

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

題目(和文)	パラメータ不確かさを有する非線形システムにおけるロバスト状態推定に関する研究
Title(English)	Study of robust state estimation for nonlinear systems with parameter uncertainties
著者(和文)	石原新士
Author(English)	Shinji Ishihara
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第10632号, 授与年月日:2017年9月20日, 学位の種別:課程博士, 審査員:山北 昌毅,三平 満司,倉林 大輔,早川 朋久,大山 真司
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第10632号, Conferred date:2017/9/20, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



Tokyo Institute of Technology

平成 29 年度 博士論文

パラメータ不確かさを有する  
非線形システムにおけるロバスト状態推定  
に関する研究

Study of robust state estimation for  
nonlinear systems with parameter  
uncertainties

2017年8月17日

東京工業大学大学院  
理工学研究科 機械制御システム専攻  
石原 新士  
指導教員 山北 昌毅 准教授



# Abstract

The Kalman filter (KF) provides optimal state estimates for linear dynamic systems with Gaussian process and measurement noises. For nonlinear systems, the Extended Kalman Filter (EKF) has long been the defacto standard. In recent years, effectiveness of Unscented Kalman Filter (UKF) has been attracting attention.

The KF and nonlinear KFs provide appropriate estimation results when the values of parameters of the dynamic and measurement models are known. However, it is not easy to obtain accurate parameters in real applications. So we have to consider parameter uncertainties to improve estimation accuracy in real applications.

There are several works which deal with state estimation for uncertain systems. We can mention the Schmidt-Kalman filter as a traditional method. The Schmidt-Kalman filter treats the parameter uncertainties as state dependent random errors. We can also mention robust KFs as a more recent method. These methods consider norm band parameter uncertainties and have less sensitive property to deviations. However, above robust KFs require specific structures for the model uncertainties, so they may not always be able to be applied to real applications. The Desensitised Kalman Filter (DKF) for nonlinear systems with parameter uncertainties has been proposed. The algorithm of the DKF is based on the principles of desensitized optimal control. The DKF doesn't require any specified structures, so it is more readily applied to real systems.

We derived robust EKF (REKF) and robust UKF (RUKF) by analyzing the influences of the parameter uncertainties on error prediction covariance matrices. These Robust Nonlinear Filters (RNF) only require nominal values of uncertain parameters so it's easy to implement in practice like the DKF.

The RNF is more accurate than conventional nonlinear KFs (NKF). However the RNF has some disadvantages : (1) when there is no parameter uncertainty, estimation accuracy of the RNF may be inferior to that of the NKF and (2) the estimated values of the RNF can have some offsets by the influence of parameter uncertainties. So, we developed an adaptive RNF (ARNF) by introducing an adaptive scheme into RNF to automatically tune the influence of the parameter uncertainties.

However, the estimated values of the RNF and ARNF may have stationary errors by the influence of parameter uncertainties. Then, we linearize the nonlinear systems and decouple unknown parameter vectors from state vectors. That is to say, we treat the unknown parameter vector as unknown input to the approximated linear models. Then, we apply an unbiased minimum variance estimation (UMVE) method for the approximated linear systems with unknown input. We named this method as Approximated Minimum Variance Unbiased Filter (AMVUF). The advantage of AMVUF is that the dynamics of state estimation error is not affected by the parameter estimation error.

All proposed robust filters mentioned above only estimate state vector. However, the estimation problem of unknown parameters is also important problem in engineering fields.

A joint estimation method is commonly used in the engineering fields. This method treats the uncertain parameters as new states and consider the state estimation problem for an augmented system. And a dual estimation method is also often used in the engineering fields like the joint estimation. However, there is a possibility that transitional estimation accuracy is decreased. So, we develop a new simultaneous states and parameters estimator for nonlinear systems by extending the AMVUF.

Furthermore, we derive Robust AMVUF (RAMVUF) by considering the linearization error at the derivation of the AMVUF. The RAMVUF minimizes the upper bound of error covariance matrix including effects of the parameter uncertainties and linearization error. The RAMVUF can provide more robust and accurate estimations.

The effectivenesses of all proposed methods are confirmed by several numerical simulations. Finally, concluding remarks on future research directions are discussed.

# 目次

<b>第1章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	研究の背景	1
1.2	本研究の目的	2
1.3	論文構成	3
<b>第2章</b>	<b>事前知識</b>	<b>6</b>
2.1	Kalman Filter	6
2.1.1	制御入力がない場合	6
2.1.2	制御入力がある場合	7
2.2	非線形カルマンフィルタ	8
2.2.1	Extended Kalman Filter	8
2.2.2	Unscented Kalman Filter	9
2.2.3	Equivalent Linearization Kalman Filter	11
<b>第3章</b>	<b>離散時間非線形ロバストフィルタ</b>	<b>12</b>
3.1	問題設定	12
3.2	Robust EKF (REKF)	12
3.3	Robust UKF (RUKF)	14
3.4	非線形ロバストフィルタ	16
3.5	非線形ロバストフィルタに関する議論	18
3.5.1	制御入力がある場合の導出	18
3.5.2	観測方程式にパラメータ不確かさが含まれる場合の導出	19
3.5.3	DKF と提案手法の関係性	21
3.5.4	その他の議論	23
	(1)Modified UKF との関係性	23
	(2) $\Delta P_k$ の設計指針	23
	(3) 未知パラメータの分散 $P_k^{pp}$ が未知の場合の設計指針	23
	(4) パラメータ不確かさの影響項について	23
3.6	非線形適応ロバストフィルタ	24
3.7	非線形ロバストフィルタのアルゴリズム	25
3.8	数値シミュレーション	26
3.8.1	シミュレーション対象	26
3.8.2	シミュレーション条件	27
3.8.3	シミュレーション結果	28
3.9	まとめ	37

<b>第 4 章</b>	<b>連続・離散非線形ロバストフィルタ</b>	<b>38</b>
4.1	問題設定	38
4.2	連続・離散ロバスト EKF	38
4.2.1	連続・離散ロバスト EKF の導出	38
4.2.2	連続・離散適応 REKF の導出	41
4.2.3	連続・離散 EKF のアルゴリズム	41
4.3	連続・離散非線形ロバストフィルタ	42
4.3.1	非線形ロバストフィルタの行列表現	42
4.3.2	連続・離散非線形ロバストフィルタの導出	45
4.3.3	連続・離散非線形適応ロバストフィルタ	46
4.3.4	連続・離散非線形ロバストフィルタのアルゴリズム	47
4.4	数値シミュレーション	47
4.4.1	シミュレーション例 1	47
4.4.2	シミュレーション例 2	52
4.5	まとめ	57
<b>第 5 章</b>	<b>近似最小分散不偏フィルタ</b>	<b>59</b>
5.1	問題設定	59
5.2	近似最小分散不偏フィルタによる状態量推定	59
5.2.1	非線形ロバストフィルタの推定誤差解析	59
5.2.2	近似最小分散不偏フィルタの導出	60
5.2.3	近似最小分散不偏推定フィルタに関する議論	62
	(1) 近似最小分散不偏フィルタの構成	62
	(2) 拡大系の可観測性との関係性	62
5.3	近似最小分散不偏フィルタによる状態量とパラメータの同時推定	64
5.3.1	同時推定フィルタの構成	64
5.3.2	パラメータ推定ステップの導出	65
5.3.3	調整型パラメータ推定ステップの導出	66
	調整型パラメータ推定ステップに関する注意点	67
5.3.4	更新ステップの導出	68
5.4	AMVUF のアルゴリズム	70
5.5	数値シミュレーション	71
5.5.1	シミュレーション対象	71
5.5.2	状態量のみ推定問題	72
5.5.3	状態量とパラメータの同時推定問題	76
5.6	まとめ	81
<b>第 6 章</b>	<b>ロバスト近似最小分散不偏フィルタ</b>	<b>82</b>
6.1	問題設定	82
6.2	線形近似誤差を考慮した予測誤差ダイナミクス	82
6.3	ロバスト近似最小分散不偏フィルタの導出	83

6.3.1	パラメータ推定ステップの導出 . . . . .	83
6.3.2	状態量推定ステップの導出 . . . . .	83
6.3.3	誤差共分散行列の上限値 $\Sigma_{k k}^{xx}$ の導出 . . . . .	84
6.4	ロバスト近似最小分散不偏フィルタのアルゴリズム . . . . .	86
6.5	ロバスト近似最小分散不偏フィルタに関する議論 . . . . .	87
6.5.1	スケーリング行列 $B_k$ について . . . . .	87
6.5.2	非線形観測システムについて . . . . .	87
6.6	数値シミュレーション . . . . .	87
6.6.1	シミュレーション対象 . . . . .	87
6.6.2	シミュレーション結果:条件1 . . . . .	89
6.6.3	シミュレーション結果:条件2 . . . . .	90
6.7	まとめ . . . . .	96
<b>第7章</b>	<b>結論</b>	<b>97</b>
	参考文献	99
	研究業績	103
	謝辞	105

## 目 次

3.1	Estimation error of $x_1$ (uncertain case)	30
3.2	Estimation error of $x_2$ (uncertain case)	30
3.3	Estimation error of $x_3$ (uncertain case)	31
3.4	Estimation error of $x_4$ (uncertain case)	31
3.5	Estimation error of $x_5$ (uncertain case)	32
3.6	Estimation error of $x_1$ (nominal case)	33
3.7	Estimation error of $x_2$ (nominal case)	34
3.8	Estimation error of $x_3$ (nominal case)	34
3.9	Estimation error of $x_4$ (nominal case)	35
3.10	Estimation error of $x_5$ (nominal case)	35
3.11	Adaptive parameter $\alpha_k$ (uncertain case)	36
3.12	Adaptive parameter $\alpha_k$ (nominal case)	37
4.1	Estimation values of current $i_a$ (uncertain case)	50
4.2	Estimation values of current $i_b$ (uncertain case)	50
4.3	Estimation values of speed (uncertain case)	51
4.4	Estimation values of position (uncertain case)	51
4.5	Estimation values of current $i_a$ (nominal case)	52
4.6	Estimation values of current $i_b$ (nominal case)	53
4.7	Estimation values of speed (nominal case)	53
4.8	Estimation values of position (nominal case)	54
4.9	Cart pendulum system	54
4.10	Estimation error of current $x_2$	57
4.11	Estimation values of current $x_4$	58
5.1	Block diagram of approximated linear system	62
5.2	Block diagram of Approximated MVUF	70
5.3	Estimation error of state $x_5$ (with parameter uncertainty)	74
5.4	Estimation error of state $x_5$ (without parameter uncertainty)	75
5.5	Estimation error of state $x_5$ and parameter $\gamma$	77
5.6	Estimation error of state $x_5$ and parameter $\gamma$ (comparison of initial condition)	79
6.1	Estimation error of JNKF	91
6.2	Estimation error of AMVUF	91
6.3	Estimation error of RAMVUF	92
6.4	Estimation error of JNKF	93
6.5	Estimation error of AMVUF	94
6.6	Estimation error of RAMVUF	94

## 表 目 次

3.1	Simulation parameters . . . . .	28
3.2	Simulation results (uncertain case) . . . . .	29
3.3	Simulation results (nominal case) . . . . .	32
3.4	Simulation results of latter half (nominal case) . . . . .	33
4.1	Simulation parameters of continious-time motor model . . . . .	48
4.2	Simulation Results (uncertain parameter) . . . . .	49
4.3	Simulation Results (nominal parameter) . . . . .	49
4.4	Simulation parameters of cart pendulum . . . . .	56
4.5	Silumation results : RMSE of each filter . . . . .	56
5.1	Simulation parameters . . . . .	72
5.2	Simulation results (uncertain) . . . . .	73
5.3	Simulation results(nominal) . . . . .	75
5.4	RMSE of each state . . . . .	76
5.5	RMSE of each state (changed initial condition) . . . . .	78
6.1	Simulation parameters . . . . .	89
6.2	RMSE of each state . . . . .	90
6.3	RMSE of each state . . . . .	92

# 第1章 序論

## 1.1 研究の背景

システムの内部条件や状態である「状態量」を数学的に表現された状態方程式に従って推定する「状態推定問題」は、工学・科学の様々な分野で研究されている [1]. 状態量を推定する手法としてはオブザーバが広く知られているが、オブザーバが対象とするシステムは雑音が存在しない確定的な場合を対象としている [2]. 一方で、確率的な枠組みで状態推定問題を扱う手法としてはカルマンフィルタ (Kalman Filter) が知られている [3]. カルマンフィルタは、航空・宇宙工学, ロボット工学, 信号・画像処理, 通信工学, 自動車, オートメーション化など工学分野に限らず, 計量経済学, 統計学, 認知科学, オペレーションズリサーチ, 気象海洋学など非常に多くの分野に応用されている [4, 5, 6]. 特にシステム制御分野においては, 状態フィードバック制御を行うために, 制御対象の状態量を把握する必要がある. しかし, 物理的な制約やコストの関係で, 状態量を直接計測することが困難な場合がある. そこで, このような制御対象に状態フィードバック制御を適用するためにカルマンフィルタが用いられる. また, システムに含まれる未知パラメータを決定するパラメータ同定問題, または, パラメータ推定問題にもカルマンフィルタが利用される [7].

カルマンフィルタは, 確率雑音を受ける線形システムにおける最適状態推定器として知られている. しかし, 現実の問題では推定対象が線形システムとは限らないため, 非線形システムを何らかの方法で線形システムに近似してカルマンフィルタを適用する手法が提案されている. 非線形システムを Taylor 展開によって線形システムに近似してカルマンフィルタを適用する手法である拡張カルマンフィルタ (EKF) は, カルマンフィルタの提案直後から提案されており, 現在でも産業分野で広く利用されている [8]. 一方, Sigma points と呼ばれる確定サンプリングを利用して非線形システムの統計的な性質を近似する, Unscented Kalman Filter (UKF) も提案されている [9, 10]. さらに, UKF と同様に Sigma points を利用した非線形フィルタとして Cubature Kalman Filter (CKF) も近年提案されている [11]. Sigma points を利用したカルマンフィルタは, 微分が行えない不連続なシステムにも適用できるため, EKF よりも多くのシステムに利用できることに利点がある. また, 統計的な性質を利用して非線形システムを線形システムに近似する手法である等価線形化を利用した等価線形化カルマンフィルタ (EqKF) も同様の性質を有する [5, 12]. なお, Sigma points のような確定サンプリングではなく, モンテカルロ法などの確率サンプリングを利用したカルマンフィルタであるアンサンブルカルマンフィルタ (EnKF) [13, 14] は, 実験データとシミュレーションモデルを融合するデータ同化と呼ばれる分野で近年注目を集めている [15, 16].

上記の線形, 非線形カルマンフィルタに基づく推定器は, 予測ステップにおいて対象システムのモデルを利用するため, 想定しているシステムモデルに不確かさが存在する場合には,

推定精度が劣化することが知られている [8, 17]. システムモデルの不確かさとしては, 確率雑音の確率分布モデルの違いや, モデルパラメータの誤差などが問題となる. 工学分野でカルマンフィルタが適用される機械システムや電機システムにおいては, モデルパラメータを正確に測定することが困難な場合が多いため, パラメータの不確かさ (未知パラメータ) への対応が重要になる.

カルマンフィルタをベースにして, 不確かさを有するシステムでもロバストな推定が行える様々なロバストカルマンフィルタ (RKF) が提案されている [17, 18, 19, 20]. これらのロバストカルマンフィルタはパラメータ不確かさが存在する場合でも良好な推定精度が維持できるものの, 不確かさを特定の行列表現で記述できることや, 不確かさを表現する行列を特定の行列不等式で記述できること, などの仮定が必要であるため, 常に実システムに適用できるとは限らない. 上記の課題に対して, Karlgaard らは Desensitized Kalman Filter (DKF) [21] を提案している. DKF は desensitized optimal control [22] の原理を状態推定に適用した手法であり, モデル不確かさの構造に特別な仮定を必要とせず, かつ, 推定対象システムの次数が増加することもないため, 実問題にも有用である. DKF は, 非線形システムの未知パラメータに関するヤコビアンを計算し, この未知パラメータに関するヤコビアンに重み行列をかけたものを通常のカルマンフィルタの評価関数に加え, この評価関数を最小化する問題を扱っている. このため, 未知パラメータについて微分できないモデルには DKF を適用できない上, 重み行列の設計方法が明確に示されていないという課題が残っている. なお, DKF は Schmidt-Kalman Filter ([8], pp.285-286) と類似した構成をとっていることに注意する.

上記のロバストカルマンフィルタや DKF は状態推定のみに着目したものである. しかしながら, 実際問題としては不確かさを有するパラメータ (未知パラメータ) 自体の推定も重要な課題になり得る. 例えば, 制御設計用に物理モデルのパラメータを同定したい場合など, 実際問題としては不確かさを有するパラメータの推定も重要な課題になり得る. また, 故障検知問題では故障信号を未知パラメータとして扱って, 状態量と故障状態に関する未知パラメータを同時に推定する手法が広く知られている [25]. 状態量と未知パラメータを推定する「同時推定手法」として, Joint 推定や Dual 推定が知られている [23, 24]. しかし, モデルパラメータを含む拡大系を扱う場合, 対象システムによっては可観測性が維持されずに推定値が発散してしまう恐れがある [26, 27]. さらに, 同時推定手法は状態推定の誤差とパラメータ推定の誤差が相互に影響するため, 特に推定過渡期における推定精度が低下する可能性がある.

一方で, 状態量と未知入力を別々に推定する手法として, Unbiased Minimum Variance Estimation (UMVE) [28] や Two-stage Kalman Filter (TKF) [29] が知られている. しかし, UMVE や TKF が利用できるのは線形システムに限られており, また, 未知パラメータの推定も行えないという課題がある.

## 1.2 本研究の目的

本研究の目的は, 上述の未知パラメータを含む非線形システムを対象としたロバストフィルタの提案を行うことにある.

まず、状態推定のみに着目した手法として非線形ロバストフィルタの導出を行う。提案する非線形ロバストフィルタは未知パラメータの平均と分散を既知のものと仮定し、未知パラメータが状態量の予測誤差共分散行列に与える影響を解析することで、最小化すべき評価関数の見直しを行う。非線形ロバストフィルタはDKFと異なり、重み行列の設計が不要である点に利点がある。

非線形ロバストフィルタは未知パラメータが存在するシステムに対する有効な手法であるが、これらの手法をパラメータ不確かさが少ないシステムに適用した場合には、EKF、UKFなどの通常の非線形カルマンフィルタよりも推定精度が劣る可能性がある。ただし、実問題においては未知パラメータの大きさを事前に見積もることが困難であることが多い。この課題に対して、観測誤差共分散行列を利用した適応則を利用することで未知パラメータの影響を調整する非線形適応ロバストフィルタの提案を行う。

また、先行研究におけるロバストフィルタの大半は状態方程式、観測方程式がともに離散時間システムで表現されるシステムのみを対象としている。しかし、サンプリング周期が長いシステムの場合、状態方程式を連続時間系、観測方程式を離散時間システムで表現する連続・離散システムの状態推定問題を扱わなければ、状態推定が正しく行えないことが知られている [30]。そこで、本研究では前述の離散時間系の非線形ロバストフィルタを連続・離散システムに適用できるように拡張を行う。

さらに、非線形ロバストフィルタの導出時に利用する線形近似システムの推定誤差期待値のダイナミクスに注目し、未知パラメータが状態量の推定値に影響を与えない条件を導出し、この拘束条件を利用した最適化問題を解くことで近似的に最小分散不偏推定を実現する、近似最小分散不偏フィルタを提案する。

その後、近似最小分散不偏フィルタを状態量と未知パラメータを同時に推定する問題へと拡張を行う。近似最小分散不偏フィルタを利用した同時推定手法は、Joint 推定や Dual 推定のように未知パラメータの推定誤差が状態量の推定結果に影響を与えない点に利点がある。

さらに、近似最小分散不偏フィルタの導出時に考慮しなかった線形化誤差が推定誤差共分散行列に与える影響を解析し、推定誤差共分散行列の上限値を導出し、この推定誤差共分散行列の上限値を最小化する手法として、ロバスト近似最小分散不偏フィルタの導出を行う。

## 1.3 論文構成

本論文の構成を以下に示す。

### 1 章 序論

論文の全体としての研究背景と目的について、先行研究との対比を行いながら紹介を行った。

### 2 章 事前知識

本章では、本論文に関係する事前知識として、線形システムにおける最適推定器であるカルマンフィルタについて紹介する。また、カルマンフィルタを非線形システムに適用する手法として、いくつかの非線形カルマンフィルタについて紹介する。まず、産

業界でも広く利用されている拡張カルマンフィルタ (EKF) を紹介する。つぎに、非線形性が強く EKF では扱うことが困難なシステムにて有用である UKF について紹介する。また、統計的な性質を近似するという観点で UKF と類似する等価線形化フィルタ (EqKF) について紹介する。

### 3 章 離散時間非線形ロバストフィルタ

本章では、パラメータ不確かさを有する非線形システムを対象とした非線形ロバストフィルタの導出を行う。まず、EKF の考え方にに基づき、非線形システムを Taylor 展開によって線形近似したシステムに従って、パラメータ不確かさが状態量の推定誤差共分散行列に与える影響を解析する。この解析結果に基づき、パラメータ不確かさの影響を考慮した推定誤差共分散行列を最小化するロバスト拡張カルマンフィルタ (REKF) を導出する。つぎに、U 変換を利用して近似線形システムを導出し、この近似線形化システムについて、REKF と同様の解析を行うことでロバスト UKF (RUKF) を導出する。その後、等価線形化フィルタの観点に従って、REKF と RUKF を統一した枠組みで表現し、非線形ロバストフィルタ (RNF) を導出する。

さらに、観測誤差共分散行列を利用した適応則を利用することでパラメータ不確かさの影響を自動的に調整する、非線形適応ロバストフィルタ (ARNF) の提案を行う。RNKF は未知パラメータがノミナル値と一致する場合には EKF や UKF に収束するといった特徴がある。なお、上記の適応則は実装上の観点より、計算負荷が低い簡易な適応則となっている。

### 4 章 連続・離散非線形ロバストフィルタ

本章では、3 章で提案を行った離散時間システムの非線形ロバストフィルタを連続・離散時間システムに適用できるように拡張を行う。

まず、離散時間システムのカルマンフィルタを連続時間システムに拡張する手法 [1] に従って、離散時間システムで導出した REKF を連続・離散システムに適用できるように拡張することで、連続・離散 REKF (CD-REKF) を導出する。

つぎに、離散時間システムの RUKF を連続離散システムに拡張するために、行列表現を用いた RUKF を導出する。その後、Sarkka[30] が提案した連続・離散 UKF の導出手法に従って、行列表現を利用した RUKF を連続・離散 RUFK (CD-RUKF) を導出する。

なお、CD-REKF, CD-RUKF はともに、その更新式が離散時間系に従うため、3 章で提案した適応則をそのまま利用することができる。

### 5 章 近似最小分散不偏フィルタ

本章では、非線形ロバストフィルタの導出時に利用する線形近似システムの推定誤差期待値のダイナミクスに注目し、未知パラメータが状態量の推定値に影響を与えない条件を導出し、この拘束条件を利用した最適化問題を解くことで近似的に最小分散不偏推定を実現する、近似最小分散不偏フィルタを提案する。なお、前記の最適化問題はラグランジュの未定乗数法を利用することで解析解を求めることができるため、通常非線形カルマンフィルタと比べても計算負荷の増加を抑制できることに利点がある。

## 6章 ロバスト近似最小分散不偏フィルタ

5章で提案した近似最小分散不偏フィルタは導出過程にて，線形化誤差を十分に考慮していない．本章では，パラメータ不確かさに加え，線形化誤差を陽に考慮した状態量の予測誤差共分散行列を演算することで近似最小分散不偏フィルタのロバスト化を行った，ロバスト近似最小分散不偏フィルタの提案を行う．

## 7章 結論

本章にて，本研究で得られた成果の総括と，我々の研究の今後の発展と課題などについて述べる．

## 第2章 事前知識

本章では，本論文で扱う状態推定問題の事前知識として，線形システムにおける最適推定器であるカルマンフィルタ (Kalman Filter : KF) について簡単に紹介する．また，カルマンフィルタを非線形システムに適用する手法として，拡張カルマンフィルタ (Extended KF : EKF)，Unscented Kalman Filter (UKF)，等価線形化カルマンフィルタ (Equivalent linearization KF : EqKF) について紹介する．

### 2.1 Kalman Filter

本節にて，線形システムの最適推定器であるカルマンフィルタについて紹介する．

#### 2.1.1 制御入力がない場合

次の確率雑音の影響を受ける線形システムを考える．

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k \quad (2.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2.2)$$

$x_k \in \mathbb{R}^n$  は状態量， $y_k \in \mathbb{R}^m$  は観測量である．システム行列  $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，観測行列  $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  は既知であると仮定する．また， $w_k, v_k$  はともに平均値が0，それぞれの分散が  $\mathbb{E}[w_k w_k^T] = Q_k$ ， $\mathbb{E}[v_k v_k^T] = R_k$  に従う正規白色性のプロセス雑音，観測雑音である．さらに，プロセス雑音  $w_k$  と観測雑音  $v_k$  には相関がない，つまり， $\mathbb{E}[w_k v_k^T] = 0$ ， $\mathbb{E}[v_k w_k^T] = 0$  が成立する，と仮定する．なお，プロセス雑音  $w_k$  の分散  $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は半正定値行列，観測雑音  $v_k$  の分散  $R_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$  は正定値行列とする．

カルマンフィルタは予測ステップと更新ステップの2ステップで構成され，それぞれのステップにおける演算は (2.3) 式～(2.10) 式で与えられる．

予測ステップ

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} \quad (2.3)$$

$$\hat{y}_{k|k-1} = H_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (2.4)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = F_{k-1} P_{k-1|k-1}^{xx} F_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (2.5)$$

$$P_{k|k-1}^{xy} = P_{k|k-1}^{xx} H_k^T \quad (2.6)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = H_k P_{k|k-1}^{xx} H_k^T + R_k \quad (2.7)$$

## 更新ステップ

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (2.8)$$

$$P_{k|k}^{xx} = P_{k|k-1}^{xx} - K_k \left( P_{k|k-1}^{xy} \right)^T \quad (2.9)$$

$$K_k = P_{k|k-1}^{xy} (P_{k|k-1}^{yy})^{-1} \quad (2.10)$$

なお, (2.3) 式～(2.10) 式における記号の定義は次の通りである.  $\hat{x}_{k|k-1}$ : 時刻  $k-1$  における状態量  $x_k$  の予測値,  $\hat{y}_{k|k-1}$ : 時刻  $k-1$  における観測値  $y_k$  の予測値,  $P_{k|k-1}^{xx}$ : 時刻  $k-1$  における状態量  $x_k$  の予測誤差共分散行列,  $P_{k|k-1}^{xy}$ : 時刻  $k-1$  における状態量  $x_k$  と観測値  $y_k$  の相互分散行列,  $P_{k|k-1}^{yy}$ : 時刻  $k-1$  における観測値  $y_k$  の観測誤差共分散行列,  $K_k$ : カルマンゲイン,  $\hat{x}_{k|k}$ : 時刻  $k$  における状態量  $x_k$  の推定値,  $P_{k|k}^{xx}$ : 時刻  $k$  における状態量  $x_k$  の推定誤差共分散行列.

ここで, (2.8)～(2.10) 式で与えられる更新式において, (2.10) 式のカルマンゲイン  $K_k$  は次の評価関数を最小化する, つまり, 最小分散推定を実現することを示す. なお,  $\text{Tr}(A)$  は行列  $A$  のトレースを意味する.

$$\begin{aligned} K_k &= \arg \min_{K_k} J(K_k) \\ &= \arg \min_{K_k} \text{Tr} \left( P_{k|k}^{xx} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

まず, (2.8) 式より, 推定誤差共分散行列  $P_{k|k}^{xx}$  を次式で与えることができる.

$$\begin{aligned} P_{k|k}^{xx} &= \mathbb{E} \left[ (x_k - \hat{x}_{k|k}) \cdot (x_k - \hat{x}_{k|k})^T \right] \\ &= P_{k|k-1}^{xx} - K_k P_{k|k-1}^{yx} - P_{k|k-1}^{xy} K_k^T + K_k P_{k|k-1}^{yy} K_k^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.11) 式に (2.12) 式を代入し,  $K_k$  について微分を行うと次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(K_k)}{\partial K_k} &= \frac{\partial}{\partial K_k} \text{Tr} \left( P_{k|k-1}^{xx} - K_k P_{k|k-1}^{yx} - P_{k|k-1}^{xy} K_k^T + K_k P_{k|k-1}^{yy} K_k^T \right) \\ &= -P_{k|k-1}^{xy} + K_k P_{k|k-1}^{yy} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

上式より, 直ちに (2.10) 式が導かれる. 以上の議論より, カルマンフィルタが最小分散推定器であることが示せた.

### 2.1.2 制御入力がある場合

状態方程式 (2.1) 式に制御入力  $u_k$  が含まれる, 次の線形システムを考える. なお, 制御入力  $u_k \in \mathbb{R}^d$  の値は正確に知ることができると仮定する.

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + w_k \quad (2.14)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2.15)$$

状態量  $x_k$ , 観測値  $y_k$ , 確率雑音  $w_k, v_k$  の定義は前節と同じである. 制御入力のゲイン行列  $G_k \in \mathbb{R}^{n \times d}$  もシステム行列  $F_k$ , 観測行列  $H_k$  と同様に既知とする.

制御入力  $u_k$  を考慮し, 制御入力を受けない場合の状態量  $x_k$  の予測式 (2.3) を次式で置き換える.

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} + G_{k-1}u_{k-1} \quad (2.16)$$

このとき, 予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{xx} &= \mathbb{E} \left[ (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \cdot (x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left\{ F_{k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}) + w_{k-1} \right\} \cdot \left\{ F_{k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}) + w_{k-1} \right\}^T \right] \\ &= F_{k-1} P_{k-1|k-1}^{xx} F_{k-1}^T + Q_{k-1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.17) 式は (2.5) 式と同じ式であることが分かる. このように制御入力  $u_k$  が印加される場合には, カルマンフィルタは予測式 (2.16) のみに入力  $u_k$  を考慮すれば良いことが分かる.

## 2.2 非線形カルマンフィルタ

本節では, 次の確率雑音の影響を受ける非線形システムを考える.

$$x_{k+1} = f(x_k) + w_k \quad (2.18)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (2.19)$$

状態量  $x_k$ , 観測値  $y_k$ , 確率雑音  $w_k, v_k$  の定義は前節と同じである. また, 非線形関数  $f(x_k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $h(x_k) \in \mathbb{R}^m$  はともに既知であると仮定する.

前節に示したカルマンフィルタの予測ステップ, 更新ステップを適用するには, 何らかの方法で非線形関数  $f(x_k), h(x_k)$  を線形関数へと近似する必要がある. 本稿では, 非線形カルマンフィルタの代表的な手法である EKF, UKF, EqKF について紹介を行う.

### 2.2.1 Extended Kalman Filter

本節では, 線形関数の演算に「Taylor 展開を利用した近似線形化」を利用する EKF を紹介する.

時刻  $k$  における状態量  $x_k$  の推定値を  $\hat{x}_{k|k}$  とし, 非線形関数  $f(x_k), h(x_k)$  をそれぞれ  $\hat{x}_{k|k}$  の周りで Taylor 展開すると次式を得る.

$$f(x_k) \approx f(\hat{x}_{k|k}) + F_k (x_k - \hat{x}_{k|k}) \quad (2.20)$$

$$h(x_k) \approx h(\hat{x}_{k|k}) + H_k (x_k - \hat{x}_{k|k}) \quad (2.21)$$

ここで、線形化行列  $F_k, H_k$  は次式で与えられる.

$$F_k := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k|k}} \quad (2.22)$$

$$H_k := \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k|k}} \quad (2.23)$$

この線形化行列を利用すると (2.18), (2.19) 式を次式で近似できる.

$$x_{k+1} = F_k x_k + \{f(\hat{x}_{k|k}) - F_k \hat{x}_{k|k}\} + w_k \quad (2.24)$$

$$y_k = H_k x_k + \{h(\hat{x}_{k|k}) - H_k \hat{x}_{k|k}\} + v_k \quad (2.25)$$

(2.24), (2.25) 式の  $\{\cdot\}$  は既知の値であり, それぞれ制御入力とみなすことができる. 2.1.2 節に示した通り, 制御入力加わるシステムであっても, KF の更新式は制御入力がないシステムと同様であるため, 線形化後のシステムとしては, 次式を考えることと等価である.

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k \quad (2.26)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2.27)$$

以上より, EKF においては, (2.5)~(2.7) 式における  $F_k, H_k$  に, (2.22), (2.23) 式で計算した  $F_k, H_k$  を利用すれば良いことがわかる.

## 2.2.2 Unscented Kalman Filter

EKF が非線形システム (2.18), (2.19) 式を Taylor 展開に従った近似線形化を用いて, KF のアルゴリズムを適用するに対して, UKF は確率ベクトルの平均値と共分散行列を近似する U 変換 (Unscented Transformation : UT) [9] を利用する. UKF は U 変換を利用した予測ステップと KF を利用した更新ステップを繰り返すことで再帰的に推定値の計算を行う. UKF は EKF と異なり, ヤコビアン計算が不要であるため, 非線形システム (2.18), (2.19) が微分できない不連続な場合にも適用できる利点がある.

以下に, UKF のアルゴリズムを簡単にまとめる.

- 初期化ステップ

- 推定初期値を与える :  $p(x_0) \sim \mathcal{N}(\hat{x}_0, P_0^{xx})$
- 重み列  $\mathcal{W}$  を次式で与える.

$$\mathcal{W}_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} \quad (2.28)$$

$$\mathcal{W}_0^{(c)} = \mathcal{W}_0^{(m)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad (2.29)$$

$$\mathcal{W}_i^{(m)} = \mathcal{W}_i^{(c)} = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (2.30)$$

なお,  $\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$  であり,  $\alpha, \kappa$  は設計パラメータである. 確率ベクトルがガウス分布に従う場合,  $n + \lambda = 3, \beta = 2$  とすることで U 変換における期待値の近似精度が最適となる [10].

