

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

|                   |                                                                                                                                                                                                |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 題目(和文)            | M凸関数最小化および関連問題に対するアルゴリズムと解析                                                                                                                                                                    |
| Title(English)    | Algorithms and Analysis of M-Convex Function Minimization and Related Problems                                                                                                                 |
| 著者(和文)            | 南川智都                                                                                                                                                                                           |
| Author(English)   | Norito Minamikawa                                                                                                                                                                              |
| 出典(和文)            | 学位:博士(工学),<br>学位授与機関:東京工業大学,<br>報告番号:甲第11944号,<br>授与年月日:2021年3月26日,<br>学位の種別:課程博士,<br>審査員:塩浦 昭義,水野 眞治,松井 知己,大和 毅彦,中田 和秀                                                                        |
| Citation(English) | Degree:Doctor (Engineering),<br>Conferring organization: Tokyo Institute of Technology,<br>Report number:甲第11944号,<br>Conferred date:2021/3/26,<br>Degree Type:Course doctor,<br>Examiner:,,,, |
| 学位種別(和文)          | 博士論文                                                                                                                                                                                           |
| Category(English) | Doctoral Thesis                                                                                                                                                                                |
| 種別(和文)            | 論文要旨                                                                                                                                                                                           |
| Type(English)     | Summary                                                                                                                                                                                        |

# 論文要旨

## THESIS SUMMARY

|                                            |              |          |                                                             |
|--------------------------------------------|--------------|----------|-------------------------------------------------------------|
| 系・コース：<br>Department of, Graduate major in | 経営工学<br>経営工学 | 系<br>コース | 申請学位 (専攻分野)： 博士 (工学)<br>Academic Degree Requested Doctor of |
| 学生氏名：<br>Student's Name                    | 南川 智都        |          | 指導教員 (主)： 塩浦 昭義 教授<br>Academic Supervisor(main)             |
|                                            |              |          | 指導教員 (副)：<br>Academic Supervisor(sub)                       |

### 要旨 (和文 2000 字程度)

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters )

M 凸性とは、離散最適化問題において望ましい性質である「凸性」の一種である。本論文では M 凸関数最小化問題、およびその関連問題について、アルゴリズムとその解析に関する研究を行った。論文は全 5 章からなり、第 1 章：研究背景、第 2 章：数学的準備と本論文で扱う問題の定義、第 3 章：M 凸関数最小化問題と関連問題に対する最急降下法の厳密な反復回数、第 4 章： $L_1$  距離制約をもつ分離凸資源配分問題に対するアルゴリズム、第 5 章：結論、という内容で構成されている。

第 1 章では、序論を述べた。まず、離散最適化問題の定義を述べ、全ての実行可能解をチェックすれば最適解を求められる、という性質について説明した。中でも、効率的に最適解を求めることができる「解きやすい」離散最適化問題について述べた上で、「解きやすい」問題の典型例である最小全域木問題と、分離凸資源配分問題を紹介した。その上で、「解きやすい」離散最適化問題に対する理論的な枠組みとして知られる「離散凸解析」について述べた。そして、本論文で着目する M 凸関数が、離散凸関数とよばれる関数クラスの一つであり、「離散凸解析」における中心的な役割を果たすことを説明した。この M 凸関数の最小化問題を定義し、最小全域木問題や分離凸資源配分問題といった「解きやすい」離散最適化問題を含む問題クラスであることを述べた。そして、このような「解きやすい」離散最適化問題を研究する意義を述べるために、「解きやすい」離散最適化問題を利用して「解きにくい」離散最適化問題を解くための様々なアプローチについて説明を行った。最後に、本論文の研究目的と貢献を述べ、各章に掲載された内容を簡潔にまとめた。

第 2 章では、本論文で扱う記号、用語の説明と、問題の定義を述べた。はじめに、記号の定義と数学的準備を行った。次に、第 3 章で扱う M 凸関数とジャンプ M 凸関数の定義を述べ、離散最適化問題においてこれらの離散凸関数があらわれる具体例を示した。さらに、第 4 章で扱う資源配分問題の定義を述べ、基本的な資源配分問題を解く既存のアルゴリズムとその計算量をまとめた。

