

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

題目(和文)	コントロール・モーメント・ジャイロ搭載宇宙機の運動学に基づく姿勢制御
Title(English)	Kinematics-Based Attitude Control of a Spacecraft with Control Moment Gyros
著者(和文)	河尻翔太
Author(English)	Shota Kawajiri
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第10793号, 授与年月日:2018年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:松永 三郎,山浦 弘,古谷 寛,野田 篤司,遠藤 玄,中西 洋喜
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第10793号, Conferred date:2018/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

平成 29 年度 博士論文

コントロール・モーメント・ジャイロ搭載  
宇宙機の運動学に基づく姿勢制御

**Kinematics-Based Attitude Control of a Spacecraft  
with Control Moment Gyros**

指導教員 松永 三郎 教授  
野田 篤司 特定准教授

東京工業大学 大学院理工学研究科  
機械宇宙システム専攻

河尻 翔太



# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	研究目的	11
1.3	論文の構成	11
1.4	記法	13
第 2 章	CMG 搭載宇宙機の姿勢力学	15
2.1	緒言	15
2.2	ベクトル解析	15
2.2.1	内積	15
2.2.2	外積	16
2.3	剛体の運動学	16
2.3.1	座標変換行列	17
2.3.2	クォータニオン	19
2.3.3	修正ロドリゲスパラメータ	22
2.4	剛体の動力学	23
2.4.1	剛体の運動方程式の導出	23
2.4.2	VSSGCMG を搭載した宇宙機の動力学	26
2.4.3	ピラミッド型 SGCMG システムを搭載した宇宙機の動力学	33
2.4.4	VSDGCMG を搭載した宇宙機の動力学	35
2.5	結言	41
第 3 章	単一 VSDGCMG を用いた逆運動学に基づく姿勢制御	43
3.1	緒言	43
3.2	提案手法	44
3.3	シミュレーション	50
3.4	結言	56



第 4 章	SGCMG を用いた角運動量保存則に基づく低計算量の高速姿勢制御	57
4.1	緒言 . . . . .	57
4.2	SGCMG が有する機械的な拘束条件 . . . . .	58
4.3	SGCMG 搭載宇宙機の最短時間姿勢変更解の性質 . . . . .	60
4.3.1	問題設定 . . . . .	60
4.3.2	CPS 法による最短時間姿勢変更問題の定式化 . . . . .	61
4.3.3	シミュレーション . . . . .	63
4.4	最短時間姿勢変更解を模擬する低計算量の高速姿勢制御則の提案 . . . . .	66
4.4.1	提案手法 . . . . .	66
4.4.2	シミュレーション . . . . .	69
4.5	結言 . . . . .	77
第 5 章	形状可変機構と SGCMG を併用した角運動量保存則に基づく姿勢制御	79
5.1	緒言 . . . . .	79
5.2	フィードバック制御 . . . . .	80
5.2.1	提案手法 . . . . .	80
5.2.2	シミュレーション . . . . .	82
5.3	最短時間姿勢変更のためのフィードフォワード制御 . . . . .	90
5.3.1	問題設定 . . . . .	90
5.3.2	CPS 法による最短時間姿勢変更問題の定式化 . . . . .	91
5.3.3	シミュレーション . . . . .	92
5.4	結言 . . . . .	105
第 6 章	結論	107
6.1	本研究の総括 . . . . .	107
6.2	今後の課題 . . . . .	109
参考文献		111
付録 A	浮遊多剛体系の運動学	117
A.1	緒言 . . . . .	117
A.2	記法と文字 . . . . .	117
A.3	定式化 . . . . .	119
A.4	結言 . . . . .	122
付録 B	CMG の特異点と制御に関する先行研究	123

---

B.1	緒言 . . . . .	123
B.2	特異点問題 . . . . .	123
B.2.1	SGCMG の特異点 . . . . .	123
B.2.2	単一 VSDGCMG の特異点 . . . . .	128
B.2.3	特異点の種類 . . . . .	128
B.3	CMG を用いたフィードバック制御 . . . . .	132
B.3.1	制御則 . . . . .	133
B.3.2	SGCMG 用駆動則 . . . . .	135
B.3.3	単一 VSDGCMG 用駆動則 . . . . .	143
B.4	CMG を用いたフィードフォワード制御 . . . . .	144
B.5	結言 . . . . .	148
付録 C	最適制御問題	149
C.1	緒言 . . . . .	149
C.2	間接法 . . . . .	149
C.2.1	定式化 . . . . .	149
C.2.2	Sequential Conjugate Gradient-Restoration Algorithm . . . . .	152
C.3	直接法 . . . . .	158
C.3.1	Chebyshev Pseudo-Spectral Method . . . . .	159
C.3.2	一軸リアクションホイール制御への CPS 法の適用 . . . . .	161
C.4	結言 . . . . .	166
研究業績		167
謝辞		173



# 目次

1.1	1–50 kg 級衛星の年間打上げ機数 . . . . .	2
1.2	キューブサット外観 . . . . .	2
1.3	超小型深宇宙探査機「PROCYON」軌道上イメージ図 . . . . .	2
1.4	打上げ予定の超小型探査機の軌道上イメージ図 . . . . .	3
1.5	TSUBAME 軌道上イメージ図 . . . . .	3
1.6	TSUBAME の GRB 観測シーケンス . . . . .	4
1.7	CMG の機構 . . . . .	4
1.8	ISS に搭載された DGCMG 外観 . . . . .	5
1.9	超小型衛星 TSUBAME に搭載された SGCMG . . . . .	5
1.10	SGCMG4 基によるピラミッド型配置 . . . . .	5
1.11	CMG のハードウェア性能の比較 . . . . .	7
1.12	特異点の分類 . . . . .	8
1.13	形状可変式姿勢制御の概念図 . . . . .	10
2.1	$\vec{n}_i$ の $\vec{b}_i$ への射影 . . . . .	22
2.2	剛体と種々の位置ベクトル . . . . .	24
2.3	SGCMG と座標系 . . . . .	28
2.4	SGCMG4 基によるピラミッド型配置 . . . . .	34
2.5	VSDGCMG と座標系 . . . . .	36
3.1	特異点の回避と通過 . . . . .	44
3.2	VSDGCMG と座標系 . . . . .	45
3.3	解の乗り換えの概念図 . . . . .	48
3.4	Case 1 における目標軌道 . . . . .	51
3.5	Case 1 (特異点回避) . . . . .	51
3.6	Case 2 (特異点通過) . . . . .	52
3.7	Case 2 (意図的に特異点回避) . . . . .	52

3.8	Case 1 における姿勢誤差の比較 . . . . .	54
3.9	Case 1 におけるトルク誤差の比較 (塚原の手法は意図的に特異点を回避)	54
3.10	センサ誤差が存在する場合の Case 1 におけるトルク誤差の比較 . . . . .	55
4.1	超小型衛星 TSUBAME に搭載された SGCMG . . . . .	58
4.2	小型 CMG のホイールとジンバル (bread board model) . . . . .	59
4.3	入力ジンバルレートと測定値との比較 . . . . .	59
4.4	Case 1 . . . . .	64
4.5	Case 2 . . . . .	65
4.6	Case 3 . . . . .	65
4.7	制御シーケンス . . . . .	67
4.8	機体加減速中のジンバル駆動方法 . . . . .	68
4.9	整定時間の分布 . . . . .	71
4.10	外部特異面における正規化された CMG システムの角運動量 . . . . .	71
4.11	提案手法と従来のフィードバック則間の整定時間の比 . . . . .	73
4.12	準最短時間制御と提案手法との比較 . . . . .	74
4.13	減速フェーズ終了後の指向誤差 . . . . .	74
4.14	$\eta_{\max}$ の分布 . . . . .	76
4.15	慣性座標系一軸回りのマヌーバにおける $\eta$ . . . . .	76
4.16	180 度マヌーバにおける機体角速度 . . . . .	77
5.1	宇宙機システムと各ボディの座標系 ( $\theta_V = \mathbf{0}$ ) . . . . .	83
5.2	Case 1 . . . . .	85
5.3	Case 2 . . . . .	86
5.4	Case 3 . . . . .	87
5.5	Case 4 . . . . .	88
5.6	Case 5 . . . . .	89
5.7	Case 1S . . . . .	95
5.8	Case 2S . . . . .	96
5.9	Case 3S . . . . .	96
5.10	Case 4S . . . . .	97
5.11	Case 5S . . . . .	97
5.12	Case 6S . . . . .	98
5.13	Case 7S . . . . .	98
5.14	Case 8S . . . . .	99

---

5.15	Case 1L . . . . .	99
5.16	Case 2L . . . . .	100
5.17	Case 3L . . . . .	100
5.18	Case 4L . . . . .	101
5.19	Case 5L . . . . .	101
5.20	Case 6L . . . . .	102
5.21	Case 7L . . . . .	102
5.22	Case 8L . . . . .	103
5.23	マヌーバ時間の比較 . . . . .	103
5.24	マヌーバ時間の比較 (拡大図) . . . . .	104
6.1	提案手法が制御対象とする衛星 . . . . .	109
A.1	マルチボディシステムの例 . . . . .	119
B.1	各ベクトルの幾何的關係 . . . . .	127
B.2	ピラミッド型 4SGCMG の特異面 ( $\beta = \tan^{-1} \sqrt{2}$ rad) . . . . .	128
B.3	ピラミッド型 4SGCMG の内部・外部特異点 ( $\beta = \tan^{-1} \sqrt{2}$ rad) . . . . .	129
B.4	特異点の分類 . . . . .	132
C.1	Case A のシミュレーション結果 . . . . .	165
C.2	Case B のシミュレーション結果 . . . . .	166



# 表目次

1.1	CMG 搭載衛星一覧 . . . . .	6
4.1	TSUBAME に搭載された小型 SGCMG の性能 . . . . .	58
4.2	各ケースにおける目標オイラー軸 $e_r$ . . . . .	63
4.3	シミュレーションパラメータ . . . . .	63
4.4	シミュレーションパラメータ . . . . .	70
4.5	整定時間の統計値 . . . . .	70
5.1	宇宙機のパラメータ . . . . .	83
5.2	CMG のパラメータ . . . . .	83
5.3	特異点回避のパラメータ . . . . .	84
5.4	各ケースのパラメータ . . . . .	84
5.5	各ケースにおける目標オイラー軸 $e_r$ . . . . .	93
5.6	シミュレーションパラメータ . . . . .	93
5.7	Case $iS$ の姿勢変更時間 . . . . .	95
5.8	Case $iL$ の姿勢変更時間 . . . . .	95
C.2	シミュレーションパラメータ . . . . .	165
C.3	終端時間のシミュレーション結果と解析解 . . . . .	165





# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究背景

近年、超小型衛星を用いたミッションが大学や企業で盛んに実施されるようになってきており、2014–2017 年における 1–50 kg の衛星の年間打上げ機数は、何れの年も 100 機を上回っている（図 1.1） [1]。火付け役となったのは、2003 年に打上げられた複数の超小型衛星であった。具体的には、東京工業大学、東京大学を含む 6 大学が開発した 6 機の 1 kg 級超小型衛星である [2]。図 1.2 に東京工業大学が開発した CUTE-1 および東京大学が開発した XI-IV の外観を示す。これらの超小型衛星の成功により、軌道上での理工学実験、実践的な教育活動、あるいは宇宙ビジネスが、低コストで実現できる可能性が示されたため、多くの大学、企業が続々と超小型衛星開発に参入したのである。また、2014 年には超小型深宇宙探査機「PROCYON」(図 1.3) が打上げられ [3]、2018 年には超小型深宇宙探査機「EQUULEUS」(図 1.4a) [4]、超小型探査機「OMOTENASHI」(図 1.4b) [5] が打上げ予定であるなど、探査機にも小型化の波が広がっている。

超小型衛星・探査機の打上げ数の増加に伴い、ミッション自体も多岐にわたるようになった。挑戦的なミッションを掲げた衛星の例として挙げられるのは、東京工業大学の松永研究室が中心となって開発を行った 50 kg 級超小型衛星「TSUBAME」(図 1.5) である [6]。そのミッションの一つは、突発天体の一種である gamma ray burst (GRB) の観測であった。突発天体とは発生方向がランダムかつ、数十秒しか継続しない天体現象を指す。TSUBAME は GRB 検知後、高速姿勢変更を行ってから観測に移るというシーケンスを採用していた (図 1.6)。そのため、同衛星には 45 度を 15 秒で姿勢変更する迅速性要求が課されており、要求を実現可能な姿勢制御装置として超小型 control moment gyro (CMG) が 4 基搭載されていた。CMG は大トルクが出力可能であるという利点を持つアクチュエータである。その普及が進めば、地心方向以外の地表写真の撮影も可能な、高迅速性を有する超小型衛星群によるリアルタイム地球観測網を実現することができ、突発災害等の監視

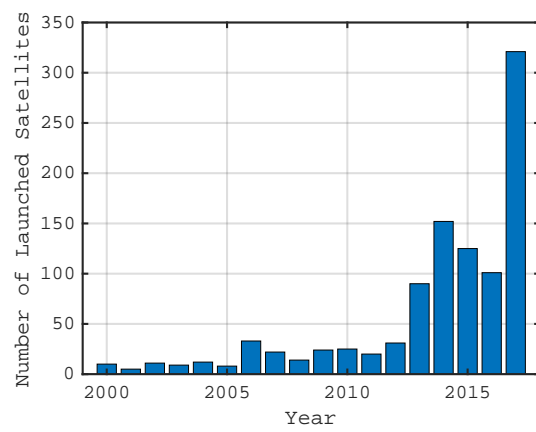
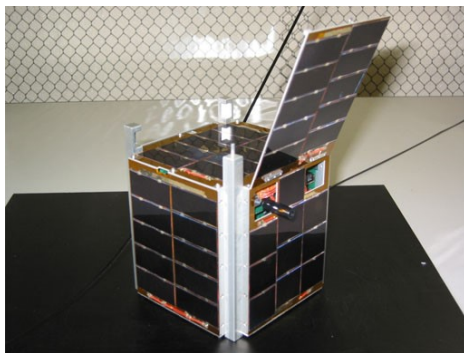
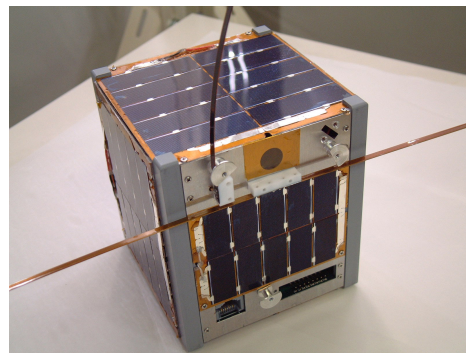


図 1.1: 1-50 kg 級衛星の年間打上げ機数



(a) CUTE-1



(b) XI-IV

図 1.2: キューブサット外観

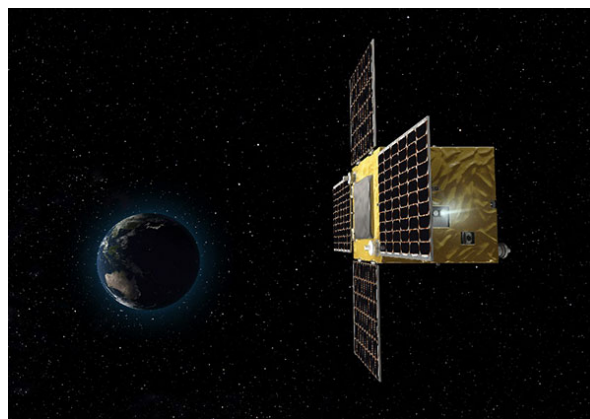
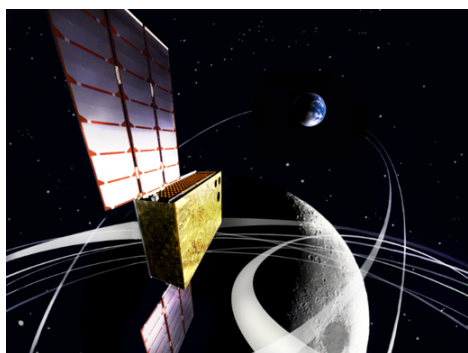
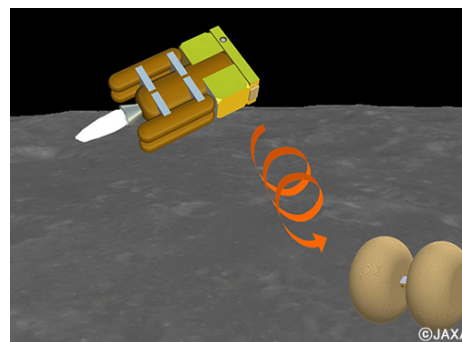


図 1.3: 超小型深宇宙探査機「PROCYON」軌道上イメージ図



(a) 超小型深宇宙探査機「EQUULEUS」



(b) 超小型探査機「OMOTENASHI」

図 1.4: 打上げ予定の超小型探査機の軌道上イメージ図

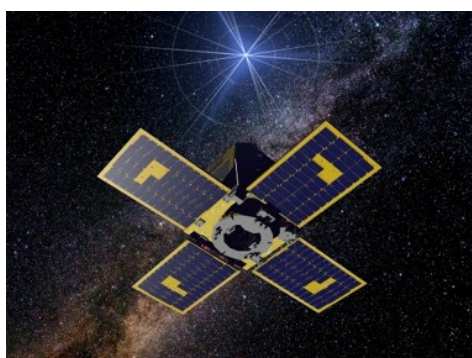


図 1.5: Tsubame 軌道上イメージ図

に資することができる。だが、CMG は後述する特異点問題などの多くの欠点も抱えているため普及は進んでおらず、CMG 搭載宇宙機の姿勢制御に関する研究も未だ盛んに行われている。本節では、この CMG に関してこれまでの研究開発活動を整理し、解決されるべき課題を明らかにする。

CMG は高速回転するホイールの角運動量ベクトルを、ジンバルで回転させることで生ずるジャイロトルクを姿勢制御に利用する。ホイールの可変速の可否およびジンバルの数で CMG は幾つかの種類に分類されるが、ここでは最も基礎的な single-gimbal CMG (SGCMG) の機構を図 1.7 を用いて説明する。この CMG は一定速度で高速回転するホイールと、その回転軸に直交する軸回りに回転するジンバルから構成される。ジンバルを回転させると、ホイール回転軸とジンバル回転軸の外積方向回りに宇宙機にトルクが加わる。ジャイロトルクを利用しているため、CMG は reaction wheel (RW) よりも大トルクが出力可能という利点をもつが、トルクの出力方向が時変になって制御が複雑になるという課題も存在し、これは後に説明する特異点問題へと繋がる。

CMG は元々、Skylab、Mir、国際宇宙ステーション (ISS) のような大型宇宙構造物に

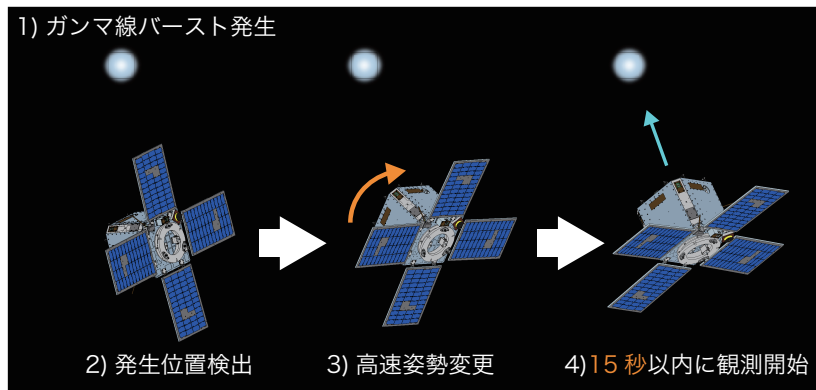


図 1.6: Tsubame の GRB 観測シーケンス

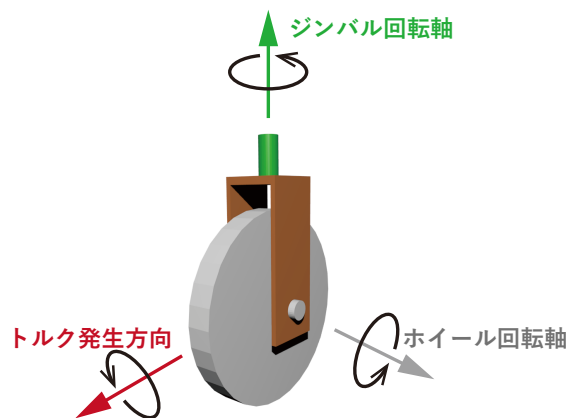


図 1.7: CMG の機構

搭載されてきた [7]。ISS には図 1.8 のような巨大な double-gimbal CMG (DGCMG) が 4 台搭載されている [8]。近年では CMG 自体の小型化が進み、超小型衛星にも搭載されるようになってきた。先に述べた衛星小型化の機運がある上、地球観測やその他ミッションに起因する厳しい迅速性要求が課されるようになってきたのが一因である。小型 CMG の一例として、Tsubame に搭載された CMG を図 1.9 に示す [9]。直径 73.5 mm、長さ 150 mm の円筒形で、質量 1 kg の超小型 SGCMG であり、図 1.10 に示すように 4 基が  $\beta = \tan^{-1} \sqrt{2} \text{ rad}$  のピラミッド型配置で搭載されていた。打上げ前の衛星も含めた、CMG 搭載衛星の一覧を表 1.1 に示す [9–17]。情報が公開されているのは 2017 年 12 月現在 11 機であり、1 トン級から 1 kg 級の衛星までが存在し、全て SGCMG を搭載している、なお、WorldView3 は WorldView2 と、SPOT-6 および SPOT-7 は Pleiades と同じ CMG を搭載している。

図 1.11 に衛星搭載 CMG のハードウェア性能の比較図を示す [18, 19]。WorldView、SwampSat は資料が見つからなかったため掲載していない。衛星には複数基の CMG が搭



図 1.8: ISS に搭載された DGCMG 外観



図 1.9: 超小型衛星 TSUBAME に搭載された SGCMG

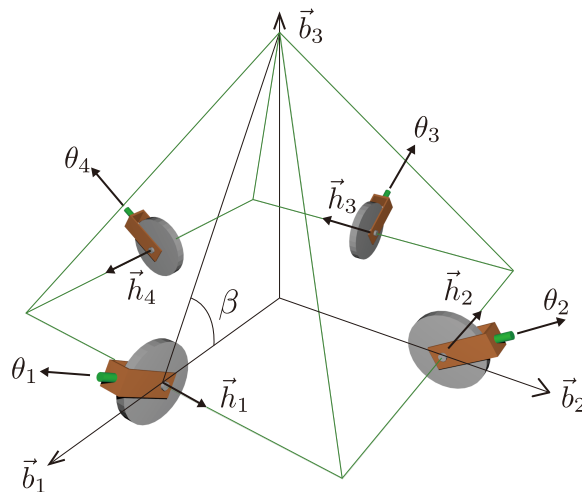


図 1.10: SGCMG4 基によるピラミッド型配置

表 1.1: CMG 搭載衛星一覧

衛星	質量 [kg]	打上げ年	SGCMG の個数
WorldView-1	2500	2008	4
WorldView-2	2800	2009	4
WorldView-3	2800	2014	4
Pleiades	1000	2011	4
SPOT-6	700	2012	4
SPOT-7	700	2014	4
BILSAT-1	130	2003	2
Prox-1	67	2018 (予定)	4
TSUBAME	50	2014	4
Violet	50	未定	8
SwampSat	1	2013	4

載されているが、この図は 1 基の CMG について評価してあること、および電気回路の質量は含めていないことに注意されたい。図中のうち最も古い BILSAT と最新の Prox-1 について比較すると、質量が 0.27 倍、保有角運動量は 0.31 倍にまで小型化されていることが分かる。特筆すべき点は、最大トルクが 3.1 倍にまで増加していることである。この理由は Prox-1 に搭載されている CMG のジンバルの最大角速度が大きく、その結果として大トルクが出力可能になっているためである。最大トルクは、角運動量空間における CMG 角運動量の最大移動速度（宇宙機の最大角加速度）を示しており、小角度マヌーバではこれが CMG の性能を表す良い指標となる。だが、大角度姿勢変更においては保有角運動量が重要な指標となる。なぜなら、大角度姿勢変更時には CMG 角運動量が最大値に長時間留まるために、角運動量の最大移動速度（宇宙機の最大角加速度）よりも最大角運動量（宇宙機の最大角速度）が大きい方が重要だからである。また、図には示されていないが、BILAT-1 の CMG のジンバル角度には  $\pm 90$  度の制限があり、TSUBAME、Prox-1 ではもはやその制限はないことも特筆に値する。以上のように、小型 CMG を開発・設計・製造するエンジニアリング技術が向上してきていることが分かる。

学術的に興味深い CMG の特徴は、先にも言及した特異点問題である。SGCMG は単体では 3 軸方向にトルクが出力できないため、多くの衛星では表 1.1 のように、複数基がまとめて CMG システムとして姿勢制御系に組み込まれる。だが、CMG のトルク出力方向はジンバル角度とともに変化するため、RW などとは違い CMG を 3 台以上を搭載しても常に 3 軸方向にトルクを出力できるわけではない。言い換えれば、ジンバル角度の組み合



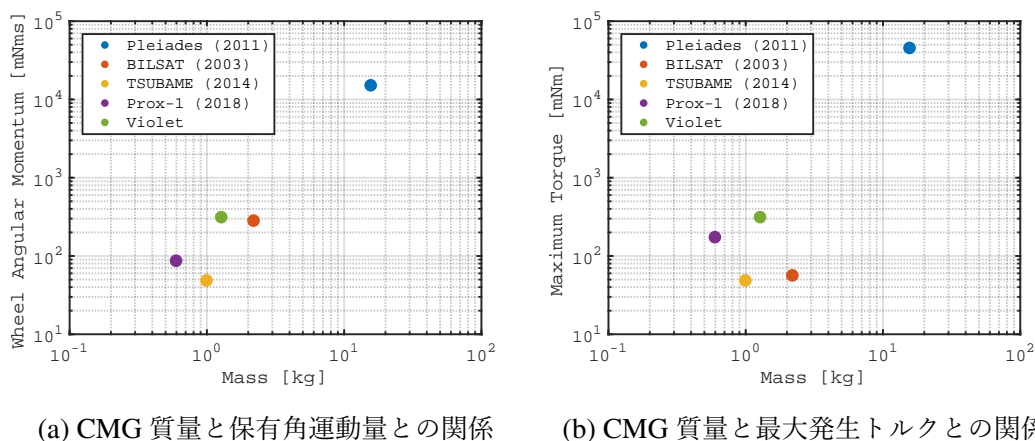


図 1.11: CMG のハードウェア性能の比較

わせによってはトルクの出力次元が 2 次元以下に縮退するのである。この状態を特異状態といい、それによって生ずる制御性低下の問題を特異点問題という。この問題が CMG による姿勢制御問題を複雑にすると同時に、多くの研究者の関心を惹いている。

CMG による宇宙機の姿勢制御に関する研究の方向性は、概して次の 3 種類に分類できる。

1. 特異点そのものに関する研究
2. 新しい CMG システムに適用できる駆動則の提案
3. 既存の CMG システムに適用できる新駆動則の提案

1 は宇宙機の姿勢制御を直接取り扱うものではないが、特異点回避則に大きく関わりのある CMG の特異点の性質を解明する研究である。2、3 は新規性がシステム部にあるのか、駆動則部分にあるのかが異なる。特異点問題はトルクに起因するものであるから、既存研究では以下に示すような動力学からのアプローチが主流であった。

1 の特異点の性質に関する包括的な研究は黒河によって行われており、ヌルモーシオン（トルクを発生させずにジンバルを駆動する手法）で特異点から脱出可能か否か（passable か impassable か）を示す Passability という概念が黒河によって定義されている [20]。Leve らは、SGCMG の特異点の持つ性質を図 1.12 に示すように整理した [21]。外部特異点（最大角運動量包絡域上の特異点）は全て楕円型（ヌルモーシオン不可能）であり、内部特異点（外部特異点以外の特異点）は楕円型・双曲線型（ヌルモーシオン可能）のどちらのタイプも存在する。双曲線型のうち、non-degenerate な特異点のみが passable と呼ばれ、ヌルモーシオンを使って特異点から脱出できる。他の 3 種は impassable と呼ばれ、ヌルモーシオンが実行可能であったとしても、誤差トルクなしに特異点からの脱出は不可



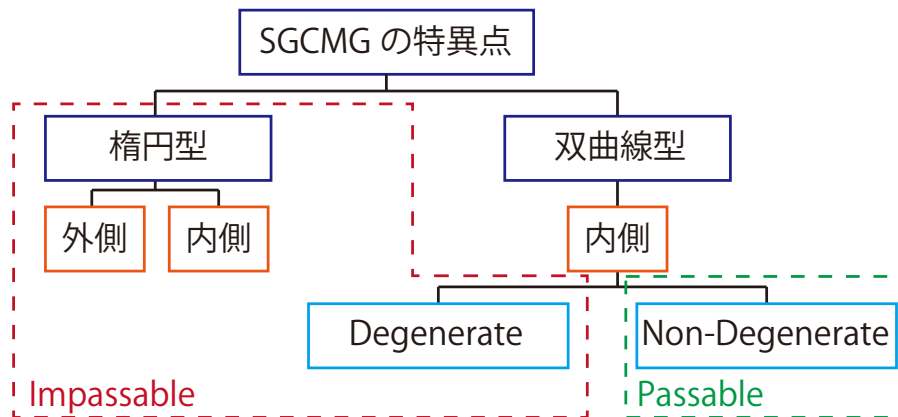


図 1.12: 特異点の分類

能である。Wie らはジンバル角について、どのような条件が満たされた場合に特異状態に陥るのかについて議論した [22]。また、トルクを発生できない方向である特異ベクトルという概念を定義した。これにより、ジンバル角ではなく角運動量と特異状態の関係が導かれ、角運動量空間における特異点の可視化が可能となった。小島は、楕円型特異点を回避するモデル予測駆動則の提案を目的として、楕円型特異点と双曲線型特異点の境界を計算した上で、境界線の多項式近似を行った [23]。

2 の例としては、まず Bedrossian らによる冗長 SGCMG 系に対する、擬似逆行列に基づく駆動則が挙げられる [24]。Schaub らは、可変速 SGCMG (variable-speed SGCMG: VSSGCMG) 系に対するフィードバック則を提案した [25]。Stevenson らは、可変速 DGCMG (variable-speed DGCMG, VSDGCMG) に対する厳密な運動方程式に基づいた非線形制御を提案した [26]。ただし、単一 VSDGCMG 系の特異点問題については触れていない。VSDGCMG は単体で 3 軸の姿勢制御が可能という特徴を有しているため、姿勢制御機器の小型化に有効なアクチュエータと考えられている。また、小島らは、ピラミッド配置における skew 角を動的に変更可能なシステムである、適応 skew 角ピラミッド配置 CMG システムへ駆動則を提案した [27]。

3 に類する研究が最も盛んに行われている。Schaub らは、ヌルモーションを利用した可変速 SGCMG 系の特異点回避手法を提案した [28]。Wie らは、ジッター項と呼ばれる項を擬似逆行列に導入することにより、特異点付近での制御入力を発散を防ぐ generalized singularity robustness (GSR) 駆動則を提案した。また、重み付けの擬似逆行列を用いることで、いかなる種類からの特異点からも回避・脱出ができる weighted singularity robustness (WSR) 駆動則も提案している [29]。Leve らは、双曲線型特異点に対してはヌルモーションによる特異点回避を、楕円型特異点に対しては特異値分解法による特異点からの脱出を行うハイブリッドな駆動則を提案した [30]。山田らは、楕円型特異点においても、目

標トルクの方角によっては誤差無くトルク出力が可能であることに着目し、**directional passability** という概念を定義した [31]。また、同論文において、微小ジンバル角度に対する角運動量変化を二次まで考慮した上で、ジンバル角度変動量の二乗和を最小にするような **quadratic steering logic** を提案した。以上のように、**SGCMG** 系に関しては特異点問題に対処する駆動則が数多く提案されている。一方、単一 **VSDGCMG** は近年になって取り扱われるようになったシステムであり、提案されている駆動則は少ない。**Zhang** らは **VSDGCMG** 系に対し、バックステッピングを用いた制御を提案しているが [32]、特異点問題は扱っていない。塚原らのみが **VSDGCMG** 系の特異点を通過・回避可能な制御則を提案しており [33]、ここには研究の余地が大いに残されている。

以上は全てフィードバック則であるが、最小エネルギー制御、最短時間制御を実現するためのフィードフォワード則の研究も行われている。楠田らは、最小エネルギー制御を実現するフィードフォワード入力軌道を求める手法を **Fourier basis algorithm** に基づいて提案している [34]。同論文においては、誤差や外乱が存在してもその軌道に追従するための、補償用フィードバック制御則も同時に提案されている。上野らはオイラー方程式を考慮して最適化問題を間接法によって解き、**CMG** の最短時間姿勢変更解を求めた。そして、大角度姿勢変更には「コースティング区間」と呼ばれる、ジンバル角速度がゼロとなり機体が一定角速度で回転する時間が 1 回現れることを示した [35]。**Zhang** らは上野らと同様の問題を、様々な拘束条件を容易に考慮できる直接法によって求めた [36]。春木らは、最適解がバンバン入力と特異入力から構成されていることに着目し、それを模擬したルールベースのフィードフォワード則を提案した [37]。高速姿勢変更を可能とするフィードフォワード制御は一般に計算量が大きく、オンラインで実行可能な低計算量のは春木らの駆動則のみである。しかしながら、同駆動則はジンバルモータの最大角加速度という機械的な拘束条件を加味していないため、ジンバルが急加速される高速姿勢変更では生成した軌道に実際のハードウェアが追従できないという課題がある。

以上のような、動力学に基づく研究が多くなされている一方、近年、山田らによって **CMG** の逆運動学に基づく駆動則が提案された [38]。目標トルクを目標 **CMG** 角運動量に変換した上で、その角運動量を実現するような目標ジンバル角度を求め、最終的に入力ジンバル角速度へ変換する手法である。運動学、すなわち角運動量レベルでは特異点問題は陽に現れないため、現在値に最も近い目標ジンバル角度を選ぶだけで特異点が回避でき、制御入力の発散を防ぐことができる。このように、運動学レベルで **CMG** の制御を考慮することで特異点問題の取り扱いを容易にできることが知られている。ただし、目標トルクの変換に際して一次近似を行っているため、十分に短い制御周期（例えば 0.1 秒）が必要となる。

また、運動学を利用した他の例には、最適制御や準最適制御の力学的拘束条件に角運動量保存則のみを課すものがある。これにより、ダイナミクスを考慮する必要なしに宇宙機

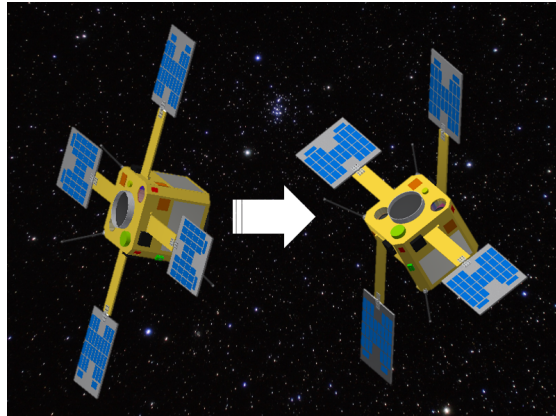


図 1.13: 形状可変式姿勢制御の概念図

の角速度を同定でき、計算コストの低下やロバスト性の向上を見込むことができる。ただし、外乱トルクが存在する環境下ではこの手法は適用できないことに注意されたい。小林らは SGCMG を用いた最短時間制御問題を直接法で解くための力学的な拘束条件として、システムの角運動量の総和がゼロという条件のみを課して最短時間解を求めた [39]。朝霧らは、ジンバル角加速度を設計変数としてみなす軌道計画法に基づく準最短時間姿勢変更手法を提案し、ジンバル角軌道から機体角速度軌道を導出する際に角運動量保存則を用いた [40]。軸屋らは朝霧の手法を発展させ、バイアスモーメンタム状態における単一 VSDGCMG 系の準最短時間姿勢変更手法を提案した [41]。これらの 3 種類の手法は、ジンバル角加速度の最大値を拘束できる点に特徴がある。

以上まで CMG に関する先行研究を整理してきたが、近年提案された、高速姿勢変更が可能な新たな姿勢制御方式についても説明する。俵と松永は、超小型衛星に対し、迅速性と高姿勢安定度を両立させる姿勢制御方式として、形状可変式姿勢制御 (variable-shape attitude control: VSAC) を提案した [42]。これは図 1.13 に示すように、太陽電池パドルなどの形状の一部をモータで駆動し、その反トルクによって衛星本体の姿勢を変更する方式である。俵ら東京工業大学の超小型衛星開発グループは、VSAC と RW を搭載した 50 kg 級超小型衛星を概念設計した上で姿勢制御シミュレーションを行い、姿勢変更角度に制限があるものの、迅速性 (40 deg / 8 s) と高姿勢安定度 (15 arcsec / 10 s) の両立が可能なことを示した [43]。渡邊らは VSAC のみを搭載した姿勢制御系、および VSAC と RW から成る系に対して、3 軸 rest-to-rest 制御や直接法による最短時間制御を提案した [44, 45]。上記のように VSAC は迅速性と高姿勢安定度を両立できるという特徴があるが、その原理上、一定角度以上のマヌーバは困難である。そこで、VSAC と SGCMG を組み合わせることによって、非常に高速な姿勢変更が自在に行えるようになると思われる。この新たな姿勢制御系に対する制御は未だ提案されておらず、検討の余地がある。

## 1.2 研究目的

以上の背景から、CMGによる姿勢制御に関する技術的な課題は次のようにまとめられる。

1. 単一可変速二軸ジンバル CMG を用いた特異点回避・通過則に関して更なる研究の余地がある
2. CMG ジンバルモータの機械的な制約を満足可能な、低計算量の高速姿勢制御則が存在しない
3. VSAC と CMG による新姿勢制御系の制御が検討されていない

これら3つの課題に関し、逆運動学あるいは角運動量保存則に基づく運動学的な姿勢制御を用いて、CMG搭載宇宙機の制御性能を向上させることを本研究の目的とする。具体的には、課題1では逆運動学に基づく駆動則を提案し、特異点近傍における制御精度の向上を図る。課題2では、コースティング区間が制御入力に現れるような軌道を、角運動量保存則に基づいて生成する駆動則を提案して宇宙機の自律性向上を図る。課題3では高度な迅速性を有する、VSAC と CMG から成るシステムの姿勢制御則を角運動量保存則に基づいて提案する。

## 1.3 論文の構成

本論文は、以下の7章から構成される。

1章「序論」では本研究の背景、目的について述べた。

2章「CMG搭載宇宙機の姿勢力学」では、宇宙機の力学の基礎となる運動学と単一剛体の動力学について整理した後に、VSSGCMG搭載宇宙機およびVSDGCMG搭載宇宙機の厳密なオイラー方程式を導出する。そして、得られた運動方程式を妥当な仮定のもとに単純な式へと近似し、次章以降のシミュレーションにおける支配方程式として利用する。

3章「単一VSDGCMGを用いた逆運動学に基づく姿勢制御」ではまず、単一VSDGCMG系に対して既存の逆運動学に基づく駆動則を適用しただけでは、特異点回避時に大きな姿勢誤差が発生してしまう場合が存在することを示す。これを防ぐため、「解の乗り換え」という概念を定義し、特異点回避のみならず特異点通過も可能な新制御則を提案する。さらに、既存手法と比較して、提案手法はノイズには弱いものの、特異点回避・通過の判断を正しく行って姿勢誤差をより低減できること、および特異点回避時の最大トルク誤差を1割強にまで低減できることを明らかにする。

4章「SGCMGを用いた角運動量保存則に基づく低計算量の高速姿勢制御」ではまず、

実際の超小型衛星に搭載された小型 CMG を例に取り、最大ジンバル角速度・角加速度という機械的な拘束条件を CMG が有することを示し、これらを考慮することでより実践的な制御則が提案可能なことに言及する。次に、それらの拘束に加え終端ジンバル角度に拘束を与えた場合、ピラミッド型 SGCMG 系に対しては、ほぼ目標オイラー軸回りに一定角速度で回転が行われる時区間「コースティング区間」が最短時間解に 1 回または 2 回現れることを示す。そして、この結果およびシステムの全角運動量が零という条件を用いることで、機体を目標オイラー軸まわりに回転させるジンバル角度の組、およびその回転継続時間のみを求める問題に最短時間姿勢変更問題を帰着させ、低計算量な高速姿勢変更手法を提案する。同手法では CMG のジンバルモータの機械的な制約を、角速度のみならず角加速度まで考慮できるという点に特色がある。提案手法と既存のフィードバック則との比較を行い、整定時間を 6-8 割にまで短縮できることを明らかにする。さらに、準最短時間制御との比較を行い、整定時間は最大で 3 割増となってしまうものの、計算時間は概算で 100 分の 1 にまで抑えられることを示す。

5 章「形状可変機構と SGCMG を併用した角運動量保存則に基づく姿勢制御」では、形状可変機構と SGCMG を組み合わせた新たな姿勢制御系に対し制御則の提案を行う。まず、角運動量から導出したフィードバック則を提案する。システムが有する特異点への対処として、逆行列にジッター項を含めている。そして、提案したフィードバック則によって特異点が回避できることをシミュレーションにより示す。次に、対象とする系の最短時間姿勢変更問題を解くことによってフィードフォワード入力を求める。力学に関する拘束条件として角運動量保存則のみを課すことで、計算のロバスト化、低計算量化を図っている。この姿勢制御系は特に大角度姿勢変更においてノンホロミック性が強いが、擬スペクトル法によって最短時間解、すなわちフィードフォワード入力を得られることを示す。そして、系として目標オイラー軸まわりに常に回転できるマヌーバであれば、形状可変機構、SGCMG の最短時間解は、それぞれを単体で用いたときの最短時間解に類似することを示す。加えて、対象とする形状可変機構は Z 軸回りに直接トルクを発生させることはできないが、Z 軸回りの慣性モーメントを低減させることで、マヌーバ時間の短縮に間接的に貢献可能なことも明らかにする。さらに、同系では、3 軸制御、あるいは大角度マヌーバの姿勢変更時間を、形状可変機構のみを搭載した系に比して 1 割強にまで短縮可能であることを示す。

6 章「結論」では以上の結論を要約し、今後の課題を述べる。

## 1.4 記法

ベクトルは **Vectorix** 形式で表す。すなわちベクトル  $\vec{x}$  をある  $A$  座標系、 $B$  座標系において次のように座標系の基底と成分で表す。

$$\vec{x} = \{\vec{a}\}^T \mathbf{x}^A = \{\vec{b}\}^T \mathbf{x}^B$$

$\{\vec{a}\}$ 、 $\{\vec{b}\}$  は各座標系の基底、 $\mathbf{x}^A$ 、 $\mathbf{x}^B$  は成分である。次のように成分、基底の順番で表すこともある。

$$\vec{x} = (\mathbf{x}^A)^T \{\vec{a}\}$$

特に断りがない限り、座標系の表記がない成分は、機体座標系での成分とみなす。

ダイアディックは  $\hat{J}$  などと表し、ある座標系では次のように表す。

$$\hat{J} = \{\vec{a}\}^T \mathbf{J}^A \{\vec{a}\}$$

$B$  系から  $A$  系への座標変換行列 (coordinate transformation matrix: CTM) については  $\mathbf{C}^{A/B}$  と表す。

$B$  系に対する  $A$  系の角速度ベクトルは  $\vec{\omega}^{A/B}$  と表す。

$A$  系でのベクトル  $\vec{x}$  の時間微分は次のように表し、 $A$  系微分と称すこともある。

$$\left\{ \frac{d\vec{x}}{dt} \right\}_A = \frac{{}^A d}{dt} \vec{x}$$



## 第 2 章

# CMG 搭載宇宙機の姿勢力学

### 2.1 緒言

本章では、以降の章の基礎となる、CMG 搭載宇宙機の運動学と動力学の定式化を行う。運動学の節では角速度と姿勢表現の時間微分の関係式を、動力学の節では角加速度とトルクの関係式を導く。動力学については、単体の剛体に関して運動方程式を導いた後、VSSGCMG 搭載宇宙機および VSDGCMG 搭載宇宙機の厳密な運動方程式を導出する。そして、妥当な仮定のもと運動方程式を簡略化し、それらを次章以降のシミュレーションにおける支配方程式として利用していく。

### 2.2 ベクトル解析

本節では、Vectrix 形式を用いた場合の内積と外積について記述する [7]。

#### 2.2.1 内積

ベクトル  $\vec{x} = \{\vec{a}\}^T \mathbf{x}$  と  $\vec{y} = \{\vec{a}\}^T \mathbf{y}$  の内積は次のように定義される。

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta \quad (2.1)$$

ここで  $\theta$  はベクトル同士のなす角である。成分と基底では次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= (x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3) \cdot (y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + y_3 \vec{a}_3) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.2)$$



上式でベクトルが  $\{\vec{a}\}^T \mathbf{x}$  のように表されていてもそのまま計算できるようにするために次の演算を定義する。

$$\{\vec{a}\} \cdot \{\vec{a}\}^T = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

すると式 (2.2) は次のように表すことができる。

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \mathbf{x}^T \{\vec{a}\} \cdot \{\vec{a}\}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad (2.4)$$

## 2.2.2 外積

外積は次のように定義される。

$$\vec{x} \times \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \theta \vec{n} \quad (2.5)$$

ここで  $\theta$  はベクトル同士のなす角、 $\vec{n}$  は  $\vec{x}$  と  $\vec{y}$  に垂直で  $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{n}\}$  が右手系を構成するような単位ベクトルである。成分と基底での表現は次のようになる。

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= (x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3) \times (y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + y_3 \vec{a}_3) \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{a}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{a}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{a}_3 \\ &= \{\vec{a}\}^T \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{x}}$  は次のように定義される歪対称行列である。

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

内積の場合と同様に次の演算を定義する。

$$\{\vec{a}\} \times \{\vec{a}\}^T = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \times \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 & \vec{a}_1 \times \vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 \times \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \times \vec{a}_2 & \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 & \vec{a}_3 \times \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \times \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{a}_3 & -\vec{a}_2 \\ -\vec{a}_3 & 0 & \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 & -\vec{a}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

すると、式 (2.6) は次のように表される。

$$\vec{x} \times \vec{y} = \mathbf{x}^T \{\vec{a}\} \times \{\vec{a}\}^T \mathbf{y} = \{\vec{a}\}^T \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{y} \quad (2.9)$$

## 2.3 剛体の運動学

運動学は姿勢表現と角速度との関係を記述する。姿勢表現とは、基準座標系から別の座標系への座標変換を記述する手法であり、CTM、オイラー角、クォータニオン、ロドリゲ

スパラメータ、修正ロドリゲスパラメータ (modified Rodrigues parameter: MRP) などが存在する [46]。本論文ではクォータニオンおよび MRP のみを用いるため、それらの運動学の記述に留める。

### 2.3.1 座標変換行列

#### 2.3.1.1 定義と性質

$B$  系の基底  $\{\vec{b}\}$  は  $A$  系の基底  $\{\vec{a}\}$  で次のように表現できる。

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= C_{11}\vec{a}_1 + C_{12}\vec{a}_2 + C_{13}\vec{a}_3 \\ \vec{b}_2 &= C_{21}\vec{a}_1 + C_{22}\vec{a}_2 + C_{23}\vec{a}_3 \\ \vec{b}_3 &= C_{31}\vec{a}_1 + C_{32}\vec{a}_2 + C_{33}\vec{a}_3\end{aligned}\tag{2.10}$$

ここで  $C_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{a}_j$  である。行列形式では次のように表される。

$$\{\vec{b}\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \{\vec{a}\} = \mathbf{C}^{B/A} \{\vec{a}\}\tag{2.11}$$

上式より  $A$  系から  $B$  系への CTM が定義される。また、次式が成り立つことから、CTM は対称行列であることも分かる。

$$(\mathbf{C}^{B/A})^T = (\mathbf{C}^{B/A})^{-1} = \mathbf{C}^{A/B}\tag{2.12}$$

CTM を使うとベクトルの成分が次のように変換できる。

$$\vec{x} = \{\vec{b}\}^T \mathbf{x}^B = (\mathbf{C}^{B/A} \{\vec{a}\})^T \mathbf{x}^B = \{\vec{a}\}^T \mathbf{C}^{A/B} \mathbf{x}^B\tag{2.13}$$

ゆえに次式が成り立つ。

$$\mathbf{x}^A = \mathbf{C}^{A/B} \mathbf{x}^B\tag{2.14}$$

## 2.3.1.2 座標変換行列による角速度の定義

CTM を使うと角速度を数学的に定義することができる。あるベクトル  $\vec{r}$  の  $A$  系における時間微分と、 $B$  系における時間微分は次の関係がある。

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_A &= \left\{ \frac{d}{dt} \{\vec{b}\}^T \mathbf{r}^B \right\}_A \\
 &= \left\{ \frac{d}{dt} \{\vec{a}\}^T \mathbf{C}^T \mathbf{r}^B \right\}_A \\
 &= \{\vec{a}\}^T \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{r}}^B + \{\vec{a}\}^T \dot{\mathbf{C}}^T \mathbf{r}^B \\
 &= \{\vec{b}\}^T \dot{\mathbf{r}}^B + \{\vec{b}\}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{C}}^T \mathbf{r}^B \\
 &= \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_B + \{\vec{b}\}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{C}}^T \mathbf{r}^B
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

ただし  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{B/A}$  である。ここで  $\mathbf{E}$  を  $3 \times 3$  の単位行列として次の式の時間微分を取る。

$$\mathbf{C} \mathbf{C}^T = \mathbf{E}$$

すると次式が成り立つ。

$$\dot{\mathbf{C}} \mathbf{C}^T = -\dot{\mathbf{C}} \mathbf{C}^T = -(\mathbf{C} \dot{\mathbf{C}}^T)^T \tag{2.16}$$

したがって、式 (2.15) 中の  $\mathbf{C} \dot{\mathbf{C}}^T$  は歪対称行列であることが分かる。さらに、式 (2.7) を用いると次のように表現できる。

$$\tilde{\omega} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{C}}^T \tag{2.17}$$

これを式 (2.15) に代入して式 (2.9) を用いて変形すると次式が得られる。

$$\left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_A = \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_B + \{\vec{b}\}^T \tilde{\omega} \mathbf{r}^B = \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_B + \tilde{\omega} \times \vec{r} \tag{2.18}$$

ここで  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^{B/A}$  が  $A$  系に対する  $B$  系の角速度で、 $\tilde{\omega}$  はその  $B$  系での表現である。 $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{B/A}$  であることに注意されたい。式 (2.17) から分かるように、その成分は CTM とその時間微分によって定義されている。

角速度と CTM をどちらも  $B/A$  かつ  $A$  系で表す際には  $\tilde{\omega}^{B/A}$  をダイアディックの成分とみなして座標変換を実行する必要がある。

$$\begin{aligned}
 \{\vec{b}\}^T \tilde{\omega}_B^{B/A} \{\vec{b}\} &= \{\vec{a}\}^T \mathbf{C}^{A/B} \tilde{\omega}_B^{B/A} \mathbf{C}^{B/A} \{\vec{a}\} = \{\vec{a}\}^T \mathbf{C}^{A/B} \mathbf{C}^{B/A} \dot{\mathbf{C}}^{A/B} \mathbf{C}^{B/A} \{\vec{a}\} = \{\vec{a}\}^T \dot{\mathbf{C}}^{A/B} \mathbf{C}^{B/A} \{\vec{a}\} \\
 &= \{\vec{a}\}^T \tilde{\omega}_A^{B/A} \{\vec{a}\}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

したがって、 $B/A$  の角速度は  $A$  系で次のように表される。

$$\tilde{\omega}_A^{B/A} = \dot{\mathbf{C}}^{A/B} \mathbf{C}^{B/A} \tag{2.20}$$

一方、式 (2.15) で  $A$  と  $B$  を入れ替えることで  $\tilde{\omega}_A^{A/B}$  が次のように得られる。

$$\tilde{\omega}_A^{A/B} = \mathbf{C}^{A/B} \dot{\mathbf{C}}^{B/A} \quad (2.21)$$

ここで式 (2.16) を用いると次式が成り立つことが分かる。

$$\tilde{\omega}_A^{B/A} = -\tilde{\omega}_A^{A/B} \quad (2.22)$$

すなわち、基準となる座標系をもう片方のものに変える場合には、値を負にするだけでよい。 $\vec{\omega}^{C/A} = \vec{\omega}^{C/B} + \vec{\omega}^{B/A}$  についても証明しておく。

$$\left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_A = \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_C + \vec{\omega}^{C/A} \times \vec{r} \quad (2.23)$$

は自明である。次の式も容易に証明できる。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_A &= \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_B + \vec{\omega}^{B/A} \times \vec{r} \\ &= \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_C + \vec{\omega}^{C/B} \times \vec{r} + \vec{\omega}^{B/A} \times \vec{r} \\ &= \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_C + (\vec{\omega}^{C/B} + \vec{\omega}^{B/A}) \times \vec{r} \end{aligned} \quad (2.24)$$

上式と式 (2.23) を比較することで次式が成立することが分かる。

$$\vec{\omega}^{C/A} = \vec{\omega}^{C/B} + \vec{\omega}^{B/A} \quad (2.25)$$

運動学微分方程式を導出する。式 (2.16)、(2.17) より

$$\tilde{\omega}_B^{B/A} = -\dot{\mathbf{C}}^{B/A} \mathbf{C}^{A/B} \quad (2.26)$$

が成り立つことが分かる。上式から以下のように運動学が導出できる。

$$\dot{\mathbf{C}}^{B/A} = -\tilde{\omega}_B^{B/A} \mathbf{C}^{B/A} \quad (2.27)$$

### 2.3.2 クォータニオン

回転軸（オイラー軸） $\mathbf{e}$  とその軸回りの回転角度（固有角） $\Phi$  によって回転を特徴づけられることが、オイラーの定理として知られている [47]。クォータニオン  $\mathbf{q}$  は基準座標系を  $\mathbf{e}$  回りに  $\Phi$  だけ回転させた座標系について、基準座標系との関係を次の  $4 \times 1$  の行列として表す姿勢表現である。

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \sin \frac{\Phi}{2} \\ \cos \frac{\Phi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

本稿では演算子  $\otimes$  をクォータニオン同士の積と呼ぶことにし、次のように定義する。

$$\mathbf{q}' \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q'_4 \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{q}}' & \mathbf{q}' \\ -\mathbf{q}'^T & q'_4 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (2.29)$$

Hamilton が定義したクォータニオンの積  $\odot$  と上式で定義した  $\otimes$  は以下の関係がある。

$$\mathbf{q}' \odot \mathbf{q} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}' \quad (2.30)$$

ここで、クォータニオン積  $\otimes$  をベクトルにまで拡張する。あるベクトルの表現  $\mathbf{x}$  に対し次式を定義する。

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

座標系  $A$ 、 $B$ 、 $C$  が存在するとき、 $A \rightarrow C$  を表すクォータニオン  $\mathbf{q}^{C/A}$  は  $A \rightarrow B$ 、 $B \rightarrow C$  間を表すクォータニオン  $\mathbf{q}^{B/A}$ 、 $\mathbf{q}^{C/B}$  を用いて次のように表される [48]。

$$\mathbf{q}^{C/A} = \mathbf{q}^{C/B} \otimes \mathbf{q}^{B/A} \quad (2.32)$$

また、クォータニオン積を用いるとベクトルの座標変換が行える。 $A$  系表現  $\mathbf{x}^A$  から  $B$  系表現  $\mathbf{x}^B$  への変換は次の式で行うことができる。

$$\mathbf{x}^B = \mathbf{q}^{B/A} \otimes \mathbf{x}^A \otimes \mathbf{q}^{A/B} = \mathbf{q}^{B/A} \otimes \mathbf{x}^A \otimes (\mathbf{q}^{B/A})^{-1} \quad (2.33)$$

クォータニオンの逆元  $\mathbf{q}^{-1}$  は次のように定義される。

$$\mathbf{q}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

これより次式が成り立つ。

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2.35)$$

クォータニオンの運動学を導出する。クォータニオンを CTM の成分で表した式を時間微分することで導出することができるが、その準備として CTM をオイラー軸および固有角で表現することを目指す。ここではオイラー軸  $\mathbf{e}$  と固有角  $\Phi$  によって、 $N$  系  $\{\vec{n}\}$  を  $B$  系  $\{\vec{b}\}$  に変換することを考える。オイラー軸は  $N$  系で次のように表すことができる。

$$\vec{e} = e_1 \vec{n}_1 + e_2 \vec{n}_2 + e_3 \vec{n}_3 \quad (2.36)$$

ここで  $\vec{n}_i$  と  $\vec{e}$  のなす角度を  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とすると次式が成立する。

$$\mathbf{e} \cdot \vec{n}_i = \cos \xi_i = e_i \quad (2.37)$$

さらに次の二つの単位ベクトル  $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{u}$  を定義する。

$$\vec{v} = \frac{\vec{e} \times \vec{n}_i}{|\vec{e} \times \vec{n}_i|} = \frac{1}{\sin \xi_i} (\vec{e} \times \vec{n}_i) \quad (2.38)$$

$$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{e} = \frac{1}{\sin \xi_i} (\vec{e} \times \vec{n}_i) \times \vec{e} \quad (2.39)$$

$\vec{u}$  は  $\vec{e}$  および  $\vec{n}_i$  と同一平面上にあり、かつ  $\vec{e}$  と  $\vec{u}$  は直交しているから  $\vec{n}_i$  はそれらの線型結合で次のように表すことができる。

$$\vec{n}_i = \cos \xi_i \vec{e} + \sin \xi_i \vec{u} \quad (2.40)$$

図 2.1 から理解できるように、上式において、 $\vec{u}$  を  $\vec{e}$  回りに  $\Phi$  だけ回転させたベクトル  $\vec{u}'$  に置き換えることで  $\vec{b}_i$  を表現することができる。すなわち、次式が成立する。

$$\vec{b}_i = \cos \xi_i \vec{e} + \sin \xi_i \vec{u}' = e_i \vec{e} + \sin \xi_i \vec{u}' \quad (2.41)$$

ここで  $\vec{u}'$  は次のように表される。

$$\vec{u}' = \cos \Phi \vec{u} + \sin \Phi \vec{v} \quad (2.42)$$

また式 (2.39) はベクトル三重積により次のように簡略化できる。

$$\vec{u} = \frac{1}{\sin \xi_i} (\vec{n}_i - e_i \vec{e}) \quad (2.43)$$

式 (2.38)、(2.42)、(2.43) を式 (2.41) に代入することで  $\vec{b}_i$  を  $\vec{e}$  と  $\vec{n}_i$  で表すことができる。

$$\begin{aligned} \vec{b}_i &= \cos \Phi \vec{n}_i + (1 - \cos \Phi) \vec{e} \vec{e}^T \cdot \vec{n}_i + \sin \Phi (\vec{e} \times \vec{n}_i) \\ &= \{\vec{n}\}^T \left( \cos \Phi + (1 - \cos \Phi) \mathbf{e} \mathbf{e}^T + \sin \Phi [\vec{e}] \right) \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (2.44)$$

ここで次の関係を利用した。

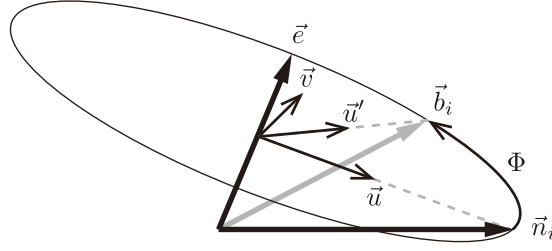
$$e_i \vec{e} = \vec{e} \vec{e}^T \cdot \vec{n}_i \quad (2.45)$$

上式は  $N$  系における成分を計算することにより証明できる。なお、 $\mathbf{n}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ 、 $\mathbf{n}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$ 、 $\mathbf{n}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  である。いま欲しいのは座標変換行列なので、 $\vec{b}_i = \mathbf{C} \vec{n}_i$  の形にまとめるために式 (2.44) の右辺のみを転置する（ベクトルを成分、基底の順で表す）と次式が得られる。

$$\begin{aligned} \vec{b}_i &= \mathbf{n}_i^T \left( \cos \Phi + (1 - \cos \Phi) \mathbf{e} \mathbf{e}^T + \sin \Phi [\vec{e}] \right)^T \{\vec{n}\} \\ &= \mathbf{n}_i^T \left( \cos \Phi + (1 - \cos \Phi) \mathbf{e} \mathbf{e}^T - \sin \Phi [\vec{e}] \right) \{\vec{n}\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

基底の形式にまとめると次式が得られる。

$$\{\vec{b}\} = \left( \cos \Phi [I_{3 \times 3}] + (1 - \cos \Phi) \mathbf{e} \mathbf{e}^T - \sin \Phi [\vec{e}] \right) \{\vec{n}\} \quad (2.47)$$

図 2.1:  $\vec{n}_i$  の  $\vec{b}_i$  への射影

式 (2.11) に示した CTM と比較することで、CTM をオイラー軸  $\vec{e}$  と固有角  $\Phi$  で次のように表せることが示された。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} e_1^2 \Sigma + c\Phi & e_1 e_2 \Sigma + e_3 s\Phi & e_1 e_3 \Sigma - e_2 s\Phi \\ e_2 e_1 \Sigma - e_3 s\Phi & e_2^2 \Sigma + c\Phi & e_2 e_3 \Sigma + e_1 s\Phi \\ e_3 e_1 \Sigma + e_2 s\Phi & e_3 e_2 \Sigma - e_1 s\Phi & e_3^2 \Sigma + c\Phi \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

