

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	気流中の弾性平板に励起される空力弾性振動の特性および励振機構に関する研究
Title(English)	Characteristics and excitation mechanism of aeroelastic vibrations generated on an elastic plate in air flow
著者(和文)	廣明慶一
Author(English)	Keiichi Hiroaki
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第4186号, 授与年月日:2021年11月30日, 学位の種別:論文博士, 審査員:高原 弘樹,岩附 信行,山浦 弘,中島 求,中野 寛
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第4186号, Conferred date:2021/11/30, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

学位論文

気流中の弾性平板に励起される空力弾性振動の
特性および励振機構に関する研究

Characteristics and excitation mechanism of
aeroelastic vibrations generated on an elastic plate
in air flow

廣明 慶一

目次

第1章 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 既往の研究	2
1.3 研究目的	7
1.4 本論文の構成	8
第2章 線形安定性解析および不安定化機構の考察	11
2.1 上流側の一边を固定支持された平板の解析モデル	11
2.2 平板の運動方程式	12
2.3 平板に作用する非定常流体力の計算	13
2.4 特性方程式	16
2.5 支配無次元数および計算パラメータ	17
2.6 モード近似の打切次数のフラッタ流速および振動数への影響	18
2.7 解析モデルの妥当性の検証	22
2.8 構造減衰および流体摩擦のフラッタ特性への影響	25
2.9 流体力による局所的な仕事分布	28
2.10 流速に対する流体力による仕事の変化（モード間の連成による仕事）	31
2.11 流体付加剛性，付加減衰，付加質量に起因する流体力による仕事	38
2.12 モード間の連成による不安定化機構の考察	44
2.13 まとめ	47
第3章 上流端の支持条件がフラッタ特性と不安定化機構へ及ぼす影響	48
3.1 平板の両側端が支持され上流端と下流端が自由な場合	48
3.1.1 両側端が支持された平板の解析モデル	48
3.1.2 有限要素法を用いた平板の離散化	49
3.1.3 平板に作用する流体力の計算	51
3.1.4 モード近似および特性方程式の導出	52
3.1.5 流体力による局所的な仕事分布の計算	52
3.1.6 支配無次元数および計算パラメータ	53
3.1.7 実験装置および実験方法	54
3.1.8 両側端が固定支持された平板の固有振動モードの解析結果	57
3.1.9 流速を変化させて計算した根軌跡	58
3.1.10 解析結果と実験結果の比較	59

3.1.11	流体力による仕事分布（解析結果）	61
3.2	平板の上流端が弾性支持され下流端が自由な場合	65
3.2.1	上流端が弾性支持された平板の解析モデル	65
3.2.2	端部が弾性支持された平板の運動方程式	66
3.2.3	支配無次元数および計算パラメータ	68
3.2.4	実験装置および実験方法	70
3.2.5	実験結果 （流速に対する振動変位の RMS 値および卓越振動数の変化）	73
3.2.6	前縁を弾性支持された平板の固有振動モードの解析結果	74
3.2.7	等価曲げ剛性とねじり剛性のフラッタ流速および振動数への影響 （解析結果）	77
3.2.8	解析結果と実験結果の比較	83
3.2.9	平板の支持条件が流体力仕事分布に及ぼす影響	85
3.3	まとめ	88
第4章	非線形解析およびリミットサイクル維持機構の考察	89
4.1	解析モデル	89
4.2	非線形運動方程式	90
4.3	非線形渦格子法を用いた流体力の計算	91
4.4	後流に放出された渦輪要素の移流	94
4.5	運動方程式のモード近似	96
4.6	数値積分スキーム	97
4.7	流体力による仕事分布の計算	98
4.8	支配無次元数および実験パラメータ	98
4.9	実験装置および測定システム	100
4.10	実験結果	102
4.11	流速に対するフラッタ振幅および振動数の変化 （解析結果と実験結果の比較）	107
4.12	平板のフラッタモードおよび平板表面上の流体圧力分布	115
4.13	リミットサイクル状態における流体力による仕事分布（計算結果）	120
4.14	CFD を用いた流体構造連成解析	125
4.15	まとめ	139
第5章	流速が平板の振動特性に及ぼす影響	140
5.1	気流中で強制変位加振を受ける平板の解析モデル	140
5.2	線形解析モデル	141

5.3	非線形解析モデル	144
5.4	計算パラメータ	146
5.5	加振実験の概要	147
5.6	線形解析と非線形解析結果および実験結果の比較	150
5.7	流速に対する周波数応答特性の変化	157
5.8	流速に対する振動モードの変化	163
5.9	強制加振時の平板表面上の流体力仕事（解析結果）	165
5.10	まとめ	172
第6章	空力加振を受ける場合の振動特性	173
6.1	実験装置および実験方法	173
6.2	周期的な空力加振を受ける平板の解析モデル	175
6.3	加振板による空力加振の影響を考慮した流体力の計算	176
6.4	加振板による空力加振を受ける平板の流体構造連成方程式 および状態方程式	178
6.5	平板に作用する流体力による仕事分布	179
6.6	計算パラメータ	180
6.7	空力加振実験結果	181
6.8	周波数応答解析結果と実験結果の比較および考察	183
6.9	空力加振時の平板表面上の流体力による仕事分布（解析結果）	188
6.10	まとめ	190
第7章	結論	191
7.1	総括	191
7.2	今後の展望	194
	参考文献	196
	付録A Kussner の積分方程式の導出	202
	付録B 核関数の特異領域の処理	208
	付録C 平板の両側端を固定支持にした場合と単純支持にした場合の フラッタ流速の比較	210

付録 D	構造減衰および流体摩擦のフラッタ流速への影響 (平板の両側端を固定支持された場合)	211
付録 E	梁の非線形運動方程式の導出	213
付録 F	減衰係数 α および流体摩擦係数 C_f のフラッタ振幅 および振動数への影響	219
付録 G	線形解析と非線形解析および実験におけるフラッタ流速の比較	227
謝辞		229

主な記号

全章で共通の記号

b	:	平板のスパン	[m]
C_f	:	流体摩擦係数	[-]
D	:	平板の曲げ剛性	[N・m]
E	:	平板のヤング率	[N/m ²]
f_f	:	フラッタ振動数	[Hz]
g	:	重力加速度	[m/s ²]
h	:	平板の厚さ	[m]
K	:	核関数	[-]
L	:	平板のコード	[m]
N	:	DPM および VLM における平板の全要素数	[-]
N_m	:	モード近似の打切次数	[-]
n_x	:	DPM および VLM における平板の x 方向分割数	[-]
n_y	:	DPM および VLM における平板の y 方向分割数	[-]
q	:	モード座標	[-]
s	:	ラプラス変数	[1/s]
s_e	:	DPM および VLM における要素の面積	[m ²]
S	:	平板の全領域	[m ²]
t	:	時間	[s]
T_s	:	代表長さ	[s]
U	:	一様流速	[m/s]
U_f	:	フラッタ流速	[m/s]
w_f	:	平板表面に誘起される吹上速度	[m/s]
w_s	:	平板の面外方向変位	[m]
w_{RMS}	:	平板の振動変位の RMS 値	[m]
x	:	x 方向	[-]
y	:	y 方向	[-]
z	:	z 方向	[-]
$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$	:	FEM 要素の局所座標系	[-]
Δp	:	平板上下面の圧力差	[Pa]

ρ_f	:	流体の密度	[kg/m ³]
ρ_s	:	平板の密度	[kg/m ³]
Λ	:	平板のアスペクト比	[-]
μ	:	質量比	[-]
μ_f	:	流体の粘性係数	[N・s/m ²]
τ	:	振動 1 周期	[s]
ν	:	平板のポアソン比	[-]
ζ	:	構造減衰比	[-]

添字

i 番目	:	i 番目
j 番目	:	j 番目
*	:	無次元化されたパラメータ

第 2 章で用いた記号

c_d	:	構造系の減衰係数	[kg/m ² s]
$\mathbf{C}_d$	:	構造減衰行列	[N · s/m ³]
E_{AK}	:	剛性項の非対角成分による仕事	[J]
E_{fc}	:	流体付加減衰に起因する仕事	[J]
E_{fk}	:	流体付加剛性に起因する仕事	[J]
E_{fm}	:	流体付加質量に起因する仕事	[J]
E_i	:	振動 1 周期当たりの流体力による局所的な仕事	[J]
E_{op}	:	固有振動モード間の連成による仕事	[J]
E_{sd}	:	構造減衰に起因する仕事	[J]
E_{total}	:	平板になされる流体力による仕事の総和	[J]
$\mathbf{K}$	:	剛性行列	[N · m]
$\mathbf{K}_f$	:	流体摩擦による幾何剛性行列	[N · m]
$\mathbf{M}$	:	質量行列	[N · ms ²]
$\mathbf{Q}$	:	流体力行列	[m ³]
ϕ	:	モード関数	[m]
ω	:	固有角振動数	[rad/s]

第3章で用いた記号

$\mathbf{A}_e$	:	流力弾性行列	[-]
d	:	ワイヤの直径	[m]
$\mathbf{e}$	:	FEM 板要素の節点変位ベクトル	[m]
$\mathbf{e}_w$	:	FEM 梁要素の節点変位ベクトル	[m]
$E_{local}^{(k)}$	:	k 番目の節点における流体力による仕事	[J]
E_m	:	各モードごとの流体力仕事	[J]
E_w	:	ワイヤのヤング率	[N/m ²]
G_w	:	ワイヤの横弾性係数	[N/m ²]
I	:	断面二次モーメント	[m ⁴]
I_p	:	断面二次極モーメント	[m ⁴]
k_b	:	等価曲げ剛性	[N/m ²]
k_t	:	等価ねじり剛性	[N]
$\mathbf{K}_g$	:	重力による幾何剛性行列	[N/m]
$\mathbf{K}_g$	:	重力による幾何剛性行列	[N/m]
$\mathbf{K}_e$	:	ワイヤと平板の複合系の剛性行列	[N/m]
$\mathbf{K}_T$	:	平板に作用する張力による幾何剛性行列	[N/m]
$\mathbf{K}_{wT}$	:	ワイヤに作用する張力による幾何剛性行列	[N/m]
ℓ_w	:	平板のスパンを除いたワイヤ長さ	[m]
$\mathbf{M}_F$	:	質量マトリクス	[kg]
n_w	:	ワイヤの分割数	[-]
$\mathbf{N}$	:	板要素の形状関数行列	[-]
$\mathbf{N}_w$	:	梁要素の形状関数行列	[-]
$\mathbf{Q}$	:	流体力ベクトル	[N/m]
T_p	:	平板に付加される張力	[N]
T_w	:	ワイヤに付加される張力	[N]
Φ	:	モード行列	[m]
ν_w	:	ワイヤのポアソン比	[-]
ρ_w	:	ワイヤの密度	[kg/m ³]

第 4 章で用いた記号

b_e	:	VLM における各要素の幅	[m]
c	:	平板の変形に沿った曲線座標系	[-]
h_x	:	平板の面内方向変位	[m]
f_D	:	VLM によって計算される非粘性抗力	[N/m ²]
f_L	:	VLM によって計算される非粘性揚力	[N/m ²]
F_{fL1}, F_{fL2}	:	流体摩擦による線形幾何剛性行列	[N]
F_{fNL1}, F_{fNL2}	:	流体摩擦による非線形幾何剛性行列	[N]
G_{L1}, G_{L2}	:	重力による線形幾何剛性項	[N]
G_{NL1}, G_{NL2}	:	重力による非線形幾何剛性項	[N]
K_L	:	構造系の線形剛性項	[N]
K_{NL}	:	構造系の非線形剛性項	[N]
L_e	:	VLM における各要素の長さ	[m]
L_v	:	VLM における後流長さ	[m]
M_L	:	構造系の線形慣性項	[kg · m]
M_{NL}	:	構造系の非線形線形慣性項	[kg · m]
P_{local}	:	流体力による各要素のパワー	[J/s]
$\mathbf{u}_w$	:	後流渦によって平板上に誘起される速度ベクトル	[m/s]
W_{local}	:	振動 1 周期当たりの各要素の流体力仕事	[J]
W_m	:	平板と流体の境界における流体格子の速度	[m/s]
x_{TE}	:	VLM における渦要素と平板の後縁間の距離	[m]
α	:	Kelvin-Voigt 型の減衰モデルにおける減衰係数	[s]
Δt	:	時間刻み	[s]
ε	:	コアスプレディングにおける渦コア半径	[m]
Γ	:	循環強さ	[m ² /s]
ν_f	:	流体の動粘度	[m ² /s]

第5章で用いた記号

a_{LE}	:	平板の上流端に入力される強制加振変位	[m]
$ a_{LE} $	:	平板の上流端に入力される強制加振変位の振幅	[m]
$\mathbf{C}_E$	:	強制加振変位に起因する減衰行列	[kg · m/s]
e_s	:	弾性変形に起因する変位	[m]
E_{fe}	:	強制加振変位に起因して生じる流体力による仕事	[J]
f_e	:	加振振動数	[Hz]
f_r	:	共振振動数	[Hz]
$\mathbf{G}$	:	加振変位から各モードのモード座標への伝達関数	[-]
$\mathbf{K}_g$	:	重力による幾何剛性行列	[N · m]
$\mathbf{M}_E$	:	強制加振変位に起因する質量行列	[kg · m]
$\mathbf{Q}_E$	:	強制加振変位に起因する流体力項	[m ³]
U_N	:	フラッタ流速で基準化した流速	[-]
$\mathbf{x}$	:	状態変数ベクトル	[-]
x_o	:	平板の変位の観測位置	[m]
ζ_T	:	構造減衰と流体付加減衰の影響が共に包含された減衰比	[-]

第 6 章で用いた記号

a_{TE}	:	加振板下流端の振幅	[m]
b_a	:	加振板のスパン	[m]
$\mathbf{c}_o$	:	観測位置行列	[-]
E_{fa}	:	加振板の振動によって平板が受ける流体力による仕事	[J]
E_{fs}	:	平板の振動に起因して生じる流体力による仕事	[J]
$\mathbf{G}_s$	:	加振板の振動変位から平板の全節点の振動変位	[-]
h_a	:	加振板の厚さ	[mm]
H	:	加振板間の距離	[m]
L_a	:	加振板のコード	[m]
n_{ax}	:	DPM における加振板の x 方向分割数	[-]
n_{ay}	:	DPM における加振板の y 方向分割数	[-]
N_{ep}	:	加振板の枚数	[-]
N_1	:	DPM における平板の総分割数	[-]
N_2	:	DPM における加振板の総分割数	[-]
$\mathbf{Q}_a$	:	加振板の振動によって平板が受ける流体力	[N]
$\mathbf{Q}_s$	:	平板の振動に起因して生じる流体力	[N]
S_1	:	平板の全領域	[m ²]
S_2	:	平板の全領域	[m ²]
w_{f1}	:	平板上に誘起される吹上速度	[m/s]
w_{f2}	:	加振板上に誘起される吹上速度	[m/s]
$\mathbf{X}_1$	:	平板の節点変位ベクトル	[m]
$\mathbf{X}_2$	:	加振板の節点変位ベクトル	[m]
Δp_1	:	平板に作用する流体圧力	[N/m ²]
Δp_2	:	加振板に作用する流体圧力	[N/m ²]
ϕ_{sa}	:	加振板の振動による流体力と平板の変位との位相差	[rad]
ϕ_{sk}	:	平板の振動に起因する流体力と平板の変位との位相差	[rad]

第 1 章

緒論

1.1 研究背景

紙は情報伝達媒体として広く用いられてきた。これまでに紙を効率的に製造するために、ロール・ツー・ロール搬送やドライヤーによる乾燥などの様々なハンドリング技術が培われてきた^[1, 2]。近年、これらの精緻なハンドリング技術は表面に緻密な処理を施した高機能性フィルムなどの薄い弾性平板の製造に応用されている^[2]。以下、単に弾性平板と表記する。弾性平板はスマートフォンやタブレットなどの電子機器のディスプレイ用の偏光フィルムや自動車の燃料電池用の絶縁フィルムをはじめとして、今日の便利で快適な生活に欠かせない多くの工業製品に利用されている^[3]。最近では、弾性平板に導電性インクを直接印刷し電子回路を作成するプリンテッドエレクトロニクス技術が注目されている^[4]。プリンテッドエレクトロニクス技術はロール・ツー・ロール搬送などの製紙工程で培われてきた印刷技術の援用により安価で短期間にデバイスを製造可能であるという特長がある。さらに、熱中症対策などを目的として皮膚に貼り付けて体温や pH および心拍数などの生体情報をモニタリングする生体フィルムが実用研究段階に入っている^[5]。

このことから、工業分野だけでなく医療分野においても、弾性平板の需要の急増が見込まれている。この需要の増加に対応するために、さらに高効率かつ高精度な弾性平板の製造技術の確立が必要である。

しかしながら、これらの弾性平板の製造工程では、平板を高速で搬送する際や平板表面に塗布された化学塗料を工業用ドライヤーにより空気を吹き付けて乾燥させる際に、空気流れと平板の運動が連成して自励振動（フラッタ）が発生する場合がある^[6]。これ以降、自励振動をフラッタと表記する。また、フラッタ発生の臨界流速以下の流速域においても、工業用ドライヤーから吹き出される脈動を含む空気流れや、平板近くに設置された絞り部などの近接構造物によって生じるはく離渦に起因した空力的な加振によって振動（強制振動）が発生する場合がある。

これらの振動が発生すると、平板の傷や破損、表面に塗布された化学塗料の飛散などの品質不良の原因となり、生産性の低下を招く。このため、振動の発生を未然に回避、または制振する必要がある。しかしながら、これらの振動の詳細な特性や励振機構は明らかになっていない。

1.2 既往の研究

1.2.1 フラッタに関する既往の研究

本研究の位置づけを明確にするために、これまでに報告されている気流中の弾性平板に励起される振動に関する研究の内容を示し、明らかにされた点と未解明の点を整理する。気流中の弾性平板に発生する振動は、フラッタと空力的な強制加振によって発生する振動に大別される。

弾性平板に発生するフラッタに関しては、これまでに理論的、実験的に多くの研究が行われている。多くの理論的研究では、フラッタ発生の臨界流速（フラッタ流速）の線形安定性解析による予測がなされており、風洞実験の結果^[6-10]との比較によりモデルの適用性の検証がなされている。その結果、平板の質量と平板に付加される流体付加質量との質量比を用いることでフラッタ流速を統一的に整理できることが明らかになった^[6, 8]。また、質量比が大きくなると、高次のモードが不安定化することが示されている。

以下にこれまでに提案されたそれぞれの解析モデルの特徴を示す。線形安定性解析モデルの多くは、平板のスパン方向、つまり流れと直交する方向の流体力の分布が一様であると仮定した2次元解析モデルである。弾性平板に励起されるフラッタに関する黎明期の研究では、流体流れを受ける無限長の平板を対象に理論解析モデルが構築され、安定性が調べられている^[11]。その後、有限長の平板の安定性を解析するためのモデルが提案されている^[7, 12-14]。これらのモデルでは、航空機の空力解析のために開発された理論^[15]が適用されており、平板の後縁において Kutta の条件が厳密に満たされるという特徴がある。また、Guo ら^[16]によって Fourier 変換と Gauss-Chebyshev 法を用いた安定性解析法が提案されている。さらに、長倉ら^[17]、金子ら^[18]は平板がカバーやガイドなどの壁面近くでハンドリングされる状況を想定して、壁面近傍の流体の粘性の影響を考慮したすき間流理論^[19]を用いた定式化を行い、安定性を調べている。

また、数値計算を援用した安定解析法も提案されている。Yamaguchi ら^[20]、Howell ら^[21]は離散渦法と梁理論を用いた解析モデルを構築した。このモデルは従来の振動モードの重ね合わせ法を用いた解析手法とは異なり、振動モードを想定せずに離散化された平板上の各節点における振幅を未知量として扱うという特徴がある。これらの2次元解析モデルを用いた解析では、不安定化するモードなどの定性的な傾向は実験結果と概ね一致するものの、フラッタ流速に関しては実験値との間に定量的な差異が生じることが明らかになっている。

このため、より精緻な解析のために、幅方向の流体力の分布を考慮した3次元解析がいくつか報告されている^[22, 23]。これらの3次元解析では、平板の縦横比であるアスペクト比がフ

フラッタ流速に及ぼす影響が調べられており、アスペクト比が小さいほど流れの 3 次元性の影響が顕著に現れ、2 次元解析との差異が大きくなる、つまり 2 次元解析結果よりもフラッタ流速が増加することが示されている。一方、アスペクト比が大きいほど、フラッタ流速は 2 次元解析結果に近づくことが明らかになっている。Eloy ら^[22]は Guo ら^[16]の手法を 3 次元に拡張しており、Guo ら^[16]の 2 次元解析手法における実験値との定量的な差異が大きく改善されている。さらに、slender-body 近似と large-span 近似が適用可能なアスペクト比の範囲を示した (図 1.1 を参照のこと)。その結果、どちらの近似も適用することができない、つまり 3 次元解析 (図 1.1 中のプロット+) でしか解析することができないアスペクト比が存在することが明らかになった。その他にも渦格子法を用いた 3 次元解析が報告されており、解析により得られたフラッタ流速は実験結果と定量的に良く一致することが示されている^[23]。

以上を示した研究では、平板の上流端が固定支持された状態を対象に解析が行われている。しかしながら、弾性平板の製造工程では、端部が弾性支持された状態や両端を支持された状態でハンドリングされる場合がある。これまでに両端を固定支持された弾性平板を対象に安定性解析を行った研究がいくつか報告されているが^[24-29]、支持条件がフラッタ特性や励振機構に及ぼす影響は詳細には明らかになっていない。加えて、これらの研究のほとんどはフラッタ流速の理論的予測に焦点を当てており、不安定化機構の詳細は明らかにされていない。

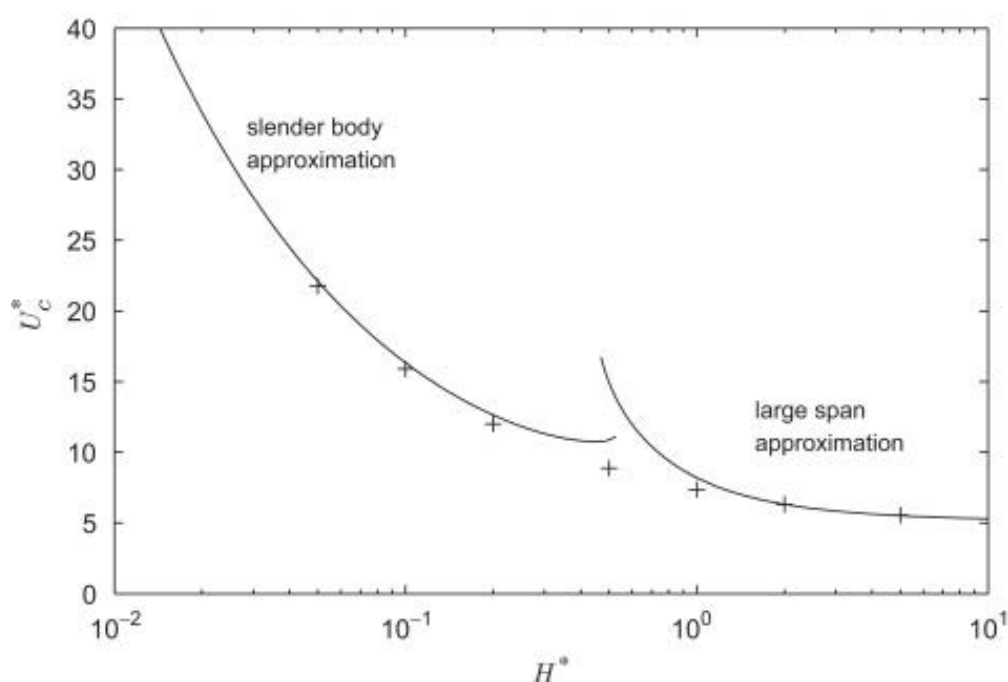


図 1.1: Slender-body 近似と large-span 近似の適用範囲 (アスペクト比 H^* に対する無次元フラッタ流速 U_c^* の変化) ^[22]

さらに、フラッタ発生後の挙動を解析するために、非線形解析が行われている。非線形解析に関する多くの研究では、離散渦法が用いられている。Tang ら^[30]は非線形梁理論と線形渦格子法を用いた非線形解析を行った。その結果、非線形解析によりリミットサイクルを再現することに成功している。しかしながら、平板に作用する流体力の非線形性を考慮していないために、フラッタ発生時の振幅は実験値よりも大幅に小さく見積もられることが明らかになった。このことから、平板に作用する流体力の非線形性はフラッタ発生時の振幅を予測する上で重要な因子である。このため、流体力の非線形性を考慮した解析モデルが構築されている。Tang ら^[31]、Michelin ら^[32]、Alben^[33]、Chen ら^[34]は非線形梁理論と 2 次元非線形離散渦を用いた非線形解析モデルを構築し、フラッタ発生時の平板の振幅を調べた。Tang ら^[31]はフラッタ発生時には進行波タイプのモードが励起されることを非線形解析により示しており、その結果は先行研究で報告されている実験結果^[6, 30]と概ね一致することが明らかになった。しかしながら、この研究では流体解析（離散渦法）において平板の後流に放出された渦要素が互いに干渉することなく定常流速で移流されると仮定し簡易的にモデリングを行っているため、フラッタ発生時の平板後流の流れ場に関しては言及されていない。

一方、Michelin ら^[32]、Alben^[33]、Chen ら^[34]はフラッタ現象の流体力学的な側面に焦点を当てており、平板の後流に放出された渦要素間の干渉により生じる誘起速度を考慮した解析により、フラッタ発生時の平板後流の渦構造を詳細にシミュレーションしている。また、Chen ら^[34]は風洞実験を行い、フラッタ発生時の振幅を実験と解析で比較している。その結果、2 次元解析であるため実験値との差異は見られるものの、Tang ら^[30]の線形渦格子法を用いた解析と比べて実験値との差異は改善されている。

Yadykin ら^[35]は slender-body 理論に非線形流体減衰を付加したモデルを構築し、非線形解析を行った。Eloy ら^[36]は流速の増減に伴って生じるフラッタ振幅のヒステリシスの機構を考察するために、非線形 slender-body 理論と large-span 理論を用いた非線形解析を行った。その結果、非線形 slender-body 理論を用いた場合にはヒステリシスは生じず、非線形 large-span 理論を用いた場合にはヒステリシスが生じることが明らかにされている。また、Wu ら^[37]は非線形すき間流理論と離散梁モデルを用いた非線形解析により、狭い流路内で支持された平板のフラッタ振幅と振動数を調べている。この研究では、平板と流路壁面間のすき間幅が狭くなるほど流体力の非線形性が顕著に現れることが示されている。これらの研究は流体流れの 3 次元性を考慮していない 2 次元解析であり、その適用範囲には制約がある。

また、近年では Computational Fluid Dynamics (CFD) を用いた流体構造連成解析が行われている。澤田ら^[38, 39]は Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) 有限要素法を用いた 2 次元非線形解析を実施している。この研究では、Zhang ら^[40]の実験によって報告されているような流速

で流れる石鹸膜中に設置された細い糸に励起される **stretched-straight state**（糸が流れ方向にまっすぐ伸びて落ち着く状態）、**flapping state**（糸がはためいている状態）、**bistability**（**stretched-straight state** と **flapping state** を飛び移る状態）の3つの状態をシミュレーションにより示している。Huang ら^[41]は **immersed boundary** 法を用いた3次元解析により、複雑な3次元変形を伴う弾性平板のフラッタ挙動を解析している。さらに、フラッタ発生時の平板後流の渦構造を可視化している。しかしながら、**immersed boundary** 法は適用可能な **Reynolds** 数に制約があり^[42]、弾性平板の製造工程におけるレイノルズ数に適用することは現在のところ困難である。さらに、フラッタ発生時の平板表面上の流体力仕事分布は明らかになっておらず、リミットサイクルの維持機構は解明されていない。

以上より、これまでに行われた弾性平板に発生するフラッタの研究に関して、明らかにされた点と未解明の点を表 1.1 にまとめる。

表 1.1: フラッタに関する既往の研究で明らかにされた点と未解明の点

	線形安定性解析	非線形解析
明らかにされた点	・質量比 μ を用いることで、フラッタ流速を統一的に整理可能 ・流れの3次元性のフラッタ流速への影響 ・Slender-body 近似と Large-span 近似の適用範囲（2次元解析モデルの適用範囲） ・壁面近傍の流体の粘性を考慮した系の安定性	・非線形解析によるリミットサイクルの再現 ・流速の増減に伴うフラッタ振幅のヒステリシスの発現機構 ・CFD を用いた数値計算による平板後流の複雑な渦構造の可視化
未解明の点	・詳細な不安定化機構 ・支持条件がフラッタ特性と不安定化機構に及ぼす影響	・リミットサイクルの維持機構（リミットサイクル状態の流体力仕事分布）

1.2.2 強制加振に起因する振動に関する既往の研究

流体中で強制加振を受ける弾性平板の振動特性を調べた既往の研究に関して、Paraz ら^[43, 44]は水流中で上流端に変位加振を受ける弾性平板を対象に、非線形流体減衰を考慮した理論解析と加振実験を行っている。その結果、加振振幅が大きくなると平板前縁と後縁の振幅比が小さくなることが明らかにされている。しかしながら、振幅の解析値と実験値の間には定量的な差異が存在することが示されている。また、Arellano Castro ら^[45]は加振振幅が応答特性に及ぼす影響を理論解析と加振実験によりさらに詳細に調べている。Michelin ら^[46]は非線形梁理論と2次元離散渦法を用いた加振応答解析を行っており、加振時の平板後流には逆 Karman 渦が形成されることを示している。上述した研究においては、流速が平板の固有振動数や減衰比などの振動特性に及ぼす影響に関しては詳細に解明されていない。また、加振時の励振流体力の分布に関しては議論されていない。

加えて、平板が Karman 渦により加振を受ける場合の理論解析^[47, 48]と実験^[48, 49]がいくつかなされており、Karman 渦の影響により大振幅の振動が平板に生じることが示されている。しかしながら、現在のところ研究報告は限られており、詳細な振動特性を解明するには至っていない。また、ターボ機械の研究分野では Sears^[50]の理論を用いて周期的な流速変動を受けるタービン翼の応答解析がなされている^[51, 52]が、弾性平板の応答解析に適用した研究は現在のところ報告されていない。

以上より、これまでに行われた気流中で強制加振を受ける弾性平板に発生する振動の研究に関して、明らかにされた点と未解明の点を表 1.2 にまとめる。

表 1.2: 強制加振によって発生する振動に関する既往の研究で明らかにされた点と未解明の点

明らかにされた点	・加振振幅の応答特性への影響 ・加振時の平板後流の流れ場 ・Karman 渦による加振を受ける場合の振動特性 ・流速変動を伴う流れによる加振を受けるタービン翼列の振動特性
未解明の点	・流速が振動特性（固有振動数，減衰比，振幅）に及ぼす影響の詳細 ・周期的な空力加振を受ける場合の詳細な周波数応答特性 ・加振時の平板表面上の励振流体力の分布

1.3 研究目的

本研究では、気流中の弾性平板に励起されるフラッタおよび強制振動を対象に、表 1.1 および 1.2 に示した未解明の内容、すなわち詳細な振動特性および励振機構を明らかにすることを目的とする。以下に表 1.1 および 1.2 に示した「未解明の点」と対応させて本研究の目的を示す。

フラッタの詳細な不安定化機構を考察するために、非定常揚力面理論に基づく 3 次元線形安定性解析モデルの構築を行う。まず上流端の一边が固定された体系を対象に解析を行う。構造解析には線形梁理論を適用する。構築した解析モデルと先行研究で報告されている実験結果^[53]および他の 3 次元解析手法^[22, 23]を比較し、モデルの妥当性を検証する。そして、流体力によって平板表面になされる仕事を求め、詳細な不安定化機構を考察する。以上の内容は、表 1.1 の未解明の点の「詳細な不安定化機構」に対応している。

次に、平板の支持条件がフラッタ特性と不安定化機構に及ぼす影響を調べるために、上述の解析モデルを拡張する。具体的には、構造解析に任意の支持条件を設定しやすい有限要素法を適用する。両端が支持された場合および平板の端部が弾性支持された場合を対象に安定性解析を行い、支持条件がフラッタ特性と不安定化機構に及ぼす影響を詳細に調べる。また風洞実験を行い、解析結果と比較することで構築したモデルの妥当性を検証する。以上の内容は、表 1.1 の未解明の点の「支持条件がフラッタ特性と不安定化機構に及ぼす影響」に対応している。

さらに、フラッタ発生後の挙動を解析するために非線形解析を行う。既往の研究で示唆されているように^[30]、フラッタ発生後の挙動には構造系、流体系双方の非線形性が大きく影響する。このため、構造系および流体系の非線形性を共に考慮した非線形解析モデルの構築を行う。ここで、先行研究で示されている実験結果より、フラッタモードは 2 次元的事であることが示されている^[6, 10, 30]ので、構造解析には非線形梁モデル^[54]を適用する。また、平板に作用する流体力は、流体力の 3 次元性と非線形性を考慮することができる渦格子法^[55]を用いて求める。構築した非線形解析モデルを用いて時刻歴応答解析を行う。フラッタ発生時の振幅および振動数を風洞実験の結果と比較し、モデルの妥当性を検証する。そしてリミットサイクル状態において、流体力により平板になされる仕事を求めることで、リミットサイクルの維持機構を考察する。以上の内容は、表 1.1 の未解明の点の「リミットサイクルの維持機構」に対応している。

強制振動に関しては、上述のフラッタ解析モデルに対して強制加振の影響を付加することでモデルを拡張し、周波数応答解析を行う。まず、流速に対して平板の固有振動数、減衰比および振幅がどのように変化するかを明らかにするために、平板の上流端に強制変位加振を与え解析と実験により周波数応答特性を調べる。以上の内容は、表 1.2 の未解明の点の「流速が振動特性（固有振動数、減衰比、振幅）に及ぼす影響の詳細」に対応している。

次に、ドライヤーから吹き出される脈動を含む空気流れや、平板近くに設置された絞り部によって生じるはく離渦などに起因した加振源による空力的な加振を想定し、平板の上流側に板（以下、加振板と表記する）を設置し周期的に振動させることで、平板に対して空力加振を行う。流速および加振振動数を変化させて周波数応答特性や励振流体力分布を調べる。以上の内容は、表 1.2 の未解明の点の「周期的な空力加振を受ける場合の詳細な周波数応答特性」および「加振時の平板表面上の励振流体力の分布」に対応している。

1.4 本論文の構成

図 1.2 に本論文の構成の概略図を示す。2～4 章ではフラッタについて、5, 6 章では強制振動について扱う。

第 1 章では、弾性平板に励起されるフラッタおよび強制振動に関する既往の研究において既に明らかにされている点と未解明の点を整理し、本研究の位置づけと必要性を示した。

第 2 章では、上流端を固定支持された弾性平板を対象に、非定常揚力面理論と線形梁理論に基づく安定性解析モデルを構築する。構築したモデルと先行研究で報告されている実験結果^[53]および他の 3 次元解析手法^[22, 23]と比較することで妥当性を検証した上で、流体力によって平板になされる仕事を求め不安定化機構を詳細に考察する。第 2 章の内容は、表 1.1 の未解明の点の「詳細な不安定化機構」に対応している。

