

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

題目(和文)	整形な異種基礎の静的ばね簡易評価のための近似理論の提案と数値的検証
Title(English)	
著者(和文)	成田修英
Author(English)	Nobuhide Narita
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12215号, 授与年月日:2022年9月22日, 学位の種別:課程博士, 審査員:田村 修次,竹内 徹,坂田 弘安,堀田 久人,石原 直
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12215号, Conferred date:2022/9/22, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

整形な異種基礎の静的ばね簡易評価のための  
近似理論の提案と数値的検証

指導教員 田村 修次 教授

東京工業大学大学院 環境・社会理工学院  
建築学系 建築学コース 博士後期課程  
18D50036 成田 修英

# 目次

第1章	序論	1
1.1	本研究の背景と目的	2
1.2	基礎のばね評価における既往の知見	5
1.2.1	地盤と構造物の相互作用に関する基礎事項	5
1.2.2	直接基礎のばねの簡易評価に関する先行研究	9
1.2.3	杭基礎のばねの簡易評価に関する先行研究	13
1.3	本研究の位置付け, および本論文の構成	16
	第1章の参考文献	19
第2章	検討対象に対するアプローチおよび検討結果を数値的に検証するための方法	21
2.1	検討対象の詳細とそれに対するアプローチの方法	22
2.1.1	検討対象の詳細	22
2.1.2	異種基礎のばねと上部構造の部分系の関係についての補足	24
2.1.3	検討対象に対するアプローチの方法	25
2.2	地盤 - 構造物間相互作用の理論と精算解法	26
2.2.1	地盤 - 構造物間相互作用評価の基本	26
2.2.2	地盤の剛性行列評価	28
2.2.3	本研究における精算解法の詳細に関する補足	34
2.2.4	本研究における精算解法の全体フロー	37
	第2章の参考文献	38
第3章	フーチング群のばねの簡易評価	40
3.1	概要	41
3.2	フーチング群における部材間相互作用の定量的な定義	42
3.3	簡易評価式	42
3.3.1	影響係数法	42
3.3.2	本研究で提案する新しい簡易評価式	43
3.3.3	簡易評価式導出手順の説明の補足	45
3.4	簡易評価式の性質に関する理論的検討	46
3.4.1	多層地盤における単独のフーチングのばねの性質	46
3.4.2	相互作用係数の境界条件	47
3.4.3	半無限弾性地盤の累積影響係数	48
3.4.4	理論的検討のまとめ	51
3.5	数値的検証	52
3.5.1	正方形配置のフーチング群における簡易評価式と精算解法の比較	52
3.5.2	長方形配置のフーチング群における簡易評価式と精算解法の比較	60

3.5.3	単独フーチングのばねに対する等価せん断弾性係数についての仮定の検証	63
3.5.4	数値的検証のまとめ	63
第 3 章	参考文献	64
第 4 章	群杭の荷重中心	65
4.1	概要	66
4.2	均一な梁ばねモデルに従う無限長単杭の水平地盤反力中心深度	68
4.3	単杭に集約した群杭の $z_c$ と $\beta_h$	69
4.3.1	群杭が単杭の梁ばねモデルに集約可能であることの数値的検証	70
4.3.2	$\beta_e$ の簡易評価に関する検討	72
第 4 章	参考文献	75
第 5 章	フーチング群と群杭の間の相互作用の簡易評価	76
5.1	概要	77
5.2	簡易評価式の導出	78
5.2.1	検討の対象	78
5.2.2	弾性エネルギーに着目した影響係数の表現	79
5.2.3	群杭とフーチング群が地盤に与える荷重の性質	81
5.2.4	群杭のフーチング群に対する影響係数 $g_{fp}$ の簡易評価式	82
5.2.5	簡易評価式についてのまとめ	84
5.3	数値的検証	86
5.3.1	検証の対象とする群杭とフーチング群	86
5.3.2	群杭とフーチング群の間の相互作用の強さ	87
5.3.3	精算解法による $g_{fp}$ 簡易評価式の精度検証	88
5.3.4	数値的検証のまとめ	97
第 5 章	参考文献	98
第 6 章	結論	99
6.1	本研究の成果	100
6.1.1	概要	100
6.1.2	異種基礎のばね評価の実用に資する成果	100
6.1.3	基礎のばねおよび地盤と構造物の相互作用に関する今後の研究に資する成果	101
6.2	今後の課題	102
謝辞		104
付録	Chang の解と精算解の不整合について	105

# 第1章 序論

# 第1章 序論

## 1.1 本研究の背景と目的

支持層に傾斜のある地盤条件や、低層部と高層部があり長期軸力に偏りのある荷重条件においては、直接基礎と杭基礎を併用した形式の異種基礎がしばしば用いられる<sup>1.1)~1.3)</sup>。図 1.1 は、日本建築学会基礎構造設計指針 (2019)<sup>1.4)</sup> による異種基礎の分類である。同図のような条件下では、異種基礎の採用が合理的だと考えられる。未開発の傾斜地が多く平野部の都市における人口過密が未だ問題視されている<sup>1.5)</sup> 日本国内では、同図タイプ A の異種基礎の利用促進が特に重要である。

直接基礎と杭基礎は、一般に基礎部材が接触する地層の違いや接触面積の違い、また部材そのものの力学特性の違いから、長期軸力や地震時水平力などの荷重に対する特性（剛性、耐力）が大きく異なる。そのため、直接基礎と杭基礎を併用した異種基礎は、長期軸力による不同沈下、地震時水平力による過大なねじれ応答（に起因する被害）が懸念され、近年まで避けるべき基礎形式とされてきた<sup>1.4)</sup>。しかし一方で、日本国内ではその地形的な特徴から、異種基礎は合理的な基礎形式の一つと考えられるため、異種基礎を一律排除することは現実的では無い。現実に実施例が存在する<sup>1.3)</sup> こと、またある程度実情に沿った高度な変形解析が可能となってきたことから、日本建築学会の建築基礎構造設計指針でも、2001 年の改訂版から併用基礎の章に異種基礎の解説が記載されるようになり、2019 年の改訂では独立して異種基礎の章が設けられるまでになった。傾斜地利用のニーズがあり、技術的なハードルも下げられつつあることから、異種基礎の利用（特に図 1.1 タイプ A のもの）は今後拡大していくものと考えられる。

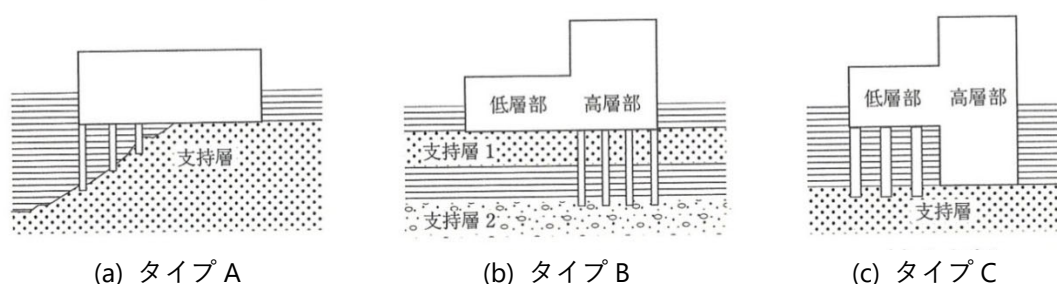


図 1.1 直接基礎と杭基礎の組み合わせによる異種基礎の分類（日本建築学会 (2019)<sup>1.4)</sup>）

## 第1章 序論

異種基礎において懸念される不同沈下やねじれ応答の問題に対応した設計をするためには、直接基礎部と杭基礎部それぞれの荷重変位関係を正確に把握する必要がある。以下、各基礎部に働く単位荷重あたりの変位を「柔性」、柔性の逆数（単位変位あたりの反力）を「ばね」と呼ぶ。異種基礎のばねは、3次元有限要素法やサブストラクチャ法<sup>例えば1.6)</sup>（以下、これらの手法を総称して「精算解法」と呼ぶ）により評価できるが、精算解法は数値解析モデル作成の手間（境界条件の設定、離散化の設定、種々の物性に関する膨大なパラメータ入力など）が大きく、また複雑なモデルに基づく数値計算に不可避な問題として入力パラメータと計算結果の因果関係が把握し辛いという欠点がある。これらの欠点は、特に設計初期の検討段階において大きな障害になると考えられる。初期段階の検討では、杭径や杭長の変更に加え、杭基礎部と直接基礎部の境界付近の仕様変更（地盤改良で済ませるか、ラップルコンクリートの打設や杭長数  $m$  以下の極端に短い杭の打設を行うかなどの仕様変更）の検討もあり、スパン割の異なる基礎の仕様を同時並行で検討することも有る。このような場合、全ての検討を精算解法で行っているのは、モデルの変更の度に大きな手間が発生することに加え、モデルの入力パラメータと結果との因果関係が分かり辛いということもあり、仕様変更の方針を立てにくい。簡易な手順で計算でき、入出力の因果関係の把握が容易なばねの評価方法が必要である。

「異種基礎の検討は、経験を積んだ地盤・基礎の専門家が行うので、複雑な精算解法を用いてもある程度の結果の見通しは立つはずで、簡易な代わりに不正確になるような評価法は不要である」とする意見もあるかも知れないが、この意見には次の2つの理由により反論できる。まず、実際の計算を実施するのが専門家であっても、基礎の仕様変更の方針を立てるのは設計者であり、専門家の意見（見通し）が受け入れられない場合がある。基礎や地盤の専門的な知識の無い設計者にも容易に理解できる簡易な理論があれば、専門家との意見交換を仲立ちするコミュニケーション・ツールとして、有用だと考えられる。また、精算解法による異種基礎の計算モデルは非常に複雑なので、モデルに不備が無いことをチェックする作業は専門家であっても非常に手間がかかる。モデルの検証としては、例えば理論的な検証の可能な簡単なモデルで、かつ検討対象に極力近い条件のモデルをいくつか作って計算し、傾向を把握するような作業を実施する。経験的にある程度結果の見通しが立っていても、それだけでは心許ない。このときチェック・ツールとして利用できる簡易な方法があれば、作業の手間を大きく軽減できる。以上の理由から、簡易評価法の検討が必要だと考えている。

本研究では、実用的な異種基礎のばねの簡易評価法を確立するための基礎として、弾性半無限弾性地盤に規則的に部材が配置された異種基礎の静的なばねの評価法について検討する。実用的には、より現実的な地盤条件下での不規則な部材配置の異種基礎のばねを動的効果も含めて評価する必要があると考えられるが、それは今後の課題とする。異種基礎のばねについては、「半無限弾性地盤に規則的に部材が配置された異種基礎に静的荷重が作用する」といった非常に単純な条件においてさえも簡易に評価する方法が確立されていない。現実的な条件の異種基礎のばねについて考えるための基礎として、理想化された単純な条件の

## 第1章 序論

異種基礎のばねについて検討し、その評価法を整理することは、工学的にも大きな価値を持つものとする。

## 1.2 基礎のばね評価における既往の知見

異種基礎のばねを直接簡易に評価する先行研究は見当たらないが、直接基礎のばねと杭基礎のばねについては、多くの先行研究が存在する。本研究に関連する先行研究とそれを理解するための予備知識について、以下に説明する。

### 1.2.1 地盤と構造物の相互作用に関する基礎事項

本研究で用いる地盤と構造物の相互作用の理論については、第2章で詳しく説明する。しかし、基礎のばねに関する先行研究とそれに対する本研究の位置付けを理解するためには、ある程度の予備知識が必要である。

#### (1) 基礎のばね

「基礎のばね」は、「評価対象となる基礎に強制的に単位変位を生じさせたときに生じる反力」として定義される。基礎のばねは、基礎と地盤の接触面積が大きくなるほど大きくなるが、接触面積に正比例しない（例えば、構造部材の断面積が大きくなることと単純に対応しない）ことに注意が必要である。このことを説明する模式図を図1.2に示す。基礎面積が増えると、基礎底面の応力はそれに反比例して減る。このメカニズムは、ばねが硬くなる方向に働く。一方、基礎面積が増えれば、より広い範囲の地盤が荷重に抵抗するため、同一の応力レベルに対して発生する変位は大きくなる。このメカニズムは、ばねが柔らかくなる方向に働く。基礎のばねと接触面積との関係には、これら2つのメカニズムが同時に作用するが、前者のメカニズムの方が優位であるため、基礎と地盤の接触面積が大きくなるほど基礎のばねは硬くなる。ただし後者のメカニズムも同時に働くため、接触面積と基礎のばねは比例関係には無い。

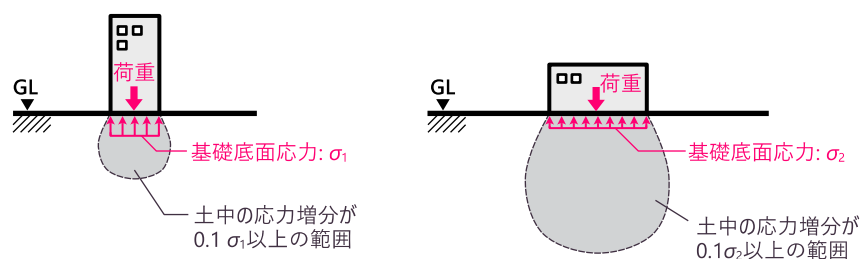


図 1.2 基礎底面が広がることによる応力の低下と抵抗範囲の拡大の模式図

基礎のばねを求める問題は、地盤と構造物の相互作用に関する問題としては最も単純な部類の問題ではあるが、それでも簡単では無い。上記の2つのメカニズムのバランスを正

確に評価しなければ正しい値が得られないため、1.2.2 で示すような単純な条件を除いては閉じた形の解（微分・積分や無限級数などを含まない、容易に数値計算できる単一の数式で表される解）が得られていない。一般的な条件における基礎のばねは、地盤を3次元弾性連続体とみなし、その点載荷変位解（一般に「グリーン関数」と呼ばれるもので、本論文でも以下「グリーン関数<sup>注1</sup>」と呼ぶ）と基礎と地盤の接触面上の応力との積を接触面全体で積分した結果の逆数として表される。地盤のグリーン関数を $g(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s)$ とし（ここに、 $\mathbf{r}_o$ はグリーン関数における変位の評価点の位置ベクトル、 $\mathbf{r}_s$ はグリーン関数における載荷点の位置ベクトルを表す）、接触面上の応力を $\sigma(\mathbf{r}_c)$ とすると（ここに、 $\mathbf{r}_c$ は接触面上の点の位置ベクトルを表す）、基礎のばね $s$ は次のように表される。

$$c(\mathbf{r}_o) = \frac{\iint_A \sigma(\mathbf{r}_c) g(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_c) d\mathbf{r}_c}{\iint_A \sigma(\mathbf{r}_c) d\mathbf{r}_c} \quad (1.1)$$

$$s = \frac{1}{c(\mathbf{r}_o)} \quad (1.2)$$

ここに、 $c(\mathbf{r}_o)$ は基礎の柔性（単位荷重あたりの変位）、 $A$ は接触面に対応する積分領域を表す。

(1.1), (1.2)式において、 $\mathbf{r}_o$ は基礎のばねを評価する際の変位の評価点であり、通常は直接基礎の中心位置や杭基礎の杭頭中心位置を指す。この式によってばねを求めるためには、接触面上の応力分布 $\sigma(\mathbf{r}_c)$ が定まっている必要があるが、これは簡易には等分布や基礎部材が剛体であることを仮定した分布を用い、より一般的な場合には2章で説明するような数値的な方法により決定する。

## (2) 影響係数とフーチング群・群杭のばね

基礎構造の分野における「影響係数」は、主に複数の杭から成るグループ（以下、「群杭」と呼ぶ）における杭同士の相互作用を評価するために用いられている<sup>1.21), 1.22)</sup>が、地盤を介した部材間相互作用一般の評価に用いることのできる概念である。本研究では、フーチング同士の相互作用や異種基礎間の相互作用の評価にも影響係数の考え方を用いる。

基礎構造の分野における影響係数は、変位評価点間の影響の大きさを表す。これは、理論的には（数式上は）(1.1)式で表される基礎の柔性の拡張として定義される。例えば、 $N$ 本の杭があり $i$ 番目の杭に対応する $\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_c, A$ をそれぞれ $\mathbf{r}_{oi}, \mathbf{r}_{ci}, A_i$ と書くことにすると、杭 $j$ の杭 $i$ に対する影響を表す影響係数 $g_{ij}$ は次の通りに表される。

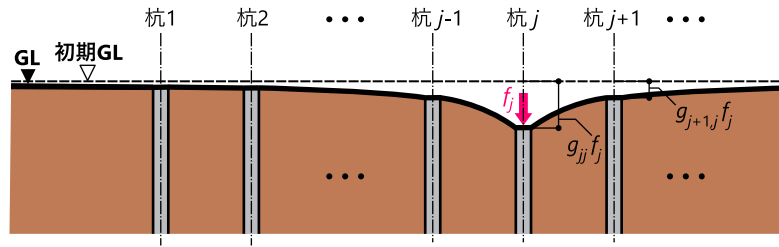
---

注<sup>1</sup> グリーン関数という用語は、本研究に近い分野では、地震学や地盤と構造物の動的相互作用の分野で使われているもので、断り無くグリーン関数といった場合には、通常は動的な解を指す。静的な解のことに限定したい場合には、「静的グリーン関数」と呼ぶのが一般的であるが、本論文では「静的グリーン関数」しか扱わないので、「静的」を省略して単に「グリーン関数」と呼ぶ。

$$g_{ij} = \frac{\iint_{A_j} \sigma(\mathbf{r}_{c_j}) g(\mathbf{r}_{oi}; \mathbf{r}_{c_j}) d\mathbf{r}_{c_j}}{\iint_{A_j} \sigma(\mathbf{r}_{c_j}) d\mathbf{r}_{c_j}} \quad (1.3)$$

(1.1)式と(1.3)式の比較から明らかなように、 $g_{ii}$ は杭*i*の柔性に対応する。ここで杭*j*杭頭に荷重 $f_j$ が作用している状況を考えると、影響係数 $g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{Nj}$ は、図 1.3 にあるような、杭*j*への荷重によって生じる各杭の変位を表す。より一般的な状況として、各杭杭頭に働く荷重を $f_1, f_2, \dots, f_N$ とし、それに対する各杭の変位を $u_1, u_2, \dots, u_N$ とした場合を考えると、この状況における荷重変位関係は、影響係数を用いて次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$



ただし、杭*j*に関する力の釣合いより  $f_j = \int_{A_j} \sigma(\mathbf{r}_{c_j}) d\mathbf{r}_{c_j}$

図 1.3 群杭の影響係数の模式図

(1.4)式の関係は、群杭だけでなく複数のフーチングからなるグループ（以下、「フーチング群」と呼ぶ）や異種基礎を含む*N*個の構成要素を持つ基礎一般に成り立つ。このように、影響係数を用いて*N*個の構成要素を持つ基礎一般の荷重変位関係を表すことができる。

(1.4)式右辺の行列は基礎の柔性を表す行列であり、この行列の定義より、その逆行列が基礎のばねを表す行列となる。

$$\mathbf{G} := \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

とすると、基礎のばねを表す行列は次のように表せる。

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N1} & s_{N2} & \cdots & s_{NN} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \quad (1.6)$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

このばね行列は、その定義より、対角成分 $s_{ii}$ が基礎の構成要素（ここではフーチングもしく

## 第1章 序論

は杭)単体のばねを表し、非対角成分 $s_{ij}$  ( $i \neq j$ )が要素 $j$ の要素 $i$ に対する相互作用(相互作用によるばねの増減)を表す。基礎全体のばね( $S$ とする)は、基礎の全要素に単位強制変位を与えたときの反力の総和であるので、(1.7)式より、次のように表される。

$$S = \{1, 1, \dots, 1\} \mathbf{S} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N s_{ij} \quad (1.8)$$

一方、要素間の相互作用が無い場合の基礎のばね( $S'$ とする)を考えると、これは要素単独のばねの総和となるので、次式の通りである。

$$S' = \sum_{i=1}^N s_{ii} \quad (1.9)$$

以上より、複数の構成要素を持つ基礎のばねに構成要素間の相互作用が与える影響の指標として、次の $\xi$ が定義できる。

$$\xi := \frac{S}{S'} \quad (1.10)$$

$\xi$ は群杭のばねについて研究が進んでおり、群杭に関する $\xi$ は群杭係数と呼ばれている。フーチング群の $\xi$ については、以下「相互作用係数」と呼ぶ。基礎のばねに関する相互作用は常に変位を増大させる方向に働くため $\xi < 1$ であり、また常に $S > 0$ かつ $S' > 0$ なので $\xi > 0$ である。つまり、常に $0 < \xi < 1$ であり、 $\xi$ が0に近いほど相互作用が強く、1に近いほど相互作用が弱いということが言える。

なお、一つのフーチングや杭に一对一で影響係数を対応させるだけでなく、一つの基礎部材を複数の要素に分割して各要素ごとに影響係数を対応させることも可能である。このことは、基礎部材と地盤の接触面上の応力分布が未知である場合に影響係数を数値的に計算する方法に応用できる。これについては2章で詳しく述べる。

### (3) 単独の杭(以下、「単杭」と呼ぶ)と地盤の相互作用の簡易評価モデル

杭は、べた基礎、フーチングと異なり地中での部材の変形が顕著なため、地盤との接触面での応力分布が複雑になり、影響係数やばねに関する解析的な解(基本となる支配方程式より理論的に定まる数式で表された解)を求めるのが特に難しい。そこで実用的な計算法として、「ある点の地盤反力は、その位置の変位に比例する」として、地盤をばねに置き換え杭の周面および先端に付加したモデル(以下、「梁ばねモデル」と呼ぶ)が良く用いられる。一般に、ある点における地盤反力は、その点の変位のみ依存せず、その点の周囲の地盤の変位と応力の影響を受けるため、梁ばねモデルは、厳密には正しくない。しかし以下2つの理由により、実用的簡易計算法としては有用であるため、広く用いられている<sup>1.16), 1.17)</sup>。①地盤の反力をばねで表現できるものと仮定すると杭と地盤の相互作用の計算が非常に簡便になること、また②適切なばね値を設定すれば、ばねで地盤反力を表現したとしても地中

の杭の挙動を概ね再現できることが分かっていること<sup>1.19)~1.23)</sup>、の2つである。

梁ばねモデルにおける杭の断面力と地盤反力の関係は、杭の変位に関する以下の微分方程式で表される。

$$\text{鉛直方向：} \quad -E_p A \frac{d^2 u_v(z)}{dz^2} + s_v B u_v(z) = 0 \quad (1.11)$$

$$\text{水平方向：} \quad E_p I \frac{d^4 u_h(z)}{dz^4} + s_h B u_h(z) = 0 \quad (1.12)$$

ここに、 $u_v(z)$ は深度 $z$ における鉛直方向の杭の変位、 $u_h(z)$ は深度 $z$ における水平方向の杭の変位、 $E_p$ は杭のヤング係数、 $A$ は杭の断面積、 $B$ は杭径、 $I$ は杭の断面2次モーメント、 $s_v$ は杭の鉛直方向の地盤反力係数、 $s_h$ は杭の水平方向の地盤反力係数を表す（地盤反力係数とは、地下構造物（主に杭）と地盤の接触面、単位面積当たりのばね定数である）。

## 1.2.2 直接基礎のばねの簡易評価に関する先行研究

直接基礎の研究は、主に地表面上の単独のべた基礎を対象に行われている。複数のフーチングから成る直接基礎の計算法も良く知られたものが存在するが、フーチング数の多い場合や、フーチング配置の複雑な場合は、かなり煩雑な重ね合わせ計算を要するため、必ずしも「簡易」な評価法とは言えない。

### (1) 半無限弾性地盤上の単独のフーチングのばね

単独のフーチングのばねは、鉛直方向については Boussinesq の解（半無限弾性地盤に対する地表面上の点集中鉛直载荷の解）、水平方向については Cerruti の解（半無限弾性地盤に対する地表面上の点集中水平载荷の解）をグリーン関数として計算する（(1.1), (1.2)式）方法が基本である。基礎のばねを求める積分（(1.1)式）は、基礎底面の応力分布が一様（ $\sigma(\mathbf{r}_c)$ が一定）である場合は比較的容易に実行できるが、基礎自体の剛性を考慮すれば、基礎底面の応力分布は一様にはならない。一般に、べた基礎の剛性は地盤よりも遥かに高く、地盤に対して剛体的に挙動するので、べた基礎のばねの実用的な解として剛板直下の応力分布を仮定した種々の解が用いられている。表 1.1 にこれらの解を示す。矩形剛基礎のばねについては、半無限弾性地盤が対象であっても解析的な閉じた形の解は求まらないので、数値的な近似解を求め表 1.1 と表 1.2 のように、基本形の式と補正係数の数値表をセットで用いるのが通例である。矩形剛基礎のばねは、数値解の求め方によって、文献ごとに表記（と数値表の数値）にばらつきが見られるが、ここでは日本建築学会（1996）<sup>1.9)</sup>による表記と数値表を示している（例えば、鉛直のばねは Whitman and Richart (1967)<sup>1.10)</sup>、水平のばねは Barkan (1962)<sup>1.11)</sup>にも示されている）。

表 1.1 半無限弾性地盤上の剛基礎のばね

	円形剛基礎 (円形剛板)	矩形剛基礎 (矩形剛板) <small>例えば 1.9)</small>
鉛直	$\frac{4\mu b}{1-\nu}$ <small>例えば 1.7)</small>	$1.15\alpha_v \frac{4\mu b}{1-\nu}$
水平	Muki (1961) <sup>1.8)</sup> : $\frac{8\mu b}{2-\nu}$	$1.15\alpha_h \frac{8\mu b}{2-\nu}$

ここに、 $\mu$ は地盤のせん断弾性係数、 $b$ は基礎の半径 (円形の場合) もしくは矩形剛基礎の一方の辺の長さ/2 (図 1.4 参照)、 $\nu$ は地盤のポアソン比、 $\alpha_v, \alpha_h$ はそれぞれ鉛直、水平方向の矩形剛基礎のばねの補正係数を表す。

表 1.2 矩形剛基礎のばねの補正係数 (日本建築学会 (1996) <sup>1.9)</sup>)

	$c/b$ $\nu$	$\nu$						
		0.50	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2.00
$\alpha_v$	-	1.025	1.004	1	1.003	1.009	1.016	1.025
$\alpha_h$	0.20	1.009	0.997	1	1.008	1.019	1.030	1.042
	0.25	1.004	0.996	1	1.009	1.021	1.034	1.047
	0.30	1.000	0.993	1	1.011	1.024	1.038	1.052
	0.35	0.995	0.991	1	1.013	1.028	1.043	1.058
	0.40	0.989	0.989	1	1.014	1.031	1.047	1.064
	0.45	0.984	0.987	1	1.016	1.035	1.053	1.071
	0.50	0.978	0.984	1	1.018	1.039	1.058	1.078

ここに、 $c$ は矩形剛基礎の $b$ に対応しない方の辺の長さ/2 (図 1.4 参照)

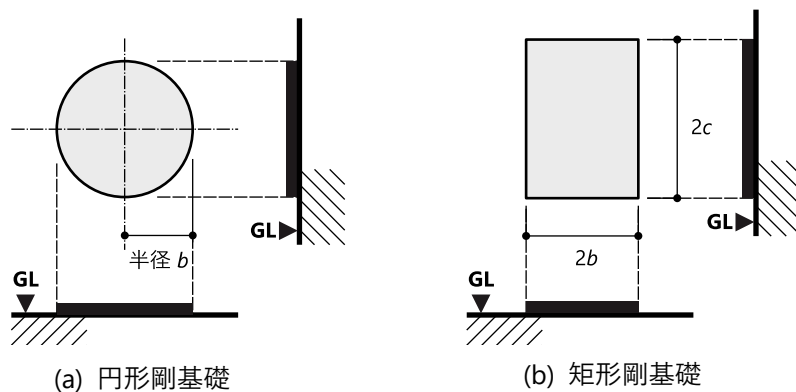


図 1.4 基礎寸法の記号の説明

なお「計算は簡単であるが非現実的」として初めに検討対象から除外した $\sigma(\mathbf{r}_c)$ 一定条件のばねも、表 1.1 の定数倍となるだけで、「ばね=定数×地盤のせん断弾性係数×基礎幅」の関係は剛基礎条件と変わらないことが知られている<sup>1.9)</sup>。ばねが(荷重)/(長さ)の次元を持ち、地盤剛性が(荷重)/(長さの2乗)の次元を持つので、フーチングのような単純な基礎要素のばねが「ばね=(無次元)定数×地盤のせん断弾性係数×基礎幅」の関係を満たすことは、次元解析の観点からも自然である。この事実は第3章での検討にも用いる。

## (2) 多層地盤の補正

表 1.1 のばねは、半無限弾性地盤に対するばねなので、多層もしくは不整形な地下構造を持つ実地盤には適用できない。多層の場合の簡易な計算法としては、Steinbrenner の多層近似<sup>1.12)</sup>が良く用いられる<sup>1.13), 1.14)</sup>。Steinbrenner の多層近似とは、半無限弾性地盤での変位解を用いて多層地盤地表面の柔性を計算する方法で、地層の数を $n$ とすると次式のように表される。

$$\frac{u_m(0)}{P} = \frac{I(z_n)}{\mu_n b} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{I(z_i) - I(z_{i+1})}{\mu_i b} \quad (1.13)$$

$$I(z) := \frac{\mu u_0(z)}{P} \quad (1.14)$$

ここに、 $u_m(z)$ は Steinbrenner の多層近似に基づく多層地盤の深度 $z$ における変位、 $P$ は基礎に働く荷重、 $z_i$ は $i$ 番目の地層の上端深度、 $\mu_i$ は $i$ 番目の地層のせん断弾性係数、 $\mu$ は半無限弾性地盤のせん断弾性係数、 $u_0(z)$ は半無限弾性地盤の深度 $z$ に変位を表し、また $A := B$ は記号 $A$ を右辺の式 $B$ で表すことを意味する。

上記の正規化された変位 $I(z)$ は、円形剛基礎については、Muki(1961)<sup>1.8)</sup>より以下のようになる。以下において、円形剛基礎の $I(z)$ を鉛直方向については $I_{cv}(z)$ 、水平方向については $I_{ch}(z)$ と書き、同様に矩形剛基礎の $I(z)$ を鉛直方向について $I_{rv}(z)$ 、水平方向について $I_{rh}(z)$ と書く。

$$I_{cv}(z) = \frac{(1-\nu)}{4\pi} \left( \pi - 2 \tan^{-1}(\zeta) + \frac{\zeta}{(\zeta^2 + 1)} \right) \quad (1.15)$$

$$I_{ch}(z) = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left( \frac{1-\zeta^2}{2\zeta} \right) - \frac{2\zeta}{1+\zeta^2} \right) + (3-2\nu) \tan^{-1} \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right) \quad (1.16)^{1.15)}$$

ここに、 $\zeta := z/b$ 。

(1.15), (1.16)式を(1.13)式に代入すれば、多層地盤における円形剛基礎の柔性が求まり、その逆数をとれば基礎のばねが求まる。矩形剛基礎の $I(z)$ については、表 1.1 の円形剛基礎と矩形剛基礎の比較より、以下のようにすれば良い。

$$I_{rx}(z) = \frac{1}{1.15\alpha_x} I_{cx}(z) \quad (x = v, h) \quad (1.17)$$

## 第1章 序論

以上、単独のフーチングのばねについては、簡易計算法が整備されている。しかし、複数のフーチング群では、地盤を介してフーチング同士が相互作用を及ぼし合うため、フーチング群全体としてのばねは、フーチング群に含まれる各フーチング単体としてのばねの単純和にはならない。このフーチング群のばねの評価については、簡易法が整備されていない。それについては、本論文の3章で検討する。

1.2.3 杭基礎のばねの簡易評価に関する先行研究

(1) 単杭のばね

杭頭単位荷重載荷を境界条件として梁ばねモデルの微分方程式 ((1.11), (1.12)式) の変位解を求め、杭頭変位を求めたものが、梁ばねモデルにおける杭のばねとなる。(1.11), (1.12)式の変位解は、数値的に求めるのもそれほど難しくないが、半無限弾性地盤内の均一な杭 ( $EA, EI, k_v, k_h$ が深度に応じて変化しない条件) においては、以下の通りに閉じた形の解析解が得られており、広く用いられている<sup>1.16), 1.17)</sup>。

表 1.3 半無限弾性地盤内の均一な杭の杭頭ばね

鉛直 (有限長杭, 杭長 $l$ )	$E_p A \beta_v \frac{E_p A \beta_v (1 - e^{-2\beta_v l}) + K_b (1 + e^{-2\beta_v l})}{E_p A \beta_v (1 + e^{-2\beta_v l}) + K_b (1 - e^{-2\beta_v l})}$	
水平 <sup>1.18)</sup> (半無限杭)	杭頭回転自由条件: $2E_p I \beta_h^3$	杭頭回転拘束条件: $4E_p I \beta_h^3$

ここに、 $K_b$ は杭先端の地盤ばねであり円形剛基礎のばねの式 (表 1.1) などにより定める。 $\beta_v, \beta_h$ は梁ばねモデルの特性値であり、次式で表される。

$$\beta_v := \sqrt{\frac{s_v B}{E_p A}} \quad (1.18)$$

$$\beta_h := \sqrt[4]{\frac{s_h B}{4E_p I}} \quad (1.19)$$

また、鉛直地盤反力係数 $s_v$ はRandolfの式<sup>1.19)</sup>により、水平地盤反力係数 $s_{hi}$  ( $i$ 番目の地層の地盤反力係数を $s_{hi}$ とする)はFrancisの式<sup>1.20)</sup>により以下の通り求めることができる。

$$s_v B = \frac{2\pi\mu_e}{\log\left(\frac{2r_m}{B}\right)} \quad (1.20)$$

$$\mu_e := \frac{1}{l} \sum \mu_i H_i \quad (1.21)$$

$$r_m := 2.5l(1 - \nu_e) \quad (1.22)$$

$$\nu_e := \frac{1}{l} \sum \nu_i H_i \quad (1.23)$$

$$s_{hi} B = 1.3 \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \left( \frac{E_i B^4}{E_p I} \right)^{\frac{1}{12}} \quad (1.24)$$

