

論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	回転慣性とせん断変形が曲げ固有振動数へ及ぼす影響と梁理論によるその画一的な簡易評価法の作成
Title(English)	Effects of rotatory inertia and shear deformation on natural bending frequencies and development of uniformed and simplified evaluation method for them by the beam theory
著者(和文)	山口雄大, 佐藤大樹
Authors(English)	Yudai Yamaguchi, Daiki Sato
出典 / Citation	日本建築学会関東支部研究報告集, , , pp. 293-296
Citation(English)	, , , pp. 293-296
発行日 / Pub. date	2022, 3

回転慣性とせん断変形が曲げ固有振動数へ及ぼす影響と梁理論によるその画一的な簡易評価法の作成

構造—振動

正会員 ○ 山口雄大*¹正会員 佐藤大樹*²

曲げ振動 回転慣性 せん断変形

1. 緒言

弾性梁の曲げ振動に関する理論として最も一般的である Bernoulli-Euler 梁理論 (以降, BEB 理論) は, 簡易で扱いやすい一方で, 回転慣性やせん断変形が考慮されておらず, 細長比の小さい梁や高次モードを評価の対象とする場合にはその影響が無視できなくなる¹⁾. これらの影響が考慮された梁理論として, Timoshenko 梁理論²⁾⁻³⁾や, Timoshenko 梁理論の物理的な不合理性が解消された修正 Timoshenko 梁理論⁴⁾⁻⁵⁾が提案されているが, これらの理論は一樣な梁であっても固有値解析のために複雑な振動数方程式を逐一数値計算する必要があるなど, 実用上の簡易性の面では BEB 理論に劣ると言える. そこで, 筆者らは, 文献 6)において, 一樣弾性梁を対象に, 修正 Timoshenko 梁理論 (以降, MTB 理論) に基づいた厳密性の高い曲げ固有振動数の理論値を複雑な数値計算や FEM 解析を用いることなく近似計算できる実用的な計算手法を提案した. 本報では, 細長比の小さい連続体角柱模型を用いて回転慣性やせん断変形が曲げ振動に与える影響について実験的に確認するとともに, MTB 理論のその評価への適用性を検証した結果を報告する. さらに, 文献 6)にて提案した手法を発展させ, 回転慣性やせん断変形が梁の曲げ固有振動数へ及ぼす影響について, 更に簡易的かつ画一的に把握・評価するための手法を作成する.

2. 弾性梁の曲げ振動理論の概略

2.1 BEB 理論と MTB 理論

密度 ρ , 弾性係数 E , 長さ L , 断面積 A , 断面二次モーメント I の一樣な無減衰弾性梁において, BEB 理論に基づいた自由振動の運動方程式は次式で表される.

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

ここに, t は時間, x は軸方向の位置, y は x における曲げたわみである. また, 固有振動数は次式で求められる.

$$f_{BE} = \phi_{BE}^2 \sqrt{EI/\rho A} / 2\pi \quad (2)$$

ここに, 添字の BE は BEB 理論を表しており, f_{BE} は固有振動数, ϕ_{BE} は梁の支持条件ごとに得られる振動数方程式を解くことで得られる角波数である.

一方で, MTB 理論の運動方程式は次式のようになる.

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (3)$$

ここに, G はせん断弾性係数 ($=E/2(1+\nu)$, ν : ポアソン比), k' は断面に応じて求められるせん断係数⁷⁾である. 式(3)の左辺の3項目以降を無視すると, 式(1)が得られることが分かる. また, MTB 理論では, 固有振動数は式(2)のような単純な式では求められず, 式(3)から導かれる複雑な振動数方程式を数値計算する必要がある. この詳細については文献 4)-6)を参照されたい.

