

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	最適化に基づくロバスト制御器の構築とヒト型ロボットの歩行制御への応用
Title(English)	Optimization Based Robust Controller Design and Application to Bipedal Robot Control
著者(和文)	高野 凜
Author(English)	Rin Takano
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11422号, 授与年月日:2020年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:山北 昌毅,藤田 政之,三平 満司,井村 順一,早川 朋久
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11422号, Conferred date:2020/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



Tokyo Institute of Technology

令和 元 年度 博士論文

最適化に基づくロバスト制御器の構築と
ヒト型ロボットの歩行制御への応用

Optimization Based Robust Controller Design
and Application to Bipedal Robot Control

2020年3月

東京工業大学
工学院 システム制御系
高野 凜
指導教員 山北 昌毅 准教授

Abstract

As control theory and machine learning theory are developed, robots play an important role in a society nowadays. The number of robots introduced to industrial field increases year by year, and robots start doing tasks that are burdensome for human. Furthermore, robots which can work in cooperate with human are also being developed and paid attention now. It is expected that robots will work in many fields and they work together with human in future.

There are too many constraints which must be satisfied for safety when robots work in real environments, for example, constraints to avoid collision with human and obstacles, constraints not to violate hardware and actuator restriction, etc. Hence it is necessary to construct control systems which can handle such kinds of constraints in practical uses. Several methods to realize such control have been proposed so far, and a new method called Control Lyapunov Function and Control Barrier Function based Quadratic Programming (CLF-CBF-QP) controller has recently been proposed. It calculates control input by solving a convex quadratic optimization problem under two kinds of constraints, a control Lyapunov function (CLF) constraint for output zeroing control and a control barrier function (CBF) constraint for satisfying given state constraints. Even if a system is nonlinear, the optimization problem to be solved becomes a simple convex quadratic programming problem. Therefore, this controller can calculate control input considering given constraints in real time. It appears to have a great potential for applications in robotics, e.g., UAV, bipedal robots, multi-robot systems.

Although the CLF-CBF-QP controller has a good property of the fast calculation, its control performance cannot be guaranteed in the presence of disturbances and model uncertainties. Some researchers have proposed a robust CLF constraint and a robust CBF constraint considering disturbance effects. However, there are still many issues left unsolved for practical uses because they assume some ideal conditions that all system's states can be observed without any noises and systems are affected by only matching disturbances. Moreover, it is also important to consider how we should design output functions to control systems affected by disturbances. If an entire system cannot be linearized and it has zero dynamics under given output functions, it is not enough to achieve the robust output zeroing control in order to stabilize the entire system. We also need to design output functions so that the zero dynamics have desired characteristics under effects of disturbances. This issue must be considered when we control underactuated robot systems.

From this background, we propose new robust optimization-based controllers which can compensate effects of disturbances and model uncertainties, and we also apply them to con-

struct a walking control framework of underactuated bipedal robots affected by disturbances as a practical application.

In the first half of this paper, we first propose new robust CLF and CBF constraints based on disturbance estimation methods which estimate disturbances as stochastic variables, especially Gaussian process regression (GPR) and unscented Kalman filter (UKF). Then we propose the following four robust optimization-based controllers considering unsolved issues mentioned above.

1. Continuous time robust CLF-CBF-QP controller considering effects of matching disturbances
2. Continuous time robust CLF-CBF-QP controller with a stochastic observer to estimate states and matching disturbances
3. Continuous time robust CLF-CBF-QP controller considering mismatching disturbances
4. Discrete time robust CBF-QP controller considering matching disturbances

Compared with previous studies, contributions of these controllers are achieving calculation of cost-effective control input based on the stochastic information of estimated disturbances, handling wider class of disturbances and estimation errors of states and disturbances. The effectiveness of these controllers has been confirmed through several numerical simulations.

In the latter half of this paper, we propose a walking control framework of underactuated bipedal robots affected by disturbances. It consists of two parts, designing output functions to make stable periodic locomotion, robust output zeroing control of designed output functions. We first introduce a hybrid zero dynamics (HZD) based control method which is a promising method to realize a periodic locomotion for underactuated bipedal robot systems. Based on this HZD based control, we propose a design method of output functions realizing stable periodic locomotion of disturbed underactuated robots. This method consists of direct collocation method which is one of numerical methods to solve optimal control problems and disturbance model identification based on GPR. One of good features of this method is that it can be used for robot systems having several underactuated states. Then we propose a robust optimization-based controller to realize robust output zeroing control of designed output functions. This controller also handles some constraints which should be guaranteed during locomotion, input constraints, friction constraints. The effectiveness of this control framework is verified through walking simulations of a planar 5 link robot affected by an external push force.

目次

第1章	序論	1
1.1	本論文の背景	1
1.1.1	制約条件を考慮した制御手法	1
1.1.2	CLF-CBF-QP コントローラのロバスト性に関する問題	2
1.1.3	外乱を受けるシステムの制御における出力関数の設計問題	2
1.2	本論文の目的	3
1.3	本論文の構成	5
1.4	数学記号	7
第2章	準備	9
2.1	システムとその解に関する性質	9
2.1.1	微分不等式	9
2.1.2	連続時間システムにおける出力関数の入力相対次数	9
2.1.3	離散時間システムにおける出力関数の入力相対次数	10
2.2	CLF-CBF-QP に基づく制御	11
2.2.1	Exponentially Stabilizing CLF (ES-CLF) 制約	11
2.2.2	Control Barrier Function (CBF) 制約	14
2.2.3	2次計画法による制御入力設計	16
2.2.4	最適化ソルバー	18
2.3	ガウス分布とガウス過程回帰	19
2.3.1	ガウス分布	19
2.3.2	ガウス過程回帰	20
第3章	マッチング外乱を受けるシステムに対する最適化ベースドロバスト制御	23
3.1	はじめに	23
3.2	連続時間システムに対する制御器設計	23
3.2.1	問題設定	23
3.2.2	マッチング外乱の影響を考慮した Robust ES-CLF 制約	24
3.2.3	マッチング外乱の影響を考慮した Robust MECBF 制約	26
3.2.4	外乱推定手法	30
	方法1: 最悪ケースを想定した外乱推定	30
	方法2: Gaussian Process Regression による外乱モデル同定を用いた外乱推定	30

3.2.5	マッチング外乱に対する Robust CLF-CBF-QP	32
	数値例 1 : 3DoF マニピュレータのエンドエフェクタ位置制御 . .	32
3.2.6	確率オブザーバの利用と状態・外乱推定誤差を考慮した Robust CLF-CBF-QP	38
	数値例 2 : 観測可能な状態の制限と観測ノイズの影響を考慮した 3DoF マニピュレータのエンドエフェクタ位置制御 . . .	42
3.3	離散時間システムに対する制御器設計	46
3.3.1	問題設定	47
3.3.2	高次相対次数をもつ D-ECBF の構成	47
3.3.3	マッチング外乱を考慮した Robust D-ECBF 制約の構築	50
3.3.4	マッチング外乱に対する Robust D-ECBF-NLP	52
	数値例 3 : 簡易エンジンモデルの圧力制御	52
3.4	おわりに	54
第 4 章 ミスマッチング外乱を受けるシステムに対する最適化ベースドロバスト 制御		57
4.1	はじめに	57
4.2	問題設定	57
4.3	ミスマッチング外乱の影響を考慮した安定化条件	59
4.3.1	ミスマッチング外乱に対する Robust ES-CLF 制約の導出	59
4.3.2	最適化による安定化制御入力の計算	63
	数値例 4 : 2次元非線形システムに対する制御	64
4.4	ミスマッチング外乱の影響を考慮した制約保証条件	69
4.4.1	ミスマッチング外乱に対する Robust MECBF 制約の導出	69
4.4.2	最適化による状態制約を満たす制御入力の計算	72
	数値例 5 : 磁気浮上システムにおける浮上体の位置制御	74
4.5	おわりに	78
第 5 章 最適化ベース制御器を用いたヒト型ロボットの歩行制御		82
5.1	はじめに	82
5.2	ヒト型ロボットモデル	82
5.2.1	連続・離散ダイナミクス	83
5.2.2	拘束力の消去による低次元システム表現	85
5.3	Hybrid Zero Dynamics に基づく制御	87
5.3.1	仮想拘束とゼロダイナミクス	87
5.3.2	最適化による仮想拘束パラメータの設計	90

5.4	Direct Collocation Method による最適制御問題の解法	93
5.4.1	Hermite-Simpson Collocation Method	94
5.4.2	K -point Radau Collocation Method	96
5.4.3	マルチフェーズ軌道計画	99
5.4.4	Direct Collocation Method に関するツールボックス	100
5.5	安定周期軌道の設計	101
5.5.1	ポアンカレマップと周期軌道の安定性	101
5.5.2	HZD に基づく周期軌道の安定化	103
5.5.3	Direct Collocation による安定周期軌道設計	104
	数値例 6 : ノミナルロボットモデルにおける安定周期軌道設計	108
5.6	外乱モデルに基づく軌道設計とロバスト制御	113
5.6.1	外乱項を含むシステムと Swing Phase Zero Dynamics	113
5.6.2	拘束力を有するシステムに対する外乱モデルの同定	114
5.6.3	外乱モデルを考慮した軌道計画・制御フレームワーク	115
	外乱モデルを考慮した軌道計画	115
	最適化ベースドロバスト制御器による外乱モデルを考慮した制御	116
	数値例 7 : 外力を受けるロボットモデルにおける安定周期軌道設計	119
5.7	おわりに	123
第 6 章 結論		124
付 録 A		127
A.1	解軌道のデータに基づくポアンカレマップヤコビアン の計算	127
A.2	近似線形化システムに基づくポアンカレマップヤコビアン の計算	127
参考文献		129
研究業績		137
謝辞		140

図 目 次

3.1	3DoF Manipulator Model	34
3.2	Error Norms of End Effector Positions $\ P_t(x) - P_d\ $	36
3.3	Trajectories of MECBFs $B(x)$	36
3.4	Estimation Errors of δ'_c, δ_b	37

3.5	Control Input of Two Controllers	37
3.6	Error Norms of Endeffector Positions $\ P_t(x) - P_d\ $	43
3.7	Trajectories of MECBFs $B(x)$	43
3.8	Estimation Errors of States $\tilde{x} = \mu_x - x$	44
3.9	Disturbances Estimation Errors $\tilde{d} = \mu_d - d$	44
3.10	Control Inputs of the Three Controllers	45
3.11	Simple Engine Model (Oyama 2018) [51, p.95]	54
3.12	Trajectories of x_2 in Two Cases	55
3.13	Trajectories of D-ECBF in Two Cases	55
3.14	Control Input of Two Cases	56
4.1	Trajectories of State x_1	67
4.2	Disturbance Estimation Results	67
4.3	Control Input of Two Controllers	68
4.4	Illustration of Error Trajectory $e(t)$ inside The Funnel-like Set F_ψ	76
4.5	Trajectories of MECBFs B_{0a}, B_{0b}, B_{0c}	79
4.6	Trajectories of State x_1	79
4.7	Trajectories of State Error $e = x_1 - x_{1d}$	80
4.8	Functions of Estimation Conditions	80
4.9	Control Input of Two Controllers	81
5.1	Planar 5 Link Bipedal Robot Model (RABBIT [59])	83
5.2	Calculation Method of Jacobian Matrix of Poincaré Map	105
5.3	Virtual Stance Leg Defining Phase Variable θ_p	109
5.4	State Errors on the Poincaré Section (Continuous Time Controller)	110
5.5	Snapshot of Robot's Walking in Steady State (Continuous Time Controller)	110
5.6	Norm of Linearized Poincaré Map Jacobian A_{zd}^{SI} (Continuous Time Controller)	111
5.7	Output Functions (Continuous Time Controller)	111
5.8	State Errors on the Poincaré Section (Discrete Time Controller)	112
5.9	Output Functions (Discrete Time Controller)	112
5.10	External Push Force Affecting Robot's Upper Body	118
5.11	Snapshot of Robot's Walking with Original Trajectory	120
5.12	Snapshot of Robot's Walking with Redesigned Trajectory	121
5.13	State Errors on the Poincaré Section with Redesigned Trajectory	122
5.14	Constraints of Constraint Forces with Redesigned Trajectory	122
5.15	Control Inputs with Redesigned Trajectory	123

表 目 次

2.1	CLF-CBF-QP Controller	17
2.2	CBF-QP Controller	18
3.1	Robust CLF-CBF-QP Controller for Matching Disturbances	32
3.2	Model & Control Parameters in the Numerical Example 1	35
3.3	Robust CLF-CBF-QP Controller with Chance Constraints	41
3.4	Robust D-ECBF-NLP Controller for Matching Disturbances	52
3.5	Model & Control Parameters in the Numerical Example 3	54
4.1	Robust CLF-QP Controller for Mismatching Disturbances	65
4.2	Model & Control Parameters in the Numerical Example 4	69
4.3	Robust CLF-CBF-QP Controller for Mismatching Disturbances	75
4.4	Model & Control Parameters in the Numerical Example 5	76
5.1	Model Parameters of Planar 5 Link Bipedal Robot Model	84
5.2	Radau Roots Having Degree $K = 2, \dots, 6$	98
5.3	Robust CLF-QP Controller for Bipedal Walking	118
5.4	Control & Design Parameters for Bipedal Walking	123

第1章 序論

1.1 本論文の背景

制御理論や機械学習理論の発展により、ロボットが社会において大きな役割を果たすようになってきている。製造業等の産業分野に導入されるロボットの数は年々増加しており [1], 人間にとって負荷の大きい作業や部品の整列作業, パレタイズ作業といった単純作業をロボットが代替することが多くなってきている [2]. また, 人間が作業する空間において移動から作業までの動作を自律的に行い, 人間と協働するようなロボットにも注目が集まっている。今後更にロボットが日常生活に浸透していくとともに, 人間とロボットが協力しながら様々な仕事を行う機会が増えていくことが期待される。

1.1.1 制約条件を考慮した制御手法

ロボットが実環境で作業を行う場合に満たさなければならない制約は非常に多い。人間や障害物が点在する環境においてロボットが自由に移動しつつ作業を行う場合には, それらに対して移動時や作業時に接触・衝突することを避けなければならない。また, 安全性の観点から環境上に進入してはならない領域や移動速度を制限しなければならない領域が存在する場合はそうした制約を満たしながら移動を行う必要がある。更にロボットのハードウェアには可動域やアクチュエータの最大出力, 最大速度といった制限が存在し, これらを違反する場合にはハードウェアが破壊される可能性もある。したがって与えられた様々な制約条件を満たしながら目標を達成できるような制御系の構築は実用上必要不可欠である。

こうした制約条件を考慮可能な制御器の設計手法については様々な方法が提案されている [3–5]。特に近年では計算機能力の向上に伴い, 制御周期ごとに有限時間最適制御問題を解くことによって制御入力を計算するモデル予測制御 (Model Predictive Control) が広く利用されている [6, 7]。この手法では現在の状態から未来の状態を予測し, 制約条件を満たしつつ与えられた評価関数を最小化する最適入力を計算することができる。線形制約のみを有する線形システムに対しては MPC における最適化問題を凸計画問題として構成できるために高速な計算が可能である。しかし, システムが非線形, あるいは制約条件が非線形である場合には凸計画問題として構成することができないため, 計算コストが大きいという問題がある。そのため, ロボット等の制御周期が小さいシステムにおいては実時間での適用が難しい。一方, 近年シンプルな形式で制約条件を考慮した最適制御入力を求める Control Lyapunov Function and Control Barrier Function based Quadratic Programming (CLF-CBF-QP) と呼ばれる手法が提案されている [8–10]。これは与えられた出力関数を零化制御するための

Control Lyapunov Function (CLF) 制約と状態制約をみたす不変集合内に状態を留めるための Control Barrier Function (CBF) 制約の 2 つの制約を持つ二次計画問題を構成し、これを制御周期ごとに解くことによって制御入力を計算する手法である。システムおよび状態制約が非線形の場合においても、制御周期ごとに解くべき問題は凸二次計画問題の形になるため、高速な計算が可能であることがこの手法の特徴である。この手法の適用例として UAV [11], 二足歩行ロボット [8,12], 群ロボット [13] などのアプリケーションがある。また、前述の [8–10] は連続時間システムに対する制御手法を提案しているが、同様の考え方に基づいて離散時間システムに対する CLF-CBF-QP コントローラも提案されている [14]。

1.1.2 CLF-CBF-QP コントローラのロバスト性に関する問題

前述の CLF-CBF-QP コントローラは制約を考慮した制御入力を高速に計算できる一方で、システムモデルに基づく計算を行うことから外乱やモデル化誤差がシステムに存在する場合には制御性能が保証されないという問題がある。この問題に対して外乱・モデル化誤差の影響を考慮したロバストな CLF 制約と CBF 制約を構築する手法がいくつか提案されている。[15] ではシステムのモデル化誤差に上限が存在するという仮定の下で CLF 制約および CBF 制約に対する最悪ケースの影響を見積もることにより、モデル化誤差の影響を考慮したロバストな CLF/CBF 制約を構築する手法を提案している。この手法は想定する上限を大きく見積もっておくことによってモデル化誤差の影響を補償できるが、計算される制御入力が保守的になりすぎるという欠点がある。これに対し、モデル化誤差の推定に基づいてロバスト化を行う方法として [16,17] がある。[16] ではモデル化誤差の影響項とその時間微分が上限を持つという仮定の下で L1 適応制御を用いた Robust CLF 制約を提案している。[17] ではガウス過程回帰 (GPR) を用いることによってデータからモデル化誤差の影響項をガウス分布に従う確率モデルとして同定し、推定時に得られる平均値と分散情報に基づいた計算を行う Robust CBF 制約を提案している。どちらも有用な方法であるが、それぞれの文献において Robust CLF-CBF-QP の形としてコントローラを構築する例は示されておらず、外乱推定に基づく Robust CLF-CBF-QP コントローラをどのように構成すべきかは未だ議論の余地が残されている。また、これらの手法においては基本的に次の 2 つの条件を仮定したコントローラ設計がなされている。

仮定 1 システムのすべての状態をノイズの影響を受けずに直接観測できる

仮定 2 システムに加わる外乱項はマッチング条件をみたす

これらの仮定が満たされない場合において、ロバストに出力零化制御および状態制約の保証を行うための Robust CLF-CBF-QP を構築する方法については未だ議論がなされていない。

1.1.3 外乱を受けるシステムの制御における出力関数の設計問題

Robust CLF 制約を利用した最適化に基づく制御は種々の制約を満たしつつ外乱の影響を考慮した出力関数の零化制御を行うことを想定したものである。しかし、この方法に基づい

て外乱を受けるシステム全体を制御するためには与えられた出力関数を用いてシステムが完全線形化可能，またはゼロダイナミクスが安定かつ望ましいダイナミクスを持つことが必要となる．一般にロボットシステムが劣駆動性を有する場合にはシステムを完全線形化するような出力関数を設計することは難しい．劣駆動性とはシステムの自由度に対して制御入力の数個がそれよりも少ない性質を表し，この性質を有するロボットの制御においては基本的にゼロダイナミクスの安定性を考慮した上で出力関数を設計しなければならない．したがって外乱を受ける劣駆動ロボットシステムを制御する際には次の2つのプロセスを考えることが必要となる．

1. 外乱情報に基づくゼロダイナミクスの安定性を保証した出力関数の設計
2. 外乱情報に基づく出力関数のロバストな零化制御

このような劣駆動ロボットシステムの実用的な制御問題として，劣駆動自由度を有するヒト型ロボットの歩行制御問題がある．多くのヒト型ロボットは平面足リンクを有し，足裏全体を地面に対して接地させた状態を維持することによって劣駆動自由度が存在しない状態を維持した歩行制御を行うことができる [18, 19]．その一方で平面足を持たず，地面に対して点接触するような足リンクを持つロボットモデルにおいても周期歩行を実現する制御手法が提案されている [20, 21]．この場合には，単純に足首のアクチュエータおよび平面足リンクを必要としないことからハードウェア面のコストを削減できるとともに，アクチュエーションに必要なエネルギーも削減できるという利点がある．また，平面足リンクを持つ場合においても，足首へのトルクを考慮せずに上述の周期歩行制御器によって歩行を生成し，歩行制御器のループの外側から足首トルクを冗長な入力として用いることによってロバスト性を高めた歩行を実現する方法も提案されている [22]．このようにシステムの劣駆動性を許容した歩行生成制御を考えることによって得られるメリットは多く，ヒト型ロボットの実用化を考える上で重要な意義がある．したがって劣駆動性を有するヒト型ロボットに対し，上述のプロセス 1, 2 からなる外乱を考慮した歩行制御手法を提案することができれば当該研究分野の発展に寄与すると期待される．

1.2 本論文の目的

前節の研究背景に基づき，本論文では外乱と不確定性の影響を考慮した最適化ベースドロバスト制御器の構築とそれを利用した劣駆動性を有するヒト型ロボットの歩行生成手法の構築を目的とする．

本論文の前半では外乱および不確定性の影響を考慮した最適化ベースドロバスト制御器の構築について議論する．1.1.2 節で述べたように外乱の影響に対してロバストな CLF 制約および CBF 制約はいくつか提案されているものの，議論されていない課題は未だ残されている．本論文では外乱を確率モデルとして表現する外乱推定手法に基づく以下の4つの最適化ベースドロバスト制御器を提案する．

1. マッチング外乱を受ける連続時間システムに対する Robust CLF-CBF-QP

2. マッチング外乱を受ける連続時間システムに対する確率オブザーバによる状態・外乱推定を併用した Robust CLF-CBF-QP
3. マッチング外乱を受ける離散時間システムに対する Robust CBF-QP
4. ミスマッチング外乱を受ける連続時間システムに対する Robust CLF-CBF-QP

提案する各制御器の特徴を説明する．まず制御器 1 においては [17] の考え方と同様にデータから外乱を確率モデルとして同定し，同定されたモデルに基づいて外乱を推定する方法を用いた Robust CLF-CBF-QP コントローラとなっている．この制御器は同定された外乱モデルの分散情報を推定の不確かさの指標として利用することにより，外乱推定の不確かさを考慮しつつ [15] のように保守的になりすぎない制御を実現することができる．次に制御器 2 においてはシステムが 1.1.2 節の仮定 1 を満たさない場合を考慮した Robust CLF-CBF-QP コントローラとなっている．非線形システムに対する観測ノイズを考慮した状態推定手法である Unscented Kalman Filter (UKF) [23] を利用することによって状態・外乱オブザーバを構築し，状態と外乱をガウス分布に従う確率変数として推定する．推定された確率分布を用いて CLF/CBF 制約を機会制約へ変換し，シナリオ計画問題として Robust CLF-CBF-QP を構築する．制御器 3 に関しては制御器 1 を構成する際の考え方に基づいて離散時間システムに対する CBF 制約 [14] を拡張した Robust CBF 制約を構成し，それを用いた最適化に基づくロバストコントローラを構成している．最後に，制御器 4 は 1.1.2 節の仮定 2 を満たさない場合，すなわちミスマッチング外乱を考慮した Robust CLF-CBF-QP コントローラである．制御器 1 を拡張したものになっており，このコントローラはあるクラスの非入力アフィインシステムに対しても適用できることが利点の一つである．

本論文の後半では劣駆動性を有するヒト型ロボットのロバスト歩行生成手法について議論する．まずは 1.1.3 節のプロセス 1 を行うための方法として，ゼロダイナミクスを考慮した軌道計画に基づく出力関数設計法を導入し，それを拡張した手法を構築することによって外乱を考慮した出力関数設計を行う．劣駆動性を有するヒト型ロボットにおける有力な歩行生成手法として，Hybrid Zero Dynamics (HZD) に基づく周期軌道設計・制御手法が提案されている [20, 21, 24, 25]．この手法は出力関数の設計を通じて周期軌道を有するゼロダイナミクス多様体を設計し，設計した出力関数の零化制御を通してロボットシステムをゼロダイナミクス多様体上の周期軌道に追従させるものである．歩行においては地面に対して脚が衝突する時に速度の離散的なジャンプが生じるが，こうした離散ジャンプに対しても不変なゼロダイナミクスを HZD として定義する．この定義に基づき，軌道計画を通して周期軌道を有する HZD 多様体を生成するような出力関数を設計する．このとき，周期軌道を生成するような出力関数を設計することは比較的容易であるが，得られる周期軌道の安定性を加味した設計を行うことは困難な問題である．HZD に基づく出力関数設計を行う上で安定な周期軌道を得るための方法としては [21, 25, 26] が提案されている．なお，周期軌道の安定性については周期軌道に対して定義できる線形化ポアンカレマップと呼ばれる離散システムの安定性と等価になることが知られている [27]．[25] では軌道計画時に得られる周期軌道に対して線形化ポアンカレマップが安定となるための解析的な条件を与えているが，適用できるシステム

は劣駆動自由度が1のみのシステムに限られている。[26]は設計された周期軌道に対し、線形化ポアンカレマップとその出力関数パラメータによる偏微分を数値的に計算し、その情報に基づいた双線形行列不等式 (BMI) 最適化問題を解くことによって線形化ポアンカレマップの安定性を改善するように出力関数パラメータを更新する方法を取っている。この手法は最初に設計されたノミナルパラメータ近傍のみでしかパラメータを調整できないため、周期軌道の収束性を大幅に改善しようとする場合には向いていない。[21]の方法は軌道計画問題の中で数値的に周期軌道の線形化ポアンカレマップを計算し、線形化ポアンカレマップが安定となるような周期軌道を探索する方法を提案している。この方法は [25] と異なり、システムの劣駆動自由度の数によらない安定周期軌道設計を行うことができるという利点がある。本論文ではこの方法 [25] と同様の考え方に基づいて安定周期軌道を生成するための出力関数の設計法を提案する。特に、Direct Collocation Method [28] [29] と呼ばれる最適制御問題の一解法と GPR による外乱モデル同定を組み合わせた、外乱の影響を考慮可能な出力関数設計法を示す。その後、1.1.3 節のプロセス 2 を行うための方法として、本論文の前半で提案した最適化ベースドロバスト制御器を利用する。特に、歩行を実現する上では接地点の摩擦力に関する制約や入力制約が存在するため、そうした種々の制約条件と設計された出力関数の零化制御の両方を考慮可能な最適化ベースドロバスト制御器を構築する。

1.3 本論文の構成

本論文の構成を以下に示す。

1 章 序論

先行研究との比較を行いつつ、本論文における研究背景と目的について述べる。

2 章 準備

2 章では最初に本論文で利用するシステムに関するいくつかの定義の導入を行う。次に以降の章において最適化に基づくコントローラ構築の基礎となる CLF-CBF-QP コントローラについて説明するとともに、最適化を解くために利用可能なソルバをいくつか紹介する。最後に本論文において外乱の確率モデルをデータから同定するために利用するガウス過程回帰 (GPR) について説明する。

3 章 マッチング外乱を受けるシステムに対する最適化ベースドロバスト制御

3 章では外乱を確率変数として推定する手法に基づいた最適化ベースドロバストコントローラを構築する。最初に 2 章で説明した CLF 制約および CBF 制約を拡張し、GPR によって同定される外乱モデルを利用した連続時間 Robust CLF-CBF-QP コントローラを構築する。また、観測信号としてシステムの状態に関する情報が一部しか得られない場合を考慮し、確率的な状態推定手法の一つである Unscented Kalman Filter (UKF) による状態・外乱推定を用いた Robust CLF-CBF-QP コントローラを提案する。これは UKF から得られる推定値と真値の間の誤差の影響を考慮した上でロバストに出

力関数の零化制御と状態制約の保証を行うため、機会制約を導入した CLF-CBF-QP コントローラ (Chance constrained CLF-CBF-QP) として構成される。最後に [14] で提案された離散時間システムにおける Discrete time Exponential CBF (D-ECBF) の概念をより一般化し、同様のアイデアに基づいて離散時間システムにおける Robust D-ECBF-NLP コントローラを構築する。これらのコントローラは GPR または UKF によって外乱をガウス分布に従う確率変数として推定し、その平均値と分散情報に基づいてロバストな制御を実現していることが特徴である。提案したこれらのコントローラの有効性については数値シミュレーションによって検証する。

4 章 ミスマッチング外乱を受けるシステムに対する最適化ベースドロバスト制御

4 章では 3 章で提案した Robust CLF-CBF-QP を拡張することにより、ミスマッチング外乱の影響を受ける連続時間システムに対して外乱の影響を考慮した Robust CLF-CBF-QP を提案する。3 章で提案した Robust CLF-CBF-QP の構造を反映し、ミスマッチング外乱の影響を考慮した CLF 制約および CBF 制約を導出したうえで、外乱の確率モデルに基づく Robust CLF-CBF-QP コントローラを構築する。3 章で提案した連続時間 Robust CLF-CBF-QP コントローラは入力アファインシステムを対象としていたが、本章で提案するコントローラはあるクラスの非入力アファインシステムに対しても適用可能であることが特徴である。コントローラの有効性は数値シミュレーションによって検証する。

5 章 最適化ベースド制御器を用いたヒト型ロボットの歩行制御

5 章では 3,4 章で提案した最適化ベースドロバスト制御器のアドバンストな適用先として、劣駆動性を有するヒト型ロボットのロバスト歩行生成問題を考える。劣駆動性を有するロボットシステムが外乱の影響を受ける場合には、外乱の下でゼロダイナミクスが安定となるような出力関数の設計と設計された出力関数のロバストな零化制御の両方を考える必要がある。本章では GPR によって同定される外乱モデルを利用した出力関数設計・零化制御フレームワークを提案する。最初に HZD に基づく歩行制御手法をベースとし、外乱の下でゼロダイナミクスの安定性を保証しつつ周期歩行を実現するための出力関数設計手法を提案する。その後、歩行を実現する上で満たすべき種々の制約条件と設計された出力関数の零化制御の両方を考慮するための最適化ベースドロバストコントローラを構築する。一連の手法の有効性は数値シミュレーションを通して検証する。

6 章 結論

本研究で得られた成果の総括を行うと共に、今後の研究課題について述べる。

1.4 数学記号

本節では本論文で用いる数学記号を以下にまとめておく．

$\mathbb{N}$... 自然数全体の集合

$\mathbb{R}$... 実数全体の集合 ($\mathbb{R}_+$ は正の実数全体の集合)

$\mathbb{R}^n$... n 次元実数ベクトル全体の集合

$\mathbb{R}^{m \times n}$... $m \times n$ 次元実数行列全体の集合

$B_\delta(x)$... $x \in \mathbb{R}^n$ を中心とし，半径を $\delta \in \mathbb{R}$ とする開球

$0_{m \times n}$... m 行 n 列の零行列

$I_{n \times n}$... n 次元単位行列

A^T ... 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の転置

A^{-1} ... 正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の逆行列

$A \succ 0$... 正定行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A \prec 0$... 負定行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$|x|$... $x \in \mathbb{R}$ の絶対値

$\|x\|$... ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ のユークリッドノルム

$\det(A)$... 正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の行列式

$L_f h$... 関数 $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ の関数 $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に沿った微分 $L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$

$L_f^k h$... 関数 $L_f^{k-1} h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ の関数 $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に沿った微分 $L_f^k h = \frac{\partial L_f^{k-1} h}{\partial x} f(x)$

$L_g L_f^k h$... 関数 $L_f^k h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ の関数 $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ に沿った微分

$$L_g L_f^k h = \frac{\partial L_f^k h}{\partial x} g(x)$$

$\lambda_{\max}(A)$... 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の最大固有値

$\lambda_{\min}(A)$... 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の最小固有値

$\rho_{\text{spec}}(A)$... 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ のスペクトル半径

$\text{rank}(A)$... 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の行ランク

$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$... スカラー $a_i \in \mathbb{R}$, ($i = 1, \dots, n$) を対角要素にもつ対角行列

$\text{blkdiag}(A_1, \dots, A_n)$... 行列 $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, ($i = 1, \dots, n$) を対角要素にもつブロック対角行列

$\text{span}(A)$... 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の列ベクトルが張る部分空間

$\text{Ker}(A)$... 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の核

$\text{Prob}\{X\}$... 事象 X の確率測度

$p(X)$... 確率変数 X の確率分布

$p(X|Y)$... 確率変数 X の Y の下での条件付き確率分布

$\mathcal{N}(\mu_x, \Sigma_x)$... 平均値 μ_x , 分散 Σ_x を持つガウス分布

$\text{round}(x)$... 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対する切り上げ

$\text{argmin}_x f(x)$... 関数 $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を最小にする引数 x の集合

$\text{argmax}_x f(x)$... 関数 $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を最大にする引数 x の集合

第2章 準備

本章では準備として本論文で利用する幾つかの定義の導入と最適化に基づくコントローラ構築についてその基礎となる先行研究の説明を行う．はじめに本論文で対象とするシステムを定義するための幾つかの性質とその定義について説明する．次に本研究で提案する最適化に基づくコントローラの基礎となっている Control Lyapunov Function and Control Barrier Function based Quadratic Programming (CLF-CBF-QP) について説明する．なお，このコントローラを用いて制御入力を計算する際には二次計画法を各制御ステップで解く必要があることから，併せて利用可能なソルバーをいくつか紹介する．最後に，本論文において外乱モデルに基づくコントローラ設計を行うために利用するガウス過程回帰 (GPR) について，その性質とデータに基づくモデルの同定方法について説明する．

2.1 システムとその解に関する性質

2.1.1 微分不等式

後述する CLF 制約および CBF 制約の解析の際に用いる補題として，微分不等式の解に関する次の補題を記載しておく．

補題 1 (Gronwall の不等式 [30]). $I = [t_0, t_1]$ および連続な関数 $a(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$, $b(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ を考える．また， $u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ を $u(t_0) = u_0$ かつ次の微分不等式を満たす C_1 級関数とする．

$$\dot{u}(t) \leq a(t)u(t) + b(t) \quad \text{for } t \in I \quad (2.1)$$

このとき， $u(t)$ は次式を満たす．

$$u(t) \leq u_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right) + \int_{t_0}^t \exp \left(\int_s^t a(\tau) d\tau \right) b(s) ds \quad (2.2)$$

2.1.2 連続時間システムにおける出力関数の入力相対次数

次の入力アファインシステムとして等価的に表現される連続時間システムを考える．

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u \quad (2.3)$$

ただし, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^{m_u}$ はシステムの状態及び制御入力ベクトルであり, $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_1(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m_u}$ は Lipschitz 連続な関数とする. このシステムに対し次の出力関数を定義する.

$$y_c = h(x, t) \quad (2.4)$$

ただし, $h(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ は連続微分可能な関数とする. このとき, 関数 $h(x, t)$ の入力相対次数を次のように定義する.

定義 1 (連続時間システムにおける入力相対次数). システム (2.3) および 関数 $h(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ を考える. $k < \rho - 1$ のとき点 x_o の近傍に含まれるすべての x および時間 t において $L_{g_1} L_f^k h = 0_{p \times m_u}$ を満たし, $k = \rho - 1$ のときすべての時間 t において $L_{g_1} L_f^k h \neq 0_{p \times m_u}$ を満たすような正の整数 $\rho \leq n$ を点 x_o における関数 $h(x, t)$ の入力相対次数 (Input Relative Degree : IRD) という.

入力相対次数 (IRD) は与えられた出力関数 $h(x, t)$ の ρ 階時間微分にはじめて入力の項が現れることを示している. また, 上記の定義に加えて $\text{rank}(L_{g_1} L_f^{\rho-1} h) = p$ を満たす場合, 一般的なベクトル相対次数 [31] の定義において出力関数 $h(x, t)$ がベクトル相対次数 $(\rho, \dots, \rho)$ を持つことに対応する. この場合には出力関数 $h(x, t)$ の各要素を独立に制御できることが保証される. 本論文では関数 $h(x, t)$ が IRD ρ を持つとともに $\text{rank}(L_{g_1} L_f^{\rho-1} h) = p$ を満たすならば, 関数 $h(x, t)$ は $\text{IRD}_+ \rho$ を持つと呼ぶことにする. なお, 出力関数 $h(x, t)$ が IRD ρ を持つ場合には微分同相な座標変換 $\Phi_x(x) = [\zeta^T, z^T]^T$, $\zeta \in \mathbb{R}^{op}$, $z \in \mathbb{R}^{n-op}$ が存在して, システム (2.3) を次式の形に変形できる.

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} 0_{(\rho-1)p \times p} & I_{(\rho-1)p \times (\rho-1)p} \\ 0_{p \times p} & 0_{p \times (\rho-1)p} \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0_{(\rho-1)p \times m_u} \\ I_{p \times m_u} \end{bmatrix} v_\zeta(\zeta, z, t) \quad (2.5)$$

$$v_\zeta = L_f^\rho h(\Phi_x^{-1}(\zeta, z), t) + L_{g_1} L_f^{\rho-1} h(\Phi_x^{-1}(\zeta, z), t) u \quad (2.6)$$

$$\dot{z} = F_z(\zeta, z, u) \quad (2.7)$$

ただし, $\zeta = [h(x, t)^T, \dots, L_f^{\rho-1} h(x, t)^T]^T$ である. ここで ζ を原点に収束させるためのコントローラを $u_\zeta(\zeta, z)$ とすると, この $u_\zeta(\zeta, z)$ を用いて $\zeta = 0$ を達成した後のシステムのダイナミクスは次式で表される.

$$\dot{z} = F_z(0, z, u_\zeta(0, z)) \quad (2.8)$$

これをシステム (2.3) におけるゼロダイナミクスという.

2.1.3 離散時間システムにおける出力関数の入力相対次数

次の入力アファインシステムとして等価的に表現される離散時間システムを考える.

$$x[k+1] = f(x[k]) + g_1(x[k])u[k] \quad (2.9)$$

ただし, $x[k] \in \mathbb{R}^n$ は k ステップ目におけるシステムの状態ベクトル, $u[k] \in \mathbb{R}^{m_u}$ は k ステップ目における制御入力ベクトルを表し, $f(x[k]) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_1(x[k]) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m_u}$ とする. このシステムに対し, 次の出力関数を定義する.

$$y_c[k] = h(x[k], k) \quad (2.10)$$

ただし, $h(x[k], k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ とする. このとき, 関数 $h(x[k], k)$ の入力相対次数を次のように定義する.

定義 2 (離散時間システムにおける入力相対次数). システム (2.9) および 関数 $h(x[k], k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. すべての時刻 k において次の式を満たす正の整数 $\rho \leq n$ を点 x_o における関数 $h(x[k], k)$ の入力相対次数 (Input Relative Degree : IRD) という.

$$\frac{\partial}{\partial u} h(f^{i-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k) = 0_{1 \times m_u}, \quad 0 \leq i \leq \rho - 1, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} h(f^{\rho-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k) \neq 0_{1 \times m_u} \quad (2.12)$$

ただし, $x[k] \in B_\delta(x_o)$ であり, $f^i(x[k]) := f^{i-1} \circ f(x[k])$, $f^0(x[k]) := x[k]$ とする.

離散時間システムにおける IRD ρ は現在の入力の影響が ρ ステップ先の出力関数にはじめて現れることを表している.

2.2 CLF-CBF-QP に基づく制御

Control Lyapunov Function and Control Barrier Function based Quadratic Programming (CLF-CBF-QP) は Exponentially Stabilizing Control Lyapunov Function (ES-CLF) 制約および Control Barrier Function (CBF) 制約の 2 つの線形不等式制約の下で二次計画法を解くことにより, 状態および入力に関する制約条件を考慮した最適制御入力を計算する手法である [8] [9]. 同様に入力飽和や状態制約を考慮可能な制御手法としてモデル予測制御 (MPC) [6] が存在するが, CLF-CBF-QP では MPC とは異なり, システムの未来の状態を予測する必要がないことから高速な計算が可能である.

2.2.1 Exponentially Stabilizing CLF (ES-CLF) 制約

Ames らによって提案された Exponentially Stabilizing CLF (ES-CLF) 制約 [32] [33] は与えられた出力関数の零化制御を行うための入力集合を規定するものであり, 制御入力に対する線形不等式制約として表される.

ここでは式 (2.3) で表されるシステム及び式 (2.4) で表される出力 $y_c = h(x, t)$ を考え, さ

らに $h(x, t)$ が $\text{IRD}_+ r_h$ を持つと仮定する. この仮定より出力関数 $h(x, t)$ の r_h 階までの時間微分は次のように表せる.

$$\dot{y}_c = L_f h + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ y_c^{(r_h)} &= L_f^{r_h} h + L_{g_1} L_f^{r_h-1} h u + \frac{\partial^{r_h} h}{\partial t^{r_h}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

r_h 階目の時間微分の式において, 次の式を満たす新たなベクトル $\mu \in \mathbb{R}^p$ を定義する.

$$\mu := L_f^{r_h} h + L_{g_1} L_f^{r_h-1} h u + \frac{\partial^{r_h} h}{\partial t^{r_h}} \quad (2.15)$$

また, 出力関数 $h(x, t)$ およびその時間微分を集めた新たなベクトル $\eta \in \mathbb{R}^{r_h p}$ を次のように定義する.

$$\eta := \left[h^T, \left(L_f h + \frac{\partial h}{\partial t} \right)^T, \dots, \left(L_f^{r_h-1} h + \frac{\partial^{r_h-1} h}{\partial t^{r_h-1}} \right)^T \right]^T \quad (2.16)$$

これにより状態を η , 入力を μ とする次の線形システムを考えることができる.

$$\dot{\eta} = F_c \eta + G_c \mu \quad (2.17)$$

ただし行列 F_c, G_c は次のように定義される.

$$F_c = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & I_{p \times p} & \cdots & 0_{p \times p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{p \times p} & 0_{p \times p} & \cdots & I_{p \times p} \\ 0_{p \times p} & 0_{p \times p} & \cdots & 0_{p \times p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}_h \times \tilde{r}_h}, \quad G_c = \begin{bmatrix} 0_{p \times p} \\ \vdots \\ 0_{p \times p} \\ I_{p \times p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}_h \times p}, \quad \tilde{r}_h := r_h p$$

この線形システムに対して ES-CLF は次のように定義される.

定義 3 (Exponentially Stabilizing CLF). システム (2.17) において, 次の不等式を満たす正定数 $c_1, c_2, \gamma \in \mathbb{R}$ が存在する時, 連続微分可能な関数 $V : \mathbb{R}^{\tilde{r}_h} \rightarrow \mathbb{R}$ は Exponentially Stabilizing Control Lyapunov Function (ES-CLF) であるという.

$$c_1 \|\eta\|^2 \leq V(\eta) \leq c_2 \|\eta\|^2 \quad (2.18)$$

$$\inf_{\mu} [L_{F_c \eta} V + L_{G_c} V \mu + \gamma V] \leq 0 \quad (2.19)$$

ES-CLF が存在するとき, 出力関数ベクトル η を原点に指数安定化するような入力 μ の集合 $\mathcal{K}_{clf}$ は次のように定義できる.

$$\mathcal{K}_{clf} := \{\mu \mid L_{F_c \eta} V + L_{G_c} V \mu \leq -\gamma V\} \quad (2.20)$$

この集合内の入力 μ を取ることによって η が原点に指数収束することは次のように示せる．式 (2.20) で表される集合内の入力 μ を取るとき，式 (2.19) に対して 補題 1 より次の不等式が得られる．

$$V(\eta(t)) \leq V(\eta(0))e^{-\gamma t} \quad (2.21)$$

ここで式 (2.18) の関係から更に次の不等式が成り立つ．

$$\|\eta(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \|\eta(0)\| \quad (2.22)$$

これより η は時間 t と共に原点に指数収束することがわかる．ここで式 (2.17) の行列 F_c, G_c から次式の連続時間代数 Riccati 方程式の解 $P \in \mathbb{R}^{\tilde{r}_h \times \tilde{r}_h}$ を用いて Lyapunov 関数を $V(\eta) = \eta^T P \eta$ とする場合を考える．

$$F_c^T P + P F_c - P G_c G_c^T P + Q = 0 \quad (2.23)$$

$Q \in \mathbb{R}^{\tilde{r}_h \times \tilde{r}_h}$ は設計可能な正定対称行列である．この場合には式 (2.22) を次のように書き直すことが可能である．

$$\|\eta(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \|\eta(0)\| \quad (2.24)$$

したがって一般には式 (2.23) から得られる行列 P を用いて，Lyapunov 関数を $V = \eta^T P \eta$ と定義することにより集合 $\mathcal{K}_{clf}$ の条件を ES-CLF 制約として用いることができる．なお，式 (2.20) は μ の集合を規定しているが，式 (2.15) の定義より実際の入力 u の集合として次式のように表すことも可能である．

$$\mathcal{K}_{clf} := \left\{ u \mid L_{F_c \eta} V + L_{G_c} V \left(L_f^{r_h} h + L_{g_1} L_f^{r_h-1} h u + \frac{\partial^{r_h} h}{\partial t^{r_h}} \right) \leq -\gamma V \right\} \quad (2.25)$$

また，式 (2.22) からわかるように通常の ES-CLF は η の収束速度がパラメータ γ に依存するが，出力関数が $\text{IRD}_+ \ r_h = 2$ を持つ場合には収束速度を調整するパラメータを更に追加した Rapidly ES-CLF (RES-CLF) 制約も利用できる．RES-CLF は次のように定義される．

定義 4 (Rapidly Exponentially Stabilizing CLF). システム (2.17) において，すべての $0 < \epsilon < 1$ に対して次の不等式を満たす正定数 $c_1, c_2, \gamma \in \mathbb{R}$ が存在する時，連続微分可能な関数 $V_\epsilon : \mathbb{R}^{\tilde{r}_h} \rightarrow \mathbb{R}$ を Rapidly Exponentially Stabilizing Control Lyapunov Function (RES-CLF) であるという．

$$c_1 \|\eta\|^2 \leq V_\epsilon(\eta) \leq \frac{c_2}{\epsilon^2} \|\eta\|^2 \quad (2.26)$$

$$\inf_{\mu} \left[L_{F_c \eta} V_\epsilon + L_{G_c} V_\epsilon \mu + \frac{\gamma}{\epsilon} V_\epsilon \right] \leq 0 \quad (2.27)$$

これより式 (2.20) と同様に η を原点に指数安定化する入力集合 $\mathcal{K}_{clf}^\epsilon$ を次のように定義できる.

$$\mathcal{K}_{clf}^\epsilon := \left\{ \mu \mid L_{F_c\eta} V_\epsilon + L_{G_c} V_\epsilon \mu \leq -\frac{\gamma}{\epsilon} V_\epsilon \right\} \quad (2.28)$$

RES-CLF の場合には通常の ES-CLF を構成する際に用いた Lyapunov 関数 $V = \eta^T P \eta$ に対して新たにパラメータ $\epsilon \in (0, 1]$ を導入し, 次式で定義される新たな Lyapunov 関数 V_ϵ を考えればよい.

$$V_\epsilon = \eta^T P_\epsilon \eta \quad (2.29)$$

ただし, $P_\epsilon := I_\epsilon P I_\epsilon$, $I_\epsilon := \text{blkdiag}(\frac{1}{\epsilon} I_{p \times p}, I_{p \times p})$ とする. この Lyapunov 関数に対して式 (2.28) を満たす入力 μ を適用することで η のノルム軌道は次式のようになる.

$$\|\eta(t)\| \leq \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\frac{\gamma}{2\epsilon} t} \|\eta(0)\| \quad (2.30)$$

したがってこの場合には η が $e^{-\frac{\gamma}{2\epsilon}}$ の速度で原点に指数収束し, パラメータ ϵ を 0 に近づけるほど収束速度を速めることができる. なお, $\mathcal{K}_{clf}^\epsilon$ に関しても次式のように入力 u の集合の形に書き直すことができる.

$$\mathcal{K}_{clf}^\epsilon := \left\{ u \mid L_{F_c\eta} V_\epsilon + L_{G_c} V_\epsilon \left(L_f^{r_h} h + L_{g_1} L_f^{r_h-1} h u + \frac{\partial^{r_h} h}{\partial t^{r_h}} \right) \leq -\frac{\gamma}{\epsilon} V_\epsilon \right\} \quad (2.31)$$

本論文では以後, 入力集合 $\mathcal{K}_{clf}$ および $\mathcal{K}_{clf}^\epsilon$ を規定する不等式制約条件をそれぞれ ES-CLF 制約, RES-CLF 制約と呼ぶことにする.

注意 1. 出力関数 y_c の取り方によっては式 (2.8) のゼロダイナミクスが不安定となることがある. 実用上は取りうる制御入力の大きさに上限があることから許容される入力の集合を $\mathcal{U}_a$ とすると, ゼロダイナミクスが発散する場合には $\mathcal{K}_{clf} \cap \mathcal{U}_a$, $\mathcal{K}_{clf}^\epsilon \cap \mathcal{U}_a$ が空集合となる可能性がある. そのため, 出力関数の零化制御を達成するためにはシステムが次のどちらかの性質を満たすように出力関数を設計しなければならない.

- ゼロダイナミクス (2.8) が安定
- 式 (2.5) における $L_f^\rho h(\Phi_x^{-1}(\zeta, z), t)$ および $L_{g_1} L_f^{\rho-1} h(\Phi_x^{-1}(\zeta, z), t)$ が z について有界

2.2.2 Control Barrier Function (CBF) 制約

Control Barrier Function (CBF) 制約は式 (2.3) で表されるシステムに対し, 状態 x を与えられた集合内に留めるための制約条件である [10]. 本論文では連続微分可能な関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ によって定義される次の状態集合を考える.

$$\mathcal{C}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x, t) \geq 0\} \quad (2.32)$$

この集合 $\mathcal{C}_0$ に対し, CBF は次のように定義される.

定義 5 (Control Barrier Function). 連続微分可能な関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて定義される式 (2.32) の集合 $\mathcal{C}_0$ を考える. このとき, システム (2.3) において次式を満たすクラス $\mathcal{K}_\infty$ 関数 α がすべての $x \in \mathcal{C}_0$ で存在するならば関数 $B(x, t)$ を Control Barrier Function (CBF) であるという.

$$\sup_u \left[L_f B(x, t) + L_g B(x, t)u + \frac{\partial B}{\partial t}(x, t) \right] \geq -\alpha(B(x, t)) \quad (2.33)$$

CBF が存在する場合, 状態 x を集合 $\mathcal{C}_0$ 内に留めるような入力 u の集合 $\mathcal{K}_{cbf}$ は次のように定義できる.

$$\mathcal{K}_{cbf} := \left\{ u \mid L_f B + L_g B u + \frac{\partial B}{\partial t} \geq -\alpha(B(x, t)) \right\} \quad (2.34)$$

クラス $\mathcal{K}_\infty$ 関数 α が定数 $\beta \in \mathbb{R}_+$ を用いて $\beta B(x, t)$ と表せる場合, 集合 $\mathcal{K}_{cbf}$ 内の入力 u を用いることで B の下界が原点に指数収束することが次のように示せる. 集合 $\mathcal{K}_{cbf}$ 内の入力を用いる場合, 関数 B の時間微分に対し次の不等式が成り立つ.

$$\dot{B} = L_f B + L_g B u + \frac{\partial B}{\partial t} \geq -\beta B(x, t) \quad (2.35)$$

ここで補題 1 より B の軌道は次の不等式を満たす.

$$B(x, t) \geq B(x_0, 0)e^{-\beta t} \quad (2.36)$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ は状態 x の $t = 0$ 時刻における状態であり, $x_0 \in \mathcal{C}_0$ を仮定すると式 (2.36) の右辺は正の値を保ちつつ原点に指数収束する. したがって式 (2.36) の関係より $t \in [0, \infty]$ において $B(x, t) \geq 0$ が満たされる.

定義 5 で与えられる CBF は IRD 1 を持つような関数 $B(x, t)$ のみを対象とするものであり, IRD 2 以上の相対次数を持つ場合には直接適用することができない. このような高次の相対次数を持つ関数 $B(x, t)$ に対して CBF を構築する方法として Exponential CBF (ECBF) が提案されている [34].

定義 6 (Exponential Control Barrier Function). 連続微分可能な関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて定義される式 (2.32) の集合 $\mathcal{C}_0$ を考える. ただし $B(x, t)$ は IRD r_b を持つとする. このとき, 次の式を満たすゲイン行列 $K_b \in \mathbb{R}^{1 \times r_b}$ が存在し, $B(x_0, 0) \geq 0$ のとき $B(x, t) \geq C_b e^{(F_b - G_b K_b)t} \eta_b(x_0, 0) \geq 0$ を満たすならば関数 $B(x, t)$ を Exponential Control Barrier Function (ECBF) であるという.

$$\sup_u \left[L_f^{r_b} B(x, t) + L_g L_f^{r_b-1} B(x, t)u + \frac{\partial^{r_b} B}{\partial t^{r_b}}(x, t) \right] \geq -K_b \eta_b(x, t) \quad (2.37)$$

ただし,

$$\eta_b(x, t) = \begin{bmatrix} B(x, t) \\ \dot{B}(x, t) \\ \vdots \\ B^{(r_b-1)}(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ L_f B + \frac{\partial B}{\partial t} \\ \vdots \\ L_f^{r_b-1} B + \frac{\partial^{r_b-1} B}{\partial t^{r_b-1}} \end{bmatrix}, C_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$F_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_b \times r_b}, G_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_b} \quad (2.39)$$

である.

ECBF が存在する場合には CBF の場合と同様に状態 x を集合 $\mathcal{C}_0$ 内に留める入力 $\mathcal{K}_{ecbf}$ を次式のように定義できる.

$$\mathcal{K}_{ecbf} := \left\{ u \mid L_f^{r_b} B + L_g L_f^{r_b-1} B u + \frac{\partial^{r_b} B}{\partial t^{r_b}} \geq -K_b \eta_b \right\} \quad (2.40)$$

以後, 集合 $\mathcal{K}_{cbf}$ 及び $\mathcal{K}_{ecbf}$ を規定する不等式制約条件を CBF 制約, ECBF 制約と呼ぶことにする. ECBF を構成するためには適切なゲイン行列 K_b を設定する必要があるが, これについては次の定理が利用できる.

定理 1 (ECBF 条件 [34, Thm. 2]). 行列 $F_b - G_b K_b$ が安定行列かつその固有値 λ_i , ($i = 1, \dots, r_b$) が次の式を満たすようにゲイン行列 K_b を選ぶとする.

$$-\lambda_i \geq -\frac{\dot{y}_{i-1}(x_0, 0)}{y_{i-1}(x_0, 0)} \quad (2.41)$$

ただし, y_i は設計パラメータ $p_i \in \mathbb{R}_+$ を用いて次式で定義される関数である.

$$y_0 = B(x, t) \quad (2.42)$$

$$y_i = \dot{y}_{i-1} + p_i y_{i-1} \quad (2.43)$$

このとき, 集合 $\mathcal{K}_{ecbf}$ 内の入力 u は $B(x, t)$ を ECBF とする.

なお, この定理については 3 章で線形非負システムの観点から異なる証明を与える.

