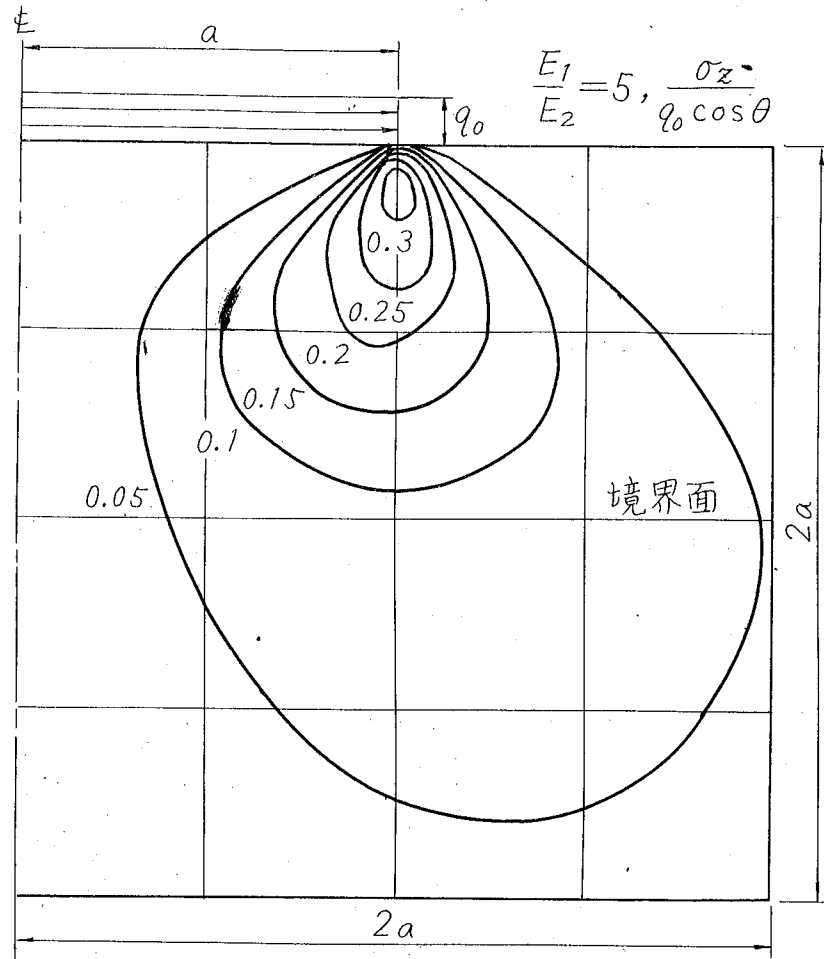
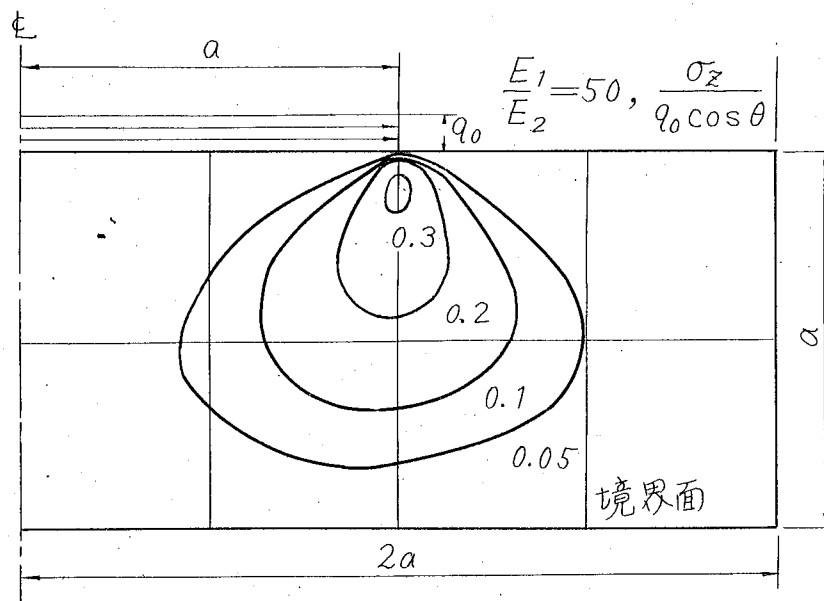


(6-c-5)  $E_1/E_2 = 100$



(6-c-6)  $E_1/E_2 = 1.000$

(6-d) 鉛直応力

(6-d-1)  $E_1/E_2 = 5$ (6-d-2)  $E_1/E_2 = 50$

(b-e) 鉛直変位

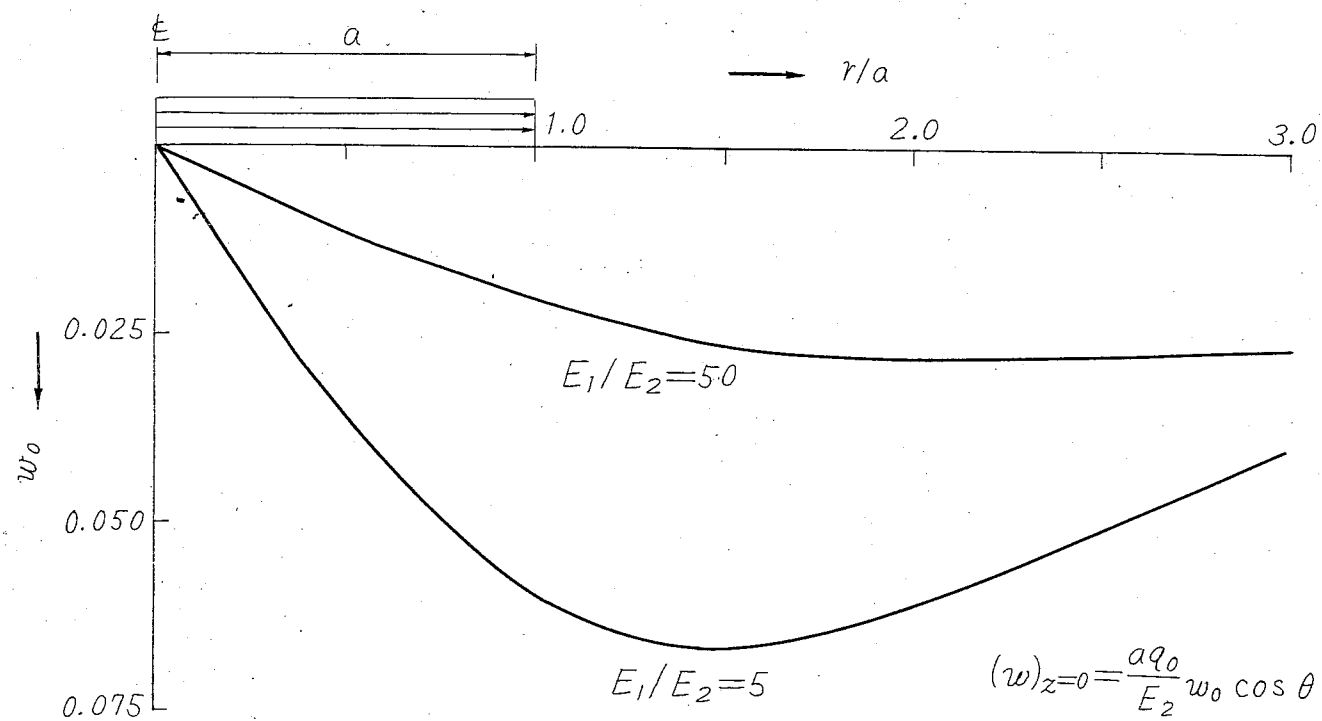
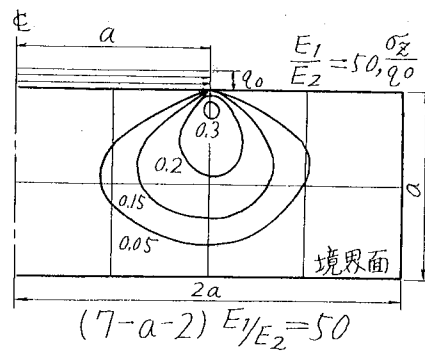
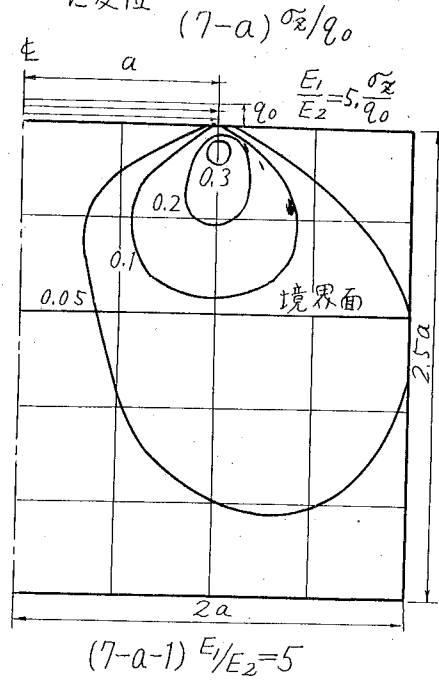
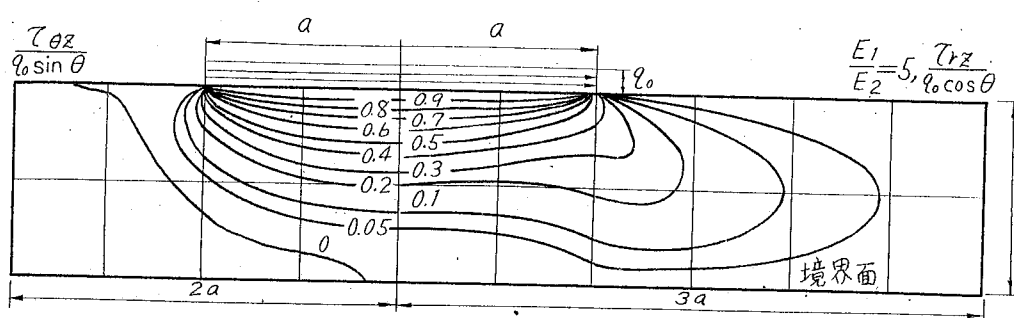
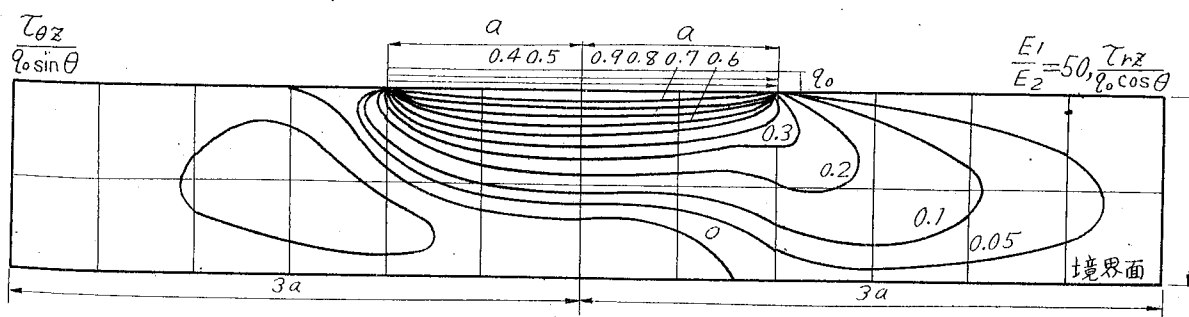


図-7 境界面が滑らかである二層地盤の表面に  
せん断応力が作用したときの応力分布ならび  
に変位



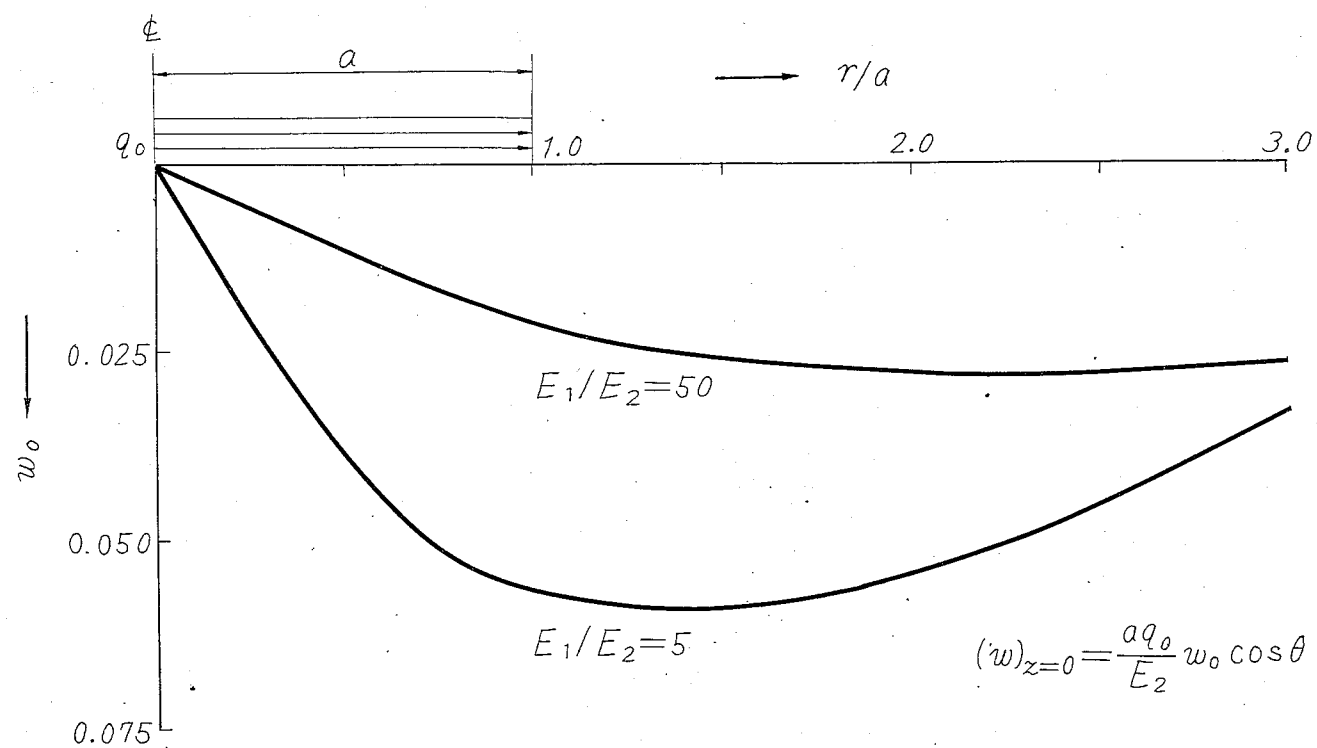


(7-b-1)  $E_1/E_2 = 5$

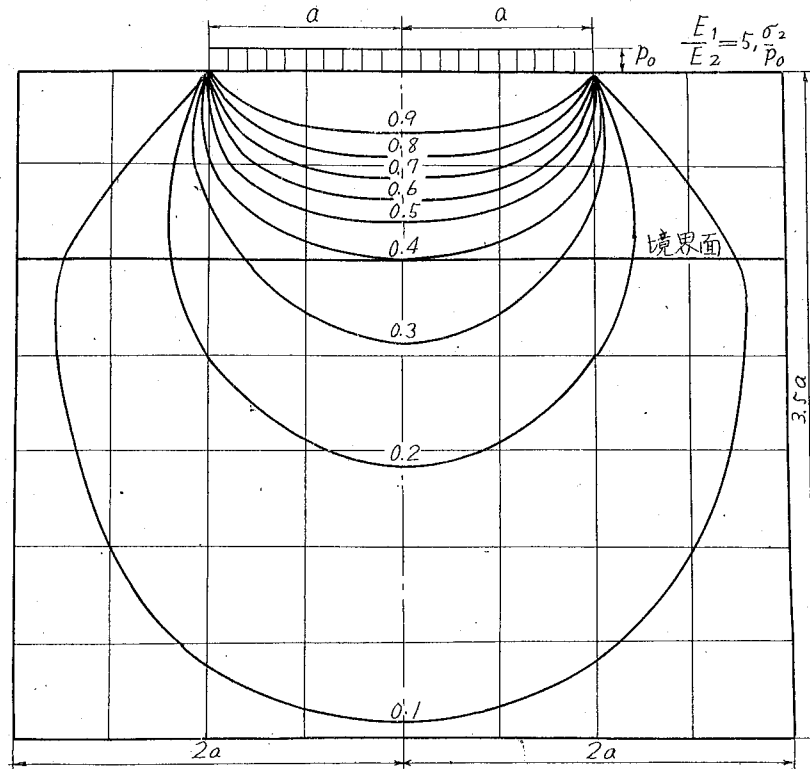


(7-b-2)  $E_1/E_2 = 50$

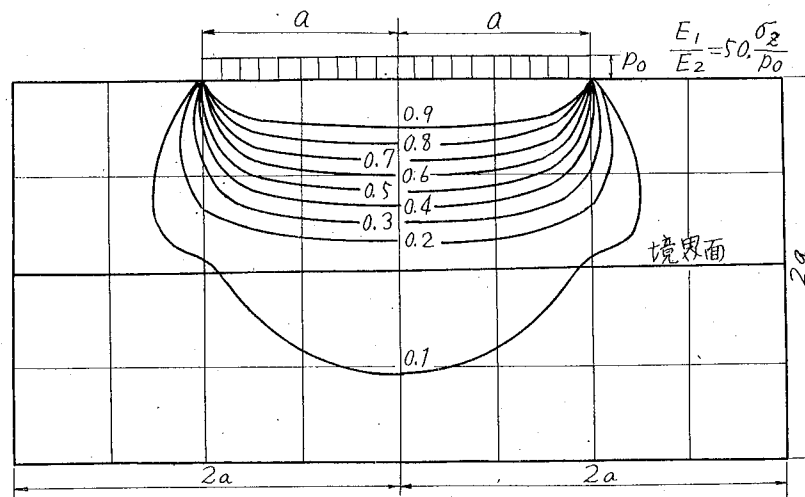
(7-C) 鉛直変位



(12)-8) 境界面が粗である二層地盤の表面に鉛直応力が  
作用したときの応力分布ならびに変位  
(8-a)  $\sigma_z/p_0$

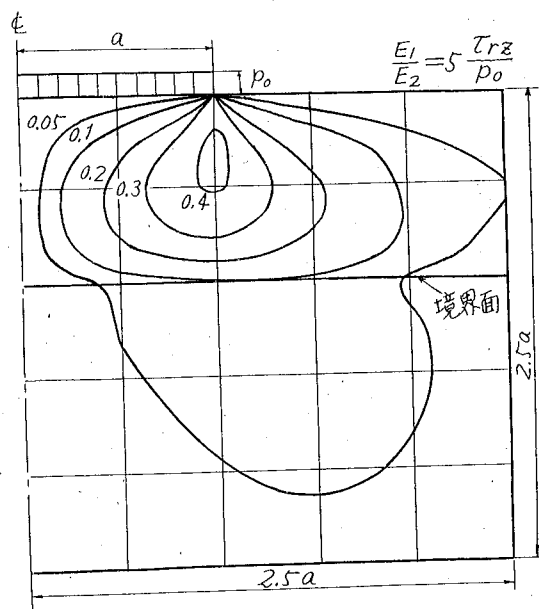


(8-a-1)

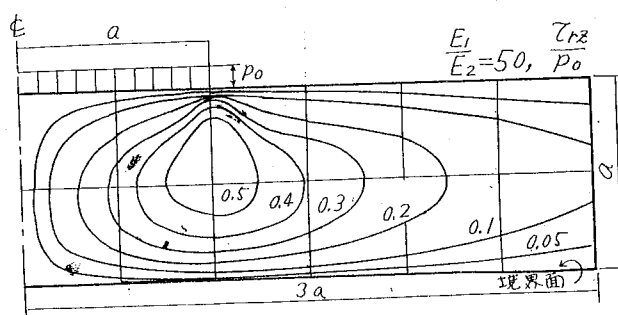


(8-a-2)

$$E_1/E_2 = 50$$

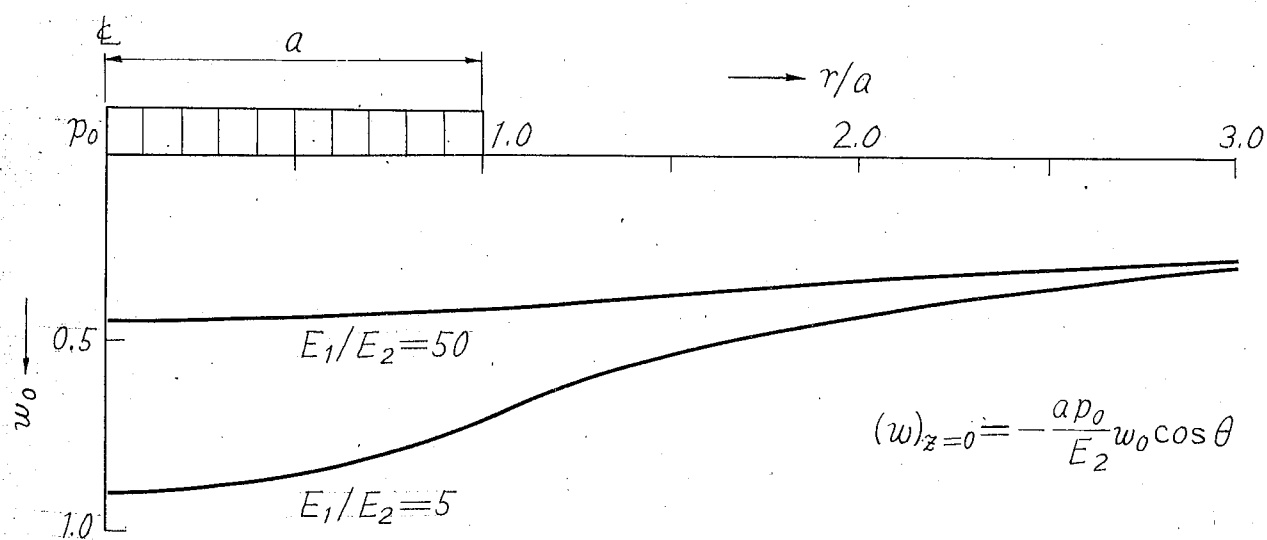


$$(8-b-1) E_1/E_2 = 5$$

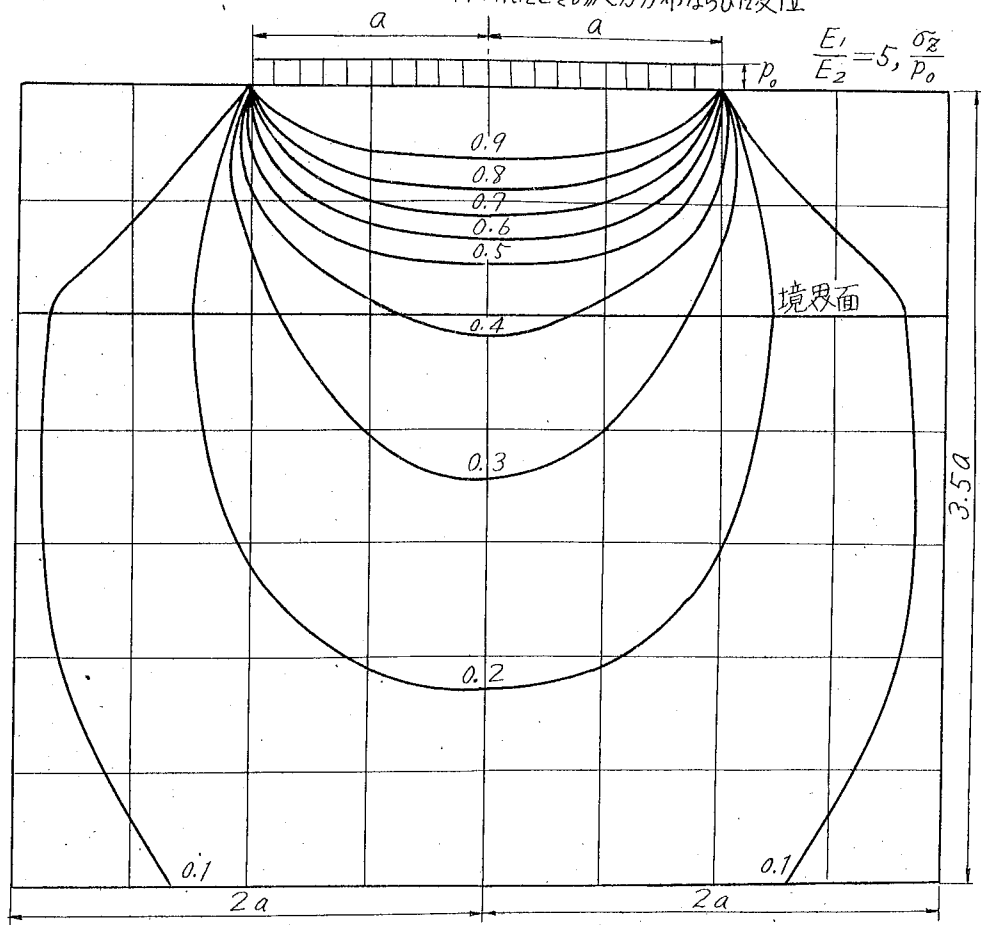


$$(8-b-2) E_1/E_2 = 50$$

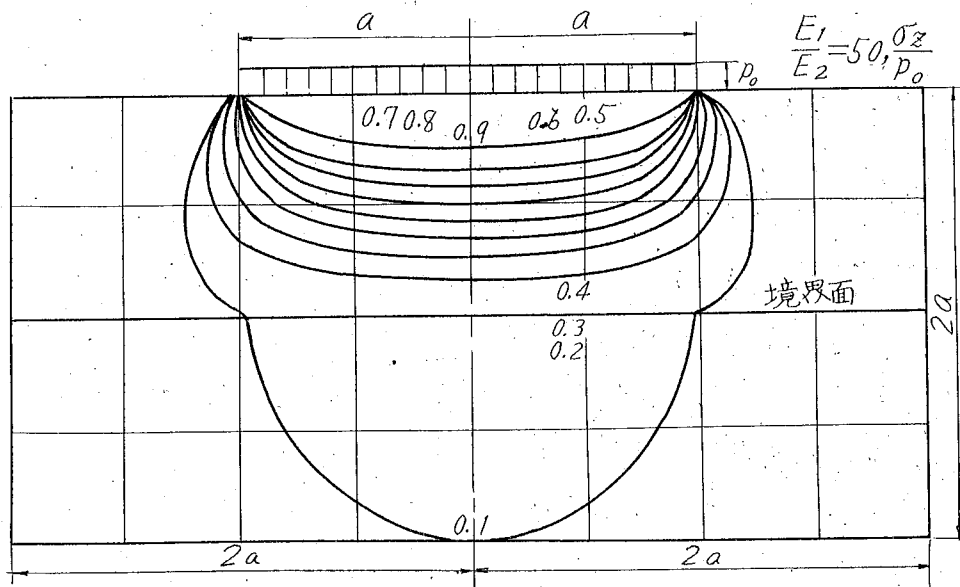
(8-C) 鉛直変位



(図-9) 境界面が滑らか(2)二層  
地盤の表面に鉛直応力が  
作用したときの応力分布ならびに変位

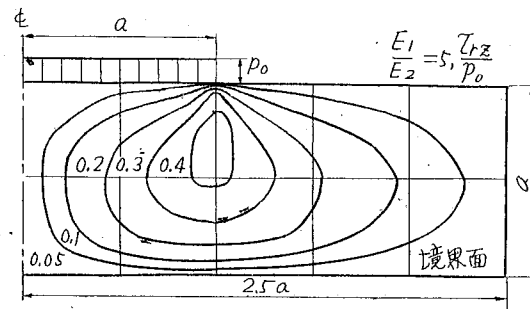


$$(9-a-1) E_1/E_2 = 5$$

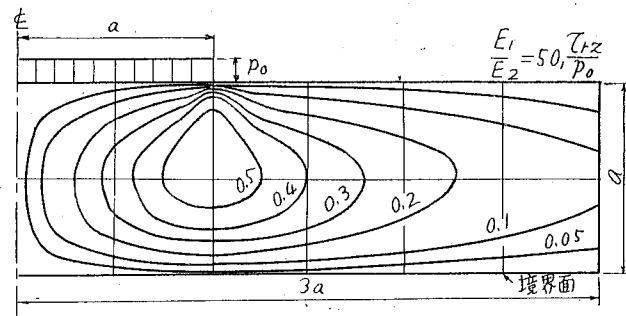


$$(9-a-2) E_1/E_2 = 50$$

(9-b)  $\tau_{rz}/p_0$



(9-b-1)  $E_1/E_2 = 5$



(9-b-2)  $E_1/E_2 = 50$

(9-C) 鉛直変位

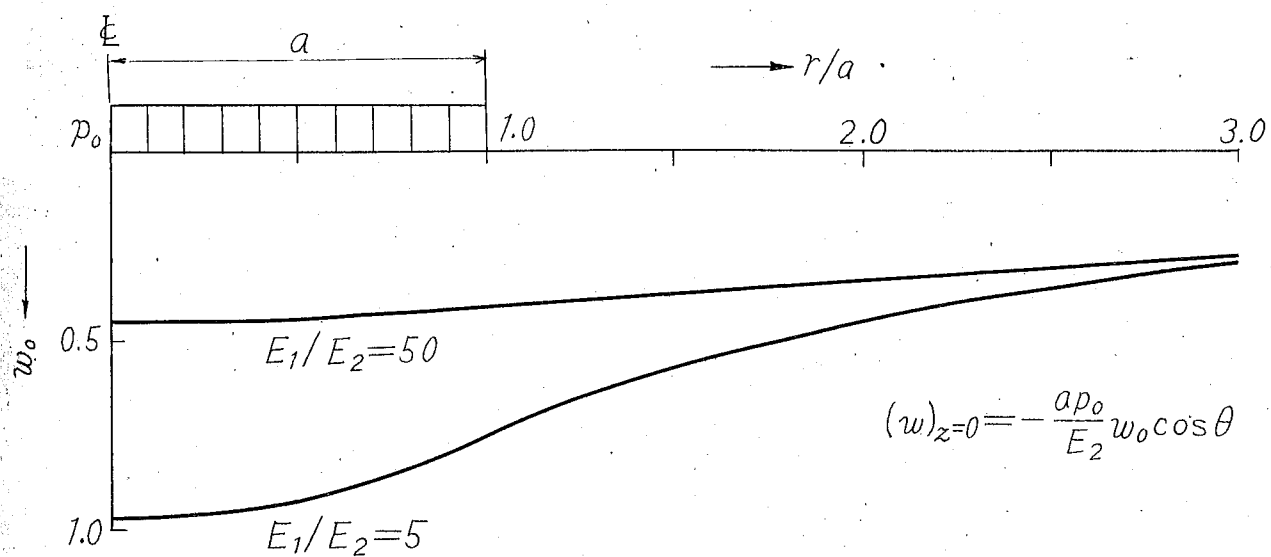
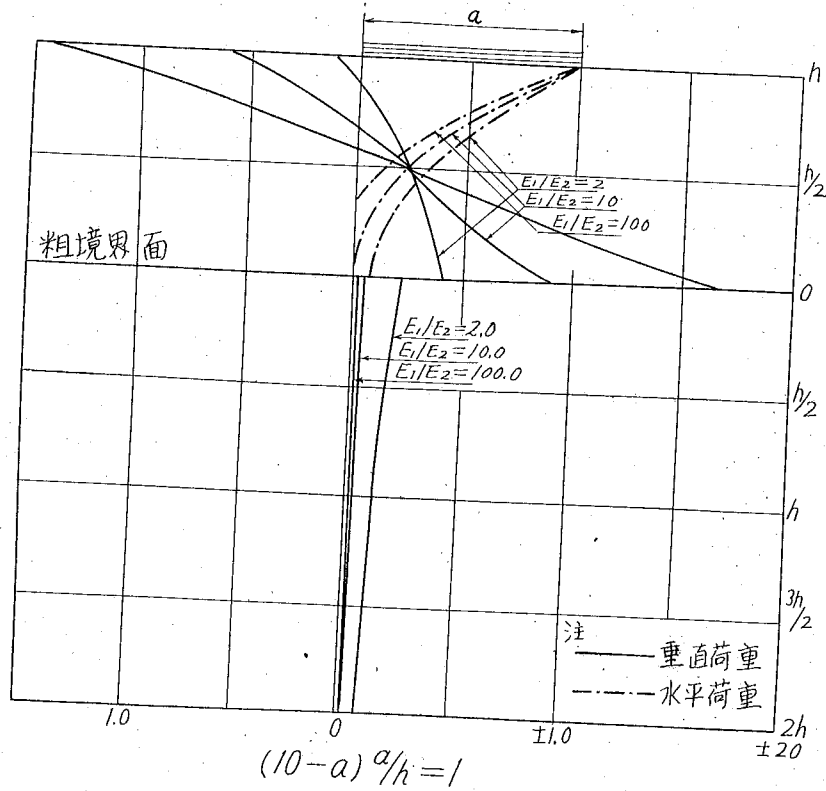
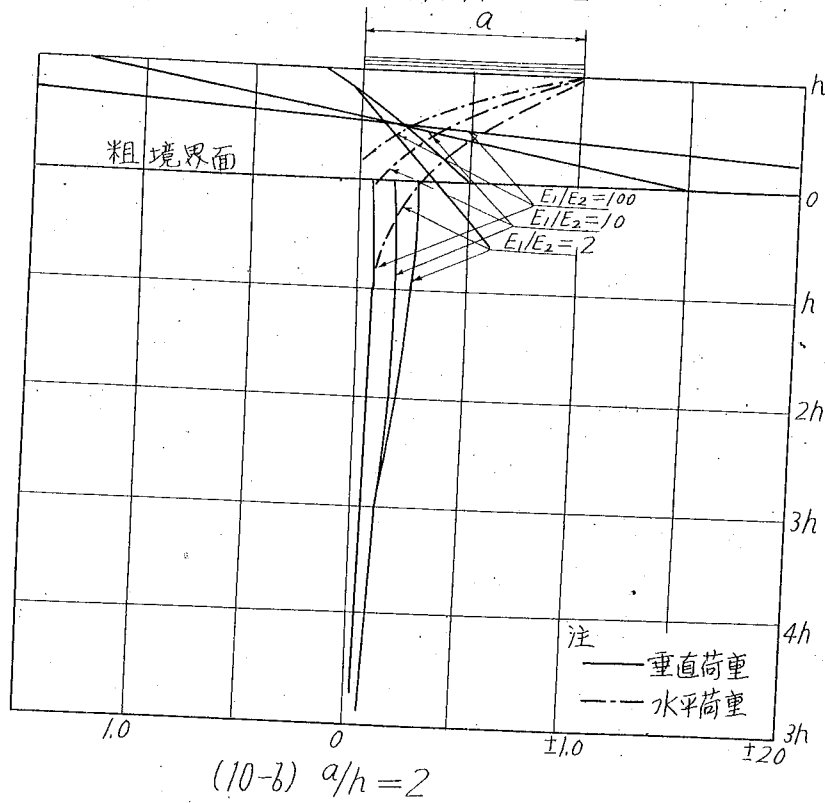


図-10 載荷中心軸の最大せん断  
応力の分布

$\tau_{max}/\rho_0 ; p=a/h=1$



$\tau_{max}/\rho_0 ; p=a/h=2$



### 第Ⅲ章 斜め地盤の応力性状

#### 第1節 概論

斜め地盤はこれを無限に続く弾性クサビと考えることによつて解析的取扱ひが可能となる。クサビの問題においては、境界面に作用するトラクションが直線的に増加する場合には比較的簡単に解が求められる (Fillunger, 1912)。自重のみを考慮したクサビの問題もこれと同種のものとなる (Fillunger, 1912)。これに対してクサビの側面において有限中にわたつて外力が作用する問題の解析はさわめて困難であるとされていたが、Tranter はクサビの両側面に頂点から有限区間内に鉛直帯荷重が働いたときの解を Mellin 変換をもちいて実に巧妙に導いた (Tranter, 1948)。

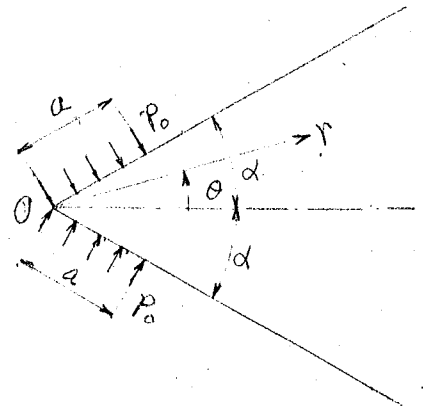
傾斜した強固な地盤上に堆積したいわゆる斜め粘土層が実際にしばしば現われるにもかかわらず、その圧縮および圧密の問題は充分議論されているとはいへない。本章ではこの点に着目し、上に述べた Tranter の解を重ね合わせさらに境界像の原理を適用することによつて、斜め地盤内の応力解を与るとともにこれに基づいて数値解を示した。また地盤内の平均主応力値が知れたときの圧密の一般解をも明らかにした。なお二次元的取扱ひにあつたために変位解を求めるには到らず、その性状を予想するに止まつた。

## 第2節 解析

### 2-1 応力解

2-1-1 Trantorの解 極座標における弾性応力の釣合式は、(図-12)によって

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$



(図-12) 頂角から有限  
角巾にわたって荷重  
を受けるくさび

応力成分を  $\text{Airy}$  の応力関数によって

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (3.2)$$

と表わすと (3.1) は満足され、適合条件式より、

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \phi = 0 \quad (3.3)$$

が得られる。 $\phi$  の Mellin 変換形を

$$\bar{\phi} = \int_0^\infty r^{s-1} \phi \, dr \quad (3.4)$$

と書くと、積分公式

$$\int_0^\infty \frac{\partial^n \phi}{\partial r^n} r^{s+n-1} \, dr = (-1)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} \bar{\phi} \quad (3.5)$$

によって (3.2) の適合条件式は常微分方程式

$$\left( \frac{d^2}{d\theta^2} + s^2 \right) \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} + (s+2)^2 \right] \bar{\phi} = 0 \quad (3.6)$$

に変換される。ただし  $\Gamma(s)$  はガンマ関数である。また

$$r^{s+n} \frac{\partial^n \phi}{\partial r^n} \quad (n=0, 1, 2, 3), \quad r^s \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad r^{s+1} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial \theta^2}$$

は  $r \rightarrow \infty$  で 0 に収束することを仮定した。(3.6)から容易に

$$\bar{\phi} = A \sin(S\theta) + B \cos(S\theta) + C \sin[(S+2)\theta] + D \cos[(S+2)\theta] \quad (3.7)$$

が得られる。ただし  $A, B, C, D$  は境界条件から定められる  $S$  および  $\alpha$  (クサビの半頂角) の関数である。

応力成分(3.2)に Mellin 変換をほどこすと

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty (r^2 \sigma_r) r^{s-1} dr &= \left( \frac{d^2}{d\theta^2} - S \right) \bar{\phi} \\ \int_0^\infty (r^2 \sigma_\theta) r^{s-1} dr &= S(S+1) \bar{\phi} \\ \int_0^\infty (r^2 \tau_{r\theta}) r^{s-1} dr &= (S+1) \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

となるから、逆変換則によつて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} - S \right) \bar{\phi} r^{-S-2} dr \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} S(S+1) \bar{\phi} r^{-S-2} dr \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (S+1) \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} r^{-S-2} dr \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

がえられる。よつて応力関数の Mellin 変換形が定まれば応力が求められるのである。

クサビの両側面に頂角から有限中にわたつて鉛重帯荷重が作用するときには、境界条件は次のごとくに表示せる(図-12)。

$$\theta = \pm \alpha r'' \quad \tau_{\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta} = \begin{cases} -p_0 & : r < a \\ 0 & : r > a \end{cases} \quad (3.10)$$

この条件に Mellin 変換をほどこすと (3.8) により

$$\left. \begin{aligned} s(s+1)\bar{\phi} &= -p_0 \int_0^a r^{s+1} dr = -\frac{a^{s+2}}{s+2} \\ (s+1)\bar{\phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

が  $\theta = \pm \alpha$  で成り立つから (3.9) の積分を実行すれば応力成分は次のごとくに得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi r}{2a p_0} (\sigma_{\theta} - \sigma_r) &= \frac{\pi a \alpha \cos \theta}{2\alpha + \rho \sin 2\alpha} - \int_0^{\infty} P(\xi) \sin(\xi \log \frac{a}{r}) d\xi \\ \frac{\pi r}{2a p_0} (\sigma_{\theta} + \sigma_r) &= -\frac{\pi a \alpha \cos \theta}{2\alpha + \rho \sin 2\alpha} + \int_0^{\infty} \left[ P(\xi) - \xi Q(\xi) \right] \frac{\sin(\xi \log \frac{a}{r})}{1 + \xi^2} d\xi \\ &\quad - \int_0^{\infty} \left[ Q(\xi) + \xi P(\xi) \right] \frac{\cos(\xi \log \frac{a}{r})}{1 + \xi^2} d\xi \\ \frac{\pi r}{a p_0} \tau_{\theta r} &= \int_0^{\infty} R(\xi) \cos(\xi \log \frac{a}{r}) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} (\xi \sin 2\alpha + \rho h 2\xi) P(\xi) &= \sin(\alpha - \theta) \operatorname{ch}(\alpha + \theta)\xi + \sin(\alpha + \theta) \operatorname{ch}(\alpha - \theta)\xi \\ (\xi \sin 2\alpha + \rho h 2\xi) Q(\xi) &= \cos(\alpha - \theta) \operatorname{sh}(\alpha + \theta)\xi + \cos(\alpha + \theta) \operatorname{sh}(\alpha - \theta)\xi \\ (\xi \sin 2\alpha + \rho h 2\xi) R(\xi) &= \sin(\alpha - \theta) \rho h(\alpha + \theta)\xi - \sin(\alpha + \theta) \rho h(\alpha - \theta)\xi \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

によって  $P, Q, R$  が与えられる。

2-1-2 斜め地盤に対する解 クサビの両端面に頂点より

有限巾にわたって鉛直帯荷重が加わったときの解は Trautner

の解(3.12)を重ね合わせることに  
て求められる。すなわち、(図-13)  
を参照し

$$n = \frac{b}{a}, \quad m = \frac{r}{a} \quad (3.14)$$

とおくと

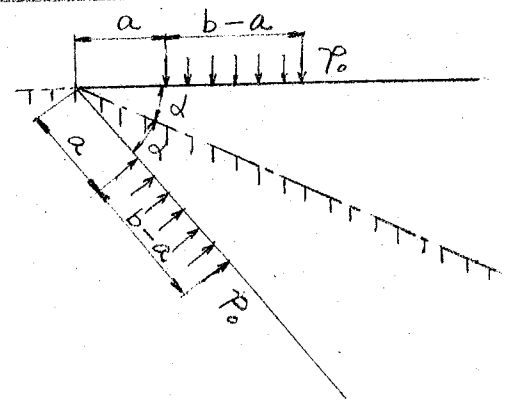
$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi r}{2p_0} (\sigma_\theta - \sigma_r) &= \frac{r \sin \alpha \cos \theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{n-1}{m} \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{P(\xi)}{m} \left[ \sin(\xi \log \frac{1}{m}) - n \sin(\xi \log \frac{n}{m}) \right] d\xi \\ \frac{\pi r}{2p_0} (\sigma_\theta + \sigma_r) &= \frac{r \sin \alpha \cos \theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{1-n}{m} \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{P(\xi) - \xi Q(\xi)}{m(1+\xi^2)} \left[ n \sin(\xi \log \frac{n}{m}) - \sin(\xi \log \frac{1}{m}) \right] d\xi \\ \frac{\pi}{p_0} \tau_{r\theta} &= \int_0^\infty \frac{R(\xi)}{m} \left[ n \cos(\xi \log \frac{n}{m}) - \cos(\xi \log \frac{1}{m}) \right] d\xi \end{aligned} \right\} (3.15)$$

