

論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	弾性基礎上に接合されたはりの座屈解析における初期不整の影響
Title(English)	Buckling analysis of a beam on an elastic foundation considering initial imperfection
著者(和文)	関口悠, 榊原稜, 佐藤 千明
Authors(English)	Yu Sekiguchi, Ryo Sakakibara, Chiaki Sato
出典(和文)	日本接着学会誌
Citation(English)	Journal of the Adhesion Society of Japan
発行日 / Pub. date	2019, 7
Note	このファイルは著者（最終）版です。 This file is author (final) version.

<研究論文>

弾性基礎上に接合されたはりの座屈解析における初期不整の影響

関口悠*, 榊原稜**, 佐藤千明*

要旨

接着・粘着接合部の座屈を表現するために, 被着体をはり, 接着・粘着層を弾性体とする Winkler モデルを用いた座屈解析を行った。弾性基礎上に置かれたはりに圧縮荷重が負荷されるとはり単体が圧縮されるよりも座屈しにくいことが知られている。しかしながら理想的な圧縮荷重を想定した完全系の座屈解析では, 座屈荷重と座屈モードは求まるが圧縮過程での変形などは議論できない。そこで本研究では, 初期不整を想定した不完全系での座屈解析を行うことで圧縮過程での被着体の変形や初期不正に伴う座屈モードの変化を明らかにした。また, 粘着剤によって接着接合されたアクリル板に圧縮荷重を加える座屈実験から座屈現象の考察を行った。

* 東京工業大学 科学技術創成研究院

** 東京工業大学 工学院 機械系

神奈川県横浜市緑区長津田町 4259 〒226-8503

1. 緒言

材料の変形を扱う材料力学を含めすべての力学は「力のつり合い」を基本としている。力のつり合いが成り立っている状態で外乱が与えられた場合に、元の状態に復元する状態を安定なつり合い、元に戻らず乱れが急速に増大する状態を不安定なつり合いという。柱やはり、橋などの構造物において、荷重の増加により力のつり合いが破れて変形が急速に増加する現象を座屈、その時の荷重を座屈荷重と呼び、Euler による座屈解析などが知られている。座屈は不安定な力のつり合いによって起こる発生予測の難しい現象であるが致命的なダメージを負うことが多いため、発生させないことが非常に重要となる。圧縮荷重によって生じる座屈の力学解析は、構造物の安全設計のために古くから行われてきた¹⁻⁴⁾。座屈の議論は皮膚のしわ生成メカニズムの議論にも応用されている⁵⁾。近年普及してきた異種材料によるマルチマテリアル構造でも線膨張係数の違いによる座屈が問題となる。室温にてリベットで締結したアルミニウム合金と炭素鋼から成る構造物も温度が上昇すると **Fig. 1** のように座屈する。接着・粘着接合の分野においても、異種材料の接着接合部が温度変化により座屈したり、柔軟性のある物体表面に粘着剤で貼られたフィルムが曲げによる圧縮で座屈したりする例が挙げられる。

接着剤や粘着剤で接合されている場合、接着・粘着層は物体同士を結合するだけでなく変形の抑制や剛性向上の役割も果たす。接合部の変形を解析的に議論するとき、接着・粘着層を弾性体、被着体をはりに近似する Winkler モデルが利用される⁶⁻⁸⁾。Winkler モデルを座屈に応用することで、はりの座屈荷重がはり単体で座屈する場合より増加することが明らかにされた⁹⁻¹⁴⁾。しかしながら、座屈解析では座屈が起きる瞬間まで変形が生じず、座屈荷重に達するとたわみが無限に増加する理想的な条件（完全系）を前提としている。一方で実際の構造物では完全系の理想的な荷重負荷は難しく、座屈荷重に達する前に変形を開始する。Euler 座屈では初期不整を仮定した不完全系の導入によって荷重の増加に伴う変形を議論している⁹⁾。不完全系の座屈解析を接着・粘着接合部の議論に適用することは圧縮荷重を受ける接合部の解析を行う上で重要である。本論文では、第2章にて Winkler モデルを用いた座屈解析に関して記述し、第3章にてモデルを不完全系に拡大する。更に、第4章にて接着接合部の座屈現象に関する実験を行う。

2. Winkler モデルを用いた座屈解析

2.1 Euler 座屈

柱単体の座屈を扱う Euler 座屈ではつり合いが破れ、たわみが急激に増加する分岐点が複数存在することが分かっている (**Fig. 2a~c**)。各分岐点における荷重（分岐荷重）は

$$P_i = (2i - 1)^2 \frac{c\pi^2 EI}{l^2} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

と与えられる。ただし、柱の曲げ剛性を EI 、長さを l とする。端末条件係数 c は上端が自由端で下端が固定端の場合 $c = 1/4$ (**Fig. 2d**)、両端が単純支持の場合 $c = 1$ (**Fig. 2e**)、両端が固定支持の場合 $c = 4$ (**Fig. 2f**) である。分岐荷重のうち最小のものが座屈荷重となる。(1)式より柱の座屈では第1モードの分岐荷重が常に一番低いことが分かる。

2.2 弾性基礎上のはりの座屈

地面に敷かれたレールの変形や接着・粘着層を持つ構造物の変形を議論する際に、弾性床の上にはりが接合されている Winkler モデルがよく用いられる。これは、地面や接着・粘着層といった

弾性基礎をばねに近似し、側面を並列のばねで支えられたはりの変形を議論するモデルである (**Fig. 3**)。このモデルの座屈において、Euler 座屈と特徴的な違いが 2 点ある。1 つ目は座屈時の形状、すなわち座屈モードである¹⁴⁾。Euler 座屈では第 1 モードの分岐荷重が常に座屈荷重となり基本的に第 1 モードの座屈が起こる。それに対して Winkler モデルの座屈では条件により最小となる分岐荷重のモードが異なる。従って、座屈時のはりの形状は条件によって変わる。2 つ目は座屈荷重の大きさである。弾性床の上のはりの座屈荷重について詳しくは後述するが、Euler 座屈の座屈荷重に比べて大きいことが知られている⁹⁾。

側面にばねが並列で配置されたはりに圧縮荷重が負荷された場合のたわみの微分方程式は、大変形による非線形項を無視すると

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} + ky = 0 \quad (2)$$

である。ただし、 P, k は圧縮荷重と弾性基礎の剛性定数である。ここで $y = e^{\lambda x}$ を代入すると、特性方程式が

$$EI\lambda^4 + P\lambda^2 + k = 0 \quad (3)$$

となる。ここで $P > 2\sqrt{EI k}$ を満足する場合のみを考えると、

$$\lambda = \pm i\omega_+, \pm i\omega_-; \quad \omega_{\pm} = \sqrt{\frac{P}{2EI} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{k}{EI}}} \quad (4)$$

が与えられ、たわみ曲線は

$$y = c_1 \sin \omega_- x + c_2 \cos \omega_- x + c_3 \sin \omega_+ x + c_4 \cos \omega_+ x \quad (5)$$

となる¹³⁾。

2.3 単純支持での座屈荷重

回転自由な単純支持の場合 (**Fig. 3c**)、境界条件は

$$y_{x=0,l} = y_{x=l} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0 \quad (6)$$

と与えられる。 $x = 0$ の境界条件より $c_2 = c_4 = 0$ と求まる。また $x = l$ の境界条件より

$$c_1 \sin \omega_- l = -c_3 \sin \omega_+ l \quad (7)$$

および

$$c_1 \omega_-^2 \sin \omega_- l + c_3 \omega_+^2 \sin \omega_+ l = 0 \quad (8)$$

と求まる。ここで $c_1 = c_3 = 0$ は自明解となる。(8)式が非自明解を持つ条件は $\omega_- = n\pi/l, c_3 = 0$ または $\omega_+ = n\pi/l, c_1 = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) となる。従って(4)式より第 n モードの分岐荷重は

$$\bar{P}_n = \bar{P}_E \left(n^2 + \frac{\bar{K}}{n^2} \right) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