2.2.3 2 次計画法による制御入力設計

前節までに述べた ES-CLF 制約および ECBF 制約を制約条件とする最適化問題を構成し, 各時刻でこれを逐次的に解くことによって拘束条件を考慮した最適制御入力を求めることができる. 特に二次計画法の形で制御入力 u_* を計算するコントローラを CLF-CBF-QP コン

Table 2.1: CLF-CBF-QP Controller

CLF-CBF-QP

$$\begin{aligned}
u_* &= \underset{u, s_r}{\operatorname{argmin}} \quad \frac{1}{2} \mu(x, u, t)^T \mu(x, u, t) + \frac{1}{2} W_{u0} s_r^2 & (2.44) \\
\text{s.t. } & L_{F_c \eta} V + L_{G_c} V \left(L_f^{r_h} h + L_{g_1} L_f^{r_h-1} h u + \frac{\partial^{r_h} h}{\partial t^{r_h}} \right) \leq -\gamma V + s_r, & (\text{ES-CLF constraint}) \\
& L_f^{r_b} B + L_{g_1} L_f^{r_b-1} B u + \frac{\partial^{r_b} B}{\partial t^{r_b}} \geq -K_b \eta_b, & (\text{ECBF constraint}) \\
& A_c u \leq B_c & (\text{Other constraints})
\end{aligned}$$

トローラと呼び、これは表 2.1 のような形の最適化問題として定式化される。ただし、 $s_r \in \mathbb{R}$ は複数の制約条件によって許容解がなくなること防ぐために ES-CLF 制約の緩和項として導入した変数であり、 $W_{u0} \in \mathbb{R}_+$ は評価関数における s_r の重み定数である。 s_r をできる限り小さくしなければならないため、重み W_{u0} は十分大きな値を設定する必要がある。また、最終行の不等式制約は入力に関するその他の制約を同時に考えるためのものであり、 A_c, B_c は定数行列として与える。一例として入力の各要素のノルムに最大値 $u_{i, \max} \in \mathbb{R}$ が存在する場合には次のような A_c, B_c を考えればよい。

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} u_{1, \max} \\ u_{1, \max} \\ \vdots \\ u_{m_u, \max} \\ u_{m_u, \max} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

CLF-CBF-QP では出力関数の零化制御のために ES-CLF 制約を導入しているが、既に別で設計されたコントローラを利用した上で状態制約のみを違反しないように制御を行いたいというケースも考えられる。このようなケースでは既に設計されている別のコントローラによって計算される入力を参照入力 $u_{ref} \in \mathbb{R}^{m_u}$ とし、ECBF 制約の下で制御入力 u と参照入力 u_r の差ノルムを最小化する CBF-QP コントローラが利用できる。これは表 2.2 のような最適化問題として定式化される。式 (2.44) で定義された CLF-CBF-QP が ES-CLF 制約にスラック変数を導入することで出力関数の零化制御を緩和していることに対し、式 (2.46) で定義される CBF-QP は評価関数を上記のような形にすることで緩和問題を構成していることに注意されたい。また、重要なこととして表 2.1、表 2.2 の形は一つの状態制約関数 $B(x, t) \geq 0$ のみを保証するものであるため、複数の状態制約 $B_i(x, t) \geq 0$, ($i = 1, \dots, N$) を同時に考慮する場合にはその分の ECBF 制約を追加する必要があることに注意されたい。

Table 2.2: CBF-QP Controller

CBF-QP

$$\begin{aligned}
u_* &= \underset{u}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}(u - u_{ref})^T(u - u_{ref}) & (2.46) \\
\text{s.t. } & L_f^{r_b} B + L_{g_1} L_f^{r_b-1} B u + \frac{\partial^{r_b} B}{\partial t^{r_b}} \geq -K_b \eta_b, & (\text{ECBF constraint}) \\
& A_c u \leq B_c & (\text{Other constraints})
\end{aligned}$$

2.2.4 最適化ソルバー

前節で説明した CLF-CBF-QP や CBF-QP といった二次計画問題や後の章で説明する非線形計画問題を解くために利用できるソルバをいくつか紹介しておく。

二次計画法 (QP) ソルバー

- Mathworks: Quadprog [35] ...
有料の MATLAB Optimization Toolbox に含まれており, MATLAB で利用可能な二次計画法ソルバー. 内点法 (Interior Point Convex Method) と信頼領域法 (Trust Region Reflective Method) の 2 つのアルゴリズムを利用して 2 次計画問題を解くことができる.
<https://jp.mathworks.com/help/optim/quadratic-programming.html>
- CVXGEN, LLC.: CVXGEN [36] ...
C または MATLAB で利用可能な線形・二次計画法ソルバーであり, 学術用途・非商用であれば無料で利用可能. 主双対内点法 (Primal Dual Interior Point Method) を利用して 2 次計画問題を解くことができる.
<https://cvxgen.com/docs/index.html>
- COIN-OR: CLP [37] ...
C++ で記述可能なオープンソースの線形・二次計画ソルバーであり, 無料で利用可能. 双対単体法 (Dual Simplex Method) を利用して 2 次計画問題を解くことができる.
<https://github.com/coin-or/Clp>

非線形計画法 (NLP) ソルバー

- Mathworks: fmincon [38] ...
有料の MATLAB Optimization Toolbox に含まれており, MATLAB で利用可能な非線形計画法ソルバー. 内点法 (Interior Point Method), 信頼領域法 (Trust Region Reflective Method), 逐次二次計画法 (Sequential Quadratic Programming), 有効制約

法 (Active Set Method) を利用して非線形計画問題を解くことができ、問題のサイズに応じてアルゴリズムを切り替えることができる。

<https://jp.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>

- COIN-OR: Ipopt [39] ...

C++ で利用可能なオープンソースの非線形計画法ソルバーであり、無料で利用可能。主双対内点法 (Primal Dual Interior Point Method) を利用して大規模な非線形計画問題を解くことができる。

<https://github.com/coin-or/Ipopt>

- S. G. Johnson: NLOpt [40] ...

C, C++, Fortran, MATLAB, Python, Julia, R, Lua, Rust 等で利用可能なオープンソースの非線形計画ソルバーであり、無料で利用可能。十数種類のアルゴリズムを利用して非線形計画問題を解くことができる。

<https://nlopt.readthedocs.io/en/latest/>

上記のいくつかのオープンソースソルバーに関しては最適化ツールボックスである OPTI TOOLBOX [41] を通じて MATLAB において利用可能である。

2.3 ガウス分布とガウス過程回帰

2.3.1 ガウス分布

ガウス分布は $x \in \mathbb{R}$ に対し確率密度関数 $f(x)$ が次式の形で与えられるような確率分布を表す。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (2.47)$$

ただし、 μ_x , σ_x はそれぞれ平均値と分散を表す。本論文において確率変数 x が平均値 μ_x および分散 σ_x を持つガウス分布に従う場合には $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x)$ と表す。

式 (2.47) は一次元ガウス分布における確率密度関数を表すものであるが、多次元ガウス分布も同様に定義できる。 n 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に対する多次元ガウス分布の確率密度関数 $f(x)$ は平均値ベクトル $\mu_x \in \mathbb{R}^n$ および共分散行列 $\Sigma_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を用いて次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det(\Sigma_x)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu_x)^T \Sigma_x^{-1} (x - \mu_x)\right) \quad (2.48)$$

多次元ガウス分布に関する有用な性質としてガウス分布に従う確率変数の線形変換に関する補題を述べておく [42]。

補題 2 (多次元ガウス分布の線形変換). 平均値ベクトル $\mu_x \in \mathbb{R}^n$, 共分散行列 $\Sigma_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を持つ n 次元ガウス分布に従う確率変数 $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \Sigma_x)$ を考える. このベクトル x に対して行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ による線形変換 $y = Ax$ を行ったベクトル $y \in \mathbb{R}^m$ も同様にガウス分布 $y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \Sigma_y)$ に従う. ただし, 平均値ベクトル $\mu_y \in \mathbb{R}^m$ および $\Sigma_y \in \mathbb{R}^{m \times m}$ は次式で与えられる.

$$\mu_y = A\mu_x \quad (2.49)$$

$$\Sigma_y = A\Sigma_x A^T \quad (2.50)$$

2.3.2 ガウス過程回帰

ガウス過程回帰 (Gaussian Process Regression : GPR) は非線形回帰手法の一つであり [42] [43], 与えられたトレーニングデータの関係から潜在関数の確率モデルを同定するものである. GPR の枠組みにおいてはすべてのトレーニングデータが同時ガウス分布に従うという仮定の下で, 推定すべき潜在関数がガウス過程によって表現される. そのため, 同定されたモデルを用いて新たな入力に対応する出力を予測する際, 得られる分散情報から推定値の不確かさを評価できる点が一般の非線形回帰手法とは異なる特徴である.

N 個の入力データ $X = [x_1, x_2, \dots, x_N] \in \mathbb{R}^{n \times N}$ と平均値がすべて 0 となるように正規化された出力データ $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \in \mathbb{R}^N$ のセットがトレーニングデータとして与えられたとする. このとき, 新たな入力ベクトル x_* に対応する出力 y_* の予測分布は次のように得られる.

$$p(y_* | x_*, X, Y, \sigma_o^2) = \mathcal{N}(y_* | \mu_*, \sigma_*^2), \quad (2.51)$$

$$\mu_* = k(x_*, X)(k(X, X) + \sigma_o^2 I)^{-1}Y, \quad (2.52)$$

$$\sigma_*^2 = k(x_*, x_*) - k(x_*, X)(k(X, X) + \sigma_o^2 I)^{-1}k(X, x_*), \quad (2.53)$$

ただし, σ_o^2 は Y に含まれる観測ノイズの分散, $k(\cdot, \cdot)$ は後述するカーネル関数と呼ばれるスカラー関数であり, $k(X, X), k(x_*, X)$ は次のように定義されるカーネル行列とする.

$$k(X, X) = \begin{bmatrix} k(x_1, x_1) & \dots & k(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(x_N, x_1) & \dots & k(x_N, x_N) \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

$$k(x_*, X) = k(X, x_*)^T = [k(x_*, x_1) \quad \dots \quad k(x_*, x_N)]. \quad (2.55)$$

GPR によって同定されるモデルの性質はカーネル関数 $k(\cdot, \cdot)$ の選び方によって変わる. よく利用されるカーネル関数の例としては次のようなものがある.

- ガウスカーネル (RBF カーネル)

$$k(x, x') = \theta_1 \exp\left(-\frac{|x - x'|^2}{\theta_2}\right), \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \quad (2.56)$$

- 周期カーネル

$$k(x, x') = \exp \left(\theta_1 \cos \left(\frac{|x - x'|}{\theta_2} \right) \right), \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \quad (2.57)$$

- 指数カーネル

$$k(x, x') = \exp \left(-\frac{|x - x'|}{\theta_1} \right), \quad \theta_1 \in \mathbb{R} \quad (2.58)$$

- 関連度自動決定二乗指数カーネル (ARD-SE カーネル)

$$\begin{aligned} k(x, x') &= \sigma_f^2 \exp \left(-\frac{1}{2} (x - x')^T \Lambda^{-1} (x - x') \right), \quad \sigma_f \in \mathbb{R}, \\ \Lambda &= \text{diag}(l_1^2, l_2^2, \dots, l_n^2), \quad l_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.59)$$

カーネル関数内に含まれるパラメータと観測ノイズの分散をまとめたベクトル θ はハイパーパラメータと呼ばれ、トレーニングデータに基づき次の周辺尤度最大化によって最適化することができる。

$$\theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \log p(Y|X, \theta), \quad (2.60)$$

$$\log p(y|X, \theta) = -\frac{1}{2} Y^T (k(X, X) + \sigma_o^2 I)^{-1} Y - \frac{1}{2} \log |k(X, X) + \sigma_o^2 I|.$$

本論文では表現自由度の高さから式 (2.59) の ARD-SE カーネルを用いた GPR によって回帰モデルを生成する。また、この ARD-SE カーネルを用いて GPR モデルを同定する場合、同定後の特性長スケールパラメータ l_i の大きさを比較することによって入力各成分が出力にどれくらい影響を与えているかを確認することができる。 l_i が大きい入力の成分ほど出力に影響を及ぼさないため、こうした成分を入力から削除してモデルを再同定することにより GPR モデルの次元を削減することができる。

上述の式 (2.52), (2.53) で表される GPR モデルにおいては式 (2.52) の定義より、新しい入力 x_* とモデル同定時のトレーニングデータ $x_i \in X$ の距離 $\|x_* - x_i\|$ が大きいほど推定平均値の関数が小さくなる性質がある。これよりデータを持たない場所では推定平均値が 0 となってしまう、同定されたモデルに基づく制御や最適化を行う際に都合が悪い場合がある。この問題に対し、基底関数とその係数ベクトルを平均値関数に加えた次の形の GPR モデルを考えることもできる。

$$p(y_*|x_*, X, Y, \sigma_o^2) = \mathcal{N}(y_*|\mu_*, \sigma_*^2), \quad (2.61)$$

$$\mu_* = h_\beta(x_*)^T \beta_H + k(x_*, X) (k(X, X) + \sigma_o^2 I)^{-1} (Y - H_\beta(X) \beta_H), \quad (2.62)$$

$$\sigma_*^2 = k(x_*, x_*) - k(x_*, X) (k(X, X) + \sigma_o^2 I)^{-1} k(X, x_*), \quad (2.63)$$

ただし、 $h_\beta(x)$ は基底関数のベクトルであり、 β_H は基底関数に対する係数ベクトルである。また、 $H_\beta(X)$ はトレーニングデータ $x_i \in X$ を用いて計算された基底関数 $h_\beta(x_i)$ を並べた

行列である．式 (2.62) の $h_\beta(x)^T \beta_H$, $H_\beta(x) \beta_H$ の項は出力 y のトレンドを表現する部分であり, $\|x_* - x_i\| \rightarrow \infty$ の場合においても推定平均値は次式のように計算されるため 0 にはならない．

$$\mu_* = h_\beta(x_*)^T \beta_H \quad (2.64)$$

これはトレーニングデータのない場所では事前に計算されたトレンドに従って平均値を推定することを意味している．この性質は本論文の 5 章で導入するような GPR モデルに基づく最適制御問題を解く際に有用である．基底関数は任意に与えることができ, それに対する係数ベクトル β_H はハイパーパラメータの最適化を行う際に同時に計算を行う．

式 (2.51)～(2.53), 式 (2.61)～(2.63) で定義されるモデルは多入力単出力の関数を想定したものであるため, ベクトル値関数を GPR で同定する場合には個々の要素を独立に同定する必要がある．入力のトレーニングデータとして $X = [x_1, x_2, \dots, x_N] \in \mathbb{R}^{n \times N}$, 出力のトレーニングデータとして $Y_{vec} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \in \mathbb{R}^{N \times m}$ が与えられたとき, 新たな入力ベクトル x_* に対応する出力ベクトルの分布は次のように表される．

$$p(y_{vec*} \mid x_*, X, Y_{vec}, \Sigma_o) = \mathcal{N}(y_{vec*} \mid \mu_{vec*}, \Sigma_{vec*}), \quad (2.65)$$

$$\mu_{vec*} = [\mu_{*1}, \dots, \mu_{*m}]^T, \quad (2.66)$$

$$\Sigma_{vec*} = \text{diag}(\sigma_{*1}^2, \dots, \sigma_{*m}^2), \quad (2.67)$$

ただし $\Sigma_o := \text{diag}(\sigma_{o1}^2, \dots, \sigma_{om}^2)$ であり, $\sigma_{oi}, \mu_{*i}, \sigma_{*i}$, ($i = 1, \dots, m$) はそれぞれ y_{vec*} の i 番目の要素に対応した値とする．

なお, GPR によって関数 $y = f(x)$, $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ のモデルを同定する場合, $f(x)$ がコンパクト集合 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ において有界な再生核ヒルベルト (RKHS) ノルムを持つようにカーネル関数 $k(\cdot, \cdot)$ が選ばれているならば関数の推定誤差を確率的に見積もることができる [44]．コンパクト集合 $\mathcal{D}$ の要素 $x_D \in \mathcal{D}$ について $\|f_i(x_D)\|_k \leq \kappa_p$, ($i = 1, \dots, n$) を満たす, すなわち RKHS ノルムが有界ならば次の式が成り立つことが知られている．

$$\text{Prob} \{ \|\mu_{vec*}(x_D) - f(x_D)\| \leq \|\beta_p^T \Sigma_{vec*}(x_D)\| \} \geq p_G, \quad x_D \in \mathcal{D} \quad (2.68)$$

ただし, $p_G \in (0, 1)$, $\beta_p, \gamma_p \in \mathbb{R}^n$ であり, β_p, γ_p の各要素は

$$\beta_{pi} = \sqrt{2\kappa_i^2 + 300\gamma_{pi} \ln^3 \left(\frac{N+1}{1-p_G^{1/n}} \right)}, \quad (2.69)$$

$$\gamma_{pi} = \max_{X \in \mathcal{D}} \frac{1}{2} \log |I + \sigma_{oi}^{-2} k_i(X, X)|, \quad (2.70)$$

として定義される．

第3章 マッチング外乱を受けるシステム に対する最適化ベースドロバスト 制御

3.1 はじめに

本章では2章で紹介した連続時間システムにおける CLF-CBF-QP コントローラを拡張し、外乱推定に基づく連続時間 Robust CLF-CBF-QP コントローラを構築する。また、[14]で提案された離散時間システムにおける ECBF の概念をより一般化し、同様の考え方に基づいて離散時間システムにおける Robust D-ECBF-NLP コントローラを構築する。特にこの章ではマッチング外乱と呼ばれる種類の外乱が影響するシステムを対象としてロバストコントローラの設計を行う。CLF/CBF 制約に対するマッチング外乱の影響を考慮したロバスト化手法は幾つかの手法が提案されているが [15] [16], 本章で提案する方法は外乱・不確定性をガウス分布に従う確率変数として推定することにより、分散情報に基づいて外乱推定の不確かさを考慮した制御が実現されることが特徴である。

3.2 連続時間システムに対する制御器設計

3.2.1 問題設定

本節ではシステムモデルとして下記のダイナミクスで等価的に表現される入力アファイン系を対象として議論を進める。

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u + g_2(x)d(x, t) \quad (3.1)$$

ただし, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^{m_u}$, はシステムの状態および制御入力ベクトルであり, $d(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_d}$ は連続微分可能な外乱関数を仮定する。また, $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g_1(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m_u}, g_2(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m_d}$ は Lipschitz 連続な関数とする。さらに g_1 と g_2 には次式の性質を仮定する。

$$\text{span}(g_2) \subseteq \text{span}(g_1) \quad (3.2)$$

この仮定は外乱の影響を制御入力で直接打ち消すことが可能であることを意味し、この性質を持つ外乱項はマッチング条件を満たす外乱（マッチング外乱）と呼ばれる。

このシステムに対し、次の出力関数 $h(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ と状態制約関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する.

$$y_c = h(x, t) \quad (3.3)$$

$$B(x, t) \geq 0 \quad (3.4)$$

これらの関数に対する性質を仮定する前に、外乱に対する関数の相対次数を定義 1 と同様に定義しておく [45].

定義 7 (連続時間システムにおける外乱相対次数). システム (3.1) および 関数 $h(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ を考える. $k < \nu - 1$ のとき点 x_o の近傍に含まれるすべての x および時間 t において $L_{g_2} L_f^k h = 0_{p \times m_d}$ を満たし, $k = \nu - 1$ のときすべての時間 t において $L_{g_2} L_f^k h \neq 0_{p \times m_d}$ を満たすような正の整数 $\nu \leq n$ を点 x_o における関数 $h(x, t)$ の外乱相対次数 (Disturbance Relative Degree : DRD) という.

仮定として出力関数 $h(x, t)$ は IRD $_+$ r_h および DRD r_h , 状態制約を表すスカラー関数 $B(x, t)$ は IRD r_b および DRD r_b を持つとする. これにより $h(x, t), B(x, t)$ の時間微分は次のように表される.

$$\dot{y}_c = L_f h + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ y_c^{(r_h)} &= L_f^{r_h} h + L_{g_1} L_f^{r_h-1} h u + \delta_c + \frac{\partial^{r_h} h}{\partial t^{r_h}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\dot{B} = L_f B + \frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ B^{(r_b)} &= L_f^{r_b} B + L_{g_1} L_f^{r_b-1} B u + \delta_b + \frac{\partial^{r_b} B}{\partial t^{r_b}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

ただし, 表記を簡単にするために $\delta_c := L_{g_2} L_f^{r_h-1} h d(x, t)$, $\delta_b := L_{g_2} L_f^{r_b-1} B d(x, t)$ とした. 上記の仮定によって $y_c(x, t)$ および $B(x, t)$ において外乱の影響は制御入力と同じ階数の時間微分に現れることに注意してほしい. このシステムにおける制御目標は時間 $t \in [0, \infty]$ において状態制約 $B(x, t) \geq 0$ を満たしつつ, 出力関数の安定化 $h(x, t) \rightarrow 0$ を達成することである.

3.2.2 マッチング外乱の影響を考慮した Robust ES-CLF 制約

まずは前述の制御目標のうち, 外乱の影響を考慮して出力関数 $h(x, t)$ の安定化を達成するための条件である Robust ES-CLF 制約を導出する. 基本的な導出手順は式 (2.20) と同じである.

式 (3.6) に対して次の式を満たす新たなベクトル $\mu \in \mathbb{R}^p$ を定義する.

$$\mu := L_f^{r_h} h + L_{g_1} L_f^{r_h-1} h u + \frac{\partial^{r_h} h}{\partial t^{r_h}} \quad (3.9)$$

また, 出力関数 $h(x, t)$ に関する新たなベクトル $\eta \in \mathbb{R}^{pr_h}$ を次のように定義する.

$$\eta := \left[h^T, \left(L_f h + \frac{\partial h}{\partial t} \right)^T, \dots, \left(L_f^{r_h-1} h + \frac{\partial^{r_h-1} h}{\partial t^{r_h-1}} \right)^T \right]^T \quad (3.10)$$

$h(x, t)$ の時間微分の関係から状態を η , 入力を μ とする次の線形システムを定義することができる.

$$\dot{\eta} = F_c \eta + G_c (\mu + \delta_c) \quad (3.11)$$

ただし, 行列 F_c および G_c は式 (2.17) で定義したものと同様である. 式 (3.11) のシステムは式 (2.17) のシステムと異なり, 右辺に外乱項が現れることに注意されたい. このシステムに対し, 連続時間代数 Riccati 方程式 (2.23) を解くことで 2.2.1 節で述べた Lyapunov 関数 $V = \eta^T P \eta$ を同様に定義する. ただし, RES-CLF を考える場合には同様に $V_\epsilon = \eta^T I_\epsilon P I_\epsilon \eta$ を用いられたい. この Lyapunov 関数の時間微分は次のように表される.

$$\dot{V} = L_{F_c \eta} V + L_{G_c} V \mu + \delta'_c \quad (3.12)$$

ただし, $\delta'_c := L_{G_c} V \delta_c$ として定義した. 式 (3.12) のように外乱の影響が Lyapunov 関数の時間微分の中に現れるものの, 外乱の影響を受けない場合と同様に $\dot{V} \leq -\gamma V$ が満たされれば η は式 (2.24) に沿って原点へ収束する. しかし, 実際には外乱 δ'_c の値を直接観測できない場合がほとんどであるため, 何らかの方法で δ'_c の推定値 $\hat{\delta}'_c$ を計算しなければならない. このとき, η を原点に指数収束させるために入力 μ および外乱推定値 $\hat{\delta}'_c$ が満たすべき条件として次の定理が成り立つ.

定理 2 (Robust ES-CLF 制約). 式 (3.11) で表されるシステムおよび Lyapunov 関数 $V = \eta^T P \eta$ を考える. ただし, P は式 (2.23) で表される連続時間代数 Riccati 方程式の解とする. このとき, η を原点に指数安定化するための十分条件は次式で表される.

$$L_{F_c \eta} V + L_{G_c} V \mu + \hat{\delta}'_c \leq -\gamma V, \quad (3.13)$$

$$\tilde{\delta}'_c := \hat{\delta}'_c - \delta'_c \geq 0 \quad (3.14)$$

ただし, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ である.

Proof. 式 (3.13) が満たされているとき, Lyapunov 関数 V の時間微分について次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= L_{F_c \eta} V + L_{G_c} V \mu + \hat{\delta}'_c - \tilde{\delta}'_c \\ &\leq -\gamma V - \tilde{\delta}'_c \end{aligned} \quad (3.15)$$

この微分不等式に対して補題 1 を適用し、さらに式 (3.14) の条件を満たすならば次の関係を得る.

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(0)e^{-\gamma t} - \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \tilde{\delta}'_c(\tau) d\tau \\ &\leq V(0)e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (3.16)$$

これより η のノルム軌道は式 (2.24) を満たし、 η は原点に指数収束する. $\square$

定理 2 によれば、出力関数を零化制御するためには外乱項 δ'_c を正方向に大きく見積もればよく、 $\tilde{\delta}'_c \rightarrow 0$ という条件は要求されていないことに注意されたい. なお、式 (3.13) は μ に関する不等式条件であるが、次式のように u に関する不等式条件として表すことが可能である.

$$L_{F_c\eta}V + L_{G_c}V \left(L_f^{r_h}h + L_{g_1}L_f^{r_h-1}hu + \frac{\partial^{r_h}h}{\partial t^{r_h}} \right) + \hat{\delta}'_c \leq -\gamma V \quad (3.17)$$

以後式 (3.17) および式 (3.14) を Robust ES-CLF 制約と呼ぶ.

3.2.3 マッチング外乱の影響を考慮した Robust MECBF 制約

外乱の影響を考慮して状態制約 $B(x, t) \geq 0$ を $t \in [0, \infty]$ において保証するための条件である Robust ECBF 制約を導出する. 2.2.2 節で定義した ECBF 制約は外乱の影響を解析する上では少々扱いづらい形であるため、まずはノミナルシステムにおける ECBF の表現に若干の修正を加えた Modified ECBF (MECBF) を新たに定義しておく.

定義 8 (Modified Exponential Control Barrier Function). 式 (2.3) で定義されるシステムおよび連続微分可能な関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて定義される式 (2.32) の集合 $\mathcal{C}_0$ を考える. ただし、関数 $B(x, t)$ は IRD r_b を持つとする. さらに設計変数 p_i , ($i = 1, \dots, r_b$) を持つ次の出力関数を考える.

$$\begin{aligned} y_0 &= B(x, t) \\ y_i &= \dot{y}_{i-1} + p_i y_{i-1}, \quad (i = 1, \dots, r_b) \end{aligned} \quad (3.18)$$

このとき、次の不等式を満たすパラメータ p_i が存在し、 $B(x_0, 0) \geq 0$ のとき $t \in [0, \infty]$ において $B(x, t) \geq 0$ を満たすならば関数 $B(x, t)$ を Modified Exponential Control Barrier Function (MECBF) であるという.

$$\sup_u [y_{r_b}(x, u, t)] \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{C}_0 \quad (3.19)$$

定義 8 は ECBF の定義を出力関数 y_i を用いてより直接的な定義に書き換えたものであり、本質的には定義 6 と同じものを表していることに注意されたい. 実際、式 (3.18) の定義に基づいて y_{r_b} を計算すると式 (3.19) が式 (2.37) に等しいことが確認できる. この定義に合わせ、同様に定理 1 も次のような形で書き換えられる.

定理 3 (MECBF 条件). 式 (2.3) で定義されるシステムと $B(x_0, 0) \geq 0$ を満たし, IRD r_b を持つ関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, および式 (3.18) で定義される出力関数 y_i , ($i = 0, \dots, r_b$) を考える. ただし y_i を定義するパラメータ p_i は次式を満たすように選ばれているとする.

$$p_i = \max \left(\epsilon_b, -\frac{\dot{y}_{i-1}(x_0, 0)}{y_{i-1}(x_0, 0)} \right), \quad (i = 1, \dots, r_b - 1), \quad (3.20)$$

$$p_{r_b} = \epsilon_b, \quad (3.21)$$

$\epsilon_b \in \mathbb{R}_+$ は定数である. このとき, 次の集合 $\mathcal{K}_{mecbf}$ 内の入力 u は $B(x, t)$ を MECBF とする.

$$\mathcal{K}_{mecbf} = \{u \mid y_{r_b}(x, u, t) \geq 0\} \quad (3.22)$$

非負線形システムの性質を用いることにより, この定理 3 を [34] とは異なる方法で証明する. 最初に非負線形システムの定義と関連する補題を次に述べる.

定義 9 (連続時間非負線形システム [46]). 次式で表される連続時間線形システムを考える.

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (3.23)$$

$$y = c^T x \quad (3.24)$$

すべての非負初期状態および非負入力に対して状態と出力が常に非負となるとき, このシステムを連続時間非負線形システムという.

補題 3 (連続時間非負線形システムの必要十分条件 [46, Thm. 2]). 式 (3.23), (3.24) で表される線形システムが連続時間非負線形システムとなるための必要十分条件は 行列 A が Metzler 行列であり, かつ行列 b, c^T が非負行列となっていることである. ただし, Metzler 行列とは非対角要素がすべて非負である行列のことを指す.

これらの性質を用いて定理 3 を証明する.

Prof of Theorem 3. 式 (3.18) の出力関数を用いて次のベクトルを定義する.

$$\eta_y := [y_0, y_1, \dots, y_{r_b-1}]^T \quad (3.25)$$

このベクトルより η_y を状態とし y_0 を出力とする次の線形システムが定義できる.

$$\frac{d}{dt}\eta_y = A_y \eta_y(x, t) + B_y y_{r_b}(x, u, t), \quad (3.26)$$

$$y_0 = C_y \eta_y(x, t) \quad (3.27)$$

ただし, 行列 A_y, B_y, C_y は次のように定義される.

$$\begin{aligned} A_y &:= \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -p_{r_b-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_{r_b} \end{bmatrix}, \quad B_y := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_y &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

行列 A_y は非対角要素が 0 あるいは 1 であるため Metzler 行列であり, 行列 B_y, C_y は非負行列である. したがって補題 3 より式 (3.26), (3.27) で表されるシステムは連続時間非負線形システムの必要十分条件を満たす. また, 式 (3.18) で定義される y_i の構造および仮定 $y_0 = B(x_0, 0) \geq 0$ より, 設計パラメータ p_i が式 (3.20) を満たすように選ばれているとき $y_i(x_0, 0) \geq 0$, ($i = 0, \dots, r_b - 1$) であるため, 初期状態 $\eta_y(x_0, 0)$ は非負ベクトルとなる. この事実と式 (3.22) の条件より線形システム (3.26), (3.27) は非負の初期状態と入力を持つことから, 連続時間非負線形システムの性質より状態 $\eta_y(x, t)$ および出力 $y_0(t)$ は常に非負の値をとる. さらに, システムの解軌道に沿った出力 y_0 の軌道について次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} y_0(t) &= C_y \left(e^{A_y t} \eta_y(x_0, 0) + \int_0^t e^{A_y(t-\tau)} B_y y_{r_b}(\tau) d\tau \right) \\ &\geq C_y e^{A_y t} \eta_y(x_0, 0) \end{aligned} \quad (3.29)$$

ここで式 (3.20), (3.21) の条件より行列 A_y は $-\epsilon_b$ 以下の最大固有値を持つ安定行列であるため, $y_0(t)$ の下界 $C_y e^{A_y t} \eta_y(x_0, 0)$ は原点へと指数収束する. $\square$

注意 2. 式 (3.18) で定義される出力関数 y_i , ($i = 0, \dots, r_b$) は次式の形を用いても表すことができる.

$$y_i = \left\{ \prod_{j=0}^i \left(\frac{d}{dt} + p_j \right) \right\} B(x, t), \quad (i = 0, \dots, r_b). \quad (3.30)$$

式 (3.25) で定義されるベクトル η_y は式 (2.38) で表されるベクトル η_b と式 (3.30) を通して一対一の関係があり, 相互に変換が可能である. したがって定理 3 におけるパラメータ p_i ($i = 1, \dots, r_b$) の条件は定理 1 のゲイン K_b の条件に対応している.

この MECBF を拡張することによってマッチング外乱に対する Robust MECBF 制約を考える. 式 (3.7), (3.8) で表された状態制約関数 $B(x, t)$ の時間微分を考えると r_b 階微分に外乱の影響 δ_b が現れるため, 最高次の出力関数 y_{r_b} は次のような形になる.

$$y_{r_b} = \dot{y}_{r_b-1}^n + p_{r_b} y_{r_b-1} + \delta_b \quad (3.31)$$

ただし, $\dot{y}_{r_b-1}^n$ は y_{r_b-1} の時間微分から外乱の影響を除いたノミナル項であり, 形式的には $\dot{y}_{r_b-1}^n = \dot{y}_{r_b-1} - \delta_b$ である. ここで次のような新たな出力関数を考える.

$$y'_i = y_i, \quad (i = 0, \dots, r_b - 1) \quad (3.32)$$

$$y'_{r_b} = \dot{y}_{r_b-1}^n + p_{r_b} y'_{r_b-1} + \hat{\delta}_b \quad (3.33)$$

ただし, $\hat{\delta}_b$ は δ_b の推定値である. これを用いてマッチング外乱を考慮した Robust MECBF を次のように定義する.

定義 10 (マッチング外乱に対する Robust MECBF). 式 (3.1) で定義されるマッチング外乱の影響を受けるシステムおよび連続微分可能な関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて定義される

式 (2.32) の集合 $\mathcal{C}_0$ を考える．ただし，関数 $B(x, t)$ は IRD r_b および DRD r_b を持つとする．さらに設計変数 p_i , ($i = 1, \dots, r_b$) を持つ式 (3.32), (3.33) の出力関数 y'_i , ($i = 0, \dots, r_b$) を考える．このとき，次の不等式を満たすパラメータ p_i および外乱推定値 $\hat{\delta}_b$ が存在し， $B(x_0, 0) \geq 0$ のとき $t \in [0, \infty]$ において $B(x, t) \geq 0$ を満たすならば 関数 $B(x, t)$ を マッチング外乱に対する Robust Modified Exponential Control Barrier Function (Robust MECBF) であるという．

$$\sup_u \left[y'_{r_b}(x, u, \hat{\delta}_b, t) \right] \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{C}_0 \quad (3.34)$$

Robust ES-CLF 制約の導出と同様に外乱推定誤差 $\tilde{\delta}_b := \hat{\delta}_b - \delta_b$ を導入して解析を行うことにより次の定理が導かれる．

定理 4 (マッチング外乱に対する Robust MECBF 制約)．システム (3.1) および $B(x_0, 0) \geq 0$ を満たし，IRD r_b ，DRD r_b を持つ関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ および式 (3.32), (3.33) で定義される出力関数 y'_i ($i = 0, \dots, r_b$) を考える．ただし y'_i を定義するパラメータ p_i は式 (3.20), (3.21) を満たすように選ばれているとする．このとき，次の条件は $B(x, t)$ をマッチング外乱に対する Robust MECBF とする．

$$y'_{r_b}(x, u, \hat{\delta}_b, t) \geq 0 \quad (3.35)$$

$$\tilde{\delta}_b = \hat{\delta}_b - \delta_b \leq 0 \quad (3.36)$$

Proof. 式 (3.33) で定義される y'_{r_b} は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} y'_{r_b} &= \dot{y}_{r_b-1}^n + p_{r_b} y'_{r_b-1} + \hat{\delta} \\ &= \dot{y}'_{r_b-1} + p_{r_b} y'_{r_b-1} + \tilde{\delta} \end{aligned} \quad (3.37)$$

これより $\eta'_y = [y'_0, \dots, y'_{r_b-1}]^T$ なるベクトルを定義すると，この η'_y を状態とし y'_0 を出力とする次の線形システムを定義できる．

$$\frac{d}{dt} \eta'_y = A_y \eta'_y + B_y (y'_{r_b} - \tilde{\delta}_b) \quad (3.38)$$

$$y'_0 = C_y \eta'_y \quad (3.39)$$

ただし， A_y, B_y, C_y は式 (3.28) で定義される行列である．以後，定理 3 の証明と同様に式 (3.35) および式 (3.36) の条件および連続時間非負線形システムの性質を用いることにより定理 4 が直ちに導かれる． $\square$

定理 4 よりマッチング外乱に対する Robust MECBF の場合にも外乱推定値が式 (3.36) を満たしていれば $\tilde{\delta}_b \rightarrow 0$ を満たす必要がないことに注意されたい．以後，式 (3.35), (3.36) をマッチング外乱に対する Robust MECBF 制約と呼ぶ．

3.2.4 外乱推定手法

前節までにマッチング外乱の影響を考慮した Robust ES-CLF 制約および Robust MECBF 制約を導いたが、制御目標を達成するためには式 (3.14), (3.36) を満たす外乱推定値 $\hat{\delta}'_c, \hat{\delta}_b$ を得る必要がある。本節ではこれらの条件を満たす外乱推定値を求めるための 2 つの方法について述べる。

方法 1：最悪ケースを想定した外乱推定

最もシンプルな方法として、システムに加わる外乱項 $d(x, t)$ に既知のノルム上界 d_{max} が存在する場合には最悪ケースの外乱を見積もることでその値を推定値として用いることが可能である [15]。すなわち次の不等式が成立する場合を考える。

$$\|d(x, t)\| \leq d_{max} \quad (3.40)$$

このとき、ES-CLF 制約および MECBF 制約に現れる外乱項 δ'_c, δ_b は定義よりスカラー関数であることからコーシー・シュワルツの不等式を用いて次の関係を得る。

$$-\|L_{G_c} V L_{g_2} L_f^{r_h-1} h\| d_{max} \leq \delta'_c \leq \|L_{G_c} V L_{g_2} L_f^{r_h-1} h\| d_{max} \quad (3.41)$$

$$-\|L_{g_2} L_f^{r_b-1} B\| d_{max} \leq \delta_b \leq \|L_{g_2} L_f^{r_b-1} B\| d_{max} \quad (3.42)$$

これより δ'_c の上界および δ_b の下界が定まるため、次式を満たす外乱推定値 $\hat{\delta}'_c, \hat{\delta}_b$ を用いることで最悪ケースを考慮した外乱推定値が得られる。

$$\hat{\delta}'_c \geq \|L_{G_c} V L_{g_2} L_f^{r_h-1} h(x)\| d_{max} \quad (3.43)$$

$$\hat{\delta}_b \leq -\|L_{g_2} L_f^{r_b-1} B\| d_{max} \quad (3.44)$$

しかし、一般に外乱のノルム上限 d_{max} は既知でない場合が多く、さらには常に最悪ケースの外乱を見積もっているために保守的な制御になってしまうことが問題である。

方法 2：Gaussian Process Regression による外乱モデル同定を用いた外乱推定

方法 2 では実験データからシステムに加わる外乱モデルを GPR で同定し、得られた確率モデルに基づいて外乱推定値を計算する方法をとる。この場合には外乱をガウス分布に従う確率変数モデルとしてみなすことが可能であるため、平均値および分散情報に基づくロバストな外乱推定を行うことができる。

まずはデータから外乱項を推定するため、システム (3.1) における外乱項 $g_2(x)d(x, t)$ をまとめて $d' = g_2(x)d(x, t)$ と表記し、次のようにシステムを書きなおしておく。

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u + d'(x, t) \quad (3.45)$$

ここではこの $d'(x, t)$ のモデルを同定していくことにする。なお、この場合には式 (3.1) における $g_2(x)$ を単位行列として ES-CLF 制約や MECBF 制約を設計すればよい。外乱項

$d'(x, t)$ は状態 x および時間 t の関数であることを仮定しているため、次のような確率モデルを考える.

$$d' \sim \mathcal{N}(\mu_{d'}(x, t), \Sigma_{d'}(x, t)) \quad (3.46)$$

このモデルを GPR によって同定するためには入力 of 学習データとして状態および時間のデータ, 出力の学習データとして外乱項 d' のデータが必要である. まずは適当なコントローラの下でシステム (3.1) を動かし, サンプリング周期 Δt において状態, 入力, 時間のデータ $x[k], u[k], t[k], (k = 0, \dots, N)$ を取得する. 外乱のデータに関してはシステム (3.45) の関係より, $\dot{x}$ の推定値 $\dot{x}_{est}$ および $x[k], u[k]$ から近似的に計算する.

$$d'[k] = \dot{x}[k] - (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]) \quad (3.47)$$

$$\approx \dot{x}_{est}[k] - (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]) \quad (3.48)$$

この近似の精度は微分値 $\dot{x}_{est}$ の精度に依存するため, 高次の差分近似等を利用して計算するのが望ましい. 本論文では $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ の精度を持つ 2 次中央差分近似によってこの $\dot{x}_{est}$ を計算することにする.

$$\dot{x}_{est}[k] = \frac{x[k+1] - x[k-1]}{2\Delta t} \quad (3.49)$$

このように得られたデータ $x[k], t[k], d'[k], (k = 0, \dots, N)$ から式 (3.46) のモデルを同定する.

外乱 d' のモデルを同定することにより, 現在の状態 x, t から対応する外乱の推定平均値 $\mu_{d'}$ および共分散行列 $\Sigma_{d'}$ を計算することができる. d' はガウス分布に従う確率変数としてモデル化されているため, 補題 2 を用いることで ES-CLF 制約および MECBF 制約に影響する外乱項 δ'_c, δ_b も次式のようなガウス分布に従う確率変数として表すことが可能である.

$$\delta'_c \sim \mathcal{N}(\mu_{\delta'_c}, \sigma_{\delta'_c}^2) \quad (3.50)$$

$$\mu_{\delta'_c} = L_{G_c} V L_{g_2} L_f^{r_h-1} h \mu_{d'} \quad (3.51)$$

$$\sigma_{\delta'_c}^2 = (L_{G_c} V L_{g_2} L_f^{r_h-1} h) \Sigma_{d'} (L_{G_c} V L_{g_2} L_f^{r_h-1} h)^T \quad (3.52)$$

$$\delta_b \sim \mathcal{N}(\mu_{\delta_b}, \sigma_{\delta_b}^2) \quad (3.53)$$

$$\mu_{\delta_b} = L_{g_2} L_f^{r_b-1} B \mu_{d'} \quad (3.54)$$

$$\sigma_{\delta_b}^2 = (L_{g_2} L_f^{r_b-1} B) \Sigma_{d'} (L_{g_2} L_f^{r_b-1} B)^T \quad (3.55)$$

ここで信頼区間パラメータ $k_d \in \mathbb{R}_+$ を導入することで δ'_c, δ_b の存在領域を次式のように有限区間として近似することができる.

$$\mu_{\delta'_c} - k_d \sigma_{\delta'_c} \leq \delta'_c \leq \mu_{\delta'_c} + k_d \sigma_{\delta'_c} \quad (3.56)$$

$$\mu_{\delta_b} - k_d \sigma_{\delta_b} \leq \delta_b \leq \mu_{\delta_b} + k_d \sigma_{\delta_b} \quad (3.57)$$

例えば $k_d = 2$ とする場合, 式 (3.56), (3.57) の表す領域は 95% 信頼区間または 2σ 区間として知られている. これにより δ'_c, δ_b の上界と下界が近似的に得られるため, 次式を満たす

Table 3.1: Robust CLF-CBF-QP Controller for Matching Disturbances

Robust CLF-CBF-QP for Matching Disturbances

$$\begin{aligned}
u_* = \operatorname{argmin}_{u, \hat{\delta}'_c, \hat{\delta}_b, s_r} & \frac{1}{2} \mu(x, u, t)^T W_{u0} \mu(x, u, t) + \frac{1}{2} W_{u1} s_r^2 + \frac{1}{2} W_{u2} \hat{\delta}'_c{}^2 + \frac{1}{2} W_{u3} \hat{\delta}_b^2 & (3.60) \\
\text{s.t. } & L_{F_c \eta} V + L_{G_c} V \left(L_f^{r_h} h + L_{g_1} L_f^{r_h-1} h u + \frac{\partial^{r_h} h}{\partial t^{r_h}} \right) + \hat{\delta}'_c \leq -\gamma V + s_r, \\
& \hat{\delta}'_c \geq \|L_{G_c} V L_{g_2} L_f^{r_h-1} h\| d_{max} \quad \text{or} \quad \hat{\delta}'_c \geq \mu_{\delta'_c} + k_d \sigma_{\delta'_c}, & (\text{Robust ES-CLF constraint}) \\
& y'_{r_b}(x, u, \hat{\delta}_b, t) \geq 0, \\
& \hat{\delta}_b \leq -\|L_{g_2} L_f^{r_b-1} B\| d_{max} \quad \text{or} \quad \hat{\delta}_b \leq \mu_{\delta_b} - k_d \sigma_{\delta_b}, & (\text{Robust MECBF constraint}) \\
& A_c u \leq B_c & (\text{Other constraints})
\end{aligned}$$

外乱推定値 $\hat{\delta}'_c$, $\hat{\delta}_b$ を用いることで推定条件 (3.14), (3.36) をロバストに満たすことが可能である。

$$\hat{\delta}'_c \geq \mu_{\delta'_c} + k_d \sigma_{\delta'_c} \quad (3.58)$$

$$\hat{\delta}_b \leq \mu_{\delta_b} - k_d \sigma_{\delta_b} \quad (3.59)$$

注意 3. GPR モデルにおける出力の予測分散の定義 (2.53) より、現在の状態 x, t が GPR を同定した際に用いたトレーニングデータに対して大きな距離を持つ場合には分散の値が大きくなり、逆にトレーニングデータに対する距離が小さい場合には分散が小さくなる。そのため、式 (3.58), (3.59) は同定された GPR モデルの予測の不確かさを反映したロバストな推定条件となっている。

3.2.5 マッチング外乱に対する Robust CLF-CBF-QP

3.2.4 節までの内容より、ロバストな外乱推定値を考慮して変形した Robust ES-CLF 制約および Robust MECBF 制約を用いることによってマッチング外乱の影響を考慮した Robust CLF-CBF-QP コントローラを構成することができる。これは表 3.1 に示すような二次計画問題として定式化される。ただし、 W_{ui} , ($i = 0, \dots, 3$) は重みパラメータである。

数値例 1 : 3DoF マニピュレータのエンドエフェクタ位置制御

この Robust CLF-CBF-QP の有効性を検証するため、図 3.1 に示す 3 自由度マニピュレータのエンドエフェクタ位置制御を対象にシミュレーションを行う。このマニピュレータの状

状態方程式は次式で定義される．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M(q)^{-1}H(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M(q)^{-1} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ M(q)^{-1} \end{bmatrix} d(x, t) \\ &= f(x) + g_1(x)u + g_2(x)d(x, t) \end{aligned} \quad (3.61)$$

ただし, $q = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$, $x = [q^T, \dot{q}^T]^T$ である．また, $M(q)$ は慣性行列, $H(q, \dot{q})$ は中心力・コリオリ力・重力項を含む非線形項である．入力 u としては各関節にトルクを印加可能であるとする．外乱 $d(x, t)$ としてはモデル化されていない各関節の粘性抵抗の影響とトルク外乱が合わさった次式の形を仮定する．

$$d(x, t) = -D_{rev}\dot{q} + F_{ext}(t) \quad (3.62)$$

ただし, $D_{rev} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は粘性係数を並べた対角行列であり, $F_{ext}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ は次式で定義されるトルク外乱とする．

$$F_{ext}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (a_{ext} + b_{ext} \sin t) \quad (3.63)$$

$a_{ext}, b_{ext} \in \mathbb{R}$ は定数パラメータである．なお, マニピュレータのベースはデカルト座標で定義されたワールド座標系 Σ_W の原点 $[0, 0, 0]^T$ に固定されているとする．

このマニピュレータモデルにおける制御目標はマニピュレータのエンドエフェクタ位置を制御し, 障害物を回避しつつ目標軌道へ追従させることである．障害物として座標系 Σ_W において中心 $P_o = [0.0, -0.30, 0.20]^T$, 半径 $r_o = 0.20$ の球状障害物が配置されていることを想定する．目標軌道は座標系 Σ_W において初期点 $P_s = [-0.70, 0.0, 0.0]^T$ と終端点 $P_d = [0.50, -0.50, 0.50]^T$ を結ぶ直線軌道とする．時間 $T = 6$ で P_s から P_d を移動するような軌道とするため, 3次多項式を用いて目標軌道を次のように定義した．

$$l(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (3.64)$$

$$h_d(t) = \begin{cases} P_s + (P_d - P_s)l(t), & t \leq T \\ P_d, & t > T \end{cases} \quad (3.65)$$

$$\dot{h}_d(t) = \begin{cases} (P_d - P_s)\dot{l}(t), & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (3.66)$$

$$\ddot{h}_d(t) = \begin{cases} (P_d - P_s)\ddot{l}(t), & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (3.67)$$

ただし, $a_i \in \mathbb{R}, (i = 0, \dots, 3)$ は曲線パラメータであり, $h_d(0) = P_s$, $h_d(T) = P_d$ および $\dot{h}_d(0) = \dot{h}_d(T) = 0$ という境界条件から求めることができる．ここでマニピュレータのエンドエフェクタ位置を表す関数を $P_t(x) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ とすると, 制御出力関数 $h(x)$ および状態制約 $B(x)$ を次のように定義できる．

$$h(x, t) = P_t(x) - h_d(t) \quad (3.68)$$

$$B(x) = (P_t(x) - P_o)^T (P_t(x) - P_o) - r_o^2 \geq 0 \quad (3.69)$$

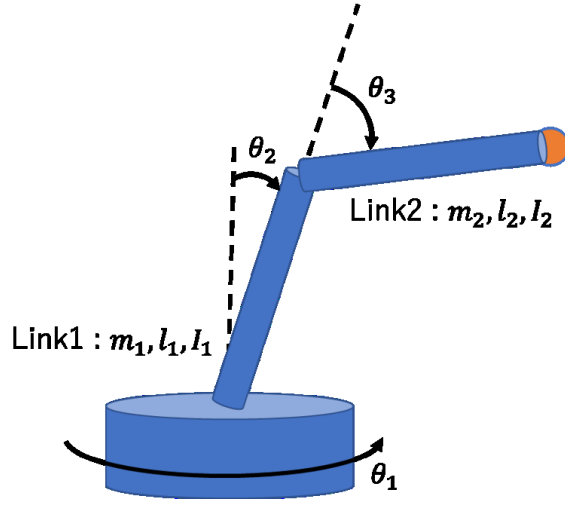


Fig 3.1: 3DoF Manipulator Model

$h(x, t)$ は IRD_+ および DRD が 2 の関数であり, $B(x, t)$ も IRD および DRD が 2 の関数であるため, 2 階の時間微分を取ることで Robust RES-CLF/MECBF 制約を構築することができる.

