

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	CIP法による極端な密度差をもつ物質同士の衝突解析
Title(English)	
著者(和文)	田島雅和
Author(English)	
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第4139号, 授与年月日:1999年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第4139号, Conferred date:1999/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

CIP 法による極端な密度差をもつ 物質同士の衝突解析

東京工業大学 総合理工学研究科
創造エネルギー専攻

田島 雅和

目次

第1章 序論	1
第2章 CIP 法について	4
2.1 基礎方程式	4
2.2 1次元の場合	4
2.2.1 1次元 CIP 法	5
2.2.2 変数変換を用いた界面捕獲法(ディジタイザー)	11
2.2.3 log 関数による変数変換	13
2.2.4 有理関数 CIP 法	14
2.2.5 陰的 CIP 法	16
2.2.6 非移流相の解法	19
2.2.7 1次元計算のまとめ	21
2.3 2次元 CIP 法	21
2.3.1 非移流相	22
2.3.2 移流相	22
2.4 3次元 CIP 法	24
2.4.1 非移流相	25
2.4.2 移流相	26
2.5 流体方程式の統一解法	27
2.5.1 圧縮性流体と非圧縮性流体	28
2.5.2 C-CUP 法	29
第3章 シューメーカー・レビー第9彗星と木星との衝突シミュレーション	32
3.1 序論	32
3.2 軸対称2次元による彗星核の木星衝突シミュレーション	35
3.2.1 計算条件	35
3.2.2 状態方程式	37
3.2.3 計算結果	38

3.3	3次元による彗星核の木星衝突シミュレーション	42
3.3.1	計算条件	42
3.3.2	計算結果	43
3.4	衝突痕の生成シミュレーション	48
3.4.1	序論	48
3.4.2	計算条件	49
3.4.3	計算結果	50
3.5	流星について	60
3.6	結論	63
第4章	小型船体のスラミング現象のシミュレーション	65
4.1	序論	65
4.2	計算条件	66
4.3	計算結果	69
4.3.1	密度の等高線図	69
4.3.2	圧力分布の相似則	74
4.3.3	最大水撃圧の衝突速度依存性	76
4.3.4	最大圧力の水撃角依存性	77
4.3.5	圧力分布の水撃角依存性	78
4.3.6	最大水撃圧の時間発展	82
4.3.7	最大水撃圧の空気密度依存性	84
4.3.8	最大水撃圧の船体落下距離依存性	86
4.4	結論	89
第5章	結論	91
APPENDIX A	CIP法の2次元化(TYPE-B, TYPE-C)	94
APPENDIX B	運動エネルギーの変化の違いについて	99
APPENDIX C	渦の強度分布の時間変化	109
APPENDIX D	ケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性の成長率	112

APPENDIX E	密度の計算誤差の検証	116
APPENDIX F	彗星核の消滅位置を決める要因について	121
参考文献		124
業績リスト		127
謝辞		129

第1章 序論

コンピュータ・シミュレーションは、ここ数十年の間に急速な進歩を遂げた計算機とその関連技術とともに大きく発展してきている。例えば流体力学においては、このような計算機による数値解法によって従来は解くことが出来なかった様々な難問にも数値的な解が与えられるようになってきている。このようなことから、コンピュータ・シミュレーションは理論、実験につぐ第三の研究法として認められるようになりつつある。しかしながら、おそらくは一千年以上もの歴史を持つと思われる理論や実験的な研究と比較すると、シミュレーションの歴史はあまりにも短い。極端な言い方をすればまだまだ海のものと山のものとも知れないような段階であろう。それにもかかわらず、第三の手法などともてはやされているのは他の手法と比べて経済性、効率性の面で優れているためと、その将来性に対して大きな期待を寄せられているためであろう。この新しい研究法が果たして理論や実験と肩を並べ、あるいは追い抜いてしまうほどにまで成長するのか、それとも単に一つの時代の流行程度で終わってしまうのかはひとえに今後の研究にかかっている。

本研究では計算流体力学の問題として、極端な密度差をもつ物質同士の衝突現象を解くのだが、密度差の大きな物質を同時に解く場合(なにも密度差が大きい場合だけに限らないが)にはとにかく解の正確さが要求される。例えば、密度の大きい物質側で何らかの誤差が発生したとする。この誤差が例えば本来の密度の 10^{-5} 程度の小さいものであったとしても、密度が10000分の1の物質側から見れば 10^{-1} 程度の非常に大きな誤差になってしまうのである。これでは正しい計算結果が得られなくなってしまえばかりでなく、解が発散して計算が途中で止まってしまうといったことにもなりかねない。よって、このような問題を解く場合には特に高精度な数値解法が必要なのである。

さらに、大きな密度差を持つ物質同士の界面は当然のことながら不連続である。この不連続面を数値的に安定に(数値振動を起こさない)、シャープに(数値拡散を発生させない)、正確に(界面の位置を狂わせない)解こうとするのは数値解法にとって非常に困難な問題である。しかしながら、密度差の大きな物質を扱うためにはこれらの条件を満たしてくれる計算手法が必要である。

計算流体力学において、大きな密度差を扱う問題が特殊な例でごく少ないのであれば特に問題は無いかもしれない。その問題に合わせてそれ専用の計算手法を開発すれば良いのである。しかし、実際にはこのような問題は多い。飛行機の翼や自動車の周りの空気の流れなどのように、特に実用的な問題はたいていこれに含まれてしまうのではないだろうか。故にこのような問題を解くための計算手法、ある特定の問題用ではなくあらゆる問題に適用できる計算手法の開発や改良、さらに、その手法を実際に適用して問題を解くといったような研究が重要である。

本研究では極端な密度差をもつ物質同士の衝突現象としてシューメーカー・レビー第 9 彗星の木星衝突と、船体と水面との衝突現象である小型船体のスラミング現象を取り上げる。これらのシミュレーションを実行するための計算手法としては固体、液体、気体を同時に解くことができ、なおかつ非常に高精度な手法である CIP 法、C-CUP 法を用いる。しかもこれらの計算手法は高精度な割には計算負荷が小さいという特長を持っている点でも非常に有効である。

本論分の構成は以下の通りである。まず、第 2 章では CIP 法について、最近の研究成果などを交えながら説明する。第 3 章ではシューメーカー・レビー第 9 彗星の木星衝突シミュレーションについて述べる。この現象では彗星核(彗星の本体)とその周囲の木星大気との密度差は 10000 倍以上にもなる。以前にも CIP 法によるシミュレーションが行われていたがそれは軸対称 2 次元による計算であり、3 次元での計算が必要とされていた。よって本研究では 3 次元で計算を行い、軸対称 2 次元と 3 次元計算とを比較して彗星核の振る舞いの様子、また木星大気中での核の消滅位置が

ほとんど同じになることを確認する。また、この衝突現象によって木星面上に巨大な衝突痕が出現したが、その成因についてはよく分かっていない。本研究ではこの衝突痕が彗星衝突時に核の近傍に発生した渦で説明できることを明らかにする。また、この SL9 の木星衝突に似た現象として規模は大幅に小さい現象であるが流星がある。流星は彗星の残した塵(小惑星起源のものもあるが)が地球大気に飛び込んで光る現象であるが、中には末端で爆発的に増光するような流星も存在する。さらに、流星が流れた後に流星痕と呼ばれる光る雲のようなものがある。このような現象の説明も試みる。第 4 章では小型船体のスラミング現象のシミュレーションについて述べる。このシミュレーションにおいては空気と水の密度差が 1000 倍程である。この計算により従来の理論では無視されがちであった空気の影響が、スラミング現象においていかに重要なものであるかを明らかにする。最後に第 5 章では全体のまとめを行う。

第2章 CIP 法について

2.1 基礎方程式

本研究ではシューメーカー・レビー第 9 彗星の木星衝突と、小型船体のスラミング現象のシミュレーションを行うが、これらは流体の方程式を数値的に解くことで実現される。そこで第 2 章では流体の方程式を数値的に解析するための計算手法について説明を行う。

まず、一番単純な非粘性流体の方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{f} = \mathbf{G} \quad (2.1.1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (\rho, \mathbf{u}, p) \\ \mathbf{G} &= \left(-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, -\frac{\nabla p}{\rho}, -\rho C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

で、 ρ は密度、 $\mathbf{u}$ は速度、 p は圧力、 C_s は音速である。これらの式はそれぞれ密度、運動量、エネルギーの保存則から導かれる。これらの方程式を数値的に解いていけば良いわけであるが、そのための計算手法は様々なものが提案されている。それらの数ある数値解法の中から、本研究では CIP(Cubic-Interpolated Pseudoparticle/Propagation)法[1,2]を採用する。そこで、本章では CIP 法で式(2.1.1)を解く方法について説明する。

2.2 1次元の場合

CIP 法は一般の双曲型方程式(流体の方程式はこの型に含まれる)を統一的に解く事が出来るアルゴリズムである。CIP 法の大きな特徴は、移流項とその他の項(非移流

項)を分離して解くということである。これにより、CIP 法を用いて流体コードを構築すると、圧縮性流体と非圧縮性流体を同時に解く事も可能となる。さらに、簡潔で、数値拡散も少なく、多次元への拡張も容易であるなどといった特長も備えている。まずは 1 次元の CIP 法についてその原理を説明する。

1 次元では式(2.1.1)は次のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = G \quad (2.2.1)$$

この式(2.2.1)を 2 つの相に分離する。すなわち、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.2.3)$$

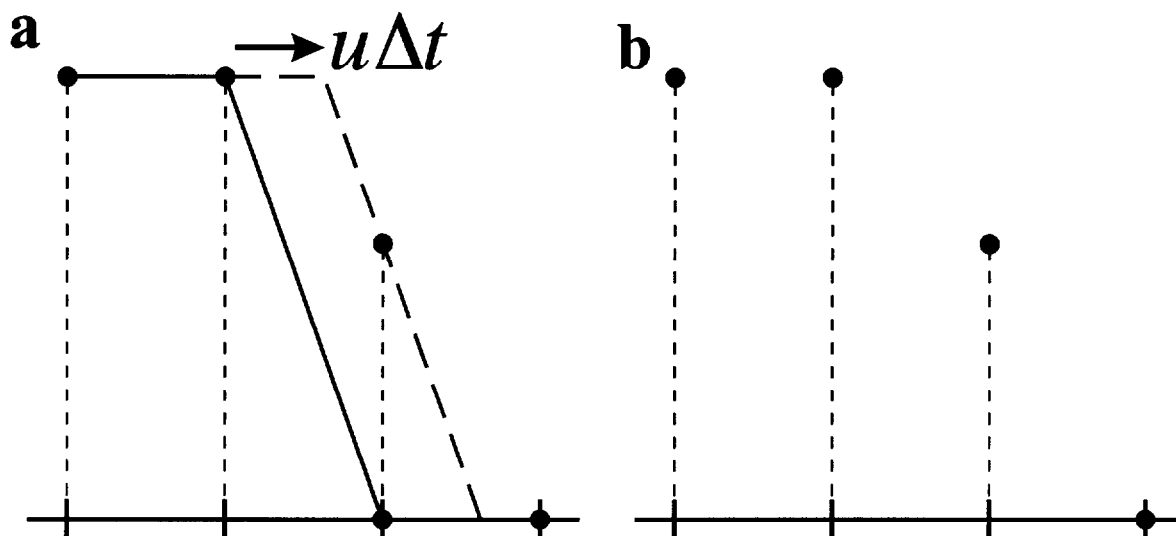
の 2 つで、式(2.2.2)は非移流相、式(2.2.3)は移流相である。CIP 法を用いて双曲型方程式を解く場合にはこのようにして方程式を非移流相と移流相とに分離し、先に非移流相を解き、次に移流相の計算を行う。ここでは便宜上、先に移流相の計算方法について説明する。

2.2.1 1 次元 CIP 法

ここでは式(2.2.3)を数値的に解くことを考える。式(2.2.3)は移流方程式、あるいは波動方程式などと呼ばれ、数値的に解くのが困難な方程式である。そこで提案されたのが CIP 法であり、本節では 1 次元の場合について、この CIP 法の原理を説明する。

u が定数の場合、式(2.2.3)は時刻 0 の時の f のプロファイルがそのままの形を保ちつつ速度 u で伝播するという解を与える。例えば、図 2.1(a)の実線は Δt 秒後には破線のように移動する。図中の黒丸は格子点上における解である。数値計算においては f の値を連続的に与えることは不可能であるので、このように空間、あるいは時間を格子で切り、その格子点上で値を離散的に与えることになる。図 2.1(a)では移流

後の黒丸も破線のような正しい解と一致していることが分かる。しかし、もし図 2.1(b)のように破線がない場合、図 2.1(a)の破線のようなプロファイルを想像することが出来るだろうか。おそらくそれは不可能であり、普通の人ならば図 2.1(c)のように各点を直線で結ぶであろう。すると元々は図 2.1(a)のようにかなり急な角度を持っていた f のプロファイルは、たちまち緩やかな角度になり、空間方向に広がりを持ってしまうことになる。すなわち数値拡散が発生してしまうのである。図 2.1(c)のようなプロセスは 1 次精度風上差分法である。一方、補間に 2 次多項式を用いると、数値振動が発生する。このようなプロセスが Lax-Wendroff 法[3]、または Leith 法と呼ばれる手法である(なお、名前が 2 つあるのは、前者が圧縮性流体で、後者が非圧縮性流体でそれぞれ独立に提案されたためである)。



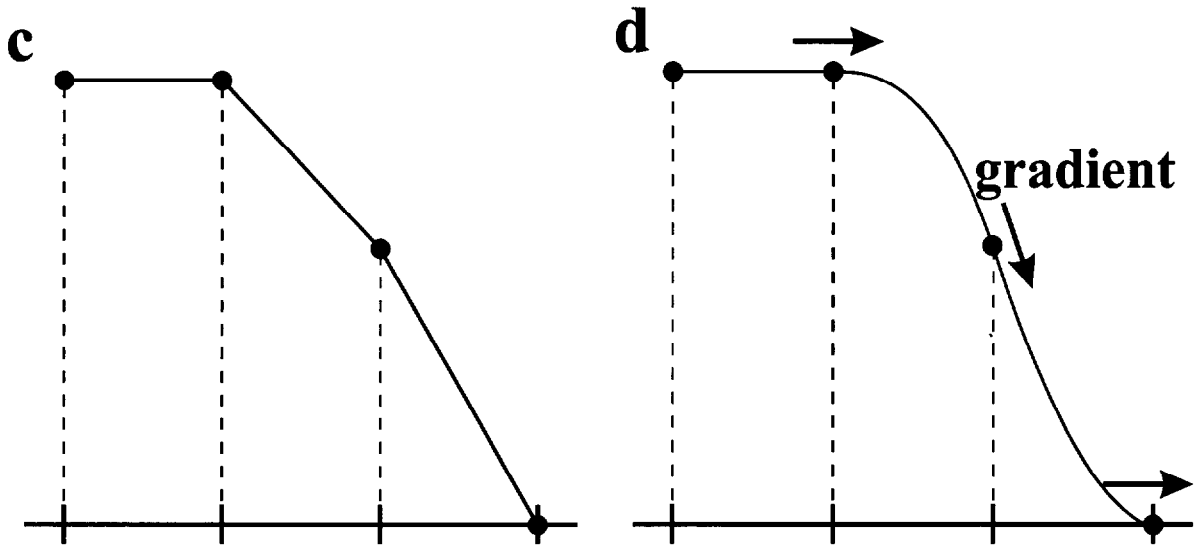


図 2.1 CIP 法の概念図

CIP 法では各格子点間を 3 次スプライン関数を用いて補間する。ただし、通常のスプライン法では近似関数を値、1 階微分、2 階微分の連続性で決定するのに対し、CIP 法では上記のような人工的な滑らかさ(高階微分の連続性など)からではなく、元の方程式を満足するように決定する。そのために、各格子点上には値 f だけでなく 1 階微分値 f' も与え、2 階微分の連続性を犠牲にし、式(2.2.3)を空間微分した式、

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + u \frac{\partial f'}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} f' \quad (2.2.4)$$

を f' を決定する方程式とする。もし u が定数ならば、式(2.2.4)は式(2.2.3)と同じであり、 f' も速度 u で伝播するだけである。式(2.2.3)(2.2.4)により、 f と f' の時間発展を捉えるわけである。図 2.1(d)のように f' を矢印で表示した場合、比較的容易に実線のプロファイルを構築することが出来る。そしてこの解は図 2.1(a)の実線の初期プロファイルに非常に近くなっている。このように各格子点において、値だけでなく空間微分値まで与えるというのが他の手法にはない CIP 法の大きな特徴である。

3 次多項式を構築するためには 4 つの情報が必要になるのだが、CIP 法では各格子点上で f と f' の値を与えるため、各格子点間を次のような 3 次多項式で補間するこ

とが可能である。

$$F_i(x) = a_i X^3 + b_i X^2 + f'_i X + f_i \quad (2.2.5)$$

ここで、 $X = x - x_i$ である。未知数は a_i と b_i の2つであるが、これについては風上の格子点における $F_i(x)$ と $dF_i(x)/dx$ の連続性によって決定する。具体的には、 $u \geq 0$ の場合、次のようにする。

$$\begin{aligned} F_i(x_{i-1}) &= f_{i-1} \\ \frac{dF_i(x_{i-1})}{dx} &= f'_{i-1} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

式(2.2.5)(2.2.6)から a_i 、 b_i は

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{(f'_i + f'_{i-1})}{\Delta x^2} - \frac{2(f_i - f_{i-1})}{\Delta x^3} \\ b_i &= \frac{3(f_{i-1} - f_i)}{\Delta x^2} + \frac{(2f'_i + f'_{i-1})}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

ただし、 $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

となる。また、 $u < 0$ の場合は式(2.1.4)で $i-1$ を $i+1$ に置き換えて計算するが、結局は式(2.2.7)で $i-1$ が $i+1$ に、 Δx が $-\Delta x$ に置き換わるだけである。まとめると、

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{(f'_i + f'_{iup})}{\Delta x^2} + \frac{2(f_i - f_{iup})}{\Delta x^3} \cdot i \operatorname{sgn} \\ b_i &= \frac{3(f_{iup} - f_i)}{\Delta x^2} - \frac{(2f'_i + f'_{iup})}{\Delta x} \cdot i \operatorname{sgn} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

ただし、 $i \operatorname{sgn} = -\operatorname{sgn}(u)$ 、 $iup = i - i \operatorname{sgn}$ 、 $\Delta x = |x_{iup} - x_i|$

となる。ここで、 $\operatorname{sgn}(u)$ は $u \geq 0$ ならば $+1$ を、 $u < 0$ ならば -1 を返す関数である。

こうして補間式が求まったので、 f_i 、 f'_i の時間発展は

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} &= F_i(x_i - u\Delta t) \\ &= a_i \xi^3 + b_i \xi^2 + f'_i \xi + f_i^n \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned}
 f_i'^{n+1} &= \frac{dF_i(x_i - u\Delta t)}{dx} \\
 &= 3a_i\xi^2 + 2b_i\xi + f_i''^n
 \end{aligned}
 \tag{2.2.10}$$

ただし、 $\xi = -u\Delta t$

と求まる。こうして得られた f^{n+1} を f^n に、 $f_i'^{n+1}$ を $f_i''^n$ に置き換えて計算を繰り返せば f の時間発展を求めることが出来る。この補間の様子を図 2.2 に、また CIP 法による計算例を図 2.3 に示す。

図 2.2 中の白丸が格子点上の値である。時刻 $t + \Delta t$ の位置 x_i における白丸は時刻 t のときの黒丸が移動してきたと考えられるが、その値は時刻 t においては計算されていない。そこでこの黒丸の値を求めるために補間が必要になるのである。

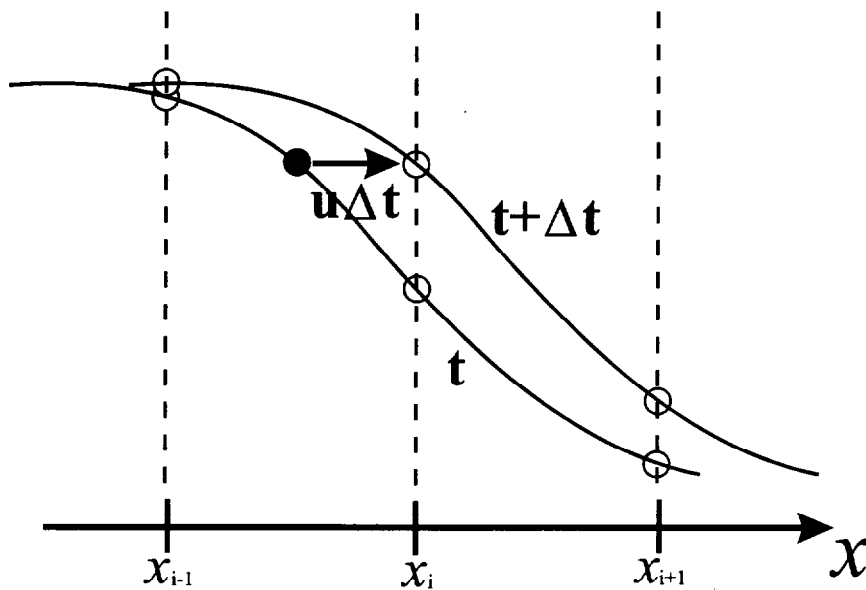


図 2.2 補間の説明図

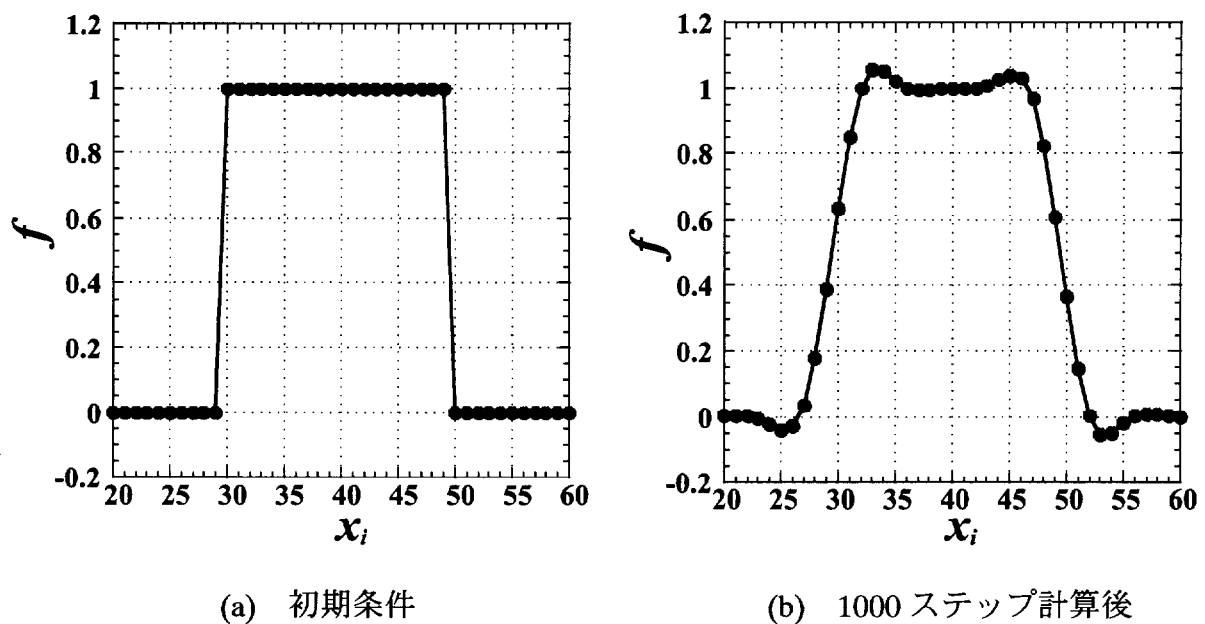


図 2.3 CIP 法による矩形波の伝播計算例

図 2.3 の計算では、格子数は 100 の等間隔格子(格子間隔 $\Delta x = 1.0$)とし、 f は格子番号 30~49 では $f = 1$ 、その他では $f = 0$ の矩形波とした。また、速度は $u = 2.0$ で一定とし、時間間隔は $\Delta t = 0.1$ である。従って、CFL 数は $CFL = 0.2$ である。また、境界条件は周期境界とした。以上のような条件で 1000 ステップの計算を行った。図 2.3 では矩形波の付近のみを拡大して表示している。表示していない部分では f の値は 0 である。図 2.3(b)では $CFL = 0.2$ で、1000 ステップの計算後なので矩形波は 200 格子分移動して元の位置に戻ってきている。図を見ると、多少のオーバーシュート、アンダーシュートが見られるが数値拡散も少なく、ほぼ初期条件の矩形波の形を保っていることが分かる。またこれらのオーバーシュートなどは計算初期の段階で形成され、その後時間的に増大するようなことはない。

この計算例からも分かるように、CIP 法は移流方程式の解法として有効である。しかし、例えば異なる流体間の界面を正確に捉えたいといったような例題を解く場合にはこの程度の数値拡散でも問題になることもある。そこで次の節ではこの問題点の解消法について説明する。

2.2.2 変数変換を用いた界面捕獲法(ディジタイザー)

CIP 法は数値拡散が非常に小さいという特長があり、界面をシャープに捉えることが出来る。しかし、本研究で取り上げる船体のスラミング現象のシミュレーションでは、船体下部表面における衝撃圧を求めるため、固定格子上を移動する船体の表面を 1 格子で捉える必要がある。このような場合には CIP 法よりもさらに数値拡散の小さいスキームが求められる。この節では、CIP 法を利用した界面を非常にシャープに捉えるのに効果的な計算手法[4,5]について述べる。

界面追跡のための計算手法も幾つか存在する(例えば[6,7]など)が、代表的なものに密度関数法と呼ばれるものがある。この手法では、例えばある物体では 1、その他では 0 という値をとる密度関数(density function)、あるいは色関数(color function)と呼ばれるものの移流によって界面を追跡する。界面追跡の精度は密度関数の移流方程式を解く精度で決まる。従って、密度関数の移流方程式を解く際に安定かつ精度の良い計算手法の適用が重要となり、数値拡散が小さく、かつ安定した手法が望まれる。

ここではこの密度関数法を用いる。密度関数を ϕ として、

$$\begin{cases} \phi = 1 & (\text{fluid 1}) \\ \phi = 0 & (\text{others}) \end{cases} \quad (2.2.11)$$

のように定義する。この密度関数は次の移流方程式に従う(ここでは 1 次元で考える)。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2.2.12)$$

この方程式を CIP 法で解けばよいのだが、そのままでは図 2.3 の計算例のように数値拡散が発生する。そこで次のような変数変換を行う。

$$F_{\phi} = \tan[0.99\pi(\phi - 0.5)] \quad (2.2.13)$$

$$\phi = \frac{\tan^{-1} F_{\phi}}{0.99\pi} + 0.5 \quad (2.2.14)$$

ここで、式(2.2.13)(2.2.14)中の定数 0.99 は F_{ϕ} が無限大になってしまうのを防ぐため

に掛けるもので、1 に近い値であれば良い。式(2.2.13)の変換により F_ϕ はほぼ $-\infty$ から ∞ の値をとる。変換された新しい関数 F_ϕ も次の移流方程式に従う。

$$\frac{\partial F_\phi}{\partial t} + u \frac{\partial F_\phi}{\partial x} = 0 \quad (2.2.15)$$

この式(2.2.15)を CIP 法で解くわけであるが、この場合も僅かながらではあるが数値拡散が発生してしまう。しかし、移流後の F_ϕ を式(2.2.14)によって ϕ に戻すとほとんどの値は $\phi = 0$ か $\phi = 1$ に非常に近い値となるのである。普通は F_ϕ を計算しておき、必要ときに ϕ に逆変換してやればよい。また、CIP 法では1階微分値も求める必要があるが、この変換を用いる場合には式(2.2.15)を空間微分して得られる式を用いることになる。このようにすることで界面を非常にシャープに捉えることが簡単に出来るのである。この変数変換を用いた矩形波の伝播の計算例を図 2.4 に示す。

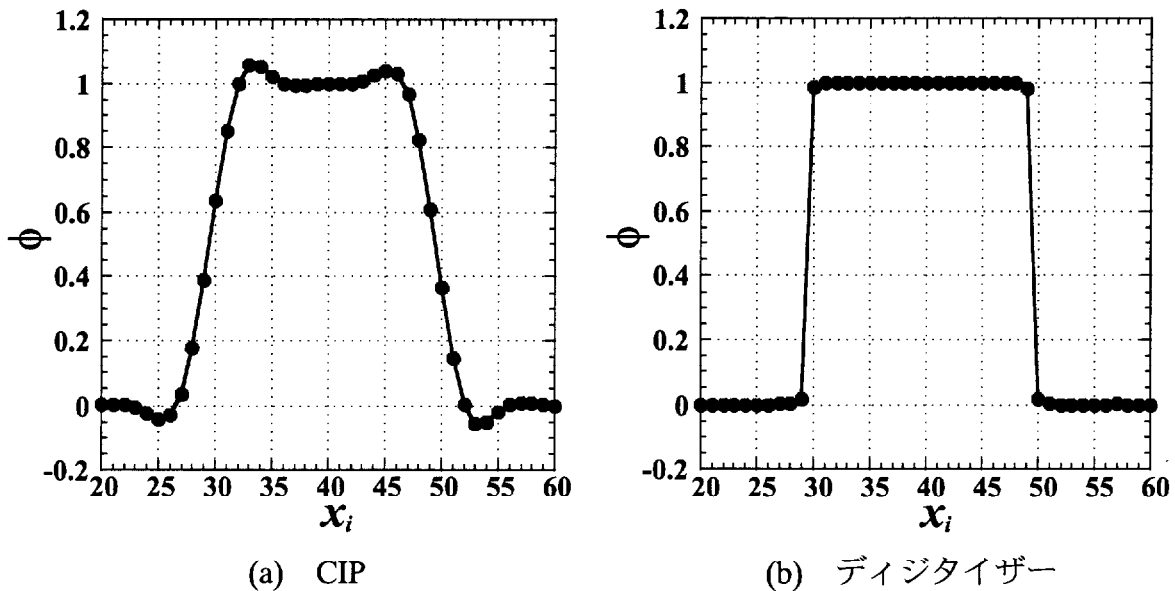


図 2.4 変数変換を用いた矩形波の伝播計算例

この計算例における初期条件などは先ほどの図 2.3 の計算例と全く同じである。また、図 2.4(a)は図 2.3(b)と同じものであるが、比較のために再び掲載する。図を見て

のとおり、式(2.2.13)(2.2.14)の変数変換を利用することで数値拡散が無くなり、 ϕ の不連続面がまさに 1 格子で捉えられていることが分かる。また、CIP 法で解く際に見られるオーバーシュートなども存在しない。

このようにタンジェント関数による変数変換は、1 か 0 の値しかとらない密度関数によって界面を追跡する場合には非常に有効である。この計算手法はディジタイザーと呼ばれる。

2.2.3 log 関数による変数変換

前節では $\tan$ 関数を用いて変数変換を行い、界面をシャープに捉える方法について説明したが、このような変数変換で使われる関数にもう一つ $\log$ 関数がある。この $\log$ 関数を用いた変数変換についてふれておく。この変数変換が用いられるのは主に大きな密度差をもつ流体の計算である。図 2.3 に示したように CIP 法ではアンダーシュートがあるが、これがもし密度の小さい流体で発生すると密度が負になってしまうといったことが起こりうる。 $\log$ 関数による変数変換はこのような現象を防ぐために用いられる。具体的には元の変数を f とすると次のように変換する。

$$F = \log(f) \quad (2.2.16)$$

逆変換は次の式である。

$$f = \exp(F) \quad (2.2.17)$$

前節のディジタイザーと同じく普段は F を計算し、必要なときに f に戻してやればよい。また、1 階微分値についても式(2.2.16)に応じて変換するのも同様である。式(2.2.17)を見ての通り、逆変換を $\exp$ 関数で行うので f の値が負になることは絶対ない。

この $\log$ 関数を用いた変数変換による矩形波の伝搬の計算例を図 2.5 に示す。初期条件などは図 2.3 のものと同じであるが、今回は $\log$ 関数を用いるため、 f の値は 1 か 0 ではなく、1 か 10^{-3} になっているのが異なる点である。図 2.5(a)は普通の CIP 法

による計算結果、(b)が $\log$ 関数で変数変換して計算した結果である。図 2.5(b)を見るとアンダーシュートが無くなり、 f の値が負にならなくなっているのが分かる。ただし、オーバーシュートについては逆に大きくなってしまっているのが欠点である。

なお、本研究ではこの $\log$ 関数による変数変換はシューメーカー・レビー第9彗星の木星衝突シミュレーションで用いられている。

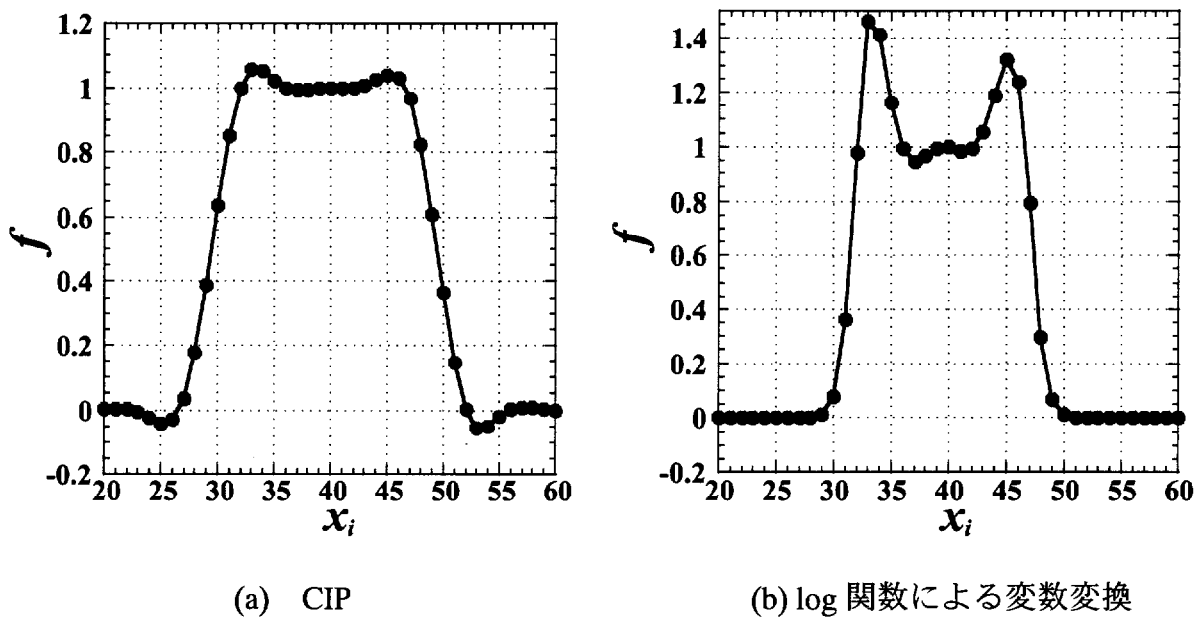


図 2.5 $\log$ 関数による変数変換を用いた矩形波の伝搬

2.2.4 有理関数 CIP 法

2.2.2 節で述べたディジタイザーは 1 か 0 の値しかとらない密度関数や、密度が変化しない非圧縮性流体を解く場合には非常に有効である。しかし、界面を挟んだそれぞれの領域で密度が時間的に変化する場合にはどうするか、といった問題が生じてくる。この場合にも同様の計算手法を用いることが可能であるが、オーバーシュートをなくすためにもより精巧な手法を考えたほうがよい。そこで開発されたのが有理関数 CIP 法[8,9]と呼ばれる手法である。本研究ではこの有理関数 CIP 法は用い

ていないが、新しい計算手法でもあるので簡単に説明することにする。

有理関数 CIP 法では次のような有理関数を用いて格子点間を補間する。

$$F_i(x) = \frac{aX^3 + bX^2 + cX + d}{1 + \alpha BX} \quad (2.2.18)$$

ここで、 $X = x - x_i$ で、 α はスイッチングパラメーターである。 $\alpha = 0$ の場合、式(2.2.18)

は式(2.2.5)の CIP 法による補間式そのものであり、 $\alpha = 1$ ならば凹凸を保存するスキームになる。式(2.2.18)の各係数は以下のようにして決定する。初めに、次の関数、