2.2 MTB 理論に基づいた固有振動数の実用計算法

Table 1 に, 文献 6)にて提案した曲げ固有振動数の近似計算式を示す. Table 1 の計算式 (以降, 実用計算法) を用いると, f_{BE} に新たな項を乗じるだけで MTB 理論に基づいた固有振動数 f_{MT} (添字の MT は MTB 理論の意) を支持条件やモードの次数に応じて簡単に近似計算することができ, 計算の手間が低減される. Fig.1 に, 矩形断面の片持ち梁 ($\nu = 0.2$) について, 細長比 λ ごとに 1 次から 10 次モードまでの f_{MT}/f_{BE} を数値計算と実用計算法により求め, 結果を比較した図を示す. 横軸は細長比 λ である. 図から, λ が小さいほど, また, モードの次数 n が上がるほど, f_{BE} と f_{MT} が乖離することが分かる. また, 実用計算法と数値計算の結果は大きな誤差なく一致していることが見て取れる. ここで, Table 2 に示すような任意に設定した矩形, 円, 中空円, 薄肉円, 薄肉正方形, I 型の断面を有する 6 種類の弾性梁のモデルについて, 1 次, 2 次, 10 次, 20 次, 50 次の固有振動数 f_{MT} を数値計算と実用計算法により求めた結果及び両者の誤差を Table 3 に示す. Table 3 の結果から, いずれの場合も誤差は小さく, 実用計算法が矩形断面以外の様々な断面の梁やかなりの高次モードにおいても有効であることが確認できる.

3. 連続体角柱模型を用いた曲げ振動実験による検証

本章では, 1 つの連続体角柱模型について, 加振実験を実施して固有モードと固有振動数を調べ, 回転慣性やせん断変形が曲げ振動に及ぼす影響を実験的に確認するとともに, 梁理論の適用性について検証する.

Table 1 Practical calculation method for f_{MT} proposed in reference 6)

$f_{MT} = f_{BE} \left\{ 1 + 0.5(1 + \kappa)(e/\lambda)^2 \right\}^{0.5} \quad e = \beta_1 n + \beta_2$	
Clamped - Free	$n \leq 2: \beta_1 = 5.052, \beta_2 = -2.015$ $n \geq 3: \beta_1 = 4.454, \beta_2 = -0.917$
Clamped - Clamped	$n \leq 2: \beta_1 = 4.744, \beta_2 = 4.187$ $n \geq 3: \beta_1 = 4.422, \beta_2 = 4.840$
Clamped - Hinged	$\beta_1 = 4.431, \beta_2 = 2.422$
Hinged - Hinged	$\beta_1 = 4.443, \beta_2 = 0$

f_{MT} : Natural frequency based on the Modified Timoshenko beam theory

f_{BE} : Natural frequency based on the Bernoulli - Euler beam theory

λ : Slenderness ratio $\kappa = 2(1 + \nu)/k'$: Elastic modulus ratio

ν : Poisson's ratio k' : Shear coefficient n : Mode number

Table 2 Beam models with various shapes and parameters for verification of the practical calculation method shown in Table 1

No.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Section	Rectangle 	Circle 	Hollow Circle 	Thin-Walled Circle 	Thin-Walled Square 	I-Section
Boundary Condition	Clamped - Clamped	Clamped - Free	Clamped - Clamped	Hinged - Hinged	Clamped - Hinged	Clamped - Free
B [m]	0.5	—	—	—	0.5	0.2
D [m]	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.5
L [m]	10.0	14.0	16.0	6.0	6.0	4.0
ρ [kg/m ³]	2.4×10^3	2.4×10^3	2.4×10^3	7.8×10^3	7.8×10^3	7.8×10^3
E [MPa]	2.0×10^4	2.0×10^4	2.0×10^4	2.0×10^5	2.0×10^5	2.0×10^5
ν	0.20	0.20	0.20	0.30	0.30	0.30
k'	0.845	0.878	0.532	0.531	0.436	0.378