ここで  $\Sigma = 1 - c\Phi$ 、 $c\Phi = \cos \Phi$ 、 $s\Phi = \sin \Phi$  である。

さて、クォータニオンの CTM 表現を求めるため、式 (2.48) へ次式を代入する。

$$\sin \Phi = 2 \sin(\Phi/2) \cos(\Phi/2), \quad \cos \Phi = 2 \cos^2(\Phi/2) - 1$$

すると次式が得られる。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_2 q_1 - q_3 q_4) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_3 q_1 + q_2 q_4) & 2(q_3 q_2 - q_1 q_4) & 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

これをクォータニオンについて解くと次式が得られる。

$$q_1 = \frac{C_{23} - C_{32}}{4q_4}, q_2 = \frac{C_{31} - C_{13}}{4q_4}, q_3 = \frac{C_{12} - C_{21}}{4q_4}, q_4 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{C_{11} + C_{22} + C_{33} + 1} \quad (2.50)$$

上式を時間微分して式 (2.27) を用いて整理するとクォータニオンに関する運動学微分方程式が次のように得られる。

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tilde{\omega} & \omega \\ -\omega^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \omega \otimes \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \odot \omega \quad (2.51)$$

### 2.3.3 修正ロドリゲスパラメータ

MRP  $\sigma$  は、オイラー軸  $\mathbf{e}$  および固有角  $\Phi$  と次の関係がある。

$$\sigma = \tan \frac{\Phi}{4} \mathbf{e} \quad (2.52)$$

クォータニオンとの関係は以下のとおりである。

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{q}}{1 + q_4} \quad (2.53)$$

式 (2.52) を時間微分し、式 (2.51) を用いて変形することで、MRP の運動学微分方程式が得られる [46, 49]。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{4} \left[ (1 - \sigma^2) [I_{3 \times 3}] + 2[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}] + 2\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T \right] \boldsymbol{\omega}_0 = \frac{1}{4} [\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})] \boldsymbol{\omega}_0 \quad (2.54)$$

MRP とその時間微分が所与の場合、角速度は次のように計算できる。

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{4}{(1 + \sigma^2)^2} \mathbf{B}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.55)$$

## 2.4 剛体の動力学

トルクと角加速度間の関係を示す、回転の運動方程式を導出する。そして、その運動方程式を基に、CMG が搭載された宇宙機の運動方程式を導く。複数の VSSGCMG が搭載された場合および、複数の VSDGCMG が搭載された場合の 2 ケースについて導出を行う。さらに、これらの運動方程式をいくつかの仮定のもとに簡略化し、広く用いられている運動方程式を導く。なお、VSSGCMG の運動方程式の導出は文献 [50] を大いに参考にしている。

### 2.4.1 剛体の運動方程式の導出

回転に関する運動方程式 (オイラーの方程式) を導く前に、角運動量について定義する。まず、図 2.2 に示すような幾つかの文字を定義する。

- $N$  : 慣性座標系
- $B$  : 剛体固定座標系
- $\{\vec{n}\}$  : 慣性座標系の基底
- $\{\vec{b}\}$  : 剛体固定座標系の基底
- $m$  : 剛体の質量
- $\vec{R}$  : 慣性座標系原点から微小質量  $dm$  へと向かうベクトル
- $\vec{R}_o$  : 慣性座標系原点から点  $O$  へ向かうベクトル
- $\vec{r}$  : 点  $O$  から微小質量へと向かうベクトル
- $\vec{r}_c$  : 点  $O$  から質量中心へ向かうベクトル
- $\vec{\rho}$  : 質量中心から微小質量へと向かうベクトル



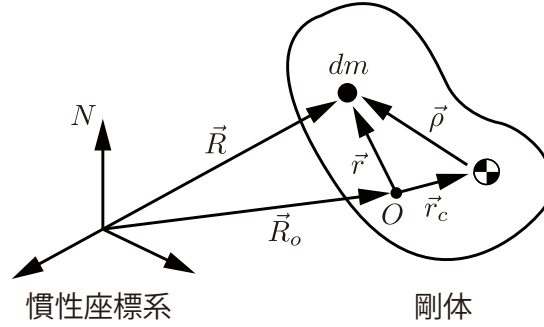


図 2.2: 剛体と種々の位置ベクトル

任意の点  $O$  回りの相対角運動量  $\vec{h}_o$  および絶対角運動量  $\vec{H}_o$  は次のように定義される。

$$\vec{h}_o = \int \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm, \quad \vec{H}_o = \int \vec{r} \times \dot{\vec{R}} dm \quad (2.56)$$

なお、ベクトル記号の上のドットは、慣性系による時間微分を表す。

それでは、絶対角運動量を慣性系で時間微分して運動方程式を導いてゆく。

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_o &= \int \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{R}} dm + \int \vec{r} \times \ddot{\vec{R}} dm \\ &= \int \dot{\vec{r}} \times (\dot{\vec{R}}_o + \dot{\vec{r}}) dm + \int \vec{r} \times \ddot{\vec{R}} dm \\ &= \int \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{R}}_o dm + \int \vec{r} \times \ddot{\vec{R}} dm \end{aligned} \quad (2.57)$$

上式の右辺第二項は点  $O$  回りの外力トルク  $\vec{M}_o$  である。

$$\vec{M}_o = \int \vec{r} \times \ddot{\vec{R}} dm \quad (2.58)$$

ここで、次の重心の定義を式 (2.57) の変形に利用する。

$$\int \vec{\rho} dm = 0 \quad (2.59)$$

上式を用いると、次の式を導出できる。

$$\int \vec{r} dm = \int (\vec{r}_c + \vec{\rho}) dm = m\vec{r}_c \quad (2.60)$$

さらに時間微分することで次式を得る。

$$\int \dot{\vec{r}} dm = m\dot{\vec{r}}_c \quad (2.61)$$

これらを式 (2.57) に代入すると運動方程式が得られる。

$$\dot{\vec{H}}_o + m\dot{\vec{R}}_o \times \dot{\vec{r}}_c = \vec{M}_o \quad (2.62)$$

また、相対角運動量の時間微分からは次式が得られる。

$$\dot{\vec{h}}_o + m\vec{r}_c \times \ddot{\vec{R}}_o = \vec{M}_o \quad (2.63)$$

ここで、慣性座標系の原点回りの絶対角運動量について考察してみる。

$$\begin{aligned} \vec{H}_o &= \int \vec{r} \times \dot{\vec{R}} dm \\ &= \int (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \times (\dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{\rho}}) dm \\ &= \int \vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c dm + \int \vec{r}_c \times \dot{\vec{\rho}} dm + \int \vec{\rho} \times \dot{\vec{r}}_c dm + \int \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm \\ &= m\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c + \vec{r}_c \times \int \dot{\vec{\rho}} dm + \int \vec{\rho} dm \times \dot{\vec{r}}_c + \int \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm \\ &= m\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c + \int \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm \\ &= m\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c + \vec{h}_c \end{aligned} \quad (2.64)$$

$\vec{h}_c$  は質量中心回りの相対角運動量である。上式右辺の第一項は軌道運動（質量中心とその時間変化）の角運動量を、第二項は回転運動による角運動量（質量中心回りの相対角運動量）を表している。このように、軌道と姿勢の角運動量は完全に分離できることが分かる。式 (2.63) を質量中心回りの相対角運動量について導くと  $\vec{r}_c = 0$  より次式が得られる。

$$\dot{\vec{h}}_c = \vec{M}_c \quad (2.65)$$

右辺は質量中心回りの外力トルクである。これが姿勢の運動方程式であり、質量中心回りのトルクがなければ、姿勢の角運動量が保存されることを意味する。

さらに  $\vec{h}_c$  について考察する。いま、剛体を取り扱っているため次式が成立する。

$$\left\{ \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right\}_B = 0 \quad (2.66)$$

これを考慮すると、慣性系に対する剛体固定座標系の角速度  $\vec{\omega}$  を用いて角運動量を簡便

な形で表すことができる。

$$\begin{aligned}
\vec{h}_c &= \int \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm \\
&= \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \\
&= \int -\vec{\rho} \times (\vec{\rho} \times \vec{\omega}) dm \\
&= \int -\{\vec{b}\}^T \boldsymbol{\rho} \times \{\vec{b}\}^T \tilde{\rho} \omega dm \\
&= \{\vec{b}\}^T \int -\tilde{\rho} \tilde{\rho} \omega dm \\
&= \{\vec{b}\}^T \int -\tilde{\rho} \tilde{\rho} dm \{\vec{b}\} \cdot \{\vec{b}\}^T \omega \\
&= \{\vec{b}\}^T \mathbf{J}^B \{\vec{b}\} \cdot \{\vec{b}\}^T \omega \\
&= \hat{\mathbf{J}} \cdot \vec{\omega}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

ここで  $\hat{\mathbf{J}} = \{\vec{b}\}^T \int -\tilde{\rho} \tilde{\rho} dm \{\vec{b}\}$  は慣性ダイアディックであり、その剛体固定座標系での成分である  $\mathbf{J}^B$  は慣性テンソルと呼ばれる。

慣性ダイアディックを用いると、式(2.65)は機体座標系における微分により次のように表される。

$$\hat{\mathbf{J}} \cdot \frac{{}^B d}{dt} \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{J}} \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_c \tag{2.68}$$

ただし、慣性ダイアディックは機体固定座標系で時間不変と仮定した。

## 2.4.2 VSSGCMG を搭載した宇宙機の動力学

本項では、まず VSSGCMG を一台のみ搭載した宇宙機の厳密な動力学を導き、続いて、それを拡張して VSSGCMG を  $n_s$  台搭載した場合の運動方程式を立式する。図 2.3 に示すようにジンバル座標系  $\{\vec{g}\}$  およびホイール座標系  $\{\vec{w}\}$  を定義する。 $\theta$  はジンバルの回転角度を、 $\Omega$  はホイールおよびジンバルの角速度を表している。ただし、CMG のジンバル回転軸は、常にジンバルの質量中心およびホイールの質量中心を貫いているものとする。初期時刻において機体座標系を含む 3 つの座標系が一致しているとし、その際のジンバル角

度を 0 度とすると、座標系間の CTM はそれぞれ次のように表される。

$$\mathbf{C}^{G/B} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{C}^{W/G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ 0 & -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

角速度は次のように表記できる。

$$\vec{\omega}^{G/B} = \dot{\theta} \vec{g}_3 \quad (2.71)$$

$$\vec{\omega}^{W/G} = \Omega \vec{g}_1 \quad (2.72)$$

慣性系に対する各座標系の角速度は次のように表記できる。

$$\vec{\omega}^{B/N} = \{\vec{g}\}^T \begin{bmatrix} \omega_{B1}^{\mathcal{G}} \\ \omega_{B2}^{\mathcal{G}} \\ \omega_{B3}^{\mathcal{G}} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\vec{\omega}^{G/N} = \vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{B/N} = \{\vec{g}\}^T \begin{bmatrix} \omega_{B1}^{\mathcal{G}} \\ \omega_{B2}^{\mathcal{G}} \\ \dot{\theta} + \omega_{B3}^{\mathcal{G}} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\vec{\omega}^{W/N} = \vec{\omega}^{W/G} + \vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{B/N} = \{\vec{g}\}^T \begin{bmatrix} \Omega + \omega_{B1}^{\mathcal{G}} \\ \omega_{B2}^{\mathcal{G}} \\ \dot{\theta} + \omega_{B3}^{\mathcal{G}} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

なお、 $\vec{\omega}^{B/N}$  の  $G$  系表示成分は  $\omega_{Bi}^{\mathcal{G}} (i = 1, 2, 3)$  としたが、以下では角速度の成分について座標系を表す  $\mathcal{G}$  は省略することとする。

次に、角運動量  $\vec{H}$  の計算に必要な文字を定義する。

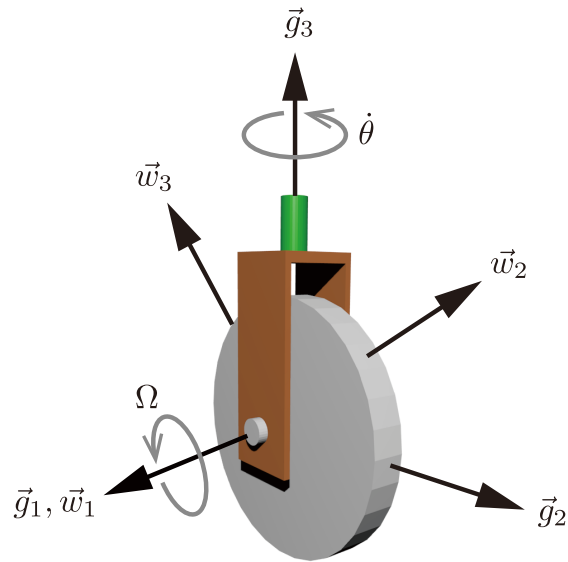


図 2.3: SGCMG と座標系

- $\mathcal{B}$  : CMG を除いた機体を表す積分範囲
- $\mathcal{G}$  : ジンバルを表す積分範囲
- $\mathcal{W}$  : ホイールを表す積分範囲
- $O$  : システムの質量中心
- $O_b$  :  $\mathcal{B}$  の質量中心
- $O_g$  : ジンバルの質量中心
- $O_w$  : ホイールの質量中心
- $\vec{R}_b$  :  $O$  から  $O_b$  へ向かうベクトル
- $\vec{R}_g$  :  $O$  から  $O_g$  へ向かうベクトル
- $\vec{R}_w$  :  $O$  から  $O_w$  へ向かうベクトル
- $\vec{r}$  :  $O$  から微小質量へと向かうベクトル
- $\vec{r}_b$  :  $O_b$  から微小質量へと向かうベクトル
- $\vec{r}_g$  :  $O_g$  から微小質量へと向かうベクトル
- $\vec{r}_w$  :  $O_w$  から微小質量へと向かうベクトル
- $m_b$  : CMG を除いた機体質量
- $m_g$  : ジンバル質量
- $m_w$  : ホイール質量

ただし、何れの質量中心も機体固定座標系（中心は  $O$ ）から見て不変と仮定する。それで

は  $O$  回りの全相対角運動量  $\vec{H}$  を計算してゆく。

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \int_{\mathcal{B}} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm + \int_{\mathcal{G}} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm + \int_{\mathcal{W}} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm \\
&= \int_{\mathcal{B}} (\vec{R}_b + \vec{r}_b) \times (\dot{\vec{R}}_b + \dot{\vec{r}}_b) dm + \int_{\mathcal{G}} (\vec{R}_g + \vec{r}_g) \times (\dot{\vec{R}}_g + \dot{\vec{r}}_g) dm \\
&\quad + \int_{\mathcal{W}} (\vec{R}_w + \vec{r}_w) \times (\dot{\vec{R}}_w + \dot{\vec{r}}_w) dm \\
&= m_b \vec{R}_b \times \dot{\vec{R}}_b + \int_{\mathcal{B}} \vec{r}_b \times \dot{\vec{r}}_b dm + m_g \vec{R}_g \times \dot{\vec{R}}_g + \int_{\mathcal{G}} \vec{r}_g \times \dot{\vec{r}}_g dm + m_w \vec{R}_w \times \dot{\vec{R}}_w + \int_{\mathcal{W}} \vec{r}_w \times \dot{\vec{r}}_w dm \\
&= \left( \int_{\mathcal{B}} \vec{r}_b \times (\vec{\omega}^{B/N} \times \vec{r}_b) dm + m_b \vec{R}_b \times (\vec{\omega}^{B/N} \times \vec{R}_b) + m_g \vec{R}_g \times (\vec{\omega}^{B/N} \times \vec{R}_g) \right. \\
&\quad \left. + m_w \vec{R}_w \times (\vec{\omega}^{B/N} \times \vec{R}_w) \right) + \int_{\mathcal{G}} \vec{r}_g \times (\vec{\omega}^{G/N} \times \vec{r}_g) dm + \int_{\mathcal{W}} \vec{r}_w \times (\vec{\omega}^{W/N} \times \vec{r}_w) dm \\
&= \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/N} + \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \tag{2.76}
\end{aligned}$$

ここで  $\hat{J}_s$ 、 $\hat{J}_g$ 、 $\hat{J}_w$  は慣性テンソルであり、次のように定義される。

$$\begin{aligned}
\hat{J}_s &= \{\vec{b}\}^T \int_{\mathcal{B}} -\vec{r}_b^{\mathcal{B}} \vec{r}_b^{\mathcal{B}} dm \{\vec{b}\} \\
&\quad + \{\vec{b}\}^T (-m_b \vec{R}_b^{\mathcal{B}} \vec{R}_b^{\mathcal{B}}) \{\vec{b}\} + \{\vec{b}\}^T (-m_g \vec{R}_g^{\mathcal{B}} \vec{R}_g^{\mathcal{B}}) \{\vec{b}\} + \{\vec{b}\}^T (-m_w \vec{R}_w^{\mathcal{B}} \vec{R}_w^{\mathcal{B}}) \{\vec{b}\} \tag{2.77}
\end{aligned}$$

$$\hat{J}_g = \{\vec{g}\}^T \int_{\mathcal{G}} -\vec{r}_g^{\mathcal{G}} \vec{r}_g^{\mathcal{G}} dm \{\vec{g}\} = \{\vec{g}\}^T \begin{bmatrix} J_{g1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{g2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{g3} \end{bmatrix} \{\vec{g}\} \tag{2.78}$$

$$\hat{J}_w = \{\vec{w}\}^T \int_{\mathcal{W}} -\vec{r}_w^{\mathcal{W}} \vec{r}_w^{\mathcal{W}} dm \{\vec{w}\} = \{\vec{w}\}^T \begin{bmatrix} J_{w1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{w2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{w2} \end{bmatrix} \{\vec{w}\} \tag{2.79}$$

$\hat{J}_s$  には CMG を除く機体、ジンバルおよびホイールの質量中心の平行運動が含まれていることに注意されたい。また、ホイールの形状は回転軸に対して軸対称であるため、 $\mathbf{J}_w^{\mathcal{W}} = \text{diag}(J_{w1}, J_{w2}, J_{w2})$  とした。 $\hat{J}_w$  の  $W$  系成分  $\mathbf{J}_w^{\mathcal{W}}$  と  $G$  系成分  $\mathbf{J}_w^{\mathcal{G}}$  が常に等しいことは図 2.3 より明らかである。

さて、式 (2.76) の各項を次のように置く。

$$\vec{H}_s = \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} \tag{2.80}$$

$$\vec{H}_g = \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/N} \tag{2.81}$$

$$\vec{H}_w = \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \tag{2.82}$$

以下では  $\dot{\vec{H}}_s$ 、 $\dot{\vec{H}}_g$ 、 $\dot{\vec{H}}_w$  をそれぞれ微分していき、その和から運動方程式を導出する。

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_s &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} \right\}_N \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} \right\}_B + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N}\end{aligned}\quad (2.83)$$

$\hat{J}_s$  中の  $\hat{r}_b^B$  は  $B$  系で時間不変である。さらに、質量中心が時間不変という仮定から  $\hat{J}_s$  は  $B$  系で時間不変であることが分かる。これを利用すると上式は次のように変形できる。

$$\dot{\vec{H}}_s = \hat{J}_s \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N}\quad (2.84)$$

次に  $\dot{\vec{H}}_g$  を時間微分する。

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_g &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/N} \right\}_N \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/N} \right\}_G + \vec{\omega}^{G/N} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/N}\end{aligned}\quad (2.85)$$

$\hat{J}_g$  は  $G$  系で時間不変であり、上式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_g &= \hat{J}_g \cdot \frac{Gd}{dt} \vec{\omega}^{G/N} + \vec{\omega}^{G/N} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/N} \\ &= \hat{J}_g \cdot \frac{Gd}{dt} \vec{\omega}^{G/N} + \vec{\omega}^{G/N} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/N} \\ &= \hat{J}_g \cdot \left( \frac{Gd}{dt} \vec{\omega}^{G/B} + \frac{Gd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} \right) + \vec{\omega}^{G/N} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/N} \\ &= \hat{J}_g \cdot \left( \frac{Gd}{dt} \vec{\omega}^{G/B} + \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/G} \times \vec{\omega}^{B/N} \right) + (\vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{B/N}) \times \hat{J}_g \cdot (\vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{B/N}) \\ &= \hat{J}_g \cdot \frac{Gd}{dt} \vec{\omega}^{G/B} + \hat{J}_g \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_g \cdot (\vec{\omega}^{B/G} \times \vec{\omega}^{B/N}) \\ &\quad + \vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\ &= \hat{J}_g \cdot \frac{Gd}{dt} \vec{\omega}^{G/B} + \hat{J}_g \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_g \cdot (\vec{\omega}^{B/G} \times \vec{\omega}^{B/N}) \\ &\quad + \vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{B/N}\end{aligned}\quad (2.86)$$

最終行の式変形には  $\vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_g \cdot \vec{\omega}^{G/B} = 0$  を用いた。最後に  $\dot{\vec{H}}_w$  を時間微分する。

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_w &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \right\}_N \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \right\}_G + \vec{\omega}^{G/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N}\end{aligned}\quad (2.87)$$

$\hat{J}_w$  は  $W$  系で時間不変だが、前述のとおりホイールの対称性より  $G$  系でも時間不変である。よって上式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{H}}_w &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \right\}_G + \vec{\omega}^{G/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \\
&= \hat{J}_w \cdot \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{W/N} + \vec{\omega}^{G/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \\
&= \hat{J}_w \cdot \left( \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{W/G} + \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{G/B} + \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} \right) + \vec{\omega}^{G/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \\
&= \hat{J}_w \cdot \left( \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{W/G} + \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{G/B} + \frac{B d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/G} \times \vec{\omega}^{B/N} \right) \\
&\quad + \left( \vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{B/N} \right) \times \hat{J}_w \cdot \left( \vec{\omega}^{W/G} + \vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{B/N} \right) \\
&= \hat{J}_w \cdot \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{W/G} + \hat{J}_w \cdot \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{G/B} + \hat{J}_w \cdot \frac{B d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_w \cdot \left( \vec{\omega}^{B/G} \times \vec{\omega}^{B/N} \right) \\
&\quad + \vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G} + \vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\
&\quad + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\
&= \hat{J}_w \cdot \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{W/G} + \hat{J}_w \cdot \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{G/B} + \hat{J}_w \cdot \frac{B d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_w \cdot \left( \vec{\omega}^{B/G} \times \vec{\omega}^{B/N} \right) \\
&\quad + \vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G} + \vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\
&\quad + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{G/B} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{B/N} \tag{2.88}
\end{aligned}$$

最終行の式変形には  $\vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{G/B} = 0$  を用いた。それでは式 (2.84)、(2.86)、(2.88) を足し合わせて運動方程式の導出を試みる。

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{H}}_s + \dot{\hat{H}}_g + \dot{\hat{H}}_w &= (\hat{J}_s + \hat{J}_g + \hat{J}_w) \cdot \frac{B d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times (\hat{J}_s + \hat{J}_g + \hat{J}_w) \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\
&\quad + (\hat{J}_g + \hat{J}_w) \cdot \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{G/B} + (\hat{J}_g + \hat{J}_w) \cdot \left( \vec{\omega}^{B/G} \times \vec{\omega}^{B/N} \right) \\
&\quad + \vec{\omega}^{G/B} \times (\hat{J}_g + \hat{J}_w) \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times (\hat{J}_g + \hat{J}_w) \cdot \vec{\omega}^{G/B} \\
&\quad + \hat{J}_w \cdot \frac{G d}{dt} \vec{\omega}^{W/G} + \vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G} \tag{2.89}
\end{aligned}$$

運動方程式を簡易に表現するため、次の記号を定義する。

$$\hat{J} = \hat{J}_g + \hat{J}_w = \{\vec{g}\}^T \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \{\vec{g}\} \tag{2.90}$$

$$\hat{I} = \hat{J}_s + \hat{J} \tag{2.91}$$



すると式 (2.65) より運動方程式は次のように表現される。

$$\begin{aligned} \hat{I} \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{I} \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J} \cdot \frac{Gd}{dt} \vec{\omega}^{G/B} + \hat{J} \cdot (\vec{\omega}^{B/G} \times \vec{\omega}^{B/N}) + \vec{\omega}^{G/B} \times \hat{J} \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\ + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J} \cdot \vec{\omega}^{G/B} + \hat{J}_w \cdot \frac{Gd}{dt} \vec{\omega}^{W/G} + \vec{\omega}^{G/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G} = \vec{M}_c \end{aligned} \quad (2.92)$$

CMG に関わる項を  $G$  系で表すと次の式が得られる。

$$\hat{I} \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} = \vec{M}_c - \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{I} \cdot \vec{\omega}^{B/N} - \{\vec{g}\}^T \begin{bmatrix} J_1 \omega_{B2} \dot{\theta} + J_{w1} \dot{\Omega} - (J_2 - J_3) \omega_{B2} \dot{\theta} \\ (J_1 \omega_{B1} + J_{w1} \Omega) \dot{\theta} - (J_2 + J_3) \omega_{B1} \dot{\theta} + J_1 \Omega \omega_{B3} \\ J_3 \ddot{\theta} - J_{w1} \Omega \omega_{B2} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$\omega_{Bi}$  は機体角速度の成分であるが、 $B$  系ではなく  $G$  系であることに注意されたい。

今、機体、ジンバル、ホイールの質量中心の位置は機体固定座標系から見て不変と仮定しているため、式 (2.92) を単純に拡張することで、SGCMG を  $n_s$  台搭載している宇宙機の動力学を次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \hat{I}' \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{I}' \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \hat{J}_i \cdot \frac{Gi d}{dt} \vec{\omega}^{Gi/B} + \hat{J}_i \cdot (\vec{\omega}^{B/Gi} \times \vec{\omega}^{B/N}) + \vec{\omega}^{Gi/B} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{B/N} \right. \\ \left. + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{Gi/B} + \hat{J}_{wi} \cdot \frac{Gd}{dt} \vec{\omega}^{Wi/Gi} + \vec{\omega}^{Gi/N} \times \hat{J}_{wi} \cdot \vec{\omega}^{Wi/Gi} \right\} = \vec{M}_c \end{aligned} \quad (2.94)$$

ここで、 $Gi$ 、 $Wi$  はそれぞれ、 $i(=1, 2, \dots, n_s)$  番目の CMG のジンバル座標系、ホイール座標系であり、 $\hat{J}_{wi}$ 、 $\hat{J}_i$  はそれぞれ、 $i$  番目の CMG のホイールの慣性テンソル、ホイールとジンバルの慣性テンソルの和である。 $\hat{I}'$  は次式で定義される慣性テンソルである。

$$\hat{I}' = \hat{J}'_s + \sum_{i=1}^{n_s} \hat{J}_i \quad (2.95)$$

$\hat{J}'_s$  は式 (2.77) を拡張したものであり、 $n_s$  台全ての VSSGCMG と、それ以外の宇宙機構造から計算される慣性テンソルである。

式 (2.93) が 1 基の VSSGCMG を搭載した宇宙機の厳密な運動方程式であるが、実際にはより単純な式が使われている。仮定として次のものが用いられている。

1. ジンバルの慣性テンソルは微小 ( $\hat{J}_g = \hat{0}$ )
2. ホイールの角運動量に対する  $\vec{\omega}^{G/N}$  の寄与は無視できる ( $\vec{H}_w = \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G}$ )

これら 2 つの仮定が成り立つとき、単一 VSSGCMG を搭載する宇宙機の運動方程式は次のように非常に単純化される。

$$\hat{J}'_s \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} = \vec{M}_c - \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}'_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} - \{\vec{g}\}^T \begin{bmatrix} J_{w1} \dot{\Omega} \\ J_{w1} \Omega \dot{\theta} + J_{w1} \Omega \omega_{B3} \\ -J_{w1} \Omega \omega_{B2} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

ベクトル表記では次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{J}_s \cdot \frac{B}{dt} \vec{\omega}^{B/N} &= \vec{M}_c - \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\ &\quad - \hat{J}_w \cdot \frac{G}{dt} \vec{\omega}^{W/G} - \vec{\omega}^{G/B} \times (\hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G}) - \vec{\omega}^{B/N} \times (\hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G}) \end{aligned} \quad (2.97)$$

右辺第三項がホイールの回転数変化に伴うトルク、第四項がホイールをジンバルで駆動することによるジャイロトルク、第五項が機体とホイール間のジャイロトルクである。第三、第四項を機体座標系における微分で表すと次の式が得られる。

$$\hat{J}_s \cdot \frac{B}{dt} \vec{\omega}^{B/N} = \vec{M}_c - \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} - \frac{B}{dt} (\hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G}) - \vec{\omega}^{B/N} \times (\hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G}) \quad (2.98)$$

SGCMG では式 (2.97) がさらに簡略化でき、以下の式を導くことができる。

$$\hat{J}_s \cdot \frac{B}{dt} \vec{\omega}^{B/N} = \vec{M}_c - \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} - \vec{\omega}^{G/B} \times (\hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G}) - \vec{\omega}^{B/N} \times (\hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/G}) \quad (2.99)$$

上述した近似は、CMG の設計によっては必ずしも成立するわけではない。しかし、制御則導出に都合がよいために頻繁に用いられている。

### 2.4.3 ピラミッド型 SGCMG システムを搭載した宇宙機の動力学

CMG 搭載宇宙機の多くは、図 2.4 に示すように SGCMG を 4 基ピラミッド型に搭載している。 $\vec{h}_i$ 、 $\theta_i$  はそれぞれ  $i$  ( $= 1, 2, 3, 4$ ) 番目の CMG 角運動量ベクトル、ジンバル角度を表す。図中の  $\theta_i$  近くの矢印はジンバルの正の回転方向を表しており、 $\beta$  は skew 角と呼ばれる。4 章、5 章においては、この CMG システムを有する宇宙機の姿勢制御を論ずるので、ここで運動方程式、特に機体座標系におけるものを導いておくことにする。ただし、導出に用いる運動方程式は 2.4.2 項で最後に述べた、最も簡略化されたものである。

各 CMG がホイール回りに保有する角運動量の大きさを  $h_w$  とすると、CMG システムが保有する角運動量ベクトル  $\vec{h}_c$  は、機体座標系において次のように近似できる。

$$\begin{aligned} \vec{h}_c &= \vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{h}_3 + \vec{h}_4 \\ &= h_w \begin{bmatrix} -c\beta \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ s\beta \sin \theta_1 \end{bmatrix} + h_w \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \\ -c\beta \sin \theta_2 \\ s\beta \sin \theta_2 \end{bmatrix} + h_w \begin{bmatrix} c\beta \sin \theta_3 \\ -\cos \theta_3 \\ s\beta \sin \theta_3 \end{bmatrix} + h_w \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \\ c\beta \sin \theta_4 \\ s\beta \sin \theta_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.100)$$

ここで  $s\beta = \sin \beta$ 、 $c\beta = \cos \beta$  である。機体座標系における時間微分は次のように表さ

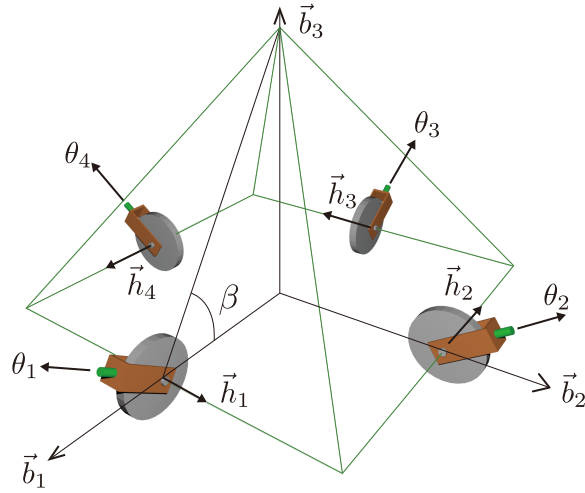


図 2.4: SGCMG4 基によるピラミッド型配置

れる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{h}_c &= h_w \begin{bmatrix} -c\beta \cos \theta_1 & \sin \theta_2 & c\beta \cos \theta_3 & -\sin \theta_4 \\ -\sin \theta_1 & -c\beta \cos \theta_2 & \sin \theta_3 & c\beta \cos \theta_4 \\ s\beta \cos \theta_1 & s\beta \cos \theta_2 & s\beta \cos \theta_3 & s\beta \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (2.101)$$

ここで  $\mathbf{A}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  は次のように定義される。

$$\mathbf{A} = h_w \begin{bmatrix} -c\beta \cos \theta_1 & \sin \theta_2 & c\beta \cos \theta_3 & -\sin \theta_4 \\ -\sin \theta_1 & -c\beta \cos \theta_2 & \sin \theta_3 & c\beta \cos \theta_4 \\ s\beta \cos \theta_1 & s\beta \cos \theta_2 & s\beta \cos \theta_3 & s\beta \cos \theta_4 \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

以上より、ピラミッド型 CMG システムに対しては、式 (2.98) を機体座標系で次のように表すことができる。

$$\mathbf{J}_s \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}_c - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega} - \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{h}_c \quad (2.104)$$

ここで  $\boldsymbol{\omega}$  は機体座標系で表した、 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{B/N}$  の成分である。また、 $\mathbf{J}_s$ 、 $\mathbf{M}_c$  はそれぞれ慣性ダイアディック、外力トルクの機体座標系における成分である。SGCMG による姿勢制御は CMG のジンバル角速度  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  を制御し、上式の右辺第三項を変化させることで行われる。

### 2.4.4 VSDGCMG を搭載した宇宙機の動力学

本項でも前項と同様、まず VSDGCMG を一台のみ搭載した宇宙機の厳密な動力学を導き、続いて、それを拡張して VSDGCMG を  $n_d$  台搭載した場合の動力学を立式する。VSDGCMG は 1 つの変速ホイールと 2 つのジンバルを有する。本稿では、内側、外側にあるジンバルをそれぞれ内側ジンバル、外側ジンバルと呼ぶ。図 2.5 に示すように外側ジンバル座標系  $\{\vec{o}\}$ 、内側ジンバル座標系  $\{\vec{i}\}$  およびホイール座標系  $\{\vec{w}\}$  を定義する。 $\theta_o$ 、 $\theta_I$  はそれぞれ外側、内側ジンバルの回転角度を、 $\Omega$  はホイールの角速度を表している。以下では下付き文字が  $o$ 、 $w$  の記号を複数用いるが、内側・外側ジンバルを区別しているだけで、記号の定義は前項のジンバルとほぼ同じであるため、個別の説明は行わない。初期時刻において機体座標系を含む 4 つの座標系が一致し、かつジンバル角度を 0 度とすると、座標系間の CTM はそれぞれ次のように表される。

$$C^{O/B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_o & \sin \theta_o \\ 0 & -\sin \theta_o & \cos \theta_o \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

$$C^{I/O} = \begin{bmatrix} \cos \theta_I & 0 & -\sin \theta_I \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_I & 0 & \cos \theta_I \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

$$C^{W/I} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

角速度は次のように表記できる。

$$\vec{\omega}^{O/B} = \dot{\theta}_o \vec{o}_1 \quad (2.108)$$

$$\vec{\omega}^{I/O} = \dot{\theta}_I \vec{i}_2 \quad (2.109)$$

$$\vec{\omega}^{W/I} = \Omega \vec{w}_3 \quad (2.110)$$

SGCMG の場合と同様に、システムの質量中心  $O$  回りの全相対角運動量  $\vec{H}$  を慣性ダイアデックと角速度の内積で次のように表す。

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \int_B \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm + \int_O \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm + \int_I \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm + \int_w \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm \\ &= \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_o \cdot \vec{\omega}^{O/N} + \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/N} + \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \end{aligned} \quad (2.111)$$

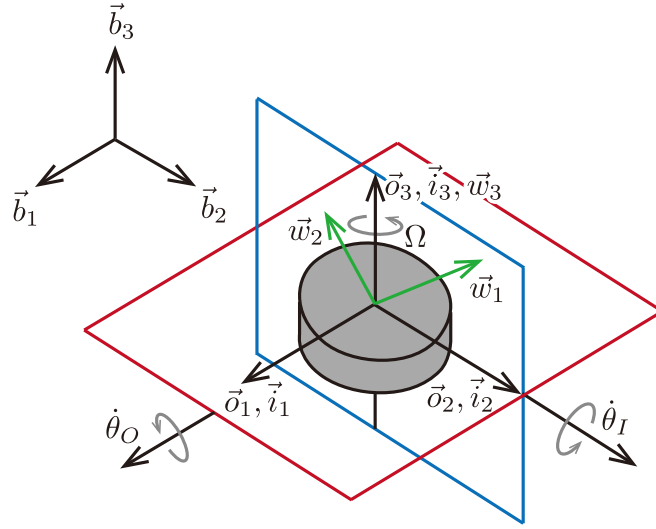


図 2.5: VSDGCMG と座標系

ここで  $\hat{J}_s$ 、 $\hat{J}_o$ 、 $\hat{J}_i$ 、 $\hat{J}_w$  は慣性テンソルであり、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \hat{J}_s = & \{\vec{b}\}^T \int_{\mathcal{B}} -\tilde{\mathbf{r}}_b^{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{r}}_b^{\mathcal{B}} dm \{\vec{b}\} + \{\vec{b}\}^T (-m_b \tilde{\mathbf{R}}_b^{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{R}}_b^{\mathcal{B}}) \{\vec{b}\} \\ & + \{\vec{b}\}^T (-m_o \tilde{\mathbf{R}}_o^{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{R}}_o^{\mathcal{B}}) \{\vec{b}\} + \{\vec{b}\}^T (-m_i \tilde{\mathbf{R}}_i^{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{R}}_i^{\mathcal{B}}) \{\vec{b}\} + \{\vec{b}\}^T (-m_w \tilde{\mathbf{R}}_w^{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{R}}_w^{\mathcal{B}}) \{\vec{b}\} \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\hat{J}_o = \{\vec{o}\}^T \int_{\mathcal{O}} -\tilde{\mathbf{r}}_o^{\mathcal{O}} \tilde{\mathbf{r}}_o^{\mathcal{O}} dm \{\vec{o}\} = \{\vec{o}\}^T \begin{bmatrix} J_{o1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{o2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{o3} \end{bmatrix} \{\vec{o}\} \quad (2.113)$$

$$\hat{J}_i = \{\vec{i}\}^T \int_{\mathcal{I}} -\tilde{\mathbf{r}}_i^{\mathcal{I}} \tilde{\mathbf{r}}_i^{\mathcal{I}} dm \{\vec{i}\} = \{\vec{i}\}^T \begin{bmatrix} J_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{i3} \end{bmatrix} \{\vec{i}\} \quad (2.114)$$

$$\hat{J}_w = \{\vec{w}\}^T \int_{\mathcal{W}} -\tilde{\mathbf{r}}_w^{\mathcal{W}} \tilde{\mathbf{r}}_w^{\mathcal{W}} dm \{\vec{w}\} = \{\vec{w}\}^T \begin{bmatrix} J_{w1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{w2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{w2} \end{bmatrix} \{\vec{w}\} \quad (2.115)$$

$\hat{J}_w$  の  $W$  系成分  $\mathbf{J}_w^{\mathcal{W}}$  と  $I$  系成分  $\mathbf{J}_w^{\mathcal{I}}$  は常に等しい。ただし、 $O$  系で表したホイール慣性テンソルと  $W$  系で表したそれは異なることに注意されたい。

さて、式 (2.111) の各項を次のように定義する。

$$\vec{H}_s = \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{\mathcal{B}/\mathcal{N}} \quad (2.116)$$

$$\vec{H}_o = \hat{J}_o \cdot \vec{\omega}^{\mathcal{O}/\mathcal{N}} \quad (2.117)$$

$$\vec{H}_i = \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{\mathcal{I}/\mathcal{O}} \quad (2.118)$$

$$\vec{H}_w = \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{\mathcal{W}/\mathcal{N}} \quad (2.119)$$

それでは、これらをそれぞれ微分し、和から運動方程式を導出していく。 $\vec{H}_s$  の時間微分は SGCMG と同値である。

$$\dot{\vec{H}}_s = \hat{J}_s \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} \quad (2.120)$$

$\vec{H}_o$  の時間微分も添字が異なるのみで SGCMG における  $\vec{H}_g$  と同様であり、次のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_o = & \hat{J}_o \cdot \frac{O d}{dt} \vec{\omega}^{O/B} + \hat{J}_o \cdot \frac{B d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_o \cdot (\vec{\omega}^{B/O} \times \vec{\omega}^{B/N}) \\ & + \vec{\omega}^{O/B} \times \hat{J}_o \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_o \cdot \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_o \cdot \vec{\omega}^{B/N} \end{aligned} \quad (2.121)$$

$\vec{H}_i$  の時間微分は次のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_i &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/N} \right\}_N \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/N} \right\}_I + \vec{\omega}^{I/N} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/N} \end{aligned} \quad (2.122)$$

$\hat{J}_i$  は  $I$  系で時間不変であり、上式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_i &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/N} \right\}_I + \vec{\omega}^{I/N} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/N} \\ &= \hat{J}_i \cdot \frac{I d}{dt} \vec{\omega}^{I/N} + \vec{\omega}^{I/N} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/N} \\ &= \hat{J}_i \cdot \left( \frac{I d}{dt} \vec{\omega}^{I/O} + \frac{I d}{dt} \vec{\omega}^{O/B} + \frac{I d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} \right) + \vec{\omega}^{I/N} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/N} \\ &= \hat{J}_i \cdot \left( \frac{I d}{dt} \vec{\omega}^{I/O} + \frac{O d}{dt} \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{O/I} \times \vec{\omega}^{O/B} + \frac{B d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/I} \times \vec{\omega}^{B/N} \right) \\ &\quad + (\vec{\omega}^{I/O} + \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{B/N}) \times \hat{J}_i \cdot (\vec{\omega}^{I/O} + \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{B/N}) \\ &= \hat{J}_i \cdot \frac{I d}{dt} \vec{\omega}^{I/O} + \hat{J}_i \cdot \frac{O d}{dt} \vec{\omega}^{O/B} + \hat{J}_i \cdot (\vec{\omega}^{O/I} \times \vec{\omega}^{O/B}) + \hat{J}_i \cdot \frac{B d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_i \cdot (\vec{\omega}^{B/O} \times \vec{\omega}^{B/N}) \\ &\quad + \hat{J}_i \cdot (\vec{\omega}^{O/I} \times \vec{\omega}^{B/N}) + \vec{\omega}^{I/O} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{I/O} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{O/B} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/O} \\ &\quad + \vec{\omega}^{O/B} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/O} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{B/N} \end{aligned} \quad (2.123)$$

ただし  $\vec{\omega}^{I/O} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{I/O} = \vec{\omega}^{O/B} \times \hat{J}_i \cdot \vec{\omega}^{O/B} = 0$  を用いた。 $\vec{H}_w$  の時間微分は次のように表さ

れる。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{H}}_w &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \right\}_N \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \right\}_I + \vec{\omega}^{I/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N}\end{aligned}\quad (2.124)$$

$\hat{J}_w$  は W 系で時間不変だが、前述のとおりホイールの対称性より I 系でも時間不変である。よって上式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{H}}_w &= \left\{ \frac{d}{dt} \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \right\}_I + \vec{\omega}^{I/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \\ &= \hat{J}_w \cdot \frac{{}^I d}{dt} \vec{\omega}^{W/N} + \vec{\omega}^{I/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \\ &= \hat{J}_w \cdot \left( \frac{{}^I d}{dt} \vec{\omega}^{W/I} + \frac{{}^I d}{dt} \vec{\omega}^{I/O} + \frac{{}^I d}{dt} \vec{\omega}^{O/B} + \frac{{}^I d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} \right) + \vec{\omega}^{I/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/N} \\ &= \hat{J}_w \cdot \left( \frac{{}^I d}{dt} \vec{\omega}^{W/I} + \frac{{}^I d}{dt} \vec{\omega}^{I/O} + \frac{{}^O d}{dt} \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{O/I} \times \vec{\omega}^{O/B} + \frac{{}^B d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/I} \times \vec{\omega}^{B/N} \right) \\ &\quad + \left( \vec{\omega}^{I/O} + \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{B/N} \right) \times \hat{J}_w \cdot \left( \vec{\omega}^{W/I} + \vec{\omega}^{I/O} + \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{B/N} \right) \\ &= \hat{J}_w \cdot \frac{{}^I d}{dt} \vec{\omega}^{W/I} + \hat{J}_w \cdot \frac{{}^I d}{dt} \vec{\omega}^{I/O} + \hat{J}_w \cdot \frac{{}^O d}{dt} \vec{\omega}^{O/B} + \hat{J}_w \cdot \left( \vec{\omega}^{O/I} \times \vec{\omega}^{O/B} \right) \\ &\quad + \hat{J}_w \cdot \frac{{}^B d}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_w \cdot \left( \vec{\omega}^{B/O} \times \vec{\omega}^{B/N} \right) + \hat{J}_w \cdot \left( \vec{\omega}^{O/I} \times \vec{\omega}^{B/N} \right) \\ &\quad + \vec{\omega}^{I/O} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/I} + \vec{\omega}^{I/O} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{I/O} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\ &\quad + \vec{\omega}^{O/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/I} + \vec{\omega}^{O/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{I/O} + \vec{\omega}^{O/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\ &\quad + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/I} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{I/O} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{B/N}\end{aligned}\quad (2.125)$$

ただし  $\vec{\omega}^{I/O} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{I/O} = \vec{\omega}^{O/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{O/B} = 0$  を用いた。それでは式 (2.120)、(2.121)、

(2.123)、(2.125) を辺々足し合わせて運動方程式の導出を試みる。

$$\begin{aligned}
& \dot{\vec{H}}_s + \dot{\vec{H}}_o + \dot{\vec{H}}_i + \dot{\vec{H}}_w \\
&= (\hat{J}_s + \hat{J}_o + \hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times (\hat{J}_s + \hat{J}_o + \hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\
& \quad (\hat{J}_o + \hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot \frac{Od}{dt} \vec{\omega}^{O/B} + (\hat{J}_o + \hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot (\vec{\omega}^{B/O} \times \vec{\omega}^{B/N}) \\
& \quad + \vec{\omega}^{O/B} \times (\hat{J}_o + \hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times (\hat{J}_o + \hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot \vec{\omega}^{O/B} \\
& \quad + (\hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot \frac{Id}{dt} \vec{\omega}^{I/O} + (\hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot (\vec{\omega}^{O/I} \times \vec{\omega}^{O/B}) + (\hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot (\vec{\omega}^{O/I} \times \vec{\omega}^{B/N}) \\
& \quad + \vec{\omega}^{I/O} \times (\hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot \vec{\omega}^{O/B} + \vec{\omega}^{I/O} \times (\hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{O/B} \times (\hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot \vec{\omega}^{I/O} \\
& \quad + \vec{\omega}^{B/N} \times (\hat{J}_i + \hat{J}_w) \cdot \vec{\omega}^{I/O} + \hat{J}_w \cdot \frac{Id}{dt} \vec{\omega}^{W/I} \\
& \quad + \vec{\omega}^{I/O} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/I} + \vec{\omega}^{O/B} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/I} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/I} \tag{2.126}
\end{aligned}$$

ここで以下の文字を定義する。

$$\hat{K} = \hat{J}_i + \hat{J}_w \tag{2.127}$$

$$\hat{J} = \hat{J}_o + \hat{K} \tag{2.128}$$

$$\hat{I} = \hat{J}_s + \hat{J} \tag{2.129}$$

すると 1 台の VSDGCMG を搭載した宇宙機の、厳密な運動方程式が次のように導出される。

$$\begin{aligned}
& \hat{I} \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{I} \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J} \cdot \frac{Od}{dt} \vec{\omega}^{O/B} + \hat{J} \cdot (\vec{\omega}^{B/O} \times \vec{\omega}^{B/N}) + \vec{\omega}^{O/B} \times \hat{J} \cdot \vec{\omega}^{B/N} \\
& + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J} \cdot \vec{\omega}^{O/B} + \hat{K} \cdot \frac{Id}{dt} \vec{\omega}^{I/O} + \hat{K} \cdot (\vec{\omega}^{O/I} \times \vec{\omega}^{O/B}) + \hat{K} \cdot (\vec{\omega}^{O/I} \times \vec{\omega}^{B/N}) + \vec{\omega}^{I/O} \times \hat{K} \cdot \vec{\omega}^{O/N} \\
& \quad + \vec{\omega}^{O/N} \times \hat{K} \cdot \vec{\omega}^{I/O} + \hat{J}_w \cdot \frac{Id}{dt} \vec{\omega}^{W/I} + \vec{\omega}^{I/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/I} = \vec{M}_c \tag{2.130}
\end{aligned}$$

今、機体、ジンバル、ホイールの質量中心の位置は機体固定座標系から見て不変と仮定しているため、式 (2.130) を単純に拡張することで、VSDGCMG を  $n_d$  台搭載している宇宙機の動力学を次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
& \hat{I}' \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{I}' \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \sum_{j=1}^{n_d} \left\{ \hat{J}_j \cdot \frac{Oj d}{dt} \vec{\omega}^{Oj/B} + \hat{J}_j \cdot (\vec{\omega}^{B/Oj} \times \vec{\omega}^{B/N}) \right. \\
& \quad + \vec{\omega}^{Oj/B} \times \hat{J}_j \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_j \cdot \vec{\omega}^{Oj/B} + \hat{K}_j \cdot \frac{Ij d}{dt} \vec{\omega}^{Ij/Oj} + \hat{K}_j \cdot (\vec{\omega}^{Oj/Ij} \times \vec{\omega}^{Oj/B}) \\
& \quad + \hat{K}_j \cdot (\vec{\omega}^{Oj/Ij} \times \vec{\omega}^{B/N}) + \vec{\omega}^{Ij/Oj} \times \hat{K}_j \cdot \vec{\omega}^{Oj/N} + \vec{\omega}^{Oj/N} \times \hat{K}_j \cdot \vec{\omega}^{Ij/Oi} + \hat{J}_{wj} \cdot \frac{Ij d}{dt} \vec{\omega}^{Wj/Ij} \\
& \quad \left. + \vec{\omega}^{Ij/N} \times \hat{J}_{wj} \cdot \vec{\omega}^{Wj/Ij} \right\} = \vec{M}_c \tag{2.131}
\end{aligned}$$



ここで、 $O_j$ 、 $I_j$ 、 $W_j$  はそれぞれ、 $j(=1, 2, \dots, n_d)$  番目の VSDGCMG の外側ジンバル座標系、内側ジンバル座標系、ホイール座標系であり、 $\hat{J}_{wj}$  は  $j$  番目の VSDGCMG のホイールの慣性テンソルである。 $\hat{K}_j$ 、 $\hat{J}_j$ 、 $\hat{I}'$  は次式で定義される慣性テンソルである。

$$\hat{K}_j = \hat{J}_{ij} + \hat{J}_{wj} \quad (2.132)$$

$$\hat{J}_j = \hat{J}_{oj} + \hat{K}_j \quad (2.133)$$

$$\hat{I}' = \hat{J}'_s + \sum_{j=1}^{n_s} \hat{J}_j \quad (2.134)$$

なお、 $\hat{J}_{ij}$  は、 $j$  番目の VSDGCMG の内側ジンバルの慣性テンソルを、 $\hat{J}_{oj}$  はその外側ジンバルの慣性テンソルを表していることに注意されたい。 $\hat{J}'_s$  は式 (2.112) を拡張したものであり、 $n_d$  台全ての VSDGCMG と、それ以外の宇宙機構造から計算される慣性テンソルである。

VSDGCMG においても、SGCMG と同様な仮定を置いて単純化した運動方程式が頻繁に用いられている。この場合、単一 VSDGCMG 搭載宇宙機の運動方程式は次のように表される。

$$\hat{J}_s \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_w \cdot \frac{I_d}{dt} \vec{\omega}^{W/I} + \vec{\omega}^{I/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/I} = \vec{M}_c \quad (2.135)$$

時間微分を機体座標系に統一すると次のようになる。

$$\hat{J}_s \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{B/N} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_s \cdot \vec{\omega}^{B/N} + \hat{J}_w \cdot \frac{Bd}{dt} \vec{\omega}^{W/I} + \vec{\omega}^{B/N} \times \hat{J}_w \cdot \vec{\omega}^{W/I} = \vec{M}_c \quad (2.136)$$

次に、上式の機体座標系での表現を導く。 $\theta_O = \theta_I = 0$  のとき外側ジンバル軸、内側ジンバル軸、ホイール回転軸が機体座標系の各軸と一致すると仮定したので、ホイールの角運動量は機体座標系において次のように表される。

$$\mathbf{h}_W = h_W \begin{bmatrix} \sin \theta_I \\ -\sin \theta_O \cos \theta_I \\ \cos \theta_O \cos \theta_I \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

ここで  $h_W$  はホイールが回転軸回りに保有する角運動量の大きさであり、 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_O \ \theta_I]^T$  である。また、

$$\dot{\mathbf{h}}_W = -\mathbf{B}\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} 0 & -h_W \cos \theta_I & -\sin \theta_I \\ h_W \cos \theta_O \cos \theta_I & -h_W \sin \theta_O \sin \theta_I & \sin \theta_O \cos \theta_I \\ h_W \sin \theta_O \cos \theta_I & h_W \cos \theta_O \sin \theta_I & -\cos \theta_O \cos \theta_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_O \\ \dot{\theta}_I \\ \dot{h}_W \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

と表されることに着目すると、機体座標系における簡略化された運動方程式は次式で与えられる。

$$\mathbf{J}_s \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega} - \mathbf{B}\mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{h}_W = \mathbf{M}_c \quad (2.139)$$

## 2.5 結言

本章ではまずベクトル演算を定義した。そして、座標変換行列を用いて角速度を定義し、CTM、クォータニオン、修正ロドリゲスパラメータの運動学を導いた。次に、単体の剛体、VSSGCMG 搭載宇宙機、VSDGCMG 搭載宇宙機のそれぞれについて厳密な運動方程式を導いた。最後に、厳密な運動方程式を 1) ジンバルの慣性テンソルは微小、2) ホイールの角運動量に対する  $\vec{\omega}^{G/N}$  の寄与は無視できるとの 2 つの仮定のもとで簡略化することにより、多くの論文で頻繁に用いられている運動方程式が導出できることを示し、次章以降のシミュレーションにおける支配方程式を定式化した。



## 第 3 章

# 単一 VSDGCMG を用いた逆運動学に基づく姿勢制御

### 3.1 緒言

研究背景で示したように、VSDGCMG に対する駆動則は様々な手法が検討されてきているが、特異点回避・通過への方策を示したものは塚原らによるもののみであった。その駆動則は、ホイール軸と外側ジンバル軸が一致した状態の特異点を回避・通過するものである。回避用の駆動則を用いた場合の、特異点近傍における外側ジンバル角の変動量の近似値が、閾値よりも小さい場合には回避を行う。そうでなければ特異点通過用のパラメータを用いて通過する。このように、特異点回避・通過の判断がジンバル角度から決定されているが、ジンバル角度は姿勢誤差を表す尺度としては不十分である。加えて、決定に大きな影響を及ぼすジンバル角速度制限値も考慮していない。さらに同駆動則は、特異点回避・通過を行うためにトルク誤差を許容する項を含んでいる。これらの問題は姿勢誤差を引き起こしうるため、本章においては、運動学な姿勢制御により課題の解決を試みる。運動学的な姿勢制御は、逆運動学に基づくものか、角運動量保存則に基づくものかで大別でき、本章では VSDGCMG 用に inverse kinematics steering logic (IKSL) を修正した逆運動学に基づく駆動則を提案して問題の解決を試みる。

IKSL では所望のトルクが出力されるよう、逆運動学に基づいて制御入力を計算する。B.3.2.3 項で示すように逆運動学の解は一般的に複数個存在し、IKSL では制御入力を最小にするために現在の値に近い解を選択する。これは VSDGCMG 系においては特異点を回避することを意味する。特異点回避のために塚原の手法で導入されている、トルク誤差を生じさせうる項が IKSL には含まれない。したがって、IKSL の採用により目標トルクとの誤差が小さいトルクが出力できることが期待できる。しかしながら、IKSL をそのまま単一 VSDGCMG に適用すると特異点周辺において大きな姿勢誤差が生じうる。そこで、

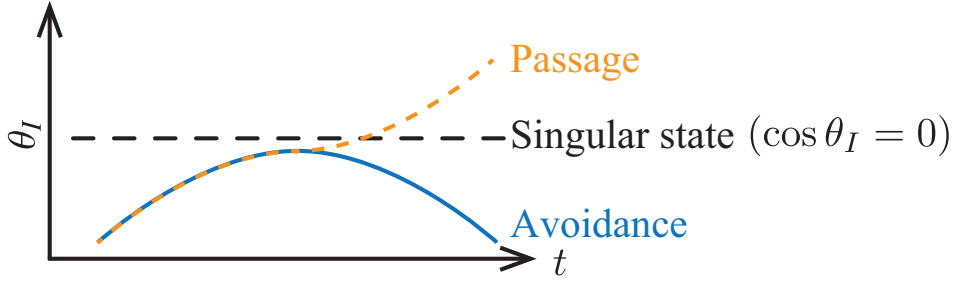


図 3.1: 特異点の回避と通過

本章の手法では近い解だけでなく、時にはもう一方の解を選ぶことによって特異点回避・通過の両者を可能にさせた修正 IKSL を提案する。特異点回避・通過の判断には近似トルク誤差を採用している。これにはジンバル角速度が陽に含まれているため、塚原らのものよりも特異点に対する動作を正しく判定でき、その結果、姿勢誤差の低下が期待できる。

なお、「特異点回避」と「特異点通過」は、特異点に相当する VSDGCMG の内側ジンバル角度  $\theta_{I\text{sing}}$ 、すなわち  $\cos \theta_I = 0$  を満たす角度を用いることで定義される。図 3.1 に示すように、回避は内側ジンバル角度が  $\theta_{I\text{sing}}$  に一旦近づき、 $\cos \theta_I$  の符号を保ちつつ特異点から離れる挙動を指す。通過は、 $\theta_{I\text{sing}}$  に近づいた後、 $\cos \theta_I$  の符号を変えて特異点から離れる挙動を指す。

### 3.2 提案手法

$h_W$  をホイール角運動量ノルム、 $\theta = [\theta_O \ \theta_I]^T$  をジンバル角度行列とする。 $\theta_O$ 、 $\theta_I$  はそれぞれ外側、内側ジンバルの回転角度である。図 3.2 に示すように、 $\theta_O = \theta_I = 0$  のとき外側ジンバル軸、内側ジンバル軸、ホイール回転軸が機体座標系の各軸と一致すると仮定する。すると CMG システムの角運動量は  $h_W$  および  $\theta$  の関数として次のように表現できる。

$$\mathbf{h}_W(\theta, h_W) = h_W \begin{bmatrix} \sin \theta_I \\ -\sin \theta_O \cos \theta_I \\ \cos \theta_O \cos \theta_I \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

また、VSDGCMG はジンバル角速度に関する次の制約を有するものとする。

$$\dot{\theta}_{O\min} < \dot{\theta}_O < \dot{\theta}_{O\max} \quad (3.2)$$

$$\dot{\theta}_{I\min} < \dot{\theta}_I < \dot{\theta}_{I\max} \quad (3.3)$$

加えて、 $h_W > 0$  が常に満たされるものとする。

提案手法では制御入力である  $\dot{h}_W$  および  $\dot{\theta}$  を次の手順で計算する。まず、所望の出力トルク  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ref}}$  と現在の CMG 角運動量を基に、CMG が微小時間  $\Delta t$  後に保有すべき目標角運動量  $\mathbf{h}_{W\text{ref}} = \mathbf{h}_W(\boldsymbol{\theta}_{\text{ref}}, h_{W\text{ref}})$  を計算する。そして、CMG システムが目標角運動量  $\mathbf{h}_{W\text{ref}}$  を

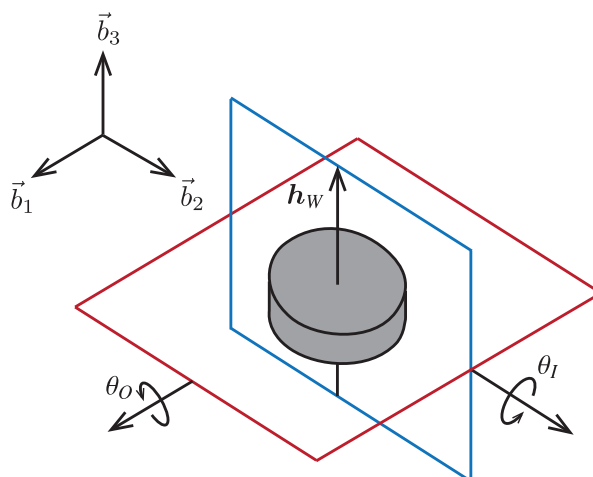


図 3.2: VSDGCMG と座標系

保有するような目標角運動量ノルム  $h_{W\text{ref}}$  および  $\theta_{\text{ref}}$  が逆運動学を基に求められる。最後に、ホイール角運動量ノルムとジンバル角度が  $\Delta t$  間にそれぞれ  $\Delta h (= h_{W\text{ref}} - h_W)$  および  $\Delta \theta (= \theta_{\text{ref}} - \theta)$  だけ変化するように制御入力  $\dot{h}_W$  および  $\dot{\theta}$  を決定する。

それでは具体的にアルゴリズムを定式化していく。目標 CMG トルク  $\tau_{\text{ref}}$  と現在の CMG 角運動量が与えられた場合、次の式が成立する。

$$\frac{d\mathbf{h}_W}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ref}} \quad (3.4)$$

一次近似によって次の式を得る。

$$\mathbf{h}_{W\text{ref}} = \mathbf{h}_W + \boldsymbol{\tau}_{\text{ref}} \Delta t \quad (3.5)$$

