

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	代表根指定法によるサンプル値系の設計法
Title(English)	
著者(和文)	安居院猛
Author(English)	
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第107号, 授与年月日:1964年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:高井 宏幸
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第107号, Conferred date:1964/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

代表根指定法によるサンプル値系の設計法

昭和 3 9 年 1 月

安 居 院

猛

代表根指定法によるサンプル値系の設計法目次

内 容 梗 概

(I) 緒 言	3
(II) サンプル値系の解析	5
(1) 階差方程式と拡張変換について	5
(1) 階差方程式について	5
(2) 階差方程式とサンプル値系	5
(2) 一定行き過ぎ量を与える2次サンプル値系のパラメータ	9
(1) デジタル計算機による計算の方法	9
(2) 計算機による計算結果	10
(3) パラメータと応答の疎さについて	19
(3) サンプル値系の近似と代表根指定法の適用について	21
(1) サンプラ・ホールダの近似	21
(2) 代表根指定法	22
(3) サンプル値系における代表根指定法の適用	27
(4) 代表根以外の根、零位が応答に及ぼす影響	29
(4) むだ時間近似による2次サンプル値系について	32
(1) 近似した2次サンプル値系のパラメータ	32
(2) 2次サンプル値系のパラメータの比較	33
(3) 2次サンプル値系と2次連続系の応答の比較	36
(4) 系の現象角 $\omega_b T$ が同じ場合の時間変換と応答	38
(5) サンプリング周期の選定について	42
(1) サンプリング周期の限界	42
(2) $\omega_b T$ の限界での応答	47
(3) 2次サンプル値系の $\omega_b T$ を変化した時の $\oplus_m, \tau_m$	56
(4) 2次サンプル値系の留数と速度誤差定数	60
(6) 不完全ホールダを持つ2次サンプル値系について	61

(1) 不完全ホールドとその近似	61
(2) 不完全ホールドを持つ2次サンプル値系の応答	64
(3) 留数の逆数ベクトル、速度誤差定数 およびホールド率の限界	65
[III] サンプル値系の特性設計	74
(1) 進み回路による3次サンプル値系の特性補償について(その1)	74
(1) 3次サンプル値系と補償前の系の応答	74
(2) 補償計算	74
(2) 進み回路による3次サンプル値系の特性補償について(その2)	83
(1) 3次サンプル値系と補償前の系の応答	83
(2) 補償計算	83
(3) 遅れ進み回路によるサンプル値系の特性補償について	90
(1) 遅れ進み回路	90
(2) 3次サンプル値系と補償前の系の応答	91
(3) 補償計算	92
(4) 行き過ぎ量40%に対する $\gamma_0=0.5$ の指定	98
(4) むだ時間を含むサンプル値系について	99
(1) むだ時間を含む2次サンプル値系	99
(2) むだ時間を含む2次サンプル値系の応答	102
(3) むだ時間を含む3次サンプル値系の特性補償	102
[IV] 結 言	111

(I) 緒 言

系の一例以上にサンプリング機構を持つサンプル値制御系は古くは温度制御の一方式である落下秤機構を持つ制御系として研究され、才次大戦中、主としてレーダの追尾装置などの研究に関して理論的に発展したといわれている。特に最近、本質的にサンプル値系であるデジタル技術などの発達にともない、その制御系への導入、データの処理などに関してサンプル値制御系の理論はさらに発達した。

サンプル値系は、誘導加熱炉の温度を熱電対で測定するときのように、本質的に連続検出が困難な場合、総合的な制御を行うために検出に走査を必要とする場合、あるいは系の要素が計算時間を必要とするような場合のように系が本質的にサンプル値系である場合と、有限整定などのようなサンプル値系の持つ特色ある制御特性を希望するような時、あるいは経済的理由により一つの制御装置で多くの対象の制御を行ないたい場合のように系をサンプル値系とした方がよい場合にわけられる。一方、サンプル値系の特性補償方法について考えると、パルス補償回路などの不連続補償回路を使う場合と、連続系の場合と同様な連続補償回路を使う場合にわけられる。不連続補償回路による特性補償では制御装置の共通利用、あるいはサンプル値系独得の特性を得ることが可能であるなどの長所を持っているが、回路が複雑、高価なものとなり、系の応答がリップルを含むなどの欠点がある。この設計法については、 Σ 変換、拡張 Σ 変換などを利用して連続系の場合のように、根軌跡、周波数応答法などを用いたすぐれた方法⁽¹⁾⁽²⁾がある。他方、連続回路を補償回路に利用する補償方法では、サンプル値系独得の特性を系に持たす上では適さないが、回路自体がきわめて簡単、安価であり、定常時の応答がリップルを含まないので、系が本質的にサンプル値系であるようなときには実用性は大きい。この設計法としてはすでに周波数特性による方法⁽³⁾、いったん不連続回路で特性設計を行ない、それとほぼ同じ応答を持つ回路を連続回路で実現する方法⁽⁴⁾などが提案されている。しかし、これ等の方法では、サンブラ、ホールダなどがあるために設計手順が煩雑であったり、得られた補償回路がそう簡単ではないなどの実用的な欠点を持っている。

本研究は補償回路に連続回路を利用して特性補を行なう場合についてのものであり、回路の設計方法としては代表根指定法⁽¹⁾を利用し、その適用方法および、その際の諸問題の解決に関するものである。

代表根指定法をサンプル値系に適用した一つの方法としては、すでに発表した「サンプリング周期を仮想的に0とする方法⁽⁵⁾」がある。この方法は大体次に述べる概念にしたがっている。すなわち連続系では高次系と近似した低次系を撰ぶことができる。サンプル値系においても同様に高次系とよく近似した低次サンプル値系を撰ぶことができるが、その各々において

サンプリング周期を仮想的に0とした時、それらの応答は大きな影響を受けるであろうが、互に近似していると考えられる。また逆に高次サンプル値系とそれを近似した低次サンプル値系においてサンプリング周期を0として得られた二つの連続系の応答が互に近似したものであれば、サンプリング周期をもとにもどしたときの応答もそれぞれよく近似したものとなることが考えられる。これらの性質を利用して、まず、仕様値を満足する特性根を持った高次サンプル値系を、前もって解析した結果から選び、そこでサンプリング周期を仮想的に0として低次連続系を得る。次に特性補償を行うべき高次サンプル値系においても仮想的にサンプリング周期を0として連続系として、これに仮想的に連続化した高次サンプル値系の特性根を代表根指定法の手法によって持たせ、留数条件によってその近似度を検討する。

以上が「サンプリング周期を仮想的に0とする方法」の設計概念であり、これによって充分よい近似が得られ、また設計手順が明確、画一的であるので比較的経験的要素を必要としない、あるいは設計計算自体が簡単である、などの特長を持っているが、連続系において代表根指定法のベクトル計算に利用される線図、または計算表などを利用することができないという大きな欠点があった。

本論文で述べる方法は、この欠点を取り除き、連続系において利用される線図、計算表をそのままサンプル値系の設計においても利用できるようにしたもので、「サンブラとホールダをサンプリング周期の1/2のむだ時間で近似する方法」である。

結論としては、この方法によれば、互換のほぼ90°以内で指定された根について連続系の場合とまったく同様にして過渡特性の設計、検討を行なうことができるということが得られた。

本論文は、まず、サンプル値系の解析に便利な階差方程式、Z交換などについて述べ、それを利用してディジタル計算機によって高次サンプル値系の応答とパラメータとの関係を求める。次に、サンプル値系を「サンブラとホールダをサンプリング周期の1/2のむだ時間で近似する」ことによって得られる連続系に代表根指定法を適用する方法について述べ、計算機によって得られた結果とこの近似法によって得られたパラメータとの比較を行ない、それによって、この近似法の近似の限界、サンプリング周期の模定などについて述べる。後半において、以上の解析の結果を利用して、高次サンプル値系、むだ時間を含むサンプル値系などの具体的な特性設計を行ない、それに関して留数限界などの吟味を行なう。

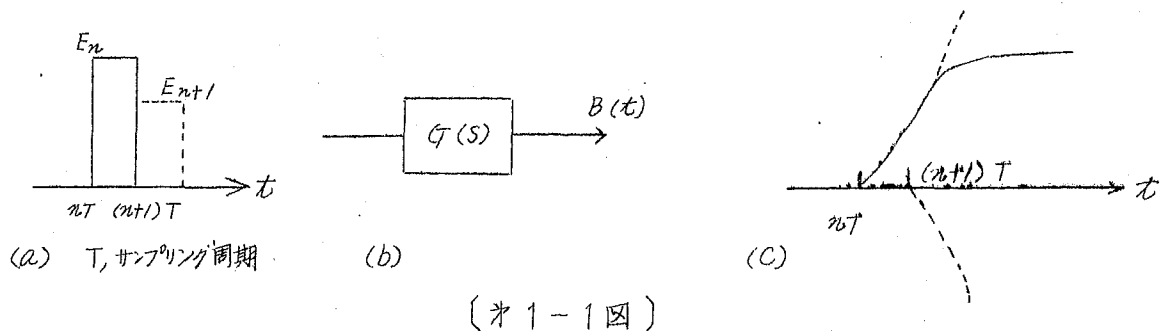
〔Ⅱ〕 サンプル値系の解析

(1) 階差方程式と拡張Z変換について

(1) 階差方程式について

サンプル値系の解析、設計にはZ変換、拡張Z変換、および、それらの逆変換があるが、実用的には、これらの変換ではラプラス変換された伝達関数が積の形であつても、例えば(1-1)に示すように、和の形となり、式がはん雑になるので利用しにくい。

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right] = \frac{1}{b-a} \left(\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}} \right) \quad (1-1)$$



一般に零次ホルダを持ったサンプル値系はオ 1-1 図に示すように $G(s)$ なる伝達関数を持ったプラントに矩形の入力が次々に入つて来ると考えて系の解析を行なうこと。すなわち階差方程式によって系の解析を行うことができる。

上図において一つの矩形インパルスによる $G(s)$ の出力を $B(t)$ とすると;

$$B(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[E_n \frac{1-e^{-sT}}{s} G(s) \right] \quad (1-2)$$

ここで、 $B(t)$ は $E_n G(s)/s$ による項とむだ時間 e^{-sT} による項にわけられ、例えば $G(s)$ を (1-3) とし、始めの矩形波による出力を求めると (1-4) となる。

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad (1-3)$$

$$B(t) = \begin{cases} B_1(t) = \frac{E_0 K}{a^2} (e^{-at} + at - 1) & 0 \leq t < T \\ B_2(t) = \frac{E_0 K}{a^2} \left[e^{-at} (1 - e^{-aT}) + aT \right] & t \geq T \end{cases} \quad (1-4)$$

ここに、T; サンプルング周期

E_0 ; 矩形波の高さ

(2) 階差方程式とサンプル値系

$$C(nT)T = \frac{1}{2\pi j} \int_P R^*(z) \frac{H_0 G^*(zT)}{1 + H_0 G^*(zT)} z^{n-1} dz \quad (1-7)$$

ここで P は上式に含まれる特異点についての線積分を示す。

一般に、拡張Z変換、Z変換、あるいはそれらの逆変換で与えられる式は系の応答の全区間で検討をすすめる場合には都合が良いが、特性方程式の根を求めなければならないので、系の次数が高い時は因数分解が困難となり、利用する上では必ずしも便利とは云えない。他方(1-6)は、応答の行き過ぎ量、あるいはそれを与える時刻などを求める場合には、特にその時刻が比較的に早い場合には、系の一巡伝達関数の逆ラプラス変換だけを計算を行なえるので系の次数が高い場合にも都合よく利用できる。

(1-6)は拡張逆Z変換に対応する式であるが、サンプリング時刻での値を求める式、すなわち、逆Z変換に対応する式は、それに(1-8)を代入すれば良い。

$$t = nT \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1-8)$$

(1-6)に(1-8)を代入してマトリクスで示すと(1-9)が得られる。

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_T \\ C_{2T} \\ C_{3T} \\ \vdots \\ C_{nT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-C_T) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-C_{2T}) & (1-C_T) & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (1-C_{(n-1)T}) & (1-C_{(n-2)T}) & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_T \\ B_{2T} \\ B_{3T} \\ \vdots \\ B_{nT} \end{pmatrix} \quad (1-9)$$

ここに C_{nT} , B_{nT} はサンプリング時刻 nT における $C(t)$, $B(t)$ の値

(1-9)において一般には $C_0 = B_0 = 0$ である。したがって;

$$\begin{pmatrix} C_T \\ C_{2T} \\ C_{3T} \\ \vdots \\ C_{nT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_T \\ B_{2T} \\ B_{3T} \\ \vdots \\ B_{nT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_{2T} & C_T & 0 & \dots & 0 \\ C_{3T} & C_{2T} & C_T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{(n-1)T} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_T \\ B_{2T} \\ B_{3T} \\ \vdots \\ B_{nT} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_T \\ B_{2T} \\ B_{3T} \\ \vdots \\ B_{nT} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_T & 0 & & \\ B_{2T} & B_T & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ B_{(n-1)T} & B_{(n-2)T} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_T \\ C_{2T} \\ \vdots \\ C_{nT} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

したがって

$$\begin{bmatrix} C_T \\ C_{2T} \\ C_{3T} \\ \vdots \\ C_{nT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1+B_T & 1 & & 0 \\ 1+B_{2T} & 1+B_T & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1+B_{(n-1)T} & \cdots & 1+B_T & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_T \\ B_{2T} \\ \vdots \\ B_{nT} \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

(1-9)あるいは(1-11)は階差方程式を利用してサンプリング時点での値を求める場合であるが、Z変換を利用した場合には、系の応答を(1-12)とすれば、時間関数は、(1-13)になる。

$$C^*(Z) = \frac{R^*(Z) \cdot H_0 G^*(Z)}{1 + H_0 G^*(Z)} \quad (1-12)$$

$$C(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_P C^*(Z) \cdot Z^{n-1} dZ \quad (1-13)$$

ここにPは $C^*(Z)$ に含まれる特異点についての線積分を示す。

上の式では特性方程式の根を求めなければならないので、 $C^*(Z)$ を(1-14)に示すように Z^{-1} に関する有理多項式で示すと、時間関数は(1-15)になり、 C_k は各々(1-16)になる。

$$C^*(Z) = \frac{P_0 + P_1 Z^{-1} + P_2 Z^{-2} + \cdots + P_n Z^{-n}}{g_0 + g_1 Z^{-1} + \cdots + g_m Z^{-m}} \quad (1-14)$$

$$C^*(t) = C_0 \delta(t) + C_1 \delta(t-T) + \cdots + C_k \delta(t-kT) + \cdots \quad (1-15)$$

ここに $\delta(t)$ はデルタ関数

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= P_0/g_0 \\ C_1 &= (P_1 - C_0 g_1)/g_0 \\ C_2 &= (P_2 - C_0 g_2 - C_1 g_1)/g_0 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (1-16)^*$$

以上によって、サンプル値系のサンプル時刻での応答、あるいは、サンプル時刻間の連続値を求めることができ、これによって最大行き過ぎ量、あるいはそれを与える時刻は次のようにすれば求まる。

まず、 z 変換を利用する方法では

$$\Delta C(nT) = C(n+1)T - C(nT) = 0 \quad (1-17)$$

一般に、初期値は0であるから

$$\mathcal{Z}(\Delta C(nT)) = (z-1)C^*(z) \quad (1-18)$$

したがって

$$\Delta C(nT) = 0 = \frac{1}{2\pi j} \int_P (z-1)C^*(z) z^{n-1} dz \quad (1-19)$$

ここに P は $C^*(z)$ に含まれる特異点についての線積分を示す。

上式によって最大行き過ぎ量を含むサンプリング区間を求めることができるが、この式も特性方程式の根を求めなければならないので、高次系では利用しにくい。したがってその場合には(1-16)あるいは(1-11)によって、その区間を求め、その区間の応答を示す式、(1-6)を考慮して、(1-20)から、最大行き過ぎ量を与える時刻 t_m を求め、それをさらに(1-6)に代入すればその値が求まる。

$$\frac{dC(t)}{dt} = 0 \quad t_m = t + \ell T \quad (1-20)$$

(1-16)あるいは(1-11)によって t_m を含むサンプリング区間 ℓ を求めるのは、サンプル周期に比較して応答が早い場合、すなわち ℓ が小さい場合には都合がよいが、 ℓ が大きくなる場合には計算が煩雑となる。しかし、そのような場合には応答の周波数がサンプリング周波数に比較して充分遅いので、サンプル時刻だけで論ずることができると思われる。

なお、(1-20)に相当する計算は拡張 z 変換でも当然行なえるが、計算はかなりはんななものとなる。

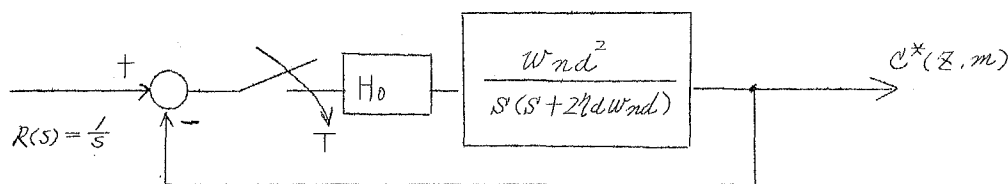
2) 「一定行き過ぎ量」を与える2次サンプル値系のパラメータ

(1) デジタル計算機による計算の方法

良く設計され、実用的な連続制御系では系の応答が代表根を持つと考えられる。これと同様にサンプル値系においても系が良く設計されていれば、系は代表根を持つと考えられる。すなわち、一般に高次のサンプル値系の応答がその代表根だけを特性根として持つ2次サンプル値系の応答で近似できると考えられる。したがってこの場合には2次系の特性根が重要な役割を持っているわけであるが、2次連続系の場合に特性根とパラメータが比

較的簡単な関係であのに対して、2次サンプル値系ではかならずしも簡単であるとは云えない。^{*}そこで基準となるべき2次サンプル系値を考え、その系のパラメータと最大行き過ぎ量、およびそれを与える時刻についての解析を行なう。

基準となるべき2次サンプル値系としてオ2-1図を考える。



T; サンプルング周期 H_0 ; 零次ホールド

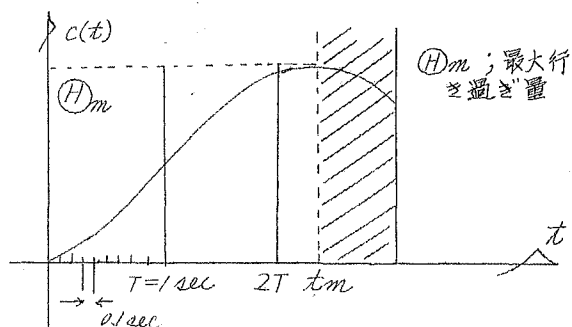
〔オ2-1図〕 基準となる2次サンプル値系

この時の応答の一般式は(1-4), (1-b)より次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} C_n(t) &= C_{n-1}(t) + (1 - C_{nT}) B(t - nT) \\ B(t - nT) &= \frac{1}{4\eta_d^2} \left\{ e^{-2\eta_d Wnd(t - nT)} + 2\eta_d Wnd(t - nT) - 1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

(2-1) によって最大行き過ぎ量、それを与える時刻を求める計算はデジタル計算機^{***}によって行ない。サンプルング周期 $T = 1 \text{ sec}$, 実時間 t を 0.1 sec づつで変化し 1 sec

を10段に分割した。 Wnd は0.4から0.1づつ変化し、各々の Wnd に対して η_d を0.01づつ変化させ、オ2-2図に示すように最初のピークが算出された所で計算を止め、その時の Wnd , η_d 最大値 Θ_m 、および、それを与える時刻 t_m をプリントした。



〔オ2-2図〕

(2) 計算機による計算結果

上の計算によって求めた結果は最大行き過ぎ量 Θ_m に関するものであり、 η_d に関して不連続値になっているので、これから、 Wnd , Θ_m を固定して、比例計算により「一定行き過ぎ量」 $\Theta_m = 60, 50, 40, 30, 20, 10, 1\%$ の各々に対して η_d および t_m を求めた。その結果をオ2-1表およびオ2-2表、オ2-3図およびオ2-4図に示す。この結果から各々の Θ_m に対して Wnd , η_d のいくつかの組を適当に撰びアナコムによって応答波形を求めるとオ2-5図のようになる。

Constant Over Shoot Loci in %

Wind	60	50	40	30	20	10	1
0.4	0.261	0.317	0.382	0.451	0.561	0.698	0.937
0.5	0.286	0.342	0.408	0.488	0.589	0.727	0.969
0.6	0.311	0.367	0.434	0.514	0.616	0.757	1.004
0.7	0.334	0.391	0.459	0.541	0.644	0.786	1.037
0.8	0.358	0.417	0.485	0.568	0.672	0.817	1.074
0.9	0.381	0.439	0.508	0.593	0.700	0.848	1.109
1.0	0.405	0.465	0.534	0.619	0.726	0.879	1.147
1.1	0.424	0.487	0.560	0.647	0.756	0.908	1.186
1.2	0.444	0.505	0.577	0.671	0.784	0.940	1.227
1.3	0.463	0.526	0.599	0.688	0.810	0.974	1.267
1.4	0.488	0.551	0.623	0.713	0.829	1.006	1.307
1.5	0.509	0.575	0.651	0.742	0.856	1.035	1.349
1.6	0.530	0.598	0.678	0.769	0.888	1.058	1.395
1.7	0.549	0.619	0.694	0.797	0.919	1.086	1.436
1.8	0.565	0.628	0.717	0.822	0.950	1.119	1.478
1.9	0.567	0.645	0.737	0.841	0.974	1.154	1.518
2.0	0.577	0.642	0.743	0.862	1.006	1.190	1.557
2.1	0.584	0.653	0.753	0.874	1.025	1.228	1.596
2.2	0.596	0.667	0.752	0.875	1.052	1.260	1.645
2.3	0.616	0.688	0.772	0.892	1.070	1.299	1.687
2.4	0.643	0.714	0.793	0.901	1.079	1.331	1.735
2.5	0.675	0.745	0.822	0.924	1.087	1.359	1.777
2.6	0.697	0.771	0.856	0.953	1.104	1.385	1.825
2.7	0.738	0.809	0.883	0.987	1.118	1.427	1.867
2.8	0.764	0.838	0.924	1.017	1.145	1.453	1.908
2.9	0.788	0.865	0.955	1.059	1.181	1.475	1.949
3.0	0.837	0.910	0.984	1.092	1.216	1.492	1.998
3.10	0.866	0.943	1.033	1.125	1.258	1.503	2.038
3.35	0.934	1.018	1.114	1.227	1.349	1.558	2.130
3.60	1.037	1.087	1.192	1.314	1.457	1.629	2.230
3.85	1.111	1.202	1.305	1.397	1.553	1.734	2.317
4.10	1.183	1.279	1.390	1.518	1.647	1.846	2.436
4.25	1.225	1.325	1.440	1.573	1.730	1.911	2.507

— $\%d$ —

(オ2-1表) 一定行き過ぎ量を与える Wind と $\%d$ の関係

(サンプリング周期 $T = 1$ 秒)

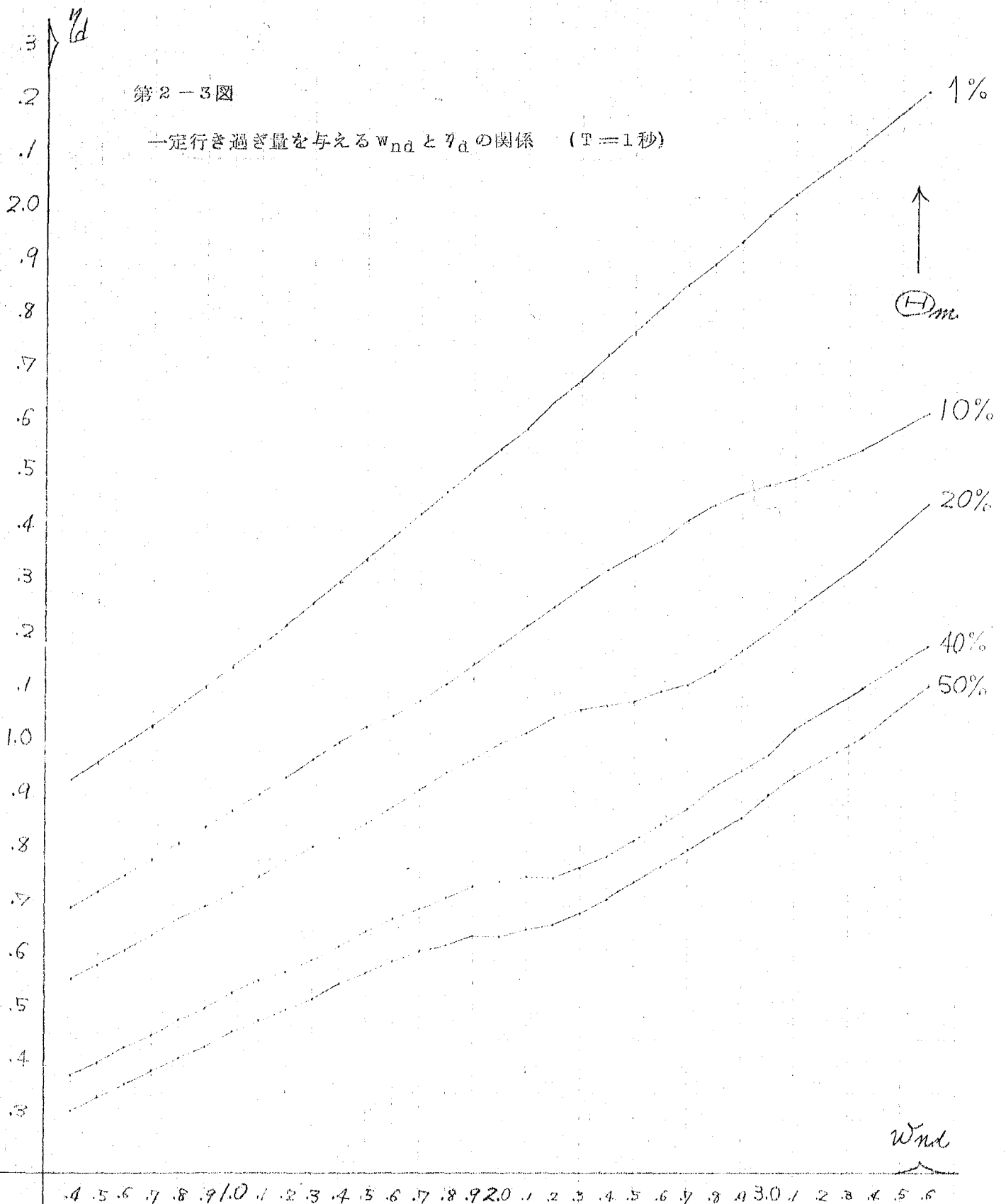
$\textcircled{H}m$

Wnd	60	50	40	30	20	10 (%)
0.4	8.2	8.3	8.4	8.6	9.0	9.9
0.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.3	8.0
0.6	5.5	5.6	5.7	5.9	6.2	6.8
0.7	4.8	4.9	4.9	5.1	5.3	5.9
0.8	4.3	4.3	4.4	4.5	4.7	5.2
0.9	3.8	3.9	3.9	4.1	4.3	4.7
1.0	3.5	3.5	3.6	3.7	3.9	4.3
1.1	3.3	3.3	3.3	3.4	3.6	4.0
1.2	3.0	3.1	3.2	3.2	3.4	3.7
1.3	2.8	2.8	2.9	3.0	3.2	3.5
1.4	2.6	2.6	2.7	2.8	3.0	3.3
1.5	2.5	2.5	2.5	2.6	2.8	3.2
1.6	2.4	2.4	2.4	2.5	2.6	3.1
1.7	2.3	2.3	2.4	2.4	2.5	2.9
1.8	2.2	2.3	2.3	2.3	2.4	2.7
1.9	2.2	2.2	2.2	2.3	2.4	2.6
2.0	2.1	2.2	2.2	2.2	2.3	2.5
2.1	1.9	2.1	2.1	2.2	2.3	2.4
2.2	1.8	1.8	2.0	2.2	2.2	2.4
2.3	1.7	1.7	1.8	2.1	2.2	2.3
2.4	1.6	1.6	1.7	1.9	2.2	2.3
2.5	1.5	1.5	1.6	1.7	2.1	2.3
2.6	1.5	1.5	1.5	1.6	2.1	2.3
2.7	1.4	1.4	1.5	1.5	1.8	2.2
2.8	1.4	1.4	1.4	1.5	1.6	2.2
2.9	1.4	1.4	1.4	1.4	1.5	2.2
3.0	1.3	1.3	1.4	1.4	1.5	2.2
3.1	1.3	1.3	1.3	1.4	1.4	2.2
3.35	1.3	1.3	1.3	1.4	1.4	2.1
3.6	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	1.5
3.85	1.2	1.2	1.2	1.3	1.3	1.4
4.1	1.2	1.2	1.2	1.2	1.3	1.3
4.25	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.3

— t_m (秒) —

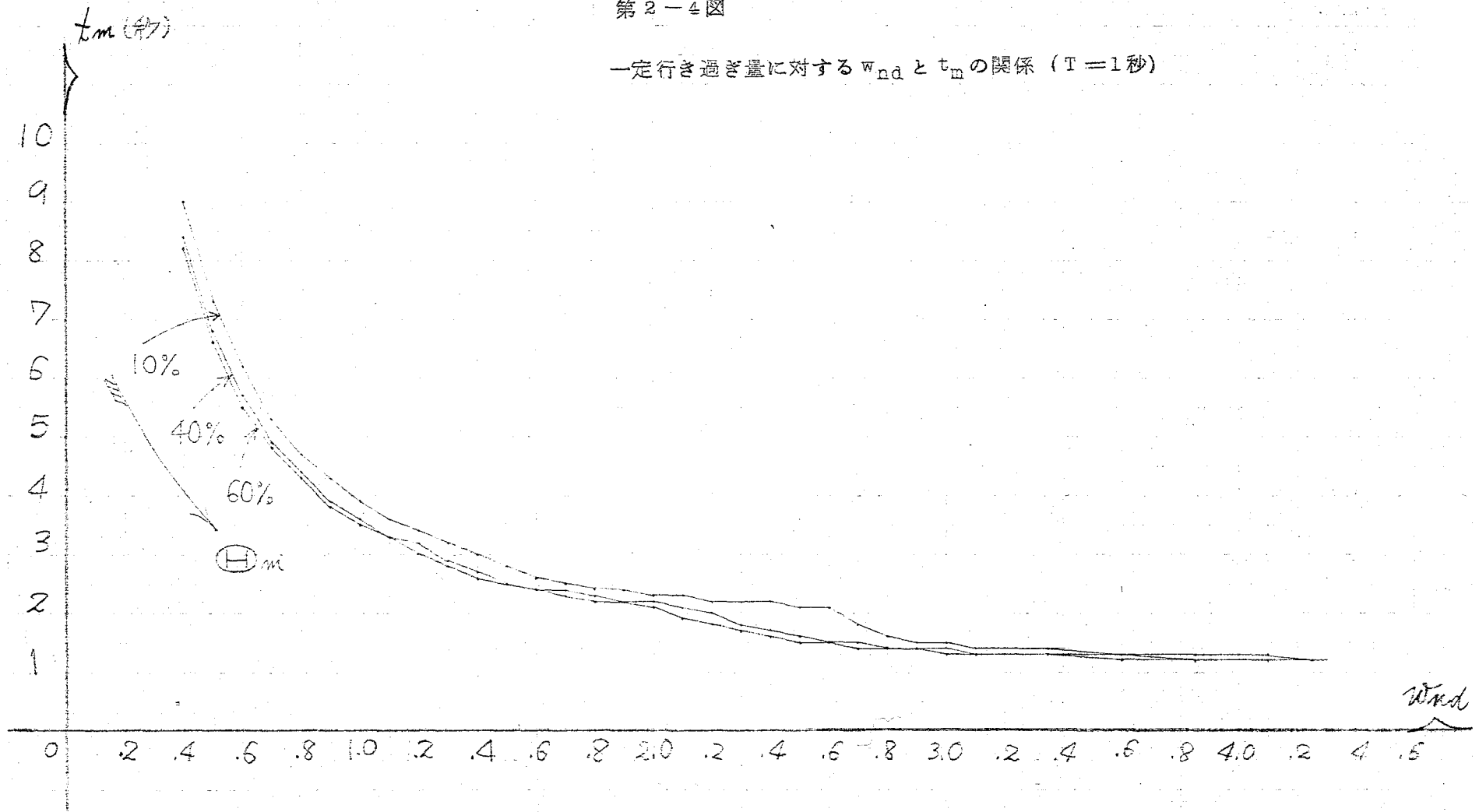
{オ2-2表} 一定行き過ぎ量に対する Wnd と t_m の関係 ($T=1$ 秒)

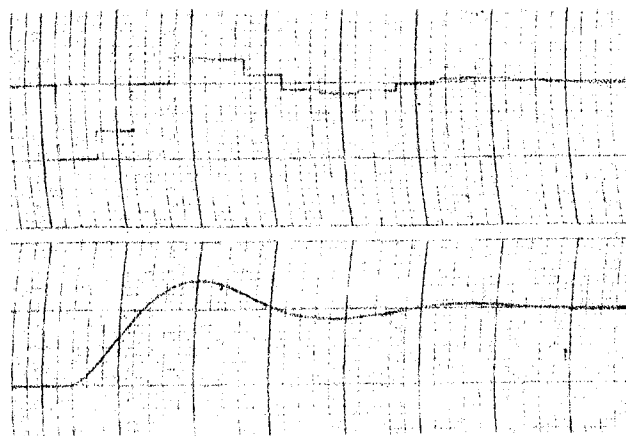
第2-3図

一定行き過ぎ量を与える w_{nd} と η_d の関係 ($T=1$ 秒)

第 2 - 4 図

一定行き過ぎ量に対する w_{nd} と t_m の関係 ($T=1$ 秒)





(a)



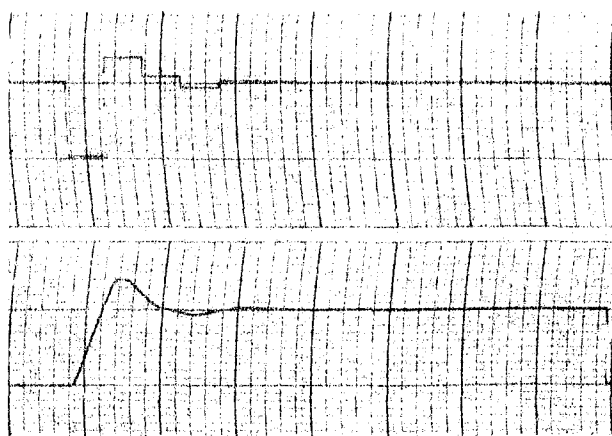
(b)



(c)



(d)



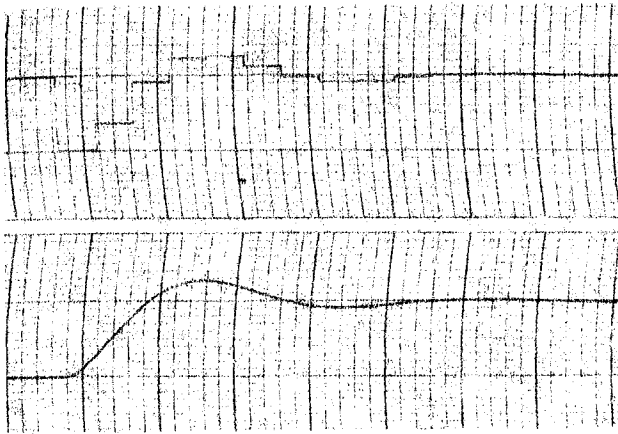
(e)

	w_{nd}	η_d
(a)	1.00	0.534
(b)	1.50	0.651
(c)	2.00	0.743
(d)	2.50	0.822
(e)	3.35	1.114

第2-5図 計算によつて求めたパラメータを持つ2次サンプル恒系の応答。

(サンプル周期 $T=1$ 秒)

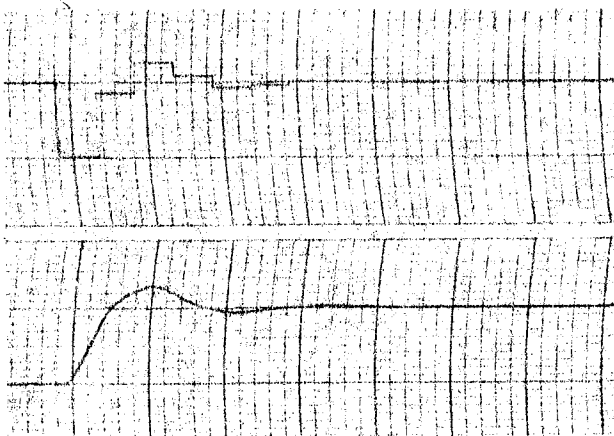
(1) $\theta_m = 40\%$



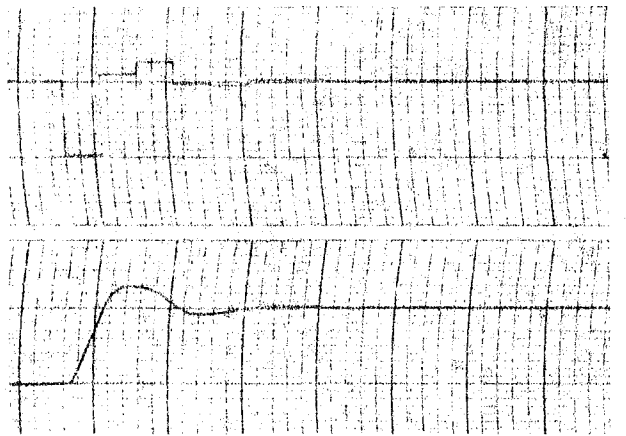
(a)



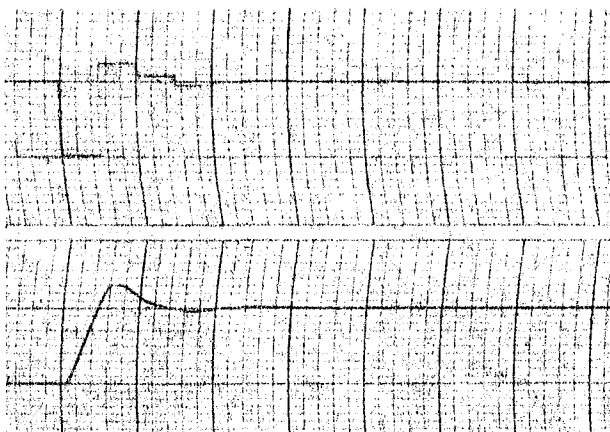
(b)



(c)



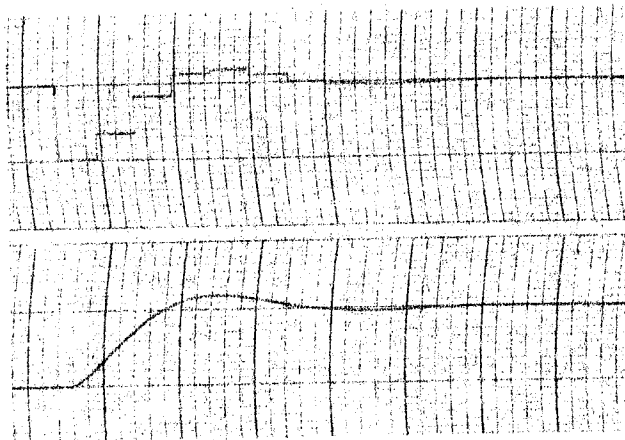
(d)



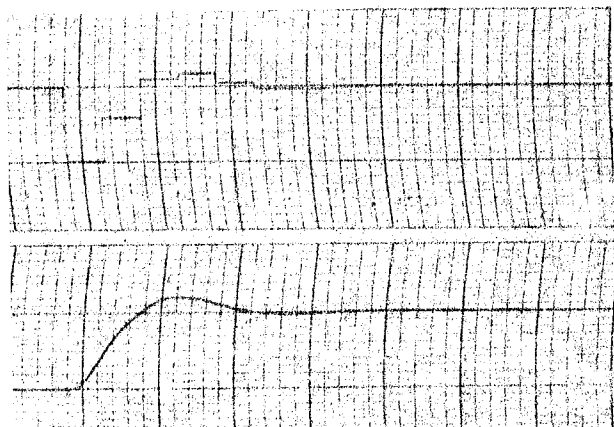
(e)

	w_{nd}	η_d
(a)	1.00	0.619
(b)	1.50	0.742
(c)	2.00	0.862
(d)	2.50	0.924
(e)	3.35	1.227

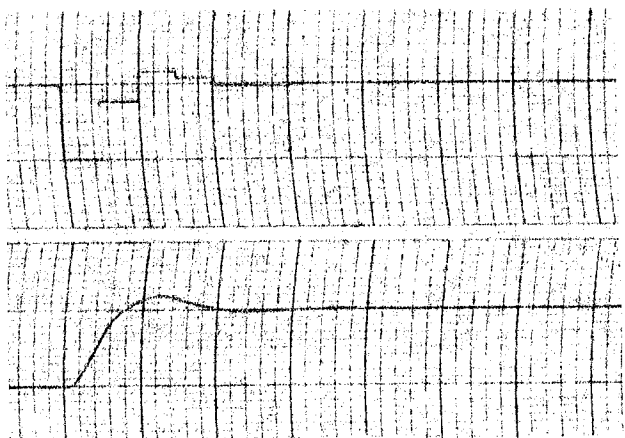
第 2-5 図 (2) $\theta_m = 30\%$



(a)



(b)



(c)



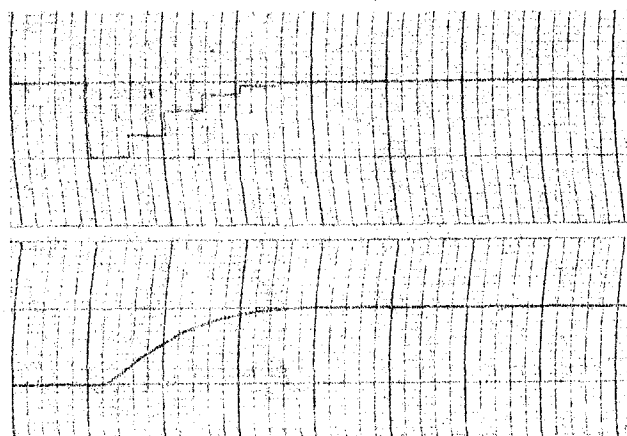
(d)



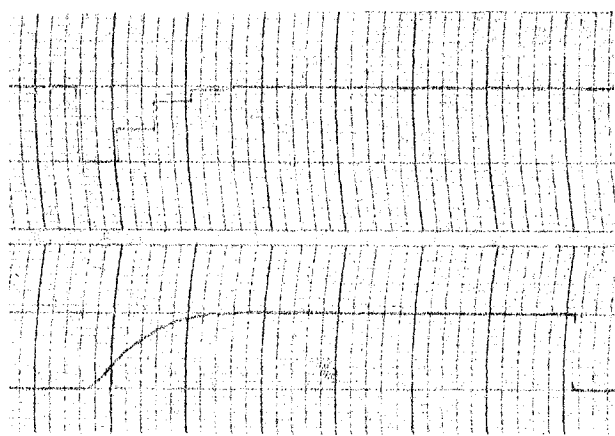
(e)

	w_{nd}	η_d
(a)	1.00	0.726
(b)	1.50	0.856
(c)	2.00	1.006
(d)	2.50	1.087
(e)	3.35	1.349

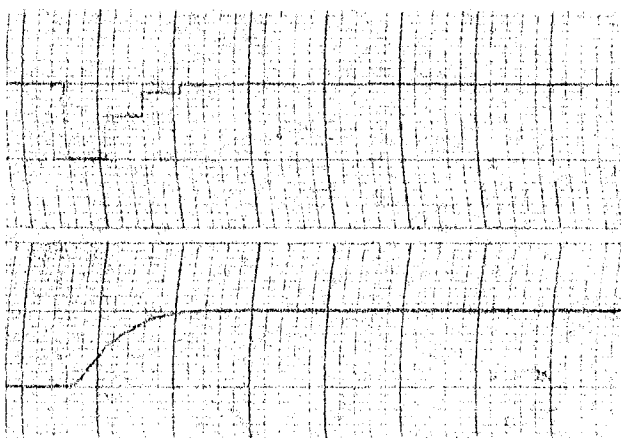
第 2-5 図 (3) $\theta_m = 20\%$



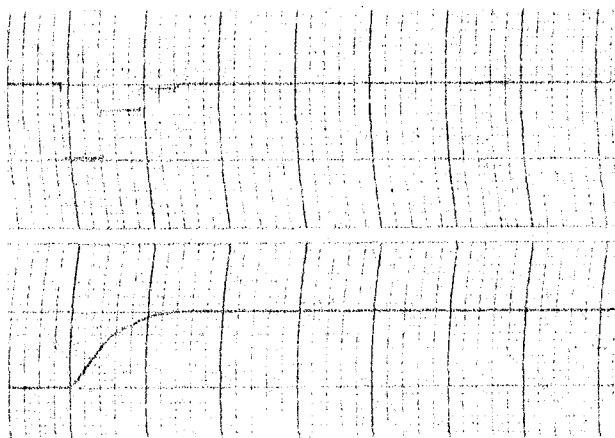
(a)