である。

この応力式において  $\theta = 0$  になるとき明らかに  $\tau_{r\theta} = 0$  となり  
また  $\theta$  方向の変位も消滅すると予想されるので、(3.15)は硬  
い地盤上に堆積した斜め地盤の応力状態を表わすものと考え  
てさしつかえない。

## 2-2 圧密解

極座標における圧密の基礎方程式は(1)を過  
剰間隙水圧であるとして



(図-13) 表面に外力を  
受ける斜め地盤

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (c_v t = \tau) \quad (3.16)$$

で与えられる。斜め地盤の地表側で排水，底側で排水または非排水とすると境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \theta = \alpha \quad \tau > 0 \quad u &= 0 \\ \theta = 0 \quad \tau > 0 \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} &= 0 \quad \text{または} \quad u = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

である。

荷重によって発生する応力を主応力で表わして  $\sigma_1, \sigma_3$  とすると，過剰間隙水圧が

$$u = \sigma_3 + A(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (3.18)$$

の形で表わされる。間隙圧係数  $A$  は，平面歪の条件の下では弾性仮定が許されるならば  $1/2$  となるので，初期条件は

$$\tau = 0 \quad \text{で} \quad u = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} = f(r, \theta) \quad (3.19)$$

で与えられる。もちろん  $f(r, \theta)$  は (3.15) の解を意味している。

底面が排水であっても取扱いはまったく同じであるので，ここでは非排水条件の場合について考えることにする。

Stokes の方法によります

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r, \tau) \cos \gamma \theta \\ \gamma &= \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$$A_n(r, z) = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha u(r, \theta, z) \cos \gamma \theta d\theta$$

とおけば, 境界条件 (3.17) は満足される (大井, 1951)。 (3.16)

の各項について同様に取り扱ふと

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(r, z) \cos \gamma \theta \quad \left. \vphantom{\frac{\partial u}{\partial r}} \right\} \quad (3.21a)$$

$$B_n(r, z) = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial r} \cos \gamma \theta d\theta = \frac{\partial}{\partial r} A_n(r, z)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(r, z) \cos \gamma \theta \quad \left. \vphantom{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}} \right\} \quad (3.21b)$$

$$C_n(r, z) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} A_n(r, z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(r, z) \cos \gamma \theta \quad \left. \vphantom{\frac{\partial u}{\partial z}} \right\} \quad (3.21c)$$

$$D_n(r, z) = \frac{\partial}{\partial z} A_n(r, z)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(r, z) \cos \gamma \theta \quad \left. \vphantom{\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}} \right\}$$

$$E_n(r, z) = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cos \gamma \theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\alpha} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \gamma \theta \Big|_0^\alpha + \gamma \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \gamma \theta d\theta \right\} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}} \right\} \quad (3.21d)$$

$$= \frac{2\gamma}{\alpha} \left\{ u \sin \gamma \theta \Big|_0^\alpha - \gamma \int_0^\alpha u \cos \gamma \theta d\theta \right\}$$

$$= -\gamma^2 A_n(r, z)$$

となるから, (3.16) は

$$\frac{\partial}{\partial z} A_n(r, z) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\gamma^2}{r^2} \right) A_n(r, z) \quad (3.22)$$

と書き改められる。

ここで  $A_n(r, z)$  の Hankel 変換を考える。すなわち

$$H_\nu[A_n(r, z)] = \int_0^\infty A_n(r, z) J_\nu(\xi r) r dr \equiv A_{n\nu}(\xi, z) \quad (3.23)$$

とすると逆変換形は

$$A_n(r, z) = \int_0^\infty A_{n\nu}(\xi, z) J_\nu(\xi r) d\xi \quad (3.24)$$

であるから, (3.22) へ入れて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty A_{n\nu}(\xi, z) J_\nu(\xi r) d\xi \\ = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} \right) \int_0^\infty A_{n\nu}(\xi, z) J_\nu(\xi r) d\xi \end{aligned} \quad (3.25)$$

積分と微分の順序が交換可能であると仮定すると

$$\int_0^\infty \left[ \frac{\partial}{\partial z} A_n(\xi, z) + \xi^2 A_n(\xi, z) \right] J_\nu(\xi r) \xi d\xi = 0$$

となり、より

$$A_n(\xi, z) = C_\nu(\xi) e^{-\xi^2 z}$$

ここで  $C_\nu(\xi)$  は  $A_n(\xi, z)$  の初期値である。

次に (3.26) と (3.24) とを (3.20) へ代入すると

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \nu \theta \int_0^\infty C_\nu(\xi) e^{-\xi^2 z} J_\nu(\xi r) \xi d\xi \quad (3.27)$$

を得、初期条件 (3.19) を考慮して

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \nu \theta \int_0^\infty C_\nu(\xi) J_\nu(\xi r) \xi d\xi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \cos \nu \theta \cdot K_n(r) \quad (3.28)$$

しかるに

$$\left. \begin{aligned} f(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) \cos n\theta, \quad F_n(r) = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(r, \xi) \cos n\xi d\xi \\ F_n(r) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} F_n(w) J_n(\xi r) J_n(\xi w) \xi w d\xi dw \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

である (Watson, 1922) から, これらを (3.28) に入れた結果

$$\left. \begin{aligned} K(r) &\equiv \int_0^{\infty} C_n(\xi) J_n(\xi r) d\xi \\ &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} f(w, \xi) \cos n\xi J_n(\xi w) \xi w d\xi dw d\xi \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

と な っ て

$$C_n(\xi) = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} f(w, \xi) \cos n\xi J_n(\xi w) w dw d\xi \quad (3.31)$$

が得られる。よって求める解は

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta, z) &= \frac{2}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \\ &\times \int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} e^{-\xi z} f(w, \xi) \cos n\xi J_n(\xi w) J_n(\xi r) \xi w d\xi dw d\xi \\ \bar{\nu} &= \frac{2n+1}{2\alpha} \pi \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

また底面排水の場合には

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta, z) &= \frac{2}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \bar{\nu} \theta \\ &\times \int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} e^{-\xi z} f(w, \xi) \sin \bar{\nu} \xi J_n(\xi w) J_n(\xi r) \xi w d\xi dw d\xi \\ \bar{\nu} &= \frac{n}{\alpha} \pi \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

2-3 結果の検討 前項で得られた結果のうち斜め地盤の応力解について検討を加え、変位成分についても若干の考察を行なう。

クサビの半頂角が直角である場合には当然半無限問題に帰する筈である。(3.12) の応力式において  $\alpha = 1/2$  とするとそれらに

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi r}{2a p_0} (\sigma_\theta - \sigma_r) &= \cos \theta \left[ 1 - \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \theta \xi}{\operatorname{ph} \frac{\pi}{2} \xi} \sin(\xi \log \frac{a}{r}) d\xi \right] \\ \frac{\pi r}{2a p_0} (\sigma_\theta + \sigma_r) &= -\cos \theta + \int_0^\infty \left[ \cos \theta \frac{\operatorname{ch} \theta \xi}{\operatorname{ph} \frac{\pi}{2} \xi} - \xi \sin \theta \frac{\operatorname{ph} \theta \xi}{\operatorname{ph} \frac{\pi}{2} \xi} \right] \frac{\sin(\xi \log \frac{a}{r})}{1 + \xi^2} d\xi \\ &\quad - \int_0^\infty \left[ \sin \theta \frac{\operatorname{ph} \theta \xi}{\operatorname{ph} \frac{\pi}{2} \xi} + \xi \cos \theta \frac{\operatorname{ch} \theta \xi}{\operatorname{ph} \frac{\pi}{2} \xi} \right] \frac{\cos(\xi \log \frac{a}{r})}{1 + \xi^2} d\xi \\ \frac{\pi r}{a p_0} \tau_{\theta r} &= \cos \theta \int_0^\infty \frac{\cos \theta \xi}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \xi} \cos(\xi \log \frac{a}{r}) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

積分公式

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \theta \xi}{\operatorname{ph} \frac{\pi}{2} \xi} \sin(\xi \log \frac{a}{r}) d\xi &= \frac{\operatorname{ph}(2 \log \frac{a}{r})}{\cos 2\theta + \operatorname{ch}(2 \log \frac{a}{r})} = \frac{(\frac{a}{r})^2 - (\frac{r}{a})^2}{(\frac{a}{r})^2 + (\frac{r}{a})^2 + 2 \cos 2\theta} \\ \int_0^\infty \frac{\operatorname{ph} \theta \xi}{\operatorname{ph} \frac{\pi}{2} \xi} \cos(\xi \log \frac{a}{r}) d\xi &= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta + \operatorname{ch}(2 \log \frac{a}{r})} = \frac{\sin 2\theta}{(\frac{a}{r})^2 + (\frac{r}{a})^2 + 2 \cos 2\theta} \\ \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \theta \xi}{\operatorname{ph} \frac{\pi}{2} \xi} \frac{\sin(\xi \log \frac{a}{r})}{1 + \xi^2} d\xi &= -\frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{a}\right) \cos \theta + \frac{(\frac{a}{r}) - (\frac{r}{a})}{4} \sin \theta \log \frac{(\frac{a}{r}) + (\frac{r}{a}) + 2 \sin \theta}{(\frac{a}{r}) + (\frac{r}{a}) - 2 \sin \theta} \\ &\quad + \frac{(\frac{a}{r}) + (\frac{r}{a})}{2} \cos \theta \tan^{-1} \frac{2 \cos \theta}{(\frac{a}{r}) - (\frac{r}{a})} \\ \int_0^\infty \frac{\operatorname{ph} \theta \xi}{\operatorname{ph} \frac{\pi}{2} \xi} \frac{\xi \sin(\xi \log \frac{a}{r})}{1 + \xi^2} d\xi &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{a}\right) \sin \theta + \frac{(\frac{a}{r}) - (\frac{r}{a})}{4} \cos \theta \log \frac{(\frac{a}{r}) + (\frac{r}{a}) + 2 \sin \theta}{(\frac{a}{r}) + (\frac{r}{a}) - 2 \sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

$$-\frac{(\frac{a}{r})+(\frac{r}{a})}{2} \sin \theta \cdot \tan^{-1} \frac{2 \cos \theta}{(\frac{a}{r})-(\frac{r}{a})}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\cos(\xi \log \frac{a}{r})}{1+\xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2} (\frac{a}{r}) \sin \theta - \frac{(\frac{a}{r})+(\frac{r}{a})}{4} \cos \theta \log \frac{(\frac{a}{r})+(\frac{r}{a})+2 \sin \theta}{(\frac{a}{r})+(\frac{r}{a})-2 \sin \theta} \\ + \frac{(\frac{a}{r})-(\frac{r}{a})}{2} \sin \theta \tan^{-1} \frac{2 \cos \theta}{(\frac{a}{r})-(\frac{r}{a})}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\xi \cos(\xi \log \frac{a}{r})}{1+\xi^2} d\xi = -1 + \frac{\pi}{2} (\frac{r}{a}) \cos \theta + \frac{(\frac{a}{r})+(\frac{r}{a})}{4} \sin \theta \log \frac{(\frac{a}{r})+(\frac{r}{a})+2 \sin \theta}{(\frac{a}{r})+(\frac{r}{a})-2 \sin \theta} \\ + \frac{(\frac{a}{r})-(\frac{r}{a})}{2} \cos \theta \tan^{-1} \frac{2 \cos \theta}{(\frac{a}{r})-(\frac{r}{a})}$$

をもちいると,

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{4arP_0 \cos \theta}{\pi} \frac{r^2 + a^2 \cos 2\theta}{r^4 + 2a^2 r^2 \cos 2\theta + a^4}$$

$$\sigma_\theta + \sigma_r = -\frac{2P_0}{\pi} \left[ \pi - \tan^{-1} \frac{2ar \cos \theta}{a^2 - r^2} \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2arP_0 \cos \theta}{\pi} \frac{a^2 \sin 2\theta}{r^4 + 2a^2 r^2 \cos 2\theta + a^4}$$

(3.36)

すなわち半無限体における解が得られる。

このように Mellin 変換による解法はクサゼの問題においては非常に有用なものであるが、その適用は外力が直線への有限区間内に作用した場合に限られる。なぜなら、無限遠まで続く荷重に対しては (3.11) における積分が発散してしまうからである。したがって自重を有するクサゼの問題を取り扱う場合には Filtinger の解と Mellin 変換による解とを重ね合わせなければならない (成田, 1968)。

最後に変位解についてふれておく。変位成分  $u_r, v_\theta$  は複素積分によって表わすと

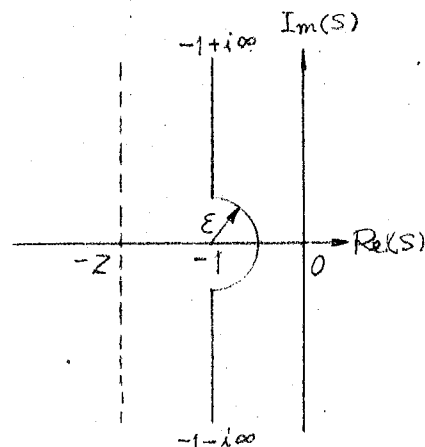
$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{3a}{4\pi i E} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[ \rho_{in}(S+2)\alpha \cos S\theta - \rho_{in}S\alpha \cos(S+2)\theta \right] \frac{H(S,\alpha)}{S+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{S+1} dS \\ v_\theta &= -\frac{3a}{4\pi i E} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[ (S+2)\rho_{in}(S+2)\alpha \sin S\theta - S\rho_{in}S\alpha \sin(S+2)\theta \right] \frac{H(S,\alpha)}{S+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{S+1} dS \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

ただし

$$H(S,\alpha) = (S+1) \left[ (S+1)\rho_{in}\alpha + \rho_{in}2(S+1)\alpha' \right] \quad (3.36')$$

収束条件などから、 $-2 < \text{Re}(S) < 0$  でなければならない。したがって (3.36) の被積分関数は  $S=-1$  で二位の極を有する。

Bromwich の積分路を  $S=-1$  のところまで移動させ、そこで  $\text{Indent}$  させても積分の値は変わらない (図-14)。



(3.36) を

$$u_r = -\frac{3}{4\pi i E} A, \quad v_\theta = -\frac{3}{4\pi i E} B$$

とかくと、図-14 を参照して

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right\} = \int_{c-iR}^{c-i\epsilon} dS + \int_{c-i\epsilon}^{c+i\epsilon} dS + \int_{c+i\epsilon}^{c+iR} dS = \text{I} + \text{II} + \text{III}$$

と表わされる。

半径方向の変位成分  $u_r$  については、I と III とにおいて

$$S = -1 + i\epsilon \text{ とおくと}$$

(図-14) 逆変換に与える積分路

$$I = \int_{-R}^{\xi} \left(\frac{a}{r}\right)^{i\xi} \frac{(1+i\xi)\sin((1+i\xi)\alpha)\sin(-1+i\xi)\theta - (-1+i\xi)\sin(-1+i\xi)\alpha\sin(1+i\xi)\theta}{(-\xi^2\sin 2\alpha - \xi\sin 2\xi)(1+i\xi)} i d\xi$$

$$\Rightarrow -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{a}{r}\right)^{i\xi} \left[ \frac{\cos\{(1+i\xi)\alpha - (-1+i\xi)\theta\} - \cos\{(1+i\xi)\alpha + (-1+i\xi)\theta\}}{\xi^2\sin 2\alpha + \xi\sin 2\xi} \right. \\ \left. + \frac{(1-2i\xi-\xi^2)}{(1+\xi^2)} \frac{\cos\{(-1+i\xi)\alpha - (1+i\xi)\theta\} - \cos\{(-1+i\xi)\alpha + (1+i\xi)\theta\}}{\xi^2\sin 2\alpha + \xi\sin 2\xi} \right] d\xi$$

$$= -\frac{i}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{-i\xi} \left[ 2\cos(\alpha+\theta)\operatorname{ch}(\alpha-\theta)\xi - 2\cos(\alpha-\theta)\operatorname{ch}_\xi(\alpha+\theta) \right.$$

$$\left. + 2\xi^2 \{ \sin(\alpha+\theta)\sin i\xi(\alpha-\theta) - \sin(\alpha-\theta)\sin \xi(\alpha+\theta) \} \right.$$

$$\left. + i\xi \left[ \cos\{(\alpha+\theta) + i\xi(\alpha-\theta)\} - \cos\{(\alpha-\theta) + i\xi(\alpha+\theta)\} \right] \right] \Delta d\xi$$

$$III \Rightarrow -i \int_0^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{i\xi} \left[ \cos(\alpha+\theta)\operatorname{ch}_\xi(\alpha-\theta) - \cos(\alpha-\theta)\operatorname{ch}_\xi(\alpha+\theta) \right.$$

$$\left. + \xi^2 \{ -\sin(\alpha+\theta)\sin i\xi(\alpha-\theta) + \sin(\alpha-\theta)\sin i\xi(\alpha+\theta) \} \right.$$

$$\left. - i\xi \left[ \cos\{(\alpha+\theta) - i\xi(\alpha-\theta)\} - \cos\{(\alpha-\theta) - i\xi(\alpha+\theta)\} \right] \right] \Delta d\xi$$

に代し

$$\frac{1}{\Delta} = (1+\xi^2)\xi \{ \xi\sin 2\alpha + \sin 2\xi \}$$

また II の積分は

$$II = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds = \frac{1}{2} \oint f(s) ds$$

と表わされるから

$$\oint f(s) ds = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[ \left\{ \frac{\sin(s+2)\alpha\sin s\theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} - \frac{s}{s+2} \frac{\sin s\alpha\sin(s+2)\theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} \right\} \left(\frac{a}{r}\right)^{s+1} \right] 2\pi i \\ = 2 \frac{\sin \alpha \sin \theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} \left\{ 1 - \log\left(\frac{a}{r}\right) \right\} 2\pi i$$

よって

$$II = \frac{\sin \alpha \sin \theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} \left[ 1 - \log \left( \frac{a}{r} \right) \right] 2\pi i$$

同様の計算を周方向変位  $v_\theta$  について行なうと、変位成分は

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{3a \sin \alpha \cos \theta}{2E(2\alpha + \sin 2\alpha)} + \frac{3a}{2\pi E} \int_0^\infty \frac{P(\xi)}{\xi} \cos \left( \xi \log \frac{a}{r} \right) d\xi \\ v_\theta &= \frac{3a \sin \alpha \sin \theta}{2E(2\alpha + \sin 2\alpha)} \left[ 1 - \log \left( \frac{a}{r} \right) \right] \\ &\quad - \frac{3a}{2\pi E} \int_0^\infty \left[ \{S(\xi) + \xi R(\xi)\} \left\{ \cos \left( \xi \log \frac{a}{r} \right) + \xi \sin \left( \xi \log \frac{a}{r} \right) \right\} \right] \frac{d\xi}{\xi(1+\xi^2)} \end{aligned} \right\} (3.31)$$

ただし

$$(\xi \sin 2\alpha + \alpha \cos 2\alpha) S(\xi) = \cos(\alpha - \theta) \operatorname{ch}(\alpha + \theta) \xi - \cos(\alpha + \theta) \operatorname{ch}(\alpha - \theta) \xi \quad (3.31')$$

また  $P(\xi)$ ,  $R(\xi)$  は (3.13) に示したものである。

(3.31)は積分の下限  $\xi=0$  において発散し、変位成分は求められない。これは第II章 (2-4) において述べた結果とまったく同じである。

半無限境界を含む二次元問題では変位の積分表示に特異性が生じる。これは三次元問題では載荷面積すなわち全荷重が有限であるに反し、二次元で例えば鉛直集中荷重についてみるとこれを三次元で考えたとき、荷重が  $\pm\infty$  に広がるために全荷重が無限大となる状態を意味する。したがって荷重点における鉛直変位は無限大となるのである。同様に水平集中荷重に対しては荷重点での水平変位は発散する。これをまとめ

ていえば、二次元問題においては、直線ベリにおける合力が  
0とならない方向の変位は求められないのである(森口, 1957)。  
たゞこの場合でも、弾性体内の一点における変位を指定すれ  
ばその値を定めることができる。

本章で取り扱った斜め地盤の問題においても、表面におけ  
る力の方向を考えれば変位成分  $u_r$ ,  $v_\theta$  および表面に垂直な方  
向の変位成分などが決まらないことは明らかである。

### 第3節 解析結果

本節では、斜め地盤内の応力分布特性を把握するため前節  
で求めた応力式(3.15)のうち第=式の平均主応力について行  
なった数値計算の結果をまとめて示した。

計算は次に示す16の場合について、第Ⅱ章におけると同じ  
く台形数値積分法によって行なった。なお、積分区間および  
積分間隔も次に示した。すなわち

$$\alpha = 30^\circ, 45^\circ$$

$$n = \frac{b}{a} = \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2, 3$$

$$0 \leq 0.005 \leq 10$$

被積分関数は分母に  $\ln 2\alpha$  なる項を有しているため、比  
較的収束度は良いが、頂点に近い部分では  $(\pm \log \frac{a}{r})$  項によっ

被積分関数の値の変動が大きくなり全体として積分の精度が低下することが考えられる。したがって特に頂点近傍の点に対する計算においては、積分の間隔をせよめるなどして誤差が大きくなるように注意する必要がある。次に本計算の精度を示すために、表面応力の計算値の一例を示した。

(表-3) 表面における応力の計算例 ( $\alpha = 45^\circ$   
 $b/a = 3$ )

| $r/a$ | 0.5   | 0.75  | 1.0   | 2.0   | 3.0   | 3.5   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 計算値   | 0.014 | 0.006 | 0.504 | 0.993 | 0.497 | 0.006 |
| 真 値   | 0     | 0     | 0.5   | 1.000 | 0.5   | 0     |

この表によって頂点附近での計算の誤差が大きいことがうかがわれるが、他の例においても精度は大体この程度と考えてよい。

主応力値の計算結果は圧力球根の形で示し図-15にまとめた。また数値計算によって求めた応力成分の値から、荷重端および荷重中心軸下の鉛直応力を算出し、半無限体時の応力値とともに(図-16)に示した。

#### 第4節 模型実験

帯荷重を受ける斜め地盤では、理論的に表面変位が求められないことを第2節で示したが、このような地盤の沈下性状

は実際上の問題として非常に重要である。本節では、これを実験的に検討するためにフォームラバーによる模型実験を試み、荷重の両端における表面沈下を観測した。

実験は半頂角  $30^\circ$  (底面×高さ =  $38 \times 60 \text{ cm}$ ) および  $45^\circ$  ( $40 \times 40 \text{ cm}$ ) のフォームラバーを内面ガラス張りの木箱 ( $105 \times 50 \times 10 \text{ cm}$ ) に入れ、薄いゴム膜を通して表面に荷重を与えた (図-17)。荷重は写真1および2に示したごとく、荷重区画を (図-17) 実験用木箱  
ボール紙で作った小箱で分割し、その中に散弾を入れなるべく等分布となるように工夫した。またフォームラバー底面にはアルミ板を敷いて摩擦が少なくなるように努めた。

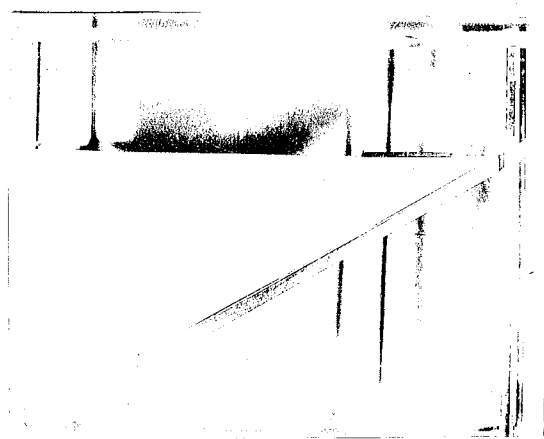
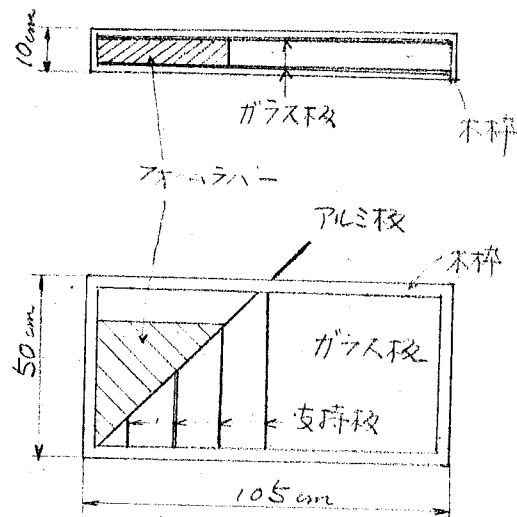


写真1 フォームラバーと載荷板

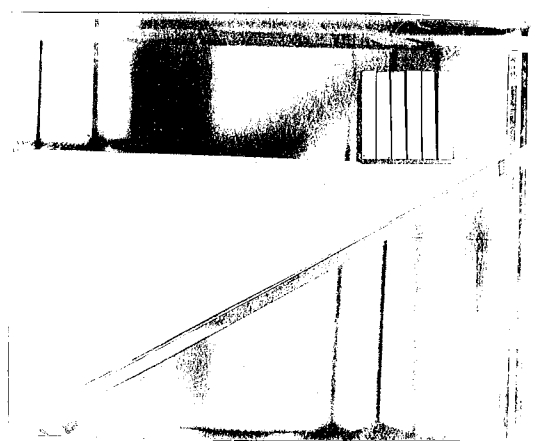


写真2 荷重容器

実験は  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$  の場合

$$n = \frac{b}{a} = 3, 2, 5/3$$

$$p_0 = 10.0, 20.0 \text{ g/cm}^2$$

の各6通りについて行ない、沈下をレベルにて観測した。

実験の結果は、頂点から遠い荷重端下の沈下  $\Delta R$  と近い荷重端の沈下  $\Delta L$  (図-13では右側端と左側端) との比  $\frac{\Delta R}{\Delta L}$  でまとめて下の表に示した。

(表-4) 荷重両端下における沈下比

(a)  $\alpha = 30^\circ$  のとき

| $\begin{matrix} p_0(\text{g/cm}^2) \\ n \end{matrix}$ | 10.0 | 20.0 |
|-------------------------------------------------------|------|------|
| 3                                                     | 1.40 | 1.50 |
| 2                                                     | 1.13 | 1.23 |
| 5/3                                                   | 1.14 | 1.31 |

(b)  $\alpha = 45^\circ$  のとき

| $\begin{matrix} p_0(\text{g/cm}^2) \\ n \end{matrix}$ | 10.0 | 20.0 |
|-------------------------------------------------------|------|------|
| 3                                                     | 1.20 | 1.23 |
| 2                                                     | 1.27 | 1.15 |
| 5/3                                                   | 1.14 | 1.03 |

## 第5節 考 察

数値計算がかなりの手数を要する関係上、本論文では頂角が  $30^\circ, 45^\circ$  の二つの場合についてのみ計算を行なった。また圧密問題にしても解析表示をしたにとどまるので、斜め粘土層の圧縮または圧密特性に関して広汎な考察を加えることはできないが、応力分布の特性として次のようなことが明らか

となった。

(1) 頂点より載荷端までの距離と載荷中との比  $\mu$  が大きくなると、平均応力に関する圧力球根のゆがみが著しくなって、斜め支持の影響が現われてくることが認められる。

$\mu$  の限界は、応力比 (平均応力と表面荷重との比) をどの値でおさえるかによって変わるが、本文ではこれを一応 0.3 とする。半無限弾性体においては、載荷中に等しい深さでの応力比がほぼ 0.3 になるので、上の基準は沈下に大きく効くと思われる圧縮域を対象としていいると考えてよい。もちろん応力比がもっと大きいところで比較を行なえば半無限解との一致はより良くなる。

以上のことから斜め支持の影響が顕著に現われ、基礎の全体的沈下の様相が半無限の場合と大きく異なってくるのは、 $\alpha = 30^\circ$  では  $\mu \geq 1.4$ 、 $\alpha = 45^\circ$  では  $\mu \geq 1.5$  のときであることが一応推定される。このときの載荷面中央部の層厚と載荷中とを比べると、 $\mu$  深さ比が頂角  $30^\circ$  の場合には約 1.8、 $45^\circ$  の場合には約 1.9 となるので、斜め支持層の影響が現われるのは  $\mu$  深さ比が 1.8~1.9 以下のときであるということもできよう。

(2) 扇形域の弾性沈下の解析的結果が求められないことは前にも触れたが、何らかの制限を加えることによって沈下表示式が得られたとしても、土の非弾性的性状を考えるとそのま

まそれが粘土層の圧縮量を表わすものかどうか疑わしい。本論文では、沈下に影響すると考えられる一つの因子すなわち地表面に垂直な応力  $\sigma_z$  を取り上げ、これによって沈下性状について傾向的もしくは定性的な考察を試みる。

すなわち(図-16)によれば、載荷中心軸上の  $\sigma_z$  は  $\alpha = 30^\circ$  のとき  $m \leq \frac{4}{3}$ ,  $\alpha = 45^\circ$  のとき  $m \leq 1.4$  で半無限時における応力状態とよく一致し、平均応力の場合と同じ傾向にあることが判明した。したがって平均的な沈下は半無限時と比して半頂角  $30^\circ$  の場合  $m \leq \frac{4}{3}$ ,  $45^\circ$  の場合  $m \leq 1.4$  では大きな差異がないものと考えられる。ただ斜の粘土層では圧縮層の厚さが限定されるから、沈下の平均値は半無限時に比べてやや小さくなるであろう。

(図-16)において両端の  $\sigma_z$  を比較してあるが、すべての場合頂上に近い側の値は遠い側のそれよりも小さい。そしてこれらの深さ方向への分布曲線(図-16中の R 線, L 線)は、半無限時の曲線(図-16の  $I_m$  線)をはさむ恰好になっている。

これらの相対的關係は、 $m$  によらない傾向がみられる。頭初頂上は特異点であるから、 $\sigma_z$  も頂上に近い左側において集中するのではないかという予測をしていたが、結果は完全にこれを否定した。この理由として次のことが考えられる。境界条件として底面でせん断応力を零と仮定したため、載荷面

下の粘土層の釣合から想像されるごとく、半径方向応力  $\sigma_r$  が左側では引張の影響によって小さくなり、右側では圧縮の影響のため大きな絶対値をもつことによるものであらうと思われる。

この境界条件は理想的なものであり、粘土がいかにも軟弱であつても底面ではなにがしかのせん断応力が生じ得る筈であるから、実際の粘土内の応力分布はここに述べたものとは異なるであらう。しかし応力の分布傾向や値にそれ程大きな差がでるとは考えられない。ことに地表面近くでは、ここに示すごとく  $|\sigma_z|_R \geq |\sigma_z|_L$  が成り立つものと推察される。少なくともこの両者はほぼ同じオーダーの値をとるとしてよい。したがって端部直下の圧縮層の厚さの大小を考えると、右端の沈下は左端に比べて大きく、その比はほぼ圧縮層の比、すなわち  $\mu$  に近いものと予想できる。

(3) 表面沈下に関して予測された結果の妥当性を検討するため、フォームラバーをもちいて行なつた実験は、(表-4)に示すように、数値計算によつて得た応力値から推定したものとはかなり異なつた結果を示した。すなわち、頂上から遠い荷重端における表面沈下と近い荷重端におけるそれとの比が 1.03 ~ 1.50 の範囲にあつて、 $\mu$  の値によつてそれ程変わっていない。応力計算は境界面が滑らかであるという条件に基づ

いて行なわれたが、実験でこれを再現することは難しい。さらに実験では、フォーミュラバーは頂点から或る距離のところで拘束を受けているため、荷重が大きくなると頂点附近の変形が大きくなり頂点が持ち上がる傾向がある。これらのことにより、理論計算の結果と実験によって得られた結果とをそのまま対比することは危険であるが、斜め地盤において荷重両端下の沈下比が $n$ に等しくなるという予想はくっがえされた。しかし(表-4)にみるごとく、その比はいずれも1より大きくしかも  $\alpha = 30^\circ$ ,  $n=3$  の場合に他の例に比してかなり大きな値を示している。このことから少なくとも沈下性状は不等沈下を生じ易い傾向にあり、その程度は $n$ が大きくなるにつれて著しくなることはほぼ間違いないものと考えられる。

## 第6節 結 語

(1) 頂点より载荷端までの距離と载荷中との比 $n$ が大きくなると、圧力球根の巾がみが大きくなる。応力比0.3を基準にとると、斜め支持の影響が現われ、基礎の全体的沈下の様相が半無限の場合と大きく異なってくるのは、载荷中/中央部深さが1.8~1.9のときである。

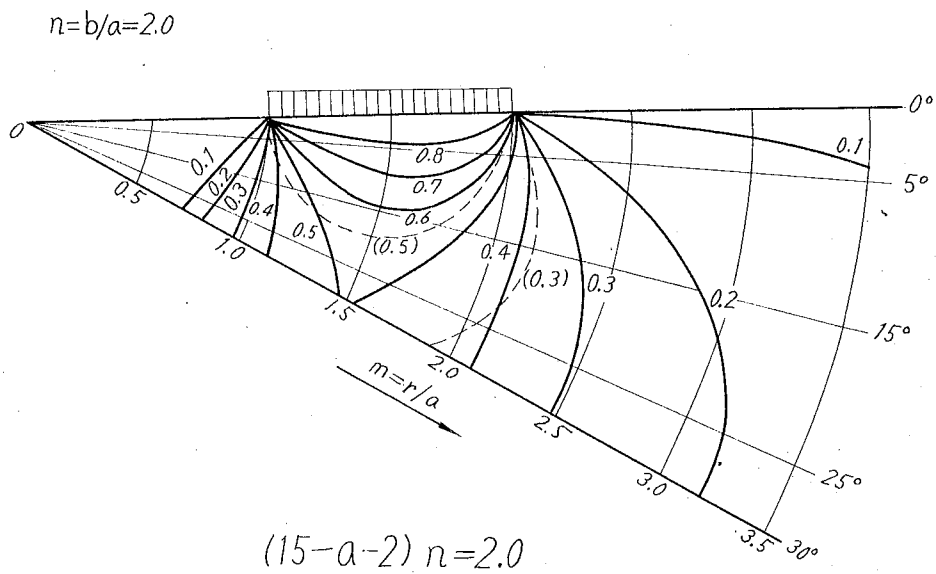
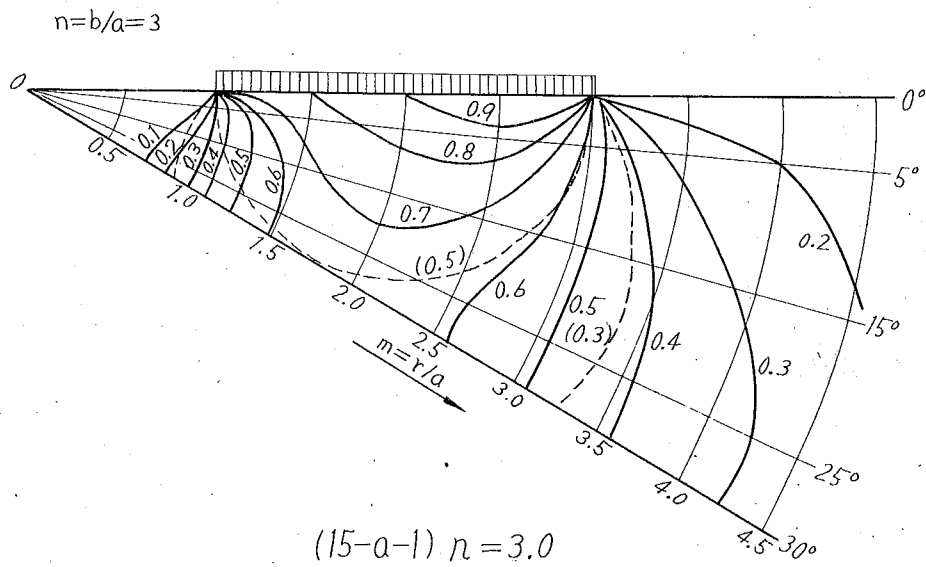
(2) 頂点に近い側の値は遠い側のそれよりも小さい。したが

つて荷重端部直下の圧縮層の厚さを考えると、右端の沈下は左端に比べて大きく、その比はほぼ圧縮層厚の比すなわち $h$ に近くなるものと予想された。

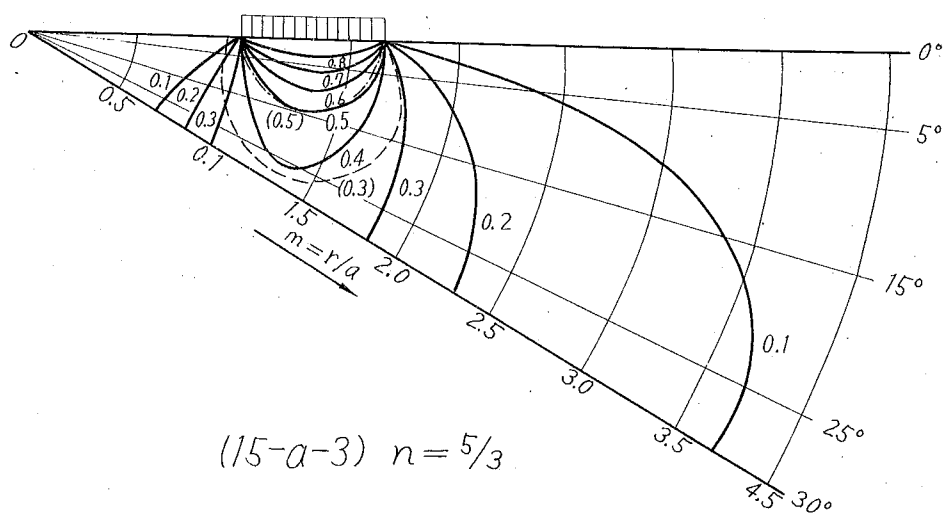
(3) 上の予測の妥当性を確かめるために行なった実験では、両端下の沈下比は $h$ に等しくならずかなり小さくなる。しかし沈下性状が不等沈下を生じ易い傾向にあることは確かなようである。

