

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	キャビティ法によるマルチレイヤーネットワークの耐性解析
Title(English)	Cavity-based robustness analysis on multilayer networks
著者(和文)	渡辺駿介
Author(English)	Shunsuke Watanabe
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第10367号, 授与年月日:2016年12月31日, 学位の種別:課程博士, 審査員:樺島 祥介,渡邊 澄夫,高安 美佐子,青西 亨,石井 秀明
Citation(English)	Degree:., Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第10367号, Conferred date:2016/12/31, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

博士論文

キャビティ法による
マルチレイヤーネットワークの
耐性解析

Cavity-based robustness analysis on
multilayer networks

渡辺 駿介

Abstract

The concept of multilayer networks offers a useful mathematical framework for describing complex systems in modern life. Their research field has been developed rapidly for these years, in which various properties of multilayer networks have been clarified. One of the major topics in the research is the percolation analysis. This is not only because the multilayer networks exhibit phenomena that differ from those known for single networks, but also because the percolation analysis has great relevance to making provision against the menace of natural or human-related disasters such as earthquakes, tsunamis, typhoons, wars, terrorisms, etc.

In this thesis, we study two types of multilayer networks composed of two sub-layers, each of which is a random degree-degree correlated network and connected with the counterpart via interdependent- or antagonistic interlinks. The former model, which is named interdependent networks, is used to explain the mechanism of massive black out caused by the failures in infrastructure networks composed of the Internet and power network. The latter model, named antagonistic networks, may be useful as a mathematical model of ecological networks: the habitat of endangered species and invasive ones are projected on each layer respectively.

The main objective of this thesis is to evaluate the size of the giant component (GC: the largest subset of connected nodes) in the interdependent- and the antagonistic networks when they suffer from random node failures or targeted node attack. For this, we develop an analytical method based on the cavity method in statistical mechanics, which enables us to explicitly handle not only both of the inter-layer and intra-layer degree-degree correlations, but also the hysteresis of the percolation process. Comparison between theoretical predictions obtained by the developed methodology and numerical experiments indicates that our method has an excellent ability for accurately evaluating the GC size in each layer in both cases. We also find that the effects of degree-degree correlations on the robustness of each layer vary a lot depending on system parameters and the type of inter-layer links: positive inter-degree-degree correlations and positive intra-degree-degree correlations in each layer make the interdependent networks more robust, while negative intra-degree-degree correlations are advantageous for the layer suffering from the initial targeted attacks in antagonistic networks.

目次

1	緒言	10
1.1	パーコレーション	10
1.2	複雑ネットワーク	11
1.3	マルチレイヤーネットワーク	14
1.4	本論文の目的	15
1.5	本論文の構成	16
2	技術的準備	18
2.1	各種トポロジー	18
2.1.1	次数と次数分布	18
2.1.2	次数相関	19
2.1.3	クラスタ係数	21
2.1.4	特徴パスと直径, 最短パスとループ	22
2.1.5	媒介中心性	23
2.2	耐性解析 (次数相関の無い場合)	23
2.2.1	残存ネットワークの考察に基づいた転移点の導出	24
2.2.2	母関数法	26
2.2.3	母関数法と Molloy-Reed 基準	27
2.3	幾つかの代表的なモデルについての考察	27
2.3.1	ER ネットワーク	28
2.3.2	SF ネットワーク	31
2.3.3	スモールワールドネットワーク	33
2.3.4	レギュラーネットワークとバイモーダルネットワーク	33
2.4	耐性解析 (次数相関のある場合)	34
2.4.1	二部グラフ表現	35
2.4.2	ミクロな観点からの記述	35
2.4.3	ミクロな観点からマクロな観点へ	37
2.4.4	マクロな観点からの記述	38
2.4.5	キャビティ法と母関数法の比較	39
2.5	リアルネットワークの特徴	40
2.5.1	スケールフリー性とスモールワールド性	40

2.5.2	次数関連の特徴	41
2.6	本章のまとめ	42
3	相互依存ネットワークの耐性解析	44
3.1	序文	44
3.2	カスケード現象	46
3.3	特徴量の導入	48
3.4	解析手法の提案	51
3.4.1	ミクロな観点での記述	51
3.4.2	マクロな観点での記述	53
3.4.3	先行研究との関連性	56
3.5	数値計算とその結果	58
3.5.1	数値実験の手順	58
3.5.2	結果と議論	59
3.6	まとめ	65
3.7	補足	66
4	対立ネットワークの耐性解析	67
4.1	背景や動機	67
4.2	対立ネットワークのモデル	70
4.2.1	二部グラフ表示と記述法	71
4.2.2	特徴量の導入	72
4.2.3	対立ネットワークのパーコレーションプロセス	73
4.3	ミクロな観点からのメッセージ伝播	77
4.3.1	最初のステージと2番目のステージ	77
4.3.2	3番目以降のステージ(ケースQ)	79
4.3.3	3番目以降のステージ(ケースF)	80
4.4	ミクロな観点からマクロな観点へ	83
4.5	マクロな観点での耐性解析	84
4.5.1	初期ステージと2番目のステージ	84
4.5.2	ケースクエンチにおける3番目以降のステージ	85
4.5.3	ケースフリーにおける3番目以降のステージ	85
4.6	数値実験	86
4.6.1	数値実験の手順	86

4.6.2	方法論の正確性: ケースクエンチト	87
4.6.3	方法論の正確性: ケースフリーの結果	89
4.7	ヒューリスティクス	89
4.7.1	ミクロな観点でのインスタンスの修正	91
4.7.2	マクロな方程式の修正	95
4.7.3	ケースフリーにおける精度の改善	96
4.8	次数相関の各レイヤーの耐性に対する影響	96
4.9	現実のシステムとの対比の例	101
4.10	まとめ	101
4.11	主要な記号の定義	103
5	本論文の総括	105
付録 A	母関数法の導出の詳細	108
付録 B	スケーリング仮説	110
B.1	クラスタの個数と臨界点における指数	110
B.2	Bethe 格子の Fisher 指数	111
B.3	一般次元の為の準備	113
B.4	クラスタ数: 一般次元	115
付録 C	数値実験で用いるアルゴリズム	117
C.1	ランダムネットワークの生成	117
C.2	GC の検出: HK アルゴリズム	117
C.3	HK アルゴリズムの考察	121
C.4	任意の次数相関	122
C.5	相互依存ネットワーク	123
C.6	対立ネットワーク	124
参考文献	125

図目次

2.1	5 個のノードから構成されるネットワークにおけるクラスタ係数の導出．今，トリプレット（結合した 3 個のノード）のインデックスは，2-1-3, 1-2-3, 1-3-2, 1-3-4, 2-3-5, 4-3-5, 2-3-4, 1-3-5 の 8 個が存在するのに対し，三角形は 123 の 1 個のみ存在している．クラスタ係数は，式 (2.8) における定義を用いた場合， $C = 3/8$ となる．しかし，式 (2.10) における定義を用いた場合， $C = (1/1 + 1/1 + 1/6 + 0 + 0) \times 1/5 = 13/30$ となることに注意したい．	21
2.2	(a) 元のネットワークのグラフ表現（一部）. (b) 元のネットワークの二部グラフ表現．白い正方形のノードが各リンク上に 1 個ずつ割り当てられる．(c) 故障を受けたネットワークの二部グラフ表現．黒い正方形のノードは各変数ノードに付随しており，そのノードの初期故障状態に関するメッセージを送る役割を持つ．(文献 [86] より引用. ©American Physical Society)	35
3.1	相互依存型ネットワークのカスケード現象の概念図．初期故障が赤い矢印で示される．各レイヤーのネットワークは大きな円で囲まれている．最終的に残存する MCGC は緑色で囲まれた部分である．	47

3.2	<p>(a) 相互依存ネットワークの二部グラフ表示．二重円は，相互依存ネットワークでつながったノードペアを表す．各ネットワーク内のレイヤー内のリンクの伝播機能が，関数ノード（白い正方形）によって表される．また，別の種類の関数ノード（黒い正方形）は，付随するノードペアにすべてのステージにおいて，固定されたメッセージ s_i を送る．(b) レイヤー A 内の式 (3.13) とレイヤー B 内の式 (3.16) に該当する．実線のメッセージは，破線のメッセージから計算される．(c) レイヤー A の式 (3.14) とレイヤー B の式 (3.17) に該当する．実線のメッセージは，破線のメッセージから計算される．現在のステージで参照しているレイヤーとは逆側のネットワークに属することを強調するため，影をつけた関数ノードを使っている．また，関数ノード（影付き）と関数ノード（黒）から送られるメッセージの積は，式 (3.14) と式 (3.17) において，それぞれ $\tau_{A,i}^{2t-1}$ 及び，$\tau_{B,i}^{2t}$ と要約される．(文献 [86] より引用. ©American Physical Society)</p>	51
3.3	<p>二極次数分布を持つ相互依存ネットワークの，選択的ノード攻撃を受ける時の最終的な耐性．各シンボルは，$N = 10000$ のネットワークの 50 回の実験から評価される MCGC を表す．統計的エラーは各シンボルのサイズより小さい．(文献 [86] より引用. ©American Physical Society)</p>	60
3.4	<p>二極次数分布を持つ相互依存ネットワークがランダムノード故障を受ける時の最終的な耐性．各シンボルは，$N = 10000$ のネットワークの 50 回の実験から評価される MCGC を表す．統計的エラーは各シンボルのサイズより小さい．(文献 [86] より引用. ©American Physical Society)</p>	61
3.5	<p>レイヤー A におけるパーコレーションスレッショルド（ターゲットアタック）．(a), (b), (c) は，$C_I = 0.5, 0, -0.5$ にそれぞれ相当している．また，$C_B = 0.7$ (赤い実線; 正の相関), $C_B = 0$ (緑の破線; ニュートラルな相関), $C_B = -0.5$ (青い一点鎖線: 負の相関) である．(文献 [86] より引用. ©American Physical Society)</p>	62

3.6	レイヤー A におけるパーコレーションスレッシュホールド (ランダム故障). 線の色の違いは, 図 3.5 におけるものと同様である. (文献 [86] より引用. ©American Physical Society)	63
4.1	対立ネットワークの二部グラフ表現. (文献 [87] より引用. ©American Physical Society)	71
4.2	ケースエンチトの場合の一例. 青い大きな丸, 黄色い大きな丸で囲んだノードの集合はそれぞれレイヤー α, β における GC である. また, 赤い矢印はそのノードに故障が起きることを表し, 点線のノードは故障した状態のノードを表す.	74
4.3	ケースフリーの場合の一例. 記号の意味は図 4.2 におけるものと同じである.	75
4.4	対立ネットワークの故障プロセスにおけるノードの状態遷移. (a) と (b) はそれぞれケースエンチトとケースフリーの可能な状態遷移をそれぞれ表している. (c) は, [22] において, ノード i_β はそのレプリカノード i_α であるとしたモデルで実現する状態遷移である. (文献 [87] より引用. ©American Physical Society)	76
4.5	メッセージの局所的な流れを表す図 (文献 [87] より引用. ©American Physical Society)	82
4.6	初期生存率 q に対するレイヤー α, β の耐性解析結果 (上が Case Q, 下がケース F). (文献 [87] より引用. ©American Physical Society)	88
4.7	ケースフリーにおける状態遷移: (i) ミクロな観点 (ii) ナイーブなマクロな観点 (iii) 修正されたマクロな観点. 単純のため, レイヤー β におけるアクティブであるが GC に属さないノードの数がほとんど無視出来るような状況を考えた. 各シンボルの意味は図 4.4 と同様である. (文献 [87] より引用. ©American Physical Society)	93

4.8	ケースフリーにおける，マクロな観点におけるノードの状態遷移の修正版．レイヤー β における活性的だが GC に属さないようなノードの割合が，無視出来ないような状況を考えた．レイヤー α において初期故障したノードの一部はステージ $t = 3$ において復活するので，ヒューリスティクスによってアクティブであるとみなされたノードの一部は，ステージ $t = 3$ においても GC に属してしまうことになり，星によってハイライトされたような不可能な状態遷移が実現してしまう．この不合理を埋め合わせるため，GC の大きさを式 (4.46) によって修正したが，その部分を小さな斜め線によって示した．各シンボルの意味は図 4.4 と同じである．(文献 [87] より引用. ©American Physical Society)	94
4.9	対立ネットワークがランダム故障を受けるときの，ケースフリーにおける場合の初期生存率 q に対するレイヤー α の耐性の解析結果（修正版）．ステージ $t = 1$ におけるレイヤー α の耐性の例（シングルレイヤー α において完結する故障プロセスの結果）もプロットされている．各ドットは数値実験によって 50 回平均したものである．(文献 [87] より引用. ©American Physical Society)	97
4.10	$C_\alpha = 0.6$ の場合のレイヤー α の耐性と次数相関の影響．(文献 [87] より引用. ©American Physical Society)	98
4.11	$C_\alpha = -0.4$ の場合のレイヤー α の耐性と次数相関の影響．(文献 [87] より引用. ©American Physical Society)	99
C.1	デモンストレーション用のネットワークの例：黒いノードは生存ノード，点線ノードは故障ノードを表す．簡単のため，ここではノードの故障のみが生じた場合を例示する．	118

表目次

2.1	様々な現実ネットワークのトポロジー (文献 [17] より本論文用に翻訳して引用.)	41
2.2	様々な現実ネットワークのノード数 N とピアソン係数 C_{pear} の関係 (文献 [36] より本論文用に翻訳して引用.)	42

3.1	ランダム故障を受ける場合の二極次数分布をもつ相互依存ネットワークのパーコレーション転移点. $k_A^1, k_A^2, k_B^1, k_B^2$ はそれぞれレイヤー A, B におけるノードの最小次数と最大次数を表す. (文献 [86] より引用. ©American Physical Society)	64
3.2	選択的破壊を受ける場合の二極次数分布をもつ相互依存ネットワークのパーコレーション転移点 (文献 [86] より引用. ©American Physical Society)	65
4.1	$\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1}, \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3}$, もしくは $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{*t=3}$ 全ての可能なケース. それぞれ $M_{i_\alpha}^{t=1}, M_{i_\alpha}^{t=3}$, そして $M'_{i_\alpha}{}^{t=3}$ によって記述される. (文献 [87] より引用. ©American Physical Society) .	92
B.1	$d = 1, 2, 3, 4, 5, 6 - \epsilon$ 次元と Bethe 格子におけるパーコレーション臨界指数 [5]. ただし, 本書の付録で紹介した指数に絞って記載した	116

1 緒言

1.1 パーコレーション

パーコレーション理論の研究は旧くからある学問的研究テーマであり，概念としては Flory の研究 [1]，数学的なモデルとしては，技術者 Broadbent と数学者 Hammersley によるガスマスクの開発のための数理的研究 [2] にまで遡る事が出来る．現在に至るまで 60 年近くに渡って研究がなされていることになるが，それにもかかわらず，問題自体を定義することは容易である．たとえば，モデルとして，非常に大きな $L \times L$ (L は 1 辺のリンクの数) の二次元格子 (ラティス) を考える．二次元格子は，格子点と格子点間のリンクによって構成されているが，それらはある確率で占有されているとする．シンプルのため，格子点 (サイトまたはノード) はすべて占有されており，一方で，格子間のボンド (リンク) がランダムな確率 q で占有される状況 (ボンド過程) を考える．このとき系の性質として知りたいのは，左端から右端まで占有された格子とリンクのみを通してたどり着けるかどうかであり．これを到達可能性 (あるいは，オープンパスが存在するかどうか) という． $q = 0$ のときは到達は無理である一方で， $q = 1$ のときは到達可能であることは自明である．しかし， $0 < q < 1$ の領域においては，自明ではない．到達可能性の代わりに，連結集合 (占有された格子点とリンクから構成される部分集合) の大きさ (系全体に対する割合)，特に最大連結集合 (Giant Component, GC) が系全体に広がっているかどうかを考える場合もあるが，やはり $0 < q < 1$ の領域においては自明ではない^{*1}いずれの場合においても共通するのが，占有確率 q という個々の格子点やリンクの状態について定義される局所的 (ミクロ) な性質と，到達可能性や最大連結集合のような，システム (系) 全体に関する大域的 (マクロ) な性質が，系のトポロジーによって結びついている点にあり，パーコレーションの問題提起もそこから出発している．ミクロ-マクロ間を最もシンプルに関連づけているパラダイムであるため，現実世界の様々な事象との関連性を含んでいる．例えば，森林火災の伝播，海面の高さとランドスケープ (景観を構成する諸要素) の関連性，インフラシステムの耐性，伝染病の伝播，生態ネットワークにおけるコロニーの分布，などの問題に対して，パーコレーション特有の視点を関連づけて考え

^{*1} L が無限大の大きさのある系については，ある q における到達可能性や GC が存在する可能性は， $0 - 1$ の法則 [6] により典型的には 0 か 1 のどちらかである．

ると、それらの問題の本質を理論的に説明づける事が出来る^{*2}また、数理的にも興味深い現象が多く、その解析に必要な技術も多岐にわたる。多くの場合、構成要素の占有確率をゼロから徐々に大きくしていくときに系全体の性質が劇的に転移する瞬間を特に対象としている。これは臨界確率 (q_c と記述する) といわれるが、到達可能性が不可能から可能に、また、最大連結部分集合の大きさが系の中の限られた領域から系全体に広がるのである。 q_c を数値実験を使って予想したり数学的に証明したり、あるいは系の臨界転移点における性質について厳密に理解すること^{*3}は、パーコレーション研究の主要な目標の1つである。

問題を定義する事が易しい一方で、解析的に解く事は難しい [5, 6, 7, 8]。これが今なお研究が行われている理由の1つである。実際、現在までに q_c を厳密に求める事が判明したモデルの例は少なく、例えば二次元格子 ($d = 2$) における格子点のボンド過程などであり、系の持つ自己双対性によって $q_c = 1/2$ であると厳密に証明されている [9]。他にも、 $d \geq 19$ 次元においては転移点の厳密な評価がされている。一方で、 $3 \leq d \leq 18$ は予想に留まることからこの方向における研究の進展は容易ではない事が分かる。例えば、同じ2次元格子でもサイト過程に関しては、 q_c は 0.59 付近にあると数値計算で示されているものの、正確な値は未だに知られていない。 q_c の値そのものだけでなく、系の大きさが q_c に与える影響 (有限サイズ効果) なども多く研究されているが、現在のところ解析手法のほとんどは無限大の大きさの系に対してであり、任意の大きさの系に対する厳密な計算手法はまだ判明していない。系の臨界点転移における様々な統計的性質は、系の次元のみに依存すると数値的に予測されている (付録 B) が、厳密には証明されていない。しかし反証する実験データは未だないので支持を得ている (^{*4})。

1.2 複雑ネットワーク

私たちの世界におけるシステムは、非常に多様である。例えば、電力網や鉄道網、航空網のような我々の移動や生活を支えるインフラストラクチャや、World

^{*2} しかし、理論が即座に現実問題の何らかの具体的な手段や解決策に結びつくかどうかは別であり、より慎重な議論が必要となる。

^{*3} 臨界転移点においてある種の不変性 (共形不変性) が出現する事が予測 [3] されていたが、最近限定的なモデルにおいてではあるが、厳密な証明がなされた [4]。

^{*4} 本論文ではラティスでなく後述する複雑ネットワークにおけるパーコレーションを扱うため、伝統的なパーコレーションの枠組みの紹介は最低限にとどめる。

Wide Web やインターネットのような情報交換を可能にする人工的なシステムが挙げられる。また、タンパク質の反応系や、生態における補食-被補食の関係など、自然由来のシステムも考えられる。これら1つ1つは全く違った特徴を持ち、それぞれは何の関連性も無いようにも思える。しかし共通点も存在する。それは、多くの構成要素とそれらの複雑な相互作用によって成立しており、時々刻々構成要素が生成や消滅を繰り返すものの、全体としては機能を存続しているという所にある。

複雑系科学によって、個々のシステムの静的特徴やシステム上で展開される動的特徴（現象）を知る事は、計算能力が向上し、知識やデータの共有が世界期で容易な社会の将来に、大きな重要性を持っている。この研究分野は、物理学、社会学、工学、生物学、情報学、等の学際領域に位置付けされる。これらの分野において、現実のシステムのモデル化と手法の構築は、大きなテーマである。ひとつは、個々のシステムに特化したやり方でモデル化を行うという方針である。この方針であるならば、対象を出来るだけ精密に描写することが出来る。開発されたシステム解析ツール（例えば、電力や水のコントロールや航空機や電車のコントロールシステム）は実用レベルに耐えうる複雑かつ高度なものになることが期待される。しかし、積み重ねられる技術や知見は限定的なものになりやすく、特に他分野の研究者や技術者にまでは伝播されにくい。もうひとつの方針は、構成要素や要素間の関係性を出来るだけシンプルに表現することで、システムの種類を超えた汎用性、つまり様々なシステムに応用できるような統一的解析的体系の発展を目指すという方針である。この場合は、個別システムに特化した部分は失われやすく、実用レベルの運用性は望めないという短所が存在するが、多くの異なるメカニズムやプロセスを1つの枠組みで理解するための新しい方法を得ることができる。

複雑ネットワーク（グラフ）理論は、明らかに後者の考え方に則って発展してきた理論的枠組みである。歴史的にはグラフという概念はオイラーが初めて利用したとされる。彼は、ある地点からスタートして7つの橋をすべて1回だけ渡って元の地点まで戻ってくる事が出来るかという問題の解を見つける際、各地点はノード、地点間を結ぶ経路（橋）はリンクとして表現することで、街を1つのグラフとして抽象的に捉えた。ここで、重要なのは次数である。次数とは、ある1つのノードにつながっているリンクの本数であり、グラフにおいて最も基本的な性質である。これを用いると、上述した一筆書き問題は、対象

のグラフにおける次数が奇数であるノードの個数を調べる事に帰着される。^{*5} 特筆すべき点は、次数という定量的特徴量によって任意の都市に関する大域的な性質を正確に議論できるようなフレームワークを提供した点である。グラフ全体においてノードの次数を調べる事で次数分布というものを考える事が出来るが、次数分布によって系の性質を議論するという手順は、現代のネットワーク科学においても頻繁に用いられる。

グラフ理論における次の歴史的発展は、Erdős の考案したランダムグラフ (ER ネットワーク, 2.3.1 節) というモデルである [10]。これは、ノード数 N と、ノード同士が結ばれる確率を p とすることによって得る事ができる。結果的に生じる次数の分布は、ポアソン分布という名前でも呼ばれるが、ネットワークの研究における代表的なモデルとして、現在まで最もよく使われた次数分布であると言える。これは解析的に性質が良いからであるが、見逃せない特徴として高次数のノードの割合が指数関数的に減少するため、非常に高い次数ノードの存在を想定していないという点が挙げられる。しかし、現実世界のシステムの中には小さな次数のノードが多く存在する一方で、極めて次数の大きいノードもわずかながら存在し重要な意味を持つ事が多い。スケールフリーネットワーク (SF ネットワーク, 2.3.2 節) は、次数分布にベキ分布を適用したモデルであり、より現実世界に近いモデルとして、バラバシにより提唱された [13]。複雑ネットワークに関する研究は現在では非常に多く存在するが、その発端となった研究の 1 つといえる。ER モデルが考案されてから SF モデルへと関心が移るまで、数十年の年月を要したが、その間にネットワークにおける重要な概念は発見されてきた。その 1 つがスモールワールド性である。これは、現実世界のネットワークにおけるノード間の平均最短距離は、ネットワーク全体のノード数 (数十万 ~ 数百万程度) に比べて、非常に小さく、6 前後であるという事実 (6 次の隔たり) であり、社会学者である Milgram による実験 [14]^{*6} によって確かめられた。しかし、数理モデルの開発は遅く、この実験 (スモールワールド実験) によってスモールワールドの概念が生まれてから、Watts, Strogatz による [12, 11] によってモデルが提唱されるまでに数十年の月日が経っている。

^{*5} 出発点と到着点が違う場合、次数はそれぞれ奇数でなければならず、2 つが同じ場合はそのノードの次数は偶数である。また、経過点は常に次数は偶数である。

^{*6} ネブラスカ州の住人の中から、160 人の被験者をランダムに選び、彼らにある男性の名前と顔写真を同封したメールを送り、写真の人物を知っていればその男性の住所に、知っていなければ、知っていそうな自身の知り合いにメールを送信するように依頼し、受け取った人物に同じことをやってもらって、写真の人物にたどり着くまで何人経由するかを調べた。

次数分布や平均頂点間距離以外にも、ネットワークを特徴付けるためのトポロジー（特徴量）は多く開発され、研究の為のツールボックスとして整理されており、それらによってネットワークの構造解析も体系的に行うことができるようになった [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]。たとえば、トポロジーとしては次数相関、媒介中心性、クラスター係数等があり、構造的性質としては、コミュニティ、耐性等が挙げられる。耐性とはシステムがある種のダメージを受けたときに、その機能を維持する事が出来るかどうかを表す性質である。たとえばスケールフリーネットワークの場合、ランダム故障に対して耐性がある（実際に WWW など絶えずノードが生成したり消滅したりしているが、全体としては安定である）一方で、高次数のノードを狙い打つ攻撃に対しては非常に脆弱であることが判明した。これは、スケールフリー性の研究の重要な動機の一つとなっている。

1.3 マルチレイヤーネットワーク

マルチレイヤーネットワーク [22, 23, 24] というモデルが多くのグループの研究対象となったきっかけは、相互依存型ネットワーク [25, 26, 27] における耐性解析の研究である。相互依存型ネットワークでは、ネットワーク（レイヤー）の各ノードは 1 対 1 対応でもう一つのネットワークのサイトと結合しており、片方のノードが故障すれば、それと結合しているもう片方のノードも故障する。この特性によって、部分的な一部のレイヤーのノードの故障がネットワーク全体に波及する連鎖的な故障（カスケード現象）につながる可能性がある。この現象は、GC の臨界点における一次転移（不連続転移）によって象徴的に捉える事ができる。次数分布が広域的である方がランダムネットワークは頑健であるという単一ネットワークにおける特徴とは異なる性質を持つ事から、現実システムのモデル化の再考へとつながった。また、このモデルは、電力網とインターネットを模擬的に表し、それによって大規模停電現象のメカニズムを理論的に説明するとして、広く注目を集めた。

緊急時ではなく日常生活においても、我々が属したり利用したりするシステムのマルチレイヤー性を実感することができる。例えば、ある社会コミュニティで共有される情報の波及速度と、別の社会コミュニティで共有される同じ情報の波及速度には差が生まれる。その際、情報の出発点（どのコミュニティに最初に伝わったか）やコミュニティ間の伝達形式が重要である。一方で、各

ユーザ同士が互いに連絡をとれるかどうかについては、コミュニティを超えたつながりを考える必要がある。また、様々な通信手段（電話や手紙、インターネット通信等）も併合して考える必要がある。このように、現実世界の多数の要素から構成される複雑なシステムは、シングルネットワークでは表現しきれない部分も多い。

マルチレイヤーネットワークの目標を一言で記述すると、“伝統的な”ネットワーク理論の一般化に必要なマルチスケールでの複雑系（自然由来，人工由来両方）のモデリングである。その際に、包括的な方法でマルチレイヤー的，マルチコンポーネント的なシステムを研究する為の確固たる基礎理論，そして，その結果生じた新しいツールボックスを創造し，進展させていくことが不急の課題である。現代のシステムは多様なサブシステムやそれらが結合したレイヤーを含んでおり，個々の構成システムについても，オープンであり，有向性があったり，マルチレベルであったり，マルチコンポーネント的であったり，再構成可能であったり，不安定で時々刻々と状況が変化する環境下におかれていたりするからである。これらのシステムは，内的あるいは外的な相互作用を通して，局所的あるいは大域的なスケールでサブシステムやサブコンポーネントに影響を与えながら，進化をしたり，環境に適用したり，変容したりしていく。現在では，[22, 23, 24]に見られるように，これらの捉え方が難しい複雑な系を解析する為の統一的な理論を作ろうとする試みが存在するものの，様々な研究グループが独自の研究を行っている傾向があり，特に数理的側面において依然として萌芽的な段階といえる。そのため，物理学のような伝統的な学問大系に比べて，成熟していない部分が多く残されているが，その分新しい手法や枠組みを提唱していく余地がある。

1.4 本論文の目的

現代のシステムは互いにつながりやすく，複雑性も増す一方である。マルチレイヤーネットワークは，そのようなシステム間の相互作用の影響を陽に議論する事ができる概念として，現在盛んに研究されている。その中でも最も大きな分野の1つがパーコレーションに端を発する耐性解析である。この理由としては，パーコレーションという文脈で現在でも未解決な問題が多数残っているという理論的側面が挙げられるが，現実のシステムに関するロバストネス（耐性）について，システムのネットワークによる近似が妥当であるとすれば定量

的評価ができる，という現実的な側面も非常に大きいと思われる．ネットワークに関する定量的耐性解析において現在主流の手法は母関数法と言われる手法である．この手法は平均場近似によって成立しているが，ミクロな観点における議論を通常省略してしまうため，導出過程が暗黙的である．母関数法の導出結果はコンパクトであるので，シングルネットワークに関しては十分であるかもしれない．一方で，マルチレイヤーネットワークをモデルとした場合は，レイヤー内およびレイヤー間における次数相関や，ノードの活性状態の伝播に関するレイヤー間での相関，時間発展する現象等，遥かに複雑な状況が想定される．そのため，モデル上で再現できる現象と，解析のための方法論との間における対応関係が明確であり，かつ上述した複雑な状況にも柔軟に対応できる手法が望まれる．

本論文では，マルチレイヤーネットワークの代表的なクラスとして相互依存ネットワークと対立ネットワークという2つのモデルの耐性について議論する．前者は，互いのシステムがノードレベルで相互に依存的であり，反対に後者では，ノードレベルで相互に対立的である．両方のモデルにおいて、系の耐性は残存する結合したノードの最大部分集合 (GC) の大きさによって，定量的に議論する事が出来る．解析手法としては統計力学における Cavity 法 [32, 66] の考え方に着目する．これは，スピングラス理論で発展してきた解析法であり，平均場近似的を行う点では母関数法に通じるものがある．本論文では，ミクロな観点におけるシングルインスタンスに関する定式化を明確にし，それを基礎としてランダムグラフ特有の局所ツリー近似や自己平均性によってマクロな観点における平均場近似的拡張を行うことで，ネットワークアンサンブルにおける耐性評価のための方法論を提案する．また，理論解析法の精度は，モンテカルロ法を基礎とした数値実験によって確かめる．また，レイヤー内とレイヤー間の次数相関が耐性に与える影響について議論する．

1.5 本論文の構成

以下論文の構成について説明する．2章において技術的準備について述べる．3章において，相互依存型ネットワークの数理解析について，議論する．4章において，対立ネットワークの数理解析について，議論する．本論文全体の総括は5章に記述する．また，付録A，付録B，付録Cにおいて，それぞれ，母

関数法の導出過程，スケーリング則の導出の概要，そして数値計算におけるアルゴリズムの概要について述べる．本論文末尾に参考文献を掲載する．

2 技術的準備

本章は、本論文の主要部である3章と4章における議論の前の導入部分に該当する。以下、本章の構成について記述する。まず、2.1節において、ネットワークのトポロジー（特徴量）を全般的に紹介する。これらは、シングルネットワークの研究において十分に確立されており、ネットワークを多面的に捉えるために非常に有用なツールボックスとなる。なお、本論文で議論するマルチレイヤーネットワークの耐性解析に関しては、次数分布や次数相関とその拡張のみを扱う。次に、2.2節において、相関のないシングルネットワークの耐性解析について議論する。初期故障が無い場合と初期故障がある場合に分けられるが、どちらの場合についても最近傍ノードの平均次数によってGCが出現する臨界転移の基準をそれぞれ導出できる。また、残存するGCの大きさの定量的評価に関して、多くの研究で使われている母関数法を基に議論する。2.3節では代表的なネットワークのモデルを紹介し、それらの特徴量や耐性について議論する。相関のあるシングルネットワークの耐性解析については、2.4節で議論する。この節においてCavity法をベースとした解析手法を展開するが、マルチレイヤーネットワークにおける個別レイヤーの耐性解析に直接適用可能であり、有用である。また、Cavity法と母関数法の対応関係についても確認する。2.5では、現実世界のネットワークの特徴について、簡潔に述べる。2.6にこの章の総括を述べる。

2.1 各種トポロジー

2.1.1 次数と次数分布

リンクに関する重みが無いネットワーク（ノード数 N ）をひとつ用意する。これは、数学的には $N \times N$ の隣接行列 A によって記述される。 A の成分は、ノード i とノード j が直接1本のリンクでつながっていれば、 $A_{ij} = 1$ 、つながっていないければ $A_{ij} = 0$ となる。また、全ての A における対角項は $A_{ii} = 0$ を満たす。隣接行列を使うと、ノード i の次数 k_i は、

$$k_i = \sum_{j \in \partial i} A_{ij} \quad (2.1)$$

によって導出される。次数は、各ノードが持つ基本的な性質である。

全てのノードについて次数の情報を得られた場合、平均次数 $\langle k \rangle$ を、 $\langle k \rangle =$

$\sum_i k_i/N$ のように求める事が出来る．平均次数が $\langle k \rangle \sim O(\log N)$ 程度であるとき，ネットワークはスパースであるという．ある具体的な現実システムをネットワークで表現し全てのノードについてのプロフィールをすることで次数分布を得る事が出来る．また，特定の1つの対象ではなく，ネットワークアンサンブルを考える時も，最も基本的な性質は次数分布である．これは，ランダムに選んだノードの次数が k である確率 $p(k)$ によって記述される．代表的な次数分布を持つモデルについては，2.3 節に後述するが，シンプルな関数で表現されるため解析計算において有用であり，多くの研究に使われている．

2.1.2 次数相関

次数分布によってその系の大域的な特徴を捉えることが出来る一方で，それだけでは捉えることが出来ない情報も多く存在する．例えば，次数分布のみが定義されている場合，繋がっているノード同士の次数に何らかの相関があることまでは想定していない．しかし，現実の系をネットワーク化した場合は，考える系の種類によって様々な次数相関を持つ事が知られている [34]（具体例については 2.5 節を参照されたい）．

次数相関を特徴づけるため，まずリンクを辿って得られるノードの次数分布 $r(k)^{*7}$ を考える．これは，ランダムにリンクを1本選び，片方のノードを参照したときの次数に関する確率である．ノードの次数分布と関連づけて，

$$r(k) = \frac{kp(k)}{\sum_l lp(l)} = \frac{kp(k)}{\langle k \rangle}, \quad (2.2)$$

と書く事ができる．リンクを1本ランダムに選んだとき，一端のノードの次数が k であり，もう一端の次数が l であるような確率 $r(k, l)$ も考える事が出来る．これは，既に定義した $p(k)$ と $r(k)$ によって

$$\sum_l r(k, l) = r(k) = \frac{kp(k)}{\sum_l lp(l)}, \quad (2.3)$$

のように定義される．リンクを1本ランダムに選んだとき，片方のノードの次数が k であることが既に分かっている状況も考えられる．このとき，もう片方のノードの次数が l であるような確率は，条件付き確率を使って $r(k | l)$ として

^{*7} ランダムにリンクを選び辿ることによって参照されるノードの次数は，ランダムにノードを選び参照したノードの次数よりも一般的に大きくなる．これは，リンクを選ぶ場合，高次数ノードに付随するリンクが選ばれやすいからである

記述され,

$$r(k|l) = \frac{r(k,l)}{r(l)} = \frac{\langle k \rangle r(k,l)}{lp(l)}, \quad (2.4)$$

を満たす．ただし，全ての k, l について， $r(k|l) = r(k)$ が成立するとき，ネットワークの次数相関が無い（あるいはニュートラルである）場合に相当する．次数の同時分布 $r(k, l)$ や条件付き確率 $r(k|l)$ は，ネットワークの次数相関を詳しく特徴づけるが，実際の系のネットワークではノード数 N の影響を受け，ノイズを含む事になりやすい．また，パラメータの数が次数の種類の組み合わせの数だけ必要となるため，耐性解析（2.2 節を参照）などのようなシステムのマクロな性質との関連性を考える場合も，取り扱いが容易ではない．

そこで，よりマクロに次数相関を特徴化するため，ピアソン係数というものを導入する．これは，次数相関を 1 つの数字で表現したものであり，前述した同時分布やリンクの次数分布によって，

$$C_{\text{pear}} = \frac{\sum_{kl} kl(r(k,l) - r(k)r(l))}{\left[\sum_k k^2 r(k) - (\sum_k kr(k))^2 \right]^{1/2}}, \quad (2.5)$$

と定義される．もし C_{pear} がゼロであるならば，ネットワークは全体として次数相関を持たない．また， C_{pear} が正（負）である場合は，全体として正（負）の相関を持つ事を示している．

次数相関を定量的に評価する別の手段として，平均最近傍次数の傾きを計る方法が挙げられる．ノード i における平均最近傍次数とは， i と付随しているノード（ ∂i によって記述する）の平均次数の事であり，

$$k_{nn,i} = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in \partial i} k_j = \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} k_j, \quad (2.6)$$