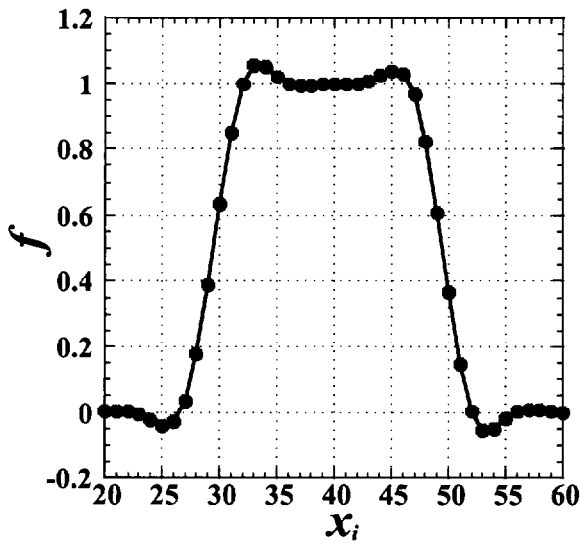
$$F_i(x) = \frac{bX^2 + cX + d}{1 + BX} \quad (2.2.19)$$

に対し、格子点 i と iup (風上側の格子点)において f と f' が連続であるという条件により b 、 c 、 d 、 B を決定する。次に、式(2.2.18)に対し、上記の連続性と先に求めた B の値を用いて a 、 b 、 c 、 d を決定する。結局、各係数は次のようになる。

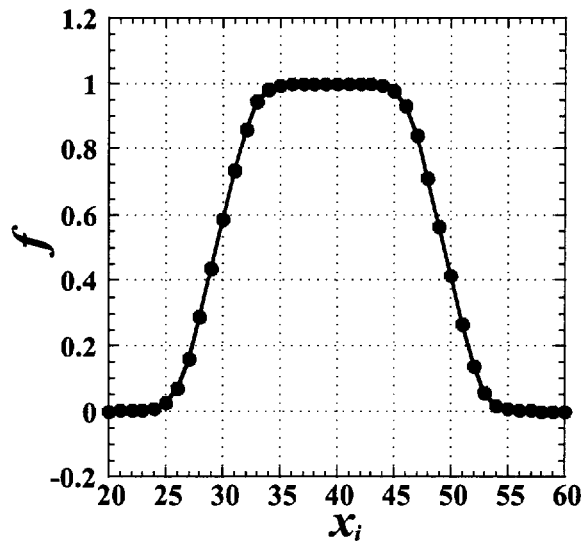
$$\begin{aligned} a &= [f'_i - S + (f'_{iup} - S)(1 + \alpha BD)] / D^2 \\ b &= S\alpha B + (S - f'_i) / D - aD \\ c &= f'_i + f_i \alpha B \\ d &= f_i \\ B &= [(S - f'_i) / (f'_{iup} - S) - 1] / D \\ S &= (f_{iup} - f_i) / D \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

ここで、 $D = -\text{sgn}(u)\Delta x$ 、 $iup = i - \text{sgn}(u)$ で、関数 $\text{sgn}(u)$ は $u \geq 0$ ならば $+1$ を、 $u < 0$ ならば -1 を返す関数である。

この有理関数 CIP 法による計算例を示す。初期条件などは図 2.3 の計算例と全く同じであるのでここでは省略する。



(a) CIP 法



(b) 有理関数 CIP 法

図 2.6 有理関数 CIP 法による矩形波の伝搬

図 2.6(a)は普通の CIP 法による計算例で、比較のために再び掲載した。(b)の有理関数 CIP 法による計算結果を見てすぐに分かるのは、CIP 法による計算結果で現れているオーバーシュート及びアンダーシュートが全く見られないことである。このように、有理関数 CIP 法を用いることにより、単調で凹凸を保存するスキームが得られるのである。

2.2.5 陰的 CIP 法

これまでに述べてきた CIP 法は陽的なものであった。そのため、CFL 数に制限を受けることは免れがたい。例えば、分布関数を用いてプラズマの運動を計算する場合、ごく少数ではあるが非常に高速の粒子が存在し、それによって時間間隔を非常に小さくせざるをえなくなって計算が進まなくなってしまうといったことが起こる。高速の粒子の運動を詳しく調べたいという場合にはそれはそれで仕方がないのだが、速度の遅い粒子の運動を調べたい場合には詳しく調べる必要のない少数の速い粒子

によって計算が妨げられるのは大きな問題である。このような場合には陰的な数値解法を用いると有利である。陽的な数値解法は現在の値を求めるのに過去の値を用いるが、陰的な数値解法は未来の値から現在の値を求める。一般的に CFL 数にはよらずに安定な計算が行える。この節では陽解法である通常の CIP 法を陰解法化した陰的 CIP 法[10]について簡単に触れておく。

陽的な CIP 法については式(2.2.8)～(2.2.10)に示した通りだが、これはプロファイルを過去から現在へとシフトさせることに相当する。これに対し、陰的な CIP 法ではプロファイルを未来から現在へとシフトさせる。そこで、式(2.2.8)～(2.2.10)において、 f と f' (f^n と f'^n) を f^{n+1} と f'^{n+1} に、 x を $-x$ に置き換えて計算すると、次のような結果が得られる。

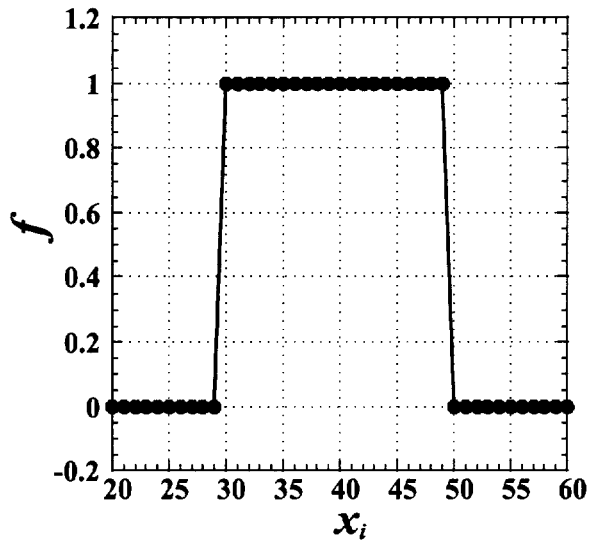
$$\begin{aligned} f_i^{n+1} &= (\kappa+1)^{-3} \left[-\kappa(\kappa+1) \left(\kappa f_{iup}'^{n+1} - f_i'^n \right) D + \kappa^2 (\kappa+3) f_{iup}^{n+1} + (3\kappa+1) f_i^n \right] \\ f_i'^{n+1} &= (\kappa+1)^{-3} \left[(\kappa+1) \left\{ (\kappa-2) f_{iup}'^{n+1} - (2\kappa-1) f_i'^n \right\} + 6\kappa (f_{iup}^{n+1} - f_i^n) / D \right] \\ \kappa &= -u\Delta t/D \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

ここで、 $D = -\text{sgn}(u)\Delta x$ 、 $iup = i - \text{sgn}(u)$ で、関数 $\text{sgn}(u)$ は $u \geq 0$ ならば $+1$ を、 $u < 0$ ならば -1 を返す関数である。

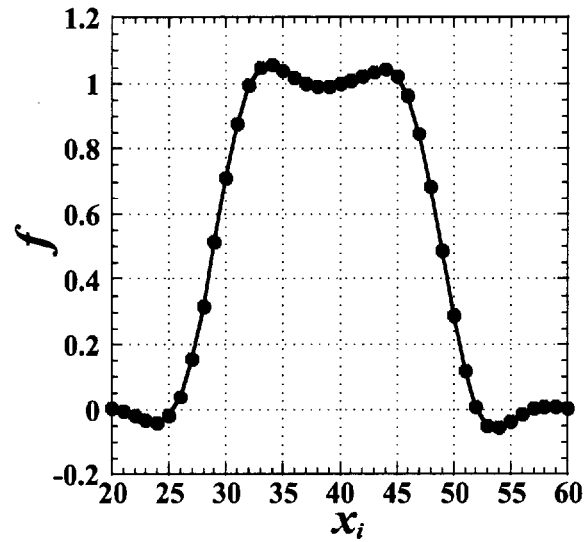
この陰的 CIP 法の大きな特長として陰解法でありながら行列式などを解く必要がなく、あたかも陽解法のように計算できるという点がある。これは式(2.2.21)を見ての通り、例えば $u > 0$ の場合、 i と $i-1$ の情報だけで次の時刻の i の情報が得られるといったように CIP 法が単純な 2 点連結であるということによる。このことにより、陰解法でありながら風上側から解いていくことで直接計算できるのである。また、速度の符号が変化する場合などについても拡張は容易である。

陰的 CIP 法による矩形波の伝搬の計算例を次に示す。初期条件、境界条件は 2.2.1 節の図 2.3 におけるオリジナルの CIP 法の計算例と同様である。今回は図 2.3 と同様に CFL=0.2 での計算例と、陰的な計算手法であるため高 CFL 数での計算例を紹介するが、その場合はステップ数を少なくすることにより波が同じ距離だけ伝搬するよ

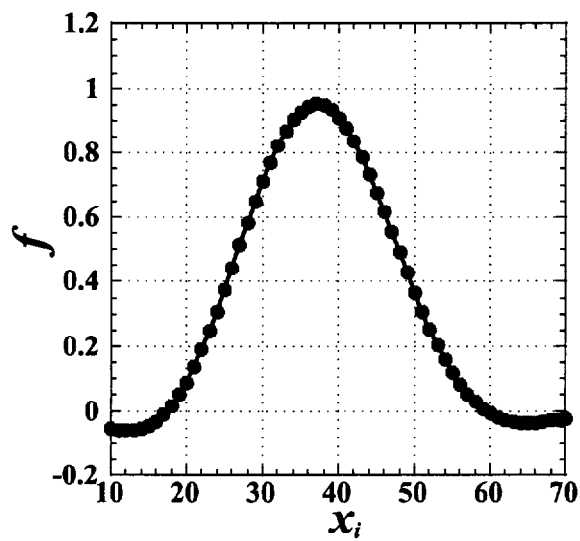
うにしてある。



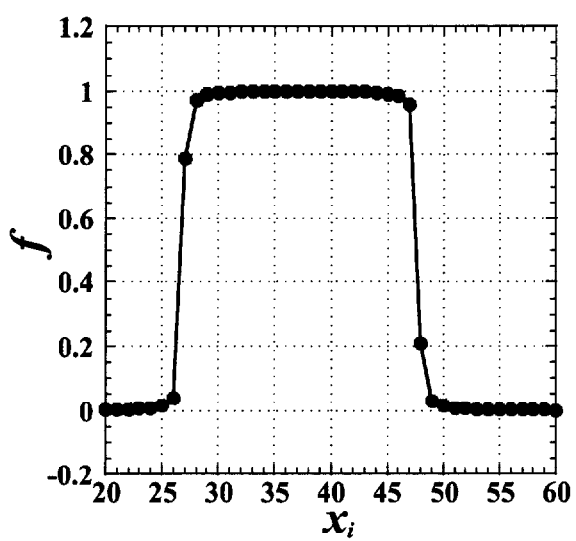
(a) 初期条件



(b) CFL=0.2



(c) CFL=5.0



(d) CFL=5.0 + デジタルフィルター

図 2.7 陰的 CIP 法による計算例

図 2.7 の計算例を見ると、(b)の CFL=0.2 の場合には陽的な CIP 法と同様の結果が得られているのが分かる。(c)の CFL=5.0 の場合には拡散が激しく、他の図と同じ領域で表示すると図からはみ出してしまうほどであるが計算自体は安定に行えている。

言うまでもなく、陽的な CIP 法ではこのような CFL 数では解が発散してしまい計算不可能である。さらに、驚くべきことに、このような高 CFL 数でも 2.2.2 節で述べたデジタイザーを併用すると、(d)のようにほぼ完全な解を得ることができる。このように陰的な CIP 法は高 CFL 数でも安定であり、正確な解が得られることが分かる。しかし、いくら陰的 CIP 法が低 CFL 数でも高 CFL 数でも安定に解けるからといって、陽的 CIP 法がもはや不要であるといったことはもちろんない。低 CFL 数のみを扱う計算の場合には陽的 CIP 法のほうが計算負荷の面から考えて有利であり、陰的 CIP 法で CFL 数を大きくして計算ステップを減らそうとしても数値拡散が大きくなってしまっただけである。要するに、問題によってうまく使い分けることが重要なのである。本研究のシミュレーションでも従来の陽的な CIP 法を用いて計算を行っている。

2.2.6 非移流相の解法

ここまでは式(2.2.3)の移流方程式を解くための計算手法について説明してきた。そして、CIP 法がこの移流方程式を解くのに有効な計算手法であることを示したが、式(2.2.1)のような一般的な双曲型方程式を解くためには移流相だけでなく非移流相も解かねばならない。本節ではこの非移流相の解き方について述べる。

まず、今解こうとしている方程式は式(2.2.1)であるが、これをもう一度書く。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = G \quad (2.2.22)$$

また、式(2.3.2)の空間微分は、

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + u \frac{\partial f'}{\partial x} = G' - f' \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2.23)$$

である。式(2.2.22)(2.2.23)を 2 つの相に分離する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G \quad (2.2.24)$$

$$\frac{\partial f'}{\partial t} = G' - f' \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2.25)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.2.26)$$

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + u \frac{\partial f'}{\partial x} = 0 \quad (2.2.27)$$

式(2.2.24)(2.2.25)は非移流相、式(2.2.26)(2.2.27)は移流相である。なお、式(2.2.25)が必要なのは言うまでもなく移流相の計算で CIP 法を用いるために f' の値も必要になるからである。このようにして式(2.2.22)を非移流相と移流相とに分離して解くわけであるが、このうちの移流相については CIP 法で解く。非移流相については差分法で解くが、以下ではその具体的な方法について述べる。

まず、式(2.2.24)については

$$f_i^* = f_i^n + G_i \Delta t \quad (2.2.28)$$

として計算する。ここで、 f^* の*は非移流相計算後の値であることを意味する。 f' については G' の取り扱いについて一般化するため、次のように考える。まず、式(2.2.28)より、

$$G_i' = \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{f_{i+1}^* - f_{i-1}^* - f_{i+1}^n + f_{i-1}^n}{2\Delta x \Delta t} \quad (2.2.29)$$

が得られる。この式(2.2.29)を式(2.2.25)に代入して整理すると、

$$f_i^* = f_i'^n + \frac{f_{i+1}^* - f_{i-1}^* - f_{i+1}^n + f_{i-1}^n}{2\Delta x} - f_i'^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \Delta t \quad (2.2.30)$$

となる。この式(2.2.30)を用いることにより、 f^* を G の微分を直接求めることなく計算することが出来る。式(2.1.2)を見ての通り、実際の流体計算では G は方程式によって異なってくるため、この G' についての一般化は重要である。

以上のようにして非移流相の計算を行うわけである。そして、この後に移流相の計算を CIP 法で行う。

2.2.7 1次元計算のまとめ

これまで 1 次元の双曲型方程式の解法について説明してきたが、ここでまとめを行う。まず、1 次元の双曲型方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = G \quad (2.2.31)$$

と書ける。この式(2.2.31)を非移流相と移流相に分けて計算する。先に非移流相の計算を差分法を用いて行い、現在の値 f^n とその空間微分値 f'^n を f^* 、 f'^* に更新する。次に移流相の計算を CIP 法によって行う。すなわち、非移流相の計算で求めた f^* 、 f'^* を用いて補間式を構築し、 f^{n+1} 、 f'^{n+1} を求める。この移流相の計算の際、解いている問題によってはディジタイザーや log 関数による変数変換を用いても良い。ここまでで 1 ステップの計算が終了である。後は f^{n+1} を f^n に、 f'^{n+1} を f'^n に置き換えて計算を繰り返していけばよい。

以上のように計算することで式(2.2.31)を解くことができる。

なお付け加えておくと、ここでは非移流相、移流相という順序での計算法を示したが、これは初期の CIP 法の論文([2]など)に基づいている。逆に移流相、非移流相という順序で計算したほうが保存性については良好な結果が得られる。さらに付け加えておくと、これは陽的な CIP 法の場合で、陰的な CIP 法では非移流相の計算を先にしたほうが保存性が良好である[11]。

2.3 2次元 CIP 法

2.2 節では 1 次元の双曲型方程式の解法について説明したが、本節ではそれを拡張して 2 次元の双曲型方程式の解法について説明する[12]。まず、2 次元の双曲型方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = G \quad (2.3.1)$$

また、CIP 法で必要になる空間微分の式は次のようになる。

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} + v \frac{\partial f_x}{\partial y} = G_x - f_x \frac{\partial u}{\partial x} - f_y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial t} + u \frac{\partial f_y}{\partial x} + v \frac{\partial f_y}{\partial y} = G_y - f_x \frac{\partial u}{\partial y} - f_y \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.3.3)$$

ただし、 $f_x = \partial f / \partial x$ 、 $f_y = \partial f / \partial y$ 、 $G_x = \partial G / \partial x$ 、 $G_y = \partial G / \partial y$ である。1 次元と同様、式(2.3.1)～(2.3.3)を非移流相と移流相に分けて計算する。

2.3.1 非移流相

非移流相の計算は差分法で行う。具体的には

$$f_{i,j}^* = f_{i,j}^n + G_{i,j} \Delta t \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} \partial_x f_{i,j}^* = \partial_x f_{i,j}^n &+ \frac{f_{i+1,j}^* - f_{i-1,j}^* - f_{i+1,j}^n + f_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \\ &- \partial_x f_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \Delta t - \partial_y f_{i,j}^n \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \Delta t \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned} \partial_y f_{i,j}^* = \partial_y f_{i,j}^n &+ \frac{f_{i,j+1}^* - f_{i,j-1}^* - f_{i,j+1}^n + f_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ &- \partial_x f_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \Delta t - \partial_y f_{i,j}^n \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \Delta t \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

となる。ここで $\partial_x = \partial / \partial x$ 、 $\partial_y = \partial / \partial y$ である。

2.3.2 移流相

移流相については CIP 法で解く。CIP 法には多次元への拡張が容易であるという特長があるが、ここでは CIP 法の 2 次元への拡張を行う。CIP 法を多次元化するための手法はいくつかあるが、ここでは Type-A と呼ばれる方法について説明する。この方法では $u < 0$ 、 $v < 0$ の場合、 $f(x, y)$ を $(i, j) - (i, j+1) - (i+1, j+1) - (i+1, j)$ で次のように補間する。

$$F_{i,j}(x,y) = \left[(A1_{i,j}X + A2_{i,j}Y + A3_{i,j})X + A4_{i,j}Y + \partial_x f_{i,j} \right] X + \left[(A5_{i,j}Y + A6_{i,j}X + A7_{i,j})Y + \partial_y f_{i,j} \right] Y + f_{i,j} \quad (2.3.7)$$

ここで、 $X = x - x_{i,j}$ 、 $Y = y - y_{i,j}$ 、 $\partial_x f = \partial f / \partial x$ 、 $\partial_y f = \partial f / \partial y$ である。式(2.3.7)の未知数は $A1, \dots, A7$ の7つである。ここでは、 f 、 $\partial_x f$ 、 $\partial_y f$ が格子点 $(i+1, j)$ 、 $(i, j+1)$ で連続、さらに f は $(i+1, j+1)$ でも連続という条件を用いる。すると、未知数 $A1, \dots, A7$ は次のように求まる。

$$A1_{i,j} = \left[-2d_i + \partial_x (f_{i+1,j} + f_{i,j}) \Delta x \right] / \Delta x^3 \quad (2.3.8)$$

$$A2_{i,j} = \left[A8_{i,j} - \partial_x d_j \Delta x \right] / \Delta x^2 \Delta y \quad (2.3.9)$$

$$A3_{i,j} = \left[3d_i - \partial_x (f_{i+1,j} + 2f_{i,j}) \Delta x \right] / \Delta x^2 \quad (2.3.10)$$

$$A4_{i,j} = \left[-A8_{i,j} + \partial_x d_j \Delta x + \partial_y d_i \Delta y \right] / \Delta x \Delta y \quad (2.3.11)$$

$$A5_{i,j} = \left[-2d_j + \partial_y (f_{i,j+1} + f_{i,j}) \Delta y \right] / \Delta y^3 \quad (2.3.12)$$

$$A6_{i,j} = \left[A8_{i,j} - \partial_y d_i \Delta y \right] / \Delta x \Delta y^2 \quad (2.3.13)$$

$$A7_{i,j} = \left[3d_j - \partial_y (f_{i,j+1} + 2f_{i,j}) \Delta y \right] / \Delta y^2 \quad (2.3.14)$$

$$A8_{i,j} = f_{i,j} - f_{i+1,j} - f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1} \quad (2.3.15)$$

$$d_i = f_{i+1,j} - f_{i,j} \quad (2.3.16)$$

$$d_j = f_{i,j+1} - f_{i,j} \quad (2.3.17)$$

これらにより、 f 、 $\partial_x f$ 、 $\partial_y f$ の時間発展は、

$$f_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}(x_{i,j} - u\Delta t, y_{i,j} - v\Delta t) \quad (2.3.18)$$

$$\partial_x f_{i,j}^{n+1} = \partial_x F_{i,j} \quad (2.3.19)$$

$$\partial_y f_{i,j}^{n+1} = \partial_y F_{i,j} \quad (2.3.20)$$

であるから、

$$f_{i,j}^{n+1} = \left[(A1_{i,j} \xi + A2_{i,j} \eta + A3_{i,j}) \xi + A4_{i,j} \eta + \partial_x f_{i,j}^n \right] \xi + \left[(A5_{i,j} \eta + A6_{i,j} \xi + A7_{i,j}) \eta + \partial_y f_{i,j}^n \right] \eta + f_{i,j}^n \quad (2.3.21)$$

$$\partial_x f_{i,j}^{n+1} = (3A1_{i,j} \xi + 2A2_{i,j} \eta + 2A3_{i,j}) \xi + (A4_{i,j} + A6_{i,j} \eta) \eta + \partial_x f_{i,j}^n \quad (2.3.21)$$

$$\partial_y f_{i,j}^{n+1} = (3A5_{i,j} \eta + 2A6_{i,j} \xi + 2A7_{i,j}) \eta + (A4_{i,j} + A2_{i,j} \xi) \xi + \partial_y f_{i,j}^n \quad (2.3.22)$$

ただし、 $\xi = -u\Delta t$ 、 $\eta = -v\Delta t$

となる。

また、 $u \geq 0$ の時は $i+1$ を $i-1$ 、 Δx を $-\Delta x$ に、 $v \geq 0$ の時は $j+1$ を $j-1$ 、 Δy を $-\Delta y$ にそれぞれ置き換えるのみである。

1次元と同じく非移流相計算後の f^* 、 f_x^* 、 f_y^* を CIP 法によって移流させることにより 1 ステップの計算が終了する。

CIP 法を 2 次元化する場合の補間方法にはここで述べた Type-A の他にも Type-B[13]、Type-C[13] と呼ばれる方法もある。Type-B は風上側の格子点 (iup, jup) において $\partial_x f$ 、 $\partial_y f$ の連続性も取り入れたもの、Type-C は 2 階微分 $\partial_{xy} f$ を導入してそれが 4 点 (i, j) 、 (iup, j) 、 (i, jup) 、 (iup, jup) で連続という条件を加えて補間式を構築する手法であるが、これらについては Appendix A で紹介する。

2.4 3次元 CIP 法

本研究ではシューメーカー・レビー第 9 彗星の木星衝突シミュレーションを 3 次元でも計算しているため、次に 3 次元の双曲型方程式の解法について説明する[12]。

まず、3 次元の双曲型方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = G \quad (2.4.1)$$

CIP 法で必要になる空間微分の式は次のようになる。

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} + v \frac{\partial f_x}{\partial y} + w \frac{\partial f_x}{\partial z} = G_x - f_x \frac{\partial u}{\partial x} - f_y \frac{\partial v}{\partial x} - f_z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.4.2)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial t} + u \frac{\partial f_y}{\partial x} + v \frac{\partial f_y}{\partial y} + w \frac{\partial f_y}{\partial z} = G_y - f_x \frac{\partial u}{\partial y} - f_y \frac{\partial v}{\partial y} - f_z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.4.3)$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial t} + u \frac{\partial f_z}{\partial x} + v \frac{\partial f_z}{\partial y} + w \frac{\partial f_z}{\partial z} = G_z - f_x \frac{\partial u}{\partial z} - f_y \frac{\partial v}{\partial z} - f_z \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.4.4)$$

ただし、 $f_x = \partial f / \partial x$ 、 $f_y = \partial f / \partial y$ 、 $f_z = \partial f / \partial z$ 、 $G_x = \partial G / \partial x$ 、 $G_y = \partial G / \partial y$ 、

$G_z = \partial G / \partial z$ である。1次元と同様、式(2.4.1)～(2.4.4)を非移流相と移流相に分けて計算する。

2.4.1 非移流相

非移流相の計算はこれまで通り差分法で行う。具体的には以下のようにになる。

$$f_{i,j,k}^* = f_{i,j,k}^n + G_{i,j,k} \Delta t \quad (2.4.5)$$

$$\begin{aligned} \partial_x f_{i,j,k}^* &= \partial_x f_{i,j,k}^n + \frac{f_{i+1,j,k}^* - f_{i-1,j,k}^* - f_{i+1,j,k}^n + f_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} - \partial_x f_{i,j,k}^n \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} \Delta t \\ &\quad - \partial_y f_{i,j,k}^n \frac{v_{i+1,j,k}^n - v_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} \Delta t - \partial_z f_{i,j,k}^n \frac{w_{i+1,j,k}^n - w_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} \Delta t \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

$$\begin{aligned} \partial_y f_{i,j,k}^* &= \partial_y f_{i,j,k}^n + \frac{f_{i,j+1,k}^* - f_{i,j-1,k}^* - f_{i,j+1,k}^n + f_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} - \partial_x f_{i,j,k}^n \frac{u_{i,j+1,k}^n - u_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} \Delta t \\ &\quad - \partial_y f_{i,j,k}^n \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} \Delta t - \partial_z f_{i,j,k}^n \frac{w_{i,j+1,k}^n - w_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} \Delta t \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned} \partial_z f_{i,j,k}^* &= \partial_z f_{i,j,k}^n + \frac{f_{i,j,k+1}^* - f_{i,j,k-1}^* - f_{i,j,k+1}^n + f_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - \partial_x f_{i,j,k}^n \frac{u_{i,j,k+1}^n - u_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \Delta t \\ &\quad - \partial_y f_{i,j,k}^n \frac{v_{i,j,k+1}^n - v_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \Delta t - \partial_z f_{i,j,k}^n \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \Delta t \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

ここで $\partial_x = \partial / \partial x$ 、 $\partial_y = \partial / \partial y$ 、 $\partial_z = \partial / \partial z$ である。

2.4.2 移流相

移流相は CIP 法で計算する。ここでは 3 次元の CIP 法について説明する。まず、 $f(x, y, z)$ を次のように補間する。

$$\begin{aligned}
 F_{i,j,k}(x, y, z) = & \left[(B1_{i,j,k} X + B2_{i,j,k} Y + B3_{i,j,k} Z + B4_{i,j,k}) X \right. \\
 & \left. + B5_{i,j,k} Y + \partial_x f_{i,j,k} \right] X + \left[(B6_{i,j,k} Y + B7_{i,j,k} Z \right. \\
 & \left. + B8_{i,j,k} X + B9_{i,j,k}) Y + B10_{i,j,k} Z + \partial_y f_{i,j,k} \right] Y \\
 & + \left[(B11_{i,j,k} Z + B12_{i,j,k} X + B13_{i,j,k} Y + B14_{i,j,k}) Z \right. \\
 & \left. + B15_{i,j,k} X + \partial_z f_{i,j,k} \right] Z + B16_{i,j,k} XYZ + f_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

ここで、 $X = x - x_{i,j,k}$ 、 $Y = y - y_{i,j,k}$ 、 $Z = z - z_{i,j,k}$ 、 $\partial_x f = \partial f / \partial x$ 、 $\partial_y f = \partial f / \partial y$ 、 $\partial_z f = \partial f / \partial z$ である。未知数は全部で 16 個になるが、これらは格子点 $(i+1, j, k)$ 、 $(i, j+1, k)$ 、 $(i, j, k+1)$ で f 、 $\partial_x f$ 、 $\partial_y f$ 、 $\partial_z f$ が連続、さらに f は格子点 $(i+1, j+1, k)$ 、 $(i, j+1, k+1)$ 、 $(i+1, j, k+1)$ 、 $(i+1, j+1, k+1)$ でも連続という条件によって決定する。すると、次のような結果が得られる。

$$B1_{i,j,k} = \left[-2D_i + \partial_x (f_{i+1,j,k} + f_{i,j,k}) \Delta x \right] / \Delta x^3 \tag{2.4.10}$$

$$B2_{i,j,k} = - \left[B17_{i,j,k} + \partial_x D_j \Delta x \right] / \Delta x^2 \Delta y \tag{2.4.11}$$

$$B3_{i,j,k} = - \left[B18_{i,j,k} + \partial_x D_k \Delta x \right] / \Delta x^2 \Delta z \tag{2.4.12}$$

$$B4_{i,j,k} = \left[3D_i - \partial_x (f_{i+1,j,k} + 2f_{i,j,k}) \Delta x \right] / \Delta x^2 \tag{2.4.13}$$

$$B5_{i,j,k} = \left[B17_{i,j,k} + \partial_x D_j \Delta x + \partial_y D_i \Delta y \right] / \Delta x \Delta y \tag{2.4.14}$$

$$B6_{i,j,k} = \left[-2D_j \partial_y (f_{i,j+1,k} + f_{i,j,k}) \Delta y \right] / \Delta y^3 \tag{2.4.15}$$

$$B7_{i,j,k} = - \left[B19_{i,j,k} + \partial_y D_k \Delta y \right] / \Delta y^2 \Delta z \tag{2.4.16}$$

$$B8_{i,j,k} = - \left[B17_{i,j,k} + \partial_y D_i \Delta y \right] / \Delta x \Delta y^2 \tag{2.4.17}$$

$$B9_{i,j,k} = [3D_j - \partial_y (f_{i,j+1,k} + 2f_{i,j,k}) \Delta y] / \Delta y^2 \quad (2.4.18)$$

$$B10_{i,j,k} = [B19_{i,j,k} + \partial_y D_k \Delta y + \partial_z D_j \Delta z] / \Delta y \Delta z \quad (2.4.19)$$

$$B11_{i,j,k} = [-2D_k + \partial_z (f_{i,j,k+1} + f_{i,j,k}) \Delta z] / \Delta z^3 \quad (2.4.20)$$

$$B12_{i,j,k} = -[B18_{i,j,k} + \partial_z D_i \Delta z] / \Delta x \Delta z^2 \quad (2.4.21)$$

$$B13_{i,j,k} = -[B19_{i,j,k} + \partial_z D_j \Delta z] / \Delta y \Delta z^2 \quad (2.4.22)$$

$$B14_{i,j,k} = [3D_k - \partial_z (f_{i,j,k+1} + 2f_{i,j,k}) \Delta z] / \Delta z^2 \quad (2.4.23)$$

$$B15_{i,j,k} = [B18_{i,j,k} + \partial_z D_i \Delta z + \partial_x D_k \Delta x] / \Delta x \Delta z \quad (2.4.24)$$

$$B16_{i,j,k} = [B17_{i,j,k} + f_{i,j,k+1} - (f_{i,j+1,k+1} + f_{i+1,j,k+1}) + f_{i+1,j+1,k+1}] / \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.4.25)$$

ここで、 $D_i = f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}$ 、 $D_j = f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k}$ 、 $D_k = f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k}$ である。また、

$$B17_{i,j,k} = -f_{i,j,k} + f_{i+1,j,k} + f_{i,j+1,k} - f_{i+1,j+1,k} \quad (2.4.26)$$

$$B18_{i,j,k} = -f_{i,j,k} + f_{i+1,j,k} + f_{i,j,k+1} - f_{i+1,j,k+1} \quad (2.4.27)$$

$$B19_{i,j,k} = -f_{i,j,k} + f_{i,j+1,k} + f_{i,j,k+1} - f_{i,j+1,k+1} \quad (2.4.28)$$

である。なお、ここで述べたのは $u < 0$ 、 $v < 0$ 、 $w < 0$ の場合である。 $u \geq 0$ の場合は $i+1$ を $i-1$ に、 Δx を $-\Delta x$ に、 $v \geq 0$ の場合は $j+1$ を $j-1$ に、 Δy を $-\Delta y$ に、 $w \geq 0$ の場合は $k+1$ を $k-1$ に、 Δz を $-\Delta z$ にそれぞれ置き換えてやればよい。

1次元、2次元と同じく非移流相計算後の f^* 、 f_x^* 、 f_y^* 、 f_z^* をCIP法によって移流させることにより1ステップの計算が終了する。

2.5 流体方程式の統一解法

ここまでは一般的な説明をするために f や G といった変数を用いてきたが、この

f や G を式(2.1.2)のように密度や速度や圧力といった物理量として計算すれば流体の計算を行うことが可能である。しかし、本研究のシミュレーションを実行するにはこれだけではまだ不足である。その理由は本研究のシミュレーションでは固体、液体、気体を同時に解かなくてはならないからである。このことがなぜ問題になるのか、またその解決法についてこの節で述べる。

2.5.1 圧縮性流体と非圧縮性流体

流体は大きく 2 種類に分けることができる。すなわち、圧縮性流体と非圧縮性流体である。例えば、液体は外から圧力を加えても容易には圧縮されない。言い換えれば密度が変化しがたい。このような流体が非圧縮性流体である。これに対し、気体は外からの圧力で比較的容易に圧縮できるので圧縮性流体である。これら圧縮性と非圧縮性との区別を決めるのが音速で、同じ空気でも低速の車の周りを通る時は非圧縮性流体として振る舞い、超音速飛行をするジェット機の周りを通る時は圧縮性流体として振る舞う。

数値計算の面からみると、例えば非圧縮性流体では音速が非常に速いことが問題となる。つまり、音速で決まる時間ステップを用いると、実際に計算したい流速の時間スケールでの現象を捉えるためには非常に多くの計算時間を必要とし、事実上不可能となってしまうのである。また、ほとんどの場合、圧縮性流体では基礎方程式を保存形に書き直して計算するが、非圧縮性流体では非保存形であることも大きな違いである。以上のような理由から、圧縮性流体と非圧縮性流体を同時に解くことは難しい。しかし、これを可能にしたのが C-CUP(CIP-Combined, Unified Procedure) 法[14]である。C-CUP 法では固体、液体、気体を同時に解くことが可能である。本研究におけるシミュレーションでは、彗星核の木星衝突シミュレーションにおいては彗星核(固体)、木星大気(気体)が、小型船体のスラミング現象のシミュレーションにおいては船体(剛体)、水(液体)、空気(気体)が混在しているために C-CUP 法が非常

に有効である。そこでこの C-CUP 法について説明する。

2.5.2 C-CUP 法

ここで、一番単純な非粘性流体の方程式を再び書くと次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{f} = \mathbf{G} \quad (2.5.1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (\rho, \mathbf{u}, p) \\ \mathbf{G} &= \left(-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, -\frac{\nabla p}{\rho}, -\rho C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

で、 ρ は密度、 $\mathbf{u}$ は速度、 p は圧力、 C_s は音速である。C-CUP 法では式(2.5.1)を2つの相に分けて計算する。すなわち、非移流相 $\partial \mathbf{f} / \partial t = \mathbf{G}$ と移流相 $\partial \mathbf{f} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{f} = 0$ の2つである。

a. 非移流相

非移流相は差分法で解く。この部分を次のように書く。

$$\frac{\rho^* - \rho^n}{\Delta t} = -\rho^n \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (2.5.3)$$

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^*}{\rho^n} \quad (2.5.4)$$

$$\frac{p^* - p^n}{\Delta t} = -\rho^n C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (2.5.5)$$

ここで、式(2.5.4)の発散をとる。

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right) = \nabla \cdot \left(-\frac{\nabla p^*}{\rho^n} \right) \quad (2.5.6)$$

式(2.5.6)より、

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = \nabla \cdot \mathbf{u}^n - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^*}{\rho^n} \right) \Delta t \quad (2.5.7)$$

式(2.5.7)を式(2.5.5)に代入して整理すると、

$$\nabla \left(\frac{\nabla p^*}{\rho^n} \right) = \frac{p^* - p^n}{\rho^n C_s^2 \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad (2.5.8)$$

