

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	ベクトル値の平均曲率指定問題
Title(English)	Vectorial prescribed mean curvature problem
著者(和文)	塚本悠暉
Author(English)	Yuki Tsukamoto
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11864号, 授与年月日:2021年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:利根川 吉廣,隠居 良行,柳田 英二,小野寺 有紹,藤川 英華
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11864号, Conferred date:2021/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： 数学 系
Department of Graduate major in 数学 コース
学生氏名： 塚本 悠暉
Student's Name

申請学位 (専攻分野)： 博士 (理学)
Academic Degree Requested Doctor of
指導教員 (主)： 利根川 吉廣 (教授)
Academic Supervisor(main)
指導教員 (副)：
Academic Supervisor(sub)

要旨 (和文 2000 字程度)

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters)

平均曲率は変分法，微分幾何，非線形偏微分方程式，幾何学的測度論など広範な数学分野に本質的な関係を持つ対象として今日まで多くの研究が行われてきた．本論文では，与えられた関数と平均曲率が一致する曲面の存在を示す問題である，平均曲率指定問題について考察する．与えられた関数が空間の点と曲面の位置に依存するとき，様々な条件下で研究が行われてきたが，関数が曲面の法ベクトルに依存する問題の研究の数は多くない．本論文では関数でなく，ベクトル場を与え，その法線成分が平均曲率ベクトルと一致する曲面の存在を示す，平均曲率指定問題について考察する．ここではこの問題をベクトル値の平均曲率指定問題と呼ぶことにする．これについて大きく 3 つの結果を得た．

第 2 章では，一般次元ユークリッド空間内の有界領域上でディリクレ境界条件を付したベクトル値の平均曲率指定問題を考える．これに関する先行研究は 2 つある．Bergner は与えられるベクトル場が有界かつ単調で，有界領域が凸集合のとき，解の存在を示した．Marquardt はベクトル場について同条件とし，有界領域が凸集合とは限らない，別の条件に緩めた．本論文では，これとは異なる条件でディリクレ境界値問題を解いた．その条件とは与えられるベクトル場と境界値関数がソボレフノルムに関して十分小さいという条件である．この条件はベクトル場について有界性や単調性は必要なく，領域についても条件がないものとなっている．証明の方針は以下である．平均曲率指定問題は準線型楕円型方程式問題であるが，これを非発散型の楕円型線形問題に書き直す．この線形問題の解の存在と一意性を示し，その解のソボレフノルムを境界値と与えられたベクトル場によって評価する．境界値とベクトル場が十分小さいとき，適切な関数空間を定義することでシャウダーの不動点定理の条件を満たすことができ，この不動点が平均曲率指定問題の解となっている．

第 3 章では， N 次元トーラス上でベクトル値の平均曲率指定問題を考える．このような問題は 1 次元トーラス上では考えられていたが，一般次元では考えられていない問題であった．本論文では以下の結果を得た．与えられるベクトル場はトーラスと閉区間の積集合から $N+1$ 次元ユークリッド空間への写像とする．このとき，ベクトル場のソボレフノルムが十分小さく，ベクトル場の第 $N+1$ 成分は単調性を持ち，またトーラス上での積分値がゼロのとき，この問題の解は存在する．ここで，単調性とソボレフノルムが十分小さいという条件は，この問題を線形化したときの解の存在と一意性を保証している．積分値の条件はトーラス上で楕円型方程式問題の解の存在を保証している．そのため，これらの条件はこの問題に対して自然な仮定となっている．証明の方針は以下である．初めに発散型の楕円型線形問題に書き直す．この問題について，与えられた関数に関する非同時間問題はラックス・ミルグラムの定理を使うことで，関数の積分値がゼロのとき，解を持つことが示せる．単調性により，ベクトル場で考えたときも解の存在と一意性が保証され，また解のソボレフノルムを評価する．このとき，発散型のため正則性が第 2 章のディリクレ境界値問題より悪くなるが，弱位相に関するシャウダーの不動点定理を用いることで，不動点が存在し，この不動点がトーラス上での平均曲率指定問題の解となっている．

第 4 章では，アレン・カーン方程式を用いる手法を考える．この方程式は相分離を表す方程式であり，対応するエネルギーを用いて拡散界面を定義すると，Modica は拡散界面が極小曲面に収束することを示した．これを利用して，アレン・カーン方程式に移流項を加えた式を考える．本論文では与えられたベクトル場のソボレフノルムとエネルギー，関数が一様有界のとき以下の結果を得た．与えられたベクトル場の列と拡散界面はそれぞれ，あるベクトル場と曲面に収束し，曲面の平均曲率ベクトルは極限ベクトル場の法線成分と一致する．つまりベクトル値の平均曲率指定問題となっている．また，この結果を用いることで次を得る．滑らかなコンパクト多様体上の与えられた関数について，この関数の勾配ベクトルの法線成分と平均曲率ベクトルが一致するような曲面が存在する．証明の方針は以下である．拡散界面の密度が上からも下からも一様有界であることを示す．これより，幾何学的測度論で重要な役割を持つ単調性公式が示せる．これと修正可能集合の収束，アラドの定理を使うことで，拡散界面が収束し，その平均曲率ベクトルは極限ベクトル場の法線成分と一致することが示される．

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： 数学 系
Department of Graduate major in 数学 コース
学生氏名： 塚本 悠暉
Student's Name

申請学位(専攻分野)： 博士 (理学)
Academic Degree Requested Doctor of
指導教員(主)： 利根川 吉廣(教授)
Academic Supervisor(main)
指導教員(副)：
Academic Supervisor(sub)

要旨(英文 300 語程度)

Thesis Summary (approx.300 English Words)

We consider the prescribed mean curvature problem, which is a problem to find a surface with the mean curvature equal to a given function. The prescribed mean curvature problem has been studied by numerous researchers in the case that a given function depends on the position of the space and surface. On the other hand, if a given function depends on the first derivative of a surface, the problem has been little studied. In the present thesis, we consider the existence of a surface whose mean curvature vector coincides with the normal component of a given vector field. We obtained three major results under these conditions.

In Chapter 2, we consider the problem under the Dirichlet boundary condition in a Euclidean space, and we proved the following. If the prescribed function and boundary value are sufficiently small in a dimensionally sharp Sobolev norm, there exists a solution near a graphical minimal surface.

In Chapter 3, we consider the problem on the N -dimensional torus. We proved the existence of solutions under the conditions that the Sobolev norm of a given vector field is sufficiently small, $N+1$ -th component is monotonous, and the integrated value is zero. The assumptions of Sobolev norm and monotonisity guarantee the existence and uniqueness of solutions to the linearized problem, and the assumption of the integrated value is necessary for the existence of solutions to elliptic equations on the torus.

In Chapter 4, we consider the Allen-Cahn equation, which represents the phase separation and has been intensively studied in recent years. By defining the diffuse interface of the corresponding energy, Modica proved that the diffuse interface converges to a minimal surface as a parameter tends to zero. We consider the Allen-Cahn equation with the advection term instead. Under the conditions that the Sobolev norm of the vector field and energy are uniformly bounded, we proved that the diffuse interface converges to a surface whose mean curvature vector coincides with the normal component of the limit of a given vector field.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note: Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1 copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).