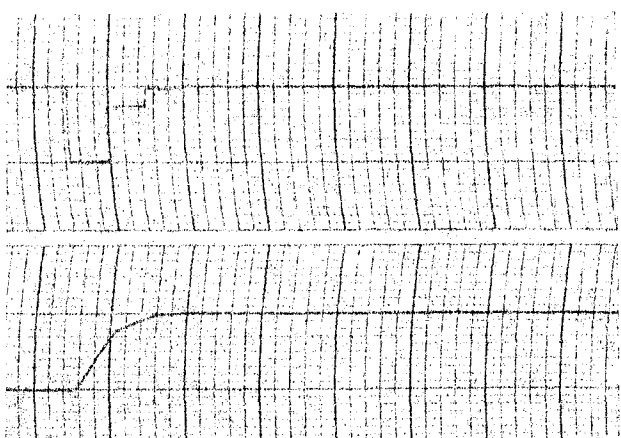
(b)



(c)



(d)



(e)

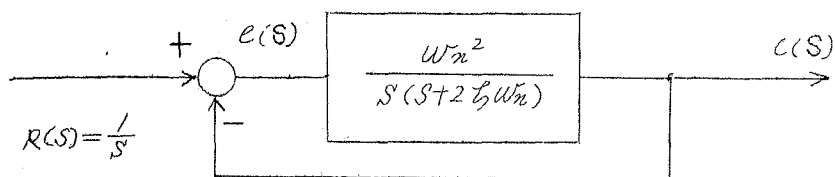
	w_{hd}	η_d
(a)	1.00	1.147
(b)	1.50	1.349
(c)	2.00	1.557
(d)	2.50	1.777
(e)	3.35	2.130

第 2-5 図 (4) $\theta_m = 1\%$

(3) パラメータと応答の速さについて

ここでは二次サンプル値系の現象の速さをオ 2-2 表によって得た t_m に比例すると考えて、二次連続系の場合と比較する。

基準となるべき二次連続系として、オ 2-6 図を考える。



(オ 2-6 図) 基準となる二次連続系

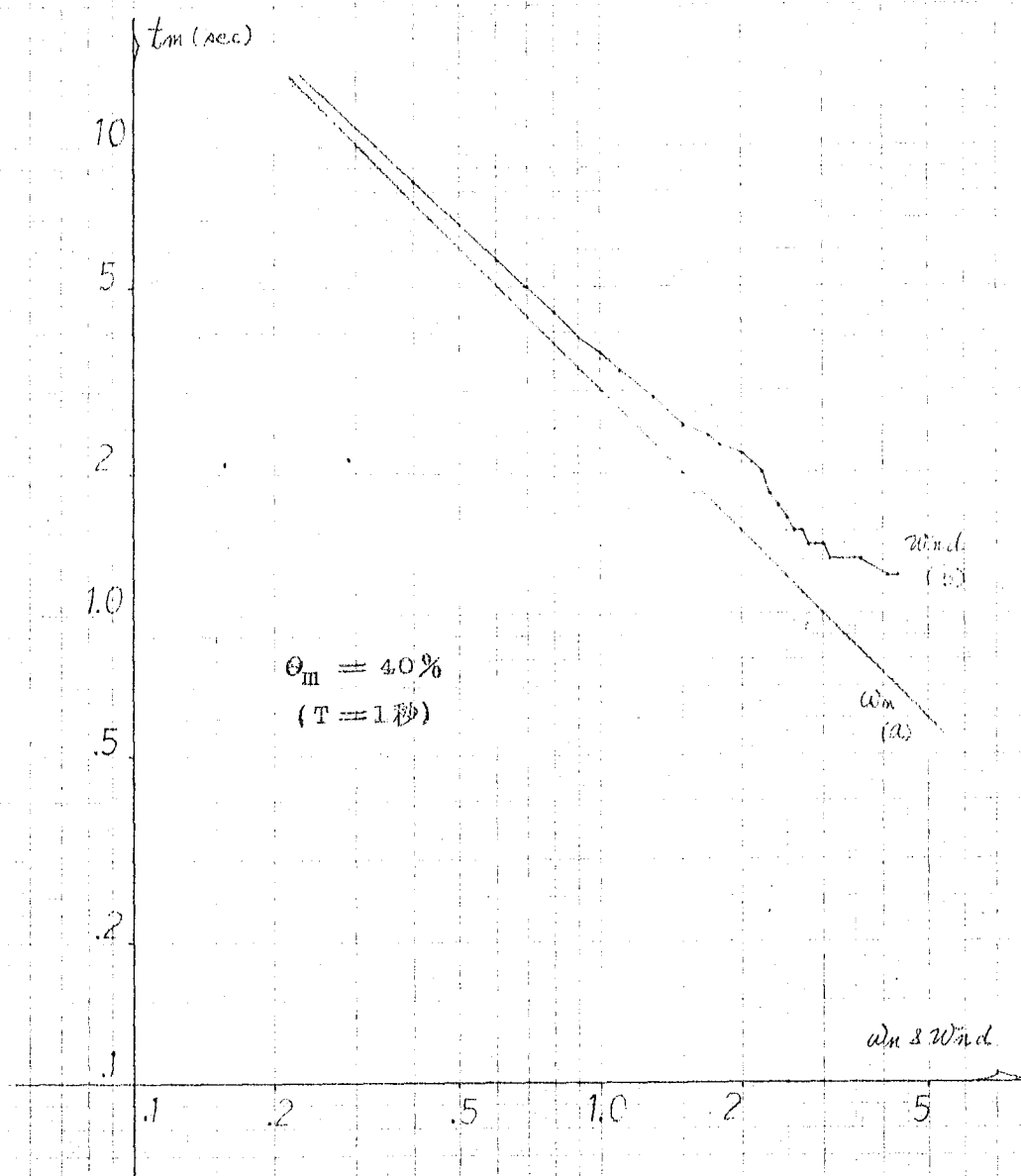
(オ 2-6 図) に示した二次連続系の誤差応答 $e(t)$ は (2-2) となる。

$$e(t) = \frac{e^{-\zeta W_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \left(\sqrt{1-\zeta^2} W_n t - \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad (2-2)$$

上式から、行き過ぎ量を与える時刻 t_{mc} を求めると (2-3) が得られる。

$$t_{mc} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} W_n} \quad (2-3)$$

二次連続系では $\textcircled{H}_m$ を一定とすると ζ が一定となるので (2-3) からわかるように t_{mc} と W_n は反比例の関係にある。 $\textcircled{H}_m = 40\%$ としてこの関係を図示するとオ 2-7 図曲線 (a) のようになる。他方、二次サンプル値系の t_m と W_{nd} はオ 2-4 図のような関係にあり、 W_{nd} をある値以上大きくしても、 t_m はサンプリング周期 T に漸近し、それより小さくはならない。オ 2-7 図曲線 (b) に t_m と W_{nd} をプロットして二次連続系と比較すると二次連続系では W_n を大きくすると応答の速度が大きくなるのに対して、二次サンプル値系ではオ 2-5 図の一連のアナコムによる応答からわかるように、 $\textcircled{H}_m$ を一定として W_{nd} を大きくしても応答の速度は大きくならないことがわかる。したがって、サンプル値系では指定すべき応答の速度に限界があることが示唆される。

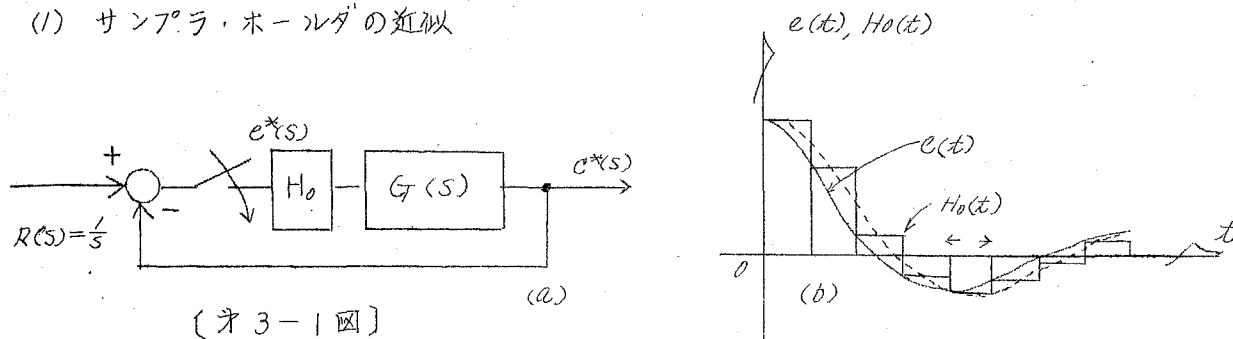


第 2-7 図 $\theta_m = 40\%$ の場合の t_m と w_n, w_{nd} の関係

(3) サンプル値系の近似と代表根指定法の適用について

ここではサンプル値系に代表根指定法を適用するために サンプル値系のサンプラ・ホールダをむだ時間で近似して連続系化する近似法について述べる。

(1) サンプラ・ホールダの近似



{オ 3-1 図}

一般に、オ 3-1 図 (a) のようなサンプル値系があり。この応答が (b) であったとする。この時、サンプラ・ホールダの働きは ホールダの出力の中点を結んだ実線の応答で示されるように、現象周波数がサンプリング周波数に比較して充分低ければ $e^{-\pi T/2}$ で示されるむだ時間と考えることができる。このことは次のようにして証明される。

一般にオ 3-1 図 (a) の系について

$$H_0 G^* S = \frac{1}{2\pi j} \oint H_0 G(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \quad (3-1)$$

この複素積分を P 面の右半面で行なう。

$$1 - e^{-T(s-p)} = 0 \quad (3-2)$$

$$\text{よって } p = s + \frac{2\pi k j}{T} \quad (3-3)$$

$$\begin{aligned} H_0 G^*(s) &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{H_0 G(p)}{d(1 - e^{-T(s-p)})/dp} \bigg|_{p=s+2\pi k j/T} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_0 G(s + j k \omega_s) \end{aligned} \quad (3-4)$$

ここに; $\omega_s = 2\pi/T$

一方、サンプラ・ホールダの伝達関数は (3-5) で与えられる。

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (3-5)$$

ここで上式に (3-6) を代入すると (3-7) が得られる。

$$s = j\omega \quad (3-6)$$

$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T e^{j\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \quad (3-7)$$

したがって、(3-4)と(3-7)から(3-8)を得る。

$$H_0 G^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T e^{-j\pi(\omega + k\omega_s)/2} \frac{\sin\{(\omega + k\omega_s)T/2\}}{(\omega + k\omega_s)T/2} G(j\omega + jk\omega_s) \quad (3-8)$$

ここで、サンプリング周波数が系の自然周波数より充分高いと考えて、(3-9)を仮定すれば(3-8)より(3-10)を得る。

$$|k| \geq 1 \text{ で } G(j\omega + jk\omega_s) \approx 0 \quad (3-9)$$

$$H_0 G^*(j\omega) \approx e^{-j\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} G(j\omega) \quad (3-10)$$

上式において $\omega T/2$ が適当に小さければ、オ 3-1 表からわかるように(3-11)と近似することができる。

$$\omega T \quad \sin(\omega T/2)/\omega T/2 \quad H_0 G^*(j\omega) \approx e^{-j\omega T/2} \cdot G(j\omega) \quad (3-11)$$

0.6 0.9851

0.8 0.9736

1.0 0.9589

1.2 0.9411

1.4 0.9203

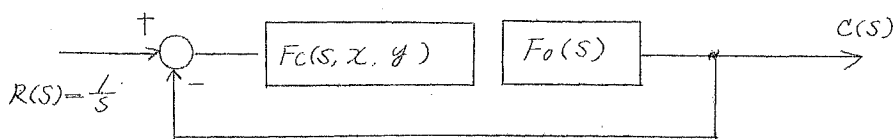
1.6 0.8967

[オ 3-1 表]

(3-11) およびオ 3-1 表からわかるように、系の基本角、(基本周波数 ω とサンプリング周期 T の積)が $\pi/2$ 位までは、サンプラ・ホールドを $T/2$ のむだ時間で近似することができる。

(2) 代表根指定法*

代表根指定法は、任意の自動制御系の代表的振動根が指定した値、すなわち指定根を持つように補償回路の定数を定める方法である。今、過渡特性の改善を行なおうとする連続系がオ 3-2 図で与えられたとする。



[オ 3-2 図]

この系の特定方式は(3-12)になる。

$$e^{jn\pi} \cdot F_c(s, x, y) \cdot F_o(s) = 1 \quad (3-12)$$

上式が(3-13)で示される指定根を持つためには、(3-12)において $n=1$ 、 $s=s_0$ を代入

*「自動制御理論」高井、オーム社

したもの成立すれば良い。

$$S_0 = (-\gamma_0 \pm j)\omega_0 \quad \text{ここに, } \gamma_0; \text{減衰度 } \omega_0; \text{現象周波数} \quad (3-13)$$

$$F_c(S_0, x, y) = 1/e^{j\pi} F_0(S_0) \quad (3-14)$$

上の式において $F_0(S_0)$ は補償前の系の伝達関数 $F_0(S)$ に (3-13) を代入したものである。この既知の複素数であり、これを (3-15) とおく。

$$g_c \angle \phi_c = 1/e^{j\pi} F_0(S_0) \quad (3-15)$$

上式において $g_c \angle \phi_c$ は指定根 S_0 に対するその系の「補償ベクトル」という。(3-14) に (3-15) を代入することにより (3-16) を得る。

$$F_c(S_0, x, y) = g_c \angle \phi_c \quad (3-16)$$

上式より未知数, x, y が決定されるが、このように補償ベクトルから補償回路の伝達関数の自由度を求める式を「補償公式」という。実際に補償回路の定数を求めるためには補償公式の他にこれをグラフに画いた補償計算線図が利用されるが、それらはサンプル値系の特性設計にもそのまま利用されるので、代表的な補償回路について求めた補償公式、補償範囲などをオ3-8表に示す。

以上のようにして、代表根指定法によって系に指定根 S_0 を持たせることができるが、この場合、指定した根が代表根である可能性が大きいといえるが、かならずしも代表根であるとは限らないので、代表根であるかどうかは系の指定根による「留数の逆数ベクトル」を計算し、それが次の限界条件を満足するかどうかで判定する。

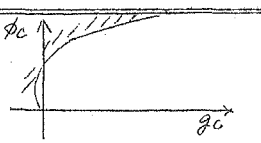
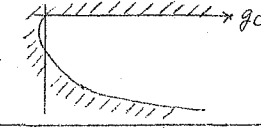
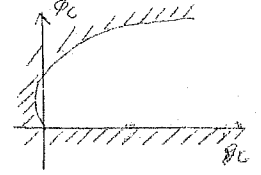
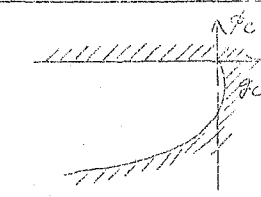
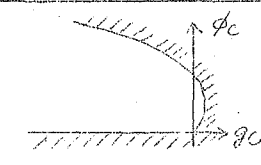
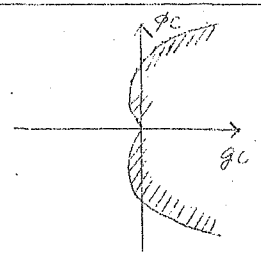
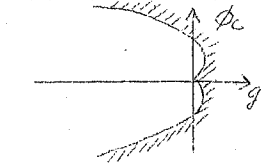
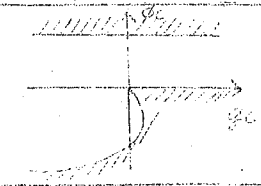
連続系において、一般にある指定根 S_0 に対する補償後の一巡伝達関数が (3-17) であるとする、留数の逆数ベクトル $1/B_0$ は (3-18) で与えられる。

$$F(S) = \frac{K(1+ST_{z1})(1+ST_{z2}) \cdots (1+ST_{zm})}{S^m(1+ST_{p1})(1+ST_{p2}) \cdots (1+ST_{pe})} \quad (3-17)$$

$$\frac{1}{B_0} = n+l-m + \frac{1}{1+S_0T_{z1}} + \frac{1}{1+S_0T_{z2}} + \cdots + \frac{1}{1+S_0T_{zm}} - \left(\frac{1}{1+S_0T_{p1}} + \frac{1}{1+S_0T_{p2}} + \cdots + \frac{1}{1+S_0T_{pe}} \right) \quad (3-18)$$

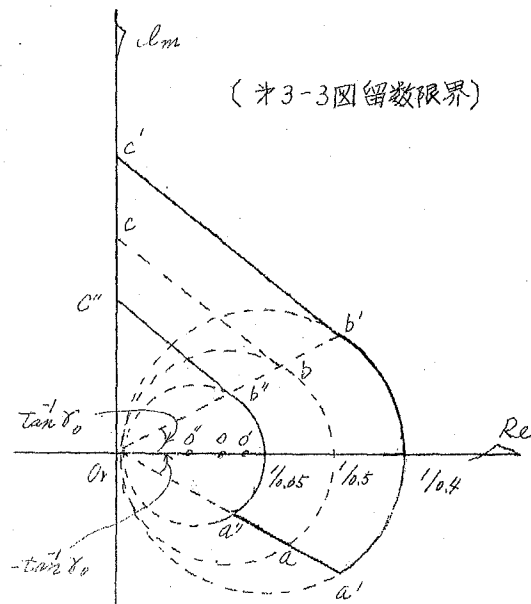
ここで; S_0 = 指定根

(表 3-1) 「代表的な補償回路の補償公式と補償範囲」

回路番号名称	補償伝達関数	補償公式	補償範囲
S2-1 (PD調節計)	$k(1 + \frac{s}{\omega_s})$	$\omega_s = \omega_0(\delta_0 + \cos \phi_c)$ $k = g_0(\cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c)$	
S2-2 (PI調節計)	$k(1 + \frac{\omega_s}{s})$	$\omega_s = \omega_0(1 + \delta_0^2) / (\delta_0 - \cos \phi_c)$ $k = g_0(\cos \phi_c - \sin \phi_c)$	
S2-3 (進み回路)	$\frac{1 + \frac{s}{\omega_s}}{1 + \frac{s}{n\omega_s}}$	$\omega_s = \frac{\omega_0(1 + \delta_0^2) \sin \phi_c}{g_0 - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c}$ $n = \frac{g_0 - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c}{\cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c - 1/g_0}$	
S2-4 (遅れ回路)	$\frac{1 + \frac{s}{\omega_s}}{1 + \frac{n s}{\omega_s}}$	$\omega_s = \frac{\omega_0(1 + \delta_0^2) \sin \phi_c}{g_0 - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c}$ $n = \frac{\cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c - 1/g_0}{g_0 - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c}$	
S2-5 (進み回路)	$\frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{s}{\omega_s}}{1 + \frac{s}{n\omega_s}}$	$\omega_s = \frac{\omega_0(\cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c - g_0)}{1/g_0 - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c}$ $n = \frac{1/g_0 - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c}{\cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c - g_0}$	
S2-6 (PID調節計)	$1 + \frac{s}{\omega_{s1}} + \frac{\omega_{s1}}{s}$	$\omega_{sp} = \frac{2\delta_0 \omega_0}{1 - g_0 \cos \phi_c + \delta_0 g_0 \sin \phi_c}$ $\omega_{s1} = \frac{(1 + \delta_0^2) \omega_0}{2\delta_0} (1 - g_0 \cos \phi_c - \delta_0 g_0 \sin \phi_c)$	
S3-1 (遅れ進み回路)	$\frac{(1 + \frac{s}{\omega_{s1}})(1 + \frac{s}{\omega_{s2}})}{(1 + \frac{s}{n_1 \omega_{s1}})(1 + \frac{s}{n_2 \omega_{s2}})}$	図式計算のみ パラメータ間の条件 $\begin{cases} n > 1 \\ n_1 \omega_{s1} > \omega_{s2} \end{cases}$	
S4-1 (遅れ進み回路)	$\frac{(1 + \frac{s}{\omega_{s1}})(1 + \frac{s}{\omega_{s2}})}{(1 + \frac{s}{n_1 \omega_{s1}})(1 + \frac{s}{n_2 \omega_{s2}})}$	図式計算のみ $\begin{cases} 0 < n_1 < 1 \\ n_1 > n_2, n_2 > 0 \end{cases}$ パラメータ間の条件 $\begin{cases} n_2 \omega_{s2} > \omega_{s1} \end{cases}$	同上
S4-2 (遅れ進み回路)	$\frac{(1 + \frac{s}{\omega_{s1}})(1 + \frac{s}{\omega_{s2}})}{(1 + \frac{s}{n_1 \omega_{s1}})(1 + \frac{s}{n_2 \omega_{s2}})}$	図式計算のみ $0 < n_1 < 1$ パラメータ間の条件 $n_1, n_2 > 1$ の条件 $\omega_{s2} > n_1 \omega_{s1}$	

ここで(3-18)がほぼ経験的に決められたオ3-3図の丁形の領域に入っているとき、指定根は代表根であるということができ、この限界を各 γ_0 に対する留数限界という。図中、 c' および c'' は円 O' および O'' が $\angle \tan^{-1} \gamma_0$ と交わる点の接線と虚軸の交点である。

留数限界の大体の性質は次のようなものである。すなわち、一般に、(3-17)の伝達関数を持つ系の誤差応答はこの系の代表的振動根を(3-19)とすると(3-20)で与えられる。



$$\left. \begin{aligned} s_0' &= -\alpha_0 + j\omega_0 \\ s_0^* &= -\alpha_0 - j\omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-19)$$

$$\begin{aligned} e(t) &= B_0 e^{s_0 t} + B_0^* e^{s_0^* t} + B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t} + \dots \\ &= 2B_0 e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega_0 t - \psi_0) + B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t} + \dots \\ &= e_d(t) + e_n(t) \end{aligned} \quad (3-20)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } B_0 &= |B_0| \quad \psi_0 = \angle B_0 \\ e_d(t) &= 2B_0 e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega_0 t - \psi_0) \\ e(t) &= B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

(3-20)が s_0, s_0^* だけによる応答成分 $e_d(t)$ だけによって近似できるとすると;

$$e(t) \simeq e_d(t) = 2B_0 e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega_0 t - \psi_0) \quad (3-22)$$

ここで、一般に誤差応答 $e(t)$ の初期値は1であるので、これから(3-23)を得る。

$$e(t)_{t=0} = 1 \simeq 2B_0 \cos \psi_0$$

$$\text{すなわち, } \frac{1}{B_0} \cos \psi_0 \simeq 2 \quad (3-23)$$

上式はオ3-3図の直径2の破線で画いた円 O になる。

また、誤差応答の $t=0$ における微係数が零であることから(3-24)を得る。

$$\frac{d}{dt} e_d(t) = \frac{d}{dt} (2B_0 e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega_0 t - \psi_0)) \simeq 0 \quad (3-24)$$

上の式から次の(3-25), (3-26)を得るが、これは図中の $O_p b'$ になる。

$$\tan(\omega_0 t - \psi_0) \Big|_{t=0+\gamma_0} \simeq 0 \quad (3-25)$$

$$\psi_0 \simeq \tan^{-1} \gamma_0 \quad (3-26)$$

他方、代表根それ自身を持つ次連続系の留数の逆数ベクトルは代表根を(3-27)とすると、(3-18)なら、(3-28)となる。

$$S_0 = (-\gamma_0 + j)\omega_0 \quad (3-27)$$

$$\frac{1}{B_0} = 2 + \frac{1}{1 + (-\gamma_0 + j)\omega_0 / 2\gamma_0\omega_0} = 2 - \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 + j} = 2 \frac{1 + j\gamma_0}{1 + \gamma_0^2} \quad (3-28)$$

上式からわかるように、(3-23)、(3-26)の交点、すなわち図中のb点が代表根それ自身を持つ2次連続系の留数の逆数ベクトルの値となる。

また、(3-21)の2乗誤差面積について考えると、これは(3-29)で与えられる。

$$S_{\text{avg}} = \int_0^\infty \left\{ 2B_0 e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega_0 t - \psi_0) \right\}^2 dt \quad (3-29)$$

上式において、(3-23)を考慮して、 S_{avg} が最小になる条件(3-30)を求めると、これからその条件として(3-31)が求まり、これは図中の $\overline{Ona'}$ となる。

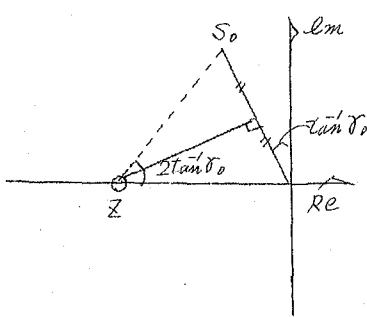
$$dS_{\text{avg}}/d\psi_0 = 0 \quad (3-30)$$

$$\psi_0 = -\tan^{-1} \gamma_0 \quad (3-31)$$

ここで、代表根それ自身を持つ2次連続系に、零点を一つ加えると、 B_0 は(3-32)に示すようになり、オ3-4図(a)およびオ3-5図からわかるように、この零点が(3-33)を満足する場合の留数の逆数ベクトルが(3-31)を満足する。

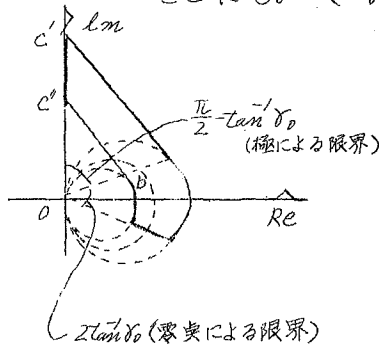
$$B_0 = \frac{-S_0^*}{S_0 - S_0^*} (S_0 - Z) \quad (3-32)$$

ここに $S_0 = (-\gamma_0 + j)\omega_0$

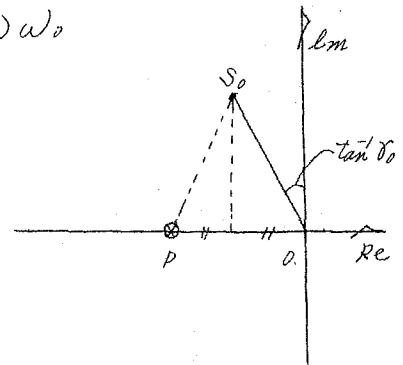


〔オ3-4図〕(a)

代表根と一極の零点



〔オ3-5図〕留数限界



〔オ3-4図〕(b)代表根と一極の極

$$Z = -\frac{1 + \gamma_0^2}{2\gamma_0} \omega_0 \quad (3-33)$$

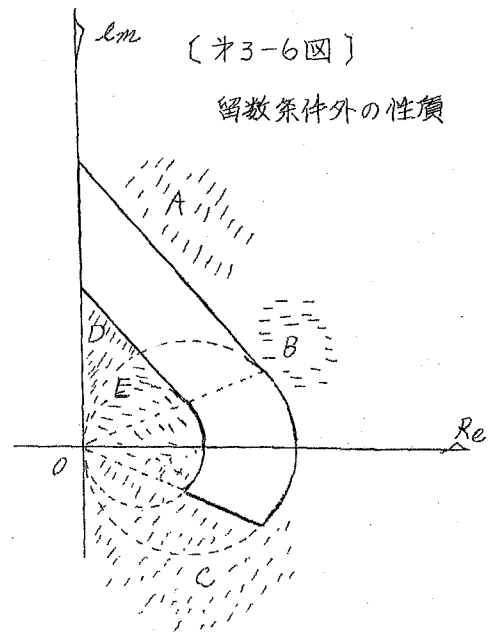
また、オ3-5図の $\overline{c'c''}$ は極による限界で、代表根それ自身を持つ2次連続系に(3-34)に示すように極を一つつけ加えた場合にはオ3-4図(b)からわかるように極が(3-35)を満足する場合のベクトル限界を示している。

$$B = -S_0^* / (S_0 - S_0^*) (S_0 - P) \quad (3-34)$$

$$P = -2\gamma_0\omega_0 \quad (3-35)$$

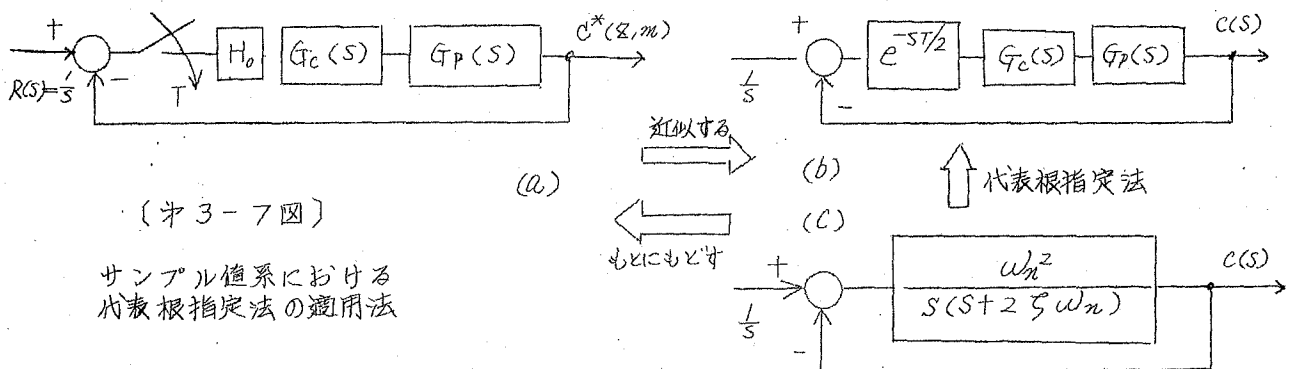
以上が留数条件に関する大体の性質であるが、これはあくまでも経験的に定められたものであり、系の応答は、この留数条件とのちに述べる系の速度誤差定数による評価を満足した場合に一応無難な応答を示す。したがって、留数条件以外にプロットされたベクトルでも、 s 次系に対する誤差の許容度を大きくしたような場合などには、比較的良好な応答が得られることもある。そのような場合を考慮するために留数条件外の平面の性質を述べると大体次のようになる。

まず、オ 3-6 図のハッチした部分の A 領域では行き過ぎ量はかなり小さく、立ち上り時間はかなり大きくなる。これが B 領域に近づくにしたがって、行き過ぎ量もかなり大きくなり、立ち上り時間は小さくなっていく。C 領域では二乗誤差面積は比較的小さいが、負の虚軸に近づくにしたがって、急激に行き過ぎ量が増加する。D 領域はほぼ A 領域と同じような性質であるが、行き過ぎ量は A 領域のそれより大きい。D 領域から E 領域に近づくにしたがって、行き過ぎ量は大きくなり、立ち上り時間は小さくなる。E 領域はほぼ B 領域



と同じ性質であるが、E 領域でのベクトルの位置の変化は B 領域でのそれより、大きな変化を応答に与える。また、C、D、E の各領域でベクトルが原点に近づくにしたがって、系の応答は指定根の応答を満足しなくなる。以上が留数条件外の留数条件平面の性質であるが、系の留数の逆数ベクトルが D、E の領域に入った場合には、特に系に対する仕様の許容度を大きくするとほぼ満足すべき応答と考えられる場合が多いといえることができる。

(3) サンプル値系における代表根指定法の適用



一般にオ 3-7 図 (a) のようなサンプル値系がある場合、(3-11) により (b) 図のように

近似することができる。(b)図はむだ時間を持つ連続系であるから、これに(c)図の2次連続系の特性根を代表根として、代表根指定法によって持たせることができる。これが代表根指定法のサンプル値系における適用の概念であるが、具体的には次のようにする。まず、系の種類によって系にあたえるべき行き過ぎ量 $(H)_m$ 、したがって、(3-36) によって与えられる γ_0 、を指定する。

$$\gamma_0 = -\ln (H)_m / \pi \quad (3-36)$$

次に系の時定数、サンプリング周期などから適当に系に与えるべき現象周波数 ω_0 を決定すれば、(b)図の系、すなわち、サンプラ・ホールドを $T/2$ のむだ時間で近似した連続系、に持たせるべき指定根 s_0 は(3-37)で与えられる。

$$s_0 = (-\gamma_0 \pm j) \omega_0 \quad (3-37)$$

(b)図の特性方程式は(3-38)で与えられる。

$$1 + e^{-ST/2} G_c(s) \cdot G_p(s) = 0 \quad (3-38)$$

上式に(3-37)を代入することによって、補償ベクトル g_c 、 $\angle \phi_c$ は次式のようになる。

$$g_c \angle \phi_c = G_c(s) = -\frac{e^{s_0 T/2}}{G_p(s_0)} \quad (3-39)$$

ここで上式は連続系の補償ベクトルとして与えられているので、実際に $G_c(s)$ に含まれる定数は連続系の補償計算線図をそのまま利用して求めることができる。

また、この場合の留数の逆数ベクトルは一級伝達関数 $F(s)$ を、

$$F(s) = e^{-ST/2} \frac{K(1+ST_{z1})(1+ST_{z2}) \cdots (1+ST_{zm})}{s^n (1+ST_{p1})(1+ST_{p2}) \cdots (1+ST_{pe})} \quad (3-40)$$

とすると、これは結局、連続系の伝達関数に $T/2$ のむだ時間が加わったものであるので、留数の逆数ベクトル $1/B_0$ は連続系の場合と同様にして求めることができ、次のようになる。

$$B_0 = \left| \frac{1}{d\{(1+F(s))s\}/ds} \right|_{s=s_0} = \frac{-1}{s_0} \frac{1}{|d \ln F(s)/ds|_{s=s_0}} \quad (3-41)$$

したがって、

$$\frac{1}{B_0} = -s_0 \frac{d}{ds} \left| \ln F(s) \right|_{s=s_0} \quad (3-42)$$

これより $F(s)$ が(3-40)で与えられる場合には留数の逆数ベクトルとして(3-43)が得られる。

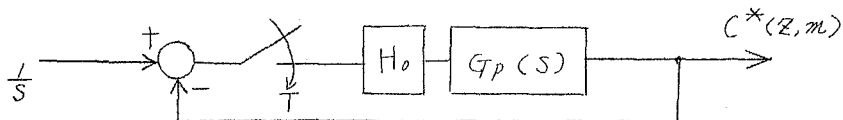
$$\frac{1}{B_0} = \frac{s_0 T}{2} + n + l - m + \sum_{i=1}^m \frac{1}{1+s_0 T_{zi}} - \sum_{j=1}^e \frac{1}{1+s_0 T_{pj}} \quad (3-43)$$

上式からわかるように、むだ時間を含む系の留数の逆数ベクトルはそれのない場合のもの

にむだ時間と指定根の積を加えたものとなる。

サンプ・ラ・ホールダをむだ時間で近似したサンプル値系の場合、上に見るように留数は連続系のそれとはほぼ同様であるので、留数限界も連続系のものをそのまま利用する、いくつかの問題を解いた経験から云えば、そのようにして実用上なんらさしつかえないと云える。

(4) 代表根以外の根、零点が応答におよぼす影響



(オ 3-8 図)

ここでは、一般に高次サンプル値系の応答をz面における代表根で近似した時の他の根、および零点が応答におよぼす影響^{*}について述べる。

オ 3-8 図において $G_p(s)$ を一般に高次系とし、応答をz面での代表根で近似することができるとして、簡単のために、次の3条件；すなわち ① 系は安定で、振動根は代表根 $z_0 = \alpha_0 \pm j\beta_0$ だけとする ② 系のzに属する分子の次数は分母のそれより小さい。③ 分母は重根を持たない；を仮定すると (3-44)，その時間関数 (3-45) を得る。

$$\frac{C^*(z, m)}{R^*(z)} = \frac{H_0 G_p^*(z, m)}{1 + H_0 G_p^*(z)} = \frac{KA(z, m)}{\beta(z)} \quad (3-44)$$

$$C(n, m, T) = \frac{1}{2\pi j} \int_P \frac{KA(z, m)}{(z-1)\beta(z)} z^n dz$$

ここに、P は代表根についてだけの積分

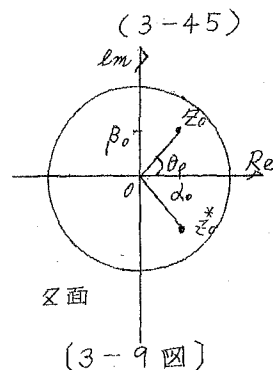
$$= K \frac{A(1)}{B(1)} + 2 \left| \frac{KA(z_0, m)}{(z_0-1)B'(z_0)} \right| \cdot |z_0|^n \cos\{n\theta_0 + \text{ang} A(z_0, m) - \text{ang}(z_0-1) - \text{ang} B'(z_0)\} \quad (3-45)$$

ここに、 $z_0 = \alpha_0 \pm j\beta_0$ $\theta_0 = \tan^{-1} \beta_0 / \alpha_0$ $B'(z_0) = dB(z)/dz |_{z=z_0}$

(3-45)において、一般にサンプリング時刻と応答の最大値を与える時刻 n_p は一致しないが、ここでは簡単のために、それらが一致すると考える。まず n_p を求めると、z変換の最大値定理から (3-46) を得る。

$$\left\{ KA(z_0) / B'(z_0) \right\} \cdot |z_0|^n \cos\{n\theta_0 + \text{ang} A(z_0) - \text{ang} B'(z_0)\} = 0 \quad (3-46)$$

(3-46) から最大値を与える時刻 n_p は (3-47) になる。



* 「Sampled-Data Control Systems」 Book by E.I. Jury chap. 3.4.

$$n_p = \frac{1}{\beta_0} \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{ang } A(z_0) + \text{ang } B'(z_0) \right\} \quad (3-47)$$

(3-47) を (3-45) に代入して、オ 3-9 図から得られる (3-48) を考慮すると最大値 M_p として (3-49) を得る。

$$\left. \begin{aligned} \cos \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{ang}(z_0 - 1) \right\} &= \frac{\beta_0}{\{(d_0 - 1)^2 + \beta_0^2\}^{1/2}} \\ (z_0 - 1) &= \beta_0 / \{(d_0 - 1)^2 + \beta_0^2\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (3-48)$$

$$M_p = \frac{2\beta_0}{(d_0 - 1)^2 + \beta_0^2} \left| \frac{KA(z_0)}{B'(z_0)} \right| \cdot |z_0|^{n_p} \quad (3-49)$$

上式において、一般に $A(z)$, $B'(z)$ は (3-50) で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A(z_0) &= \prod_i (z_0 - z_i) \\ B'(z_0) &= (z_0 - z_0^*) \prod_j (z_0 - p_j) \end{aligned} \right\} \quad (3-50)$$

したがって (3-47) における $\text{ang } A(z_0)$ は $z = z_i$ なる零点と z_0 とのなす角であり、 $\text{ang } B'(z_0)$ は z_0 を除いた他のすべての極と z_0 のなす角の和であるので、これから零点は n_p を減少させ、極は n_p を増加させる。一方、系は安定と仮定しているので $|z_0| < 1$ となる。したがって (3-49) から n_p が減少すると M_p は増加し、 n_p が増加すると M_p は減少することがわかる。

以上より、サンプル値系をその代表的振動根で近似した時の、他の根、および零点の影響としては、零点は n_p を減少させ、行き過ぎ量を増加し、逆に実軸上の極は n_p を増加し、行き過ぎ量を減少させる、と云うことができ、又、それらの量的な関係としては (3-47) (3-49) について考慮すればよいことがわかる。

一方、連続系において、代表根以外の根、あるいは零点が応答におよぼす影響についての解析^{*}によれば、一般に、零点は行き過ぎ量を増加させ、立ち上り時間を減少し、実軸上の根は、その逆に、行き過ぎ量を減少させ、立ち上り時間を増加させるということができ、これはサンプル値系の場合と、まったく同様な性質であり、一般に s 領域から z 領域への対応が一对一であることを考え合すれば、ここで述べている方法のように、サンパラモデル^{*}をむだ時間で近似して、サンプル値系を連続系化したような場合の零点、あるいは根と立ち上り時間、行き過ぎ量などの関係は連続系化した系について考察しても良い近似が得られると考えられる。

一方、この零点あるいは実軸上の根が応答の行き過ぎ量あるいは、立ち上り時間におよ

ばす影響は次に述べる速度誤差定数 K_v によっても判定でき、むだ時間で近似したサンプル値系の場合には K_v は比較的簡単に算出できるので、それを利用する方がより実用的と考えられる。

一般に連続系における閉ループ伝達関数を(3-51)にすると；

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\pi_i(s-z_i)}{(s-s_0)(s-s_0^*)\pi_j(s-s_j)} \cdot \frac{s_0 \cdot s_0^* \pi_j(-s_j)}{\pi_i(-z_i)} \quad (3-51)$$

速度誤差定数 K_v は次式で与えられる

$$\frac{1}{K_v} = \frac{1}{|s_0|} + \frac{1}{|s_0^*|} + \sum_j \frac{1}{|s_j|} - \sum_i \frac{1}{|z_i|} \quad (3-52)$$

ここで、2次連続系の速度誤差定数を K_{v2} とすると、 K_{v2} は次式となる、

$$\frac{1}{K_{v2}} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_0^*} = \frac{2\gamma_0}{\omega_0(1+\gamma_0^2)} \quad (3-53)$$

(3-52)と(3-53)との比較によって、零点の影響が大きいと、すなわち、応答の行き過ぎ量が大きく、立ち上り時間が短くなるような場合には；

$$K_v > K_{v2} \quad (3-54)$$

となり、根の影響が大きい場合には逆に；

$$K_v < K_{v2} \quad (3-55)$$

となることがわかる。これは逆に K_v が指定根 s_0 だけを持つ2次系の速度誤差定数 K_{v2} より大きい場合には行き過ぎ量が2次系のそれより大きく、かつ、立ち上り時間は2次系のそれより小さくなる傾向があり、 K_v が K_{v2} より小さい場合には、行き過ぎ量、立ち上り時間がそれぞれ逆の傾向にあると考えることができる。

(3-51)は系の閉ループの伝達関数から K_v を算出しているが、この場合には系の特性方程式を解く必要があり、特にサンプラ・ホールドをむだ時間近似して連続系化した場合には、特性方程式が超越方程式となるので、一般には次に述べるように、系の閉ループの伝達関数から速度誤差定数を求める。一般に系の応答を $C(s)$ 、目標値を $R(s)$ とすると展開定理から次式を得る。

$$\frac{1}{s^2} \frac{C(s)}{R(s)} = \left[\frac{1}{s^2} \frac{C(s)}{R(s)} \right]_{s=0} + \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left[\frac{C(s)}{R(s)} \right]_{s=0} + \frac{1}{s+p_i} \left[\frac{s+p_i}{s^2} \frac{C(s)}{R(s)} \right]_{s=-p_i} + \dots \quad (3-56)$$

(3-56)において、右辺第3項以下は $s \rightarrow \infty$ で0になるので、速度誤差定数 K_v は；

$$\frac{1}{K_v} = \left[\left(\frac{1}{s^2} \frac{C(s)}{R(s)} - \left[\frac{1}{s^2} \frac{C(s)}{R(s)} \right]_{s=0} \right) \times s \right]_{s \rightarrow 0} = \left[\frac{d}{ds} \frac{C(s)}{R(s)} \right]_{s=0} \quad (3-57)$$

(3-57)において、一巡伝達関数 $F(s)$ を(3-58)とすると、 $1/K_v$ として(3-59)が得られる。

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{F(s)}{1 + F(s)} \quad (3-58)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_v} &= \left. \frac{d}{ds} \frac{C(s)}{R(s)} \right|_{s=0} = \frac{C(0)}{R(0)} \left. \frac{d \ln C(s)/R(s)}{ds} \right|_{s=0} \\ &= \frac{F(0)}{1 + F(0)} \left. \frac{d}{ds} \{ \ln F(s) - \ln (1 + F(s)) \} \right|_{s=0} \\ &= \frac{F(0)}{1 + F(0)} \left. \left(\frac{d}{ds} \ln F(s) - \frac{1}{1 + F(s)} \frac{dF(s)}{ds} \right) \right|_{s=0} \\ &= \frac{F(0)}{1 + F(0)} \left. \left(\frac{d}{ds} \ln F(s) - \frac{F(s)}{1 + F(s)} \frac{d \ln F(s)}{ds} \right) \right|_{s=0} \\ &= \frac{F(0)}{1 + F(0)} \left. \frac{1}{1 + F(s)} \frac{d \ln F(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad (3-59) \end{aligned}$$

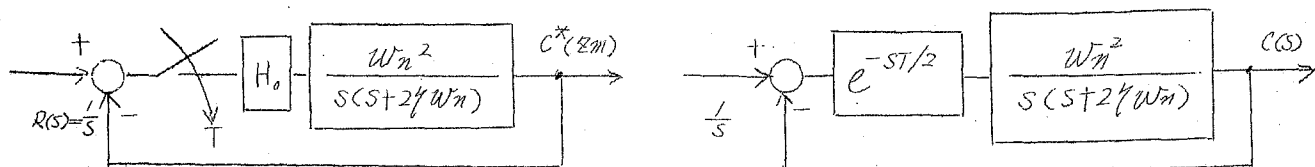
(3-59)によって速度誤差定数 K_v の逆数が求まるが、これは一巡伝達関数から算出できるので、むだ時間で近似したサンプル値系の場合にも利用できる。

以上によって得られた高次系の速度誤差定数 K_{v2} と(3-53)によって得られる2次系の速度誤差定数 K_v との比、 K_{v2}/K_v と応答との量的な関係は、経験的に、これが(3-60)を満足する範囲までは、応答はかなり良く2次連続系のそれに近似すると考えられる。

$$0.5 < K_{v2}/K_v < 2.5 \quad (3-60)$$

(4) むだ時間近似による2次サンプル値系について

ここでは、オ4-1図(a)に示される2次サンプル値系を(b)図に示すような、サンプル・ホールドを $T/2$ のむだ時間で近似した系について各パラメータの値を求め、2次連続系の応答(2)に述べた計算機による各パラメータの値などと比較して、むだ時間近似法の近似の度合について述べる。



(オ4-1図) (a) 2次サンプル値系

(b) 近似した2次サンプル値系

(1) 近似した2次サンプル値系のパラメータ

(オ4-1図) (b)の特許方程式は(4-1)となる。

$$1 + \frac{K e^{-sT/2}}{s(s+a)} = 0 \quad (4-1)$$

$$\text{ここに;} K = \omega_n^2, \quad a = 2\zeta\omega_n$$

次に指定根 S_0 を (4-2) として, (4-1) の a, K を求めるわけであるが, ここで系を (4-3) に示すように $G_1(s), G_2(s)$ にわけると

$$S_0 = (-\delta_0 \pm j)\omega_0 \quad (4-2)$$

$$\left. \begin{aligned} G_1(s) &= e^{-sT/2} / s \\ G_2(s) &= K / (s+a) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

$G_2(s)$ を $G_1(s)$ に対する補償回路のように考えると (4-4) を得る.

$$\begin{aligned} G_2(S_0) &= -\frac{1}{G_1(S_0)} = -e^{S_0 T/2} \cdot S_0 \\ &= g_0 (\cos \phi_c + j \sin \phi_c) = K / (S_0 + a) \end{aligned} \quad (4-4)$$

(4-2), (4-4) より $T/2$ のむだ時間で近似した系のパラメータは (4-5) で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{-\omega_0 \cdot g_0}{\sin \phi_c} \\ a &= \omega_0 (\delta_0 - \cot \phi_c) \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに;} \quad g_0 &= -\omega_0 (1 + \delta_0^2)^{1/2} \cdot e^{-\delta_0 \omega_0 T/2} \\ \phi_c &= \frac{\omega_0 T}{2} + \pi - \tan^{-1} \frac{1}{\delta_0} \end{aligned} \right\} \quad (4-6)$$

(2) 2次サンプル値系のパラメータの比較

行き過ぎ量 $\overline{Hm} = 40\%$, すなわち $\gamma_0 = 0.292$ に対するむだ時間以外の2次サンプル値系のパラメータは;

$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= \omega_0 g_c / \sin \phi_c \\ 2\zeta\omega_n &= \omega_0 (0.292 - \cot \phi_c) \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに;} \quad \phi_c &= \omega_0 T/2 + 1.858 \\ g_c &= -1.043 \omega_0 e^{-\delta_0 \omega_0 T/2} \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

サンプリング周期 $T = 1$ 秒として, 種々な ω_0 に対する ζ, ω_n の値を求めると, 表4-1表のようになる.