を得る。式(2.5.8)では圧力は様々な音速 C_s を持った流れに対して決定される。また、もし音速 C_s が非常に大きければ、右辺第1項が無視でき、MAC(Marker and Cell)法[15]と同じになる。これに対し、音速 C_s が小さければ左辺が右辺第1項に対して十分小さくなるので、圧縮性流体のアルゴリズム $(p^* - p^n)/\Delta t = -\rho^n C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^n$ が得られる。式(2.5.8)は p^* についての拡散方程式となっており、この方程式の数値解法については多くの研究が行われている。

式(2.5.8)で重要なのが左辺の微分の中に ρ が含まれているということである。大きな密度差を持つ物質同士の界面においては加速度 $\nabla p/\rho$ の連続性が非常に重要である。しかしながら、密度差の大きな物質同士の界面では分母の ρ が1格子で数桁の変化をするため、その影響で $\nabla p/\rho$ も大きく変化してしまい、結果的に不連続になってしまうといったことが起こり得る。しかし、式(2.5.8)では不連続面における $\nabla p/\rho$ の連続性が保証されている。この手法により、全ての物質を同時に、単にその状態方程式を変えるだけで取り扱うことが可能になるのである。本研究では極端な密度差を持つ物質同士の衝突現象を扱うが、C-CUP法のこのような特性が大いに有効である。

式(2.5.8)から p^* が求まったら、式(2.5.4)から $\mathbf{u}^*$ を求め、さらに式(2.5.3)から ρ^* を計算する。以上で非移流相の計算は終了する。

b. 移流相

移流相の計算は差分法では難しく、CIP法を用いて解くことになる。非移流相の計算で求まった ρ^* 、 $\mathbf{u}^*$ 、 p^* からCIP法によって ρ^{n+1} 、 $\mathbf{u}^{n+1}$ 、 p^{n+1} を求める。ここまですべて1ステップの計算が終了する。

後はこうして得られた ρ^{n+1} 、 $\mathbf{u}^{n+1}$ 、 p^{n+1} を ρ^n 、 $\mathbf{u}^n$ 、 p^n に置き換えて計算を繰り返していけばよい。ただし、移流相の計算でCIP法を用いるため、それぞれの物理量

の1階微分の計算もあわせて行わなければならない。

以上のような計算方法により、圧縮性流体、非圧縮性流体が混在するような問題でも比較的容易に解くことができる。

以上で CIP 法関連の説明を終えるが、CIP 法は現在でも研究が盛んに行われており、今後の発展が期待されている(最近の CIP 法の成果などは[16]にまとめられている)。

第 3 章 シューメーカー・レビー第 9 彗星と木星との衝突シミュレーション

3.1 序論

1993 年 3 月 24 日、アメリカ・パロマー山天文台においてシューメーカー夫妻とレビーにより、細長くのびた奇妙な姿をした新彗星が発見された[17]。そして、その後の観測から短周期彗星であることが分かり、シューメーカー・レビー第 9 彗星(以後 SL9 と略す)と名付けられた。さらに、軌道計算の結果、この彗星は木星の周りを回っていること、1992 年 7 月に木星に大接近し、その時に木星の潮汐力の影響で分裂したらしいこと、そして 1994 年 7 月には木星に衝突することが判明したのである。この分裂した SL9 の核にはアルファベットの識別子がつけられ、木星に向かう側から順に A、B、C、……、W とされた。ただし I と O は数字の 1 と 0 に間違いやすいということで欠番となっている。分裂核の中には衝突前にさらに分裂したもの(P 核、Q 核)や、衝突前に消滅してしまったもの(J 核、M 核、P1 核)もあるが、とにかくまるで列車のように連なった彗星核が次々に木星に衝突することになったのである。

このような現象は 1000 年に 1 度と言われるだけあってかなりの注目を集めたが、多くの専門家の見解は木星には大きな変化は現れないだろうというものであった。しかし、実際に衝突が起こってみると木星面には巨大な暗斑が現れたり、電磁気圏の環境の変化によって北半球でオーロラや X 線放射が発生するなど、彗星衝突が木星に与えた影響はかなり大きかったのである。最初の A 核の衝突は 1994 年 7 月 16 日 20 時(世界時)過ぎに起こった。この A 核の衝突の際には衝突によって発生したきのこ雲が赤外線で観測され、しかもこのきのこ雲は木星の雲の上空 3000km にまで達していたということが分かった。衝突自体は地球からは直接観測できない木星の裏

側の南緯 44 度付近、中央経度(地球から見た木星面中心の経度)から西に 98 度から 94 度の場所で起こったが、やがて木星の自転によって衝突場所が地球から見えるようになると、そこには大きな斑点が残されていた。可視光では黒く見えたその斑点は中央部の条痕、広がりつつあるリング、そして特異な三日月型の大きな雲の 3 つの部分から成っていた。しかし、赤外線での観測ではその痕跡は木星面に対して明るく光っており、それが木星大気上部に存在するものであることを示していた。その他の核について詳しく述べるのは避けるが、C 核、E 核、H 核などは A 核と同じような規模の痕跡を残し、G 核、K 核、L 核は A 核による痕跡を上まわる大規模な痕跡を残した。7 月 22 日 8 時(世界時)過ぎの W 核の衝突によって一連の衝突現象は終了したが、その後も数ヶ月の間は木星面上に衝突痕跡が残り続けた。以上が SL9 の発見から木星との衝突に至るまでをざっと振り返ってみたものである(観測結果については[18,19]など、衝突前の予測や衝突期間中の観測の様子などは[20,21]に詳しい)。

木星大気、特に対流圏の循環構造がどのようなになっているのか、様々な想像がある(例えば[22])が、実際に分かっているのは探査機ボイジャー等の赤外放射観測による 1bar より上空の、主として成層圏の平均的温度構造と雲パターンとして見える対流圏上層の縞模様や渦[23]に限られている。従って、今回の衝突によって木星大気の構造の解明が少しでも進むことが期待された(なお、探査機ガリレオに搭載されていたプローブが木星大気に突入し、大気の直接観測を行ったのはこの衝突現象から 1 年半ほど後の 1995 年 12 月である)。ここで問題となったのは、彗星核が木星大気のどのくらいの深さにまで到達したのかということである。衝突により、どんな物質が存在するのかはっきりとは分かっていない下層の木星大気が上空まで巻き上げられ、それが観測されることが期待されたが、核がどのくらいの深さまで進入したのかが分からなければ観測された物質が木星大気中のどのくらいの高さにあるのか分からない。これは観測で求めることは全く不可能であるから、この問題に対する予

測がいくつか行われた[24-28]。これらは全て異なった結果を出しているが、大きく 2 つのグループに分けることができる。1 つは Ahrens ら[26]の SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法[29]によるもので彗星は途中で分裂せず、木星の奥深くまで到達するというもの、もう 1 つは彗星は途中で分裂し、その時の衝撃が元で急激なエネルギーの解放が起こるというものである[27,28]。

この彗星の木星衝突について CIP 法、C-CUP 法を用いた流体コードによってシミュレーションを行った。軸対称 2 次元による彗星核の木星衝突のシミュレーションでは彗星核はその前方の中心部から穴が空き、そこに木星大気の流れが集中して破壊されるという結果が得られた。また、彗星核は木星大気の比較的浅いところで消滅するということが分かった[28,30]。しかし、他の研究者によるシミュレーションでは彗星核は木星大気の深いところまで進入するという結果を得ているものもある[26]。この場合には彗星核は中心部から破壊されるのではなく、側面から徐々に物質を失っていくという経過をたどる。また、このような結果は 3 次元による計算で得られている。そのため、彗星核が中心部から破壊されるのは軸対称計算において対称軸付近の計算方法に問題があるのではないかという疑いが持たれた。そこで、本研究ではこの彗星核の木星大気衝突シミュレーションを 3 次元でも実行し、衝突時の彗星核の変化の様子を調べた。

また、彗星の木星衝突により木星面上には衝突痕跡が残されたが、この痕跡は長期間に渡って観測されたことからかなり安定な構造であったと考えられる。このような安定な構造としては渦が候補として挙げられる。実際、木星面には大赤斑のように地球が何個も入ってしまうような巨大なものから探査機でやっと捉えられる程度の小さなものまで、数多くの渦が存在している。しかも、大赤斑はすでに 100 年以上もの間(300 年以上という説もある)観測され続けているような長寿命で安定な渦である。よって、衝突痕跡も渦であると考えられるのだが、ではこの渦がどうやって発生したのか、そのメカニズムについてもシミュレーションによって解明するこ

とを試みた[31]。

3.2 軸対称 2 次元による彗星核の木星衝突シミュレーション

3.2.1 計算条件

ここでは SL9 の核が木星大気に突入する場面の軸対称 2 次元によるシミュレーションについて述べる。計算は CIP 法、C-CUP 法を用いて行い、密度の移流相の計算の際には log 関数による変数変換を利用した。計算領域などについては図 3.1 に示した。ただし、軸対称計算であるので、実際の計算は図 3.1 の上半分(あるいは下半分)だけである。また、図 3.1 の左側方向が木星の中心の方向である。SL9 の核の大きさはここでは直径 3km と仮定した。観測などによると、実際の SL9 の分裂核の大きさは大きなもので直径 1~5km 程度とみられている(例えば[32,33])。

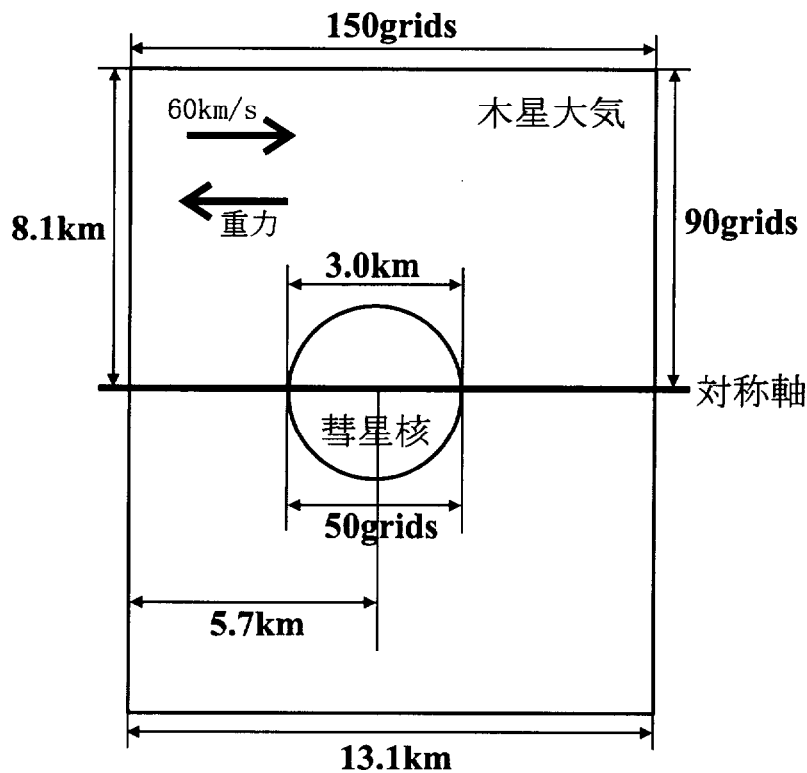


図 3.1 初期条件(軸対称 2 次元)

計算格子については不均一固定直交格子を用いた。核の近傍では格子間隔は 60m で一定の間隔であるが、核から離れたところでは核から離れるほど格子間隔が広くなるようにし、計算領域を広くとるようにしている。

計算のモデリングでは木星大気を固定して核を動かす方法と、逆に核を固定してそれに木星大気を吹き付ける方法が考えられるが、この計算では核の変化の様子を詳しく探ることを目的としたために後者の方法を採用した。この方法では前者に比べて格子数が少なく良いという利点があるからである。核の部分は初速度 0 とし、周囲の木星大気に 60km/s の初速を与えた。実際、SL9 は木星に 60km/s で衝突している。また、核の密度は $1g/cm^3$ とし、圧力は周囲の木星大気と同じ値とした。木星大気は等温であると仮定し、その圧力と密度のプロファイルは次のように設定した。

$$p = p_0 \exp\left[-\frac{(r - r_0)}{L}\right] \quad (3.1)$$

$$\rho = \rho_0 \exp\left[-\frac{(r - r_0)}{L}\right] \quad (3.2)$$

$$L = \frac{p_0}{\rho_0 g} \quad (3.3)$$

ここで、 p は圧力、 ρ は密度、 r は距離、 g は木星の重力加速度である。観測によるデータなどから、 $p_0 = 10bar$ 、 $\rho_0 = 10^{-3} g/cm^3$ 、 $g = 980 \times 2.37 cm/s^2$ とした。また、圧力が p_0 、密度が ρ_0 になる位置が r_0 である。また、木星大気の粘性の影響については考慮していない。

境界条件については、対称軸に沿った部分は反射境界、その他は核の前方(木星大気の流れの上流側)以外は自由境界である。核の前方の境界については速度は常に 60km/s とし、圧力と密度については次のように決定した。

$$p = p_0 \exp\left[\frac{V_J t - (r_J - r_0)}{L}\right] \quad (3.4)$$

$$\rho = \rho_0 \exp\left[\frac{V_J t - (r_J - r_0)}{L}\right] \quad (3.5)$$

ここで、 $V_j = 60 \text{ km/s}$ で、 t は計算開始からの経過時間である。また、 r_j は核の中心から前方の境界までの距離である。

計算は木星の大気圧 0.25 bar 、密度 $2.5 \times 10^{-5} \text{ g/cm}^3$ の場所(この場所が $r = 0$ である)を彗星核の木星大気突入点とした。従って、初期条件における核の密度は周囲の木星大気の密度の 4×10^4 倍である。また、 r_0 は式(3.1)で $r = 0$ として、

$$0.25 = p_0 \exp\left(\frac{r_0}{L}\right)$$

から、

$$r_0 = L \log\left(\frac{0.25}{p_0}\right)$$

となる。

3.2.2 状態方程式

状態方程式とは、簡単に言えば物質がある状態(温度、圧力)のもとではどのくらいの密度になるかということを表した式である。

流体のエネルギー保存の式は次のように書ける。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\rho C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u} - (\gamma - 1) Q_v \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.6)$$

ここで、 p は圧力、 ρ は密度、 $\mathbf{u}$ は速度、 C_s は音速で、

$$C_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

であり、右辺第2項は粘性加熱の影響を表している。

状態方程式はこの $\partial p / \partial \rho$ を求めるために必要となる。今回のシミュレーションでは木星大気は理想気体であり、 $\partial p / \partial \rho = \gamma p / \rho$ (γ : 比熱比、 $\gamma = 1.4$)としたが、彗星核は氷であるとして計算を行った。そのため、氷の状態方程式が必要になるが、これ

については次の Tait 方程式と呼ばれるもの[34]を使用した。

$$\frac{p+B}{p_0+B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \quad (3.7)$$

ここで、 $n = 7$ 、 $B = 24000\text{bar}$ とした。また、水であるので $p_0 = 1\text{bar}$ 、 $\rho_0 = 1\text{g/cm}^3$ となる。

式(3.7)は B が小さければ p の変化に対して ρ も変化しやすく、逆に B が大きければ p の変化に対して ρ は変化しにくくなるということを表している。よって、前者は柔らかい物質、後者は固い物質であるといえる。

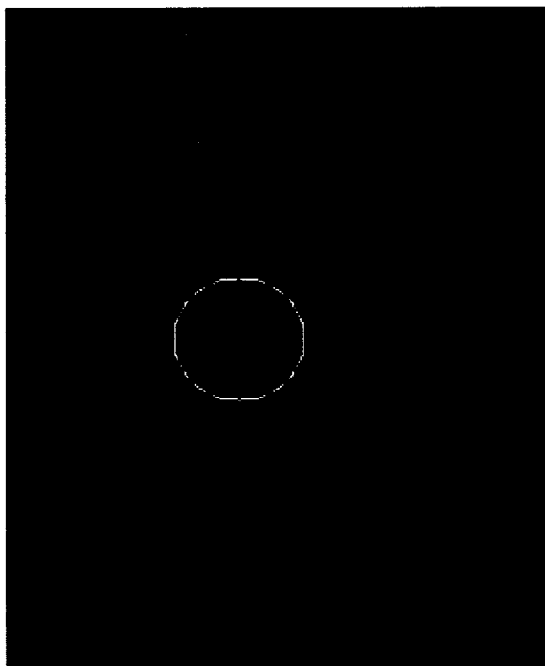
なお、木星大気は理想気体であり、彗星核は氷であるので両者を区別する必要があるが、これについては核と大気の密度が桁違いに異なる値であることを利用した。

3.2.3 計算結果

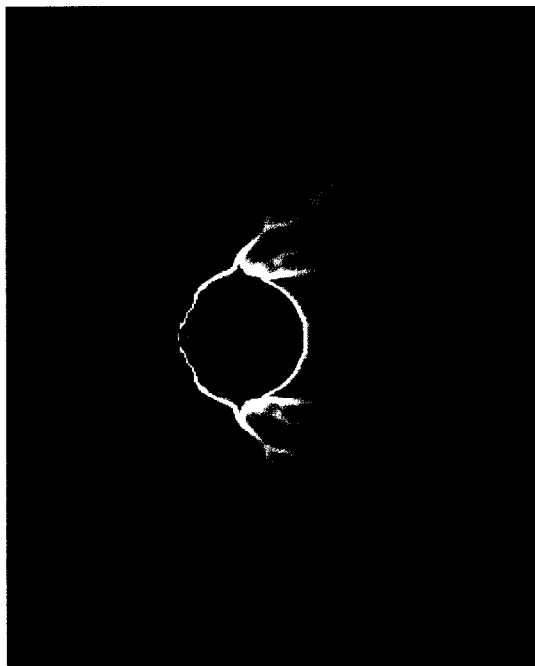
計算結果を図 3.2 に示す。これらの図は密度分布を表している。赤い部分が最も高密度、黄色がそれに次ぎ、より暗い色になるほど低密度である。

低密度

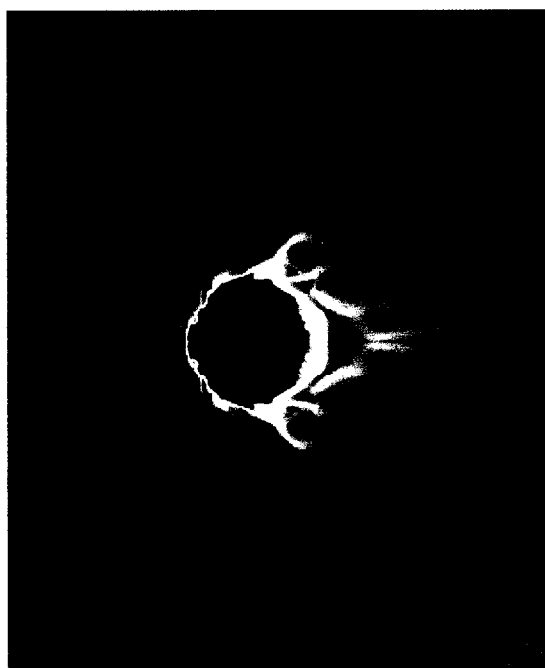
高密度



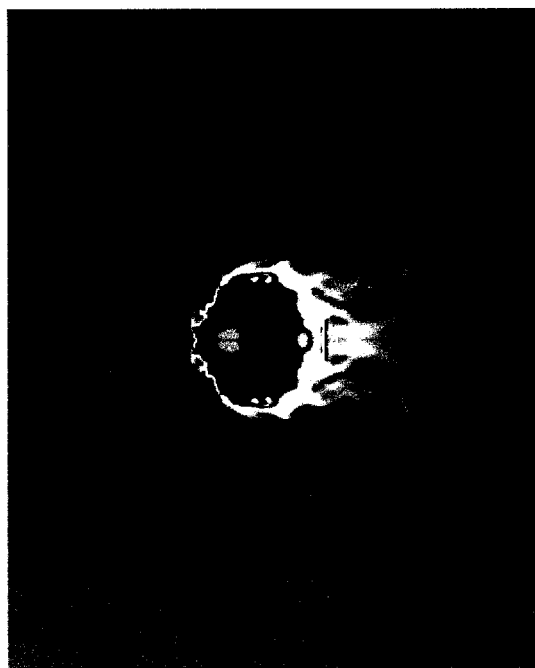
(a) 0.0 sec



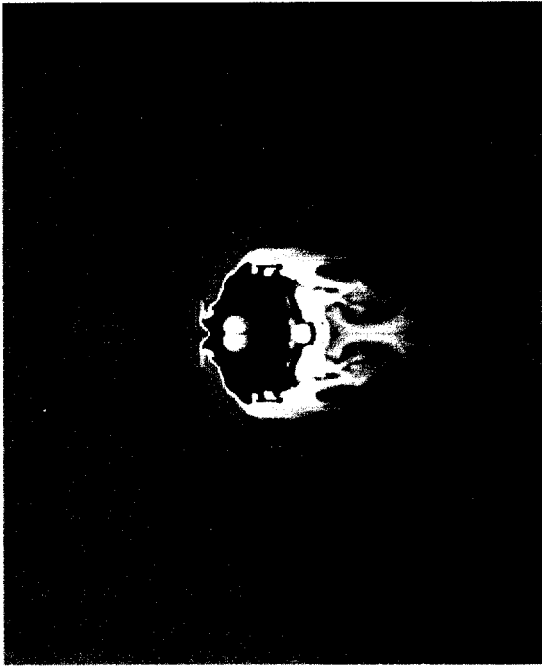
(b) 0.4 sec



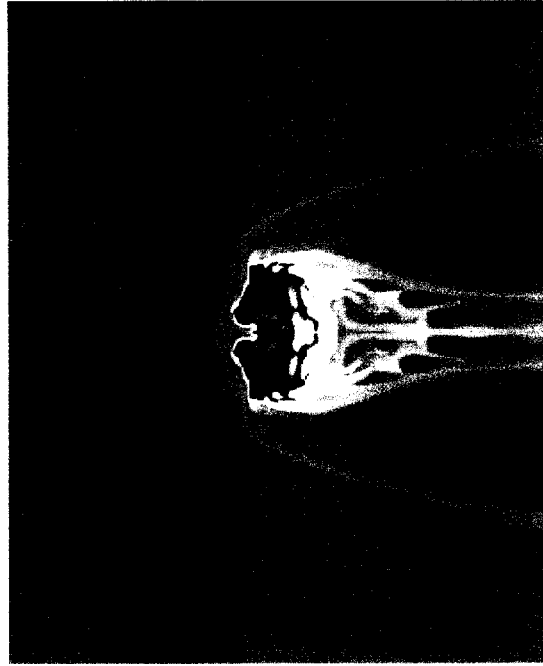
(c) 0.8 sec



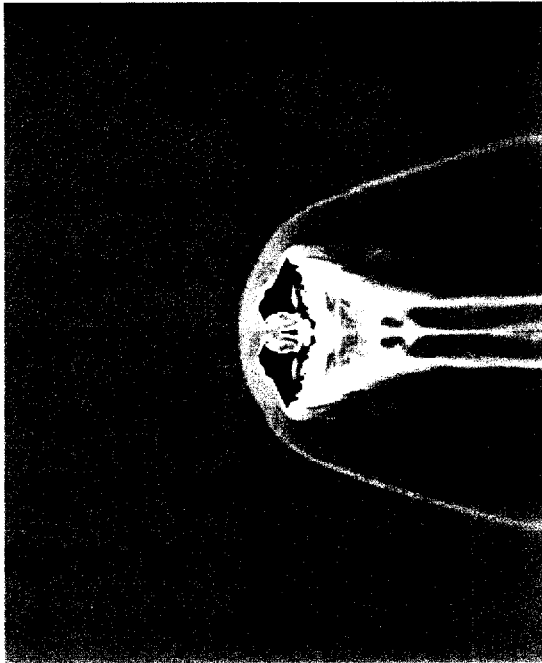
(d) 1.2 sec



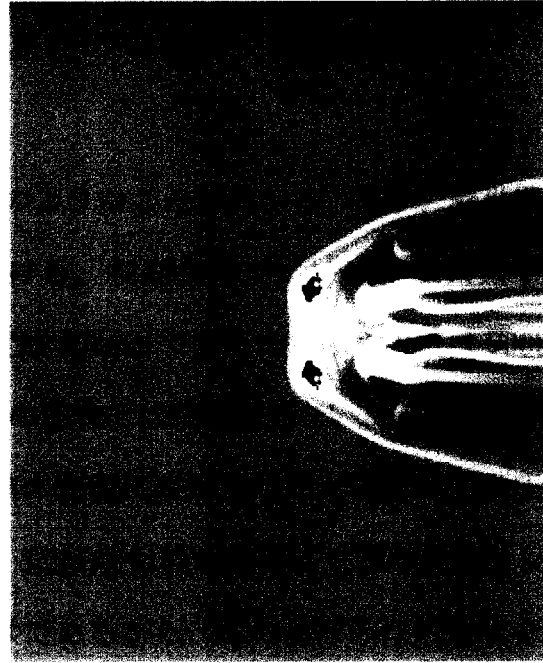
(e) 1.6 sec



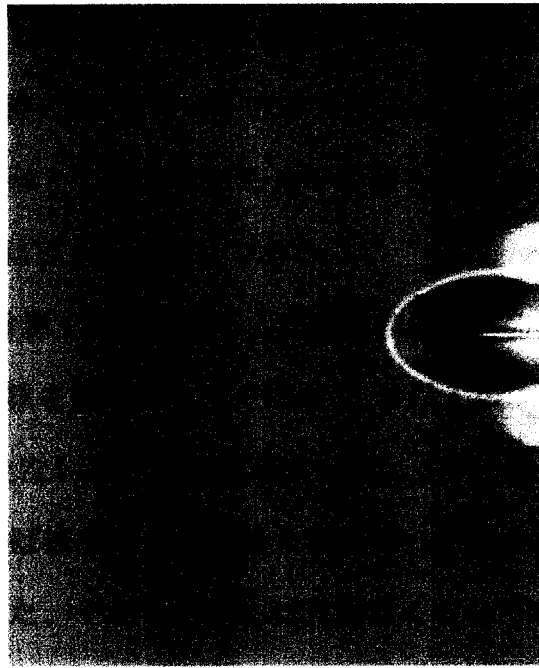
(f) 2.0 sec



(g) 2.4 sec



(h) 2.8 sec



(i) 3.2 sec

図 3.2 軸対称 2 次元による彗星核の木星衝突(密度分布)

図 3.2 の彗星核の変化を追っていくと、次のようなことが分かる。まず、彗星核が木星大気に突入すると大気により動圧を受ける。初期条件では核は木星大気中の 0.25bar のところに配置したので、大気の色度は 60km/s であるから動圧の値は 900bar である。しかし、核は氷であるためこの程度の圧力では圧縮されない。図 3.2(b)と(c)を見ると核の表面に凹凸があるが、これは核の表面に波が立つことによって動圧の影響を横に逃がしているのである。また、図 3.2(d)では核の前面にくぼみが発生している。ここでは軸対称計算を行っているわけであるから、このくぼみは円錐状をしていることになる。すると、この円錐の底面から頂点の方へと木星大気が流れ込み、頂点に集中することになる。そのため、このくぼみは次第に大きくなり、ついには核を貫通し、彗星に穴があいてしまう。そしてこの穴から流れ出る木星大気の噴流によって彗星の残りの部分が引き千切られてしまい、急激なエネルギーの解放が起こるのである。結果的に彗星核が消滅するのはだいたい 3 秒程度で、この時の周囲

の木星大気の大気圧は 15bar ほどにまで上昇している。なお、彗星核の運動エネルギーの時間変化の様子は後の図 3.5 に示した。また、ここでは示さなかったが、彗星核を水、あるいは理想気体とした場合でも途中の振る舞いは多少異なるものの、最終的に核が消滅する時刻はほとんど同じである。

この軸対称 2 次元計算で問題になるのが彗星核の前面の真ん中に穴があくということである。この穴が核を貫通するまでには 2 秒以上かかるが、一旦貫通してしまうとその後 1 秒もたたないうちに核は消滅してしまう。従って、もし彗星核にこのような穴があかなければ核はもっと木星大気の深いところまで進入できるのではないかと考えられる。また、そもそも中心に穴があくというのは、軸対称計算において対称軸付近の計算方法に問題があるのではないかという疑いもある。そこで、彗星核の木星大気衝突シミュレーションを 3 次元で実行し、この軸対称 2 次元計算の検証を行った。この 3 次元計算について次の節で述べる。

3.3 3 次元による彗星核の木星衝突シミュレーション

3.3.1 計算条件

計算領域などについて図 3.3 に示す。なお、この図は xy 平面で切った断面図で、彗星核の中心を通るようになっている。また、図 3.1 と同じく図の左側が木星の中心方向である。格子数は $56 \times 56 \times 56$ で、不均一固定直交格子となっている。格子間隔は核の近傍では 150m であるが、計算領域の外側では格子間隔が核から離れるにつれて広がるようになっており、全体で $15 \times 15 \times 15$ km の範囲を計算している。核の直径は軸対称計算と同じく 3km で、計算領域の中央に核の中心が位置するように配置した。その他の木星大気の状態なども軸対称計算と同様であるので、ここでは詳しい説明は省略する。当然のことながら、この 3 次元計算においては対称計算は行っていない。

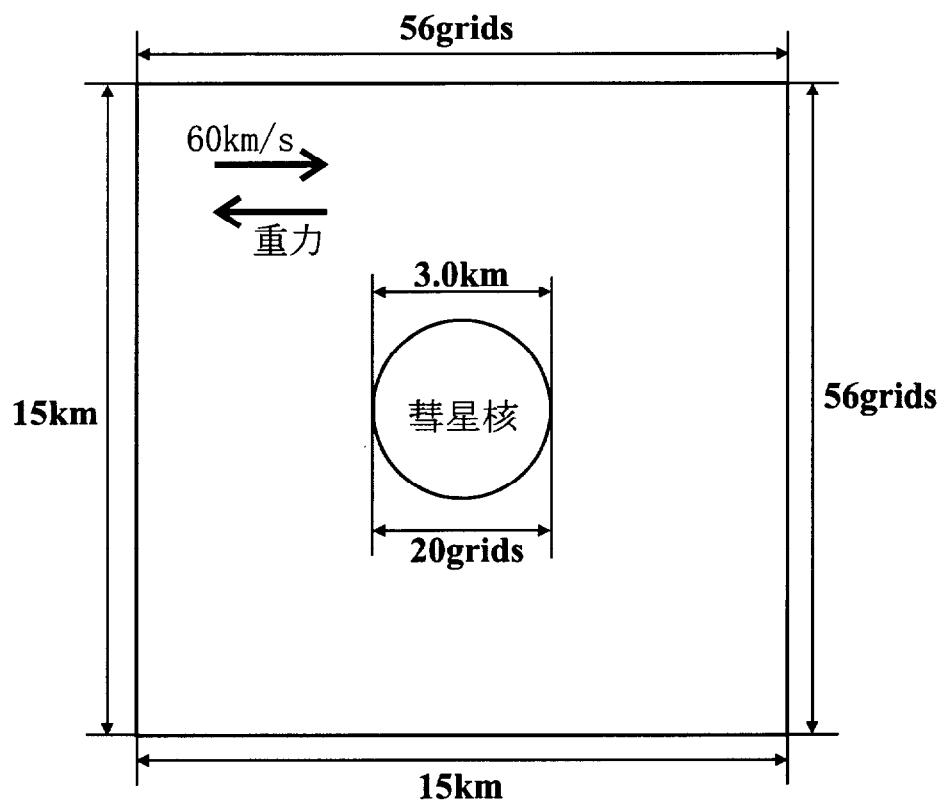
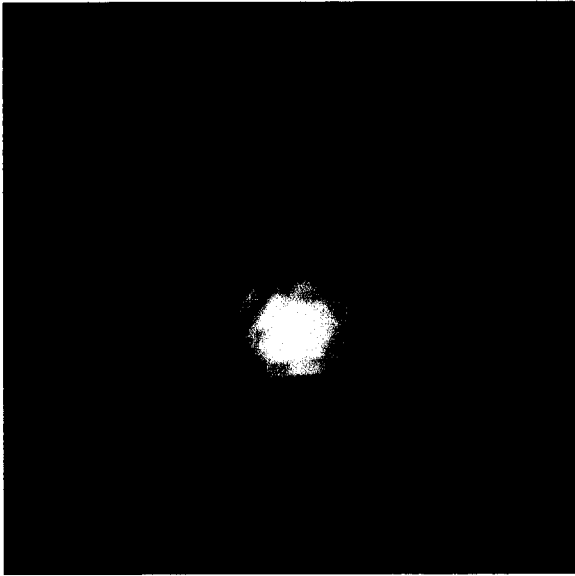


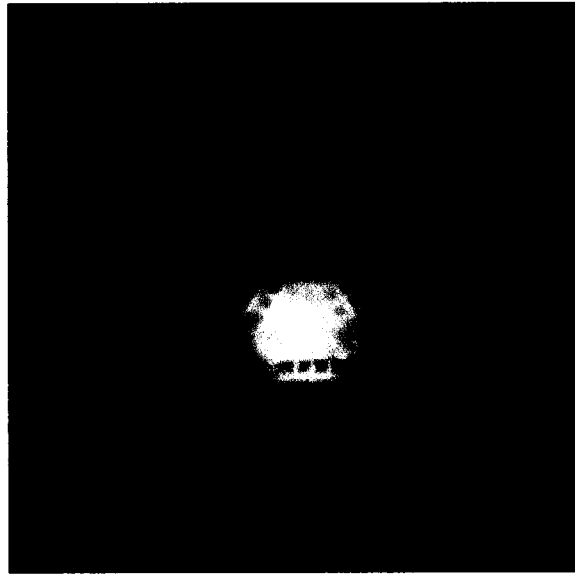
図 3.3 初期条件(3 次元)

3.3.2 計算結果

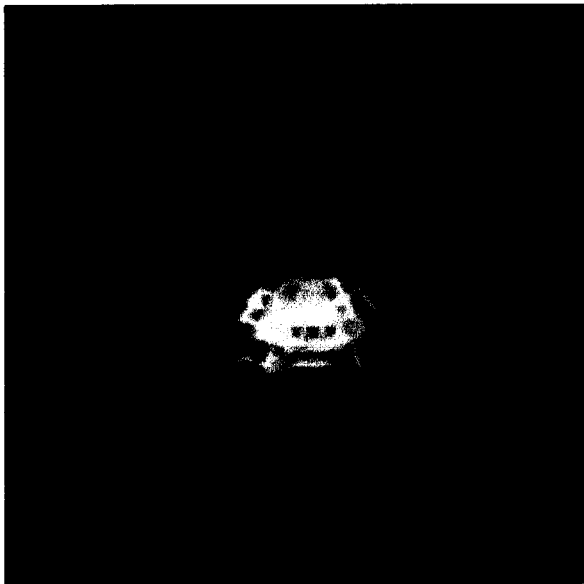
計算結果を図 3.4 に示す。これらの図は密度の等値面(2 面)と、核の中心を通る断面における密度分布を表しており、彗星核付近を拡大表示してある。なお、図 3.3 の初期条件の図とは異なり、図の下方向が木星の中心方向になるように表示している。