ここに、 $\mu_e$ は杭周面における平均的な地盤のせん断弾性係数、 $r_m$ は杭が地盤に及ぼす影響の半径、 $\mu_i$ は $i$ 番目の地層のせん断弾性係数、 $H_i$ は $i$ 番目の地層の層厚、 $\nu_e$ は杭周面における平

均的な杭のポアソン比,  $\nu_i$ は*i*番目の地層のポアソン比,  $E_i$ は*i*番目の地層の地盤の変形係数 ( $= 2(1 + \nu_i)\mu_i$ )。

(2) 群杭のばね

群杭係数の定義 ((1.10)式) より, 単杭のばねの和に群杭係数をかけた結果が群杭のばねに対応する。単杭のばねの簡易評価法は前述の通り整備されているので, 「群杭のばねの簡易評価」の問題は, 「群杭係数の簡易評価」の問題に帰着される。群杭係数の簡易評価については多くの先行研究(例えば 1.22), 1.24)~1.28) があるが, ここでは現時点 (2021 年) の標準的な方法として, 日本建築学会の「建物と地盤の動的相互作用を考慮した応答解析と耐震設計」(2006) 1.29) にも記載されている護らの方法 1.27) を紹介する。以下が護らの方法による群杭係数である。

$$\xi_x = 0.4 \left(\frac{\Delta r}{B}\right)^{0.3} \left(\frac{n_x}{2}\right)^{e_1} \left(\frac{n_y}{2}\right)^{e_2} \quad (1.25)$$

$$\xi_y = 0.4 \left(\frac{\Delta r}{B}\right)^{0.3} \left(\frac{n_x}{2}\right)^{e_2} \left(\frac{n_y}{2}\right)^{e_1} \quad (1.26)$$

$$e_1 := -0.74 \left(\frac{\Delta r}{B}\right)^{-0.43} \quad (1.27)$$

$$e_2 := -0.59 \left(\frac{\Delta r}{B}\right)^{-0.54} \quad (1.28)$$

$$\xi_v = N^{-(0.45+0.005(l/B)-0.5 \log(\Delta r/B))} \quad (1.29)$$

ここに,  $\xi_x$ は群杭の長辺方向載荷に対する群杭係数,  $\xi_y$ は群杭の短辺方向載荷に対する群杭係数,  $\xi_v$ は鉛直方向載荷に対する群杭係数,  $\Delta r$ は杭間隔,  $n_x$ は長辺方向の杭本数,  $n_y$ は短辺方向の杭本数 (杭総数  $N = n_x \times n_y$ である) を表す。

上記の護らの方法は, 精算解法によるパラメータスタディ結果の回帰分析に基づいている。こうした方法は, 当然パラメータスタディで検証した範囲から逸脱した条件下での適用性は担保されない (例えば, 上記の護らの方法の式では,  $\Delta r$ が極端に大きい場合には群杭係数が1を超える計算になってしまうが, これは物理的に有り得ない)。現在知られている群杭係数の簡易評価法(例えば 1.22), 1.24)~1.28) は, 簡易な方法ほど精算解法による経験則に依存する部分が大きく, 比較的経験則的な側面が弱く理論的な側面が強い手法 (例えば, Poulos らの方法 1.24) や Dobry らの方法 1.25) など) では計算が煩雑になる傾向がある。したがって, 群杭係数の簡易評価の問題も, 完全に解決しているわけでは無い。しかしながら, 未解決問題は残されているとしても, 簡易評価法が既に存在するという点において, 群杭のばねの研究は, フーチング群のばねの研究に先行している。

本研究では, 群杭の簡易評価法については扱わない。異種基礎のばね評価への応用については, 既往の知見が活用できるものとし, 未解決の問題については今後の課題とする。ただ

## 第1章 序論

し、群杭とフーチング群の間の相互作用に関して、一部、群杭に関する既往の知見だけでは対応しきれない部分があるので、その点について4章で説明する。

## 第1章 序論

### 1.3 本研究の位置付け, および本論文の構成

図 1.5 に基礎のばねの簡易評価に関する先行研究と未解決の問題に対する本研究の位置付けを示す。本研究では, 弾性半無限弾性地盤に規則的に部材が配置された異種基礎 (図 1.5 において「整形」とされている異種基礎) のばねの簡易評価法について検討する。また, その際必要となるフーチング群のばねの簡易評価法について検討する。

図 1.5 における「整形」, 「不整形」の定義は, 図 1.6~図 1.8 の通りである。整形なフーチング群と群杭は, 部材の寸法と部材の間隔が全て均一かつ地盤への埋め込み部分の無い部材のグループであり, 整形な異種基礎は整形なフーチング群と整形な群杭のペアである。不整形なフーチング群, 群杭, 異種基礎とは, 整形の条件に該当しない全てのフーチング群, 群杭, 異種基礎を指す。また, 不整形地盤とは半無限地盤 (図 1.8(a)) にも水平成層地盤 (同図(b)) にも該当しない地盤を指す。不整形地盤は, 直接基礎や杭基礎を適用条件としてはイレギュラーではあるものの, 異種基礎の適用条件としてはむしろ標準的 (図 1.1 参照) であり, 実用的な異種基礎のばね評価法の確立のためには, 地盤の不整形性の評価は必須だと考えられる。しかし, 現状では不整形地盤よりも単純で基本的と考えられる半無限弾性地盤や水平成層地盤におけるばねの検討も十分に為されていない。よって本研究ではこれらの基本的な条件に対する検討を優先し, 地盤の不整形性の影響の検討は今後の課題とする。同様に, 基礎の不整形性の影響検討についても今後の課題とする。

図 1.9 に本論文の構成を示す。本章 (第 1 章) の後, 第 2 章にて検討対象の条件について詳細を整理し, ばねの簡易評価法の検討方法と検証方法について述べる。研究で検討した内容については, 第 3 章でフーチング群について, 第 4 章で群杭について, 第 5 章で異種基礎 (フーチング群と群杭のペア) について説明する。以上の結論を第 6 章でまとめる。

		フーチング			杭			異種基礎	
		単独	複数, 整形	複数, 不整形	単独	複数, 整形	複数, 不整形	整形	不整形
地盤	半無限	■	■ 3章	■	■	■	■	■ 5章	■
	水平成層	■	■ 3章	■	■	■	■	■	■
	不整形	■	■	■	■	■	■	■	■

■ : 簡易法が既にある  
■ : 本研究にて簡易法を提案する  
■ : 簡易法なし, 今後の検討課題

図 1.5 基礎のばねの簡易評価法における先行研究と本研究の検討対象

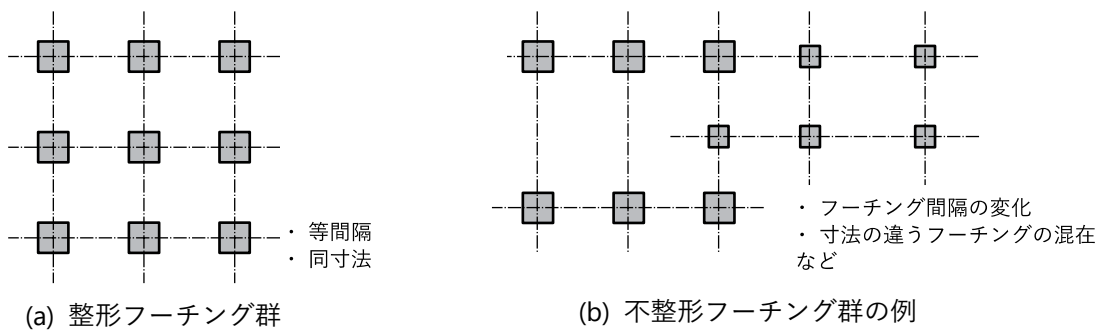


図 1.6 図 1.5 におけるフーチング群の整形・不整形の定義

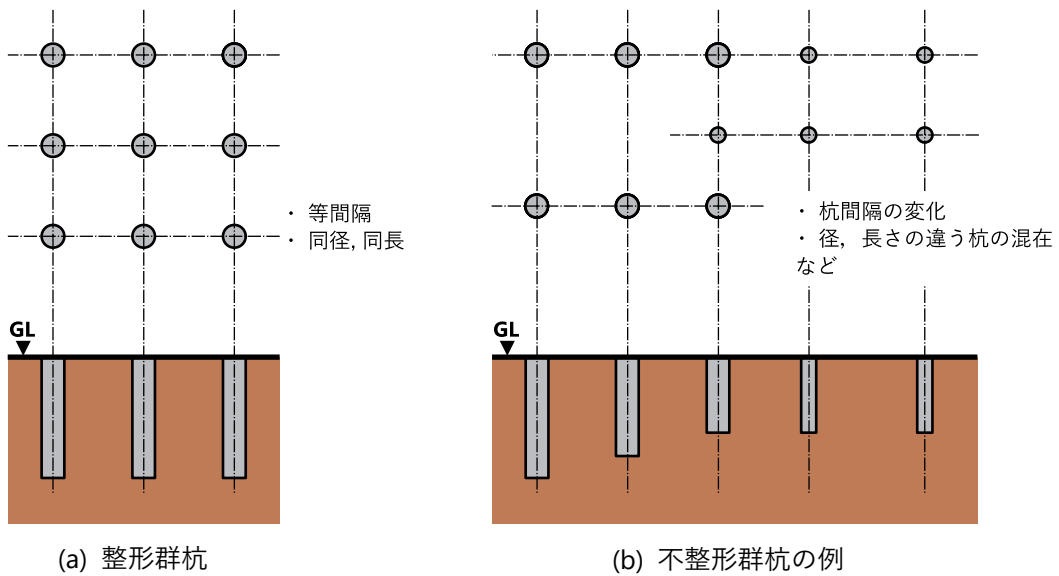


図 1.7 図 1.5 における群杭の整形・不整形の定義

第1章 序論

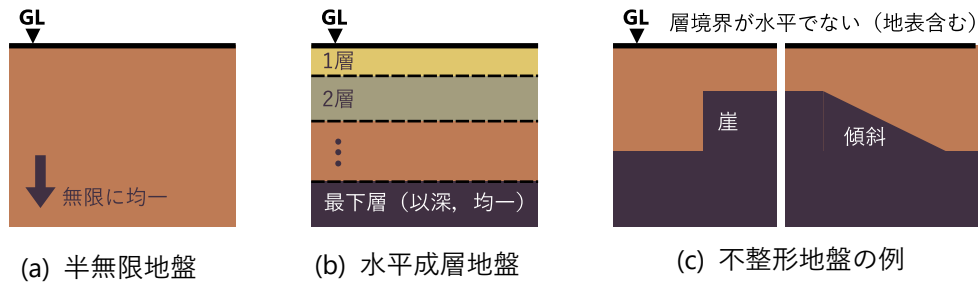


図 1.8 図 1.5 における地盤種別の定義

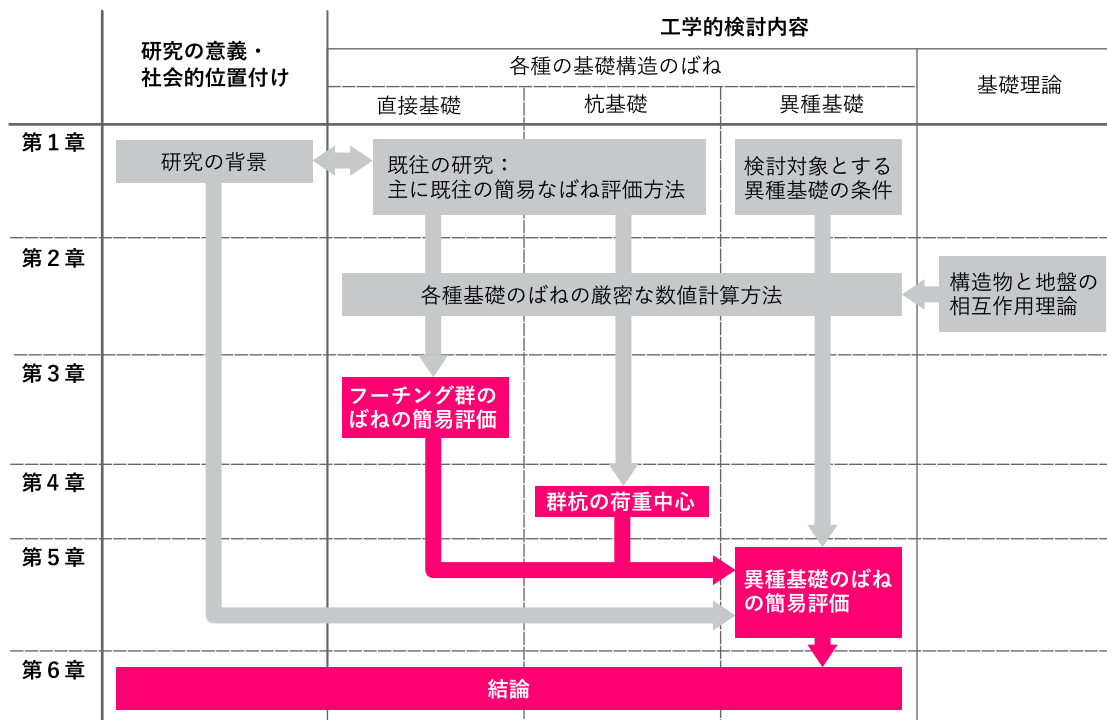


図 1.9 本論文の構成 (図中赤の四角で塗り潰した部分が本研究オリジナルの内容)

## 第1章 序論

### 第1章の参考文献

- 1.1) 川村東雄, 小林治男, 大石哲哉, 西尾博人:「東広島市における建築異種基礎の工事例」, 基礎工, Vol. 31, No. 10, pp. 63-65, 2003
- 1.2) 瀧正哉, 友住博昭, 武居幸次郎, 下村修一:「複雑な切盛り造成地における異種基礎」, 基礎工, Vol. 37, No. 10, pp. 38-41, 2009
- 1.3) 高沢利親, 光成高志:「傾斜支持地盤上に建つ建物設計例」, 基礎工, Vol. 13, No. 5, pp. 79-84, 1985
- 1.4) 日本建築学会:「建築基礎構造設計指針」, 日本建築学会, pp. 319-334, 2019
- 1.5) 総務省:「令和2年版 情報通信白書」, 2020, <<https://www.soumu.go.jp/johotsusintokei/whitepaper/ja/r02/html/nd121120.html>> (参照 2021年10月15日)
- 1.6) 日本建築学会:「入門・建物と地盤との動的相互作用」, 日本建築学会, pp. 118-129, 1996
- 1.7) POULOS, H. G. and DAVIS, E. H. : "Elastic solutions for soil and rock mechanics", John Wiley & Sons, 1973
- 1.8) MUKI, R. : "Asymmetric problems of the theory elasticity for a semi-infinite solid and thick plate", Progress in Solid Mechanics, Vol. 1, North-Holland Publishing Co., 1961
- 1.9) 日本建築学会:「入門・建物と地盤との動的相互作用」, 日本建築学会, pp. 342, 1996
- 1.10) WHITMAN, R. V. and RICHART, F. E. : "Design procedures for dynamically loaded foundations", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Vol. 93, Issue 6, pp. 169-193, 1967.11, DOI: 10.1061/JSFEAQ.0001050
- 1.11) BARKAN, D. D. : "Dynamics of bases and foundations", McGraw Hill, 1962
- 1.12) STEINBRENNER, W. : "Tafeln zur setzungsberechnung", Die Strasse, Vol. 1, pp. 121-124, 1934
- 1.13) 濱田純次, 土屋富男, 谷川友浩, 山下清:「パイルド・ラフト基礎の地震時水平抵抗に関する研究」, 竹中技術研究報告, 第66号, pp. 43-59, 2010
- 1.14) 中川太郎, 小林勝巳, 佐々木仁, 佐々木聡, 田中良一:「パイルド・ラフト基礎の沈下および水平拳動解析手法」, フジタ技術研究報告, 第48号, pp. 43-48, 2012
- 1.15) 古垣内靖, 中沢楓太, 川崎健次郎:「弾性理論解に基づく直接基礎の水平変位および水平地盤ばねの簡易算定法」, 日本建築学会技術報告集, 第24巻, 第57号, pp. 587-590, 2018, DOI: 10.3130/aijt.24.587
- 1.16) 日本建築学会:「建築基礎構造設計指針」, 日本建築学会, pp. 222-283, 2019
- 1.17) 土質工学会:「杭基礎の設計法とその解説」, 土質工学会, pp. 535-541, 1985
- 1.18) CHANG, Y. L. : Discussion on "lateral pile-loading test" by Feagin, Transaction, ASCE, 1937
- 1.19) RANDOLF, M. F. and WROTH, C. P. : "Analysis of deformation of vertically loaded piles", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 104, Issue 12, pp.

- 1465-1488, 1978, DOI: 10.1061/AJGEB6.0000729
- 1.20) FRANCIS, A. J. : "Analysis of Pile Groups with Flexural Resistance", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 90, Issue 3, pp. 1-32, 1964, DOI: 10.1061/JSFEAQ.0002133
- 1.21) GAZETAS, G. and DOBRY, R. : "Horizontal response of piles in layered soils", Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 110, Issue 1, pp. 20-40, 1984, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9410(1984)110:1(20)
- 1.22) 土方勝一郎, 柳下文雄, 富井隆:「群杭の動的インピーダンス簡便評価法」, 日本建築学会構造系論文集, 第59巻, 第455号, pp. 73-82, 1994, DOI: 10.3130/aijs.59.73\_1
- 1.23) 成田修英, 福田健, 小阪宏之, 久世直哉, 飛田喜則, 岸本剛, 小川敦, 富田祐介, 内田崇彦, 大沼満, 川幡栄治, 阿部秋男, 新井寿昭, 沼本大輝, 佐藤武:「人力加振による杭頭のインパルス応答を用いて弾性領域における杭頭の静的ばねを推定する方法」, 日本建築学会構造系論文集, 第86巻, 第799号, pp. 65-75, 2021, DOI: 10.3130/aijs.86.65
- 1.24) POULOS, H. G. : "Analysis of the settlement of pile groups", Géotechnique, Vol. 18, Issue 4, pp. 449-471, 1968, DOI: 10.1680/geot.1968.18.4.449
- 1.25) DOBRY, R. and GAZETAS, G. : "Simple method for dynamic stiffness and damping of floating pile groups", Géotechnique, Vol. 38, Issue 4, pp.557-574, 1988, DOI: 10.1680/geot.1988.38.4.557
- 1.26) 土方勝一郎, 今村晃, 柳下文雄, 富井隆, 小山桂介:「群杭係数の評価方法に関する研究」, 日本建築学会構造系論文集, 第476号, pp. 57-66, 1995, DOI: 10.3130/aijs.60.57\_3
- 1.27) 護雅史, 森川和正:「加振方向を考慮した群杭効率の推定式の提案」, 第3回日本地震工学研究発表会, pp. 416-417, 2004
- 1.28) 成田修英, 金子治, 根本恒, 金井重夫, 新井寿昭:「杭位置の影響を考慮した群杭の非線形水平地盤ばね簡易評価手法」, 日本建築学会構造系論文集, 第77巻, 第676号, pp. 877-882, 2012, DOI: 10.3130/aijs.77.877
- 1.29) 日本建築学会:「建物と地盤の動的相互作用を考慮した応答解析と耐震設計」, 日本建築学会, 2006

第2章 検討対象に対するアプローチおよび検討  
結果を数値的に検証するための方法

## 第2章 検討対象に対するアプローチおよび検討結果を数値的に検証するための方法

### 2.1 検討対象の詳細とそれに対するアプローチの方法

#### 2.1.1 検討対象の詳細

検討対象となるフーチング群、群杭、異種基礎の条件については第1章でも説明したが、ここでは、さらに詳細な条件について説明する。図 2.1 に、本研究で検討の対象とする群杭、フーチング群、異種基礎の模式図を示す。整形な群杭、フーチング群を取り扱うのは、第1章で述べた通りである。また、これらの群杭、フーチング群において、杭同士、フーチング同士は剛な梁で連結されているものとする。杭同士は杭頭部で連結される。またフーチングは、剛板とする。これは、グループに含まれる全ての部材の変位を同一にするための条件設定である（群杭で1グループ、フーチング群で1グループ、異種基礎には計2グループが含まれると考える）。グループ内部で部材の変位（群杭の場合は杭頭部の変位）が異なることを許すと、グループとしての変位が一意に定まらないので、検討を進める上で不都合が生じる。例えば、杭頭自由の条件で、群杭中央位置の杭頭変位を群杭を代表する変位とした場合と、群杭に含まれる全ての杭の杭頭変位の平均値を群杭を代表する変位とした場合とでは、同じ代表変位でも値に違いがでる。「群杭を代表する変位をどう定めるべきか?」という新たな問題が発生してしまう。剛梁で連結しないフーチング群も同様の問題が発生する。このような混乱を避け、理論的な取り扱いをスムーズにするため、各グループの部材は互いに剛な梁で連結されているものとする。同じ理由で、群杭は、杭頭の回転が群杭全体としても各杭についても拘束されているものとする。部材の連結要素が剛でない場合の連結要素の剛性の影響の検討については、今後の課題とする。

群杭とフーチング群は連結しない。第1章でも述べた通り、異種基礎の変位の検討では不同沈下やねじれに大きな関心がある場合が多く、杭基礎部分の変位と直接基礎部分の変位を個別に評価できた方が都合が良いためである。また、連結部分や上部構造への影響は、後からでも評価できる。連結されていない異種基礎（群杭とフーチング群のペア）の柔性は、図 2.2 に示す4成分で表せるので、群杭に作用する荷重を $F_p$ 、フーチング群に作用する荷重を $F_f$ とし、群杭の杭頭の変位を $u_p$ 、フーチング群の変位を $u_f$ とすると、この異種基礎の荷重変位関係は次の通りに書ける。

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ u_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{pp} & g_{fp} \\ g_{pf} & g_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_p \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

(2.1)式右辺の行列は、剛梁によって群杭1自由度、フーチング群1自由度に自由度が集約された形の異種基礎の柔性を表す行列である（剛梁が無ければ1章で示した(1.4)式の形になる）。 $g_{pp}$ は群杭単体の柔性、 $g_{ff}$ はフーチング群単体の柔性を表し、 $g_{fp}$ 、 $g_{pf}$ は両者の影響係数を表す。また、荷重 $F_p$ 、 $F_f$ は同方向とし、鉛直荷重と水平荷重どちらの場合も考える（今後出てくる模式図では、鉛直荷重の模式図が多いが、これは単に鉛直荷重の方が図が描きやすいため、鉛直荷重に偏重して検討している訳では無い）。

(2.1)式より、異種基礎のばねは、同式右辺の柔性行列の逆行列として表される。異種基礎間の連結要素や上部構造の剛性の影響を考慮する場合、これらの構造物の足元に、このばねを付加して構造計算を行えば良い。異種基礎建物を、連結されていない異種基礎部分とそれ以外の部分に分けて考えるということである(図2.3参照)。同様に、杭同士もフーチング同士も連結しない方が正確で汎用的な取り扱いができるが、その場合、柔性行列の自由度が大きくなり過ぎる。簡易法としては、基礎のばねは極力少ない自由度で表したいので、群杭とフーチング群については、杭同士、フーチング同士を剛梁で連結し自由度を集約する。

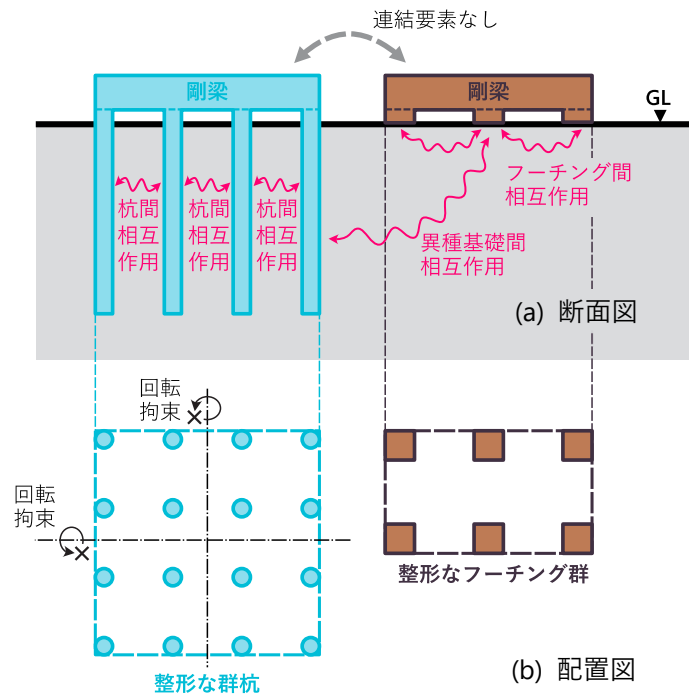


図 2.1 本研究において検討の対象とする群杭とフーチング群

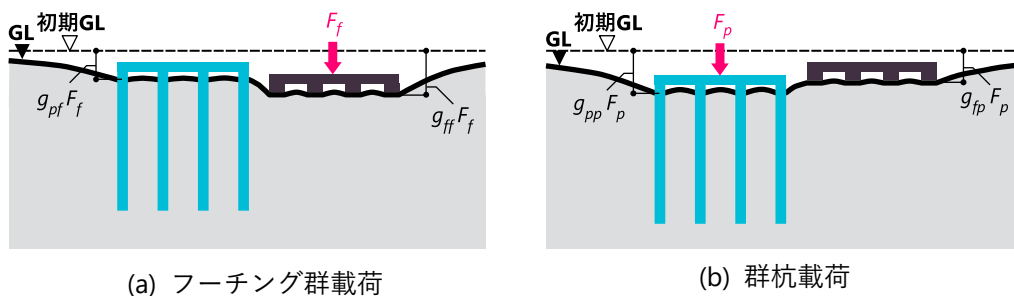


図 2.2 連結されていない群杭とフーチング群の柔性

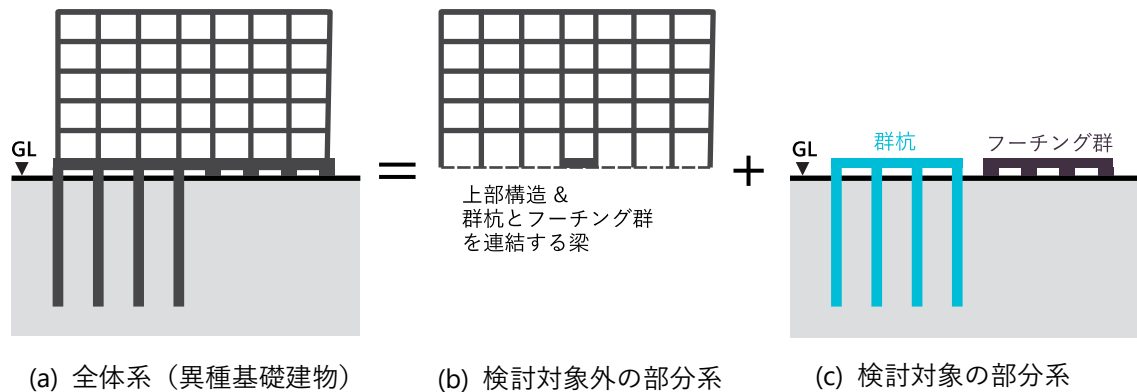


図 2.3 異種基礎建物と本研究の検討対象の関係

### 2.1.2 異種基礎のばねと上部構造の部分系についての補足

2.1.1 で述べた異種基礎のばねとは、群杭のばねとフーチング群のばねのみのことを指すのではない。群杭とフーチング群の間の相互作用効果（図 2.2 参照）を表すばねもある。異種基礎のばねの行列を以下のように書くとき、この非対角成分が相互作用効果を表すばねとなる。

$$\begin{bmatrix} s_{pp} & s_{fp} \\ s_{pf} & s_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{pp} & g_{fp} \\ g_{pf} & g_{ff} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{g_{pp}g_{ff} - g_{fp}g_{pf}} \begin{bmatrix} g_{ff} & -g_{fp} \\ -g_{pf} & g_{pp} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ここに、 $s_{pp}, s_{fp}, s_{pf}, s_{ff}$  は異種基礎のばね行列の各成分を表す。

(2.2)式において、 $s_{pp}$  は群杭のばね、 $s_{ff}$  はフーチング群のばねであり、 $s_{fp}, s_{pf}$  が群杭とフーチング群の間の相互作用効果を表すばねである。(2.2)式のばねを図 2.3(b)の上部構造と連結部の梁要素の部分系の足元に付加すれば、完全に全体系と等価な計算ができる。模式図的に書けば、図 2.4 の通りである。例えば、汎用骨組解析プログラムで作成した上部構造のモデルの足元に、同図(b)のようにばねを付加すれば、元の全体系（同図(a)）と理論的に完全に等価な計算ができる。

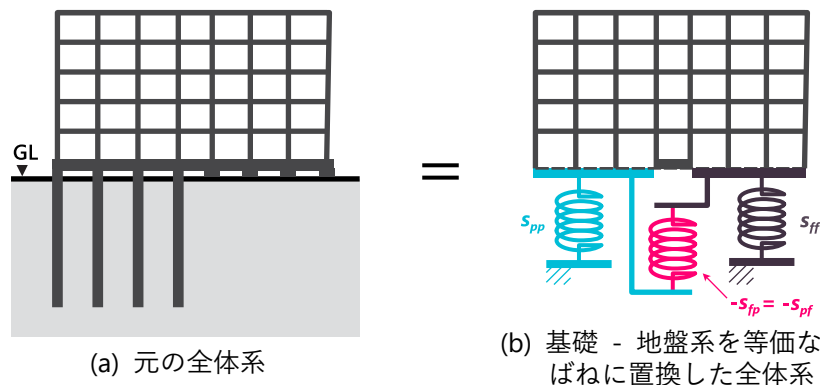


図 2.4 本研究における異種基礎のばねの意味

図 2.3, 図 2.4 の部分系への分離とばねへの置換は, サブストラクチャ法<sup>2.19)</sup> の最も簡単な例である。このように, 基礎 - 地盤系の自由度を 2 自由度のみに集約した場合は, 汎用骨組解析プログラムでも容易に基礎 - 地盤系をばね置換できる。ただし, 常にこのように簡単にばね置換ができるわけでは無いので, 注意が必要である。例えば杭同士やフーチング同士を結ぶ梁が剛でないとして, 基礎 - 地盤系の自由度を増やした場合, 負のばね定数を持つ相互作用ばねが発生する場合がある。このようなばねは, 単体のばねとしては極めて不自然であるが, 3 自由度以上の多自由度の基礎 - 地盤系をばね置換したときのばね行列の中ではしばしば発生するものである (一成分だけ取り出すと不自然に見えても, ばね行列全体で力学的辻褃が合うようになっている)。負のばね定数を持つばね要素は一般的な汎用プログラムでは設定できないので, このような場合は, 図 2.4 のような分かり易い置き換えは不可能になる。自由度の大きい基礎 - 地盤系のばね行列は, ばね要素には置き換えずに行列のままの形で上部構造物の剛性行列を組み合わせる計算するのが一般的である<sup>2.19)</sup>。

### 2.1.3 検討対象に対するアプローチの方法

本研究では, 厳密解を従来それを数値的に求めるのに用いていた煩雑な手順 (精算解法) よりも簡易な手順により近似する方法 (簡易法) を, 精算解法や実験の結果を用いた回帰分析などの経験則的なアプローチではなく, 純粋に理論的な考察により導く。そして理論的に導いた簡易法に対して, 精算解法による精度の検証を行い, その結果について考察する。

理論的なアプローチには, 以下 2 つのメリットがあり, 未解明の問題が数多く存在する異種基礎のばねの検討 (図 1.5 参照) には, 適していると考えられる。① 理論の前提となる仮定条件や近似 (テイラー展開を用いた多項式近似や, 離散値の和の計算による積分の近似など) の成立条件が, そのまま簡易法を適用することが可能な条件となるので, 手法の適用限界が明確。② 理論の前提となる仮定条件を一部緩めたり, 逆に新たな条件を追加したり, 用いている近似式を別の近似式に置き換えたりすることで, 新たな手法を導くことができる可能性があり, 発展性がある。

## 2.2 地盤 - 構造物間相互作用の理論と精算解法

ここでは、異種基礎のばね評価の基礎となっている力学理論を概観し、本研究において簡易法の検証計算に採用した精算解法とその理由について述べる。

### 2.2.1 地盤 - 構造物間相互作用評価の基本

#### (1) 力の釣合い方程式とその離散化

構造物と地盤の境界面上の点を $\mathbf{r}_c$ とし、それ以外の構造物内部の点を $\mathbf{r}_b$ 、地盤内部および地表面上の点を $\mathbf{r}_s$ とする。さらに系の内部の任意の点 $\mathbf{r}$ における変位を $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ 、荷重を $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ として、荷重に対する構造物の復元力を $\mathbf{R}_b(\mathbf{u}(\mathbf{r}_b))$ 、地盤の復元力を $\mathbf{R}_s(\mathbf{u}(\mathbf{r}_s))$ とすると、全体の力の釣合いは以下の通りに書ける (図 2.4 参照)。

$$\begin{cases} \mathbf{R}_b(\mathbf{u}(\mathbf{r}_c)) + \mathbf{R}_s(\mathbf{u}(\mathbf{r}_c)) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_c) \\ \mathbf{R}_b(\mathbf{u}(\mathbf{r}_b)) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_b) \\ \mathbf{R}_s(\mathbf{u}(\mathbf{r}_s)) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_s) \end{cases} \quad (2.3)$$

外力分布 $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ が分かっているか、もしくは想定値が設定されていて、それに対して任意の点 $\mathbf{r}$ で(2.2)式を満たすような変位分布 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ を決定するのが、一般的な構造物 - 地盤間の相互作用問題である。