によって計算する事が出来る．ネットワーク全体における次数が k のノードの平均最近傍次数は，

$$k_{nn}(k) = \sum_{k'} k' r(k'|k), \quad (2.7)$$

となる．次数相関が無い場合は， $r(k'|k) = r(k')$ であるため，式 (2.2) より $k_{nn}(k) = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle \equiv \kappa$ となり，次数 k とは独立となる．また，次数相関が正である場合は $k_{nn}(k)$ は次数 k に関する増加関数，次数相関が負である場合は， $k_{nn}(k)$ は次数 k に関する減少関数となり，その傾き ν はピアソン係数と同様，ネットワークのマクロな次数相関を表す指標となる．

2.1.3 クラスタ係数

本論文におけるクラスタとは、互いに三角形のように繋がっているノードのことを指すことにする*⁸。ネットワーク全体におけるクラスタ係数の定義は、次のように2種類存在する。

まず、グローバルに定義されるクラスタ係数は、

$$C = \frac{\text{ネットワーク内の三角形の数} \times 3}{\text{ネットワーク内で結合した3個のノードの総数}} \quad (2.8)$$

として定義される。

別の方法として、ノードのクラスタ性を個別に評価し、その和としてクラスタ係数を定義する方法もある。ノード i におけるクラスタ係数は、

$$C_i = \frac{\text{ノード } i \text{ が属す三角形の数}}{\text{ノード } i \text{ を中心としたトリプル (3個のノード) の数}} \quad (2.9)$$

と計算できることから、ネットワーク全体のクラスタ係数は、

$$C = \frac{1}{n} \sum_i C_i \quad (2.10)$$

である。式 (2.8) と式 (2.10)、どちらを採用するかによって、クラスタ係数は異なる値をとることに注意したい (図 2.1)。

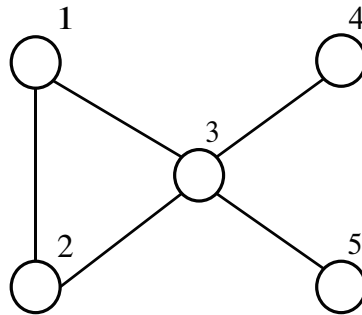


図 2.1 5 個のノードから構成されるネットワークにおけるクラスタ係数の導出。今、トリプレット (結合した 3 個のノード) のインデックスは、2-1-3, 1-2-3, 1-3-2, 1-3-4, 2-3-5, 4-3-5, 2-3-4, 1-3-5 の 8 個が存在するのに対し、三角形は 123 の 1 個のみ存在している。クラスタ係数は、式 (2.8) における定義を用いた場合、 $C = 3/8$ となる。しかし、式 (2.10) における定義を用いた場合、 $C = (1/1 + 1/1 + 1/6 + 0 + 0) \times 1/5 = 13/30$ となることに注意したい。

*⁸ パーコレーションでは、クラスターはつながったノード部分集合のことを指すが、本論文ではコンポーネントという名前と呼ぶ。尚、付録 B ではクラスターを使う。

2.1.4 特徴パスと直径，最短パスとループ

2つの異なるノード i, j に関して， i から j まで，つながっているノードとリンクを辿って到達できるかどうかを考える．リンクに方向性がない場合は，ノードやリンクを重複することなく，たどり着く事が出来るか，出来ないかのいずれかである．この経路をパスという．リンクに方向性がある場合は，ノードやリンクを重複してたどり着く事が出来る場合もあり，ウォークというが本論文で扱う対象は無向重み無しネットワークである．2つノード間のパスの中で長さが最短のパスの長さを $l_{i,j}$ と記述する．本論文では，リンクに重みのあるネットワークの場合は考えないので，パスの長さは始点から終点までに辿る必要のあるリンクの本数であり，化学距離とも言われる．また，異なる2つのノード i, j 間のパスは，一方ノードからつながっているリンクだけを通ってもう一方のノードにたどり着くことが出来ない場合定義出来ない（便宜上，無限大として定義する場合もある）

特徴パス長 L は，異なる2つノード間の最短パスのネットワーク（ノード数 N ）全体における平均であり，

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j,i \neq j} l_{i,j}, \quad (2.11)$$

として定義される． L の代わりにパスの長さのハーモニック平均の和 $E = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j} 1/l_{i,j}$ で定義されるエフィシエンシーが使われる場合もある．パスが存在しない2つのノード間の距離は L を用いる場合，便宜上無限大として距離を定義する必要があるが， E を使うと自然に0として定義できるという利点がある． E は脳科学の研究で使われ，脳機能との関連性が示唆されている[?]．)

また，ネットワークの半径 r が最も高い次数のノードからの平均的パス長である一方でネットワークの直径 D は，異なる2つのノード間の最短パスの最大値であり，

$$D = \max_{i,j} l_{i,j} \quad (2.12)$$

と定義される．ただし， $r < D < 2r$ が成り立つ．

ループは，あるノードからつながっている異なるリンクを辿ることで，そのノード自身に戻ってくることができる時，その経路によって定義される．ランダムグラフは一般的には短いループの存在を無視出来，Bethe ツリーによる近似によって可解性を保つ事が知られている．具体的なモデルにおけるループの数については，2.3 節に後述する．

2.1.5 媒介中心性

ネットワークにおけるノードの重要性は、ノードの次数の大きさによって測る事が出来る場合もある。例えば、耐性や情報の伝播においてハブノード（高次数のノード）が重要な役割を担っている事は、直感的にイメージしやすい。しかし、それが成立しない場合もありうる。

今、一般的なネットワーク内の任意の2つのノード間の最短パスを考える。このとき、最短パスに含まれやすいノードと含まれにくいノードが存在する。言い換えれば、前者は最短パスの中継点になりやすいということである。このような観点における尺度を媒介中心性 (betweenness centrality) という。定量的には、ノード i の媒介中心性 $g(i)$ は、ランダムに2つの i とは異なるノード j, k を選択し、それらの最短パスがそのノード i を中継する場合は g_i に1を加え、中継しない場合は0を加える事によって計算される。2つノード j, k は全ての組み合わせが必要であるので、

$$g(i) = \sum_{\{j,k\}} g_i(j,k), \quad (2.13)$$

という形で定義される。ここで、 $\{j,k\}$ は、順番を無視した2つのノードであることを意味する。

ネットワークに向きが無い場合は、一般にはノード間に異なる最短パスが複数存在する。その場合は、式 (2.13) の $g_i(j,k)$ の計算において1を加える代わりに、

$$\frac{\text{ノード } j,k \text{ 間の最短パスの内、ノード } i \text{ を経由するものの数}}{\text{ノード } j,k \text{ 間の最短パスの総数}} \quad (2.14)$$

を加えることによって対応出来る。媒介中心性は、ネットワークの次数分布とも密接な関わりがある事が知られている [17]。

2.2 耐性解析（次数相関の無い場合）

マルチレイヤーネットワークの耐性解析の準備として、次数相関の無い場合のシングルネットワークの耐性について議論する。耐性の評価基準の1つは、故障が無い場合は GC が出現するかどうか、故障がある場合は GC が残存するかどうかである。故障を伴わない場合については、次数分布と耐性に関して、Molloy-Reed 基準 [28] という簡潔な評価式が成立する。この基準の導出方法は複数あるが、Cohen らの方法 [18] で示す。また、故障を伴う場合についても、

故障の後に残存したネットワークの次数分布に関して，上述の基準を適用することによって，臨界転移故障確率を定量的に評価できる．一方で，残存する GC の大きさによっても耐性を定量的に評価できる．それに関しては，まず，母関数法 [38] を使って議論する．本論文では GC の大きさの議論に限定するが，母関数によって複雑ネットワークの種々の特徴量をコンパクトな形で導出出来る．

2.2.1 残存ネットワークの考察に基づいた転移点の導出

故障を伴わない場合の GC の出現を決定する Molloy-Reed 基準は，例えば次のように導出することができる [18]．今，無向ネットワーク（全体のノード数 N ）における，あるコンポーネントに着目する．その中の構成要素である任意の 2 つのノード i, j について， i を出発点としてノード j に到達できることを， $i \leftrightarrow j$ と記述する．コンポーネントが十分大きい場合，その中に含まれるノードの平均次数は 2 より大きくなければならない．これより，

$$\langle k_i | i \leftrightarrow j \rangle = \sum_{k_i} k_i p(k_i | i \leftrightarrow j) > 2 \quad (2.15)$$

ここで，Bayes の公式より

$$\begin{aligned} p(k_i | i \leftrightarrow j) &= \frac{p(k_i, i \leftrightarrow j)}{p(i \leftrightarrow j)} \\ &= \frac{p(i \leftrightarrow j | k_i) p(k_i)}{p(i \leftrightarrow j)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

が成立する．次に，式 (2.16) のそれぞれの構成要素を計算する．今，ランダムに選んだ 2 つのノード i, j について， i から j に到達できる確率は，任意の 2 つのノードに存在するパスを，全てのノードから 2 つランダムに選ぶ組み合わせの数で除したものであり， $p(i \leftrightarrow j) = \sum_i \frac{k_i N/2}{N(N-1)/2} = \langle k \rangle / (N-1)$ と評価できる．また，一方のノード i の次数が k_i という限定条件において， i から j に到達できる確率は， $p(i \leftrightarrow j | k_i) = k_i / (N-1)$ と評価できる．これらを式 (2.15) に代入して

$$\langle k_i | i \leftrightarrow j \rangle = \frac{\sum_{k_i} k_i^2 p(k_i)}{\langle k \rangle} = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \equiv \kappa > 2 \quad (2.17)$$

式 (2.17) の最後の不等式が，故障が無い場合に GC が出現するかどうかの条件を示しており，Molloy-Reed 基準という名前と呼ばれる．ここで， κ は 2.1.2 節において定義した，次数相関がない場合の平均最近傍次数である．

一方で，確率 $1 - q$ でランダムにノードが故障（すなわちノードの生存確率が q ）したとき GC が残存するかどうか，も系の耐性を知る基準となる．GC が

残存するための下限である臨界生存確率 q_c を導出するためには，故障後の残存ネットワークの平均次数と次数の 2 次モーメントを求め，式 (2.17) を適用すればよい．

今， k を故障前のノードの次数， k' を故障後に残ったノードの次数とする．残存したネットワークの次数分布は，

$$\tilde{p}(k', q) = \sum_{k=k'}^{\infty} p(k) \binom{k}{k'} q^{k'} (1-q)^{k-k'} \quad (2.18)$$

と表現される．これより， $\langle k' \rangle, \langle k'^2 \rangle$ が，

$$\begin{aligned} \langle k' \rangle &= \sum_{k=k'}^{\infty} k' p(k) \frac{k!}{k'!(k-k')!} q^{k'} (1-q)^{k-k'} \\ &= \sum_{k=k'}^{\infty} q k p(k) \frac{(k-1)!}{(k'-1)!(k-k')!} q^{k'-1} (1-q)^{k-k'} \\ &= q \langle k \rangle, \\ \langle k'^2 \rangle &= \sum_{k=k'}^{\infty} k'^2 p(k) \frac{k!}{k'!(k-k')!} q^{k'} (1-q)^{k-k'} \\ &= \sum_{k=k'}^{\infty} q k p(k) + \sum_{k=k'}^{\infty} q^2 k(k-1) p(k) \\ &= q(1-q) \langle k \rangle + q^2 \langle k^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

と計算される．これらを式 (2.17) に代入することで，

$$\frac{q^2 \langle k^2 \rangle + q(1-q) \langle k \rangle}{q \langle k \rangle} > 2, \quad (2.20)$$

を得る．式 (2.20) を q について解くことにより，

$$q > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} = \frac{1}{\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1} = \frac{1}{\kappa - 1} = q_c, \quad (2.21)$$

を得るが，最後の q_c がランダムにノード故障が起きた後 GC が残存するための臨界生存確率である．もし，元のネットワークにおいて次数の 2 次モーメントが発散するならば，いかなる割合のランダム故障後も必ず GC が残存する事を示している（2.3.2 節も参照されたい）．

まとめると，故障が無い場合は式 (2.17)，ランダムノード故障（生存率が q ）がある場合は式 (2.21) が，それぞれの状況における GC が出現（残存）するための臨界条件である．

2.2.2 母関数法

ランダムネットワークにおける耐性解析のための解析法として標準的に用いられる手法は、複雑ネットワーク科学の分野では母関数法であり [34]、耐性解析に関して 2.2.1 における手法よりも、論理構成として精緻な手法と考えられている。ただし、GC の出現（残存）に関して最終的に得られる結果に関しては全く等価である。この手法では相関がない場合のネットワークにおける GC の大きさを導出出来る。また、それ以外の重要な特徴量もコンパクトな形で求める事ができるため、多くの研究者に用いられている。

以下母関数法の概要を簡単に記述する。まず、次数分布 $P(k)$ で特徴付けられるランダムネットワークアンサンブルを考える。これに対する母関数は、

$$G_0(x) = \sum_k p(k)x^k, \quad (2.22)$$

のように定義される。ただし、 $G_0(x)$ は、 $|x| \leq 1$ でのみ定義され、絶対収束するような関数である。これより、平均次数は $\langle k \rangle = G'_0(1)$ と表す事ができる。また、

$$G_1(x) = \frac{1}{\langle k \rangle} \frac{dG_0(x)}{dx} \quad (2.23)$$

を定義する。これは後述する式 (2.26) において活用する。

ノードが故障確率 $1 - q$ でランダム故障したとき、残存するネットワークの次数分布 (2.18) に対する母関数は

$$\tilde{G}_0(x, q) \equiv G_0(xq + 1 - q) \quad (2.24)$$

と、故障前のネットワークの母関数によって表現できる。すると、GC に属すノードの全ノードに対する割合は、

$$\mu = q\tilde{G}_0(x, q) = q(1 - G_0(fq + 1 - q)), \quad (2.25)$$

と表現できる。ここで f は超越方程式

$$f = G_1(fq + 1 - q) \quad (2.26)$$

の非負最小解である。また、初期故障が無い状況では、式 (2.26) に $q = 1$ を代入することによって、 $\mu = 1 - G_0(f)$ と導出できる。なお、これらの導出過程については、付録 A に記載する。

ここでは、GC の大きさの導出手順を紹介したが、ネットワークの種々の統計的性質を、次数分布と一連の関数操作によってコンパクトを導出できるのが母関数法の大きな利点である。

2.2.3 母関数法と Molloy-Reed 基準

母関数法を使って，Molloy-Reed 基準を導出する方法を述べる．簡単のため，初期故障が無い状況を考える．GC が出現しない場合，コンポーネントの平均的大きさ $\langle s \rangle$ が臨界転移点より下では発散しないことを示す必要があるが，ここでは [20] に記載される方法を紹介する．任意に選んだノードを含むコンポーネントの大きさの分布の母関数を $H_0(x)$ とおく．これを直接計算する事が難しいが，あるノードを選び底から 1 本のリンクを辿った先につながっているノード数の分布の母関数 $H_1(x)$ に対して， $H_1(x) = xG_1(H_1(x))$ が成立する．すると， $H_0(x)$ は， $H_0(x) = xG_0(H_1(x))$ と表される．これより $\langle s \rangle$ は，

$$\langle s \rangle = H'_0(1) = 1 + G'_0(1)H'_1(1). \quad (2.27)$$

ここで， $H'_1(1) = 1 + G'_1(1)H'_1(1)$ を満たす事から， $H'_1(1) = 1/(1 - G'_1(1))$ である．それゆえ，式 (2.27) は， $G'_1(x) = G''_0(x)/G'_0(1) = G''_0(x)/\langle k \rangle$ と表される事と， n_2 (第 2 隣接ノード数) について $\langle n_2 \rangle = G''_0(1)$ と計算出来る事から，

$$\langle s \rangle = 1 + \frac{G'_0(1)}{1 - G'_1(1)} = 1 + \frac{\langle k \rangle^2}{\langle k \rangle - \langle n_2 \rangle}, \quad (2.28)$$

と書き直す事が出来る．ここで，母関数の 2 階導関数の計算により， $\langle n_2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle$ が成り立つので，式 (2.28) に代入し，

$$\langle s \rangle = 1 + \frac{\langle k \rangle^2}{2\langle k \rangle - \langle k^2 \rangle}, \quad (2.29)$$

GC が存在しない場合，コンポーネントの大きさの平均は発散しないという条件を想定したことを思い出すと，式 (2.29) の第 2 項の分母について $2\langle k \rangle - \langle k^2 \rangle > 0$ が成立する必要がある．そのため，

$$\kappa = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} < 2 \quad (2.30)$$

が成立する．逆に GC が存在する場合は $\kappa > 2$ となるため，GC の出現に関する臨界転移条件は $\kappa = 2$ である．これより式 (2.17) に帰着するので，母関数法によって導出される臨界条件が 2.2.1 節で議論した基準と等価であることが示された．

2.3 幾つかの代表的なモデルについての考察

ここでは，複雑ネットワークの研究に使われる代表的なモデルの特徴について議論する．古典的なモデルは， $G(N, p)$ に属す Erdős-Rényi ネットワーク (ER

ネットワーク)であり,ポアソン型分布を持つ.ER ネットワークの特殊な場合として,単一の次数を持つノードから構成されるレギュラーランダムネットワーク(RR ネットワーク)が挙げられる.ER ネットワークとRR ネットワークの性質は非常に良く似ている.これらのモデルはシンプルな解析表現が可能であるため,非常に多くの研究に使われてきたが,高次数ノード(ハブ)が存在しないという点で,現実世界の系のネットワークとは振る舞いが異なる.

より現実ネットワークに近い性質を持つと考えられているのが,スケールフリーネットワーク(SF ネットワーク)である.このモデルの次数分布はべき的であるが,べきの指数 γ の大きさによって,その性質が大きく異なる.大掴みに言えば, γ が大きいとき($\gamma > 4$ 程度),高次数ノードの割合が無視出来るほどであるので,ER ネットワークやRR ネットワークと同様の性質を持つ.一方で, γ が比較的小さい時($2 < \gamma < 3$),特に高次数ノードの割合が無視出来ない場合に相当し,他のクラスのネットワークでは見られない特有の性質をもつ.これは,無視出来ない高次数ノードの割合がノードの次数の差に起因する不均一性が系全体の統計的性質に影響を及ぼすからである [18].

これらのモデルについて,次数分布,クラスタ係数,特徴パス長,故障を伴わない耐性,故障を伴う場合の耐性について,前節までに導入した特徴量の定義や,計算方法を基に計算,比較する.

2.3.1 ER ネットワーク

ノードが N 個あり,それぞれがある確率 p でランダムに結びついたランダムグラフを考える.今,ネットワークの平均次数が z であるとする.このとき, $p = z/(N-1)$ と示せるので,熱力学的極限で $p \sim z/N$ が成立する.ネットワークの次数分布はポアソン分布となり,

$$p(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \simeq \frac{e^{-z} z^k}{k!}, \quad (2.31)$$

で表される.このような次数分布持つネットワークを ER ネットワークという.ここで $z = \langle k \rangle$ である. ($\because z = z \int p(k) dk = z \int e^{-z} z^{k-1} / (k-1)! dk = \langle k \rangle \equiv \int k e^{-z} z^k / k! dk$.)

以下に,このモデルの特徴量について記述する.

1. ER ネットワークにおいて,クラスターは非常に生成されにくく,生成されたとしてもその数は少ないため,熱力学的極限 ($N \rightarrow \infty$) では無視できる.なぜなら,あるノード i に繋がるノードが k 個であるとする,

隣接ノードのペアの総数は $k(k-1)$ 、隣接ノード同士のリンクの本数は $pk(k-1)$ と計算出来るので、式 (2.9) より、 $C_i = p$ である。ランダムグラフではノードはどれも等価であるとみなせるから $C = p = \langle k \rangle / N$ と計算できるが、平均次数が十分小さいスパース構造を持つとき、これをほとんど 0 と見積もることが出来るからである。

2. 特徴パス長とループについて考察する。ランダムネットワークにおけるループの典型的な長さは $\propto \ln N$ であることが知られる。また、[30, 31] より、長さ L のループの数 N_L は、

$$N_L \approx \frac{1}{2L} \left(\frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle} \right)^L, \quad (2.32)$$

と計算出来る。式 (2.32) は、次数分布の 2 次モーメントが有限にとどまるならば、無限大の大きさのネットワークであっても、いかなる長さのループの数も有限に留まることを示している。結果的に、ある有限の長さのループがあるノードを通る確率は非常に小さくなり、ツリー近似が妥当であることを示唆している。一方で、本質的に長い（ネットワークの”直径”より長い）ループの数は極めて多く、 $\ln N_L \propto N$ と見積もることが出来る。しかし、これらはネットワークの直径よりも長いため、ツリー近似は依然として妥当性である。さらに、これらのループの存在はパーコレーション転移に不可欠である [16]。

3. 媒介中心性については、 $P(g)$ も次数分布と同様に、指数的に減少することが知られる。すなわち、著しく中心的な役割を果たすノードはランダムネットワークにおいては存在しない。
4. 故障を伴わない場合の、GC が出現するための臨界次数について考察する。 $\langle k_0^2 \rangle = \langle k_0 \rangle^2 + \langle k_0 \rangle$ であることから、[7]

$$q_c = \frac{\langle k_0 \rangle}{\langle k_0^2 \rangle - \langle k_0 \rangle} = \frac{1}{\langle k_0 \rangle} \quad (2.33)$$

これより、故障を受けない場合の GC の出現に関する臨界平均次数が 1 であることが分かる。^{*9}平均次数がちょうど 1 である臨界転移点において

^{*9} ER ネットワークの次数分布において次数 1 の孤立ノードの存在が全体の平均次数を下げて

は, $O(N^{2/3})$ の連結成分が無数に存在する [7] .^{*10}

5. 最後に, 確率 p で故障を受ける場合の GC の大きさ (耐性) について考察する. ER ネットワークの母関数は,

$$\begin{aligned} G_0(x) &= \sum_k \frac{e^{-z} z^k}{k!} x^k = e^{-z} \sum_k \frac{(zx)^k}{k!} = e^{z(x-1)} \\ G_1(x) &= \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)} = e^{z(x-1)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

これより式 (2.26) は, $f = e^{zf(q-1)}$ と表され, 解を式 (2.25) に代入すれば GC の大きさを得られる.

いるため [20], 式 (2.15) における連結成分の平均次数が 2 以上であるという仮定とは矛盾しない.

^{*10} ランダムネットワークは, 境界が存在しない事から無限次元に属す. 6 次元以上の任意の系におけるパーコレーションは, 全て同じユニバーサリティクラスに属す (上部臨界次元 d_c が 6 の値をとる) ことが知られている. 一方で臨界転移点での GC はフラクタル的の性質を持ち, その次元は $d_f = 4$ である (付録 B). そのため, ノード数 $N \sim R^{d_c}$ に対する最大のコンポーネントの大きさ $\mu \sim R^{d_f}$ が $O(N^{d_f/d_c})$ のように評価できる. 一方で, 転移点より上では GC の典型的な大きさは $O(N)$ と評価される. つまり, ランダムグラフのパーコレーション転移は 2 次転移 (連続転移) ではあるが, 転移点とそれ以外でオーダーが異なる事から, 2 段階ジャンプとも表現される [10].

2.3.2 SF ネットワーク

現実世界におけるネットワークにおいては、平均次数が小さいにも関わらず、非常に大きな次数のノードが少数ながら存在し、それらが系に対して重要な役割を持つ。そのため、ベキ則で近似するのが良い場合が多いと考えられている [13]。ベキ則を数理的に最も簡潔に表現したモデルが SF ネットワークであり、その次数分布は、

$$p(k) = ck^{-\gamma}, k = m, \dots, K \quad (2.35)$$

として表される。ここで、 m と K はそれぞれ、最小カットオフ次数、最大カットオフ次数である。特に有限サイズのネットワークについて、高次カットオフ K が、ノード数と最小カットオフ次数によって

$$K \sim mN^{1/(\gamma-1)} \quad (2.36)$$

のように自然に見積もる事が出来ることに注意したい*11。

以下に、特徴量について記述する。

1. SF ネットワークにおけるクラスターは次数分布だけでは論ずる事ができず、ネットワークの生成過程に依存する。本論文では詳しく議論しないが、例えば Barabasi-Albert モデル（ノードが次数に依存した確率で新しいノードと結合する事で成長していくモデル）では、クラスターはほとんど生成されないことが知られる。また、コンフィギュレーション的生成（任意の次数分布に関して、成長過程を考慮せず、ランダムに2つのノード選びリンクを張っていく。付録 C も参照されたい）によっても、クラスター係数は無視出来る程小さい。勿論、リンクのつなぎかえを施すことによって、クラスター係数の大きいスケールフリーネットワークを作る事は可能である。
2. ループの数は ER ネットワークと同様に式 (2.32) で計算できるが、次数のカットオフがある場合は、 $\gamma > 3$ において平均次数の2次モーメントが有限にとどまるのに対し、 $2 < \gamma < 3$ において、 $\langle k^2 \rangle \sim aN^{(3-\gamma)/2}$ (a は

*11 $k > K$ であるような次数を持つノードの割合が $O(1/N)$ で表現される事から、 $\int_K^\infty ck^{-\gamma} dk = cK^{-\gamma+1}/(\gamma-1) \sim 1/N$ と書く事ができ、これに $c \approx (\gamma-1)m^{\gamma-1}$ を代入する事から導出される。ただしこの計算は、ノードからそのノード自身へのループ（セルフループ）を許容しており、セルフループが許されない場合は、 $K \sim N^{1/2}$ 程度であることが知られる。[18]。

定数) となり, 熱力学的極限で発散することを考慮すると,

$$N_L \approx \frac{1}{2L} \left(\frac{a}{\langle k \rangle} \right)^L N^{L(3-\gamma)/2} \quad (2.37)$$

のように評価される. つまり, $\gamma < 3$ では有限の長さのループの数は多く, ネットワークは loopy である*12

3. 媒介中心性については, 次数分布と同様 SF 的となる. すなわち, $P(g) \sim g^{-\eta}$ と表現され, 指数についても, 現実世界のネットワークについては $\eta \sim 2$, 人工ネットワークについては, $\eta \sim 2.2$ と見積もる事が出来る事が知られている [18].
4. SF ネットワーク ($p(k) = ck^{-\gamma}$) の耐性について考察する. 平均最近傍次数 κ を計算するため, 次数のモーメント, 2 次モーメントを計算する.

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &= \int_m^K kp(k)dk = \int_m^K ck^{-\gamma+1} = \frac{c(K^{2-\gamma} - m^{2-\gamma})}{2-\gamma}, \\ \langle k^2 \rangle &= \int_m^K k^2 p(k)dk = \int_m^K ck^{-\gamma+2} = \frac{c(K^{3-\gamma} - m^{3-\gamma})}{3-\gamma}, \\ \therefore \kappa &= \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = \frac{2-\gamma}{3-\gamma} \frac{K^{3-\gamma} - m^{3-\gamma}}{K^{2-\gamma} - m^{2-\gamma}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

最大次数が最小次数に比べて極めて大きい ($K \gg m$) とき, κ は次のように近似してよい.

$$\kappa \rightarrow \frac{2-\gamma}{3-\gamma} \times \begin{cases} m & \gamma > 3 \\ m^{\gamma-2} K^{3-\gamma} & 2 < \gamma < 3 \\ K & 1 < \gamma < 2 \end{cases} \quad (2.39)$$

故障を伴わない場合の臨界条件を考える. 最小次数が 1 である時 ($m = 1$), $\gamma > 4$ で必ず $\kappa < 2$ となる. このとき, GC は存在しない. しかし, m が 2 以上である場合は, 常に $\kappa > 2$ を満たすので γ の値によらず GC は存在する. このことは, 次数が 1 のノードを作らない事によって, システム全体の耐性を高める事が出来ることを示唆している [20].

故障を伴う場合についての臨界条件はより複雑である. $\gamma > 3$ であるとき, $q_c = (\kappa - 1)^{-1} \approx \left(\frac{2-\gamma}{3-\gamma} m - 1 \right)^{-1}$ となり, q_c 以下の生存率で GC は存在

*12 ループが多いが, 平均場近似が成立する正確な理由は研究課題である.

しない(パーコレーション転移は起きる)。一方で、 $\gamma < 3$ であるとき、 κ は K について発散するため、 $K \rightarrow \infty$ で、 $q_c \rightarrow 0$ となるため、常に GC が存在し、パーコレーション転移は起きない(系の大きさ(ノード数)が無限である場合)。これは、SF ネットワークがランダムノード故障に対して極めて頑強である (ultra-resilient ともいわれる) ことを示している^{*13}。ただし、これはあくまでランダム故障における結果であり、高次数のノードが狙い撃たれる場合には、逆に非常に脆弱である [13] ことが知られている。

2.3.3 スモールワールドネットワーク

スモールワールドを表す数理モデルは、Watts-Strogatz らによって開発された [11, 12]。モデルの構築方法は非常にシンプルであり、まず周期的境界条件をもつ次元ラティスを用意する。次に、ある割合 p のリンクについて、リンクのつながりかえをする。つながりかえる場合のみ、一方のノードからリンクを切り離し、すべてのノードからランダムに 1 つ選んだノードにつけかえる。これによって、短い特徴パスと高いクラスタ性を再現することができる。実際、スモールワールド性は p を少しでも増やすとすぐに発現 ($p_c = 0$) するという研究がある [42, 43, 17]。特徴パス長 L の長さは急速に減少する ($L \sim p^{-1}$) のに対し、クラスタ係数は p に対して線形に増える。

2.3.4 レギュラーネットワークとバイモーダルネットワーク

ER ネットワークも SF ネットワークも、連続的な次数分布が考慮されていたのに対して、3, 4 章で用いるネットワークの次数分布はバイモーダルネットワーク(二極分布)型であり、次数の種類は 2 種類しかない。小さい次数を k_{min} 、大きい次数を k_{max} とすると、

$$p(k_{min}) + p(k_{max}) = 1, 0 < p(k_{min}) < 1, \quad (2.40)$$

のように表現される。この次数分布は、次数の組が 3 タイプ $[k_{min}, k_{min}]$, $[k_{min}, k_{max}]$, そして $[k_{max}, k_{max}]$ であり、ピアソン係数 C_{pear} を定めることによって一意に次数相関 2.1.2 を導入出来るという便宜性がある。

^{*13} 現実世界のネットワークは $2 < \gamma < 3$ である事が多く(表 2.1), 系の大きさが有限であるため、パーコレーション転移は常に起きることに注意したい。たとえば $N = 10000$, $\gamma \approx 2.5$ の場合は $\kappa \approx K^{0.5} \approx N^{1/4}$ ($\because K \approx N^{1/2}$) となるので、 $q_c \approx 0.1$ となり、ランダム故障に対して”極めて頑強である”とはいえなくなる。

レギュラーネットワークは、次数が単一のネットワークであり Bethe ツリー近似がそのまま成立する可解モデルである。以下で、耐性に関して転移点 q_c を求める。次数 z のレギュラーランダムネットワークの場合、 $z = \kappa_0$ であることから、

$$q_c = \frac{1}{z-1}, \quad (2.41)$$

となる。また、残存する GC の大きさに着いて、ノードの次数が 3 の場合、

$$\begin{aligned} G_0(x) &= x^3 \\ G_1(x) &= x^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

これより、式 (2.26) は $f = (1 - q + qf)^2$ となり、その解は $f = \left(\frac{1-q}{q}\right)^2$ である。GC の大きさは、

$$\mu = q \left(1 - \frac{(1-q)^3}{q}\right) = \frac{(2q-1)(q^2-q+1)}{q^2} \quad (2.43)$$

であり、臨界転移点 $q_c = 1/2$ は、Molloy-Reed 基準で求めた $1/(\langle k \rangle - 1)$ (式 2.41) と一致する。同様にノードの次数が 4 の場合、

$$\begin{aligned} G_0(x) &= x^4 \\ G_1(x) &= x^3 \end{aligned} \quad (2.44)$$

これより、式 (2.26) は、 $f = (1 - q + qf)^3$ となり、その非負解は $f = q^2(2q-3) + q\sqrt{q}(4-3q)/2q^3$ であるので、GC の大きさは、

$$\mu = q \left(1 - \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4-3q}{q}} - \frac{1}{2}\right)^4\right) \quad (2.45)$$

であり、 $q_c = 1/3$ であることが確認出来る。

2.4 耐性解析（次数相関のある場合）

次数相関のある場合のシングルネットワークにおける耐性解析のため、キャビティ法を導入する。この議論は、マルチレイヤーネットワークにおいては、各ステージ内のパーコレーション現象を記述する為に用いる事が出来る。キャビティ法も、ランダムに選んだ 2 つのノード間のパスの長さが、ネットワークの大きさ N が無限大に近づくにつれて、典型的には $O(\ln N)$ と評価される性質

を利用する．ただし，これは次数分布の2次モーメントが有限にとどまる時に限られる．一方で自明でない次数相関が導入された時でも，この性質が保たれることが予測される．つまり，十分に大きいランダムネットワークであれば，クラスタの影響は無視出来る程小さく，局所的にツリーとして扱う事が出来る．

2.4.1 二部グラフ表現

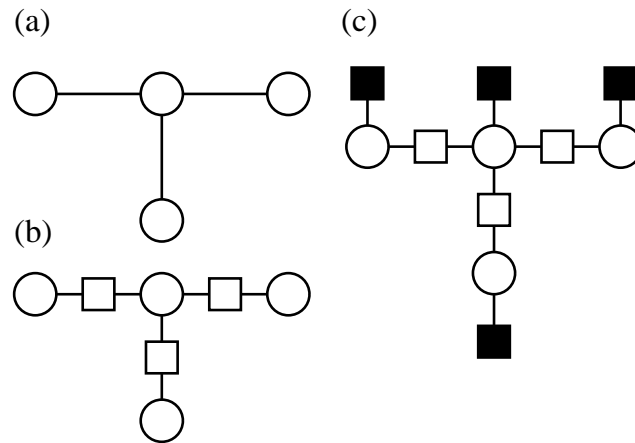


図 2.2 (a) 元のネットワークのグラフ表現 (一部). (b) 元のネットワークの二部グラフ表現．白い正方形のノードが各リンク上に 1 個ずつ割り当てられる．(c) 故障を受けたネットワークの二部グラフ表現．黒い正方形のノードは各変数ノードに付随しており，そのノードの初期故障状態に関するメッセージを送る役割を持つ．(文献 [86] より引用. ©American Physical Society)

一般的に，キャビティ方程式は，あるネットワークに対応する二部グラフ上のメッセージ伝播アルゴリズムとして表現される [32]．図 2.2 に元のネットワークに対する二部グラフを示す．元のノードは，白い円で表され，二部グラフでは変数ノードと言われる．2 つの変数ノード i と j をつなぐリンク上に白い正方形型ノード a を 1 つセットするが，これは関数ノードと言われる．また，初期故障の影響は，各変数ノードにつながる黒い正方形型ノードとして表現する．

2.4.2 ミクロな観点からの記述

$p(k)$ と $r(k, l)$ で特徴づけられるあるネットワークが，ランダムノード故障やターゲットノードアタックを受ける状況を考える．初期故障によって，ノード i が活性的 ($s_i = 1$) もしくは非活性的 ($s_i = 0$) である状態を表すバイナリ変数と

して $s_i \in \{0, 1\}$ を定義する．また, i をキャビティとした*¹⁴ときに $\exists j \in \partial i$ が GC に属すか ($\rho_i = 0$), 属さないか ($\rho_i = 1$) を示す変数として, 状態変数 $\rho_i \in \{0, 1\}$ を定義する．これらの定義を用いる事によって, もし $s_i(1 - \rho_i)$ が 1 をとるときのみ, i が GC に属することになる．GC の大きさは,

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(1 - \rho_i), \quad (2.46)$$

で与えられる．

これらの性質を組み込むため, i -キャビティシステム の概念を用いる．これは, オリジナルのシステムからノード i を取り除くことによって定義されるもので, ノード i が GC に属すかどうかを定義するときに導入した．今, ノード i と j が繋がっており i がキャビティのときに, j が i に送るメッセージを次のように考える．

1. $\exists h \in \partial j \setminus i$ が i -キャビティシステムの GC に属すとき, $m_{j \rightarrow i} = 0$ である．
2. $\exists h \in \partial j \setminus i$ が i -キャビティシステムの GC に属さないとき, $m_{j \rightarrow i} = 1$ である．

これより, ρ_i が 0 になる (このとき, 式 (2.46) より i が初期生存していれば, i は GC に属す) のは, $s_j = 1$ を満たし, かつ $m_{j \rightarrow i} = 0$ であるような $j \in i$ が少なくとも 1 つ存在するときであり,

$$\rho_i = \prod_{j \in \partial i} (1 - s_j + s_j m_{j \rightarrow i}), \quad (2.47)$$

が導出される．

その後, 次のノードにメッセージを伝播させる準備としてキャビティを元に戻す．すなわち, i を元に戻し j をキャビティとすることによって, j -キャビティシステムに移行する事が出来る． i から j へのメッセージは, j -キャビティシステムにおいて $\exists h \in \partial i \setminus j$ が GC に属す時のみ, $m_{i \rightarrow j} = 0$ となると定義