$\mathbf{h}_{W\text{ref}} = \mathbf{h}_W(\theta_{\text{ref}}, h_{W\text{ref}})$  を式 (3.5) へ代入して式 (3.1) を用いて変形すると次式が得られる。

$$h_{W\text{ref}} \begin{bmatrix} \sin \theta_{I\text{ref}} \\ -\sin \theta_{O\text{ref}} \cos \theta_{I\text{ref}} \\ \cos \theta_{O\text{ref}} \cos \theta_{I\text{ref}} \end{bmatrix} = \mathbf{h}_W + \boldsymbol{\tau}_{\text{ref}} \Delta t \quad (3.6)$$

上式の右辺を  $[h_1 \ h_2 \ h_3]^T$  と表すことにすると、解くべき方程式は次のようになる。

$$h_{W\text{ref}} \sin \theta_{I\text{ref}} = h_1 \quad (3.7)$$

$$-h_{W\text{ref}} \sin \theta_{O\text{ref}} \cos \theta_{I\text{ref}} = h_2 \quad (3.8)$$

$$h_{W\text{ref}} \cos \theta_{O\text{ref}} \cos \theta_{I\text{ref}} = h_3 \quad (3.9)$$

式 (3.8)–(3.9) の二乗和の平方根は次のように計算できる。

$$h_{W\text{ref}} \cos \theta_{I\text{ref}} = \pm \sqrt{h_2^2 + h_3^2} \quad (3.10)$$

ここで  $h_2^2 + h_3^2 \neq 0$  を仮定し、式 (3.7) を上式で割り、次式を得る。

$$\theta_{Iref} = \tan^{-1} \frac{h_1}{\pm \sqrt{h_2^2 + h_3^2}} \quad (3.11)$$

式 (3.10) を式 (3.8)、(3.9) に代入すると次のように変形できる。

$$\mp \sqrt{h_2^2 + h_3^2} \sin \theta_{Oref} = h_2 \quad (3.12)$$

$$\pm \sqrt{h_2^2 + h_3^2} \cos \theta_{Oref} = h_3 \quad (3.13)$$

式 (3.12) を式 (3.13) で割ることで外側ジンバル角が得られる。

$$\theta_{Oref} = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{-h_2}{h_3} & (\cos \theta_{Iref} > 0) \\ \tan^{-1} \frac{h_2}{-h_3} & (\cos \theta_{Iref} < 0) \end{cases} \quad (3.14)$$

$\Delta h = h_{Wref} - h_W$ 、 $\Delta \theta = \theta_{ref} - \theta$  という表記を用いると式 (3.6) の解は次のように表すことができる。

$$\Delta h_W = -h_W + \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \quad (3.15)$$

$$\Delta \theta_I = -\theta_I + \tan^{-1} \frac{h_1}{\pm \sqrt{h_2^2 + h_3^2}} \quad (3.16)$$

$$\Delta \theta_O = \begin{cases} -\theta_O + \tan^{-1} \frac{-h_2}{h_3} & (\cos \theta_{Iref} > 0) \\ -\theta_O + \tan^{-1} \frac{h_2}{-h_3} & (\cos \theta_{Iref} < 0) \end{cases} \quad (3.17)$$

ジンバル角度に関して解は2つ存在するが、IKSL では  $\cos \theta_I$  と  $\cos \theta_{Iref}$  の符号が等しくなるような、現在の角度に近い解を選択する。この選択がなされ、かつ  $h_2^2 + h_3^2 \neq 0$  が成立する限り、 $\cos \theta_I$  の符号は変化しない。実際、 $h_2^2 + h_3^2$  が計算機上ではゼロになることはほぼないので、この手法により IKSL で  $\cos \theta_I = 0$  の特異点を回避することができる。ここで  $\cos \theta_{Iref}$  の符号が異なる2解を上付き文字 +、- で区別する。この記法を用いると、式 (3.16) および (3.17) から次の関係が示される。

$$\theta_{Iref}^- + \theta_{Iref}^+ = \begin{cases} \pi & (\sin \theta_{Iref}^+ > 0) \\ -\pi & (\sin \theta_{Iref}^+ < 0) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\theta_{Oref}^- - \theta_{Oref}^+ = \pi \quad (3.19)$$

$\theta_{Iref}$  の2解は  $\cos \theta_{Iref}^+ = 0$  近傍において近づきあう一方、 $\theta_{Oref}$  に関しては常に  $\pi$  ラジアン

だけ離れていることが分かる。もし  $h_2^2 + h_3^2 = 0$  が成立した場合には次の式で駆動する。

$$\Delta h_W = -h_W + h_1 \quad (3.20)$$

$$\Delta \theta_I = -\theta_I \pm \pi/2 \quad (3.21)$$

$$\Delta \theta_O = 0 \quad (3.22)$$

$h_{W\text{ref}} = 0$  の場合に対しては、次の解を選択する。

$$\Delta h_W = -h_W \quad (3.23)$$

$$\Delta \theta_I = 0 \quad (3.24)$$

$$\Delta \theta_O = 0 \quad (3.25)$$

再度述べておくと、 $h_2^2 + h_3^2$  は計算機上ではゼロとなることはほぼないため、式 (3.15)–(3.17) が主として使われることになる。以上の結果を用いると、制御入力は次のように決定できる。

$$\dot{h}_W = \frac{\Delta h_W}{\Delta t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (3.26)$$

上述した単一 VSDGCMG 用 IKSL を用いた場合の、特異点近傍における外側ジンバル角の挙動について解析する。例として、内側ジンバル角度が  $\cos \theta_I > 0$  を保ちつつ特異点に接近する場合を取り上げる。式 (3.1) と (3.5) を式 (3.17) に代入すると次式が得られる。

$$\Delta \theta_O = -\theta_O + \tan^{-1} \frac{h_W \sin \theta_O \cos \theta_I + \tau_2 \Delta t}{h_W \cos \theta_O \cos \theta_I - \tau_3 \Delta t} \quad (3.27)$$

ここで  $\tau_i$  は  $\tau_{\text{ref}}$  の  $i$  ( $= 1, 2, 3$ ) 番目の要素である。式 (3.26) を式 (3.27) に代入して  $\cos \theta_I \approx 0$  と近似すると次の微分方程式が得られる。

$$\dot{\theta}_O(t) = \frac{1}{\Delta t} \left( -\theta_O(t) + \tan^{-1} \frac{\tau_2(t)}{-\tau_3(t)} \right) \quad (3.28)$$

さらに、システムが特異点近傍から十分に早く離れるとすると、目標トルク  $\tau_{\text{ref}}$  は特異点近傍で時間不変とみなせる。このような仮定を置くと上式は容易に解くことができ、次の解が得られる。

$$\theta_O(t) = (\theta_O(0) - C) \exp\left(-\frac{t}{\Delta t}\right) + C \quad (3.29)$$

ここで  $C = \tan^{-1}(\tau_2 / -\tau_3)$  である。時間が経過するにつれ、外側ジンバル角  $\theta_O$  が  $C$  へと近づくことが分かる。式 (3.28) を式 (3.29) を用いて書き直すと次式を得る。

$$\dot{\theta}_O(t) = \frac{-1}{\Delta t} (\theta_O(0) - C) \exp\left(-\frac{t}{\Delta t}\right) \quad (3.30)$$



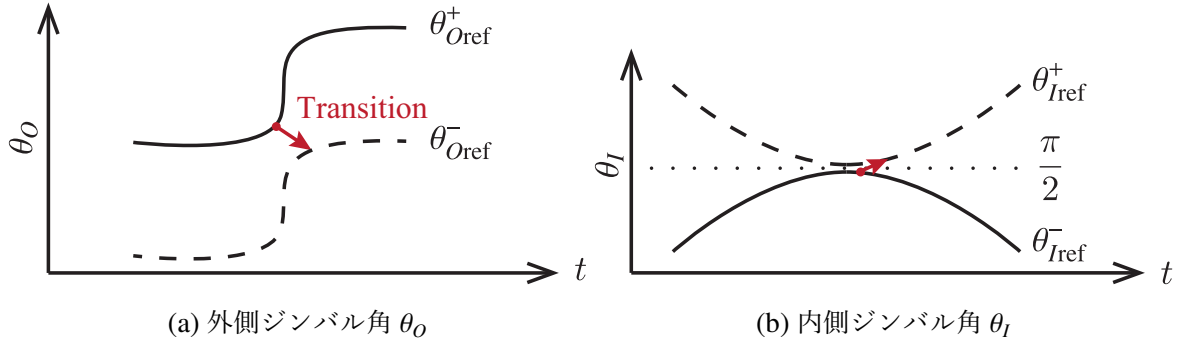


図 3.3: 解の乗り換えの概念図

この式から、特異点近傍における制御入力 of the maximum value  $|\dot{\theta}_o|$  is  $|(\theta_o(0) - C)/\Delta t|$  であることが理解できる。この値が大きい場合、ジンバル角速度制限のために要求されたトルクが出力できず、大きな姿勢誤差が生ずると考えられる。

そのような姿勢誤差の発生を防ぐために、IKSL を修正して特異点を通過する方策を考える。ここでは例として現在値に近い解が  $\theta_{\text{ref}}^+$  であってかつ  $\theta_o(0) = 0$ 、 $C^+ = \pi$  [rad] の場合を考える。この場合は  $C^- = 0$  であるため、 $\theta_{\text{Oref}}^-$  は初期値である  $\theta_o(0) = 0$  に時間経過で近づく。したがって、特異点近傍において制御入力 that exceeds the gimbal angular velocity limit のときには、選択する解を  $\theta_{\text{Oref}}^-$  へ変えることで姿勢誤差を低減できると考える。この概念図を図 3.3a に示す。解の「乗り換え」は内側ジンバル角についても適用されねばならず、 $\theta_{\text{Iref}}^-$  が選択される必要がある。ただ、図 3.3b に示すように、特異点周辺で  $\theta_l^+ \approx \pm\pi/2$  および  $\theta_l^- \approx \pm\pi/2$  が成立することは式 (3.18) から明らかであるので、解の乗り換えが姿勢に与える影響は少ないと考えられる。以下では、乗り換えの判断および乗り換え中の制御入力について言及していく。簡単のため、 $\pi/2$  ラジアンを跨いで  $\cos \theta_l$  が正から負に変化する場合のみを考える。

駆動則が解を乗り換える（現在値に対し遠い解を選択する）かどうかを判定する評価関数  $L(\Delta\theta, \Delta h_w)$  として「 $T_1$  秒間の平均トルクと目標トルク  $\tau_{\text{ref}}$  の差」を採用する。

$$L(\Delta\theta, \Delta h_w) = \left| \left\{ \mathbf{h}_w \left( \underset{\theta + \dot{\theta}_{\max} T_1, \theta + \dot{\theta}_{\min} T_1}{\text{sat}} (\boldsymbol{\theta} + \Delta\boldsymbol{\theta}), \mathbf{h}_w + \Delta\mathbf{h}_w^* \right) - \mathbf{h}_w(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}_w) \right\} / T_1 - \boldsymbol{\tau}_{\text{ref}} \right| \quad (3.31)$$

ここで  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\max} = [\dot{\theta}_{o\max} \ \dot{\theta}_{l\max}]^T$ 、 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\min} = [\dot{\theta}_{o\min} \ \dot{\theta}_{l\min}]^T$  はジンバル角速度制限を表す行列であり、**sat** は次のように表される、飽和関数を含む行列である。

$$\underset{\theta_{\max}, \theta_{\min}}{\text{sat}} (\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \underset{\theta_{o\max}, \theta_{o\min}}{\text{sat}} (\theta_o) & \underset{\theta_{l\max}, \theta_{l\min}}{\text{sat}} (\theta_l) \end{bmatrix}^T \quad (3.32)$$

$$\underset{\theta_{\max}, \theta_{\min}}{\text{sat}} (\theta) = \begin{cases} \theta_{\max} & (\theta > \theta_{\max}) \\ \theta & (\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}) \\ \theta_{\min} & (\theta < \theta_{\min}) \end{cases} \quad (3.33)$$

上記の評価関数を用いると、 $\theta_{\text{ref}}^+$  と  $\theta_{\text{ref}}^-$  を選択した際の評価関数はそれぞれ次のように表される。

$$L^+ = L(\Delta\theta^{*+}, \Delta h_W^*), \quad L^- = L(\Delta\theta^{*-}, \Delta h_W^*) \quad (3.34)$$

ここで  $\Delta\theta^*$  と  $\Delta h_W^*$  は式 (3.15)–(3.17) を現在時間  $t$  から  $t + T_1$  まで数値積分して得られた値である。目標トルク  $\tau_{\text{ref}}$  は現在値のまま時間不変とみなして数値積分を行う。

もし  $L^+ > L^-$  かつ  $|\cos \theta_I|_{\min} < \varepsilon$ , であれば、乗り換えを開始する。ただし、 $|\cos \theta_I|_{\min}$  は数値積分中の  $|\cos \theta_I|$  の最小値を表す。乗り換え時間  $T_2$  の間、入力は次のように与えられる。

$$\dot{\theta}_O = \text{sat}_{\dot{\theta}_{\max}, \dot{\theta}_{\min}} \left( \frac{1}{\Delta t} \frac{t}{T_2} (\theta_O^- - \theta_O) \right) \quad (3.35)$$

$$\dot{\theta}_I = \text{sat}_{\dot{\theta}_{\max}, \dot{\theta}_{\min}} \left( \frac{1}{\Delta t} \frac{t}{T_2} (\theta_I^- - \theta_I) \right) \quad (3.36)$$

目標角度  $\theta_{\text{ref}}^-$  と現在値  $\theta$  は乗り換え開始時点において大きな差があるが、時間経過とともに目標値が現在値に近づいてくる。そのため、入力は現在値  $\theta$  が目標値  $\theta_{\text{ref}}^-$  に徐々に近づくような入力を与え、大きな姿勢誤差が生ずることを防いでいる。

以上をまとめると、提案する特異点回避・通過則は次のように実行される。

1. ジンバル角とホイール角運動量ノルムを式 (3.15)–(3.17) および (3.26) を用いて現在時刻  $t$  から  $t + T_1$  まで数値積分する
2. もし  $L^\dagger > L^\ddagger$  かつ  $|\cos \theta_I|_{\min} < \varepsilon$  であれば 3 へ、そうでない場合は 4 へ
3. 乗り換え用駆動則 ( $L^-$  に乗り換える場合は式 (3.35) および (3.36)) を用いて  $T_2$  の間 CMG を駆動し 1 へ戻る
4. 式 (3.15)–(3.17)、(3.26) あるいは式 (3.20)–(3.26) を用いて CMG を駆動し、1 へ戻る

ただし  $L^\dagger$  は現在値に近い解に対する評価関数を、 $L^\ddagger$  は遠い解に対するそれを表す。

制御パラメータをまとめておく。設定が必要なものは  $\Delta t$ 、 $T_1$ 、 $T_2$  および  $\varepsilon$  である。 $\Delta t$  は制御周期である。 $T_1$  は評価関数の計算に使われており、未来のホイール角運動量ノルムとジンバル角をどれだけ期間に渡って予測するかを表すパラメータである。 $T_2$  は乗り換えに要する時間である。 $\varepsilon$  はシステムが特異点近傍かどうかを判定するパラメータである。上記に加えて、評価関数の計算に必要とされる数値積分法も指定する必要がある。

### 3.3 シミュレーション

提案手法の妥当性と有効性を検証するため、宇宙機が目標姿勢と目標角速度をトラッキングする2ケースの制御シミュレーションを行った。支配方程式は式(2.139)であり、外力トルクは無視した。両ケースに共通するパラメータは次のとおりである。

$$\begin{aligned}
 J_s &= \text{diag}(3.41, 2.89, 2.55) [\text{kgm}^2] \\
 \omega_{\text{ref}} &= \begin{cases} \frac{t}{14} \omega_f & 0 \leq t < 14 \\ \omega_f & 14 \leq t < 16 \\ \frac{30-t}{30} \omega_f & 16 \leq t \leq 30 \end{cases} \\
 \theta_O(0) &= -\pi/4 [\text{rad}], \quad \theta_I(0) = 1.36 [\text{rad}], \quad h_W(0) = 0.1 [\text{Nms}] \\
 \Delta t &= 0.1 [\text{s}], \quad \varepsilon = 0.1 \\
 T_1 &= 1.0 [\text{s}], \quad T_2 = 2.0 [\text{s}] \\
 \dot{\theta}_{O\text{max}} = \dot{\theta}_{I\text{max}} &= 1 [\text{rad/s}], \quad \dot{\theta}_{O\text{min}} = \dot{\theta}_{I\text{min}} = -1 [\text{rad/s}]
 \end{aligned}$$

$\omega_{\text{ref}}$  は台形型の目標角速度であり、 $\theta_O(0)$ 、 $\theta_I(0)$ 、 $h_W(0)$  はジンバル角およびホイール角運動量ノルムの初期条件である。 $\theta_O(0) = -\pi/4$  ラジアンは +YZ 方向にトルクを発生しづらい角度を、 $\theta_I(0) = 1.36$  ラジアンは特異点近傍となる角度を設定した。目標クォータニオン  $q_{\text{ref}}$  については、初期条件  $q_{\text{ref}}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  のもとで目標角速度を式(2.51)で積分した値を指定した。目標トルク  $\tau_{\text{ref}}$  は式(B.54)により与え、制御ゲインは次のように設定した。

$$K_q = 1.25J, \quad K_\omega = 5.0J$$

評価関数の計算に必要な数値積分法には、時間刻み 0.1 秒のオイラー法を用いた。オイラー法は低計算量のアルゴリズムであり、実機に搭載することも可能だと考えられるからである。

実行した2ケースでは目標角速度が次のように異なる。

- Case 1:  $\omega_f = 0.02 \sqrt{0.5} [0 \ 1 \ 1]^T$  [rad/s]
- Case 2:  $\omega_f = 0.04 \sqrt{0.5} [0 \ 1 \ 1]^T$  [rad/s]

例として、Case 1 の目標軌道を図 3.4 に示す。姿勢誤差を抑えられる動作は Case 1 では回避、Case 2 では通過である。Case 2 では A よりも大きな角速度が必要であり、これを実現するためにはジンバルを高速に駆動してトルクを稼ぐ必要がある。結果として、計算される制御入力ジンバル角速度の制限を大きく逸脱するために、Case 2 では特異点通過により姿勢誤差を低減できるのである。

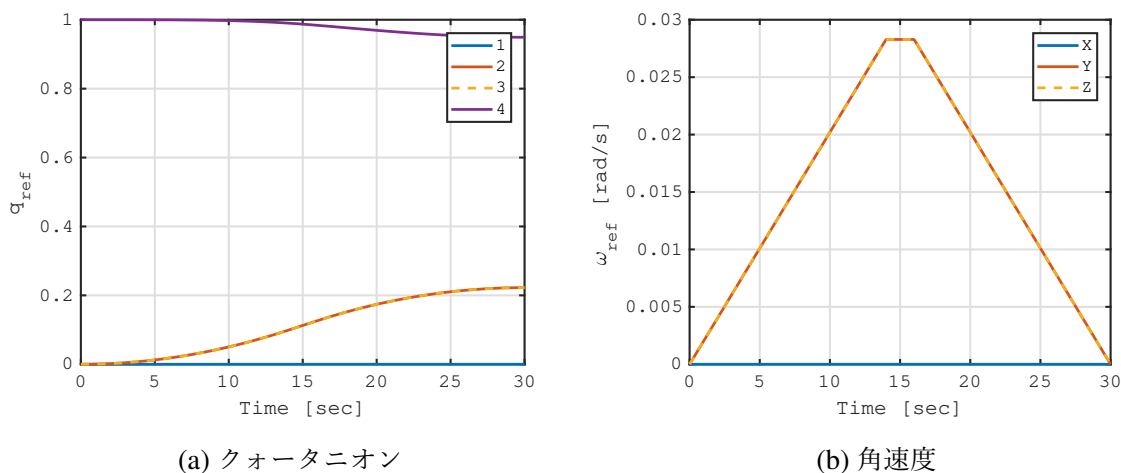


図 3.4: Case 1 における目標軌道

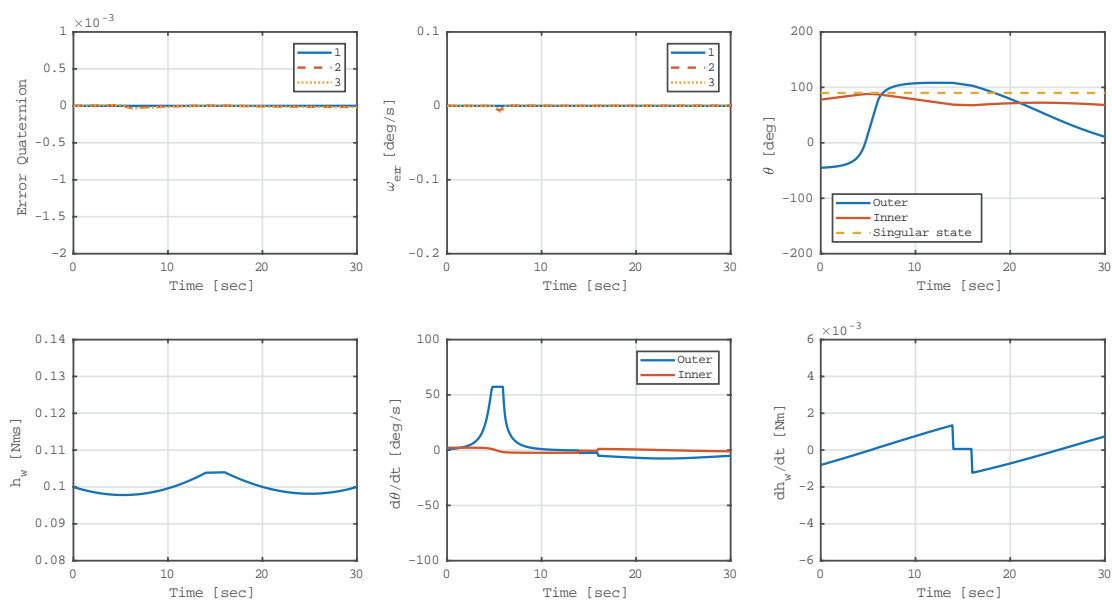


図 3.5: Case 1 (特異点回避)

Case 1 の結果を図 3.5 に示す。誤差を定量的に理解しやすくするため、エラークォータニオンについてはそのベクトル部  $\Delta\mathbf{q}$  だけを示している。提案手法は特異点回避を選択して CMG を駆動しており、結果として誤差角が十分に小さくなっていることが分かる。また 3.2 節で解析的に予測したように、 $\theta_l \approx \pi/2$  の周辺では外側ジンバル角速度が急上昇していることも見て取れる。

特異点通過を行うことが望ましい Case 2 の結果を図 3.6 に示す。駆動則は正しく特異点通過を選択しており、 $t = 1.9$  秒から解の乗り換えが実行されている。ここで比較のために式 (3.15)–(3.17) を常に用いて意図的に特異点回避を行った結果を図 3.7 に示す。3.2

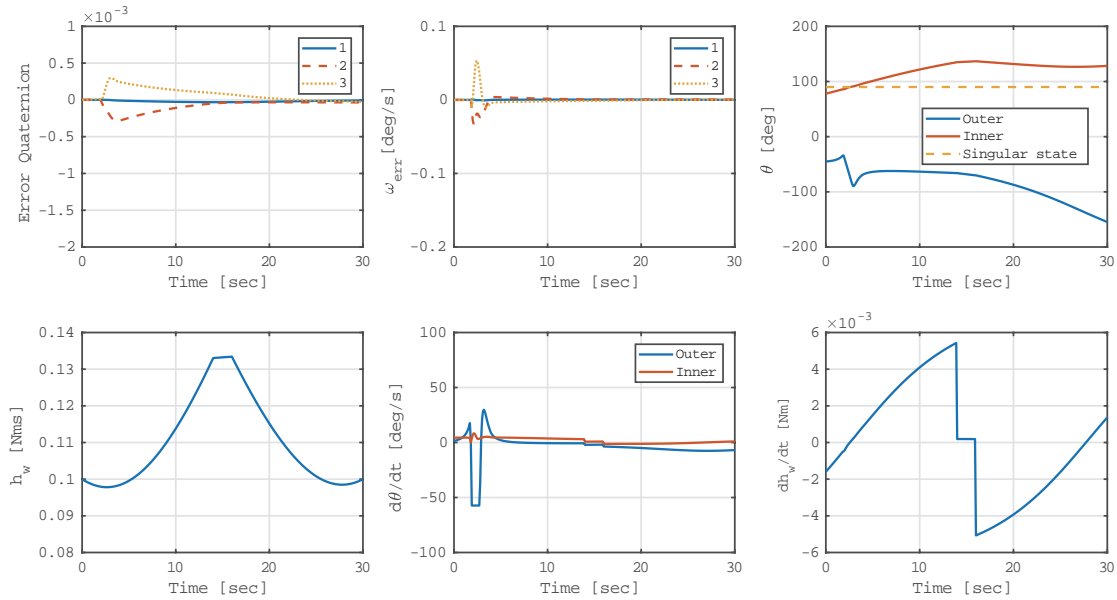


図 3.6: Case 2 (特異点通過)

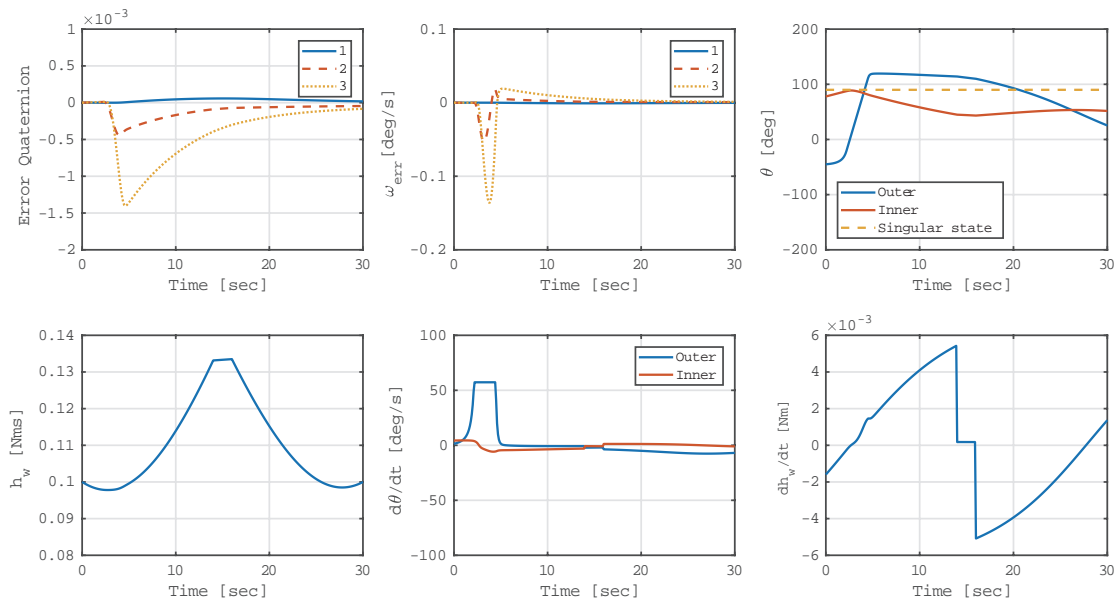


図 3.7: Case 2 (意図的に特異点回避)

節で予測したとおり、ジンバル角速度制限を逸脱した制御入力が計算されており、その結果として大きな姿勢誤差が生じている。以上の結果から、特異点回避・通過のコストを正しく見積もり、姿勢誤差が小さくなる適切な駆動を、提案した駆動則により行えることが明らかとなった。

提案手法を塚原の手法と比較するため、同条件での比較を行った。塚原の手法では

B.3.3 項に示したようにパラメータ  $\delta$  と  $l$  を設定する必要があり、次のように設定した。

$$\delta = 0.2, \quad l = 0.2$$

Case 1 と 2 のどちらにおいても、塚原の手法は特異点通過を選択し、Case 1 においては図 3.8 に示すように大きな姿勢誤差が生じた。図 3.8a は以下のように定義される誤差姿勢角  $\xi$  を示している。

$$\xi = 2 \cos^{-1} q_{\text{err}4} \quad (3.37)$$

提案手法によって塚原の手法よりも誤差姿勢角を 1 桁低減できることが図から明らかとなった。

塚原の手法が特異点通過のみを選択した理由を説明する。同手法では次の条件が成り立つときに特異点を回避するのであった。

$$\left| \theta_0 + \tan^{-1} \frac{\tau_2}{\tau_3} \right| < l \quad \text{and} \quad |\cos \theta_l| = \delta \quad (3.38)$$

左の式の左辺は、特異点回避を選択した場合の、特異点近傍における外側ジンバル角変動量の近似値と相関があり、これが  $\pi/2$  に近いほどジンバル角の動きは大きくなる。今回の両ケースでは、 $\omega_{\text{ref}2}/\omega_{\text{ref}3}$  が等しいため、 $\tan^{-1} \tau_2/\tau_3$  がほぼ等しくなっていると考えられる。したがって、塚原の手法では特異点回避のみが選択されたのだと考えられる。一方、提案手法では姿勢誤差と直接的に関係のあるトルク誤差の近似値を評価関数として用いている。加えて、評価関数には特異点に対する動作を決定するのに重要なパラメータであるジンバル角速度を陽に含んでいる。こうした点が相まって、提案手法は姿勢誤差が小さくなるような動作を選択することができるのである。

提案手法は特異点を回避する場合にはトルク誤差を許容する項を含まないため、目標トルクとの誤差が小さいトルクを出力できると考えられる。これを示すために、Case 1 において提案手法と塚原の手法とでトルク誤差の大きさを比較した。ただし、塚原の手法は強制的に特異点を回避するよう設定した。トルク誤差  $\tau_{\text{err}}$  は次のように定義される。

$$\tau_{\text{err}} = \frac{dh_w}{dt} - \tau_{\text{ref}} \quad (3.39)$$

$|\tau_{\text{err}}|$  の比較結果を図 3.9 に示す。塚原の手法では最大で約  $2.0 \times 10^{-2} \text{Nm}$  の誤差が発生しているが、提案手法ではエラーが  $2.6 \times 10^{-3} \text{Nm}$  以下である。この結果から、目標トルクとの出力誤差が小さいトルクが提案手法によって出力できることが示された。

最後に、センサノイズの影響を確認する。センサノイズとしてホイール角運動量ノルムとジンバル角度に平均ゼロの正規分布を加え、Case 1 を再度実行した。正規分布の  $3\sigma$  値はそれぞれ次のとおりである。

$$\text{For } h_w : 0.003 \text{ [Nms]}, \quad \text{For } \theta_l \text{ and } \theta_0 : 2.0 \text{ [deg]}$$

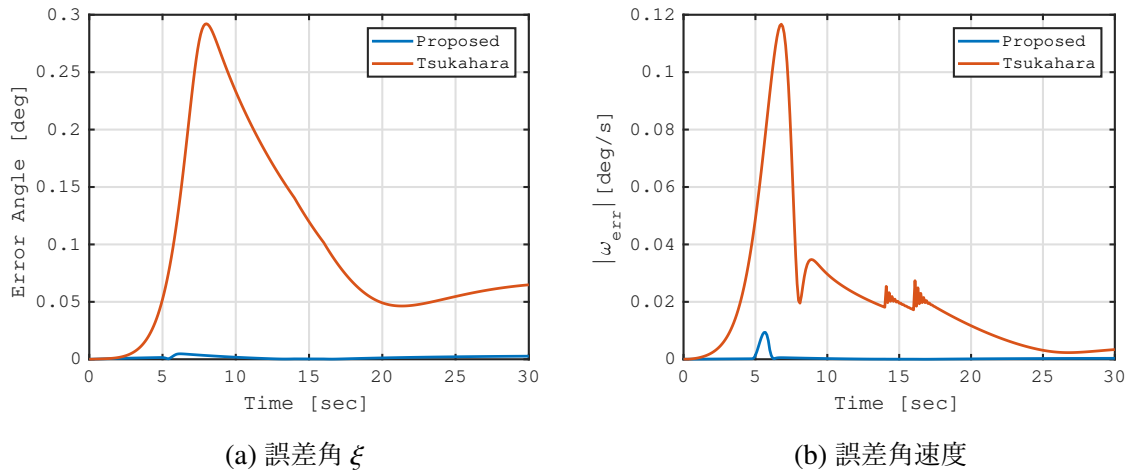


図 3.8: Case 1 における姿勢誤差の比較

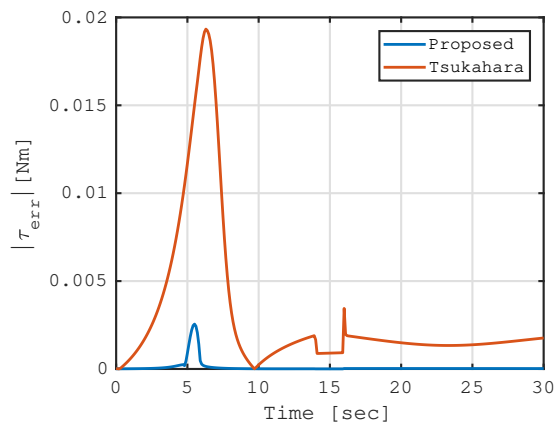


図 3.9: Case 1 におけるトルク誤差の比較 (塚原の手法は意図的に特異点を回避)

得られたトルク誤差を図 3.10 に示す。このとき、両手法は共に特異点通過を行っている。ノイズがなければ提案手法は特異点回避を行えるが、ノイズ誤差のために特異点を通過しており、加えて、トルク誤差の最大値は塚原らの手法の 3.7 倍になってしまっている。したがって、提案手法はノイズに弱く、実機への搭載に際してはフィルタリングによりノイズを十分に除去する必要があることが明らかとなった。

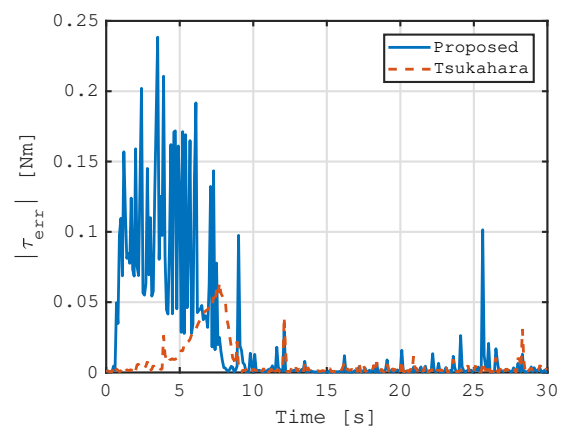


図 3.10: センサ誤差が存在する場合の Case 1 におけるトルク誤差の比較



### 3.4 結言

本章においては、単一 VSDGCMG に適用可能な、逆運動学に基づいた特異点回避・通過則を提案した。単一 VSDGCMG と宇宙機から成る系に対して逆運動学を適用し、目標トルクを出力可能な解が 2 つ存在することを示した。提案した駆動則は基本的には IKSL と同様に、現在のホイールレート、ジンバル角度に近い解を選択して特異点を回避する。特異点回避を行うと姿勢誤差が過大になる場合のみ、特異点通過が行われる。特異点通過は、現在値から遠い方の解を選択することで実現され、ジンバル角速度制限を陽に含む近似トルク誤差が回避・通過の判断に用いられる。提案手法の有用性を評価するため、先行研究との比較も行った。その結果、提案手法はノイズに弱いものの、1) 特異点回避・通過の判断を正しく行って姿勢誤差をより低減できること、2) 特異点回避時のトルク誤差が少なく、最大値は先行研究の 1 割強であることを明らかにした。

## 第 4 章

# SGCMG を用いた角運動量保存則に基づく低計算量の高速姿勢制御

### 4.1 緒言

CMG による高速姿勢制御には数多くの先行研究がある。Zhang ら、小林らや朝霧らによる手法および、特異入力と bang bang 解に基づく低計算量の手法などである [36, 37, 39–41]。だが、これらの手法では、低計算量と CMG の機械的な拘束条件—特に最大ジンバル角加速度制限—の満足を両立させることはできない。低計算量は宇宙機の自律性を向上させて、高度なミッションを遂行可能にするという点で重要である。最大ジンバル角加速度制限を満足できるということは、生成した軌道に実際のハードウェアが追従できるということを意味し、ジンバルの急加速が起こりうる高速姿勢変更制御では特に有用となる。したがって、本章では SGCMG の機械的拘束条件を満足できる低計算量の高速姿勢制御手法の提案という課題に取り組む。

本章のはじめにまず、CMG のジンバルモータには最大ジンバル角速度および最大角加速度という機械的な拘束条件が存在し、その条件を考慮することでより実践的な制御則が提案可能であることを、超小型衛星「TSUBAME」に搭載された小型 SGCMG を例として説明する。そして、それらの拘束と終端ジンバル角度に拘束を与えた上でピラミッド型配置の 4 基の SGCMG に対する最短時間姿勢変更問題を直接法によって解き、その条件下でも上野らによって示唆された「コースティング区間」[35] が存在することを示す。最後に、そのコースティング区間とゼロモーメント条件に着目して最短時間解を模擬するアプローチによって低計算量の高速姿勢変更手法を提案し、課題の解決を試みる。



図 4.1: 超小型衛星 TSUBAME に搭載された SGCMG

表 4.1: TSUBAME に搭載された小型 SGCMG の性能

Parameter	Value
サイズ	$\Phi 73.5 \times 150$ mm
質量	1.0 kg (電気回路含まず)
最大角運動量	0.0527 Nms (24000 rpm において)
最大ジンバル角速度	1.0 rad/s
最大ジンバル角加速度	0.698 rad/s <sup>2</sup>
入力禁止ジンバル角速度	2–3 deg/s
電力消費	Max. 8.7 W Nominal 3.9 W (ジンバル角速度ゼロ時)

## 4.2 SGCMG が有する機械的な拘束条件

本節では、実際の SGCMG のハードウェア設計を紹介して SGCMG が有する機械的な拘束条件を示し、制御則で考慮すべき条件を明らかにする。ここでは、超小型衛星「TSUBAME」に搭載された小型 SGCMG を例にとって説明していく。外観、性能はそれぞれ図 4.1、表 4.1 に示すとおりである。

小型 SGCMG の内部構造を図 4.2 に示す。SGCMG のホイールはヒステリシス同期モータで駆動されており、定常状態では 24000 rpm で回転する [9]。ジンバルモータにはハイブリッド型ステッピングモータが採用されており、最大角速度は 1 rad/s である。このモータには最大ジンバル角速度に加えて、最大ジンバル角加速度が設定されている。高角加速度時には脱調と呼ばれる現象が生じ、入力パルスとモータ回転との同期が失われるためである。

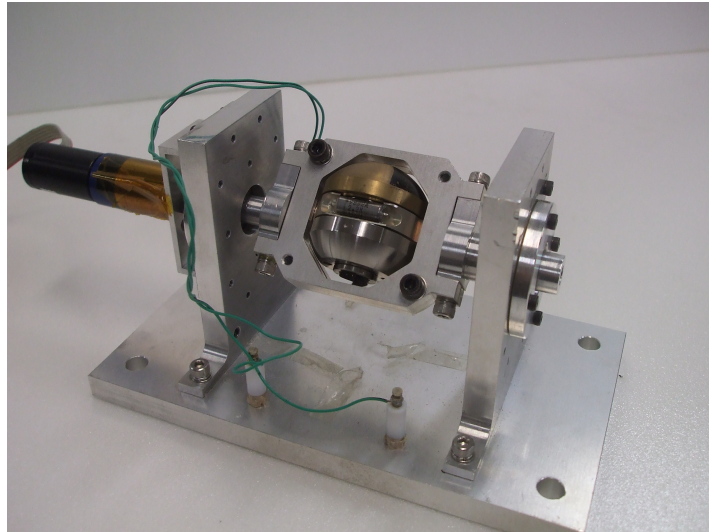


図 4.2: 小型 CMG のホイールとジンバル (bread board model)

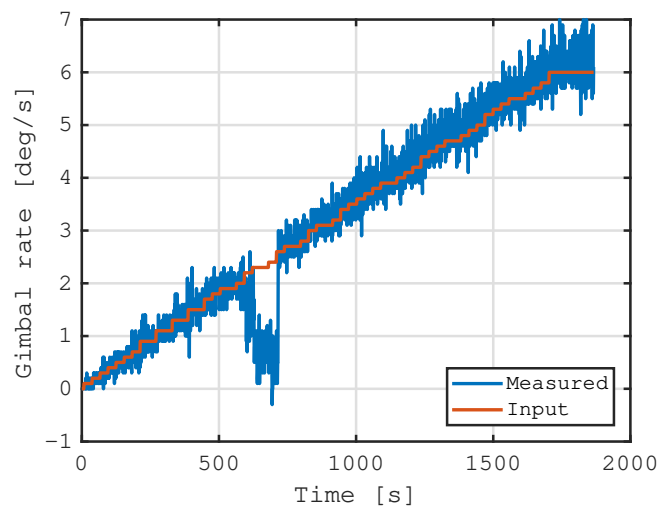


図 4.3: 入力ジンバルレートと測定値との比較

TSUBAME 搭載の SGCMG には、入力が禁止されているジンバル角速度が存在する。ジンバルが入力に追従しなくなる、共振現象を避けるためである。ステップモータは指令毎に回転・停止を繰り返しており、停止時には減衰振動が発生する。特定の角速度を入力すると、この振動が増幅されてしまいジンバルが入力どおりに動かなくなる。これが共振現象であり、TSUBAME 搭載品では共振防止を目的として 2–3 deg/s が入力禁止ジンバル角速度として設定されていた。TSUBAME 搭載 SGCMG における、入力ジンバルレートと測定値の比較を図 4.3 に示す。禁止帯においては入力と測定値の乖離が激しく、ジンバルが正常に回転できないことが分かる。

以上のように、TSUBAME 搭載 SGCMG には、最大ジンバル角速度・角加速度、入力禁止ジンバル角速度という3つの機械的な拘束条件が存在した。共振は設計によって対処可能であるが、前者2つはステッピングモータを使用している以上、不可避の問題である。したがって、最大ジンバル角速度・角加速度を拘束条件として考慮することは、より実践的な制御則を提案する上で重要であることが明らかとなった。

### 4.3 SGCMG 搭載宇宙機の最短時間姿勢変更解の性質

上野らは、間接法を用いてピラミッド型4SGCMG システムに対する最短時間姿勢変更問題の求解を行い、最適解ではほぼオイラー軸回りに一定角速度で回転が行われる時区間「コースティング区間」が1回現れることを示唆した [35]。一般の最短時間姿勢変更解が常にオイラー軸回りに回転する運動 (simple rotation) としてよく近似できることを考えれば、妥当な結果である。この回転運動をうまく利用することができれば、低計算量で高速姿勢変更を行うことができる。だが、上野らは、CMG の最大ジンバル角加速度には拘束条件を与えず、終端時間におけるジンバル角度にも拘束を与えなかった。そこで、こうした条件の元でもコースティング区間が存在するかどうかを本節で明らかにする。というのも、前者の拘束条件は実際のハードウェアが追従可能な軌道を生成できうという点で、後者は低計算量のアルゴリズムにおいて、終端ジンバル角度を計算するリソースを削減できるという点で重要だからである。

上野らは、最適制御の解法のうち、間接法の一つである SCGRA (sequential conjugate gradient-restoration algorithm)[51] を用いて求解した。一方、以下では、直接法の一つである擬スペクトル法に属する Chebyshev-pseudo spectral method (CPS 法) によって求解する。直接法は、拘束条件を課すことが間接法よりも容易なためである。CPS 法の詳細については C.3.1 項で述べる。

#### 4.3.1 問題設定

ピラミッド型配置の4基の SGCMG を用いた最短時間変更問題を定式化する。ただし、ゼロモーメント制御かつ rest-to-rest 制御を仮定する。力学的な拘束条件として、2.4.2 項で述べた仮定を用いて導出できる、次の角運動量保存則を用いる。

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_w(\boldsymbol{\theta}_C) = 0 \quad (4.1)$$

ただし  $\mathbf{J}$  は機体座標系における宇宙機の慣性テンソル、 $\boldsymbol{\omega}$  は機体座標系における機体角速度、 $\boldsymbol{\theta}_C = [\theta_{C1} \ \cdots \ \theta_{C4}]^T$  はジンバル角度行列、 $\mathbf{H}_w(\boldsymbol{\theta}_C)$  は CMG ホイールの角運動量の

機体座標系における表現であり、次式で表される。

$$\mathbf{H}_w(\boldsymbol{\theta}_C) = h_W \begin{bmatrix} -c\beta \sin \theta_{C1} - \cos \theta_{C2} + c\beta \sin \theta_{C3} + \cos \theta_{C4} \\ \cos \theta_{C1} - c\beta \sin \theta_{C2} - \cos \theta_{C3} + c\beta \sin \theta_{C4} \\ s\beta \sin \theta_{C1} + s\beta \sin \theta_{C2} + s\beta \sin \theta_{C3} + s\beta \sin \theta_{C4} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ここで  $s\beta = \sin\beta$ 、 $c\beta = \cos\beta$ 、 $h_W$  はホイールの角運動量であり、 $\theta_{Cl}$  は  $\boldsymbol{\theta}_C$  の  $l(= 1, 2, 3, 4)$  番目の成分を表す。

いま、初期姿勢において慣性座標系とメインボディ座標系が一致している状態から、目標オイラー軸  $\mathbf{e}_r$  回りに目標固有角  $\varphi_r (\neq 0)$  だけ回転する場合を考える。すると、初期姿勢  $\boldsymbol{\sigma}(0)$  と最終姿勢  $\boldsymbol{\sigma}(t_f)$  は次のように表現される。

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}(t_f) = \tan \frac{\varphi_r}{4} \mathbf{e}_r \quad (4.3)$$

Rest-to-rest マヌーバとするため、初期時刻 0 および終端時刻  $t_f$  において次の制約を与える。

$$\theta_{Cl}(0) = \theta_{Cl}(t_f) = 0 \quad (l = 1, \dots, 4) \quad (4.4)$$

初期・終端時刻においてメインボディが受けるトルクを 0 にするために次の拘束を設ける。

$$\dot{\theta}_{Cm}(0) = \dot{\theta}_{Cm}(t_f) = \ddot{\theta}_{Cm}(0) = \ddot{\theta}_{Cm}(t_f) = 0 \quad (m = 1, \dots, 4) \quad (4.5)$$

CMG ジンバルには角速度および角加速度の制限を与える。

$$|\dot{\theta}_{Cm}(t)| < \dot{\theta}_{C \max}, \quad |\ddot{\theta}_{Cm}(t)| < \ddot{\theta}_{C \max} \quad (m = 1, \dots, 4) \quad (4.6)$$

### 4.3.2 CPS 法による最短時間姿勢変更問題の定式化

MRP $\boldsymbol{\sigma}$ 、ジンバル角  $\boldsymbol{\theta}_C$  を次のように Chebyshev 展開する。

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \tan \frac{\varphi_r}{4} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{a}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.7)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{Cm} = \dot{\theta}_{C \max} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{c}_m \quad (m = 1, \dots, 4) \quad (4.8)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}_j = [\sigma_j(t_1) \cdots \sigma_j(t_N)]^T$ 、 $\boldsymbol{\theta}_{Cm} = [\theta_{Cm}(t_1) \cdots \theta_{Cm}(t_N)]^T$  は全て  $N \times 1$  行列であり、 $\mathbf{e}_j$  は  $\mathbf{e}_r$  の  $j$  番目の成分である。 $\mathbf{a}_j$ 、 $\mathbf{c}_m$  は全て  $S \times 1$  の行列であり、設計変数を並べたベクトルになっている。これらの時間微分は次のように解析的に求まる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_j = \frac{2 \tan(\varphi_r/4)}{t_f} \dot{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{a}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{Cm} = \frac{2}{t_f} \dot{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{c}_m, \quad \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{Cm} = \frac{4}{t_f^2} \ddot{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{c}_m \quad (m = 1, \dots, M) \quad (4.10)$$

式 (2.55) を式 (4.1) に代入することで、角運動量保存則が  $3N$  個の拘束条件として得られる。

$$\frac{4}{(1 + \sigma^2)^2} \mathbf{J}\mathbf{B}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{H}_w(\boldsymbol{\theta}_C) = 0 \quad (4.11)$$

初期・終端時刻における制約は次のように計 30 個である。

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{D}\mathbf{a}_j = 0, \quad \mathbf{C}_N \mathbf{D}\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 \mathbf{D}\mathbf{c}_m = 0, \quad \mathbf{C}_N \mathbf{D}\mathbf{c}_m = 0, \quad \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{D}}\mathbf{c}_m = 0, \quad \mathbf{C}_N \dot{\mathbf{D}}\mathbf{c}_m = 0, \quad \mathbf{C}_1 \ddot{\mathbf{D}}\mathbf{c}_m = 0, \quad \mathbf{C}_N \ddot{\mathbf{D}}\mathbf{c}_m = 0 \\ (m = 1, \dots, 4) \end{aligned} \quad (4.13)$$

CMG のジンバルモータおよび VSAC 関節の機械的な拘束は次のような計  $8(N - 2)$  個の拘束条件として表現される。

$$\left( \frac{2}{t_f} \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{D}}\mathbf{c}_m \right)^2 < 1 \quad (i = 2, \dots, N - 1) \quad (4.14)$$

$$\left( \frac{4}{t_f^2} \mathbf{C}_i \ddot{\mathbf{D}}\mathbf{c}_m \right)^2 < \left( \frac{\ddot{\theta}_{C \max}}{\dot{\theta}_{C \max}} \right)^2 \quad (i = 2, \dots, N - 1) \quad (4.15)$$

以上より、次のような最適化問題が定式化できる。

$$\text{minimize } t_f \quad \text{subject to Eqs. (4.11)–(4.15)} \quad (4.16)$$

拘束条件の数は  $11N + 14$  個である。

初期値の与え方について説明する。Chebyshev 展開係数  $\mathbf{c}_m$  の初期値は全て 0 とした。MRP の軌道は 3 次の多項式を用いて次のように設定した。

$$\boldsymbol{\sigma}_j(t) = p_{3j}t^3 + p_{2j}t^2 + p_{1j}t + p_{0j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.17)$$

係数  $p_{0j}$ 、 $p_{1j}$ 、 $p_{2j}$ 、 $p_{3j}$  は次の境界条件を満たすように決定する。

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}(t_f) = \tan \frac{\varphi_r}{4} \mathbf{e}_r, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t_f) = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

これらの条件を式 (4.17) とその時間微分に代入することで初期軌道が次のように得られる。

$$\boldsymbol{\sigma}_j(t) = -\frac{2e_j \tan(\varphi_r/4)}{t_f^3} t^3 + \frac{3e_j \tan(\varphi_r/4)}{t_f^2} t^2 \quad (4.19)$$

Chebyshev points  $t_i$  での値は次のように計算できる。

$$\boldsymbol{\sigma}_j(t_i) = -\frac{2e_j \tan(\varphi_r/4)}{t_N^3} t_i^3 + \frac{3e_j \tan(\varphi_r/4)}{t_N^2} t_i^2 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4.20)$$

Chebyshev 関数係数を並べた行列  $\mathbf{a}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) の初期値は、上式と式 (4.7) を用いて次のように計算できる。

$$\mathbf{a}_j = \frac{1}{\tan(\varphi_r/4)} \mathbf{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_j \quad (4.21)$$

終端時間の初期推定値は試行錯誤により設定した。

### 4.3.3 シミュレーション

前項で定式化した、ピラミッド配置の SGCMG 系における CPS 法を計算機上で解いて最短時間姿勢変更解を求めた。NLP のソルバには MATLAB に実装されている `fmincon` を、その中でも内点法を用いた。実行ケースは Case 1-3 の 3 ケースである。各ケースの目標オイラー軸  $\mathbf{e}_r$  は初期時刻におけるメインボディ固定座標系において表 4.2 のように表記される。表中の方位角、仰角は  $\mathbf{e}_r$  の方向を指す。シミュレーションパラメータは表 4.3 に示すとおりである。

表 4.2: 各ケースにおける目標オイラー軸  $\mathbf{e}_r$

Case	$\mathbf{e}_r$	備考
1	$\left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right]^T$	方位角 45 度、仰角 0 度
2	$\left[ 1 \quad 0 \quad 0 \right]^T$	方位角 0 度、仰角 0 度
3	$\left[ 0.9239 \quad 0.3827 \quad 0 \right]^T$	方位角 22.5 度、仰角 0 度

表 4.3: シミュレーションパラメータ

Parameter	Value
$\varphi$	90 [deg]
$\mathbf{J}$	diag (3.584, 3.584, 6.121) [kgm <sup>2</sup> ]
$h_W$	0.086 [Nms]
$\dot{\theta}_{C \max}$	1 [rad/s]
$\ddot{\theta}_{C \max}$	1 [rad/s <sup>2</sup> ]
$\beta$	$\tan^{-1} \sqrt{2}$ [rad]
$N$	30
$S$	30

計算によって得られた、Case 1-3 の最適解を図 4.4-4.6 に示す。Case 1、3 はジンバル



角度が一定となり、機体が一定角速度でほぼオイラー軸まわりに回転する「コースティング区間」が1回現れている。これは上野らの結果と一致する。Case 2はCMG4のジンバル角度が $t = 10$ 秒を過ぎたあたりから大きく変動しており、コースティング区間が2回現れている。終端時間におけるジンバル角度を0度に拘束しているために、上野らの結果と異なる解が求まったのだと思われる。以上の議論から、ジンバル角加速度に拘束があり、終端ジンバル角度が0度に固定されている場合においては、1回ないしは2回のコースティング区間が現れることが分かった。次節では、この区間の存在に着想を得た制御則を提案する。

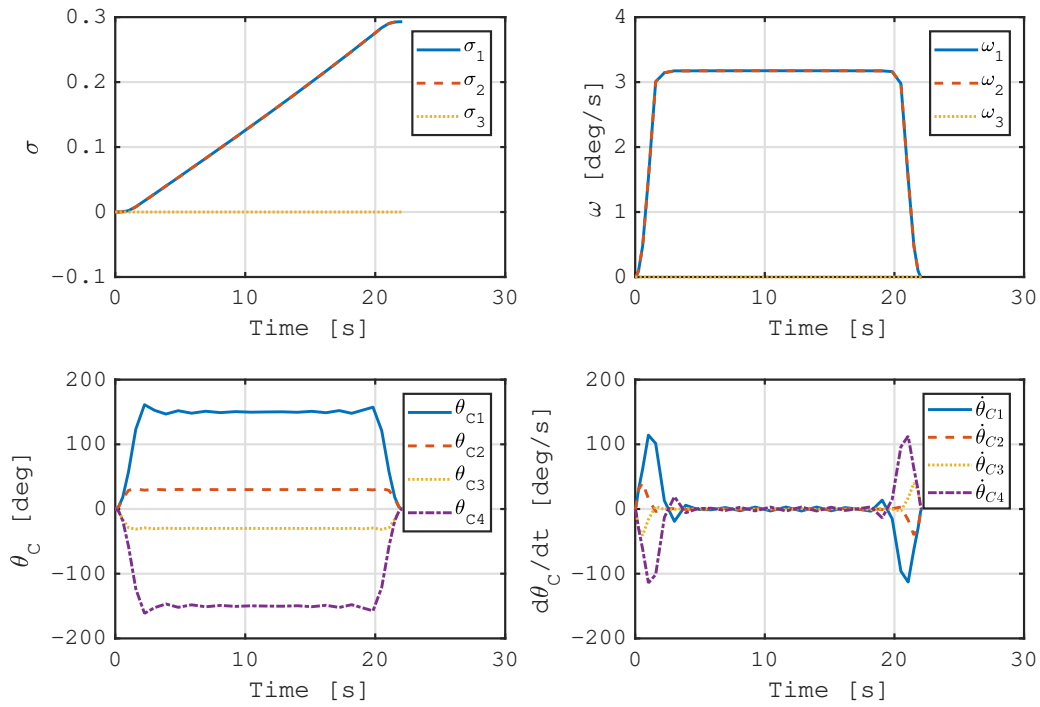


図 4.4: Case 1

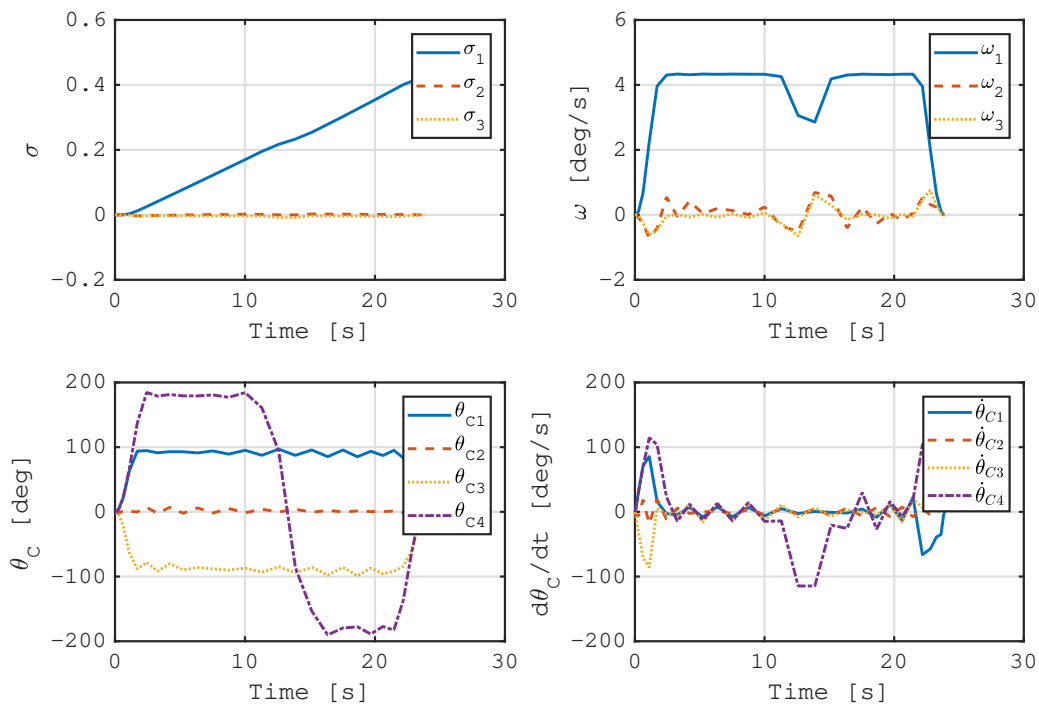


図 4.5: Case 2

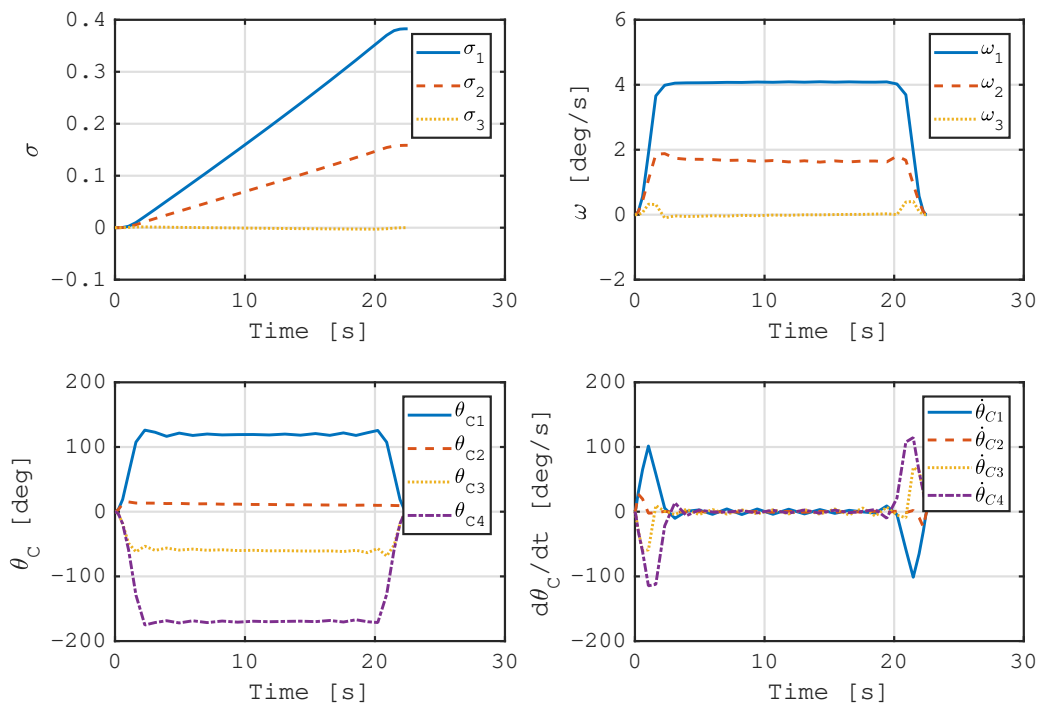


図 4.6: Case 3

## 4.4 最短時間姿勢変更解を模擬する低計算量の高速姿勢制御則の提案

### 4.4.1 提案手法

本手法は、 $n$  個の SGCMG を有するゼロモーメント宇宙機の大角度高速姿勢制御を対象とし、目標姿勢と現在姿勢から決まる目標オイラー軸  $\mathbf{e}$  および固有角  $\Phi$  からジンバル角度指令値を計算する。具体的には図 4.7 に示すような手順でジンバル角速度を制御する。まず、オイラー軸  $\mathbf{e}$  回りの角速度を最大化するジンバル角度の組  $\boldsymbol{\theta}_e = [\theta_{e1} \ \theta_{e2} \ \cdots \ \theta_{en}]^T$  を計算する。そしてジンバルを初期角度  $\boldsymbol{\theta}_0 = [\theta_{01} \ \theta_{02} \ \cdots \ \theta_{0n}]^T$  から  $\boldsymbol{\theta}_e$  まで以下の最大ジンバル角速度、角加速度に関する拘束を満たしつつ駆動する。

$$|\ddot{\theta}_i(t)| \leq a_m(\cdot) \quad (4.22)$$

$$|\dot{\theta}_i(t)| \leq v_m(\cdot) \quad (4.23)$$

するとコースティング区間の継続時間  $t_c$  が計算できるようになるので、 $t_c$  の間、ジンバルを停止させて宇宙機を一定角速度で回転させる。次にジンバル角を再度初期角度まで戻す。最後に、フィードバック制御を使うことで、以上までで生じた指向誤差を修正する。以上のように、本手法では高速姿勢変更問題を  $\boldsymbol{\theta}_e$  と  $t_c$  を求める問題に変換している。なお、この手法は Steyn によって提案された、RW 用高速姿勢変更制御の CMG 版とも位置づけることができる [52]。