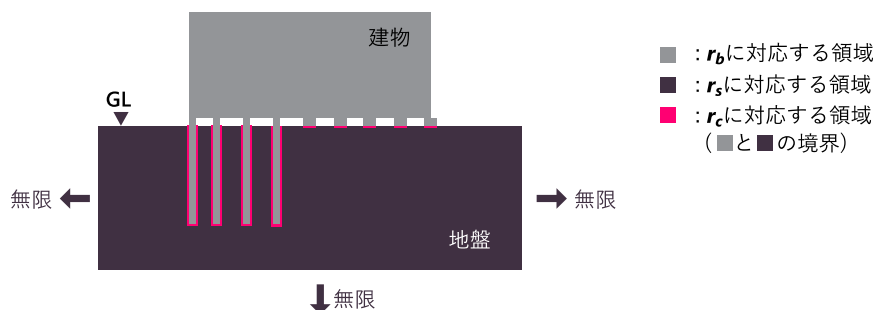


図 2.5 部分系に分離した力の釣合い式 ((2.2)式) の説明図

(2.2)式は外力と復元力の釣合いを部位ごとに分けて書いただけなので、一見すると当たり前のつまらない式にも思えるが、分け方が重要である。同式は、「建物と地盤の連成系の力の釣合いは、建物部分、地盤部分、そして両者の境界部分の3つの部分系に分けて考えることができる」ということを示している。構造物の復元力関数 $\mathbf{R}_b$ は構造力学、骨組解析の既往の知見(例えば2.2)を用いて構造物の諸元から決定でき、地盤の復元力関数 $\mathbf{R}_s$ は弾性連続体の支配方程式(詳細は後述)を用いて地盤の諸元から決定できるので、原理的には、 $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ を境界条件として $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ を求めることができる。しかし、 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ を解析的に求めることは、構造物と

地盤がごく単純な場合<sup>注2</sup>を除いて、非常に困難である。そこで通常は、任意の点 $\mathbf{r}$ で(2.2)式を満たすような変位分布 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ を求めるのは諦め、「 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ は、有限の離散点 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  (以下、「評価点」と呼ぶ) 上でのみ(2.2)式を満たせば良い」ということにして、 $\mathbf{u}(\mathbf{r}_1), \mathbf{u}(\mathbf{r}_2), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{r}_N)$ を求める。この検討対象の系を離散的な評価点で表すことを以下「離散化」、離散化を用いた解法を以下「離散化法」と呼ぶ。離散化の例を図 2.5 に示す。例えば、異種基礎建物の隣に盛土をする場合の影響を評価するとか、(動的項を考慮する必要があるので本研究の検討対象からは外れるが) 建物に隣接する道路の交通振動の影響を評価するとかいう場合には、このような離散化になる。

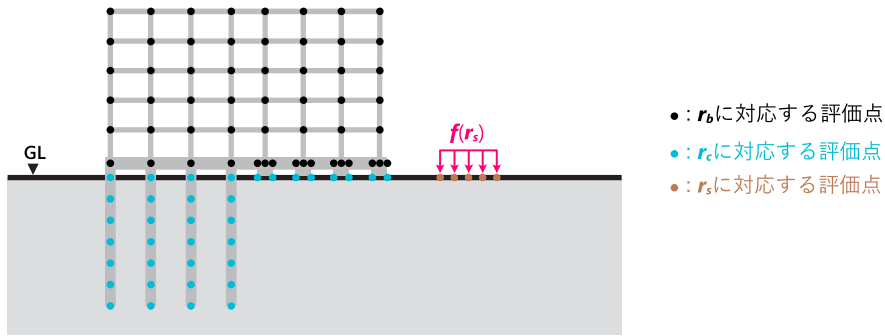


図 2.6 異種基礎建物と地盤の離散化の例

評価点の内、 $\mathbf{r}_b$ に対応する点を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_B$ ,  $\mathbf{r}_c$ に対応する点を $\mathbf{r}_{B+1}, \mathbf{r}_{B+2}, \dots, \mathbf{r}_{B+C}$ ,  $\mathbf{r}_s$ に対応する点を、 $\mathbf{r}_{B+C+1}, \mathbf{r}_{B+C+2}, \dots, \mathbf{r}_{B+C+S}$  ( $B + C + S = N$ )とすると、評価点上の復元力関数は以下のように表せる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_b(\mathbf{u}(\mathbf{r}_1)) \\ \vdots \\ \mathbf{R}_b(\mathbf{u}(\mathbf{r}_B)) \\ \mathbf{R}_b(\mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+1})) \\ \vdots \\ \mathbf{R}_b(\mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C})) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{bbb} & \mathbf{S}_{bbc} \\ \mathbf{S}_{bcb} & \mathbf{S}_{bcc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_B) \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C}) \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_s(\mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+1})) \\ \vdots \\ \mathbf{R}_s(\mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C})) \\ \mathbf{R}_s(\mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C+1})) \\ \vdots \\ \mathbf{R}_s(\mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C+S})) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{scc} & \mathbf{S}_{scs} \\ \mathbf{S}_{ssc} & \mathbf{S}_{sss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C+S}) \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

(2.3), (2.4)式右辺の行列は構造物 ((2.3)式) と地盤 ((2.4)式) の剛性を表す行列である。構造物の剛性行列は、一般的な行列を用いた構造計算の剛性行列にそのまま対応するので

<sup>注2</sup> 例えば、構造物が剛円板、地盤が半無限弾性地盤で外力が剛円板上にのみ作用する場合、この円板の変位の解析解を得ることができる。第1章の表 1.1 で示した円形剛基礎のばねは、この解によるものである。このくらい条件が単純でなければ、変位を解析的に求めることは難しい。

容易に決定できる。地盤の剛性行列は、基本的には弾性連続体の支配方程式に基いて決定することになるが、技術的な詳細の異なる幾つかの決定方法が存在する。これについては2.2.2で説明する。(2.3), (2.4)式と(2.2)式をまとめると、次式の通りに離散化された力の釣合い式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{bbb} & \mathbf{S}_{bbc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{bcb} & \mathbf{S}_{bcc} + \mathbf{S}_{scc} & \mathbf{S}_{scs} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{ssc} & \mathbf{S}_{sss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_B) \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C+S}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_B) \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+C}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+C+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+C+S}) \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

(2.5)式において、左辺の剛性行列は構造物と地盤の諸元により決定できるので、右辺の外力ベクトルが与えられていれば、同式は評価点各点の変位を未知数とした連立方程式となり、これを解くことで評価点各点の変位が求まる。「建物と地盤の連成系における力の釣合い関係を、(2.5)式の連立方程式に帰着して解く」、これが地盤 - 構造物間相互作用の数値的評価の基本である。

「任意の点で力の釣合いを満たすと、限られた離散点で力の釣合いを満足するのでは、条件が違い過ぎる」と思う読者が居るかもしれないが、荷重の分布が離散的で、かつ点 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ が荷重の作用点を全て含む場合、離散化法による解は境界条件をすべて満たすので、剛性行列の評価が正確なら厳密な解に一致する。したがって、荷重の作用範囲内に、離散化法の評価点 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ が十分な密度で分布するのであれば、離散化法の解は、厳密な解に近似的に一致する（剛性行列が正確なら）。

## 2.2.2 地盤の剛性行列評価

### (1) 評価法の概要

地盤の剛性行列の評価法は、評価の対象とする領域近傍の地盤を切り出して、その領域内を離散化して剛性を評価する方法（以下、「領域法」と呼ぶ）と、図 2.5 のように外力の作用している領域と構造物との境界そして変位を評価する対象となる点のみを離散化する方法（以下、「境界法」と呼ぶ）に大別される。領域法の方が地盤の非線形性や不整形性を反映させやすいため、現時点（2021年）では領域法の方が計算環境が整備されており、異種基礎の計算においても多くの実施例がある<sup>例えは2.3)~2.5)</sup>。しかしながら、領域法では、検討対象となる領域全体の離散化が必要であるため、部材間、基礎間の距離が大きくなるほどその分広い領域を考慮する必要がある。したがって、3次元の問題では部材間、基礎間の距離の3乗に比例して評価点の数が増大するし、これらの距離の大きい異種基礎の評価が難しいと

いう欠点がある。図 2.5 の例で言えば、境界法なら同図に示されている通りの評価点で剛性行列の評価が可能だが、領域法の場合は、同図に評価点の無い（本来の工学的な問題解決のためには変位を知る必要の無い）土中の領域にも十分な密度で評価点を分布させなければならない。一方、境界法では、評価の必要がある部位にのみ評価点を分布させれば良いので、部材間の距離が広がっても評価点の数が増大することは無い。以上まとめると、表 2.1 の通りになる。本研究では、地盤の非線形性や不整形性は検討の対象外であるため、計算効率の点で優位性がある境界法に基づく剛性行列を用いることとする。

表 2.1 領域法と境界法のメリット・デメリット

	領域法	境界法
メリット	地盤の非線形性、不整形性が反映しやすい。	土中の評価点は、構造物との境界上と荷重が作用している部分にしか必要ないため、評価点の数を最小化できる。
デメリット	評価領域内の地盤全体に一定間隔で評価点を配置する必要があり、特に3次元の計算では計算負荷が非常に高くなる。	地盤の非線形性、不整形性を反映するのが難しい。

(2) 境界法による地盤の剛性行列評価方法

境界法による剛性行列は、群杭の杭頭ばね (1.2.3 (2)参照) と同様に、評価点全点对全の柔性行列の逆行列として与えられる。(2.4), (2.5)式の表現に従えば、地盤の柔性行列と、変位ベクトル、荷重ベクトルとの関係は次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C+S}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{SCC} & \mathbf{S}_{SCS} \\ \mathbf{S}_{SSC} & \mathbf{S}_{SSS} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+C}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+C+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+C+S}) \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

(2.6)式から明らかなように、柔性行列の*i*行*j*列成分は、*j*番目の評価点に単位荷重が働いたときの*i*番目の評価点の変位となる。これは、地盤のグリーン関数 (1.2.1(1) 参照) に基づいて評価できるが、グリーン関数そのものは使用できない。柔性行列の対角成分は、荷重の作用する評価点と変位を評価する評価点が一致するが、地盤のグリーン関数は、載荷点と評価点が一致する場合には無限大に発散するためである。これは、点載荷の場合には載荷点で応力が無限大になるからで、それを回避するには、荷重が点でなくある広がりを持った範囲に分布していることを考慮する必要がある。

本研究では、地盤への荷重は、群杭とフーチング群を介して与えられるので、荷重は杭周面かフーチング底面に分布している。これらの分布に応じてグリーン関数を数値積分し、柔

性行列の各成分を求める。分布荷重と評価点の関係は、先行研究に倣い、図 2.6 の通りに設定する。フーチングについて<sup>2.6), 2.7)</sup>は、有限の矩形要素に分割して、要素中央を評価点とし、各要素内で荷重は等分布とする。杭について<sup>2.8)</sup>は、杭材軸方向一定間隔で分割し、評価点は杭芯位置、荷重は各評価点と同一水平面内、杭周位置にリング状に等分布させる。これは、同図のように要素分割されたフーチングと杭の各要素について、要素中心の評価点間の影響係数(1.2.1(2)参照)を評価するということである。このようにすれば、変位の発散を回避して柔性行列の全成分を定めることができる。

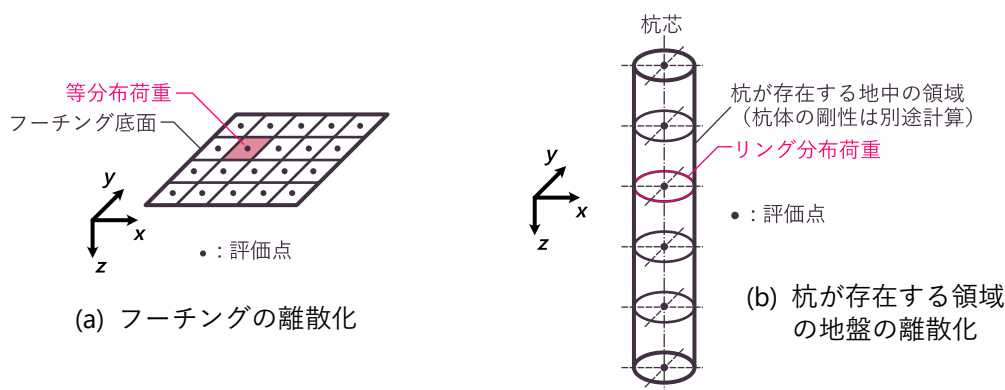


図 2.7 フーチングおよび杭との境界面における地盤の離散化と評価点、荷重分布の関係

### (3) 地盤のグリーン関数評価の基礎

弾性領域における地盤のグリーン関数は、Navier の方程式<sup>例えば 2.9)</sup>と呼ばれる 3次元弾性連続体の支配方程式(次式、ただし本研究では静的問題を扱うため動的項は省略する)の点荷重に対する解として与えられる。

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})) + \frac{2}{1-\nu} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})) + \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

ここに、 $\mu$ は地盤のせん断弾性係数、 $\nu$ はポアソン比、 $\nabla$ はベクトル解析における微分演算子のナブラ(3次元空間における各方向を $x, y, z$ としたとき、 $\nabla := (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ )を表す。また、(2.7)式において太字の $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ と $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ は3次元空間における位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点における変位ベクトル、(単位体積当たり作用する)外力ベクトルを表す。スカラーではないことに注意を要する。

Navier の方程式((2.7)式)は、3成分の変位が互いに連成した形の偏微分方程式になっており、これをそのままの形で解くことは困難であるが、変位ベクトルに対して適切な変数変換を施せば、変位とは別の3変数に関する独立した3つの微分方程式に変形できる。これを解いて一般解を得た後、変数を逆変換すれば変位と応力に関する一般解を得ることができる。変位と応力の一般解に対して境界条件を適用し一般解に含まれる未知係数を決定すれば、境界条件を満たす特殊解が得られる。以上が Navier の方程式を解いてグリーン関数

を求める手順の概要である。まとめると以下の通りになる。

- 1) 変位ベクトルを変数変換し、微分方程式を簡単な形に変形する。
- 2) 変換した変数に関する簡単な微分方程式の一般解を得る。
- 3) 前の手順で得た一般解に対して、変数変換を逆向きに適用して変位と応力に関する一般解を得る。
- 4) 変位と応力に関する一般解に境界条件を適用し、境界条件に適合する特殊解を得る。

Navier の方程式は、半無限弾性地盤では閉じた形の解析解が得られており、水平成層地盤では無限積分と未知係数を含む一般解、およびその解の数値的な評価方法が知られている。これらの解について、以下に簡単に説明する。これらの解は、本研究の検討した内容を検証するため単なる手段であって、本研究の検討の内容には直接の関係は無いので、詳細には立ち入らない。これらの解の詳細に興味のある読者は、固体力学、連続体力学、地震学などの教科書(例えば2.9)~2.11)を参照されたい。

#### (4) 半無限弾性地盤におけるグリーン関数 (Navier の方程式の解)

Mindlin (1936)<sup>2.12)</sup> は、Galerkin ベクトル(例えば2.9) と呼ばれる変位ベクトルを変数変換して作られるベクトルを用いて半無限弾性における Navier の方程式の解を導いた。この解は Mindlin 解と呼ばれ半無限弾性地盤におけるグリーン関数として利用できる。位置 $\mathbf{r}$ における Galerkin ベクトルを $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ とすると、Galerkin ベクトルと変位ベクトルの関係は次式の通りになる。これが Galerkin ベクトルの定義である。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu} \left( 2(1-\nu)\nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})) \right) \quad (2.9)$$

(2.8)式を Navier の方程式 ((2.7)式) に代入して整理すると、次のような単純な形の微分方程式を導くことができる。

$$\nabla^4 \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.10)$$

この微分方程式を解いて、Galerkin ベクトルによる解を変位と応力の解に逆変換し、地表面で応力がゼロとなる条件と組み合わせると、Mindlin 解が得られる。

Mindlin 解には、外力の作用方向と変位、応力の評価方向の組み合わせによって異なる形の式が、変位解で6通り、応力解で10通り存在する。以下に、本研究で利用する2つの変位解のみを示す。3次元空間上で載荷点座標を $\mathbf{r}_s := (x_s, y_s, z_s)$ 、評価点座標を $\mathbf{r}_o := (x_o, y_o, z_o)$ として、 $R_1 := ((x_o - x_s)^2 + (y_o - y_s)^2 + (z_o - z_s)^2)^{1/2}$ 、 $R_2 := ((x_o - x_s)^2 + (y_o - y_s)^2 + (z_o + z_s)^2)^{1/2}$ とすると、 $z$ 方向単位外力載荷に対する $z$ 方向変位 ( $g_{zz}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s)$ とおく) は、次のようになる。

$$g_{zz}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left( \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \frac{(z_o - z_s)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z_o + z_s)^2 - 2z_o z_s}{R_2^3} + \frac{6z_o z_s (z_o + z_s)^2}{R_2^5} \right) \quad (2.11)$$

$x$ 方向単位外力载荷に対する $x$ 方向変位 ( $g_{xx}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s)$ とおく) は、次のようになる。

$$g_{xx}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left( \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{(x_o - x_s)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(x_o - x_s)^2}{R_2^3} + \frac{2z_o z_s}{R_2^3} \left( 1 - \frac{3x(x_o - x_s)^2}{R_2^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2 + z_s + z_o} \left( 1 - \frac{(x_o - x_s)^2}{R_2(R_2 + z + c)} \right) \right) \quad (2.12)$$

载荷直交方向に対する変位解もあるが、静的な問題では、载荷方向と一致する方向の変位が卓越するので、本研究では载荷直交方向の変位は無視する。

#### (5) 水平成層地盤におけるグリーン関数 (Navier の方程式の解)

水平成層地盤においては Galerkin ベクトルによる解法を示した研究は見当たらない。恐らく、① Galerkin ベクトルの物理的背景が明確でなく使い辛い (物理的背景が明確になっている手法よりも応用性・発展性に欠ける懸念がある) こと、② 動的問題では微分方程式が(2.9)式のような単純な形にならず動的問題には適用し辛いこと、の2点がその理由だと考えられる。水平成層地盤でグリーン関数を計算する場合、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを用いた解法が一般的である。これらのポテンシャル関数は物理的に何を意味するか明らかにされており、動的問題でも静的問題でも得られる微分方程式の形がほとんど変わらないため、汎用性が高い。3次元変位場に対するスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは、次のように定義される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

(2.12)式において、 $\phi$ がスカラーポテンシャル、 $\mathbf{A}$ がベクトルポテンシャルである。弾性連続体 (この場合、地盤) の変位を扱う場合は、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は次のように定義される。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi(\mathbf{r}) \end{Bmatrix} + \nabla \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(\mathbf{r}) \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

ベクトル解析の公式より、任意のスカラー $s$ について $\nabla \times \nabla s = 0$ 、任意のベクトル $\mathbf{v}$ について $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$ であるので、(2.12)式より、以下の関係が成り立つ。

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

(2.14)式左辺は体積ひずみを表すので、同式よりスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は体積変化を伴う変位成分 (動的問題では粗密波) に対応し、(2.15)式左辺は変位の剛体回転成分を表すので、同式よりベクトルポテンシャルは体積変化を伴わない変位成分、つまりせん断変形によ

る変位成分(動的問題ではせん断波)に対応する。また、ベクトルポテンシャルについては、その定義((2.13)式)より次式の関係が成り立つので、

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi(\mathbf{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi(\mathbf{r})}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial x} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial z} \\ -\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

ベクトルポテンシャルの内、 $\chi(\mathbf{r})$ は $x$ - $y$ 平面上のせん断変形(動的問題におけるSH波)に対応し、 $\psi(\mathbf{r})$ は $x$ - $z$ 平面と $y$ - $z$ 平面上のせん断変形(動的問題におけるSV波)に対応する。このように、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを用いた変数変換では、すべての変数の物理的背景が明確になっている。

(2.12)式を Navier の方程式((2.7)式)に代入して整理すると、次のような単純な形の微分方程式を導くことができる。

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 \chi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.19)$$

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.20)$$

円筒座標系 $\mathbf{r} = (r, \varphi, z)$ において(地盤のグリーン関数の評価では、点荷重に対する変位場の対称性から、円筒座標を用いるのが便利であり、円筒座標が多用される)、(2.17)式の微分方程式の一般解は、次のようになる<sup>2.10)</sup>。

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty R(r)\Phi(\varphi)Z(z) dk \quad (2.21)$$

$$R(r) := A_1 H_n^{(1)}(kr) + B_1 H_n^{(2)}(kr) \quad (2.22)$$

$$\Phi(\varphi) := A_2 e^{im\varphi} + B_2 e^{-im\varphi} \quad (2.23)$$

$$Z(z) := A_3 e^{kz} + B_3 e^{-kz} \quad (2.24)$$

ここに、 $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )は境界条件より定まる未知係数、 $H_n^{(1)}$ は第一種 $n$ 次の Hankel 関数、 $H_n^{(2)}$ は第二種 $n$ 次の Hankel 関数を表す。

(2.18), (2.19)式についても、(2.17)式と同じ形式の微分方程式であるので、(2.20)~(2.23)式と同様の解が得られる。これらの解を元に変位、応力の一般解を導くことができる。これら変位と応力に関する一般解は、元々のポテンシャルに関する解((2.20)~(2.23)式)の形より「(未知係数)  $\times H_n^{(i)}(kr)$  ( $i = 1, 2$ )」の $k$ に関する無限の重ね合わせ(無限積分)の形になる。 $k$ は、一般に「波数」と呼ばれるパラメータである。本論文でも、以下「波数」と呼ぶ(波数の物理的な意味については後述)。Hankel 関数には直交性があるので、全ての波数成分の重ね合わせが境界条件を満たすためには、任意の波数において境界条件が満たされる必要がある。したがって、一般解に含まれる未知係数は波数依存で変化することになる。波数に関するこのような未知関数を解析的に求めることは非常に困難であるため、一般解に含まれる未知係数を決定し境界条件に適合した特殊解を得ようとする場合には、構造物と地盤を離散化したのと同様に、波数も離散化する。離散化された評価対象の波数において

境界条件を適用し、未知係数についての連立方程式を導いてこれを解き、その解を重ね合わせることにより、境界条件に適合した変位解を得ることができる。この手法は、波数成分の重ね合わせを行うことから、一般に「波数積分法」と呼ばれる。未知係数の決定のために用いる境界条件は、① 地表面で応力がゼロとなる条件、② 層境界での変位と応力の連続条件、③ 外力の条件、の3つである。外力の条件については、外力の空間分布関数（点荷重ではデルタ関数）に Hankel 変換を施して得られる各波数成分を外力の存在深度に不釣り合い力として与えることで、波数ごとの未知係数を決定する方程式の中に導入することができる。

上記の通り、波数積分法は、点荷重に対する評価点の変位を、載荷点と評価点の間の地盤をモデル化せずに直接評価するものであり、境界法においてグリーン関数を評価するための手法である。波数積分法は、主に地震動の評価を目的として発展してきた手法であり、また、静的な分野では領域法の利用が標準になっているため、静的な変位の評価に波数積分法を用いた事例は見当たらない。しかしながら、(1)で説明した通り、本研究の検証のためには、領域法よりも境界法の方に優位性がある。そこで本研究では、波数積分法によるグリーン関数を用いた境界法を精算解法として採用する。

なお波数とは、一般に何らかの媒体を伝播する波の波長の逆数に  $2\pi$  をかけた量として説明される（波長を  $\lambda$  とすると、波数  $k := 2\pi/\lambda$ ）<sup>注3</sup>。本研究は、静的な問題を取り扱っており、一般的な意味での「波」が動的に地盤を伝わっていくようなことは無いため、この説明には当てはまらない。しかし、静的な変位分布も動的な変位分布も、数学的にはどちらも正弦波関数（直交座標系の場合）や Bessel 関数（円筒座標系の場合）の重ね合わせとして表すことが可能である。つまり、静的な変位分布についても、静止した波の重ね合わせとして表すことは可能である。本研究における波数とは、そのような静止した波の波数を指す。

### 2.2.3 本研究における精算解法の詳細に関する補足

#### (1) 波数積分法の具体的手順

波数積分においては、波数に関する無限積分の評価が問題となる。無限積分をそのまま数値的に評価することは不可能なので、何らかの方法で無限積分を有限区間の積分に帰着させる必要がある。本研究では、この無限積分の評価に Hisada (1994)<sup>2.13)</sup> によってまとめられた手順を用いる。Hisada の方法は、漸近解法 (Asymptotic solution method) と呼ばれる手法<sup>2.13), 2.14)</sup> に分類されるもので、波数の大きい領域で厳密な解に漸近的に一致する解析的な積分の可能な近似解 (漸近解) を用いて無限積分を効率化することを特徴とする。漸近解

---

<sup>注3</sup> 「波長の逆数に  $2\pi$  かけた値」というと無駄に複雑な定義に思えるかもしれないが、これは振動論で角周波数 (周期の逆数に  $2\pi$  かけた値) を多用するのと同じである。時間軸に関するフーリエ変換から角周波数が現れるのと同様、空間軸に対するフーリエ変換からは波数が現れるので、理論的 (数学的) には波長よりも波数を使った方が便利である。

の無限積分は解析的に評価できるので、厳密解と漸近解の誤差が無視できない波数の比較の小さい区間のみを数値積分で評価し、厳密解と漸近解がほぼ一致する十分大きい波数の区間については漸近解の解析的な積分を用いることで、数値積分の評価範囲を有限区間に収めることができる。

波数の小さい区間で必要となる数値積分について、Hisada (1994)は、特に具体的な方法を指定していない。この数値積分について、本研究では、被積分関数に含まれる Bessel 関数の零点ごとに積分区間（波数の小さい区間）を分割し、分割された小区間について適応 Gauss-Kronrod 求積<sup>2.15)</sup>（標準的な数値積分ライブラリである QUADPACK<sup>2.16)</sup>で採用されている適応数値積分法、ここでは許容相対誤差 $1.5 \times 10^{-8}$ として適応数値積分のアルゴリズムを利用)を実施した結果の合計として評価する。

## (2) 剛性行列の評価法の詳細（容積法）

剛性行列の評価の対象となるのは連結されない群杭とフーチング群であり、上部構造物は評価しない(図 2.1, 図 2.3 参照)ので、全評価点が構造物と地盤の境界面上に位置する。(2.5)式の表現で書くと、次の部分だけが評価の対象となる。

$$[\mathbf{S}_{bcc} + \mathbf{S}_{scc}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+C}) \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

(2.24)式において、 $\mathbf{S}_{bcc}$ は群杭の剛性行列から成り、 $\mathbf{S}_{scc}$ は群杭上の評価点とフーチング底面の評価点に対する地盤の剛性行列から成る。剛梁やフーチング（剛板）は、評価点の多点拘束条件<sup>例えば 2.17)</sup>により表現するため、剛性行列には現れない。(2.24)式に現れている評価点の内、群杭と地盤の境界上の点を $\mathbf{r}_{B+1}, \mathbf{r}_{B+2}, \dots, \mathbf{r}_{B+P}$ 、フーチング群と地盤の境界上の点を $\mathbf{r}_{B+P+1}, \mathbf{r}_{B+P+2}, \dots, \mathbf{r}_{B+C}$ とすると、(2.24)式は、次のように群杭に関する部分とフーチング群に関する部分、そして両者の相互作用に関する部分に分けて書くことができる。

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{bpp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{spp} & \mathbf{S}_{spf} \\ \mathbf{S}_{sfp} & \mathbf{S}_{sff} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+P}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+P+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{B+C}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+P}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+P+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{B+C}) \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

ここに、(2.25)式左辺の行列と(2.24)式左辺の行列の対応は以下の通りである。

$$\mathbf{S}_{bcc} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{bpp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{S}_{scc} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{spp} & \mathbf{S}_{spf} \\ \mathbf{S}_{sfp} & \mathbf{S}_{sff} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

群杭の剛性行列 $\mathbf{S}_{bpp}$ は、前述の通り構造力学の既往の知見より求めることができる。本研究

では、有限要素法を用いて定める。鉛直方向載荷時には棒（ロッド）要素、水平方向載荷時には梁要素を用いる。地盤の剛性行列 $\mathbf{S}_{bcc}$ は、2.2.2で述べたように、グリーン関数の積分によって影響係数を求め、それを並べた柔性行列の逆行列を計算することにより求まる。しかし、(2.27)式をそのまま計算しようとする、杭によって置換された部分を取り除いた地盤の柔性を評価する必要が生じる。この評価には、前述の単純な杭の離散化方法（図 2.6 参照）を用いることはできない。より複雑な離散化モデルが必要となる。これを回避するため、杭によって置換された土柱の剛性行列を $\mathbf{S}'_{spp}$ として、次の剛性行列を考える。

$$\mathbf{S}'_{bcc} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{bpps} - \mathbf{S}'_{spps} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (2.29)$$

$$\mathbf{S}'_{scc} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{spps} + \mathbf{S}'_{spps} & \mathbf{S}_{spsf} \\ \hline \mathbf{S}_{sfp} & \mathbf{S}_{sff} \end{array} \right] \quad (2.30)$$

このような $\mathbf{S}'_{bcc}$ 、 $\mathbf{S}'_{scc}$ を定義すると、 $\mathbf{S}_{bcc}$ 、 $\mathbf{S}_{scc}$ との比較より、 $\mathbf{S}'_{bcc} + \mathbf{S}'_{scc} = \mathbf{S}_{bcc} + \mathbf{S}_{scc}$ であるので、全体系の剛性行列として $\mathbf{S}_{bcc} + \mathbf{S}_{scc}$ の代わりに $\mathbf{S}'_{bcc} + \mathbf{S}'_{scc}$ を用いることができる。 $\mathbf{S}'_{scc}$ は、杭部分の土柱を取り除いた地盤の剛性行列に土柱の剛性行列 $\mathbf{S}'_{spp}$ が足された形になっているので、結果として自由地盤（欠損や構造物の埋め込みの無い無垢の地盤）の剛性行列となっており、図 2.6 に示した離散化に基づいて比較的簡単に評価可能である。 $\mathbf{S}_{bpps} - \mathbf{S}'_{spps}$ の評価は、有限要素法で剛性行列を計算する際に、梁要素もしくは棒要素の剛性として、杭の剛性から土柱の剛性を差し引いた剛性を用いることで求めること可能であり、 $\mathbf{S}'_{bcc}$ を $\mathbf{S}_{bcc}$ の代わりに用いても計算の手間が増えることは無い。したがって、全体系の剛性行列として $\mathbf{S}_{bcc} + \mathbf{S}_{scc}$ の代わりに $\mathbf{S}'_{bcc} + \mathbf{S}'_{scc}$ を用いることで、剛性行列を求めるための計算を効率化できる。この方法は、Lysmer (1973)<sup>2,18)</sup>によって提案されたもので、容積法あるいはフレキシブルボリューム法と呼ばれている。本研究では、この容積法を用いて系の剛性行列を評価する。

2.2.4 本研究における精算解法の全体フロー

精算解法では、2.2.2, 2.2.3 で説明した方法に基づいて系の剛性行列を評価し、それを用いて系の力の釣合いを解いて、異種基礎各部の変位や負担荷重を求める。この評価のフローをまとめると、表 2.2 のようになる。同表の評価ステップの順に評価を進める。グリーン関数の積分により影響係数が求まり、それを並べた柔性行列の逆行列と有限要素法により別途求めた群杭の剛性行列を足し合わせることで全体系の剛性行列が求まるので、それを用いて所要の変位や荷重を計算する。

地盤の柔性行列を評価する際（ステップ1～3）には、膨大な数のグリーン関数の評価が必要であり、それほど要素数（杭やフーチングの数）が多くない場合でも、計算量が大きくなりがちである。また地盤の柔性行列および剛性行列は一般にフルマトリクスになる（非対角成分が疎にならない）ので、逆行列を求める計算（ステップ3）や、連立方程式の数値解を求める計算（ステップ4）の計算負荷も高い。このような計算を回避できる簡易法が提案できれば、その有用性は高い。

表 2.2 精算解法における評価の対象と方法

評価ステップ	評価対象	評価方法
1	グリーン関数	Mindlin 解（半無限弾性地盤）, 波数積分法（多層地盤）
2	影響係数	グリーン関数の数値積分
3	剛性行列	影響係数を並べた柔性行列の逆行列（地盤の剛性行列） + 群杭の剛性行列
4	変位, 負担荷重など	力の釣合い方程式

第2章の参考文献

- 2.1) 成田修英, 田村修次:「半無限弾性地盤における群杭とフーチング群の間の静的相互作用の簡易評価法」, 日本建築学会構造系論文集, 第87巻, 第795号, pp. 435-444, 2022, DOI: 10.3130/aijs.87.435
- 2.2) MARTIN, H. C. 著, 吉識雅夫 監訳:「マトリックス法による構造力学の解法」, 培風館, 1967
- 2.3) 成田修英, 保井美敏, 金子治:「杭基礎と直接基礎を併用した異種基礎のねじれ応答が建物の地震時慣性力に与える影響」, 日本建築学会構造系論文集, 第83巻, 第743号, pp. 101-109, 2018, DOI: 10.3130/aijs.83.101
- 2.4) 渡辺和博, 佐原守, 西山高士, 鈴木直子:「地下階を有する異種基礎の水平挙動」, 大林組技術研究所報, No. 82, 記事番号 39, 2018
- 2.5) 西尾博人, 長尾俊昌, 真島正人:「異種基礎建物のねじれ挙動に関する研究 -杭頭モーメントの簡便な評価法-」, 大成建設技術センター報, 第36号, pp. 14-1-14-4, 2003
- 2.6) WONG, H. L. and LUCO, J. E. : "Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape", International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, pp. 579-587, 1976, DOI: 10.1002/eqe.4290040606
- 2.7) 北村泰寿, 桜井春輔:「剛基礎底面の複素剛性に関する一解法」, 土木学会論文報告集, 第290号, pp. 43-52, 1979
- 2.8) 長谷川正幸, 中井正一:「杭基礎のインピーダンス関数に基いた群杭効率の研究」, 日本建築学会構造系論文集 第417号, pp. 133-145, 1990, DOI: 10.3130/aijsx.417.0\_133
- 2.9) FUNG, Y. C. 著, 大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀生 共訳:「固体の力学/理論」, 培風館, pp. 185-236, 1970
- 2.10) 斎藤正徳:「地震波動論」, 東京大学出版会, pp. 122-138, 2009
- 2.11) 日本建築学会:「地盤震動 -現象と理論-」, 日本建築学会, pp. 84-91, 2005
- 2.12) MINDLIN, R. D. : "Force at a point in the interior of a semi-infinite solid", Journal of Applied Physics, Vol.7, pp. 195-202, 1936, DOI: 10.1063/1.1745385
- 2.13) HISADA, Y. : "An efficient method for computing Green's function for a layered half-space with sources and receivers at close depth", Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 74, No. 5, pp. 1456-1472, 1994, DOI: 10.1785/BSSA0840051456
- 2.14) LUCO, J. E. and APSEL, R. J. : "On the Green's functions for a layered half-space, part 1", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 73, No. 4, pp. 909-929, 1983, DOI: 10.1785/BSSA0730040909
- 2.15) KRONROD, A. S. : "Nodes and weights of quadrature formulas", Sixteen-place tables, New York: Consultants Bureau (Authorized translation from the Russian), 1965
- 2.16) QUADPACK INDUSTRIES, S. A.: "Quadpack", <https://www.quadpack.com/> (参照)