となる。ただし、荷重と弾性基礎の剛性定数は $\bar{P} = Pl^2/\pi^2 EI, \bar{K} = kl^4/\pi^4 EI$ と無次元化された。また、 $\bar{P}_E$ は無次元化された $c = 1$ の Euler 座屈荷重とする。(9)式では $\bar{K}$ の増加によって $\bar{P}_n < \bar{P}_{n+1}$ から $\bar{P}_n > \bar{P}_{n+1}$ へと切り替わる。すなわち、第 1 モードの分岐荷重が常に座屈荷重 (最小の分岐荷重) となる Euler 座屈とは異なり、必ずしも第 1 モードの座屈が起きるとは限らない。単純支持における座屈荷重と $\bar{K}$ の関係を **Fig. 4a** に示す。モードの切り替わりは $\bar{P}_n = \bar{P}_{n+1}$ 、すなわち

$$(\bar{K}, \bar{P}_n) = (n^2(n+1)^2, n^2 + (n+1)^2) \quad (10)$$

で起こる。従って、 $\bar{K}$ が大きいほど高次のモードとなる。

2.4 固定支持での座屈荷重

両端の回転が拘束された固定支持の場合 (Fig. 3d), 境界条件は

$$y_{x=0} = y_{x=l} = 0, \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=l} = 0 \quad (11)$$

と与えられる。これを(5)式に代入することで

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \omega_- & 0 & \omega_+ & 0 \\ \sin \omega_- l & \cos \omega_- l & \sin \omega_+ l & \cos \omega_+ l \\ \omega_- \cos \omega_- l & -\omega_- \sin \omega_- l & \omega_+ \cos \omega_+ l & -\omega_+ \sin \omega_+ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

を得る。自明解は $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ であり、このとき変形は起こらない。非自明解が存在する条件は

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \omega_- & 0 & \omega_+ & 0 \\ \sin \omega_- l & \cos \omega_- l & \sin \omega_+ l & \cos \omega_+ l \\ \omega_- \cos \omega_- l & -\omega_- \sin \omega_- l & \omega_+ \cos \omega_+ l & -\omega_+ \sin \omega_+ l \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

となる。従って、

$$2\sqrt{\bar{K}}(1 - \cos \omega_- l \cos \omega_+ l) = \bar{P} \sin \omega_- l \sin \omega_+ l \quad (14)$$

が満たされるとき、 $\bar{P}$ は分岐荷重となる。

$$\omega_- = n\pi, \omega_+ = (n+2)\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

は(14)式を満たしており、(4)式より

$$(\bar{K}, \bar{P}_n) = (n^2(n+2)^2, n^2 + (n+2)^2) \quad (16)$$

を得る。(16)式の $\bar{P}, \bar{K}$ はモードの切替点に対応する解である。 $\omega_{\pm}$ は $\bar{P}$ と $\bar{K}$ の関数であるため、その他の範囲での $\bar{P}$ と $\bar{K}$ の関係は(14)式を数値的に解く必要がある。式(14)を二分法で解いた結果を Fig. 4b に示す。

2.5 座屈モード

座屈の解析では不安定つり合いを扱うため、座屈が開始する瞬間の荷重と形状は求まるが、座屈後について記述することは出来ない。しかしながら実際には座屈後もある形状を保つことが一般的であり²⁾、座屈する瞬間の形状(座屈モード)を知ることは重要である。完全系の解析では、境界条件と $\bar{K}$ の値によって座屈モードが定まる。両端が単純支持の場合、座屈モードは

$$y = c_1 \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17)$$

となる。モード数が奇数のときは左右対称、偶数のときは非対称になる。両端が固定支持の場合、境界条件より

$$c_2 = -c_4 = \frac{\omega_- \sin \omega_+ l - \omega_+ \sin \omega_- l}{\omega_+ (\cos \omega_- l - \cos \omega_+ l)} c_1, c_3 = -\frac{\omega_-}{\omega_+} c_1 \quad (18)$$

となるので、(5)式より座屈モードが求まる。Fig. 5 に固定支持での第1～第4座屈モードを複数の $\bar{K}$ について示す。ただし、最大振幅を1に揃えてある。同じモードでも $\bar{K}$ の増加に伴い両端近傍が平らになり、切替点に達すると波が1つ増える。また波の振幅は中央部分ほど大きい傾向にある。

$\bar{K}$ は曲げ剛性に反比例するため、薄い被着体ほど $\bar{K}$ が増加し、より多くの波を生じさせる。このような周期的な座屈変形は、粘着剤に貼られたフィルムを曲げると簡単に観察することができる

(Fig. 6a)。また、引き伸ばした粘着剤にフィルムを貼ったのちに伸びを戻しても残留応力により同じように座屈が起きる (Fig. 6b)。しかしフィルムの厚さが増すとこのようなモードの座屈は起きなくなる (Fig. 6c)。すなわち、被着体の厚さは座屈のモードにとって重要なパラメータであることが分かる。(10)、(16)式において n が大きくなると、

$$\bar{P} \approx 2\sqrt{\bar{K}} \quad (19)$$

が得られる。これは(4)式において $\omega_- = \omega_+$ となる条件であり、たわみ曲線が

$$y = c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(\omega x + \beta) \quad (20)$$

の周期関数となる。(19)式を Fig. 4 にも点線で図示したが、低次モードにおいては特に固定支持の条件において座屈荷重を下回る傾向にある。一方で $\bar{K}$ が大きい範囲では単純支持、固定支持ともに(19)式によく一致する (Fig. 7)。更に(19)式を整理すると

$$P \approx 2\sqrt{kEI} \quad (21)$$

となる。すなわち周期的な座屈モードが起こる条件では座屈荷重が全長の影響を受けないという点で Euler 座屈とは大きく異なる現象である。被着体の曲げ剛性と粘着剤の硬さを増加させれば周期的な座屈を防ぐことは出来る一方で、接合部の柔軟性は失われてしまう。すなわち柔軟性と座屈はトレードオフの関係にあることが分かる。

3. 不完全系の Winkler 座屈モデル

第 2 章では理想的な条件を仮定した完全系での座屈解析について述べてきたが、理想的な荷重の負荷は現実的ではなく、何かしらの初期不整が存在するのが一般的である。Fig. 2a の Euler 座屈において荷重点が軸心から e だけ偏心した場合、上端のたわみ量 δ は

$$\delta = e \left(\frac{1}{\cos \sqrt{P/EI}l} - 1 \right) \quad (22)$$

と求まり、 $e \rightarrow 0$ または $\delta \rightarrow \infty$ のとき座屈荷重（第 1 モードの分岐荷重）に漸近する (Fig. 8)。つまり Euler 座屈の不完全系では座屈荷重以下でも変形は起きる一方で、座屈荷重に近づくほど変形は増大する。本章では、Winkler モデルに基づく座屈解析について第 2 章で導いた 2 つの境界条件で初期不整がある場合の影響を議論する。

3.1 荷重開始直後のたわみ

完全系での座屈解析では、座屈荷重に達した時点での座屈モードのみ議論する必要があったため $\bar{P} > 2\sqrt{\bar{K}}$ でのたわみ曲線 ((5)式) を考えた。しかしながら、圧縮荷重の荷重開始直後から変形が始まる不完全系を扱う場合、 $\bar{P} < 2\sqrt{\bar{K}}$ でのたわみを記述する必要がある。この条件のとき(2)式を満たすたわみ曲線は、

$$y = c_1 \sin \omega_1 x \sinh \omega_2 x + c_2 \sin \omega_1 x \cosh \omega_2 x + c_3 \cos \omega_1 x \sinh \omega_2 x + c_4 \cos \omega_1 x \cosh \omega_2 x \quad (23)$$

となる¹⁵⁾。ただし、

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{\bar{K}} + \bar{P}}}{2}, \omega_2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{\bar{K}} - \bar{P}}}{2} \quad (24)$$

である。

3.2 単純支持でのたわみ変化

Winkler 座屈モデルの完全系では両端単純支持の境界条件が(6)式で与えられた。しかしながら Euler 座屈の自由端における不完全系と同様に、単純支持での圧縮においても中心軸に作用点を