外乱 δ'_c, δ_b の推定については外乱ノルムの上界が未知であるとして前述の方法 2 を用いることにする. 制御パラメータおよび設計パラメータを表 3.2 に示す. GPR による外乱モデルの同定に関しては, 仮定した外乱が状態依存の外乱と時間を引数とする外乱が合わさったものであることから式 (3.46) の形のモデルを同定する. 前述のとおり, 状態 x および入力 u , 時間 t のデータを取得し, 外乱 d の値をダイナミクスの式関係から近似的に求めることで学習用の入出力トレーニングデータを作成する. 今回のケースにおいては状態方程式の下段 $\ddot{q}$ の部分を抜き出し, 外乱 d について整理すると次の関係が得られる.

$$d = M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) - u \quad (3.70)$$

データ $q[k], \dot{q}[k]$ がサンプリング周期 Δt で得られるとすると, $\ddot{q}$ を中央差分近似を用いて近似することにより外乱 d はデータから次式で計算することができる.

$$d[k] = M(q[k]) \frac{\dot{q}[k+1] - \dot{q}[k-1]}{2\Delta t} + H(q[k], \dot{q}[k]) - u[k] \quad (3.71)$$

なお, ここでは目標軌道の P_s に対応した状態に対して $\pm 10\%$ の範囲でランダムに N_s 個の初期状態を生成し, 次式で表されるノミナルコントローラ u_n を用いて制御を行うことによってデータ $q[k], \dot{q}[k], u[k], t[k]$ を取得する.

$$u_n = L_{g_1} L_f h^{-1} \left(-L_f^2 h - \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + v_n \right) \quad (3.72)$$

$$v_n = -K_1 h - K_2 \dot{h} \quad (3.73)$$

得られたデータから計算される $d[k]$ と併せてデータセットを作成した後, さらに同定後のモデルの次元を削減するためにデータセットから N_d 個のデータを抜き出したものを学習用

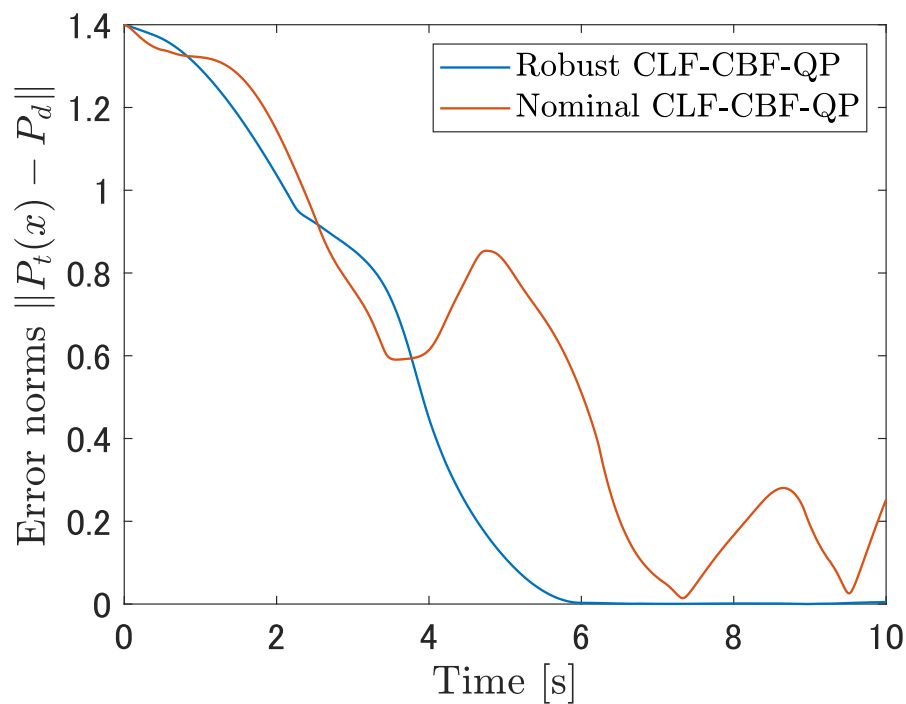
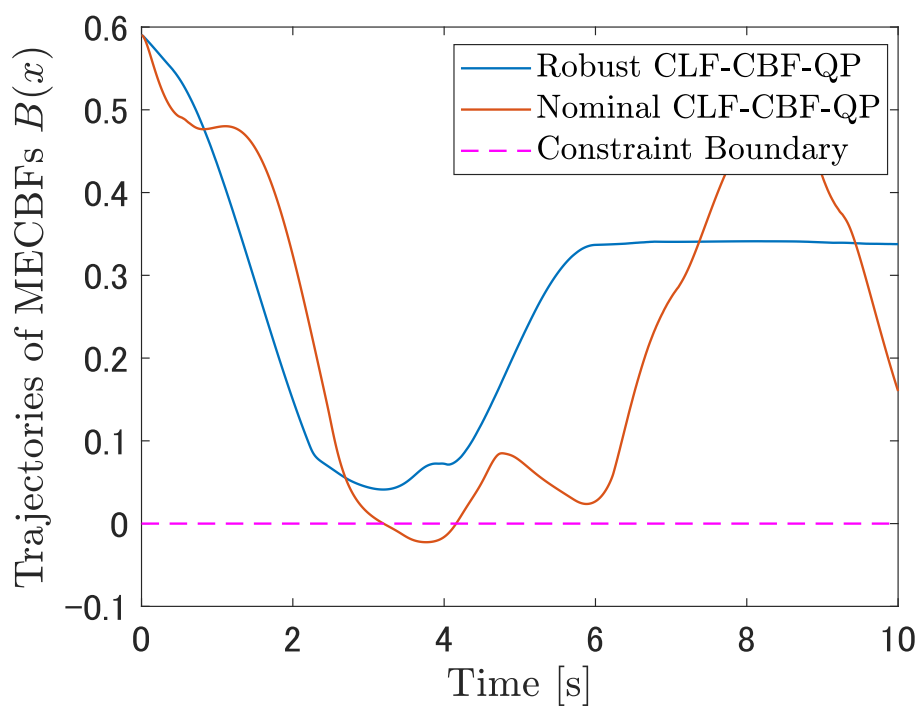
Table 3.2: Model & Control Parameters in the Numerical Example 1

$m_1 = 1.0$	$l_1 = 5.0 \times 10^{-1}$	$I_{1x} = I_{1y} = 2.1 \times 10^{-2}$	$I_{1z} = 1.1 \times 10^{-2}$
$m_2 = 1.0$	$l_2 = 5.0 \times 10^{-1}$	$I_{2x} = I_{2y} = 2.1 \times 10^{-2}$	$I_{2z} = 1.1 \times 10^{-2}$
$D_{rev} = 0.5I_{3 \times 3}$	$a_{ext} = 1.0$	$b_{ext} = -2.0$	$a_0 = 0.0$
$a_1 = 0.0$	$a_2 = 8.3 \times 10^{-2}$	$a_3 = -9.3 \times 10^{-3}$	$k_d = 3.0$
$K_1 = 25I_{3 \times 3}$	$K_2 = 10I_{3 \times 3}$	$W_{u0} = 1.0$	$W_{u1} = 1.0 \times 10^3$
$W_{u2} = 10$	$W_{u3} = 10$	$\gamma = 5.0$	$\epsilon = 0.5$
$p_1 = 10$	$p_2 = 10$	$Q = I_{6 \times 6}$	$N_s = 10$
$N_d = 500$			

の入出力トレーニングデータとして利用し，GPRによって外乱モデルを同定する．

この数値例では制御性能の検証のため，提案手法である Robust CLF-CBF-QP を用いた場合と外乱補償を行わない Nominal CLF-CBF-QP を用いた場合の結果を比較する．それぞれのコントローラは $\Delta t = 1\text{ms}$ で離散的に制御入力を計算することとし，さらに制御入力に対して $\|u_i\| \leq 10$, ($i = 1, 2, 3$) として制約条件を課す．それぞれの場合におけるエンドエフェクタの目標値の誤差と MECBF の時間変化を図 3.2, 図 3.3 に示す．Nominal CLF-CBF-QP の場合にはエンドエフェクタ位置を目標値へ制御することができておらず，さらに 4 秒前後で MECBF $B(x)$ が負の値をとり状態制約を違反，すなわちエンドエフェクタが球状障害物の内部へ侵入してしまっている．一方で提案手法の場合には設計した目標軌道に沿って制御開始から $T = 6$ 秒で目標位置 P_d へ到達することができており，MECBF $B(x)$ も非負の値を取り続けていることから外乱を考慮した制御を実現できていることが分かる．図 3.4 は提案手法を利用した場合の RES-CLF 制約および MECBF 制約に影響する外乱項 δ'_c, δ_b の推定誤差を表したものである．式 (3.14) および式 (3.36) が満たすべき外乱推定条件であるが，この結果より今回のケースではこれらの推定条件をほぼすべての時刻で満たすことができおり有効な外乱推定を行うことができていると言える．これらの結果より提案手法である Robust CLF-CBF-QP によって従来の CLF-CBF-QP の制御性能を向上させ，外乱を考慮した制御が行えていることが確認できた．

最後にそれぞれの場合における制御入力の時間変化を図 3.5 に示す．どちらのコントローラにおいても制御入力が振動し，制御入力の上限である 10Nm に張り付いてしまう時刻が存在する．これは RES-CLF 制約における入力の係数行列が CLF V_e を含んでいるために， $V_e = 0$ 近傍で制約を満たすために必要な入力の値が大きくなってしまいうことが理由と考えられる．また，これに加えて制御入力を離散的に計算していることからチャタリング現象が生じ，制御入力が振動してしまう．これらの現象を緩和するためには元のシステムの制御入力に対し，その一階の時間微分を新たな制御入力としてコントローラを設計する方法が考えられる．この場合には最適化によって計算される値が振動的であっても実際の入力はそれを一度積分したものとなるため，滑らかな制御入力を得ることができる．ただし，入力の微分を新たな入力として考える際には出力関数および状態制約関数の IRD, DRD が変わってしま

Fig 3.2: Error Norms of End Effector Positions $\|P_t(x) - P_d\|$ Fig 3.3: Trajectories of MECBFs $B(x)$

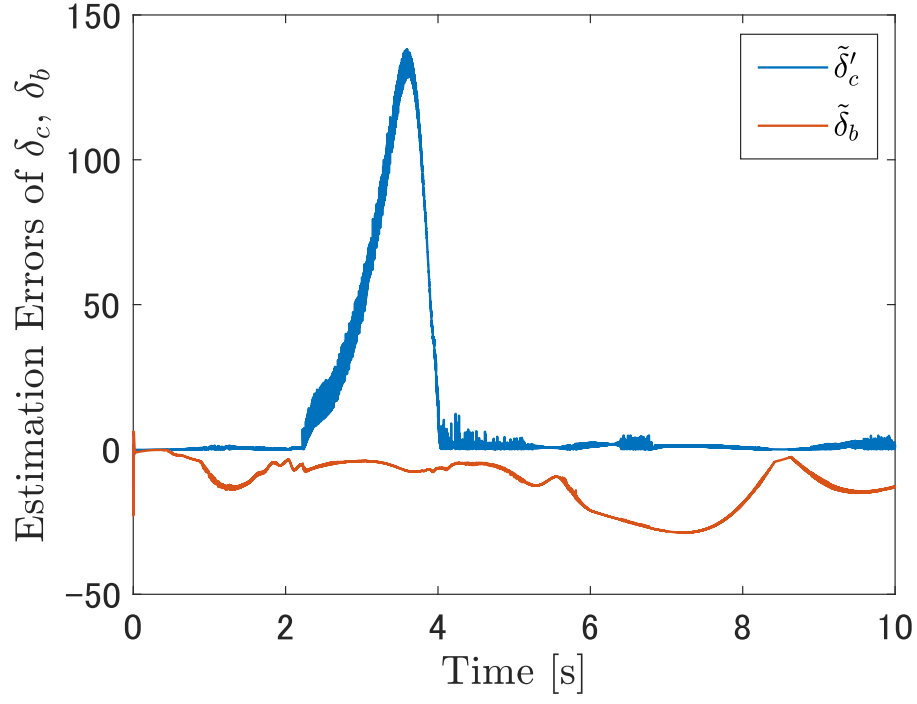


Fig 3.4: Estimation Errors of δ'_c, δ_b

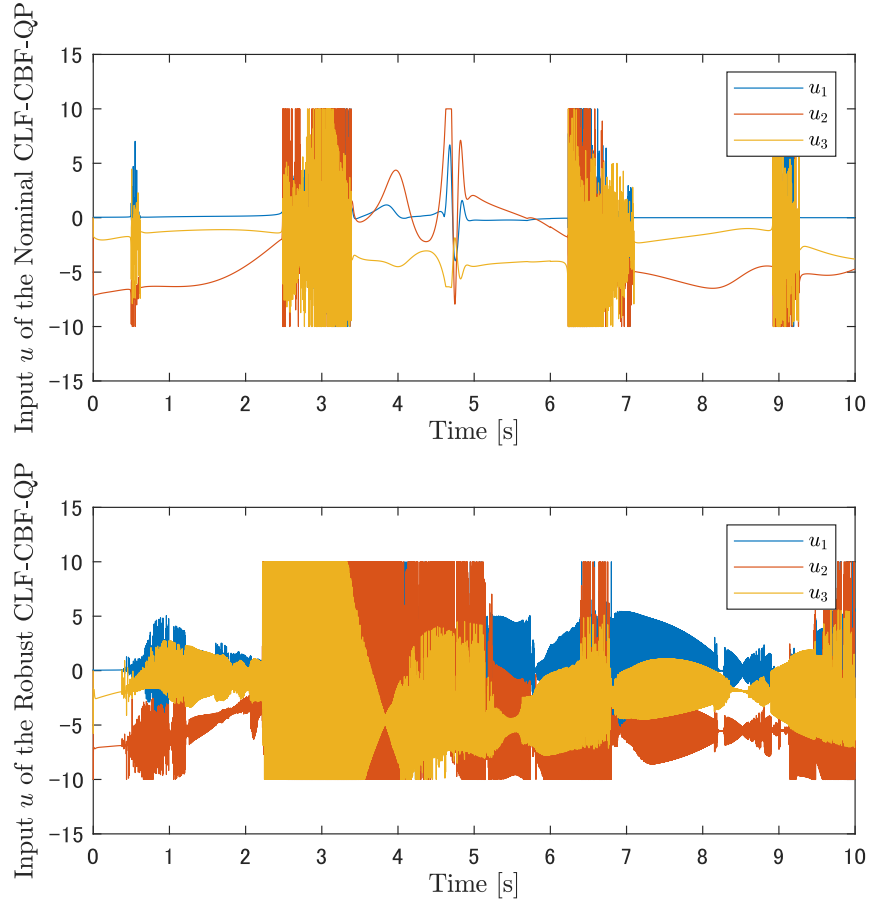


Fig 3.5: Control Input of Two Controllers

うことに注意されたい．こうした場合におけるコントローラ設計については 4 章で述べる．

3.2.6 確率オブザーバの利用と状態・外乱推定誤差を考慮した Robust CLF-CBF-QP

前節では外乱モデルの同定とそれを利用した制御器設計について述べたが，外乱モデルを同定するためには全状態が誤差なく観測できる必要があった．しかし，実際には全状態を直接観測できることは少ない上に観測信号にノイズが加わる場合がほとんどであるため，実用上はカルマンフィルタ等の確率オブザーバを利用することによってシステムの状態を推定する必要がある．本節では確率ノイズを含む非線形システムに対する状態推定手法の一つである Unscented Kalman Filter (UKF) [23] を用いて状態・外乱推定を行う Robust CLF-CBF-QP を提案する．特に UKF から得られる外乱推定値の誤差だけでなく，状態推定値の誤差の影響も考慮したロバストな最適化問題を構成する方法について述べる．

本節では式 (3.1) のダイナミクスに加えて次の観測方程式を仮定する．

$$y_o = h_o(x) + w \quad (3.74)$$

ただし， $w \in \mathbb{R}^{n_o}$ は $\mathcal{N}(0, \Sigma_w)$ の分布に従うガウスノイズとし， $h_o(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_o}$ は観測信号を規定する関数である．この場合，前節のように直接観測信号を用いて外乱 d の値を推定することは一般にできない．そこで UKF を用いることによって外乱と状態の値を観測信号から推定することを考える．UKF は非線形システムに対して Unscented Transformation (UT) を用いることによって推定する状態をガウス分布に従う確率変数とみなし，その推定値平均値と共分散の情報を計算する手法である．標準的な UKF は離散時間システムに対して構成されるものであるため，まずはシステム (3.1)，(3.74) を前進オイラー法によって次のような離散時間システムに近似する．

$$x[k+1] = x[k] + (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k] + g_2(x[k])d[k]) \Delta t \quad (3.75)$$

$$y_o[k] = h_o(x[k]) + w[k] \quad (3.76)$$

ただし， $\Delta t \in \mathbb{R}_+$ はサンプリング周期を表す．ここで外乱 d をオブザーバの枠組みで推定するために拡大状態 $x_a[k] = [x[k]^T, d[k]^T, \dot{d}[k]^T]^T$ を定義し，次の拡大システムを考える．

$$x_a[k+1] = x_a[k] + F_{da}(x_a[k], u[k]) + v[k] \quad (3.77)$$

$$y_o[k] = h_o(x[k]) + w[k] \quad (3.78)$$

ただし， $v[k]$ は $\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_v)$ の分布に従うガウスノイズとし，

$$F_{da}(x_a[k], u[k]) := \begin{bmatrix} (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k] + g_2(x[k])d[k]) \Delta t \\ \dot{d}[k] \Delta t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

とする。拡大システムを定義するうえで外乱 d のモデルは未知であるが、ここでは二次積分系にガウスノイズが加わるような形を仮定する。このモデルを仮定することにより外乱の動きは UKF を通して時間に対する 2 次の多項式として推定される。

式 (3.77), (3.78) で表される拡大システムに対して UKF を設計する。UKF の詳細な性質については文献 [23], [47] を参照していただくとし、ここでは推定アルゴリズムの概要のみを述べる。拡大システムの状態 $x_a[k]$ の推定平均値 $\mu_{x_a}[k]$ および 共分散行列 $\Sigma_{x_a}[k]$ を計算する UKF のアルゴリズムは次の通り。

Algorithms of Unscented Kalman Filter (UKF)

STEP 0 状態の初期化・生起確率の設定

Define initial values and probability weights : $\mu_{x_a}(0|0)$, $\Sigma_{x_a}(0|0)$

$$W_0 = \frac{\kappa}{n_a + \kappa} \quad (3.80)$$

$$W_i = \frac{1}{2(n_a + \kappa)}, \quad (i = 1, \dots, n_a) \quad (3.81)$$

$$W_{i+n_a} = W_i, \quad (i = 1, \dots, n_a) \quad (3.82)$$

STEP 1 シグマポイントの決定

$$\chi_0(k|k) = \mu_{x_a}(k|k), \quad (3.83)$$

$$\chi_i(k|k) = \mu_{x_a}(k|k) + \sqrt{(n_a + \kappa)\Sigma_{x_a}(k|k)}, \quad (i = 1, \dots, n_a) \quad (3.84)$$

$$\chi_{i+n_a}(k|k) = \mu_{x_a}(k|k) - \sqrt{(n_a + \kappa)\Sigma_{x_a}(k|k)}, \quad (i = 1, \dots, n_a) \quad (3.85)$$

STEP 2 状態の平均値と共分散行列の計算

$$\chi_i(k+1|k) = \chi_i(k|k) + F_{da}(\chi_i(k|k), u(k), d(k)), \quad (i = 0, \dots, 2n_a) \quad (3.86)$$

$$\mu_{x_a}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i \chi_i(k+1|k) \quad (3.87)$$

$$\Sigma_{x_a}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i \{\chi_i(k+1|k) - \mu_{x_a}(k+1|k)\} \{\chi_i(k+1|k) - \mu_{x_a}(k+1|k)\}^T + \Sigma_v \quad (3.88)$$

STEP 3 出力の平均値と共分散行列の計算

$$\zeta_i(k+1|k) = h_o(\chi_i(k+1|k)), \quad (i = 0, \dots, 2n_a) \quad (3.89)$$

$$\mu_{y_o}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i \zeta_i(k+1|k) \quad (3.90)$$

$$\Sigma_{yy}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i \{\zeta_i(k+1|k) - \mu_{y_o}(k+1|k)\} \{\zeta_i(k+1|k) - \mu_{y_o}(k+1|k)\}^T \quad (3.91)$$

STEP 4 予測誤差の共分散および相互分散行列の計算

$$\Sigma_{\nu\nu}(k+1|k) = \Sigma_w + \Sigma_{yy}(k+1|k) \quad (3.92)$$

$$\Sigma_{x_a\nu}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i \{ \chi_i(k+1|k) - \mu_{x_a}(k+1|k) \} \{ \zeta_i(k+1|k) - \mu_{y_o}(k+1|k) \}^T \quad (3.93)$$

STEP 5 予測共分散行列および予測状態の更新

$$K_{kal}(k+1) = \Sigma_{x_a\nu}(k+1|k) \Sigma_{\nu\nu}^{-1}(k+1|k) \quad (3.94)$$

$$\nu(k+1) = y_o(k+1) - \mu_{y_o}(k+1|k) \quad (3.95)$$

$$\mu_{x_a}(k+1|k+1) = \mu_{x_a}(k+1|k) + K_{kal}(k+1) \nu(k+1) \quad (3.96)$$

$$\Sigma_{x_a}(k+1|k+1) = \Sigma_{x_a}(k+1|k) - K_{kal}(k+1) \Sigma_{\nu\nu}(k+1|k) K_{kal}^T(k+1) \quad (3.97)$$

$$\mu_{x_a}[k+1] = \mu_{x_a}(k+1|k+1) \quad (3.98)$$

$$\Sigma_{x_a}[k+1] = \Sigma_{x_a}(k+1|k+1) \quad (3.99)$$

ただし、 n_a は拡大システムの状態 x_a の次数、 W_i , ($i = 0, \dots, 2n_a$) は離散の生起確率であり、 κ は高次の統計モーメントを近似するための設計パラメータである。これらの STEP1 から STEP5 を各制御周期ごとに実行する事によって $x_a[k] \sim \mathcal{N}(\mu_{x_a}[k], \Sigma_{x_a}[k])$ を推定し、 $x[k]$, $d[k]$ の推定値を得ることができる。

注意 4. UKF による推定を用いる場合においても外乱推定値の平均値と分散の情報が得られる。そのため、UKF を外乱オブザーバとして扱う場合にも、状態 x については精度よく値を推定できるという仮定の下で式 (3.58), (3.59) を利用した外乱の確率分布に基づく表 3.1 の Robust CLF-CBF-QP を構築できる。ただし、この場合は Robust ES-CLF 制約, Robust MECBF 制約を計算するための状態 x の値は UKF によって得られる推定平均値 μ_x を用いることとする。

上述のように UKF により状態 x と外乱項 d をガウス分布に基づく確率変数として推定することができる。しかし x, d が確率変数であるとき、式 (3.17) の Robust ES-CLF 制約内の関数 $L_f^{r_h} h(x, t)$ および式 (3.35) の Robust MECBF 制約内の関数 $L_f^{r_b} B(x, t)$ 等も確率分布を持つため、もはや通常の線形不等式制約として扱うことができない。特に状態 x はガウス分布に従う確率変数とみなしているが、その非線形変換である $L_f^{r_h} h(x, t)$ 等は一般にガウス分布に従わないことに注意されたい。このようにガウス分布によらない確率変数を考慮した Robust CLF-CBF-QP を構築する方法として機会制約に基づく手法を提案する。

まずは外乱を考慮した ES-CLF 制約および MECBF 制約を新たに機会制約とよばれる次式の条件に変換する。

$$\text{Prob} \{ F_{c1}(x, d, t) + F_{c2}(x, t) u_a > 0 \} \leq \epsilon_p, \quad (3.100)$$

$$\text{Prob} \{ F_{b1}(x, d, t) + F_{b2}(x, t) u_a > 0 \} \leq \epsilon_p, \quad (3.101)$$

Table 3.3: Robust CLF-CBF-QP Controller with Chance Constraints

Robust CLF-CBF-QP with Chance Constraints

$$\begin{aligned}
u_* &= \underset{u, s_r}{\operatorname{argmin}} \quad \frac{1}{2} \mu(\mu_x, u, t)^T \mu(\mu_x, u, t) + \frac{1}{2} W_{u0} s_r^2 & (3.106) \\
\text{s.t. } & F_{c1}(x_i, d_i, t) + F_{c2}(x_i, t) u_a \leq 0, \quad (i = 1, \dots, N_c), & (\text{Robust ES-CLF constraint}) \\
& F_{b1}(x_i, d_i, t) + F_{b2}(x_i, t) u_a \leq 0, \quad (i = 1, \dots, N_c), & (\text{Robust MECBF constraint}) \\
& N_c = \operatorname{round} \left(\frac{2}{\epsilon_p} \ln \frac{1}{\beta_p} + 2(m_u + 1) + \frac{2(m_u + 1)}{\epsilon_p} \ln \frac{2}{\epsilon_p} \right) \\
& A_c u \leq B_c & (\text{Other constraints})
\end{aligned}$$

ただし, $u_a = [u^T, s_r]^T \in \mathbb{R}^{m_u+1}$ は制御入力と ES-CLF 制約におけるスラック変数をまとめたベクトルであり, $\epsilon_p \in (0, 1)$ は確率を表すパラメータである. また, $F_{c1}, F_{c2}, F_{b1}, F_{b2}$ は次のそれぞれの不等式を u_a に関する線形不等式として簡潔に表した場合の項と係数行列である.

$$L_{F_{c\eta}} V + L_{G_c} V \left(L_f^{r_h} h + L_{g1} L_f^{r_h-1} h u + \frac{\partial^{r_h} h}{\partial t^{r_h}} \right) + \delta'_c \leq -\gamma V + s_r \quad (3.102)$$

$$y'_{rb}(x, u, \delta_b, t) \geq 0 \quad (3.103)$$

すなわち式 (3.100), (3.101) は式 (3.102) および式 (3.103) の不等式制約を違反する確率が ϵ_p 以下になるという制約条件を表しており, $\epsilon_p \rightarrow 0$ の場合には式 (3.102) および式 (3.103) の制約に一致する. ここで式 (3.100), (3.101) の機会制約を満たすために次の不等式を新たな制約条件として与えることにする.

$$F_{c1}(x_i, d_i, t) + F_{c2}(x_i, t) u_a \leq 0, \quad (i = 1, \dots, N_c) \quad (3.104)$$

$$F_{b1}(x_i, d_i, t) + F_{b2}(x_i, t) u_a \leq 0, \quad (i = 1, \dots, N_c) \quad (3.105)$$

ただし, x_i, d_i は x, d の分布に基づいて N_c 回サンプリングされた内の i 番目の値を表す. 直感的には N_c の値が機会制約の確率パラメータ ϵ_p に対応しており, $N_c \rightarrow \infty$ となるとき, $\epsilon_p \rightarrow 0$ となることが推測できるであろう. この制約条件と機会制約の関係については次の補題が知られている [48], [49].

補題 4 (Chance constraints [48, Thm. 1]). シナリオ計画問題と呼ばれる次の凸計画問題を考える.

$$\min_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x, \xi_i) \leq 0, \quad (i = 1, \dots, N_c) \quad (3.107)$$

ただし, $\xi \in \Delta_\xi \subseteq \mathbb{R}^l$ は確率変数であり, ξ_i は ξ の確率分布に基づいてランダムにサンプリングされた ξ の値とする. また, 関数 $f(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数であり, 関数 $g(x, \xi) : \mathcal{X} \times \Delta_\xi \rightarrow \mathbb{R}$

はすべての $\xi \in \Delta_\xi$ に対して x の凸関数となることを仮定する．この問題に対し，サンプリング数 N_c をパラメータ $\epsilon_p \in (0, 1)$, $\beta_p \in (0, 1)$ を用いて次式を満たすように決定したとする．

$$N_c \geq \frac{2}{\epsilon_p} \ln \frac{1}{\beta_p} + 2n + \frac{2n}{\epsilon_p} \ln \frac{2}{\epsilon_p} \quad (3.108)$$

このとき，シナリオ計画問題 (3.107) の解 x_o は確率 $1 - \beta_p$ 以上で次の機会制約を満たす．

$$\text{Prob}\{g(x_o, \xi) > 0\} \leq \epsilon_p \quad (3.109)$$

この補題より，式 (3.104), (3.105) を生成するにあたり機会制約 (3.100), (3.101) を満たすために必要なサンプル数 N_c は設計パラメータ ϵ_p, β_p に基づいて次式のように決めればよいことがわかる．

$$N_c = \text{round} \left(\frac{2}{\epsilon_p} \ln \frac{1}{\beta_p} + 2(m_u + 1) + \frac{2(m_u + 1)}{\epsilon_p} \ln \frac{2}{\epsilon_p} \right) \quad (3.110)$$

これより機会制約を利用して状態・外乱推定誤差の影響を考慮した Robust CLF-CBF-QP は表 3.3 のように定式化される．

注意 5. 補題 4 は ξ の確率分布によらず成り立つ事に注意する．また，不等式を表す関数 $g(x, \xi)$ においても引数 x に対する凸関数であることのみが条件となっているため，式 (3.104), (3.105) における関数 F_{c1} , F_{c2} , F_{b1} , F_{b2} の形状はサンプリング数 N_c の条件に影響を及ぼさない．

数値例 2：観測可能な状態の制限と観測ノイズの影響を考慮した 3DoF マニピュレータのエンドエフェクタ位置制御

提案手法の有効性を検証するため，前節で利用した 3DoF マニピュレータのエンドエフェクタ位置制御問題を再び利用してシミュレーションを行う．観測方程式を含め，マニピュレータのシステムは次のように表される．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M(q)^{-1}H(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M(q)^{-1} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ M(q)^{-1} \end{bmatrix} d(x, t) \\ &= f(x) + g_1(x)u + g_2(x)d(x, t) \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$y_o = C_o x + w \quad (3.112)$$

式中の変数や行列は式 (3.61) と同じものを仮定するが，観測信号 y_o はマニピュレータの角度 q にガウスノイズ $w \in \mathbb{R}^3$ が加法的に加わったものを仮定し，行列 C_o は $C_o = [I_{3 \times 3}, 0_{3 \times 3}]$ という構造を持つとする．また，ガウスノイズ w は平均値 0, 共分散行列 $(0.05)^2 I_{3 \times 3}$ を持つガウス分布に従うものとし，外乱項 $d(x, t)$ は前節同様に式 (3.62) の粘性摩擦によるトルクと外生トルクを合成した外乱トルクを仮定する．制御目標は前節同様エンドエフェクタの障害物

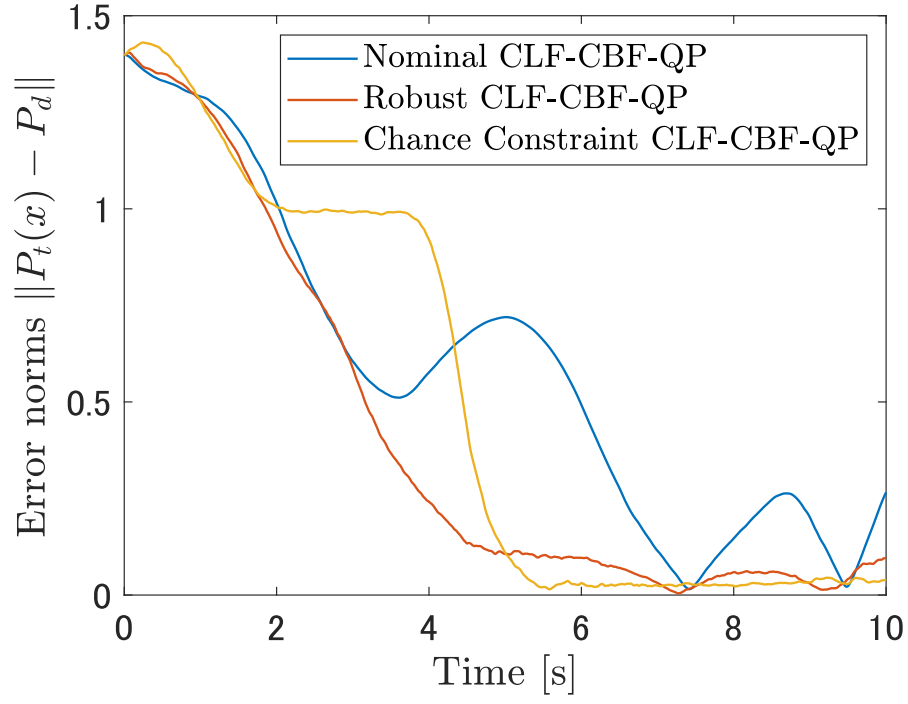


Fig 3.6: Error Norms of Endeffector Positions $\|P_t(x) - P_d\|$

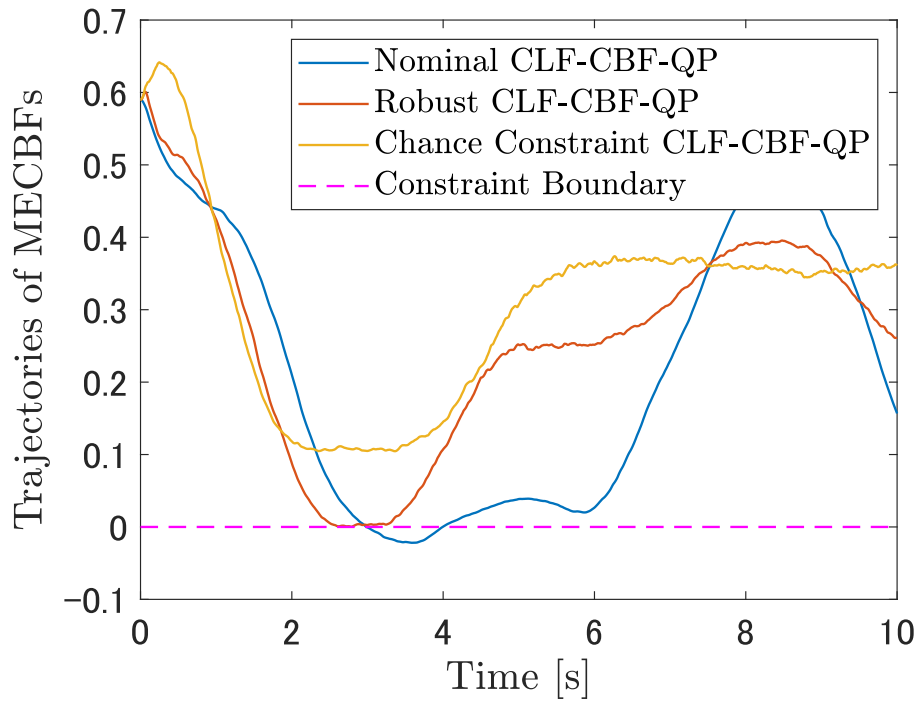
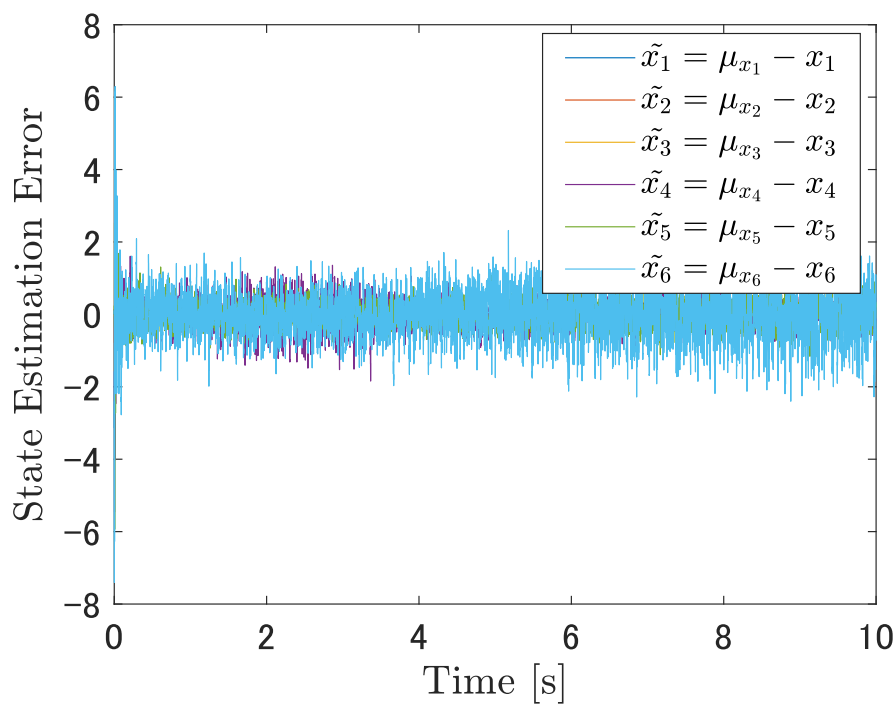
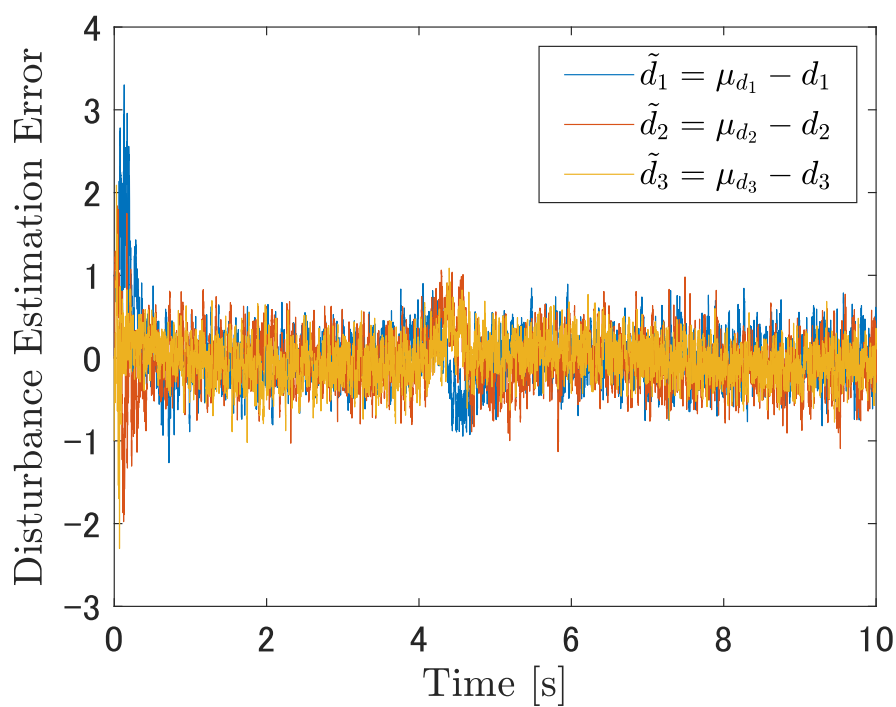


Fig 3.7: Trajectories of MECBFs $B(x)$

Fig 3.8: Estimation Errors of States $\tilde{x} = \mu_x - x$ Fig 3.9: Disturbances Estimation Errors $\tilde{d} = \mu_d - d$

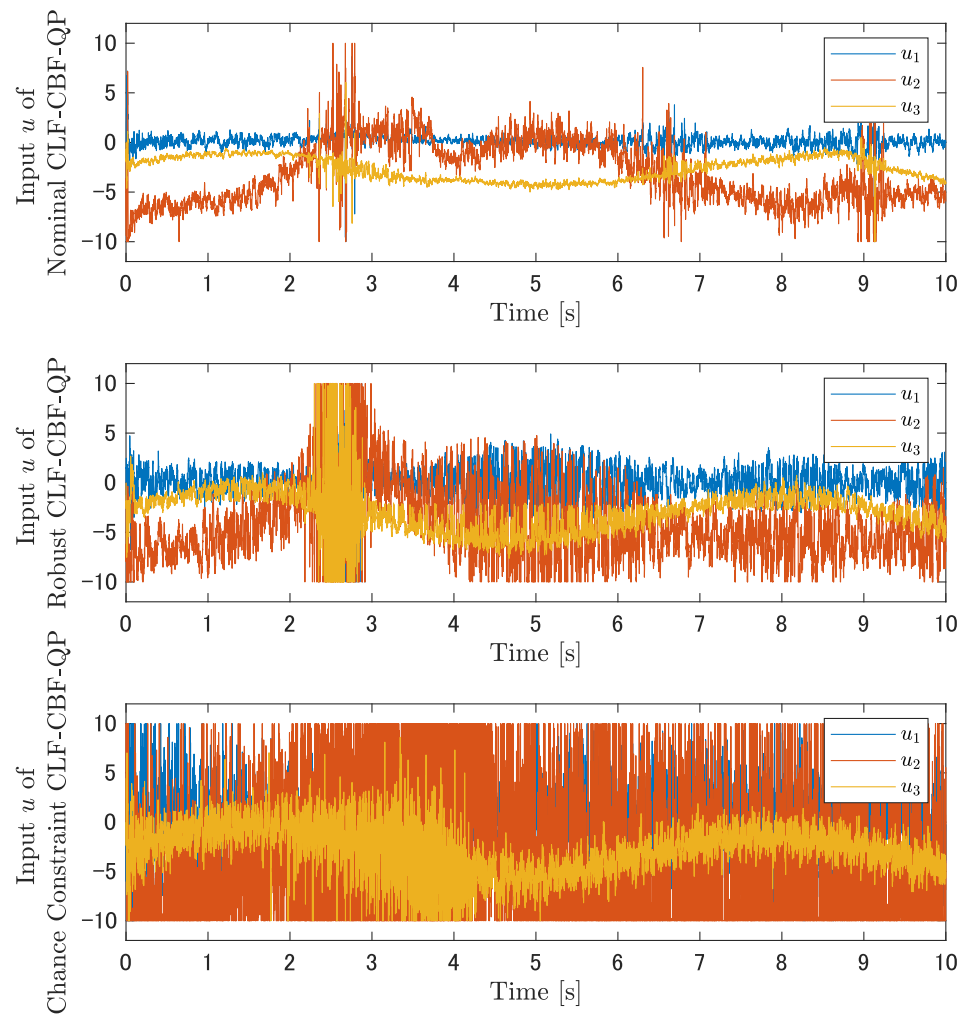


Fig 3.10: Control Inputs of the Three Controllers

回避と軌道追従制御とし、目標軌道は整定時間を $T = 5.0$ とした式 (3.64)～(3.67) を用いるとする。また、障害物に関しても前節同様に座標系 Σ_W において中心 $P_o = [0.0, -0.30, 0.20]^T$ 、半径 $r_o = 0.20$ の球状障害物が配置されているとする。制御器のパラメータに関しては表 3.2 のパラメータと同じものを用い、機会制約を構成するためのパラメータは $\epsilon_p = 0.3$ 、 $\beta_p = 0.3$ とした。また、制御周期も同様に $\Delta t = 1\text{ms}$ である。

この数値例では制御性能を比較するため、式 (2.44) の外乱を考慮しない Nominal CLF-CBF-QP, UKF による外乱推定と状態推定を利用して注意 4 に記載した方法によって構成された式 (3.60) の Robust CLF-CBF-QP, そして本節の提案手法である式 (3.106) の UKF および機会制約を用いる Robust CLF-CBF-QP (Chance Constraint CLF-CBF-QP と呼ぶ) のそれぞれを用いた場合の結果を示す。まず図 3.6 に各コントローラにおけるエンドエフェクタ位置の目標値との偏差ノルムを示す。最終的な偏差の大きさとして Chance Constraint CLF-CBF-QP, Robust CLF-CBF-QP, Nominal CLF-CBF-QP の順に偏差を小さくできていることがわかる。特に Chance Constraint CLF-CBF-QP の場合には設計された目標軌道 h_d の通り、5 秒前後で目標値 P_d 近傍に到達できており、更に最終的な偏差が観測ノイズ w の各要素 w_i の標準偏差 0.05 前後に留まっていることが特徴的である。次に図 3.7 に各コントローラにおける MECBF の値を示す。Nominal CLF-CBF-QP では MECBF の値が負の値を取っており状態制約を違反してしまっている一方で、Robust CLF-CBF-QP および Chance Constraint CLF-CBF-QP では状態制約を考慮した制御を行うことができている。特に、Chance Constraint CLF-CBF-QP は制約境界に対して 0.1 ほどオフセットを持つ保守的な制御を行っていることが読み取れる。最後に図 3.8, 図 3.9 に UKF によって推定された状態および外乱の推定平均値と実際の値の誤差, 図 3.10 にそれぞれのコントローラにおける入力の値を示しておく。これらの結果より今回比較した 3 つのコントローラにおいて、観測ノイズの下で状態推定誤差の影響を考慮しなければならない場合には本節で提案する Chance Constraint CLF-CBF-QP が 3 つのコントローラのうち最も良い制御性能を有することが確認できた。特に状態制約の保証に関しては保守的な制御が実現されるため、ロボットの衝突回避等のアプリケーションにおいて有用性を発揮できると考えられる。

3.3 離散時間システムに対する制御器設計

前節では連続時間システムにおける ECBF 制約の外乱に対するロバスト化を行ったが、同様のアイデアを用いることにより離散時間システムにおける ECBF 制約についてもロバスト化が可能である。本節では最初に [14] で提案された離散時間システムにおける ECBF をより一般的な定義に拡張する。その後、前節の考え方に基づいて外乱に対してロバストな離散時間 ECBF 制約を構築する。

3.3.1 問題設定

本節では次のような離散時間非線形システムを対象に議論を進める.

$$x[k+1] = f(x[k]) + g_1(x[k])u[k] + g_2(x[k])d(x[k], u[k]) \quad (3.113)$$

ただし, $x[k] \in \mathbb{R}^n$ は k ステップ目におけるシステムの状態ベクトル, $u[k] \in \mathbb{R}^{m_u}$ は k ステップ目における制御入力ベクトルを表し, $g_1(x[k]) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m_u}$, $g_2(x[k]) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m_d}$ とする. ここで g_1 および g_2 は前節と同様に次の条件を満たすと仮定する.

$$\text{span}(g_2) \subseteq \text{span}(g_1) \quad (3.114)$$

また, $d(x[k], u[k]) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_u} \rightarrow \mathbb{R}^{m_d}$ は k ステップ目における外乱ベクトルを表し, 状態と入力関数であることを仮定する. このシステムに対し, 次の状態の集合を考える.

$$\mathcal{C}_{0d} := \{x[k] \in \mathbb{R}^n \mid B(x[k], k) \geq 0\} \quad (3.115)$$

ただし, $B(x[k], k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ は状態制約を表す関数とする. 本節の目標は時刻 k , ($k = 0, \dots, \infty$) において状態 $x[k]$ を集合 $\mathcal{C}_{0d}$ 内に留める制御器を設計することである. この関数の性質を仮定する前に定義 2 に従って離散時間システムにおける外乱に対する相対次数も次のように定義しておく.

定義 11 (離散時間システムにおける外乱相対次数). システム (3.113) および 関数 $h(x[k], k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. すべての時刻 k において次の式を満たす正の整数 $\nu \leq n$ を点 x_o における関数 $h(x[k], k)$ の外乱相対次数 (Disturbance Relative Degree : DRD) という.

$$\frac{\partial}{\partial d} h(f^{i-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k] + g_2(x[k])d[k]), k) = 0_{1 \times m_d}, \quad 0 \leq i \leq \nu - 1, \quad (3.116)$$

$$\frac{\partial}{\partial d} h(f^{\nu-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k] + g_2(x[k])d[k]), k) \neq 0_{1 \times m_d} \quad (3.117)$$

ただし, $x[k] \in B_\delta(x_o)$ であり, $f^i(x[k]) := f^{i-1} \circ f(x[k])$, $f^0(x[k]) := x[k]$ とする.

ここでは状態制約関数 $B(x[k], k)$ が等しい IRD および DRD r_b を持つと仮定し, 現在の入力と外乱の影響は r_b ステップ後の状態制約関数にはじめて現れるとする.

3.3.2 高次相対次数をもつ D-ECBF の構成

外乱を考慮しないノミナルシステム (2.9) において $B(x[k], k) \geq 0$ を保証するための方法としては, 連続時間システムにおける ECBF の概念を離散時間システムに拡張した Discrete time ECBF (D-ECBF) が提案されている [14]. しかし文献 [14] で定義された D-ECBF は入力相対次数 1 を持つ関数 $B(x[k], k)$ のみを想定したものであるため, まずはより高次の相対次数を持つ状態制約関数を想定した D-ECBF を次のように定義する.

定義 12 (Discrete Time Exponential Control Barrier Function). 離散時間システム (2.9) および IRD r_b を持つ関数 $B(x[k], k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて定義される式 (3.115) の集合 $\mathcal{C}_{0d}$ を考える. このとき, 次の不等式を満たすゲイン行列 $K_{db} \in \mathbb{R}^{1 \times r_b}$ が存在し, $B(x[0], 0) \geq 0$ のとき $k = 0, \dots, \infty$ において $B(x[k], k) \geq 0$ を満たすならば関数 $B(x[k], k)$ を Discrete Time Exponential Control Barrier Function (D-ECBF) であるという.

$$\sup_u \{B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k + r_b)\} \geq K_{db}\eta_{db}[k] \quad (3.118)$$

ただし,

$$K_{db} := \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r_b} \end{bmatrix}, \quad \eta_{db}[k] := \begin{bmatrix} B(x[k], k) \\ B(x[k+1], k+1) \\ \vdots \\ B(x[k+r_b-1], k+r_b-1) \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

とする.

この D-ECBF に関しては次の定理が成り立つ.

定理 5 (D-ECBF 条件). 離散時間システム (2.9) および IRD r_b を持つ関数 $B(x[k], k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. また, 式 (3.119) のベクトル $\eta_{db}[k]$ が $\eta_{db}[0] \geq 0$ を満たすと仮定する. このとき, 次の集合 $\mathcal{K}_{decbf}$ 内の入力 $u[k]$ は関数 $B(x[k], k)$ を D-ECBF とする.

$$\mathcal{K}_{decbf} := \{u \in \mathbb{R}^{m_u} \mid B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k + r_b) \geq K_{db}\eta_{db}[k]\} \quad (3.120)$$

ただし, $K_{db} \in \mathbb{R}^{1 \times r_b}$ は D-ECBF ゲイン行列であり, 次の行列 $K_{cl} \in \mathbb{R}^{r_b \times r_b}$ が安定行列となるように選ばれるとする.

$$K_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{r_b} \end{bmatrix}, \quad k_i \geq 0, \quad (i = 1, \dots, r_b) \quad (3.121)$$

この定理を証明するために次の離散時間非負線形システムに関する定義とその補題を述べておく.

定義 13 (離散時間非負線形システム [46]). 次式で表される離散時間線形システムを考える.

$$x[k+1] = Ax[k] + bu[k] \quad (3.122)$$

$$y[k] = c^T x[k] \quad (3.123)$$

ただし, $x[k] \in \mathbb{R}^n$, $u[k] \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ とする. すべての非負初期条件および非負入力に対して状態と出力が常に非負となるとき, このシステムを離散時間非負線形システムという.

補題 5 (離散時間非負線形システムの必要十分条件 [46, Thm. 2]). 式 (3.122), (3.123) で表される線形システムが離散時間非負線形システムであるための必要十分条件は行列 A , b , c^T が非負行列となっていることである.

この補題を用いることにより定理 5 は次のように示される.

Proof of Theorem 5. $B(x[k], k)$ が相対次数 r_b を持つという仮定から, $k+1$ ステップから $k+r_b$ ステップまでの関数 $B(x[k], k)$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} B(x[k+1], k+1) &= B(f(x[k]), k+1) \\ &\vdots \\ B(x[k+r_b-1], k+r_b-1) &= B(f^{r_b-1}(x[k]), k+r_b-1) \\ B(x[k+r_b], k+r_b) &= B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k+r_b) \end{aligned} \quad (3.124)$$

これより次の線形システムを考えることができる.

$$\begin{aligned} \eta_{db}[k+1] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \eta_{db}[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} B(x[k+r_b], k+r_b) \\ y_{db}[k] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \eta_{db}[k] \end{aligned} \quad (3.125)$$

このシステムに対し $\mathcal{K}_{decbf}$ 内の入力を用いることにより次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \eta_{db}[k+1] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{r_b} \end{bmatrix} \eta_{db}[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon_B[k] \\ y_{db}[k] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \eta_{db}[k] \end{aligned} \quad (3.126)$$

ただし, $\epsilon_B[k] \geq 0$ は次式を満たす値である.

$$B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k+r_b) = K_{db}\eta_{db}[k] + \epsilon_B[k] \quad (3.127)$$

ここで定理 5 の仮定を満たすようにゲイン行列 K_{db} を選んでいるならば式 (3.126) における $\eta_{db}[k]$ の係数行列は安定かつ非負行列であり, さらにその他の係数行列も非負である. したがって補題 5 より式 (3.126) で表されるシステムは離散時間非負線形システムの条件を満たし, さらに定理 5 の仮定から $k=0, \dots, \infty$ において $y_{db}[k]$ は非負の値をとる. また, システム (3.126) は離散時間システムにおける安定条件を満たすため, $y_{db}[k]$ の下界は原点に指数収束する. $\square$

以後、式 (3.120) を定義する不等式を D-ECBF 制約と呼ぶ。 $r_b = 1$ のとき、これは [14] で提案されている不等式制約に一致することから [14] の一般化となっていることに注意された。 また、連続時間システムに対する ECBF 制約と異なり、一般に D-ECBF 制約は状態 $x[k]$ が与えられる場合において入力 $u[k]$ に対する非線形不等式制約となる。そこで D-ECBF 制約の左辺を次のように書き直す。

$$B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k + r_b) = F_B(x[k], 0, k) + \int_0^{u[k]} \frac{\partial}{\partial \omega} F_B(x[k], \omega, k) d\omega \quad (3.128)$$

ただし、 $F_B(x[k], u[k], k) := B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k + r_b)$ である。もし関数 $\frac{\partial F_B}{\partial u}$ が入力 u を含まない形であれば右辺第 2 項は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \int_0^{u[k]} \frac{\partial}{\partial \omega} F_B(x[k], \omega, k) d\omega &= \frac{\partial F_B}{\partial u}(x[k], k) \int_0^{u[k]} d\omega \\ &= \frac{\partial F_B}{\partial u} u[k] \end{aligned} \quad (3.129)$$

この場合には D-ECBF 制約を次のような入力 $u[k]$ に対する線形不等式として表すことができる。

$$F_B(x[k], 0, k) + \frac{\partial F_B}{\partial u}(x[k], k)u[k] \geq K_{db}\eta_{db}[k] \quad (3.130)$$

3.3.3 マッチング外乱を考慮した Robust D-ECBF 制約の構築

前節で述べた D-ECBF を拡張し、マッチング外乱の影響を考慮した Robust D-ECBF を次のように定義する。

定義 14 (マッチング外乱に対する Robust D-ECBF). 離散時間システム (3.113) および IRD, DRD r_b を持つ関数 $B(x[k], k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて定義される式 (3.115) の集合 $\mathcal{C}_{0d}$ を考える。このとき、次の不等式を満たすゲイン行列 $K_{db} \in \mathbb{R}^{1 \times r_b}$ および外乱推定値 $\hat{\delta}_{db}[k] \in \mathbb{R}$ が存在し、 $B(x[0], 0) \geq 0$ のとき $k = 0, \dots, \infty$ において $B(x[k], k) \geq 0$ を満たすならば関数 $B(x[k], k)$ をマッチング外乱に対する Robust Discrete Time Exponential Control Barrier Function (Robust D-ECBF) であるという。

$$\sup_u \left\{ B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k + r_b) + \hat{\delta}_{db}[k] \right\} \geq K_{db}\eta_{db}[k] \quad (3.131)$$

ただし、行列 K_{db} およびベクトル η_{db} は式 (3.119) で定義されるものとする。

Robust D-ECBF を構成するための条件として定理 5 は次のように拡張される。

定理 6 (Robust D-ECBF 条件). 離散時間システム (3.113) および IRD, DRD r_b を持つ関数 $B(x[k], k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。また、式 (3.119) のベクトル $\eta_{db}[k]$ について $\eta_{db}[0] \geq 0$ を

満たすと仮定する．このとき，次の条件を満たす $u[k]$ および外乱推定値 $\hat{\delta}_{db}$ は関数 $B(x[k], k)$ を Robust D-ECBF とする．

$$B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k + r_b) + \hat{\delta}_{db}[k] \geq K_{db}\eta_{db}[k] \quad (3.132)$$

$$\hat{\delta}_{db}[k] \leq \delta_{db}[k] \quad (3.133)$$

ただし，

$$\begin{aligned} \delta_{db}[k] &:= B_{dist}(x[k], u[k], k) - B_{nom}(x[k], u[k], k) \\ B_{dist}(x[k], u[k], k) &:= B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k] + g_2(x[k])d(x[k], u[k])), k + r_b) \\ B_{nom}(x[k], u[k], k) &:= B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k + r_b) \end{aligned} \quad (3.134)$$

とし， $K_{db} \in \mathbb{R}^{1 \times r_b}$ は Robust D-ECBF ゲイン行列であり，式 (3.121) の条件を満たすものとする．

Proof. まず式 (3.132)，(3.133) を満たす入力 $u[k]$ および $\hat{\delta}_{db}$ を用いる場合，次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} B(x[k + r_b], k + r_b) &= B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k + r_b) + \delta_{db}[k] \\ &\geq B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k + r_b) + \hat{\delta}_{db}[k] \\ &\geq K_{db}\eta_{db}[k] \end{aligned} \quad (3.135)$$

この不等式より次式を満たす $\epsilon'_B[k] \geq 0$ が存在する．

$$B(x[k + r_b], k + r_b) = K_{db}\eta_{db}[k] + \epsilon'_B[k] \quad (3.136)$$

ここでベクトル η_{db} を状態とする線形システムは次のように表される．

$$\begin{aligned} \eta_{db}[k + 1] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{r_b} \end{bmatrix} \eta_{db}[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon'_B[k] \\ y_{db}[k] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \eta_{db}[k] \end{aligned} \quad (3.137)$$

以後，定理 5 と同様にシステム (3.137) が離散時間非負線形システムの条件を満たすことから定理 6 が直ちに示される．また， $\eta_{db}[k]$ の係数行列が安定行列であることから $y_{db}[k]$ の下界は原点に指数収束する． $\square$

定理 6 における外乱推定条件 (3.133) を満たすため，連続時間 Robust CLF-CBF-QP と同様に GPR を用いてデータから次の外乱モデルを同定する方法をとる．

$$\delta_{db} \sim \mathcal{N}(\mu_{\delta_{db}}(x[k], u[k]), \sigma_{\delta_{db}}^2(x[k], u[k])) \quad (3.138)$$

Table 3.4: Robust D-ECBF-NLP Controller for Matching Disturbances

Robust D-ECBF-NLP for Matching Disturbances

$$\begin{aligned}
u_*[k] &= \underset{u[k], \hat{\delta}_{db}[k]}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} (u[k] - u_{ref}[k])^T (u[k] - u_{ref}[k]) & (3.140) \\
\text{s.t. } & B(f^{r_b-1} \circ (f(x[k]) + g_1(x[k])u[k]), k + r_b) + \hat{\delta}_{db}[k] \geq K_{db}\eta_{db}[k] \\
& \hat{\delta}_{db}[k] \leq \mu_{\delta_{db}}(x[k], u[k]) - k_d\sigma_{\delta_{db}}(x[k], u[k]) & (\text{Robust D-ECBF constraint}) \\
& A_c u \leq B_c & (\text{Other constraints})
\end{aligned}$$

このモデルを GPR で同定する際に出力のトレーニングデータとして $\delta_{db}[k]$ の推定値が必要となるが、これは式 (3.134) の関係を用いて計算することができる。式 (3.138) のモデルを同定した後は信頼区間パラメータ $k_d \in \mathbb{R}_+$ の導入により、ロバストな推定条件として次の不等式が得られる。

$$\hat{\delta}_{db} \leq \mu_{\delta_{db}}(x[k], u[k]) - k_d\sigma_{\delta_{db}}(x[k], u[k]) \quad (3.139)$$

3.3.4 マッチング外乱に対する Robust D-ECBF-NLP

与えられた状態制約を保証するような制御入力を計算する手法として、前節で提案した Robust D-ECBF 制約を用いた最適化に基づくコントローラを構築する。これは表 3.4 に示すような最適化問題として定式化される。ただし $u_{ref}[k] \in \mathbb{R}^{m_u}$ は別個設計された参照入力であり、 A_c, B_c は入力に関するその他の制約を定義するための定数行列である。このコントローラは連続時間システムに対する CBF-QP と同様に Robust D-ECBF 制約の下で参照入力 $u_{ref}[k]$ との差ノルムを最小化するような制御入力 $u[k]$ を出力する。Robust D-ECBF 制約は一般に $u[k]$ に対して非線形な制約であることからこの問題は非線形最適化問題となるが、状態制約関数 $B(x[k], k)$ が式 (3.129) の形で表せる場合には式 (3.130) を用いて二次計画法として定式化できることに注意されたい。

数値例 3 : 簡易エンジンモデルの圧力制御

Robust D-ECBF-NLP の有効性を検証するため、図 3.11 に示す簡易エンジンモデルの圧力制御問題を扱う。シミュレーションに利用するモデルは [50, 51] で提案された連続時間エンジンモデルを前進オイラー法を用いて離散化したものであり、状態方程式は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
x[k+1] &= \begin{bmatrix} 1 - \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 - \theta_3 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} \theta_2(1 - x_2[k]^2) \\ \theta_4(1 - x_2[k]^2) \end{bmatrix} u[k] + d(x[k], u[k]) \\
0 &\leq u[k] \leq 1 & (3.141)
\end{aligned}$$

ただし, $x[k] = [x_1[k], x_2[k]]^T \in \mathbb{R}^2$, $u[k] \in \mathbb{R}$ であり, $\theta_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \dots, 4)$ はモデルパラメータである. このモデルはエンジンのスロットルバルブの開閉角を入力としてエンジン内部の温度 $T = x_2/x_1$ および圧力 $p = x_2$ のダイナミクスをモデル化したものである. スロットルバルブの開閉角に制限があるという仮定から式 (3.141) のように入力制約が課されている. また, $d(x[k], u[k]) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は外乱ベクトルであり, 今回はモデルパラメータ θ_i がノミナルパラメータに対して $\pm 20\%$ の誤差 $\Delta\theta_i$ を持つとし, その影響が外乱項 d として次式のように現れると仮定する.

$$d(x[k], u[k]) = \begin{bmatrix} -\Delta\theta_1 x_1[k] + \Delta\theta_2 (1 - x_2[k]^2) u[k] \\ -\Delta\theta_3 x_2[k] + \Delta\theta_4 (1 - x_2[k]^2) u[k] \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

このシステムにおける制御目標はノッキングと呼ばれる異常運転を回避するための非線形状態制約条件を満たしつつ, 圧力 $x_2[k]$ を定数目標値 $x_{2d} \in \mathbb{R}$ に制御することである. まずは $x_2 \rightarrow x_{2d}$ を達成する参照入力を計算するために次の入力変換を考える.

$$u[k] = \frac{1}{\theta_4(1 - x_2[k]^2)} v[k] \quad (3.143)$$

これにより, システム (3.141) は次のような線形ダイナミクスを持つとみなすことができる.