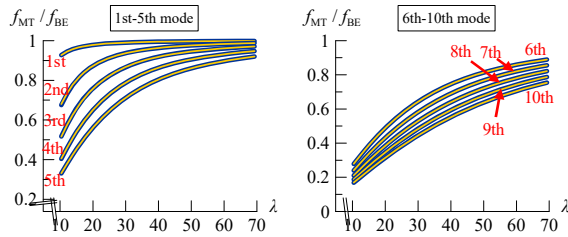


Fig.1

Relationships of λ and f_{MT}/f_{BE} of beams with rectangular cross-section [Numerical analysis vs Practical calculation method shown in Table 1]

3. 1 実験概要

Fig.2 は実験装置の概略図である。Fig.2 のように模型を水平振動台の上に固定し、変位振幅 1.0 mm の正弦波で順次振動数を変えながら基礎加振を行い、レーザ変位計で高さごと（固定部から 80 mm, 160 mm, 240 mm, 340 mm, 440 mm）に定常応答変位を計測した。Fig.3 に模型の写真を示す。模型はウレタンフォームを切り出して作成した断面 $B = 80 \text{ mm} \times D = 160 \text{ mm}$ 、高さ（軸方向の長さ） $H = 480 \text{ mm}$ の連続体角柱である。模型材料は、小ひずみ領域では一様な弾性体として扱え得ることを確認しており^{注1)}、本実験も、模型を一様な弾性体として扱え得るような変形領域内で実施している。なお、回転慣性やせん断変形の影響が現れやすいよう、模型の振動方向は強軸方向とした。模型の強軸方向の細長比 λ は約 10.4 である。また、加振範囲は、振動台の性能上、2 次の共振点が観測できる範囲までとした。

3. 2 実験結果と梁理論の比較

まず、実験と梁理論の振動モードを比較する。Fig.4(a) は、1 次と 2 次の共振点における模型の振動モードと BEB 理論における 1 次と 2 次の固有モードの比較である。Fig.4(a) から、1 次モードは実験と BEB 理論でよく一致しているのに対し、2 次モードでは、固定端に近い箇所において実験のモードが BEB 理論のモードよりも膨らんでおり、回転慣性やせん断変形の影響が現れていることが分かる。Fig.4(b) は、実験の振動モードを MTB 理論の固有モードと比較した図である。Fig.4(b) では、Fig.4(a) の 2 次モード形の乖離が大きく改善されていることが分かる。

Table 3 Comparison of f_{MT} of the beam models in Table 2 [Numerical analysis vs Practical calculation method shown in Table 1]

Mode	Natural Frequency	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1st	f_{MT} [Hz]	Numerical	19.73	2.05	12.29	70.07	63.20
		Formula	19.73	2.05	12.32	70.08	63.53
	Error		-0.03%	-0.01%	0.29%	0.03%	0.53%
2nd	f_{MT} [Hz]	Numerical	60.38	12.67	32.14	229.76	181.51
		Formula	60.41	12.67	32.26	229.74	183.15
	Error		0.04%	-0.02%	0.39%	-0.01%	0.90%
10th	f_{MT} [Hz]	Numerical	648.49	357.64	325.28	1694.18	1508.12
		Formula	648.71	357.43	327.03	1694.15	1509.76
	Error		0.03%	-0.06%	0.54%	0.00%	0.11%
20th	f_{MT} [Hz]	Numerical	1420.79	928.63	730.55	3452.34	3147.52
		Formula	1421.34	927.17	732.06	3452.27	3149.80
	Error		0.04%	-0.16%	0.21%	0.00%	0.07%
50th	f_{MT} [Hz]	Numerical	3660.70	2578.22	1904.93	8677.28	7971.54
		Formula	3666.64	2575.48	1910.34	8677.10	7985.44
	Error		0.16%	-0.11%	0.28%	0.00%	0.17%