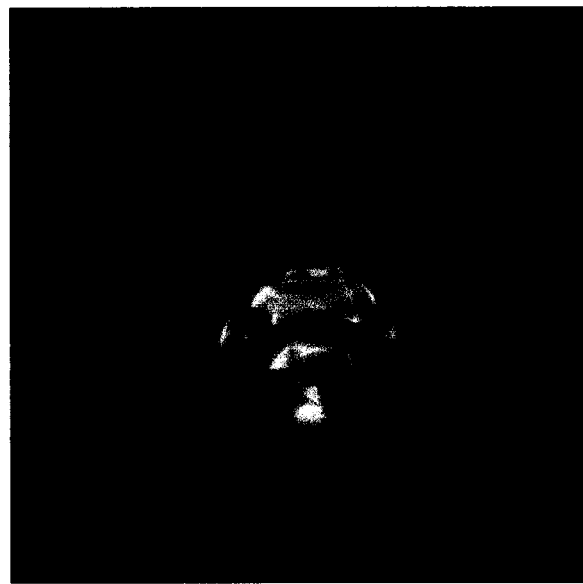
(a) 0.0 sec



(b) 0.4 sec



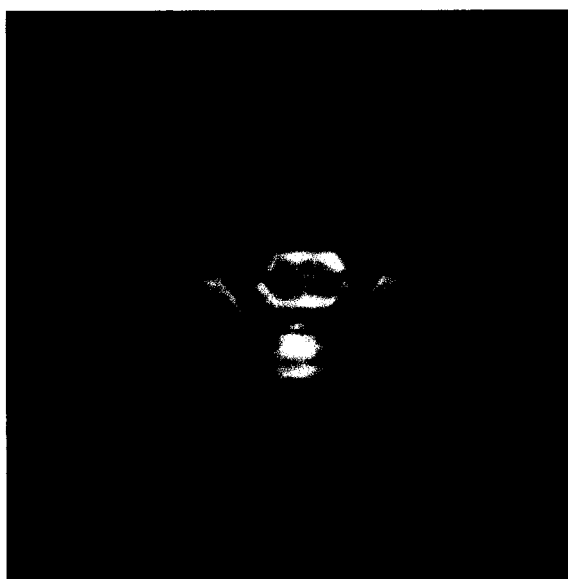
(c) 0.8 sec



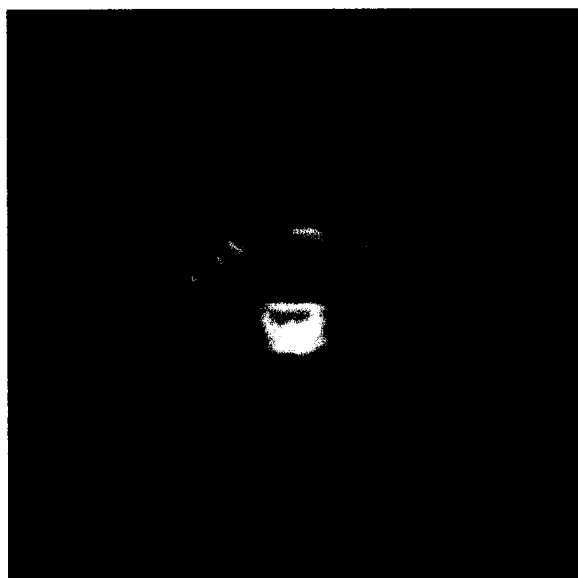
(d) 1.2 sec



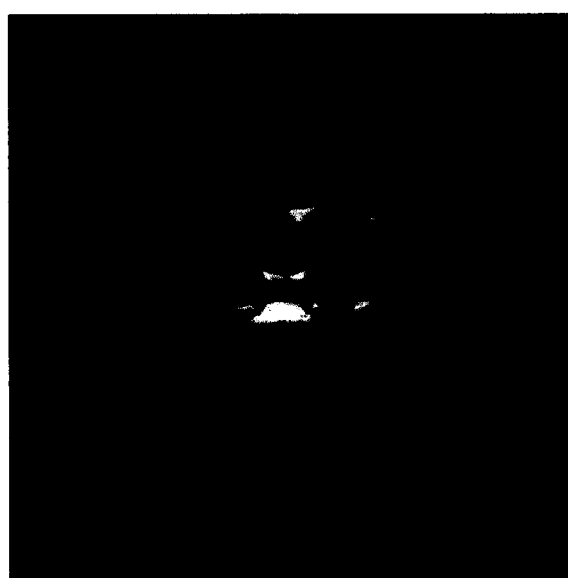
(e) 1.6 sec



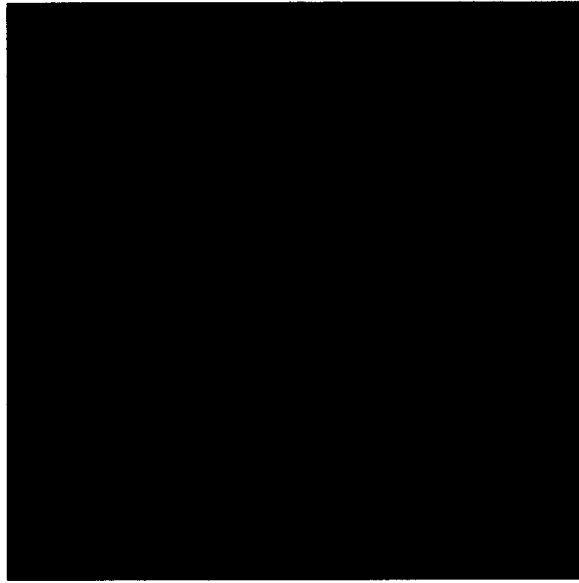
(f) 2.0 sec



(g) 2.4 sec



(h) 2.8 sec



(i) 3.2 sec

図 3.4 3 次元による彗星核の木星衝突

計算結果を見ると、初めに球形であった彗星核が吹き付けてくる木星大気の動圧によって前面がくぼんでやがて穴があき、核が粉砕されていく様子が捉えられているのが分かる。このようなプロセスは図 3.2 の軸対称 2 次元計算と全く同じである。さらに、彗星核が消滅するまでの時間も 3 秒程度でほぼ一致している。この 3 次元計算の結果から、軸対称 2 次元計算による彗星核が中心部に穴があき、それによって核が粉砕されるという結果に問題は無いものと考えられる。さらに、この 3 次元計算と 3.2 節の軸対称 2 次元計算による彗星核の運動エネルギーの時間変化の様子を図 3.5 に示す。なお、運動エネルギーは彗星核の密度が 0.5 g/cm^3 以上の部分の運動エネルギーを足し合わせて求めたものである。

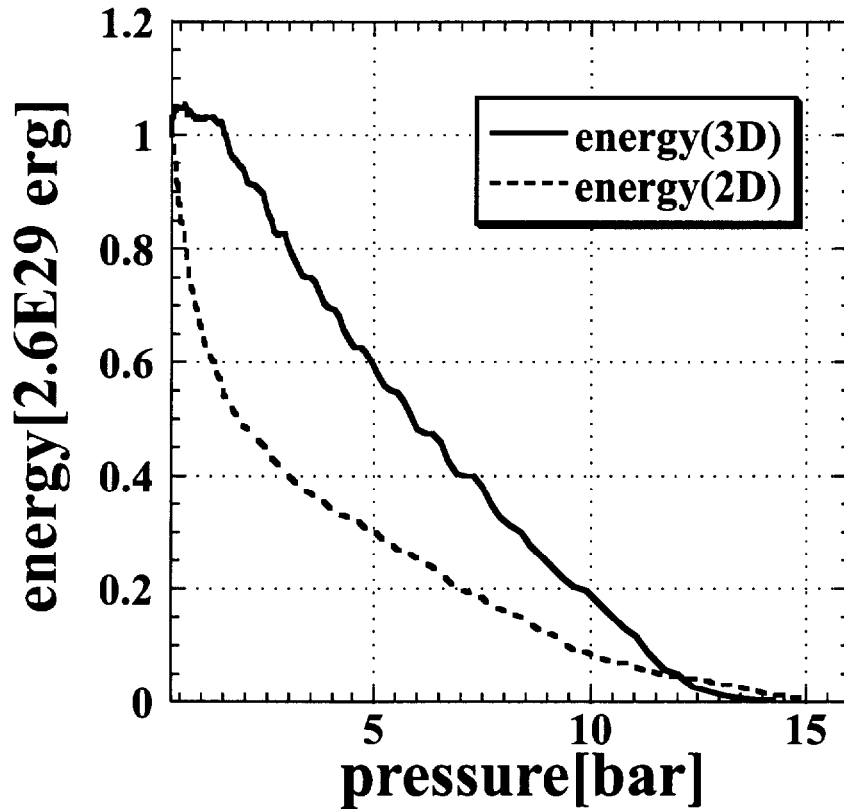


図 3.5 彗星核の運動エネルギーの時間変化

図 3.5 から、軸対称 2 次元と 3 次元とでは彗星核の運動エネルギーの変化の様子が全く異なっているのが分かる。2 次元の場合は初めのうちは急激にエネルギーを失うが、やがて核が 2bar 程度よりも深いところまで進入すると一転して緩やかにエネルギーを失っていくようになる。それに対し、3 次元の場合には初めから終わりまでほぼ一定の割合でエネルギーを失っていく(Appendix B を参照)。しかし、面白いことに彗星核が完全に運動エネルギーを失うのはどちらも 15bar ほどで同じである。このことから、彗星核は木星大気の 15bar ほどの深さにまで到達して破壊されたと考えられる。この結果と文献[22]から、SL9 の核は木星大気の対流圏に存在すると想像されている NH_4SH の雲を突き抜け、 H_2O の雲にまで達していたと考えられる。この結果は観測から硫黄や水が検出されたことと矛盾しない。

また、図 3.4(h)のように最終的に彗星核が粉々になって木星大気中に散っていく様

子が分かるのは3次元シミュレーションならではの結果である。このような現象は3次元計算でなければ求められない。ただし、この計算にはスーパーコンピュータを利用したが、メモリの関係で格子数が少なく、従って解像度の方はあまり高くない。なにしろ直径3kmの球形の彗星核をたったの20格子で表現しているのである。それでもこの結果のようになかなか細かく核の変化の様子が捉えられているのだから、CIP法の解像度の高さがかなりのものであることが分かる。将来的にはより多くのメモリが使えるようになるだろうから、その際にはもっと格子数を増やして計算を行えばより詳しく彗星核の変化の様子が捉えられるであろう。さらに、今回のシミュレーションでは彗星核を球形であると仮定したが、もっと複雑な形状にして計算を行うことにより、核が消滅するまでの時間などが変化する可能性もある。いずれにせよ、これは今後の課題である。

3.4 衝突痕の生成シミュレーション

3.4.1 序論

SL9の分裂核が次々に木星に衝突すると、木星面には可視光で見ると真っ黒な斑点が多数出現した。直径数千kmにも達するこれらの暗斑はその後木星の大気の流れによって次第に拡散していったが、衝突後1ヶ月以上もの間観測可能であった。従って、これらの暗斑は非常に安定な構造であったと考えられる。そして、このような安定な構造としては渦が挙げられる。

それではSL9の木星衝突後に出現した衝突痕が渦であるとする、その渦はどのように発生したのだろうか。本研究では渦がSL9の核が木星大気に突入、あるいは破壊された時に発生した渦が大きく広がって衝突痕を形成したと推定し、その様子をシミュレートすることを試みた。この計算により、彗星核の木星衝突により実際に渦が発生するかどうか、また、渦が発生するとしたらその渦から衝突痕が出来る

のかどうかを検証した。

3.4.2 計算条件

計算領域などについて図 3.6 に示す。計算は軸対称 2 次元で実行したので、実際に計算しているのは図の半分だけである。また、図の左側が木星の中心方向である。これまでの計算と異なり、衝突痕生成のシミュレーションでは背景の木星大気を固定し、核を 60km/s で移動させるという方法を用いた。これは核の細かい変化を追うよりも核の衝突による木星大気の変化の様子を広い領域で追跡する必要があるためであるのと、核に大気を吹き付けるという方法の場合には核の減速の影響により核が後方に吹き流され、結果的により大きな領域で計算しなければならなくなるためである。ただし、いくら核の細かい変化を追う必要が無いといっても球形の彗星核を扱うには相応の格子数が必要である。また、核の通り道については格子間隔を広げるわけにもいかないので結果的に多くの格子数が必要になるのが欠点であるといえる。

核の大きさはこれまでと同様、直径 3km で材質は氷とした。格子数は 1200×65 で固定直交格子を使用した。対称軸に沿う方向(核の落下方向)については均一格子、その垂直方向は不均一格子で、核近傍では均一、それより外側では核から離れるにつれて格子間隔が大きくなっている。格子間隔は最小で 200m である。木星大気についてはこれまでの計算と同様であるのでここでは省略する。

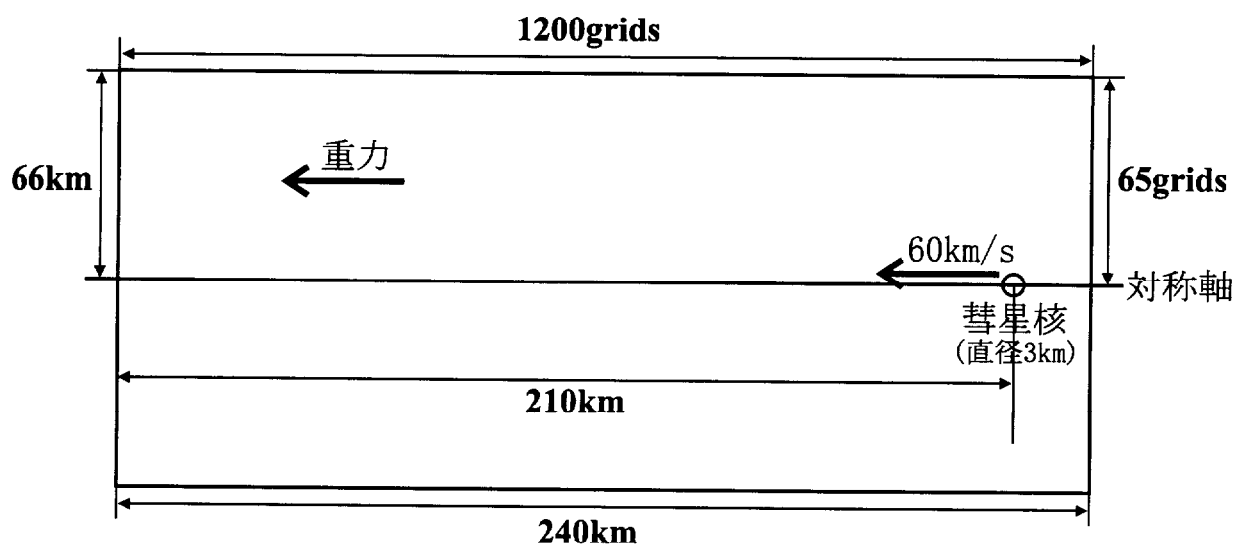


図 3.6 初期条件(渦の生成シミュレーション)

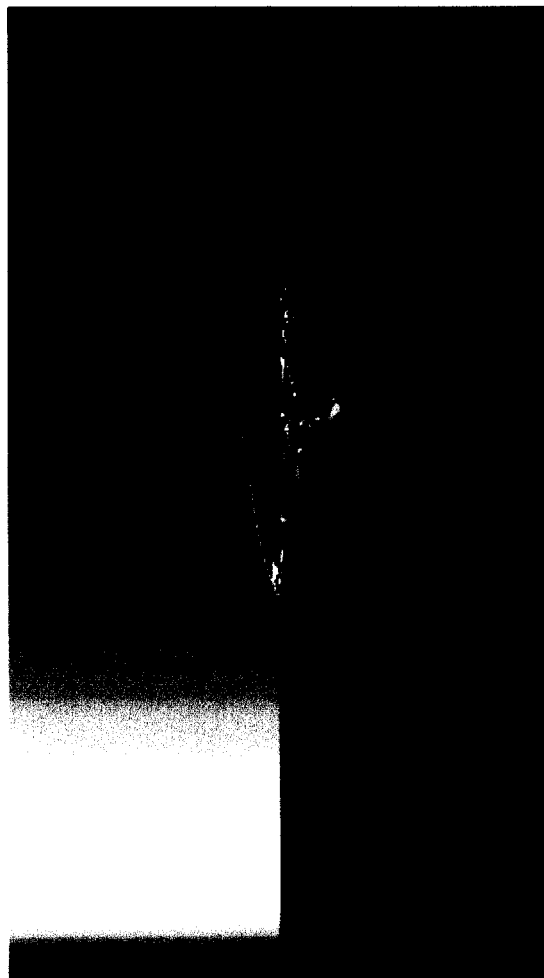
3.4.3 計算結果

計算結果として図 3.7 に密度と渦度の分布図を示す。図 3.6 と異なり、図 3.7 は下が木星の中心方向になっている。これらの図の左半分が密度を、右半分が渦度を示している。密度は赤が最も高密度、その後黄、橙、紫、と続き、後は暗い色になるほど低密度である。渦度については図 3.6(a)の色が渦度 0、黄、赤が図 3.7 でいうと時計周りの渦(以後プラス方向の渦とする)で赤の方が渦度が大きい領域、青が反時計周りの渦(以後マイナス方向の渦とする)でより明るい青の方が渦度が大きい領域である。

低  高 (密度) 
 マイナス方向  プラス方向 (渦度) 



(a) 0.0 sec



(b) 2.0 sec



(c) 4.0 sec



(d) 6.0 sec



(e) 8.0 sec



(f) 10.0 sec

図 3.7 彗星衝突による渦の生成(左半分:密度、右半分:渦度)

図 3.7 を見ると、初めは静止していた木星大気が彗星核の通過によって乱されていく様子が分かる。また、これによって渦度の高い領域が発生しているのも分かる。核が通過した後は大気の密度が小さくなるために浮力が働き、結果として木星大気中にできた図のような構造は木星大気の上層へと運ばれ、さらに水平方向へも拡散していく。

この計算による渦度の最大値と計算領域全体での循環の時間変化をグラフにしたのが次の図 3.8(a)である。

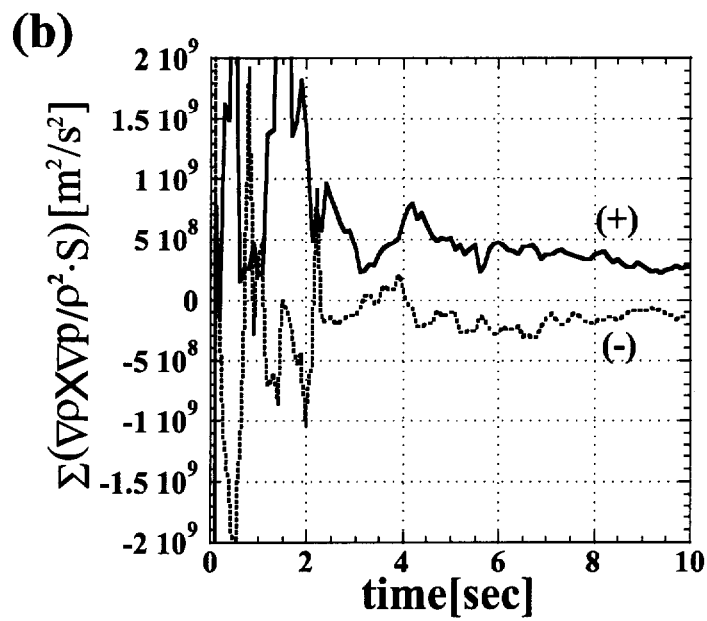
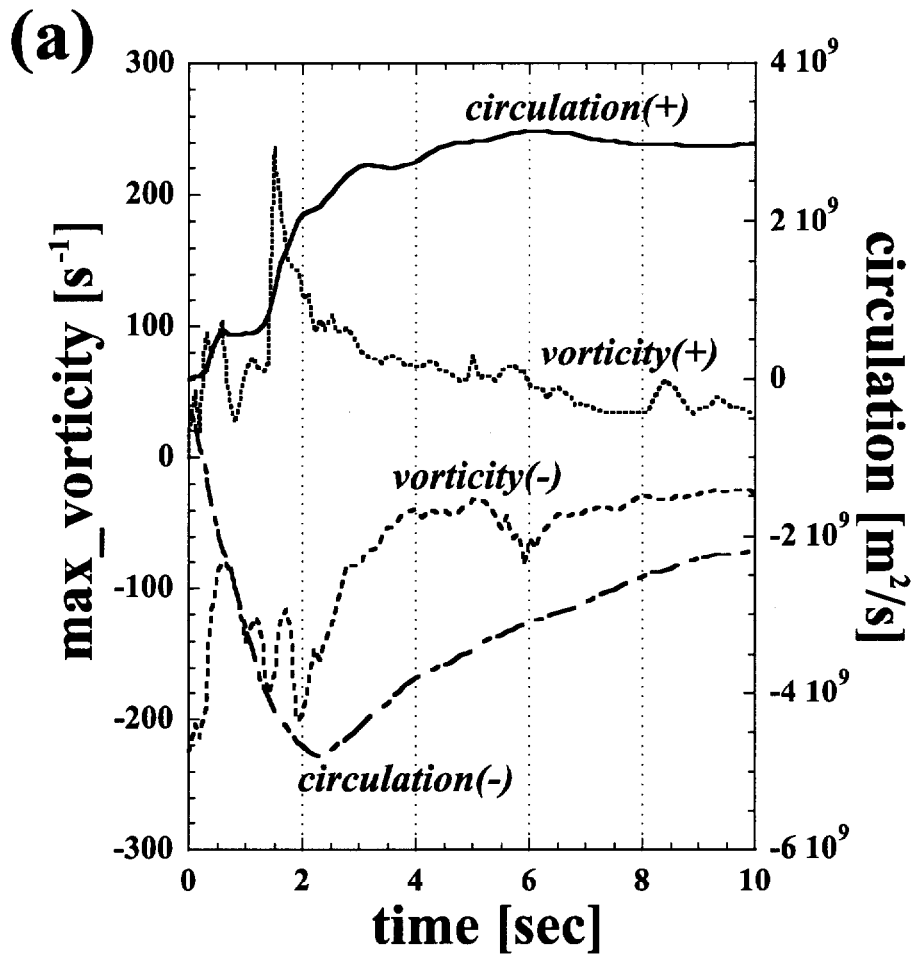


図 3.8 彗星核の木星衝突による渦の変化

ここで、循環とは

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.8)$$

で定義され、渦を特徴づける量である。ここではストークスの定理から、

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.9)$$

として算出した。ここで、 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ で、これが渦度の定義である。なお、 $\mathbf{u}$ は速度である。

図 3.8(a)を見ると、渦度の最大値はプラス方向、及びマイナス方向ともに 2 秒程度で大きな値をとった後、次第に減少していく。この時刻の頃に彗星核が破壊されるので、その時に大きな渦度が発生しているものと考えられる。また、循環の時間変化を見るとマイナス方向は 2 秒過ぎに大きな値をとった後、次第に減少していく。これに対し、プラス方向の循環は 5 秒程度までは値が上昇するがその後はほぼ一定の値となっている。

ここで、式(3.9)の時間変化をとる。

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \int \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{n} dS) = \int \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{u} \times d\mathbf{l}) \quad (3.10)$$

ここで、 $\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{u} \times d\mathbf{l}) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l}$ であるから、式(3.10)は

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \int \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.11)$$

となる。なお、最後の式変形にはストークスの定理を用いた。よって

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \int \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \right] \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.12)$$

となり、従って

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0 \quad (3.13)$$

であれば $D\Gamma/Dt = 0$ で循環が保存することが分かる。これがケルヴィンの循環定理である。ここで、運動方程式を考えてみる。ポテンシャルを ϕ として重力を $\mathbf{g} = -\nabla\phi$

とすると流体の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi \quad (3.14)$$

公式 $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}^2 \right) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ を用いて式(3.14)を変形すると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi \quad (3.15)$$

となる。さらに、両辺の回転をとると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times \left[\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \right] - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = -\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) - \nabla \times (\nabla \phi) \quad (3.16)$$

よって、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p \quad (3.17)$$

が得られる。従って、 $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2 = 0$ ならば式(3.13)を満たすので循環が保存する。

そこで図 3.8(b)にこの $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$ の値を調べた結果を示す。これはプラス方向及びマイナス方向の渦度を持つ領域でそれぞれの $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$ の和を求めたものである。

これは各セルにおいて $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$ を計算し、そのセルの面積 S を掛けたものを足し

合わせたものである。図をみると、 $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$ の和は初めのうちは大きな値を持つ

が急速に減少している。特にマイナス方向の $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$ の和の最大値は $10^{15} \text{ m}^2/\text{s}^2$

のオーダーにもなる。なお、図 3.8(b)ではこのような大きな値まで図示しようとする

とほとんどの値は 0 と見分けられなくなってしまうため、拡大して表示している。

図 3.8(a)と(b)とを比較してみると、 $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$ の和が小さくなるにつれて渦度の最

大値も小さくなっているのが分かる。また、プラス方向の循環に注目すると

$(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$ の和が小さくなると循環の変化も小さくなるのが分かる。従って、循環

がほぼ一定値になるのは式(3.13)がほぼ満たされるようになるためであると考えられ

る。しかし、マイナス方向についても $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$ の和は同じように小さくなるのだ

が、こちらの方は循環が保存していない。これはなぜなのか、現在のところ検討中

である。

また、図 3.8(a)で注目したいのは渦度の大きさは次第に小さくなっていくにもかかわらずプラス方向については循環の値が保存されるということである。これはすなわち渦の存在する領域の面積が増大しているということである。つまりこれは核の衝突によりコンパクトではあるが強い渦が発生し、それが拡散して渦度自体は弱まるが大きく広がっていくというように考えることが出来る。従って、核の衝突によって発生した渦が衝突痕の大きさにまで拡散したと考えるには循環が保存することが重要である。

問題なのはこのような循環が保存するという傾向がどのくらいの時間まで続くかということである。そこで、図 3.8 では 10 秒までの結果であるが、図 3.9 に格子間隔をより粗くして計算領域を広くとり、50 秒まで計算した結果を示す。

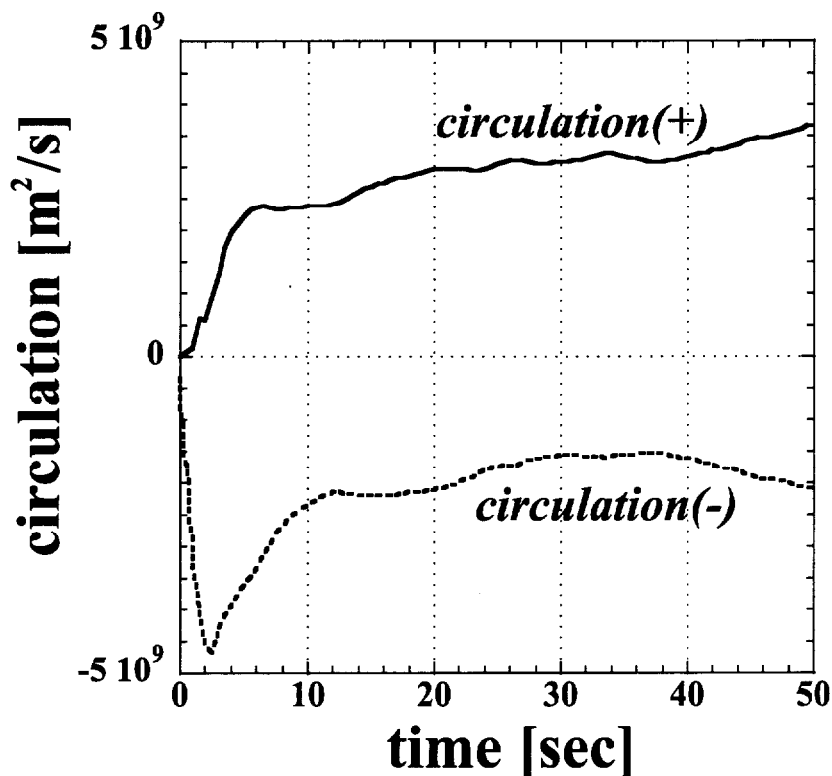


図 3.9 循環の時間変化(50 秒まで)

なお、この計算は格子数 800×70 の不均一格子(最小格子間隔は 300m)で行った。計算領域は鉛直方向(核の落下方向)が 625km、水平方向が 391km である。図 3.9 を見ると、プラス方向の循環は増加傾向にはあるが 2 秒程度までの急激な増加に比べれば緩やかな上昇であり、ほぼ一定であるといえる。マイナス方向の循環は 10 秒以降は少なくとも 10 秒以前に比べると変動も少なく、ほぼ一定の値になっている。従って、この結果から少なくとも 1 分程度までは循環が保存すると考えられる。

ここでこの計算結果から、発生すると考えられる衝突痕の大きさを見積もってみる。観測によると、衝突痕付近の流速 V_0 は $V_0 = 100 \text{ m/s}$ 程度であった。衝突痕の大きさを D とすると渦度 ω_0 は $\omega_0 = V_0/D$ であり、循環 Γ は $\Gamma = \int \omega dS = V_0 D$ となる。観測から、最も大きい部類の衝突痕の大きさは $D \approx 10000 \text{ km}$ 程度であったから、その循環は $\Gamma \approx 10^9 \text{ m}^2/\text{s}$ となる。シミュレーションによる循環の大きさはこれよりやや大きい値であるがオーダーは同じであるからほぼ一致していると考えて良いだろう。このことから考えると、SL9 の核はシミュレーションで仮定した直径 3km よりももう少し小さいものなのかもしれない。

ここで、このシミュレーションでは重力の影響のみ考慮しているが、他の力の影響について考えてみる。他の力とは遠心力とコリオリの力である。SL9 の衝突緯度は南緯 44 度付近であるが、ここでは簡単にするために赤道に衝突したとし、木星の半径は 70000km(正確には 71492km)、自転周期は 10 時間(同じく 9 時間 55 分 29.37 秒: System III)であるとする。まず、遠心力であるが遠心力による加速度を a_{cen} とすると、 $a_{cen} = R_J \omega_J^2 = R_J (2\pi/T_J)^2 \approx 1.22 \text{ m/s}^2$ となる。ここで、 R_J 、 ω_J 、 T_J はそれぞれ木星の半径、自転の角速度、自転周期である。この遠心力による加速度は重力加速度 $g = 23.2 \text{ m/s}^2$ の 1/20 程度しかなく、無視できると言える。次に、コリオリの力であるがコリオリの力による加速度を a_{cor} とすると、 $a_{cor} = 2\omega_J V$ と表せる。ここで V

を計算値の最大速度 $6.96 \times 10^4 \text{ m/s}$ とすると $a_{cor} \approx 24.3 \text{ m/s}^2$ となる。従ってコリオリの力は重力と同じ程度の影響を与えることになる。ここで、コリオリの力によって発生する渦の渦度を見積もってみる。計算時間の 10 秒で大きさが 1km の渦ができたとするとその渦度は $24.3 \times 10 \div 1000 = 0.243 \text{ s}^{-1}$ となる。シミュレーションによる渦度は最大で 200 s^{-1} 程なのでこれに比べると遥かに小さい。しかも、この値は最大値であって、実際には速度の方向やあるいは衝突場所が赤道ではないことを考慮すると影響はより小さいものになる。これらの力と同様に問題になるのが木星大気中の風の影響である。探査機ガリレオのプロープによる観測には、木星大気中の 10bar 程度の所で風速 200m/s 前後の強風が吹いていた[35]。プロープが突入したのは赤道付近であり、SL9 が突入した南緯 44 度付近でも同じ強さの風が吹いているのかは何とも言えない。しかし、風が吹いているのは事実であり、また、深さによって風速が異なるのでシミュレーションで得られたような構造は多少なりとも崩されるものと考えられる。しかし、風速 200m/s 程度であればやはり 1 分程度の時間では大きな影響を及ぼすようなものではない。このように、シミュレーションで無視した力や木星大気の運動は計算した時間スケールでは影響は小さいと考えられるが、衝突痕が長期に渡って観測されたことを考えると実際に衝突痕に与えた影響はかなり大きくなる。実際、観測による画像を見ると衝突痕は初めのうちはほぼきれいな円形であるが、時間とともに変形し、東西方向に引き延ばされていくのが分かる。これはコリオリの力と木星大気中の風の影響であろう。またこのような衝突痕の形状変化については、初めのうちは今回のシミュレーションで得られたような主に垂直方向に回転する渦で形も整っていたのだが、時間が経つにつれてコリオリの力の影響を受けて水平方向の回転が加わることにより、形が崩れていったと解釈することができる。

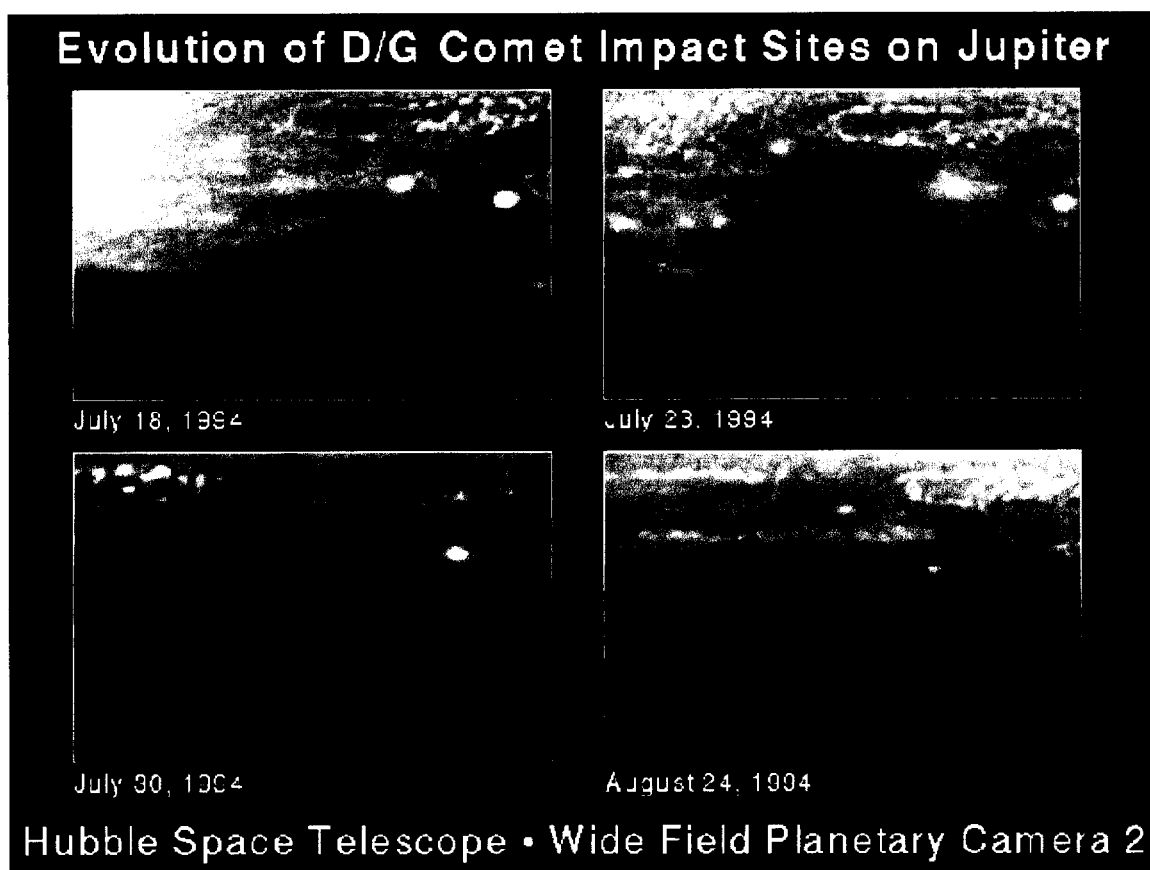


図 3.10 衝突痕の時間変化

SL9 の核は地球からは見えない木星の裏側に衝突したが、位置的には木星が少し自転すれば地球の方向を向く場所であった。しかも木星は巨体ではあるが自転は非常に速く、そのため衝突場所も衝突後 10 分程度で地球から観測できるようになった。その時にはすでに衝突痕が現れていたわけであるから、衝突痕は数分程度のごく短時間で形成されたはずである。このことから衝突痕は今回のシミュレーションで見たように、やはり彗星核の周囲で発生した渦が拡散して形成されたと考えられる。

3.5 流星について

流星は宇宙空間を漂う小さな塵が地球大気に飛び込んで輝く現象である。流星物質が地球大気に突入すると、その運動エネルギーを熱として大気に与え、大気中や

流星体の原子、分子が電離して光るようになるのである。流星の中には末端で爆発的に増光するものや、その経路上に光る雲のようなものを残すものもある。これは流星痕と呼ばれ、普通は数秒程度で見えなくなるが、時には数分以上もの間にわたって観測できる場合もある。このようなものは永続痕と呼ばれるが、地球大気の流れを知る上でも重要な現象である。なぜなら、流星は地上 100km ほどの高高度の現象であり、このような高さでは雲もできなければ飛行機などでも観測できないからである(大気レーダーやロケットによる観測は可能である)。従って、永続痕の変化を観測することであまりよく分かっていないこの高さでの大気の運動を知ることが出来るのである。また、そもそもこの流星痕がなぜ光るのか、その正体自体もよく分かっていないのだが、SL9 の木星衝突シミュレーションから推定してみることにする(流星については[36])。

まず爆発的な増光を示す流星であるが、これについては突入シミュレーションで見たように流星体が途中で分裂したためであると考えられる。分裂することで一気に運動エネルギーを解放し、急激に増光するのである。このような挙動を示す流星の元となる塵は比較的脆いものなのであろう。