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 1 - \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 - \theta_3 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} \frac{\theta_2}{\theta_4} \\ 1 \end{bmatrix} v[k] + \bar{d}(x[k], v[k]) \quad (3.144)$$

ただし, $\bar{d}(x[k], v[k])$ は $d(x[k], u[k])$ において入力変換の影響を考慮した形を表している. このシステムに対する参照入力 $v_{ref}[k]$ として次の形の PI 制御器を設計する.

$$v_{ref}[k] = -k_P(x_2[k] - x_{2d}) - k_I \sum_{j=0}^k (x_2[j] - x_{2d}) \quad (3.145)$$

ただし, $k_P, k_I \in \mathbb{R}$ は制御ゲインであり, これらは次の行列が離散時間システムの意味で安定行列となるように選ぶ.

$$\begin{bmatrix} 1 - \theta_3 - k_P & -k_I \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

また, ノッキングを回避するための状態制約関数 $B(x[k])$ は次式のように定義される.

$$B(x[k]) = 1 - \frac{1}{\alpha_E^2} x_2[k]^2 - \frac{1}{\beta_E^2} \left(\frac{x_2[k]}{x_1[k]} - 1 \right)^2 \geq 0 \quad (3.147)$$

ただし, $\alpha_E, \beta_E \in \mathbb{R}$ は定数パラメータである. この状態制約 $B(x[k])$ はシステム (3.144) において IRD 1 および DRD 1 を持つ関数であるため, 式 (3.132), (3.139) と同様の形で Robust D-ECBF 制約を構築することが可能である. この例では $v[k]$ を入力として Robust D-ECBF-NLP を構成することにし, 入力制約 (3.141) も次の形に変形して制約に入れておく.

$$0 \leq \frac{1}{\theta_4(1 - x_2[k]^2)} v[k] \leq 1 \quad (3.148)$$

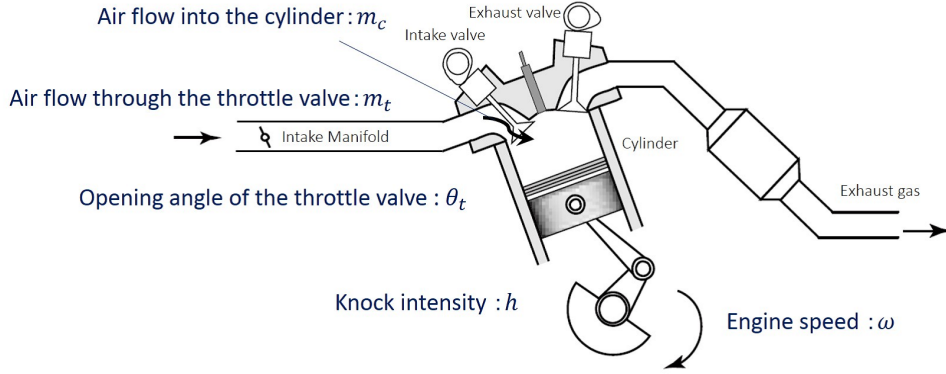


Fig 3.11: Simple Engine Model (Oyama 2018) [51, p.95]

なお, GPR を用いた外乱モデル (3.138) の同定に関しては, 外乱を考慮しない通常の D-ECBF-NLP を利用した閉ループシステムにおいて初期値を $\pm 20\%$ の範囲で適当に振った際のシミュレーションデータ (試行回数 N_s) を取得し, それらをトレーニングデータとしてモデルを同定する. シミュレーションにおける制御パラメータを表 3.5 にまとめておく.

提案手法の有効性を検証するために, 外乱を考慮しない Nominal D-ECBF-NLP を利用した場合の結果と Robust D-ECBF-NLP を利用した場合の結果を比較する. 図 3.12 はそれぞれのコントローラにおける圧力 x_2 の軌道を表したものであり, マゼンタの点線は x_{2d} を表す. また, 図 3.13 はそれぞれのコントローラにおける式 (3.147) の状態制約関数 $B(x[k])$ の軌道を表したものであり, マゼンタの点線が制約境界, その上側が許容される領域を表している. 最後に図 3.14 に両方のコントローラにおける制御入力を示す. これらの結果より Nominal D-ECBF-NLP を利用した場合には $x_2 \rightarrow x_{2d}$ を達成できているものの, 状態が許容領域の外側に出てしまい, 状態制約が満たされていないことがわかる. 一方で Robust D-ECBF-NLP では制約条件を違反することなく $x_2 \rightarrow x_{2d}$ を達成できている, 提案手法によって外乱に対してロバストな制御が実現できていることを確認できた.

3.4 おわりに

本章では最初にマッチング外乱の影響を受ける連続時間システムにおいて外乱の影響を考慮した Robust ES-CLF および Robust MECBF 制約を構築し, それらを用いた最適化ベー

Table 3.5: Model & Control Parameters in the Numerical Example 3

$\theta_1 : 8.33 \times 10^{-2}$	$\theta_2 : 2.19 \times 10^3$	$\theta_3 : 1.17 \times 10^{-1}$	$\theta_4 : 3.7 \times 10^3$
$k_P : 1.38$	$k_I : 0.560$	$\alpha_E : 1.10$	$\beta_E : 0.350$
$N_s : 5$	$K_{db} : 0.4$	$k_d : 3.0$	

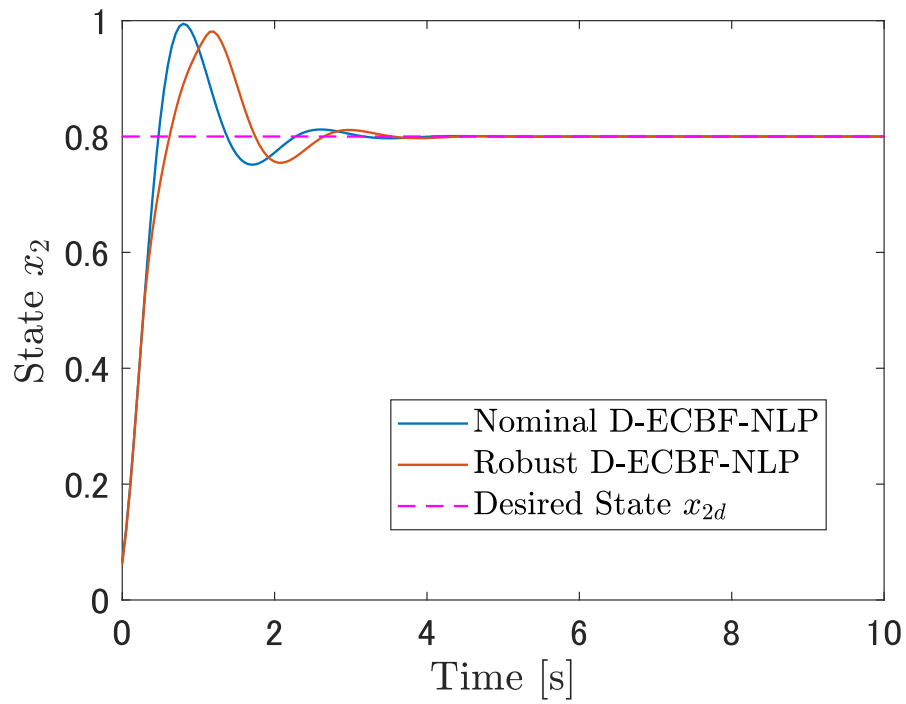


Fig 3.12: Trajectories of x_2 in Two Cases

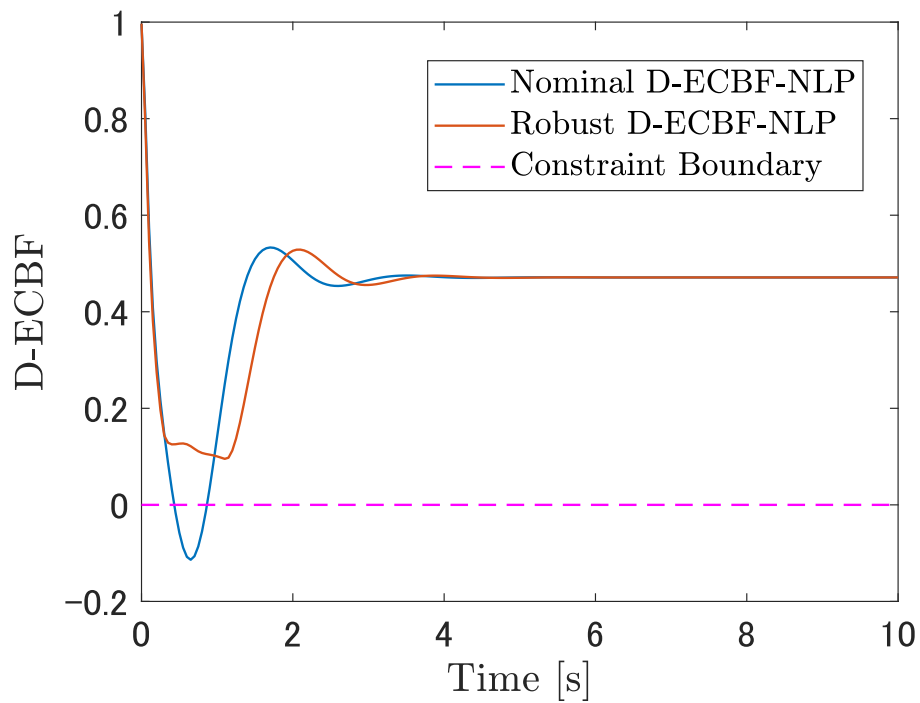


Fig 3.13: Trajectories of D-ECBF in Two Cases

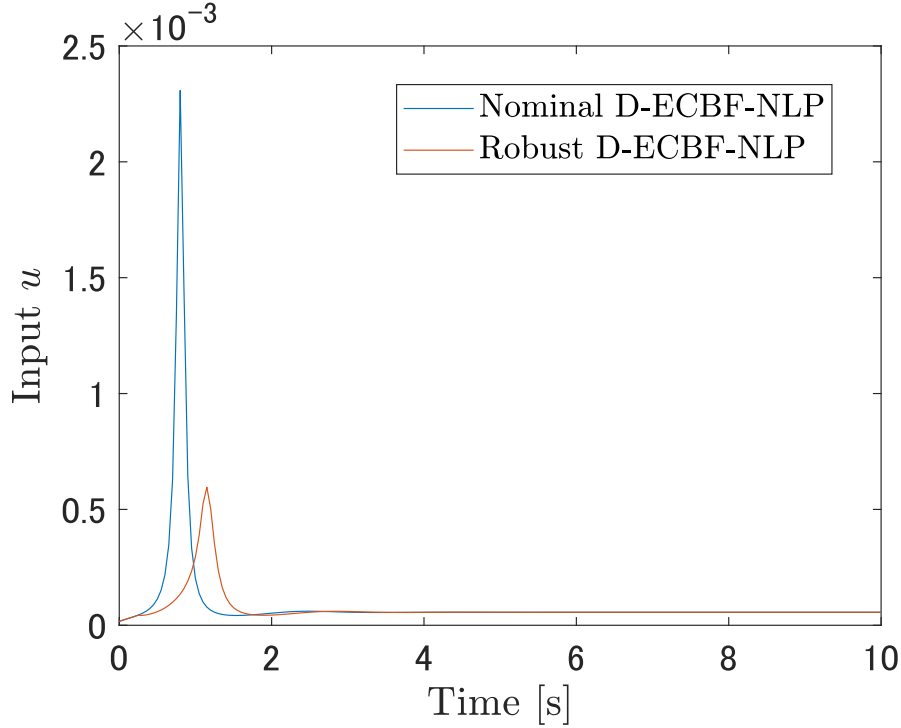


Fig 3.14: Control Input of Two Cases

ストコントローラである Robust CLF-CBF-QP を提案した。また、観測信号から状態および外乱を推定する場合を考慮するため、UKF を状態・外乱オブザーバとして導入し、機会制約として構成される Robust ES-CLF, Robust MECBF 制約を用いた Chance Constraint CLF-CBF-QP を提案した。最後に上述のアイデアを拡張することによってマッチング外乱の影響を受ける離散時間システムにおける Robust D-ECBF 制約を提案し、最適化ベースドロバストコントローラである Robust D-ECBF-NLP を提案した。これらのコントローラについては数値シミュレーションを通して制御性能の検証を行っている。

これらの手法は GPR による外乱モデル同定または UKF による外乱推定に基づいており、外乱をガウス分布に従う確率変数として推定することによって平均値と分散の情報を利用したロバスト制御を実現している。出力関数の安定化および状態制約を保証するために満たすべき外乱推定値の条件が不等式として得られることを利用し、推定される外乱の分散情報に応じてロバストに制御を行うための外乱推定値が計算される。そのため、外乱推定値が真値に対して偏差を持っていても制御目標を達成できることがこのコントローラの特徴である。特に GPR によって外乱モデルを同定し、それに基づく外乱推定を行う場合には推定値の不確かさが分散として表現される。したがって GPR モデルを同定するためのトレーニングデータが少ない場合においてもモデルの精度を反映したロバストな制御を行えることが提案手法の利点の一つである。

第4章 ミスマッチング外乱を受けるシステムに対する最適化ベースドロバスト制御

4.1 はじめに

3章ではマッチング条件を満たす外乱（マッチング外乱）の影響を受けるシステムにおいて、外乱に対するロバスト性を向上させた Robust ES-CLF 制約 および Robust MECBF 制約を構築し、最適化に基づく制御器を構築する方法を提案した。力外乱を受ける機械システム等に対しては3章の手法を用いることで外乱に対してロバストな制御を行うことができるが、より複雑なシステムにおいてはマッチング条件を満たさない外乱（ミスマッチング外乱）がシステムに加わる場合が存在する。3章の方法ではこのような外乱に対処することが出来ないため、こうした外乱を考慮可能なロバスト制御器を新たに構築する必要がある。

本章ではミスマッチング外乱を受ける連続時間システムにおいて、外乱に対するロバスト性を保証した最適化ベースド制御器を提案する。3章で提案した制御器の構造を反映し、出力関数を安定化するための制約条件および状態制約を満たすための制約条件を導出した上で、それらを制約とする最適化問題を構成することによって制御入力を計算する方法について説明する。

4.2 問題設定

本章ではシステムモデルとして下記のダイナミクスで等価的に表現される入力アファイン系を扱う。

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u + g_2(x)d(x, t) \quad (4.1)$$

ただし、 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{m_u}$ はシステムの状態および制御入力ベクトルであり、 $d(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_d}$ は連続微分可能な外乱関数を仮定する。また、 $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_1(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m_u}$, $g_2(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m_d}$ は Lipschitz 連続な関数とする。さらに3章とは異なり、 g_1 と g_2 には次式の性質を仮定する。

$$\text{span}(g_2) \not\subseteq \text{span}(g_1) \quad (4.2)$$

この仮定はマッチング条件を満たさない外乱，すなわちミスマッチング外乱がシステムに加わることを意味しており，外乱がシステムに及ぼす影響 $g_2(x)d$ には入力 u によって直接キャンセルすることができない成分が存在する．したがって制御の観点からは3章で対象としたシステム (3.1) よりも扱うことが難しいシステムとなっている．

このシステムに対し，出力関数 $h(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ および状態制約関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する．

$$y_c = h(x, t) \quad (4.3)$$

$$B(x, t) \geq 0 \quad (4.4)$$

この章における制御目標も3章同様に，時間 $t \in [0, \infty]$ において状態制約 $B(x, t) \geq 0$ を満たしつつ，出力関数の安定化 $h(x, t) \rightarrow 0$ を達成することである．仮定として出力関数 $h(x, t)$ は $\text{IRD}_+ r_h$ および $\text{DRD } r_h - 1$ ，状態制約関数 $B(x, t)$ は $\text{IRD } r_b$ および $\text{DRD } r_b - 1$ を持つとする．ただし， $r_h \geq 2$ ， $r_b \geq 2$ とする．これにより $h(x, t)$ および $B(x, t)$ の時間微分は次のように表される．

$$\dot{y}_c = L_f h(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) \quad (4.5)$$

$\vdots$

$$y_c^{(r_h-1)} = L_f^{r_h-1} h(x, t) + \frac{\partial^{r_h-1}}{\partial t^{r_h-1}} h(x, t) + \delta_{c1} \quad (4.6)$$

$$y_c^{(r_h)} = L_f^{r_h} h(x, t) + L_{g1} L_f^{r_h-1} h(x, t) u + \frac{\partial^{r_h}}{\partial t^{r_h}} h(x, t) + \dot{\delta}_{c1} + \delta_{c2} \quad (4.7)$$

$$\dot{B}(x, t) = L_f B(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} B(x, t) \quad (4.8)$$

$\vdots$

$$B(x, t)^{(r_b-1)} = L_f^{r_b-1} B(x, t) + \frac{\partial^{r_b-1}}{\partial t^{r_b-1}} B(x, t) + \delta_{b1} \quad (4.9)$$

$$B(x, t)^{(r_b)} = L_f^{r_b} B(x, t) + L_{g1} L_f^{r_b-1} B(x, t) u + \frac{\partial^{r_b}}{\partial t^{r_b}} B(x, t) + \dot{\delta}_{b1} + \delta_{b2} \quad (4.10)$$

ただし， $\delta_{c1}, \delta_{c2}, \delta_{b1}, \delta_{b2}$ は次のように定義する．

$$\delta_{c1} := L_{g2} L_f^{r_h-2} h(x, t) d(x, t) \quad (4.11)$$

$$\delta_{c2} := L_{g2} L_f^{r_h-1} h(x, t) d(x, t) \quad (4.12)$$

$$\delta_{b1} := L_{g2} L_f^{r_b-2} B(x, t) d(x, t) \quad (4.13)$$

$$\delta_{b2} := L_{g2} L_f^{r_b-1} B(x, t) d(x, t) \quad (4.14)$$

この仮定は出力関数 $h(x, t)$ および状態制約関数 $B(x, t)$ において外乱の影響が入力よりも1階低い時間微分に現れることを意味する．

注意 6. 上述の仮定を満たす問題の例の一つとして、次のような非入力アフィン系の制御問題を考えることができる。

$$\dot{\xi} = f_{\xi}(\xi, v) + g_{\xi}(\xi)d_{\xi}(\xi, v, t) \quad (4.15)$$

ただし、 $\xi \in \mathbb{R}^{n-m_u}$ は状態ベクトル、 $v \in \mathbb{R}^{m_u}$ は制御入力ベクトルであり、 $f_{\xi}(\xi, v) : \mathbb{R}^{n-m_u} \times \mathbb{R}^{m_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m_u}$ 、 $g_{\xi}(\xi) : \mathbb{R}^{n-m_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m_u \times m_d}$ は局所 Lipschitz 関数とする。また、 $d_{\xi}(\xi, v, t) : \mathbb{R}^{n-m_u} \times \mathbb{R}^{m_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_d}$ は外乱を表す関数であり、連続微分可能な関数とする。このシステムに対し、制御入力を状態に加えた拡大状態ベクトル $x = [\xi^T, v^T]^T \in \mathbb{R}^n$ を定義し、制御入力の時間微分 $\dot{v}$ を新たな入力と考えることでシステム (4.15) を次式の入力アフィン系に変換することができる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\xi}(\xi, v) \\ 0_{m_u \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n-m_u \times m_u} \\ I_{m_u \times m_u} \end{bmatrix} \dot{v} + \begin{bmatrix} g_{\xi}(\xi) \\ 0_{m_u \times m_d} \end{bmatrix} d_{\xi}(\xi, v, t) \quad (4.16)$$

この場合、入力ベクトル $\dot{v}$ 及び外乱ベクトル d_{ξ} の係数行列は仮定 (4.2) を満たすシステムとなり、 $f_{\xi}(\xi, v)$ 、 $g_{\xi}(\xi)$ の構造によっては式 (4.5)～式 (4.10) の構造を持つような出力関数および状態制約関数を定義することができる。すなわち、本章の問題設定は外乱が加わるようなあるクラスの非入力アフィンシステムにおける安定化制御及び拘束制御問題を含んでいる。筆者の知る限り、これまでに非入力アフィンシステムにおける Robust CBF の構築手法について言及した先行研究は存在しないため、本章で提案する手法はそうした意味でも新規性を有している。

4.3 ミスマッチング外乱の影響を考慮した安定化条件

4.3.1 ミスマッチング外乱に対する Robust ES-CLF 制約の導出

本節では前述の制御目標のうち、出力関数 $h(x, t)$ の安定化を達成するための条件を導出する。導出の過程は適応制御系の設計でしばしば用いられるバックステッピング法の考えを応用したものである [52]。

まずは式 (4.5)～式 (4.7) を用いて次式の新たな出力関数ベクトルを定義する。これは MECBF を構成する際に利用した出力関数 (3.18) を拡張したものである。

$$\eta_{c,i}(x, t) := \left\{ \prod_{j=0}^i \left(\frac{d}{dt} + K_j \right) \right\} h(x, t), \quad (i = 0, \dots, r_h - 2) \quad (4.17)$$

$$\eta_{c,r_h-1}(x, \hat{\Delta}_c, t) := \eta_{c,r_h-2}^n + K_{r_h-1} \eta_{c,r_h-2} + \hat{\delta}_{c1} \quad (4.18)$$

$$\eta_{c,r_h}(x, u, \hat{\Delta}_c, t) := \eta_{c,r_h-2}^{nn} + K_{r_h-1} \eta_{c,r_h-2}^n + K_{r_h} \eta_{c,r_h-1} + \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \hat{\delta}_{c1} + \hat{\delta}_{c2} + \dot{\hat{\delta}}_{c1} \quad (4.19)$$

ただし, $\hat{\delta}_{c1}, \hat{\delta}_{c2} \in \mathbb{R}^p$ は外乱 δ_{c1}, δ_{c2} の推定値であり, $\hat{\Delta}_c = [\hat{\delta}_{c1}^T, \hat{\delta}_{c2}^T, \dot{\hat{\delta}}_{c1}^T]^T \in \mathbb{R}^{3p}$ と定義した. また, $K_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, ($i = 1, \dots, r_h$) は設計パラメータである. $\eta_{c, r_h-2}^n, \eta_{c, r_h-2}^{nn}$ は外乱項 δ_{c1}, δ_{c2} を除いたノミナル項であり, 次式で定義される.

$$\begin{aligned} \eta_{c, r_h-2}^n &:= \dot{\eta}_{c, r_h-2} - \delta_{c1}, \\ &= L_f^{r_h-1} h(x, t) + \delta_{c1} + \frac{\partial^{r_h-1}}{\partial t^{r_h-1}} h(x, t) + \dots + \prod_{j=1}^{r_h-2} K_j \dot{h}(x, t) - \delta_{c1} \\ &= L_f^{r_h-1} h(x, t) + \dots + \prod_{j=1}^{r_h-2} K_j \dot{h}(x, t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \eta_{c, r_h-2}^{nn} &:= \dot{\eta}_{c, r_h-2}^n - \sum_{j=1}^{r_h-2} K_j \delta_{c1} - \delta_{c2} \\ &= L_f^{r_h} h(x, t) + L_{g1} L_f^{r_h-1} h(x, t) u + \delta_{c2} + \frac{\partial^{r_h}}{\partial t^{r_h}} h(x, t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r_h-2} K_j \left(L_f^{r_h-1} h(x, t) + \delta_{c1} + \frac{\partial^{r_h-1}}{\partial t^{r_h-1}} h(x, t) \right) + \dots + \prod_{j=1}^{r_h-2} K_j \ddot{h}(x, t) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{r_h-2} K_j \delta_{c1} - \delta_{c2} \\ &= L_f^{r_h} h(x, t) + L_{g1} L_f^{r_h-1} h(x, t) u + \dots + \prod_{j=1}^{r_h-2} K_j \ddot{h}(x, t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

ここで外乱推定値 $\hat{\delta}_{c1}, \hat{\delta}_{c2}$ と実際の外乱項 δ_{c1}, δ_{c2} の誤差を $\tilde{\delta}_{c1} = \hat{\delta}_{c1} - \delta_{c1}$, $\tilde{\delta}_{c2} = \hat{\delta}_{c2} - \delta_{c2}$ として定義することにより, 出力関数の安定化条件として次の定理が得られる.

定理 7 (ミスマッチング外乱を考慮した出力関数の安定化条件). ミスマッチング外乱の影響を受ける連続時間システム (4.1) および $\text{IRD}_+ r_h$, $\text{DRD } r_h - 1$ を持つ出力関数 (4.3) とそれらによって新たに構成される関数 (4.17), (4.18), (4.19) を考える. これらの関数を定義するためのパラメータであるゲイン行列 K_i , ($i = 1, \dots, r_h$) は次の条件を満たすように選ばれているとする.

$$P_\eta = -\text{blkdiag}(K_1, \dots, K_{r_h}) + 1/2 I_z \prec 0 \quad (4.22)$$

ただし, $I_z \in \mathbb{R}^{pr_h \times pr_h}$ は $i = 1, \dots, p(r_h - 1)$ として $(i, i + p)$, $(i + p, i)$ 要素に 1 を持つ定数行列とする.

このとき, 次の条件を満たす制御入力 u および外乱推定値 $\hat{\delta}_{c1}, \dot{\hat{\delta}}_{c1}, \hat{\delta}_{c2}$ は出力関数 $h(x, t)$

を原点に指数安定化する.

$$-\eta_{c,r_h-2}^T \tilde{\delta}_{c1} \leq 0 \quad (4.23)$$

$$-\eta_{c,r_h-1}^T \tilde{\delta}_{c2} \leq 0 \quad (4.24)$$

$$\eta_{c,r_h-1}^T \left(-\sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \tilde{\delta}_{c1} + \eta_{c,r_h} \right) \leq 0 \quad (4.25)$$

Proof. 式 (4.18), 式 (4.19) を $\tilde{\delta}_{c1}, \tilde{\delta}_{c2}$ を用いて次のように変形する.

$$\begin{aligned} \eta_{c,r_h-1} &= \eta_{c,r_h-2}^n + K_{r_h-1} \eta_{c,r_h-2} + \delta_{c1} + \tilde{\delta}_{c1} \\ &= \dot{\eta}_{c,r_h-2} + K_{r_h-1} \eta_{c,r_h-2} + \tilde{\delta}_{c1} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \eta_{c,r_h} &= \eta_{c,r_h-2}^{nn} + K_{r_h-1} \eta_{c,r_h-2}^n + K_{r_h} \eta_{c,r_h-1} + \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \hat{\delta}_{c1} + \hat{\delta}_{c2} + \dot{\hat{\delta}}_{c1}, \\ &= \eta_{c,r_h-2}^{nn} + \left(\sum_{j=1}^{r_h-2} K_j + K_{r_h-1} \right) (\delta_{c1} + \tilde{\delta}_{c1}) + \delta_{c2} + \tilde{\delta}_{c2} + \dot{\hat{\delta}}_{c1} \\ &\quad + K_{r_h-1} \eta_{r_h-2}^n + K_{r_h} \eta_{c,r_h-1} \\ &= \dot{\eta}_{c,r_h-2}^n + K_{r_h-1} (\delta_{c1} + \eta_{c,r_h-2}^n) + \dot{\hat{\delta}}_{c1} + \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \tilde{\delta}_{c1} + \tilde{\delta}_{c2} + K_{r_h} \eta_{c,r_h-1} \\ &= \dot{\eta}_{c,r_h-1} + K_{r_h} \eta_{c,r_h-1} + \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \tilde{\delta}_{c1} + \tilde{\delta}_{c2}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

これより各関数 $\eta_{c,i}, (i = 0, \dots, r_h - 1)$ の時間微分は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{c,0} &= \eta_{c,1} - K_1 \eta_{c,0} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\dot{\eta}_{c,r_h-2} = \eta_{c,r_h-1} - K_{r_h-1} \eta_{c,r_h-2} - \tilde{\delta}_{c1} \quad (4.29)$$

$$\dot{\eta}_{c,r_h-1} = -K_{r_h} \eta_{c,r_h-1} - \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \tilde{\delta}_{c1} - \tilde{\delta}_{c2} + \eta_{c,r_h} \quad (4.30)$$

これらに対しバックステッピング法による Lyapunov 関数の設計過程を用いる. まずは次の形の正定関数 V_1 を考える.

$$V_1 = \frac{1}{2} \eta_{c,0}^T \eta_{c,0} \quad (4.31)$$

この関数の時間微分は式 (4.28) を用いて次のように表される.

$$\dot{V}_1 = \eta_{c,0}^T (\eta_{c,1} - K_1 \eta_{c,0}) \quad (4.32)$$

$$= -\eta_{c,0}^T K_1 \eta_{c,0} + \eta_{c,0}^T \eta_{c,1} \quad (4.33)$$

さらにこの V_1 を拡張した正定関数 V_2 を考える.

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}\eta_{c,1}^T \eta_{c,1} \quad (4.34)$$

V_2 の時間微分は次のように表される.

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \eta_{c,1}^T (\eta_{c,2} - K_2 \eta_{c,1}) \quad (4.35)$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_{c,0} \\ \eta_{c,1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -K_1 & \frac{1}{2}I \\ \frac{1}{2}I & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{c,0} \\ \eta_{c,1} \end{bmatrix} + \eta_{c,1}^T \eta_{c,2} \quad (4.36)$$

同様の過程を繰り返して $V_{r_h-1} = \sum_{i=0}^{r_h-2} \frac{1}{2}\eta_{c,i}^T \eta_{c,i}$ を構成し, 式 (4.29) の関係からこの時間微分を求めると次のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{V}_{r_h-1} = & \begin{bmatrix} \eta_{c,0} \\ \eta_{c,1} \\ \vdots \\ \eta_{c,r_h-2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -K_1 & \frac{1}{2}I & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}I & -K_2 & \frac{1}{2}I & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}I & -K_{r_h-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{c,0} \\ \eta_{c,1} \\ \vdots \\ \eta_{c,r_h-2} \end{bmatrix} \\ & + \eta_{c,r_h-2}^T \eta_{c,r_h-1} - \eta_{c,r_h-2}^T \tilde{\delta}_{c1} \end{aligned} \quad (4.37)$$

ここで式 (4.23) を満たすように外乱推定値 $\hat{\delta}_{c1}$ を選んでいるならば次の不等式が成り立つ.

$$\dot{V}_{r_h-1} \leq \begin{bmatrix} \eta_{c,0} \\ \eta_{c,1} \\ \vdots \\ \eta_{c,r_h-2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -K_1 & \frac{1}{2}I & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}I & -K_2 & \frac{1}{2}I & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}I & -K_{r_h-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{c,0} \\ \eta_{c,1} \\ \vdots \\ \eta_{c,r_h-2} \end{bmatrix} + \eta_{c,r_h-2}^T \eta_{c,r_h-1} \quad (4.38)$$

さらに新たな正定関数 $V_{r_h} = V_{r_h-1} + \frac{1}{2}\eta_{c,r_h-1}^T \eta_{c,r_h-1}$ を考え, 式 (4.24) および式 (4.25) を満たすように入力 u および外乱推定値 $\hat{\delta}_{c2}$ を選んでいるならば, この時間微分は次の不等式を満たす.

$$\begin{aligned} \dot{V}_{r_h} &= \dot{V}_{r_h-1} - \eta_{c,r_h-1}^T K_{r_h} \eta_{c,r_h-1} + \eta_{c,r_h-1}^T \left(-\sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \tilde{\delta}_{c1} + \eta_{c,r_h} \right) - \eta_{c,r_h-1}^T \tilde{\delta}_{c2} \\ &\leq \eta_c^T P_\eta \eta_c \end{aligned} \quad (4.39)$$

ただし, $\eta_c = [\eta_{c,0}^T, \dots, \eta_{c,r_h-1}^T]^T$ として定義した. 二次形式の性質より $\dot{V}_{r_h}$ について次の不等式が得られる.

$$\dot{V}_{r_h} \leq 2\lambda_{\max}(P_\eta)V_{r_h} \quad (4.40)$$

ただし, $\lambda_{\max}(P_\eta)$ は行列 P_η の最大固有値を表す. 仮定より P_η は負定行列であり $\dot{V}_{r_h}$ は $\eta_c = 0$ 以外の点において負定関数である. したがって補題 1 より V_{r_h} は指数的に原点へ収束し, η_c も次式に従って指数的に原点へ収束する.

$$\|\eta_c(t)\| \leq \exp(\lambda_{\max}(P_\eta)t)\|\eta_c(0)\| \quad (4.41)$$

□

以後、式 (4.23), (4.24), (4.25) をミスマッチング外乱に対する Robust ES-CLF 制約と呼ぶ。

4.3.2 最適化による安定化制御入力の計算

定理7として得られたミスマッチング外乱に対する Robust ES-CLF 制約条件を用いて安定化のための制御入力を計算することを考える。3章で示した安定化条件と同様に条件 (4.23), (4.24) を満たすように外乱推定値を決定する必要がある。この場合においても GPR を用いて実験データから外乱モデルを同定し、得られたモデルに基づいて外乱推定値を計算する方法を取ることにする。

まずはシステム (4.1) の外乱に関する仮定より、外乱モデルとして次の確率モデルを GPR により同定する。

$$d \sim \mathcal{N}(\mu_d(x, t), \Sigma_d(x, t)) \quad (4.42)$$

ガウス分布に従う確率変数の線形変換に関する補題（補題2）より、出力関数に影響する外乱項 δ_{c1}, δ_{c2} は次のように表すことができる。

$$\delta_{c1} \sim \mathcal{N}(\mu_{\delta_{c1}}(x, t), \Sigma_{\delta_{c1}}(x, t)) \quad (4.43)$$

$$\delta_{c2} \sim \mathcal{N}(\mu_{\delta_{c2}}(x, t), \Sigma_{\delta_{c2}}(x, t)) \quad (4.44)$$

ただし、平均値関数および共分散関数は次のように表される。

$$\mu_{\delta_{c1}}(x, t) = \Gamma_{c1} \mu_d(x, t) \quad (4.45)$$

$$\mu_{\delta_{c2}}(x, t) = \Gamma_{c2} \mu_d(x, t) \quad (4.46)$$

$$\Sigma_{\delta_{c1}}(x, t) = \Gamma_{c1} \Sigma_d(x, t) \Gamma_{c1}^T \quad (4.47)$$

$$\Sigma_{\delta_{c2}}(x, t) = \Gamma_{c2} \Sigma_d(x, t) \Gamma_{c2}^T \quad (4.48)$$

$\Gamma_{c1} := L_{g2} h(x, t)$, $\Gamma_{c2} := L_{g2} L_f h(x, t)$ と定義した。

この確率モデルを用いる事によってミスマッチング外乱に対する Robust ES-CLF 制約条件 (4.23), (4.24), (4.25) をよりロバストな条件に変換することを考える。補題2を用いることで安定化条件 (4.23)~(4.25) 内の $\tilde{\delta}_{c1}$, $\tilde{\delta}_{c2}$ に関わる項も確率変数とみなすことができる。ここで信頼区間パラメータ $k_d \in \mathbb{R}_+$ を導入して分布の有限区間近似を行うことにより、安定化条件 (4.23)~(4.25) に対して次の不等式関係を得る。

$$-\eta_{c, r_h-2}^T \tilde{\delta}_{c1} \leq -\eta_{c, r_h-2}^T \left(\hat{\delta}_{c1} - \mu_{\delta_{c1}} \right) + k_d \sqrt{\eta_{c, r_h-2}^T \Sigma_{\delta_{c1}} \eta_{c, r_h-2}} \quad (4.49)$$

$$-\eta_{c, r_h-1}^T \tilde{\delta}_{c2} \leq -\eta_{c, r_h-1}^T \left(\hat{\delta}_{c2} - \mu_{\delta_{c2}} \right) + k_d \sqrt{\eta_{c, r_h-1}^T \Sigma_{\delta_{c2}} \eta_{c, r_h-1}} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
& \eta_{c,r_h-1}^T \left(- \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \tilde{\delta}_{c1} + \eta_{c,r_h} \right) \\
& \leq -\eta_{c,r_h-1}^T \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \left(\hat{\delta}_{c1} - \mu_{\delta_{c1}} \right) + k_d \sqrt{\eta_{c,r_h-1}^T \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \Sigma_{\delta_{c1}} \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j^T \eta_{c,r_h-1}} \\
& \quad + \eta_{c,r_h-1}^T \eta_{c,r_h}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

これらの式より外乱モデルを考慮したロバストな安定化条件として次の不等式を用いる事ができる。

$$-\eta_{c,r_h-2}^T \left(\hat{\delta}_{c1} - \mu_{\delta_{c1}} \right) + k_d \sqrt{\eta_{c,r_h-2}^T \Sigma_{\delta_{c1}} \eta_{c,r_h-2}} \leq 0 \tag{4.52}$$

$$-\eta_{c,r_h-1}^T \left(\hat{\delta}_{c2} - \mu_{\delta_{c2}} \right) + k_d \sqrt{\eta_{c,r_h-1}^T \Sigma_{\delta_{c2}} \eta_{c,r_h-1}} \leq 0 \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
& -\eta_{c,r_h-1}^T \left\{ \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \left(\hat{\delta}_{c1} - \mu_{\delta_{c1}} \right) - \eta_{c,r_h} \right\} + k_d \sqrt{\eta_{c,r_h-1}^T \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \Sigma_{\delta_{c1}} \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j^T \eta_{c,r_h-1}} \leq 0
\end{aligned} \tag{4.54}$$

得られた式 (4.52)～(4.54) のロバスト安定化条件を用いて制御入力を計算する最適化問題を構成していく。式 (4.52)～(4.54) の制約条件を用いるにあたり、これらの制約関数は制御入力 u および外乱推定値 $\hat{\delta}_{c1}, \hat{\delta}_{c2}$ の積を含むため、通常の二次計画問題として構成することができない。そこで最適化問題を2段階で階層的に解くことによって凸二次計画問題のみで構成される形のコントローラを考える。最初に式 (4.52) の制約を満たす外乱推定値 $\hat{\delta}_{c1}$ を最適化によって計算し、この値を利用して η_{c,r_h-1} を計算する。同時に微分値 $\dot{\hat{\delta}}_{c1}$ を前ステップの値 $\hat{\delta}_{c1prev}$ からサンプリング周期を Δt として数値微分により計算する。微分の計算には [56] 等の微分器を利用することも可能である。その後、得られた $\eta_{c,r_h-1}, \dot{\hat{\delta}}_{c1}$ を用いて式 (4.53), (4.54) を満たす制御入力 u および $\hat{\delta}_{c2}$ を最適化によって求める。このアルゴリズムは表 4.1 のように与えられる。ただし、 $W_{ui}, (i = 0, 1, 2)$ は重みパラメータである。この場合にも許容解を得るために式 (4.54) の制約に緩和項 s_r を入れて緩和問題にしていることに注意されたい。

数値例 4 : 2次元非線形システムに対する制御

表 4.1 に示す Robust CLF-QP コントローラの制御性能を検証するため、本節では [53] で提案されている2次元非線形システムモデルに対する制御問題を扱う。このモデルは次の微分方程式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1^2 + 3x_1 + x_2 \\ \sin x_2 - \cos x_1 + x_1 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 + \sin x_1) d_{sub,1} \\ d_{sub,2} \end{bmatrix} \\
&= f(x) + g_1(x)u + g_2 d(x, t),
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Table 4.1: Robust CLF-QP Controller for Mismatching Disturbances

Robust CLF-QP for Mismatching Disturbances

STEP 1 : Calculate $\hat{\delta}_{c1}$

$$\hat{\delta}_{c1*} = \underset{\hat{\delta}_{c1}}{\operatorname{argmin}} \quad \frac{1}{2}(\hat{\delta}_{c1} - \hat{\delta}_{c1prev})^T(\hat{\delta}_{c1} - \hat{\delta}_{c1prev}) \quad (4.55)$$

$$\text{s.t.} \quad -\eta_{c,r_h-2}^T \left(\hat{\delta}_{c1} - \mu_{\delta_{c1}} \right) + k_d \sqrt{\eta_{c,r_h-2}^T \Sigma_{\delta_{c1}} \eta_{c,r_h-2}} \leq 0$$

(Robust CLF Constraints 1)

STEP 2 : Calculate $\eta_{c,r_h-1}, \dot{\hat{\delta}}_{c1}$

$$\eta_{c,r_h-1} = \eta_{c,r_h-2}^n + K_{r_h-1} \eta_{c,r_h-2} + \hat{\delta}_{c1*} \quad (4.56)$$

$$\dot{\hat{\delta}}_{c1} = \frac{\hat{\delta}_{c1*} - \hat{\delta}_{c1prev}}{\Delta t} \quad (4.57)$$

STEP 3 : Calculate $u, \hat{\delta}_{c2}$

$$u_* = \underset{u, \hat{\delta}_{c2}, s_r}{\operatorname{argmin}} \quad \frac{1}{2} u^T W_{u0} u + \frac{1}{2} \hat{\delta}_{c2}^T W_{u1} \hat{\delta}_{c2} + \frac{1}{2} W_{u2} s_r^2 \quad (4.58)$$

$$\text{s.t.} \quad -\eta_{c,r_h-1}^T \left(\hat{\delta}_{c2} - \mu_{\delta_{c2}} \right) + k_d \sqrt{\eta_{c,r_h-1}^T \Sigma_{\delta_{c2}} \eta_{c,r_h-1}} \leq 0$$

$$-\eta_{c,r_h-1}^T \left\{ \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \left(\hat{\delta}_{c1*} - \mu_{\delta_{c1}} \right) - \eta_{c,r_h} \right\} + k_d \sqrt{\eta_{c,r_h-1}^T \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \Sigma_{\delta_{c1}} \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j^T \eta_{c,r_h-1}} \leq s_r$$

(Robust CLF Constraints 2)

$$A_c u \leq B_c \quad \text{(Other Constraints)}$$

ただし, $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2, d = [d_1, d_2]^T \in \mathbb{R}^2$ であり, d_1, d_2 は次の線形システムによって生成される外乱項とする.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w_{1a} \\ w_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1a} \\ w_{1b} \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

$$d_{sub,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1a} \\ w_{1b} \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w_{2a} \\ w_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{2a} \\ w_{2b} \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$

$$d_{sub,2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{2a} \\ w_{2b} \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

このシステムにおける制御目標は状態 $x_1(t)$ を目標軌道 $x_{1d}(t)$ に収束させることとし, 次の出力関数の零化制御を考える.

$$y_c = h(x, t) = x_1 - x_{1d}(t) \quad (4.64)$$

この出力関数 $h(x)$ はシステム (4.59) において IRD 2, DRD 1 を持つ. 本シミュレーションでは比較のため, 提案手法である表 4.1 の Robust CLF-QP コントローラと次式で定義される入出力線形化に基づく出力零化コントローラ (IOL based Contoller) の二つのコントローラを用いて結果を検証する.

$$u = -L_{g_1} L_f h^{-1} \left(L_f^2 h + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + v_{OF} \right) \quad (4.65)$$

$$v_{OF} = k_1 h + k_2 \dot{h} \quad (4.66)$$

ただし, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ は制御ゲインである. 式 (4.65) で定義されるコントローラは外乱 $d(x, t)$ の影響を考慮しないノミナルコントローラであることに注意されたい. それぞれのコントローラで計算される制御入力 u はサンプリング周期 Δt で零次ホールドされた値がシステムに入力されるとする. また, 制御入力に対して $|u| \leq 6$ として制約条件を課す.

制御に用いる外乱モデルは式 (4.42) の形で GPR により同定することとし, モデルの同定には式 (4.65) のノミナルコントローラを用いて N_s 個の定数目標値 $x_{1d} \in [0.4, 0.6]$ に対してそれぞれ制御を行った結果をトレーニングデータとして利用する. 入力のトレーニングデータはサンプリング周期 Δt で観測された状態および時間のデータ列 $x[k], t[k], (k = 0, \dots, N)$ を用い, 出力のトレーニングデータである外乱 $d[k]$ の値は次式を用いてデータから推定した値を用いる.

$$d_1[k] = \frac{x_1[k+1] - x_1[k-1]}{2\Delta t} - (x_1[k]^2 + 3x_1[k] + x_2[k]) \quad (4.67)$$

$$d_2[k] = \frac{x_2[k+1] - x_2[k-1]}{2\Delta t} - (\sin x_2[k] - \cos x_1[k] + x_1[k] + x_2[k]) - (1 + x_1[k]^2 + x_2[k]^2) u[k] \quad (4.68)$$

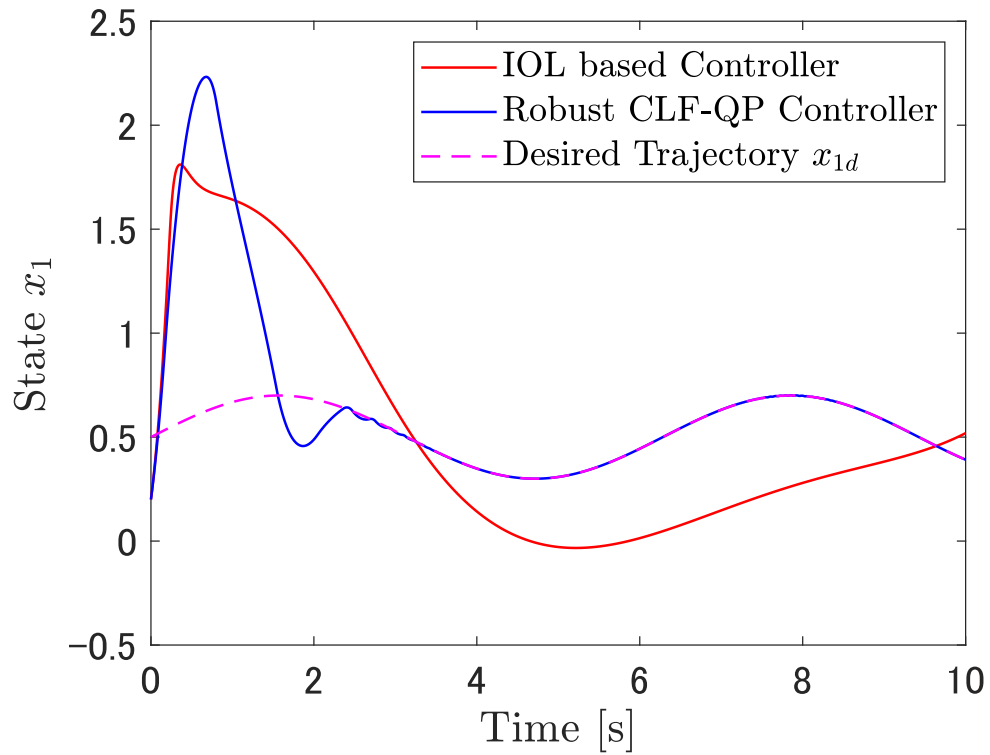
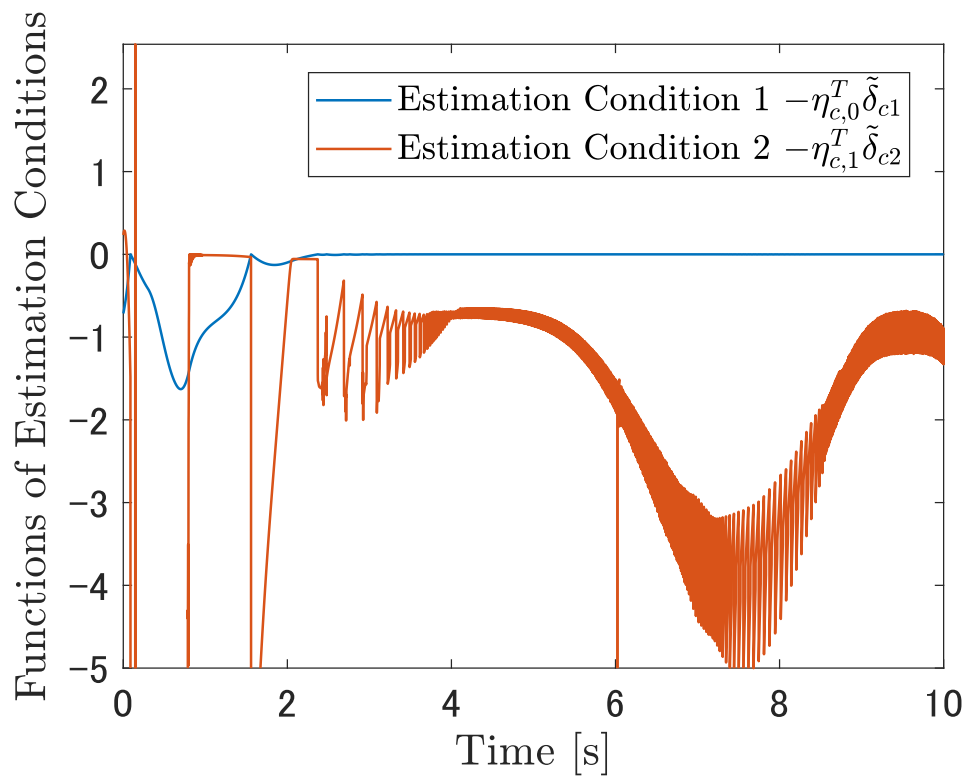
Fig 4.1: Trajectories of State x_1 

Fig 4.2: Disturbance Estimation Results

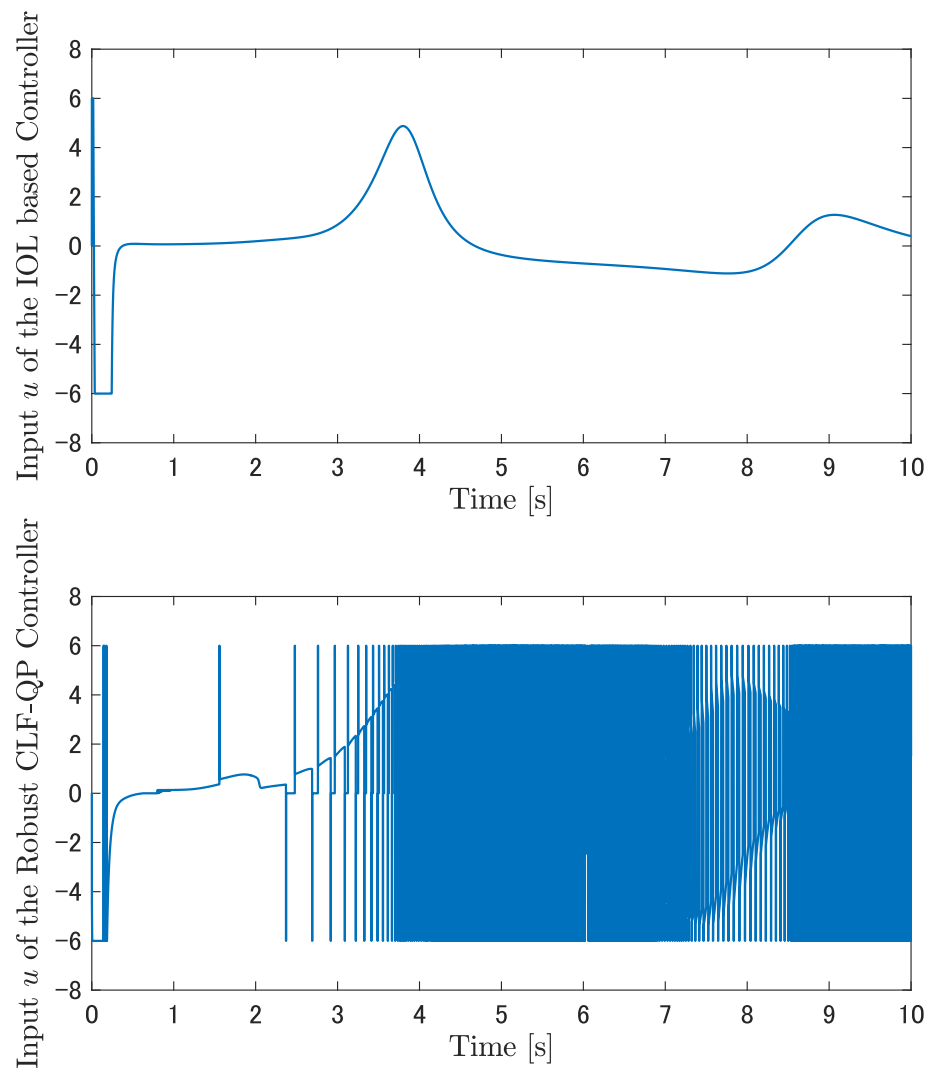


Fig 4.3: Control Input of Two Controllers

Table 4.2: Model & Control Parameters in the Numerical Example 4

$k_p = 3.0$	$K_1 = 1.0$	$K_2 = 1.0$	$W_{u0} = 50$
$W_{u1} = 0.0$	$W_{u2} = 1.0 \times 10^3$	$\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$	$k_1 = 1.0 \times 10^2$
$k_2 = 20$	$a_{1d} = 0.5$	$b_{1d} = 0.2$	$N_s = 5$
$N_d = 500$			

この式は式 (4.59) において $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ のダイナミクスを抜き出し, d_1, d_2 について解いたものである. 各式の右辺第 1 項は $\dot{x}_1[k], \dot{x}_2[k]$ を中央差分によってデータから推定する形になっていることに注意されたい. 最終的に得られたデータから抽出した N_d 個のデータセットを用いて外乱モデルの学習を行う.

次の目標軌道 x_{1d} に対して式 (4.65) のノミナル出力零化コントローラと提案手法である表 4.1 に示す Robust CLF-QP コントローラを用いて制御を行った結果を示す.

$$x_{1d}(t) = a_{1d} + b_{1d} \sin t \quad (4.69)$$

ただし, $a_{1d}, b_{1d} \in \mathbb{R}$ は定数パラメータである. 目標軌道等のコントローラのパラメータを表 4.2 に示す. まず図 4.1 はそれぞれのコントローラを用いた場合の状態 x_1 の軌道を表している. ノミナルコントローラの場合には外乱の影響を受けてしまい目標軌道 x_{1d} に対して大きく偏差が残ってしまっているが, Robust CLF-QP コントローラの場合には 2 秒前後で目標軌道に収束できていることが分かる. Robust CLF-QP コントローラを用いた場合における外乱推定条件 (4.29), (4.30) の左辺の関数の値を図 4.2 に示す. シミュレーション時間 $t \in [0, 10]$ のほぼすべての時間においてこれらの関数の値が負となっていることから, 式 (4.29), (4.30) の推定条件を満たす有効な外乱推定値を得られていることが読み取れる. したがってこれらの結果より提案手法である Robust CLF-QP コントローラによってミスマッチング外乱の影響を考慮した出力零化制御が実現できていることが確認できた. しかし, 図 4.3 に示すようにこのコントローラにおいても制御入力を離散的に計算していることから, 出力関数の値が 0 となる近傍でチャタリング現象が生じてしまうことに注意されたい.

4.4 ミスマッチング外乱の影響を考慮した制約保証条件

4.4.1 ミスマッチング外乱に対する Robust MECBF 制約の導出

本節では前述の制御目標のうち, システム (4.1) において与えられた状態制約関数 $B(x, t) \geq 0$ を時刻 $t \in [0, \infty]$ において保証するための条件を導出する. この条件は 3 章で提案したマッチング外乱に対する Robust MECBF 制約を拡張することによって得られるものである.