第 3 章では、弾性平板の支持条件のフラッタ特性と不安定化機構への影響を明らかにする。複雑な支持条件や平板の 3 次元的な変形を考慮するために、構造解析に有限要素法を適用した解析を行う。具体的には、両端が支持された場合と端部が弾性支持された場合を対象とする。また風洞実験を行い、構築したモデルの妥当性を検証する。さらに、支持条件によって流体力による仕事分布がどのように変化するかを調べ、支持条件の不安定化機構への影響を明らかにする。第 3 章の内容は、表 1.1 の未解明の点の「支持条件がフラッタ特性と不安定

化機構に及ぼす影響」に対応している。

第 4 章では、非線形梁理論と渦格子法を用いた非線形解析モデルを構築し、フラッタ発生後の振幅と振動数を調べる。さらに、リミットサイクル状態における流体力仕事分布を求めることで、リミットサイクルの維持機構を考察する。第 4 章の内容は、表 1.1 の未解明の点の「リミットサイクルの維持機構」に対応している。

第 5 章では、流速に対して平板の振動特性、つまり固有振動数、減衰比および振幅がどのように変化するかを明らかにするために、平板の上流端に強制変位加振を与え周波数応答特性を調べる。フラッタ流速以下の流速域で流速を変化させて振動特性を解析と実験により調べる。さらに、加振時の平板表面上の流体力による仕事分布を求め、励振流体力が作用する領域を明らかにする。第 5 章の内容は、表 1.2 の未解明の点の「流速が振動特性（固有振動数、減衰比、振幅）に及ぼす影響の詳細」に対応している。

第 6 章では、弾性平板の上流側に加振板を設置し、フラッタ流速以下の流速において気流中で加振板を振動させることで加振板の後流を周期的に振動させ、平板に対して空力加振を行い周波数応答特性を調べる。解析では、加振板の振動によって平板上に誘起される吹上速度を考慮した空力加振応答解析モデルを構築する。さらに、励振流体力の分布を詳細に調べるために、流体力によって平板になされる仕事を加振板による空力加振に起因する成分（強制流体力に起因する成分）と平板の振動に起因する成分（自励流体力に起因する成分）に分離し、考察を行う。第 6 章の内容は、表 1.2 の未解明の点の「周期的な空力加振を受ける場合の詳細な周波数応答特性」および「加振時の平板表面上の励振流体力の分布」に対応している。

第 7 章では、本研究の結論と今後の展望を述べる。

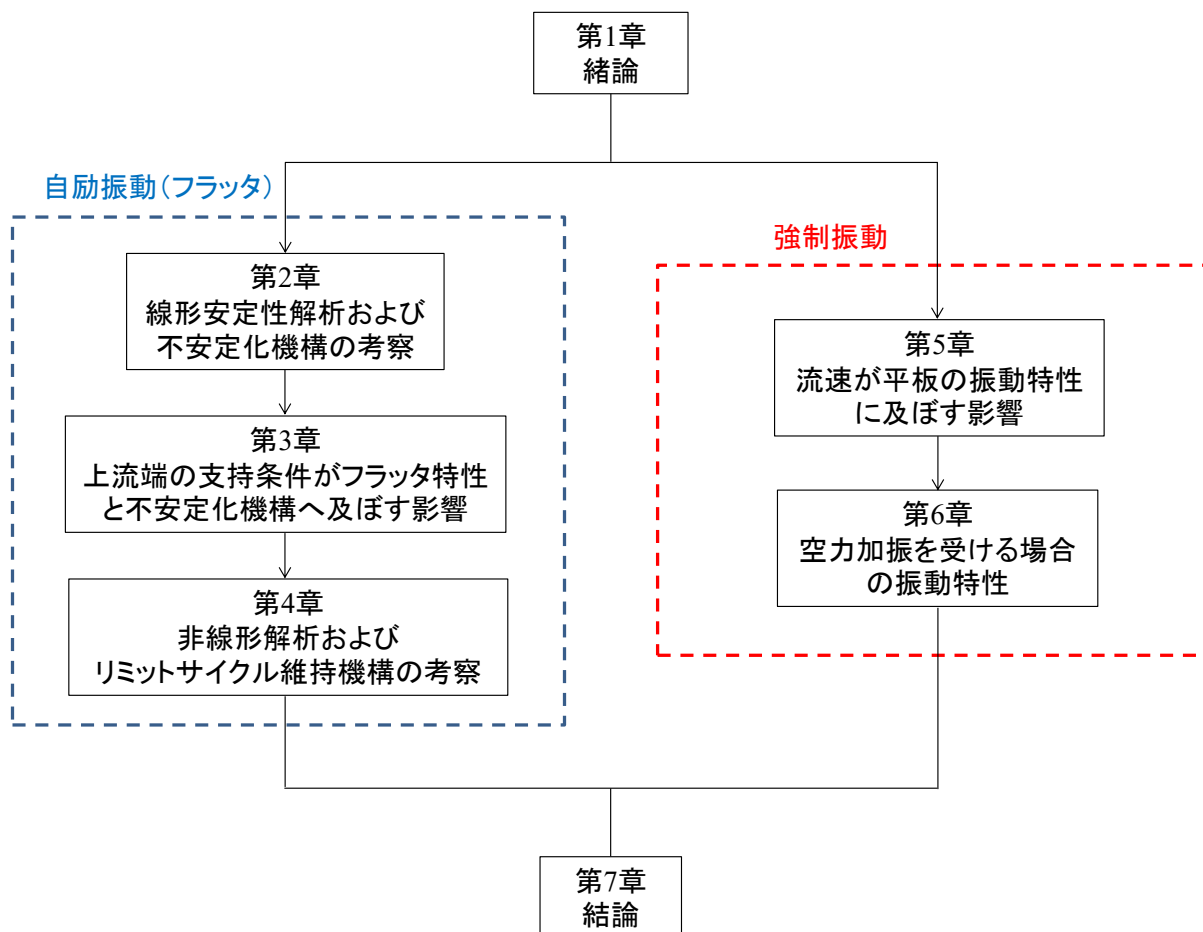


図 1.2: 本論文の構成

第 2 章

線形安定性解析および不安定化機構の考察

第 2 章では、弾性平板のハンドリング工程で最も基本的な体系である上流端が固定支持された体系を対象として線形安定性解析モデルを構築し、流速を変化させて複素固有値解析を行いフラッタ流速（系が不安定化する流速）と振動数を調べる。

ここで、上流端固定支持の場合、フラッタ発生時の平板の変形は 2 次元的事であることが示されているため^[6, 10, 30]、本章では簡略化のために平板を片持ち梁としてモデル化する。一方、第 3 章では 3 次元的事な変形を呈する平板を解析対象とするため、構造解析に 3 次元的事な変形を考慮することができる有限要素法を用いる。

解析結果を先行研究で報告されている実験結果および他の解析手法と比較し構築したモデルの妥当性を検証した上で、流体力によって平板になされる仕事を求め励振流体力が作用する領域を明らかにする。さらに、平板に作用する流体力を流体付加質量、付加減衰、および付加剛性に寄与する成分に分離し、それぞれの成分が流体力仕事に及ぼす影響を調べる。また、フラッタへの寄与が支配的な固有振動モードに着目し、それらのモード間の連成により生じる仕事が系の安定性に及ぼす影響を調べることで、不安定化機構を詳細に考察する。

2.1 上流側の一辺を固定支持された平板の解析モデル

図 2.1 に一様流中の平板の解析モデルを示す。平板は上流端が固定支持されており、密度 ρ_f 、一様流速 U の流れを受けている。平板のコード、スパン、厚さ、密度をそれぞれ L, b, h, ρ_s と定義する。また、平板の面外方向の変位を w_s と表記する。

ここで、先行研究の実験において、上流端を固定支持された平板のフラッタモードは 2 次元的事である（曲げ変形が支配的事である）ことが示されているため^[6, 10, 30]、簡略化のために平板を片持ち梁としてモデル化する。一方、平板に作用する流体力の 3 次元性はフラッタ特性に大きく影響を及ぼすため^[22]、平板に作用する流体力は 3 次元ポテンシャル流れに基づく Doublet-point 法^[56, 57]（以下 DPM と呼ぶ）を用いて求める。

DPM は、構造物を任意の数の要素に分割し、各要素に分布する流体力を集中荷重に置き換えて要素ごとに流体力を計算した上で、最終的にそれらの流体力の総和を取ることで構造物に作用する流体力を求める解析手法である。DPM は流体力の 3 次元性を考慮した解析手法であるため、2 次元解析手法と比べて流体力を精緻に計算することができる。さらに、各要素

に作用する流体力を集中荷重で置き換えているため有限要素法と組み合わせやすく，3次元的な変形を呈する構造物や複雑な支持条件を有する構造物の解析に適しているという特長がある．本章では構造解析に梁理論を適用するが，第3章では，DPMと有限要素法を組み合わせた解析手法を用いる．

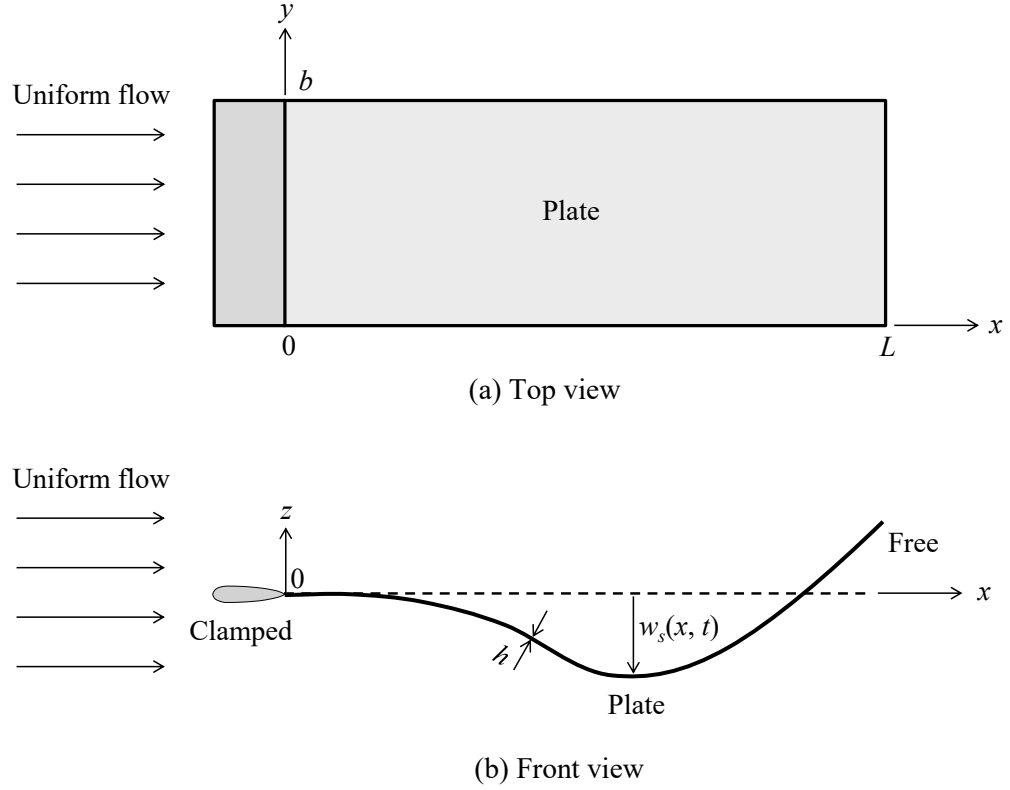


図 2.1: 一様流中で上流端を固定支持された平板の解析モデル

2.2 平板の運動方程式

平板の線形安定性を議論するために微小な振動を仮定すると，平板の運動方程式は以下のよう表される．

$$\rho_s h \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w_s}{\partial t} + D \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \rho_f U^2 C_f \frac{\partial w_s}{\partial x} - \rho_f U^2 C_f (L-x) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \Delta p(x, y, t) \quad (2.1)$$

c_d , D はそれぞれ減衰係数と平板の曲げ剛性を表している．曲げ剛性 D は $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ で与えられる． E と ν はそれぞれ平板のヤング率とポアソン比である．左辺の第1項，第2項，第3項はそれぞれ構造系の慣性項，減衰項，剛性項である．

また，右辺の Δp は流体流れによって生じる平板の上下面の圧力差であり，3次元ポテンシャル流れに基づく DPM^[56, 57]により求める．ここで，DPMはポテンシャル流れを基礎として

いるため、平板近傍の境界層（粘性）の影響により生じる流体摩擦の影響を考慮することができない．このため、流体摩擦に起因する流れ方向（ x 方向）に作用する張力（左辺 4, 5 項）を導入することで、近似的に粘性の影響を考慮する．

次に、Galerkin 法により、平板の面外方向変位 w_s を以下のように近似する．

$$w_s(x, t) = \sum_{m=1}^{N_m} \phi_m(x) q_m(t) \quad (2.2)$$

ϕ_m はモード関数、 q_m はモード座標を表している．また、 N_m はモードの打切次数である．ここでは、下式で与えられる片持ち梁のモード関数を用いる．

$$\phi_m(x) = \left(\cosh \frac{\lambda_m x}{L} - \cos \frac{\lambda_m x}{L} \right) - \sigma_m \left(\sinh \frac{\lambda_m x}{L} - \sin \frac{\lambda_m x}{L} \right), \quad \sigma_m = \frac{\cosh \lambda_m + \cos \lambda_m}{\sinh \lambda_m + \sin \lambda_m} \quad (2.3)$$

式(2.2)を(2.1)に代入すると、

$$\begin{aligned} & \rho_s h \sum_{m=1}^{N_m} \phi_m(x) \ddot{q}_m(t) + c_d \sum_{m=1}^{N_m} \phi_m(x) \dot{q}_m(t) + D \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\partial^4 \phi_m(x)}{\partial x^4} q_m(t) \\ & + \rho_f U^2 C_f \left(\sum_{m=1}^{N_m} \frac{\partial \phi_m(x)}{\partial x} q_m(t) - (L-x) \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\partial^2 \phi_m(x)}{\partial x^2} q_m(t) \right) \\ & = \Delta p_m(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる．さらに、モードの直交性を利用するために式(2.4)にモード関数 $\phi_\ell(x)$ を乗じ、コード方向（ $x=0 \sim L$ ）およびスパン方向（ $y=0 \sim b$ ）に積分すると、

$$\begin{aligned} & \rho_s b h \int_0^L (\phi_\ell(x))^2 dx \ddot{q}_\ell(t) + 2 \rho_s b h \zeta_\ell \omega_\ell \int_0^L (\phi_\ell(x))^2 dx \dot{q}_\ell(t) + \rho_s b h \omega_\ell^2 \int_0^L (\phi_\ell(x))^2 dx q_\ell(t) \\ & + \rho_f U^2 b C_f \left(\sum_{m=1}^{N_m} \int_0^L \phi_\ell(x) \frac{\partial \phi_m(x)}{\partial x} dx q_m(t) - \sum_{m=1}^{N_m} \int_0^L (L-x) \phi_\ell(x) \frac{\partial^2 \phi_m(x)}{\partial x^2} dx q_m(t) \right) \\ & = \int_0^b \int_0^L \phi_\ell(x) \Delta p(x, y, t) dx dy \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる．ここで、 ω_ℓ および ζ_ℓ は ℓ 次モードの固有角振動数と減衰比である．

2.3 平板に作用する非定常流体力の計算

流体流れによって平板の上下面に生じる圧力差 Δp^* と平板表面上に誘起される吹上速度 w_f^* は非定常揚力面理論に基づく以下の積分方程式^[58]で関係付けられる．式(2.6)は無次元化された方程式であり、式中の上付添字*は無次元化された変数であることを表している．また、

積分方程式の導出過程に関しては付録 A を参照のこと。

$$w_f^*(x^*, y^*) = \frac{1}{8\pi} \iint_{S^*} \Delta p^*(\xi^*, \eta^*) K(x_0^*, y_0^*) d\xi^* d\eta^* \quad (2.6)$$

$$x^* = x/b, \quad y^* = y/b, \quad \xi^* = \xi/b, \quad \eta^* = \eta/b, \quad w_f^* = w_f/U, \quad \Delta p^* = \Delta p/(\rho_f U^2/2) \quad (2.7)$$

式(2.6)中の S^* は平板が占める全領域（面積）である。また、 K は核関数であり、以下の式で与えられる。

$$K(x_0^*, y_0^*) = e^{-\frac{i\omega b}{U} x_0^*} B(r, x_0^*) \quad (2.8)$$

$$r = |y_0^*| = |y^* - \eta^*|, \quad x_0^* = x^* - \xi^* \quad (2.9)$$

$$B(r, x_0^*) = \int_{-\infty}^{x_0^*} \frac{e^{\frac{i\omega b}{U} v^*}}{(v^{*2} + r^2)^{3/2}} dv^* \quad (2.10)$$

ここで、式(2.10)で与えられる積分関数 B は特異領域を含んでいるため、漸近展開式^[56, 57]を用いて計算を行う。特異領域の処理の詳細は付録 B を参照のこと。また、式(2.10)より、核関数 K 中には流速 U および角振動数 ω が含まれている。

式(2.6)で与えられる積分方程式を DPM により離散化し、平板表面に作用する流体力を求める。1/4~3/4 翼弦則に従って要素上に分布する流体力の代表点（ダブレット点）と吹上速度の代表点（アップウォッシュ点）を配置する。つまり、図 2.2 に示すように、ダブレット点(ξ_i, η_i)を 1/4 翼弦点に、アップウォッシュ点(x_{ui}, y_{ui})を 3/4 翼弦点に配置する。この配置を用いることで、平板後縁において Kutta の条件が近似的に満たされる。

DPM を用いた離散化により、各要素に作用する流体力が以下のように求まる。

$$\Delta \mathbf{p}^* = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{w}^* \quad (2.11)$$

$$\Delta \mathbf{p}^* = \{\Delta p^*(\xi_j^*, \eta_j^*)\}, \quad \mathbf{w}^* = \{w_{fi}^*(x_{ui}^*, y_{ui}^*)\}, \quad \mathbf{D} = \left[\frac{\Delta_j^*}{8\pi} K(x_{ui}^* - \xi_j^*, y_{ui}^* - \eta_j^*) \right]$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.12)$$

式(2.11)より、各要素に作用する流体力は平板上の全ての要素の吹上速度により定まる。

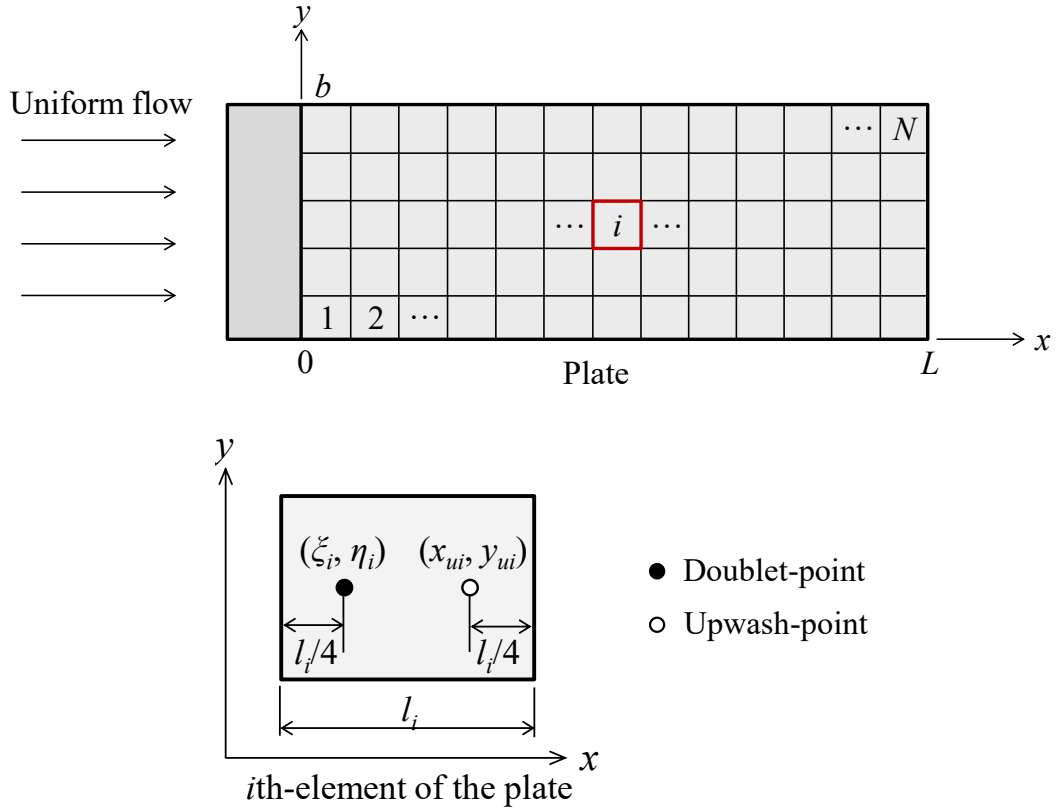


図 2.2: ダブレット点とアップウォッシュ点の配置

ここで、任意の要素の吹上速度は流体と平板の界面における運動学的条件より、アップウォッシュ点 (x_{ui}, y_{ui}) における平板の面外方向変位を用いて以下のように与えられる。

$$w_{fi}^* = \frac{1}{U} \frac{\partial w_{si}}{\partial t} + \frac{\partial w_{si}}{\partial x} = \frac{1}{U} \left(\sum_{r=1}^{N_m} \phi_r(x_{ui}, y_{ui}) \dot{q}_r(t) \right) + \sum_{r=1}^{N_m} \frac{\partial}{\partial x} \phi_r(x, y) \Big|_{x=x_{uj}, y=y_{uj}} q_r(t) \quad (2.13)$$

以上より、式(2.5)の右辺は下式のように離散化される。

$$\int_0^b \int_0^L \phi_l(x) \Delta p(x, y, t) dx dy \equiv \sum_{i=1}^N \phi_l(\xi_i, \eta_i) \Delta p_i(\xi_i, \eta_i, t) s_{ei} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \Delta p_i(\xi_i, \eta_i, t) &= \frac{1}{2} \rho_f U^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{fij} w_{fj}^* \\ &= \frac{1}{2} \rho_f U^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{fij} \left\{ \left(\frac{1}{U} \sum_{r=1}^{N_m} \phi_r(x_{uj}, y_{uj}) \dot{q}_r(t) \right) + \sum_{r=1}^{N_m} \frac{\partial}{\partial x} \phi_r(x, y) \Big|_{x=x_{uj}, y=y_{uj}} q_r(t) \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

式(2.14)中の s_{ei} は各要素の面積を表している。また、式(2.15)中の c_{fij} は以下の式で与えられる。

ここで、 c_{fij} 中には核関数が含まれており、複素数となっている。

$$[c_{fij}] = \mathbf{D}^{-1} \quad (2.16)$$

2.4 特性方程式

モード近似を適用した運動方程式(2.5)を $\ell = 1 \sim N_m$ まで行列表示すると、以下のようなになる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{K}_f\mathbf{q} = \frac{1}{2}\rho_f U^2 \mathbf{Q}\mathbf{q} \quad (2.17)$$

式(2.17)中のマトリクス $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}_d$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_f$, $\mathbf{Q}$ は以下のように定義される。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho_s b h \int_0^L (\phi_1(x))^2 dx & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_s b h \int_0^L (\phi_{N_m}(x))^2 dx \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 2\rho_s b h \zeta_1 \omega_1 \int_0^L (\phi_1(x))^2 dx & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\rho_s b h \zeta_{N_m} \omega_{N_m} \int_0^L (\phi_{N_m}(x))^2 dx \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \rho_s b h \omega_1^2 \int_0^L (\phi_1(x))^2 dx & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_s b h \omega_{N_m}^2 \int_0^L (\phi_{N_m}(x))^2 dx \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{K}_f = \rho_f U^2 b C_f \begin{bmatrix} \int_0^L \phi_1(x) \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} dx - \int_0^L (L-x) \phi_1(x) \frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} dx & & \\ & \vdots & \\ \int_0^L \phi_{N_m}(x) \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} dx - \int_0^L (L-x) \phi_{N_m}(x) \frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} dx & & \\ \cdots & \int_0^L \phi_1(x) \frac{\partial \phi_{N_m}(x)}{\partial x} dx - \int_0^L (L-x) \phi_1(x) \frac{\partial^2 \phi_{N_m}(x)}{\partial x^2} dx & \\ & \vdots & \\ \cdots & \int_0^L \phi_{N_m}(x) \frac{\partial \phi_{N_m}(x)}{\partial x} dx - \int_0^L (L-x) \phi_{N_m}(x) \frac{\partial^2 \phi_{N_m}(x)}{\partial x^2} dx \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{fij} s_{ei} \begin{bmatrix} \phi_1(\xi_i, \eta_i) \left(\frac{i\omega}{U} \phi_1(x_{ij}, y_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(x, y) \Big|_{x=x_{ij}, y=y_{ij}} \right) \\ \vdots \\ \phi_{N_m}(\xi_i, \eta_i) \left(\frac{i\omega}{U} \phi_1(x_{ij}, y_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(x, y) \Big|_{x=x_{ij}, y=y_{ij}} \right) \\ \cdots \quad \phi_1(\xi_i, \eta_i) \left(\frac{i\omega}{U} \phi_{N_m}(x_{ij}, y_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_{N_m}(x, y) \Big|_{x=x_{ij}, y=y_{ij}} \right) \\ \vdots \\ \cdots \quad \phi_{N_m}(\xi_i, \eta_i) \left(\frac{i\omega}{U} \phi_{N_m}(x_{ij}, y_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_{N_m}(x, y) \Big|_{x=x_{ij}, y=y_{ij}} \right) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

また、モード座標ベクトル $\mathbf{q}$ は以下のように定義される。

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad \cdots \quad q_{N_m}]^T \quad (2.23)$$

式(2.17)をラプラス変換することで、特性方程式が以下のように得られる。

$$\det \left(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C}_d + \mathbf{K} + \mathbf{K}_f - \frac{1}{2} \rho_f U^2 \mathbf{Q} \right) = 0 \quad (2.24)$$

流速 U を変化させて式(2.24)の複素固有値を計算し、系の安定性を調べる。固有値の実部が正であれば系は不安定となり、虚部が 0 であればダイバージェンス型の不安定状態（静的不安定状態）、0 でなければフラッタ型の不安定状態（動的不安定状態）となる。

2.5 支配無次元数および計算パラメータ

平板のフラッタ現象を支配する無次元数は、代表長さをコード L 、代表時間を $\sqrt{\rho_s h L^4 / D}$ として無次元化された、無次元フラッタ流速 U_f^* 、無次元フラッタ振動数 f_f^* 、アスペクト比 Λ 、質量比 μ であり、下式のように定義される。

$$U_f^* = U_f L \sqrt{\frac{\rho_s h}{D}}, \quad f_f^* = f_f L^2 \sqrt{\frac{\rho_s h}{D}}, \quad \Lambda = \frac{b}{L}, \quad \mu = \frac{\rho_f L}{\rho_s h}. \quad (2.25)$$

表 2.1 に計算パラメータを示す。アスペクト比や質量比に応じて、 x 方向分割数を $n_x = 23 \sim 27$ 、 y 方向分割数を $n_y = 17 \sim 41$ の範囲で変化させ計算結果が十分に収束する値を用いた。モード近似の打ち切り次数 N_m は $2 \sim 7$ の範囲で変化させて収束性を調べる。その結果を 2.6 節に示す。また、減衰比 ζ および流体摩擦係数 C_f はフラッタ流速、振動数への影響を調べるために

パラメータとして変化させる．結果は 2.8 節に示す．

表 2.1: 計算パラメータ

Division number in x -direction n_x	23 – 27	Fluid density $\rho_f(\text{air}) [\text{kg/m}^3]$	1.2
Division number in y -direction n_y	17 – 41	Damping ratio ζ	0, 0.003, 0.01, 0.02
Truncation order of Galerkin decompositions N_m	2 – 7	Coefficient of fluid friction C_f	0, 0.01, 0.1, 0.2

2.6 モード近似の打切次数のフラッタ流速および振動数への影響

Galerkin 法によるモード近似において考慮するモードの次数の収束性を検証するために，モード近似の次数 N_m のフラッタ流速と振動数への影響を調べた．図 2.3, 2.4 に流速を変化させた場合の根軌跡を示す．図中の(a)および(b)はそれぞれ，固有値の実部と虚部の関係および流速に対する固有値の実部の関係を示している．図 2.3, 2.4 はそれぞれ質量比 $\mu = 1.0, 2.0$ の場合の結果であり，減衰比 $\zeta = 0$ ，流体摩擦係数 $C_f = 0$ として計算を行った．モード近似の次数は 5 とした．また，図 2.5 はモード近似の打切次数 N_m を 2~6 の範囲で変化させた場合の質量比 μ に対するフラッタ流速 U_f^* および振動数 f_f^* を示している．

図 2.3, 2.4 より，流速が増加すると質量比が 1.0 の場合は 2 次ブランチが，質量比が 2.0 の場合は 3 次ブランチが不安定化することがわかる．つまり，質量比が大きくなると高次モードがフラッタ挙動に影響する．

また，図 2.5 より，質量比 1 以下の領域では低次の 2 つのモードを考慮すれば，フラッタ流速，振動数共に概ね収束することがわかる．ここで，1 次モードのみを考慮した場合には系は不安定化しなかった．一方，質量比が 1 以上になると，図 2.4 に示したように 3 次モード以上の高次モードが影響するようになるため，収束にはより多くのモードを要する． $N_m = 5$ とした場合，フラッタ流速，振動数共に十分に収束している．このため，これ以降はモード近似の打切次数を 5 以上として計算を行った結果を示す．

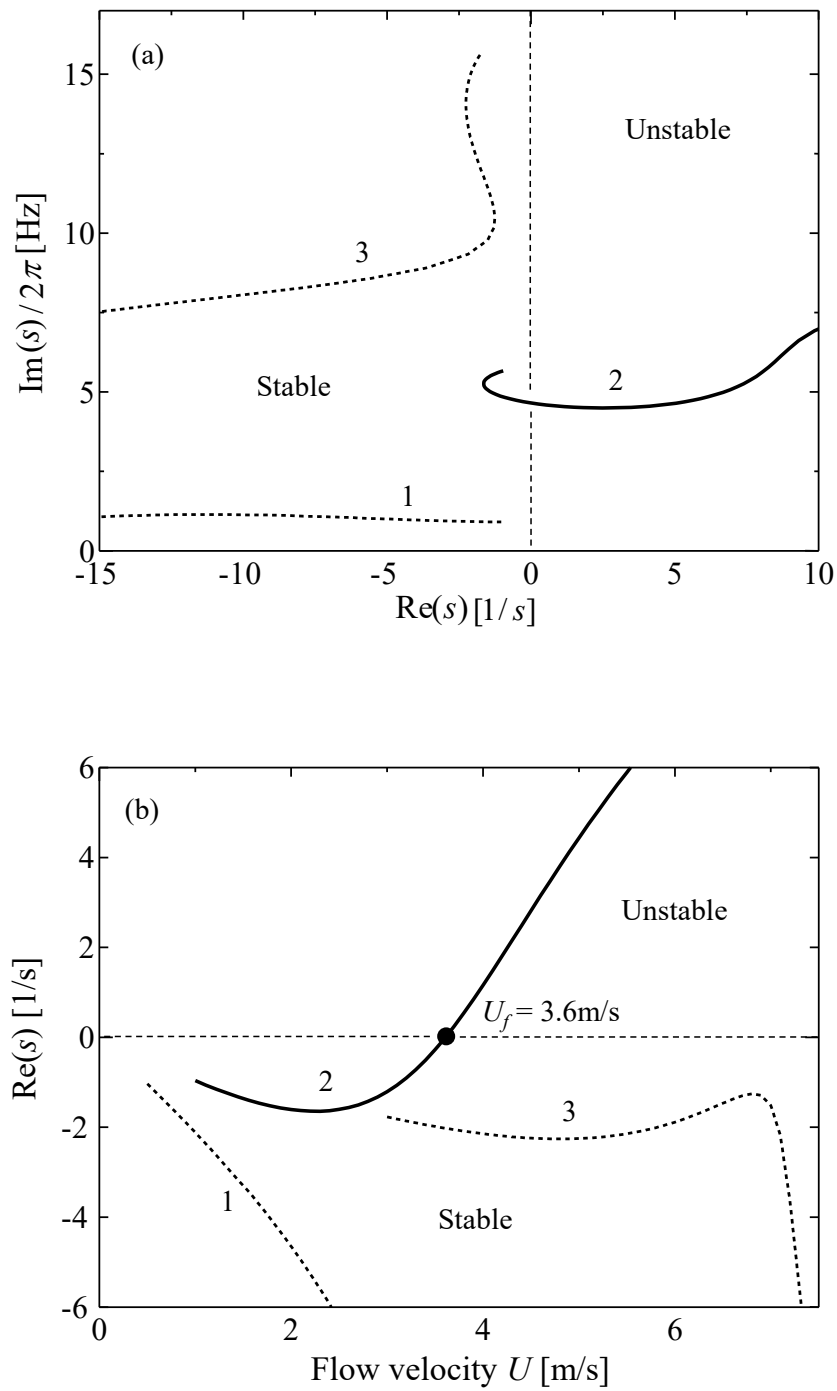


図 2.3: 質量比 $\mu = 1.0$ における流速を変化させた場合の根軌跡 ((a) 固有値の実部と虚部の関係, (b) 流速に対する固有値の実部の関係)