それでは具体的にアルゴリズムを説明していく。前段落で定義した  $\boldsymbol{\theta}_e$  は次のように計算できる。CMG システムが  $\mathbf{e}$  回りに最大角速度  $\omega_{\max}$  で回転しているとき、両者の関係は正数  $k$  を用いて次のように表せる。

$$\omega_{\max} = k\mathbf{e} \quad (4.24)$$

ゼロモーメントを仮定しているため、機体角速度と CMG システムの角運動量は次の関係を持つ。

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}_c(\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (4.25)$$

上式に式 (4.24) を代入することで CMG システムが保有すべき角運動量が得られる。

$$\mathbf{h}_c(\boldsymbol{\theta}_e) = -k\mathbf{J}\mathbf{e} \quad (4.26)$$

したがって、 $\boldsymbol{\theta}_e$  は次のような最適化問題の解として計算される。

$$\boldsymbol{\theta}_e = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}} \mathbf{h}_c(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{h}_c(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{subject to} \quad \mathbf{h}_c^T(-\mathbf{J}\mathbf{e}) = \|\mathbf{h}_c\| - \mathbf{J}\mathbf{e} \quad (4.27)$$

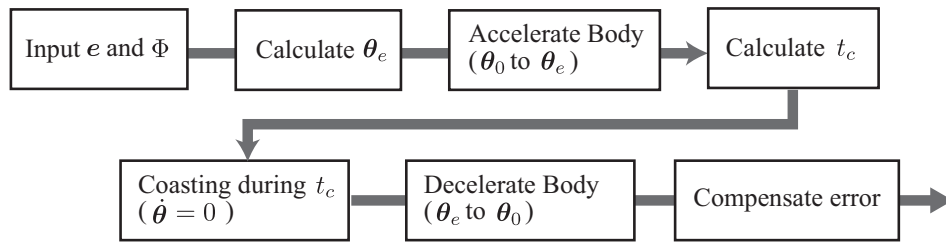


図 4.7: 制御シーケンス

ピラミッド型の 4SGCMG から成るシステムに対しては  $\theta_e$  を求める手法が提案されているが [38]、一般の CMG 配置に対しては上記の最適化問題を解く必要がある。最適化計算が本手法のうちで最も計算量が高い部分であるものの、例えば方位角、仰角を 10 度刻みで計算した全ての  $e$  に対する初期解をオフラインで求めておき、それを組み込み計算機に予めルックアップテーブルとしてインストールしておくことで高速化が可能だと考えられる。

$\theta_0$  から  $\theta_e$  への最適な経路を決定するのは、計算量の面で現実的でない。そこで、本手法では最短経路でジンバルを駆動する。角加速度と角速度が式 (4.22)、(4.23) のように制限されているため、 $i$  番目のジンバルの角速度の時間履歴は  $\Delta\theta_i (= \theta_{ei} - \theta_{0i})$  の値に基づいて図 4.8 のように三角形型か台形型となる。 $\Delta\theta_i < v_m^2/a_m$  の場合、CMGi への入力は次のような三角形型となる。

$$\dot{\theta}_i = \begin{cases} a_m t & (0 \leq t < t_{1i}) \\ -a_m(t - 2t_{1i}) & (t_{1i} \leq t < 2t_{1i}) \\ 0 & (2t_{1i} \leq t) \end{cases} \quad (4.28)$$

ここで  $t_{1i} = \sqrt{\Delta\theta_i/a_m}$  である。 $\Delta\theta_i \geq v_m^2/a_m$  に対しては次の台形制御が採用される。

$$\dot{\theta}_i = \begin{cases} a_m t & (0 \leq t < t_{1i}) \\ v_m & (t_{1i} \leq t < t_{1i} + t_{2i}) \\ -a_m(t - t_{1i} - t_{2i}) + v_m & (t_{1i} + t_{2i} \leq t < 2t_{1i} + t_{2i}) \\ 0 & (2t_{1i} + t_{2i} \leq t) \end{cases} \quad (4.29)$$

ただし  $t_{1i} = v_m/a_m$ 、 $t_{2i} = \Delta\theta_i/v_m - t_{1i}$  である。

全てのジンバルが  $\theta_e$  に到達した後、 $t_c$  間だけ入力ジンバル角速度をゼロとする。すなわち、ジンバル角度は維持されて、宇宙機は一定角速度  $\omega_c$  で回転する。なお、コースティング区間では機体角速度は機体座標系から見て時間変化しない。これを確認するため、外乱トルクゼロを仮定した、宇宙機システム全体の運動方程式を以下に示す。

$$\hat{J}_s \cdot \frac{B_d}{dt} \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\hat{J}_s \cdot \vec{\omega} + \vec{h}_c) + \frac{B_d}{dt} \vec{h}_c = 0 \quad (4.30)$$

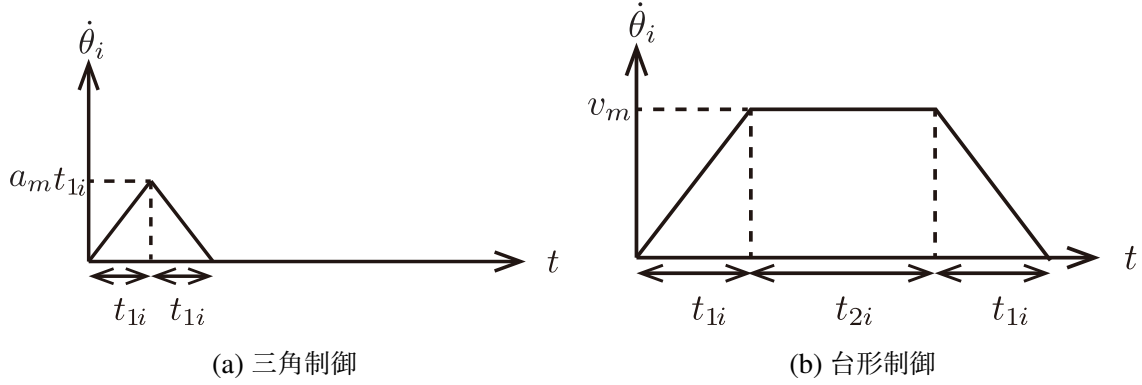


図 4.8: 機体加減速中のジンバル駆動方法

ここでゼロモーメント条件である式 (4.25) および、ジンバル角速度ゼロ ( $\frac{B}{d}\vec{h}_c = 0$ ) を考慮すると上式から確かに  $\frac{B}{d}\vec{\omega} = 0$  が導かれる。なお、 $\frac{N}{d}\vec{\omega} = \frac{B}{d}\vec{\omega}$  より慣性系でも角速度は一定である。

コースティングを行う時間  $t_c$  は以下の手順で計算できる。機体が常にオイラー軸  $\mathbf{e}$  回りに回転すると仮定すると、回転角度に関して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_{\text{acc}}+t_c+t_{\text{dec}}} (\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{e}) dt = \Phi \\
 \Leftrightarrow & \int_0^{t_{\text{acc}}} (\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{e}) dt + \int_{t_{\text{acc}}}^{t_{\text{acc}}+t_c} (\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{e}) dt + \int_{t_{\text{acc}}+t_c}^{t_{\text{acc}}+t_c+t_{\text{dec}}} (\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{e}) dt = \Phi \\
 \Leftrightarrow & \int_0^{t_{\text{acc}}} (\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{e}) dt + (\boldsymbol{\omega}_c^T \mathbf{e}) t_c + \int_{t_{\text{acc}}+t_c}^{t_{\text{acc}}+t_c+t_{\text{dec}}} (\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{e}) dt = \Phi \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

ただし  $t_{\text{acc}}$  は加速時間、 $t_{\text{dec}}$  は減速時間である。最後の式変形には、コースティング区間における機体角速度  $\boldsymbol{\omega}_c$  を用いた。もし加減速フェーズのどちらにおいても CMG が同じ角運動量の経路をたどるのであれば、両フェーズにおける回転角度は等しくなる。したがって、次の式が成り立つ。

$$\Phi_a + (\boldsymbol{\omega}_c \cdot \mathbf{e}) t_c + \Phi_a = \Phi \quad (4.32)$$

ここで  $\Phi_a$  は加減速フェーズにおける回転角度であって次のように数値的に計算される。

$$\Phi_a = \int_0^{t_{\text{acc}}} (\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{e}) dt \quad (4.33)$$

さらに、式 (4.25) から次式が得られる。

$$\boldsymbol{\omega}_c = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{h}_c(\boldsymbol{\theta}_e) \quad (4.34)$$

したがって、式 (4.32) より  $t_c$  が次のように計算できる。

$$t_c = -\frac{\Phi - 2\Phi_a}{\mathbf{J}^{-1} \mathbf{h}_c^T(\boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{e}} \quad (4.35)$$

$t_c$  間のコースティング後、減速を開始する。先に述べたように、加速時と同じ角運動量経路を通るようにジンバルを回転させる。以上の制御を用いた場合、一般には、 $e$  回りに常に回転する運動 (simple rotation) にはならないために減速後に指向誤差が生じる。そのため、減速後に B.3.1.1 項で述べる QF 制御器および B.3.2.1 項で述べる GSR-Inverse 駆動則を用いて誤差を補償する。

#### 4.4.2 シミュレーション

提案手法の妥当性と有用性を検証するために数値シミュレーションを行う。CMG システムは skew 角  $\beta$  の 4 基のピラミッド配置 (図 2.4) を想定する。支配方程式は式 (2.104) であり、外力トルクは無視した。パラメータを表 4.4 に示す。GSR 駆動則に用いる  $\lambda_0$ 、 $\varepsilon_i$ 、 $\mu$  の値は、CMG システムが特異点から脱出可能な値を事前のシミュレーションから求めて指定した。クォータニオン  $q$ 、機体角速度  $\omega$ 、ジンバル角度  $\theta$  の初期値は次のように指定した。

$$q(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \quad \omega(0) = [0 \ 0 \ 0]^T [\text{deg/s}], \quad \theta_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T [\text{deg}]$$

ジンバル角加速度と角速度は式 (4.22)、(4.23) のように制限されている。 $\theta_e$  は式 (4.27) を MATLAB に実装されている内点法によって解いた。固有角  $\Phi$ 、目標オイラー軸の仰角  $\psi$  と方位角  $\phi$  を次のように変化させて計 271 ケースのシミュレーションを行った。

$$\Phi : 45, 90, 180 [\text{deg}], \quad \psi : 0, 10, 20, \dots, 90 [\text{deg}], \quad \phi : 0, 10, 20, \dots, 90 [\text{deg}]$$

仰角が 90 度のとき方位角はオイラー軸に影響を及ぼさない。したがってそのような重複するケースは 1 シミュレーションしか行っていない。シミュレーションは Core i5-650 (クロック : 2.8 GHZ) を搭載した計算機で実行し、プログラムは MATLAB/Simulink で記述した上でアルゴリズムの計算速度を計測した。MATLAB はアルゴリズムの記述が容易というメリットがあるものの、スクリプト言語のため実行速度が遅く、組み込み機器の言語には適さない。このため、計算速度に関しては、他手法との相対値のみを議論するものとする。後述するように、定性的に考えて他手法と提案手法とでは計算量が大きく違うことから、概算した相対値が非常に小さくともその値は妥当であって、MATLAB 環境特有のものでないことに注意されたい。

シミュレーションを実行し、整定時間 (指向誤差が 1 度以下になるまでの時間) を評価した。統計量と分布をそれぞれ表 4.5 および図 4.9 に示す。図 4.9 の球面上の色は、目標オイラー軸  $e$  がその球面上の点を指した際の整定時間を示している。 $-90 \leq \psi < 0 \text{ deg}$  および  $90 < \phi < 360 \text{ deg}$  の範囲のオイラー軸は実行ケースに含まれていないが、CMG 配置の対称性を考慮して描画した。平均的なケースでは、姿勢変更中の平均角速度は 45 度、

表 4.4: シミュレーションパラメータ

Parameter	Value
$\mathbf{J}_s$	diag(1.82, 1.86, 1.95) [kgm <sup>2</sup> ]
$\beta$	$\tan^{-1} \sqrt{2}$ [rad]
$h_w$	0.0527 [Nms]
$v_m$	1.0 [rad/s]
$a_m$	0.7 [rad/s <sup>2</sup> ]
$\mathbf{K}_q$	$0.7\mathbf{J}_s$
$\mathbf{K}_\omega$	$1.0\mathbf{J}_s$
$\varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$	$0.01 \sin(2\pi t + (i - 1)/3)$
$\lambda_0$	$10^{-3}$
$\mu$	10
制御周期	$10^{-2}$ [s]

90 度、180 度マヌーバに対してそれぞれ 2.8 deg/s、3.7deg/s、4.7deg/s であることが表 4.5 から分かる。図 4.9 からは、180 度マヌーバの整定時間が外部特異面における CMG 角運動量 (図 4.10) に反比例していることが分かる。これは、整定時間に占めるコースティング時間  $t_c$  の割合が大きいく、更に  $t_c$  が式 (4.35) に示したように、次の関係性を有するためである。

$$t_c \propto \frac{1}{\mathbf{h}_c^T(\boldsymbol{\theta}_e)\mathbf{e}} \quad (4.36)$$

一方、45 度、90 度マヌーバにおけるコースティング時間は、整定時間全体の中でそれほど大きな割合を占めない。それゆえに 180 度マヌーバとは分布が異なっているのである。

表 4.5: 整定時間の統計値

$\Phi$ [deg]	Min. [s]	Mean [s]	Max. [s]
45	10.1	15.9	19.7
90	18.9	24.5	29.7
180	35.6	38.1	44.4

提案手法と従来のフィードバック則との間で整定時間を比較する。従来のフィードバック則には、QF と GSR を採用し、同様の条件でシミュレーションを行った。制御ゲインは

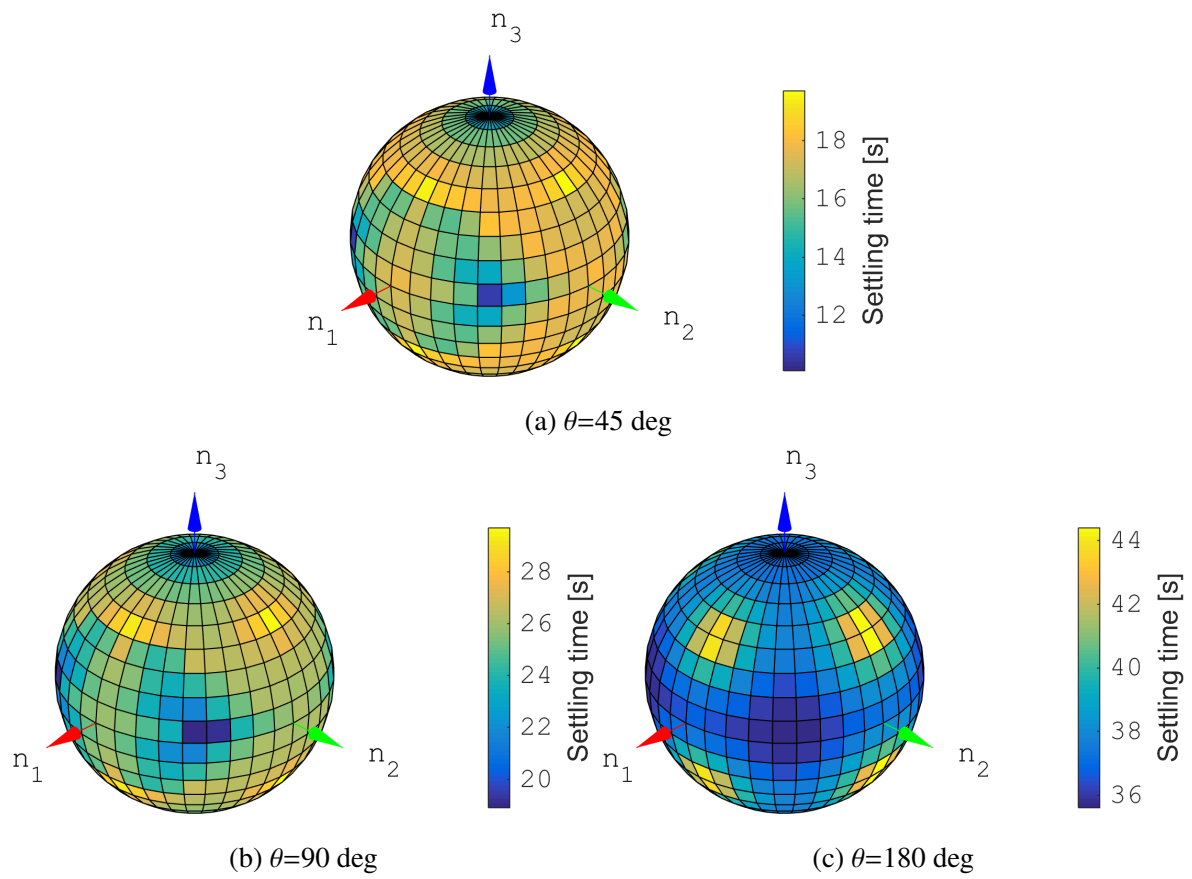


図 4.9: 整定時間の分布

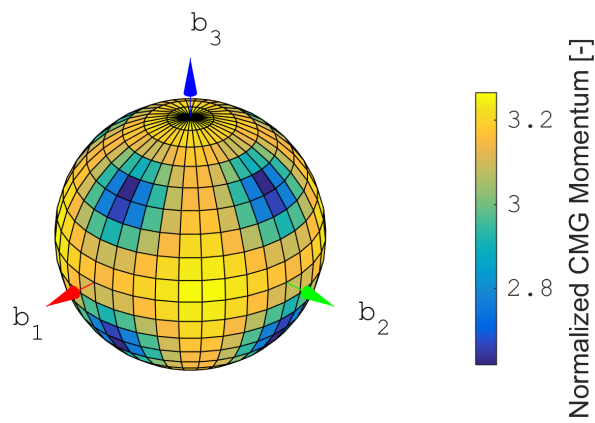


図 4.10: 外部特異面における正規化された CMG システムの角運動量



次のように設定した。

$$\mathbf{K}_q = 0.08\mathbf{J}_s, \quad \mathbf{K}_\omega = 0.4\mathbf{J}_s$$

GSR のパラメータは表 4.4 と同様である。マヌーバ角が 90 度の時の比較結果を図 4.11 に示す。図では、次式で表される整定時間の比をパーセント表示している。

$$\frac{t_{\text{pro}}}{t_{\text{fb}}} \quad (4.37)$$

ここで  $t_{\text{pro}}$  は提案手法の整定時間、 $t_{\text{fb}}$  は QF と GSR を用いた場合の整定時間である。提案手法によって整定時間を 60–80% にまで減少させられることが分かる。この結果は、提案手法が持つ 3 つの性質に起因する。1 つ目は、制御入力が典型的な最短時間解である bang-bang 解に近いこと、2 つ目は、機械的な拘束を考慮しつつ制御していることである。3 つ目は、トルクを効率的に出力できる CMG を適切に選択、駆動していることである。駆動される CMG に関して、慣性座標系 1 軸回り ( $\psi = 0 \text{ deg}$ 、 $\phi = 0 \text{ deg}$ ) のマヌーバを例にとって説明する。対象としているシステムに関して、CMG 角運動量のヤコビ行列  $\mathbf{A}$  は次のように表される。

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = h_w \begin{bmatrix} -c\beta \cos \theta_1 & \sin \theta_2 & c\beta \cos \theta_3 & -\sin \theta_4 \\ -\sin \theta_1 & -c\beta \cos \theta_2 & \sin \theta_3 & c\beta \cos \theta_4 \\ s\beta \cos \theta_1 & s\beta \cos \theta_2 & s\beta \cos \theta_3 & s\beta \cos \theta_4 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$\boldsymbol{\theta}_0 = 0$  を仮定すると、初期時刻におけるヤコビ行列は次のようになる。

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) = h_w \begin{bmatrix} -c\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & -c\beta & 0 & c\beta \\ s\beta & s\beta & s\beta & s\beta \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

このヤコビ行列と式 (B.73) を考慮すると、GSR 駆動則では CMG1 と CMG3 しか駆動されないことが分かる。一方、角速度を 1 軸回りに最大化するジンバル角の組は次のように与えられる。

$$\boldsymbol{\theta}_e = \left[ \frac{\pi}{2} \ 0 \ -\frac{\pi}{2} \ -\pi \right]^T [\text{rad}] \quad (4.40)$$

GSR とは異なり、提案手法では CMG4 が  $-\pi$  ラジアンまで駆動されることが分かる。このように、提案手法では従来のフィードバック則では駆動できなかった CMG を駆動することにより、効率的にトルクを発生、姿勢変更時間を短縮させられるのである。

朝霧らによって提案された準最短制御制御とも、同様の条件で整定時間および計算時間の比較を行った。この制御手法は、B.4 節で詳述する通り、ジンバル角加速度をパラメータとして姿勢軌道を設計する手法である [40]。提案手法の計算時間は  $\boldsymbol{\theta}_e$  を求める最適化計算の時間であり、準最短時間制御では、制御入力の時間履歴が決定されるまでの時間で

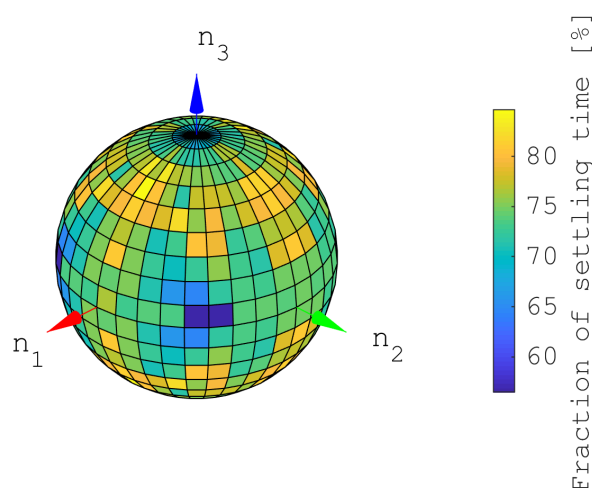


図 4.11: 提案手法と従来のフィードバック則間の整定時間の比

ある。提案手法におけるマヌーバ中の計算負荷は小さいと考えられるので、その計算時間は示さない。準最短時間制御では制約を満たす解を得るため、制御入力の世界履歴全体を最適化している。一方、提案手法では大角度高速マヌーバに関する知識、すなわち **simple rotation** を利用しているために目標オイラー軸  $e$  回りの角速度を最大化するジンバル角度の組を求めるだけでよい。そのため、提案手法の計算量は準最短時間制御のそれよりも十分に小さいと考えられ、概算した計算速度の相対値が非常に小さくともその値は妥当であり、MATLAB 環境が結果に大きく影響しているわけではないことを明記しておく。90 度マヌーバにおける比較結果を図 4.12 に示す。整定時間の比率は先ほどと同様に、準最短時間制御の整定時間を提案手法のそれで割った値である。図 4.12a が整定時間の比率を、図 4.12b が計算時間の比較を示している。仰角  $\psi = 90$  度（図からは見えづらいが）、 $\psi = 45$  度、 $\psi = 0$  度するときのみ提案手法の整定時間が、準最短時間制御のそれを下回っていることが図 4.12a から分かる。これは、提案手法によって行われたマヌーバが、準最短時間制御のそれよりも最短時間姿勢変更解に近いことを意味している。整定時間の比率が多くのケースで 100% を超えており、最大では 132% に達しているが、図 4.12b から明らかのように、計算速度は準最短時間制御の 0.67% となっている。言語や実装によって計算速度は変動し得るため、定量的には評価しづらいが、計算量も低減していることは明らかである。したがって、低計算量と高速姿勢制御が提案手法によって両立できるということを示すことができた。

次に減速フェーズ終了後の誤差角度について考察してみる。誤差角は図 4.13 に示すとおりであり、固有角の増加に応じて指向誤差が減少していることが分かる。45 度マヌーバでは誤差は 9 度に達するのに比して、180 度マヌーバでは 1 度以下に抑えられている。したがって、提案手法は大角度姿勢変更に対して特に有効であることが示された。

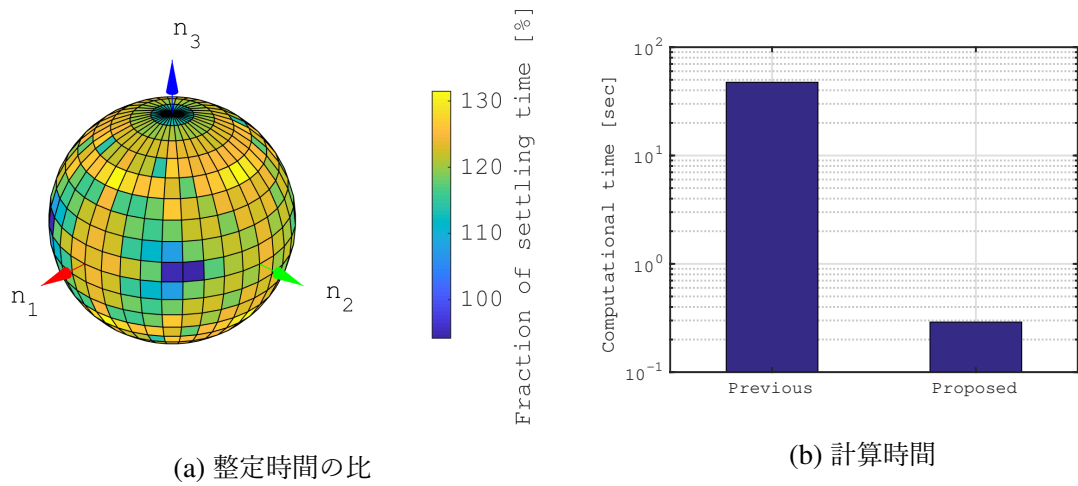


図 4.12: 準最短時間制御と提案手法との比較

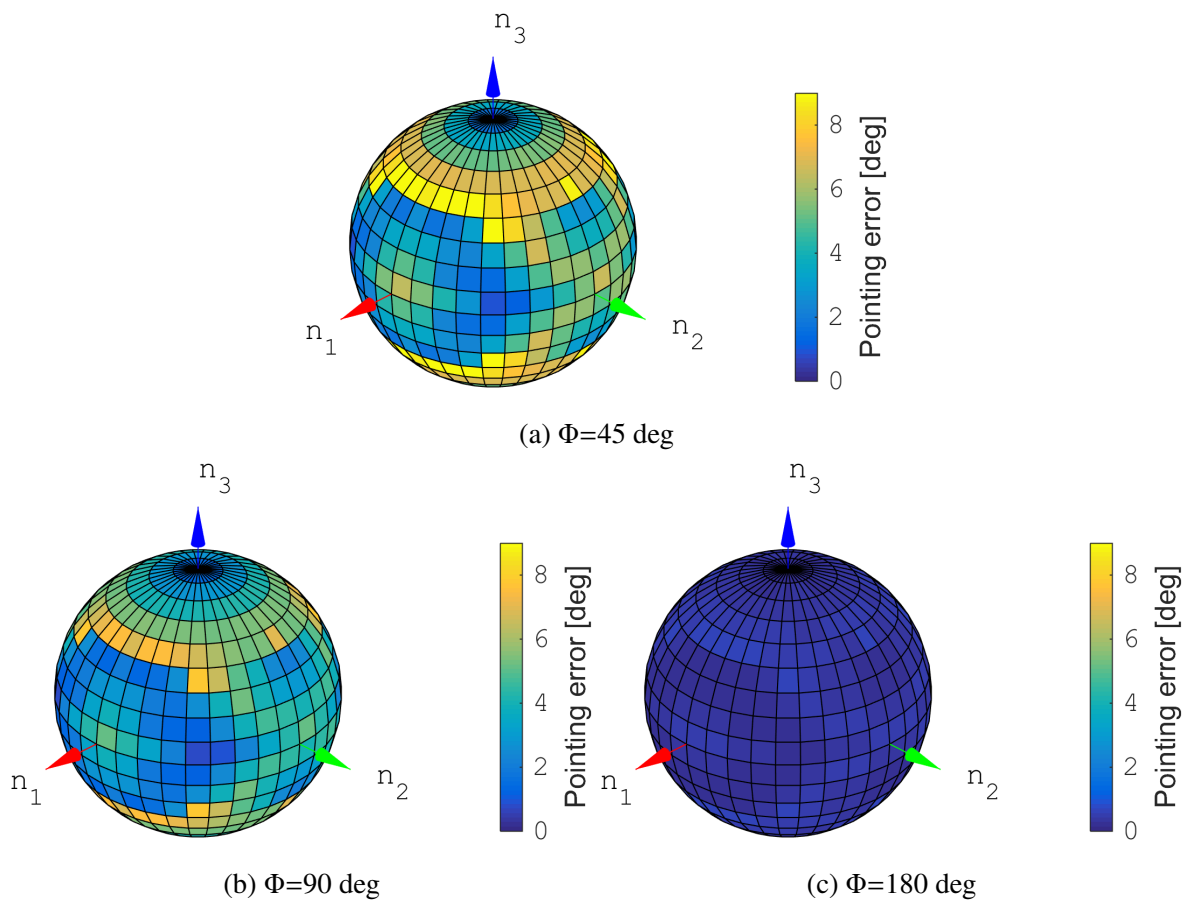
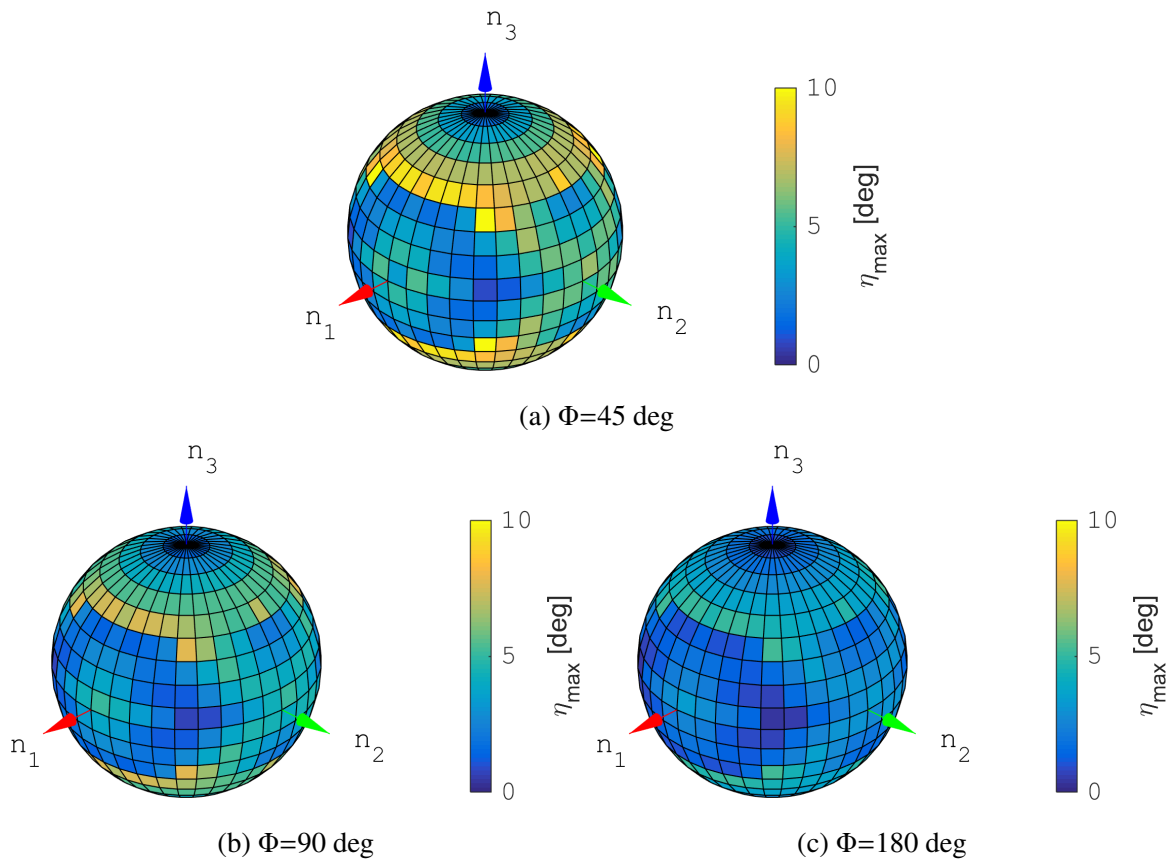
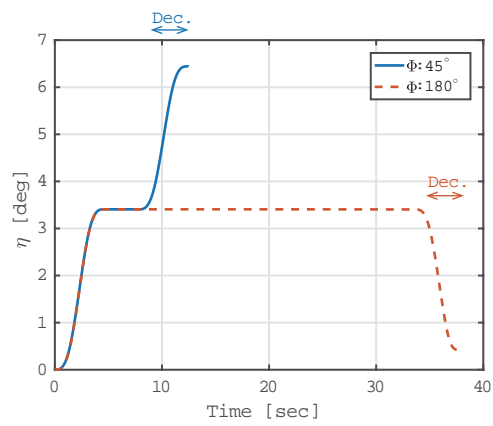


図 4.13: 減速フェーズ終了後の指向誤差

この指向誤差は、コースティング時間を求めるときに想定した仮定が成り立っていないことに起因する。すなわち、実際には、必ずしも常に目標オイラー軸  $e$  回りに機体が回転しているわけではないということである。目標オイラー軸  $e$  回りの simple rotation かどうかを定量的に評価するために、慣性座標系に固定された目標オイラー軸  $e$  と機体固定座標系に固定された目標オイラー軸  $e_b$  がなす角  $\eta$  を評価することにする。 $e_b$  は初期時刻で  $e$  と一致しており、もし機体が  $e$  以外の軸回りに回転すると  $e$  と一致しなくなる。したがって、これらのなす角度  $\eta$  は、simple rotation の成立性を定量的に評価できる指標となっている。

姿勢変更中の最大の  $\eta$  である  $\eta_{\max}$  を図 4.14 に示す。固有角度  $\Phi$  が大きくなるにつれ、 $\eta_{\max}$  が減少している、すなわち simple rotation への近似精度が高まっていることが分かる。固有角度の  $\eta$  への影響をさらに解析するため、慣性座標系 1 軸回り ( $\psi = 0 \text{ deg}$ ,  $\phi = 0 \text{ deg}$ ) のマヌーバにおける  $\eta$  の時間履歴を図 4.15 に示す。時間履歴の傾向は、コースティング区間 ( $\Phi = 45 \text{ 度}$  では 4 秒、 $\Phi = 180 \text{ 度}$  では 35 秒) までは同様であって、その後の減速フェーズにおいて異なる。 $\Phi = 45 \text{ 度}$  では  $\eta$  が増加しているのに対して、 $\Phi = 180 \text{ 度}$  では減少している。この違いを説明するために、この 180 度マヌーバにおける角速度の時間履歴を図 4.16 に示す。機体座標系における成分を図 4.16a に、慣性座標系における成分を図 4.16b に示した。ただし、誤差補償フェーズ中の時間履歴は載せていない。 $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は角速度の  $i$  軸回りの成分を示しており、図 4.16b においては  $\omega_1$  が回転軸回りの角速度を、その他二つが誤差を生み出す角速度 (誤差角速度と呼称) を表している。加速フェーズ、減速フェーズでは、CMG の角運動量経路が等しくなるようにジンバルが駆動されるために、両フェーズにおける機体角速度の軌道は機体座標系で見れば一致していることが分かる。注目すべきは、図 4.16b において加速フェーズ中の誤差角速度  ${}^N\omega_2$ ,  ${}^N\omega_3$  が、減速フェーズにおいて補償されていることである。これは、減速フェーズの開始時において機体がほぼ 180 度回転しており、機体座標系の二軸、三軸が慣性座標系のそれらとは逆方向を向いているからである。一方、45 度などのマヌーバでは、減速中の誤差角速度が加速中とほぼ同じ方向を指向しているために  $\eta$  が増加するのである。以上の議論から、固有角  $\Phi$  の増加に伴い、機体の回転が simple rotation によく近似できるようになるメカニズムを理解できた。

最後に、指向精度に影響を及ぼすパラメータ  $J_s$ ,  $h_w$ ,  $v_m$ ,  $a_m$  について定性的に述べる。最初の 2 つは加減速フェーズ中の姿勢変更角度と関係がある。 $J_s$  が大きい場合、あるいは  $h_w$  が小さい場合には両フェーズにおいて姿勢変更角度が小さくなり、 $\eta$  の時間増加率が小さくなることから、指向誤差の低減をもたらす。残り 2 つのパラメータは、両フェーズの継続時間に関係がある。これらの値が大きい場合には、両フェーズはより短時間で終了するようになり、したがって  $\eta_{\max}$  も減少し、指向誤差も低下する。

図 4.14:  $\eta_{\max}$  の分布図 4.15: 慣性座標系一軸回りのマヌーバにおける  $\eta$

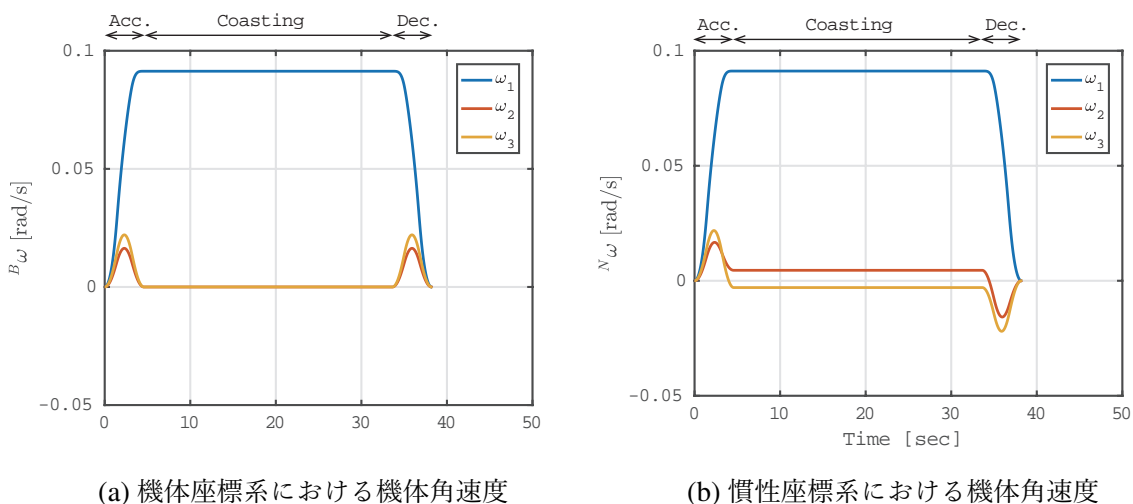


図 4.16: 180 度マヌーバにおける機体角速度

## 4.5 結言

本章では、まず、TSUBAME に搭載された小型 SGCMG を例に取り、最大ジンバル角速度・角加速度という機械的な拘束条件を CMG が有することを示し、これらを考慮することでより実践的な制御則が提案可能なことを述べた。次に、それらの拘束と終端ジンバル角度に拘束を与えた上でピラミッド型 SGCMG システムに対する最短時間解を導き、姿勢変更中にコースティング区間が 1 回または 2 回現れることを示した。そして、コースティング区間が 1 回のみ現れる際の最短時間解を、同区間に着目して模擬することにより、SGCMG を用いた低計算量の高速度姿勢制御手法を提案した。模擬に際してはまず、運動学的一种である角運動量保存則を使い、目標オイラー軸回りに回転が行える CMG 角運動量を決定した。そして、その CMG 角運動量を出力できるジンバル角度の組および、コースティングの継続時間を導出し、これらの値を使用してコースティング区間が存在する最短時間解を低計算量で模擬した。提案手法の有用性は数値シミュレーションによって示され、クォータニオンフィードバックと GSR 駆動則を用いた場合と比して、整定時間を 6–8 割にまで短縮できることを明らかにした。準最短時間制御との比較では整定時間は最大で 3 割増となってしまうものの、計算時間は概算で 100 分の 1 にまで抑えられることを示した。



## 第 5 章

# 形状可変機構と SGCMG を併用した角運動量保存則に基づく姿勢制御

### 5.1 緒言

VSAC は太陽電池パドルなどの構造を回転させ、その反トルクを利用するという姿勢変更方式であり、他構造との接触をさけるために VSAC の関節角度には多くの場合制限が設けられている。例えば、図 1.13 に示す「ひばり」衛星では 4 つのモータそれぞれに対して  $\pm 90$  度の駆動制限が課せられている。これは、VSAC のみで構成された姿勢制御系の高速マヌーバにおける姿勢変更角度が制限されることを意味する。そこで、本章では VSAC と SGCMG から成る新たなシステムのフィードバック制御および最短時間制御を行うフィードフォワード制御を提案する。これにより、どのような姿勢変更角度のマヌーバであっても高速に姿勢制御を実行することができる。

本章ではまず、角運動量を時間微分することで、VSAC+SGCMG 系のフィードバック則を導出する。この制御入力を求めるには逆行列計算が必要となり、CMG 単体系と同様に特異点問題が生じるが、これにはジッター項により対処する。次に、Chebyshev 関数系を用いた擬スペクトル法により最短時間姿勢変更問題を解き、フィードフォワード入力を求める。さらに、最短時間解の解構造の解明およびシステムの有用性の評価も行う。最適制御計算においては、力学的な拘束条件として角運動量保存則のみを課すことで、計算コストの低下やロバスト性の向上を図っている。



## 5.2 フィードバック制御

### 5.2.1 提案手法

形状可変機構および複数の SGCMG が搭載された宇宙機システムを対象とし、所与の目標トルク  $\mathbf{T}_r$  を出力可能な、VSAC の関節角加速度および CMG のジンバル角速度を導出することを目指す。CMG のホイールやジンバルも関節とみなし、宇宙機は全  $N$  個の関節を有するものとする。このうち  $L$  個が VSAC で駆動される関節、 $2M$  個がホイールとジンバルをあわせた関節 (CMG は  $M$  個) とする。すると、宇宙機の質量中心回りの相対角運動量  $\mathbf{L}_g$  はメインボディ (ボディ 0) の角速度  $\boldsymbol{\omega}$  および関節角速度を用いてメインボディ固定座標系において次のように厳密に記述できる (付録 A)。

$$\mathbf{L}_g = \mathbf{H}_\omega(\boldsymbol{\theta}_V, \boldsymbol{\theta}_C)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_{\theta_V}(\boldsymbol{\theta}_V)\dot{\boldsymbol{\theta}}_V + \mathbf{H}_{\theta_C}(\boldsymbol{\theta}_C)\dot{\boldsymbol{\theta}}_C + \mathbf{H}_\Omega(\boldsymbol{\theta}_C)\boldsymbol{\Omega} \quad (5.1)$$

$\dot{\boldsymbol{\theta}}_V = [\dot{\theta}_{V1} \cdots \dot{\theta}_{VL}]^T$  は VSAC で姿勢制御を行う関節の回転速度を表す  $L \times 1$  行列、 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_C = [\dot{\theta}_{C1} \cdots \dot{\theta}_{CM}]^T$  および  $\boldsymbol{\Omega} = [\dot{\Omega}_1 \cdots \dot{\Omega}_M]^T$  は CMG のジンバルレートおよびホイールレートを表す  $M \times 1$  行列である。 $\mathbf{H}_\omega$ 、 $\mathbf{H}_{\theta_V}$ 、 $\mathbf{H}_{\theta_C}$ 、 $\mathbf{H}_\Omega$  は各ボディの慣性テンソルなどから計算される行列であり、それぞれ  $3 \times 3$ 、 $3 \times L$ 、 $3 \times M$ 、 $3 \times M$  行列である。ここで、CMG の角運動量に関して 2.4.2 項で述べた次の仮定をおく。

1. ジンバルの慣性テンソルは微小
2.  $\boldsymbol{\Omega} \gg \boldsymbol{\omega}^{G/N}$  であるため、ホイールの角運動量に対する  $\boldsymbol{\omega}^{G/N}$  の寄与は無視できる

これらは次の式として表現できる。

$$\mathbf{H}_{\theta_C}(\boldsymbol{\theta}_C)\dot{\boldsymbol{\theta}}_C = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_\omega(\boldsymbol{\theta}_V, \boldsymbol{\theta}_C) = \mathbf{H}_\omega(\boldsymbol{\theta}_V) \quad (5.2)$$

以上の仮定のもと、式 (5.1) は次のように式変形できる。

$$\mathbf{L}_g = \mathbf{H}_\omega(\boldsymbol{\theta}_V)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_{\theta_V}(\boldsymbol{\theta}_V)\dot{\boldsymbol{\theta}}_V + \mathbf{H}_\Omega(\boldsymbol{\theta}_C)\boldsymbol{\Omega} \quad (5.3)$$

先行研究においては VSAC と RW を組合せたシステムまでが検討されていた。これらのアクチュエータはモータ角速度の変化によって角運動量を変化させるものであるため、上式をそのまま用いることで目標角速度を出力するモータ角速度が容易に導出できる。一方、SGCMG の角運動量は、ジンバル角の関数として表される点が異なっている。上式においても、 $\mathbf{H}_\Omega$  がジンバル角行列  $\boldsymbol{\theta}_C$  に関して線型であったならば既存研究と同様に解くことができた。しかし、CMG システムの角運動量がジンバル角に関して非線型となるのは式 (2.100) などから明らかである。そこで、角運動量を微分し、CMG のジンバル角に関して線型な項を式中に現すことを試みる。ただし、 $\mathbf{H}_\omega$  および  $\mathbf{H}_{\theta_V}$  の時間変化は微小

であって無視できるという仮定をおく。すると、式 (5.3) のメインボディ固定座標系における時間微分は次のように表される。

$$\dot{\mathbf{L}}_g = \mathbf{H}_\omega \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{H}_{\theta_V} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_V + \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}}_C \quad (5.4)$$

ここで  $\mathbf{A}$  は CMG の角運動量  $\mathbf{H}_{\theta\Omega}\boldsymbol{\Omega}$  の  $\boldsymbol{\theta}_V$  に関するヤコビ行列である。外乱トルクが無視できるときには慣性座標系におけるシステムの全角運動量の時間微分はゼロとなるから、メインボディ固定座標系での微分  $\dot{\mathbf{L}}_g$  の関係に関して次式が成立する。

$$\dot{\mathbf{L}}_g = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{L}_g \quad (5.5)$$

また、式 (5.3) の右辺第一項の慣性系における時間微分を、 $\mathbf{T}_r$  だけ変化させて機体を制御することを考えた場合、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_r &= \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\omega} \right\}_N \\ \mathbf{T}_r &= \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\omega} \right\}_B + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (5.6)$$

したがって、式 (5.4) は次のように表すことができる。

$$-\tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{L}_g = \mathbf{T}_r - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_{\theta_V} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_V + \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}}_C \quad (5.7)$$

上式を  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_V$  および  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_C$  に関して整理することで、目標 VSAC 関節角加速度およびジンバル角速度が以下のように導出できる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_V \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_C \end{bmatrix} = -\mathbf{H}_{VC}^+ \left\{ \mathbf{T}_r + \tilde{\boldsymbol{\omega}} (\mathbf{L}_g - \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\omega}) \right\} \quad (5.8)$$

ここで  $\mathbf{H}_{VC}^+$  は特異点対策を施した  $\mathbf{H}_{VC} = [\mathbf{H}_{\theta_V} \mathbf{A}]$  の重み付き擬似逆行列であり、次のように定義される。

$$\mathbf{H}_{VC}^+ = \mathbf{W}^{-1} [\mathbf{H}_{VC} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H}_{VC}^T + \lambda \mathbf{E}]^{-1} \quad (5.9)$$

B.3.2.1 項で説明する GSR と同様に  $\lambda \mathbf{E}$  はジッター項であり、次のように定義される。

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \lambda_0 \exp[-\mu \det(\mathbf{H}_{VC} \mathbf{H}_{VC}^T)] \quad (5.10)$$

$\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )、 $\lambda_0$ 、 $\mu$  は適切に設定されるべきパラメータである。

重み  $\mathbf{W}$  を考慮した擬似逆行列を用いた理由は、CMG よりも圧倒的に大きいトルクを、VSAC は低角速度で出力できるためである。なお、ゼロモーメント制御を行う宇宙機の場合は以下のように更に簡略化できる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_V \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_C \end{bmatrix} = -\mathbf{H}_{VC}^+ (\mathbf{T}_r - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\omega}) \quad (5.11)$$

### 5.2.2 シミュレーション

前節で提案した駆動則の妥当性と有用性の確認のため、姿勢制御シミュレーションを行った。支配方程式は式 (5.3) であり、全角運動量は零とし、外力トルクは無視した。宇宙機システムとして「ひばり」[43] へ RW の代わりに  $M = 4$  基のピラミッド型 CMG を搭載したものを想定し、表 5.1 のパラメータを用いた。宇宙機の概念図を図 5.1 に示す。図は  $\theta_V = 0$  の状態を表している。ボディ 0 がメインボディ、ボディ  $2i - 1$  がロッド、ボディ  $2i$  が太陽電池パドルである ( $i = 1, 2, 3, 4$ )。各ロッド固定座標系、パネル固定座標系の +Y 方向は、宇宙機中心からロッドの長手方向を指す方向であり、+Z 方向はボディ 0 の +Z 方向に一致する。+X 方向は右手系から決定する。関節角度は各ボディ座標系における +X 軸回りの回転方向を正とする。CMG のパラメータは表 5.2 に示すとおりである。関節数  $N$ 、VSAC で駆動される関節  $L$  および CMG のホイールとジンバルをあわせた関節数  $2M$  は次に示すとおりである。

$$N = 16, \quad L = 4, \quad 2M = 8 \quad (5.12)$$

駆動しない関節はロッドとパネル間の 4 つである。CMG のホイール、ジンバルの質量中心は、メインボディの質量中心と常に一致するものとした。クォータニオンの初期値  $q(0)$  および VSAC で駆動される関節の初期角度  $\theta_V(0)$  は次のように設定した。

$$q(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \quad \theta_V(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

VSAC の関節は  $\pm 90$  度まで回転可能とした。制御トルク  $T_r$  の計算にはクォータニオンフィードバック則を用い、パラメータは次のように設定した。

$$K_q = 0.1I_{3 \times 3}, \quad K_\omega = 0.8I_{3 \times 3}$$

$H_{VC}$  の重み付け擬似逆行列に対する重みは、ヒンジが  $10^4$ 、CMG のジンバルが 1 となるように重み  $W$  を次のように設定した。

$$W = \text{diag}(10^4, 10^4, 10^4, 10^4, 1, 1, 1, 1)$$

試行錯誤の結果、特異点回避のパラメータは表 5.3 のとおりに設定した。宇宙機は目標オイラー軸  $e$  回りに  $\Phi$  だけ姿勢変更を行うものとし、全 5 ケースのパラメータは表 5.4 に示すとおりである。Case 4、5 は初期状態において CMG システムの特異点に陥っているケースである。Case 5 は VSAC と CMG から成るシステムとしての特異点にも陥っているケースであり、初期状態において  $\det(H_{VC}H_{VC}^T) = 0$  であって  $H_{VC}$  は逆行列を持たない。

シミュレーション結果を図 5.2–5.6 に示す。図中の Error angle は現在の姿勢と最終姿勢の間のオイラー軸回りの角度を表しており、エラークォータニオンの 4 成分目  $q_{\text{err}4}$  を

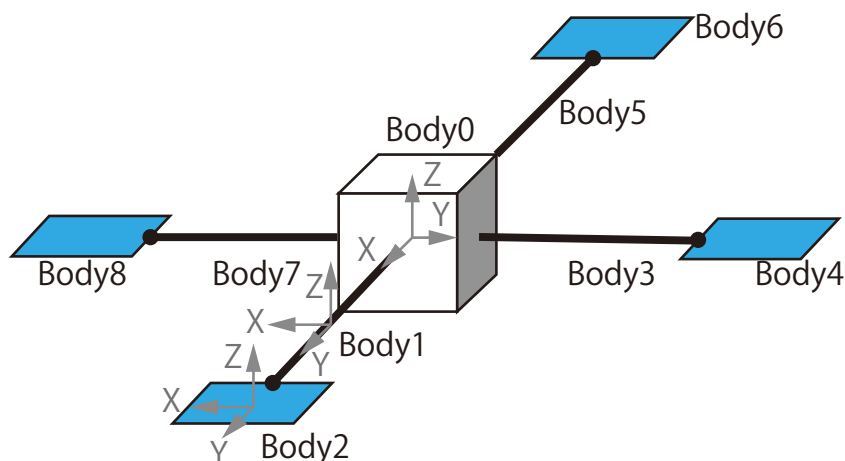
図 5.1: 宇宙機システムと各ボディの座標系 ( $\theta_V = \mathbf{0}$ )

表 5.1: 宇宙機のパラメータ

	メインボディ	ロッド	パドル
形状	1 辺 $d_0$ の立方体 $d_0 = 0.43[\text{m}]$	長さ $d_1$ 、線密度 $\rho$ の棒 $d_1 = 0.4[\text{m}], \rho = 3.125[\text{kg/m}]$	1 辺 $d_2$ の四角形の板 $d_2 = 0.4[\text{m}]$
質量	$m_0 = 34[\text{kg}]$	$m_1 = \rho d_1 = 1.25[\text{kg}]$	$m_2 = 1.5[\text{kg}]$
慣性テンソル	$\frac{1}{6}m_0d_0^2 \times \text{diag}(1, 1, 1)$	$\frac{1}{12}m_1d_1^2 \times \text{diag}(1, 0, 1)$	$\frac{1}{12}m_2d_2^2 \times \text{diag}(1, 1, 2)$

表 5.2: CMG のパラメータ

Parameter	Value
ホイール慣性テンソル	$209.67 \times 10^{-7} \times \text{diag}(1, 0.5, 0.5) [\text{kgm}^2]$
ホイール回転数	24000 [rpm]
ジンバル慣性テンソル	0 [ $\text{kgm}^2$ ]
skew 角	$\tan^{-1} \sqrt{2} [\text{rad}]$

用いて次のように計算できる。

$$2 \cos^{-1} q_{\text{err}4} \quad (5.13)$$

$\det(\mathbf{H}_{VC} \mathbf{H}_{VC}^T)$  は Condition number と呼ばれる値であり、これがゼロに近いほど VSAC と CMG からなるシステムが特異点に近いことを表す。

Case 1 はシステムの特異点に陥ることなく、かつヒンジも 90 度まで回転しておらず、理想的なマヌーバができています。ただし、どちらもシミュレーション終了時にジンバル角度  $\theta_C$  および VSAC 関節角度  $\theta_V$  が 0 度に戻っておらず、連続マヌーバが必要な場合は好

表 5.3: 特異点回避のパラメータ

Parameter	Value
$\varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$	$0.01 \sin(2\pi t + (i - 1)/3)$
$\lambda_0$	$10^{-5}$
$\mu$	$10^5$

表 5.4: 各ケースのパラメータ

Case	マヌーバ軸 $e$		マヌーバ角度 $\Phi$ [deg]	初期ジンバル角度 [deg]
	方位角 [deg]	仰角 [deg]		
1	90	0	40	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
2	90	0	90	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
3	30	30	40	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
4	30	80	40	$[60 \ -10.9 \ 60 \ -10.9]^T$
5	30	30	40	$[90 \ -90 \ 90 \ -90]^T$

ましくない。Case 2 はシミュレーション開始後約 16 秒で VSAC 関節角が 90 度に達した結果、角速度が急激に低下しているものの、マヌーバ自体には成功しており問題はない。Case 4 は初期状態で CMG の特異点に達しているが、システムとしては特異状態でなく、制御は正常に行えている。初期時刻でジンバル角速度が -100 deg/s 程度まで達している理由は、VSAC の特異方向である +Z 軸方向へ CMG のみでトルクを出力しているためである。Case 5 は初期状態における Condition number がほぼゼロであり、特異点回避の方策を導入しない場合、駆動則の計算が発散する。本シミュレーションでも CMG のジンバルレートが瞬間的に大きくなってはいるものの、ジッター項の効果によって特異点からの脱出に成功し、誤差姿勢角も 0 度へ収束している。以上の結果から、パラメータを適切に選べば本駆動則によって特異点から脱出可能であることが分かった。

ただ、現在の駆動則では、VSAC 関節への入力回転角度の制限を逸脱する場合の考慮ができていない。実際、Case 2 や Case 5 では違反が起こっており、制御性が著しく低下している。この問題に対しては、GSR など通常の駆動則へ制御を切り替えることで対処が可能であると考えられる。