*¹⁴ ノードにキャビティを割り当てる事は初期故障とは独立であり, 局所ツリー近似を使って, 各メッセージを計算するために行う．その後, キャビティを元に戻す事によって次のノードにメッセージを伝播させ, 今度はそのノードにキャビティを割り当てる, ということを繰り返すと想定する．

する．以上の定義によって，次のようなキャビティ方程式を考える事が出来る．

$$m_{i \rightarrow j} = \prod_{h \in \partial i \setminus j} (1 - s_h + s_h m_{h \rightarrow i}). \quad (2.48)$$

二部グラフ上でメッセージの表現は，マクロな観点との対応関係を考える事に役立つ．そのため， $m_{j \rightarrow i}$ を $m_{j \rightarrow a}$ と $m_{a \rightarrow i}$ いう2つのメッセージに分割して式 (2.48) は

$$m_{i \rightarrow a} = m_{a \rightarrow j} \quad (\partial a = \{i, j\}) \quad (2.49)$$

$$m_{i \rightarrow a} = 1 - s_i + s_i \prod_{b \in \partial i \setminus a} m_{b \rightarrow i}, \quad (2.50)$$

として表現する．また，式 (2.47) は各変数が0か1の2値をとることから，実はシンプルに $\rho_i = \prod_{a \in \partial i} m_{a \rightarrow i}$ と計算してよい．これより，式 (2.46) は

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i (1 - \prod_{a \in \partial i} m_{a \rightarrow i}), \quad (2.51)$$

と書き換えられる．

2.4.3 ミクロな観点からマクロな観点へ

ミクロな観点では，個別のネットワークを考え，ノードの次数に関する情報を陽に扱わなかったが，マクロな観点では，次数相関によって特徴づけられるネットワークアンサンブルを想定し，ノードの耐性に与える寄与は次数にのみ依存するし，一方でリンク上に定義されるメッセージは次数相関に依存すると考える^{*15}．もちろんシングルインスタンスにおいては，ネットワークの生成状態に依存したインスタンス間のゆらぎがある．しかし，揺らぎの強さは， $N \rightarrow \infty$ となるにつれて，0へと近づいていく，同次数のノードは統計的に等価と見なす事が出来る．この性質はセルフアベレージングという名前で知られており，詳細は [32] を参照されたい．

ミクロな観点ではノードの初期生存状況は s_i という変数によって表現されていたが，マクロな観点では，次数 l の各ノードが初期故障によって q_l という確率で生存する状況を考える．また，ある次数 l のノードが $m_{a \rightarrow i} = 1$ というメッセージを受け取る頻度は I_l によって定義される．つまり， I_l は， $I_l = (l \sum_i \delta_{|\partial i, l})^{-1} \sum_i (\delta_{|\partial i, l} \sum_{a \in \partial i} m_{a \rightarrow i})$ として，評価される．ここで， $I_l = (l \sum_i \delta_{|\partial i, l})$

^{*15} これより，耐性評価において式 (2.51) を，メッセージ計算において式 (2.50)，(2.49) をマクロ変換する

は、次数 l のノードにつながるリンク総数であり、 $\sum_i (\delta_{i|\partial i, l} \sum_{a \in \partial i} m_{a \rightarrow i})$ は次数 l のノードがメッセージ $m_{a \rightarrow i} = 1$ を受ける数である。

2.4.4 マクロな観点からの記述

この節では、前節のミクロな観点における定式化を拡張することによって、マクロな観点での定式化を述べる。これによって、ある故障確率において残存する GC の大きさの評価が可能となる。

式 (2.49) と (2.50) について、次数 l について、 $r(k|l)$ と q_k に関して平均をとる事によって

$$I_l = \sum_k r(k|l)(1 - q_k + q_k I_k^{k-1}) \quad (2.52)$$

が導出される。ここで、ランダムグラフは局所的にツリーでよく近似されるため、式 (2.50) の右辺における $\prod_{b \in \partial i \setminus a} m_{b \rightarrow i}$ の平均は $b \in \partial i \setminus a$ に関して独立に計算できる、という性質を利用した。また、式 (2.52) は各次数について用意されるが、全体集合は $\forall l$ に関して、 I_l を決定する。これらの式を反復的に解くことで、GC の典型的な大きさを

$$\mu = \sum_l p(l) q_l (1 - I_l^l), \quad (2.53)$$

評価できる。ただし、これは式 (2.51) に相当する。

式 (2.52) は常に自明な解 $I_l = 1$ を $\forall l$ に関して持ち、このとき $\mu = 0$ である。この自明な解の局所的な安定性は線形化によって

$$\delta I_l = \sum_k (k-1) q_k r(k|l) \delta I_k, \quad (2.54)$$

もしくは、代替表現として、

$$\delta \mathbf{I} = \mathbf{A} \delta \mathbf{I}, \quad (2.55)$$

が得られる。ここで \mathbf{A} は

$$A_{lk} = (k-1) q_k r(k|l), \quad (2.56)$$

として表現される行列である。式 (2.55) より、 $\mu = 0$ となるような自明な解は、 \mathbf{A} の全ての固有値が複素平面の原点を中心とした単位円の内側に位置するときのみ、安定である。 $A_{lk} \geq 0$ は、 $\forall l$ と $\forall k$ に関して保証されているので、臨界条件は、Peron-Frobenius の定理によって

$$\det(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0, \quad (2.57)$$

として与えられる．ここで \mathbf{E} は単位行列である．ノードの生存確率 q_l が、 $\forall l$ に対して十分小さいとき、 \mathbf{A} の固有値の絶対値もまた充分小さく、そのため、自明な解は安定である事が保証される．このときの GC の大きさは、極めて小さく、 $\mu = 0$ とおける．しかしながら、 q_l がある方法で大きくなり、臨界点、つまり $q_l = q_c$ となったとき式 (2.57) が満たされる．このとき、 $\mu > 0$ の解が自明な解から連続的に変化すると考えられる．このように、GC の出現はシングルネットワークでは、常に連続的相転移として記述される^{*16}．

2.4.5 キャビティ法と母関数法の比較

ここでは、次数相関がない場合キャビティ法と母関数法の最終的な導出結果が等価である事を示す．母関数法では基本的に次数相関を想定しないので、ランダムノード故障を受ける場合を考える．

母関数法では、

$$G(x) = \sum_k p(k)x^k, \quad (2.58)$$

$$H(x) = \sum_k r(k)x^{k-1} = \frac{G'(x)}{G'(1)}, \quad (2.59)$$

を定義し、また、GC の規格化された大きさを

$$\mu = q(1 - G(1 - q + qf)). \quad (2.60)$$

として計算していた．ここで、 f は

$$f = \tilde{H}(f, q) = H(1 - q + qf), \quad (2.61)$$

という超越方程式の解であるが、これを

$$\begin{aligned} f = \tilde{H}(f, q) &= \frac{\sum_k k p(k)}{\langle k \rangle} (1 - q + qf)^{k-1} \\ &= \sum_k r(k) (1 - q + qf)^{k-1}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

と変形しておく．

^{*16} 平均場近似による定式化では、臨界点における 2 段階ジャンプ (2.3.1 節) までは導く事が出来ない [5]．しかし、ここでの議論の通り、自明でない次数相関があるとき残存する GC の大きさの解析評価は高い精度で出来る．

キャビティ法においては, $q_l = q$, $I_l = I$ とおくことができるので, メッセージの積を $I^{k-1} \equiv U_k$ とおくと, 式 (2.52) から

$$\begin{aligned} U_k &= \left[\sum_k r_k (1 - q + q U_k) \right]^{k-1} \\ &= \left(1 - q + q \sum_k r_k U_k \right)^{k-1} \end{aligned} \quad (2.63)$$

式 (2.63) の両辺に $r(k)$ をかけて, k に関して和をとる.

$$\sum_k r_k U_k = \sum_k r_k \left(1 - q + q \sum_k r_k U_k \right)^{k-1}, \quad (2.64)$$

式 (2.62) と (2.64) を比較する事で, $f \equiv \sum_k r(k) U_k$ という対応関係が判明した. これより, キャビティ法におけるメッセージ I は,

$$I = 1 - q + q \sum_k r(k) U_k = 1 - q + qf, \quad (2.65)$$

と変形することで, 母関数法における $1 - q + qf$ によって相当する.

同様に, ランダムにノードを確率 $1 - q$ で故障させた後残存する GC に属すノードの割合を, 母関数法で評価した式 (2.60) は,

$$\begin{aligned} 1 - r(q) &= q(1 - G(fq + 1 - q)) \\ &= q \left(1 - \sum_k p(k) (1 - q + fq)^k \right) \\ &= q \left(1 - \sum_k p(k) I^k \right) = \mu, \end{aligned} \quad (2.66)$$

と変形出来ることから, Cavity 法における GC の評価式 (2.53) と一致することが示された.

2.5 リアルネットワークの特徴

この節では, リアルワールドネットワークに関する事項を非常に限定的ではあるが記述する.

2.5.1 スケールフリー性とスモールワールド性

現実世界のネットワークにおいては, クラスタ係数は非常に高い一方で, 特徴パス長は小さいという特徴がある事が分かる. このような性質は, 古くから

ネットワーク	N	k	L	C	γ	C_{pear}
AS2001	11 174	4.19	3.62	0.24	2.38	< 0
ルーター	228 263	2.80	9.5	0.03	2.18	> 0
Gnutella	709	3.6	4.3	0.014	2.19	< 0
WWW	$\sim 2 \times 10^8$	7.5	16	0.11	2.1/2.7	?
タンパク質	2 115	6.80	2.12	0.07	2.4	< 0
代謝	778	3.2	7.40	0.7	2.2/2.1	< 0
共著 (数学'99)	57 516	5.00	8.46	0.15	2.47	> 0
俳優	225 226	61	3.65	0.79	2.3	> 0
e-mail	59 812	2.88	4.95	0.03	1.5/2.0	?

表 2.1 様々な現実ネットワークのトポロジー (文献 [17] より本論文用に翻訳して引用.)

経験的に知られていた。

表 2.1 にいくつかのリアルな系に関するトポロジーの情報を示す。明らかであるのは、現実の世界の系は、スモールワールド性とスケールフリー性の 2 つを有する事である。特に γ の値は 2 から 3 までの値をとる事が多く、 L の値は十分に小さい。

また、実際のネットワークにおいては、指数 γ が次数分布のテールに位置するハブノードの次数によってゆらぎを受けやすい。そのため、累積次数分布 $p_{\text{cum}}(k)$ ($p_{\text{cum}}(k) = \sum_{k'=k}^{\infty} p(k')$ のように定義される。) を用いると良い場合がある。累積次数分布を両対数グラフにプロットした場合、その傾き γ_{cum} と元の次数分布の傾き γ との間に、 $\gamma_{\text{cum}} = \gamma - 1$ のような関係が成立する。

2.5.2 次数関連の特徴

先述の通り、現実世界のシステムをネットワークで表現したとき、系全体としてニュートラルではない次数関連を持つものが多数存在している [35, ?]。例えば、社会ネットワークは高次数のノードが別の高次数のノードと接続しやすい、正の次数関連を持っているものが多いのに対し、技術的ネットワークや生物ネットワークは、高次数のノードは低次数のノードと結びつきやすいという負の相関関係を持っているものが多い。これらは、各要素の結合に関する嗜好

ネットワーク	N	C_{pear}
共著ネットワーク (物理学)	52 909	0.363
共著ネットワーク (生物学)	1 520 251	0.127
共著ネットワーク (数学)	253 339	0.120
映画俳優の共演	449 913	0.208
会社の経営者	7 673	0.276
インターネット	10 697	-0.189
World-Wide Web	269 504	-0.065
タンパク質の相互作用	2 115	-0.156
ニューラルネットワーク	307	-0.163
食物網 (海洋)	134	-0.247
食物網 (淡水)	92	-0.276
ランダムグラフ (ER)		0
ランダムグラフ (Callaway)		$\delta/(1 + 2\delta)$
スケールフリー (BA)		0

表 2.2 様々な現実ネットワークのノード数 N とピアソン係数 C_{pear} の関係 (文献 [36] より本論文用に翻訳して引用.)

性や、系の成長性に由来するものと思われる。

2.6 本章のまとめ

本章を総括する。まず、シングルネットワークにおける各種トポロジーの定義を紹介した。これらは、ネットワークの調べたい性質に応じて、ツールボックスのように使い分ける必要がある。本論文では、特に次数分布や次数相関をよく使う。

次にシングルネットワークの耐性解析を紹介した。特に有意な次数相関が存在しない場合、様々な手法が考案されてきた。これらは、アプローチの仕方は異なるが最終的な導出結果 (転移点の解析基準である Molloy-Reed 基準や、GC の大きさに関する解析評価式) はどれも等しくなる。

一方で、次数相関が存在する場合について、二部グラフにおけるキャピティ

法を導入した。キャビティ法における次数 l に入ってくる 1 本のメッセージ I_l は、一般的には次数 l に依存するため、次数の種類だけ方程式が必要となる。つまり、キャビティ方程式である式 (2.52) を 1 変数非線形方程式として簡略化することができない。そのため、Molloy-Reed 基準を使った転移点の考察が出来ず、代わりに、式 (2.55) における行列 A の最大固有値が 1 を超えるかどうか、が代替的基準となる。また、GC の大きさを評価においても、母関数法のようなコンパクトな表現を利用する事が出来ないため、キャビティ方程式を数値的に求解することで導出しなければならない。

最後に、現実ネットワークの特徴に関して簡単に触れた。スモールワールド性とスケールフリー性は、どちらも本質的な概念であり、実際のネットワークのデータからもその傾向を読み取れる。しかし、耐性に関しては 3, 4 章で示すが、むしろ次数相関の影響の方が特に選択的ノード故障の状況では重要であると言えるかもしれない。

3 相互依存ネットワークの耐性解析

*17

3.1 序文

現代のシステムは、種類を問わず時々刻々と構成要素やその相互作用が変化する巨大で複雑なものであることが多いが、それぞれは大抵完全に孤立しておらず、お互いに何らかの関係性を持って成立している。そのため、一方のシステムの損傷がそれと関係性を持つ他方のシステムに伝播し、新たな損傷を引き起こす事もある。例えば、大規模の停電は複数の種類のインフラストラクチャの部分的な故障が原因である。

Buldyrev らは現代システム間の関係性を相互依存的であると想定し、2つの結合したランダムネットワークによって系のモデル化を行い、パーコレーションの枠組みでシステムの耐性を数理的に論じた [53]。このモデルを相互依存ネットワークという。最もシンプルな相互依存ネットワークは、2つのサブネットワーク（レイヤー）で構成されており、片方のレイヤーのノードはもう1つのネットワークにおけるノードと1対1対応でつながっている。これらのノードのことをノードペア、片方のノードに対するもう片方のノードをレプリカノード、という名で呼ぶ。片方のレイヤーにおけるノードの生存状態と耐性に対する寄与（そのレイヤーのGCに属すかどうか）は、そのレプリカノードのそれに完全に依存するため、互いに依存的（相互依存的）であることが顕著な特徴である。また、片方のレイヤーにおいて故障が生じたとき、そのレイヤーにおいてのみ一旦故障が進行し、その結果がもう片方のレイヤーに伝搬される。この2つの特徴によって、相互依存ネットワークにおけるパーコレーション現象は、2つのレイヤーにおけるGCが完全に一致するまで連鎖的に続く。この現象は、カスケード故障という名前と呼ばれ、イタリアの大規模停電のモデル（インターネットと電力ネットワークの2つのレイヤーから構成される相互依

*17 本章の内容は、[86]”Cavity-based robustness analysis of interdependent networks: Influences of intranetwork and internetwork degree-degree correlations, Shunsuke Watanabe and Yoshisuiki Kabashima”, Phys. Rev. E **89**, 012808 (2014). ©American Physical Society に準拠している。

存ネットワーク)ともされている [53] .

相互依存ネットワークのパーコレーション現象はシングルネットワークのそれとは本質的に異なり, 構造的複雑性も増している. そのため, 系における特徴量が系全体の耐性に与える影響も複雑であり, シングルネットワークの耐性解析で得られた知見をそのまま適用出来ない場合も存在する. 例えば, スケールフリー分布を持つシングルネットワークの場合ランダム故障に対して著しく強い耐性を持っていたが, これは次数分布が広域的でハブノードが結果的に生き残るからであった (2.3.2 節参照). しかし, 相互依存ネットワークの場合は, ある条件下 (ネットワーク間の次数相関が無く, レイヤー内の平均次数に制約がある) では, レイヤー内の次数分布が単一であるほうが高い耐性を持つ事が分かった [53]. これは, 1 度だけの故障ではなく連鎖故障が起きることがハブノードに対する脅威となりうるため, ハブノードが存在する事の重要性が薄れ, 低次数のノードが "存在しない" ことのほうが耐性に関して肝要になる, からである^{*18}. 現在は, このモデルに関する様々なヴァリエーションに関する研究は多く行われているが [49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65], 解析的研究における手法は母関数法 [34] (2.2.2 節参照) である. つまり, ネットワークにおける自明でない次数相関を想定しておらず, 著者の知る限りは, レイヤー間の次数相関がある場合については数値的な検証 [55] にとどまっている.

この章では, 相互依存ネットワークに自明でない次数相関がレイヤー間とレイヤー内の両方にある場合, それらを統合的に扱う耐性解析のための手法を構築する. 我々の方法は統計力学におけるキャビティ法 [32, 66, 33] を基礎とし, それを複雑ネットワークの枠組みにおいて発展させたものであるが, Bethe ツリー上の平均場近似を用いる点では母関数法と同じである. そのため, ネットワークに次数相関が無い場合, 我々の手法は母関数に縮退する (2.4.5 参照). しかし, キャビティ法ではミクロな観点での情報の伝播を記述し, それをマクロな観点に変化することで, 自明でない次数相関のある場合の相互依存ネットワークにおける GC の大きさを解析的に評価できる. つまり, ここで提示する方法論は母関数法の拡張として考える事が出来る.

この章の構成を次に示す. 3.2 節では, カスケード現象の概要を記述する.

^{*18} SF 次数分布を持つシングルネットワークでも, 故障が伴わない場合, 低い次数のノードが 2 以上であれば必ず GC が出現する (2.3.2 節参照). つまり, シングルネットワークでも "ボトルネック" を作らない事の重要性は議論されていた.

3.3 節では、解析のために必要な基本的概念を簡単に要約する。3.4 節では、相互依存ネットワークに対する解析手法を提示する。3.5 節で具体例としてバイモダル次数分布をもつ相互依存ネットワークに対する数値計算の結果を示し、提案手法の有効性を検証する。また、次数相関の耐性に与える影響についても議論する。最後に、この章を総括する。

3.2 カスケード現象

2つのネットワーク(レイヤー)A, Bによって構成される相互依存ネットワークを考える。ただし、両方のレイヤーにおいて、故障が起きる前の初期状態では、すべてのノードがつながっており活性的であると仮定する。レイヤーAにおける各ノードはレイヤーBにおける各ノードと1対1対応でレイヤー間のリンクによってつながっており、相互に依存的である。すなわち、もし一方のレイヤーにおけるノードが非活性化された(初期故障を受けた、またはGCに属していない)ならば、もう片方のノード、つまりレプリカノードもまた非活性化される。各ネットワークにおけるGCは、活性的なノードで構成される部分連結集合の中で、その要素数が最大のものとして定義される。

初期ステージにおいて、レイヤーAのノードはランダム故障あるいはターゲットアタック(高次数ノードから狙い撃つ)を受けるので、故障が生じたノードは非活性的となり、残りのノードのみが活性的となる。さらに、活性的ではあるがレイヤーAのGCに属していないノードが、ある割合で存在する。これらも機能を失い初期ステージ最後において非活性的となる。

ステージ2において、レイヤーBのノードはもしそのレプリカノードがレイヤーAにおいて非活性的である(AのGCに属さない)場合、自らの機能性を失う。このことがレイヤーB全体の故障を引き起こし、また活性的ではあるが、Bにおける活性ノードの大部分(GC)から切り離されたノードもステージ2終了時に機能を失う。そして、ステージ3において、ステージ2におけるレイヤーBの非活性的ノードの存在が、さらなるレイヤーAの新たな故障を引き起こす。このような連鎖的破壊現象をカスケード現象ともいう(小規模のネットワークにおけるカスケード現象の具体例を図3.1に示した)。最終的に、レイヤーAにおいてGCに属すノードは、そのレプリカノードもレイヤーBにおいてGCに属している。これらのノードペアで構成されるGCは、*mutually connected giant component (MCGC)* という特別な名前がついている。

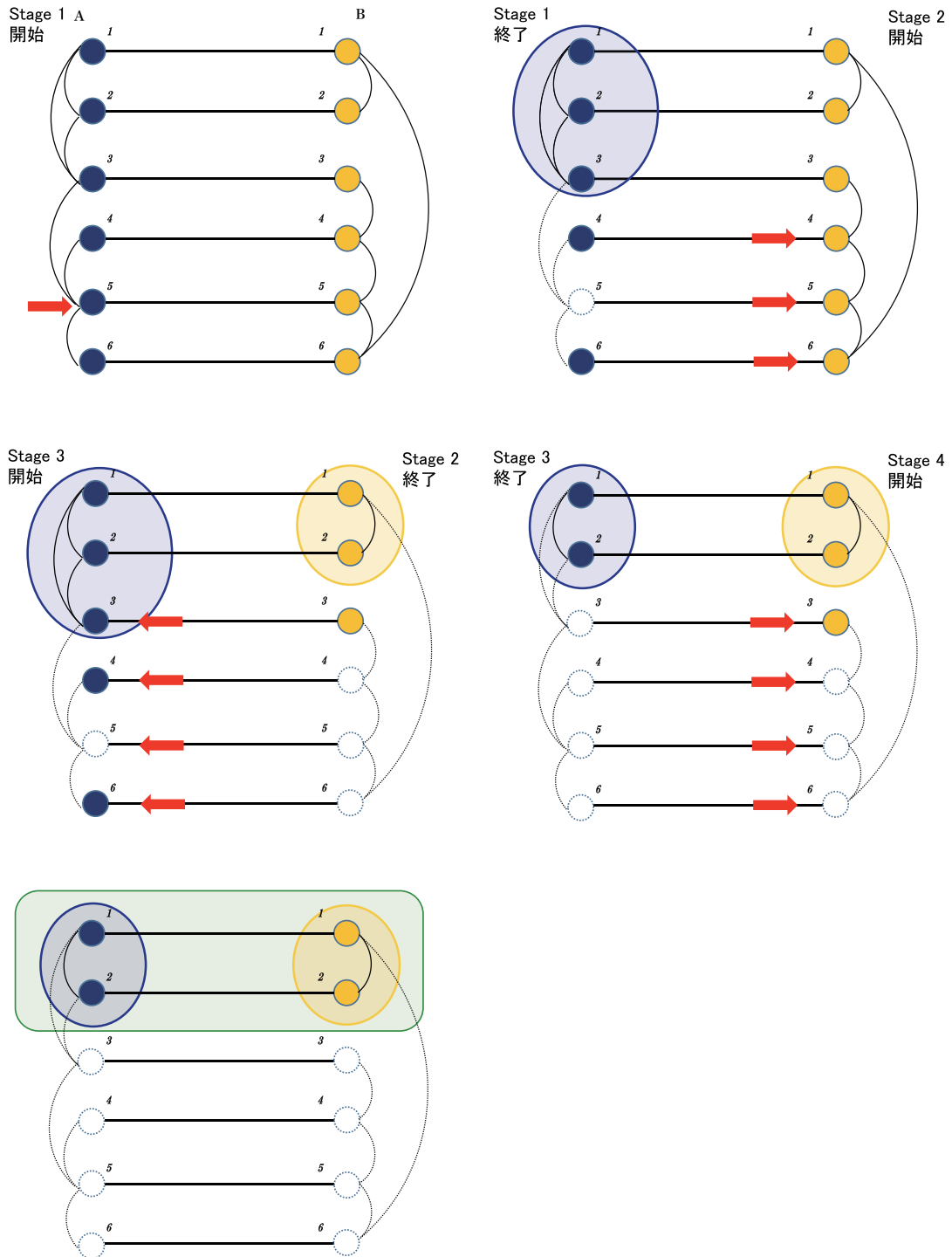


図 3.1 相互依存型ネットワークのカスケード現象の概念図．初期故障が赤い矢印で示される．各レイヤーのネットワークは大きな円で囲まれている．最終的に残存する MCGC は緑色で囲まれた部分である．

先行研究では、シングルネットワークの場合とは異なり、臨界転移故障確率において、MCGC の大きさが $O(N)$ から 0 へと不連続に転移することが報告された [25, 26] .

3.3 特徴量の導入

この節では相互依存ネットワークの解析に必要な特徴量を導入する．次数分布を $p(k)$ と記すが、これはネットワーク内での次数 k のノードの割合を示している．一方でボンドの次数分布を $r(k)$ と定義することができるが、これはランダムに選んだリンクの一端のノードが次数 k である確率であり、

$$r(k) = \frac{kp(k)}{\sum_l lp(l)} = \frac{kp(k)}{\langle k \rangle}, \quad (3.1)$$

が成立する．ここで、 $\langle k \rangle$ は、ランダムに選んだノードの平均次数である．

次数分布は基本的な特徴量であるが、ネットワークの性質を完全に特徴付けるには不十分である [34] . 例えば、社会ネットワークでは、正の相関、つまり、高い次数のノードは、他の高い次数のノードと繋がりやすい傾向を示す．それに対して、技術的な、あるいは生物学的なネットワークは、負の次数相関、高い次数のノードは、低い次数のノードとつながりやすいという傾向を示す．そのような傾向をシンプルに導入するため、次数相関 $r(k, l)$ を導入する．これは、ランダムに選んだリンクの両端に位置する 2 つのノードの次数が k, l である確率であり、ノードの次数分布 $p(k)$ とボンドの次数分布 $r(k)$ を使って、

$$\sum_l r(k, l) = r(k) = \frac{kp(k)}{\sum_l lp(l)}, \quad (3.2)$$

のように書く事ができる

さらに、計算の便宜上、条件付き確率 $r(k|l)$ を次数相関 $r(k, l)$ から導入する．これは、ランダムに選んだリンクのひとつの終端に位置するノードが次数 l であるときに、リンクのもう片方の終端のノードの次数が k であるような確率として定義することができる、

$$r(k|l) = \frac{r(k, l)}{r(l)} = \frac{\langle k \rangle r(k, l)}{lp(l)}, \quad (3.3)$$

である．条件

$$r(k|l) = r(k) \quad (3.4)$$

が $\forall k, l$ に対して成立するとき、リンクで直接つながったノードの次数は統計的に独立である。

次数相関に関する統計量は次数の組について定義される量であるため、行列によって表現する事しか出来ず、扱いにくいという短所がある。そこで、1変数によって次数相関を扱うため、ピアソン係数

$$C = \frac{1}{\sigma_r^2} \sum_{kl} kl(r(k, l) - r(k)r(l)), \quad (3.5)$$

を導入する。ここで、

$$\sigma_r = \sum_k k^2 r(k) - \left(\sum_k kr(k) \right)^2 \quad (3.6)$$

が成立する。もし $C = 0$ であるならば、そのネットワークは無相関である。 $C > 0$ あるいは $C < 0$ である場合は、繋がっているノードの次数同士に正の相関あるいは負の相関があることを意味する。

相互依存ネットワークを構成するそれぞれのネットワークについて、A と B というラベルづけをする。レイヤー A における各ノードは1対1でレイヤー B の各ノードと結合している。ランダムにノードペアを選んだときに、レイヤー A における次数 k_A であるノードとレイヤー B における次数 k_B であるようなノードで構成されているような確率を、 $P(k_A, k_B)$ と表現する。レイヤー A, B 内のリンクの次数分布を、 $r_A(k_A, l_A)$ と $r_B(k_B, l_B)$ のようにそれぞれ記す。一貫性のため、等式

$$p_A(k_A) = \sum_{k_B} P(k_A, k_B) \quad (3.7)$$

$$r_A(k_A) = \sum_{l_A} r_A(k_A, l_A) = \frac{\sum_{k_B} k_A P(k_A, k_B)}{\sum_{k_A, k_B} k_A P(k_A, k_B)} \quad (3.8)$$

がレイヤー A, レイヤー B の両方で成立しなければならない。ベイズの公式を使う事で、レイヤー B のノードが次数 k_B であるとき、レイヤー A のノードの次数が k_A であるような分布は

$$P_A(k_A|k_B) = \frac{P(k_A, k_B)}{\sum_{k_B} P(k_A, k_B)}, \quad (3.9)$$

であり、

$$P_B(k_B|k_A) = \frac{P(k_A, k_B)}{\sum_{k_A} P(k_A, k_B)}, \quad (3.10)$$

である．式 (3.8) と (3.10) はノードペアのための条件付き次数分布を評価する為に用いられる．つまり，レイヤー A で次数 l_A を，レイヤー B で， l_B を持つようなノードペアが，別のノードペアとレイヤー A 内でイントラレイヤーリンクを通して結合しており，そのノードのペアの次数がレイヤー A で次数 k_A ，レイヤー B で次数 k_B を持つような確率は，

$$r_A(k_A, k_B | l_A, l_B) = P_B(k_B | k_A) r_A(k_A | l_A), \quad (3.11)$$

として評価される．同様に， $r_B(k_A, k_B | l_A, l_B) = P_A(k_A | k_B) r_B(k_B | l_B)$ が成立する．これらの条件付き次数分布は，相互依存ネットワークを解析する上で重要な役割を果たす．

この統計的特徴に加えて，我々は，ランダムに生成されたネットワークのあるひとつの具現化したもの（シングルインスタンス）もミクロな観点において扱う．そのため，ノード i に直接つながる全ての隣接ノード集合に対して， ∂i と記述する．また，そのノードの集合の構成要素の数を $|\partial i|$ と書く．集合 X から要素 x を取り除く事によって定義される集合を $X \setminus x$ として表現する．そのため， $\partial i \setminus j$ は， ∂i から $j \in \partial i$ を取り除くことによって定義されるノードの集合を意味する．相互依存ネットワークのレイヤー A とレイヤー B について， $\partial_{A}i$ は，レイヤー A においてノードペア i が直接つながっているノードペアの集合を， $\partial_{B}i$ は，レイヤー B においてノードペア i が直接つながっているノードペアの集合を表現するのに用いられている．

解析方法の詳細に入る前に，ネットワークにおける情報の流れを明確に扱うため，元のネットワークを二部グラフとして表現しておく（図 2.2 参照）．まず，ノード i をひとつの白い丸として記述し，2 つのノード i と j の間の向き無しのリンク上に新たに白い正方形で記述されるノード（関数ノード）を設置する．これによって，一般的には，各関数ノードは 2 本のリンクを持つ．一方で白い丸は元のネットワークのノードであるから，元のネットワークと同じ次数を持つ．そして， ∂a を関数ノード a とつながる 2 個の変数ノードの集合として記述し， ∂i を変数ノード i とつながる複数の関数ノードの集合として記述する．相互依存ネットワークは，レイヤー A とレイヤー B から構成されるため，それらの情報についても記号に含めて記述する．つまり， $\partial_{A}a$ と $\partial_{A}i$ は，レイヤー A のノードペアのコネクティビティの二部グラフ表示をするために， $\partial_{B}a$ と $\partial_{B}i$ は，レイヤー B のノードペアのコネクティビティの二部グラフ表示をするために用いられる．

3.4 解析手法の提案

この節では、ランダムノード故障やターゲットノードアタックの結果として、相互依存ネットワークで発生するカスケード故障を分析する為のキャビティ法を発展させる。

3.4.1 ミクロな観点での記述

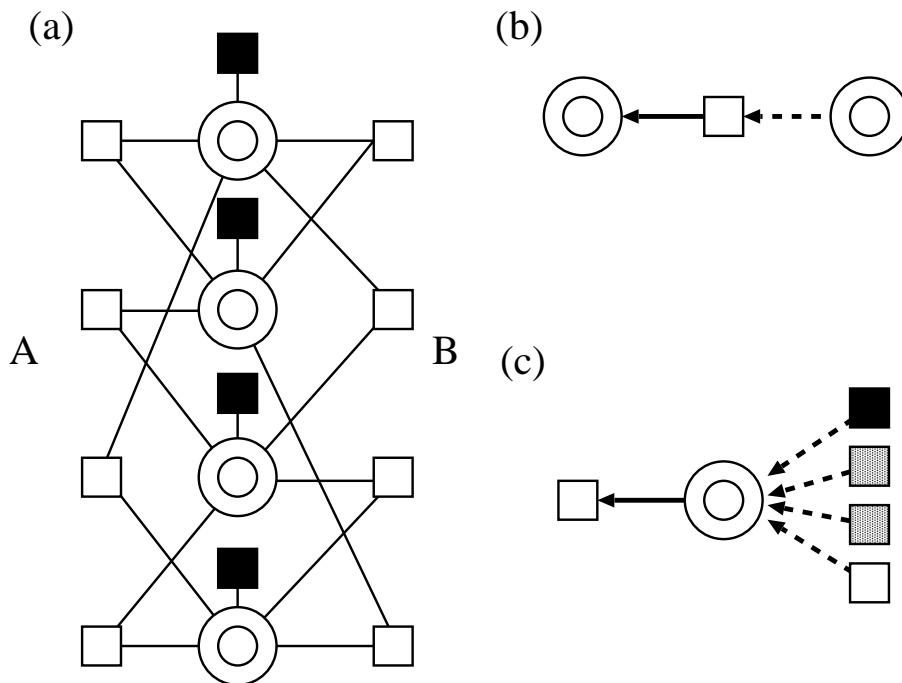


図 3.2 (a) 相互依存ネットワークの二部グラフ表示．二重円は、相互依存ネットワークでつながったノードペアを表す．各ネットワーク内のレイヤー内のリンクの伝播機能が、関数ノード（白い正方形）によって表される．また、別の種類の関数ノード（黒い正方形）は、付随するノードペアにすべてのステージにおいて、固定されたメッセージ s_i を送る．(b) レイヤー A 内の式 (3.13) とレイヤー B 内の式 (3.16) に該当する．実線のメッセージは、破線のメッセージから計算される．(c) レイヤー A の式 (3.14) とレイヤー B の式 (3.17) に該当する．実線のメッセージは、破線のメッセージから計算される．現在のステージで参照しているレイヤーとは逆側のネットワークに属することを強調するため、影をつけた関数ノードを使っている．また、関数ノード（影付き）と関数ノード（黒）から送られるメッセージの積は、式 (3.14) と式 (3.17) において、それぞれ $\tau_{A,i}^{2t-1}$ 及び、 $\tau_{B,i}^{2t}$ と要約される．(文献 [86] より引用. ©American Physical Society)

相互依存ネットワークのノードペアを i として記述する．ただし，レイヤー A の i と記述した場合は，A における i のみを指し示すことにする． i が初期ステージにおいて活性的である（初期故障を受けていない場合 $s_i = 1$ とする）か，非活性的である（初期故障を受けている場合 $(s_i = 0)$ とする）かを， $s_i \in \{0, 1\}$ で記述される 2 値変数によって表す．また，状態変数 $\sigma_{A,i}^t \in \{0, 1\}$ を，ステージ $t(t = 1, 2, \dots)$ において， i がレイヤー A において GC に属す ($\sigma_i^A = 0$) か，属さない ($\sigma_i^A = 1$) かを表すために用いる．同様に， $\sigma_{B,i}$ はレイヤー B において i が GC に属すかどうかを表す状態変数である．これらを用いると，ステージ $2t$ における MCGC の規格化された大きさは，

$$\begin{aligned} S^{2t} &= \frac{1}{N} \sum_i \sigma_{A,i} = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_{B,i} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i \left(1 - \prod_{a \in \partial_{A,i}} M_{a \rightarrow i}^{A, 2t-1} \right) \left(1 - \prod_{b \in \partial_{B,i} \setminus a} M_{b \rightarrow i}^{B, 2t} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

として表現される．

MCGC の大きさを求める為には，あるステージにおける，レイヤー A, B，それぞれにおけるノード i に入ってくるメッセージの積，すなわち $\prod_{a \in \partial_{A,i}} M_{a \rightarrow i}^{A, 2t-1}$ や $\prod_{b \in \partial_{B,i} \setminus a} M_{b \rightarrow i}^{B, 2t}$ を，キャビティ法によって計算する必要がある．レイヤー A において，ネットワーク内のメッセージを決定する式（キャビティ方程式）は，

$$M_{a \rightarrow i}^A = M_{j \rightarrow a}^A \quad (\partial_{A,a} = \{i, j\}), \quad (3.13)$$

$$M_{i \rightarrow a}^A = 1 - \tau_{A,i}^{2t-1} + \tau_{A,i}^{2t-1} \prod_{b \in \partial_{A,i} \setminus a} M_{b \rightarrow i}^A, \quad (3.14)$$

のように書く事ができる．この方程式の解によって，ステージ $2t-1$ においてノード i がレイヤー A の GC に属すかどうか

$$\sigma_{A,i}^{2t-1} = \tau_{A,i}^{2t-1} \prod_{a \in \partial_{A,i}} (1 - M_{a \rightarrow i}^A), \quad (3.15)$$