オ4-1表の結果とデジタル計算機による結果、
すなわち、オ2-3図の $\oplus m = 40\%$ の結果を比較
すると、オ4-2図のようになる。

オ4-2図からわかるように、 γ のサンプル値系
のサンブラとホルダを $T/2$ のむだ時間で近似した系の
パラメータ W_n 、 γ の関係はほぼ直線になる。この
関係は、近似的に次のように得られる。

(4-5), (4-6)より(4-9)を得る。

$$\left. \begin{aligned} (W_n T)^2 &= (\omega_0 T)^2 (1 + \gamma_0^2)^{1/2} e^{-\gamma_0 \omega_0 T/2} / \sin \phi_c \\ 2\gamma W_n T &= \omega_0 T (\gamma_0 - \cot \phi_c) \\ \phi_c &= \omega_0 T/2 + \pi - \tan^{-1}(1/\gamma_0) \end{aligned} \right\} (4-9)$$

ここで、 $\sin \phi_c$ 、 $e^{-\gamma_0 \omega_0 T/2}$ に対するマクローリン展開より；

$$\begin{aligned} \sin \phi_c &= \sin \left(\tan^{-1} \frac{1}{\gamma_0} - \frac{\omega_0 T}{2} \right) \simeq \sin \left(\tan^{-1} \frac{1}{\gamma_0} \right) \left\{ 1 - \cot \left(\tan^{-1} \frac{1}{\gamma_0} \right) \frac{\omega_0 T}{2} - \dots \right\} \\ &= (1 + \gamma_0^2)^{-1/2} (1 - \gamma_0 \omega_0 T/2 - \dots) \end{aligned} \quad (4-10)$$

$$e^{-\gamma_0 \omega_0 T/2} \simeq 1 - (\gamma_0 \omega_0 T/2) + (\gamma_0 \omega_0 T/2)^2/2! + \dots \quad (4-11)$$

したがって

$$\begin{aligned} (W_n T)^2 &\simeq (\omega_0 T)^2 (1 + \gamma_0^2)^{1/2} (1 - \gamma_0 \omega_0 T/2) / (1 + \gamma_0^2)^{-1/2} (1 - \gamma_0 \omega_0 T/2) \\ &= (\omega_0 T)^2 \cdot (1 + \gamma_0^2) \end{aligned} \quad (4-12)$$

すなわち

$$W_n T \simeq (1 + \gamma_0^2)^{1/2} \cdot \omega_0 T \quad (4-13)$$

また、 $\cos \phi_c$ に対するマクローリン展開より；

$$\cos \phi_c = \cos \left(\tan^{-1} \frac{1}{\gamma_0} - \frac{\omega_0 T}{2} \right) \simeq \cos \left(\tan^{-1} \frac{1}{\gamma_0} \right) \left(1 + \frac{\omega_0 T}{2\gamma_0} + \dots \right) \quad (4-14)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } -\cot \phi_c &= \cos \left(\tan^{-1} \frac{1}{\gamma_0} - \frac{\omega_0 T}{2} \right) \simeq \cot \left(\tan^{-1} \frac{1}{\gamma_0} \right) \frac{(1 + \omega_0 T/2\gamma_0 + \dots)}{(1 - \gamma_0 \omega_0 T/2 + \dots)} \\ &\simeq \gamma_0 \left(1 + \frac{(1 + \gamma_0^2)}{2\gamma_0} \omega_0 T \right) \end{aligned} \quad (4-15)$$

$$\text{これより } 2\gamma W_n T \simeq \omega_0 T \gamma_0 \left\{ 2 + (1 + \gamma_0^2) \omega_0 T/2\gamma_0 \right\} \quad (4-16)$$

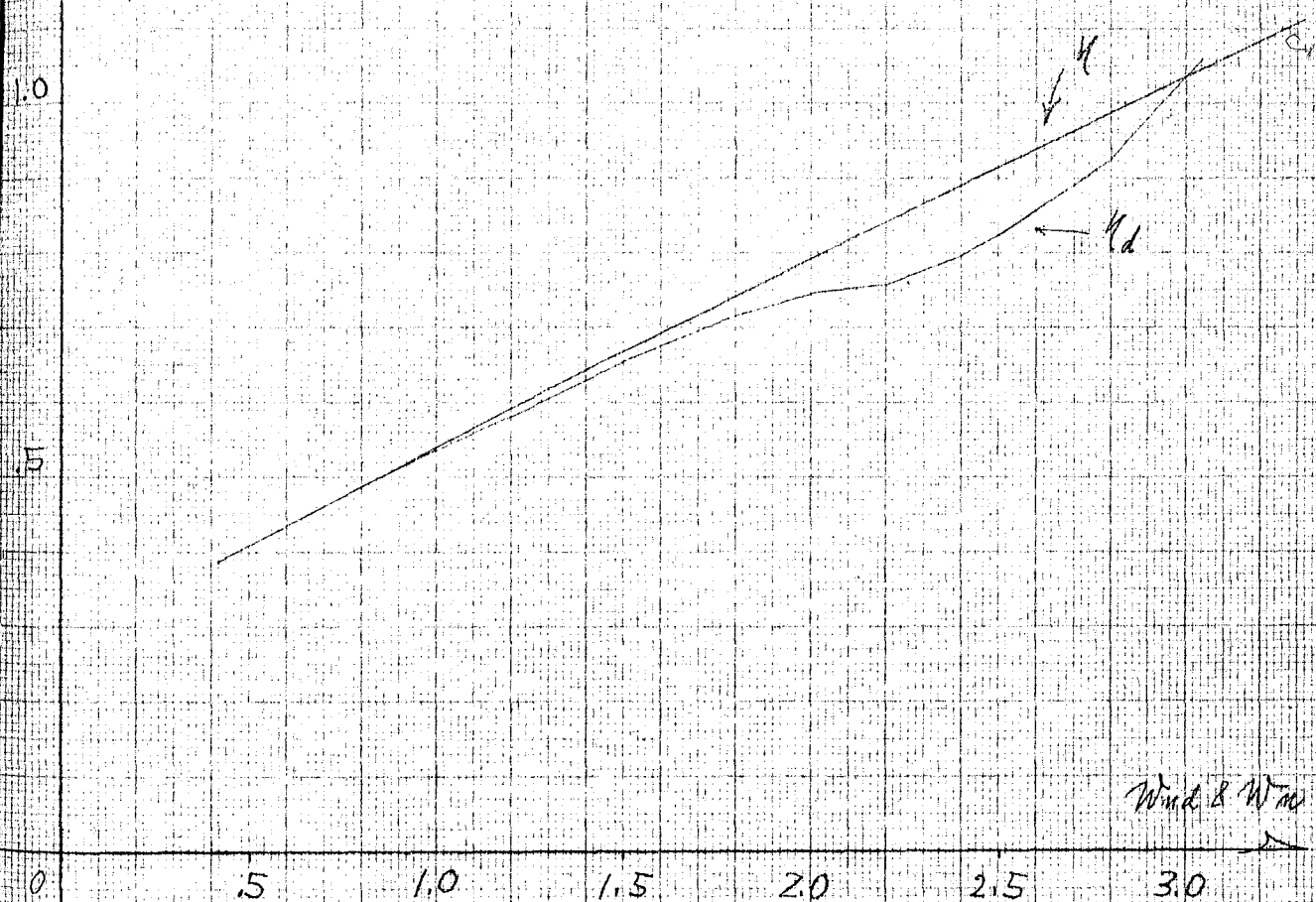
(4-13), (4-16)より γ と W_n の関係は(4-17)のようになる。

(オ4-1表) $\gamma_0 = 0.292$

ω_0	γ	W_n
0.4	0.388	0.423
0.6	0.447	0.642
0.8	0.510	0.876
1.0	0.574	1.129
1.2	0.645	1.411
1.4	0.726	1.740
1.6	0.824	2.135
2.0	1.111	3.320
2.4	2.020	6.970

$\eta_d \text{ \& } \eta$

$$\theta_m = 40\% \quad (T_0 = 0.292)$$



第4-2図 2次サンプル値系のパラメータ

$$\zeta = \frac{1}{4} \omega_n T + \frac{\gamma_0}{(1+i, 2)^{1/2}} \quad (4-17)$$

代表根指定法では行き過ぎ量の指定に関して、 γ_0 を(4-18)の値で取っている。

$$\gamma_0 = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 \quad (4-18)$$

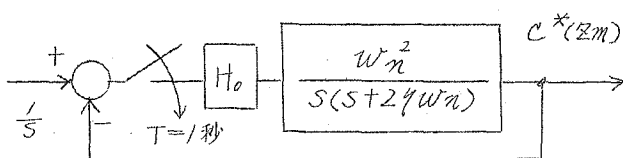
サンプル値系においても行き過ぎ量を与える γ_0 として(4-18)を取り、それらに対するパラメータ ζ , ω_n の値を $T=1$ 秒として求めるとオ4-2表が得られる。

ω_0	ω_n	ζ	ω_n	ζ	ω_n	ζ	ω_n	ζ
0.4	0.423	0.395	0.437	0.484	0.455	0.565	0.475	0.639
0.6	0.644	0.452	0.665	0.545	0.695	0.630	0.726	0.709
0.8	0.876	0.508	0.911	0.608	0.952	0.705	1.00	0.795
1.0	1.133	0.578	1.176	0.685	1.239	0.784	1.313	0.884
1.2	1.414	0.651	1.481	0.766	1.563	0.885	1.68	0.991
1.4	1.75	0.733	1.85	0.860	1.98	1.00	2.17	1.142
1.6	2.14	0.830	2.30	0.985	2.53	1.157	2.85	1.39
1.8	2.64	0.954	2.93	1.157	3.37	1.413	/	/
		$\gamma_0 = 0.3$			$\gamma_0 = 0.4$			$\gamma_0 = 0.5$
								$\gamma_0 = 0.6$

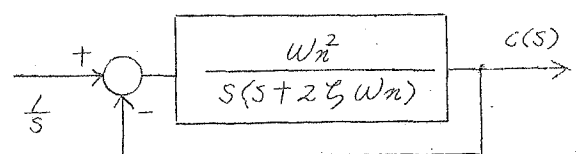
(オ4-2表) むだ時間近似によって得られた2次サンプル値系のパラメータ

オ4-2表をグラフにプロットするとオ4-3図が得られる。オ4-3図およびオ2-3図の比較、あるいはオ4-2図の各パラメータの比較により、むだ時間で近似した2次サンプル値系のパラメータ ζ , ω_n と計算によって求めたパラメータ ζ_d , ω_{nd} とは $\omega_n \leq 2 \text{ rad/sec}$ あたりまではよく一致している。また、 ω_n がそれ以上大きい所での現象の速さ。すなわち最大行き過ぎ量を与える時刻 t_m について見ると、オ2-4図あるいはオ2-7図からわかるように、 ω_n を大きくしても、 t_m はあまり小さくならない。したがって、実用的にはサンプラ・ホールドを $T/2$ のむだ時間で近似することによって、良い近似が得られると考えてよい。

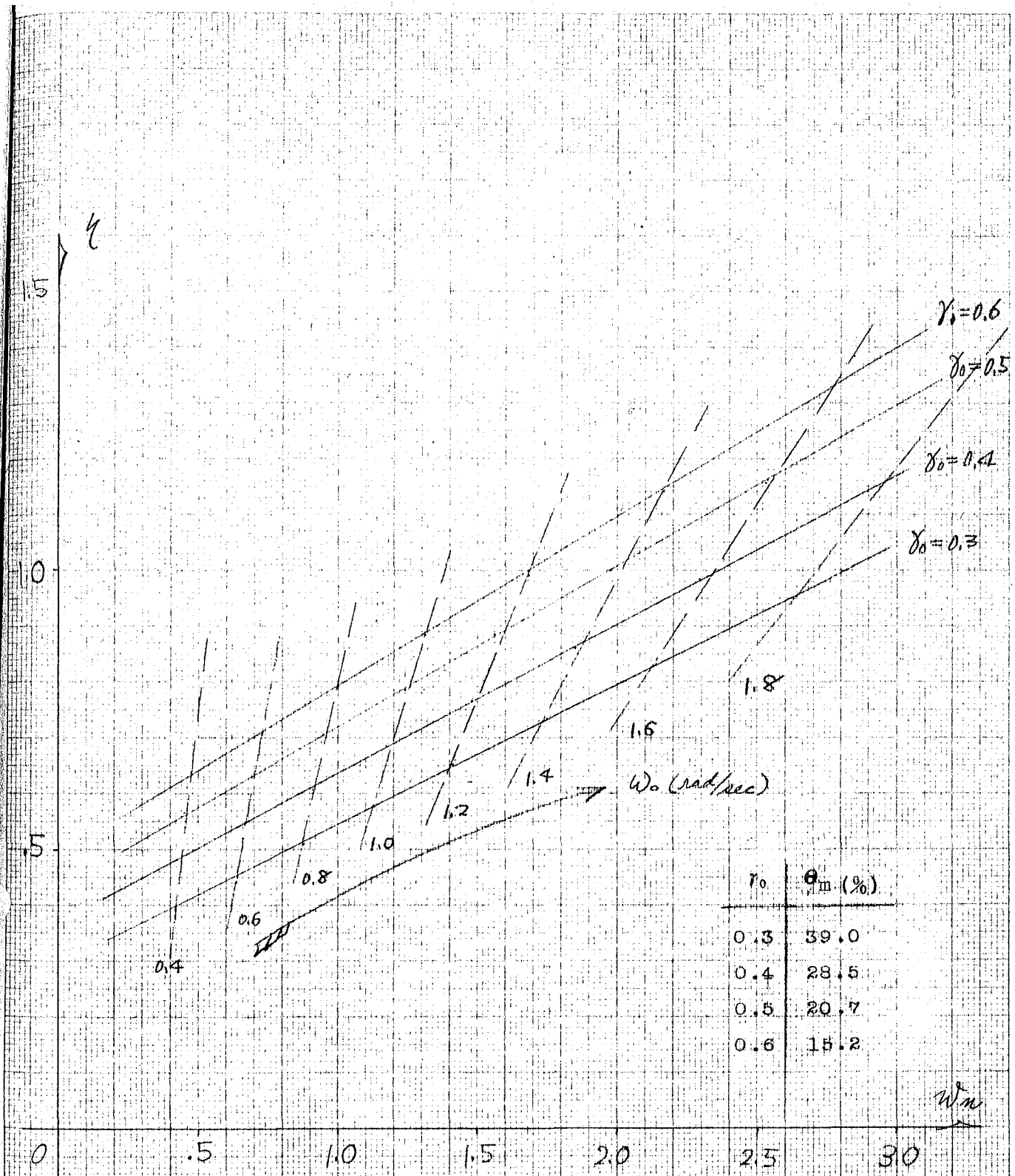
(3) 2次サンプル値系と2次連続系の応答の比較



(オ4-4図) (a) 2次サンプル値系



(b) 2次連続系



γ_0	$\theta_m (\%)$
0.3	39.0
0.4	28.5
0.5	20.7
0.6	15.2

第4-3図 2次サンプル値系のパラメータ

一般に二次連続系のパラメータと δ_0 , 現象角周波数 ω_0 との関係は(4-18)になる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= (1 + \delta_0^2)^{1/2} \omega_0 \\ 2\zeta \omega_n &= 2\delta_0 \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

他方二次サンプル値系では、前に述べたように、一般に(4-19)で示され、近似的には、(4-13) および(4-16)で示される。

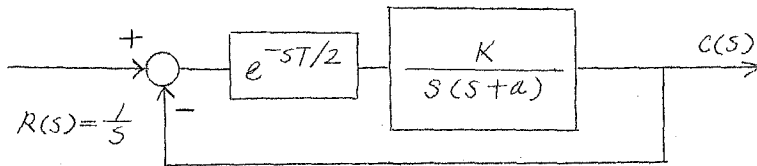
$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= -\omega_0 g_c / \sin \phi_c \\ 2\zeta \omega_n &= \omega_0 (\delta_0 - \cot \phi_c) \\ g_c &= -\omega_0 (1 + \delta_0^2)^{1/2} \cdot e^{-\delta_0 \omega_0 T/2} \\ \phi_c &= \omega_0 T/2 + \pi - \tan^{-1} 1/\delta_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

(4-13) および(4-16)と(4-18)を比較すると、 ω_0 が充分小さい所では、二次サンプル値系と二次連続系はそのパラメータ、応答の速さ、行き過ぎ量が良く一致していることがわかる。しかしこの場合、 ζ と ω_n の関係が、 ω_0 をかなり大きくとった場合でも、直線的になるだけであり、 ω_n と ω_0 , および ζ と ω_0 の関係は(4-19)の関係とは近似度がわるい。したがって、むだ時間で近似した二次サンプル値系のパラメータの問題をあつかう時には(4-19)の関係によらなければならない。

オ4-5図にオ4-4図(a),(b)において δ_0 , ω_0 が同じ場合のアナコンによる応答を適当な ω_0 について求めた結果を示す。

(4) 系の現象角 $\omega_0 T$ が同じ場合の時間変換と応答

今まで系のパラメータを考察する場合、サンプリング周期 T に関しては、 $T=1$ 秒としてきたが、ここでは、 $T=1$ 秒以外のサンプリング周期の時、 $\omega_0 T$ を一定として ω_0 を変化した場合のパラメータについて、二次形を例として取り上げて述べる。



(オ4-5図)

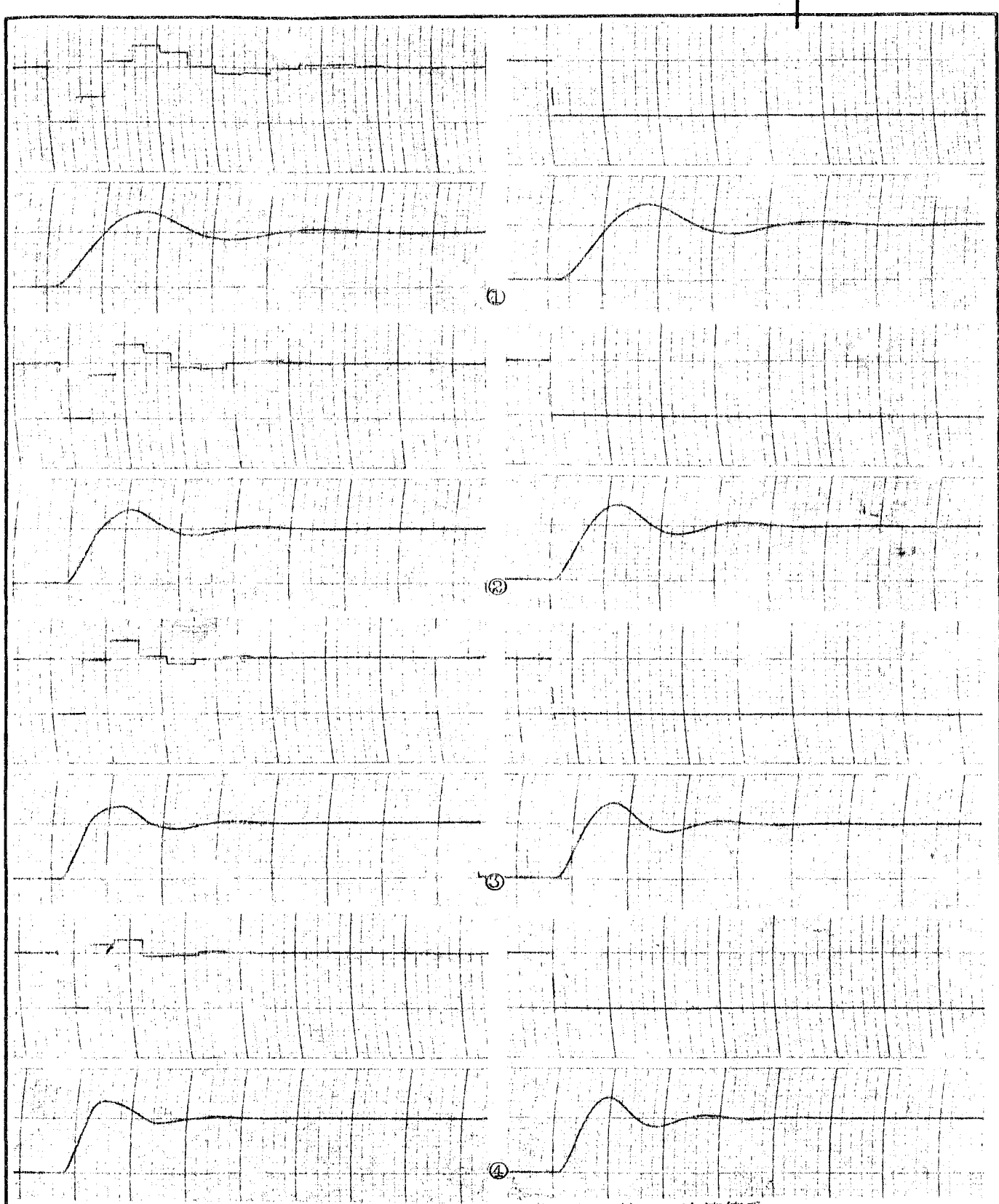
一般に二次サンプル値系のサンプラ・ホルダをむだ時間で近似した系はオ4-5図になる。ここで、指定根を;

$$s_{01} = (-\delta_0 \pm j) \omega_{01} \quad (4-20)$$

として(4-5), (4-6)から系のパラメータを求めると次式が得られる。

$$F_1(s) = \frac{e^{-sT/2} \cdot K}{s(s+a)} = \frac{e^{-s\theta_0/2} \cdot \omega_{01}^2 (1 + \delta_0^2)^{1/2} e^{-\delta_0 \theta_0/2} / \sin(\theta_0/2 + \varphi)}{s \{s + \omega_{01} \{ \delta_0 - \cot(\theta_0/2 + \varphi) \} \}} \quad (4-21)$$

$$\text{ここに} \quad \theta_0 = \omega_{01} T, \quad \varphi = \pi - \tan^{-1}(1/\delta_0) \quad (4-22)$$



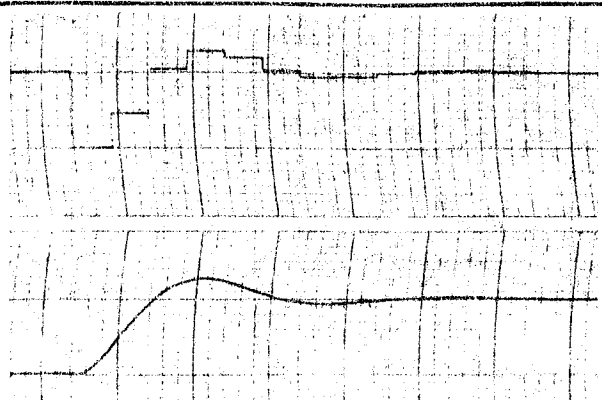
むた時間近似によつて得たパラメータを持つ2次
サンプル値系

第4-5図 (1)
 $T=1(\text{sec}) \quad \gamma_0 = 0.3$

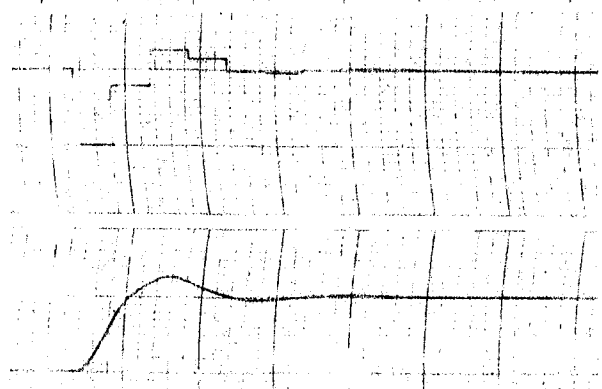
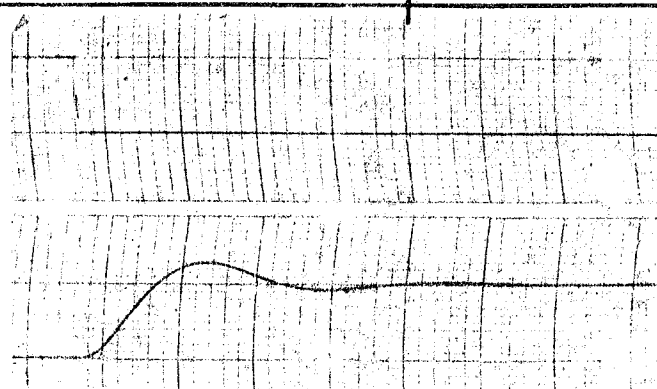
以下紙送り速度 5mm/sec

指定根を持つ2次連続系

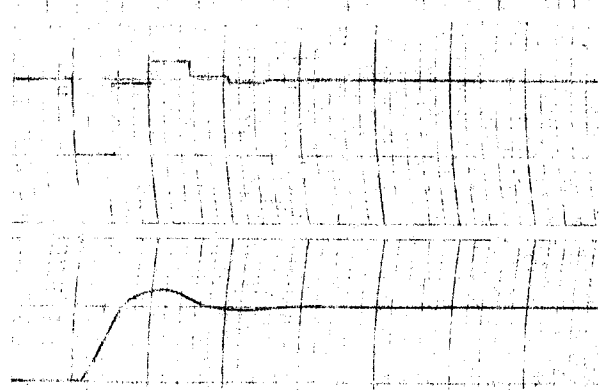
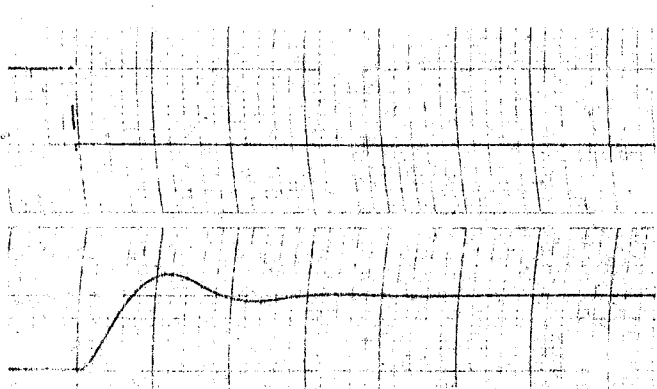
	$2\eta\omega_n$	ω_n^2	$2\eta\omega_n$	ω_n	$\omega_0(\text{r/s})$
1	1.31	1.28	0.60	1.09	1.0
2	2.56	3.04	0.84	2.14	1.4
3	3.55	4.56	0.96	2.79	1.6
4	5.03	6.94	1.08	3.53	1.8



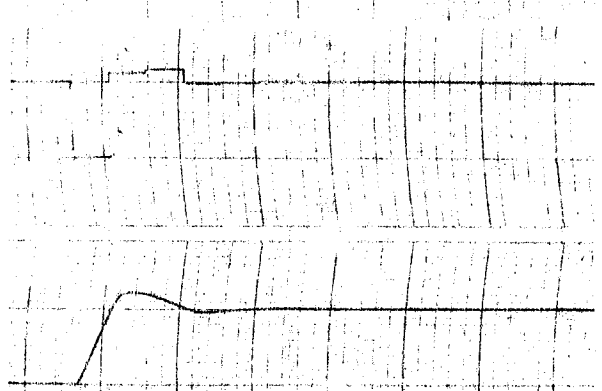
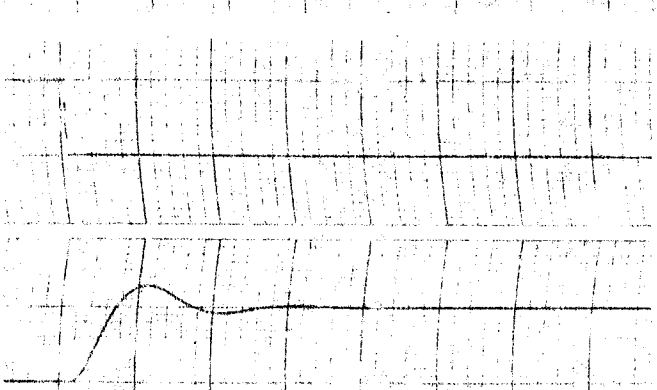
①



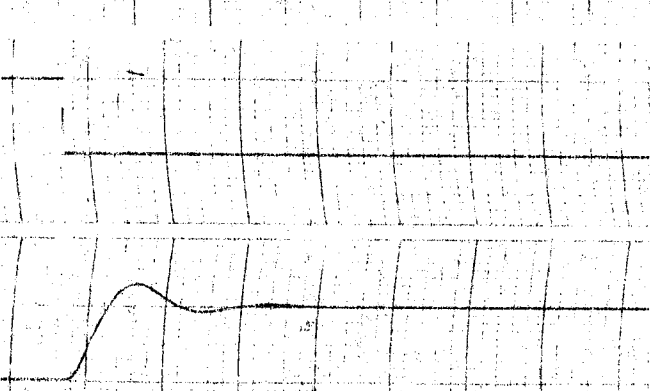
②



③



④

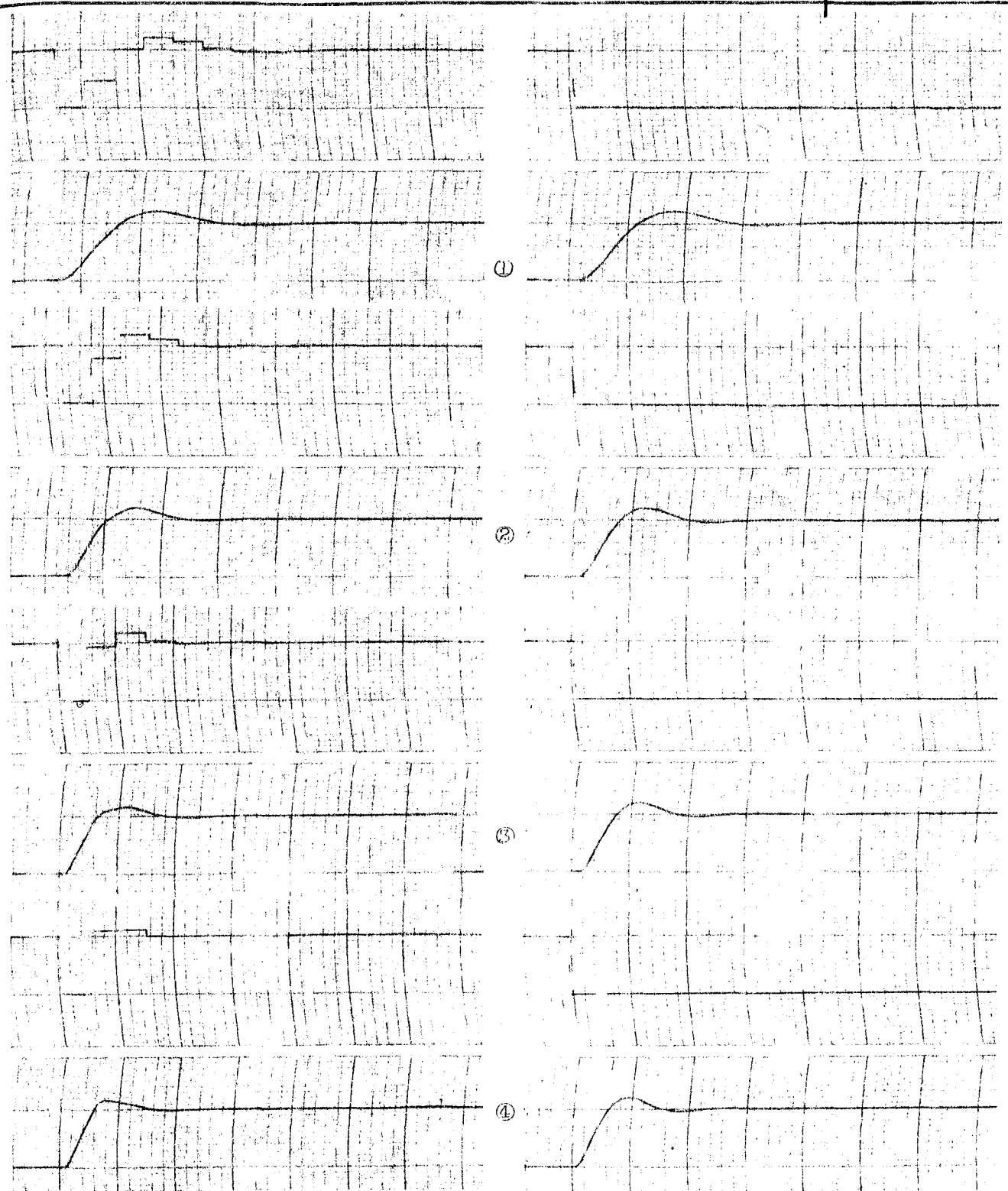


むた時間近似によつて得たパラメータを持つ
2次サンプル値系

指定根を持つ2次連続系

		$2\zeta\omega_n$	ω_n^2	$2\zeta\omega_n$	ω_n^2	ω_0 (r/s)
第4-5図 (H)	1	1.61	1.38	0.8	1.16	1.0
	2	3.18	3.41	1.12	2.27	1.4
	3	4.52	5.25	1.28	2.97	1.6
	4	6.76	8.52	1.44	3.76	1.8

$T=1$ (sec) $r_0=0.4$



むだ時間近似によつて得たパラメータを持つ2次
サンプル値系

指定根を持つ2次連続系

		$2\eta\omega_n$	ω_n^2	$2\zeta\omega_n$	ω_n^2	ω_0 (r/s)
第4-5図 (1H) $T=1$ (sec) $\tau_0=0.5$	1	1.94	1.53	1.0	1.25	1.0
	2	3.95	3.90	1.4	2.45	1.4
	3	5.85	6.35	1.6	3.20	1.6
	4	9.53	11.30	1.8	4.05	1.8

また一方、上式と異った ω_{02} を (4-23) とし、指定根を (4-24) とすると一巡伝達関数として (4-25) が得られる、

$$\theta_0 = \omega_{02} \cdot T_2 \quad (4-23)$$

$$s_{02} = (-\gamma_0 \pm j) \omega_{02} \quad (4-24)$$

$$F_2(s) = \frac{e^{-s\theta_0/2\omega_{02}} \cdot \omega_{02}^2 (1+\gamma_0^2)^{1/2} \cdot e^{-\gamma_0\theta_0/2} \sin(\theta_0/2 + \varphi)}{s \{s + \omega_{02} \{\gamma_0 - \cot(\theta_0/2 + \varphi)\}\}} \quad (4-25)$$

同じ θ_0 に関して (4-22), (4-23) から次式を得る、

$$\theta_0 = \omega_0 T_1 = \omega_{02} T_2 \quad \omega_{01} = (T_2/T_1) \omega_{02} \quad (4-26)$$

ここで: (4-21) に関して演算時間を T_2/T_1 倍すると;

$$F_1\left(\frac{T_2}{T_1} s\right) = \frac{e^{-T_2 s \theta_0 / 2 \omega_{01} T_1} \cdot \omega_{01}^2 (1+\gamma_0^2)^{1/2} \cdot e^{-\gamma_0 \theta_0 / 2} \sin(\theta_0/2 + \varphi)}{(T_2/T_1) s \{ (T_2/T_1) s + \omega_{01} \{\gamma_0 - \cot(\theta_0/2 + \varphi)\}\}} \quad (4-27)$$

したがって、(4-26), (4-27) より、

$$F_1\left(\frac{T_2}{T_1} s\right) = F_2(s) \quad (4-28)$$

上式によってわかるように、ここで述べている近似法によっても、他の方法による場合と同様現象角 $\omega_0 T$ が同じであれば、指定根 ω_0 の値が異っていても系の応答は演算時間交換によって同じになるということができ、2次形以外の場合についても同様な結果を得ることはいうまでもない。例として $\omega_0 T = 1$ (radian) とし、 T を変化した場合の応答を示すと図4-6図が得られる。

(5) サンプリング周期の選定について

一般にサンプル値系のサンプリング周期はアクチュエータの消耗度、あるいは、一つの信号路で多くの情報を送ることを考えるような場合、同じ現象周波数に対しては長い方がよい。ここでは、系に指定する現象周波数 ω_0 、および減衰度 γ_0 を一定とした場合の、仕様値を満足するサンプリング周期の限界について述べる。

(1) サンプリング周期の限界

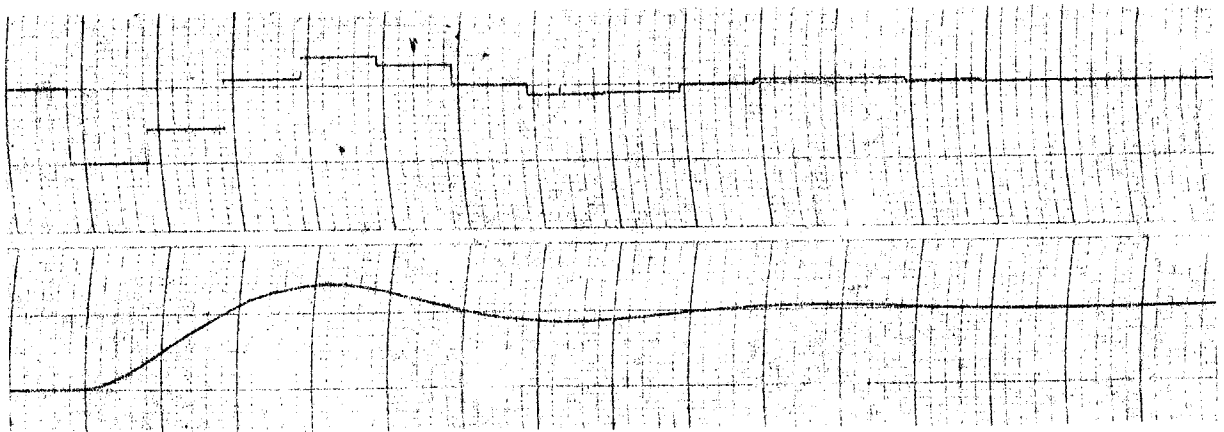
サンプリング定理によれば、入力信号を再現するためには、入力信号に含まれる周波数成分の最高角速度を ω とし、サンプリング角速度を ω_s とすれば、各々の間には (5-1) が成立しなければならない。

$$\omega_s \geq 2\omega \quad \text{または} \quad T \leq \pi/\omega, \quad \text{ただし} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_s} \quad (5-1)$$

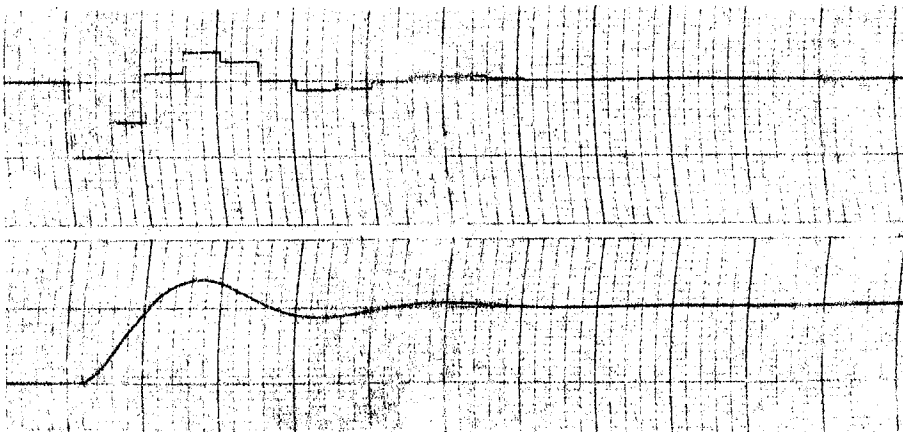
他方、一般にサンプル値系のサンアラの入力はあらゆる周波数成分を含む。したがって、(5-1) にしたがってサンプリング周期を求めることはできない。ここでは、指定根を持つ2次連続系の周波数応答の共振周波数から何 dB減衰した所の周波数までを再現すれば良

第4-6図 同じ $\omega_0 T$ に対する応答ただし : $\omega_0 T = 1 \text{ rad}$

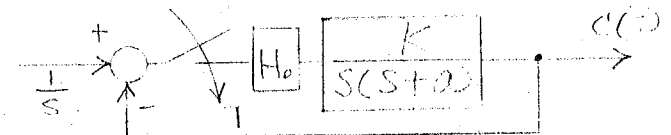
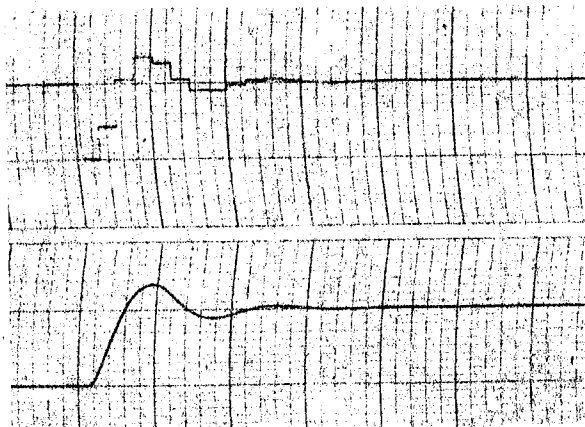
- ① { $\omega_1 = 0.5 \text{ rad/sec}$ ② { $\omega_2 = 1 \text{ rad/sec}$ ③ { $\omega_3 = 2 \text{ rad/sec}$
 $T = 2 \text{ sec}$ $T = 1 \text{ sec}$ $T = 0.5 \text{ sec}$



①



②



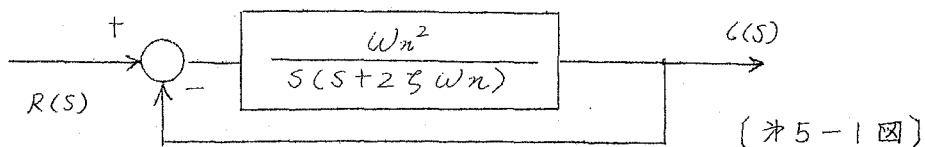
	T (sec)	a	K
1	2	0.654	0.32
2	1	1.31	1.28
3	0.5	2.62	5.12

③

以上紙送り速度 5mm/sec

い近似が得られるかについて述べる。

一般に、2次連続系として図5-1図を考え、この系の共振周波数 および共振値を求める。



$$A(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-2)$$

ここで(5-3)を(5-2)に代入する。

$$s = j\omega \quad \omega/\omega_n = \Omega \quad (\text{相対角周波数}) \quad (5-3)$$

$$A(\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + 2\zeta j\Omega} \quad (5-4)$$

サンプリング定理では位相関係は問題とされないので、(5-4)の絶対値を求めると、(5-5)が得られ、これから共振相対角周波数 Ω_r 、および、その時の共振値 M_r を求めると(5-6)が得られる。

$$M(\Omega) = |A(\Omega)| = \{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2\}^{-1/2} \quad (5-5)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_r &= \{(1 - \gamma_0^2)/(1 + \gamma_0^2)\}^{1/2} = (1 - 2\zeta^2)^{1/2} \\ M_r &= (1 + \gamma_0^2)/2\gamma_0 \end{aligned} \right\} \quad (5-6)$$

ここに; $\gamma_0 = \zeta/(1 - \zeta^2)^{1/2}$

ここで、 $G(\Omega)$ を(5-7)として、サンプラによつて再現すべき角周波数 ω を $G(\Omega)$ がその共振値 G_r から3dB減衰した所の角周波数 ω_3 までとする。

$$G(\Omega) = 20 \log M(\Omega) \quad (5-7)$$

$$20 \log \left\{ (1 - \Omega^2)^2 + 4 \frac{\gamma_0^2}{1 + \gamma_0^2} \Omega^2 \right\}^{-1/2} = 20 \log \frac{1 + \gamma_0^2}{2\gamma_0} - 3 \quad (5-8)$$

$$\text{したがって: } \frac{(1 + \gamma_0^2)^2}{4\gamma_0^2} \left\{ (1 - \Omega^2)^2 + \frac{4\gamma_0^2}{1 + \gamma_0^2} \Omega^2 \right\} = 2 \quad (5-9)$$

上式から必要な Ω についてだけ解を求めると(5-10)が得られる。

$$\Omega = \left(\frac{1 + 2\gamma_0 - \gamma_0^2}{1 + \gamma_0^2} \right)^{1/2} \quad (5-10)$$

ここで(5-11)を考慮して、(5-3)、(5-10)から(5-12)が成立する。

$$\omega_n = (1 + \gamma_0^2)^{1/2} \cdot \omega_0 \quad (5-11)$$

$$\omega_3 = (1 + 2\gamma_0 - \gamma_0^2)^{1/2} \cdot \omega_0 \quad (5-12)$$

(5-1), (5-12) から求めるべきサンプリング周期として (5-13) を得る.