● 予測ステップ

- 時刻  $k-1$  において、推定値が  $\hat{x}_{k-1|k-1}$ 、推定誤差共分散行列が  $P_{k-1|k-1}^{xx}$  で与えられるものとする。
- 次式に従って、 $2n+1$  個のシグマ点列  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}$  を生成する。

$$\mathcal{X}_{k-1|k-1} = \hat{x}_{k-1|k-1} \times \mathbf{1}_{1 \times (2n+1)} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma \sqrt{P_{k-1|k-1}^{xx}} & -\gamma \sqrt{P_{k-1|k-1}^{xx}} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

ここで、 $\gamma = \sqrt{n+\lambda}$  である。なお、 $\sqrt{A}$  は行列  $A$  の行列平方根である。行列平方根の計算にはコレスキー分解や特異値分解を利用するが、行列平方根の計算方法によって近似精度に違いが現れることに注意されたい [5]。

- シグマ点列  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}$  を状態方程式  $f(x)$  に従って変換し、予測値  $\hat{x}_{k|k-1}$  と予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  を計算する。

$$\mathcal{X}_{k|k-1,i} = f(\mathcal{X}_{k-1|k-1,i}, u_{k-1}, k-1) \quad (2.32)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i^{(m)} \mathcal{X}_{k|k-1,i} \quad (2.33)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i^{(c)} (\hat{x}_{k|k-1} - \mathcal{X}_{k|k-1,i}) (\hat{x}_{k|k-1} - \mathcal{X}_{k|k-1,i})^T + Q_{k-1} \quad (2.34)$$

- 上式で得られた  $\mathcal{X}_{k|k-1}$  を観測方程式  $h(x)$  に従って変換し、観測値の推定値  $\hat{y}_{k|k-1}$  と誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{yy}$  を計算する。

$$\mathcal{Y}_{k|k-1,i} = h(\mathcal{X}_{k|k-1,i}, k) \quad (2.35)$$

$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i^{(m)} \mathcal{Y}_{k|k-1,i} \quad (2.36)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i^{(c)} (\hat{y}_{k|k-1} - \mathcal{Y}_{k|k-1,i}) (\hat{y}_{k|k-1} - \mathcal{Y}_{k|k-1,i})^T + R_k \quad (2.37)$$

- 状態量と観測値の予測値の相互分散行列  $P_{k|k-1}^{xy}$  を次式によって計算する。

$$P_{k|k-1}^{xy} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i^{(c)} (\hat{x}_{k|k-1} - \mathcal{X}_{k|k-1,i}) (\hat{y}_{k|k-1} - \mathcal{Y}_{k|k-1,i})^T \quad (2.38)$$

● 更新ステップ

- カルマンフィルタの更新式に従い、更新を行う。

$$K_k = P_{k|k-1}^{xy} (P_{k|k-1}^{yy})^{-1} \quad (2.39)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (2.40)$$

$$P_{k|k}^{xx} = P_{k|k-1}^{xx} - K_k P_{k|k-1}^{yy} K_k^T \quad (2.41)$$

### 2.2.3 Equivalent Linearization Kalman Filter

前節で述べた通り，EKF は (2.22), (2.23) 式に示した通りヤコビアン の計算が必要であるため，非線形システム (2.18), (2.19) が微分できないシステムには適用できないという問題点がある．本節では，微分を必要としない線形化手法である等価線形化を利用した等価線形化カルマンフィルタについて説明する．

(2.18) 式における非線形関数  $f(x_k)$  を (2.20) 式と同じ形で近似することを考える．ここで，近似誤差  $e_{f,k}$  を次式で定義する．

$$e_{f,k} := f(x_k) - \{f(\hat{x}_{k|k}) + F_k (x_k - \hat{x}_{k|k})\} \quad (2.42)$$

等価線形化では，近似誤差の 2 乗平均を最小化するように線形化行列  $F_k$  を求める．このため，次の評価関数  $J(F_k)$  を考える．

$$J(F_k) := \arg \min_{F_k} \text{Tr} (\mathbb{E}[e_{f,k} \cdot e_{f,k}^T]) \quad (2.43)$$

(2.43) 式の評価関数を最小化する  $F_k$  は次式によって与えられる [5]．

$$F_k = \mathbb{E} \left[ \{f(x_k) - f(\hat{x}_{k|k})\} \cdot \{x_k - \hat{x}_{k|k}\}^T \right] P_{k|k}^{-1} \quad (2.44)$$

非線形関数  $h(x_k)$  についても，(2.21) 式と同じ形で近似を行うことを考えると，線形近似行列  $H_k$  を次式で得る．

$$H_k = \mathbb{E} \left[ \{h(x_k) - h(\hat{x}_{k|k})\} \cdot \{x_k - \hat{x}_{k|k}\}^T \right] P_{k|k}^{-1} \quad (2.45)$$

なお，(2.44), (2.45) 式を計算するためには期待値の計算が必要である．この期待値計算に U 変換を利用した USL (Unsecnted Statistical Linearization)[31] が効果的な演算手法として知られている．また，粒子フィルタ [32, 33] で利用されるような確率サンプリングによって期待値計算を行っても良い．

# 第3章 離散時間非線形ロバストフィルタ

## 3.1 問題設定

次の確率雑音の影響を受ける非線形システムを考える。

$$x_{k+1} = f(x_k, p_k) + w_k \quad (3.1)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (3.2)$$

2章と同様に  $x_k \in \mathbb{R}^n$  は状態量,  $y_k \in \mathbb{R}^m$  は観測量である。また,  $w_k, v_k$  はともに平均値が0, それぞれの分散が  $\mathbb{E}[w_k w_k^T] = Q_k$ ,  $\mathbb{E}[v_k v_k^T] = R_k$  に従う正規白色性のプロセス雑音, 観測雑音である。さらに, プロセス雑音  $w_k$  と観測雑音  $v_k$  には相関がない, つまり,  $\mathbb{E}[w_k v_k^T] = 0$ ,  $\mathbb{E}[v_k w_k^T] = 0$  が成立する, と仮定する。なお, プロセス雑音  $w_k$  の分散  $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は半正定値行列, 観測雑音  $v_k$  の分散  $R_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$  は正定値行列とする。また, 不確かさを含むパラメータベクトル  $p_k \in \mathbb{R}^l$  は平均値 (ノミナル値) と分散がそれぞれ  $p_k^{\text{nom}} \in \mathbb{R}^l$ ,  $P_k^{\text{pp}} \in \mathbb{R}^{l \times l}$  に従うものとし, 平均値  $p_k^{\text{nom}}$  と分散  $P_k^{\text{pp}}$  の値は既知であり, さらに, 状態量  $x_k$  と未知パラメータ  $p_k$  は相関がない, つまり,  $\mathbb{E}[x_k p_k^T] = 0$ ,  $\mathbb{E}[p_k x_k^T] = 0$  が成立する, と仮定する。

## 3.2 Robust EKF (REKF)

まず, (3.1) 式の未知パラメータ  $p_k$  が EKF の予測誤差共分散行列に与える影響を解析する。状態量  $x_{k-1}$  の推定値を  $\hat{x}_{k-1}$  として, (3.1) 式を  $(\hat{x}_{k-1}, p_{k-1}^{\text{nom}})$  のまわりで Taylor 展開すると次式を得る。

$$x_k = f(\hat{x}_{k-1}, p_{k-1}^{\text{nom}}) + F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + \cdots + w_{k-1} \quad (3.3)$$

ここで, 推定誤差を  $\tilde{x}_{k-1} := x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}$ , パラメータ偏差を  $\tilde{p}_{k-1} := p_{k-1} - p_{k-1}^{\text{nom}}$  で定義する。なお, (3.3) 式における  $F_k$ ,  $G_k$  は次式で与えられる線形化行列である。

$$F_k := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}, p=p_{k-1}^{\text{nom}}} \quad (3.4)$$

$$G_k := \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}, p=p_{k-1}^{\text{nom}}} \quad (3.5)$$

一方で, パラメータのノミナル値  $p_{k-1}^{\text{nom}}$  を利用した EKF で計算される予測値  $\hat{x}_{k|k-1}$  は次式で与えることができる。

$$\hat{x}_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1}, p_{k-1}^{\text{nom}}) \quad (3.6)$$

ここで、予測誤差を  $\tilde{x}_{k|k-1} := x_k - \hat{x}_{k|k-1}$  で定義すると、 $\tilde{x}_{k|k-1}$  は (3.3) 式と (3.6) 式の差より次式で与えることができる。

$$\tilde{x}_{k|k-1} = F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + \cdots + w_{k-1} \quad (3.7)$$

さらに、(3.7) 式を使うと、予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  を次式で近似できる。

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{xx} &= \mathbb{E}(\tilde{x}_{k|k-1} \cdot \tilde{x}_{k|k-1}^T) \\ &\approx F_k \mathbb{E}(\tilde{x}_{k-1} \tilde{x}_{k-1}^T) F_k^T + Q_{k-1} + G_k \mathbb{E}(\tilde{p}_{k-1} \tilde{p}_{k-1}^T) G_k^T + \Delta P_k \\ &= F_k P_{k-1}^{xx} F_k^T + Q_{k-1} + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T + \Delta P_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

なお、 $\Delta P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は Taylor 展開で得られた高次の項の期待値をまとめた行列である。また、状態量  $x_{k-1}$  と未知パラメータ  $p_{k-1}$  が無相関であることを仮定しているので、 $\tilde{x}$  と  $\tilde{p}$  の積に関する期待値は 0 になることに注意されたい。

一方で、通常の EKF で計算される予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{EKF}}$  は次式で与えられる。

$$P_{k|k-1}^{\text{EKF}} = F_k P_{k-1}^{xx} F_k^T + Q_{k-1} \quad (3.9)$$

よって、(3.8) 式は (3.9) 式を利用して、次式で表すことができる。

$$P_{k|k-1}^{xx} = P_{k|k-1}^{\text{EKF}} + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T + \Delta P_k \quad (3.10)$$

以上の解析より、未知パラメータが含まれる場合の予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  に比べて、未知パラメータ  $p_k$  の影響を陽に考慮していない通常の EKF の予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{EKF}}$  は、「 $G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T + \Delta P_k$ 」分少なく見積もってしまっていることがわかる。

Xiong らによる非線形フィルタの安定性解析結果 [27] によれば、EKF の予測誤差共分散行列の推定値を小さく見積もってしまうと推定誤差の Lyapunov 安定性が保証されなくなることが示されている。ゆえに、パラメータ不確かさを有する非線形システムに通常の EKF を適用すると、推定値が発散してしまう可能性がある。

本節で提案する Robust EKF (REKF) では、以上の解析結果に基づき、パラメータ不確かさの影響  $G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T$  を陽に考慮して予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{REKF}}$  を次式で与える。

$$P_{k|k-1}^{\text{REKF}} = P_{k|k-1}^{\text{EKF}} + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T + \Delta P_k^{\text{REKF}} \quad (3.11)$$

ここで、 $\Delta P_k^{\text{REKF}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は、真値を計算することが困難な  $\Delta P_k$  の影響を補償するために利用する設計パラメータである。以上のように、REKF はパラメータ不確かさの影響項  $G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T$  を考慮して  $P_{k|k-1}^{\text{REKF}}$  を計算し、予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  との偏差を抑制することで、正確な推定を実現する。

つぎに、2.2.1 節に示した EKF と同様に観測方程式 (3.2) を  $\hat{x}_{k|k-1}$  まわりで線形化すると次式を得る。

$$\begin{aligned} y_k &\approx H_k \tilde{x}_{k|k-1} + h(\hat{x}_{k|k-1}) + v_k \\ &\approx H_k \tilde{x}_{k|k-1} + \hat{y}_{k|k-1} + v_k \\ H_k &:= \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k|k-1}} \end{aligned}$$

よって、未知パラメータ  $p_k$  の影響を考慮した場合の観測誤差共分散行列、相互分散行列は次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{xy, \text{REKF}} &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{x}_{k|k-1} (y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T \right\} \\ &\approx \mathbb{E} \left( \tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^T \right) H_k^T \\ &= P_{k|k-1}^{\text{REKF}} H_k^T \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{yy, \text{REKF}} &= \mathbb{E} \left\{ (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) (y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T \right\} \\ &\approx H_k \mathbb{E} \left( \tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^T \right) H_k^T + R_k \\ &= H_k P_{k|k-1}^{\text{REKF}} H_k^T + R_k \end{aligned} \quad (3.13)$$

さらに、状態量の更新式を (2.8) 式と同じ形式の次式で与えた場合、

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k^{\text{REKF}} (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (3.14)$$

となり、推定誤差共分散行列  $P_{k|k}^{\text{REKF}}$  を次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} P_{k|k}^{\text{REKF}} &= \mathbb{E} \left[ (x_k - \hat{x}_{k|k}) (x_k - \hat{x}_{k|k})^T \right] \\ &= P_{k|k-1}^{\text{REKF}} - K_k^{\text{REKF}} P_{k|k-1}^{yx, \text{REKF}} - P_{k|k-1}^{xy, \text{REKF}} (K_k^{\text{REKF}})^T + K_k^{\text{REKF}} P_{k|k-1}^{yy, \text{REKF}} (K_k^{\text{REKF}})^T \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここで、(3.15) 式は (2.12) 式と同様の形であるので、最小分散推定を実現する最適ゲイン  $K_k^{\text{REKF}}$  は次式の通りになる。

$$K_k^{\text{REKF}} = P_{k|k-1}^{xy, \text{REKF}} \left( P_{k|k-1}^{yy, \text{REKF}} \right)^{-1} \quad (3.16)$$

以上より、REKF は予測ステップの計算 (3.11) でパラメータ不確かさの影響項を加算する形をとっている以外は、通常の EKF と同様のアルゴリズムであることが分かる。

### 3.3 Robust UKF (RUKF)

3.2 節では、EKF をベースとしたロバストフィルタである REKF を導出した。REKF は通常の EKF と同様にヤコビアン計算が必要であるため、非線形関数  $f(x_k, p_k)$  が微分できないシステムには適用することができない。この問題を解決するために、本節にて UKF をベースとしたロバストフィルタである RUKF を導出する。

3.2 節にて、未知パラメータ  $p_k$  が予測誤差共分散行列に与える影響は「 $G_k P_{k-1}^{\text{PP}} G_k^T$ 」で近似できることを示した。

ここで、時刻  $k-1$  における未知パラメータ  $p_{k-1}$  に関するシグマ点列  $\mathcal{P}_{k-1|k-1} \in \mathbb{R}^{l \times (2l+1)}$  を次式で与える。

$$\mathcal{P}_{k-1|k-1} = p_{k-1}^{\text{nom}} \times \mathbf{1}_{1 \times (2l+1)} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma_l \sqrt{P_{k-1}^{\text{PP}}} & -\gamma_l \sqrt{P_{k-1}^{\text{PP}}} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

なお,  $\gamma_l$  は未知パラメータ  $p_{k-1}$  に対応するスカラー値のスケーリング係数である.

状態ベクトル  $x_{k-1}$  を推定値  $\hat{x}_{k-1|k-1}$  で固定し, 未知パラメータベクトル  $p_{k-1}$  に対してシグマ点列  $\mathcal{P}_{k-1|k-1}$  を利用した状態量の予測値  $\hat{x}_{k|k-1}^p$  は次式で計算することができる.

$$\mathcal{X}_{k|k-1,i}^p = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, \mathcal{P}_{k-1|k-1}^i) \quad (3.18)$$

$$\hat{x}_{k|k-1}^p = \sum_{i=0}^{2l} \mathcal{W}_i^{(m,p)} \mathcal{X}_{k|k-1,i}^p \quad (3.19)$$

なお,  $\mathcal{W}^{(m,p)}$  は (2.30) 式の  $\mathcal{W}^{(m)}$  を状態ベクトルの次数  $n$  の代わりにパラメータの次数  $l$  で設定した重みベクトルである. 同じく, 以降の式に現れる  $\mathcal{W}^{(c,p)}$  も  $\mathcal{W}^{(c)}$  に対応する重みベクトルである.

ここで, (3.18) 式を未知パラメータのノミナル値  $p_{k-1}^{\text{nom}}$  の周りで Taylor 展開すると,

$$\mathcal{X}_{k|k-1,i}^p = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, p_{k-1}^{\text{nom}}) + G_k \tilde{p}_{k-1} + \dots \quad (3.20)$$

が得られる. なお, 上式における  $G_k$  は (3.5) 式で与えられる. 一方, (3.19) 式について, 次の近似式が成り立つ [6].

$$\hat{x}_{k|k-1}^p \approx f(\hat{x}_{k-1|k-1}, p_{k-1}^{\text{nom}}) \quad (3.21)$$

(3.20), (3.21) 式を利用して, 未知パラメータベクトル  $p_{k-1}$  に対するシグマ点列  $\mathcal{P}$  を利用した U 変換で近似される予測誤差共分散  $P_{k|k-1}^{\text{pp}}$  を計算すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{\text{pp}} &= \sum_{i=0}^{2l} \mathcal{W}_i^{(c,p)} (\hat{x}_{k|k-1}^p - \mathcal{X}_{k|k-1,i}^p) (\hat{x}_{k|k-1}^p - \mathcal{X}_{k|k-1,i}^p)^T \\ &= \sum_{i=0}^{2l} \mathcal{W}_i^{(c,p)} (G_k \tilde{p}_{k-1} + \dots) (G_k \tilde{p}_{k-1} + \dots)^T \\ &= G_k P_{k-1}^{\text{pp}} G_k^T + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

(3.22) 式は REKF で導出したパラメータ不確かさの影響項と同じ形式をとっていることが分かる. (3.22) 式を利用すれば, パラメータ不確かさの影響項の計算にヤコビアン計算が不要となるため, 非線形関数  $f(x_k, p_k)$  が微分できないシステムにも適用することができる.

以上の議論を考慮し, RUKF の予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{RUKF}}$  は次式で与えることができる.

$$P_{k|k-1}^{\text{RUKF}} = P_{k|k-1}^{\text{UKF}} + P_{k|k-1}^{\text{pp}} + \Delta P_k^{\text{RUKF}} \quad (3.23)$$

なお,  $P_{k|k-1}^{\text{UKF}}$  は (2.34) 式で計算される通常の UKF の予測誤差共分散行列であり,  $\Delta P_k^{\text{RUKF}}$  は REKF と同様に近似誤差を補償するための設計パラメータである.

RUKF の予測誤差共分散行列は通常の UKF とは異なるため, 次式に従ってシグマ点列  $\mathcal{X}_{k|k-1}$  を生成する必要がある.

$$\mathcal{X}_{k|k-1} = \hat{x}_{k|k-1} \times \mathbf{1}_{1 \times (2n+1)} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma \sqrt{P_{k|k-1}^{\text{RUKF}}} & -\gamma \sqrt{P_{k|k-1}^{\text{RUKF}}} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

RUKF の以降の計算は (3.24) 式のシグマ点列  $\mathcal{X}_{k|k-1}$  を利用して, (2.35)~(2.38) 式の演算を行えばよい.

なお, 観測方程式 (3.2) が  $y_k = H_k x_k + v_k$  で与えられる線形システムの場合に限って, 上記のシグマ点列の生成は不要であり, 状態量と観測値の予測値の相互分散行列  $P_{k|k-1}^{xy}$ , 観測値の誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{yy}$  を次式で計算できる.

$$P_{k|k-1}^{xy} = P_{k|k-1}^{\text{RUKF}} H_k^T \quad (3.25)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = H_k P_{k|k-1}^{\text{RUKF}} H_k^T + R_k \quad (3.26)$$

### 3.4 非線形ロバストフィルタ

本節では, 3.2, 3.3 節で導出した REKF, RUKF を統一の表現方法でまとめた非線形ロバストフィルタを導出する.

まず, 非線形ロバストフィルタの予測ステップの導出を行う. (3.1) 式 of 非線形関数  $f(x_{k-1}, p_{k-1})$  について,  $(\hat{x}_{k-1|k-1}, p_{k-1}^{\text{nom}})$  の周りで線形化を行うと次式を得る.

$$x_k \approx F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + \hat{x}_{k|k-1} + w_{k-1} \quad (3.27)$$

ここで,  $\tilde{x}_{k-1} = x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}$  は推定誤差,  $\tilde{p}_{k-1} = p_{k-1} - p_{k-1}^{\text{nom}}$  はパラメータ偏差である. (3.27) 式の予測値  $\hat{x}_{k|k-1}$  は EKF では,

$$\hat{x}_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, p_{k-1}^{\text{nom}}) \quad (3.28)$$

によって演算できる. また, U 変換を利用した等価線形化 KF, もしくは UKF では,

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i f(\mathcal{X}_i, p_{k-1}^{\text{nom}}) \quad (3.29)$$

によって演算できる. なお,  $\mathcal{X}_i$  は  $\mathcal{N}(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1}^{xx})$  からサンプリングするシグマ点列である. また, 状態ベクトル  $x$  がガウス分布に従う場合の重み行列  $\mathcal{W}_i$  の最適な設計方法については文献 [9, 31] を参照されたい.

さらに, (3.27) 式における線形化行列  $F_k, G_k$  は EKF で利用される Taylor 展開による近似線形化の場合には,

$$F_k = \left. \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}, p=p_{k-1}^{\text{nom}}} \quad (3.30)$$

$$G_k = \left. \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}, p=p_{k-1}^{\text{nom}}} \quad (3.31)$$

によって演算できる. 一方, 線形化手法として U 変換を利用する場合には,

$$F_k = \left\{ \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i f(\mathcal{X}_i, p_{k-1}^{\text{nom}}) (\mathcal{X}_i - \hat{x}_{k-1})^T \right\} \{P_{k-1}^{xx}\}^{-1} \quad (3.32)$$

$$G_k = \left\{ \sum_{j=0}^{2l} \mathcal{W}_j^p f(\hat{x}_{k-1|k-1}, \mathcal{P}_j) (\mathcal{P}_j - p_{k-1}^{\text{nom}})^T \right\} \{P_{k-1}^{pp}\}^{-1} \quad (3.33)$$

によって計算する. (3.33) 式における  $\mathcal{P}_j$  は, 前述の通り, 不確かさを有するパラメータベクトル  $p_k$  についてのシグマ点列であり,  $\mathcal{W}_j^p$  はこれに対応するシグマ点列の重み列である.

ここで, (3.27) 式を用いると, 予測誤差  $\tilde{x}_{k|k-1}$  を次式で近似することができる.

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k|k-1} &:= x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ &\approx x_k - f(\hat{x}_{k-1|k-1}) \\ &\approx F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + w_{k-1}\end{aligned}\quad (3.34)$$

上式を利用すると, 予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  を次式のように近似できる.

$$\begin{aligned}P_{k|k-1}^{xx} &= \mathbb{E}[\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^T] \\ &\approx F_k P_{k-1}^{xx} F_k^T + Q_{k-1} + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T\end{aligned}\quad (3.35)$$

ここで, (3.35) 式の  $F_k P_{k-1}^{xx} F_k^T + Q_{k-1}$  は通常为非線形カルマンフィルタで計算される予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  に相当する. この事実と, (3.35) 式より, パラメータ不確かさを考慮していない通常为非線形カルマンフィルタでは, パラメータ不確かさの影響項である  $G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T$  分, 予測誤差共分散行列を小さく見積もってしまうことがわかる. 当然であるが, これは REKF, RUKF の導出結果と同じ結論である.

通常为非線形カルマンフィルタで計算される予測誤差共分散行列を次式で定義する.

$$P_{k|k-1}^{\text{nom}} = F_k P_{k-1}^{xx} F_k^T + Q_{k-1}\quad (3.36)$$

さらに, パラメータ不確かさの影響を  $P_{k|k-1}^{\text{prob}} := G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T$  で定義すると, (3.35) 式の予測誤差共分散行列を次式で与えることができる.

$$P_{k|k-1}^{xx} = P_{k|k-1}^{\text{nom}} + P_{k|k-1}^{\text{prob}}\quad (3.37)$$

なお, REKF, RUKF と同様に近似誤差を考慮するための設計行列  $\Delta P_k$  を用いて, 次式のように定義しても良い.

$$P_{k|k-1}^{\text{prob}} = G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T + \Delta P_k\quad (3.38)$$

つぎに, 更新ステップの導出を行う. (3.2) 式の非線形関数  $h(x)$  を予測推定値  $\hat{x}_{k|k-1}$  の周りで近似すると次式を得る.

$$y_k \approx H_k \tilde{x}_{k|k-1} + \hat{y}_{k|k-1} + v_k\quad (3.39)$$

ここで,  $H_k$  は (2.23) 式, もしくは, (2.45) 式を用いて求めることができる. ただし, (2.45) 式を用いる場合には, 共分散行列に (3.37) 式を利用することに注意されたい. 線形化行列  $H_k$  が求まると, 以降の演算は (2.6)~(2.9) 式に従えば良い.

以上の議論より, REKF, RUKF を非線形ロバストフィルタによって, 統一表現できることを示せた. よって, 以降は非線形ロバストフィルタの表現を利用して議論を行う.

## 3.5 非線形ロバストフィルタに関する議論

### 3.5.1 制御入力がある場合の導出

3.2～3.4節では、制御入力  $u$  を含まないシステムを考えていた。システム制御の分野では、一般に制御入力  $u$  を含むシステムの状態推定問題を考える必要があるため、本小節では次の制御入力  $u$  を含むシステムについての非線形ロバストフィルタを導出する。

$$x_{k+1} = f(x_k, p_k) + g(x_k)u_k + w_k \quad (3.40)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (3.41)$$

まず、これまでの非線形ロバストフィルタの導出方法と同様に (3.40) 式を、等価線形化の一種である USL [31] を利用して近似線形化する。等価線形化を行うために、次の評価関数を最小化する問題を考える。

$$J_k = \mathbb{E} \left[ \left\| f(x_{k-1}, p_{k-1}) + g(x_{k-1})u_{k-1} - \{F_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}) + G_k(p_{k-1} - p_{k-1}^{\text{nom}}) + d_k\} \right\|^2 \right] \quad (3.42)$$

(3.42) 式を各線形化行列  $F_k, G_k$  とドリフト項  $d_k$  で偏微分することで、次の最適解を得る。

$$F_k = \mathbb{E} \left[ \{f(x_{k-1}, p_{k-1}) + g(x_{k-1})u_{k-1}\} \tilde{x}_{k-1}^T \right] \{P_{k-1}^{xx}\}^{-1} \quad (3.43)$$

$$G_k = \mathbb{E} \left[ \{f(x_{k-1}, p_{k-1}) + g(x_{k-1})u_{k-1}\} \tilde{p}_{k-1}^T \right] \{P_{k-1}^{pp}\}^{-1} \quad (3.44)$$

$$d_k = \mathbb{E} [f(x_{k-1}, p_{k-1}) + g(x_{k-1})u_{k-1}] \quad (3.45)$$

なお、推定誤差  $\tilde{x}_{k-1}$ 、パラメータ偏差  $\tilde{p}_{k-1}$  の定義は前述の通りである。さらに、(3.43)～(3.45) 式は UT を利用することで、次式で近似計算することができる。

$$F_k \approx \left[ \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{x,i} \{f(\mathcal{X}_i, p_{k-1}^{\text{nom}}) + g(\mathcal{X}_i)u_{k-1}\} (\mathcal{X}_i - \hat{x}_{k-1|k-1})^T \right] \times \{P_{k-1}^{xx}\}^{-1} \quad (3.46)$$

$$G_k \approx \left[ \sum_{j=0}^{2l} \mathcal{W}_{p,j} \{f(\hat{x}_{k-1|k-1}, \mathcal{P}_j) + g(\hat{x}_{k-1|k-1})u_{k-1}\} (\mathcal{P}_j - p_{k-1}^{\text{nom}})^T \right] \times \{P_{k-1}^{pp}\}^{-1} \quad (3.47)$$

$$d_k \approx \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{x,i} \{f(\mathcal{X}_i, p_{k-1}^{\text{nom}}) + g(\mathcal{X}_i)u_{k-1}\} \quad (3.48)$$

以上より、制御入力  $u$  を含む非線形システム (3.40) を次式で近似できる。

$$x_k \approx F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + d_k + w_{k-1} \quad (3.49)$$

また、(3.45) 式より  $\hat{x}_{k|k-1} \approx d_k$  であるので、予測誤差共分散行列を次式で導出できる。

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{xx} &= \mathbb{E} [\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^T] \\ &\approx F_k P_{k-1}^{xx} F_k^T + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T + Q_{k-1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

上式より、制御入力  $u$  が含まれる場合でも、線形化行列  $F_k$ ,  $G_k$  の演算値が変更されるだけで、予測誤差共分散行列は制御入力がない場合 (3.35) と同じであることがわかる。

次に、(3.40) 式の  $g(x)$  もパラメータ不確かさを有する場合について考える。

$$x_{k+1} = f(x_k, p_k) + g(x_k, q_k)u_k + w_k \quad (3.51)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (3.52)$$

なお、未知パラメータ  $p_k$  と同様に、未知パラメータ  $q_k \in R^{l_q}$  は平均値  $q_k^{\text{nom}}$  と分散  $P_k^{\text{qq}}$  は既知であると仮定する。さらに、非線形関数  $f(\cdot)$  に含まれる未知パラメータ  $p_k$  と、非線形関数  $g(\cdot)$  に含まれる未知パラメータ  $q_k$  の間には相関がない、つまり、 $\mathbb{E}[p_k q_k^T] = 0, \mathbb{E}[q_k p_k^T] = 0$  が成り立つ、とする。

まず、(3.51) 式において、未知パラメータ  $p_k$  と  $q_k$  をまとめたベクトル  $\bar{p}_k \in \mathbb{R}^{l+l_q}$  を考える。この拡大未知パラメータベクトル  $\bar{p}_k$  の平均値  $\bar{p}_k^{\text{nom}}$  と分散  $\bar{P}_k^{\text{pp}} \in \mathbb{R}^{(l+l_q) \times (l+l_q)}$  は次式で与えることができる。

$$\bar{p}_k^{\text{nom}} = \begin{bmatrix} p_k^{\text{nom}} \\ q_k^{\text{nom}} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\bar{P}_k^{\text{pp}} = \begin{bmatrix} P_k^{\text{pp}} & 0 \\ 0 & P_k^{\text{qq}} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

上記の拡大未知パラメータベクトル  $\bar{p}_k$  を使って、(3.51) 式を近似線形化するために、次の最適化問題を考える。

$$J_k = \mathbb{E} \left[ \left\| f(x_k, \bar{p}_k) + g(x_k, \bar{p}_k)u_k - \left\{ \bar{F}_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}) + \bar{G}_k(\bar{p}_{k-1} - \bar{p}_{k-1}^{\text{nom}}) + \bar{d}_k \right\} \right\|^2 \right] \quad (3.55)$$

線形化行列  $\bar{F}_k, \bar{G}_k$  とドリフト項  $\bar{d}_k$  は (3.43)~(3.45) 式と同様に解くことができ、この線形化行列  $\bar{F}_k, \bar{G}_k$  を用いて、3.5.1 節と同様の解析を行うと予測誤差共分散行列を次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{xx} &= \mathbb{E} [\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^T] \\ &\approx \bar{F}_k P_{k-1}^{xx} \bar{F}_k^T + \bar{G}_k \bar{P}_{k-1}^{\text{pp}} \bar{G}_k^T + Q_{k-1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

以上より、「予測誤差共分散行列にパラメータ不確かさの影響項を加算する」という非線形ロバストフィルタの特徴は、制御入力  $u$  の有無によらず維持されることが確認できた。

### 3.5.2 観測方程式にパラメータ不確かさが含まれる場合の導出

3.2~3.4 節では、観測方程式が未知パラメータを含まない場合を考えていた。本小節では観測方程式も未知パラメータを含む場合の非線形ロバストフィルタを導出する。

$$x_{k+1} = f(x_k, p_k) + w_k \quad (3.57)$$

$$y_k = h(x_k, q_k) + v_k \quad (3.58)$$

前小節と同様に、未知パラメータ  $q_k \in R^l$  は平均値  $q_k^{\text{nom}}$  と分散  $P_k^{\text{qq}}$  は既知であり、かつ、非線形関数  $f(\cdot)$  に含まれる未知パラメータ  $p_k$  と、非線形関数  $h(\cdot)$  に含まれる未知パラメータ  $q_k$  の間には相関がないものと仮定する。なお、本小節では説明を簡単にするために制御入力  $u_k$  を含まない場合のみを考えるが、前小節の導出方法を利用すれば、容易に制御入力を含む場合にも拡張を行えることに注意されたい。

まず、(3.57) 式は (3.27) 式と同様に次式で線形近似できる。

$$x_k \approx F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + \hat{x}_{k|k-1} + w_{k-1} \quad (3.59)$$

つぎに、(3.58) 式を  $(\hat{x}_{k|k-1}, q_k^{\text{nom}})$  のまわりで線形近似するために、次の最適化問題を考える。

$$J_k = \mathbb{E} \left[ \left\| h(x_k, q_k) - \{H_k(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + B_k(q_k - q_k^{\text{nom}}) + \bar{c}_k\} \right\|^2 \right] \quad (3.60)$$

各線形化行列  $H_k, B_k$  とドリフト項  $c_k$  で偏微分することで、次の最適解を得る。

$$H_k = \mathbb{E}[h(x_k, q_k) \tilde{x}_{k|k-1}^T] \{P_{k|k-1}^{xx}\}^{-1} \quad (3.61)$$

$$B_k = \mathbb{E}[h(x_k, q_k) \tilde{q}_k^T] \{P_k^{\text{qq}}\}^{-1} \quad (3.62)$$

$$c_k = \mathbb{E}[h(x_k, q_k)] \quad (3.63)$$

(3.61)~(3.63) 式は U 変換を利用することで、次式で近似計算することができる。

$$H_k \approx \left[ \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{x,i} \{h(\mathcal{X}_i, q_k^{\text{nom}})\} (\mathcal{X}_i - \hat{x}_{k|k-1})^T \right] \{P_{k|k-1}^{xx}\}^{-1} \quad (3.64)$$

$$B_k \approx \left[ \sum_{j=0}^{2k} \mathcal{W}_{q,j} \{f(\hat{x}_{k|k-1}, \mathcal{Q}_j)\} (\mathcal{Q}_j - q_k^{\text{nom}})^T \right] \{P_k^{\text{qq}}\}^{-1} \quad (3.65)$$

$$c_k \approx \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_{x,i} \{h(\mathcal{X}_i, q_k^{\text{nom}})\} \quad (3.66)$$

ここで、 $\mathcal{Q}$  は  $(q_k^{\text{nom}}, P_k^{\text{qq}})$  に従って生成される未知パラメータ  $q_k$  に関するシグマ点列である。また、 $\mathcal{W}_q$  はシグマ点列  $\mathcal{Q}$  に対応する重み列である。

以上より、(3.58) 式を次式で近似できる。

$$y_k \approx H_k \tilde{x}_{k|k-1} + B_k \tilde{q}_k + c_k + v_k \quad (3.67)$$

ここで、 $\tilde{x}_{k|k-1} := x_k - \hat{x}_{k|k-1}$  は予測誤差であり、 $\tilde{q}_k := q_k - q_k^{\text{nom}}$  はパラメータ偏差である。

(3.67) 式を利用して、パラメータ不確かさを考慮した予測値と観測値の相互分散行列  $P_{k|k-1}^{xy}$  は次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{xy} &= \mathbb{E} [\tilde{x}_{k|k-1} \cdot \tilde{y}_{k|k-1}^T] \\ &\approx \mathbb{E} [\tilde{x}_{k|k-1} \cdot (H_k \tilde{x}_{k|k-1} + B_k \tilde{q}_k + v_k)^T] \\ &\approx \mathbb{E} [\tilde{x}_{k|k-1} \cdot \tilde{x}_{k|k-1}^T] H_k^T \\ &= P_{k|k-1}^{xx} H_k^T \end{aligned} \quad (3.68)$$

ここで、上式の  $P_{k|k-1}^{xx}$  は (3.35) 式で与えられるパラメータ不確かさを考慮した予測誤差共分散行列である。(3.68) 式は観測方程式にパラメータ不確かさが含まれていない場合の  $P_{k|k-1}^{xy}$  である、(3.12) 式や (3.25) 式と同じ形であることに注意されたい。これは未知パラメータ  $p_k$  と  $q_k$  が無相関であることを仮定しているためである。

一方で、観測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{yy}$  は次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{yy} &= \mathbb{E} [\tilde{y}_{k|k-1} \cdot \tilde{y}_{k|k-1}^T] \\ &\approx \mathbb{E} \left[ (H_k \tilde{x}_{k|k-1} + B_k \tilde{q}_k + v_k) \cdot (H_k \tilde{x}_{k|k-1} + B_k \tilde{q}_k + v_k)^T \right] \\ &\approx (H_k P_{k|k-1}^{xx} H_k^T + R_k) + B_k P_k^{qq} B_k^T \end{aligned} \quad (3.69)$$

(3.69) 式の括弧内は観測方程式にパラメータ不確かさが含まれない場合の  $P_{k|k-1}^{yy}$  と一致する。(3.69) 式は、(3.35) 式と同様にパラメータ不確かさの影響を受けない誤差共分散行列にパラメータ不確かさの分散の線形化行列による二次形式が加算される形になることに特徴がある。

### 3.5.3 DKF と提案手法の関係性

本節では、提案手法である非線形ロバストフィルタと Karlgaard らの提案した Desensitised Kalman filtering (DKF) [21, 34, 35] の関係性を示す。

本小節では、推定対象の非線形システムが (3.1), (3.2) 式で表現されることを前提とする。DKF の更新式は次式で与えることができ、

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (3.70)$$

最適ゲイン  $K_k$  は次の評価関数を最小化するように設計される。

$$J_{\text{DKF}}(K_k) = \text{Tr} (P_{k|k}^{xx}) + \sum_{i=1}^l (\hat{\sigma}_{i,k}^T W_i \hat{\sigma}_{i,k}) \quad (3.71)$$

ここで、 $W_i$  はパラメータ不確かさの影響を考慮するための設計パラメータであり、 $P_{k|k}^{xx}$  はパラメータ不確かさを含まないシステムを考えた場合の推定誤差共分散行列である。さらに、 $\hat{\sigma}_{i,k}$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{i,k} &= \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial p_{i,k}} \\ &= \bar{\sigma}_{i,k} + \frac{\partial K_k}{\partial p_{i,k}} (y_k - \bar{y}_k) - K_k \gamma_{i,k} \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{i,k} &= \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial p_{i,k}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\sigma}_{i,k-1} + \left( \frac{\partial f}{\partial p_{i,k}} \right)_{k-1} \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\gamma_{i,k} = \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \bar{\sigma}_{i,k} + \left( \frac{\partial h}{\partial p_i} \right) \quad (3.74)$$

なお、上式において  $p_{i,k}$  は未知ベクトル  $p_k$  の  $i$  番目の要素を表すスカラーである。ここで、(3.2) 式がパラメータ不確かさの影響を受けない、つまり  $\frac{\partial h}{\partial p} = 0$  が成り立つことに注意し、さらに、非線形関数  $h(x)$  のヤコビアンを  $H_k = \frac{\partial h}{\partial x}$  とする。ここで、DKF の演算時の仮定である  $\frac{\partial K}{\partial p} = 0$  という条件を利用すると、(3.72) 式を次式で与えることができる。

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{i,k} &= \bar{\sigma}_{i,k} - K_k H_k \bar{\sigma}_{i,k} \\ &= (I - K_k H_k) \bar{\sigma}_{i,k} \\ &= (I - K_k H_k) \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\sigma}_{i,k-1} + \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \right\}\end{aligned}\quad (3.75)$$

また、(3.75) 式を (3.71) 式の第2項に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_k W \hat{\sigma}_k^T &= (I - K_k H_k) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\sigma} \right) W \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\sigma} \right)^T (I - K_k H_k)^T \\ &\quad + (I - K_k H_k) \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right) W \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)^T (I - K_k H_k)^T\end{aligned}\quad (3.76)$$

(3.71) 式の第1項は通常の KF で計算する誤差共分散行列であることに注意すれば、DKF の評価関数を次式のトレースを最小化する問題を考えていることに等しいことがわかる。

$$\begin{aligned}JT_{\text{DKF}} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1}^{xx} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\ &\quad + (I - K_k H_k) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\sigma} \right) W \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\sigma} \right)^T (I - K_k H_k)^T \\ &\quad + (I - K_k H_k) \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right) W \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)^T (I - K_k H_k)^T\end{aligned}\quad (3.77)$$

一方、提案手法の非線形ロバストフィルタは「パラメータ不確かさを含むシステムの  $P_{k|k}^{xx}$ 」を最小化するように最適ゲイン  $K_k$  を求める手法である。DKF がヤコビアンを利用して計算を行っているため、対比する提案手法として REKF を考える。ここで、REKF の評価関数を (3.77) 式と同じ形式で表現すると次式を得る。

$$\begin{aligned}JT_{\text{REKF}} &= (I - K_k H_k) \left\{ P_{k|k-1}^{xx} + \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right) P_{k-1}^{\text{pp}} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)^T + \Delta P_k \right\} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\ &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1}^{xx} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\ &\quad + (I - K_k H_k) \Delta P_k (I - K_k H_k)^T \\ &\quad + (I - K_k H_k) \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right) P_{k-1}^{\text{pp}} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)^T (I - K_k H_k)^T\end{aligned}\quad (3.78)$$

DKF の評価関数 (3.77) 式と REKF の評価関数 (3.78) を比較すると、次の関係式が成立することがわかる。

$$\Delta P_k = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\sigma} \right) W \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\sigma} \right)^T \quad (3.79)$$

$$P_{k-1}^{\text{pp}} = W \quad (3.80)$$

以上の議論より，提案手法の非線形ロバストフィルタと DKF は類似した評価関数を最小化するゲイン  $K_k$  を求めるフィルタであると言える．ただし，DKF は重み  $W_i$  の具体的な設計方法を示していないが，提案手法の非線形ロバストフィルタに従えば，DKF の重みを未知パラメータの分散  $P_{k-1}^{\text{pp}}$  で与えれば良いと判断できる．

### 3.5.4 その他の議論

#### (1) Modified UKF との関係性

通常非線形カルマンフィルタ (Nonlinear Kalman Filter : NKF) の予測誤差共分散の推定値  $P_{k|k-1}$  に，線形近似で生じる高次の近似項を補償する正定値行列  $\Delta P$  を追加した非線形カルマンフィルタは，Xiong らが導出した modified UKF[26] にならって，modified NKF と呼ぶことができる．そして，modified NKF の予測誤差共分散行列を  $P_{k|k-1}^{\text{mnkf}}$  とすると，予測誤差共分散行列 (3.37) を次式で書き換えることができる．

$$P_{k|k-1}^{\text{rnkf}} = P_{k|k-1}^{\text{mnkf}} + G_k P_{k-1}^{\text{pp}} G_k^T \quad (3.81)$$

$$P_{k|k-1}^{\text{mnkf}} := P_{k|k-1}^{\text{nkf}} + \Delta P_k \quad (3.82)$$

つまり，提案した RNKF は modified NKF の予測誤差共分散にパラメータの影響  $G_k P_{k-1}^{\text{pp}} G_k^T$  を加算したものを考えることができる．

#### (2) $\Delta P_k$ の設計指針

高次の近似項を補償する  $\Delta P_k$  は，Xiong らの安定性解析 [26] で導入された補正項  $\Delta Q_k$  と同様の働きをするため，正定値行列で設計することが望ましい．なお， $\Delta P_k$  を大きくするほど，推定誤差の Lyapunov 安定性が保証されやすくなる一方で，推定精度が低下するトレードオフの関係があることに注意されたい．

#### (3) 未知パラメータの分散 $P_k^{\text{pp}}$ が未知の場合の設計指針

パラメータ不確かさの分散  $P_k^{\text{pp}}$  が未知の場合は，予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{rnkf}}$  の計算時に  $P_k^{\text{pp}}$  の代わりに，正定値行列  $W_k^{\text{pp}}$  を利用すると良い．前節の議論より，この場合でも RNKF は DKF[21] の一種とみなすことができるためロバストな推定が実現できる．

#### (4) パラメータ不確かさの影響項について

前節までに導出した非線形ロバストフィルタは予測誤差共分散行列 (3.37) は，通常非線形カルマンフィルタで計算する予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{nom}}$  にパラメータ不確かさの影響項  $P_{k|k-1}^{\text{rob}}$  を加えるという簡易な構成になっている．この構成は「カルマンフィルタのロバスト性を向上させるためにプロセス雑音の分散  $Q_{k-1}$  を大きめに設計する」というエンジニアが実機適用の際によく利用する手法と類似している．この観点では，本稿の非線形ロバストフィ

ルタは「パラメータ真値がわからないシステムにおけるプロセス雑音の分散  $Q_{k-1}$  の最適な設計方法」を提供する手法と考えることもできる。

ただし、「プロセス雑音の分散  $Q_{k-1}$  を大きめに設計する」ことは、前述の通り、フィルタの安定性(ロバスト性)を向上するが、フィルタの推定精度を低下させる可能性がある。提案手法の非線形ロバストフィルタをパラメータ不確かさが少ないシステムに適用した場合、プロセス雑音の分散  $Q_{k-1}$  を  $P_{k|k-1}^{\text{rob}}$  だけ大きく設計していることになり、推定精度が通常の非線形カルマンフィルタよりも低下する可能性がある。このような課題を解決するために、パラメータ不確かさの有無によって、 $P_{k|k-1}^{\text{rob}}$  の大きさを調整する非線形適応ロバストフィルタを節で提案する。

### 3.6 非線形適応ロバストフィルタ

本節では、非線形ロバストフィルタのパラメータ不確かさの影響項  $P_{k|k-1}^{\text{rob}}$  を実際のパラメータ不確かさに応じて調整する適応則を導入した「非線形適応ロバストフィルタ」を提案する。

