

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	結び目とグラフの多項式不変量
Title(English)	Polynomial invariants of knots and graphs
著者(和文)	嘉藤桂樹
Author(English)	Keiju Kato
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11567号, 授与年月日:2020年9月25日, 学位の種別:課程博士, 審査員:KALMAN TAMAS,遠藤 久顕,本多 宣博,五味 清紀,野坂 武史
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11567号, Conferred date:2020/9/25, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

(博士課程)

Doctoral Program

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース：

Department of Graduate major in

学生氏名：

Student's Name

数学

数学

系

コース

嘉藤 桂樹

申請学位 (専攻分野)：

Academic Degree Requested

指導教員 (主)：

Academic Supervisor(main)

指導教員 (副)：

Academic Supervisor(sub)

博士

Doctor of

(理学)

カールマン タマシユ

要旨 (和文 2000 字程度)

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters)

本論文は 2 つの部分から構成されており、どちらも Tutte 多項式を起源として、様々な種類がある Tutte 型多項式不変量を通じて、互いに深い関係にある。Tutte 多項式はグラフやマトロイドなどを含む組合せ論的対象の 2 変数多項式不変量であり、組合せ論では中心的な役割を果たしている。

本論文の第一部は、二部グラフの内部多項式に関するもので、結び目の HOMFLY 多項式と深い関わりがある。結び目とは、トポロジーの分野で盛んに研究されている対象で、3次元球面上に埋め込まれた円周のことである。また、複数個の円周を持つ場合は絡み目と呼ぶ。結び目の分類を行うための道具として不変量があり、近年では Jones 多項式や HOMFLY 多項式をはじめとした量子不変量が調べられている。古典的な Tutte 型多項式不変量と様々な結び目量子不変量との間には、よく知られた関係がある。本論文は、このテーマを大幅に拡張し、低次元トポロジーと代数的組合せ論のより広い関係を示すものである。また、このテーマは、低次元トポロジーでの有用な道具である Floer 理論と深い関わりがあり、Floer 理論と量子不変量の間関係を提供する可能性がある。

Kálmán 氏は、内部多項式と呼ばれる超グラフの 1 変数多項式不変量を導入した。この内部多項式は、グラフの Tutte 多項式の特徴値を超グラフに拡張したものである。超グラフは二部グラフに自然な対応があり、Kálmán 氏と Postnikov 氏は、内部多項式が二部グラフの不変量として捉えられることを示した。また、二部グラフが平面である場合には、そのグラフに交代絡み目を関連付けることができ、Kálmán 氏と村上氏はその絡み目の HOMFLY 多項式がある最大の項の係数として内部多項式を含むことを示した。

本論文では、上記が以下のように一般化できることを示す。任意の符号付き二部グラフに対し、1 変数符号付き内部多項式を定義する。二部グラフが平面である場合、そのグラフに自然に関連付けられる有向絡み目図式の HOMFLY 多項式は元のグラフの符号付き内部多項式を含むことを示す。また、このような絡み目図式を組み合わせることで、任意の絡み目図式の HOMFLY 多項式は、その図式から構成される Seifert グラフの内部多項式を含むことも証明できた。

また、Kálmán 氏と Postnikov 氏は、内部多項式は根多面体と呼ばれる二部グラフから構成される多面体の格子点を数える Ehrhart 多項式を用いて記述できることも示した。本論文では、同様に符号付き内部多項式も Ehrhart 多項式によって記述できることを証明した。これを利用して、符号付き二部グラフに交代周と呼ばれるものがあるとき、その符号付き内部多項式が 0 になるという消滅公式を証明した。この性質の系には、もとの内部多項式の新しい同一性がある。これは、Tutte 多項式での切除収縮公式の類似であり、これまでの研究では得られていないものであった。

HOMFLY 多項式は、鏡像の下である種の幾何学的対称性を持つ。平面的な場合、この対称性は自動的に符号付き内部多項式の公式を生成する。しかし、この公式は非平面の場合でも同様に真である。そのためには別途証明が必要であり、先述の消滅公式と同様、根多面体と Ehrhart 多項式の性質を用いて証明する。特に、Ehrhart 多項式の重要な性質である、Ehrhart 反転公式が重要な役割を担っている。また、HOMFLY 多項式はライブ操作、ミュタントの下で不変であるという性質も持っている。鏡像の場合と同様、二部グラフが平面的でない場合でも、符号付き内部多項式が同じ性質を持つことを証明した。

本論文の第二部は、Hopf モノイドに関するものである。Aguilar と Ardila は、一般化された permutahedra に Hopf モノイドと呼ばれる代数構造 GP を導入し、グラフを含む様々な組合せ論的対象をサブモノイドとして含むことを証明した。また、Hopf モノイドに基本不変量と呼ばれる 1 変数多項式を導入し、グラフの場合には彩色多項式と一致することも証明した。

本論文では、有向グラフに Hopf モノイドを導入し、それが GP のサブモノイドになることを証明する。証明には、最大フロー-最小カット定理と呼ばれる組合せ論で広く知られている性質を利用する。また、有向グラフの Hopf モノイドの基本不変量が Awan と Bernardi による有向グラフの厳密彩色多項式と一致していることを示す。これは、組合せ論の最新かつすでに非常に人気のある、2 つの先行研究の間に貴重な関係を提供している。また、Hopf モノイドは多くの数学的対象の間の統一言語になる可能性があり、一方 Tutte 多項式の類似である彩色多項式は、結び目理論における量子不変量の新しい公式の源泉になり得るため、非常に重要な結果と考えている。

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

(博士課程)
Doctoral Program

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： 数学 系
Department of Graduate major in 数学 コース
学生氏名： 嘉藤 桂樹
Student's Name

申請学位 (専攻分野)： 博士 (理学)
Academic Degree Requested Doctor of
指導教員 (主)： カールマン タマシユ
Academic Supervisor(main)
指導教員 (副)：
Academic Supervisor(sub)

要旨 (英文 300 語程度)
Thesis Summary (approx.300 English Words)

This thesis consists of two parts. Firstly, we study the interior polynomial and its properties related to the HOMFLY polynomial. Secondly, we study the Hopf monoid of directed graphs.

The interior polynomial is a Tutte-type invariant of bipartite graphs, and a part of the HOMFLY polynomial of a special alternating link coincides with the interior polynomial of the Seifert graph of the link. We extend the interior polynomial to signed bipartite graphs, and we show that, in the planar case, it is equal to the maximal z -degree part of the HOMFLY polynomial of a naturally associated link. Note that the latter can be any oriented link. This result fits into a program aimed at deriving the HOMFLY polynomial from Floer homology.

We also establish some other, more basic properties of the signed interior polynomial. For example, the HOMFLY polynomial of the mirror image of L is given by $P_{\{L\}}(-v^{-1}, z)$. This implies a mirroring formula for the signed interior polynomial in the planar case. We prove that the same property holds for any bipartite graph and the same graph with all signs reversed. The proof relies on Ehrhart reciprocity applied to the so-called root polytope. We also establish formulas for the signed interior polynomial inspired by the knot theoretical notions of flyping and mutation, as well as a certain vanishing formula. This leads to new identities for the original unsigned interior polynomial.

The Hopf monoid GP of generalized permutahedra was defined by Aguiar and Ardila, who showed that it contains many submonoids that correspond to combinatorial objects. They also give a basic polynomial invariant of generalized permutahedra, which then specializes to submonoids. We define the Hopf monoid of directed graphs and show that it also embeds in GP . The resulting basic invariant coincides with the strict chromatic polynomial of Awan and Bernardi.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note: Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1 copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).