図一15 斜め地盤内の平均応力の分布

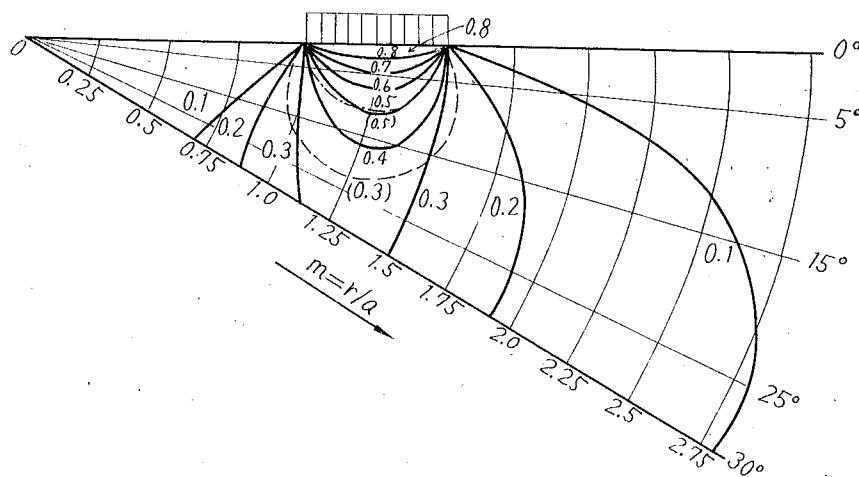
(15-a) 平均応力図( $\alpha=30^\circ$ )



$$n = b/a = \frac{5}{3}$$

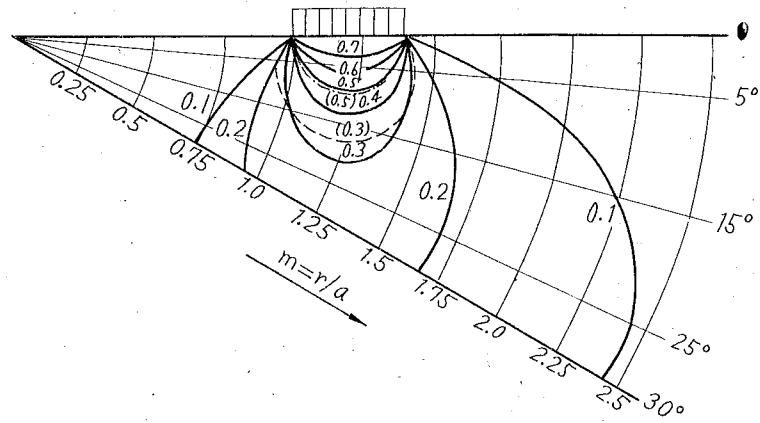


$$(15-a-3) \quad n = 5/3$$



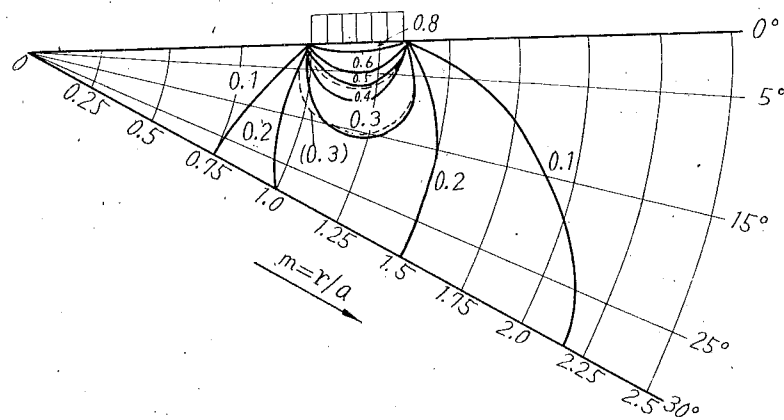
$$(15-a-4) \quad n = 1.5$$

$$n=b/a=1.4$$



$$(15-a-5) \quad n=1.4$$

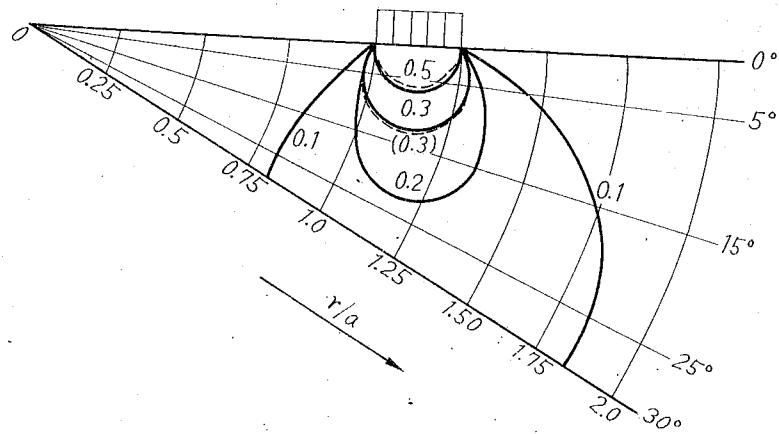
$$n=b/a=4/3$$



$$(15-a-6) \quad n=4/3$$

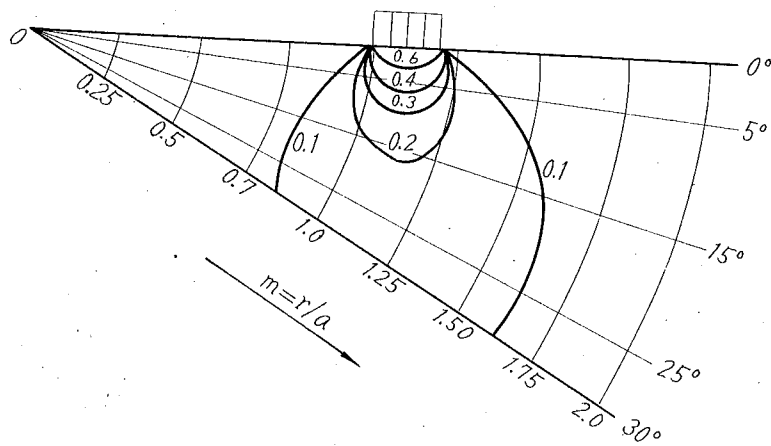
$$n=b/a=1.25$$

102



$$(15-a-7) \quad n=1.25$$

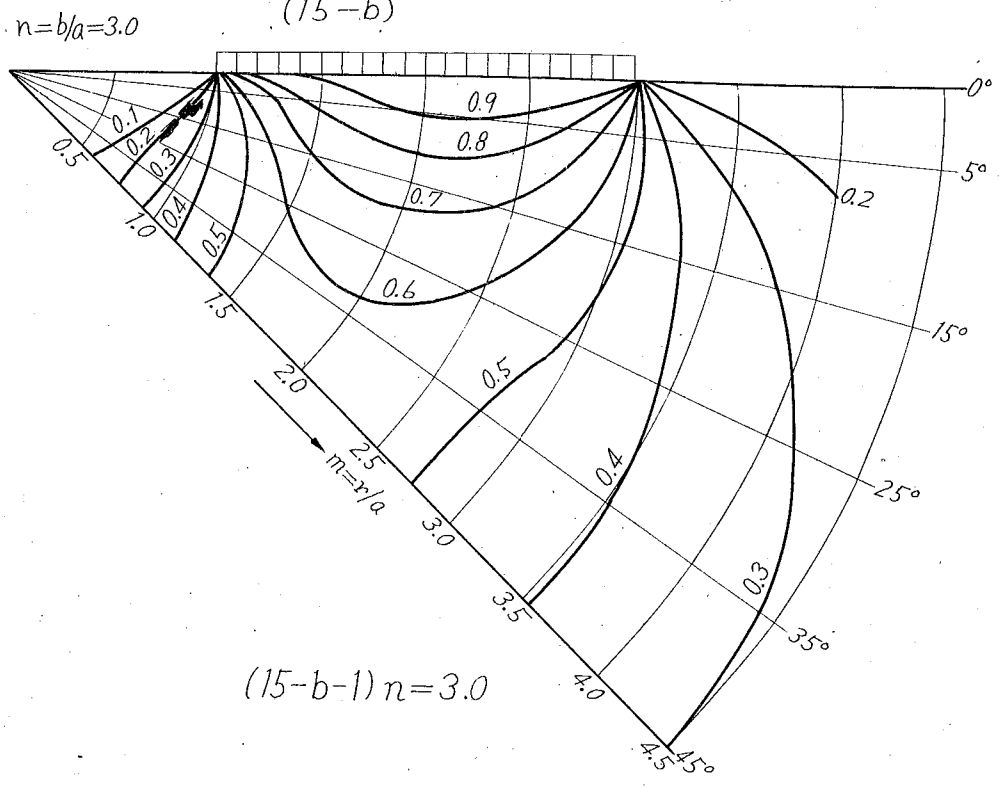
$$n=b/a=1.2$$



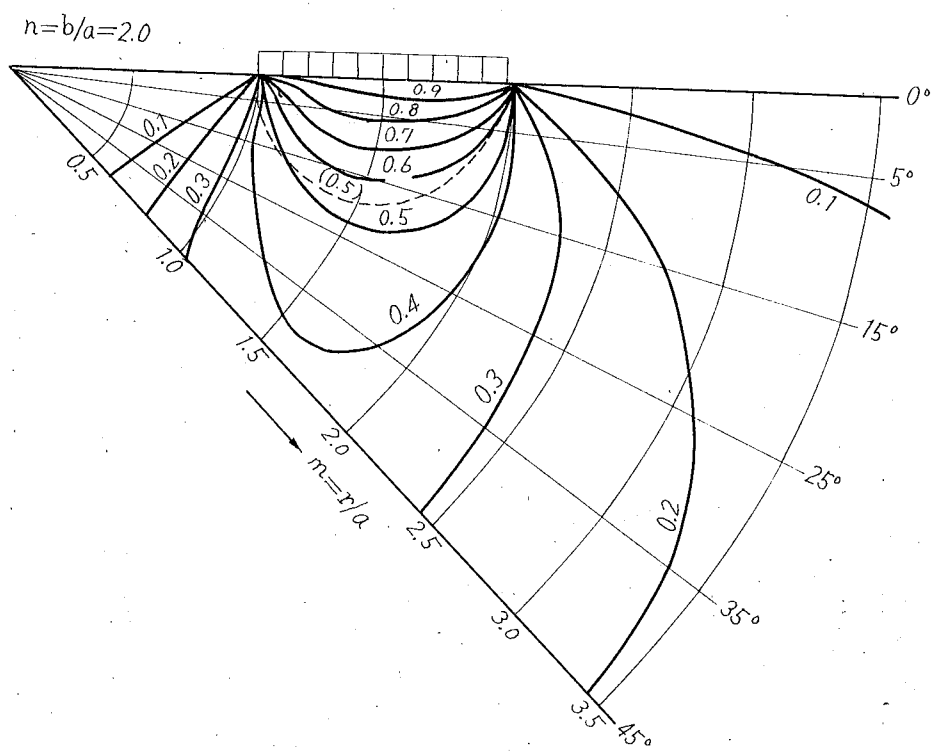
$$(15-a-8) \quad n=1.2$$

平均应力图 ( $\alpha=45^\circ$ )  
(15-b)

103

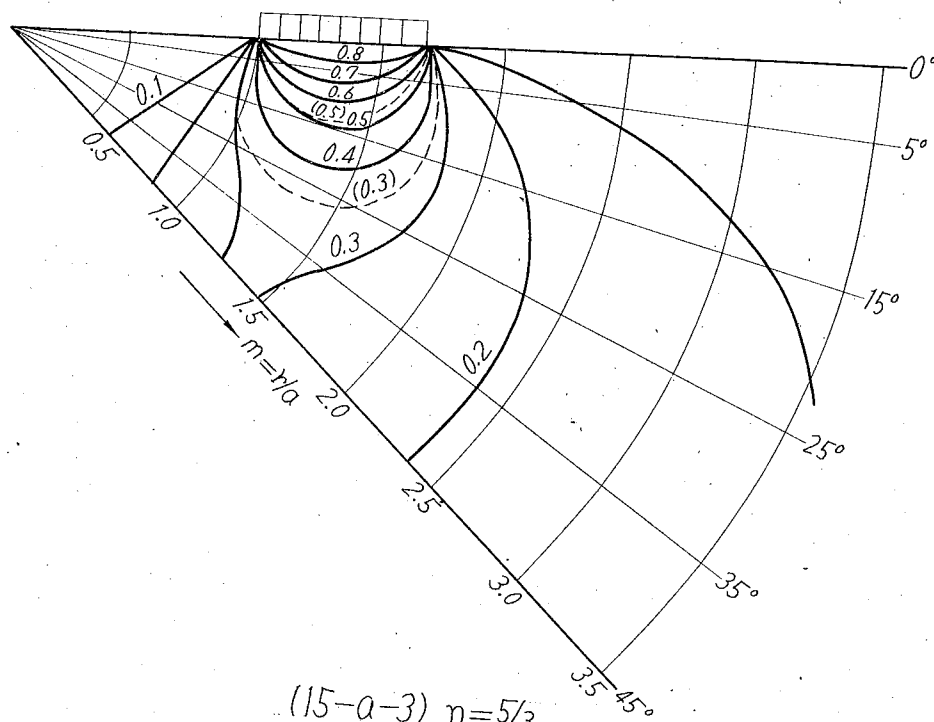


(15-b-1)  $n=3.0$

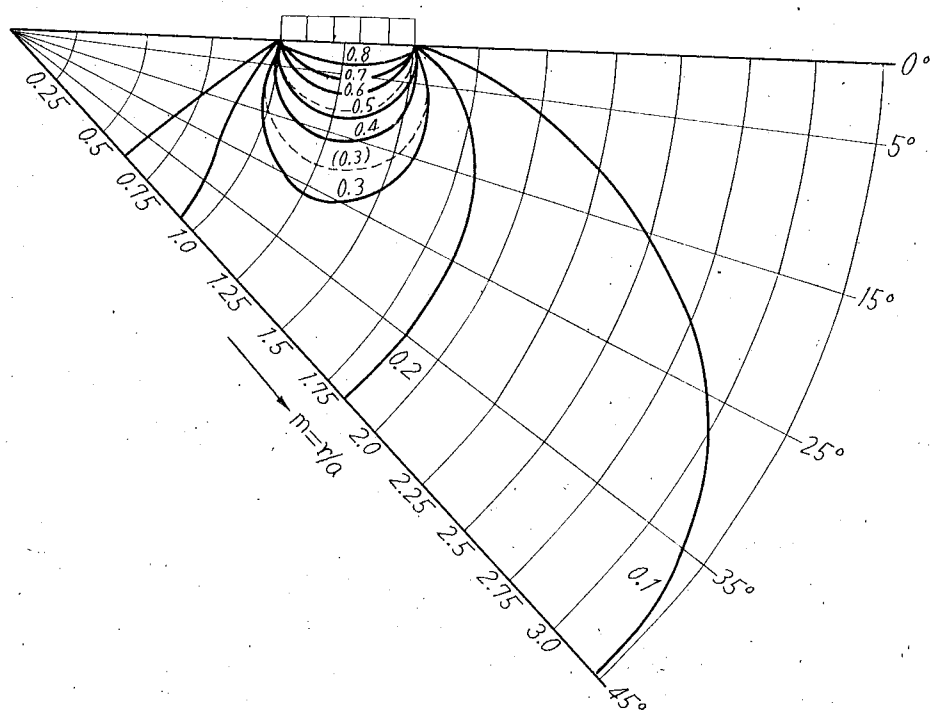


(15-b-2)  $n=2.0$

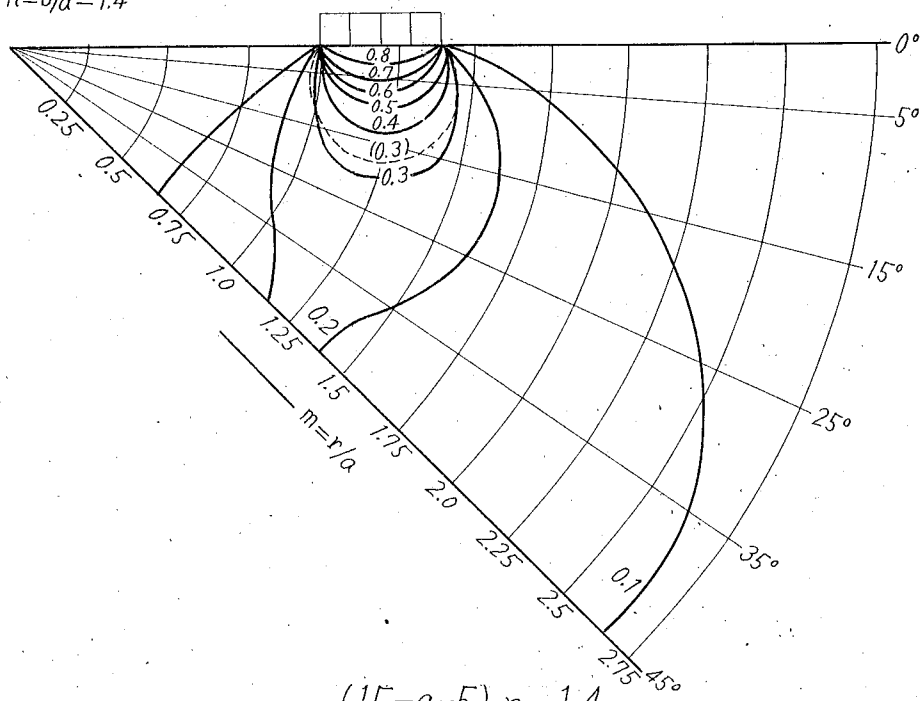
$$n=b/a=5/3$$

(15-a-3)  $n=5/3$ 

$$n=b/a=1.5$$

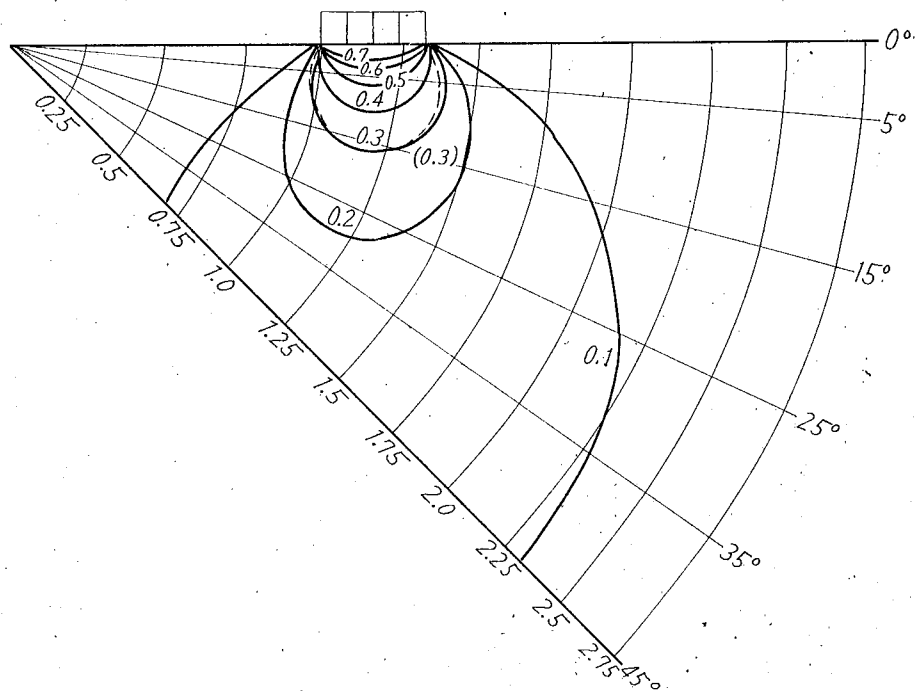
(15-a-4)  $n=1.5$

$$n=b/a=1.4$$



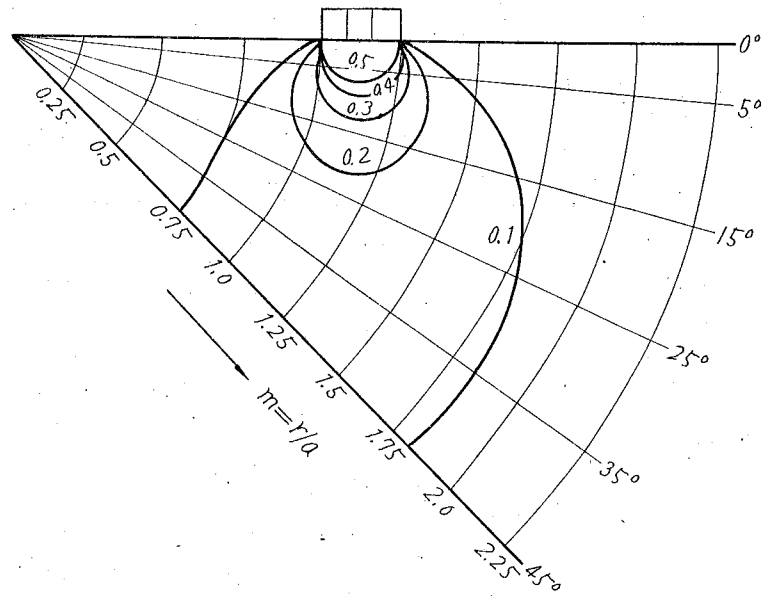
$$(15-a-5) n=1.4$$

$$n=b/a=4/3$$



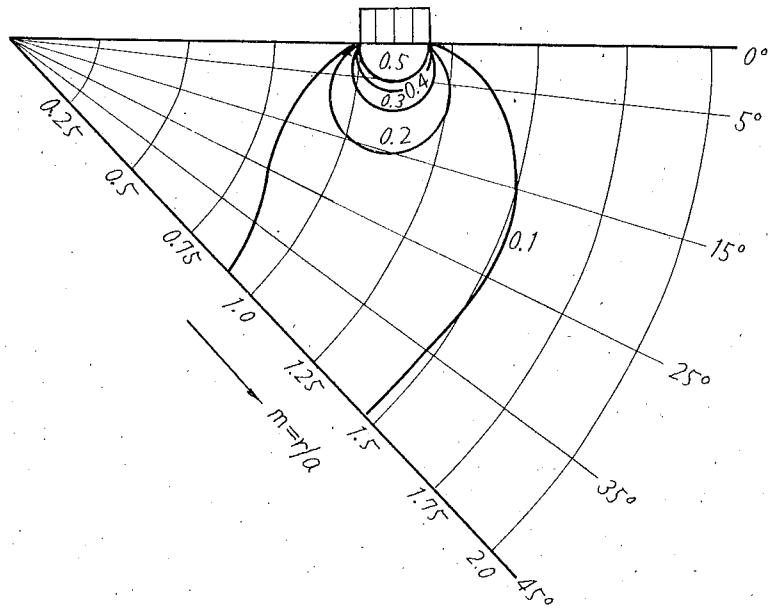
$$(15-a-6) n=4/3$$

$$n=b/a=1.25$$



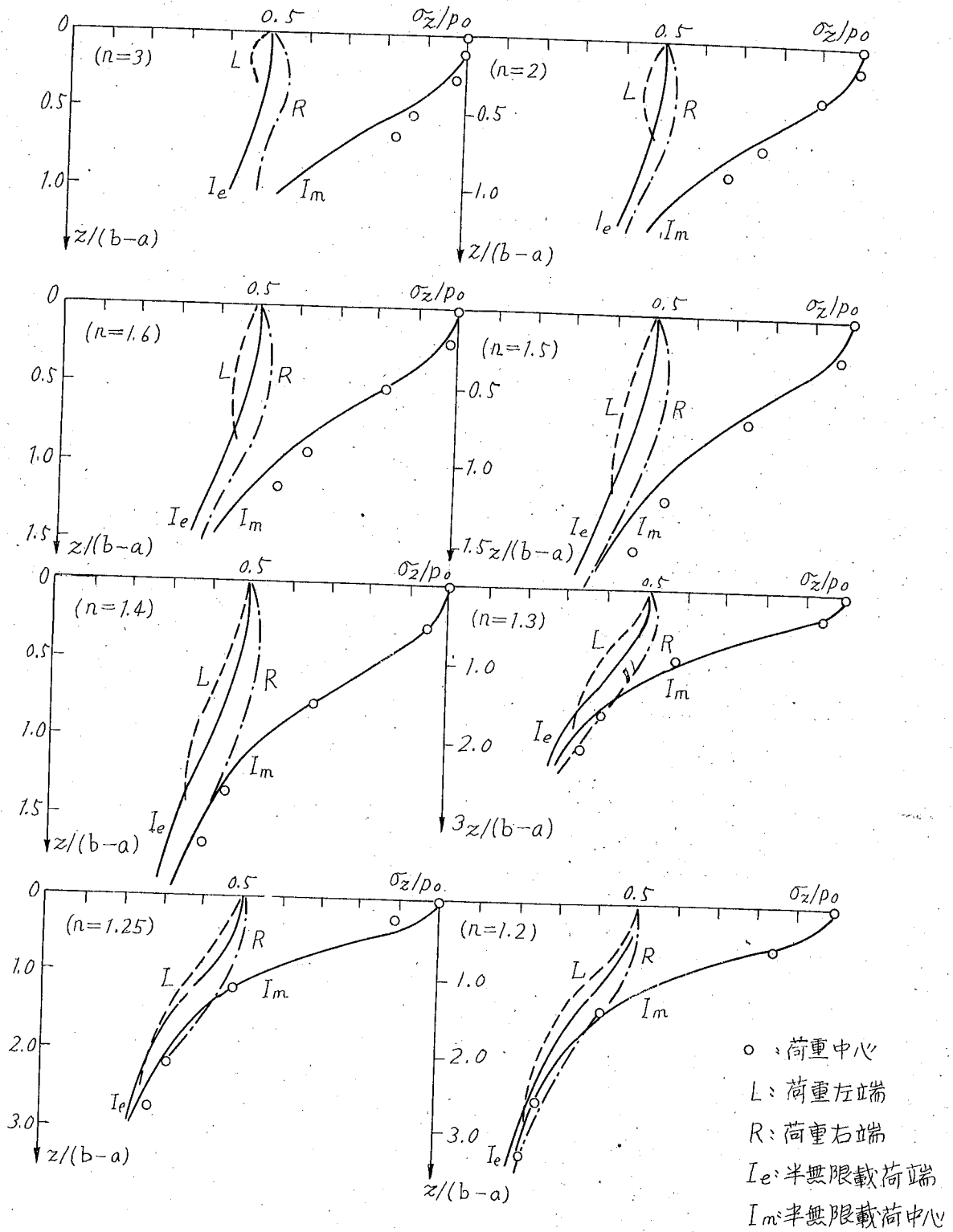
$$(15-a-7) \quad n=1.25$$

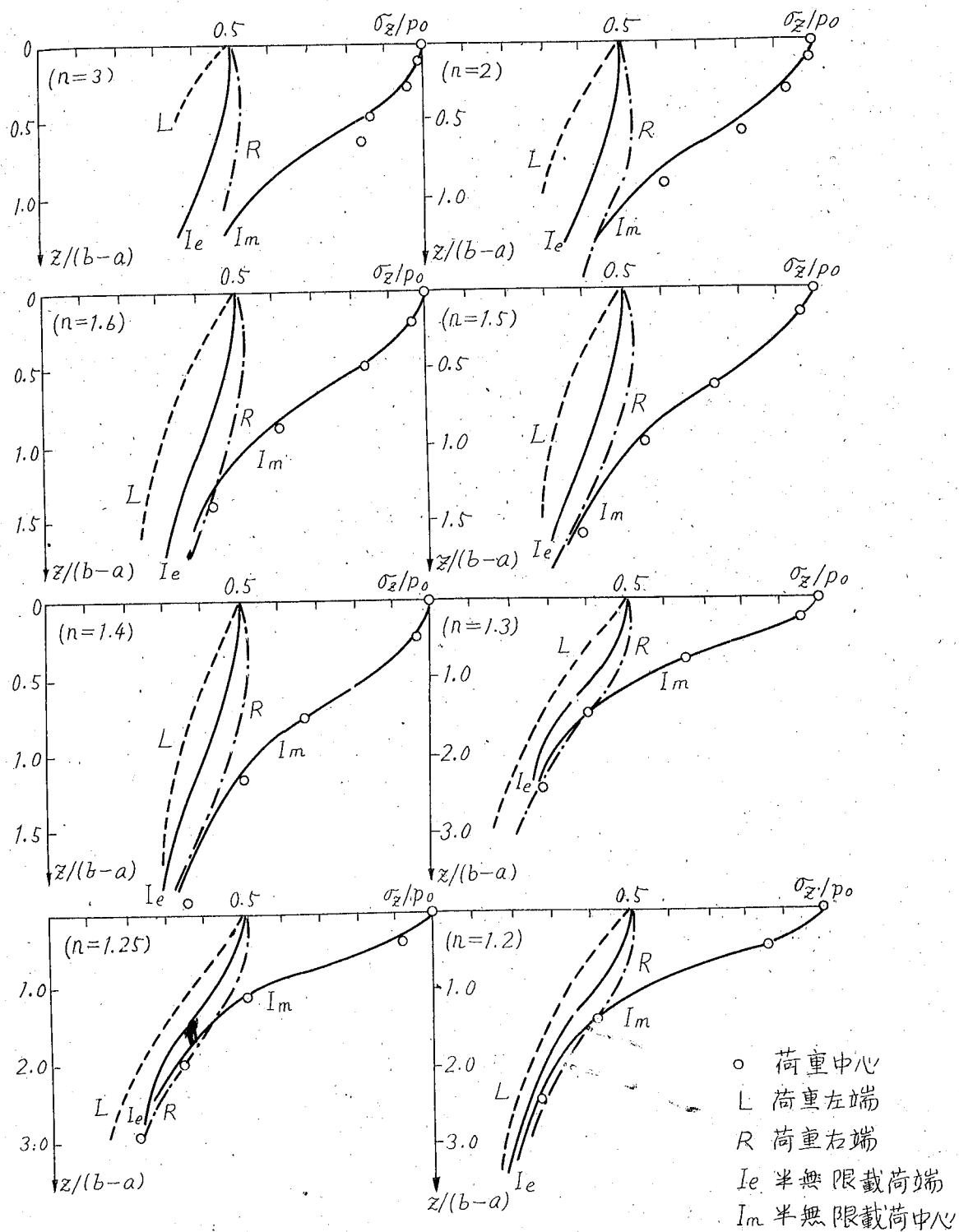
$$n=b/a=1.2$$



$$(15-a-8) \quad n=1.2$$

(16-a) 鉛直応力図 ( $\alpha = 30^\circ$ )



(1b-b) 鉛直灰力圖( $\alpha=45^\circ$ )

## 第 IV 章 水平有限層の接触応力と沈下性状

### 第 1 節 概 論

地盤に一樣な表面変位を生ぜしめるいわゆる剛性荷重においては、その接触応力の性質は一般に載荷構造物と地盤の相對剛性によって複雑な様相を呈する。

一樣半無限弾性体の場合には、剛性板と地盤との接触応力を、三次元に対しては Boussinesq が、二次元に対しては Sadowsky が与えている (Timoshenko and Goodier, 1951)。  
すなわち

$$\left. \begin{aligned} \text{Sadowsky} ; P &= \frac{P}{\pi A \sqrt{A^2 - x^2}} \\ \text{Boussinesq} ; P &= \frac{P}{2\pi A \sqrt{A^2 - r^2}} \end{aligned} \right\} (4.1)$$

ただし  $P$  は全荷重、 $A$  は載荷半巾または載荷半径である。

岩盤上にある有限土層の問題は二層地盤の一つの極限と考えられるため、数多くの研究が試みられているが、これらは表面で応力値を指定したいわゆる撓み性載荷の場合が多い。また接触条件を忠実に再現するものであっても、沈下計算時に近似仮定を行なっており、剛性載荷に対する厳密な研究はないようである。

本章では、構造物の高層化現象にともないここ数年来沖積

地盤上の剛性荷重の例が増加している現状にかんがみ、構造物の二次応力に及ぼす接触反力の性状を明らかにした。すなわち有限層に属する弾性応力解を重ね合わせて剛性載荷条件を満たす接触応力の分布を求めると同時に、その接触応力による地盤内の鉛直応力の分布についても考察した。

## 第2節 解 析

2-1 基本解 二次元直交座標における弾性応力の釣合式および適合条件式は(図-18参照)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} (4.2)$$

airyの応力関数によって応力成分を

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \quad (4.3)$$

と表わすと(4.2)より

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (4.4)$$

を得る。Hankel変換公式(2.7)をもちい、

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{i s x} dx \quad (4.5)$$

とおくと第Ⅱ章におけると同じく (4.4) の偏微分方程式は常微分方程式

$$\left(\frac{d}{dz} - \xi\right)^2 G(\xi, z) = 0 \quad (4.6)$$

に書き直される。これより容易に

$$G = (A + Bz)e^{i\xi z} + (C + Dz)e^{-i\xi z} \quad (4.7)$$

したがって (4.4) の逆変換は

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (A + Bz)e^{i\xi z} + (C + Dz)e^{-i\xi z} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (4.8)$$

ここに  $A, B, C, D$  は境界条件より定まる  $z$  と  $x$  との関数である。(3.3) の両辺に  $e^{i\xi x}$  を乗じ  $x$  について  $-\infty \sim \infty$  の範囲で積分すると,  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} e^{i\xi x}$  および  $\Phi e^{i\xi x}$  が無限遠点において収束することを仮定すれば

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x e^{i\xi x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} e^{i\xi x} dx \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{i\xi x} dx = \frac{d^2 G}{dz^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z e^{i\xi x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} e^{i\xi x} dx \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} e^{i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} i\xi e^{i\xi x} dx \\ &= -\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{i\xi x} dx = -\xi^2 G \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xz} e^{i\xi x} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} e^{i\xi x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \Phi e^{i\bar{z}x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} i\bar{z} \Phi e^{i\bar{z}x} d\bar{z} \\
 &= i\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{i\bar{z}x} d\bar{z} = i\bar{z} \frac{dG}{d\bar{z}}
 \end{aligned}$$

逆変換を行なうと

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 G}{d\bar{z}^2} e^{-i\bar{z}x} d\bar{z} \\
 \sigma_z &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{z}^2 G e^{-i\bar{z}x} d\bar{z} \\
 \tau_{xz} &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{z} \frac{dG}{d\bar{z}} e^{-i\bar{z}x} d\bar{z}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

次に変位成分を求める。平面歪の条件により

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u}{\partial x} &= \{ \sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \} \\
 \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial w}{\partial z} &= \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \}
 \end{aligned}$$

であるから、応力の場合と同様にして

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{1+\nu}{2\pi E} i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (1-\nu) \frac{d^2 G}{d\bar{z}^2} + \nu \bar{z}^2 G \right\} e^{-i\bar{z}x} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} \\
 w &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (1-\nu) \frac{d^2 G}{d\bar{z}^2} + (\nu-2) \bar{z}^2 \frac{dG}{d\bar{z}} \right\} \frac{e^{-i\bar{z}x}}{\bar{z}^2} d\bar{z}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

したがって (4.7) をもちいれば応力および変位の表示式は次のごとくになる

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \{ A|\xi| + B|\xi|Z - 2(1-\nu) \} e^{i\bar{z}\xi} \right. \\
 &\quad \left. + \{ C|\xi| + D|\xi|Z + 2(1-\nu) \} e^{-i\bar{z}\xi} \right] i e^{-i\bar{z}x} \frac{|\xi|}{\xi} d\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \{A|\xi| + B|\xi|Z + (1-2\nu)\} e^{|\xi|Z} \right. \\
 &\quad \left. + \{ -C|\xi| + D(1-2\nu) - \xi Z \} e^{-|\xi|Z} \right] e^{-i\xi x} d\xi \\
 \sigma_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \xi^2 (A+BZ) - 2B|\xi| \right] e^{|\xi|Z} \\
 &\quad + \left[ \xi^2 (C+DZ) + 2D|\xi| \right] e^{-|\xi|Z} \right] e^{-i\xi x} d\xi \\
 \sigma_z &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left\{ (A+BZ) e^{|\xi|Z} + (C+DZ) e^{-|\xi|Z} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \\
 \tau_{xz} &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \left[ \{ -|\xi|(A+BZ) + B \} e^{|\xi|Z} \right. \\
 &\quad \left. + \{ |\xi|(C+DZ) + D \} e^{-|\xi|Z} \right] e^{-i\xi x} d\xi
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

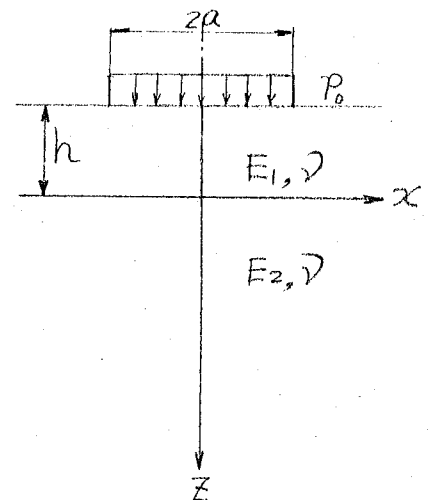
2-2 二層半無限体に対する解      外力として(図-18)に示す鉛直帯荷重を考える。第Ⅱ章におけると同じく上層の関数、定数にはサフィックス1を、下層のそれらにはサフィックス2を附することにする。三次元の場合と同じく、(4.7)の関数は各層に対して

○ 上層

$$G_1(\xi, Z) = (A_1 + B_1 Z) e^{|\xi|Z} + (C_1 + D_1 Z) e^{-|\xi|Z} \tag{4.12}$$

○ 下層

$$G_2(\xi, Z) = (C_2 + D_2 Z) e^{-|\xi|Z} \tag{4.13}$$



(図-18) 帯荷重を受ける二層地盤

ととらねばならない。第Ⅱ章にならって境界面が粗であるときと滑らかであるときについて解を求める。

$z=2-1$ 境界面が粗であるとき 境界条件は (2.24) と同じく次の形で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} z=-h \text{ で } \quad \tau_{xz} &= 0, \quad \sigma_z = \begin{cases} -p_0 & ; |x| < a \\ 0 & ; |x| > a \end{cases} \\ z=0 \text{ で } \quad u_1 &= u_2, \quad w_1 = w_2, \quad \sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \quad \tau_{xz1} = \tau_{xz2} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

これらの条件より (4.2), (4.13) に含まれる 6 個の未知数に関する一次方程式が得られる。これを解くと  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$  に対しては

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -2 \frac{p_0}{\xi^2} \Delta'_R \left[ (1+2|\xi|h) e^{|\xi|h} + \xi' e^{-|\xi|h} \right] \frac{|\xi|}{\xi} \sin a \xi \\ D_1 &= 2 \frac{p_0}{\xi^2} \Delta'_R \left[ \xi e^{|\xi|h} + (1-2|\xi|h) e^{-|\xi|h} \right] \frac{|\xi|}{\xi} \sin a \xi \\ C_1 &= -\frac{p_0}{\xi^3} \Delta'_R \left[ 2\xi(1+|\xi|h) e^{|\xi|h} + (\xi\xi' + 1-2|\xi|h) e^{-|\xi|h} \right] \sin a \xi \\ A_1 &= -\frac{p_0}{\xi^3} \Delta'_R \left[ (\xi\xi' + 1+2|\xi|h) e^{|\xi|h} + 2\xi'(1-|\xi|h) e^{-|\xi|h} \right] \sin a \xi \\ A_2 &= -\frac{p_0}{\xi^3} \Delta'_R \left[ \left\{ \xi\xi' + 2\xi \overline{1+|\xi|h} + 1+2|\xi|h \right\} e^{|\xi|h} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \xi\xi' + 2\xi \overline{1-|\xi|h} + 1-2|\xi|h \right\} e^{-|\xi|h} \right] \sin a \xi \\ B_2 &= 2 \frac{p_0(1+\xi')}{\xi^2} \Delta'_R \left[ \xi e^{|\xi|h} + (1-2|\xi|h) e^{-|\xi|h} \right] \frac{|\xi|}{\xi} \sin a \xi \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

さらに

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \xi = \frac{(3-4\nu)+f}{1-f}, \quad \xi' = \frac{1-f}{f+\frac{1}{3-4\nu}} \\ \frac{1}{\Delta'_R} &= \xi e^{2|\xi|h} + (1+\xi\xi' + 4\xi^2 h^2) + \xi' e^{-2|\xi|h} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

よって応力および変位の表示式は

$$\xi h = \lambda, \quad \frac{a}{h} = \alpha, \quad \frac{x}{h} = s, \quad \frac{z}{h} = \zeta, \quad \Delta_R = e^{2\lambda} \Delta_R \quad (4.17)$$

と表わすと次のごとくに得られる。

$$\begin{aligned} u_1 = & -p_0 \frac{1+\nu}{\pi E_1} h \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda^2} \left[ 2\xi' \{1-2\nu+\lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ & - \{ \xi \xi' + (1+2\lambda)(4\nu-3-2\lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \\ & - \{ \xi \xi' + (1-2\lambda)(4\nu-3+2\lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} \\ & \left. + 2\xi \{1-2\nu-\lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \alpha \lambda \sin s \lambda d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 = & -p_0 \frac{1+\nu}{\pi E_1} h \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda^2} \left[ 2\xi' \{2(1-\nu)-\lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ & + \{ \xi \xi' + (1+2\lambda)(3-4\nu-2\lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \\ & - \{ \xi \xi' + (1-2\lambda)(3-4\nu+2\lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} \\ & \left. - 2\xi \{2(1-\nu)+\lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \alpha \lambda \cos s \lambda d\lambda \quad (4.18a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z_1} = & -\frac{p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\xi' \{1-\lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{ \xi \xi' + (1+2\lambda)(1-2\lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ & \left. + \{ \xi \xi' + (1-2\lambda)(1+2\lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} + 2\xi \{1+\lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \alpha \lambda \cos s \lambda d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} = & -\frac{p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\xi' \{1+\lambda(1+\zeta)\} e^{2\lambda(\zeta-1)} - \{ \xi \xi' - (1+2\lambda)(2\lambda\zeta+3) \} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ & \left. - \{ \xi \xi' + (1-2\lambda)(2\lambda\zeta-3) \} e^{-2\lambda} + 2\xi \{1-\lambda(1+\zeta)\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \alpha \lambda \cos s \lambda d\lambda \end{aligned}$$

$$\tau_{xz_1} = -\frac{p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ 2\xi' \lambda(1+\zeta) e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{ -\xi \xi' + (1+2\lambda)(1+2\lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \varepsilon \varepsilon' - (1-2\lambda)(1-2\lambda\bar{\varepsilon}) \right\} e^{-2\lambda} + 2\varepsilon\lambda(1+\bar{\varepsilon}) \Big] e^{-\lambda(1+\bar{\varepsilon})} \sin \lambda \sin \lambda d\lambda \\
u_2 = & p_0 \frac{(1+\nu)}{E_2} h \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda^2} \left[ \left\{ \varepsilon \varepsilon' + 2\varepsilon'(1-\lambda + \sqrt{1-2\lambda} \sqrt{\lambda\bar{\varepsilon} - 2 + 2\bar{\nu}}) + (1-2\lambda)(2\lambda\bar{\varepsilon} + 4\bar{\nu} - 3) \right\} e^{-2\lambda} \right. \\
& \left. + \left\{ \varepsilon \varepsilon'(2\lambda\bar{\varepsilon} + 4\bar{\nu} - 3) + 2\varepsilon(\lambda\sqrt{1+\bar{\varepsilon}} + 2\bar{\nu} - 1) + 1 + 2\lambda \right\} \right] e^{-\lambda(1+\bar{\varepsilon})} \sin \lambda \sin \lambda d\lambda \\
w_2 = & p_0 \frac{(1+\nu)}{E_2} h \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda^2} \left[ \left\{ \varepsilon \varepsilon' + 2\varepsilon'(1-\lambda + \sqrt{1-2\lambda} \sqrt{\lambda\bar{\varepsilon} + 1 - 2\bar{\nu}}) + (1-2\lambda)(2\lambda\bar{\varepsilon} + 3 - 4\bar{\nu}) \right\} e^{-2\lambda} \right. \\
& \left. + \left\{ \varepsilon \varepsilon'(2\lambda\bar{\varepsilon} + 3 - 4\bar{\nu}) + 2\varepsilon(\lambda\sqrt{1+\bar{\varepsilon}} + 2 - 2\bar{\nu}) + 1 + 2\lambda \right\} \right] e^{-\lambda(1+\bar{\varepsilon})} \sin \lambda \cos \lambda d\lambda \\
\sigma_{z_2} = & -\frac{p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \left\{ \varepsilon \varepsilon' + 2\varepsilon'(1-\lambda + \sqrt{1-2\lambda} \sqrt{\lambda\bar{\varepsilon} - 2\lambda}) + (2\lambda\bar{\varepsilon} + 1)(1-2\lambda) \right\} e^{-2\lambda} \right. \\
& \left. + \left\{ \varepsilon \varepsilon' \sqrt{1+2\lambda\bar{\varepsilon}} + 2\varepsilon \sqrt{1+\lambda+\lambda\bar{\varepsilon}} + 1 + 2\lambda \right\} \right] e^{-\lambda(1+\bar{\varepsilon})} \sin \lambda \cos \lambda d\lambda \quad (4.18b) \\
\sigma_{x_2} = & -\frac{p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \left\{ \varepsilon \varepsilon' + 2\varepsilon'(1-\lambda + \sqrt{1-2\lambda} \sqrt{\lambda\bar{\varepsilon} - 2}) + (1-2\lambda)(2\lambda\bar{\varepsilon} - 3) \right\} e^{-2\lambda} \right. \\
& \left. + \left\{ \varepsilon \varepsilon'(2\lambda\bar{\varepsilon} - 3) + 2\varepsilon(\lambda\sqrt{1+\bar{\varepsilon}} - 1) + 1 + 2\lambda \right\} \right] e^{-\lambda(1+\bar{\varepsilon})} \sin \lambda \cos \lambda d\lambda \\
\tau_{xy_2} = & -\frac{p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \left\{ \varepsilon \varepsilon' + 2\varepsilon'(1-\lambda - \sqrt{1-\lambda\bar{\varepsilon}} \sqrt{1-2\lambda}) + (1-2\lambda)(2\lambda\bar{\varepsilon} - 1) \right\} e^{-2\lambda} \right. \\
& \left. + \left\{ \varepsilon \varepsilon'(2\lambda\bar{\varepsilon} - 1) + 2\varepsilon\lambda(1+\bar{\varepsilon}) + 1 + 2\lambda \right\} \right] e^{-\lambda(1+\bar{\varepsilon})} \sin \lambda \sin \lambda d\lambda
\end{aligned}$$

2-2-2境界面が滑らかであるとき      この場合境界面における条件を

$$z = -h \text{ で } w_1 = w_2, \quad \sigma_{z_1} = \sigma_{z_2}, \quad \tau_{xz_1} = \tau_{xz_2} \quad (4.19)$$

としなければならない。これらの条件から定数を定め(4.11)に入れると底力および変位の表示式が求められる。すなわち

$$N = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}, \quad \frac{1}{\Delta_5} = N e^{-4\lambda} - \{N(2\lambda^2 + 2\lambda + 1) + (2\lambda^2 - 2\lambda + 1)\} e^{-2\lambda} + 1. \quad (4.20)$$