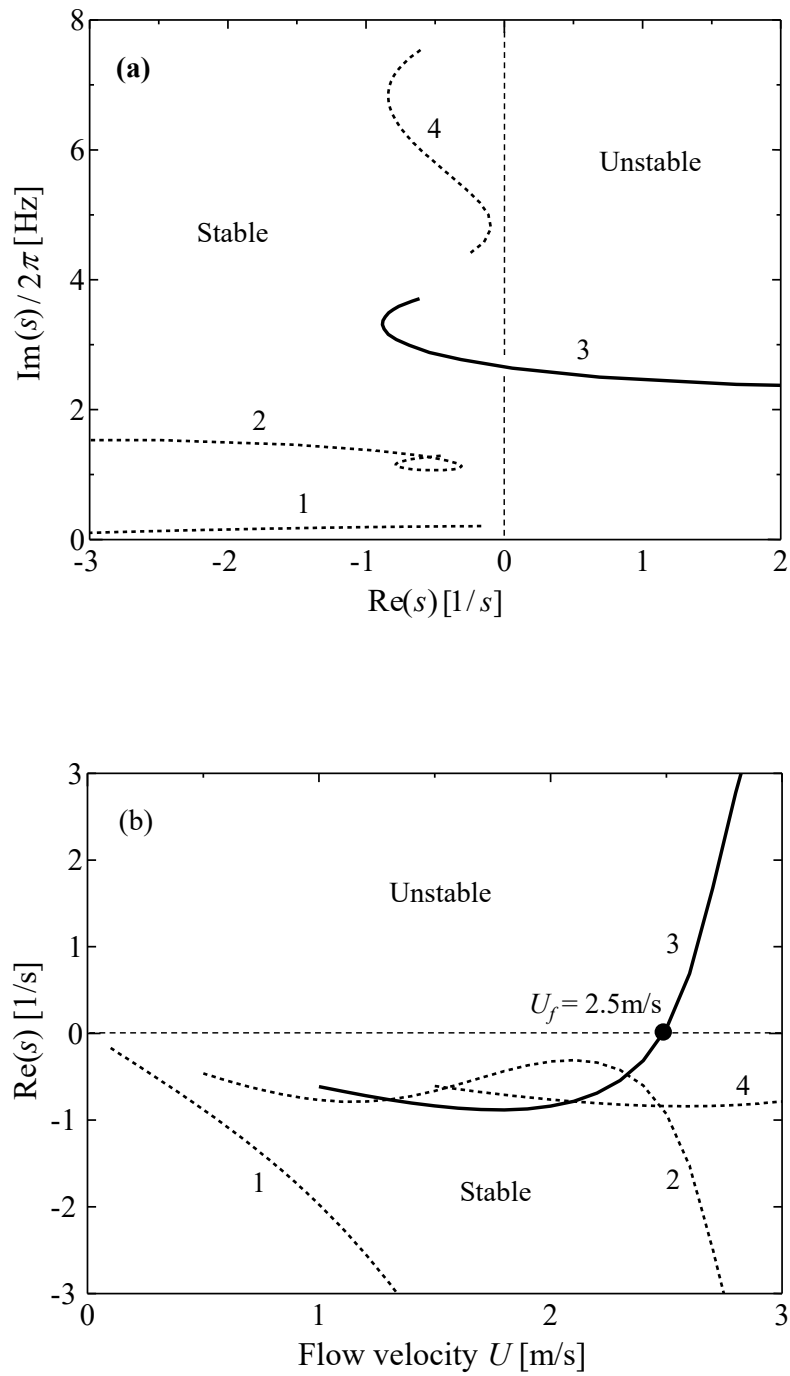


図 2.4: 質量比 $\mu = 2.0$ における流速を変化させた場合の根軌跡 ((a) 固有値の実部と虚部の関係, (b) 流速に対する固有値の実部の関係)

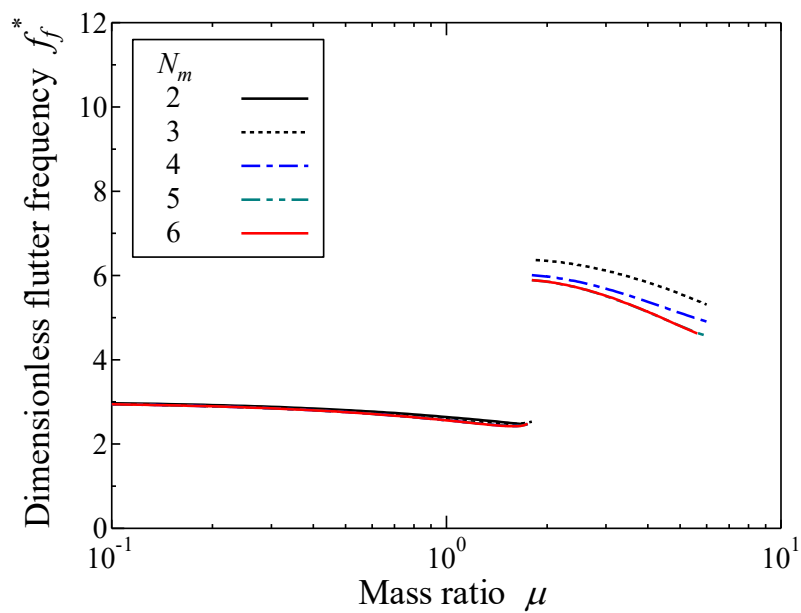
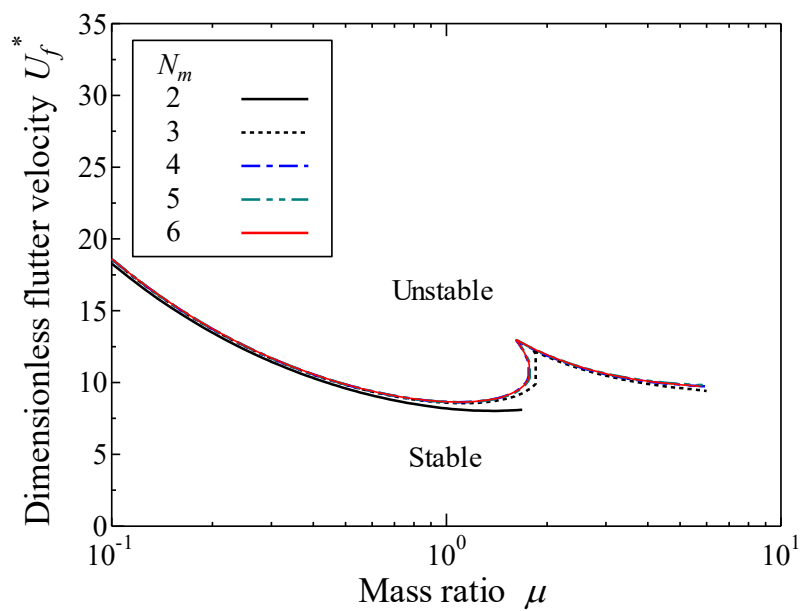


図 2.5: モード近似の打切次数の収束性

2.7 解析モデルの妥当性の検証

構築した解析モデルの妥当性を検証するために、既往の研究において報告されている理論解析結果および実験結果と比較を行った。

図 2.6 は本モデルによって得られたフラッタ流速および振動数の結果と渡辺ら^[53]による実験結果および解析結果、Gibbs らによる解析結果^[23]と比較したものである。これらの結果はアスペクト比 $\Lambda = 0.5$ の場合の結果である。渡辺らは構造解析に有限要素法、流体力の計算に Doublet-point 法を使用しており、Gibbs らは構造解析に線形梁モデル、流体力の計算に線形渦格子法を使用している。図中には渡辺ら^[53]、Gibbs ら^[23]の解析結果と比較するために、減衰比を $\zeta = 0, 0.01$ とした場合の結果をそれぞれ赤の実線と点線で示す。図 2.6 より、本モデルにより得られたフラッタ流速は実験結果と良く一致しており、他の解析結果とも質量比が小さい領域においてわずかに差異が見られるものの概ね一致している。また、フラッタ振動数に関しても、質量比 $\mu = 2.0$ 程度における振動数の急激な増加が実験結果および他の解析モデルと同様に生じている。

図 2.7 に質量比に対する低次の 5 つのモードのモード振幅の変化を示す。これらの結果は各質量比における中立安定点（固有値の実部が零となる点）で計算した結果である。図 2.7 より質量比が小さい領域（ $\mu < 1.8$ ）では、低次の 2 つのモード振幅が支配的となっており、3 次以上のモードの振幅は無視できるほど小さい。一方、質量比が大きい場合（ $\mu > 1.8$ ）、3 次モードのモード振幅が影響するようになり、不安定化するモードが高次のモードに遷移する。このモードの遷移に伴い、図 2.6 に示したように、質量比 $\mu = 1.8$ 周辺においてフラッタ流速および振動数の急激な変化が生じる。

また、図 2.8 に Eloy ら^[22]の 3 次元理論解析結果との比較を示す。Eloy らと計算条件を合わせるために、減衰比 $\zeta = 0$ 、流体摩擦係数 $C_f = 0$ とした。加えて、Eloy ら^[10]、Tang ら^[31]の 2 次元解析結果をあわせて示す。Eloy らの解析結果^[10]は、Kornecki ら^[12]の解析モデルを用いて幅広く質量比を変化させて計算した結果である。なお、Tang ら^[31]は Kelvin – Voigt 型の減衰モデルを導入している。図中にはアスペクト比 $\Lambda = 0.2, 1.0$ の場合の結果を示す。図 2.8 より、アスペクト比が大きい $\Lambda = 1.0$ の方がアスペクト比が小さい $\Lambda = 0.2$ よりも広い質量比にわたってフラッタ流速が小さくなっており、その値はいずれのアスペクト比においても Eloy ら^[22]の理論解析結果と定量的に一致している。また、アスペクト比が大きい場合、フラッタ流速は Eloy ら^[10]、Tang ら^[31]によって報告されている 2 次元解析結果に近づくことがわかる。

以上より、本解析モデルはフラッタ流速および振動数に関して既往の研究で報告されている実験結果および解析結果と良く一致することが明らかになった。

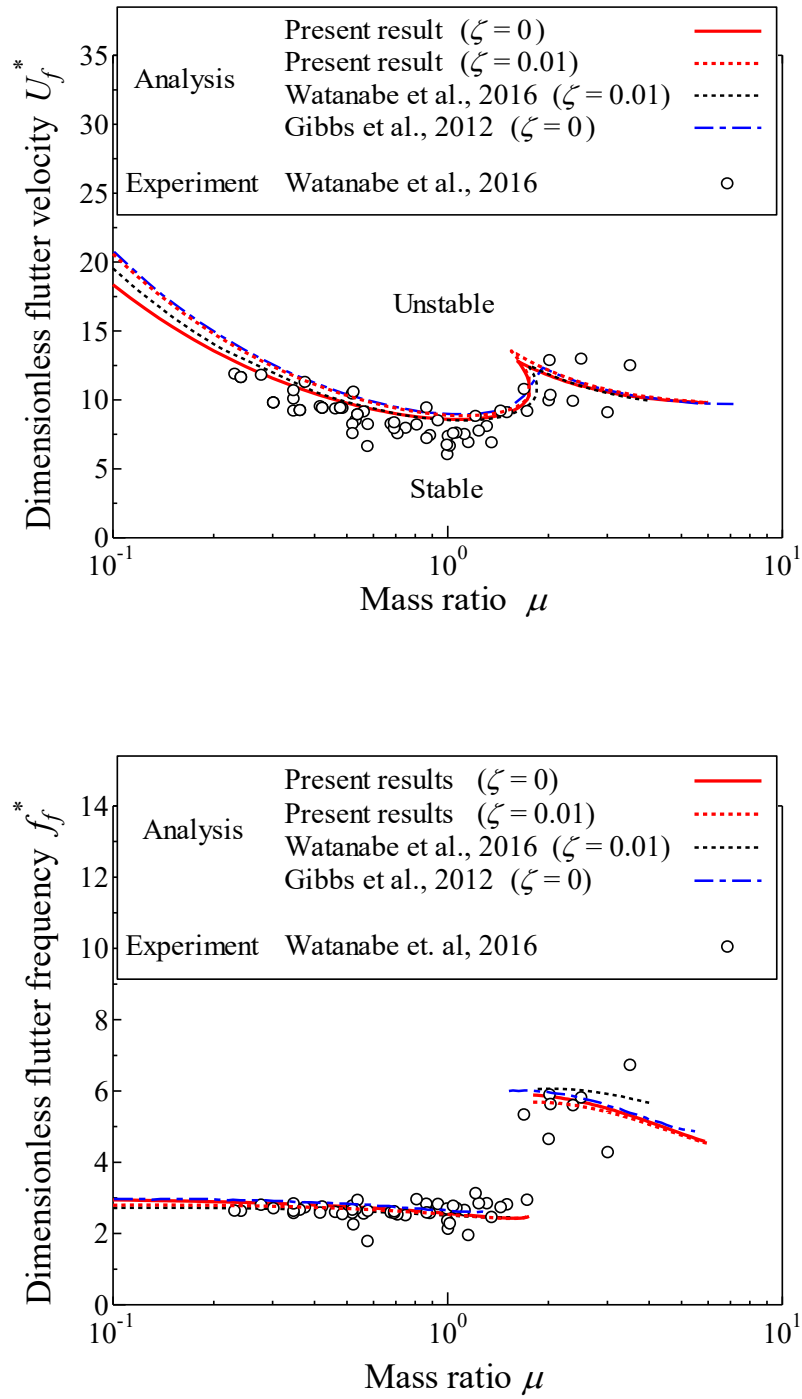


図 2.6: 渡辺ら^[53]の理論解析結果および実験結果, Gibbs ら^[23]の理論解析結果との比較

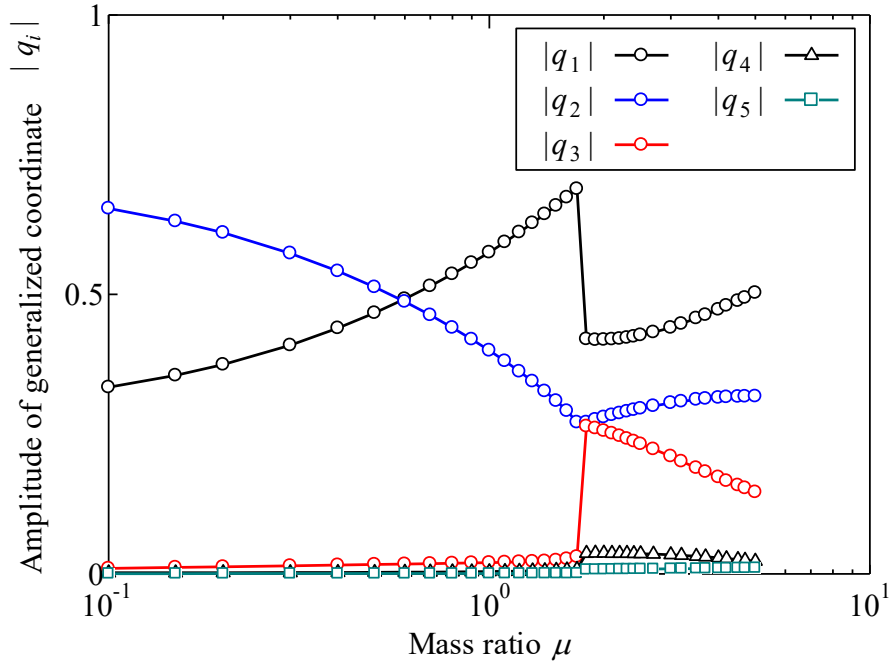


図 2.7: 質量比に対するモード振幅の変化 (中立安定点における結果)

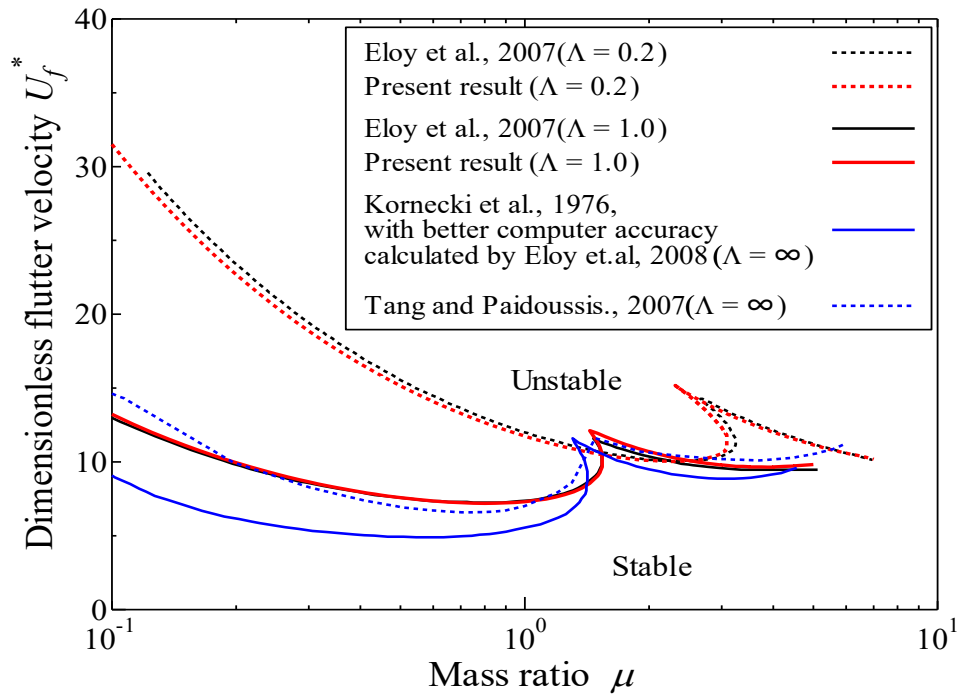


図 2.8: 他の 2 次元理論解析結果^[10, 12, 31] および 3 次元解析結果^[22] との比較

2.8 構造減衰および流体摩擦のフラッタ特性への影響

図 2.9 に減衰比を $\zeta = 0, 0.003, 0.01, 0.02$ に変化させた場合の質量比と無次元フラッタ流速および振動数の関係を示す。これらの結果はアスペクト比が $\Lambda = 0.5$ の結果である。フラッタ流速に関しては、質量比が小さい領域において減衰比の影響が大きく、減衰比が大きくなるとフラッタ流速が増加する。一方、質量比が大きい領域では減衰比のフラッタ流速への影響は小さい。この原因は 2.11 節において流体力による仕事と構造減衰による仕事の大きさを比較することで考察する。また、フラッタ振動数に関しては減衰比の影響は質量比によらず小さい。

図 2.10 に流体摩擦係数を $C_f = 0, 0.01, 0.1, 0.2$ に変化させた場合の質量比と無次元フラッタ流速および振動数の関係を示す。これらの結果はアスペクト比が $\Lambda = 0.5$ の結果である。ここで、 $C_f = 0.01$ は既往の研究^[53]において流体流れの中で静止している polyethylene terephthalate（以下、PET と表記する）製の平板の抗力を実験的に測定して得られた値である。一方、表面粗さの大きい平板の場合、 $C_f = 0.1 \sim 0.2$ 程度の流体摩擦係数を取ることが既往の実験的研究により示されている^[59]。このため、 $C_f = 0.01 \sim 0.2$ の範囲で流体摩擦係数を変化させ、フラッタ流速と振動数への影響を調べた。図 2.10 より、実験により得られた PET の C_f 値 ($C_f = 0.01$) を用いた場合、フラッタ流速、振動数共にほとんど影響がないことがわかる。 $C_f = 0.1, 0.2$ の場合、質量比が小さい領域では流体摩擦がフラッタ流速と振動数に及ぼす影響が小さい一方で、質量比が大きい領域では大きな影響を及ぼすことがわかる。

図 2.11, 2.12 にそれぞれ質量比 $\mu = 0.5, 5.5$ の場合の中立安定点(固有値の実部が零となる点)における振動モード(フラッタモード)を示す。図中には $C_f = 0, 0.1, 0.2$ の場合のフラッタモードを示す。図 2.11 より質量比が小さい場合は流体摩擦係数が高い場合 ($C_f = 0.1, 0.2$) でもフラッタモードにほとんど変化は見られない。一方、図 2.12 より質量比が大きい場合は、流体摩擦係数が大きくなるとフラッタモードが波数の多い高次モードに変化することがわかる。これは質量比が小さい領域においては流体摩擦に起因して付加される剛性(式(2.1)の第 4, 5 項)が平板の曲げ剛性に対して小さいため影響が小さく、一方質量比が大きい領域では平板の曲げ剛性に対して流体摩擦に起因する付加剛性の影響が大きくなるためであると考えられる。

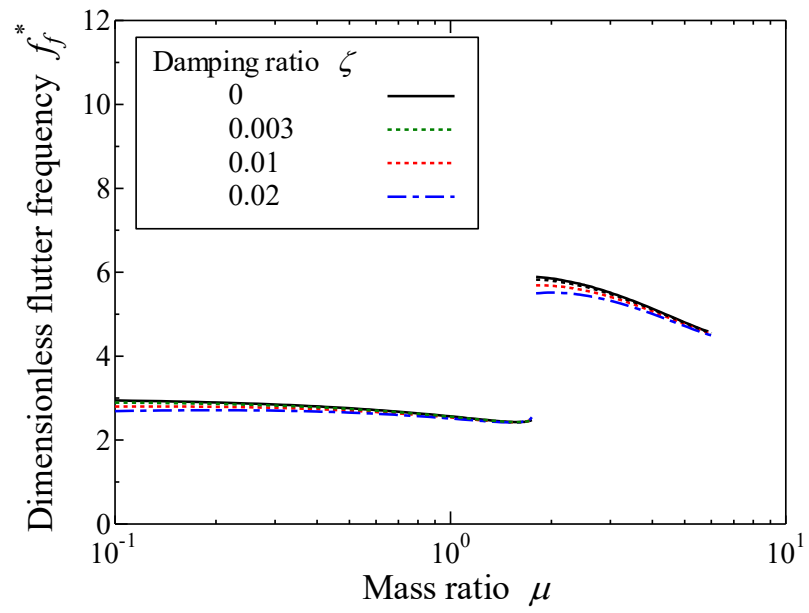
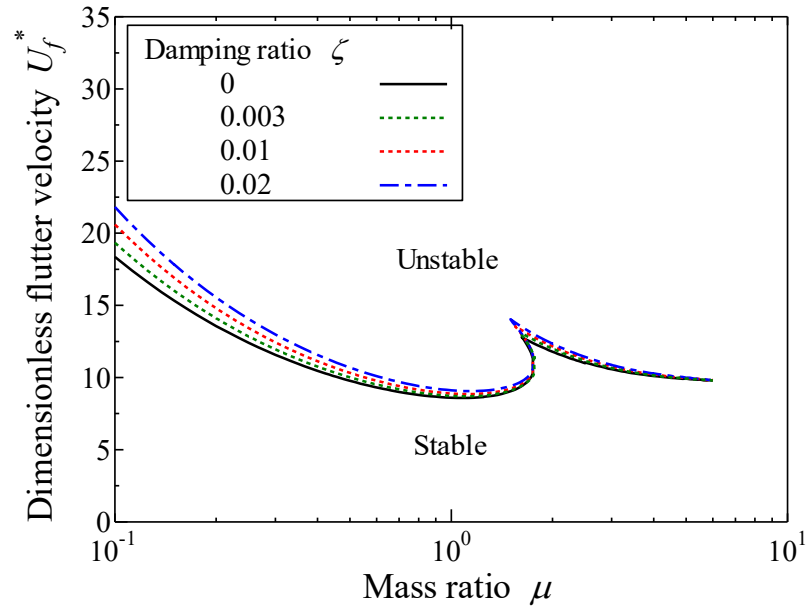


図 2.9: 構造減衰のフラッタ流速および振動数への影響

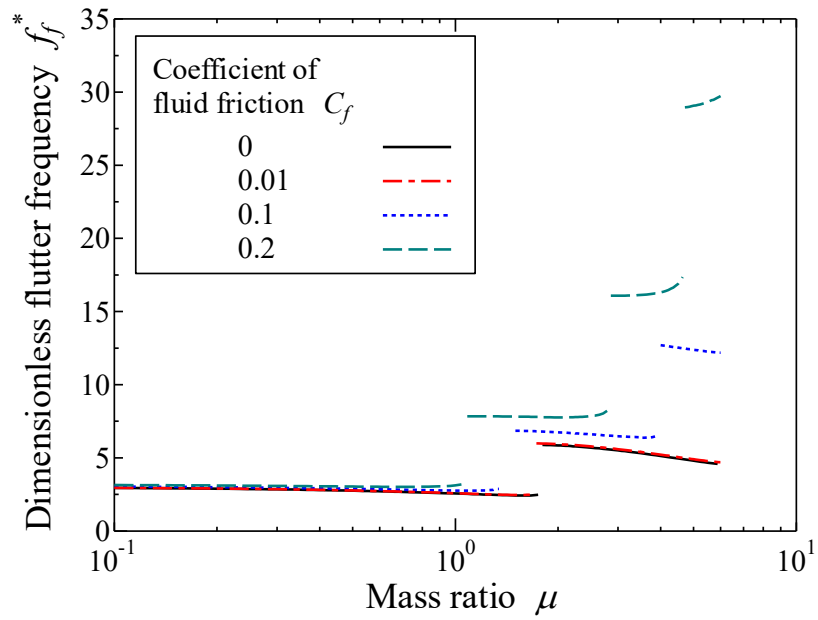
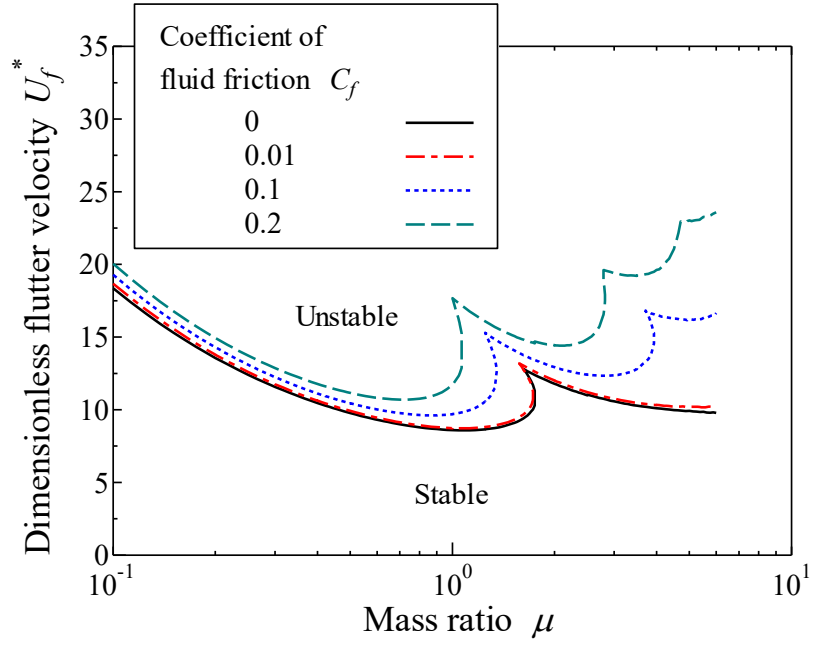


図 2.10: 流体摩擦のフラッタ流速および振動数への影響

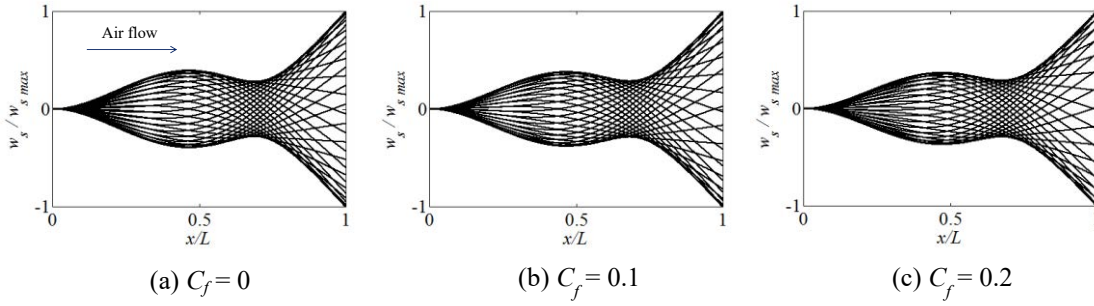


図 2.11: 質量比 $\mu = 0.5$ におけるフラッターモード（流体摩擦係数を変化させた場合）

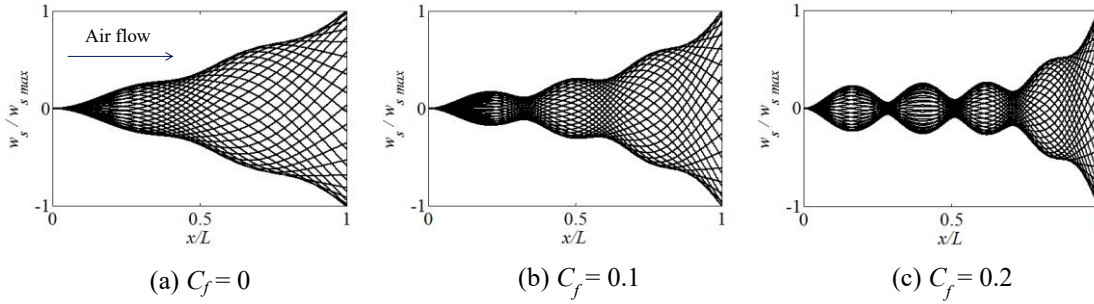


図 2.12: 質量比 $\mu = 5.5$ におけるフラッターモード（流体摩擦係数を変化させた場合）

2.9 流体力による局所的な仕事分布

励振流体力が作用する領域を調べるために、流体力によって平板の表面になされる局所的な仕事の分布を求める．流体力による振動 1 周期 τ 当たりの局所的な仕事 E_i は以下の式により求めることができる．

$$E_i = \int_0^\tau \dot{w}_{si}(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta p_i(\xi_i, \eta_i) s_{ei} dt \quad (2.26)$$

(ξ_i, η_i) は各要素のダブレット点の座標を表している．流体力による仕事の計算では、 $\zeta = 0$, $C_f = 0$ とした．図 2.13 は流体力によって平板になされる局所的な仕事の分布を表している．これらは質量比 $\mu = 0.5$ における結果であり、図中の赤色と青色の領域はそれぞれ流体力による仕事が正と負の領域を示している．仕事の大きさは平板表面上の最大値で正規化して表示している．

図 2.13 より、いずれのアスペクト比においても平板の中流領域付近で流体力による仕事が正となっており、この領域に作用する流体力が励振力として作用している．一方、平板の下流端付近の領域では流体力による仕事が負となっており、この領域に作用する流体力は励振力として作用していない．

また、図 2.14 に平板のコード方向中央付近と下流端付近におけるスパン方向の流体力仕事

分布を示す．アスペクト比の流体力仕事分布への影響を詳細に調べるために， $\Lambda = 0.5, 1.5, 3.0, 5.0$ の結果を図中に併せて示す．図 2.14 より，アスペクト比が小さい場合は流れの 3 次元性がスパン方向の流体力仕事の分布に大きく影響しており，特に平板の側端付近で大きく影響が出ている．一方，アスペクト比が大きい場合は流体力仕事の分布が top - hat 型に近くなっており，3 次元性の影響が小さくなっている．このため，アスペクト比が大きい場合のフラッタ流速は 2 次元解析の結果に漸近する^[10, 22]．

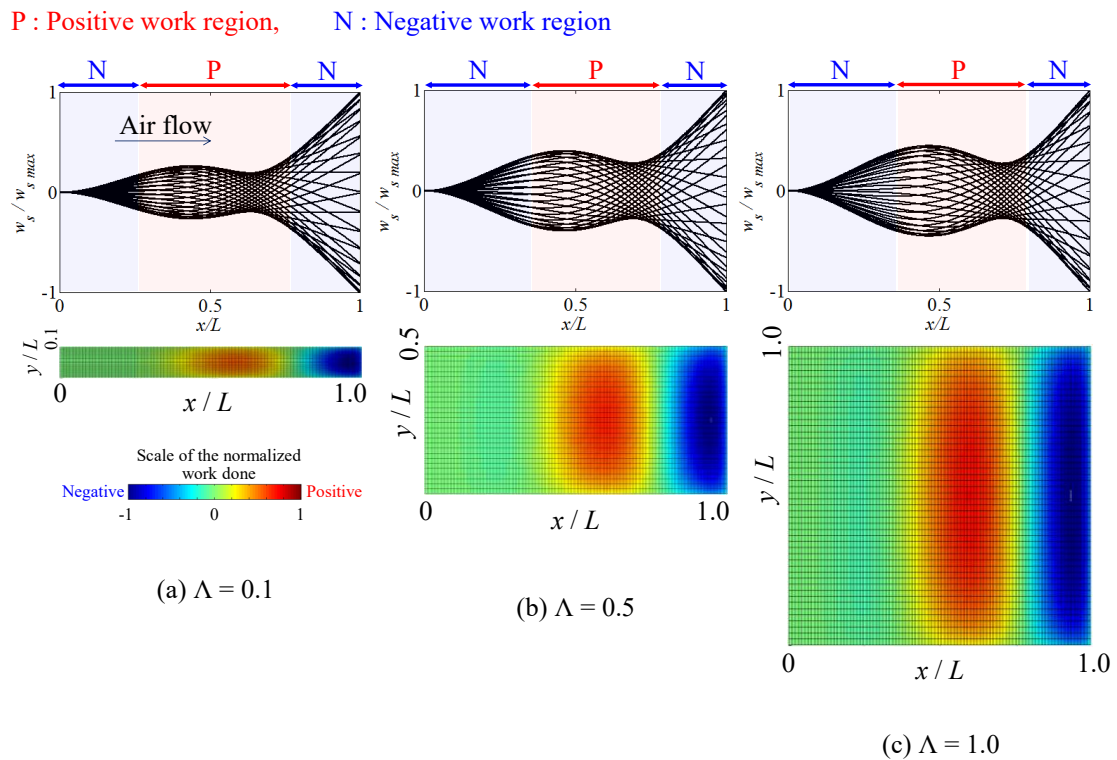
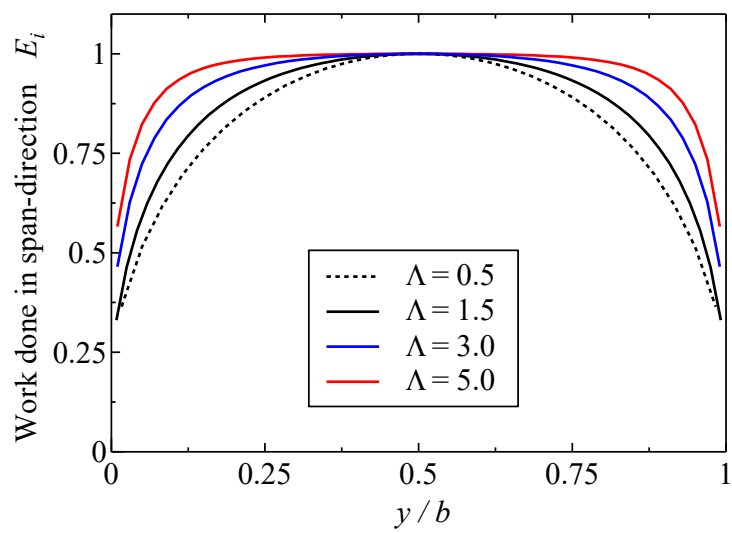
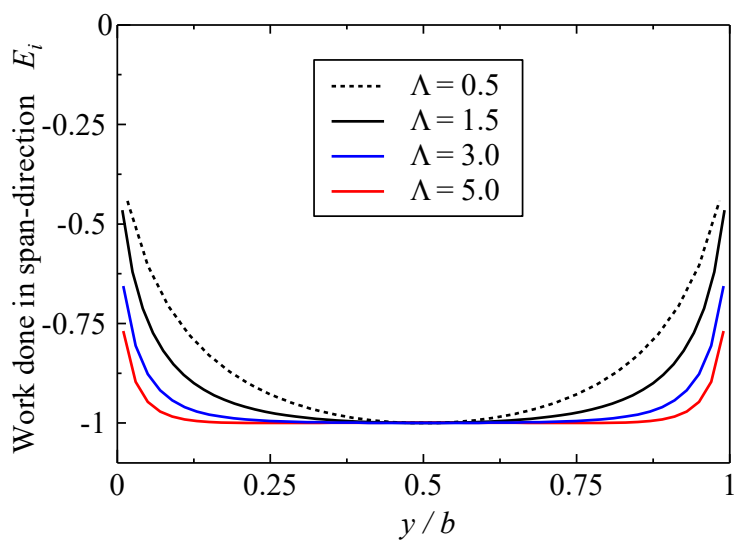


図 2.13: 流体力による局所的な仕事の分布（赤: 正の流体力仕事，青: 負の流体力仕事）



(a) $x = 0.59L$



(b) $x = 0.94L$

図 2.14: スパン方向の流体力仕事の分布

2.10 流速に対する流体力による仕事の変化 (モード間の連成による仕事)

