

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	Rasmussen-Tamagawa予想のDrinfeld加群類似
Title(English)	A Drinfeld module analogue of the Rasmussen-Tamagawa conjecture
著者(和文)	奥村喜晶
Author(English)	Yoshiaki Okumura
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11035号, 授与年月日:2019年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:田口 雄一郎,加藤 文元,内藤 聡,鈴木 正俊,馬 昭平
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11035号, Conferred date:2019/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 数学	系 コース	申請学位 (専攻分野)： 博士 Academic Degree Requested Doctor of (理学)
学生氏名： Student's Name	奥村喜晶		指導教員 (主)： 田口雄一郎 教授 Academic Supervisor(main)
			指導教員 (副)： Academic Supervisor(sub)

要旨 (和文 2000 字程度)

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters)

代数体と大域関数体 (以下、関数体) の数論的性質は多くの点で類似しており、それを研究することは二つの理論をより豊かに発展させることに繋がる。申請者はこの類似に基づいて、代数体上のアーベル多様体に関するある予想を、楕円曲線の関数体類似物である Drinfeld 加群に対して定式化する研究を行った。以下でその概要を述べる。

整数論における重要なテーマの一つに、ある性質を満たす数論的対象の有限性や非存在性に関する問題がある。例えば代数体の有限性に関する Hermite-Minkowski の定理や、代数体上のアーベル多様体の有限性に関する Shafarevich 予想 (今日では Faltings らによって解決されている) などがある。このような結果はしばしば強力な応用を持ち、整数論の研究において重要な意味を持つ。

2008 年に Christopher Rasmussen と玉川安騎男は、伊原康隆が提起した外ガロア表現に関する問題を背景に次の予想 (以下、RT 予想) を提唱した: 『代数体 k , 正整数 g , 素数 ℓ に対してある条件 (以下、RT 型条件) を満たす g 次元アーベル多様体の同型類の集合 $A(k, g, \ell)$ を考える。このとき k と g から決まる定数 $C > 0$ が存在し、 $\ell > C$ ならば $A(k, g, \ell)$ は空集合であろう』RT 型条件はアーベル多様体の良還元と付随する法 ℓ 表現の言葉で記述でき、それを満たすアーベル多様体は大変珍しい。実際 Shafarevich 予想によって $A(k, g, \ell)$ は常に有限なので、RT 予想はある例外的なアーベル多様体の有限性を主張していることになる。RT 予想は特別な場合を除いて未解決であるが、一般リーマン仮説 (GRH) の下では正しいことが示されている。また RT 予想の主張を「定数 C が g と k の有理数体上の拡大次数のみに依存して取れる」と変更したものは uniform 版 RT 予想と呼ばれる。こちらも一般には未解決だが、GRH の仮定の下では拡大次数が奇数の場合に示されている。

以下、 A を t を変数とする標数 p で位数 q の有限体上の多項式環、 F を A の商体、 K を F の有限次拡大とする。1974 年に Drinfeld は、楕円曲線の関数体類似物として Drinfeld 加群を導入した。 K 上の Drinfeld 加群は、 A 作用付加法群スキームとして与えられ、楕円曲線の場合と同様に、有限素点での還元概念や A のモニック既約元 π ごとに定まる法 π ガロア表現などが存在する。申請者は、Drinfeld 加群に対して RT 型条件の類似とそれを満たす K 上の階数 r の Drinfeld 加群の同型類集合 $D(K, r, \pi)$ を定式化し、RT 予想の類似として次の命題 (Q) を考察した: (Q) 『 q, K , 及び r から決まる定数 C で、 π の次数が C より大ならば $D(K, r, \pi)$ が空となるものが存在する』これについて次のような結果を得た。ここで (2), (3) に関しては京都大学の玉川安騎男教授より重要な示唆を頂いた。