図 3.11 流星痕

次に流星痕であるが、これは渦生成シミュレーションで見たように流星体が大気に突入したことによって発生した渦が原因であると考えられる。本研究のシミュレーションでは彗星核の直径は 3km であるが、流星体の大きさは数 mm 程度しかない。従って発生する渦も遥かに小さいはずである。発生した渦は大気の粘性によって次第に散逸していくだろうが、SL9 の木星衝突によって発生した渦は数千 km もの巨大なものであるからそう簡単には無くならない。しかし、流星で発生する渦は小さいので短時間で消えてしまうだろう。この時間をざっと見積もってみる。動粘性係数を ν とすると、粘性の影響は 1 次元で書くと

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

である。従って、渦の大きさを D とすると、

$$t \approx \frac{D^2}{\nu}$$

で渦が消滅すると考えられる。空気の場合 $\nu \approx 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$ で、 $D = 10 \text{ cm}$ とすると、 $t \approx 660 \text{ s}$ となるので、だいたい 10 分程度は渦が持続することが分かる。長寿命の永続痕はこのくらいの時間観測されるのでこれは妥当な数字であるといえる。また、流星痕が光る理由についても考えてみる。流星が発光するのは流星体の運動エネルギーが熱に変換され、その結果、流星体や大気中の原子、分子が電離するためである。しかし、流星痕が輝いている頃にはもはや流星体は存在しないから、流星痕が輝くためには流星体が解放したエネルギーを何らかの仕組みで維持していなければならない。これについては渦が発生すればその渦自体もエネルギーを持っているわけであるから、流星痕は流星体が解放したエネルギーを渦として保持していると考えることができる。従って、流星痕は流星物質が地球大気に飛び込んだ時に発生した渦のエネルギーが空気の粘性によって熱に変換されて輝いているものと考えられる。ただし、地上 100km 程度の高さにある 10cm 程度の構造が地上から観測できるとは考えられない。角度にして 0.2 秒程度にしかないからである。これについて

は小さな渦がその周囲を広範囲に輝かせていると考えればよい。また、流星痕は明るい流星が流れた後に見られることが多いが、これは地球との衝突速度が同じならば明るい流星の方が流星体のサイズが大きいはずであるから、生成される渦の大きさも当然大きいはずである。従って明るい流星の方が流星痕を残しやすいと考えられる。しかし、明るい流星が必ず痕を残すわけではない。これは流星体の形状や大気突入時のローカルな気流の条件などによって発生する渦の大きさや強さが変化するためであると考えることができる。さらに、8月のペルセウス座流星群や11月のしし座流星群は痕を残す流星が多いことが知られているが、これらの流星群に共通するのは流星体の地球との衝突速度が 70km/s 前後で非常に速いことである。衝突速度が速ければそれだけ強い渦が発生しやすいことが予想され、従って痕を残す流星が多くなるのではないかと考えられる。このように流星痕の正体は流星体の地球大気突入によって生じる渦であると考えられるのだが、これを検証するため、そしてもっと詳しく調べるためにも実際に流星現象のシミュレーションを行うことが必要である。この計算は現在実際に着手されており、継続中である。

3.6 結論

CIP 法、C-CUP 法を基礎とした流体コードにより、SL9 の木星衝突のシミュレーションを行った。軸対称 2 次元による計算では、彗星核はまずその前面の中心付近にくぼみができ、そこに木星大気の流れが集中して穴が深くなっていき、やがて核を貫通して核が引きちぎられるように破壊されるという結果が得られた。また、核が消滅するのは木星大気突入約 3 秒後で、その時の周囲の木星の大気圧はおよそ 15bar であった。

しかし、この軸対称 2 次元計算において、彗星核がその前面中心部から破壊されるのは対称軸での計算手法に問題があることが疑われた。そこで、同じ計算を 3 次元で実行した。その結果、彗星核は 3 次元計算においても軸対称 2 次元計算とほと

んど同じ経過をたどって破壊されることが分かった。さらに、核が消滅するのも木星大気突入約3秒後であり、この結果も3次元計算と軸対称2次元計算は一致した。従って、軸対称2次元による計算から正しい結果が得られているものと考えられる。このようにこの3次元計算は従来の軸対称2次元による計算を補強するものとなった。また、これらの計算で得られたSL9の核の木星大気進入深度は観測結果と矛盾しなかった。

また、SL9の核の木星衝突によって発生した渦が木星面上に現れた巨大な衝突痕の原因であるかどうかを調べた。その結果、衝突によって実際に渦が発生した。そして、発生した渦の強さはすぐに弱まってくるものの、循環の大きさは保存されることが分かった。これは発生した渦が拡散しながら広がっていくことを意味している。この結果から木星面上に残された衝突痕は彗星核の木星衝突の際に発生した渦が拡散してできたものであると考えられる。

さらに地球上の流星現象についても簡単にではあるが検討を行った。その結果、経路の末端で爆発的に増光する流星は流星体の分裂で説明できること、流星痕の原因も流星に伴って発生した渦であると考ええることで説明できることを示した。

今後の課題としては、彗星核の木星大気突入シミュレーションでは彗星核を球形ではなくより複雑な形状にしてそのときの核の変化の様子や消滅時間を調べること、衝突痕の生成シミュレーションでは核の大きさを変化させ、衝突痕の大きさがどのように変化するかを調べること、さらに長い時間について循環の時間変化を調べることなどといったことが挙げられる。さらに流星のシミュレーションについても流星体の大きさや固さ、あるいは速度を様々に変化させて計算を行い、その際に発生する渦の大きさや強さなどについて詳しく調べる必要があるだろう。

第4章 小型船体のスラミング現象のシミュレーション

4.1 序論

スラミングは荒れた海面を航行中の船舶の船体がいったん海面上に露出し、続いて激しく波面に突入したときに生じる現象である。この時、船体には大きな衝撃荷重が作用し、船体の損傷の原因となることもある。さらにひどくなると時には船体に致命的なダメージを与え、海難事故を引き起こすこともあり、非常に侮り難い現象である。このように従来から水撃荷重は小型船体の強度にとって支配的である。大型船においては小型船舶に比べて堅牢であり、また速度も遅いために水撃圧は小さくなる。しかし、最近では大型船においてもその高速化によって同じく重要な要因となっており、さらに1回1回の水撃は小さくてもそれが続くと金属疲労を招くため、特に老朽化した船舶にとっては問題である。故に、船体設計において、船舶の安全性を確保するためにも水撃荷重の発生機構を解明し、さらに正確な圧力の空間分布を捉えることが重要な課題となっている。

このような水撃理論の研究としては、Wagner[37]によるものが良く知られている。Wagner は水撃現象では重力の影響は無視できるとし、水面と衝突物体とのなす角、水撃角 β が小さいものとして2次元物体が進入速度で水面に突入する問題を線形化した。Wagner 理論は単純明快であるが、例えば、平板の端点では圧力が負の無限大になってしまうといった問題点も抱えている。よって、Wagner 理論は発表されても現在ほどには信頼されず、この理論を実験などで検証する研究が行われた。なかでもChuangの研究[38]が知られている。Chuangの実験ではWagner理論と比べて衝撃圧の最大値は全体的に低い結果が得られている。従って、Wagner理論の値によって船体設計をすれば事実上安全であると考えられた。

Wagner 理論は現在では実用上十分な精度を持つことが検証されたと考えられている。しかし、水撃角 β が小さく、空気巻き込みの影響がある場合の荷重推定のように、現在でも課題として残っているようなものもある。この課題についても例えば Korobkin[39,40]によって、水の圧縮性の影響などを考慮した理論的な研究が行われたり、他にも様々な研究がある[41-43]が、小さい水撃角における水撃圧の振る舞いを議論できるほどのものではない。

なお、Chuang の実験は圧力計の問題により圧力波の鋭いパルスが捉えきれておらず、結果的に水撃圧値が Wagner 理論よりもずっと小さくなっているのだと長い間考えられてきた。しかし、最近でも Chuang の実験に近い値が得られている実験もある[44]。

本研究[45]では CIP、C-CUP 法を用いた流体コードにより水撃現象を数値的に解析した。この流体コードでは固体、液体、気体を同時に計算できるので、水撃現象のシミュレーションには非常に有効である。そして、これによって得られた結果と Wagner 理論、及び Chuang の実験結果との比較検証を行った。

4.2 計算条件

シミュレーションでは、船体は横幅 L の剛体であるとし、水面に一定速度 V_0 で衝突させた(図 4.1)。これ以降、速度や長さ(距離)はそれぞれ V_0 、 L で規格化する。船体表面は tan 変換を用いた密度関数法(2.2.2 節を参照)により追跡し、船体内部の圧力についても C-CUP 法で解いている。なお、このシミュレーションにおいては SL9 の木星衝突シミュレーションで用いた log 関数による変数変換は利用していない。

水と空気の区別については密度と音速を変えることによって行なっている。ここでは水の音速を空気の音速の 5 倍に設定した。音速 C_s は $C_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$ (ρ :密度、 p :圧力、 γ :比熱比)で表わせるが、比熱比 γ の値を変えることによって音速の違いを実現

している。実際、水の音速は 1500 m/s で、空気の音速 300 m/s の5倍である。水、空気、船体の密度はそれぞれ、 ρ_{water} 、 $1.293 \times 10^{-3} \rho_{\text{water}} (= \rho_{\text{air}})$ 、 $0.5 \rho_{\text{water}}$ で、圧力は計算領域全体で $100 \rho_{\text{water}} V_0^2$ とした。マッハ数 V_0/C_s (C_s は音速)は水中で 6.7×10^{-4} 、空気中で 3.0×10^{-3} となる。

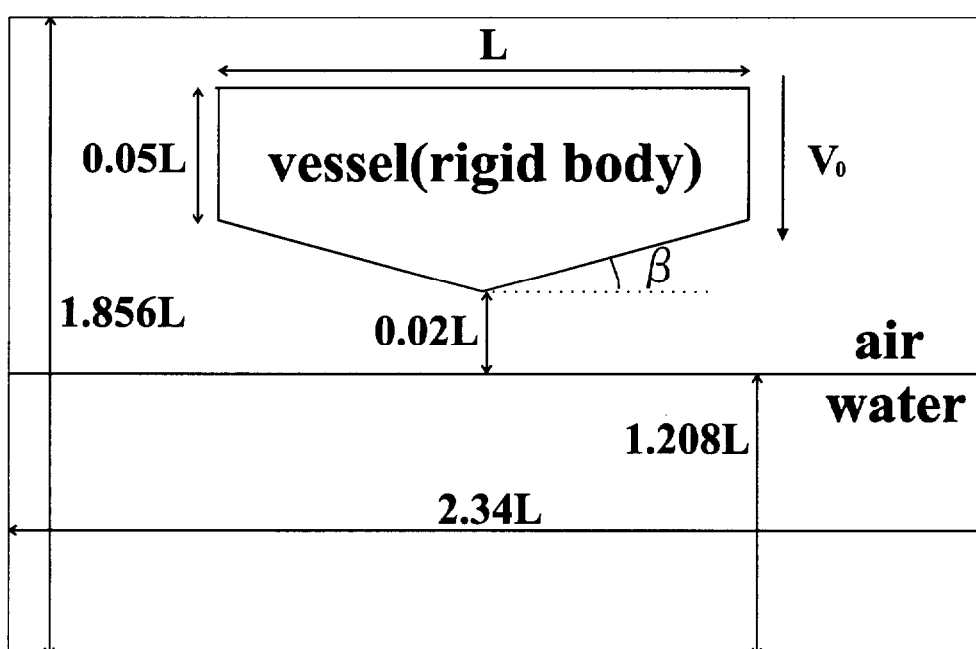


図 4.1 初期条件(細かい格子の場合)

計算格子については均一固定直交格子、不均一固定直交格子を用いた。均一格子の場合、格子数は水平方向に 200 格子、船体が落下する方向である垂直方向に 130、あるいは 750 格子とした。この時、格子間隔は水平方向が $\Delta x/L = 0.01$ 、垂直方向が $\Delta y/L = 0.01$ 、あるいは $\Delta y/L = 0.002$ である。これは水撃角の大きさによって選択した。それは水撃角が小さい場合、格子が粗すぎると直交格子では船体の下部表面を正しく捉えることが出来ないからである。以後、この均一固定直交格子を”粗い”格子と呼ぶことにする。この粗い格子を用いた計算では実粘性の影響は考慮していない。

また、計算結果の格子依存性を調べるため、不均一格子を使用して格子間隔をより小さくした場合の計算も実行した。この場合、格子数は水平方向に 400 格子、垂直方向に 500 格子とした。格子間隔は最小で水平方向が $\Delta x/L = 0.004$ 、垂直方向が $\Delta y/L = 0.0008$ である。これらの格子間隔は水面付近、船体付近に適用され、計算領域の外側にいくにつれて格子間隔が広がるように設定されている。以後、この不均一固定直交格子を”細かい”格子と呼ぶことにする。この細かい格子を用いた計算では実粘性の影響を考慮した計算も実行した。

ここで全ての計算が固定直交格子を用いて行われていることを強調したい。というのは、水、空気、そして船体はこの固定された格子上を移動する。すると、従来の計算スキームでは数値拡散が発生してしまい、物体の表面がぼやけてしまうといった現象が起こる。しかし、CIP 法は数値拡散が非常に小さいため、このような数値的困難は解消されている。

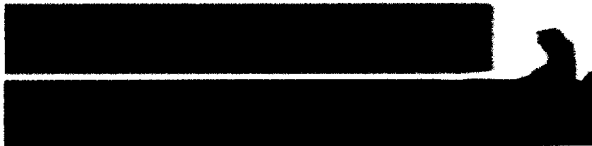
なお、全ての計算において表面張力と重力の影響は考慮していない。

ここで付け加えておくと、本論文のテーマは極端な密度差をもつ物質を同時に解くということであるが、このスラミング現象や第 3 章の SL9 の木星衝突のように高密度の物質が移動する場合についてはそれが移動しない場合よりも数値計算上は有利である。というのは高密度物質が移動しない場合、その表面で計算誤差が発生するとそれが一カ所に留まるために次第に誤差が累積され、ついには計算が発散してしまうということが起こりうる。しかし、高密度物質が移動する場合にはそれに伴って誤差が発生した部分も移動し、従って誤差の累積が起こりにくくなるためである。もちろん、だからといって本論文で扱ったシミュレーションが簡単なものであるということではない。

4.3 計算結果

4.3.1 密度の等高線図

図 4.2 に密度の等高線図を示す。これらの図は船体付近を拡大したもので、水平方向で $0.45L$ の範囲を表している。また、どの図も船体下部表面の水撃圧が最大になった時刻での密度の等高線図である。また、実粘性とあるのは細かい格子を使用し、かつ実粘性の影響を考慮して計算したものである。



(a) $\beta = 0^\circ$, $t = 0.018L/V_0$, 粗い格子



(b) $\beta = 0^\circ$, $t = 0.0164L/V_0$, 細かい格子



(c) $\beta = 0^\circ$, $t = 0.0176L/V_0$, 実粘性



(d) $\beta = 1^\circ$, $t = 0.024L/V_0$, 粗い格子



(e) $\beta = 1^\circ$, $t = 0.02156L/V_0$, 細かい格子



(f) $\beta = 1^\circ$, $t = 0.02058L/V_0$, 実粘性



(g) $\beta = 5^\circ$, $t = 0.046L/V_0$, 粗い格子



(h) $\beta = 5^\circ$, $t = 0.04185L/V_0$, 細かい格子



(i) $\beta = 5^\circ$, $t = 0.04185 L/V_0$, 実粘性 (j) $\beta = 20^\circ$, $t = 0.06216 L/V_0$, 粗い格子

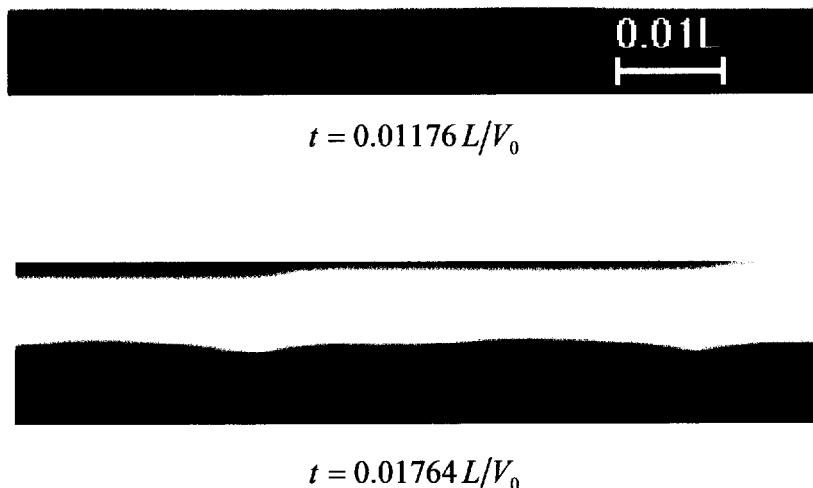
図 4.2 密度の等高線図(水撃圧最大時)

実粘性の影響が無い場合、水面の波は格子間隔によって大きな影響を受ける。特に、水撃角が小さい場合に格子間隔の影響が顕著である。これは図 4.2(d)と(e)、そして(g)と(h)を比較すると良く分かる。細かい格子を使用した場合には水面には多くの波が発生しているが、粗い格子を使用した場合、あるいは細かい格子でも実粘性の影響を考慮した場合、これは図 4.2(f)と(i)であるが、この場合には波長の長い波が発生するだけである。ここで、水と空気の動粘性係数 ν_{water} と ν_{air} はレイノルズ数がそれぞれ、 $R_{e\ water} \equiv V_0 L / \nu_{water} = 10^6$ 、 $R_{e\ air} \equiv V_0 L / \nu_{air} = 7.1 \times 10^4$ となるように設定している。概して言えば、水撃角が大きくなるにつれて水面波は少なくなり、従って最大水撃圧に水面波が与える影響も小さくなると考えられる。

なお、本章で扱っているのは小型船体のスラミング現象であるが、ここでこの計算を大型船体にそのまま適用できるのかということについて述べておく。本研究では船体の横幅を L で規格化しているわけであるから、 L の値を変化させれば船体が小型であろうと大型であろうと同じである。というのは間違いで、例えば粘性の効果について考えた場合、船体が大きくなるとレイノルズ数 R_e が大きくなるために粘性の効果小さくなる。よって、船体が小さい場合よりもより波長の短い波や小規模な流体構造が残りやすくなる。そのため、これらを解析するためにはより細かい格

子を使わなければならない。しかし、今回の計算では L の値が大きくなると格子間隔も同時に大きくなってしまうため、小規模構造の解析はできなくなってしまうのである。そのため、今回の計算で単純に L の値を大きくするだけで大型船についての計算もできるかといえそうではないのである。

話を戻すが、前述のような水面波が発生する原因は船体と水面との間の空気の流れである。船体はその中心(図 4.2 のそれぞれの図の左側にあたる。ただし船体の中心自体は図の外側である)から水面に衝突するが、それによって船体下部と水面との間にあった空気が右側(船体の外側方向)に押し出される。よって、船体下部の空気の流れは加速されていくのである。また、この空気の流れは水撃角が小さくなるにつれてより大きくなり、ケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性を誘起する。水面波がケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性によるものであるということは水面波の時間発展を調べることで証明できる。図 4.3 に図 4.2(e)を強拡大した図を示す。





$$t = 0.02107 L/V_0$$

図 4.3 水面波の成長($\beta=1^\circ$,細かい格子)

図 4.3 において、空気は左から右へと流れている。初めは平坦であった水面に凹凸が現れ、それが発達して波ができる様子がよく分かる。図 4.3 の計算では、空気の流速の最大値は $49.64V_0$ が得られている。これは $\beta=1^\circ$ の場合のある高さにおける船体の横幅の増大率 $V_0 \times 180/\pi \approx 60V_0$ に近い値である。なお、音速の値はおよそ $300V_0$ であるので、空気の流速はかなり大きくなるものの音速の $1/6$ 程度であり、衝撃波が発生するほどの大きさではないと考えられる。一方、空気の流速が最大になった時刻での水の流速はたったの $0.34V_0$ でしかない。従って、水面を挟んで非常に大きな速度差が発生していることになり、ケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性が誘起されるのである。図 4.4 に水面波の成長率を示す。

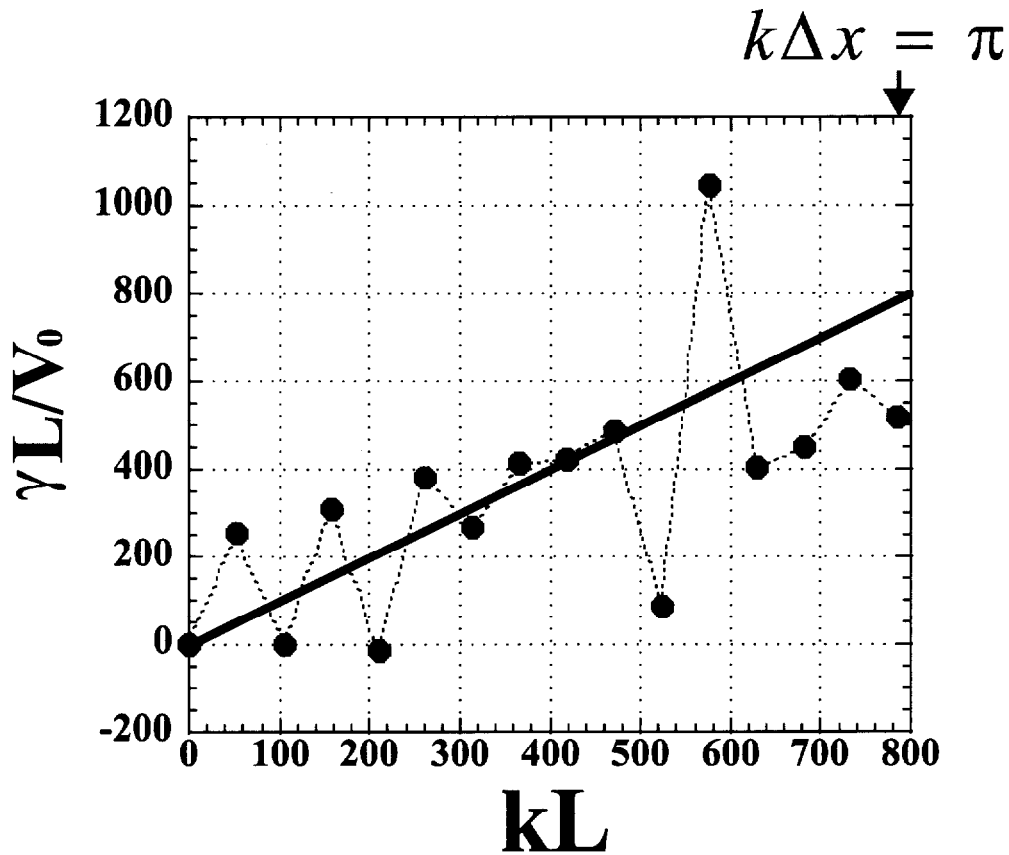


図 4.4 水面波の成長率

図 4.4 に示した成長率は図 4.3 の計算におけるもので、時刻 $t = 0.01470L/V_0$ から $t = 0.01519L/V_0$ の間の成長率を示している。これは水面波のプロファイルをフーリエ変換して得られたものである。また、 $k\Delta x > \pi$ よりも細かい波については解像できないので表示していない。図 4.4 中の実線は理論値である。ケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性の成長率の理論値は

$$\gamma_{KH} = k|V_{air} - V_{water}| \frac{\sqrt{\rho_{air}\rho_{water}}}{\rho_{air} + \rho_{water}} \quad (4.1)$$

と表される(Appendix D を参照)。ここで、 k は波数、 V_{air} と V_{water} はそれぞれ空気と水の速度である。図 4.4 を見ると、水面波の成長率の計算値はほぼ理論値と一致していることが分かる。従って、図 4.2、あるいは図 4.3 に見られるような水面波はケルヴ

イン・ヘルムホルツ不安定性によるものであると考えられる。また、成長率は流速に比例するので、水面波の振幅は水撃角が小さいほど大きくなるということも分かる。以下ではこのような水面波の影響を調べていくことにする。

4.3.2 圧力分布の相似則

船体の下部表面における水撃圧の分布図を図 4.5 に示す。この計算では水撃角 $\beta = 15^\circ$ で、粗い格子を用いた。このように大きな水撃圧では格子間隔依存性は小さく、細かい格子を用いて計算しても同じような結果が得られる。従ってわざわざ細かい格子で時間をかけて計算する必要はなく、粗い格子で十分である。

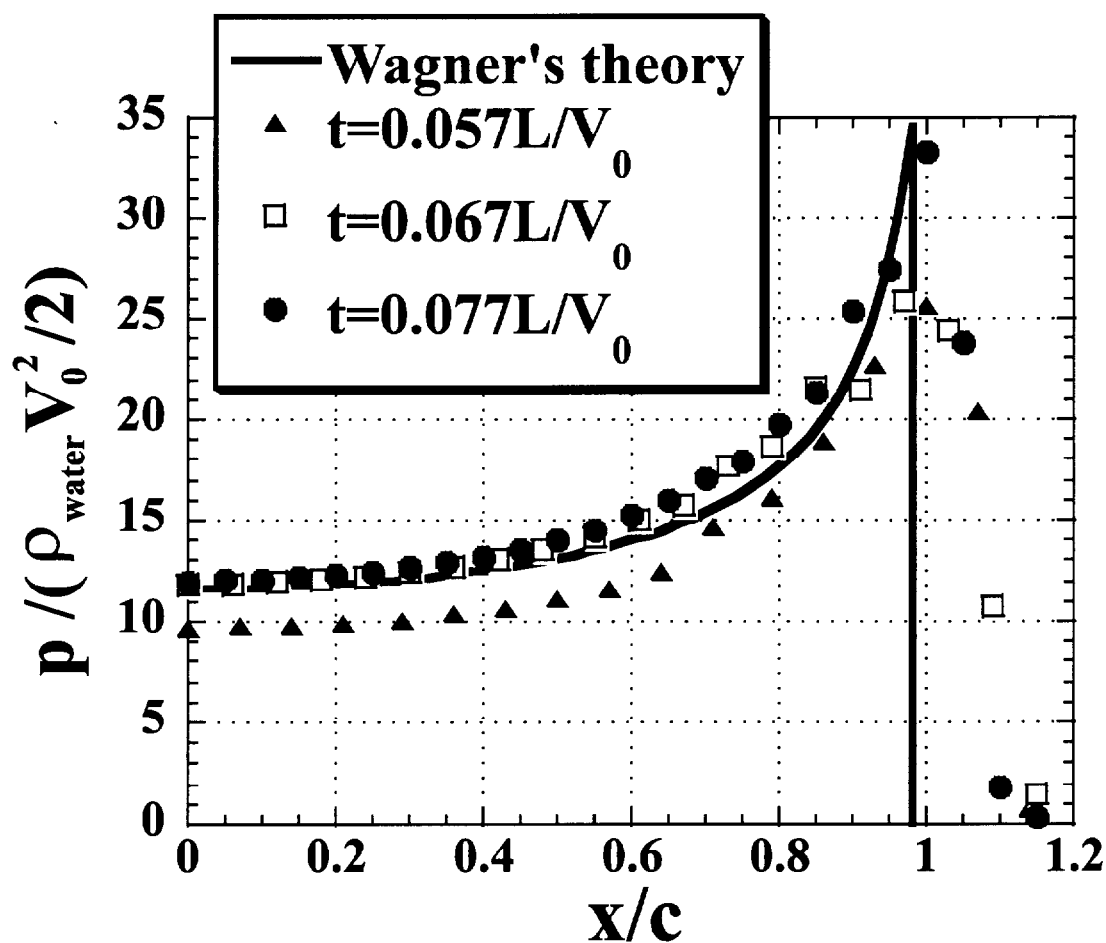


図 4.5 水撃圧の空間分布($\beta = 15^\circ$)

図 4.5 の縦軸の p はゲージ圧力で、圧力の計算値と初期値 $100\rho_{\text{water}}V_0^2$ との差である。

以降の図で p 、あるいは p_{max} はゲージ圧力を表している。一部例外もあるがその時には明記する。図 4.5 の横軸の x は船体中心からの距離を、 c は船体中心から接水端までの距離を表している。従って、 $x/c = 0$ はちょうど船体の中心部、 $x/c = 1$ は接水端である。また、今回のシミュレーションで船体下部の圧力分布を示す場合、圧力が最大になった場所が接水端であるとしてグラフを作成した。

図 4.5 中の実線は Wagner 理論による圧力の空間分布を示している。Wagner は無重力の仮定の下に水撃角 β が小さいとして問題を線形化し、流場を速度 V の一様流中に置かれた拡大平板周りの流場で近似することにより、自由表面の盛り上がりを考慮した理論を導いた。その骨子は拡大平板上 $y = 0^+$ での速度ポテンシャル ϕ と流速 $\partial\phi/\partial y$ が解析的に

$$\phi = \begin{cases} V\sqrt{c^2 - x^2} & ; x < c \\ 0 & ; x > c \end{cases}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \begin{cases} 0 & ; x < c \\ V/\sqrt{1 - c^2/x^2} & ; x > c \end{cases}$$

で表せるので、下の式を時間積分して時々刻々の自由表面位置と接水幅 c を計算し、この接水幅 c と上式をベルヌーイの式に代入して物体表面の圧力分布を得るというものである。結局、Wagner 理論による圧力の空間分布は次の式で表される。

$$p(x) = \frac{1}{2}\rho_{\text{water}}V^2\left(\frac{\pi\cot\beta}{\sqrt{1 - x^2/c^2}} - \frac{x^2/c^2}{1 - x^2/c^2}\right) \quad (4.2)$$

ここで、 V は船体と水面との衝突速度である。Wagner 理論による圧力分布は船体中心から離れるにつれて水撃圧が単調増加し、また接水端で鋭いピークを持つ。さらに時間には依存しない。図 4.5 に示したように、計算による圧力分布は時間によらず

Wagner 理論とほぼ一致している。特に時刻 $t = 0.077L/V_0$ における圧力分布は Wagner 理論と良く一致している。なお、シミュレーションではこの時刻に最大水撃圧が得られている。

4.3.3 最大水撃圧の衝突速度依存性

水撃角 $\beta = 15^\circ$ の船体の落下速度を変化させてシミュレーションを行った。前節と同様、粗い格子を使用し、船体の落下速度を V_{vessel} として V_{vessel}/V_0 を 0.5 から 3.0 まで 0.5 毎に変化させた。計算結果を図 4.6 に示した。船体の落下速度をこのように変化させても、最大水撃圧は Wagner 理論と同じ速度依存性を持つという結果が得られた。

前節の結果とこの結果から、この $\beta = 15^\circ$ の解は Wagner 理論によって正確に記述されていることが確認できた。

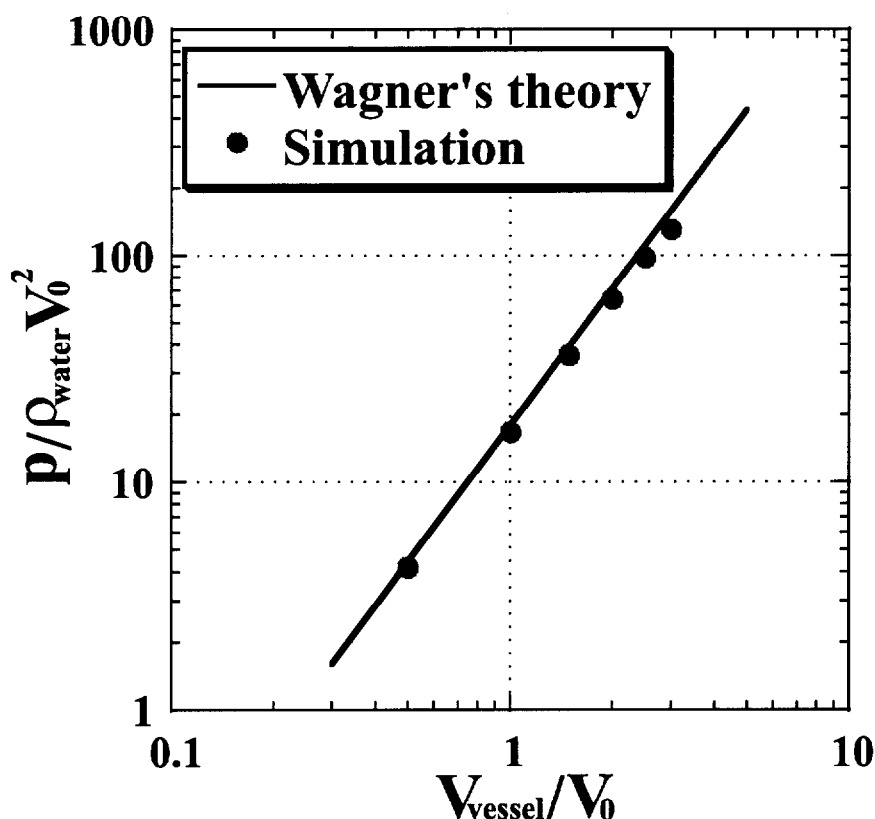


図 4.6 最大水撃圧の衝突速度依存性($\beta = 15^\circ$)

4.3.4 最大圧力の水撃角依存性

次に、水撃角 β のみを変化させて計算を繰り返し行った。これらの計算で得られた最大水撃圧を図 4.7 に示す。図 4.7 において、実線は Wagner 理論、破線は Chuang の実験による最大水撃圧値をそれぞれ表している。

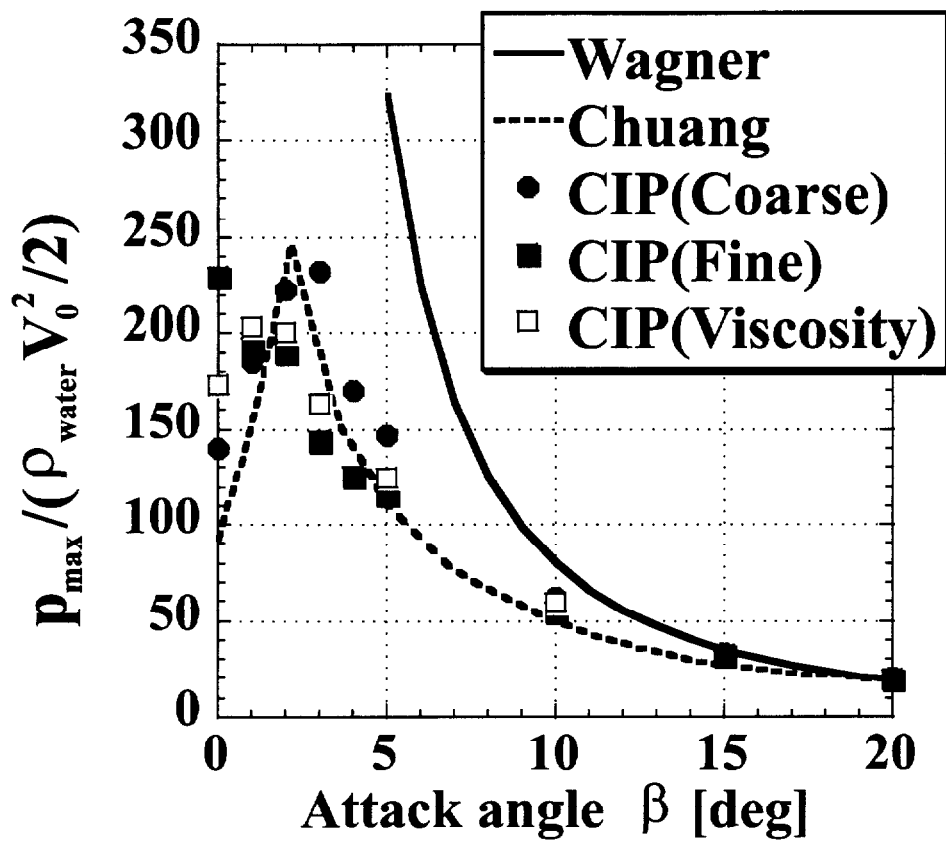


図 4.7 最大水撃圧の水撃角依存性

Wagner 理論は水撃角 β が小さい場合には非常に大きな最大水撃圧値を与え、 $\beta = 0^\circ$ では無限大になってしまう。これは接水端の増大率が平板では無限大になってしまふことに起因している。それに対して、Chuang の実験結果では最大水撃圧は水撃角が小さい場合には Wagner 理論よりもずっと小さい値となっている。そして

$\beta = 2.5^\circ$ 程度で最大になり、 $\beta = 0^\circ$ でも有限の値となっている。

シミュレーションによる最大水撃圧は、格子間隔、あるいは実粘性の影響の有無によらず Wagner 理論よりもむしろ Chaung の実験結果に近い値となっている。格子依存性は大きくないが、細かい格子による $\beta = 0^\circ$ の場合の最大水撃圧値は他の計算結果よりも大きい値であり、これによって細かい格子による計算だけは水撃圧の増加に伴って最大水撃圧が単調減少するという結果になっている。しかし、後に示すように $\beta = 0^\circ$ での最大水撃圧は船体が水面に接触する前に起こっており、また非常に鋭いため散逸しやすいものである。