## 第2章 検討対象に対するアプローチおよび検討結果を数値的に検証するための方法

2021-12-28)

- 2.17) 非線形 CAE 協会 監修, 岸正彦 著:「構造解析のための有限要素法実践ハンドブック」, 森北出版, pp. 43-48, 2006
- 2.18) LYSMER, J. : "Analytical procedures in soil dynamics", Report No. EERC 78-29, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, pp. 23-30, 1973
- 2.19) 日本建築学会:「入門・建物と地盤との動的相互作用」, 日本建築学会, pp. 118-129, 1996

## 第3章 フーティング群のばねの簡易評価

### 第3章 フーチング群のばねの簡易評価

#### 3.1 概要

この章の内容は、既発表論文<sup>3.1),3.2)</sup>の内容を再構成し、一部説明を追加したものである。第1章、第2章でも述べた通り、本研究では、整形なフーチング群を検討の対象とする(図3.1)。一部の数値的検証では、 $x$ 方向と $y$ 方向でフーチング間隔やフーチングの並んでいる数が異なるケースも扱うが、基本は同図の通り、フーチング間隔にも並んでいる数にも異方性の無いフーチング群を検討の対象とする。以下、3.2~3.4でフーチング群のばねの簡易評価法の理論的な導出と簡易評価法の特徴に関する理論的検討、3.5でその理論に対する数値的検証を行う。

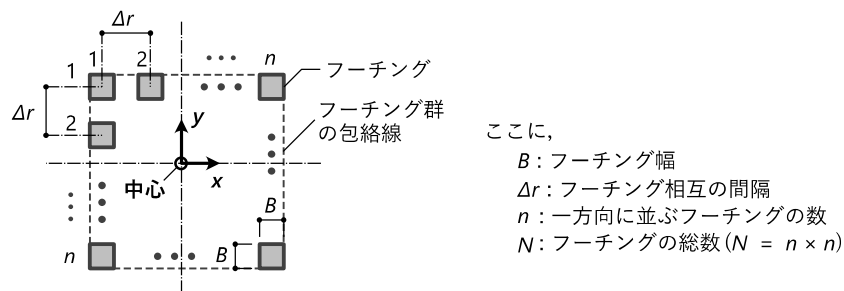


図 3.1 検討の対象とする整形なフーチング群

なお、以下の理論的検討を説明する模式図において、载荷方向が常に鉛直に描かれているが、これは図的な表現として、地表面への载荷や地表面上のフーチングへの载荷の図として、鉛直方向の载荷が書き易いから、図としてはそのような表現をしているだけで、鉛直载荷だけを取り扱っていることを意図するものではない。以下の理論は、载荷方向の区別なく成立する。

### 第3章 フーチング群のばねの簡易評価

#### 3.2 フーチング群における部材間相互作用の定量的な定義

第3章の理論的検討では、図3.1の整形な $N$ 個の剛フーチング間の相互作用を各フーチング中央位置の評価点間の影響係数を用いて表す（数値的に相互作用を評価する場合には、2.2.2で説明した通り、各フーチングをより細かい要素に分割して影響係数を考えるが、理論的検討においてはフーチングと評価点是一对一とする）。各フーチング間の影響係数を並べたフーチング群の柔性行列と、その逆行列によって定義されるフーチング群の剛性行列を以下のようにおくと、

$$\mathbf{G}_f := \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{S}_f := \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N1} & s_{N2} & \cdots & s_{NN} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_f^{-1} \quad (3.2)$$

フーチング群のばね $S_f$ と、相互作用を無視したフーチング群のばね $S'_f$ 、相互作用係数 $\xi_f$ を次のように定義できる。

$$\xi_f := \frac{S_f}{S'_f} \quad (3.3)$$

$$S_f := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N s_{ij} \quad (3.4)$$

$$S'_f := \sum_{i=1}^N s_{ii} \quad (3.5)$$

#### 3.3 簡易評価式

##### 3.3.1 影響係数法

本研究で提案する新しい簡易評価法は、群杭係数の簡易評価の分野で用いられている影響係数法<sup>3.3), 3.4)</sup>の考え方に基づくものである。群杭係数の簡易評価における影響係数法とは、「相互作用によるばねの低下率は、相互作用による変位の増加率の逆数に近似する」と仮定して群杭係数を評価するもので、この仮定を用いれば、逆行列の計算を省略し柔性行列から直接ばねの低下率が評価できる。(3.1)～(3.5)式の表現を用いれば、影響係数法の仮定は次の通りに定式化できる。

$$\frac{\sum_{j=1}^N s_{ij}}{s_{ii}} \approx \frac{g'_{ii}}{\sum_{j=1}^N g'_{ij}} \quad (3.6)$$

ただし、ここで用いる影響係数は、影響係数法の考え方を個別のフーチングにも適用し、フーチング底面の応力分布を一定としたときの影響係数とする。これをフーチングが剛な場合の影響係数 $g_{ij}$ と区別して $g'_{ij}$ と書く。

### 3.3.2 本研究で提案する新しい簡易評価式

まず、フーチング群中央位置のフーチングに働く相互作用で、フーチング群全体の相互作用が近似できると仮定する。このとき、フーチング群中央位置のフーチング番号を $c$ とすると、次式が成り立つ。

$$\xi_f \approx \frac{\sum_{j=1}^N s_{cj}}{s_{cc}} \quad (3.7)$$

これと影響係数法 ((3.6)式) を組み合わせると、次の関係が得られる。

$$\xi_f \approx \frac{g'_{cc}}{\sum_{j=1}^N g'_{cj}} = \frac{g'_{cc}}{g'_{cc} + \sum_{j \neq c} g'_{cj}} \quad (3.8)$$

ここで、フーチング群中央位置を評価点とし点 $(x, y)$ を載荷点とした地盤のグリーン関数を $g_c(x, y)$ とすると、離散和と積分の近似関係 (図 3.2 参照) より、次の関係が成り立つ。

$$\sum_{j \neq c} g'_{cj} \approx \frac{1}{\Delta r^2} \left( \int_{-n\Delta r}^{n\Delta r} \int_{-n\Delta r}^{n\Delta r} g_c(x, y) dx dy - \int_{-\Delta r/2}^{\Delta r/2} \int_{-\Delta r/2}^{\Delta r/2} g_c(x, y) dx dy \right) \quad (3.9)$$

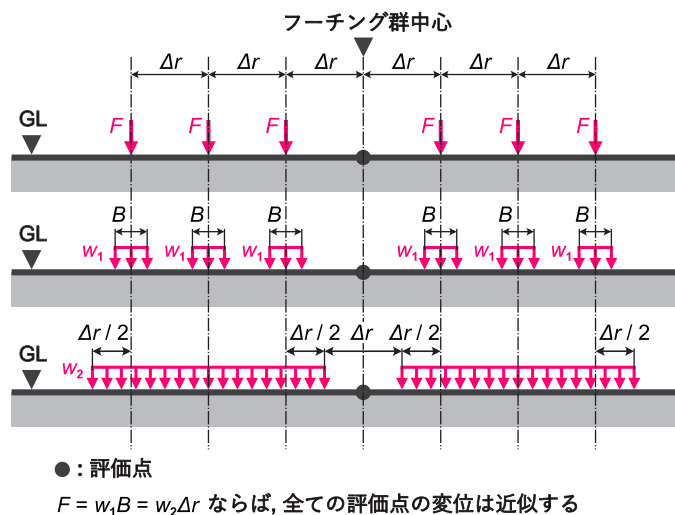


図 3.2 離散的な荷重の和と分布荷重の積分の近似関係

### 第3章 フーチング群のばねの簡易評価

一方、幅 $B$ の剛なフーチングのばねを $s(B)$ とし、幅 $B$ のフーチング底面で応力分布一定とした場合のばねを $\alpha_c s(B)$ （ここに、 $\alpha_c$ は剛なフーチングのばねに対する比例定数）とすると、次式の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{\alpha_c s(B)} = g'_{cc} \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\alpha_c s(n\Delta r)} = \frac{1}{N\Delta r^2} \int_{-n\Delta r}^{n\Delta r} \int_{-n\Delta r}^{n\Delta r} g_c(x, y) dx dy \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{\alpha_c s(\Delta r)} = \frac{1}{\Delta r^2} \int_{-\Delta r/2}^{\Delta r/2} \int_{-\Delta r/2}^{\Delta r/2} g_c(x, y) dx dy \quad (3.12)$$

(3.11), (3.12)式を(3.9)式に代入すると、次の関係が得られるので、

$$\sum_{j \neq c} g'_{cj} \simeq \frac{N}{\alpha_c s(n\Delta r)} - \frac{1}{\alpha_c s(\Delta r)} \quad (3.13)$$

これと(3.10)式を(3.8)式に代入して整理すると、以下の通りの相互作用係数の評価式が導ける。

$$\xi_f \simeq \frac{1}{1 + I(n, \Delta r, B)} \quad (3.14)$$

$$I(n, \Delta r, B) := \frac{Ns(B)}{s(n\Delta r)} - \frac{s(B)}{s(\Delta r)} \quad (3.15)$$

これが、本件研究で提案する相互作用係数の簡易評価式である。この式を使えば、精算解法の手順に則って膨大な数のグリーン関数の計算を行わなくても、第一章で紹介した剛なフーチングのばねの式(表 1.1)式により $s(B)$ ,  $s(\Delta r)$ ,  $s(n\Delta r)$ を計算して式に代入するだけで、相互作用係数の評価ができる。多層地盤の場合も、Steinbrenner の多層近似 (1.2.2 参照) に基づいて $s(B)$ ,  $s(\Delta r)$ ,  $s(n\Delta r)$ を計算すれば良い。上記の簡易式に基づく相互作用係数の推定値を、以下 $\hat{\xi}_f$ と書く。

$$\hat{\xi}_f := \frac{1}{1 + I(n, \Delta r, B)} \simeq \xi_f \quad (3.16)$$

なお、(3.8)式と(3.14)式の比較より、 $I(n, \Delta r, B)$ は次式のようにも書ける。

$$I(n, \Delta r, B) \simeq \frac{1}{g'_{cc}} \sum_{j \neq c} g'_{cj} \quad (3.17)$$

(3.17)式より、 $I(n, \Delta r, B)$ は $g'_{cc}$ で正規化した $g'_{cc}$ 以外の $g'_{cj}$ の総和に近似する。このことから、以下、 $I(n, \Delta r, B)$ を「累積影響係数」と呼ぶ。

3.3.3 簡易評価式導出手順の説明の補足

(3.8)式において、わざわざ $\sum_{j=1}^N g'_{cj}$ を $g'_{cc} + \sum_{j \neq c} g'_{cj}$ と書き換えたことに疑問を持つ読者も居るかもしれないので補足する。これは、 $g'_{cj}$  ( $j = 1, \dots, N$ )の中で、 $g'_{cc}$ のみ図 3.2 の近似が成り立たないことに対する措置である。評価点と載荷点が一致する場合、地盤のグリーン関数は無限大に発散するため、積分領域に載荷点が含まれる場合には、有限値の関数に対する積分の法則は成り立たない。 $g_c(x, y)$ の積分と $g'_{cc}$ の関係は、数式で表すと以下のようなので、

$$g'_{cc} = \frac{1}{B^2} \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-B/2}^{B/2} g_c(x, y) dx dy = \frac{1}{\alpha_c s(B)} \quad (3.18)$$

$$g'_{cc} \neq \frac{1}{\Delta r^2} \int_{-\Delta r/2}^{\Delta r/2} \int_{-\Delta r/2}^{\Delta r/2} g_c(x, y) dx dy = \frac{1}{\alpha_c s(\Delta r)} \quad (3.19)$$

次式の両辺は一致しないだけでなく近似もしない。

$$\sum_{j=1}^N g'_{cj} \neq \frac{1}{\Delta r^2} \int_{-n\Delta r}^{n\Delta r} \int_{-n\Delta r}^{n\Delta r} g_c(x, y) dx dy = \frac{N}{\alpha_c s(n\Delta r)} \quad (3.20)$$

よって、 $g'_{cc}$ だけは積分による近似の対象とはせず、分けて考える必要がある。

評価点と載荷領域が離れていれば、領域内で荷重が離散的に分布しているか連続的に分布しているかは問題にならない(図 3.2 の通りの近似が成り立つ)が、評価点と載荷領域が重なっている場合には、荷重の分布範囲や分布形状に注意を要するということである。

3.4 簡易評価式の性質に関する理論的検討

3.4.1 多層地盤における単独のフーチングのばねの性質

簡易評価式 ((3.14), (3.15)式) の備えている性質について理論的な検討を加える前準備として、多層地盤における単独のフーチングのばねの性質について説明する。まず、半無限弾性体上のフーチングのばねは次式の通りに表せる (表 1.1 参照) ので、

$$s(B) = \alpha_x \mu B \tag{3.21}$$

ここに、 $\alpha_x$ は荷重方向および地盤のポアソン比によって定まる比例定数を表す。

これを用いて、多層地盤上のフーチングに対する「等価」なせん断弾性係数が次のように定義できる。

$$\mu_{eq}(B) := \frac{s(B)}{\alpha_x B} \tag{3.22}$$

この場合の「等価」せん断弾性係数とは、「半無限弾性地盤上のフーチングのばねの式に代入した結果が多層地盤のばねの値と一致するせん断弾性係数」という意味での「等価」である。この等価せん断弾性係数を用いると、累積影響係数は次のようにも書ける。

$$I(n, \Delta r, B) = \left( n \frac{\mu_{eq}(B)}{\mu_{eq}(n\Delta r)} - \frac{\mu_{eq}(B)}{\mu_{eq}(\Delta r)} \right) \frac{B}{\Delta r} \tag{3.23}$$

一方、地盤 (弾性連続体) への荷重については、荷重範囲が大きくなるほど、より広くより深い範囲に応力が分布することが知られている。図 3.3 は、その模式図である。同図から分かるように、小さいフーチングの挙動には浅い地層しか寄与しないし、大きいフーチングほど深い地層の特性が影響する。したがって、等価せん断弾性係数について、次の関係が成り立つことが仮定できる。

$$\mu_{eq}(B | B \ll z_1) \simeq \mu_1 \tag{3.24}$$

$$\mu_{eq}(B | B \gg z_{m-1}) \simeq \mu_m \tag{3.25}$$

ここに、 $f(x | A)$ は $x$ を引数とする関数 $f$ において引数 $x$ が条件 $A$ を満たす場合の値、 $\mu_i$ は $i$ 番目の地層におけるせん断弾性係数、 $m$ は最下層の層番号を表す。

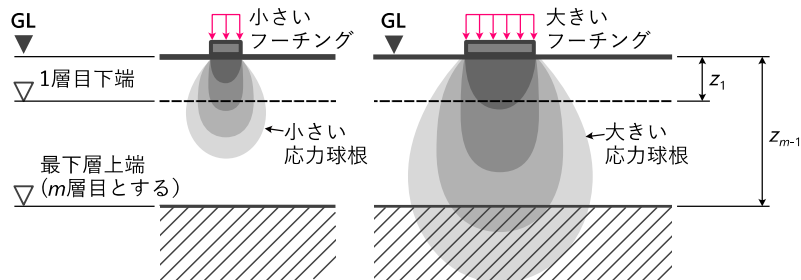


図 3.3 フーチングの大きさと応力の分布範囲の関係

以下の議論の一部では、(3.24)、(3.25)式の仮定が成り立つことを前提としている。この仮定について、2層地盤では、数値的に確からしいことを確認済みである (3.5.3 に示す)。

### 3.4.2 相互作用係数の境界条件

相互作用係数について、フーチング間隔が最も狭い場合の境界条件と、フーチング間隔が広い極限 ( $\Delta r \rightarrow \infty$ ) の境界条件が設定できる。フーチング間隔が最も狭い場合の境界条件とは、フーチング相互が互いに密着している場合 (定量的には、 $\Delta r = B$ ) の条件である。これよりフーチング間隔が狭くなると、フーチング同士が重なってしまう状況になり、物理的に有り得ない。 $\Delta r \rightarrow \infty$ の極限と $\Delta r = B$ のどちらの境界においても、簡易評価式 ((3.15)、(3.16)式) による相互作用係数 $\xi_f$ が境界条件を満たすことを示すことができる。

$\Delta r \rightarrow \infty$ の極限では、フーチング間で相互作用は働かないので、 $\xi_f = 1$ である。

$$\xi_f(\Delta r \rightarrow \infty) = 1 \quad (3.26)$$

一方、簡易評価式においては、以下の通りである。まず累積影響係数が次式のようになる。

$$I(n, \Delta r \rightarrow \infty, B) = \left( n \frac{\mu_{eq}(B)}{\mu_{eq}(n\Delta r | \Delta r \rightarrow \infty)} - \frac{\mu_{eq}(B)}{\mu_{eq}(\Delta r \rightarrow \infty)} \right) \lim_{\Delta r \rightarrow \infty} \left( \frac{B}{\Delta r} \right) \quad (3.27)$$

(3.27)式右辺において、 $\mu_{eq}(n\Delta r | \Delta r \rightarrow \infty)$ 、 $\mu_{eq}(\Delta r \rightarrow \infty)$ は、等価せん断弾性係数の仮定

((3.25)式)を受け入れれば $\mu_m$ 、受け入れなくとも $\min(\mu_i) \leq \mu_{eq} \leq \max(\mu_i)$  ( $i = 1, \dots, m$ )であり、どちらにしても非零の有限値となる。よって(3.27)式右辺の1項目の括弧内は有限である。一方、(3.27)式右辺の2項目は、 $\lim_{\Delta r \rightarrow \infty} (B/\Delta r) = 0$ なので、次式が成り立つ。

$$I(n, \Delta r \rightarrow \infty, B) = 0 \quad (3.28)$$

よって、(3.16)式より次式が成り立つので、簡易評価式は $\Delta r \rightarrow \infty$ の境界条件を満たす。

$$\xi_f(\Delta r \rightarrow \infty) = 1 \quad (3.29)$$

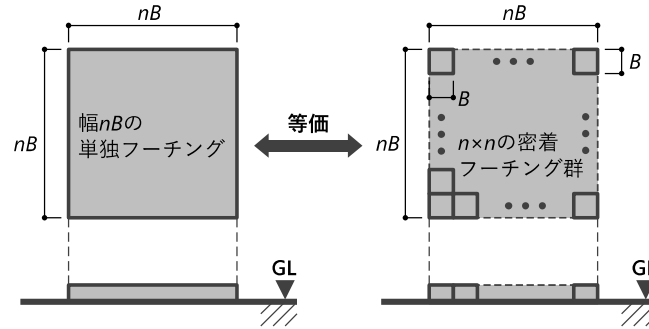


図 3.4 単独フーチングと密着したフーチング群の等価性 (成田ら (2018)<sup>3,1)</sup>, 一部修正)

フーチング間隔が狭い極限 ( $\Delta r = B$ ) では、幅  $nB$  の巨大な単独のフーチングと、 $n \times n$  個のフーチング群は、フーチングが剛かつフーチング同士は相互に剛な梁で連結されているという条件下で等価になる (図 3.4)。したがって、相互作用係数の定義 ((3.3)式) より、次の境界条件が成り立つ。

$$\xi_f(\Delta r = B) = \frac{s(nB)}{Ns(B)} \quad (3.30)$$

相互作用係数の簡易評価式 ((3.16)式) に  $\Delta r = B$  を代入することで、簡易評価式が上記の境界条件を満たすことは容易に確かめられる (次式)。

$$\xi_f(\Delta r = B) = \left( 1 + \left( \frac{Ns(B)}{s(nB)} - \frac{s(B)}{s(B)} \right) \right)^{-1} = \frac{s(nB)}{Ns(B)} \quad (3.31)$$

### 3.4.3 半無限弾性地盤の累積影響係数

#### (1) 半無限弾性地盤の累積影響係数と多層地盤の累積影響係数の関係

半無限弾性地盤ではフーチング幅によらず等価せん断弾性係数  $\mu_{eq}(B) = \mu$  で一定なので、等価せん断弾性係数を用いた累積影響係数の定義式 ((3.23)式) より次式が成り立つ。

$$I(n, \Delta r, B | \mu_{eq} = \text{const.}) = \left( n \frac{\mu}{\mu} - \frac{\mu}{\mu} \right) \frac{B}{\Delta r} = (n - 1) \frac{B}{\Delta r} \quad (3.32)$$

(3.32)式より、半無限弾性地盤では、単独のフーチングのばねすら計算せずに  $n, \Delta r, B$  のみから累積影響係数を決定でき、非常に簡便に相互作用を評価できる。以下、(3.32)式右辺を  $I_1$  とする。

$$I_1 := (n - 1) \frac{B}{\Delta r} \quad (3.33)$$

等価せん断弾性がフーチング幅に対して単調増加ならば  $I(n, \Delta r, B) < I_1$  であり、単調減少ならば  $I(n, \Delta r, B) > I_1$  である。以下にその証明を示す。まず、等価せん断弾性係数がフーチ

ング幅に対して単調増加ならば  $\mu_{eq}(B) < \mu_{eq}(\Delta r) < \mu_{eq}(n\Delta r)$  であるので、(3.23)式より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} I(n, \Delta r, B) &< \left( n \frac{\mu_{eq}(B)}{\mu_{eq}(\Delta r)} - \frac{\mu_{eq}(B)}{\mu_{eq}(\Delta r)} \right) \frac{B}{\Delta r} = (n-1) \frac{\mu_{eq}(B)}{\mu_{eq}(\Delta r)} \frac{B}{\Delta r} \\ &< (n-1) \frac{\mu_{eq}(B)}{\mu_{eq}(B)} \frac{B}{\Delta r} = I_1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

よって、 $I(n, \Delta r, B) < I_1$  となる（つまり、相互作用の影響が半無限弾性地盤よりも弱くなる）。等価せん断弾性係数がフーチング幅に対して単調減少の場合には、単調増加の場合と大小関係のみが逆転した同様の議論により、 $I(n, \Delta r, B) > I_1$  となる。

一般に、深い地層ほど剛性が高い傾向がある<sup>例えば3.5)</sup>ので、等価せん断弾性係数が(3.24)、(3.25)式の仮定を満たすのであれば、単調増加となり  $I(n, \Delta r, B) < I_1$  となる場合が多いと考えられる。このことから、 $I_1$  をフーチング群の相互作用評価における一次的な判断の指標として利用することが可能であろう。

## (2) 半無限弾性地盤の累積影響係数と境界条件

半無限弾性地盤では、影響係数法の仮定（(3.8)式）と相互作用係数に関する境界条件、および半無限弾性地盤におけるフーチングのばねの性質（(3.21)式）と影響係数の性質より、離散和と積分の近似関係（図 3.2 参照）を使わずに、累積影響係数の式（(3.33)式）を導くことが可能である。得られる累積影響係数の形はすでに説明した(3.33)式の通りで変わらないため、アプローチを変えて再度累積影響係数を導くことに実用的な意味は無いが、相互作用係数の評価に境界条件の概念を用いることの有効性を示す例として、以下に離散和と積分の近似関係を使わない累積影響係数の式の誘導を示す。

まず半無限弾性地盤では、フーチングのばねは  $s(B) = \alpha_x \mu B$ （(3.21)式）なので、フーチング同士が密着した条件の相互作用係数は、(3.30)式より以下の通りになる。

$$\xi_f(\Delta r = B) = \frac{\alpha_x \mu n B}{N \alpha_x \mu B} = \frac{1}{n} \quad (\because N = n^2) \quad (3.35)$$

次に中央フーチングに対する影響係数  $g'_{cj}$  について考える。フーチング  $c$  と  $j$  の間の距離を  $r_{cj}$  とすると、両者の間の影響係数は  $g'_{cj}$  は、半無限弾性地盤では  $r_{cj}$  に近似的に反比例する（次式）。

$$g'_{cj} \approx \frac{\beta_x}{\mu r_{cj}} \quad (3.36)$$

ここに、 $\beta_x$  は荷重方向と地盤のポアソン比により定まる定数を表す。

上の近似は、半無限弾性地盤のグリーン関数（Mindlin 解、(2.10)、(2.11)式）より導くことができる。Mindlin 解の式の形から、 $g'_{cj}$  について概ね(3.36)式のような近似が成り立つであろうことは、直感的にも予測できるはずである。同式の厳密な証明は第5章(5.2)で行う。

同式において、フーチング間隔 $\Delta r = 1$ であるときの $r_{cj}$ を $\bar{r}_{cj}$ とし、 $r_{cj} = \Delta r \bar{r}_{cj}$ とすると、次式が成り立つ。

$$g'_{cj} \simeq \frac{\beta_x}{\mu \Delta r \bar{r}_{cj}} \quad (3.37)$$

よって、 $g'_{cc}$ 以外の $g'_{cj}$ の総和は次のように書ける。

$$\sum_{j \neq c} g'_{cj} \simeq \frac{\beta_x}{\mu \Delta r} \sum_{j \neq c} \frac{1}{\bar{r}_{cj}} \quad (3.38)$$

一方、 $g'_{cc}$ はフーチングの柔性とばねの関係 ((3.18), (3.21)式) より、

$$g'_{cc} = \alpha_c \alpha_x \mu B \quad (3.39)$$

なので、累積影響係数と影響係数の関係 ((3.17)式) より、次式が成り立つ。

$$I(n, \Delta r, B | \mu_{eq} = \text{const.}) \simeq \frac{1}{g'_{cc}} \sum_{j \neq c} g'_{cj} \simeq c_1 \frac{B}{\Delta r} \quad (3.40)$$

$$c_1 := \frac{\beta_x}{\alpha_c \alpha_x} \sum_{j \neq c} \frac{1}{\bar{r}_{cj}} \quad (3.41)$$

ここで、 $\xi_f = 1/(1+I)$ なので、(3.40)式より次式が成り立つ。

$$\xi_f(\Delta r = B) \simeq \frac{1}{1 + c_1 \frac{B}{\Delta r}} = \frac{1}{1 + c_1} \quad (3.42)$$

$c_1$ を含む相互作用係数の式も境界条件 ((3.35)式) は満たす必要があるので、(3.35)式と(3.42)式の比較より、 $c_1$ に関して次の近似が成り立つ。

$$c_1 \simeq n - 1 \quad (3.43)$$

これを(3.40)式右辺に代入すると、(3.32)式の右辺と同じ形の相互作用係数の式が得られる。

以上、初めに示したのとは別のアプローチから相互作用係数の簡易評価式を導いた。このアプローチでは、「 $c_1$ を含む相互作用係数の式も、相互作用係数に関する境界条件を満たす必要がある」ということのみ用いて、取り扱いの困難な複雑な形の $c_1$ の定義式 ((3.41)式) には全く触れずに、簡潔な形の近似式 ((3.43)式) を導くことに成功しており、相互作用係数の評価に境界条件の概念を用いることの有効性が分かる。

#### 3.4.4 理論的検討のまとめ

以上、理論的検討において、フーチング群の相互作用係数の簡易評価式を導き、それが  $\Delta r = B$  と  $\Delta r \rightarrow \infty$  における相互作用係数の境界条件を満たすことを示した。したがって、これらの極端な状況における簡易評価式の精度は担保されていると言える。 $\Delta r \rightarrow \infty$  まで実際に計算して簡易評価式の信頼性を検証することは不可能だが、 $\Delta r \rightarrow \infty$  の境界条件を満たすことより、検証の範囲外への外挿にもある程度信頼のおける手法になっていると考えられる。

また、半無限弾性地盤における累積影響係数（相互作用の強さ） $I_1$  と多層地盤の累積影響係数の関係についても示した。半無限弾性地盤の累積影響係数  $I_1$  は非常に簡便な計算（(3.32)式）によって求まる。多層地盤の累積影響係数と  $I_1$  の大小関係は、多層地盤の累積影響係数を計算すること無しに、ある程度判別可能であり、 $I_1$  をフーチング群の相互作用評価における一次的な判断の指標として利用することが可能だと考えられる。

$I_1$  については、相互作用係数の境界条件を利用して導くことが可能であることも示した。このアプローチによる  $I_1$  の誘導では、累積影響係数（より求まる相互作用係数）が境界条件を満たす必要があるという事実のみに基づき、影響係数法の定義より定まる複雑な形の累積影響係数の式（(3.40), (3.41)式）から、(3.32)式の簡潔な形の  $I_1$  が導かれる。このことから、相互作用係数の評価に境界条件の概念を用いることの有効性が分かる。

3.5 数値的検証

3.5.1 正方形配置のフーチング群における簡易評価式と精算解法の比較

正方形配置とは、水平 2 方向で並んでいるフーチングの数およびフーチングの間隔が変わらないフーチング群の配置を意味する。フーチングの数は $3 \times 3$ と $12 \times 12$ の 2 ケース、フーチング幅は一律 2m とし、地盤は 2 層とする。地盤条件を 2 層としたのは、① 半無限弾性地盤 (1 層) とすると、累積影響係数の形が単純になり過ぎ ((3.33)式) 地盤条件の違いが簡易評価式の精度に与える影響が検証できないこと、② 3 層以上の多層地盤一般とすると、考えられる地盤条件のパターンが膨大になり、網羅的に検証するのが難しくなること、の 2 点が理由である。地盤条件は表 3.1 に示す 6 通りとする。地盤モデル 1 から 4 は 2 層目の剛性の方が高いモデルであり、1 層目の層厚が薄いか厚いか、1 層目と 2 層目の剛性のコントラストが弱い (モデル 1, 3) か強いかの組み合わせで、4 通りの地盤モデルとしている。地盤モデル 5, 6 は 1 層目の地盤剛性が 2 層目よりも高い地盤モデルであり、剛性コントラストの大きい条件のみを検証することとして、1 層目の層厚の薄いモデル 5 と層厚の厚いモデル 6 で計算を実施する。地盤のポアソン比は、静的荷重に対する一般的な値として全層 0.3 を用いるケースと、極端な場合の検証として全層 0.49 を用いるケース、2 ケースとする。

表 3.1 正方配置フーチング群の検証計算のための地盤諸元

地盤モデル	$\mu_1$ (MN/m <sup>2</sup> )	$\mu_2$ (MN/m <sup>2</sup> )	$z_1$ (m)
1	18	45	1
2	18	180	1
3	18	45	5
4	18	180	5
5	180	18	1
6	180	18	5

ここに、 $\mu_i$  は  $i$  層目の地盤のせん断弾性係数、 $z_1$  は 1 層目の地層の下端深度を表す。

精算解では、各フーチングを $3 \times 3$ の要素に分割し、要素の中央に評価点を設定して、波数積分法に基づいてフーチング群の柔性行列を評価し、その逆行列をとることで、ばねの行列を求め(2.2 参照)、定義((3.3)~(3.5)式)に従って相互作用係数を計算する。その際、载荷要素内に変位を出力する評価点を含む場合には、精度確保のため、要素を更に $2 \times 2$ に分割して積分を実施する。各要素におけるグリーン関数の数値積分は Gauss 求積(積分点 $3 \times 3$ )を用いる。簡易評価式の計算は、相互作用係数の簡易評価式((3.14), (3.15)式)に代入する単独のフーチングのばね $s(B)$ ,  $s(\Delta r)$ ,  $s(n\Delta r)$ を、精算解法に基づいて求めるケースと Steinbrenner の多層近似(1.2.2 参照)に基づいて求めるケース、2 ケースで実施する。実用的には、簡易式に代入するばねは、Steinbrenner の多層近似を用いて簡易に求めることを想定しているが、その場合の簡易計算の誤差は、簡易評価式が用いた仮定および近似と精算解法との乖離による誤差に、Steinbrenner の多層近似の誤差が上乘せされたものとなる。ここでは、簡易評価式由来の誤差の程度を正確に把握するため、簡易評価式に代入するばねに、精算解に基づいて得られるばねを用いるケースの検証も行う。以下検証において、精算解法による相互作用係数を $\xi_f$ 、精算解法に基づくばねを簡易評価式に代入して得た相互作用係数を $\hat{\xi}_f$ 、Steinbrenner の多層近似に基づくばねを簡易評価式に代入して得た相互作用係数を $\xi'_f$ と書く。さらに簡易評価式の誤差率 $\varepsilon, \varepsilon'$ を以下のように定義する。

$$\varepsilon := \frac{\hat{\xi}_f - \xi_f}{\xi_f} \quad (3.44)$$

$$\varepsilon' := \frac{\xi'_f - \xi_f}{\xi_f} \quad (3.45)$$

図 3.5, 図 3.6 に、地盤のポアソン比 0.3 における検証計算の結果を簡易評価式と精算解と比較して示す。これらの図に示される全ケースにおいて、簡易評価式と精算解による結果は概ね一致している。鉛直载荷(図の左列)と水平载荷(図の右列)、フーチングの少ないケース(図 3.5)と多いケース(図 3.6)、1 層目と 2 層目のコントラストの小さいケース(地盤モデル 1, 3)と大きいケース(地盤モデル 2, 4, 5, 6)、2 層目の剛性の方が大きいケース(地盤モデル 1~4)と 1 層目の剛性の方が大きいケース(地盤モデル 5, 6)、いずれのケースでも簡易評価式と精算解は概ね一致する。

より詳細な誤差の分析のため、検証計算結果の誤差率を図 3.7, 図 3.8 に示す。これらの誤差率の絶対値は最大でも 10%以内に収まっており、簡易評価式の精度が確認できる。 $\Delta r$ の変化に対する誤差の推移に着目すると、全てのケースで、「 $\Delta r = B$ において誤差ゼロ、 $\Delta r$ が小さい領域では $\Delta r$ の増大に伴って誤差も増大するが、 $\Delta r$ が十分に大きい領域では誤差は減少傾向に転ずる」ような傾向を示している。この傾向は、簡易評価式が $\Delta r = B$ と $\Delta r \rightarrow \infty$ での境界条件を満たすことを反映したものと考えられる。