まず、3.4節にて(3.37)式で与えた予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  をスカラ値の適応パラメータ  $\alpha_k (0 \leq \alpha_k \leq 1)$  を用いて次式で与える。

$$P_{k|k-1}^{\text{adp}} = P_{k|k-1}^{\text{nom}} + \alpha_k P_{k|k-1}^{\text{rob}} \quad (3.83)$$

なお、適応パラメータ  $\alpha_k$  に上下限を設けるのは、予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{adp}}$  を非線形ロバストフィルタの予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  よりも大きくしない ( $\alpha_k \leq 1$ )、かつ、非線形KFの予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{nom}}$  よりも小さくしない ( $0 \leq \alpha_k$ ) ためである。また、 $P_{k|k-1}^{\text{nom}}$ 、 $P_{k|k-1}^{\text{rob}}$  ともに正定値行列であるので、 $\alpha_k \geq 0$  において  $P_{k|k-1}^{\text{adp}}$  も正定値行列になることに注意されたい。

$\alpha_k$  の調整則を導出するために、まず、観測誤差共分散行列  $P_k^{yy}$  をイノベーション  $\nu_k = y_k - \hat{y}_{k|k-1}$  を用いて、次式で近似することができることに着目する [36]。

$$P_k^{yy,o} = \begin{cases} \nu_1 \nu_1^T & (k=1) \\ \frac{\rho P_{k-1}^{yy,o} + \nu_k \nu_k^T}{\rho+1} & (k>1) \end{cases} \quad (3.84)$$

なお、 $\rho (0 < \rho < 1)$  は忘却係数である。

一方で、(3.83)式を使って観測誤差共分散行列を計算すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{yy,\text{adp}} &= H_k P_{k|k-1}^{\text{adp}} H_k^T + R_k \\ &= (H_k P_{k|k-1}^{\text{nom}} H_k^T + R_k) + \alpha_k H_k P_{k|k-1}^{\text{rob}} H_k^T \\ &= P_{k|k-1}^{yy,\text{nom}} + \alpha_k H_k P_{k|k-1}^{\text{rob}} H_k^T \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$P_{k|k-1}^{yy,\text{nom}} := H_k P_{k|k-1}^{\text{nom}} H_k^T + R_k \quad (3.86)$$

ここで、 $H_k$  は3.4節で導出した線形化行列である。

(3.84), (3.85) 式のそれぞれで計算される観測誤差共分散行列をノルムの観点で近づけることを目的として、次の評価関数を最小化する適応パラメータ  $\alpha_k$  を考える。

$$\begin{aligned} J_\alpha(\alpha_k) &= \left\| P_k^{yy,o} - P_{k|k-1}^{yy,\text{adp}} \right\|_F^2 \\ &= \text{Tr} \left\{ \left( P_k^{yy,o} - P_{k|k-1}^{yy,\text{adp}} \right) \left( P_k^{yy,o} - P_{k|k-1}^{yy,\text{adp}} \right)^T \right\} \end{aligned} \quad (3.87)$$

なお、ノルム  $\|\cdot\|_F$  はフロベニウスノルムを意味する。

(3.85), (3.87) 式より、適応パラメータ  $\alpha_k$  が満たすべき、最適解の必要条件を次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha_k} &= 2 \left[ \alpha_k \text{Tr} (A_k A_k^T) - \text{Tr} \left\{ \left( P_k^{yy,o} - P_{k|k-1}^{yy,\text{nom}} \right) A_k^T \right\} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

なお、上式にて表記の簡略化のために  $A_k := H_k P_{k|k-1}^{\text{prob}} H_k^T$  を定義した。よって、(3.88) 式を満たす適応パラメータ  $\alpha_k$  を次式で与えることができる。

$$\alpha_k = \frac{\text{Tr} \left\{ \left( P_k^{yy,o} - P_{k|k-1}^{yy,\text{nom}} \right) A_k^T \right\}}{\text{Tr} (A_k A_k^T)} \quad (3.89)$$

なお、アルゴリズムを実装する際には (3.89) 式で求めた  $\alpha_k$  が上下限に収まるように次式を利用すると良い。

$$\alpha_k = \min \left[ 1, \max \left( 0, \frac{\text{Tr} \left\{ \left( P_k^{yy,o} - P_{k|k-1}^{yy,\text{nom}} \right) A_k^T \right\}}{\text{Tr} (A_k A_k^T)} \right) \right] \quad (3.90)$$

導出された適応パラメータ  $\alpha_k$  を利用して、以降の演算は非線形適応ロバストフィルタと同様に更新式に (2.6)~(2.9) 式を利用すればよい。

### 3.7 非線形ロバストフィルタのアルゴリズム

本章で提案した非線形ロバストフィルタ、および非線形適応ロバストフィルタのアルゴリズムは次のようにまとめられる。なお、アルゴリズムの説明は非線形システムが (3.1) 式, (3.2) 式で与えられる場合を想定している。

#### ステップ 1

通常の非線形カルマンフィルタと同様の計算によって、状態量の予測値  $\hat{x}_{k|k-1}$  と予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{nom}}$  を計算する。

#### ステップ 2

パラメータ不確かさが予測誤差共分散行列に与える影響分  $P_{k|k-1}^{\text{rob}}$  を (3.88) 式によって

計算する。ここで、EKF, EqKF に従うロバストフィルタの場合は線形化行列  $G_k$  を演算する必要があり、それぞれ (3.31), (3.33) 式で計算することになる。なお、RUKF を利用する場合は (3.22) 式からパラメータ不確かさが予測誤差共分散行列に与える影響項を計算できるため、線形化行列  $G_k$  の計算は不要である。

### ステップ 3

適応パラメータ  $\alpha_k$  を (3.90) 式、もしくは、次式で計算する。

$$\alpha_k = \min \left[ 1, \max \left( \alpha_{\min}, \frac{\text{Tr} \left\{ \left( P_k^{yy,o} - P_{k|k-1}^{yy,\text{nom}} \right) A_k^T \right\}}{\text{Tr} (A_k A_k^T)} \right) \right] \quad (3.91)$$

なお、 $\alpha_{\min}$  は設計パラメータである。 $\alpha_{\min}$  は 0 でも問題ないが、小さな正の値を入れておくと  $\alpha_k P_{k|k-1}^{\text{prob}}$  の項が文献 [26] における  $\Delta Q$  と同様の働きを持つと期待できる。

### ステップ 4

予測誤差共分散行列を次式で与える。

$$P_{k|k-1}^{\text{adp}} = P_{k|k-1}^{\text{nom}} + \alpha_k P_{k|k-1}^{\text{prob}} \quad (3.92)$$

### ステップ 5

$P_{k|k-1}^{\text{adp}}$  を利用して、通常非線形カルマンフィルタの更新式と同様の更新を行う。具体的には (2.6) ~ (2.10) 式において、 $P_{k|k-1}^{xx}$  の代わりに  $P_{k|k-1}^{\text{adp}}$  を利用する。なお、非線形観測  $h(x)$  の線形化行列  $H_k$  の演算には、(2.23) 式、もしくは、(2.45) 式を利用する。また、 $P_{k|k-1}^{xy}$  と  $P_{k|k-1}^{yy}$  を U 変換によって計算する場合には、 $\mathcal{N}(\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}^{\text{adp}})$  に従ったシグマ点列の再生成が必要である。

### ステップ 6

更新ステップで得られた  $P_{k|k}^{xx} = P_{k|k-1}^{\text{adp}} - K_k \left( H_k P_{k|k-1}^{\text{adp}} H_k^T + R_k \right) K_k^T$  を利用して、予測誤差共分散の推定値  $P_{k+1|k}^{\text{nom}}$  を計算し  $k \rightarrow k+1$  として、ステップ 2 に戻る。

なお、適応則を用いない非線形ロバストフィルタのアルゴリズムでは、ステップ 3 の計算を省略し、かつ、ステップ 4 を  $\alpha_k = 1$  とすればよい。

## 3.8 数値シミュレーション

本章の提案手法の有効性を確認するために数値シミュレーションを行った結果を示す。

### 3.8.1 シミュレーション対象

本節では、誘導モータモデル [26] を対象としたシミュレーションを考える。

連続時間ダイナミクスをサンプリング周期  $\Delta t$  で離散化すると、非線形ダイナミクスを次式で与えることができる。

$$f(x_{k-1}, p_{k-1}, u_{k-1}) = x_{k-1} + \begin{bmatrix} -\gamma x_{1,k-1} + \frac{K}{T_r} x_{3,k-1} + K p x_{5,k-1} x_{4,k-1} + \frac{1}{\sigma L_x} u_{1,k} \\ -\gamma x_{2,k-1} + \frac{K}{T_r} x_{4,k-1} - K p x_{5,k-1} x_{3,k-1} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{2,k} \\ \frac{M}{T_r} x_{1,k-1} - \frac{1}{T_r} x_{3,k-1} - p x_{5,k-1} x_{4,k-1} \\ \frac{M}{T_r} x_{2,k-1} - \frac{1}{T_r} x_{4,k-1} + p x_{5,k-1} x_{3,k-1} \\ \frac{pM}{JL_r} (x_{3,k-1} x_{2,k-1} - x_{4,k-1} x_{1,k-1}) - \frac{T_r}{J} \end{bmatrix} \Delta t \quad (3.93)$$

なお,  $x_1, x_2$  は固定子電流,  $x_3, x_4$  は回転子磁束,  $x_5$  は角速度である. (3.93) 式における入力信号  $u_k$  は次式で与えるものである.

$$u_{1,k} = 350 \cos(0.003k), \quad u_{2,k} = 300 \sin(0.003k)$$

観測方程式は線形システム  $y_k = H_k x_k + v_k$  とし, 観測行列  $H_k$  を次式で与える.

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

また, プロセスノイズ  $w_k$ , 観測ノイズ  $v_k$  はそれぞれ平均値 0 のガウス雑音であり, その共分散行列は次式に従うものである.

$$Q_k = 0.01^2 I_{5 \times 5}, \quad R_k = 0.1^2 I_{2 \times 2}$$

(3.93) 式中に現れる定数  $T_r, \sigma, K, \gamma$  の定義は以下のとおりである.

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}, \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}, \quad K = \frac{M}{\sigma L_s L_r}$$

$$\gamma = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r}$$

ここで, 各パラメータのノミナル値と定義を Table 3.1 にまとめた.

### 3.8.2 シミュレーション条件

(3.93) 式のパラメータ  $T_r$  と  $\gamma$  がそれぞれ, 次のような不確かさを有すると仮定する.

$$T_r \sim \mathcal{N}(T_r^{\text{nom}}, 0.01) \quad (3.95)$$

$$\gamma \sim \mathcal{N}(\gamma^{\text{nom}}, 10) \quad (3.96)$$

ここで,  $T_r^{\text{nom}}, \gamma^{\text{nom}}$  はそれぞれ Table 3.1 のパラメータを利用して計算する  $T_r$  と  $\gamma$  のノミナル値であり, それぞれの値は  $T_r^{\text{nom}} = 0.47$ ,  $\gamma^{\text{nom}} = 50.7$  である. なお, 本シミュレーションでは, 未知パラメータに対するロバスト性を検討するため,  $T_r, \gamma$  の分散を大きめに設定していることに注意されたい.

本節では, パラメータ不確かさが無い場合, ある場合のそれぞれの場合について, 次の 4 つの非線形カルマンフィルタを使って, それぞれシミュレーションを行い, 提案手法の有効性を確認する.

Table 3.1: Simulation parameters

Parameter		Value	Unit
$R_s$	Stator Resistance	0.18	$\Omega$
$R_r$	Rotor Resistance	0.15	$\Omega$
$L_s$	Stator Inductance	0.0699	H
$L_r$	Rotor Inductance	0.0699	H
$M$	Mutual Inductance	0.068	H
$J$	Rotor Inertia	0.0586	$kg \cdot m^2$
$T_l$	Load Torque	10	Nm
$p$	Pole Pairs	1	-
$\Delta t$	Step size	0.0001	s

**PNKF (Perfect Nonlinear Kalman Filter)**

パラメータの真値を利用する非線形カルマンフィルタ

**NNKF (Nominal Nonlinear Kalman Filter)**

パラメータのノミナル値を利用する非線形カルマンフィルタ

**RNF (Robust Nonlinear Filter)**

3.4 節で導出した非線形ロバストフィルタ

**ARNF (Adaptive Robust Nonlinear Filter)**

3.6 章で導出した非線形適応ロバストフィルタ

なお、非線形カルマンフィルタはすべて線形化に U 変換を利用した等価線形化カルマンフィルタを利用する。

各種フィルタのシミュレーション初期値  $x_0, \hat{x}_0$  と共分散行列の初期値  $P_0$  は次の通りとする。

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 50 \\ 50 \\ 350 \end{bmatrix}, \quad P_0 = 10^4 I_{5 \times 5}$$

**3.8.3 シミュレーション結果**

k=1~1000 ステップまでの計算を 1 回のシミュレーションとし、50 回のモンテカルロ・シミュレーションを行った。

得られた推定値の RMSE の平均値を Table 3.2 にまとめた。ここで、RMSE は次式で与えられる推定精度の評価値である。

$$RMSE_j = \sqrt{\frac{1}{N_f} \sum_{k=1}^{N_f} (x_{k,j} - \hat{x}_{k,j})^2}, j = 1, \dots, n$$

上式の  $N_f$  は 1 回のシミュレーションにおける最終ステップであり、サンプリング回数に等しい。

Table 3.2: Simulation results (uncertain case)

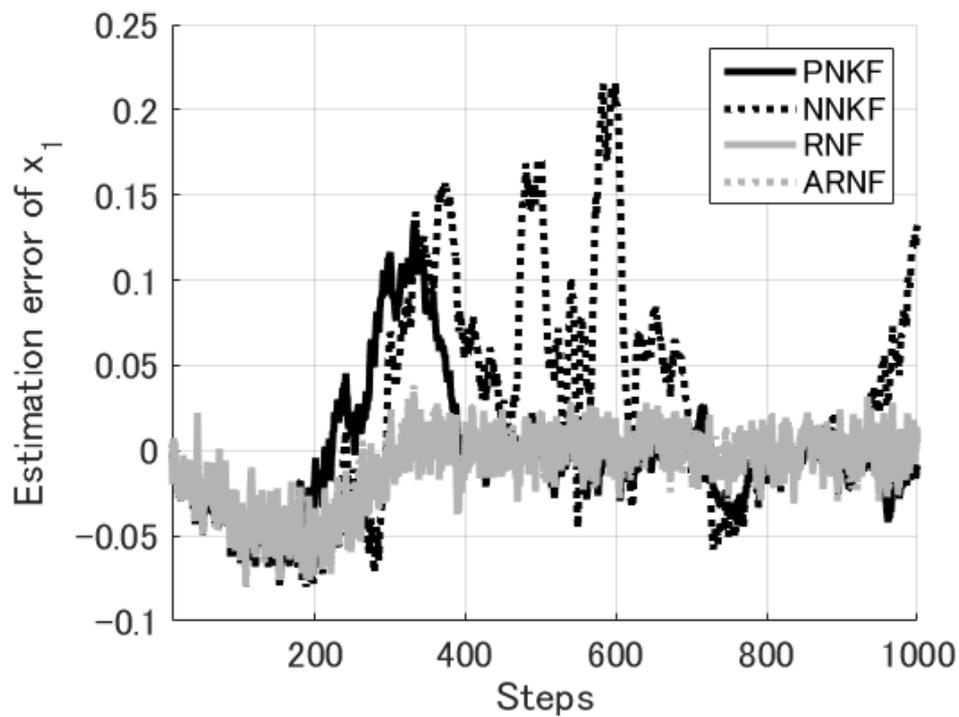
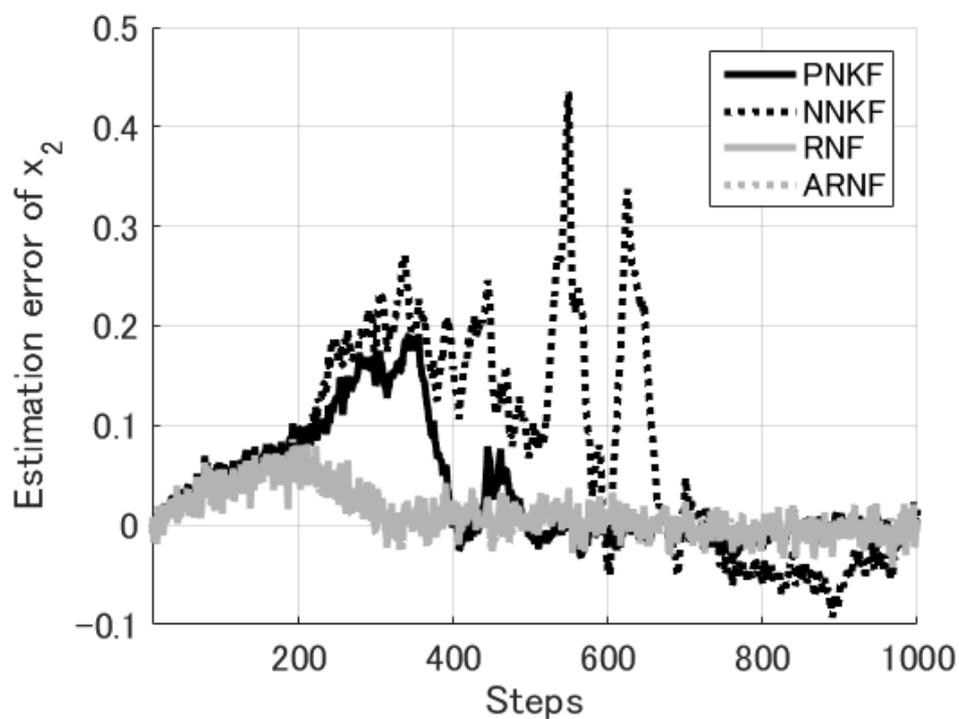
	PNKF	NNKF	RNF	ARNF
$x_1$	6.32	6.32	6.32	6.32
$x_2$	6.32	6.33	6.32	6.32
$x_3$	2.22	4.52	2.79	2.47
$x_4$	1.96	3.66	2.43	2.17
$x_5$	125	139	151	135

Table 3.2 を見ると、パラメータ不確かさがある場合には、ノミナルパラメータを利用した通常の非線形カルマンフィルタである NNKF の推定精度が、パラメータ真値を利用した PNKF よりも劣化していることが確認できる。また、提案した RNF は  $x_3, x_4$  について、NNKF よりも推定精度が優れることが確認できる。ただし、RNF の  $x_5$  の推定結果は NNKF よりも劣ることが確認される。これはパラメータ不確かさに関する近似項  $\Delta P_k$  の設計が不十分であることが原因であることが推測される。適応則を利用した ARNF は RNF に比べて、すべての状態量において推定精度が向上していることが確認できる。また、ARNF の  $x_5$  の推定誤差は NNKF よりも抑制されている。これはパラメータ不確かさの影響の近似誤差を適応パラメータ  $\alpha_k$  によって、吸収できたためであると考えられる。

Fig. 3.1 ~ 3.5 に各推定器の推定誤差の時系列を示す。なお、Fig. 3.1 ~ 3.5 は 50 回のシミュレーションのサンプルパスの平均値を示したものである。

つぎに、Fig. 3.3, Fig. 3.4 を見ると、Table 3.2 に示した RMSE の値からもわかるように、NNKF に比べて、RNF, ARNF は推定誤差が小さいことが確認できる。さらに、700 ステップ以降では、パラメータ真値を利用した PNKF よりも ARNF の方が推定誤差が小さくなっていることが確認できる。

Fig. 3.5 を確認すると、ノミナルパラメータを利用した NNKF は 700 ステップ付近から時間経過に応じて徐々に推定偏差が拡大しており、推定誤差が発散しそうな傾向が見て取れる。一方で、RNF は NNKF と異なり一定の推定誤差を維持していることが確認できる。このことより、RNF は推定精度の向上だけでなく、フィルタのロバスト性向上に効果があることが確認できる。ただし、RNF は定常的に推定誤差が生じていることも確認できる。ARNF は RNF よりも推定誤差のバイアスが減少し、推定精度の向上が確認できる。しかし、ARNF もまた推定誤差に定常的な誤差が残っていることが確認できる。この課題については、5 章にて詳しく述べる。

Fig 3.1: Estimation error of  $x_1$  (uncertain case)Fig 3.2: Estimation error of  $x_2$  (uncertain case)

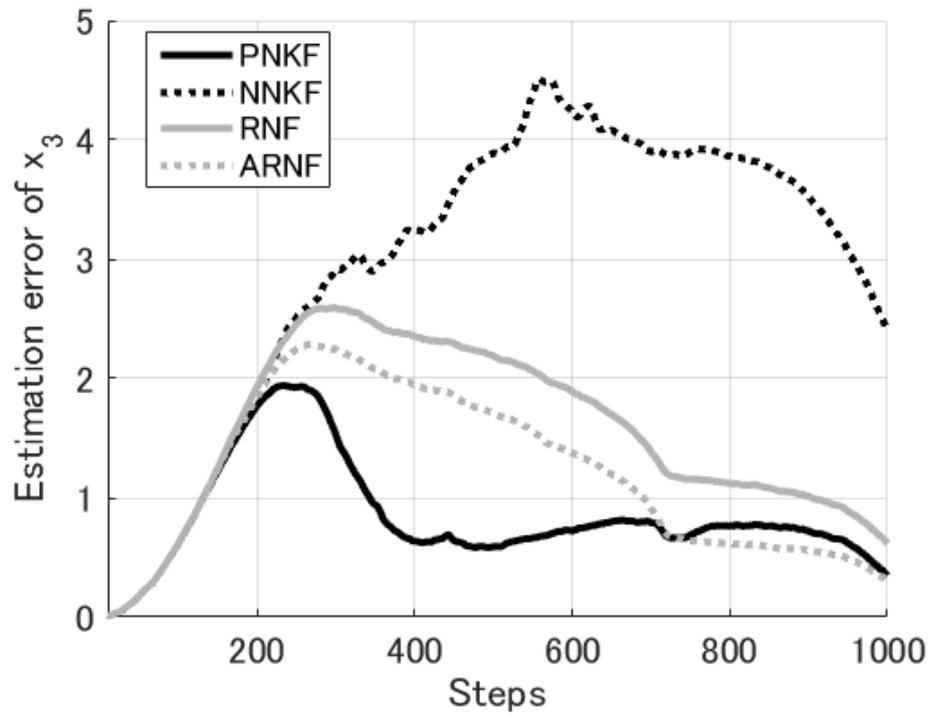


Fig 3.3: Estimation error of  $x_3$  (uncertain case)

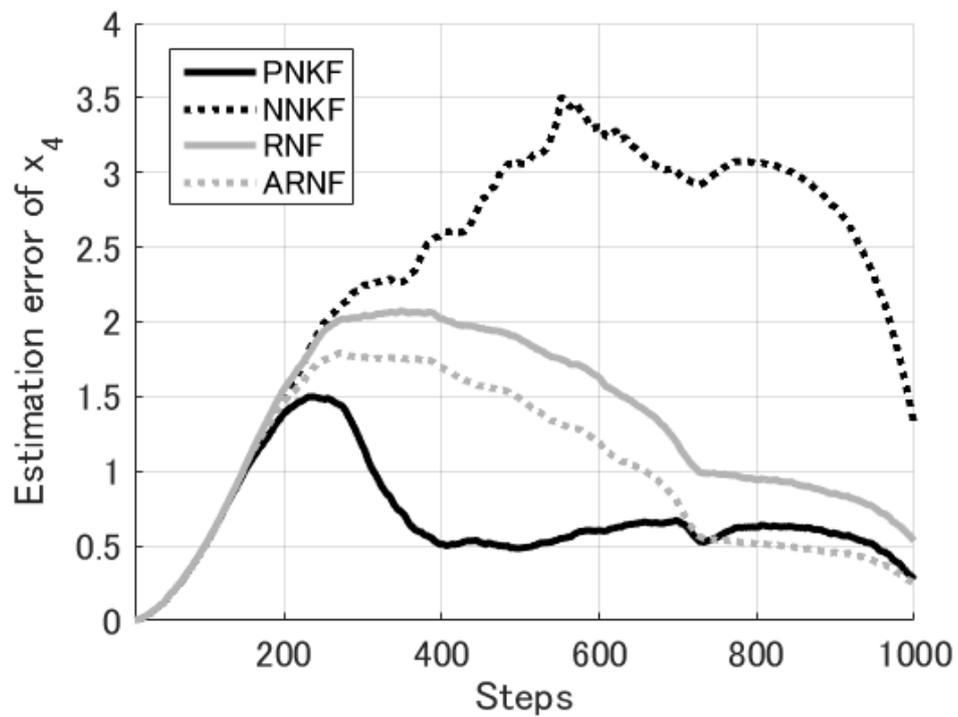
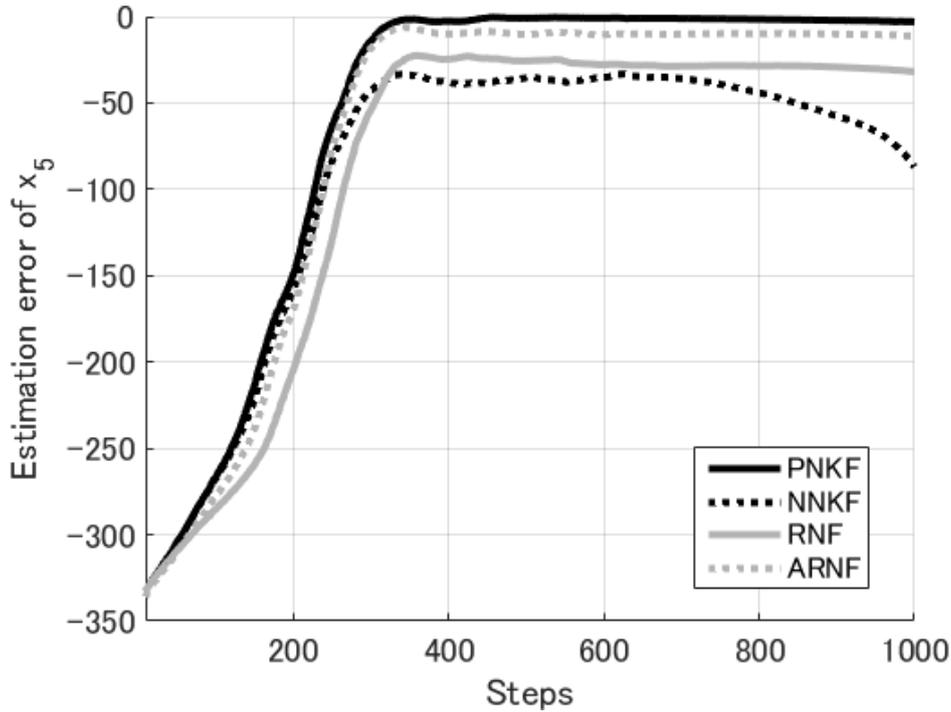


Fig 3.4: Estimation error of  $x_4$  (uncertain case)

Fig 3.5: Estimation error of  $x_5$  (uncertain case)

つぎに、パラメータに不確かさがない場合について、同様のシミュレーションを行った結果を Table 3.3 に示す。なお、パラメータに不確かさがない場合は PNKF と NNKF は同じ推定器になることに注意されたい。

Table 3.3: Simulation results (nominal case)

	PNKF	NNKF	RNF	ARNF
$x_1$	6.32	6.32	6.32	6.32
$x_2$	6.32	6.32	6.32	6.32
$x_3$	2.16	2.16	2.38	2.26
$x_4$	1.91	1.91	2.09	1.99
$x_5$	126	126	139	129

Table 3.3 よりパラメータ不確かさがない場合には、提案した RNKF は、通常の NNKF よりも推定精度が劣ることが確認できる。これは、3.5.4 節で示した推定精度に関する考察の通りである。一方、ARNF は RNF よりも推定精度が改善していることが確認できる。ただし、ARNF の推定結果は PNKF (NNKF) よりも劣るように見える。これは、時刻  $k$  が小さいうちは  $P_k^{yy}$  の近似値  $P_k^{yy,0}$  が安定しないために適応則が所望の挙動を達成できていないためと推測される。これを確認するために、1000 ステップのシミュレーションのうち、後半の 500 ステップのみの RMSE を 3.4 に示した。

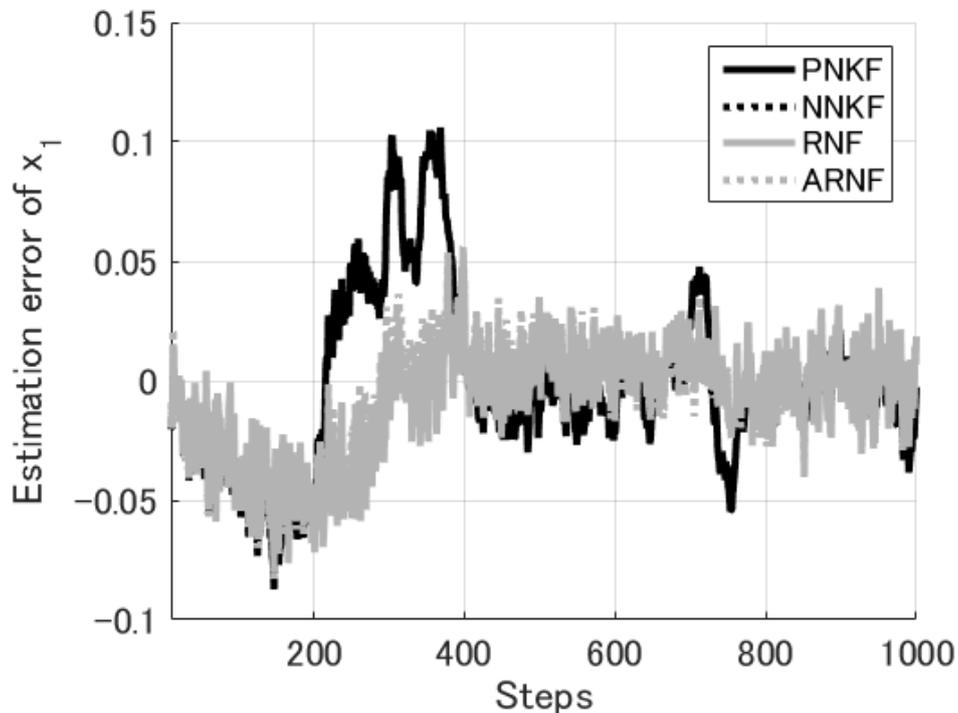
Table 3.4: Simulation results of latter half (nominal case)

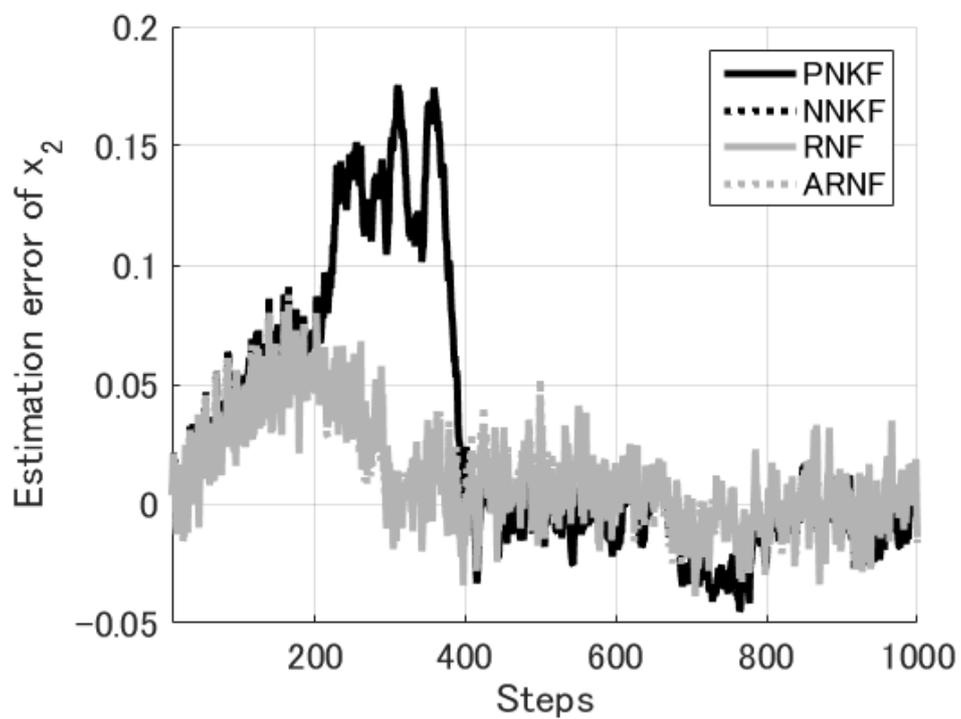
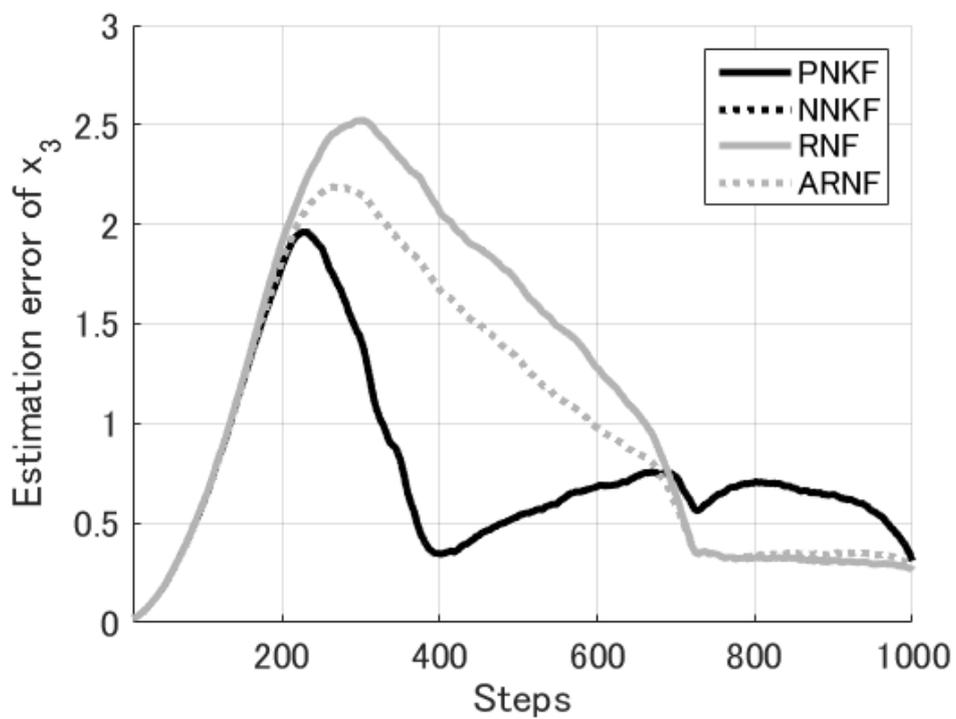
	PNKF	NNKF	RNF	ARNF
$x_1$	0.07	0.07	0.08	0.08
$x_2$	0.07	0.07	0.08	0.08
$x_3$	0.66	0.66	0.89	0.72
$x_4$	0.56	0.56	0.76	0.62
$x_5$	2.02	2.02	1.00	0.86

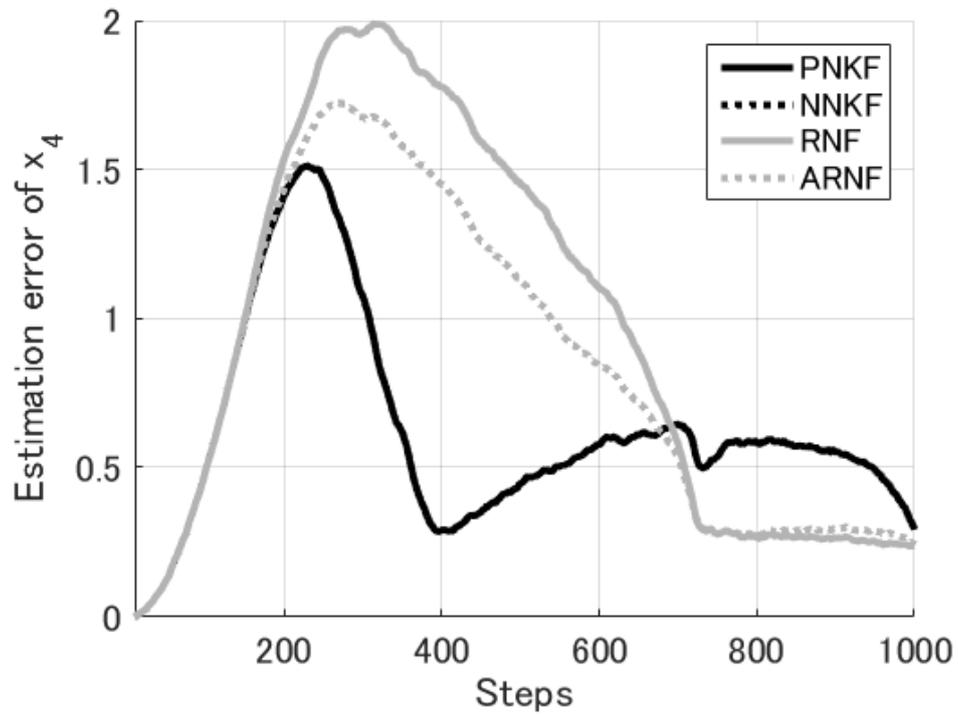
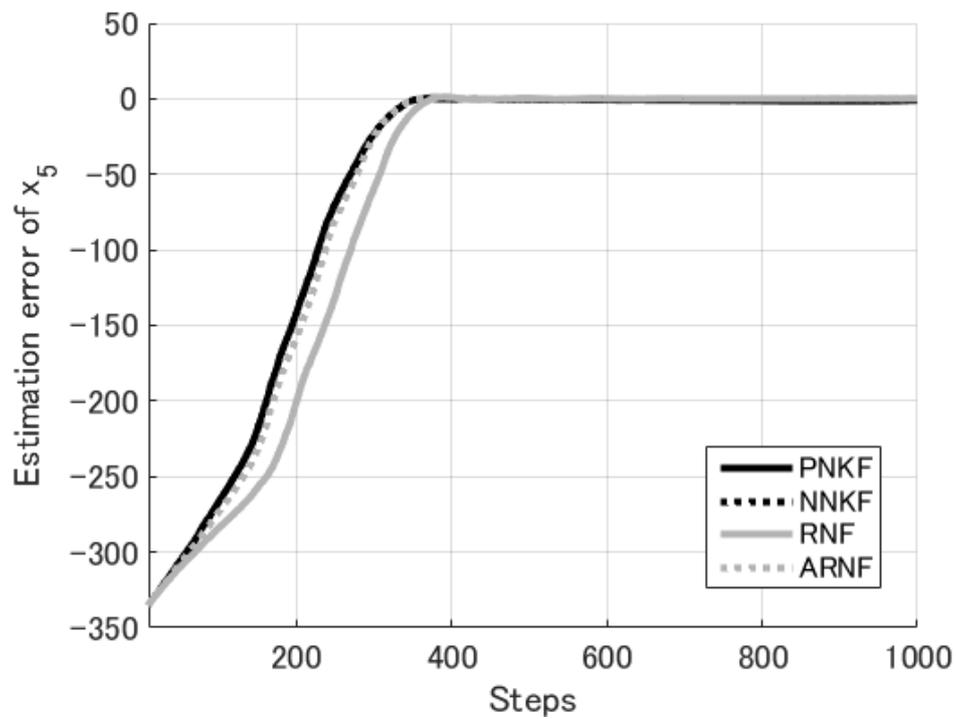
Table 3.4 より, 後半 500 ステップの  $x_5$  についての RMSE は ARNF が最も小さいことが確認できる. しかし,  $x_3, x_4$  についても ARNF の方が RNF よりも RMSE は小さいが, PNKF (NNKF) よりも大きな値をとっている. これは適応則をスカラ値で与えているため, 全ての推定誤差が小さくなるように,  $P_k^{\text{rob}}$  の値を調整することができないためであると推測される.