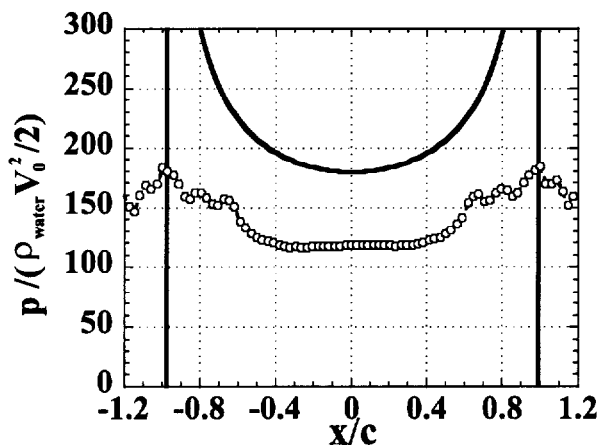
実際、実粘性の影響を考慮すると、このような鋭い圧力パルスは減少して粗い格子による計算結果に近いものとなる。なお、粗い格子の場合には格子間隔よりも波長の短い波が無くなって水面波が減衰するという効果が働いている。

いずれにせよ、シミュレーションの結果は Wagner 理論とは大きく異なった Chuang の実験結果をほぼ再現している。水撃角が大きい場合、例えば $\beta = 15^\circ$ の場合にはこれまでに見たようにシミュレーション結果と Wagner 理論とは良く一致している。従って、水撃角が大きい場合には何ら問題はない。問題なのは水撃角が小さい場合である。では、なぜシミュレーション結果と Wagner 理論とが食い違うのか、以下で検討することにする。

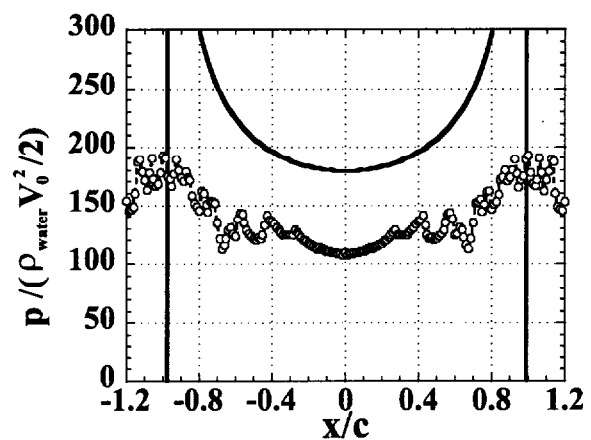
4.3.5 圧力分布の水撃角依存性

まず、図 4.8 に水撃角 $\beta = 1^\circ$ と $\beta = 5^\circ$ の場合の圧力の空間分布図を示す。これらの図は水撃圧が最大になった時刻での圧力分布を表している。また、図中の実線は Wagner 理論による圧力分布である。図 4.8 を見ると分かるように、 $\beta = 5^\circ$ の場合には船体中心付近では計算値と Wagner の理論値はほぼ一致している。これは $\beta \geq 2^\circ$ の場合に見られる傾向である。これに対し、接水端付近では Wagner 理論ほどには圧力が増加していない。

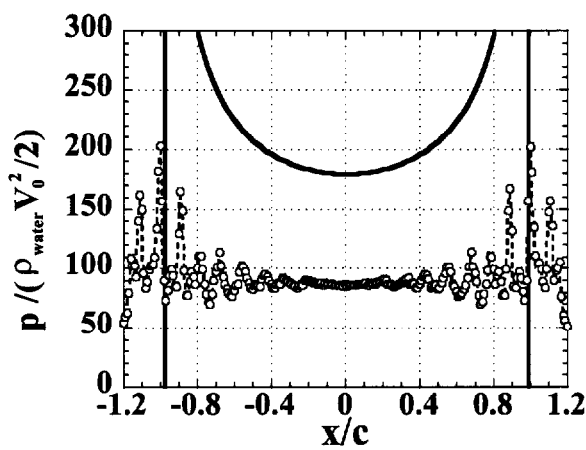
ここで、一つの問題が持ち上がる。もし、Wagner 理論が全ての水撃角に対して正しいならば、最大水撃圧を計算するために出来る限り細かい格子を使用しなければならない。なぜなら、水撃角が小さくなるにつれて圧力パルスが大きく、しかも鋭くなっていくからである。これは水撃角が小さい領域における Chuang の実験結果が Wagner 理論よりもずっと小さいのは、圧力計の解像度が足りないせいだとされてきた所以である。しかしながら、幸いなことに $\beta \leq 5^\circ$ における最大水撃圧は格子の細かいほど増加するわけではない。これは図 4.7 を見れば明らかである。従って、この圧力分布の不一致は格子の解像力が足りないせいではないと考えられる。もっとも重要なのは、図 4.8(a)~(c)に示したように、小さい水撃角に対する圧力分布が Wagner 理論による圧力分布と全く異なるということである。圧力は全ての領域で Wagner 理論の様に増加せず、空間プロファイルも水撃角が大きい場合に比べて平坦である。また、図 4.8(b)と(c)のように細かい格子を用いた場合には圧力分布に振動が見られるが、この振動は図 4.2(e)と(f)における水面波に対応するものである。図 4.8(c)の最大水撃圧は図 4.8(b)のそれとほぼ同じであるが、圧力の振動は図 4.8(c)の方がはるかに目立つものとなっている。これは実粘性の影響によって波長の短い波が消えているためである。



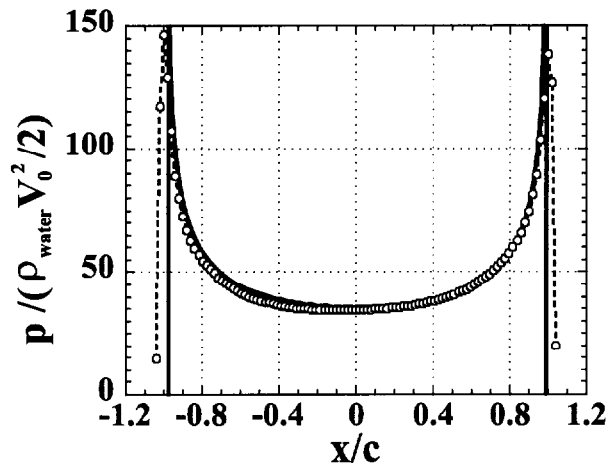
(a) $\beta = 1^\circ$, 粗い格子



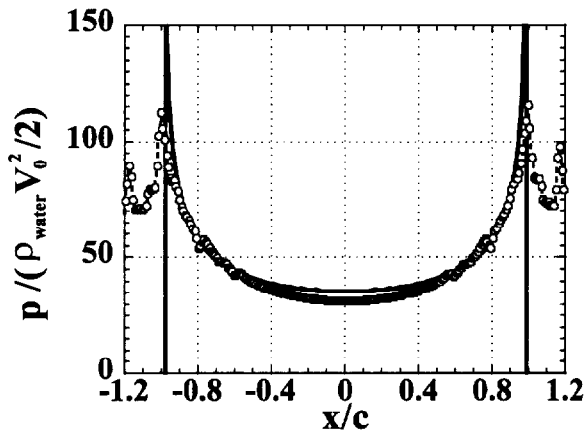
(b) $\beta = 1^\circ$, 細かい格子



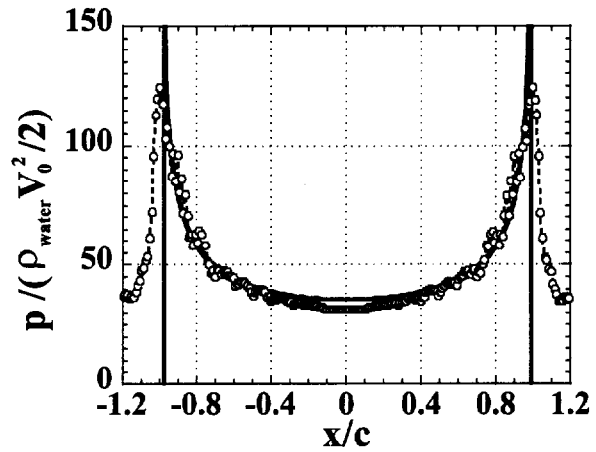
(c) $\beta = 1^\circ$, 実粘性



(d) $\beta = 5^\circ$, 粗い格子



(e) $\beta = 5^\circ$, 細かい格子



(f) $\beta = 5^\circ$, 実粘性

図 4.8 水撃圧の空間分布図

シミュレーション結果と Wagner 理論とが水撃角が小さい場合に異なるのは空気の影響であると考えられる。なぜなら、Wagner 理論では空気の影響が考慮されていないことと、水撃角が小さい場合には船体と水面との間に空気が挟み込まれ、それが押し出される時に高速気流が発生するためである。このような空気の影響について調べるため、初めから船体の最下端部を水面に接触させておくというようにシミュレーションの初期条件を変えて計算を行った。なお、水撃角 $\beta = 1^\circ$ で、細かい格子を使用した。また、実粘性の影響は考慮していない。この計算による水撃圧の空間分

布を図 4.9 に示す。

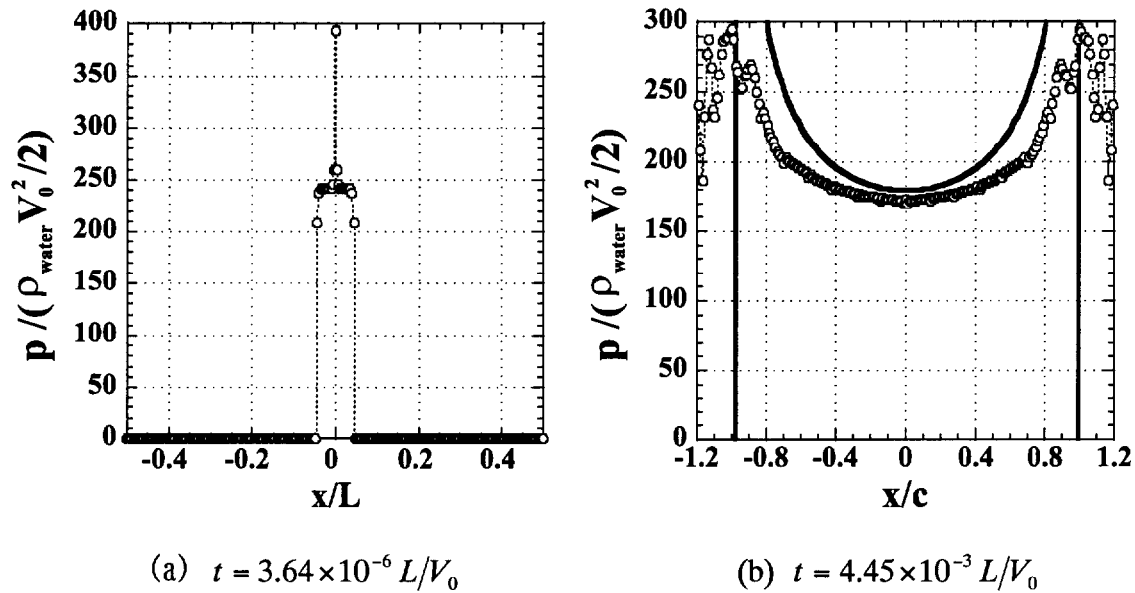


図 4.9 最初から船体を水面に接触させた場合の圧力分布

図 4.9(a)は水撃圧が最大になった時刻での水撃圧の空間分布を表している。水撃圧はその後一旦減少するが再び増加に転じ、やがてまた減少するといった時間変化をする。その 2 度目の極大の時刻での水撃圧の空間分布が図 4.9(b)である。図 4.9(a)では船体中央で非常に鋭い圧力パルスが捉えられている。この圧力パルスの値は $p_{\max}/(\rho_{\text{water}} V_0^2/2) = 392.48$ である。図 4.9(a)から察するに、もっと細かい格子を用いれば $p_{\max}$ がもっと大きくなる可能性もある。この鋭い圧力パルスの正確な値を論じるのが目的ではないのでこれ以上は追求しないが、船体を水面から離れた状態で計算を始めると空気の層の影響で水撃圧値が減少するということが指摘できる。

実際に、図 4.8(b)では船体中心にはこのような圧力パルスは現れていない。面白いことに、図 4.9(b)を見ると、図 4.8(b)とはかなり異なった分布をしており、さらに船体中心では Wagner 理論にかなり近い値になっているのが分かる。そして、船体の外

側にいくにつれて Wagner 理論から離れていく。これは空気の層の影響であると考えられる。すなわち、この場合は $\beta = 1^\circ$ であるので空気の層を完全に排除しているわけではなく、船体の最外部では厚さ $0.0087L$ の空気の層が残っているのである。船体中心部では空気の層は無く、外側にいくにつれて空気の層は厚くなる。このことから、図 4.9(b)のような圧力の空間分布が得られるのは空気の影響であり、そして空気の層は水撃圧を減少させる効果があると考えられる。

4.3.6 最大水撃圧の時間発展

次に、最大水撃圧の時間発展の様子を調べた。この結果を図 4.10 に示す。ここで示したのは水撃角が 0° 、 1° 、 2° 、 3° 、 4° 、 5° 、 20° の場合である。これらの計算においては細かい格子を使用し、実粘性の影響は考慮していない。また、図 4.10 の縦軸の p はゲージ圧力ではなく、この場合は水撃圧の計算値そのものを表している。

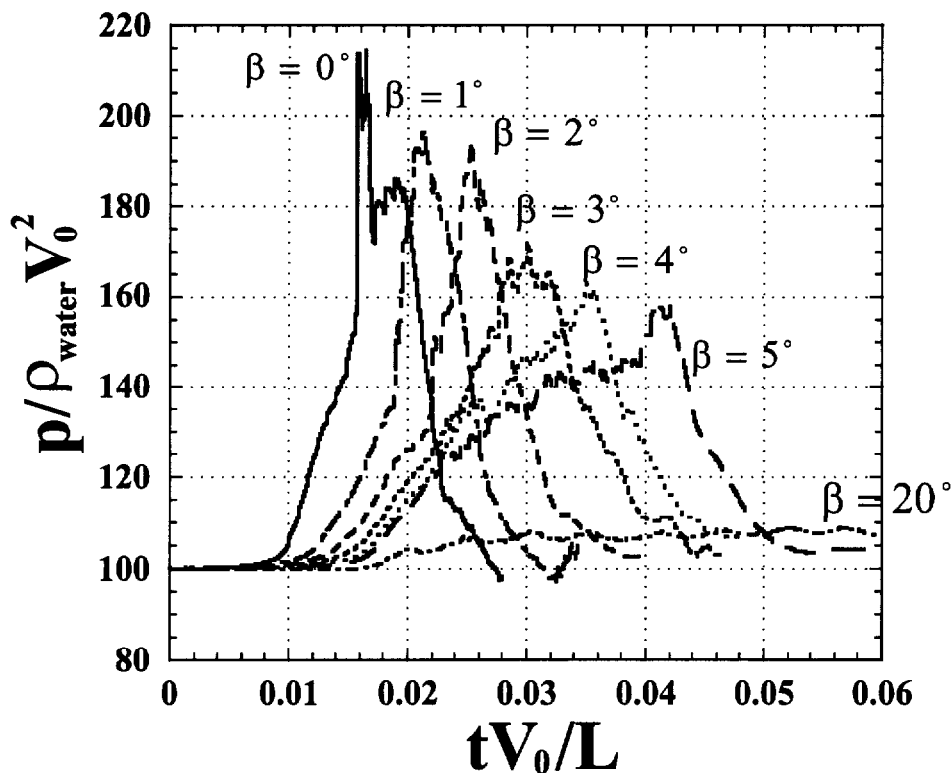


図 4.10 最大水撃圧の時間発展

初期条件において、船体の最下端部と水面との間隔は $0.02L$ であるから、船体が水面と接触するのは時刻 $0.02L/V_0$ の時である。しかし、水撃角 $\beta = 0^\circ$ の場合、水撃圧が最大になるのは時刻 $0.016L/V_0$ の時である。これは船体が水面に接触する前に起こっている。さらに大きな水撃角の場合でも船体が水面に接触する前に水撃圧が上昇し始める。これは船体と水面との間に挟まれた空気の層が圧縮されることによって水撃圧が増加するというように考えることができる。

また、特に $\beta = 0^\circ$ の場合、時刻 $0.018L/V_0$ の頃の水撃圧の主極大の前に非常に鋭い圧力パルスが発生しているのが見て取れる。4.3.4 節で既に述べたように、このパルスは $\beta = 0^\circ$ の場合の最大水撃圧を増大させ、粗い格子、あるいは細かい格子でも実粘性を考慮した場合と異なって最大水撃圧と水撃角との関係を単調減少なものにする原因となっている(図 4.7 を参照)。実際、この圧力パルスを無視すると最大水撃圧は時刻 $0.018L/V_0$ の時で、その値は $p \approx 180(\rho_{\text{water}} V_0^2/2)$ となり、これは実粘性を考慮した時の値に近いものとなる。このことから、この圧力パルスは波長の短い水面波が原因で発生するものであり、実粘性によって散逸しやすいものであると考えられる。

さらに、全ての水撃角に対していえることだが、ある程度の時間が経過すると水撃圧が急激に減少する。この時刻は船体の端が水面に到達する時とほぼ一致している。よって、この水撃圧の急激な減少は、船体が水面と衝突したことによって発生した圧力パルスが船体から離れて弱くなったためであると考えられる。

水撃角が大きくなるにつれて水撃圧がほぼ一定の値をとる時間がより長くなっている。特に、水撃角 $\beta = 20^\circ$ の場合にはこれが顕著で、時刻 $0.03L/V_0$ から $0.06L/V_0$ までの間は水撃圧がほとんど一定である。実際、Wagner 理論の自己相似解が達成されていれば、水撃圧は全ての時刻において一定になるはずである。従って、図 4.10 に

見られるように水撃角が小さい場合には水撃圧が一定になることが無いことから、水撃角が小さい場合には Wagner 理論の自己相似解が実現される前に現象が終わっていると考えられる。

4.3.7 最大水撃圧の空気密度依存性

空気の影響についてより詳しく調べるため、空気の密度を様々な値に変化させてシミュレーションを実行した。これらの計算では細かい格子を使用し、実粘性の影響については考慮しなかった。これまでの結果から、水撃角が小さい場合には空気の影響が大きい、水撃角が大きい場合には空気の影響は小さいと考えられるため、比較のために水撃角 $\beta = 1^\circ$ と $\beta = 10^\circ$ の場合についての計算を実行した。

様々な空気の密度に対する最大水撃圧の値を図 4.11 に示した。水撃角 $\beta = 1^\circ$ の場合には最大水撃圧は空気の密度の増加に伴って減少している。これは特に $\rho_{air} \geq 4 \times 10^{-3} \rho_{water}$ で著しい。これに対し、水撃角 $\beta = 10^\circ$ の場合には空気の密度を変化させても最大水撃圧はほとんど変化しない。このことは、これまでの結果から予想されるように、水撃角が大きい場合には空気の影響が小さいということと一致する。そして、この結果はこれまで述べてきたように、船体と水面との間の空気の流れが特に水撃角が小さい場合の最大水撃圧を決める非常に重要な要因であることを補強するものである。

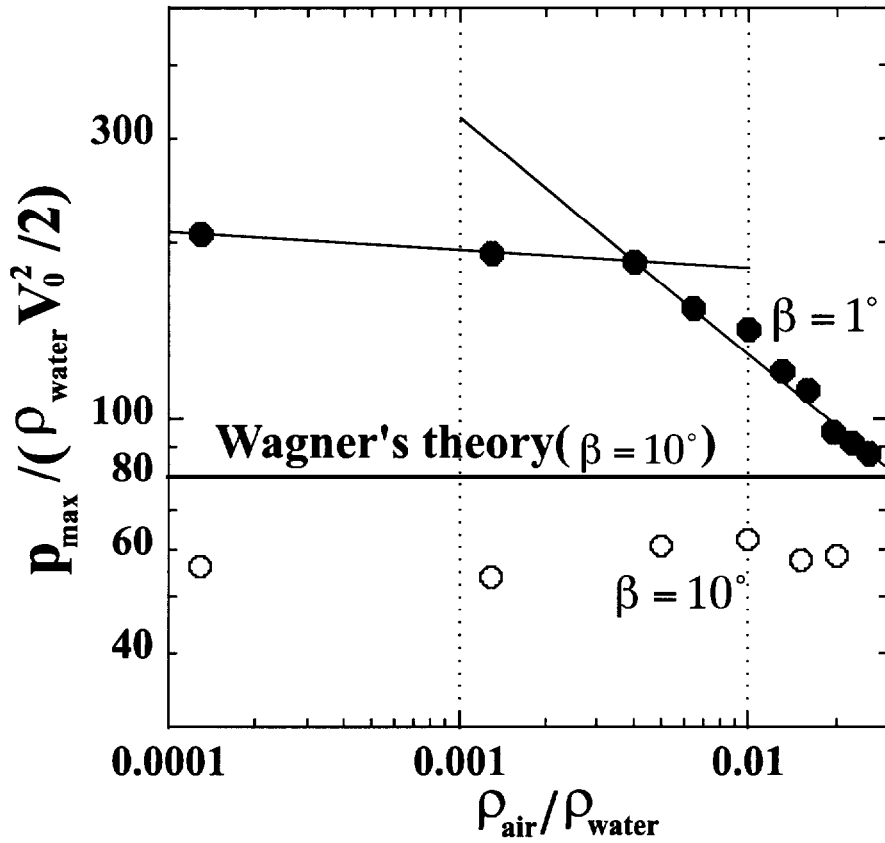


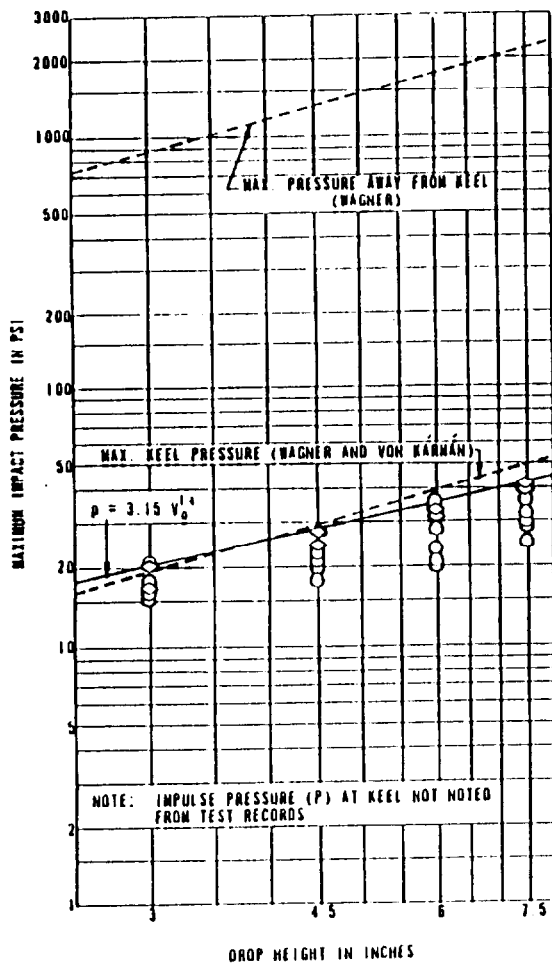
図 4.11 空気密度の変化に対する最大水撃圧の変化

$\rho_{air} \geq 4 \times 10^{-3} \rho_{water}$ の場合の水撃圧は $(\rho_{air} / \rho_{water})^{-0.4}$ に比例して減少しているようである。しかし、現段階ではなぜこのような関係があるのかは良く分かっておらず、従ってこの関係についての明確な説明をすることは不可能である。この関係で興味深いのはこれとケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性の成長率の指数との類似性である。なお、ケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性の成長率は式(4.1)に示したように $(\rho_{air})^{0.5}$ に比例する。成長率が大きくなると、水面波がケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性の影響で発生しているのであれば、水撃圧の減少は $(\rho_{air})^{-0.5}$ に比例するようになるのではないかと予想される。また、 $\rho_{air} \leq 4 \times 10^{-3} \rho_{water}$ における水撃圧と空気の密度との関係はケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性の成長率が十分小さくなった時

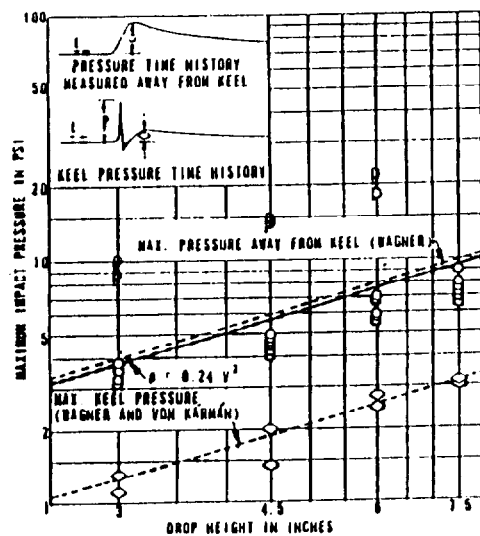
に何か別のメカニズムが働いていることを暗示している。いずれにせよ、この水撃圧と空気密度との関係の詳しい研究は今後の課題である。

4.3.8 最大水撃圧の船体落下距離依存性

最後になるが非常に重要なこととして、船体の落下距離と最大水撃圧の間系について述べ、Chuang の実験の問題点について触れておきたい。Chuang は水撃角が大きい時には最大水撃圧は衝突速度に 2 乗に比例するが、小さい水撃角に対する最大水撃圧は衝突速度の 2 乗よりも小さな指数にしか比例しないということを主張している。ここで、Chuang の実験結果の一例を図 4.12 に示す。



(a) $\beta = 1^\circ$



(b) $\beta = 15^\circ$

図 4.12 Chuang の実験結果の例(文献[38]より)

図 4.12 を見ての通り、Chuang の実験では船体の落下距離と最大水撃圧の関係が求められており、これから船体と水面との衝突速度と最大水撃圧の関係を求めている。

今回のシミュレーションでは全ての量が規格化されており、特に圧力については $\rho_{\text{water}} V_0^2/2$ で規格化されているため、水撃圧は衝突速度の 2 乗に比例し Chuang の実験と同じ結論を得ることは出来ない。この矛盾を解決する手がかりは船体の落下距離にある。Chuang は衝突速度を増すために船体の模型をより高い位置にまで持ち上げて落下させるということを行っている。しかし、このように船体を高い位置にまで持ち上げると確かに衝突速度を大きくすることが出来るが、同時に船体と水面との間の空気の層がより厚くなるという効果も生じてしまうのである。

このような空気の層の厚さの影響について調べるため、船体の落下距離を変えて計算を行い、最大水撃圧の変化を調べた。結果を図 4.13(a)に示す。繰り返すが、本研究におけるシミュレーションでは例えば距離は L 、速度は V_0 、圧力は $\rho_{\text{water}} V_0^2$ というように、全ての値が規格化されている。従って、様々な速度 V_0 に対する最大水撃圧も V_0^2 でスケーリングされている。よって、一定速度 V_0 によって船体を落下させるのは実験での自由落下による衝突速度よりもより統一的であるといえる。この節のシミュレーションにおける唯一のパラメーターは船体の落下距離 h であり、 $h = 0.02L$ 、 $0.04L$ 、 $0.06L$ の 3 通りについて計算を実行した。また、これらの計算では水撃角 $\beta = 1^\circ$ とし、細かい格子を使用し、実粘性の影響は考慮しなかった。なお、これまでの計算では最初から船体を水面に接触させていた場合を除いて全て $h = 0.02L$ である。

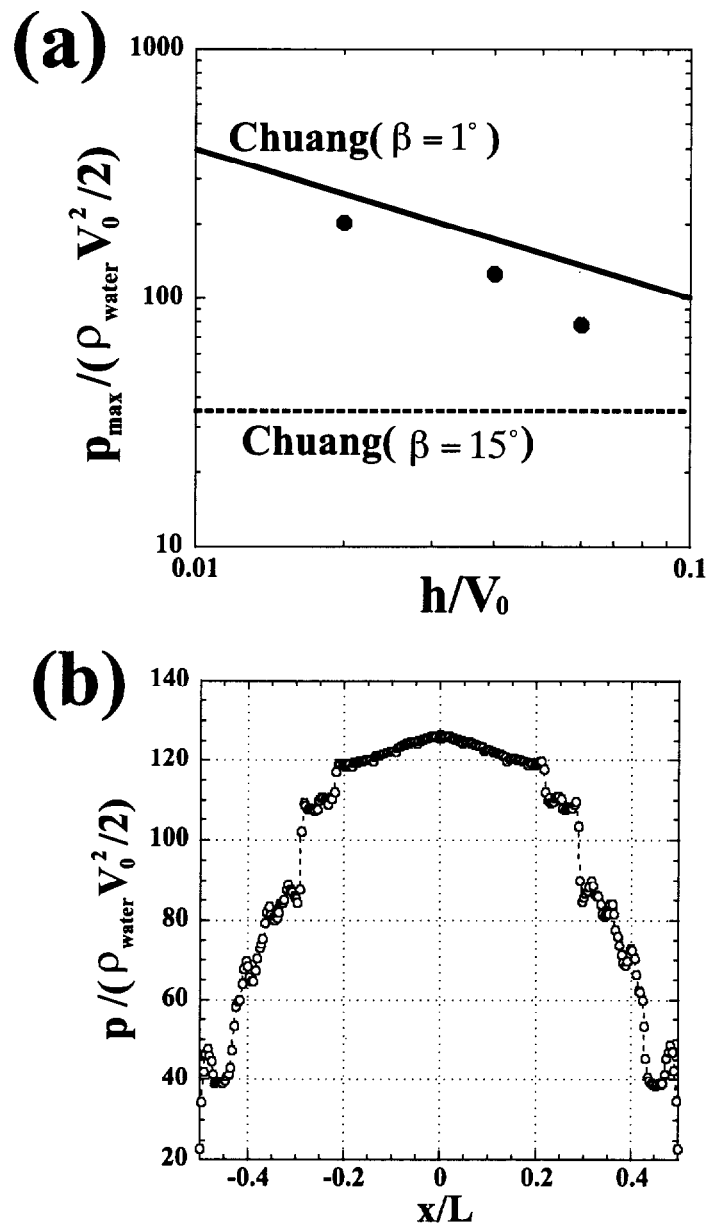


図 4.13 最大水撃圧の船体落下距離依存性

シミュレーション結果と実験結果とを比較する際に問題なのは、実験結果では船体が落下する際に加速される影響と空気の層による影響が合わさってしまっているということである。そこで、次の様な提案を行う。すなわち、実験結果と計算結果とを規格化された水撃圧 $p/(\rho_{\text{water}} V_0^2/2)$ と h/V_0 で整理する。ここで h/V_0 は船体がどれだけ早く空気の層を排除できるかを意味する。これに加え、実験結果については h

を $1/2$ とした。これは実験では自由落下であるので $h = gt^2/2 = V_0 t/2$ となるためである。ここで g は重力加速度である。このような操作を行うことにより、シミュレーション結果は Chuang の実験結果に近い値となることが分かる。シミュレーションは一定速度で船体を落下させたわけであるから、Chuang の実験で水撃角が小さい時には水撃圧が衝突速度の 2 乗に比例しないというのは実は空気の層の厚さの変化によるものであると考えられる。

また、図 4.13(b)に $h = 0.04L$ の場合の水撃圧の空間分布図を示した。この図は水撃圧が最大になった時のものであるが、船体の中心部で圧力が最大になっているのが大きな特徴である。 $h = 0.02L$ の場合の圧力の空間分布図は図 4.8(b)に示したものであるが、比較してみると空気の層の厚さが圧力の空間分布に大きな影響を及ぼしていることが良く分かる。

4.4 結論

CIP 法を基礎とした流体コードにより小型船体のスラミング現象のシミュレーションを実行した。水撃角が大きい場合、Wagner 理論の特徴である接水端付近で水撃圧が鋭く上昇するという圧力の空間分布を再現出来た。さらに、最大水撃圧についても Wagner 理論と良く一致した。しかし、水撃角が小さい場合、圧力の空間分布は平坦で、最大水撃圧についても Wagner 理論よりもずっと小さくなり、むしろ Chuang の実験結果に近い値であった。このようなシミュレーション結果と Wagner 理論との違いは、船体と水面との間の空気の層の影響であると結論した。実際、水撃角 $\beta = 0^\circ$ の場合、船体が水面に接触する以前に水撃圧が最大になった。

計算格子の細かさを変化させて計算を実行したところ、最大水撃圧については大きな違いは見られず、どの場合も Chuang の実験結果に近い値であった。特に、水撃角 $\beta \leq 1^\circ$ の場合の水撃圧の空間分布は Wagner 理論から予想されるような顕著なピー

クは現れなかった。

水撃角 $\beta = 1^\circ$ の場合、最大水撃圧は空気の密度の変化によって大きく変化した、 $\beta = 10^\circ$ の場合にはほとんど変化しなかった。これは $\beta = 1^\circ$ の場合には船体と水面との間に挟まれた空気の層の影響であると考えられる。さらに面白いことに、最初から船体の最下端部を水面に接触させた状態で計算を始めると、 $\beta = 1^\circ$ の場合でも水撃圧の空間分布が Wagner 理論に近くなるという結果が得られた。これは水撃圧の空間分布に対する空気の層の影響がいかに重要かを物語っている。

本研究によるシミュレーションで、2次元での Wagner 理論と Chuang の実験との食い違いはほぼ解明できたと考えられる。今後の課題として、3次元での計算を実行すること、また船体を弾性体であるとして衝撃に対する応答を計算すること、などが挙げられる。

第5章 結論

本論文では密度差が異なる物質同士の衝突現象として、1994年7月に起こった SL9 の木星衝突と、小型船体のスラミング現象を取り上げた。SL9 の木星衝突シミュレーションでは彗星核とその周囲の木星大気との密度差は約 10000 倍、スラミング現象のシミュレーションでは船体と水との密度差は 2 倍しかないが、その間に空気があるので空気との密度差は 1000 倍程度であり、どちらも極端に密度差のある衝突現象である。これらの現象のシミュレーションを実行するにあたり、そのための計算手法として CIP 法、C-CUP 法を用いた。

SL9 の木星衝突シミュレーションは衝突現象発生当時にも CIP 法による計算が行われていたが、それは軸対称 2 次元による計算であった。そのために結果を疑われることもあったのだが、この軸対称 2 次元計算を検証するため、本研究ではこの問題を 3 次元で計算した。そして、軸対称 2 次元でも 3 次元でも彗星核は同じようにその前面の中心付近から物質を失っていき、最終的には核が分裂して消滅するという結果が得られた。さらに彗星核の運動エネルギーの時間変化を調べたところ、3 次元では 2 次元よりもより緩やかにエネルギーを失っていくといったように異なるものの、最終的に核が消滅するのはどちらの計算においても木星大気中の 15bar 付近であった。このように、彗星核の変化の様子、あるいは木星大気中での核の消滅位置がほぼ同じであったことから、以前の軸対称 2 次元計算も全く問題はないものと考えられる。また、彗星核が 15bar 程度で消滅するという結果は大規模な爆発現象が観測され、硫黄や水が検出されたという観測結果とは矛盾しないものである。これは彗星核が木星大気に深く進入すると運動エネルギーを緩やかに失うことになるために大爆発にはなりにくく、仮に爆発が起ころうとも木星の雲の下であれば観測できないこと、逆に核があまりに浅いところで消滅すれば硫黄や水が検出されるとは考え

にくいからである。

さらに、SL9 の木星衝突によって木星面上に出現した衝突痕が彗星核の周囲で発生した渦が拡散してできたものであると推定し、これを確認するためのシミュレーションを実行した。計算により、彗星核の木星大気突入により確かに渦度の高い領域が現れ、さらにその渦の循環が少なくとも 50 秒までは保存するという結果が得られた。渦度自体は彗星核消滅の頃に最大となり、その後は小さくなっていくため、循環が保存するのは渦が拡大していくためであると考えられる。計算では 1 分近くまで循環が保存することが確認できたこと、シミュレーションによる循環の大きさから見積もった衝突痕の大きさも観測と大きな違いはなかったこと、また、衝突痕が数分程度の短時間で形成されたと考えられることなどから、衝突痕はやはり彗星核の周囲で発生した渦が拡散したものであると考えられる。また、このように小天体が大気に突入して渦が発生するという考え方は地球上の流星にも適用でき、これによって流星痕の説明を行うとその持続時間と発光原因の説明が可能であることを示した。