を決定する事が出来る．同様に，レイヤー B 側の $2t$ 番目のステージにおける GC を決定する為の方程式は，

$$M_{a \rightarrow i}^B = M_{j \rightarrow a}^B \quad (\partial_{B,a} = \{i, j\}), \quad (3.16)$$

$$M_{i \rightarrow a}^B = 1 - \tau_{B,i}^{2t} + \tau_{B,i}^{2t} \prod_{b \in \partial_{B,i} \setminus a} M_{b \rightarrow i}^B, \quad (3.17)$$

のように表現される．これを解く事によって，レイヤー B におけるノード i が

GC に属すかどうか，すなわち

$$\sigma_{B,i}^{2t} = \tau_{B,i}^{2t} \left(1 - \prod_{a \in \partial_{B,i}} M_{a \rightarrow i}^B \right), \quad (3.18)$$

が決定される．ただし，ステージ $2t + 1$ における A 側のノードに与えられる状態変数及び，ステージ $2t$ における B 側のノードに与えられる状態変数は，それぞれ，B から A への，及び A から B へのインターレイヤーメッセージによって，

$$\begin{aligned} \tau_{A,i}^{2t+1} &= s_i \left(1 - \prod_{a \in \partial_{B,i}} M_{a \rightarrow i}^B \right), \\ \tau_{B,i}^{2t} &= s_i \left(1 - \prod_{a \in \partial_{A,i}} M_{a \rightarrow i}^A \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

のように定義する．^{*19}

相互依存ネットワークを用意したとき，A 側に初期故障を受けた時残存する MCGC の大きさは，全てのノードに初期故障変数として s_i を与え，時系列順に A, B それぞれにおける GC を決定する式 (3.13)–(3.19) を解いていき，それぞれのネットワークにおける GC のノードラベルが一致した (MCGC が決定された) ときに，式 (3.12) に解であるメッセージ等を代入することで MCGC の大きさを導出することができる^{*20}．

3.4.2 マクロな観点での記述

今，相互依存ネットワークが，3.3 節において言及された方法で生成された状況を考える．レイヤー A が，初期故障としてランダム故障がターゲットアタックによってダメージを受けた時に，最終的に残存する MCGC の典型的な大きさの期待値を評価を行いたい．そのために，次数相関が各ネットワーク内とネットワーク間に存在していても，平均場近似の仮定が成立しているものとする．これは，レイヤー A において l_A ，レイヤー B において l_B という次数を持つノードペアは統計的に全て等価であり，次数の組に依存したユニフォーム

^{*19} インターレイヤーメッセージの定義は原論文 [86] に準拠した形で補足し記述したが，これはマクロ的視点に備えた定義の仕方である．この章最後の補足 3.7 も参照されたい．

^{*20} ミクロな観点における Cavity 方程式にはコンポーネントの大きさを比較検討する手順が含まれないので，具体的な例についての GC を決定しない．あくまでマクロな観点の為の準備であり，ネットワークアンサンブルの為の定式化といえる

な確率 $q_{l_A l_B}$ によって活性的である，というものである*21．

レイヤー A のノードがランダムに初期故障するとき，初期生存確率は

$$q_{A, k_A, k_B}^1 = q, \quad (3.20)$$

と記述される．一方で，レイヤー A のノードが次数の高いノードから選択的に初期故障するとき，初期生存確率は，

$$\begin{aligned} q_{A, k_A > l, k_B}^1 &= 0, \\ q_{A, k_A = l, k_B}^1 &= \delta, \\ q_{A, k_A < l, k_B}^1 &= 1, \end{aligned} \quad (3.21)$$

と記述され，また

$$q \equiv \sum_{k_A, k_B} q_{A, k_A, k_B}^1 / P(k_A, k_B) \quad (3.22)$$

は，初期生存しているすべてのノードの割合である．ここで， l と δ は生存確率パラメータ q を与えればユニークに決定される．

レイヤー内の耐性解析については，基本的にシングルネットワークにおけるものと同じである．つまり，ノードペア集合(A で次数 l_A , B で次数 l_B を持つ)が，レイヤー内のリンクを通して1である(キャビティ系においてGCではない)というメッセージを受け取る頻度によってシステムを記述する．つまり，レイヤー A のメッセージについて， $I_{l_A l_B}^A = (l_A \sum_i \delta_{|\partial_{A,i}|, l_A} \delta_{|\partial_{B,i}|, l_B})^{-1} (\sum_i \delta_{|\partial_{A,i}|, l_A} \sum_{a \in \partial i} M_{a \rightarrow i}^A)$ ，と定義する．同様に，レイヤー B についても， $I_{l_A l_B}^B$ を定義する．

$2t-1$ 番目のステージにおいて，レイヤー A の次数が l_A ，レイヤー B における次数が l_B であるノードペアが生存している(故障していない， $\tau_{A,i}^{2t-1} = 1$ を満たす)確率を， $q_{A, l_A l_B}^{2t-1}$ と記述する事にする．ランダムグラフの自己平均性の性質と，局所ツリー近似の性質によって，式(3.13)と式(3.14)を

$$I_{l_A l_B}^A = \sum_{k_A, k_B} r_A(k_A, k_B | l_A, l_B) \left(1 - q_{A, k_A, k_B}^{2t-1} + q_{A, k_A, k_B}^{2t-1} (I_{k_A k_B}^A)^{k_A-1} \right). \quad (3.23)$$

ように記述する事が出来る．

ステージ $2t$ のレイヤー B において，レイヤー A の次数 l_A とレイヤー B の次数 l_B を持つようなノードペアについて， $\tau_{B,i}^{2t} = 1$ であるような確率は，式(3.23)

*21 [86] には明記していないが，いかなるステージにおいても，この平均場近似が成立していると仮定している．これは，MCGC の定義と式(3.19)によるインターレイヤーメッセージの定義の御利益である．

の解と式 (3.19) から ,

$$q_{B,l_A l_B}^{2t} = q_{l_A l_B} \left(1 - \left(I_{l_A l_B}^A \right)^{l_A} \right), \quad (3.24)$$

のように評価できる . $2t$ 番目のステージにおいて , 式 (3.23) と同様の方式で , レイヤー B のキャピティ方程式を次のように記述することが可能になる .

$$I_{l_A l_B}^B = \sum_{k_A, k_B} r_B(k_A, k_B | l_A, l_B) \left(1 - q_{B, k_A k_B}^{2t} + q_{B, k_A k_B}^{2t} \left(I_{k_A k_B}^B \right)^{k_B - 1} \right). \quad (3.25)$$

式 (3.25) の解を使う事によって , レイヤー A , レイヤー B の次数がそれぞれ l_A, l_B であるようなノードペアが , $2t - 1$ ステージのレイヤー A 内において , $\tau_{A,i}^{2t+1} = 1$ となる確率を ,

$$q_{A,l_A l_B}^{2t+1} = q_{l_A l_B} \left(1 - \left(I_{l_A l_B}^B \right)^{l_B} \right), \quad (3.26)$$

のように評価できる .

ステージ $2t$ における MCGC の大きさの平均値を ,

$$\begin{aligned} \mu^{2t} &= \sum_{l_A, l_B} P(l_A, l_B) q_{l_A l_B} \left(1 - \left(I_{l_A l_B}^A \right)^{l_A} \right) \left(1 - \left(I_{l_A l_B}^B \right)^{l_B} \right) \\ &= \sum_{l_A, l_B} P(l_A, l_B) \left(q_{l_A l_B} \right)^{-1} q_{A, l_A l_B}^{2t-1} q_{B, l_A l_B}^{2t}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

のように式 (3.12) に基づき評価する事が出来る . 式 (3.23)–(3.27) はこの章の主要な成果である .

ひとつ特筆すべき事をここに記す . シングルネットワークの場合と同様に式 (3.23) は自明な解 $I_{l_A l_B}^A = 1$ を持つ . この解は , すべての l_A と l_B のペアについて充分小さな生存確率 $q_{A, l_A l_B}^{2t-1}$ が設定されれば , 安定である . これより , 式 (3.24) におけるすべての l_A と l_B について , $q_{B, l_A l_B}^{2t} = 0$ が成立する . さらに , これを式 (3.25) に代入することによって , ステージ $2t$ において $I_{l_A l_B}^B = 1$ は , 式 (3.25) のユニークで安定な解となるので , $\mu^{2t} = 0$ が保証される . つぎのステージ $2t + 1$ においても , すべての l_A と l_B について , $q_{A, l_A l_B}^{2t+1} = 0$ が成立する . それによって , 自明な解が安定であることが再び保証される . すなわち , 自明な解 $\mu^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^{2t} = 0$ は , ランダム故障確率の大きさに関わらず , 式 (3.23)–(3.26) のダイナミクスにおいて , 常に局所的に安定である . このような特徴は , シングルネットワークの場合には見られない . 結果として , 初期ステージにおいて , すべての次数ペア l_A, l_B について十分大きな $q_{A, l_A l_B}^1 = q_{l_A l_B}$ が設定されているとき , 転移点においては , 自明な解 $\mu^* = 0$ と共に有限の μ^* をも得る . これに

よって, μ^* が一般的に (次数次数相関の存在する相互依存ネットワークにおいても), ある有限の値から 0 へと転移する (一次転移) ことを示すことができる .

3.4.3 先行研究との関連性

[53] において, ネットワーク間の正の相関が最も強く ($P(k_A, k_B) = \delta_{k_B, k_A} p(k_A)$, ネットワーク間の 1 対 1 対応で結合するノードの次数が一致する), ネットワーク内の次数次数相関がない ($r_A(k, l) = r_B(k, l) = r(k)r(l)$ が成立する) 場合における, 相互依存ネットワークがランダム故障 $q_{l_A l_B} = q$ を受ける場合の MCGC の導出について, 母関数法によって検証されている . この結果と本節における結果の対応を検証する . 上述した状況では, 2 つのネットワークにおいてメッセージが等しく, またネットワーク内の相関が無い事から, メッセージが次数依存しないと仮定できるので, $I_{l_A l_B}^A = I_{l_A l_B}^B = I$ が成立する . さらに, レイヤー A と B の間に正の最も強い相関が存在する事により, $\lim_{t \rightarrow \infty} q_{A, ll}^{2t-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} q_{B, ll}^{2t} = q(1 - I')$ と設定する事が出来る . これらを, $r_A(k_A, k_B | l_A, l_B) = \delta_{k_B, k_A} r(k_A) \delta_{l_A, l_B}$ と共に式 (3.23) に代入する事によって, I に関して,

$$\begin{aligned} I &= 1 - q(1 - IH(I)) + q(H(I) - IH(I^2)) \\ &= 1 - q(1 - (I + 1)H(I) + IH(I^2)), \end{aligned} \quad (3.28)$$

を得るが, これは [53] における式 (36) と等価である .

また, $t \rightarrow \infty$ における MCGC の大きさは $I_{l_A l_B}^A = I_{l_A l_B}^B = I$ を, $P(k_A, k_B) = \delta_{k_B, k_A} p(k_A)$ について式 (3.27) に代入することで評価される . これより,

$$\mu^* = q(1 - 2G(I) + G(I^2)), \quad (3.29)$$

という式を得るが, これもまた, [53] の式 (35) と等価である .

一方で [25] では, ネットワーク内の次数次数相関の場合, ($r_A(k, l) = r_A(k)r_A(l)$, $r_B(k, l) = r_B(k)r_B(l)$) とインターレイヤー次数次数相関がない $r_A(k, l) = r_A(k)r_A(l)$, $r_B(k, l) = r_B(k)r_B(l)$ 場合が議論された . そのような場合もノードの次数依存性を無視する事で, $I_{l_A l_B}^A = I_A$, $I_{l_A l_B}^B = I_B$ のように設定する事ができる . 今, 初期故障としてランダム故障の場合を考える . $r_A(k_A, k_B | l_A, l_B) = p_B(k_B)r_A(k_A)$ を式 (3.23) に代入する事で,

$$\begin{aligned} I_A &= 1 - q_B + q_B \left(\sum_{k_A} r_A(k_A) I_A^{k_A-1} \right) \\ &= 1 - q_B + q_B f_A, \end{aligned} \quad (3.30)$$

であり，これを書き換えると，

$$f_A = H_A(1 - q_B + q_B f_A), \quad (3.31)$$

が成立する．ここで $H_A(x) = \sum_k r_A(k)x^{k-1}$ であり， $f_A = H_A(I_A)$ である．同様の方法によって，式 (3.25) は

$$f_B = H_B(1 - q_A + q_A f_B), \quad (3.32)$$

を与え， $H_B(x) = \sum_k r_B(k)x^{k-1}$ である．式 (3.26) と (3.24) は，自己無撞着な方法で q_A と q_B 式 (3.31) と (3.32) を与え，それぞれ

$$\begin{aligned} q_A &= q \left(1 - \sum_k p_A(k) I_A^k \right) \\ &= q(1 - G_A(1 - q_B + q_B f_A)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

であり，

$$q_B = q(1 - G_B(1 - q_A + q_A f_B)), \quad (3.34)$$

ここで $G_A(x) = \sum_k p_A(k)x^k$ であり，また $G_B(x) = \sum_k p_B(k)x^k$ である．

式 (3.31) と (3.34) は 4 つの変数 f_A, f_B, q_A ，そして q_B を決定する一連の条件を構成しており，これらの変数を使う事で，共有 GC の大きさは，

$$\mu^* = q(1 - G_A(1 - q_B + q_B f_A))(1 - G_B(1 - q_A + q_A f_B)). \quad (3.35)$$

として，評価できる．

特に ER ネットワークアンサンブルの次数分布は， $p_A(k) = e^{-a}a^k/k!$ と $p_B(k) = e^{-b}b^k/k!$ によって特徴付けされる (2.3.1 節を参照) ため，式 (3.31)–(3.34) は，2 つの式によって要約することができる．なぜなら， $G_A(x)$ と $G_B(x)$ は，それぞれ $H_A(x)$ と $H_B(x)$ に一致するため， $G_A(x) = H_A(x) = \exp(a(x-1))$ ， $G_B(x) = H_B(x) = \exp(b(x-1))$ のように表現できるからであり．結果的に得られる方程式は

$$f_A = \exp(-a(f_A - 1)(f_B - 1)) \quad (3.36)$$

と，

$$f_B = \exp(-b(f_A - 1)(f_B - 1)), \quad (3.37)$$

となるが，これらは [25] の補足部分の式 (14) と一致する．

以上の2つの具体例によって、我々の方法論的枠組みは既に報告された研究結果に一致し、母関数法に書き換える事によってよりコンパクトに表現する事が出来ることが示された。ただし、これはマクロなキャビティ変数 $I_{l_A l_B}^A$ と $I_{l_A l_B}^B$ が次数 l_A と l_B に依存しないような場合に限られる。しかしながら、次数相関がネットワーク内及びネットワーク間にある場合は、マクロな観点においてはキャビティ変数（メッセージ）はそれぞれのネットワークにおけるノードの次数に依存する。そのような場合は、本節で示したような一連の耐性決定方程式 (3.23)–(3.27) を直接操作することによってのみ、相互依存ネットワークのふるまいを理論的に記述することができる。

3.5 数値計算とその結果

*22

3.5.1 数値実験の手順

前節で展開した解析手法の妥当性を確かめる為に、ノード数 10000 の相互依存ネットワークに対してモンテカルロ法を基礎とした数値計算を行った。その際、各ネットワークについて、[34] において提案されたアルゴリズムによってリンクの組み替えを行い、次数相関による特徴付けを行った。また、[?, 81] によって提案されたアルゴリズムを使う事によって、実際に全てのコンポーネントのラベルを分類し、その中で最も大きいものの大きさを計測することで MCGC を決定した。

初期故障として、数値実験の為に構築したレイヤー A について、ランダム故障または、ターゲットアタックどちらの場合についても、いくつかのノードが、故障の様相に応じて取り除かれる。これによって A における GC が決定されるが、数値実験では、各ノードにおける GC ラベルがそのまま、相手側のネットワークに送られるものとする。各ステージにおいて、GC から切り離されるノードが存在する限りは、連鎖破壊現象は止まらず、最終的にはそのようなノードが存在しなくなったとき初めて互いのネットワークで残存している GC を MCGC とみなすことができる。インターレイヤーリンクが 1 対 1 対応で必ず 1 本存在するため、MCGC に属すインデックスラベル集合（レプリカノード同士は同じインデックス）はネットワーク間で同じものとなる。数値実験で得

*22 付録 C も参照されたい。

られた共有 GC の実際の大きさと、キャビティ法による解析によって見積もられる GC の大きさの期待値とを比較した。

シンプルだが自明でない次数分布の例として、2 ピークモデルを採用した。このモデルでは、次数の種類が 2 つしか存在しないため、それぞれのネットワーク毎に定義されるピアソン係数 C_A と C_B によって、イントラレイヤー次数次数相関をユニークに決定できる。しかし、レイヤー A と B の間の次数次数相関は、 $P(k_A, k_B)$ のピアソン係数である C_I によってはユニークに決定されない。なぜなら、一般に（シングルネットワークにおける）ピアソン係数の計算において、リンクの両端に関する区別はないからである。しかし、相互依存ネットワークでは、 $(k_A = 4, k_B = 6)$ という次数を持つノードと $(k_A = 6, k_B = 4)$ という次数を持つノードが異なる意味を持つことは明確である。そのため、これらのペアの割合は同じであると仮定する。これによってレイヤー内次数相関、レイヤー間次数相関を 3 つのパラメータ (C_A, C_B, C_I) によって特徴付ける事が出来る。

故障の様相（ランダムノード故障かターゲットノード破壊か）は、MCGC の大きさに大きく影響する。ランダム故障の場合、ノードペアの生存確率はそれらの次数のペアに依存せず一様であることを意味する。しかしながらターゲットアタックの場合、ノードペアはレイヤー A で高い次数を持つノードペアが選択的に除去される。そのため、ステージ 2 における除去のレイヤー B のノードに対する影響は、ネットワーク間で定義された次数相関に依存する。これより、相互依存ネットワークのロバストネスは、インターレイヤー次数次数相関にも自明でない形で影響を受けることが分かる。

3.5.2 結果と議論

図 3.3 と図 3.4 は、それぞれターゲットノードアタック、ランダムノード故障の場合における、MCGC の大きさと初期故障確率の関係性を示している。実線は、キャビティ法から得られる MCGC の大きさの期待値、各記号は対応する数値実験の結果を表している。これらの図によると、実験結果と解析解は高い精度で一致しており、キャビティ法に基づく解析的枠組みが妥当であることが分かる。また、これらの図は、相互依存ネットワークにおける MCGC の臨界転移が、ネットワーク内及びネットワーク間の次数次数相関の導入とは無関係に不連続であることを示している。

次に図 3.5 を参照されたい。(a), (b), (c) は、それぞれネットワーク間の次数

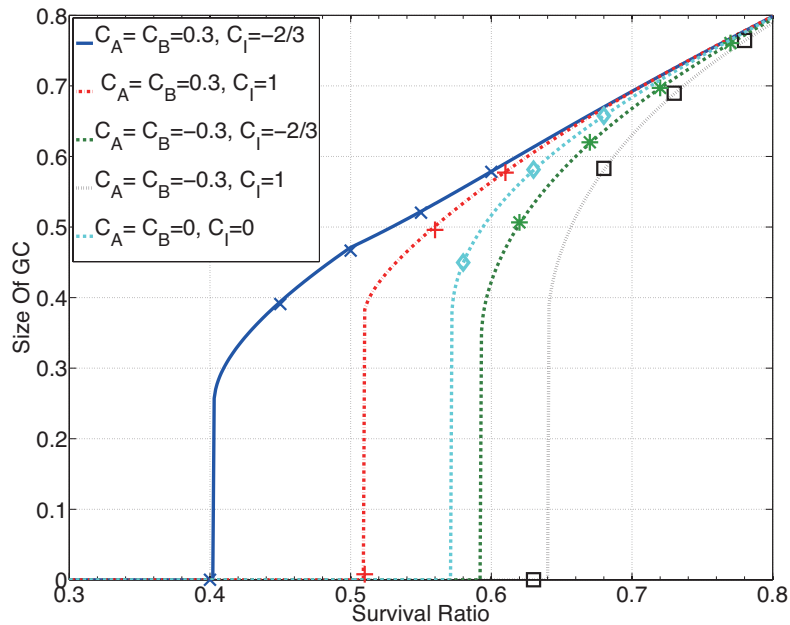


図 3.3 二極次数分布を持つ相互依存ネットワークの、選択的ノード攻撃を受ける時の最終的な耐性．各シンボルは、 $N = 10000$ のネットワークの 50 回の実験から評価される MCGC を表す．統計的エラーは各シンボルのサイズより小さい．(文献 [86] より引用. ©American Physical Society)

相関が正，ニュートラル，負である場合に対応し，またそれぞれについて臨界転移点（パーコレーションスレッシュホールドとも言う）が，ネットワーク内の次数相関にどのように依存するかを示している．結果としては，臨界転移点は次数相関に自明でない形で強く依存しているといえる．ネットワーク間の次数相関がニュートラルでない状況（(a), (c) に相当）下では，各ネットワークに対してネットワーク内の次数相関を導入する事によって，相互依存ネットワークの耐性がより強くなる．一方で，ネットワーク間の次数相関 ((b) に相当) がニュートラルである状況では，A のネットワーク内の次数相関が正の相関であり，B のネットワーク内の次数相関が負の相関であるときに，相互依存ネットワークの耐性が最も強くなる．^{*23}

^{*23} ランダム故障に対しては，二極次数分布をもつシングルネットワーク（ここではネットワーク）における広範囲のクラスの耐性研究によって，負の次数相関を持つときに最も耐性が強いという研究報告 [79] が後にされた．相互依存ネットワークでは，ネットワーク間の次数相関がニュートラルであるときは，ステージ $t = 3$ 以降の A において，及び B における故障の様相は，初期故障によらず常にランダム故障となる事に注意したい．

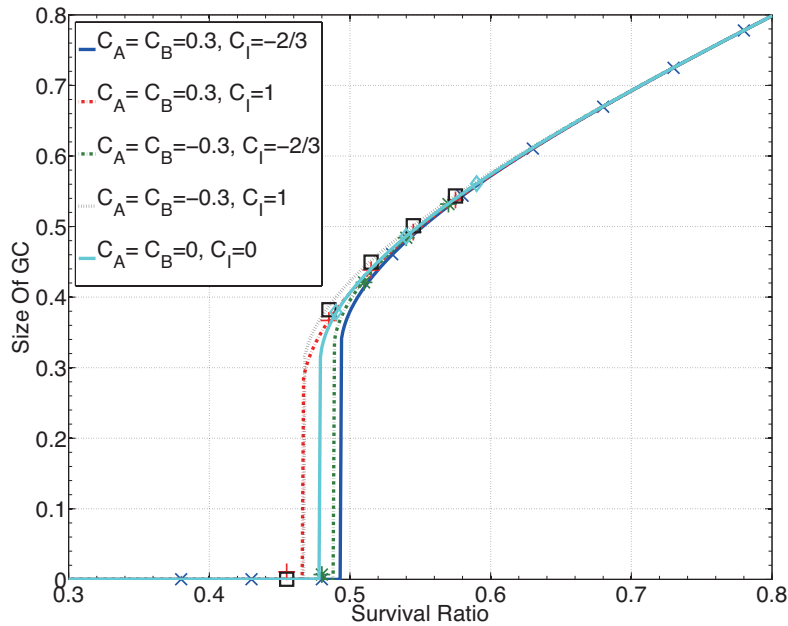


図 3.4 二極次数分布を持つ相互依存ネットワークがランダムノード故障を受ける時の最終的な耐性．各シンボルは， $N = 10000$ のネットワークの 50 回の実験から評価される MCGC を表す．統計的エラーは各シンボルのサイズより小さい．(文献 [86] より引用. ©American Physical Society)

ランダム故障においても，レイヤー内の次数相関は耐性に影響を及ぼす．図 3.6 を参照されたい．(a), (b), (c) はそれぞれレイヤー間の次数相関が正，ニュートラル，負である場合に対応し，またそれぞれについて臨界転移点（パーコレーションスレッシュホールドとも言う）が，レイヤー内の次数相関にどのように依存するかを示している．いかなるタイプのレイヤー間の次数相関が導入されようと，両方のレイヤーにおける負のイントラレイヤー次数相関によって，わずかにより高い耐性を呈することを示している．*²⁴しかし，ターゲットノードアタックを受ける場合と比べると，次数相関におけるコントロールパラメータを変えても，全体的な転移点の変化は小さかった．これは，ランダムノード故障の場合は，次数相関の役割はターゲットノードアタックに比べて相対的にそれほど重要ではないということを暗示している．

最後に，我々の今までの考察を確かめる為に，二極次数分布における様々な

*²⁴ この部分もシングルネットワークに置けるランダム故障において負の相関が有利に働くというその後の研究成果 [79] に一致している．

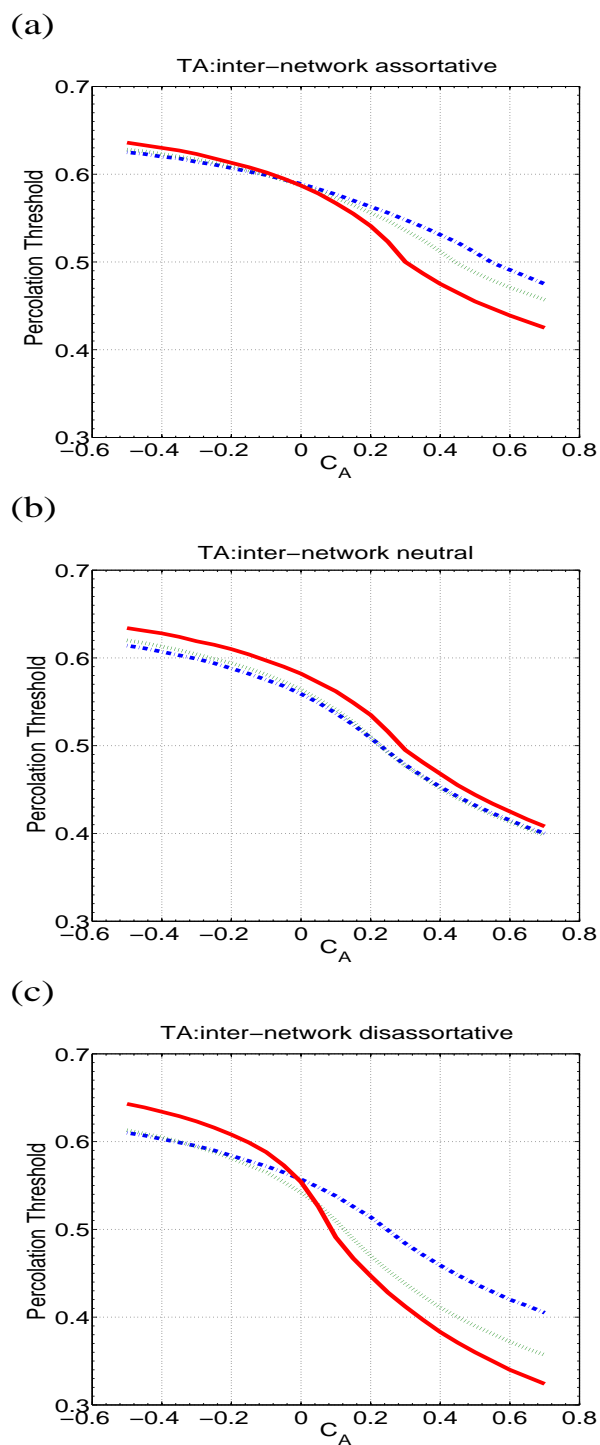


図 3.5 レイヤー A におけるパーコレーションスレッシュホールド (ターゲットアタック). (a), (b), (c) は, $C_I = 0.5, 0, -0.5$ にそれぞれ相当している. また, $C_B = 0.7$ (赤い実線; 正の相関), $C_B = 0$ (緑の破線; ニュートラルな相関), $C_B = -0.5$ (青い一点鎖線: 負の相関) である. (文献 [86] より引用. ©American Physical Society)

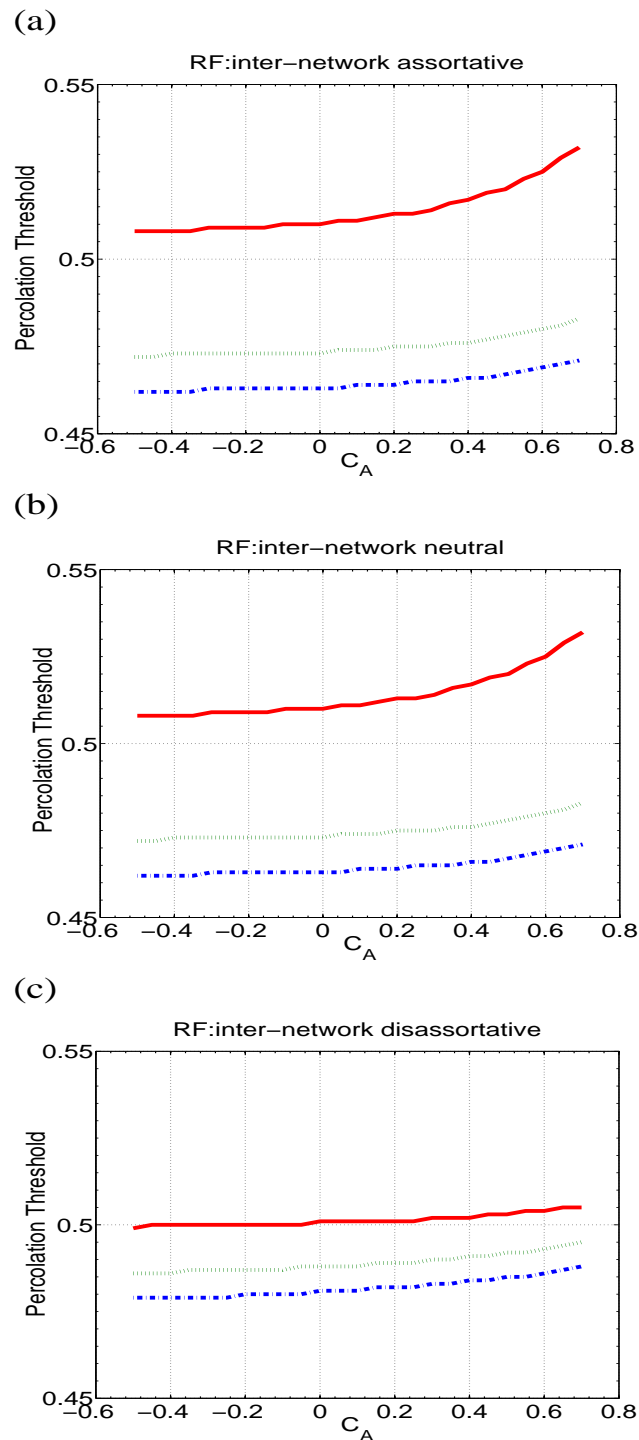


図 3.6 レイヤー A におけるパーコレーションスレッシュホールド (ランダム故障). 線の色の違いは, 図 3.5 におけるものと同様である. (文献 [86] より引用. ©American Physical Society)

$k_A^1(k_B^1)$	$k_A^2(k_B^2)$	C_A	C_B	C_I	q_c
3	8	0.3	0.3	1	0.361
3	8	0.3	0.3	0	0.475
3	8	0.3	0.3	-1	0.543
3	8	-0.3	-0.3	1	0.389
3	8	-0.3	-0.3	0	0.432
3	8	-0.3	-0.3	-1	0.512
4	7	0.3	0.3	1	0.413
4	7	0.3	0.3	0	0.457
4	7	0.3	0.3	-1	0.466
4	7	-0.3	-0.3	1	0.419
4	7	-0.3	-0.3	0	0.428
4	7	-0.3	-0.3	-1	0.458
5	6	0.3	0.3	1	0.431
5	6	0.3	0.3	0	0.444
5	6	0.3	0.3	-1	0.436
5	6	-0.3	-0.3	1	0.431
5	6	-0.3	-0.3	0	0.426
5	6	-0.3	-0.3	-1	0.435

表 3.1 ランダム故障を受ける場合の二極次数分布をもつ相互依存ネットワークのパーコレーション転移点. $k_A^1, k_A^2, k_B^1, k_B^2$ はそれぞれレイヤー A, B におけるノードの最小次数と最大次数を表す. (文献 [86] より引用. ©American Physical Society)

次数の組み合わせについて, 実験した. 表 3.1 と表 3.2 は, それぞれターゲットノードアタック, ランダムノード故障における臨界転移点の数値 (キャビティ法によって導出されたもの) を示している. 両方のレイヤー間, レイヤー内次数相関, 及び次数分布によって, 実験結果は複雑である.