(1) r が非分離次数 $[K : F]_i$ を割らないならば (Q) は真。 $D(K, r, \pi)$ に含まれる Drinfeld 加群 ϕ は例外的なガロア表現を持つことに着目する。証明は次の (i), (ii) の場合に分かれる。(i) r が p 幕のとき: 法 π 表現の馴分岐重みという量の評価と RT 型条件を用いて、仮定に反する関係式を示す。特にこの場合は、 $D(K, r, \pi)$ を含むより大きな集合に対して非存在性を示した。(ii) r は p 幕でない: この場合は関数体の効果的チェボタレフ密度定理を用いて、適当なフロベニウス元の作用を計算し、仮定に反する関係式を導く。また (i) と (ii) での議論を精密化し、 r が拡大次数 $[K : F]$ を割らないときは uniform 版 RT 予想の類似が成り立つことも示した。

(2) r が $[K : F]_i$ を割るならば (Q) は偽。これは代数体の場合とは大きく異なる結果である。 $r=1$ のときは Carlitz 加群が自明な反例となる。 $r > 1$ の場合は Carlitz 加群をひねったものを重ね合わせることで、任意の π に対して $D(K, r, \pi)$ に含まれる Drinfeld 加群が構成できる。故に (1) と合わせて、命題 (Q) の真偽を完全に決定できたことになる。

(3) $\pi=t$ かつ $r > 1$ のとき、 $D(K, r, \pi)$ は無限集合。Drinfeld 加群は楕円曲線の類似物ではあるが、Shafarevich 予想の類似が成立しないため、集合 $D(K, r, \pi)$ が有限かどうか一般には分からない。実際、 $\pi=t$ のときは具体的にガロア表現を計算することで RT 型条件を満たす Drinfeld 加群の定義方程式を与え、 $D(K, r, \pi)$ の無限部分集合を構成した。この結果も関数体特有の現象である。

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。
Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ (T2R2) にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

論文要旨
THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 数学コース	系 コース	申請学位 (専攻分野)： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	(理学)
学生氏名： Student's Name	奥村喜晶		指導教員 (主)： Academic Supervisor(main)	田口雄一郎 教授	
			指導教員 (副)： Academic Supervisor(sub)		

要旨 (英文 300 語程度)
Thesis Summary (approx.300 English Words)

In the arithmetic of function fields, Drinfeld modules play the role that elliptic curves do in the arithmetic of number fields. It is known that there are beautiful analogies between the arithmetic of number fields and that of function fields. In the thesis, we study a Drinfeld module analogue of the Rasmussen-Tamagawa conjecture, which is a non-existence conjecture of abelian varieties satisfying some conditions.

Let $A=\mathbb{F}_q[t]$ be the polynomial ring over the finite field of order q and characteristic $p>0$ and set $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q(t)$. Let K/F be a finite extension and $r>0$ a positive integer. Write $[K:F]_i$ for the inseparable degree of K/F . Let π be a monic irreducible element of A . Under the above analogy, we define the set $D(K,r,\pi)$ of K -isomorphism classes of rank- r Drinfeld modules over K satisfying the Rasmussen-Tamagawa type condition. As a Drinfeld module analogue of the Rasmussen-Tamagawa conjecture, we consider the following conjecture:

The set $D(K,r,\pi)$ is empty for any π whose degree is sufficiently large.

The main results in the thesis are as follows.

- (1) If $[K:F]_i$ is not divisible by r , then the conjecture is true. The proof consists of the following two cases: (i) r is a p -power, (ii) r has a divisor $d>1$ not divisible by p . In (i), we prove some non-existence results by considering the tame inertia weights of mod π representations attached to Drinfeld modules. In (ii), by the effective Chebotarev density theorem, we show the result.
- (2) If $[K:F]_i$ is divisible by r , then the conjecture is not true. In this case, we in particular construct a Drinfeld module Φ satisfying $\Phi \in D(K,r,\pi)$ for all π .
- (3) If $\pi=t$ and $r>1$, then $D(K,r,t)$ is infinite. We prove it by constructing an infinite subset of $D(K,r,t)$.

Therefore we can give a complete answer to the Drinfeld module analogue of the Rasmussen-Tamagawa conjecture.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。
Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).