Galerkin 法によりモード近似を適用した流体構造連成方程式は下式のように表される．

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & m_{N_m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{N_m} \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & c_{N_m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{N_m} \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & k_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & k_{N_m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N_m} \end{bmatrix}} \\
 & = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N_m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N_m1} & f_{N_m2} & \cdots & f_{N_mN_m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N_m} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

式(2.27)の左辺は構造系の慣性項，減衰項，剛性項であり，右辺は流体力を表している．ここで，流体力項の非対角項 (f_{op} when $o \neq p$) は不安定化機構において重要な役割を担う．流体力項の非対角項の重要性を示すために，非対角項を意図的に無視した場合の根軌跡を図 2.15 に示す．図中の(a)および(b)はそれぞれ，固有値の実部と虚部の関係および流速に対する固有値の実部の関係を示している．これは質量比 $\mu = 1.0$ の場合の結果である．ここでは構造減衰と流体摩擦は無視した．

図 2.15 より，非対角項を無視した場合，流速が増加してもいずれのブランチも不安定化しないことがわかる．一方，非対角項を考慮した場合は図 2.3 に示したように，2 次ブランチが不安定化する．このことから，流体力項の非対角項はフラッタの発生に大きく寄与すると考えられる．このため，本節では流体力項の非対角項に起因する仕事，つまりモード間の連成による仕事の安定性への影響を詳細に調べる．

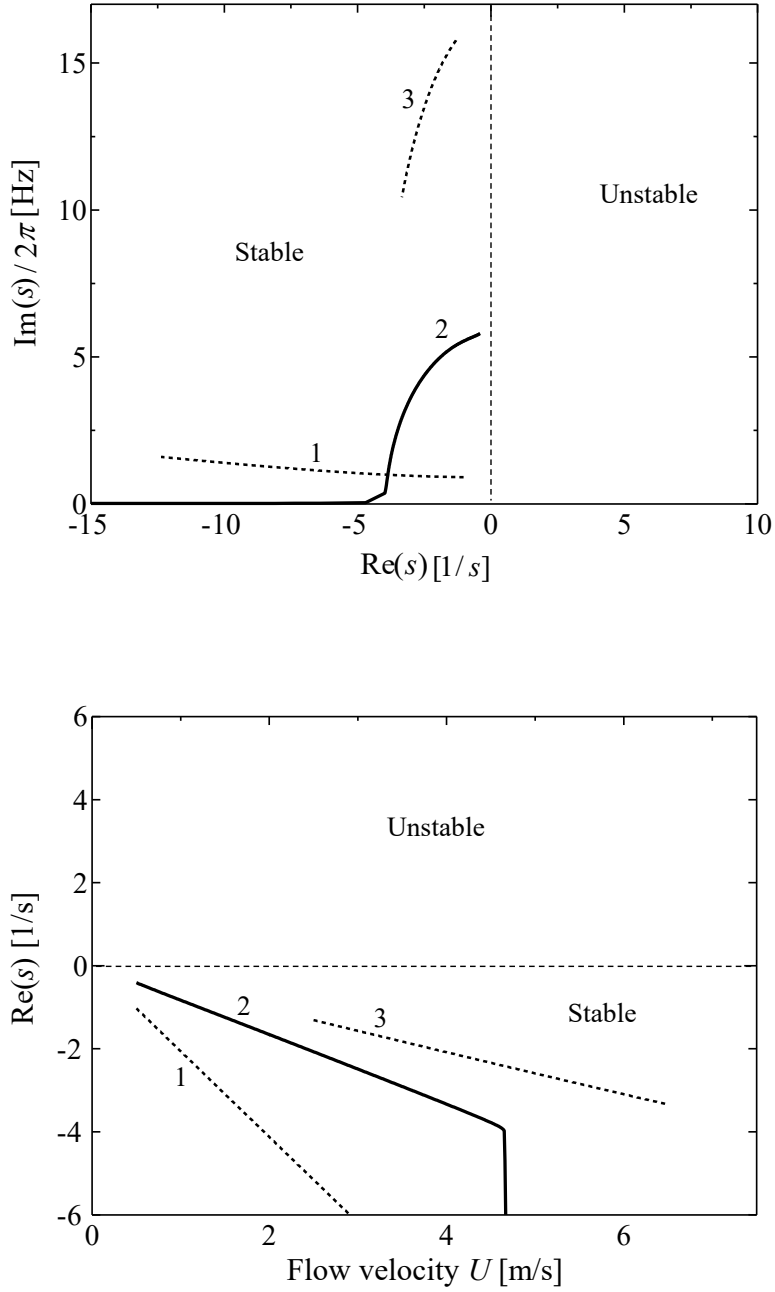


図 2.15: 流体力の非対角成分を意図的に無視した場合の根軌跡 ((a) 固有値の実部と虚部の関係, (b) 流速に対する固有値の実部の関係)

平板になされる流体力による仕事の全要素の総和 E_{total} は、式(2.26)に示した DPM により離散化された各要素の流体力仕事 E_i の和をとって以下のように表される。

$$E_{total} = \sum_{i=1}^N E_i \quad (2.28)$$

さらに、式(2.28)に対してモード近似を適用すると、固有振動モード間の連成による流体力に

よる仕事 E_{op} が式(2.29)のように得られる. E_{op} は p 次モードから o 次モードへの仕事であり, $o \neq p$ の場合はモード間の連成による仕事を, $o = p$ の場合は各モード自身の仕事を表している. E_{op} を求めることで, モード間の連成による仕事と各モード自身の仕事のどちらがフラッタの発生に寄与するか調べることができる.

$$\begin{aligned}
E_{total} &= \int_0^\tau \dot{\mathbf{q}}^T \underbrace{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{Q}_m}_{\mathbf{A}_m} \mathbf{q} dt = \int_0^\tau \{ \dot{q}_1(a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1p}q_p + \cdots + a_{1N_m}q_{N_m}) \\
&\quad + \dot{q}_2(a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2p}q_p + \cdots + a_{2N_m}q_{N_m}) \\
&\quad \cdots + \dot{q}_o(a_{o1}q_1 + a_{o2}q_2 + \cdots + a_{op}q_p + \cdots + a_{oN_m}q_{N_m}) \\
&\quad \cdots + \dot{q}_{N_m}(a_{N_m1}q_1 + a_{N_m2}q_2 + \cdots + a_{N_mp}q_p + \cdots + a_{N_mN_m}q_{N_m}) \} dt \\
&= \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} \int_0^\tau \dot{q}_o a_{op} q_p dt = \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} E_{op}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi_1, \eta_1) & \cdots & \phi_m(\xi_1, \eta_1) & \cdots & \phi_{N_m}(\xi_1, \eta_1) \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \phi_1(\xi_i, \eta_i) & \cdots & \phi_m(\xi_i, \eta_i) & \cdots & \phi_{N_m}(\xi_i, \eta_i) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\xi_N, \eta_N) & \cdots & \phi_m(\xi_N, \eta_N) & \cdots & \phi_{N_m}(\xi_N, \eta_N) \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_m &= \frac{1}{2} \rho_f U^2 \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N c_{1j} s_1 \left(\frac{i\omega}{U} \phi_1(x_{uj}, y_{uj}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(x, y) \right) \Big|_{x=x_{uj}, y=y_{uj}} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N c_{Nj} s_N \left(\frac{i\omega}{U} \phi_1(x_{uj}, y_{uj}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(x, y) \right) \Big|_{x=x_{uj}, y=y_{uj}} \\ \cdots \sum_{j=1}^N c_{1j} s_1 \left(\frac{i\omega}{U} \phi_{N_m}(x_{uj}, y_{uj}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_{N_m}(x, y) \right) \Big|_{x=x_{uj}, y=y_{uj}} \\ \vdots \\ \cdots \sum_{j=1}^N c_{Nj} s_N \left(\frac{i\omega}{U} \phi_{N_m}(x_{uj}, y_{uj}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_{N_m}(x, y) \right) \Big|_{x=x_{uj}, y=y_{uj}} \end{bmatrix} \\
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1N_m} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{o1} & \cdots & a_{op} & \cdots & a_{oN_m} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{N_m1} & \cdots & a_{N_mp} & \cdots & a_{N_mN_m} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

ここで、図 2.5 より、質量比が 1 以下の場合には低次の 2 つのモード、質量比が 1 以上の場合には低次の 3 つのモードのフラッタへの寄与が支配的であることが明らかになった。このため、ここでは議論を簡略化するために、フラッタへの寄与が支配的なモードのみに着目し流体力による仕事を調べた。図 2.16 は質量比 $\mu = 1.0$ において低次の 2 つのモードのみを考慮した場合の根軌跡である。図中の(a)および(b)はそれぞれ、固有値の実部と虚部の関係および流速に対する固有値の実部の関係を示している

図 2.16 より、流速が増加すると 2 次ブランチが $U = 3.4\text{m/s}$ において不安定化しており、この結果は図 2.6 に示した低次の 5 つのモードを考慮した場合の結果とほぼ一致している。また、図 2.17 に質量比 $\mu = 2.0$ において低次の 3 つのモードのみを考慮した場合の根軌跡を示す。図 2.4 に示した低次の 5 つのモードを考慮した根軌跡と同様に、3 次ブランチが不安定化しており、フラッタ流速もほぼ一致している。

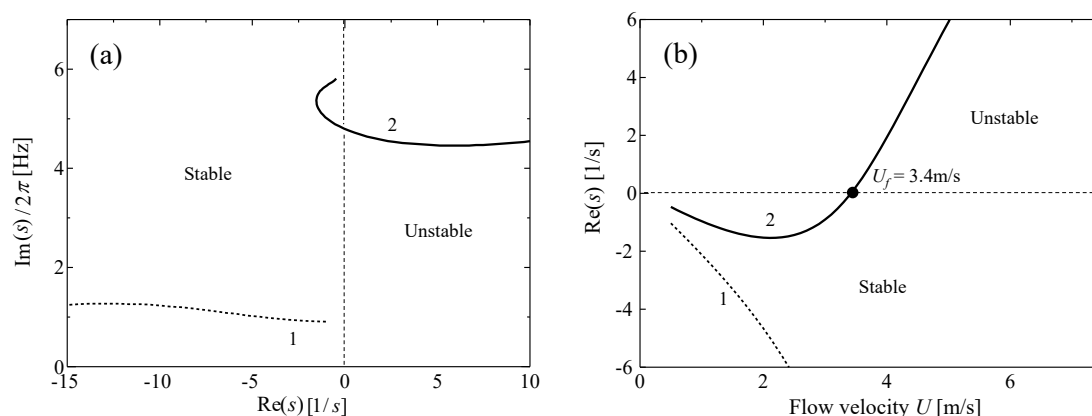


図 2.16: 質量比 $\mu = 1.0$ において低次の 2 つのモードのみを考慮した場合の根軌跡 ((a) 固有値の実部と虚部の関係, (b) 流速に対する固有値の実部の関係)

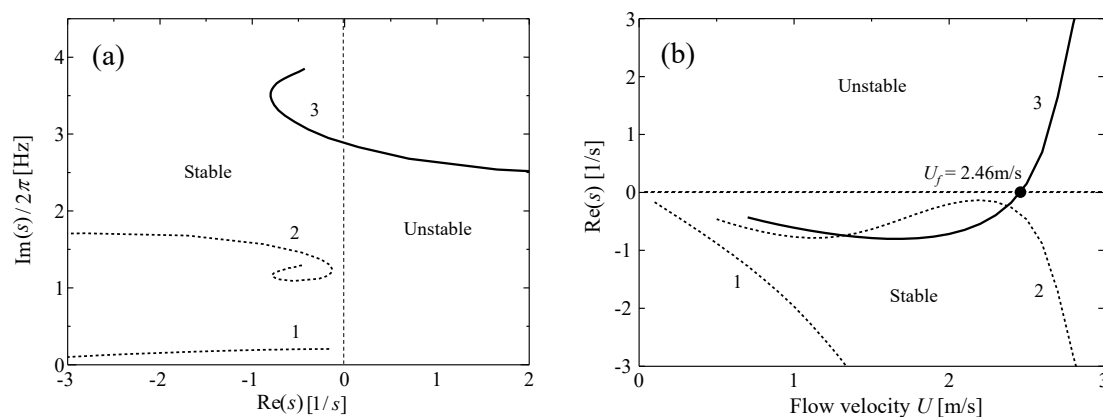


図 2.17: 質量比 $\mu = 2.0$ において低次の 3 つのモードのみを考慮した場合の根軌跡 ((a) 固有値の実部と虚部の関係, (b) 流速に対する固有値の実部の関係)

図 2.18, 2.19 にそれぞれ質量比 $\mu = 1.0, 2.0$ の場合の流速に対する(a) 流体力による仕事の総和 E_{total} と(b) 流体力による仕事をモード分解した結果 E_{op} を示す. 流体力による仕事は最大値で正規化した値を示している. また, $\mu = 1.0$ の場合は低次の 2 つのモード, $\mu = 2.0$ の場合は低次の 3 つのモードを考慮して計算を行った.

図 2.18(a)より, $\mu = 1.0$ の場合, 流体力による仕事の総和は流速の増加と共に正の方向に変化し, $U = 3.4\text{m/s}$ を境に正となる. 流体力による仕事が正となる流速は, 図 2.16 に示した 2 次ブランチが不安定化する流速と一致している. ここで, 図 2.18(b)より, 1 次および 2 次モードの連成による仕事 E_{12}, E_{21} は流速の増加の伴い正の方向へ変化する. 一方, 1 次モード自身の仕事 E_{11} および 2 次モード自身の仕事 E_{22} は流速の増加に伴い負の方向へ変化する. このことから, $\mu = 1.0$ の場合, 低次の 2 つのモードの連成による正の仕事によってフラッタが発生することがわかる. 一方, 各モード自身の仕事は流速によらず負の値をとることから, 単一のモードが励起されるフラッタは発生しない. また, 図 2.19 より, $\mu = 2.0$ の場合も各モード自身の仕事 E_{11}, E_{22}, E_{33} は流速によらず負の値をとっており, モード間の連成による仕事 E_{13}, E_{21}, E_{32} が流速の増加と共に正の方向へ変化している. このため, $\mu = 2.0$ においてもモード間の連成による仕事によってフラッタが発生している.

ここで, 式(2.27)より左辺の構造系の各項は非対角項が零であるため, 流体力が作用しない場合には各モードは連成しない. しかしながら, 右辺の流体力を考慮し, 流体力項を左辺に移項することで構造系の各項の非対角項が密になり, 各モードは流体力を介して連成する. つまり, 本章におけるモード連成は, (流体力が作用しない場合の) 固有振動モード同士が流体力を介して連成することを指している. また, 図 2.16, 2.17 の根軌跡のそれぞれのブランチは, 流体力を介して (流体力が作用しない場合の) モード同士が連成したものである. 図 2.16, 2.17 より, それぞれのブランチの固有振動数が離れている. つまり, 曲げモードとねじりモードの固有振動数が近いために 2 つのモードが連成して発生する航空機の翼の曲げねじりフラッタ^[15]の励振機構とは性質が異なる.

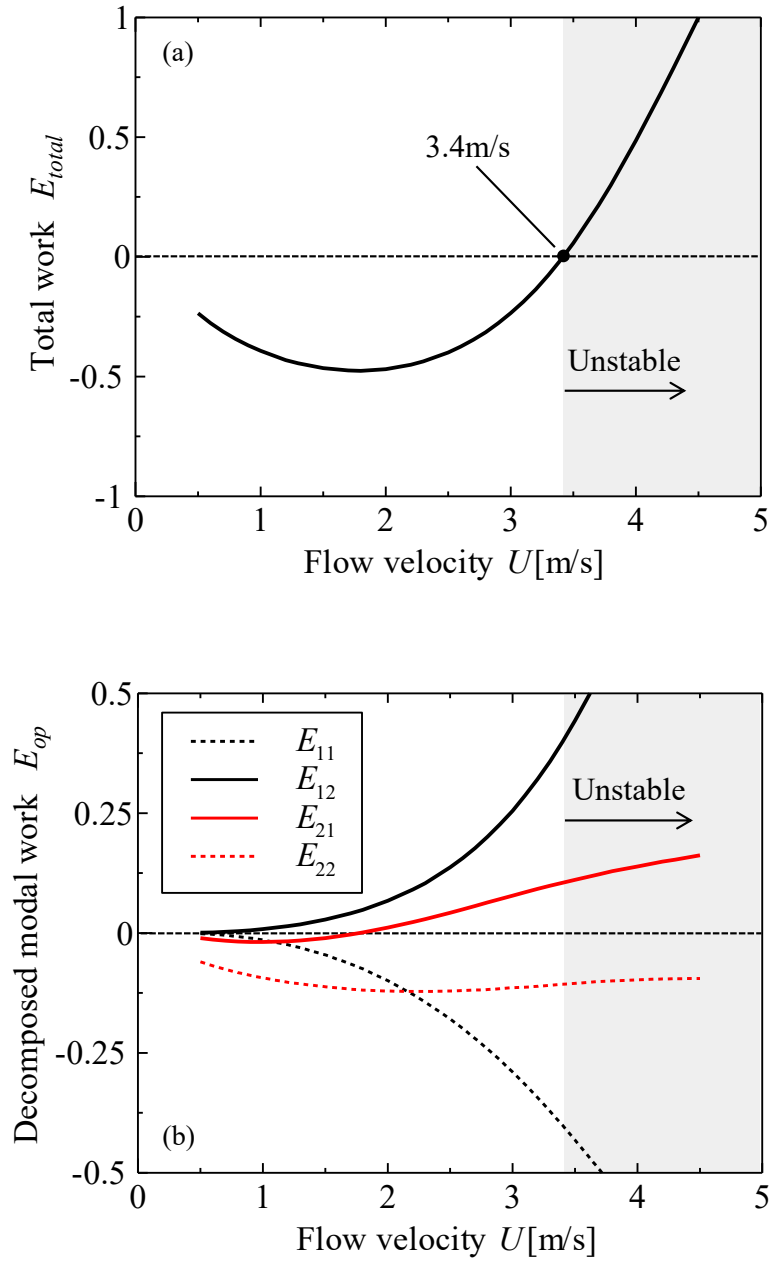


図 2.18: (a) 流体力による仕事の総和, (b) 流体力による仕事のモード分解 ($\mu = 1.0$)

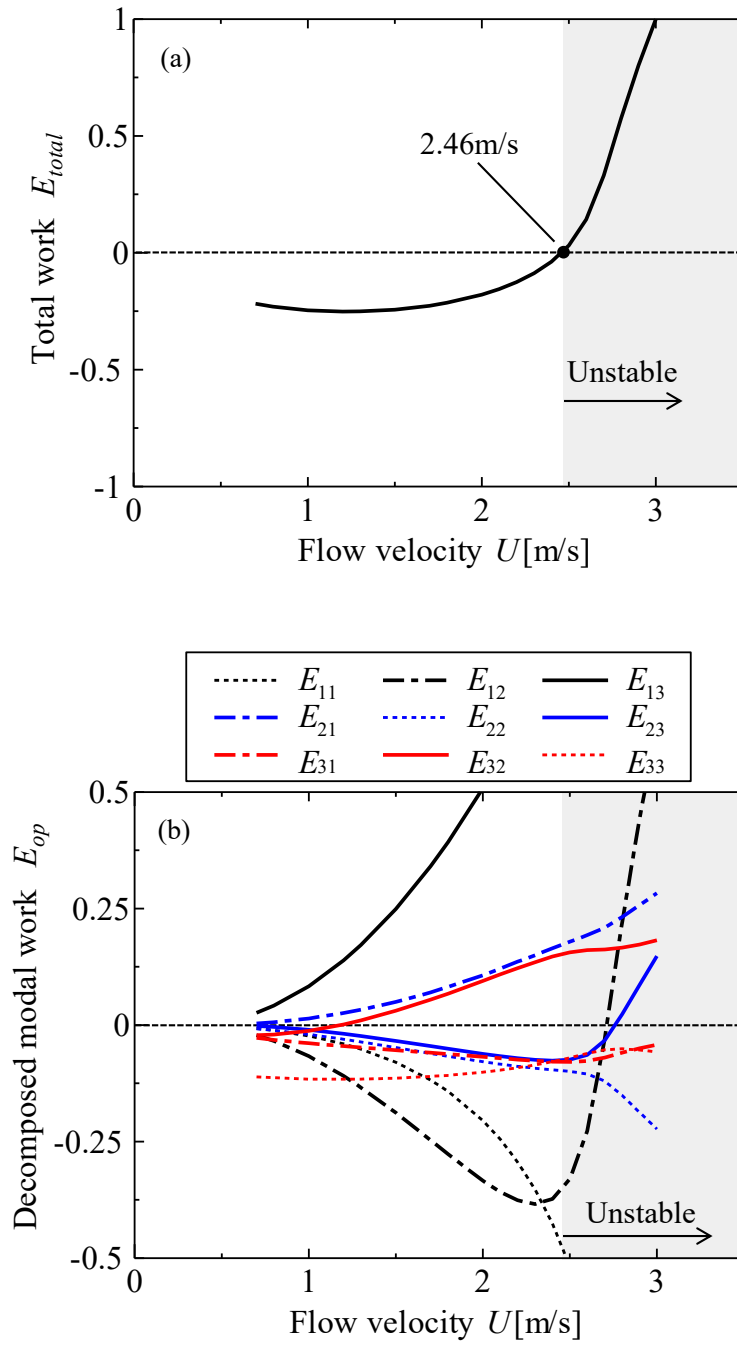


図 2.19: (a) 流体力による仕事の総和, (b) 流体力による仕事のモード分解 ($\mu = 2.0$)

2.11 流体付加剛性，付加減衰，付加質量に起因する 流体力による仕事

平板に発生するフラッタの不安定化機構を詳細に調べるために，式(2.31)に示した流体力 $\mathbf{Q}_m$ を流体付加剛性，付加減衰，付加質量に分離し，それぞれの成分に起因する仕事が系の安定性に及ぼす影響を調べる．最小自乗法を用いて式(2.31)に示した $\mathbf{Q}_m$ をラプラス変数 s の 2 次式として近似すると，下式のようになる．

$$\mathbf{Q}_m(s)\mathbf{q} \approx (\mathbf{Q}_{s0} + s\mathbf{Q}_{s1} + s^2\mathbf{Q}_{s2})\mathbf{q} \quad (2.33)$$

さらに，式(2.33)に逆ラプラス変換を適用し時間領域に変換すると，以下のようになる．

$$\mathbf{Q}_m\mathbf{q} \approx \mathbf{Q}_{s0}\mathbf{q} + \mathbf{Q}_{s1}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_{s2}\ddot{\mathbf{q}} \quad (2.34)$$

式(2.34)の右辺の第 1, 2, 3 項はそれぞれ流体付加剛性，付加減衰，付加質量を表している．式(2.34)を式(2.28)に代入することで，流体力による仕事は以下のように分解される．

$$\begin{aligned} E_{total} &= \int_0^{\tau} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Phi}^T \mathbf{Q}_m \mathbf{q} dt = \int_0^{\tau} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Phi}^T (\mathbf{Q}_{s0}\mathbf{q} + \mathbf{Q}_{s1}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_{s2}\ddot{\mathbf{q}}) dt \\ &= E_{fk} + E_{fc} + E_{fm} \end{aligned} \quad (2.35)$$

式(2.35)の E_{fk} , E_{fc} , E_{fm} はそれぞれ流体付加剛性，付加減衰，付加質量に起因する仕事を表している．流速を変化させて E_{fk} , E_{fc} , E_{fm} の変化を調べることで，どの成分に起因する仕事が フラッタの発生に寄与するか明らかにする．

まず，式(2.34)による流体力の近似精度を検証する．図 2.20, 2.21 に流速に対する流体力による仕事 E_{total}^* の変化を示す．流体力による仕事は最大値で正規化したため，上付添字*を付けて表記している．図 2.20, 2.21 はそれぞれ質量比が 1.0 と 2.0 の場合の結果であり，アスペクト比はどちらも 0.5 である．図中の実線は近似なしの場合の結果，破線は近似を施した場合の結果である．近似なしの場合は式(2.28)を用いて，近似を施した場合は式(2.35)を用いて流体力による仕事を計算した．モード近似の打切次数は， $N_m = 5$ とした．つまり， 5×5 の行列に対して，最小自乗法による近似を行った．また，式(2.35)における最小自乗法の計算には汎用数値計算ソフト MATLAB を用いた．図 2.20, 2.21 より，いずれの場合も近似を施した場合とそうでない場合で計算結果にほとんど差異が見られないことから，近似精度は十分であることがわかる．このため，近似を施した結果から不安定化機構を考察する．

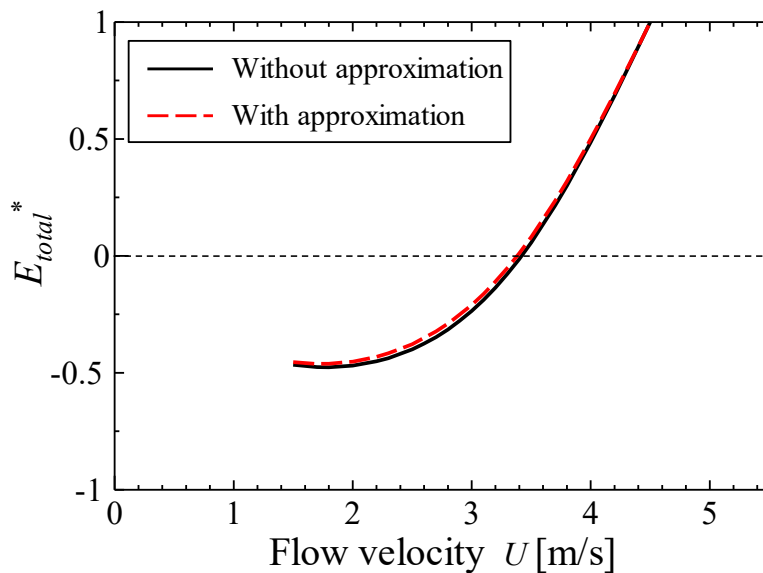


図 2.20: 流体力の近似精度の検証 ($\mu = 1.0$)

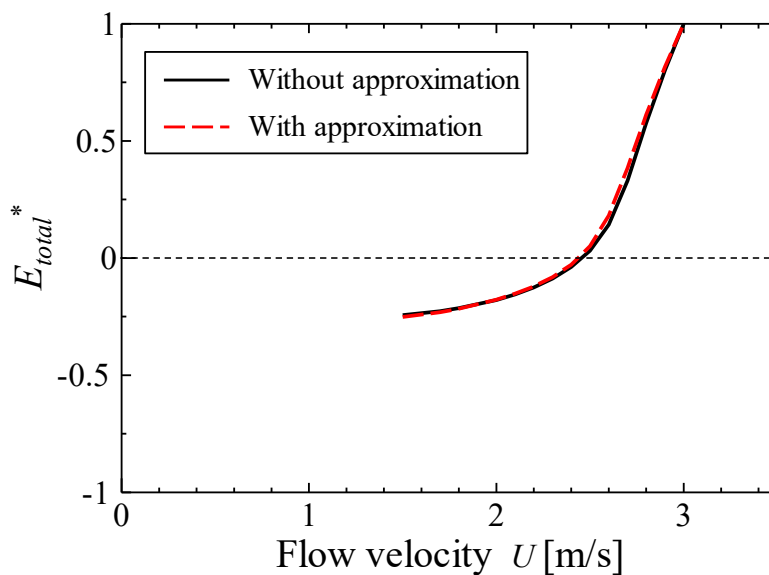


図 2.21: 流体力の近似精度の検証 ($\mu = 2.0$)

図 2.22, 2.23 に中立安定点（固有値の実部が零となる点）における流体力による仕事分布を流体付加剛性成分，付加減衰成分，付加質量成分に分離した結果を示す．図 2.22, 2.23 はそれぞれ質量比 $\mu = 1.0, 2.0$ の場合の結果である．ここでは減衰比 $\zeta = 0$ ，流体摩擦係数 $C_f = 0$ とした．図 2.22, 2.23(a) より，流体付加剛性に起因する仕事は平板の全面で正となっている．一方，図 2.22, 2.23(b) より，わずかに流体力仕事为正の領域が見られるが，大域的には特に下流端付近の領域において負の仕事が支配的となっている．また，図 2.22, 2.23(c) より，流体付加質量に起因する仕事は平板の全面でほぼ零となっている．

図 2.24 に流速に対する流体付加剛性，付加減衰，付加質量に起因する仕事の変化を示す．質量比によらず，流速が増加すると流体付加剛性に起因する仕事 E_{fk} は正の方向に変化する．一方，流体付加減衰に起因する仕事 E_{fc} は流速の増加に伴い負の方向へ変化する．ここで，流体付加質量に起因する仕事 E_{fm} は流速に対してほとんど変化しない．つまり，流体付加剛性に起因するエネルギーの流入量が流体付加減衰に起因するエネルギーの散逸量を上回ったとき，平板にフラッタが発生する．

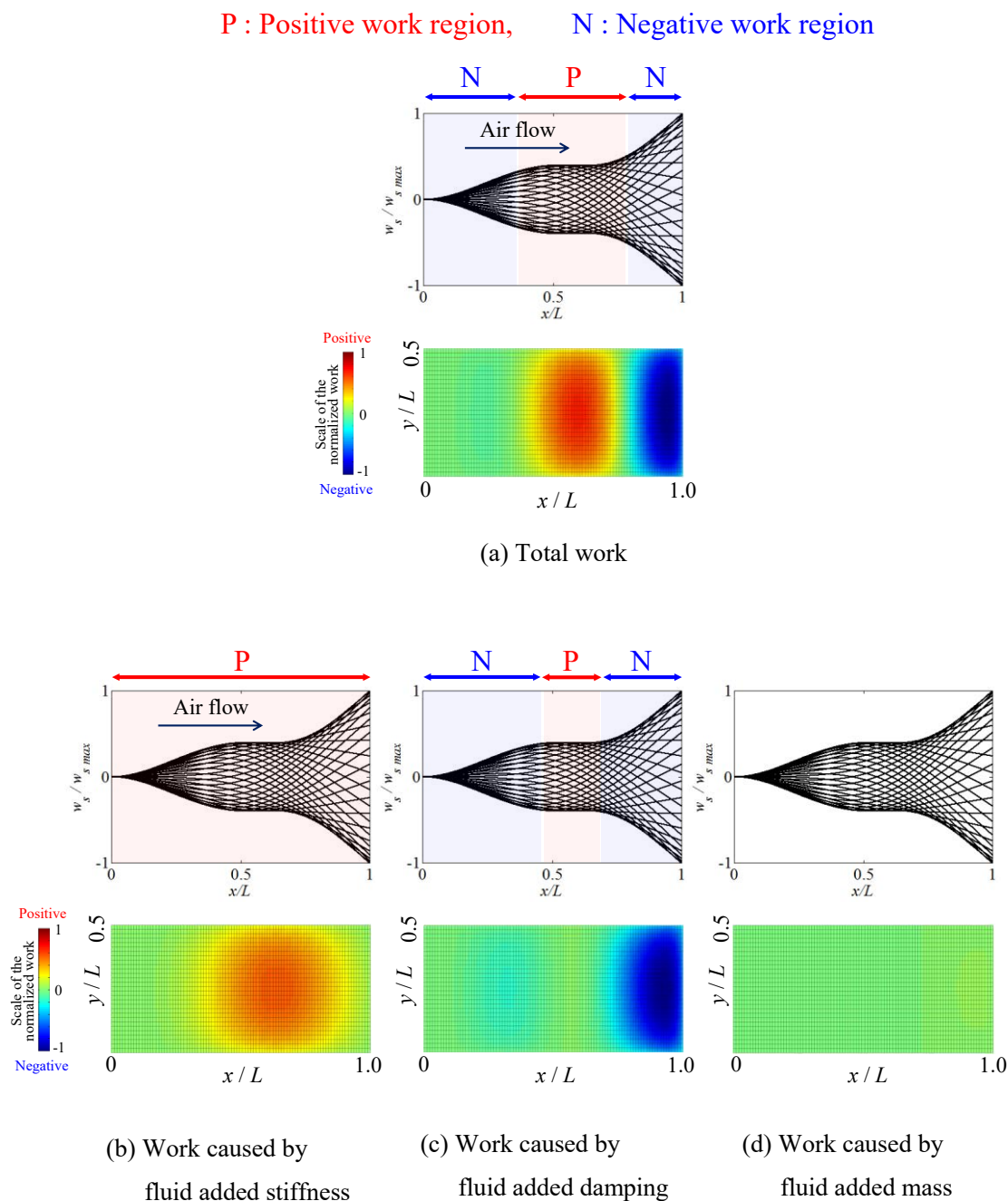
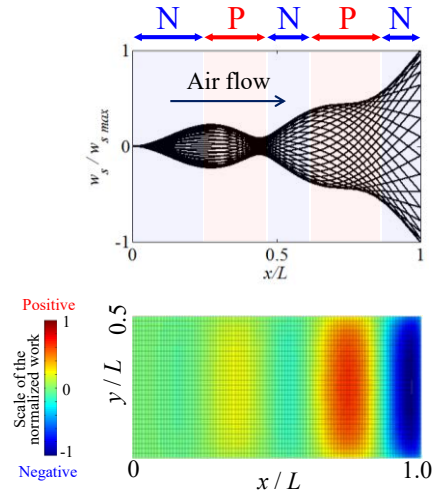
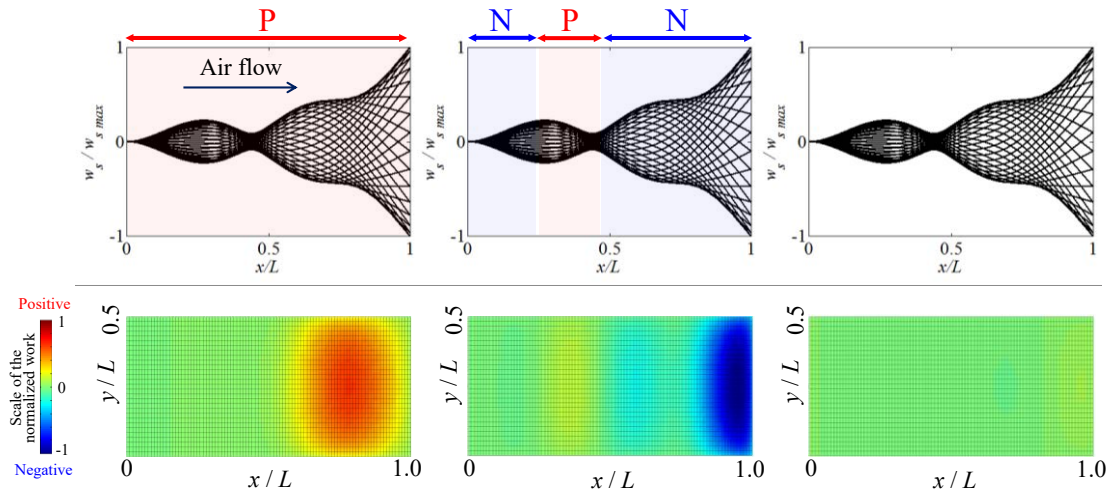


図 2.22: 平板表面上の流体力仕事の流体付加剛性成分，付加減衰成分，付加質量成分への分離 ($\mu = 1.0$)