とすると

$$\begin{aligned} u_1 = & -2p_0 \frac{(1+\nu)h}{\pi E_1} \int_0^\infty \frac{\Delta_5}{\lambda^2} \left[ N \{1 - 2\nu + \lambda(1+\zeta)\} e^{\frac{2\lambda(\zeta-1)}{\lambda^2}} \right. \\ & - \{N(1+\lambda)(1-2\nu) + \lambda(2-2\nu) + \lambda\zeta\} e^{2\lambda\zeta} \\ & - \{(\lambda-1)(\lambda\zeta-1+2\nu) + N\lambda(\lambda\zeta-2+2\nu)\} e^{-2\lambda} \\ & \left. - \{1-2\nu-\lambda(1+\zeta)\} e^{-\lambda(1+\zeta)} \right] \sin \lambda \sin \lambda \, d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 = & -2p_0 \frac{(1+\nu)h}{\pi E_1} \int_0^\infty \frac{\Delta_5}{\lambda^2} \left[ N \{2(1-\nu) - \lambda(1+\zeta)\} e^{\frac{2\lambda(\zeta-1)}{\lambda^2}} \right. \\ & - \{N(2-2\nu-\lambda\zeta)(1+\lambda) + \lambda(1-2\nu-\lambda\zeta)\} e^{2\lambda\zeta} \\ & + \{(1-\lambda)(2-2\nu) + \lambda\zeta\} + N\lambda(2\nu-1-\lambda\zeta)\} e^{-2\lambda} \\ & \left. - \{2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta)\} e^{-\lambda(1+\zeta)} \right] \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda \end{aligned} \quad (4.21a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z1} = & -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_5}{\lambda} \left[ N \{1 - \lambda(1+\zeta)\} e^{\frac{2\lambda(\zeta-1)}{\lambda^2}} - \{N(1+\lambda)(1-\lambda\zeta) - \lambda^2\zeta\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ & \left. - \{(1-\lambda)(1+\lambda\zeta) - N\lambda^2\zeta\} e^{-2\lambda} + 1 + \lambda(1+\zeta) \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} = & -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_5}{\lambda} \left[ N \{1 + \lambda(1+\zeta)\} e^{\frac{2\lambda(\zeta-1)}{\lambda^2}} - \{N(1+\lambda)(1+\lambda\zeta) + \lambda(\lambda\zeta+2)\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ & \left. + \{(1-\lambda)(\lambda\zeta-1) + N\lambda(2-\lambda\zeta)\} e^{-2\lambda} - \{1 - \lambda(1+\zeta)\} e^{-\lambda(1+\zeta)} \right] \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz1} = & -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_5}{\lambda} \left[ N(1+\zeta) e^{\frac{2\lambda(\zeta-1)}{\lambda^2}} - \{N(1+\lambda)\zeta + (1+\lambda\zeta)\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\ & \left. - \{N(1-\lambda\zeta) + (1-\lambda)\zeta\} e^{-2\lambda} + (1+\zeta) \right] \lambda e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \sin \lambda \, d\lambda \end{aligned}$$

$$u_2 = -4P_0 \frac{1+\nu}{\pi E_2} h \int_0^\infty \frac{\Delta_s}{\lambda^2} \left[ \{ (1-\lambda)e^{-2\lambda} - (1+\lambda) \} (\lambda\zeta - 1 + 2\nu) \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \sin s \lambda d\lambda$$

$$w_2 = -4P_0 \frac{1+\nu}{\pi E_2} h \int_0^\infty \frac{\Delta_s}{\lambda^2} \left[ \{ 2(1-\nu) + \lambda\zeta \} \{ (1-\lambda\zeta)e^{-2\lambda} - (1+\lambda) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \sin s \lambda d\lambda$$

$$\sigma_{z_2} = \frac{4P_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_s}{\lambda} \left[ \{ (1-\lambda)e^{-2\lambda} - (1+\lambda) \} (1+\lambda\zeta) \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \cos s \lambda d\lambda$$

(4-21b)

$$\sigma_{x_2} = -\frac{4P_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_s}{\lambda} \left[ \{ (1-\lambda)e^{-2\lambda} - (1+\lambda) \} (-1+\lambda\zeta) \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \cos s \lambda d\lambda$$

$$\tau_{xz} = -\frac{4P_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_s}{\lambda} \left[ \{ (1-\lambda)e^{-2\lambda} + (1+\lambda) \} \lambda\zeta \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \sin s \lambda d\lambda$$

である。

2-3 有限深さの弾性体に対する解      剛なる地盤上の有限深さの弾性体の解は、上で求めた二層地盤の解において下層の弾性係数  $E_2$  を無限大にすることによって得られる。すなわち  $E_2 \rightarrow \infty$  であるとき

$$f=0, \quad \varepsilon = \varepsilon' = 3-4\nu, \quad N=-1$$

(4-22)

であることを利用すれば、変位および鉛直応力は  
○境界面が粗であるとき

$$\begin{aligned} u_1 = & -P_0 \frac{1+\nu}{\pi E_1} h \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda^2} \left[ 2k \{ 1-2\nu + \lambda(1+\zeta) \} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\ & - \{ k^2 + (1+2\lambda)(4\nu-3-2\lambda\zeta) \} e^{2\lambda\zeta} \\ & - \{ k^2 + (1-2\lambda)(4\nu-3+2\lambda\zeta) \} e^{-2\lambda} \\ & \left. + 2k \{ 1-2\nu - \lambda(1+\zeta) \} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \sin s \lambda d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_1 = & -p_0 \frac{1+\nu}{\pi E_1} h \int_0^{\infty} \frac{\bar{\Delta}_R}{\lambda^2} \left[ 2k \left\{ 2(1-\nu) - \lambda(1+\zeta) \right\} e^{2\lambda(\zeta-1)} \right. \\
 & + \left\{ k^2 + (1+2\lambda)(3-4\nu-2\lambda\zeta) \right\} e^{2\lambda\zeta} \\
 & - \left\{ k^2 + (1-2\lambda)(3-4\nu+2\lambda\zeta) \right\} e^{-2\lambda} \\
 & \left. - 2k \left\{ 2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta) \right\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \cos s \lambda d\lambda \\
 \sigma_{z1} = & -\frac{p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\Delta}_R}{\lambda} \left[ 2k \left\{ 1 + \lambda(1+\zeta) \right\} - \left\{ k^2 - (1+2\lambda)(2\lambda\zeta+3) \right\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\
 & \left. + \left\{ k^2 + (1-2\lambda)(2\lambda\zeta-3) \right\} e^{-2\lambda} + 2k \left\{ 1 - \lambda(1+\zeta) \right\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \cos s \lambda d\lambda
 \end{aligned} \quad (4.23)$$

ただし

$$k = 3-4\nu, \quad \frac{1}{\Delta_R} = k + (1+k^2+4\lambda^2)e^{-2\lambda} + ke^{-4\lambda} \quad (4.24)$$

○境界面が滑らかであるとき

$$\begin{aligned}
 u_1 = & -2p_0 \frac{1+\nu}{\pi E_1} h \int_0^{\infty} \frac{\bar{\Delta}_S}{\lambda^2} \left[ \left\{ 1-2\nu + \lambda(1+\zeta) \right\} e^{2\lambda(\zeta-1)} - \left\{ 1-2\nu + \lambda(\zeta-1) \right\} e^{-2\lambda} \right. \\
 & \left. + \left\{ 1-2\nu - \lambda(\zeta-1) \right\} e^{-2\lambda} + \left\{ 1-2\nu - \lambda(1+\zeta) \right\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \sin s \lambda d\lambda \\
 w_1 = & -2p_0 \frac{1+\nu}{\pi E_1} h \int_0^{\infty} \frac{\bar{\Delta}_S}{\lambda^2} \left[ \left\{ 2(1-\nu) - \lambda(1+\zeta) \right\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + \left\{ \lambda(\zeta-1) - 2(1-\nu) \right\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\
 & \left. - \left\{ \lambda(\zeta-1) + 2(1-\nu) \right\} e^{-2\lambda} + \left\{ 2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta) \right\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \cos s \lambda d\lambda \\
 \sigma_{z1} = & -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\Delta}_S}{\lambda} \left[ \left\{ 1 - \lambda(1+\zeta) \right\} e^{2\lambda(\zeta-1)} + \left\{ \lambda(\zeta-1) - 1 \right\} e^{2\lambda\zeta} \right. \\
 & \left. + \left\{ \lambda(\zeta-1) + 1 \right\} e^{-2\lambda} + \left\{ 1 + \lambda(1+\zeta) \right\} \right] e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \lambda \cos s \lambda d\lambda
 \end{aligned} \quad (4.25)$$

ただし

$$\frac{1}{\Delta_S} = e^{-4\lambda} - 4\lambda e^{-2\lambda} - 1 \quad (4.26)$$

地表面における鉛直変位成分は (4.23), (4.25) より明らかに

(i) 境界面が粗であるとき

$$w_0 = -4p_0 \frac{1-\nu^2}{\pi E_1} h \int_0^{\infty} \frac{\Delta_R}{\lambda^2} \left[ k(e^{-2\lambda} - 1)(e^{-2\lambda} + 1) + 4\lambda \right] \rho \sin \lambda \cos s \lambda d\lambda \quad (4.27a)$$

(ii) 境界面が滑らかであるとき

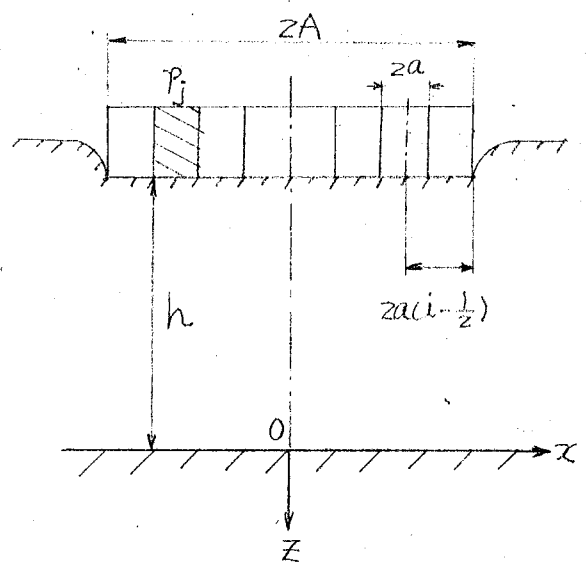
$$w_0 = -4p_0 \frac{1-\nu^2}{\pi E_1} h \int_0^{\infty} \frac{\Delta_S}{\lambda^2} (e^{-2\lambda} - 1)^2 \rho \sin \lambda \cos s \lambda d\lambda \quad (4.27b)$$

と与えられる。

## 2-4 接触応力に対する解

硬い地盤上の弾性体の表面に撓み性の鉛直帯荷重が働いたときのものである。剛性荷重と地盤との接触応力の分布は、荷重を小区間に分割して考察する「分割法」によって求めることは前に述べた。

前項の (4.27) に示した解は、



すなわち (図-19) に示すごとく、 $2A$  の剛性荷重を  $2n$  等分し

(図-19) 有限層表面に剛性荷重が働く場合

た小区間 (中  $2a$ ) 内には、荷重は等分布するものと仮定する。

各区間内の荷重を  $p_j$  で表わすと、(図-18) の点の表面変位は

(i) 境界面が粗であるとき

$$w_i = -4h \frac{1-\nu^2}{\pi E_1} \sum_{j=1}^{2n} p_j \int_0^{\infty} \frac{\Delta_R}{\lambda^2} \left[ k(e^{-2\lambda} - 1)(e^{-2\lambda} + 1) + 4\lambda \right] \rho \sin \lambda \cos \left( \frac{x_i - x_j}{h} \right) \lambda d\lambda \quad (4.28a)$$

(ii) 境界面が滑らかであるとき

$$w_i = -4h \frac{1-\nu^2}{\pi E_1} \sum_{j=1}^{2n} p_j \int_0^{\infty} \frac{\Delta_s}{\lambda^2} (e^{-2\lambda} - 1)^2 \rho \sin \lambda \cos\left(\frac{x_i - x_j}{h}\right) \lambda d\lambda \quad (4.28b)$$

と表わせる。(4.28) を

$$w_i = p_j F(x_i - x_j)$$

と書くと、載荷板下の変位が一定であることから

$$\sum_{j=1}^{2n} p_j \{F(x_{i+1} - x_j) - F(x_i - x_j)\} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 2n-1)$$

載荷板に働く全荷重を  $P$  とすると、小区間内の荷重  $p_j$  に関する  $2n$  個の一次方程式

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n} p_j \{F(x_{i+1} - x_j) - F(x_i - x_j)\} &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, 2n-1) \\ P &= \sum_{j=1}^{2n} p_j \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

が得られる。なおこの  $p_j$  による内部の応力  $\sigma_z$  は、(4.23)

および (4.25) によって計算することができる。

2-5 結果の検討 二層地盤における表示式について検討する。

境界面が粗であるときを例にとれば、地盤表面においては  $\zeta = -1$  とおいて

$$\sigma_{z1} = -\frac{2P_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho \sin \lambda \cos s \lambda}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} -P_0 & ; |x| < a \\ 0 & ; |x| > a \end{cases}$$

$$\tau_{xz1} = 0$$

また境界面では  $\zeta=0$  とおくと

$$u_1 = -p_0 \frac{1+\nu}{\pi E_1} h \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda^2} \left[ \{ 2\varepsilon'(1-2\nu+\lambda) - \varepsilon\varepsilon' - (1-2\lambda)(4\nu-3) \} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + 2\varepsilon(1-2\nu-\lambda) - \varepsilon\varepsilon' - (1+2\lambda)(4\nu-3) \right] e^{-\lambda} \sin \alpha \lambda \sin S \lambda d\lambda \equiv u_2$$

$$w_1 = -p_0 \frac{1+\nu}{\pi E_1} h \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda^2} \left[ \{ 2\varepsilon'(2-2\nu-\lambda) - \varepsilon\varepsilon' - (1-2\lambda)(3-4\nu) \} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + \{ \varepsilon\varepsilon' + (1+2\lambda)(3-4\nu) - 2\varepsilon(2-2\nu+\lambda) \} \right] e^{-\lambda} \sin \alpha \lambda \cos S \lambda d\lambda \equiv w_2$$

$$\sigma_{z1} = -\frac{p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \{ 2\varepsilon'(1-\lambda) + \varepsilon\varepsilon' + (1-2\lambda) \} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + \{ \varepsilon\varepsilon' + (1+2\lambda) + 2\varepsilon(1+\lambda) \} \right] e^{-\lambda} \sin \alpha \lambda \cos S \lambda d\lambda \equiv \sigma_{z2}$$

$$\tau_{xz1} = -\frac{p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta_R}{\lambda} \left[ \{ 2\varepsilon'\lambda + \varepsilon\varepsilon' - (1-2\lambda) \} e^{-2\lambda} \right. \\ \left. + \{ -\varepsilon\varepsilon' + (1+2\lambda) + 2\varepsilon\lambda \} \right] e^{-\lambda} \sin \alpha \lambda \sin S \lambda d\lambda \equiv \tau_{xz2}$$

となるから、境界条件(4.14)はすべて満足されていることが証明された。

その他第Ⅱ章の三次元問題におけると同様のことが本節の解についてもあてはまるが、ここでは省略する。

### 第3節 解析結果

本節では水平なる有限層の表面に一樣変位を生ずる剛性荷重について、その接触応力性状を明らかにするために、前節

で求めた表面の未知力に関する一次方程式を解きその分布形を示した。また得られた分布力によって生ずる鉛直応力についても行察を行なった。

接触応力の分布形を与える方程式 (4.29) においては、対称性を考慮することにより未知量を  $n$  個に減らすことができる。本章では分割区間数を 20 すなわち  $n = 10$  として計算を行なった。まず (4.28) によって 1 つの  $p_j$  による各点の表面変位を積値積分によって算出する。次にそれらを重ね合わせてすべての  $p_j$  による変位を計算し、各点で変位が等しくなりかつ全荷重が  $P$  に等しくなるように未知力  $p_j$  を定めるのである。この計算法においては、1 つの撓み性荷重による沈下曲線を求める計算が非常に重要であって、この計算の精度が悪く沈下曲線に局所的な歪が生ずると全体の接触応力分布が正しい形とはまったく異なったものになることがある。本計算ではこの積分に充分注意して (4.28) に対して積分区間および間隔を次のごとくにとった。

$$0 \leq 0.001 \leq 4, \quad 4 \leq 0.01 \leq 44, \quad 44 \leq 0.1 \leq 444$$

すなわち被積分関数の値 12,000 個を計算したのである。この積分の精度については、比較する値がないため検討を加えることができないが、いずれの場合においても沈下曲線の形は

きわめて滑らかであった。

また求められた接触応力による地盤内の鉛直応力については、それぞれの  $p_j$  に対する値を (4.23), (4.25) によって計算しておき、それらを重ね合わせればよい。

本章でもちいた計算法は厳密解をよりどころとしているため、大型の電子計算機によってもかなりの時間を必要とする。この種の問題においては近似解をもちいたものがほとんどであることも上に示した事実によって肯められる。

計算は次に示す18通りについて行なった。すなわち

$$\nu = 0.3, 0.4, 0.5$$

$$\frac{h}{2A} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$$

接触応力および地盤内の鉛直応力の数値解を (図-20) にまとめ、Sadounsky による分布形状および半無限体内の鉛直応力分布形状と対比して示した。またポアソン比  $\nu$  および ~~厚さ~~ 比  $\frac{h}{2A}$  による接触応力の分布形の差違についても (図-21, 22) に明らかにした。

#### 第4節 模型実験

弾性理論計算によって得られた接触応力の分布形状および表面沈下量が、土のような非弾性物質に対してどの程度の適

応性があるかを検討するために、フォームラバーによる模型実験を行なった。実験装置は第Ⅲ章でもちいたものと大略同じであるが、表面沈下が一定値であることをたしかめるために写真3.4に示すように載荷板の四隅にダイヤルゲージを配置した。一定変位を与える載荷板は長さ  $30\text{cm}$  × 中  $10\text{cm}$  × 厚さ  $0.4\text{cm}$

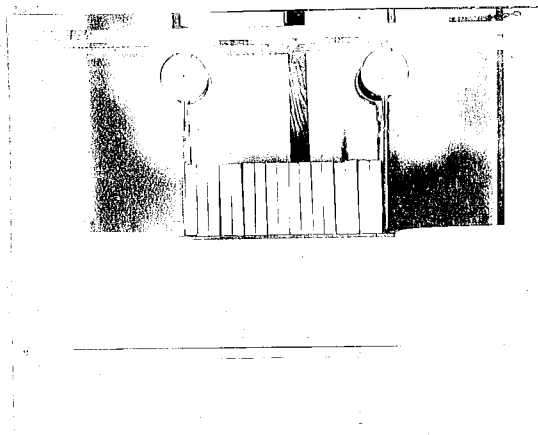


写真3 載荷装置とダイヤルゲージ

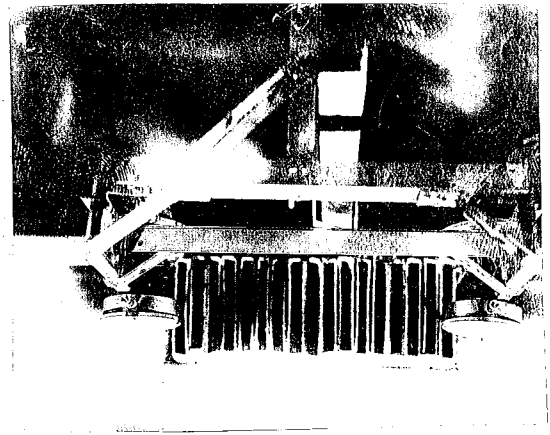


写真4 ダイヤルゲージと荷重容器

の鋼板とした。フォームラバーの寸法は長さ  $105\text{cm}$  × 中  $10\text{cm}$  とし高さは、表-5に示すごとく層厚/中比に応じて変化させた。

(表-5) 実験にもちいたフォームラバーの高さと載荷半中

| $h/2A$    | 0.5  | 1.0  | 1.5  |
|-----------|------|------|------|
| フォームラバー高さ | 15cm | 30cm | 45cm |
| 載荷板中      | 30cm | 30cm | 30cm |

荷重は写真に示すようにボール紙製の小箱

に散弾をつめたものを並べて与えた。剛性載荷板による実験においては散弾の量を等しくしたが、ここで行なったように小区間に分けて荷重を与えないと一定変位を生ぜしめること

が困難なようである。フォームラバーに与えた全荷重は 2kg, 4kg, および 6kg の 3 種とした。

実験は(表-5)に示す層厚~~率~~比について 3 種の荷重強度を与え沈下量を観測するとともに、比が 1.0 の場合について理論計算によって得られた分布を再現し沈下の性状および沈下量について観察を行なった。なおこの際フォームラバーの表面には薄いゴム膜を敷きその上に前述の小箱をならべ、その中に分布形に見合う散弾を加え、小区内内の荷重がなるべく等分布となるように工夫した(写真 5)。剛性板による実験では表面沈下はダイヤルゲージによって記録し、分布形を再現させる実験ではレベルを利用した。

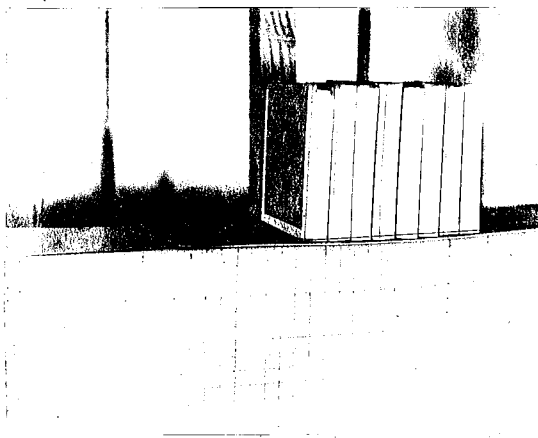
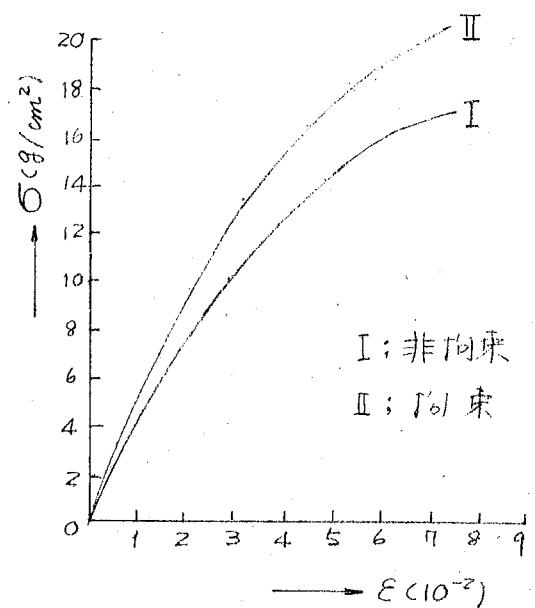


写真 5 荷重容器とゴム膜



(図-23) フォームラバーの応力-歪曲線

フォームラバーの一軸圧縮試験を非拘束供試体および側方拘束供試体について行ない(図-23)に示す応力-歪曲線を得た。

なおポアソン比は、非拘束時ならハに拘束時の弾性率から算出し 0.290 とした。

実験の結果は計算値と対比して第5節の(表-6)に示したが計算にしろいた弾性係数は、比較した実の応力値に対する正割係数をとった。その意味では変形係数といった方が適當であろう。

## 第5節 考 察

以上の計算によって求めた剛性荷重と地盤との接触応力の分布形については、

(1) 境界面が滑らかなときには分布形がポアソン比の影響を受けないことは、(4.27b) の積分記号内に  $\nu$  が含まれていないことから明らかである。もちろん沈下の絶対値には影響を及ぼす。

(2) 滑らかであるときには、粗である場合に較べて荷重端部における応力値の大きい。したがって中央部の応力値は粗であるときよりも小さくなり、むしろ上りの傾向もさ程顕著ではない。ポアソン比が小さくなるにつれて両者の分布形の差違は少なくなる。

(3) 境界面が粗であるときには、(図-21)によって大きなポアソン比に対しては層厚比の影響が大きく、ポアソン比が下

がるにつれてその度合が小さくなる傾向がうかがわれる。

(4) 接触応力の分布形で  $h/2A$  が 0.5 より小さいものでは、中央部の応力がやや大きくなりより上がりの傾向が認められる。これに対して 0.5 より大きい場合には、応力は中央部で最小となり、形としては Sadowsky 分布に似たものとなる。また 1.5 の場合には、端部以外はほぼ等分布形となっている。これは、層厚が薄いときには下層の剛なる地盤の影響が現われ易いことを示している。

(5) 境界面が粗である場合、 $h/2A$  が小さいときポアソン比の影響が大きく、 $h/2A$  が大きくなるにつれてその影響が小さくなる傾向がみられる。またポアソン比が小さくなるに従い、滑らかな場合の分布形に接近する。

(6) (図-22(f)) によつて  $h/2A$  が 1.5 になると、滑らかなときと粗であるときとで分布形はほとんど差違がなくなり、また半無限体における Sadowsky の分布形に近くなる。したがつて実用的には  $h/2A$  が 1.5 以上の場合には、有限層の接触応力は (4.1) の第 1 式で与えられると考えてよい。

次に地盤内の鉛直応力  $\sigma_z$  の分布については、

(1) 荷重縁部において、 $h/2A$  の値のいかんにかかわらず応力集中の傾向が著しい。

(2) 応力集中度はポアソン比が大きいためにやや著しいよう

であるが、全体としてはほとんど差がないといえる。

(3) 等分布荷重による半無限体内の分布形と比べると、底力比が大きいところでの偏りははなはだしいが、底力比が 0.3 以下の場合には表面から層厚の半分くらいまでの深さ迄は比較的良く一致している。境界面附近において半無限時底力とのずれが大きくなっているのは、下層の硬い地盤の影響によるものと考えられる。

(4) 境界面が粗であるときには地表面近くにおける底力集中の程度が著しく、滑らかである場合には底部近辺における集中の傾向が強い。したがって粗であるときの圧力球根の形は下で広がる三角型、滑らかであるときには底部でせはまるつり鐘型になる。

(5) 層厚が大きくなるにつれ半無限時の底力分布に近づき、境界面の状態によって底力の分布形がさ程変わらなくなる。これは  $h/2A$  が大きいとき、境界面の影響が現われにくいためと考えれば当然のことである。

また剛性板によって一定変位を与えたときの観測沈下量および分布形を再現したときの沈下性状を、理論計算の結果とともに(表-6.7)に示した。なお表中に示した計算値は、非拘束時の変形係数( $E_I$ )および側方拘束時の係数( $E_{II}$ )によるものである。またポアソン比は前述のごとく 0.290 とした。

(表-6) 剛性板によって一定変位を与えた場合の沈下量(理論値と実測値)

| 平均荷重<br>強度             | $h/2A$ | 計 算 値 (mm) |              | 実測値<br>(mm) |
|------------------------|--------|------------|--------------|-------------|
|                        |        | $E_I$ による  | $E_{II}$ による |             |
| 6.7 g/cm <sup>2</sup>  | 0.5    | 2.48       | 1.89         | 1.76        |
|                        | 1.0    | 4.27       | 3.25         | 2.93        |
|                        | 1.5    | 5.69       | 4.31         | 3.70        |
| 13.3 g/cm <sup>2</sup> | 0.5    | 5.96       | 4.43         | 4.88        |
|                        | 1.0    | 10.22      | 7.61         | 7.29        |
|                        | 1.5    | 14.10      | 10.50        | 9.01        |
| 20.0 g/cm <sup>2</sup> | 0.5    | /          | 11.9         | 10.57       |
|                        | 1.0    |            | 20.5         | 12.91       |
|                        | 1.5    |            | /            | /           |

これらの対比表によって次のことが明らかとなった。

(1) 平均荷重強度が過大にならない範囲(20.0 g/cm<sup>2</sup>以下)

では、拘束状態の変形係数をもちいた計算値と実測値とが良好一致を見せている。ことに層厚比の小さい値に対しては両値の偏りがほぼ10%以下に収まっている。これに反してこの比が大きいたときには合致度が悪くなる(図-24)。この理由として  $h/2A$  が小さいときすなわち有限層が薄い場合には、荷重と剛なる基礎までの距離が短いので上下からの拘束が大きく

(表-7) 理論分布を再現したときの実測沈下量

| 平均荷重強度(g/cm <sup>2</sup> ) | 6.7 | 13.3 |
|----------------------------|-----|------|
| 沈下量(mm)                    | 2.9 | 5.8  |

なり、さらに層厚に比して載荷中が大きいために側方からの拘束も増加して  $h/2A$  が大きいときに較べてより弾性的挙動を示すことが考えられる。

(2) 計算で得られた  $\nu=0.3$  ,

$h/2A = 1.0$  の場合の接触応

力分布形 (図-20(a-4)) を表

面に与えたときの沈下曲線を写真6に示した。この写真によっても認められるごとく、載荷部直下における変位はほとん

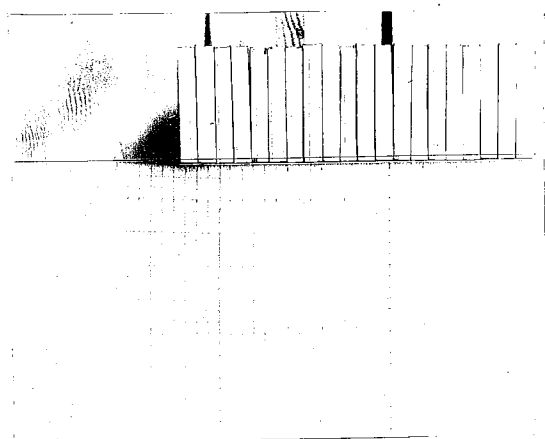
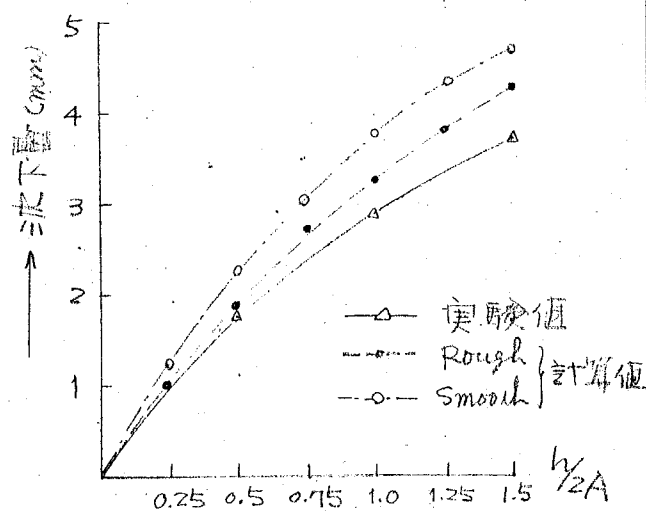


写真6 接触応力分布形と与えたときの変位曲線

縁部で小さい分布荷重を与えると沈下が一様とならないことを写真7,8にて示した。

以上の事実によって土のような非弾性物質の載荷試験にお



(図-24) 実験値と計算との比較

ど一定であった。少なくともレベルによっては沈下の不均一性は見出し得なかった。またその値も(表-7)に示すごとく、(表-6)の剛性載荷板による値とほぼ一致している。比較のために等分布および中央部で大きく

いては、変形係数として拘束時の係数をとった方が理論との一致が良いこと、また剛性載荷板と地盤との接触応力を求めるには、実用上分割法で充分であることなどが明らかとなった。

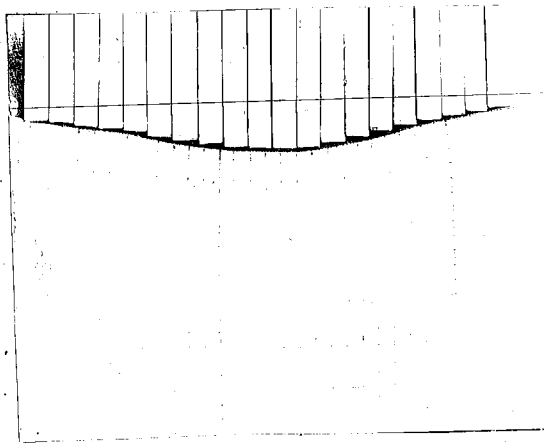


写真7 中央部で大きく縁部で小さい分布の場合

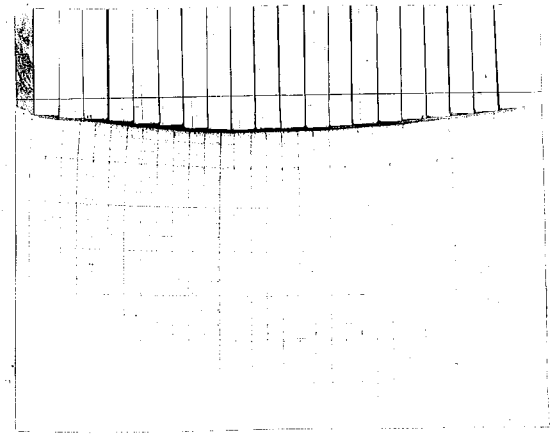


写真8 等分布の場合

## 第6章 結 語

本章で得られた結論を要約する。

(1) 境界面が滑らかであるときは接触応力の分布形はポアソン比によらない。

(2) 境界面が粗であるときの接触応力分布はポアソン比によって変化し、滑らかなときと較べるとやや平均化されているが、ポアソン比が小さくなるにつれて滑らかな状態における分布形に接近する。

(3) 境界面が粗である場合には、ポアソン比が大きいとき層厚比の影響が大きく、ポアソン比が小さくなるとその影

響も小さくなる。また  $\frac{\text{層厚}}{\text{巾}}$  比が小さいときには、接触応力の分布形はポアソン比によって大きく変化するが  $\frac{\text{層厚}}{\text{巾}}$  比が大きくなるにつれてほとんどの影響はなくなる。

(4)  $\frac{\text{層厚}}{\text{巾}}$  比が 1.5 以上では、下層の剛なる地盤の影響があまり表面に現われないので、実用上 Sadowsky の分布式をもちいてさしつかえない。

(5) 地盤内の鉛直応力分布形状はポアソン比によってさ程変化せず、 $\frac{\text{層厚}}{\text{巾}}$  比のいかんにかかわらず縁部で応力が集中する。

(6) 等分布荷重による半無限体内の鉛直応力分布と比べると応力比が小さい所では比較的よく合致している。上層が厚くなるにつれて全体として半無限時の分布に近くなる。

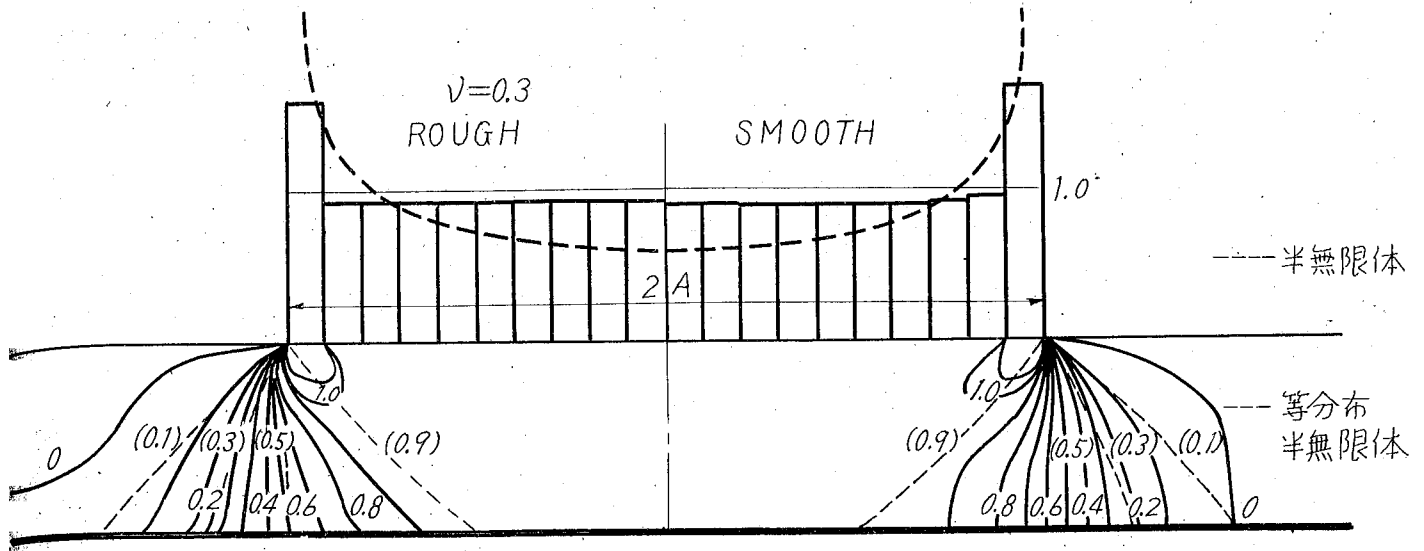
(7) 土のような非弾性材料の載荷試験においては、拘束時の弾性係数をもちいると理論値と合致しやすい。

(8) 剛性板と地盤との接触応力を数値的に求める場合には、いわゆる分割法が非常に実用的である。

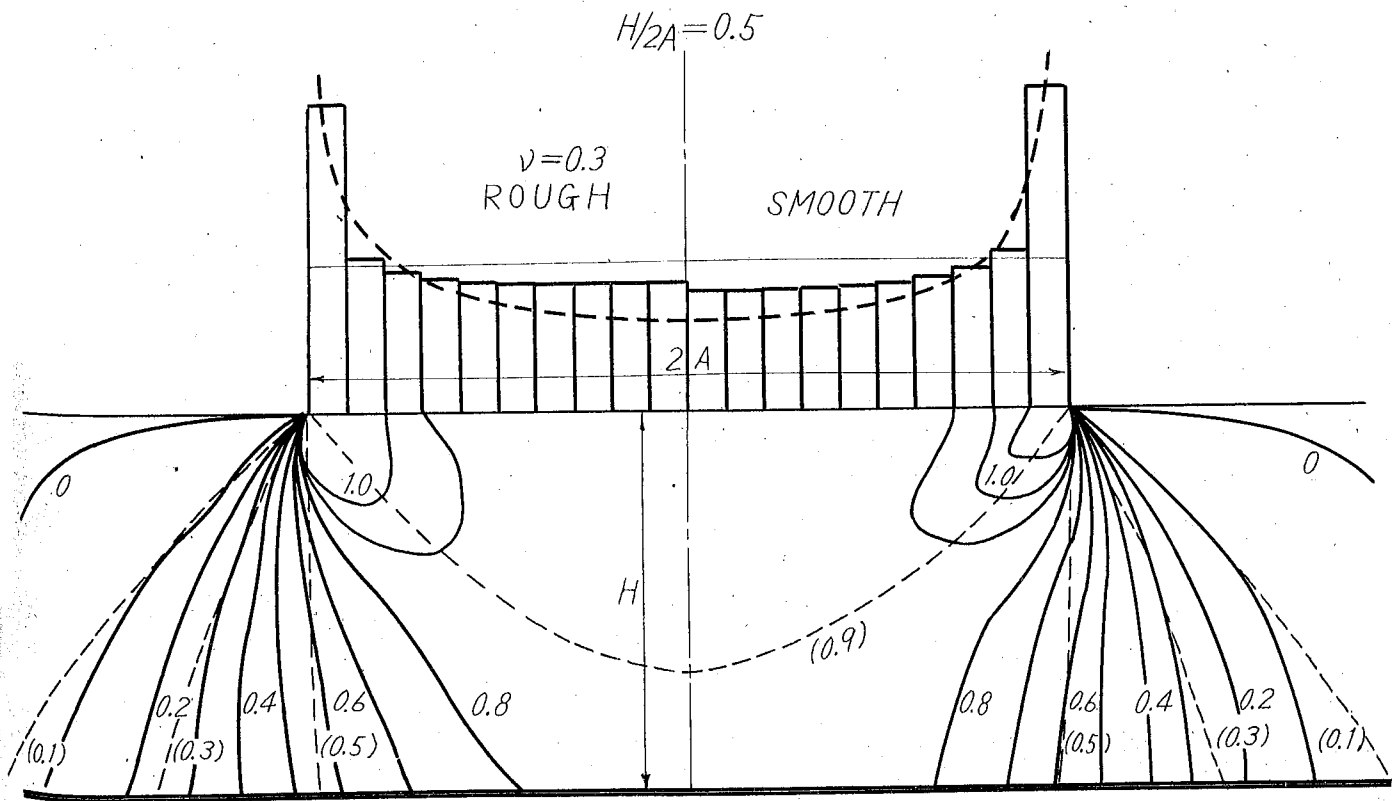
図-20 有限層表面の接触応力と内部応力分布

(20-a)  $\nu=0.3$  のとき

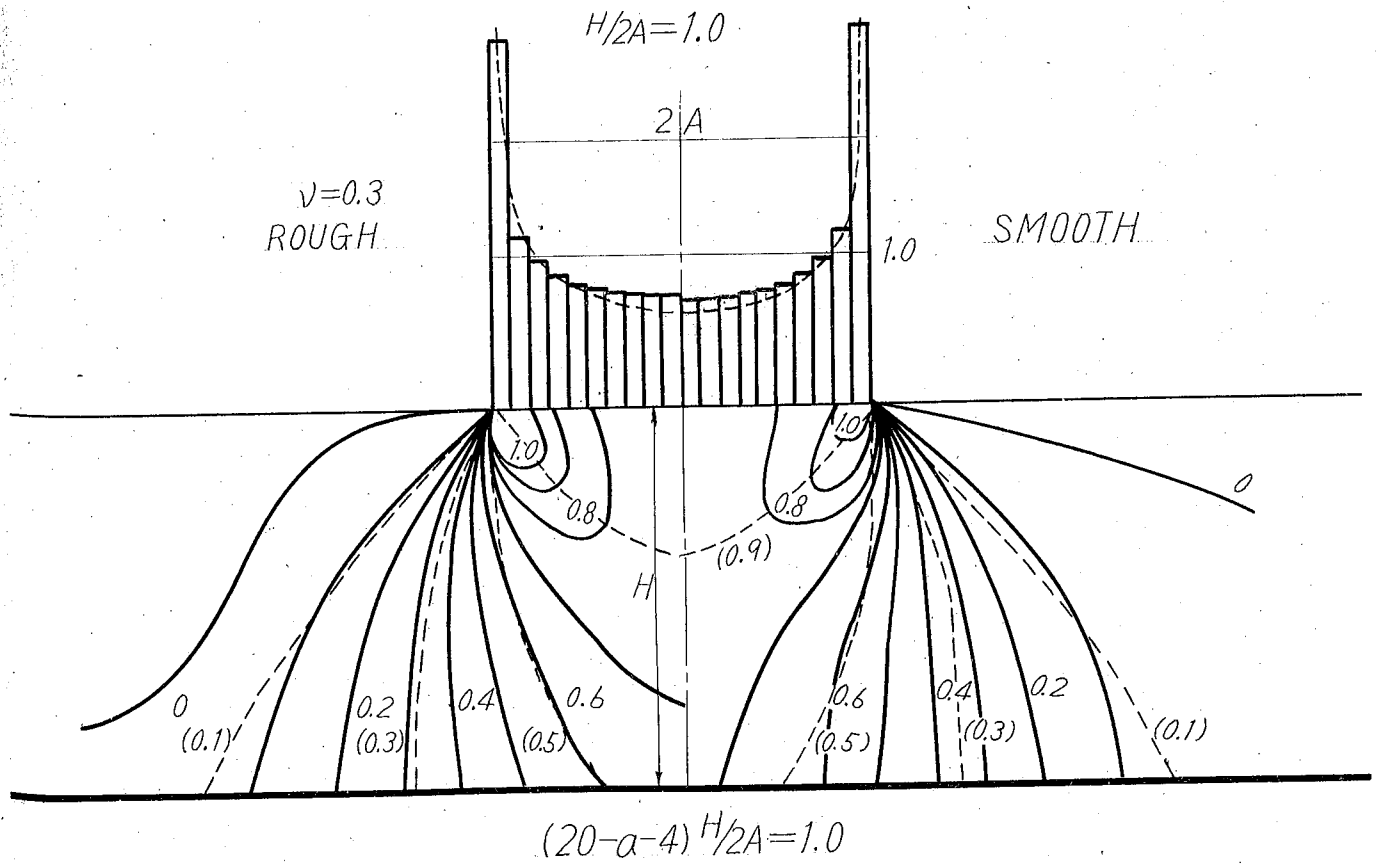
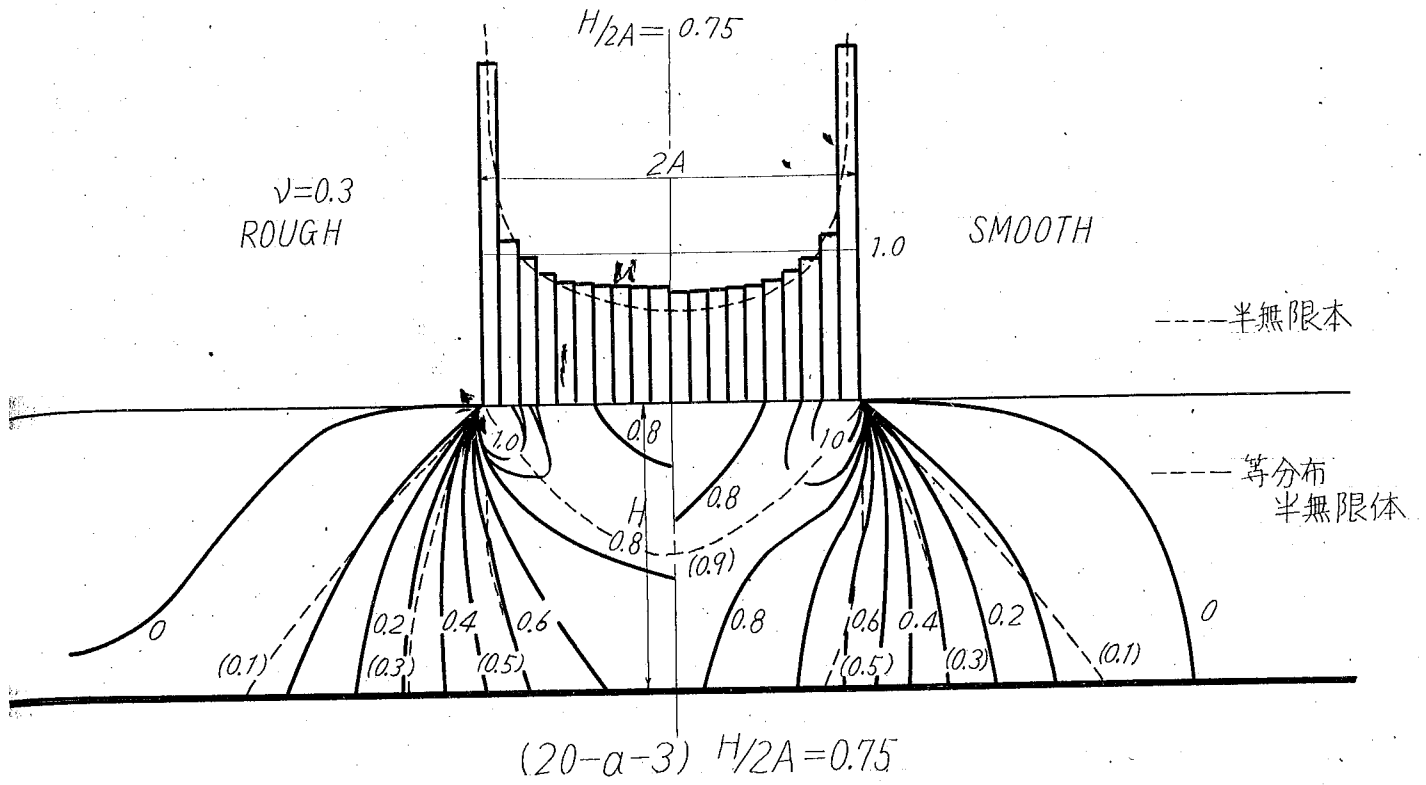
$$H/2A=0.25$$