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_3} = \frac{\pi}{(1 + 2\gamma_0 - \gamma_0^2)^{1/2} \cdot \omega_0} \quad (5-13)$$

あるいは (5-13) から. この場合. 系に指定できる最大現象角は (5-14) で与えられる.

$$\omega_0 T \leq \frac{\pi}{(1 + 2\gamma_0 - \gamma_0^2)^{1/2}} \Big|_{3dB} \quad (5-14)$$

一般に (5-7) の共振値から. c dB 減衰した所の角周波数 ω_c までをサンプラによって再現するためには上と同様な計算により (5-15), (5-16), (5-17) を得る.

$$\Omega_c = \left\{ \frac{1 + 2\gamma_0 (2^{c/3} - 1)^{1/2} - \gamma_0^2}{1 + \gamma_0^2} \right\}^{1/2} \quad (5-15)$$

$$\omega_c = \{ 1 + 2\gamma_0 (2^{c/3} - 1)^{1/2} - \gamma_0^2 \}^{1/2} \cdot \omega_0 \quad (5-16)$$

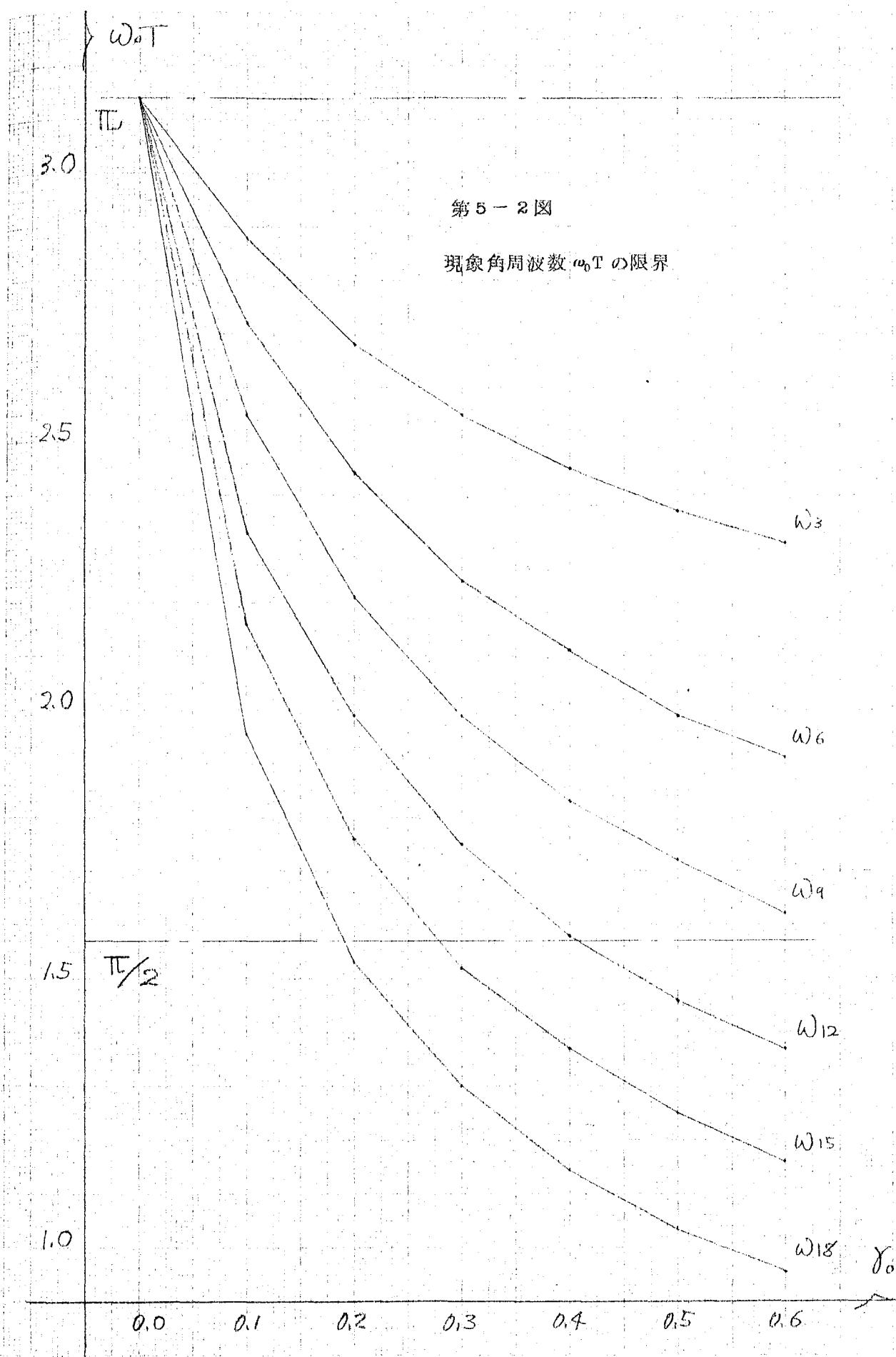
$$\omega_0 T \leq \frac{\pi}{\{ 1 + 2\gamma_0 (2^{c/3} - 1)^{1/2} - \gamma_0^2 \}^{1/2}} \Big|_{c dB} \quad (5-17)$$

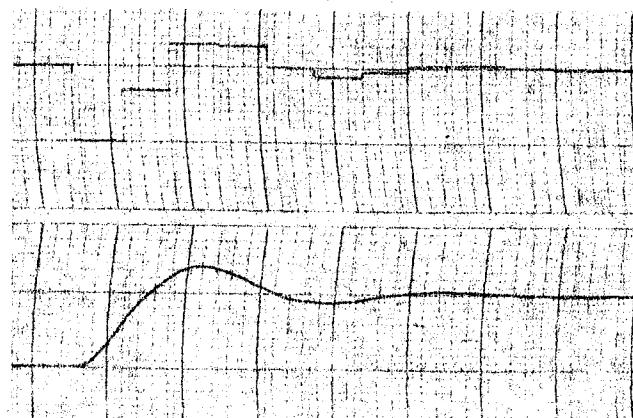
(5-17) から適当な ω_c について. γ_0 をパラメータとして. 各 ω_c に対する現象周波数 ω_b T の限界を求めるとオ 5-1 表が得られる.

γ_0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	c (dB)
$\omega_0 T$	3.14	2.88	2.68	2.55	2.45	2.37	2.31	3
	3.14	2.92	2.44	2.24	2.11	1.99	1.91	6
	3.14	2.55	2.21	1.99	1.83	1.72	1.62	9
	3.14	2.33	1.99	1.95	1.58	1.46	1.37	12
	3.14	2.16	1.76	1.52	1.37	1.25	1.16	15
	3.14	1.96	1.53	1.30	1.15	1.03	0.955	18

(オ 5-1 表)

オ 5-1 表をグラフにプロットするとオ 5-2 図が得られるが. オ 4-2 図あるいは. オ 2-3 図とオ 4-3 図の比較の結果からわかるように. 現象角周波数 $\omega_0 T$ の限界はほぼ $\pi/2$ (rad) にあるので. γ_0 , $\omega_0 T$, ω_0 の値を (5-18) として. サンプリング周期 T を変化して (4-5) (4-6) からパラメータの値を求めてアナコムによって応答を求めるとオ 5-3 図のようになる.





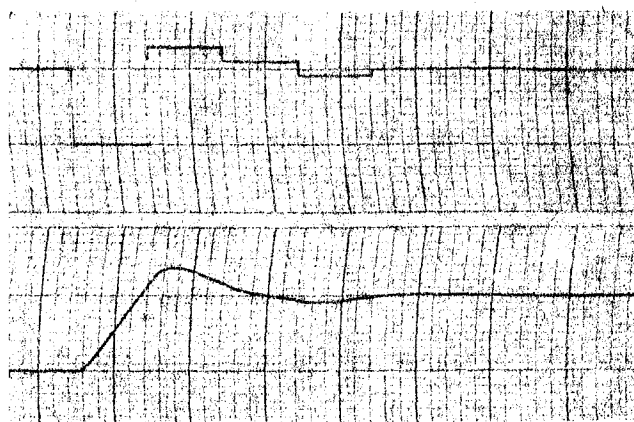
①



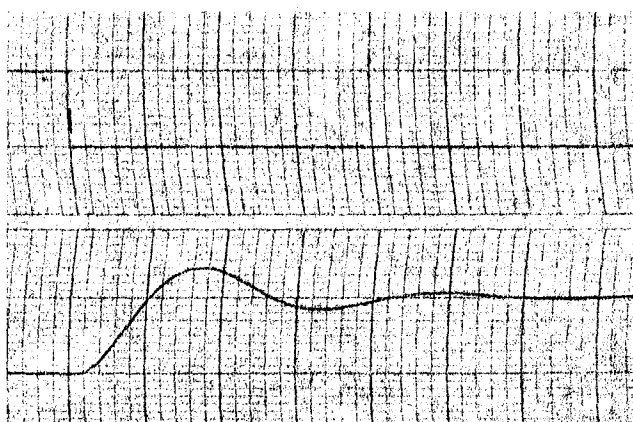
②



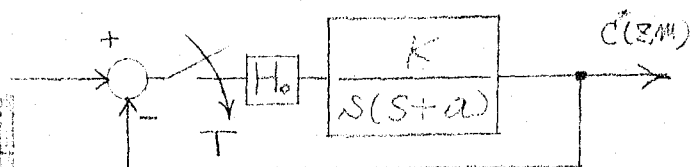
③



④



⑤

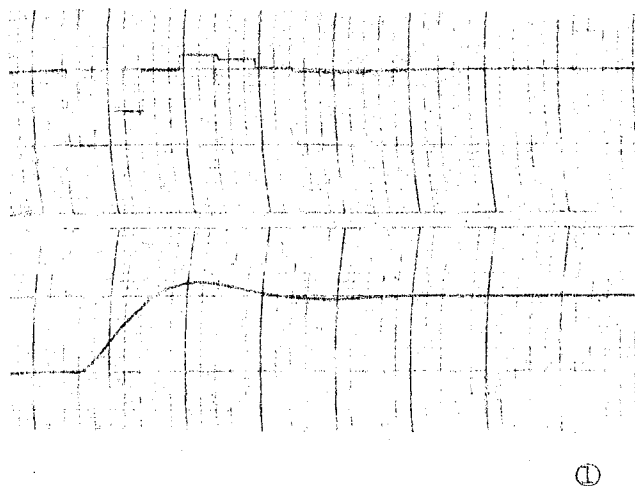


$$T_0 = 0.3$$

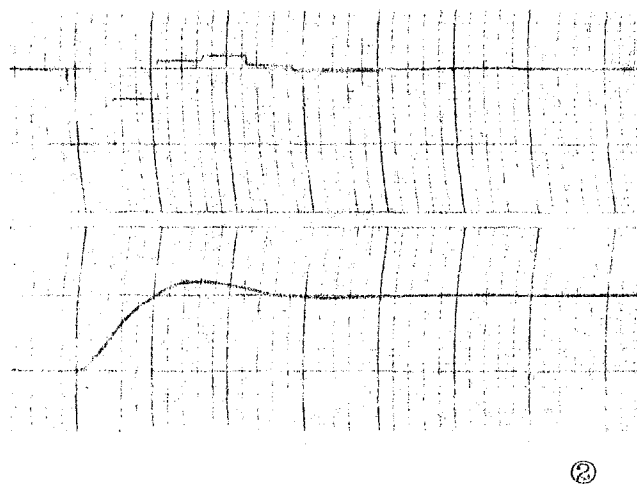
$$\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$$

	$\omega_0 T$	a	K
1	1.3	1.67	1.45
2	1.5	2.00	1.64
3	1.8	2.79	2.14
4	2.0	3.76	2.79
5	2次連続系		

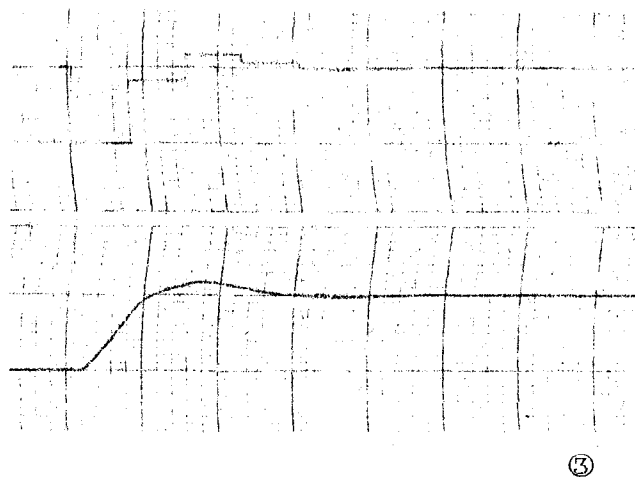
第5-3図 (1) $\omega_0 T$ の限界あたりでの応答



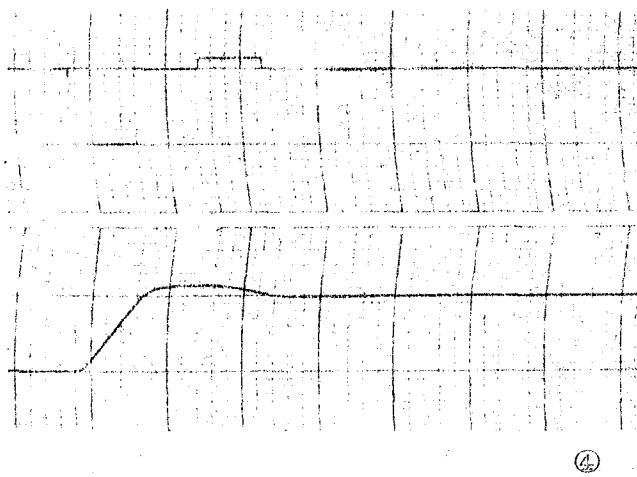
①



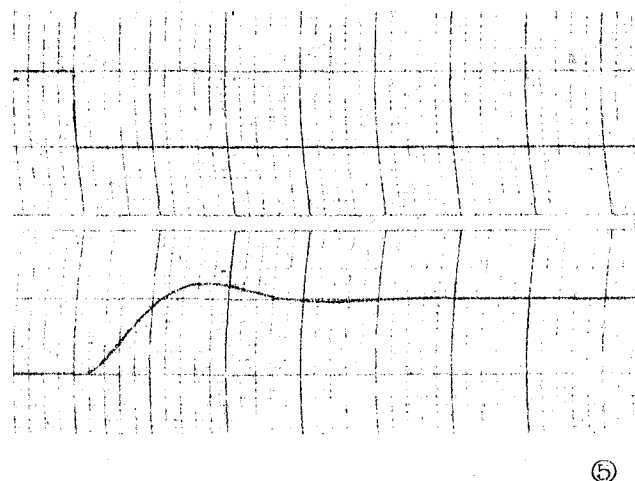
②



③



④



⑤

$$\gamma_0 = 0.5 \quad \omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$$

	$\omega_0 T$	a	K
1	1.0	1.96	1.54
2	1.2	2.32	1.72
3	1.5	3.23	2.23
4	1.7	4.39	2.94
5	2次連続系		

第5-3図 (11) $\omega_0 T$ の限界あたりでの応答

$$\left. \begin{array}{ll} \omega_0 = 1 \text{ rad/sec} \\ \gamma_0 = 0.3 & \omega_0 T = 2.0, 1.8, 1.5, 1.3 \text{ (rad)} \\ \gamma_0 = 0.5 & \omega_0 T = 1.7, 1.5, 1.2, 1.0 \text{ (rad)} \end{array} \right\} \quad (5-18)$$

(2) $\omega_0 T$ の限界での応答

オ5-3図のアナログによる応答からわかるようにサンプラによって再現すべき最高周波数を2次連続系の共振値から15dB減衰した時の角周波数 ω_{15} までとすれば良い近似が得られることがわかるが、ここでは2次連続系とむだ時間で近似した2次サンプル値系の応答を筆算で求め、それから誤差を求める。(各 γ_0 に対する ω_{15} をオ5-4図に示す。)

2次連続系として、一般にオ5-1図を取り上げるとその誤差応答は、周知のように(5-19)で与えられる。

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1} E(s) = \sqrt{1+\gamma_0^2} e^{-\gamma_0 \omega_0 t} \cdot \cos(\omega_0 t - \tan^{-1} \gamma_0) \quad (5-19)$$

また、上式から行き過ぎ量、およびその時刻は(5-20)および(5-21)となる。

$$\Theta_m = -e^{-\gamma_0 \pi} \quad (5-20)$$

$$t = n\pi / \omega_0 \quad n=1 \quad (5-21)$$

(5-20)から各 γ_0 に対する Θ_m を求めるとオ5-2表が得られる。

γ_0	0.3	0.4	0.5	0.6
$\Theta_m(\%)$	38.98	28.48	20.66	15.20

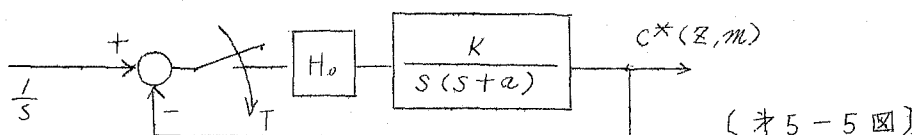
(オ5-2表)

他方、 $\omega_0 T$ の限界を ω_{15} とすると各 γ_0 に対する限界の値はオ5-1表のようになるが実用的にはそれらの値に近い数値を取り、オ5-3表の値を $\omega_0 T$ の限界とする。

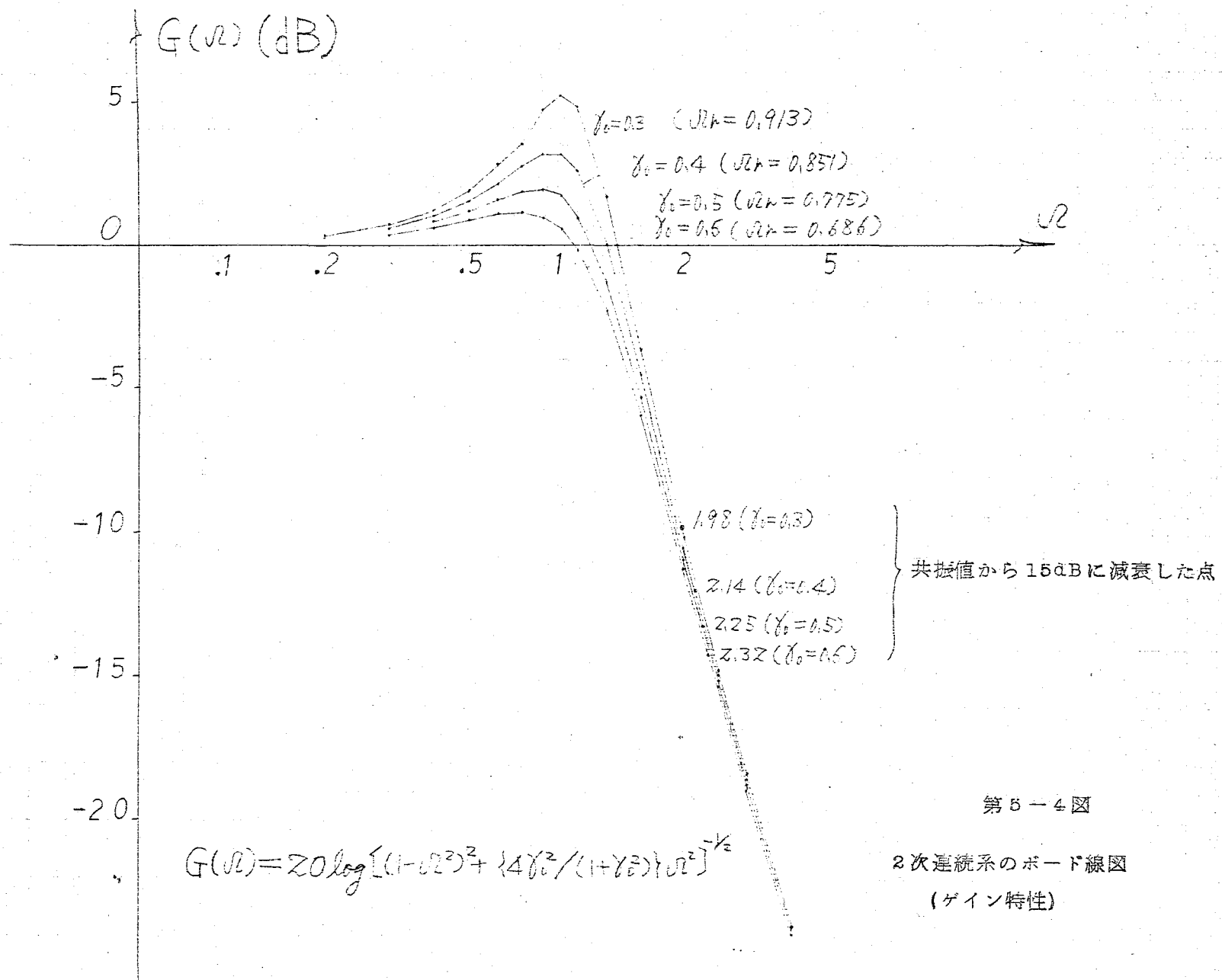
γ_0	0.3	0.4	0.5	0.6
$\omega_0 T$	1.5	1.4	1.3	1.2

(オ5-3表)

ここで、2次サンプル値系としてオ5-5図を取り上げる。



オ5-5図において、 ω_0, γ_0 を(5-22)として、系がオ5-3表の値を持つように(4-5)(4-6)からパラメータ a, K の値を求めると(5-23)が得られる。



$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= 1 \text{ rad/sec} \\ \gamma_0 &= 0.3, 0.5 \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 = 0.3 \quad a &= 2.00 \quad K = 1.64 \quad T = 1.4 (\text{sec}) \\ \gamma_0 = 0.5 \quad a &= 2.54 \quad K = 1.84 \quad T = 1.3 (\text{sec}) \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

(5-23)の値を(1-6)に代入して求めた筆算による二次サンプル値系の応答と(5-19)の二次連続系の応答を各 γ_0 に対応して画くとオ5-6図が得られる。 γ_0 の他の場合についても同様にして応答を求め、行き過ぎ量、その時の時刻を求めるとオ5-4表のようになる。

γ_0	0.3	0.4	0.5	0.6
$t_m (\text{sec})$	3.226	3.145	3.054	3.030
$H_m \%$	36.27	25.67	19.23	14.52

[オ5-4表]

オ5-4表の結果からわかるように現象角 $\omega_0 T$ の限界として系の共振周波数から15dB減衰した所の周波数までを再現するようにサンプリング周期を選べばかなり良い近似が成立する。これは逆に云つて、ここで述べている近似方法、すなわち、サンプラ・ホルダを $T/2$ のむだ時間で近似する方法によって比較的良い近似で指定できる $\omega_0 T$ の限界はオ5-2図の ω_B に対応する $\omega_0 T$ 、すなわちオ5-3表の $\omega_0 T$ までであるといふことができる。

ここで、サンプラによって再現すべき周波数を共振値から9dB減衰した実、すなわち ω_9 までとすると限界 $\omega_0 T$ はオ5-5表のようになる。

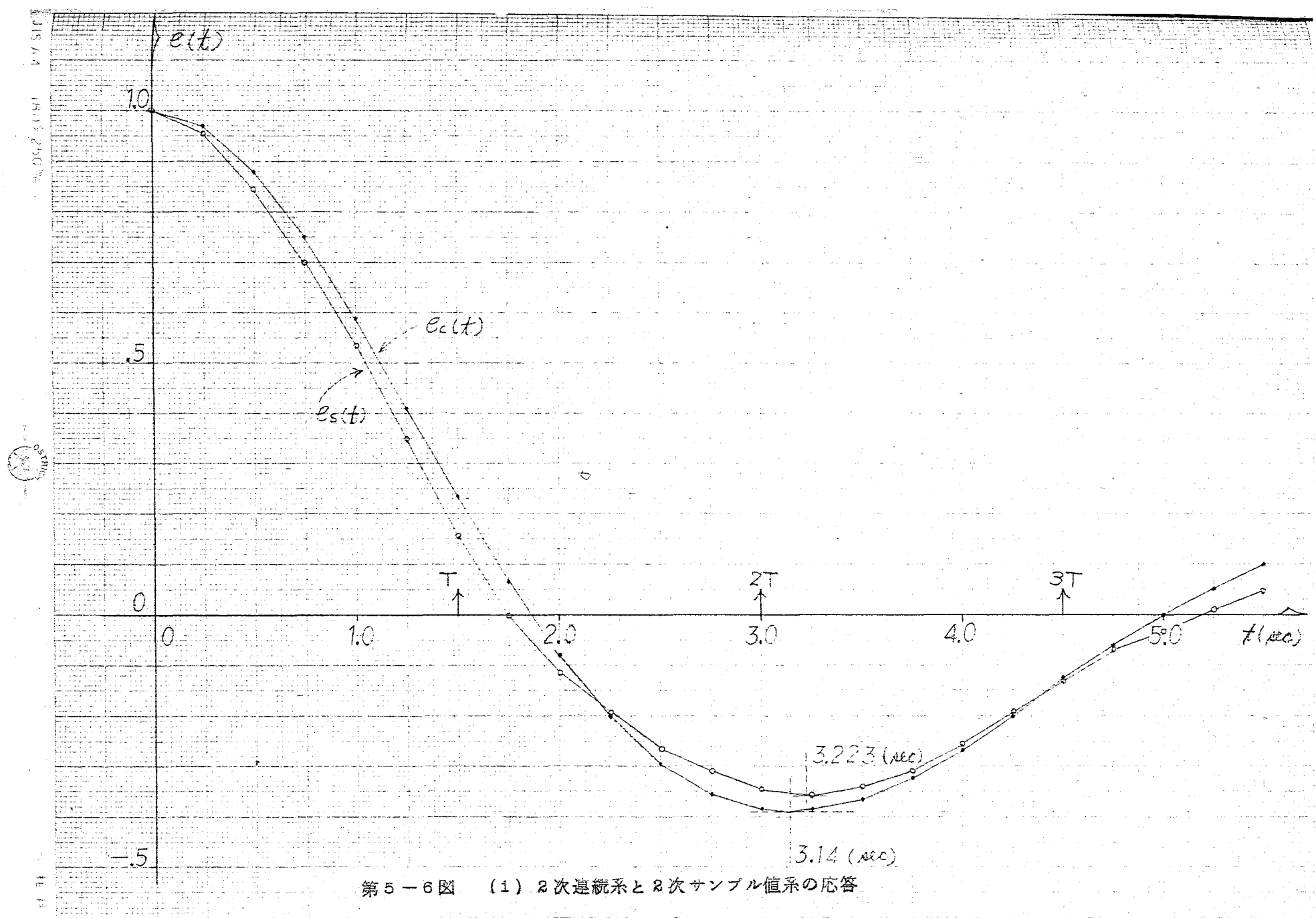
γ_0	0.3	0.4	0.5	0.6
$\omega_0 T$	2.0	1.8	1.7	1.6

(オ5-5表)

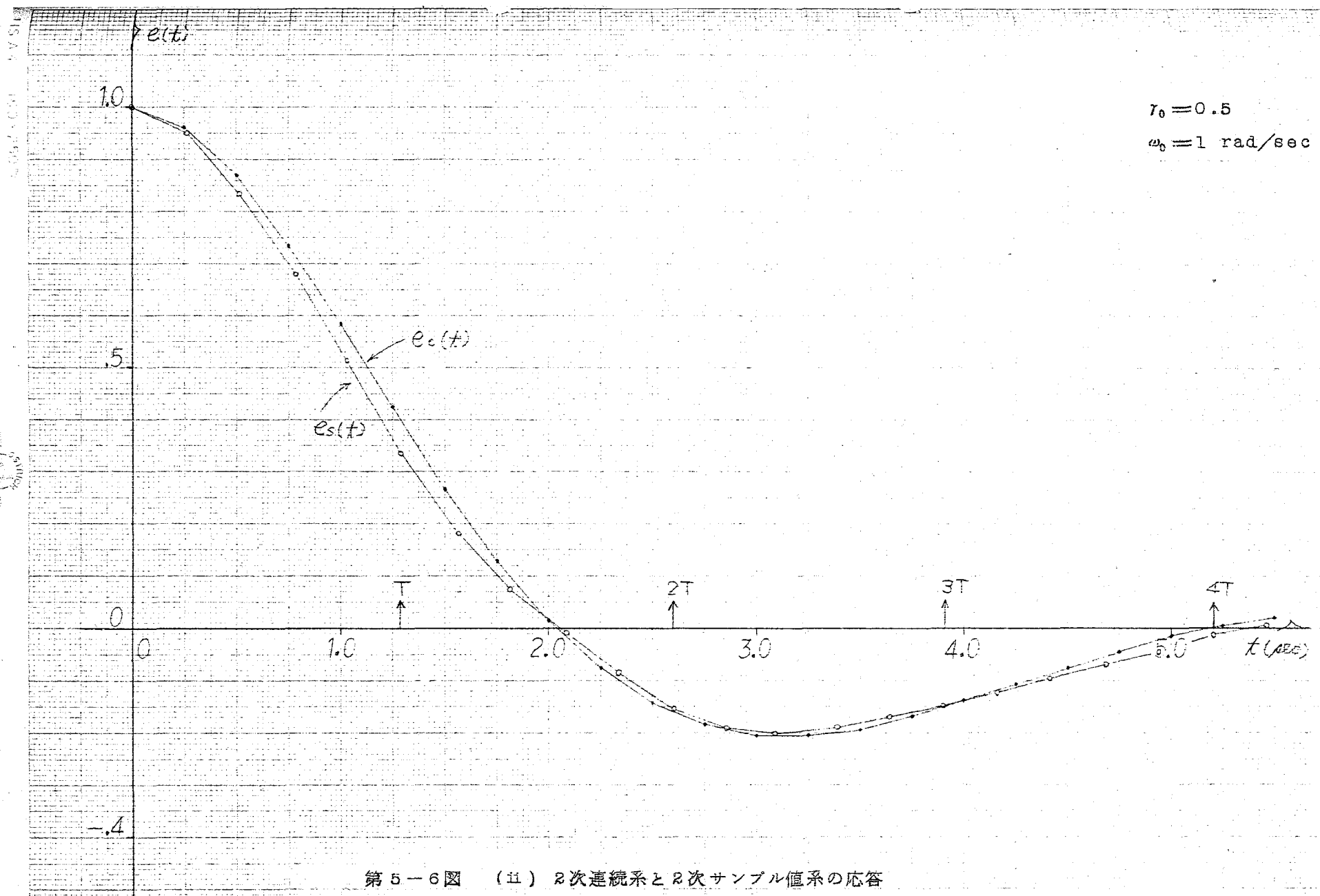
ここで前と同様にして応答を求め、二次連続系の応答と比較するとオ5-7図のようになり、行き過ぎ量はほぼ指定値と同じで、それを与える時刻は指定値よりかなり速くなっている。したがって、それだけについて云えば良い応答であると云えるが、二次形の応答に対する近似と云う実から見ると近似度は良くないと云える。

この他に、参考のために、オ5-4図においてサンプラによって再現すべき Ω として(5-24)を取ると(この場合ゲイン交点からの各 γ_0 に対する減衰は-10~-11dBとなる) $\omega_0 T$ は(5-25)で与えられ、各 γ_0 に対する値はオ5-6表になる。

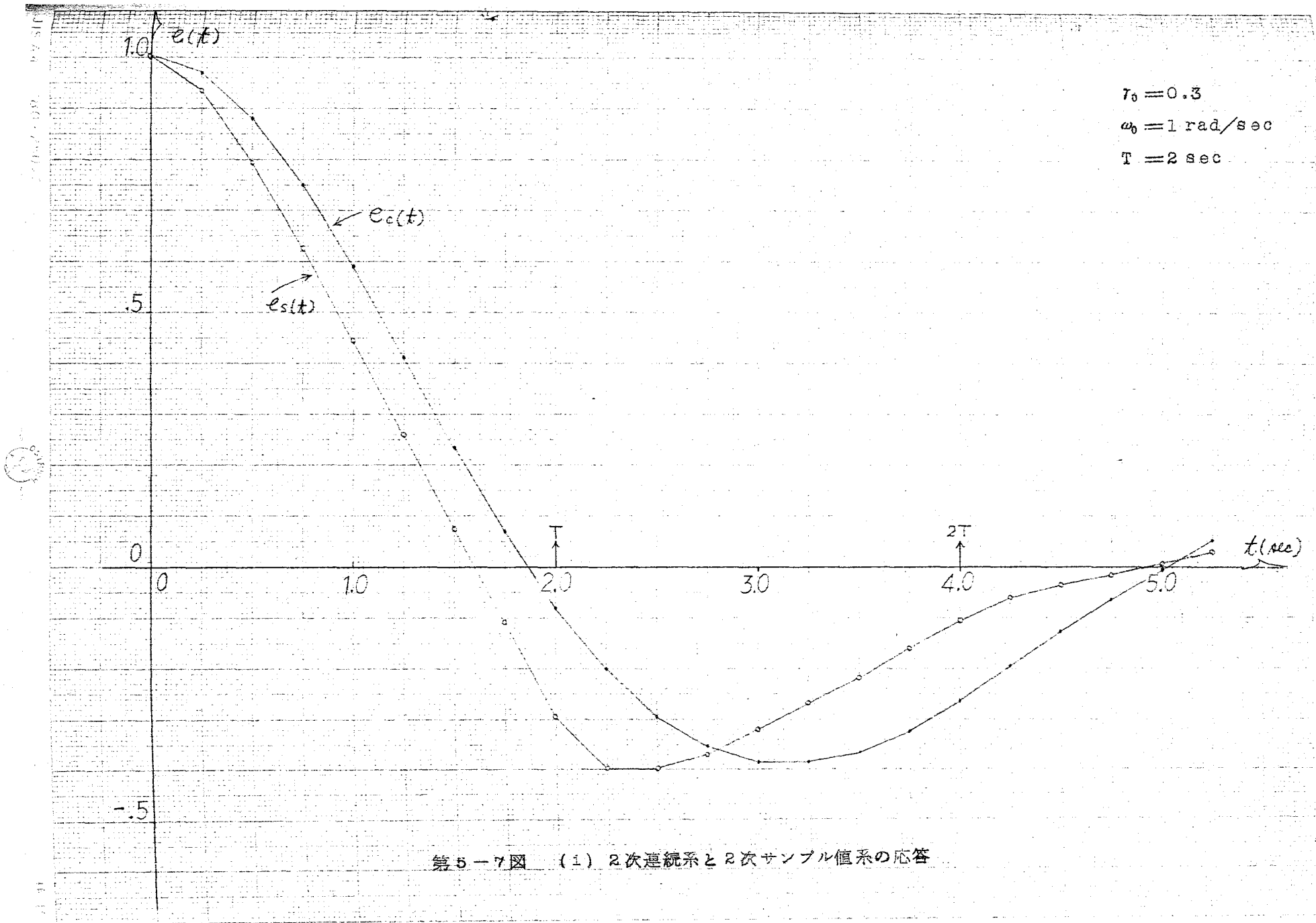
$$\Omega = 2.0 \quad (5-24)$$



第5-6図 (1) 2次連続系と2次サンプル値系の応答

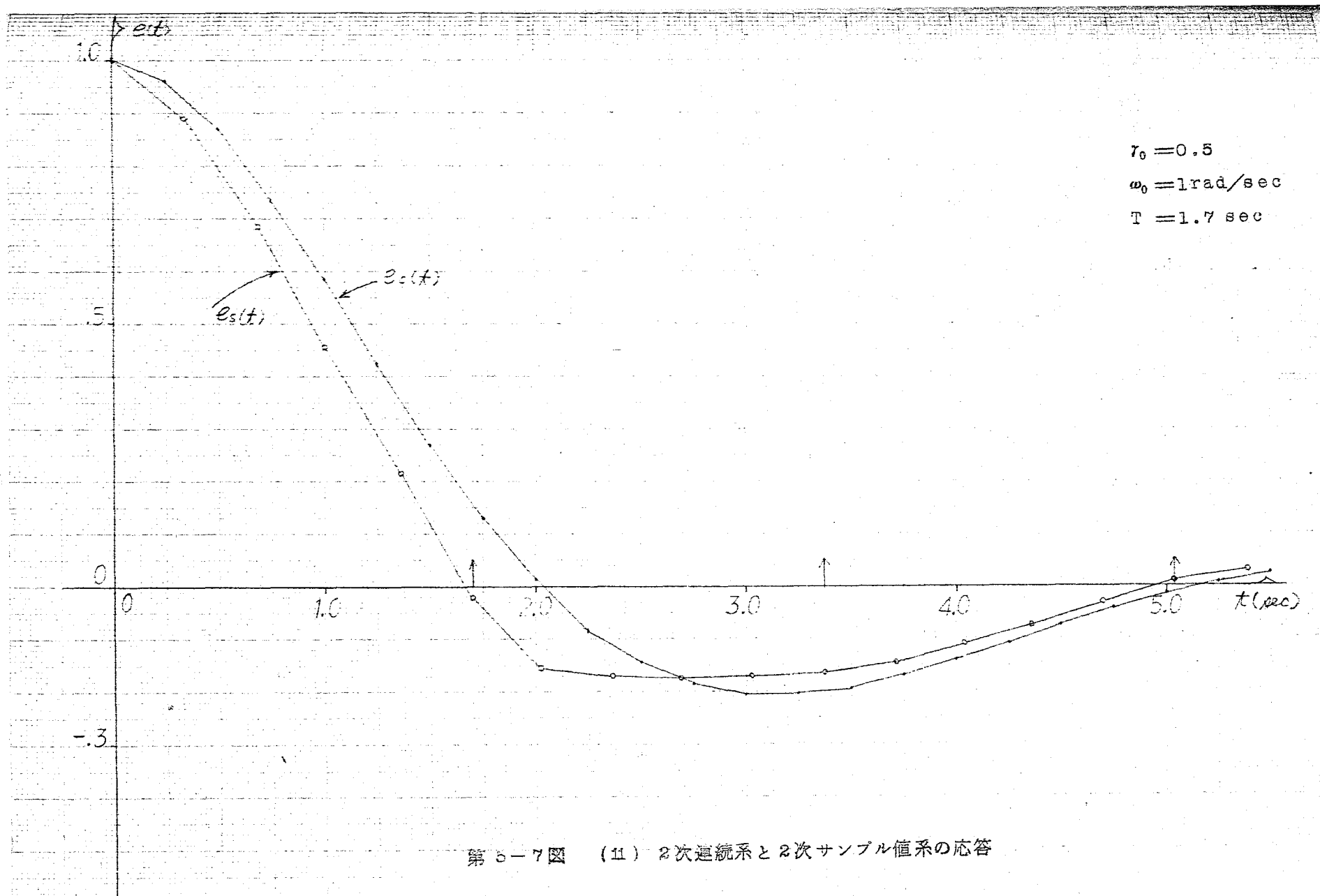


第 5-6 図 (ii) 2 次連続系と 2 次サンプル値系の応答



第5-7図 (1) 2次連続系と2次サンプル値系の応答

55



第 8-7 図 (11) 2 次連続系と 2 次サンプル値系の応答

$$\omega_0 T \leq \frac{\pi}{\Omega(1+\gamma_0^2)^{1/2}} \quad (5-25)$$

γ_0	0.3	0.4	0.5	0.6
$\omega_0 T$	1.505	1.460	1.405	1.350

(オ5-6表)

また、 Ω を $\Omega = 2\Omega_r$ までとすると γ_0 に対する $\omega_0 T$ はオ5-7表になる。

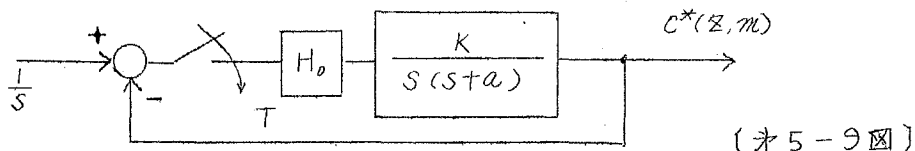
γ_0	0.3	0.4	0.5	0.6
$\omega_0 T$	1.650	1.715	1.815	1.965

(オ5-7表)

オ5-6表、オ5-7表および ω_{15} , ω_9 に対応する $\omega_0 T$ をプロットするとオ5-8図が得られる。これから、 $\omega_0 T$ に対する限界を ω_{15} としても、あるいは、 $\Omega = 2$ としても良いし、あるいはさらにおおまかに云って、 $\omega_0 T$ の限界を $\pi/2$ rad までとしても近似度はさう悪くならないと云うことができる。

(3) 2次サンプル値系の $\omega_0 T$ を変化した時の $\oplus m$, t_m

$\omega_0 T$ の限界での行き過ぎ量 $\oplus m$ およびそれを与える時刻 t_m は各 γ_0 に対してオ5-4表のようになるが、ここでは、オ5-9図の2次サンプル値系において $\gamma_0 = 0.3$ として、 $\omega_0 T$ を適当に変化した場合の系の $\oplus m$, t_m について述べる。



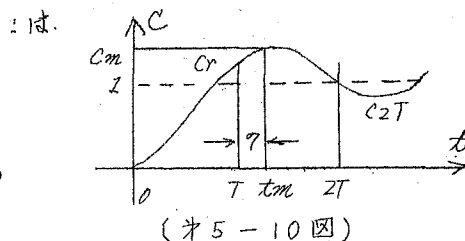
オ5-9図における系の閉回路のサンプリング区間における応答は(1-3), (1-4) すなわち、(5-26), (5-27) で与えられる。

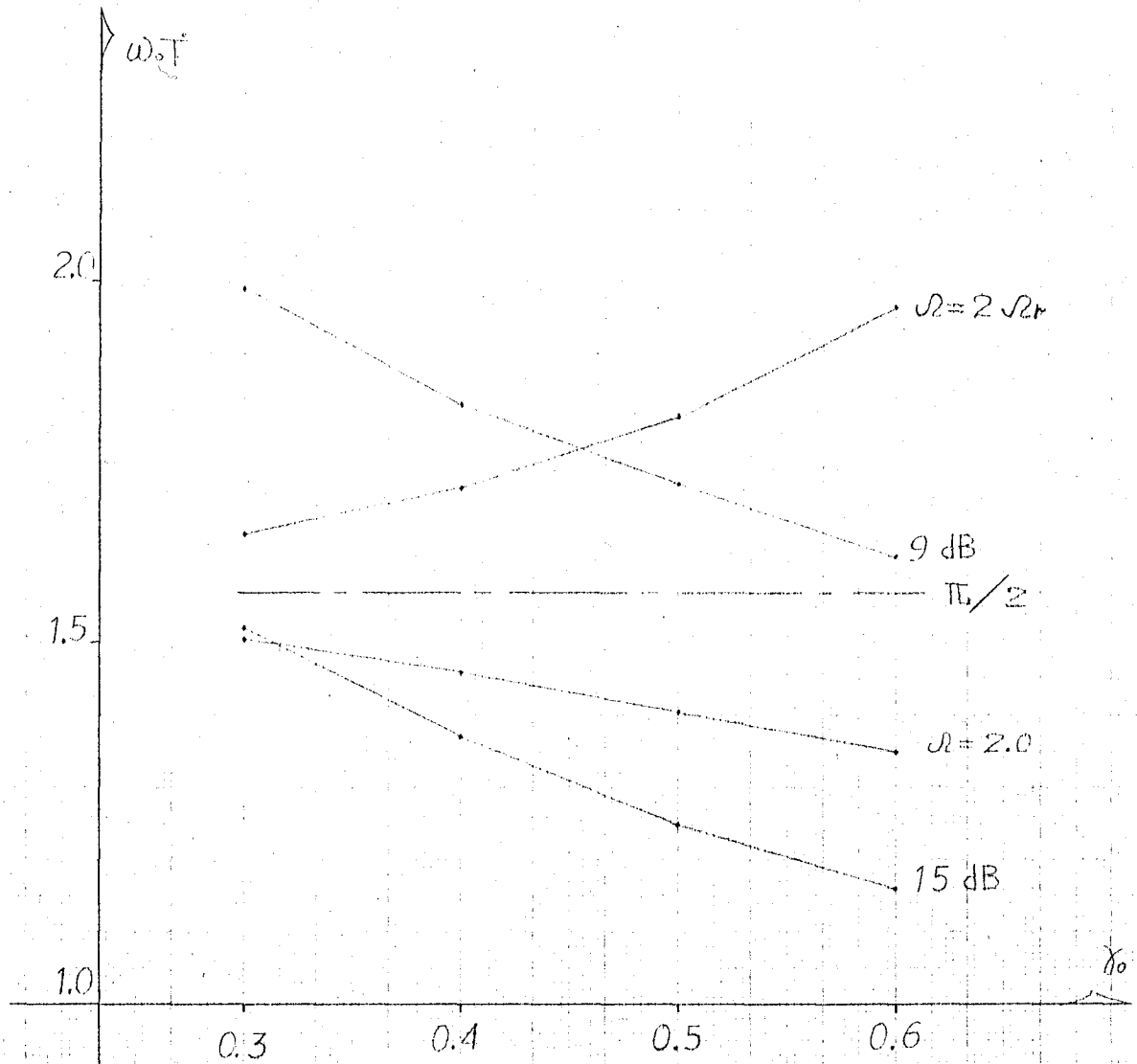
$$\left. \begin{aligned} B(t)_1 &= (K/a^2) \cdot (e^{-at} + at - 1) & 0 \leq t \leq T \\ B(t)_2 &= (K/a^2) \cdot \{e^{-at}(1 - e^{aT}) + aT\} & t \geq T \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

$$\left. \begin{aligned} dB(t)_1/dt &= (K/a) \cdot (1 - e^{-at}) & 0 \leq t \leq T \\ dB(t)_2/dt &= (K/a) \cdot (e^{aT} - 1) e^{-at} & t \geq T \end{aligned} \right\} \quad (5-27)$$