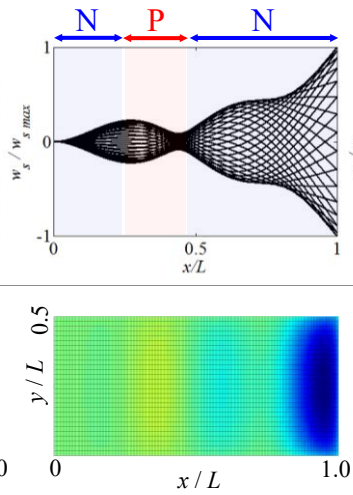
P : Positive work region, N : Negative work region



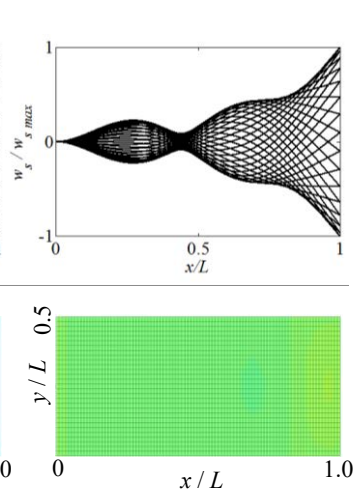
(a) Total work



(b) Work caused by
fluid added stiffness

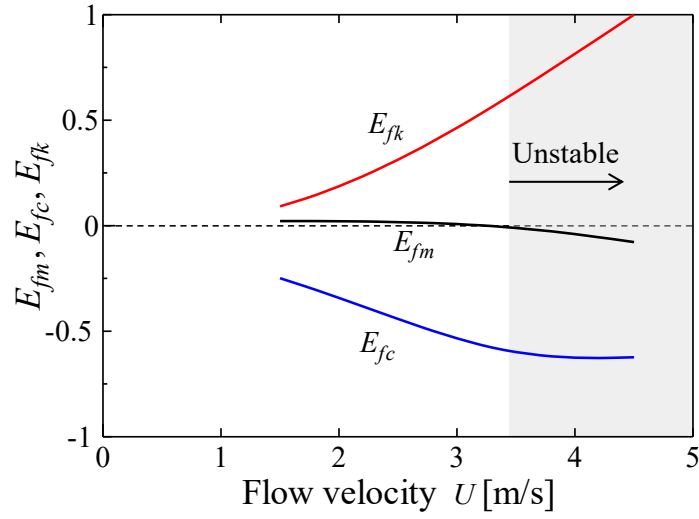


(c) Work caused by
fluid added damping

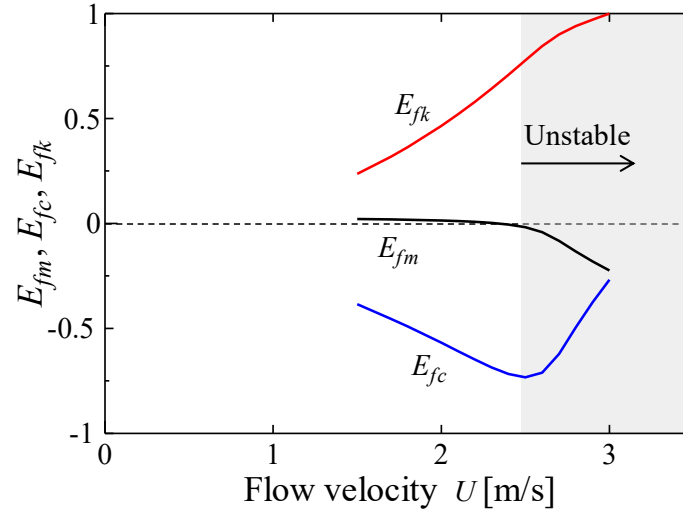


(d) Work caused by
fluid added mass

図 2.23: 平板表面上の流体力仕事の流体付加剛性成分, 付加減衰成分, 付加質量成分への分離 ($\mu = 2.0$)



(a) $\mu = 1.0$



(b) $\mu = 2.0$

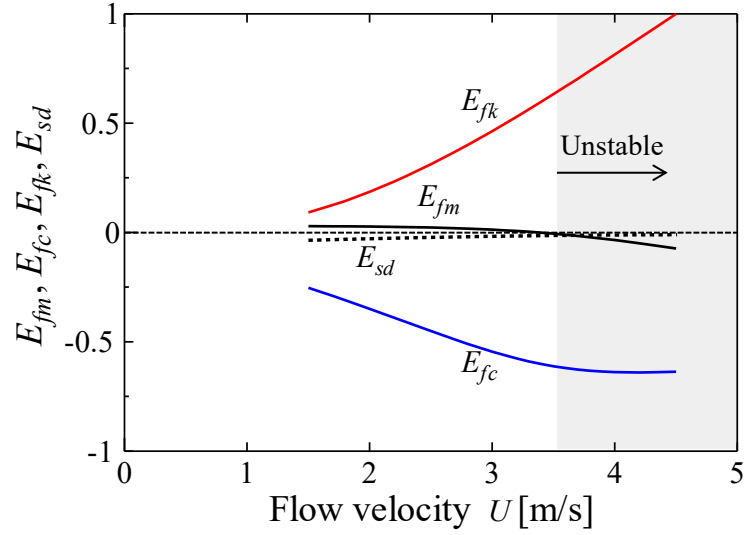
図 2.24: 流速に対する流体付加剛性，付加減衰，付加質量に起因する仕事の変化

また，構造減衰が安定性に及ぼす影響を考察するために，構造減衰による仕事を求め，流体力による仕事と比較する．構造減衰による仕事の計算では $\zeta = 0.01$ とした．構造減衰による仕事は下式より求めることができる．

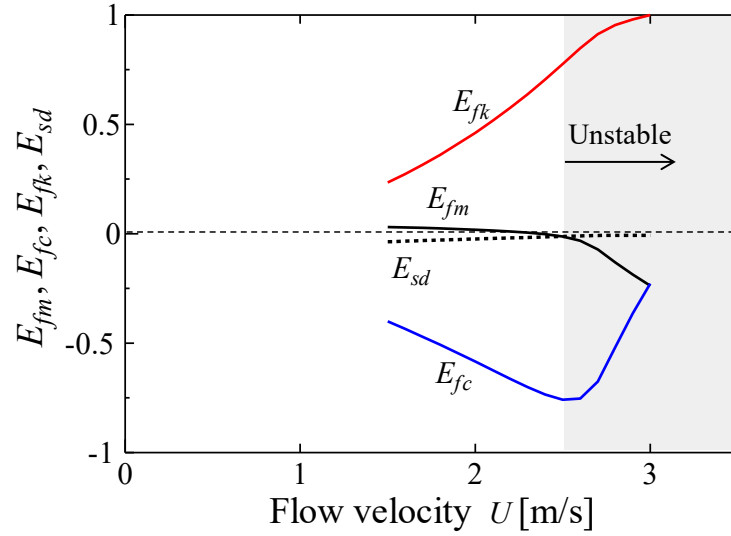
$$E_{sd} = \int_0^L \int_0^\tau c_d b \dot{w}_s^2 dt dx = \int_0^L \int_0^\tau 2\rho_s b h \zeta \omega_\ell b \dot{w}_s^2 dt dx \quad (2.36)$$

図 2.25 は構造減衰による仕事 E_{sd} と流体力による仕事 E_{fk} , E_{fc} , E_{fm} を比較した結果である．図 2.25(a), (b) はそれぞれ質量比 $\mu = 1.0, 2.0$ の場合の結果である．いずれの質量比においても構造

減衰による仕事 E_{sd} は流速によらず負の値をとるが、その大きさは流体付加減衰に起因する負の仕事に対して小さい。このことから、構造減衰によるエネルギー散逸よりも流体付加減衰によるエネルギー散逸の方が支配的であるため、図 2.8 に示したように構造減衰がフラッタ流速に及ぼす影響が小さいと考えられる。



(a) $\mu = 1.0$



(b) $\mu = 2.0$

図 2.25: 流体付加剛性，付加減衰，付加質量に起因する仕事と構造減衰による仕事の比較

2.12 モード間の連成による不安定化機構の考察

図 2.5 より，質量比が 1 以下の領域では低次の 2 つのモードの寄与が支配的であることが明らかになった．このため，低次の 2 つのモードに着目し支配方程式を簡略化することで質量比が小さい場合（ $\mu < 1.0$ ）の不安定化機構をさらに詳細に調べる．式(2.17)においてモード近似の打切次数を 2 とすると，運動方程式は下式のように 2 自由度系に縮約される．

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{k11} & f_{k12} \\ f_{k21} & f_{k22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{mD}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}} \quad (2.37)$$

ここで，構造減衰と流体摩擦は議論の簡略化のために無視した．また，図 2.24 より流体付加剛性に起因する正の流体力仕事は不安定化に大きく寄与することが明らかになったため，式(2.37)の右辺は流体付加剛性のみ考慮している．式(2.37)の右辺の流体付加剛性項を左辺の剛性項に移項し，下式のように剛性行列を対称行列 $\mathbf{K}_{mD}$ と交替行列 $\mathbf{K}_{mA}$ に分解する．

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_{mD} + \mathbf{K}_{mA})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{K}_{mD} = \begin{bmatrix} k_1 - f_{k11} & -\frac{1}{2}(f_{k12} + f_{k21}) \\ -\frac{1}{2}(f_{k12} + f_{k21}) & k_2 - f_{k22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{mA} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(-f_{k12} + f_{k21}) \\ \frac{1}{2}(f_{k12} - f_{k21}) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

ここで，流体付加剛性行列は非対角成分を含むため，流体付加剛性項を移項することで剛性行列の非対角成分は密となる．すなわち，流体力を介して低次の 2 つのモードは連成となる．式(2.37)に対して振動 1 周期 τ にわたってエネルギー積分を実行すると，下式のようになる．

$$\int_0^\tau \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} dt + \int_0^\tau \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_{mD} \mathbf{q} dt = - \underbrace{\int_0^\tau \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_{mA} \mathbf{q} dt}_{E_{Ak}} \quad (2.40)$$

式(2.40)の左辺第 1, 2 項はそれぞれ運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを表している．つまり，式(2.40)の左辺は力学的エネルギーの増分を表している．また，式の右辺の E_{Ak} は剛性マトリクスの交替成分（流体付加剛性の非対角成分）による仕事を表している．つまり，平板が流体力によって励振されるためには E_{Ak} が正である必要がある．ここで，モード座標 q_1, q_2 を以下のようにおく．

$$q_1 = \bar{q}_1 \cos(\omega t + \theta_1), \quad q_2 = \bar{q}_2 \cos(\omega t + \theta_2) \quad (2.41)$$

式(2.41)を式(2.40)の右辺に代入すると E_{Ak} は,

$$E_{Ak} = \pi \bar{q}_1 \bar{q}_2 (f_{k12} - f_{k21}) \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (2.42)$$

となる．つまり， E_{Ak} の正負は流体付加剛性に起因する剛性項の非対角項の差 $f_{k12} - f_{k21}$ および低次の 2 つのモード間の位相差 $\theta_2 - \theta_1$ によって決まる．これ以降，質量比 $\mu = 1.0$ の場合の計算結果を示す．

図 2.26 に流速に対する位相差 $\theta_2 - \theta_1$ の変化を示す．また，図 2.27 より流速に対する剛性項の非対角成分の差 $f_{k12} - f_{k21}$ を示す．これらの値の計算には複素固有値解析で得られた固有値を用いた．図 2.26 より位相差 $\theta_2 - \theta_1$ は $90 \sim 110\text{deg}$ の値を取るため，式(2.41)中の $\sin(\theta_2 - \theta_1)$ は流速によらずほぼ一定の正の値をとる．また，図 2.27 より剛性項の非対角成分の差 $f_{k12} - f_{k21}$ に着目すると，流速の増加に伴い非対角成分の差が大きくなっており，流速によらず常に正となっている．つまり，流速の増加により流体付加剛性に起因する剛性項の非対角成分の差 $f_{k12} - f_{k21}$ が大きくなることで剛性項の非対角成分による仕事 E_{Ak} が増加し，平板にフラッタが発生することがわかる．

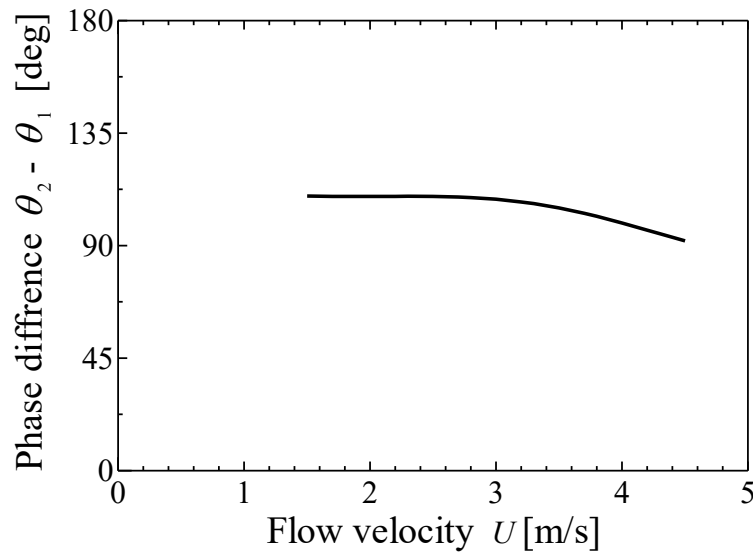


図 2.26: 流速に対する低次の 2 つのモードの位相差 $\theta_2 - \theta_1$ の変化

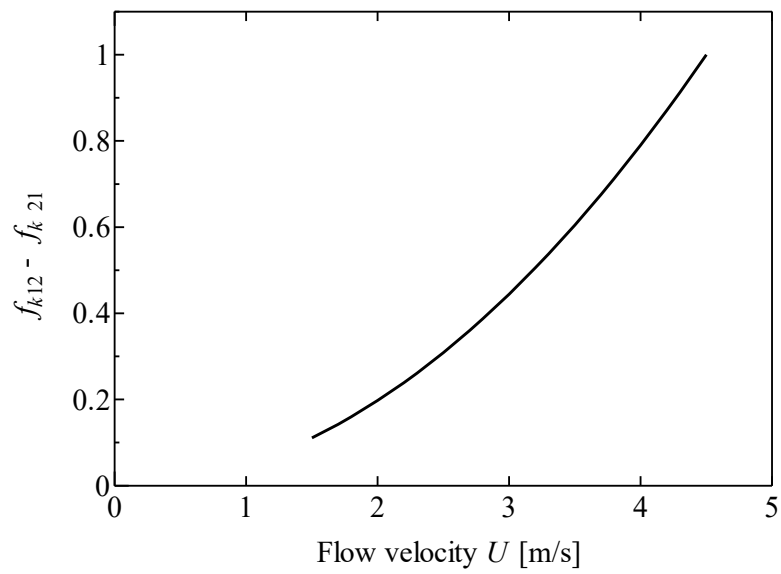
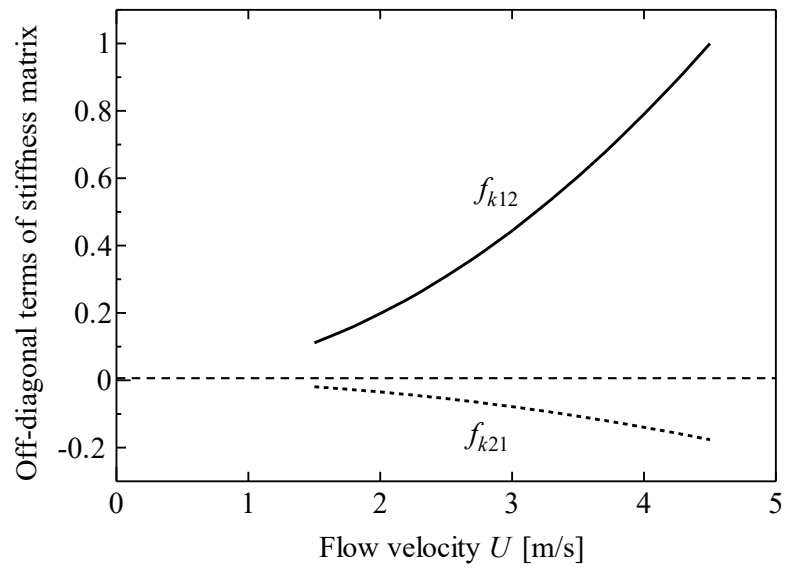


図 2.27: 流速に対する流体付加剛性に起因する剛性項の非対角項 f_{k12}, f_{k21} の変化

2.13 まとめ

第2章では上流端を固定支持された平板を対象に3次元線形解析モデルを構築し、安定性解析を行った。得られた結果を先行研究で報告されている実験結果および解析結果と比較したところ、フラッタ流速および振動数に関して定量的に良く一致した。

さらに、不安定化機構を詳細に考察するために、平板表面に作用する流体力による仕事を求めた。流体力を流体付加質量、付加減衰、付加剛性に寄与する成分に分離し、それぞれの成分が流体力仕事に及ぼす影響を調べた。また、フラッタへの寄与が支配的な固有振動モードに着目し、それらのモード間の連成による仕事に係の安定性に及ぼす影響を調べることで、不安定化機構を考察した。本章で得られた主な結果を以下に示す。

- (1) アスペクト比が小さい場合は流れの3次元性の影響が顕著に現れ、特に平板の側端付近の領域で流体力仕事小さくなる。一方、アスペクト比が大きい場合は側端付近における流れの3次元性の影響が小さくなり、2次元解析の結果に漸近する。
- (2) 構造減衰によるエネルギー散逸よりも流体付加減衰によるエネルギー散逸の方が支配的であるため、構造減衰がフラッタ流速および振動数に及ぼす影響は小さい。
- (3) 流体付加剛性に起因する流体力仕事は流速によらず正である。一方、流体付加減衰に起因する流体力仕事は負である。また、流体付加質量に起因する流体力仕事はフラッタの励振に寄与していない。つまり、流体付加剛性に起因するエネルギーの流入量が流体付加減衰に起因するエネルギーの散逸量を上回ったとき、フラッタが発生する。
- (4) 質量比が小さい場合、フラッタ発生に寄与する低次の2つの曲げモードを用いたモード近似により縮約された流体構造連成方程式において、剛性行列の非対角成分による仕事を求めた。その結果、剛性行列の非対角成分による仕事が正となることがフラッタ発生の原因であることがわかった。つまり、質量比が小さい場合は、流体付加剛性に起因する剛性項の非対角成分の影響による低次の2つの曲げモード間の連成がフラッタ発生の原因である。一方、各モード自身の仕事は流速によらず常に負であり、単一のモードが励起されるフラッタは発生しない。

第 3 章

上流端の支持条件がフラッタ特性と不安定化機構へ及ぼす影響

第 3 章では，平板の端部の支持条件がフラッタ特性（フラッタ流速，振動数など）と不安定化機構に及ぼす影響を調べる．第 2 章では上流端が固定支持された場合を対象に不安定化機構を調べた．しかしながら，平板の製造工程では上流端が自由になっている状態や弾性支持された状態でハンドリングされる場合がある．そこで本章では，図 3.1.1 に示すように両側端を支持され上流端と下流端が自由となっている場合および上流端を弾性支持され下流端が自由な場合を対象とする．

ここで，前章ではモデルの簡易化のために平板の変形が 2 次元であると仮定し，片持ち梁としてモデル化した．しかしながら，第 2 章で用いた解析手法は 3 次元的な変形を呈する場合や複雑な支持条件を持つ場合に適用することができない．また，既往の研究では，構造系の 3 次元的な変形や複雑な支持条件と流体力の三次元性を共に考慮することができる解析手法は提案されていない．このため，第 3 章では構造解析に 3 次元的な変形を解析することが可能であり，複雑な支持条件を導入することができる有限要素法を用いる．

本章の前半では両側端が支持され上流端が自由になっている場合について述べ，後半では上流端が弾性支持された場合について述べる．支持条件によって流体力仕事の分布がどのように変化するのかを示す．

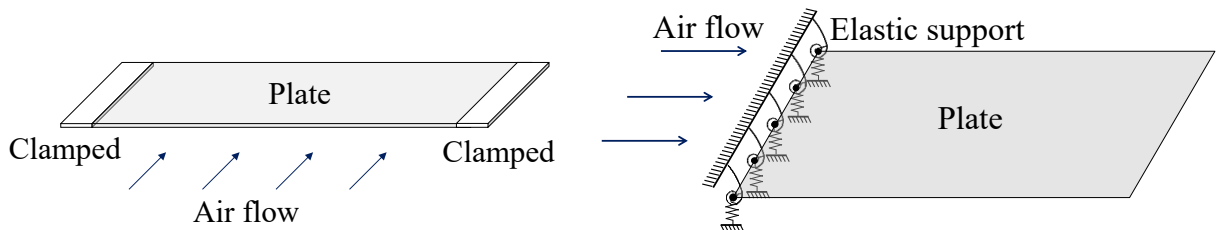


図 3.1.1: 本章で対象とする支持条件の概略図

3.1 平板の両側端が支持され上流端と下流端が自由な場合

3.1.1 両側端が支持された平板の解析モデル

図 3.1.2 に両端が支持された平板の解析モデルと座標系を示す．平板は両端が固定支持されており， y 軸方向に張力 T が付加されている．平板のスパン，コード，厚さ，密度をそれぞれ L, b, h, ρ_s と定義する．密度 ρ_f の流体（空気）が x 軸方向（平板のコード方向）に一様流速

U で流れているとする．重力は y 軸方向（平板のスパン方向）に作用している．ここで，平板の曲げ変形と捩じり変形が連成した 3 次元的な変形を呈する場合の固有振動モードを解析的に求めることは困難である．このため，有限要素法を用いて平板を離散化する．

なお，平板の両端を単純支持した場合と固定支持した場合で予備計算を行いフラッタ流速を比較した結果，両者にほとんど差異が見られなかった．このため，ここでは解析結果を実験結果と比較しやすいように平板を両端固定支持としてモデル化した．詳細は付録 C を参照のこと．

また，流体摩擦および構造減衰は，予備計算の結果，フラッタ流速への影響は無視することができるだけ小さいことが明らかになったため，ここでは考慮しない．詳細は付録 D を参照のこと．

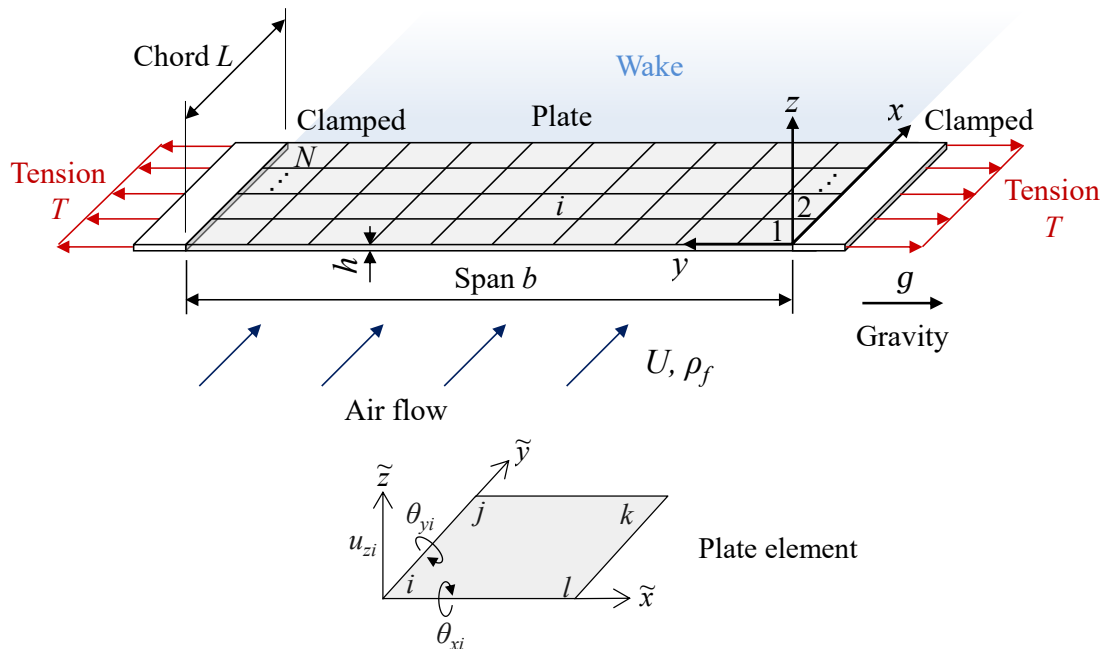


図 3.1.2: 一様流中で両端を支持された平板の解析モデル

3.1.2 有限要素法を用いた平板の離散化

曲げ変形と捩じり変形が連成した 3 次元的な変形を考慮するために，変位法に基づく有限要素法を用いて平板を離散化する．ここで，平板は薄板としてモデル化し，振動は微小振動を仮定する．平板の離散化には，面外方向（ z 方向）変位 u_z ， x 軸回りの回転 θ_x ， y 軸回りの回転 θ_y の各節点 3 自由度，1 要素合計 12 自由度の四角形板曲げ要素（ACM 要素）を用いる．ここで，要素の節点変位ベクトルを $\mathbf{e}(t)$ ，要素の局所座標系を $(\tilde{x}, \tilde{y})$ として定義された形状関

数行列 $\mathbf{N}(\tilde{x}, \tilde{y})$ を用いて式(3.1.1)のように表される．ここで，形状関数行列 $\mathbf{N}$ は 4 次の関数により要素内の変位を内挿した行列である．

$$u_z(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \mathbf{N}(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{e}(t) \quad (3.1.1)$$

仮想仕事の原理に基づき，離散化された各要素の運動方程式は下式のように得られる．

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{e}}(t) + (\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_T) \mathbf{e}(t) = \mathbf{f} \quad (3.1.2)$$

式(3.1.2)中の $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}_s$, $\mathbf{k}_g$, $\mathbf{k}_T$, $\mathbf{f}$ はそれぞれ，各要素の質量行列，平板の剛性行列，重力による幾何剛性行列，平板に付加された張力による幾何剛性行列，節点外力ベクトルである．これらは以下の式(3.1.3)で与えられる．

$$\mathbf{m} = \int_V \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \quad \mathbf{k}_s + (\mathbf{k}_g + \mathbf{k}_T) = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV + \int_S \mathbf{G}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{G} dS, \quad \mathbf{f} = \int_S \mathbf{N}^T \Delta p dS \quad (3.1.3)$$

$$\mathbf{B} = -\tilde{z} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \tilde{x}^2} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \tilde{y}^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right]^T \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_y \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

$$N_y = T/b + \rho_s h g (L - y) \quad (3.1.7)$$

剛性行列 $\mathbf{k}_s$ 中の $\mathbf{B}$ は平面応力状態を仮定した薄板の曲げ理論^[61]より導出された歪－変位行列， $\mathbf{D}$ は弾性行列であり，それぞれ式(3.1.4), (3.1.5)で表される．式中の E , ν はそれぞれ平板のヤング率とポアソン比である．幾何剛性行列 $\mathbf{k}_g$, $\mathbf{k}_T$ 中の $\mathbf{G}$, $\mathbf{S}_0$ は式(3.1.6)で与えられる．式(3.1.6)中の N_y は平板の y 軸方向に付加される張力と重力による面内力であり，式(3.1.7)で与えられる．

また，節点外力ベクトル $\mathbf{f}$ 中の Δp は流体流れによって平板の上下面に生じる圧力差であり，DPM^[56, 57]により求める．流体力の導出過程に関しては，次節において述べる．

全体座標系での変位ベクトルを $\mathbf{X}(t)$ として，式(3.1.2)に示した各要素の運動方程式を重ね合わせることで全体座標系での運動方程式は下式のように得られる．

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{X}} + \underbrace{(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_T)}_{\mathbf{K}} \mathbf{X} = \mathbf{Q} \quad (3.1.8)$$

上式中の $\mathbf{M}_F$ と $\mathbf{K}$ はそれぞれ全体座標系での質量行列と剛性行列であり，剛性行列 $\mathbf{K}$ には平板の剛性行列 $\mathbf{K}_s$ および重力と張力による幾何剛性 $\mathbf{K}_g$, $\mathbf{K}_T$ が包含されている．また，右辺の $\mathbf{Q}$ は流体力ベクトルである．

3.1.3 平板に作用する流体力の計算

平板表面に作用する流体力は第 2 章と同様に，非定常揚力面理論に基づく Küssner の積分方程式^[58]を DPM^[56, 57]により離散化することで求める．基本的な定式化の流れは第 2 章と同様であるが，ここでは運動学的条件において有限要素法により離散化された面外方向変位を用いる．具体的には， j 番目の要素の吹上速度は流体と平板の界面における運動学的条件より，有限要素法により離散化されたアップウォッシュ点 $(\tilde{x}_u, \tilde{y}_u)$ における平板の面外方向変位 $u_{zj} = \mathbf{N}_u \mathbf{e}_j$ を用いて以下のように与えられる．

$$w_{\tilde{f}}^* = \frac{1}{U} \frac{\partial u_{zj}}{\partial t} + \frac{\partial u_{zj}}{\partial \tilde{x}} = \frac{i\omega}{U} \mathbf{N}_u(\tilde{x}_u, \tilde{y}_u) \mathbf{e}_j + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \mathbf{N}_u \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_u, \tilde{y}=\tilde{y}_u} \mathbf{e}_j \quad (3.1.9)$$

ここで， $\mathbf{N}_u$ はアップウォッシュ点における形状関数， $\mathbf{e}_j$ は節点変位ベクトルである．よって式(3.1.9)を用いると， i 番目の要素に作用する流体圧力が板要素の節点変位ベクトル $\mathbf{e}_j$ と関連付けられた形で下式のように表される．

$$\Delta p_i = \frac{1}{2} \rho_f U^2 \sum_{j=1}^N c_{ij} w_{\tilde{f}}^* = \frac{1}{2} \rho_f U^2 \sum_{j=1}^N c_{ij} \left\{ \frac{i\omega}{U} \mathbf{N}_u(\tilde{x}_u, \tilde{y}_u) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \mathbf{N}_u \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_u, \tilde{y}=\tilde{y}_u} \right\} \mathbf{e}_j \quad (3.1.10)$$

要素面積を s_i とすると， i 番目の要素の流体力 $\Delta p_i s_{ei}$ はダブレット点に集中荷重として作用する． i 番目の要素の等価節点外力 $\mathbf{f}_i$ はダブレット点 $(\tilde{x}_d, \tilde{y}_d)$ における形状関数 $\mathbf{N}_d$ を用いて下式のように求められる．

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{N}_d^T(\tilde{x}_d, \tilde{y}_d) \cdot \Delta p_i \cdot s_{ei} \quad (3.1.11)$$

最終的にこれらの等価節点外力を重ね合わせることで，有限要素法の全体座標系における等価節点外力，つまり平板の運動と連成した流体力 $\mathbf{Q}$ が以下のように求められる．式中の $\mathbf{A}_e$ は無次元化された流弾性行列である．

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \rho_f U^2 b \mathbf{A}_e \mathbf{X} \quad (3.1.12)$$

3.1.4 モード近似および特性方程式の導出

式(3.1.8)に示した流体構造連成方程式は有限要素法の全自由度に関する方程式であるため、このままでは自由度が大きく計算負荷が大きい。ここで、一般にフラッタに寄与するモードは低次の数個のモードである。このため、モード近似を適用することで計算負荷を低減する。有限要素解析によって得られた平板の固有振動モードを成分とするモード行列 Φ を用いて、平板の全体座標系での変位ベクトル $\mathbf{X}$ を以下のように近似する。

$$\mathbf{X} = \Phi \mathbf{q} \quad (3.1.13)$$

上式中の $\mathbf{q}$ はモード座標ベクトルである。モード近似には収束性を考慮して低次の9つのモードを使用した。式(3.1.13)を式(3.1.8)に代入すると、モード座標に関する運動方程式は以下のように得られる。

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Omega} \mathbf{q}(t) - \frac{1}{2} \rho_f U^2 b \tilde{\mathbf{A}}_e \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (3.1.14)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_e = \Phi^T \mathbf{A}_e \Phi \quad (3.1.15)$$

ここで、流体流れがない場合の平板の i 次固有角振動数を ω_i とすると、式(3.1.14)中の $\mathbf{\Omega}$ は式(3.1.16)で与えられる。

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}[\omega_i^2] \quad (3.1.16)$$

以上より、 $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} e^{st}$ として式(3.1.14)に代入すると、モード座標 $\mathbf{q}$ に関する特性方程式は下式(3.1.17)のように求まる。ここで、 $\bar{\mathbf{q}}$ はモード座標 $\mathbf{q}$ の複素振幅である。また、式中の $\mathbf{A}'_e(s)$ はラプラス変換された流力弾性行列である。

$$\det \left[s^2 \mathbf{I} + \mathbf{\Omega} - \frac{1}{2} \rho_f U^2 b \mathbf{A}'_e(s) \right] = 0 \quad (3.1.17)$$

第2章と同様に、流速 U を変化させ式(3.1.16)を満足する特性根であるラプラス変数 s を求めて安定性を判別する。得られた特性根のうち1つでも実部が正 ($\text{Re}[s] > 0$) の根があれば、系は不安定となり、 $\text{Im}[s] \neq 0$ の場合にはフラッタが発生する。このときの流速をフラッタ流速 U_f 、振動数をフラッタ振動数 f_f と定義する。

3.1.5 流体力による局所的な仕事分布の計算

平板表面に作用する非定常流体力 $\mathbf{Q}$ によってなされる振動1周期当たりの仕事 E_f は、以下の式より求めることができる。

$$E_f = \oint \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{Q} dt = \oint \dot{\mathbf{X}}^T \left(\frac{1}{2} \rho_f U^2 b \mathbf{A}_e \right) \mathbf{X} dt = \sum_{k=1}^{N_k} E_{local}^{(k)} \quad (3.1.18)$$

ここで、式(3.1.18)中の k および N_k は有限要素法により離散化された平板上の節点の番号および総数を表している。また、 $E_{local}^{(k)}$ は節点 k における流体力による局所的な仕事を表している。局所的な仕事の分布を求めることで、フラッタを励起している流体力が平板上のどの領域に作用しているかを調べることができる。ここでは、振動 1 周期の間では振幅の成長が小さいと仮定し固有値の実部（振幅の成長率）を零、つまり一定振幅として、中立安定点（固有値の実部が零となる点）における複素固有モードを節点変位 $\mathbf{X}$ として流体力仕事を計算した。

3.1.6 支配無次元数および計算パラメータ

平板に発生するフラッタ現象を支配する主な無次元数を以下の式(3.1.19)に示す。第 2 章でも用いた質量比 μ 、アスペクト比 Λ 、無次元フラッタ流速 U_f^* 、無次元フラッタ振動数 f_f^* に加え、無次元張力 T^* を定義した。また、式中の D は平板の曲げ剛性 $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ である。ここでは、平板のスパン b を代表長さとした。これらの無次元数を用いて解析および実験結果を整理した。

$$\begin{aligned} T^* &= b^2 T / DL, \quad \mu = \rho_f b / \rho_s h, \quad \Lambda = b / L \\ U_f^* &= U_f b \sqrt{\rho_s h / D}, \quad f_f^* = f_f b^2 \sqrt{\rho_s h / D} \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