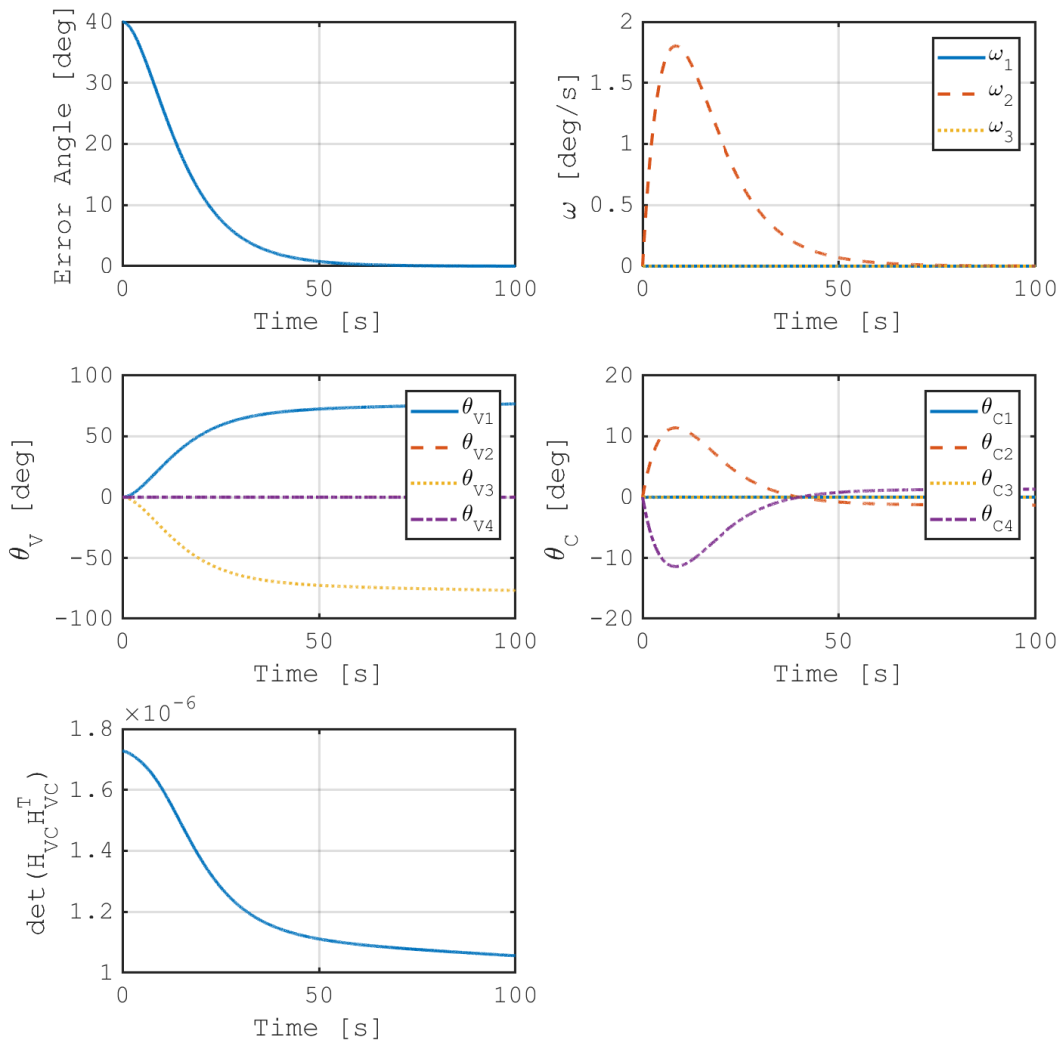


図 5.2: Case 1

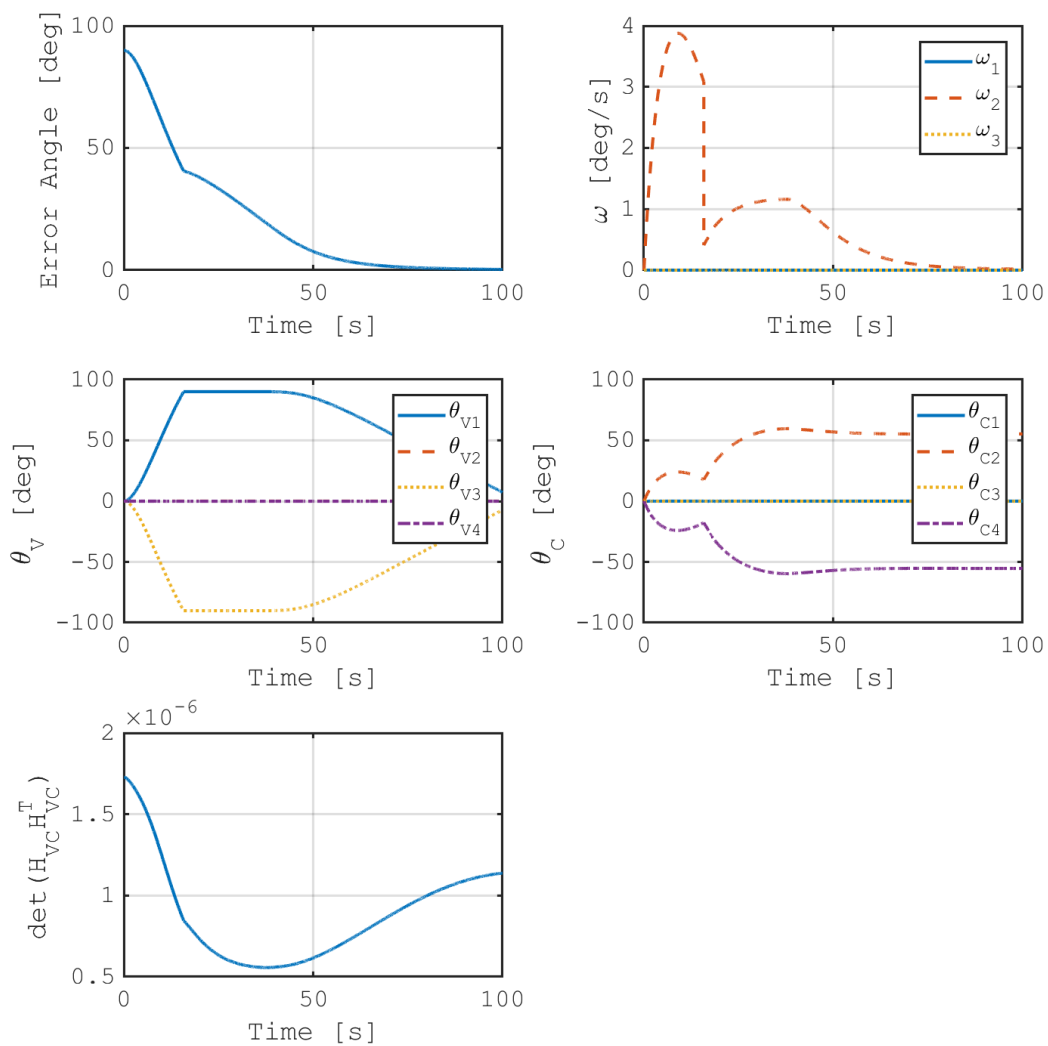


図 5.3: Case 2

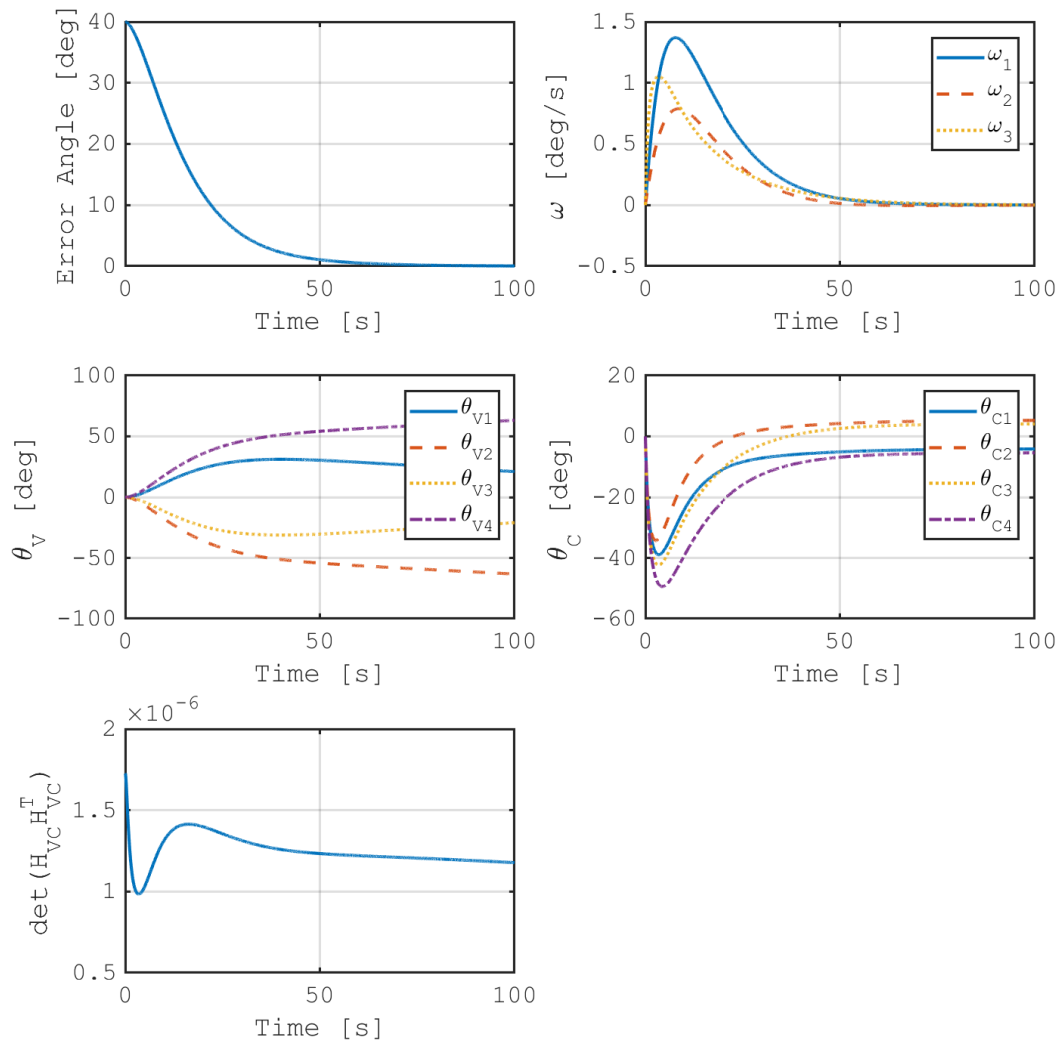


図 5.4: Case 3



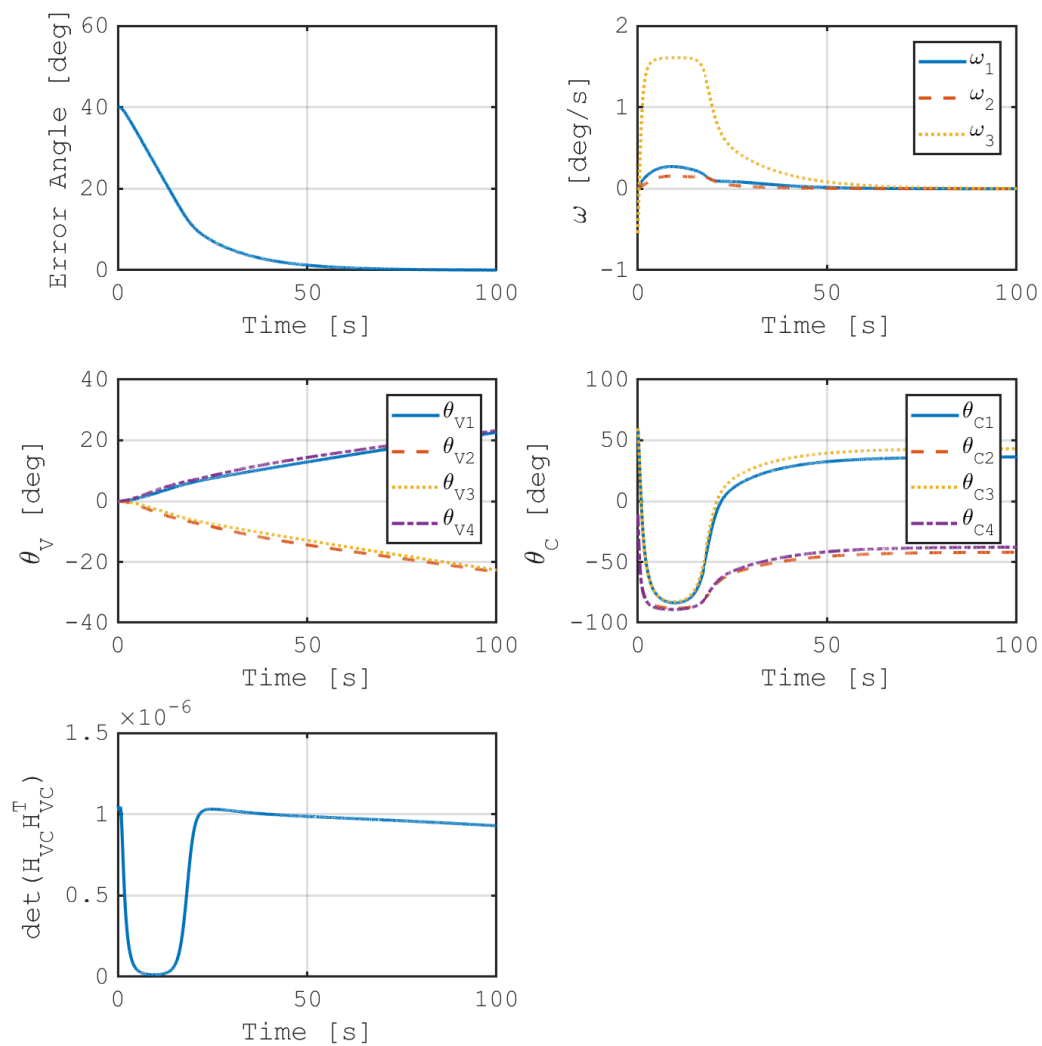


図 5.5: Case 4

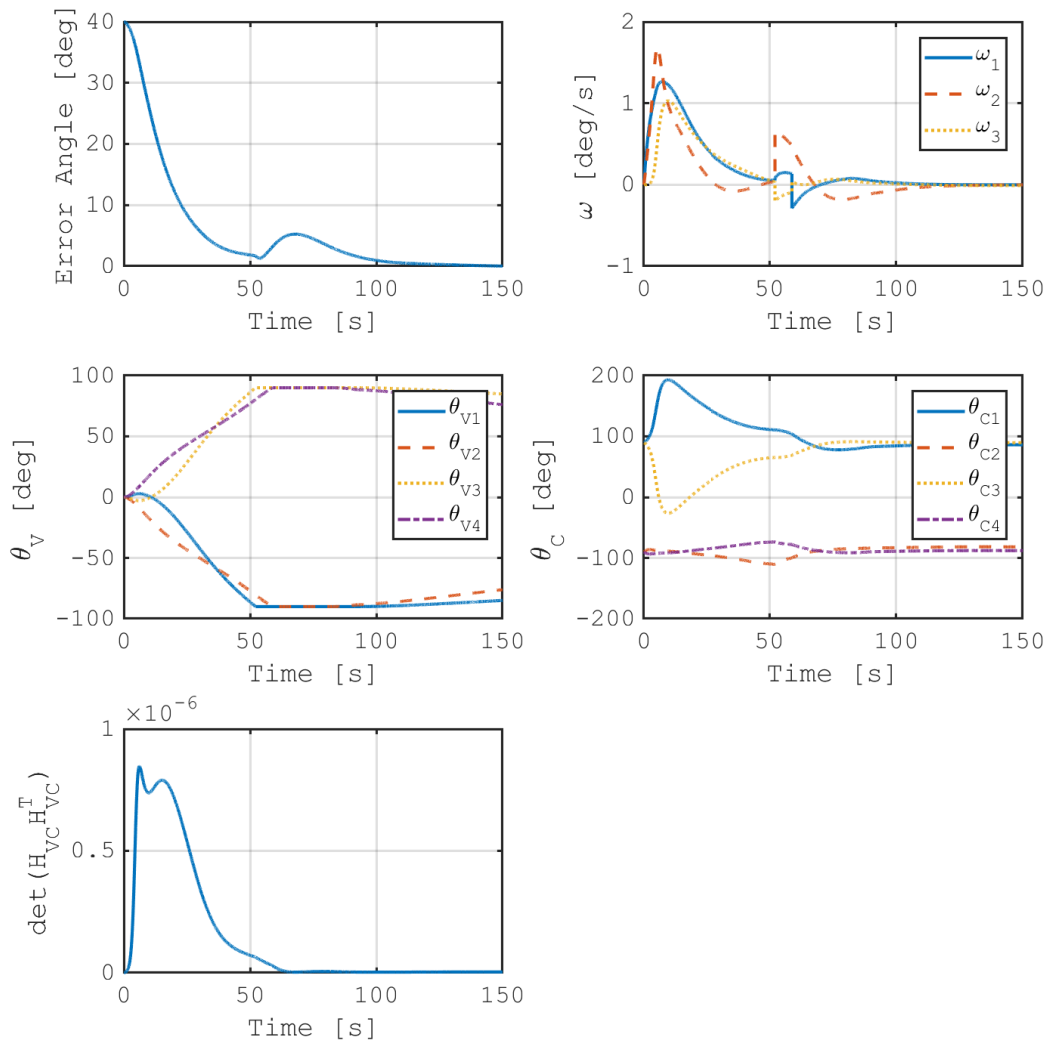


図 5.6: Case 5

### 5.3 最短時間姿勢変更のためのフィードフォワード制御

以下では、VSAC+CMG系での最短時間姿勢制御問題を Chebyshev-pseudo spectral method (CPS法) によって求解し、フィードフォワード入力を求める。さらに、最短時間解の解構造の解明およびシステムの有用性の評価も行う。

#### 5.3.1 問題設定

VSAC+SGCMG系の最短時間制御問題を定式化する。ゼロモーメント制御かつ rest-to-rest 姿勢変更を仮定し、宇宙機は VSAC で駆動される関節を  $L$  個、SGCMG を  $M$  個搭載するものとする。姿勢表現には、3つのパラメータのみで姿勢を表すことのできる修正ロドリゲスパラメータ (MRP)  $\sigma$  を用いる。このとき、宇宙機の質量中心回りの相対角運動量  $L_g$  はメインボディ (ボディ 0) の角速度  $\omega$  および関節角速度を用いてメインボディ固定座標系において式 (5.3) のように近似できる。いま、ゼロモーメント制御を仮定しているため、外乱がなければ角運動量は常にゼロである。

$$H_\omega(\theta_V)\omega + H_{\theta_V}(\theta_V)\dot{\theta}_V + H_\Omega(\theta_C)\Omega = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

初期姿勢において慣性座標系とメインボディ座標系が一致している状態から、目標オイラー軸  $e_r$  回りに目標固有角  $\varphi_r (\neq 0)$  だけ回転する場合を考える。すると、初期姿勢  $\sigma(0)$  と最終姿勢  $\sigma(t_f)$  は次のように表現される。

$$\sigma(0) = \mathbf{0}, \quad \sigma(t_f) = \tan \frac{\varphi_r}{4} e_r \quad (5.15)$$

Rest-to-rest マヌーバとするため、初期時刻 0 および終端時刻  $t_f$  において次の制約を与える。

$$\dot{\theta}_{V_k}(0) = \dot{\theta}_{V_k}(t_f) = 0 \quad (k = 1, \dots, L) \quad (5.16)$$

$$\theta_{C_l}(0) = \theta_{C_l}(t_f) = 0 \quad (l = 1, \dots, M) \quad (5.17)$$

$\theta_{V_k}$  は  $\theta_V$  の  $k$  番目の成分を表す。すなわち  $k$  番目の VSAC 関節角度を表している。VSAC 関節の初期角度は 0 度とする。

$$\theta_{V_k}(0) = 0 \quad (5.18)$$

初期・終端時刻においてメインボディが受けるトルクを 0 にするために次の拘束を設ける。

$$\ddot{\theta}_{V_l}(0) = \ddot{\theta}_{V_l}(t_f) = 0 \quad (l = 1, \dots, L) \quad (5.19)$$

$$\dot{\theta}_{C_m}(0) = \dot{\theta}_{C_m}(t_f) = \ddot{\theta}_{C_m}(0) = \ddot{\theta}_{C_m}(t_f) = 0 \quad (m = 1, \dots, M) \quad (5.20)$$

CMG のジンバルには角速度および角加速度の制限を、VSAC 関節にはその 2 つに加えて角度の制限を与える。

$$|\theta_{Vl}(t)| < \theta_{V\max}, \quad |\dot{\theta}_{Vl}(t)| < \dot{\theta}_{V\max}, \quad |\ddot{\theta}_{Vl}(t)| < \ddot{\theta}_{V\max} \quad (l = 1, \dots, L) \quad (5.21)$$

$$|\dot{\theta}_{Cm}(t)| < \dot{\theta}_{C\max}, \quad |\ddot{\theta}_{Cm}(t)| < \ddot{\theta}_{C\max} \quad (m = 1, \dots, M) \quad (5.22)$$

### 5.3.2 CPS 法による最短時間姿勢変更問題の定式化

MRP $\sigma$ 、VSAC 関節角  $\theta_V$ 、ジンバル角  $\theta_C$  を次のように Chebyshev 展開する。

$$\sigma_j = \tan \frac{\varphi_r}{4} \Phi \mathbf{a}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.23)$$

$$\theta_{Vl} = \theta_{V\max} \Phi \mathbf{b}_l \quad (l = 1, \dots, L) \quad (5.24)$$

$$\theta_{Cm} = \dot{\theta}_{C\max} \Phi \mathbf{c}_m \quad (m = 1, \dots, M) \quad (5.25)$$

ここで、 $\sigma_j = [\sigma_j(t_1) \cdots \sigma_j(t_N)]^T$ 、 $\theta_{Vl} = [\theta_{Vl}(t_1) \cdots \theta_{Vl}(t_N)]^T$ 、 $\theta_{Cm} = [\theta_{Cm}(t_1) \cdots \theta_{Cm}(t_N)]^T$  は全て  $N \times 1$  行列であり、 $e_j$  は  $\mathbf{e}_r$  の  $j$  番目の成分である。 $\mathbf{a}_j$ 、 $\mathbf{b}_l$ 、 $\mathbf{c}_m$  は全て  $S \times 1$  の行列であり、設計変数を並べたベクトルになっている。これらの時間微分は次のように解析的に求まる。

$$\dot{\sigma}_j = \frac{2 \tan(\varphi_r/4)}{t_f} \dot{\Phi} \mathbf{a}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.26)$$

$$\dot{\theta}_{Vl} = \frac{2\theta_{V\max}}{t_f} \dot{\Phi} \mathbf{b}_l, \quad \ddot{\theta}_{Vl} = \frac{4\theta_{V\max}}{t_f^2} \ddot{\Phi} \mathbf{b}_l \quad (l = 1, \dots, L) \quad (5.27)$$

$$\dot{\theta}_{Cm} = \frac{2}{t_f} \dot{\Phi} \mathbf{c}_m, \quad \ddot{\theta}_{Cm} = \frac{4}{t_f^2} \ddot{\Phi} \mathbf{c}_m \quad (m = 1, \dots, M) \quad (5.28)$$

式 (2.55) を式 (5.14) に代入することで、角運動量保存則が  $3N$  個の拘束条件として得られる。

$$\frac{4}{(1 + \sigma^2)^2} \mathbf{H}_\omega \mathbf{B}^T \dot{\sigma} + \mathbf{H}_{\theta_V} \dot{\theta}_V + \mathbf{H}_\Omega \Omega = 0 \quad (5.29)$$

初期・終端時刻における制約は次のように計  $5L + 6M + 6$  個である。

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{D} \mathbf{a}_j = 0, \quad \mathbf{C}_N \mathbf{D} \mathbf{a}_j = e_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.30)$$

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{D} \mathbf{b}_l = 0, \quad \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{D}} \mathbf{b}_l = 0, \quad \mathbf{C}_N \dot{\mathbf{D}} \mathbf{b}_l = 0, \quad \mathbf{C}_1 \ddot{\mathbf{D}} \mathbf{b}_l = 0, \quad \mathbf{C}_N \ddot{\mathbf{D}} \mathbf{b}_l = 0 \quad (l = 1, \dots, L) \quad (5.31)$$

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{D} \mathbf{c}_m = 0, \quad \mathbf{C}_N \mathbf{D} \mathbf{c}_m = 0, \quad \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{D}} \mathbf{c}_m = 0, \quad \mathbf{C}_N \dot{\mathbf{D}} \mathbf{c}_m = 0, \quad \mathbf{C}_1 \ddot{\mathbf{D}} \mathbf{c}_m = 0, \quad \mathbf{C}_N \ddot{\mathbf{D}} \mathbf{c}_m = 0 \quad (m = 1, \dots, M) \quad (5.32)$$

CMG のジンバルモータおよび VSAC 関節の機械的な拘束は次のような計  $L(3N - 5) + 2M(N - 2)$  個の拘束条件として表現される。

$$(\mathbf{C}_i \mathbf{D} \mathbf{b}_l)^2 < 1 \quad (i = 2, \dots, N) \quad (5.33)$$

$$\left( \frac{2}{t_f} \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{D}} \mathbf{b}_l \right)^2 < \left( \frac{\dot{\theta}_{V \max}}{\theta_{V \max}} \right)^2 \quad (i = 2, \dots, N - 1) \quad (5.34)$$

$$\left( \frac{4}{t_f^2} \mathbf{C}_i \ddot{\mathbf{D}} \mathbf{b}_l \right)^2 < \left( \frac{\ddot{\theta}_{V \max}}{\theta_{V \max}} \right)^2 \quad (i = 2, \dots, N - 1) \quad (5.35)$$

$$\left( \frac{2}{t_f} \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{D}} \mathbf{c}_m \right)^2 < 1 \quad (i = 2, \dots, N - 1) \quad (5.36)$$

$$\left( \frac{4}{t_f^2} \mathbf{C}_i \ddot{\mathbf{D}} \mathbf{c}_m \right)^2 < \left( \frac{\ddot{\theta}_{C \max}}{\theta_{C \max}} \right)^2 \quad (i = 2, \dots, N - 1) \quad (5.37)$$

以上より、次のような最適化問題が定式化できる。

$$\text{minimize } t_f \quad \text{subject to Eqs. (5.29)–(5.37)} \quad (5.38)$$

拘束条件の数は  $3LN + 2MN + 3N + 2M + 6$  個である。

Chebyshev 展開係数  $\mathbf{b}_l$ 、 $\mathbf{c}_m$  の初期値は全て 0 とした。 $\mathbf{a}_j$  の与え方は 4.3.2 項と同様である。

### 5.3.3 シミュレーション

前項で定式化した、VSAC+CMG 系における CPS 法を計算機上で解いて最短時間姿勢変更解を求めた。NLP のソルバとして MATLAB に実装されている fmincon を、その中でも内点法を用いた。16 ケースを実行し、それぞれを Case  $iS$  あるいは Case  $iL$  と呼称する ( $i = 1, \dots, 8$ )。Case  $i$  における目標オイラー軸  $\mathbf{e}_r$  は初期時刻におけるメインボディ固定座標系において表 5.5 のように表記される。表中の方位角、仰角は  $\mathbf{e}_r$  の方向を指す。目標固有角度については、Case  $iS$  では  $\varphi_r = 30$  度と Case  $iL$  では  $\varphi_r = 90$  度とした。

CMG は  $M = 4$  基から成るピラミッド型配置を想定した。シミュレーションパラメータは表 5.6 に示すとおりである。VSAC は、ひばりと同等のものを仮定した。宇宙機概観とそのパラメータは前出の図 5.1、表 5.1 のとおりである。ホイールの角運動量を表す  $h_w$  は、ホイール回転軸回りの慣性モーメント  $J_w$ 、ホイール角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  との間に  $h_w = J_w \boldsymbol{\Omega}$  の関係がある。

対象としている系はノンホロノミック性が強いが、CPS 法によって許容解を得ることができた。これはフィードフォワード則が提案できたことに他ならない。Case  $iS$  の姿勢変更時間を表 5.7 に、Case  $iL$  の姿勢変更時間を表 5.8 に示す。また、Case 1S–8S における

表 5.5: 各ケースにおける目標オイラー軸  $e_r$ 

Case	$e_r$	備考
1	$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right]^T$	方位角 45 度、仰角 0 度
2	$\left[1 \quad 0 \quad 0\right]^T$	方位角 0 度、仰角 0 度
3	$\left[0.9239 \quad 0.3827 \quad 0\right]^T$	方位角 22.5 度、仰角 0 度
4	$\left[0.9098 \quad 0.3769 \quad 0.1736\right]^T$	方位角 22.5 度、仰角 10 度
5	$\left[0.8081 \quad 0.3314 \quad 0.5000\right]^T$	方位角 22.5 度、仰角 30 度
6	$\left[0.4619 \quad 0.1913 \quad 0.8660\right]^T$	方位角 22.5 度、仰角 60 度
7	$\left[0.1604 \quad 0.0665 \quad 0.9894\right]^T$	方位角 22.5 度、仰角 80 度
8	$\left[0 \quad 0 \quad 1\right]^T$	方位角 22.5 度、仰角 90 度

表 5.6: シミュレーションパラメータ

Parameter	Value
$h_W$	0.086 [Nms]
$\dot{\theta}_{C \max}$	1 [rad/s]
$\ddot{\theta}_{C \max}$	1 [rad/s <sup>2</sup> ]
$\beta$	$\tan^{-1} \sqrt{2}$ [rad]
$\theta_{V \max}$	$\pi/2$ [rad]
$\dot{\theta}_{V \max}$	$\pi/18$ [rad/s]
$\ddot{\theta}_{V \max}$	$\pi/6$ [rad/s <sup>2</sup> ]
$N$	30
$S$	30

各物理量の時間変化を図 5.7–5.14 に、Case 1L–8L のそれを図 5.15–5.22 に示す。角速度はメインボディ固定座標系で表記している。

それでは、Case  $iS$  の結果から考察していく。Case 1S は解が非常に単純である。このときの VSAC、CMG の解軌道はそれぞれ、VSAC のみで  $e_r$  軸回りに 30 度、CMG のみで  $e_r$  軸回りに 5 度のマヌーバを行ったときのものに酷似している。これらは、Case 1S では目標オイラー軸  $e_r$  回りに常に回転 (simple rotation) が可能なことに起因すると考えられる。Case 2S は VSAC のみならば simple rotation が可能であるが、CMG は不可能なケースである。目標オイラー軸回り以外に角速度が生じておりその補償のために解が複雑と

なって、さらに VSAC、CMG 単体での最短時間解とも違う解になっている。Case 3S–7S は、VSAC、CMG とともに simple rotation が不可能なケースである。このうち、Case 3S–6S の解の性質は Case 2S と同様である。Case 7S については後述する。Case 8S は CMG のみが simple rotation が可能なケースである。CMG の解軌道は、単体での最適解と類似したものになっており、VSAC は Z 軸回りの慣性モーメントを減らすべく、パドルを閉じる動作を行っている。Case 7S においても VSAC のこの動作が確認できる。Case 7S では simple rotation が不可能であるが、目標オイラー軸が Case 8S に近いいためか、Case 8S に類似した単純な解が出ている。CMG の解軌道も単体の最短時間解に近い。

次に Case  $iL$  の結果を考察する。それぞれを Case  $iS$  と比較すると、Case 1S と Case 1L の差が最も大きいことが分かる。Case 1L では途中からパネルが逆転を始め、一部のパネルは再度正転を行うような解となっている。加えて、初期時刻におけるパネルの回転方向も 1S と異なる。Case 1S では  $\theta_{V1}$ 、 $\theta_{V4}$  が正方向に回転し、残りは負方向に回転している。Case 1L では初期時刻において  $\theta_{V1}$ 、 $\theta_{V2}$  が正方向に回転し始めている。また、Case 1L の CMG の解軌道は CMG 単体で 90 度姿勢変更を行うときのものに類似しているが、Case 8L を除く他のケースにおける CMG の解の場合、類似度は低い。

最後に、姿勢変更時間  $t_f$  を考察する。VSAC、CMG のみで制御を行った場合との姿勢変更時間の比較を図 5.23 に示す。図 5.24 はその拡大図である。VSAC のみで制御する場合には CMG システムの角運動量は常にゼロとし、CMG のみで制御する場合は、宇宙機形状は図 5.1 のまま、VSAC 関節角度を常にゼロとして制御した。直感的には VSAC は Z 軸方向回りマヌーバの時間短縮には貢献できそうにない。だが、前述したように、Z 軸回りの慣性モーメントを低減させることでそれを可能としていることが Case 8 の姿勢変更時間を VSAC+CMG 系と CMG 単体系で比較することで理解できる。また、Case 1S が VSAC のみで 5.0 秒で実行可能なことを考慮すると、Case 1S、2S、3S のように 2 軸制御のみが必要な場合は CMG の必要性は高くはないと言える。しかしながら、Case 4S を VSAC のみで姿勢変更した場合は Z 軸の制御に時間を要するため、姿勢変更時間は 16.7 秒となってしまう。CMG を併用すれば 9.1 秒で姿勢変更が終了することを踏まえると、3 軸制御の姿勢変更時間の短縮に関しては CMG が大きく寄与できることが分かる。Case 5S–8S に関して比較した平均を取ると、定量的には VSAC のみのケースに比して平均 11.1% まで短縮可能であると言える。また、VSAC システムに CMG を搭載することにより、大角度マヌーバ (90 度マヌーバ) の迅速性が劇的に向上し、姿勢変更時間を平均で 10.5% にまで短縮できることが Case 1L–8L に関する比較で理解できる。実施したシミュレーションケースが限られていることを考慮して以上をまとめると、提案したシステムは 3 軸姿勢制御、あるいは大角度マヌーバにおいて、VSAC 単体系に比して姿勢変更時間を 1 割強まで短縮可能といえる。