$\Delta r$ 以外の計算条件の違いと誤差率の関係は、複数の誤差要因が複合的に影響し合っているような傾向を示しており、複雑である。以下、その例を3つ示す。

- 1) 1 層目と 2 層目の剛性のコントラストの大きい地盤モデルの方が、全般的に誤差が大

### 第3章 フーチング群のばねの簡易評価

きい傾向があるが、一部の計算条件では誤差の大きさと地盤剛性のコントラストの大きさが逆転している（例えば、地盤モデル1（コントラスト小）の12×12 フーチング鉛直載荷の結果と地盤モデル2（コントラスト大）の12×12 フーチング鉛直載荷の結果など）。

- 2) 1層目の剛性が2層目の剛性よりも低い地盤モデル（モデル1, 2, 3, 4）では誤差率が負の値をとる（簡易評価式の相互作用係数の方が精算解よりも小さい）傾向があり、2層目の剛性の方が高い地盤モデル（モデル5, 6）では誤差率が正の値をとる（簡易評価式の相互作用係数の方が精算解よりも大きい）傾向が見られるが、一部の計算条件ではその傾向に反した結果が得られている（例えば地盤モデル1, 12×12 フーチング鉛直載荷など）。
- 3) 簡易評価式の近似の原理（図 3.2）から考えると、フーチングの数が少ないほど離散和と積分の違いが大きくなるはずなので、フーチングの数の少ない計算ケースの方が誤差が大きくなることが予想されるが、計算結果は必ずしもそうっていない。

以上より、1層目と2層目の剛性のバランスやフーチングの数が、誤差率の正負やその絶対値の大小に大きく影響することは確かだと考えられるが、全ての誤差要因の特定とそれが互いに影響し合うメカニズムの解明には更なる検討が必要である。これは今後の課題とする。

地盤のポアソン比0.3での誤差率（図 3.7）と0.49での誤差率（図 3.8）を比較すると、ポアソン比0.49の結果の方が誤差率が1割程度大きい傾向があるが、定性的な傾向は両者ほぼ変わらない。したがって、地盤のポアソン比は簡易評価式の精度には大きな影響を及ぼさないものと考えられる。

相互作用係数の簡易評価式（(3.14), (3.15)式）に代入する単独のフーチングのばねにSteinbrennerの多層近似に基づくものを用いた場合の誤差率を図 3.9 に示す。この場合、簡易評価式の誤差にSteinbrennerの多層近似の誤差が上乘せされるため、単独のフーチングのばねを精算解法に基づく手順で用いた場合よりも、誤差が大きい傾向にある。 $\mu_1 > \mu_2$ の地盤モデル5と6（同図(i), (j), (k), (l)）では、特に誤差が大きい。同様の現象はSteinbrennerの多層近似の適用性に関する既往の研究<sup>3.6), 3.7)</sup>でも報告されており、浅い地層の剛性が深い地層の剛性よりも高くなる地盤条件一般で成り立つ傾向と考えられるので、注意が必要である。一方、 $\mu_1 < \mu_2$ である地盤モデル1～4では、精算解に基づいて単独のフーチングのばねを求める場合に比べて誤差が大きい傾向はあるものの、最大で誤差率10%程度であり、実用に足る精度は確保できていると考えられる。

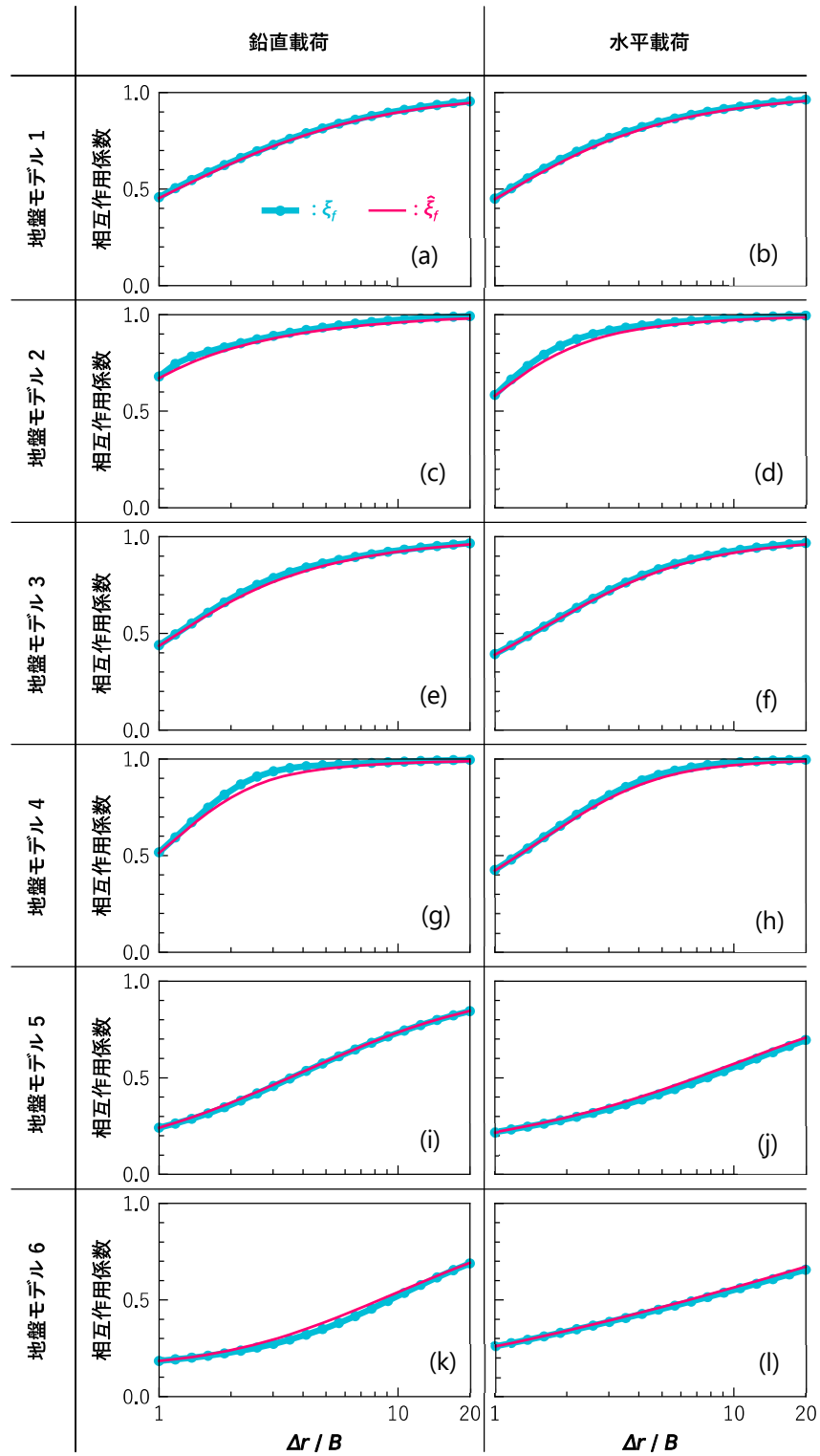


図 3.5 3x3 フーチング群の相互作用係数 (ポアソン比 0.3)

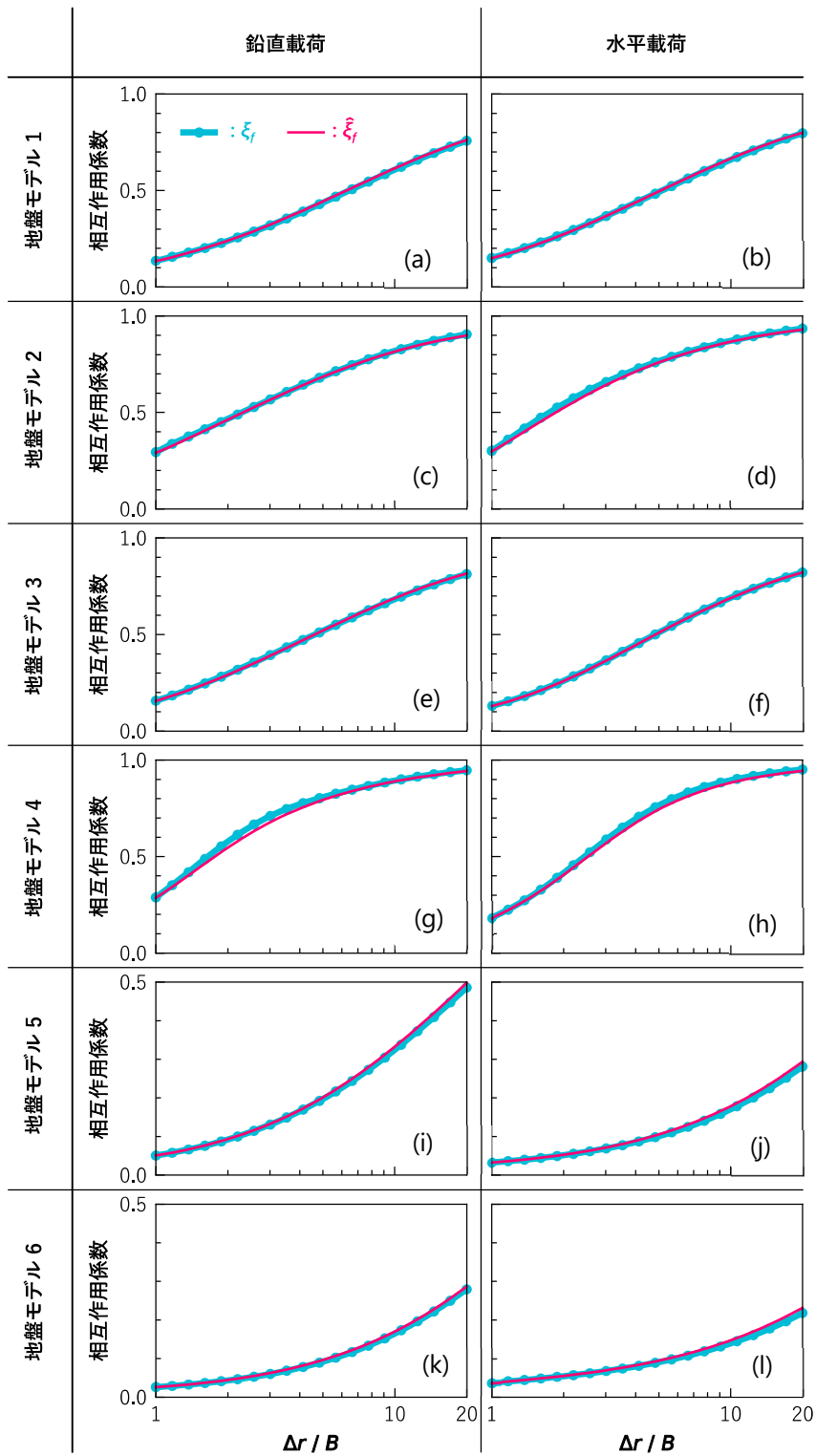


図 3.6 12x12 フーチング群の相互作用係数 (ポアソン比 0.3)

第3章 フーチング群のばねの簡易評価

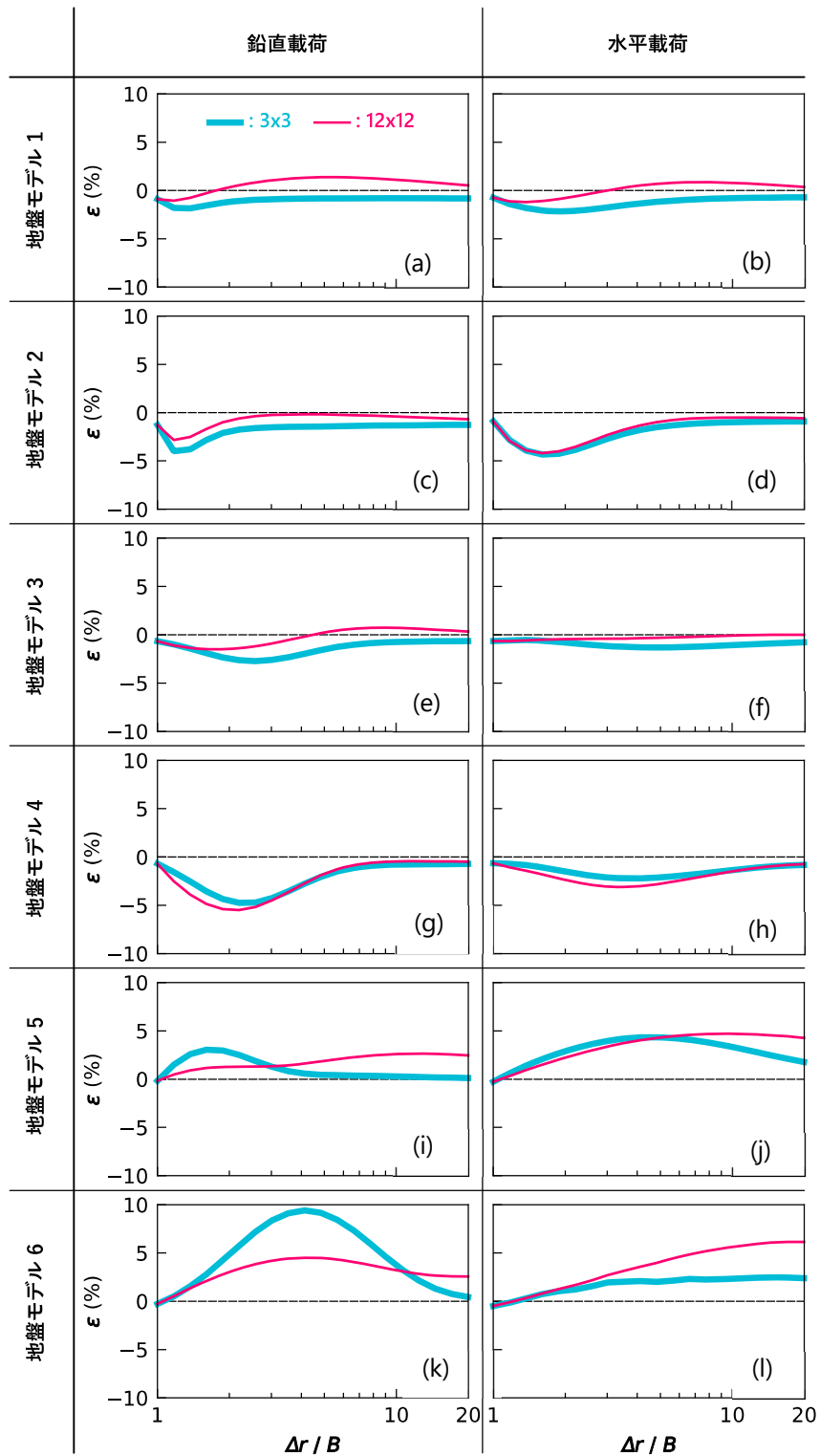


図 3.7 精算解法に基づいて単独フーチングのばねを計算した場合の誤差率（ポアソン比 0.3）

第3章 フーチング群のばねの簡易評価

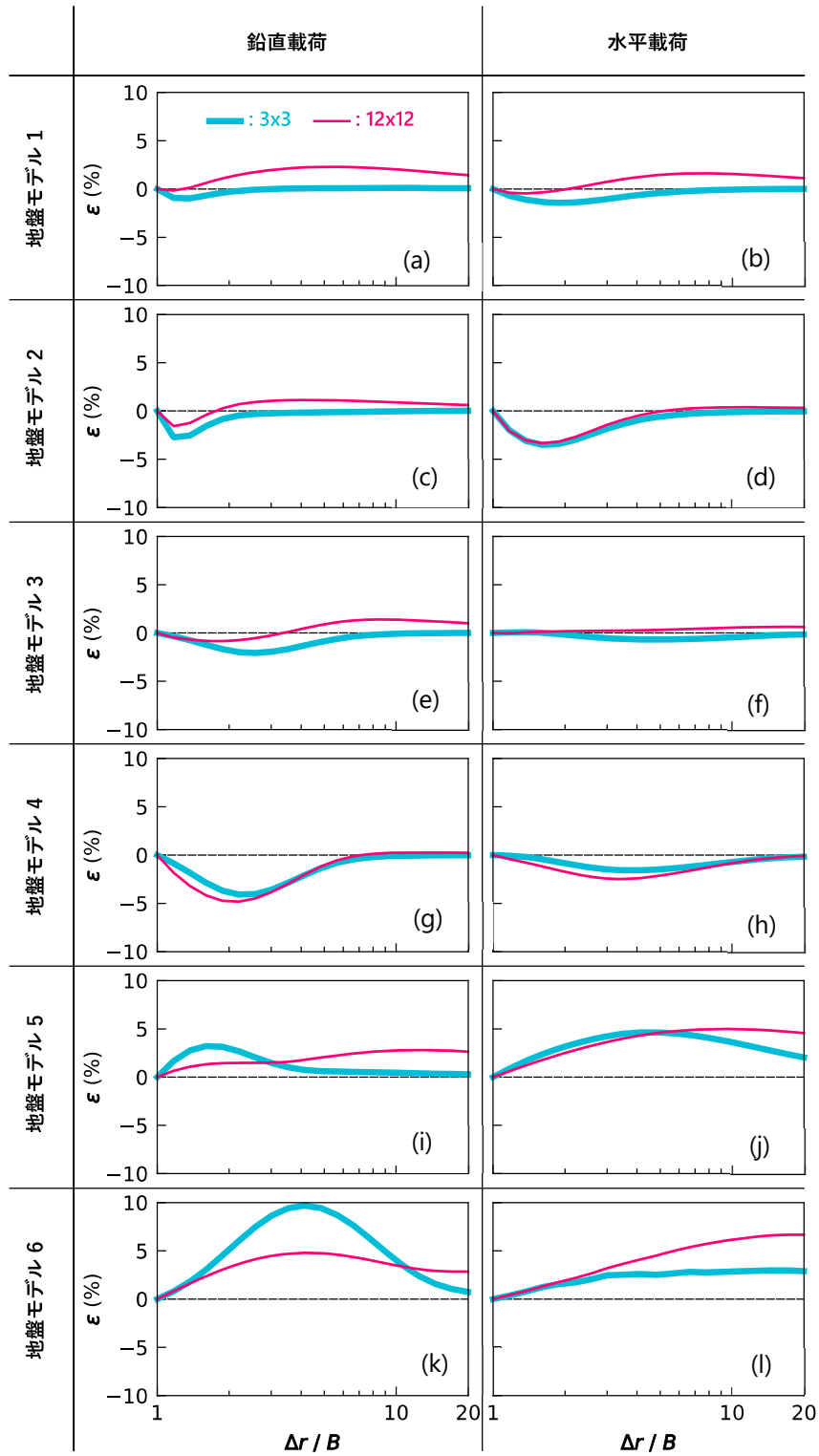


図 3.8 精算解法に基づいて単独フーチングのばねを計算した場合の誤差率（ポアソン比 0.49）

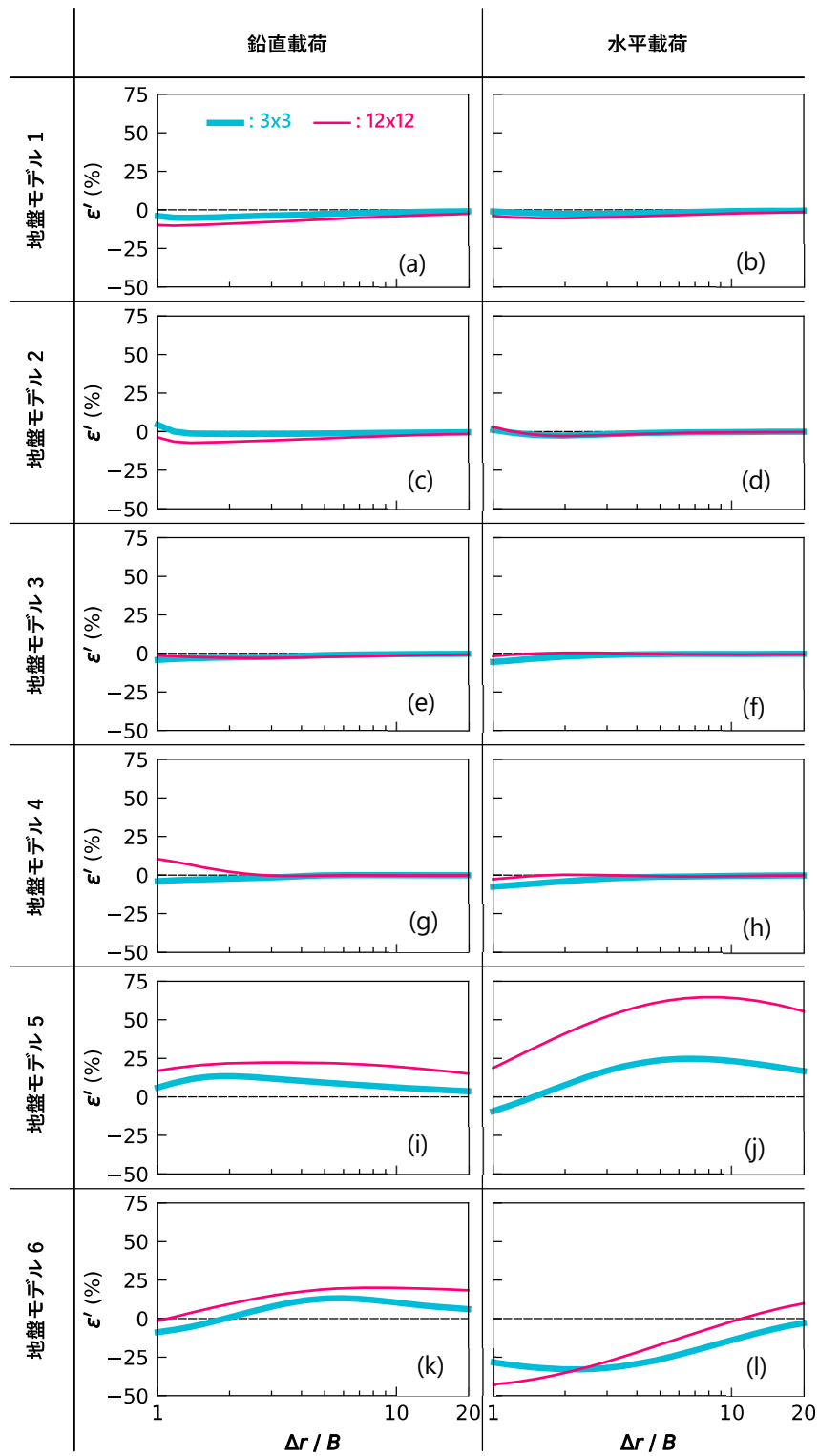


図 3.9 Steinbrenner の多層近似を用いて単独フーチングのばねを計算した場合の誤差率 (ポアソン比 0.3)

### 3.5.2 長方形配置のフーチング群における簡易評価式と精算解法の比較

長方形配置とは、水平方向に並んでいるフーチングの数もしくはフーチングの間隔が方向によって変わるフーチング群の配置を意味する。図 3.10 に長方形配置のフーチング群の例を示す。検証計算は、同図に示す正方形格子（水平2方向でフーチング間隔が共通、フーチングの数が異なる）と長方形格子（水平2方向でフーチング間隔が異なり、フーチングの数が共通）の2パターンで行う。このフーチング配置の影響のみを見るため、地盤は半無限弾性地盤とする。ポアソン比は 0.48 である。精算解法では、半無限弾性地盤が対象なのでグリーン関数に Mindlin 解を用いる。それ以外は、正方形配置のフーチング群に対する手順と同様の手順を用いる。

図 3.11～図 3.13 に、正方形格子の結果を示す。精算解がマーカー（○, △, □）の値、簡易評価式（式に代入する  $n$  は、 $\sqrt{n_x n_y}$  とする）が破線の値である。これらの図より、長方形配置では、長辺／短辺の比が大きくなるほど、精算解と簡易評価式の誤差が大きくなる傾向が見られる。また、载荷方向により誤差の大きさが顕著に異なる傾向も見られる。これらの結果に現れている長辺／短辺比の影響と载荷方向の影響について検討するため、载荷されたフーチング周りの変位場の模式図を図 3.14 に示す。鉛直载荷では、载荷されたフーチング周りの変位場は同心円状に広がる（同図(a), (d)）ため、矩形の基礎の中では正方形配置の基礎が最も相互作用効果が強く、基礎形状が細長くなるほど相互作用効果は弱まると考えられる。また、水平载荷による変位場は、载荷方向に広く载荷直交方向に狭くなる傾向を示す（同図(b), (c), (e), (f)）ため、载荷方向と基礎長辺方向が直交している場合（同図(e)）に最も相互作用効果が弱く、载荷方向と基礎長辺方向が一致している場合（同図(f)）に最も相互作用効果が強くなると考えられる。以上の図 3.14 に基づく考察より、図 3.11～図 3.13 に現れている長方形配置の影響を説明できる。また、図 3.12 と図 3.13 の差異に表れている傾向、つまり短辺方向载荷のばねが強くなり長辺方向载荷のばねが弱くなる傾向は、単一の長方形基礎に関する既往の知見<sup>例えば3.8)</sup>とも整合的である。

定量的な誤差の大きさに着目すると、フーチング数、長辺 16×短辺 9（長辺／短辺比 1.78）のケースでは、いずれの载荷方向に対しても誤差 10%以内であり、この程度の長辺／短辺比までは簡易評価式は実用上問題なく利用できるものと考えられる。ただし、それ以上の長辺／短辺比を持つ（正方格子の）基礎に対しては、10%～最大 40%以上の顕著な誤差が発生する可能性があるため、簡易評価式を利用しようとする際には、長辺／短辺比に応じた補正が必要になると考えられる。この補正に関しては今後の課題とする。

第3章 フーチング群のばねの簡易評価

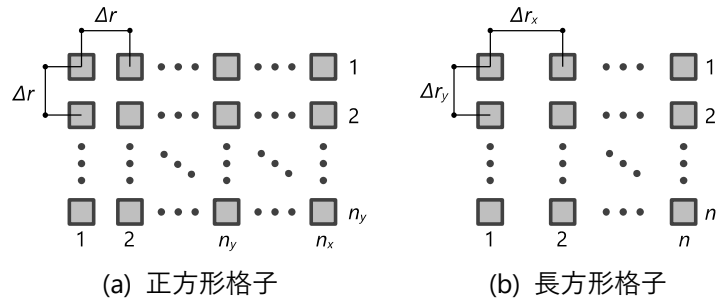


図 3.10 長方形配置のフーチング群

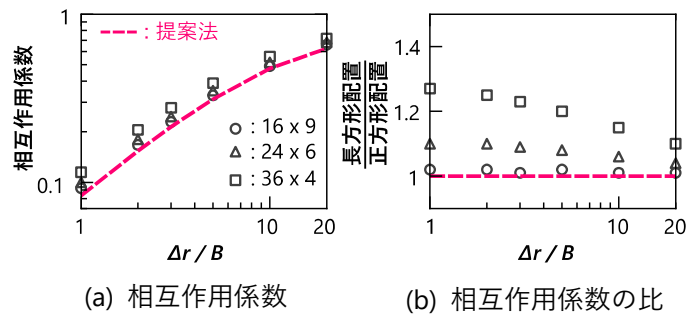


図 3.11 正方形格子, 鉛直载荷の相互作用係数

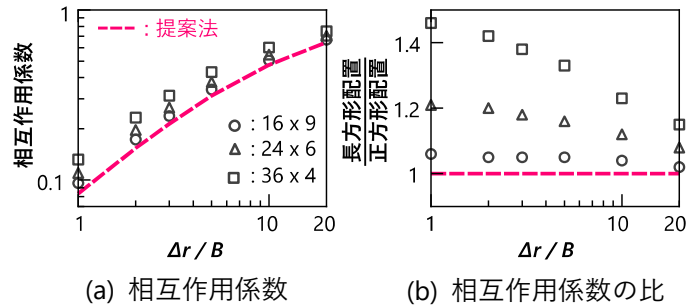


図 3.12 正方形格子, 短辺方向载荷の相互作用係数

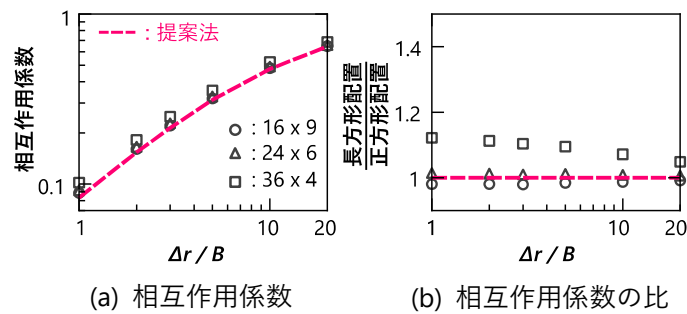


図 3.13 正方形格子, 長辺方向载荷の相互作用係数

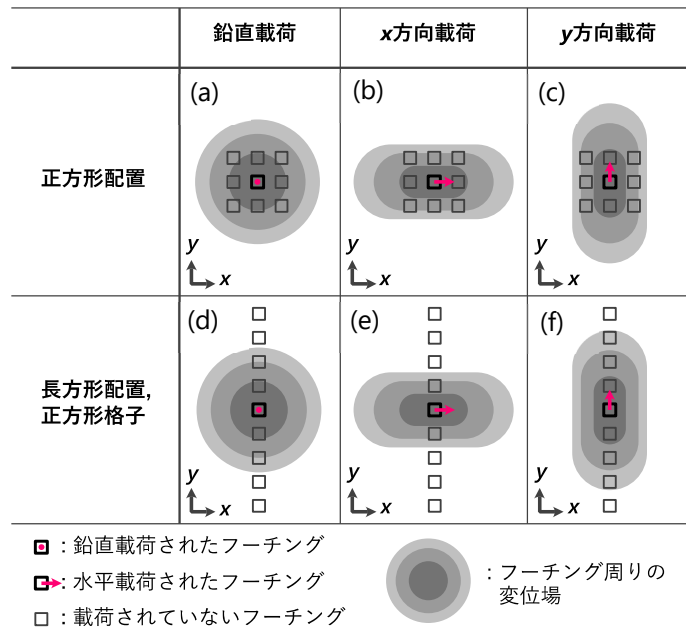


図 3.14 载荷されたフーチング周りの変位場の模式図

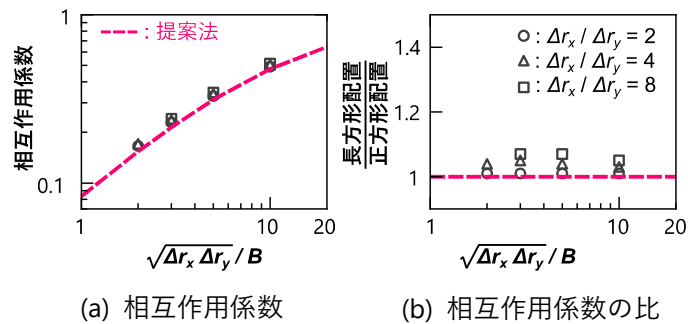


図 3.15 長方形格子，鉛直方向载荷の相互作用係数

図 3.15 に長方形格子の計算結果（標準的結果として鉛直载荷の結果のみ）を示す。長方形格子については、縦横でフーチング間隔が異なるため、簡易評価式に代入する等価な $\Delta r$ として、縦横フーチング間隔の相乗平均 ( $\sqrt{\Delta r_x \Delta r_y}$ ) の値を用いた。同図より、長方形格子の計算では正方格子の計算よりも誤差が小さく、長辺/短辺比が8倍のケースでも誤差が10%以内に収まっていることが分かる。したがって、長方形格子に関しては、簡易評価式の精度は実用に足るものと考えられる。長方形格子において誤差が小さくなっているのは、簡易評価式に代入する $\Delta r$ として縦横フーチング間隔の相乗平均を用いていることが、長辺/短辺比の補正として働いていることによるものと考えられる。誤差発生メカニズム自体は、正方格子・長方形格子とも図 3.14 で説明されるもので変わりないはずである。

3.5.3 単独フーチングのばねに対する等価せん断弾性係数についての仮定の検証

正方形配置フーチング群の検証 (3.5.1 参照) における地盤モデル1と3に、1層目の層厚2mの地盤モデルを追加し、単独のフーチングに鉛直荷重を与えて、そのばねに対する等価せん断弾性係数を計算した結果を図3.16に示す。同図より、等価せん断弾性係数は、フーチング幅が狭い極限で1層目の地盤のせん断剛性に漸近し、フーチング幅が広い極限で最下層の地盤のせん断剛性に漸近する傾向が確認できる。

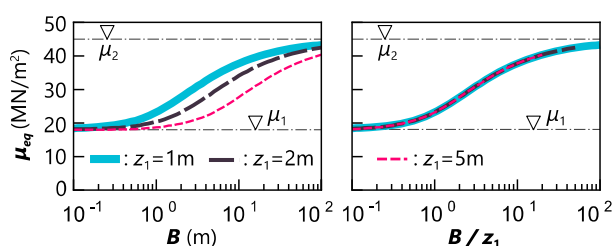


図 3.16 フーチング幅と等価せん断剛性の関係

3.5.4 数値的検証のまとめ

数値的検証において提案した相互作用係数の簡易評価式と精算解法の比較を行い、簡易評価式が実用上十分な精度を確保できていることを確認した (水平載荷、鉛直載荷とも)。簡易評価式は、フーチング同士が密着する場合とフーチング同士が無限に離れている場合の境界条件を満たすため、フーチング間隔が極端に狭い場合と極端に広い場合に特に精度が向上する傾向も確認した。

フーチングの配置が正方形でなく、フーチング数やフーチング間隔が水平2方向で異なる場合、長辺/短辺比が大きくなるほど誤差が大きくなるが、長辺/短辺比1.78でも誤差は10%以内であり、それ以下の縦横比であれば、本研究の簡易評価式で実用上問題ないと考えられる。長辺/短辺比が大きいフーチング群は、整形なフーチング群を対象とした本研究の簡易評価式では対応できないと考えられるので、別途補正が必要である。これについては今後の課題とする。