$k_A^1(k_B^1)$	$k_A^2(k_B^2)$	C_A	C_B	C_I	survival ratio
3	8	0.3	0.3	1	0.659
3	8	0.3	0.3	0	0.626
3	8	0.3	0.3	-1	0.577
3	8	-0.3	-0.3	1	0.657
3	8	-0.3	-0.3	0	0.639
3	8	-0.3	-0.3	-1	0.631
4	7	0.3	0.3	1	0.538
4	7	0.3	0.3	0	0.495
4	7	0.3	0.3	-1	0.397
4	7	-0.3	-0.3	1	0.633
4	7	-0.3	-0.3	0	0.6
4	7	-0.3	-0.3	-1	0.585
5	6	0.3	0.3	1	0.383
5	6	0.3	0.3	0	0.408
5	6	0.3	0.3	-1	0.339
5	6	-0.3	-0.3	1	0.582
5	6	-0.3	-0.3	0	0.546
5	6	-0.3	-0.3	-1	0.550

表 3.2 選択的破壊を受ける場合の二極次数分布をもつ相互依存ネットワークのパーコレーション転移点 (文献 [86] より引用. ©American Physical Society)

3.6 まとめ

本章では、2つのレイヤーで構成される相互依存ネットワークに対する解析的な方法論を紹介した。我々の方法論はキャビティ法を基礎としており、ターゲットアタックあるいは、一連のマクロな非線形な式を解く事によって、ランダム故障を受ける GC の大きさを評価する事が可能になる。ただし、マクロな式の導出において、ランダムネットワークの自己平均性（セルフアベレージング特性）や、ローカルツリー近似を仮定している。また、今回開発した方法論で得られた結果は、レイヤー内、あるいはレイヤー間の次数相関が無い場合、

母関数法に縮退するが、トリビアルでない次数相関を考慮する場合は、本章で示したようなシングルインスタンスからマクロなキャビティ方程式を導出することが必ず必要になる。数値実験として、バイモーダル次数分布を持つようなネットワークを2つ用意して、ターゲットアタック、ランダム故障のノード故障プロセス両方について、解析解（理論値）との比較を行った。解析解と実験で計測された値は非常に高い精度で一致しており、解析手法の正当性を確認することができた。また、次数相関の耐性に影響を検証した結果、初期故障としてターゲットアタックを受ける時は、レイヤー内、間の相関が耐性に大きな影響を与えるのに対し、ランダム故障においては、次数次数相関の重要性は比較的小さいことが分かった。

まず、レイヤー間の次数相関の耐性に与える効果について言及する。レイヤー間における相関が正であるとき、高次数ノードと高次数ノードのノードペアの割合が増えている。そのようなノードペアの存在は、ランダム故障に対する耐性を強める。しかし、これらがシステムの耐性に最も寄与する部分でもあるため、初期故障において選択的に狙い撃たれる、つまりターゲットノードアタックの場合は、システム全体を脆弱にしてしまう要因になりうる。

次に、各レイヤーのレイヤー内の次数相関と次数分布の相乗効果について考察する。シングルネットワークの場合とは異なり、相互依存ネットワークではレイヤー内における正の相関が必ずしもターゲットノードアタックに対する耐性を強める事にはならない。この理由は、大きな次数と小さな次数のノードの次数の差、特にその幅が大きいことの方が、ネットワーク内の次数相関よりも耐性に対して重要であるからと考えられる。しかし、そのような差異は比較的小さく、むしろレイヤー間の相関がターゲットアタックのロバストネスを増加させる最も大きな要因となる。

3.7 補足

ミクロな観点においては、式 (3.19) によるレイヤー間のメッセージを、 $\sigma_{A,i}^{2t-1}$ や $\sigma_{A,i}^{2t-1}$ （あるステージにおける各ノードが GC かどうかの情報）によって定義しても良い。、こちらの方が現実ネットワークのシナリオとしては自然である。しかし、マクロな観点に置ける評価式の導出のためには、4.7 節で紹介するようなヒューリスティクスを導入する事によって、結局式 (3.19) の定義を用いる事に帰着する。

4 対立ネットワークの耐性解析

*25

4.1 背景や動機

マルチレイヤーネットワークというコンセプトは、現代の複雑ネットワーク科学において重要な概念と考えられている [22, 23, 24, 49, 51, 52, 48, 67, 68, 69, 70, 57, 58, 60, 61, 62, 65, 71]。このモデルは、複数のレイヤーで構成されており、それぞれはシングルネットワークと同様の振る舞いをする。一方で、あるレイヤーのノードは他のレイヤーにおけるノードと、一般的には自明でないつながりを持っている。つまり、マルチレイヤーネットワークにおいてはシステム間の相互作用を陽にモデル化されており、このことが新しい現象の発現やそれに伴った新しい手法や概念の創出につながると考えられている。マルチレイヤーネットワークの数理モデルの研究は、[25, 26] によって提案された相互依存ネットワークの耐性解析に端を発しており、本論文ではそのモデルにおける次数相関の耐性に与える影響について、3 章にて詳しく解析した。相互依存ネットワークでは、レイヤー間においてノードレベルの相互依存関係が 1 対 1 で存在しており、耐性の指標は共通結合 GC (Mutually Connected Giant Component, MCGC) であり、両方のレイヤーの故障の状況に依存する性質を持っていた。そのため、システムの次数分布や次数相関によっては、片方のレイヤーにおけるわずかなノードの初期故障が連鎖破壊へつながり、全体に致命的なダメージが波及する可能性があることについて言及した。このタイプのモデルは、現代のシステムが互いに支えあう（依存し合う）という前提から生み出されたものであり、構成要素が故障した影響が系の種類を超えて伝播するという緊急時に、互いのシステムのリカバリー作用が働かないという状況を模擬的に再現しているという点においては、十分に妥当なモデルであるかもしれない [72]。

一方で、相互依存ネットワークとは異なるクラスも十分に考えられる。例え

*25 本章の内容は、[87]”Reilience of antagonistic networks with regard to the effects of initial failures and degree-degree correlations”, Shunsuke Watanabe and Yoshiyuki Kabashima, Phys. Rev. E **94**, 032308 (2016). ©American Physical Society に準拠している。

ば、対立性の相互作用によってレイヤー同士が結合しているモデルが挙げられるが、本論文ではそれを対立ネットワークという名前で記述することにする。相関を考慮せず、初期故障を伴わない場合の対立ネットワーク（本論文におけるモデルとは詳細は異なる。）に関して、いくつかの論文が掲載された [73, 74]。また、相関を考慮しないが初期故障を伴うケースについても、マルチレイヤーネットワークに関する総説論文の 1 つである [22] に、解析例が掲載されている。これらのモデルは 1 次転移現象を呈するとされているが、レイヤー間の対立作用が解析表現がシンプルになるように便宜を図った上で設定されているため、数値実験上で再現する際は幾分不自然にならざるを得ない。我々のモデルでは、ノードが GC に属すかどうかという情報のみがレイヤー間の相互作用に寄与するように設定しており、各ステージ終了時における情報のみを使っている点で自然である。また、初期故障が起きるレイヤーについても、明示的にレイヤー α で起きると定義しており、レイヤー間リンクの対立性に起因する異なるレイヤー間の非対称性を再現している。

我々のモデルも、ある意味では幾分人工的であるかもしれないが、生態系のネットワークのモデルの一例と解釈することができるかもしれない。シングルネットワークではなく、2 つのレイヤーで構成されるマルチレイヤーネットワークを使う事によって、2 種の生態ネットワーク：生存を脅かされている希少な固有種と侵略種、それぞれにおける生存範囲とその間の関係性、を表現している。前者はレイヤー α に、後者はレイヤー β 上に射影されており、各レイヤーの GC はそれぞれのレイヤーにおけるすなわち最も重要なコロニーを意味しているものと考えられる。各レイヤー間のリンクは、対立的な性質を呈すると考えられる。なぜなら、侵略種は希少種を補食する一方で、後者は人間による根絶計画によって、前者に対抗することができるからである。

この論文では、故障を受ける対立ネットワークの耐性を、次のような 3 つの項目：(i) 初期故障のタイプ、(ii) 初期故障の残存効果、(iii) 次数相関、について、理論解析する。初期ノード故障を特徴づける 2 つのシナリオとして、ランダムノード故障か選択的ノード破壊を考慮する。初期ステージの後、特に $t = 3$ におけるレイヤー α における初期故障の残存性について 2 つの可能性が考慮される。ケースクエンチト (ケース Q) というシナリオでは初期故障の残存が深刻であるため、初期故障したノードは $t = 3$ のステージにおいても再びその機能を取り戻す事が出来ない。一方でケースフリー (ケース F) というシナリオでは、初期故障したすべてのノードは、その故障から解放される。すなわち、

レイヤー α におけるすべてのノードがその後レイヤー β におけるノードの状態次第によっては、ステージ 3 以降で機能を取り戻すポテンシャルを備えている。現実問題のシナリオにおいては、ケース F が希少種がその個体数を復活させる事ができる場合に該当する一方で、ケース Q においては、侵略種がそのエリアにおいて消滅したとしても、個体数を復活させる事が出来ない場合に対応する。しかし、両方のケースにおいて、パーコレーションプロセスは周期的現象を呈する。周期的現象は、別の状況設定の対立ネットワークモデル [75] においても確認されている。加えて、我々は 2 種類の次数相関（レイヤー内の次数相関とレイヤー間の次数相関）を考慮した。一般的に現実世界のネットワークは何らかの次数相関を持つ事が多い事が知られており [34]、それらの影響を調べる事はマルチレイヤーネットワークの最も重要なテーマの 1 つと考えられている [22]。

本章の主要な部分は、キャビティ法を基にした解析的手法を提案する点にある。この手法は平均場アプローチとして分類されるが、グラフの局所的なツリー構造近似と Bethe-Pierl 近似を仮定している [77, 78, 33, 59]。母関数 [38] と比較すると、決定的な形でミクロな変数（補助場と外場）を陽に記述するというキャビティ法の特徴は、シングルインスタンスにおけるノードの状態遷移を理解する上で大変有益である。2.4.5 節でも考察した通り、ネットワークの大きさが無限大に発散している場合を仮定し、自己平均性が保たれている場合、母関数法とキャビティ法の最終的な導出結果は一致する。

前章における相互依存ネットワークの場合と同様に、対立ネットワークについても定式化を進めるが、残念な事に最初に得られた解析解と数値実験の結果との間に部分的な不一致が生じていた。これは、過去の履歴に影響を受けたあるノードが決定的にレイヤー全体の耐性に寄与しているために、平均場近似を成立させる上で重要な自己平均性（同次数のノードは統計的には等価な性質を共有する）の仮定が成立していないことが原因である。この種のヒステリシスを消し去る技術は、実は陰に相互依存ネットワークでも使われているが、対立ネットワークでは妥当性を失う。なぜなら、対立ネットワークの場合は、本来故障しているノードが生存しているという条件の元で、GC に属してしまう可能性が出るからである。このようなノードはたとえ少数であっても、マルチレイヤーネットワークが連鎖的なパーコレーション現象を生みやすい構造であるために、転移の定性的な性質を決定してしまう可能性がある。そこで、対立ネットワークが周期現象を呈することを念頭に、ヒューリスティック的に GC の大

きをミクロなレベルで記述した後で、それをマクロな観点におけるものに転換し、その有効性について数値実験との比較で検証した。各レイヤーにおける GC の臨界転移は、ケース Q でもケース F でも連続転移である。特にレイヤー α における臨界転移は、マルチレイヤー的構造に組み込まれているにもかかわらず、レイヤー α 内のトポロジカルな性質にのみ依存する。一方で、レイヤー α の GC の大きさは、特に半分を過ぎた辺りから、両方のレイヤー内の相関やレイヤー間の相関に影響を受ける。

この章は、次のように構成される。4.2 節では、セットアップと解析に使う為の様々な記号の定義を、多くは 2.1 節でも既に述べたが、もう一度導入する。4.3 節では、ミクロな観点からメッセージの流れを記述する。4.4 節で与えられた定義^{*26}によって、4.5 節では、ミクロな観点からの定式化をマクロな観点からのものに変換する。4.6 節では、我々の解析手法の妥当性を数値実験で確認する。この際、前述した通りの不一致が、部分的にはあるが観察される。そこで 4.7 節において、4.4 節とは異なる定義によるヒューリスティクスを示し、解析手法の有効性を再検証する。また、4.8 節では、いくつかの具体的な事例に関する結果を示す。最後の節では、要約とともにこの章を締めくくる。なお、この章で用いた主な記号は、見やすいように 4.11 節にリスト化してある。

4.2 対立ネットワークのモデル

この節では、対立ネットワークのモデルの簡単なアウトラインを提示する。対立ネットワークは、レイヤー α とレイヤー β の 2 つのレイヤーから構成されており、それぞれのレイヤーにおけるノードの数は N である。それぞれのレイヤーは独立に生成され、故障プロセスに先立ってどちらのレイヤーにおいても次数が 1 のノードはないものとする。各ネットワークのトポロジーである次数分布、レイヤー間の次数相関、レイヤー内の次数相関は、4.2.2 節で導入する。

初期故障として、レイヤー α においてある割合のノードが故障するとする。その際、選択的度数破壊（度数に依存したランダム故障）かランダム故障は前もって決めておくが、どちらの場合についても故障確率は $1 - q$ であるとする。最初のステージの結果として、レイヤー α 内に GC が残存するかもしれない。その大きさは、典型的には $O(N)$ であるが、臨界転移点においては、 $O(N^{2/3})$ で

^{*26} 自己相似性を仮定しているが、この部分は $t = 1, 2$ においてのみ有効であり、過去の履歴の影響が利いてくるケースフリーの $t = 3$ では有効ではない。

ある [10, 7] . レイヤー間の相互作用に関して次のよう定義する : レイヤー α においてノードが GC に属す場合 , レイヤー β におけるレプリカノードを失活化させ , 一方で GC に属さないノードは , レプリカノードを活性化させる (レイヤー β のノードは初期設定としてすべて活性的であるので , 特に何も作用しない) . このような状況設定によって , ステージ 2 におけるレイヤー β におけるノードの故障が生じ , レイヤー α とは異なる GC が生じるかもしれない . 先ほどと同様に , レイヤー β において GC に属すノードは , レイヤー α における自身のレプリカノードを不活性化させる . 一方で , GC に属さないノードはレイヤー α における自身のレプリカノードを活性化させるが , ノードが初期故障している場合に関しては , 2 つの可能性が考えられる : レイヤー β からの作用よりも初期故障の影響を優先させる場合をケースクエンチト , レイヤー β からの作用を優先させ , 初期故障からは解放されているとする場合をケースフリー , とする . これらの状況設定のもとで , 故障プロセスは収束するまで反復的に繰り返される . このことは , 4.2.3 節でも , より深く議論される .

4.2.1 二部グラフ表示と記述法

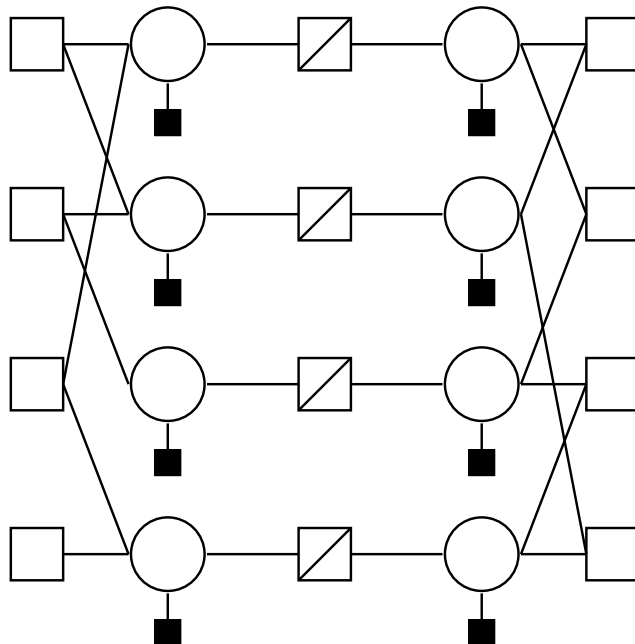


図 4.1 対立ネットワークの二部グラフ表現 . (文献 [87] より引用 .
©American Physical Society)

図 4.1 に、元のネットワークに対する二部グラフを示す。これは、故障プロセスにおけるメッセージ伝播の枠組みをグラフ上で考えるときに役立つ。元のノードは、二部グラフにおいては変数ノードともいわれ、円として表現される。変数ノードが初期故障しているかどうかを除去せずに図示するため、各変数ノードに関数ノードを接続しており、それらは黒い正方形で示される。レイヤー間の各リンクとレイヤー内の各リンク上に、メッセージを仲介する働きを持つ関数ノードを 1 個、新たに付け加える。レイヤー間のリンク上に加えらる場合は中に斜め線が入った白い正方形、レイヤー内リンクの上に加えらるものは白い正方形で表される。

次に、対立ネットワークの定式化における記号を導入する。レイヤー α における変数ノードを i_α によって記述する。変数ノード i_α と直接つながっている関数ノード集合は、 ∂i_α で書かれる。レイヤー α における各イントラリンク上の関数ノードは a_α によって記述する。また、レイヤー間のリンク上の関数ノードは、 p によって記述する。関数ノード a_α は 2 つの変数ノードと直接繋がっており、 ∂a_α によって記述される。

4.2.2 特徴量の導入

レイヤー α におけるトポロジを、マクロな耐性解析のために設定する。ネットワークにおける最も基本的なトポロジの 1 つは次数分布であり、ランダムに選ばれたノードが k_α であるような確率として定義され、 $p_\alpha(k_\alpha)$ として記述される。また、 $r_\alpha(k_\alpha)$ を、ランダムに選ばれたリンクの終端ノードの次数が k_α であるような確率として定義するが、 $p_\alpha(k_\alpha)$ を使って

$$r_\alpha(k_\alpha) = \frac{k_\alpha p_\alpha(k_\alpha)}{\sum_{l_\alpha} l_\alpha p_\alpha(l_\alpha)}, \quad (4.1)$$

と書ける。これに関連して、 $r_\alpha(k_\alpha, l_\alpha)$ をレイヤー内の同時次数分布（レイヤー内の次数相関）は、ランダムに選ばれたあるレイヤー内リンクにおける終端ノードの一方の次数が k_α であり、もう片方の終端のノードの次数が l_α であるような確率として定義するが、 $r_\alpha(k_\alpha)$ を使って

$$r_\alpha(k_\alpha) = \sum_{l_\alpha} r_\alpha(k_\alpha, l_\alpha), \quad (4.2)$$

と記述される。レイヤー内の次数相関と関連して、レイヤー内同時次数分布は、

$$r_\alpha(k_\alpha | l_\alpha) = \frac{r_\alpha(k_\alpha, l_\alpha)}{r_\alpha(l_\alpha)}, \quad (4.3)$$

と記述される．レイヤー間同時度数分布は $P(k_\alpha, k_\beta)$ によって記述され，ランダムに選んだレイヤー間リンクの終端のノードの次数が k_α ，他方の終端ノードの次数が k_β である確率として定義される． $p_\alpha(k_\alpha)$ と $P(k_\alpha, k_\beta)$ の関係性は

$$p_\alpha(k_\alpha) = \sum_{k_\beta} P(k_\alpha, k_\beta), \quad (4.4)$$

である．レイヤー間の度数分布とレイヤー間の条件付き度数分布の関係性は

$$P_\alpha(k_\alpha|k_\beta) = \frac{P_\alpha(k_\alpha, k_\beta)}{\sum_{k_\alpha} P_\alpha(k_\alpha, k_\beta)}, \quad (4.5)$$

として記述されるが， $P_\alpha(k_\alpha|k_\beta)$ は，ランダムに選んだレイヤー β におけるあるノードの次数が k_β であるときに，そのレプリカノードが次数 k_α を持つような確率として定義される．式 (4.1)–(4.5) において， α と β を交換する事によって， $r_\beta(k_\beta)$ ， $r_\beta(k_\beta|l_\beta)$ ， $p_\beta(k_\beta)$ ，及び $P_\beta(k_\beta|k_\alpha)$ をそれぞれ定義することができる．また， $P_\beta(k_\beta|k_\alpha)$ の定義を使う事によって，ノードペア（レイヤー α とレイヤー β の次数によって特徴づけられる）のレイヤー内の条件度数分布を

$$r_\alpha(k_\alpha, k_\beta|l_\alpha, l_\beta) = P_\beta(k_\beta|k_\alpha)r_\alpha(k_\alpha|l_\alpha), \quad (4.6)$$

のように表現出来る．これは，ランダムにレイヤー α 内のリンクを 1 本選び終端ノードペアが次数 (l_α, l_β) を持つとき，もう片方の終端ノードペアが次数 (k_α, k_β) を持つ確率として定義される．

4.2.3 対立ネットワークのパーコレーションプロセス

図 4.2 と図 4.3 に，ケースエンチトとケースフリーにおける素過程の一例をそれぞれ示す．また，一般的なランダムネットワークのレイヤーから構成される対立ネットワークのパーコレーションの進行を，再度図 4.4 に示す．各ステージは，大きな長方形で表現され，赤と青はレイヤー α, β をそれぞれ表している．その中での左側のシンボルは，ノード集合の状態を，右側のシンボルの状態は左側の条件において決まるパーコレーションの結果を表す．各レイヤーにおけるノードは，(i) GC に属す，(ii) 孤立コンポーネントに属す，(iii) 故障している，のいずれかに分類されるため，それぞれを記号 (i) 円，(ii) 三角，(iii) \times の記号) で示すことで，なお，図 4.4 は，レイヤー α における初期故障のタイプ（ランダム故障かターゲット破壊か），及びレイヤー内及びレイヤー間の次数相関には依らない．

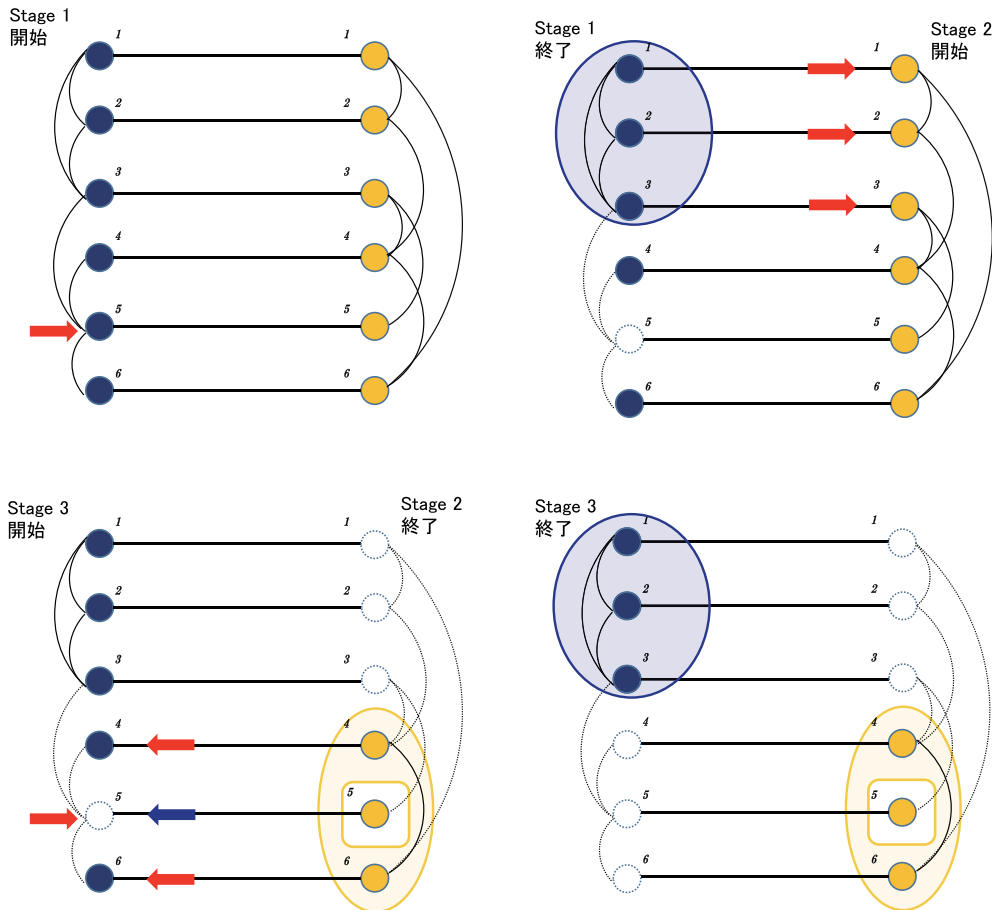


図 4.2 ケースクエンチの場合の一例．青い大きな丸，黄色い大きな丸で囲んだノードの集合はそれぞれレイヤー α, β における GC である．また，赤い矢印はそのノードに故障が起きることを表し，点線のノードは故障した状態のノードを表す．

- i) $t = 1$ のパーコレーションプロセスの後，レイヤー α のノードは GC を構成するが，それがステージ $t = 2$ の開始時におけるレプリカノードを不活性化させる．また，このこととは，対応するレイヤー α のノードが $t = 3$ の開始時において，活性的であることを保証する．加えて，ネットワークのトポロジーは $t = 1$ から変わっていない．そのため， $t = 3$ のパーコレーションプロセス後に，これらのノードが GC に属す事を保証し，この議論を繰り返す事によって，ノードが奇数ステージ $t = 5, 7, \dots$ においては，永久に GC に含まれることを結論づける事が出来る．また，それらのレプリカノードは $t = 2, 4, \dots$ においては，不活性であり続ける．

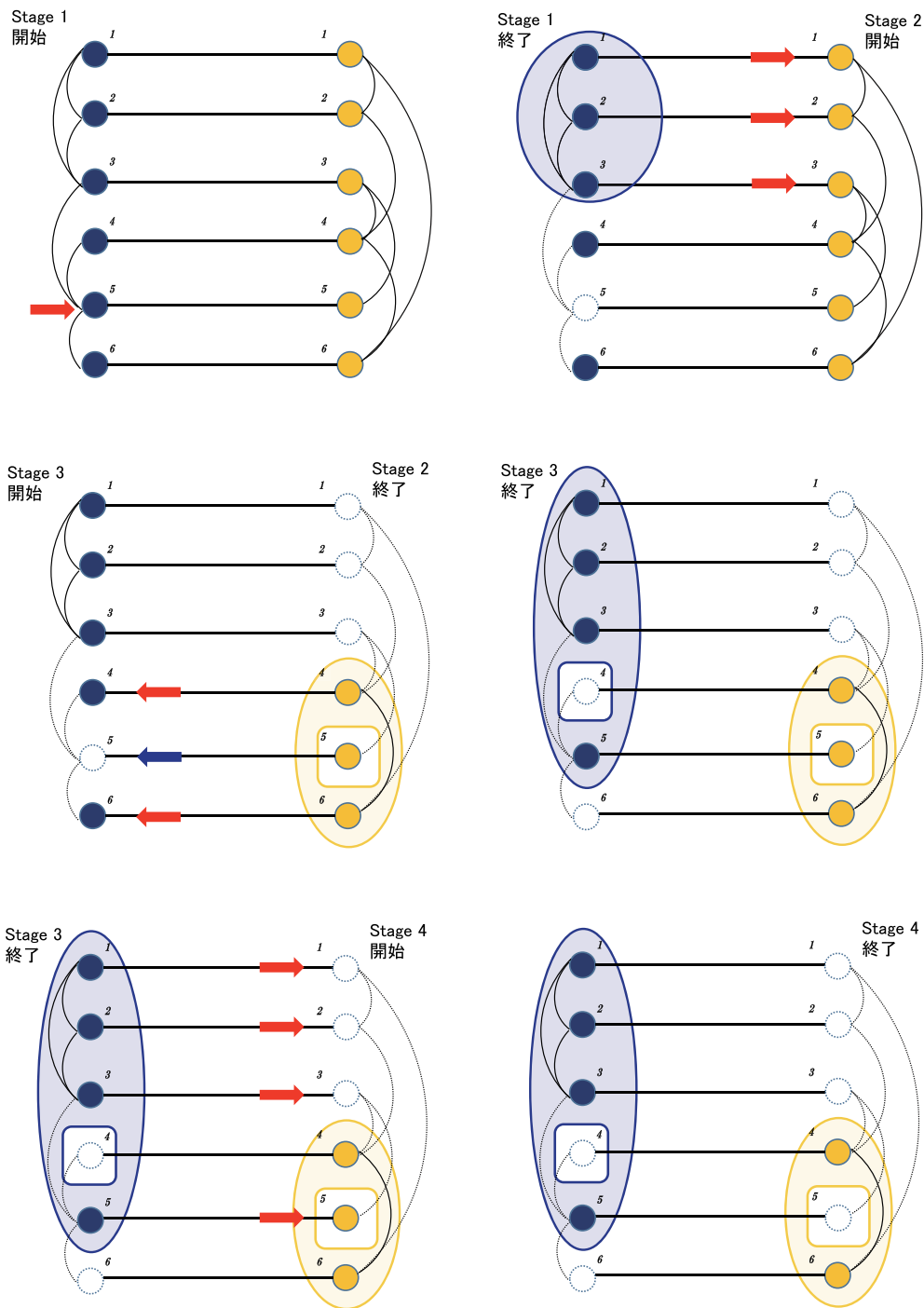


図 4.3 ケースフリーの場合の一例．記号の意味は図 4.2 におけるものと同じである．

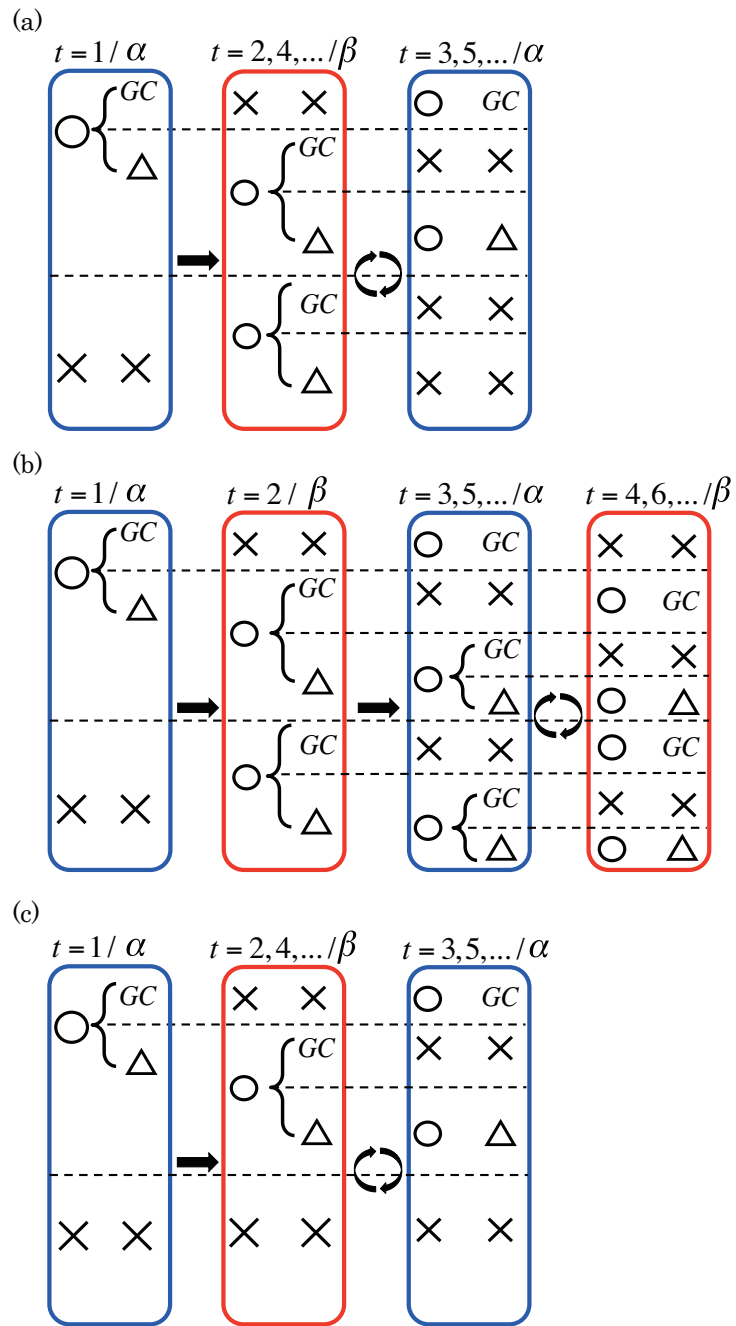


図 4.4 対立ネットワークの故障プロセスにおけるノードの状態遷移 . (a) と (b) はそれぞれケースエンチトとケースフリーの可能な状態遷移をそれぞれ表している . (c) は , [22] において , ノード i_β はそのレプリカノード i_α であるとしたモデルで実現する状態遷移である . (文献 [87] より引用 . ©American Physical Society)

ii) 同様の議論はステージ $t = 2$ において、レイヤー β でアクティブなノードが $t = 4, 6, \dots$ においても、アクティブであり、それらのレイヤー α におけるレプリカノードは $t = 3, 5, \dots$ において、決して再活性化されないということを保証している。

iii) i) と ii) における議論によって、ノードは故障しているまたは、GC に入らないという意味で不活性的と分類されたら、その後は再活性化されることはない、保証しているように見える。実際、ケースクエンチトではその通りであるが、ケースフリーでは、必ずしもそのような保証は無い。これは、レイヤー β のステージ $t = 2$ におけるアクティブなノードは、レイヤー α におけるそれらのレプリカノードが不活性的であるが、GC をレイヤー β で形作ることが保証されていない。そのため、レイヤー α における不活性だったノードが $t = 3$ で活性的になる可能性が出てくるからである。

i)–iii) の考察によって、図 4.4 において描かれる状態遷移のみに限定されることが分かる。これより、ケースクエンチトではステージ $t = 3$ 終了時に、ケースフリーではステージ $t = 4$ 終了時に、パーコレーションの繰り返しを止めて、その時の耐性を系の耐性として議論出来る。

4.3 ミクロな観点からのメッセージ伝播

ここではミクロな観点からシングルインスタンスにおけるメッセージ伝播について議論するが、マクロな観点から GC の大きさを評価するための準備となる。4.3.1 節では、ステージ $t = 1, t = 2$ におけるメッセージ伝播を記述し、4.3.2 節と 4.3.3 節では、ケースクエンチトとケースフリーにおけるメッセージ伝播をそれぞれ記述する。局所的なメッセージの流れは、4.2.1 節で導入された二部グラフ表現を用いる事によって、5 種類に分類される。(図 4.5 も参照されたい。)

4.3.1 最初のステージと 2 番目のステージ

まず、バイナリ変数 ψ_{i_α} をノード i_α が初期故障に影響を受けるか否かに応じて定義する。故障を受けるとき ψ_{i_α} は 0, 受けないときは 1 の値をとるようにする。さらに、それをステージ $t = 1$ におけるアクティブインデックス $s_{i_\alpha}^{t=1}$ に

そのまま割り当てる．すわなち，

$$s_{i_\alpha}^{t=1} \equiv \psi_{i_\alpha}, \quad (4.7)$$

となる．初期故障時の活性的なノードの割合， $\sum_{i_\alpha} \delta(\psi_{i_\alpha} = 1) / N$ は 4.5 節におけるマクロな観点で初期生存率 q に転換されるが，パーコレーションにおけるコントロールパラメータの役割を担う．

ある集合 $\{s_{i_\alpha}^1\}$ が与えられたときのレイヤー α における最初のステージを検証する為に，キャビティ法を適用して，一連の自己無撞着な方程式を導入する．

$$m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} = m_{j_\alpha \rightarrow a_\alpha}^{t=1} \quad (\partial a_\alpha = \{i_\alpha, j_\alpha\}), \quad (4.8)$$

$$m_{i_\alpha \rightarrow a_\alpha}^{t=1} = 1 - s_{i_\alpha}^{t=1} + s_{i_\alpha}^{t=1} \prod_{b_\alpha \in \partial i_\alpha \setminus a_\alpha} m_{b_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1}. \quad (4.9)$$

ここで， $m_{i \rightarrow a}^t \in \{0, 1\}$ はステージ t における変数ノード i から関数ノード a へのメッセージであり， a が取り除かれた状況で i がそのレイヤーにおいて GC に属す場合は 0，そうでない場合は 1 をとるように定義する．一方で $m_{a \rightarrow i}^t \in \{0, 1\}$ は，ステージ t において，関数ノード a から変数ノード i へと送られるメッセージであり， $j \in \partial a \setminus i$ のうち，少なくとも 1 つのノードが GC に属すならば 0 を，そうでなければ 1 を送る．式 (4.8) 及び (4.9) の解を用いる事によって，ステージ $t = 1$ における GC のインデックスとレイヤー α における GC の大きさを

$$\sigma_\alpha^{t=1} = \sum_{i_\alpha} \sigma_{i_\alpha}^{t=1} = \sum_{i_\alpha} s_{i_\alpha}^{t=1} \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} \right) \quad (4.10)$$

と導出する．これからステージ $t = 1$ におけるレイヤー間のリンク上の i_α から p へのメッセージを，

$$m_{i_\alpha \rightarrow p}^{t=1} = \sigma_{i_\alpha}^{t=1} = s_{i_\alpha}^{t=1} \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} \right), \quad (4.11)$$

と求める事が出来る．レイヤー間のリンクの対立性によって，ステージ $t = 1$ の後，式 (4.11) の逆転した値が関数ノード p からレイヤー β におけるレプリカノード i_β へと伝播されるため，

$$\begin{aligned} 1 - m_{i_\alpha \rightarrow p}^{t=1} &= 1 - s_{i_\alpha}^{t=1} \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} \right) \\ &= m_{p \rightarrow i_\beta}^{t=2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

である．

ステージ $t = 2$ はレイヤー β における初期ステージと考えられる。ただし、レイヤー α における最初のステージとは異なり、自明でない ψ_{i_β} を設定しないことにする。(言い換えれば、すべての i_β において、 $\psi_{i_\beta} = 1$ である。) これは、レイヤー β においてはノードは初期故障の影響を直接受けず、ステージ $t = 1$ において与えられるレイヤー α のノードの各状態にのみ影響を受けると考えた時、自然である。ステージ $t = 2$ における i_β の活性状態を示す $s_{i_\beta}^{t=2}$ は、

$$s_{i_\beta}^{t=2} = m_{p \rightarrow i_\beta}^{t=2} = 1 - s_{i_\alpha}^{t=1} \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} \right). \quad (4.13)$$

これより $s_{i_\beta}^{t=2} = 1$ となる条件は $\psi_{i_\alpha} = 0$ のときか、 $\psi_{i_\alpha} = 1$ かつ $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} = 0$ のときである。 $\{s_{i_\beta}^{t=2}\}$ があたえられたとき、キャビティ法によって、次のような自己無撞着な方程式を立てることができる。

$$m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} = m_{j_\beta \rightarrow a_\beta}^{t=2} \quad (\partial a_\beta = \{i_\beta, j_\beta\}), \quad (4.14)$$

$$m_{i_\beta \rightarrow a_\beta}^{t=2} = 1 - s_{i_\beta}^{t=2} + s_{i_\beta}^{t=2} \prod_{b_\beta \in \partial i_\beta \setminus a_\beta} m_{b_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2}. \quad (4.15)$$

式 (4.14) と式 (4.15) の解によって、ステージ $t = 2$ におけるレイヤー β の GC の大きさを

$$\sigma_\beta^{t=2} = \sum_{i_\beta} \sigma_{i_\beta}^{t=2} = \sum_{i_\beta} s_{i_\beta}^{t=2} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \right), \quad (4.16)$$

と求める事が出来る。また、この解によって、 i_β から p へのメッセージ、及び p から i_α へのメッセージを、

$$m_{i_\beta \rightarrow p}^{t=2} = s_{i_\beta}^{t=2} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \right), \quad (4.17)$$

$$m_{p \rightarrow i_\alpha}^{t=3} = 1 - m_{i_\beta \rightarrow p}^{t=2}, \quad (4.18)$$

と導出出来る。

4.3.2 3 番目以降のステージ (ケース Q)

節 4.2.3 において議論したように、レイヤー α 、レイヤー β における最終的な耐性を、それぞれステージ 1 における耐性 (レイヤー α) とステージ 2 における耐性 (レイヤー β) によって得ている。しかしながら、あえてステージ $t = 3$

における各ノードのアクティブ変数を記述すると,

$$\begin{aligned}
 s_{i_\alpha}^{t=3}(\mathbf{Q}) &= s_{i_\alpha}^{t=1} m_{p \rightarrow i_\alpha}^{t=3} \\
 &= \left(s_{i_\alpha}^{t=1}\right)^2 + s_{i_\alpha}^{t=1} \left(1 - s_{i_\alpha}^{t=1}\right) \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \\
 &\quad - \left(s_{i_\alpha}^{t=1}\right)^2 \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2}\right). \\
 &= s_{i_\alpha}^{t=1} \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2}\right)\right). \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

式 (4.19) は, $s_{i_\alpha}^{t=3}(\mathbf{Q})$ は $m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1}$ を含んでおり, 各ノードの状態が初期ステージの時のように外因によってランダムに与えられるのではなく, レイヤー α の具体的なトポロジーに依存する事を示唆している.