また、表 3.1.1 に計算で用いたパラメータを示す。また、平板の x 方向分割数を $n_x = 5$ 、 y 方向分割数を $n_y = 31$ として計算を行った。ここで、分割数はフラッタ流速、振動数がほぼ一定値に収束する値を用いた。また、平板は質量比を幅広く設定するために、様々な材質のものを用いた。具体的には、polyethylene terephthalate（以下、PET と表記する）、紙、青銅、ステンレス（SUS304）、真鍮である。詳細な物性値は表 3.1.2 に示す。

表 3.1.1: 計算パラメータ

Chord b [m]	0.0023~0.092
Span L [m]	0.023~0.92
Fluid density ρ_f [kg/m ³]	1.2 (Air)
Gravity acceleration g [m/s ²]	9.81
Division number in x - direction n_x	5
Division number in y - direction n_y	31

表 3.1.2: 平板の物性値

Material	Density ρ_s [kg/m ³]	Thickness h [mm]	Young's modulus E [GPa]	Poisson's ratio ν
PET	1400	0.016	3.00	0.40
		0.038		
	1413	0.10	6.69	
	1380	0.20	3.20	
		0.30	2.49	
		0.50	2.20	
Paper	734	0.13	4.03	0.30
Bronze	8810	0.03	113	0.38
		0.05		
Stainless steel (SUS304)	7930	0.04	193	0.30
		0.05		
Brass	8390	0.10	103	0.35

3.1.7 実験装置および実験方法

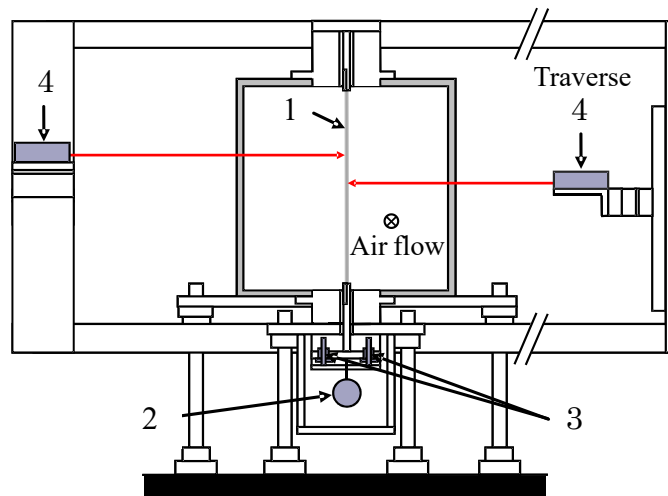
理論解析結果の妥当性の検証のために、両端を固定支持され張力を付加された平板を対象に風洞実験を行った．図 3.1.3 に実験装置全体の構成図を，図 3.1.4 にテストセクションの写真を示す．実験は横型風洞を用いて行った．風洞の乱れ度は 0.8%以下である．テストセクションの寸法は 300 mm×300 mm×580 mm である．

流速は，流路中央部で熱線流速計を用いて測定した流速を代表流速とした．熱線流速計の分解能は 0.1 m/s である．平板の両端を固定した状態で流れの乱れの影響の小さいテストセクション中央に設置し，おもりを用いて平板に張力を付加した．また，張力を一様に付加するためにリニアブッシュを用いた．

平板の振動変位はレーザ変位計を用いて測定した．空気の流速を徐々に増加させて平板の振動変位を測定し，振動変位が急激に大きくなった流速の直前の流速をフラッタ流速，フラッタが発生した流速における振動数をフラッタ振動数とした．実験パラメータは 3.1.6 節の表 3.1.1, 3.1.2 に示した解析パラメータに合わせて設定した．

また，位相平均法を用いて，フラッタモードを測定した．図 3.1.5 に示すように固定したセンサ A（リファレンスセンサ）を基準として，もう一方のセンサ B をトラバースすることで平板の各位置における振動変位を測定した．得られた振動変位のデータを基に，センサ A での振動変位の任意の位相を基準として，平板の各測定点でのセンサ B の振動変位を求めるこ

とで，フラッタ発生時のモード形状およびその時間的変化の測定を行った．



1. Plate 2. Weight 3. Linear bush
4. Laser displacement sensor

図 3.1.3: 実験装置の全体図

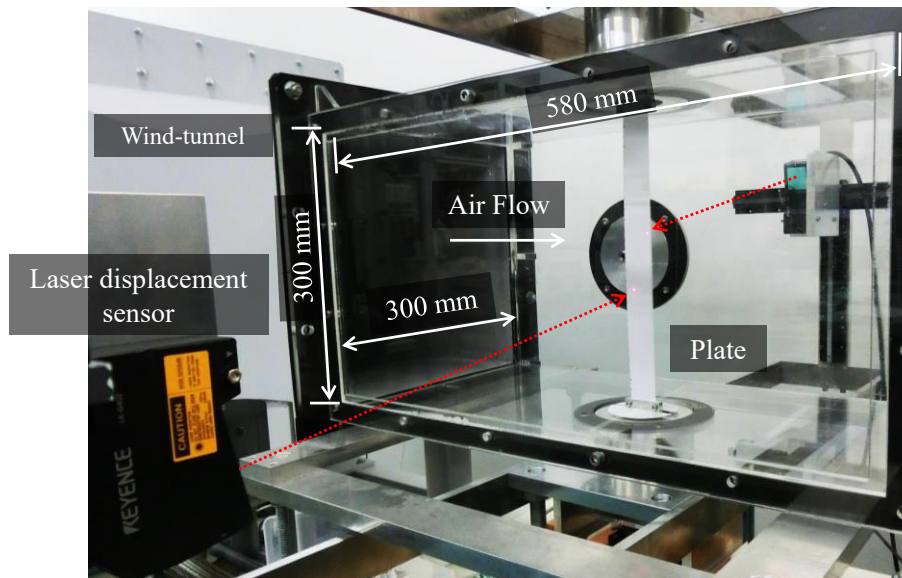


図 3.1.4: テストセクションの写真

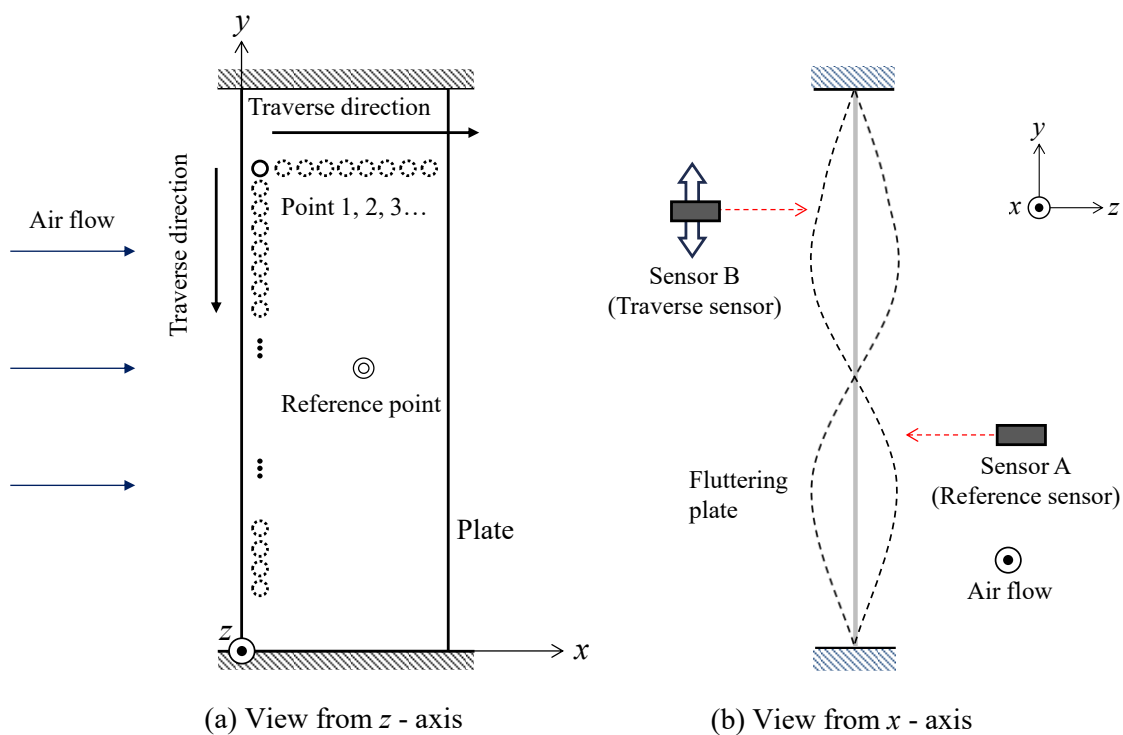


図 3.1.5: 位相平均法を用いたフラッタモード測定概要

表 3.1.3 に測定条件を示す. 測定のサンプリング周波数は 1000 Hz (サンプリング時間 0.001 s), 測定データ点数は 10000 点とした. また, FFT 解析におけるデータ点数は 8192 点 (2^{13} 点) とした. ここで, 周波数分解能がフラッタ発生時における平板の卓越振動数よりも十分に細かくなるようにこれらの条件を設定した. 変位の最小読み取り値はフラッタ発生時の平板の変位よりも十分に小さい値に設定した. また, 変位の測定可能範囲は, 平板の変位の最大値よりも十分に大きい値に設定した.

表 3.1.3: 測定条件

Sampling frequency [Hz]	1000
Temporal resolution [s]	0.001
Data number	10000
Data number used in FFT analysis	8192
Frequency resolution [Hz]	0.122
Minimum measureable value [mm]	0.00244
Measurable range [mm]	± 5.0

3.1.8 両側端が固定支持された平板の固有振動モードの解析結果

図 3.1.6 に有限要素解析によって得られた低次から 9 つの固有振動モードを示す。これらの解析結果は流体の影響を含まない結果である。ここでは代表的な結果として、アスペクト比 $\Lambda = 10$ (材質 PET, $L = 280\text{mm}$, $b = 28\text{mm}$, $h = 0.2\text{mm}$), 無次元張力 $T^* = 1000$ の場合の結果を示す。図中の赤色と青色の領域はそれぞれ上向きと下向きの変位を表している。

代表的なモードについて述べると、1 次モードは曲げ 1 次モード (B1 mode), 2 次モードはねじり 1 次モード (T1 mode), 3 次モードは曲げ 2 次モード (B2 mode), 4 次モードはねじり 2 次モード (T2 mode) である。また、フラッタ解析におけるモード近似には収束性を考慮して低次の 9 個の固有振動モードを用いた。

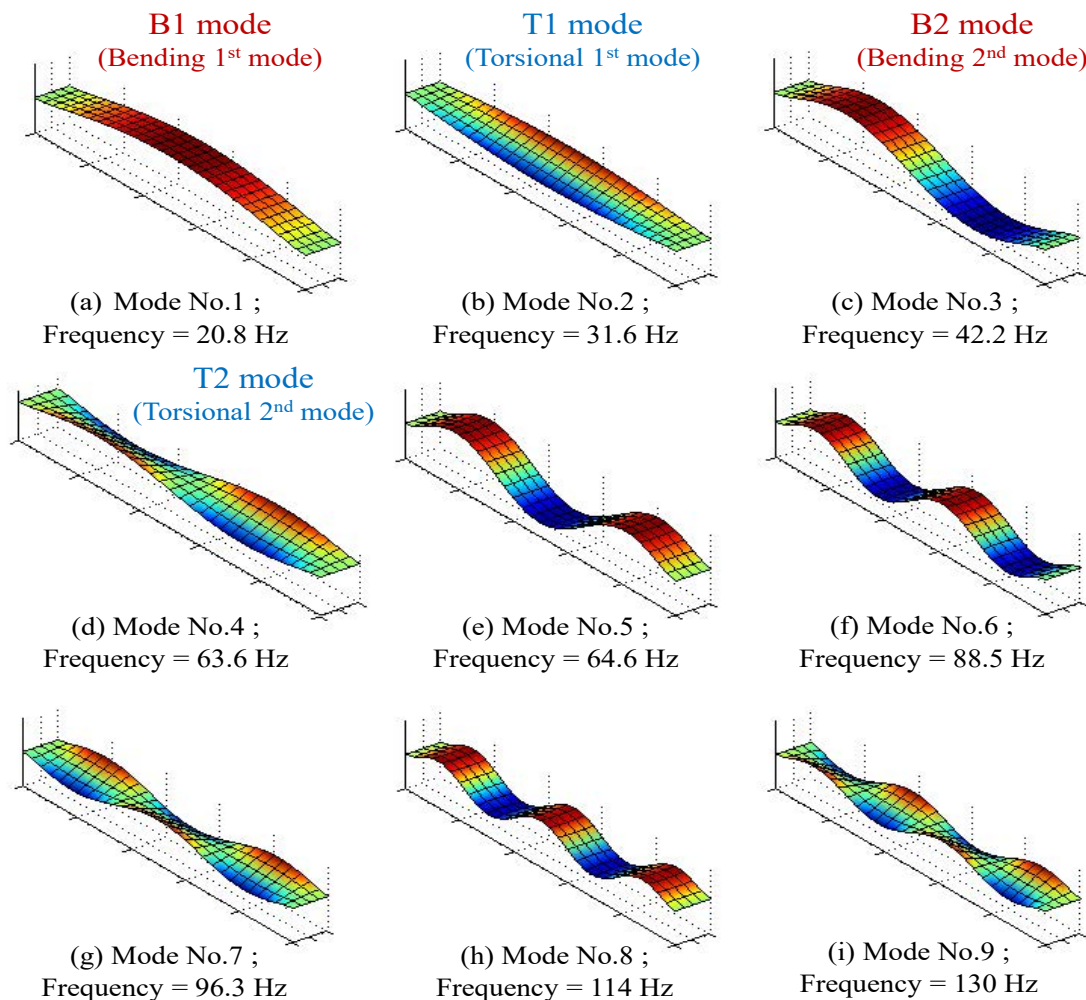


図 3.1.6: 両端が固定支持された平板の固有振動モード

3.1.9 流速を変化させて計算した根軌跡

図3.1.7に流速を変化させて固有値を計算した根軌跡および流速に対する特性根の実数部（フラッタの成長率）の変化を示す。図はアスペクト比 $\Lambda = 10$ （材質PET, $L = 280\text{mm}$, $b = 28\text{mm}$, $h = 0.2\text{mm}$ ），無次元張力 $T^* = 1000$ の場合の結果である。また，図中には流速が零の場合，つまり図3.1.6に示した固有振動モードを初期根とした根軌跡を表示している。図中の(a)および(b)はそれぞれ，固有値の実部と虚部の関係および流速に対する固有値の実部の関係を示している。ここで，流れがある場合（ $U \neq 0 \text{ m/s}$ ），各モードの特性根は流体力により連成したものである。なお，流速が小さい場合は，DPMにおける核関数の計算が発散するため，ここでは $U = 1.5 \text{ m/s}$ から固有値の計算を行った。

図より流速が増加すると，まずねじり1次モードの固有値を初期根とするブランチ（図の実線）が不安定化する。さらに流速が増加すると，ねじり1次モードを初期根とする2次ブランチに続いて，ねじり2次モードを初期根とするブランチ（図の一点鎖線）が不安定化する。しかしながら，本研究で実験を行ったパラメータにおいては，流速を増加させても高次のねじりモードのフラッタは観測されなかった。

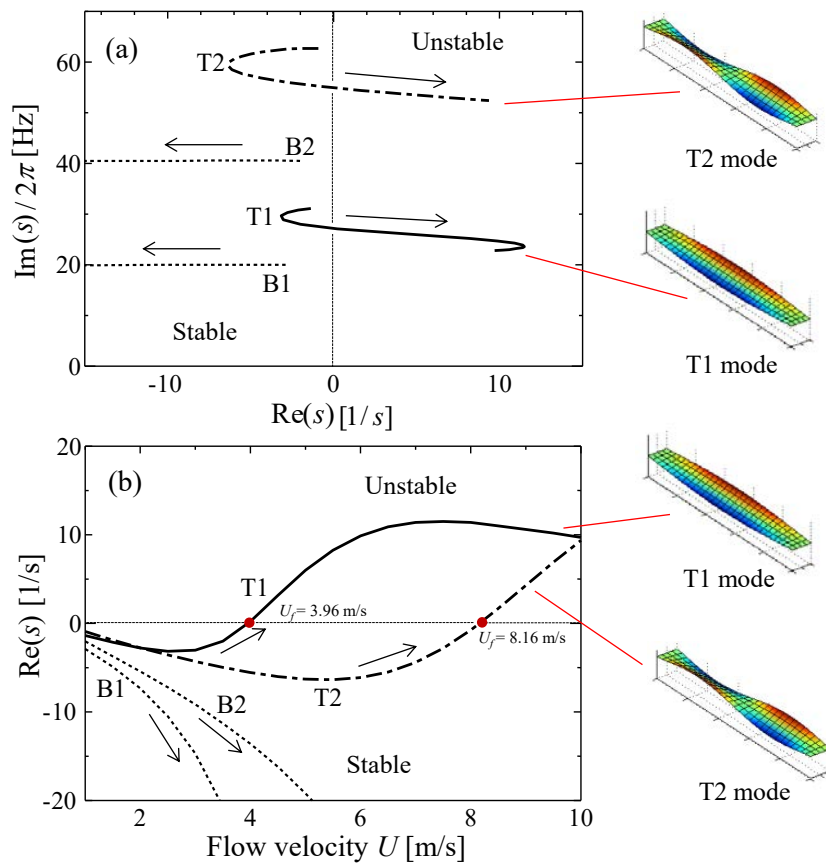


図 3.1.7: 流速を変化させた場合の根軌跡と固有値の実部の変化((a) 固有値の実部と虚部の関係, (b) 流速に対する固有値の実部の関係)

3.1.10 解析結果と実験結果の比較

代表的な実験結果として、図3.1.8に流速に対する振動変位のRMS 値と振動数の変化（スペクトルマップ）を示す。これらは、 $\Lambda = 10$ (材質PET, $L = 280\text{mm}$, $b = 28\text{mm}$, $h = 0.2\text{mm}$), $T^* = 1.0 \times 10^4$ の場合の結果である。スペクトルマップ中の赤色の領域はその振動数成分が卓越していることを表している。

図3.1.8の左図より、流速が増加すると振動変位が急激に大きくなり、フラッタが発生する。ここで、実験を行った全てのパラメータにおいて、同様の傾向が得られた。また、フラッタが発生した状態から徐々に流速を減少させていった結果、フラッタがおさまる流速は流速増加時にフラッタが発生した流速とほぼ変化がなかった（流速の上昇、下降に伴うヒステリシスは見られなかった）。ここで、右図のスペクトルマップより、フラッタ発生時の振動数はわずかに高調和成分が見られるが、ほぼ単一の振動数成分が卓越している。

図3.1.9, 3.1.10にそれぞれ質量比に対するフラッタ流速とフラッタ振動数の変化を実験と解析で比較した結果を示す。これらの図はアスペクト比 $\Lambda = 20$ の結果である。実験では質量比を幅広く設定するために、様々な材質の平板を用いた。平板の材質は記号で、張力は色で分けて図中に示す。

ここで、式(3.1.19)で定義した無次元フラッタ流速および振動数を用いて結果を整理した場合、質量比が大きい領域において、有次元では減少傾向となるのに対し、無次元ではその逆の傾向（増加傾向）となってしまう。そこでTang ら^[31]は、フラッタ流速および振動数を有次元の場合と同様の傾向で整理するために、無次元フラッタ流速 U_f^* を質量比 μ で、無次元フラッタ振動数 f_f^* を μ^2 で基準化した無次元数を用いた。本章で示す結果も、Tang らと同様の無次元数を用いて整理した。

図3.1.9より、フラッタ流速は解析結果と実験結果で概ね良く一致している。また図3.1.10より、厳密にフラッタ発生時の振動数を求めるためには大振幅に伴う非線形性を考慮する必要があるものの、実験より測定したフラッタ発生時の振動数と線形解析により求めた振動数と概ね良く一致している。しかしながら、張力が大きい場合は解析結果と実験結果に差異が見られる。これは高張力により平板にできたしわの影響などが原因ではないかと思われる。フラッタ流速と振動数は質量比が大きくなると、大域的には減少する。また、平板に付加された張力が大きくなるとフラッタ流速と振動数は増加する。

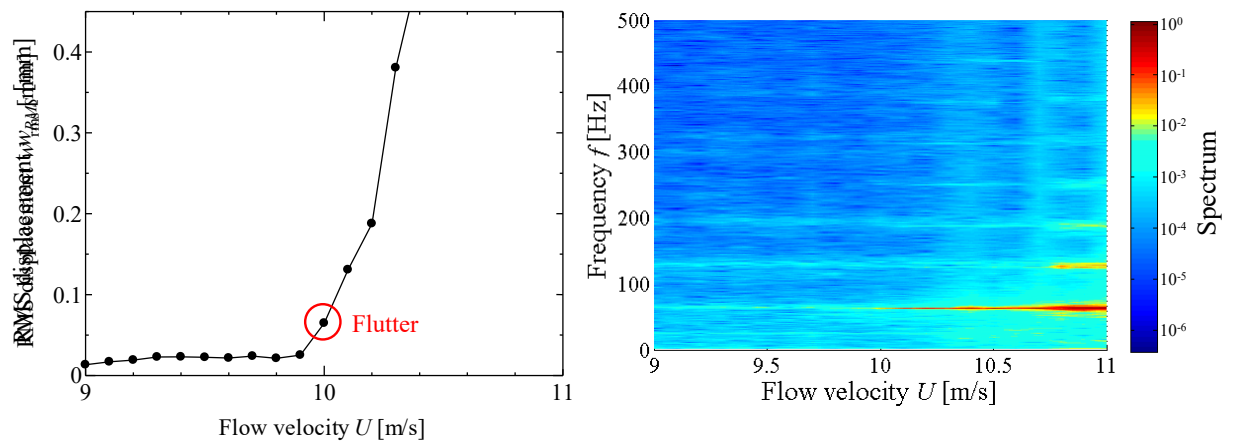


図3.1.8: 流速に対する振動変位のRMS値と振動数の変化

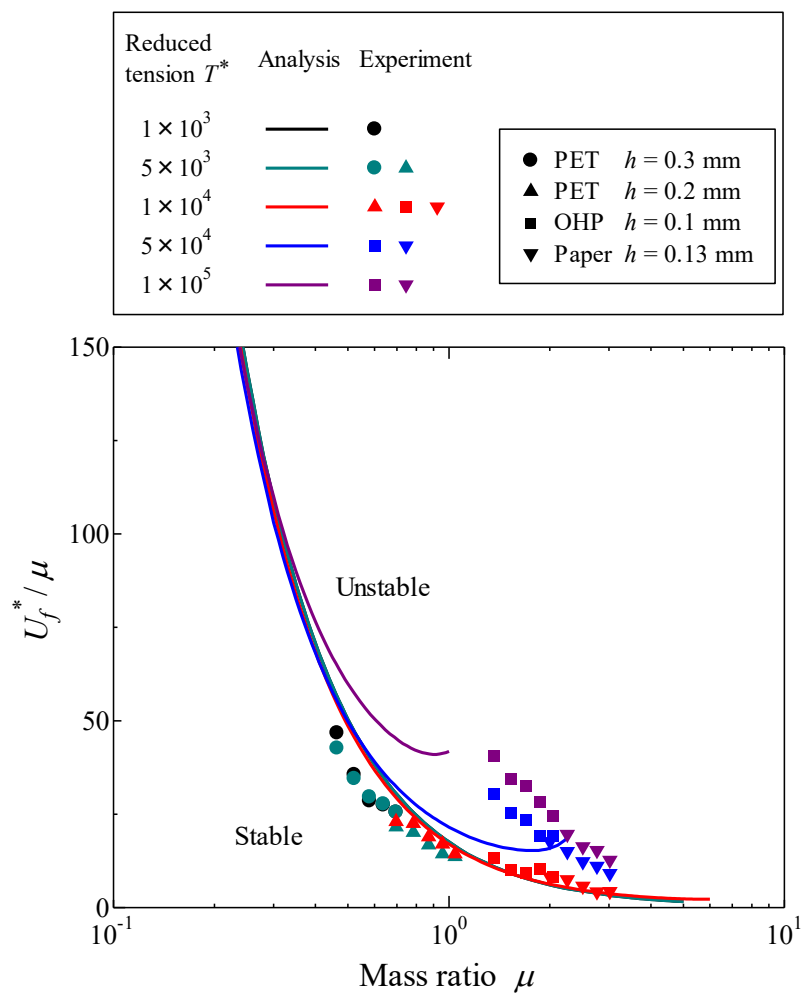


図3.1.9: 無次元フラッタ流速に関する解析結果と実験結果の比較

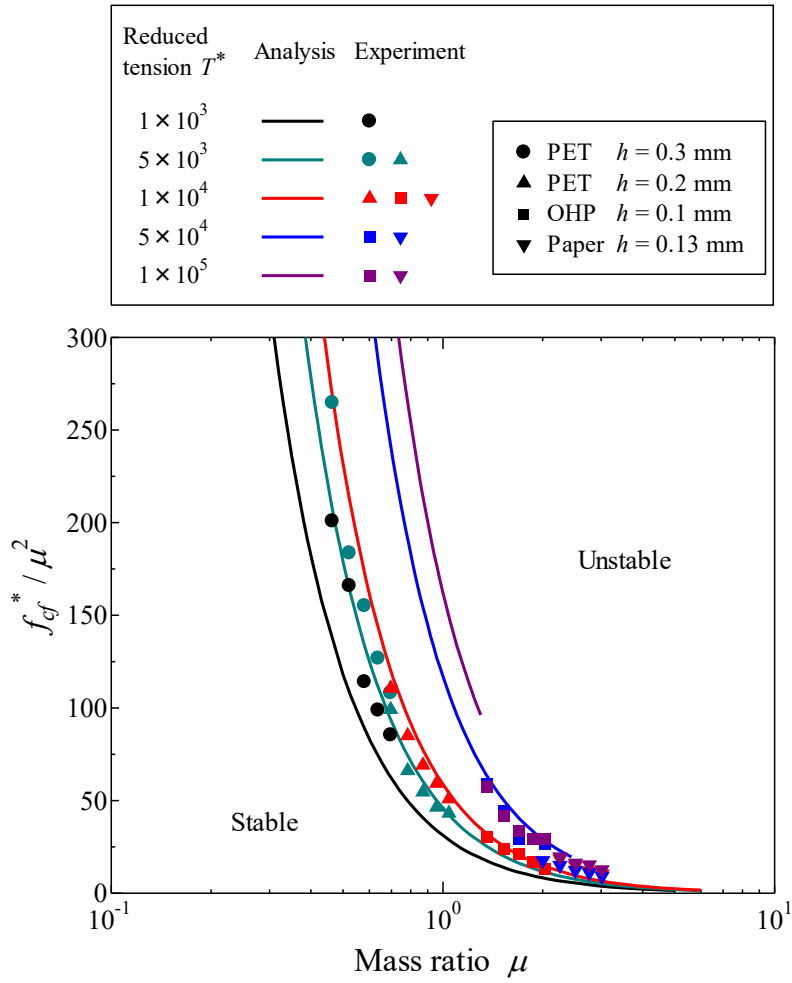


図3.1.10: 無次元フラッタ振動数に関する解析結果と実験結果の比較

3.1.11 流体力による仕事分布（解析結果）

図3.11～13 (a), (b)にそれぞれ平板のスパン方向（長辺方向）の中央の位置におけるフラッタモードと流体力の分布の解析結果を示す．これらの結果は，中立安定点（固有値の実部が零となる点）において計算した結果である．

図3.11～13 (a)より，フラッタモードはねじり（回転）の中心軸が前縁側に偏心しており，後縁側の方が振幅が大きくなっている．ここで，図3.11～13 (b)に示した流体力分布に着目すると，前縁付近において流体力の変動が大きくなっていることがわかる．

また，図 3.11～13 (c)に平板表面上の流体力による仕事分布の解析結果を示す．流体力仕事 $E_{local}^{(k)}$ は式(3.1.18)を用いて計算した．図中の赤色と青色の領域はそれぞれ流体力による仕事が正と負の領域を表している．流体力による仕事は平板表面上の最大値で正規化して表示している．さらに，支持条件による流体力仕事分布の変化を示すために，図 3.1.14(a), (b)にそれぞれ両側端を固定支持され上流端が自由な場合と上流端が固定支持された場合の流体力仕事分

布を示す．これらの結果は同一のパラメータの平板（質量比 $\mu = 2.6$ ，アスペクト比 $\Lambda = 5.0$ ）に対して支持条件のみを変化させた結果である．どちらも張力の影響は考慮せずに計算を行った．

図3.1.14(b)より上流端を固定支持された平板の場合は，第2章で示した結果と同様に，平板の中流領域において流体力による仕事が正となる．一方，両側端を固定され上流端が自由な場合，上流端を固定支持された場合とはフラッタモードが異なり上流端付近での振動が支配的になるため，流体力仕事分布が大きく変化し，平板の上流端付近で流体力仕事が正となっている．つまり，上流端付近に作用する流体力が励振力として作用しており，フラッタ発生の原因となっている．一方，下流端付近では流体力による仕事が負となっており，この領域に作用する流体力は励振力として作用していない．また，固定端付近では振動変位と流体力の振幅が共に小さいため，流体力による仕事はほぼ零となっている．

また，図3.11～13 (c)より質量比の流体力仕事分布への影響に着目すると，いずれの場合も平板の上流端付近では流体力による仕事が正，下流端付近では負となっており，質量比によってエネルギーの流入領域と散逸領域は大きく変化しない．

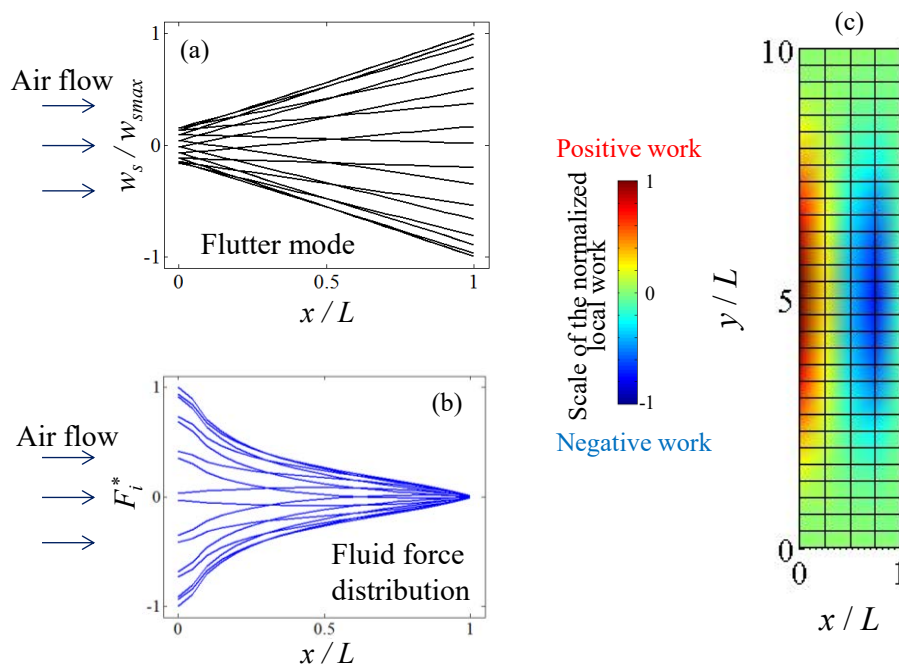


図 3.1.11: 平板のスパン方向中央の位置における (a) フラッタモード, (b) 流体力分布および (c) 平板表面上の流体力による仕事分布（質量比 $\mu = 0.1$ ）

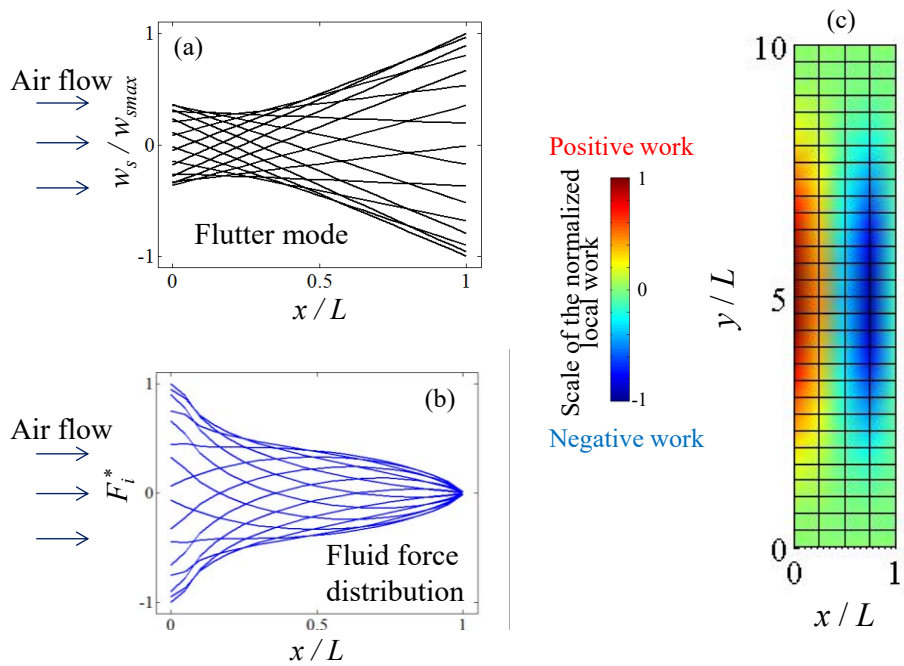


図 3.1.12: 平板のスパン方向中央の位置における (a) フラッタモード, (b) 流体力分布および (c) 平板表面上の流体力による仕事分布 (質量比 $\mu = 1.0$)

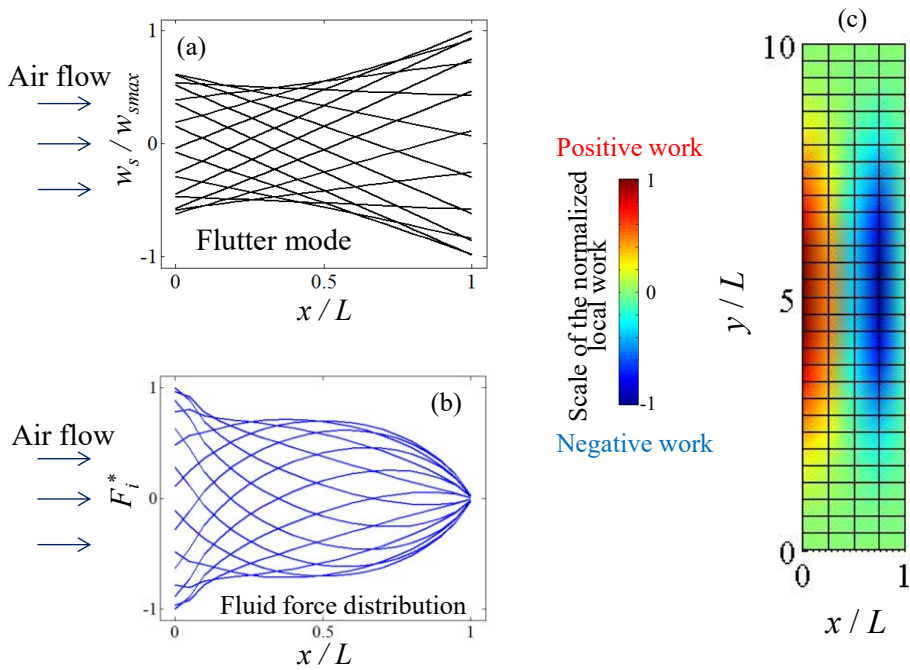


図 3.1.13: 平板のスパン方向中央の位置における (a) フラッタモード, (b) 流体力分布および (c) 平板表面上の流体力による仕事分布 (質量比 $\mu = 3.0$)