オ5-9図の系において t_m が $T \sim 2T$ の間にあるときは、(1-20), (5-27) およびオ5-10図から、

$$\frac{K}{a} \{ (e^{aT} - 1) e^{-a(t_m+T)} \} + (1 - e^{aT})(1 - e^{-at_m}) = 0 \quad (5-28)$$





第5-8図 現象角周波数 $\omega_0 T$ の限界

ここに、 C_T は T での応答の値

よ式から、 $e^{-a\tau}$ について解き、その自然対数を取ると;

$$\tau = \frac{1}{a} \ln \frac{(C_T - 1) + (1 - A_T)}{(C_T - 1)} \quad (5-29)$$

$$\text{ここに;} A_T = e^{-aT}$$

$$\text{したがって;} \quad t_m = T + \tau \quad (5-30)$$

ここで、(5-29)、(5-30)を(5-26)に代入すれば行き過ぎ量 Θ_m は(5-31)で与えられる。

$$\Theta_{m+1} = C_m = (K/a^2) \{ e^{-a\tau} (A_T - 1) + aT + (1 - C_T) \{ e^{-a\tau} + a\tau - 1 \} \} \quad (5-31)$$

これと同様に、一般に t_m が $nT \sim (n+1)T$ にある時は(5-32)(5-33)となる。

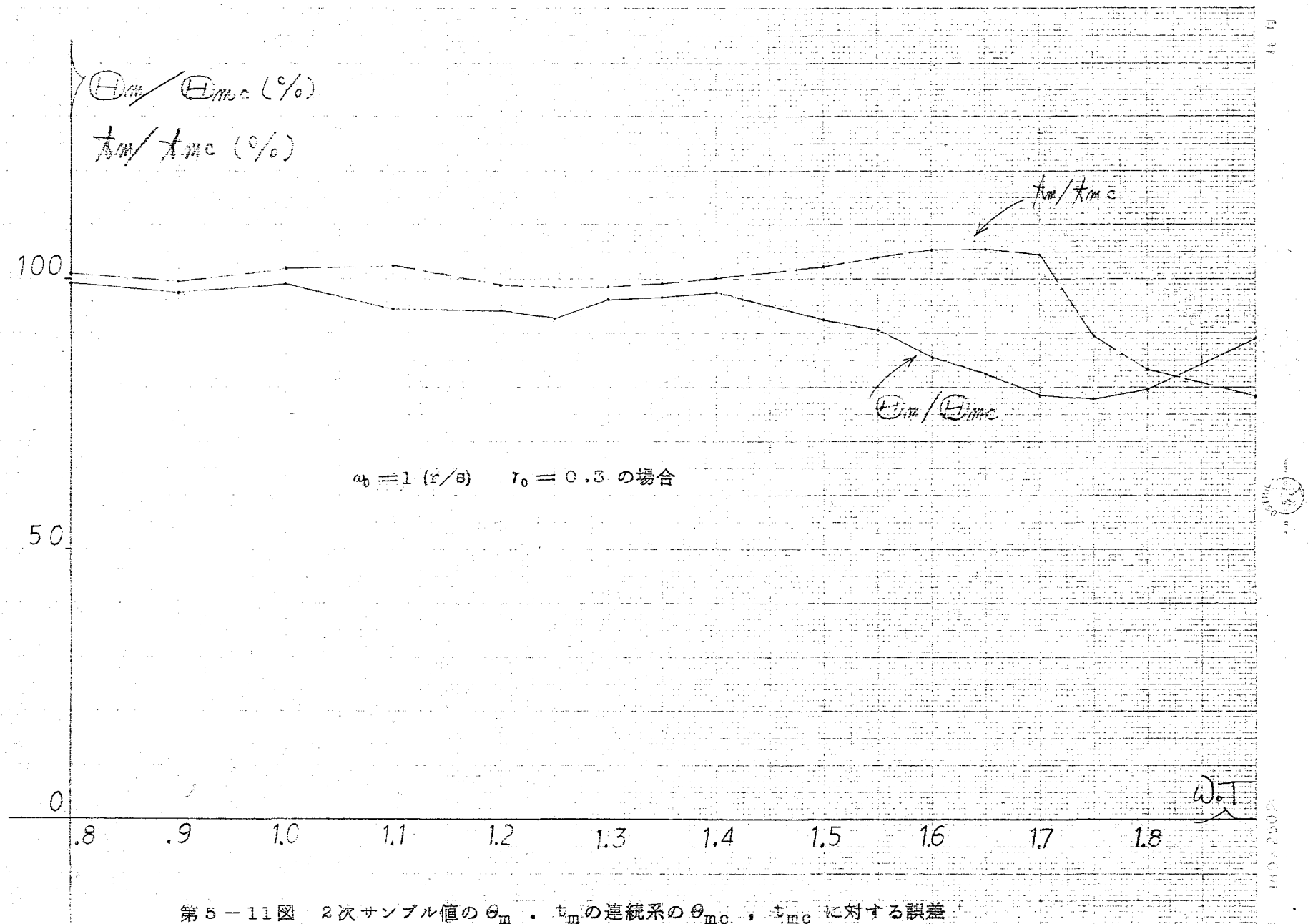
$$\tau = \frac{1}{a} \ln \frac{(C_{nT} - 1) + (1 - C_{(n+1)T})(1 - A_T) + (1 - C_{(n+2)T})(1 - A_T)A_T + \dots + (1 - A_T)A_T^{n-1}}{(C_{nT} - 1)}$$

$$t_m = nT + \tau \quad (5-32)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{m+1} = C_m = & (K/a^2) \{ e^{-a\tau} A_T^{n-1} (A_T - 1) + aT \\ & + (1 - C_T) \{ e^{-a\tau} A_T^{n-2} (A_T - 1) + aT \} + (1 - C_{2T}) \{ e^{-a\tau} A_T^{n-3} (A_T - 1) + aT \} \\ & + \dots + (1 - C_{nT}) \{ e^{-a\tau} + a\tau - 1 \} \} \end{aligned} \quad (5-33)$$

オ5-9図において $\gamma_0 = 0.3$ $\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$ とし、各 $\omega_0 T$ に対して、(4-5)、(4-6)からパラメータ a 、 K の値を求め、それを(5-32)、(5-33)に代入して、 Θ_m 、 t_m を求めると、オ5-8表のようになる。また、ここで、2次連続系の $\gamma_0 = 0.3$ 、 $\omega_0 = 1 (\text{rad/sec})$ に対する Θ_{mc} 、 t_{mc} の値すなわち $\Theta_{mc} = 38.98(\%)$ 、 $t_{mc} = 3.141 \text{ sec}$ に対するそれらの値の比も同表に示す。これをグラフにプロットするとオ5-11図が得られる。

$\omega_0 T$	$\Theta_m (\%)$	$t_m (\text{sec})$	$\Theta_m / \Theta_{mc} (\%)$	$t_m / t_{mc} (\%)$
0.8	38.61	3.185	99.05	101.38
0.9	37.99	3.133	97.46	99.72
1.0	38.62	3.206	99.08	102.05
1.1	36.87	3.228	94.59	102.75
1.2	36.71	3.108	94.18	98.93
1.25	36.13	3.091	92.69	98.39
1.3	37.51	3.097	96.23	98.58
1.35	37.58	3.118	96.41	99.25



第5-11図 2次サンプル値の θ_m 、 t_m の連続系の θ_{mc} 、 t_{mc} に対する誤差

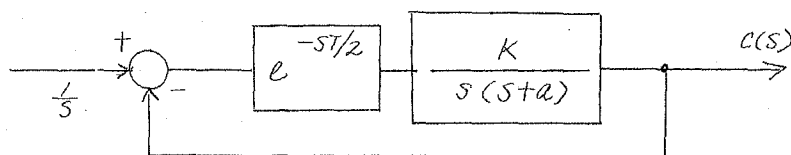
1.4	37.32	3.146	95.74	100.14
1.5	35.97	3.231	92.28	102.84
1.55	35.27	3.268	90.48	104.02
1.6	33.32	3.319	85.48	105.64
1.65	32.11	3.323	82.37	105.77
1.7	30.56	3.285	78.40	104.56
1.75	30.40	2.819	77.99	89.73
1.8	31.12	2.621	79.84	83.43
1.9	34.72	2.458	89.07	78.24

{オ5-8表}

オ5-11図からわかるように、 $\omega_0 T = 1.5$ 以後から急激に誤差が大きくなり、 $\omega_0 T$ の限界を1.5 rad 付近に選んでおけば、それより小さい所では連続系に対する誤差を、 H_m 、 σ_m に対して10%以内におさめることができる。なお、 γ_0 が0.3以外の場合にも、ほとんど同じ結果が得られることは言うまでもない。

(4) 2次サンプル値系の留数と速度誤差定数

オ5-9図に示すような2次サンプル値系をオ5-12図で近似した系についての指定できる $\omega_0 T$ の限界については(2)で述べ、 $W_{15} \text{ dB}$ 、あるいは $\Omega = 2$ とすればよい近似が得られることを示したが、これらについての留数限界の検討を行うと、次のようになる。



{オ5-12図} むだ時間近似した2次サンプル値系

オ5-12図に示す系の留数の逆数ベクトルは、(3-43)に系の定数を代入して、次式で与えられる。

$$1/B_0 = 2 + s_0 T/2 - a/(s_0 + a) \quad (5-34)$$

ここで上式に指定根として(5-35)を代入し、 a が(5-36)であることを考慮すると上式は(5-37)となる。

$$s_0 = (-\delta_0 + j) \omega_0 \quad (5-35)$$

$$a = \omega_0 \{ \gamma_0 - \cot(\omega_0 T/2 + \pi - \tan^{-1}(1/\gamma_0)) \} \quad (5-36)$$

$$\frac{1}{B_0} = \left(2 + \frac{\gamma_0 - \cot \phi_c}{1 + \cot^2 \phi_c} \cot \phi_c - \frac{\gamma_0 \omega_0 T}{2} \right) + j \left(\frac{\omega_0 T}{2} + \frac{\gamma_0 - \cot \phi_c}{1 + \cot^2 \phi_c} \right) \quad (5-37)$$

$$\text{ここに } \gamma_0 - \cot \phi_c = (\gamma_0 + \tan \omega_0 T/2) / (1 - \gamma_0 \tan \omega_0 T/2)$$

上式において、 γ_0 を(5-38)として、適当な $\omega_0 T$ について留数の導数ベクトル計算すると
 図5-13図、および図5-14図が得られる。

$$\gamma_0 = 0.3, \quad 0.5, \quad \omega_0 T = 1.0, 1.4, 1.6, 1.8 \text{ (rad/sec)} \quad (5-38)$$

図5-13図および図5-14図から指定根の $\omega_0 T$ の限界を $W/15\text{dB}$ あるいは、 $\Omega=2$ とすれば、これらが留数条件を充分満足していることがわかる。

他方、指定根を持つ2次連続系の速度誤差定数 K_{v2} と、図5-12図に示す系の速度誤差定数 K_v の比は図5-9表のようになり、(3-60)を満足していることがわかる。

$\omega_0 T$	K_{v2}/K_v	
	$\gamma_0 = 0.3$	$\gamma_0 = 0.5$
1.0	1.86	1.58
1.4	2.14	1.77
1.6	2.26	1.84
1.8	2.37	1.90

(図5-9表) 速度誤差定数

(6) 不完全ホールドを持つ2次サンプル値系について

(1) 不完全ホールドとその近似

今まで述べてきた零次ホールドは、いわゆる完全ホールドで、ホールド期間とサンプリング期間が同じ場合のものである。しかし、実用的には、サンプリング期間中値をホールドしないで、一定時間 $\tau \leq T$ でホールドが解除されるものも考えられる。ここでは、それらについて述べる。

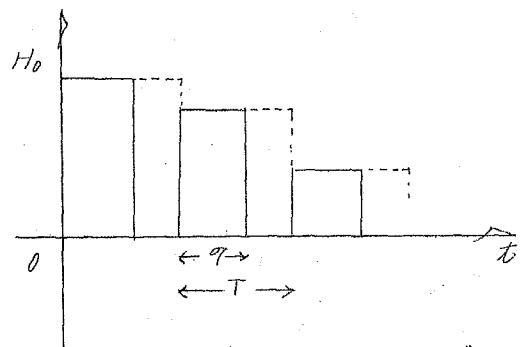
図6-1図は不完全ホールドの例であり、ホールド開始から τ でホールドが解除される。ここでホールド率 P を(6-1)とすると、このホールドの伝達関数は(6-2)で与えられる。

$$P = \tau/T \quad (6-1)$$

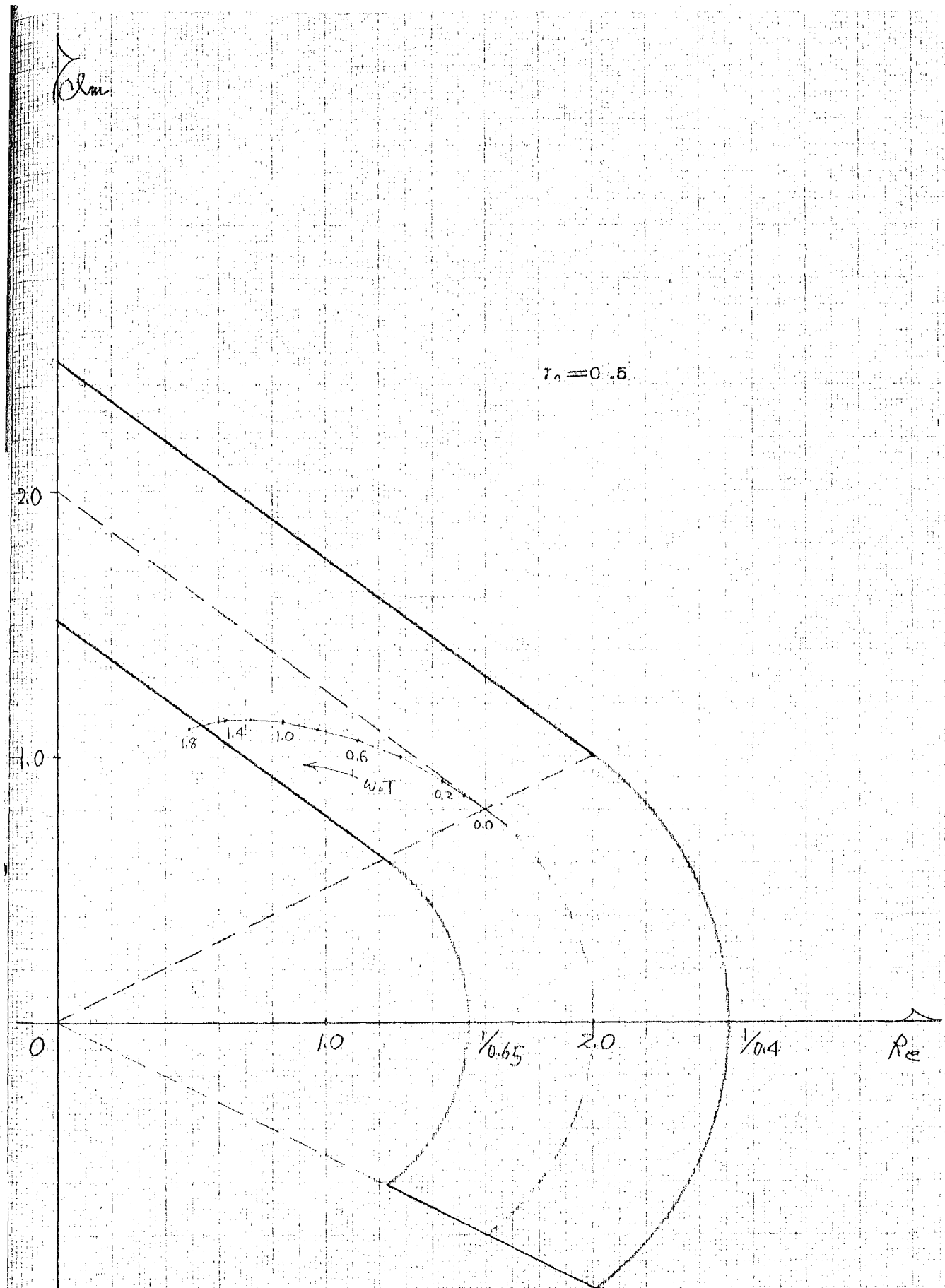
$$H_{op}(s) = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad (6-2)$$

上式から(3-1)~(3-10)と同様にして(6-3)を得る。

$$H_{op} G^*(j\omega) \approx P e^{-j\omega\tau/2} \cdot \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \cdot G(j\omega) \quad (6-3)$$



(図6-1図) 不完全ホールド

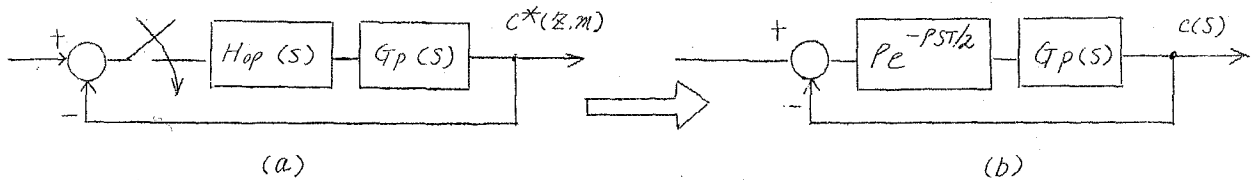


第 6-14 図 むだ時間で近似した 2 次サンプル値系の留数

上式において (b-4) を考慮すると (b-5) となるので、オ6-2 図 (a) の系は、同図 (b) のように近似することができる。

$$\sin(\omega PT/2) / \omega PT/2 \simeq 1 \quad (b-4)$$

$$H_{op}(s) \simeq p e^{-pST/2} \quad (b-5)$$



(オ6-2 図) 不完全ホールダとその近似

(b-3) から (b-5) の近似において、周波数に因しては (b-4) に見るように $\omega T/2$ が p 倍されているので見かけ上 ω がさがり、近似度は良くなるが、ゲインに因して p 倍されるので、 $G_p(s)$ に含まれているゲインを $1/p$ 倍しなくてはならないので、行き過ぎ量が大きくなり近似度は落ちると考える。

(2) 不完全ホールダを持つ二次サンプリング系の応答

オ6-2 図 (a) において $G_p(s)$ を (b-6) として、(b) 図のように近似した系について、(4-2)~(4-4) と同様な計算を行なうと系の各定数として、(b-7) (b-8) を得る。

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad (b-6)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \omega_0 (\gamma_0 - \cot \phi_0) \\ K &= -\omega_0 g_0 / \sin \phi_0 \end{aligned} \right\} \quad (b-7)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに;} \quad g_0 &= \frac{-1}{p} e^{-\gamma_0 \omega_0 T P / 2} (1 + \gamma_0^2)^{1/2} \omega_0 \\ \phi_0 &= \frac{\omega_0 T P}{2} + \pi - \tan^{-1} \frac{1}{\gamma_0} \end{aligned} \right\} \quad (b-8)$$

(b-7), (b-8) にしたがって、 γ_0, ω_0, T, p を各々 (b-9) として、(b-6) の定数 a, K を求めると、オ6-1 表が得られる。

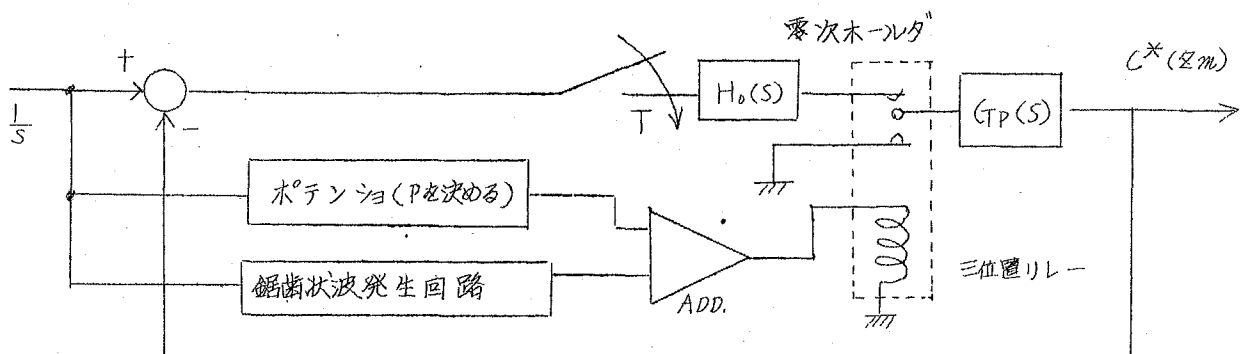
$$T = 1 \text{ sec} \left\{ \begin{array}{lll} \gamma_0 = 0.3 & \omega_0 = 1.0 & 1.8 \text{ (rad/sec)} \\ \gamma_0 = 0.5 & \omega_0 = 1.0 & 1.8 \text{ (rad/sec)} \end{array} \right\} \quad (b-9)$$

この各々につき、 $p = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$

P	$\gamma_0 = 0.3$				$\gamma_0 = 0.5$			
	$\omega_0 = 1$ (r/s)		$\omega_0 = 1.8$ (r/s)		$\omega_0 = 1$ (r/s)		$\omega_0 = 1.8$ (r/s)	
	a	K	a	K	a	K	a	K
0.25	0.746	4.41	1.57	14.6	1.17	5.05	2.38	16.8
0.5	0.898	2.26	2.18	8.02	1.38	2.63	3.26	9.53
0.75	1.091	1.59	3.16	6.50	1.61	1.85	4.81	8.24
1.0	1.308	1.28	5.03	6.93	1.96	1.54	9.71	11.5
2次連続系	0.6	1.09	1.08	3.53	1.0	1.25	1.8	4.05

(オ b - 1 表)

オ b - 1 表の結果をオ b - 3 図のプログラムにしたがってアナコムによって応答を求めると、オ b - 4 図、および、オ b - 5 図の結果が得られる。各々の場合につき、2次連続系の応答と比較するために、それらの応答も示しておく。



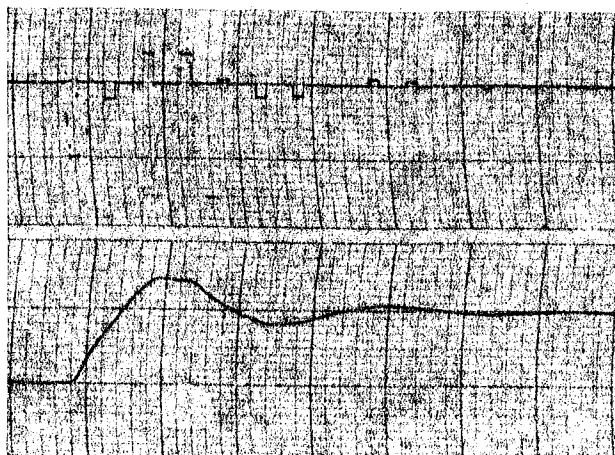
(オ b - 3 図) 不完全ホールドを持つサンプリング系のブロック線図

(3) 留数の逆数ベクトル、速度誤差定数 およびホールド率の限界

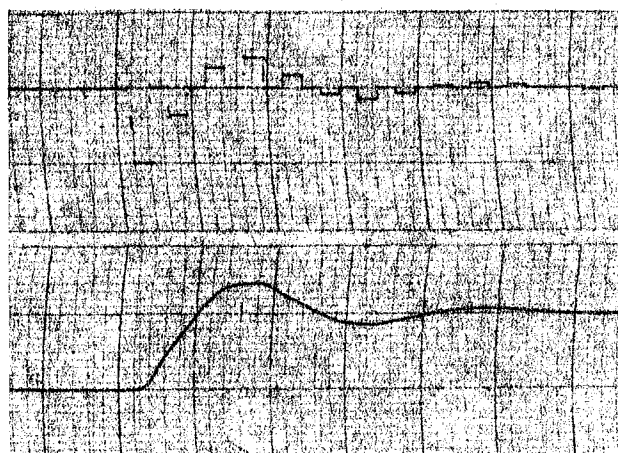
不完全ホールドをオ b - 2 図 (b) のように近似した場合の留数の逆数ベクトルは (3-43) より (b-10) のようになる。

$$\frac{1}{B_0} = 2 + \frac{\rho S_0 T}{2} - \frac{a}{S_0 + a} \quad (b-10)$$

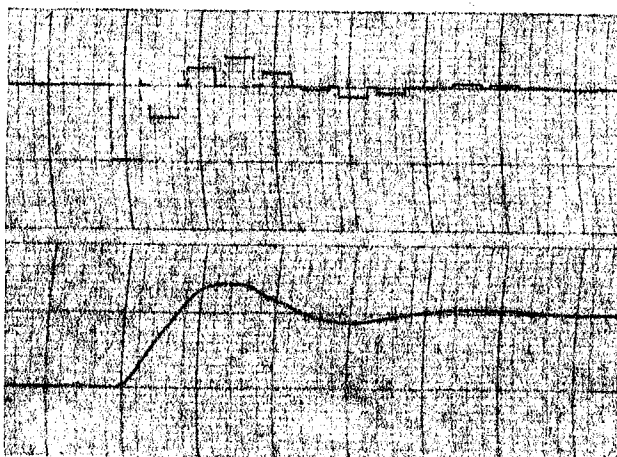
(b-10) にオ b - 1 表の結果を代入して 各々の場合につき $1/B_0$ を求めると、オ b - 2 表が得られ、これを留数限界図にプロットすると、各 γ_0 についてオ b - 6 図のようになる。



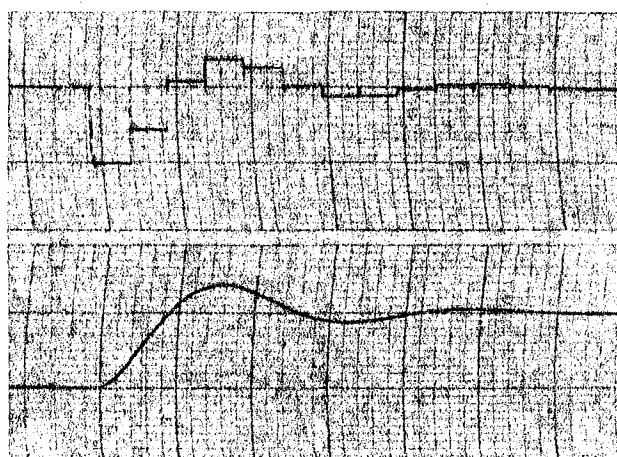
①



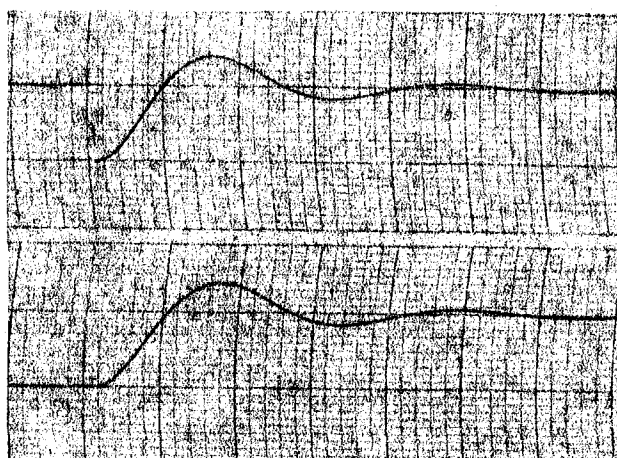
②



③



④

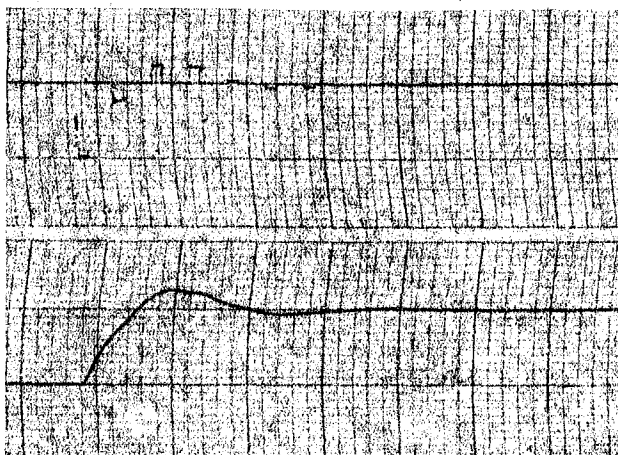


⑤

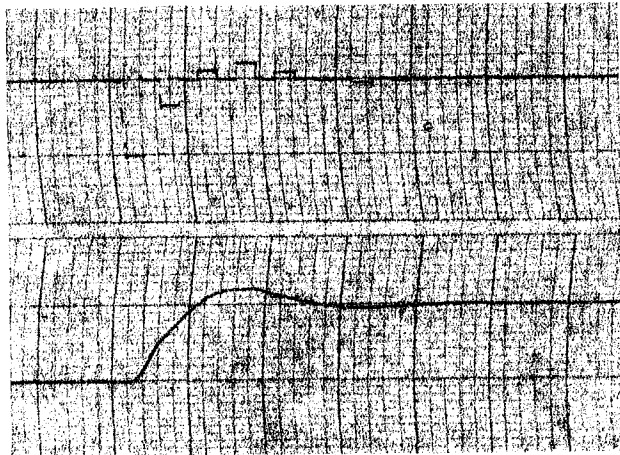
	ρ	a	K
1	0.25	0.746	4.41
2	0.50	0.898	2.26
3	0.75	1.091	1.59
4	1.00	1.308	1.28
5	指定根	0.6	1.09

第6-4図 (1) $r_0 = 0.3$, $\omega_0 = 1.0 \text{ rad/sec}$, $T = 1 \text{ sec}$

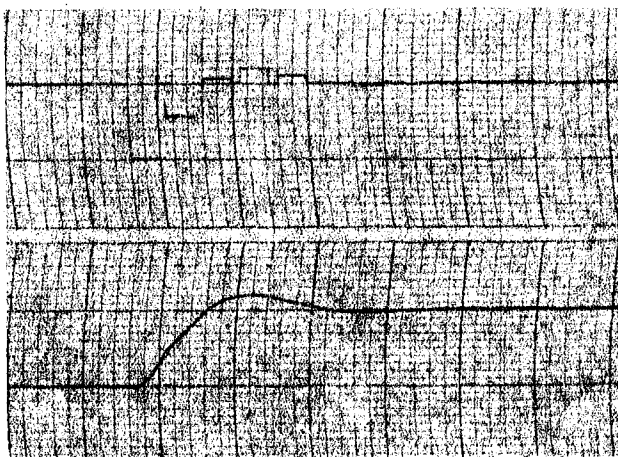
ホールド率を変化した場合の応答



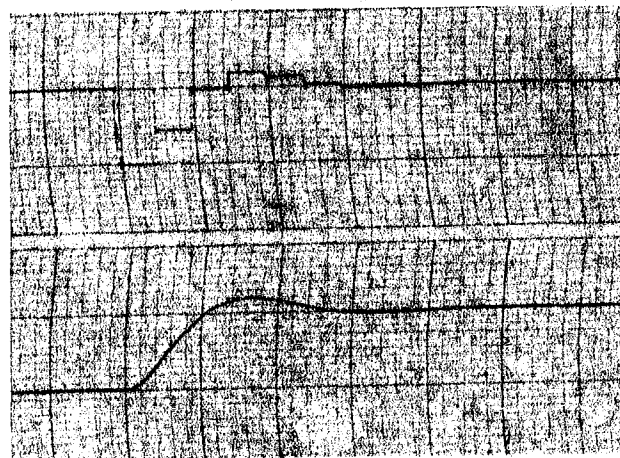
①



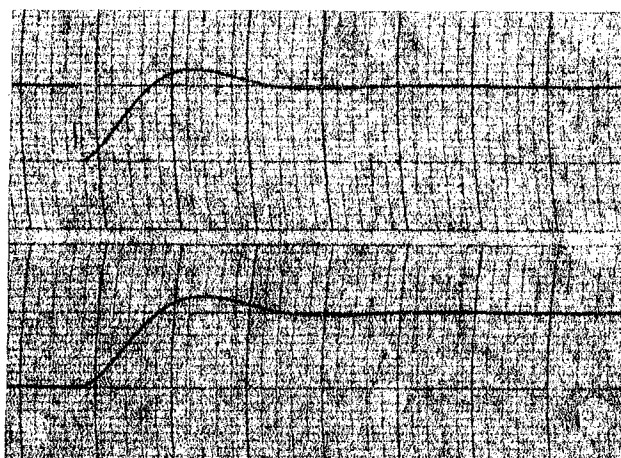
②



③



④

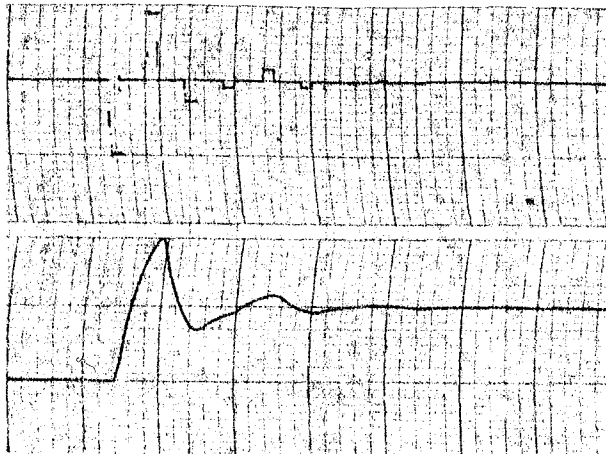


⑤

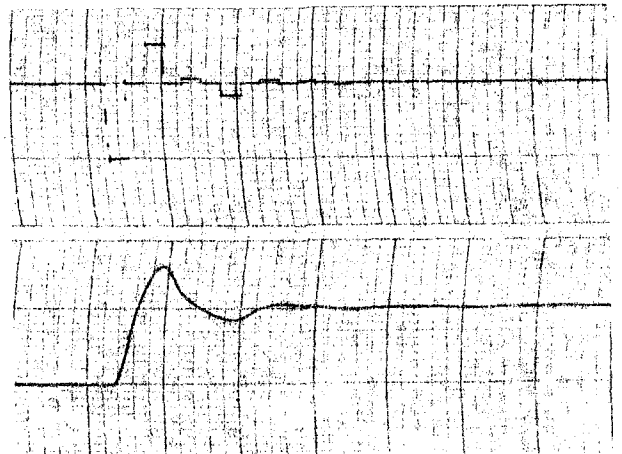
	ρ	a	K
1	0.25	1.17	5.05
2	0.50	1.38	2.63
3	0.75	1.61	1.85
4	1.00	1.96	1.54
5	指定根	1.0	1.25

第 6-4 図 (11) $\gamma_0 = 0.5$ $\omega_0 = 1.0 \text{ rad/sec}$ $T = 1 \text{ sec}$

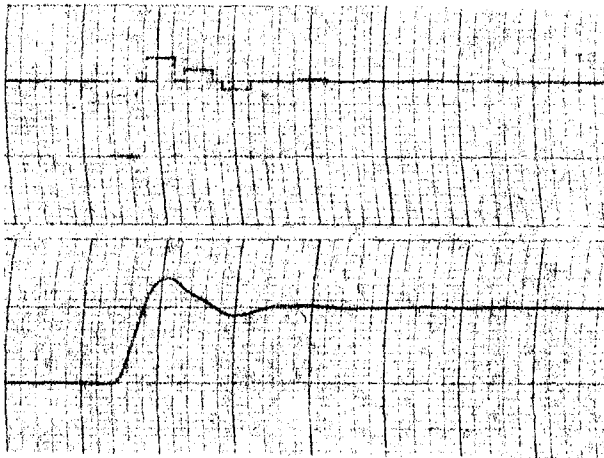
ホールド率を変化した場合の応答



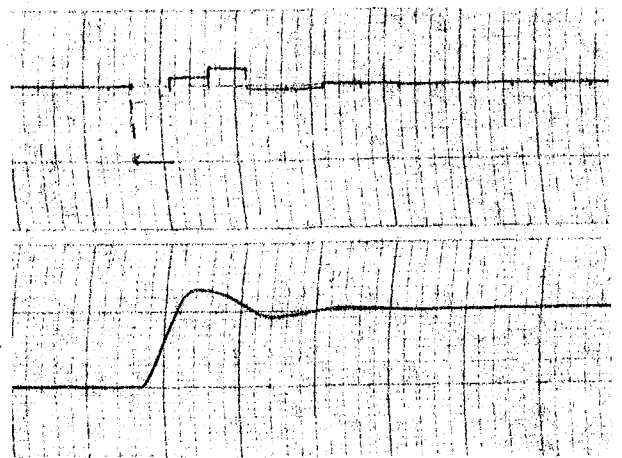
①



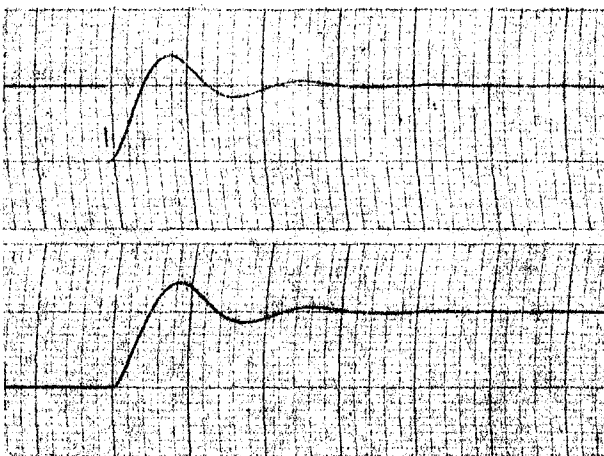
②



③



④

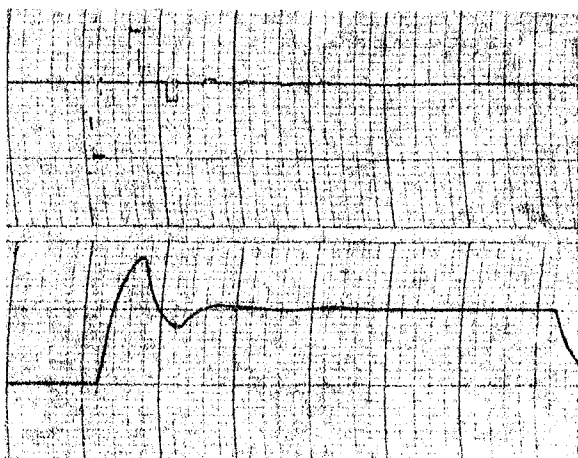


⑤

	ρ	a	K
1	0.25	1.57	14.6
2	0.50	2.18	8.02
3	0.75	3.16	6.50
4	1.00	5.03	6.93
5	指定根	1.08	3.53

第6-5図 (1) $\gamma_0 = 0.3$, $\omega_0 = 1.8 \text{ rad/sec}$ $T = 1 \text{ rad/sec}$

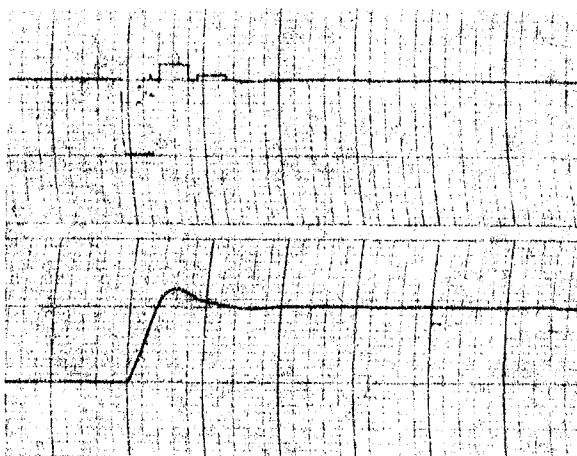
ホールド率を変化した場合の応答



①



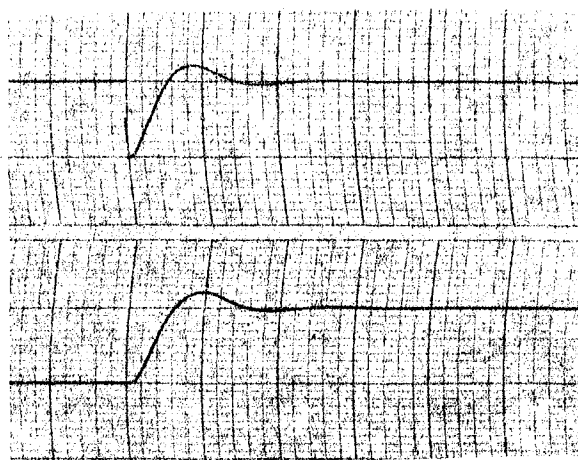
②



③



④



⑤

	ρ	a	K
1	0.25	2.38	16.8
2	0.50	3.26	9.53
3	0.75	4.81	8.24
4	1.00	9.71	11.5
5	指定根	1.8	4.05

第6-5図 (11) $r_0 = 0.5$, $\omega_0 = 1.8 \text{ rad/sec}$ $T = 1 \text{ sec}$

ホールド率を変化した場合の応答

	$\gamma_0 = 0.3$		$\gamma_0 = 0.5$	
	$\omega_0 = 1.0$ (rad/s)	$\omega_0 = 1.8$ (rad/s)	$\omega_0 = 1.0$ (rad/s)	$\omega_0 = 1.8$ (rad/s)
ρ	$1/B_0$	$1/B_0$	$1/B_0$	$1/B_0$
0.25	$1.685 + j0.747$	$1.558 + j0.882$	$1.397 + j0.933$	$1.237 + j1.013$
0.50	$1.527 + j0.912$	$1.266 + j1.112$	$1.197 + j1.030$	$0.900 + j1.114$
0.75	$1.359 + j1.046$	$0.978 + j1.238$	$1.010 + j1.096$	$0.648 + j1.137$
1.00	$1.195 + j1.149$	$0.766 + j1.289$	$0.837 + j1.126$	$0.492 + j1.109$

(オ6-2表) 留数の逆数ベクトル

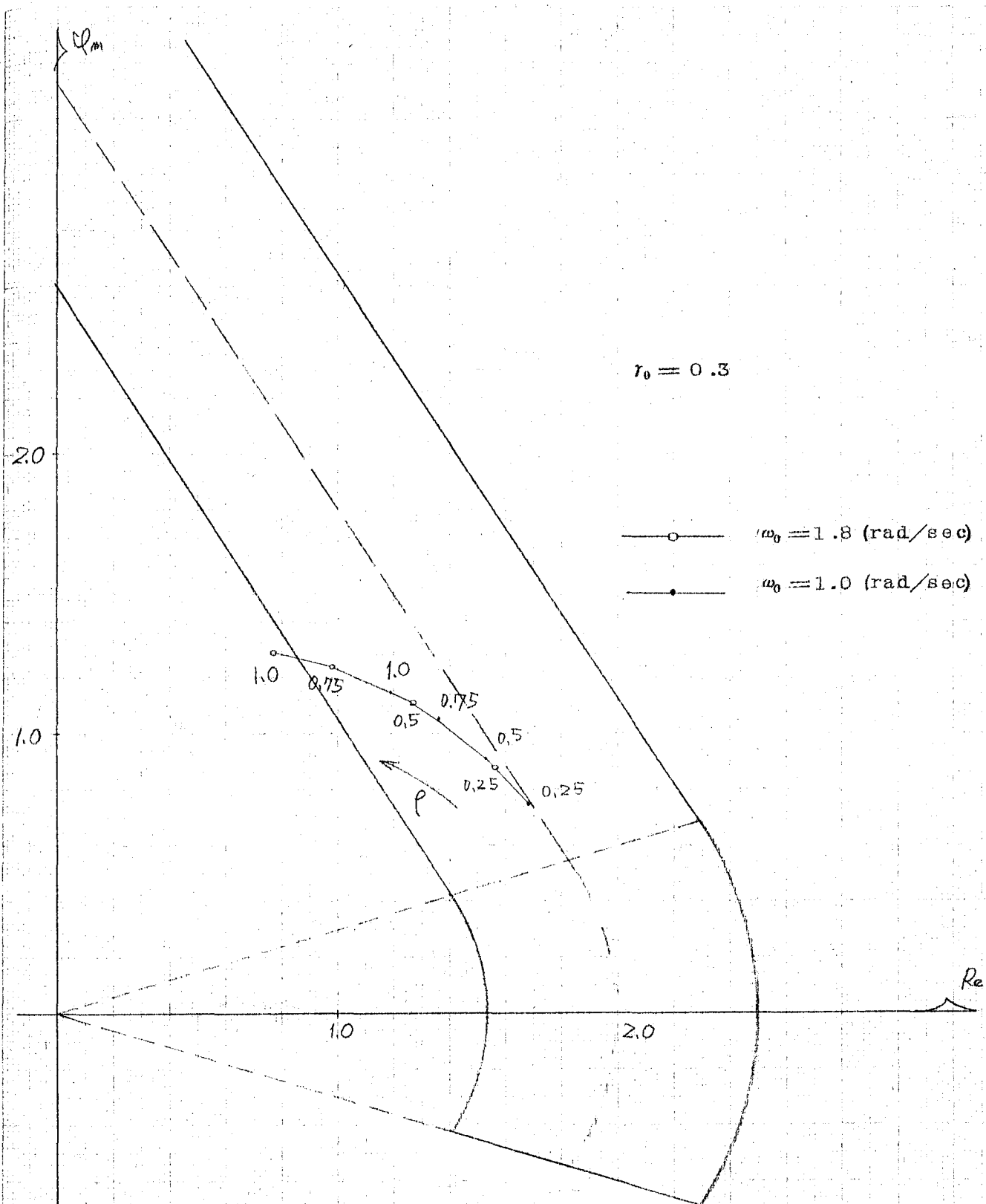
他方、速度誤差定数の比 K_{n2}/K_n をオ6-1表の各々の場合について求めると、オ6-3表の結果が得られる。