4.3.3 3 番目以降のステージ (ケース F)

ケースフリーでは, レイヤー α のノードはステージ $t = 3$ において初期故障から解放されており, レイヤー間のメッセージにのみ影響されるので, i_α のアクティビティインデックスは次のようになる.

$$\begin{aligned}
 s_{i_\alpha}^{t=3}(\mathbf{F}) &= m_{p \rightarrow i_\alpha}^{t=3} \\
 &= 1 - s_{i_\beta}^{t=2} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2}\right) \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

$s_{i_\alpha}^{t=3}(\mathbf{F})$ を式 (4.8) と式 (4.9) における $s_{i_\alpha}^{t=1}$ に代入する事によって,

$$m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3} = m_{j_\alpha \rightarrow a_\alpha}^{t=3} \quad (\partial a_\alpha = \{i_\alpha, j_\alpha\}), \tag{4.21}$$

$$m_{i_\alpha \rightarrow a_\alpha}^{t=3} = 1 - s_{i_\alpha}^{t=3} + s_{i_\alpha}^{t=3} \prod_{b_\alpha \in \partial i_\alpha \setminus a_\alpha} m_{b_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3}, \tag{4.22}$$

を得る. 式 (4.22) の解 $m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3}$ によってレイヤー α の GC の大きさを

$$\sigma_\alpha^{t=3} = \sum_{i_\alpha} \sigma_{i_\alpha}^{t=3} = \sum_{i_\alpha} s_{i_\alpha}^{t=3} \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3}\right). \tag{4.23}$$

と導出する事が出来る.

各 i_β がステージ $t = 4$ において受け取るメッセージ $s_{i_\alpha}^{t=4}(\mathbf{F})$ を

$$s_{i_\alpha}^{t=4}(\mathbf{F}) = m_{p \rightarrow i_\beta}^{t=4} = m_{i_\alpha \rightarrow p}^{t=3} = 1 - \sigma_{i_\alpha}^{t=3}$$

$$= 1 - s_{i_\beta}^{t=3} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=3} \right), \quad (4.24)$$

のように得る．4.2.3 節で議論しているように，ケースフリーにおいては，ステージ $t = 4$ におけるパーコレーションの結果はステージ $t = 2$ におけるものと同等である．それゆえ，各ネットワークの各ノードのインデックスは次のように決定出来る．

$$\sigma_{i_\alpha}^{2t'+1} = \sigma_{i_\alpha}^{t=3}, \quad \sigma_{i_\beta}^{2t'} = \sigma_{i_\beta}^{t=2}(\mathbf{F}). \quad (4.25)$$

結果的に，ネットワークが収束しているとみなすことで，パーコレーションの周期的現象をステージ $t = 4$ にて止めてよい．(図 4.4 (b) も参照されたい．)

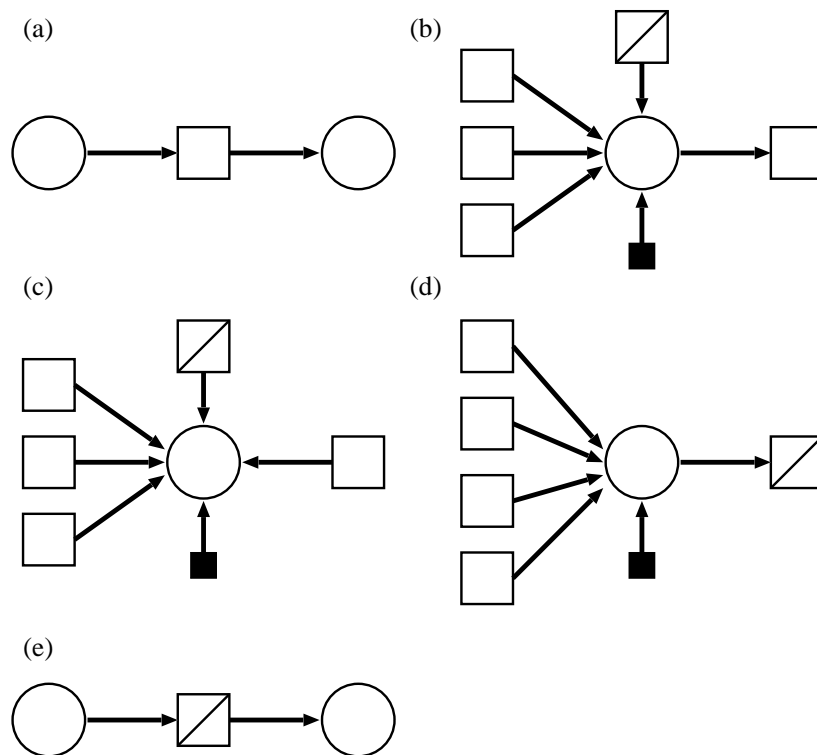


図 4.5 メッセージの局所的な流れを表す図 (文献 [87] より引用. ©American Physical Society)

- (a) あるレイヤー内における関数ノードを通るメッセージの流れであり，式 (4.8), 式 (4.14) 及び式 (4.21) に相当する．
- (b) あるレイヤー内における変数ノードを通るメッセージの流れであり，式 (4.9), 式 (4.15) 及び式 (4.22) に相当する．
- (c) あるレイヤー内における GC の大きさを計算する為のメッセージの流れであり，式 (4.10), 式 (4.16) 及び式 (4.23) に相当する．
- (d) あるレイヤーにおける変数ノードから，レイヤー間のリンク上の関数ノードへの流れであり，式 (4.11) と式 (4.17) に相当する．
- (e) あるレイヤー間のリンク上の関数ノードからレイヤー内の変数ノードへのメッセージの流れであり，式 (4.12) と式 (4.18) に相当している．

4.4 ミクロな観点からマクロな観点へ

この節では、マクロな観点での耐性解析のための準備的段階として、節 4.3 にて記述された状態変数やメッセージの対応するマクロな量の定義を行う。まず、次数が l_α と l_β であるようなノードペア i_α と i_β を考えるが、ノード i_α は初期状態で $s_{i_\alpha}^{t=1}$ を付加され、それは式 (4.7) によって記述されていた。 $s_{i_\alpha}^{t=1}$ を用いる事によって、 $q_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=1}$ を

$$q_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=1} = \frac{\sum_{i_\alpha} \delta(|\partial i_\alpha| = l_\alpha) \delta(|\partial i_\beta| = l_\beta) s_{i_\alpha}^{\alpha, t=1}}{\sum_{i_\alpha} \delta(|\partial i_\alpha| = l_\alpha) \delta(|\partial i_\beta| = l_\beta)}, \quad (4.26)$$

のように評価できるが、これは次数が l_α と l_β であるようなノードペアの集合について、 $s_{i_\alpha}^{t=1}$ が初期ステージにおいて 1 をとる確率である。レイヤー β における場合、該当するノードの生存確率は

$$q_{l_\alpha, l_\beta}^{\beta, t=2} = \frac{\sum_{i_\beta} \delta(|\partial i_\alpha| = l_\alpha) \delta(|\partial i_\beta| = l_\beta) s_{i_\beta}^{\beta, t=2}}{\sum_{i_\beta} \delta(|\partial i_\alpha| = l_\alpha) \delta(|\partial i_\beta| = l_\beta)}. \quad (4.27)$$

によって与えられる。式 (4.26) にあるように、 $s_{i_\alpha}^{\alpha, t=3}$ をつかって $q_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=3}$ を陰に定義するが、これによって式 (4.39) を導くことができる。メッセージ $m_{j_\alpha \rightarrow a_\alpha}^{t=1} = m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1}$ が 1 をとる割合は、次数 l_α と l_β で特徴付けされるので、対応する Cavity 方程式（たとえば式 (4.33)）を反復的に解く事によって、計算できる。マクロな観点におけるレイヤー α 内のリンク上で定義されるメッセージを $I_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=1}$ と記述する事にすると、 $I_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=1}$ は

$$I_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=1} = \frac{\sum_{i_\alpha} \delta(|\partial i_\alpha| = l_\alpha) \sum_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{\alpha, t=1}}{l_\alpha \sum_{i_\alpha} \delta(|\partial i_\alpha| = l_\alpha) \delta(|\partial i_\beta| = l_\beta)}, \quad (4.28)$$

とミクロな変数を使って定義される。同様に、レイヤー β においても、

$$I_{l_\alpha, l_\beta}^{\beta, t=2} = \frac{\sum_{i_\beta} \delta(|\partial i_\beta| = l_\beta) \sum_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{\beta, t=2}}{l_\beta \sum_{i_\beta} \delta(|\partial i_\alpha| = l_\alpha) \delta(|\partial i_\beta| = l_\beta)}. \quad (4.29)$$

と定義する。これらのマクロな観点における変数はネットワークアンサンブルに対して適切である。しかし、例えばネットワークのシングルインスタンスにおけるパーコレーション過程において時間が経過しヒステリシスが無視できないような状況では、同次数のノードが統計的に等価である保証が無くなるため、適切でなくなる可能性がある。

4.5 マクロな観点での耐性解析

本節は、ランダム故障あるいはターゲットアタックを受けたときの対立ネットワークアンサンブルを考え、それぞれのレイヤーにおいて残存する GC の大きさを、マクロな観点から解析評価することを目的とする。

4.5.1 初期ステージと 2 番目のステージ

レイヤー α における初期ステージ ($t = 1$) を考える。まず、初期生存確率としてひとつのパラメータ (レイヤー α において生存しているノードの割合) を設定する。ランダム故障の場合、

$$q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} = q_{k_\alpha}^{\alpha, t=1} = q, \quad (4.30)$$

によって定められる。一方でターゲットアタックの場合、レイヤー α における次数の大きいノードから選択的にダメージを受け、次数毎の生存確率は一様であることから、

$$q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} = q_{k_\alpha}^{\alpha, t=1} \begin{cases} 0 & (k_\alpha > \Theta) \\ \Delta & (k_\alpha = \Theta), \\ 1 & (k_\alpha < \Theta) \end{cases}, \quad (4.31)$$

によって定めることができる。ここで、 Θ と Δ は

$$q = \sum_{l_\beta} \left(\Delta P(\Theta, l_\beta) + \sum_{l_\alpha < \Theta} P(l_\alpha, l_\beta) \right), \quad (4.32)$$

を満たすようにユニークに決定される。 $q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1}$ は自己無撞着な Cavity 方程式

$$I_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=1} = \sum_{k_\alpha, k_\beta} r_\alpha(k_\alpha, k_\beta | l_\alpha, l_\beta) \left(1 - q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} + q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} \right)^{k_\alpha - 1} \right), \quad (4.33)$$

に必要であり、式 (4.33) を反復的に解く事によって、解 $I_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=1}$ は決定される。ただし、式 (4.33) はミクロな観点における式 (4.8) と (4.9) に相当する。レイヤー α におけるステージ $t = 1$ における GC の割合は、

$$\mu_\alpha^{t=1} = \sum_{k_\alpha, k_\beta} P(k_\alpha, k_\beta) q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} \left(1 - \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} \right)^{k_\alpha} \right), \quad (4.34)$$

のように得られる。

レイヤー β におけるステージ 2 のパーコレーション過程を考える．今， $q_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2}$ は，レイヤー β における次数が k_β でありレイヤー α における次数が k_α であるようなノードペアがレイヤー β において故障していない確率，である．レイヤー間のメッセージの流れ（式 (4.11)–(4.13)）から， $q_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2}$ は式 (4.33) における解 $I_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=1}$ から直接

$$q_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2} = 1 - q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} + q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} \right)^{k_\alpha}, \quad (4.35)$$

のように計算することができる． $q_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2}$ を自己無撞着な方程式（式 (4.14) と (4.15) に基づく）

$$I_{l_\alpha, l_\beta}^{\beta, t=2} = \sum_{k_\alpha, k_\beta} r_\beta(k_\alpha, k_\beta | l_\alpha, l_\beta) \left(1 - q_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta(F), t=2} + q_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta(F), t=2} \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2} \right)^{k_\beta - 1} \right). \quad (4.36)$$

に代入することによって，一連のメッセージ $I_{l_\alpha, l_\beta}^{\beta, t=2}$ を計算する．レイヤー β のステージ $t=2$ における GC の割合は，

$$\mu_\beta^{t=2} = \sum_{k_\alpha, k_\beta} P(k_\alpha, k_\beta) q_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2} \left(1 - \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2} \right)^{k_\beta} \right). \quad (4.37)$$

のように導出できる．

4.5.2 ケースクエンチにおける 3 番目以降のステージ

4.2.3 節において，レイヤー α における最終的な GC はステージ $t=1$ におけるものと同じであり，一方でレイヤー β における最終的な GC はステージ $t=2$ におけるものと同じであるということを確認した．それゆえ，

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha^{t=1}, \quad \mu_\beta = \mu_\beta^{t=2}. \quad (4.38)$$

である．

4.5.3 ケースフリーにおける 3 番目以降のステージ

ここでは， $q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha(F), t=3}$ をステージ $t=3$ において故障していないノードの割合（式 (4.20) に基づく）と考え，単純に

$$q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha(F), t=3} = 1 - q_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2} + q_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2} \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2} \right)^{k_\beta}, \quad (4.39)$$

と計算する．しかし，4.6 節にて議論されるように，式 (4.20) のマクロ化は注意して行う必要がある．式 (4.39) によって評価された $q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha(F), t=3}$ を次の自己無撞着な方程式（式 (4.21) と式 (4.22) に基づく）に代入する事によって，

$$I_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=3} = \sum_{k_\alpha, k_\beta} r_\alpha(k_\alpha, k_\beta | l_\alpha, l_\beta) \left(1 - q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha(F), t=3} + q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha(F), t=3} \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=3} \right)^{k_\alpha} \right), \quad (4.40)$$

解 $I_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=3}$ を得る．レイヤー α の GC の割合は

$$\mu_\alpha^{t=3} = \sum_{k_\alpha, k_\beta} P(k_\alpha, k_\beta) q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha(F), t=3} \left(1 - \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=3} \right)^{k_\alpha} \right) \quad (4.41)$$

のように導出される．

4.2.3 節より，ステージ $t = 3$ とステージ $t = 4$ のパーコレーションプロセスの結果が交互に繰り返されるため，レイヤー β のステージ $t = 4$ における GC は， $t = 2$ におけるものと同等である．そのため，レイヤー α とレイヤー β の最終的な耐性（GC の大きさ）はそれぞれ

$$\mu_\alpha(F) = \mu_\alpha^{t=3}(F), \quad \mu_\beta(F) = \mu_\beta^{t=2}(F), \quad (4.42)$$

のように評価する事が出来る．

4.6 数値実験

*27

4.6.1 数値実験の手順

本章で提案した手法の妥当性を確かめるために，数値実験を行った．ここではその数値実験の手順について，簡潔に記述する．

- (1) 2つのランダムネットワーク（レイヤー） α と β を構築する．それぞれの大きさは $N = 10000$ であり，次数分布は $P_\alpha(4) = P_\beta(4) = 0.5, P_\alpha(6) = P_\beta(6) = 0.5$ によって表現されるものである．

*27 付録 C にアルゴリズムの概要を記述したので，参照されたい．

- (2) レイヤー間の次数相関を導入するため、各レイヤーにおいてピアソン係数 C_α と C_β をセットする。各レイヤー内において、2つの結合したノードのペアを選び、レイヤー内のリンクを [34] におけるアルゴリズムを使う事によって、リンクをつなぎかえる。
- (3) レイヤー間の次数相関を導入する為、レイヤー間のピアソン係数 C_I をセットする。これは片方のレイヤーのインデックスを並べ替えてレイヤー間のリンクをつなぎかえをすることによって可能である。ただし、 C_I だけでは $P(k_\alpha, k_\beta)$ をユニークに決定しない為、 $P(k_\alpha = x, k_\beta = y) = P(k_\alpha = y, k_\beta = x)$ と仮定しておく必要がある。
- (4) 次数相関のあるネットワークに対して、下記のように、モンテカルロ法ベースのシミュレーションを行う。初期生存確率 q をセットする事によって、初期故障ノードを故障タイプ(ランダム故障かターゲットアタック)に応じてランダムに選ぶ。故障したノードは、ネットワークを複数のコンポーネントに分割するが、それらについて、[80, 81] によるアルゴリズムを使う事によって検知する。ただし、このアルゴリズムは、深さ優先探索の一種である。([81] にはプログラムが記載されているが、局所最小ラベルを割り当てる際に、計算量を節約するために用意する行列において最小ラベルを探索する部分のアルゴリズムが最小ラベルに必ずたどり着けるようにはなっていかなかったので、その部分をこちらで修正した。) パーコレーション過程の途中において、レイヤー α におけるノードの各状態が過去のステップにおけるものと 1 対 1 対応ですべて一致したことが検出されたとき、シングルインスタンスを終了させる。同様の手順を、各初期生存確率 q において 50 回実験を行った。

4.6.2 方法論の正確性: ケースクエンチト

図 4.6(上) は、解析によって得られた理論的予測と実験的結果との比較を示す。この 2 つが極めて良い精度で合致している事が分かる。ケースクエンチトの場合は、4.4 で確認した通り対立するレイヤー間のリンクは α の耐性に対して影響せず、点線によって示されたシングルネットワーク α の耐性と全く同じ結果を得る。

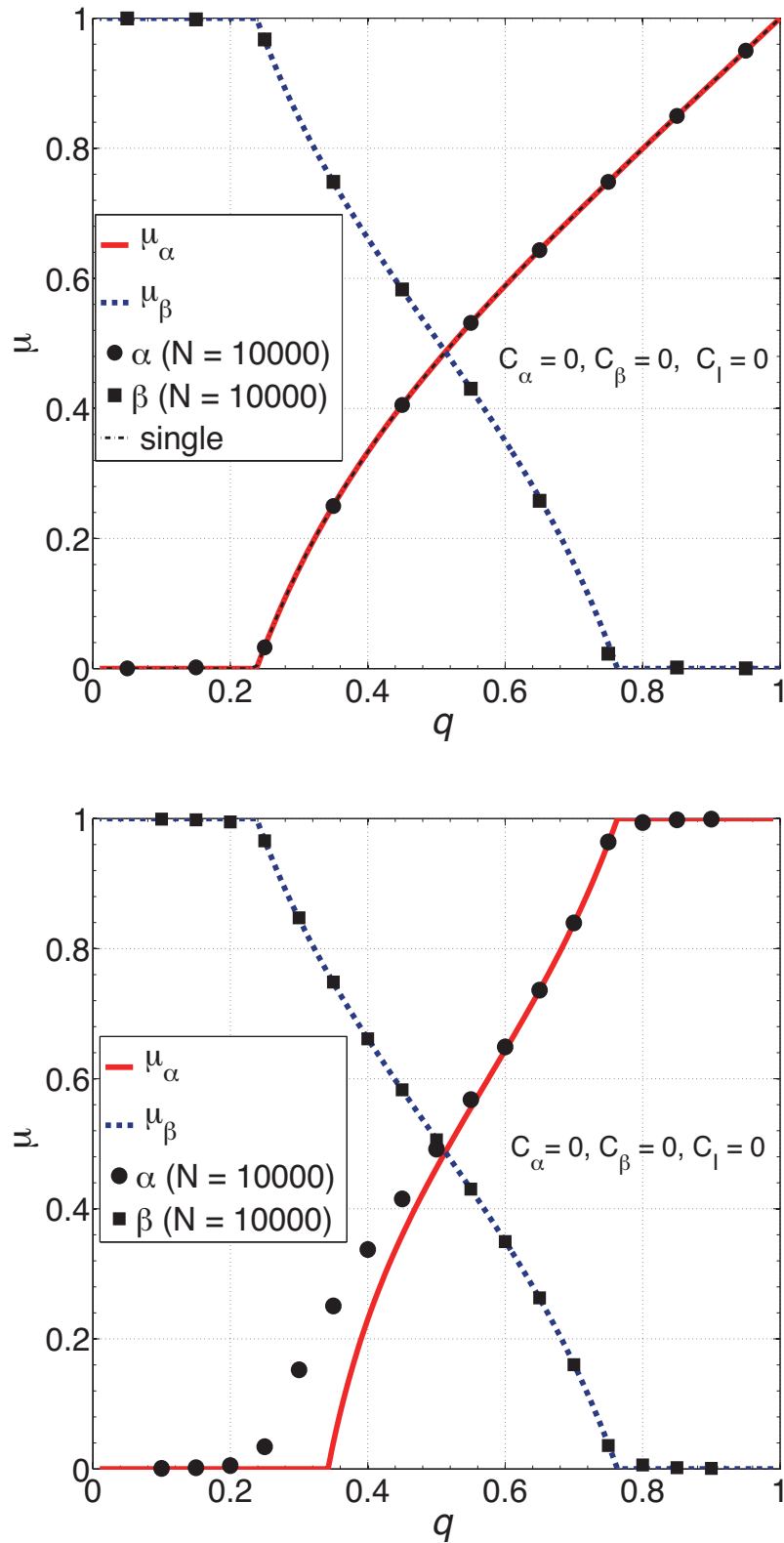


図 4.6 初期生存率 q に対するレイヤー α, β の耐性解析結果 (上が Case Q, 下がケース F). (文献 [87] より引用. ©American Physical Society)

4.6.3 方法論の正確性: ケースフリーの結果

図 4.6 (下) に, ケースフリーにおけるレイヤー α とレイヤー β の耐性解析の結果と数値実験結果の比較を示す. レイヤー β における実験データは, 理論的予測と高い精度で一致している事が分かる. しかしながら, レイヤー α における耐性に関して, 理論的予測と数値実験結果との間には無視できないずれが生じている.

4.7 ヒューリスティクス

結論から言えば, 理論解と実験結果の差の原因はステージ $t = 3$ におけるミクロスコピックな変数からマクロスコピックな変数へと変換する部分にある. この答えにたどり着く為に, ステージ $t = 3$ における GC は構成的にヘテロジニアスであるので, それらのノードのステージ $t = 1$ での履歴に応じて 3 つの部分集合に分割する.

- (1) ステージ $t = 1$ において, GC に属していた.
- (2) ステージ $t = 1$ において, ノードが故障していた.
- (3) ステージ $t = 1$ においてノードが小さなコンポーネントのひとつに属していた.

部分集合 (1) に属すノードは全てステージ $t = 3$ においてアクティブであるので, 再び結合集合を作るが, それは必ず GC である. そのため, これらのノードに入ってくるメッセージの積は, 必ず 0 になる. これは, つながっている周りのノードのうち, 少なくとも 1 つのノードが GC であることを保証してくれる事に等しい. しかし, この事は通常のシングルネットワークのパーコレーション現象を解析するために考える状況ではありえないことである. なぜなら, あるノードが故障していない場合, そのノードが GC に属すかどうかは, 他のノードの故障状況とネットワークの組成に依存するため, 確率的であるからである. しかし, 部分集合 (1) というステージ $t = 1$ における履歴を調べることで, 故障していないだけで GC に属することが確定的となる. これは, ノードの故障状態 $s_{i_\alpha}^{t=3}$ と入力メッセージの積 $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3}$ の間に強い相関があるということである. ミクロスコピックには, 0,1 という情報であるので, 相関があっ

てもなくても、全く問題ない。しかし、マクロスコピックな観点からは、これらを独立と考え、それぞれに対応する確率 $q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha(F), t=3}$ と $\left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=3}\right)^{k_\alpha}$ を導出し、それらの積として GC の大きさを導出すると、実験値との差が出てしまう事となった。

上記で論じたような、レイヤー α における過去のノードの履歴に影響されるヘテロジニティを扱わないため、レイヤー α におけるコネクティビティに関する情報を、なかったことにする（以下処理するという）。すなわち、レイヤー α 内において定義される過去のメッセージの項を、ステージ $t=3$ の前では全て 0 とする。これによって、本来ステージ $t=3$ において故障するはずのノードが、故障していないことになる場合が出てくる。そして、それらはレイヤー α における GC に属してしまう可能性がある。（これはレイヤー β におけるステージ $t=2$ におけるパーコレーションの結果にも依存する。図 4.7 にケースフリーにおける状態遷移の図を掲載する。この図では、レイヤー β における GC 以外のコンポーネントに属するようなノードがほとんど無視できるような状況に限定する。すると、図 (ii) は修正前の計算によるものだが、本来 GC の要素であるはずのノードが GC と判断されず（赤い三角形、孤立を示す）、これらが図 4.6 における差を生み出している。一方で、修正後の計算における遷移を示す (iii) では、実際には対立的なレイヤー間のリンクによって不活性的であるが、式 (4.43) から式 (4.44) としてセルフフィードバックの項を落とした事によってアクティブであるとされたノードを赤い丸で表している。一方で、GC 以外のコンポーネントに属すノードが無視出来ないような状況の状態遷移を、図 4.8 に掲載した。この処理によって誤って GC に属することになるノードは、実は (3) の履歴を持っている、つまりステージ $t=1$ では GC ではない部分集合に属していた。そのため、 $t=3$ で同じ GC に属し、(1) の履歴を持つノードと比べると、他のノードに対する重要性が小さい。そのため、これらを取り除いても、本来 GC に属すノードまでもが孤立して除かれることになる可能性が小さい（存在しても無視出来るくらいの量である）と考える。

上述した状況を計算上で実現するため、処理をしたレイヤー間のメッセージを使って、 $t=3$ におけるレイヤー α 内のマクロな観点でのメッセージを導出しておき、処理をしないレイヤー間のメッセージを使って得られた GC の導出式に代入する形で、GC の大きさを導出する。ただし、 $t=1$ におけるレイヤー α 内のメッセージと、 $t=3$ におけるレイヤー α におけるレイヤー α 内のメッセージには相関があるので、それらの積を評価する際は特に注意を払って考慮する。

4.7.1 ミクロな観点でのインスタンスの修正

マクロな解析の為の準備として、式 (4.20) を詳細に次のように記述する。

$$s_{i_\alpha}^{t=3}(\mathbf{F}) = s_{i_\alpha}^{t=1} + (1 - s_{i_\alpha}^{t=1}) \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} - s_{i_\alpha}^{t=1} \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \right), \quad (4.43)$$

$s_{i_\alpha}^{t=3}(\mathbf{F})$ は、 $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1}$ の項を含んでいるが、これはノードが部分集合 (i) (表 4.1 を参照されたい) に属す場合は、 $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3}$ と全く同じであるため、既にレイヤー α におけるコネクティビティによって影響を受けている。この特殊性を明確に表す為、表 4.1 において、実現しないケース、 $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1}$ が値 0 をとり、 $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3}$ が値 1 をとるということが同時に起こるケースをあえて示している。このような状況はミクロな観点ではいかなる問題も生じさせないが、マクロな観点ではそうではない。キャビティ法の観点では、 $q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha(\mathbf{F}), t=3}$ を含む式 (4.40) の係数はもはや定数として表現されず、 $t = 3$ でのメッセージ、言い換えれば、式 (4.40) の解に依存することになる。

我々のモデルは、もし $s_{i_\alpha}^{t=3}(\mathbf{F})$ の代わりにレイヤー α 内のメッセージを含まないように仮のアクティブ変数が定義される場合のみ、可解性を保つ事が出来る。式 (4.43) において $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} = 0$ を仮定する事によって、仮のアクティブ変数を

$$s_{i_\alpha}^{*t=3} \equiv s_{i_\alpha}^{t=1} + (1 - s_{i_\alpha}^{t=1}) \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2}, \quad (4.44)$$

セットする。 $s_{i_\alpha}^{*t=3}$ を式 (4.21) と (4.22) における $s_{i_\alpha}^{t=3}(\mathbf{F})$ に代入することによって、仮のメッセージ $m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{*t=3}$ を計算する。

レイヤーの具体的なコネクティビティからはフリーなアクティブ変数を用いる事は、レイヤー内のすべてのノードが確率的に等価であり、マクロな観点からはその次数によってのみ特徴付けられると考える事が出来、それによって GC の大きさをノードに関するアクティブな確率とメッセージの積 (リンクに割り当てられる) とに因子分解できる。(式 (4.34), (4.37), (4.41) を参照されたい。)

仮のアクティブ変数とメッセージを使う事によって、近似的にステージ $t = 3$

$S_{i_\alpha}^{t=1}$	$M_{i_\alpha}^{t=1}$	$M_{i_\alpha}^{t=3}$	$M'^{t=3}$	$S_{i_\alpha}^{t=1} M_{i_\alpha}^{t=1} M_{i_\alpha}^{t=3}$	$S_{i_\alpha}^{t=1} M_{i_\alpha}^{t=1} M'^{t=3}$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	ϕ	ϕ

表 4.1 $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1}$, $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3}$, もしくは $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{*t=3}$ 全ての可能なケース. それぞれ $M_{i_\alpha}^{t=1}$, $M_{i_\alpha}^{t=3}$, そして $M'^{t=3}$ によって記述される. (文献 [87] より引用. ©American Physical Society)

における各ノードの GC のラベル (式 (4.23)) を詳細に記述する:

$$\begin{aligned} \sigma_{i_\alpha}^{t=3}(\mathbf{F}) \approx & s_{i_\alpha}^{*t=3} \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{*t=3} \right) - s_{i_\alpha}^{t=1} \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} \\ & \cdot \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \right) \cdot \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{*t=3} \right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

ここで, $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1}$, $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3}$ を $\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3}$ と交換することができる. なぜなら, ステージ $t=1$ とステージ $t=3$ におけるレイヤー内のメッセージの積には相関があるからである (表 4.1 も参照されたい). それゆえ, 式 (4.45) を

$$\begin{aligned} \sigma_{i_\alpha}^{t=3}(\mathbf{F}) \approx & \sigma_{i_\alpha}^{*t=3} - s_{i_\alpha}^{t=1} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \right) \\ & \cdot \left(\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{*t=3} \right), \end{aligned} \quad (4.46)$$

として更新するが, ここで

$$\sigma_{i_\alpha}^{*t=3} \equiv s_{i_\alpha}^{*t=3} \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{*t=3} \right), \quad (4.47)$$

は仮の GC に相当し, 一方で式 (4.46) における 2 番目の項は, それは $s_{i_\alpha}^{*t=3}$ を定義するためにアクティブと考えたが, 実際には故障したノードに相当する. (図 4.8) を併せて参照されたい)

すでに, ケースフリーにおいてステージ $t=4$ の結果はステージ $t=2$ におけるものと同じである事を知っている (図 4.4 も参照されたい) が, これをマイクロ

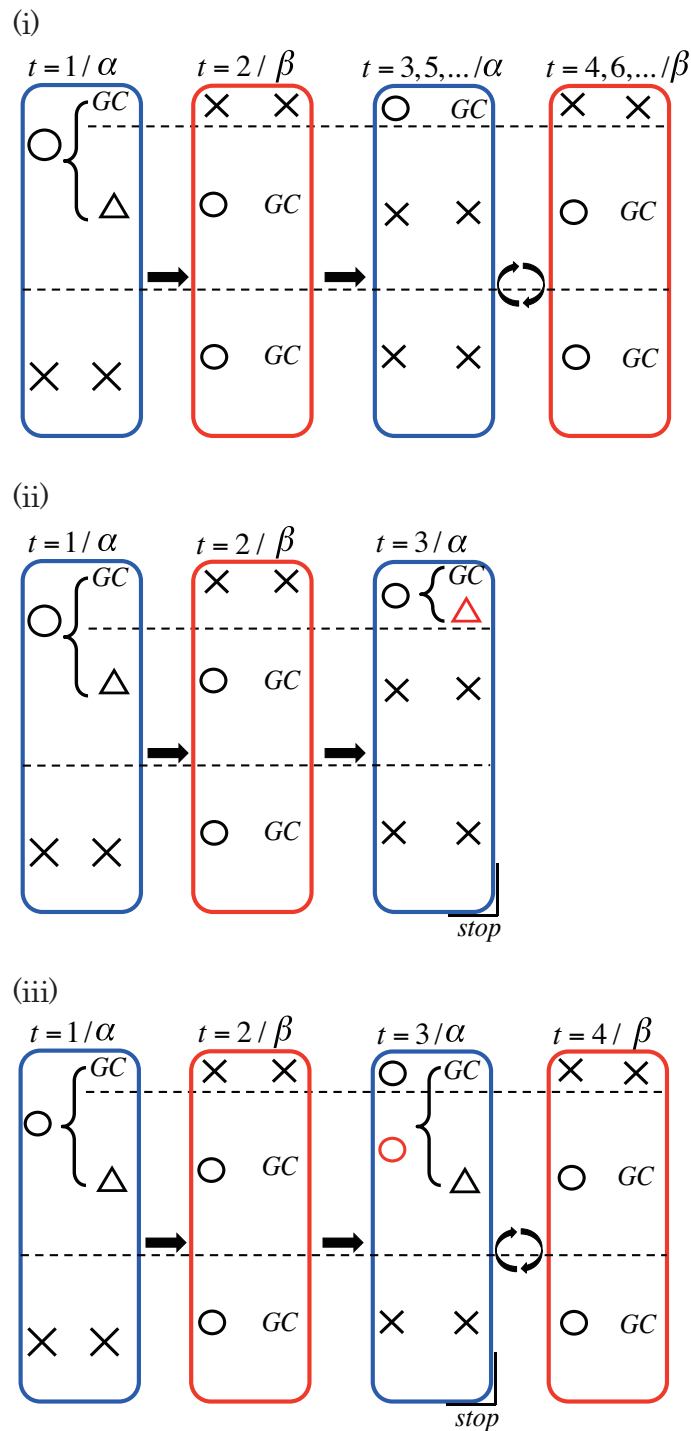


図 4.7 ケースフリーにおける状態遷移：(i) ミクロな観点 (ii) ナイーブなマクロな観点 (iii) 修正されたマクロな観点．単純のため，レイヤー β におけるアクティブであるが GC に属さないノードの数がほとんど無視出来るような状況を考えて．各シンボルの意味は図 4.4 と同様である．(文献 [87] より引用. ©American Physical Society)

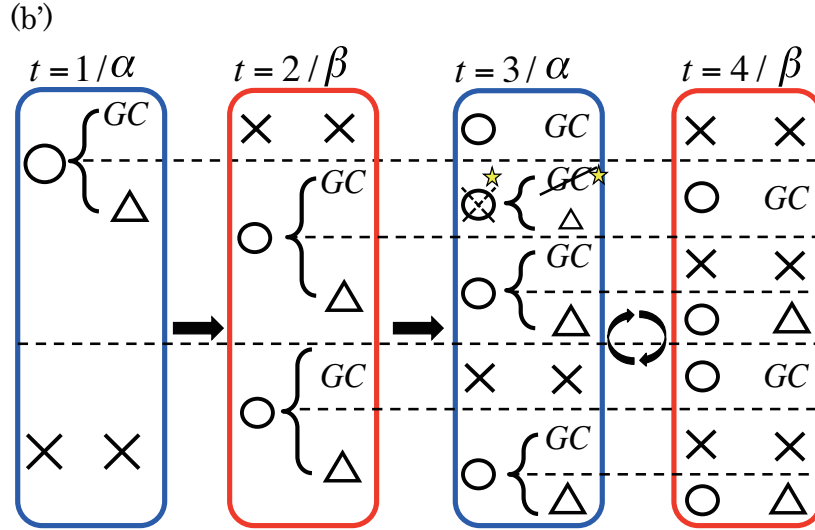


図 4.8 ケースフリーにおける，マクロな観点におけるノードの状態遷移の修正版．レイヤー β における活性的だが GC に属さないようなノードの割合が，無視出来ないような状況を考えて．レイヤー α において初期故障したノードの一部はステージ $t = 3$ において復活するので，ヒューリスティクスによってアクティブであるとみなされたノードの一部は，ステージ $t = 3$ においても GC に属してしまうことになり，星によってハイライトされたような不可能な状態遷移が実現してしまう．この不合理を埋め合わせるため，GC の大きさを式 (4.46) によって修正したが，その部分を小さな斜め線によって示した．各シンボルの意味は図 4.4 と同じである．(文献 [87] より引用．©American Physical Society)

な観点においても確かめる．その際， $s_{i_\alpha}^{t=4}(F)$ を計算するために $s_{i_\alpha}^{t=3}(F)$ のときと同様の処理を施した．式 (4.24) と式 (4.46) を使う事によって， $s_{i_\alpha}^{t=4}(F)$ を詳細に記述する：

$$s_{i_\alpha}^{t=4}(F) = 1 - s_{i_\alpha}^{*t=3} \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3} \right) + s_{i_\alpha}^{t=1} \left(\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3} \right) \cdot \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \right), \quad (4.48)$$

$\prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2}$ が式 (4.48) において消えると仮定する事で，式 (4.44) によって $s_{i_\alpha}^{*t=3}$ を $s_{i_\alpha}^{t=1}$ に交換する事が出来， $s_{i_\alpha}^{*t=4}(F)$ を次のように定義する．

$$s_{i_\alpha}^{*t=4}(F) \equiv 1 - s_{i_\alpha}^{t=1} \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + s_{i_\alpha}^{t=1} \left(\prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3} \right) \\
& = 1 - s_{i_\alpha}^{t=1} + s_{i_\alpha}^{t=1} \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=1} \\
& = s_{i_\alpha}^{t=2}, \tag{4.49}
\end{aligned}$$