一致させることは難しい。ここでは単純支持の不完全系として、Euler 座屈での不完全系と同様に荷重点が軸心から e だけずれている場合について考える (Fig. 9a)。このとき $x = 0, l$ にはモーメント $M = Pe$ が働く。従って、両端の境界条件として

$$y_{x=0,l} = y_{x=l} = 0, \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0} = \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=l} = -\frac{M}{EI} \quad (25)$$

が与えられる。この条件を(5)式および(23)式に適用することで求まる $\bar{K} = 3, 8, 40$ でのたわみ曲線を Fig. 10a, c, e に、またそれに対応する荷重と最大たわみ量の関係を Fig. 10b, d, f に示す。荷重・最大たわみ量の関係図において、点線は $\bar{P} < 2\sqrt{\bar{K}}$ 、実線は $\bar{P} > 2\sqrt{\bar{K}}$ でのたわみを示している。 $\bar{K} = 8$ は完全系で非対称となる第 2 モードの条件であるが、左右対称のモーメントが端部に働く初期不整を与えたため、たわみも左右対称の第 1 モードに近い形状となった。この条件では、荷重も完全系の解析結果で最小とされた第 2 モードの分岐荷重ではなく第 1 モードの分岐荷重に漸近した。

3.3 固定支持でのたわみ変化

接着接合部で他手法（リベット・ねじ締結など）との併用を考えた場合、他手法での固定部を固定端、固定間隔をはりの長さで見なすことができる。このとき、他手法での締結部では被着体の沈み込みなどで傾きを持った状態で固定されることなどが想定される (Fig. 9b)。そこで固定支持の不完全系として、境界条件の傾きがゼロではない場合について考える (Fig. 9c)。傾きは十分に小さく ($\tan \theta \approx \theta$)、左右対称であると仮定すると、両端の境界条件として

$$y_{x=0} = y_{x=l} = 0, \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \theta, \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=l} = -\theta \quad (26)$$

が与えられる。この条件を(5)式および(23)式に適用することで求まる $\bar{K} = 3, 8, 40$ でのたわみ曲線を Fig. 11a, c, e に、またそれに対応する荷重と最大たわみ量の関係を Fig. 11b, d, f に示す。左右対称な傾きを両端に与えたため、単純支持の場合同様左右対称なたわみが生じた。固定支持で初期に傾きが与えられる場合、無荷重の状態においてもたわみが生じているため、荷重・最大たわみ量の関係は原点から始まらない。 $\bar{K} = 40$ では低い荷重の範囲で山のたわみが大きいのに対し、ある荷重を境に中央の谷のたわみが大きくなる。今回は最大たわみ量をたわみの絶対値で評価したため、山から谷へ最大たわみが切り替える点において荷重・最大たわみ量関係の傾きが不連続になっている (Fig. 11f)。また、 $\bar{K} = 40$ は第 2 モードの条件であるが、第 3 モードのたわみのまま変形が進むため、第 3 モードの分岐荷重に漸近した。単純支持・固定支持ともに、境界条件によって前後の座屈モードにシフトし、座屈荷重が完全系よりも高くなる現象が見られた。今回は左右対称の境界条件としたため、偶数モードが奇数モードへ移動したが、左右非対称の境界条件を与えれば逆に奇数モードが偶数モードへ移る。このように条件により座屈の起き方に違いは見られるものの、単純支持・固定支持とも初期不整が小さいほど座屈荷重に早く漸近することは Euler 座屈における不完全系と同じ傾向である。また、同じ初期不整の条件であれば、 $\bar{K}$ が大きいほど完全系の理論に漸近する。すなわち、はりを支える弾性基礎の剛性定数が大きい、もしくははりが長いほど初期不整の影響を受けにくい。

4. 接着接合部の座屈現象に関する実験

不完全系を考えることで弾性体によって側面を支持されたはりに圧縮荷重が負荷されてから座

屈に至るまでの変形挙動が解析的に示された。しかしながら実際の座屈現象において、各物理パラメータがどのような影響を及ぼすか、接合部で何が起こるのかなど、現実的な問題を把握することは重要である。そこで、粘着剤によって接着接合されたはり両端に圧縮荷重を加えることで座屈を生じさせる実験を行った。実験系を **Fig. 12** に示す。モータ駆動式のステージでアクリル樹脂 (PMMA) の板 (幅 10.0 mm, 長さ 150 mm) に左右それぞれ 1 mm/min の送り速度で圧縮方向の変位を加え、荷重を測定した。圧子とはり端部は接触しているだけであり、単純支持に近い条件ではりを圧縮している。はり側面に描いた標点を CMOS カメラで撮影し、たわみ量を測定した (**Fig. 13**)。標点はそれぞれの条件でたわみの発生が想定される場所に打点し、観測した。はりに用いた PMMA の縦弾性係数は引張試験におけるひずみ 0.01% から 0.1% の間での最小二乗法を用いた線形回帰より 3.6 GPa と求めた。はりの接着に用いた粘着剤の縦弾性係数は、引張試験におけるひずみ 0% から 0.5% の間での最小二乗法を用いた線形回帰により 0.24 MPa と求めた。

まず初めに、PMMA のはり単体 (厚さ 2.01 mm) での座屈実験の結果を **Fig. 14** に示す。PMMA の縦弾性係数と寸法から計算される Euler の座屈荷重は 10.8 MPa であり、収束荷重とおおよそ一致する。座屈開始時に Euler の座屈荷重を大きく超えていた場合にも、座屈後は第 1 モードの変形となり同じ荷重へと収束した。

次に、PMMA のはりを粘着剤で接着した場合の座屈試験において、はりの厚さを 0.98 mm と 2.01 mm の 2 種類、粘着剤の厚さを 5 mm, 10 mm, 15 mm, 20 mm の 4 種類、計 8 条件における実験での荷重と標点のたわみ量の関係を **Fig. 15** と **Fig. 16** に示す。はりを接着後、圧子がはり端部を押せるように高さ調整を各試験ごとに行った。試験片を配置するたびに圧子とはり端部の位置関係が微妙に変わったことで、様々な初期不整の結果が得られた。はりの厚さが薄く (すなわち、はりが低剛性であり)、弾性基礎の厚さが薄い (すなわち、弾性基礎の剛性定数が大きい) ほど高次のモードで座屈していることは、第 2 章で示した座屈モデルと傾向が一致する。同じモードの場合、荷重増加時の初期たわみ変化が小さく初期不整が少ないと考えられる実験結果ほど、より高い荷重に収束した ([PMMA 厚さ(mm) : 粘着剤厚さ(mm) : 試験片番号]=[0.98, 10, No 1], [0.98, 15, No 2], [2.01, 5, No 1], [2.01, 10, No 2] など)。また同じ実験条件でも異なる座屈モードが観察される場合があった。これらは初期不整を考慮した第 3 章の座屈モデルにより示された傾向と一致している。(9)式から計算される座屈時の荷重と座屈モードを **Table 1** に示す。ただし、弾性基礎の剛性定数と粘着剤の縦弾性係数・幅・厚さ (E_{ad}, b, h_{ad}) の関係を

$$k = E_{ad} b / h_{ad} \quad (27)$$

と仮定した。座屈時の荷重が最小となる座屈モードでの荷重 (座屈荷重) を黒塗りで示している。また、実験より求めた座屈荷重と座屈モードの関係を **Table 2** に示す。ここで、座屈荷重は収束荷重の低い座屈モードの収束荷重とし、同じモードが複数回測定された条件では初期不整がより小さい結果の荷重を採用した。これらの比較から、座屈荷重・座屈モードともに理論値と実験値に明確な違いが確認された。そこで、座屈荷重の実験値と理論値の差が小さくなるように最小二乗法により弾性係数をフィッティングすると、0.66 MPa となり、引張試験から求めた縦弾性係数の約 2.8 倍となる一方で座屈荷重・座屈モードともに実験値とよい一致を示すことが分かった