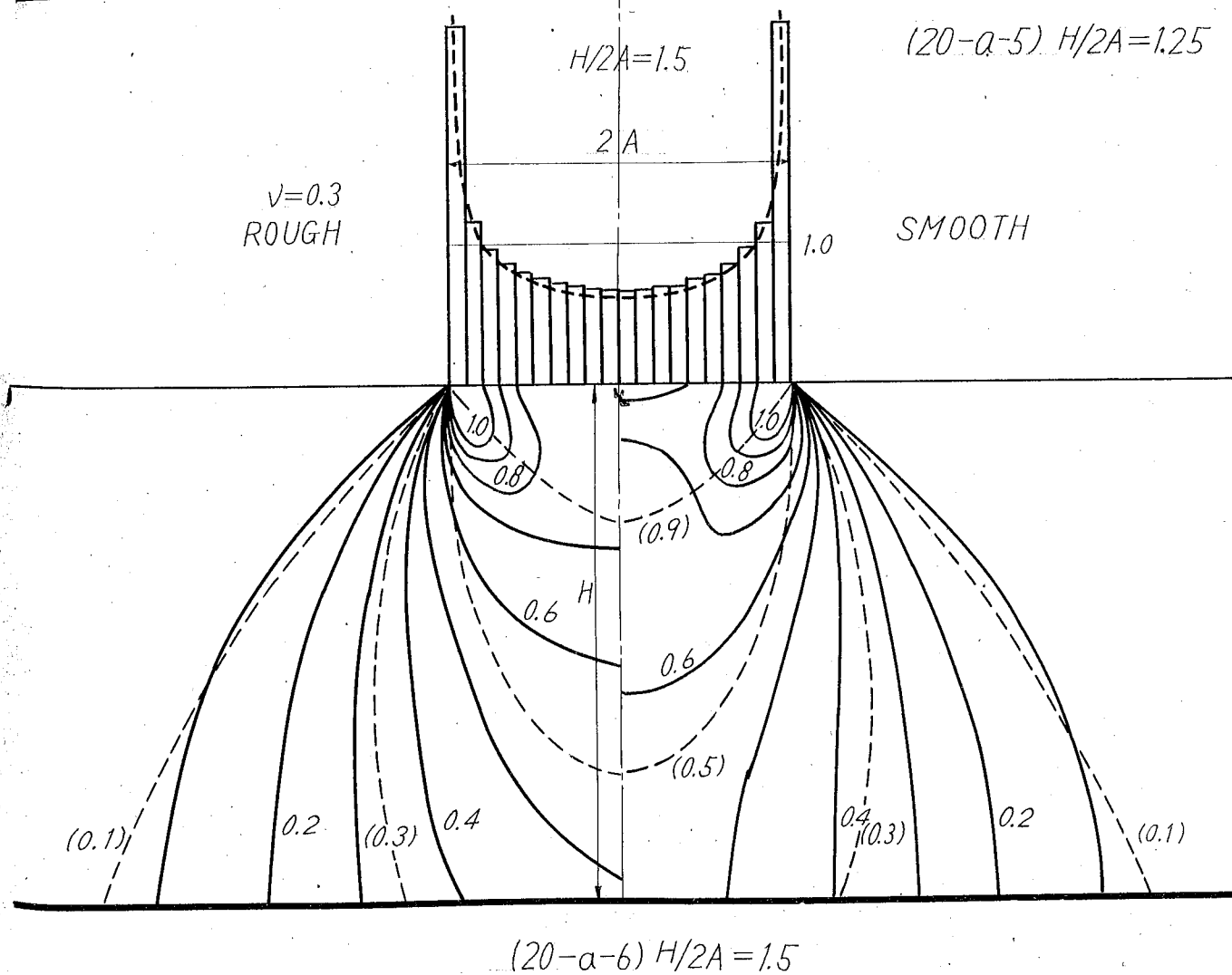
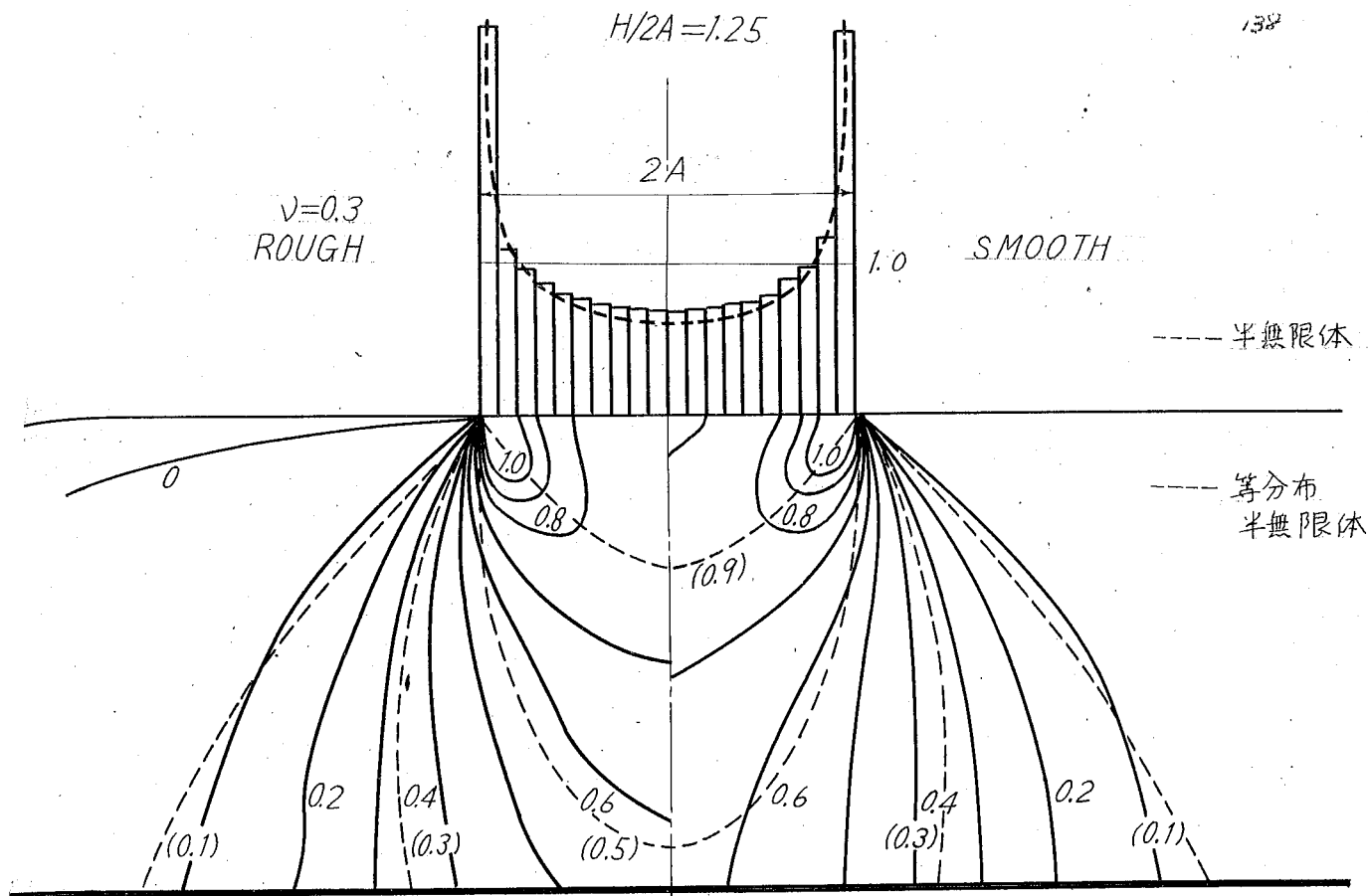


(20-a-1)  $H/2A=0.25$



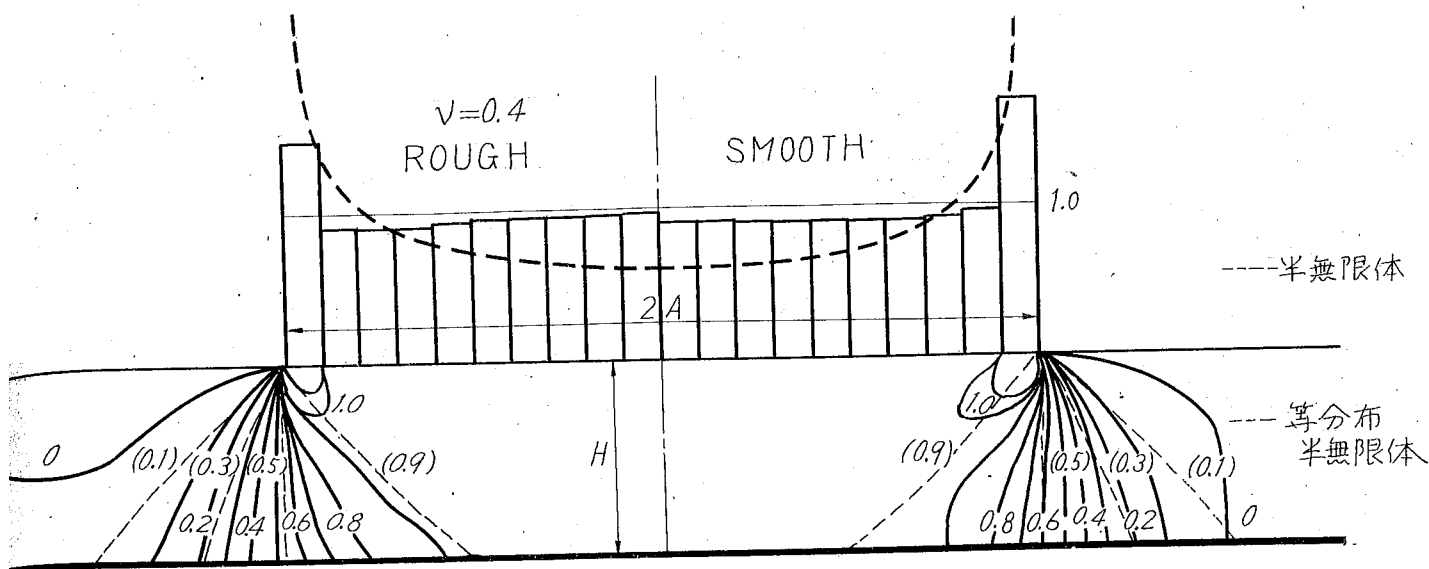
(20-a-2)  $H/2A=0.5$





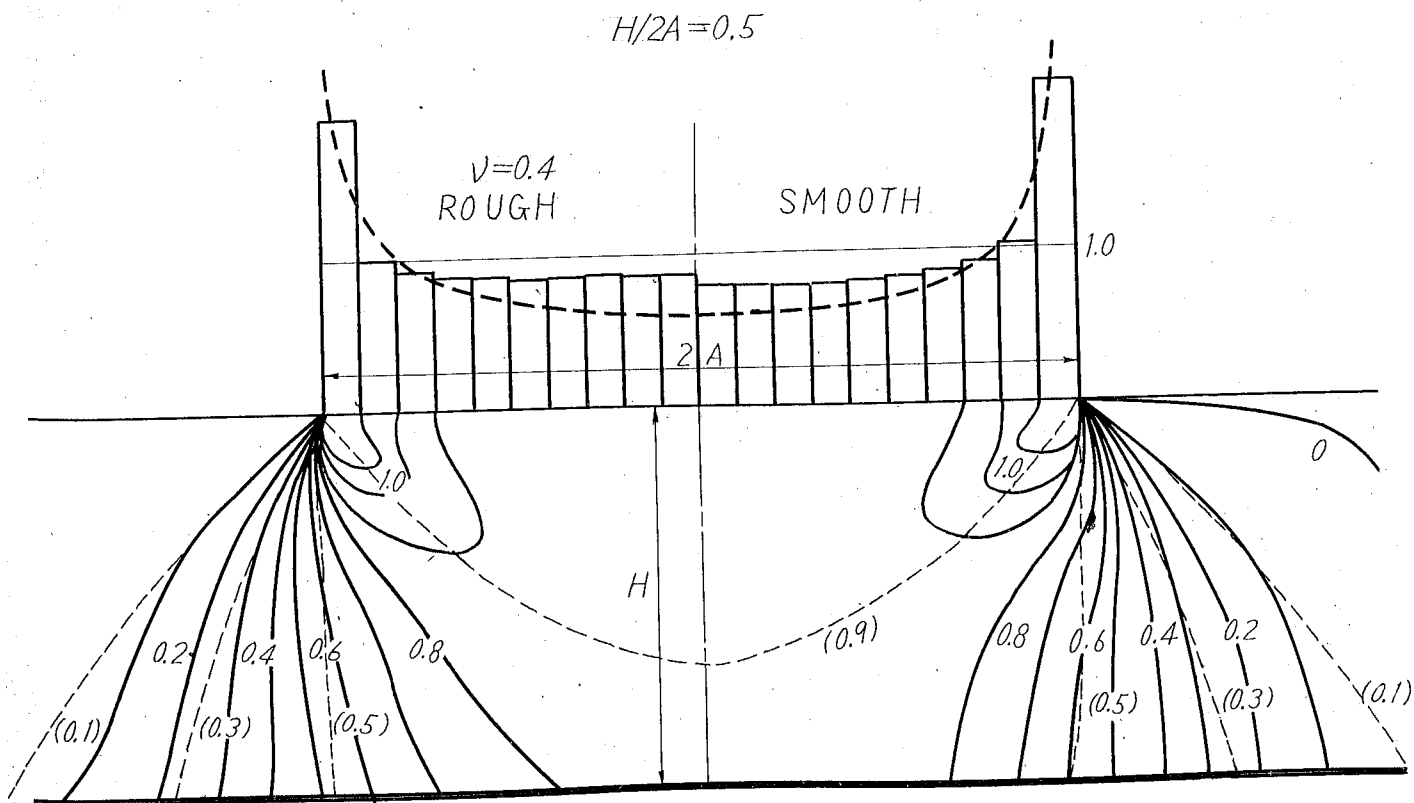
(20-b)  $\nu=0.4$  のとき

$$H/2A = 0.25$$



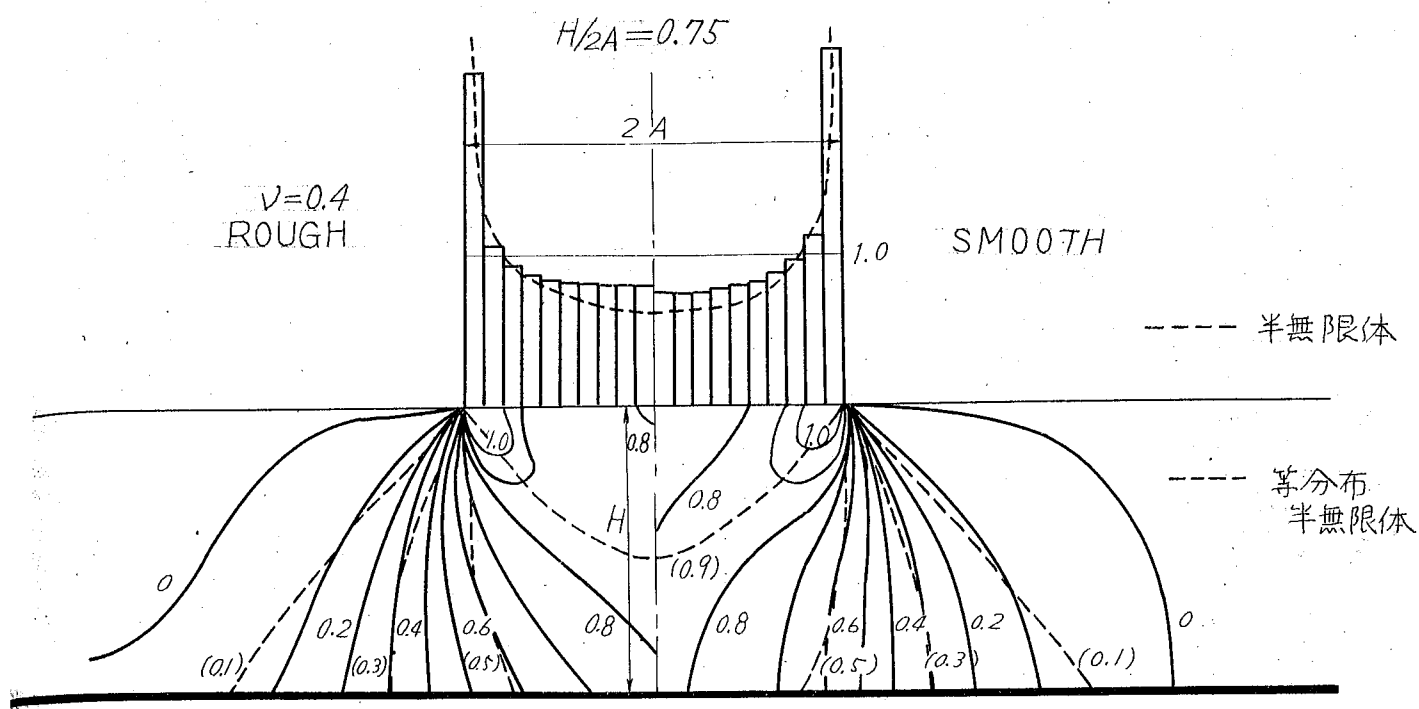
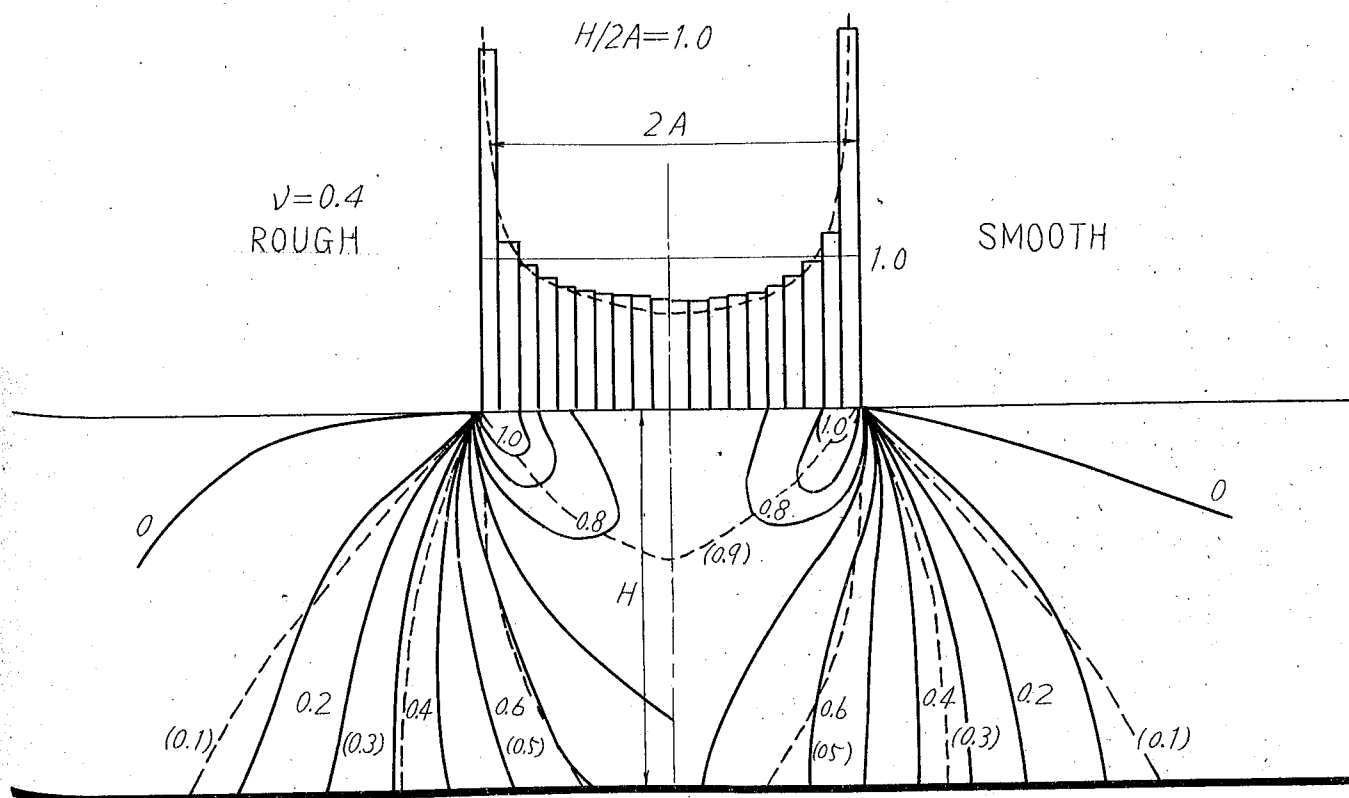
(20-b-1)

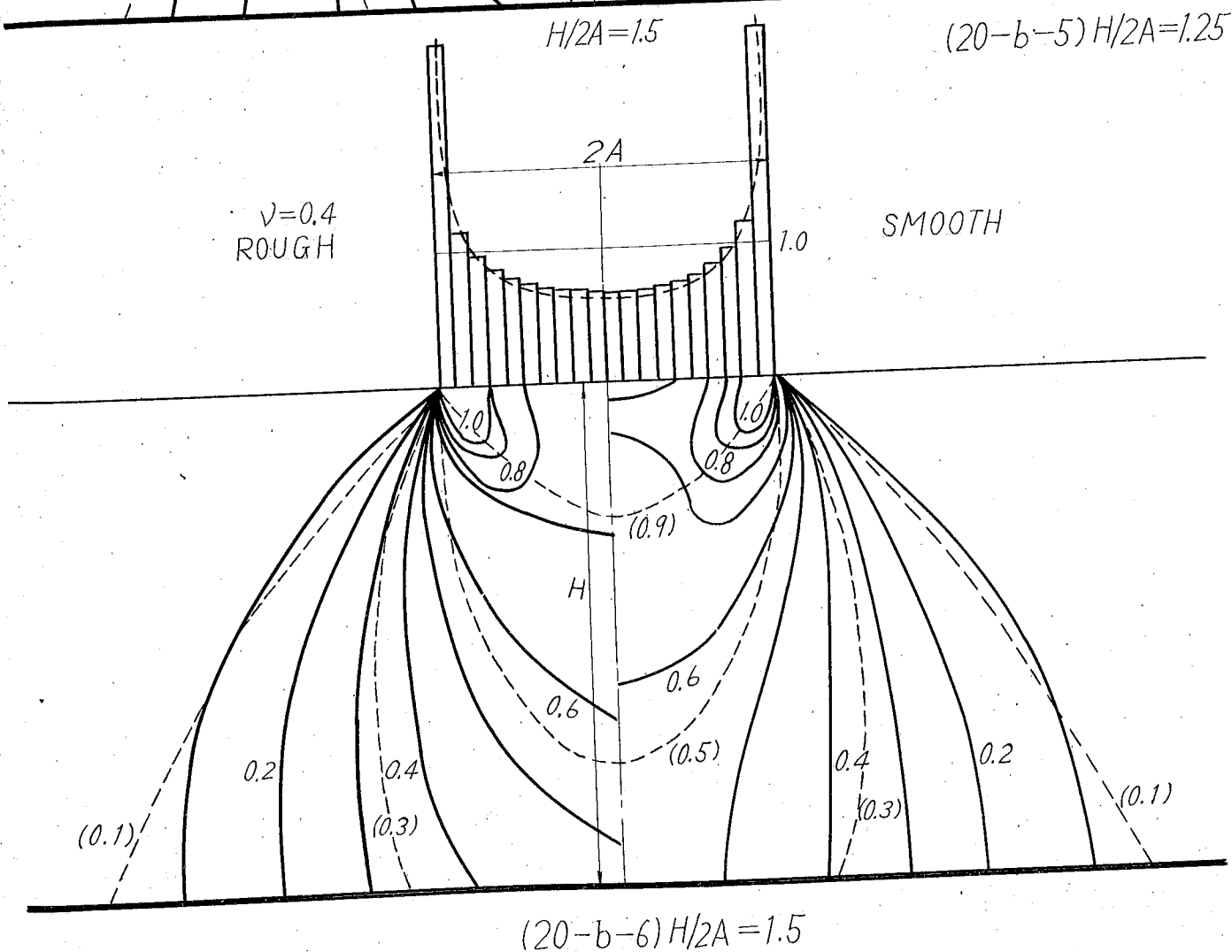
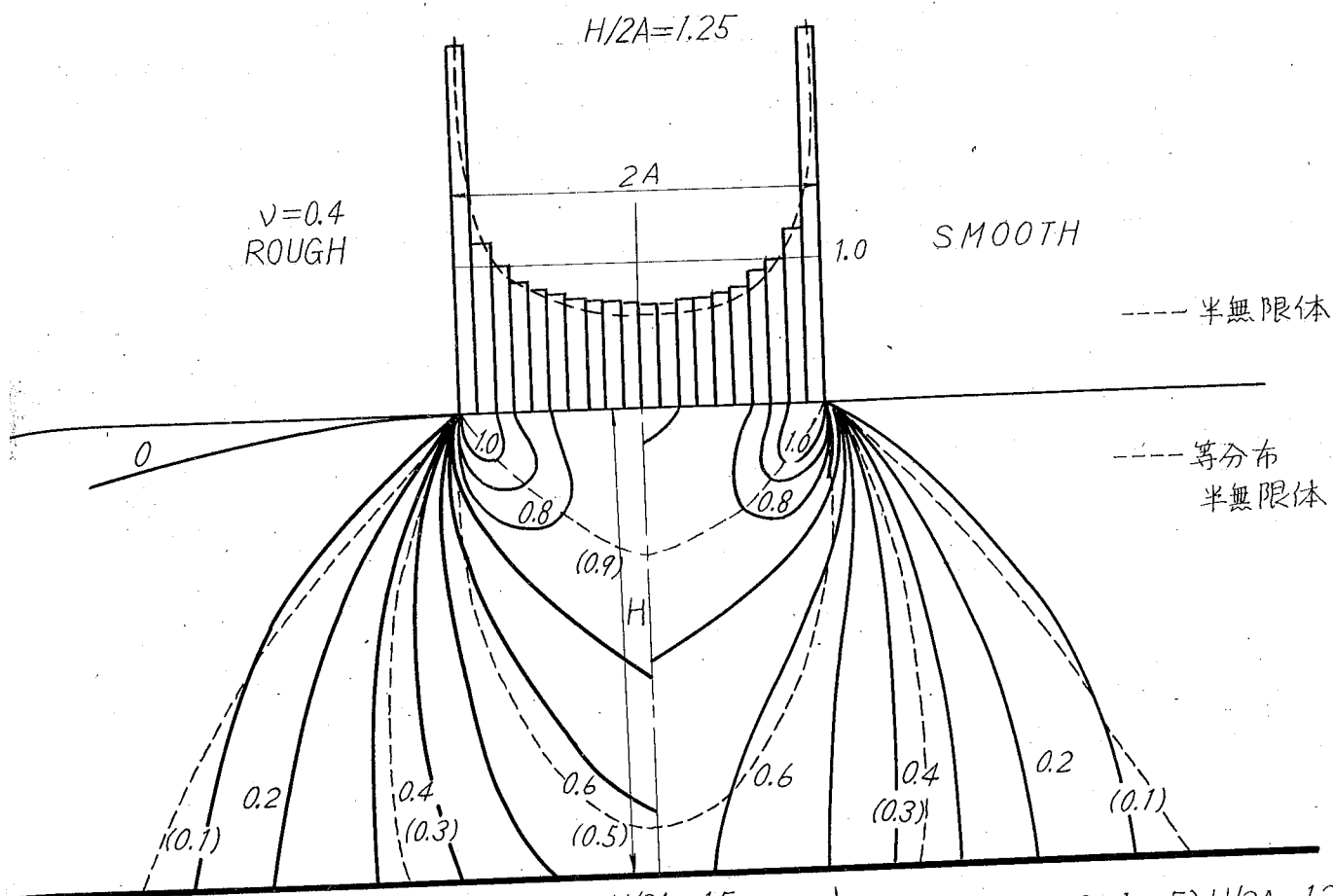
$$H/2A = 0.25$$



(20-b-2)

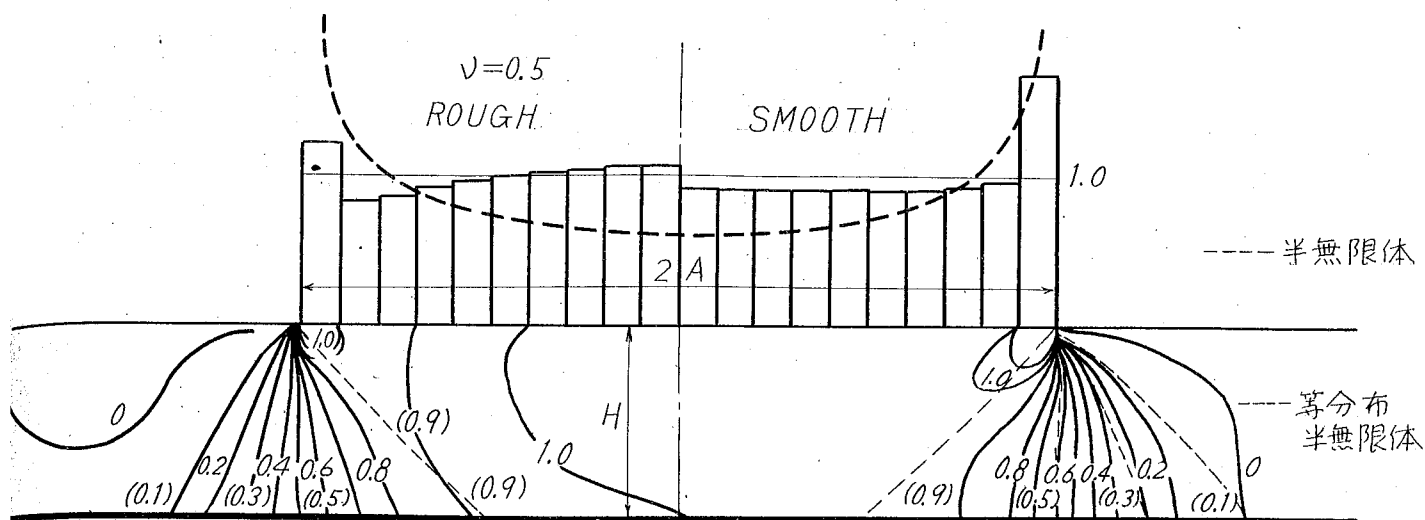
$$H/2A = 0.5$$

(20-b-3)  $H/2A = 0.75$ (20-b-4)  $H/2A = 1.0$

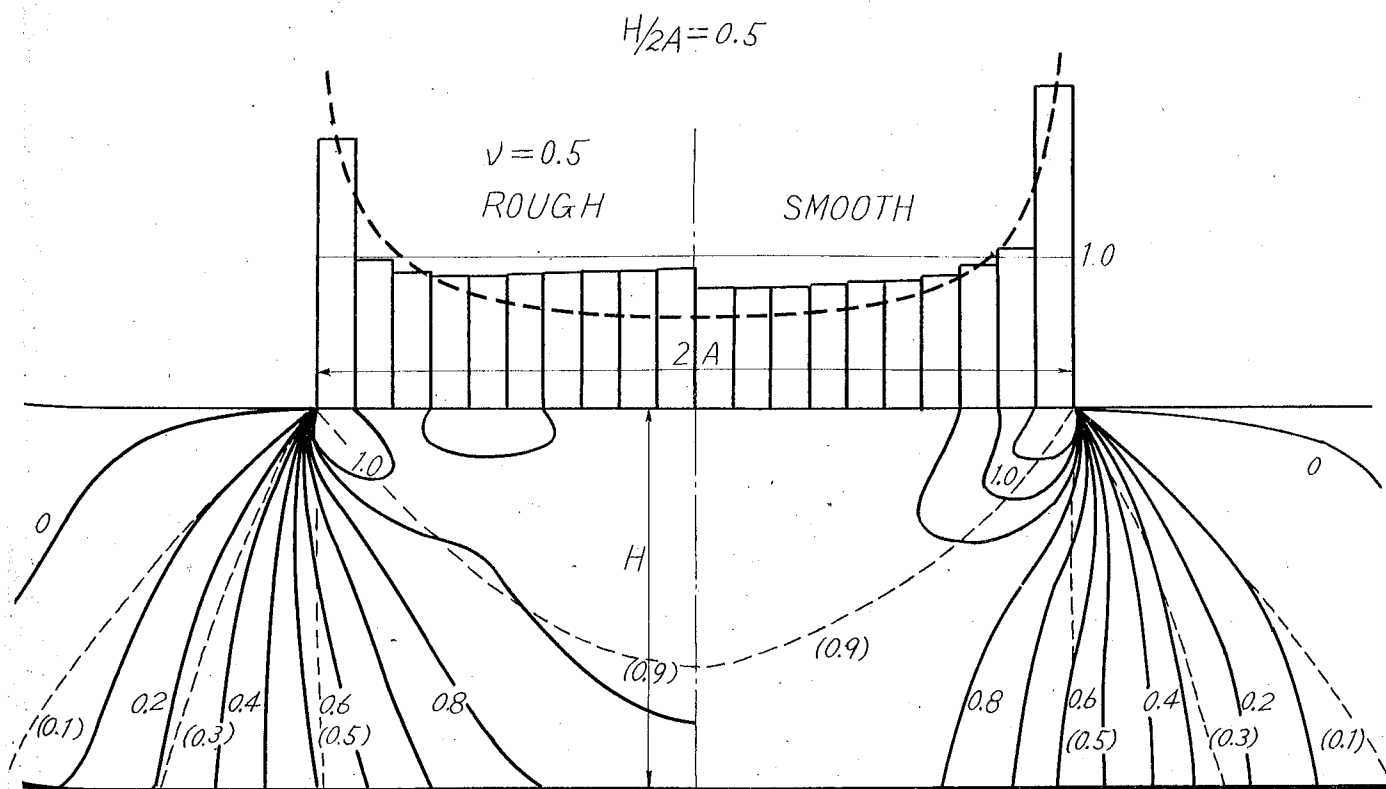


$(20-c) \nu = 0.5$  のとき

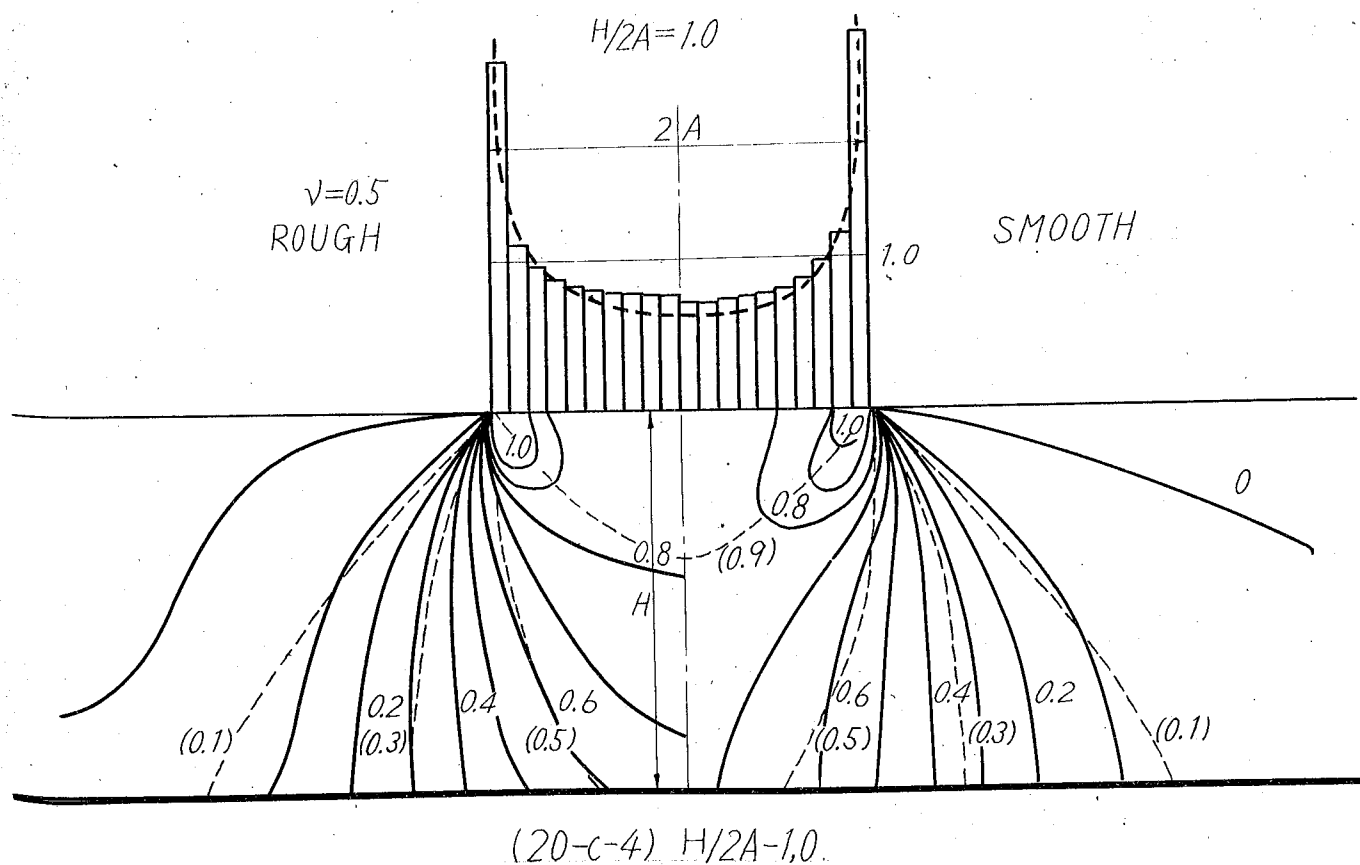
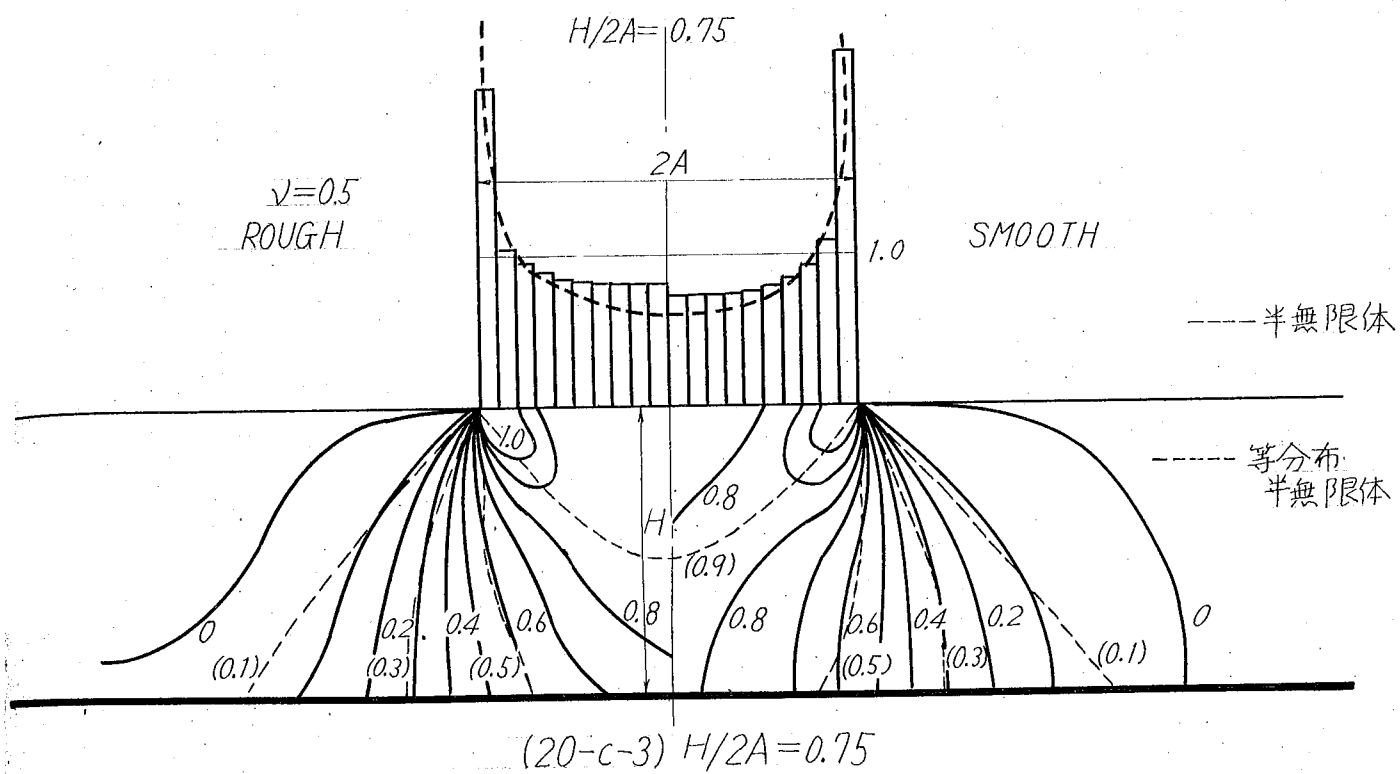
$$H/2A = 0.25$$