まずは式 (4.8)~式 (4.10) で与えられる状態制約関数 $B(x, t)$ の時間微分を用い, 前節の

Robust ES-CLF 制約を構成する際に利用した関数と同様の関数 $\bar{y}_i$ を考える.

$$\bar{y}_i(x, t) := \left\{ \prod_{j=0}^i \left(\frac{d}{dt} + p_j \right) \right\} B(x, t), \quad (i = 0, \dots, r_b - 2) \quad (4.70)$$

$$\bar{y}_{r_b-1}(x, \hat{\Delta}_b, t) := \bar{y}_{r_b-2}^n + p_{r_b-1} \bar{y}_{r_b-2} + \hat{\delta}_{b1} \quad (4.71)$$

$$\bar{y}_{r_b}(x, u, \hat{\Delta}_b, t) := \bar{y}_{r_b-2}^{nn} + p_{r_b-1} \bar{y}_{r_b-2}^n + p_{r_b} \bar{y}_{r_b-1} + \sum_{j=1}^{r_b-1} p_j \hat{\delta}_{b1} + \hat{\delta}_{b2} + \dot{\hat{\delta}}_{b1} \quad (4.72)$$

ただし, $\hat{\delta}_{b1}, \hat{\delta}_{b2} \in \mathbb{R}$ は外乱 δ_{b1}, δ_{b2} の推定値であり, $\hat{\Delta}_b = [\hat{\delta}_{b1}, \hat{\delta}_{b2}, \dot{\hat{\delta}}_{b1}]^T \in \mathbb{R}^3$ と定義した. また, $p_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \dots, r_b)$ は設計パラメータである. $\bar{y}_{r_b-2}^n, \bar{y}_{r_b-2}^{nn}$ は外乱項 δ_{b1}, δ_{b2} を除いたノミナル項であり, 次式で定義される.

$$\begin{aligned} \bar{y}_{r_b-2}^n &:= \dot{\bar{y}}_{r_b-2} - \delta_{b1}, \\ &= L_f^{r_b-1} B(x, t) + \delta_1 + \frac{\partial^{r_b-1}}{\partial t^{r_b-1}} B(x, t) + \dots + \prod_{j=1}^{r_b-2} p_j \dot{B}(x, t) - \delta_{b1} \\ &= L_f^{r_b-1} B(x, t) + \dots + \prod_{j=1}^{r_b-2} p_j \dot{B}(x, t) \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{r_b-2}^{nn} &:= \dot{\bar{y}}_{r_b-2}^n - \sum_{j=1}^{r_b-2} p_j \delta_{c1} - \delta_{b2} \\ &= L_f^{r_b} B(x, t) + L_{g1} L_f^{r_b-1} B(x, t) u + \delta_{b2} + \frac{\partial^{r_b}}{\partial t^{r_b}} B(x, t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r_b-2} p_j \left(L_f^{r_b-1} B(x, t) + \delta_{b1} + \frac{\partial^{r_b-1}}{\partial t^{r_b-1}} B(x, t) \right) + \dots + \prod_{j=1}^{r_b-2} p_j \ddot{B}(x, t) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{r_b-2} p_j \delta_{b1} - \delta_{b2} \\ &= L_f^{r_b} B(x, t) + L_{g1} L_f^{r_b-1} B(x, t) u + \dots + \prod_{j=1}^{r_b-2} p_j \ddot{B}(x, t) \end{aligned} \quad (4.74)$$

これらの関数 $\bar{y}_i$ を用いてミスマッチング外乱に対する Robust MECBF を定義する.

定義 15 (ミスマッチング外乱に対する Robust MECBF). 連続時間システム (4.1) および IRD r_b , DRD $r_b - 1$ を持つ状態制約関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ によって定義される集合 $\mathcal{C}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x, t) \geq 0\}$ を考える. また, 式 (4.70), (4.71), (4.72) の出力関数を考える. このとき, 次の条件を満たすパラメータ $p_i, (i = 1, \dots, r_b)$ および外乱推定値 $\hat{\Delta}_b$ が存在し, $B(x_0, 0) \geq 0$ のとき時刻 $t \in [0, \infty]$ において $B(x, t) \geq 0$ が満たされるならば関数 $B(x, t)$ をミスマッチング外乱に対する Robust MECBF であるという.

$$\sup_u \left[\bar{y}_{r_b}(x, u, \hat{\Delta}_b, t) \right] \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{C}_0 \quad (4.75)$$

ここで外乱推定誤差 $\tilde{\delta}_{b1} := \hat{\delta}_{b1} - \delta_{b1}$, $\tilde{\delta}_{b2} := \hat{\delta}_{b2} - \delta_{b2}$ を導入することにより, 次の定理が成り立つ.

定理 8 (ミスマッチング外乱に対する Robust MECBF 制約). 式 (4.1) で定義されるシステムと $B(x_0, 0) \geq 0$ を満たし, IRD r_b , DRD $r_b - 1$ を持つ関数 $B(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, および式 (4.70), (4.71), (4.72) で定義される出力関数 $\bar{y}_i$ ($i = 0, \dots, r_b$) を考える. ただし $\bar{y}_i$ を定義するパラメータ p_i は次式を満たすように選ばれているとする.

$$p_i = \max \left(\epsilon_b, -\frac{\dot{\bar{y}}_{i-1}(x_0, 0)}{\bar{y}_{i-1}(x_0, 0)} \right), \quad (i = 1, \dots, r_b - 2) \quad (4.76)$$

$$p_{r_b-1} = \max \left(\epsilon_b, -\frac{\bar{y}_{r_b-2}^n(x_0, 0) + \hat{\delta}_{b1}(0)}{\bar{y}_{r_b-2}(x_0, 0)} \right) \quad (4.77)$$

$$p_{r_b} = \epsilon_b \quad (4.78)$$

ただし, $\epsilon_b \in \mathbb{R}_+$ は正の定数パラメータである. このとき, 次の条件を満たす入力 u および外乱推定値 $\hat{\delta}_{b1}, \tilde{\delta}_{b1}, \hat{\delta}_{b2}$ は $B(x, t)$ をミスマッチング外乱に対する Robust MECBF とする.

$$\bar{y}_{r_b}(x, u, \hat{\Delta}_b, t) \geq 0 \quad (4.79)$$

$$\tilde{\delta}_{b1} \leq 0 \quad (4.80)$$

$$\tilde{\delta}_{b2} \leq 0 \quad (4.81)$$

Proof. 定理 8 は定理 4 の証明と同様の過程を用いて示すことができる. 最初に式 (4.73), (4.74) で表される $\bar{y}_{r_b-2}^n, \bar{y}_{r_b-2}^{nn}$ の定義より関数 $\bar{y}_{r_b-1}$ および $\bar{y}_{r_b}$ を次のように変形する.

$$\begin{aligned} \bar{y}_{r_b-1} &= \bar{y}_{r_b-2}^n + p_{r_b-1} \bar{y}_{r_b-2} + \delta_1 + \tilde{\delta}_1 \\ &= \dot{\bar{y}}_{r_b-2} + p_{r_b-1} \bar{y}_{r_b-2} + \tilde{\delta}_1 \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{r_b} &= \bar{y}_{r_b-2}^{nn} + p_{r_b-1} \bar{y}_{r_b-2}^n + p_{r_b} \bar{y}_{r_b-1} + \sum_{j=1}^{r_b-1} p_j \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 + \dot{\hat{\delta}}_1, \\ &= \bar{y}_{r_b-2}^{nn} + \left(\sum_{j=1}^{r_b-2} p_j + p_{r_b-1} \right) (\delta_1 + \tilde{\delta}_1) + \delta_2 + \tilde{\delta}_2 + \dot{\hat{\delta}}_1 + p_{r_b-1} \bar{y}_{r_b-2}^n + p_{r_b} \bar{y}_{r_b-1} \\ &= \dot{\bar{y}}_{r_b-2}^n + p_{r_b-1} (\delta_1 + \bar{y}_{r_b-2}^n) + \dot{\hat{\delta}}_1 + \sum_{j=1}^{r_b-1} p_j \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2 + p_{r_b} \bar{y}_{r_b-1} \\ &= \dot{\bar{y}}_{r_b-1} + p_{r_b} \bar{y}_{r_b-1} + \sum_{j=1}^{r_b-1} p_j \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2. \end{aligned} \quad (4.83)$$

この表現を利用し, 関数 $\bar{y}_i$, ($i = 1, \dots, r_b - 1$) を要素にもつベクトル $\bar{\eta}_y := [\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{r_b-1}]^T \in \mathbb{R}^{r_b}$ を定義することによって状態制約関数 $B(x, t)$ を出力とする次の線形システムを考えること

ができる.

$$\frac{d}{dt}\bar{\eta}_y = A_y\bar{\eta}_y(x,t) + \bar{B}_y \begin{bmatrix} \bar{y}_{r_b}(x,u,\hat{\Delta}_b,t) \\ -\tilde{\delta}_1 \\ -\tilde{\delta}_2 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$B(x,t) = C_y\bar{\eta}_y(x,t) \quad (4.85)$$

ただし, A_y, C_y は前章の式 (3.28) で定義される定数行列であり, $\bar{B}_y \in \mathbb{R}^{r_b \times 3}$ は次式で定義される定数行列である.

$$\bar{B}_y := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \sum_{j=1}^{r_b-1} p_j & 1 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

このシステムにおいて $B(x_0, 0) \geq 0$ および式 (4.76), (4.77) の仮定から状態ベクトルの初期値 $\bar{\eta}_y(x_0, 0)$ は非負の値をとり, 式 (4.79)~(4.81) の条件から入力 $[\bar{y}_{r_b}(x,u,\hat{\Delta}_b,t), -\tilde{\delta}_1, -\tilde{\delta}_2]^T$ も非負の値をとる. ここで式 (4.76), (4.77), (4.78) の仮定より行列 A_y は安定な Metzler 行列, 行列 $\bar{B}_y, C_y$ は非負行列であるため, 連続時間非負線形システムの補題 (補題 3) よりシステム (4.84) は非負線形システムの条件を満たす. よってシステム (4.84) の出力 $B(x,t)$ もまたすべての時刻において非負の値をとる. なお, システムの解軌道に沿った $B(x,t)$ の軌道は次の不等式を満たす.

$$B(x,t) \geq C_y e^{A_y t} \bar{\eta}_y(x_0, 0) \geq 0 \quad (4.87)$$

A_y は $-\epsilon_b$ 以下の最大固有値を持つ安定行列であることから $B(x,t)$ の下限 $C_y e^{A_y t} \bar{\eta}_y(x_0, 0)$ は原点へ指数収束していく. $\square$

注意 7. 以後, 式 (4.79), (4.80), (4.81) をミスマッチング外乱に対する Robust MECBF 制約と呼ぶ. これらの条件式において実際の外乱 δ_{b1} の微分値 $\dot{\delta}_{b1}$ は現れないことに注意されたい. また, 式 (4.72), (4.73), (4.74) の構造により, 式 (4.79) は制御入力 u および外乱推定値 $\hat{\delta}_{b1}, \hat{\delta}_{b2}, \hat{\delta}_{b1}$ に対する線形不等式となっているため, 後述するように二次計画問題の制約条件として用いることができる.

4.4.2 最適化による状態制約を満たす制御入力の計算

定理 8 として得られたミスマッチング外乱に対する Robust MECBF 制約条件を用いて与えられた状態制約条件を満たす制御入力を最適化問題を通じて計算する. 外乱推定値の決定に関しても前節同様に GPR を用いてデータから外乱モデルを同定し, 得られたモデルに基づいて条件 (4.80), (4.81) を満たすような外乱推定値を計算する.

式 (4.42) の形で GPR により外乱モデルが同定されているとすると、やはり補題 2 を用いることによって関数 $\bar{y}_{r_b-1}, \bar{y}_{r_b}$ に現れる外乱の影響 δ_{b1}, δ_{b2} もガウス分布に従う確率変数としてモデル化できる.

$$\delta_{b1} \sim \mathcal{N}(\mu_{\delta_{b1}}(x, t), \sigma_{\delta_{b1}}^2(x, t)) \quad (4.88)$$

$$\delta_{b2} \sim \mathcal{N}(\mu_{\delta_{b2}}(x, t), \sigma_{\delta_{b2}}^2(x, t)) \quad (4.89)$$

ただし, 平均値関数 $\mu_{\delta_{b1}}, \mu_{\delta_{b2}}$ および共分散関数 $\sigma_{\delta_{b1}}^2, \sigma_{\delta_{b2}}^2$ は次の式で表される.

$$\mu_{\delta_{b1}}(x, t) := L_{g_2} L_f^{r_b-2} B(x, t) \mu_d(x, t), \quad (4.90)$$

$$\mu_{\delta_{b2}}(x, t) := L_{g_2} L_f^{r_b-1} B(x, t) \mu_d(x, t), \quad (4.91)$$

$$\sigma_{\delta_{b1}}^2(x, t) := L_{g_2} L_f^{r_b-2} B(x, t) \Sigma_d(x, t) L_{g_2} L_f^{r_b-2} B(x, t)^T, \quad (4.92)$$

$$\sigma_{\delta_{b2}}^2(x, t) := L_{g_2} L_f^{r_b-1} B(x, t) \Sigma_d(x, t) L_{g_2} L_f^{r_b-1} B(x, t)^T. \quad (4.93)$$

この確率モデルより, 信頼区間パラメータ $k_d \in \mathbb{R}_+$ を用いて外乱の推定条件 (4.80), (4.81) の上界を次のように近似する.

$$\tilde{\delta}_{b1} \leq \hat{\delta}_{b1} - \mu_{\delta_{b1}} + k_d \sigma_{\delta_{b1}} \quad (4.94)$$

$$\tilde{\delta}_{b2} \leq \hat{\delta}_{b2} - \mu_{\delta_{b2}} + k_d \sigma_{\delta_{b2}} \quad (4.95)$$

したがって同定された外乱モデルの不確かさを考慮したロバストな外乱推定条件として次の不等式制約が利用できる.

$$\hat{\delta}_{b1} - \mu_{\delta_{b1}} + k_d \sigma_{\delta_{b1}} \leq 0 \quad (4.96)$$

$$\hat{\delta}_{b2} - \mu_{\delta_{b2}} + k_d \sigma_{\delta_{b2}} \leq 0 \quad (4.97)$$

式 (4.79) の条件およびロバストな外乱推定条件である式 (4.96), (4.97) を利用して最適化問題を構築する. しかし, 前節の Robust CLF-QP と同様に外乱推定値 $\hat{\delta}_{b1}$ に関してはその時間微分 $\dot{\hat{\delta}}_{b1}$ も用いる制約条件の中に現れているため, 次の CBF 制約を考えることで $\dot{\hat{\delta}}_{b1}$ のみを最適化変数として考えることにする.

$$-\dot{\hat{\delta}}_{b1} + \dot{F}_{\delta_{b1}} + \gamma_{\delta_{b1}} \left(-\hat{\delta}_{b1} + F_{\delta_{b1}} \right) \geq 0 \quad (4.98)$$

$$F_{\delta_{b1}} := \mu_{\delta_{b1}} - k_d \sigma_{\delta_{b1}} \quad (4.99)$$

式 (4.98) は $\dot{\hat{\delta}}_{b1}$ に関する線形不等式であり, これを満たすような $\dot{\hat{\delta}}_{b1}$ を用いることによって間接的に式 (4.80) の推定条件を満たすことができる. ただし, 制約式中の $\hat{\delta}_{b1}$ は次式のように $\dot{\hat{\delta}}_{b1}$ を時間について積分することによって求める.

$$\hat{\delta}_{b1}(t) = \hat{\delta}_{b1}(0) + \int_0^t \dot{\hat{\delta}}_{b1}(\tau) d\tau \quad (4.100)$$

ここで $F_{\delta_{b1}}$ は x, t の関数であり, $\dot{F}_{\delta_{b1}}$ の解析的な形は得られた GPR モデルの勾配を計算することによって求めることができることに注意されたい. しかし, 予測時の勾配推定の計

算コストが増加することや、GPR モデルを学習する際のトレーニングデータが少ない場合には十分な精度で潜在関数の勾配が推定できないという点を加味し、本論文では数値微分を用いて $\dot{F}_{\delta_{b1}}$ の値を $F_{\delta_{b1}}$ の値から推定する形を取る。

これらの制約条件をふまえ、制御入力および外乱推定値を計算するためのコントローラを表 4.3 のように構築する。ただし、出力関数の安定化を同時に考えるため、前節で提案した Robust ES-CLF 制約を併用した段階的な最適化問題として構成しており、前節の Robust CLF-QP と同様に ES-CLF 制約に関しては許容解を得るために緩和項 s_r を導入している。また、 W_{ui} , ($i = 0, \dots, 4$) は重みパラメータである。

注意 8. MECBF $B(x, t)$ はスカラー関数であり、式 (4.104) の最適化問題における Robust MECBF 制約は一つの状態制約のみを保証する条件であることに注意されたい。そのため、守るべき状態制約が複数個ある場合にはその個数分 Robust MECBF 制約を加える必要がある。このとき同時に考慮する複数の MECBF はそれぞれの関数における IRD と DRD の差が 1 以下である限り、互いの IRD がそれぞれ異なってもよい。

数値例 5：磁気浮上システムにおける浮上体の位置制御

式 (4.101)～(4.104) で与えられるコントローラの制御性能を検証するため、本節ではミスマッチング外乱を受ける磁気浮上システムにおける浮上体の位置制御問題を扱う。文献 [54] [55] で提案された磁気浮上システムモデルは次の非入力アファインシステムとして表現される。

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.105)$$

$$\dot{x}_2 = g_0 - \frac{k_0}{(l_0 + x_1)^2} u^2 + d(x, u, t) \quad (4.106)$$

ただし、 $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ は状態ベクトルであり、 x_1, x_2 はそれぞれ浮上体の鉛直方向位置と速度を表す状態である。 $u \in \mathbb{R}$ は制御入力であり、 $g_0 \in \mathbb{R}$ は重力加速度、 $k_0, l_0 \in \mathbb{R}$ はシステムの物理パラメータを表す。 $d(x, u, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は外乱を表す関数であり、次式のようにパラメータ k_0 のモデル化誤差の影響と外乱トルク $F_{ext}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の合成トルクを仮定する。

$$d(x, u, t) = -\frac{\Delta k_0}{(l_0 + x_1)^2} u^2 + F_{ext}(t) \quad (4.107)$$

$$F_{ext}(t) = a_{ext} + b_{ext} \sin(c_{ext} t) \quad (4.108)$$

ただし、 $a_{ext}, b_{ext}, c_{ext} \in \mathbb{R}$, $\Delta k_0 \in \mathbb{R}$ は定数パラメータである。

注意 6 で述べたように式 (4.105), (4.106) で表される非入力アファインシステムは制御入力の時間微分 $\dot{u}$ を新たな入力として導入することにより、次の入力アファインシステムに変換することが可能である。

$$\dot{x}_e = f(x_e) + g_1 \dot{u} + g_2 d(x_e, t) \quad (4.109)$$

Table 4.3: Robust CLF-CBF-QP Controller for Mismatching Disturbances

Robust CLF-CBF-QP for Mismatching DisturbancesSTEP 1 : Calculate $\hat{\delta}_{c1}$

$$\hat{\delta}_{c1*} = \underset{\hat{\delta}_{c1}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}(\hat{\delta}_{c1} - \hat{\delta}_{c1prev})^T(\hat{\delta}_{c1} - \hat{\delta}_{c1prev}) \quad (4.101)$$

$$\text{s.t.} \quad -\eta_{c,r_h-2}^T \left(\hat{\delta}_{c1} - \mu_{\delta_{c1}} \right) + k_d \sqrt{\eta_{c,r_h-2}^T \Sigma_{\delta_{c1}} \eta_{c,r_h-2}} \leq 0$$

(Robust CLF Constraints 1)

STEP 2 : Calculate $\eta_{c,r_h-1}, \dot{\delta}_{c1}$

$$\eta_{c,r_h-1} = \eta_{c,r_h-2}^n + K_{r_h-1} \eta_{c,r_h-2} + \hat{\delta}_{c1*} \quad (4.102)$$

$$\dot{\delta}_{c1} = \frac{\hat{\delta}_{c1*} - \hat{\delta}_{c1prev}}{\Delta t} \quad (4.103)$$

STEP 3 : Calculate $u, \hat{\delta}_{c2}, \dot{\delta}_{b1}, \dot{\delta}_{b2}$

$$u_* = \underset{u, \hat{\delta}_{c2}, \dot{\delta}_{b1}, \dot{\delta}_{b2}, s_r}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} u^T W_{u0} u + \frac{1}{2} W_{u1} s_r^2 + \frac{1}{2} W_{u2} \hat{\delta}_{c2}^2 + \frac{1}{2} W_{u3} \dot{\delta}_{b1}^2 + \frac{1}{2} W_{u4} \dot{\delta}_{b2}^2 \quad (4.104)$$

$$\text{s.t.} \quad -\eta_{c,r_h-1}^T \left(\hat{\delta}_{c2} - \mu_{\delta_{c2}} \right) + k_d \sqrt{\eta_{c,r_h-1}^T \Sigma_{\delta_{c2}} \eta_{c,r_h-1}} \leq 0$$

$$-\eta_{c,r_h-1}^T \left\{ \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \left(\hat{\delta}_{c1*} - \mu_{\delta_{c1}} \right) + \eta_{c,r_h} \right\} + k_d \sqrt{\eta_{c,r_h-1}^T \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j \Sigma_{\delta_{c1}} \sum_{j=1}^{r_h-1} K_j^T \eta_{c,r_h-1}} \leq s_r$$

(Robust CLF Constraints 2)

$$\bar{y}_{r_b}(x, u, \hat{\Delta}_b, t) \geq 0$$

$$\dot{F}_{\delta_{b1}} + \gamma_{\delta_{b1}} F_{\delta_{b1}} \geq 0$$

$$\hat{\delta}_{b2} - \mu_{\delta_{b2}} + k_d \sigma_{\delta_{b2}} \leq 0 \quad (\text{Robust MECBF Constraints})$$

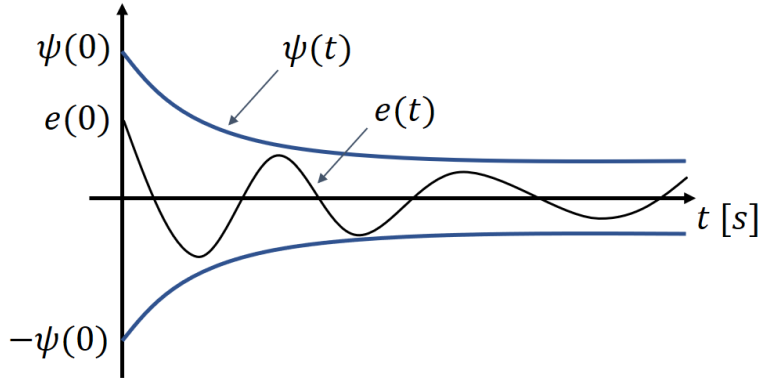
$$A_c u \leq B_c \quad (\text{Other Constraints})$$

ただし, $x_e := [x_1, x_2, u]^T \in \mathbb{R}^3$ であり, 各項は次のように定義される.

$$f(x_e) := \begin{bmatrix} x_2 \\ g_0 - \frac{k_0}{(l_0 + x_1)^2} u^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

Table 4.4: Model & Control Parameters in the Numerical Example 5

$g_0 : 9.81$	$k_0 : 21.3$	$\Delta k_0 : -1.07$	$l_0 : 0.002$	$a_{\psi 1} : 0.0005$
$a_{\psi 2} : 0.02$	$a_{\psi 3} : 1$	$x_{1lb} : -0.002$	$b_{1d} : 0.03$	$b_{2d} : 0.01$
$k_1 : 3000$	$k_2 : 650$	$k_3 : 45$	$\epsilon_b : 10$	$k_d : 3$
$\gamma_1 : 10$	$\Delta t : 0.001$	$N_d : 500$	$N_s : 5$	$W_{u0} : 100$
$W_{u1} : 5000$	$W_{u2} : 0$	$W_{u3} : 0$	$W_{u4} : 0$	$a_{ext} : 0.2$
$b_{ext} : 0.1$	$c_{ext} : 0.1$			

Fig 4.4: Illustration of Error Trajectory $e(t)$ inside The Funnel-like Set F_ψ

以後, この入力アファインシステムに対して Robust CLF-CBF-QP を設計する.

このシステムにおける制御目標は外乱の影響 $d(x_e, t)$ を考慮して浮上体の位置 x_1 を目標値 x_{1d} に制御することである. 特に図 4.4 のような Funnel-like set F_ψ を設計し, 浮上体の目標値と実際の位置の誤差 $e(t) = x_1(t) - x_{1d}$ を設計された集合 F_ψ の中に留めるように制御を行う. この制御問題は文献 [57], [58] に示される Funnel control 問題と同じであり, 本節ではこの制御目標を Robust CLF-CBF-QP を用いて実現する. Funnel-like set F_ψ は次の式で与えることとする.

$$F_\psi := \{e(t) \mid \|e(t)\| \leq \psi(t)\} \quad (4.111)$$

$$\psi(t) := a_{\psi 1} + a_{\psi 2} \exp(-a_{\psi 3} t) \quad (4.112)$$

ただし, $a_{\psi 1}, a_{\psi 2}, a_{\psi 3} \in \mathbb{R}_+$ は正の定数パラメータである. この Funnel-like set 内に誤差 $e(t)$ を留めるために考えるべき状態制約関数は次のように定義される.

$$B_{0a}(x_e, t) := -x_1(t) + x_{1d}(t) + \psi(t) \geq 0, \quad (4.113)$$

$$B_{0b}(x_e, t) := x_1(t) - x_{1d}(t) + \psi(t) \geq 0. \quad (4.114)$$

これらの関数 B_{0a}, B_{0b} は式 (4.109) のシステムに対して IRD 3, DRD 2 を持つ. また, システム (4.109) は状態 x_1 が $l_0 + x_1 = 0$ を満たす点において入力 u が非零の要素を持つと発散

してしまうため, x_1 がこの特異点に近づかないように次の状態制約をあわせて考える.

$$B_{0c}(x_e) := x_1(t) - x_{1lb} \geq 0 \quad (4.115)$$

これは x_1 の許容領域を制限する制約であり, $x_{1lb} \in \mathbb{R}$ は $-l_0$ よりも大きい正の定数を設定する. 式 (4.115) の状態制約関数も IRD 3, DRD 2 を持つ. これらの状態制約関数およびその時間微分を考え, ミスマッチング外乱に対する Robust MECBF 制約を構成する. また, $e(t) \rightarrow 0$ を実現するため, 次の出力関数を定義し, これを零化制御するための Robust ES-CLF 制約を構築する.

$$y_c = h(x_e, t) := x_1(t) - x_{1d}(t) \quad (4.116)$$

この出力関数も式 (4.109) のシステムにおいて IRD 3, DRD 2 を持つ関数である. これより式 (4.113), (4.114), (4.115) の状態制約関数に影響する外乱項の推定値をそれぞれ $\hat{\delta}_{b1,a}$, $\hat{\delta}_{b1,b}$, $\hat{\delta}_{b1,c}$ とし, 式 (4.116) の出力関数に影響する外乱項の推定値を $\hat{\delta}_{c1}$ として定義しておく. なお, 今回のケースにおいては式 (4.115), (4.116) の関数についてそれぞれ $L_{g_2}L_f^2B_{0a} = L_{g_2}L_f^2B_{0b} = L_{g_2}L_f^2B_{0c} = 0$, $L_{g_2}L_f^2h = 0$ となるため, それぞれの関数の 3 階の時間微分に現れる $\hat{\delta}_{b2,a}$, $\hat{\delta}_{b2,b}$, $\hat{\delta}_{b2,c}$, $\hat{\delta}_{c2}$ は考えないこととする.

これらの外乱推定値を計算するための外乱モデル $d(x_e, t)$ は次の形を持つ確率モデルとしてデータから同定する.

$$d \sim \mathcal{N}(\mu_d(x_e, t), \sigma_d^2(x_e, t)) \quad (4.117)$$

このモデルを同定するため, まずは次のノミナルコントローラおよび目標値関数を用いてシミュレーションを行い, サンプリング周期 Δt において拡大状態・時刻のデータ $x_e[k], t[k], (k = 0, \dots, N)$ を取得する.

$$\dot{u} = (L_{g_1}L_f^2h)^{-1} \left(-L_f^3h - \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} + v_{SF} \right) \quad (4.118)$$

$$v_{SF} = -k_1h - k_2\dot{h} - k_3\ddot{h} \quad (4.119)$$

$$x_{1d} = b_{1d} + b_{2d}\sin(t) \quad (4.120)$$

これは入出力線形化に基づく出力零化コントローラであり, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}_+$ は制御ゲイン, $b_{1d}, b_{2d} \in \mathbb{R}$ は定数パラメータである. ここでは異なるパラメータ b_{1d}, b_{2d} を持つ目標値関数 N_s セットを用いてデータを取得することとし, データ $x_e[k], t[k]$ が得られた後は次式を用いて外乱項 $d[k]$ の値を $x_e[k]$ から推定する.

$$d[k] \approx \frac{x_2[k+1] - x_2[k-1]}{2\Delta t} - g_0 + \frac{k_0}{(l_0 + x_1[k])^2} u[k]^2 \quad (4.121)$$

最終的に, 得られたデータから抽出した N_d セットのデータから GPR を用いることによって式 (4.117) のモデルを同定する.

以上の状態制約関数および出力関数, 外乱モデルを用いて表 (4.3) の Robust CLF-CBF-QP

を構築しシミュレーションを行った。制御性能の比較のため、式(4.118)の入出力線形化に基づくノミナルコントローラと提案手法である Robust CLF-CBF-QP を用いた場合のそれぞれの結果を示す。なお、システム(4.109)のモデルパラメータおよびコントローラのパラメータを表4.4にまとめておく。まず図4.6に各コントローラにおける状態 x_1 の軌道と目標軌道 x_{1d} を示す。入出力線形化に基づくコントローラでは目標軌道に対して大きく偏差が残っているが、提案手法である Robust CLF-CBF-QP では3秒前後で目標軌道へ到達し、以後も追従できていることが分かる。Robust CLF-CBF-QP を利用する場合の MECBF B_{0a}, B_{0b}, B_{0c} の軌道および B_{0a}, B_{0b} に対応する Funnel-like set と状態 x_1 の目標値との偏差 $e = x_1 - x_{1d}$ をそれぞれ図4.5, 図4.7に示す。図4.5よりすべての時刻において MECBF の値は非負であることから状態制約を満たしていることがわかり、また図4.7より実際に状態の偏差 e を設計した Funnel-like set 内に収められていることが確認できる。また、図4.8は Robust CLF-CBF-QP における式(4.52), (4.80)の外乱推定条件を規定する関数の値を表したものであり、これよりすべての関数がほぼすべての時刻で負であることから有効な外乱推定値を計算できていることが読み取れる。最後に図4.9にそれぞれのコントローラにおける制御入力 u の値を示す。今回のケースでは実際に入力 u に対してその時間微分 $\dot{u}$ を新たな入力として Robust CLF-CBF-QP を構築したため、制御入力 u としては滑らかな値を得られることが特徴的である。これらの結果より、提案手法である Robust CLF-CBF-QP を用いることによって4.2節の仮定を満たすミスマッチング外乱の影響を考慮し、ロバストな拘束制御が実現されることを確認できた。

4.5 おわりに

本章ではあるクラスのミスマッチング外乱の影響を受ける連続時間システムに対し、外乱の影響を考慮した最適化ベースド制御器を提案した。最初に3章で提案した Robust ES-CLF 制約および Robust MECBF 制約を拡張し、ミスマッチング外乱の影響を考慮した Robust ES-CLF 制約, Robust MECBF 制約を提案した。次にそれらの制約を用いて凸計画問題のみによって構成される最適化ベースド制御器の構築を行い、コントローラの制御性能を数値シミュレーションによって検証した。

本章で提案した手法の適用先の一つとして、式(4.105), (4.105)のような非入力アファインシステムに対する Robust CLF-CBF-QP を構築できることが大きな利点である。また、3章の手法は制御入力のチャタリングが生じる場合があるが、その際に入力の時間微分を新たな制御入力として問題を再構成することによって本章で扱う問題のクラスに落とし込むことができるため、本章の提案手法を用いて制御を行うことでチャタリングを回避することができる。現時点ではこうした形で本手法を利用できるケースは IRD と DRD の差が1であるような出力関数および状態制約関数に限られているが、IRD と DRD の差が2以上の場合に対しても同様のアイデアに基づいた拡張ができると考えられる。より一般的な形を定義し、扱いやすいコントローラを設計していくことが本手法における今後の課題である。

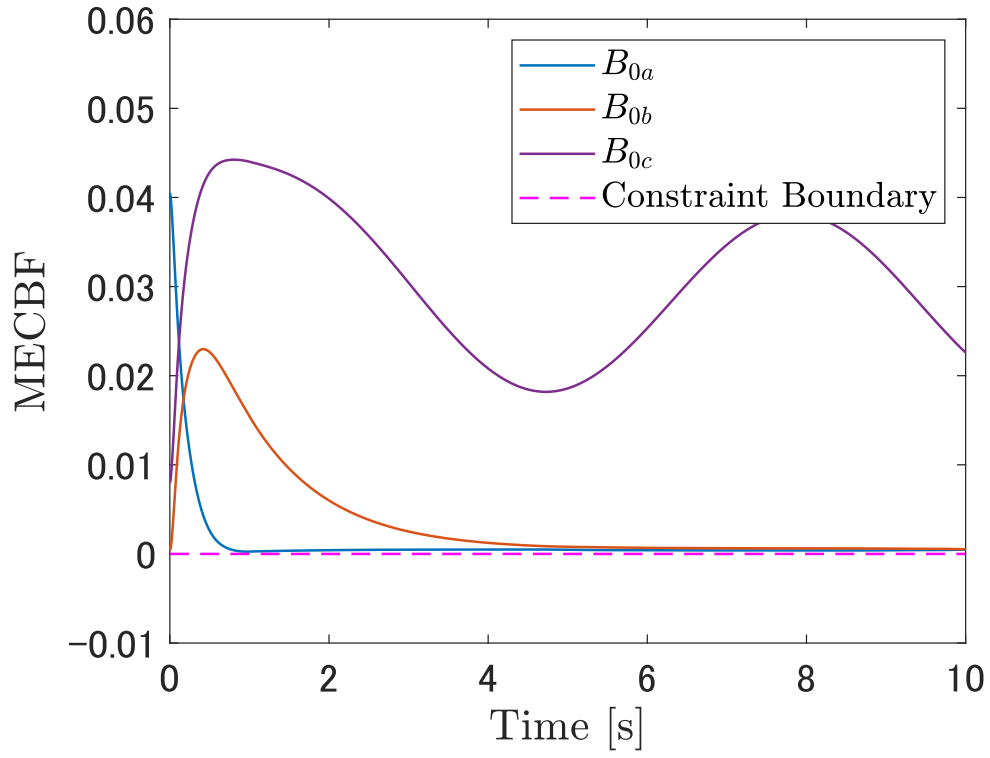


Fig 4.5: Trajectories of MECBFs B_{0a}, B_{0b}, B_{0c}

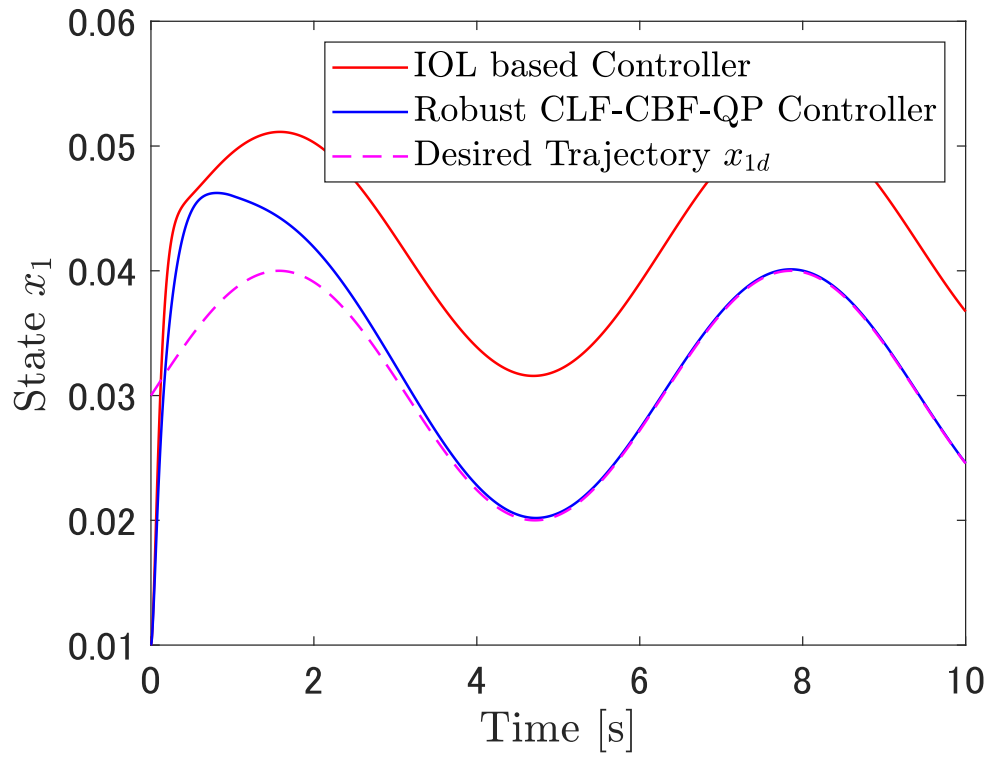


Fig 4.6: Trajectories of State x_1

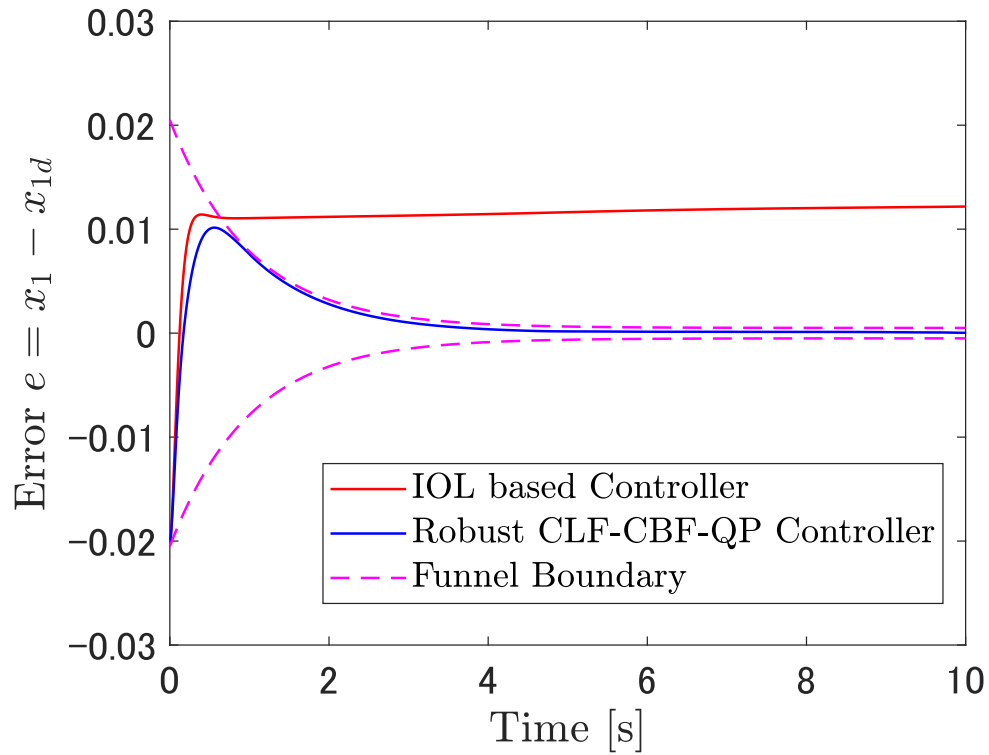
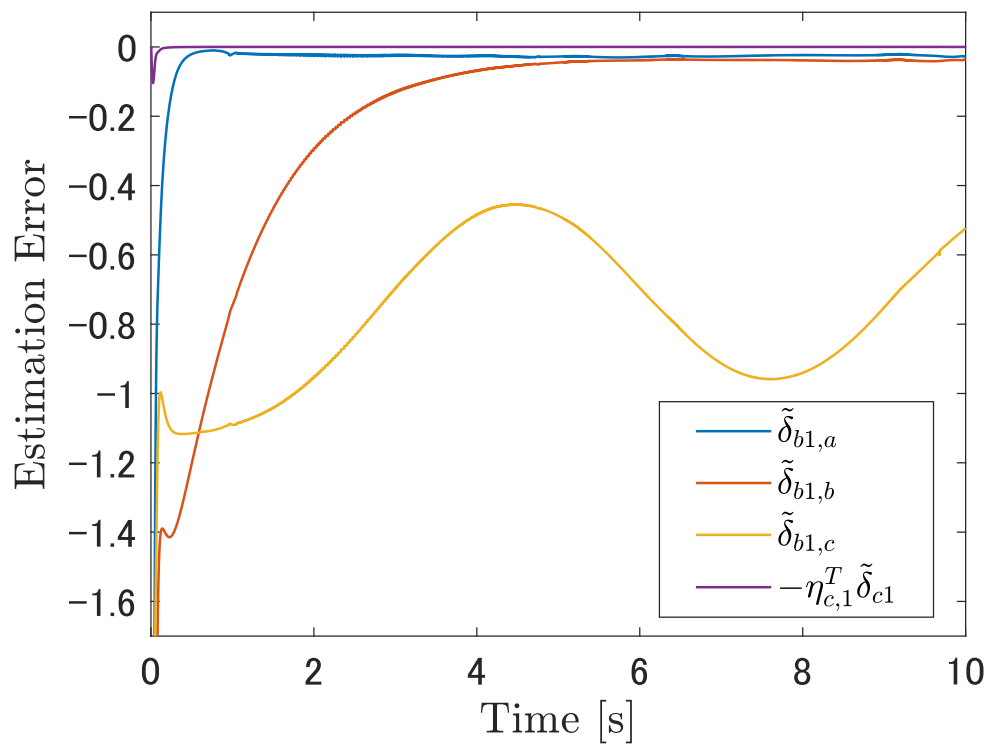
Fig 4.7: Trajectories of State Error $e = x_1 - x_{1d}$ 

Fig 4.8: Functions of Estimation Conditions

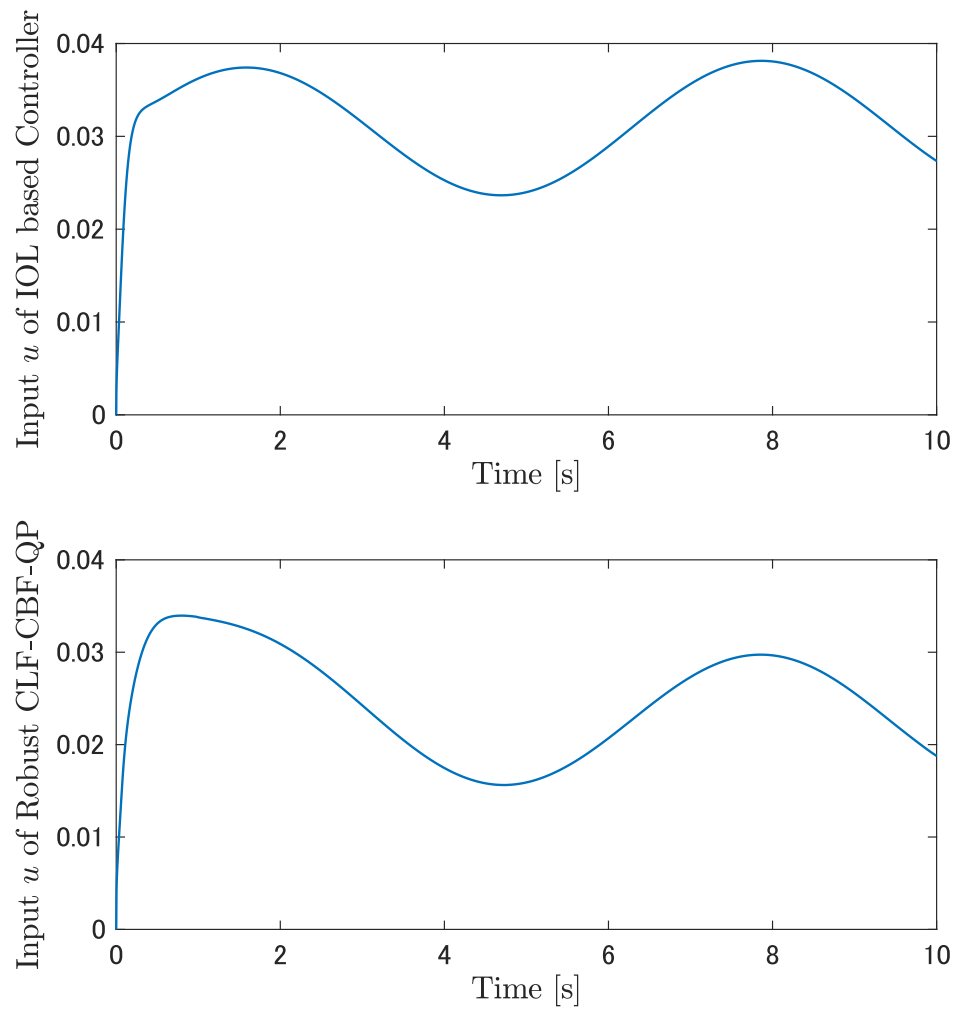


Fig 4.9: Control Input of Two Controllers

第5章 最適化ベースド制御器を用いたヒト型ロボットの歩行制御

5.1 はじめに

前章までの内容では、外乱が加わるシステムにおいて制約条件を満たしつつ与えられた出力関数を零化制御するためのロバストな最適化ベースド制御器の構築方法について述べた。しかし、この制御器を用いて外乱の影響を受けるシステム全体を安定化するためには与えられた出力関数に対してシステムが注意1に記載された条件を満たすことが必要であり、ゼロダイナミクスが望ましい挙動をするように出力関数が設計されていない場合には安定化を達成することはできない。したがって一般のシステムを制御するためには出力関数のロバストな零化制御だけではなく、出力関数自身をどのように設計するかという事も重要な要素となっている。

本章ではこうした問題のひとつとして劣駆動性を有するヒト型ロボットのロバストな周期歩行生成問題を扱う。劣駆動性とはシステムの自由度がシステムの制御入力の数よりも多い性質を指し、3章のマニピュレータの制御例で用いたような $IRD_+ 2$ を持つ出力関数によって制御を行う場合には線形化できない部分のダイナミクスが必ず生じる。したがってこのシステムにおいて周期歩行を実現するためにはゼロダイナミクスが安定な周期軌道を持つように出力関数を設計することが必要不可欠である。本章では外乱の影響を考慮した上でゼロダイナミクスが望ましい周期軌道を持つように出力関数を設計する方法を提案するとともに、3章で提案した最適化ベースド制御器を用いて外乱の影響を考慮したロバストな制御を行うことで周期歩行を実現する方法について述べる。特に実際のロボットの制御を考える上では、ロボットの足の接地点における拘束力の制約やアクチュエータトルクの上限に関する制約といった歩行の際に満たすべき制約条件が存在するため、最適化ベースド制御器を利用することでこうした制約を同時に考慮できるという利点もある。

5.2 ヒト型ロボットモデル

図5.1に本章で制御対象とするヒト型ロボットモデルを示す。これはRABBIT [59] をベースとする平面運動モデルであり、剛体5リンクによって構成される劣駆動ロボットモデルである。このモデルの歩行は拘束力を有する運動方程式によって表される連続ダイナミクスと脚衝突時に生じる状態の離散ジャンプを組み合わせたハイブリッドシステムとして表現される。

5.2.1 連続・離散ダイナミクス

連続ダイナミクス

歩行運動において支持脚のみが地面に接触している時のダイナミクスは次式のように拘束力を有する運動方程式によって記述される。

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = Su + J_{st}(q)^T \lambda \quad (5.1)$$

$$J_{st}(q)\ddot{q} + \dot{J}_{st}(q, \dot{q})\dot{q} = 0 \quad (5.2)$$

ここで $q = [q_{r1}, q_{r2}, q_{r3}, q_{r4}, q_{so}, p_x, p_z]^T \in \mathbb{R}^7$ はシステムの一般化座標であり，それぞれの座標は図 5.1 に示すロボットのベースリンクに対する相対関節角，ベースリンク姿勢，ベースリンク位置に対応している．簡単のため，以後は相対関節角をまとめたベクトルを $q_r = [q_{r1}, q_{r2}, q_{r3}, q_{r4}]^T$ と表記する． $u \in \mathbb{R}^4$ は関節に対するトルク入力を表し， $M(q) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^{7 \times 7}$ ， $H(q, \dot{q}) : \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ ， $S \in \mathbb{R}^{7 \times 4}$ はそれぞれ慣性行列，中心力・コリオリ力・重力を含む非線形力ベクトル，駆動行列を表す．特に駆動行列に関しては $S = [I_{4 \times 4}, 0_{4 \times 3}]^T$ という構造を持つとする． $J_{st}(q) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 7}$ は次の支持脚先端位置の拘束を表す関数 $f_c(q) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^2$ から得られる拘束ヤコビアンであり， $\lambda = [\lambda_x, \lambda_z]^T \in \mathbb{R}^2$ が対応する拘束力ベクトルである．

$$f_c(q) = p_{st}(q) = \begin{bmatrix} p_{stx}(q) - c_x \\ p_{stz}(q) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

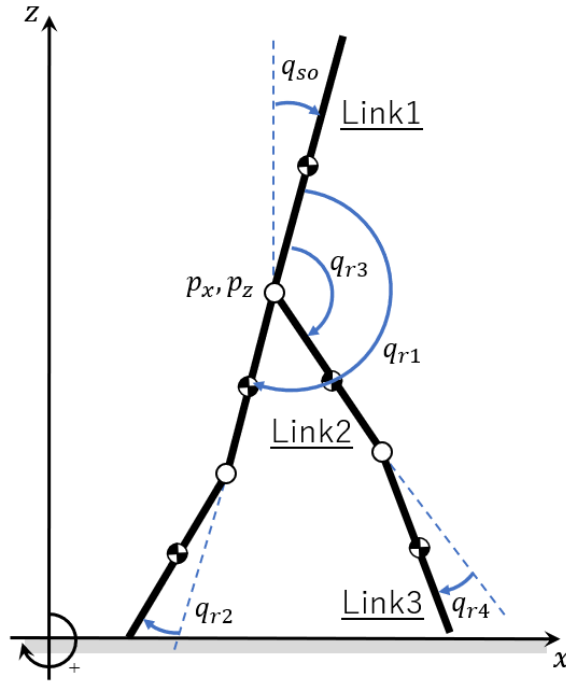


Fig 5.1: Planar 5 Link Bipedal Robot Model (RABBIT [59])

Table 5.1: Model Parameters of Planar 5 Link Bipedal Robot Model

$m_b : 12.0$	$m_1 : 6.80$	$m_2 : 3.20$	$l_b : 0.63$	$l_1 : 0.40$
$l_2 : 0.40$	$I_b : 1.33$	$I_1 : 0.47$	$I_2 : 0.20$	

ただし, $p_{stx}(q) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_{stz}(q) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ はそれぞれ支持脚先端の水平方向位置および鉛直方向位置を表す関数であり, $c_x \in \mathbb{R}$ は支持脚先端の水平方向拘束位置を表す. また, λ_x , λ_z はそれぞれ拘束力の水平方向, 鉛直方向における成分を表す. 具体的な拘束力 λ の値については式 (5.1), (5.2) を連立して解くことにより, 次式のような解析的な形が得られる.

$$\lambda = F_\lambda(q, \dot{q}) + G_{\lambda 1}(q)u \quad (5.4)$$

$$F_\lambda(q, \dot{q}) = -\left(J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T\right)^{-1}\left(\Gamma_{c1}(q, \dot{q}) + \dot{J}_{st}(q)\dot{q}\right) \quad (5.5)$$

$$G_{\lambda 1}(q) = -\left(J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T\right)^{-1}\Gamma_{c2}(q) \quad (5.6)$$

$$\Gamma_{c1}(q, \dot{q}) = -J_{st}(q)M(q)^{-1}H(q, \dot{q}) \quad (5.7)$$

$$\Gamma_{c2}(q) = J_{st}(q)M(q)^{-1}S \quad (5.8)$$

この式 (5.4) を式 (5.1) に代入し, 整理することによって拘束力を消去した次のダイナミクス表現を得ることができる.

$$M(q)\ddot{q} + \Phi_c(q)H(q, \dot{q}) = \Phi_c(q)Su - J_{st}(q)^T\left(J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T\right)^{-1}\dot{J}_{st}(q, \dot{q})\dot{q} \quad (5.9)$$

ただし $\Phi_c(q) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^{7 \times 7}$ は次式で定義される行列関数とする.

$$\Phi_c(q) = I - J_{st}(q)^T\left(J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T\right)^{-1}J_{st}(q)M(q)^{-1} \quad (5.10)$$

各リンクの質量等のモデルのパラメータを表 5.1 にまとめておく.