(オ6-3表)

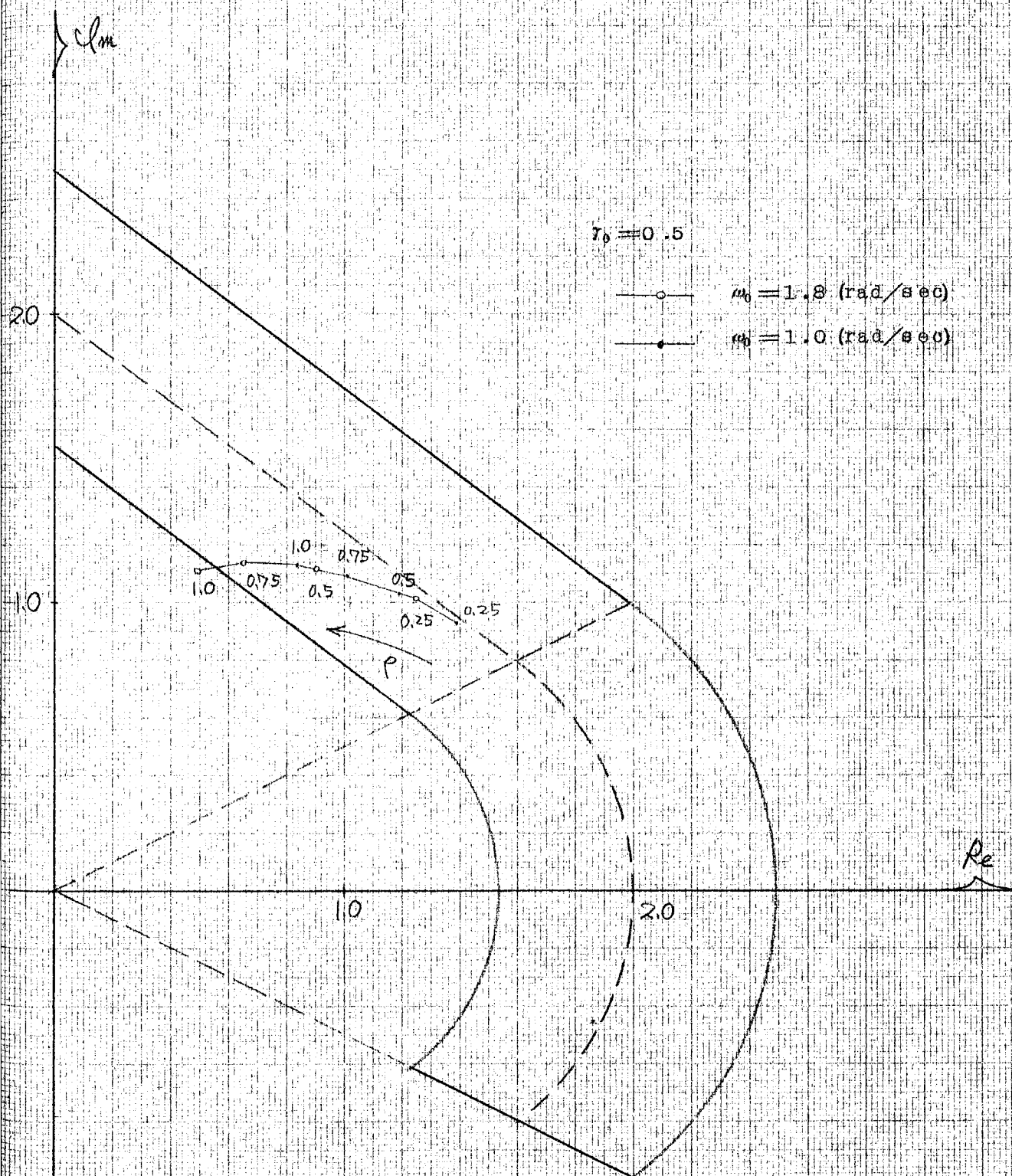
速度誤差定数の比

	$\gamma_0 = 0.3$		$\gamma_0 = 0.5$	
	$\omega_0 = 1.0$ (rad/s)	$\omega_0 = 1.8$ (rad/s)	$\omega_0 = 1.0$ (rad/s)	$\omega_0 = 1.8$ (rad/s)
ρ	K_{n2}/K_n	K_{n2}/K_n	K_{n2}/K_n	K_{n2}/K_n
0.25	0.308	0.351	0.289	0.321
0.50	0.725	0.889	0.654	0.770
0.75	1.25	1.59	1.09	1.315
1.00	1.87	2.37	1.59	1.91

以上の結果から、不完全ホールダを持つ二次サンプル値系の応答の評価を、アナコムによる応答の結果から見ると、オ6-4図(i),(ii)の場合のように、指定根が $\omega_0 T$ の限界内である場合には、 $\rho = 0.25$ の場合でも 応答が高調波を含みいくぶん不自然な波形になっている程度であり、その他の場合には、比較的良好な近似が得られていると考えられる。一方、オ6-5図(i),(ii)の場合のように、指定根が $\omega_0 T$ の限界の外、あるいはその近くでは、応答は指定根を持つ二次連続系のそれと比較して、それほど良いとは言えず、特に $\rho = 0.25$ 、あるいは 0.5 では、行き過ぎ量が非常に大きくなっていると云える。また、応答の評価をオ6-6図(i),(ii)の留数条件から考察すると、 $\gamma_0 = 0.3$ および 0.5 のいずれの場合でも、 $\omega_0 = 1.8$ (rad/sec) の場合に、留数の逆数ベクトルが限界外になっているだけで、その他の場合には限界条件を満足している。特に $\rho = 0.25$ 、あるいは 0.5 では ω_0 の値とはあまり関係なく、二次連続系の留数の逆数ベクトルの値である $2 \angle \tan^{-1} \gamma_0$ の奥の近くに、その値がプロットされている。しかし、これを速度誤差定数の比を示すオ6-3表の結果から見ると、 $\rho = 0.25$ では ω_0 、 γ_0 のいずれの場合にも、速度誤差定数の比による評価の限界である(3-60)を満足していない。すなわち、上に述べたことを要約す



第 6-6 図 (1) 不完全ホールダを持つ系の留数の逆数ベクトル



第6-6図 (11) 不完全ホールドを持つ系の留数の逆数ベクトル

れば、 ρ が小さい所では、留数条件は満足するようになるが、それにつれて、速度誤差定数による条件を満足しなくなり、たとえば、オ6-4図(i)の①と④の比較からわかるように行き過ぎ量が大きくなる傾向があると云うことができる。したがって、不完全ホールドを持つサンプル値系のホールド率の限界としては(6-11)を満足する範囲までとすることが適当であると考えられる。

$$0.5 \leq \rho \leq 1$$

(6-11)

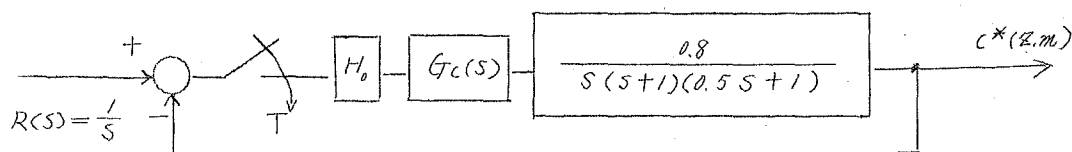
上式を増巾器の線形性という点で考えると、たとえば、オ6-2図(a)の系において $\rho = 0.25$ とすると、始めのサンプリングではサンプラの出力、あるいは不完全ホールド $H_0 \rho$ の出力は一般に目標値と同じになるが、 $G_p(s)$ に含まれる線形増巾器の出力は $\rho = 1$ の場合に比べて、ほぼ $1/\rho = 4$ 倍の出力を出さなければならないので、それだけ広い線形性が増巾器に要求されることになる。このような実用的な点から考えても、 ρ の限界としては(6-11)の範囲が妥当であると考えられる。

(Ⅲ) サンプル値系の特性設計

サンプル値系の解析の所で述べたように、サンプル値系を、そのサンプラとホールドをむだ時間で近似して連続系とした場合、実用上としかえぬ程度ではあるが、いくつかの限界のもとで、充分良い近似が得られる。ここではそれらの性質を利用して、補償回路として、通常連続系で用いられている連続回路を用いて、サンプル値系の特性補償を行なう方法、結果、あるいはその際の留意すべき点などについて述べる。

(1) 「進み回路」による3次サンプル値系の特性補償について(その1) ・

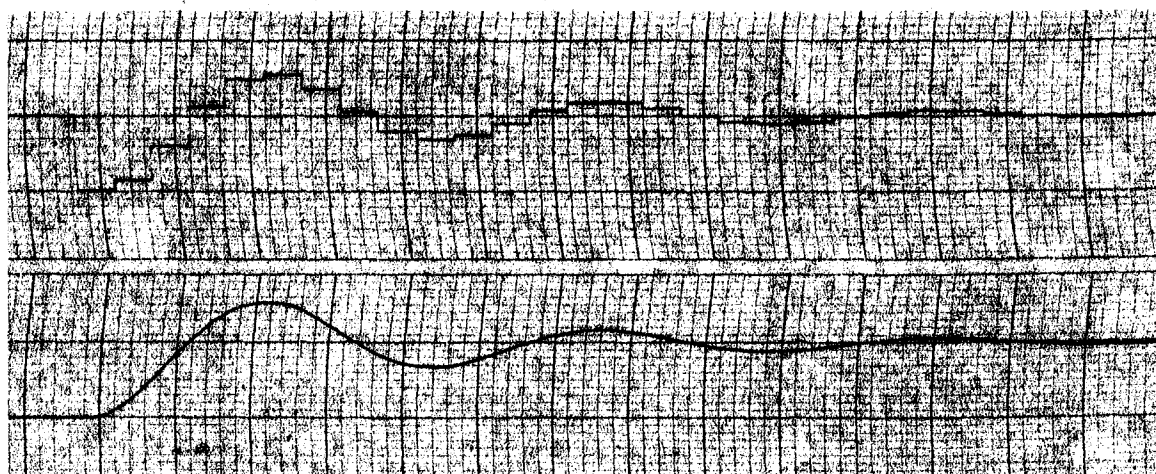
(1) 3次サンプル値系と補償前の系の応答



ここに; $G_c(s)$ = 補償回路

(例1-1図) 例題として取り上げる3次サンプル値系

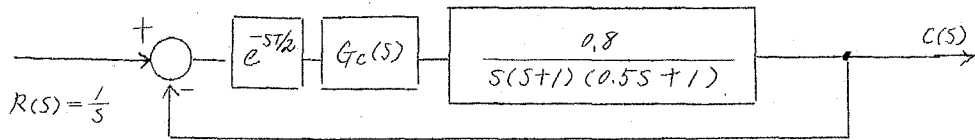
まず、例1-1図に示す系の特性補償の問題をとり上げる。この系のアナログによる応答は例1-2図のようになり、系は一応安定ではあるが、整定時間がかなり長く、行き過ぎ量もいくらか大きい。



(例1-2図) 補償前の系の応答

(2) 補償計算

オ1-1図に与えられた系をオ1-3図のように近似して〔II-3-3〕で述べた方法にしたがって補償回路 $G_c(s)$ に含まれる定数を求める。



(オ1-3図) むだ時間近似した3次サンプル値系

オ1-3図に示す系が満足すべき仕様値を $\gamma_0 = 0.3$ $T = 1$ 秒として、出来るだけ速い応答を与えるようにする。これから、系にあたえるべき指定根は(3-1)となる。

$$s_0 = (-0.3 \pm j) \omega_0 \quad (3-1)$$

また、補償ベクトル、 g_c , $\angle \phi_c$ は(3-2)となる。

$$g_c, \angle \phi_c = \frac{e^{-j\pi} e^{s_0 T/2} s_0 (s_0 + 1) (0.5s_0 + 1)}{0.8} \quad (3-2)$$

ここで、 ω_0 を適当に選んで、各 ω_0 に対して(3-1)を(3-2)に代入すれば、 $g_c, \angle \phi_c$ が求まるわけであるが、代表根指定法では、これらの計算を簡単に行うために(3-3)に示す各 γ_0 に対して、(3-4), (3-5)で与えられるベクトルの計算表、すなわち、補償ベクトル計算表が用意されている。

$$\gamma_0 = 0.0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 \quad (3-3)$$

$$1 + \frac{s_0}{\omega_s} = X + jY = g \angle \phi \quad (3-4)$$

$$\angle (1 + s_0/\omega_s) = X' + jY' = g' \angle \phi' \quad (3-5)$$

ここに(3-4)は(3-2)の補償ベクトルを求めるためのものであり、(3-5)は留数の逆数ベクトルを求めるためのものである。連続系の場合には、これらの二つの式、あるいは必要に応じて、 $20 \log g$ を求めれば良いが、ここで述べている、サンプル値系をむだ時間で近似する方法では(3-2)示すように、 $e^{-s_0 T/2}$ の計算も行なわなければならない。しかし、これは簡単な計算であり、適当な $\omega_0 T$ について計算を行ない、表にまとめるとオ1-1表のようになる。

補償ベクトル計算表および $e^{-s_0 T/2}$ の計算から、(3-1)の各々に対して、(3-2)を求めるとオ1-2表の結果が得られる。

	$ Z_0 $				
$LZ_0(\text{rad})$	δ_0				$LZ_0(\text{deg})$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.00
0.05	0.9851	0.9802	0.9753	0.9704	2.87
0.10	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	5.73
0.15	0.9560	0.9418	0.9277	0.9139	8.60
0.20	0.9418	0.9231	0.9048	0.8869	11.46
0.25	0.9277	0.9048	0.8825	0.8607	14.32
0.30	0.9139	0.8869	0.8607	0.8353	17.19
0.35	0.8985	0.8694	0.8437	0.8106	20.05
0.40	0.8869	0.8521	0.8187	0.7866	22.92
0.45	0.8737	0.8353	0.7985	0.7634	25.78
0.50	0.8607	0.8187	0.7788	0.7408	28.65
0.55	0.8479	0.8025	0.7596	0.7189	31.51
0.60	0.8353	0.7866	0.7408	0.6977	34.38
0.65	0.8228	0.7711	0.7225	0.6771	37.24
0.70	0.8106	0.7558	0.7047	0.6570	40.11
0.75	0.7985	0.7408	0.6873	0.6376	42.97
0.80	0.7866	0.7261	0.6703	0.6188	45.84
0.90	0.7634	0.6977	0.6376	0.5827	51.57
1.00	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	57.30
1.10	0.7189	0.6440	0.5769	0.5169	63.03
1.20	0.6977	0.6188	0.5488	0.4868	68.79
1.30	0.6771	0.5945	0.5220	0.4584	74.52
1.40	0.6570	0.5712	0.4966	0.4317	80.25
1.50	0.6376	0.5488	0.4724	0.4066	85.98
1.60	0.6188	0.5273	0.4493	0.3829	91.71
	0.3	0.4	0.5	0.6	

δ_0

$$Z_0 = e^{j\theta_0} = e^{(-\delta_0 \pm j\theta_0)} = e^{-\delta_0 \pm j\theta_0}, \quad L\theta_0$$

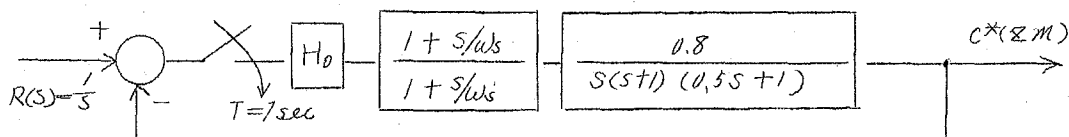
(オ1-1表) $e^{j\theta_0}$ の補償ベクトル計算表

	$\omega_0 = 0.8 (\%)$		$\omega_0 = 0.9 (\%)$		$\omega_0 = 1.0 (\%)$		$\omega_0 = 1.1 (\%)$		$\omega_0 = 1.2 (\%)$		$\omega_0 = 1.3 (\%)$	
	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°
$S_0 + 1$	1.103	46.47	1.159	50.95	1.221	55.01	1.288	58.65	1.360	61.93	1.436	64.86
$0.5S + 1$	0.967	24.44	0.975	27.48	0.986	30.47	0.999	33.37	1.016	36.19	1.035	38.72
$e^{S_0 T/2}$	0.887	22.90	0.874	25.80	0.861	28.65	0.848	31.51	0.835	34.40	0.823	37.30
S_0	0.836	$\frac{180^\circ}{73.30}$	0.942	$\frac{180^\circ}{73.30}$	1.045	$\frac{180^\circ}{73.30}$	1.150	$\frac{180^\circ}{73.30}$	1.253	$\frac{180^\circ}{73.30}$	1.360	$\frac{180^\circ}{73.30}$
$e^{j\pi/k}$	$1/0.8$	-180	$1/0.8$	-180	$1/0.8$	-180	$1/0.8$	-180	$1/0.8$	-180	$1/0.8$	-180
$g_0 L \phi_0$	0.987	20.51	1.162	30.83	1.360	40.73	1.570	50.23	1.810	59.22	2.080	67.00

(オ1-2表) 与えられた系の補償ベクトル

オ1-3図に示す系の補償回路 $G_c(s)$ として、S2-3, すなわち(3-6)で示される伝達関数を持つ回路を撰ぶと、オ1-3図はオ1-4図となる。

S2-3
$$G_c(s) = \frac{1 + s/\omega_s}{1 + s/\omega_n s} \quad (3-6)$$



(オ1-4図) S2-3を補償回路として持つ3次サンプル値系

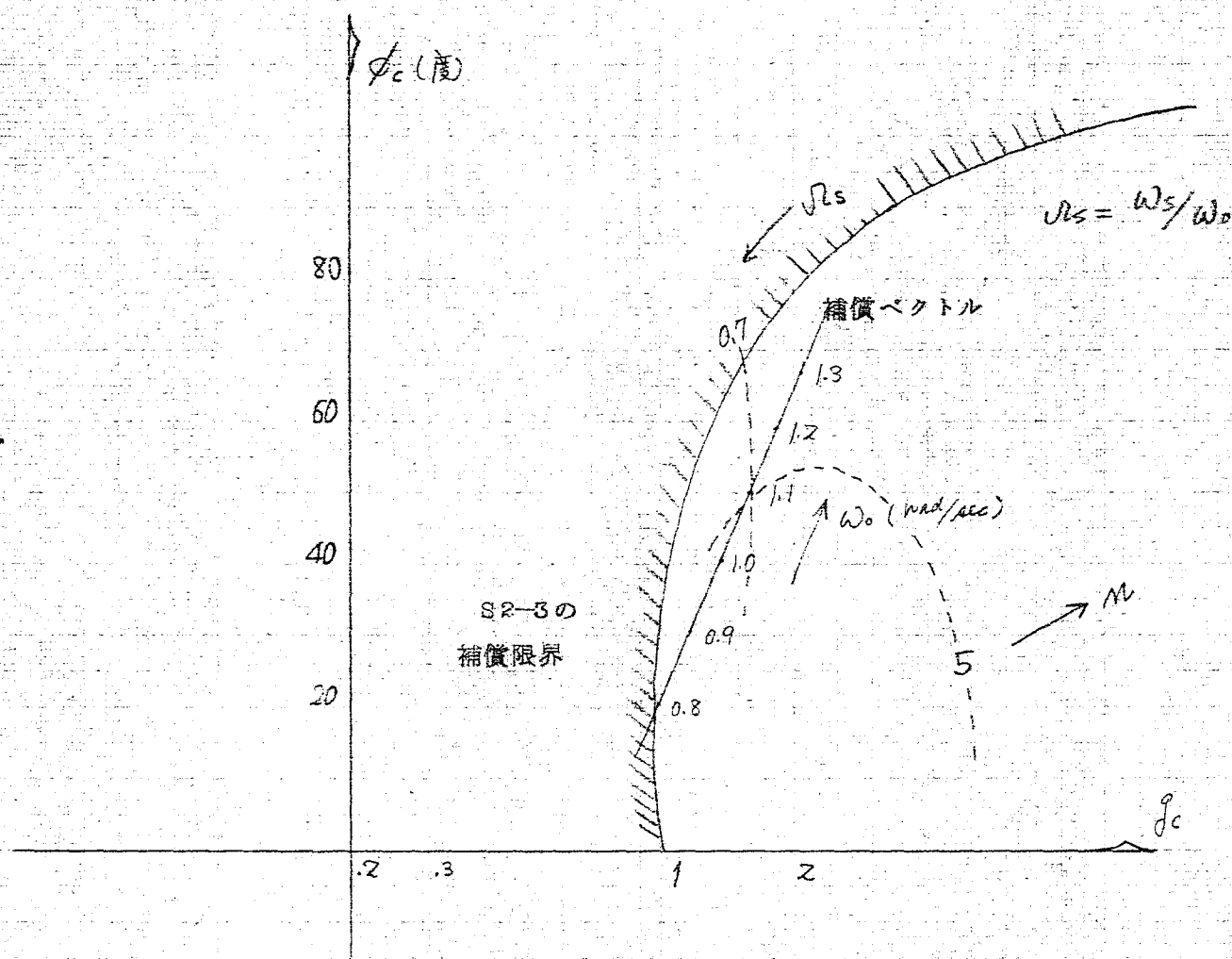
(3-6)で示される補償回路の定数 n , ω_s はオ1-2表で求めた補償ベクトルを片対数方目紙にプロットして、オ1-5図に示すように、補償ベクトル計算線図に、連絡系におけると同様な方法で重ね合わせて、値を読み取って求められるが、ここでは一応、(3-6)の補償公式である(3-7)を使って、各 ω_0 に対する値を計算する。

$$\left. \begin{aligned} \omega_s &= \frac{\omega_0 (1 + \delta_0^2) \sin \phi_c}{g_c - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c} \\ n &= \frac{g_c - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c}{\cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c - 1/g_c} \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

上式にオ1-2表で求めた g_c , ϕ_c を代入して、(3-6)の各定数 $1/\omega_s$, $1/n$ を各 ω_0 に対して求めるとオ1-3表が得られる。

(オ1-3表)
補償回路の各定数

$\omega_0 (\%)$	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
$1/\omega_s$	0.508	0.911	1.12	1.26	1.39	1.51
$1/n$	0.174	0.334	0.274	0.199	0.139	0.095



第1-5図

補償ベクトル計算線図による補償回路の定数の読み取り。(S2-3)

次に補償回路の各定数を代入して、オ1-3図の留数の逆数ベクトルを(Ⅱ-(3-43))、すなわち、次の(3-8)から求めると、補償ベクトル計算表の(3-5)に相当する項から、各値を読み取ってオ1-4表を得る。

$$\frac{1}{B_0} = \frac{S_0 T}{2} + n + l - m + \sum_{i=1}^m \frac{1}{1 + S_0 T s_i} - \sum_{j=1}^l \frac{1}{1 + S_0 T p_j} \quad (3-8)$$

ω_0 (rad/s)	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
$S_0 T/2$	$-0.120 + j0.440$	$-0.135 + j0.445$	$-0.15 + j0.5$	$-0.165 + j0.55$	$-0.18 + j0.6$	$-0.195 + j0.65$
$(H^S/\omega_s)^{-1}$	$0.939 - j0.433$	$0.615 - j0.659$	$0.392 - j0.661$	$0.257 - j0.612$	$0.164 - j0.55$	$0.103 - j0.489$
$(S_0 + 1)^{-1}$	$0.624 - j0.657$	$0.544 - j0.670$	$0.490 - j0.671$	$0.403 - j0.663$	$0.346 - j0.649$	$0.296 - j0.630$
$(0.5S_0 + 1)^{-1}$	$0.942 - j0.448$	$0.910 - j0.473$	$0.874 - j0.514$	$0.835 - j0.550$	$0.794 - j0.581$	$0.752 - j0.607$
$(1 + S^S/\omega_s)^{-1}$	$1.016 - j0.073$	$1.00 - j0.298$	$0.988 - j0.334$	$1.00 - j0.298$	$1.012 - j0.250$	$1.019 - j0.201$
$n+l-m$	3	3	3	3	3	3
	$1.237 + j1.125$	$1.026 + j1.232$	$0.910 + j1.368$	$0.854 + j1.449$	$0.832 + j1.530$	$0.841 + j1.599$

(オ1-4表) 補償した系の留数の逆数ベクトル

オ1-4表の結果を留数限界上にプロットするとオ1-6図が得られる。

また一方、あたえられた系の速度誤差定数の逆数 $1/K_n$ は(3-9)で与えられ、指定振を持つ2次連続系の速度誤差定数 $1/K_{n2}$ との比 K_{n2}/K_n は(Ⅱ-(3-53))より、(3-10)で与えられる。

$$\frac{1}{K_n} = \frac{1}{K} = \frac{1}{0.8} = 1.25 \quad (3-9)$$

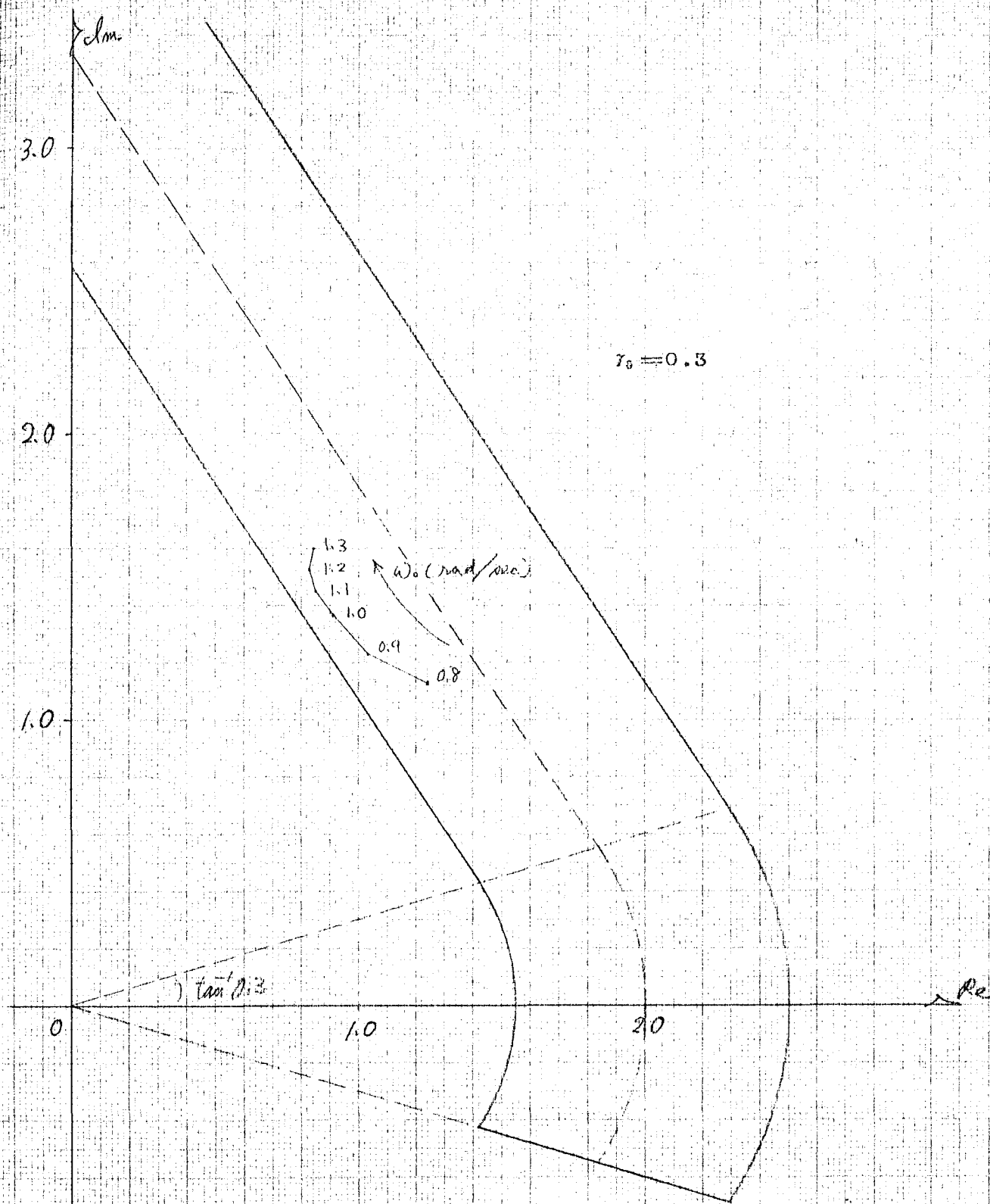
$$\frac{K_{n2}}{K_n} = \frac{1 + \delta_0^2}{2\delta_0} \omega_0 \times 1.25 = 2.271 \omega_0 \quad (3-10)$$

上式から各 ω_0 に対して K_{n2}/K_n を求めると、オ1-5表の結果が得られる。

ω_0 (rad/s)	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
K_{n2}/K_n	1.82	2.04	2.271	2.50	2.72	2.95

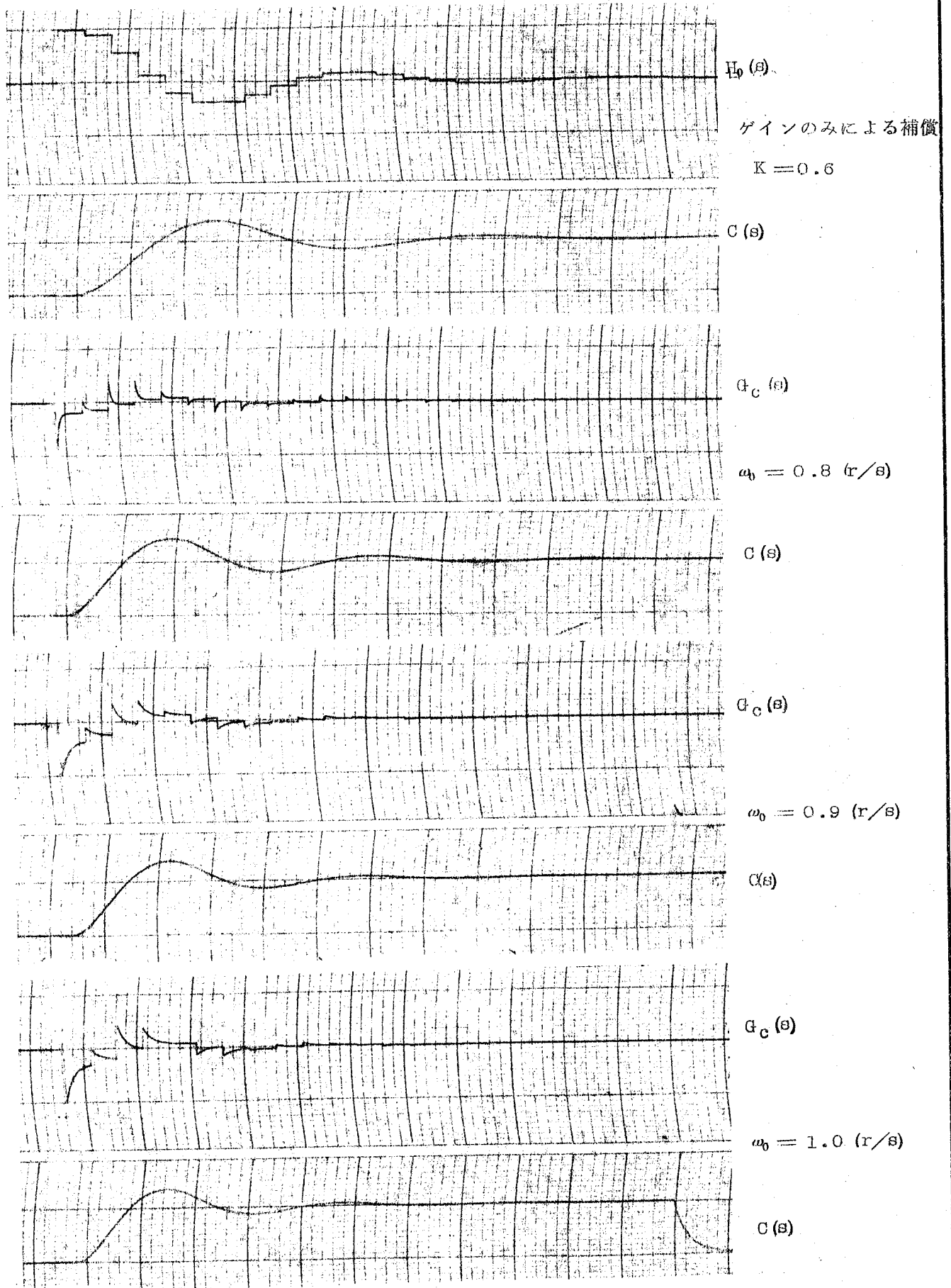
(オ1-5表) 与えられた系の速度誤差定数の比

オ1-6図の留数限界のプロットでは、 $\omega_0 \rightarrow 1.3 \text{ rad/sec}$ まで、一応条件を満足している。しかしオ1-5表の速度誤差定数による評価では、 $\omega_0 = 1.1 \text{ rad/sec}$ までは条件(Ⅱ-(3-60))を満足しているが、それ以上の ω_0 では K_{n2}/K_n がかなり大きくなり、した

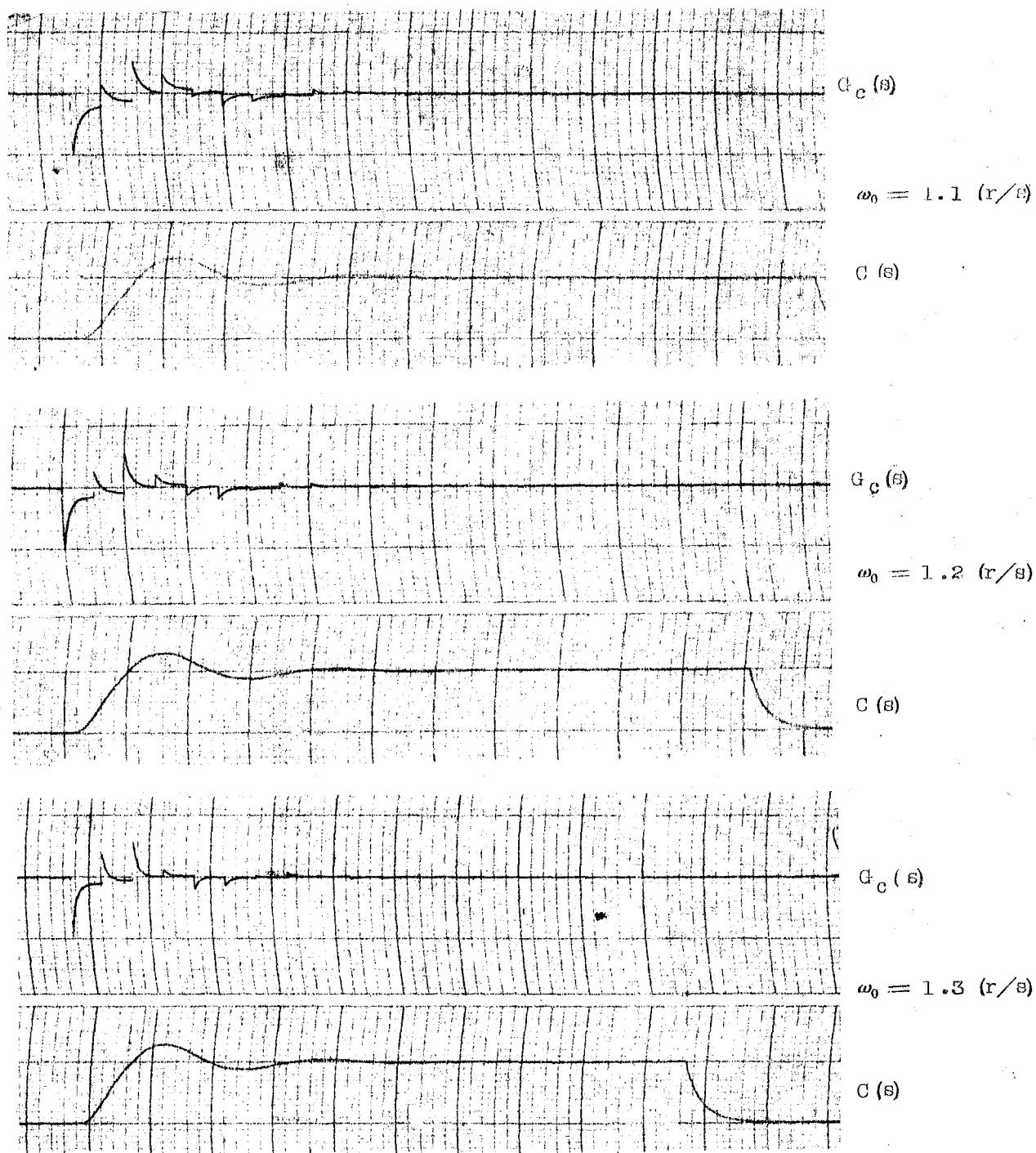


第1-6図 82-3を補償回路とした第1-3図の系の留数限界

以下: $\gamma_0 = 0.3$, サンプルング周期 $T = 1 \text{ sec}$ (紙送り速度: 5 mm/sec)



第1-7図 アナコンによる補償後の応答



以上補償回路の各定数は第 1-3 表による。

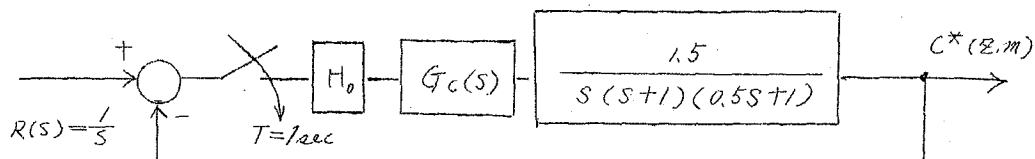
第 1-7 図 アナコムによる補償後の応答

がって行き過ぎ量はかなり小さくなっていると予想される。

上で求めた補償回路を持つ系の応答をアナコムで求めるとオー7図が得られる。

(2) 進み回路による3次サンプル値系の特性補償について。(その2)

(1) 3次サンプル値系と補償前の系の応答



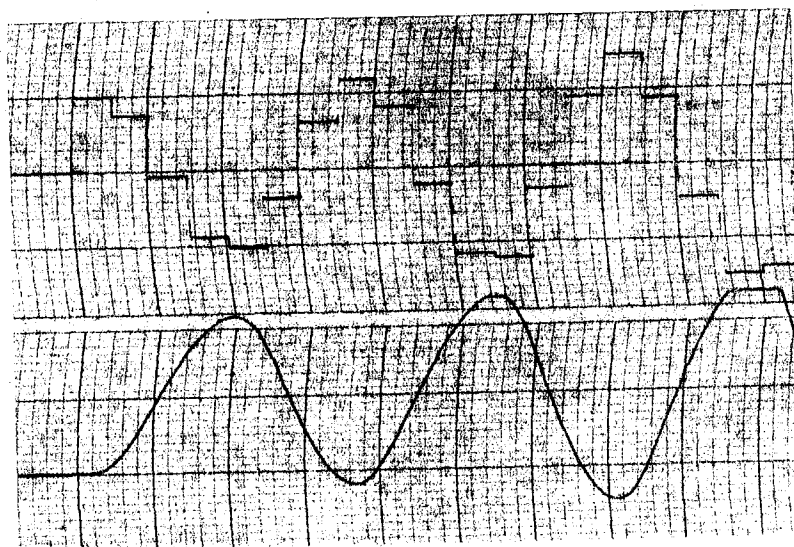
(オ2-1図) 例題として取り上げる3次サンプル値系

ここで例題として取り上げるのはオ2-1図に示す系で、これは図からわかるように前のオ1-1図に示す系のゲインを1.5としたもので、その他、系の時定数、サンプリング周期等は同じものである。

この系のアナコムによる応答は、オ2-2図に示すようになり、図から応答は不安定であることがわかる。

(オ2-2図)

補償前の系の応答



(2) 補償計算

オ2-1図のサンブラ・ホールドをむだ時間近似して、仕様値を(Ⅲ-(1))と同様に、(2-1)とすると、系のゲインが1.5であること以外は前設計例とすべて同じであるから、補償ベクトルは(Ⅲ)オ1-2表で求めた g_c を1/1.5倍して、オ2-1表を得る。

$\omega_0(\%)$	$g_c^{0.7}$	ϕ_c°	$g_c^{0.8}$	ϕ_c°	$g_c^{0.9}$	ϕ_c°	$g_c^{1.0}$	ϕ_c°	$g_c^{1.1}$	ϕ_c°	$g_c^{1.2}$	ϕ_c°
$g_c \angle \phi_c$	0.445	9.65	0.527	20.51	0.620	30.83	0.725	40.73	0.837	50.23	0.967	59.22

(2-1表) 与えられた系の補償ベクトル

$$S_0 = (-0.3 \pm j) \omega_0 \quad \omega_0: 0.7 \sim 1.2 \text{ (rad/sec)} \quad (2-1)$$

ここでは主として系のゲインの変化と応答との関係を見るために、オ2-1図の補償回路として、補償回路のゲインが変化する「進み回路」\$S2-5\$、すなわち、(2-2)で与えられる回路を撰ぶ。

$$S2-5 \quad G_c(s) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + s/\omega_s}{1 + s/\mu\omega_s} \quad (2-2)$$

上式に含まれる、回路の各定数は、前と同様にして、オ2-1表の補償ベクトルを補償ベクトル計算線図の上にプロットして、オ2-3図のようにして求めるか、(2-2)の補償公式である(2-3)に各値を代入して求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega_s} &= \frac{\sin \phi_c}{\omega_0 (\cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c - g_c)} \\ \frac{1}{n} &= \frac{\cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c - g_c}{1/g_c - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c} \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

上式とオ2-1表から求めた補償回路の各定数は、オ2-2表のようになる。

ω_0 (1/s)	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
$1/n$	0.450	0.500	0.443	0.280	0.0428
$1/\omega_s$	0.405	0.853	1.395	2.860	20.81
$1/\mu\omega_s$	0.182	0.427	0.620	0.800	0.892