(**Table 3**)。Winkler モデルを DCB 試験片の接着層に应用する場合、(27)式の剛性定数を用いることが多い^{6,7)}。しかしながら圧縮の場合、圧力と体積ひずみの関係は体積弾性係数 $E_{ad}/3(1-2\nu)$ に比例する。ここで ν はポアソン比である。エポキシ樹脂の代表的なポアソン比 0.37 の場合、体

積弾性率は縦弾性係数の約 1.3 倍であるが、 $\nu = 0.45$ では約 3.3 倍となりゴムやゲルのようにポアソン比の大きな材料では影響が大きいことが分かる。座屈現象では接着層の引張と圧縮が同時に混在するため、引張と圧縮で弾性係数が大きく異なる非圧縮性材料の接着層において座屈問題を取り扱う場合は弾性基礎の剛性定数の決定に注意を要することが明らかとなった。

5. 結言

Winkler モデルを利用して弾性基礎に接合されたはりの座屈を検討した。理想的な荷重を前提とした完全系の座屈解析では荷重の増加に伴うたわみ変化を表現できないため、不完全系の座屈モデルを利用して初期不整がある場合の座屈現象を解析した。想定した初期不整に対応した境界条件を与えることで、荷重の増加に伴うはりの変形過程が求められた。初期不整に伴う境界条件の変化により完全系における座屈モードから前後の座屈モードへ変化する条件が存在し、その場合には変化した座屈モードの座屈荷重に漸近することが明らかにされた。また、接着接合されたはりの圧縮による座屈実験により、初期不整による座屈前のたわみが確認されるとともに、座屈モードの変化や初期不整の程度による収束荷重の違いなど不完全系での Winkler 座屈モデルと同じ傾向が観察された。

文献

- 1) S. Timoshenko, "Strength of Materials Part 1", D. Van Nostrand Company, Inc. New York (1940).
- 2) 小西一郎, 横尾義貫, 成岡昌夫, 丹羽義次, "構造力学 I", 丸善株式会社 (1951).
- 3) S. ティモシェンコ, D.H.ヤング, "材料力学要論", コロナ社 (1964).
- 4) 渋谷寿一, 本間寛臣, 斎藤憲司, "現代材料力学", 朝倉書店 (1986).
- 5) 桑水流理, ジャリヤポーン・サウトン, 吉川暢宏, 生産研究, **57**, 497 (2005).
- 6) M.F. Kanninen, *Int. J. Fract.*, **9**, 83 (1973).
- 7) Y. Sekiguchi, M. Katano, C. Sato, *J. Adhes.*, **93**, 235 (2017).
- 8) D. A. Dillard, B. Mukherjee, P. Karna, R. C. Batra, J. Frechette, *Soft Matter*, **14**, 3669 (2018).
- 9) S. P. Timoshenko, J. M. Gere, "Theory of Elastic Stability", Dover Publications, Inc., New York (1961).
- 10) V. Tvergaard, A. Needleman, *J. Appl. Mech.*, **47**, 613 (1980).
- 11) B.S. Wu, H.X. Zhong, *Arch. Appl. Mech.*, **69**, 491 (1999).
- 12) 池田清宏, 室田一雄, "構造系の座屈と分岐", コロナ社 (2001).
- 13) A.N. Kounadis, J. Mallis, A. Sbarounis, *Arch. Appl. Mech.*, **75**, 395 (2006).
- 14) S.R. Li, R. C. Batra, *AIAA J.*, **45**, 712 (2007).
- 15) 三上市蔵, 堂垣正博, 米沢博, 土木学会論文報告集, **298**, 17 (1980).

Buckling Analysis of a Beam on an Elastic Foundation Considering Initial Imperfection

Yu SEKIGUCHI*, Ryo SAKAKIBARA**, Chiaki SATO*

* Institute of Innovative Research, Tokyo Institute of Technology

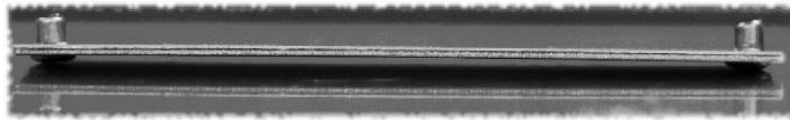
** Department of Mechanical Engineering, Tokyo Institute of Technology
4259 Nagatsuta-cho, midori-ku, Yokohama 226-8503, Japan

Abstract

In order to express buckling of adhesive joints, buckling using Winkler's elastic foundation model is analyzed. When a compressive load is applied to a beam on the elastic foundation, buckling occurs at much higher load than when the beam is compressed as a single body. However, in complete system buckling analysis assuming ideal compressive load, deformation in the compression process cannot be discussed although buckling load and buckling mode are obtained. In this paper, adherend deformation and buckling mode shift due to initial imperfection is investigated with incomplete system buckling analysis assuming the initial imperfection. Additionally, the phenomena that could occur in the buckling of the adhesive joints is experimentally discussed.

Key words: Buckling analysis, Winkler model, Beam on elastic foundation, Dissimilar material bonding, Buckling mode shift

Room temperature



High temperature

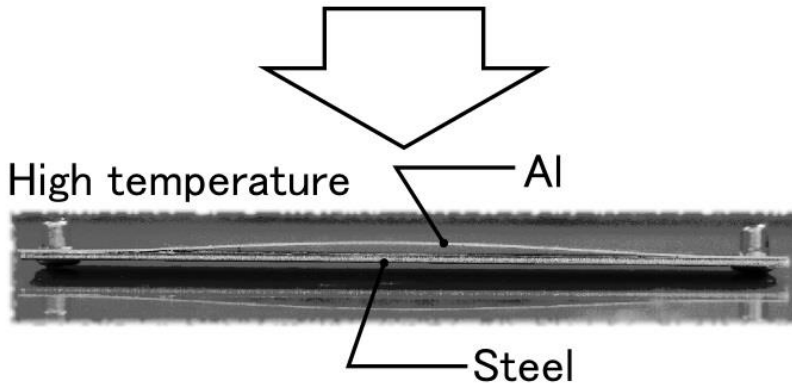


Fig. 1 Buckling of aluminum alloy fasten to steel by rivets.

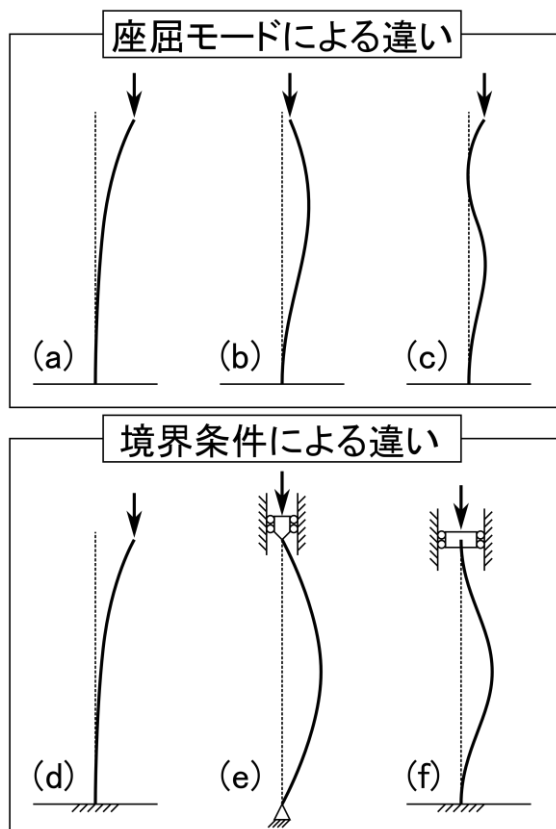


Fig. 2 Buckling of a column (a) ~ (c) with difference of buckling modes, and (d) ~ (f) with difference of boundary conditions.