離散ダイナミクス

支持脚同様に遊脚先端の水平・鉛直位置関数を $p_{swx}(q) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_{swz}(q) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ とすると, 歩行においては $p_{swz}(q) = 0$ かつ $\dot{p}_{swz}(q, \dot{q}) < 0$ の条件を満たすときに遊脚先端位置が地面に衝突する. その際, 衝突は完全非弾性衝突であり地面と足の間に滑りが生じないと仮定すると, 衝突直前の状態 $q^-, \dot{q}^-$ および衝突直後の状態 $q^+, \dot{q}^+$ は次式の関係を満たす.

$$M(q^+)\dot{q}^+ - M(q^-)\dot{q}^- = J_{sw}(q^-)^T\lambda_I \quad (5.11)$$

$$J_{sw}(q^+)\dot{q}^+ = 0 \quad (5.12)$$

ただし, $J_{sw}(q) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 7}$ は遊脚先端位置 $p_{sw}(q) = [p_{swx}(q), p_{swz}(q)]^T$ のヤコビアンであり, $\lambda_I \in \mathbb{R}^2$ は衝突の際に地面から受ける力である. $q^+, \dot{q}^+, \lambda_I$ に関しても式 (5.11) と式 (5.12) を連立して解くことによって次のように解析的な形が得られる.

$$q^+ = q^- \quad (5.13)$$

$$\dot{q}^+ = \left\{I - M(q^-)^{-1}J_{sw}(q^-)^T\left(J_{sw}(q^-)M(q^-)^{-1}J_{sw}(q^-)^T\right)^{-1}J_{sw}(q^-)\right\}\dot{q}^- \quad (5.14)$$

$$\lambda_I = -\left(J_{sw}(q^-)M(q^-)^{-1}J_{sw}(q^-)^T\right)^{-1}J_{sw}(q^-)\dot{q}^- \quad (5.15)$$

また、遊脚衝突直後に支持脚が即座に地面から離れ、遊脚と支持脚が入れ替わると仮定することにより、衝突によるリセットマップ $\Delta_I(q^-, \dot{q}^-)$ は最終的に次式のように定義される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q^+ \\ \dot{q}^+ \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta_q q^- \\ \Delta_q \left\{ I - M(q^-)^{-1} J_{sw}(q^-)^T (J_{sw}(q^-) M(q^-)^{-1} J_{sw}(q^-)^T)^{-1} J_{sw}(q^-) \right\} \dot{q}^- \end{bmatrix} \\ &=: \Delta_I(q^-, \dot{q}^-) \end{aligned} \quad (5.16)$$

$\Delta_q \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ は支持脚交換の際の座標を入れ替える定数行列であり、次の構造を持つ。

$$\Delta_q = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

ハイブリッドシステム表現

式 (5.9) の連続ダイナミクスと式 (5.16) の衝突と脚交換による離散ジャンプを組み合わせることにより、ロボットの歩行を次のハイブリッドシステム Σ_n として表現することができる。

$$\Sigma_n : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)u, & x^- \notin \mathcal{G}_n \\ x^+ = \Delta_I(x^-), & x^- \in \mathcal{G}_n \end{cases} \quad (5.18)$$

ただし、 $x = [q^T, \dot{q}^T]^T \in \mathbb{R}^{14}$ であり、各関数 $f(x) : \mathbb{R}^{14} \rightarrow \mathbb{R}^{14}$, $g_1(x) : \mathbb{R}^{14} \rightarrow \mathbb{R}^{14 \times 4}$ は次式で定義される。

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M(q)^{-1} \left\{ \Phi_c(q) H(q, \dot{q}) + J_{st}(q)^T (J_{st}(q) M(q)^{-1} J_{st}(q)^T)^{-1} \dot{J}_{st}(q, \dot{q}) \dot{q} \right\} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 4} \\ M(q)^{-1} \Phi_c(q) S \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

また、 $\mathcal{G}_n$ はガードと呼ばれる離散ジャンプが起こる際の状態集合であり、次式で定義される。

$$\mathcal{G}_n = \{x \in \mathbb{R}^{14} \mid p_{swz}(x) = 0, \dot{p}_{swz}(x) < 0\} \quad (5.21)$$

5.2.2 拘束力の消去による低次元システム表現

式 (5.9) の連続ダイナミクスは式 (5.1) で表されるダイナミクスに拘束力の式を代入することによって得られるものであるが、実際にはホロノミック拘束によって一般化座標の間に従属関係が存在するため、冗長なシステム表現になっている。以後の解析のため、与えられた拘束の式を用いて冗長性を消去した低次元システムを求める方法について述べておく。

まずは拘束式から得られるヤコビアン $J_{st}(q)$ の要素を $J_{st}(q) = [J_{st1}(q_r, q_{so}), J_{st2}]$ という

形で分割する．このとき，一般化座標ベクトル q の構造から $J_{st2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ は正方行列であり逆行列が存在するため， J_{st2}^{-1} を用いて次の行列 $\bar{J}_{st}(q_r, q_{so})$ が定義できる．

$$\bar{J}_{st}(q) = J_{st2}^{-1} J_{st}(q) = \begin{bmatrix} \bar{J}_{st1}(q_r, q_{so}) & I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

ただし， $\bar{J}_{st1}(q) = J_{st2}^{-1} J_{st1}(q)$ である．この行列 $\bar{J}_{st}(q)$ を利用することにより，速度拘束 $J_{st}(q)\dot{q} = \bar{J}_{st}(q)\dot{q} = 0$ の関係から次式が成り立つ．

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = -\bar{J}_{st1}(q_r, q_{so}) \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_{so} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

したがって元のシステムの座標 $q, \dot{q}$ は低次元化した座標 $\bar{q} = [q_r^T, q_{so}]^T \in \mathbb{R}^5$ によって次のように表される．

$$\begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}(t) \\ \begin{bmatrix} p_x(0) \\ p_z(0) \end{bmatrix} - \int_0^t \bar{J}_{st1}(\bar{q}(\tau))\dot{\bar{q}}(\tau) d\tau \\ \bar{J}'_{st}(\bar{q})\dot{\bar{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

ただし， $\bar{J}'_{st} = [I_{5 \times 5}, -\bar{J}_{st1}(\bar{q})^T]^T$ とした．さらに元の一般化加速度ベクトル $\ddot{q}$ は次式のように表される．

$$\ddot{q} = \bar{J}'_{st}(\bar{q})\ddot{\bar{q}} + \dot{\bar{J}}'_{st}(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\dot{\bar{q}} \quad (5.25)$$

この式と $\bar{J}_{st}(q)$ を用いて式 (5.1) を次のように書き換える．

$$M(\bar{q})\bar{J}'_{st}(\bar{q})\ddot{\bar{q}} + M(\bar{q})\dot{\bar{J}}'_{st}(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\dot{\bar{q}} + H(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = Su + \bar{J}_{st}(\bar{q})^T \bar{\lambda} \quad (5.26)$$

$$\bar{\lambda} = J_{st2}^T \lambda \quad (5.27)$$

ここで式 (5.26) の左から $\bar{J}'_{st}(\bar{q})^T$ を掛け， $\bar{J}'_{st}(\bar{q})^T \bar{J}_{st}(\bar{q})^T = 0$ となることを利用すると拘束力を消去して低次元化されたシステム表現が得られる．

$$\bar{M}(\bar{q})\ddot{\bar{q}} + \bar{H}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \bar{S}u \quad (5.28)$$

ただし， $\bar{M}(\bar{q}), \bar{H}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}), \bar{S}$ は次のように定義される．

$$\bar{M}(\bar{q}) = \bar{J}'_{st}(\bar{q})^T M(\bar{q}) \bar{J}'_{st}(\bar{q}) \quad (5.29)$$

$$\bar{H}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \bar{J}'_{st}(\bar{q})^T H(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + \bar{J}'_{st}(\bar{q})^T M(\bar{q}) \dot{\bar{J}}'_{st}(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\dot{\bar{q}} \quad (5.30)$$

$$\bar{S} = \bar{J}'_{st}(\bar{q})^T S \quad (5.31)$$

$\bar{J}'_{st}(\bar{q})$ および S の構造より $\bar{J}'_{st}(\bar{q})^T S = [I_{4 \times 4}, 0_{4 \times 1}]^T$ であることに注意されたい．

この表現より低次元化された状態 $\bar{x} = [\bar{q}^T, \dot{\bar{q}}^T]^T$ に対するハイブリッドシステム $\bar{\Sigma}_n$ も同様に定義することができる．

$$\bar{\Sigma}_n : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}_1(\bar{x})u, & \bar{x}^- \notin \bar{\mathcal{G}}_n \\ \bar{x}^+ = \bar{\Delta}_I(\bar{x}^-), & \bar{x}^- \in \bar{\mathcal{G}}_n \end{cases} \quad (5.32)$$

各関数 $\bar{f}(\bar{x}) : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$, $\bar{g}_1(\bar{x}) : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{10 \times 4}$, $\bar{\Delta}_I(\bar{x}^-) : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$ は次のように定義される.

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ -\bar{M}(\bar{q})^{-1} \bar{H}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$\bar{g}_1(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 4} \\ \bar{M}(\bar{q})^{-1} \bar{S} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\bar{\Delta}_I(\bar{x}^-) = \begin{bmatrix} \Delta_{\bar{q}} \bar{q}^- \\ \Delta_{\bar{q}} \left\{ I - \bar{M}(\bar{q}^-)^{-1} \bar{J}_{sw}(\bar{q}^-)^T (\bar{J}_{sw}(\bar{q}^-) \bar{M}(\bar{q}^-) \bar{J}_{sw}(\bar{q}^-)^T)^{-1} \bar{J}_{sw}(\bar{q}^-) \right\} \dot{\bar{q}}^- \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

ただし, $\Delta_{\bar{q}} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ は元のシステムにおける支持脚交換のための行列 Δ_q の 1~5 行および 1~5 列までのブロック要素を抜き出した行列であり, $\bar{J}_{sw}(\bar{q}) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 5}$ は低次元システムの座標 $\bar{q}$ を用いて表現される遊脚先端位置の関数 $\bar{p}_{sw}(\bar{q}) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ のヤコビアンを表す. また, ガード $\bar{G}_n$ は遊脚先端の鉛直方向位置座標 $\bar{p}_{swz}(\bar{q}) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて次のように定義される.

$$\bar{G}_n = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^{10} \mid \bar{p}_{swz}(\bar{q}) = 0, \dot{\bar{p}}_{swz}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) < 0 \} \quad (5.36)$$

5.3 Hybrid Zero Dynamics に基づく制御

劣駆動性を有するヒト型ロボットモデルにおける有力な歩行制御手法として, 連続時間システムにおけるゼロダイナミクス概念をハイブリッドシステムに拡張した Hybrid Zero Dynamics (HZD) に基づく周期軌道設計・制御手法が提案されている [20], [24]. この手法はシステムに与える仮想拘束の設計を通じて周期軌道を有するゼロダイナミクス多様体を設計し, 制御入力を用いてシステムを設計した多様体上に拘束することによって周期歩行を生成する手法である. 特に, ハイブリッドシステムの持つ離散ジャンプに対しても不変なゼロダイナミクス多様体を HZD 多様体と呼び, ロボットのダイナミクスを考慮した軌道計画によって HZD 多様体を実現する仮想拘束を求める. 本節ではこの方法の概要を説明し, 式 (5.18) で定義されたシステムモデルに対して周期軌道を設計するための最適化問題の構成について述べる.

5.3.1 仮想拘束とゼロダイナミクス

本節では便宜上, 式 (5.32) で表される拘束力を消去して低次元化したシステム表現を解析に用いる. ただし, このシステムは拘束力を有する式 (5.18) のシステムと本質的に同じであるため, 本節の議論の内容は式 (5.18) のシステムにおいても成り立つことに注意されたい.

式 (5.32) のシステムに対し、次の形の仮想拘束を与えることによって周期軌道を生成することを考える。

$$C_1 \bar{q} - h_d(\theta_p(\bar{q}), \alpha_p) = 0 \quad (5.37)$$

ただし、 $\theta_p(\bar{q}) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ は Phase variable と呼ばれる関数であり、 $\theta_p(\bar{q}) = C_2 \bar{q}$ と定義する。 $C_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 5}$ は定数行列であり、 $h_d(\theta_p(\bar{q}), \alpha_p) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4 \times (M_p+1)} \rightarrow \mathbb{R}^4$ はパラメータ $\alpha_p \in \mathbb{R}^{4 \times (M_p+1)}$, $M_p \in \mathbb{N}$ を持つパラメータ曲線関数である。本論文では $h_d(\theta_p, \alpha_p)$ の各要素を次式で定義される M_p 次 Bezier 曲線を用いて与えることにする。

$$h_{di}(s_\theta(\theta_p), \alpha_p) = \sum_{j=0}^{M_p} \alpha_{p,ij} \frac{M_p!}{j!(M_p-j)!} s_\theta(\theta_p)^j (1 - s_\theta(\theta_p))^{M_p-j} \quad (5.38)$$

$$s_\theta(\theta_p) = \frac{\theta_p - \theta_p^+}{\theta_p^- - \theta_p^+} \quad (5.39)$$

ただし、 $\alpha_{p,ij} \in \mathbb{R}$ はパラメータ行列 α_p の (i, j) 要素を表し、 $\theta_p^-, \theta_p^+ \in \mathbb{R}$ は周期軌道において遊脚が地面に衝突する直前および直後における関数 θ_p の値を表す。また、 $s_\theta(\theta_p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は値域を $[0, 1]$ とするための正規化関数である。このとき、この仮想拘束が周期軌道を生成するためには引数である θ_p が周期軌道上で単調増加するような関数として設計される必要があることに注意されたい。

式 (5.37) の仮想拘束は次の出力関数 y_c を零化制御することによって実現することができる。

$$y_c = C_1 \bar{q} - h_d(\theta_p(\bar{q}), \alpha_p) \quad (5.40)$$

この出力関数 y_c は一般化座標 $\bar{q}$ の関数であるため、IRD 2 を持つ。したがって 2.2.1 節で述べた RES-CLF V_ϵ を構成し、式 (2.28) で定義される集合 $\mathcal{K}_{clf}^\epsilon$ 内の入力を用いることで y_c を指数的に零化制御することが可能である。なお、次の条件を満たす制御入力 $u_{oz}(\bar{x}, \alpha_p)$ もまた $\mathcal{K}_{clf}^\epsilon$ の要素となっている。

$$\ddot{y}_c + \frac{1}{\epsilon^2} K_1 y_c + \frac{1}{\epsilon} K_2 \dot{y}_c = 0 \quad (5.41)$$

ただし、 $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ は制御ゲイン行列であり、次の行列が安定行列となるように選ぶ。

$$\begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

この式 (5.41) を $L_{\bar{g}_1} L_{\bar{f}} y_c$ が正則であるという仮定の下で u_{oz} について解くと次式の入出力線形化に基づくコントローラが得られる。

$$u_{oz} = -(L_{\bar{g}_1} L_{\bar{f}} y_c)^{-1} \left(L_{\bar{f}}^2 y_c + \frac{1}{\epsilon^2} K_1 y_c + \frac{1}{\epsilon} K_2 \dot{y}_c \right) \quad (5.43)$$

式 (5.40) の出力を零化制御することによってシステムが次のゼロダイナミクス多様体上に拘束される。

$$\mathcal{Z} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{10} \mid y_c(\bar{x}) = 0, \dot{y}_c(\bar{x}) = 0\} \quad (5.44)$$

C_1, C_2 のそれぞれの行ベクトルが線形独立となるように選ばれているとき, 行列 $T_c = [C_1^T, C_2^T]^{-T}$ を用いて元の一般化座標 $\bar{q}$ に対する次の座標変換を考えることができる.

$$\bar{q} = T_c \begin{bmatrix} \xi \\ \theta_p \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\dot{\bar{q}} = T_c \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

このとき C_1 が $C_1 = [C_{11}, 0_{4 \times 1}]$, $C_{11} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ という構造をもつように選ばれているならば, ゼロダイナミクスが入力の影響を受けない θ_p のダイナミクスで表現できることを示す. 式 (5.28) のダイナミクスを新たな座標 ξ, θ_p で書き換えると次式ようになる.

$$T_c^T \bar{M}(\xi, \theta_p) T_c \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} + T_c^T \bar{H}(\xi, \theta_p, \dot{\xi}, \dot{\theta}_p) = T_c^T \bar{S} u \quad (5.47)$$

行列 C_1 の構造により, 入力の係数行列 $T_c^T \bar{S}$ は次式を満たす.

$$T_c^T \bar{S} = \begin{bmatrix} C_{11}^{-T} & -C_{11}^T C_{21}^T C_{22}^{-T} \\ 0_{1 \times 4} & C_{22}^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{4 \times 4} \\ 0_{1 \times 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{-T} \\ 0_{1 \times 4} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

ただし, $C_{21} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$, $C_{22} \in \mathbb{R}$ は行列 C_2 のブロック要素であり, $C_2 = [C_{21}, C_{22}]$ を満たす. ここで $T_c^T \bar{M}(\xi, \theta_p) T_c$ の左下のブロック要素および右下のブロック要素を $\bar{M}_{21}(\xi, \theta_p) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 4}$, $\bar{M}_{22}(\xi, \theta_p) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とし, $T_c^T \bar{H}(\xi, \theta_p, \dot{\xi}, \dot{\theta}_p)$ の下側のブロック要素を $\bar{H}'_2(\xi, \theta_p, \dot{\xi}, \dot{\theta}_p) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とすると式 (5.47) の下側のダイナミクスを次のように表すことができる.

$$\bar{M}_{21}(\xi, \theta_p) \ddot{\xi} + \bar{M}_{22}(\xi, \theta_p) \ddot{\theta}_p + \bar{H}'_2(\xi, \theta_p, \dot{\xi}, \dot{\theta}_p) = 0 \quad (5.49)$$

更に, システムがゼロダイナミクス多様体 $\mathcal{Z}$ 上に拘束されているとき, $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$ は次式を満たす.

$$\xi = h_d(\theta_p, \alpha_p) \quad (5.50)$$

$$\dot{\xi} = \dot{h}_d(\theta_p, \dot{\theta}_p, \alpha_p) = \frac{\partial h_d}{\partial \theta_p} \dot{\theta}_p \quad (5.51)$$

$$\ddot{\xi} = \ddot{h}_d(\theta_p, \dot{\theta}_p, \ddot{\theta}_p, \alpha_p) = \frac{\partial h_d}{\partial \theta_p} \ddot{\theta}_p + \frac{\partial^2 h_d}{\partial \theta_p^2} \dot{\theta}_p^2 \quad (5.52)$$

式 (5.50)~(5.52) を式 (5.49) に代入することで次式を得る.

$$\bar{M}_{21}(\theta_p, \alpha_p) \left(\frac{\partial h_d}{\partial \theta_p} \ddot{\theta}_p + \frac{\partial^2 h_d}{\partial \theta_p^2} \dot{\theta}_p^2 \right) + \bar{M}_{22}(\theta_p, \alpha_p) \ddot{\theta}_p + \bar{H}'_2(\theta_p, \dot{\theta}_p, \alpha_p) = 0 \quad (5.53)$$

式 (5.53) は Swing phase zero dynamics [21] と呼ばれ, システムがゼロダイナミクス多様体上に拘束される場合のダイナミクスを表す. これによりゼロダイナミクスとして状態を $\bar{x}_z = [\theta_p, \dot{\theta}_p]^T \in \mathbb{R}^2$ とする次式の低次元システムを考えることができる.

$$\dot{\bar{x}}_z = \bar{f}_z(\bar{x}_z, \alpha_p) \quad (5.54)$$

ただし, $\bar{f}_z(\bar{x}_z, \alpha_p) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{4 \times M_p + 1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は次式で定義される.

$$\bar{f}_z(\bar{x}_z, \alpha_p) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_p \\ - \left(\bar{M}_{21} \frac{\partial h_d}{\partial \theta_p} + \bar{M}_{22} \right)^{-1} \left(\bar{M}_{21} \frac{\partial^2 h_d}{\partial \theta_p^2} \dot{\theta}_p^2 + \bar{H}_2' \right) \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

ここで設計されたゼロダイナミクス多様体がシステムの離散ジャンプに対しても不変である, すなわち HZD 多様体であると仮定すると, 式 (5.35) に対して式 (5.45), (5.46) の座標変換および式 (5.50)~(5.52) の関係を用いることでゼロダイナミクス多様体上における離散ジャンプの式を次のように与えることができる.

$$\bar{x}_z^+ = \bar{\Delta}_{Iz}(\bar{x}_z^-, \alpha_p) := \begin{bmatrix} C_2 & 0_{1 \times 5} \\ 0_{1 \times 5} & C_2 \end{bmatrix} \bar{\Delta}_I(\bar{x}_z^-, \alpha_p) \quad (5.56)$$

なお, この離散ジャンプが起きるガード集合 $\bar{\mathcal{G}}_z$ も式 (5.36) から次のように定義される.

$$\bar{\mathcal{G}}_z = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{p}_{swz}(\bar{x}_z, \alpha_p) = 0, \dot{\bar{p}}_{swz}(\bar{x}_z, \alpha_p) < 0 \} \quad (5.57)$$

これらの連続ダイナミクスと離散ジャンプの式によって HZD 多様体上の運動を次のハイブリッドシステム $\bar{\Sigma}_z$ として表現しておく.

$$\bar{\Sigma}_z : \begin{cases} \dot{\bar{x}}_z = \bar{f}_z(\bar{x}_z, \alpha_p), & \bar{x}_z^- \notin \bar{\mathcal{G}}_z \\ \bar{x}_z^+ = \bar{\Delta}_{Iz}(\bar{x}_z^-, \alpha_p), & \bar{x}_z^- \in \bar{\mathcal{G}}_z \end{cases} \quad (5.58)$$

5.3.2 最適化による仮想拘束パラメータの設計

式 (5.37) の仮想拘束を出力零化制御によって実現した際のゼロダイナミクス多様体が HZD 多様体として得られる場合, HZD 多様体上の運動を式 (5.58) の低次元システムとして表現できる. このシステム (5.58) において初期値 $\bar{x}_{z0}$ から始まる解 $\varphi_z(t, \bar{x}_{z0}, \alpha_p)$ を次式のように定義する.

$$\varphi_z(t, \bar{x}_{z0}, \alpha_p) = \bar{x}_{z0} + \int_0^t \bar{f}_z(\varphi_z(\tau, \bar{x}_{z0}, \alpha_p), \alpha_p) d\tau \quad (5.59)$$

この解の定義より, 周期 $T_f \in \mathbb{R}$ の周期軌道を設計する問題は次の条件を満たす仮想拘束パラメータ α_p および初期状態 φ_{z0} を設計する問題として考えることができる.

$$\begin{bmatrix} h_d(\varphi_{z0}, \alpha_p) \\ \dot{h}_d(\varphi_{z0}, \alpha_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{4 \times 5} \\ 0_{4 \times 5} & C_1 \end{bmatrix} \bar{\Delta}_I(\varphi_z(T_f, \varphi_{z0}, \alpha_p), \alpha_p) \quad (5.60)$$

$$\varphi_{z0} = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{1 \times 5} \\ 0_{1 \times 5} & C_2 \end{bmatrix} \bar{\Delta}_I(\varphi_z(T_f, \varphi_{z0}, \alpha_p), \alpha_p) \quad (5.61)$$

$$\varphi_z(T_f, \varphi_{z0}, \alpha_p) \in \bar{\mathcal{G}}_z \quad (5.62)$$

式 (5.60) は離散ジャンプに対してゼロダイナミクス多様体が不変であることを意味し, HZD 多様体を生成するための条件を表す. 式 (5.61), (5.62) は HZD 多様体上の解が周期 T_f の周期解となるための条件を表しており, これらの条件を満たす解 $\varphi_z(t, \varphi_{z0}, \alpha_p), t \in [0, T_f]$ は式 (5.45), (5.46) の座標変換を通して元のシステム (5.32) の状態空間においても周期解として表される. 実際, 式 (5.60)~(5.62) の条件は元のシステム (5.32) の初期値 $\varphi_{\bar{x}0}$ から始まる解 $\varphi_{\bar{x}}(t, \varphi_{\bar{x}0}, \alpha_p)$ を

$$\varphi_{\bar{x}}(t, \varphi_{\bar{x}0}, \alpha_p) = \varphi_{\bar{x}0} + \int_0^t F_{\bar{x}}(\varphi_{\bar{x}}(\tau, \varphi_{\bar{x}0}, \alpha_p), \alpha_p) d\tau \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{x}}(\varphi_{\bar{x}}(t, \varphi_{\bar{x}0}, \alpha_p), \alpha_p) &:= \bar{f}(\varphi_{\bar{x}}(t, \varphi_{\bar{x}0}, \alpha_p)) \\ &\quad + \bar{g}_1(\varphi_{\bar{x}}(t, \varphi_{\bar{x}0}, \alpha_p)) u_{oz}(\varphi_{\bar{x}}(\tau, \varphi_{\bar{x}0}, \alpha_p), \alpha_p) \end{aligned} \quad (5.64)$$

として定義すると次の条件に一致する.

$$\varphi_{\bar{x}0} = \bar{\Delta}_I(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \varphi_{\bar{x}0}, \alpha_p)) \quad (5.65)$$

$$\varphi_{\bar{x}}(T_f, \varphi_{\bar{x}0}, \alpha_p) \in \bar{\mathcal{G}}_n \quad (5.66)$$

式 (5.60)~(5.62) は周期解を生成するための条件であるが, 実際にロボットの歩行を考える場合には関節角の可動範囲の制限やアクチュエータのトルク制限, 拘束力等の制約を同時に考慮しながら周期軌道を設計する必要がある. こうした種々の制約を考慮した軌道計画問題は最適制御問題として定式化することが可能である. ここでは拘束力の制約を考慮するためにダイナミクスの中に拘束力項を含む式 (5.1), (5.2), (5.16) のシステム表現を用いて問題を構成する.

$$\begin{aligned} (x_e^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), \alpha_p^*) &= \underset{x_e(t), u(t), \lambda(t), \alpha_p}{\operatorname{argmin}} J_{cost}(x_e, u) \\ \text{s.t.} \quad &g_{dyn}(x_e(t), u(t), \lambda(t), \alpha_p) = 0 \\ &g_{path}(x_e(t), u(t), \lambda(t), \alpha_p) \leq 0 \\ &g_{bound}(x_e(0), x_e(T_f), \alpha_p) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.67)$$

ただし, $x_e = [q^T, \dot{q}^T, \ddot{q}^T]^T$ は状態ベクトル $x = [q^T, \dot{q}^T]^T$ に一般化加速度 $\ddot{q}$ を加えた拡大状態ベクトルとする. $J_{cost}(x_e, u)$ は評価関数であり, 入力ノルムや移動仕事率を与えることによってエネルギー効率を考慮した歩行軌道を設計することができる. ここでは次式で定義される移動仕事率を評価関数として用いることにする.

$$J_{cost}(x_e, u) = \frac{1}{mgW_x} \int_0^{T_f} |P(x_e(\tau), u(\tau))| d\tau \quad (5.68)$$

ただし, mg はロボットの総重量, W_x は一歩あたりの移動距離, $P(x_e(t), u(t))$ は入力パワーを表す. また, $g_{dyn}(x_e(t), u(t), \lambda(t), \alpha_p)$ はシステムのダイナミクスに関する制約ベクトルであり, $g_{path}(x_e(t), u(t), \lambda(t), \alpha_p)$ は軌道上で満たされなければならない制約をまとめたベクトル, $g_{bound}(x_e(0), x_e(T_f), \alpha_p)$ は境界制約を表すベクトルである. これらの制約は次に示すよ

うな条件によって構成される.

$g_{dyn}(x_e(t), u(t), \lambda(t), \alpha_p)$ の要素

- 連続時間ダイナミクスの制約 (微分代数方程式表現)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = F_{int}(\dot{q}, \ddot{q}) \quad (5.69)$$

$$F_{dae}(x_e, u, \lambda) = 0 \quad (5.70)$$

ただし, $F_{int}(\dot{q}, \ddot{q}) := [\dot{q}^T, \ddot{q}^T]^T$ と定義し, $F_{dae}(x_e, u, \lambda)$ は次式のように定義する.

$$F_{dae}(x_e, u, \lambda) = \begin{bmatrix} M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) - Su - J_{st}(q)^T \lambda \\ J_{st}(q)\ddot{q} + \dot{J}_{st}(q, \dot{q})\dot{q} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

$g_{path}(x_e(t), u(t), \lambda(t), \alpha_p)$ の要素

- 状態・入力 of 許容集合に関する制約

$$x \in \mathcal{X}_a, \quad u \in \mathcal{U}_a \quad (5.72)$$

ただし, $\mathcal{X}_a \subset \mathbb{R}^{14}$ は関節可動角度や脚先端位置の制約等から規定される状態の許容集合を表し, $\mathcal{U}_a \subset \mathbb{R}^4$ は入力トルク上限から規定される入力の許容集合を表す.

- 拘束力に関する制約

$$\lambda_z \geq 0 \quad (5.73)$$

$$|\lambda_x| \leq \alpha_\lambda \lambda_z \quad (5.74)$$

ただし, $\alpha_\lambda \in \mathbb{R}_+$ は静止摩擦における静止摩擦係数を表す.

- 出力関数の零化制御と Phase Variable の単調増加性に関する制約

$$\ddot{y}_c + \frac{1}{\epsilon^2} K_1 y_c + \frac{1}{\epsilon} K_2 \dot{y}_c = 0 \quad (5.75)$$

$$\dot{\theta}_p > 0 \quad (5.76)$$

ただし, ここでは低次元化していないシステム (5.1), (5.2), (5.16) を考えているため, y_c, θ_p は次式で定義する.

$$y_c = C'_1 q - h_d(\theta_p(q), \alpha_p), \quad C'_1 := [C_1, 0_{4 \times 2}] \quad (5.77)$$

$$\theta_p = C'_2 q, \quad C'_2 := [C_2, 0_{1 \times 2}] \quad (5.78)$$

$g_{bound}(x_e(0), x_e(T_f), \alpha_p)$ の要素

- 状態に関する境界制約条件

$$x(T_f) \in \mathcal{G}_n \quad (5.79)$$

$$A_q x(0) = A_q \Delta_I(x(T_f)) \quad (5.80)$$

$$W_x = p_{swx}(x(T_f)) - p_{stx}(x(T_f)) \quad (5.81)$$

周期歩行において、システムの状態 q のうちベースリンク位置座標 p_x のみは増加していくため周期性を持たない。したがって、 p_x 以外の状態のみを抜き出す行列 $A_q \in \mathbb{R}^{13 \times 14}$ を導入し、式 (5.80) の形で周期軌道の条件を与えている。また、歩行の平均速度 v_{avg} は周期 T_f より $v_{avg} = W_x/T_f$ として計算できる。最終姿勢と初期姿勢は一致するように歩行軌道が設計されるため、一步における重心の移動距離も W_x であることに注意されたい。

- 出力関数の零化制御に関する初期値の制約

$$y_c(x(0)) = 0 \quad (5.82)$$

$$\dot{y}_c(x(0)) = 0 \quad (5.83)$$

この条件により衝突に対して不変なゼロダイナミクスを生成する出力関数が得られる。

注意 9. システムの状態として $\ddot{q}$ を状態に加える場合、式 (5.69), (5.71) のようにダイナミクスを微分代数方程式の形で表現しなければならないが、最適化を解く上では慣性行列 $M(q)$ 等の種々の逆行列を計算する必要がなくなるために計算コストの面で有用である。また、式 (5.75) 内の $\ddot{y}_c$ は具体的に次のような形を持つ。

$$\ddot{y}_c = \frac{\partial y_c}{\partial q} \ddot{q} + \frac{\partial^2 y_c}{\partial q^2} \dot{q}^2 \quad (5.84)$$

ここにも一般化加速度 $\ddot{q}$ の項が現れるため、 $\ddot{q}$ を状態として考えない場合には慣性行列 $M(q)$ の逆行列を含む煩雑な表現となる。一方で $\ddot{q}$ を状態として考える場合には式 (5.84) を直接利用できるため、制約の記述を簡潔に行うことができることもこの形の利点である。

5.4 Direct Collocation Method による最適制御問題の解法

式 (5.67) の最適制御問題を解くことによって周期歩行を生成する仮想拘束パラメータ α_p および対応する周期軌道を計算することができる。しかし、この問題は連続時間非線形システムに対する最適制御問題であるため一般に解くことが難しい問題となっている。こうした最適制御問題を数値的に解く方法として、Differential Dynamic Programming (DDP) [60]

や iterative LQR (iLQR) [61] といった手法が挙げられるが、本論文では Direct Collocation Method [28] と呼ばれる手法を利用して式 (5.67) の最適制御問題を解く。Direct Collocation Method は評価関数およびダイナミクスを離散化することによって連続時間最適制御問題を非線形計画問題へ変換して解く手法であり、制約条件の取り扱いが容易であるという特徴を持つ。本節では Direct Collocation Method の中でも近年よく用いられている Hermite-Simpson Collocation [28] と K -point Radau Collocation [29] の概要とそれらを用いた式 (5.67) の最適化問題の変換について説明する。

5.4.1 Hermite-Simpson Collocation Method

Hermite-Simpson Collocation では Simpson の公式および Hermite spline を用いて連続ダイナミクスと評価関数を離散化することによって非線形計画問題を構成する。まずは式 (5.67) の問題に対し、時間 t を $2N + 1$ 個の変数列に分割し、併せて分割した時間に対応する状態列と入力・拘束力列を次のように生成する。

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t^{[0]}, t^{[\frac{1}{2}]}, t^{[1]}, \dots, t^{[N]} \\ x_e &\rightarrow x_e^{[0]}, x_e^{[\frac{1}{2}]}, x_e^{[1]}, \dots, x_e^{[N]} \\ u &\rightarrow u^{[0]}, u^{[\frac{1}{2}]}, u^{[1]}, \dots, u^{[N]} \\ \lambda &\rightarrow \lambda^{[0]}, \lambda^{[\frac{1}{2}]}, \lambda^{[1]}, \dots, \lambda^{[N]} \end{aligned} \quad (5.85)$$

今後の便宜を図るため、これらの変数列をまとめたベクトルを次のように定義しておく。

$$T_{o,HS} = [t^{[0]}, \dots, t^{[N]}]^T \quad (5.86)$$

$$X_{o,HS} = [x_e^{[0]T}, \dots, x_e^{[N]T}, \dots, u^{[0]T}, \dots, u^{[N]T}, \lambda^{[0]T}, \dots, \lambda^{[N]T}]^T \quad (5.87)$$

これらの離散変数列を用いて式 (5.67) の最適化問題を再構成していく。

時間列 $T_{o,HS}$ に対して $t^{[0]} = 0$, $t^{[N]} = T_f$ であるとし、等間隔に時間 $t \in [0, T_f]$ を等分割するために次の関数を考える。

$$g_{time,HS} \left(t^{[\frac{k-1}{2}]}, t^{[\frac{k}{2}]} \right) = \Delta t - 2 \left(t^{[\frac{k}{2}]} - t^{[\frac{k-1}{2}]} \right), \quad (5.88)$$

$\Delta t \in \mathbb{R}$ は時間のステップ幅である。これを用いて各時間列に対する制約条件は次式のように与えられる。

$$G_{time,HS}(T_{o,HS}) = \begin{bmatrix} t^{[0]} \\ g_{time,HS} \left(t^{[0]}, t^{[\frac{1}{2}]} \right) \\ g_{time,HS} \left(t^{[\frac{1}{2}]}, t^{[1]} \right) \\ \vdots \\ g_{time,HS} \left(t^{[N-\frac{1}{2}]}, t^{[N]} \right) \\ t^{[N]} - T_f \end{bmatrix} = 0 \quad (5.89)$$

式 (5.69) の連続ダイナミクスについては Simpson の公式と Hermite spline を用いた近似により離散変数によって次式のように表現できる。

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} + \frac{\Delta t}{6} \left(F_{int}^{[k]} + 4F_{int}^{[k+\frac{1}{2}]} + F_{int}^{[k+1]} \right) \quad (5.90)$$

$$x^{[k+\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2} (x^{[k]} + x^{[k+1]}) + \frac{\Delta t}{8} (F_{int}^{[k]} - F_{int}^{[k+1]}) \quad (5.91)$$

ただし, $F_{int}^{[k]} = F_{int}(\dot{q}^{[k]}, \ddot{q}^{[k]})$ と定義した。これらの式をまとめて次の関数として表す。

$$\begin{aligned} g_{dyn,HS} \left(x_e^{[k]}, x_e^{[k+\frac{1}{2}]}, x_e^{[k+1]}, u^{[k]}, u^{[k+\frac{1}{2}]}, u^{[k+1]}, \lambda^{[k]}, \lambda^{[k+\frac{1}{2}]}, \lambda^{[k+1]} \right) \\ = \begin{bmatrix} x^{[k+1]} - x^{[k]} - \frac{\Delta t}{6} \left(F_{int}^{[k]} + 4F_{int}^{[k+\frac{1}{2}]} + F_{int}^{[k+1]} \right) \\ x^{[k+\frac{1}{2}]} - \frac{1}{2} (x^{[k]} + x^{[k+1]}) - \frac{\Delta t}{8} (F_{int}^{[k]} - F_{int}^{[k+1]}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.92)$$

また, 式 (5.70) の微分代数方程式については離散変数を用いて次のように表すことができる。

$$F_{dae}^{[\frac{k}{2}]} := F_{dae} \left(x_e^{[\frac{k}{2}]}, u^{[\frac{k}{2}]}, \lambda^{[\frac{k}{2}]} \right) = 0 \quad (5.93)$$

これより次の制約を与えることによってシステムのダイナミクスを考慮した軌道を計算することができる。

$$\begin{aligned} G_{dyn,HS}(X_{o,HS}) &= \begin{bmatrix} g_{dyn,HS} \left(x_e^{[0]}, x_e^{[\frac{1}{2}]}, x_e^{[1]}, u^{[0]}, u^{[\frac{1}{2}]}, u^{[1]}, \lambda^{[0]}, \lambda^{[\frac{1}{2}]}, \lambda^{[1]} \right) \\ \vdots \\ g_{dyn,HS} \left(x_e^{[N-1]}, x_e^{[N-\frac{1}{2}]}, x_e^{[N]}, u^{[N-1]}, u^{[N-\frac{1}{2}]}, u^{[N]}, \lambda^{[N-1]}, \lambda^{[N-\frac{1}{2}]}, \lambda^{[N]} \right) \\ F_{dae}^{[0]} \\ F_{dae}^{[\frac{1}{2}]} \\ \vdots \\ F_{dae}^{[N]} \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.94)$$

なお, この近似で得られた解軌道と実際のシステムを積分して得られる解軌道の間の近似誤差は離散化ステップ Δt に対して 4 次のオーダー $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ であることが知られている [62]。

また, その他の制約条件 $g_{path}(x_e(t), u(t), \lambda(t), \alpha_p)$, $g_{bound}(x_e(0), x_e(T_f), \alpha_p)$ に関しては各離散変数の値を用いて表し, 次のような制約として与える。

$$G_{other,HS}(X_{o,HS}, \alpha_p) = \begin{bmatrix} g_{path} \left(x_e^{[0]}, u^{[0]}, \lambda^{[0]}, \alpha_p \right) \\ \vdots \\ g_{path} \left(x_e^{[N]}, u^{[N]}, \lambda^{[N]}, \alpha_p \right) \\ g_{bound} \left(x_e^{[0]}, x_e^{[N]}, \alpha_p \right) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.95)$$

評価関数については Simpson の公式より次のように離散変数列を用いて近似することができる。

$$\begin{aligned} J_{cost}(x_e, u) &\approx J_{costd,HS}(X_{o,HS}) \\ &:= \frac{\Delta t}{6mgW_x} \sum_{k=0}^{N-1} \left(|P^{[k]}| + 4|P^{[k+\frac{1}{2}]}| + |P^{[k+1]}| \right) \end{aligned} \quad (5.96)$$

ただし, $P^{[k]} = P(x_e^{[k]}, u^{[k]})$ とした。

これらの離散化により決定変数を $T_{o,HS}, X_{o,HS}, \alpha_p$ として, 解くべき非線形計画問題は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} (T_{o,HS}^*, X_{o,HS}^*, \alpha_p^*) &= \underset{T_{o,HS}, X_{o,HS}, \alpha_p}{\operatorname{argmin}} J_{costd,HS}(X_{o,HS}) \\ \text{s.t.} \quad &G_{time,HS}(T_{o,HS}) = 0 \\ &G_{dyn,HS}(X_{o,HS}, \alpha_p) = 0 \\ &G_{other,HS}(X_{o,HS}, \alpha_p) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.97)$$

5.4.2 K -point Radau Collocation Method

K -point Radau Collocation Method では時間を N 分割し, 各時刻間の連続ダイナミクスを K 次 Legendre 多項式を用いて近似することによって非線形計画問題を構成する。まずは時間 $t \in [0, T_f]$ を $N(K+1)$ 個の変数列に分割し, 併せて分割した時間に対応する状態列と入力・拘束力列を次のように生成する。

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t^{[0,0]}, t^{[0,1]}, \dots, t^{[0,K]}, t^{[1,0]}, t^{[1,1]}, \dots, t^{[1,K]}, \dots, t^{[N-1,0]}, t^{[N-1,1]}, \dots, t^{[N-1,K]} \\ x_e &\rightarrow x_e^{[0,0]}, x_e^{[0,1]}, \dots, x_e^{[0,K]}, x_e^{[1,0]}, x_e^{[1,1]}, \dots, x_e^{[1,K]}, \dots, x_e^{[N-1,0]}, x_e^{[N-1,1]}, \dots, x_e^{[N-1,K]} \\ u &\rightarrow u^{[0,0]}, u^{[0,1]}, \dots, u^{[0,K]}, u^{[1,0]}, u^{[1,1]}, \dots, u^{[1,K]}, \dots, u^{[N-1,0]}, u^{[N-1,1]}, \dots, u^{[N-1,K]} \\ \lambda &\rightarrow \lambda^{[0,0]}, \lambda^{[0,1]}, \dots, \lambda^{[0,K]}, \lambda^{[1,0]}, \lambda^{[1,1]}, \dots, \lambda^{[1,K]}, \dots, \lambda^{[N-1,0]}, \lambda^{[N-1,1]}, \dots, \lambda^{[N-1,K]} \end{aligned} \quad (5.98)$$

ここではこれらの変数列をまとめたベクトル $T_{o,KR}, X_{o,KR}$ を次のように定義し, これらを用いて式 (5.67) の最適化問題を再構成していく。

$$T_{o,KR} = [t^{[0,0]}, \dots, t^{[N-1,K]}]^T \quad (5.99)$$

$$X_{o,KR} = [x_e^{[0,0]T}, \dots, x_e^{[N-1,K]T}, u^{[0,0]T}, \dots, u^{[N-1,K]T}, \lambda^{[0,0]T}, \dots, \lambda^{[N-1,K]T}]^T \quad (5.100)$$

時間列 $T_{o,KR}$ に対して $t^{[0,0]} = 0$, $t^{[N-1,K]} = T_f$ であるとし, 次の式を満たすように決定する。

$$t^{[i,j]} = t^{[i,0]} + \Delta h^{[j]} \Delta t, \quad (i = 0, \dots, N-1), \quad (j = 1, \dots, K) \quad (5.101)$$

$$t^{[i,0]} = t^{[i-1,K]}, \quad (i = 1, \dots, N-1) \quad (5.102)$$

$$\Delta t = t^{[i,K]} - t^{[i,0]}, \quad (i = 0, \dots, N-1) \quad (5.103)$$

ただし, $\Delta h^{[j]} \in [0, 1]$, Δt は時間列のステップ幅を表す定数であり, 後述する Gauss-Jacobi 多項式の根を用いて決定する. 式 (5.101), (5.102) を用いて時間列に対する制約条件は次式で与える.

$$G_{time, KR}(T_{o, KR}) = \begin{bmatrix} t^{[0,0]} \\ t^{[N-1,K]} - T_f \\ t^{[0,1]} - t^{[0,0]} - \Delta h^{[1]} \Delta t \\ \vdots \\ t^{[N-1,K]} - t^{[N-1,0]} - \Delta h^{[K]} \Delta t \\ t^{[1,0]} - t^{[0,K]} \\ \vdots \\ t^{[N-1,0]} - t^{[N-2,K]} \\ \Delta t - (t^{[0,K]} - t^{[0,0]}) \\ \vdots \\ \Delta t - (t^{[N-1,K]} - t^{[N,0]}) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.104)$$

式 (5.69), (5.70) の連続ダイナミクスを考えるため, 時間列 $T_{o, KR}$ の $t^{[i,0]} \sim t^{[i,K]}$ 間のシステムの解軌道 x_i を次式のように K 次 Lagrange 多項式を用いて近似する.

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^K l_k(\tau) x^{[i,k]} \quad (5.105)$$

$$t = t^{[i,0]} + \tau \Delta t, \tau \in [0, 1] \quad (5.106)$$

ただし, $l_k(\tau)$ は次式で定義される Lagrange 基底多項式である.

$$l_k(\tau) = \prod_{m=0, m \neq k}^K \frac{\tau - \Delta h^{[m]}}{\Delta h^{[k]} - \Delta h^{[m]}} \quad (5.107)$$

この $l_k(\tau)$ の構造により, $t' = t^{[i,0]} + \Delta h^{[j]} \Delta t$ のとき $x_i(t') = x^{[i,j]}$ となることに注意されたい. ここで, 式 (5.105) が式 (5.69), (5.70) の近似解となるためには次式を満たす必要がある.

$$\frac{d}{dt} x_i(t^{[i,j]}) = F_{int}(x_e^{[i,j]}) \quad (5.108)$$

$$F_{dae}(x_e^{[i,j]}, u^{[i,j]}, \lambda^{[i,j]}) = 0 \quad (5.109)$$

さらに, 式 (5.106) の定義から式 (5.108) は次式のように変数 τ における微分方程式に変換することができる.

$$\frac{d}{d\tau} x_i(t^{[i,j]}) = \Delta t F_{int}(x_e^{[i,j]}) \quad (5.110)$$

Table 5.2: Radau Roots Having Degree $K = 2, \dots, 6$

$K = 2$	0.3333	1.0000				
$K = 3$	0.1551	0.6449	1.0000			
$K = 4$	0.0886	0.4094	0.7877	1.0000		
$K = 5$	0.0571	0.2768	0.5836	0.8602	1.0000	
$K = 6$	0.0398	0.1980	0.4380	0.6955	0.9015	1.0000

式 (5.105) の定義から $\frac{d}{d\tau}x_i(t^{[i,j]}) = \sum_{k=0}^K x^{[i,k]} \frac{dl_k(\Delta h^{[j]})}{d\tau}$ と表せることから、連続ダイナミクスを考慮するために各離散変数が満たすべき制約は次の形で与えられる。

$$\sum_{k=0}^K x^{[i,k]} \frac{dl_k(\Delta h^{[j]})}{d\tau} = \Delta t F_{int}(x_e^{[i,j]}), \quad (i = 0, \dots, N-1), (j = 1, \dots, K) \quad (5.111)$$

$$F_{dae}(x_e^{[i,j]}, u^{[i,j]}, \lambda^{[i,j]}) = 0, \quad (i = 0, \dots, N-1), (j = 0, \dots, K) \quad (5.112)$$

また、式 (5.102) と同様に $t^{[i,0]}$ と $t^{[i-1,K]}$ における状態は一致しなければいけないため、次の制約も同時に考える。

$$x_e^{[i,0]} = x_e^{[i-1,K]}, \quad (i = 1, \dots, N-1) \quad (5.113)$$

これらの式 (5.111)～(5.113) より最終的にダイナミクスの制約条件は次のベクトルで与えられる。

$$G_{dyn,KR}(X_{o,KR}, T_{o,KR}) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^K x^{[0,k]} \frac{dl_k(\Delta h^{[0]})}{d\tau} - F_{int}(x_e^{[0,1]}) \Delta t \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^K x^{[N-1,k]} \frac{dl_k(\Delta h^{[K]})}{d\tau} - F_{int}(x_e^{[N-1,K]}) \Delta t \\ F_{dae}(x_e^{[0,0]}, u^{[0,0]}, \lambda^{[0,0]}) \\ \vdots \\ F_{dae}(x_e^{[N-1,K]}, u^{[N-1,K]}, \lambda^{[N-1,K]}) \\ x_e^{[1,0]} - x_e^{[0,K]} \\ \vdots \\ x_e^{[N-1,0]} - x_e^{[N-2,K]} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.114)$$

ここで、この制約 (5.114) を満たす状態列 $x^{[i,j]}$ と連続ダイナミクス (5.69), (5.70) を積分して得られる解について、これらの間に生じる誤差の大きさは時間列に対するステップ幅 $\Delta h^{[j]}$ の選び方に依存する。 K -point Radau Collocation Method ではガウス求積に関する定

理 [29, Thm. 10.1] より次の K 次 Gauss-Jacobi 多項式の根を用いて $\Delta h^{[j]}$ を決定する.

$$P_K(\Delta h) = \sum_{j=0}^K (-1)^{K-j} (\Delta h)^j \frac{(K-j+1)(K+j+1)}{j^2} \quad (5.115)$$

$K = 2$ から $K = 6$ のそれぞれの場合における $P_K(\Delta h) = 0$ の解について表 5.2 にまとめておく. なお, この場合における近似誤差は Δt に対して $\mathcal{O}(\Delta t^{2K-1})$ のオーダーであることが知られている [29].

その他の制約条件 $g_{\text{path}}(x_e(t), u(t), \lambda(t), \alpha_p)$, $g_{\text{bound}}(x_e(0), x_e(T_f), \alpha_p)$ に関しては各離散変数の値を用いて表すことで Hermite-Simpson Collocation Method と同様の形で与えられる.

$$G_{\text{other}, KR}(X_{o, KR}, \alpha_p) = \begin{bmatrix} g_{\text{path}}(x_e^{[0,0]}, u^{[0,0]}, \lambda^{[0,0]}, \alpha_p) \\ \vdots \\ g_{\text{path}}(x_e^{[N-1, K]}, u^{[N-1, K]}, \lambda^{[N-1, K]}, \alpha_p) \\ g_{\text{bound}}(x_e^{[0,0]}, x_e^{[N-1, K]}, \alpha_p) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.116)$$

評価関数については一次の前進オイラー法を使って積分を近似し, 離散変数を用いて次式のように表すとする.

$$\begin{aligned} J_{\text{cost}}(x_e, u) &\approx J_{\text{cost}, KR}(X_{o, KR}) \\ &:= \frac{1}{mgW_x} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{K-1} |P(x_e^{[i,j]}, u^{[i,j]})| \Delta h^{[j+1]} \end{aligned} \quad (5.117)$$

これらの離散化により決定変数を $T_{o, KR}$, $X_{o, KR}$, α_p として解くべき非線形計画問題は次のように定式化される.

$$\begin{aligned} (T_{o, KR}^*, X_{o, KR}^*, \alpha_p^*) &= \underset{T_{o, KR}, X_{o, KR}, \alpha_p}{\operatorname{argmin}} J_{\text{cost}, KR}(X_{o, KR}) \\ \text{s.t.} \quad &G_{\text{time}, KR}(T_{o, KR}) = 0 \\ &G_{\text{dyn}, KR}(X_{o, KR}, \alpha_p) = 0 \\ &G_{\text{other}, KR}(X_{o, KR}, \alpha_p) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.118)$$

5.4.3 マルチフェーズ軌道計画

式 (5.97), (5.118) は 1 歩周期の歩行軌道を求めるための非線形最適化問題であるが, これを拡張することで 2 歩以上の周期を持つ歩行軌道を計画するための問題を構成できる. N_w 歩周期の歩行軌道を生成する場合を考え, 形式的に i 歩めの歩行 ($i = 1, \dots, N_w$) における最適化変数列をまとめたベクトルをそれぞれ T_o^i, X_o^i, α_p^i とする. ただし, これらの表記は Hermite-Simpson Collocation および K -point Radau Collocation のどちらを利用してもいいように一般的な形で表現しており, 各ステップにおける時間列 T_o^i は $N + 1$ の要素をも

つとする．また，これらを用いて i 歩目における評価関数と制約条件の関数を $J_{costd}^i(X_o^i)$, $G_{time}^i(T_o^i)$, $G_{dyn}^i(X_o^i, \alpha_p^i)$, $G_{other}^i(X_o^i, \alpha_p^i)$ として表す． N_w 歩周期の軌道を設計するために G_{other}^i においては式 (5.80) の周期性条件を外したものを考え，加えて i 歩目の歩行における初期値 $x_e^{i[0]}$ と $i-1$ 歩目の終端値 $x_e^{i-1[N]}$ に対する制約条件 $G_{trans}^i(X_o^{i-1}, X_o^i)$ を新たに定義する．

$$G_{trans}^i(X_o^{i-1}, X_o^i) = \Delta_I(x^{i-1[N]}) - x^{i[0]}, \quad (i = 2, \dots, N_w) \quad (5.119)$$

$$G_{trans}^1(X_o^{N_w}, X_o^1) = \Delta_I(x^{N_w[N]}) - x^{1[0]} \quad (5.120)$$

なお，パラメータ α_p^i が各ステップ間で変わらないといった制約を追加したい場合には G_{trans}^i 内に定義すればよい．これらの評価関数，制約条件を用いて N_w 歩周期の周期軌道を設計するための基本的な非線形計画問題は最適化変数を $T_{ow} := \{T_o^{1*}, \dots, T_o^{N_w*}\}$, $X_{ow} := \{X_o^{1*}, \dots, X_o^{N_w*}\}$, $\alpha_{pw} = \{\alpha_p^{1*}, \dots, \alpha_p^{N_w*}\}$ として次のように定式化できる．

$$\begin{aligned} (T_{ow}^*, X_{ow}^*, \alpha_{pw}^*) &= \underset{T_{ow}, X_{ow}, \alpha_{pw}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N_w} J_{costd}^i(X_o^i) \\ \text{s.t.} \quad &G_{time}^i(T_o^i) = 0, \quad (i = 1, \dots, N_w) \\ &G_{dyn}^i(X_o^i, \alpha_p^i) = 0, \quad (i = 1, \dots, N_w) \\ &G_{other}^i(X_o^i, \alpha_p^i) \leq 0, \quad (i = 1, \dots, N_w) \\ &G_{trans}^i(X_o^{i-1}, X_o^i) = 0, \quad (i = 2, \dots, N_w) \\ &G_{trans}^1(X_o^{N_w}, X_o^1) = 0 \end{aligned} \quad (5.121)$$

5.4.4 Direct Collocation Method に関するツールボックス

Direct Collocation Method を利用した軌道計画を行う上で有用なツールボックスをいくつか紹介しておく．これらはダイナミクスと制約条件および評価関数を定義することによって上述の非線形計画問題を自動的に構成し，付属する非線形計画ソルバによって解を計算する機能を有している．また，式 (5.121) のような複数のフェーズを持つ軌道計画問題を構成することも可能である．

- Open Optimal Control Library (Open OCL) [63] ...

MATLAB で利用可能な無料の最適制御ツールボックス．自動微分を利用した最適制御ツールボックスである CasADi [64] と IPOPT を用いて構成されており，非線形計画問題の勾配を自動微分によって計算する形を取っている． K -point Radau Collocation Method を利用可能であり，複数モードを持つハイブリッドシステムの軌道計画にも対応している．

<https://openocl.org/>

- Fast Robot Optimization and Simulation Toolkit (FROST) [65] ...

MATLAB で利用可能な無料のシステムモデリング，最適制御ツールボックス．MATLAB と Mathematica を用いて構成されており，非線形計画問題の勾配をシンボリックに計算する形を取っている．Hermite-Simpson Collocation Method, Trapezoidal Collocation Method, Pseudospectral Optimization Method (Legendre-Gauss-Lobatto) を利用可能．二足歩行ロボットの軌道計画に特化しており，複数モードを持つハイブリッドシステムの軌道計画に対応している他，HZD ベースの制御系を考慮した軌道計画も行うことができる．また，FROST で定義した問題を C++ に変換して高速化するためのツールボックスである C-FROST [66] も開発されている．

<https://ayonga.github.io/frost-dev/index.html>

- Imperial College London Optimal Control Software 2 (ICLOCS2) [67] ...

MATLAB で利用可能な無料の最適制御ツールボックス．有限差分を用いた近似の他に Adigator [68] を用いた自動微分によって非線形計画問題の勾配を計算できる．Trapezoidal Collocation Method, Hermite-Simpson Collocation Method, Pseudospectral Optimization Method (Legendre-Gauss-Lobatto) を利用可能．複数モードを持つハイブリッドシステムの軌道計画にも対応している．

<http://www.ee.ic.ac.uk/ICLOCS/default.htm>

5.5 安定周期軌道的设计

HZD に基づく周期軌道は式 (5.67) の最適化問題を解くことによって設計することができるが，得られる周期軌道の安定性については前述の制約条件 g_{dyn} , g_{path} , g_{bound} だけでは保証されていない．本節では周期軌道の安定性と密接な関係を持つポアンカレマップについて説明し，それに基づく安定周期軌道の設計方法を提案する．

5.5.1 ポアンカレマップと周期軌道の安定性

式 (5.67) の最適化問題を解くことによって得られるシステム (5.32) の周期軌道を次のように定義する．

$$\mathcal{O} = \{\bar{x} = \varphi_{\bar{x}}(t, \bar{x}_{d*}, \alpha_p) \mid 0 \leq t < T_f\} \quad (5.122)$$

ただし， $\bar{x}_{d*} \in \mathcal{S}_P$ かつ $\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p) \in \bar{\mathcal{G}}_n$ であり， $\mathcal{S}_P$ は次式で定義される状態の集合である．

$$\mathcal{S}_P = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{10} \mid s_p(\bar{x}) = 0, \bar{x} = \bar{\Delta}_I(\bar{x}'), \bar{x}' \in \bar{\mathcal{G}}_n\} \quad (5.123)$$

ただし， $s_p(\bar{x}) : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}$ でありここでは $s_p(\bar{x}) = \bar{p}_{swz}(\bar{x})$ である．これはガード $\bar{\mathcal{G}}_n$ 上にある状態をリセットマップによって遷移させた直後の状態の集合を表している．この $\bar{x}_{d*}$ 対

してその近傍 $\bar{x}_d \in B_\delta(\bar{x}_{d*}) \cap \mathcal{S}_p$ から始まる次式の解 $\varphi_{\bar{x}}(t, \bar{x}_d, \alpha_p)$ を考える.

$$\varphi_{\bar{x}}(t, \bar{x}_d, \alpha_p) = \bar{x}_d + \int_0^t F_{\bar{x}}(\varphi_{\bar{x}}(\tau, \bar{x}_d, \alpha_p), \alpha_p) d\tau \quad (5.124)$$

次にこの解が時間 $T_I(\bar{x}_d, \alpha_p)$ で集合 $\bar{\mathcal{G}}_n$ に戻ってくると仮定する. $T_I(\bar{x}, \alpha_p) : \mathcal{S}_p \times \mathbb{R}^{4 \times M_p+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ は次式で定義される Time-to-reset 関数である.

$$T_I(\bar{x}, \alpha_p) = \inf\{t > 0 \mid \varphi_{\bar{x}}(t, \bar{x}, \alpha_p) \in \bar{\mathcal{G}}_n\} \quad (5.125)$$

$T_I(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) = T_f$ であることに注意されたい. このとき状態を $\bar{x}_d^S[k] \in \mathcal{S}_p, (k = 0, 1, \dots)$ とする次の離散時間システムを考えることができる.

$$\bar{x}_d^S[k+1] = P_{\bar{x}}(\bar{x}_d^S[k], \alpha_p) \quad (5.126)$$

$$P_{\bar{x}}(\bar{x}_d^S[k], \alpha_p) := \bar{\Delta}_I \left(\bar{x}_d^S[k] + \int_0^{T_I(\bar{x}_d^S[k], \alpha_p)} F_{\bar{x}}(\varphi_{\bar{x}}(\tau, \bar{x}_d^S[k], \alpha_p), \alpha_p) d\tau \right) \quad (5.127)$$

この状態遷移関数 $P_{\bar{x}}(\bar{x}_d^S[k], \alpha_p) : \mathcal{S}_p \times \mathbb{R}^{4 \times M_p+1} \rightarrow \mathcal{S}_p$ はポアンカレマップと呼ばれ, 状態空間において超平面 $\mathcal{S}_p$ を横断する周期軌道の挙動を $\mathcal{S}_p$ から $\mathcal{S}_p$ への写像として表現するものである. 特に超平面 $\mathcal{S}_p$ はポアンカレセクションと呼ばれる. また, $\mathcal{O}$ は周期軌道であるから $\bar{x}_{d*}$ については次式が成り立つ.

$$\bar{x}_{d*} = P_{\bar{x}}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) \quad (5.128)$$

この式 (5.126) で定義されるポアンカレマップと周期軌道 $\mathcal{O}$ の安定性については次の関係があることが知られている.