つぎに, Fig. 3.6 ~ 3.10 に各推定器の推定誤差の時系列を示す.

Fig. 3.8, Fig. 3.9 を見ると, Table 3.3 に示した RMSE の値からもわかるように, NNKF に比べて, RNF, ARNF は推定誤差が小さいことが確認できる. また, Fig. 3.10 を見ると, ARNF のほうが RNF よりも推定誤差の収束精度が良いことが確認できる. さらに, Fig. 3.5 と異なり, RNF, ARNF とともに推定誤差を生じていないことが確認できる. この結果についても, 5 章にて詳しく述べる.

Fig 3.6: Estimation error of  $x_1$  (nominal case)

Fig 3.7: Estimation error of  $x_2$  (nominal case)Fig 3.8: Estimation error of  $x_3$  (nominal case)

Fig 3.9: Estimation error of  $x_4$  (nominal case)Fig 3.10: Estimation error of  $x_5$  (nominal case)

最後に、適応則の有効性を確認するために、適応パラメータ  $\alpha_k$  の時系列変化をパラメータ不確かさがある場合、ない場合について、それぞれ Fig. 3.11 と Fig. 3.11 にまとめた。

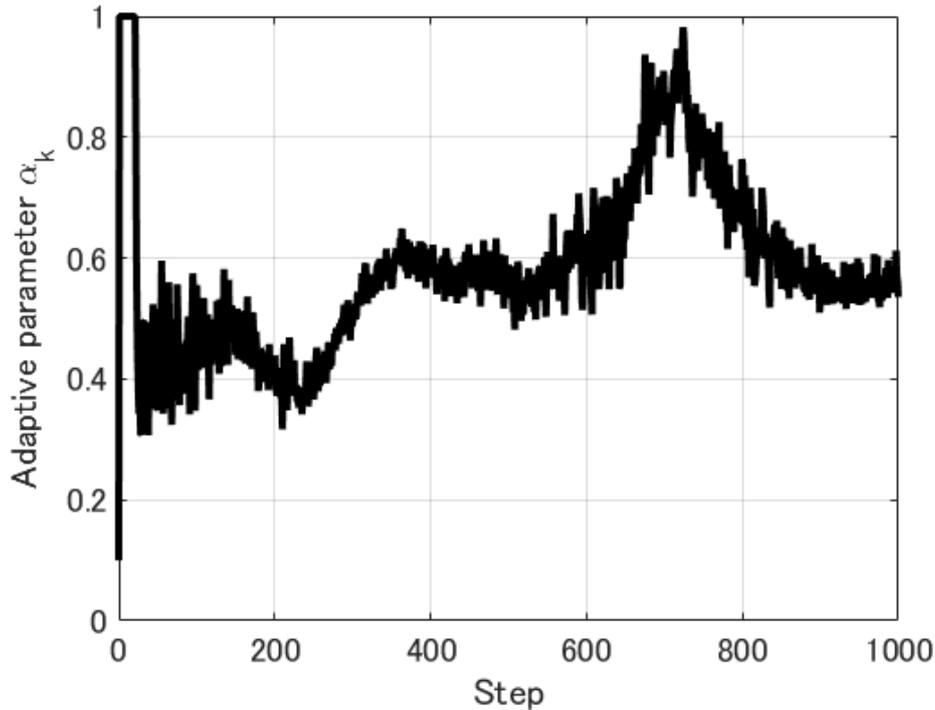


Fig 3.11: Adaptive parameter  $\alpha_k$  (uncertain case)

Fig.3.11を見ると、前述の通り、パラメータ不確かさがある場合でも  $\alpha_k$  は1以外の値をとっており、パラメータ真値とノミナル値の差に応じて、 $P_{k|k-1}^{\text{rob}}$  の項の影響を調整していることが確認できる。一方、パラメータ不確かさがない場合の結果 Fig.3.12を見ると、パラメータ不確かさがある場合の結果 Fig.3.11 に比べて小さな値をとっており、パラメータ不確かさの項の影響を抑制するように適応則が動作していることが確認できる。ただし、パラメータ不確かさがない場合でも  $\alpha_k$  は0に収束はしていないことが確認できる。これは、適応則に利用している近似式 (3.84) の影響で厳密に  $P_k^{yy, \text{adp}} = P_k^{yy}$  を満足しないためであると推測される。

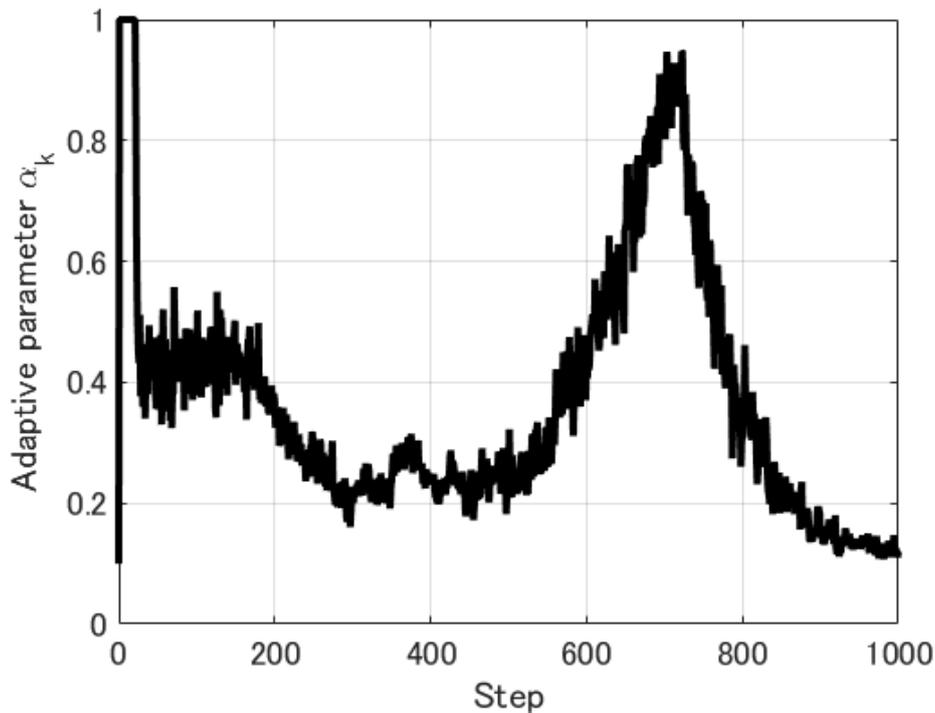


Fig 3.12: Adaptive parameter  $\alpha_k$  (nominal case)

### 3.9 まとめ

本章では、パラメータ不確かさを有する離散時間非線形システムについて、パラメータ不確かさが予測誤差共分散行列に与える影響を解析し、この影響項を陽に考慮した予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  を利用することでロバストな推定を実現する、REKF, RUKF, そしてその統一表現である非線形ロバストフィルタを導出した。非線形ロバストフィルタは、真値が分からないパラメータを拡大系とした、同時推定手法を適用することが困難なシステムにおいても適用可能であり、かつ、通常非線形カルマンフィルタの枠組みで計算されるため、既存の設計方法を流用でき、また、計算コストの増加も少ないという実用上のメリットもある。また、観測誤差共分散行列の近似値を利用した適応則を併用することで、不確かさのないシステムにおいても推定精度を維持することができる非線形適応ロバストフィルタを提案した。なお、提案した非線形適応ロバストフィルタに用いた適応則は計算コストが低く、実装も容易であることも、本手法の利点である。

数値シミュレーションによって、パラメータ不確かさがある場合に、非線形ロバストフィルタを利用することで推定精度の低下を抑制できることを確認した。さらに、適応則を利用することでパラメータ不確かさがない場合にも、提案手法が有効であることを確認できた。

# 第4章 連続・離散非線形ロバストフィルタ

## 4.1 問題設定

本章では、次式のような、状態方程式が連続時間系、観測方程式が離散時間系で与えられるパラメータ不確かさを有する連続・離散時間非線形システムを考える。

$$\dot{x}(t) = f(x(t), p) + w(t) \quad (4.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (4.2)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  は状態量,  $y_k \in \mathbb{R}^m$  は観測量である。なお,  $x_k$  は観測周期ごとに得られる状態量  $x(t)$  の値であり, 観測が行われた時刻を  $t_k$  としたとき,  $x_k = x(t_k)$  で定義される。また, プロセス雑音  $w(t)$  は平均値0の白色雑音であり, 分散は  $\mathbb{E}(w(t)w^T(\tau)) = Q_c \delta(t - \tau)$  で与えられるとする。なお,  $\delta(t)$  は Dirac のデルタ関数である。また,  $Q_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は半正定値行列とする。

観測方程式については, 3章で与えた定義と同様とし, 観測雑音  $v_k$  は平均値が0であり, 分散が  $\mathbb{E}[v_k v_k^T] = R_k$  に従う正規白色雑音とする。なお, 本章では簡単のために線形観測方程式を考えるが, (4.2) 式が非線形観測方程式であっても, 3章に示した線形化手法を適用すれば, 本章の議論を容易に拡張することができる。

さらに, 不確かさを含むパラメータベクトル  $p \in \mathbb{R}^l$  の平均値を  $p^{\text{nom}}$ , 分散を  $P^{\text{pp}} \in \mathbb{R}^{l \times l}$  と与え, これらの値は既知であると仮定する。

本章では, 3章で導出した REKF, RUKF を含む非線形ロバストフィルタのそれぞれについて, 異なるアプローチに従った連続・離散ロバストフィルタを導出する。

## 4.2 連続・離散ロバスト EKF

### 4.2.1 連続・離散ロバスト EKF の導出

離散時間系の REKF の導出方法と同じく, まず, 連続時間系の (4.1) 式について, パラメータ不確かさの影響を陽に考慮した予測ステップの導出を行う。

時刻  $t$  における状態推定値が  $\hat{x}(t)$  で与えられるものとし, (4.1) 式を  $(\hat{x}(t), p^{\text{nom}})$  のまわりで Taylor 展開すると次式を得る。

$$f(x(t), p) = f(\hat{x}(t), p^{\text{nom}}) + F(t)\tilde{x}(t) + G(t)\tilde{p} + \dots \quad (4.3)$$

$$F(t) := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}, p=p^{\text{nom}}} \quad (4.4)$$

$$G(t) := \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{x=\hat{x}, p=p^{\text{nom}}} \quad (4.5)$$

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \hat{x}(t) \quad (4.6)$$

$$\tilde{p}(t) := p - p^{\text{nom}} \quad (4.7)$$

上式において、未知パラメータ周りの線形化行列  $G(t)$  は状態量  $x(t)$  に依存するため、時変行列となる。また、時不変の未知パラメータ  $p$  について、ノミナル値まわりの Taylor 展開を考える点は Schmidt-Kalman filter [8] と類似する点に注意されたい。一方で、連続時間系における EKF の予測ステップで予測平均は次式で与えられる。

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), p^{\text{nom}}) \quad (4.8)$$

また、(4.3) 式より、予測誤差  $\tilde{x}(t)$  の微分方程式を次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &\approx \{f(\hat{x}(t), p^{\text{nom}}) + F(t)\tilde{x}(t) + G(t)\tilde{p} + w(t)\} - f(\hat{x}(t), p^{\text{nom}}) \\ &= F(t)\tilde{x}(t) + G(t)\tilde{p} + \dots + w(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

以降は表記を簡単にするため、明記する必要がない限り  $(t)$  を省略する。

さて、(4.9) 式をサンプリング周期  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  で離散化すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1|k} &= e^{F\Delta t}\tilde{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_k-\tau)} (G\tilde{p} + \dots + w) d\tau \\ &= F_k\tilde{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_k-\tau)} (G\tilde{p} + \dots + w) d\tau \end{aligned} \quad (4.10)$$

なお、上式において  $F_k := e^{F\Delta t}$  を定義した。

さらに、(4.10) 式を利用して、予測誤差共分散行列  $P_{k+1|k}$  を計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= \mathbb{E}[\tilde{x}_{k+1|k} \cdot \tilde{x}_{k+1|k}^T] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left\{ F_k\tilde{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_k-\tau)} (G\tilde{p} + \dots + w) d\tau \right\} \left\{ * \right\}^T \right] \\ &= F_k P_k F_k^T \\ &\quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_k-\tau)} G P P P G^T \{e^{F(t_k-\tau)}\}^T d\tau \\ &\quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_k-\tau)} Q_c \{e^{F(t_k-\tau)}\}^T d\tau \\ &\quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_k-\tau)} \Delta P_c \{e^{F(t_k-\tau)}\}^T d\tau \end{aligned} \quad (4.11)$$

なお,  $\Delta P_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は離散時間系の導出と同様に Taylor 展開で得られた高次の項の期待値をまとめた行列である. また, (4.11) 式の二段目において, 表記の簡略化のため  $A\{*\}^T = AA^T$  を利用した.

さて, (4.11) 式に, 文献 [1] (4.28) 式の近似式  $e^{F(t_k-\tau)} \approx I, \tau \in [t_k, t_{k+1}]$  を適用すると次式を得る.

$$\begin{aligned} P_k^{\text{PP}} &:= \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F_x(t_k-\tau)} G P^{\text{PP}} G^T \{e^{F(t_k-\tau)}\}^T d\tau \\ &\approx G P^{\text{PP}} G^T \Delta t \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} Q_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_k-\tau)} Q_c \{e^{F(t_k-\tau)}\}^T d\tau \\ &\approx Q_c \Delta t \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta P_k &:= \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_k-\tau)} \Delta P_c \{e^{F(t_k-\tau)}\}^T d\tau \\ &\approx \Delta P_c \Delta t \end{aligned} \quad (4.14)$$

(4.11)~(4.14) 式より, サンプルング周期  $\Delta t$  で離散化された予測誤差共分散行列を次式で近似できる.

$$P_{k+1|k} \approx F_k P_k (F_k)^T + Q_k + \Delta P_k + P_k^{\text{PP}} \quad (4.15)$$

さらに, (4.15) 式において  $F_k = e^{F\Delta t} \approx I + F\Delta t$  を利用することで次式を得る.

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &\approx (1 + F\Delta t) P_k (1 + F\Delta t)^T + Q_k + \Delta P_c + P_k^{\text{PP}} \\ &\approx P_k + (F P_k + P_k F^T + Q_c + \Delta P_c + G P^{\text{PP}} G^T) \Delta t \end{aligned} \quad (4.16)$$

よって,  $\Delta t \rightarrow 0$  とすることで, 連続時間システムの予測誤差共分散行列に関する微分方程式を次式のように与えることができる.

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q_c(t) + \Delta P_c(t) + G(t)P^{\text{PP}}G^T(t) \quad (4.17)$$

以上の解析より, 離散時間系の REKF と同様に, 連続時間システムの EKF の予測誤差共分散行列  $P^{\text{EKF}}$  と REKF の予測誤差共分散行列  $P^{\text{REKF}}$  に関する微分方程式をそれぞれ次式で与えることができる.

$$\dot{P}^{\text{EKF}} = F P^{\text{EKF}} + P^{\text{EKF}} F^T + Q_c \quad (4.18)$$

$$\dot{P}^{\text{REKF}} = \left( \dot{P}^{\text{EKF}} + \Delta P_c^{\text{REKF}} \right) + G P_c^{\text{PP}} G^T \quad (4.19)$$

なお,  $\Delta P_c^{\text{REKF}}$  は真値の計算が困難な  $\Delta P_c$  を補償する項である. (4.19) 式で  $(\cdot)$  で囲んだ式は, 連続時間系の modified EKF の予測誤差共分散行列とみなせるので, 離散時間 REKF の予測ステップと同様に, modified EKF の予測誤差共分散行列にパラメータ不確かさの影響「 $G P_c^{\text{PP}} G^T$ 」を足した形になっていることに注意されたい. また, 高次の近似項を補償する  $\Delta P_c^{\text{REKF}}$  は, 離散時間系の  $\Delta P_k^{\text{REKF}}$  と同じく, 正定値行列で設計することが望ましい.

以上の議論で得られた予測誤差共分散行列の微分方程式をサンプルング周期  $\Delta t$  で積分した値を  $P_{k|k-1}^{xx} = P^{\text{REKF}}(t)$  とすれば, 更新ステップは前章で導出した離散時間系の REKF と同じになる. よって, 本章では更新ステップの導出は割愛する.

## 4.2.2 連続・離散適応 REKF の導出

本節では、3.6 節で導出した適応則を連続・離散 REKF に適用することを考える。

まず、(4.19) 式の予測誤差共分散行列に関する微分方程式を次の (4.20) 式と (4.21) 式の通り、連続時間系の EKF の予測誤差共分散行列とパラメータ不確かさの影響に関する二つの微分方程式に分割する。

$$\dot{P}^{\text{REKF}} = \dot{P}^{\text{EKF}} + \dot{P}^{\text{prob}} \quad (4.20)$$

$$\dot{P}^{\text{prob}} := GP_c^{\text{pp}}G^T + \Delta P_c^{\text{REKF}} \quad (4.21)$$

各微分方程式をサンプリング周期  $\Delta t$  間積分して得られる共分散行列をそれぞれ、 $P_{k|k-1}^{\text{REKF}}$ ,  $P_{k|k-1}^{\text{EKF}}$ ,  $P_{k|k-1}^{\text{prob}}$  とする。これらの共分散行列と、適応パラメータ  $\alpha_k$  を利用すると、観測値  $y_k$  が得られるタイミングでの予測共分散行列の推定値を次式で与えられる。

$$P_{k|k-1}^{\text{AREKF}} = P_{k|k-1}^{\text{EKF}} + \alpha_k P_{k|k-1}^{\text{prob}} \quad (4.22)$$

(4.22) 式の離散時間の予測共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{AREKF}}$  を用いれば、3.6 節で導いた離散時間適応 REKF の適応則をそのまま利用することができる。

## 4.2.3 連続・離散 EKF のアルゴリズム

本節で提案した連続・離散 EKF のアルゴリズムは次のようにまとめられる。

### ステップ 1

サンプリング周期  $\Delta t$  間、(4.8) 式、(4.18) 式、(4.21) 式を積分し、状態量の予測値  $\hat{x}_{k|k-1}$ 、予測誤差共分散  $P_{k|k-1}^{\text{EKF}}$  とパラメータ不確かさの影響項  $P_{k|k-1}^{\text{prob}}$  を計算する。

### ステップ 2

(4.22) 式に (3.90) 式を用いて、適応パラメータ  $\alpha_k$  を計算する。

### ステップ 3

予測誤差共分散行列の推定値を次式で与える。

$$P_{k|k-1}^{\text{AREKF}} = P_{k|k-1}^{\text{EKF}} + \alpha_k P_{k|k-1}^{\text{prob}} \quad (4.23)$$

### ステップ 4

$P_{k|k-1}^{\text{AREKF}}$  を利用して、通常の EKF の更新式に従って更新を行う。

### ステップ 5

更新ステップで得られた  $P_{k|k}^{\text{AREKF}}$  を、次の積分初期値として、ステップ 1 にもどる。

離散時間フィルタと同様に、適応則を利用しない場合はステップ 2 の演算を省略し、ステップ 3 で  $\alpha_k = 1$  とすればよい。

### 4.3 連続・離散非線形ロバストフィルタ

本節では、3.4節にて提案した等価線形化を利用した非線形ロバストフィルタを行列表現を導出し、Sarkka[30]が提案した連続・離散UKFにしたがって、連続・離散非線形ロバストフィルタを導出する。

#### 4.3.1 非線形ロバストフィルタの行列表現

次の非線形システムについて、非線形ロバストフィルタの行列表現を導出する。

$$x_{k+1} = f(x_k, p_k) + w_k \quad (4.24)$$

なお、状態量  $x_k \in \mathbb{R}^n$ 、未知パラメータ  $p_k \in \mathbb{R}^l$  の定義は3.4節と同じものとする。

まず、Sarkka[30]の記法に従って、 $\mathcal{N}(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}^{xx})$  に基づいて生成される状態量  $x_k$  に関するシグマ点列  $\mathcal{X}$  の行列  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{mtr} \in \mathbb{R}^{n \times (2n+1)}$  を次式で定義する。

$$\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{mtr} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} & \cdots & \hat{x}_{k-1|k-1} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{P_{k-1|k-1}^{xx}} & \sqrt{P_{k-1|k-1}^{xx}} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

さらに、(4.24)式に従ったシグマ点列行列  $\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{mtr}$  の非線形変換を次式で表現する。

$$\mathcal{X}_{k|k-1}^{mtr} = f(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^{mtr}, p_{k-1}^{\text{nom}}) \quad (4.26)$$

また、シグマ点列  $\mathcal{X}$  の重みに関するベクトル  $\omega_x$ 、行列  $W_x$  を次式で定義する。

$$\omega_x = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_0^{(m)} & \cdots & \mathcal{W}_{2n}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$W_x = \left( I - \begin{bmatrix} \omega_x & \cdots & \omega_x \end{bmatrix} \right) \text{diag} \left( \mathcal{W}_0^{(c)} \cdots \mathcal{W}_{2n}^{(c)} \right) \left( I - \begin{bmatrix} \omega_x & \cdots & \omega_x \end{bmatrix} \right)^T \quad (4.28)$$

なお、各重み  $W_i^{(m)}$ 、 $W_i^{(c)}$  は2.2.2節で定義したものと同一である。

状態量  $x_k$  のシグマ点列  $\mathcal{X}_k$  と同様に、未知パラメータ  $p_k$  に関するシグマ点列  $\mathcal{P}$  の行列  $\mathcal{P}_k^{mtr} \in \mathbb{R}^{l \times (2l+1)}$  を次のように定義できる。

$$\mathcal{P}_{k-1|k-1}^{mtr} = \begin{bmatrix} p_{k-1}^{\text{nom}} & \cdots & p_{k-1}^{\text{nom}} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{P_{k-1}^{\text{pp}}} & \sqrt{P_{k-1}^{\text{pp}}} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

また、(4.24)式に従ったシグマ点列行列  $\mathcal{P}_{k-1|k-1}^{mtr}$  の非線形変換を次式で表現する。

$$\mathcal{P}_{k|k-1}^{mtr} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, \mathcal{P}_{k-1|k-1}^{mtr}) \quad (4.30)$$

さらに、シグマ点列  $\mathcal{P}$  の重みに関するベクトル  $\omega_p$ 、行列  $W_p$  は次式で与えることができる。

$$\omega_p = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_0^{(m)} & \cdots & \mathcal{W}_{2l}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$W_p = \left( I - \begin{bmatrix} \omega_p & \cdots & \omega_p \end{bmatrix} \right) \text{diag} \left( \mathcal{W}_0^{(c)} \cdots \mathcal{W}_{2l}^{(c)} \right) \left( I - \begin{bmatrix} \omega_p & \cdots & \omega_p \end{bmatrix} \right)^T \quad (4.32)$$

以上の準備の下、パラメータ不確かさを考慮しない予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{nom}}$  の行列表現を導出する。まず、(3.32) 式の行列表現を考える。ここで、 $F_k := F_k^F \{P_{k-1|k-1}^{xx}\}^{-1}$  とすると次式を得る。

$$\begin{aligned} F_k^F &= \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i f(\mathcal{X}_{i,k-1}, p_{k-1}^{\text{nom}}) (\mathcal{X}_{i,k-1} - \hat{x}_{k-1})^T \\ &= \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i f(\mathcal{X}_{i,k-1}, p_{k-1}^{\text{nom}}) (\mathcal{X}_{i,k-1} - \mathcal{X}_{k-1} \omega_x)^T \\ &= \mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}} \text{diag} \left( \mathcal{W}_0^{(c)} \cdots \mathcal{W}_{2n}^{(c)} \right) \left( \mathcal{X}_{k-1}^{\text{mtr}} - \mathcal{X}_{k-1}^{\text{mtr}} \begin{bmatrix} \omega_x & \cdots & \omega_x \end{bmatrix} \right)^T \end{aligned} \quad (4.33)$$

さらに、 $P_{k-1|k-1}^{xx}$  が次式で表現できることに注目する。

$$P_{k-1|k-1}^{xx} = \left( \mathcal{X}_{k-1}^{\text{mtr}} - \mathcal{X}_{k-1}^{\text{mtr}} \begin{bmatrix} \omega_x & \cdots & \omega_x \end{bmatrix} \right) \text{diag} \left( \mathcal{W}_0^{(c)} \cdots \mathcal{W}_{2n}^{(c)} \right) \left( \mathcal{X}_{k-1}^{\text{mtr}} - \mathcal{X}_{k-1}^{\text{mtr}} \begin{bmatrix} \omega_x & \cdots & \omega_x \end{bmatrix} \right)^T \quad (4.34)$$

ここで、 $P_{k-1|k-1}^{xx}$  の行列平方根  $S_{k-1}^{xx} (S_{k-1}^{xx})^T = P_{k-1|k-1}^{xx}$  を定義すると、 $S_{k-1}^{xx}$  は次式で与えることができる。

$$S_{k-1}^{xx} = \mathcal{X}_{k-1}^{\text{mtr}} \left( I - \begin{bmatrix} \omega_x & \cdots & \omega_x \end{bmatrix} \right) \text{diag} \left( \sqrt{\mathcal{W}_0^{(c)}} \cdots \sqrt{\mathcal{W}_{2n}^{(c)}} \right) \quad (4.35)$$

また、 $P_{k-1|k-1}^{xx}$  が正定であることを仮定すれば、 $S_{k-1}^{xx}$  も正則行列になるため、 $F_k$  を次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} F_k &= F_k^F \{P_{k-1|k-1}^{xx}\}^{-1} \\ &= \left\{ \mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}} \text{diag} \left( \sqrt{\mathcal{W}_0^{(c)}} \cdots \sqrt{\mathcal{W}_{2n}^{(c)}} \right) (S_{k-1}^{xx})^T \right\} \left\{ S_{k-1}^{xx} (S_{k-1}^{xx})^T \right\}^{-1} \\ &= \mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}} \text{diag} \left( \sqrt{\mathcal{W}_0^{(c)}} \cdots \sqrt{\mathcal{W}_{2n}^{(c)}} \right) (S_{k-1}^{xx})^{-1} \end{aligned} \quad (4.36)$$

よって、(3.36) 式で与えられた、パラメータ不確かさを考慮しない予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{nom}}$  の行列表現を次式で導ける。

$$\begin{aligned} P_{k|k-1}^{\text{nom}} &= F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + Q_{k-1} \\ &= \mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}} \text{diag} \left( \sqrt{\mathcal{W}_0^{(c)}} \cdots \sqrt{\mathcal{W}_{2n}^{(c)}} \right) (S_{k-1}^{xx})^{-1} \left\{ S_{k-1}^{xx} (S_{k-1}^{xx})^T \right\} \\ &\quad \times \left[ \mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}} \text{diag} \left( \sqrt{\mathcal{W}_0^{(c)}} \cdots \sqrt{\mathcal{W}_{2n}^{(c)}} \right) (S_{k-1}^{xx})^{-1} \right]^T + Q_{k-1} \\ &= \mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}} \text{diag} \left( \mathcal{W}_0^{(c)} \cdots \mathcal{W}_{2n}^{(c)} \right) (\mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}})^T + Q_{k-1} \\ &= \mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}} W_x (\mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}})^T + Q_{k-1} \end{aligned} \quad (4.37)$$

同様に未知パラメータの影響項  $P_{k|k-1}^{\text{PP}}$  について考える。まず, (3.33) 式の行列表現を考えるために,  $G_k := G_k^F \{P_{k-1|k-1}^{\text{PP}}\}^{-1}$  とすると次式を得る。

$$\begin{aligned} G_k^F &= \sum_{i=0}^{2l} \mathcal{W}_i f(\hat{x}_{k-1|k-1}, \mathcal{P}_{i,k-1}) (\mathcal{P}_{i,k-1} - p_{k-1}^{\text{nom}})^T \\ &= \sum_{i=0}^{2l} \mathcal{W}_i f(\hat{x}_{k-1|k-1}, \mathcal{P}_{i,k-1}) (\mathcal{P}_{i,k-1} - \mathcal{P}_{k-1}^{\text{mtr}} \omega_p)^T \\ &= \mathcal{P}_{k|k-1}^{\text{mtr}} \text{diag} \left( \mathcal{W}_0^{(c)} \cdots \mathcal{W}_{2n}^{(c)} \right) \left( \mathcal{P}_{k-1}^{\text{mtr}} - \mathcal{P}_{k-1}^{\text{mtr}} \begin{bmatrix} \omega_p & \cdots & \omega_p \end{bmatrix} \right)^T \end{aligned} \quad (4.38)$$

さらに,  $P_{k-1}^{\text{PP}}$  が次式で表現できることに注目する。

$$P_{k-1}^{\text{PP}} = \left( \mathcal{P}_{k-1}^{\text{mtr}} - \mathcal{P}_{k-1}^{\text{mtr}} \begin{bmatrix} \omega_p & \cdots & \omega_p \end{bmatrix} \right) \text{diag} \left( \mathcal{W}_0^{(c)} \cdots \mathcal{W}_{2n}^{(c)} \right) \left( \mathcal{P}_{k-1}^{\text{mtr}} - \mathcal{P}_{k-1}^{\text{mtr}} \begin{bmatrix} \omega_p & \cdots & \omega_p \end{bmatrix} \right)^T \quad (4.39)$$

ここで,  $P_{k-1}^{\text{PP}}$  の行列平方根  $S_{k-1}^{\text{PP}}$  ( $S_{k-1}^{\text{PP}} (S_{k-1}^{\text{PP}})^T = P_{k-1}^{\text{PP}}$ ) を定義すると,  $S_{k-1}^{\text{PP}}$  は次式で与えることができる。

$$S_{k-1}^{\text{PP}} = \mathcal{P}_{k-1}^{\text{mtr}} \left( I - \begin{bmatrix} \omega_p & \cdots & \omega_p \end{bmatrix} \right) \text{diag} \left( \sqrt{\mathcal{W}_0^{(c)}} \cdots \sqrt{\mathcal{W}_{2n}^{(c)}} \right) \quad (4.40)$$

さらに,  $P_{k-1}^{\text{PP}}$  が正定であることに注意すれば,  $S_{k-1}^{\text{PP}}$  も正則行列になるため,  $G_k$  を次式で与えることができる。

$$\begin{aligned} G_k &= G_k^F \{P_{k-1}^{\text{PP}}\}^{-1} \\ &= \left\{ \mathcal{P}_{k|k-1}^{\text{mtr}} \text{diag} \left( \sqrt{\mathcal{W}_0^{(c)}} \cdots \sqrt{\mathcal{W}_{2n}^{(c)}} \right) (S_{k-1}^{\text{PP}})^T \right\} \left\{ S_{k-1}^{\text{PP}} (S_{k-1}^{\text{PP}})^T \right\}^{-1} \\ &= \mathcal{P}_{k|k-1}^{\text{mtr}} \text{diag} \left( \sqrt{\mathcal{W}_0^{(c)}} \cdots \sqrt{\mathcal{W}_{2n}^{(c)}} \right) (S_{k-1}^{\text{PP}})^{-1} \end{aligned} \quad (4.41)$$

よって, パラメータ不確かさの影響項  $P_{k|k-1}^{\text{PP}}$  の行列表現を次式で導ける。

$$P_{k|k-1}^{\text{PP}} = \mathcal{P}_{k|k-1}^{\text{mtr}} \text{diag} \left( \mathcal{W}_0^{(c)} \cdots \mathcal{W}_{2l}^{(c)} \right) (\mathcal{P}_{k|k-1}^{\text{mtr}})^T \quad (4.42)$$

$$=: \mathcal{P}_{k|k-1}^{\text{mtr}} W_p (\mathcal{P}_{k|k-1}^{\text{mtr}})^T \quad (4.43)$$

(4.37) 式, (4.43) 式より, パラメータ不確かさの影響を考慮した予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{\text{prob}}$  は次式でまとめられる。

$$P_{k|k-1}^{\text{prob}} = \mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}} W_x (\mathcal{X}_{k|k-1}^{\text{mtr}})^T + Q_{k-1} + \mathcal{P}_{k|k-1}^{\text{mtr}} W_p (\mathcal{P}_{k|k-1}^{\text{mtr}})^T + \Delta P_k \quad (4.44)$$

なお,  $\Delta P_k$  は前出の近似誤差を補償するための設計行列である。

### 4.3.2 連続・離散非線形ロバストフィルタの導出

十分に小さなサンプリング時間  $\Delta t$  を利用すると、非線形ダイナミクス (4.1) 式を次式で近似できる。

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) - x(t) &= f(x(t), p, t)\Delta t + L(t)\Delta\beta + o(\Delta t) \\ &\approx \{F\tilde{x} + G\tilde{p} + \mathbb{E}[f(x, p)]\} \Delta t + L(t)\Delta\beta(t) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (4.45)$$

ここで、 $\Delta\beta(t) \sim \mathcal{N}(0, Q_c(t)\Delta t)$  であり、 $o(\Delta t)$  は  $\Delta t \rightarrow 0$  のときに  $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$  を満足する。なお、連続・離散 REKF の導出時と同様に、簡略化のため、時刻  $(t)$  は明確に表記する必要がない場合は省略する。

(4.1) 式の非線形関数  $f(x, p)$  を  $(\hat{x}(t), p^{\text{nom}})$  まわりで線形化を行うと次式を得る。

$$f(x(t), p) \approx F(t)\tilde{x}(t) + G(t)\tilde{p} + \mathbb{E}[f(x, p)] \quad (4.46)$$

ここで、推定誤差  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 、パラメータ偏差  $\tilde{p} = p - p^{\text{nom}}$  の定義は連続・離散 REKF の導出時と同様である。

さらに、予測誤差  $\tilde{x}^-$  を  $\tilde{x}^- := x(t + \Delta t) - \hat{x}(t + \Delta t)$  で定義すると、

$$\begin{aligned} \tilde{x}^- &\approx x(t) + \{F\tilde{x} + G\tilde{p} + \mathbb{E}[f(x, p)]\} \Delta t + L\Delta\beta - \hat{x}(t + \Delta t) \\ &\approx F\tilde{x} + G\tilde{p} + L\Delta\beta \end{aligned} \quad (4.47)$$

を得る。この予測誤差  $\tilde{x}^-$  を利用することで、予測誤差共分散行列を次式で近似できる。

$$\begin{aligned} P^-(t + \Delta t) &= \mathbb{E}[\tilde{x}^- \cdot (\tilde{x}^-)^T] \\ &\approx \mathbb{E}[(F\tilde{x} + G\tilde{p} + L\Delta\beta)(F\tilde{x} + G\tilde{p} + L\Delta\beta)^T] \\ &= FP^{xx}F^T + GP^{pp}G^T + LQ_cL^T \end{aligned} \quad (4.48)$$

以上の準備の下、4.3.1 節で定義したシグマ点列の行列表現  $\mathcal{X}^{mtr}, \mathcal{P}^{mtr}$  を利用すると、連続時間系の予測式の行列表現を次のように得る。

$$\hat{\mathcal{X}}^{mtr}(t + \Delta t) = \mathcal{X}^{mtr}(t) + f(\mathcal{X}^{mtr}(t), p^{\text{nom}})\Delta t + o(\Delta t) \quad (4.49)$$

$$m^-(t + \Delta t) = \hat{\mathcal{X}}^{mtr}(t + \Delta t)\omega_m \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} P^-(t + \Delta t) &= \hat{\mathcal{X}}^{mtr}(t + \Delta t)W_x\hat{\mathcal{X}}^{mtr}(t + \Delta t)^T \\ &\quad + \left\{ \mathcal{P}^{mtr}W_p(\mathcal{P}^{mtr})^T + LQ_cL^T \right\} \Delta t \end{aligned} \quad (4.51)$$

予測平均  $m(t)$  に関する微分方程式は、(4.49) 式は未知パラメータベクトル  $p(t)$  を含んでおらず、パラメータ不確かさを考慮しない従来の連続・離散 UKF [30] と同じである。よって、以降は予測誤差共分散行列に関する微分方程式のみに注目する。

(4.49) 式を (4.51) 式に代入し，高次の項を省略すると次式を得る．

$$\begin{aligned}
P^-(t + \Delta t) &= \{ \mathcal{X}^{mtr}(t) + f(\mathcal{X}^{mtr}(t), p^{\text{nom}})\Delta t \} W_x \{ * \}^T \\
&\quad + \{ \mathcal{P}^{mtr} W_p [\mathcal{P}^{mtr}]^T + L Q_c L^T \} \Delta t + o(\Delta t) \\
&= \mathcal{X}^{mtr}(t) W_x \mathcal{X}^{mtr}(t)^T + f(\mathcal{X}^{mtr}(t), p^{\text{nom}}) W_x \mathcal{X}^{mtr}(t)^T \Delta t \\
&\quad + \mathcal{X}^{mtr}(t) W_x f(\mathcal{X}^{mtr}(t), p^{\text{nom}})^T \Delta t \\
&\quad + \{ \mathcal{P}^{mtr} W_p [\mathcal{P}^{mtr}]^T + L Q_c L^T \} \Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

なお，上式の一段目において， $\{ * \}$  は  $\{ A \} X \{ * \}^T = A W A^T$  を意味する省略記号である．

両辺を  $\Delta t$  で割り，サンプリング時間  $\Delta t$  を  $\Delta t \rightarrow 0$  とすると，次の微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}
\frac{dP^{\text{rnf}}}{dt} &= f(\mathcal{X}^{mtr}(t), p^{\text{nom}}) W_x \mathcal{X}^{mtr}(t)^T + \mathcal{X}^{mtr}(t) W_x f(\mathcal{X}^{mtr}(t), p^{\text{nom}})^T + L Q_c L^T \\
&\quad + \mathcal{P}^{mtr} W_p [\mathcal{P}^{mtr}]^T \\
&= \frac{dP^{\text{nkf}}}{dt} + \mathcal{P}^{mtr} W_p [\mathcal{P}^{mtr}]^T
\end{aligned} \tag{4.53}$$

上式の  $P^{\text{nkf}}$  はパラメータ不確かさがない場合の予測誤差共分散行列を意味し，Sarkka[30] の文献と同様に次式で定義される．

$$\frac{dP^{\text{nkf}}}{dt} = f(\mathcal{X}^{mtr}(t), p^{\text{nom}}) W_x \mathcal{X}^{mtr}(t)^T + \mathcal{X}^{mtr}(t) W_x f(\mathcal{X}^{mtr}(t), p^{\text{nom}})^T + L Q_c L^T \tag{4.54}$$

本節で導出した予測誤差共分散行列の微分方程式 (4.53) 式と REKF の予測誤差共分散行列の微分方程式 (4.19) 式を比較すると，どちらもパラメータ不確かさの影響を考慮していない微分方程式にパラメータ不確かさの影響項を加算した形になっている点で類似している．

### 4.3.3 連続・離散非線形適応ロバストフィルタ

4.2.2 節と同様に，連続・離散非線形ロバストフィルタにも適応則を採用することができる．

(4.53) 式の予測誤差共分散行列に関する微分方程式を (4.55) 式と (4.56) 式の通り，連続時間系の非線形ロバストフィルタの予測誤差共分散行列とパラメータ不確かさの影響に関する二つの微分方程式に分割する．

$$\dot{P}^{\text{rnf}} = \dot{P}^{\text{nkf}} + \dot{P}^{\text{prob}} \tag{4.55}$$

$$\dot{P}^{\text{prob}} := \mathcal{P}^{mtr} W_p [\mathcal{P}^{mtr}]^T + \Delta P_c^{\text{rnf}} \tag{4.56}$$

なお， $\Delta P_c^{\text{rnf}}$  は近似誤差を補償するための設計行列である．

各微分方程式をサンプリング周期  $\Delta t$  間積分して得られる共分散行列をそれぞれ， $P_{k|k-1}^{\text{rnf}}$ ， $P_{k|k-1}^{\text{nkf}}$ ， $P_{k|k-1}^{\text{prob}}$  とする．これらの共分散行列を利用し，適応パラメータ  $\alpha_k$  を用いて，観測値が得られるタイミングでの予測共分散行列の推定値を次式で与える．

$$P_{k|k-1}^{\text{arnf}} = P_{k|k-1}^{\text{nkf}} + \alpha_k P_{k|k-1}^{\text{prob}} \tag{4.57}$$

(4.57) 式の離散時間の予測共分散行列の推定値を用いれば，3.6 節で導いた離散時間適応 REKF の適応則をそのまま利用することができる．

### 4.3.4 連続・離散非線形ロバストフィルタのアルゴリズム

本節で提案した連続・離散非線形ロバストフィルタのアルゴリズムは次のようにまとめられる。

#### ステップ 1

サンプリング周期  $\Delta t$  間, (4.50), (4.54), (4.56) 式を積分し, 状態量の予測値  $\hat{x}_{k|k-1}$ , 予測誤差共分散  $P_{k|k-1}^{\text{nkf}}$  と  $P_{k|k-1}^{\text{rob}}$  を計算する。

#### ステップ 2

(3.89) 式, もしくは, (3.90) 式の関係式を用いて, 適応パラメータ  $\alpha_k$  を計算する。

#### ステップ 3

予測誤差共分散行列の推定値を次式で与える。

$$P_{k|k-1}^{\text{arnf}} = P_{k|k-1}^{\text{nkf}} + \alpha_k P_{k|k-1}^{\text{rob}} \quad (4.58)$$

#### ステップ 4

$P_{k|k-1}^{\text{arnf}}$  を利用して, 通常非線形カルマンフィルタの更新式に従って更新を行う。

#### ステップ 5

更新ステップで得られた  $P_{k|k}^{\text{arnf}}$  を, 次の積分初期値として, ステップ 1 に戻る。

離散時間フィルタと同様に, 適応則を利用しない場合はステップ 2 の演算を省略し, ステップ 3 で  $\alpha_k = 1$  とすればよい。

## 4.4 数値シミュレーション

本節では, 2つの対象を例にして提案した連続・離散ロバストフィルタの有効性を検証する。

### 4.4.1 シミュレーション例 1

まず, 次式で与えられる二相永久磁石同期モータモデルを扱う ([1] Example 13.1)。

$$\dot{i}_a = -\frac{R}{L}i_a + \frac{\omega\lambda}{L}\sin\theta + \frac{u_a + q_1}{L} \quad (4.59)$$

$$\dot{i}_b = -\frac{R}{L}i_b - \frac{\omega\lambda}{L}\cos\theta + \frac{u_b + q_2}{L} \quad (4.60)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{3\lambda}{2J}i_b\sin\theta + \frac{3\lambda}{2J}i_a\cos\theta - \frac{F\omega}{J} + q_3 \quad (4.61)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (4.62)$$

なお,  $u_a = \sin(2\pi t), u_b = \cos(2\pi t)$  を時変入力とする. また, 確率雑音  $q_1 \sim q_3$  は全て平均0で, 分散がそれぞれ  $[2/3, 2/3, 0.5]$  に従うものと仮定する. さらに, 上記の非線形ダイナミクスについて, 状態量  $x$  を次の通り定義する.

$$x = \begin{bmatrix} i_a & i_b & \omega & \theta \end{bmatrix}^T \quad (4.63)$$

観測はサンプリング周期  $\Delta t$  ごとに行われるものとし, 次式の線形観測方程式に従うとする.