表 5.7: Case  $iS$  の姿勢変更時間

Case	1S	2S	3S	4S	5S	6S	7S	8S
$t_f$ [s]	3.82	4.53	4.39	4.39	6.12	9.51	8.74	8.78

表 5.8: Case  $iL$  の姿勢変更時間

Case	1L	2L	3L	4L	5L	6L	7L	8L
$t_f$ [s]	11.0	11.3	11.2	10.9	11.6	14.0	16.5	15.0

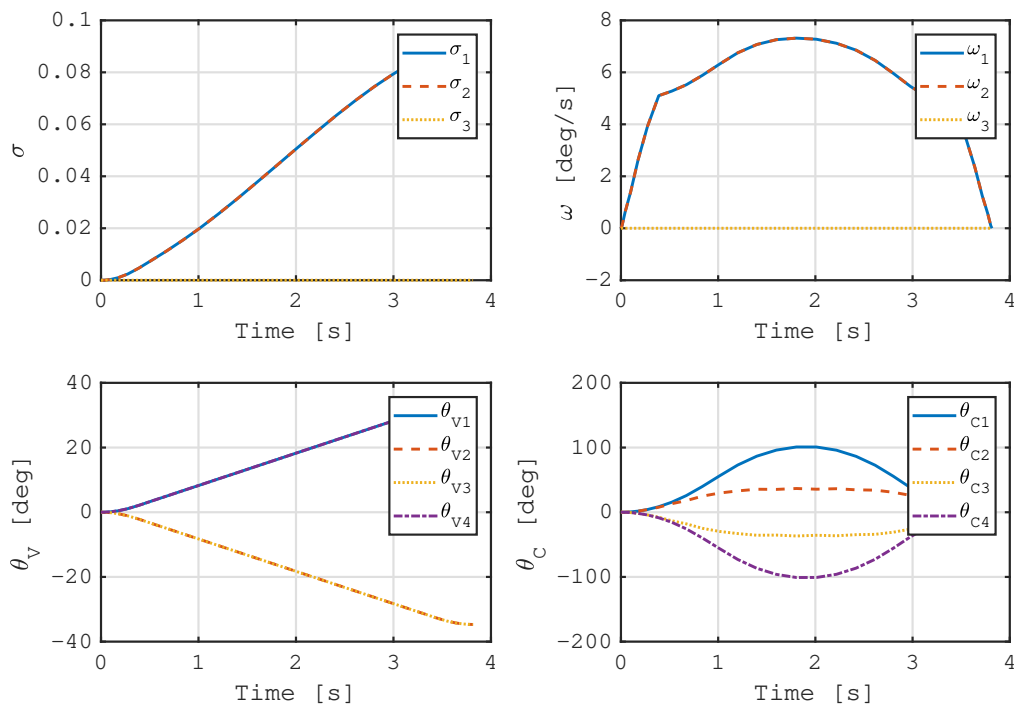


図 5.7: Case 1S



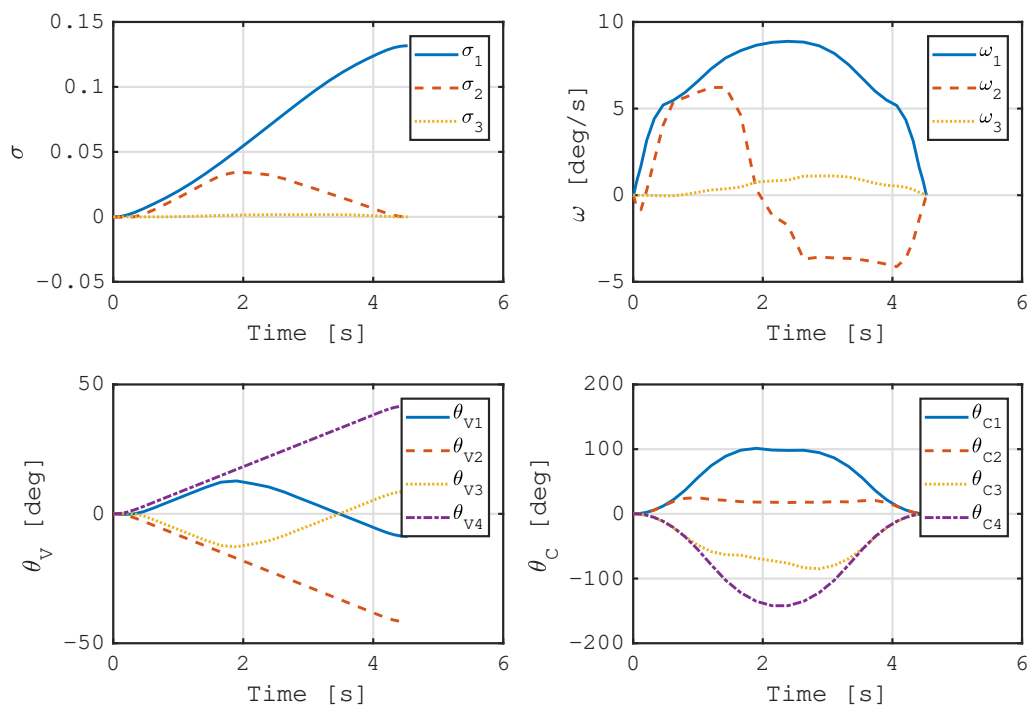


図 5.8: Case 2S

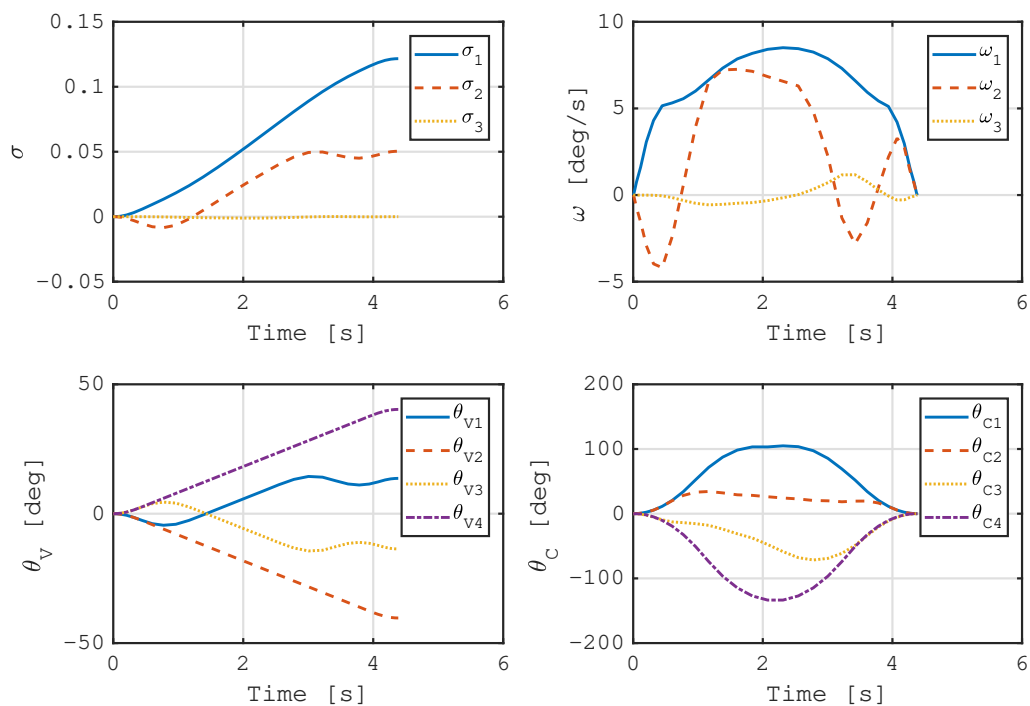


図 5.9: Case 3S

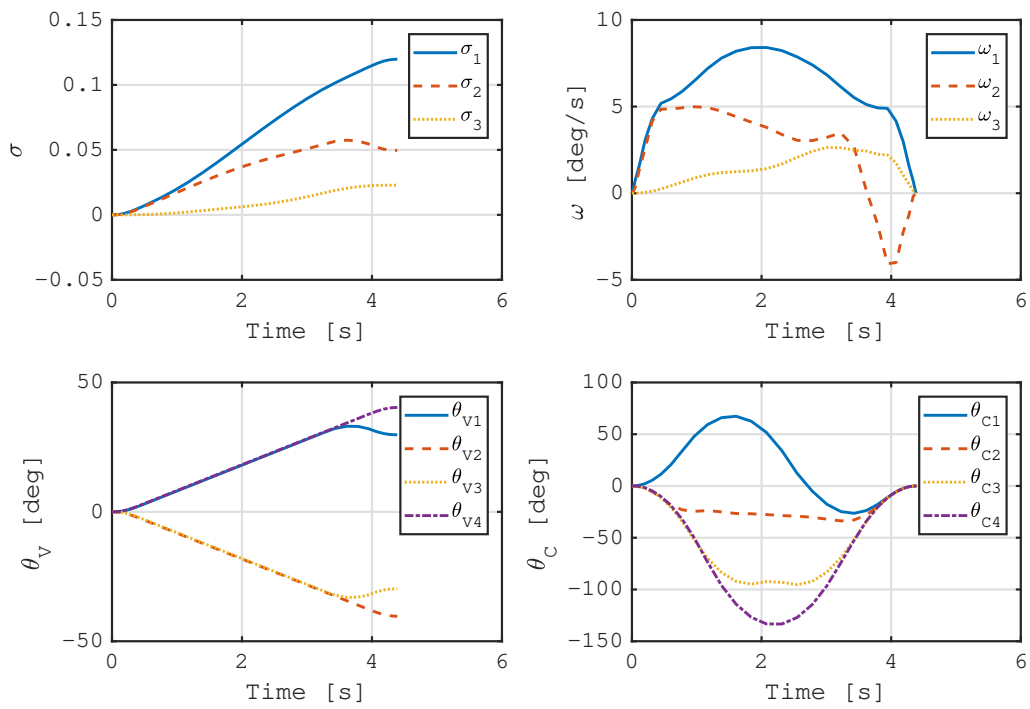


図 5.10: Case 4S

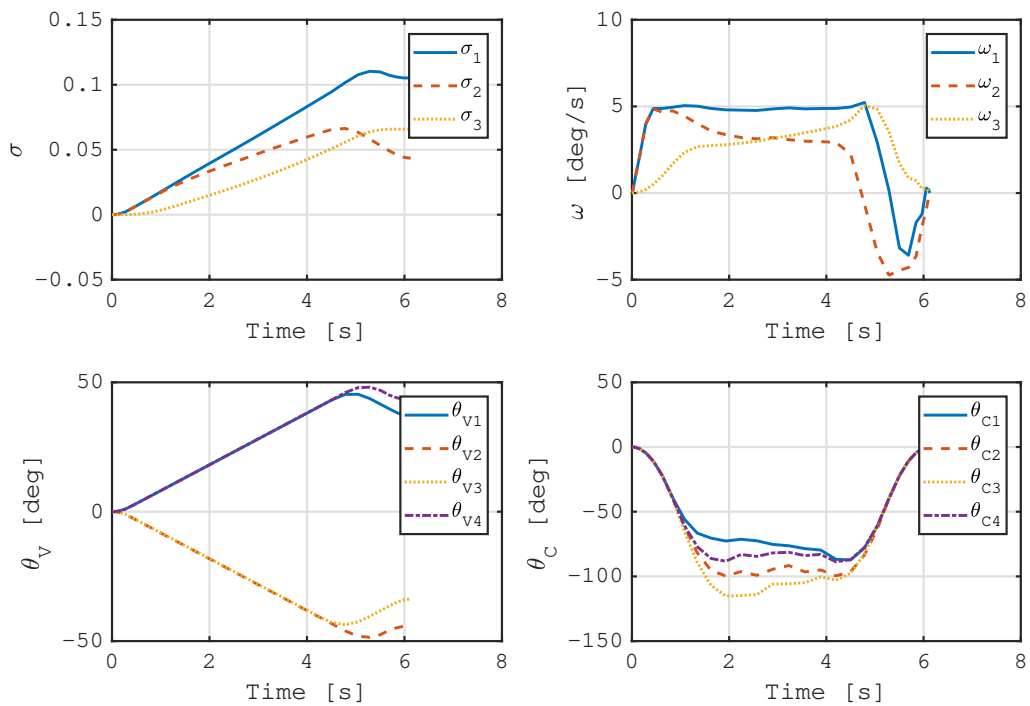


図 5.11: Case 5S

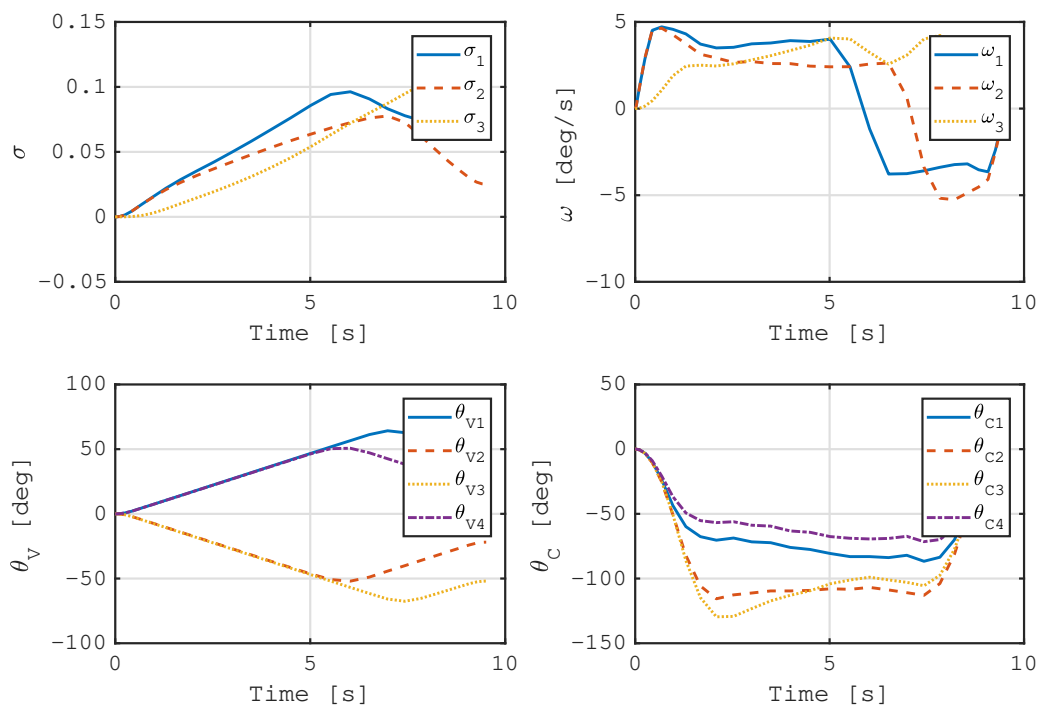


図 5.12: Case 6S

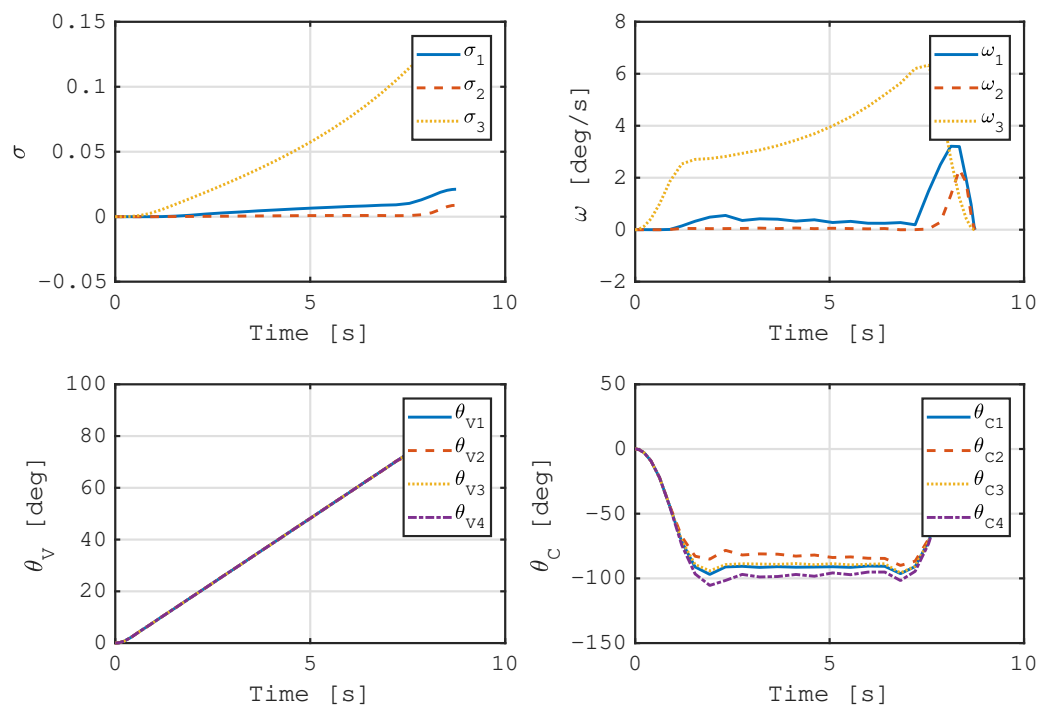


図 5.13: Case 7S

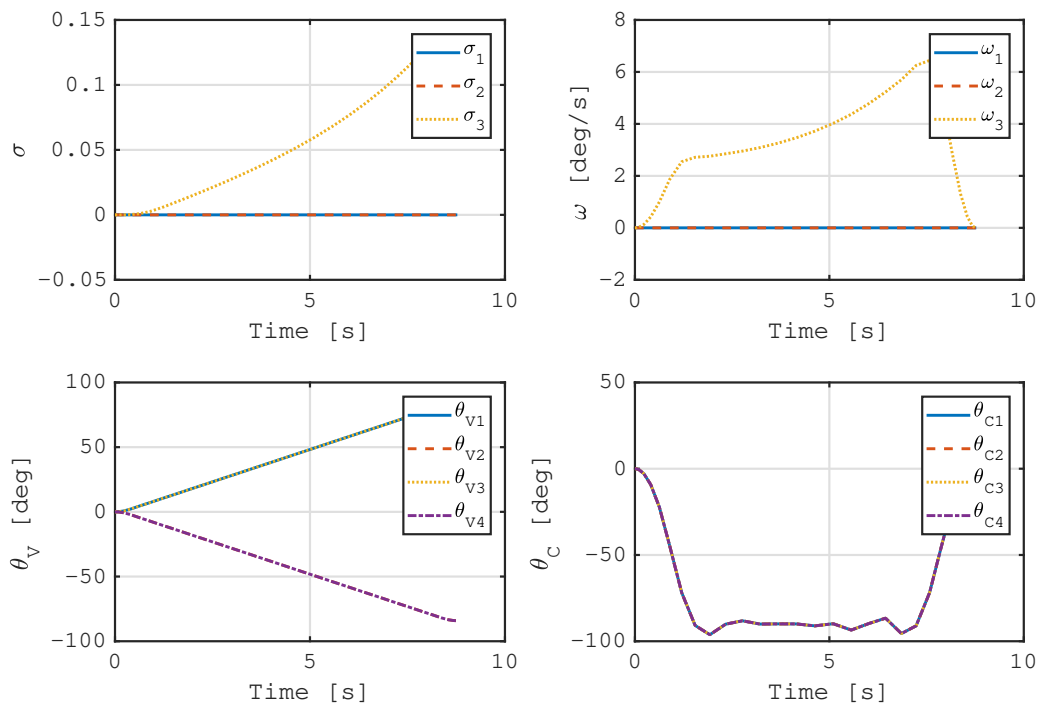


図 5.14: Case 8S

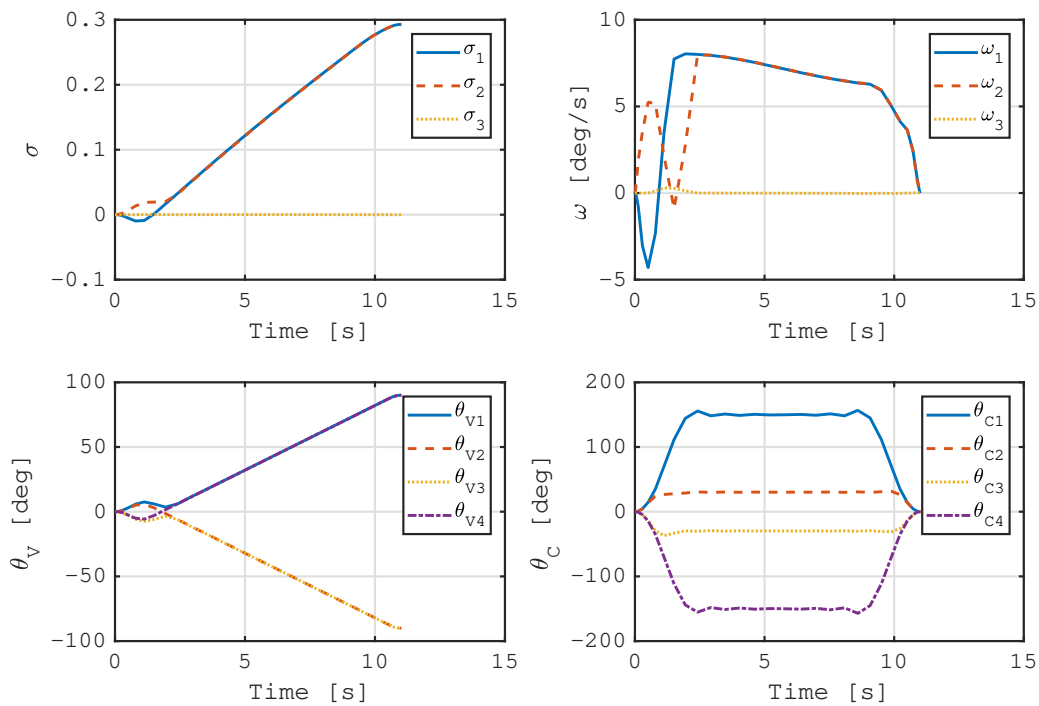


図 5.15: Case 1L

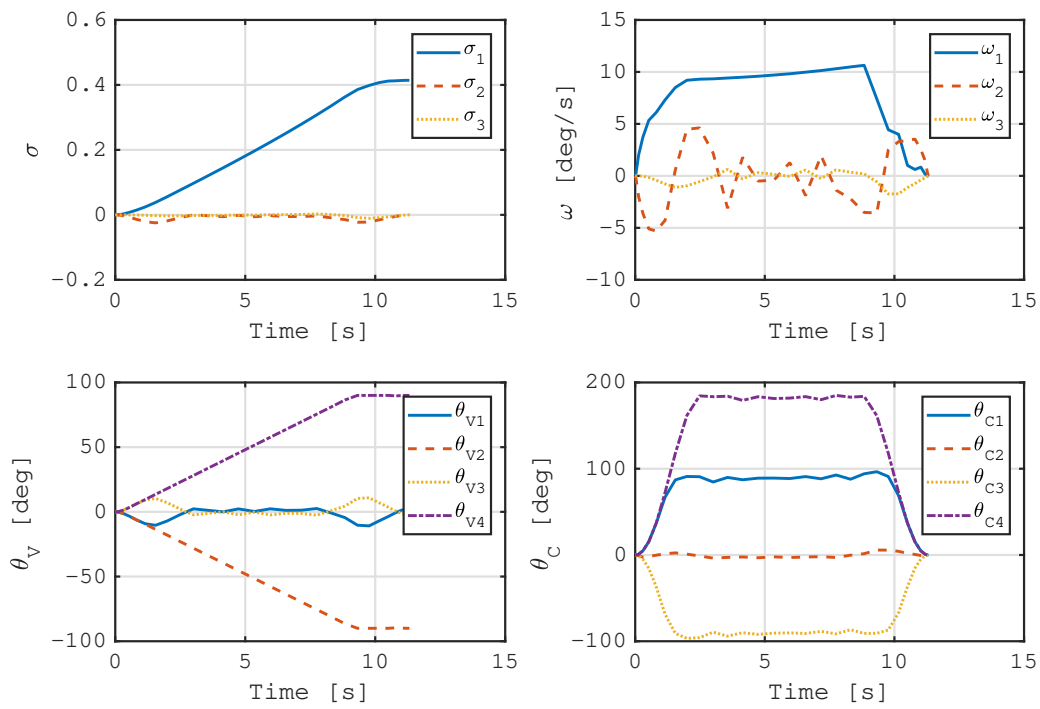


図 5.16: Case 2L

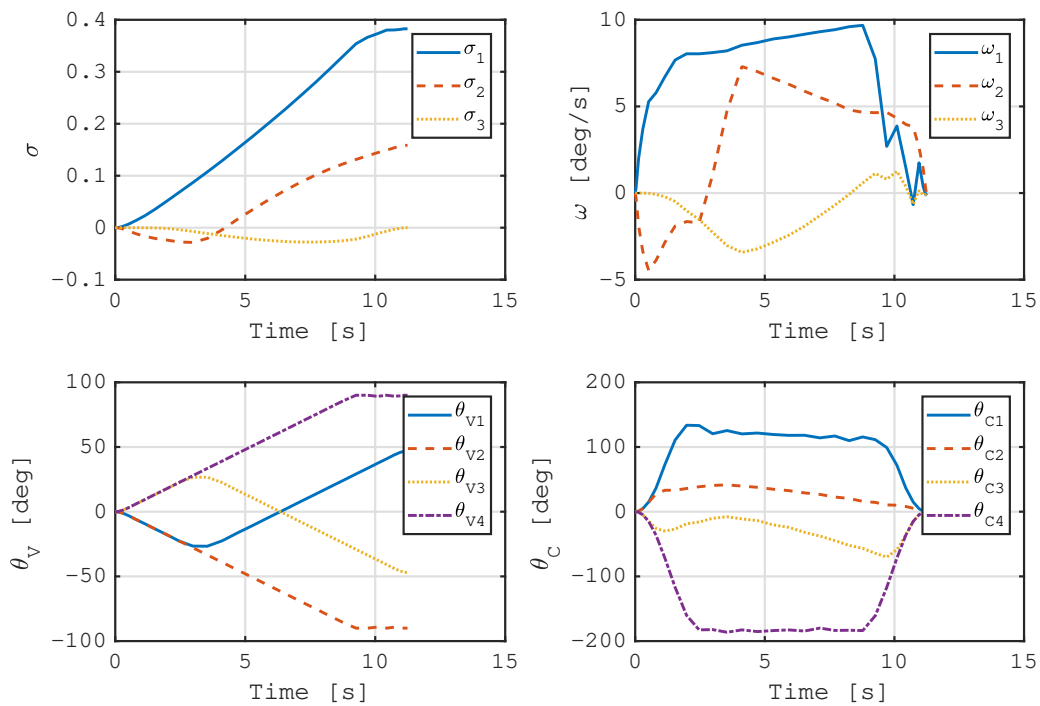


図 5.17: Case 3L

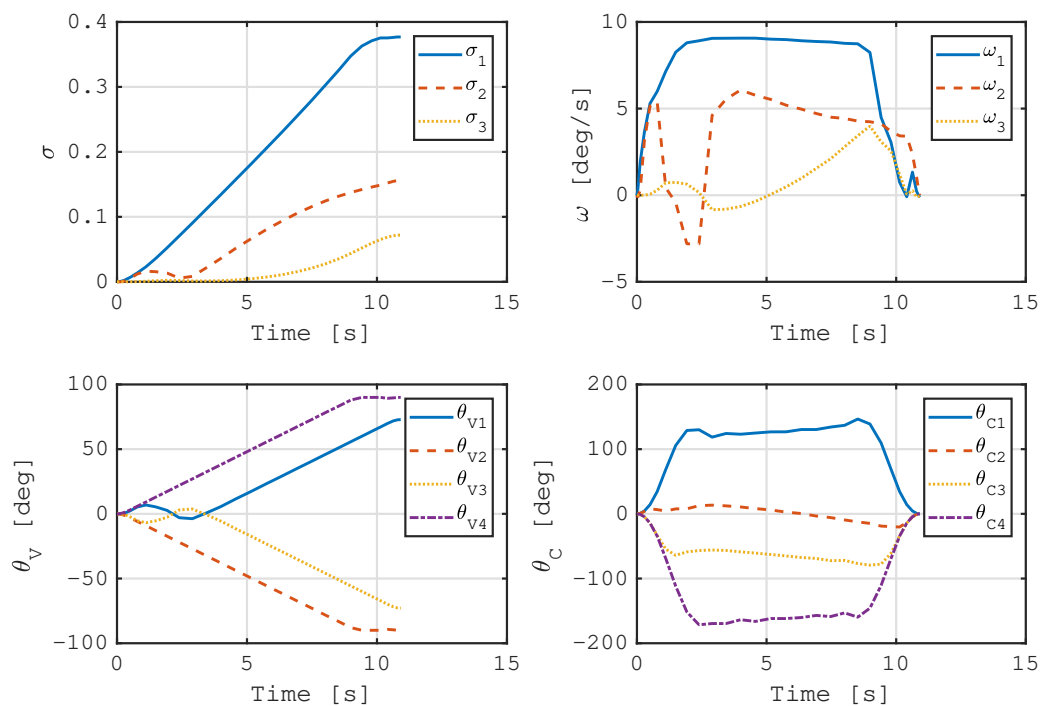


図 5.18: Case 4L

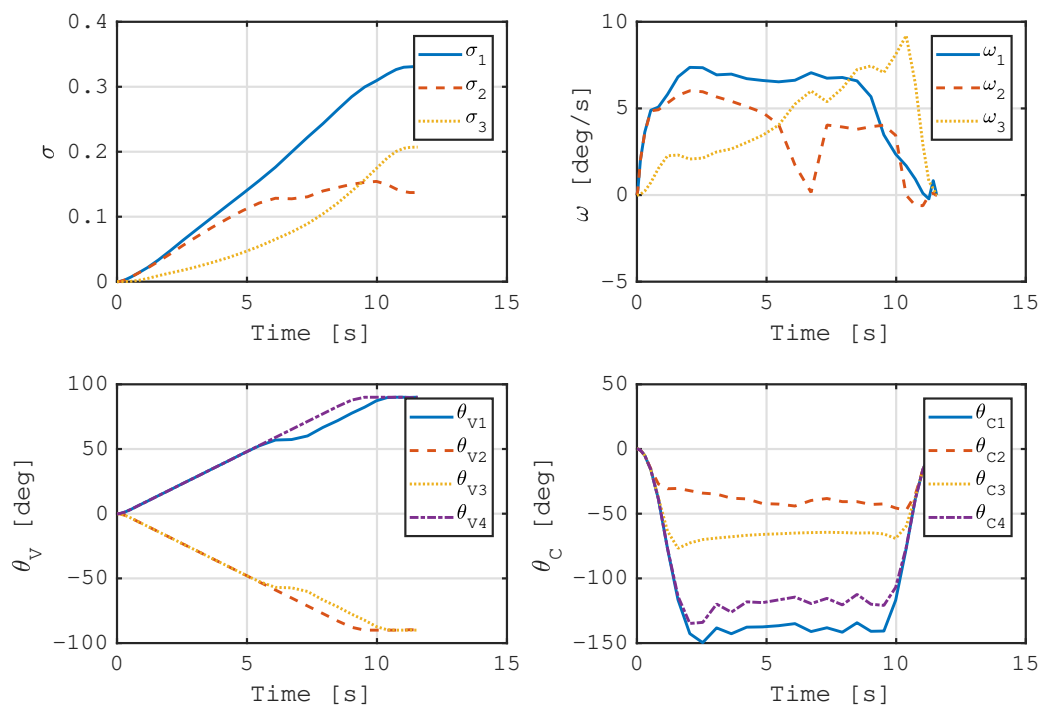


図 5.19: Case 5L

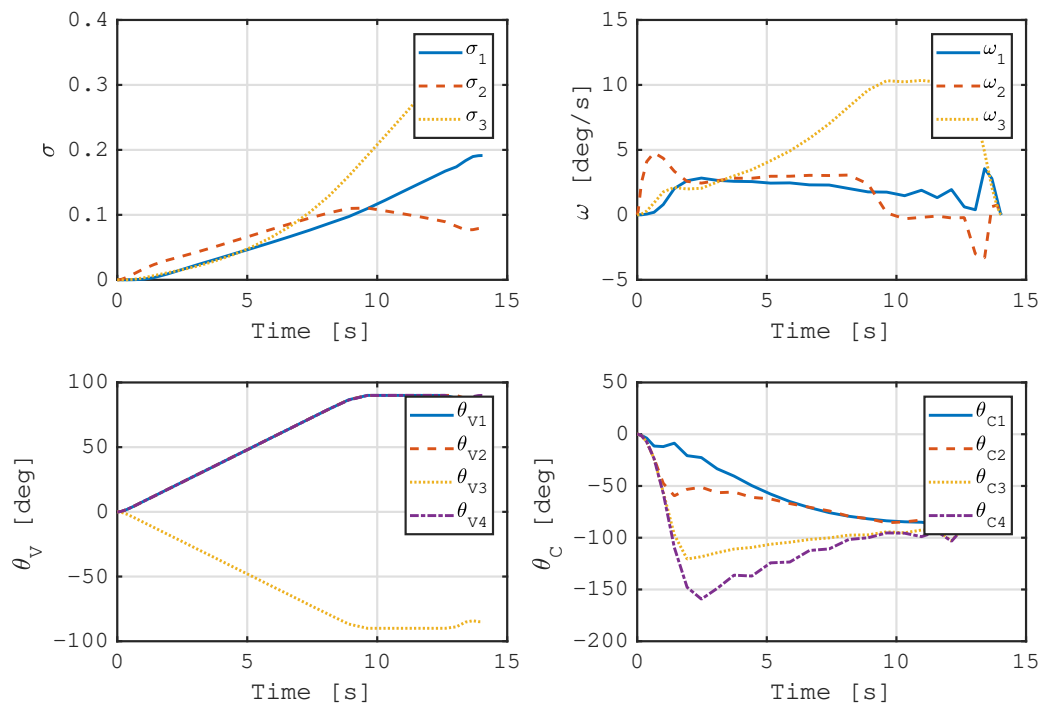


図 5.20: Case 6L

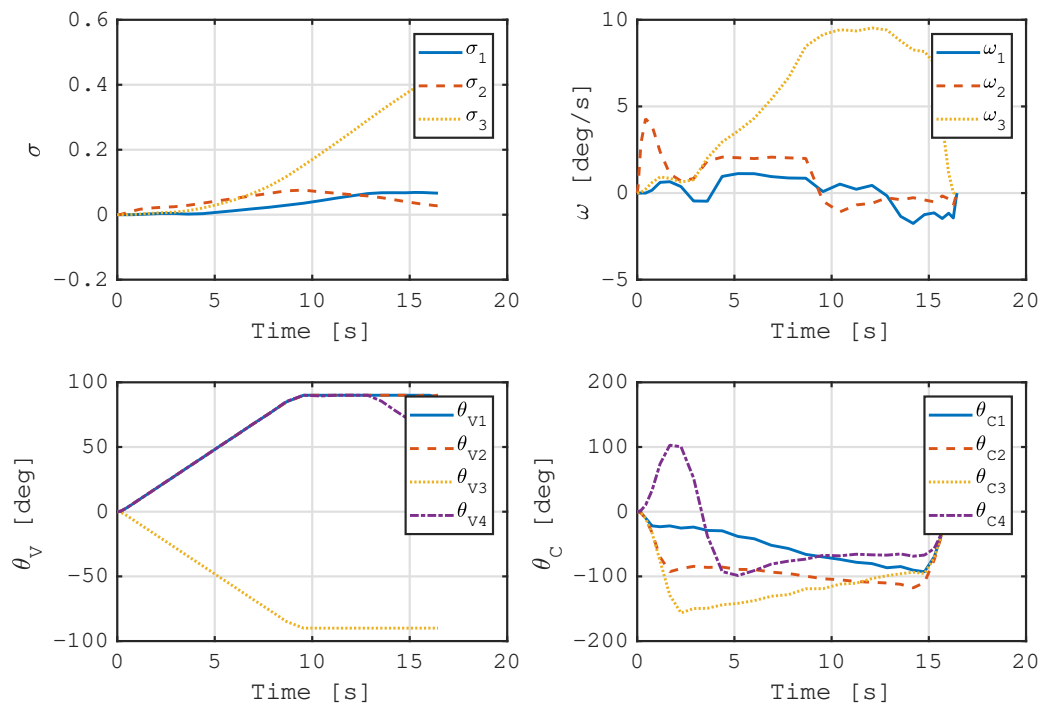


図 5.21: Case 7L

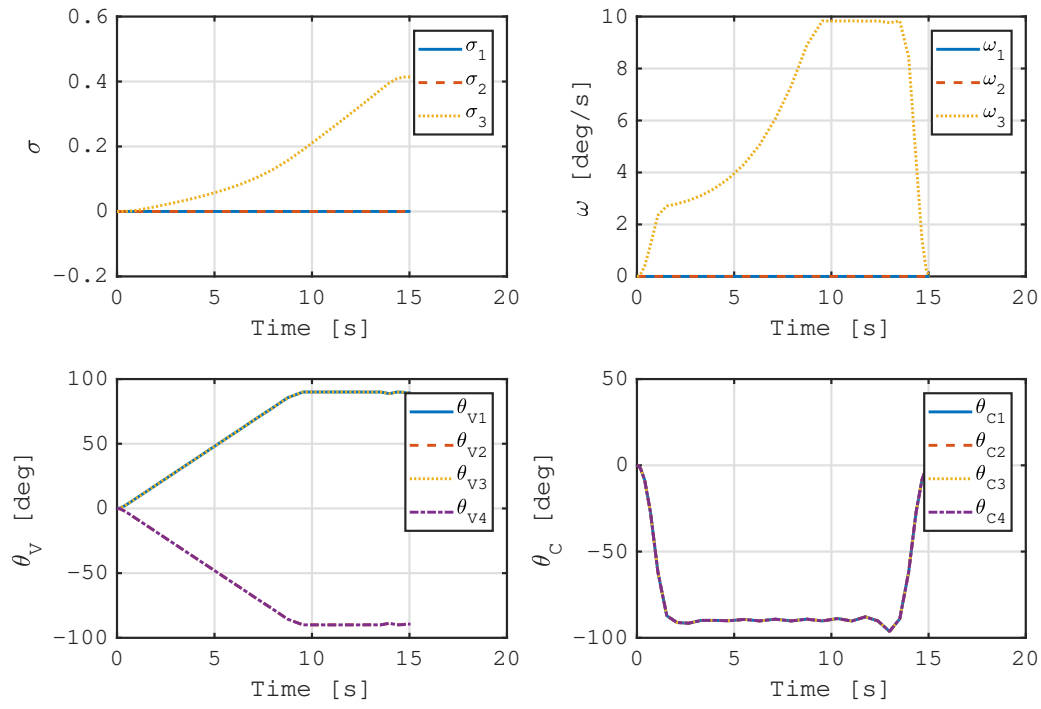


図 5.22: Case 8L

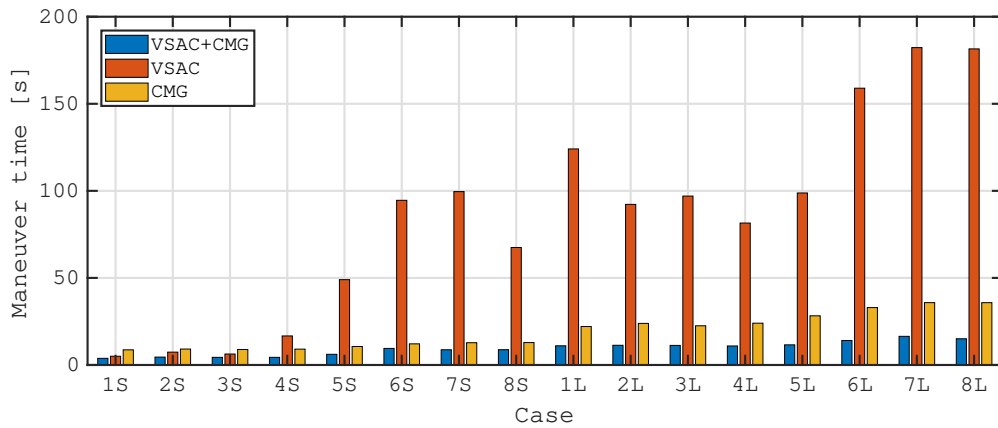


図 5.23: マヌーバ時間の比較



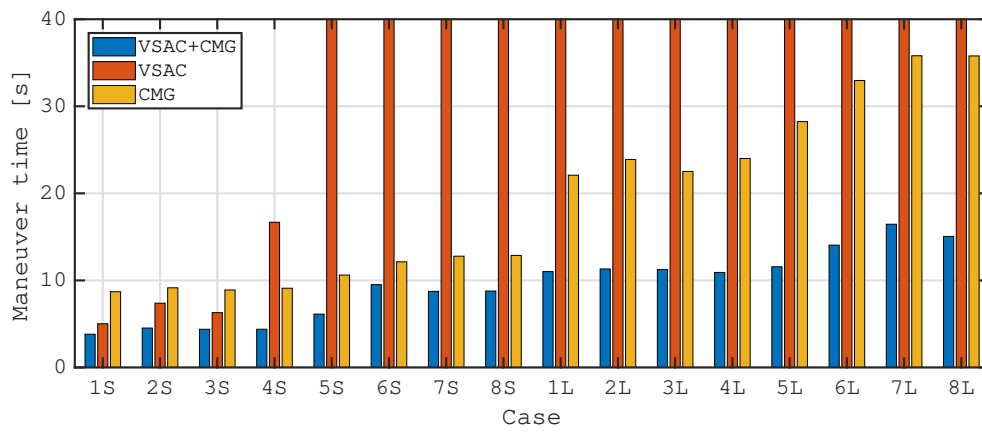


図 5.24: マヌーバ時間の比較 (拡大図)

## 5.4 結言

本章ではまず、VSAC+SGCMG系の角運動量を時間微分することにより、同系のフィードバック則を提案した。制御入力を求めるには逆行列の計算が必要となり、CMG単体系と同様に特異点問題が生ずる。そのため、逆行列にジッター項を導入して特異点を回避・脱出可能な駆動則を提案した。数値シミュレーションによって、特異点からの脱出が可能であることが示された。次に、VSAC+SGCMG系に対してフィードフォワード則を提案する目的で、その最短時間姿勢変更解を求めた。最適制御計算においては、力学的な拘束条件として角運動量保存則のみを課すことで、計算コストの低下やロバスト性の向上を図った。同系はノンホロノミック性が強いが、Chebyshev関数系を用いた擬スペクトル法によって許容解（フィードフォワード入力）を得られることが分かった。さらに、以下に示す解の性質、およびシステムの有用性を明らかとした。

1. simple rotation が可能なマヌーバにおける VSAC、CMG の解軌道はそれぞれ、VSAC あるいは CMG のみを用いた場合の最短時間姿勢変更解と類似している。
2. VSAC 関節を駆動して Z 軸回りの慣性モーメントの低減させることにより、「ひばり」型 VSAC は Z 軸回りマヌーバの姿勢変更時間の低減に寄与する。
3. VSAC+SGCMG 系は 3 軸制御、あるいは大角度マヌーバの姿勢変更時間を、VSAC 単体系に比して 1 割強にまで短縮可能である。



## 第6章

# 結論

### 6.1 本研究の総括

本稿では、逆運動学あるいは角運動量保存則に基づく運動学的な姿勢制御を用いて、CMG 搭載宇宙機の制御性能を向上させることを目的に研究を行った。以下では、まず2-5章で述べた結論を再掲した上で本論文の総括を行う。

2章「宇宙機の姿勢力学」ではまずベクトルの内積と外積を定義した。そして、座標変換行列を用いて角速度を定義し、CTM、クォータニオン、修正ロドリゲスパラメータの運動学を導いた。次に、単体の剛体、VSSGCMG 搭載宇宙機、VSDGCMG 搭載宇宙機のそれぞれについて厳密な運動方程式を導いた。最後に、厳密な運動方程式を1) ジンバルの慣性テンソルは微小、2) ホイールの角運動量に対する  $\omega^{G/N}$  の寄与は無視できるとの2つの仮定のもとで簡略化することにより、多くの論文で頻繁に用いられている運動方程式が導出できることを示し、次章以降のシミュレーションにおける支配方程式を定式化した。

3章「単一VSDGCMGを用いた逆運動学に基づく姿勢制御」ではまず、単一VSDGCMGと宇宙機から成る系に対して逆運動学を適用し、目標トルクを出力可能な解が2つ存在することを示した。提案した駆動則は基本的にはIKSLと同様に、現在のホイールレート、ジンバル角度に近い解を選択して特異点を回避する。特異点回避を行うと姿勢誤差が過大になる場合のみ、特異点通過が行われる。特異点通過は、現在値から遠い方の解を選択することで実現され、ジンバル角速度制限を陽に含む近似トルク誤差が回避・通過の判断に用いられる。提案手法の有用性を評価するため、先行研究との比較も行った。その結果、提案手法はノイズに弱いものの、1) 特異点回避・通過の判断を正しく行って姿勢誤差をより低減できること、2) 特異点回避時のトルク誤差が少なく、最大値は先行研究の1割強であることを明らかにした。

4章「SGCMGを用いた角運動量保存則に基づく低計算量の高速度姿勢制御」ではまず、TSUBAMEに搭載された小型SGCMGを例に取り、最大ジンバル角速度・角加速度とい

う機械的な拘束条件を CMG が有することを示し、これらを考慮することでより実践的な制御則が提案可能なことを述べた。次に、それらの拘束と終端ジンバル角度に拘束を与えた上でピラミッド型 SGCMG システムに対する最短時間解を導き、姿勢変更中にコースティング区間が 1 回または 2 回現れることを示した。そして、コースティング区間が 1 回のみ現れる際の最短時間解を、同区間に着目して模擬することにより、SGCMG を用いた低計算量的高速姿勢制御手法を提案した。模擬に際してはまず、運動学の一種である角運動量保存則を使い、目標オイラー軸回りに回転が行える CMG 角運動量を決定した。そして、その CMG 角運動量を出力できるジンバル角度の組および、コースティングの継続時間を導出し、これらの値を使用してコースティング区間が存在する最短時間解を低計算量で模擬した。提案手法の有用性は数値シミュレーションによって示され、クォータニオンフィードバックと GSR 駆動則を用いた場合と比して、整定時間を 6–8 割にまで短縮できることを明らかにした。準最短時間制御との比較では整定時間は最大で 3 割増となってしまうものの、計算時間は概算で 100 分の 1 にまで抑えられることを示した。

5 章「形状可変機構と SGCMG を併用した角運動量保存則に基づく姿勢制御」ではまず、VSAC+SGCMG 系の角運動量を時間微分することにより、同系のフィードバック則を提案した。制御入力を求めるには逆行列の計算が必要となり、CMG 単体系と同様に特異点問題が生ずる。そのため、逆行列にジッター項を導入して特異点を回避・脱出可能な駆動則を提案した。数値シミュレーションによって、特異点からの脱出が可能であることが示された。次に、VSAC+SGCMG 系に対してフィードフォワード則を提案する目的で、その最短時間姿勢変更解を求めた。最適制御計算においては、力学的な拘束条件として角運動量保存則のみを課すことで、計算コストの低下やロバスト性の向上を図った。同系はノンホロノミック性が強いが、Chebyshev 関数系を用いた擬スペクトル法によって許容解（フィードフォワード入力）を得られることが分かった。さらに、以下に示す解の性質、およびシステムの有用性を明らかとした。

1. simple rotation が可能なマヌーバにおける VSAC、CMG の解軌道はそれぞれ、VSAC あるいは CMG のみを用いた場合の最短時間姿勢変更解と類似している。
2. VSAC 関節を駆動して Z 軸回りの慣性モーメントの低減させることにより、「ひばり」型 VSAC は Z 軸回りマヌーバの姿勢変更時間の低減に寄与する。
3. VSAC+SGCMG 系は 3 軸制御、あるいは大角度マヌーバの姿勢変更時間を、VSAC 単体系に比して 1 割強にまで短縮可能である。

3 章および 4、5 章で提案した手法はそれぞれ、逆運動学、角運動量保存則に基づく運動学的な姿勢制御手法と整理できる。これらの姿勢制御手法はいずれも、地球観測網を構築する超小型衛星の姿勢制御に資する。CMG がもたらす姿勢変更の迅速性によって、観測領域が拡張可能だからである。一方で、それぞれの提案手法が対象とする衛星

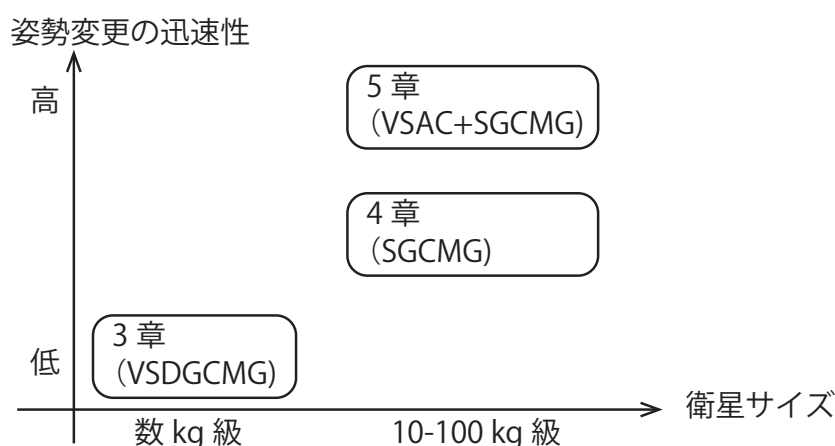


図 6.1: 提案手法が制御対象とする衛星

の種類は異なっており、その観点からも提案手法を総括できる（図 6.1）。3 章で提案した制御は、姿勢制御機器の省スペース化が可能と目されている単一 VSDGCMG を対象としたものであり、体積制限が厳しい数 kg 級衛星の姿勢制御に適している。4 章で提案した制御は、SGCMG が複数台搭載できるほど体積に余裕のあり、かつ、迅速性要求の厳しい 10–100kg の超小型衛星に適している。その中でも提案手法が持つ低計算量という特徴を活かすことのできる、突発的な姿勢変更が要求されるものに最適である。5 章で提案した VSAC+SGCMG 系の制御は、CMG 単体では実現し得ないほどの高度な迅速性が要求される 10–100kg の超小型衛星に用いることができる。実際、地球観測網の計画には 3U CubeSat を用いたもの（Planet 社）、あるいは 100 kg の超小型衛星を用いたもの（Axelspace 社）などがあり、本研究はその更なる発展に寄与できるものと位置づけられる。

以上のように、本稿では運動学を基礎に CMG の姿勢制御問題に取り組んだ。そして、優れた性能を持つ駆動則を提案し、数値シミュレーションによってその有用性を明らかにした。加えて、提案手法が有効と考えられるケースについて整理した。

## 6.2 今後の課題

CMG に関する課題は、軌道上で CMG 制御の実験が行えるプラットフォームを作成して数式モデルの妥当性を定量的に確認することである。本論文では、2.4.2 項で述べた近似を行った後の運動方程式を用いており、これが実際の宇宙機でも成立するかを確認する必要がある。必要に応じて、ホイールの質量中心と回転中心のズレまでも考慮した高精度の運動方程式を使用しなければならないだろう。地上実験での代替も考えられるが、高精度な地上実験は容易ではない。したがって、超小型衛星などで CMG 制御の軌道上実験プ

ラットフォームを実現することは、より実践的な駆動則を提案していく上で有用である。

3章で提案した単一 VSDGCMG 系の逆運動学に基づく制御はセンサノイズに弱く、実機への搭載にあたっては対策が必須である。単純にはフィルタリングによるセンサノイズの低減で対応可能だと考えられるが、センサに対する要求を明らかにするには、更なる検討が必要となる。また、駆動則の修正によっても対策が行える可能性があり、研究の余地がある。

5章で提案した VSAC と SGCMG から成る系の姿勢制御についても多くの課題が残っている。フィードバック則に関しては、VSAC 関節角の制限が考慮できていない。さらに、フィードフォワード制御を実用に供するには、モデル誤差や外乱を補償しつつフィードフォワード入力へ追従するフィードバック制御則を提案する必要がある。また、最短時間制御に関しては、simple rotation 以外のマヌーバでは、何故そのような解が出力されるのかについて明確な答えが打ち出せていない。目標オイラー軸回り以外の回転の補償動作が鍵であると思われるが、更なる研究の深化が必要である。VSAC+SGCMG 系の最短時間解に関する課題を解くことができれば、CMG の最短時間解の性質の解明にも繋がり、両系において低計算量かつ高精度に最短時間解を模擬できる可能性がある。したがって、本課題は宇宙機の自律性を大きく向上できる重要な問題であると考えられる。

## 参考文献

- [1] SpaceWorks, “2018 Nano/Microsatellite Market Forecast, 8th Edition,” URL: <http://www.spaceworkscommercial.com/wp-content/uploads/2018/01/Nano-Microsatellite-Market-Forecast-8th-Edition-2018.pdf>, accessed on 2018-02-08.
- [2] 此上一也, 澤田弘崇, 中谷幸司, 宇井恭一, 宮下直己, 居相政史, 岡田英人, 占部智之, 山口伸齊, 柏宗孝, 尾曲邦之, 松永三郎, “超小型衛星 CUTE-1 の開発と軌道上運用評価”, 電子情報通信学会論文誌 B, Vol. J88-B, No. 1, pp. 49–57, 2005.
- [3] R. Funase, T. Inamori, S. Ikari, N. Ozaki, S. Nakajima, H. Koizumi, A. Tomiki, Y. Kobayashi, and Y. Kawakatsu, “One-year Deep Space Flight Result of the World’s First Full-scale 50kg-class Deep Space Probe PROCYON and its Future Perspective, 30th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellite,” *30th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellite*, SSC16-III-05, Utah, US, August, 2016.
- [4] S. Ikari, N. Ozaki, S. Nakajima, K. Oguri, K. Miyoshi, S. Campagnola, H. Koizumi, Y. Kobayashi, and R. Funase, “EQUULEUS: Mission to Earth-Moon Lagrange Point by a 6U Deep Space CubeSat,” *31st Annual AIAA/USU Conference on Small Satellite*, Utah, US, August, 2017.
- [5] J. Hernando-Ayuso, Y. Ozawa, S. Takahashi, S. Campagnola, T. Ikenaga, T. Yamaguchi, C. Yam, B. Sarli, and T. Hashimoto, “Trajectory Design for the JAXA Moon Nano-Lander OMOTENASHI,” *31st Annual AIAA/USU Conference on Small Satellite*, SSC17-III-07, Utah, US, August, 2017.
- [6] K. Ishizaka, S. Matunaga, and TSUBAME development team, “Design of Pre-Flight model for Earth and Astronomical Observation Technology Demonstration Satellite TSUBAME,” *The 28th International Symposium on Space Technology and Science*, 2011-n-01, Okinawa, Japan, June, 2011.
- [7] 狼嘉彰, 中須賀真一, 富田信之, 松永三郎, “宇宙ステーション入門”, 東京大学出版会, 第2版, 2008.



- [8] NASA, “Kennedy Media Gallery,” URL: <https://mediaarchive.ksc.nasa.gov>, accessed on 2017-08-23.
- [9] K. Akiyama, K. Fujihashi, and S. Matunaga, “High-Speed Attitude Control System for Small Satellite with Micro-CMGs,” *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan*, Vol. 8, No. ists27, pp. 91–97, 2010.
- [10] B. Wie, *Space Vehicle Dynamics and Control*, AIAA Education Series, 2nd edition, 2008.
- [11] Satellite Imaging Corporation, “WorldView-3 Specification,” URL: <https://www.satimagingcorp.com/satellite-sensors/worldview-3>, accessed on 2017-08-23.
- [12] M. Gleyzes, L. Perret, and P. Kubik, “Pleiades System Architecture and Main Performances,” *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, Vol. 39, pp. 537–542, 2012.
- [13] Airbus Defence and Space, “SPOT 6/7 Technical sheet,” URL: [http://www.intelligence-airbusds.com/files/pmedia/public/r12317\\_9\\_spot6-7\\_technical\\_sheet.pdf](http://www.intelligence-airbusds.com/files/pmedia/public/r12317_9_spot6-7_technical_sheet.pdf), accessed on 2017-08-23.
- [14] V. Lappas, P. Oosthuizen, P. Madle, L. Cowie, G. Yuksel, and D. Fertin, “Micro CmgS for Agile Small Satellites: Design and In-Orbit Tests,” *6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems*, 53.1, Loutraki, Greece, January, 2006.
- [15] D. A. Spencer, S. B. Chait, P. Z. Schulte, K. J. Okseniuk, and M. Veto, “Prox-1 University-Class Mission to Demonstrate Automated Proximity Operations,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 53, No. 5, pp. 847–863, 2016.
- [16] J. Gersh and M. Peck, “Violet: A High-Agility Nanosatellite for Demonstrating Small Control-Moment Gyroscope Prototypes and Steering Laws,” *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, pp. 10–13, 2009.
- [17] J. D. Muñoz, V. Nagabhushan, S. Asundi, and N. G. Fitz-Coy, “High Fidelity Simulation of SwampSat Attitude Determination and Control System,” *21st AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, AAS 11-111, New Orleans, Louisiana, US, February, 2011.
- [18] Airbus Defence and Space, “CMG 15-45S Datasheet,” URL: <https://spaceequipment.airbusdefenceandspace.com/wp-content/uploads/2015/04/cmg-15-45s-datasheet.pdf>, accessed on 2017-08-23.
- [19] Honeybee Robotics, “Microsat Control Moment Gyroscopes Specification,” URL: <https://www.honeybeerobotics.com/wp-content/uploads/2014/03/>

Honeybee-Robotics-Microsat-CMGs.pdf, accessed on 2017-08-23.

- [20] 黒河治久, “単一ジンバル・コントロール・モーメント・ジャイロの幾何学的研究-特異点と制御則”, 博士論文, 東京大学, 1997.
- [21] F. A. Leve, B. J. Hamilton, and M. A. Peck, *Spacecraft Momentum Control Systems*, Springer, 2015.
- [22] B. Wie, “Singularity Analysis and Visualization for Single-Gimbal Control Moment Gyro Systems,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 2, pp. 271–282, March, 2004.
- [23] H. Kojima, “Calculation and Fitting of Boundaries Between Elliptic and Hyperbolic Singularities of Pyramid-Type Control Moment Gyros,” *Acta Astronautica*, Vol. 104, No. 1, pp. 33 - 44, 2014.
- [24] N. S. Bedrossian, J. Paradiso, E. V. Bergmann, and D. Rowell, “Steering Law Design for Redundant Single-Gimbal Control Moment Gyroscopes,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 13, No. 6, pp. 1083–1089, November, 1990.
- [25] H. Schaub, S. R. Vadali, and J. Junkins, “Feedback Control Law for Variable Speed Control Moment Gyroscopes,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 46, pp. 307–328, July, 1998.
- [26] D. Stevenson and H. Schaub, “Nonlinear Control Analysis of a Double-Gimbal Variable-Speed Control Moment Gyroscope,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 35, No. 3, pp. 787–793, 2012.
- [27] H. Kojima, “Singularity Analysis and Steering Control Laws for Adaptive-Skew Pyramid-Type Control Moment Gyros,” *Acta Astronautica*, Vol. 85, pp. 120–137, 2013.
- [28] H. Schaub and J. L. Junkins, “Singularity Avoidance Using Null Motion and Variable-Speed Control Moment Gyros,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 1, pp. 11–16, January, 2000.
- [29] B. Wie, “Singularity Escape/Avoidance Steering Logic for Control Moment Gyro Systems,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 5, pp. 948–956, 2005.
- [30] F. A. Leve and N. G. Fitz-Coy, “Hybrid Steering Logic for Single-Gimbal Control Moment Gyroscopes,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 4, pp. 1202–1212, July, 2010.
- [31] K. Yamada and I. Jikuya, “Directional Passability and Quadratic Steering Logic for Pyramid-Type Single Gimbal Control Moment Gyros,” *Acta Astronautica*, Vol. 102, pp. 103 - 123, 2014.

- [32] H. Zhang and J. Fang, “Robust Backstepping Control for Agile Satellite Using Double-Gimbal Variable-Speed Control Moment Gyroscope,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 36, No. 5, pp. 1356–1363, June, 2013.
- [33] 塚原拓矢, 山田克彦, 莊司泰弘, “可変速 2 軸ジンバル CMG の特異点の回避/通過則について”, 航空宇宙技術, Vol. 15, pp. 53–61, 2016.
- [34] Y. Kusuda and M. Takahashi, “Feedback Control with Nominal Inputs for Agile Satellites Using Control Moment Gyros,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 34, No. 4, pp. 1209–1218, 2011.
- [35] 上野誠也, 遠藤達也, “CMG を用いた人工衛星の最短時間姿勢変更”, 宇宙科学技術連合講演会講演集, Vol. 58, 2008, 1C16.
- [36] W. Zhang, Y. Zhang, W. Li, and Y. Wang, “Path Planning for Rapid Large-Angle Maneuver of Satellites Based on the Gauss Pseudospectral Method,” *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2016, 2016.
- [37] M. Haruki, “Rule-Based Optimal Control Law for Minimum Time Attitude Maneuver using CMGs,” *The 28th International Symposium on Space Technology and Science*, 2011-d-71s, Okinawa, Japan, June, 2011.
- [38] K. Yamada, T. Asai, and I. Jikuya, “Inverse Kinematics in Pyramid-Type Single-Gimbal Control Moment Gyro System,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 39, No. 8, pp. 1897–1907, June, 2016.
- [39] 小林洋, 莊司泰弘, 山田克彦, “ピラミッド配置型 CMG をもつ宇宙機の擬似スペクトル法による最適姿勢変更計画”, 航空宇宙技術, Vol. 16, pp. 55–63, 2017.
- [40] 朝霧正規, 山田克彦, 軸屋一郎, “CMG を持つ宇宙機の姿勢変更計画”, 日本航空宇宙学会論文集, Vol. 61, No. 1, pp. 16–22, 2013.
- [41] I. Jikuya, K. Fujii, and K. Yamada, “Attitude Maneuver of Spacecraft with a Variable-Speed Double-Gimbal Control Moment Gyro,” *Advances in Space Research*, Vol. 58, No. 7, pp. 1303–1317, 2016.
- [42] K. Tawara and S. Matunaga, “New Attitude Control for Agile Maneuver and Stably Pointing using Variable Shape Function and Reaction Wheels,” *The 26th Workshop on JAXA Astrodynamics and Flight Mechanics*, C1, Kanagawa, Japan, July, 2016.
- [43] K. Tawara, S. Harita, Y. Yatsu, S. Matunaga, and Hibari project team, “Technology Demonstration Microsatellite Hibari: Variable Shape Attitude Control and Its Application to Astrometry of Gravitational Wave Sources,” *The 31st International Symposium on Space Technology and Science*, 2017-f-013, Ehime, Japan, June, 2017.
- [44] 渡邊輔祐太, 俵京佑, 松永三郎, “形状可変機能を用いた Rest-to-Rest 三軸姿勢変更に関する一考察”, 第 25 回スペース・エンジニアリング・コンファレンス, 2B1, 山

- 口, 2016, 12月.
- [45] 渡邊輔祐太, 松永三郎, “形状可変制御方式を利用した最短時間3軸姿勢変更方法に関する基礎研究”, 2017年度日本機械学会年次大会, S1920101, 埼玉, 2017, 9月.
- [46] H. Schaub and J. Junkins, *Analytical Mechanics of Space Systems*, AIAA Education Series, 2nd edition, 2009.
- [47] P. C. Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc. 1986.
- [48] J. L. Crassidis and J. L. Junkins, *Optimal Estimation of Dynamic Systems*, CRC press, 2nd edition, 2011.
- [49] M. D. Shuster, “Survey of Attitude Representations,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 41, pp. 439–517, October, 1993.
- [50] 俵京佑, “可変形状宇宙システムの軌道上動力学に関する基礎検討”, 修士論文, 東京工業大学, 2015.
- [51] A. K. Wu and A. Miele, “Sequential Conjugate Gradient-Restoration Algorithm for Optimal Control Problems With Non-Differential Constraints and General Boundary Conditions, Part I,” *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 1, No. 1, pp. 69–88, 1980.
- [52] W. H. Steyn, “Near-Minimum-Time Eigenaxis Rotation Maneuvers Using Reaction Wheels,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 5, pp. 1184–1189, 1995.
- [53] 俵京佑, “浮遊多剛体系汎用シミュレータ仕様書”, 東京工業大学 松永研究室内部資料, 2016.
- [54] B. Wie and P. M. Barba, “Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 3, pp. 360–365, 1985.
- [55] T. Hao, “A Study on Control Methods of Rapid Attitude Maneuver using Control Moment Gyros for Microsatellites,” Ph.D. dissertation, Tokyo Institute of Technology, 2015.
- [56] 野波健蔵, 田宏奇, “スライディングモード制御—非線形ロバスト制御の設計理論”, コロナ社, 1994.
- [57] B. Wie, D. Bailey, and C. Heiberg, “Singularity Robust Steering Logic for Redundant Single-Gimbal Control Moment Gyros,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 5, pp. 865–872, 2001.
- [58] 土屋武司, 鈴木真二, “数理計画法を用いた最適制御問題解法に関する研究(その1)”, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 45, No. 519, pp. 231–237, 1997.
- [59] B. A. Conway, *Spacecraft Trajectory Optimization*, Cambridge University Press, 2010.

- [60] 銅谷賢治, 森本淳, 鮫島和行, “強化学習と最適制御”, システム/制御/情報: システム制御情報学会誌, Vol. 45, No. 4, pp. 186–196, 2001, 4月.
- [61] 加藤寛一郎, “工学的最適制御”, 東京大学出版会, 1988.
- [62] S. Gonzalez and S. Rodriguez, “Modified Quasilinearization Algorithm for Optimal Control Problems with Nondifferential Constraints and General Boundary Conditions,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 50, No. 1, pp. 109–128, July, 1986.
- [63] 麥谷高志, “状態量不等式拘束を伴う最適問題の数値解法に関する研究”, 博士論文, 東京大学, 1996.
- [64] 原田正範, “最適制御問題による地面付近における滑空機の距離最大飛行の解析に関する研究”, 博士論文, 東海大学, 1996.
- [65] C. R. Hargraves and S. W. Paris, “Direct Trajectory Optimization using Nonlinear Programming and Collocation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 4, pp. 338–342, 1987.
- [66] P. J. Enright and B. A. Conway, “Discrete Approximations to Optimal Trajectories using Direct Transcription and Nonlinear Programming,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 4, pp. 994–1002, 1992.

## 付録 A

# 浮遊多剛体系の運動学

### A.1 緒言

VSAC を数式モデルに落とし込むため、浮遊多剛体系の運動学を記述する。本章の内容は、表によって執筆された浮遊多剛体系汎用シミュレータ仕様書 [53] からの寄与が大きい。

### A.2 記法と文字

本節では、 $n + 1$  個の剛体からなる、ループを含まないマルチボディシステムを対象として、システムの定式化を行う。このとき、メインボディ（しばしば宇宙機本体を指定）のボディ番号は 0 であるとする。

次に、本節で用いる座標系を以下のように定義する。

- $\Xi_I$  : 慣性空間に固定された慣性座標系
- $\Xi_0$  : 宇宙機本体の質量中心に原点を置き、宇宙機本体に固定された回転座標系
- $\Xi_i$  : リンク  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の質量中心に原点を置き、リンク  $i$  に固定された回転座標系

ベクトルは  $\mathbf{x}$  のように太字で表記する。このベクトルは、なんらかの座標系で表されたときの成分であって、 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  と書ける。ただし、表示される系を明示する必要があるときには、左上付き文字で  ${}^l\mathbf{x}$ 、 ${}^i\mathbf{x}$  などと表記する。さらに、 ${}^i\dot{\mathbf{x}}$  は  $\Xi_I$  などの慣性系でベクトルを時間微分することを示す。すなわち以下のように定義される。

$${}^i\dot{\mathbf{x}} = \frac{{}^I d\mathbf{x}}{dt} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{x} \quad (\text{A.1})$$

なお、 ${}^k \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  は  $\mathbf{x}$  の  $\Xi_k$  での微分を表し、 $\boldsymbol{\omega}_i$  は慣性系に対するリンク  $i$  の角速度である。

最後に、本節で使用する文字について、まとめて定義を掲載しておく。

- $t$  : 時刻
- $n$  : 関節の数 (剛体ボディの数よりひとつ少ない)
- $\tilde{i}$  : ボディ  $i$  の外集合 (外ボディ集合のうち隣接するもの)
- $\underline{i}$  : ボディ  $i$  の内集合 (メインボディとボディ  $i$  の間のボディ :  
ボディ  $i$  を含み、メインボディを除く)
- $\underline{i}$  : ボディ  $i$  の内ボディ (宇宙機の隣接ボディ)
- $\bar{i}$  :  $\underline{i}$  のうち、メインボディに隣接したボディ
- $\mathbf{r}_i$  : 慣性座標系の原点からリンク  $i$  の重心へ至る位置ベクトル
- $\mathbf{r}_{ij}$  : ボディ  $i$  の質量中心からボディ  $j$  の質量中心へと至る位置ベクトル
- $\mathbf{r}_g$  : 慣性座標系の原点から多剛体系の質量中心へと至るベクトル
- $\mathbf{v}_i$  : ボディ  $i$  の質量中心の速度ベクトル  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$
- $\mathbf{v}_g$  : 多剛体系の質量中心の速度ベクトル  $\mathbf{v}_g = \dot{\mathbf{r}}_g$
- $\boldsymbol{\omega}_i$  : 慣性系に対する  $\Xi_i$  系の角速度ベクトル
- $\boldsymbol{\omega}_{i/j}$  :  $\Xi_j$  に対する  $\Xi_i$  系の角速度ベクトル
- $C^{i/j}$  :  $\Xi_j$  系から  $\Xi_i$  系への座標変換行列
- $\Xi^{x\phi}$  : 座標系を  $\mathbf{x}$  軸回りに  $\phi$  だけ回転させる座標変換行列
- $E$  :  $3 \times 3$  単位行列
- $h_i$  : ボディ  $i$  とボディ  $\underline{i}$  を繋ぐヒンジ
- $\mathbf{p}_i$  : 慣性座標系の原点から  $h_i$  へ至る位置ベクトル
- $\mathbf{e}_i$  :  $h_i$  の回転方向ベクトル
- $\theta_i$  :  $h_i$  の回転角
- $\boldsymbol{\theta}$  :  $[\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_n]^T$
- $m_i$  : ボディ  $i$  の質量
- $M$  : 多剛体系全体の質量
- $I_i$  : ボディ  $i$  の慣性テンソル

## A.3 定式化

まず、浮遊多剛体系における各ボディの慣性系に対する角速度と速度を定式化する。全ての関節が運動したときの角速度 ${}^0\boldsymbol{\omega}_i$ は次のように表記できる ( $i \neq 0$ )。

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_i &= {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + \sum_{k \in i} {}^0\boldsymbol{\omega}_{k/k} \\ &= {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + \sum_{k \in i} C^{0/k} {}^k\boldsymbol{e}_k \dot{\theta}_k \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

さらに、今後 $\Xi_0$ でベクトルを表記するときには、左上付き文字の0を省略することとする。これを踏まえると次の表記が可能となる。

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{J}_{Q_i} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.3})$$

なお、 $\boldsymbol{J}_{Q_i}$ は以下の等式を満たすように定義される、ボディ $i$ の角速度に関するヤコビ行列である。

$$\boldsymbol{J}_{Q_i} \dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv \sum_{k \in i} C^{0/k} {}^k\boldsymbol{e}_k \dot{\theta}_k = \sum_{k \in i} \boldsymbol{e}_k \dot{\theta}_k = [\boldsymbol{e}_{Q_i}] \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.4})$$

$\boldsymbol{J}_{Q_0}$ は $\boldsymbol{J}_{Q_i}$ と同じサイズのゼロ行列である。理解を助けるため、図A.1に示すようなマルチボディシステムを具体例として考える。このとき、角速度に関するヤコビ行列は具体的

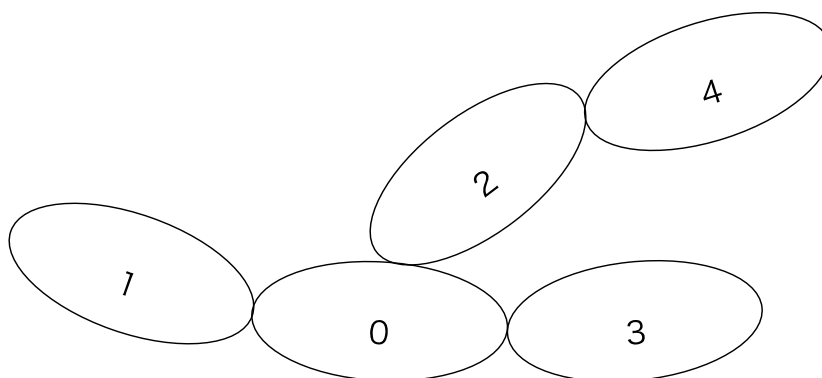


図 A.1: マルチボディシステムの例

には次のように計算できる。

$$\boldsymbol{J}_{Q_1} = [\boldsymbol{e}_1 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] = [\boldsymbol{e}_{Q_1}] \quad (\text{A.5})$$

$$\boldsymbol{J}_{Q_2} = [\mathbf{0} \ \boldsymbol{e}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] = [\boldsymbol{e}_{Q_2}] \quad (\text{A.6})$$

$$\boldsymbol{J}_{Q_3} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \boldsymbol{e}_3 \ \mathbf{0}] = [\boldsymbol{e}_{Q_3}] \quad (\text{A.7})$$

$$\boldsymbol{J}_{Q_4} = [\mathbf{0} \ \boldsymbol{e}_2 \ \mathbf{0} \ \boldsymbol{e}_4] = [\boldsymbol{e}_{Q_4}] \quad (\text{A.8})$$



なお、 $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$  としている。

次に、ボディ  $i$  の質量中心の速度  $\dot{\mathbf{r}}_i$  は次のように導かれる ( $i \neq 0$ )。

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{{}^I d}{dt} (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{0i}) \\
&= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{0i} + \frac{{}^0 d \mathbf{r}_{0i}}{dt} \\
&= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{0i} + \sum_{k \in i} \frac{{}^0 d \mathbf{r}_{kk}}{dt} \\
&= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{0i} + \sum_{k \in i} \frac{{}^0 d}{dt} (\mathbf{r}_k - \mathbf{p}_k + \mathbf{p}_k - \mathbf{r}_{\underline{k}}) \\
&= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{0i} + \sum_{k \in i} \left\{ \frac{{}^k d}{dt} (\mathbf{r}_k - \mathbf{p}_k) + \boldsymbol{\omega}_{\underline{k}/0} \times \mathbf{r}_{\underline{k}k} \right\} \\
&= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{0i} + \sum_{k \in i} \left\{ \boldsymbol{\omega}_{k/\underline{k}} \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{p}_k) + \left( \boldsymbol{\omega}_{\underline{k}/\underline{k}} + \boldsymbol{\omega}_{\underline{k}/\underline{\underline{k}}} + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{\bar{i}/0} \right) \times \mathbf{r}_{\underline{k}k} \right\} \\
&= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{0i} + \sum_{k \in i} \left\{ \boldsymbol{\omega}_{k/\underline{k}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}_k) \right\} \\
&= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{0i} + \sum_{k \in i} \left\{ \mathbf{e}_k \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}_k) \right\} \dot{\theta}_k
\end{aligned} \tag{A.9}$$

上式は、 $\mathbf{J}_{Q_i}$  でしたように適切に  $\mathbf{J}_{R_i}$  を定義することで次のように整理できる。

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{0i} + \mathbf{J}_{R_i} \dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{A.10}$$

ここで、 $\mathbf{J}_{R_i}$  はボディ  $i$  の質量中心速度に関するヤコビ行列であり、次のように定義される。

$$\mathbf{J}_{R_i} \dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv \sum_{k \in i} \left\{ \mathbf{e}_k \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}_k) \right\} \dot{\theta}_k \tag{A.11}$$

なお、 $\mathbf{J}_{R_0}$  は  $\mathbf{J}_{R_i}$  と同サイズのゼロ行列である。

最後に、以上を踏まえて運動量保存関係の定式化を行う。いま、系の運動量を  $\mathbf{P}$ 、慣性座標系の原点回りの絶対角運動量を  $\mathbf{L}$  と置けば、それぞれ次のように表すことができる。

$$\mathbf{P} = \sum_{i=0}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \tag{A.12}$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=0}^n (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \tag{A.13}$$

さらに、質量中心に関して以下の式が成立する。

$$\sum_{i=0}^n m_i \mathbf{r}_i = M \mathbf{r}_g \tag{A.14}$$

まず、式 (A.12) に式 (A.10) を代入し、さらに式 (A.14) を用いて整理すれば、運動量  $\mathbf{P}$  は次のように整理できる。

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_0 + M\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{0g} + M\mathbf{J}_{Rg}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.15})$$

ただし、次の記号を用いた。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{0g} &\equiv \mathbf{r}_g - \mathbf{r}_0 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} \mathbf{r}_{0i} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{J}_{Rg} = \sum_{i=0}^n \frac{m_i}{M} \mathbf{J}_{Ri} \quad (\text{A.17})$$

次に、角運動量保存則である式 (A.13) を考える。式 (A.3)、式 (A.10)、式 (A.14) を考慮して整理すると、次の式が導かれる。

$$\mathbf{L} = M\mathbf{r}_g \times \mathbf{v}_0 + \mathbf{I}_\omega \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{I}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.18})$$

なお、次のように文字を置いた。

$$\mathbf{I}_\omega \equiv \sum_{i=0}^n (\mathbf{I}_i - m_i \tilde{\mathbf{r}}_i \tilde{\mathbf{r}}_{0i}) \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{I}_\theta \equiv \sum_{i=0}^n (\mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Qi} + m_i \tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{J}_{Ri}) \quad (\text{A.20})$$

式 (A.15)、式 (A.18) を用いて、式 (A.12)、式 (A.13) を書き換えると、これらは次のようにまとめることができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M\mathbf{E} & -M\tilde{\mathbf{r}}_{0g} \\ M\tilde{\mathbf{r}}_g & \mathbf{I}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M\mathbf{J}_{Rg} \\ \mathbf{I}_\theta \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.21})$$

ここまでの定式化では、角運動量は絶対角運動量を取り扱ってきた。しかし、2.4.1 項で述べたとおり、質量中心を角運動量の基準点と考えることにより、姿勢運動と軌道運動を分離して考えることができる。すなわち、システムの質量中心回りの相対角運動量は、システムの質量中心回りにトルクが掛からない場合保存されるのであった。よって、ここからより取り扱いのしやすい相対角運動量について論じる。相対角運動量は、システムの質量中心回りの絶対角運動量から容易に導出することができるので、いま、システムの質量中心回りの絶対角運動量  $\mathbf{L}_g$  を考える。まず、 $\mathbf{L}_g$  は次のように表記できる。

$$\mathbf{L}_g = \sum_{i=0}^n (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{r}_{gi} \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \quad (\text{A.22})$$

ここで、式 (A.3)、式 (A.10)、式 (A.14) を考慮して整理すると、次式が得られる。

$$\mathbf{L}_g = \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{H}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.23})$$

ここで、 $\mathbf{H}_\omega$ 、 $\mathbf{H}_\theta$  は次のように定義される。

$$\mathbf{H}_\omega \equiv \sum_{i=0}^n (\mathbf{I}_i - m_i \tilde{\mathbf{r}}_{gi} \tilde{\mathbf{r}}_{0i}) \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{H}_\theta \equiv \sum_{i=0}^n (\mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Q_i} + m_i \tilde{\mathbf{r}}_{gi} \mathbf{J}_{R_i}) \quad (\text{A.25})$$

すると、運動量保存関係は次のようにまとめることができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{L}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M\mathbf{E} & -M\tilde{\mathbf{r}}_{0g} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M\mathbf{J}_{Rg} \\ \mathbf{H}_\theta \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.26})$$

システム質量中心回りの相対角運動量を得るには、式 (A.23) において慣性系に対する絶対速度  $\mathbf{r}_i$  を質量中心に対する相対速度に置き換えれば良い。式 (A.9) から明らかのように、これは式 (A.26) において  $\mathbf{v}_0$  を  $\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_g$  へと置き換え、さらに、慣性系の原点をシステムの質量中心に一致させることに相当する。

## A.4 結言

本章では、VSAC を有する宇宙機をモデル化するために浮遊多剛体系の運動学の定式化を行った。この定式化により、システム角運動量をメインボディの角速度と関節角速度を陽に含む形で表すことができた。

## 付録 B

# CMG の特異点と制御に関する先行研究

### B.1 緒言

2章で導出した、CMGを有する宇宙機の運動方程式を用いることで、特異点問題を数学的に議論することができる。本章ではまず、ジンバル角について、どのような条件が満たされた場合に特異状態に陥るのかについて議論する。次に、トルクを発生できない方向である特異ベクトルという概念を用いて、ジンバル角ではなく角運動量レベルで特異状態を議論する。特異点の種類分類についても述べる。加えて、CMGのフィードバック制御とフィードフォワード制御に関して、主だった先行研究を紹介する。

### B.2 特異点問題

#### B.2.1 SGCMGの特異点

1章で述べたように、CMGにはトルクの出力次元が縮退する特異点問題が存在する。制御性の低下を抑えるため、特異状態は可能な限り避けねばならない。特異状態を詳しく理解するため、まず本項においてSGCMGの特異点を数学的に整理する。一般の場合として、 $n(\geq 3)$ 個のSGCMGを有したシステムを考える。このとき、式(2.104)と同様に、機体座標系で表されたCMGトルク $\boldsymbol{T}$ (制御可能な項)は次のように表される。

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{B.1})$$

ここで $\boldsymbol{A}$ は $3 \times n$ のヤコビ行列、 $\boldsymbol{\theta}$ はCMG $i$ のジンバル角度 $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )を縦に並べた $n \times 1$ 行列である。なお、CMG $i$ は $i$ 番目のCMGを指す。CMGシステムが $\boldsymbol{T}$ 方向にトルクを出力不可な場合とは、ヤコビ行列 $\boldsymbol{A}$ に逆行列が存在しない場合であるから、 $\boldsymbol{A}$ は次

の式を満たす。

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 0 \quad (\text{B.2})$$

コーシー・ビネの公式を用いて上式を変形すると次式が得られる [22]。

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \sum_{i=1}^n M_i^2 = 0 \quad (\text{B.3})$$

ここで  $M_i = \det(\mathbf{A}_i)$  は 3 次の小行列式であり、 $\mathbf{A}_i$  は  $\mathbf{A}$  から  $i$  列目を取り出した行列である。一例として、4 台の SGCMG をピラミッド型に配置したシステムが特異状態に陥っている場合を考えると、次の 4 つの式が成立することになる。

$$M_1 = s\beta \left[ (s_2 s_3 c_4 + c_2 s_3 s_4) + c\beta (c_2 c_3 s_4 - s_2 c_3 c_4) + 2(c\beta)^2 c_2 c_3 c_4 \right] = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$M_2 = s\beta \left[ (s_3 s_4 c_1 + c_3 s_4 s_1) + c\beta (c_3 c_4 s_1 - s_3 c_4 c_1) + 2(c\beta)^2 c_3 c_4 c_1 \right] = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$M_3 = s\beta \left[ (s_4 s_1 c_2 + c_4 s_1 s_2) + c\beta (c_4 c_1 s_2 - s_4 c_1 c_2) + 2(c\beta)^2 c_4 c_1 c_2 \right] = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$M_4 = s\beta \left[ (s_1 s_2 c_3 + c_1 s_2 s_3) + c\beta (c_1 c_2 s_3 - s_1 c_2 c_3) + 2(c\beta)^2 c_1 c_2 c_3 \right] = 0 \quad (\text{B.7})$$

ここで  $s_i = \sin \theta_i$ 、 $c_i = \cos \theta_i$  である。特異状態において  $\mathbf{A}$  のランクは最大でも 2 だから、上記 4 つの条件のうち 2 つのみが独立である。 $c_i \neq 0$  のとき、条件は更に簡略化できて次のように変形できる。

$$\tan \theta_3 (\tan \theta_2 + \tan \theta_4) + c\beta (\tan \theta_4 - \tan \theta_2) = -2(c\beta)^2 \quad (\text{B.8})$$

$$\tan \theta_4 (\tan \theta_3 + \tan \theta_1) + c\beta (\tan \theta_1 - \tan \theta_3) = -2(c\beta)^2 \quad (\text{B.9})$$

$$\tan \theta_1 (\tan \theta_4 + \tan \theta_2) + c\beta (\tan \theta_2 - \tan \theta_4) = -2(c\beta)^2 \quad (\text{B.10})$$

$$\tan \theta_2 (\tan \theta_1 + \tan \theta_3) + c\beta (\tan \theta_3 - \tan \theta_1) = -2(c\beta)^2 \quad (\text{B.11})$$

たとえば、 $(\theta_1, \theta_3)$  が独立だとして  $(\theta_2, \theta_4)$  を式 (B.9)、(B.11) から求めると次のように計算できる。

$$\tan \theta_2 = \frac{-2(c\beta)^2 - c\beta \tan \theta_3 + c\beta \tan \theta_1}{\tan \theta_1 + \tan \theta_3} \quad (\text{B.12})$$

$$\tan \theta_4 = \frac{-2(c\beta)^2 - c\beta \tan \theta_1 + c\beta \tan \theta_3}{\tan \theta_1 + \tan \theta_3} \quad (\text{B.13})$$

$c_i = 0$  となる場合については文献 [22] で詳述されている。

以上では特異状態に相当するジンバル角度を求めてきたが、次に CMG の角運動量と特異点の関係を述べる。これは、角運動量空間上で特異面を描画する際などに有用である。いま、ベクトル  $\vec{u}$  を、穴の空いた単位球面上を指すベクトルとして次のように定義する。

$$\mathcal{S} = \{ \vec{u} : |\vec{u}| = 1, \vec{u} \neq \pm \vec{g}_i, i = 1, \dots, n \}$$

ここで、 $\vec{g}_i$  は CMGi のジンバル軸方向を指す単位ベクトルである。 $\vec{u}$  は次のようにパラメータ表示できる。

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_x \vec{b}_1 + u_y \vec{b}_2 + u_z \vec{b}_3 \\ &= \sin \xi_2 \vec{b}_1 - \sin \xi_1 \cos \xi_2 \vec{b}_2 + \cos \xi_1 \cos \xi_2 \vec{b}_3\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

ここで、 $\xi_1$ 、 $\xi_2$  は連続した 2 回転の回転角度である。具体的には  $[0 \ 0 \ 1]^T$  ベクトルを  $y$  軸回りに  $\xi_2$  回転した後、 $x$  軸回りに  $\xi_1$  だけ回転したものである。 $n$  台の SGCMG から成るシステムの角運動量  $\vec{H}$  の微小変化は次のように表せる。

$$d\vec{H} = \sum_{i=1}^n d\vec{h}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{h}_i}{d\theta_i} d\theta_i = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i d\theta_i \quad (\text{B.15})$$

ここで、 $\vec{h}_i$  は CMGi の角運動量ベクトルであり、単位ベクトルと仮定するが、一般性を失うことはない。 $\vec{f}_i$  は次のように定義される接線ベクトルである。

$$\vec{f}_i = \vec{f}_i(\theta_i) = \frac{d\vec{h}_i}{d\theta_i} = \vec{g}_i \times \vec{h}_i \quad (\text{B.16})$$

3 つのベクトル  $\{\vec{f}_i, \vec{g}_i, \vec{h}_i\}$  は正規直交系をなしており、ジンバルが  $\vec{g}_i$  回りに回転するとともに座標系が回転する。システムが特異状態であるとは、全ての  $\vec{f}_i$  が同じ平面上に存在することを意味する。言い換えれば、特異状態の場合、全ての  $\vec{f}_i$  に直交する単位ベクトル  $\vec{u}$  が存在し、次の式を満たす。

$$\vec{f}_i(\theta_i) \cdot \vec{u} \equiv \vec{f}_i^T \vec{u} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{B.17})$$

上式が成り立つとき、式 (B.15) より次式が成立することが分かる。

$$d\vec{H} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{B.18})$$

CMG システムは、 $\vec{u}$  方向に角運動量を変化させられない、すなわちその方向にトルクを出力できないことが上式から分かる。このような単位ベクトル  $\vec{u}$  は特異ベクトルと呼ばれ、特異状態におけるジンバル角の組を特異ジンバル角という。

次に、CMG システムの角運動量  $\vec{H}$  を  $\vec{u}$  と  $\vec{g}_i$  で記述することを目指す。既知な CMG システムの配置  $\vec{g}_i$  に対し、 $\vec{u}$  を変化させることで、ジンバル角を考慮することなく、角運動量空間上でどの点が特異点なのかを解析できるようにするためである。 $\vec{f}_i$  は  $\vec{g}_i$  に直交し、大きさが 1 なので、特異状態を表す式 (B.17) は次のように書き直せる (図 B.1a)。

$$\vec{f}_i = \pm \frac{\vec{g}_i \times \vec{u}_i}{|\vec{g}_i \times \vec{u}_i|} \quad (\text{B.19})$$

$\vec{h}_i = \vec{f}_i \times \vec{g}_i$  より、 $\vec{h}_i(\theta_i)$  の特異条件は次のように書ける。

$$\vec{h}_i = \pm \frac{(\vec{g}_i \times \vec{u}_i) \times \vec{g}_i}{|\vec{g}_i \times \vec{u}_i|} \quad (\text{B.20})$$

$\vec{h}_i$  と  $\vec{u}$  の内積から次の式が得られる。

$$e_i = \vec{h}_i \cdot \vec{u} = \pm |\vec{g}_i \times \vec{u}| \equiv \pm \sqrt{1 - (\vec{g}_i \cdot \vec{u})^2} \quad (\text{B.21})$$

上式を導くため、図 B.1b のように、 $\vec{h}_i$  と  $\vec{u}$  のなす角度が  $\varphi$  の場合を例として考えてみる。

$$\begin{aligned} e_i &= \vec{h}_i \cdot \vec{u} \\ &= \cos \varphi \\ &= \sin(\pi/2 + \varphi) \\ &= |\vec{g}_i \times \vec{u}| \\ &= \sqrt{1 - \cos^2(\pi/2 + \varphi)} \\ &= \sqrt{1 - (\vec{g}_i \cdot \vec{u})^2} \end{aligned}$$

確かに、式 (B.21) が求まった。いま、 $\vec{u}$  は  $\vec{g}$ 、 $\vec{h}$  で張られる平面の第二象限にあるとしたが、他の象限でも同様に計算できる。 $\vec{h}_i \cdot \vec{u} < 0$  だと  $\cos \varphi < 0$  となるため符号がマイナスとなる。以上の議論により、角運動量を特異ベクトルで表すことができる。

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \sum_{i=1}^n \vec{h}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} (\vec{g}_i \times \vec{u}) \times \vec{g}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_i [\vec{u} - \vec{g}_i (\vec{g}_i \cdot \vec{u})]}{\sqrt{1 - (\vec{g}_i \cdot \vec{u})^2}} \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

ここで、 $\epsilon_i = \text{sign}(e_i) = \text{sign}(\vec{h}_i \cdot \vec{u}) = \pm 1$  である。 $n$  個の CMG で構成されるシステムには  $2^n$  個の  $\epsilon_i$  の組み合わせがあることに注意されたい。 $\vec{u} = \vec{u}(\xi_1, \xi_2)$  であるので、 $\vec{H} = \vec{H}(\xi_1, \xi_2)$  であり、 $\vec{H}$  も  $\xi_1, \xi_2$  でパラメータ化されていることが分かる。式 (B.22) を用いると、角運動量空間上の特異曲面がジンバル角を介さなくても直接求まるため、特異曲面の描画が容易に行える。

一例として、4 台の SGCMG によるピラミッド型配置の場合の特異曲面を描画する。ジ

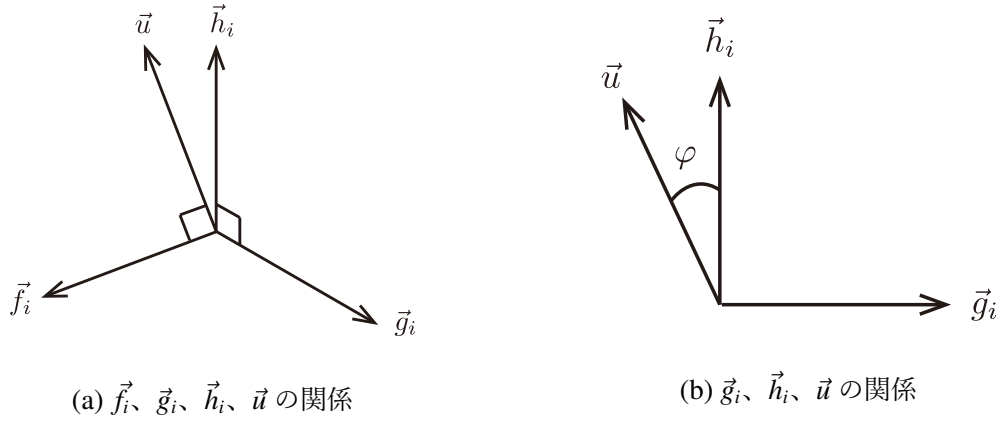


図 B.1: 各ベクトルの幾何的關係

ンバル軸ベクトルは次のように機体座標系で表される。

$$\vec{g}_1 = \sin \beta \vec{b}_1 + \cos \beta \vec{b}_3 \quad (\text{B.23})$$

$$\vec{g}_2 = \sin \beta \vec{b}_2 + \cos \beta \vec{b}_3 \quad (\text{B.24})$$

$$\vec{g}_3 = -\sin \beta \vec{b}_1 + \cos \beta \vec{b}_3 \quad (\text{B.25})$$

$$\vec{g}_4 = -\sin \beta \vec{b}_2 + \cos \beta \vec{b}_3 \quad (\text{B.26})$$

また  $e_i = \vec{h}_i \cdot \vec{u}$  は次のようになる。

$$e_1 = \pm \sqrt{1 - (s\beta u_x + c\beta u_z)^2} \quad (\text{B.27})$$

$$e_2 = \pm \sqrt{1 - (s\beta u_y + c\beta u_z)^2} \quad (\text{B.28})$$

$$e_3 = \pm \sqrt{1 - (-s\beta u_x + c\beta u_z)^2} \quad (\text{B.29})$$

$$e_4 = \pm \sqrt{1 - (-s\beta u_y + c\beta u_z)^2} \quad (\text{B.30})$$

したがって、特異ベクトル  $\vec{u}$  を用いて、特異状態における角運動量が次のように計算できる。

$$H_x = \frac{c\beta(-s\beta u_z + c\beta u_x)}{e_1} + \frac{u_x}{e_2} + \frac{c\beta(s\beta u_z + c\beta u_x)}{e_3} + \frac{u_x}{e_4} \quad (\text{B.31})$$

$$H_y = \frac{u_y}{e_1} - \frac{c\beta(s\beta u_z - c\beta u_y)}{e_2} + \frac{u_y}{e_3} + \frac{c\beta(s\beta u_z + c\beta u_y)}{e_4} \quad (\text{B.32})$$

$$H_z = \frac{s\beta(-c\beta u_x + s\beta u_z)}{e_1} + \frac{s\beta(s\beta u_z - c\beta u_y)}{e_2} + \frac{s\beta(s\beta u_z + c\beta u_x)}{e_1} + \frac{s\beta(s\beta u_z + c\beta u_y)}{e_4} \quad (\text{B.33})$$