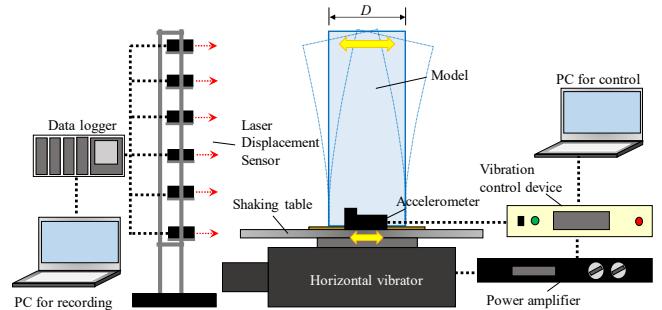


Fig.2 Experimental apparatus

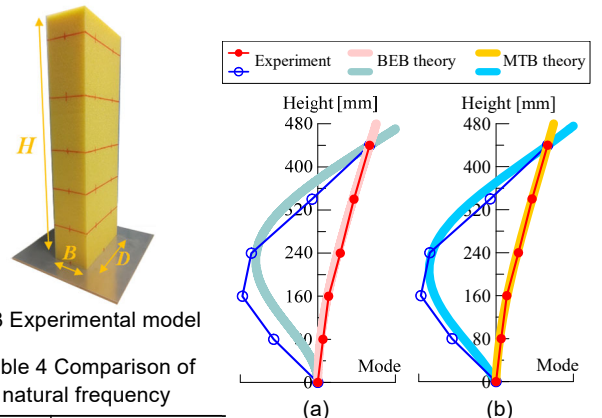


Fig.3 Experimental model

Table 4 Comparison of natural frequency

Unit: Hz	1st mode	2nd mode
Experiment	6.43	29.70
BEB theory	6.99	43.80
MTB theory	6.44	29.21

Fig.4 Comparison of mode shape

次に、Table 4 に、実験と BEB 理論（式(2)）及び MTB 理論（Table 1）から得られた 1 次と 2 次の固有振動数の値の比較を示す。なお、理論計算に用いる物性パラメータは、材料実験結果に基づき、弾性係数 $E = 58 \text{ kPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.32$ とした。結果を見ると、BEB 理論に基づいた計算結果は実験結果よりも大きく、1 次モードではおよそ 1.1 倍程度であるが、2 次モードではおよそ 1.5 倍もの過大評価となっている。一方で、MTB 理論に基づいた計算結果は、1 次モードと 2 次モードのどちらにおいても実験結果に近い値となっていることが確認できる。

以上のように、回転慣性やせん断変形の曲げ振動性状への影響が実験的に確認され、MTB 理論がその評価に有効であることが示された。今後は、更に高次のモードや別の実験でも検証を行うことを課題としたい。

4. 梁の曲げ固有振動数低下に関する画一的な簡易評価法

本章では、Table 1 の実用計算法を発展させ、回転慣性とせん断変形による弾性梁の曲げ固有振動数の低下 f_{MT}/f_{BE} を、更に画一的かつ簡易的に把握・評価できるような手法（評価式）を作成することを試みる。

回転慣性とせん断変形が曲げ固有振動数へ及ぼす影響の度合いは、主に梁の細長比 λ とモードの次数 n が大きく関わっていることから、本検討では λ と n を統合した次のようなパラメータを考えることにする。

$$n_{eq} = n/\lambda \quad (4)$$

λ を 10 から 80 まで変化させた、断面形状が矩形、円、中空円、薄肉円、薄肉正方形、I 型であるそれぞれの梁について、実用計算法により高次モードまでの f_{MT}/f_{BE} を計算し、式(4)の n_{eq} を横軸にとってグラフ化した図を Fig.5 に示す。梁の支持条件は、固定－自由（以降、CF）、固定－固定（以降、CC）、固定－ヒンジ（以降、CH）、ヒンジ－ヒンジ（以降、HH）の 4 種類とし、ポアソン比 ν は 0.2 で統一した。Fig.5 を見ると、どの支持条件や断面形状の場合でも、プロットがほぼ同じように変化している。この結果から、 n_{eq} をパラメータとすることで、回転慣性やせん断変形による梁の曲げ固有振動数の低下の度合いをさらに画一的かつ簡易に評価できるものと考えられる。ただし、支持条件が CC と CH の場合、 λ が 10 や 20 と小さいモデルのプロットが、 n_{eq} が 0 に近い範囲で λ が大きいプロットの変化からやや外れる傾向が見られ、特に CC の場合に顕著である。Fig.6 は、Fig.5 を支持条件ごとにまとめたものであり、断面形状ごとの n_{eq} と f_{MT}/f_{BE} の関係の違いが見て取れる。まず、矩形断面と円断面のプロットがほぼ同じライン上にあり、また、他の断面のプロットよりも上にあることから、検証した断面形状の中で最も回転慣性やせん断変形の影響を受けにくいことが分かる。次に、中空円断面と薄肉円断面もほぼ同じライン上にあり、これらは矩形断面と円断面のプロットよりも下にある。さらに、薄肉正方形断面と I 型断面もほぼ同じライン上にあり、プロットが最も下を通っていることから、最も