小型船体のスラミング現象のシミュレーションでは船体にかかる最大水撃圧は Wagner 理論よりも Chuang の実験結果に近いという結果が得られた。しかしながら Wagner 理論は現在でも正しいと信じられており、逆に Chuang の実験のほうが疑われている有様である。そもそも Wagner 理論は船体の端点では圧力が負の無限大になってしまうたり、平板では水撃圧が無限大になってしまうという欠点を持っているのである。これは Wagner 理論が空気の影響を無視しているためであると考え、その検証をシミュレーションで行った。

計算では船体が落下してくると水面に波が生じた。これは空気の流れがケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性を誘起して発生したものであることが分かった。また、船体が水面に接触する以前に圧力が増加するという現象も捉えることが出来た。この現象は船体と水面との間の空気が圧縮されることによって圧力が増加したため

あると考えられる。さらに船体を初めから水面に接触させた状態で計算を実行すると、水撃圧の空間分布は Wagner 理論に近いものになった。このようにすることで空気の影響はある程度排除できるので、結果が Wagner 理論に近くなったのはやはり空気の影響が大きいものと考えられる。また、空気の密度を変化させて計算すると水撃角が小さい場合には最大水撃圧が大きく変化するが、水撃角が大きい場合には最大水撃圧はほとんど変化しなかった。このことは水撃角が小さいと空気の影響が大きく、水撃角が大きいと空気の影響は小さいということを意味している。これらの結果から、スラミング現象において空気の影響を考慮することの重要性を示すことが出来た。

一方、水撃角が 15° 、 20° の場合は最大水撃圧値が Wagner 理論とシミュレーション結果とは一致し、さらに水撃角が 15° の場合には水撃圧の空間分布、さらに衝突速度と最大水撃圧の関係も一致した。これらの結果により、Wagner 理論は空気の影響を無視しているが、水撃角が大きく、空気の影響が小さくなる場合には正しい解を与えることが確認できた。

また、シミュレーションで船体の落下距離と最大水撃圧との関係を計算し、その結果が Chuang の実験で船体の水面との衝突速度と最大水撃圧との関係とされているものと類似していることを示した。この結果から、Chuang の実験にも問題点があることを指摘した。

SL9 の木星衝突、小型船体のスラミング現象のどちらも密度差の極端に異なる衝突現象であり、その解析は困難なものである。にもかかわらず、本論文で示したような結果を得ることができたことから、CIP 法、C-CUP 法は本研究で扱ったような密度差の大きな問題を解く場合に非常に有効であるということを示すことができたのではないかと考えている。

Appendix A CIP 法の 2 次元化(Type-B, Type-C)

そもそも 2 次元 CIP 法の補間式は一般に次のような形をしていると考えられる。

$$F(X,Y) = \sum_{l=0}^3 \sum_{m=0}^3 C_{l,m} X^l Y^m \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $X = x - x_i$ 、 $Y = y - y_j$ である。未知数 $C_{l,m}$ は全部で 16 個であるが、このうちの $C_{0,0}$ 、 $C_{0,1}$ 、 $C_{0,2}$ 、 $C_{0,3}$ 、 $C_{1,0}$ 、 $C_{1,1}$ 、 $C_{1,2}$ 、 $C_{2,0}$ 、 $C_{2,1}$ 、 $C_{3,0}$ の 10 個を選んで補間式を構築したのが本文中の Type-A である。この場合の条件は 3 点 (i, j) 、 (iup, j) 、 (i, jup) で f 、 f_x 、 f_y が連続、さらに (iup, jup) で f が連続というものであった。しかし、CIP 法では全ての格子点で f 、 f_x 、 f_y の値があるわけであるから Type-A に (iup, jup) で f_x 、 f_y が連続という条件を加えることは容易である。これにより、関係式が 2 つ増えるので式(A.1)において使える係数を 2 つ増やすことができる。ここでは $C_{1,3}$ 、 $C_{3,1}$ と Type-A で使用する係数を用いて補間式を構築する。これが Type-B である。

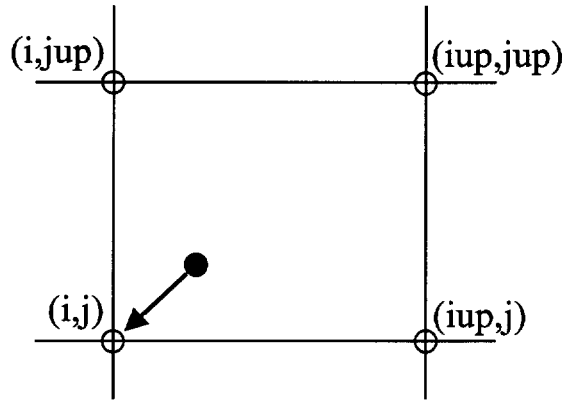


図 A.1 2 次元の格子点

Type-B の補間式は次のようになる。

$$F_{i,j}(X,Y) = C_{3,0}X^3 + C_{2,0}X^2 + \partial_x f_{i,j}X + f_{i,j} + C_{0,3}Y^3 + C_{0,2}Y^2 + \partial_y f_{i,j}Y \\ + C_{3,1}X^3Y + C_{2,1}X^2Y + C_{1,1}XY + C_{1,2}XY^2 + C_{1,3}XY^3$$

4 点 (i,j) 、 (iup,j) 、 (i,jup) 、 (iup,jup) で f 、 f_x 、 f_y が連続という条件により各係数は以下のようにになる。

$$C_{3,0} = 2(f_{i,j} - f_{iup,j})/D^3 + \partial_x(f_{i,j} + f_{iup,j})/D^2 \\ C_{2,0} = 3(-f_{i,j} + f_{iup,j})/D^2 - \partial_x(2f_{i,j} + f_{iup,j})/D \\ C_{0,3} = 2(f_{i,j} - f_{i,jup})/L^3 + \partial_y(f_{i,j} + f_{i,jup})/L^2 \\ C_{0,2} = 3(-f_{i,j} + f_{i,jup})/L^2 - \partial_y(2f_{i,j} + f_{i,jup})/L \\ C_{3,1} = -2A/D^3L + \partial_x(-f_{i,j} - f_{iup,j} + f_{i,jup} + f_{iup,jup})/D^2L \\ C_{2,1} = 3A/D^2L + \partial_x(2f_{i,j} + f_{iup,j} - 2f_{i,jup} - f_{iup,jup})/DL \\ C_{1,1} = -A/DL + \partial_x(-f_{i,j} + f_{i,jup})/L + \partial_y(-f_{i,j} + f_{iup,j})/D \\ C_{1,2} = 3A/DL^2 + \partial_y(2f_{i,j} - 2f_{iup,j} + f_{i,jup} - f_{iup,jup})/DL \\ C_{1,3} = -2A/DL^3 + \partial_y(-f_{i,j} + f_{iup,j} - f_{i,jup} + f_{iup,jup})/DL^2 \\ A = f_{i,j} - f_{iup,j} - f_{i,jup} + f_{iup,jup}$$

ここで、 $D = -\Delta x \cdot \text{sgn}(u_{i,j})$ 、 $L = -\Delta y \cdot \text{sgn}(v_{i,j})$ 、 $\partial_x = \partial/\partial x$ 、 $\partial_y = \partial/\partial y$ である。

次に Type-C について述べる。Type-C では新たに 2 階微分 f_{xy} を導入し、4 点 (i,j) 、 (iup,j) 、 (i,jup) 、 (iup,jup) で f 、 f_x 、 f_y 、 f_{xy} が連続であるという条件により補間関数を構築する。全部で 16 個の条件があることになるので、式(A.1)の補間式の係数

を全て使用することが可能となる。 $\xi = x_i - u\Delta t$ 、 $\eta = y_j - v\Delta t$ とすると、点 $T(\xi, \eta)$ における f 、 f_x 、 f_y 、 f_{xy} の値が補間できればよい。

$u < 0$ 、 $v < 0$ の場合を例とし、点 $S(x_i, y_j)$ から点 T に至る補間のプロセスを図 A.2 に示す。

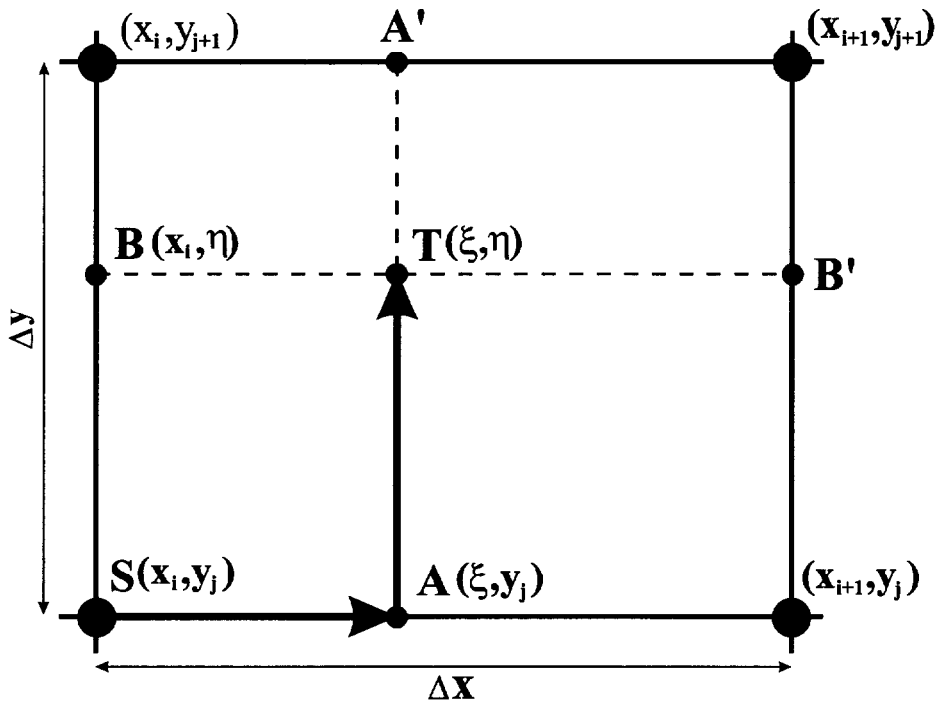


図 A.2 2次元 CIP 法 Type-C の補間プロセス

点 S から点 T へ移動するには 2 つのルートがある。 $S \rightarrow A(\xi, y_j) \rightarrow T$ と $S \rightarrow B(x_i, \eta) \rightarrow T$ の 2 つである。ここでは前者の $S \rightarrow A \rightarrow T$ の方法について説明する。まず、点 A での値、1 階微分値、2 階微分値 f 、 f_x 、 f_y 、 f_{xy} を求める。これは点 S と点 (x_{i+1}, y_j) との間で x 方向に 1 次元 CIP 法を用いて補間する。これにより、次の式を得る。

$$f_{(A)} = a_1 X^3 + b_1 X^2 + f_{x\,i,j} X + f_{i,j}$$

$$f_{x\,(A)} = 3a_1 X^2 + 2b_1 X + f_{x\,i,j}$$

$$f_{y\,(A)} = a_2 X^3 + b_2 X^2 + f_{xy\,i,j} X + f_{y\,i,j}$$

$$f_{xy\,(A)} = 3a_2 X^2 + 2b_2 X + f_{xy\,i,j}$$

$$a_1 = \frac{(f_{x\,i,j} + f_{x\,i+1,j})}{\Delta x^2} + \frac{2(f_{i,j} - f_{i+1,j})}{\Delta x^3}$$

$$b_1 = \frac{3(f_{i+1,j} - f_{i,j})}{\Delta x^2} - \frac{(2f_{x\,i,j} + f_{x\,i+1,j})}{\Delta x}$$

$$a_2 = \frac{(f_{xy\,i,j} + f_{xy\,i+1,j})}{\Delta x^2} + \frac{2(f_{y\,i,j} - f_{y\,i+1,j})}{\Delta x^3}$$

$$b_2 = \frac{3(f_{y\,i+1,j} - f_{y\,i,j})}{\Delta x^2} - \frac{(2f_{xy\,i,j} + f_{xy\,i+1,j})}{\Delta x}$$

ここで、 $X = \xi - x_i = -u\Delta t$ である。これと同様にして 2 点 (x_i, y_{j+1}) 、 (x_{i+1}, y_{j+1}) の間で点 $A'(\xi, y_{j+1})$ における f 、 f_x 、 f_y 、 f_{xy} の値を補間できる。これによって求まった値を $f_{(A')}$ 、 $f_{x\,(A')}$ 、 $f_{y\,(A')}$ 、 $f_{xy\,(A')}$ とする。最終的には点 $T(\xi, \eta)$ での f 、 f_x 、 f_y 、 f_{xy} の値は点 A と点 A' との間で y 方向に補間され、次のようになる。

$$f_{(T)} = a_3 Y^3 + b_3 Y^2 + f_{y\,(A)} Y + f_{(A)}$$

$$f_{y\,(T)} = 3a_3 Y^2 + 2b_3 Y + f_{y\,(A)}$$

$$f_{x\,(T)} = a_4 Y^3 + b_4 Y^2 + f_{xy\,(A)} Y + f_{x\,(A)}$$

$$f_{xy\,(T)} = 3a_4 Y^2 + 2b_4 Y + f_{xy\,(A)}$$

$$a_3 = \frac{(f_{y\,(A)} + f_{y\,(A')})}{\Delta y^2} + \frac{2(f_{(A)} - f_{(A')})}{\Delta y^3}$$

$$b_3 = \frac{3(f_{(A')} - f_{(A)})}{\Delta y^2} - \frac{(2f_{y\,(A)} + f_{y\,(A')})}{\Delta y}$$

$$a_4 = \frac{(f_{xy\,(A)} + f_{xy\,(A')})}{\Delta y^2} + \frac{2(f_{x\,(A)} - f_{x\,(A')})}{\Delta y^3}$$

$$b_4 = \frac{3(f_{x(A)} - f_{x(A)})}{\Delta y^2} - \frac{(2f_{xy(A)} + f_{xy(A)})}{\Delta y}$$

ここで、 $Y = \eta - y_j = -v\Delta t$ である。この補間法が Type-C であり、2 階微分 f_{xy} は x 方向に f_y を補間するためと、y 方向に f_x を補間するために使用される。なお、Type-C では 2 階微分 f_{xy} を導入したため、非移流相でもこの f_{xy} についての計算を行う必要が生じてくる。これについては

$$\begin{aligned} f_{xy\ i,j}^* &= f_{xy\ i,j}^n + \frac{f_{i+1,j+1}^* - f_{i-1,j+1}^* - f_{i+1,j-1}^* + f_{i-1,j-1}^*}{4\Delta x\Delta y} \\ &\quad - \frac{f_{i+1,j+1}^n - f_{i-1,j+1}^n - f_{i+1,j-1}^n + f_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x\Delta y} \\ &\quad - f_{x\ i,j}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} \Delta t - f_{y\ i,j}^n \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} \Delta t \end{aligned}$$

として計算する。

Appendix B 運動エネルギーの変化の違いについて

第 3 章において、SL9 が木星大気に突入した際の運動エネルギーの時間変化の様子が 2 次元計算と 3 次元計算とで全く異なることを示した。ここではその理由について考えてみる。

まず、考えられるのが格子依存性である。2 次元計算では最小格子間隔は 60m であるが、3 次元では同じく 150m であり、2 次元計算の倍以上の数字になっている。これについて検証するため、2 次元でも格子間隔を 3 次元計算のように大きくして計算を実行した。結果を図 B.1 に示す。

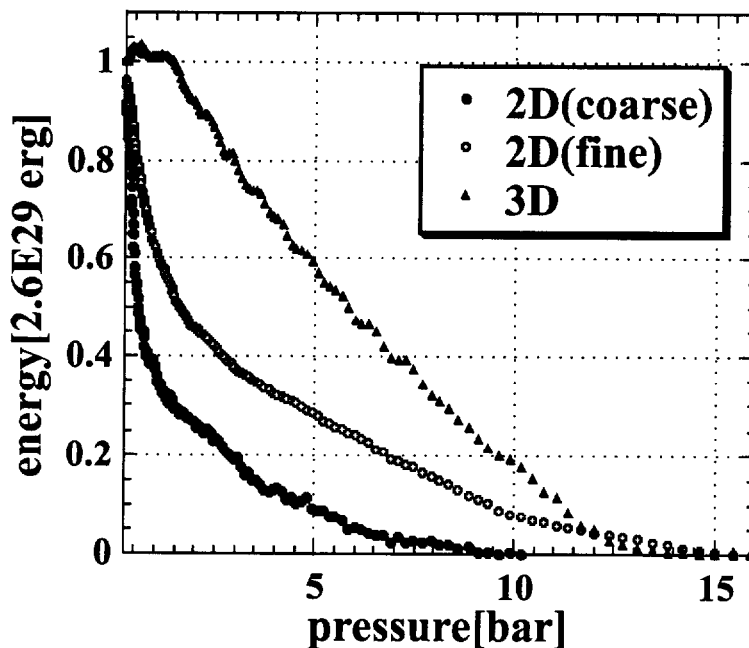
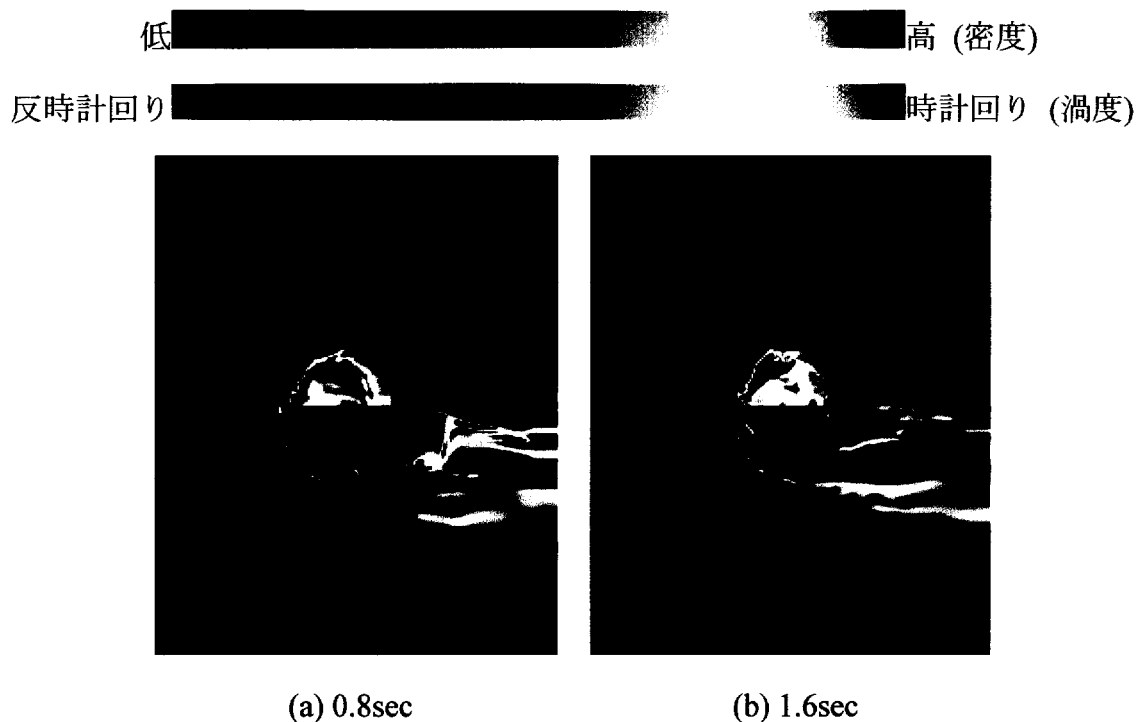


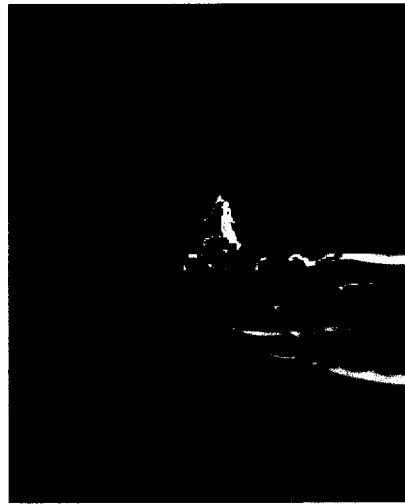
図 B.1 運動エネルギーの時間変化

グラフ中の黒丸が今回計算した粗い格子の 2 次元計算による結果である。2 次元による計算同士を比較すると運動エネルギーの時間変化に格子依存性があることが分か

る。格子が粗い方が彗星核が消滅するのが早く、また木星大気中の浅いところまでしか到達できないことも分かる。しかし、運動エネルギーの時間変化のプロファイルは格子が細かい場合と同じく初めは急激で、途中から緩やかになるというカーブを描いており、これはやはり 3 次元計算の結果とは大きく異なる。従って 2 次元計算と 3 次元計算とで運動エネルギーの時間変化の様子が異なるのは格子依存性によるものではないと考えられる。

格子依存性によるものではないとするとやはり 2 次元と 3 次元とで彗星核の削れかたに何か違いがあると考えられる。そこで 2 次元計算における渦度の分布を調べた。その結果を図 B.2 に示す。これらの図は上半分が密度、下半分が渦度を表している。





(c) 2.4sec

図 B.2 2次元計算による渦度

この計算は軸対称 2 次元であるので図 B.2 のような構造が対称軸の周りに対称に分布しているわけである。ただし、図 B.2 の上半分では図示されている下半分とは渦の回転方向が逆になる。同じように 3 次元計算についても渦度を調べてみた。その結果を図 B.3 に示す。ただし、ここで表示した渦度は xy 平面と平行で、かつ彗星核の中心を通る平面で切った場合の断面図である。木星大気は x 軸と平行に吹き付けている。また、渦度を求める際、この平面の垂直方向(z 軸方向)の速度については無視し、 x 軸方向の速度と y 軸方向の速度から渦度を求めた。なお、渦の方向などは図 B.2 のカラーバーを参照。

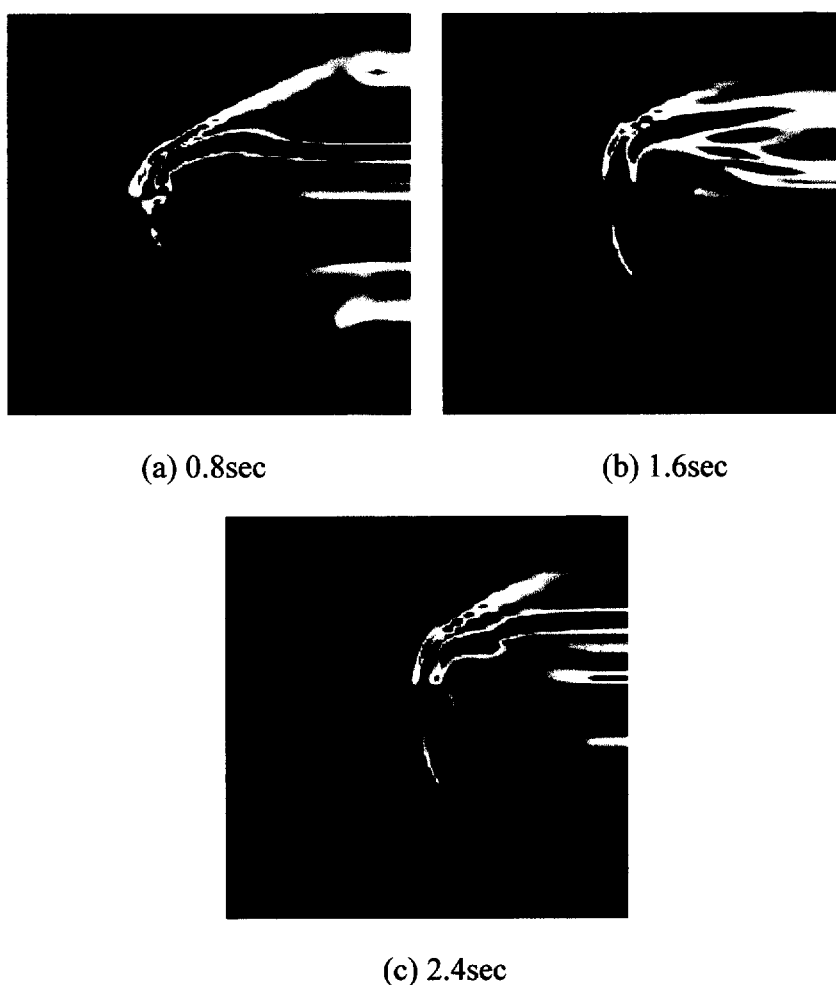


図 B.3 3次元計算による渦度

図 B.3 を見ると分かるように渦は対称にはなっていない。従って 2 次元と 3 次元とでは彗星核の周囲の木星大気の流れが異なっていることになる。また、図 B.3 のような静止画ではよく分からないが、これを動画にしてみると核の中心に対して上下上下…といったように交互に核の物質が木星大気の流れによって削られていく様子が分かる。このことが運動エネルギーの変化の違いの原因ではないかと考えられる。つまり、軸対称 2 次元の場合には図 B.4(a)のように核の一部が削れると、それは図 B.4(b)のようにリング状に物質が削れたことを意味する。それに対し、3 次元では図 B.4(c)のように核の一部が削れたとしてもその部分の物質が失われるだけであって、軸対称のようにリング状に物質が削られるわけではない。よって、2 次元の場合には

核の質量が減少しやすく、従って運動エネルギーも急激に失われていくものと考えられる。

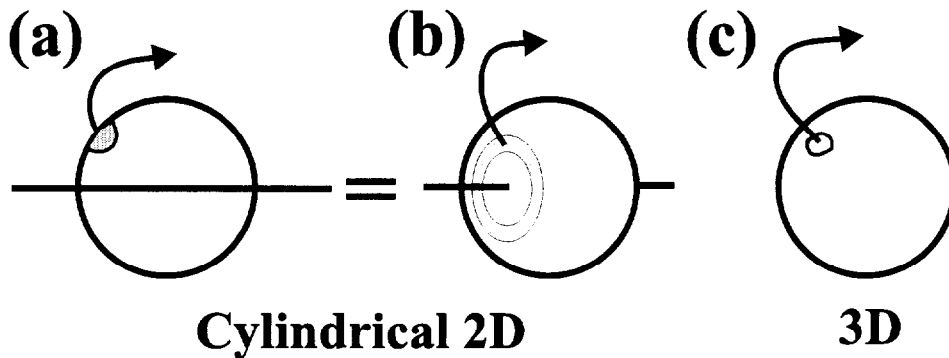


図 B.4 彗星核物質の失われ方の違い

ただし、この考え方には問題がある。すなわち、核の周囲の流れの非対称性が目立つようになるのは1秒程度の時間が過ぎてからであり、3次元でも初めのうちは流れはほぼ対称である。従って、3次元でも2次元と同じように最初のうちは核の物質がリング状に削られていくことになる。しかし、運動エネルギーの時間変化は最初から2次元と3次元とで異なっている。3次元で流れが非対称になった後では図B.4のような解釈でも良いのだが、少なくとも初めのうちはこの解釈では運動エネルギーの時間変化の違いは説明できない。

他に理由として考えられるのが3次元では核が木星大気の流れと直交する方向に振動して、核が木星大気の流れから受ける影響をある程度逃がしているのではないかということである。2次元の場合は軸対称であるので、核は対称軸に沿った方向には移動できるが垂直方向には移動できない。これに対し、3次元の場合には木星大気の流れに直交する方向にも移動可能である。さらに渦が交互に発生しているという点でも核が振動している可能性が考えられる。そこで核が実際に振動しているかどうか調べてみた。ここでは核の密度が 0.5 g/cm^3 以上の部分の速度の平均値を成分ご

とに求めた。

まず、木星の大気の流れに沿った方向である x 軸方向について図 B.5 に示す。この x 軸方向の速度成分は木星大気の流れによって押し流される方向になるため、次第に速度が大きくなっていくことが予測される。

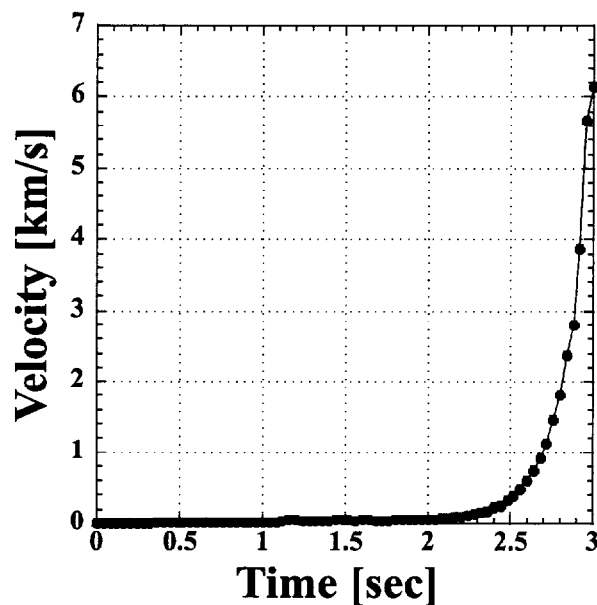


図 B.5 速度の x 軸方向成分の平均値の時間発展

結果は図 B.5 の通り、初めのうちは小さな速度であったのが 2 秒あたりから急激に速度が大きくなっている。速度の大きさは 1 秒で 20m/s、2 秒で 62m/s、3 秒で 6.1km/s である。2 秒の頃からの急激な速度の上昇は、この時刻以前からの木星大気の抵抗の影響が目立ってきたためと、これに加えて核が木星大気によって削られて質量が減少したことにより、より木星大気の影響を受け易くなったためと考えられる。

次に木星大気の流れに直交する成分、 y 方向と z 方向の速度の平均値の変化の様子を図 B.6 に示す。

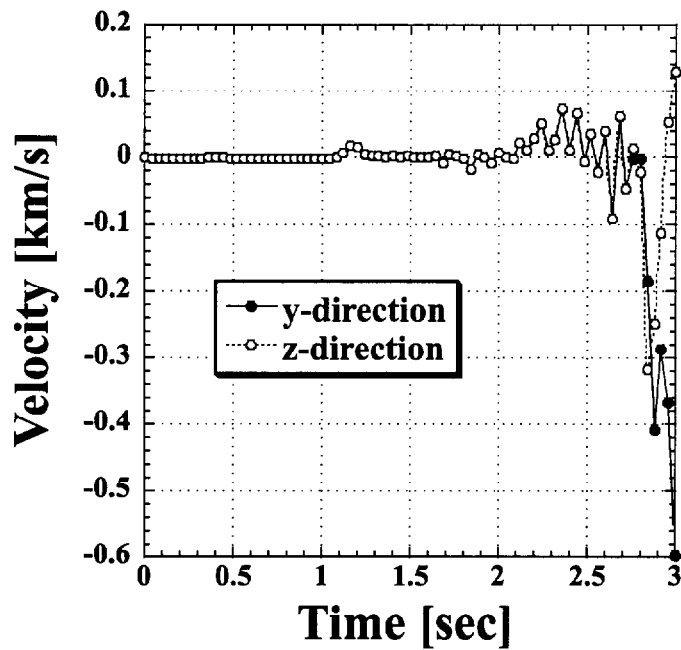


図 B.6 速度の y,z 軸方向成分の平均値の時間発展

図 B.6 を見ると、y、z 軸方向についても初めは速度が小さいが、やはり 2 秒過ぎ程度から速度が大きくなっていることが分かる。ただし、その大きさは x 軸方向の速度に比べれば 3 秒の時でも 10 分の 1 以下でしかない。また、速度が大きくなり始める 2 秒程度から速度が振動しているのが分かる。この時間以前にも振幅は小さいながらも振動が見られるので初めから核が振動している可能性もある。ただし、x 軸方向についても速度に小さな振動は見られるので、速度の小さな振動を即核の振動に結び付けることは出来ない。しかし、2 秒以後の大きな速度の振動については核が振動しているためであると考えられる。また、速度の振動が小さいうちは y 軸方向、z 軸方向の速度の平均値はほとんど同じである。だが、速度の振動が大きくなると値が異なってくる。そこで 2.6 秒以後の速度変化を図 B.7 に示す。

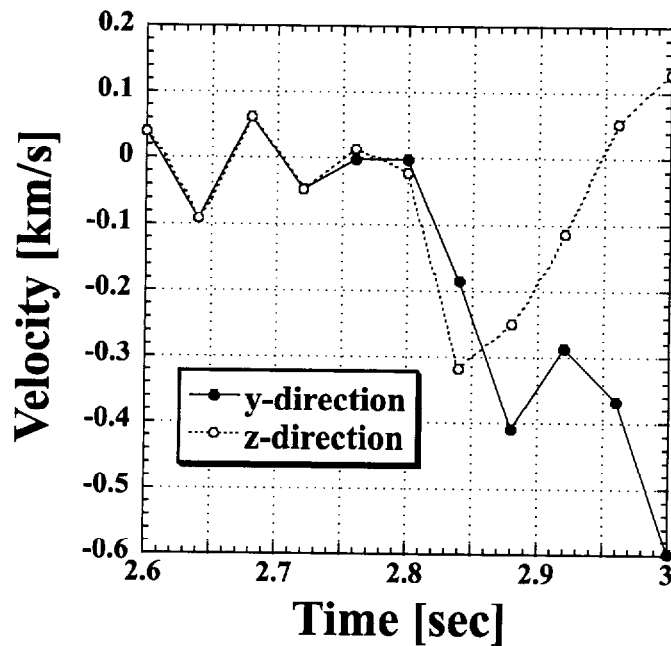


図 B.7 速度の y,z 軸方向成分の平均値の時間発展(2.6 秒以降)

この時刻では核は消滅寸前であるため、y、z 方向の速度が異なった変化を示すのは核が分裂したことが影響しているものと考えられる。

さらに、y 軸方向の速度変化についてフーリエ変換を行ない、速度変化がどのような周期で発生しているのか調べてみた。結果を図 B.8 に示す。計算により、周波数 0.67Hz 程度の変動が大きいという結果が得られた。核が消滅するまでの時間は約 3 秒であるから、この周波数では核は消滅するまでに 2 回振動するというゆっくりとした振動になる。また高周波の方では、8.7Hz、11.3Hz でもピークが見られる。しかし、どのピークについても鋭いピークではないため、この結果からは核がある特定の周波数で振動しているとは考えられない。また、速度の時間変化の様子をみると速度の振動が大きくなった時にはその周期が短いので、核の振動が目立つようになるのは振動の高周波成分の影響が大きくなっていくためであると考えられる。

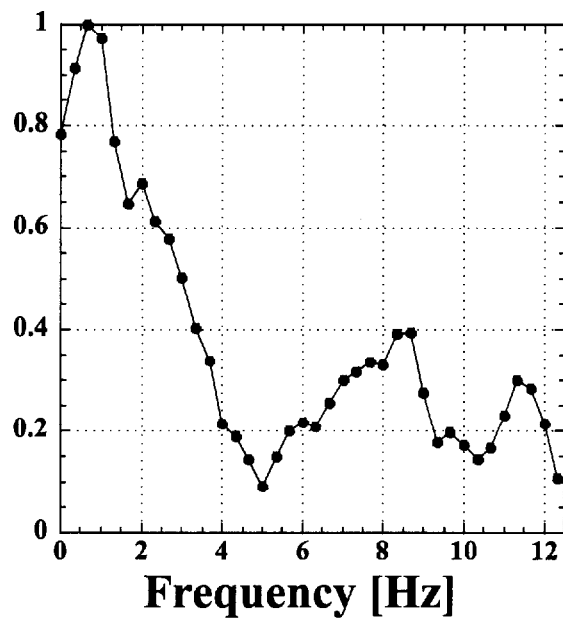


図 B.8 速度変化の周波数スペクトル

この彗星核の振動についての結果をまとめると以下ようになる。まず 2 秒以前については核が振動しているかどうかははっきりとは分からない。しかし、核の質量が小さくなり、木星大気の影響によって核の減速が目立ってくる頃になると核が進行方向に対して直交する方向に振動するようになる。この振動が目立ち始める頃には y 軸、z 軸方向の速度が同じであるが、さらに時間が進んで核が消滅する直前になるとこれらの速度も異なった値を持つようになる。これは核が分裂することが影響しているのではないかと考えられる。核の振動が目立つようになるのは 2 秒以降になってからであるという結果から、核の振動でも運動エネルギーの変化が初めから異なるということの説明は出来ない。他の理由を考えなければならないがこれは今後の課題である。

