T2R2 東京工業大学リサーチリポジトリ
Tokyo Tech Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	量子alcoveモデルの組合せ論
Title(English)	Combinatorics of the quantum alcove model
著者(和文)	河野隆史
Author(English)	Takafumi Kouno
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12052号, 授与年月日:2021年9月24日, 学位の種別:課程博士, 審査員:内藤 聡,田口 雄一郎,加藤 文元,水本 信一郎,鈴木 正俊
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12052号, Conferred date:2021/9/24, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

Powered by T2R2 (Tokyo Institute Research Repository)

（博士課程）
Doctoral Program

論 文 要 旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 系 数学 コース	申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 Doctor of （ 理学 ）
学生氏名： Student's Name	河野 隆史	指導教員（主）： Academic Supervisor(main)	内藤 聡
		指導教員（副）： Academic Supervisor(sub)	

要旨（和文 2000 字程度）
Thesis Summary（approx.2000 Japanese Characters ）

本論文では，(通常の有限次元) 旗多様体や半無限旗多様体のトーラス同変 K 群において重要な役割を果たす量子 alcove モデルの理論を扱う．

旗多様体のコホモロジー群や K 群は，Schubert 類が基底をなす．Schubert calculus では，Schubert 類同士の積の展開を記述することが基本問題である．この問題に対する研究方法の一つとして，直線束の類と Schubert 類の積を Schubert 類たちの線形結合として展開する「Chevalley 公式」が考察されてきた．Chevalley 公式は 1950 年代に，Chevalley によって旗多様体のコホモロジー群における等式として見いだされ，その後トーラス同変コホモロジー群や K 群など，様々な変種においても研究された．

Lenart-Postnikov は，旗多様体のトーラス同変 K 群における Chevalley 公式を記述するため，alcove モデルを導入した．その後，Lenart-Lubovsky により alcove モデルの一般化にあたる量子 alcove モデルが導入され，Lenart-内藤-佐垣により半無限旗多様体のトーラス同変 K 群における Chevalley 公式を記述するのに用いられた．この Chevalley 公式の証明には，その表現論的類似に当たる，アフィン量子群上のレベル・ゼロ Demazure 加群の次数付き指標に関する等式が背景にある．

量子 alcove モデルの理論では，一般のウェイト λ に対して alcove パス（λ チェイン）を固定し，この alcove パスに対応する admissible 部分集合の全体を考える．一方，優整ウェイト λ に対しては量子 Lakshmibai-Seshadri パス（量子 LS パス）という，admissible 部分集合の全体と等価な組合せ論的対象がある．本論文では，量子 LS パスの一般のウェイトへの一般化である「interpolated 量子 LS パス」を定義し，それらが一般のウェイトに対する admissible 部分集合の全体と等価であることを示す．その応用として，Lenart-内藤-佐垣による半無限旗多様体のトーラス同変 K 群における Chevalley 公式を，interpolated 量子 LS パスを用いて記述する．

旗多様体のトーラス同変 K 群は，トーラスの表現環上の加群構造を持つ．この加群構造を調べるには，「逆 Chevalley 公式」が有効である．逆 Chevalley 公式とは，トーラスの指標を Schubert 類に作用させた結果を，Schubert 類たちの線形結合として展開する等式である．本論文では，導入した interpolated 量子 LS パスの $q=0$ 極限にあたる interpolated LS パスを用いて，旗多様体のトーラス同変 K 群における逆 Chevalley 公式を具体的に記述する．また，逆 Chevalley 公式の応用として，Yip 公式の $q=t=0$ における特殊化を導く．この Yip 公式とは，トーラスの指標と非対称 Macdonald 多項式の積の展開式である．Littlewood-Richardson ルールについては，$q=t=0$ の場合は，Haglund-Luoto-Mason-Van Willigenburg により特殊な条件のもとで組合せ論的に記述され，筆者がその条件を拡張した．本論文では，Littlewood-Richardson ルールの記述で重要な役割を果たすと考えられる Yip 公式の $q=t=0$ での特殊化を，interpolated LS パスを用いて書き下す．

続いて，量子 Yang-Baxter move について考察する．優整ウェイト λ に関する admissible 部分集合の全体に対して，Lenart-Lubovsky は「量子 Yang-Baxter move」というある種の良い写像を構成した．λ チェインは複数存在するが，量子 Yang-Baxter move は，これらの異なる λ チェインのそれぞれから定まる admissible 部分集合の全体の間に，「ウェイト」や「高さ」などの量を保つ全単射があることを保証する．本論文では，量子 Yang-Baxter move の類似にあたる写像が，優整とは限らない一般のウェイトでも存在することを示す．その応用として，admissible 部分集合のウェイトや高さなどの量に関する母関数が，λ チェインの取り方によらずに定まることを示す．また，この母関数を利用して，半無限旗多様体のトーラス同変 K 群における Chevalley 公式の表現論的類似に当たる，アフィン量子群のレベル・ゼロ Demazure 加群の次数つき指標に関する等式に，簡明な証明を与える．

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。
Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

（博士課程）
Doctoral Program

論 文 要 旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 数学	系 コース	申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	（ 理学 ）
学生氏名： Student's Name	河野 隆史		指導教員（主）： Academic Supervisor(main)	内藤 聡	
			指導教員（副）： Academic Supervisor(sub)		

要旨（英文 300 語程度）
Thesis Summary（approx.300 English Words ）

We study the quantum alcove model, which plays an important role in the study of the torus-equivariant K-groups of ordinary flag manifolds and semi-infinite flag manifolds.

In the theory of the quantum alcove model, one fixes a λ-chain for arbitrary weight λ, and considers corresponding collection of admissible subsets. If λ is dominant, then one can also consider the set of quantum Laksimibai-Seshadri paths (QLS paths), which carry the same information as the quantum alcove model. We introduce interpolated quantum Lakshmibai-Seshadri paths (interpolated QLS paths), which are generalization of QLS paths for an arbitrary weight, and show that the set of interpolated QLS paths carry the same information as the corresponding collection of admissible subsets. As an application, we rewrite the identity of "Chevalley-type" for the graded characters of level-zero Demazure submodules over a quantum affine algebra, which is a representation-theoretic analog of the Chevalley formula in the torus-equivariant K-group of semi-infinite flag manifolds.

The torus-equivariant K-group of an ordinary flag manifold has a module structure over a representation ring of the torus. To investigate this module structure, one considers the inverse Chevalley formula, the expansion formula for the product of a character of the torus and a Schubert class. We describe the inverse Chevalley formula in terms of interpolated LS paths, "q=0 counterpart" of interpolated QLS paths. As an application, we write the specialization at $q=t=0$ of the Yip formula, the expansion formula for the product of a character of the torus and a character of a Demazure module over a (finite-dimensional) simple Lie algebra.

The other topic of this thesis is quantum Yang-Baxter moves, defined for the two collections of admissible subsets corresponding to different reduced λ-chains, where λ is a dominant weight. Quantum Yang-Baxter moves establish that the two collections of admissible subsets corresponding to different reduced λ-chains are mutually isomorphic if λ is dominant. We prove the existence of quantum Yang-Baxter moves for an arbitrary weight, and show that the generating function of important statistics (including "weights" and "heights") associated to the collection of admissible subsets does not depend on the choice of a reduced λ-chain. In addition, by using these generating functions, we give a simpler proof of the identity of Chevalley-type for the graded characters of level-zero Demazure submodules.

備考 ： 論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。
Note : Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ（T2R2）にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).