また、理論的検討において導入したフーチング幅に対する等価せん断剛性の数値的検証も行った。等価せん断剛性は、理論的な検討の際に仮定した通り、フーチング幅が小さい極限で最上層のせん断剛性に漸近し、フーチング幅が大きい極限で最下層のせん断剛性に漸近することを確認した。

### 第3章 フーチング群のばねの簡易評価

#### 第3章の参考文献

- 3.1) 成田修英, 田村修次:「半無限弾性体表面におけるフーチング群の相互作用を考慮した静的地盤ばね簡易評価法」, 日本建築学会構造系論文集, 第83巻, 第753号, pp. 1629-1638, 2018, DOI: 10.3130/aijs.83.1629
- 3.2) 成田修英, 田村修次:「2層地盤地表面におけるフーチング群の相互作用を考慮した静的地盤ばね簡易評価法」, 日本建築学会構造系論文集, 第86巻, 第781号, pp. 405-414, 2021, DOI: 10.3130/aijs.86.405
- 3.3) POULOS, H. G. : "Analysis of settlement of pile groups", Géotechnique, Vol. 18, Issue 4, pp. 449-471, 1968, DOI: 10.1680/geot.1968.18.4.449
- 3.4) 土方勝一郎, 柳下文雄, 富井隆:「群杭の動的インピーダンス簡易評価法」, 日本建築学会構造系論文集, 第455号, pp. 73-82, 1994, DOI: 10.3130/aijs.59.73\_1
- 3.5) 太田裕, 後藤典俊:「横波速度を推定するための実験式とその物理的背景」, 物理探鉱, 第31巻, 第1号, pp. 8-17, 1978
- 3.6) POULOS, H. G. and DAVIS, E. H. : "Elastic solutions for soil and rock mechanics", John Wiley & Sons, 1973
- 3.7) 伊藤淳志, 山肩邦男:「剛な基盤上の弾性地盤における Steinbrenner の近似解の適用性に関する検討」, 日本建築学会構造系論文集, 第493号, pp. 57-64, 1997, DOI: 10.3130/aijs.62.57\_1
- 3.8) 日本建築学会:「入門・建物と地盤の動的相互作用」, pp. 337-350, 1996

## 第4章 群杭の荷重中心

## 第4章 群杭の荷重中心

### 4.1 概要

この章の内容は、既発表論文<sup>4.1)</sup>の内容を再構成し、一部説明を追加したものである。

群杭については、第1章の1.2.3で述べた通り、既にばねの求め方が整備されている。フーチング群の場合と異なり、本研究で改めてばねの求め方を検討する必要は無い。しかし、群杭について検討すべきことが無いかと言うとそうでは無い。水平載荷に対する群杭とフーチング群の間の相互作用を評価するためには、杭の変位に対する地盤の反力（杭を介して地盤に伝わる荷重）の中心深度が必要となる（この詳細は第5章で述べる）。群杭上の地盤の点を $\mathbf{r}_p := (x, y, z)$ 、 $\mathbf{r}_p$ の存在する3次元の領域を $V_p$ として、(2.2)式の表現を用いると、杭の水平地盤反力の中心深度 $z_c$ は次の通りに定義される。ただし、(2.2)式の復元力 $\mathbf{R}_b, \mathbf{R}_s$ は3次元の荷重ベクトルを意図しているが、ここでの $R_b, R_s$ は載荷方向に対する1次元の反力である。

$$z_c := \frac{\iiint_{V_p} z_p R_b(u(\mathbf{r}_p)) dx dy dz}{\iiint_{V_p} R_b(u(\mathbf{r}_p)) dx dy dz} = \frac{\iiint_{V_p} z_p R_s(u(\mathbf{r}_p)) dx dy dz}{\iiint_{V_p} R_s(u(\mathbf{r}_p)) dx dy dz} \quad (4.1)$$

異種基礎のばねの簡易評価法を確立するためには、この $z_c$ の簡易評価法も確立する必要があるが、この問題については、残念ながら未解決である。ただし、ある程度検討は進めており、今後の見通しも立っているため、ここではその検討の内容と今後の課題について説明する。

検討対象とする群杭は、第1章、第2章でも述べた通り、整形な群杭を検討の対象とする（図4.1）。

第4章 群杭の荷重中心

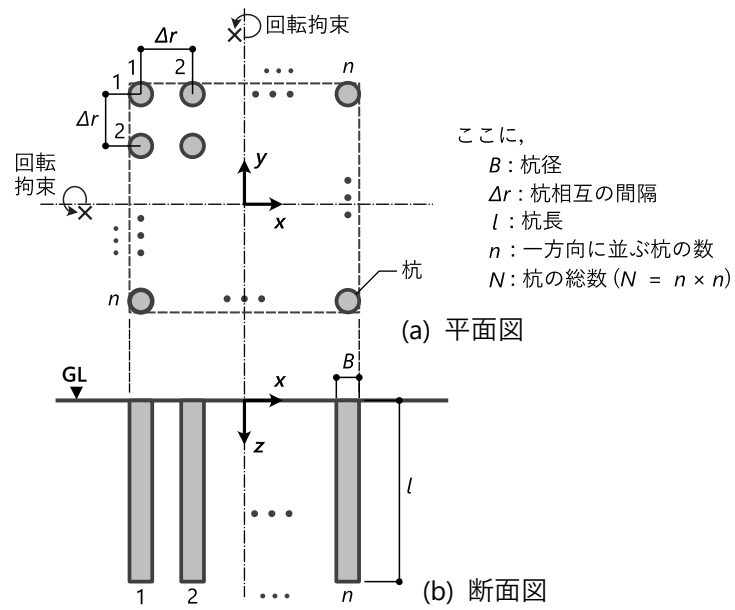


図 4.1 検討の対象とする整形な群杭

4.2 均一な梁ばねモデルに従う無限長単杭の水平地盤反力中心深度

まず単杭の地盤反力中心深度 $z_c$ の簡易評価について考える。これについては、Chang (1937)<sup>4.2)</sup>による解が利用できる。Changの解は、均一な無限長杭の梁ばねモデルの水平変位解で、本研究で検討対象としている杭頭回転拘束条件の解 $u_h(z)$ は、次の通りになる。

$$u_h(z) = \frac{F_p}{4E_p I \beta_h^3} e^{-\beta_h z} (\cos \beta_h z + \sin \beta_h z) \quad (4.2)$$

ここに、 $u_h(z)$ は深度 $z$ における水平方向の杭の変位、 $F_p$ は杭頭水平荷重、 $E_p$ は杭のヤング係数、 $I$ は杭の断面2次モーメント、 $\beta_h$ は梁ばねモデルの特性値（(1.19)式）を表す。

$\beta_h$ の定義を再掲しておく。

$$\beta_h := \sqrt[4]{\frac{s_h B}{4E_p I}} \quad (4.3)$$

ここに、 $s_h$ は水平地盤反力係数を表す。

(4.2)式から分かるように、水平载荷に対する梁ばねモデルの杭の変位は、深度に対して指数関数的に（ $e^{-\beta_h z}$ のオーダーで）減少するので、 $u_h(z | z \gg \beta_h^{-1}) \simeq 0$ である。有限長の杭であっても杭先端深度が $\beta_h^{-1}$ よりも十分に大きい場合には、実用上、Changの解を用いて問題ない。例えば日本建築学会の「建築基礎構造設計指針」（2019）<sup>4.3)</sup>では、杭長 $l$ として $\beta_h l \geq 2.25$ の杭は、Changの解を使って良いとしている。これは余程短く硬い杭以外は満足する条件である。よって、ここでの検討にもChangの解を用いる。

梁ばねモデルにおける杭の水平地盤反力は「水平地盤反力係数 $s_h \times$ 変位」なので、杭の挙動がChangの解に従うのであれば、その水平地盤反力深度分布 $R_s(u_h(z))$ は、以下のように書ける。

$$R_s(u_h(z)) = s_h u_h(z) \quad (4.4)$$

ここで、 $\beta_h$ の定義より次式が成り立つので、

$$\frac{s_h B}{4E_p I \beta_h^3} = \beta_h^4 \frac{1}{\beta_h^3} = \beta_h \quad (4.5)$$

これと(4.2)、(4.4)式を組み合わせると、杭の水平地盤反力深度分布は次式の通りに整理できる。

$$R_s(u_h(z)) = -F_p \beta_h e^{-\beta_h z} (\cos \beta_h z + \sin \beta_h z) \quad (4.6)$$

一方、梁ばねモデルにおいて、地盤反力の杭全長に渡る積分値である杭頭せん断力と、杭頭荷重は釣合うので、次式が成り立つ。

$$\int_0^l R_s(u_h(z)) dz = -F_p \quad (4.7)$$

(4.6)、(4.7)式より、水平地盤反力の中心深度 $z_c$ は以下の通りに書ける（梁ばねモデルの単杭には水平方向の広がりはないので、 $z_c$ の積分は体積積分ではなく $z$ 方向のみの積分となる）。

$$z_c = \frac{\int_0^l z R_s(u_h(z)) dz}{\int_0^l R_s(u_h(z)) dz} = \frac{F_p \beta_h}{F_p} \int_0^l z e^{-\beta_h z} (\cos \beta_h z + \sin \beta_h z) dz$$

$$= \beta_h \int_0^l z e^{-\beta_h z} (\cos \beta_h z + \sin \beta_h z) dz \quad (4.8)$$

指数関数と三角関数の積の積分については、以下のような積分公式<sup>例えば4.4)</sup>があるので、

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C \quad (4.9)$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (-b \cos bx + a \sin bx) + C \quad (4.10)$$

ここに、 $C$ は積分定数を表す。

これと部分積分を組み合わせると、(4.8)式の積分は以下の通りに計算できる。

$$\int_0^l z e^{-\beta_h z} (\cos \beta_h z + \sin \beta_h z) dz$$

$$= \frac{1}{2\beta_h^2} (1 + e^{-\beta_h l} (\sin \beta_h l - (1 + 2\beta_h l) \cos \beta_h l)) \quad (4.11)$$

ここで、Chang の解の適用条件を考えると、 $\beta_h l \gg 1$ であるので Chang の解を用いることのできる条件下では $e^{-\beta_h l} \simeq 0$ となり(4.11)式の $e^{-\beta_h l}$ のかかる項は無視できる。よって次の近似が成り立つ。

$$\int_0^l z e^{-\beta_h z} (\cos \beta_h z + \sin \beta_h z) dz \simeq \frac{1}{2\beta_h^2} \quad (4.12)$$

これを(4.8)式に代入すると、Chang の解に従う単杭の $z_c$ が以下の通りに求まる。

$$z_c \simeq \beta_h \frac{1}{2\beta_h^2} = \frac{1}{2\beta_h} \quad (4.13)$$

#### 4.3 単杭に集約した群杭の $z_c$ と $\beta_h$

群杭をそれと「等価」な一本の杭に置き換えて計算できるとすると、その単杭に対する梁ばねモデルの $z_c$  ((4.13)式) を求めることで群杭の $z_c$ が求められるものと考えられる。このような群杭と等価な単杭を、以下「集約杭」と呼ぶ。群杭を単杭に集約するというアイデアは、著者の独創では無く、先行研究による実績のある考え方である。Penzien モデル<sup>4.5)</sup>では古くから用いられており、群杭のばね評価の分野でも、例えば文(2006)<sup>4.6)</sup>が複数の杭を単杭に集約して検討を行っている。以下、次の2点について説明する。① 適切に単杭への集約が成された群杭の $\beta_h$  (以下、このような集約杭の $\beta_h$ を「 $\beta_e$ 」と書く) より、群杭の $z_c$ が推定可能だと考えられること (4.3.1)、ただし②「適切な集約」を簡易に行うためには、幾つかの技術的問題を解決する必要がある、それについては今後の課題であること (4.3.2)。

4.3.1 群杭が単杭の梁ばねモデルに集約可能であることの数値的検証

群杭の挙動（この場合、群杭の水平地盤反力）が Chang の解で再現できるかどうかを数値的に検証する。この検証は以下の手順により行う。

- 1) 精算解法に基づいて定義式 ((4.1)式) 通りに  $z_c$  を計算する。
- 2) Chang の解に従う単杭の  $z_c$  の式 ((4.13)式) より、 $\beta_e$  を逆算する。
- 3)  $\beta_e$  を Chang の解における水平地盤反力の式 ((4.6)式) に代入した結果と、精算解法に基づいて計算した群杭の水平地盤反力を比較する。
- 4) 上記、精算解法による水平地盤反力は、各評価点の変位の精算解に地盤の剛性行列をかけて、各評価点における地盤反力を求めた後に、同一深度の評価点の地盤反力を合計した値とする。

検証計算に用いる杭の諸元は以下の通りとする。

表 4.1 検証計算に用いる杭の諸元

$B$ (m)	$l$ (m)	$E_p$ (MN/m <sup>2</sup> )	$A$ (m <sup>2</sup> )	$I$ (m <sup>4</sup> )
1	20	$2.1 \times 10^4$	0.79	$4.9 \times 10^{-2}$

ここに、 $A$ は杭の断面積を表す。

地盤は半無限弾性地盤とし、せん断弾性係数は  $18\text{MN/m}^2$ 、ポアソン比は  $0.3$  とする。また、精算解法において、杭は  $1\text{m}$  ごとに要素分割し、杭周上に分布させるリング分布荷重は、杭周上に等間隔で分布させた  $10$  点の集中荷重の重ね合わせとして計算する (図 2.6(b)参照)。

図 4.2 に検証計算の結果を示す。同図より、単杭 ( $n = 1$  の場合) はもちろん群杭 ( $n \geq 2$  の場合) についても、Chang の解に基づく地盤反力は、精算解による地盤反力を概ね再現できている。この結果より、適切な  $\beta_e$  が得られれば、Chang の解に基づいて地盤反力の深度分布が推定でき、地盤反力の中心深度  $z_c$  も推定できることが分かる。

杭頭部において精算解の地盤反力に顕著な不連続があるが、これは系の離散化に伴う誤差と考えられる (ただし、杭頭の柔性やばねに直接寄与するのは、地盤反力では無く、その累積値であるせん断力なので、局所的に地盤反力が異常値となっても、杭頭柔性、杭頭ばねに与える影響は大きくない)。また、杭間隔が狭く杭本数が多いケース (図 4.2(c), (d), (g), (h)) では、杭先端 (深度  $20\text{m}$ ) においても精算解の地盤反力に不連続が現れているが、これは無限長杭 (Chang の解) と有限長の杭の違いによるものと考えられる。これらの相互作用の影響が強く、地盤の剛性が見かけ上低下して相対的に杭の剛性が高くなるようなケースでは、より深い深度までせん断力が伝わるので、有限長の杭では杭先端に地盤反力が集中するが、無限長の杭ではそのような地盤反力の集中は発生しない。

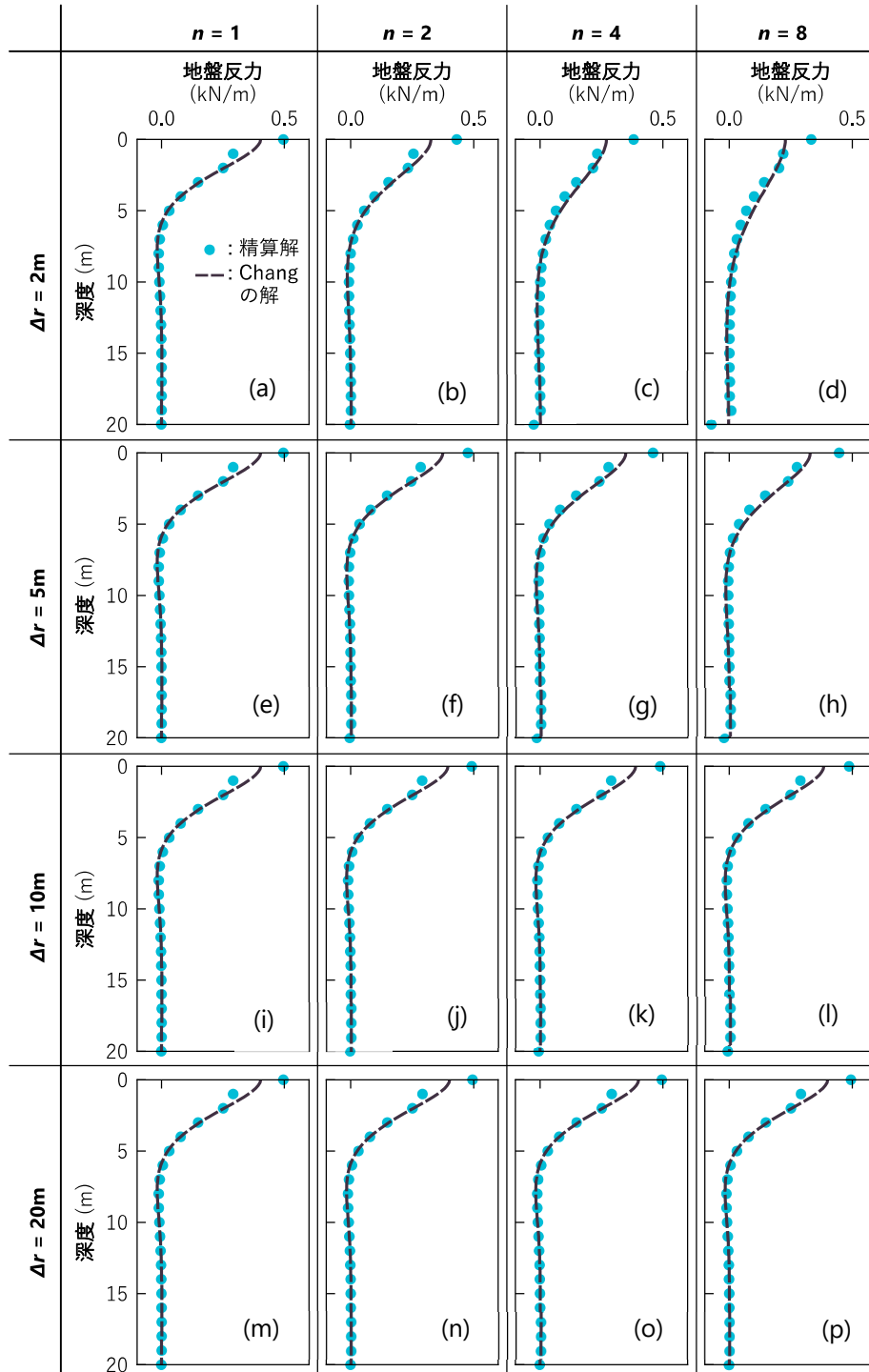


図 4.2 群杭の水平地盤反力 ( $F_p = -1\text{kN}$ )

4.3.2  $\beta_e$ の簡易評価に関する検討

Chang の解における杭頭回転拘束条件の杭頭ばねは $4E_p I \beta_h^3$  (表 1.3 参照) であるので、集約杭の曲げ剛性を $E_p I_e$  (ここに、 $I_e$ は集約杭の断面 2 次モーメントで、 $I_e = n^2 I$ ) とすると、群杭の杭頭ばね $S_p$ は、集約杭の諸元を用いて次式のように表せる。ただし、杭頭ばねに関する集約杭の $\beta_h$ は、地盤反力分布に対応した集約杭の $\beta_h$ と区別して、 $\beta'_e$ と書く。

$$S_p = 4E_p I_e (\beta'_e)^3 = 4n^2 E_p I (\beta'_e)^3 \quad (4.14)$$

第一章で説明した通り、群杭の杭頭ばね $S_p$ は既往の知見<sup>(例えば 4.7)</sup>に基づいて簡易評価が可能なので、この $S_p$ を用いて(4.14)式より $\beta'_e$ が求まる。これを $z_c$ と $\beta_h$ の関係式 ((4.13)式) に代入して $z_c$ が求まるのであれば、 $z_c$ の簡易評価法は完成したことになるが、残念ながらそうはならない。 $\beta'_e \neq \beta_e$ であり、 $z_c$ に対応するのは $\beta'_e$ ではなく $\beta_e$ だからである。

図 4.3 に、図 4.2 に示した精算解の結果を基に算出した $\beta_e$ と $\beta'_e$ の関係を示す。同図より、 $\beta_e$ と $\beta'_e$ の間には顕著な不整合が見られる。この不整合の要因は2つ考えられる。まず、図 4.2 にも表れていたように、Chang の解は地盤内の群杭の挙動を完全には再現できない。そのことが $\beta_e$ と $\beta'_e$ の不整合に反映されていると考えられる。

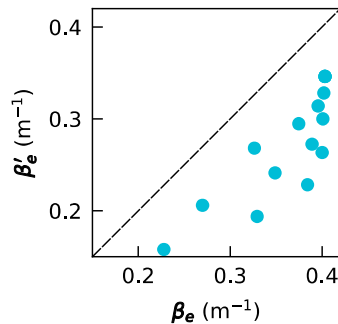


図 4.3  $\beta_e$ と $\beta'_e$ の比較

#### 第4章 群杭の荷重中心

$\beta_e$ と $\beta'_e$ の不整合の要因の二つ目として、 $z_c$ が群杭と整合する集約杭 ( $\beta_e$ に対応) と杭頭ばねが群杭と整合する集約杭 ( $\beta'_e$ に対応) は、異なる特性の杭になっているという事が考えられる。このことについて検討するため、杭*i*における群杭効果 (杭間相互作用) の影響も反映された $\beta_h$ を $\beta_i$ とおく。このとき群杭の杭頭ばねは次式の通りに表せる。

$$S_p = 4E_p I \sum_{i=1}^{n^2} \beta_i^3 \quad (4.15)$$

これと Chang の解における杭頭ばねの式 ((4.14)式) を組み合わせると、 $\beta_i$ と $\beta'_e$ の関係が次の通りに得られる。

$$(\beta'_e)^3 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n^2} \beta_i^3 \quad (4.16)$$

一方、 $\beta_i$ と $\beta_e$ の関係は以下の通りになる。まず杭*i*の負担水平力を $F_i$ 、杭*i*の水平地盤反力を $R_i(z)$ として、Chang の解に当てはめると、次式の関係が成り立つ。

$$R_i(z) = -F_i \beta_i e^{-\beta_i z} (\cos \beta_i z + \sin \beta_i z) \quad (4.17)$$

このとき、集約杭の水平地盤反力 $R_s(u_h(z))$ は以下の通りである。

$$R_s(u_h(z)) = \sum_{i=1}^{n^2} R_i(z) \quad (4.18)$$

これを $z_c$ の定義式 ((4.1)式) に代入すると、 $z_c$ と $\beta_i$ の関係が次の通りに得られる。

$$z_c = \sum_{i=1}^{n^2} \frac{F_i \beta_i}{F_p} \left( \int_0^l z e^{-\beta_i z} (\cos \beta_i z + \sin \beta_i z) dz \right) \quad (4.19)$$

(4.19)式右辺の括弧内の積分は 4.2 で示した手順により $1/2\beta_i$ となるので、(4.19)式は次のように整理できる。

$$z_c = \sum_{i=1}^{n^2} \frac{F_i}{F_p} \frac{1}{2\beta_i} \quad (4.20)$$

ここで、集約杭の $z_c$ は $1/2\beta_e$ でもある ((4.13)式) ので、これと(4.20)式を組み合わせると、 $\beta_i$ と $\beta_e$ の関係が次の通りに得られる。

$$\frac{1}{\beta_e} = \sum_{i=1}^{n^2} \frac{F_i}{F_p} \frac{1}{\beta_i} \quad (4.21)$$

(4.16)式と(4.21)式の比較より、 $\beta_e$ と $\beta'_e$ は、 $\beta_i$ との関係が異なっており、変数としての性質が異なっていることが分かる。 $\beta_e$ と $\beta'_e$ は、共に $\beta_i$ の平均的な値にはなっているものの、 $\beta_e$ は負担荷重の割合 ( $F_i/F_p$ ) で重み付けした $\beta_i$ の調和平均 (逆数の平均の逆数) であるのに対し、

#### 第4章 群杭の荷重中心

$\beta'_e$ はその3乗が $\beta_i^3$ の平均となるような平均であり、それぞれ異なる種類の平均となっている。したがって、 $\beta_e$ と $\beta'_e$ は、互いに関連はあるものの、必ずしも一致あるいは近似するとは限らないと言える。

$z_c$ の簡易評価法を確立するためには、以上2つの不整合要因の影響を適切に評価し、 $\beta'_e$ を補正して $\beta_e$ の近似値を得る方法を整備する必要があると考えられる。

## 第4章 群杭の荷重中心

### 第4章の参考文献

- 4.1) 成田修英, 田村修次:「半無限弾性地盤における群杭とフーチング群の間の静的相互作用の簡易評価法」, 日本建築学会構造系論文集, 第87巻, 第795号, pp. 435-444, 2022,, DOI: 10.3130/aijs.87.435
- 4.2) CHANG, Y. L. : Discussion on “lateral pile-loading test” by Feagin, Transaction, ASCE, 1937
- 4.3) 日本建築学会:「建築基礎構造設計指針」, 日本建築学会, pp. 255-263, 2019
- 4.4) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信:「岩波 数学公式 I」, 岩波書店, P. 214, 1956
- 4.5) PENZIEN, J. , SCHEFFEY, C. F. and PARMELEE, R. A. : ”Seismic analysis of bridges on long piles”, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 90, Issue 3, ASCE, pp. 223-254, 1964, DOI: 10.1061/JMCEA3.0000489
- 4.6) 文学章, 福和伸夫, 小島宏章, 酒井理恵子:「大規模群杭の効率的な動的相互作用解析法」, 日本建築学会構造系論文集, 第71巻, 第607号, pp. 109-116, 2006, DOI: 10.3130/aijs.71.109\_1
- 4.7) 護雅史, 森川和正:「加振方向を考慮した群杭効率の推定式の提案」, 第3回日本地震工学研究発表会, pp. 416-417, 2004

第5章      フーチング群と群杭の間の相互作用の  
簡易評価

## 第5章 フーチング群と群杭の間の相互作用の簡易評価

### 5.1 概要

この章の内容は、既発表論文<sup>5.1)</sup>の内容を再構成し、一部説明を追加したものである。

簡単のため、ここでの検討は、半無限弾性地盤を対象とする。以下、5.2でフーチング群と群杭の間の影響係数の簡易評価式を理論的に導出する。また5.3で数値的な検証を行い、フーチング群と群杭の間の相互作用が無視できるほど小さくなく考慮すべきであることと、5.2で導出した影響係数の簡易評価式の精度を確認する。

5.2 簡易評価式の導出

5.2.1 検討の対象

第2章で述べた通り、評価の対象とするのは、剛な梁で互いに連結されたフーチング群と、杭頭部を剛な梁で互いに連結された群杭との間の相互作用である。群杭については、杭頭部の回転も拘束されているものとする。この模式図を図5.1、図5.2に示す（第2章より再掲）。

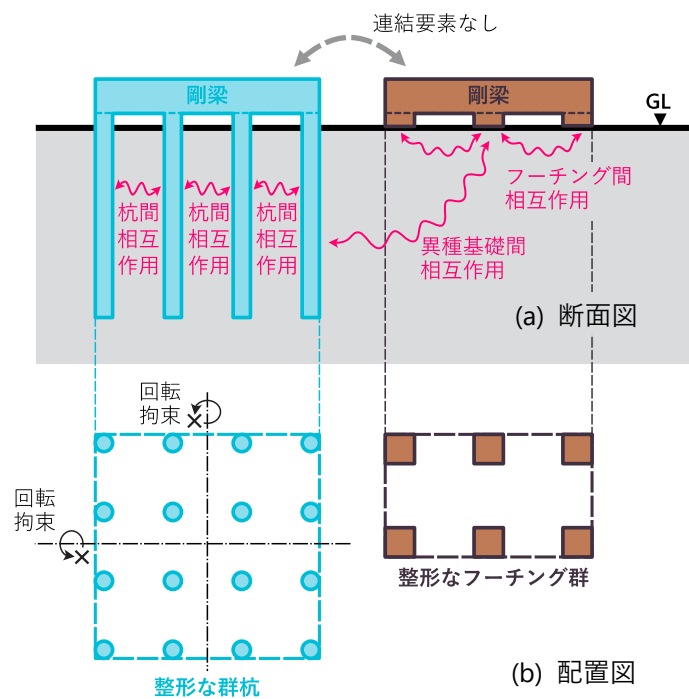


図 5.1 検討の対象とする群杭とフーチング群

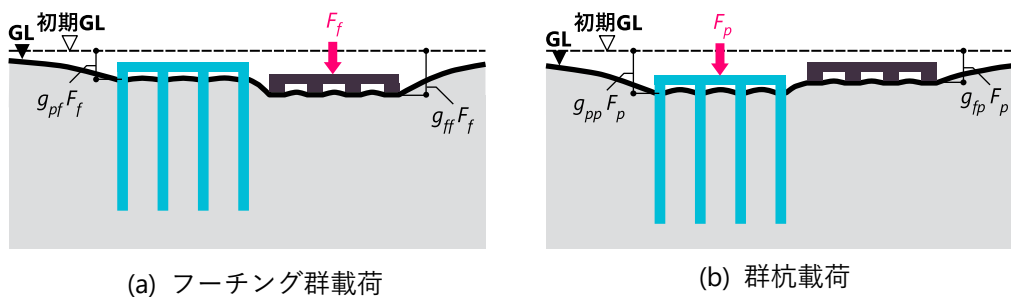


図 5.2 連結されていない群杭とフーチング群の柔性

図 5.1 のような、剛梁で連結され、回転も拘束された群杭とフーチング群の荷重変位関係は、群杭杭頭部の変位を $u_p$ 、フーチング群の変位を $u_f$ とすると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ u_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{pp} & g_{fp} \\ g_{pf} & g_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_p \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

(5.1)式右辺の記号は、図 5.2 に示す通りで、 $g_{ij}$ が群杭とフーチング群の影響係数、 $F_p$ が群杭に作用する荷重、 $F_f$ がフーチング群に作用する荷重を表す。 $g_{pp}$ は群杭のばねの逆数なので、群杭のばね評価に関する既往の知見<sup>例えば5.2)</sup>より評価でき、 $g_{ff}$ はフーチング群のばねの逆数なので第3章で説明した簡易評価法により評価できる。したがって、後は $g_{fp}$ と $g_{pf}$ の評価さえできれば、系の柔性行列全体が定まって、その逆行列である剛性行列も容易に求まる。

このフーチング群に対する群杭の影響係数 $g_{fp}$ と、群杭に対するフーチング群の影響係数 $g_{pf}$ の簡易評価法について検討する。ただし、Maxwell-Betti の相反定理より $g_{fp} = g_{pf}$ なので、これらのどちらか片方が評価できれば良い。

### 5.2.2 弾性エネルギーに着目した影響係数の表現

外力 $F_p, F_f$ の成す仕事を $W$ とすると、これは以下の通りに書ける。

$$W = \frac{1}{2}(g_{pp}F_p^2 + g_{ff}F_f^2 + g_{fp}F_pF_f) = \frac{1}{2}(g_{pp}F_p^2 + g_{ff}F_f^2 + g_{pf}F_pF_f) \quad (5.2)$$

このうち群杭とフーチング群の相互作用の寄与を $\Delta W$ とすると、これは以下の通りである。

$$\Delta W = \frac{1}{2}g_{fp}F_pF_f = \frac{1}{2}g_{pf}F_pF_f \quad (5.3)$$

ここで、 $g_{fp} = g_{pf}$ であり、どちらに着目しても変わらないので、以下 $g_{fp}$ に着目して検討を進める。(5.3)式より、 $g_{fp}$ は $\Delta W$ を用いて次のように表せる。

$$g_{fp} = \frac{2\Delta W}{F_pF_f} \quad (5.4)$$

一方 $\Delta W$ は、群杭、フーチング群と地盤との境界上に分布する分布荷重を用いて表すこともできる。まず、図 5.3 のように、杭が存在する地盤内の領域上の点を $\mathbf{r}_s := (x, y, z)$ 、フーチングが存在する（接している）地盤内の領域上の点を $\mathbf{r}_o := (x' + r \cos \theta, y' + r \sin \theta, 0)$ 、これらの構造物が地盤に与える荷重を $R_b(\mathbf{r}_s)$ 、 $R_b(\mathbf{r}_o)$ として、さらに、点 $\mathbf{r}_s$ を載荷点とし点 $\mathbf{r}_o$ を評価点とした地盤のグリーン関数を $g(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s)$ とおく。このとき群杭が地盤に与える荷重 $R_b(\mathbf{r}_s)$ によって、フーチング群の存在領域内の点 $\mathbf{r}_o$ に発生する変位を $u(\mathbf{r}_o)$ とすると、これは以下のように書ける。

$$u(\mathbf{r}_o) = \int_0^l \int_{-w_y}^{w_y} \int_{-w_x}^{w_x} g(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) R_b(\mathbf{r}_s) dx dy dz \quad (5.5)$$

この変位に伴ってフーチング底面の荷重 $R_b(\mathbf{r}_o)$ の成す仕事は、変位 $g_{fp}F_p$ の発生に伴ってフ

ーチング群に作用する外力 $F_f$ が成す仕事、つまり $\Delta W$ に等しいので、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} \int_{-b_y}^{b_y} \int_{-b_x}^{b_x} R_b(\mathbf{r}_o) u(\mathbf{r}_o) dx' dy' \\ &= \frac{1}{2} \int_{-b_y}^{b_y} \int_{-b_x}^{b_x} R_b(\mathbf{r}_o) \left( \int_0^l \int_{-w_y}^{w_y} \int_{-w_x}^{w_x} g(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) R_b(\mathbf{r}_s) dx dy dz \right) dx' dy' \quad (5.6) \end{aligned}$$

これを(5.4)式に代入すると、 $g_{fp}$ に関する次の表現が得られる。

$$g_{fp} = \frac{1}{F_p F_f} \int_{-b_y}^{b_y} \int_{-b_x}^{b_x} R_b(\mathbf{r}_o) \left( \int_0^l \int_{-w_y}^{w_y} \int_{-w_x}^{w_x} g(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) R_b(\mathbf{r}_s) dx dy dz \right) dx' dy' \quad (5.7)$$

(5.7)式右辺について、簡易に計算可能な近似式を導くことが可能である。この近似式を用いて、 $g_{fp}$ を簡易に評価できる。以下、(5.7)式右辺の近似について検討を進める。