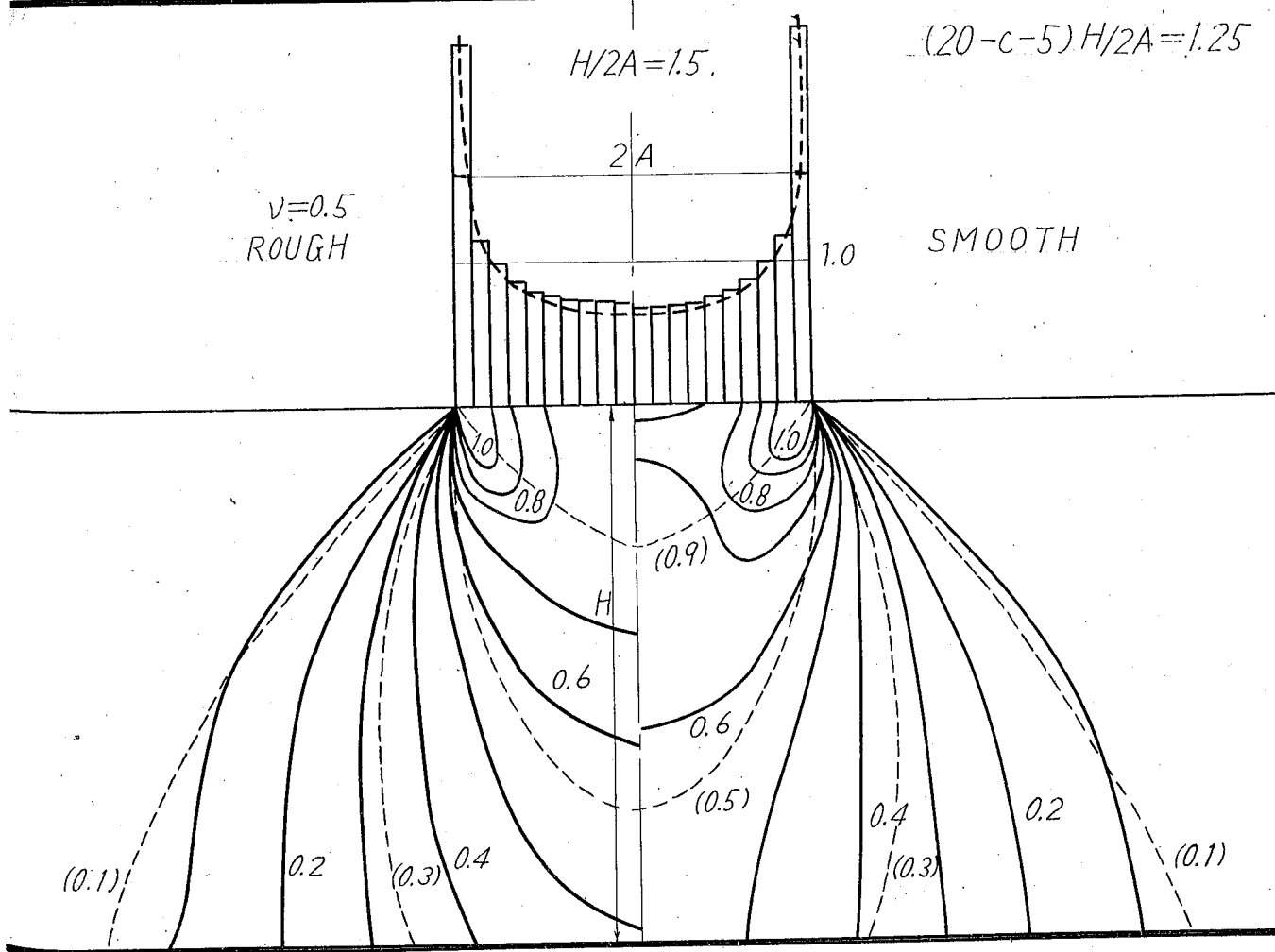
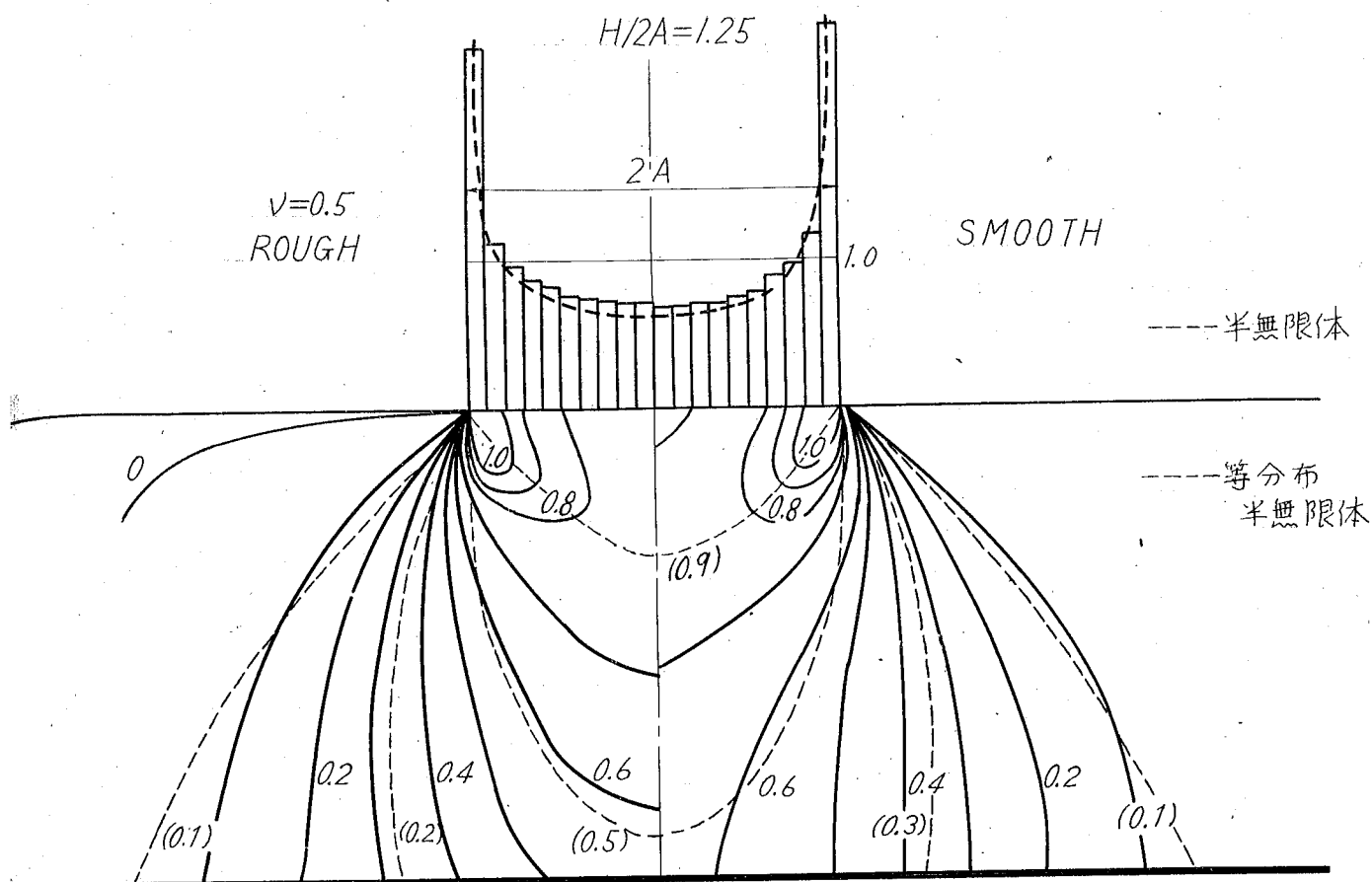


$$(20-c-1) H/2A = 0.25$$



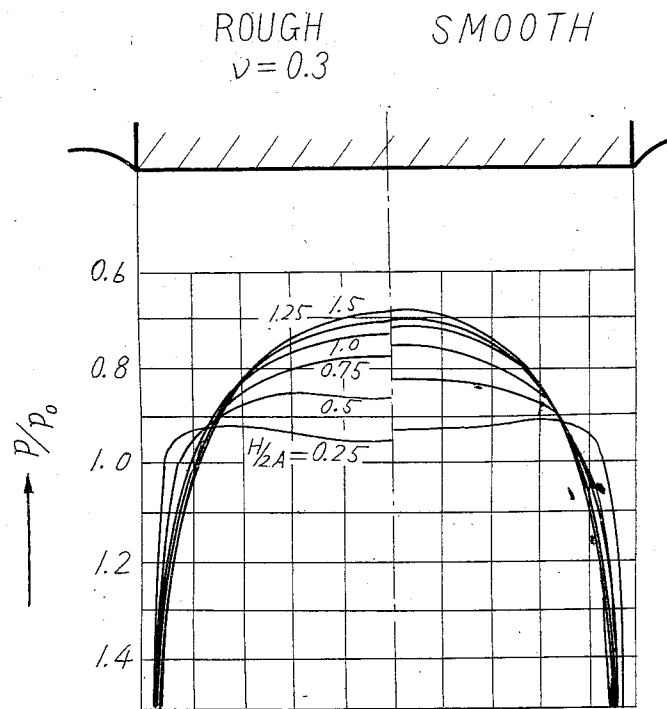
$$(20-c-2) H/2A = 0.5$$



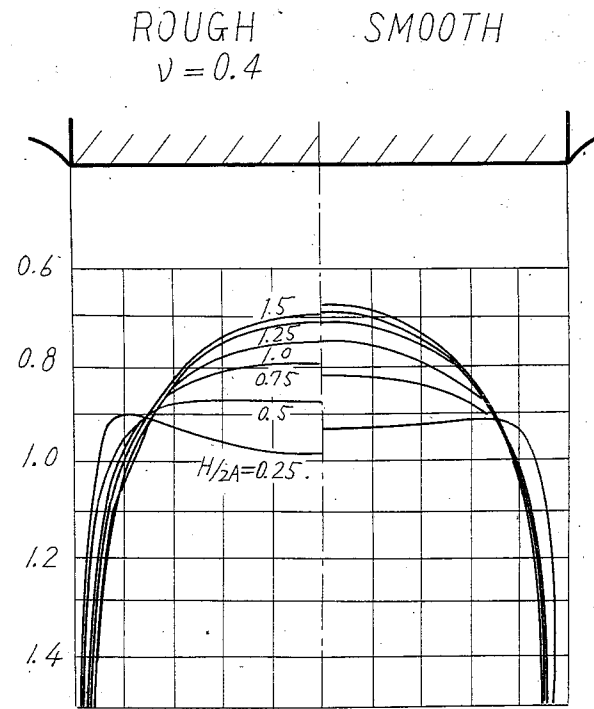


(20-c-6)  $H/2A=1.5$

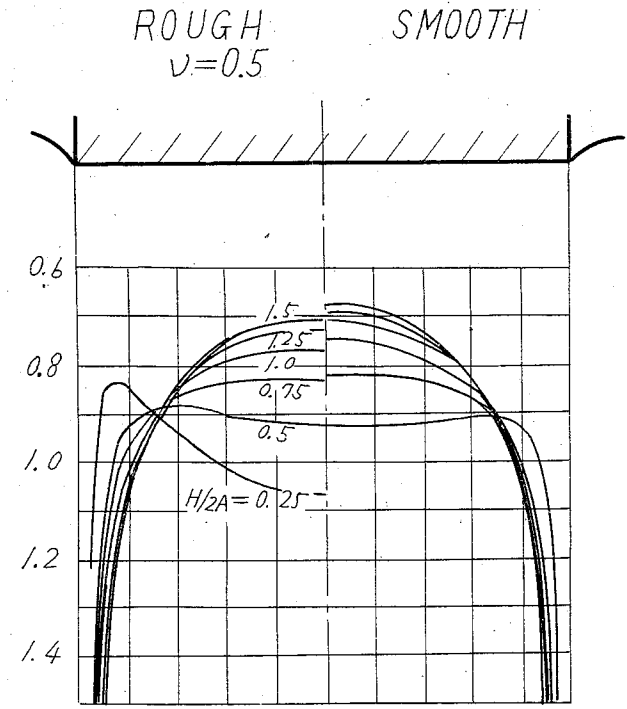
図-21 ポアソン比と接触底力分布形との関係



(21-a)  $\nu = 0.3$

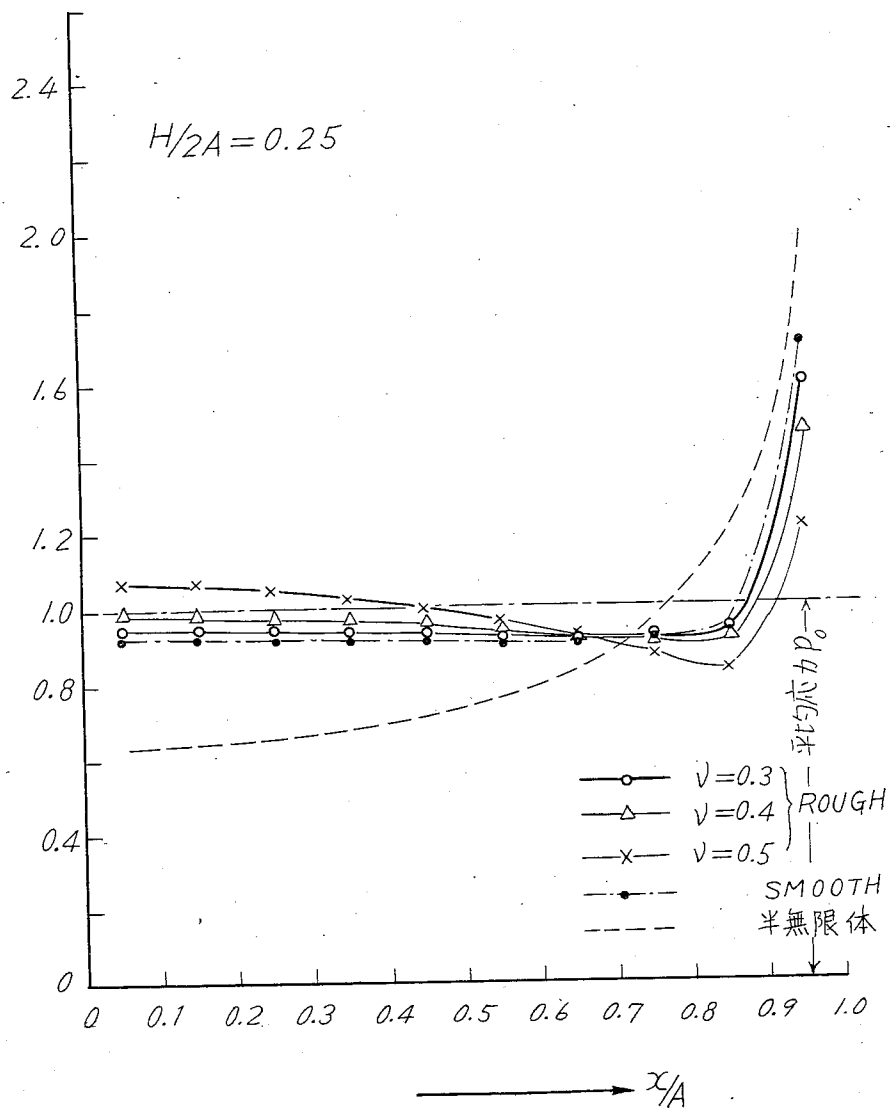


(21-b)  $\nu = 0.4$

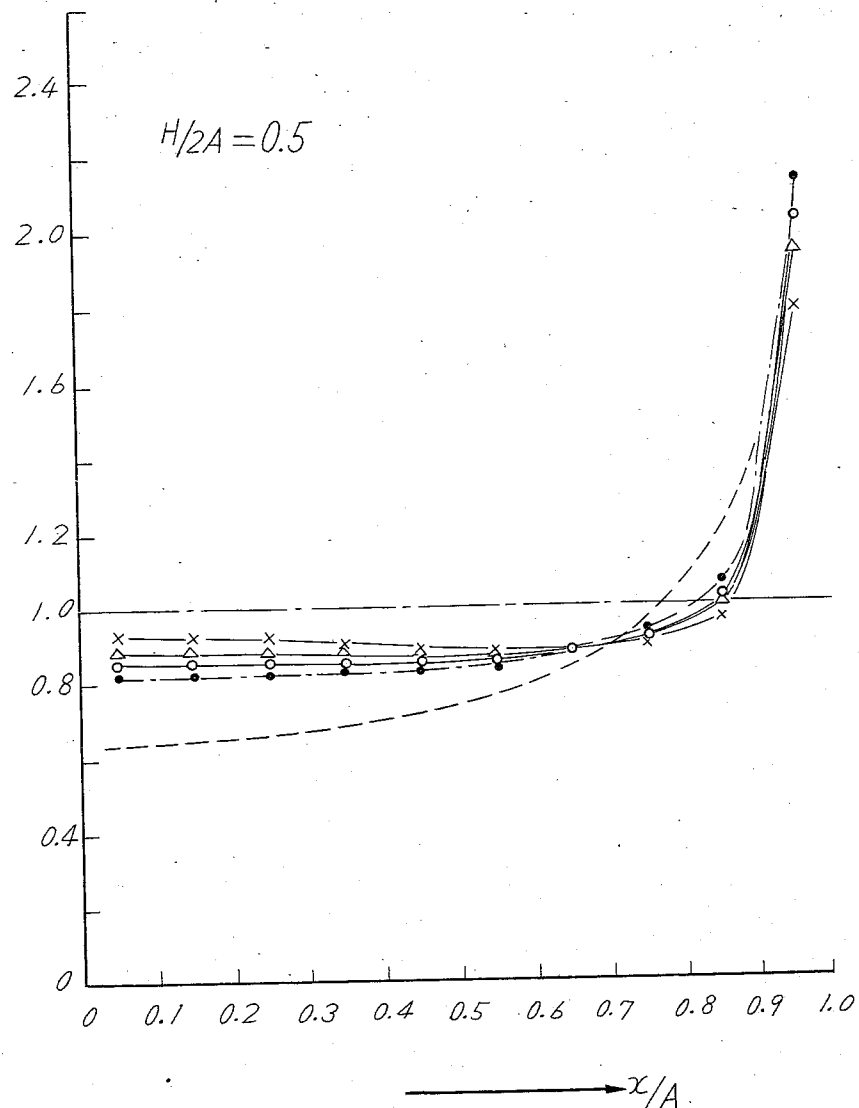


(21-c)  $\nu = 0.5$

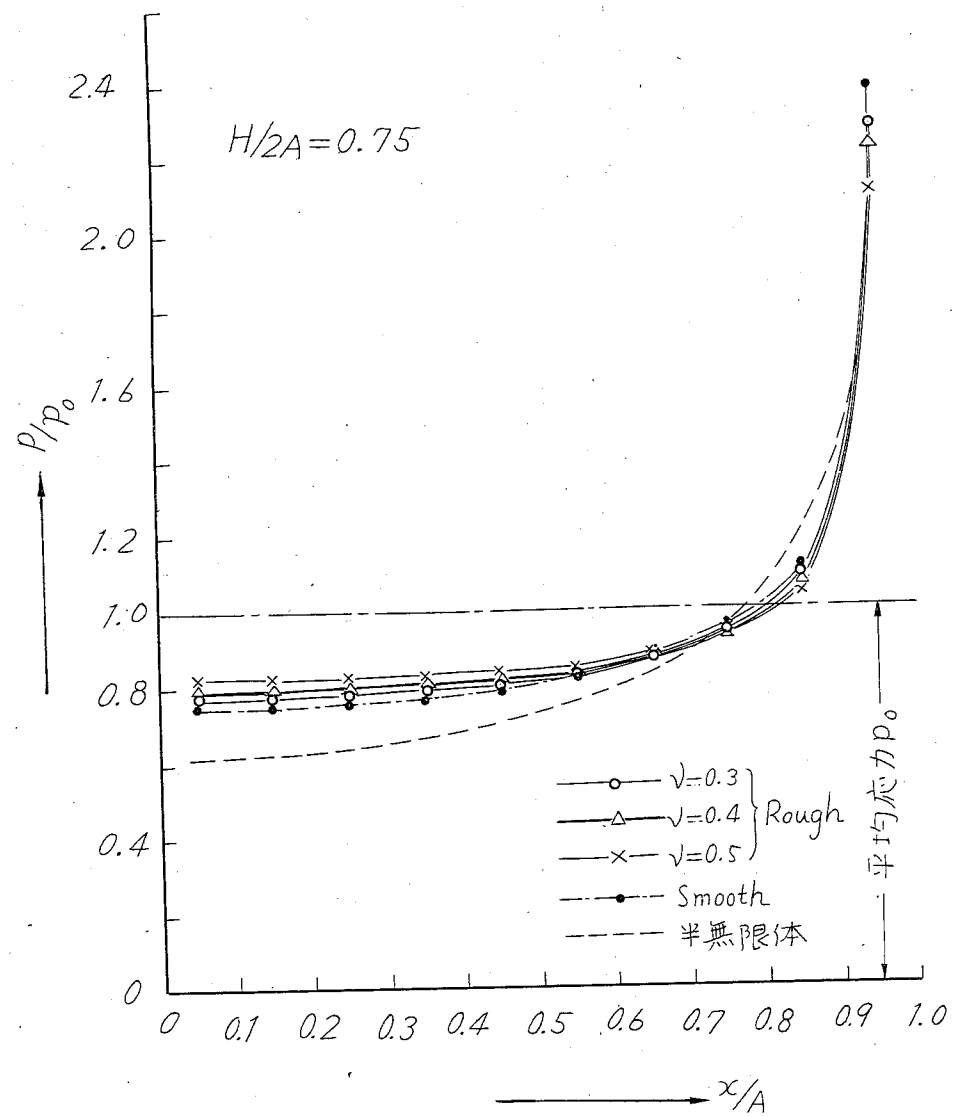
图-22 深さ/巾比と接触応力分布形状の関係



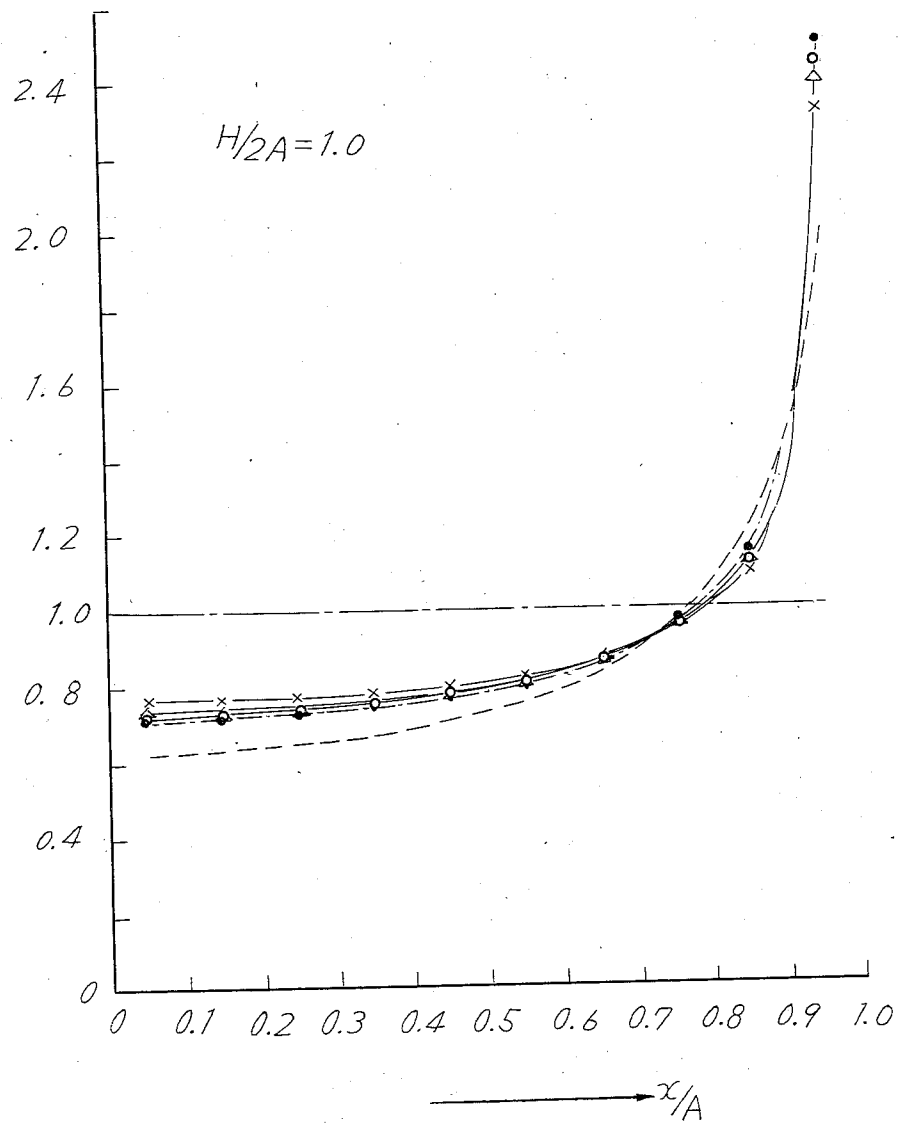
(22-a)  $H/2A = 0.25$



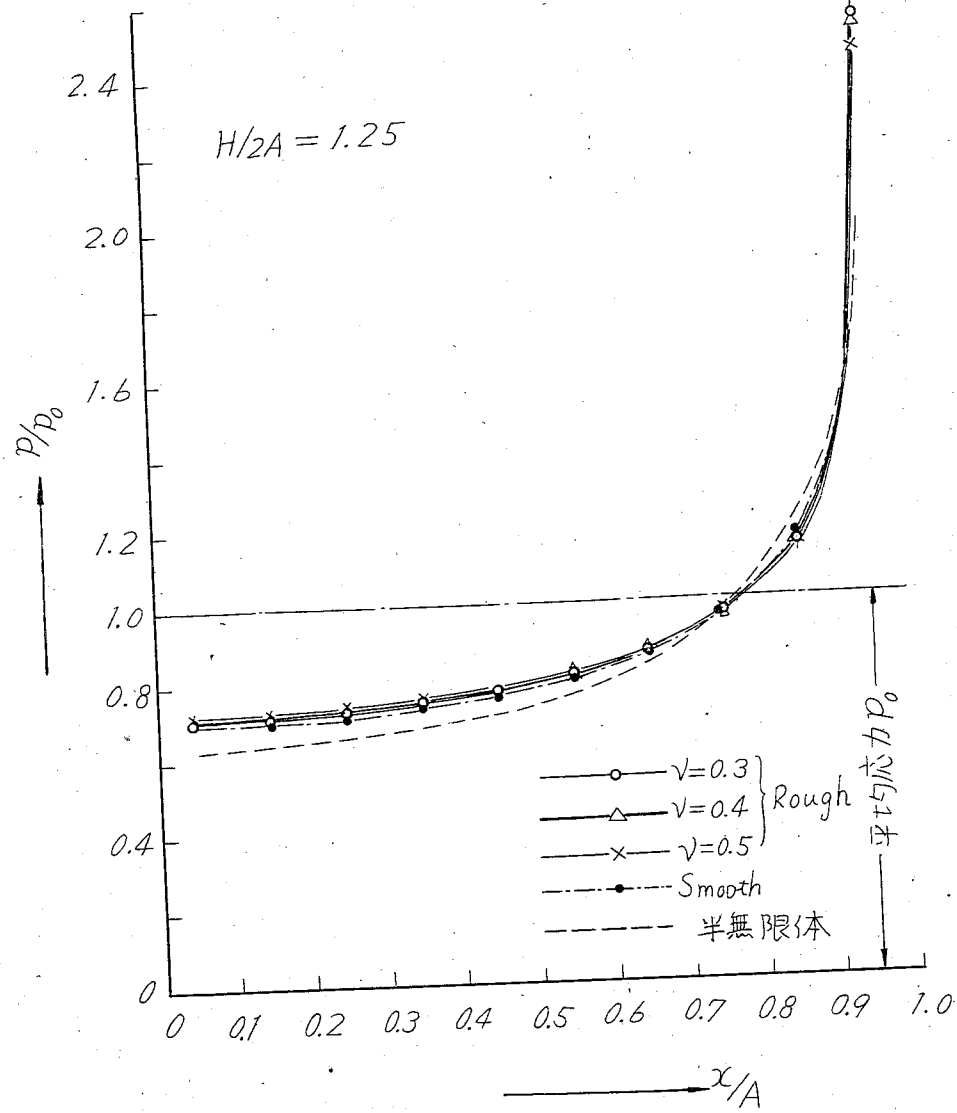
(22-b)  $H/2A = 0.5$



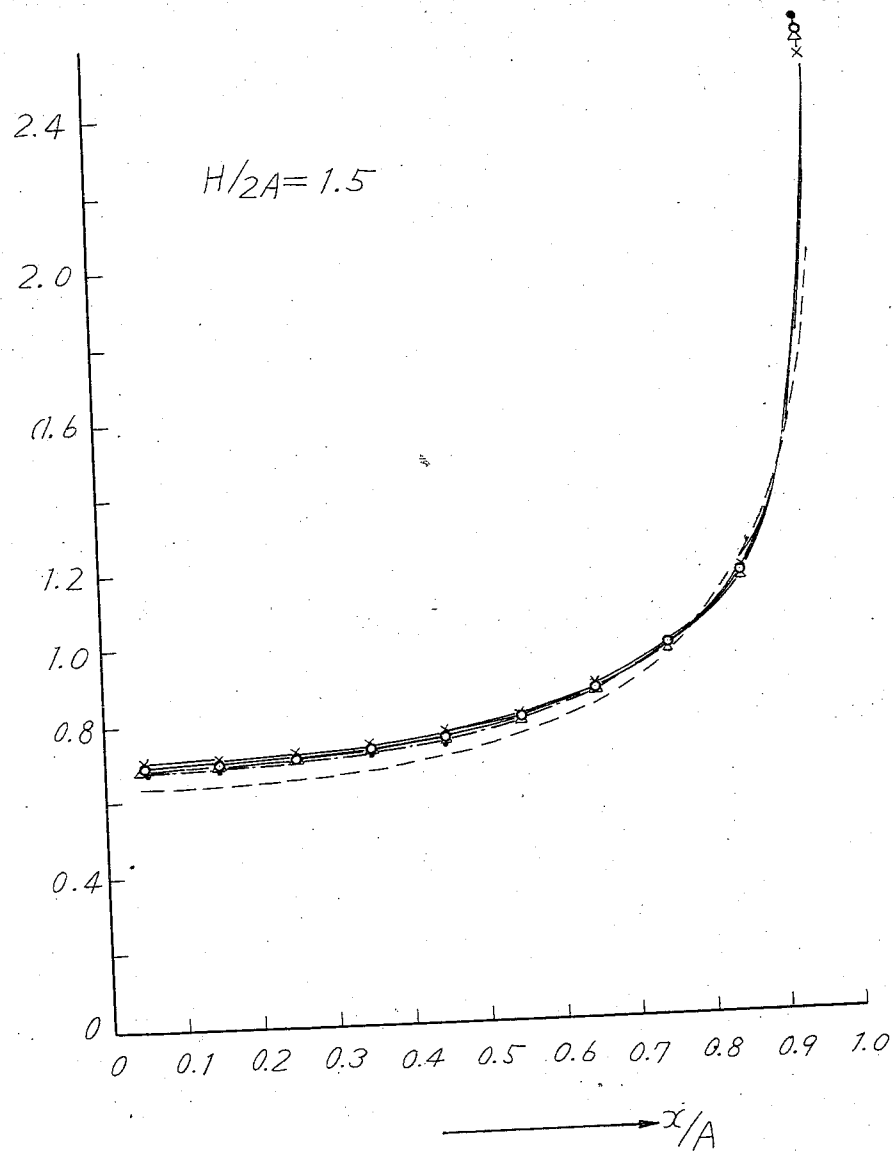
(22-c)  $H/2A=0.75$



(22-d)  $H/2A=1.0$



(22-e)  $H/2A = 1.25$



(22-f)  $H/2A = 1.5$

## 第 V 章 くぼみを有する地盤の載荷問題

### 第 1 節 概 論

境界が直線でない半無限板問題の研究は、歯車や各種の切欠きなどの実用上の問題に関連してかなりの発展を見せている。それらの研究はすべて等角写像を利用したものであって、複雑な境界形状を有する半無限板を、適当な写像関数によって複素面上の半平面に写し、この半平面について解析を行なうという手法をとっている。理論的には、いかなる境界形状であっても近似度の良い写像関数を見出し得れば、解析的な解が得られるということが知られているが、実際問題への応用には数学的困難さがともない簡単には解決できない問題が残るのである。したがって第 I 章で触れたこの種の問題に関する研究においても、境界形状が三角関数あるいは周期的な関数で表わされるような比較的簡単な問題が取り上げられている。

これら写像による方法は、とくに半無限体の境界の一部にくぼみがあってそのくぼみ内に外力が作用するような場合には適用することが不可能であるように思われる。

道路の表面に何らかの原因でくぼみができると、きわめて短期間にその機能を失いかちであり、この傾向はアスファルト舗装の亀裂発生や砂利道の波状変形などにおいて経験的

に認められている。本章ではその原因を究明するために、表面の一部に浅いだけでなくほみのある二次元弾性体内の応力分布を求める数値解法を提案した。

## 第2節 解 析

2-1 二次元半無限体の解 直線境界を有する二次元半無限体の解は今さら取り上げる迄もないが、第IV章で基本解

を求めたのでこれに基づいて鉛直および水平帯荷重に対する解を求めておく。一樣半無限体の場合には関数(4.7)は座標軸を(図-25)のごとくとると

$$G = (C + D\xi)e^{-\beta_1 \xi} \quad (5.1)$$

でなければならぬ。

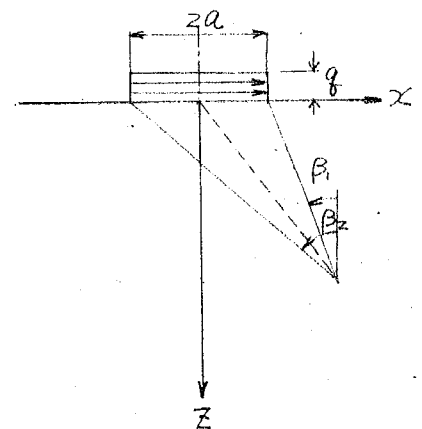
(1) 水平帯荷重

表面の条件は

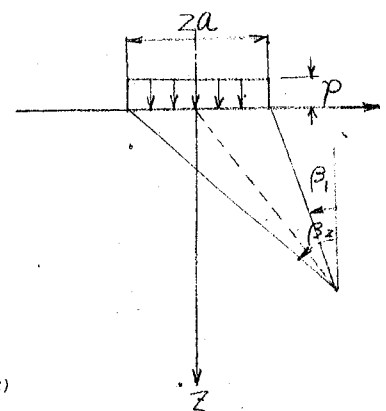
$$z=0 \text{ で } \sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = \begin{cases} -q & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (5.2)$$

で与えられるから、(4.11)より

$$C = 0, \quad D = 2iq \frac{\sin \alpha \beta}{\xi^2}$$



(a) 水平帯荷重



(b) 鉛直帯荷重

(図-25) 二次元半無限体

よって応力の表示式は

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{ig}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi| (1-|\xi|Z) e^{-|\xi|Z}}{\xi^2} e^{-i\xi x} \sin a\xi d\xi = -Z \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\xi Z-2)}{\xi} e^{-\xi Z} \sin a\xi \sin \xi x d\xi \\
 &= Z \frac{g}{\pi} \left[ \frac{2aZ^2x}{\{Z^2+(a-x)^2\} \{Z^2+(a+x)^2\}} - \frac{1}{Z} \log \left\{ \frac{Z^2+(a+x)^2}{Z^2+(a-x)^2} \right\} \right] \\
 &= \frac{g}{\pi} \left[ \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi - \log \frac{\cos^2 \beta_1}{\cos^2 \beta_2} \right] \\
 \sigma_z &= -\frac{ig}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z e^{-|\xi|Z} \sin a\xi e^{-i\xi x} d\xi = -Z \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} Z e^{-\xi Z} \sin a\xi \sin \xi x d\xi \\
 &= -4 \frac{ag}{\pi} \left[ \frac{Zx}{\{Z^2+(a-x)^2\} \{Z^2+(a+x)^2\}} \right] \\
 &= -\frac{g}{\pi} \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi \\
 \tau_{xz} &= \frac{ig}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi (1-|\xi|Z) e^{-|\xi|Z} \frac{\sin a\xi}{\xi^2} e^{-i\xi x} d\xi = -Z \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} (1-\xi Z) e^{-\xi Z} \frac{\sin a\xi}{\xi} \cos \xi x d\xi \\
 &= -Z \frac{g}{\pi} \left[ \frac{1}{Z} \tan^{-1} \frac{2aZ}{Z^2+x^2-a^2} - a \frac{(Z^2+a^2-x^2)Z}{\{Z^2+(a-x)^2\} \{Z^2+(a+x)^2\}} \right] \\
 &= -\frac{g}{\pi} \left[ -\varepsilon - \sin 2\varepsilon \cos 2\varphi \right]
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

で与えられる。ただし

$$2\varepsilon = \beta_1 + \beta_2, \quad 2\varphi = \beta_1 - \beta_2 \tag{5.4}$$

## (ii) 鉛直帯荷重

表面における条件は

$$Z=0, \tau \quad \sigma_z = \begin{cases} -p & ; |x| < a \\ 0 & ; |x| > a \end{cases}, \quad \tau_{xz}=0 \tag{5.5}$$

よって係数 C, D は

$$C = \frac{2p_0}{\xi^3} \sin a\xi, \quad D = \frac{2p_0}{\xi^3} \sin a\xi$$

となるから，応力は次のごとくに与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^a \frac{(1-|\xi|Z)}{\xi} e^{-|\xi|Z} \sin a\xi e^{-i\xi x} d\xi = -\frac{2P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1-\xi Z}{\xi} e^{-\xi Z} \sin a\xi \cos \xi x d\xi \\ &= -\frac{P}{\pi} \left[ \frac{1}{Z} \tan^{-1} \frac{2aZ}{Z^2+x^2-a^2} - a \frac{(Z^2+a^2-x^2)Z}{\{Z^2+(a-x)^2\}\{Z^2+(a+x)^2\}} \right] \\ &= -\frac{P}{\pi} [2\varepsilon - \sin 2\varepsilon \cos 2\varphi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+|\xi|Z)}{\xi} e^{-|\xi|Z} \sin a\xi e^{-i\xi x} d\xi = -\frac{2P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1+\xi Z}{\xi} e^{-\xi Z} \sin a\xi \cos \xi x d\xi \\ &= -\frac{P}{\pi} \left[ \frac{1}{Z} \tan^{-1} \frac{2aZ}{Z^2+x^2-a^2} + a \frac{(Z^2+a^2-x^2)Z}{\{Z^2+(a-x)^2\}\{Z^2+(a+x)^2\}} \right] \quad (5.6) \\ &= -\frac{P}{\pi} [2\varepsilon + \sin 2\varepsilon \cos 2\varphi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -i \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z e^{-|\xi|Z} \sin a\xi e^{-i\xi x} d\xi = -\frac{2Z}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi Z} \sin a\xi \sin \xi x d\xi \\ &= -4 \frac{aP}{\pi} \left[ \frac{Z^2 x}{\{Z^2+(a-x)^2\}\{Z^2+(a+x)^2\}} \right] \\ &= -\frac{P}{\pi} \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi\end{aligned}$$

$z-z < 0$  を有する二次元半無限体の解

半無限弾性体

のくぼみを無視して仮想水平面

のくぼみで区切られる部分に未

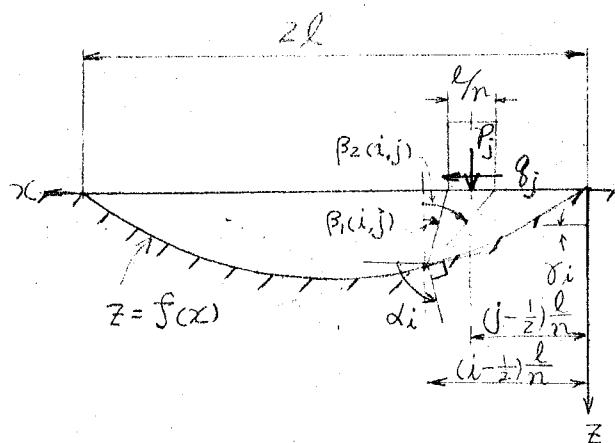
知の表面力  $P_j$ ,  $q_j$  を想定する

(図-26)。これらの力による半無

限弾性体内の応力解は(5.3)お

よび(5.5)によって簡単に求め

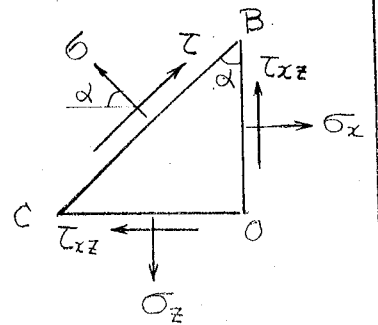
られる。地表面に対して任意の



(図-26) くぼみ面と仮想面上に作用する荷重

傾きをなす平面上の応力成分は(図-27)に示すように

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_z \sin^2 \alpha + \sigma_x \cos^2 \alpha - 2\tau_{xz} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau &= (\sigma_z - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\} (5.7)$$