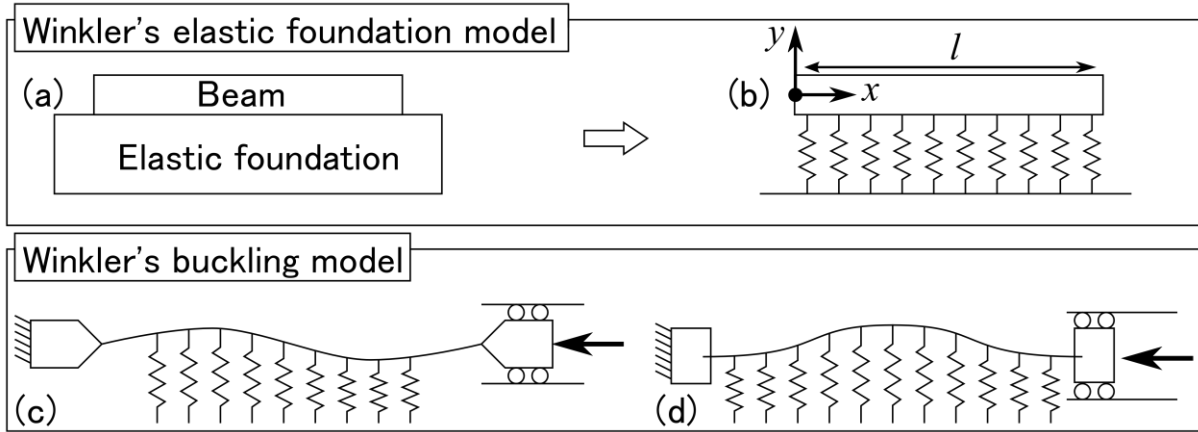


Fig. 3 Illustrations of (a) a beam on an elastic foundation, (b) Winkler's model in which the elastic foundation is replaced by springs, (c) buckling model with free-end, and (d) that with fixed-end.

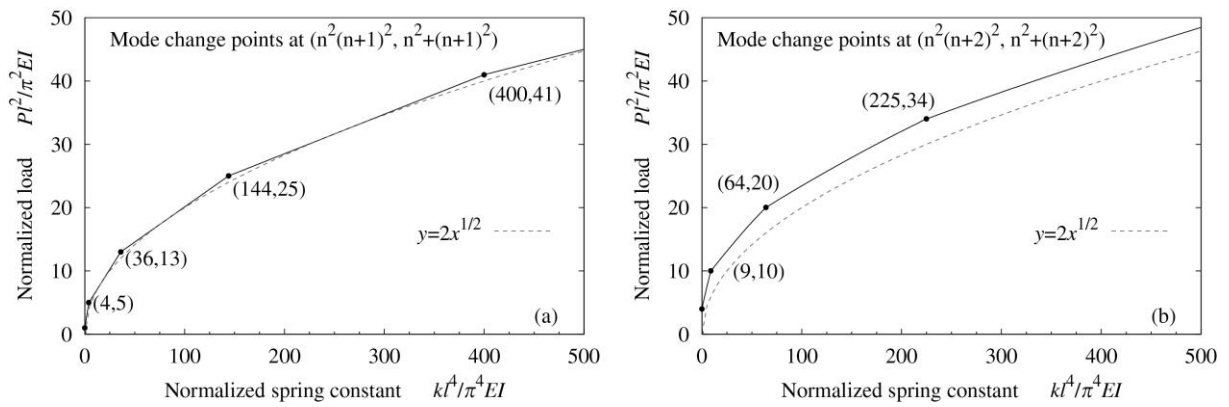


Fig. 4 Relation between normalized load $\bar{P}$ and normalized spring constant $\bar{K}$ at buckling for (a) free-end, and (b) fixed-end.

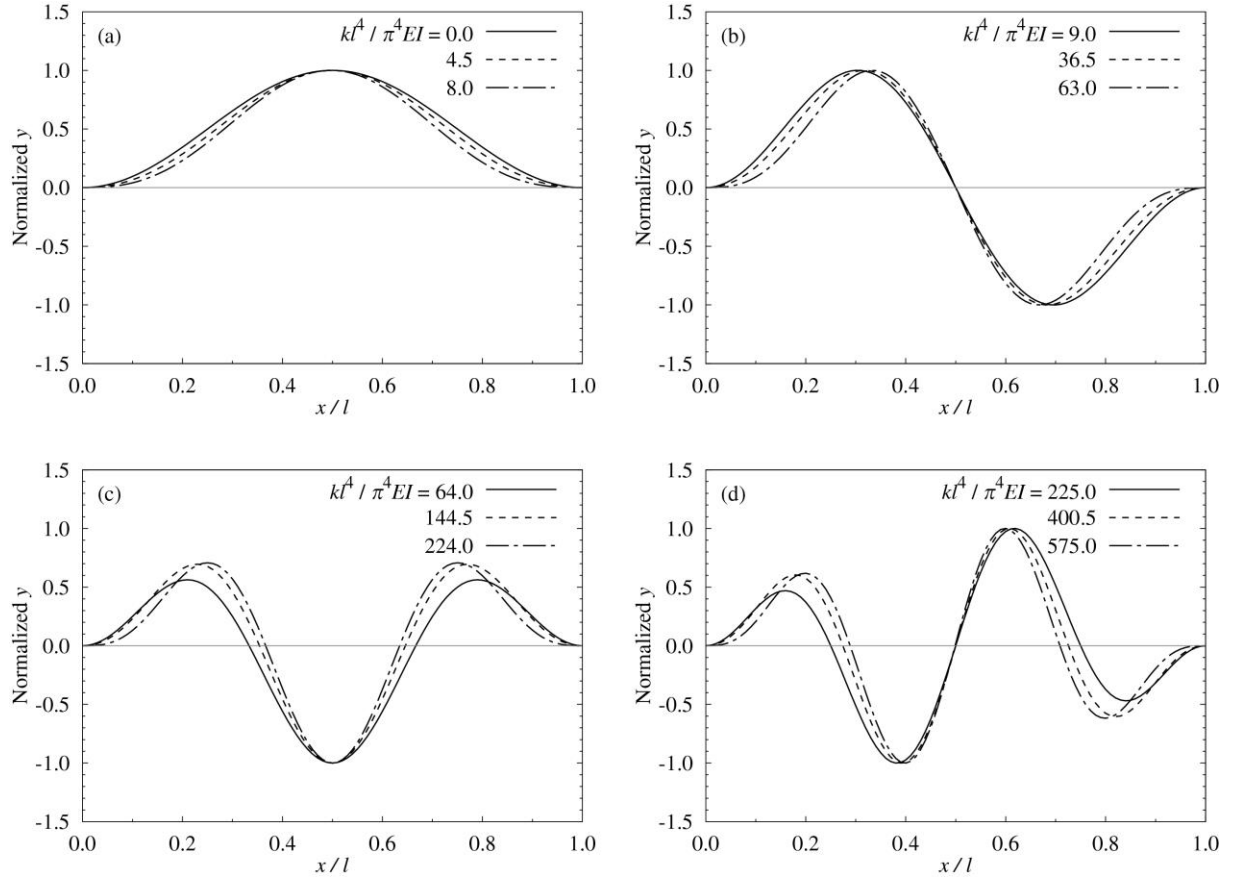


Fig. 5 Buckling mode of the fixed-end condition in complete system buckling analysis.

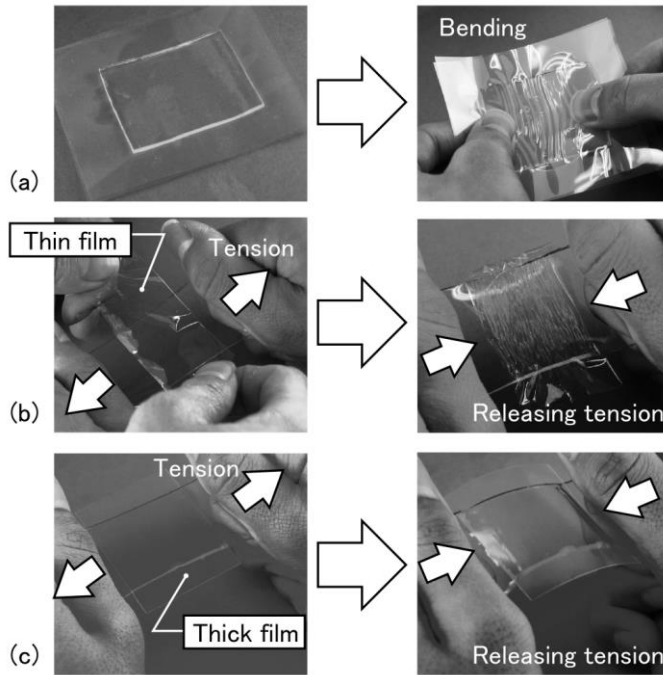


Fig. 6 Buckling (a) by bending, (b) by residual stress with thin film, and (c) with thick film.