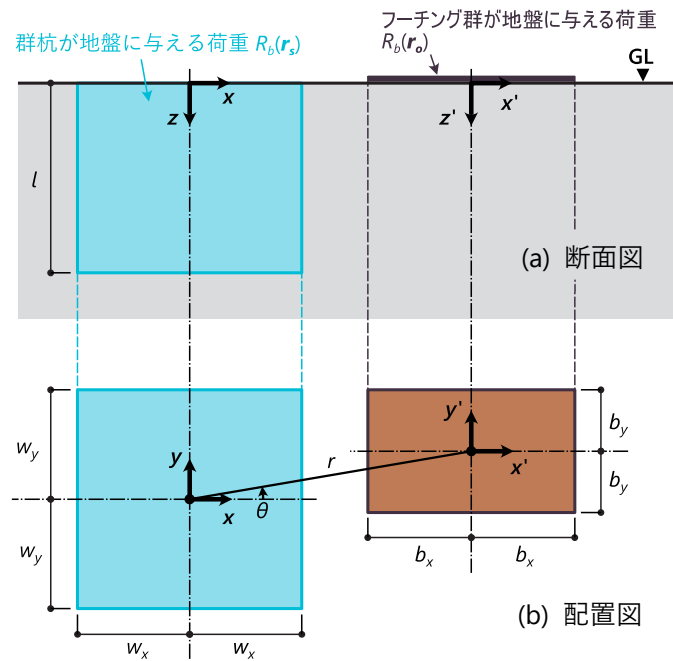


図 5.3 群杭とフーチング群が地盤に与える荷重

5.2.3 群杭とフーチング群が地盤に与える荷重の性質

(5.7)式右辺の簡易な近似式を導く前準備として、荷重分布関数 $R_b(\mathbf{r}_s)$ と $R_b(\mathbf{r}_o)$ の基本的な性質について確認し、簡単な仮定をおく。まず $R_b(\mathbf{r}_s)$ 、 $R_b(\mathbf{r}_o)$ を全て足し合わせた値は、その部位に作用している外力に等しいので以下の式が成り立つ。

$$\int_0^l \int_{-w_y}^{w_y} \int_{-w_x}^{w_x} R_b(\mathbf{r}_s) dx dy dz = F_p \quad (5.8)$$

$$\int_{-b_y}^{b_y} \int_{-b_x}^{b_x} R_b(\mathbf{r}_o) dx' dy' = F_f \quad (5.9)$$

また第4章で説明した地盤反力の中心深度 $z_c$ の定義((4.1)式)より、次式が成り立つ。

$$\int_0^l \int_{-w_y}^{w_y} \int_{-w_x}^{w_x} z R_b(\mathbf{r}_s) dx dy dz = F_p z_c \quad (5.10)$$

さらに、「 $R_b(\mathbf{r}_s)$ 、 $R_b(\mathbf{r}_o)$ は水平2軸に関して対称」だと仮定する。これは、以下の関係が成り立つことを意味する。

$$R_b(x, y, z) = R_b(-x, y, z) = R_b(x, -y, z) = R_b(-x, -y, z) \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} R_b(x' + r \cos \theta, y' + r \sin \theta, 0) &= R_b(-x' + r \cos \theta, y' + r \sin \theta, 0) \\ &= R_b(x' + r \cos \theta, -y' + r \sin \theta, 0) = R_b(-x' + r \cos \theta, -y' + r \sin \theta, 0) \end{aligned} \quad (5.12)$$

この仮定は、整形な群杭もしくは整形なフーチング群が単独で存在する場合には、部材配置の対称性より明らかに成り立つが、両者が近接して存在する場合には、両者の相互作用の影響により、厳密には成り立たない。群杭、フーチング群どちらも、他方が存在する側に分布する荷重が小さくなり、その反対側に分布する荷重が大きくなって、荷重分布に偏りが生じるためである。しかしここでは簡単のため、そのような相互作用は無視して、 $R_b(\mathbf{r}_s)$ 、 $R_b(\mathbf{r}_o)$ は水平2軸に関して対称だと仮定する。

(5.11)、(5.12)式の仮定が成り立つとすると、以下の関係も成り立つ。

$$\int_{-w_x}^{w_x} x R_b(\mathbf{r}_s) dx = 0 \quad (5.13)$$

$$\int_{-w_y}^{w_y} y R_b(\mathbf{r}_s) dy = 0 \quad (5.14)$$

$$\int_{-b_x}^{b_x} x' R_b(\mathbf{r}_o) dx' = 0 \quad (5.15)$$

$$\int_{-b_y}^{b_y} y' R_b(\mathbf{r}_o) dy' = 0 \quad (5.16)$$

これらの式が成り立つことの証明は、全て同じ手順でできるので、ここでは(5.13)式の証明のみ示す。まず(5.13)式の左辺は以下の通りに分離できる。

$$\int_{-w_x}^{w_x} x R_b(\mathbf{r}_s) dx = \int_0^{w_x} x R_b(\mathbf{r}_s) dx + \int_{-w_x}^0 x R_b(\mathbf{r}_s) dx \quad (5.17)$$

(5.17)式の右辺2項目は以下の通りに変形すると、

$$\begin{aligned}
 \int_{-w_x}^0 xR_b(x, y, z)dx &= - \int_0^{-w_x} xR_b(x, y, z)dx \\
 &= - \int_0^{w_x} (-x)R_b(-x, y, z)d(-x) \\
 &= - \int_0^{w_x} xR_b(-x, y, z)dx \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

(5.11)式の仮定より、次式が導ける。

$$\int_{-w_x}^0 xR_b(x, y, z)dx = - \int_0^{w_x} xR_b(-x, y, z)dx = - \int_0^{w_x} xR_b(x, y, z)dx \tag{5.19}$$

(5.19)式を(5.17)式に代入すると右辺がゼロとなり、(5.13)式の関係が得られる。

#### 5.2.4 群杭のフーチング群に対する影響係数 $g_{fp}$ の簡易評価式

半無限弾性地盤のグリーン関数には第2章で説明した Mindlin 解<sup>5.3)</sup> ((2.10), (2.11)式)を使うことができる。今考えている条件では評価点が地表面上 ( $z_0 = 0$ )にあるので、Mindlin 解に現れる二つの距離関数  $R_1$  と  $R_2$  は以下の形で一致する。これを  $R$  とおく。

$$R_1 = R_2 = \sqrt{(x' + r \cos \theta - x)^2 + (y' + r \sin \theta - y)^2 + z^2} =: R \tag{5.20}$$

また  $z_0 = 0$  なので、Mindlin 解において  $z_0$  のかかっている項はゼロとなる。以上まとめると、ここで用いるグリーン関数は以下の通りに書ける。

$$g_{zz}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{2(1-\nu)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right) \tag{5.21}$$

$$g_{xx}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{1}{R} + \frac{(r \cos \theta + x' - x)^2}{R^3} + \frac{1-2\nu}{R+z} \left( 1 - \frac{(r \cos \theta + x' - x)^2}{R(R+z)} \right) \right) \tag{5.22}$$

評価点が地表にあるので、(5.21)式のグリーン関数は載荷点と評価点を入れ替えた Boussinesq 解に、(5.22)式のグリーン関数は載荷点と評価点を入れ替えた Cerruti 解に一致する。Maxwell-Betti の相反定理より、載荷点と評価点を入れ替え可能なので、上記のグリーン関数は、Boussinesq 解と Cerruti 解と言っても良い。

(5.21)式と(5.22)式を積分のしやすい近似式に置き換えて、影響係数の積分 ((5.7)式) を実行する。この近似のため、まず以下の仮定をおく。

$$r \gg x' - x \tag{5.23}$$

$$r \gg y' - y \tag{5.24}$$

$$r \gg z \tag{5.25}$$

上記の(5.23), (5.24)式の仮定については、概ね妥当な(成り立つ場合が多い)仮定と考えられる。図 5.3 で設定した群杭とフーチング群の条件より、以下の関係が成り立ち、ほとんどの場合で  $r > x' - x$  かつ  $r > y' - y$  と考えられるためである。

$$\max(x' - x) = w_x + b_x \quad (5.26)$$

$$\max(y' - y) = w_y + b_y \quad (5.27)$$

$$\min r = \min(w_x + b_x, w_y + b_y) = \min(\max(x' - x), \max(y' - y)) \quad (5.28)$$

(5.25)式の仮定については、部材（杭またはフーチング）の数が少ない場合には満足されないと考えられるので注意が必要である。 $z$ の最大値は杭長 $l$ なので、部材の数が多ければ必然的に基礎全体の水平方向の幅も広くなり、 $r \geq \min(w_x + b_x, w_y + b_y) > l$ つまり $r > z$ が成り立つが、部材の数が少なく杭長が長い場合には $r < z$ になり得る。

表記の簡略化のため、 $\delta := (x' - x)/r$ 、 $\zeta := (y' - y)/r$ 、 $\eta := z/r$ とすると、(5.21)、(5.22)式のグリーン関数はどちらも $\delta, \zeta, \eta$ の関数として表せる。また、(5.23)～(5.25)式の仮定より、 $\delta, \zeta, \eta$ の2次以上の項は無視できる（近似的にゼロと見なせる）ので、グリーン関数を多変数マクローリン展開し、2次以上の項を無視すれば、 $\delta, \zeta, \eta$ に関するグリーン関数の1次近似が得られる。 $\delta, \zeta, \eta$ を用いて表したグリーン関数を $g(\delta, \zeta, \eta)$ とすると、この場合の1次近似は以下の通りである。

$$g(\delta, \zeta, \eta) \simeq g(0,0,0) + \left( \frac{\partial g(\delta, \zeta, \eta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta, \zeta, \eta=0} \right) \delta + \left( \frac{\partial g(\delta, \zeta, \eta)}{\partial \zeta} \Big|_{\delta, \zeta, \eta=0} \right) \zeta + \left( \frac{\partial g(\delta, \zeta, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\delta, \zeta, \eta=0} \right) \eta \quad (5.29)$$

この近似式の具体的な形を全て書き下すと式が長くなり過ぎるので、(5.21)、(5.22)式のグリーン関数に含まれる各項の近似を以下に示す。これらの式の右辺を(5.21)、(5.22)式に代入すれば、グリーン関数の一次近似となる。

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{1}{r} (1 - \delta \cos \theta - \zeta \sin \theta) \quad (5.30)$$

$$\frac{z^2}{R^3} \simeq 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{(r \cos \theta + x' - x)^2}{R^3} \simeq \frac{1}{r} (2\delta \cos \theta + (1 - 3\delta \cos \theta - 3\zeta \sin \theta) \cos^2 \theta) \quad (5.32)$$

$$\frac{1}{R+z} \simeq \frac{1}{r} (1 - \delta \cos \theta - \zeta \sin \theta - \eta) \quad (5.33)$$

$$\frac{(r \cos \theta + x' - x)^2}{R(R+z)^2} \simeq \frac{1}{r} (2\delta \cos \theta + (1 - 3\delta \cos \theta - 3\zeta \sin \theta - 2\eta) \cos^2 \theta) \quad (5.34)$$

以上グリーン関数の近似式を、影響係数の式((5.7)式)に代入して、積分を実施する。その際、5.2.3で説明した①  $zR_b(\mathbf{r}_s)$ の積分の $F_p z_c$ への置き換え((5.10)式)と、② 荷重分布の対称性の仮定より(5.13)～(5.16)式に示した積分がゼロになること、の2つが利用できるため、最終的な積分結果は以下のような単純な形となる。

$$g_{fp,v} \simeq \frac{1}{4\pi\mu} \frac{1}{r} \quad (5.35)$$

$$g_{fp,h} \approx \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{1}{r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} + (1-2\nu) \left( \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z_c}{r}\right) - \frac{\cos^2 \theta}{r} \left(1 - \frac{2z_c}{r}\right) \right) \right) \quad (5.36)$$

ここに、 $g_{fp,v}$ は鉛直载荷に対する $g_{fp}$ であり積分に用いるグリーン関数に $g_{zz}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s)$ を用いた影響係数、 $g_{fp,h}$ は水平载荷に対する $g_{fp}$ であり積分に用いるグリーン関数に $g_{xx}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s)$ を用いた影響係数を表す。

これらの影響係数の近似式と、元となったグリーン関数((5.21), (5.22)式)には明確な類似性がある。まず鉛直载荷に対する影響係数((5.35)式)とグリーン関数((5.21)式)を比較すると次式が成り立つことが分かる。

$$g_{fp,v} \approx g_{zz}(r \cos \theta, r \sin \theta, 0); (0, 0, 0) \quad (5.37)$$

水平载荷に対する影響係数については、(5.33), (5.34)式の近似式を逆に使って以下のような近似を考え、

$$\frac{1}{r} \left(1 - \frac{z_c}{r}\right) \approx \frac{1}{r + z_c} \quad (5.38)$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{r} \left(1 - \frac{2z_c}{r}\right) \approx \frac{(r \cos \theta)^2}{r(r + z_c)^2} \quad (5.39)$$

これを(5.36)式に代入した次式、

$$g_{fp,h} \approx \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{1}{r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} + (1-2\nu) \left( \frac{1}{r + z_c} - \frac{(r \cos \theta)^2}{r(r + z_c)^2} \right) \right) \quad (5.40)$$

と水平方向のグリーン関数((5.22)式)を比較すると、次式が成り立つことが分かる。

$$g_{fp,h} \approx g_{xx}(r \cos \theta, r \sin \theta, 0); (0, 0, z_c) \quad (5.41)$$

以上より、影響係数の簡易評価式((5.37), (5.41)式)が導かれた。

### 5.2.5 簡易評価式についてのまとめ

上記の簡易評価式((5.37), (5.41)式)は、フーチング群に対する群杭の影響係数、あるいはその逆向きの影響係数(相反定理より)が、フーチング群を代表する一点(座標 $(r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ の点)と群杭を代表する一点(鉛直载荷では座標原点, 水平载荷では座標 $(0, 0, z_c)$ の点), 2点間のグリーン関数で近似できることを示している。この簡易評価式により、フーチング群と群杭の間の影響係数の評価が、極めて簡便になる。しかし残念ながら、4章でも述べた通り、水平地盤反力中心深度 $z_c$ の簡易な評価方法は、未だ確立していない。したがって、簡易評価の手法全体としては、未完成の部分が残っていると言える。この点については、今後の課題である。

なお、水平载荷の群杭の代表点深度は $z_c$ となるのに対し、鉛直载荷の群杭の代表点は地表面上に位置することには注意が必要である。これは簡易評価式の元となるグリーン関数((5.21)式と(5.22)式)の形の違いに起因する。水平方向载荷の簡易評価式を導く積分の被

積分関数には $zR_b(\mathbf{r}_s)$ の項が含まれるが、鉛直荷重の場合には $zR_b(\mathbf{r}_s)$ の項は含まれてない。荷重が地表面から杭先端に分布していて、その分布範囲の一番端が代表点になるのは不自然な印象を持つ読者も多いと思われるが、これは多項式展開したときの 2 次以上の項を無視した近似を行っていることの限界である。今後、より高次の項まで含めた近似を行った場合、地表面荷重で群杭の荷重が近似できるような結果にはならないことが予想される。

5.3 数値的検証

5.3.1 検証の対象とする群杭とフーチング群

図 5.4 のような群杭とフーチング群のペアを数値的な検証の対象とする。理論的な検討 (5.2) では、より一般的な状況設定 (図 5.3 参照) を行ったが、ここでは、影響を調べるパラメータの数を絞り込むため、図 5.4 の群杭とフーチング群で検証を進める。同図の通り、群杭とフーチング群における各要素の数と間隔は各部位で共通とし、また両者は正確に図面左右方向に並んでいるものとする。これは、図 5.3 の表記で表すと  $w_x = w_y = b_x = b_y = n\Delta r/2$ かつ  $\theta = 0$  の条件である。杭径とフーチング幅は、ともに 1 とする。以下、表記の簡略化のため  $n\Delta r/2 =: w$  として、群杭およびフーチング群の幅の表記には  $w$  を用いる。杭の諸元は、第 4 章と共通で表 5.1 の通りとする。地盤は半無限弾性地盤とし、せん断弾性係数は  $18\text{MN/m}^2$ 、ポアソン比は 0.3 とする。

精算解法において、杭の離散化は、第 4 章と共通で、1m ごとに要素分割し、杭周上に分布させるリング分布荷重は、杭周上に等間隔で分布させた 10 点の集中荷重の重ね合わせとして計算する (図 2.6(b)参照)。フーチングの離散化は、第 3 章と共通で、各フーチングを  $3 \times 3$  の要素に分割し、要素の中央に評価点を設定、要素内でグリーン関数を積分して影響係数を評価する。その際、载荷要素内に変位を出力する評価点を含む場合には、精度確保のため、要素を更に  $2 \times 2$  に分割して積分を実施する。地盤は半無限弾性地盤としているので、グリーン関数には Mindlin 解<sup>5.3)</sup> を用いる。

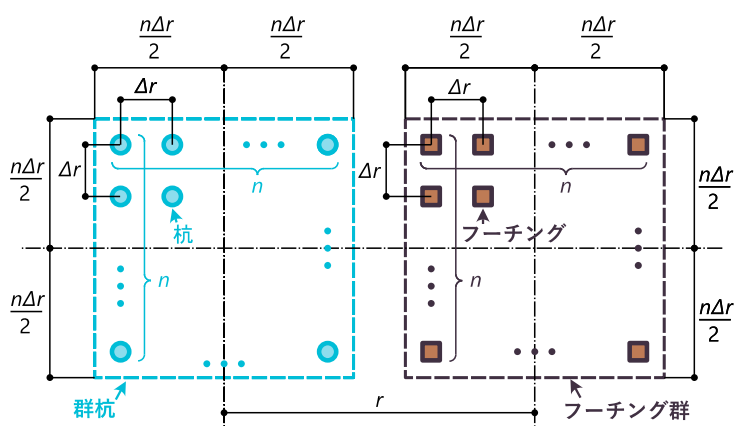


図 5.4 検証の対象とする群杭とフーチング群

表 5.1 検証計算に用いる杭の諸元

$B$ (m)	$l$ (m)	$E_p$ (MN/m <sup>2</sup> )	$A$ (m <sup>2</sup> )	$I$ (m <sup>4</sup> )
1	20	$2.1 \times 10^4$	0.79	$4.9 \times 10^{-2}$

5.3.2 群杭とフーチング群の間の相互作用の強さ

5.2 で、群杭とフーチング群の間の相互作用（フーチング群に対する群杭の影響係数 $g_{fp}$ ）を簡易に評価する式を誘導したが、この相互作用が顕著で無視できないケースが稀であれば、そもそも評価の必要が無い。ここでは、群杭の柔性 $g_{pp}$ 、フーチング群の柔性 $g_{ff}$ に対する両者間の影響係数 $g_{fp}$ の比を精算解法により計算し、 $g_{fp}$ が無視できるほど小さいケースの方が稀であることを確認する。

図 5.5, 図 5.6 は部材間隔 $\Delta r$ と $g_{fp}/g_{pp}$ ,  $g_{fp}/g_{ff}$ の関係をまとめたものである。現実の異種基礎では、直接基礎部と杭基礎部は隣接するケースが最も多いと考えられるので、これらの図では、両者が隣接するケースとして $r/w = 2$ の場合を示している。これらの図より、 $n$ が大きき $\Delta r$ が小さい、つまり基礎部材間相互作用が強い場合に異種基礎間の相互作用の影響も大きくなるのが分かる。 $n = 8$ での $g_{fp}/g_{pp}$ は $\Delta r = 2\text{m}$ では60%前後（鉛直載荷 57%, 水平載荷 63%）に達し、 $\Delta r = 20\text{m}$ でも20%を超える（鉛直載荷 23%, 水平載荷 28%）。相互作用の最も弱い $n = 2, \Delta r = 20\text{m}$ では、 $g_{fp}$ は精々10%程度の寄与しか無いため、無視しても良いかも知れないが、それ以外のケースでは $g_{fp}$ の影響は無視できないことが確認できる。

このような異なる基礎間の相互作用は、実現象としても報告されており（Çelebi (1993)<sup>5.4</sup>, 小島ら(2014)<sup>5.5</sup> など）、 $g_{fp}$ の影響が顕著になり得ることを示している。

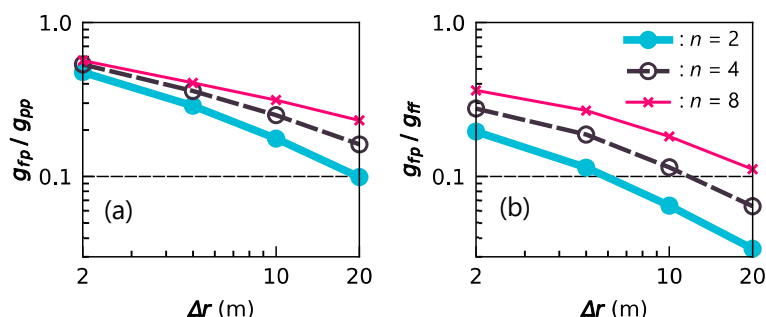


図 5.5  $g_{pp}$  または  $g_{ff}$  に対する  $g_{fp}$  の比（鉛直載荷,  $r/w = 2$ ）

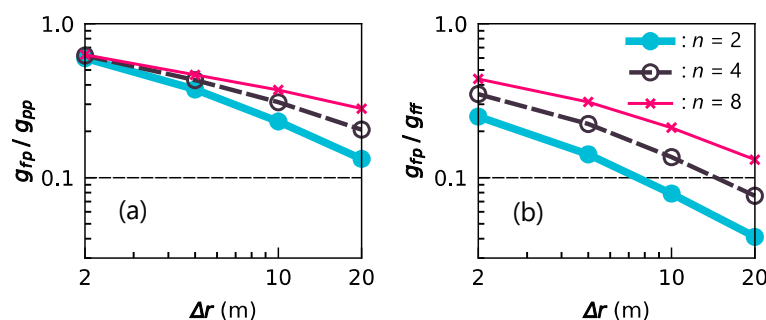


図 5.6  $g_{pp}$  または  $g_{ff}$  に対する  $g_{fp}$  の比（水平載荷,  $r/w = 2$ ）

5.3.3 精算解法による  $g_{fp}$  簡易評価式の精度検証

簡易評価式 ((5.37)式, (5.41)式) の精度検証のため, 簡易評価式より得られる  $g_{fp}$  を  $\hat{g}_{fp}$  とし, 精算解法による  $g_{fp}$  をそのまま  $g_{fp}$  として, 簡易評価式の誤差率を次式で定義する。

$$\varepsilon := \frac{\hat{g}_{fp} - g_{fp}}{g_{fp}} \quad (5.42)$$

簡易評価式は  $1/r$  の 2 次以上の項を無視している, 誤差率  $\varepsilon$  は  $r^{-2}$  のオーダーを持つと考えられる。以下の検証では, 誤差の分析のため, 誤差率に対する  $r^{-2}$  の項の寄与を  $\varepsilon_2$ , より高次の項の寄与を  $\varepsilon_{3+}$  とおく。これらの記号の数式による定義は以下の通りである。

$$\varepsilon_2 \propto r^{-2} \quad (5.43)$$

$$\varepsilon_{3+} = O(r^{-3}) \quad (5.44)$$

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_{3+} = \varepsilon \quad (5.45)$$

ここに,  $O$  は Landau のビッグオー<sup>例えば 5.6)</sup> を表す。

なお, 水平載荷時に  $g_{fp}$  の簡易評価式に代入する  $z_c$  は, 精算解法の結果より定める。 $z_c$  の簡易評価は今後の課題である。

(1) フーチング群周辺の変位場

$g_{fp}$ の簡易評価式は、群杭とフーチング群どちらかが点と見なせる場合にも成立する。群杭とフーチング群のどちらも点と見なせる場合に近似式が成り立つのは明らかであり検証は必要ないので、ここではまず検証の必要とされる中で最も簡単な例として、群杭が点と見なせる場合の $\hat{g}_{fp}$ の検証を行う。この場合には、群杭（と同一視される点）は、その周囲の地盤に拘束効果を一切及ぼさないで、得られる影響係数は、群杭に単位荷重を与えたときのフーチング群の影響がない状態での群杭周辺の変位場に対応した値となる。

図 5.7 に鉛直載荷における精算解と簡易評価式（簡易式）の比較を、図 5.8 に水平載荷における精算解と簡易式の比較を示す。これらの図より、載荷方向によらず、精算解と簡易法は概ね対応しており、 $r$ が大きくなるほど誤差が小さくなる傾向が確認できる。

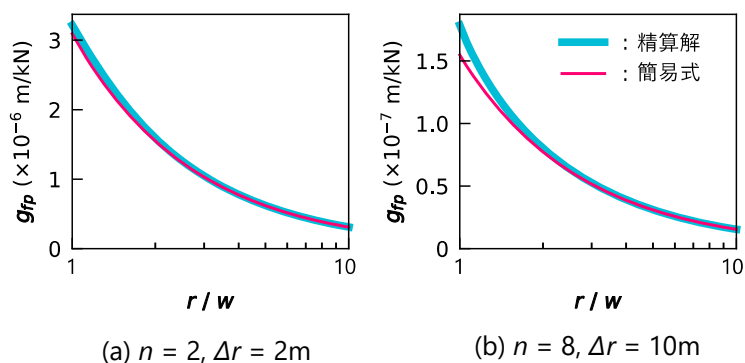


図 5.7 フーチング群周りの変位場の例（鉛直載荷）

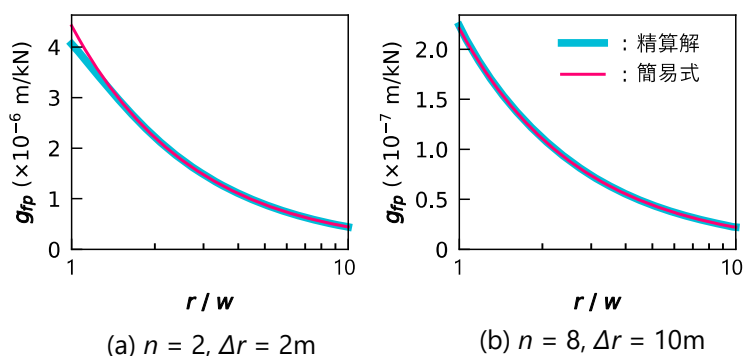


図 5.8 フーチング群周りの変位場の例（水平載荷）

誤差の傾向について詳細に分析するため、 $\Delta r = 5\text{m}$ における $r/w$ と誤差率 $\varepsilon$ の関係を図 5.9 に、群杭とフーチング群が隣接した状態（標準的配置と考えられる状態）である $r/w = 2$ における部材間隔 $\Delta r$ と誤差率 $\varepsilon$ の関係を図 5.10 に示す。図 5.9 より、グループ間の距離に応じて誤差が減少する傾向が、図 5.7, 図 5.8 よりも明確に分かる。 $r/w$ の変化に応じて $\varepsilon$ の正負が入れ替わるケースがあるが、これは $r/w$ の変化に応じて $\varepsilon$ に対する $\varepsilon_2$ と $\varepsilon_{3+}$ の寄与の割合も変化するためだと考えられる。 $r$ が小さいときには3次以上の全ての項を含む $\varepsilon_{3+}$ の寄与が卓越するが、 $r$ に対する減少率は $\varepsilon_2$ よりも $\varepsilon_{3+}$ の方が大きいので、十分に $r$ が大きければ $\varepsilon_{3+}$ よりも $\varepsilon_2$ の寄与の方が大きくなると考えられる。鉛直荷重と水平荷重を比較すると、 $r/w$ に対する $\varepsilon$ の収束の速さ（鉛直荷重の方が収束が遅い）から、鉛直荷重の方が $\varepsilon_2$ の影響が強い傾向がある。これは鉛直と水平のグリーン関数（ここでは Mindlin 解）の違いによるものと推察されるが、この検証については、今後の課題とする。図 5.10 では、 $\Delta r$ に対して $\varepsilon$ は概ね横ばいであり、 $\Delta r$ は簡易式の精度にあまり影響しないことが確認できる。部材の数 $n$ による違いに着目すると、 $n$ が大きい方がやや誤差が大きい傾向にあるが、これは、 $\Delta r$ が同じなら $n$ が大きいほど部材間の相互作用が強くなり、 $1/r$ の2次以上の項の影響が大きくなるためと考えられる。

部材間相互作用の強さと簡易評価式の誤差の関係について説明するため、相互作用と荷重分布の関係の模式図を図 5.11 に示す。相互作用が無ければ各部材の負担の大小は部材単体でのばねに依存するので、今検討の対象としているような均一なフーチング群（図 5.4）では、負担荷重の分布は一様になる（図 5.11(a)）。一方、部材間相互作用が強い場合には、特に相互作用の影響を強く受け見かけのばねが低下するグループ中央付近の部材の負担が小さくなり、比較的相互作用の影響の小さいグループ端部の部材に負担が集中する（同図 (b)）。この負担の端部への偏りにより、相互作用の強い場合の方が、2次以上の偶数次数の項の影響が強くなり、その結果、2次以上の項を無視している簡易評価式との乖離が大きくなる。このメカニズムが、図 5.10 の結果に反映していると考えられる。図 5.9 において、 $n$ が大きいほど $\varepsilon$ の収束が遅い理由についても、このメカニズムで説明できる。 $n$ が大きく相互作用が強いほど $\varepsilon_2$ の絶対値が大きいので、その分収束が遅くなるということである。

第5章 フーチング群と群杭の間の相互作用の簡易評価

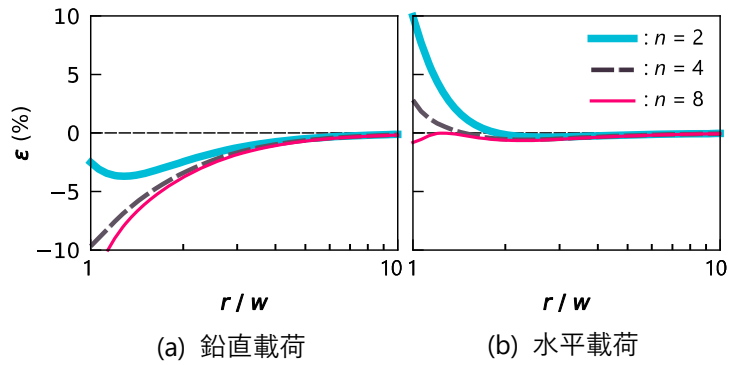


図 5.9 フーチング群周りの変位場の誤差率 ( $\Delta r = 5\text{m}$ )

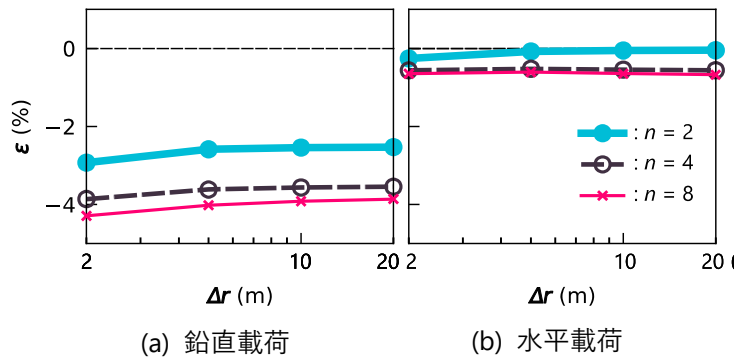


図 5.10 フーチング群周りの変位場の誤差率 ( $r/w = 2$ )

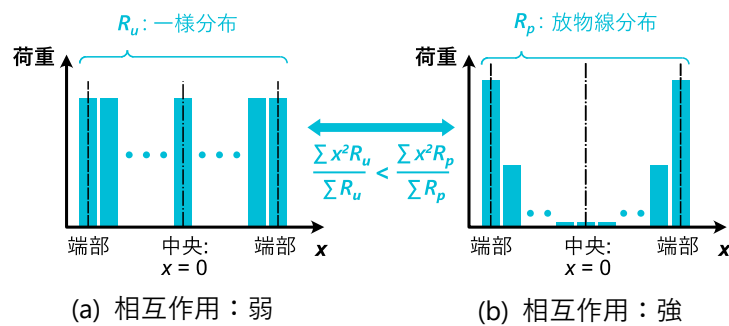


図 5.11 相互作用の強さと荷重分布の関係

(2) 群杭周辺の変位場

フーチング群周辺の変位場の検討に引き続いて、群杭周辺の変位場についても確認する。図 5.12 に鉛直載荷における精算解と簡易法の比較を、図 5.13 に水平載荷における比較を示す。群杭の場合も  $r/w$  に応じて誤差が小さくなる傾向が確認できる。 $n = 2, \Delta r = 2\text{m}$  のケースでは、フーチング群 (図 5.7, 図 5.8) に比べ誤差が顕著に大きいのが、これは杭長  $l$  が基礎幅  $w$  の 10 倍大きいことに起因している。簡易法が精算解に近似する要件は、 $r \gg w$  と同時に  $r \gg l$  であることなので、 $r \gg w$  でも  $r$  が  $l$  よりも十分に大きくない場合には、近似の精度は低下する。

図 5.8(a) と図 5.13(a) を比較すると、簡易式の結果は、同じ式 ((5.41) 式) を用いているにも関わらず結果に顕著な違いが出ている。これは、中心深度  $z_c$  の違いに起因するものである。フーチング群では、常に  $z_c = 0$  であるが、群杭は  $z_c \neq 0$  である (ここでは、 $z_c = 1.53\text{m}$ )。この  $z_c$  の寄与により、簡易式は ( $r$  が  $l$  よりも十分大きくない場合に誤差が大きい傾向はあるものの) 以下 2 つの精算解の傾向を再現できている。① 特に  $r/w = 1$  付近で、フーチング群 (図 5.8 (a)) に比べ、群杭 (図 5.13 (a)) の変位が顕著に小さい。② 群杭近傍 (群杭のケースで  $r/w$  が小さい範囲) では、 $r/w$  の変化に対する影響係数の変化 ( $r/w$  に対する  $g_{fp}$  の傾き) が小さい。