で与えられるから(図-26)の点Aにおける  
垂直応力とせん断応力は、(5.3)

と(5.6)とを(5.7)に入れることに

(図-27) 接線応力と  
法線応力

よって

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2n} \left[ p_j \left\{ 2\epsilon_{ij} - \rho \sin 2\epsilon_{ij} \cos 2(4\epsilon_{ij} + \alpha_i) \right\} \right. \\ &\quad \left. + q_j \left\{ 2\epsilon_{ij} \rho \sin \alpha_i + 2 \cos^2 \alpha_i \log \frac{\cos \beta_1(i,j)}{\cos \beta_2(i,j)} - \rho \sin 2\epsilon_{ij} \sin 2(4\epsilon_{ij} + \alpha_i) \right\} \right] \\ \tau_i &= -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2n} \left[ p_j \left\{ \rho \sin 2\epsilon_{ij} \sin 2(4\epsilon_{ij} + \alpha_i) \right\} \right. \\ &\quad \left. + q_j \left\{ 2\epsilon_{ij} \cos 2\alpha_i + \rho \sin 2\alpha_i \cdot \log \frac{\cos \beta_1(i,j)}{\cos \beta_2(i,j)} - \rho \sin 2\epsilon_{ij} \cos 2(4\epsilon_{ij} + \alpha_i) \right\} \right] \end{aligned} \right\} (5.8)$$

$T_i = T_i'$

$$\left. \begin{aligned} 2\epsilon_{ij} &= \beta_2(i,j) - \beta_1(i,j), \quad 24_{ij} = \beta_2(i,j) + \beta_1(i,j), \quad \alpha_i = \frac{\pi}{2} + \delta_i \\ \beta_1(i,j) &= \tan^{-1} \left( \frac{i-j-\frac{1}{2}}{f_i} \cdot \frac{l}{n} \right), \quad \beta_2(i,j) = \tan^{-1} \left( \frac{i-j+\frac{1}{2}}{f_i} \cdot \frac{l}{n} \right) \\ f_i &= f \left\{ \left( i - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{n} \right\}, \quad \delta_i = \tan^{-1} \left\{ \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=(i-\frac{1}{2})\frac{l}{n}} \right\} \end{aligned} \right\} (5.9)$$

くほみ面上において与えられた垂直応力およびせん断応力がそれぞれ  $G(x)$ ,  $H(x)$  なる関数で表わされたとすると

$$\sigma_i = G \left\{ \left( i - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{n} \right\}, \quad \tau_i = H \left\{ \left( i - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{n} \right\} \quad (5.10)$$

によって未知力  $p_j, q_j$  に関する  $4n$  個の一次方程式が得られる。

### 第3節 解析結果

本節では、くほみ形および荷重が次の形で示されたときの地盤内の応力分布を計算した。

すなわちくほみ面形としては二種の放物線

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{3}{2500} x(100-x) \\ (2) \quad f(x) &= \frac{1}{250} x(100-x) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{3}{2500} x(100-x) \\ (2) \quad f(x) &= \frac{1}{250} x(100-x) \end{aligned}} \right\} (5.11)$$

また外力としては二種の分布

$$\begin{aligned} (i) \quad G(x) &= -\exp \left\{ -\frac{(x-50)^2}{50} \right\} ; \quad H(x) = 0 \\ (ii) \quad G(x) &= 0 ; \quad H(x) = -\exp \left\{ -\frac{(x-50)^2}{50} \right\} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (i) \quad G(x) &= -\exp \left\{ -\frac{(x-50)^2}{50} \right\} ; \quad H(x) = 0 \\ (ii) \quad G(x) &= 0 ; \quad H(x) = -\exp \left\{ -\frac{(x-50)^2}{50} \right\} \end{aligned}} \right\} (5.12)$$

を考えた。このような形を選んだ理由は特にはないが、浅くならかなくほみを表わす関数として放物線が簡単であること、またこのような指数関数は中央部で最大値をとりその両側で値が急激に減少するために、等分布荷重に近いことなどを概観としてゐる。

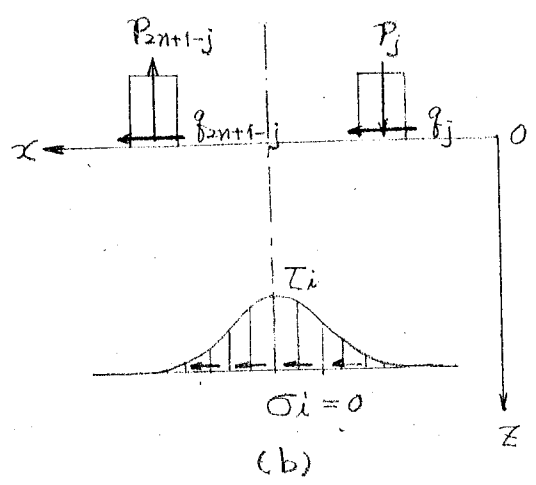
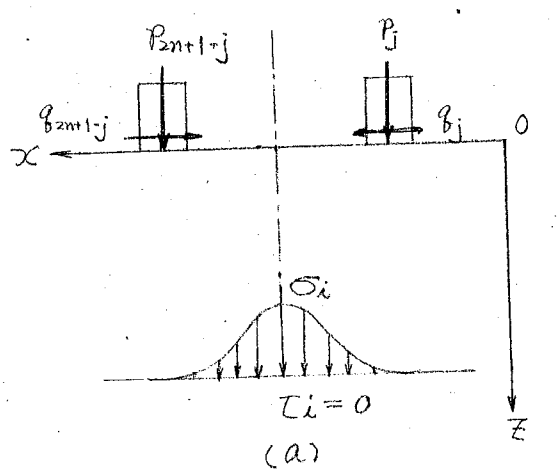
ここに示したくほみ形および外力としての垂直応力は、中

心線すなわち  $x=50$  に関して対称である。また外力としての接線応力は(ii)の場合において方向は非対称であるが大きさは対称である。したがっていずれの場合にも、未知力  $p_j, q_j$  の大きさは  $x=50$  の直線に関して対称であることが結論される。つまり(図-26)によれば

$$|p_j| = |p_{2n+1-j}|, \quad |q_j| = |q_{2n+1-j}|$$

である。

次にその方向について考える。荷重が(i)の分布形を与えられるときには、(図-28)に示すごとく表面では鉛直力  $p_j$  と  $p_{2n+1-j}$  とは同じ向き、水平力  $q_j$  と  $q_{2n+1-j}$  とは反対向きとなる。これに対し(ii)の場合には  $x=50$  を中心として鉛直力は反対向き、水平力は同じ向きとなる。したがって  $4n$  個の一次方程式が  $2n$  個に減り次のごとくに表わされる。すなわち  $m$  を  $1, 2$  とすれば



(図-28)内部応力と表面力との関係

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \left[ p_j (A_{ij} + \delta_+^m A_{i,2n+1-j}) + q_j (B_{ij} - \delta_+^m B_{i,2n+1-j}) \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad = -\frac{1}{2} (1 - \delta_+^m) \exp \left\{ -\frac{(\alpha - 50)^2}{50} \right\} \\
 & \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \left[ p_j (C_{ij} + \delta_+^m C_{i,2n+1-j}) + q_j (D_{ij} - \delta_+^m D_{i,2n+1-j}) \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad = -\frac{1}{2} (1 + \delta_+^m) \exp \left\{ -\frac{(\alpha - 50)^2}{50} \right\}
 \end{aligned} \right\} (5.13)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 A_{ij} &= 2\varepsilon_{ij} - \sin 2\varepsilon_{ij} \cos 2(4ij + \alpha_{ij}) \\
 B_{ij} &= 2\varepsilon_{ij} \sin 2\alpha_i + 2 \cos^2 \alpha_i \log \frac{\cos \beta_1(i, j)}{\cos \beta_2(i, j)} - \sin 2\varepsilon_{ij} \sin 2(4ij + \alpha_i) \\
 C_{ij} &= \sin \varepsilon_{ij} \sin 2(4ij + \alpha_i) \\
 D_{ij} &= 2\varepsilon_{ij} \cos 2\alpha_i + \sin 2\alpha_i \log \frac{\cos \beta_1(i, j)}{\cos \beta_2(i, j)} - \sin 2\varepsilon_{ij} \cos 2(4ij + \alpha_i) \\
 \delta_+^m &= \begin{cases} 1 & ; m=1 \\ -1 & ; m=2 \end{cases}
 \end{aligned} \right\} (5.14)$$

本章では計算機の容量ならびに計算精度を考慮して、分割区間数を 50 すなわち  $n$  を 25 とした。くぼみ面上では外力を (5.12) に示した連続関数で与えたが、方程式を解くときには (5.10) によって表わされているごとく分割した荷重の中心線における有限個の値としか考えられていない。換言すれば一次方程式 (5.13) の解として得られる表面力  $p_j, q_j$  はくぼみ面上の特定の点において境界条件を満足しているにすぎない。

のである。したがって、くぼみ面上の応力が指定されている  
 点以外において、境界条件が満たされているかどうかを確か  
 めておく必要がある。計算によって求めた表面力を(表-8)  
 に、またこの力によってくぼみ面上の点に生ずる応力値の真  
 値からのずれを(表-9)に示した。なお検算の結果、応力値  
 を与えた点においては一次方程式(5.10)はほとんど完全に満  
 足されていることが確認された。

これら計算された表面力によって、くぼみを有する地盤内  
 の応力値を求め、主応力差の形でまとめて(図-29)に示した。  
 また図中の点線は境界が直線である半無限体に(i), (ii)の分布  
 荷重が加わったときの応力解に対するものである。境界が直  
 線であるときには

(i)に対して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} &= \sqrt{\frac{50}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-12.5\xi^2 - \xi z} \xi z \cos \xi x d\xi \\ \tau_{xz} &= -\sqrt{\frac{50}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-12.5\xi^2 - \xi z} \xi z \sin \xi x d\xi \end{aligned} \right\} (5.15a)$$

(ii)に対して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} &= \sqrt{\frac{50}{\pi}} \int_0^{\infty} (\xi z - 1) e^{-12.5\xi^2 - \xi z} \sin \xi x d\xi \\ \tau_{xz} &= \sqrt{\frac{50}{\pi}} \int_0^{\infty} (\xi z - 1) e^{-12.5\xi^2 - \xi z} \cos \xi x d\xi \end{aligned} \right\} (5.15b)$$

(表-8) 表面力の分布

(a) 荷重分布(ii) - くぼみ形状(1)

| $i$ | 荷重中心のX座標 | 鉛直表面力      | 水平表面力      |
|-----|----------|------------|------------|
| 2   | 3        | 0.0003695  | 0.0013554  |
| 3   | 5        | 0.0003003  | 0.0008294  |
| 4   | 7        | 0.0003057  | 0.0011064  |
| 5   | 9        | 0.0002622  | 0.0008037  |
| 6   | 11       | 0.0003766  | 0.0008080  |
| 7   | 13       | 0.0003035  | 0.0011313  |
| 8   | 15       | 0.0001632  | 0.0006859  |
| 9   | 17       | 0.0004492  | 0.0004311  |
| 10  | 19       | 0.0004324  | 0.0010517  |
| 11  | 21       | -0.0000415 | 0.0005153  |
| 12  | 23       | 0.0003689  | -0.0005488 |
| 13  | 25       | 0.0006673  | 0.0001528  |
| 14  | 27       | -0.0003763 | -0.0005187 |
| 15  | 29       | -0.0001535 | -0.0036371 |
| 16  | 31       | 0.0011111  | -0.0048380 |
| 17  | 33       | 0.0016895  | -0.0075105 |
| 18  | 35       | 0.0095885  | -0.0131319 |
| 19  | 37       | 0.0350022  | -0.0047950 |
| 20  | 39       | 0.0840523  | 0.0370393  |
| 21  | 41       | 0.1638698  | 0.1290946  |
| 22  | 43       | 0.2594411  | 0.2733878  |
| 23  | 45       | 0.3265123  | 0.3970682  |
| 24  | 47       | 0.3450030  | 0.37116489 |
| 25  | 49       | 0.3403806  | 0.1528652  |

(b) 荷重分布 (i) - くほみ形状 (2)

| i  | 荷重中心のx値 | 鉛直表面V      | 水平表面U      |
|----|---------|------------|------------|
| 2  | 3       | 0.1318355  | -0.0312395 |
| 3  | 5       | -0.0934189 | 0.3093840  |
| 4  | 7       | -0.0691206 | -0.3663187 |
| 5  | 9       | 0.3868837  | 0.2452816  |
| 6  | 11      | -0.5159356 | 0.1975301  |
| 7  | 13      | 0.4414964  | -0.6268322 |
| 8  | 15      | -0.0165816 | 0.9738896  |
| 9  | 17      | -0.5157308 | -0.9174473 |
| 10 | 19      | 1.0882760  | 0.5289208  |
| 11 | 21      | -1.3537190 | 0.2557607  |
| 12 | 23      | 1.2796307  | -1.1337004 |
| 13 | 25      | -0.6628920 | 1.1944551  |
| 14 | 27      | -0.2883120 | -2.3296964 |
| 15 | 29      | 1.5125568  | 2.1095511  |
| 16 | 31      | -2.5576993 | -1.1934441 |
| 17 | 33      | 3.1721120  | -0.4333054 |
| 18 | 35      | -3.0008142 | 2.1867264  |
| 19 | 37      | 1.6757520  | -4.3653442 |
| 20 | 39      | 0.3873259  | 4.0904062  |
| 21 | 41      | -1.7368743 | -5.9078330 |
| 22 | 43      | 8.5092103  | 2.7509149  |
| 23 | 45      | -1.6267670 | 6.7086119  |
| 24 | 47      | 4.5905313  | 6.0382214  |
| 25 | 49      | -9.0032309 | 12.5160592 |

(C) 荷重分布 (ii) - &lt; 円形形状 (1)

| i  | 荷重中心のZ値 | 鉛直表面力      | 水平表面力      |
|----|---------|------------|------------|
| 2  | 3       | -0.0052955 | -0.0198792 |
| 3  | 5       | -0.0036466 | -0.0115749 |
| 4  | 7       | -0.0039237 | -0.0119440 |
| 5  | 9       | -0.0025464 | -0.0128206 |
| 6  | 11      | -0.0022879 | -0.0060347 |
| 7  | 13      | -0.0042019 | -0.0083744 |
| 8  | 15      | -0.0009526 | -0.0116641 |
| 9  | 17      | 0.0007640  | -0.0006278 |
| 10 | 19      | -0.0051146 | 0.0000273  |
| 11 | 21      | -0.0011836 | -0.0108059 |
| 12 | 23      | 0.0066300  | 0.0044459  |
| 13 | 25      | -0.0041149 | 0.01602920 |
| 14 | 27      | -0.0035809 | -0.0040089 |
| 15 | 29      | 0.0158642  | 0.0121604  |
| 16 | 31      | 0.0046380  | 0.0473831  |
| 17 | 33      | -0.0022643 | 0.0302513  |
| 18 | 35      | 0.0310310  | 0.0578738  |
| 19 | 37      | 0.0142184  | 0.1495886  |
| 20 | 39      | -0.0524478 | 0.1600010  |
| 21 | 41      | -0.1122758 | 0.1220955  |
| 22 | 43      | -0.2577538 | 0.0154872  |
| 23 | 45      | -0.4248445 | -0.3170664 |
| 24 | 47      | -0.3704889 | -0.9653116 |
| 25 | 49      | -0.1318306 | -1.2838603 |

(d) 荷重分布 (d) - &lt; 荷重形状 (2)

| i  | 荷重中心x値 | 鉛直表面力       | 水平表面力      |
|----|--------|-------------|------------|
| 2  | 3      | -0.0971491  | -0.3807450 |
| 3  | 5      | 0.1591792   | 0.0908135  |
| 4  | 7      | -0.4259303  | 0.1172217  |
| 5  | 9      | 0.2096631   | -0.6583361 |
| 6  | 11     | 0.1093828   | 0.7355698  |
| 7  | 13     | -0.6973474  | -0.6295325 |
| 8  | 15     | 1.0046629   | -0.0409797 |
| 9  | 17     | -1.0724622  | 0.7684637  |
| 10 | 19     | 0.5897163   | -1.5526431 |
| 11 | 21     | 0.2090252   | 1.8910160  |
| 12 | 23     | -1.2543071  | -1.7202298 |
| 13 | 25     | 2.1624941   | 0.8888691  |
| 14 | 27     | -2.6348433  | 0.5043603  |
| 15 | 29     | 2.4499717   | -2.0704790 |
| 16 | 31     | -1.3413911  | 3.6051638  |
| 17 | 33     | 0.3216269   | -4.2631392 |
| 18 | 35     | 2.7310818   | 4.0942030  |
| 19 | 37     | -4.17207332 | -2.2301982 |
| 20 | 39     | 6.6735674   | 0.0896404  |
| 21 | 41     | -3.6605962  | 6.3179384  |
| 22 | 43     | 2.7523012   | -1.5821753 |
| 23 | 45     | -4.7610848  | 13.4093103 |
| 24 | 47     | -15.180048  | -9.8152151 |
| 25 | 49     | 1.9712174   | -11.956677 |

(表-9) 表面力による応力値の真値からの偏り  
(a) 荷重分布(i)

| i  | 相当点のX値 | くぼみ形(1)    |          | くぼみ形(2)    |          |
|----|--------|------------|----------|------------|----------|
|    |        | $\sigma_i$ | $\tau_i$ | $\sigma_i$ | $\tau_i$ |
| 1  | 2      | -0.0010    | 0.0014   | 0.1214     | 0.0698   |
| 2  | 4      | 0.0003     | -0.0002  | -0.1305    | 0.0422   |
| 3  | 6      | -0.0002    | 0.0001   | 0.0396     | -0.0562  |
| 4  | 8      | 0.0001     | -0.0001  | 0.0069     | 0.0275   |
| 5  | 10     | 0          | 0.0001   | -0.0131    | -0.0062  |
| 6  | 12     | -0.0001    | 0        | 0.0076     | -0.0011  |
| 7  | 14     | 0.0001     | 0.0001   | -0.0027    | 0.0027   |
| 8  | 16     | 0.0001     | 0.0001   | 0.0004     | -0.0018  |
| 9  | 18     | -0.0001    | 0        | 0.0004     | 0.0008   |
| 10 | 20     | 0          | 0.0001   | -0.0004    | 0.0003   |
| 11 | 22     | 0.0001     | 0        | 0.0003     | 0        |
| 12 | 24     | 0.0001     | 0        | -0.0002    | 0.0001   |
| 13 | 26     | 0.0002     | 0.0001   | 0.0001     | -0.0001  |
| 14 | 28     | 0.0001     | 0        | 0.0001     | 0.0001   |
| 15 | 30     | 0.0001     | 0        | 0.0001     | 0        |
| 16 | 32     | 0          | 0        | 0          | 0        |
| 17 | 34     | 0.0013     | 0        | 0.0001     | 0        |
| 18 | 36     | 0.0001     | 0        | 0          | 0        |
| 19 | 38     | 0          | 0.0001   | 0          | 0        |
| 20 | 40     | 0          | 0.0002   | 0          | 0        |
| 21 | 42     | 0.0002     | 0.0003   | 0          | 0        |
| 22 | 44     | 0.0006     | 0        | 0          | 0        |
| 23 | 46     | 0.0001     | -0.0004  | 0.0001     | 0        |
| 24 | 48     | 0.0004     | -0.0003  | 0          | 0        |
| 25 | 50     | 0.0006     | 0        | 0          | 0        |

(b) 荷重分布(ii)

| i  | 相当点のX値 | ＜ ば ん 形 (1) |          | ＜ ば ん 形 (2) |          |
|----|--------|-------------|----------|-------------|----------|
|    |        | $\sigma_i$  | $\tau_i$ | $\sigma_i$  | $\tau_i$ |
| 1  | 2      | 0.0145      | -0.0210  | 0.2827      | -0.3080  |
| 2  | 4      | -0.0045     | 0.0033   | -0.0036     | 0.1376   |
| 3  | 6      | 0.0002      | -0.0008  | 0.0670      | -0.0219  |
| 4  | 8      | 0.0010      | 0.0007   | 0.0397      | 0.0147   |
| 5  | 10     | -0.0020     | 0.0005   | -0.0110     | 0.0165   |
| 6  | 12     | 0.0004      | -0.0011  | -0.0010     | -0.0086  |
| 7  | 14     | 0.0012      | 0.0006   | 0.0032      | 0.0029   |
| 8  | 16     | -0.0014     | 0.0008   | -0.0023     | 0.0003   |
| 9  | 18     | -0.0004     | -0.0011  | -0.0012     | -0.0005  |
| 10 | 20     | 0.0014      | 0.0001   | -0.0005     | 0.0005   |
| 11 | 22     | -0.0007     | 0.0010   | 0.0001      | -0.0004  |
| 12 | 24     | -0.0009     | -0.0008  | 0.0001      | 0.0002   |
| 13 | 26     | 0.0012      | -0.0004  | -0.0001     | -0.0001  |
| 14 | 28     | -0.0001     | 0.0012   | 0.0001      | 0.0001   |
| 15 | 30     | -0.0012     | 0        | 0           | 0        |
| 16 | 32     | 0.0009      | -0.0006  | 0           | 0        |
| 17 | 34     | 0.0003      | 0.0011   | 0           | 0        |
| 18 | 36     | -0.0014     | 0        | 0           | 0        |
| 19 | 38     | 0.0003      | 0.0552   | 0           | 0        |
| 20 | 40     | -0.0003     | -0.0009  | 0           | 0        |
| 21 | 42     | -0.0013     | 0.0004   | 0           | 0        |
| 22 | 44     | 0.0010      | -0.0018  | 0           | 0        |
| 23 | 46     | 0.0023      | 0.0005   | 0           | 0        |
| 24 | 48     | 0           | 0.0013   | 0           | 0        |
| 25 | 50     | 0           | 0.0003   | 0           | 0        |

#### 第4節 考 察

浅くなだらかなくぼみを有する地盤内の応力分布を計算した結果次のようなことが明らかとなった。

(1) 本章で計算した範囲においては、くぼみが大きくなっても、それ程著しい応力集中は見られないが応力の分散の程度は大きくなりより遠方まで応力が減衰せずに伝播することが認められる。またその分散の程度は、垂直応力によるものよりせん断応力によるものの方が大きいようである。

(2) 主応力差の分布図(図-29)から明らかになるとく、垂直応力が外力として与えられた場合には、くぼみが深くなると応力分布形状が大きく変化してくる。これは(表-9)によって示したように、縁部近辺における境界条件の満たされ方がくぼみの深さによってかなり異なるためであろう。すなわち、境界力が垂直応力のときには、縁部で0となるべき応力値が、くぼみ深さ10に対しては0.1214となって現われたため、逆にこの応力によって大きな応力が地盤内に引き起されたものと解釈される。

これに対して外力として接線応力が与えられるときには、くぼみの深さによって縁部における境界条件からのずれがさ程変化しないために、全体としての分布形が変わらないことが予想される。

(3) 直線境界を有する半無限体内の分布形状と比べると、接線応力を与えた場合よりも垂直応力を与えたときによりよい一致が見られる。これは計算によって求めた仮想表面力の分布が(表-8)に示すごとく、垂直外力よりも接線外力に対してより大きく変動していることを知れば当然のこととして肯かれるが、何故接線境界力に対して変動するかは定かではない。また(表-9)に示した仮想外力による境界面上の値の真値からの偏りは、接線外力に対するものの方が一般に大きくなっているが、これも仮想外力の分布を考えればもっともなことである。

(4) くぼみの深さが大きくなると、縁部において真値からのずれが大きくなることは前にも述べたが、これに反して中央部における偏りが小さくなるのは興味あることである。

(5) 本章の計算においては、分割区間数を片側で25としたが仮想水平面上の力に関して(表-8)に示すごとく24個ずつの解しか求められていない。すなわち中心が $x=1$ である荷重は始めから0と仮定してしまったのである。これは本計算を行なっている向に見出した一つの計算上のテクニックといわなければならない。もちろんこの値を0としなくても一次方程式(5.13)の解は求め得る。しかしながら(5.13)に見るごとくこの線型方程式は $\log$ 項を含んでおり、 $x=1$ 上すなわちそ

の端がくぼみ縁に接する荷重においてはその影響が非常に大きくなる。いかえれば、荷重とくぼみ面上の点との距離が小さくなって *singularity* の影響が現れ、これを消さんがために他の部分の荷重変動が大きくなることが考えられるのである。したがって計算全体の精度を下けないために、止む得ず縁部における精度を無視して、縁部に接する個所の表面力を0と仮定したのである。これを0としない方法によって求めた結果と比べるとその優劣は明らかであった。

(6) 本章で提案した仮想境界法は、ここで例として示した放物線分布では、その適用は深さ 30 のものが限度であることがわかった。もっともこのような消去法をくり返すことによつてあるいはその限度を伸ばすことは可能であろう。またこの方法は、くぼみの縁部近辺における応力状態を議論する場合には適用は不可能で、中央附近における応力性状を対象とする問題に限って応用できるようである。

(7) 一般にくぼみがあることによつて応力が深部まで減衰せずに伝達されるということは、舗装の場合について考えれば、くぼみがない場合には応力がほとんど働かなかった路盤や路床も応力を受けるようになることを意味している。したがって舗装には全体として大きくなり返し応力が加わり、くぼみが生じたことによる断面減少の影響とともに舗装の破壊を早

めるものと考えられる。

## 第5節 結 論

本章で得られた結論を要約する。

(1) 一般にくぼみが大きくなってもそれ程著しい応力集中は見られないが、応力の分散の程度は垂直外力によるものより接線外力によるものの方が大きい。

(2) 垂直外力による主応力差の分布は、くぼみが深くなると周辺部において大きく変化する。これに対して接線外力では全体的形状がそれ程変わらない。

(3) 境界が直線であるときの応力分布形状と比べると、接線外力よりも垂直外力における方がよい一致が見られる。

(4) くぼみが深くなるにつれて縁部においては、境界条件の満たされ方の度合が悪くなるが、中央部においては逆に精度が良くなっている。

(5) 仮想境界法は、浅いならならなくぼみを有する地盤の問題には利用できるが、くぼみが深くなったりあるいは縁部の応力性状が問題であるようなものには適用できない。

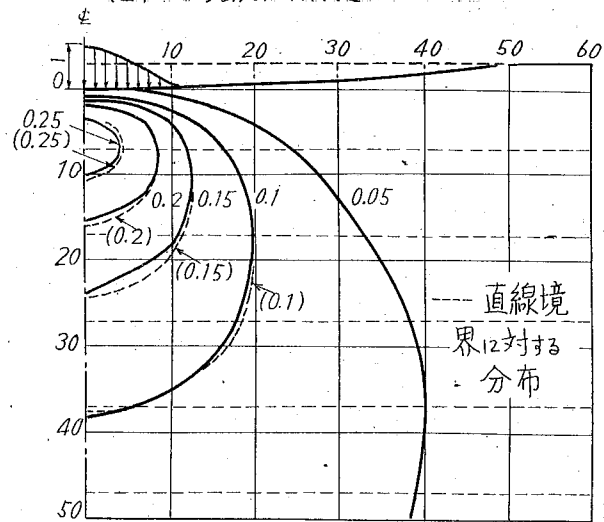
(6) 舗装の場合などでは、くぼみがあることによつて路盤や路床などの深部まで応力が伝達され、くぼみによつて断面が減少した影響とあいまって、舗装の破壊が促進されることが

考えられる。

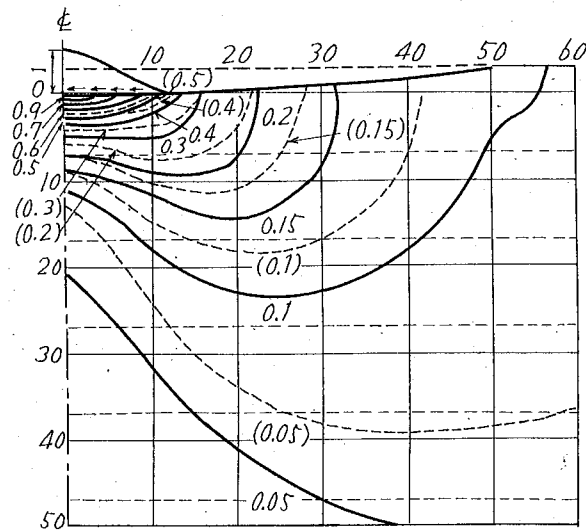
の 本章ではごく簡単な例について計算を行なっただけであるが、この仮想境界法は改良を重ねることによってもっと広い範囲の問題に適用できるものと予想される。

(図-29)くぼみを有する地盤内の主応力差の分布

(29-a)最大深さ3



(29-a-1) 垂直外力による分布



(29-a-2) 接線外力による分布

## 第 VI 章 現場実測値と理論値との比較

### 第 1 節 概 論

地盤の表面に作用する外力によって地盤に生ずる応力や変位を測定した例は数多くある。一様地盤における応力の実測例としては、砂地盤の表面に剛性荷重を加えた Kögler-Scheidig の実験が非常に有名である (Kögler-Scheidig, 1927~1929)。また Faber や市原らも同種の実測を行なっている (Faber, 1933; 市原, 1955 (a)(b))。その他撓性荷重による実測として, Turnbull らの実験が良く知られており, 均一なる地盤においては応力値は計算値と合致するが, 変位は一致し難いことを結論としている (Turnbull 他, 1961)。

これに対して多層地盤における実測は, 舗装の構造解析との関連において多く試みられている。この種の実測では Sowers らによるものが広範囲にわたっているため, しばしば参照されるようである (Sowers 他 1961)。彼らは実物大の舗装模型に実際に輪荷重を作用せしめて, 路床内の鉛直応力分布を測定している。路盤材料としては (i) 粒度の良いシルト質砂; (ii) 土交り碎石, (iii) ソイルセメントの三種類のものをもちいている。また路床は雲母質の砂質シルトで, その L.L は 45, P.I は 8, 200 番篩通過量は約 40% であった。実験の結果によれば, (i)(iii) においては表層や路盤などの強固な層があるに

もかわらずその層の効果が現われず、むしろ一様弾性体と仮定したときの計算値に良く合致していること、これに対し(ii)の場合には表層と路盤とを上層、路床を下層と考えた二層問題の理論値と比較的良好一致を見せていることが明らかとなった。この理由として Sowers らは、(i)(ii)においては路盤材料の引張抵抗力が少なく路床を補強する機能を発揮し得ないが、(iii)ではソイルセメントが大きな引張強度を有するために全体として弾性に近い挙動を示すことを挙げている。残念ながら Sowers らの実測は路床内の鉛直応力成分に限られており、上の層の応力や表面変位などについては触れていない。

その他イギリスの Road Research Laboratory や、アメリカにおける AASHO, WASHO などの Road Test においても実測が行なわれている。しかしながらこれらは、舗装全体の応力や変位性状を追跡することを主眼としているため、舗装を構成する材料の物質定数が明らかにされていないことが多い。このように現在の時点では、多層構造の理論的計算が現実の問題にどの程度の適応性を有しているかについて決定的な結論は下されていない実状である。ことに変位成分については、一様地盤のときと同じくこの傾向は著しいものがある。

本章ではこのような事情を考慮し、二層地盤における弾性理論の適用性を検討するため、第2章で得られた変位に関する

る数値解と現場において測定された値とを対比することを試みた。先にも述べたごとく地盤の変位については、実験的に測定した例が少なく、たとえあっても模型実験によるものであって現場における実測例は稀である。ことに水平荷重によって生ずる変位量を観測したものはほとんどないといえる。

ここでは (I) 日本道路公団名神高速道路で行なわれた沈下量観測試験および (II) 建設省土木研究所構内における舗装の載荷実験の二つの実測例から得られたデータを使用させて貰った。

(I) の試験は、舗装面の沈下を簡便に計測できるベンゲルマンビームによって高速道路面の輪荷重による沈下を観測したものである。

(II) の実験は、土木研究所構内の舗装区間に大型載荷装置によって鉛直荷重を与えると同時に水平引張力を作用させ、変位量を観測したものである。

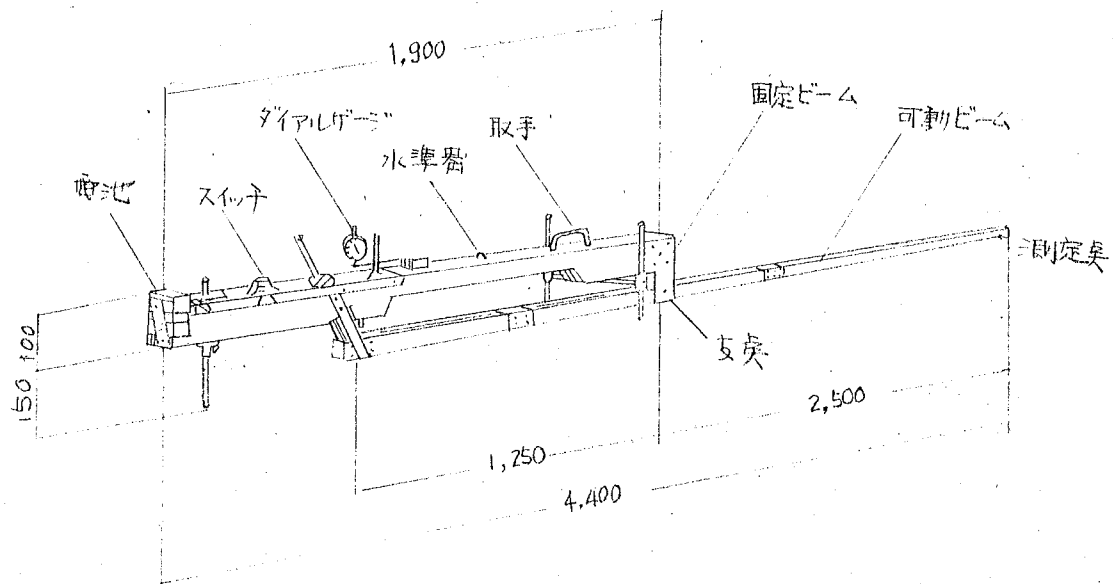
なおこれら実測値と理論計算によって得られた値とを比較するときには必要となるヤング率などの定数は、実験において与えられていないので、CBR値やマーシャル安定度などから推定せざるを得なかった。

## 第2節 実測値との対比

### 2-1 名神高速道路における沈下観測試験

この試験は、

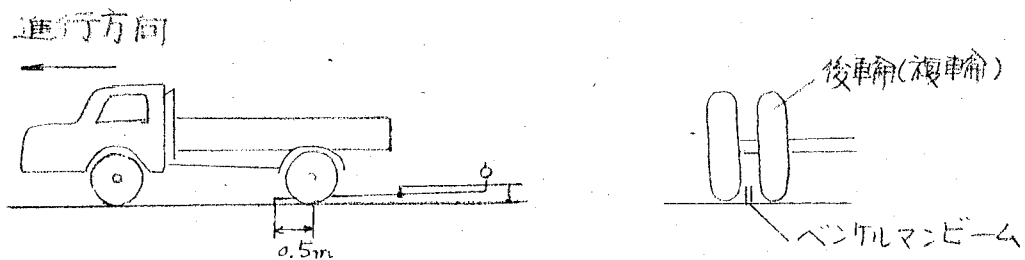
名神高速道路の大垣～関ヶ原区間において実施された。この区間は試験当時すでに供用に附されていたため、車線を封鎖して観測を行なった。測定には、ダンプトラックとベンケルマンビームとを利用した。ベンケルマンビームの機構の概要は(図-29)に示す通りであり、これをトラックの後部の複輪の間に挟んでトラックを前進させ沈下を測定するのである。



(図-29) ベンケルマンビーム

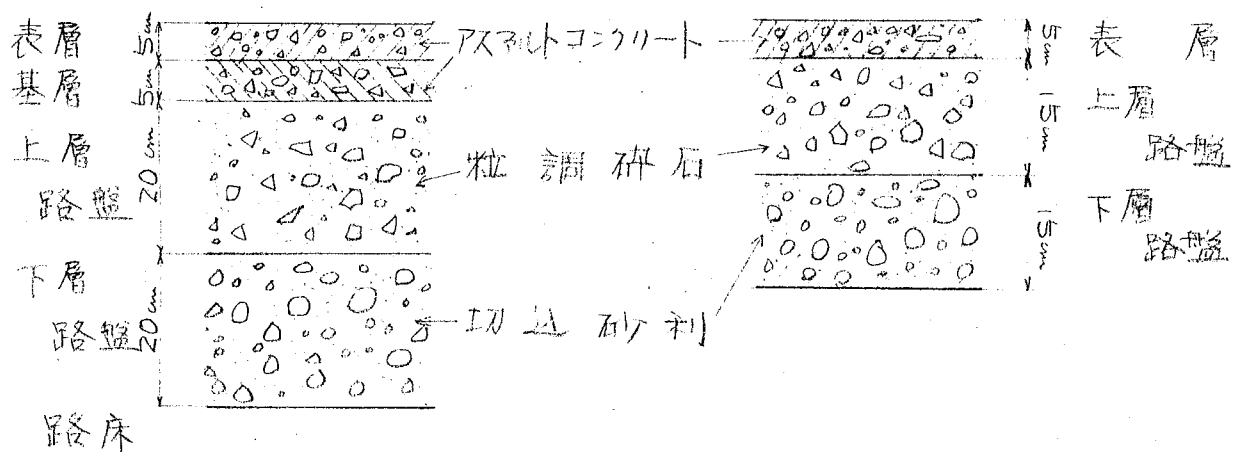
この試験では「復元法」と呼ばれる測定法がもちいられた。すなわち(図-30)に示すごとく沈下測定桌上に可動ビームの先端をセットし、後輪の二つのタイヤでこれを挟む状態でビーム先端より50cm後方にトラックを誘導する。このときのダイ

マルゲージの読みを記録した後トラックをできるだけゆっくり前進させながら50cmごとに11回ゲージの値を観測する。トラックはそのまま前進させてダイヤルゲージの読みが変わらなくなるところで測定を終わる。このとき最大沈下量は観測点上に荷重がのったときの読みと最終読みとの差である。



(図-30) ベンケルマンビームによる  
沈下測定

観測試験は、(図-31)に示した二種の断面を有する舗装面上で行なわれた。断面1は名神高速道路の標準断面の一つで、主として関ヶ原～米原区間に施工されたものである。断面2



(a) 断面 1

(b) 断面 2

(図-31) 試験区間の舗装断面

はしに比して表層、路盤の厚さともに薄くなっているが、これは大垣の軟弱地盤地帯にその後の圧密沈下を見込んで舗設された仮断面である。その一部はすでにアスファルト混合材によって *overlaying* されたと聞く。

測定は各断面について約100箇所行なわれたが、そのうち約50の値を選び(図-30)に・で示した。印の大小はその値の頻度の大小を表わしている。

次に弾性理論によって表面変位を計算するために、(図-31)の断面を二層体と仮定する。現実にはこの断面は四層と考えねばならないが、アスファルトを含む層すなわち表層を上層、上層路盤以下を下層と考えることが近似的に許されることを竹下博士が結論しておられる(竹下, 1957)。

理論値と実測値とを対比するためには、輪荷重強度 $R$ 、接地半径 $a$ および各層のヤング率 $E_1, E_2$ などの値が必要である。本試験においては、後輪荷重は7 tonとしたが、竹下博士によれば載荷半径は輪荷重を $P$ (ton)とすると

$$a \text{ (cm)} = 12 + P \quad (6.1)$$

で与えられる(竹下他, 1961)から、これより載荷半径19 cm、強度強度 $6.2 \text{ kg/cm}^2$ を得る。またこの区間のアスファルト混合材の安定度 $S$ は $850 \sim 1000 \text{ kg}$ 、フロー値 $f$ は $25 \sim 30$  ( $\frac{1}{100} \text{ cm}$ )

の範囲にあることが知られている（日本道路公団，1964）。これらの値と変形係数との間には  $60^{\circ}\text{C}$  において

$$\bar{E}_1 = 16 \frac{S}{f} \quad (6.2)$$

なる関係がある（竹下，1965）。測定時の温度が  $6^{\circ}\sim 10^{\circ}\text{C}$  であることを考慮し割増係数（竹下，1965）をかければ，上層のヤング率は  $5,700 \sim 8,000 \text{ kg/cm}^2$  程度になるものと考えてよい。また上層路盤以下の層に関しては，現場における測定値として変形係数  $850 \sim 1,500 \text{ kg/cm}^2$  が得られたことが報告されている（上田他，1963）。計算に必要な以上の値をまとめると次のようになる。

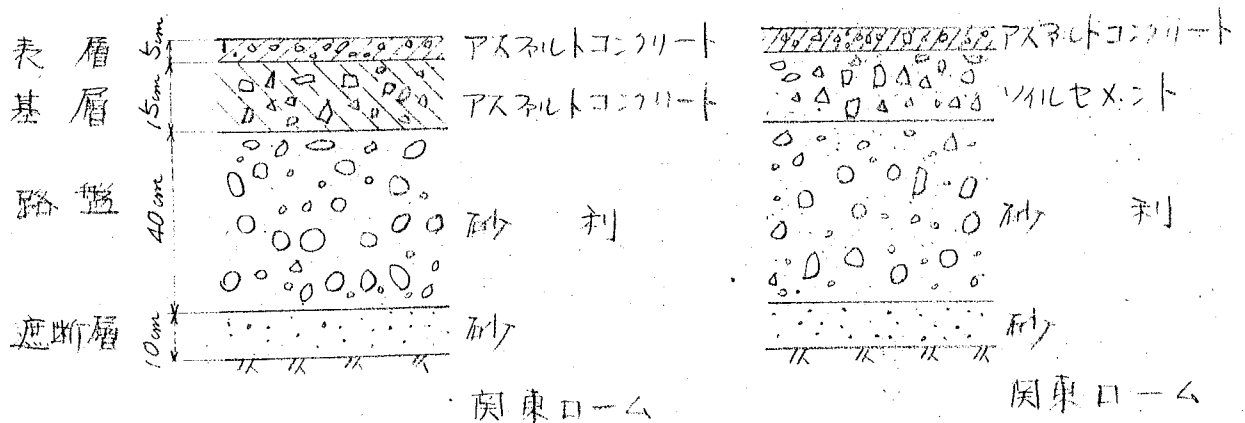
（表-10） 名神高速道路における観測試験に関する諸量

| 荷重強度 $p_0$            | 載荷半径 $a$        | 上層厚 $h$         |                | 上層ヤング率 $E_1$                       | 下層ヤング率 $E_2$                     |
|-----------------------|-----------------|-----------------|----------------|------------------------------------|----------------------------------|
|                       |                 | 断面 1            | 断面 2           |                                    |                                  |
| $6.2 \text{ kg/cm}^2$ | $19 \text{ cm}$ | $10 \text{ cm}$ | $5 \text{ cm}$ | $5,700 \sim 8,000 \text{ kg/cm}^2$ | $850 \sim 1,500 \text{ kg/cm}^2$ |
| $a/h =$               |                 | 1.9             | 3.8            | $E_1/E_2 = 4 \sim 10$              |                                  |

これらの値を参考とし， $a/h = 1, 2$ ； $r_1/r_2 = 5, 50$  の 4 つの場合につき第 2 章の結果を利用して変位曲線を求め，（図-32）に示した。