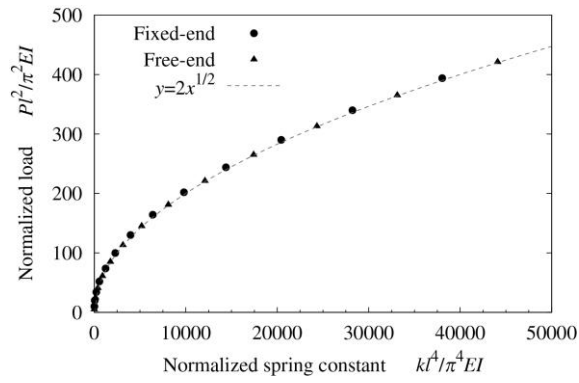


Fig. 7 Relation between normalized load and normalized spring constant at buckling with approximate equation.

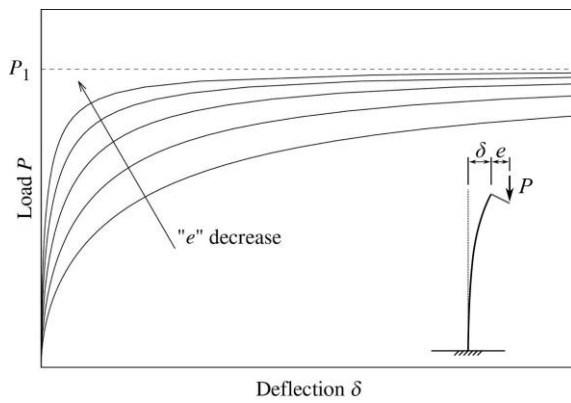


Fig. 8 Load versus deflection in incomplete system Euler buckling.

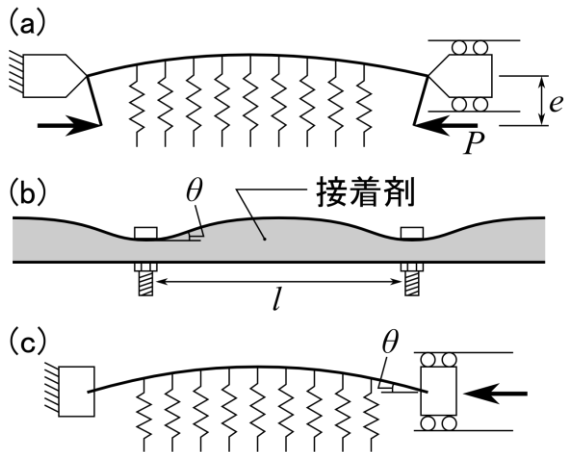


Fig. 9 Illustrations of (a) incomplete system buckling with free-end, (b) example of joints using adhesive and other fasteners jointly, and (c) incomplete system buckling with fixed-end.

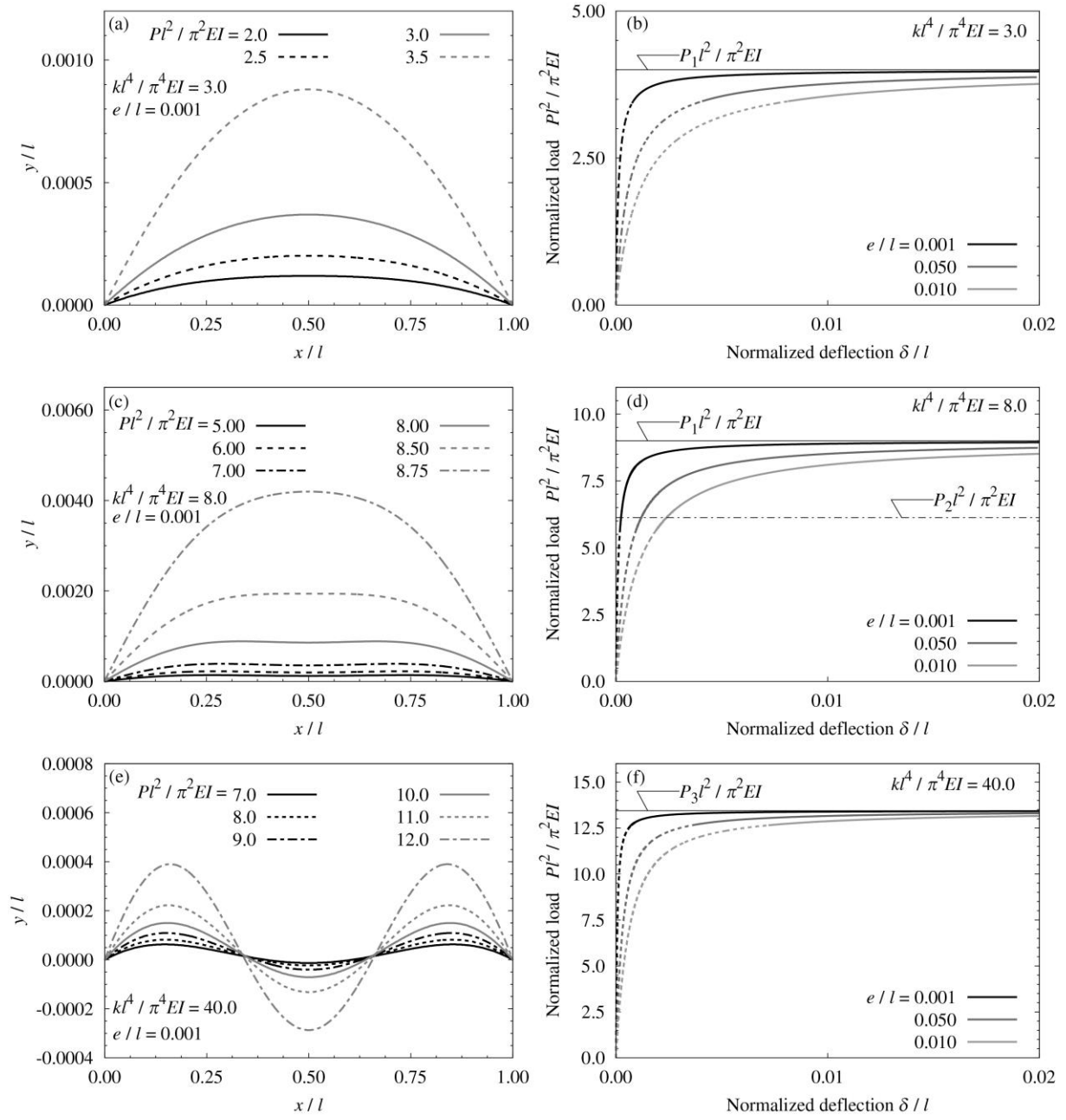


Fig. 10 Buckling mode (deflection curves) and relation between load and deflection of incomplete system buckling analysis with free-end for (a) and (b) $\bar{K} = 3.0$, (c) and (d) $\bar{K} = 8.0$, and (e) and (f) $\bar{K} = 40.0$.