ここで  $u_x = \sin \xi_2$ ,  $u_y = -\sin \xi_1 \cos \xi_2$ ,  $u_z = \cos \xi_1 \cos \xi_2$  である。上式を用いて  $\beta = \tan^{-1} \sqrt{2}$  rad に対し、角運動量空間内に特異点を描画した結果を図 B.2 に示す。本コン



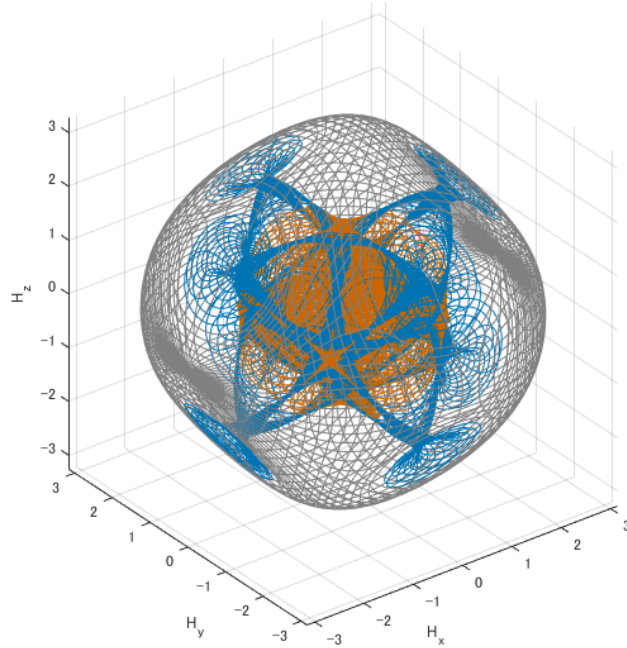


図 B.2: ピラミッド型 4SGCMG の特異面 ( $\beta = \tan^{-1} \sqrt{2}$  rad)

フィグレーションでは、 $\sum_i e_i$  の値に応じた 4H、2H、0H の特異面が存在し、それぞれ図中の灰色、青色、橙色の面に相当する。

### B.2.2 単一 VSDGCMG の特異点

式 (2.138) で見たように、単一 VSDGCMG の制御トルクは次のように表されるのであった。

$$-\begin{bmatrix} 0 & -h_w \cos \theta_I & -\sin \theta_I \\ h_w \cos \theta_O \cos \theta_I & -h_w \sin \theta_O \sin \theta_I & \sin \theta_O \cos \theta_I \\ h_w \sin \theta_O \cos \theta_I & h_w \cos \theta_O \sin \theta_I & -\cos \theta_O \cos \theta_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_O \\ \dot{\theta}_I \\ \dot{h}_w \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

左辺の  $3 \times 3$  行列から明らかなように、 $h_w = 0$  および  $\cos \theta_I = 0$  なる二つの特異状態があることが分かる。前者の特異状態では、ホイールは回転を停止しており、ホイール軸回りにしかトルクを発生させることができない。後者ではホイール軸が外側ジンバルの回転軸と一致し、SGCMG に類似した配置となるために、出力トルクが二次元平面上に拘束される。姿勢制御中、後者の特異点には遭遇する可能性が高く、対策が必要となる。

### B.2.3 特異点の種類

ここまで特異状態におけるジンバル角度や角運動量について整理してきた。次は SGCMG の特異点の種類をまとめる [20, 21]。特異点に関する重要な性質は三つあり、一

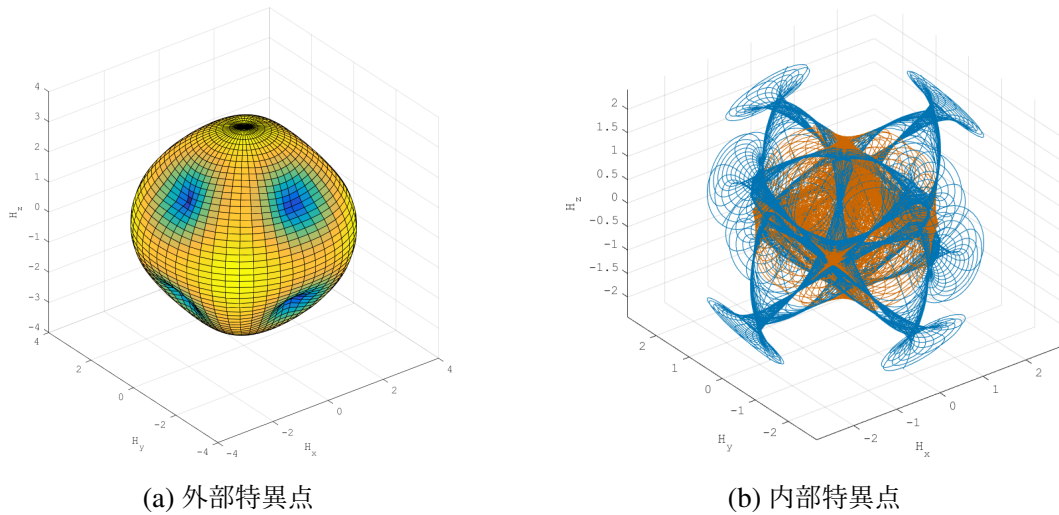


図 B.3: ピラミッド型 4SGCMG の内部・外部特異点 ( $\beta = \tan^{-1} \sqrt{2}$  rad)

つ目はその特異点が外部特異点か内部特異点か、二つ目は楕円型か双曲線型か、三つ目は passable か impassable かということである。

それではまず外部特異点、内部特異点についてみていく。CMG システムは角運動量空間内において、ある角運動量包絡域を持ち、それらは必ず特異点となることは自明だろう。なぜなら、包絡域の定義上、包絡域を超えた角運動量を持つことはできず、これは包絡域の法線ベクトル方向にトルクを出力できない特異状態であることを意味するからである。こうした特異点を外部特異点といい、それ以外の特異点を内部特異点という。 $\beta = \tan^{-1} \sqrt{2}$  rad の際の外部特異点を図 B.3a に、内部特異点を図 B.3b に示す。描画の都合上、図 B.3b には外部特異点も一部描かれていることに注意されたい。外部特異点を精度よく描画する方法は、参考文献 [38] が詳しい。外部特異点は高速姿勢変更など、宇宙機に大角運動量を与える際のみ遭遇する。一方、内部特異点は一般の姿勢変更時に遭遇するものであり、こちらへの対処はより重要となってくる。

次に楕円型特異点、双曲線型特異点について述べる。いま、ヌルモーションと呼ばれる、宇宙機にトルクを生じさせることなく CMG のジンバル角を変える動作を考える。このとき、CMG $i$  の仮想運動量ベクトル  $\delta \vec{h}_i$  を用いると、ヌルモーションの条件は次のように表すことができる。

$$\delta \vec{H} = \sum_{i=1}^n \delta \vec{h}_i = 0 \quad (\text{B.35})$$

上式の中辺をテイラー展開することで次式を得る。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \delta \vec{h}_i &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d\vec{h}_i}{d\theta_i} \delta\theta_i + \frac{1}{2!} \frac{d^2\vec{h}_i}{d\theta_i^2} \delta\theta_i^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\vec{h}_i}{d\theta_i^3} \delta\theta_i^3 + \dots \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \vec{f}_i \delta\theta_i - \frac{1}{2!} \vec{h}_i \delta\theta_i^2 - \frac{1}{3!} \vec{f}_i \delta\theta_i^3 + \dots \right]\end{aligned}\quad (\text{B.36})$$

式中の微分は、機体座標系での微分である。また、式 (B.16) および次の関係式を用いた。

$$\frac{d^2\vec{h}_i}{d\theta_i^2} = -\vec{h}_i \quad (\text{B.37})$$

これより、ヌルモーシヨンの一次の必要条件は次式で与えられる。

$$\sum_{i=1}^n \vec{f}_i \delta\theta_i = 0 \quad (\text{B.38})$$

機体座標系では次のように表される。

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \delta\theta_i = \mathbf{A} \delta\boldsymbol{\theta} = 0 \quad (\text{B.39})$$

次に、より高次の必要条件を導く。機体座標系でのヌルモーシヨンの条件は次のようになる。

$$\delta\mathbf{H} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{f}_i \delta\theta_i - \frac{1}{2!} \mathbf{h}_i \delta\theta_i^2 - \frac{1}{3!} \mathbf{f}_i \delta\theta_i^3 + \dots \right] = 0 \quad (\text{B.40})$$

ここで上式と特異ベクトル  $\mathbf{u}$  の内積を取ると次式が得られる。

$$\mathbf{u}^T \delta\mathbf{H} = \mathbf{u}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{f}_i \delta\theta_i - \frac{1}{2!} \mathbf{h}_i \delta\theta_i^2 - \frac{1}{3!} \mathbf{f}_i \delta\theta_i^3 + \dots \right] \right\} = 0 \quad (\text{B.41})$$

システムが特異状態のとき、 $\mathbf{u}^T \mathbf{f}_i = 0$  であるので、ヌルモーシヨンに関する拘束条件は次のように変形できる。

$$0 = \mathbf{u}^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{1}{2!} \mathbf{h}_i \delta\theta_i^2 + \frac{1}{4!} \mathbf{h}_i \delta\theta_i^4 + \dots \right] \right\} \quad (\text{B.42})$$

$$= \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}^T \mathbf{h}_i) \left[ -\frac{1}{2!} \delta\theta_i^2 + \frac{1}{4!} \delta\theta_i^4 + \dots \right] \quad (\text{B.43})$$

$$= \sum_{i=1}^n e_i (\cos \delta\theta_i - 1) \quad (\text{B.44})$$

ここで  $e_i = \mathbf{u}^T \mathbf{h}_i = \vec{u} \cdot \vec{h}_i$  である。これより 2 次の必要条件が次のように与えられる。

$$\sum_{i=1}^n e_i \delta \theta_i^2 = 0 \quad (\text{B.45})$$

これは  $e_i$  を対角成分とした対角行列  $\mathbf{E}$  を用いて行列の二次形式に表現できる。

$$\delta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{E} \delta \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (\text{B.46})$$

さらに  $\delta \boldsymbol{\theta}$  をその零空間の基底  $\mathbf{n}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-2$ ) の線型結合として次のように表す。

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n-2} c_i \mathbf{n}_i = \mathbf{N} \mathbf{c} \quad (\text{B.47})$$

上式を式 (B.46) に代入すると次式を得る。

$$\mathbf{c}^T \mathbf{M} \mathbf{c} = 0 \quad (\text{B.48})$$

ここで  $\mathbf{M} = \mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{N}$  である。この行列  $\mathbf{M}$  の性質によって特異点の楕円型・双曲線型が区別できる。 $\mathbf{M}$  が定置行列、すなわち正定あるいは負定行列の場合、trivial な解である  $\delta \boldsymbol{\theta} = 0$  が式 (B.48) を満たす唯一の解である。このような特異点が楕円型特異点と呼ばれる。その理由は式 (B.48) が次の形に変形できるからである。

$$ay^2 + bz^2 = r^2 \quad (\text{B.49})$$

なお、先に述べた外部特異点は全て楕円型である。 $\mathbf{M}$  が準定置行列あるいは不定行列の場合、すなわちすくなくとも一つの  $\delta \boldsymbol{\theta} \neq 0$  なる non-trivial な解を持ち、双曲線型の特異点と呼ばれる。しかしながら、ヌルモーシオンが行えるからといって、特異点を脱出できることは保証されない。つまり、ヌルモーシオンを行った後も常に特異状態となり、脱出が不可能な場合も存在する。これらの性質は、次に述べる passable、impassable で整理される。

特異点の通過可能性、passability は角運動量空間上で定義される。すなわち、角運動量空間上のある特異点において、特異ジンバル角から、トルクを発生させることなく非特異ジンバル角に状態を変更できれば、その点は passable と呼ばれる。そうでない場合は impassable と呼ばれる。passable な特異点は双曲線型の特異点のうち、特異点から脱出できるもの (non-degenerate hyperbolic singularities) をいう。それ以外の双曲線型特異点 (degenerate hyperbolic singularities) および楕円型特異点は impassable な特異点である。詳細な議論については参考文献 [21] が詳しい。

以上の分類を図 B.4 にまとめた。ヌルモーシオンが行えるかどうかで双曲線型・楕円型が分かれる。外部特異点は全て楕円型であり、内部はどちらのタイプも存在する。双曲線

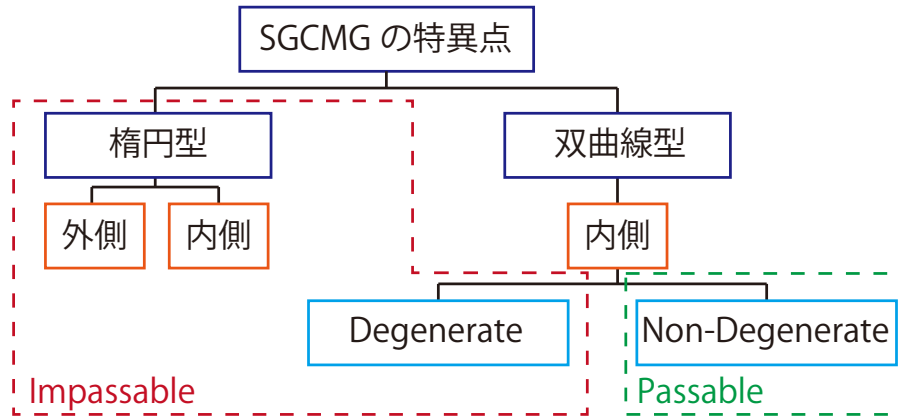


図 B.4: 特異点の分類

型のうち、non-degenerate な特異点のみが passable であり、ヌルモーションを使って特異点から脱出できる。他の 3 種は impassable、つまりヌルモーションが実行可能であったとしても、誤差トルクなしに特異点からの脱出は不可能である。

### B.3 CMG を用いたフィードバック制御

本節と次節にかけて、CMG の駆動則を説明する。前節で述べたように、CMG には特異点が存在するため、その特異点を回避あるいは脱出する方策が駆動則に組み込まれている。特異点への対策手法で駆動則を分類することもできるが、本稿では制御の観点からフィードバック制御とフィードフォワード制御に分類して説明していく。フィードバック制御では目標トルク  $\mathbf{u}_r$  をトルク制御則により計算する必要があるため、その手法についても記述した。

トルク制御則と駆動則の違いについて述べておく。宇宙機と CMG を別の系とみなした場合、簡略化された運動方程式は次の 2 式で記述される。

$$\dot{\mathbf{h}}_b + \tilde{\omega} \mathbf{h}_b = \mathbf{u} \quad (\text{B.50})$$

$$\dot{\mathbf{h}}_c + \tilde{\omega} \mathbf{h}_c = -\mathbf{u} \quad (\text{B.51})$$

$\mathbf{h}_b$ 、 $\mathbf{h}_c$  はそれぞれ機体、CMG システムの角運動量、 $\mathbf{u}$  は宇宙機が受けるトルクである。CMG に関する運動方程式において制御に使用される項は  $\dot{\mathbf{h}}_c$  であり、本稿では CMG トルク  $\boldsymbol{\tau}$  を次式で定義する。

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{h}}_c = -\mathbf{u} - \tilde{\omega} \mathbf{h}_c \quad (\text{B.52})$$

$\mathbf{u}$  の目標値である  $\mathbf{u}_r$  を決定するアルゴリズムが制御則と呼ばれる。 $\mathbf{u}_r$  が定まると

$\boldsymbol{\tau}_r = -\mathbf{u}_r - \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{h}_c$  も計算できる。 $\boldsymbol{\tau}_r$  を出力するようなジンバルモータの角速度、ホイールモータの角速度（可変速 CMG の場合のみ）を決定するものが駆動則と呼ばれている。

### B.3.1 制御則

#### B.3.1.1 Quaternion feedback control

本制御則は最も素朴なものであり、Wie らによって提案された [54]。制御目標はクォータニオン  $\mathbf{q}$  を目標値  $\mathbf{q}_r$  に、機体角速度  $\boldsymbol{\omega}$  を  $\boldsymbol{\omega}_r$  に収束させることであり、次式で制御則が与えられる。

$$\mathbf{u}_r = -\mathbf{K}_q\Delta\boldsymbol{q} - \mathbf{K}_\omega\Delta\boldsymbol{\omega} \quad (\text{B.53})$$

$$\text{where } \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{q} \\ \Delta q_4 \end{bmatrix} = \Delta\mathbf{q} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_r^{-1}, \Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_r$$

$\mathbf{K}_q$ 、 $\mathbf{K}_\omega$  は制御ゲインであって、宇宙機の慣性テンソル  $\mathbf{J}_s$  を用いて  $\mathbf{K}_q = k_q\mathbf{J}_s$  ( $k_q > 0$ )、 $\mathbf{K}_\omega = k_\omega\mathbf{J}_s$  ( $k_\omega > 0$ ) などと与えられることが多い。クォータニオンを姿勢の比例成分、角速度を微分成分と捉えると、本制御則は PD 制御の形を成していることが理解できる。本制御則を用いることでオイラー軸回りの姿勢変更、すなわち最短経路での姿勢変更が可能である。

#### B.3.1.2 Modified quaternion feedback control

塚原らは Quaternion feedback (QF) を発展させ、次の制御則を提案した [33]。

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{J}_s\dot{\boldsymbol{\omega}}_r + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{J}_s\boldsymbol{\omega} - \mathbf{K}_q\Delta\boldsymbol{q} - \mathbf{K}_\omega\Delta\boldsymbol{\omega} \quad (\text{B.54})$$

特徴は、姿勢および角速度が目標値へ漸近することがリアプノフ関数を用いて証明されていること、および目標角速度の時間変化に対応している点である。

#### B.3.1.3 Sliding mode control

スライディングモード制御を応用した CMG の制御則も提案されている [55]。スライディングモード制御はロバスト性に優れており、その応用が広い分野で研究されている [56]。同制御の基本的な概念は、システムに対する入力を切換関数とよばれる関数によって切換え、最終的に位相平面上である状態へとシステムを収束させるものである。一例として次のシステムを考える。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R} \quad (\text{B.55})$$

切換関数  $\boldsymbol{\sigma}$  は一般的に  $m$  次元であり、各々のスカラの切換関数  $\sigma_i = 0$  で表される面は、切換面（切換多様体）とよばれる。システムはこの面のみを移動し（滑り）、ある状態へと

収束する。切換面を状態が滑っていくことをスライディングモード、あるいはスライディングモードと呼び、これが制御の名前の由来である。切り替え面は  $2^m - 1$  個存在し、中でも全ての切換面の交線は、 $n - m$  次元の一つの切換面  $\sigma_e$  となる。 $\sigma_e$  はすべての切換面が最終的に到達しなければならない最終切換面とよばれ、これに関するスライディングモードは、最終スライディングモードと呼ばれる。状態がすべり面の方に向かって動き、かつすべり面に到達する条件を到達条件という。到達条件を指定するためのアプローチの一つとしてリアプノフ関数法がある。いま、リアプノフ関数の候補を次のように定める。

$$V(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.56})$$

上式が次の条件を満たしたとき、到達条件が満たされ、システムが最終スライディングモードへ到達することが保証される。

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0 \quad \boldsymbol{\sigma} \neq 0 \text{ のとき} \quad (\text{B.57})$$

有限な到達時間を満たすための条件は、正数  $e$  を使って次のように表される。

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) < -e \quad \boldsymbol{\sigma} \neq 0 \text{ のとき} \quad (\text{B.58})$$

以下では、スライディングモード制御の CMG への応用について示していく。まず、現在の姿勢、角速度と目標とする姿勢、角速度とが一致した状態が、最終スライディングモードに対応するよう、切換関数  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  を次のように設定する。

$$\boldsymbol{\sigma} = \Delta \boldsymbol{\omega} + P_1 \Delta \boldsymbol{\varrho} \quad (\text{B.59})$$

到達条件を満たすような制御入力を導出するため、リアプノフ関数の候補として次式を考える。

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T J_s \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.60})$$

$V$  を時間微分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\sigma}^T J_s \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \\ &= \boldsymbol{\sigma}^T J_s (\dot{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_r + P_1 \frac{d}{dt} \Delta \boldsymbol{\varrho}) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^T \left\{ (-\tilde{\boldsymbol{\omega}} J_s \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}_r) - J_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_r + P_1 J_s \frac{d}{dt} \Delta \boldsymbol{\varrho} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

ただし、次式で表されるオイラーの運動方程式を用いた。

$$J_s \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} J_s \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}_r \quad (\text{B.62})$$

いま、目標制御トルクを次のように定める。

$$\mathbf{u}_r = -p\boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{J}_s\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_s\dot{\boldsymbol{\omega}}_r - P_1\mathbf{J}_s\frac{d}{dt}\Delta\boldsymbol{\rho} \quad (p > 0) \quad (\text{B.63})$$

すると式 (B.61) は次のように変形できる。

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\sigma}^T p\boldsymbol{\sigma} \leq 0 \quad (\text{B.64})$$

したがって、式 (B.63) の制御則を用いることで、スライディングモードへの到達条件が満たされることが示された。

なお、式 (B.63) 中の  $\frac{d}{dt}\Delta\boldsymbol{\rho}$  を第一から第三成分として含む  $\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{q}$  は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{q} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\rho} & \Delta q_4 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_r^{-1}) \\ &= \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}_r^{-1} + \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}}_r^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_r^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes (\boldsymbol{\omega}_r \otimes \mathbf{q}_r)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\omega} \otimes \Delta\mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_r^{-1} \otimes (-\boldsymbol{\omega}_r) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\omega} \otimes \Delta\mathbf{q} - \Delta\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_r \} \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

## B.3.2 SGCMG 用駆動則

### B.3.2.1 Generalized singularity robustness inverse steering logic

SGCMG の場合、出力トルク  $\boldsymbol{\tau}$  はヤコビ行列  $\mathbf{A}$  とジンバル角速度の組  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  の積で表されるのであった。駆動則はこの関係を用いて、目標トルク  $\boldsymbol{\tau}_r$  が与えられた場合の指令ジンバル角速度  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  を決定する。Wie らによって提案された generalized singularity robustness inverse (GSR) 駆動則では次のように最適化問題の解として  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  を決定する [57]。

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\dot{\boldsymbol{\theta}}}{\operatorname{argmin}} (\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad \text{where} \quad \mathbf{e} = \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau}_r \quad (\text{B.66})$$

ここで  $\mathbf{P}$  および  $\mathbf{Q}$  は重みを意味する対角行列である。上式の解析解の導出を試みる。まず評価関数  $L(\dot{\boldsymbol{\theta}})$  を次のように定義する。

$$L(\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{B.67})$$

いま、次式が成り立つ。

$$\frac{dL}{d\dot{\boldsymbol{\theta}}} = 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \frac{d\mathbf{e}}{d\dot{\boldsymbol{\theta}}} + 2\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Q} = 2(\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A}^T - \boldsymbol{\tau}_r^T) \mathbf{P} \mathbf{A} + 2\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Q} \quad (\text{B.68})$$



最適化のための一次の必要条件は次のように表される。

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}} = 0 \quad (\text{B.69})$$

したがって、式 (B.68) を上式に代入すると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}^T A^T - \tau_r^T) P A + \dot{\theta}^T Q &= 0 \\ \dot{\theta}^T (A^T P A + Q) &= \tau_r^T P A \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

上式を転置すると解析解が得られる。

$$\begin{aligned} (A^T P A + Q) \dot{\theta} &= A^T P \tau_r \\ \dot{\theta} &= (A^T P A + Q)^{-1} A^T P \tau_r \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

ここで次式で表される  $A^\#$  を定義する。

$$A^\# = [A^T P A + Q]^{-1} A^T P \quad (\text{B.72})$$

すると式 (B.71) は次のように変形できる。

$$\dot{\theta} = A^\# \tau_r \quad (\text{B.73})$$

本駆動則では  $Q = \lambda I_4$  が指定されている。 $I_i$  は  $i$  次の単位行列である。このとき、式 (B.72) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} A^\# &= [A^T P A + \lambda I_4]^{-1} A^T P \\ &= A^T [P A A^T + \lambda I_3]^{-1} P \\ &= A^T [A A^T + \lambda P^{-1}]^{-1} \\ &= A^T [A A^T + \lambda E]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

$$\text{where } P^{-1} = E = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 1 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & \epsilon_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.75})$$

特異状態、すなわち  $\det(A A^T) = 0$  のとき、どのような  $\lambda$ 、 $\epsilon_i$  に対しても  $\text{rank}(A^\#) < 3$  となりうるため、 $\dot{\theta} = A^\# \tau_r = 0$  を満たす非ゼロベクトルの  $\tau_r$  が常に存在することが分かる。すなわち  $\lambda$ 、 $\epsilon_i$  が固定であると特異点から脱出できない場合が存在する。そこで、次式で  $\epsilon_i$  を時間的に連続して変化させ、特異点に陥るのを防ぐ。

$$\epsilon_i = \epsilon_0 \sin(\omega t + \phi_i) \quad (\text{B.76})$$

パラメータ  $\lambda$  は次のように指定されることが多い。

$$\lambda = \lambda_0 \exp[-\mu m^2] \quad \text{where } m = \sqrt{\det(A A^T)} \quad (\text{B.77})$$

$m$  は特異点に対する近さを表しており、Condition number とも呼ばれる。この値が小さいほど特異状態に近いことを示している。

Moore-Penrose の擬似逆行列  $A^+$  は次式で与えられる。

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1} \quad (\text{B.78})$$

これと式 (B.74) を比較すると、GSR 駆動則で用いた擬似逆行列  $A^\#$  は式 (B.78) の右辺の  $AA^T$  に対してジッター項を加えたものとも解釈できる。なお、 $A^+$  は次の最小化問題から導くことができる。

$$\min_{\dot{\theta}} \dot{\theta}^T \dot{\theta} \quad \text{subject to} \quad A\dot{\theta} = \tau_r \quad (\text{B.79})$$

拘束条件が付与されたタイプの問題は次のように解くことができる。ラグランジュの未定乗数法を用いると、拡張評価関数  $J$  は次のように与えられる。

$$J = \dot{\theta}^T \dot{\theta} + \lambda(A\dot{\theta} - \tau_r) \quad (\text{B.80})$$

ここで  $\lambda$  は  $1 \times 3$  行列であり、未定乗数を表す。最適性の必要条件は以下の式で与えられる。

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{\theta}} = 2\dot{\theta} + A^T \lambda^T = 0 \quad (\text{B.81})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = A\dot{\theta} - \tau_r = 0 \quad (\text{B.82})$$

式 (B.81) に左から  $A$  をかけて変形していくと以下の式を得る。

$$\begin{aligned} AA^T \lambda^T &= -2A\dot{\theta} \\ AA^T \lambda^T &= -2\tau_r \\ \lambda^T &= -2(AA^T)^{-1} \tau_r \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

これを式 (B.81) に再度代入して  $\dot{\theta}$  について整理することで次式が得られる。

$$\dot{\theta} = A^T(AA^T)^{-1} \tau_r \quad (\text{B.84})$$

よって式 (B.78) が証明できた。

以上から、GSR 駆動則は、特異点に近づいた際に指令トルクとは異なったトルクを出力することで特異点を回避する手法とまとめられる。特異点に近づくのはマヌーバ中である一方、多くのミッションではマヌーバ中の指向精度や姿勢安定度は求められていないため、ジッター項の影響は実践的には無視できる。駆動則の実装が単純であることも合わせ、GSR は広く用いられている駆動則となっている。

### B.3.2.2 Weighted singularity robustness inverse steering logic

GSR 駆動則では外部特異点から脱出できない場合がある。この問題を解決できる weighted singularity robustness inverse steering logic (WSR) 駆動則が Wie によって提案されている [29]。これは GSR 駆動則において、ジンバル角速度に対する重み行列を次のように設定したものである。

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & W_2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & W_3 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & W_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.85})$$

擬似逆行列は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= [\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ &= \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^T [\mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{P}^{-1}]^{-1} \\ &= \mathbf{W} \mathbf{A}^T [\mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{A}^T + \mathbf{E}]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

全ての種類の特異点から脱出するには、異なった  $W_i$  かつ、非ゼロの  $\lambda$  を選択する必要がある。また、 $\mathbf{W} \neq \mathbf{I}_4$  を適切に選べば、より効率よく特異点を避ける事が可能である。

### B.3.2.3 Inverse kinematics steering logic

Inverse kinematics steering logic (IKSL) は山田らによって提案された、CMG の逆運動学に基づく駆動則である [38]。CMG の逆運動学とは CMG システムの角運動量からジンバル角を逆算する手法を指す。角運動量ベースで議論を行えるため、特異点問題を陽に考慮する必要がないという特徴を持っている。山田らは同手法をピラミッド型の 4 基の SGCMG のコンフィグレーションに適用した。

IKSL について説明する前に、ピラミッド型の 4 基の SGCMG に対して逆運動学を導出する。CMG のホイール角運動量  $h_w$  で正規化した、CMG システムの角運動量ベクトルは機体座標系で次のように表される。

$$\frac{1}{h_w} \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\beta \sin \theta_1 - \cos \theta_2 + c\beta \sin \theta_3 + \cos \theta_4 \\ \cos \theta_1 - c\beta \sin \theta_2 - \cos \theta_3 + c\beta \sin \theta_4 \\ s\beta \sin \theta_1 + s\beta \sin \theta_2 + s\beta \sin \theta_3 + s\beta \sin \theta_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.87})$$

逆運動学では所与の  $h_i$  のもとで  $\theta_i$  を求める。上式のとおり拘束条件は 3 つだが、自由度は 4 つのために解は無数に存在する。そこで、いま  $\theta_4$  を暫定的に固定して考えてゆく。

式 (B.87) を変形すると次式を得る。

$$\cos \theta_1 - \cos \theta_3 = h_{20} \quad (\text{B.88})$$

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_3 = \frac{1}{s\beta} h_{30} \quad (\text{B.89})$$

$$\sin \theta_1 - \sin \theta_3 = -\frac{1}{c\beta} h_{30} \quad (\text{B.90})$$

ここで  $h_{10}$ 、 $h_{20}$ 、 $h_{30}$  は次のように定義される。

$$h_{10} = h_1 + \cos \theta_2 - \cos \theta_4 \quad (\text{B.91})$$

$$h_{20} = h_2 + c\beta(\sin \theta_2 - \sin \theta_4) \quad (\text{B.92})$$

$$h_{30} = h_3 - s\beta(\sin \theta_2 + \sin \theta_4) \quad (\text{B.93})$$

これらの式を、任意の  $\phi_1$ 、 $\phi_2$  について成り立つ次の恒等式へ代入する。

$$\begin{aligned} & [(\cos \phi_1 - \cos \phi_2)^2 + (\sin \phi_1 + \sin \phi_2)^2][(\cos \phi_1 - \cos \phi_2)^2 + (\sin \phi_1 - \sin \phi_2)^2] \\ & \quad = 4(\cos \phi_1 - \cos \phi_2)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.94})$$

加えて、 $\phi_1 = \theta_1$ 、 $\phi_2 = \theta_3$  とすると次式を得る。

$$\left( h_{20}^2 + \frac{h_{30}^2}{\sin^2 \beta} \right) \left( h_{20}^2 + \frac{h_{10}^2}{\cos^2 \beta} \right) = 4h_{20}^2 \quad (\text{B.95})$$

$\theta_4$  を固定して考えた場合、上式の辺々を二乗したものは  $\sin \theta_2$  に関する 8 次の多項式となる。以降の計算は次に示す手順で行われる。

- 式 (B.95) を  $\sin \theta_2$  に関して数値的に解いて、絶対値が 1 以下の実数解のみを選ぶ
- 各  $\sin \theta_2$  について、 $\cos \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}$  を計算し、式 (B.95) を満たす  $\cos \theta_2$  を選ぶ
- 式 (B.95) を満足する  $\sin \theta_2$  と  $\cos \theta_2$  の組合せに対し、式 (B.89)、(B.90) に対応する次式から  $\sin \theta_1$  と  $\sin \theta_3$  の候補を計算する。

$$\sin \theta_1 = -\frac{1}{2c\beta} h_{10} + \frac{1}{2s\beta} h_{30} \quad (\text{B.96})$$

$$\sin \theta_3 = \frac{1}{2c\beta} h_{10} + \frac{1}{2s\beta} h_{30} \quad (\text{B.97})$$

その中から、値の絶対値が 1 以下で、かつ式 (B.88) が成り立つものを選ぶ

繰り返しになるが、以上は  $\theta_4$  が固定されているという仮定のもので導出した。もし  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を固定する場合には機体座標系を第三軸回りに回転させて、機体座標系-Y 軸方向に  $i$  番目の CMG が配置されるように  $\mathbf{h}$  を座標変換して計算すればよい。

上記では  $\theta_4$  を固定して計算したが、次に CMG の角運動量を一定に保ったままジンバル角をある値  $\theta_{is}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) に近づけることを考える。具体的には次の評価関数をニュートン法によって最小化する。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (\theta_i - \theta_{is})^2 \quad (\text{B.98})$$

ニュートン法においては、 $\theta_i$  のうち一つを調整ジンバル角  $\theta_a$  として選ぶ。ここで、プライム' をこのジンバル角に関する微分とし、次式のように表現する。

$$J' = \frac{dJ}{d\theta_a}, \quad J'' = \frac{d^2J}{d\theta_a^2} \quad (\text{B.99})$$

$\theta_a = \theta_4$  とすると、ジンバル角は次のように更新される。

$$\theta_{4(n+1)} = \theta_{4n} - \frac{J'}{J''} \quad (\text{B.100})$$

$\theta_{4n}$  は  $n$  回目のイテレーションにおける  $\theta_4$  である。他のジンバル角は次のように更新される。

$$\theta_{i(n+1)} = \theta_{in} + \theta'_i \Delta\theta_{4n} + \frac{1}{2} \theta''_i (\Delta\theta_{4n})^2 \quad (\text{B.101})$$

ここで  $\Delta\theta_{4n} = \theta_{4(n+1)} - \theta_{4n}$  である。

次に  $J'$ 、 $J''$  の導出を行う。CMG の角運動量に関する拘束を満たしつつジンバル角を更新するため、式 (B.87) の両辺を  $\theta_4$  で微分した次の式を用いる。

$$\mathbf{A}_t \boldsymbol{\theta}'_t = \mathbf{a}_t \quad (\text{B.102})$$

ここで  $\mathbf{A}_t$  と  $\boldsymbol{\theta}_t$  はヤコビ行列  $\mathbf{A}$  と  $\boldsymbol{\theta}'$  から調整ジンバル角  $\theta_4$  に関する部分以外を切り出した行列、 $\mathbf{a}_t$  は  $\mathbf{A}$  から  $\theta_4$  に関する部分のみを切り出した行列であり、それぞれ次のように表される。

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} -c\beta \cos \theta_1 & \sin \theta_2 & c\beta \cos \theta_3 \\ -\sin \theta_1 & -c\beta \cos \theta_2 & \sin \theta_3 \\ s\beta \cos \theta_1 & s\beta \cos \theta_2 & s\beta \cos \theta_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_t = \begin{bmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_t = \begin{bmatrix} \sin \theta_4 \\ -c\beta \cos \theta_4 \\ -s\beta \cos \theta_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.103})$$

$\mathbf{A}_t$  が逆行列を持つとき、 $\theta'_1$ 、 $\theta'_2$ 、 $\theta'_3$  は容易に求められる。しかし、システムが特異点に陥っている場合にはその限りではない。そこでいま  $\theta'_1$ 、 $\theta'_2$ 、 $\theta'_3$  の近似解を求めることにする。逆元をもつ  $\mathbf{A}_t$  の逆行列は次のように表されるのであった。

$$\mathbf{A}_t^{-1} = \frac{\text{adj} \mathbf{A}_t}{\det \mathbf{A}_t} \quad (\text{B.104})$$

ここで余因子行列  $\text{adj} \mathbf{A}_t$  と行列式  $\det \mathbf{A}_t$  は次のように与えられる。

$$\det \mathbf{A}_t = s\beta\{c_2[2c\beta^2c_1c_3 + c\beta(c_1s_3 - s_1c_3)] + s_2[c_1s_3 + s_1c_3]\} \quad (\text{B.105})$$

$$\text{adj} \mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} -s\beta c_2(s_3 + c\beta c_3) & s\beta c_3(-s_2 + c\beta c_2) & s_2s_3 + c\beta^2c_2c_3 \\ s\beta(s_1c_3 + c_1s_3) & -2s\beta c\beta c_1c_3 & -c\beta(s_1c_3 - c_1s_3) \\ s\beta c_2(-s_1 + c\beta c_1) & s\beta c_1(s_2 + c\beta c_2) & s_1s_2 + c\beta^2c_1c_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.106})$$

ここで  $c_i = \cos \theta_i$ 、 $s_i = \sin \theta_i$  である。本手法においては、分母である  $\det \mathbf{A}_t$  がゼロ、もしくはゼロに近い場合に対応できるようにするため、 $\mathbf{A}_t^{-1}$  を次のように近似する。

$$\mathbf{A}_t^\dagger = \frac{\text{adj} \mathbf{A}_t}{\text{sign}(\det \mathbf{A}_t) \max(|\det \mathbf{A}_t|, \varepsilon)} \quad (\text{B.107})$$

ここで  $\varepsilon$  は微小な正数である。このとき、近似解  $\tilde{\theta}'_1$ 、 $\tilde{\theta}'_2$ 、 $\tilde{\theta}'_3$  は次のように計算できる。

$$\tilde{\theta}' = [\tilde{\theta}'_1 \quad \tilde{\theta}'_2 \quad \tilde{\theta}'_3]^T = \mathbf{A}_t^\dagger \mathbf{a}_t \quad (\text{B.108})$$

これで  $\theta_4$  に関する一階微分は求まった。次に、式 (B.87) の拘束を満たしつつ、式 (B.100)、(B.101) のイテレーションを行うために式 (B.102) の両辺を  $\theta_4$  で再度微分して次式を得る。

$$\mathbf{A}_t \theta_t'' + \mathbf{B}_t \theta_t'^2 = \mathbf{b}_t \quad (\text{B.109})$$

ここで  $\theta_t'$ 、 $\mathbf{B}_t$ 、 $\theta_t'^2$ 、 $\mathbf{b}_t$  は次のように定義されている。

$$\theta_t' = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}'_1 \\ \tilde{\theta}'_2 \\ \tilde{\theta}'_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} c\beta \sin \theta_1 & \cos \theta_2 & -c\beta \sin \theta_3 \\ -\cos \theta_1 & c\beta \sin \theta_2 & \cos \theta_3 \\ -s\beta \sin \theta_1 & -s\beta \sin \theta_2 & -s\beta \sin \theta_3 \end{bmatrix}, \quad \theta_t'^2 = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}'_1{}^2 \\ \tilde{\theta}'_2{}^2 \\ \tilde{\theta}'_3{}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_t = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \\ c\beta \sin \theta_4 \\ s\beta \sin \theta_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.110})$$

式 (B.109) より、近似解  $\tilde{\theta}''_1$ 、 $\tilde{\theta}''_2$ 、 $\tilde{\theta}''_3$  は次のように計算できる。

$$\tilde{\theta}'' = [\tilde{\theta}''_1 \quad \tilde{\theta}''_2 \quad \tilde{\theta}''_3]^T = \mathbf{A}_t^\dagger (\mathbf{b}_t - \mathbf{B}_t \tilde{\theta}'^2) \quad (\text{B.111})$$

以上の式と連鎖律を用いることで  $J'$ 、 $J''$  が次のように計算できる。

$$J' = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J}{\partial \theta_i} \frac{d\theta_i}{d\theta_4} + \frac{\partial J}{\partial \theta_4} \quad (\text{B.112})$$

$$\approx (\theta_1 - \theta_{1s})\tilde{\theta}'_1 + (\theta_2 - \theta_{2s})\tilde{\theta}'_2 + (\theta_3 - \theta_{3s})\tilde{\theta}'_3 + \theta_4 - \theta_{4s}$$

$$J'' = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J'}{\partial \theta_i} \frac{d\theta_i}{d\theta_4} + \frac{\partial J'}{\partial \theta_4} \quad (\text{B.113})$$

$$\approx (\theta_1 - \theta_{1s})\tilde{\theta}''_1 + (\theta_2 - \theta_{2s})\tilde{\theta}''_2 + (\theta_3 - \theta_{3s})\tilde{\theta}''_3 + (\tilde{\theta}'_1)^2 + (\tilde{\theta}'_2)^2 + (\tilde{\theta}'_3)^2 + 1$$

上式によって計算される  $J'$ 、 $J''$  を式 (B.100)、式 (B.101) に代入してイテレーションを繰り返すことにより、角運動量ベクトルを一定に保ちつつ評価関数  $J$  を最小化できる。この最小化計算は inverse kinematics computational procedure (IKCP) と呼ばれる。

それでは IKCP を駆動則へ適用することを考える。目標 CMG トルク  $\tau_r$  が与えられたとき、CMG の角運動量は次式を満たすように変化しなければならない。

$$\dot{\mathbf{h}} = \tau_r \quad (\text{B.114})$$

制御周期  $\Delta t$  が十分に小さいと仮定すると、上式は次のように一次近似できる。

$$\Delta \mathbf{h} = \tau \Delta t \quad (\text{B.115})$$

これにより、ダイナミクスの問題を、次の制御ステップにおいて CMG システムの角運動量が  $\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h}$  になるようなジンバル角度を求める問題へと帰着できる。

具体的な計算手順は以下のとおりである。 $\theta_i(\mathbf{h})$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) を現在の角運動量  $\mathbf{h}$  に対するジンバル角度と称する。まず、現在のジンバル角のうちの一つ  $\theta_i(\mathbf{h})$  を暫定固定ジンバル角として設定し、 $\theta_i(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h}) = \theta_i(\mathbf{h})$  とする。そして  $j$  ( $\neq i$ ) 番目の他 3 つのジンバル角  $\theta_j(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h})$  を上述した手順で求める。これを  $i$  について 1 から 4 まで順に全て計算する。IKCP における調整ジンバル角は、次式が最小となるような  $\theta_i(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h})$  を先ほど計算した 4 つの暫定固定ジンバル角から選択する。

$$\sum_{j \neq i} [\theta_j(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h}) - \theta_j(\mathbf{h})]^2 \quad (\text{B.116})$$

調整ジンバル角の初期値は、現在のジンバル角が選ばれる。すなわち次式のように初期値を定める。

$$\theta_{i0} = \theta_i(\mathbf{h}) \quad (\text{B.117})$$

ここで  $i$  ( $= 1, 2, 3, 4$ ) に対して  $\theta_i(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h})$  を決定するために IKCP を用いる。評価関数については式 (B.99) に  $\theta_{is} = \theta_i(\mathbf{h})$ 、 $\theta_i = \theta_i(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h})$  を代入した次式を用い、後に計算する入力ジンバル角速度を最小化とする。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 [\theta_i(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h}) - \theta_i(\mathbf{h})]^2 \quad (\text{B.118})$$

最後に、制御入力であるジンバル角速度を次のように決定する。

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \quad (\text{B.119})$$

なお  $\Delta \boldsymbol{\theta}$  はジンバル角の微小変化を表し、次のように定義される。

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h}) - \theta_1(\mathbf{h}) \\ \theta_2(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h}) - \theta_2(\mathbf{h}) \\ \theta_3(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h}) - \theta_3(\mathbf{h}) \\ \theta_4(\mathbf{h} + \Delta \mathbf{h}) - \theta_4(\mathbf{h}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.120})$$

### B.3.3 単一 VSDGCMG 用駆動則

単一 VSDGCMG による宇宙機の制御則は、これまでに幾つか提案されてきている。例えば、厳密な運動方程式に基づいた非線型制御、バックステッピングを用いた制御が挙げられる [26, 32]。しかしながら、特異点対策を講じているものは塚原らによって提案された駆動則のみである [33]。以下ではその特異点回避・通過則について説明してゆく。

塚原らは  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}\mathbf{u}$  として制御トルクを定義し、次の評価関数を最小にするような駆動則を提案した。

$$L = (\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}_r)^T (\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}_r) + \mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (\text{B.121})$$

ここで  $\mathbf{K}$  は特異点周辺での制御入力が発散を防ぐための重み行列であり、次式で与えられる。なお、塚原らの制御トルクの定義は B.3 節で述べたものとは符号が逆であることに注意されたい。

$$\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, k_3) \quad (\text{B.122})$$

最適性の必要条件から、 $\mathbf{B}^\dagger$  は次のように計算できる。

$$\mathbf{B}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h_w \cos \theta_O \cos \theta_I}{k_1 + h_w^2 \cos^2 \theta_I} & \frac{h_w \sin \theta_O \cos \theta_I}{k_1 + h_w^2 \cos^2 \theta_I} \\ -\frac{h_1 \cos \theta_I}{k_2 + h_w^2} & -\frac{h_w \sin \theta_O \sin \theta_I}{k_2 + h_w^2} & \frac{h_w \cos \theta_O \sin \theta_I}{k_2 + h_w^2} \\ -\frac{\sin \theta_I}{k_3 + 1} & \frac{\sin \theta_O \cos \theta_I}{k_3 + 1} & -\frac{\cos \theta_O \cos \theta_I}{k_3 + 1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.123})$$

特異点を回避する際には重みが次のように設定される。

$$k_1 = -h_w^2 \cos^2 \theta_I + h_w^2 \delta |\cos \theta_I|, \quad k_2 = -h_w^2 + \frac{h_w^2 \delta}{|\cos \theta_I|}, \quad k_3 = 0 \quad (\text{B.124})$$

通過の場合は次のとおり。

$$k_1 = -h_w^2 \cos^2 \theta_I + h_w^2 \delta^2, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0 \quad (\text{B.125})$$

ここで  $\delta$  は特異点近傍を表すパラメータであり、 $|\cos \theta_I| < \delta$  の場合、特異点に陥っているものとする。

特異点回避・通過の判断は、特異点回避時の外側ジンバル角度の変動量の近似値の大小によって決定され、変動量が大きければ通過を、小さければ回避を行う。具体的には、特異点に陥った時、つまり  $|\cos \theta_I| < \delta$  に達したとき、ある閾値  $l (> 0)$  に対して次のように判断する。 $\theta_y < \pi/2$  のときは以下のような動作を選択する。

$|\theta_{O0} + \phi_x| < l$  のとき：特異点通過

$|\theta_{O0} + \phi_x| > l$  のとき：特異点回避



$\theta_y > \pi/2$  の際の動作は以下のとおり。

$\pi - |\theta_{00} + \phi_x| < l$  のとき：特異点通過

$\pi - |\theta_{00} + \phi_x| > l$  のとき：特異点回避

$|\theta_{00} + \phi_x|$  が特異点回避時の外側ジンバル角度の変動量を表しているわけではないことに注意されたい。ここで  $\theta_{00}$  は判断時の内側ジンバル角度であり、 $\phi_x$  は次のように判断時の目標トルク  $\tau_r = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$  から計算される角度である。

$$\tan \phi_x = \frac{\tau_2}{\tau_3} \quad (\text{B.126})$$

## B.4 CMG を用いたフィードフォワード制御

フィードフォワード制御を用いた CMG 搭載宇宙機の姿勢制御手法にも多くの先行研究が存在する。SGCMG から成るシステムを適用例としたものについては、逐次最適化手法 [9]、fourier basis algorithm を用いたエネルギー最適姿勢変更計画 [34]、軌道設計法に基づく準最短時間姿勢変更計画法 [40]、最適制御問題に基づいた最短時間姿勢変更計画法 [36, 39] が挙げられる。単一 VSDGCMG への適用例としては、朝霧ら [40] と同一のアルゴリズムを使用している軸屋らの論文が挙げられる [41]。

本稿ではこのうち、計算時間と姿勢変更時間のバランスがとれており、ジンバル角加速度拘束も考慮することができる、朝霧らの手法について説明する。CMG システムは、ピラミッド型配置の 4SGCMG を想定する。まず軌道全体を  $N$  等分割し、姿勢変更初期時刻を  $t_0 (= 0)$ 、時間間隔を  $\Delta t$  とおく。すると、姿勢変更終了時刻は  $t_N = N\Delta t$  となる。 $i (= 1, 2, 3, 4)$  番目の CMG のジンバル角加速度  $\ddot{\theta}_i$  の時刻  $t_j (= j\Delta t, j = 0, 1, \dots, N)$  における値を  $a_{ij}$  と設定し、これを次のように軌道生成のためのパラメータとする。

$$\ddot{\theta}_i(t_j) = a_{ij} \quad (\text{B.127})$$

また、時刻  $t (t_j \leq t \leq t_{j+1})$  における  $i$  番目の CMG のジンバル角加速度  $\ddot{\theta}_i(t)$  は、次式のように前後の  $a_{ij}$  で線型補間した値とする。

$$\ddot{\theta}_i(t) = \frac{a_{ij}(t_{j+1} - t) + a_{i(j+1)}(t - t_j)}{\Delta t} \quad (\text{B.128})$$

それでは軌道パラメータ  $a_{ij}$  から各軌道を計算する手法を示してゆく。パラメータを単純に積分することでジンバル角速度、角度の軌道を、ゼロモーメントム状態における角運動量の保存則より宇宙機の角速度軌道を計算する。最終的に、運動学の近似解からクォータニオン表記での姿勢変更軌道を求める。まず式 (B.128) を積分することで時刻

$t (t_j \leq t \leq t_{j+1})$  におけるジンバル角速度  $\dot{\theta}_i(t)$  を得る。

$$\dot{\theta}_i(t) = \frac{-a_{ij}(t_{j+1}-t)^2 + a_{i(j+1)}(t-t_j)^2}{2\Delta t} + \frac{\Delta t}{2}a_{ij} + \dot{\theta}_i(t_j) \quad (\text{B.129})$$

上式より時刻  $t_j$  における CMGi のジンバル角速度は次のように表される。

$$\dot{\theta}_i(t_j) = \Delta t \sum_{k=0}^j a_{ik} - \frac{\Delta t}{2}(a_{i0} + a_{ij}) + \dot{\theta}_i(t_0) \quad (\text{B.130})$$

式 (B.129) を更に積分することで時刻  $t (t_j \leq t \leq t_{j+1})$  におけるジンバル角度  $\theta_i(t)$  も得られる。

$$\theta_i(t) = \frac{a_{ij}(t_{j+1}-t)^3 + a_{i(j+1)}(t-t_j)^3}{6\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{6}a_{ij} + \left(\frac{\Delta t}{2}a_{ij} + \dot{\theta}_i(t_j)\right)(t-t_j) + \theta_i(t_j) \quad (\text{B.131})$$

同様に時刻  $t_j$  における CMGi のジンバル角度は次のように表される。

$$\theta_i(t_j) = \Delta t^2 \sum_{k=0}^j (j-k)a_{ik} - \frac{(3j+1)\Delta t^2}{6}a_{i0} + \frac{\Delta t^2}{6}a_{ij} + j\Delta t\dot{\theta}_i(t_0) + \theta_i(t_0) \quad (\text{B.132})$$

次に、上記のジンバル角を入力したときの宇宙機の角速度軌道を求める。いま、軌道の分割数  $N$  が十分に大きいと仮定すると時刻  $t (t_j \leq t \leq t_{j+1})$  におけるジンバル角  $\theta_i(t)$  は前後の値の平均値  $\tilde{\theta}_{ij}$  で近似することができる。

$$\tilde{\theta}_{ij} = \frac{\theta_i(t_j) + \theta_i(t_{j+1})}{2} \quad (\text{B.133})$$

すると時刻  $t (t_j \leq t \leq t_{j+1})$  においては CMG の角運動量ベクトル  $\mathbf{h}_{cj}$  は次の値で表される一定値をとる。

$$\mathbf{h}_{cj} = \mathbf{h}_1(\tilde{\theta}_{1j}) + \mathbf{h}_2(\tilde{\theta}_{2j}) + \mathbf{h}_3(\tilde{\theta}_{3j}) + \mathbf{h}_4(\tilde{\theta}_{4j}) \quad (\text{B.134})$$

$\mathbf{h}_i(\tilde{\theta}_{ij})$  の具体的な成分は式 (2.100) で示したように計算できる。ここで外力トルクが無視できる場合、宇宙機システムの全角運動量ベクトル  $\mathbf{J}_s\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}_c$  は保存されることを利用する。ゼロモーメントを仮定すると、宇宙機の角速度は簡便な形で表される。

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{J}_s^{-1}\mathbf{h}_c \quad (\text{B.135})$$

したがって、時刻  $t (t_j \leq t \leq t_{j+1})$  における宇宙機の角速度ベクトルは次のように表される。

$$\boldsymbol{\omega}_j = -\mathbf{J}_s^{-1}\mathbf{h}_{cj} \quad (\text{B.136})$$

最後にクォータニオン表記で姿勢軌道を求める。クォータニオンの運動学は式 (2.51) で記述できるのであった。微小時間  $\Delta t$  中に宇宙機の角速度  $\boldsymbol{\omega}$  が一定と仮定すると運動学の解は次のように近似できる ( $0 \leq t \leq \Delta t$ )。

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_1}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|t}{2}\right) \\ \frac{\omega_2}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|t}{2}\right) \\ \frac{\omega_3}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|t}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.137})$$

ただしクォータニオンの初期値は  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  とした。この近似解を利用すると、時刻  $t$  ( $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ ) 間の宇宙機の姿勢変動  $\mathbf{q}_{j(j+1)}$  は角速度  $\boldsymbol{\omega}_j = [\omega_{1j} \ \omega_{2j} \ \omega_{3j}]^T$  を用いて次のように表すことができる。

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_{1j}}{\|\boldsymbol{\omega}_j\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_j\|t}{2}\right) \\ \frac{\omega_{2j}}{\|\boldsymbol{\omega}_j\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_j\|t}{2}\right) \\ \frac{\omega_{3j}}{\|\boldsymbol{\omega}_j\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_j\|t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_j\|t}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.138})$$

初期時刻  $t_0$  から終了時刻  $t_N$  までの姿勢変動  $\mathbf{q}_{0N}$  については、クォータニオンの積を用いて次のように表すことができる。

$$\mathbf{q}_{0N} = \mathbf{q}_{(N-1)N} \otimes \cdots \otimes \mathbf{q}_{12} \otimes \mathbf{q}_{01} \quad (\text{B.139})$$

ここまでの議論で、パラメータ  $a_{ij}$  を用いて姿勢軌道を計算できることを示した。次は拘束条件の与え方を記述する。拘束条件としては最終姿勢、ジンバル角、ジンバル角速度、ジンバル角加速度に関するものを考えてゆく。まず姿勢に関する拘束条件として、トータルの姿勢変動  $\mathbf{q}_{0N}$  が目標姿勢  $\mathbf{q}_r$  に一致するような条件を採用する。すなわち

$$\mathbf{q}_{0N} = \mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} e_{r1} \sin \Phi_r / 2 \\ e_{r2} \sin \Phi_r / 2 \\ e_{r3} \sin \Phi_r / 2 \\ \cos \Phi_r / 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.140})$$

を拘束条件として用いる。ただし  $\mathbf{e}_r = [e_{r1} \ e_{r2} \ e_{r3}]^T$ 、 $\Phi_r$  は目標姿勢  $\mathbf{q}_r$  に対応するオイラー軸および固有角である。ジンバルモータには通常、最大角速度  $\dot{\theta}_{\max}$  および最大角加速度  $\ddot{\theta}_{\max}$  といった機械的な制約が設けられている。そこで次の制約を設ける。

$$|\dot{\theta}_i| \leq \dot{\theta}_{\max}, \quad |\ddot{\theta}_i| \leq \ddot{\theta}_{\max} \quad (\text{B.141})$$

加えて、初期時刻  $t_0$  および最終時刻  $t_N$  におけるジンバル角、角速度、角加速度も 0 に制限する。

$$\theta_i(t_0) = 0, \theta_i(t_N) = 0, \dot{\theta}_i(t_0) = 0, \dot{\theta}_i(t_N) = 0, \ddot{\theta}_i(t_0) = 0, \ddot{\theta}_i(t_N) = 0 \quad (\text{B.142})$$

これらの制約条件は rest-to-rest マヌーバに相当する。式 (B.127)、(B.130)、(B.132) を考慮すると式 (B.142) は次式に変換できる。

$$\mathbf{B}\mathbf{a} = \text{diag}(\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4)\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (\text{B.143})$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{\Delta}{2} & \Delta t & \cdots & \Delta t & \frac{\Delta t}{2} \\ \frac{(3N-1)\Delta t^2}{6} & (N-1)\Delta t^2 & \cdots & \Delta t^2 & \frac{\Delta t^2}{6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = [a_{10} \ a_{11} \ \cdots \ a_{1N} \ a_{20} \ \cdots \ a_{4N}]^T$$

ここで  $\mathbf{B}$  は式 (B.142) の係数を並べた  $16 \times 4(N+1)$  の行列である。さて、 $\mathbf{B}$  を次のように特異値分解する。

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}[\boldsymbol{\Sigma} \ | \ \mathbf{0}]\mathbf{V}^T = \mathbf{U}[\boldsymbol{\Sigma} \ | \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} \quad (\text{B.144})$$

$\mathbf{U}$  は  $16 \times 16$  の直交行列で  $\mathbf{V}$  は  $4(N+1) \times 4(N+1)$  の直交行列、 $\boldsymbol{\Sigma}$  は特異値を対角成分として持つ  $16 \times 16$  の対角行列である。すると式 (B.144) は次のように変換できる。

$$\mathbf{U}[\boldsymbol{\Sigma} \ | \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1^T \\ \boldsymbol{\xi}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.145})$$

ここで  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{V}_1^T \mathbf{a}$ 、 $\boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{V}_2^T \mathbf{a}$  である。すると軌道パラメータ  $a_{ij}$  を  $\boldsymbol{\xi}_1$  と  $\boldsymbol{\xi}_2$  によって表すことが可能となる。

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{V}_2 \boldsymbol{\xi}_2 \quad (\text{B.146})$$

$\boldsymbol{\xi}_1$  は  $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{0}$  と与えれば式 (B.142) の拘束条件を常に満たすことができる。ただし rest-to-rest マヌーバ以外の制約を課す場合には  $\boldsymbol{\xi}_1 \neq \mathbf{0}$  となることに注意されたい。

それでは、軌道を求めるための手順を説明する。

1. 式 (B.142) を満たすために  $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{0}$  とおく
2. 式 (B.139) を計算し、式 (B.140)、式 (B.141) を満足するようにニュートン法により  $\boldsymbol{\xi}_2$  を決定する。ただし  $\boldsymbol{\xi}_2$  がうまく収束しない場合には  $\Delta t$  を 2 倍にしていく。 $\boldsymbol{\xi}_2$  が得られるまで  $\Delta t$  を増加させて、条件を満足する軌道のうちの一つを計算する。
3.  $\Delta t$  に対して二分法を適用し、駆動時間が最短となる軌道を計算する。

## B.5 結言

本章では、CMG の特異点および制御に関する既存研究をまとめた。まず、ピラミッド型の 4SGCMG から成るシステムに対して、特異ジンバル角を求めた。次に、特異ベクトルを用いて特異状態に対応する角運動量を求め、特異点の描画を容易にした。CMG のフィードフォワード則のうち、トルク制御則として 1) クォータニオンフィードバック、2) 拡張クォータニオンフィードバック、3) スライディングモード制御を紹介した。フィードバック駆動則としては SGCMG 向けに GSR、WSR、IKSL を、単一 VSDGCMG 向けに塚原らによる駆動則を紹介した。フィードフォワード則の項では、朝霧らによって提案された軌道生成法を紹介した。

## 付録 C

# 最適制御問題

### C.1 緒言

最適制御問題とは、拘束条件のもとで評価関数を最小化する制御入力履歴を求める問題であり、数学的には多点境界値問題に帰着できる [58]。しかしながら、非線型問題を解析的に解くのは容易ではないため、数値的に解を求める手法が多数提案されてきている。求解アルゴリズムは間接法と直接法の 2 種類に大別できる。間接法は変分法から導出される二点境界値問題を解く手法である。一次の最適性条件を満たす解が得られるメリットがあるものの、状態量拘束の取扱は容易でない。直接法は最適制御問題を数理計画問題へと変換する手法である。拘束条件が扱いやすく、かつ、市販のソルバも利用できるように容易に解を得られるが、最適性は保証されない。以下では両手法を詳述していく。

