

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	クラスター代数から生じる差分方程式
Title(English)	Difference equations arising from cluster algebras
著者(和文)	水野勇磨
Author(English)	Yuma Mizuno
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11893号, 授与年月日:2021年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:鈴木 咲衣,梅原 雅顕,西畑 伸也,南出 靖彦,渡邊 澄夫,寺嶋 郁二
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11893号, Conferred date:2021/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数理・計算科学 数理・計算科学	系 コース	申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	（理学）
学生氏名： Student's Name	水野勇磨		指導教員（主）： Academic Supervisor(main)	鈴木咲衣	
			指導教員（副）： Academic Supervisor(sub)	寺嶋郁二	

要旨（和文 2000 字程度）

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters)

2000 年ごろに Fomin と Zelevinsky はインプットとして反対称化可能行列（しばしば箴として表される）を与えることで定まるクラスター代数と呼ばれる可換環を導入した。クラスター代数は単なる可換環というだけでなく、箴の変異と呼ばれる組み合わせ的な操作に付随する構造を備えているという特徴を持つ。これまでに様々な数学的対象がクラスター代数の構造を持つということが発見され、クラスター代数に関する多くの研究が行われてきた。クラスター代数に関する研究のひとつに、クラスター代数上の離散力学系の研究がある。クラスター代数はクラスターモジュラー群と呼ばれる対称性を持ち、クラスターモジュラー群に属する自己同型を与えるごとにクラスター代数上の離散力学系を考えることができる。このような離散力学系を記述する方法のひとつに、Y-system および T-system と呼ばれる、クラスター変数の間の代数関係式からなる差分方程式を与えるというものがある。本論文の目的は、これらの差分方程式について系統的理解を与えることである。以下で、本論文の内容について具体的に述べる。1 章では Fomin と Zelevinsky によるクラスター代数の定義についてまとめた。2 章ではクラスター代数における Y-system と T-system について調べた。2.1 節では、中西による Y/T-system の定式化についてまとめたのち、Y-system と T-system の間にシンプレクティック関係式と呼ばれる関係があることを証明した。2.2 節では、本論文の主結果である、差分方程式系がクラスター代数における T-system として実現できるための必要十分条件を与えた。簡潔に述べると、前節で与えたシンプレクティック関係式が求める必要十分条件そのものになっている、というのが結果である。このことから、シンプレクティック関係式を満たす正方行列の組を与えることとクラスター代数上の Y-system および T-system を与えることが等価であるということがわかった。本論文では、このような正方行列の組を T-datum と名付けた。主結果の証明は、T-datum からクラスター代数を定義するデータである反対称化可能行列およびクラスターモジュラー群の元を与える明示式を与えることでなされた。証明で用いた明示式はそれ自体も便利であり、T-system から反対称化可能行列を得る統一的な方法を与える。2.3 節では、T-datum の例をいくつか与えた。前節で与えた明示式と合わせることで、Fomin-Zelevinsky, Fordy-Marsh, 中西, Galashin-Pylyavskyy などによって得られていた様々な Y-system や T-system を、統一的な方法で再構成した。3 章では周期的な Y-system および T-system について研究を行った。このような差分方程式系は、Zamolodchikov による熱力学的ベータ仮設の研究に関連して、これまでに様々な例が発見されてきた。本論文では、周期的な Y/T-system を与える T-datum を有限型の T-datum と呼び、これについて研究を行った。3.1 節では T-datum の同時正値性が T-datum が有限型であるための必要条件であることを証明した。同時正値性は行列に関する単純な条件であり、したがって Y/T-system が周期的でないことを示す効果的な判定方法を与える。3.2 節では、同時正値性の応用として、Cartan 的であるという条件を満たす有限型の T-datum から、自然な方法で正定値対称行列が得られることを証明した。このことから、T-datum に付随する Y-system が、区間 $(0, 1)$ に含まれるような実数の固定点を一意に持つことが従う。3.3 節では、前節で得られた正定値対称行列を用いて、カルタンの有限型の T-datum に対して分配 q 級数と呼ばれる超幾何 q 級数を定義した。そして、Bloch 群のトーシェン元とモジュラー関数を関係づける Nahm の予想から着想を得て、分配 q 級数は常にモジュラー関数であると予想した。いくつかの例では Rogers-Ramanujan 型の恒等式を用いることでこの予想が証明できることを確認した。3.4 節では、分配 q 級数の漸近挙動に現れる冪指数という量について調べた。冪指数について、T-datum から定義する方法と、クラスター変換の微分特性多項式から定義する方法とのふたつの異なる定義を与えた。さらに、量子アフィン代数の Kirillov-Reshetikhin 加群に關係する T-datum について、冪指数をルート系を用いて明示的に与える公式を予想した。この予想が A 型のルート系のいくつかの場合に正しいことを証明した。3.5 節では、前節で論じた量子アフィン代数の Kirillov-Reshetikhin 加群に關係する T-datum について、その分配 q 級数とアフィンリー代数の可積分最高ウェイト表現の指標のフェルミ公式が一致することを示した。分配 q 級数の漸近挙動と Weyl-Kac の指標公式の漸近挙動を比較することで、冪指数をルート系を用いて記述する前節で予想した公式においてパラメーターを特殊化したものが得られることを示した。

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数理・計算科学 数理・計算科学	系 コース	申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	（ 理学 ）
学生氏名： Student's Name	水野勇磨		指導教員（主）： Academic Supervisor(main)	鈴木咲衣	
			指導教員（副）： Academic Supervisor(sub)	寺嶋郁二	

要旨（英文 300 語程度）

Thesis Summary (approx.300 English Words)

Around 2000, Fomin and Zelevinsky introduced commutative rings called cluster algebras, which are defined by giving skew-symmetrizable matrices (often expressed as quivers) as inputs. Cluster algebras are not only commutative rings, but also have a structure associated with combinatorial operations called quiver mutations. It has been discovered that many important mathematical objects have a structure of cluster algebras, and cluster algebras have been widely studied. One of the topics in the study of cluster algebras is the study of discrete dynamical systems on cluster algebras. A cluster algebra has a symmetry called a cluster modular group, and we can consider a discrete dynamical system on a cluster algebra for each automorphism belonging to the cluster modular group. One of the ways for describing such a discrete dynamical system is to give a difference equation called Y-system and a T-system, which are algebraic relations among cluster variables. The purpose of this paper is to give a systematic understanding of these difference equations. The main result, which is proved in Section 2.2, is to give a necessary and sufficient conditions for a difference equation to be realized as a T-system in a cluster algebra. Briefly, the result is that the desired necessary and sufficient condition is given by a certain symplectic relation between a pair of square matrices. From this result, we see that giving a pair of square matrices satisfying the symplectic relation is equivalent to giving a Y-system and a T-system on a cluster algebra. We call such a pair a T-datum. The main result is proved by giving an explicit formula that gives from a T-datum a skew-symmetrizable matrix as an input data of a cluster algebra and an element in the cluster modular group in this cluster algebra. This explicit formula used in the proof is convenient in itself. It gives a unified method of constructing skew-symmetrizable matrices from T-systems. we give some examples of T-data. By using the explicit formula given in the last section, these examples reconstruct various Y-systems and T-systems obtained by Fomin-Zelevinsky, Fordy-Marsh, Nakanishi, Galashin-Pylyavskyy, etc. in a unified way.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。
Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).