ここで、最後の等号は式 (4.13) から導かれる。式 (4.49) は $m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{*t=4}$ を示しており、また、それは $s_{i_\alpha}^{*t=4}(\text{F})$ を使う事によって計算される $t=4$ における仮のメッセージを記述しているが、それは $m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2}$ に相当する。ステージ $t=4$ における GC のラベルは

$$\begin{aligned}
\sigma_{i_\beta}^{t=4} & \approx s_{i_\beta}^{t=4} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{*t=4} \right) \\
& = s_{i_\beta}^{t=4} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \right) \\
& = s_{i_\alpha}^{t=2} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \right) \\
& \quad - (1 - s_{i_\alpha}^{t=1}) \left(1 - \prod_{a_\alpha \in \partial i_\alpha} m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{t=3} \right) \\
& \quad \cdot \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \left(1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} \right) \\
& = \sigma_{i_\beta}^{t=2}, \tag{4.50}
\end{aligned}$$

となる。ここで、最後の等号は常に $\prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2} (1 - \prod_{a_\beta \in \partial i_\beta} m_{a_\beta \rightarrow i_\beta}^{t=2})$ が消える事によって導かれる。

4.7.2 マクロな方程式の修正

マクロな解析の目的の為、式 (4.44) に基づいてステージ $t=3$ におけるアクティブなノードの割合を記述する。

$$q_{k_\alpha, k_\beta}^{*\alpha(\text{F}), t=3} = q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} + (1 - q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1}) (I_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2})^{k_\beta}, \tag{4.51}$$

$q_{k_\alpha, k_\beta}^{*\alpha(\text{F}), t=3}$ を自己無撞着なキャビティ方程式に代入する事で

$$I_{l_\alpha, l_\beta}^{*\alpha, t=3} = \sum_{k_\alpha, k_\beta} r_\alpha(k_\alpha, k_\beta | l_\alpha, l_\beta)$$

$$\cdot \left(1 - q_{k_\alpha, k_\beta}^{*\alpha(F), t=3} + q_{k_\alpha, k_\beta}^{*\alpha(F), t=3} \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{*\alpha, t=3} \right)^{k_\alpha} \right), \quad (4.52)$$

のように一連のメッセージ $I_{l_\alpha, l_\beta}^{*\alpha, t=3}$ を計算できるが、これによって GC の大きさは式 (4.46) によって

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha(F)}^{*t=3} = & \sum_{k_\alpha, k_\beta} P(k_\alpha, k_\beta) q_{k_\alpha, k_\beta}^{*\alpha(F), t=3} \left(1 - \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{*\alpha, t=3} \right)^{k_\alpha} \right) \\ & - q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} \left(1 - \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\beta, t=2} \right)^{k_\beta} \right) \cdot \left(\left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, t=1} \right)^{k_\alpha} - \left(I_{k_\alpha, k_\beta}^{*\alpha, t=3} \right)^{k_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (4.53)$$

と導出される。

4.7.3 ケースフリーにおける精度の改善

図 4.9 は、対立ネットワークに次数相関が無い場合の、式 (4.39) と式 (4.53) によって予測される GC の大きさを示しており、実験データと高い精度で整合する。我々の検証では、他のパラメータ集合に対しても同様の正確性が達成された。

4.8 次数相関の各レイヤーの耐性に対する影響

ここでは、レイヤー内とレイヤー間の次数相関の各レイヤーに対する耐性に与える影響について議論する。ここで、初期故障に関する残存効果はケースフリーに限定する。なぜなら、ケースクエンチトにおいて、各レイヤーのパーコレーションプロセスは互いに独立であり、シングルネットワークのケースに縮退できるからである。また、次数相関の耐性に与える影響はランダム故障のときよりターゲットアタックのほうがずっと大きいので、後者のケースに焦点を合わせる。

対立ネットワークがターゲットアタックを受け、残存効果がフリーである時の、初期生存率 q に対する残存するレイヤー α における GC の大きさを、図 4.10、図 4.11 に示した。ただし、図 4.10 では、レイヤー α 内の次数相関は正（ここでは、 $C_\alpha = 0.6$ ）に、図 4.11 では、レイヤー α 内の次数相関は負（ここでは $C_\alpha = -0.4$ ）に設定した。また、ステージ $t = 1$ におけるレイヤー α の GC（シングルネットワークにおけるパーコレーションの結果）も示してある。

レイヤー間の次数相関と、レイヤー β 内の次数相関がレイヤー α の耐性に与える影響に着目するため、図 4.10 と図 4.11 において、レイヤー α における耐

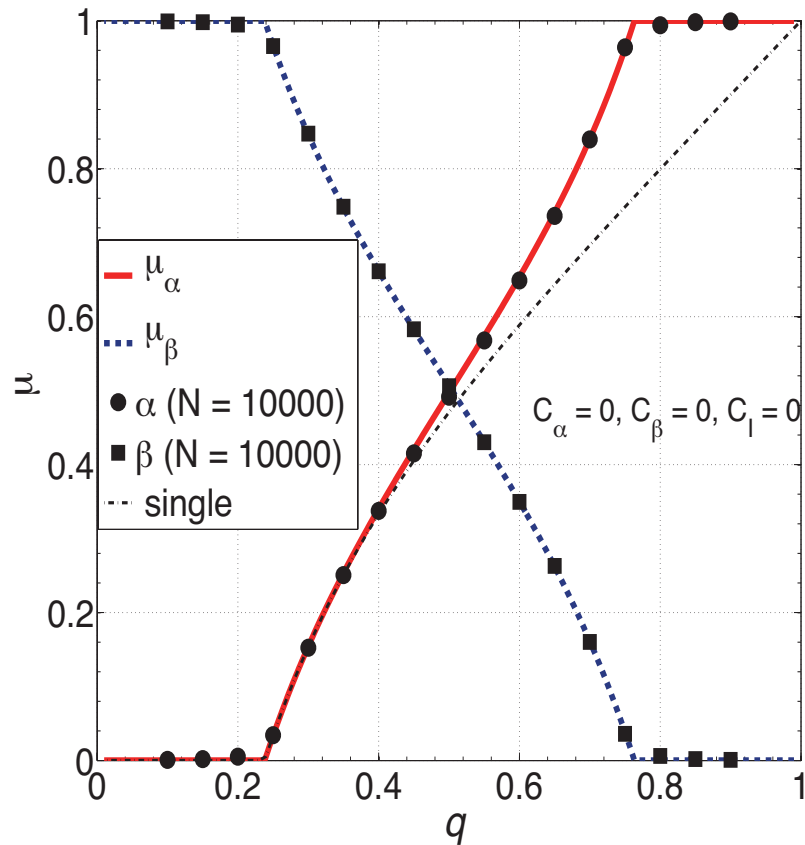


図 4.9 対立ネットワークがランダム故障を受けるときの、ケースフリーにおける場合の初期生存率 q に対するレイヤー α の耐性の解析結果（修正版）。ステージ $t = 1$ におけるレイヤー α の耐性の例（シングルレイヤー α において完結する故障プロセスの結果）もプロットされている。各ドットは数値実験によって 50 回平均したものである。（文献 [87] より引用。©American Physical Society）

性の例と、レイヤー間の及びレイヤー内のの次数相関の効果を示す。

μ_α の臨界転移点は、レイヤー α の次数相関にのみ依存し、レイヤー α におけるピアソン係数、 C_α を用いて特徴付けされる。これは、ステージ $t = 1$ において GC に属すノードは、それ以降ステージにおいて必ず GC に属すというシステム特性のためである。言い換えれば、もしノードがステージ $t = 1$ において GC を形成するものがないのであれば、それ以降も GC に属すようなノードは存在しない。レイヤー α における臨界耐性は、最初のステージに依存するので、それゆえレイヤー間の次数相関とレイヤー β は無関係である（図 4.7 も参

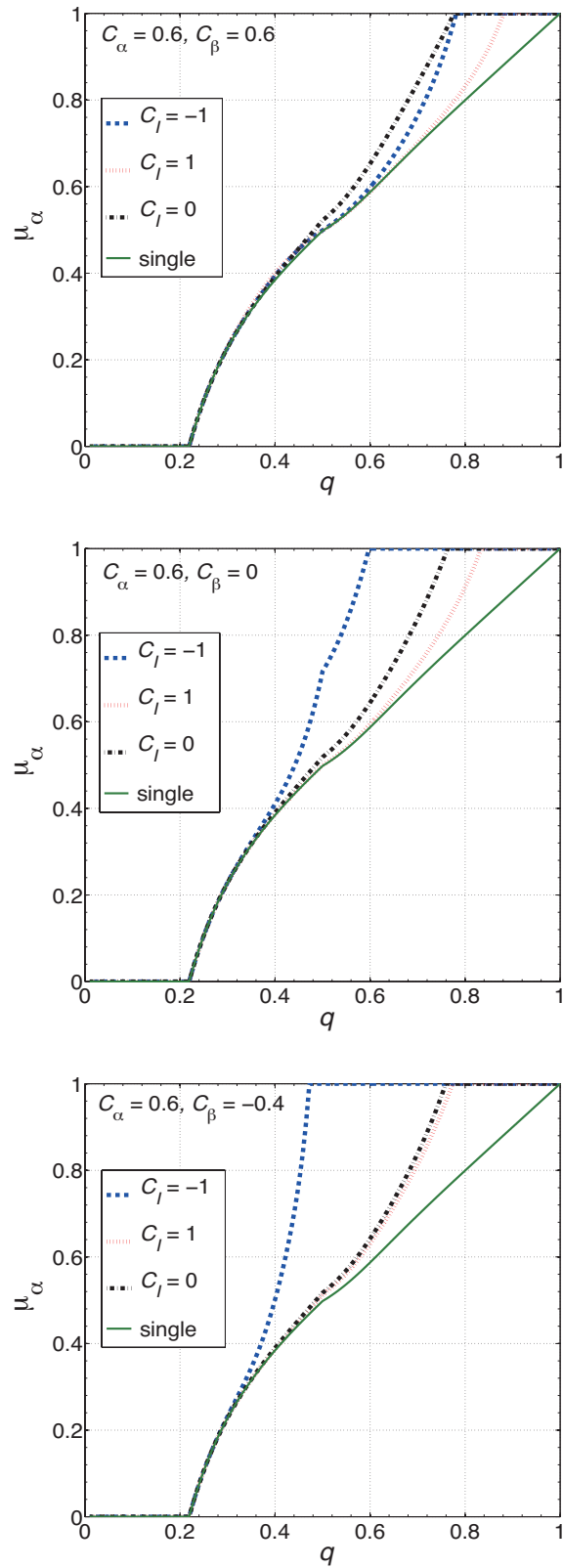


図 4.10 $C_\alpha = 0.6$ の場合のレイヤー α の耐性と次数相関の影響 . (文献 [87] より引用. ©American Physical Society)

4.8 次数相関の各レイヤーの耐性に対する影響 対立ネットワークの耐性解析

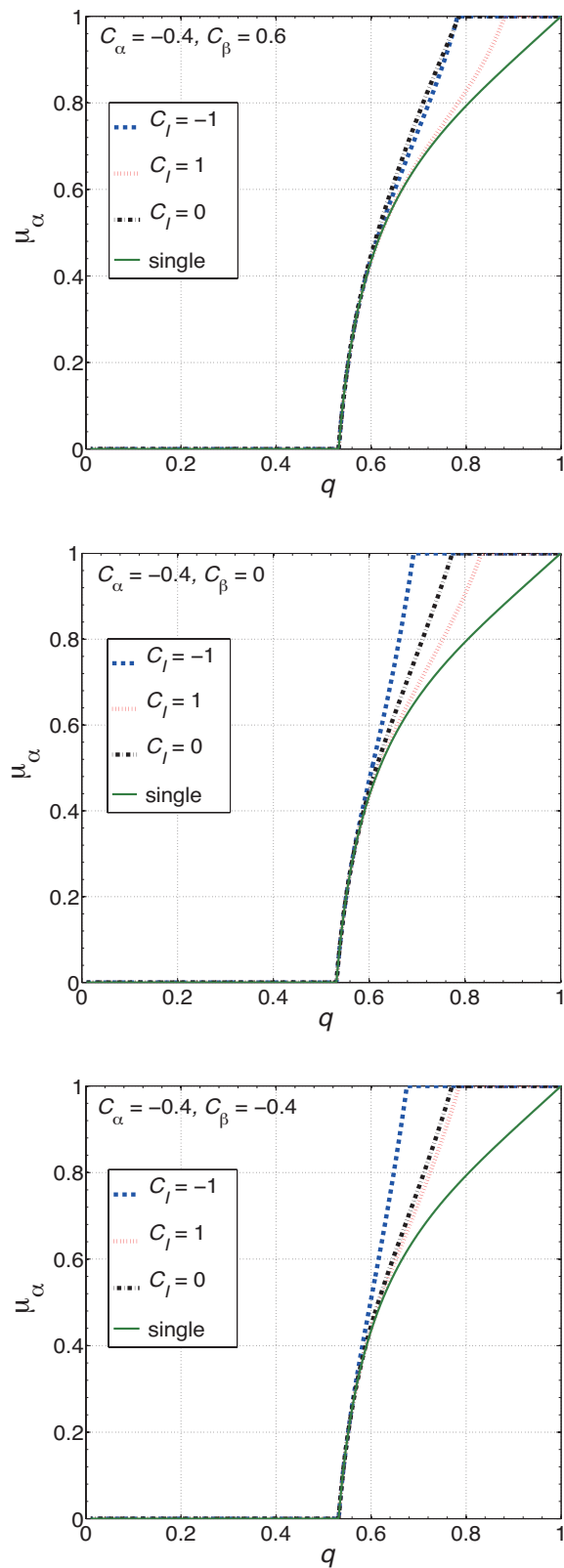


図 4.11 $C_\alpha = -0.4$ の場合のレイヤー α の耐性と次数相関の影響 . (文献 [87] より引用. ©American Physical Society)

照されたい)。

ステージ $t = 3$ においてレイヤー α において GC に属さないノードが初めて出現する瞬間について、議論する。これは、レイヤー β における臨界転移点に対応する (レイヤー β においても、ステージ $t = 2$ において GC に属すノードは、それ以降も必ず GC に属すからである)。レイヤー β における耐性はレイヤー内およびレイヤー間の、両方の次数相関に影響され、その効果は各次数相関の組み合わせによって決定される。

- レイヤー間の次数相関がニュートラルであるとき、レイヤー α 及びレイヤー β におけるレイヤー内の次数相関の効果は比較的小さい。
- レイヤー間の次数相関が最も正の相関が強いとき、レイヤー β におけるレイヤー内次数相関は最も影響力がある。
- レイヤー間次数相関が最も負の相関が弱い時は、レイヤー α とレイヤー β におけるレイヤー内次数相関はレイヤー β に影響する。

レイヤー β における最も有利な状況、つまり、より高い次数のノードがアクティブになる傾向にある状況を考えよう。そのためには、ターゲットアタックの結果として破壊される傾向があるレイヤー α における次数の高いノードと、 β における次数の高いノードが結合しているのが望ましい。図 4.10 及び図 4.11 は、レイヤー間の次数相関とレイヤー β におけるレイヤー内の次数相関がより正であれば、レイヤー β はよりロバストであり、レイヤー α はより脆弱であることを示している。

レイヤー β におけるレイヤー内の次数相関の役割は、レイヤー α のレイヤー内の次数相関が正であり、特にレイヤー間の次数相関が最も負であるとき、より重要になってくる。この状況において、レイヤー β における高い次数ノードが故障しやすくなるので、レイヤー β における“ターゲットアタック”に相当することになる。

まとめると、レイヤー内の次数相関は該当するシングルレイヤーにおける耐性を決定するのに対し、レイヤー間の次数相関は故障の様相を変化させる (たとえば、ランダム故障やターゲットアタックなど) が、アクティブもしくはインアクティブなノードの比率を変えはしない。レイヤー間のリンクの対立性によって、レイヤー内の次数相関はレイヤー α の耐性に影響を与えるが、レイヤー β の耐性は全ての次数相関の影響を受ける。特に、レイヤー間の次数相関がニュートラルでない場合は、次数相関の効果は、他の次数相関の項に依存し

つつ様々に変化する。

4.9 現実のシステムとの対比の例

現実世界のシステムの応用として、対立ネットワークは生存を脅かされる希少種と侵略種の複雑な生態相互作用のモデルの一例として捉えてもよい。[82, 83] では、日本の奄美大島における、そのような関係性の例を報告している。アマミノクロウサギ (*Pentalagus furnessi*) やアマミイシカワガエル (*Odorrana splendida*) のような希少種の個体数が、インディアンマングース (*Herpestes auropunctatus*) のような侵略種が根絶されている所では、ほとんど以前の状態まで復活している一方で、侵略種が確立されている地域では、ほとんど希少種が見られないことが報告されている。

我々の解析は、もし初期故障を受けたノードが再活性化可能であるならば (ケースフリーに相当)、レイヤー β におけるレプリカノードからの対立的な影響によって、レイヤー α の GC の大きさは初期故障がある程度小さい限り、元のレベルまで復活することを示している。これは、上述の報告と一致している。報告された希少種はげっ歯類や両生類であり、高い出産数と短いライフサイクルを持つ種がほとんどであるので、ケースフリーの条件に適合するかもしれない。一方で、例えば大型のほ乳類や霊長類は低出産数と長いライフサイクルを持つ種が多いので、ケースクエンチトに相当し、レイヤー間の対立的性質だけではその個体数を増やす事が出来ないかもしれない。しかしながら、我々の解析は、[82, 83] と共にそのようなケースであっても、侵略種の根絶や希少種の人工化等による再配置などの人為的な手法が、生態システムを保全するための効果的なスキームであることを陰に示唆している。

4.10 まとめ

この章では、レイヤー間の次数相関やレイヤー内の次数相関をもつ対立ネットワークの耐性を研究する為に、キャビティ法に基づいた解析的方法論を詳しく紹介した。初期故障を受けたノードが、レプリカノードによってノードが復活するか (ケースフリー) そうでないか (ケースクエンチト) に応じて、2つのシナリオを調査した。両方のケースにおいて、故障プロセスが、レイヤー間のリンクの対立性という特性によって周期的に繰り返す事を示した。

周期性は、各レイヤーにおける履歴 (ヒステリシス) によって生じるもので

あり、特にケースフリーにおいて理論と数値実験との間の不一致が生じた。それゆえ、理論予測の正確性を向上させるためのヒューリスティクスを導入し、再度数値実験との整合性を確認した。これらの一連の定式化はマルチレイヤーネットワークのパーコレーション現象を、ミクロスコピックおよびマクロスコピック両面から慎重に解析する事の重要性を示唆している。また、次数相関の観点からレイヤー α においてもっとも有利な条件を論じた。レイヤー α における最小臨界耐性 $\mu_\alpha \approx 0$ は、レイヤー α のレイヤー内の次数相関が急所を握っているのに対し、レイヤー α の最大耐性 $\mu_\alpha \approx 1$ はレイヤー間の次数相関および両レイヤーのレイヤー内の次数相関に影響する事について議論した。最も耐性が強い状況は、レイヤー α においてレイヤー内の次数相関があり、レイヤー β においてレイヤー内の次数相関が負であり、レイヤー間の次数相関が負であるときである。また、現実世界のシステムの重要性のため、生存個体を脅かされる希少種と侵略種によって構成される生態システムの例について、言及した。

4.11 主要な記号の定義

記号	定義や意味
α, β	レイヤー α とレイヤー β をそれぞれ表す.
a_α	レイヤー α 内におけるリンク上の関数ノードのインデックス.
i_α, j_α	レイヤー α における変数ノードのインデックス.
p	レイヤー間のリンク上の関数ノードのインデックス.
∂i_α	レイヤー α におけるノード i_α におけるノードの集合.
$ \partial i_\alpha $	ノード i_α の次数.
k_α, l_α	レイヤー α のノードの次数.
$P(k_\alpha, k_\beta)$	レイヤー間の同時次数分布 (レイヤー間次数相関).
$r_\alpha(k_\alpha)$	レイヤー α におけるランダムに選択されたリンクの一端のノードの次数分布.
$r_\alpha(k_\alpha, k_\beta l_\alpha, l_\beta)$	レイヤー α 内の、レプリカノードの次数も考慮した条件付き次数分布. すなわち, レイヤー α 内におけるランダムに選択されたノードの一端の次数が l_α であり, そのレプリカノードの次数が l_β である場合, もう一端のノードの次数が k_α であり, そのレプリカノードの次数が k_β であるような確率.
C_α, C_β, C_I	(順番に)レイヤー α , レイヤー β , レイヤー間におけるピアソン相関係数.
Case Q, Case F	初期故障の残存効果がケース Q である場合, ケース F である場合をそれぞれ表す. 前者は, レイヤー α におけるノードの初期故障が残存する (故障から固定されている, クエンチト) が, 後者においては残存しない (故障から解放されている, フリー) ため, ステージ $t = 3$ 以降にこれらの違いが生まれる.

記号	定義や意味
ψ_{i_α}	ノード i_α が初期故障している ($\psi_{i_\alpha} = 0$) もしくは, 初期故障してしない ($\psi_{i_\alpha} = 1$) ことをあらわす二値変数.
$s_{i_\alpha}^{2t'-1}$	ステージ $2t'-1$ の開始時に ノード i_α が故障している ($s_{i_\alpha}^{2t'-1} = 0$) もしくは故障していない ($s_{i_\alpha}^{2t'-1} = 1$) ことをあらわす二値変数.
$m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{2t'-1}$	ステージ $2t'-1$ において関数ノード a_α から変数ノード i_α へと伝播するメッセージであり, 条件 $\partial a_\alpha = \{i_\alpha, j_\alpha\}$ を満たす. もし, ノード j_α が i_α キャピティシステムにおいて GC に属すならば, $m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{2t'-1} = 0$ となり; そうでなければ, $m_{a_\alpha \rightarrow i_\alpha}^{2t'-1} = 1$ となる.
$\sigma_{i_\alpha}^{2t'-1}$	ステージ $2t'-1$ 終了時に ノード i_α が レイヤー α に属す ($\sigma_{i_\alpha}^{2t'-1} = 1$) もしくは, 属さない ($\sigma_{i_\alpha}^{2t'-1} = 0$) ことを表す二値変数.
q	初期ステージにおいて, ノードがアクティブである (初期故障を受けていない) ノードの割合.
$q_{k_\alpha, k_\beta}^{\alpha, 2t'-1}$	レイヤー α における ステージ $2t'-1$ 最初における, ノードの次数が k_α であり, レプリカノードの次数が k_β であるようなノードがアクティブであるような確率.
$I_{l_\alpha, l_\beta}^{\alpha, t=1}$	マクロな観点からの, ステージ $t=1$ におけるレイヤー内のリンク上におけるメッセージであり, 詳細は式 (4.28) で定義される.
$\mu_\alpha^{2t'-1}$	ステージ $2t'-1$ 最後における, レイヤー α における期待される GC の大きさ.

5 本論文の総括

本論文における主要部分は3章と4章であった。3章では、2つのレイヤーで構成されレイヤー内とレイヤー間が次数相関によって特徴づけられる相互依存ネットワークをモデルとして想定した。4章では、レイヤー間の次数相関とレイヤー内の次数相関をもつ対立ネットワークをモデルとして想定した。両方の場合において、耐性を解析する為の枠組みを提案した。以下に本論文における論旨と結論を総括する。

相互依存ネットワークの顕著な特徴は、一部のノードの故障が、レイヤーを超えて伝播するために、カスケード故障という連鎖的な破壊が起きる可能性があるという点にあった。最終的に両方のレイヤーにおいて残存するGC (MCGC) は、システムの耐性評価において重要な意味を持っていた。MCGCの大きさを定量的に評価する手法としてキャビティ法(メッセージ伝搬法)を適用した。キャビティ法は、統計力学におけるスピングラス理論において発展してきた手法であるが、マルチレイヤーネットワークの解析への適用はあまり類がない。類似の手法であるメッセージ伝搬法は使われ始めているが、定義や論理の構成が異なり、統一性が計られていない。そのため、本論文では出来るだけ定式化が明確になるように様々な工夫を施した。

まず、相互依存ネットワークに対して、局所的なメッセージ(GCの大きさを計算する上で必要な情報)の流れを分類する事が出来るように、二部グラフ変換を施した。次に、ミクロな観点におけるノード同士のメッセージ伝搬を記述した。この観点では、個別のノードがGCに属すかどうかについて一意に決定することなく、ノードの状態を決定的に記述しており、マクロな観点で記述する為の準備の役割を担っていた。この定式化を基礎として、平均場近似とランダムネットワークにおいて有効である局所ツリー近似を仮定することによって、マクロな観点におけるメッセージ伝搬を記述した。この観点では、ノードの状態は確率的に記述されており、パーコレーションの枠組みによって、ランダムノード故障や次数依存の選択的ノード破壊に晒される相互依存ネットワークアンサンブルにおける耐性評価が可能となった。解析手法によって導出された解の精度を確認するため、数値実験を行った。レイヤー内、レイヤー間に適切な次数相関を持った相互依存ネットワークを用意するため、二極次数分布を持つようなランダムネットワークをコンフィグレーションモデルの作り方を参考に2つ作り、レイヤー内、レイヤー間についてリンクの組み替えを適宜行った。

選択的度数依存破壊，ランダム故障の故障プロセス両方において，適宜ノードの状態（生存か故障か）を割当て，全てのコンポーネントを検出しそれらの大きさを比較することによって，各ステージの GC を同定し，カスケード故障を検証した．MCGC の大きさに関して，解析解と実験で計測された値は非常に高い精度で一致しており，解析手法の正当性を確認できた．これによって，レイヤー内，レイヤー間における度数相関の耐性に与える影響に関して，（二極度数分布というクラスに限定されるものの）統合的に論じることが可能となった．相互依存ネットワークがレイヤー間の正の度数相関を持つ場合，ランダム故障には頑強になるが，選択的故障の場合脆弱になる．一方で，レイヤー間の負の度数相関を持つ場合は，逆にランダム故障には脆弱に，選択的故障の場合は頑強になることが分かった．この結果は次のように説明出来る．レイヤー間における度数相関が正である場合，レイヤー A における高次数ノードとレイヤー B における高次数ノードが結合するペアの割合が，その他の度数相関の条件に比べて相対的に増えている．これらの存在は，相互依存ネットワークにおけるハブと捉える事が出来る．そのため，スケールフリーネットワークにおけるハブに関する考察と同様の議論が成立する．すわわち，正のレイヤー間の度数相関は，ランダム故障に対する耐性を強めるが，選択的に狙い撃たれる場合は，システム全体を脆弱にするというものである．次に，各レイヤーのレイヤー内の度数相関と度数分布の相乗効果について考察した．これらの効果はレイヤー間の度数相関に比べて影響が相対的に小さかったが，カスケード現象によって，レイヤー間の故障の伝播が幾度となく起きるからと思われる．また，レイヤー内の平均次数を一定にした状況では，レイヤー内のノードの次数の差が大きいたことが，ネットワーク内の度数相関よりも耐性に対して重要であり，レイヤー内における正の相関が必ずしも選択的度数破壊に対する耐性を強める事に直結しない傾向が確認された．

対立ネットワークのモデルの特徴は，故障の伝播のルールとして，一方のレイヤーにおいてノードが GC に属すならば，次のステージでレプリカノードを活性化させず，そうでなければ，活性化させるというように定義した点にあった．このルールは本論文におけるオリジナルであるが，相互依存ネットワークとは正反対であり，各ステージ終了時のノードの状態のみが故障の伝播の様相を決定するという意味で自然であると考えられた．また，初期故障を受けたノードは，そのレプリカノードによって復活するかどうか 2 つの状況を想定した．前者をケースフリー，後者をケースクエンチトと呼び，それぞれについて

GC を解析した。両方のケースにおいて、故障プロセスが、レイヤー間のリンクの対立性という特性によって周期的に繰り返されることがわかった。これは、各レイヤーの局所的トポロジーが不変であり、伝播される故障がヒステリシスを持つ事によって生じていた。このため、特にケースフリーにおいて一般的な平均場近似の仮定（同次数のノードは統計的に等価である）が成立しなくなるため、理論と数値実験との間の不一致が生じた。理論予測の正確性を向上させるためのヒューリスティクスを導入し、数値実験によって整合性を確認した。ケースクエンチの場合は、初期故障を受けるレイヤーにおいて残存する GC は、もう一方のレイヤーの影響に依存しなかった。しかし、ケースフリーの場合は、初期故障を受けるレイヤーにおいて残存する GC は、初期故障直後の GC に比べて増大した。これは、先述の通りノードの再活性化が可能であるからである。しかし、臨界耐性（GC が出現する瞬間）は、ケースクエンチと変わらなかった。これは、初期故障直後に GC が残存していない場合、初期故障ノードは再活性化されることがないため、以降のステージで GC を結成することができないからである。また、次数相関の観点からレイヤー α においてもっとも有利な条件を論じた。レイヤー α における最小臨界耐性 $\mu_\alpha \approx 0$ は、レイヤー α のレイヤー内の次数相関が急所を握っているのに対し、レイヤー α の最大耐性 $\mu_\alpha \approx 1$ はレイヤー間の次数相関および両レイヤーのレイヤー内の次数相関に影響する事について議論した。最も耐性が強い状況は、レイヤー α においてレイヤー内の次数相関があり、レイヤー β においてレイヤー内の次数相関が負であり、レイヤー間の次数相関が負であるときである。また、現実世界のシステムの重要性のため、生存個体を脅かされる希少種と侵略種によって構成される生態システムの例について、言及した。

マルチレイヤーネットワークによってモデル化できる対象は多岐に渡るため、その意味では本論文において解析したモデルは限定的であると言えるかもしれない。しかし、本論文で提唱した解析手法は多くの観点から現象を捉えて記述をしており、非常に柔軟性がある。そのため、これから開発されるであろう、より複雑なモデルに対しても充分応用出来るフレームワークであると著者は信じる。

付録 A 母関数法の導出の詳細

ノード i に対して, ノード j が接続されている状況を考える. ノード j の次数が k である確率は, すべてのリンクの中から, 次数が k であるノードにつながっているリンクを 1 つランダムに選ぶ確率と等しく, $kp(k)/\sum_l lp(l) = kp(k)/\langle k \rangle$ である. これらを用いて, ノード j の次数分布に対する母関数を

$$\frac{kp(k)x^k}{\langle k \rangle} = \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)}x, \quad (\text{A.1})$$

と定義する.

次に, ノード j から先ほど選んだリンクとは別のリンクを通過してたどり着くことができる, i 以外のノードの個数を考える. ノード j の次数は k であったので, i - j 間のリンクを差し引いた $k-1$ 個数のノードが候補となる. つまり, 式 (A.1) から x (1 本分のリンク) を除したものが母関数であり,

$$G_1(x) = \frac{G'_0(x)}{G'_0(1)} = \frac{1}{\langle k \rangle} \frac{dG_0(x)}{dx} \quad (\text{A.2})$$

母関数法における式 (2.26) は次のように導かれる. 元のネットワークが次数分布 $p(k)$ を持つ時, グラフにおいてランダムに選ばれたリンクを通過してあるノードに到達する確率は $kp(k)/\langle k \rangle$ で表わされる. これは, ランダムに選ばれたリンクを通過してあるノードに到達する確率がリンクの数 k に比例し, 分母の $\langle k \rangle$ は正規化によって導かれる数だからである. また, 次数 k のノードに到達した時, そこから出力されるリンク (枝) の数は残りの $k-1$ 本である. それゆえ, ケーリーツリー^{*28}の観点から考えると, ランダムに選ばれたリンクを通過して, $k-1$ 本のリンク (枝) が出力されるノードに到達する確率 q_{k-1} は

$$q_{k-1} = \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} = r(k) \quad (\text{A.3})$$

今, 確率 q でリンクが存在するような^{*29} ケーリーツリーのランダムに選ばれたリンクから出発して, n 回目の生成で GC に到達しない確率を Q_n と仮定する. 簡単のため, ノードの次数は全て 3 であるようなレギュラーツリーを考え

^{*28} 境界のあるツリーのこと. 境界のないツリーは Bethe 格子と呼ばれ, 両者は区別される. 母関数法でも最終的には無限回のツリー生成を考える必要があるため, 結局 Bethe 格子を考えていることになる.

^{*29} リンクを辿った先のノードの故障過程と考える事が出来る.

ると、入力されるリンクの本数は 2、出力されるリンクの本数は 2 である。あるリンクから出発して n 回目の生成で GC に到達しない確率 Q_n は次の 3 つの確率の和となる。

- (1) $n - 1$ 回目の生成に関わらず、 n 回目の生成において出力される枝が両方とも存在しなければ、GC に到達しない。この確率は $(1 - q)^2$ である
- (2) $n - 1$ 回目の枝の生成で GC に到達しておらず、 n 回目の生成で出力される枝が 2 本とも存在する場合は GC に到達しない。この確率は $q^2 Q_{n-1}^2$ である
- (3) $n - 1$ 回目の枝の生成で GC に到達しておらず、 n 回目の生成で出力される枝は 2 本のうち片方のみが存在している場合は、GC に到達しない。この確率は $2q(1 - q)Q_{n-1}$ である

以上より次の式が成立する。

$$Q_n = (1 - q)^2 + q^2 Q_{n-1}^2 + 2q(1 - q)Q_{n-1} \quad (\text{A.4})$$

これを簡潔にすると

$$Q_n = ((1 - q) + qQ_{n-1})^2 \quad (\text{A.5})$$

1 本のリンクを通して、2 本の出力があるような例を考えたが、一般に m 本の出力がある場合は次のようになる。

$$Q_m = ((1 - q) + qQ_{n-1})^m \quad (\text{A.6})$$

これと式 (A.3) から、Cayley ツリーにおいてあるリンクから出発して n 回の生成によって GC に到達しない確率は次の様な再帰的な式

$$Q_l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(k)k((1 - q) + qQ_{l-1})^{k-1}}{\langle k \rangle}, \quad (\text{A.7})$$

によって求められる。式 (A.2) は次のように書けることに注意する。

$$G_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kp(k)x^{k-1}}{\langle k \rangle} \quad (\text{A.8})$$

よって、あるリンクから出発して n 回の生成で GC に到達する確率は

$$1 - Q_n(q) = 1 - G_1(1 - q + qQ_{n-1}) = 1 - G_1(1 - q(1 - Q_{n-1})) \quad (\text{A.9})$$

式 (A.9) において、 $Q_{\infty} \equiv f$ とすることによって $f = G_1(1 - q + rf)$ と書き換えられる。つまり、式 (2.26) を導出する事が出来た。

付録 B スケーリング仮説

現在の複雑ネットワークではスケールフリーネットワークが注目を浴びている。その一方で、伝統的なパーコレーション理論では、むしろ様々な次元の格子(ラティス)モデルが主な対象となっている。パーコレーションに関する長年の研究の成果のひとつとして、系の臨界点における統計的性質の臨界指数の値がその次元のみに依存し、系のトポロジーにはよらないという予測が挙げられる。この予測はスケーリング仮説という名で呼ばれ、数学的に証明されているわけではないが多くの数値実験によって確かめられている。ここでは、Staufferらの著書 [5] で紹介された方法で、スケーリング仮説を簡潔に説明する。

B.1 クラスターの個数と臨界点における指数

*30 1次元系におけるパーコレーションを考える。各サイト(ノード)の占有確率を p とすると、大きさ s のクラスターの系全体で規格化された大きさ(ノード1個当たりが寄与する個数 n_s)を求めたい。これは、両端2個のノードが占有されておらず、かつ中の s 個のノードが占有されている確率であるから、 $n_s = p^s(1-p)^2$ と評価できる。

1次元系の場合は周縁はこのように常に両端の2個のノードである。一方で、一般の次元系の場合はクラスターの周縁の形は様々であり、そのためクラスターは格子アニマルとも言われる。一般の次元における大きさ s のクラスターの規格化された大きさを求める為には、占有されたサイトの個数が s 個、周縁のノードの個数を t 個であるときの、可能な配置数 g_{st} を数え上げる必要がある。これより、大きさ s のクラスターの存在確率を $n_s = \sum_t g_{st} p^s (1-p)^t$ と評価できる。 g_{st} について詳細に調べた研究があるが、 s と t に関する解析的表現は現在に至るまで得られておらず、パーコレーション転移点を導出できる条件に限られる原因の起源はここにある。

パーコレーション転移点未満の占有確率(サブクリティカル領域)において、任意のノードはいずれかの大きさのクラスターに属す。そのため、占有確率と大きさ s のクラスターに属する確率 $n_s s$ との間に、 $\sum_s n_s s = p$ が成立する。これより占有されているノードをランダムに選んだとき、それが属すクラスター

*30 ここでのクラスターはコンポーネントの同義である。パーコレーションの研究の文脈ではクラスターの方が自然であると思われるので、付録ではクラスターで統一する。

が s である確率 w_s は, $w_s = n_s s / \sum_s n_s s$ で定義される. また, 系におけるクラスタの平均の大きさ S は, $S = \sum_s w_s s = \sum (n_s s^2 / \sum n_s s) \propto \sum_s s^2 n_s$ で与えられる.