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k \quad (4.64)$$

なお, 観測雑音  $v_k$  は  $v_k \sim \mathcal{N}(0, 0.1^2 I_{2 \times 2})$  に従うものと仮定とする.

各パラメータのノミナル値と定義を Table 4.1 にまとめる.

Table 4.1: Simulation parameters of continuous-time motor model

	Parameter	Value
$R$	Winding resistance	2.0
$L$	Winding inductance	0.003
$\lambda$	Motor constant	0.1
$J$	Moment of inertia	0.0002
$F$	Coefficient of viscous friction	0.001

本例では, パラメータ不確かさがある場合, パラメータ不確かさがない場合のそれぞれの場合について, 以下の連続・離散フィルタの比較を行う.

**PNKF** パラメータ真値を利用する連続・離散非線形カルマンフィルタ

**NNKF** ノミナルパラメータを利用する連続・離散非線形カルマンフィルタ

**RNF** 提案した連続・離散非線形ロバストフィルタ

**ARNF** 提案した連続・離散非線形適応ロバストフィルタ

また, 「パラメータ不確かさがある場合」には, 各試行ごとに巻き線抵抗  $R_a$  を 1~3, モータ慣性  $J$  を  $10^{-4} \sim 3 \times 10^{-4}$  の一様分布でそれぞれ与えるものとする.

シミュレーションの初期値として以下の値を設定する.

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_0 = 3I_{4 \times 4}$$

なお, 適応則に利用する忘却係数は「 $\rho = 0.9$ 」を用いることにする.

連続系のシミュレーションには、刻み幅  $\delta t = 0.001$  秒の Euler-Maruyama 法 [37] を利用し、サンプリング周期  $\Delta t$  を 0.02s とし、各連続・離散時間フィルタの有効性検証するシミュレーションを行う。なお、このサンプリング周期で離散時間フィルタを適用しようとする、推定値が発散してしまうことを確認している。

まず、パラメータ不確かさがある場合について、50回のモンテカルロシミュレーションを行い、得られた RMSE の平均値を Table 4.2 に示した。

Table 4.2: Simulation Results (uncertain parameter)

state	PNKF	NNKF	RNF	ARNF
$x_1$	0.09	0.09	0.10	0.10
$x_2$	0.09	0.09	0.10	0.10
$x_3$	0.41	0.73	0.71	0.68
$x_4$	0.30	0.50	0.37	0.42

Table 4.2を見ると、PNKF と NNKF を比較すると、連続・離散フィルタにおいても、パラメータ不確かさによって推定精度の低下が確認できる。また、 $x_3, x_4$  については、RNF と ARNF は NNKF よりも推定精度が向上していることが確認できる。なお、適応則を利用すると  $x_3$  の推定精度は向上するものの、 $x_4$  の推定精度が低下していることが確認できる。これは適応パラメータがスカラで表現されていることが原因であると推測される。

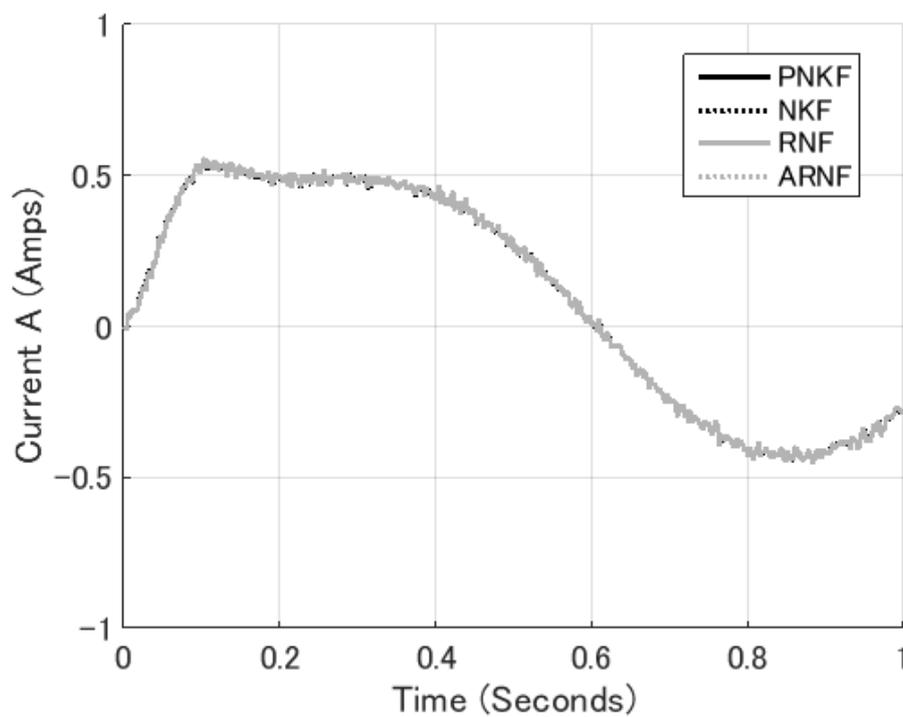
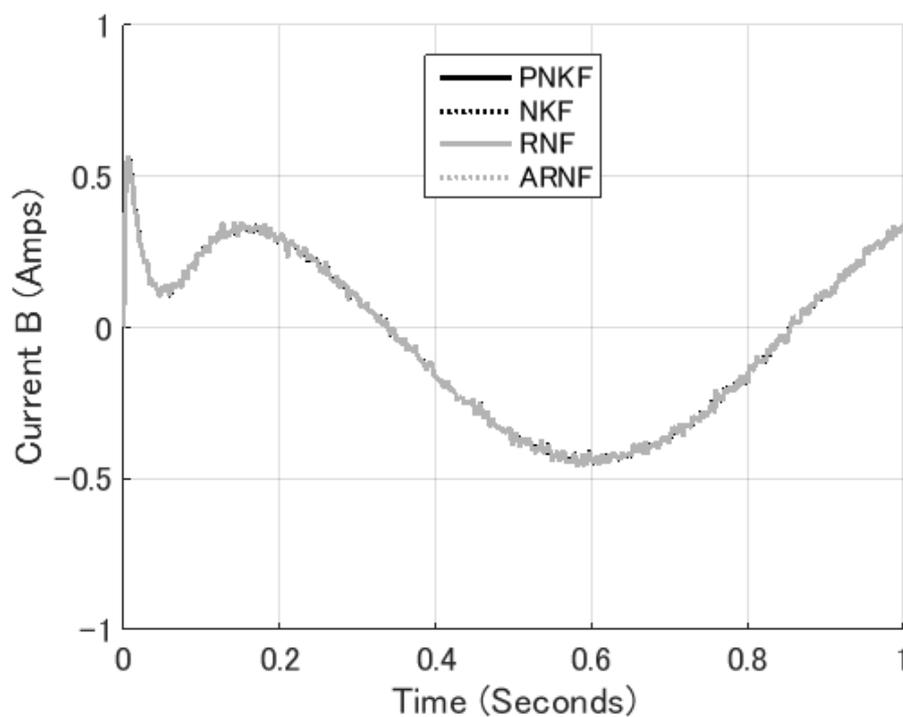
Fig.4.1～4.4に各連続・離散フィルタの推定値の時系列を示した。各グラフは50回のモンテカルロシミュレーションのサンプルパスの平均値である。Table 4.2の RMSE の値からわかるように、Fig. 4.1, Fig. 4.2からは各フィルタに明確な差がみられない。一方で、Fig. 4.3では、PNKF に対して、ほかのフィルタの推定値は立ち上がり遅く、かつ、0.2秒以降に偏差を生じており、PNKF からの偏差は NNKF, RNF, ARNF の順に小さくなっている。Fig.4.4も推定開始初期に PNKF とのかい離が確認できる。

つぎに、パラメータ不確かさがない場合について、50回のモンテカルロシミュレーションを行い、得られた RMSE の平均値を Table 4.3 に示した。

Table 4.3: Simulation Results (nominal parameter)

state	PNKF	NNKF	RNF	ARNF
$x_1$	0.09	0.09	0.10	0.10
$x_2$	0.09	0.09	0.10	0.10
$x_3$	0.41	0.41	0.62	0.46
$x_4$	0.32	0.32	0.32	0.32

Table 4.3を見ると、離散時間系のロバストフィルタと同様に、RNF の推定結果が NNKF よりも低下していることが確認できる。また、 $x_3$  の推定値に関しては ARNF の推定結果が RNF よりも改善していることが分かる。この結果も離散時間フィルタと同様である。

Fig 4.1: Estimation values of current  $i_a$  (uncertain case)Fig 4.2: Estimation values of current  $i_b$  (uncertain case)

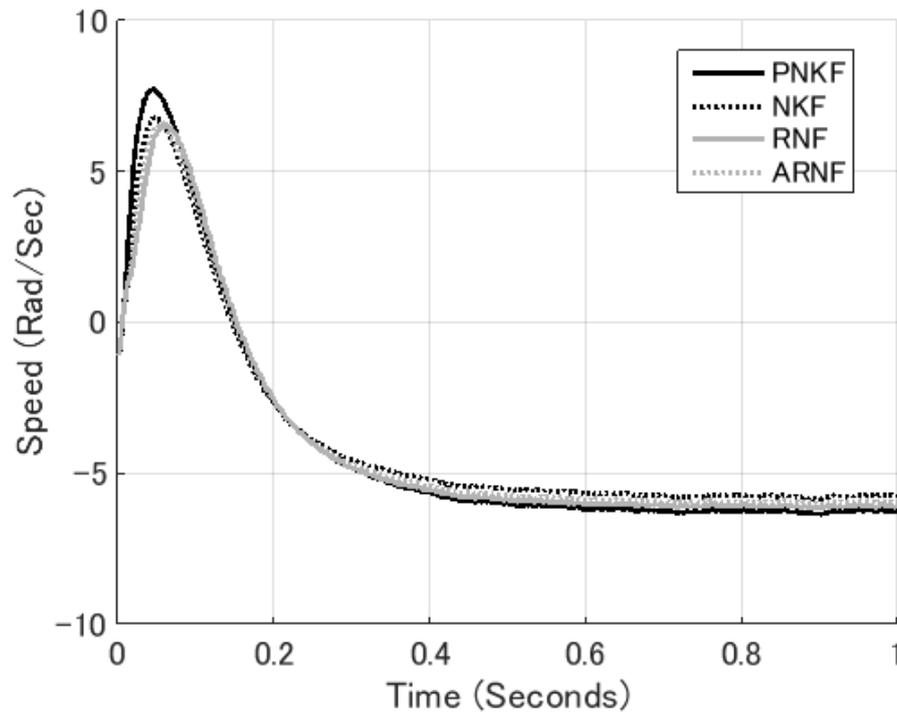


Fig 4.3: Estimation values of speed (uncertain case)

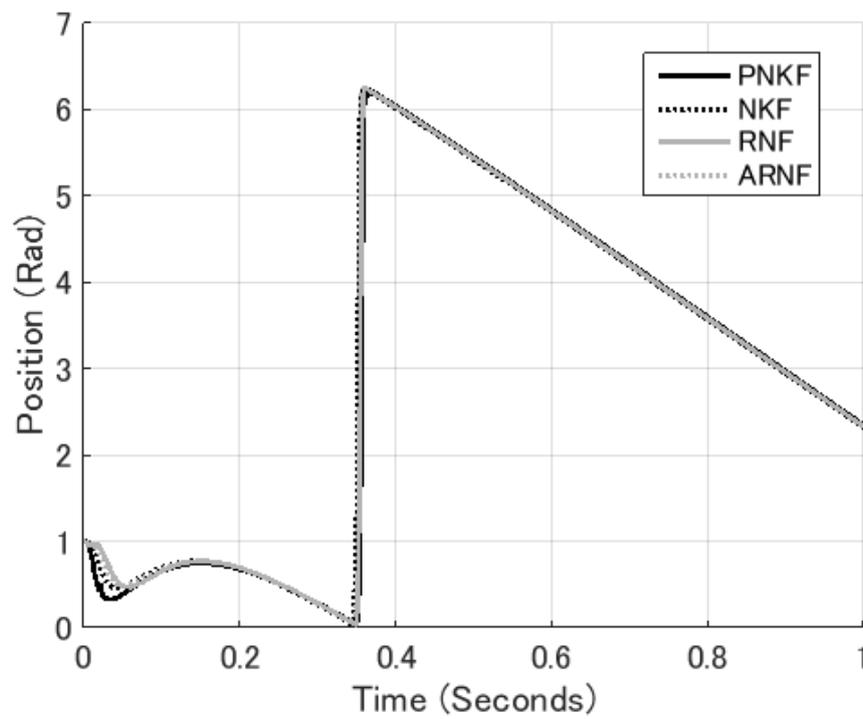


Fig 4.4: Estimation values of position (uncertain case)

Fig.4.5～4.8に各連続・離散フィルタの推定値の時系列を示した。Fig.4.7を見ると、パラメータ不確かさがある場合には存在していたPNKFとRNF, ARNFの偏差がなくなっていることがわかる。

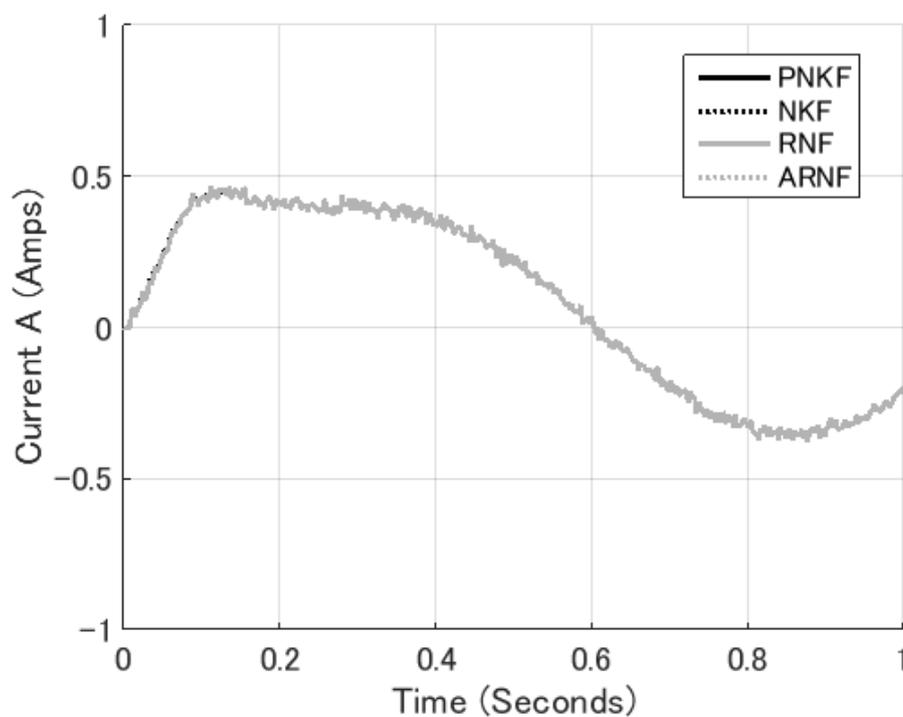


Fig 4.5: Estimation values of current  $i_a$  (nominal case)

#### 4.4.2 シミュレーション例2

本節では、Fig. 4.9に示した台車・振り子系の推定問題を考える。

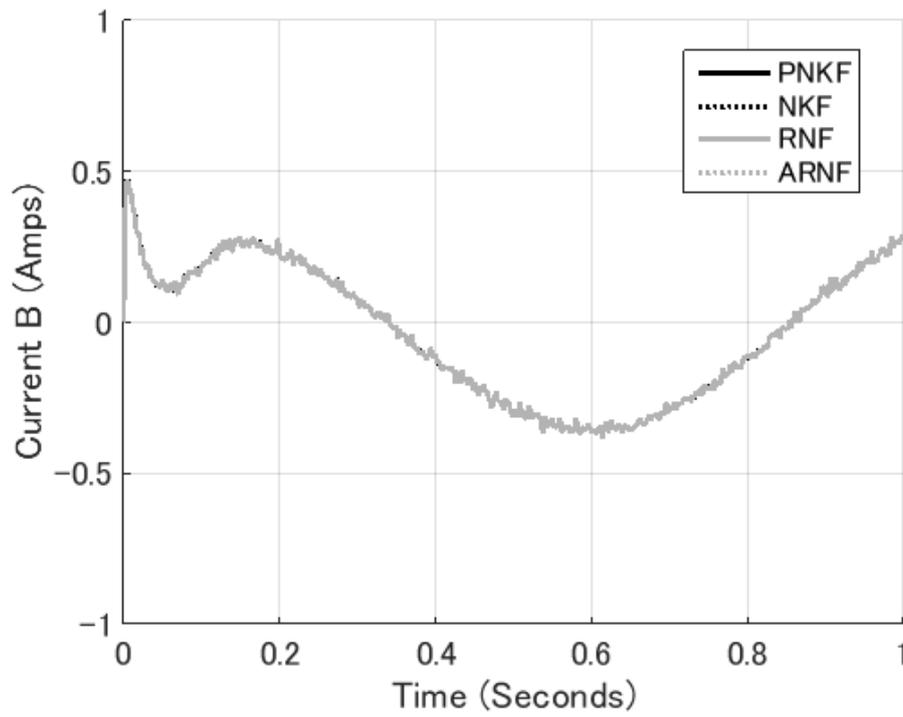


Fig 4.6: Estimation values of current  $i_b$  (nominal case)

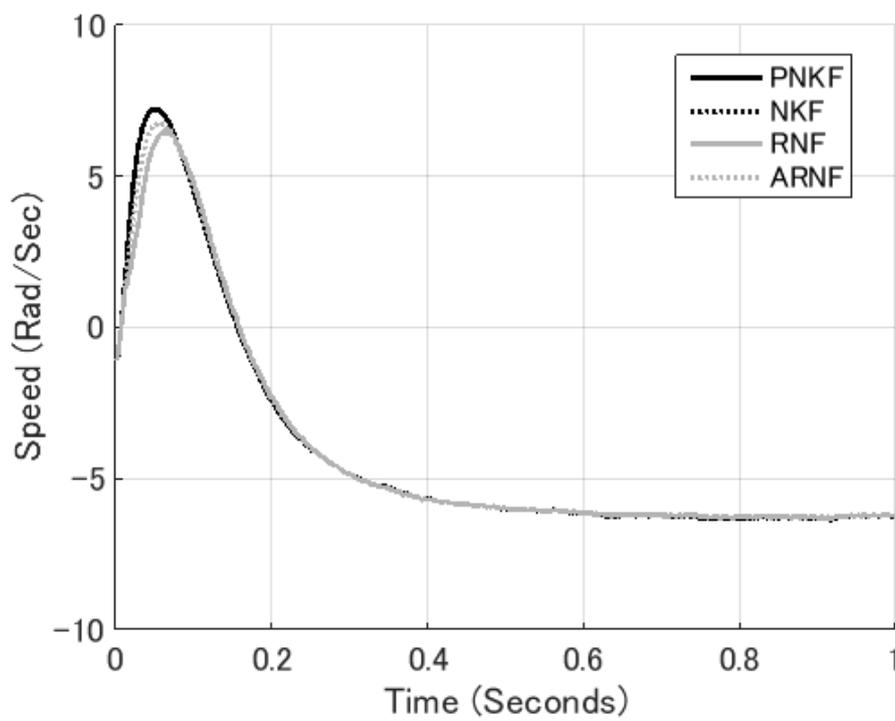


Fig 4.7: Estimation values of speed (nominal case)

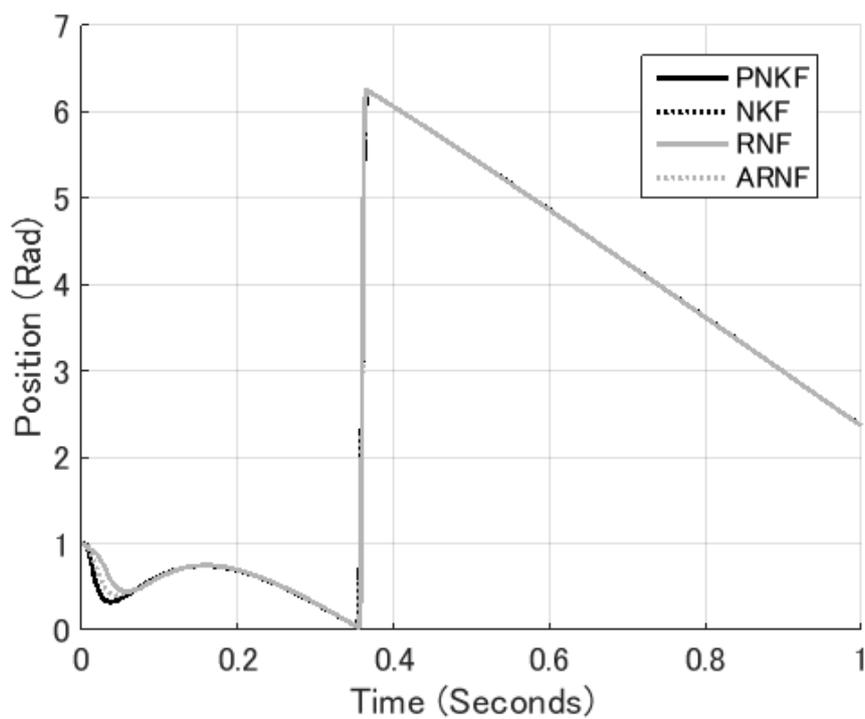


Fig 4.8: Estimation values of position (nominal case)

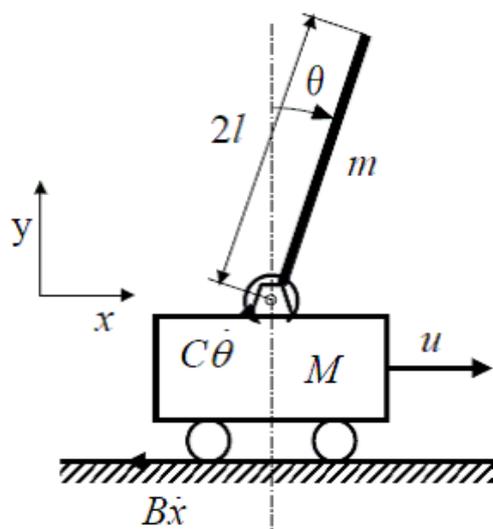


Fig 4.9: Cart pendulum system

Fig. 4.9 の台車・振り子系の非線形ダイナミクスは次式で表現できる.

$$f(x(t), u(t), p) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \left\{ -B(J + ml^2)x_2 + Cml \cos(x_3)x_4 + (J + ml^2)ml \sin(x_3)x_4^2 - m^2l^2g \sin(x_3) \cos(x_3) \right\} / \alpha(x) \\ x_4 \\ \left\{ Bml \cos(x_3)x_4 - C(m + M)x_4 - m^2l^2g \sin(x_3) \cos(x_3)x_4^2 \right\} / \alpha(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (J + ml^2) / \alpha(x) \\ 0 \\ -ml \cos(x_3) / \alpha(x) \end{bmatrix} u(t)$$

$$\alpha(x) = J(m + M) + Mml^2 + m^2l^2 \sin^2(x_3)$$

なお, 状態ベクトル  $x(t) \in \mathbb{R}^4$  は次式で定義される.

$$x = \begin{bmatrix} x & \theta & \dot{x} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (4.65)$$

制御入力  $u(t)$  は時変であり,

$$u(t) = \begin{cases} 10 & (0 \leq t \leq 8) \\ 10 \sin(10t) & (8 < t \leq 12) \\ -10 & (12 < t) \end{cases}$$

で与えるものとする. さらに, 離散時間系の観測方程式は次式で与えられるものとする.

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k$$

本シミュレーションでも, 以下の4通りの連続・離散フィルタの比較を行う.

**PNKF** パラメータ真値を利用する連続・離散非線形カルマンフィルタ

**NNKF** ノミナルパラメータを利用する連続・離散非線形カルマンフィルタ

**RNF** 提案した連続・離散非線形ロバストフィルタ

**ARNF** 提案した連続・離散非線形適応ロバストフィルタ

なお, 各フィルタの初期値は次式で与える.

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}, P_0 = 10I_{4 \times 4} \quad (4.66)$$

Table 4.4: Simulation parameters of cart pendulum

	Parameter	Value
$M$	Math of Cart	0.5 [kg]
$m$	Math of Pendulum	1.0 [kg]
$l$	Length of Pendulum	1.0 [m]
$B$	Friction Coefficient	0.5 [kg/s]
$C$	Viscous Friction Coefficient	0.3 [kg m <sup>2</sup> /s]

また、非線形ダイナミクス  $f(x(t), u(t), p)$  に含まれる各記号の意味、及び、その値を Table 4.4 にまとめる。

本シミュレーションでは、台車と地面の摩擦係数  $B$  と振り子と台車をつなぐリンクの粘性摩擦係数  $C$  は不確かさを有するものとし、各シミュレーションシナリオごとに次の分布に従って、パラメータ真値を生成する。なお、一度サンプリングしたパラメータ真値はシミュレーション途中で変更しない。

$$B \sim \mathcal{N}(0.5, 0.1), \quad C \sim \mathcal{N}(0.3, 0.05) \quad (4.67)$$

サンプリング周期  $\Delta t$  を  $\Delta t = 0.2$  秒とし、20 秒間のシミュレーションを 1 セットとして、30 回のモンテカルロシミュレーションを実行した RMSE を Table 4.5 にまとめた。なお、連続系のシミュレーションには、刻み幅  $\delta t = 0.001$  秒の Euler-Maruyama 法を利用した。

Table 4.5: Simulation results : RMSE of each filter

	PNKF	NNKF	RNF	ARNF
$x_1$	0.05	0.05	0.05	0.05
$x_2$	0.09	0.54	0.48	0.45
$x_3$	0.05	0.05	0.05	0.05
$x_4$	0.13	0.30	0.31	0.33

Table 4.5 にて、 $x_2$  の RMSE に注目すると、パラメータ真値が利用できない NNKF はパラメータ真値を利用する PNKF に比べて推定精度が大きく低下していることがわかる。これに対して、パラメータ不確かさの影響項を考慮した RNF は推定精度の低下を抑制できていることも確認できる。さらに、適応則を利用した ARNF では、RNF よりも推定精度低下の抑制効果が確認できる。一方で、 $x_4$  の RMSE に注目すると、NNKF よりも RNF, ARNF の推定精度が低下していることが確認できる。

Fig. 4.10, Fig.4.11 に各フィルタによる  $x_2$  と  $x_4$  の推定誤差の時系列をまとめた。各グラフは 30 回のモンテカルロシミュレーションのサンプルパスの平均値を示している。ARNF の時系列波形を確認すると、 $x_2$ ,  $x_4$  とともに制御入力の切り替えが起こる、8 秒において推定誤差が急峻に立ち上がっていることが確認できる。また、 $x_2$  については、2 回目の制御入力

の切り替えが起こる, 12秒でも同様の傾向が確認できる. この現象より, サンプル周期が長い系においては, 適応則が十分に機能し得ない場合があると推測される.

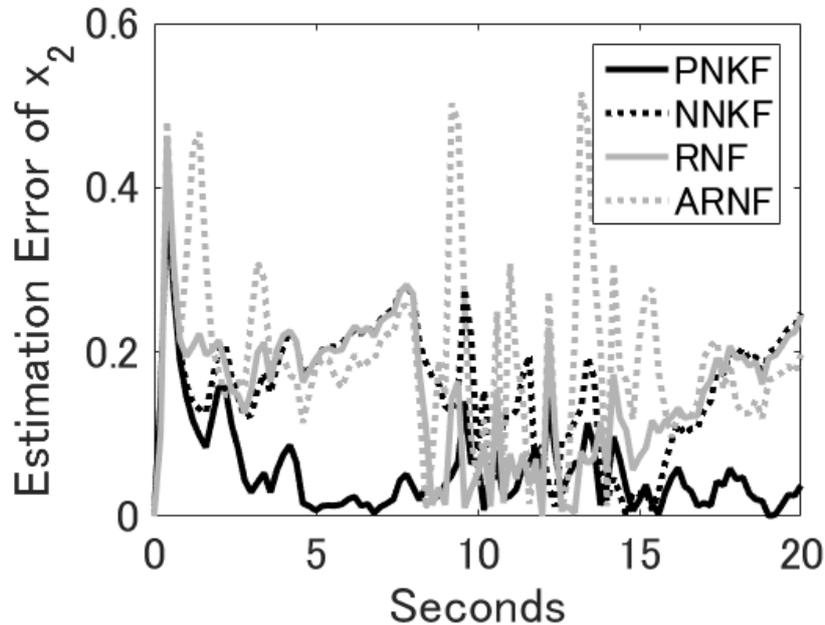


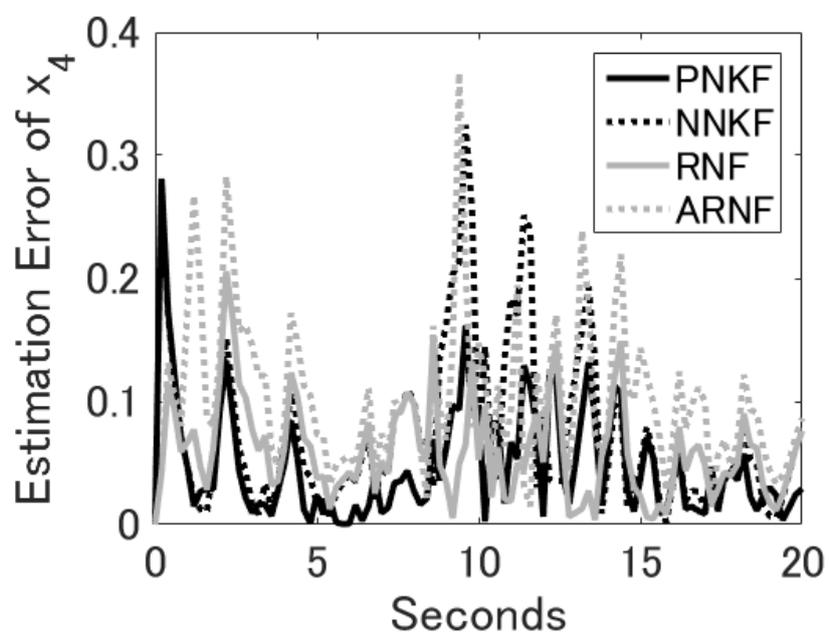
Fig 4.10: Estimation error of current  $x_2$

## 4.5 まとめ

本章では, ダイナミクスが連続時間系, 観測方程式が離散時間系で表現される連続・離散時間系における非線形ロバストフィルタの提案を行った.

まず, 連続時間系の非線形システムをサンプル周期で離散時間系の非線形システムの近似することで, 離散時間系の REKF の予測ステップを連続時間系に拡張した連続・離散 REKF の提案を行った. さらに, RUKF を含む非線形ロバストフィルタの行列表現を導出し, Sarkka[30] が導出した連続・離散 UKF の導出に従って, 連続・離散非線形ロバストフィルタを導出した. これらの2つの連続・離散非線形ロバストフィルタとも, 更新式が離散時間系に従うため, 前章で導出した適応則を直接利用することもできる.

数値シミュレーションにより, 連続・離散時間系においても非線形ロバストフィルタの有効性を確認した.

Fig 4.11: Estimation values of current  $x_4$

# 第5章 近似最小分散不偏フィルタ

## 5.1 問題設定

本章でも, (3.1), (3.2) 式で定義した, 次の離散時間非線形システムを考える.

$$x_{k+1} = f(x_k, p_k) + w_k \quad (3.1)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (3.2)$$

状態量  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , 観測量  $y_k \in \mathbb{R}^m$ , 未知パラメータ  $p_k \in \mathbb{R}^l$ , プロセス雑音  $w_k$ , 観測雑音  $v_k$  はともに平均値が0, それぞれの分散が  $\mathbb{E}[w_k w_k^T] = Q_k$ ,  $\mathbb{E}[v_k v_k^T] = R_k$  に従う正規白色雑音とする. さらに, プロセス雑音  $w_k$  と観測雑音  $v_k$  には相関がない, つまり,  $\mathbb{E}[w_k v_k^T] = 0$ ,  $\mathbb{E}[v_k w_k^T] = 0$  が成立することを仮定する. また, 状態量  $x_k$  と未知パラメータ  $p_k$  は相関がない, つまり,  $\mathbb{E}[x_k p_k^T] = 0$ ,  $\mathbb{E}[p_k x_k^T] = 0$  が成立する, と仮定する.

本章の目的は, 状態量  $x_k$  の近似的な最小分散不偏推定値を求める「最小分散不偏フィルタ」を導出することである. さらに, 近似最小分散不偏フィルタを状態量  $x_k$  とパラメータ  $p_k$  を同時に推定する最適フィルタも本章にて導出する.

## 5.2 近似最小分散不偏フィルタによる状態量推定

### 5.2.1 非線形ロバストフィルタの推定誤差解析

3.4節で提案した非線形ロバストフィルタも, 3.6節で提案した非線形適応ロバストフィルタも予測誤差共分散行列  $P_{k|k-1}^{xx}$  の演算のみが通常非線形カルマンフィルタと異なるが, 更新式は (2.6)~(2.10) 式に従っている. 本節では, この更新式を利用することによって生じ得る問題を明らかにする.

観測方程式 (3.2) 式が次式で近似できたことに注意して,

$$y_k \approx H_k \tilde{x}_{k|k-1} + \hat{y}_{k|k-1} + v_k \quad (3.39)$$

更新式 (2.6)~(2.10) で得られる推定誤差  $\tilde{x}_{k|k} := x_k - \hat{x}_{k|k}$  を計算すると,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k|k} &= x_k - \{ \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \} \\ &\approx (I_{n \times n} - K_k H_k) (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) - K_k v_k \\ &= (I_{n \times n} - K_k H_k) \tilde{x}_{k|k-1} - K_k v_k \end{aligned} \quad (5.1)$$

を得る. さらに, 予測誤差  $\tilde{x}_{k|k-1} = x_k - \hat{x}_{k|k-1}$  は次式で近似できた.

$$\tilde{x}_{k|k-1} \approx F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + w_{k-1} \quad (3.34)$$

ここで, (5.1) 式に (3.34) 式を代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k|k} &= (I_{n \times n} - K_k H_k) F_k \tilde{x}_{k-1} + (I_{n \times n} - K_k H_k) G_k \tilde{p}_{k-1} \\ &\quad + (I_{n \times n} - K_k H_k) w_{k-1} - K_k v_k \end{aligned} \quad (5.2)$$

よって, プロセス雑音  $w_k$ , 観測雑音  $v_k$  は平均 0 であることに注意して, 更新式 (2.6)~(2.10) で得られる推定誤差  $\tilde{x}_{k|k}$  の期待値を計算すると次式を得る.

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_{k|k}] = (I_{n \times n} - K_k H_k) F_k \mathbb{E}[\tilde{x}_{k-1}] + (I_{n \times n} - K_k H_k) G_k \mathbb{E}[\tilde{p}_{k-1}] \quad (5.3)$$

この解析結果より, 以下の条件のうち, 少なくともいずれか一方が成立しなければ, 推定値  $\hat{x}_{k|k}$  は不偏推定にならない. つまり, 推定値にバイアスが残り得ることがわかる.

$$\begin{cases} (I_{n \times n} - K_k H_k) G_k = 0 \\ \mathbb{E}[\tilde{p}_{k-1}] = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

(5.4) 式の 2 つの条件のうち,  $\mathbb{E}[\tilde{p}_{k-1}] = 0$  はシステムに依存する条件であるため, この条件はいかなるフィルタの設計によっても満足させることはできない. このため, 次節以降では,  $(I_{n \times n} - K_k H_k) G_k = 0$  を満足するようにフィルタ設計を行う.

### 5.2.2 近似最小分散不偏フィルタの導出

不偏推定を実現するために, 更新式 (2.8) の代わりに, 次の更新式を利用することを考える.

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + L_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (5.5)$$

(5.5) 式における更新ゲイン  $L_k$  が最小分散不偏推定を実現できるように設計することが本節の目的である. (5.5) 式を利用した場合も, 前節と同様に, 推定誤差  $\tilde{x}_{k|k}$  の期待値を次式の通り導出できる.

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_{k|k}] = (I_{n \times n} - L_k H_k) F_k \mathbb{E}[\tilde{x}_{k-1}] + (I_{n \times n} - L_k H_k) G_k \mathbb{E}[\tilde{p}_{k-1}] \quad (5.6)$$

よって, 最小分散不偏推定を実現するためには, 次の拘束条件付き最適問題を解くことになる.

$$\arg \min_{L_k} \text{Tr}(P_{k|k}^{xx}) \quad \text{s.t.} \quad (I_{n \times n} - L_k H_k) G_k = 0 \quad (5.7)$$

(5.7) 式の最適化問題をラグランジュの未定乗数法 [38, 39] によって解くため, 次のラグランジアンを考える.

$$\mathcal{L} = \text{Tr}(P_{k|k}^{xx}) + 2\text{Tr} [(I_{n \times n} - L_k H_k) G_k \Lambda_k^T] \quad (5.8)$$

なお,  $\Lambda_k$  は未定乗数である.