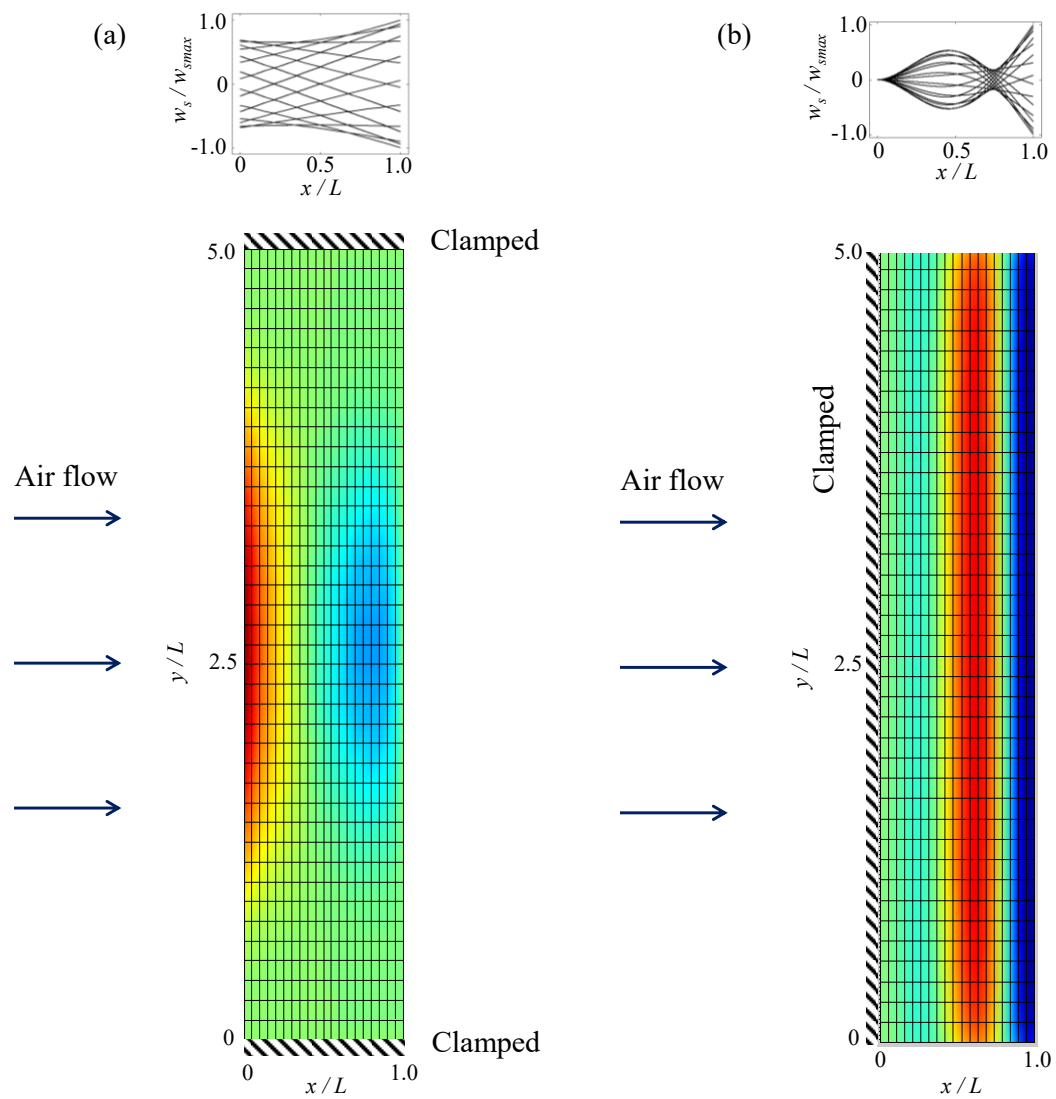


図 3.1.14: 平板表面上の流体力による仕事分布 (a) 両側端を固定支持され上流端が自由な場合, (b) 上流端が固定支持された場合 ($\mu = 2.6, \Lambda = 5.0$)

3.2 平板の上流端が弾性支持され下流端が自由な場合

3.1 節において上流端が固定支持された場合と自由な場合の平板表面上の流体力仕事分布を比較した結果、上流端の支持条件によって流体力仕事分布が大きく変化することが明らかになった。このため、平板の上流端の支持条件は不安定化機構に大きな影響を及ぼす重要な因子である。

ここで、本章の冒頭で述べたように、弾性平板の製造工程では支持部が弾性支持された状態で平板がハンドリングされる場合があるため、支持部の柔軟性が不安定化機構に及ぼす影響を明らかにする必要がある。そこで、本節では支持部の柔軟性を変化させた場合にフラッタ特性および流体力仕事分布がどのように変化するかを明らかにする。本節では、支持部の影響により流れの乱れが生じないように、細いワイヤで平板の上流端を支持することで弾性支持状態を実現する。なお、ワイヤによる弾性支持に関するパラメータは等価曲げ剛性およびねじり剛性に縮約し、これらのパラメータを変化させてフラッタ特性および流体力仕事分布への影響を調べる。

3.2.1 上流端が弾性支持された平板の解析モデル

図 3.2.1 に上流端がワイヤによって弾性支持された平板の解析モデルを示す。平板の上流端が偏心なくワイヤの中央に結合されており、下流端は自由である。ワイヤには張力が付加されている。密度 ρ_f の流体が x 軸方向に一樣流速 U で流れているとする。重力は x 軸方向（流れと同じ方向）に作用している。平板のコード、スパン、厚さ、密度をそれぞれ L, b, h, ρ_s と定義する。また、ワイヤ長さおよびワイヤ径をそれぞれ L_w, d と定義する。ここでも 3.1 節と同様に、流体摩擦および構造減衰の影響は無視した。

ここで、ワイヤに作用する流体力は平板表面に作用する流体力に対して無視できるほど小さいと仮定し、考慮しない。

また、3.2.3 節で詳述するが、支持部の柔軟性に関するパラメータは曲げ剛性およびねじり剛性に関する 2 つの無次元数に縮約される。これらの無次元数を用いて結果を整理する。

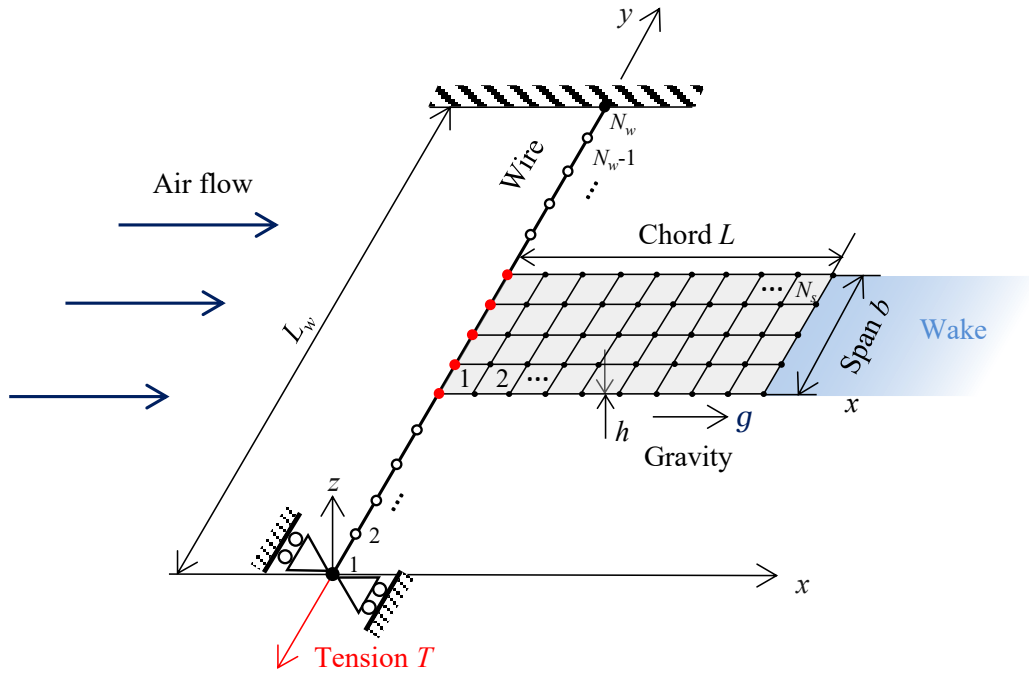


図 3.2.1: 上流側をワイヤで弾性支持された平板の解析モデル

3.2.2 端部が弾性支持された平板の運動方程式

構造解析には 3.1 節と同様に有限要素法を用いる．図 3.2.2 に有限要素法で用いた要素の概略図を示す．ワイヤは 1 節点 3 自由度，1 要素 2 節点の張力が付加された梁要素により離散化する．また，平板は第 3 章と同様に 1 節点 3 自由度，1 要素 4 節点の板要素（ACM 要素）により離散化する．ここで，ワイヤと平板を複合系として扱うために，板要素と梁要素の各節点の自由度を一致させることで 2 つの要素を重ね合わせる．

梁要素の並進変位を板要素の並進変位と区別するために u_w と表記すると，梁要素の形状関数行列 $\mathbf{N}_w(\tilde{y}_w)$ と節点変位ベクトル $\mathbf{e}_w(t)$ を用いて式(3.2.1)のように表される．また，梁要素の局所座標系は $(\tilde{y}_w)$ と定義する．

$$u_w(\tilde{y}_w, t) = \mathbf{N}_w(\tilde{y}_w) \mathbf{e}_w(t) \quad (3.2.1)$$

仮想仕事の原理に基づき，離散化されたワイヤの各要素の運動方程式を求めると，式(3.2.2)のようになる．

$$\mathbf{m}_w \ddot{\mathbf{e}}_w(t) + (\mathbf{k}_w + \mathbf{k}_{wT}) \mathbf{e}_w(t) = \mathbf{0} \quad (3.2.2)$$

式中の $\mathbf{m}_w$, $\mathbf{k}_w$, $\mathbf{k}_{wT}$ は，それぞれ梁要素の質量行列，剛性行列，張力による幾何剛性行列であ

る．これらは式(3.2.3)より求められる．式(3.2.3)中の E_w はワイヤのヤング率である．また， $\mathbf{B}_w$ は梁要素の歪-変位行列であり，式(3.2.4)で表される．梁要素に付加される張力は幾何剛性 $\mathbf{k}_{wT}$ として考慮する．また式(3.2.3)中の N_y は梁要素に付加される y 軸方向の張力 T_w である．

$$\mathbf{m}_w = \int_V \rho_w \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w dV, \quad \mathbf{k}_w + \mathbf{k}_g = \int_V \mathbf{B}_w^T E_w \mathbf{B}_w dV + \int_c \mathbf{G}_w^T N_y \mathbf{G}_w ds \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{B}_w = -\tilde{z} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_w}{\partial \tilde{y}^2} \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{G}_w = \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial \tilde{y}_w}, \quad N_y = T_w \quad (3.2.5)$$

また，板要素の運動方程式は第 3.1 節で示したように，下式のように求められる．

$$\mathbf{m}_s \ddot{\mathbf{e}}_s(t) + (\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_g) \mathbf{e}_s(t) = \mathbf{f}_s \quad (3.2.6)$$

式中の $\mathbf{m}_s$, $\mathbf{k}_s$, $\mathbf{k}_g$, $\mathbf{f}_s$ は，それぞれ板要素の質量行列，剛性行列，重力による幾何剛性行列，節点外力ベクトル(流体力)である．これらの行列の詳細は 3.1 節の式(3.1.3～3.1.7)を参照のこと．ここで，各行列は梁要素と区別するために下付添字 s を付けて表記している．また，3.2 節で扱う体系では 3.1 節とは異なり，軸方向 (x 方向) に重力が作用するため，軸方向の幾何剛性として考慮する．幾何剛性行列 $\mathbf{k}_g$ は下式のように表される．式(3.2.8)中の $\mathbf{N}_s$ は板要素の形状関数である．

$$\mathbf{k}_g = \int_S \mathbf{G}_s^T \mathbf{S}_s \mathbf{G}_s dS \quad (3.2.7)$$

$$\mathbf{G}_s = [\partial \mathbf{N}_s / \partial \tilde{x}_s \quad \partial \mathbf{N}_s / \partial \tilde{y}_s]^T, \quad \mathbf{S}_s = \begin{bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

$$N_x(x) = \rho_s h g (L - x) \quad (3.2.9)$$

全体座標系での節点変位ベクトルを $\mathbf{X}(t)$ として式(3.2.2), (3.2.6)に示したワイヤと平板の各要素の運動方程式を重ね合わせることで全体座標系での運動方程式は式(3.2.10)のように得られる．

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{wT} + \mathbf{K}_g) \mathbf{X} = \mathbf{Q} \quad (3.2.10)$$

式(3.2.10)中の $\mathbf{K}_e$, $\mathbf{K}_{wT}$, $\mathbf{K}_g$ はそれぞれ全体座標系におけるワイヤと平板の剛性行列，ワイヤに付加される張力による幾何剛性行列，平板に作用する重力による幾何剛性行列を表している．

また、 $\mathbf{Q}$ は流体力ベクトルであり、3.1 節の式(3.1.12)より求められる。式(3.2.10)に対してモード近似を適用しラプラス変換を行うことで、ラプラス変数 s に関する特性方程式が得られる。流速を変化させて特性方程式を満足する特性根を計算することで、系の安定性を判別する。

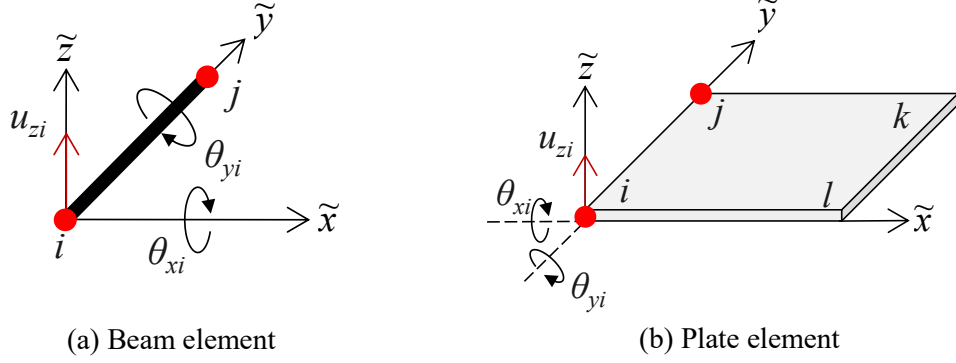


図 3.2.2: ワイヤと平板の複合系の離散化に用いる(a)梁要素および(b)板要素

3.2.3 支配無次元数および計算パラメータ

平板に関する無次元数は、第 2 章でも用いた質量比 μ 、アスペクト比 Λ 、無次元フラッタ流速 U_f^* 、無次元フラッタ振動数 f_f^* であり、式(3.2.11)で定義される。また、式中の D は平板の曲げ剛性 $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ である。ただし、ここでは 3.1 節とは異なり、代表長さとして平板のコード L を用いて無次元化を行った。

$$\begin{aligned} \mu &= \rho_f L / \rho_s h, \quad \Lambda = b / L \\ U_f^* &= U_f L \sqrt{\rho_s h / D}, \quad f_f^* = f_f L^2 \sqrt{\rho_s h / D} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

本章では平板に関する無次元数に加えて、平板の弾性支持に関する無次元数を定義する。ここで、軸方向に張力 T_w が作用するワイヤに付加される外力 F とワイヤの変位 u_w の関係は下式のように表される^[62]。式(3.2.12)中の I は梁の断面二次モーメント $I = \pi d^4 / 64$ である。また、式中の ℓ_w は平板の幅を除いたワイヤの長さである。

$$F = \frac{2T_w}{[(\ell_w / 2) - \{\ell_w \sinh(\omega / 2) / \omega \cosh(\omega / 2)\}]} u_w, \quad \omega = \frac{\ell_w}{2} \sqrt{\frac{T_w}{E_w I}} \quad (3.2.12)$$

式(3.2.12)において、ワイヤの変位 u_w に比例する項、つまり等価曲げ剛性 k_b を取り出すと、式(3.2.13)のようになる。

$$k_b = \frac{2T_w}{[(\ell_w/2) - \{\ell_w \sinh(\omega/2) / \omega \cosh(\omega/2)\}]b} \quad (3.2.13)$$

次にワイヤがねじりを受ける状態を考え、ワイヤのねじり角に比例する項、つまり等価ねじり剛性 k_t を取り出すと式(3.2.14)のようになる。 G_w は横弾性係数、 I_p はワイヤの断面 2 次極モーメント $I_p = \pi d^4 / 32$ である。

$$k_t = \frac{4G_w I_p}{b\ell_w} \quad (3.2.14)$$

さらに、式(3.2.13)および式(3.2.14)に示した等価曲げ剛性 k_b およびねじり剛性 k_t を平板の曲げ剛性 $D = E_s h^3 / 12(1 - \nu_s^2)$ で基準化することで、無次元曲げ剛性 k_b^* と無次元ねじり剛性 k_t^* が下式のように表される。

$$k_b^* = \frac{k_b L^3}{D}, \quad k_t^* = \frac{k_t L}{D} \quad (3.2.15)$$

以上より、ワイヤによる弾性支持に関するパラメータを図 3.2.3 に示すように等価曲げ剛性およびねじり剛性の 2 つのパラメータに縮約し、解析結果および実験結果を整理する。

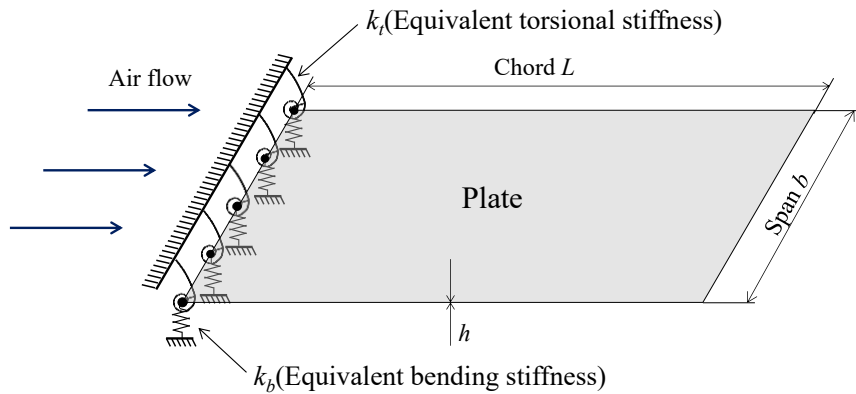


図 3.2.3: 並進ばね k_b とねじりばね k_t で弾性支持された平板

表 3.2.1 にワイヤのパラメータを示す。等価曲げ剛性を幅広い範囲で変化させるために、ステンレス (SUS304)、銅、ピアノ線、真鍮の 4 つの材質のワイヤを用いた。また、表 3.2.2 に平板のパラメータを示す。平板は PET 製のものを用いた。

表 3.2.3 に計算で用いたパラメータを示す。また、平板の x 方向分割数を $n_x = 13$, y 方向分

割数を $n_y = 11$ とした．ここで，分割数はフラッタ流速，振動数がほぼ一定値に収束する値を用いた．

表 3.2.1: ワイヤのパラメータ

Material	Stainless (SUS304)	Copper	Piano wire	Brass
Young's modulus E_w [GPa]	197	130	206	103
Poisson's ratio ν_w	0.3	0.34	0.3	0.35
Density ρ_w [kg/m ³]	8000	8940	7850	8390
Wire diameter d [mm]	0.2			
Wire length L_w [mm]	360	252	373	211

表 3.2.2: 平板のパラメータ

Material	PET
Young's modulus E [GPa]	3.2
Poisson's ratio ν	0.4
Density ρ_s [kg/m ³]	1380
Plate chord L [mm]	120
Plate span b [mm]	60
Plate thickness h [mm]	0.2

表 3.2.3: 計算パラメータ

Fluid density ρ_f [kg/m ³]	1.2 (Air)
Gravity acceleration g [m/s ²]	9.81
Division number in x - direction n_x	13
Division number in y - direction n_y	11
Division number of wire n_w	19

3.2.4 実験装置および実験方法

理論解析結果の妥当性を検証するために，風洞実験を行った．図 3.2.4 に実験装置全体の構成図，図 3.2.5 にテストセクションの写真を示す．本研究では縦型回流式風洞を用いて実験を行った．風洞は主にノズルおよびベルマウスから構成される．ノズルの断面の寸法は 100 mm × 200 mm，ベルマウスの断面の寸法は 200 mm × 300 mm である．風洞の乱れ度は 0.7% 以下である．

流速は，上流側に設置されたノズル断面中央の位置で熱線流速計を用いて測定した値を代

表流速とした．熱線流速計の分解能は 0.1 m/s である．ワイヤを用いて上流側の一边を支持した平板をテストセクション上部に設置した．ここで，平板は偏心なくワイヤの中央に結合されている．縦型風洞により上から下に向かって空気が流れ，平板は一樣な気流にさらされる．

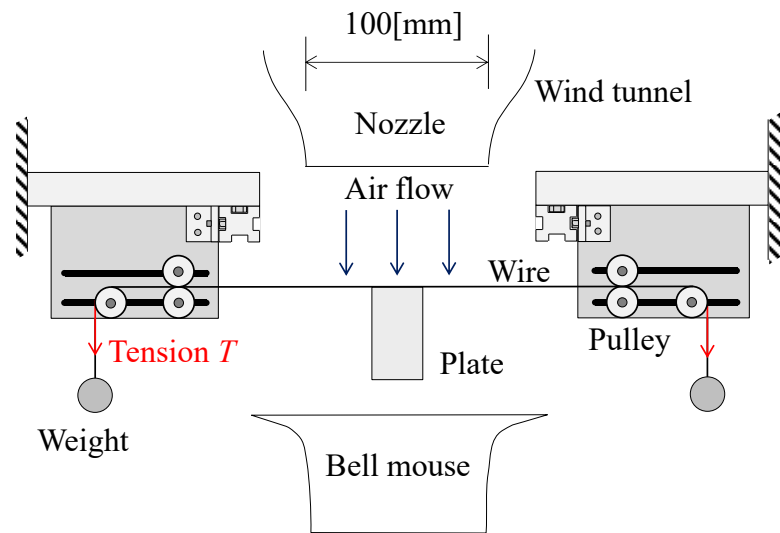
ここで，流れを乱すことなく平板を弾性支持するために，平板の厚さと同一の直径 (0.2mm) の細いワイヤを用いた．また，流れの乱れの影響を極力小さくするために，平板を乱れ度の小さいノズル断面の中央の位置に設置した．図 3.2.6 にワイヤと平板の結合部の詳細を示す．図 3.2.6 に示すように，厚さ 0.01mm の薄い PET フィルムでワイヤを包み，接着剤で平板にすき間なく接着した．接着剤は支持部の剛性が著しく変化することのないように，薄く平板表面上に塗布した．平板の材質は PET である．

実験はワイヤに付加する張力，ワイヤ長さ，ワイヤの材質をパラメータとして変化させて行った．プーリとおもりを用いた機構によりワイヤに張力を付加し，おもりの質量を変化させることで張力を調節した．また，プーリは左右に可動であり，ワイヤ長さを調節することができる．平板の振動変位はレーザ変位計を用いて測定した．振動変位の測定は振動の節にならず，振幅が大きい下流端付近の位置で行った．空気の流速を徐々に増加させて平板の振動変位を測定し，振動変位が急激に大きくなった流速の直前の流速をフラッタ流速とした．また，フラッタが発生する流速における振動数をフラッタ振動数とした．ここで，フラッタ発生時のモードをハイスピードカメラを用いて撮影した．また，実験パラメータは表 3.2.1, 3.2.2 に示したパラメータに合わせて設定した．

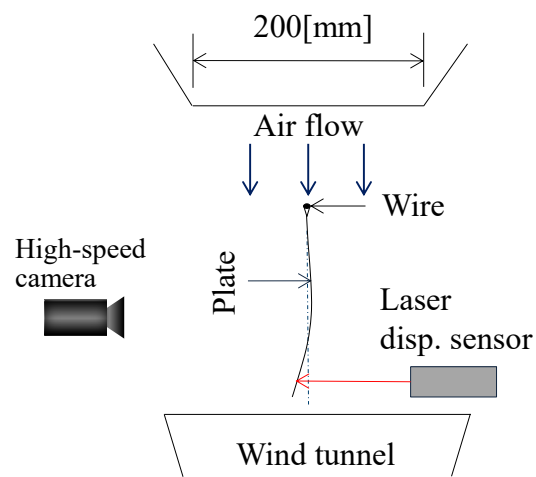
表 3.2.4 に測定条件を示す．測定のサンプリング周波数は 1000 Hz (サンプリング時間 0.001 s)，測定データ点数は 10000 点とした．また，FFT 解析におけるデータ点数は 8192 点(2^{13} 点)とした．ここで，周波数分解能が平板の卓越振動数よりも十分に細くなるようにこれらの条件を設定した．変位の最小読み取り値はフラッタ発生時の平板の振幅よりも十分に小さい値に設定した．また，変位の測定可能範囲は，平板の振幅の最大値よりも十分に大きい値に設定した．

表 3.2.4: 測定条件

Sampling frequency [Hz]	1000
Temporal resolution [s]	0.001
Data number	10000
Data number used in FFT analysis	8192
Frequency resolution [Hz]	0.122
Minimum measurable value [mm]	0.0488
Measurable range [mm]	± 100



(a) Front view



(b) Side view

図 3.2.4: 実験装置全体の構成

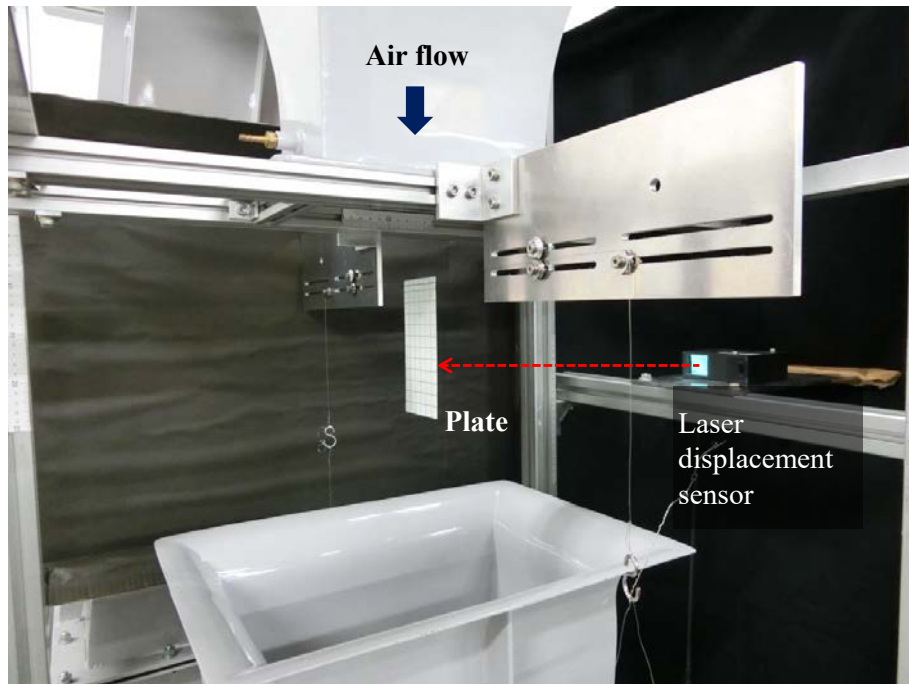


図 3.2.5: テストセクションの写真

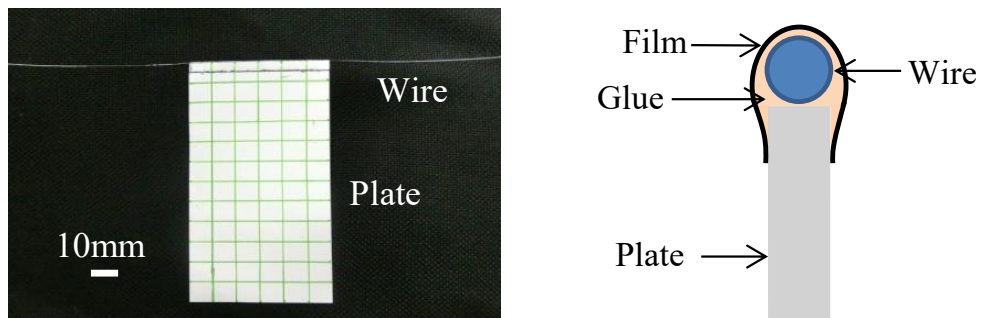


図 3.2.6: ワイヤと平板の結合部の概要

3.2.5 実験結果（流速に対する振動変位の RMS 値 および卓越振動数の変化）

図 3.2.7 に流速に対する振動変位の RMS 値および振動数の変化（スペクトルマップ）を示す。スペクトルマップ中の赤色の領域はその振動数成分が卓越していることを表している。

図 3.2.7(a)は無次元等価曲げ剛性 $k_b^* = 33.6$ の結果、図 3.2.7(b)は無次元等価曲げ剛性 $k_b^* = 910$ の結果である。これらは、ステンレスワイヤを用いた場合の結果である。ここでは、等価ねじり剛性が一定 ($k_t^* = 0.125$) の状態で、ワイヤに付加された張力を変化させることで支持部の等価曲げ剛性を変化させた。

図 3.2.7 より、いずれの場合も流速が増加すると振動変位が急激に大きくなり、フラッタが

発生する．第 3.1 節と同様にフラッタが発生する直前の流速をフラッタ流速，フラッタ発生時の卓越振動数をフラッタ振動数と定義する．ここで，等価曲げ剛性が大きくなると，フラッタ流速が増加することがわかる．また，フラッタ発生時の卓越振動数に着目すると，いずれの場合も単一の振動数成分が卓越しており高調波成分の影響は小さい．

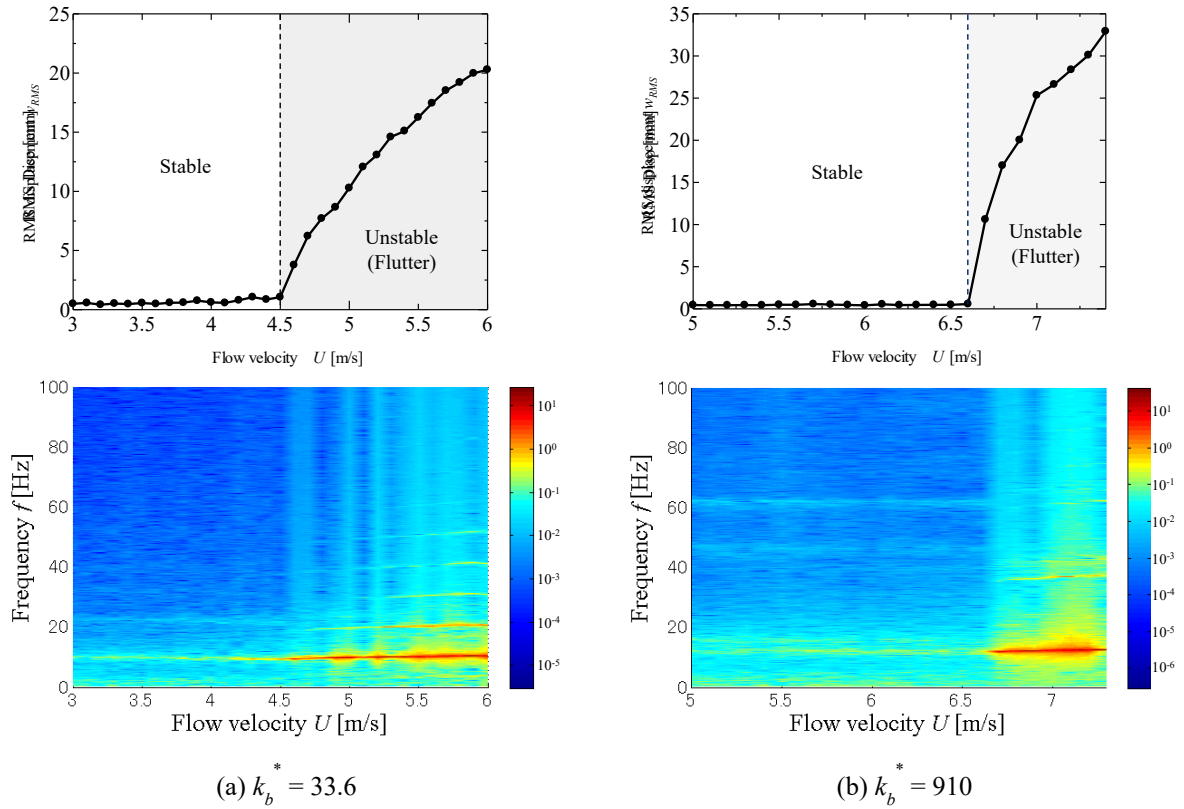


図 3.2.7: 流速に対する振動変位の RMS 値および振動数の変化

3.2.6 前縁を弾性支持された平板の固有振動モードの解析結果

図 3.2.8, 3.2.9 に前縁をワイヤで弾性支持された平板の固有振動モードの有限要素解析結果を示す．これらは，長さ $L_w = 360$ mm のステンレスワイヤを用いた場合の結果である．ここで，支持部の等価曲げ剛性はワイヤに付加された張力を変化させることで変化した．図 3.2.8 は無次元等価曲げ剛性が $k_b^* = 33.6$ ($T = 0.2$ N) と比較的小さい場合の結果，図 3.2.9 は等価曲げ剛性が $k_b^* = 910$ ($T = 5.9$ N) と比較的大きい場合の結果である．また，これらのモードは流体力の影響を含まない場合の結果である．

代表的なモードについて述べると，いずれの場合も 1 次モードは平板がほとんど弾性変形

せずに支持部まわりに回転するモードである。2, 3 次モードに関して, 等価曲げ剛性が比較的小さい場合 ($k_b^* = 33.6$) は 2 次モードが平板の曲げが支配的なモード (以下単に曲げモードと呼ぶ), 3 次モードが平板のねじりが支配的なモード (以下単にねじりモードと呼ぶ) となるのに対して, 等価曲げ剛性が大きくなると ($k_b^* = 910$) 2 次モードがねじりモード, 3 次モードが曲げモードとなる。ここで, 支持部の柔軟性の影響に着目すると特に曲げモードにおいてその影響が顕著に現れており, 図 3.2.8(b)と 3.2.9(c)を比較すると等価曲げ剛性が小さい場合支持部が大きく変形するようになる。