なお、近年では遺伝的アルゴリズムに代表される進化的アルゴリズムに基づく最適制御 [59]、強化学習に基づく最適制御も発展してきているが [60]、ここでは触れない。

### C.2 間接法

#### C.2.1 定式化

間接法が変分法に基づいた求解手法であることは上述したとおりである。ここでは、以下に示す問題に対して変分法による定式化を試みる [61]。取り扱う問題は十分に一般的な問題であり、ほぼすべての問題がこの形に帰着できることを明記しておく。

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{u}(t), t_0, t_f}{\text{minimize}} && J = \eta(\mathbf{x}(t_0), t_0) + \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \\ & \text{subject to} && \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \chi(\mathbf{x}(t_0), t_0) = 0 \quad \text{and} \quad \psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \end{aligned}$$

ここで  $J$  は評価関数、 $\mathbf{x}$  は状態ベクトル、 $\mathbf{u}$  は制御入力、 $\mathbf{f}$  は状態方程式、 $\mathbf{C}$  は等式拘束条件、 $\chi$ 、 $\psi$  は初期・終端拘束条件を表す。ラグランジュ乗数（随伴変数） $\lambda$ 、 $\rho$ 、 $\mu$ 、 $\nu$  を用いると、上記の問題は次式で表される拡張評価関数  $J^*$  を最小化する問題へと変換できる。

$$J^* = \left[ \eta(\mathbf{x}, t) + \mu^T \chi(\mathbf{x}, t) \right]_{t=t_0} + \left[ \phi(\mathbf{x}, t) + \nu^T \psi(\mathbf{x}, t) \right]_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L^* dt \quad (\text{C.1})$$

ここで  $L^*$  は拡張評価関数の被積分項であり、次のように表される。

$$L^* = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \rho^T(t)\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (\text{C.2})$$

天下降的ではあるが、ここでハミルトニアン  $H$  を次のように定義する。

$$H = L + \lambda^T \mathbf{f} + \rho^T \mathbf{C} \quad (\text{C.3})$$

なお、解析力学におけるハミルトニアンとは違うことに注意されたい。これを用いると式 (C.1) は次のように表すことができる。

$$J^* = \left[ \eta(\mathbf{x}, t) + \mu^T \chi(\mathbf{x}, t) \right]_{t=t_0} + \left[ \phi(\mathbf{x}, t) + \nu^T \psi(\mathbf{x}, t) \right]_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (H - \lambda^T \dot{\mathbf{x}}) dt \quad (\text{C.4})$$

$J^*$  の最小値を求めるため、変数  $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{u}$ 、 $\lambda$ 、 $\rho$ 、 $\mu$ 、 $\nu$ 、 $t_0$ 、 $t_f$  を微小変化させたときの  $J^*$  の第一変分  $\delta J^*$  を求めてゆく。

$$\begin{aligned} \delta J^* = & [\chi^T]_{t=t_0} d\mu + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t} \right]_{t=t_0} dt_0 - \int_{t_0}^{t_0+dt_0} (H - \lambda^T \dot{\mathbf{x}}) dt + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} d\mathbf{x}(t_0) \\ & + [\psi^T]_{t=t_f} d\nu + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]_{t=t_f} dt_f + \int_{t_f}^{t_f+dt_f} (H - \lambda^T \dot{\mathbf{x}}) dt + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_f} d\mathbf{x}(t_f) \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} - \lambda^T \delta \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \delta \lambda^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \delta \rho^T \mathbf{C} \right] dt \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

ただし入力が微分可能であることを仮定している。右辺 3、7 項を微小近似し、さらに 9 項目中の  $\lambda^T \delta \dot{\mathbf{x}}$  に対して部分積分を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta J^* = & [\chi^T]_{t=t_0} d\mu + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial t} - H + \lambda^T \dot{\mathbf{x}} \right]_{t=t_0} dt_0 + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \mu^T \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} d\mathbf{x}(t_0) \\ & + [\psi^T]_{t=t_f} d\nu + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial t} + H - \lambda^T \dot{\mathbf{x}} \right]_{t=t_f} dt_f + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_f} d\mathbf{x}(t_f) \\ & - [\lambda^T]_{t_f} \delta \mathbf{x}(t_f) + [\lambda^T]_{t_f} \delta \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\lambda}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \delta \lambda^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \delta \rho^T \mathbf{C} \right] dt \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

ここで、 $\delta \mathbf{x}$  は  $\mathbf{x}$  の仮想変位であって  $d\mathbf{x}$  と次の関係を有することを利用して、上式から  $\delta \mathbf{x}(t_0)$ 、 $\delta \mathbf{x}(t_f)$  を消去することを試みる。

$$d\mathbf{x} = \delta \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} dt \quad (\text{C.7})$$

すると式 (C.6) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \delta J^* = & [\boldsymbol{\chi}^T]_{t=t_0} d\boldsymbol{\mu} + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} - H \right]_{t=t_0} dt_0 + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \right]_{t=t_0} d\mathbf{x}(t_0) \\ & + [\boldsymbol{\psi}^T]_{t=t_f} d\mathbf{v} + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} + H \right]_{t=t_f} dt_f + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T \right]_{t=t_f} d\mathbf{x}(t_f) \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \delta \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{C} \right] dt \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$\delta \mathbf{x}$  などの微小量は全て任意であることから、最適性の一次の必要条件は次のように得られる。

$$\text{随伴変数の微分方程式} \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left[ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \quad (\text{C.9})$$

$$\text{制御入力最適性の条件} \quad \left[ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right] = 0 \quad (\text{C.10})$$

$$\text{運動方程式} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \left( = \left[ \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]^T \right) \quad (\text{C.11})$$

$$\text{等式拘束条件} \quad \mathbf{C} = 0 \quad (\text{C.12})$$

$$\text{初期拘束条件} \quad \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}(t_0), t_0) = 0 \quad (\text{C.13})$$

$$\text{終端拘束条件} \quad \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$\text{随伴変数初期条件} \quad \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) = - \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} \quad (\text{C.15})$$

$$\text{随伴変数終端条件} \quad \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_f} \quad (\text{C.16})$$

$$\text{未知量 } t_0 \text{ に対する条件} \quad \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} - H \right]_{t=t_0} = 0 \quad (\text{C.17})$$

$$\text{未知量 } t_f \text{ に対する条件} \quad \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} + H \right]_{t=t_f} = 0 \quad (\text{C.18})$$

以上から、最適化問題は  $\mathbf{x}$  と  $\boldsymbol{\lambda}$  に関する 2 点境界値問題に帰着されること、最適な制御入力はハミルトニアンの制御入力に関する微分をゼロにすることがわかる。なお、 $\mathbf{u}$  が微分可能でない際の最適解はハミルトニアン  $H$  を最小にすることが、最小原理として知られている。

最後に、 $H$  がハミルトニアンと呼ばれる所以とその性質について説明しておく。式 (C.9)、(C.11) は、解析力学における正準方程式とハミルトン関数（「解析力学のハミルトニアン」）の係数に類似している。これが最適制御において「ハミルトニアン」と呼ばれる所以である。また、 $H$  が  $t$  を陽に含んでいなければ、最適軌道に沿って  $H$  は一定になる。この性質を確認するため、 $t$  を陽に含まないハミルトニアン  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho})$  をラグラン



ジュ微分する。

$$\dot{H}(x, u, \lambda, \rho) = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \rho} \dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} + C^T \dot{\rho} \quad (\text{C.19})$$

ここで式 (C.9)–(C.12) を代入すると次式を得る。

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x} \left[ \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right]^T - \frac{\partial H}{\partial \lambda} \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \right]^T = 0 \quad (\text{C.20})$$

上式より  $\dot{H} = 0$  が示された。これは最適軌道に沿って  $H$  が一定値を取ることに他ならない。

## C.2.2 Sequential Conjugate Gradient-Restoration Algorithm

間接法に基づく求解アルゴリズムとしては、一次の勾配法である sequential conjugate gradient-restoration algorithm (SCGRA)[51]、二次の勾配法である modified quasilinearization algorithm (MQA)[62] が挙げられる。以下では SCGRA について詳しく説明する。

SCGRA の特徴は次の 3 点であって、特に汎用性の高さから様々な問題に適用されている [51, 63, 64]。

1. 最適制御問題の本質である非線型二点境界値問題を線型化して容易に解けるようにした点
2. 拘束条件を満たすことを主眼においた restoration phase と、拡張目的関数が小さくすることに主眼をおいた conjugate gradient phase の 2 つのステップによって拘束条件を満たしつつ最適解を求める点
3. 汎用性の高さ

### C.2.2.1 文字

以下に本項で使う文字を列挙する。一般的な表記ではなく、前項と一貫していないものもある。だが、元の論文 [51] ではこの表記を用いており、自作したプログラムは以下の文字を使って変数を定義しているので、わかりやすさを重視してそのまま掲載した。

$t$	: 正規化時間 ( $0 \leq t \leq 1$ )
$\mathbf{x}(t)$	: $n$ 次元状態ベクトル
$\mathbf{u}(t)$	: $m$ 次元入力ベクトル
$\boldsymbol{\pi}$	: $p$ 次元パラメータ (終端時間 $\tau$ を含む)
$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}, t)$	: $n$ 次元の状態方程式
$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi})$	: $q$ 次元の終端拘束条件
$\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi})$	: $k$ 次元の等式拘束条件
$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}, t)$	: 評価関数の被積分項
$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi})$	: 終端コスト
$I$	: 評価関数
$J$	: 拡張評価関数
$\boldsymbol{\lambda}(t)$	: $n$ 次元のラグランジュ乗数
$\boldsymbol{\rho}(t)$	: $k$ 次元のラグランジュ乗数
$\boldsymbol{\nu}$	: $q$ 次元のラグランジュ乗数
$P$	: 拘束条件のエラー
$Q$	: 最適性条件のエラー

### C.2.2.2 初期状態が固定された問題

まず問題設定を述べる。終端時間  $\tau$  が自由、初期状態は  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{mit}}$  に固定、終端時間に拘束条件が課されている問題を考える。 $\tau$  が自由な最短時間問題だと積分時間が毎回変わってしまい手間なので、実時間  $\theta$  を正規化した時間  $t = \theta/\tau, (0 \leq t \leq 1)$  を用いることにする。

このとき、最小化すべき評価関数は次式で表される。

$$I = \int_0^1 f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}, t) dt + [g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi})]_1 \quad (\text{C.21})$$

状態方程式は次のとおり。

$$\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (\text{C.22})$$

境界条件は以下の式で表される。

$$[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi})]_1 = 0 \quad (\text{C.23})$$

等式拘束条件は以下のとおりである。

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (\text{C.24})$$

拡張評価関数は次式で表される。

$$J = \int_0^1 [f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}, t) + \boldsymbol{\lambda}(\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\phi}) + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{S}] dt + [g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\psi}]_1 \quad (\text{C.25})$$

上式を変分すると次の最適性の必要条件が得られる。

$$\boldsymbol{\lambda} - f_x^T + \boldsymbol{\phi}_x^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{S}_x^T \boldsymbol{\rho} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} - H_x^T = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (\text{C.26})$$

$$f_u^T - \boldsymbol{\phi}_u^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_u^T \boldsymbol{\rho} = H_u^T = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (\text{C.27})$$

$$\int_0^1 (f_\pi^T - \boldsymbol{\phi}_\pi^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_\pi^T \boldsymbol{\rho}) dt + (g_\pi^T + \boldsymbol{\psi}_\pi^T \boldsymbol{\mu})_1 = \int_0^1 H_\pi^T dt + (G_\pi^T)_1 = 0 \quad (\text{C.28})$$

$$(\boldsymbol{\lambda} + g_x^T + \boldsymbol{\psi}_x^T \boldsymbol{\mu})_1 = (\boldsymbol{\lambda} + G_x)_1 = 0 \quad (\text{C.29})$$

ただし、 $G$ 、 $H$  は次のように与えられる。

$$G = k_g g + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\psi} \quad (\text{C.30})$$

$$H = k_g f - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{S} \quad (\text{C.31})$$

いま  $k_g = 1$  としておくが、この詳細については後述する。

拘束条件および最適性が満たされているかはそれぞれ次の  $P$ 、 $Q$  を計算することで明らかにできるため、これらの値が十分に小さくなるまで計算を行うこととする。

$$P = \int_0^1 N(\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\phi}) dt + \int_0^1 N(\mathbf{S}) dt + N(\boldsymbol{\psi})_1 \quad (\text{C.32})$$

$$Q = \int_0^1 N(\boldsymbol{\lambda} - f_x^T + \boldsymbol{\phi}_x^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{S}_x^T \boldsymbol{\rho}) dt + \int_0^1 (f_u^T - \boldsymbol{\phi}_u^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_u^T \boldsymbol{\rho}) dt \\ + N \left[ \int_0^1 (f_\pi^T - \boldsymbol{\phi}_\pi^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_\pi^T \boldsymbol{\rho}) dt + (g_\pi^T + \boldsymbol{\psi}_\pi^T \boldsymbol{\mu})_1 \right] + N(\boldsymbol{\lambda} + g_x^T + \boldsymbol{\psi}_x^T \boldsymbol{\mu})_1 \quad (\text{C.33})$$

ここで  $N$  は次のように与えられる。

$$N(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{v} \quad (\text{C.34})$$

なお、 $P$ 、 $Q$  の右辺第一項のような微分が入った項を計算機上でも求めるには数値微分をせざるを得ず、精度が落ちてしまうために次のようにして計算を行った。

$$\int_0^1 N \left[ \mathbf{x} - \int_0^t \boldsymbol{\phi} dt_2 - (\mathbf{x})_0 \right] dt \quad (\text{C.35})$$

$$\int_0^1 N \left[ \boldsymbol{\lambda} - \int_0^t (f_x^T + \boldsymbol{\phi}_x^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{S}_x^T \boldsymbol{\rho}) dt_2 - (\boldsymbol{\lambda})_0 \right] dt \quad (\text{C.36})$$

それでは具体的なアルゴリズムを説明していく。本アルゴリズムでは、まず初期解  $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{u}$ 、 $\boldsymbol{\pi}$  を与え、そこから少しずつ解を修正していくことで最適解を求める。いま、ラグラ

ラグランジュ乗数については次式を満たすように求める。

$$\lambda - H_x^T = 0 \quad (\text{C.37})$$

$$(\lambda + G_x)_1 = 0 \quad (\text{C.38})$$

制御量、パラメータの修正量は以下のように設定する。

$$\Delta u = -\alpha H_u^T \quad (\text{C.39})$$

$$\Delta \pi = -\alpha \left\{ \int_0^1 H_\pi dt + (G_\pi)_1 \right\}^T \quad (\text{C.40})$$

すると、拡張評価関数の第一変分は常に減少特性を示すようになり、数値解は最適解へと近づく。ここで  $\alpha$  はステップサイズと呼ばれる、解の更新幅を規定する正定数である。次に状態方程式である式 (C.22) をテイラー展開すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{x} + \Delta \dot{x} - \phi - \phi_x \Delta x - \phi_\pi \Delta \pi - \phi_u \Delta u &= 0 \\ \Delta \dot{x} - \phi_x \Delta x - \phi_\pi \Delta \pi - \phi_u \Delta u + (\dot{x} - \phi) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

解を微小に変化させる前に運動方程式が厳密に満たされていれば、上式の左辺第五項は 0 になるはずだが、本アルゴリズムではこれにエラーを認めて次のように扱う。

$$\Delta \dot{x} = \phi_x \Delta x + \phi_\pi \Delta \pi + \phi_u \Delta u - k_r \alpha (\dot{x} - \phi) = 0 \quad (\text{C.42})$$

$k_r = 1$  であれば、状態方程式が満たされる方向に近づくような  $\Delta \dot{x}$  となる。同様に式 (C.23) の境界条件、式 (C.24) の拘束条件についても線型化を行うと次式が得られる。

$$(\psi_x \Delta x + \psi_\pi \Delta \pi + k_r \alpha \psi)_1 = 0 \quad (\text{C.43})$$

$$S_x \Delta x + S_\pi \Delta \pi + S_u \Delta u + k_r \alpha S = 0 \quad (\text{C.44})$$

ここで、次のように文字を定義し直す。

$$\Delta x / \alpha = A, \quad \Delta u / \alpha = B, \quad \Delta \pi / \alpha = C \quad (\text{C.45})$$

すると、式 (C.42)、(C.37)、(C.39)、(C.44)、(C.43)、(C.40)、(C.38) は以下のように書き直すことができる。

$$\dot{A} = \phi_x A + \phi_\pi C + \phi_u B - k_r (\dot{x} - \phi) \quad (\text{C.46})$$

$$\lambda = k_g f_x^T - \phi_x^T \lambda + S_x^T \rho \quad (\text{C.47})$$

$$\begin{bmatrix} I_{m \times m} & S_u^T \\ S_u & 0_{k \times k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ \rho \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_g f_u^T - \phi_u^T \lambda \\ k_r S + S_x A + S_\pi C \end{bmatrix} \quad (\text{C.48})$$

$$(\psi_x A + \psi_\pi C + k_r \psi)_1 = 0 \quad (\text{C.49})$$

$$C = - \left\{ \int_0^1 (k_g f_\pi^T - \phi_\pi^T \lambda + S_\pi^T \rho) dt + (k_g g_\pi^T + \psi_\pi^T \mu)_1 \right\} \quad (\text{C.50})$$

$$(\lambda + g_x^T + \psi_x^T \mu)_1 = 0 \quad (\text{C.51})$$

$A$  の初期値を 0 とし、 $(\lambda)_0$  と  $C$  を適当な値に仮定すると、式 (C.46)–(C.48) から  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $\lambda$ 、 $\rho$  を計算できることがわかる。

式を全て線型化した意味がここで生きてくる。 $(\lambda)_0$  と  $C$  をまとめた以下のベクトルの自由度は  $n+p$  個であって、方程式が全て線型化されていることから、特解を含め  $n+p+1$  個の解の重ねあわせで  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $\lambda$ 、 $\rho$  を表すことができる。

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} (\lambda)_0 \\ C \end{bmatrix} \quad (\text{C.52})$$

$i$  個目の解を  $A_i$  などとおき、その初期値となる  $\mathbf{w}$  の  $j$  番目の要素は次のように与える。

$$w_j = \delta_{ij} \quad (\text{C.53})$$

ここでクロネッカーのデルタを用いた。このとき、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $\lambda$ 、 $\rho$  と  $k_i$  は次の関係を満たす。

$$A = \sum k_i A_i, \quad B = \sum k_i B_i, \quad C = \sum k_i C_i, \quad \lambda = \sum k_i \lambda_i, \quad \rho = \sum k_i \rho_i \quad (\text{C.54})$$

$$\sum k_i = 1 \quad (\text{C.55})$$

$k_i$  と  $q$  個の  $\mu$  は、式 (C.49)–(C.51) を満たすように選べば良い。すなわち、以下の式を解けば求まる。

$$\begin{bmatrix} (\psi_x A_1 + \psi_\pi C_1)_1 & \cdots & (\psi_x A_{n+p+1} + \psi_\pi C_{n+p+1})_1 & 0_{n \times q} \\ C_1 + \int_0^1 (-\phi_\pi^T \lambda_1 + S_\pi^T \rho) dt & \cdots & C_{n+p+1} + \int_0^1 (-\phi_\pi^T \lambda_{n+p+1} + S_\pi^T \rho) dt & (\psi_\pi^T)_1 \\ (\lambda_1)_1 & \cdots & (\lambda_{n+p+1})_1 & (\psi_x^T)_1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0_{1 \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n+p+1} \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_r (\psi)_1 \\ -k_g \left[ \int_0^1 f_\pi^T dt + (g_\pi^T)_1 \right] \\ -(g_x^T)_1 \\ 1_{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.56})$$

こうして  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $\lambda$ 、 $\rho$ 、 $\nu$  が計算できる。最後にステップサイズ  $\alpha$  を決定して修正量を決定する。

SCGRA の特徴で述べたように、同アルゴリズムには restoration phase と conjugate gradient phase が存在する。restoration phase では、 $k_g = 0$ 、 $k_r = 1$  として得た修正量で本来の評価関数は無視しながら、拘束条件のみを満たそうとする。このとき、ステップサイズは  $\alpha = 1$  から二分法で決定する。さらに、 $P$  が小さくなるまで何回も restoration

phase を繰り返す。一方の conjugate gradient phase では  $k_g = 1$ 、 $k_r = 0$  として、評価関数を小さくすることのみに注力する。ステップサイズは、拡張評価関数が最小となるよう  $0 < \alpha \leq 1$  の範囲で黄金分割法を使って求める。なお、論文 [51] では 3 次の補間で求めている。この 2 つのフェイズを繰り返し、 $P$ 、 $Q$  が十分に小さくなれば計算終了となる。

### C.2.2.3 初期状態が固定された問題

状態の一部に初期状態自由のものがある場合でもアルゴリズムはほぼ同様である。 $A_i$  の初期値が 0 でない点と、初期拘束条件に対するラグランジュ乗数も  $n + p + 1$  回の積分結果の重ねあわせで表わされることにさえ注意すればよい。以下に式のみを羅列する。状態ベクトルのうち、初期状態自由のものを  $b$  次元ベクトル  $\mathbf{z}$  とおき、初期拘束条件は  $c$  次元ベクトル  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\pi})$ 、それに対するラグランジュ乗数は  $\boldsymbol{\sigma}$ 、状態方程式に対するラグランジュ乗数は  $\boldsymbol{\zeta}$  とおいた。

評価関数および拡張評価関数：

$$I = \int_0^1 f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}, t) dt + [h(\mathbf{z}, \boldsymbol{\pi})]_0 + [g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi})]_1 \quad (\text{C.57})$$

$$J = \int_0^1 [f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}, t) + \boldsymbol{\lambda}(\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\phi}) + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{S}] dt + [h(\mathbf{z}, \boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\omega}]_0 + [g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\psi}]_1 \quad (\text{C.58})$$

状態方程式、境界条件および等式拘束条件：

$$\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (\text{C.59})$$

$$[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\pi})]_0 = 0 \quad (\text{C.60})$$

$$[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi})]_1 = 0 \quad (\text{C.61})$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (\text{C.62})$$

線型化された式：

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{\omega}_z)_0 & 0_{c \times c} \\ 1_{b \times b} & (\boldsymbol{\omega}_z)_0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}(0) \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\boldsymbol{\omega}_\pi \mathbf{C} - k_r \boldsymbol{\omega})_0 \\ (\boldsymbol{\zeta} - k_g h_z)_0 \end{bmatrix} \quad \text{where } \mathbf{E} = \Delta \mathbf{z} / \alpha \quad (\text{C.63})$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\phi}_x \mathbf{A} + \boldsymbol{\phi}_\pi \mathbf{C} + \boldsymbol{\phi}_u \mathbf{B} - k_r (\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\phi}) \quad (\text{C.64})$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = k_g f_x^T - \boldsymbol{\phi}_x^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_x^T \boldsymbol{\rho} \quad (\text{C.65})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m \times m} & \mathbf{S}_u^T \\ \mathbf{S}_u & 0_{k \times k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_g f_u^T - \boldsymbol{\phi}_u^T \boldsymbol{\lambda} \\ k_r \mathbf{S} + \mathbf{S}_x \mathbf{A} + \mathbf{S}_\pi \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (\text{C.66})$$

$$(\boldsymbol{\psi}_x \mathbf{A} + \boldsymbol{\psi}_\pi \mathbf{C} + k_r \boldsymbol{\psi})_1 = 0 \quad (\text{C.67})$$

$$\mathbf{C} = - \left\{ \int_0^1 (k_g f_\pi^T - \boldsymbol{\phi}_\pi^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_\pi^T \boldsymbol{\rho}) dt + (k_g h_\pi^T + \boldsymbol{\omega}_\pi^T \boldsymbol{\sigma})_0 + (k_g g_\pi^T + \boldsymbol{\psi}_\pi^T \boldsymbol{\mu})_1 \right\} \quad (\text{C.68})$$

$$(\boldsymbol{\lambda} + g_x^T + \boldsymbol{\psi}_x^T \boldsymbol{\mu})_1 = 0 \quad (\text{C.69})$$

$k_i, \mathbf{u}$  の求解 :

$$\begin{bmatrix} (\psi_x \mathbf{A}_1 + \psi_\pi \mathbf{C}_1)_1 & \cdots & (\psi_x \mathbf{A}_{n+p+1} + \psi_\pi \mathbf{C}_{n+p+1})_1 & 0_{n \times q} \\ \Xi_1 & \cdots & \Xi_{n+p+1} & (\psi_\pi^T)_1 \\ (\lambda_1)_1 & \cdots & (\lambda_{n+p+1})_1 & (\psi_x^T)_1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0_{1 \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n+p+1} \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{bmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -k_r(\psi)_1 \\ -k_g \left[ \int_0^1 f_\pi^T dt + (h_\pi^T)_0 + (g_\pi^T)_1 \right] \\ -(g_x^T)_1 \\ 1_{1 \times 1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.70})$$

$$\text{where } \Xi_i = \mathbf{C}_i + \int_0^1 (-\phi_\pi^T \lambda_i + \mathbf{S}_\pi^T \rho) dt + (\omega_\pi^T \sigma_i)_0$$

拘束条件および最適性が満たされているかどうかの評価式 :

$$P = \int_0^1 N(\dot{\mathbf{x}} - \phi) dt + \int_0^1 N(\mathbf{S}) dt + N(\omega)_0 + N(\psi)_1 \quad (\text{C.71})$$

$$Q = \int_0^1 N(\lambda - f_x^T + \phi_x^T \lambda - \mathbf{S}_x^T \rho) dt + \int_0^1 (f_u^T - \phi_u \lambda + \mathbf{S}_u^T \rho) dt \\ + N \left[ \int_0^1 (f_\pi^T - \phi_\pi^T \lambda + \mathbf{S}_\pi^T \rho) dt + (h_\pi^T + \omega_\pi^T \mu)_0 + (g_\pi^T + \psi_\pi^T \mu)_1 \right] \\ + N(\zeta + h_z^T + \omega_z^T \sigma)_0 + N(\lambda + g_x^T + \psi_x^T \mu)_1 \quad (\text{C.72})$$

### C.3 直接法

直接法は最適制御問題を数理計画問題へと変換する手法であり、最適化する変数の選び方で2種類に大別できる。本稿ではコロケーション法、非コロケーション法と呼称する[59]。コロケーション法は状態ベクトルと制御入力の両者を最適化する変数として扱うものであり、direct collocation with non-linear programming (DCNLP)[65]、擬スペクトル法[36, 39]といった手法が存在する。非コロケーション法は離散化された制御入力のみを最適化し、状態ベクトルは状態方程式を数値積分することによって求める[66]。

コロケーション法は状態ベクトルと制御入力がある関数系で近似・離散化し、その関数系の係数を最適化変数に含める。以下では、Chebyshev 関数系を用いた場合の擬スペクトル法である Chebyshev pseudo-spectral method (CPS 法) について説明する。

### C.3.1 Chebyshev Pseudo-Spectral Method

Chebyshev 関数とは、 $\cos m\theta$  を  $\cos \theta$  の関数として表したものである。 $x = \cos \theta$  とすると、Chebyshev 関数系  $T_m(x)$  は区間  $[-1, 1]$  に対して次のように定義される。

$$T_m(x) = T_m(\cos \theta) = \cos m\theta \quad (\text{C.73})$$

Chebyshev 関数系には次の漸化式が成り立つ。

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \quad (\text{C.74})$$

低次の関数系は以下のように表される。

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, & T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, & T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

さて、区間  $[0, t_f]$  で定義される関数  $f(t)$  を、Chebyshev 関数を用いて次のように展開することを考える。

$$f(t) = \sum_{m=0}^{S-1} a_m T_m(x) = \sum_{m=0}^{S-1} a_m T_m\left(\frac{2}{t_f}t - 1\right) \quad (\text{C.76})$$

ただし  $a_m (m = 0, 1, \dots, S-1)$  は Chebyshev 関数の係数であり、 $S$  は展開する Chebyshev 関数の次数を表す。 $2t/t_f - 1$  は、時刻  $t$  の区間  $[0, t_f]$  を Chebyshev 関数の区間  $[-1, 1]$  に変換するために導入した。このとき  $f(t)$  の時間に関する一次微分  $\dot{f}(t)$ 、二次微分  $\ddot{f}(t)$  も解析的に導出できる。

$$\dot{f}(t) = \frac{2}{t_f} \sum_{m=0}^{S-1} a_m T'_m\left(\frac{2}{t_f}t - 1\right) \quad (\text{C.77})$$

$$\ddot{f}(t) = \frac{4}{t_f^2} \sum_{m=0}^{S-1} a_m T''_m\left(\frac{2}{t_f}t - 1\right) \quad (\text{C.78})$$

ただし  $T'_m$ 、 $T''_m$  は  $T_m(x)$  の  $x$  に関する 1 階微分および 2 階微分である。

次に時間の離散化について述べる。離散化に際する分点として、等分割点ではなく Chebyshev points を用いる。区間  $[0, t_f]$  に Chebyshev points を用いて  $N$  個の評価点を作成すると  $i (= 1, 2, \dots, N)$  番目の時刻  $t_i$  は次のように表される。

$$t_i = \frac{t_f}{2}(\hat{t}_i + 1) \quad \text{where} \quad \hat{t}_i = -\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right) \quad (\text{C.79})$$

ここで  $t_1 = 0$ 、 $t_N = t_f$  である。式 (C.79) より、Chebyshev points では等角度で分割され、その  $\cos$  成分が区間の位置となっていることが分かる。すなわち、区間の始点と終端付近



で分点の間隔が短くなる。 $\hat{t}_i$  を用いると  $N$  個の点  $t_i$  において式 (C.76) は次のように計算できる。

$$f(t_i) = f\left(\frac{t_f}{2}(\hat{t}_i + 1)\right) = \sum_{m=0}^{S-1} a_m T_m(\hat{t}_i) \quad (\text{C.80})$$

理解を深めるため、 $S = 4$  に対する  $f(t_i)$  を書き下してみると次のように行列形式に変換できることが分かる。

$$\begin{aligned} f(t_i) &= \sum_{m=0}^3 a_m T_m(\hat{t}_i) \\ &= a_0 + a_1 \hat{t}_i + a_2(2\hat{t}_i^2 - 1) + a_3(4\hat{t}_i^3 - 3\hat{t}_i) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \hat{t}_i & 2\hat{t}_i^2 - 1 & 4\hat{t}_i^3 - 3\hat{t}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{t}_i^0 & \hat{t}_i^1 & \hat{t}_i^2 & \hat{t}_i^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

$f(t_i)$  をまとめて  $n \times 1$  の行列形式  $\mathbf{f} = [f(\hat{t}_1) \ f(\hat{t}_2) \ \cdots \ f(\hat{t}_N)]^T$  にすると上の形を利用して関数  $f(t)$  を次のように離散化できる。

$$\mathbf{f} = \Phi \mathbf{a} \quad (\text{C.82})$$

ここで  $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{(S-1)}]^T$  は  $S \times 1$  行列であり、 $\Phi$  は次式で表される  $N \times S$  行列である。

$$\Phi = CD \quad (\text{C.83})$$

$$\text{where } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1^0 & \hat{t}_1^1 & \cdots & \hat{t}_1^{(S-1)} \\ \hat{t}_2^0 & \hat{t}_2^1 & \cdots & \hat{t}_2^{(S-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{t}_N^0 & \hat{t}_N^1 & \cdots & \hat{t}_N^{(S-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & -3 & 0 & \cdots \\ & 2 & 0 & -8 & \cdots \\ & & 4 & 0 & \cdots \\ \mathbf{0} & & & 8 & \cdots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{C.84})$$

$\mathbf{C}$  は  $N \times S$  行列であり、 $i$  行目の成分が  $i$  点目の分点  $t_i$  における  $\hat{t}_i$  のべき乗を表している。 $\mathbf{D}$  は  $S \times S$  の正方行列であり、 $i$  行  $j$  列が Chebyshev 多項式  $T_{j-1}(x)$  における  $x^{i-1}$  の係数である。 $\mathbf{D}$  のうち、対角成分を除く下三角成分は全て 0 である。 $\mathbf{D}$  を計算機上で求める

には漸化式 (C.74) を用いる。同様に  $\dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}$  も次のように離散化できる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{2}{t_f} \dot{\Phi} \mathbf{a} \quad (\text{C.85})$$

$$\ddot{\mathbf{f}} = \frac{4}{t_f^2} \ddot{\Phi} \mathbf{a} \quad (\text{C.86})$$

ここで  $\dot{\Phi}, \ddot{\Phi}$  は式 (C.83) 中における  $\mathbf{D}$  をそれぞれ  $T'_m(x), T''_m(x)$  に相当する係数に置き換えた行列であって、次のように表せる。

$$\dot{\Phi} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & \dots \\ & 0 & 4 & 0 & -16 & \dots \\ & & 0 & 12 & 0 & \dots \\ & & & 0 & 32 & \dots \\ \mathbf{0} & & & & 0 & \dots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{C.87})$$

$$\ddot{\Phi} = \mathbf{C} \ddot{\mathbf{D}} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & -16 & \dots \\ & 0 & 0 & 24 & 0 & \dots \\ & & 0 & 0 & 96 & \dots \\ & & & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{0} & & & & 0 & \dots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{C.88})$$

これを計算機上で求めるには式 (C.74) を  $x$  で微分して得られる次の漸化式を用いる。

$$T'_{m+1}(x) = 2T_m(x) + 2xT'_m(x) - T'_{m-1}(x) \quad (\text{C.89})$$

$$T''_{m+1}(x) = 4T'_m(x) + 2xT''_m(x) - T''_{m-1}(x) \quad (\text{C.90})$$

### C.3.2 一軸リアクションホイール制御への CPS 法の適用

#### C.3.2.1 問題設定

本項では単純な問題に対して CPS 法を適用し、理解を深めることを目的とする。ここでは、宇宙機とリアクションホイール (RW) を用いた一軸まわりの最短時間姿勢変更問題を対象とする。問題を単純にするため、ゼロモーメント制御かつ rest-to-rest 姿勢変更を対象とする。CPS 法の適用に先立ち、まずは本問題を数式モデルで表していく。回転軸周りの角運動量保存則から次式が成り立つ。

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_W\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0} \quad (\text{C.91})$$

ここで  $\mathbf{J}, \mathbf{J}_W$  はそれぞれ機体、ホイールの慣性テンソル、 $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$  はそれぞれ機体、ホイールの角速度である。回転軸周りの宇宙機の姿勢を表す角度  $\psi$  と機体角速度の間には次式

の関係が成り立つ。

$$\dot{\psi} = \omega \quad (\text{C.92})$$

初期姿勢  $\psi(0)$  および最終姿勢  $\psi(t_f)$  は次のように定める。

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(t_f) = \phi \quad (\text{C.93})$$

Rest-to-rest マヌーバとするため、初期時刻 0 および終端時刻  $t_f$  におけるホイール角速度に次の制約を与える。

$$\Omega(0) = 0, \quad \Omega(t_f) = 0 \quad (\text{C.94})$$

また、RW の回転数  $\Omega(t)$  および角加速度  $\dot{\Omega}(t)$  には、次の機械的な制約を与える。

$$|\Omega(t)| < \Omega_{\max}, \quad |\dot{\Omega}(t)| < \dot{\Omega}_{\max} \quad (\text{C.95})$$

### C.3.2.2 CPS 法による最短時間姿勢変更問題の定式化

それでは、以上の連続数式モデルを CPS 法を使って離散化する。今回は RW の回転速度  $\Omega$  と姿勢  $\psi$  を Chebyshev 関数系で次のように展開する。

$$\Omega = \Omega_{\max} \Phi \mathbf{a} \quad (\text{C.96})$$

$$\psi = \phi \Phi \mathbf{b} \quad (\text{C.97})$$

ここで  $\Omega = [\Omega(t_1) \cdots \Omega(t_N)]^T$ 、 $\psi = [\psi(t_1) \cdots \psi(t_N)]^T$  は共に  $N \times 1$  行列であり、 $\mathbf{a}$  および  $\mathbf{b}$  が設計変数である。最適化計算をロバストにするために  $\Omega_{\max}$ 、 $\phi$  で大きさを正規化している。運動学微分方程式 (C.92) を式 (C.91) に代入して式 (C.85) を用いることで、次の  $n$  個の拘束条件を導ける。

$$\frac{2}{t_f} J \phi \dot{\Phi} \mathbf{b} + J_W \Omega_{\max} \Phi \mathbf{a} = 0 \quad (\text{C.98})$$

姿勢角  $\psi$  に関する拘束は次のように与えられる。

$$\psi(t_1) = 0, \quad \psi(t_N) = \phi \quad (\text{C.99})$$

パラメータ  $\mathbf{b}$  で表すと次式が得られる。

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{D} \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{C}_N \mathbf{D} \mathbf{b} = 1 \quad (\text{C.100})$$

ここで  $\mathbf{C}_i$  は  $\mathbf{C}$  の  $i$  行目の行ベクトルを表す。Rest-to-rest マヌーバのための制約は次のように課される。

$$\Omega(t_1) = 0, \quad \Omega(t_N) = 0 \quad (\text{C.101})$$

パラメータ  $\mathbf{a}$  で表すと次式が得られる。

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{D} \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{C}_N \mathbf{D} \mathbf{a} = 0 \quad (\text{C.102})$$

RW の機械的な制約である式 (C.95) は計  $2N - 2$  個の制約として次のように与えられる。

$$\Omega^2(t_i) < \Omega_{\max}^2 \quad (i = 2, \dots, N - 1) \quad (\text{C.103})$$

$$\dot{\Omega}^2(t_i) < \dot{\Omega}_{\max}^2 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (\text{C.104})$$

回転数に関する  $i = 1, N$  の場合の制約は rest-to-rest マヌーバと重なるので除外した。これらをパラメータ  $\mathbf{a}$  を用いて表すと次のようになる。

$$(\mathbf{C}_i \mathbf{D} \mathbf{a})^2 < 1 \quad (i = 2, \dots, N - 1) \quad (\text{C.105})$$

$$\left( \frac{2}{t_f} \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{D}} \mathbf{a} \right)^2 < \left( \frac{\dot{\Omega}_{\max}}{\Omega_{\max}} \right)^2 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (\text{C.106})$$

以上をまとめると設計変数を  $t_f$ 、 $\mathbf{a}$  および  $\mathbf{b}$  とした数理計画問題が次のように定式化できる。

$$\begin{aligned} & \min_{t_f, \mathbf{a}, \mathbf{b}} t_f \\ \text{subject to } & \frac{2}{t_f} J \phi \Phi \mathbf{b} + J_W \Omega_{\max} \Phi \mathbf{a} = 0 \\ & \mathbf{C}_i \mathbf{D} \mathbf{a} = 0 \quad (i = 1, N) \\ & \mathbf{C}_1 \mathbf{D} \mathbf{b} = 0 \\ & \mathbf{C}_N \mathbf{D} \mathbf{b} = 1 \\ & (\mathbf{C}_i \mathbf{D} \mathbf{a})^2 - 1 < 0 \quad (i = 2, \dots, N - 1) \\ & \left( \frac{2}{t_f} \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{D}} \mathbf{a} \right)^2 - \left( \frac{\dot{\Omega}_{\max}}{\Omega_{\max}} \right)^2 < 0 \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

拘束条件は  $3N + 2$  個である。なお、拘束条件のうち 2–4 番目の式（方程式の数は 4 個）はパラメータ  $t_f$ 、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  に関して線型拘束であって、次のような形で表すこともできる。

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_1 \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{C}_N \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \mathbf{D} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_N \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_f \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.107})$$

今回は  $\psi$  のみを展開しても解が導けるが、参考文献 [39] に倣って  $\Omega$  も展開した。同文献ではピラミッド配置の 4CMG を扱っており、所与の機体角速度からジンバル角度が一意に決定できないため、クォータニオンとジンバル角度を共に Chebyshev 展開しなければならない。

初期値の与え方について説明する。Chebyshev 展開係数  $a_m$  の初期値は全て 0 とした。

$$a_m = 0 \quad (m = 0, \dots, S - 1) \quad (\text{C.108})$$

姿勢角  $\psi$  の軌道は 3 次多項式を用いて次のように設定した。

$$\psi(t) = p_3 t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0 \quad (\text{C.109})$$

係数  $p_0$ 、 $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  は次の境界条件を満たすように決定する。

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(t_f) = \phi, \quad \dot{\psi}(0) = 0, \quad \dot{\psi}(t_f) = 0 \quad (\text{C.110})$$

これらの条件を式 (C.109) とその時間微分に代入することで初期軌道が次のように得られる。

$$\psi(t) = -\frac{2\phi}{t_f^3} t^3 + \frac{3}{t_f^2} t^2 \quad (\text{C.111})$$

Chebyshev points  $t_i$  での値は次のように計算できる。

$$\psi(t_i) = -\frac{2\phi}{t_N^3} t_i^3 + \frac{3\phi}{t_N^2} t_i^2 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (\text{C.112})$$

Chebyshev 関数係数を並べた行列  $\mathbf{b}$  の初期値は、上式と式 (C.97) を用いて次のように計算できる。

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\phi} \mathbf{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\psi} \quad (\text{C.113})$$

終端時間の初期推定値は試行錯誤を行って設定した。

### C.3.2.3 シミュレーション

本問題の解析解は自明であるが、それが CPS 法で計算されるかを確認した。2 ケースのシミュレーションを行い、どちらにも共通するパラメータは表 C.2 に示した。宇宙機の慣性モーメントは 50kg 級衛星に相当する値を、RW のパラメータは超小型衛星用の RW の値を採用している。ケースによって異なるパラメータは  $\dot{\Omega}_{\max}/\Omega_{\max}$  であり、各ケースにおいて次のように設定した。

- Case A :  $\frac{\dot{\Omega}_{\max}}{\Omega_{\max}} = 0.0441$
- Case B :  $\frac{\dot{\Omega}_{\max}}{\Omega_{\max}} = 1$

表 C.2: シミュレーションパラメータ

Parameter	Value
$\phi$	20 [deg]
$J$	1.8 [kgm <sup>2</sup> ]
$\Omega_{\max}$	7800 [rpm]
$J_W \Omega_{\max}$	0.34 [Nms]
$N$	30
$S$	30

表 C.3: 終端時間のシミュレーション結果と解析解

Case	シミュレーション [s]	解析解 [s]
A	13.00	12.95
B	2.8484	2.8480

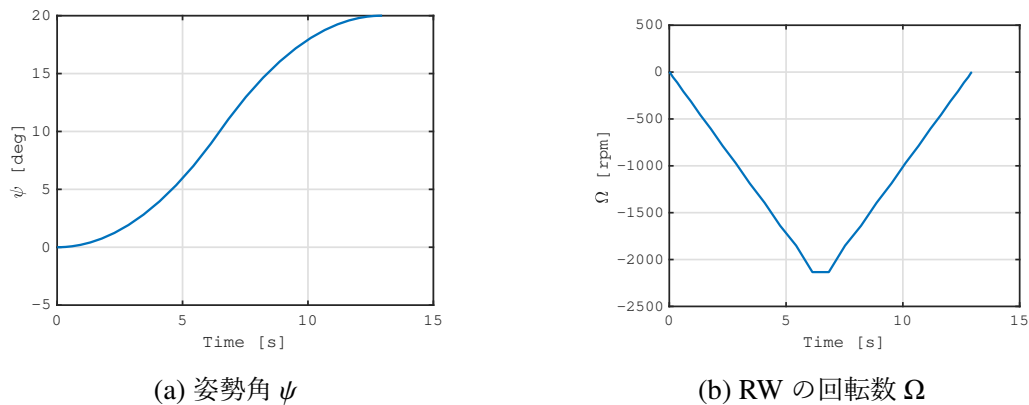


図 C.1: Case A のシミュレーション結果

Case A は実際の RW の性能を模したパラメータであり、Case B は  $t = 1$  秒で RW が最大回転数に達するケースである。NLP のソルバには MATLAB に実装されている `fmincon` を、中でも内点法を用いた。

シミュレーションによって得られた終端時間と解析解との比較を表 C.3 に、姿勢角  $\psi$  および RW の回転数  $\Omega$  を図 C.1、C.2 に示す。Case A は  $\dot{\Omega}_{\max}/\Omega_{\max}$  が小さいため角速度が下限値に達していない。一方で、角加速度の拘束は常に満たされている。 $\Omega(t)$  の解析解は三角形型のはずだが、時間刻みが粗いために台形型になっている。ただ、終端時間の解析解との誤差はわずか 0.05 秒であるため、影響は少ない。

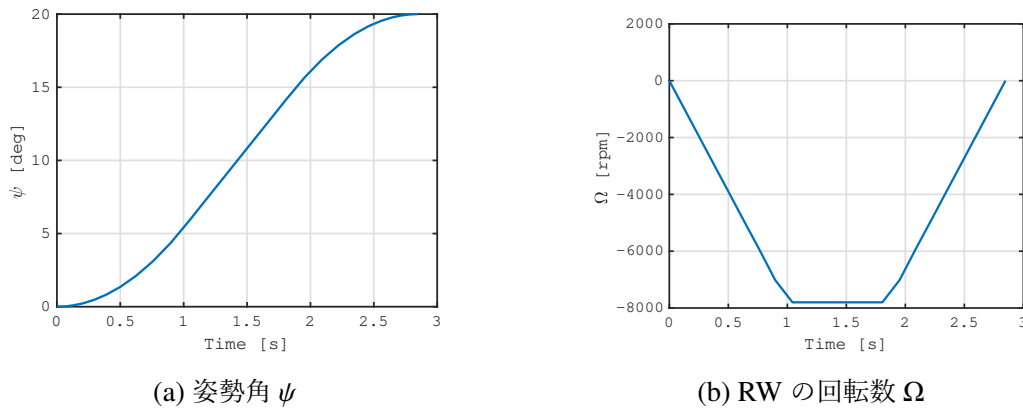


図 C.2: Case B のシミュレーション結果

Case B では  $t = 1$  秒から RW の回転数が飽和しており、回転数と角加速度をともに拘束できることが示された。終端時間の誤差は  $4 \times 10^{-4}$  秒にまで縮まっている。

## C.4 結言

本章では、まず最適制御問題を体系的に説明した。具体的にはまず、変分法を用いることで、同問題の多くを 2 点境界値問題に帰着させられることを示した。非線型問題の場合はこの解析解を求めるのは容易でないため、線型化によりこの境界値問題を解く SCGRA を紹介した。変分法を利用するこうした手法は間接法と呼ばれる。一方、変分法を用いず、数理計画法に問題を変換する手法は直接法と呼ばれる。状態ベクトルと制御入力 of 両者を最適化変数とするか、制御入力のみを最適化変数とするかで直接法も 2 種類に大別される。本章では前者の一種であり、Chebyshev 関数系を用いて解を近似する CPS 法を紹介した。

# 研究業績

## 本研究に関係するもの

### 投稿論文

- [1] S. Kawajiri and S. Matunaga, “Singularity Avoidance/Passage Steering Logic for a Variable-speed Double-gimbal Control Moment Gyro Based on Inverse Kinematics,” Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan (accepted). (3章に相当)
- [2] S. Kawajiri and S. Matunaga, “A Low-Complexity Attitude Control Method for Large-Angle Agile Maneuvers of a Spacecraft with Control Moment Gyros,” Acta Astronautica, Vol. 139, pp. 486–493, 2017. (4章の一部に相当)
- [3] S. Kawajiri and S. Matunaga, “Time Optimal Attitude Control of a Spacecraft with Variable Shape Function,” (5章の一部に相当, to be submitted).

### 国際学会発表

- [1] S. Kawajiri and S. Matunaga, “Singularity Avoidance/Passage Steering Logic for a Variable-speed Double-gimbal Control Moment Gyro Based on Inverse Kinematics,” 31st International Symposium on Space Technology and Science, 2017-d-165, Matsuyama, Japan, June 3–9, 2017. (3章に相当)
- [2] S. Kawajiri and S. Matunaga, “Real-time Attitude Control for Large-angle Agile Maneuvers of a Spacecraft with Control Moment Gyros,” 27th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, AAS 17-457, San Antonio, Texas, Feb. 5–9, 2017. (4章の一部に相当)
- [3] S. Kawajiri and S. Matunaga, “Real-time Attitude Control for Agile Maneuver of an Spacecraft with CMGs,” The 26th Workshop on JAXA: Astrodynamics and Flight Mechanics, C-2, Kanagawa, Japan, July 25–26, 2016. (4章の一部に相当)



## 国内学会発表

- [1] 河尻翔太, 松永三郎, “逆運動学に基づく単一の可変速二軸ジンバルコントロールモーメントジャイロの駆動則”, 第25回スペース・エンジニアリング・コンファレンス, 1A7, 山口, 2016年12月21–22日. (3章に相当)

## その他の業績

### 投稿論文

- [1] S. Kawajiri and A. K. Misra, “Attitude Control of a Spacecraft Orbiting an Asteroid using Thruster and Solar Radiation Pressure,” (to be submitted).
- [2] T. Hao, S. Kawajiri, K. Tawara, and S. Matunaga, “A Practical Rapid Attitude Maneuver Control System using Control Moment Gyros for Micro-satellite TSUBAME,” Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan, Vol. 13, pp. 37–43, 2015.

## 国際学会発表

- [1] S. Kawajiri, M. Matsushita, K. Tawara, M. Koga, and S. Matunaga, “Attitude Simulation and Result of On-Orbit Initial Operation of Microsatellite TSUBAME”, 30th International Symposium on Space Technology and Science, 2015-f-41, Kobe, Japan, July 6–10, 2015.
- [2] S. Kawajiri, T. Hao, M. Matsushita, K. Tawara, and S. Matunaga, “Pointing Accuracy and Stability Analysis of CMG Control for Nano-Satellite TSUBAME”, 10th IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation, IAA-B10-1402, Berlin, Germany, April 20–24, 2015.
- [3] K. Tawara, S. Kawajiri, E. Kim, and S. Matunaga, “Accuracy Improvement on Attitude Maneuver Simulations for Microsatellites Using CMGs,” 30th International Symposium on Space Technology and Science, 2015-f-46, Kobe, Japan, July 6–10, 2015.
- [4] K. Ohta, M. Koga, S. Suzuki, K. Miyasato, S. Kawajiri, E. Kim, and S. Matunaga, “Proposal and Results of an Automatic Operation System for Nano Satellites Using Multiple Ground Stations,” 30th International Symposium on Space Technology and Science, 2015-j-19, Kobe, Japan, July 6–10, 2015.

- 
- [5] M. Matsushita, S. Kawajiri, T. Nagasu, E. Kim, K. Miyasato, S. Suzuki, K. Tawara, K. Ohta, M. Koga, T. Hao, S. Kurita, N. Moriyama, M. Arimoto, Y. Yatsu, S. Kimura, S. Matunaga, and the TSUBAME development team, “Flight Model Development of the Micro-satellite TSUBAME,” 10th IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation, IAA-B10-1008P, Berlin, Germany, April 20–24, 2015.
- [6] M. Matsushita, S. Kawajiri, T. Nagasu, E. Kim, K. Miyasato, S. Suzuki, K. Tawara, K. Ohta, M. Koga, T. Hao, S. Kurita, M. Arimoto, Y. Yatsu, N. Moriyama, S. Kimura, S. Matunaga, and the TSUBAME development team, “Flight Model Development and Integration Test of the Micro-satellite TSUBAME,” 21st Asia-Pacific Regional Space Agency Forum, Tokyo, Japan, Dec. 2–5, 2014.
- [7] Y. Yatsu, K. Ito, S. Kurita, M. Arimoto, N. Kawai, M. Matsushita, S. Kawajiri, S. Kitamura, S. Matunaga, S. Kimura, J. Kataoka, T. Nakamori, and S. Kubo, “Pre-flight Performance of a Micro-Satellite TSUBAME for X-ray Polarimetry of Gamma-Ray Bursts,” Proc. SPIE 9144, Space Telescopes and Instrumentation 2014: Ultraviolet to Gamma Ray, 91440L, July 2014.
- [8] T. Hao, T. Kamiya, L. X. Huy, S. Kawajiri, and S. Matunaga, “A Reasonable and Robust Attitude Determination and Control System for Nano Satellite TSUBAME,” i-SAIRAS 2014, Montreal, Canada, June 2014.
- [9] L. X. Huy, T. Kamiya, T. Hao, S. Kawajiri, and S. Matunaga, “TSUBAME Microsatellite: Design, Development and Verification of Attitude Determination and Control System,” ICSANE 2013, SANE2013-96, Hanoi, Vietnam, Dec. 2013.
- [10] T. Kamiya, L. X. Huy, T. Hao, S. Kawajiri, M. Matsushita, T. Oya, Y. Takei, K. Jingu, T. Nishihara, K. Ishizaka, Y. Komiya, K. Ogatasu, K. Matsubara, M. Terakura, and S. Matunaga, “Development and Performance Evaluation of the Attitude Determination and Control System for nano-satellite TSUBAME,” The 5th Nano-Satellite Symposium, Tokyo, Japan, Nov. 2013
- [11] S. Kurita, H. Ohuchi, M. Arimoto, Y. Yatsu, N. Kawai, K. Ohta, M. Koga, E. Kim, K. Tawara, S. Suzuki, K. Miyasato, T. Nagasu, S. Kawajiri, M. Matsushita, S. Matunaga, N. Moriyama, S. Kimura, and the TSUBAME team, “Development of a micro-satellite TSUBAME for X-ray polarimetry of GRBs,” Fifth International Fermi Symposium, Nagoya, Japan, Oct. 2014.

## 国内学会発表

- [1] 河尻翔太, 俵京佑, 古賀将哉, 神谷崇志, 松永三郎, “超小型衛星 TSUBAME におけるロケット分離直後の姿勢制御シミュレーション”, 第 23 回スペース・エンジニアリング・コンファレンス, D04, 羽咋, 2014 年 12 月.
- [2] 河尻翔太, 神谷崇志, 俵京佑, 松永三郎, “HiLS による小型 CMG の地上試験”, 第 58 回宇宙科学技術連合講演会講演集, JSASS-2014-4453, 2014.
- [3] 河尻翔太, 福島直哉, 店橋護, 志村祐康, 宮内敏雄, “マイクロチャンネル内予混合火炎の直接数値計算, 第 50 回伝熱シンポジウム”, 第 50 回伝熱シンポジウム講演論文集, pp. 516–517, 2013 年 5 月.
- [4] 松下将典, 河尻翔太, 鈴木聡太, 俵京佑, 宮里和良, 太田佳, 古賀将哉, 渡邊輔祐太, 栗田真, 有元誠, 谷津陽一, 森山永久, 木村真一, 松永三郎, “50kg 級衛星 TSUBAME プロジェクトの総合報告ー開発と軌道上運用からの教訓ー”, 第 16 回宇宙科学シンポジウム, P-059, 相模原, 2016 年 1 月.
- [5] 宮里和良, 松永三郎, 古賀将哉, 河尻翔太, “衛星・地上局の運用条件を考慮した超小型衛星のアンテナ配置最適化とそのシステム構築”, 第 24 回スペース・エンジニアリング・コンファレンス, 仲多度, 2015 年 12 月.
- [6] 俵京佑, 河尻翔太, 松永三郎, “超小型衛星 TSUBAME の姿勢決定制御系と軌道上データ解析結果”, 第 59 回宇宙科学技術連合講演会, JSASS-2015-4357, 2I05, 鹿児島, 2015 年 10 月.
- [7] 古賀将哉, 松下将典, 河尻翔太, 長洲孝, 松永三郎, “超小型衛星の軌道・姿勢運動を考慮した電力収支の高精度模擬”, 日本機械学会 2015 年度年次大会, 札幌, 2015 年 9 月.
- [8] S. Kurita, M. Arimoto, Y. Yatsu, N. Kawai, K. Ohta, M. Koga, E. Kim, S. Suzuki, K. Tawara, K. Miyasato, T. Nagasu, S. Kawajiri, M. Matsushita, S. Matunaga, N. Moriyama, S. Kimura, and the TSUBAME team, “Development of a micro-satellite TSUBAME for X-ray Polarimetry of GRBs,” 重力波天体の多様な観測による宇宙物理学の新展開 第 3 回シンポジウム, 広島, 2015 年 2 月.
- [9] 俵京佑, 河尻翔太, 松下将典, 古賀将哉, 松永三郎, “超小型衛星 TSUBAME における姿勢決定制御系の設計と評価”, 第 15 回宇宙科学シンポジウム, P-046, 相模原, 2015 年 1 月.
- [10] 古賀将哉, 松下将典, 河尻翔太, 長洲孝, 鈴木聡太, 俵京佑, 宮里和良, 太田佳, 下中淳史, Hao Ting, Kim Eugene, 木村真一, 谷津陽一, 松永三郎, “小型衛星開発プログラム活動報告”, 第 15 回宇宙科学シンポジウム, P-044, 相模原, 2015 年 1

月.

- [11] 栗田真, 大内遙河, 有元誠, 谷津陽一, 河合誠之, 太田佳, 古賀将哉, Kim Eugene, 鈴木聡太, 俵京佑, 宮里和良, 長洲孝, 河尻翔太, 松下将典, 松永三郎, 森山永久, 木村真一, “TSUBAME 衛星搭載ガンマ線バースト硬 X 線偏光観測システムの開発”, 第 15 回宇宙科学シンポジウム, 相模原, 2015 年 1 月.
- [12] 松下将典, 河尻翔太, 長洲孝, 宮里知良, 鈴木聡太, 俵京佑, Kim Eugene, 太田佳, 古賀将哉, 下中淳史, Hao Ting, 栗田真, 森山長久, 有元誠, 谷津陽一, 木村真一, 松永三郎, “超小型衛星 TSUBAME のフライトモデル開発とクリティカルフェーズ運用”, UNISEC Space Takumi Conference, 相模原, 2014 年 12 月.
- [13] 俵京佑, 河尻翔太, 松下将典, 古賀将哉, 松永三郎, “シミュレーションと軌道上データによる TSUBAME 初期太陽補足制御の評価”, University Space Engineering Consortium Workshop 2014, 堺, 2014 年 12 月.
- [14] 太田佳, 河尻翔太, 宮里和良, 古賀将哉, 谷津陽一, 松永三郎, “複数地上局を用いた超小型衛星用自動運用システムの提案”, 第 23 回スペース・エンジニアリング・コンファレンス, E06, 羽咋, 2014 年 12 月.
- [15] 松下将典, 河尻翔太, 松永三郎, “スピンする超小型衛星の大気抵抗トルクを考慮した磁気制御に関する研究”, 第 58 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 長崎, 2014 年 11 月.
- [16] 栗田真, 伊藤慶, 有元誠, 谷津陽一, 河合誠之, 太田佳, 古賀将哉, 鈴木聡太, 俵京佑, 宮里和良, 長洲孝, 河尻翔太, 松下将典, 松永三郎, 木村真一, 久保信, TSUBAME 開発チーム, “超小型衛星 TSUBAME のソフトウェア開発と統合試験”, 日本天文学会 2014 年秋季年会, 山形, 2014 年 9 月.
- [17] 神谷崇志, Le Xuan Huy, Hao Ting, 河尻翔太, 松下正典, 大谷知弘, 武井悠斗, 神宮 健, 西原俊幸, 石坂和也, 小宮悠太, 小勝國弘, 松原薫, 寺倉雅人, 松永三郎, “超小型衛星 TSUBAME の姿勢決定制御系開発とその性能評価について”, 4th UNISEC Space Takumi Conference, 東京, 2013 年 7 月.
- [18] 宮田英里子, 河尻翔太, 福島直哉, 志村祐康, 店橋護, 宮内敏雄, “マイクロ円管内における予混合火炎の直接数値計算”, 第 26 回計算力学講演会, 第 26 回計算力学講演会講演論文集, p. 208, 2013 年 11 月.

## 受賞

- [1] 第 24 回衛星設計コンテスト, 設計大賞, 2016 年 11 月.
- [2] 第 22 回衛星設計コンテスト, アイデア大賞, 地球電磁気・地球惑星圏学会賞, 最

優秀模型賞, 2014年11月.

# 謝辞

本論文の最後にあたり、5年に渡って研究のご指導および研究費のご支援を頂きました東京工業大学 工学院 機械系 松永三郎教授に対し、謹んで感謝の意を表します。

研究のご指導を頂きました、東京工業大学 工学院 機械系 野田篤司特定准教授に感謝致します。

本論文の審査過程においてご助言とご指導を頂きました、東京工業大学 工学院 機械系 山浦弘教授、古谷寛准教授、遠藤玄准教授、中西洋喜准教授に感謝致します。

2017年7月頭から9月末まで Graduate research trainee として研究室に受け入れていただいた、McGill University の Arun K. Misra 教授に感謝致します。氏のもとでは小惑星回りの宇宙機の姿勢制御という興味深い研究に従事できただけでなく、有意義なご指導を頂きました。

発注および旅費申請などの事務手続きを行って頂きました、研究室秘書の藤沢まり氏に感謝致します。

松永研究室 俵京佑氏が開発した浮遊多剛体シミュレータ、および氏の有益なコメントによって VSAC+CMG 系の姿勢制御に関する成果を上げることができました。2.4.2 項に記載した VSSGCMG 搭載宇宙機の運動方程式の明瞭な導出も氏の寄与によるものです。同氏に感謝致します。

1章の GRB 観測シーケンス図を作成して頂きました、松永研究室 新谷勇介氏に感謝致します。

3章、4章では、私が提案した CMG 駆動則の比較対象として、大阪大学 工学研究科 機械工学専攻 山田克彦教授の研究室から提案されたものを採用させて頂きました。加えて、5章の最短時間制御問題に関する研究は、山田先生の研究を発展・応用させたものです。CMG 制御を含めた宇宙機の姿勢力学・制御全般における、山田先生の先進的な研究結果に敬意を表したいと思います。

最後に、大学生活が9年に及んだにもかかわらず、常に支え続けてくれた両親に感謝致します。