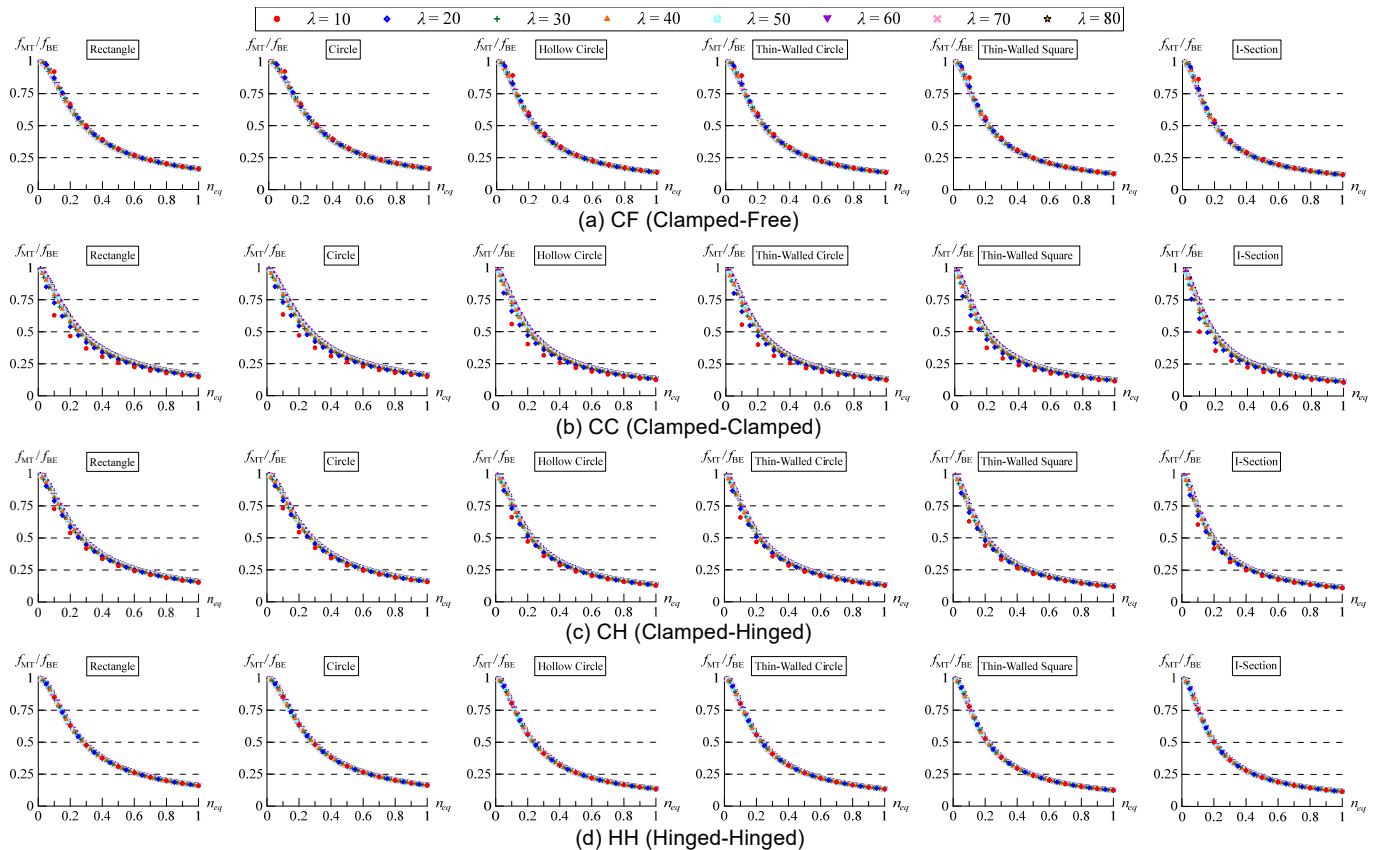


Fig.5 Relationships between n_{eq} and f_{MT}/f_{BE} for each support condition and shape of cross-section

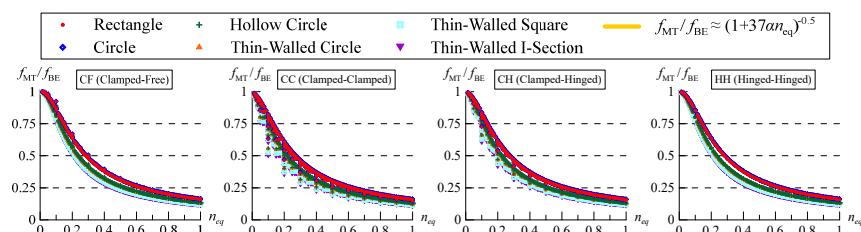


Fig.6 Summary of Fig.5 for each support condition

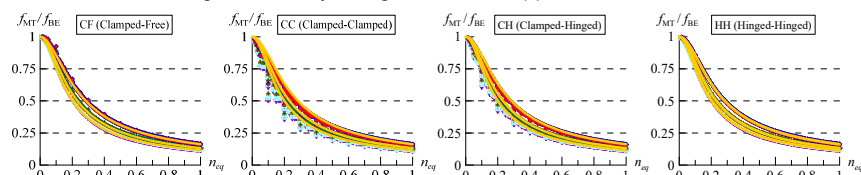


Fig.8 Comparison of Fig.6 and Fig.7

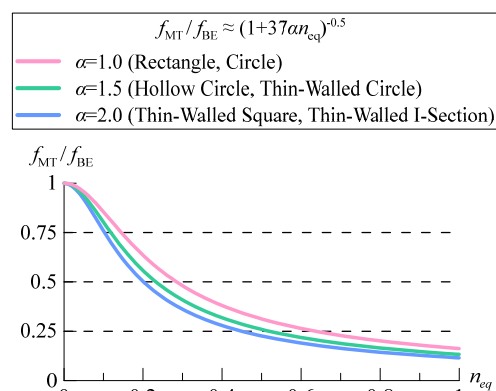


Fig.7

Uniformed and simplified evaluation method for f_{MT}/f_{BE}

回転慣性やせん断変形の影響を受けることが分かる。また、これらの傾向は、支持条件によらず共通である。