2-2 土木研究所構内における載荷実験      この実験は建設省土木研究所千葉支所内に舗設された巾  $8.7 \text{ m}$ ，全長  $100 \text{ m}$  のアスファルト舗装面上において行なわれたものである。アス

ファルト舗装が上層路盤あるいは基層の性質の違いによってどのような沈下性状を呈するかを調査することが主たる目的であった。実験の対象となった舗装断面は5種あり、基層の種類だけを異にしていた。本章では次に示す例だけを取り上げ比較の対象とする(図-33)。



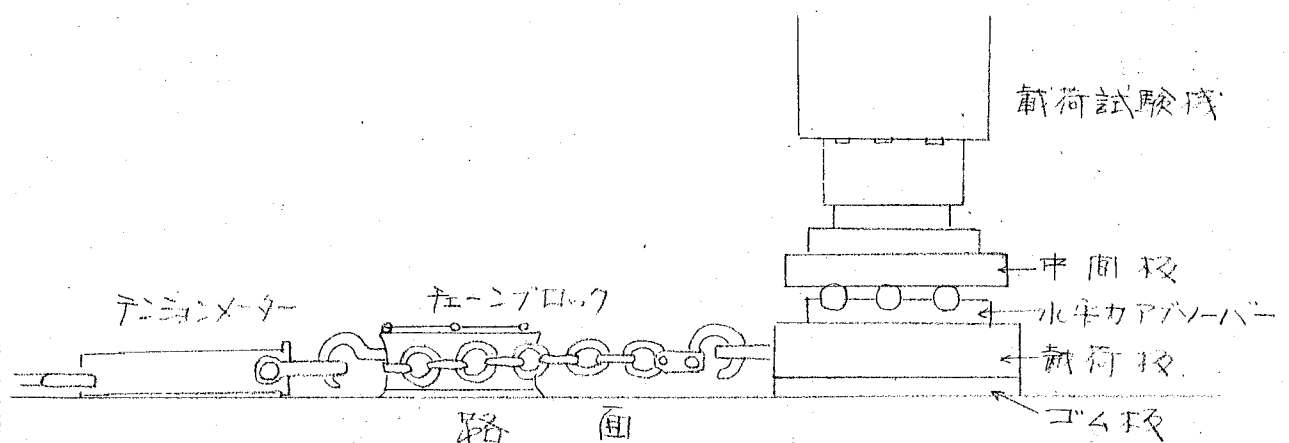
(a) 断面 1

(b) 断面 2

(図-33) 実験区間の舗装断面

路面への載荷は、30ton 載荷装置の底面に直径40cmのゴム板を接着し、鉛直荷重は載荷試験機により、水平荷重はこの載荷板にチェーンブロックを取りつけ人力によって与えた。水平荷重のコントロールはテンションメーターにて行なった(図-34)。荷重は、鉛直力、水平力ともに4段階とし、その最大値はそれぞれ15ton、4.5tonである。

舗装の変位は、舗装内に埋め込まれた沈下計、および表面



(図-34) 鉛直および水平荷重試験装置

にとりつけられたダイヤルゲージにより観測した。(図-35)の  
 (a)には11.9 tonの鉛直荷重による鉛直変位, (b)には10 tonの  
 鉛直荷重による水平変位, (c)には3 tonの水平荷重による水  
 平変位の値を示した。

次に2-1におけると同じく, (図-33)の断面を二層に単純化  
 し, 二層弾性体としての変位曲線を計算する。断面1は前項  
 におけると同じくアスファルトを含む層と含まない層とに分  
 けられるが, 断面2に関しては問題がある。

表層および基層にもちいられたアスファルトコンクリート  
 については,  $60^{\circ}\text{C}$ および $0^{\circ}\text{C}$ において一軸圧縮試験が行なわ  
 れ平均値としてそれぞれ  $240\text{ kg/cm}^2$ ,  $1860\text{ kg/cm}^2$  が得られてい  
 る。測定は夏期に行なわれており, 舗装版の温度は  $35^{\circ} \pm 3^{\circ}\text{C}$   
 であることが知られているから, 断面1に対しては  $E_1 = 800\text{ kg/cm}^2$   
 と考えてよい。基層に利用されたソイルセメントの現場CBR

値は 22.3% , 支持力係数  $K_{30}$  は  $44.6 \text{ kg/cm}^2/\text{cm}$  であった。再び竹下博士によれば, 変形係数と CBR 値あるいは  $K$  値との間には次の関数があるといわれている(竹下, 1958, 1966)。

$$\bar{E} = 35 \cdot \text{CBR}(\%) \quad (6.3)$$

$$\bar{E} = 1.18 a K_{30} \quad (6.4)$$

ただし  $a$  は平板の半径である。この両式によって求めた値は驚くほどよく一致し  $800 \text{ kg/cm}^2$  を得る。したがって基層がソールセメントの場合も表層+基層を上層と考えてよいことが結論される。

路盤の砂利については, CBR 7.0% ,  $K_{30}$   $20.0 \text{ kg/cm}^2/\text{cm}$  の値が報告されており, これより  $E_2 = 250 \sim 350 \text{ kg/cm}^2$  の値が得られた。計算に際しては一応  $250 \text{ kg/cm}^2$  をもちいる。

次の表は計算に必要な数値をまとめる。

(表-11) 土木研究所における載荷実験に関する諸量

| 荷重強度 $P_0$                                                                                                             | 載荷半径 $a$ | 上層厚 $h$ | 上層ヤング率 $E_1$          | 下層ヤング率 $E_2$                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|---------|-----------------------|--------------------------------|
| $9.5 \text{ kg/cm}^2; 11.9 \text{ t}$<br>$8.0 \text{ kg/cm}^2; 10.0 \text{ t}$<br>$2.4 \text{ kg/cm}^2; 3.0 \text{ t}$ | 20 cm    | 20 cm   | $800 \text{ kg/cm}^2$ | $250 \sim 350 \text{ kg/cm}^2$ |
| $a/h = 1$                                                                                                              |          |         | $E_1/E_2 = 3 \sim 4$  |                                |

これらの値を参考とし,  $a/h = 1$ ,  $E_1/E_2 = 5, 50$  の二つの場合について数値計算により変位曲線を求め, (図-35) に示した。

### 第3節 考 察

二層地盤に関する計算値と現場における実測値とを比較した結果、次のことが明らかとなった。

I、名神高速道路の沈下観測データについては、断面1,2のいずれにおいても観測値は計算値を大巾に下回りほぼ  $\frac{1}{2}$  の大きさになっている。また断面1は2に較べて上層の厚さが2倍あるが、その効果は載荷中心より50cm離れた地盤においては現われていない。載荷中央部では沈下量が約  $\frac{1}{10}$ mm 少なくなっていることが認められる。計算によれば、(図-32)から明らかに  $\frac{3}{10}$ mm 減少する筈であるが、実際はその  $\frac{1}{3}$  になっている。さらに実測値は  $\eta_n = 1$  の場合の計算値に非常によく一致している。このようにここで取り上げた二層地盤は、上層の厚さあるいは載荷半径/層厚比に計算におけるほど影響を受けないようである。もっともこれはあくまで、弾性率比  $E_1/E_2$  が5~50の範囲にあるという前提に立っての議論である。

見方をかえ、実際の弾性率比がこれよりもかなり大きいものと仮定すれば、理論値との合致度が良くなることは(図-32)によって肯かれる。事実少し極端な考え方をすればこの比は大きくなり得るのである。すなわち測定においてはトラウは静止しておらず、10km/h程度の速度で動いている。一般に、変形係数は載荷時間によって大きく変動する(Ishihara, 1965)。換

算式(6.2)はマーシャル試験によって得られる値を対象とするものであるから、載荷時間は5秒と考えられている。本試験では直径38cmの載荷部分を10km/hの速度で通過するとしてよいから、載荷時間はおよそ0.14秒となり、変形係数は2〜3倍に増加する(ヤブ下, 1965)。また序論でも述べ、第IV章でも具体的に示したごとく、変形係数は拘束の影響を大きく受け非拘束時係数の2倍程度にはなり得る。輪荷重が加わった舗装では、内部の応力状態は拘束時に近くなり、ことに路盤ではその影響が大きくなることが予想される。

以上述べたことから、下層の弾性率 $E_2$ および弾性率比 $E_1/E_2$ をここに示した値の2〜4倍程度にとることは不可能ではないと推察され、そうすることによって理論値と実測値とのよりよい一致が見られることは明らかである。

著者は各種の舗装現場において沈下観測を行ない、これを二層あるいは三層弾性理論によって計算した値と比較検討した経験がしばしばあるが、比較的高級な舗装の場合にはほとんどいいくらい観測値は計算値の $1/2$ 程度の大きさであった。またAASHOのRoad Testの結果について同様に解析を行なったが、やはり実測値は同じような傾向を示した(Ishihara 他, 1967)。いずれの比較例においても、計算に必要な定数はCBR値、相対強度あるいはマーシャル試験値など

から推定せざるを得なか、たがこの場合にも、路盤の変形係数が拘束した状態において非拘束時の2倍程度になるという仮定を許せば、理論値と実測値とはきわめて良く一致することが結論されている。

なおベンケルマンロームによって測定された沈下量が、最大沈下量でないことはすでに指摘した通りである(木村他, 1965)。すなわち、(図-36)から明らかに、最大値は車輪の下で生ずるから、(図-32)の載荷中心軸上の実測値はやや大きくなると考えてさしつかえない。

## Ⅱ. 土木研究所内における実験については

(1) 鉛直荷重による鉛直変位では、断面1の載荷板下の部分の値は計算値とよく一致しているが、これを離れるにしたがい合致度は悪くなる。しかし全体としてはⅠの名神高速道路における試験の値ほど悪くはない。またソイルセメント基層の場合には沈下曲線は、アスファルトコンクリート基層のときに較べてなだらかであり弾性率比  $E_1/E_2$  が大きいときの曲線形に似ている。すなわち、絶対値こそ異なるが、形としてはアスファルトコンクリートのときは  $E_1/E_2 = 5$ 、ソイルセメントのときは  $E_1/E_2 = 50$  の曲線形にきわめて近い。下層の弾性率を  $300 \text{ kg/cm}^2$  にとれば絶対値もほぼ等しくなる。

(2) 鉛直荷重による水平変位では、鉛直変位のときと異なり

実測値が計算値よりも大きい傾向にあるが、概して計算値に近い値を示している。とくにソイルセメント基層を有する断面では、よい一致が見られる。

(3) 水平荷重による水平変位では、計算値は実測値に比してかなり小さい。これは水平荷重を正しく等分布状に与えることが難しくかなり大きな力が鉛直方向に働いて力の損失が出るためと考えられる。

(4) ソイルセメントとアスファルトコンクリートの弾性率はほぼ等しいと推論したにもかかわらず、断面スにおける実測値の方が1のそれよりもかなり小さくなっている。これは明らかにソイルセメント層の弾性率がアスファルトコンクリートに比べて大きいことを意味しており、弾性率決定の方法に問題があるものと想像される。

(5) Iの観測試験の結果と較べると、この土木研究所において行なわれた実験では、ある程度実測値と理論値とが一致している。この理由としてはいろいろ考えられるが、Iの名神高速道路の舗装断面の弾性率の推定がとくに路盤以下の層に関して適当でなかったこと、およびトラックの輪荷重を利用したため円形等分布荷重と考えに計算の実情と合わなかったことなどによるものと考えられる。

#### 第4節 結 語

本章で得られた結論を要約する。

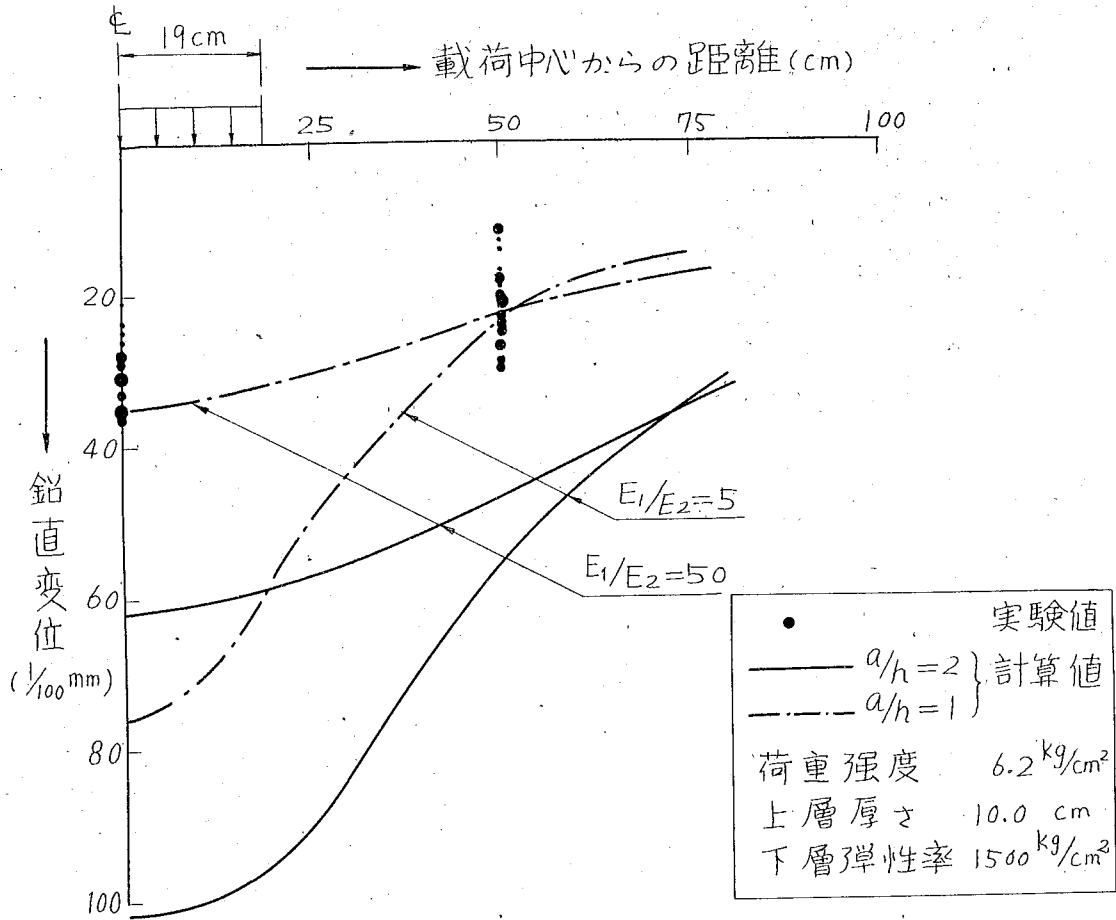
(1) 実際の舗装断面について実測した結果得られた沈下量は、断面を二層地盤に単純化して計算したものと比較すると、やや小さい値を示す傾向がある。ただしこの場合も弾性率比および下層の弾性率として、考えられる範囲で大きな値をとれば理論値との一致は良くなる。

(2) 鉛直変位については、ベンケルマンゼームによる沈下観測試験と円形板による載荷試験とを比べると、ベンケルマンゼームによるものの方が理論値との一致が悪く、マーシャル試験値などから推定した弾性率をもちいて計算した値の約2倍になる。これに対して円形載荷板による試験ではかなり良く合致している。

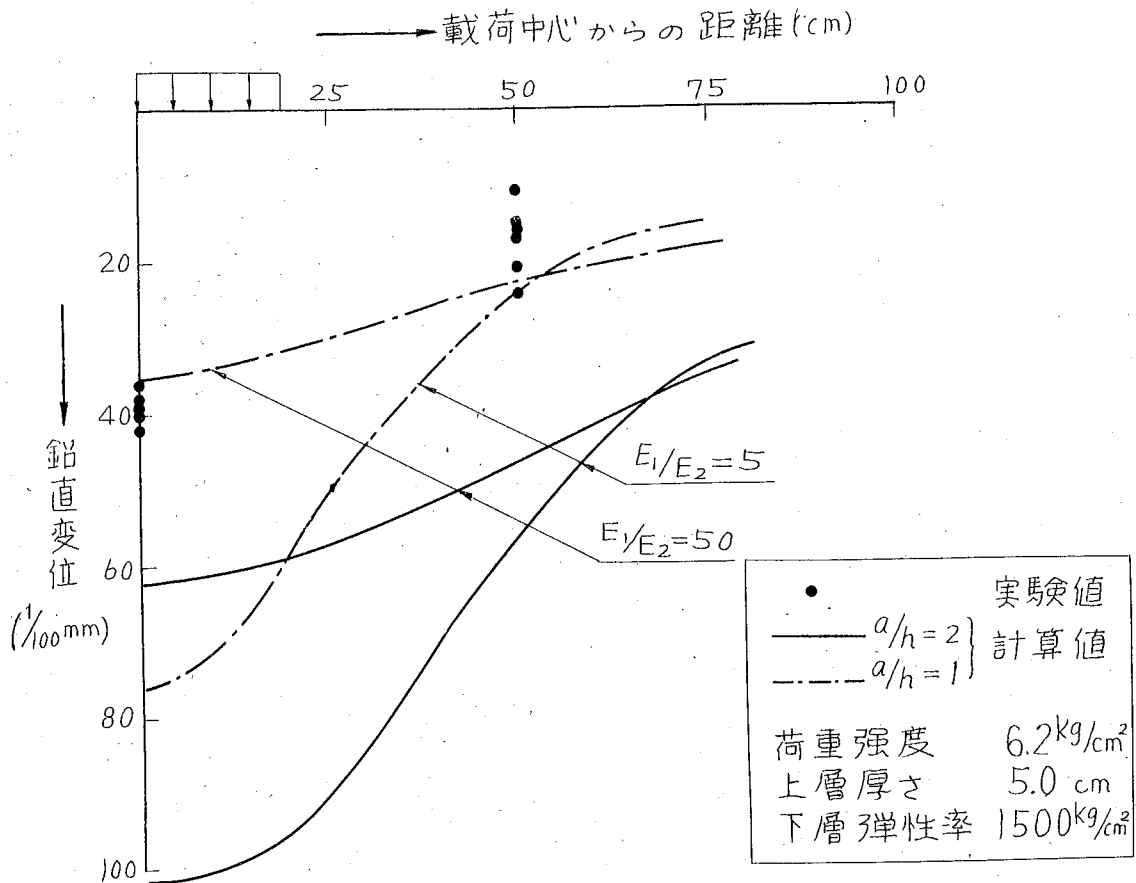
(3) 理論的計算によってこれらの地盤の沈下量を求める場合には、従来行なわれているようにマーシャル試験値、CBR値あるいは支持力係数などから弾性率を推定するのは適当ではなく、拘束された状態で三軸試験を行なうかあるいは載荷試験などを行なってこれを決定すべきであると考えられる。

(4) トラックの複輪荷重を(6.1)式で円形分布荷重に換算する方法は、応力周題については妥当性があることは良く知られているが、変位解析を行なう場合にはやや疑問がある。

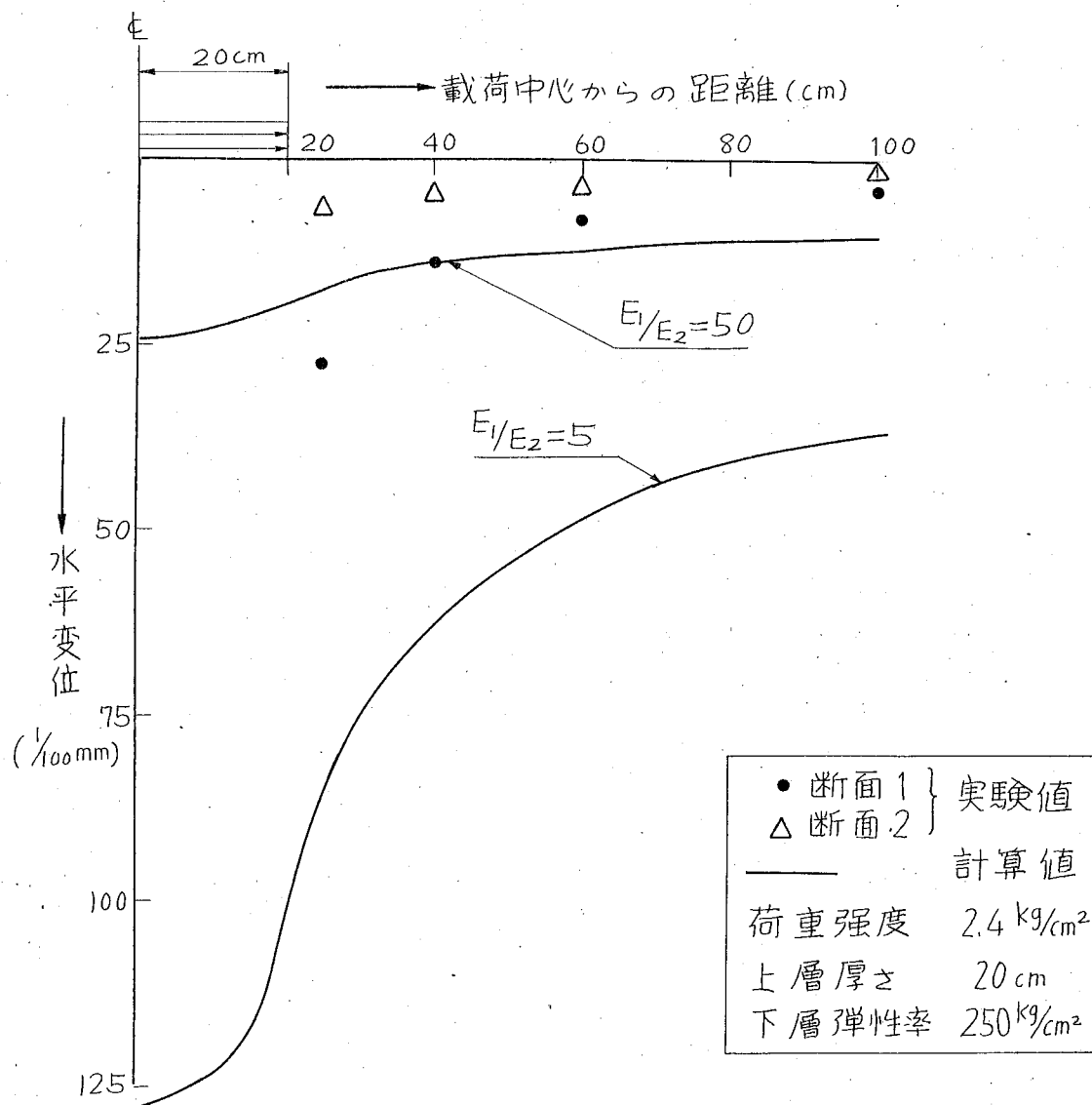
(32-a) 断面 1 における変位量



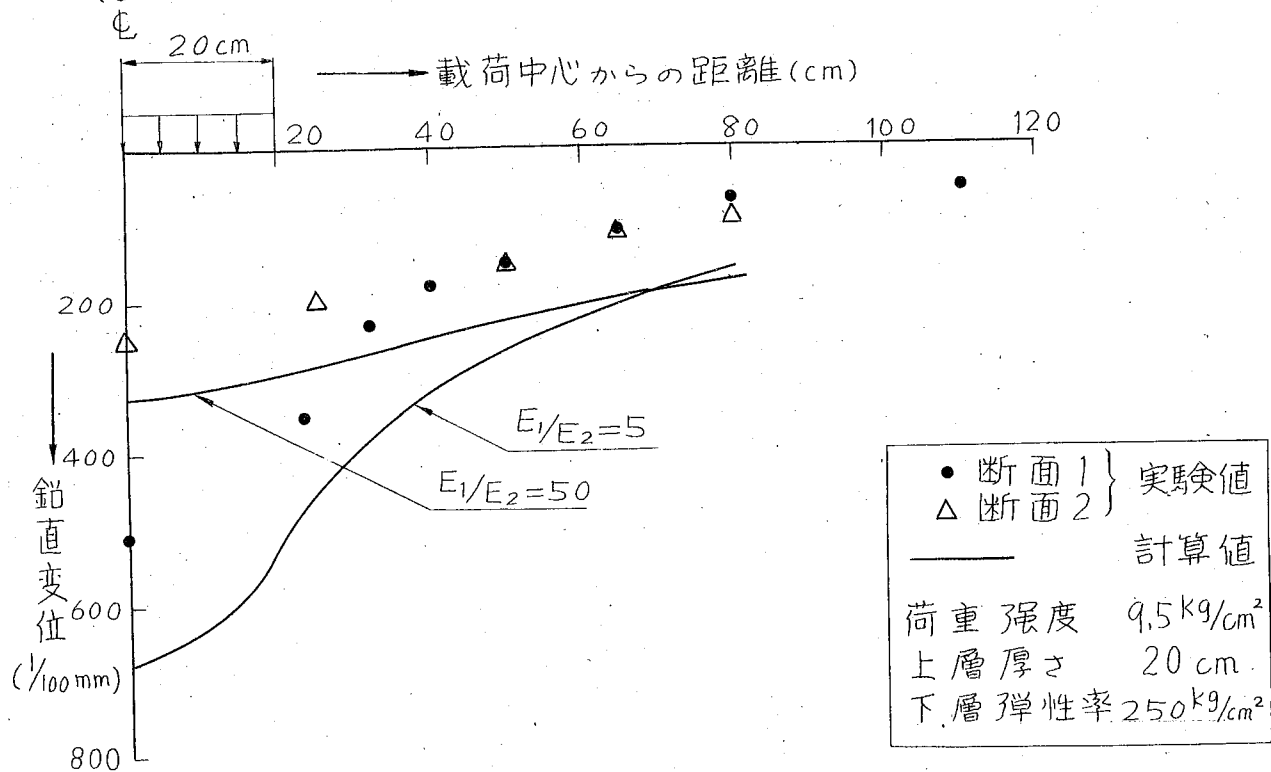
(32-b) 断面 2 における変位量



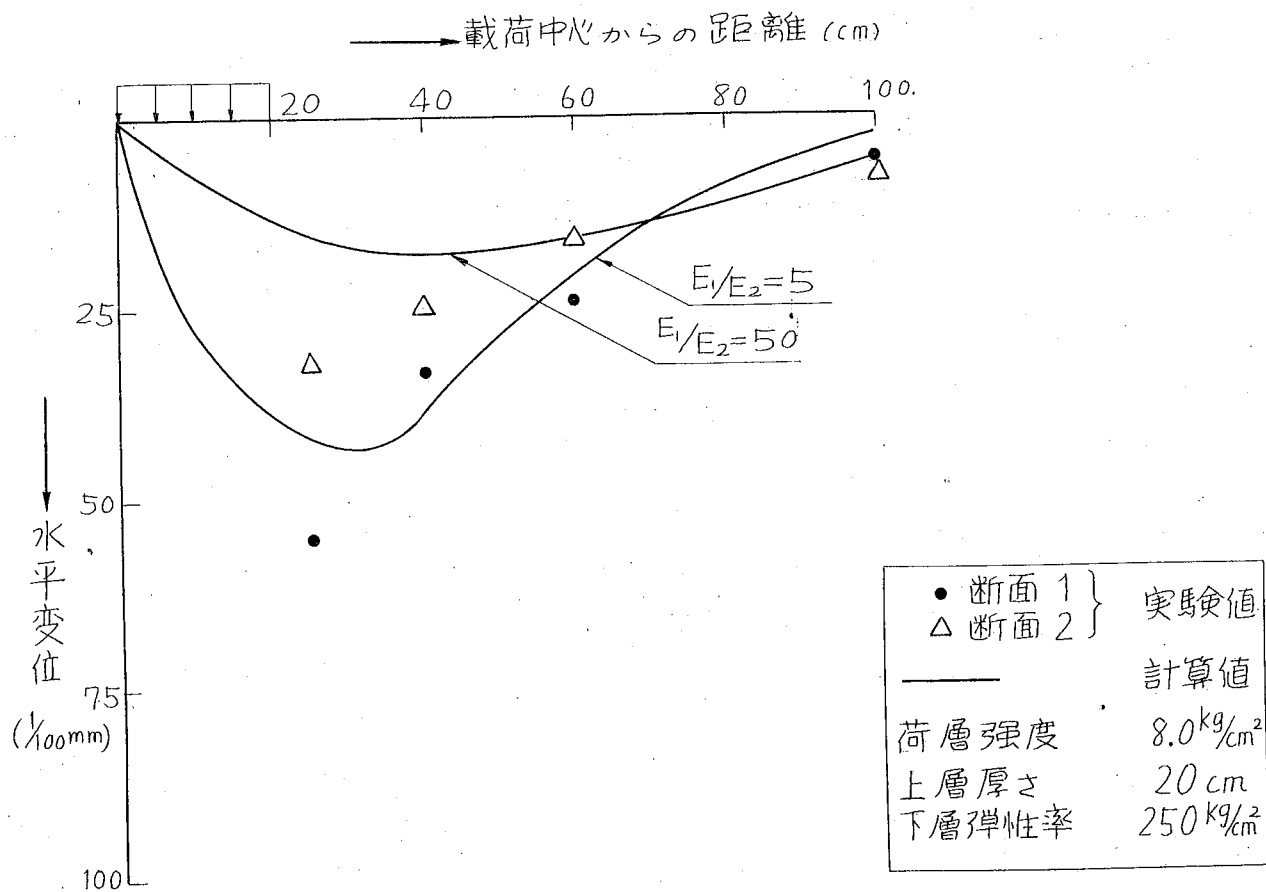
(35-C) 水平荷重による水平変位



(35-a) 鉛直荷重による鉛直変化



(35-b) 鉛直荷重による水平変位



## 第 VII 章 結 論

二層地盤に関する研究は従来数多く試みられているが、それらは水平なる二層を対象としかつ鉛直荷重に関するものが大部分であって、層の形状や荷重の作用する方向に対して充分な考慮がなされていたとはいえない。

本論文ではこの点に着目し、次に示す四つの問題を取り上げ主として解析的あるいは数値的に研究を行ない、それぞれの問題に対して結論を与えた。

すなわち第 II 章においては、鉛直およびせん断力を受ける二層水平地盤について考察した。地盤の表面に鉛直およびせん断力が作用したときの応力と変位の弾性理論解を求め、数値計算を行ない実用的な図表を作成し、その力学的性状を明らかにするとともに設計上の資料に供した。水平せん断力に関する本解析の結果、地盤内にかなりの応力が発生することが結論された。ことに舗装の場合などで摩擦係数が 1 に近いと、表面附近においては、鉛直力よりはむしろせん断力の影響が支配的であることが指摘され、これによって交叉点や曲線部のごとくせん断力が作用する確率の大きい部分で舗装体に損傷が起りやすい事実を説明した。

第 III 章は鉛直力を受ける斜め地盤の問題である。岩盤との接触が滑らかであるようなやわらかい斜め粘土層が局部等分

布荷重を受けるときの弾性解および圧密解を求め、前者について数値計算を行なって区間の位置や傾斜(角 $30^\circ$ ,  $45^\circ$ )の影響を論じた。その結果鉅直応力について浅い側の応力集中がさほどなく傾斜は不等沈下を予想以上に大きくすること、ならびにくさびの頂点に近い載荷端までの距離を $a$ 、載荷巾を $l$ としたとき、 $(a+l)/a < 1.5$  (角 $30^\circ$ )、 $\frac{2}{3}$  (角 $45^\circ$ )ではほとんど平均応力すなわち圧密沈下に与える傾斜の影響を無視してよいことを結論した。またこの傾向を実験的にも確かめた。

第IV章は水平有限層の接触応力と沈下性状について論じた。有限層に関する弾性応力解を重ね合わせて剛性載荷条件を満たす接触応力の分布を求めると同時にその接触応力による有限層内部の鉅直応力分布も明らかにした。その結果層厚が相対的に小さくなると載荷中央部の接触圧が半無限時にくらべて大きくなり平均化が進むこと、層厚比が1.5以上では有限層を半無限体と考えて実用上さしつかえないこと、またポアソン比の影響はあまりないことおよび接触圧の分布については従来の近似解法の精度が比較的よいことなどを結論した。また解析結果は模型実験により検討し、土のような非弾性物体に対する解の適用性を考察しこの種の載荷試験においては拘束時の変形係数をもちいるべきことを提案した。

第V章では表面にくぼみを有する地盤に関する応力分布の

計算法について述べた。すなわち、地表面になだらかな浅いくぼみがあってそこに表面力が作用するとき地盤応力を数値的に求める方法を提案した。くぼみを無視した半無限体の表面（仮想境界）のくぼみで仕切られる範囲に未知の鉛直および水平力を仮想し、あらかじめ指定されたくぼみ面上の応力値が、既知境界応力に一致するような仮想外力を求める方法である。数値計算例によって検討した結果、くぼみの深さが大きくなってもそれほど顕著な応力集中は見られないが、表面近くでの応力の横分散は大きくなり、その程度は水平外力の方が鉛直外力より著しくなることが見出され、舗装の破壊に及ぼすくぼみの影響の一端を説明した。

最後に第VI章では、これまでの解析結果を舗装に関して行なわれた現場実測値と対比し適用性を検討した。その結果、断面を二層地盤に単純化し、従来行なわれているようにマシナル試験値やCBR値などから換算した弾性率をもちいて計算するとその値は実測値よりかなり大きくなる傾向があることが判明した。したがってこの種の計算を行なう場合には、拘束状態の変形係数をもちいれば、実測値との一致がより良くなることが予想される。

いずれにしてもこれだけの対比からは、二層地盤の理論的計算が実際問題にどの程度適用性があるかについて決定的な

結論は下し得ない。しかしながら(図-32)および(図-35)に示すごとく、実測値が一様地盤における計算値よりも二層地盤のそれにより近いことは少なくとも確かである。また、本章でとり上げた実測例では、作用する荷重も小さくこれによって生ずる歪も小さい上路盤部は拘束されているから、全体としてはかなり弾性的性状を示すものと考えられる。したがって著者は今後、弾性率の測定に重点を置いた実測をくり返すことによって必らずや理論と実際とが交わる点の近傍には到達できるものと信じている次第である。

終りに、本研究を進めるにあたり終始御鞭撻と賜わった東京大学最上武雄教授、そして叱咤激励のうちに御指導と頂いた東京工業大学山口柏樹教授に心から感謝致す次第であります。また実験および計算の結果の取りまとめは、東京工業大学工学部金野春幸君が引き受けてくれた。併せて謝意を表する。なお清書は妻を頼り、数値計算は東京大学大型計算機センターのHITAC 5020により行われた。

## 参 考 文 献

Barber, E. S., 1962 "Shear Loads on Pavements" Proc. 1st  
Intern. Conf. Structural Design of Asphalt Pavements  
Michigan

Biot, M. A., 1935 "Effect of Discontinuities on the Pressure  
Distribution in a Loaded Soil" *Physics*, Vol. 6

Bjerrum, L., 1954 "Theoretical and Experimental Investi-  
gations on the Shear Strength of Soils"  
Norwegian Geotechnical Institute Publ. No. 15

Bonds, R. P. H., and Kuhn, S. H., 1959 "Dynamic Forces  
Exerted by Moving Vehicles on a Road Surface"  
Bull. Highway Res. Board

Burmister, D. M., 1943 "The Theory of Stresses and Displace-  
ments in Layer Systems and applications to  
Design of Airport Runways" Proc. Highway Res.  
Board, Vol. 23

Burmister, D. M., 1945 "The General Theory of Stresses and  
Displacements in Layered Systems" *Journal Appl.  
Physics*, Vol. 16 Nos 2, 3, 5

Burmister, D. M., 1962 "Applications of Layered System Concepts and Principles to Interpretations and Evaluations of Asphalt Pavement Performances and to Design and Construction" Proc. 1st Intern. Conf. Structural Design of Asphalt Pavements, Michigan

Cummings, A. E., 1941 "Foundation Stresses in an Elastic Solid with a Rigid Underlying Boundary"  
Civil Engng., Vol. 11

Davis, E. H., and Taylor, H., 1961 "The Surface Displacement of an Elastic Layer Due to Horizontal and Vertical Surface Loadings" Proc. 5th Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Paris

Faber, O., 1933 "Pressure Distribution under Bases and Stability of Foundations" Structural Engineer, 11

Fillunger, P., 1912 "Dreiwichtige ebene Spannungszustände des Keilförmigen Körpers" Z. Math. und Physik  
Vol. 60

Filon, L. N. G., 1903 Phil. Trans. Royal Society, Series A,

Fox, L., 1948 "Computation of Traffic Stresses in a Simple Road Structure" Proc. 2nd Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering. Rotterdam

Frölich, O. K., 1934 "Druckverteilung im Baugrunde" Springer, Berlin

Gibson, R. F., 1967 "Some Results Concerning Displacements and Stresses in a Non-homogeneous Elastic Half-space" Geotechnique Vol. XVII, No. 1

Green, A. E., and Zerna, W., 1953 "Theoretical Elasticity" Clarendon Press, Oxford

Hall, D. L., 1940 "Stress Transmission in Earths" Proc. Highway Res. Board, Vol. 20

Hvorslev, M. J., 1960 "Physical Components of the Shear Strength of Saturated clays" Proc. Am. Soc. Civil Engng., Res. Conf. Shear Strength of Cohesive Soils

市原政士, 1955(a) "剛性載荷重による砂層中鉛直増加土圧の分布について" 土木学会誌 40巻4号

市原松平, 1955(b) “地表面載荷重によつて基礎に作用する  
横方向土圧の分布について” 土木学会誌 40巻5号

大井鉄郎, 1951 “応用偏微分方程式論” 岩波書店

色部誠, 高野博, 1963 “一つの傾斜度曲面を有する半無限  
体の一解法” 電機中央研究所報 Vol.3 No.1

色部誠, 1966 “任意の境界形状を有する半無限体の応力  
状態” 第21回土木学会学術講演会講演概要

Ishihara, K., 1965 “Effect of Rate of Loading on the  
Modulus of Deformation of Materials Exhibiting  
Viscoelastic Behaviors” Trans. Japan Soc. Civil  
Engineers No.117

Ishihara, K., and Kimura, T., 1967 “The Theory of  
Viscoelastic Two-layer Systems and Conception  
of Its Application to the Pavement Design”  
Proc. 2nd Intern. Conf. Structural Design of As-  
phalt Pavements, Michigan

川本睦万, 1966 “基礎岩盤の変位状態におよぶ地山の異  
方性の影響について” 土木学会論文集 第126号

Kezdi, A., 1957 Discussion in Session E, Foundation of Structures. Proc. 1st Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, London.

Kezdi, A., 1964 "Bodenmechanik" Springer Verlag, Berlin

Khera, R.P., and Krizek, R.J., 1968 "Effect of Principal Consolidation Stress Differences on Undrained Shear Strength" Soil and Foundation  
掲載予定

木村直, 斎藤総一郎 1965 "ベントリマンビーム試験方法  
の理論的問題点について" 第8回日本道路会議  
論文集

Kögler, F., and Scheidig, A., 1927, 1928, 1929 "Druckver-  
teilung im Baugrunde" Die Bautechnik,  
Vol. 5, 6, 7

Kögler, F., 1936 Opening Discussion at Section E, Stress Distribution in Solids, Proc. 1st Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Cambridge, Mass.

Liveneh, M., and Komornik, A., 1967 "Anisotropic Strength of Compacted clays" Proc. 3rd Asian Regional Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Haifa

Love, A.E.H., 1944 "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity" 4th ed, Dover, New York

Marguerre, K., 1931 "Druckverteilung durch eine elastische Schicht auf starrer, rauher Unterlage" Ing. Archiv, Vol. 2

Marguerre, K., 1933 "Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der dicken Platte" Ing. Archiv Vol. 4

Marwick, A.H.D., and Starks, H.J.H., 1941 "Stresses Between Tire and Load" Journal of I.C.E 16(7)

松村琢治, 1931 "弾性率の減衰と共に変化する地盤における基礎の沈下" 土木学会誌 17巻11号

Melan, E., 1919 "Die Druckverteilung durch eine elastische Schicht" Beton und Eisen, Vol. 18

Melan, E., 1932 "Die Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halb-

scheibe " Z. A. M. M., Vol. 12

Mitchell, J. H., 1901 Proc. London Math. Soc. Vol. 32

宮本博, 1967 "三次元弾性論" 裳華房

Mindlin, R. D., 1936 "Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid" Physics, Vol. 7

森口繁一, 1957 "二次元弾性論" 岩波書店

岸波鹿将, 1956 "表面にせん断荷重を受ける半無限体の三次元問題" 日本機械学会論文集 22巻 119号

Muskhelishvili, N. I., 1953 "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity" P. Noordhoff Groningen - The Netherlands

成田国雄, 1968 "盛土斜面内の応力解析と安定計算への応用" 未発表

Neuber, H., 1962 "Die belastete Parabelkerbe" Z. A. M. M. Vol. 42

日本道路公団, 1964 日本道路公団試験所報告(昭和39年)

200

Odenstad, S., 1948 "Stresses and Strains in the Undrained Compression Test" *Geotechnique* Vol. 1

大崎順彦, 1961 "基礎構造" 工口社

Passer, W., 1935 "Druckverteilung durch eine elastische Schichte" *Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa*, Vol. 144

Seed, R.B., and Chan, C.K., 1959 "Structure and Strength characteristics of Compacted clays" *Proc. Am. Soc. Civil Engng.* 85 No. 5

Shepherd, W.M., 1935 "Stress Systems in an Infinite Sector." *Proc. Roy. Soc. London A* 148.

Skempton, A.W., 1948 "A Study of the Immediate Triaxial Test on Cohesive Soils" *Proc. 2nd Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rotterdam*

Sneddon, I.N., 1951 "Fourier Transforms" McGraw-Hill New York

Somers, G. F., and Vesic, , 1961 "Stress Distribution beneath Pavements of Different Rigidities" Proc. 5th Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Paris

Steinbrenner, W., 1934 "Tafeln zur Setzungsrechnung" Die Straße, Vol. 1

竹下春見, 1955 "舗装は下からこわれる" 土と基礎 Vol. 3, No. 9

竹下春見, 1957 "既設道路の路床状態に関する調査研究" 土木研究所報告 95号

竹下春見, 1958 "アスファルト舗装について (6)" 道路建設 No. 130

竹下春見, 石田滋, 1960 "道路舗装の設計" 土木社

竹下春見, 1965 "舗装厚の取決めについて" 道路 11月号

竹下春見, 1966 "解説アスファルト舗装" アスファルト, 9巻 50号

Timoshenko and Goodier, J. N., 1951 "Theory of Elasticity"

222  
2nd ed. McGraw-Hill, New York

Tranter, C.J., 1948 "The Use of the Mellin Transform in Finding the Stress Distribution in an Infinite Wedge" Quart. Journ. of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 1

Turnbull, W. J., Maxwell, A.A., and Ahlvin R.G., 1961 "Stresses and Deflections in Homogeneous Soil Masses" Proc. 5th Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Paris

土田嘉男, 岡中利和利, 堀井隆 1963 "及び地盤変位に対する肩構造の考之方" 第7回日本道路会議論文集

堀下昭, G.G. マヤ木ヲ, 1967 "岩盤土層表層における弾性変位について" 土木学会論文集 第143号

Watson, G.N., 1922 "Bessel Function" Cambridge University Press

Weihen. C., 1942 "Halbebene mit periodisch gewelltem Rand" Z.A.M.M. 22, Nr 1

Wu, T.H., 1966 "Soil Mechanics" Allyn and Bacon, Inc. Boston