第 3 章では、離散凸関数の一種である M 凸関数とジャンプ M 凸関数の最小化問題について、基本的なアルゴリズムの一種である最急降下法の厳密な反復回数を導出した。M 凸関数は最急降下法を利用することで、有限回の反復で最小解を求めることが可能である。M 凸関数最小化に対する基本的な最急降下法の反復回数については、M 凸関数の最小解が唯一であるときに限り、厳密な反復回数が得られていた。最小解が唯一とは限らない一般の M 凸関数について、最急降下法の厳密な反復回数は近年まで明らかになっておらず、最急降下法の動作を修正することで、反復回数の上界を得ていた。2018 年、塩浦によって一般の M 凸関数に対する最急降下法の厳密な反復回数が求められ、最急降下法の解の軌道が測地線、すなわち最短経路となることが示された。本論文では、降下方向の情報をを用いて最小解が含まれる領域を制限できる、という最小解カット定理の精緻化によって、厳密な反復回数の別証明を与えた、さらに、M 凸関数の一般化であるジャンプ M 凸関数の最小化問題について、最急降下法の厳密な反復回数を初めて導出するとともに、最急降下法によって生成される解の軌道が測地線となることを示した。

第 4 章では、「解きやすい」離散最適化問題の一種である分離凸資源配分問題について新しいクラスの問題を考え、M 凸関数最小化として定式化できることを示すと同時にアルゴリズムの高速な実装を示した。分離凸資源配分問題とは、いくつかの離散的な資源を複数の活動に割り当てる問題である、凸関数で表される経費・損失が最小になるように資源を配分することを目的とする。本論文では、所与のベクトルから解ベクトルまでの  $L_1$  距離が定数以下、という制約の下での分離凸資源配分問題を考えた。この制約は、現在の配分が与えられたときに配分の変更量に制約がある、という状況を表しており、バイクシェアリングサービスにおけるドックの再配置問題に関する Freund ら (2017) の研究のモデルで扱われたものである。この  $L_1$  距離制約を付与した分離凸資源配分問題が、M 凸関数最小化問題の一種である劣モジュラ凸資源配分問題として定式化できることを示した。この結果から、劣モジュラ凸資源配分問題を解く既存のアルゴリズムを用いて、 $L_1$  距離制約付き分離凸資源配分問題の最適解を効率的に求められる。さらに、既存のアルゴリズムの初期解をこの問題に特化した設定にすることで、より高速な実装を示すと同時に、時間計算量の解析を行った。また本論文では、 $L_1$  距離制約付き分離凸資源配分問題にさらなる制約を加えた問題を考え、劣モジュラ資源配分問題として定式化できない具体例が存在することを示した。

第 5 章では、本論文の結論を述べた。第 3 章と第 4 章それぞれで述べた内容を章ごとに簡潔にまとめ、本論文の貢献を示した。

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ (T2R2) にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。  
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

# 論文要旨

## THESIS SUMMARY

系・コース： 経営工学 系  
Department of Graduate major in 経営工学 コース  
学生氏名： 南川 智都  
Student's Name

申請学位(専攻分野)： 博士 (工学)  
Academic Degree Requested Doctor of  
指導教員(主)： 塩浦 昭義 教授  
Academic Supervisor(main)  
指導教員(副)：  
Academic Supervisor(sub)

### 要旨 (英文 300 語程度)

Thesis Summary (approx.300 English Words)

In this thesis, we discuss M-convex function minimization and related problems. This thesis is titled "Algorithms and Analysis of M-Convex Function Minimization and Related Problems" and consists of five chapters.

In Chapter 1, we explain the background and the purpose of this thesis. In this thesis, we aim to contribute to advance the research on M-convex function minimization and related problems theoretically and practically.

In Chapter 2, we introduce necessary concepts and notations, and show elementary key properties. In particular, we explain the definition of M-convex function minimization and related problems.

In Chapter 3, we analyze the basic steepest descent algorithm for M-convex function minimization. It is known that a minimizer of an M-convex function can be found by a steepest descent algorithm in a finite number of iterations. Recently, the exact number of iterations required by a basic steepest descent algorithm was obtained. In this thesis, we give a simpler and shorter proof of this result. We also consider the minimization of a jump M-convex function, which is a generalization of M-convex function, and analyze the number of iterations required by the basic steepest descent algorithm.

In Chapter 4, we consider the separable convex resource allocation problem with an additional constraint that the  $L_1$ -distance between a given vector and a feasible solution is bounded by a given positive constant. We prove that the simple separable convex resource allocation problem with the  $L_1$ -distance constraint can be reformulated as a submodular resource allocation problem, which is a special case of M-convex function minimization. This means that the problem is a well-solved discrete optimization problem, i.e., it admits an efficient algorithm for finding an optimal solution. Furthermore, we present specialized implementations of the existing algorithms and analyze their running time.

In Chapter 5, we conclude this thesis by providing a summary of our contributions.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1 copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).