Fig.5, Fig.6の結果に基づき, Fig.7に示すような f_{MT}/f_{BE} の簡易評価法を導出した (導出の手順については附録に参照示す)。この簡易評価法は、実用計算法において、支持条件やモードの次数 n に応じて場合分けされた式により計算する必要がある定数 e や、断面形状に応じて計算する必要があるせん断係数 k' が省略されており、また、ポアソン比 ν もパラメータに含まれておらず、 f_{MT}/f_{BE} を断面形状に応じた 3 つの曲線のみから把握できるよう簡易化・画一化したものである。Fig.7 の簡易評価法の曲線と Fig.6 の実用計算法のプロットの比較を Fig.8 に示す。Fig.8 より、CF と HH では、3 本の曲線はそれぞれのプロットの変化をよく再現していることが分かる。また、CC と CH では、 λ が小さい場合のプロットは曲線から外れているものの、それらを除けば簡易評価法は有効であると言える。ただし、提案した簡易評価法は、回転慣性やせん断変形の曲げ固有振動数への影響を画一的かつ簡易的に把握するために用いること意図したものであり、高精度な固有値解析が必要な場面では、実用計算法あるいは数値解析を用いることが推奨される。また、本報の検討範囲外の断面形状や、ポアソン比が極端に小さいあるいは大きい場合などの検討については今後の課題としたい。