第5章 フーチング群と群杭の間の相互作用の簡易評価

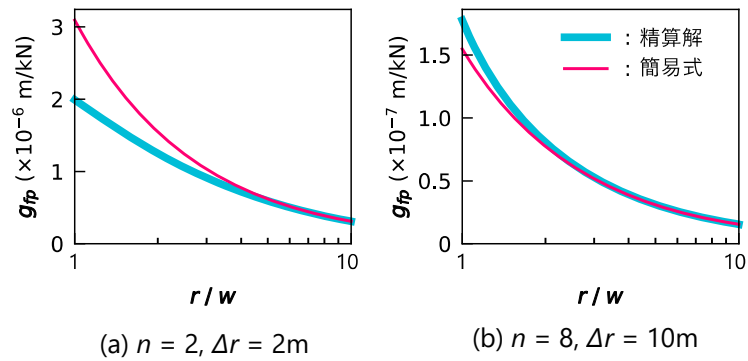


図 5.12 群杭周りの変位場の例（鉛直載荷）

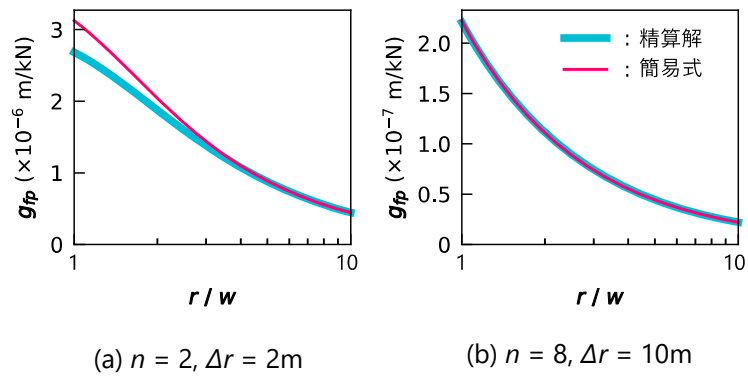


図 5.13 群杭周りの変位場の例（水平載荷）

$r/w$ と誤差率 $\varepsilon$ の関係(図 5.14)を見ると、定性的な傾向はフーチング群の場合(図 5.9)と共通しているものの、こちらの方が基礎の要素数 $n$ (ここでは杭本数)による差が大きい傾向がある。これは、 $r/w$ が同じでも、 $n$ が大きければ $r$ も大きくなり、 $r/l$ も大きくなることによるものと考えられる。杭間隔 $\Delta r$ と $\varepsilon$ の関係(図 5.15)を見ると、 $\varepsilon$ はフーチング群の場合(図 5.10)と異なり、 $\Delta r$ の変化に対して $\varepsilon$ も顕著に変化する傾向が見られる。これは $\Delta r$ の変化によって $w$ も変化し、 $r/w = 2$ で一定の条件であれば $r$ も変化するので、 $r/l$ も変化することによると考えられる(フーチング群の場合には、 $l = 0$ 一定の条件なので、こうした要因の $\varepsilon$ の変化は生じない)。

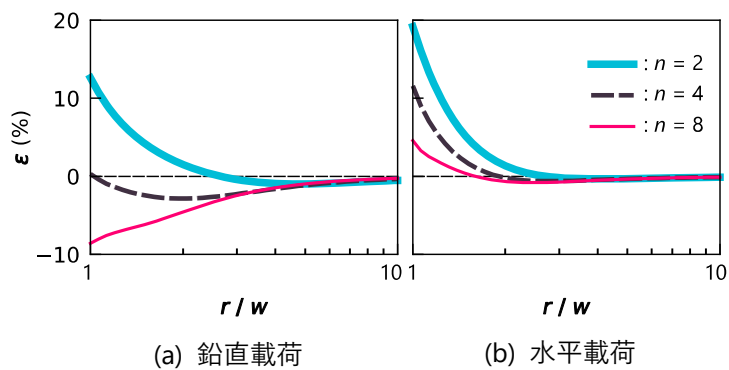


図 5.14 群杭周りの変位場の誤差率 ( $\Delta r = 5\text{m}$ )

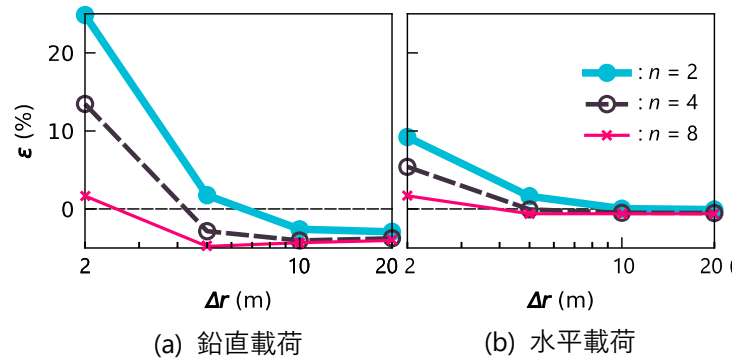


図 5.15 群杭周りの変位場の誤差率 ( $r/w = 2$ )

(3) 群杭とフーチング群の間の影響係数

異種基礎における簡易法の誤差は、フーチング群の誤差と群杭の誤差を足し合わせた結果に概ね対応する。図 5.16～図 5.19 より、そのことが確認できる。5.2.3 で述べた通り、群杭とフーチング群が近接している場合には、荷重分布の対称性の仮定 ((5.11)～(5.16)式) が厳密には成り立たず、簡易評価式的前提が一部崩れることになるが、少なくとも今回の数値的検証の範囲では、その影響は顕著ではない。図 5.16～図 5.19 の結果より、そのことも確認できる。 $\varepsilon$ の絶対値に着目すると、図 5.18, 図 5.19 の結果より、 $\Delta r \geq 5\text{m}$ の条件では、 $r/w = 2$ において $\varepsilon < 12\%$ であり ( $n = 8$ で 11.8%), 簡易評価式は工学的に実用に足る精度を確保できていると言える。ただし、 $\Delta r$ が小さく $w$ が小さい条件下では、誤差が拡大するので注意が必要である。

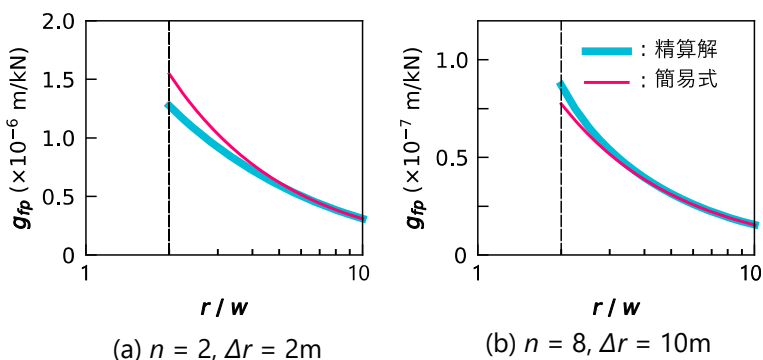


図 5.16 群杭とフーチング群の間の影響係数の例 (鉛直載荷)

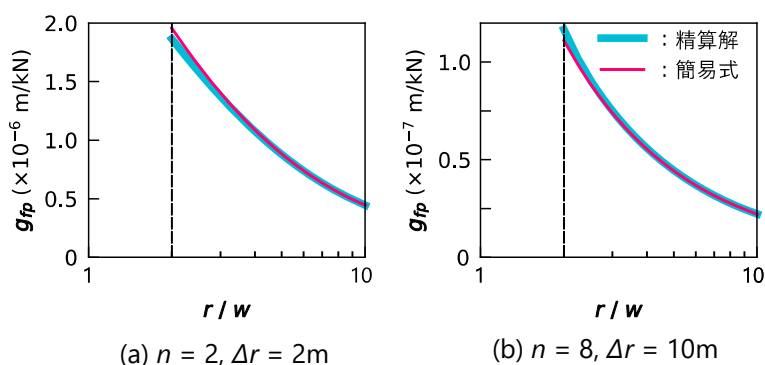


図 5.17 群杭とフーチング群の間の影響係数の例 (水平載荷)

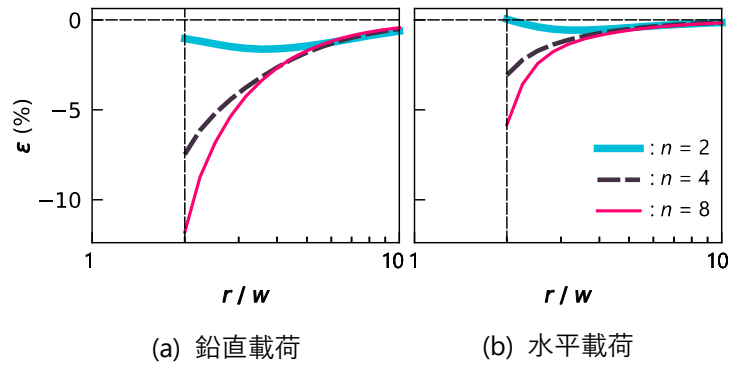


図 5.18 群杭とフーチング群間の影響係数の誤差率 ( $\Delta r = 5\text{m}$ )

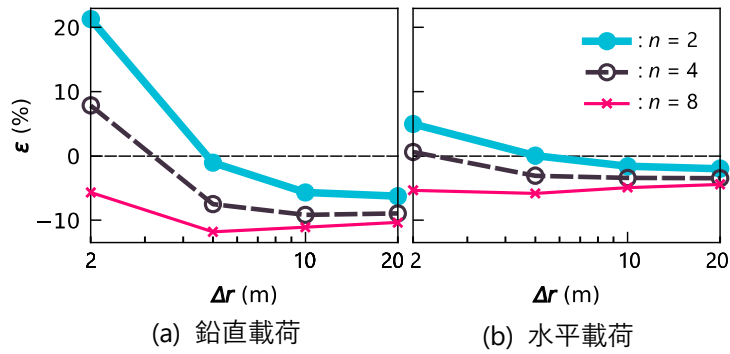


図 5.19 群杭とフーチング群間の影響係数の誤差率 ( $r/w = 2$ )

### 5.3.4 数値的検証のまとめ

精算解法により、群杭とフーチング群の間の相互作用が無視できない場合が多いことを確認し、群杭とフーチングの間の相互作用（影響係数）の簡易評価式（(5.37)式, (5.41)式）の精度検証を行った。その結果、本論文で示した近似は、杭基礎の幅が杭長に対して十分に大きければ（本論文の検証範囲では、杭長 20m に対して、杭間隔 5m 以上、杭本数  $2 \times 2$  以上）、工学的な実用に足る精度の解（本論文の検証範囲では、誤差 12%以下）が得られることを確認した。

上記、杭長に関する適用範囲は、簡易評価式の誘導過程（5.2 参照）で設定した  $r \gg l$  の条件が満たされるか否かで決まるので、 $r/l$  で一般化して書ける。しかし簡易評価式の条件設定における  $l$  とは、深度方向の荷重の分布範囲として設定したものであり、杭長で最大値がおさえられることは間違いないが、必ずしも杭長に一致する必要は無い。杭の地盤反力深度分布は、特に水平荷重においては、杭先端よりも杭頭側に偏る傾向があるため、 $r/l$  よりも  $r/z_c$  で適用範囲を規定した方が、正確かつ実用的だと考えられる。 $z_c$  と簡易評価式の精度の関係については、 $z_c$  の簡易評価法の整備と併せて、今後の課題とする。

第5章の参考文献

- 5.1) 成田修英, 田村修次:「半無限弾性地盤における群杭とフーチング群の間の静的相互作用の簡易評価法」, 日本建築学会構造系論文集, 第87巻, 第795号, pp. 435-444, 2022, DOI: 10.3130/aijs.87.435
- 5.2) 護雅史, 森川和正:「加振方向を考慮した群杭効率の推定式の提案」, 第3回日本地震工学研究発表会, pp. 416-417, 2004
- 5.3) MINDLIN, R. D. : "Force at a point in the interior of a semi-infinite solid", Journal of Applied Physics, Vol.7, pp. 195-202, 1936, DOI: 10.1063/1.1745385
- 5.4) ÇELEBI, M. : "Seismic responses of two adjacent buildings. I: Data and analyses", Journal of Structural Engineering, Vol. 119, Issue 8, pp. 2461-2476, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1993)119:8(2461)
- 5.5) 小島宏章, 高野真一郎:「解体工事建物と隣接建物における振動実測及び解析的検討(その1) 振動実測に基づく建屋応答の分析」, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 333-334, 2014
- 5.6) JEFFREY, A. 著, 柳谷晃 監訳, 穴田浩一, 内田雅克, 柳谷晃 共訳:「数学公式ハンドブック ポケット版」, 共立出版, pp. 94-95, 2013

## 第6章 結論

## 第6章 結論

### 6.1 本研究の成果

#### 6.1.1 概要

本研究では、半無限弾性地盤上の異種基礎について、部材配置が整形な場合を対象として、静的なばねの簡易評価についての理論的検討を行った（フーチング群の検討は多層地盤でも実施）。また、理論的検討より導かれたフーチング群のばねの簡易評価法（第3章）と異種基礎間相互作用の簡易評価法（第5章）について、数値的な検証を行い精度を確認した。この2つの簡易評価手法は、どちらも理論的に導かれており、導出の過程で用いた理論的な仮定や数学的な近似の成り立つ範囲が全て定式化されているため、手法の適用範囲（どのような状況で高い近似精度が期待できて、どのような状況で精度が期待できないか）が明確であるという特徴を持つ。この2つの手法を示したのが、本研究における最大のオリジナルな成果である。

#### 6.1.2 異種基礎のばね評価の実用に資する成果

フーチング群のばね（第3章）については、離散和と積分の近似関係に基づき、単独のフーチングのばねの式を組み合わせ、容易に近似計算が可能であることを示した。またフーチング間の相互作用が満たすべき境界条件があることを示し、提案したばねの簡易評価式が、境界条件を満たすことも示した。この簡易評価式は、多層地盤に適用可能なので、多層の最も単純な場合として2層地盤で検証計算を行い、実用的な精度を確保できていることを確認した。また、やや整形性の崩れた場合の検証として、並んでいるフーチングの数が水平2方向で異なる場合とフーチングの間隔が水平2方向で異なる場合の検証も行い、長辺／短辺比1.78までは誤差10%以内の比較的良好な精度を確保できることを確認した。

異種基礎間の相互作用（第5章）については、Mindlin解の多変数マクローリン展開による1次近似に基づいて簡易評価法を導いた。この方法は、フーチング群全体に対する群杭全体（あるいはその逆）の相互作用が、フーチング群を代表する1点と群杭を代表する1点、2点間の相互作用をMindlin解で計算することにより求まるというものである。この方法については、Mindlin解（半無限弾性地盤の解）を用いているため、半無限弾性地盤で検証計算を行い、杭長に対して特に基礎の幅が狭い場合を除いて、実用的な精度を確保できていることを確認した。また、フーチング群・群杭の各代表点への載荷により、地表面上の各グループ周りの変位場を近似的に再現できることを示し、その近似解が数値的にも実用的な精度を持っていることを示した。

異種基礎間の相互作用（第5章）については、離れた2つの基礎間の相互作用が無視できないということも数値的に検証し、提案した簡易評価法の有用性を確認した。実構造物においては、このような相互作用の影響による変位は、各基礎単体での荷重変位関係に基づく変

位と常に重なり合った形で現れるため、単体での評価が難しい。そのため、実測の報告は多くないが、例えば Çelebi (1993)<sup>5.4)</sup> や小島ら(2014)<sup>5.5)</sup> の研究では、実構造物における異種基礎間相互作用の実測例が示されており、異種基礎間相互作用は実現象としても顕著になり得ると考えられる。

異種基礎間の相互作用に関連して、群杭の荷重中心と Chang の解の特性値との関係を示した(第4章)。また荷重中心に対応する Chang の解の特性値と、群杭の杭頭ばねに対応する Chang の解の特性値は異なることを示した。また、この理論の検証のために行った数値計算により、適切なパラメータを代入した Chang の解による地盤反力は、弾性論を厳密に近似した数値計算(第2章参照)の結果と良く整合することを確認した。

### 6.1.3 基礎のばねおよび地盤と構造物の相互作用に関する今後の研究に資する成果

地盤を介したフーチング間の相互作用の強さの度合いを表す係数(相互作用係数)の評価に、ある種の境界条件が存在することを示し、簡易評価法においても境界条件は満たされるべきものであることを示した(第3章)。「境界条件は満たすが、系の支配方程式は厳密には満たさない単純な(計算の簡単な)関数で近似計算を行う」というアイデアは、数値計算の分野では一般的である(例えば、有限要素法における形状関数など)が、相互作用係数の簡易評価に同様のアイデアが用いられた事例は見当たらず、オリジナリティの高いアイデアだと考えている。実用的には、簡易評価法が主で境界条件はその信頼性を担保するものでしかないが、学術的には、簡易評価法の発明よりも相互作用係数に対する境界条件の概念の導入の方が基礎的な成果であり<sup>注4)</sup>、工学的な重要度は甲乙付けがたい。

地盤と構造物の静的な相互作用の問題に対し、波数積分法を適用した。波数積分法を用いた境界法による相互作用の評価は、従来良く用いられてきた有限要素法などによる領域法よりも自由度を削減した効率的な計算が可能であり、また境界法で静的相互作用を評価する際に従来用いられてきた Steinbrenner の多層近似よりも理論的に厳密な形のグリーン関数が得られる。波数積分法は、静的な相互作用の評価に対する適用事例は見当たらないが、理論地震動計算の分野では静的なグリーン関数の評価も含めて実績のある手法であり、上記の通り従来の手法に対する優位性もあるため、今後静的な相互作用評価の分野にも適用の拡大が期待される。ただし第2章の説明からも分かる通り、波数積分法は、Steinbrenner の多層近似に比べ数学的に難解で数値計算プログラムが複雑になる上、無限積分の評価も必要になるため計算負荷も高い。Steinbrenner の多層近似との使い分けも必要だと考えられる。

---

<sup>注4)</sup> 今後、本研究で提案した簡易評価法の改良や別のアプローチによる評価法の発明を行い、相互作用係数の計算式自体が変化しても、本研究で示した境界条件は必ず満たすようにする必要があるという意味で、簡易評価法の発明よりも境界条件という概念の導入の方が「基礎的」である。

### 6.2 今後の課題

第一章, 特に 1.3 で述べた通り, 本研究は簡単のため極端に理想化した単純な状況のみを取り扱っている。今後はより現実的な状況に対応するため, 部材の不整形, 地盤の不整形と材料非線形, 動的問題などについて検討を進める必要がある。また, 本研究の対象とした範囲内でも未説明の問題が残されているため, これらの問題についても検討を進める必要がある。以下, 優先順位が高いと考えられる順に, 今後の課題を列挙する。

- 1) 杭の水平地盤反力の中心深度 $z_c$ の簡易評価: これが確立しなければ, 本研究で示した異種基礎間相互作用の評価方法は完成したと言えない。単杭において杭頭ばねに対応する特性値と地盤反力分布に対応する特性値の不整合を補正する方法と, 群杭において各杭の負担荷重を算定し $\beta_i$  (4.3.2 参照) を決定する方法を確立できれば, それを組み合わせて $z_c$ の推定も可能と考えている。これと併せて,  $z_c$ と異種基礎間相互作用簡易評価法の適用範囲の関係についても整理したい。
- 2) 本研究で提案した整形な異種基礎のばね評価法の不整形な異種基礎への適用: 本研究において, 多層地盤上のフーチング群が, 極端な条件下では半無限地盤(一層地盤)上のフーチング群として扱えたり, 単独のフーチングと同様に扱えることを示した。同様に, 整形な異種基礎を不整形地盤上の不整形な異種基礎の極端な場合として捉えれば, 整形な異種基礎の評価結果を, 不整形な異種基礎に関する一種の境界条件として用いることが可能だと考えられる。「整形な異種基礎 A のばね < 評価対象の不整形な異種基礎ばね < 整形な異種基礎 B のばね」のような整形な異種基礎が考えられるはずである。このような整形な異種基礎のばねの組合せにより, 不整形な異種基礎のばねの評価が可能であろう(幅を持った評価にはなるが)。この手順の整理と, 評価結果がどの程度の幅を持つかの検証が必要だと考えている。
- 3) 不整形地盤における基礎のばね及び相互作用の評価: 異種基礎は不整形地盤に適用される場合が多いので, 地盤の不整形性の影響の評価法確立は必須と言える。理論や数値計算によるアプローチによって「簡易で正確」な評価を行うのは不可能だと考えているが, 不整形性の度合いに応じて半無限弾性地盤や多層地盤とどの程度違いが出るか, その上限と下限を抑える程度の評価は, 簡易な手順でも可能であろう。不整形地盤については, 理論的にも数値的にも解析が非常に困難であるため, 机上での検討よりも, 原位置での常時微振動(微動)測定や起振試験によるアプローチ(微動のデータや起振試験の結果から地盤のグリーン関数を直接推定できる可能性がある)の方が, むしろ「簡易」である可能性もある。こちらのアプローチも併せて検討したい。どちらにしても非常に難しいテーマになるが, 実現できれば, 不整形地盤における地震動の評価や, 地表面で測定した微動の情報のみで地下の不整形性の度合いを評価するなどの応用も考えられるため, インパクトは大きい。
- 4) 不整形な部材配置, 特に杭長, 杭径の異なる杭の混在した群杭のばね及び相互作用評

価：不整形地盤における杭基礎は、著しく杭長の異なる杭が混在するはずなので、その影響を評価する方法は必要である。不整形性の度合いが小さい場合には無視するか補正係数などで対応し、不整形性の度合いが大きい場合には群杭やフーチング群の中で更にグループを細分化することで対応できると考えている。ただし、補正係数の決定や不整形の度合いの大きい、小さいの線引きを決めるためにパラメータスタディが必要である。また、本研究では群杭同士の相互作用の評価法は扱っていないため、これについても検討する必要がある（フーチング群同士の相互作用は、杭長ゼロの群杭とフーチング群の相互作用として評価できる）。

- 5) 提案した簡易評価式の誤差評価：フーチング群のばね簡易評価式の誤差については離散和と積分の差異が主要な誤差要因と考えられ、異種基礎間相互作用の簡易評価式の誤差についてはグリーン関数の1次近似において無視した2次以上の項の寄与が主要な誤差要因と考えられる。これらの誤差評価の理論は確立されており、それを提案式に適用することで、提案式の誤差評価方法を確立できると考える。
- 6) 基礎幅に対して相対的に杭長の長い群杭に対する相互作用評価：これができれば、提案式の汎用性を更に高めることができるであろう。グリーン関数の多項式近似において、2次以上の項も考慮すれば対応可能と考えられるが、簡便さにも留意する必要がある。前項の誤差評価法も用いて、許容できる誤差と評価の手間とのバランスを検討する必要があると考えている。

以上箇条書きした課題において、1)は本研究を完成させるための課題、2)は本研究の成果の適用性に関する課題であり、3)以降は簡易法の高度化（本研究の方法の精度評価および、より複雑で現実的な条件での簡易法の検討）に関する課題である。3)以降の検討項目については、これらの全ての検討項目を統合した「簡易法」ができるどうかは分からない。複数の簡易評価法を組み合わせた結果、「この場合は、この式を用いる」というような手法の適用のための条件が複雑になり過ぎて「簡易」では無くなるかも知れないし、各項目の適用条件が矛盾して統合不可能になる可能性もある。しかし異種基礎のばねの簡易評価法として統合不能であっても、各検討項目の成果は、それぞれ個別に利用可能であり、検討の価値があるものとする。

## 謝辞

まず本研究をご指導いただいた田村修次 教授（東京工業大学）に、厚く感謝申し上げます。田村先生には、博士課程進学以前から研究の方向性について相談に乗って頂き適切なご指導を頂きました。また、進学した後も遅々として進まない私の研究に対して粘り強くご指導頂き、何とかここまで漕ぎ着けることができました。

本研究は日本建築学会、基礎構造運営委員会、建築基礎構造設計指針改定小委員会、異種基礎ワーキンググループでの検討に端を発したものです。異種基礎ワーキンググループ委員の皆様（主査：佐原守、幹事：濱田純次、委員：池田隼人、西山高士、古垣内靖、渡邊徹）には、特にフーチング群のばね評価の検討において、貴重なご意見を頂きました。大変ありがとうございました。

時松孝次 名誉教授（東京工業大学）と当時の私の上司である伊勢本昇昭 元戸田建設技術開発センター長には、博士課程進学を勧めて頂きました。先生方のお勧めが無ければ、私の博士課程進学は5年は遅れていたに違いありません。大変に感謝しております。

進学の許可を下さった半田雅俊 前戸田建設技術開発センター長、通学および研究の実施に際して格別の配慮をして頂いた同僚諸氏にも記してお礼申し上げます。

## 付録 Chang の解と精算解の不整合について

本文第 4 章で精算解法による水平地盤反力の杭頭の値に乱れ (Chang の解との不整合) があった点について、補足説明を行う。説明するのは以下 2 点である。

### (1) 水平地盤反力の乱れは杭の断面力に大きな影響を及ぼすか

本文でも述べた通り、杭のせん断力は地盤反力の累積値 (杭材軸方向に積分した結果) であり、曲げモーメントはそれを更に積分した結果である。地盤反力の局所的な値の乱れは、杭のせん断力や曲げモーメントに大きな影響を与えない。このことを確認するため、本文図 4.2 の計算結果におけるせん断力の深度分布を図 A1 に示す。同図にある通り、せん断力については杭頭の値が乱れて、精算解と Chang の解の間に大きな不整合が出るようなことは無く、地盤反力の局所的な乱れが杭の断面力に大きな影響を及ぼさないことが確認できる。

### (2) 水平地盤反力の乱れの原因は何か

これについては、杭の節点間の変位差分の精度の問題が大きいと考えている。FEM で地盤反力を計算する過程で、杭の剛性行列と杭の節点変位ベクトルの積の計算が現れるが、この計算の中には隣接する節点間の変位差分をとる計算が暗に含まれる。その際、杭の剛性が高く節点間の変位差分が小さければ、数値計算の桁落ちによって計算精度が悪化する。

このことについて確認するため、本文第 4 章の計算を、杭の剛性を 1/10 に落として行った結果を図 A2 に示す。同図において、杭頭部の地盤反力の乱れは全般的に顕著では無く、やや値の乱れが見られるのは、群杭の本数が多く杭同士の間隔が狭いため群杭全体として剛性の高い同図(b), (c), (d)のケースのみとなっており、本文図 4.2 の結果よりも地盤反力の乱れが小さい。つまり、群杭全体としての剛性が小さいほど、地盤反力の乱れが小さい結果となっている。この結果は、群杭全体としての剛性が小さいほど、杭の隣接節点間の変位差が大きくなり、桁落ちが発生し難くなる結果として解釈できる。

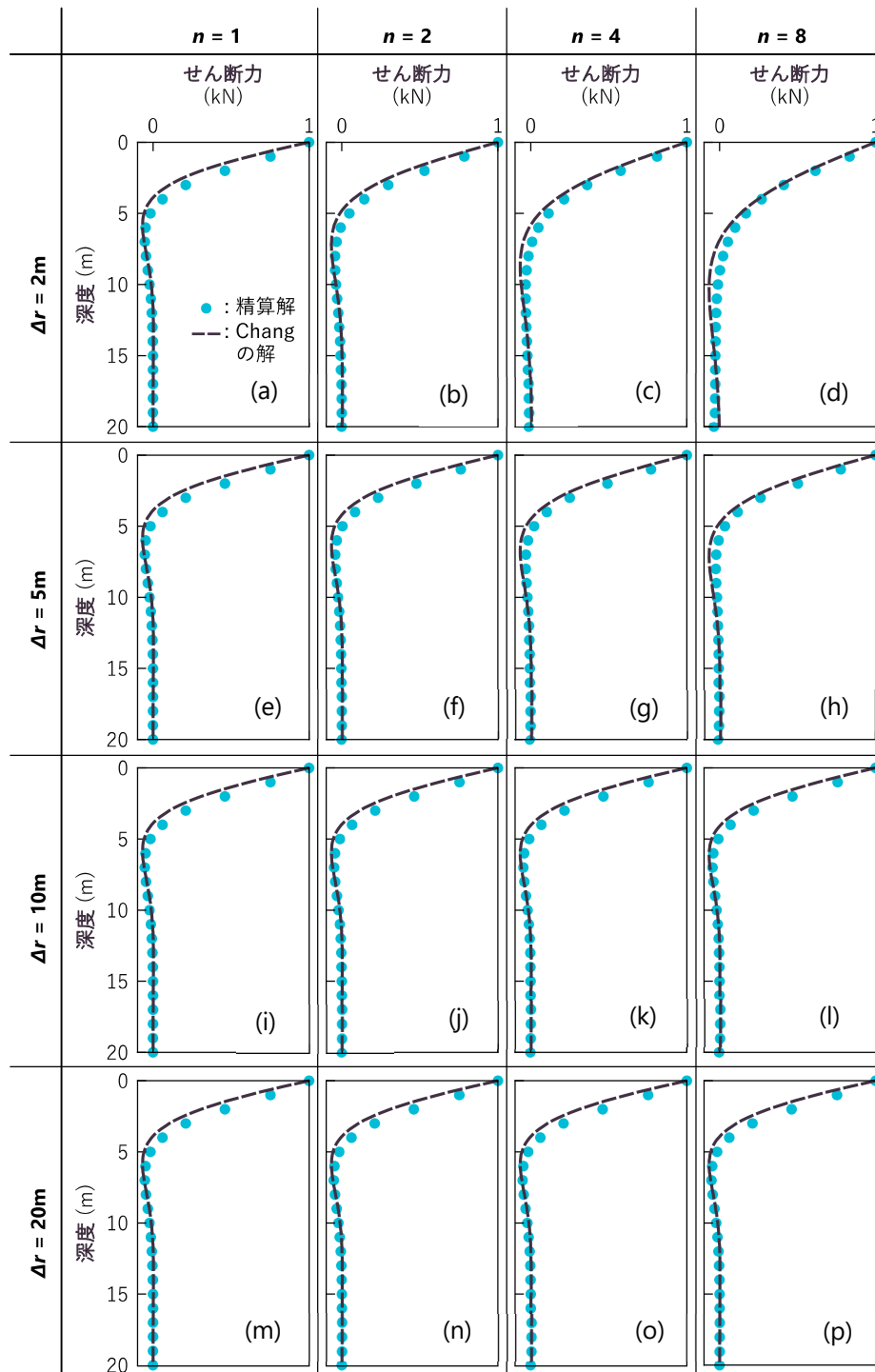


図 A1 群杭のせん断力 ( $F_p = 1\text{kN}$ )

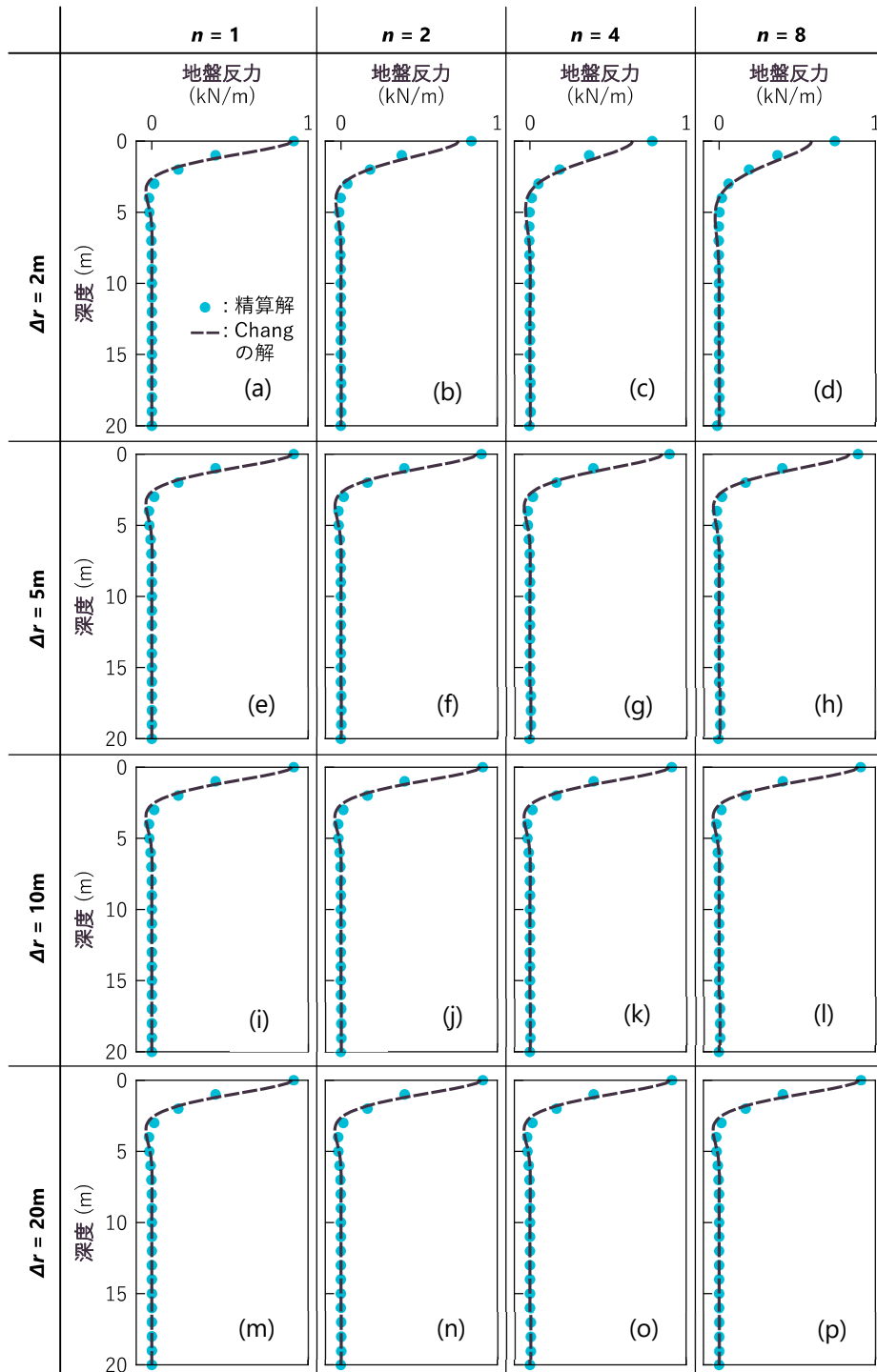


図 A2 剛性 1/10 の群杭の水平地盤反力 ( $F_p = 1\text{kN}$ )