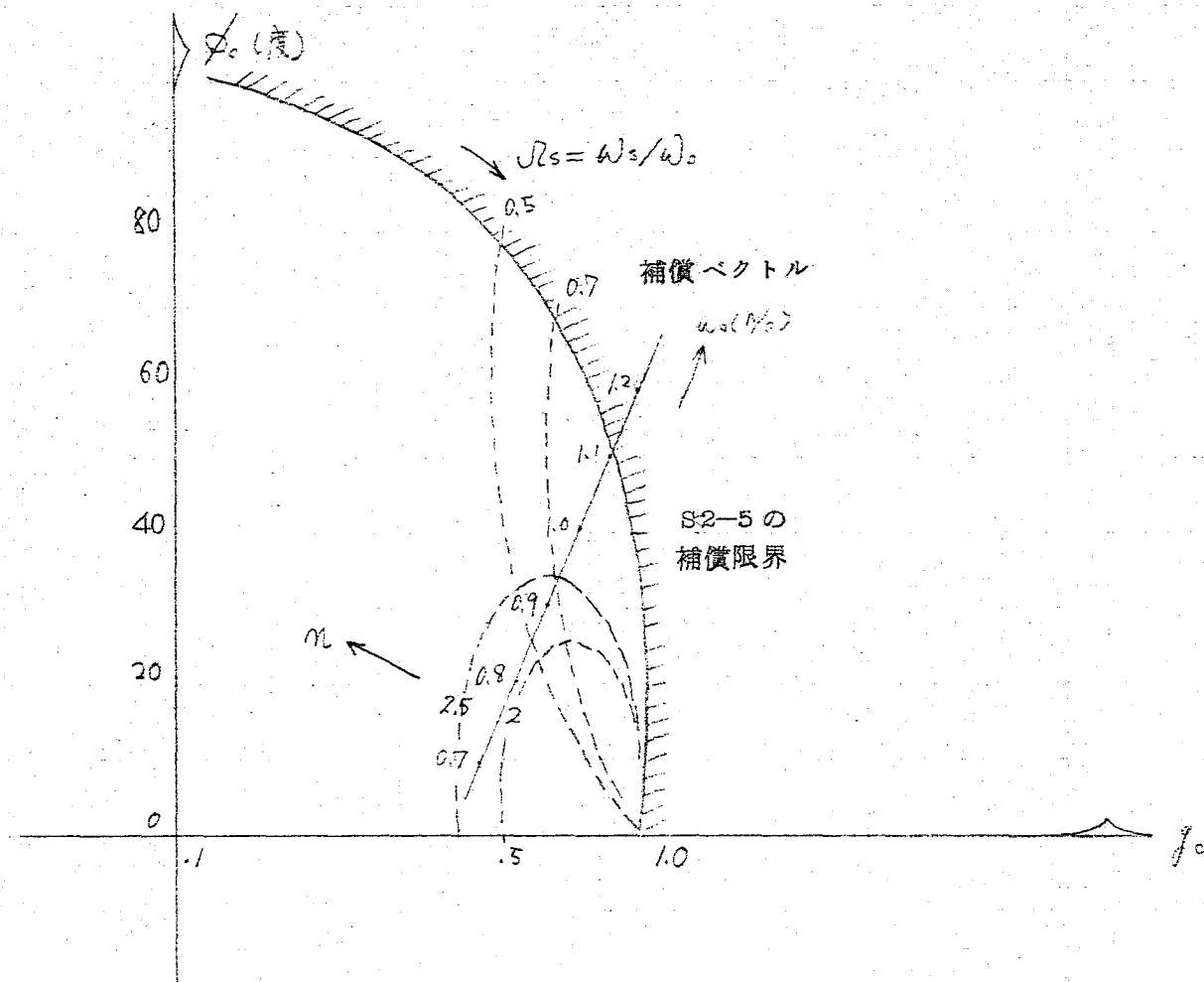
(オ2-2表) 補償回路の各定数

前と同様にして、上で求めた補償回路を持つサンプル値系の留数の逆数ベクトルを求めると、オ2-3表のようになる。

ω_0 (1/s)	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
$s/2$	$-0.105 + j0.35$	$-0.12 + j0.4$	$-0.135 + j0.45$	$-0.15 + j0.5$	$-0.165 + j0.55$
$(1 + S_0/\omega_s)^{-1}$	$0.998 - j0.305$	$0.726 - j0.62$	$0.315 - j0.638$	$0.017 - j0.349$	$-0.011 - j0.041$
$(S_0 + 1)^{-1}$	$0.709 - j0.628$	$0.624 - j0.657$	$0.544 - j0.670$	$0.470 - j0.671$	$0.403 - j0.663$
$(0.5S_0 + 1)^{-1}$	$0.969 - j0.377$	$0.942 - j0.428$	$0.910 - j0.473$	$0.874 - j0.514$	$0.835 - j0.550$
$(1 + S_0/\mu\omega_s)^{-1}$	$1.022 - j0.138$	$0.974 - j0.369$	$0.827 - j0.557$	$0.624 - j0.657$	$0.484 - j0.672$
$n + l - m$	3	3	3	3	3
$g_c \angle \phi_c$	$1.193 + j1.19$	$1.066 + j1.234$	$0.899 + j1.512$	$0.899 + j1.993$	$1.102 + j2.394$

(オ2-3表) 補償後の系の留数の逆数ベクトル

ここで、補償後の系の留数の逆数ベクトルを留数限界図にプロットすると、第2-4図が得られる。



第2-3図 補償ベクトル計算線図による補償回路の定数の読み取り。(S2-5)

また、この系の速度誤差定数は(2-4)となるので、前と同様に、2次連続系のそれとの比を取ること(2-5)となる。

$$\frac{1}{K_v} = \frac{1}{K/n} = \frac{n}{1.5} \quad (2-4)$$

$$\frac{K_{v2}}{K_v} = \frac{1+\delta_o^2}{2\delta_o} \omega_o \frac{n}{1.5} = 1.211 \omega_o n \quad (2-5)$$

(2-5)から、各 ω_o に対する、速度誤差定数の比、 K_{v2}/K_v を求めるとオ2-4表が得られる。

$\omega_o(\%/s)$	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
K_{v2}/K_v	1.88	1.94	2.48	4.33	31.1

(オ2-4表) 補償した系の K_{v2}/K_v

オ2-4図の留数限界条件では、一応補償した系の留数の逆数ベクトルは、限界内にあることがわかるが、 ω_o の増加にともなって、ベクトルは急速に、その虚数部が増加し、したがって、行き過ぎ量が急激に小さくなることが予想される。一方、速度誤差定数の比からは、条件を満足しているのは、 $\omega_o \sim 0.9 \text{ rad/sec}$ までで、 $\omega_o = 1.1 \text{ rad/sec}$ では問題とならないくらい条件からはずれている。これらの様子を、系の応答をアナコムによって求めて示すと、オ2-5図のようになり、これから、 $\omega_o = 0.9 \text{ rad/sec}$ までは一応は、応答が仕様値を満足しているとみなすことができるが、 $\omega_o = 1.1 \text{ rad/sec}$ では、まったく仕様値が満足されていないことがわかる。

代表根指定法では、サンプル値系の解析の所で述べたように、留数限界により補償した系の代表根が指定根をいかに満足しているかを評価し、速度誤差定数の比によって、代表根以外の根、零央が応答におよぼす影響を検討している。一方、S2-5の補償回路を使って、特性補償を行なった場合との違いは、前者では補償によって系のゲインが変化し、後者では、一定であるということである。また、留数の逆数ベクトルを求める計算には系のゲインが現われず、系が一型の場合には速度誤差定数が系のゲインによってほとんど定まってしまうという点を考え合わせると、系のゲインが変化すれば、当然、系の根、零央の位置も変化するが、おおまかにいつて一型の場合の速度誤差定数は、留数の逆数ベクトルの計算ではかくれてしまう系のゲインに対する評価を行なうものであるということができ、このような点から考えると、ここで行なったように3次サンプル値系の特性補償をゲインが変化するS2-5のような補償回路を使う場合には補償範囲が限定されるということができる。

以下 $\gamma_n = 0.3$ サンプルング周期 $T = 1 \text{ sec}$ (紙送り速度: 5 mm/sec)



$H_0(s)$

ゲインのみによる補償

$K = 0.6$

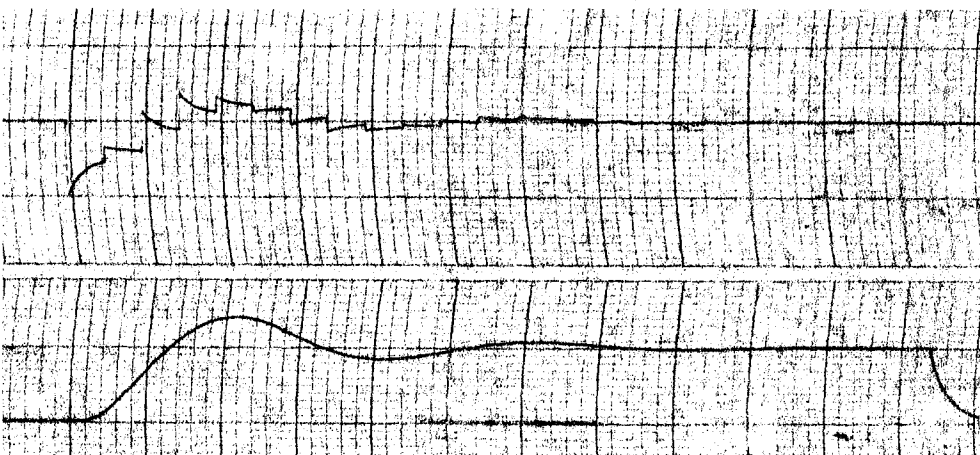
$C(s)$



$G_C(s)$

$\omega_0 = 0.7 \text{ (r/s)}$

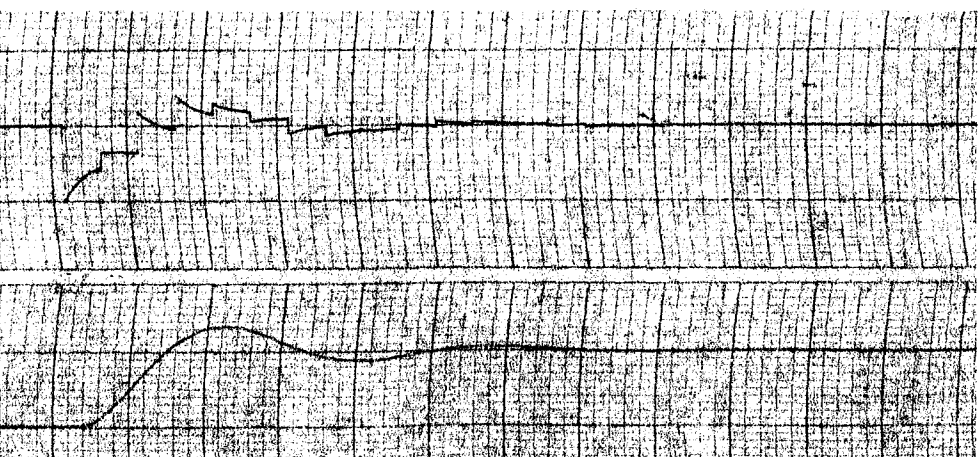
$C(s)$



$G_C(s)$

$\omega_0 = 0.8 \text{ (r/s)}$

$C(s)$

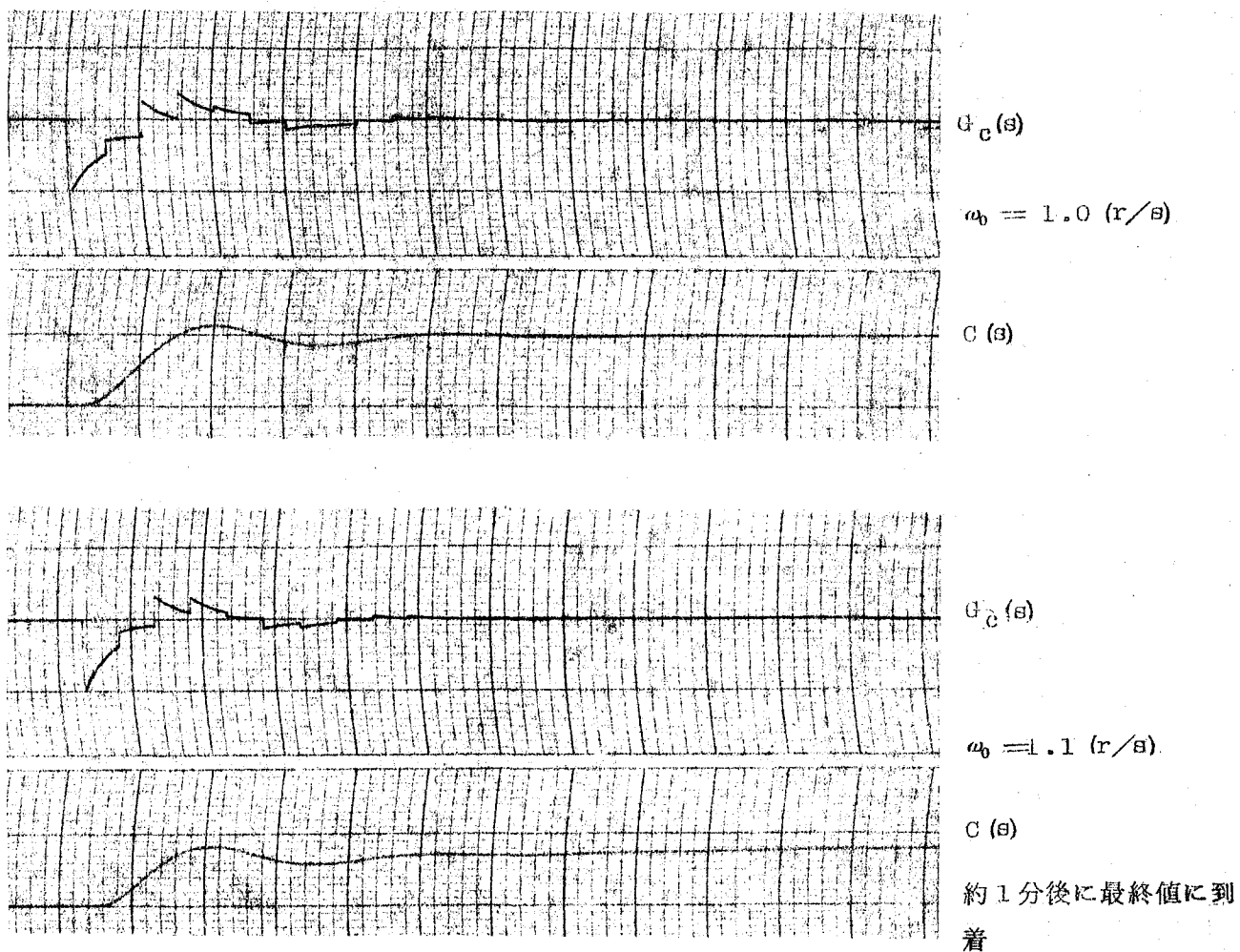


$G_C(s)$

$\omega_0 = 0.9 \text{ (r/s)}$

$C(s)$

第2-5図 補償後の系の応答



以上補償回路の各定数は第2-2表による。

第2-5図 補償後の系の応答

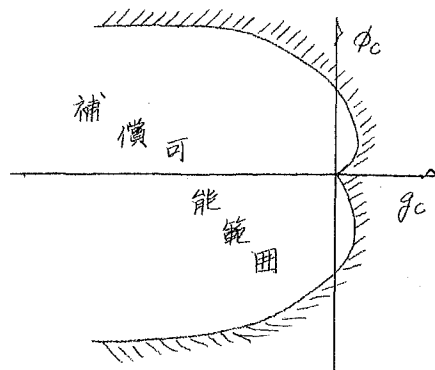
(3) 「遅れ進み回路」によるサンプリング系の特性補償について

(1) 遅れ進み回路

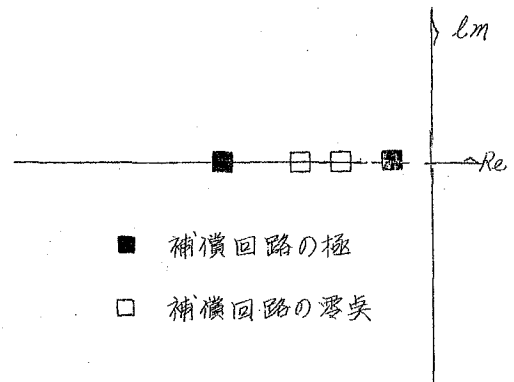
遅れ進み回路は、たとえば(3-1)のような伝達関数を持つもので、この場合の補償限界はオ3-1図のようになり、S面上での根配置はオ3-2図のようになる。

(オ3-1)

$$G_c(S) = \frac{\left(1 + \frac{S}{\omega_{s1}}\right) \left(1 + \frac{S}{\omega_{s2}}\right)}{\left(1 + \frac{S}{\pi \omega_{s1}}\right) \left(1 + \frac{S}{\pi \omega_{s2}}\right)} \quad (3-1)$$

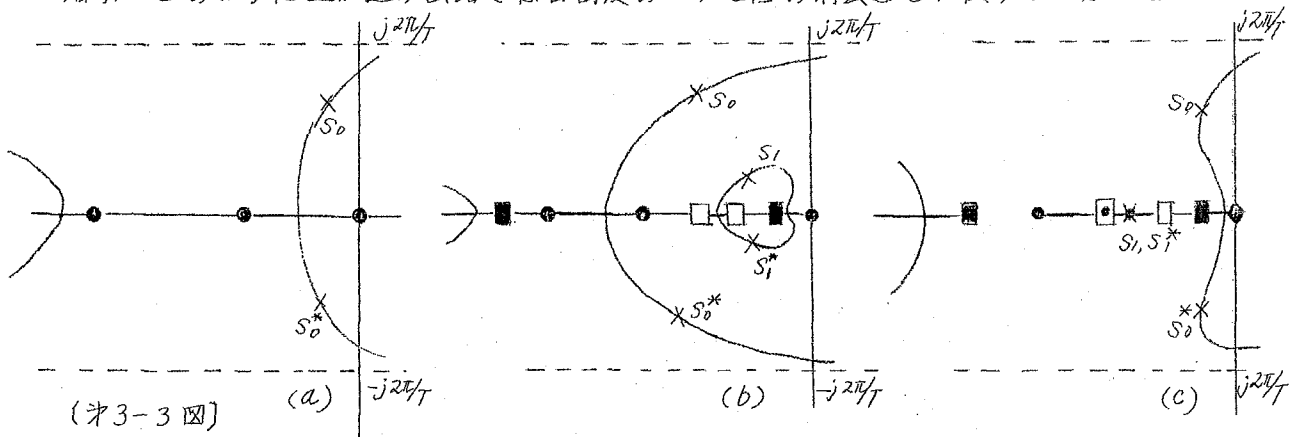


(オ3-1図) 補償限界



(オ3-2図) $G_c(S)$ の根配置

遅れ進み補償回路の特長は、たとえば、(3-1)にみるように、 π , ω_{s1} , ω_{s2} と自由度が3であることで、これによつて、一対の指定根を持たせる外に、もう一つの自由度を任意に換へることである。たとえば、補償前の系の根軌跡が、S面上のオ1ストリップについて、オ3-3図(a)のように、あたえられたとして、これを遅れ進み回路によつて補償して結果が、S面オ1ストリップ内で、(b)図のようになったとすると、複素根として指定根 S_0, S_0^* の他に、 S_1, S_1^* が現れられるので、指定根が代表根でなくなる可能性が生ずる。しかし、この場合、補償回路に含まれる零の一方を(c)図に示すように、与えられた系の極の一方を打ち消すようにすれば、 S_1, S_1^* が現れられず指定根になる可能性が増す。このように遅れ進み回路では自由度の一方を極の消去などに使うことができる。



(オ3-3図)

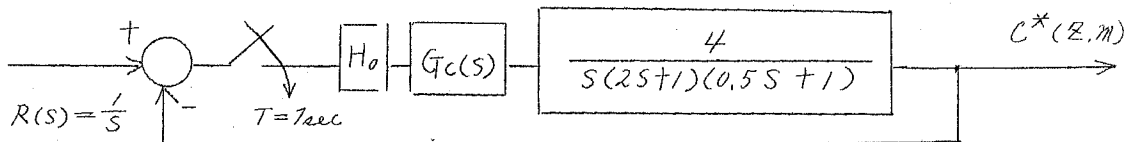
補償ベクトルによって補償回路の定数を求める場合、今までは、補償公式あるいは、補償計算線図によって求めることができたが、一般に進み遅れ回路の場合には補償公式を求めることが困難であり、求めたとしても、式が非常に複雑となりほとんど実用的ではない。したがって、この場合には、(3-1)が(3-2)に示す進み回路と、(3-3)によって与えられる遅れ回路の積であることを利用して、補償計算線図上のベクトル分解によって、補償回路の各定数を求める。

$$G_{c1}(s) = \frac{1 + s/\omega_{s1}}{1 + s/\eta\omega_{s1}} \quad (\text{進み回路部分}) \quad (3-2)$$

$$G_{c2}(s) = \frac{1 + s/\omega_{s2}}{1 + s/\eta'\omega_{s2}} \quad (\text{遅れ回路部分}) \quad (3-3)$$

また、遅れ進み回路による補償の場合には、オ3-3図(c)に示すように、補償後の根軌跡において、補償回路の持つ零実の一つが、 S 面の原点に近い所に現われ、その左側近くに実根が存在するので、補償後の応答は一般に行き過ぎ量が大きくなる傾向がある。したがって、代表根のチェックの段階では、速度誤差定数によるチェックに充分注意しなければならない。

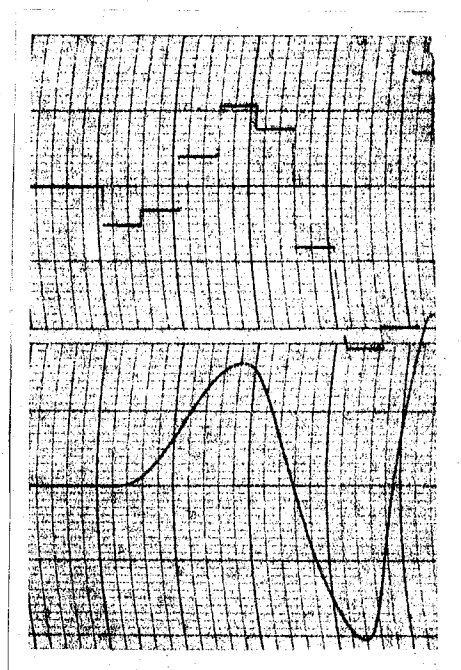
(2) 3次サンプル値系と補償前の系の応答



(オ3-4図)「遅れ進み回路」で補償すべき3次サンプル値系

オ3-4図に示す系のアナログによる応答はオ3-5図のようになり、図からわかるように系は不安定である。

ここで、系に与えるべき仕様値として、 $\phi_m = 40\%$ 、サンプリング周期 $T = 1 \text{ sec}$ として、現象角周波数をできるだけ大きくする。



$H_0(s)$
 $T = 1 \text{ sec}$

(オ3-5図)
補償前の系の
応答

$C(s)$

(3) 補償計算

系に仕様すべき行き過ぎ量 $\textcircled{D}m$ が40%であるので、 $\gamma_0 = 0.3$ として、系のサンプロ・ホルダを $T/2$ のむだ時間で近似して得た系の持つ特性方程式から補償ベクトルは(3-4)で与えられる。

$$g_c \angle \phi_c = \frac{e^{-j\pi} e^{s_0 T/2} S_0 (2S_0 + 1)(0.5S_0 + 1)}{K} \quad (3-4)$$

$$\text{ここで、 } K = 4 \quad S_0 = (-0.3 \pm j)\omega_0$$

上式に各 ω_0 に対する指定根 S_0 を代入して、補償ベクトル計算表から各値を読み取るとオ3-1表のように、各補償ベクトル g_c, ϕ_c が求まる。

$\omega_0(\%)$	0.5		0.6		0.7		0.8		0.9	
	g_c	$\phi_c(\text{度})$	g_c	$\phi_c(\text{度})$	g_c	$\phi_c(\text{度})$	g_c	$\phi_c(\text{度})$	g_c	$\phi_c(\text{度})$
$2S_0 + 1$	1.221	55.01	1.360	61.93	1.515	67.50	1.682	72.00	1.858	75.66
$0.5S_0 + 1$	0.958	15.12	0.958	18.25	0.961	21.36	0.967	24.44	0.975	27.48
$e^{s_0 T/2}$	0.928	14.32	0.914	17.19	0.899	20.05	0.887	22.92	0.874	25.78
S_0	0.523	180-73.30	0.627	180-73.30	0.731	180-73.30	0.836	180-73.30	0.940	180-73.30
$e^{-j\pi/K}$	1/4	-180	1/4	-180	1/4	-180	1/4	-180	1/4	-180
$g_c \angle \phi_c$	0.142	11.15	0.187	24.07	0.239	35.61	0.302	46.06	0.372	55.62

(オ3-1表) 与えられた系の補償ベクトル

オ3-1表によって、あたえられた系の極の一つ、(3-5)を消去して、補償回路の各定数を求める。

$$2S_0 + 1 = 0 \quad \text{すなわち、} \quad S_0 = -0.5 \quad (3-5)$$

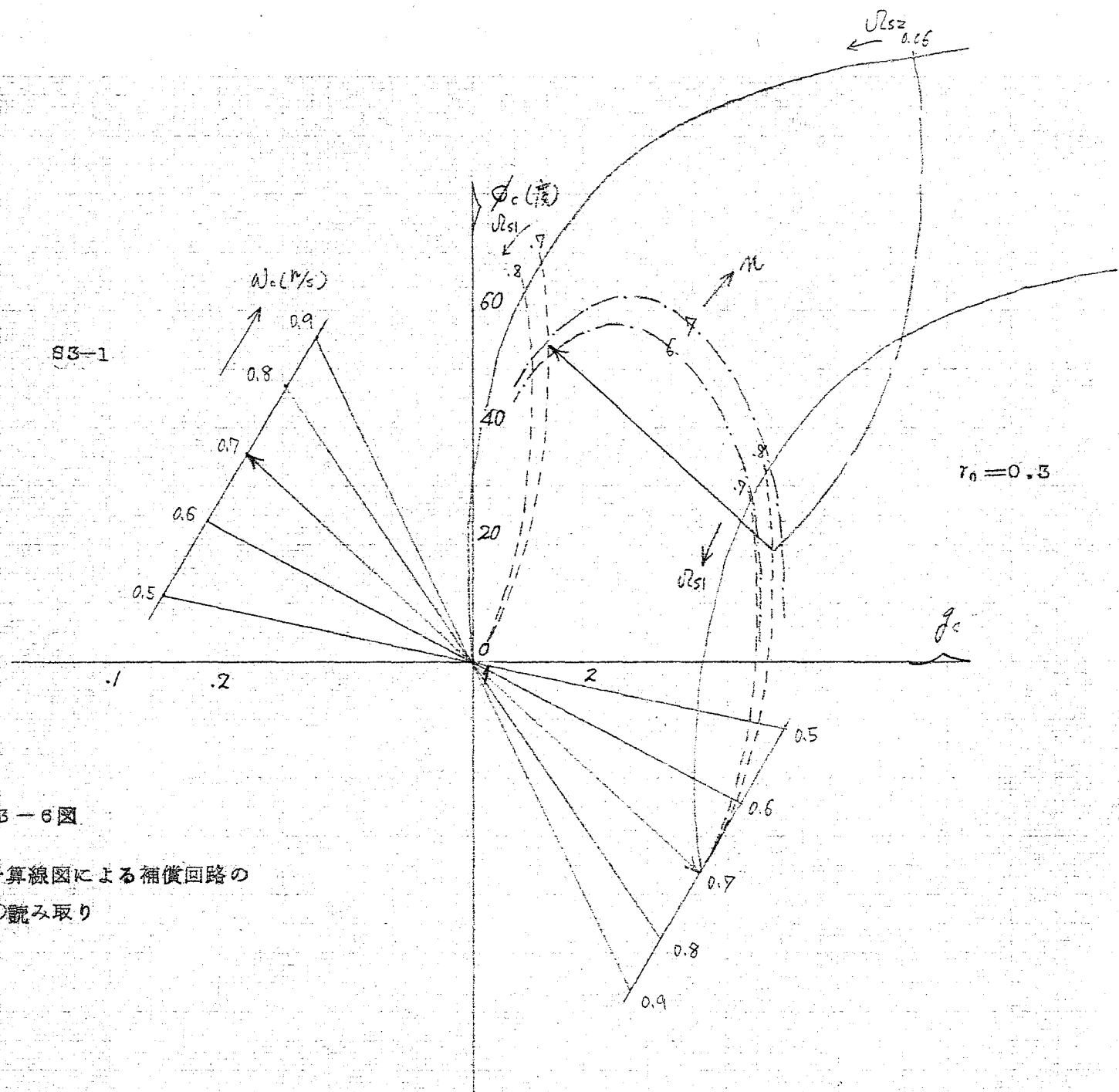
遅れ進み回路の各定数を与えられた系の極の一つを消去して、求める手順は次のようであり、たとえば $\omega_0 = 0.7(\%)$ の場合にはオ3-6図のようになる。

(手順) (a) 補償回路に含まれる ω_{s1} を与えられた系の伝達関数の極のうちで、根平面において右から2番目にプロットされるべき、すなわち消去すべき極に一致させる。

(b) 補償ベクトル平面上に、該当する ω_0 に対する補償ベクトルの逆ベクトルを画き、その先端を補償計算線図の原点に一致させるように重ね、(3-6)によって求まる Ω_{s1} の目盛線と補償計算線図から写し取る。

$$\Omega_{s1} = \omega_{s1} / \omega_0 \quad (3-6)$$

(c) 再び補償ベクトル平面の原点と補償計算線図の原点が一致するように重ねる。



第3-6図

補償計算線図による補償回路の
定数の読み取り

(d) 補償計算線図上の Ω_{S1} の目盛と、それを写し取ったものが、ある η の値の目盛線と交わる点を結んだ。線分の傾斜は η の値によって変化するが、そのうちで与えられた補償ベクトルと平行なものを選び出す。

(e) このときの η の値、および写し取った Ω_{S1} の目盛線とその目盛線の交点の折角周波数の値を読み取る。この値を Ω_{S2} とすると、補償回路に含まれる ω_{S2} は (3-7) で求まる。

$$\omega_{S2} = \omega_0 \cdot \eta \cdot \Omega_{S2} \quad (3-7)$$

オ 3-1 表の補償ベクトルから上の手順によって、補償回路の各定数として、オ 3-2 表を得る。

ω_0	Ω_{S1}	η	Ω_{S2}	ω_{S1}	ω_{S2}
0.5	1.00	9.6	0.075	0.5	0.36
0.6	0.834	8.0	0.08	0.5	0.384
0.7	0.714	6.5	0.06	0.5	0.278
0.8	0.625	5.5	0.03	0.5	0.103
0.9	0.556	5.0	0.003	0.5	0.0835

(オ 3-2 表)

補償回路の各定数

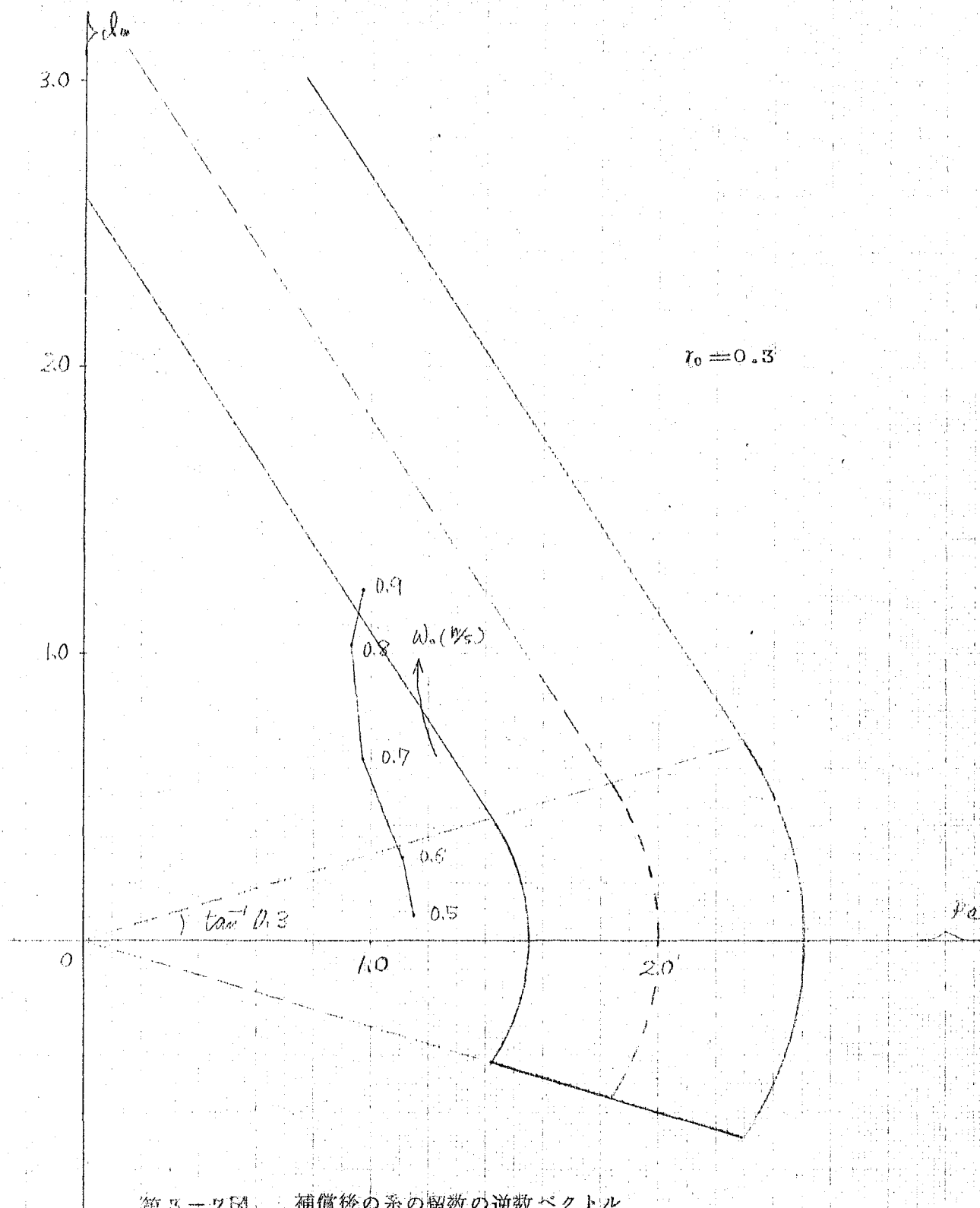
オ 3-2 表によって求まった補償回路を持つ系の留数の逆数は前と同様に、オ 3-3 表のように求まる。これを留数限界図にプロットするとオ 3-7 図が得られる。

(オ 3-3 表) 補償後の系の留数の逆数ベクトル

ω_0 (1/s)	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$S\sigma T/2$	$-0.075 + j0.25$	$-0.09 + j0.3$	$-0.105 + j0.35$	$-0.12 + j0.4$	$-0.135 + j0.45$
$1/(1 + \eta\omega_{S2})$	$0.257 - j0.612$	$0.196 + j0.574$	$0.038 - j0.393$	$-0.022 - j0.145$	$-0.018 - j0.089$
$n+l-m$	3	3	3	3	3
$1/(1 + \eta\omega_{S1})$	$1.020 - j0.105$	$1.022 - j0.161$	$1.014 - j0.239$	$0.995 - j0.316$	$0.964 - j0.389$
$1/(1 + \eta\omega_{S2})$	$-0.016 - j0.072$	$-0.017 - j0.076$	$-0.014 - j0.057$	$-0.008 - j0.028$	$0.000 - j0.000$
$1/(1 + 0.5S)$	$1.007 - j0.272$	$0.991 - j0.327$	$0.989 - j0.377$	$0.942 - j0.428$	$0.910 - j0.473$
$1/B_0$	$1.171 + j0.087$	$1.11 + j0.29$	$0.964 + j0.633$	$0.929 + j1.027$	$0.973 + j1.223$

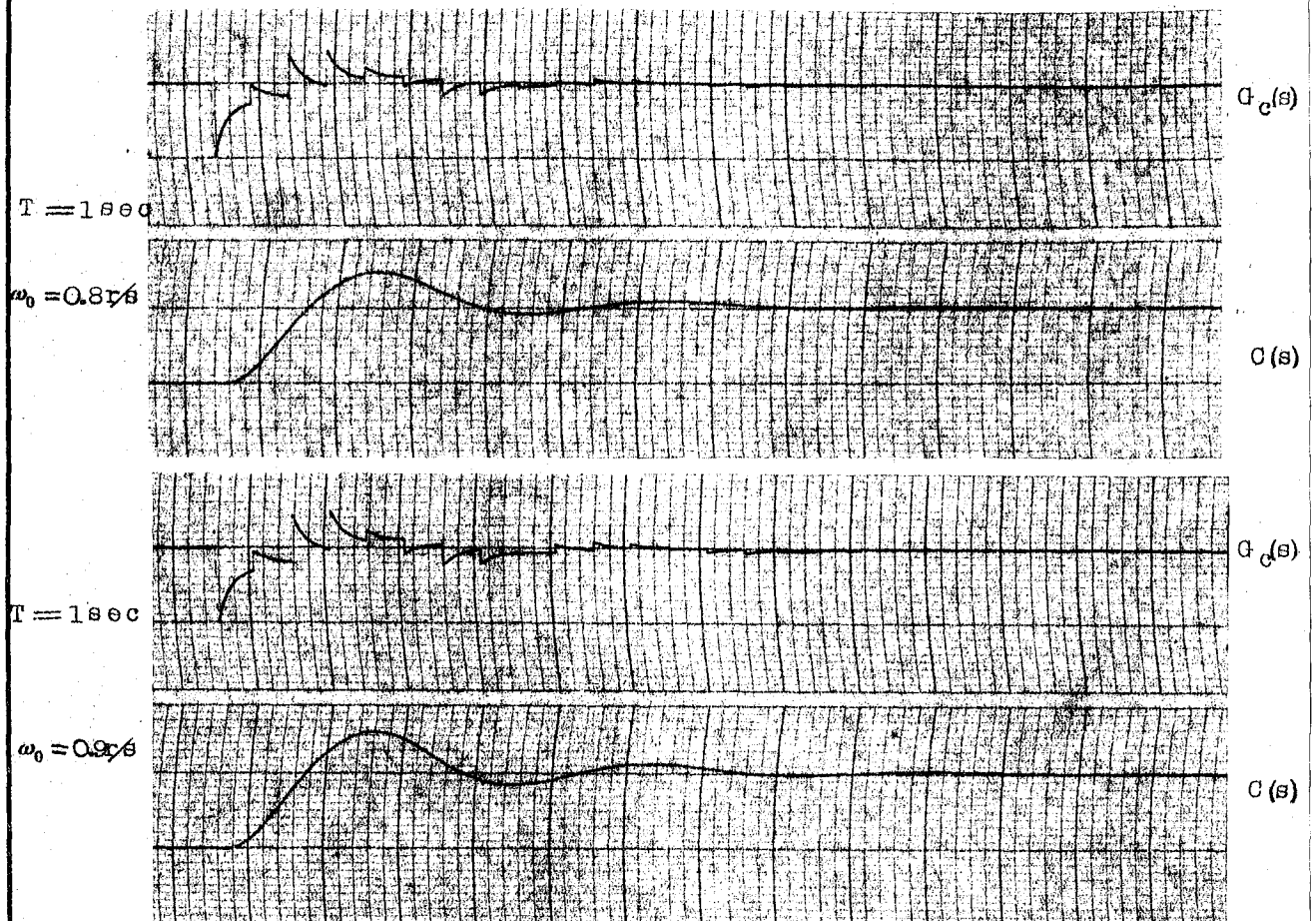
この場合の速度誤差定数の比 K_{v2}/K_v は (3-8) で与えられるが、これから、指定根が $\omega_0 < 0.9$ (1/s) では、つねに条件外となる。また、この場合の系の応答は、 $K_{v2}/K_v < 0.5$ であるので、行き過ぎ量がかなり大きくなることが予想される。

$$K_{v2}/K_v = (1 + \sigma_0^2/2\sigma_0) \cdot (\omega_0/k) = 0.454\omega_0 \quad (3-8)$$



指定根を $\omega_0 > 0.9$ (1/s) とした場合には、オ3-3表、 $\omega_0 = 0.9$ (1/s) の $1/(1 + \pi s/\omega_{s2})$ の項からわかるように、補償ベクトルが補償計算線図の外に出て、補償不能となる。

ここで、この系に対して、 $\omega_0 = 0.8$ および 0.9 rad/sec のアナコムによる応答を求めるとオ3-8図のようになる。



〔オ3-8図〕 補償した系の応答 ($\gamma_0 = 0.3$ とした場合)

(4) 行き過ぎ量 40% に対する $\gamma_0 = 0.5$ の指定

オ3-8図では図からわかるように、行き過ぎ量が指定値より大きくなっている、しかし、これは、一般にオ3-3図(c)のような根配置に系を補償した場合には、原点近くにある零点の影響で行き過ぎ量が大きくなるわけであり、このことは始めから予想されている。したがって、このような場合には指定された行き過ぎ量に対する γ_0 より大きい γ_0 、すなわち、行き過ぎ量を小さめに、始めから指定するのが良い方法の一つであると言える。たとえば、オ3-4図に与えられた系で、指定行き過ぎ量 40% に対して、 γ_0 を (3-9) とすると良い結果が予想される。この場合の補償回路の各定数は次のように求める。

$$\gamma_0 = 0.5 \quad (H_m = 40\% \text{ に対して}) \quad (3-9)$$

まず、指定根を(3-10)として補償ベクトルを求めるとオ3-1表のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= (-0.5 + j) \omega_0 \\ T &= 1 \text{ sec} \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

$\omega_0(\%)$	0.5		0.6		0.7		0.8	
	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°
$2S_0+1$	1.118	63.43	1.265	71.57	1.432	77.91	1.612	82.87
$0.5S_0+1$	0.910	15.95	0.901	19.44	0.896	22.99	0.894	26.57
$e^{S_0T/2}$	0.883	14.32	0.861	17.19	0.844	20.05	0.819	22.92
S_0	0.559	180-63.50	0.670	180-63.50	0.782	180-63.50	0.894	180-63.50
$e^{-j\pi/k}$	1/4	-180	1/4	-180	1/4	-180	1/4	-180
$g_0L\phi_c$	0.125	30.20°	0.164	44.70°	0.212	57.45°	0.263	68.86°

(オ3-4表) $\gamma_0=0.5$ に対する与えられた系の補償ベクトル

補償ベクトルと $\gamma_0=0.5$ に対する補償計算線図からオ3-6図と同様な読み取りによって、補償回路の各定数はオ3-5表のようになる。

$\omega_0(\%)$	Ω_{s1}	Ω_{s2}	n	ω_{s1}	ω_{s2}
0.5	1.00	0.065	8.6	0.5	0.279
0.6	0.834	0.055	7.4	0.5	0.244
0.7	0.715	0.035	7.0	0.5	0.171
0.8	0.625	0.010	6.5	0.5	0.052

(オ3-5表)

補償回路の各定数

オ3-4図に示す系の補償回路の定数としてオ3-5表の結果を採用してアナコムによって応答を求めると、オ3-9図が得られる。応答からわかるように、 $\gamma_0=0.5$ に対する応答としては行き過ぎ量が40%程度となるので良い応答とは言い難いが、行き過ぎ量40%指定に対しては仕様を満足しているといえることができる。

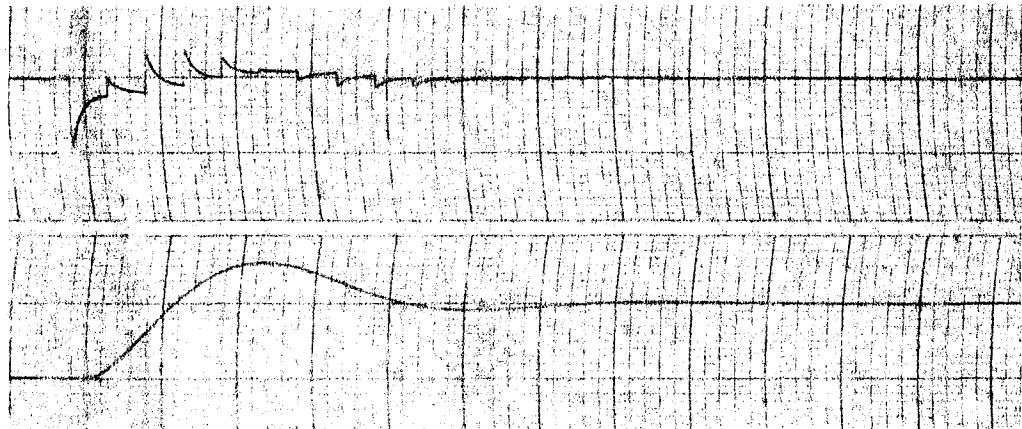
以下紙送り速度 : 5mm/sec



$T = 1 \text{ sec}$

$C(s)$

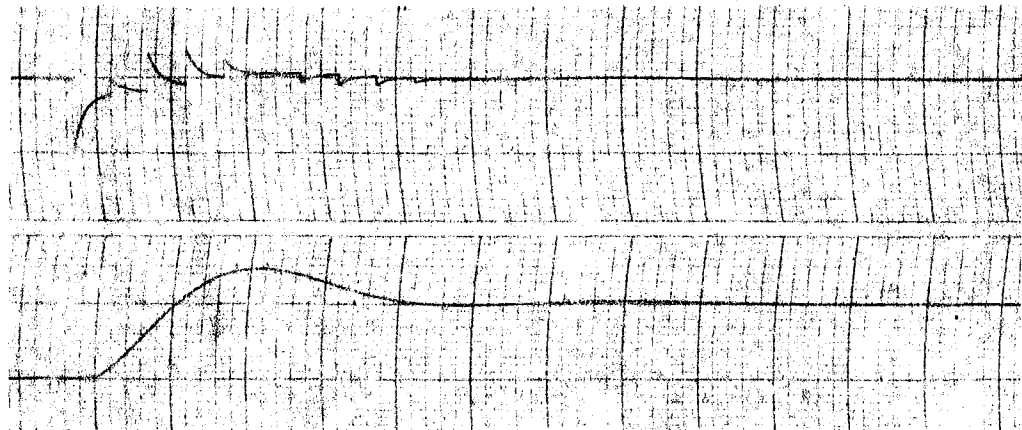
$\omega_0 = 0.5 \text{ (r/s)}$



$G_0(s)$

$C(s)$

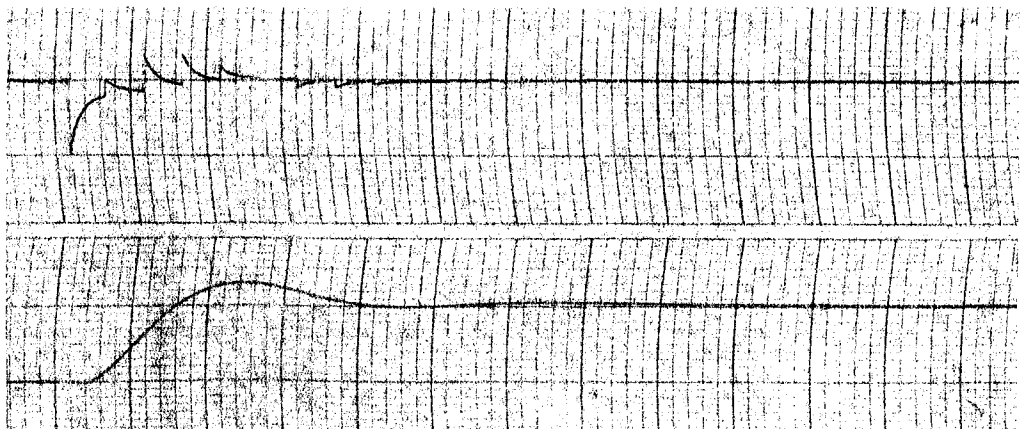
$\omega_0 = 0.6 \text{ (r/s)}$



$G_c(s)$

$C(s)$

$\omega_0 = 0.7 \text{ (r/s)}$

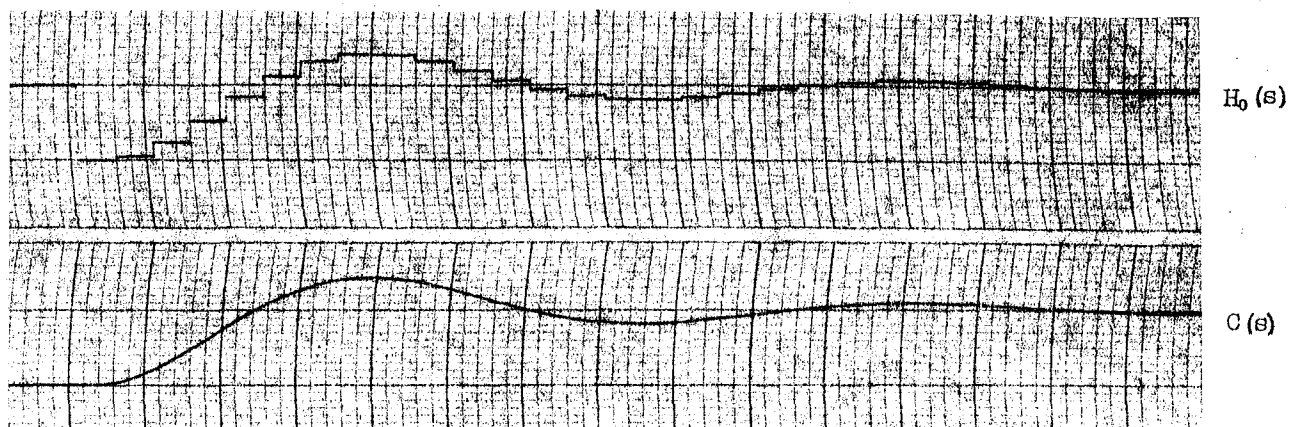


$G_c(s)$

$C(s)$

$\omega_0 = 0.8 \text{ (r/s)}$

第3-9図 補償後の系の応答 (35-1)