5. 結言

本報では、連続体角柱模型を用いた加振実験の一例により、回転慣性やせん断変形が弾性体の曲げ振動に及ぼす影響について実験的に確認し、修正 Timoshenko 梁理論の適用性を検証した。また、文献 6)にて提案した手法を発展させ、回転慣性やせん断変形による弾性梁の曲げ固有振動数の低下を、更に画一的かつ簡易的に把握・評価できる手法を新たに作成し、提案した。

謝辞

本稿は、前田建設工業株式会社と東京工業大学による共同研究の成果の一部をまとめたものであり、本研究の一部は、JST 産学共創プラットフォーム共同研究推進プログラム (JPMJP1723) によるものです。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 谷口修, 田村章義: 新版 工業振動学, コロナ社, pp.387-390, 1977
- 2) S.P. Timoshenko: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 41, pp. 744-746, 1921
- 3) S.P. Timoshenko: On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 43, pp. 125-131, 1922
- 4) Chunfeng Wan, Rong Chen, Songtao Xue and Zhishen Wu: Development of a novel beam model and its dynamic characteristics, Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 22, pp. 402-412, 2015
- 5) Chunfeng Wan, Huachen Jiang, Liyu Xie, Caiqian Yang, Youliang Ding, Hesheng Tang and Songtao Xue: Natural frequency characteristics of the beam with different cross sections considering the shear deformation induced rotary inertia, Applied Sciences, Vol. 10, 5245, 2020
- 6) 山口雄大, 佐藤大樹, 田村哲郎: 回転慣性とせん断変形を考慮した一様弾性梁の曲げ固有振動数の実用的な計算手法, 日本建築学会構造系論文集, 第 87 巻, 第 791 号, pp. 72-82, 2022.1
- 7) G.R. Cowper: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335-340, 1966

注

- 1) 山口雄大, 佐藤大樹, 丸山勇祐, 中川尚大, 長尾悠生, 田村哲郎: 柔軟な発泡材料を用いた空力振動角柱模型の機械的性質及び曲げ振動特性について, 日本建築学会技術報告集, 第 28 巻, 第 69 号, 2022.6 【印刷中論文】

附録

矩形・円, 中空円・薄肉円, 薄肉正方形・薄肉 I 型のグループごとに、以下の式を Fig.6 のプロットにカーブフィットさせ、定数 α' を同定した。

$$f_{MT}/f_{BE} = (1 + \alpha'n_{eq})^{-0.5} \quad (A)$$

カーブフィットの結果を Table A に示す。CF と HH では、各グループの α' の同定値がほぼ同程度であることが分かる。一方で、CC と CH では、CF や HH よりも全体的に α' の同定値が大きくなっている。これは、本論で示したように、CC と CH では細長比 λ が小さい場合のプロットが他のプロットと外れていることが起因している。そこで、本検討では、 λ が小さい場合を無視して全ての支持条件において画一化された f_{MT}/f_{BE} の簡易評価法を作成することとし、Table A の結果を参考に、試行錯誤のうえ Fig.7 を作成・提案した。

Table A Result of identification of α' in Eq.(A)

	CF	CC	CH	HH
Rectangle & Circle	33.008	39.515	38.574	36.799
Hollow Circle & Thin-Walled Circle	51.024	56.289	54.568	51.731
Thin-Walled Square & I-Section	72.292	158.208	110.361	73.508

*1 東京工業大学 環境・社会理工学院 修士課程

*2 東京工業大学 未来産業技術研究所 准教授・博士 (工学)

Graduate Student, School of Environment and Society, Tokyo Institute of Technology*1

Associate Prof., FIRST, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng. *2