ラグランジアン (5.8) の偏微分を行うことで, 最適ゲイン  $L_k$  が満たすべき必要条件を次の通り与えることができる.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_k} = -2P_{k|k-1}^{xy} + 2L_k P_{k|k-1}^{yy} + 2\Lambda_k (H_k G_k)^T = 0_{n \times m} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_k} = 2(L_k H_k G_k - G_k) = 0_{n \times l} \quad (5.10)$$

ここで,  $P_{k|k-1}^{xy}, P_{k|k-1}^{yy}$  はパラメータ不確かさの影響を考慮した予測誤差共分散行列 (3.35) 式を用いて計算する値であることに注意されたい.

さらに,  $P_{k|k-1}^{yy}$  が正定値行列である事実に注目し, (5.9) 式に  $(P_{k|k-1}^{yy})^{-1}$  を右からかけることで次式を得る.

$$-K_k + L_k + \Lambda_k (H_k G_k)^T (P_{k|k-1}^{yy})^{-1} = 0_{n \times m} \quad (5.11)$$

なお, 上式では, 表記の簡略のために, (2.10) 式のカルマンゲイン  $K_k = P_{k|k-1}^{xy} (P_{k|k-1}^{yy})^{-1}$  を利用した. さらに, (5.11) 式に右から  $(H_k G_k)$  をかけると次式を得る.

$$-K_k (H_k G_k) + L_k (H_k G_k) + \Lambda_k \left\{ (H_k G_k)^T (P_{k|k-1}^{yy})^{-1} (H_k G_k) \right\} = 0_{n \times l} \quad (5.12)$$

ここで,  $(H_k G_k)^T (P_{k|k-1}^{yy})^{-1} (H_k G_k)$  が正則であると仮定し, 拘束条件より  $G_k = L_k (H_k G_k)$  が成り立つことに注意すると, 未定乗数  $\Lambda_k$  を次式の通り得ることができる.

$$\Lambda_k = \{K_k (H_k G_k) - G_k\} \left\{ (H_k G_k)^T (P_{k|k-1}^{yy})^{-1} (H_k G_k) \right\}^{-1} \quad (5.13)$$

よって, 最適ゲイン  $L_k$  を次式の通り得る.

$$L_k = K_k - \{K_k (H_k G_k) - G_k\} \left\{ (H_k G_k)^T (P_{k|k-1}^{yy})^{-1} (H_k G_k) \right\}^{-1} (H_k G_k)^T (P_{k|k-1}^{yy})^{-1} \quad (5.14)$$

近似最小分散不偏推定フィルタでは, (5.14) 式の最適ゲイン  $L_k$  を用いて, 更新ステップを以下のように変更する.

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + L_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (5.15)$$

$$P_{k|k}^{xx} = P_{k|k-1}^{xx} - L_k (P_{k|k-1}^{xy})^T \quad (5.16)$$

なお, 前述の通り,  $P_{k|k-1}^{xx}$  はパラメータ不確かさの影響を考慮した予測誤差共分散行列 (3.35) 式であることに注意されたい.

### 5.2.3 近似最小分散不偏推定フィルタに関する議論

#### (1) 近似最小分散不偏フィルタの構成

(5.2) 式の構成は、Fig. 5.1 に示したブロック線図として表現できる。

Fig. 5.1 では、未知パラメータ  $p_k$  を未知入力とみなしたシステムと考えることができる。近似最小分散不偏フィルタでは、この未知入力から推定誤差  $\tilde{x}_{k|k}$  へのゲイン  $(I_{n \times n} - L_k H_k) G_k$  が 0 になるように、最適ゲイン  $L_k$  を設計していたと考えることができる。

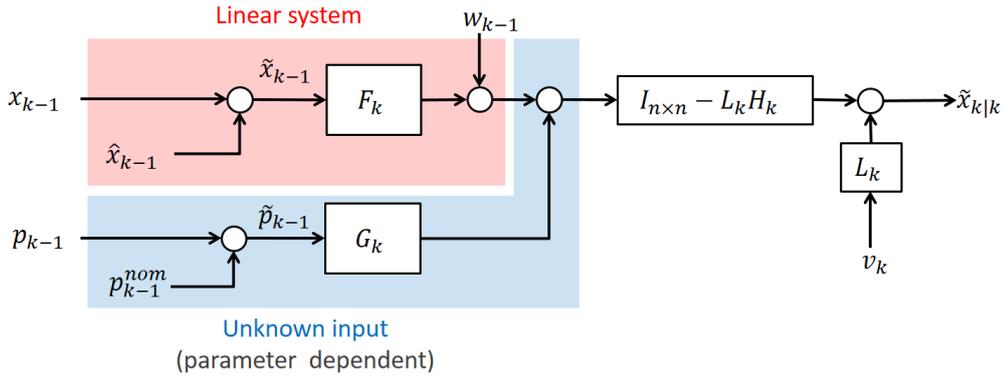


Fig 5.1: Block diagram of approximated linear system

#### (2) 拡大系の可観測性との関係性

近似最小分散不偏推定フィルタの導出過程で、 $(H_k G_k)^T (P_{k|k-1}^{yy})^{-1} (H_k G_k)$  が正則であると仮定した。この条件は各時刻において、「 $\text{rank}(H_k G_k) = l \quad (m \geq l)$ 」が満たされることを仮定することに等しい [28]。ゆえに、近似最小分散不偏推定フィルタを適用可能な条件は、近似線形化後の局所可観測性に着目すると、次の通りにまとめることができる。

【条件 A】「 $(H_k, F_k)$  の可観測性が成立する、かつ、 $\text{rank}(H_k G_k) = l \quad (m \geq l)$ 」

ここで、近似線形化後のシステムを線形時不変システム (LTI システム) として考える。

$$x_k = F x_k + G p_{k-1} \quad (5.17)$$

$$y_k = H x_k \quad (5.18)$$

LTI システムなので、次の可観測性行列

$$\mathcal{O}_{ori} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

を利用すると、上記の【条件 A】を次の【条件 B】のように書き換えることができる。

【条件 B】  $\text{rank}(\mathcal{O}_{ori}) = n$ , かつ,  $\text{rank}(HG) = l$  ( $m \geq l$ )

一方で、未知パラメータ  $p_k$  を同時に推定する場合における条件を考える [40].

未知パラメータを同時する場合、パラメータを状態量に含めた拡大系を考えるため、LTI システムを次のように変形できる。

$$x_k = \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ p_{k-1} \end{bmatrix} =: \bar{F} \bar{x}_{k-1} \quad (5.20)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ p_k \end{bmatrix} =: \bar{H} \bar{x}_k \quad (5.21)$$

このとき、拡大系の可観測性行列  $\mathcal{O}_{aug}$  は次式で与えられる。

$$\mathcal{O}_{aug} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \bar{H}\bar{F}^2 \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n+l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ HF & HG \\ HF^2 & HG + HFG \\ \vdots & \vdots \\ HF^{n+l-1} & H \sum_{i=0}^{n+l-2} F^i G \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

拡大系の可観測性が成立するためには、 $\text{rank}(\mathcal{O}_{aug}) = n + l$  であれば良い。

さて、 $\mathcal{O}_{aug}$  について、 $j$  行目のブロック行列を  $j + 1$  行目のブロック行列から引くと、可観測性行列を以下のように書き換えることができる。

$$\mathcal{O}_{sub} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ H(F - I) & HG \\ HF(F - I) & HFG \\ \vdots & \vdots \\ HF^{n+l-2}(F - I) & HF^{n+l-2}G \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

さらに、引き算の処理を施した可観測性行列  $\mathcal{O}_{sub}$  はケーリー・ハミルトンの定理より、 $F^n$  以上の高次の項を省略した、次の可観測性行列  $\mathcal{O}_{red}$  を考えれば良いことになる。

$$\mathcal{O}_{red} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ H(F - I) & HG \\ HF(F - I) & HFG \\ \vdots & \vdots \\ HF^{n-1}(F - I) & HF^{n-1}G \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

さらに、低次元化した可観測性行列  $\mathcal{O}_{red}$  は、次式のように  $\mathcal{O}_L$  と  $\mathcal{O}_R$  に分割することができる。

$$\mathcal{O}_{red} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathcal{O}_{ori} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F - I & G \\ H & 0 \end{bmatrix} := \mathcal{O}_L \mathcal{O}_R \quad (5.25)$$

$\mathcal{O}_L$  は、通常の系の可観測性行列  $\mathcal{O}_{ori}$  がフルランクならば、フルランクになる。よって、拡大系の可観測性は  $\mathcal{O}_R$  のランクが  $n+l$  であれば良い。

つまり、未知パラメータの同時推定を行う場合の可観測性の条件は、

【条件 C】  $\text{rank}(\mathcal{O}_{ori}) = n$ , かつ,  $\text{rank}(\mathcal{O}_R) = n+l$

と書き換えることができる。

なお、拡大系が可観測になるためには、 $m \geq l$  を満たさなければならない (文献 [40] Theorem4) ため、【条件 C】は次の【条件 D】となる。

【条件 D】  $\text{rank}(\mathcal{O}_{ori}) = n$ , かつ,  $\text{rank}(\mathcal{O}_R) = n+l$ , かつ,  $m \geq l$

【条件 B】と【条件 D】の違いは、 $\text{rank}(HG) = l$  と  $\text{rank}(\mathcal{O}_R) = n+l$  であり、非常に近い関係式が成り立つと言える。

上記の導出は簡単のために、LTI システムを前提としているため、厳密な関係性を導くことはできていないものの、近似最小分散不偏フィルタが適用できる条件と、未知パラメータの同時推定を行う非線形フィルタの適用条件には密接な関係があると考ええる。

### 5.3 近似最小分散不偏フィルタによる状態量とパラメータの同時推定

前節までに提案した各ロバストフィルタは全て状態量  $x_k$  の推定のみに着目していた。しかし、実際の問題においては、未知パラメータ  $p_k$  の推定も重要な課題になり得る。本節では、前節で提案した近似最小分散不偏フィルタを拡張し、状態量  $x_k$  と未知パラメータ  $p_k$  を同時に推定する手法を提案する。

#### 5.3.1 同時推定フィルタの構成

状態量と未知パラメータを同時に推定する近似最小分散不偏フィルタを提案するに先立って、同時推定フィルタの構成を示す。同時推定フィルタは予測ステップ、パラメータ更新ステップ、状態量更新ステップの 3 ステップから構成され、各ステップの更新式は以下の通りである。

予測ステップ

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i f(\mathcal{X}_i, p_{k-1}^{\text{nom}}) \quad (5.26)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = F_k P_{k-1}^{xx} F_k^T + Q_{k-1} + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T \quad (5.27)$$

パラメータ更新ステップ

$$\hat{p}_{k-1} = M_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (5.28)$$

$$\hat{p}_{k-1} = \hat{p}_{k-1} + p_{k-1}^{\text{nom}} \quad (5.29)$$

### 状態量更新ステップ

$$\hat{x}_{k|k}^* = \hat{x}_{k|k-1} + G_k \hat{p}_{k-1} \quad (5.30)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k}^* + N_k (y_k - \hat{y}_{k|k}^*) \quad (5.31)$$

ここで, (5.28), (5.31) 式の  $\hat{y}_{k|k-1}, \hat{y}_{k|k}^*$  はそれぞれ, 予測値  $\hat{x}_{k|k-1}, \hat{x}_{k|k}^*$  に従って計算される観測予測値である. また,  $M_k \in \mathbb{R}^{l \times m}$  と  $N_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  はそれぞれパラメータ推定, 状態推定の最適ゲインであり, 次節以降でその詳細を述べる. 以降, 各ゲインがパラメータ, 状態量のそれぞれについて, 最小分散不偏推定を実現するように設計を行う. なお, 予測ステップの計算 (5.26), (5.27) 式は非線形ロバストフィルタのものと同一であるため, 本節では省略する.

### 5.3.2 パラメータ推定ステップの導出

本節では, パラメータ偏差  $\tilde{p}_{k-1} := p_{k-1} - p_{k-1}^{\text{nom}}$  の推定値  $\hat{p}_{k-1}$  を次式で与え,

$$\hat{p}_{k-1} = M_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (5.28)$$

上式のパラメータ偏差の推定値  $\hat{p}_{k-1}$  が最小分散不偏推定になるように最適ゲイン  $M_k$  を設計する.

最適ゲイン  $M_k$  の導出に先立ち, 観測誤差  $\tilde{y}_k := y_k - \hat{y}_{k|k-1}$  について解析する. 非線形観測方程式に関する近似式 (3.39) を利用し, 予測誤差  $\tilde{x}_{k|k-1}$  が (3.34) 式で与えられたことに注意すると, 観測誤差  $\tilde{y}_k$  は次のように近似できる.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &\approx (H_k \tilde{x}_{k|k-1} + \hat{y}_{k|k-1} + v_k) - \hat{y}_{k|k-1} \\ &= H_k (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + v_k \\ &\approx H_k (F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + w_{k-1}) + v_k \\ &= H_k G_k \tilde{p}_{k-1} + e_k \end{aligned} \quad (5.32)$$

なお, (5.32) 式における  $e_k$  は次式で定義する.

$$e_k := H_k F_k \tilde{x}_{k-1} + H_k w_{k-1} + v_k \quad (5.33)$$

さらに,  $e_k$  の共分散行列  $P_k^{ee}$  は次式で与えることができる.

$$P_k^{ee} = \mathbb{E}[e_k \cdot e_k^T] = H_k P_{k|k-1}^{xx} H_k^T + R_k \quad (5.34)$$

ここで,  $e_k$  の期待値を考える. 問題設定にて確率雑音  $w_{k-1}, v_k$  が平均0のガウス分布に従うとしたので,  $\mathbb{E}[w_{k-1}] = 0, \mathbb{E}[v_k] = 0$  が成り立つ. さらに,  $\hat{x}_{k-1|k-1}$  が不偏推定だとすると  $\mathbb{E}[\tilde{x}_{k-1}] = 0$  も成立するため, (5.33) 式より  $\mathbb{E}[e_k] = 0$  が成立する.

ゆえに, (5.32) 式より  $\mathbb{E}[\tilde{y}_k] = H_k G_k \mathbb{E}[\tilde{p}_{k-1}]$  も成り立つ. この結果は従来手法 [28] と同様であるので,  $\text{rank}(H_k G_k) = l$  が成立するならば, 従来手法と同じ方法でパラメータ推定の最適ゲインを計算することができる.

(5.32) 式を (5.28) 式に代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned}\hat{p}_{k-1} &= M_k (H_k G_k \tilde{p}_{k-1} + e_k) \\ &= M_k H_k G_k \tilde{p}_{k-1} + M_k e_k\end{aligned}\quad (5.35)$$

よって, パラメータ推定における最適ゲイン  $M_k$  は次式で与えることができる.

$$\begin{aligned}\hat{p}_{k-1} &= \{(H_k G_k)^T (P_k^{ee})^{-1} (H_k G_k)\}^{-1} (H_k G_k)^T (P_k^{ee})^{-1} \tilde{y}_k \\ &:= M_k \tilde{y}_k\end{aligned}\quad (5.36)$$

なお, (5.36) 式はパラメータ偏差  $\tilde{p}_{k-1} = p_{k-1} - p_{k-1}^{\text{nom}}$  についての推定式であるので, パラメータ推定値  $\hat{p}_{k-1}$  を得るためには次の変換を行う必要があることに注意されたい.

$$\hat{p}_{k-1} = \tilde{p}_{k-1} + p_{k-1}^{\text{nom}}\quad (5.37)$$

更に, パラメータ偏差  $\tilde{p}_{k-1}$  の推定誤差  $\delta p_{k-1}$  は次式で近似することができる.

$$\begin{aligned}\delta p_{k-1} &:= \tilde{p}_{k-1} - \hat{p}_{k-1} \\ &\approx \tilde{p}_{k-1} - M_k H_k G_k \tilde{p}_{k-1} - M_k e_k \\ &= (I_{l \times l} - M_k H_k G_k) \tilde{p}_{k-1} - M_k e_k \\ &= -M_k e_k\end{aligned}\quad (5.38)$$

この式は後述の更新ステップの導出時に利用する. なお, (5.38) 式の 3 段目から 4 段目の変形は (5.36) 式で求めた最適ゲイン  $M_k$  が次式を満足することを利用している.

$$\begin{aligned}(I_{l \times l} - M_k H_k G_k) &= \left( I_{l \times l} - \left[ \{(H_k G_k)^T (P_k^{ee})^{-1} (H_k G_k)\}^{-1} (H_k G_k)^T (P_k^{ee})^{-1} \right] H_k G_k \right) \\ &= (I_{l \times l} - I_{l \times l}) = 0_{l \times l}\end{aligned}\quad (5.39)$$

### 5.3.3 調整型パラメータ推定ステップの導出

前節の方法でも未知パラメータの推定を行うことができるが, KF を利用したパラメータ推定手法と異なり, 未知パラメータ  $p_k$  の推定値の挙動を調整することはできない. この問題を避けるために「パラメータ真値の変化が十分に遅い」という仮定を導入し,

$$p_k = p_{k-1} + \sigma_{k-1}\quad (5.40)$$

というダイナミクスを考える. なお,  $\sigma_k \in \mathbb{R}^l$  は平均が 0, 分散が  $Q_k^{\text{pp}}$  で与えられるガウス分布に従うものとする. この方程式を考慮して, パラメータ推定値を次式で与え,

$$\hat{p}_k = p_{k-1}^{\text{nom}} + \bar{M}_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1})\quad (5.41)$$

この推定値が最小分散不偏推定になるように最適ゲイン  $\bar{M}_k$  を求めることを考える。まず、パラメータ推定誤差  $\tilde{p}_k = p_k - \hat{p}_k$  は次式で与えることができる。

$$\begin{aligned}\tilde{p}_k &= (p_{k-1} + \sigma_{k-1}) - \{p_{k-1}^{\text{nom}} + \bar{M}_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1})\} \\ &\approx (I - \bar{M}_k H_k G_k) (\tilde{p}_{k-1} + \sigma_{k-1}) - \bar{M}_k e_k\end{aligned}\quad (5.42)$$

(5.42) 式を使って、調整型のパラメータ推定誤差共分散行列  $\bar{P}_k^{\text{PP}}$  を計算すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}\bar{P}_k^{\text{PP}} &:= \mathbb{E}(\tilde{p}_k \cdot \tilde{p}_k^T) \\ &\approx (I - \bar{M}_k H_k G_k) (\bar{P}_{k-1}^{\text{PP}} + Q_{k-1}^{\text{PP}}) (I - \bar{M}_k H_k G_k)^T \\ &\quad + \bar{M}_k P_{k-1}^{ee} \bar{M}_k^T \\ &= (I - \bar{M}_k H_k G_k) \bar{P}_{k|k-1}^{\text{PP}} (I - \bar{M}_k H_k G_k)^T \\ &\quad + \bar{M}_k P_{k-1}^{ee} \bar{M}_k^T\end{aligned}\quad (5.43)$$

上式のパラメータ推定誤差共分散行列  $\bar{P}_k^{\text{PP}}$  を最小化する最適ゲイン  $\bar{M}_k$  は KF の導出と同様に、

$$\bar{M}_k = \bar{P}_{k|k-1}^{\text{PP}} (H_k G_k)^T \left\{ H_k G_k \bar{P}_{k|k-1}^{\text{PP}} (H_k G_k)^T + P_{k-1}^{ee} \right\}^{-1}\quad (5.44)$$

を得る。パラメータ雑音  $\sigma_k$  の分散  $Q_k^{\text{PP}}$  の設計値を変更することで、パラメータ推定値の挙動を調整することができる。

### 調整型パラメータ推定ステップに関する注意点

#### [注意 1]

本節の手法を利用すると、時不変パラメータの推定精度の向上が期待できるが、急峻な変化を伴うパラメータを推定する問題では応答が低下する場合があるので注意されたい。

#### [注意 2]

本節の手法は状態量  $x_k$  と未知パラメータ  $p_k$  を別々のフィルタで推定する Dual 推定と類似した構成になっている。

#### [注意 3]

(5.34), (5.44) 式より、通常の KF と同様に観測雑音の分散  $R_k$  を調整しても、パラメータ推定値の挙動を調整できることが分かる。ただし、 $R_k$  の値は後述の更新ステップにおける状態推定値の推定挙動にも影響を与えるため、 $R_k$  によってパラメータ推定の応答性を調整する場合には、パラメータ推定と状態推定のステップで異なる  $R_k$  を設計することが望ましい。

#### [注意 4]

次節の更新ステップでは、パラメータ推定に前節の更新ゲイン  $M_k$  を利用した場合のみを示しているが、本節のパラメータ推定を利用した場合は、 $M_k$  を  $\bar{M}_k$  に置き換えるだけで良いことに注意されたい。

### 5.3.4 更新ステップの導出

まず、状態量  $x_k$  の予測値  $\hat{x}_{k|k-1}$  をパラメータ偏差  $\hat{p}_{k-1}$  の推定値  $\hat{\hat{p}}_{k-1}$  を使って更新する.

$$\hat{x}_{k|k}^* = \hat{x}_{k|k-1} + G_k \hat{\hat{p}}_{k-1} \quad (5.30)$$

このように、パラメータ偏差の推定値  $\hat{\hat{p}}_{k-1}$  を利用して予測値  $\hat{x}_{k|k-1}$  を修正することで、推定誤差を抑制する効果が期待できる. さらに、修正後の予測値  $\hat{x}_{k|k}^*$  を利用し、更新式を次式で与える.

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k}^* + N_k (y_k - \hat{y}_{k|k}^*) \quad (5.31)$$

なお、 $\hat{y}_{k|k}^*$  は  $\hat{x}_{k|k}^*$  を利用して計算する観測値の予測値であり、次式で近似できる.

$$\hat{y}_{k|k}^* \approx h(\hat{x}_{k|k}^*) \quad (5.45)$$

以降では、状態量に関して最小分散不偏推定を実現する最適ゲイン  $N_k$  を導出する.

まず、修正後の予測誤差を  $\tilde{x}_{k|k}^* := x_k - \hat{x}_{k|k}^*$  で定義する. (5.30) 式と (3.34) 式より、予測誤差  $\tilde{x}_{k|k}^*$  を次式で与えることができる.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k|k}^* &= x_k - \left( \hat{x}_{k|k-1} + G_k \hat{\hat{p}}_{k-1} \right) \\ &= \tilde{x}_{k|k-1} - G_k \hat{\hat{p}}_{k-1} \\ &\approx (F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + w_{k-1}) - G_k \hat{\hat{p}}_{k-1} \\ &= F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \delta p_{k-1} + w_{k-1} \end{aligned} \quad (5.46)$$

(5.38) 式と (5.46) 式より、修正後の予測値  $\hat{x}_{k|k}^*$  に関する誤差共分散行列  $P_{k|k}^{*xx}$  を次式で近似することができる.

$$\begin{aligned} P_{k|k}^{*xx} &= \mathbb{E}[\tilde{x}_{k|k}^* \cdot \tilde{x}_{k|k}^{*T}] \\ &\approx F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + Q_{k-1} + G_k \mathbb{E}[\delta p_k \delta p_k^T] G_k^T \\ &= F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + Q_{k-1} + G_k M_k P_k^{ee} (G_k M_k)^T \end{aligned} \quad (5.47)$$

一方で、非線形観測方程式 (3.2) 式を  $\hat{x}_{k|k}^*$  の周りで線形化すると、

$$y_k \approx H_k^* \hat{x}_{k|k}^* + \hat{y}_{k|k}^* + v_k \quad (5.48)$$

で近似できることに注意すると、更新式 (5.31) で得られる推定誤差を  $\tilde{x}_k := x_k - \hat{x}_{k|k}$  で定義すると、次の近似式を導出できる.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= x_k - \left\{ \hat{x}_{k|k}^* + N_k (y_k - \hat{y}_{k|k}^*) \right\} \\ &\approx x_k - \left\{ \hat{x}_{k|k}^* + N_k (H_k^* \tilde{x}_{k|k}^* + v_k) \right\} \\ &\approx (I_{n \times n} - N_k H_k^*) \tilde{x}_{k|k}^* - N_k v_k \end{aligned} \quad (5.49)$$

なお,  $H_k^*$  は  $\hat{x}_{k|k}^*$  の周りで非線形関数  $h(x)$  を近似線形化, もしくは, 等価線形化を行うことで得られる線形化行列である.

さらに, (5.46) 式を (5.49) 式に代入することで, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k|k} \approx & (I_{n \times n} - N_k H_k^*) F_k \tilde{x}_{k-1} + (I_{n \times n} - N_k H_k^*) w_{k-1} \\ & - N_k v_k + (I_{n \times n} - N_k H_k^*) G_k \delta p_{k-1} \end{aligned} \quad (5.50)$$

(5.50) 式において,  $(I_{n \times n} - N_k H_k^*) G_k = 0$  を満足すると仮定すると (これは「 $\text{rank}(H_k^* G_k) = l$ 」を満足することと等価である), 推定誤差  $\tilde{x}_{k|k}$  のダイナミクスがパラメータの推定誤差  $\delta p_{k-1}$  の影響を受けない次式で与えられる.

$$\tilde{x}_{k|k} \approx (I_{n \times n} - N_k H_k^*) F_k \tilde{x}_{k-1|k-1} + (I_{n \times n} - N_k H_k^*) w_{k-1} - N_k v_k \quad (5.51)$$

上式において, 確率雑音  $w_{k-1}, v_k$  とともに平均 0 を仮定しているので, 時刻  $k-1$  の推定値  $\hat{x}_{k-1}$  が不偏推定, つまり,  $\mathbb{E}[\tilde{x}_{k-1}] = 0$  を満足するならば, 時刻  $k$  において  $\mathbb{E}[\tilde{x}_{k|k}] \approx 0$  となる. これにより, 更新則 (5.31) で得られる推定値が近似的に不偏であることがわかる.

さらに,  $(I_{n \times n} - N_k H_k^*) G_k = 0$  が成り立つと仮定すると, 推定誤差共分散行列  $P_{k|k}^{xx}$  を次式で近似することができる.

$$\begin{aligned} P_{k|k}^{xx} &= \mathbb{E} [\tilde{x}_{k|k} \cdot \tilde{x}_{k|k}^T] \\ &\approx \{(I_{n \times n} - N_k H_k^*) F_k\} P_{k-1}^{xx} \{(I_{n \times n} - N_k H_k^*) F_k\}^T \\ &\quad + (I_{n \times n} - N_k H_k^*) Q_{k-1} (I_{n \times n} + N_k H_k^*)^T + N_k R_k N_k^T \\ &= (I_{n \times n} - N_k H_k^*) P_{k|k-1}^{xx} (I_{n \times n} - N_k H_k^*)^T + N_k R_k N_k^T \end{aligned} \quad (5.52)$$

以上より, パラメータ偏差の推定誤差  $\delta p_{k-1}$  の影響を受けない最小分散推定を実現するために, 次の拘束条件付きの最適化問題を解くことで, 最適ゲイン  $N_k$  を求めることができる.

$$\arg \min_{N_k} \text{Tr}(P_{k|k}^{xx}) \quad \text{s.t.} \quad (I_{n \times n} - N_k H_k^*) G_k = 0 \quad (5.53)$$

(5.53) 式にラグランジュの未定乗数法を用いることで, 最適ゲイン  $N_k$  を以下のように求めることができる.

$$N_k = K_k^* - \{K_k^* (H_k^* G_k) - G_k\} \left\{ (H_k^* G_k)^T (P_{k|k}^{*yy})^{-1} (H_k^* G_k) \right\}^{-1} (H_k^* G_k)^T (P_{k|k}^{*yy})^{-1} \quad (5.54)$$

$$K_k^* = P_{k|k}^{*xx} H_k^* (P_{k|k}^{*yy})^{-1} \quad (5.55)$$

$$P_{k|k}^{*yy} = H_k^* P_{k|k}^{*xx} (H_k^*)^T + R_k \quad (5.56)$$

なお,  $K_k^*$  はカルマンゲインと同じ構造を持っており, また, 最適ゲイン  $N_k$  の構造自体は前節の状態量のみを推定する最小分散不偏フィルタの最適ゲイン (5.14) と同じことに注意されたい.

## 5.4 AMVUF のアルゴリズム

本節にて，近似最小分散不偏フィルタのアルゴリズムをまとめる．

前述の通り，近似最小分散不偏フィルタは 3 ステップのフィルタであり，アルゴリズムの概要を Fig.5.2 のように表現できる．

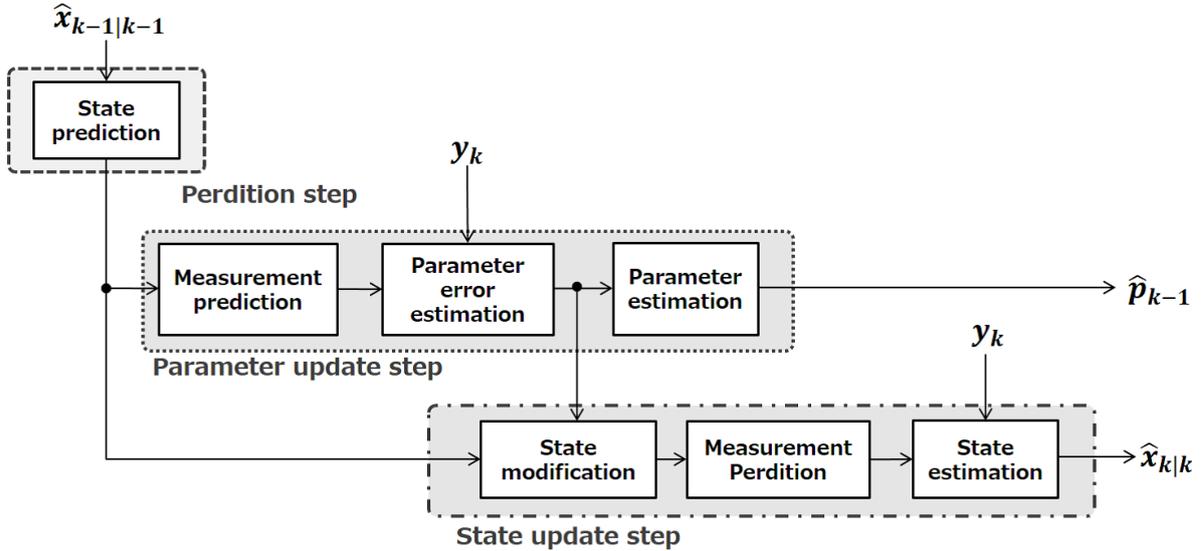


Fig 5.2: Block diagram of Approximated MVUF

各時刻  $k$  における具体的な演算手順を以下に示す．

### ステップ 1

(3.46), (3.47) 式にて線形化行列  $F_k$ ,  $G_k$  を計算する．

### ステップ 2

(3.29), (3.35) 式にて  $\hat{x}_{k|k-1}$ ,  $P_{k|k-1}^{xx}$  を計算する．

### ステップ 3

(5.36) 式にてパラメータ推定ゲイン  $M_k$ , および，パラメータ偏差の推定値  $\hat{p}_k$  を計算する．

### ステップ 4

(5.37) 式にてパラメータ推定値  $\hat{p}_k$  を計算する．

### ステップ 5

(5.30) 式にて状態量の修正値  $\hat{x}_{k|k}^*$  を計算する．

### ステップ 6

(5.54) ~ (5.56) 式にて最適ゲイン  $N_k$  を計算する．

### ステップ 7

(5.31) 式にて状態量の推定値  $\hat{x}_{k|k}$  を計算する.

### ステップ 8

(5.52) 式にて状態量の推定誤差共分散  $P_{k|k}^{xx}$  を計算する.

なお, 5.3.3 節のパラメータ推定手法を利用する場合はステップ 3 とステップ 4 の最適ゲインの計算が (5.44) 式, パラメータ推定式が (5.41) 式に変更されることに注意されたい. また, 状態量のみを推定する場合には, パラメータ推定にかかわるステップ 3~ステップ 5 を省略すればよい.

## 5.5 数値シミュレーション

本章で提案した近似最小分散不偏フィルタの有効性を検証するために数値シミュレーションを行う. 本節では, 状態量  $x_k$  のみを推定する問題と状態量  $x_k$  と未知パラメータ  $p_k$  を同時に推定する問題の 2 つを問題を扱う.

### 5.5.1 シミュレーション対象

本章でも, 3 章で扱った, 誘導モータモデルのシミュレーションを考える [26]. 誘導モータモデルの非線形ダイナミクスを次式で与えることができた.

$$f(x_{k-1}, p_{k-1}, u_{k-1}) = x_{k-1} + \begin{bmatrix} -\gamma x_{1,k-1} + \frac{K}{T_r} x_{3,k-1} + K p x_{5,k-1} x_{4,k-1} + \frac{1}{\sigma L_x} u_{1,k} \\ -\gamma x_{2,k-1} + \frac{K}{T_r} x_{4,k-1} - K p x_{5,k-1} x_{3,k-1} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{2,k} \\ \frac{M}{T_r} x_{1,k-1} - \frac{1}{T_r} x_{3,k-1} - p x_{5,k-1} x_{4,k-1} \\ \frac{M}{T_r} x_{2,k-1} - \frac{1}{T_r} x_{4,k-1} + p x_{5,k-1} x_{3,k-1} \\ \frac{pM}{JL_r} (x_{3,k-1} x_{2,k-1} - x_{4,k-1} x_{1,k-1}) - \frac{T_r}{J} \end{bmatrix} \Delta t \quad (3.93)$$

なお,  $x_1, x_2$  は固定子電流,  $x_3, x_4$  は回転子磁束,  $x_5$  は角速度である. (3.93) 式における入力信号  $u_k$  は次式で与えるものである.

$$u_{1,k} = 350 \cos(0.003k), \quad u_{2,k} = 300 \sin(0.003k)$$

観測方程式も 3 章で扱ったものと同じものを仮定する.

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

また, プロセスノイズ  $w_k$ , 観測ノイズ  $v_k$  はそれぞれ平均値 0 のガウス雑音であり, その共分散行列は次式に従うものである.

$$Q_k = 0.01^2 I_{5 \times 5}, \quad R_k = 0.1^2 I_{2 \times 2}$$

(3.93) 式中に現れる定数  $T_r, \sigma, K, \gamma$  の定義は以下のとおりである.

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}, \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}, \quad K = \frac{M}{\sigma L_s L_r}$$

$$\gamma = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r}$$

ここで、各パラメータのノミナル値と定義を Table 5.1 に再掲する.

Table 5.1: Simulation parameters

Parameter		Value	Unit
$R_s$	Stator Resistance	0.18	$\Omega$
$R_r$	Rotor Resistance	0.15	$\Omega$
$L_s$	Stator Inductance	0.0699	H
$L_r$	Rotor Inductance	0.0699	H
$M$	Mutual Inductance	0.068	H
$J$	Rotor Inertia	0.0586	$kg \cdot m^2$
$T_l$	Load Torque	10	Nm
$p$	Pole Pairs	1	-
$\Delta t$	Step size	0.0001	s

3.8 節のシミュレーションでは  $T_r$  と  $\gamma$  を未知パラメータとしていたが、本章では、 $\gamma$  のみが未知であると仮定する.

ここで、近似最小分散不偏フィルタの適用条件を確認する. (3.93) 式を未知パラメータ  $\gamma$  で微分することで、次のヤコビ行列を得る.

$$G_k = \frac{\partial f}{\partial \gamma}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_{1,k-1} & -x_{2,k-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \Delta t \quad (5.57)$$

よって、提案手法を適用するためのランク条件  $\text{rank}(H_k G_k) = l$  と  $\text{rank}(H_k^* G_k) = l$  が、 $x_{1,k} = 0$  と  $x_{2,k} = 0$  が成り立つときに成立しないことがわかる. したがって、 $x_{1,k} = 0$  と  $x_{2,k} = 0$  の近傍では、状態量、パラメータともに更新を実施しないものとする. (つまり、 $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k}^*$  とする)

## 5.5.2 状態量のみ の推定問題

本節では、状態量のみを推定する問題において、パラメータ不確かさがない場合、パラメータ不確かさがある場合のそれぞれの場合について、次の5つの非線形カルマンフィルタを使って、それぞれシミュレーションを行い、提案手法の有効性を確認する.