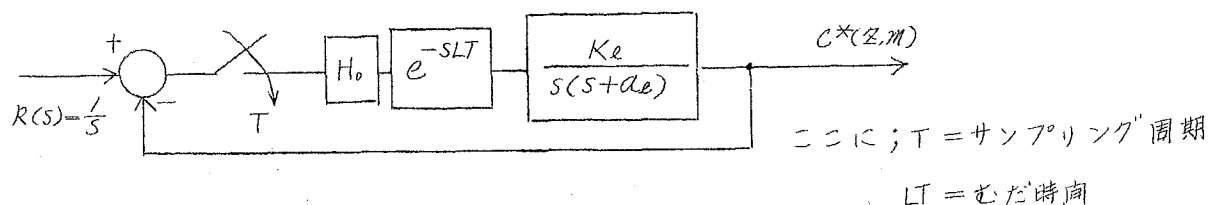


〔オ3-9図〕 補償後の系の応答 (ゲインのみ $K=0.5$)

(4) むだ時間を含むサンプル値系について

ここでは、まず、むだ時間を含む連続サンプル値系について考察し、指定出来る $\omega_0 T$ の限界、アナコムによる応答などを求め、次に3次サンプル値を遅み回路で特性補償する場合について述べる。

(1) むだ時間を含む連続サンプル値系



〔オ4-1図〕 むだ時間を含む連続サンプル値系

オ4-1図に示すむだ時間を含む連続サンプル値のサンプラとホールドを $T/2$ で近似した系の特性方程式は(4-1)で与えられる。

$$1 + \frac{K_e e^{-sT(L+\frac{1}{2})}}{s(s+a_e)} = 0 \quad (4-1)$$

ここで、指定根 s_0 を(4-2)として、〔II-(4)〕で述べた方法と同様にして、補償ベクトル $g_c \angle \phi_c$ を求めると(4-3)となり、これからオ4-1図の各定数 K_e , a_e は、 γ_0 および $\omega_0 T$ をパラメータとして(4-4), (4-5)で与えられる。

$$s_0 = (-\gamma_0 \pm j) \omega_0 \quad (4-2)$$

$$g_c \angle \phi_c = -s_0 \cdot e^{s_0 T(L+\frac{1}{2})} = \frac{K_e}{s_0 + a_e} \quad (4-3)$$

$$\left. \begin{aligned} a_e &= \omega_0 (\gamma_0 - \cot \phi_c) \\ K_e &= -\omega_0 g_c / \sin \phi_c \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

$$\left. \begin{aligned} g_c &= -\omega_0 (1 + \delta_0^2)^{1/2} e^{-\delta_0 \omega_0 T (L + \frac{1}{2})} \\ \phi_c &= \omega_0 T (L + \frac{1}{2}) + \pi - \tan^{-1}(1/\delta_0) \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

(4-4), (4-5) において a_e, K_e に関して少なくとも (4-6) が成立することが必要であるから、これから (4-7) を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_e &\geq 0 \\ K_e &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-6)$$

$$\phi_c \leq \pi \quad (4-7)$$

(4-7) から、ここで問題にしている、むだ時間を含むサンプル値に指定できる最大の現象角 $\omega_0 T$ の限界として (4-8), (4-9) を得る。

$$\omega_0 T (L + \frac{1}{2}) + \pi - \tan^{-1}(\frac{1}{\delta_0}) \leq \pi \quad (4-8)$$

したがって、

$$\omega_0 T \leq \frac{\cot^{-1} \delta_0}{L + \frac{1}{2}} \quad (4-9)$$

上式において、 L を (4-10) とすれば、オ 4-1 図に示す系は [II-(5)] であつた問題と同じになり、これから $\omega_0 T$ の限界を求めると (4-11) のようになる。

$$L = 0 \quad (4-10)$$

$$\omega_0 T \leq 2 \cot^{-1} \delta_0 \quad (4-11)$$

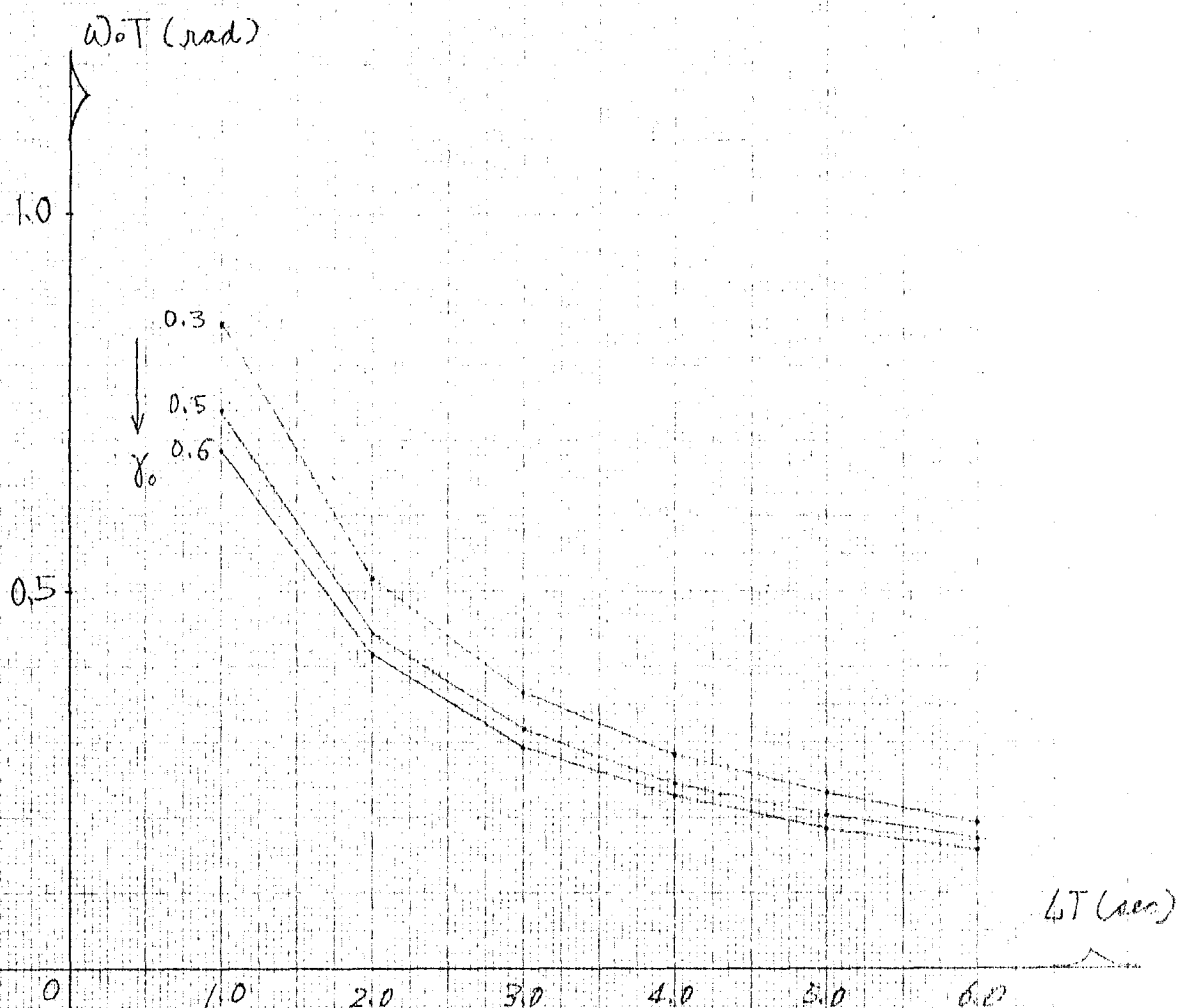
(4-11) で、たとえば $\delta_0 = 0.3$ とすれば、 $\omega_0 T$ は (4-12) となり、[II-(5)] で求めた限界よりかなり大きな値となる。

$$\omega_0 T \leq 2.56 \text{ (rad)} \quad (\delta_0 = 0.3 \text{ 時}) \quad (4-12)$$

したがって、系がむだ時間を含む場合も (4-9) で求めた結果より、いくらか小さい $\omega_0 T$ の値が限界となることが考えられ、実際には、むだ時間が (4-13)、すなわち；

$$LT \geq 1 \quad (\text{sec}) \quad (4-13)$$

で示される場合には、制御対象の伝達関数、高次系の場合には補償回路を含めての系の伝達関数の周波性特性が充分良いロー・パス特性を示すので、後に示す2次サンプル値系のアナコムによる応答からもわかるように、(4-9) で示される限界がほぼ $\omega_0 T$ に対する限界と考えることができる。ここで、むだ時間が (4-13) で与えられる場合の $\omega_0 T$ の限界を (4-9) にしたがって、 δ_0 をパラメータとしてグラフにプロットするとオ 4-2 図が得られる。



第4-2図 むだ時間を含む系の $\omega_0 T$ の限界

(2) むだ時間を含む2次サンプル値系の応答

オ4-1図に含まれる a_e, K_e を適当な ω_0 に対して (4-4), (4-5) から T, L, γ_0 をそれぞれ (4-14) として求めるとオ4-1表 のようになる。

$$\begin{aligned} LT &= 1 \text{ sec} & T &= 1 \text{ sec} \\ \gamma_0 &= 0.3 & \omega_0 &= \sim 0.8 (\text{1/s}) \end{aligned} \quad (4-14)$$

$\omega_0 (\text{1/s})$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
K_e	0.222	0.414	0.772	1.67	5.69
a_e	0.613	1.00	1.67	3.18	10.02

(オ4-1表) $\gamma_0 = 0.3$ に対する各定数の値

オ4-1表で求めた K_e, a_e を持つ系のアナコムによる応答はオ4-3図のようになり、留数の逆数ベクトルは (4-15) から、オ4-2表のように求まり、これを留数限界図にプロットするとオ4-4図のようになる。

$$\frac{1}{B_0} = \left(L + \frac{1}{2}\right) S_0 T + \pi + l - \frac{a_e}{S_0 + a_e} \quad (4-15)$$

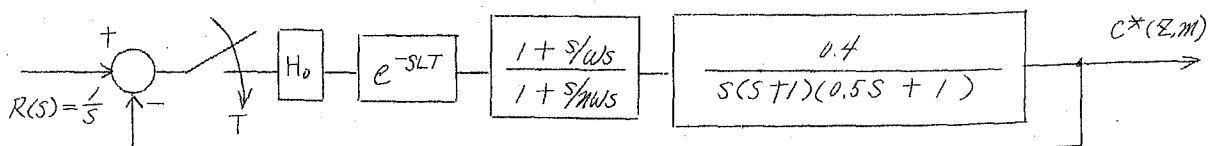
$\omega_0 (\text{1/s})$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$3S_0 T/2$	$-0.18 + j0.6$	$-0.225 + j0.75$	$-0.27 + j0.9$	$-0.315 + j1.05$	$-0.36 + j1.20$
2	2	2	2	2	2
$(1 + S_0/a_e)^{-1}$	$0.752 - j0.607$	$-0.874 + j0.514$	$0.964 - j0.389$	$1.014 - j0.239$	$1.018 - j0.083$
$1/B_0$	$1.068 + j1.207$	$0.901 + j1.264$	$0.766 + j1.289$	$0.671 + j1.289$	$0.622 + j1.283$

(オ4-2表) むだ時間を含む2次サンプル値系の留数の逆数ベクトル

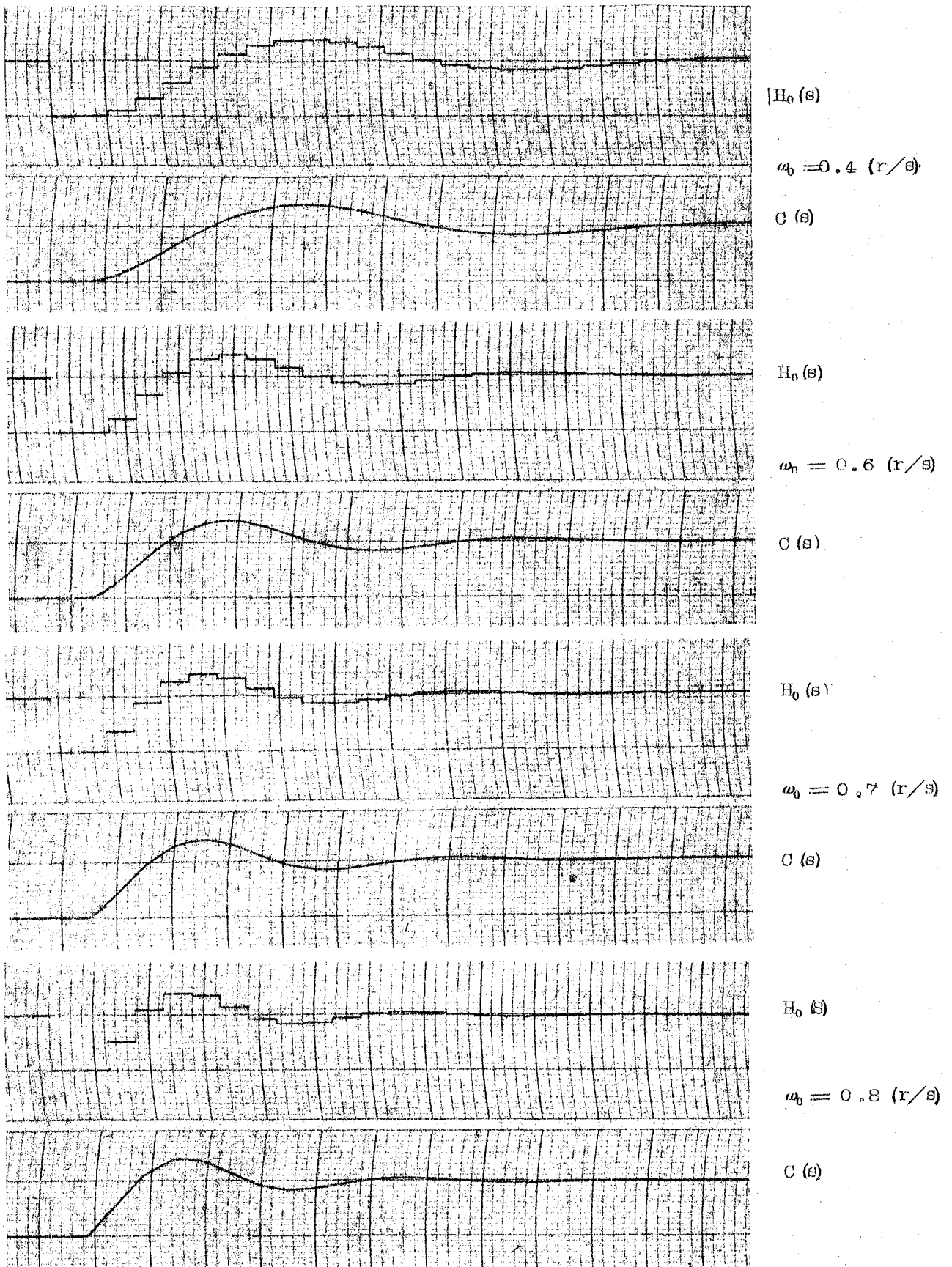
留数条件からの指定根の限界は、オ4-4図から見ると、 $\omega_0 = 0.5 (\text{1/s})$ までであるが、オ4-3図の応答の結果から見ると、 $\omega_0 = 0.8 (\text{1/s})$ で応答が、いくぶん高調波分が多い程度であり、一応、指定根は $\omega_0 = 0.8 (\text{1/s})$ まで満足されていると考えることができる。

(3) むだ時間を含む3次サンプル値系の特性補償

ここでは、オ4-5図に示すようなむだ時間を含む3次サンプル値系の特性補償を、図に示すような進み回路を使って行なう場合を述べる。

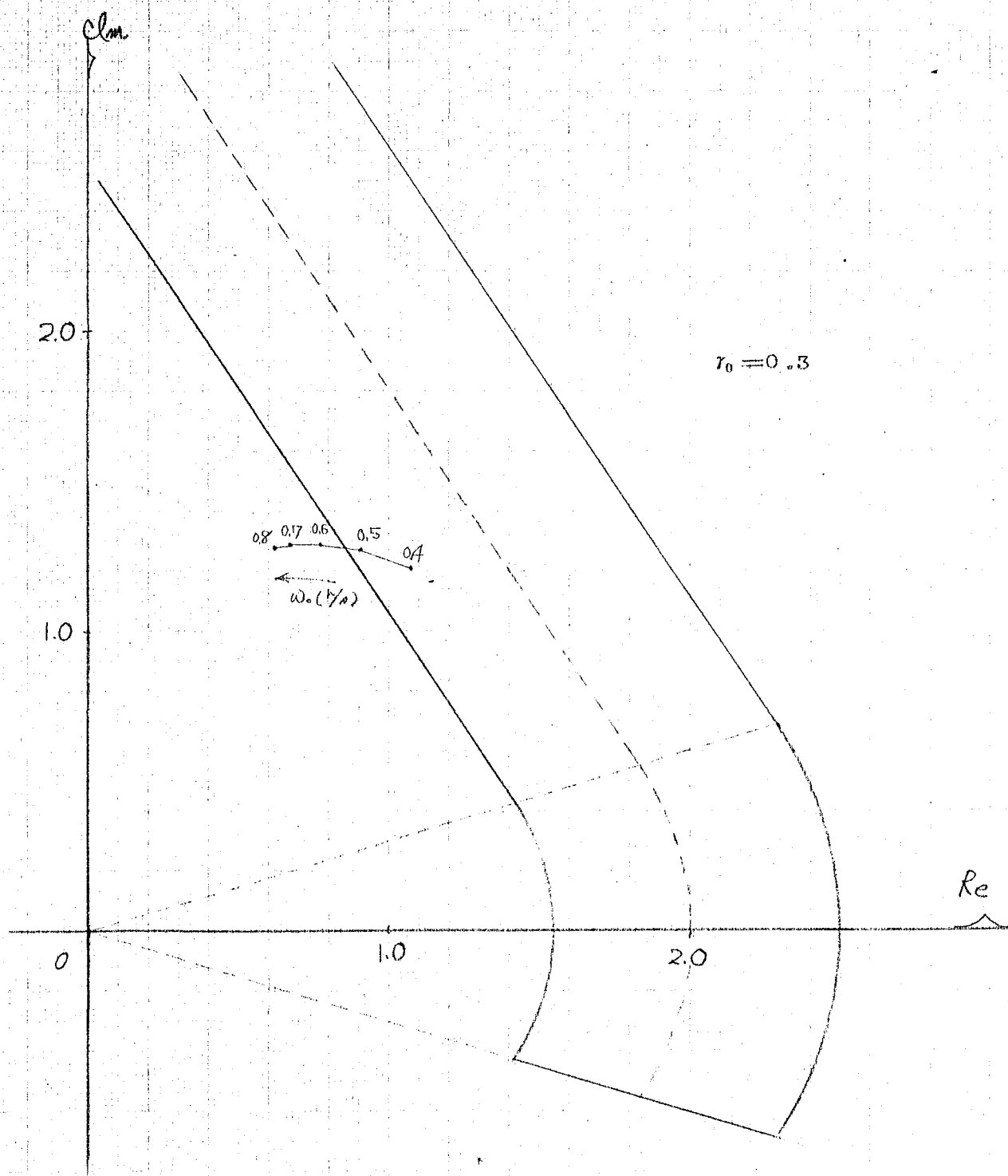


(オ4-5図) むだ時間を含む3次サンプル値系



第 4-3 図 むだ時間を含む 2 次サンプル値系の応答

($T=1 \text{ sec}$ $LT=1 \text{ sec}$ 、各パラメータは第 4-1 表による)



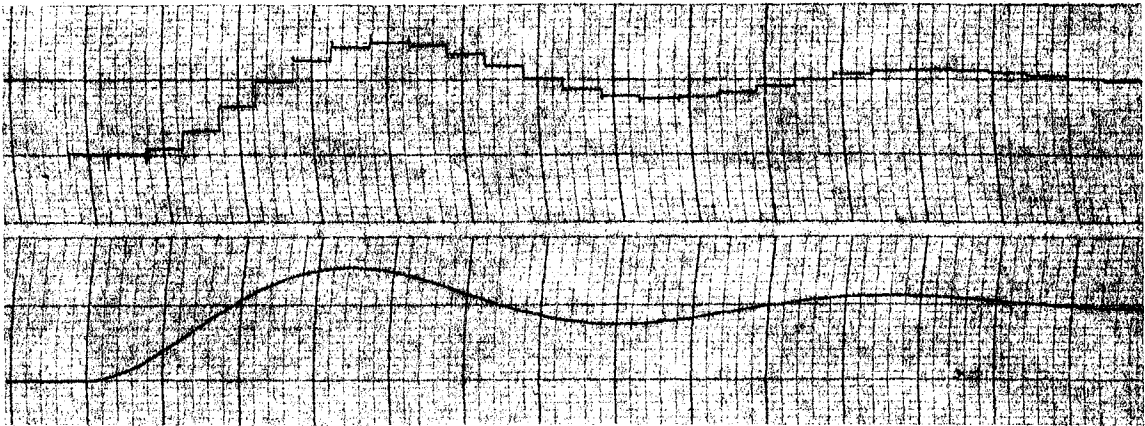
第4-4図 むだ時間を含む2次サンプル値系の留数の逆数ベクトル

オ4-5図において、サンプリング周期 T 、およびむだ時間 LT を各々(4-16)とすると与えられた系の補償前の応答はオ4-6図のようになる。

$$T = \text{sec}$$

$$LT = 1 \text{ sec}$$

$$(4-16)$$



{オ4-6図} 補償前の系の応答

オ4-6図の応答から、系は一応安定であるが、行き過ぎ量はいくらか大きいと云える。オ4-5図および(4-16)から与えられた系のむだ時間による補償ベクトルは(4-17)で与えられる。

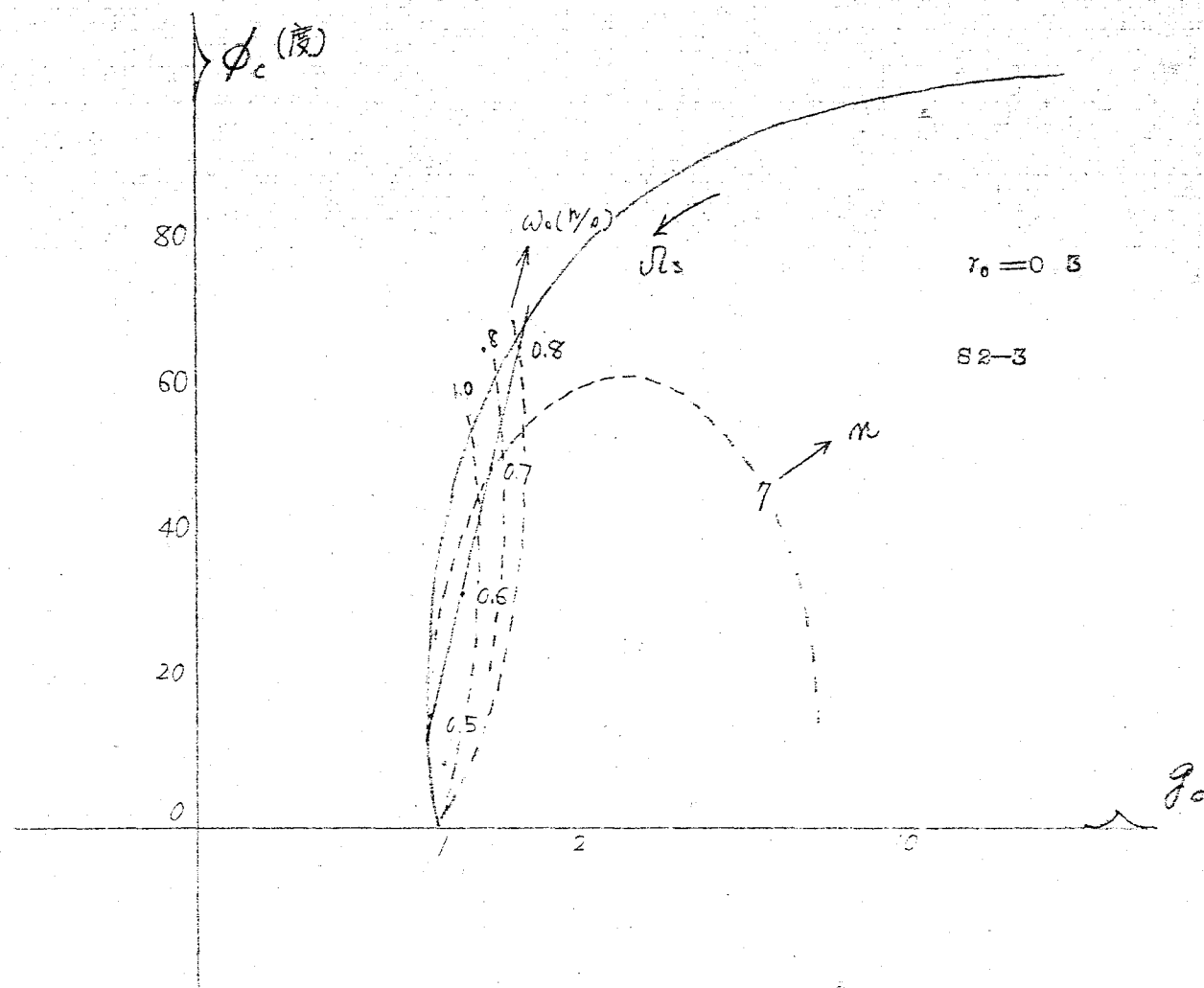
$$g_c L \phi_c = \frac{e^{-j\pi} \cdot e^{S_0 T/2} \cdot e^{S_0 L T} \cdot S_0 (S_0 + 1) (0.5 S_0 + 1)}{0.4} \quad (4-17)$$

上式において、仕様として、 $\gamma_0 = 0.3$ を与え、適当な ω_0 に対して、補償ベクトル計算表から各値を読み取ると、オ4-3表の結果が得られる。

$\omega_0 (\%)$	0.5		0.6		0.7		0.8	
	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°	g_i	ϕ_i°
$S_0 + 1$	0.986	30.47	1.016	36.19	1.056	41.54	1.103	46.47
$0.5 S_0 + 1$	0.958	15.12	0.958	18.25	0.961	21.36	0.967	24.44
$e^{S_0 T (L+1/2)}$	0.799	42.97	0.763	51.57	0.730	60.17	0.698	68.79
S_0	0.523	$180 - 73.30$	0.627	$180 - 73.30$	0.731	$180 - 73.30$	0.836	$180 - 73.30$
$e^{-j\pi/K}$	1/0.4	-180	1/0.4	-180	1/0.4	-180	1/0.4	-180
$g_c L \phi_c$	0.988	15.26	1.162	32.71	1.352	49.77	1.558	66.40

{オ4-3表} 与えられた系の補償ベクトル

オ4-3表の結果とオ4-5図に示す進み回路に対する補償公式(4-17)、あるいはオ4-7図のようにして、補償回路の各定数を求めるとオ4-4表の結果が得られる。



第 4 - 7 図 補償計算線図による補償回路の定数の読み取り

$$\left. \begin{aligned} \omega_s &= \frac{\omega_0 (1 + \delta_0^2) \sin \phi_c}{g_c - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c} \\ \eta &= \frac{g_c - \cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c}{\cos \phi_c + \delta_0 \sin \phi_c - 1/g_c} \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

$\omega_0 (\text{rad/s})$	0.5	0.6	0.7	0.8
ω_s	1.41	0.617	0.622	0.558
η	3.10	3.37	6.90	43.7

(オ4-4表) 補償回路の各定数

オ4-4表に示した定数を持つ補償回路によって特性補償を行なったオ4-5図に示す系の応答はオ4-8図のようになる。

また、この場合の指定根に対する留数の逆数ベクトルは(4-18)で与えられる。

$$\frac{1}{B_0} = \left(L + \frac{1}{2}\right) s_0 T + 3 + \frac{1}{1 + s_0/\omega_s} - \frac{1}{s_0 + 1} - \frac{1}{0.5s_0 + 1} - \frac{1}{1 + s_0/\eta\omega_s} \quad (4-18)$$

(4-18)と補償ベクトル計算表から、この場合の留数の逆数ベクトルを求めるとオ4-5表のようになり、これを留数限界図にプロットするとオ4-9図が得られる。

$\omega_0 (\text{rad/s})$	0.5	0.6	0.7	0.8
$3s_0T/2$	$-0.225 + j0.75$	$-0.27 + j0.90$	$-0.315 + j1.05$	$-0.36 + j1.20$
$(1 + s_0/\omega_s)^{-1}$	$0.969 - j0.379$	$0.488 - j0.672$	$0.386 - j0.659$	$0.123 - j0.511$
$(s_0 + 1)^{-1}$	$0.874 - j0.514$	$0.794 - j0.581$	$0.709 - j0.628$	$0.624 - j0.657$
$(0.5s_0 + 1)^{-1}$	$1.007 - j0.272$	$0.991 - j0.327$	$0.967 - j0.379$	$0.942 - j0.428$
$(1 + s_0/\eta\omega_s)^{-1}$	$1.021 - j0.116$	$0.995 - j0.136$	$1.022 - j0.172$	$1.021 - j0.183$
$(n + l - m)$	3	3	3	3
$1/B_0$	$0.842 + j1.273$	$0.438 + j1.452$	$0.373 + j1.57$	$0.176 + j1.957$

(オ4-5表) 与えられた系の留数の逆数ベクトル

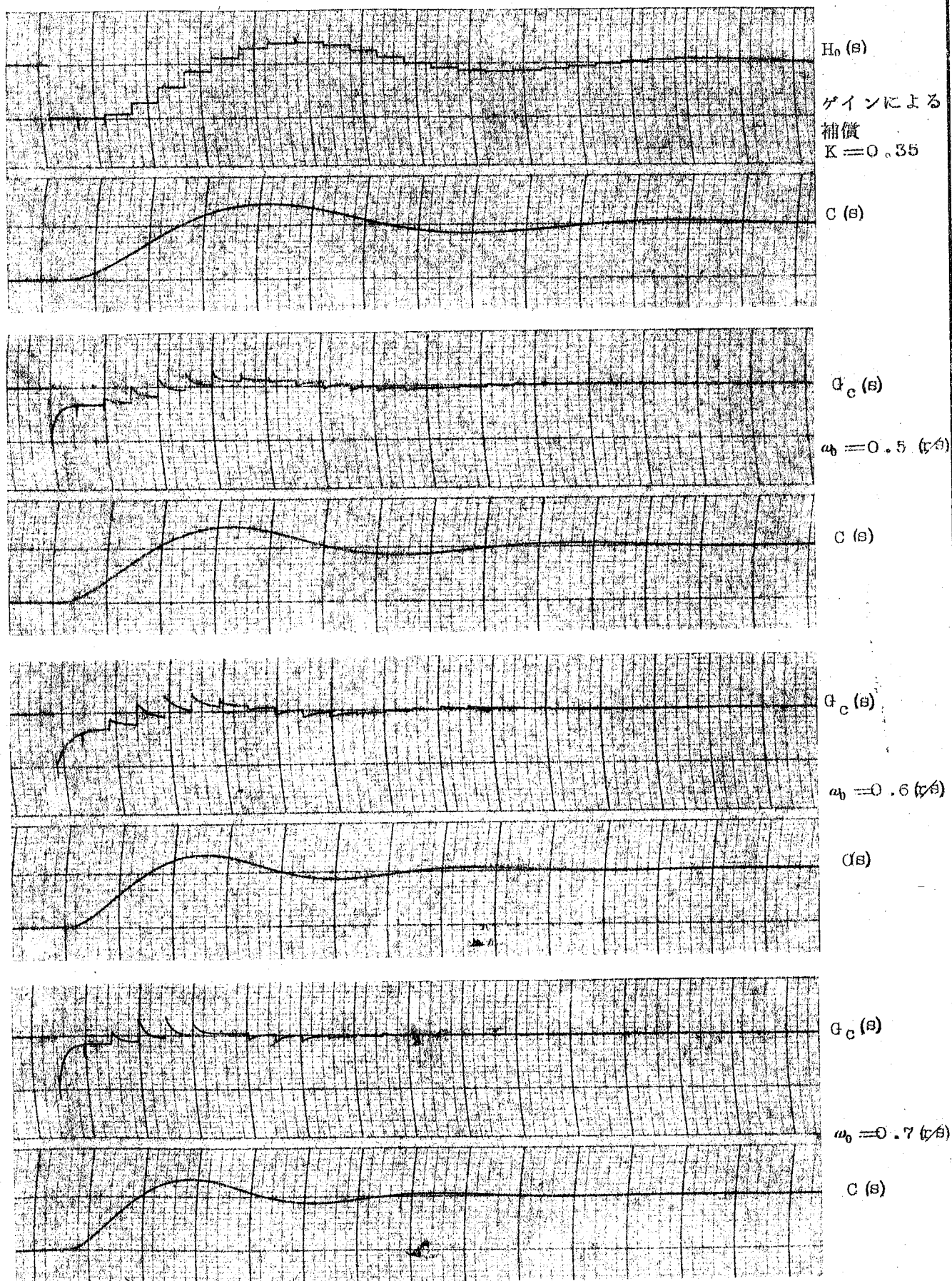
この場合の速度誤差定数の比は(4-19)で与えられ、これからオ4-6表が得られる。

$$\frac{K_{v2}}{K_v} = \frac{1 + \delta_0^2}{2\delta_0} \omega_0 \times \frac{1}{0.4} = 4.54 \omega_0 \quad (4-19)$$

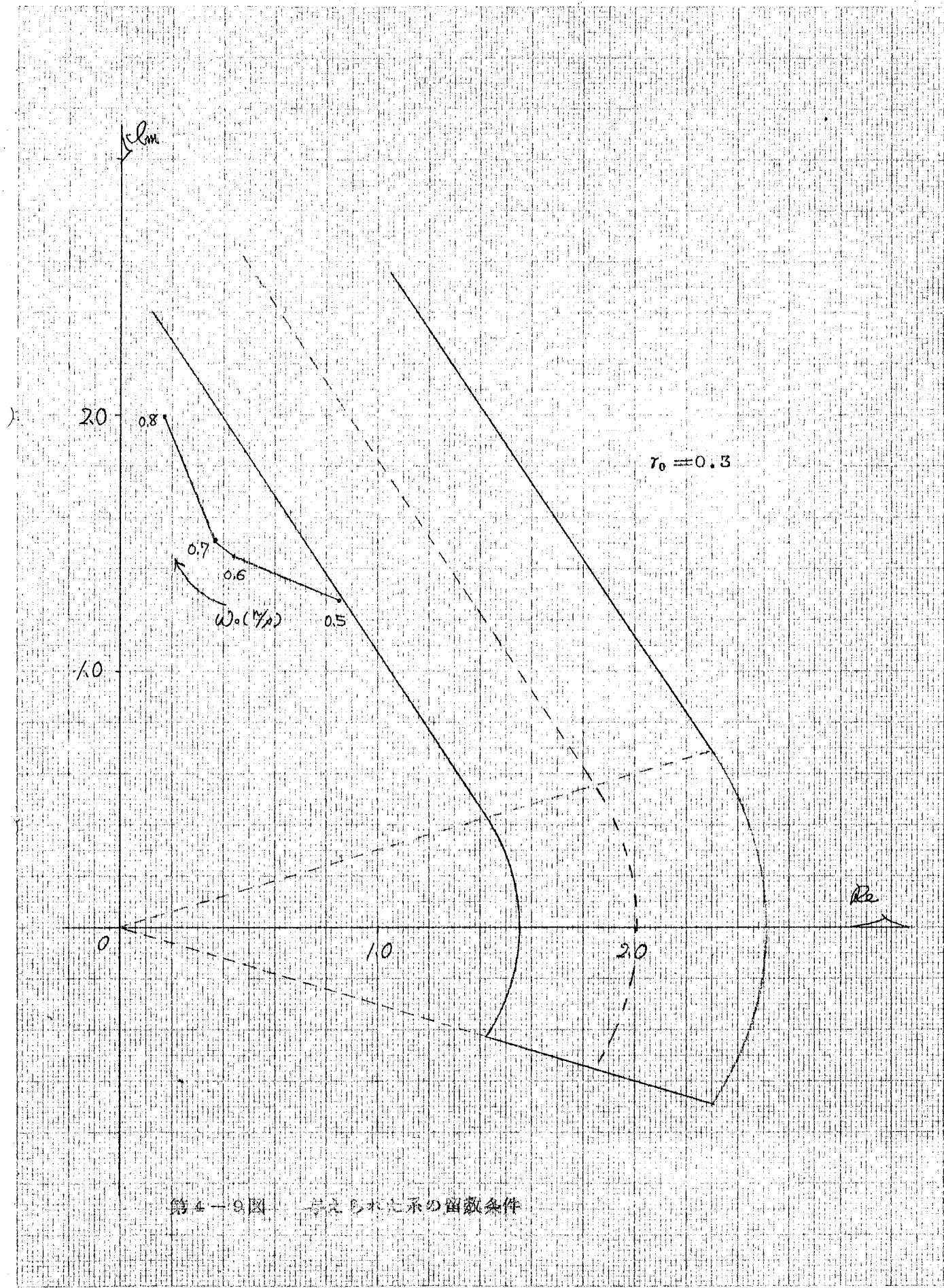
$\omega_0 (\text{rad/s})$	0.5	0.6	0.7	0.8
K_{v2}/K_v	2.27	2.72	3.18	3.64

(オ4-6表) 与えられた系の速度誤差定数の比

以下 $T=1 \text{ sec}$ 紙送り速度: 5 mm/sec



第4-8図 与えられた系の補償後の応答



第4-9図 与えられた系の留蔵条件

留数の逆数および速度誤差定数の比による評価では、仕様値が満足されるのは一応、 $\omega_0 = 0.5$ (%) までであるが、応答に対する許容度を大きくすれば、才 4-8 図からわかるように、 $\omega_0 = 0.7$ (%) まで、かなり良い応答を示すということができる。

(IV) 結 言

本研究は連続制御系の特性補償の一方法として提案されている「代表根指定法」をサンプル値制御系の設計に拡張したもので、連続補償回路を用いてサンプル値系の特性補償を行なう場合の補償回路の設計方法を示したものである。

サンプル値系に代表根指定法を適用する場合、ここではサンプル値系に含まれるサンプラとホールドをサンプリング周期 T の $1/2$ のむだ時間、すなわち $T/2$ のむだ時間で置き換えて連続系に近似し、その近似された系に、系の応答を支配的に決定する代表的振動根を持たせている。この設計方法が他の方法と比較して持っている利便は、サンプル値系特有のいくつかの制限を除いて、連続系において代表根指定法が他の方法と比較して持っている利便とほとんど同じであるということができ、その主なものは次のようなものである。

- (i) 設計手順が明確であり、系に代表根を比較的正確に持たせることができ、ある種の補償回路によつては簡単に代表根以外の根の位置も指定できるので、設計に際して、比較的经验的要素を必要としない。
- (ii) 補償回路の設計に關して、補償公式、補償計算線図、補償ベクトル計算表などが利用されるので、補償計算自体がきわめて簡単である。
- (iii) 比較複雑な系の設計にも適用できる。
- (iv) 連続系における設計概念をほとんどそのまま利用でき、たとえば、代表根の留数の逆数ベクトル（補償ベクトル計算表から簡単に求めることができる）の限界なども、連続系におけるそれとまったく同様であるとしてさしつかえない。

また、サンプル値系における代表根指定法と連続系におけるそれとの主な相違点としては、次のような点があげられる。

- (i) 連続系においては、指定根の持つ現象角周波数 ω_0 がそのまま系の応答の現象角周波数をあたえるのに対して、サンプル値系では系を近似して指定根を系に与えているので、系の現象角周波数は指定根のそれといくぶん異なった値を持つ。しかし、サンプリング周波数が、系の応答の現象角周波数に対して充分小さければ、指定根の ω_0 は、当然、系の応答のそれと同じとみなすことができる。
- (ii) 高次系の速度誤差定数 K_v と2次系のそれ K_{v2} との比 K_{v2}/K_v による応答の評価では、連続系においては、それが

$$0 < K_{v2}/K_v < 2$$

であつたのに対して、サンプル値系をむだ時間近似した系においては、

$$0.5 < K_{v2}/K_v < 2.5$$

となり、連続系の場合よりいくぶんずれている程度である、しかし、この範囲は、応答に対する許容度によってきまるものであるから、大きな差異と考える必要はない。

この他の相違点としては、サンプル値系を「サンプリング周期を仮想的に0」として連続系に近似した設計法では、指定根の γ_0 が、サンプル値系の一定行き過ぎ量に対して一定とならず、したがって、連続系において利用される、補償計算線図、補償ベクトル計算表などを利用できないという大きな相違点が上げられたが、ここに示したような、サンプル値系のサンプリング・ホールドをむだ時間近似する方法では、それらの線図、あるいは表をまったくそのまま利用することができる。

本研究によるサンプル値系設計特有の性質としては次のようなものが考えられる。

- (i) サンプル値系に指定できる現象角周波数 ω_0 とサンプリング周期 T の積、すなわち現象角 $\omega_0 T$ の限界は、大まかに云って、各 γ_0 に対して、

$$\omega_0 T < \pi/2$$

までである。

- (ii) 不完全ホールドを系に含むサンプル値系では、ホールド率を ρ とすると、 ρ が

$$0.5 < \rho \leq 1$$

の範囲を満足する場合には系の応答が連続系のそれとよく近似する、この場合 ρ が0.5より小さくなると近似度が落ちるだけでなく、補償回路などのゲインがきわめて大きくなり実用的でなくなる。

以上が代表根指定法をサンプル値系の特性補償に利用した場合の利便、あるいはサンプル値特有の性質であるが、基本的には連続系での代表根指定法の設計方法、応答などの検討方法、その他を、ほとんどそのままサンプル値系の特性補償に適用できると結論することができる。

おわりに、本研究について終始、御指導いただいた本学高井宏幸教授、同長谷川健介助教授、同金台然講師に深く感謝すると共に、種々御尽力下さった高井研究室の諸氏に厚く御礼申し上げます。

参考文献

- (1) E. I. Jury "Correlation between Root Locus and Transient Response of Sampled - Data Control Systems" Trans. A.I.E.E. 74 Pt II 1955
- (2) Masahiro Mori "Root Locus Method of Pulse Transfer Function for Sampled - Data Control Systems" I. R. E. Trans. on Automatic Control., PGAC-3, Nov. 1957
- (3) J. R. Ragazzini and L. A. Zadeh "Analysis of Sampled - Data Systems" Trans. A. I. E. E., 71, Pt II 1952
- (4) E. I. Jury and F. W. Semelka "Time - Domain Synthesis of Sampled - Data Control Systems" A. S. M. E. Trans. Paper No. 58 - I R D - 8. April 3. 1953.
- (5) 高井宏幸 長谷川健介「自動制御系の設計方法としての代表根指定法の提案」
電気学会雑誌、昭和32年2月号 P138～
- (6) 高井宏幸 安居院猛「代表根指定法によるサンプル値系の設計法」
計測と制御、昭和37年 オ1巻、オ9号、P17～