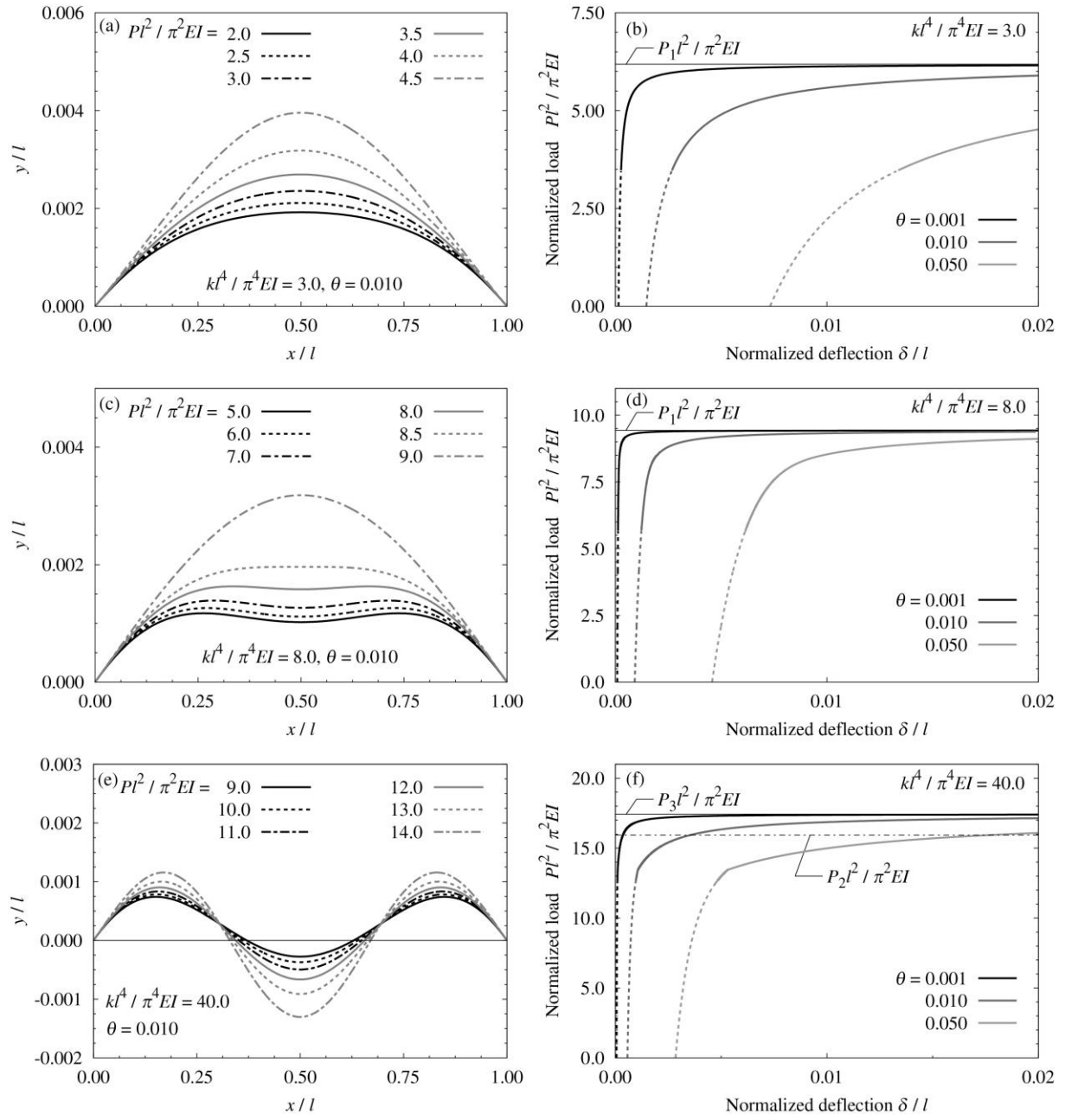


Fig. 11 Buckling mode (deflection curves) and relation between load and deflection of incomplete system buckling analysis with fixed-end for (a) and (b) $\bar{K} = 3.0$, (c) and (d) $\bar{K} = 8.0$, and (e) and (f) $\bar{K} = 40.0$.

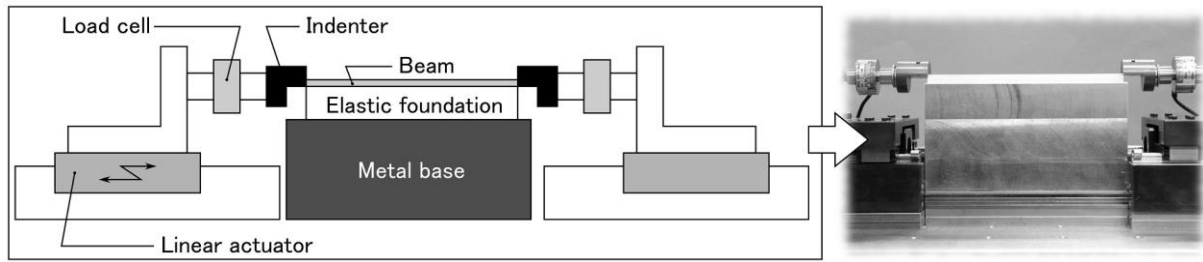


Fig. 12 Experimental equipment.

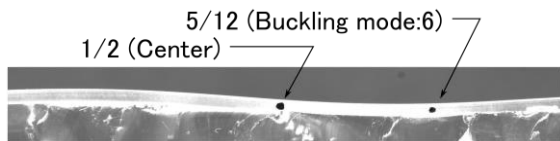


Fig. 13 Side view image of the 0.98 mm thickness PMMA beam with the elastic foundation thickness 10 mm at $\delta = 0.43$ mm (No 1 specimen). Black dots are plotted at half of the length (center) and 5/12 of the length (related to deflection point of buckling mode 6).

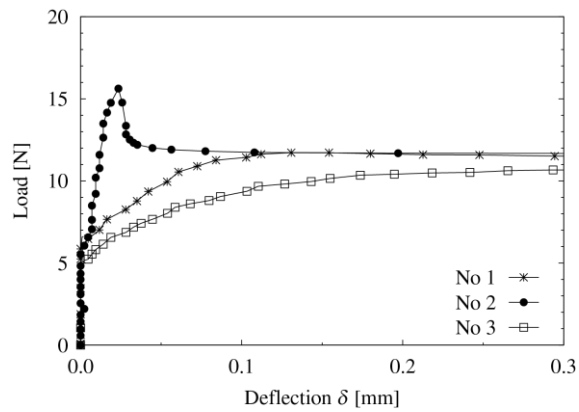


Fig. 14 Experimental result of buckling using the 2.01 mm thickness polymethyl methacrylate (PMMA) beam without the elastic foundation.