転移点において, あるノードの占有確率は, 無限大のクラスター (GC) に属す確率 P と, 有限の大きさのクラスターに属す確率の和として表現される. すなわち, $P + \sum_s n_s(p_c) s = p_c$ が成立する (ただし 2 項目の s についての和は, GC について含めない). クラスタの平均の大きさ S は, GC についても含めて計算するとその寄与によって無限大に発散するはずである (クラスタの大きさの分布の 2 次モーメントである $\sum n_s s^2$ は無限大となる). 実際に 1 次元系では, $S = (1+p)/(1-p)$ と計算でき, $p_c = 1$ で発散する. もし, $n_s(p_c)$ が s とともに指数的に減少すると仮定すると, S が有限に留まってしまうので, べき的に減少すると仮定する方が自然である. そこで,

$$n_s(p_c) \propto s^{-\tau} \quad (\text{B.1})$$

と仮定し, 指数 τ を導入するが, これは液滴模型における Fisher 指数と呼ばれる [84]. τ の系の次元に依存した値 (2 から 3 の間) をとるが, 式 (??) 自体は一般の系に対しても成立する.

B.2 Bethe 格子の Fisher 指数

1 次元系でべき法則を確認したが, 転移点は $p_c = 1$ であるため, より複雑な別の次元の系で Fisher 指数を具体的に求めるのがこの節の目的である. そこで, 1 次元同様に可解である例である Bethe 格子 (無限次元) に注目する. 次数 (配位数) が z の Bethe 格子について, 大きさ s のクラスターの周縁の個数は, 次のように求められる. 孤立しているノードの周縁は z 個のノードであるが, 2 個のクラスターの周縁は, $2(z-1)$ 個である. つまり, 既存のクラスター及び新しく加わるノードが結合する際, それぞれ 1 本のリンクを共有する必要があり周縁のノードの個数に含まれないので, 周縁のノード数はクラスターのノード数が 1 個増える毎に $z-2$ 個増える. よって, 大きさ s のクラスターの周縁ノード数は $z + (s-1) \times (z-2) = 2 + (z-2)s$ 個である. g_{st} は周縁の配向を無視することにより g_s に置き換えられ, また n_s は t に関する和で書く必要がなくなり, $n_s = g_s p^s (1-p)^{2+(z-2)s}$ と評価される.

Bethe 格子に関して, p が臨界転移点のときの $n_s(p = p_c)$ と, 一般の p (ただし, 臨界転移点に非常に近い) のときの $n_s(p)$ の比を次のように評価する. ただ

し、簡単のため $z = 3$ とする。

$$\begin{aligned}\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} &= \left(\frac{1-p}{1-p_c}\right)^2 \left[\frac{p}{p_c} \frac{1-p}{1-p_c}\right]^s \\ &= \left(\frac{1-p}{1-p_c}\right)^2 [1-4(p-p_c)^2]^s \\ &\propto \exp(-cs)\end{aligned}\tag{B.2}$$

ここで、2番目の等式は、第2項の $p = p_c$ におけるテイラー展開と Bethe 格子固有の性質 $p_c = 1/(z-1) = 1/2$ を代入することによって、導出される。また、3番目の比例記号は、 $1-4(p-p_c)^2 = e^{-c}$ と指数を使って表現することによるものである。(これから $c \propto -\log[1-4(p-p_c)^2] \propto (p-p_c)^2$ も導かれる。) これより、クラスタの個数の比は、 s とともに、指数法則に従って減少することがわかる。これをアニマル的という。(ただし Bethe 格子では、どのクラスターも常にアニマル的であるが、2, 3次元では p_c 以下の極めて大きなクラスターのみがアニマル的振る舞いを示すことが知られている。)

式 (B.2) を使って、Bethe 格子におけるクラスターの平均の大きさは、

$$\begin{aligned}S &= \sum_s s^2 n_s / p_c \propto \sum_s s^2 n_s \propto \sum_s s^{2-\tau} \exp(-cs) \propto \int s^{2-\tau} \exp(-cs) ds \\ &= c^{\tau-3} \int z^{2-\tau} \exp(-z) dz \propto c^{\tau-3} \propto (p_c - p)^{2\tau-6}\end{aligned}\tag{B.3}$$

と計算される。ただし、式 (B.3) では、無限大の大きさのコンポーネント (GC) に関する寄与を無視した^{*31}。

一方で、 $z = 3$ における Bethe 格子について、実は $S \propto (p_c - p)^{-1}$ が成り立つ。これは次のように導出される。原点から Bethe 格子の周縁方向へのメッセージの流れを考える。あるノードがクラスターの大きさに関与するためには、そのノードが占有されている必要があり、そのとき2本の枝から、 T_{in} 個分の関与があるとするとす。すなわち、そのノードが出力するメッセージ T_{out} は、 $T_{\text{out}} = p(1 + 2T_{\text{in}})$ を満たす。無限大の大きさの Bethe 格子については $T_{\text{in}} = T_{\text{out}} \equiv T$ が成立するので、 $T = p/(1 - 2p)$ である。また、原点 (占有されている点の中から選ぶ) の属すクラスターの大きさの期待値は、 $S = 1 + 3T = \frac{1+p}{1-2p} = \frac{p_c+p}{p_c-p}$ である ($p_c = 1/2$ を使った)。 p が p_c に下から近づくと、

$$S \propto (p_c - p)^{-1},\tag{B.4}$$

^{*31} 一般次元では無視出来ない。そのため、Bethe 格子における計算が一般次元に適用出来ない原因となる。B.3 で改善される。

が示される。

したがって、式 (B.4) と式 (B.4) から、Bethe 格子における Fisher 指数は $\tau = 5/2$ である。以上の結果と式 (B.2) から、

$$n_s(p) = n_s(p_c) \exp(-cs) =^* s^{-\tau} \exp(-cs) = s^{-5/2} \exp(-cs), \quad (\text{B.5})$$

ここで、 $c \propto (p - p_c)^2$ である。ただし、 \star の等式は、一般的な系でも成立するかどうかは後に議論する。(修正を加える必要がある。) また、Fisher 指数は一般的な系については数値計算によってしか求める事が出来ないことを付け加えておく。

B.3 一般次元の為の準備

Bethe 格子において様々な統計量は具体的な数字を使った指数的に表現されたが、一般的には Fisher 指数 τ のように何らかの変数を使って表現される。たとえば、

$$\begin{aligned} M_0^{\text{sing}} &\propto |p - p_c|^{(2-\alpha)}, \\ P &\propto (p - p_c)^\beta, \\ S &\propto |p - p_c|^{-\gamma}, \\ \xi &\propto |p - p_c|^{-\nu}, \\ c &\propto (p - p_c)^{1/\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

などのように表現される。ここで、 M_0^{sing} はクラスターの総数の解析的でない部分、 P は無限大のクラスターの規格化された大きさ、 S はクラスターの平均の大きさ、 ξ は相関長、 c はクラスター数を指数関数的に表現したときの指数である。

また、 P を、前節では $P + \sum_s sn_s(p) = p$ の等式から定義したが、 $p_c = \sum_s sn_s(p_c)$ である事と、式 (B.1) と (B.5)^{*32} を使って、式 (B.3) と同様に次のようなオーダー評価をする事が出来る。

$$\begin{aligned} P &= \sum_s [n_s(p_c) - n_s(p)]s + O(p - p_c) \\ &\propto^* \sum_s s^{1-\tau} [1 - \exp(-cs)] \propto \int s^{1-\tau} [1 - \exp(-cs)] ds \\ &\propto c \int s^{2-\tau} \exp(-cs) ds = c^{\tau-2} \int z^{2-\tau} \exp(-z) dz \end{aligned}$$

*32 \star に適用。Bethe 格子特有のもの

$$\propto c^{\tau-2}. \quad (\text{B.7})$$

ただし, 3 番目の比例記号は, $f = s^{2-\tau}, g = 1 - \exp(-cs)$ として部分積分の公式 $\int f'g = -\int fg'ds + (fg)$ を使って導出した. 式 (B.7) の結果より $P \propto c^{\tau-2}$ であるが, 式 (B.6) における c から, さらに $P \propto |p - p_c|^{(\tau-2)/\sigma}$ と書ける. この指数が式 (B.6) における P の指数 β と等しいことから,

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma}, \quad (\text{B.8})$$

である.

また, 式 (B.3) の結果より $S \propto c^{\tau-3}$ であるが, 式 (B.6) における c から, さらに $S \propto |p - p_c|^{(\tau-3)/\sigma}$ と書ける. この指数が式 (B.6) における S の指数 $-\gamma$ と等しいことから,

$$\gamma = \frac{3 - \tau}{\sigma}. \quad (\text{B.9})$$

このように, 1 つの変数は, 他の 2 つの変数によって表現され, 2 変数スケーリング法則と呼ばれ. すなわち, Bethe 格子における議論から, スケーリング法則の本質である 2 変数スケーリング法則を示す事が可能である.

しかしながら問題点も存在する. まず, 式 (B.5) の \star ^{*33} は, 任意の次元については成立しない. なぜなら, 任意の次元について成立する $n_s(p_c) \propto s^{-\tau}$ (式 (B.1)) と Bethe 格子においてのみ成立する $n_s(p) \propto n_s(p_c) \exp(-cs)$ (式 (B.2)) によって, 構成された式であるからである. 式 (B.2) が, Bethe 格子特有であることは, 1 次元における考察からもすぐに判明する. 例えば, 1 次元において規格化されたクラスター数は $n_s(p) = p^s(1-p)^2$ と評価できる. これはさらに, 1 次元の閾値が $p_c = 1$ であることと, $p = \exp(\log p) = \exp(p - p_c)$ を用いる事によって, $n_s(p) = (p_c - p)^2 \exp(-(p_c - p)s)$ と評価できる. つまり, 指数関数と s のべき乗でなく $p_c - p$ のべき乗によって, 臨界点におけるクラスター数は表されている. また, クラスター数 n_s の高次微分が指数 σ の値が整数でない限り発散するものが出てくる. これは, n_s の p に関する k 次微分が, c の p に関する k 次微分となり, σ が整数でない限り $1/|p - p_c|^{0.5}$ のように, 分母の指数に 1 以下の小数が残る形で発散してしまうことから確認できる. さらには, 臨界確率 p_c より下でも特別な考慮をしない限り, 式 (B.3) より, GC が存在している事になってしまう.

^{*33} 再掲載すると $n_s(p) = \star s^{-\tau} \exp(-cs) = s^{-\tau} \exp(-(p - p_c)^{1/\sigma} s)$

B.4 クラスタ数: 一般次元

結果的に言えば,

$$n_s(p) = s^{-\tau} f[(p - p_c)s^\sigma], \quad p \rightarrow p_c, s \rightarrow \infty \quad (\text{B.10})$$

という形が最も自然な評価式である。式 (B.10) は, 上述した問題点を全て解決している。なぜなら, 例えば $\sigma = 1, \tau = 2, (p - p_c)s^\sigma = z$ と置く事で, 式 (B.10) は,

$$n_s(p) = s^{-2} f(z) = s^{-2} z^2 e^z \quad (\text{B.11})$$

となり, $s^{-2} z^2$ における s の項は, σ, τ の設定により消え, $(p - p_c)$ の指数のみが残り, 前頁で示した 1 次元の例にあてあまるからである。

次に, 式 (B.7) の最初の式と, 式 (B.10) から示される $dz/ds = \sigma z/s$ を使って, p_c 以下で無限大のクラスタが存在しない事を示す。

$$\begin{aligned} P &= \sum_s [n_s(p_c) - n_s(p)] s \\ &= \int s^{1-\tau} [f(0) - f(z)] ds \\ &= |p - p_c|^{(\tau-2)/\sigma} \int |z|^{-1-(\tau-2)/\sigma} [f(0) - f(z)] dz / \sigma \\ &= (\beta + \gamma) |p - p_c|^\beta \int |z|^{-1-\beta} [f(0) - f(z)] dz \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

ここで, $z = (p - p_c)s^\sigma$ についての積分領域が, $p > p_c$ においては, 0 から ∞ , 一方で $p < p_c$ においては, 0 から $-\infty$ である。

$p < p_c$ においては最大クラスタが存在しない, すなわち,

$$\int |z|^{-1-\beta} [f(0) - f(z)] dz = \int |z|^{-\beta} \frac{[f(0) - f(z)] dz}{|z|} = 0 \quad (\text{B.13})$$

より,

$$\int |z|^{-\beta} \left[\frac{df}{dz} \right] dz = 0 \quad (\text{B.14})$$

を満たせばよい。このような条件を満たす関数 $f(z)$ は, 例えばある点 f_{\max} において, z の最大値 $z_{\max} < 0$ をとるような単調増加あるいは単調現象ではなく波形の関数を用意すれば良い。

指数	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6 - \epsilon$	Bethe
α	1	-2/3	-0.62	-0.72	-0.86	$-1 + \epsilon/7$	-1
β	0	5/36	0.41	0.64	0.84	$1 - \epsilon/7$	1
γ	1	43/18	1.796	1.44	1.18	$1 + \epsilon/7$	1
ν	1	4/3	0.88	0.68	0.57	$1/2 + 5\epsilon/84$	1/2
σ	1	36/91	0.45	0.48	0.49	$1/2 + O(\epsilon^2)$	-1
τ	2	187/91	2.189	2.313	2.412	$5/2 - 3\epsilon/14$	5/2

表 B.1 $d = 1, 2, 3, 4, 5, 6 - \epsilon$ 次元と Bethe 格子におけるパーコレーション臨界指数 [5]. ただし, 本書の付録で紹介した指数に絞って記載した.

また, 最後のクラスタ数の p に関する微分の発散は, f を解析関数と仮定する事で, $f(z)$ の z に関する全ての導関数が $z = 0$ の所で有限に, またこれより $n_s(p)$ の p に関する全ての導関数が $p = p_c$ で有限に留まる事が保証されるので, 解決されると思われる.

最後に, 過去の多くの研究によって判明している様々な指数の値の一部をまとめて表 B.1 に付記する.

付録 C 数値実験で用いるアルゴリズム

C.1 ランダムネットワークの生成

次数分布からネットワークを構築する方法は多々あるがその際に結合がランダムであるようにするのは自明ではない。以下に任意の次数分布を持つランダムネットワークの作成法の一例を示す。 d_i をノード i の次数, N をノードの総数とする。 $i = 1, \dots, N$ を満たす。生成のアルゴリズムは次のようになる [85]。

- (0) 各ノード番号 i がその次数 d_i 個含まれるような指標集合 U を用意する。
- (1) U から 2 つの異なる要素を選び, それぞれ i, j とする。
- (2) $i \neq j$ でありかつ今まで選ばれていない場合, i と j の間にリンクを作り, i と j を U から取り除く。
- (3) U が空になるまで (1), (2) を繰り返す。更なるリンクを (1), (2) で作ることが出来なくなった場合, (0) に戻ってやり直す。

C.2 GC の検出: HK アルゴリズム

[81] で紹介された, ネットワークの各コンポーネントを分類するアルゴリズム (深さ優先探索アルゴリズムの一種) を説明する。

ある有限サイズのノード数 N , リンク数 L のネットワークを一つ用意する。ここでは, デモンストレーションの為に, $N = 11, L = 15$ のネットワークを用意し, ノードに対して 1 から N までの自然数を, リンクに対しても 1 から L までの自然数を, 異なるノード (リンク) に異なる自然数が対応するようにランダムにラベル付けをする。そして, ネットワークに, 故障 (ノード除去, リンク除去, ノード及びリンク故障) が生じた状況を想定する (図 C.1 を参照されたい)。ノードに関しては, `Node`, `NodeS`, `NodeNext` を用意し, それぞれノードのインデックス, 各ノードの生存故障 (生存のとき 1, 故障のとき 0), 隣接行列

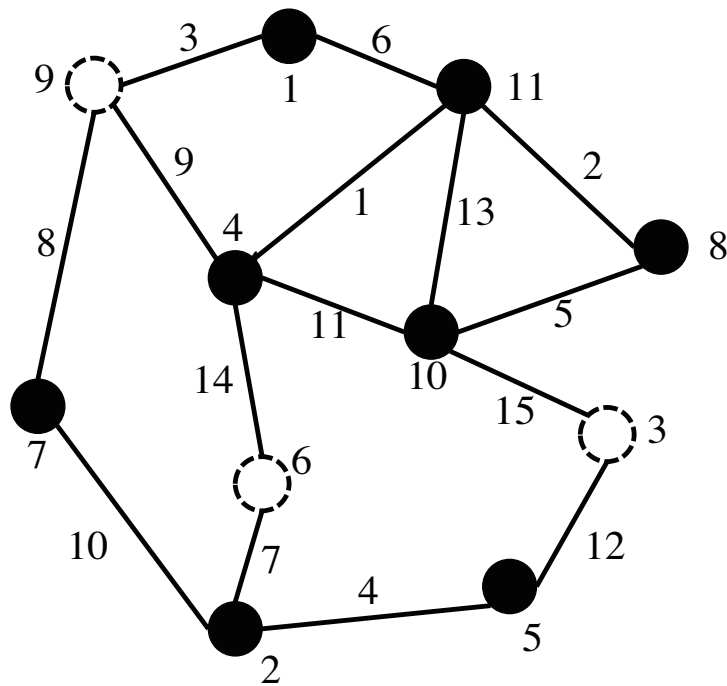


図 C.1 デモンストレーション用のネットワークの例：黒いノードは生存ノード，点線ノードは故障ノードを表す．簡単のため，ここではノードの故障のみが生じた場合を例示する．

(各成分は隣接ノードのインデックス)を表す．

$$\text{Node} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{NodeS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{NodeNext} = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 10 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 11 \\ 1 & 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

リンクについても同様に，Link, LinkS, LinksOfNode を用意し，それぞれリンクのインデックス，各リンクの生存故障，隣接リンク行列（各成分は NodeNext

で定義した隣接ノードとの間のリンクのインデックス)を表す.

$$\text{Link} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{LinkS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{LinksOfNode} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 0 \\ 12 & 15 & 0 & 0 \\ 14 & 9 & 11 & 1 \\ 4 & 12 & 0 & 0 \\ 7 & 14 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 8 & 0 \\ 15 & 11 & 5 & 13 \\ 6 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

ここからは、アルゴリズムの手順を簡単に説明する.

- (1) ネットワークの構造を読み込む. 必要な入力は, NodeS, LinkS, NodeNext, LinksOfnode, Oflag (デフォルトでは1)である.
- (2) NodeL, LinkL を用意する. これらはそれぞれ, Node, Link と同じ大きさであり, 成分は全て0である.
 $\text{NodeL} = \{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$
 $\text{LinkL} = \{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$
- (3) 可変長の行列である, NodeLP を用意する. この行列はコンポーネントのラベルに関する情報を保持し, HK アルゴリズムの本質(計算量を少なく出来るという意味で)と関係している. ネットワーク全体をスキャンした後は, NodeLP だけを操作する. また, リンクに関しては, 同様の行列を作る必要は無い.
- (4) ノードをラベルの順番にスキャンする. 各ノードをスキャンする毎に, NodeL 及び NodeLP の各要素は次に示す基準によって変更される.
 - (a) もし, ノードが故障している場合, 次のノードに移動する. 例として挙げたネットワークでは, {3,6,9} がそれに該当する.

(b) もし、ノードが生存しているが、隣接するノードがすべて故障している場合は、新しいコンポーネントであると認識する。このコンポーネントラベルを、NodeL 及び NodeLP に記録する。例として挙げたネットワークでは、該当するノードは無い。

(c) もし、ノードが生存しており、隣接するノードのうち少なくとも 1 つが生存している（リンク故障も考える場合はリンクも生存している必要がある）とき、2 つの可能性が考えられる。

i. もし、隣接ノードのうち、ひとつもコンポーネントラベル付けがされていない場合、新しいコンポーネントと認識し、それに応じて NodeL, NodeLP を更新する。例として挙げたネットワークでは、{1, 2, 4, 8} がそれに該当する。

ノード 8 参照終了時

NodeLP={1,2,3,4}

NodeL={1,2,0,3,2,0,2,4,0,0,0}

ii. もし、コンポーネントラベル付けされた隣接ノードがある場合、それらのうちで最も小さいコンポーネントラベルを参照する。それを、今参照しているノード (NodeL) および、その全ての隣接生存ノード (NodeLP) の適切な成分に対して、新たに割り当てる。

ノード 10 参照終了時

NodeLP={1,2,3,3}

NodeL={1,2,0,3,2,0,2,4,0,3,0}

ノード 11 参照終了時

NodeLP={1,2,1,3}

NodeL={1,2,0,3,2,0,2,4,0,3,1}

ステップ 4 が終わった後、NodeLP のみ进行操作する。

(a) NodeLP のラベルを、同コンポーネント内のノードに同じラベルが割り当てられるように、反復的に修正する。

$$\text{NodeLP}=[1,2,1,1]$$

(b) NodeLP のラベルを連続的になるように，並べ替えをする．

$$\text{NodeLP}=[1,2,1,1]$$

(5) NodeLP の修正されたラベルを NodeL および，LinkL に適用する．

$$\text{NodeL}=\{1,2,0,1,2,0,2,1,0,1,1\}$$

$$\text{LinkL}=\{1,1,1,2,1,1,2,2,1,2,1,2,1,1,1\}$$

(6) 最後に，リンク 1 本だけで構成されるコンポーネントをラベル付けする．

$$\text{LinkL}=\{1,1,1,2,1,1,2,2,1,2,1,2,1,1,1\}$$

C.3 HK アルゴリズムの考察

以下に，HK アルゴリズムの急所について，より詳細に説明する．上記の手順 3 で導入された NodeLP は，最小コンポーネントラベル記憶マトリクスともいえる．この行列は $1 \times m$ の横に長いベクトルあり， m はコンポーネントラベルが新しく追加される毎に 1 ずつ増えていく（手順 4. (c) i. 参照）．具体的には，参照されたノードの周り（隣接ノード）にコンポーネントラベルが付けられたノードが無い場合（手順 4. (c) i. 参照），新しいラベルを NodeLP の右に新たに加える．このコンポーネントラベルは 1 から順に割り当てられるため，古いノードほど小さいコンポーネントラベルが割り当てられる傾向がある．もし，NodeLP において左から数えて n 番目の成分が n である場合は，そのラベルが最小値であることを意味する．

現在参照したノードの周りに既に参照されたノードがある場合（手順 4. (c) ii. 参照），そのノードのラベルを NodeLP の成分の中から検索し，さらにそのラベルを左にたどっていく事で最小値を探索する．これを全ての周りのノードに対して行い，最も小さい値を NodeL 及び NodeLP に記憶する．同一コンポーネントに属するノードは，最も小さなコンポーネントラベルで同定されるというルールがあるため，局所的には真の最小値を探すことが必須である．その部分が [80] では不十分であったので， $N = 10000$ 程度のネットワークの場合，本来同じコンポーネントに属し，同一の最小ラベルが割り当てられるはず

が、異なる数字が割当てられるために、別々のコンポーネントとされるノードがわずかだが発生していた。よって、該当する箇所を著者が修正した。この操作では、現在直接参照されたノード i の近傍のノードやリンクのラベルのみが新しく更新されるため、同じコンポーネントに属するその他のノードやリンクのラベルについて上書きされない。つまり、同じコンポーネントであるが、それに属する各ノードには異なるラベルがついているまま（すなわち NodeLP を大規模に修正しない）で、NodeLP に履歴を記憶しておく事によってアルゴリズムを進めて行く事が出来る。最終的には、手順 4, 手順 5 によって、正しいコンポーネントラベル付けがされるように全体的な更新を行う。

ミクロな観点におけるメッセージ伝搬法ではバイナリ型メッセージが伝播されるのに対し、数値実験アルゴリズムでは、コンポーネントのラベルがメッセージの代替的役割を果たしている。このコンポーネントのラベルは、用意したネットワークの組成や、ノードのラベル付けに依存する形で発生するため、その解析的評価を次数分布などのようなトポロジーで特徴付ける事が出来ない。このため、数値実験アルゴリズムそのものの解析評価は困難であり、ミクロな観点におけるメッセージ伝搬とは区別して扱う。

また、[80] のアルゴリズムとメッセージ伝搬では、取り扱える状況が大きく異なる。前者では、全てのコンポーネントがラベルで区別されるため、GC のみならず全てのコンポーネントを分類する事が出来るし、局所ツリー近似を特に仮定していない。また、ノードやリンクの故障の様相も任意である。しかし、解析手法であるメッセージ伝搬ではノードの状態が次数に依存することを仮定する為、その準備段階であるミクロな視点においてもマクロ定式化に対応する準備をする必要がある。特に、マルチレイヤーネットワークの解析ではこの点に注意をしたい。

C.4 任意の次数相関

ピアソン係数を何らかの目標値に設定し、それによって導かれる次数相関を基に決定されるある確率を使って、ランダムネットワークのリンクのつなぎかえを行う [36] ことによって、目標とした次数相関をもつようなランダムネットワークを構築する事が出来る。これは、生成法則を考慮することなしに、模倣的に次数相関を導入した事に相当するが、一般的なパーコレーション解析や耐性解析においては、次数相関の影響がリンクを辿る毎に指数的に減少すること

から、システムの性質の研究に耐えうるものであると思われる。

C.5 相互依存ネットワーク

前節で考え方を紹介したので、本節では正確な手順、およびプログラムを記す。これは、[80] に記述されているものそのものである。(最小値ラベルを探索する所は、真の最小値でなければならず、[80] に記載されているプログラムのように、探索に 2 回遡るだけでは真の最小値でない可能性があって不十分(同一コンポーネントであるはずなのに、別のコンポーネントと認識される場合が出てくる)であるので、著者が修正した。

- (1) ネットワークのサイズを N とする。考える次数分布を元にグラフの組成を示す $N \times N$ の異なるランダム隣接マトリクスを 2 つ作成し、それぞれをネットワーク (レイヤー) A, B とする。
- (2) ネットワーク A からランダムに (あるいはターゲット破壊的に) 取り除くノードを $N(1-p)$ 個選び、ノード生存故障を意味するバイナリラベルを変更する。
- (3) ネットワーク B において、ノード m_b , ノード n_b がリンクで結合しているとする。この時ネットワークにおいてノード m_a , ノード n_a のクラスタラベルが一致しているかどうかをコンポーネント識別アルゴリズム [80] によって調べ、一致していない場合のみノード m_b とノード n_b を結びリンクを除去する。^{*34}
- (4) ネットワーク A においても 3 と同様の手順で、リンクを消去する。
- (5) 互いのネットワークのノードのコンポーネントのラベルが完全に一致するまで 3,4 の手順を繰り返す。

^{*34} この部分は、相互依存ネットワークの原論文 [25] におけるメカニズムに準拠しているが、3.7 でも言及したように、各ネットワークの GC かどうかのラベルをレイヤー間のメッセージとして定義しても等価な結果を得る。解析手法では、ノードの故障 (リンクの故障は考えない) のみによる記述をしていることに注意したい。

C.6 対立ネットワーク

対立ネットワークについても，アルゴリズムの概要を示す．

- (1) ネットワークのサイズを N とする．考える次数分布を元にグラフの組成を示す $N \times N$ のランダム隣接マトリクスを 2 つ作成し，ネットワーク (レイヤー) α, β とする．
- (2) ネットワーク α からランダムに取り除くノードを $N(1-p)$ 個選び，ノード生存故障を意味するバイナリラベルを変更する．
- (3) ネットワーク α において，HK アルゴリズム [80] によって GC を調べ，バイナリ反転ラベルを β に与える．
- (4) ネットワーク β においても，同様の手順で，GC を調べ，バイナリ反転ラベルを α に与える
- (5) 収束するまで 3, 4 の手順を繰り返すが，図 4.4 に示した通り周期的な結果を得る．(正しい周期性を得る為には，[81] において紹介されたアルゴリズムに C.3 に示したような修正が必要．)

参考文献

- [1] P. J. Flory, J. Am. Chem. Soc. **63**, 3083 (1941).
- [2] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley, Proc. Cambridge Philos. Soc. **53**, 629 (1957).
- [3] J. L. Cardy, J. Phys. A, **25**, 4 (1992).
- [4] S. Smirnov, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 no. 3, 239 (2001).
- [5] パーコレーションの基本原理, D. Stauffer and A. Aharony, 小田垣孝(訳), 吉岡書店 (2001).
(*Introduction to Percolation Theory*, 2nd ed. (Talyor and Francis, London, 1994)).
- [6] G. Grimett, *Percolation*, vol. 321 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* (Springer, 1999), 2nd ed.
- [7] B. Bollobás, S. Janson and O. Riordan, Random Struct. Alg. **31**, 3 (2007)
- [8] A. A. Saberi, Phys. Rep. **578**, 2015.
- [9] H. Kesten, Commun. in Math. Phys **74**, 41 (1980).
- [10] P. Erdős and A. Rényi, Publ. Math. Debrecen **6**, 290 (1959).
- [11] S. H. Strogatz, Nature **410**, 268 (2001).
- [12] D. J. Watts, *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999).
- [13] R. Albert and A.-L. Barabási, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).
- [14] S. Milgram, Psychology Today **1** 61 (1967).
- [15] M. E. J. Newman, SIAM Rev. **45**, 167 (2003).
- [16] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, Adv. Phys. **51** 1079 (2002).
- [17] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, Phys. Rep. **424**, 175-308 (2006).
- [18] S. Havlin and R. Cohen, COMPLEX NETWORKS, Structure, Robustness and Function, Cambridge university press (2010).
- [19] M. Barthélémy, Phys. Rep. **499** (2011).
- [20] “複雑ネットワークとその構造”, 矢久保考介, 共立出版 (2013).
- [21] 増田直紀, 今野紀雄, “複雑ネットワークの科学”, 産業図書, (2005).
- [22] S. Boccaletti, G. Bianconi, R. Criado, C.I. del Genio, J. Gómez-Gardenes, M. Romance, I. Sendina-Nadal, Z. Wang, and M. Zanin, Phys. Rep. **544** (2014).

-
- [23] M. Kivelä, A. Arenas, M. Barthélemy, J.P. Gleeson, Y. Moreno, and M.A. Porter, *Journal of Complex Networks*
- [24] Gregorio D'Agostino and Antonio Scala, *Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity* (Springer, 2014).
- [25] S. V. Buldyrev, R. Parshani, G. Paul, H. E. Stanley, and S. Havlin, *Nature* **464**, 1025 (2010).
- [26] R. Parshani, S. V. Buldyrev, and S. Havlin, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 048701 (2010).
- [27] A Vespignani, *Nature* **464**, 984 (2010).
- [28] M. Molloy and B. Reed, *Random. Struct. and Alg.* **6**, 161 (1995).
- [29] M. Chavez, M. Valencia, V. Navarro, V. Latora, and J. Martinerie, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 118701 (2010).
- [30] G. Bianconi, and A. Capocci, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 078701 (2003).
- [31] G. Bianconi, and M. Marsili, *J. Stat. Mech* (2005), P06005.
- [32] M. Mézard, G. Parisi, and M. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond* (World Scientific, Singapore, 1987).
- [33] M. Mézard and Montanari, *Information, Physics, and Computation* (Oxford University Press, Oxford, 2009).
- [34] M. E. J. Newman, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 208701 (2002).
- [35] S. Maslov and K. Sneppen, *Science* **296**, 910 (2002).
- [36] M. E. J. Newman, *Phys. Rev. E* **67**, 026126 (2003).
- [37] D. S. Callaway, M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5468 (2000).
- [38] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 026118 (2001).
- [39] Y. Shiraki and Y. Kabashima, *Phys. Rev. E* **82**, 036101 (2010).
- [40] S. Janson, D. E. Knuth, T. Łuczak, and B. Pittel, *Random Struct. and Alg.* **4**, 233 (1993).
- [41] S. Kirkpatrick, *Rev. Mod. Phys.* **45**, 574 (1973).
- [42] A. Barrat, M. Weight, *Eur. Phys. J. B* **13**, 547 (2000)
- [43] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, D. J. Watts, *Phys. Lett. A* **263**, 341 (1999).
- [44] A. X. C. N. Valente, A. Sarkar, and H. A. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 118702 (2004).

-
- [45] G. Paul, T. Tanizawa, S. Havlin, and H. E. Stanley, *Eur. Phys. J. B* **38**, 187 (2004).
- [46] E. Agliari, C. Cioli, and E. Guadagnini, *Phys. Rev. E* **84**, 031120 (2011).
- [47] T. Tanizawa, S. Havlin, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* **85**, 046109 (2012).
- [48] S. V. Buldyrev, N. W. Shere, and G. A. Cwilich, *Phys. Rev. E* **83**, 016112 (2011).
- [49] J. Gao, S. V. Buldyrev, S. Havlin, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 195701 (2011).
- [50] S. W. Son, P. Grassberger, M. Paczuski, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 195702 (2011).
- [51] R. G. Morris and M. Barthelemy, *Phys. Lett.* **109**, 128703 (2012).
- [52] G. J. Baxter, S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, *Phys. Lett.* **109**, 248701 (2012).
- [53] S. V. Buldyrev, N. W. Shere, and G. A. Cwilich, *Phys. Rev. E* **83**, 016112 (2011).
- [54] R. R. Liu, W. X. Wang, Y. C. Lai, and B. H. Wang, *Phys. Rev. E* **85**, 026110 (2012).
- [55] D. Zhou, H. E. Stanley, G. D'Agostino, and A. Scala, *Phys. Rev. E* **86**, 066103 (2012).
- [56] C. M. Schneider, N. A. M. Araújo, and H. J. Herrmann, *Phys. Rev. E* **87**, 043302 (2013).
- [57] R. Parshani, C. Rozenblat, D. Ietri, C. Ducruet, and S. Havlin, *Europhys. Lett.* **92**, 68002 (2010).
- [58] Z. Wang, A. Szolnoki, and M. Perc, *Europhys. Lett.* **97**, 48001 (2012).
- [59] S. W. Son, G. Bizhani, C. Christensen, P. Grassberger, and M. Paczuski, *Europhys. Lett.* **97**, 68002 (2012).
- [60] B. Podobnik, D. Horvatić, M. Dickison, and H. E. Stanley, *Europhys. Lett.* **100**, 50004 (2012).
- [61] X. Huang, S. Shao, H. Wang, S. V. Buldyrev, H. E. Stanley, and S. Havlin, *Europhys. Lett.* **101**, 18002 (2013).
- [62] G. Dong, L. Tian, R. Du, J. Gao, H. E. Stanley, and S. Havlin, *Europhys. Lett.* **102**, 68004 (2013).
- [63] K. Zhao and Ginestra Bianconi, *J. Stat. Mech* P05005 (2013).
- [64] B. Min, S. D. Yi, K.-M. Lee, K.-I. Goh, arXiv:1307.1253.

-
- [65] D. Cellai, E. López, J. Zhou, J. P. Gleeson, and G. Bianconi, arXiv:1307.6359v2
- [66] M. Mézard and G. Parisi, Eur. Phys. J. B **20**, 217 (2001).
- [67] X. Huang, J. Gao, S. V. Buldyrev, S. Havlin, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E **83**, 065101 (2011).
- [68] Y. Hu, B. Ksherim, R. Cohen, and S. Havlin, Phys. Rev. E **84**, 066116 (2011).
- [69] D. Zhou, J. Gao, H. E. Stanley, and S. Havlin, Phys. Rev. E **87**, 052812 (2013).
- [70] J. Shao, S.V. Buldyrev, S. Havlin, and H.E. Stanley, Phys. Rev. E **83**, 036116 (2011).
- [71] M. M. Danziger, A. Bashan, Y. Berezin, and S. Havlin, Journal of Complex Networks 2 (4), (2014)
- [72] S. M. Rinaldi, J. P. Peerenboom, and T. K. Kelly, IEEE, 2001
- [73] K. Zhao and G. Bianconi, J. Stat. Mech. P05005 (2013).
- [74] K. Zhao and G. Bianconi, J. Stat. **152** (2013).
- [75] B. Kotnis and J. Kuri, Phys. Rev. E (2014)
- [76] D. Zhou, H. E. Stanley, G. D'Agostino, and A. Scala, Phys. Rev. E **86**, 066103 (2012).
- [77] Pearl, J., *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference* (Morgan Kaufmann, San Francisco, 1988).
- [78] Hartmann, A. K., and M. Weigt, *Phase Transitions in Combinatorial Optimization Problems: Basics, Algorithms and Statistical Mechanics* (Wiley-VCH, Berlin, 2005).
- [79] S. Mizutaka and T. Tanizawa, Phys. Rev. E **94**, 02208 (2016).
- [80] J. Hoshen and R. Kopelman, Phys. Rev. B **14**, 3438 (1976).
- [81] A. Al-Futaisi and T. W. Patzek, Physica A **321**, 665 (2003).
- [82] Y. Watari, S. Nishijima, M. Fukasawa, F. Yamada, S. Abe, and T. Miyashita, Ecol. Evol. **3**, 4711 (2013).
- [83] K. Fukasawa, T. Miyashita, T. Hashimoto, M. Tatara, and S. Abe, Proc. R. Soc. London B **280**, 20132075 (2013).
- [84] M. E. Fisher, Physics **3**, 255 (1967).
- [85] A. Steger and N. C. Wormald, Combinations, Probab. Comput. **8**, 377 (1999).
- [86] S. Watanabe and Y. Kabashima, Phys. Rev. E **89**, 012808 (2014).

- [87] S. Watanabe and Y. Kabashima, Phys. Rev. E **94**, 032308 (2016).