定理 9 (ハイブリッドシステムにおける周期軌道の安定性 [27, Thm. 1]). 周期 T_f をもつ周期軌道 $\mathcal{O}$ が局所指数安定であるための必要十分条件は式 (5.126) のポアンカレマップにおいて $\bar{x}_{d*} \in \mathcal{S}_p \cap \mathcal{O}$ が局所指数安定な平衡点であることである.

したがってこの定理より, 周期軌道 $\mathcal{O}$ の局所指数安定性を保証するためには式 (5.126) のポアンカレマップにおいて $\bar{x}_{d*}$ が局所指数安定な平衡点となることを保証すればよい. これを考えるため状態の誤差ベクトル $\delta \bar{x}_d^S[k] := \bar{x}_d^S[k] - \bar{x}_{d*}$ を用いた次の離散時間システムを導入する.

$$\delta \bar{x}_d^S[k+1] = P_{\bar{x}}(\bar{x}_{d*} + \delta \bar{x}_d^S[k], \alpha_p) - \bar{x}_{d*} \quad (5.129)$$

このシステムの右辺をテイラー展開し, 二次以上の項を無視すると共に式 (5.128) の性質を用いることによって次式の線形近似システムを得る.

$$\delta \bar{x}_d^S[k+1] = \frac{\partial P_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) \delta \bar{x}_d^S[k] \quad (5.130)$$

ここで定義よりポアンカレセクション $\mathcal{S}_p$ はロボットの全状態に対して一次元小さな集合であるから, 式 (5.126) のシステムにおいては従属な状態が 1 つ含まれることに注意されたい.

これを考慮して式 (5.130) のシステムを独立な状態 $\bar{x}_d^{SI} \in \mathbb{R}^9$ のみによって表現される形へ変形する．次の性質を満たす行列 $\pi_{d,proj} \in \mathbb{R}^{9 \times 10}$, $\pi_{d,lift} \in \mathbb{R}^{10 \times 9}$ を導入する [26]．

$$\bar{x}_d^{SI} = \pi_{d,proj} \bar{x}_d^S \quad (5.131)$$

$$\bar{x}_d^S = \pi_{d,lift} \bar{x}_d^{SI} \quad (5.132)$$

$$\pi_{d,proj} \pi_{d,lift} = I_{9 \times 9} \quad (5.133)$$

$$\frac{\partial s_p}{\partial \bar{x}_d^S}(\bar{x}_{d*}) \pi_{d,lift} = 0_{1 \times 9} \quad (5.134)$$

$\pi_{d,proj}$ は元の状態 $\bar{x}_d^S$ を $\mathcal{S}_P$ 上へ射影する線形作用素であり, $\pi_{d,lift}$ は $\bar{x}_d^{SI}$ を拡大して $\bar{x}_d^S$ を生成する作用素である．これらを用いて式 (5.130) のシステムは次式の形へ変形できる．

$$\delta \bar{x}_d^{SI}[k+1] = A_d^{SI}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) \delta \bar{x}_d^{SI}[k] \quad (5.135)$$

$$A_d^{SI}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) := \pi_{proj} \frac{\partial P_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) \pi_{lift} \quad (5.136)$$

離散時間システムの安定条件よりこのシステムの原点が局所指数安定となるためには次式の条件を満たさなければならない．

$$\rho_{spec}(A_d^{SI}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p)) < 1 \quad (5.137)$$

この式 (5.137) が式 (5.126) のポアンカレマップにおいて $\bar{x}_{d*}$ が局所指数安定となるための条件であり, この条件を満たす場合には周期軌道 $\mathcal{O}$ が局所指数安定であると言える．したがって $A_d^{SI}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p)$ のスペクトル半径を調べることによって設計された周期軌道の安定性を調べることができるが, 一般に $\frac{\partial P_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p)$ は解析的な形を求めることができないため, 数値的な手法を用いて計算する必要がある．代表的な2つの方法を付録 A.1, A.2 に記載しておく．

5.5.2 HZD に基づく周期軌道の安定化

ロボットの状態を周期軌道に対して安定に追従させるためにはポアンカレマップが式 (5.137) の条件を満たすように仮想拘束を設計, 制御を行う必要がある．HZD に基づく制御においては HZD 多様体 $\mathcal{Z}$ 上にシステムの状態が拘束されるため, 式 (5.58) の低次元システムに対しても次式のポアンカレマップを考えることができる．

$$\bar{x}_{zd}^S[k+1] = P_{\bar{x}_z}(\bar{x}_{zd}^S[k], \alpha_p) \quad (5.138)$$

$$P_{\bar{x}_z}(\bar{x}_{zd}^S[k], \alpha_p) = \bar{\Delta}_{Iz} \left(\bar{x}_{zd}^S[k] + \int_0^{T_I(\bar{x}_{zd}^S[k], \alpha_p)} \bar{f}_z(\varphi_z(\tau, \bar{x}_{zd}^S[k], \alpha_p), \alpha_p) d\tau \right) \quad (5.139)$$

ただし, $\bar{x}_{zd}^S[k] \in \mathcal{S}_{Pz}$ であり, $\mathcal{S}_{Pz}$ は次式で定義される集合である．

$$\mathcal{S}_{Pz} = \{ \bar{x}_z \in \mathbb{R}^2 \mid s_p(\bar{x}_z, \alpha_p) = 0, \bar{x}_z = \bar{\Delta}_{Iz}(\bar{x}'_z, \alpha_p), \bar{x}'_z \in \bar{\mathcal{G}}_z \} \quad (5.140)$$

これより式 (5.135) と同様の手順を踏むことで $\mathcal{S}_{P_z}$ 上の独立な状態 $\delta\bar{x}_{zd}^{SI}[k]$ のみで表現される低次元線形ポアンカレマップを次のように構築できる.

$$\delta\bar{x}_{zd}^{SI}[k+1] = A_{zd}^{SI}(\bar{x}_{zd*}, \alpha_p) \delta\bar{x}_{zd}^{SI}[k] \quad (5.141)$$

$$A_{zd}^{SI}(\bar{x}_{zd*}, \alpha_p) := \pi_{zd,proj} \frac{\partial P_{\bar{x}_z}}{\partial \bar{x}_{zd}}(\bar{x}_{zd*}, \alpha_p) \pi_{zd,lift} \quad (5.142)$$

ただし, $\delta\bar{x}_{zd}^{SI}[k] := \bar{x}_{zd}^{SI}[k] - \pi_{zd,proj} \bar{x}_{zd*}$ であり, $\pi_{zd,proj} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $\pi_{zd,lift} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ は式 (5.131) ~ (5.134) と同様の性質を持つ線形作用素である. HZD 多様体上の周期軌道を $\mathcal{O}_z$ として $\mathcal{O}$ と同様に定義すると, 前述の議論より $\mathcal{O}_z$ が指数安定であることと式 (5.138) の固定点 $\bar{x}_{zd*}$ が指数安定であることは等価となる. ここで HZD 上の周期軌道 $\mathcal{O}_z$ の安定性と元のシステムの周期軌道 $\mathcal{O}$ の安定性について次の定理が示されている.

定理 10 (RES-CLF による出力零化制御と周期軌道の安定性 [32, Thm. 2]). $\mathcal{S}_P \cap \mathcal{Z}$ を横断する HZD 多様体上の指数安定な周期軌道を $\mathcal{O}_z$ とし, システム (5.32) と式 (5.40) の出力関数 y_c において RES-CLF V_ϵ が存在すると仮定する. このとき, すべての $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ および Lipschitz 連続な制御入力 $u \in \mathcal{K}_{clf}^\epsilon$ に対して $\mathcal{O}$ が指数安定な周期軌道となるような $\bar{\epsilon}$ が存在する.

この定理は HZD 多様体上の周期軌道 $\mathcal{O}_z$ が指数安定であれば $u \in \mathcal{K}_{clf}^\epsilon$ を用いることによって元のシステムにおける周期軌道 $\mathcal{O}$ を指数安定化できることを意味している. すなわち HZD に基づく制御を行う場合には式 (5.141) の低次元線形化ポアンカレマップが指数安定となるように軌道を設計することにより, 全体として指数安定な周期軌道 $\mathcal{O}$ を実現することができる. したがって次の不等式が安定な周期軌道を得るために満たすべき条件となる.

$$\rho_{spec}(A_{zd}^{SI}(\bar{x}_{zd*}, \alpha_p)) < 1 \quad (5.143)$$

式 (5.143) の条件を満たす仮想拘束パラメータ α_p を得るための方法として [21], [26], [25] 等が提案されており, ゼロダイナミクスが 2 次元である 2D ロボットモデルに対しては [25] の方法が用いられることが多い. しかし, [25] の方法はシステムが 3 次以上のゼロダイナミクスを持つ場合には適用できないため, より高次のゼロダイナミクスを持つシステムへの拡張および 5.4 節で述べた Direct Collocation Method の利用を考慮した安定周期軌道設計手法を次節で述べる.

5.5.3 Direct Collocation による安定周期軌道設計

本節では 5.4 節の Direct Collocation Method による軌道設計手法を拡張し, 得られる周期軌道の指数安定性を保証した軌道設計手法を提案する. 主となるアイデアは [21] と同様に数値的なポアンカレマップの計算に基づいて周期軌道とポアンカレマップヤコビアンの特値半径を同時に設計するものであるが, 本論文では Direct Collocation Method の枠組みで利用できる形を構成するため, 5.4.4 節で紹介した種々のツールボックスにおいて実行可

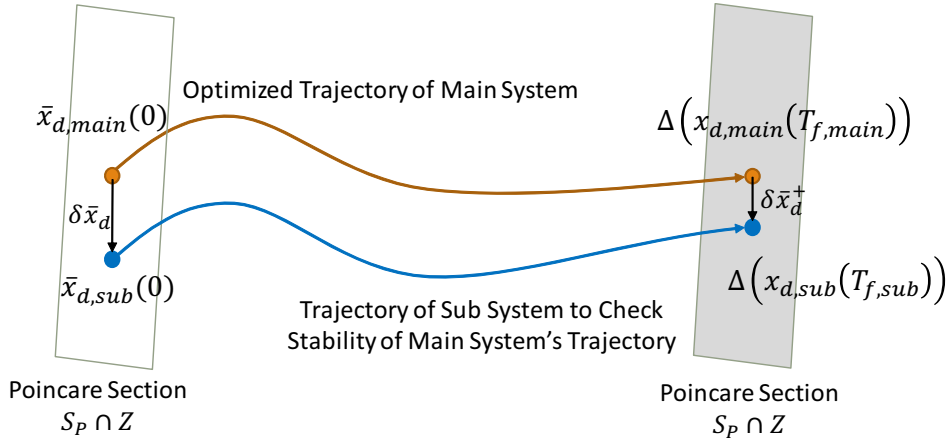


Fig 5.2: Calculation Method of Jacobian Matrix of Poincaré Map

能である。

Direct Collocation Method においてポアンカレマップやコビアンの特値半径を設計するためには周期軌道とそれに対応したポアンカレマップやコビアンを同時に計算する必要がある。[69] では付録 A.2 の微分方程式 (A.12) を軌道計画で考慮するシステムダイナミクスに加えることでポアンカレマップやコビアンを計算する方法を利用しているが、HZD に基づく制御を利用する場合には閉ループ系の形が複雑になることからシンボリックに式 (A.12) を求めるのは難しい。そこで本論文では付録 A.1 の方法を用いることによって Direct Collocation Method 内でポアンカレマップやコビアンを数値的に計算する方法を取る。具体的には図 5.2 に示すように周期軌道を設計するための主システムとポアンカレマップやコビアンを計算するための副システムを導入し、それぞれのシステムの解軌道を Direct Collocation Method 内で同時に計算することによって周期軌道の設計とそれに対応したポアンカレマップやコビアンを計算を行う。

主システムと副システムは同じダイナミクス、コントローラ、仮想拘束パラメータを持つとする。付録 A.1 の方法に基づく、主システムが $S_P \cap Z$ 上に固定点 $\bar{x}_{d,main} \in S_P \cap Z$ を持ち、 Z 上に拘束された周期軌道 $\mathcal{O}_z$ を有するとき、副システムにおいて初期値を $\bar{x}_{d,sub} = \bar{x}_{d,main} + \delta\bar{x}_d \in B_\delta(\bar{x}_{d*}) \cap S_P \cap Z$ とする解軌道を計算し、 $S_P \cap Z$ に再び戻ってきた際の値 $\delta\bar{x}_d^+$ を用いることで周期軌道 $\mathcal{O}_z$ に関するポアンカレマップやコビアン $A_{zd}^{SI}(\bar{x}_{d,main}, \alpha_p)$ を式 (A.4) より数値的に求めることができる。このとき、式 (A.4) を計算するためには $S_P \cap Z$ の次元分のデータが必要であり、次式で与えられる $S_P \cap Z$ のそれぞれの基底に対する摂動 $\delta\bar{x}_d$ を与えなければならない。

$$\delta\bar{x}_d \in \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial s_p}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial y_c}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix} \right) \subseteq S_P \cap Z \quad (5.144)$$

各基底方向への摂動 $\delta\bar{x}_d$ に対するデータを集めるためには $S_P \cap Z$ の次元と等しい数の副システムを用意しなければならないことに注意されたい。今回のケースでは $S_P \cap Z$ の次元は

1 であり $\mathcal{S}_P \cap \mathcal{Z}$ 上の独立な変数は $\dot{\theta}_p$ であるから副システムは 1 つ考えればよい。しかし高次のゼロダイナミクスを持つ場合への拡張を考慮して $\mathcal{S}_P \cap \mathcal{Z}$ の次元が n_{sz} の場合における副システムの初期値 $\bar{x}_{d,sub}^i$ が満たすべき条件を次のように定義しておく。

$$g_{initial} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{d,sub}^1 - \bar{x}_{d,main} - \epsilon_\delta \delta \bar{x}_d^1 \\ \vdots \\ \bar{x}_{d,sub}^{n_{sz}} - \bar{x}_{d,main} - \epsilon_\delta \delta \bar{x}_d^{n_{sz}} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.145)$$

ただし $\epsilon_\delta \in \mathbb{R}$ は微小定数パラメータであり、 $\delta \bar{x}_d^i$ は $\mathcal{S}_P \cap \mathcal{Z}$ の i 番目の正規直交基底とする。

前述の方法で計算されるポアンカレマップヤコビアン A_{zd}^{SI} が式 (5.143) の条件を満たすように制約を課すことを考える。ここでも $\mathcal{S}_P \cap \mathcal{Z}$ の次元が n_{sz} であると仮定する。 $n_{sz} \geq 2$ であるとき、式 (5.143) の条件を直接 Direct Collocation Method における制約として用いることは難しいため、等価な条件として次式の制約を考える [72]。

$$\exists P_A \text{ s.t. } A_{zd}^{SI T} P_A A_{zd}^{SI} - r_A^2 P_A \prec 0, \quad P_A = P_A^T \succ 0 \quad (5.146)$$

ただし、 $r_A \in [0, 1]$ は A_{zd}^{SI} のスペクトル半径の上限を決めるパラメータであり、 $r_A = 1$ のとき離散時間 Lyapunov 不等式に一致する。また、この条件は次の補題 [73] を用いることによって線形行列不等式 (LMI) の形で表すことができる。

補題 6 (Schur の相補性条件). 次の式 (5.147) の条件が成り立つことと式 (5.148) の条件が成り立つことは等価である。

$$\begin{bmatrix} P & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.147)$$

$$Q \succ 0, \quad P - SQ^{-1}S^T \succ 0 \quad (5.148)$$

この補題 6 により、式 (5.146) は次の LMI 条件に変換できる。

$$A_{LMI} := \begin{bmatrix} r_A^2 P_A & A_{zd}^{SI T} P_A \\ P_A A_{zd}^{SI} & P_A \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.149)$$

更にシルベスターの判定条件 [74] より行列 A_{LMI} の首座小行列式を $\det(A_{LMI,i})$ として式 (5.149) の LMI 条件は次の不等式制約へ変換できる。

$$g_{stab}(A_{zd}^{SI}, P_A) = \begin{bmatrix} \det(A_{LMI,1}) \\ \vdots \\ \det(A_{LMI,2n_{sz}}) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.150)$$

これより新たな最適化変数として P_A を導入し、式 (5.150) の条件を Direct Collocation Method 内の制約条件として用いることで式 (5.143) の条件を満たす周期軌道を得ることができる。

以上の方法を用いて (5.67) の方法を拡張した安定周期軌道設計手法を構成する．主システムと副システムの状態および入力を $x_{main}(t)$, $u_{main}(t)$, $t \in [0, T_{f,main}]$, $x_{sub}(t)$, $u_{sub}(t)$, $t \in [0, T_{f,sub}]$, 共通の仮想拘束パラメータ α_p および式 (5.146) の正定行列 P_A をあわせたものを α_{param} としてこれらを最適化する問題を考え，主システムと副システムに対し次の評価関数と制約条件を与える．

主システム

- 評価関数：歩行における移動仕事率 (CoT) J_{cost} (5.68)
- 制約条件 1：ダイナミクスの制約 g_{dyn} (5.69)～(5.71)
- 制約条件 2：
状態・入力の許容集合に関する制約および拘束力，出力関数の零化制御に関する制約 g_{path} (5.72)～(5.76)
- 制約条件 3：
状態に関する境界制約条件，出力関数の初期値の制約 g_{bound} (5.79)～(5.83)
- 制約条件 4：
ポアンカレマップヤコビアンの特値に関する制約 g_{stab} (5.150)

副システム

- 評価関数：なし
- 制約条件 1：ダイナミクスの制約 g_{dyn} (5.69)～(5.71)
- 制約条件 2：
状態・入力の許容集合に関する制約および拘束力，出力関数の零化制御に関する制約 g_{path} (5.72)～(5.75)
- 制約条件 3：
終端状態がガード上に到達するための制約（周期条件と歩幅の条件は除く），出力関数の初期値の制約 g'_{bound} (5.79), (5.82), (5.83)
- 制約条件 4：初期状態に関する制約 $g_{initial}$ (5.145)

これらの最適化問題は 5.4.3 節で紹介したマルチフェーズの Direct Collocation Method を用いることで 1 つの非線形計画問題に変換することができる．すなわち，前述の主システムと副システムの最適化問題をそれぞれ異なるフェーズに設定したマルチフェーズ最適化問題を構成する．ただし，この場合には式 (5.121) の問題の G_{trans} のように前のフェーズと次のフェーズの状態に対する遷移条件を考える必要はないことに注意されたい．

主システムに対する離散変数を $T_{o,main}$, $X_{o,main}$, i 番目の副システムに対する離散変数を $T_{o,sub}^i$, $X_{o,sub}^i$, パラメータを α_{param} として定義する．これらの離散変数を用いて各制

約を表現したベクトルを G_{time} , G_{dyn} のように構成し, さらに $T_{o,sub} = \{T_{o,sub}^1, \dots, T_{o,sub}^{n_{sz}}\}$, $X_{o,sub} = \{X_{o,sub}^1, \dots, X_{o,sub}^{n_{sz}}\}$ とすると Direct Collocation Method による問題の構成は次のように定式化される.

$$(T_{o,main}^*, X_{o,main}^*, T_{o,sub}^*, X_{o,sub}^*, \alpha_{param}^*) = \underset{T_{o,main}, X_{o,main}, T_{o,sub}, X_{o,sub}, \alpha_{param}}{\operatorname{argmin}} J_{costd}(X_{o,main}) \quad (5.151)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & G_{time}(T_{o,main}) = 0, \\ & G_{time}(T_{o,sub}^i) = 0, \quad (i = 1, \dots, n_{sz}), \\ & G_{dyn}(X_{o,main}, \alpha_{param}) = 0, \\ & G_{dyn}(X_{o,sub}^i, \alpha_{param}) = 0, \quad (i = 1, \dots, n_{sz}), \\ & G_{path}(X_{o,main}, \alpha_{param}) \leq 0, \\ & G_{path}(X_{o,sub}^i, \alpha_{param}) \leq 0, \quad (i = 1, \dots, n_{sz}), \\ & G_{bound}(X_{o,main}, \alpha_{param}) = 0, \\ & G'_{bound}(X_{o,sub}^i, \alpha_{param}) = 0, \quad (i = 1, \dots, n_{sz}), \\ & G_{stab}(X_{o,sub}, \alpha_{param}) \geq 0, \\ & G_{initial}(X_{o,main}, X_{o,sub}) = 0 \end{aligned}$$

今回のケースでは主システムの問題を 1 番目のフェーズ, 副システムの問題を 2 番目のフェーズとしてそれぞれのシステムに対して設定した評価関数および制約条件を用いて式 (5.151) の非線形計画問題へ変換すればよい.

数値例 6 : ノミナルロボットモデルにおける安定周期軌道設計

本節で提案する手法を用いて図 5.1 の RABBIT における安定周期歩行を設計する. 設計する歩行の目標パラメータは次のとおりである.

- 歩幅 ... $W_x = 0.4$
- 終端時間 ... $0.3 \leq T_f \leq 0.5$
- 入力上限 ... $|u_{max,i}| \leq 80, \quad (i = 1, \dots, 4)$
- ポアンカレマップヤコビアン A_{zd}^{SI} のスペクトル半径上限 ... $r_A = 1.0$

この例では出力関数を定義するための行列を $C'_1 = [I_{4 \times 4}, 0_{4 \times 3}]$, $C'_2 = [1, 1/2, 0, 0, 1, 0, 0]$ として設定した. この場合, Phase variable $\theta_p = C'_2 q$ は図 5.3 に示すようにロボットの支持脚先端位置と腰位置を結んだ仮想支持脚の角度を表す座標となる. 今回は分割ノードの数を $N = 15$ とする 6-point Radau Collocation を利用して式 (5.151) の非線形計画問題を構成するとし, 5.4.4 節に記載した Open OCL を用いて最適化を行った.

得られた周期軌道とパラメータとして $\epsilon = 0.05$, $K_1 = I_{4 \times 4}$, $K_2 = 2I_{4 \times 4}$ を持ち, 式 (5.75)

を満たす出力零化コントローラを用いてシミュレーションを行った結果を示す。図 5.4 は設計された軌道から 5% ずれた初期値を用いてシミュレーションを行い、ポアンカレセクション上の状態と設計された固定点との偏差の時間変化を表したものである。このときの定常状態における歩行の様子は図 5.5 の通りである。歩数が増えるとともに偏差が減少し、設計された固定点に対して状態が収束していく様子を読み取れる。また、図 5.6 はゼロダイナミクス $\dot{\theta}_p$ に関する線形化ポアンカレマップヤコビアン $A_{zd}^{SI} = \frac{\delta \dot{\theta}_p[k]}{\delta \dot{\theta}_p[k-1]}$ のノルムをステップ毎に計算したものであり、図 5.7 は出力関数の時間変化を表したものである。歩行開始の初期段階では出力関数が零化されておらず、線形化ポアンカレマップヤコビアンのノルムは大きな値を取っているが、出力関数が零化されてからはおよそ 0.764 前後の値を取っていることから安定なゼロダイナミクスが得られていることが分かる。また、軌道設計時に計算された線形化ポアンカレマップヤコビアンの値も 0.764 程度であったことからおよそ設計通りのパフォーマンスが得られていることが分かった。

上記の例では連続時間で制御入力を変更できるという仮定で出力零化コントローラを用いていたが、実際のロボットを制御する場合には設定したサンプリング周期に応じて離散的に制御入力を更新することしかできない。そのため、サンプリング周期を 1ms として同様のコントローラを用いて制御した場合の結果を図 5.8 に示す。歩数を進めるごとに固定点に対する状態の偏差を減少させることはできているものの、最終的には設計した偏差を残したまま設計した固定点近傍に留まる形となっている。すなわち、この場合には設計した固定点が Lyapunov 安定となっていることがわかる。図 5.9 はこの場合の出力関数の値を表したものである。連続時間コントローラを用いる場合と異なり、離散ジャンプの際に出力関数に偏差が生じてしまい HZD 多様体上に状態を拘束しつづけることができていないことが読み取れ

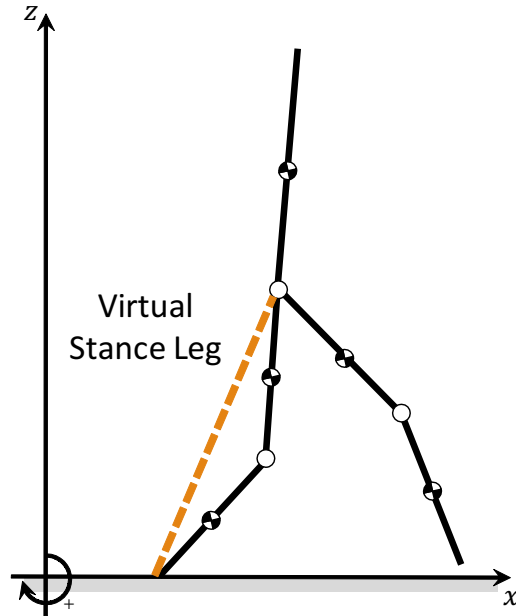


Fig 5.3: Virtual Stance Leg Defining Phase Variable θ_p

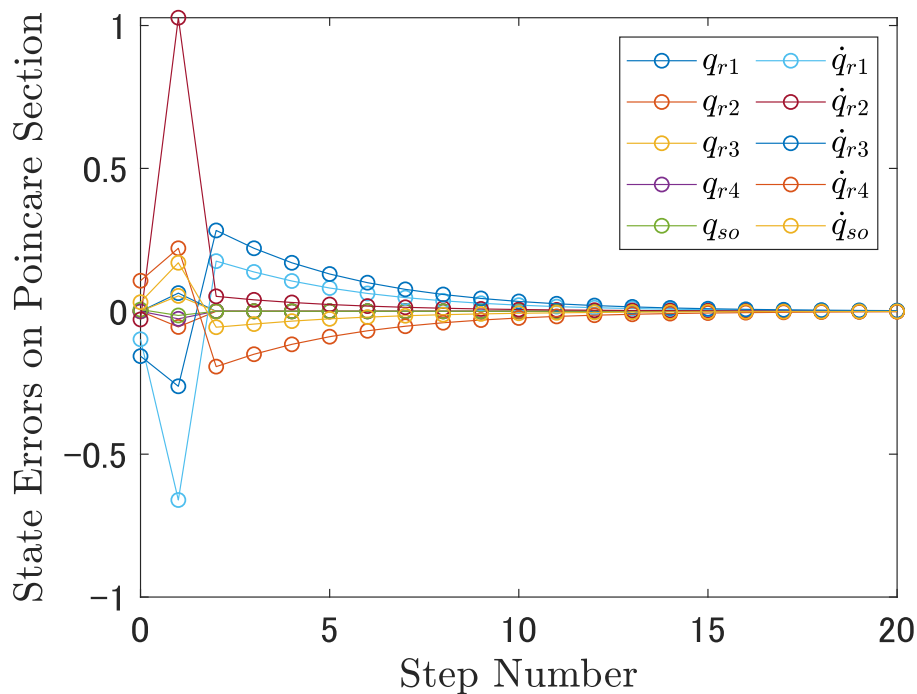


Fig 5.4: State Errors on the Poincaré Section (Continuous Time Controller)

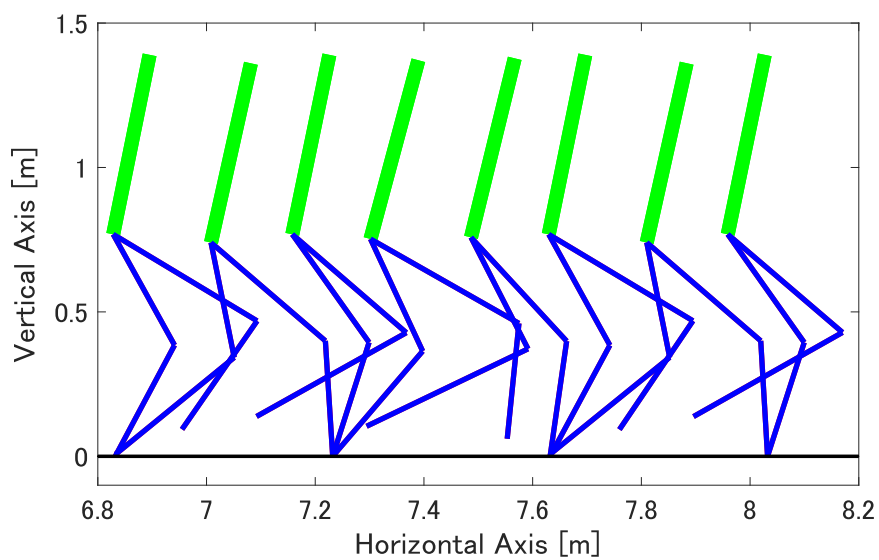


Fig 5.5: Snapshot of Robot's Walking in Steady State (Continuous Time Controller)

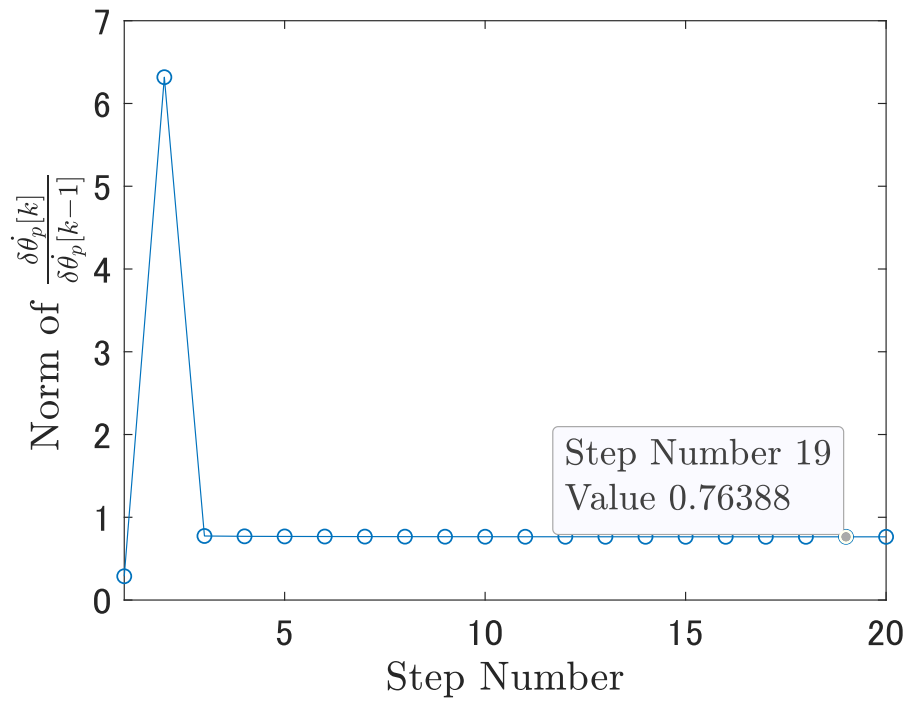


Fig 5.6: Norm of Linearized Poincaré Map Jacobian A_{zd}^{SI} (Continuous Time Controller)

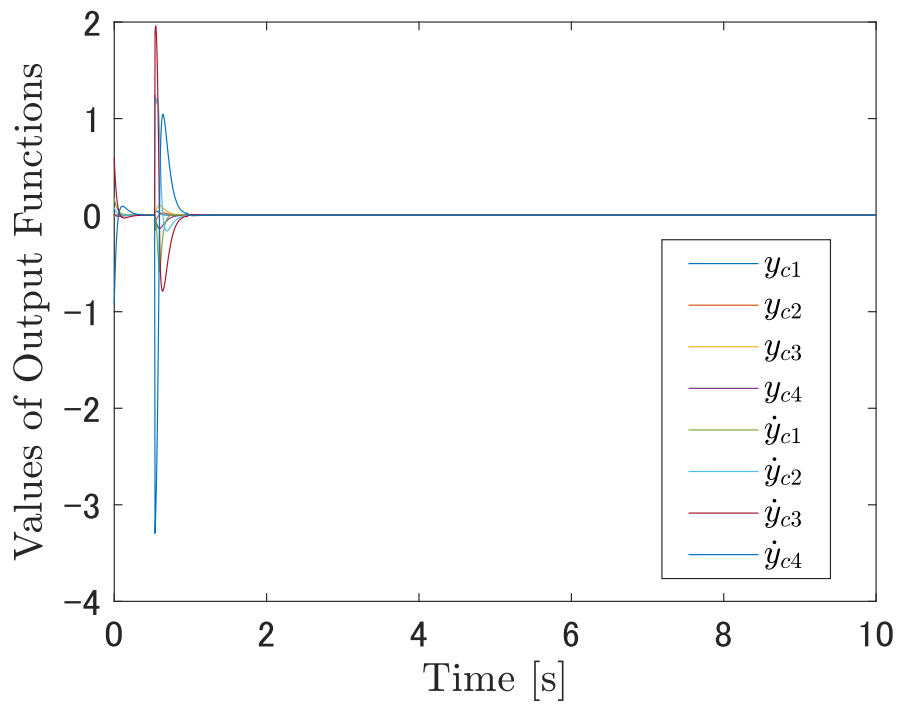


Fig 5.7: Output Functions (Continuous Time Controller)

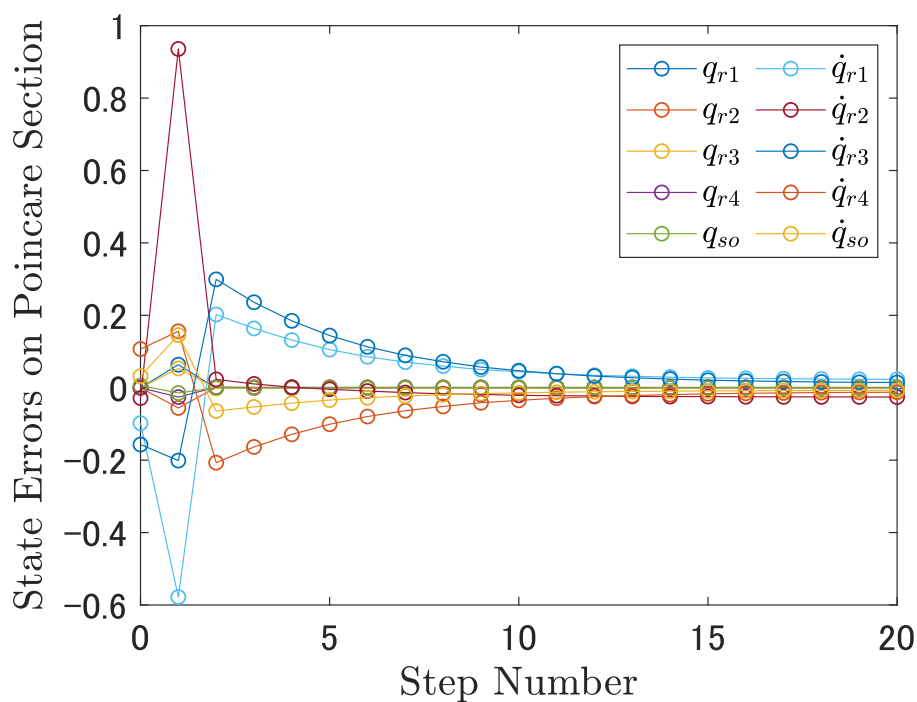


Fig 5.8: State Errors on the Poincaré Section (Discrete Time Controller)

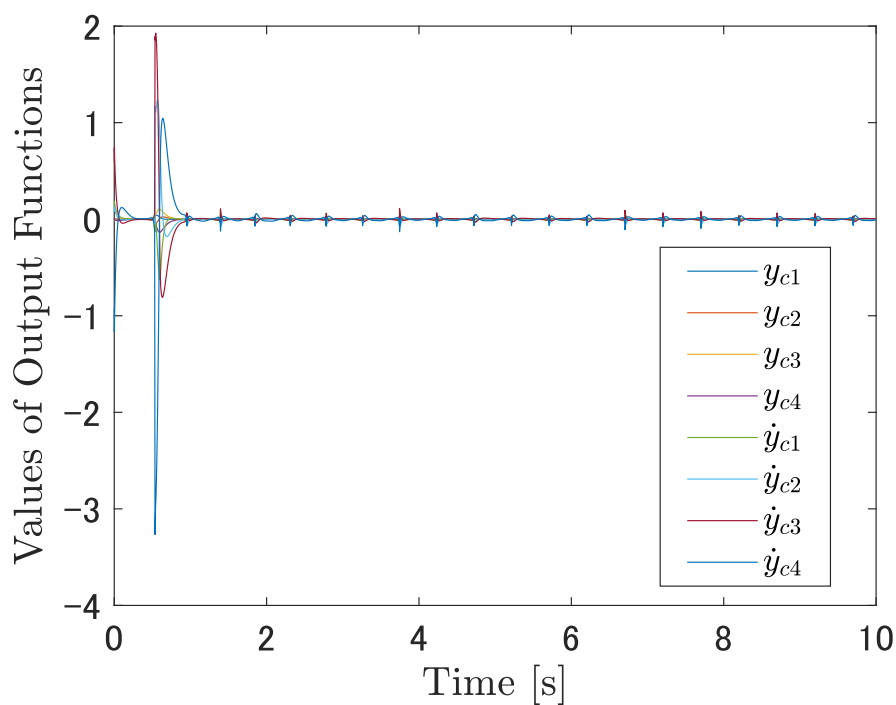


Fig 5.9: Output Functions (Discrete Time Controller)

るため、このことが設計した軌道に対して偏差を残す原因だと考えられる．このように制御入力を離散的に更新する場合には設計した周期軌道へ完全に収束させることは難しいことが分かる．

5.6 外乱モデルに基づく軌道設計とロバスト制御

前節までの内容ではモデルが完全に既知であるとしてノミナルモデルに対する軌道設計・制御を考えていたが、実際のロボットシステムにおいてはモデルの不確かさや外乱が存在するため、そうした影響を考慮して歩行生成を行う必要がある．本節では式 (5.1) のダイナミクスに外乱項を加えたシステムについて、外乱の影響を考慮した歩行生成フレームワークを提案する．特に、GPR を用いることによって実験データから外乱モデルを同定し、得られた外乱データに基づいて軌道計画・制御を行う方法を述べる．

5.6.1 外乱項を含むシステムと Swing Phase Zero Dynamics

式 (5.1) に対して外乱項を加えた次の運動方程式を考える．

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = Su + \delta_U(x) + J_{st}(q)^T \lambda \quad (5.152)$$

$$J_{st}(q)\ddot{q} + \dot{J}_{st}(q, \dot{q})\dot{q} = 0 \quad (5.153)$$

ただし、 $\delta_U(x) : \mathbb{R}^{14} \rightarrow \mathbb{R}^7$ は外乱を表す関数であり、状態 $x = [q^T, \dot{q}^T]^T$ を引数とする滑らかな関数であることを仮定する．外部から一定の力をロボットが受ける場合やモデル化誤差の影響はこの性質を持つ外乱として表すことができる．また、この仮定より $\delta_U(x)$ はデルタ関数的な要素を持たないため、遊脚衝突時のリセットマップは式 (5.16) で表されることに注意する．

このような外乱を含むヒト型ロボットシステムに対して HZD に基づく歩行制御を行う際には、ロバストな制御器を用いて式 (5.40) の出力関数に影響する外乱の影響を打ち消す方法が提案されている [15] [16]．しかし、厳密には出力関数のロバストな零化制御を考慮するだけでは設計した周期軌道への制御を達成することができない．この事は Swing phase zero dynamics に対する外乱の影響を解析することによって確認することができる．式 (5.152) で表される運動方程式に対し、5.3 節と同様の過程を踏むことによって Swing phase zero dynamics が次式のように求められる．

$$\dot{\bar{x}}_z = \bar{f}_z(\bar{x}_z, \alpha_p) + \bar{g}_z(\bar{x}_z, \alpha_p)\delta_U(\bar{x}_z, \alpha_p) \quad (5.154)$$

ただし、 $\bar{f}_z$ は式 (5.55) で定義された関数と同じであり、 $\bar{g}_z : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{4 \times M_p + 1} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 7}$ は次式で定義される関数とする．

$$\bar{g}_z(\bar{x}_z, \alpha_p) = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 7} \\ \left(\bar{M}_{21} \frac{\partial h_d}{\partial \theta_p} + \bar{M}_{22} \right)^{-1} C_{22}^{-T} \begin{bmatrix} 0_{1 \times 4} & 1 \end{bmatrix} \bar{J}_{st}^T \end{bmatrix} \quad (5.155)$$

式 (5.154) は式 (5.40) の出力関数をどんなにロバストな制御器を用いて零化制御したとしても, $\delta_U \notin \text{Ker}(\bar{g}_z)$ となる外乱の影響はキャンセルできないことを意味している. したがって外乱項 $\delta_U(x)$ がシステムに含まれる場合には, 出力関数のロバストな零化制御だけでなく $\delta_U(x)$ の構造に基づいて Swing phase zero dynamics (5.154) が望ましい解軌道を持つように軌道パラメータ α_p を調整しなければ目標の歩行は実現できない.

5.6.2 拘束力を有するシステムに対する外乱モデルの同定

式 (5.152), (5.153) のダイナミクスに対して, 望ましい周期軌道を設計するためには外乱項 $\delta_U(x)$ のモデルが必要である. ここでは軌道設計だけでなく後述するロバストコントローラにも利用できるよう GPR を用いてデータから確率モデルを同定することを考える. $\delta_U(x)$ の確率モデルを同定するためには入出力のトレーニングデータとして外乱 $\delta_U(x)$ および状態 x のデータが必要となるが, 一般に $\delta_U(x)$ を直接観測できる場合は少ないために観測可能な値から推定する必要がある. この推定を行うためにまずは次の拘束力を有する式 (5.152), (5.153) のダイナミクスに関する補題を示しておく.

補題 7. 式 (5.10) で定義される行列 Φ_c を考える. この Φ_c について次の 2 つの性質が成り立つ.

1. Φ_c は射影行列である. すなわち, $\Phi_c \Phi_c = \Phi_c$ が成り立つ.
2. 式 (5.152), (5.153) のダイナミクスに加わる外乱項 δ_U において射影行列 Φ_c の零空間に含まれる要素はダイナミクスに影響を及ぼさない.

Proof. まず性質 1 については直接計算することによって次のように示せる.

$$\begin{aligned}
 \Phi_c \Phi_c &= \left(I - J_{st}(q)^T (J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T)^{-1} J_{st}(q)M(q)^{-1} \right)^2 \\
 &= I - 2J_{st}(q)^T (J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T)^{-1} J_{st}(q)M(q)^{-1} \\
 &\quad + J_{st}(q)^T (J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T)^{-1} J_{st}(q)M(q)^{-1} \\
 &= I - J_{st}(q)^T (J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T)^{-1} J_{st}(q)M(q)^{-1} \\
 &= \Phi_c
 \end{aligned} \tag{5.156}$$

次に性質 2 を示す. 式 (5.152), (5.153) のダイナミクスから拘束力 λ の解析的な形は次のように求められる.

$$\begin{aligned}
 \lambda &= F_\lambda(q, \dot{q}) + G_{\lambda 1}(q)u + G_{\lambda 2}(q)\delta_U \\
 G_{\lambda 2}(q) &= - (J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T)^{-1} J_{st}(q)M(q)^{-1}
 \end{aligned} \tag{5.157}$$

この式を式 (5.152) に代入することによって拘束力項を消去した次のダイナミクス表現を得る.

$$M(q)\ddot{q} + \Phi_c(q)H(q, \dot{q}) = \Phi_c(q)Su - J_{st}(q)^T (J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T)^{-1} \dot{J}_{st}(q, \dot{q})\dot{q} + \Phi_c(q)\delta_U \tag{5.158}$$

この式より $\delta_U \in \text{Ker}(\Phi_c(q))$ となる δ_U はダイナミクスに影響を及ぼさない. $\square$

この補題7の性質2を用いることにより、一般性を失うことなく式(5.152)は次のように書き換えることができる。

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = Su + \delta'_U(x) + J_{st}(q)^T \lambda \quad (5.159)$$

ただし、 $\delta'_U(x) = \Phi_c(x)\delta_U(x)$ である。ここで式(5.153)と式(5.159)を連立して解き、性質1を用いたうえで δ'_U について整理すると次式が得られる。

$$\delta'_U = M(q)\ddot{q} + \Phi_c(q)(H(q, \dot{q}) - Su) + J_{st}(q)^T (J_{st}(q)M(q)^{-1}J_{st}(q)^T)^{-1} \dot{J}_{st}(q, \dot{q})\dot{q} \quad (5.160)$$

この式(5.160)を用いることによって状態 $q, \dot{q}, \ddot{q}$ および入力 u のデータから外乱 δ'_U の推定値 $\hat{\delta}'_U$ を得ることが可能である。したがって最終的に実験によって得られる状態と入力のデータ $q[k], \dot{q}[k], \ddot{q}[k], u[k], k = 0, \dots, N_d$ から対応する外乱推定値 $\hat{\delta}'_U[k]$ のデータを式(5.160)を用いて計算し、次の入力のトレーニングデータセット $X \in \mathbb{R}^{14 \times N_d+1}$ および出力のトレーニングデータセット $Y_{vec} \in \mathbb{R}^{N_d+1 \times 7}$ を作成する。

$$X = \begin{bmatrix} q[0] & \cdots & q[N_d] \\ \dot{q}[0] & \cdots & \dot{q}[N_d] \end{bmatrix}, \quad Y_{vec} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}'_U[0]^T \\ \vdots \\ \hat{\delta}'_U[N_d]^T \end{bmatrix} \quad (5.161)$$

これらより GPR を用いて次式の確率モデルを同定する。

$$\delta'_U \sim \mathcal{N}(\mu_{\delta'_U}(x), \Sigma_{\delta'_U}(x)) \quad (5.162)$$

注意 10. 2.3.2節で述べたように軌道計画のための外乱モデル同定において、式(2.51)～(2.53)の形の GPR モデルを利用する場合、トレーニングデータのない場所では推定平均値が0になってしまうため好ましくない。ここでは基底関数とその係数ベクトルを平均値関数に加えた式(2.61)～(2.63)の形の GPR モデルを利用することとし、GPR モデルの入力に対して線形の基底関数を用いることとする。

5.6.3 外乱モデルを考慮した軌道計画・制御フレームワーク

外乱モデルを考慮した軌道計画

前節の方法を利用して外乱モデルを同定するためのデータを取得し、得られたモデルを利用して外乱モデルを考慮した周期軌道を設計するまでの手順を以下に示す。

STEP 1 ノミナル軌道の計算

式(5.159)において $\delta'_U = 0$ とするダイナミクスを用いて式(5.151)の最適化問題を構成し、それを解くことによってノミナルパラメータ $\alpha_{p,nom}$ および軌道 $\varphi_{x,nom}(t, x_{0,nom}, \alpha_{p,nom})$, $t \in [0, T_{f,nom}]$ を計算する。

STEP 2 外乱モデルを同定するためのデータの取得

STEP 1 で計算したノミナルパラメータ $\alpha_{p,nom}$ を利用して歩行データを取得する．設計した式 (5.77) の出力関数の零化制御には式 (5.75) に基づくコントローラを利用し，サンプリング時間 Δt で一步分のロボットの状態のデータ $q[k], \dot{q}[k], \ddot{q}[k]$ および制御入力 of データ $u[k]$ を記録する．

STEP 3 外乱推定値の計算とモデルの同定

STEP 2 で得られたデータ $q[k], \dot{q}[k], \ddot{q}[k], u[k]$ より式 (5.160) を用いて外乱推定値 $\delta'_U[k]$ を計算する．その後，式 (5.161) の学習用トレーニングデータセット X, Y_{vec} を作成し，式 (5.162) の形の確率モデルを GPR により同定する．

STEP 4 同定されたモデルを用いた軌道の再計算

同定された外乱モデルの平均値関数を外乱のモデルとして用いる．すなわち $\delta'_U = \mu_{\delta'_U}(x)$ とした式 (5.159) および式 (5.153) のダイナミクスを用い，改めて式 (5.151) の最適化問題を構成する．これを解くことによって外乱の影響を考慮した軌道パラメータ $\alpha_{p,dist}$ および周期軌道 $\varphi_{x,dist}(t, x_{0,dist}, \alpha_{p,dist})$, $t \in [0, T_{f,dist}]$ を計算する．

注意 11. 出力零化制御に関する制約として式 (5.75) を直接用いていることから，STEP 4 の軌道計画では外乱を考慮したロバストな出力零化制御入力陰的に計算されている．そのため，得られた周期軌道をシミュレーションまたは実験で実現するためには 3 章で述べたような外乱に対してロバストなコントローラを用いて制御を行う必要がある．

注意 12. STEP 4 の軌道計画では信頼性の観点から，状態空間において外乱モデルを同定する際に用いたトレーニングデータ近傍を通るような周期軌道を設計することが望ましい．これを実現するための方法として外乱モデルの分散情報を軌道計画時の評価関数に加える方法が考えられる．式 (2.53) の定義より，GPR モデルでは新たな入力ベクトルとトレーニングデータからの距離が遠いほど予測出力の分散が大きくなる性質がある．そのため，軌道上における GPR モデルの分散の積分値が最も小さくなるように軌道を計画することによって，ダイナミクスの制約を考慮しつつできるだけトレーニングデータ近傍を通るような周期軌道を得ることができる．

最適化ベースドロバスト制御器による外乱モデルを考慮した制御

設計された仮想拘束を実現するための出力関数の零化制御に関しては，3 章で提案した二次計画法に基づくロバストコントローラを用いて行う．これにより，Robust ES-CLF 制約を用いることで外乱の影響を考慮した出力関数の零化制御を行いつつ，設計した歩行を実現する上で満たすべき式 (5.73)，(5.74) の拘束力制約や入力飽和の制約を同時に考えることができる．

まずは式 (5.152)，(5.153) のダイナミクスにおいて式 (5.40) の出力関数を零化制御するための Robust ES-CLF 制約を設計する．式 (5.158) より次の状態空間表現を定義しておく．

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u + g_2(x)\delta'_U \quad (5.163)$$

ただし, $f(x) : \mathbb{R}^{14} \rightarrow \mathbb{R}^{14}$, $g_1(x) : \mathbb{R}^{14} \rightarrow \mathbb{R}^{14 \times 4}$ は式 (5.19), (5.20) で表されるものであり, $g_2(x) : \mathbb{R}^{14} \rightarrow \mathbb{R}^{14 \times 7}$ は次のように定義される関数である.

$$g_2(x) = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 7} \\ M(q)^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.164)$$

このシステムに対して前節と同じ行列 C'_1 , C'_2 を用いて出力関数 y_c を定義する. この場合, $C'_1, g_1(x), g_2(x)$ の構造よりこの出力関数 y_c は IRD_+ 2, DRD 2 を持つ関数であるため, $\eta = [y_c^T, \dot{y}_c^T]^T$ として RES-CLF V_ϵ を次のように定義できる.

$$V_\epsilon = \eta^T P_\epsilon \eta \quad (5.165)$$

3.2.2 節の手順に従うと, この RES-CLF V_ϵ の時間微分と GPR によって得られた外乱モデル (5.162) の情報から式 (3.17) および式 (3.58) で表される Robust RES-CLF 制約は次式のように得られる.

$$L_{F_\epsilon \eta} V_\epsilon + L_{G_\epsilon} V_\epsilon (L_f^2 y_c + L_{g_1} L_f y_c u) + \hat{\delta}'_c \leq -\frac{\gamma}{\epsilon} V_\epsilon \quad (5.166)$$

$$\hat{\delta}'_c \geq (L_{G_\epsilon} V_\epsilon L_{g_2} L_f y_c) \mu_{\delta'_U} + k_d \sqrt{(L_{G_\epsilon} V_\epsilon L_{g_2} L_f y_c) \Sigma_{\delta'_U} (L_{G_\epsilon} V_\epsilon L_{g_2} L_f y_c)^T} \quad (5.167)$$

次に外乱モデルを考慮した拘束力の制約を考える. 式 (5.157) において $\delta_U = \delta'_U$ とすることによって外乱項 δ'_U を考慮した拘束力ベクトル λ は次のように計算できる.

$$\lambda = F_\lambda + G_{\lambda 1} u + G_{\lambda 2} \delta'_U \quad (5.168)$$

また, $C_{\lambda x} = [1, 0]$, $C_{\lambda z} = [0, 1]$ とする. ここで式 (5.73), (5.74) の制約条件に対して外乱モデル (5.162) の情報を用いると, 分散情報を利用した拘束力制約は次式で得られる.

$$A_\lambda u \leq B_\lambda \quad (5.169)$$

ただし, A_λ , B_λ は次のように定義される.

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} -C_{\lambda z} G_{\lambda 1} \\ (C_{\lambda x} - \alpha_\lambda C_{\lambda z}) G_{\lambda 1} \\ -(C_{\lambda x} + \alpha_\lambda C_{\lambda z}) G_{\lambda 1} \end{bmatrix} \quad (5.170)$$

$$B_\lambda = \begin{bmatrix} C_{\lambda z} (F_\lambda + G_{\lambda 2} \mu_{\delta'_U}) - k_d \sqrt{C_{\lambda z} G_{\lambda 2} \Sigma_{\delta'_U} G_{\lambda 2}^T C_{\lambda z}^T} \\ (\alpha_\lambda C_{\lambda z} - C_{\lambda x}) (F_\lambda + G_{\lambda 2} \mu_{\delta'_U}) - k_d \sqrt{(\alpha_\lambda C_{\lambda z} - C_{\lambda x}) G_{\lambda 2} \Sigma_{\delta'_U} G_{\lambda 2}^T (\alpha_\lambda C_{\lambda z} - C_{\lambda x})^T} \\ (C_{\lambda x} + \alpha_\lambda C_{\lambda z}) (F_\lambda + G_{\lambda 2} \mu_{\delta'_U}) - k_d \sqrt{(C_{\lambda x} + \alpha_\lambda C_{\lambda z}) G_{\lambda 2} \Sigma_{\delta'_U} G_{\lambda 2}^T (C_{\lambda x} + \alpha_\lambda C_{\lambda z})^T} \end{bmatrix} \quad (5.171)$$

これらの制約に入力制約を加えた Robust CLF-QP コントローラは表 5.3 のように定義される. なお, $W_{u0} \in \mathbb{R}_+$ は重みパラメータである. この二次計画問題を制御周期ごとに解くことによって設計した歩行を生成するための制御入力 u を計算できる.