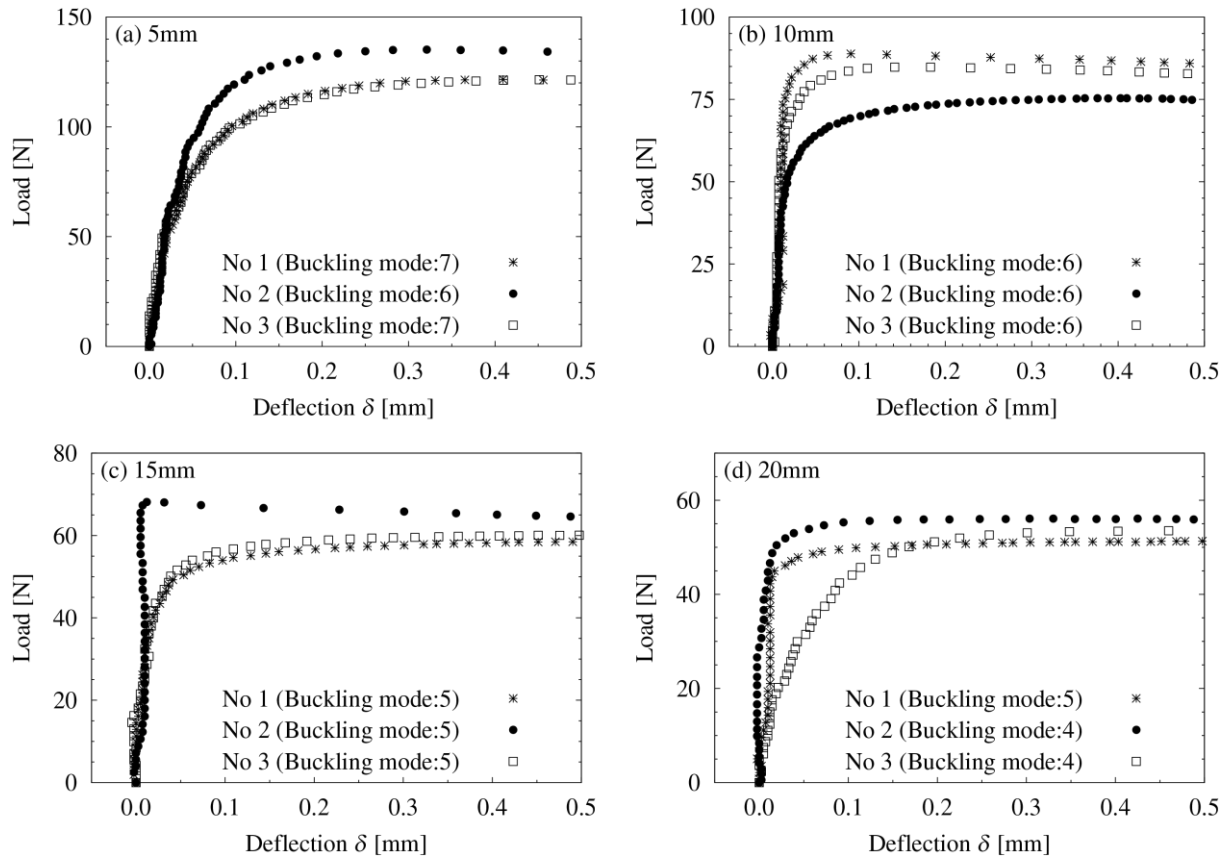


Fig. 15 Experimental result of buckling using the 0.98 mm thickness polymethyl methacrylate (PMMA) beam with the elastic foundation for the thickness of (a) 5 mm, (b) 10 mm, (c) 15 mm, and (d) 20 mm.

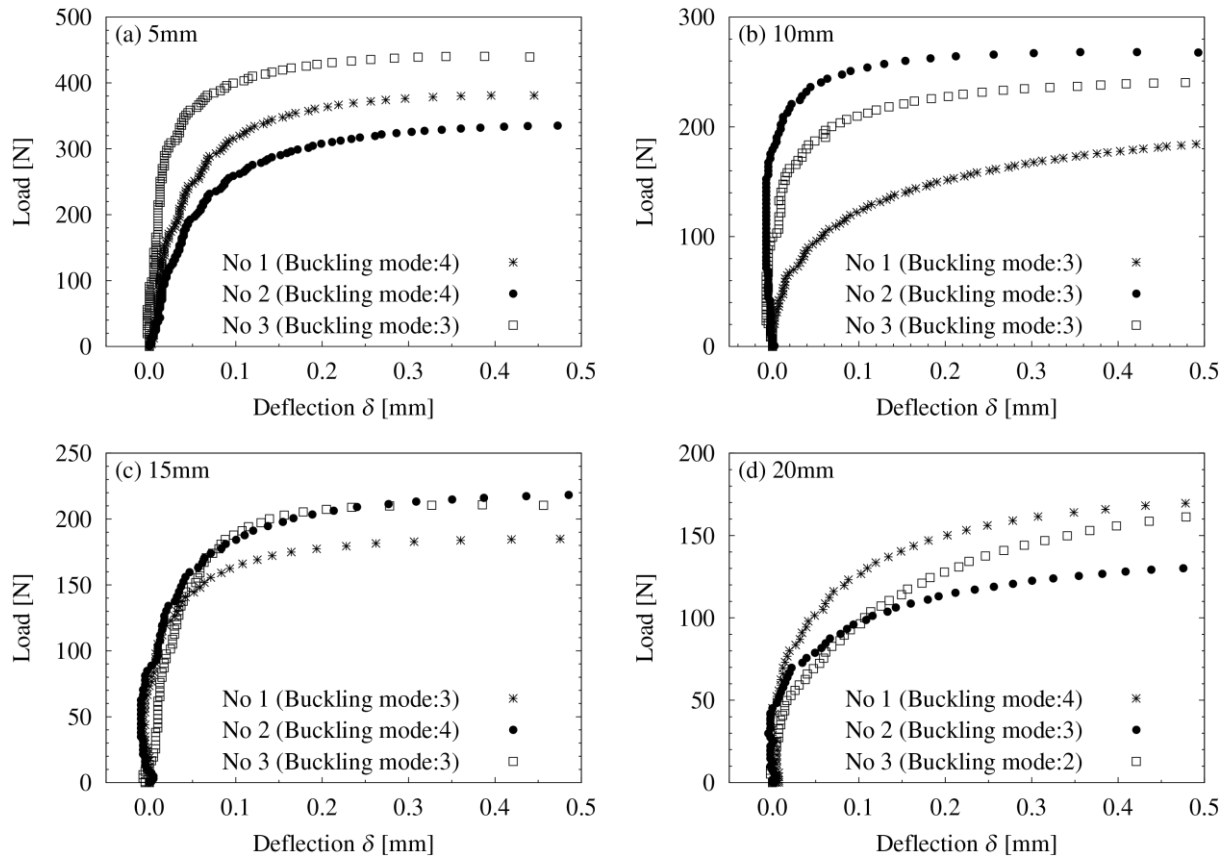


Fig. 16 Experimental result of buckling using the 2.01 mm thickness polymethyl methacrylate (PMMA) beam with the elastic foundation for the thickness of (a) 5 mm, (b) 10 mm, (c) 15 mm, and (d) 20 mm.

Table 1. Theoretical buckling load using adhesive elastic modulus.

	Thickness		$\bar{K}$	Buckling mode					
	PMMA	Adhesive		2	3	4	5	6	7
Case 1	0.98mm	5mm	876	279N	133N	88.4N	75.0N	75.4N	83.5N
Case 2		10mm	438	142N	72.0N	54.2N	53.1N	60.2N	72.4N
Case 3		15mm	292	96.2N	51.8N	42.8N	45.8N	55.1N	68.6N
Case 4		20mm	219	73.4N	41.6N	37.1N	42.2N	52.6N	66.8N
Case 5	2.01mm	5mm	102	317N	219N	241N	313N	418N	550N
Case 6		10mm	50.8	180N	158N	607N	291N	403N	539N
Case 7		15mm	33.9	134N	137N	195N	284N	398N	535N
Case 8		20mm	25.4	111N	127N	190N	280N	396N	534N

Table 2. Buckling load and buckling mode in the experimental results. Gray colored cells are the modes observed in the experiments except for the buckling mode.

	Thickness		Buckling mode					
	PMMA	Adhesive	2	3	4	5	6	7
Case 1	0.98mm	5mm						120N
Case 2		10mm					89N	
Case 3		15mm				68N		
Case 4		20mm				51N		
Case 5	2.01mm	5mm			380N			
Case 6		10mm		268N				
Case 7		15mm		210N				
Case 8		20mm		131N				

Table 3. Theoretical buckling load using back-calculated adhesive elastic modulus by a least-square method for the experimental results.

	Thickness		$\bar{K}$	Buckling mode					
	PMMA	Adhesive		2	3	4	5	6	7
Case 1	0.98mm	5mm	2404	756N	345N	208N	151N	128N	122N
Case 2		10mm	1202	380N	178N	114N	91.3N	86.7N	91.8N
Case 3		15mm	801	255N	122N	82.5N	71.3N	72.8N	81.6N
Case 4		20mm	601	193N	94.6N	66.9N	61.2N	65.8N	76.5N
Case 5	2.01mm	5mm	279	794N	431N	389N	471N	589N	737N
Case 6		10mm	139	418N	264N	266N	329N	430N	559N
Case 7		15mm	92.9	293N	208N	235N	309N	416N	548N
Case 8		20mm	69.7	231N	180N	219N	299N	409N	543N