T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	ロジスティック成長を伴う反応拡散モデルにおける総個体数の最大化
Title(English)	Maximization of the total population in reaction-diffusion models with logistic growth
著者(和文)	永原健大郎
Author(English)	Kentaro Nagahara
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11362号, 授与年月日:2020年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:柳田 英二,利根川 吉廣,隠居 良行,川平 友規,小野寺 有紹
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11362号, Conferred date:2020/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

（博士課程）
Doctoral Program

論 文 要 旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 系 数学 コース	申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 （ 理学 ） Doctor of
学生氏名： Student's Name	永原 健大郎	指導教員（主）： Academic Supervisor(main)	柳田 英二 教授
		指導教員（副）： Academic Supervisor(sub)	

要旨（和文 2000 字程度）
Thesis Summary（approx.2000 Japanese Characters ）

ロジスティック型の非線形項を持つ反応拡散方程式は，1930 年代以降から現在に至るまで，さまざまな形で盛んに研究されている．特に，1951 年に Skellam によって生物種の個体密度分布を表すモデルとして提唱されて以降は，数理生物学の方面からも興味のある研究対象となっている．その後，自明解の周りでの線形化固有値問題を考えた際，最大固有値が負であればこの方程式の自明解は不安定となり，非自明な正値定常解が存在し大域的漸近安定であることが示された．これは生物種が増殖し，生き残ることに対応する．最大固有値が 0 以上の場合は自明解が安定となり，解は自明解に収束する．これは生物種が絶滅してしまうことに対応する．本論文の目的は，最大固有値が負で生物種が増殖する状況において，リソースの配置が総個体数に対しどのような影響を及ぼすかを数学的に解析することである．本論文は“Maximization of the total population in reaction-diffusion models with logistic growth”（ロジスティック成長を伴う反応拡散モデルにおける総個体数の最大化）と題し，以下の 3 章から成っている．

第 1 章「Introduction」では，ロジスティック型の反応項を持つ連続拡散モデルおよびそれを離散化したマルチパッチモデルを導入し，その定常解に関する研究の歴史と背景について述べる．特に 2010 年に Ding らにより提唱された「総個体数を最大化するリソースの配置に対応する大域的最大化解は bang-bang 性を持つ」という予想を紹介し，その研究の重要性と数学的な困難さについて解説している．本論文では，連続モデルに対してこの予想を肯定的に証明し，離散モデルに対して大域的最大化解のリソースの最適配置について明らかにする．

第 2 章「Reaction-diffusion model」では，第 1 章で導入した連続モデルに対して，リソースの正則性に関するある条件のもとで，Ding らの予想について考察する．まず，定常解を記述するロジスティック型の非線形項を持つ半線形楕円型方程式を考え，局所的最大化解が満たすべき条件を求めている．具体的には，リソースの摂動による定常解の漸近展開を用いて，総個体数を表す積分量の第一変分および第二変分を計算する．第一変分は非斉次項を持つ線形楕円型方程式の解の積分によって与えられるので，対応する線形作用素に関連する Strum-Liouville 型の固有値問題を考え，そのレーリー商による変分法的特徴づけを用いてその性質を明らかにする．第一変分が消えてしまう場合には，第二変分を考えることでリソースの再配置による積分量の変化を調べることができる．これらの解析によって，リソースの正則性をリーマン積分可能なクラスまで上げれば，局所的最大化解は必ず bang-bang 性を持つことを証明する．なお，この章の終わりでは，自明解の周りでの線形化固有値問題の最大固有値の最小化についての結果についても述べているが，これは Lou-Yanagida(2006)によって示された結果の拡張になっている．

連続モデルに対し，大域的最大化解のリソースを配置する可測集合について具体的な情報を得ることは極めて難しい問題となる．そのため，第 3 章「Multi-patch model」では，対応する離散モデルの大域的最大化解の形状に関する詳細な解析を行っている．はじめに，離散化したマルチパッチモデルの正値定常解について，2 パッチの場合とマルチパッチの場合に分けて考察している．第 2 章の手法を離散化した計算により，2 パッチの場合は片方にリソースを集中させるのが最適であることが示される．しかし，3 パッチ以上の場合には拡散係数が小さい場合と十分大きい場合では状況が異なる．拡散係数が十分大きい場合は，リソースをすべて端に寄せて配置するものが最大化解であることが比較的簡単に示される．しかし，拡散係数が小さい場合は，非線形項の影響が大きいことから最大化解の形状は単純ではなくなり，その形状を決定するには総個体数を拡散係数について漸近展開したときの係数を低次の項から順に調べる必要がある．より詳細な解析が必要な場合は，高次のオーダーまで展開して最大化解の形状を絞る形で議論を進め，パッチの数を 3 で割ったときの余りによってその構造が大きく変化するという顕著な性質を明らかにしている．また，高次の項まで展開した際に現れる係数を具体的に与える漸化式を導き，パッチ数が多いとリソースの配置が分断化されることを示すとともに，その規則性を具体的に決定している．なお，漸近展開には複雑な計算が必要となるが，それらは章末の付録にまとめている．

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。
Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

（博士課程）
Doctoral Program

論 文 要 旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 系 数学 コース	申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 (理学) Doctor of
学生氏名： Student's Name	永原 健大郎	指導教員（主）： Academic Supervisor(main)	柳田 英二 教授
		指導教員（副）： Academic Supervisor(sub)	

要旨（英文 300 語程度）
Thesis Summary（approx.300 English Words ）

This thesis is concerned with a nonlinear optimization problem that naturally arises in population biology. We consider the effect of spatial heterogeneity on the total population of a biological species at a steady state, using a reaction-diffusion model, or multi-patch model with logistic growth. Our objective is to maximize the total population when resources are distributed in habitat or some patches to control the intrinsic growth rate, but the total amount of resources are limited.

In Chapter 1, we introduce these nonlinear optimization problems and their backgrounds more precisely. We first mention to the stability of a trivial solution of a reaction-diffusion model with logistic growth. If a trivial solution is stable, then any solution tends to 0 as the time goes to sufficiently large, namely, the species goes to extinction. Conversely, if the trivial solution is unstable, then there is a unique positive steady state, namely, the species can survive. These results hold the case of multi-patch model. We also mention to main results of this thesis. It is shown that global maximizer is of "bang-bang" type under some constraints. Further, global maximizer can be expressed in a patchy environment for any number of patches with sufficiently small and large diffusion constant.

In Chapter 2, we prove main results corresponding to the reaction-diffusion model. We compute asymptotic expansion of the total population by using perturbation theory. The main idea is calculation of the first and second variation. In the last section of this chapter, we treat related problems.

In Chapter 3, we prove main results corresponding to the multi-patch model. We mainly compute asymptotic expansion of the total population with respect to diffusion rate. The idea of the main theorem is expression of coefficients by using recurrence relations.

備考 ： 論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。
Note : Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ（T2R2）にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).