**PNKF**

パラメータの真値を利用する非線形カルマンフィルタ

**NNKF**

パラメータのノミナル値を利用する非線形カルマンフィルタ

**RNF**

3.4節で導出した非線形ロバストフィルタ

**ARNF**

3.6章で導出した非線形適応ロバストフィルタ

**AMVUF**

5.2.1節で導出した近似最小分散不偏フィルタ

なお、非線形カルマンフィルタはすべて線形化に USL を利用した等価線形化カルマンフィルタを利用する。

「パラメータ不確かさがある場合」について、(3.93) 式における  $\gamma$  を次式で与える。

$$\gamma \sim \mathcal{N}(\gamma^{\text{nom}}, 10) \quad (5.58)$$

なお、上付きの nom は Table 5.1 のパラメータで計算されるノミナル値を意味し、その値は  $\gamma^{\text{nom}} = 50.67$  である。

各種フィルタのシミュレーション初期値  $x_0, \hat{x}_0$  と共分散行列の初期値  $P_0$  は次の通りとする。

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 50 \\ 50 \\ 350 \end{bmatrix}, \quad P_0 = 100^2 I_5$$

k=1~1000 ステップまでの計算を 1 回のシミュレーションとし、50 回のモンテカルロ・シミュレーションを行った。

得られた推定値の RMSE の平均値を Table 5.2 にまとめた。ここで、RMSE は次式で与えられる推定精度の評価値である。

$$RMSE_j = \sqrt{\frac{1}{N_f} \sum_{k=1}^{N_f} (x_{k,j} - \hat{x}_{k,j})^2}, j = 1, \dots, n$$

上式の  $N_f$  は 1 回のシミュレーションにおける最終ステップであり、サンプリング回数に等しい。

Table 5.2 より、本節のシミュレーション条件においても、パラメータ不確かさがある場合には、ノミナルパラメータを利用した通常の非線形カルマンフィルタである NNKF の推定精度が、パラメータ真値を利用した PNKF よりも劣化していることが確認できる。また、

Table 5.2: Simulation results (uncertain)

	PNKF	NNKF	RNF	ARNF	AMVUF
$x_1$	6.32	6.32	6.32	6.32	6.32
$x_2$	6.32	6.33	6.32	6.32	6.32
$x_3$	2.22	4.15	2.67	2.57	2.54
$x_4$	1.95	3.48	2.33	2.25	2.26
$x_5$	127	145	154	146	136

RNF は  $x_3, x_4$  について、NNKF よりも推定精度が優れることが確認できる。適応則を利用した ARNF は RNF に比べて、すべての状態量において推定精度が向上していることが確認できる。さらに、拘束条件を考慮した最適ゲイン  $L_k$  を利用した AMVUF の推定結果は、RNF, ARNF よりも精度が良いことが確認できる。これは拘束条件によって、未知パラメータの影響を打ち消すことができたためと考える。

RMSE の大きな  $x_5$  の推定誤差の時系列を Fig. 5.3 に示した。なお、 $x_1 \sim x_4$  の推定誤差の挙動は、AMVUF を含め、本節のシミュレーション条件でも、3 章に示した結果と大きな差がみられないため、ここでは割愛する。

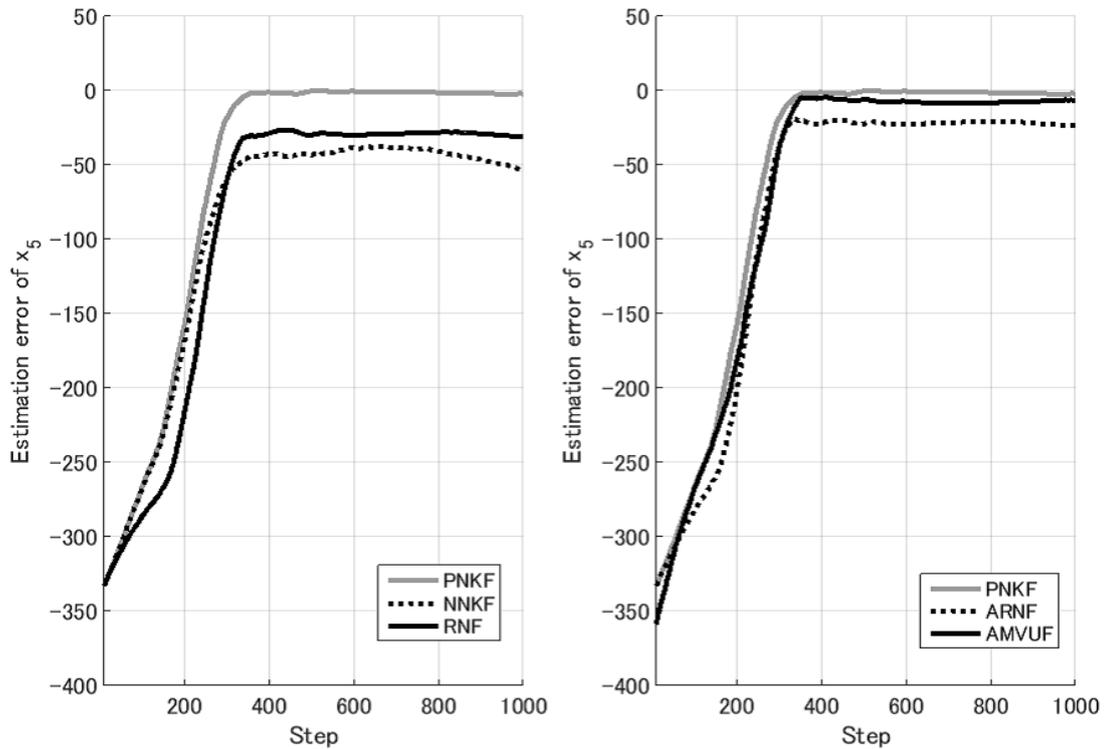
Fig 5.3: Estimation error of state  $x_5$  (with parameter uncertainty)

Fig. 5.3 を見ると、NNKF は 800 ステップ以降で時間経過に応じて徐々に偏差が拡大しており、推定誤差が発散しそうな傾向が見取れる。一方で、RNF は NNKF と異なり一定の

推定誤差を維持していることが確認できる。これは、3章に示した通り、RNFは推定精度の向上だけでなく、フィルタのロバスト性向上に効果があることが確認できる。ただし、RNFでは定常的に推定誤差が生じていることも確認できる。ARNFはRNFよりも推定誤差のバイアスが減少し、推定精度の向上が確認できる。しかしながら、ARNFも推定誤差が0へと収束するような傾向がみられない。一方で、AMVUFはARNFよりもさらに推定誤差が少なく、PNKFの定常誤差に近づいていることが確認できる。

次に、パラメータ不確かさが無い場合について、同様のシミュレーションを行った結果をTable 5.3に示す。なお、パラメータに不確かさが無い場合はPNKFとNNKFは同じ推定器になることに注意されたい。

Table 5.3: Simulation results(nominal)

	PNKF	NNKF	RNF	ARNF	AMVUF
$x_1$	6.32	6.32	6.32	6.32	6.32
$x_2$	6.32	6.33	6.32	6.32	6.32
$x_3$	2.16	2.16	2.38	2.29	2.42
$x_4$	1.91	1.91	2.09	2.02	2.18
$x_5$	126	126	139	135	128

Table 5.3にて、PNKF、NNKF、RNF、ARNFのシミュレーション結果は、3.8節のシミュレーション結果と同様であるため、詳細は割愛する。また、AMVUFは $x_5$ の推定精度はRNF、ARNFよりも優れるものの、 $x_3, x_4$ の推定精度はRNFよりも劣っている。

RMSEの大きな $x_5$ の推定誤差の時系列をFig. 5.4に示した。

Fig. 5.4を見ると、パラメータ不確かさが無い場合は、どの推定手法も推定誤差にバイアスを生じていないことが確認できる。これは、5.2.1節に示した推定誤差の解析において、 $\mathbb{E}[\hat{p}] = 0$ が成立するためである。また、RNFに比べて、ARNFやAMVUFは推定誤差が収束するのが早いことがわかる。

### 5.5.3 状態量とパラメータの同時推定問題

本節では、状態量と未知パラメータ $\gamma$ を同時に推定できるAMVUFと拡大系を考えた非線形カルマンフィルタ(Joint-NKF:JNKF)の2つのフィルタを比較する。

本節におけるシミュレーション初期値は以下の通りとする。

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 10 \\ 10 \\ 200 \end{bmatrix}, P_0 = 10^4 I_5 \quad (5.59)$$

また、JNKFで必要となる拡大系の状態量及び共分散行列の初期値は次の通りとする。

$$\hat{x}_{6,0} = \gamma^{\text{nom}}, P_{(6,6),0} = 10^4$$

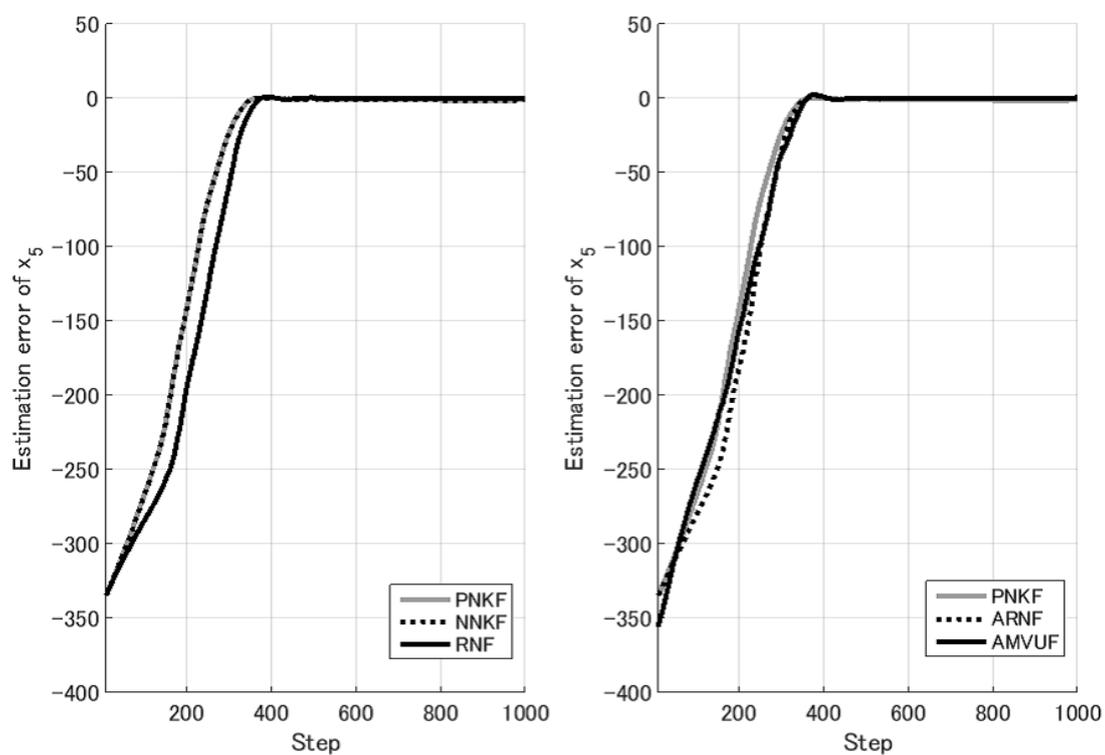


Fig 5.4: Estimation error of state  $x_5$  (without parameter uncertainty)

なお、未知パラメータの共分散行列の初期値  $P_{(6,6),0}$  は状態量の分散と同一になるように設計している。

未知パラメータ  $\gamma$  は3通りの値  $\gamma_1 = 0.7\gamma^{\text{nom}}(35.5)$ ,  $\gamma_2 = \gamma^{\text{nom}}(50.7)$ ,  $\gamma_3 = 1.3\gamma^{\text{nom}}(65.9)$  をとるものとし、各パラメータ値においてフィルタの推定精度を検証した。なお、未知パラメータ  $\gamma$  は1回のシミュレーション中に値を変更しないものとする。

Table 5.4 は50回のモンテカルロシミュレーションを行った結果のRMSEの平均値をまとめたものである。

Table 5.4: RMSE of each state

$\gamma$	$0.7\gamma^{\text{nom}}$		$\gamma^{\text{nom}}$		$1.3\gamma^{\text{nom}}$	
	JNKF	AMVUF	JNKF	AMVUF	JNKF	AMVUF
$x_1$	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08
$x_2$	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08
$x_3$	1.98	1.90	1.56	1.85	1.28	1.86
$x_4$	1.53	1.53	1.25	1.47	1.07	1.46
$x_5$	83.1	86.7	54.4	88.6	35.7	90.9
$x_6$	11.2	6.41	9.41	5.90	7.31	6.82

Table 5.4 より、未知パラメータが  $\gamma = 0.7\gamma^{\text{nom}}$  のときには、JNKF と AMVUF の推定精度はほぼ同程度であることが確認できる。ただし、未知パラメータが  $\gamma = \gamma^{\text{nom}}$  や  $\gamma = 1.3\gamma^{\text{nom}}$  になると、未知パラメータが  $\gamma = \gamma^{\text{nom}}$  のときと比べて、JNKF は  $x_5$  の推定精度が大きく変化することが確認できる。一方で、提案手法である AMVUF の推定精度は未知パラメータ  $\gamma$  の真値によらず、ほぼ一定の精度になることが確認できる。

Fig. 5.5 は、パラメータ真値が  $\gamma = 0.7\gamma^{\text{nom}}$  と  $\gamma = 1.3\gamma^{\text{nom}}$  の2つのシミュレーションケースについて、状態量  $x_5$  とパラメータ  $\gamma (= x_6)$  の推定誤差の時系列を示している。

Fig. 5.5 にて、黒線は AMVUF、灰線は JNKF のシミュレーション結果をそれぞれ示しており、さらに、実線が  $\gamma = 0.7\gamma^{\text{nom}}$  の場合、点線が  $\gamma = 1.3\gamma^{\text{nom}}$  の場合である。AMVUF の推定誤差の挙動は未知パラメータ  $\gamma$  の値によらず、ほぼ同じように収束していることが確認できる。一方で、JNKF の推定結果はパラメータ推定誤差によって、その収束速度が大きく変化していることが確認できる。

先述の通り、JNKF の状態量とパラメータの推定精度は互いに影響する可能性が高い。これを確認するために、シミュレーション初期値を次のように変更し、状態量の推定誤差がパラメータ推定に与える影響を確認する。

$$x_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 10 \\ 10 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad P_0 = 10^4 I_5 \quad (5.60)$$

また、JNKF で必要となる拡大系の状態量及び共分散行列の初期値は変更せず、上述のシミュ

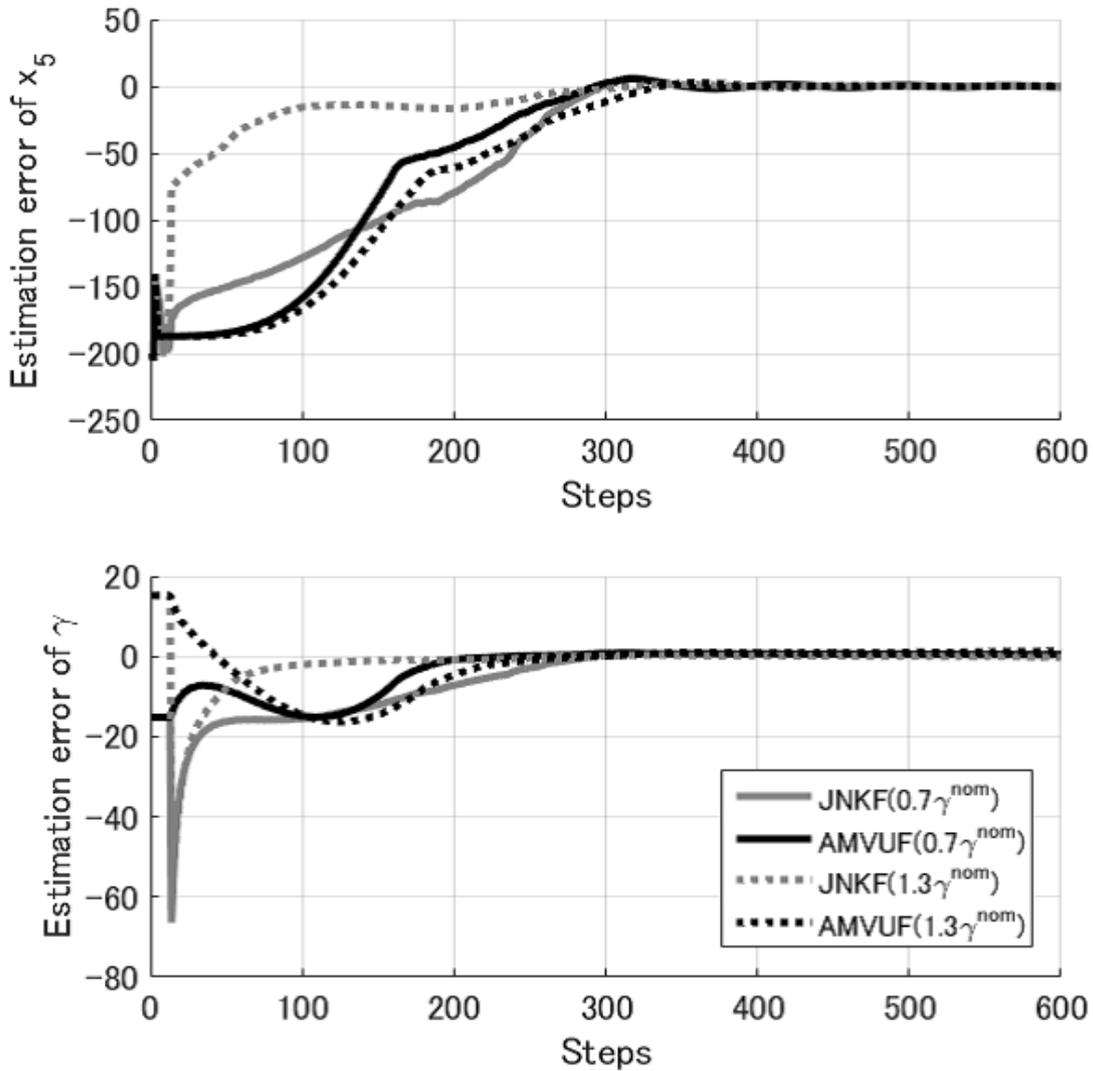


Fig 5.5: Estimation error of state  $x_5$  and parameter  $\gamma$

レーション条件と同じく，次の通りとする。

$$\hat{x}_{6,0} = \gamma^{\text{nom}}, P_{(6,6),0} = 10^4$$

Table 5.5 はシミュレーション初期値を変更し，50回のモンテカルロシミュレーションを行った結果を示している。

Table 5.5を見ると，JNKFの推定精度がTable 5.4に示した結果に比べて，大きく低下していることが確認できる。一方，提案手法であるAMVUFの推定結果はそれほど変化していないことが確認できる。このことより，AMVUFはJNKFよりも推定初期値について，ロバストな特性を有していると言える。このような特性は，推定初期値を知ることが難しい実システムの推定問題では非常に有用であることが分かる。

Table 5.5: RMSE of each state (changed initial condition)

$\gamma$	$0.7\gamma^{\text{nom}}$		$\gamma^{\text{nom}}$		$1.3\gamma^{\text{nom}}$	
	JNKF	AMVUF	JNKF	AMVUF	JNKF	AMVUF
$x_1$	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04
$x_2$	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04
$x_3$	8.23	5.61	8.33	5.93	8.46	6.16
$x_4$	7.03	5.04	7.07	5.29	7.11	5.46
$x_5$	242	80.0	258	89.7	256	94.4
$x_6$	19.5	4.66	22.3	4.32	24.4	5.65

Fig. 5.6 は、パラメータ真値が  $\gamma = \gamma^{\text{nom}}$  のシミュレーションケースについて、状態量  $x_5$  とパラメータ  $\gamma (= x_6)$  の推定誤差の時系列を示している。Fig. 5.6 において、黒線は AMVUF の推定誤差、灰線は JNKF の推定誤差をそれぞれ示している。また、実線は初期条件を (5.59) 式で与えた場合、点線は初期条件を (5.60) 式で与えた場合を示している。

初期条件を (5.60) 式で与えた場合の JNKF における  $x_5$  の推定誤差が徐々に大きくなっており、フィルタが不安定になっているように見える。また、初期条件を (5.59) 式で与えた場合と異なり、初期条件を (5.60) 式で与えた場合の JNKF のパラメータ推定値は真値に収束していない。一方、初期条件を (5.60) 式で与えた場合の AMVUF の  $x_5$  推定誤差は大きくなるような傾向はみられない。ただし、いくらかの推定誤差が残っていることが確認できる。この原因は USL における近似誤差と推定初期値がバイアスを持っていることに原因があると考えている。なお、UMVE[28] は推定初期値の期待値が不偏であることを前提としているが、本シミュレーションでは実問題への適用を考慮して、敢えてバイアスを設けた推定初期値を設定している。また、AMVUF のパラメータ推定誤差はシミュレーション初期値によらず、ほぼ 0 に収束している。

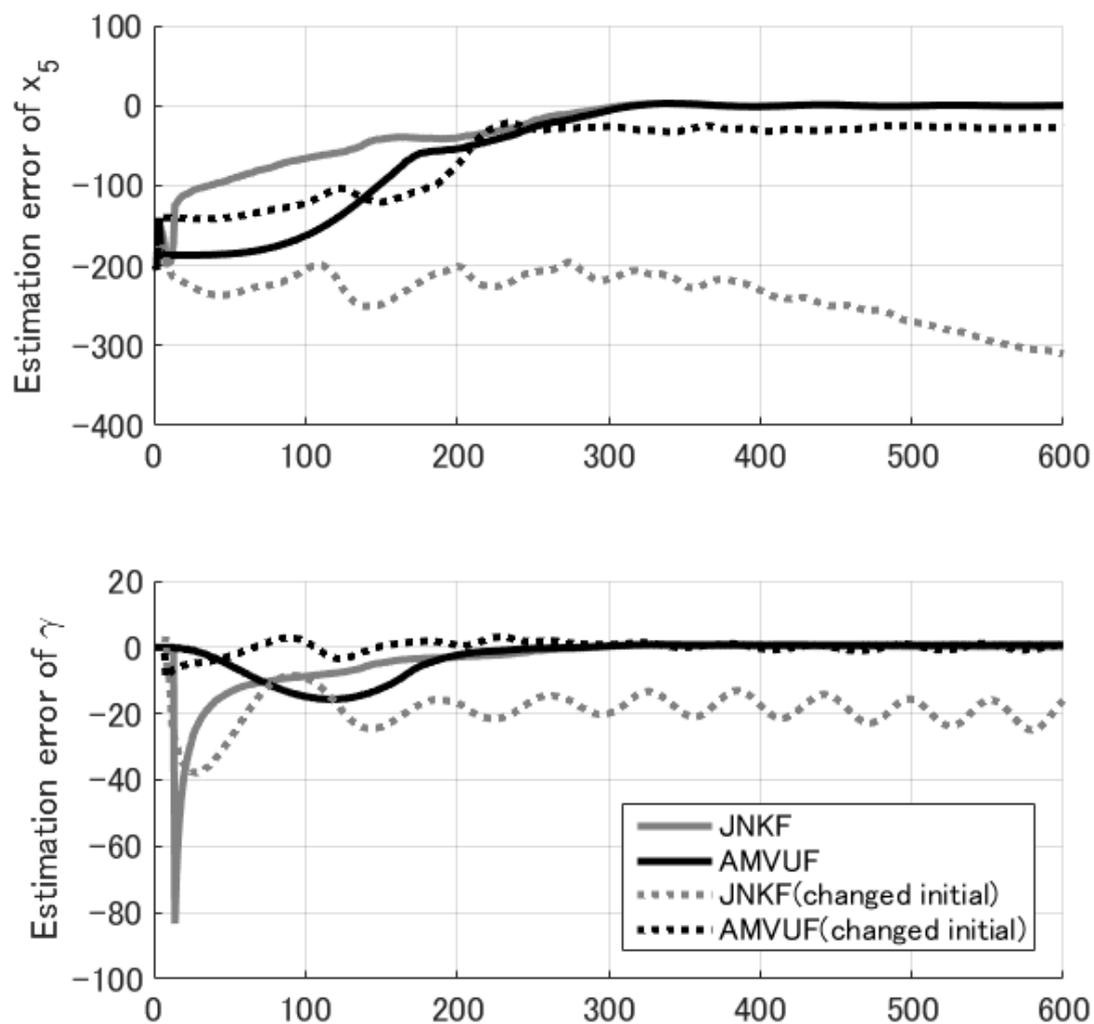


Fig 5.6: Estimation error of state  $x_5$  and parameter  $\gamma$  (comparison of initial condition)

## 5.6 まとめ

本章では、パラメータ不確かさが推定誤差  $\hat{x}$  の期待値に与える影響を分析し、その影響を打ち消すように最適ゲインを設計する近似最小分散不偏フィルタを提案した。近似最小分散不偏フィルタは推定精度が大きく向上できる可能性があるが、適用可能条件としてランク条件を満たす必要があるため、適用可能なシステムが非線形ロバストフィルタや非線形適応ロバストフィルタに比べて限定されてしまうことに注意されたい。

さらに、近似最小分散不偏フィルタをパラメータ不確かさを有する離散時間非線形システムにおける状態量とパラメータの同時推定手法へと拡張した。近似最小分散不偏フィルタの導出に当たっては、UMVE[28]を非線形システムに適用できるように、線形化を利用して状態量とパラメータを分離した形で近似線形モデルを導出した。また、提案手法は非線形システムに対して、UMVEを有効に適用できるように、パラメータ推定ゲインと状態量推定ゲインを求める際に、線形近似を異なる推定値の周りで2回の線形化を行うことに特徴がある。なお、状態量推定ゲインの設計に当たっては、パラメータ推定誤差が状態量の推定誤差ダイナミクスに影響を与えない条件を導出し、この条件を拘束条件とした、拘束条件付き最適化問題を考慮した。これによって、Joint推定において生じる推定過渡期における状態量の推定値とパラメータの推定値が互いに影響する状況を緩和することができる。

最後に、数値シミュレーションによって、提案手法の有効性の検証を行い、近似最小分散不偏フィルタの状態推定精度がパラメータ推定誤差に影響を受けないことを確認した。また、定常状態においては、近似最小分散不偏フィルタとJoint推定の状態推定精度はほぼ同程度であることも確認した。さらに、近似最小分散不偏フィルタはJoint推定に比べて、推定初期値に対するロバスト性に優れることも確認した。以上より、提案手法である近似最小分散不偏フィルタは状態量とパラメータの同時推定手法として有効な代替手段になると考える。

なお、本章で扱った非線形システム(3.1)が制御入力  $u_k$  を含む場合には、3.5.1節に示した手法に従って(3.40)式を線形化すれば、本章の議論を直接的に拡張することができることに注意されたい。

# 第6章 ロバスト近似最小分散不偏フィルタ

## 6.1 問題設定

本章でも、(3.1)式で定義した、次の離散時間非線形システムを考える。ただし、観測方程式は線形時変システムとし、かつ、パラメータを不確かさの影響を受けないものとする。

$$x_{k+1} = f(x_k, p_k) + w_k \quad (3.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2.2)$$

状態量  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ，観測量  $y_k \in \mathbb{R}^m$ ，未知パラメータ  $p_k \in \mathbb{R}^l$ ，プロセス雑音  $w_k$ ，観測雑音  $v_k$  はともに平均値が0，それぞれの分散が  $\mathbb{E}[w_k w_k^T] = Q_k$ ， $\mathbb{E}[v_k v_k^T] = R_k$  に従う正規白色雑音とする。さらに，プロセス雑音  $w_k$  と観測雑音  $v_k$  には相関がない，つまり， $\mathbb{E}[w_k v_k^T] = 0$ ， $\mathbb{E}[v_k w_k^T] = 0$  が成立することを仮定する。また，状態量  $x_k$  と未知パラメータ  $p_k$  は相関がない，つまり， $\mathbb{E}[x_k p_k^T] = 0$ ， $\mathbb{E}[p_k x_k^T] = 0$  が成立する，と仮定する。

前章では，非線形システム (3.1)，(3.2) 式を対象として，状態量  $x_k$  の近似的な最小分散不偏推定を実現する，最小分散不偏フィルタを提案した。しかし，近似最小分散不偏フィルタは，非線形システム (3.1) を線形近似する際に生じる誤差の影響を考慮していなかった。本章では，未知パラメータに加え，線形近似によって生じる誤差の影響を考慮したロバストフィルタであるロバスト近似最小分散不偏フィルタを導出する。

## 6.2 線形近似誤差を考慮した予測誤差ダイナミクス

非線形ロバストフィルタ，近似最小分散不偏フィルタの導出過程では，非線形ダイナミクス (3.1) に Taylor 展開や等価線形化 [5] などの線形近似手法を用いることで，(3.27) 式で近似し，次の予測誤差  $\tilde{x}_{k|k-1}$  に関するダイナミクスの近似式 (3.34) を得た。

$$\tilde{x}_{k|k-1} \approx F_k \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + w_{k-1} \quad (3.34)$$

ここで，Xiong ら [41] の手法に倣い， $\Delta_k \Delta_k^T \leq I_{n \times n}$  を満足する時変の未知行列  $\Delta_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  と，既知のスケーリング行列  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を用いて，上式に含まれる線形近似誤差を陽に考慮した予測誤差ダイナミクスを次式で与える。

$$\tilde{x}_{k|k-1} = (F_k + B_k \Delta_k E_k) \tilde{x}_{k-1} + G_k \tilde{p}_{k-1} + w_{k-1} \quad (6.1)$$

なお，未知行列  $E_k$  のサイズは  $E_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  で与えられるものとする。

以降の節にて，推定誤差ダイナミクスが (6.1) 式で与えられた場合に，前章で導出した近似最小分散不偏フィルタがどのように変化するかを詳細に述べる。

## 6.3 ロバスト近似最小分散不偏フィルタの導出

### 6.3.1 パラメータ推定ステップの導出

パラメータ偏差の推定則が次式で与えられるものとする。

$$\hat{p}_{k-1} = M_k^\dagger (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad (6.2)$$

観測方程式が線形方程式 (2.2) で与えられることに注意し、観測誤差  $\tilde{y}_k$  について (5.32) 式と同様の解析を行うと次式を得る。

$$\tilde{y}_k = H_k G_k \tilde{p}_{k-1} + \bar{e}_k \quad (6.3)$$

$$\bar{e}_k = H_k (F_k + B_k \Delta_k E_k) \tilde{x}_{k-1} + H_k w_{k-1} + v_k \quad (6.4)$$

ここで、前章と同様に、状態推定値が不偏推定、つまり、 $\mathbb{E}[\tilde{x}_{k-1}] = 0$  を仮定すると、 $\mathbb{E}[\bar{e}_k] = 0$  が成り立つことに注意すれば、最適ゲイン  $M_k^\dagger$  を次のように導出することができる。

$$M_k^\dagger = \{(H_k G_k)^T (\bar{P}_k^{ee})^{-1} (H_k G_k)\}^{-1} (H_k G_k)^T (\bar{P}_k^{ee})^{-1} \quad (6.5)$$

$$\bar{P}_k^{ee} = H_k \bar{P}_{k|k-1}^{xx} H_k^T + R_k \quad (6.6)$$

なお、(6.6) 式の予測誤差共分散行列  $\bar{P}_{k|k-1}^{xx}$  については 6.3.3 節にて詳細に述べる。

### 6.3.2 状態量推定ステップの導出

前章の近似最小分散不偏フィルタと同様に、状態量の推定則が次式で与えられるものとする。

$$\hat{x}_{k|k}^* = \hat{x}_{k|k-1} + G_k \hat{p}_{k-1} \quad (6.7)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + N_k^\dagger (y_k - H_k \hat{x}_{k|k}^*) \quad (6.8)$$

ここで、推定誤差  $\tilde{x}_{k|k}$  について (5.49) 式と同様の解析を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k|k} &= \left( I - N_k^\dagger H_k \right) (F_k + B_k \Delta_k E_k) \tilde{x}_{k-1} \\ &\quad + \left( I - N_k^\dagger H_k \right) G_k \delta p_{k-1} + \left( I - N_k^\dagger H_k \right) w_{k-1} - N_k^\dagger v_k \end{aligned} \quad (6.9)$$

(6.9) 式より、予測誤差ダイナミクスを (6.1) 式で与えた場合も  $\left( I - N_k^\dagger H_k \right) G_k = 0$  を満足するように最適ゲイン  $N_k^\dagger$  を設計できれば、状態量の推定誤差ダイナミクス (6.9) がパラメータ推定誤差  $\tilde{p}_{k-1}$  の影響を受けないことがわかる。よって、最適ゲイン  $N_k^\dagger$  の設計問題は (5.53) 式と同じ形で与えることができるため、推定誤差共分散行列  $\bar{P}_{k|k}^{xx}$  をどのように計算するかが問題となる。ただし、予測誤差ダイナミクス (6.1) が未知行列  $\Delta_k$ ,  $E_k$  を含むため、これらを考慮した誤差共分散行列の上限値  $\Sigma_{k|k}^{xx}$  を導出し、この値を最小化する問題として、次式で定式化する。

$$\arg \min_{N_k^\dagger} \text{Tr}(\Sigma_{k|k}^{xx}) \quad \text{s.t.} \quad \left( I_{n \times n} - N_k^\dagger H_k \right) G_k = 0 \quad (6.10)$$

### 6.3.3 誤差共分散行列の上限値 $\Sigma_{k|k}^{xx}$ の導出

誤差共分散行列の上限値  $\Sigma_{k|k}^{xx}$  の導出にあたり、まず、(6.6) 式に現れる予測誤差共分散行列  $\bar{P}_{k|k-1}^{xx}$  を計算する。  $\bar{P}_{k|k-1}^{xx}$  は (6.1) 式を利用することで次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\bar{P}_{k|k-1}^{xx} &= \mathbb{E}(\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{x}_{k|k-1}^T) \\ &= \mathbb{E}\left\{(F_k + B_k\Delta_k E_k)\tilde{x}_{k-1}\tilde{x}_{k-1}^T(F_k + B_k\Delta_k E_k)^T\right\} + G_k\mathbb{E}(\tilde{p}_{k-1}\tilde{p}_{k-1}^T)G_k^T + Q_{k-1}\end{aligned}\quad (6.11)$$

ここで、(6.11) 式の第一項の期待値演算部を  $\bar{F}_k$  で定義すると、 $\bar{F}_k$  は次の通り変形することができる。

$$\begin{aligned}\bar{F}_k &:= \mathbb{E}\left\{(F_k + B_k\Delta_k E_k)\tilde{x}_{k-1}\tilde{x}_{k-1}^T(F_k + B_k\Delta_k E_k)^T\right\} \\ &= F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T \\ &\quad + (B_k\Delta_k E_k) P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + F_k P_{k-1|k-1}^{xx} (B_k\Delta_k E_k)^T + (B_k\Delta_k E_k) P_{k-1|k-1}^{xx} (B_k\Delta_k E_k)\end{aligned}\quad (6.12)$$

$\bar{P}_{k|k-1}^{xx}$  の上限を求めるために、 $\bar{F}_k$  の上限値を求める。まず、 $\bar{F}_k$  の第 2~4 項に関する上限を考えるために、

$$\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T > 0, \eta > 1 \quad (6.13)$$

を満足する  $\eta$  の存在を仮定した上で、以下の行列を定義する。

$$X_1 := F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T (\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^{-1/2} \quad (6.14)$$

$$X_2 := B_k \Delta_k (\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^{1/2} \quad (6.15)$$

ここで、行列不等式  $X_1 X_2^T + X_2 X_1^T \leq X_1 X_1^T + X_2 X_2^T$  を使うことで、(6.12) 式の第 2, 3 項の上限を次式で与えることができる。

$$\begin{aligned}&(B_k\Delta_k E_k) P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + F_k P_{k-1|k-1}^{xx} (B_k\Delta_k E_k)^T \\ &\leq F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T (\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^{-1} (F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^T + B_k \Delta_k (\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T) (B_k \Delta_k)^T\end{aligned}\quad (6.16)$$

さらに、 $\Delta_k \Delta_k^T \leq I_{n \times n}$ 、(6.12)、(6.16) 式より次の関係式を導ける。

$$\bar{F} \leq F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T (\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^{-1} (F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^T + \eta B_k B_k^T \quad (6.17)$$

(6.17) 式を (6.11) 式に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}\bar{P}_{k|k-1}^{xx} &\leq F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T (\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^{-1} (F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^T + \eta B_k B_k^T \\ &\quad + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T + Q_{k-1}\end{aligned}\quad (6.18)$$

さらに, (6.18) 式の第 1 項, 2 項に注目すると, 次の変形を行える.

$$\begin{aligned}
& F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T (\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^{-1} (F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^T \\
&= F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T (\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^{-1} (P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^T F_k^T \\
&= F_k \left\{ P_{k-1|k-1}^{xx} + P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T (\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^{-1} (P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^T \right\} F_k^T \\
&= F_k S_{k-1} \left\{ I_{n \times n} + S_{k-1}^T E_k^T (\eta I - E_k S_{k-1} S_{k-1}^T E_k^T)^{-1} (S_{k-1}^T E_k^T)^T \right\} S_{k-1}^T F_k^T \quad (6.19)
\end{aligned}$$

上式において,  $P_{k-1|k-1}^{xx} = S_{k-1} S_{k-1}^T$  を満足する行列平方根  $S_{k-1}$  を定義した.

ここで, 未知行列  $E_k$  は次式を満足すると仮定する.

$$E_k = \left( \sqrt{(P_{k-1|k-1}^{xx})^{-1}} \right)^T \quad (6.20)$$

さらに, (6.19) 式に逆行列補題を適用することで, 次式を得る.

$$\begin{aligned}
& F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T (\eta I - E_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^{-1} (F_k P_{k-1|k-1}^{xx} E_k^T)^T \\
&= F_k S_{k-1} \left\{ I_{n \times n} - \eta^{-1} S_{k-1}^T E_k^T E_k S_{k-1} \right\}^{-1} S_{k-1}^T F_k^T \\
&= (1 - \eta^{-1})^{-1} F_k S_{k-1} S_{k-1}^T F_k^T = (1 - \eta^{-1})^{-1} F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T \quad (6.21)
\end{aligned}$$

(6.18) 式, (6.21) 式より予測誤差共分散行列の上限値を次式で与えることができる.

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{k|k-1}^{xx} &\leq (1 - \eta^{-1})^{-1} F_k P_{k-1|k-1}^{xx} F_k^T + G_k P_{k-1}^{pp} G_k^T + \eta B_k B_k^T + Q_{k-1} \\
&=: \Sigma_{k|k-1}^{xx} \quad (6.22)
\end{aligned}$$

つぎに, 推定誤差共分散行列  $P_{k|k}^{xx}$  の上限値  $\Sigma_{k|k}^{xx}$  を考える. 推定誤差  $\tilde{x}_{k|k}$  は式で与えられることより,

$$\tilde{x}_k = \left( I - N_k^\dagger H_k \right) \tilde{x}_{k|k-1} - N_k^\dagger v_k \quad (6.23)$$

推定誤差共分散行列  $\bar{P}_{k|k}^{xx}$  は予測誤差共分散行列  $\bar{P}_{k|k-1}^{xx}$  を用いて次式で与えることができる.

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{k|k}^{xx} &= \mathbb{E} (\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T) \\
&= \left( I - N_k^\dagger H_k \right) \bar{P}_{k|k-1}^{xx} \left( I - N_k^\dagger H_k \right)^T + N_k^\dagger R_k \left( N_k^\dagger \right)^T \quad (6.24)
\end{aligned}$$

ゆえに, 推定誤差共分散行列の上限値  $\Sigma_{k|k}^{xx}$  は予測誤差共分散行列の上限値  $\Sigma_{k|k-1}^{xx}$  を利用することで, 直ちに次式で与えられる.

$$\Sigma_{k|k}^{xx} = \left( I - N_k^\dagger H_k \right) \Sigma_{k|k-1}^{xx} \left( I - N_k^\dagger H_k \right)^T + N_k^\dagger R_k \left( N_k^\dagger \right)^T \quad (6.25)$$

なお, (6.10) 式の最適解  $N_k^\dagger$  は, (5.52) 式と (6.25) 式の共通性より直ちに次式で求めることができる.

$$N_k^\dagger = K_k^\dagger - \left\{ K_k^\dagger (H_k G_k) - G_k \right\} \left\{ (H_k G_k)^T \left( \Sigma_{k|k-1}^{yy} \right)^{-1} (H_k G_k) \right\}^{-1} (H_k G_k)^T \left( \Sigma_{k|k-1}^{yy} \right)^{-1} \quad (6.26)$$

$$K_k^\dagger = \Sigma_{k|k-1}^{xx} H_k \left( \Sigma_{k|k-1}^{yy} \right)^{-1} \quad (6.27)$$

$$\Sigma_{k|k-1}^{yy} = H_k \Sigma_{k|k-1}^{xx} H_k^T + R_k \quad (6.28)$$

## 6.4 ロバスト近似最小分散不偏フィルタのアルゴリズム

本節にて、ロバスト近似最小分散不偏フィルタのアルゴリズムをまとめる。各時刻  $k$  における具体的な演算手順を以下に示す。

### ステップ 1

時刻  $k = 0$  で誤差共分散行列の上限値を  $\Sigma_{0|0}^{xx} = P_{0|0}^{xx}$  とする。

### ステップ 2

(3.46), (3.47) 式にて線形化行列  $F_k, G_k$  を計算する。

### ステップ 3

(3.29), (3.35) 式にて  $\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}^{xx}$  を計算する。

### ステップ 4

(6.22) 式にて予測誤差共分散行列の上限値  $\Sigma_{k|k-1}^{xx}$  を計算する。

### ステップ 5

(6.6) 式にて  $\bar{P}_{k|k-1}^{xx}$  の代わりに  $\Sigma_{k|k-1}^{xx}$  を用い、パラメータ推定ゲイン  $\bar{M}_k$  を次式で計算する。

$$M_k^\dagger = \{(H_k G_k)^T (\Sigma_k^{ee})^{-1} (H_k G_k)\}^{-1} (H_k G_k)^T (\Sigma_k^{ee})^{-1} \quad (6.29)$$

$$\Sigma_k^{ee} = H_k \Sigma_{k|k-1}^{xx} H_k^T + R_k \quad (6.30)$$

### ステップ 6

(6.2) 式にてパラメータ偏差の推定値  $\hat{p}_{k-1}$  を計算する。

### ステップ 7

(5.37) 式にてパラメータ推定値  $\hat{p}_{k-1}$  を計算する。

### ステップ 8

(6.7) 式にて状態量の修正値  $\hat{x}_{k|k}^*$  を計算する。

### ステップ 9

(6.26)~(6.28) 式にて最適ゲイン  $N_k^\dagger$  を計算する。

### ステップ 10

(6.8) 式にて、状態量の推定値  $\hat{x}_{k|k}$  を計算する。

### ステップ 11

(6.25) 式にて、状態量の推定誤差共分散の上限値  $\Sigma_{k|k}^{xx}$  を計算する。

なお、前章の近似最小分散不偏フィルタと同様にパラメータ推定を行わない場合には、ステップ 5~ステップ 7 の計算を省略すればよい。

## 6.5 ロバスト近似最小分散不偏フィルタに関する議論

### 6.5.1 スケーリング行列 $B_k$ について

文献 [41] にも示されているように、実用上は、(6.22) 式の計算に必要なスケーリング行列  $B_k$  は未知であることが多く、 $B_k$  を設計パラメータとして利用することになる。そこで、 $B_k$  設計方法の一例として、対角パラメータ行列  $\beta_k = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$  を用いて、 $B_k = \beta_k F_k$  とすることを提案する。この設計方法は、非線形関数  $f(x_{k-1})$  を  $f(x_{k-1}) = \beta_k F_k \tilde{x}_{k-1}$  で表現する方法 [26] に基づいている。

### 6.5.2 非線形観測システムについて

本章では、観測方程式を線形システムに限定した議論を行った。これは、不偏推定を実現するための条件  $(I_{n \times n} - N_k^\dagger H_k) G_k = 0$  の導出を行うためである。

このことを示すために、観測方程式が非線形の (3.2) 式で与えられる場合を考えよう。(6.1) 式に倣い、スケーリング行列  $B_k^y$ 、未知行列  $\Delta_k^y$ 、 $E_k^y$  を用いると、非線形観測方程式を次の線形方程式で与えることができる。

$$y_k = (H_k + B_k^y \Delta_k^y E_k^y) \tilde{x}_{k|k-1} + \hat{y}_{k|k-1} + v_k \quad (6.31)$$

このとき、状態更新式 (6.8) によって得られる推定誤差  $\tilde{x}_{k|k}$  のダイナミクス (6.9) 式は次式のように変更される。

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k|k} = & \left\{ I - N_k^\dagger (H_k + B_k^y \Delta_k^y E_k^y) \right\} (F_k + B_k \Delta_k E_k) \tilde{x}_{k-1} \\ & + \left\{ I - N_k^\dagger (H_k + B_k^y \Delta_k^y E_k^y) \right\} G_k \tilde{p}_{k-1} + \left\{ I - N_k^\dagger (H_k + B_k^y \Delta_k^y E_k^y) \right\} w_{k-1} - N_k^\dagger v_k \end{aligned} \quad (6.32)$$

ゆえに、不偏推定を実現するための条件は次式で与えられる。

$$\left\{ I - N_k^\dagger (H_k + B_k^y \Delta_k^y E_k^y) \right\} G_k = 0 \quad (6.33)$$

(6.33) 式には未知行列  $\Delta_k^y$ 、 $E_k^y$  が含まれるため、不偏推定の実現が困難になる。

なお、非線形観測方程式の線形化誤差を考慮しない場合 ( $B_k^y \Delta_k^y E_k^y = 0$ ) は、直ちに非線形観測システム (3.2) を扱うことができることに注意されたい。

## 6.6 数値シミュレーション

### 6.6.1 シミュレーション対象

本章でも、3章で扱った、誘導モータモデルのシミュレーションを考える [26]。

誘導モータモデルの非線形ダイナミクスを次式で与えることができた。

$$f(x_{k-1}, p_{k-1}, u_{k-1}) = x_{k-1} + \begin{bmatrix} -\gamma x_{1,k-1} + \frac{K}{T_r} x_{3,k-1} + K p x_{5,k-1} x_{4,k-1} + \frac{1}{\sigma L_x} u_{1,k} \\ -\gamma x_{2,k-1} + \frac{K}{T_r} x_{4,k-1} - K p x_{5,k-1} x_{3,k-1} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{2,k} \\ \frac{M}{T_r} x_{1,k-1} - \frac{1}{T_r} x_{3,k-1} - p x_{5,k-1} x_{4,k-1} \\ \frac{M}{T_r} x_{2,k-1} - \frac{1}{T_r} x_{4,k-1} + p x_{5,k-1} x_{3,k-1} \\ \frac{pM}{JL_r} (x_{3,k-1} x_{2,k-1} - x_{4,k-1} x_{1,k-1}) - \frac{T_r}{J} \end{bmatrix} \Delta t \quad (3.93)$$

なお,  $x_1, x_2$  は固定子電流,  $x_3, x_4$  は回転子磁束,  $x_5$  は角速度である. (3.93) 式における入力信号  $u_k$  は次式で与えるものである.

$$u_{1,k} = 350 \cos(0.003k), \quad u_{2,k} = 300 \sin(0.003k)$$

観測方程式も 3 章で扱ったものと同じものを仮定する.