今回の計算により、3 次元計算では軸対称 2 次元計算では現れない核の周囲の木星大気の流れの非対称性や核の振動が起こっていることが明らかになった。図 B.3 で示したように 3 次元計算を平面に切断して見た場合、渦が交互にできるということ

はこれを 3 次元で見ると彗星核に対してまるでリンゴの皮をむくように渦ができて
いるのではないかと推測される。これが確かならば流星痕で時折観測されるスパイ
ラル構造の説明が可能である。

また、問題なのが今回の計算で現れた 3 次元計算における非対称性が本当に物理
的に発生するものなのかどうかである。単に数値計算上の問題から非対称性が現れ
ただけである可能性もある。より慎重に、そして繰り返し計算を行い、十分に検討
しなければならないだろう。

Appendix C 渦の強度分布の時間変化

SL9 の木星衝突により、木星大気中に渦が生成され、その循環が保存することは第 3 章で述べたとおりであるが、ここでは発生した渦やその循環の大きさがどのような分布を示すのか、またその時間変化について調べてみる。

まず、渦の強度分布の時間変化を図 C.1 に示す。これは各セルにおける渦度を計算し、計算領域全体でその分布(例えば渦度が $0.75 \sim 1.25 \text{ s}^{-1}$ のセルがいくつあるか)を調べたものである。なお、時刻 2.0sec のグラフを見ると渦度が $\pm 100 \text{ s}^{-1}$ のところがあるが、これは渦度の絶対値が 100 s^{-1} を越えるものは 100 s^{-1} に含めて算出したためである。従って、時刻 2.0sec の場合には絶対値で 100 s^{-1} を越える大きさの渦度を持つ渦が発生しているわけである。

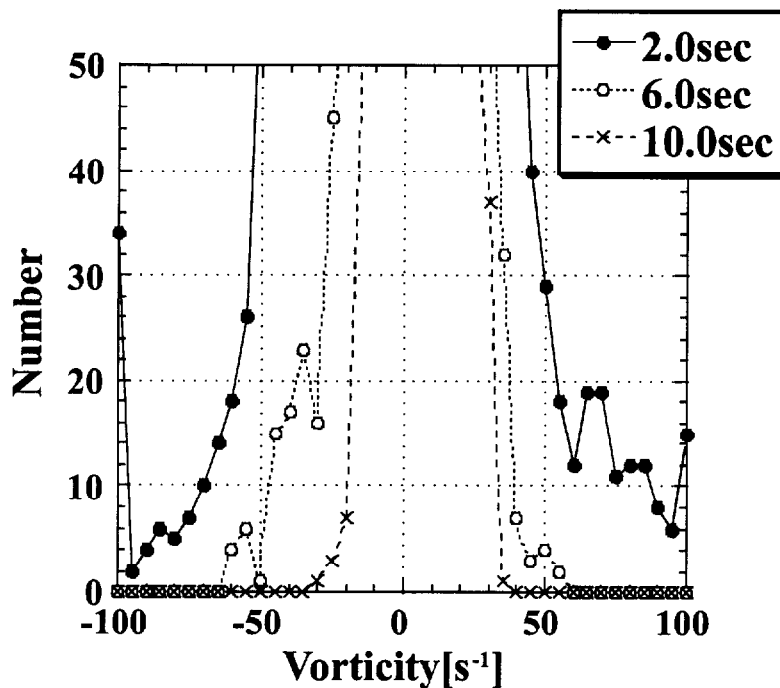


図 C.1 渦の強度分布の時間変化

なお、格子数は 1200×65 であるから全格子点数は 78000 個であるがそのうちの 70000 個近い格子点ではほとんど渦度が 0 か、0 に近い値となっている。図 C.1 を見て分かるのは時間が経過するにつれて大きな渦度を持つ渦が減少していくことである。また、時刻 2.0 秒の場合にはあまり顕著ではないが、時間がより経過した場合には分布がプラス側に偏っていることも分かる。すなわち、マイナス方向の渦はプラス方向の渦よりも発生しにくいのではないかと考えられる。本文中で渦の循環が保存することを示したが、それはプラス方向についてであり、マイナス方向では少なくとも 10 秒までの計算では保存していなかった。この渦度の強度分布の偏りと何らかの相関があるかもしれないが現段階では何とも言えない。

次に循環の大きさについて、渦度と同様にその分布を調べてみた。その結果を図 C.2 に示す。

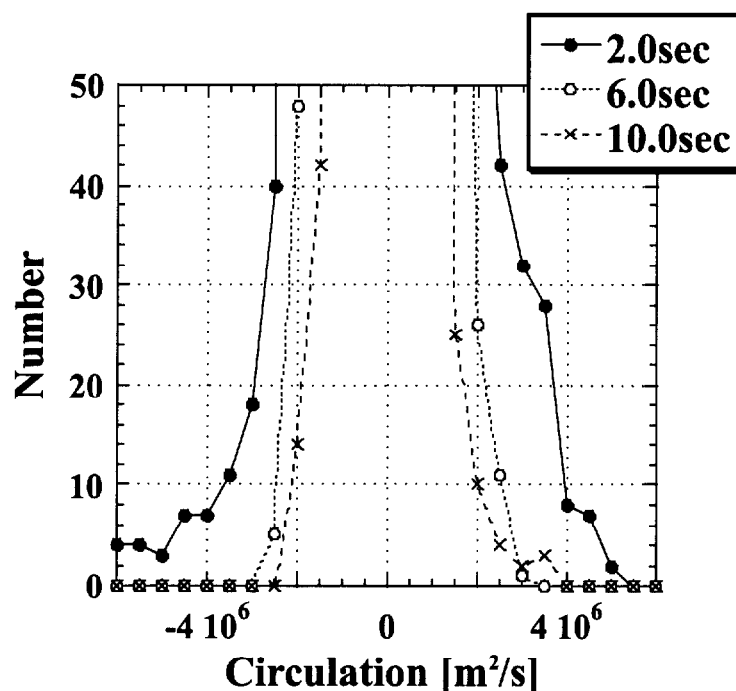


図 C.2 循環の強度分布の時間変化

渦度と同様、循環についても時間の経過とともに大きな値を持つセルが少なくなっていくことが分かる。ただし、 $3.5 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$ 程度の循環値を持つセルについては時刻 10 秒の時の方が時刻 6 秒の時よりも多くなっている。また、循環については渦度の分布で見られたようなプラス方向への顕著な偏りは見られない。しかし、時刻 10 秒の時には明らかにプラス方向の方がマイナス方向よりも大きな循環値が残っている。このこともマイナス方向では循環が減少するがプラス方向は保存するという結果と関係があるかもしれない。

以上のように渦度や循環の強度分布を調べてみたが、循環がある方向についてしか保存しないことの理由を解明する手がかりになりそうな結果が得られた。しかし、現在のところこの結果の解析は全くといって良いほど進んでおらず、詳しいことは実際に解析を行ってみなければ分からない。今後の課題である。

Appendix D ケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性の成長率

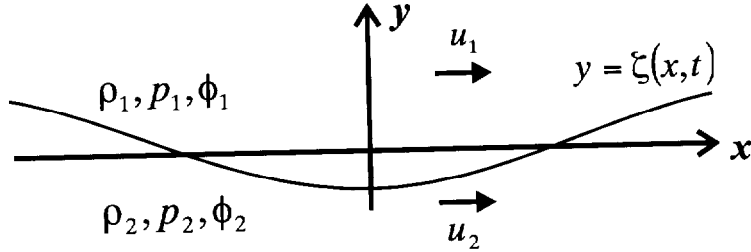


図 D.1 ケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性

界面を $y = \zeta(x, t)$ で表し、界面の上側の密度と圧力を ρ_1 、 p_1 で、下側を同じく ρ_2 、 p_2 とする。また界面上側の速度ポテンシャルを $u_1 x + \phi_1(x, y, t)$ 、同じく下側を $u_2 x + \phi_2(x, y, t)$ とする。ここで u_1 、 u_2 は界面の変形が無い場合の流速で ϕ_1 、 ϕ_2 は界面の乱れによる速度ポテンシャルである。図 D.1 にこれらを示す。なお、ここでは重力、あるいは表面張力の影響は無視する。

ここでは界面の上側を考える。流速を $\mathbf{q}$ とすると

$$\mathbf{q} = (u, v) = \left(u_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)$$

である。ここで界面の形を表す関数 $\zeta(x, t)$ を使って新しい関数

$$f(x, y, t) \equiv y - \zeta(x, t) \quad (\text{D.1})$$

を定義する。自由表面上の点 (x, y) では全ての t に対し、

$$f(x, y, t) = 0$$

が成り立つ。時刻 $t + \Delta t$ では表面粒子は (x, y) から $(x + u\Delta t, y + v\Delta t)$ に移動するが、

$$f(x + u\Delta t, y + v\Delta t, t + \Delta t) = 0$$

が成立する。これより

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\text{D.2})$$

となる。ここで式(D.1)より、 $\partial f / \partial t = -\partial \zeta / \partial t$ 、 $\partial f / \partial x = -\partial \zeta / \partial x$ 、 $\partial f / \partial y = 1$ であるから、式(D.2)より $y = \zeta(x, t)$ 上で

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v$$

となる。よって、 $y = \zeta$ で

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left(u_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_{y=\zeta}$$

となる。微小変化(ζ, ϕ)について線形近似を行う。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{D.3})$$

同様に界面の下側では

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{D.4})$$

となる。さらに界面での圧力の連続条件を考える。まず、運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

公式 $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ より

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

ここで、渦なし($\nabla \times \mathbf{u} = 0$)とすると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

速度ポテンシャルを ϕ とすると $\mathbf{u} = \nabla \phi$ より、

$$\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

よって、

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} \right] = 0$$

ゆえに

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} = C \quad (C: \text{定数})$$

これより

$$p = C - \rho \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right]$$

となる。よって界面上下の圧力 p_1 、 p_2 は

$$p_1 = C_1 - \rho_1 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 \right]$$

$$p_2 = C_2 - \rho_2 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2 \right]$$

$y = 0$ で $p_1 = p_2$ として

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \quad (\text{D.5})$$

を得る。ここで、 $\xi(x, t) = Ae^{\sigma + ikx}$ とおき、これに対応して $\phi_1(x, y, t) = e^{\sigma + ikx} f(y)$ の形に

おくと、 ϕ_1 が調和関数であること、また $y \rightarrow \infty$ で $\phi_1 \rightarrow 0$ であることから $f(y) \propto e^{-|k|y}$

でなければならない。同様に ϕ_2 は $y \rightarrow -\infty$ で $\phi_2 \rightarrow 0$ であることを考慮すると

$\phi_1(x, y, t) = B_1 e^{\sigma + ikx - |k|y}$ 、 $\phi_2(x, y, t) = B_2 e^{\sigma + ikx + |k|y}$ とおける。なお、 A 、 B_1 、 B_2 は定数で

ある。これらを式(D.3)(D.4)(D.5)に代入すると($k > 0$ とする)

$$(\sigma + iku_1)A + kB_1 = 0 \quad (\text{D.6})$$

$$(\sigma + iku_2)A - kB_2 = 0 \quad (\text{D.7})$$

$$\rho_1(\sigma + iku_1)B_1 - \rho_2(\sigma + iku_2)B_2 = 0 \quad (\text{D.8})$$

を得る。 $A, B_1, B_2 \neq 0$ の条件を満たすには式(D.6)(D.7)(D.8)の連立方程式の係数行列式

が0でなければならない。これより、

$$\rho_1(\sigma + iku_1)^2 + \rho_2(\sigma + iku_2)^2 = 0$$

よって

$$(\rho_1 + \rho_2)\sigma^2 + 2ik(\rho_1u_1 + \rho_2u_2)\sigma - k^2(\rho_1u_1^2 + \rho_2u_2^2) = 0$$

従って、

$$\sigma = \frac{-ik(\rho_1u_1 + \rho_2u_2) \pm k(u_1 - u_2)\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}$$

を得る。 $\sigma > 0$ の実部を持つとき不安定であり、 $u_1 > u_2$ の場合、その成長率 γ は

$$\gamma = k(u_1 - u_2) \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}$$

となる。 $u_1 < u_2$ の場合には

$$\gamma = k(u_2 - u_1) \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}$$

であるから、結局

$$\gamma = k|u_1 - u_2| \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}$$

となる。

Appendix E 密度の計算誤差の検証

密度差の大きな物質を同時に計算した場合、高密度側の物質で発生した誤差が低密度側に悪影響を及ぼして計算が破綻してしまう可能性を序論で指摘した。ここではスラミング現象のシミュレーションを例にとり、密度分布を調べてどの程度の誤差が発生しているのか調べてみることにする。

実際に密度分布を調べたのは細かい格子を使用した水撃角 $\beta = 1^\circ$ の場合の計算である。図 E.1 の破線のように、船体の中心部を通る水面に垂直な直線上における密度分布を調べた。

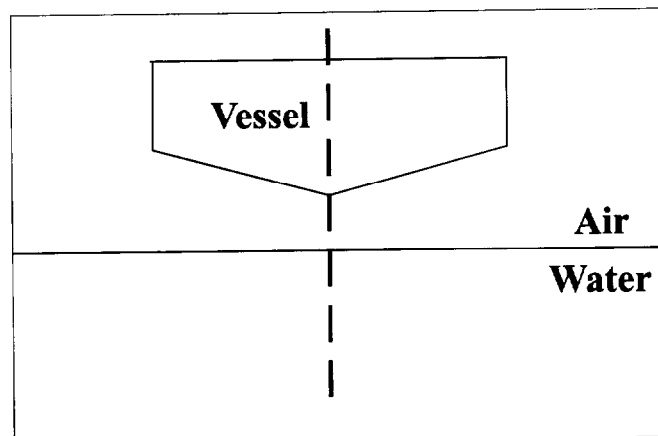


図 E.1 密度分布の計算位置

まず、時刻 $t = 0.00686L/V_0$ における密度分布を図 E.2 に示す。左図は計算領域の半分程度の範囲を表示したものである。船体が水面に接触するのは $t = 0.02L/V_0$ であるので、この時刻においては船体と水面とはまだ離れた状態である。左図を見ると、水面における数値拡散は非常に小さいのが分かる。また、船体は計算開始時からこ

の時刻までに 8 格子分ほど移動しているのだが、数値拡散も目立たず、オーバーシュートなども発生していない。

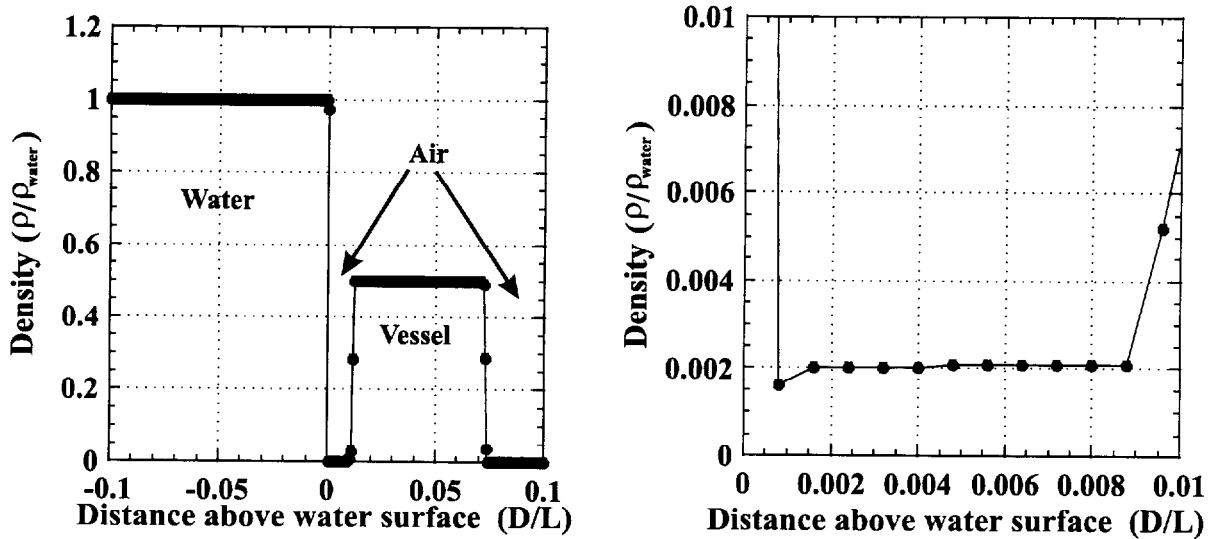


図 E.2 密度の分布図

図 E.2 の右図は水面付近を強拡大した図で、主に水面と船体との間に挟まれている空気の層の領域を示している。図の左端が水面、右端の方には船体が見えている。空気の層のうち、船体の側ではアンダーシュートの発生による空気の密度の低下は全く見られないが、水面側では空気密度の低下が起こっている。これは船体の中心部では船体の左右両側に向けて気流が発生するため、空気が膨張して密度が低下し得る可能性もあるが、アンダーシュートの発生による空気密度の低下である可能性も考えられる。これをアンダーシュートの発生による空気密度の低下であると考え、その影響は 1 格子分だけであるが、この格子点の船体側の隣の格子点における密度の値と比較するとおよそ 20%ほどの密度の低下となっている。密度の値が負になって計算が破綻するほどの誤差ではないが、小さな誤差であるとも言えない大きさである。

また、問題になるのが空気の密度が全体的に初期条件よりも大きな値になってい

るという点である。前述の 1 格子を除いて、この時刻では空気の密度は初期値の 1.5 倍程度にまで増加している。一方、圧力の値は 0.6% ほどしか増加していない。従って、空気の密度が増加しているのは船体の数値拡散によって密度が増加している可能性が考えられる。この数値拡散の可能性について検証してみる。増加した密度と圧力による空気の音速は $265V_0$ であり、これに対して $\beta = 1^\circ$ での空気の流速の最大値は本文中に示したようにおよそ $50V_0$ である。よって、衝撃波が発生するとは考えにくく、実際圧力分布を調べてみても不連続面が形成されているようなところは見出せない。従って、この場合の密度、圧力の変化は断熱的であると考えられるので、

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (\text{E.1})$$

が成立し、この式に従って密度、圧力が変化すると考えられる。ここで、 p_0 、 ρ_0 はそれぞれ圧力、密度の初期値、また $\gamma = 1.4$ である。

まず、図 E.2 右図における真ん中の格子点上、すなわち水面からの距離 D が $D/L=0.005$ で、船体の中心を通り水面と直交する直線上にある格子点における密度と圧力の時間変化を図 E.3 に示す。図 E.3 から、この格子点に船体が到達するのはおよそ $t = 0.015L/V_0$ の時刻である。船体が格子点に接近してくると船体の密度が大きく増加するようになるが、これは船体の数値拡散の影響である。しかし、時刻 $t = 0.01L/V_0$ 以前ではこの格子点上にある物質は空気であるから式(E.1)が成立しているものと考えられる。そこで時刻 $t = 0.01L/V_0$ 以前での密度と圧力の関係を図 E.4 に示す。なお、時刻 $t = 0.01L/V_0$ における密度は $2.42\rho_0$ 、圧力は $1.02p_0$ である。

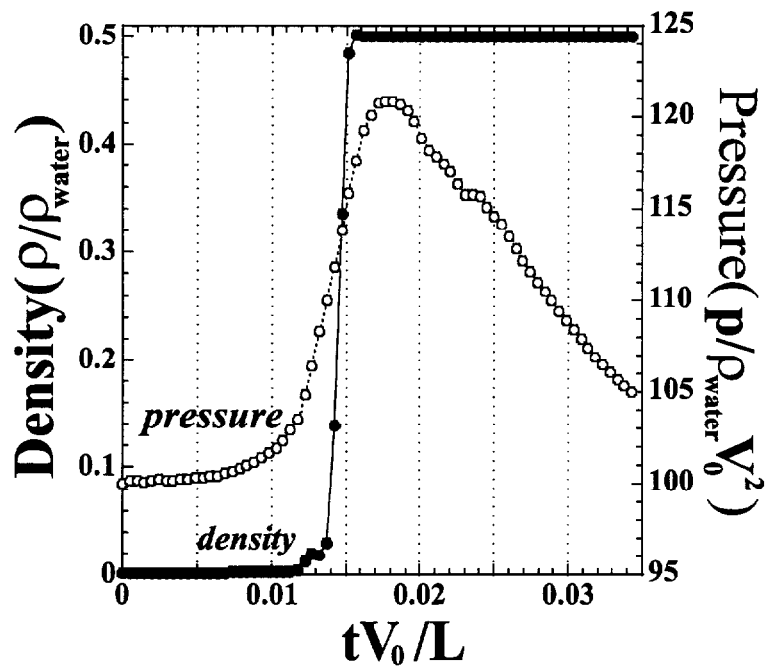


図 E.3 密度と圧力の時間変化

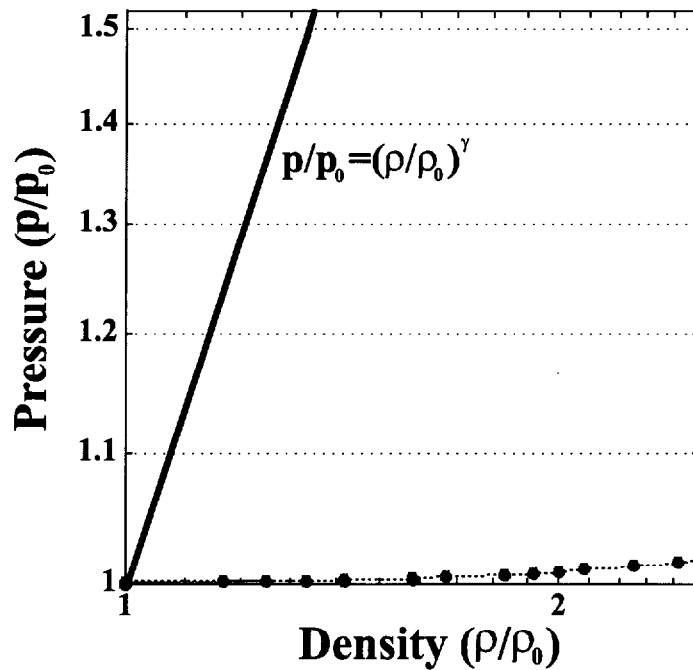


図 E.4 密度と圧力の関係図

図 E.4 の実線は式(E.1)による値、黒丸がシミュレーションによる値である。図 E.4 のように、シミュレーション結果と式(E.1)とは大きく異なっている。密度が増加して

も圧力は式(E.1)から求まる値よりも小さな値しか持っていない。これは圧力がほとんど増加していないのに密度だけが増加しているためである。この原因として考えられるのはやはり数値拡散の影響である。今回、密度と圧力を求めた格子点は水と船体との間にあるため、どちらからも数値拡散の影響を受けていると考えられる。しかも、この格子点は時間が経つにつれて船体が接近し、水面との船体との間に挟み込まれる位置にあるために、特に数値拡散の影響を受け易くなっているのではないかと考えられる。この結果から、高密度物質の近傍では数値拡散の影響によって、低密度物質側の密度が増加するという現象が発生する可能性が指摘される。また、前述の 1 格子分の密度の低下は、他よりも数値拡散の影響が小さいために密度が小さかっただけである可能性も考えられる。

以上のように、1つの計算例についてのみであるが、計算の検証を簡単に実行した。その結果、不連続面に接する低密度の物質側では数値振動の影響とも考えられる密度の低下が生じる可能性があり、実際に誤差であるとするとその大きさは今回の検証例では 20%程度であった。また、数値拡散の影響について調べたところ、おそらくは数値拡散の影響と考えられる密度の増加が低密度物質側で発生している可能性があるという結果が得られた。この数値拡散が実際の計算結果にどの程度の影響を及ぼすことになるのか、詳しく検討してみる必要があると考えられる。

Appendix F 彗星核の消滅位置を決める要因について

本研究では2次元でも3次元でも彗星核は木星大気の15bar付近で消滅するという結果が得られたが、この15barという値を決める要因について調べるための計算を行ってみた。2次元でも3次元でも消滅位置には大きな変化がないことが分かったので、計算は軸対称2次元で実行したが、3.2節における2次元計算よりも格子間隔は大きくなっており、最小格子間隔は3次元計算と同じ150mになっている。核の消滅位置を決めるものとしては、核の大きさ、核と木星との衝突速度、核の材質、核の形状が考えられる。このうち、最後の核の形状については格子を細かくし、なおかつ3次元で計算する必要があるので今回は見送った。

まず、核の大きさを変えた場合、この場合は速度60km/s、核の状態方程式(以後EOS)は氷であるが、核の直径が1kmの場合で消滅は2bar、3kmで10bar、5kmで33barであった(図F.1)。3kmの場合はこれまでの2次元、3次元計算と同じ条件であるが、消滅位置が浅くなっている。これは格子が粗いことが影響していると考えられる。なお、この核の大きさを変える計算では格子間隔を変化させることによって核の大きさを変化させている。従って、核の大きさが変化しても核の半径は10格子分になっている。この結果から、核の大きさは核の消滅位置に大きな影響を及ぼすことが分かる。

次に核の木星との衝突速度を変化させた場合である。この場合は核の大きさは直径3km、EOSは氷である。結果は核の速度が30km/sで13bar、60km/sで10bar、120km/sで9barであった(図F.2)。核の大きさを変えた場合に比べて速度の影響は少ない。これは速度が大きいほど木星大気による抵抗を受けやすく、より減速しやすくなるため、衝突速度が変化しても消滅位置には大きな差が現れないものと考えられる。

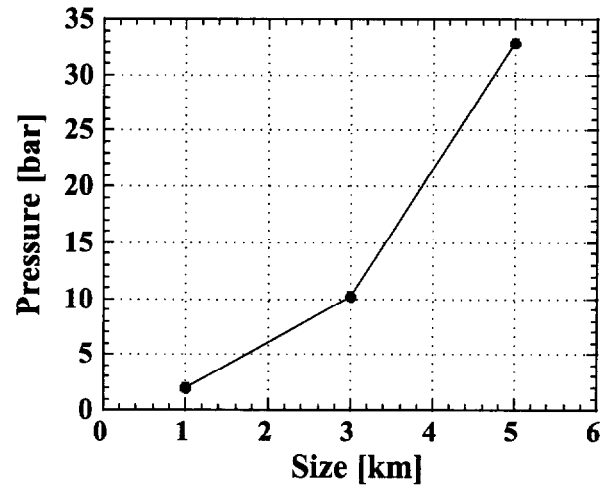


図 F.1 核の大きさによる消滅位置の変化

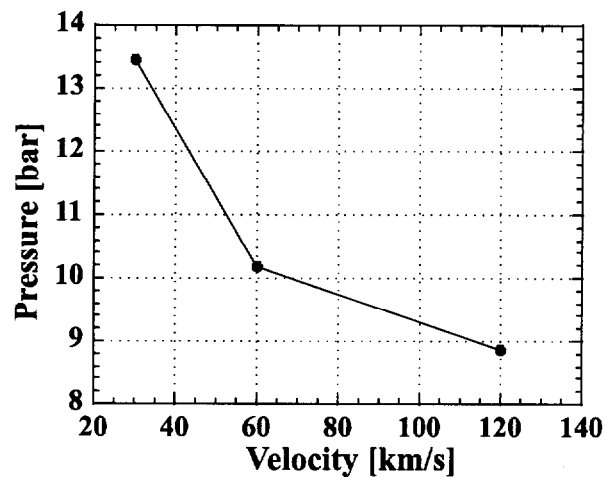


図 F.2 核の速度による消滅位置の変化

最後に核の EOS を変化させて計算を行った。この場合は核の大きさは 3km、速度は 60km/s である。EOS は理想気体、水、氷とした。なお、水の場合は式(3.7)の Tait 方程式において $B = 3000\text{bar}$ としたものである。結果は理想気体で 16bar、水で 13bar、氷で 10bar であった。EOS を変化させても速度を変化させた場合と同じく消滅位置に大きな変化は現れなかった。なお、核の材質が変化しても消滅位置に大差がないというのは、彗星核の物性値が正確に分かっていないだけに重要である。

また、彗星核が木星に及ぼす影響について考える。核が球形をしているとすると、

核の運動エネルギーは $E = mv^2/2 = 2\pi\rho v^2 r^3/3$ であるから、速度の 2 乗に、大きさの 3 乗に比例する。このことから、核の速度の変化よりも大きさが変化した場合のほうが核の木星に及ぼす影響の大きさが変化しやすいと考えられる。

この衝突現象では SL9 の分裂核は全てほぼ同じ軌道上を運行し、木星に衝突したわけであるから、それぞれの核の木星との衝突速度はほとんど同じである。今回の計算では、核の木星との衝突速度が 2 倍に変化しても消滅位置に大きな差は現れなかった。従って、実際の衝突現象において、核の速度の違いによる木星への影響の変化はほとんどないものと考えられる。また、核の材質の変化による消滅位置の変化も小さいものであった。よって彗星核の消滅位置に大きな影響を及ぼすのは核の大きさであると結論できる。また、核が木星に与えた影響の違い、例えば衝突痕の大きさの違いも核の大きさの違いが直接影響しているものと考えられる。

参考文献

- [1] H.Takewaki, A.Nishiguchi and T.Yabe, *J. Comp. Phys.* **61**(1985) 261.
- [2] T.Yabe and T.Aoki, *Comput. Phys. Commun.* **66**(1991) 219.
- [3] P.D.Lax and B.Wendroff, *Comm. Pure Appl. Math.* **13**(1960) 217.
- [4] T.Yabe and F.Xiao, *J. Phys. Soc. Jpn.* **62**(1993) 2537.
- [5] F.Xiao and T.Yabe, *Shock Waves* **4**(1994) 101.
- [6] C.W.Hirt and B.D.Nichols, *J. Comp. Phys.* **39**(1981) 201.
- [7] M.Sussman, P.Smereka and S.Osher, *J. Comp. Phys.* **114**(1994) 146.
- [8] F.Xiao, T.Yabe and T.Ito, *Comput. Phys. Commun.* **93**(1996) 1.
- [9] F.Xiao, T.Yabe, G.Nizam and T.Ito, *Comput. Phys. Commun.* **94**(1996) 103.
- [10] M.Ida and T.Yabe, *Comput. Phys. Commun.* **92**(1995) 21.
- [11] 幕内秀和, 多次元陰的 CIP 法による双曲型方程式の数値解法 東京工業大学博士論文(1997).
- [12] T.Yabe, T.Ishikawa, P.Y.Wang, T.Aoki, Y.Kadota and F.Ikeda, *Comput. Phys. Commun.* **66**(1991) 233.
- [13] T.Aoki, *CFD Journal* **4**(1995) 279.
- [14] T.Yabe and P.Y.Wang, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60**(1991) 2105.
- [15] F.H.Harlow and J.E.Welch, *Phys. Fluids* **8**(1965) 2182.
- [16] T.Yabe, Unified Solver CIP for Solid, Liquid and Gas, *Computational Fluid Dynamics Review*(1997).
- [17] C.S.Shoemaker, E.M.Shoemaker and D.H.Levy, *IAU Circ.* 5725(1993).
- [18] J.R.Graham, I.de Pater, J.G.Jernigan, M.C.Liu and M.E.Brown, *Science* **267**(1995) 1320.
- [19] J.Watanabe, T.Yamashita, H.Hasegawa, S.Takeuchi, M.Abe, Y.Hirota, E.Nishihara,

- S.Okumura and A.Mori, *Pub. Astron. Soc. Japan* **47**(1995) 21.
- [20] 渡部潤一, 巨大彗星が木星に激突するとき, 誠文堂新光社(1994).
- [21] 渡部潤一, 彗星の木星衝突を追って, 誠文堂新光社(1995).
- [22] F.M.Flaser, *Icarus* **65**(1986) 280.
- [23] J.A.Pirraglia, B.J.Conrath, M.D.Allison and P.J.Gierasch, *Nature* **292**(1981) 677.
- [24] Z.Sekanina, *Science* **262**(1993) 382.
- [25] M.B.Boslough, D.A.Crawford, A.C.Robinson and T.G.Trucano, *Geophys. Res. Lett.* **21**(1994) 1555.
- [26] T.J.Ahren, T.Tanaka, J.D.O'Keefe and G.S.Orton, *Geophys. Res. Lett.* **21**(1994) 1087.
- [27] M.Mac Low and K.Zahnle, *Ap. J. Lett.* **434**(1994) 33.
- [28] T.Yabe, F.Xiao, D.Zhang, S.Sasaki, Y.Abe, N.Kobayashi and T.Terasawa, *J. Geomag. Geoelectr.* **46**(1994) 657.
- [29] J.J.Monaghan, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **30**(1992) 543.
- [30] T.Yabe, T.Aoki, M.Tajima, F.Xiao, S.Sasaki, Y.Abe and J.Watanabe, *Geophys. Res. Lett.* **22**(1995) 2429.
- [31] E.Matsunaga, T.Yabe and M.Tajima, NIFS-509(1997).
- [32] H.A.Weaver, P.D.Feldman, M.F. A'Hearn and C.Arpinny, *Science* **263**(1994) 787.
- [33] J.V.Scotti and H.J.Melosh, *Nature* **365**(1993) 7333.
- [34] R.H.Cole, *Underwater Explosions* Princeton University Press, Princeton NJ (1948).
- [35] D.H.Atkinson, J.B.Pollack and A.Seiff, *Science* **272**(1996) 842.
- [36] 渡部潤一, しし座流星雨がやってくる, 誠文堂新光社(1998).
- [37] H.Wagner, *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik* **12**(1932) 193.
- [38] S.L.Chuang, *J. Ship Research* **11**(1967) 190.
- [39] A.Korobkin, *J. Fluid Mech.* **244**(1992) 437.
- [40] A.Korobkin, *J. Fluid Mech.* **263**(1994) 319.

- [41] J.H.G.Verhagen, *J. Ship Research* **11**(1967) 211.
- [42] Z.N.Dobrovol'skaya, *J. Fluid Mech.* **36**(1969) 805.
- [43] R.Zhao and O.Faltinsen, *J. Fluid Mech.* **246**(1993) 593.
- [44] 角洋一・岡田真三・向井広樹・井上弘一, 日本造船学会論文集 第 182 号 639.
- [45] 田島雅和・渡邊和義・矢部孝, 日本機械学会論文集 B 編 64 卷 618 号(1998) 389.

業績リスト

学術論文

T.Yabe, T.Aoki, M.Tajima, F.Xiao, S.Sasaki, Y.Abe and J.Watanabe, Possible Explanation of the Secondary Flash and Strong Flare on IR Lightcurves upon Impact of Shoemaker-Levy 9, *Geophys. Res. Lett.*, **22**(1995), p2429-2432.

F.Xiao, T.Yabe, T.Ito and M.Tajima, An Algorithm for Simulating Solid Objects Suspended in Stratified Flow, *Comput. Phys. Commun.*, **102**(1997), p147-160.

田島雅和、渡邊和義、矢部孝、CIP 法による小型船体のスラミング現象のシミュレーション、日本機械学会論文集（B 編）64 巻 618 号(1998-2)、p389-396

T.Yabe, M.Tajima and Y.Zhang, Simulation of Impact and Splashing Phenomena by the CIP Method, 3rd ASME/JSME JOINT FLUID ENGINEERING CONFERENCE(FEDSM99)

M.Tajima and T.Yabe, Simulation on Slamming of a Vessel by CIP Method, 投稿中

口頭発表論文

田島雅和、松永栄一、青木尊之、矢部孝、シューメイカー・レビー第 9 彗星と木星との衝突の 3 次元シミュレーション、第 10 回数値流体力学シンポジウム、中央大学理工学部(東京)、1996 年 12 月

田島雅和、矢部孝、CIP 法による小型船体のスラミング現象のシミュレーション、
日本機械学会第 76 期全国大会、東北大学工学部(仙台)、1998 年 10 月

田島雅和、矢部孝、CIP 法による小型船体のスラミング現象のシミュレーション、
第 12 回数値流体力学シンポジウム、中央大学理工学部(東京)、1998 年 12 月

謝辞

本研究を遂行するにあたり、指導教官である矢部孝教授には終始適切で有益なご助言をしていただきました。この場を借りて深く感謝の意を表します。

また、適切なアドバイスや、特に画像の作成などいろいろとご協力をしていただいた原子炉研の青木尊之助教授にも深く感謝いたします。

さらに、いろいろとお世話になった理研の肖鋒博士や矢部研究室の先輩、後輩の皆さんにも深く感謝いたします。