Table 5.3: Robust CLF-QP Controller for Bipedal Walking

Robust CLF-QP for Bipedal Walking

$$u_* = \underset{u, \hat{\delta}'_c, s_r}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \mu(x, u, t)^T \mu(x, u, t) + \frac{1}{2} W_{u0} s_r^2 \quad (5.172)$$

$$\text{s.t. } L_{F_c \eta} V_\epsilon + L_{G_c} V_\epsilon (L_f^2 y_c + L_{g_1} L_f y_c u) + \hat{\delta}'_c \leq -\frac{\gamma}{\epsilon} V_\epsilon + s_r,$$

$$\hat{\delta}'_c \geq (L_{G_c} V_\epsilon L_{g_2} L_f y_c) \mu_{\delta'_U} + k_d \sqrt{(L_{G_c} V_\epsilon L_{g_2} L_f y_c) \Sigma_{\delta'_U} (L_{G_c} V_\epsilon L_{g_2} L_f y_c)^T},$$

(Robust RES-CLF Constraint)

$$A_\lambda u \leq B_\lambda$$

(Robust Constraint Force Constraints)

$$A_c u \leq B_c$$

(Input Saturation Constraints)

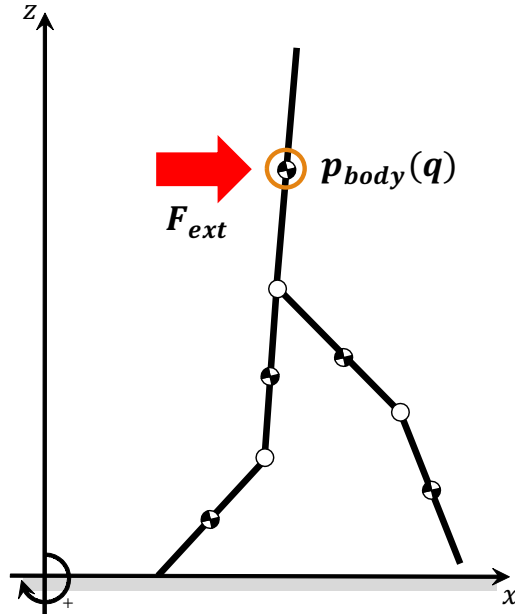


Fig 5.10: External Push Force Affecting Robot's Upper Body

数値例 7：外力を受けるロボットモデルにおける安定周期軌道設計

本節の提案手法を用いて再び図 5.1 の RABBIT における歩行制御を行う。今回のケースでは図 5.10 に示すようにロボットの上体リンクが後ろから一定の力で押され続ける場合を考える。 $p_{body}(q) : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を外力が働く位置とし、外力ベクトルを $F_{ext} = [30, 0]^T$ とすると、システム (5.163) における外乱 δ'_U は次の形で表される。

$$\delta'_U = \Phi_c(q) \left(\frac{\partial p_{body}(q)}{\partial q} \right)^T F_{ext} \quad (5.173)$$

ここでは $p_{body}(q)$ を上体リンクの重心位置とする。 $\Phi_c(q)$ と $p_{body}(q)$ の構造より、この δ'_U は状態 $\bar{q} = [q_{r1}, q_{r2}, q_{r3}, q_{r4}, q_{so}]^T$ を引数とする滑らかな関数となる。また、この外乱は Swing phase zero dynamics に影響を及ぼすものであり、入力によって直接打ち消すことができない成分を持つ。そのため、出力関数のロバストな零化制御だけでは歩行を達成することができず、提案手法の有効性を検証するのに適した例となっている。この例では外乱が一定外力であることは既知とし、外力が作用する位置 $p_{body}(q)$ および外力ベクトル F_{ext} が未知であるという仮定の下で提案手法を用いる。

最初に 5.5.3 節で求めた安定周期軌道に対し、外乱の推定値を $\hat{\delta}'_c = 0$, $\mu_{\delta'_U} = 0$, $\Sigma_{\delta'_U} = 0$ とする式 (5.172) のコントローラを用いて歩行を生成した結果を図 5.11 に示す。各種制御パラメータ等は表 5.4 の通りである。5.5.3 節の結果ではポアンカレセクション上の固定点へ指数的に安定化されていく挙動が見られたものの、今回の外力を受けるケースでは仮想支持脚角速度 $\dot{\theta}_p$ が増加していき、歩行開始 3 歩目において転倒してしまっていることがわかる。この結果に対し、上記の STEP 2 から STEP 4 に従って外乱を考慮した軌道の再計算を行った。STEP 2 では設計された安定周期軌道のポアンカレセクション上の固定点の近傍でランダムに 2 点初期値を取り、それぞれの初期値から始まる解のデータを取得した。STEP 3 においては上述の仮定に基づいて次の形の外乱モデルを同定した。

$$\delta'_U \sim \mathcal{N}(\mu_{\delta'_U}(\bar{q}), \Sigma_{\delta'_U}(\bar{q})) \quad (5.174)$$

外乱モデル δ'_U を用いて再計算された周期軌道および外乱モデルに基づく式 (5.172) のコントローラを用いて歩行生成を行った結果を図 5.12 に示す。再設計前の軌道を用いた場合と異なり、この場合においては歩行を継続できていることがわかる。また、設計された軌道の安定性を確認するため、ポアンカレセクション上の固定点から 5% ずれた点を初期値として歩行生成を行った際の結果を図 5.13～図 5.15 に示す。図 5.13 はポアンカレセクション上における設計された固定点と実際の状態の偏差を示したものである。実際の状態は設計した固定点の近傍に留まることができているのがわかる。これは前節の離散時間コントローラを用いた場合と同じように、設計された固定点が Lyapunov 安定となっていることを示している。最後に図 5.14, 図 5.15 に拘束力の制約条件を表す関数の値と制御入力の時間変化を示す。表 5.3 のコントローラにおいて、考慮した制約条件を違反することなく歩行生成制御が実現できていることがわかる。これらの結果より、本節で提案した軌道計画・制御フレームワークを用いることで入力によって直接打ち消すことができない外乱がシステムに加わる場合においても安定な歩行を生成できることが確認できた。

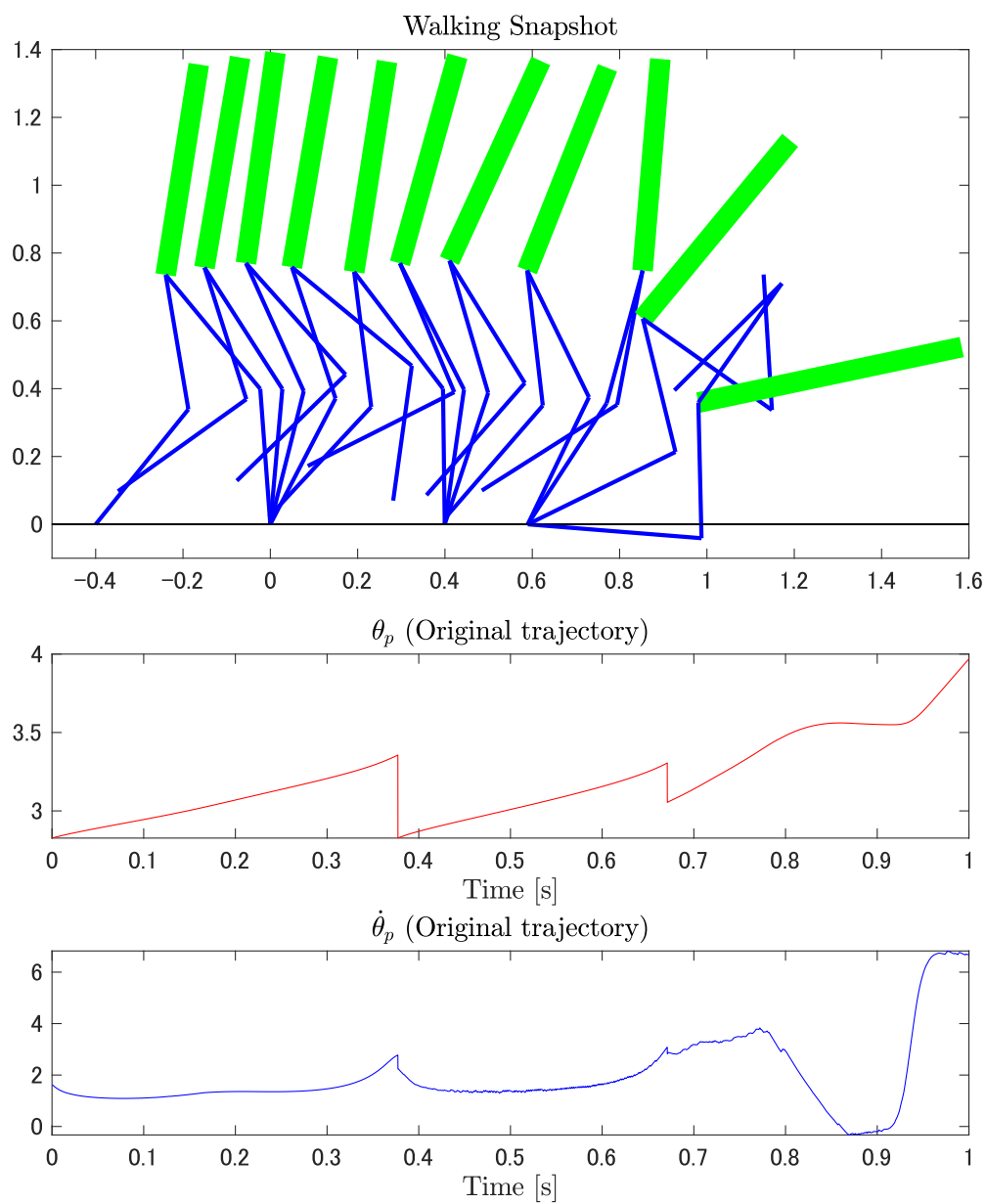


Fig 5.11: Snapshot of Robot's Walking with Original Trajectory

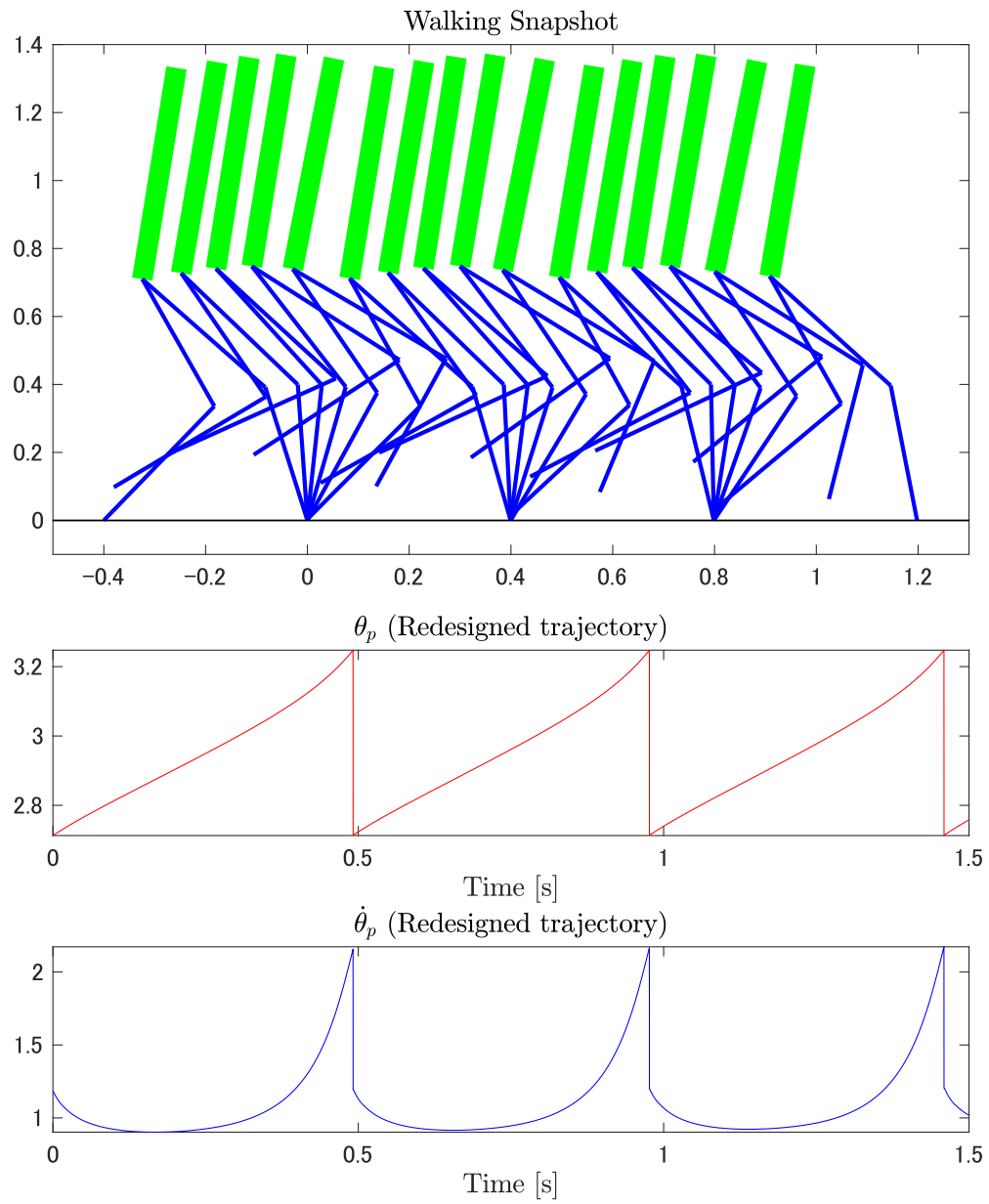


Fig 5.12: Snapshot of Robot's Walking with Redesigned Trajectory

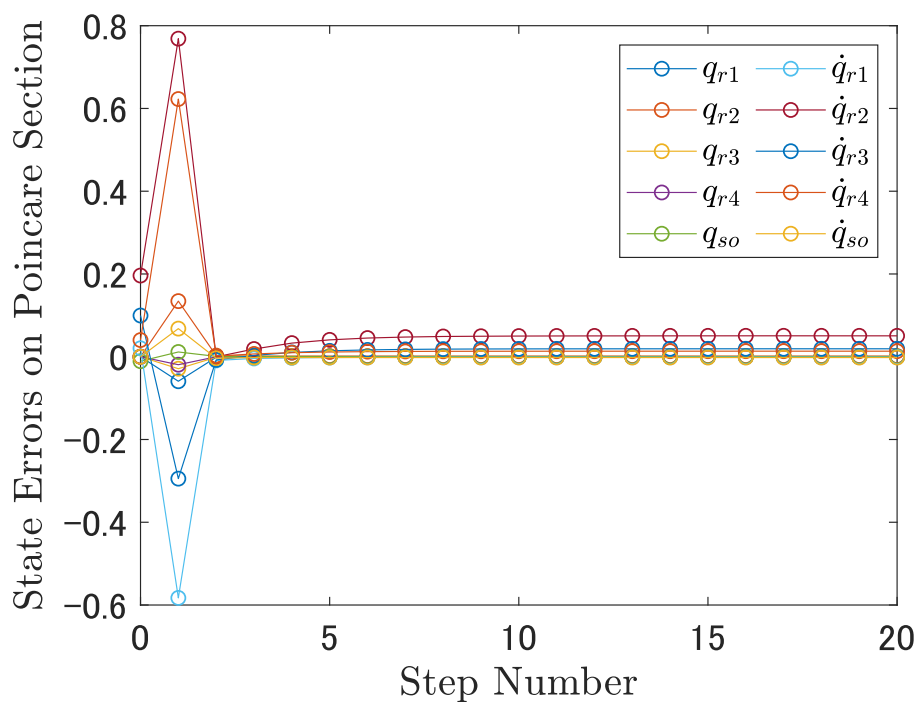


Fig 5.13: State Errors on the Poincaré Section with Redesigned Trajectory

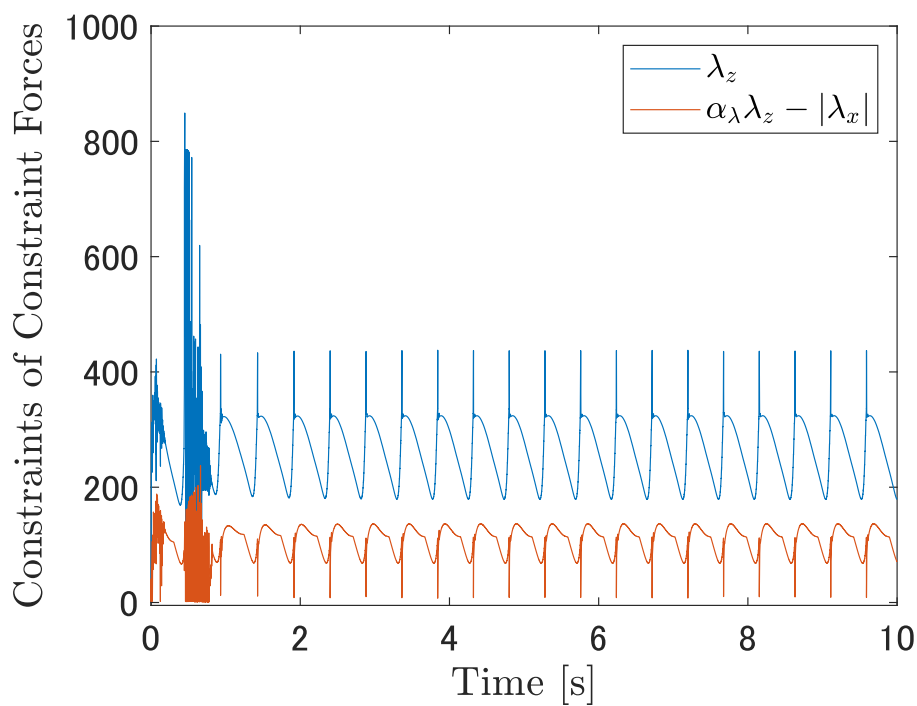


Fig 5.14: Constraints of Constraint Forces with Redesigned Trajectory

Table 5.4: Control & Design Parameters for Bipedal Walking

$\gamma : 10$	$k_d : 3.0$	$\alpha_\lambda : 0.50$	$\epsilon = 0.05$	$N_d : 104$
---------------	-------------	-------------------------	-------------------	-------------

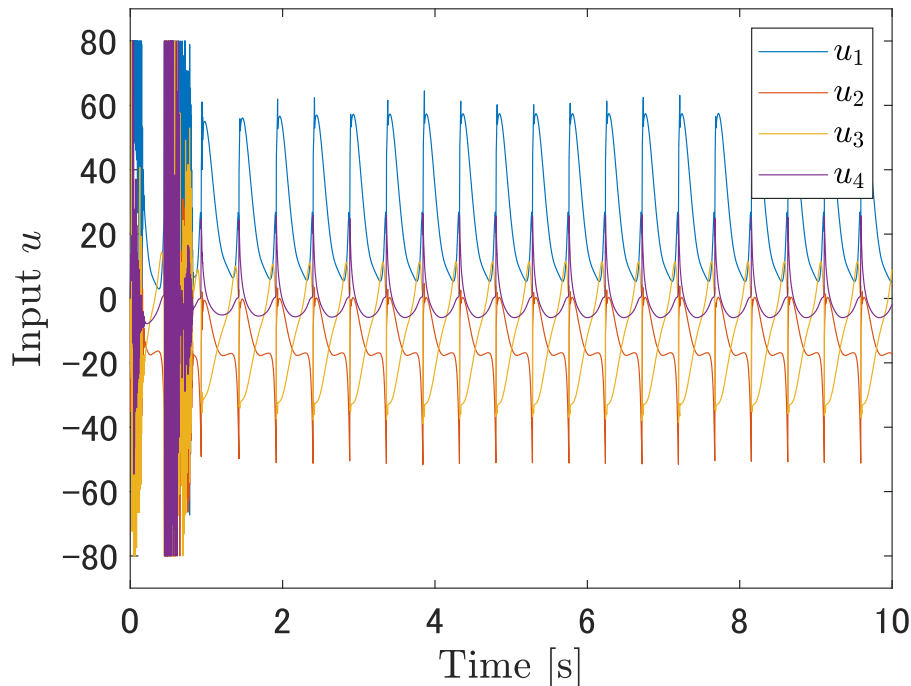


Fig 5.15: Control Inputs with Redesigned Trajectory

5.7 おわりに

本章では外乱の影響を受けるヒト型ロボットのロバスト周期歩行生成問題を対象として、ゼロダイナミクスを考慮した出力関数の設計法と最適化ベースド制御器を利用した歩行生成法を提案した．最初にロボットの歩行をハイブリッドシステムとして定義し，HZDに基づく制御の概要と周期軌道を生成するための軌道計画問題について説明した．次に軌道計画問題を非線形計画問題として解くための手法である Direct Collocation Method を導入し，Direct Collocation Method の枠組みでゼロダイナミクスの安定性を保証した周期軌道を設計するための方法を提案した．更に，GPR によってロボットのダイナミクスに影響する外乱のモデルをデータから同定する方法について述べ，同定された外乱モデルを軌道計画に組み込むことによって外乱を考慮した安定周期軌道を設計するための方法を提案した．最後に拘束力・入力制約を満たしつつ設計された出力関数を外乱の下で零化制御するための最適化ベースドロバスト制御器を構成し，数値シミュレーションを通して安定周期歩行が生成できることを示した．

第6章 結論

本論文では外乱とシステムの不確定性の影響を考慮した最適化ベースドロバスト制御器の構築とそれを応用したヒト型ロボットの歩行制御手法について議論を行った。特に GPR や UKF といった手法を用いて外乱を確率変数としてみなして推定することにより、その平均値と分散情報を活用したロバストな制御を実現する手法を提案し、シミュレーションによる有効性の検証を行った。本研究で得られた成果を以下にまとめる。

2章では最初に本論文で利用するシステムに関する幾つかの定義の導入を行い、最適化に基づくコントローラ構築の基礎となる CLF-CBF-QP コントローラについて説明した。また、本論文において外乱の確率モデルをデータから同定するための手法として利用するガウス過程回帰 (GPR) についてその概要を述べた。

3章では外乱を確率変数として推定する手法に基づいた最適化ベースドロバストコントローラを構築した。最初に2章で説明した ES-CLF 制約および ECBF 制約を拡張し、GPR によって同定される外乱モデルを利用した連続時間 Robust CLF-CBF-QP コントローラを構築した。また、観測信号としてシステムの状態に関する情報が一部しか得られない場合に対し、確率的な状態推定手法の一つである Unscented Kalman Filter (UKF) による状態・外乱推定を用いた Robust CLF-CBF-QP コントローラを構築した。これは ES-CLF 制約および MECBF 制約を機会制約として導入する形を取ることで推定誤差の影響を考慮できる形になっている。最後に [14] で提案された離散時間システムにおける ECBF の概念をより一般化し、同様のアイデアに基づいて離散時間システムにおける Robust D-ECBF-NLP コントローラを構築した。提案したそれぞれのコントローラの有効性については数値シミュレーションによって検証を行った。

4章では3章で提案した Robust CLF-CBF-QP を拡張することによって、ミスマッチング外乱の影響を受ける連続時間システムに対して外乱の影響を考慮した Robust CLF-CBF-QP を提案した。ミスマッチング外乱の影響を考慮した ES-CLF 制約および MECBF 制約を導出したうえで、外乱の確率モデルに基づく Robust CLF-CBF-QP コントローラを構築した。3章で提案した連続時間 Robust CLF-CBF-QP コントローラは入力アファインシステムを対象としていたが、本章で提案するコントローラはあるクラスの非入力アファインシステムに対しても適用可能であることが特徴である。コントローラの有効性は数値シミュレーションによって検証した。

5章では3,4章で提案した最適化ベースドロバスト制御器のアドバンストな適用先として、劣駆動性を有するヒト型ロボットのロバストな歩行生成手法の構築に取り組んだ。劣駆動性を有するロボットシステムが外乱の影響を受ける場合には、外乱の下でゼロダイナミクスが

安定となるような出力関数の設計と設計された出力関数のロバストな零化制御の両方を考える必要がある．最初に HZD に基づく歩行制御手法をベースとし，外乱の下でゼロダイナミクス of 安定性を保証しつつ周期歩行を実現するための出力関数設計手法を提案した．その後，歩行を実現する上で満たすべき種々の制約条件と設計された出力関数の零化制御の両方を考慮するための最適化ベースドロバスト制御器を構築した．一連のフレームワークの有効性については数値シミュレーションを通じた検証を行った．

最後に本論文の研究成果に対する今後の課題について述べる．

1. IRD と DRD の差が 2 以上となる場合における Robust CLF-CBF-QP の提案

4 章で提案したミスマッチング外乱に対する Robust CLF-CBF-QP では与えられた出力関数及び状態制約関数の IRD と DRD の差が 1 であるという仮定をおいていたが，2 以上の場合においても式 (4.17)～(4.19) および式 (4.70)～(4.72) を定義しなおすことによって拡張が可能であると考えられる．この拡張を行うことによってより広いクラスの外乱の影響を扱うことが可能になる．また，4 章の 2 つ目の適用例のように入力 of 微分を新たな入力としてコントローラを設計する場合にも，より高次の入力を行うことによって実際の入力をより滑らかな関数として得られると期待される．

2. 想定する外乱のクラスの拡張（不連続外乱に対する対処）

本論文では外生信号とモデルの不確かさによって生成される外乱が連続微分可能であるという条件の下，制御則の構築と解析を行った．しかし，ロボット関節に生じる不連続摩擦のように連続性を仮定しない外乱に対する補償も考える必要がある．こうした不連続外乱がマッチング条件を満たさない場合の解析は困難であることが予想されるが，マッチング外乱を仮定する場合には本論文における提案手法の拡張方針が幾つか考えられる．まず，不連続外乱に対する ES-CLF 制約の設計においては [75] [76] のように微分包含式に対する Lyapunov 安定定理を利用することが可能であろう．また，CBF 制約に関しては不連続な状態制約関数を考慮した手法が近年提案されている [77] [78]．これらにおいてもシステムダイナミクスを微分包含式とする解析を行っており，外乱を考慮した拡張を行うことによって不連続外乱を考慮した CBF 制約を構築できると期待される．

3. 最適化ベース制御器の許容解の存在性保証

基本的に CLF-CBF-QP のような最適化に基づく制御器は，考慮する制約条件をすべて満たすような許容解がすべての時刻において存在するという仮定の下で安定性が保証されるが，実際には出力関数や状態制約関数の選び方によって許容解が得られない場合が存在する．そのため，許容解の存在を保証するような出力関数・状態制約関数の設計手法の構築は大きな課題となっている．この課題に対しては幾つかの手法が提案されているが [79] [80]，適用できるシステムのクラスは低次元なシステムや線形システムに限られている．今後さらなる手法の発展が必要である．

4. 3次元空間上を運動するヒト型ロボットの制御

5章における今回のシミュレーション例では2次元平面上を運動するロボットシステムを考慮したため、劣駆動自由度が1であったが、3次元空間上を運動するロボットシステムの場合は更に劣駆動自由度の数が増加する。5章で提案した安定周期軌道設計法はロボットシステムの劣駆動自由度の数に関係なく適用可能であるため、3次元空間上を運動するロボットにおいても同様に安定な周期軌道が得られると考えられる。3次元空間上の歩行を考えたロボットの制御においてはサジタル面に対する対称性を利用した次元削減手法が提案されており [26]，こうした手法を取り入れることによって計算コストを削減することができると期待される。

5. 実機実験における最適化ベースドロバスト制御器の有効性検証

本論文では提案手法の有効性に関し，数値シミュレーションのみでの確認を行った。今後の課題として実機実験による有効性検証も行っていく必要があると考えられる。

付 録 A

A.1 解軌道のデータに基づくポアンカレマップヤコビアン の計算

式 (5.122) の周期軌道 $\mathcal{O}$ が得られた後は対応する仮想拘束パラメータ α_p を用いてシミュレーションまたは実験を行うことにより, 式 (5.135) のポアンカレマップにおける入出力データ $\bar{x}_d^{SI}[k]$, $\bar{x}_d^{SI}[k+1]$ を得ることができる. 方法 1 ではこの入出力データに基づいてポアンカレマップヤコビアン $A_d^{SI}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p)$ を同定する. この方法は受動歩行の安定性解析にしばしば用いられているものである [70], [71].

式 (5.135) において $\bar{x}_d^{SI}$ の次元は 9 であるから, データを取るための状態の初期値として次の 9 個のベクトル $\bar{x}_{d0i}^S$, ($i = 1, \dots, 9$) を考える.

$$\bar{x}_{d0i}^S = \bar{x}_{d*} + \epsilon_{\bar{x}} \pi_{d, lift} e_i \quad (\text{A.1})$$

ただし, $\epsilon_{\bar{x}} \in \mathbb{R}$ は微小定数であり, e_i は $\mathcal{S}_P$ の i 番目の正規直交基底である. この $\bar{x}_{d0i}^S$ は固定点 $\bar{x}_{d*}$ を $\pi_{d, lift} e_i$ 方向に微小定数 $\epsilon_{\bar{x}}$ だけ移動させた状態を表している. これらを初期値としてシミュレーションまたは実験を行い, 再びポアンカレセクション $\mathcal{S}_P$ に戻ってきた際の状態 $\bar{x}_{d1i}^S$ ($i = 1, \dots, 9$) を記録し, 次式の行列を生成する.

$$\Delta \bar{x}_{d0} = \epsilon_{\bar{x}} \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta \bar{x}_{d1} = \pi_{d, proj} \begin{bmatrix} \bar{x}_{d11}^S - \bar{x}_{d*} & \cdots & \bar{x}_{d19}^S - \bar{x}_{d*} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

これらの行列を用いることにより式 (5.135) の関係から行列 $A_d^{SI}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p)$ は次式で求めることができる.

$$A_d^{SI}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) = \Delta \bar{x}_{d1} \Delta \bar{x}_{d0}^{-1} \quad (\text{A.4})$$

A.2 近似線形化システムに基づくポアンカレマップヤコビアン の計算

ポアンカレマップヤコビアンは閉ループシステムを線形近似して得られるダイナミクスを用いることにより, 微分方程式の解として計算できることが知られている [26] [69]. 今回のケースではまず式 (5.126) のポアンカレマップの定義を次のような表現に書き直す.

$$P_{\bar{x}}(\bar{x}_d^S[k], \alpha_p) = \bar{\Delta}_I \left(\varphi_{\bar{x}} \left(T_I(\bar{x}_d^S[k], \alpha_p), \bar{x}_d^S[k], \alpha_p \right) \right) \quad (\text{A.5})$$

固定点 $\bar{x}_{d*}$ におけるポアンカレマップヤコビアンはこの式の $\bar{x}_d^S[k]$ についての一次変分を計算することによって次のように得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) &= \frac{\partial \bar{\Delta}_I}{\partial \varphi_{\bar{x}}}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p)) \frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial T_I}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p), \alpha_p) \frac{\partial T_I}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) \\ &\quad + \frac{\partial \bar{\Delta}_I}{\partial \varphi_{\bar{x}}}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p)) \frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

式 (A.6) 内の各要素は次のように計算できる. まず $\frac{\partial \bar{\Delta}_I}{\partial \varphi_{\bar{x}}}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p))$ は $\bar{\Delta}_I$ の定義に対してその偏微分を求めることで直ちに計算できる. $\frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial T_I}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p), \alpha_p)$ に関しては次のように計算できる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial T_I}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p), \alpha_p) &= \dot{\varphi}_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p) \\ &= F_{\bar{x}}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p), \alpha_p) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

次に $\frac{\partial T_I}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p)$ は式 (5.36) のガードの式から計算できる. 関数 T_I の定義より次式が成り立つ.

$$\bar{p}_{swz}(\varphi_{\bar{x}}(T_I(\bar{x}_d^S[k], \alpha_p), \bar{x}_d^S[k], \alpha_p)) = 0 \quad (\text{A.8})$$

これより式 (A.8) の両辺の $\bar{x}_d^S[k]$ による偏微分を計算し, $\bar{x}_d^S[k] = \bar{x}_{d*}$ を代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{p}_{swz}}{\partial \varphi_{\bar{x}}}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p)) \frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial T_I}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p), \alpha_p) \frac{\partial T_I}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) \\ &+ \frac{\partial \bar{p}_{swz}}{\partial \varphi_{\bar{x}}}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p)) \frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

最終的にこの式を整理すると次のように $\frac{\partial T_I}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p)$ が得られる.

$$\frac{\partial T_I}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p) = - \frac{\frac{\partial \bar{p}_{swz}}{\partial \varphi_{\bar{x}}}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p)) \frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p)}{\frac{\partial \bar{p}_{swz}}{\partial \varphi_{\bar{x}}}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p)) \frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial T_I}(\varphi_{\bar{x}}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p), \alpha_p)} \quad (\text{A.10})$$

最後に $\frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p)$ の計算方法について述べる. まず式 (5.124) の初期値を $\bar{x}_{d*}$ とするフローについて $\bar{x}_{d*} \rightarrow \bar{x}_{d*} + \delta \bar{x}_d$ の場合の一次変分を計算することで次式の関係を得る.

$$\frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(t, \bar{x}_{d*}, \alpha_p) = I + \int_0^t \frac{\partial F_{\bar{x}}}{\partial \varphi_{\bar{x}}} \frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(\tau, \bar{x}_{d*}, \alpha_p) d\tau \quad (\text{A.11})$$

ここで $\Phi_{\bar{x}}(t) := \frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(t, \bar{x}_{d*}, \alpha_p)$ と定義して式 (A.11) の両辺を時間微分すると次の微分方程式が得られる.

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\bar{x}} = \frac{\partial F_{\bar{x}}}{\partial \varphi_{\bar{x}}} \Phi_{\bar{x}} \quad (\text{A.12})$$

式 (A.11) よりこの微分方程式を初期値 $\Phi_{\bar{x}}(0) = I$ として時間 T_f だけ積分することによって $\Phi_{\bar{x}}(T_f) = \frac{\partial \varphi_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}_d^S[k]}(T_f, \bar{x}_{d*}, \alpha_p)$ が得られる.

最後に本来求めたかった低次元ポアンカレマップヤコビアン $A_d^{SI}(\bar{x}_{d*}, \alpha_p)$ に関しては式 (A.6) で得られた結果に対して π_{proj} , π_{lift} を掛けることによって求めることができる.

参考文献

- [1] 経済産業省: “資料3 ロボットを取り巻く環境変化等について”, 第1回 ロボットによる社会変革推進会議, https://www.meti.go.jp/shingikai/mono_info_service/robot_shakaihenkaku/pdf/001_03_00.pdf, (最終閲覧日 2019/12/24) .
- [2] 経済産業省, 一般社団法人日本ロボット工業会: “ロボット導入実証事業 事例紹介ハンドブック 2018”, <http://robo-navi.com/webroot/document/2018RobotHandBook.pdf>, (最終閲覧日 2019/12/24).
- [3] 郭 昊, 太田 有三, 増淵 泉: “拘束システムに対するリファレンスガバナの実装”, システム制御情報学会誌, Vol. 27, No. 4, pp.187–192.
- [4] 平田 研二, 小木曾公尚: “拘束条件の達成を考慮したリファレンスガバナの実現”, システム制御情報学会誌, Vol. 14, No. 11, pp.554–559, 2001.
- [5] D. Q. Mayne: “Control of Constrained Dynamic Systems”, European Journal of Control, Vol. 7, Issues 2–3, pp. 87–99, 2001.
- [6] C. E. Garcia, D. M. Prett and M. Morari: “Model Predictive Control: Theory and Practice a Survey”, Automatica, Vol. 25, No. 3, pp. 335–348, 2004.
- [7] D. Q. Mayne: “Constrained model predictive control: Stability and optimality”, Automatica, Vol. 36, Issue 6, pp. 789–814, 2000.
- [8] Q. Nguyen, A. Hereid, J. W. Grizzle, A. D. Ames, K. Sreenath: “3D Dynamic Walking on Stepping Stones with Control Barrier Functions”, Proc. of IEEE Conference on Decision and Control (CDC), pp. 827–834, 2016.
- [9] A. D. Ames, J. W. Grizzle, P. Tabuada: “Control Barrier Function based Quadratic Programs with Application to Adaptive Cruise Control”, Proc. of IEEE Conference on Decision and Control, pp. 6271–6278, 2014.
- [10] A. D. Ames, S. Coogan, M. Egerstedt, G. Notomista, K. Sreenath, P. Tabuada: “Control Barrier Functions: Theory and Applications”, Proc. of European Control Conference, pp. 3420–3431, 2019.
- [11] G. Wu, K. Sreenath: “SAFETY-CRITICAL CONTROL OF A 3D QUADROTOR WITH RANGE-LIMITED SENSING”, Proc. of ASME Dynamic Systems and Control Conference, pp.1-11, 2016.

-
- [12] S. C. Hsu, X. Xu, A. D. Ames: “Control Barrier Function based Quadratic Programs with Application to Bipedal Robotic Walking”, Proc. of American Control Conference, pp.4542–4548, 2015.
 - [13] L.Wang, A. D. Ames, M. Egerstedt: “Safety Barrier Certificates for Collision-Free Multirobot Systems”, IEEE Transaction on Robotics, Vol. 33, No. 3, pp. 661–674, 2017.
 - [14] A. Agrawal, K. Sreenath: “Discrete Control Barrier Functions for Safety-Critical of Discrete Systems with Application to Bipedal Robot Navigation”, Robotics: Science and System (RSS), 2017.
 - [15] Q. Nguyen, K. Sreenath: “Optimal Robust Control for Constrained Nonlinear Hybrid Systems with Application to Bipedal Locomotion”, American Control Conference (ACC) 2016, pp.4807–4813, 2016.
 - [16] Q. Nguyen, K. Sreenath: “L1 Adaptive Control for Bipedal Robots with Control Lyapunov Function based Quadratic Programs”, Proc. of American Control Conference, pp.862–867, 2015.
 - [17] L. Wang, E. A. Theodorou, M. Egerstedt: “Safe Learning of Quadrotor Dynamics Using Barrier Certificates”, Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2460–2465, 2018.
 - [18] S. Kajita, M. Morisawa, K. Harada, K. Kaneko, F. Kanehiro, K. Fujiwara, H. Hirukawa: “Biped Walking Pattern Generator allowing Auxiliary ZMP Control”, Proc. of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp.2993–2999, 2006.
 - [19] H. Dai, R. Tedrake: “Planning robust walking motion on uneven terrain via convex optimization”, Proc. of IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, pp.579–586, 2016.
 - [20] E. R. Westervelt, J. W. Grizzle, et al.: “Feedback Control of Dynamic Bipedal Robot Locomotion”, Taylor & Francis/CRC, 2007.
 - [21] C. Chevallereau, J. W. Grizzle, C. Shih: “Asymptotically Stable Walking of a Five-Link Underactuated 3-D Bipedal Robot”, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 25, No. 1, pp.37–50, 2009.
 - [22] K. Sreenath, H. W. Park, I. Poulakakis, J. W. Grizzle: “Embedding Active Force Control within the Compliant Hybrid Zero Dynamics to Achieve Stable, Fast Running on MABEL”, The International Journal of Robotics Research, Vol. 32, Issue 3, pp.324–345, 2013.

-
- [23] S. Julier, J. Uhlmann: “Unscented filtering and nonlinear estimation”, Proceedings of the IEEE, Vol. 92, No. 3, pp. 401–421, 2004.
- [24] J. W. Grizzle, C. Chevallereau, A. D. Ames, R. W. Sinnet: “3D Bipedal Robotic Walking: Models, Feedback Control, and Open Problems”, Proc. of 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, pp.505–532, 2010.
- [25] E. R. Westervelt, J. W. Grizzle, D. E. Koditschek: “Hybrid Zero Dynamics of Planar Biped Walkers”, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 48, No. 1, 2003.
- [26] K. A. Hamed, B. G. Buss, J. W. Grizzle: “Exponentially stabilizing continuous-time controllers for periodic orbits of hybrid systems: Application to bipedal locomotion with ground height variations”, International Journal of Robotics Research, Vol. 35, Issue 8, 2016.
- [27] B. Morris, J. W. Grizzle: “A Restricted Poincare Map for Determining Exponentially Stable Periodic Orbits in Systems with Impulse Effects: Application to Bipedal Robots”, Proc. of IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, pp. 4199–4206, 2005.
- [28] M. Kelly: “An Introduction to Trajectory Optimization: How to Do Your Own Direct Collocation”, SIAM REVIEW, Vol. 59, No. 4, 2017.
- [29] L. T. Biegler: “Nonlinear Programming: Concepts, Algorithms, and Applications to Chemical Processes.”, SIAM, 2010.
- [30] J. Burke: “ODEs: Existence and Uniqueness Theory”, Lecture notes of Linear Analysis in University of Washington, https://sites.math.washington.edu/~burke/crs/555/555_notes/exist.pdf, (最終閲覧日 2020/01/29).
- [31] A. Isidori: “Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems”, Springer, 2017.
- [32] A. D. Ames, K. Galloway, K. Sreenath, J. W. Grizzle: “Rapidly Exponentially Stabilizing Control Lyapunov Functions and Hybrid Zero Dynamics”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 59, No. 4, pp.876–891, 2014.
- [33] K. Galloway, K. Sreenath, A. D. Ames, and J. W. Grizzle: “Torque saturation in bipedal robotic walking through control lyapunov function based quadratic programs”, IEEE Access, Vol. 3, No. 99, pp. 323–332, 2015.
- [34] Q. Nguyen, K. Sreenath: “Exponential Control Barrier Functions for Enforcing High Relative-Degree Safety-Critical Constraints”, Proc. of American Control Conference, pp. 322–328, 2016.

-
- [35] Mathworks: “二次計画法”, <https://jp.mathworks.com/help/optim/ug/quadprog.html>, (最終閲覧日 2019/12/22) .
- [36] J. Mattingley, S. Boyd: “CVXGEN: a code generator for embedded convex optimization”, *Optim Eng*, Vol. 13, pp.1–27, 2012.
- [37] COIN-OR: “Clp”, <https://github.com/coin-or/Clp>, (最終閲覧日 2019/12/22) .
- [38] Mathworks: “fmincon”, <https://jp.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>, (最終閲覧日 2019/12/22) .
- [39] A. Wächter and L. T. Biegler: “On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming”, *Mathematical Programming*, Vol. 106, Issue 1, pp. 25–57, 2006.
- [40] S. G. Johnson: “The NLOpt nonlinear-optimization package”, <http://github.com/stevengj/nlopt>, (最終閲覧日 2019/12/22) .
- [41] J. Currie and D. I. Wilson: “OPTI: Lowering the Barrier Between Open Source Optimizers and the Industrial MATLAB User”, *Foundations of Computer-Aided Process Operations*, Georgia, USA, 2012.
- [42] 持橋 大地, 大羽成征: “ガウス過程と機械学習”, 講談社, 2019 年.
- [43] C. E. Rasmussen, C. K. I. Williams: “Gaussian Processes for Machine Learning”, MIT Press, 2006.
- [44] T. Beckers, D. Kulić, S. Hirche: “Stable Gaussian process based tracking control of Euler-Lagrange systems”, *Automatica*, Vol. 103, pp. 390–397, 2019.
- [45] J. Yang, W. Chen, S. Li, X. Chen: “Static disturbance-to-output decoupling for nonlinear systems with arbitrary disturbance relative degree”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, No.23, pp. 562–577, 2013.
- [46] L. Farina, S. Rinaldi: “Positive Linear Systems: Theory and Applications”, John Wiley & Sons. Inc, 2000.
- [47] 山北 昌毅: “UKF(Unscented Kalman Filter) って何? ”, システム制御情報学会誌, Vol. 50, No. 7, pp. 261–266, 2006.
- [48] M. C. Campi, G. Calafiore: “Decision making in an uncertain environment: the scenario-based optimization approach”, *Multiple Participant Decision Making*, Advanced Knowledge International, 2004.

-
- [49] G. Calafiore, M. C. Campi: “Uncertain convex programs: randomized solutions and confidence levels”, *Mathematical Programming Series A*, 2005.
- [50] A. Ohata: “Benchmark Problems on Automotive Engine Controls”, 第 59 回自動制御連合講演会予稿集, pp. 801–806, 2016.
- [51] 大山 博之: “統計的モデルを用いた自動車ガソリンエンジンの制御モデル同定”, 東京工業大学, 博士論文, 2018.
- [52] I. A. Raptis, K. P. Valavanis: “Linear and Nonlinear Control of Small-Scale Unmanned Helicopters”, *Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering*, Vol. 45, Springer, 2011.
- [53] H. Zhang, X. Wei, L. Zhang, M. Tang: “Disturbance rejection for nonlinear systems with mismatched disturbances based on disturbance observer”, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 354, Issue 11, pp. 4404–4424, 2017.
- [54] T. Binazadeh, M. A. Rahgoshay: “Robust output tracking of a class of non-affine systems”, *Systems Science & Control Engineering*, Vol. 5, No.1, pp. 426–433, 2017.
- [55] N. F. Al-muthairi, M. Zribi: “Sliding Mode Control of A Magnetic Levitation System”, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2004, pp. 93–107, 2004.
- [56] A. Levant: “Globally Convergent Fast Exact Differentiator with Variable Gains”, *Proc. of European Control Conference (ECC)*, pp.2925–2930, 2014.
- [57] A. Ilchmann, E. P. Ryan, S. Trenn: Tracking Control: “Performance Funnels and Prescribed Transient Behavior For Nonlinear Systems Of Known Relative Degree”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 46, No. 1, pp. 210–230, 2007.
- [58] C. M. Hackl, C. Endisch, D. Schröder: “Funnel-Control in Robotics: An Introduction”, *Proc. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp. 913–919, 2017.
- [59] C. Chavallereau, G. Abba, et al.: “RABBIT: a testbed for advanced control theory”, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 23, Issue 5, 2003.
- [60] Z. Xie, C. K. Liu, K. Hauser: “Differential Dynamic Programming with Nonlinear Constraints”, *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp.695–702, 2017.
- [61] W. Li and E. Todorov: “Iterative Linear Quadratic Regulator Design for Nonlinear Biological Movement Systems”, *Proc. of the 1st International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, pp. 1–8, 2004.

-
- [62] D. Kraft: “Converting Optimal Control Problems into Nonlinear Programming Problems”, Computational Mathematical Programming, Springer, 1985.
- [63] J. Koenemann, G. Licitra, M. Alp, M. Diehl: “OpenOCL - Open Optimal Control Library”, Robotics Science and Systems, workshop submission, extended abstract, 2019.
- [64] J. A. E. Andersson, J. Gillis, G. Horn, J. B. Rawlings, M. Diehl: “CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control”, Mathematical Programming Computation, Vol. 11, No. 1, pp.1–36, 2019.
- [65] A. Hereid, A. D. Ames: “FROST: Fast Robot Optimization and Simulation Toolkit”, Proc. of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp.719–726, 2017.
- [66] A. Hereid, O. Harib, R. Hartley, Y. Gong, J. W. Grizzle: “Rapid Trajectory Optimization Using C-FROST with Illustration on a Cassie-Series Dynamic Walking Biped”, Proc. of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp.4722–4729, 2019.
- [67] Y. Nie, O. Faqir, E. C. Kerrigan: “ICLOCS2: Try this optimal control problem solver before you try the rest”, Proc. of UKACC 12th International Conference on Control, p.336, 2018.
- [68] M. J. Weinstein, A. V. Rao: “Algorithm 984: ADiGator, a Toolbox for the Algorithmic Differentiation of Mathematical Functions in MATLAB Using Source Transformation via Operator Overloading”, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 44, No. 21, Issue 2, 2017.
- [69] M. Diehl, K. Mombaur, D. Noll: “Stability Optimization of Hybrid Periodic Systems via a Smooth Criterion”, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 54, No. 8, pp.1875–1880, 2009.
- [70] T. Narukawa, K. Yokoyama, and M. Takanashi: “Numerical and Experimental Studies of Planar Passive Biped Walker with Flat Feet and Ankle Springs”, Journal of System Design and Dynamics, Vol. 4, No. 6, pp. 848–856, 2010.
- [71] M. W. Spong, J. K. Holm, and D. Lee: “Passivity-based control of bipedal locomotion”, IEEE Robotics & Automation Magazine, Vol.14, No. 2, pp. 30–40, 2007.
- [72] 小原敦美: “行列不等式アプローチによる制御系設計”, コロナ社, 2016.
- [73] 原辰次: “線形行列不等式 (LMI) 表現と Riccati 不等式”, 計測と制御, 第 35 巻, 第 12 号, pp. 971–973, 1996.

-
- [74] G. T. Gilbert: “Positive Definite Matrices and Sylvester’s Criterion”, The American Mathematical Monthly, Vol. 98, No. 1, pp. 44-46, 1991.
- [75] D. Shevitz, B. Paden: “Lyapunov Stability Theory of Nonsmooth Systems”, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 39, No. 9, pp. 1910–1914, 1994.
- [76] 中荃 隆, 申 鉄龍, 田村 捷利: “不連続な不確かさを持つロボットシステムのロバスト軌道追従制御 -Filippov の枠組みからのアプローチ-”, 電気学会論文誌 C, Vol. 125, No. 3, pp. 463–470, 2005.
- [77] P. Glotfelter, J. Cortés, M. Egerstedt: “Nonsmooth Barrier Functions With Applications to Multi-Robot Systems”, IEEE Control Systems Letters, Vol. 1, No. 2, pp. 310–315, 2017.
- [78] P. Glotfelter, J. Cortés, M. Egerstedt: “Boolean Composability of Constraints and Control Synthesis for Multi-Robot Systems via Nonsmooth Control Barrier Functions”, Proc. of IEEE Conference on Control Technology and Applications, pp. 897–902, 2018.
- [79] L. Wang, D. Han, M. Egerstedt: “Permissive barrier certificates for safe stabilization using sum-of-squares”, Proc. of American Control Conference, pp. 585–590, 2018.
- [80] T. Gurriet, M. Mote, A. D. Ames, E. Feron: “An Online Approach to Active Set Invariance”, Proc. of IEEE Conference on Decision and Control, pp. 3592–3599, 2018.

研究業績

研究業績 (発表順に掲載)

学術雑誌論文

- Rin Takano, Masaki Yamakita: "Robust Control Barrier Function for Systems Affected by A Class of Mismatched Disturbances", SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration. (Accepted for publication, to appear 2020) (4章 4.3節に関連)

国際会議発表

- Rin Takano, Junho Chang, Masaki Yamakita: "Periodic Trajectory Planning and Robust Output Zeroing Control for Underactuated Bipedal Robots with Predicted Disturbances", IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2019. (5章 5.6節に関連)
- Rin Takano, Masaki Yamakita: "Optimization based Robust Output Regulation Control for Nonlinear Systems with Mismatched Disturbances", The SICE Annual Conference, 2019. (4章 4.2節に関連)
- Hiroki Sasaki, Junho Chang, Rin Takano, Masaki Yamakita: "Robust Analysis of Biped Walking on Uneven Terrain Using Output Zeroing Control with Trajectory Optimization", The 45th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON), 2019. (5章 5.3 ~ 5.5節に関連)
- Haruto Yano, Junho Chang, Rin Takano, Masaki Yamakita: "Simultaneous Optimization of Trajectory and Parameter for Biped Robot with Series Elastic Actuators", The Joint 12th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems, Robotics, and Vehicles 1st IFAC Workshop on Robot Control, 2019. (関連なし)
- Rin Takano, Hiroyuki Oyama, Masaki Yamakita: "Application of Robust Control Barrier Function with Stochastic Disturbance Model for Discrete Time Systems", The 5th IFAC Conference on Engine and Powertrain Control, Simulation and Modeling (IFAC E-CoSM 2018), 2018. (3章 3.3節に関連)
- Rin Takano, Masaki Yamakita: "Robust Constrained Stabilization Control using Control Lyapunov and Control Barrier Function in the presence of Measurement Noises",

IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA), 2018. (3 章 3.2 節に関連)

- Junho Chang, Rin Takano, Masaki Yamakita: "Approximated Model Matching Control for Running Robots with SEA Actuators", IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), 2018. (関連なし)
- Yuta Hanazawa, Rin Takano, Masaki Yamakita: "Inerter Effects for Running Robots with Mechanical Impedance", IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2017. (関連なし)
- Hiroki Sasaki, Rin Takano, Masaki Yamakita: "Study on mechanism and control of high efficiency running biped robot", SICE Annual Conference, 2017. (関連なし)
- Rin Takano, Masaki Yamakita: "Sequential-contact Bipedal Running based on SLIP Model through Zero Moment Point Control", IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), 2017. (関連なし)
- Rin Takano, Masaki Yamakita, Qiuguo Zhu: "Analysis of Biped Running with Rotational Inerter", IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2016. (関連なし)

査読なし国内会議発表

- 高野 凜, 山北 昌毅: "Direct collocation method によるヒト型ロボットの安定周期歩容設計", 第 6 回 制御部門マルチシンポジウム (MSCS), 2019 年. (5 章 5.3 ~ 5.5 節に関連)
- 高野 凜, 山北 昌毅: "観測外乱にロバストな CLF-CBF-QP 制御", 第 5 回 制御部門マルチシンポジウム (MSCS) 第 9 回プラントモデリングシンポジウム, 2018 年. (3 章 3.2 節に関連)
- 高野 凜, 山北 昌毅: "外乱を考慮した CLF-CBF-QP の提案", 第 60 回自動制御連合講演会, 2017 年. (3 章 3.2 節に関連)
- 高野 凜, 花澤 雄太, 山北 昌毅: "回転型イナータの適用部位の違いによる 2 足移動ロボットの移動性能変化", 第 34 回日本ロボット学会学術講演会, 2016 年. (関連なし)
- 花澤 雄太, 高野 凜, 山北 昌毅: "イナータを有する高速走行に適した I-SLIP モデル", 第 34 回日本ロボット学会学術講演会, 2016 年. (関連なし)
- 花澤 雄太, 高野 凜, 山北 昌毅: "斜面を利用した高効率かつ漸近安定な SLIP モデルの走行制御", 第 34 回日本ロボット学会学術講演会, 2016 年. (関連なし)

- 高野 凜, 山北 昌毅：“足首イナータの効果を用いた高速リミットサイクル走行”，第 16 回計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会, 2015 年.（関連なし）

謝辞

本研究を進めるにあたって指導教員・論文審査員主査としてご指導・ご助言をくださいました山北昌毅准教授に心より御礼申し上げます。修士課程から博士課程までの5年間の長い間、数学、制御工学、ロボット工学など様々な学問の知識を賜り、また論文執筆の方法や研究の進め方など様々なご指導を賜りました。5年の間、山北先生の研究に対する考え方を身近で学ばせていただき、大きなモチベーションを得るとともに研究に対して前向きな姿勢で取り組むことができました。山北先生のもとで研究を行えたことを光栄に思います。重ねて感謝いたします。

本論文の審査員を務めていただき、丁寧な論文審査の過程で様々なご助言をくださいました井村順一教授、三平満司教授、藤田政之教授、早川朋久准教授に深く感謝申し上げます。

トヨタ自動車株式会社東富士研究所の皆様には共同研究を行っていただき、大変お世話になりました。深く感謝いたします。特に大畠様、佐多様、松永様、江原様、小鮎様には様々な面でご指導・御鞭撻を賜りました。

九州工業大学の花澤雄太助教には二足歩行ロボットに関する共同研究を行っていただき、大変お世話になりました。受動歩行ロボットに関連する議論を通じて様々な知識を賜るとともに、共著での論文を投稿させていただいたことを嬉しく思います。深く感謝申し上げます。

浙江大学の Qiuguo Zhu 助教には共同研究と浙江大学へ滞在する機会を与えていただき、大変お世話になりました。また、共著での論文を投稿させていただいたこと、深く感謝申し上げます。

NEC データサイエンス研究所の大山博之様には学生生活や研究における相談にのっていただき、大変お世話になりました。また、就職活動の際にも研究所を紹介していただき、共に研究を行う機会を与えてくださったことに深く感謝いたします。

学会の手続きや共同研究等の事務手続きに関して大変お世話になりました小林真理事務官に心よりお礼申し上げます。山北研究室での研究生活において様々な議論をするとともに、日々の充実した生活を共に過ごした山北研究室の学生の皆様に感謝いたします。また、山北准教授の奥様には様々な点でご配慮いただき、大変お世話になりました。深く感謝申し上げます。

最後に、精神的・経済的に私を支えてくれた家族に心よりお礼申し上げます。

なお、本研究は JSPS 科研費 JP19J13314 の助成を受けたものです。ここに記し、感謝の意を表します。