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

また, プロセスノイズ  $w_k$ , 観測ノイズ  $v_k$  はそれぞれ平均値 0 のガウス雑音であり, その共分散行列は次式に従うものである.

$$Q_k = 0.01^2 I_{5 \times 5}, \quad R_k = 0.1^2 I_{2 \times 2}$$

(3.93) 式中に現れる定数  $T_r, \sigma, K, \gamma$  の定義は以下のとおりである.

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}, \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}, \quad K = \frac{M}{\sigma L_s L_r}$$

$$\gamma = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r}$$

ここで, 各パラメータのノミナル値と定義を Table 6.1 に再掲する.

本章のシミュレーション条件も, 前章と同様に, パラメータ  $\gamma$  のみが未知であると仮定する.

また, 近似最小分散不偏推定フィルタの適用条件とロバスト近似最小分散フィルタの適用条件は同じであるため,  $x_{1,k} = 0$  と  $x_{2,k} = 0$  の近傍では, 状態量, パラメータともに更新を実施しないものとする. (つまり,  $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k}^*$  とする)

本章では, 状態量とパラメータを同時に推定する問題について次の 3 つの非線形フィルタを使って, それぞれシミュレーションを行い, 提案手法の有効性を確認する.

### JNKF (Joint NKF)

未知パラメータ  $\gamma$  を含めた拡大系に非線形カルマンフィルタを適用したもの

### AMVUF

5 章で導出した近似最小分散不偏フィルタ

### RAMVUF

6 章で導出したロバスト近似最小分散不偏フィルタ

Table 6.1: Simulation parameters

Parameter		Value	Unit
$R_s$	Stator Resistance	0.18	$\Omega$
$R_r$	Rotor Resistance	0.15	$\Omega$
$L_s$	Stator Inductance	0.0699	H
$L_r$	Rotor Inductance	0.0699	H
$M$	Mutual Inductance	0.068	H
$J$	Rotor Inertia	0.0586	$kg \cdot m^2$
$T_l$	Load Torque	10	Nm
$p$	Pole Pairs	1	-
$\Delta t$	Step size	0.0001	s

なお、5章のシミュレーション結果において、JNKFの推定結果が推定初期値によって大きく異なることが分かったので、本章でも初期条件の異なる2通りのシミュレーションを実施する。

### 6.6.2 シミュレーション結果:条件1

本節におけるシミュレーション初期値は次の通りとする。

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 10 \\ 10 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad P_0^{xx} (= \Sigma_0^{xx}) = 10^4 I_5 \quad (6.34)$$

また、JNKFで必要となる拡大系の状態量及び共分散行列の初期値は次の通りとする。

$$\hat{x}_{6,0} = \gamma^{\text{nom}}, P_{(6,6),0}^{xx} = 10^4$$

前述の通り、 $\gamma^{\text{nom}}$ は $\gamma$ の公称値であり、Table 6.1のパラメータに従って計算でき、その値は $\gamma^{\text{nom}} = 50.67$ となる。

さらに、RAMVUFに利用する正のスカラー値 $\eta$ 、スケーリング行列 $B_k$ を次式で与える。

$$\eta = 100, B_k = \frac{1}{\eta} F_k \quad (6.35)$$

未知パラメータ $\gamma$ は3通りの値([1] $\gamma = 0.7\gamma^{\text{nom}}$ , [2] $\gamma = \gamma^{\text{nom}}$ , [3] $\gamma = 1.3\gamma^{\text{nom}}$ )をとるものとし、各パラメータ値においてフィルタの推定精度を検証した。なお、未知パラメータ $\gamma$ は1回のシミュレーション中は値を変更しないものとする。

Table 6.2は50回のモンテカルロシミュレーションを行った結果のRMSEをまとめたものである。なお、 $x_6$ がパラメータ $\gamma$ の推定結果を示している。

Table 6.2: RMSE of each state

$\gamma$	$0.7\gamma^{\text{nom}}$			$\gamma^{\text{nom}}$			$1.3\gamma^{\text{nom}}$		
	JNKF	AMVUF	RAMVUF	JNKF	AMVUF	RAMVUF	JNKF	AMVUF	RAMVUF
$x_1$	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08
$x_2$	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08	4.08
$x_3$	1.98	1.90	1.68	1.56	1.85	1.65	1.28	1.86	1.64
$x_4$	1.53	1.53	1.39	1.25	1.47	1.34	1.07	1.46	1.31
$x_5$	83.1	86.7	79.1	54.4	88.6	81.4	35.7	90.9	84.5
$x_6$	11.2	6.41	4.24	9.41	5.90	3.03	7.31	6.82	4.21

Table 6.2 より、未知パラメータが  $\gamma = 0.7\gamma^{\text{nom}}$  のときには、JNKF と AMVUF の状態量推定精度はほぼ同程度であることが確認できる。ただし、未知パラメータが  $\gamma = \gamma^{\text{nom}}$  や  $\gamma = 1.3\gamma^{\text{nom}}$  になると、未知パラメータが  $\gamma = 0.7\gamma^{\text{nom}}$  のときと比べて、JNKF は  $x_5$  の推定精度が大きく変化することが確認できる。一方で、提案手法である AMVUF の推定精度は未知パラメータ  $\gamma$  の真値によらず、ほぼ一定の精度になることが確認できる。また、RAMVUF は状態量、パラメータともに、すべての条件において AMVUF よりも高精度な推定を実現できることが確認できる。

Fig. 6.1~6.3 は、パラメータ真値の異なる 3 つのシミュレーションケースについて、各フィルタの状態量  $x_5$  とパラメータ  $\gamma (= x_6)$  の推定誤差の時系列を示している。

Fig.6.1~6.3 にて、黒実線は  $\gamma = \gamma^{\text{nom}}$ 、黒点線は  $\gamma = 0.7\gamma^{\text{nom}}$ 、灰線は  $\gamma = 1.3\gamma^{\text{nom}}$  のシミュレーション結果をそれぞれ示している。JNKF の推定結果はパラメータ推定誤差によって、状態推定誤差の収束速度が大きく変化していることが確認できる。一方で、AMVUF の推定誤差の挙動は未知パラメータ  $\gamma$  の値によらず、ほぼ同じように収束していることが確認できる。RAMVUF もほぼ同様である。このように、提案手法 (AMVUF, RAMVUF) はパラメータ推定値の挙動に状態量推定値の挙動が左右されないことが特徴である。

### 6.6.3 シミュレーション結果:条件 2

先述の通り、JNKF の状態量とパラメータの推定精度は互いに影響すると考えられる。これを確認するために、シミュレーション初期値を次のように変更し、状態量の推定誤差がパラメータ推定に与える影響を確認する。

$$x_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 10 \\ 10 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad P_0^{xx} (= \Sigma_0^{xx}) = 10^4 I_5 \quad (6.36)$$

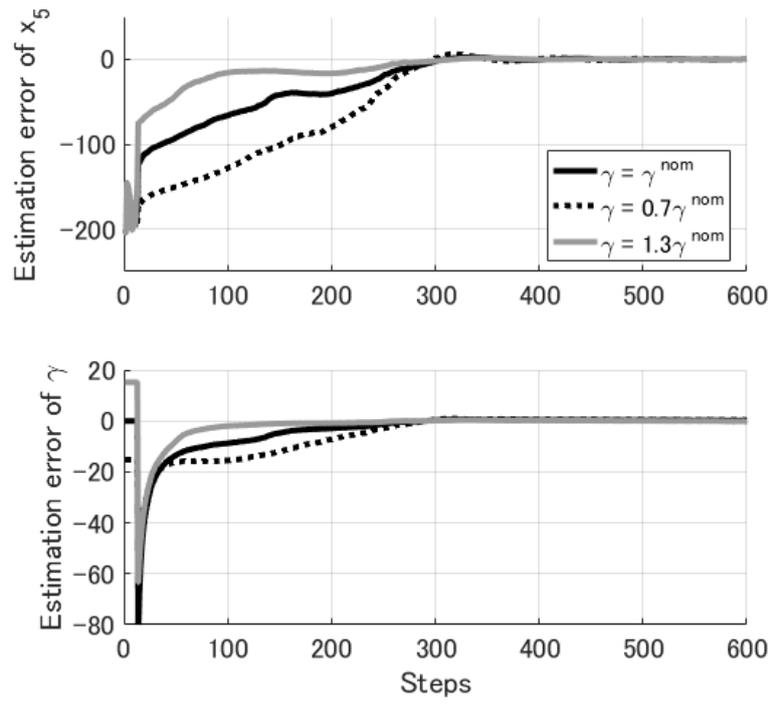


Fig 6.1: Estimation error of JNKF

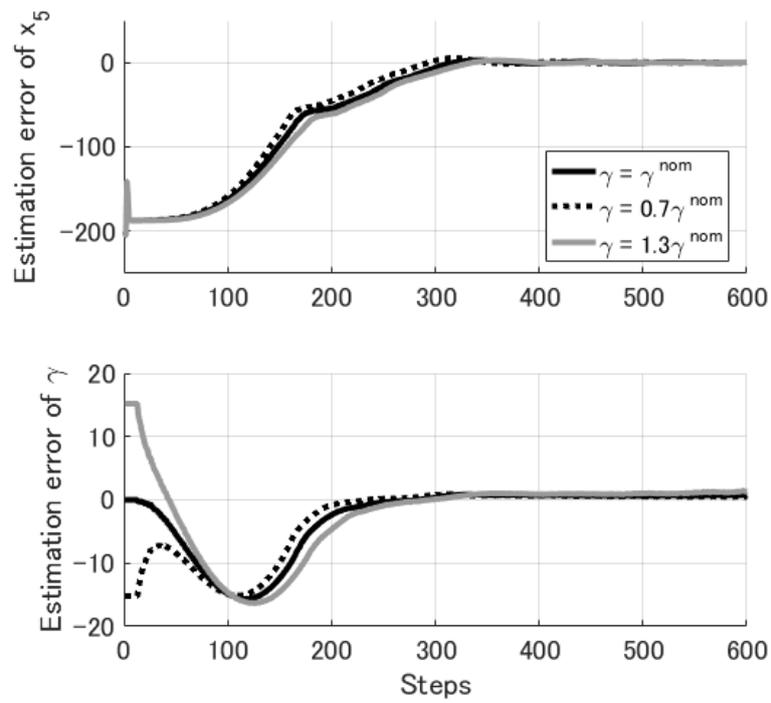


Fig 6.2: Estimation error of AMVUF

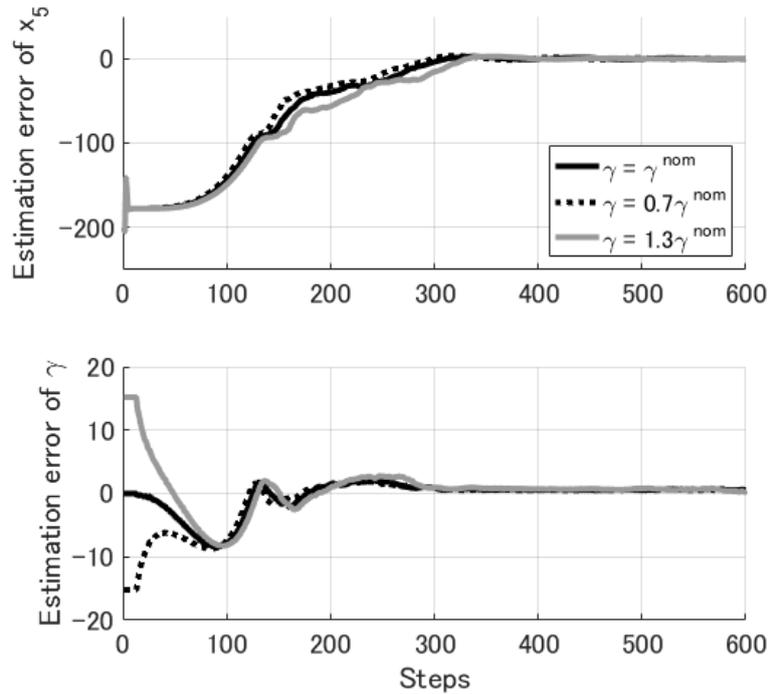


Fig 6.3: Estimation error of RAMVUF

また、JNKFで必要となる拡大系の状態量及び共分散行列の初期値は変更せず、上述のシミュレーション条件と同じく、次の通りとする。

$$\hat{x}_{6,0} = \gamma^{\text{nom}}, P_{(6,6),0}^{xx} = 10^4$$

なお、RAMVUFに利用する正のスカラ値 $\eta$ 、スケーリング行列 $B_k$ も変更しないものとする。

Table 6.3 はシミュレーション初期値 (6.36) を利用した 50 回のモンテカルロシミュレーションを RMSE の平均値を示している。

Table 6.3: RMSE of each state

$\gamma$	$0.7\gamma^{\text{nom}}$			$\gamma^{\text{nom}}$			$1.3\gamma^{\text{nom}}$		
	JNKF	AMVUF	RAMVUF	JNKF	AMVUF	RAMVUF	JNKF	AMVUF	RAMVUF
$x_1$	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04
$x_2$	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04
$x_3$	8.23	5.61	4.28	8.33	5.93	4.75	8.46	6.16	5.15
$x_4$	7.03	5.04	3.88	7.07	5.29	4.29	7.11	5.46	4.62
$x_5$	242	80.0	56.8	258	89.7	74.5	256	94.4	82.6
$x_6$	19.5	4.66	4.50	22.3	4.32	5.36	24.4	5.65	7.38

Table 6.3 を見ると、JNKF の推定精度が Table 6.2 に示した結果に比べて、著しく低下し

ていることが確認できる．一方，提案手法である AMVUF の推定結果はそれほど変化していないことが確認できる．また，RAMVUF についても同様である．このことより，RAMVUF も AMVUF と同様に，推定初期値についてロバストな特性を有していると言える．このような特性は，推定初期値を知ることが難しい実システムの推定問題では非常に有用である．なお，RAMVUF の状態量の推定結果 ( $x_1 \sim x_5$ ) はすべての条件において AMVUF よりも高精度であるが，パラメータ推定結果 ( $x_6$ ) についてはパラメータ真値  $\gamma$  の値によって AMVUF よりも劣ることがあることが確認できる．この結果は RAMVUF が状態量の線形化誤差のみしか考慮していないことに起因していると推測する．

Fig. 6.4~6.6 は，パラメータ真値が  $\gamma = 0.7\gamma^{\text{nom}}$  のシミュレーションケースについて，状態量  $x_5$  とパラメータ  $\gamma (= x_6)$  の推定誤差の時系列を示している．なお，Fig. 6.4~6.6 は全て 50 回のシミュレーションのサンプルパスの平均値をまとめたものである．

Fig. 6.4~6.6 において，実線はシミュレーション初期条件が (6.34) 式の推定誤差，点線はシミュレーション初期条件が (6.36) 式の推定誤差をそれぞれ示している．

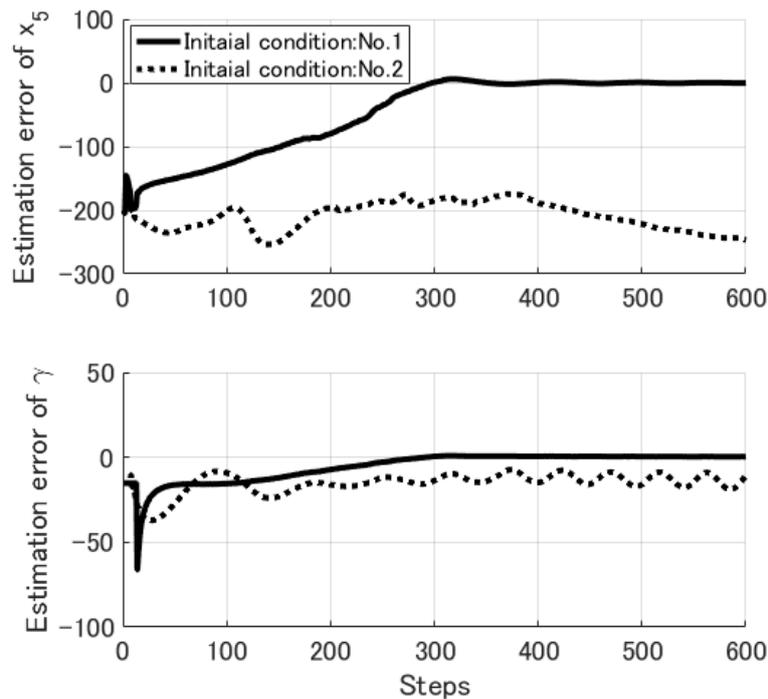


Fig 6.4: Estimation error of JNKF

初期条件を (6.36) 式で与えた場合の JNKF における  $x_5$  の推定誤差が徐々に大きくなっており，フィルタが不安定になっているように見える．また，初期条件を (6.34) 式で与えた場合と異なり，初期条件を (6.36) 式で与えた場合の JNKF のパラメータ推定値は真値に収束していない．一方，初期条件を (6.36) 式で与えた場合の AMVUF の  $x_5$  の推定誤差は大きくなるような傾向はみられない．ただし，いくらかの推定誤差が残っていることが確認できる．この原因は USL における近似誤差を持っていることに原因があると考えている．これは，Fig.6.6

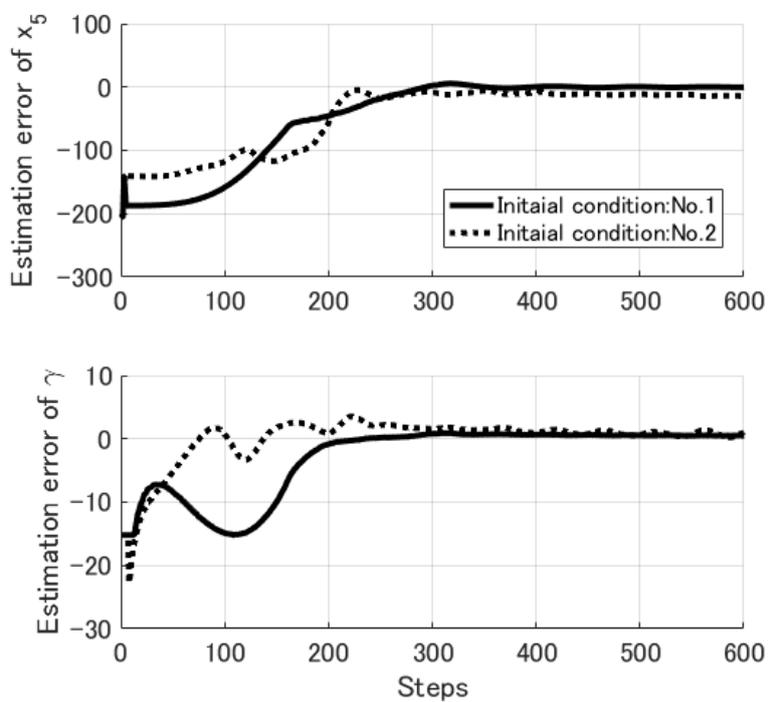


Fig 6.5: Estimation error of AMVUF

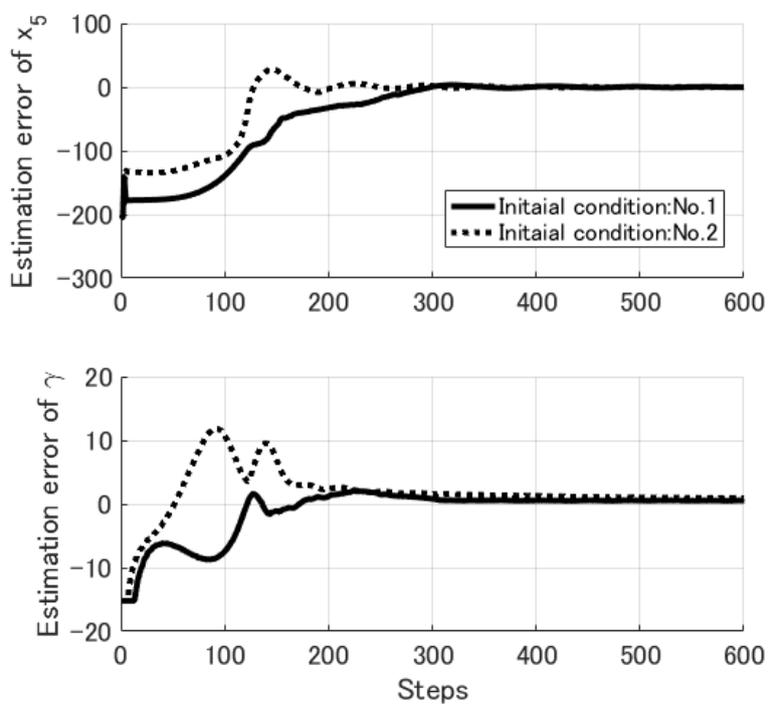


Fig 6.6: Estimation error of RAMVUF

において, RAMVUF の  $x_5$  の推定誤差が 0 に収束していることから判断できる.

## 6.7 まとめ

本章では、前章の近似最小分散不偏フィルタの導出過程で省略した、線形化誤差を陽に考慮して、未知パラメータの影響のみでなく、線形化誤差を考慮した推定誤差共分散行列を最小化するロバスト近似最小分散不偏フィルタを導出した。

数値シミュレーションによって、提案手法の有効性の検証を行い、RAMVUF の状態推定精度が、AMVUF と同様にパラメータ推定誤差に影響を受けないことを確認した。さらに、RAMVUF が Joint 推定に比べて、推定初期値に対するロバスト性に優れることも確認した。以上より、提案手法である RAMVUF も状態量とパラメータの同時推定手法として有効な代替手段になると考える。

なお、状態推定精度、パラメータ推定精度は設計パラメータ  $\eta$ 、スケーリング行列  $B_k$  の設計次第で、さらに向上し得ると期待しており、設計パラメータ  $\eta$ 、スケーリング行列  $B_k$  の理論的な設計方法の確立が今後の課題である。

## 第7章 結論

本研究では、パラメータ不確かさを有する非線形システムを対象として、ロバストな状態推定、およびパラメータ推定を行う手法を提案した。

2章では、本研究の事前知識として、不確かさを含まない非線形カルマンフィルについて紹介した。

3章では、パラメータ不確かさを有する非線形システムにおいて、パラメータ不確かさが非線形カルマンフィルタの予測誤差共分散行列に与える影響を解析し、非線形ロバストフィルタを導出した。本手法は、真値が分からないパラメータを拡大系とした、同時推定手法を適用することが困難なシステムにおいても適用可能であり、実用上のメリットもある。さらに、観測誤差共分散行列の近似値を利用した適応則を併用することで、不確かさのないシステムにおいても推定精度を維持することができる非線形適応ロバストフィルタを提案した。

4章では、3章で導出した離散時間非線形ロバストフィルタを連続・離散時間系へと拡張した。連続系の予測ステップを利用することで、サンプリングの間隔が長いシステムにおいても、ロバストな推定が可能になる。連続時間系の非線形システムをサンプリング周期で離散時間系の非線形システムに近似することで、離散時間系のREKFの予測ステップを連続時間系に拡張した連続離散REKFの提案を行った。さらに、RUKFを含む非線形ロバストフィルタの行列表現を導出し、Sarkka[30]が導出した連続離散UKFの導出に従って、連続離散非線形ロバストフィルタを導出した。これらの2つの連続離散非線形ロバストフィルタとも、更新式が離散時間系に従うため、前章で導出した適応則を直接利用することもできる。

5章では、パラメータ不確かさが推定誤差  $\hat{x}$  の期待値に与える影響を解析し、その影響を打ち消すように最適ゲインを設計する近似最小分散不偏フィルタを提案した。さらに、近似最小分散不偏フィルタをパラメータ不確かさを有する離散時間非線形システムにおける状態量とパラメータの同時推定手法へと拡張した。なお、状態量推定ゲインの設計に当たっては、パラメータ推定誤差が状態量の推定誤差ダイナミクスに影響を与えない条件を導出し、この条件を拘束条件とした、拘束条件付き最適化問題を考慮した。これによって、Joint推定において生じる推定過渡期における状態量の推定値とパラメータの推定値が互いに影響する状況を緩和することができることを示した。

6章では、5章の近似最小分散不偏フィルタの導出過程で省略した線形化誤差を陽に考慮し、誤差共分散行列の上限値を最小化する問題として定式化することで、ロバスト近似最小分散不偏フィルタも導出した。

これらの結果は、非線形システムの状態推定に関する研究、並びに応用を大きく進展させると期待している。

本研究では、非線形システムの不確定性を未知パラメータのみに注目した検討を行った。しかし、実問題では、ノンパラメトリックな不確定性が課題になる状況も多いため、これら

の不確定性に対してもロバストな推定を実現できるフィルタの検討が今後の課題になると考えている。

## 参考文献

- [1] Simon, Dan : Optimal state estimation: Kalman,  $H_\infty$ , and nonlinear approaches : John Wiley & Sons, (2006)
- [2] 内田 健康, 山中 一雄 : 状態推定の理論 : コロナ社 (2004)
- [3] 足立 修一, 丸田 一郎 : カルマンフィルタの基礎; 東京電機大学出版局 (2012)
- [4] 片山 徹 : 新版 応用カルマンフィルタ : 朝倉書店 (2000)
- [5] 片山 徹 : 非線形カルマンフィルタ : 朝倉書店 (2011)
- [6] 谷萩 隆嗣 : カルマンフィルタと適応信号処理 : コロナ社 (2005)
- [7] 大住 晃, 亀山 健太郎, 松田 吉隆 : カルマンフィルタとシステムの同定 動的逆問題へのアプローチ : 森北出版 (2016)
- [8] Jazwinski, Andrew H. : Stochastic processes and filtering theory : Academic Press (1970)
- [9] Julier, Simon, Jeffrey Uhlmann, and Hugh F. Durrant-Whyte : A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimations : IEEE Transactions on automatic control, Vol.45, No.3, pp.477-482, (2000)
- [10] Van Der Merwe, Rudolph, Wan, Eric A: Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models : Proceedings of the Workshop on Advances in Machine Learning, Montreal, Canada, Jun, (2003)
- [11] Arasaratnam, Ienkaran, and Simon Haykin : Cubature kalman filters : IEEE Transactions on automatic control, Vol.54, No.6, pp.1254-1269 (2009)
- [12] Katayama, Tohru : Equivalent linearization Kalman filter with application to cubic sensor problems : Proceedings of European Control Conference 2013, pp.1633-1638 (2013)
- [13] Evensen, Geir : The ensemble kalman filter: theoretical formulation and practical implementation : Ocean Dynamics, Vol. 53, No. 4, pp.343-367 (2003)
- [14] Gillijns, Steven, et al : What Is the Ensemble Kalman Filter and How Well Does it Work? : Proceedings of the 2006 American Control Conference 2006, pp.4448-4453 (2006)
- [15] 樋口 知之 : 予測に生かす統計モデリングの基礎 ベイズ統計入門から応用まで : 講談社 (2011)
- [16] 樋口 知之 [編著] : データ同化入門 - 次世代のシミュレーション技術 : 朝倉書店 (2011)
- [17] Xie, Lihua, Yeng Chai Soh, and Carlos E. de Souza. : Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems : IEEE Transactions on Automatic Control , Vol.39 No.6 pp. 1310-1314 (1994)
- [18] Zhu, Xing, Yeng Chai Soh, and Lihua Xie : Design and analysis of discrete-time robust Kalman filters : Automatica, Vol.38, pp.1069-1077, (2002)

- 
- [19] Kai, Xiong, Chunling Wei, and Liangdong Liu : Robust Extended Kalman Filtering for Non-linear Systems With Stochastic Uncertainties : IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, Vol.40, No.2, pp.399-405, (2010)
- [20] Dong, Zhe, and Zheng You : Finite-horizon robust Kalman filtering for uncertain discrete time-varying systems with uncertain-covariance white noises : IEEE Signal Processing Letters, 13.8 , pp.493-496 (2006)
- [21] Karlgaard, Christopher D., and Haijun Shen : Desensitized Kalman filtering : IET Radar, Sonar and Navigation, Vol.7, Iss.1, pp.2-9 (2013)
- [22] Seywald, Hans, and Renjith R. Kumar : Desensitized Optimal Trajectories : Spaceflight mechanics, Vol. 93, pp. 103- 115 (1996)
- [23] Wan, Eric A., and Rudolph Van Der Merwe : The unscented Kalman filter for nonlinear estimation : Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium, pp.153-158 (2000)
- [24] Yamakita, M., Y. Musha, and G. Kinoshita : Comparative Study of simultaneous parameter-state Estimation : Proceeding of the 2004 IEEE International Control Conference on Control Application, pp.1621-1626, (2004)
- [25] Gao, Zhiwei, Carlo Cecati, and Steven X. Ding : A Survey of Fault Diagnosis and Fault Tolerant Techniques Part I: Fault Diagnosis With Model Based and Signal Based Approaches : IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 62, No. 6, pp.3757-3767 (2015)
- [26] Xiong, Kai, H. Y. Zhang, and C. W. Chan : Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering, Automatica, Vol.42, pp.261-270 (2006)
- [27] Xiong, Kai, H. Y. Zhang, and C. W. Chan : Author's reply to "Comments on 'Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering' " : Automatica, Vol.43 ,pp.569-570 (2007)
- [28] Gillijns, Steven, and Bart De Moor : Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough : Automatica, Vol.43, pp. 934-937 (2007)
- [29] Hsieh, Chien-Shu : Robust Two-stage Kalman Filter for Systems with Unknown inputs : IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.45, No.12, pp.2374-2378 (2000)
- [30] Sarkka, Simo : On Unscented Kalman filtering for state estimation of continuous-time nonlinear systems : IEEE Transactions on automatic control, Vol.52, No.9, pp.1631-1641 (2007)
- [31] Murata, Masaya, Hidehisa Nagano, and Kunio Kashino : Unscented Statistical Linearization and Robustified Kalman Filter for Nonlinear Systems with Parameter Uncertainties : Proceedings of the 2014 American Control Conference, pp.5079-5084, (2014)
- [32] Bain, Alan, and Dan Crisan : Fundamentals of stochastic filtering : Springer, (2009)
- [33] 矢野 浩一 : 粒子フィルタの基礎と応用 : フィルタ・平滑化・パラメータ推定 : 日本統計学会誌, 第44巻, 第1号, pp.189-216, (2014)
- [34] Karlgaard, Christopher D., Haijun Shen : Robust state estimation using desensitized divided difference filter : ISA transactions, Vol.52, No.5 pp.629-637, (2013)

- 
- [35] Karlgaard, Chris, and Haijun Shen : Desensitized optimal filtering : AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. (2011)
  - [36] Subrahmanya, Niranjana, and Yung C. Shin : Adaptive divided difference filtering for simultaneous state and parameter estimation : Automatica, Vol. 45, pp.1686-1693, (2009)
  - [37] 竹野 倫彰, 片山 徹 : 非線形関数に対する差分商近似を用いた連続-離散非線形フィルタについて : システム制御情報学会論文誌, Vol.25, No.4, pp.84-93 (2012)
  - [38] 大塚 敏之 : 非線形最適制御入門 : コロナ社 (2011)
  - [39] 緒方 秀教 : 変分法 : コロナ社 (2011)
  - [40] Bembenek, Charlene, Tom A. Chmielewski, and Paul R. Kalata : Observability conditions for biased linear time invariant systems : Proceedings of the 1998 American Control Conference, pp. 1180-1184, (1998)
  - [41] Xiong, Kai, C. L. Wei, and L. D. Liu : Robust Kalman filtering for discrete-time nonlinear systems with parameter uncertainties : Aerospace Science and Technology, Vol.18, pp.15-24, (2012)



# 研究業績

## 研究業績 (発表順に掲載)

### 学術雑誌論文

- 石原 新士, 山北 昌毅 : パラメータ不確かさを有する非線形システムにおける連続・離散ロバスト拡張カルマンフィルタ, システム制御情報学会学会誌, Vol.29, No.7, pp.302-310, 2016. (3章, 4章に関連)
- 石原 新士, 山北 昌毅 : パラメータ不確かさを有する非線形システムにおけるロバストカルマンフィルタ, 計測自動制御学会論文誌, (2017. 10 掲載予定, 5章に関連)
- 石原 新士, 山北 昌毅 : ロバスト近似最小分散不偏フィルタによる状態量とパラメータの同時推定手法, 計測自動制御学会論文誌, (査読中, 6章に関連)

### 国際会議論文

- S. Ishihara and M. Yamakita, "Gain constrained robust UKF for nonlinear systems with parameter uncertainties", 2016 European Control Conference (ECC), Aalborg, 2016, pp. 1709-1714.
- S. Ishihara and M. Yamakita, "Adaptive robust UKF for nonlinear systems with parameter uncertainties," IECON 2016 - 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Florence, 2016, pp. 48-53.
- S. Ishihara and M. Yamakita, "Continuous-discrete robust UKF for nonlinear systems with parameter uncertainties" The 48th International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS), 2016, pp.1-6.
- S. Ishihara and M. Yamakita, "Approximated unbiased minimum-variance simultaneous states and parameters estimation for nonlinear systems", IFAC World Congress, Toulouse, 2017, pp.1643-1648.
- S. Ishihara and M. Yamakita, "Robust Approximated Unbiased Minimum Variance Filter for nonlinear systems with parameter uncertainties", IEEE Conference on Decision and Control (CDC) 2017 (to appear).

## 解説記事

- 石原 新士, 山北 昌毅: 不確定性を考慮したカルマンフィルタと自動車分野への応用, 計測と制御 (2017.9 掲載予定, 5章に関連)

## 査読なし国内会議発表

- 石原 新士, 山北 昌毅: パラメータ不確かさを有する線形観測非線形システムに対する適応ロバスト UKF, 第2回制御部門マルチシンポジウム, 2015.
- 石原 新士, 山北 昌毅: パラメータ不確かさを有する非線形観測システムにおけるロバスト UKF, 第58回自動制御連合講演会, 2015.
- 石原 新士, 山北 昌毅: 制御入力にカスケード不確かさを有する非線形システムにおけるロバスト UKF, 2015 年度産業応用部門大会, 2015.
- 石原 新士, 山北 昌毅: 不確かさの影響が観測可能な非線形システムにおけるゲイン拘束ロバスト UKF, 第3回制御部門マルチシンポジウム, 2016.
- 石原 新士, 山北 昌毅: 近似最小分散不偏推定を用いた非線形システムの状態量とパラメータの同時推定手法, 第4回制御部門マルチシンポジウム, 2017.

## 謝辞

本研究を遂行するにあたり、様々な方々からのご助言やご指導などを賜りました。特に指導教員である山北昌毅准教授には、社会人博士コースのご指導を快く引き受けて頂き、論文の執筆、学会発表など非常に多くのご指導を賜りました。社会人の業務内容と博士課程の研究内容が異なるために、遅々として進まない私の研究を辛抱強くご指導を頂いたおかげで、3年間で研究遂行能力を飛躍的に高めることができたと思っております。

山北研究室の学生のみなさまは、私を学生メンバの一人として接してくれたため、気分転換やモチベーションアップにつながりました。社会人博士として山北研究室に戻ってきたばかりの私に研究室の様々なことを教えてもらい感謝しています。また、博士課程、修士課程に在籍していた学生の皆さんとは、院ゼミを中心に様々研究テーマについて研究内容を紹介してもらい、研究知識を3年間で大幅に広げることができたと思います。学部4年生に在籍していた学生の皆さんが、お昼休みに山北先生と議論を行っているところをよく見かけ、私も新しい知識を学ぶことへのモチベーションアップへのきっかけになりました。また、ATACSでの出し物を盛り上げてくれて大いに楽しませてもらいました。

私の社会人博士への進学を後押し頂いた株式会社 日立製作所 日立研究所時代の上司であった梅北氏、柄川氏に感謝します。また、社会人博士の通学中のサポートをいただいた株式会社 日立製作所 研究開発グループ 輸送システム研究部の部長である鈴木氏、川股氏、ユニットリーダーである尾坂氏、荒井氏（現在、日立建機 株式会社）に感謝します。さらに、社会人博士への進学、通学に寛大な理解を示していただいた日立建機 株式会社の皆様にも感謝します。