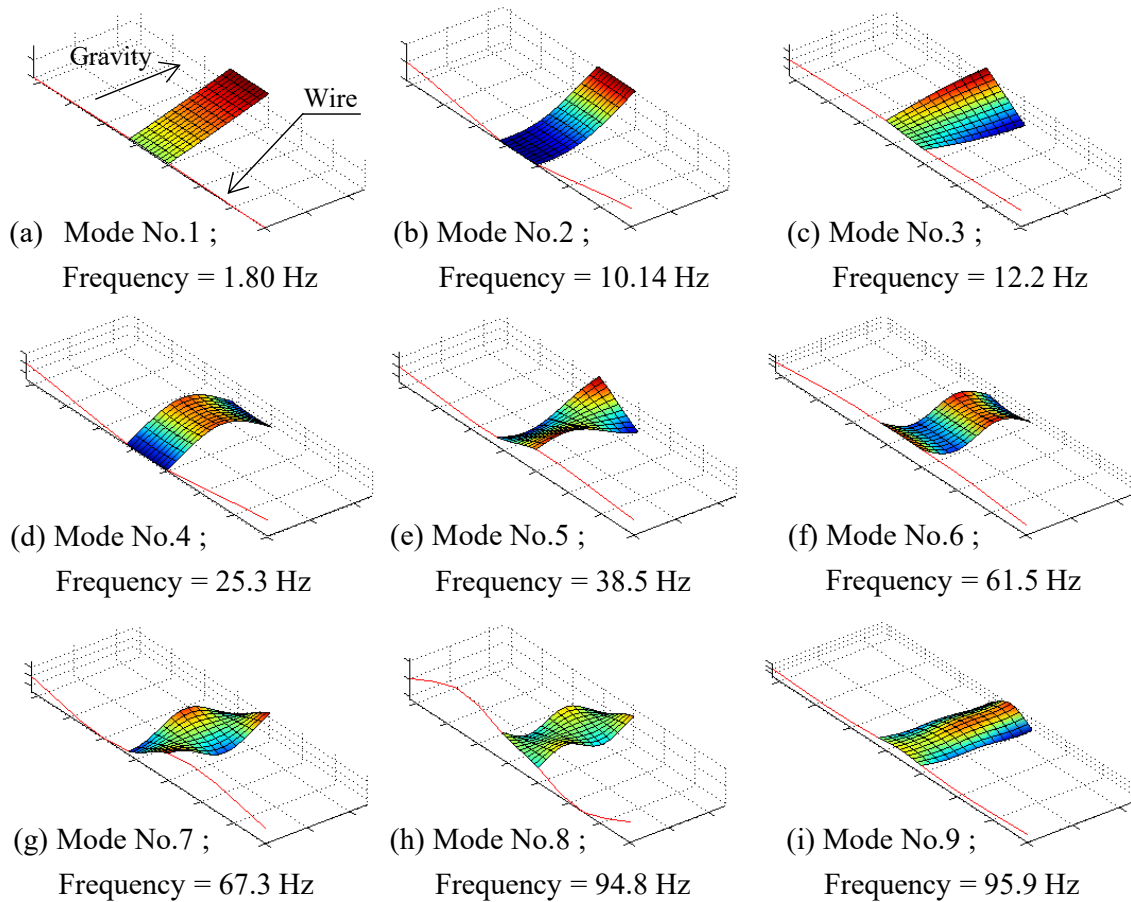


図 3.2.8: 前縁をワイヤで弾性支持された平板の複合系の固有振動モードの有限要素解析結果 (無次元等価曲げ剛性 $k_b^* = 33.6$, 無次元等価ねじり剛性 $k_t^* = 0.125$)

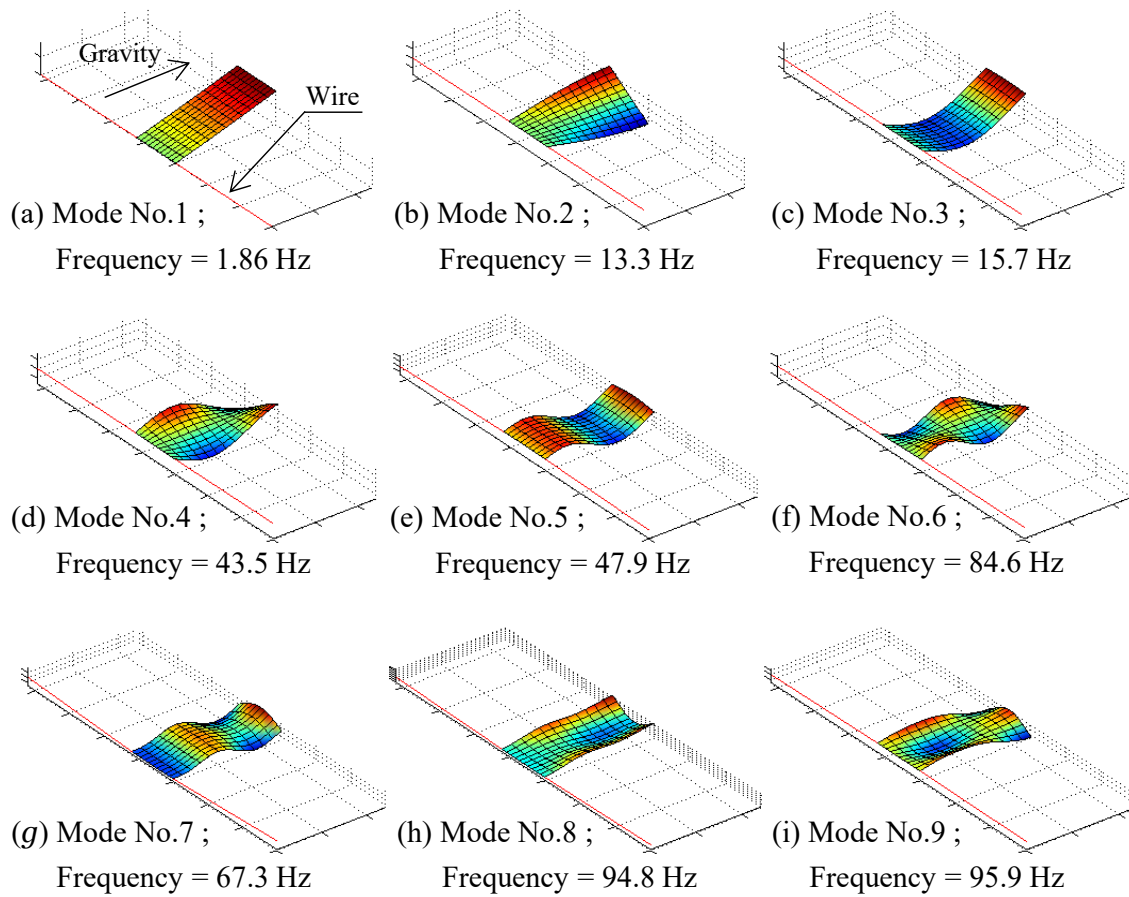


図 3.2.9: 前縁をワイヤで弾性支持された平板の複合系の固有振動モードの有限要素解析結果
(無次元等価曲げ剛性 $k_b^* = 910$, 無次元等価ねじり剛性 $k_t^* = 0.125$)

3.2.7 等価曲げ剛性とねじり剛性のフラッタ流速および振動数への影響（解析結果）

図 3.2.10, 3.2.11 に流速を変化させた場合の根軌跡および流速に対する特性根の実数部（振動の成長率）の変化を示す．図中の(a)および(b)はそれぞれ，固有値の実部と虚部の関係および流速に対する固有値の実部の関係を示している．図 3.2.10 は等価曲げ剛性が比較的小さい場合 ($k_b^* = 33.6$)，図 3.2.11 は等価曲げ剛性が比較的大きい場合 ($k_b^* = 910$) の結果である．これらは，ステンレスワイヤを用いた場合の結果である．等価曲げ剛性は，ワイヤに付加する張力を変化させることで変化した．また，図中には図 3.2.8, 3.2.9 に示した固有振動モードを初期根とした根軌跡を表示している．図 3.2.10 中に示したブランチの初期根は図 3.2.8 に示したモードに，図 3.2.11 中に示したブランチの初期根は図 3.2.9 に示したモードにそれぞれ対応している．

図 3.2.10, 3.2.11 より，いずれの場合も流速が増加すると平板の曲げが支配的なモードを初期根とするブランチ（図 3.2.10 中の 2 次ブランチおよび図 3.2.11 中の 3 次ブランチ）が不安定化する．一方，その他のブランチは流速の増加とともに安定側へ変化する．なお，5 次ブランチ以上の高次のブランチは本計算パラメータにおいては不安定化しなかった．

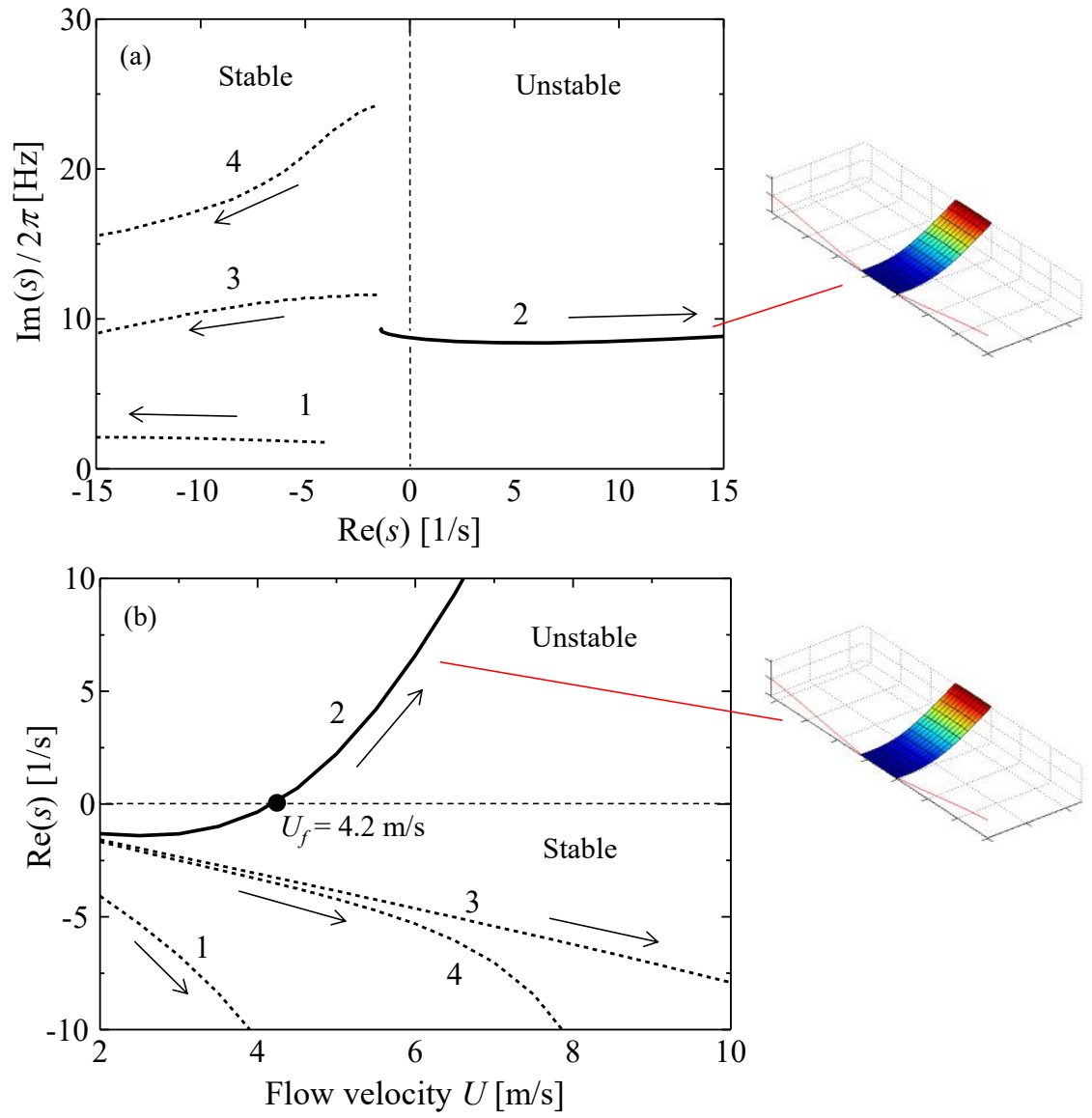


図 3.2.10: 流速を変化させた場合の根軌跡 (無次元等価曲げ剛性 $k_b^* = 33.6$, 無次元等価ねじり剛性 $k_t^* = 0.125$)

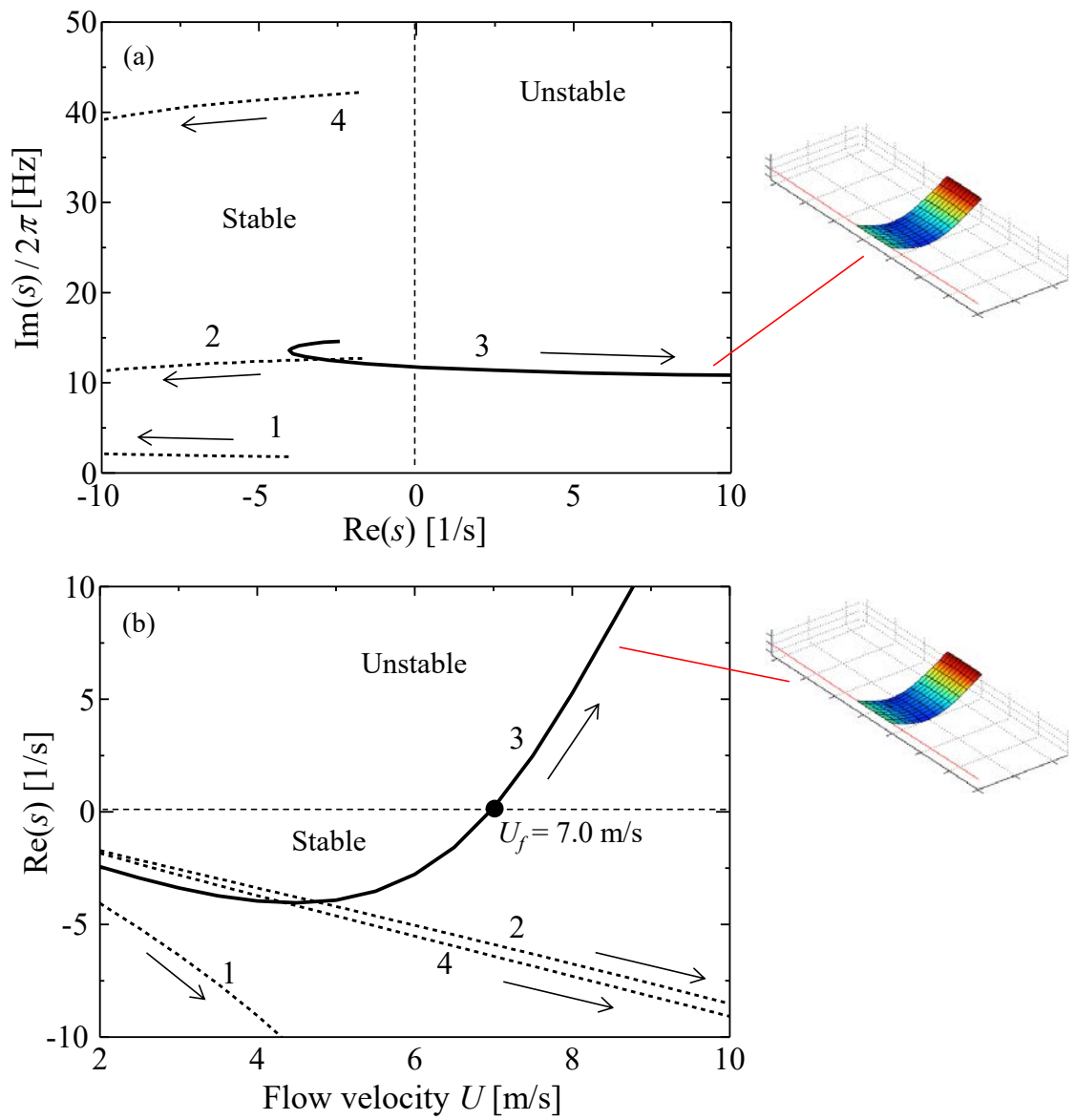


図 3.2.11: 流速を変化させた場合の根軌跡 (無次元等価曲げ剛性 $k_b^* = 910$, 無次元等価ねじり剛性 $k_t^* = 0.125$)

図 3.2.12(a), (b)にそれぞれ無次元等価曲げ剛性に対する無次元フラッタ流速および振動数の解析結果を示す。計算はワイヤの材質がステンレス、銅、ピアノ線、真鍮の 4 種類の場合を対象として行った。これらは無次元等価ねじり剛性が一定 ($k_t^* = 0.125$) の場合の結果である。無次元等価曲げ剛性はワイヤに付加する張力を変化させることで変化させた。

図 3.2.12 より、フラッタ流速および振動数はワイヤの材質によらず一本の曲線となる。つまり、無次元等価曲げ剛性およびねじり剛性を用いることで、ワイヤの物性値（密度、ヤング率、ポアソン比）によらずフラッタ流速および振動数を統一的に整理することができることがわかる。無次元等価曲げ剛性が大きくなるとフラッタ流速および振動数が増加し、さらに無次元等価曲げ剛性が大きくなると一定となる。

平板の支持条件のフラッタ流速および振動数への影響を調べるために、図 3.2.13(a), (b)にそれぞれ平板の前縁をワイヤで弾性支持した場合、ピン支持した場合、固定支持した場合の無次元フラッタ流速と振動数への影響を示す。ワイヤ支持の場合は等価ねじり剛性 $k_t^* = 0.125$ (ワイヤ長さ: $L_w = 360$ mm, 材質: SUS304) とした。

図 3.2.13 より、固定支持の場合にフラッタ流速と振動数（図の青の破線）が最も大きくなる。また、平板の前縁をピン支持した場合（ねじり剛性 0）は、固定支持の場合（ねじり剛性 ∞ ）と比べてフラッタ流速はあまり変化しない（約 5%低下）。一方、図 3.2.13(b)よりフラッタ振動数は大きく（約 40%）低下する。このことから、ねじり剛性のフラッタ流速への影響は小さいがフラッタ振動数に及ぼす影響は大きく、ねじり剛性が大きくなるとフラッタ振動数は増加する。平板の前縁をワイヤで支持した場合、等価曲げ剛性が大きくなると、前縁をピン支持した場合のフラッタ流速（図の赤の一点鎖線）に一致する。また、等価曲げ剛性が小さい場合は、十分に等価曲げ剛性が大きい場合と比べフラッタ流速は大きく（半分以下に）低下する。

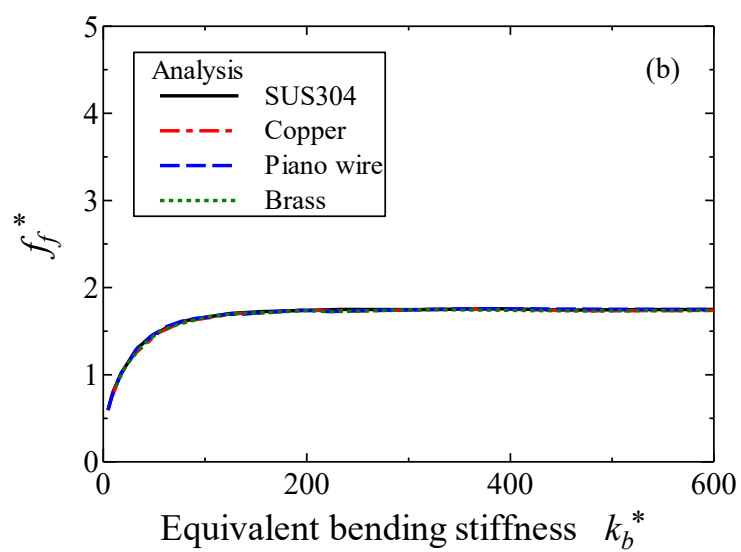
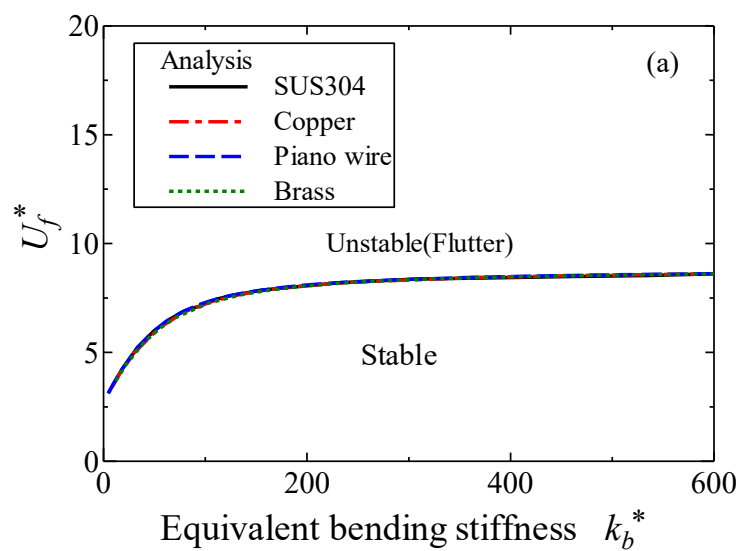
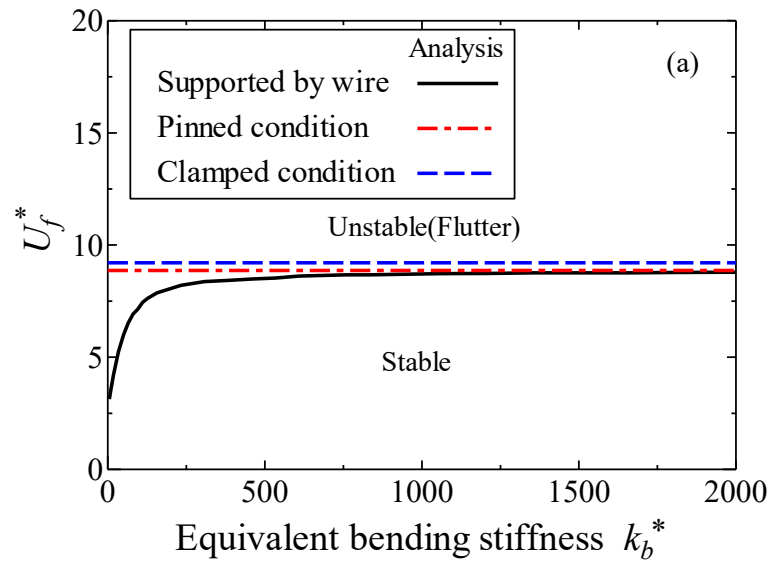
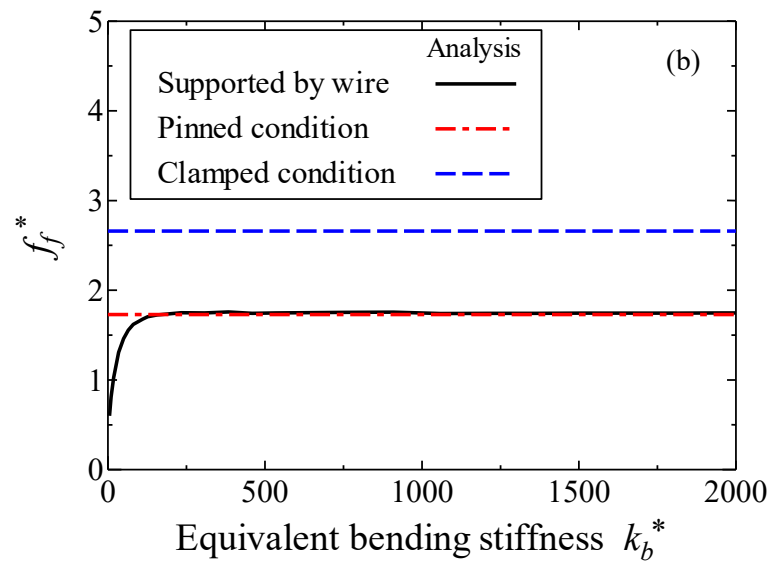


図 3.2.12: 無次元等価曲げ剛性 k_b^* に対する無次元フラッタ流速 U_f^* および振動数 f_f^* の変化 (解析結果)



L_w^*



L_w^*

図 3.2.13: 無次元等価曲げ剛性 k_b^* に対する無次元フラッタ流速 U_f^* および振動数 f_f^* の解析結果 (支持条件による比較)

3.2.8 解析結果と実験結果の比較

解析モデルの妥当性を検証するために、図 3.2.14 に図 3.2.12 において示した解析結果を実験結果と比較した結果を示す。図 3.2.14(a)はフラッタ流速に関する結果、図 3.2.14(b)はフラッタ振動数に関する結果を示している。実験においてもステンレス、銅、ピアノ線、真鍮の4種類のワイヤを用いた。これらの結果は無次元等価ねじり剛性が一定 ($k_t^* = 0.125$) の場合の結果である。

実験結果も解析結果と同様にワイヤの材質によらず一本の曲線となる。図 3.2.14(a)より、フラッタ流速は実験結果と概ね良く一致している。ここで、等価曲げ剛性が小さい領域においては解析結果と実験結果の間に若干の差異が生じる。実験では重力によりワイヤが流れ方向に少したわんだ状態となるが、解析においてはこの重力によるワイヤのたわみの影響は考慮されていない。このため、等価曲げ剛性が小さい領域において解析結果と実験結果の間に差異が生じたと考えられる。また図 3.2.14(b)より、フラッタ振動数に関しても、大振幅に伴う非線形性が振動数に影響を及ぼす可能性があるものの、解析結果に概ね近い値となっている。

図 3.2.15 に解析で得られたフラッタモードとハイスピードカメラで撮影したモードを比較した結果を示す。図 3.2.15(a)は等価曲げ剛性が比較的小さい場合 ($k_b^* = 33.6$)、図 3.2.15 (b)は等価曲げ剛性が比較的小さい場合 ($k_b^* = 910$) の結果である。解析は微小振動を仮定した線形解析であるためフラッタモードの比較は定性的なものであるが、フラッタモードは解析と実験で良く一致している。等価曲げ剛性が大きい場合 ($k_b^* = 910$)、支持部の変位はあまり見られないが、等価曲げ剛性が小さくなると ($k_b^* = 33.6$) 支持部が大きく変位するモードに変化する。

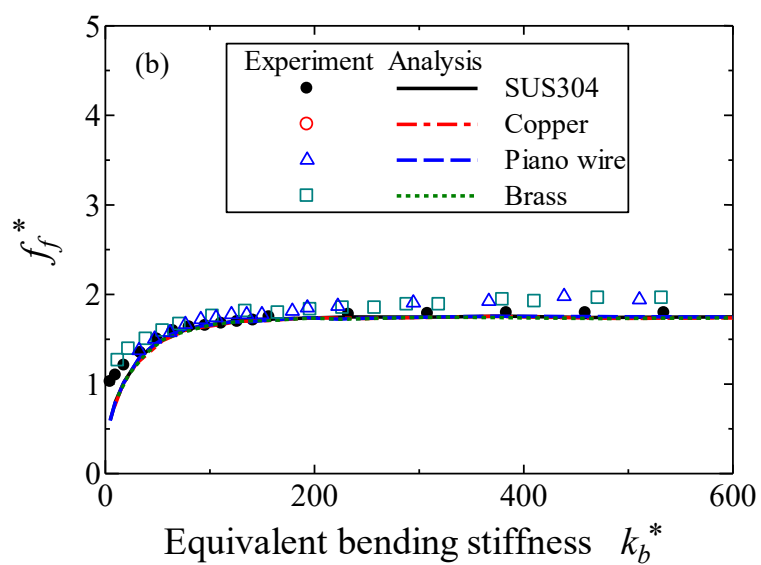
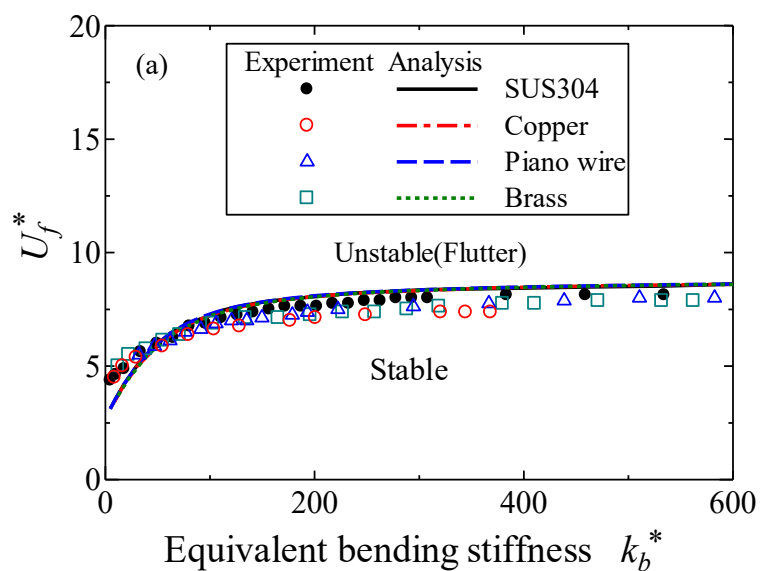


図 3.2.14: 無次元等価曲げ剛性 k_b^* に対する無次元フラッタ流速 U_f^* の変化 (解析結果と実験結果の比較)

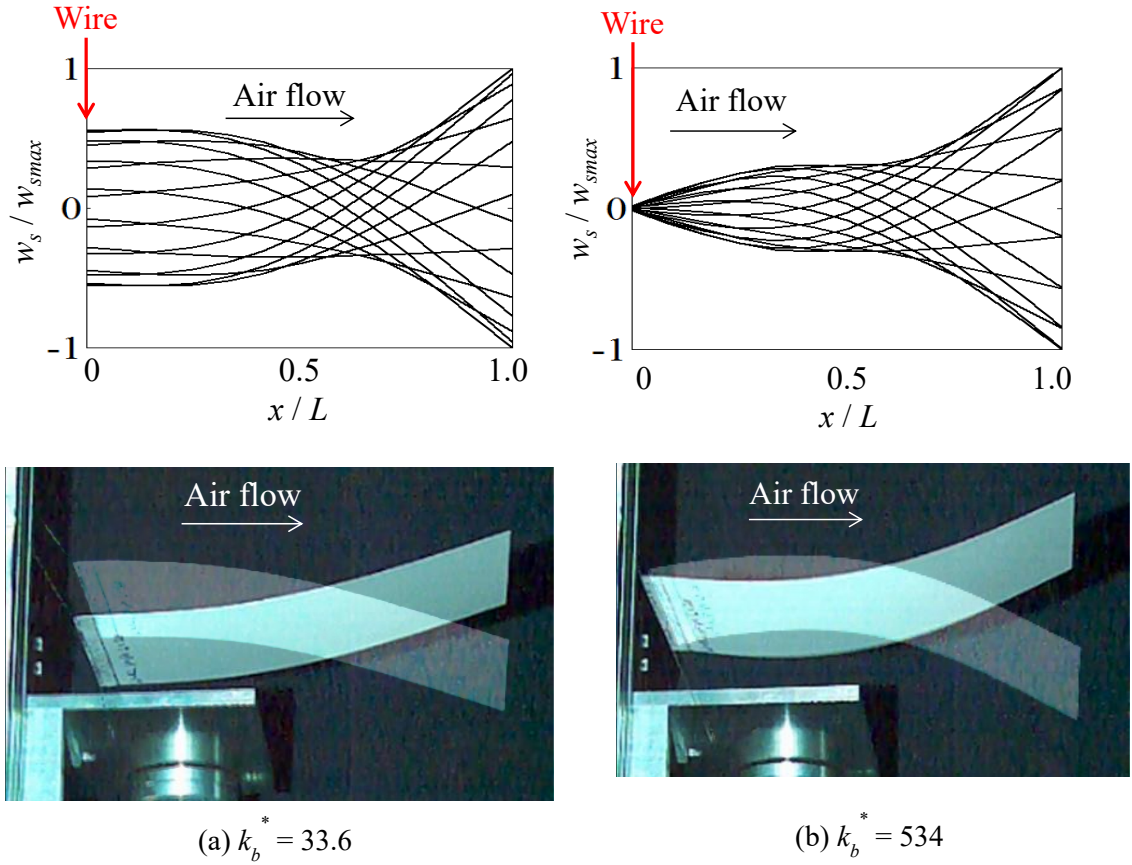


図3.2.15: 解析および実験で得られたフラッタモードの比較: (a) $k_b^* = 33.6$, (b) $k_b^* = 534$

3.2.9 平板の支持条件が流体力仕事分布に及ぼす影響

平板の支持条件が不安定化機構に及ぼす影響を調べるために、各支持条件（ワイヤによる弾性支持，ピン支持，固定支持）における平板表面上の流体力による仕事分布を求める．流体力仕事 $E_{local}^{(k)}$ は第 3.1 節の式(3.1.18)を用いて中立安定点（固有値の実部が零となる点）において計算した．

さらに、各固有振動モードの流体力仕事への寄与を調べるために、式(3.1.18)にモード近似を適用すると、各モードの仕事 E_{mi} が下式のように得られる．

$$E_f = \oint \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Phi}^T \left(\frac{1}{2} \rho_f U^2 b \mathbf{A}_e \right) \mathbf{\Phi} \mathbf{q} dt = \sum_{i=1}^{N_m} E_{mi} \quad (3.2.16)$$

ここで、 i, N_m はモード次数とモード近似の打切次数である．

図 3.2.16 に各支持条件（ワイヤ支持，ピン支持，固定支持）におけるフラッタモード，平板表面上の局所的な流体力による仕事の分布 $E_{local}^{(k)}$ （エネルギー収支），各固有モードの寄与率

E_{mi}^* および対応する固有振動モードを示す．ここで，各固有振動モードの寄与率は総和が1となるように正規化を行い，正規化したことを示すために上付添字*を付けて E_{mi}^* と表記している．フラッタモードはエネルギーが平板上のどの領域で流入または散逸しているか示すために，3次元で導出したモードの幅方向中央の位置におけるモードを2次元的に表示している．ここで，ワイヤ支持の結果は，等価曲げ剛性が小さい場合($k_b^* = 33.6$)と，等価曲げ剛性が十分に大きい場合($k_b^* = 910$)の結果を示す．

図 3.2.16 の上から二段目に示した平板表面上の流体力仕事分布より，いずれの支持条件においても平板の中流域においてエネルギーが流入しており（図の赤色の領域），下流端付近でエネルギーが散逸している（図の青色の領域）．また，等価曲げ剛性が小さく支持部が大きく振動する場合，エネルギー流入領域が上流端側に拡大する．また，平板の下流端付近に加え，上流端付近にもエネルギーの散逸領域が存在する．

ここで，流体力仕事への各固有振動モードの寄与率に着目すると，いずれの支持条件においても2つのモードの寄与が支配的である．固定支持の場合は，低次の2つの曲げモードの寄与が支配的となっている．また，ワイヤで支持の場合とピン支持の場合は，平板がほとんど弾性変形せずに回転するモードと，平板の曲げが支配的なモードの寄与が支配的である．

このことから，支持条件によって寄与する固有振動モードは異なるにも関わらず，いずれの支持条件においても平板の中流域においてエネルギーが流入しており，下流端付近ではエネルギーが散逸している．つまり，平板の支持条件によらず平板の中流領域におけるエネルギーの流入がフラッタの発生に寄与している．

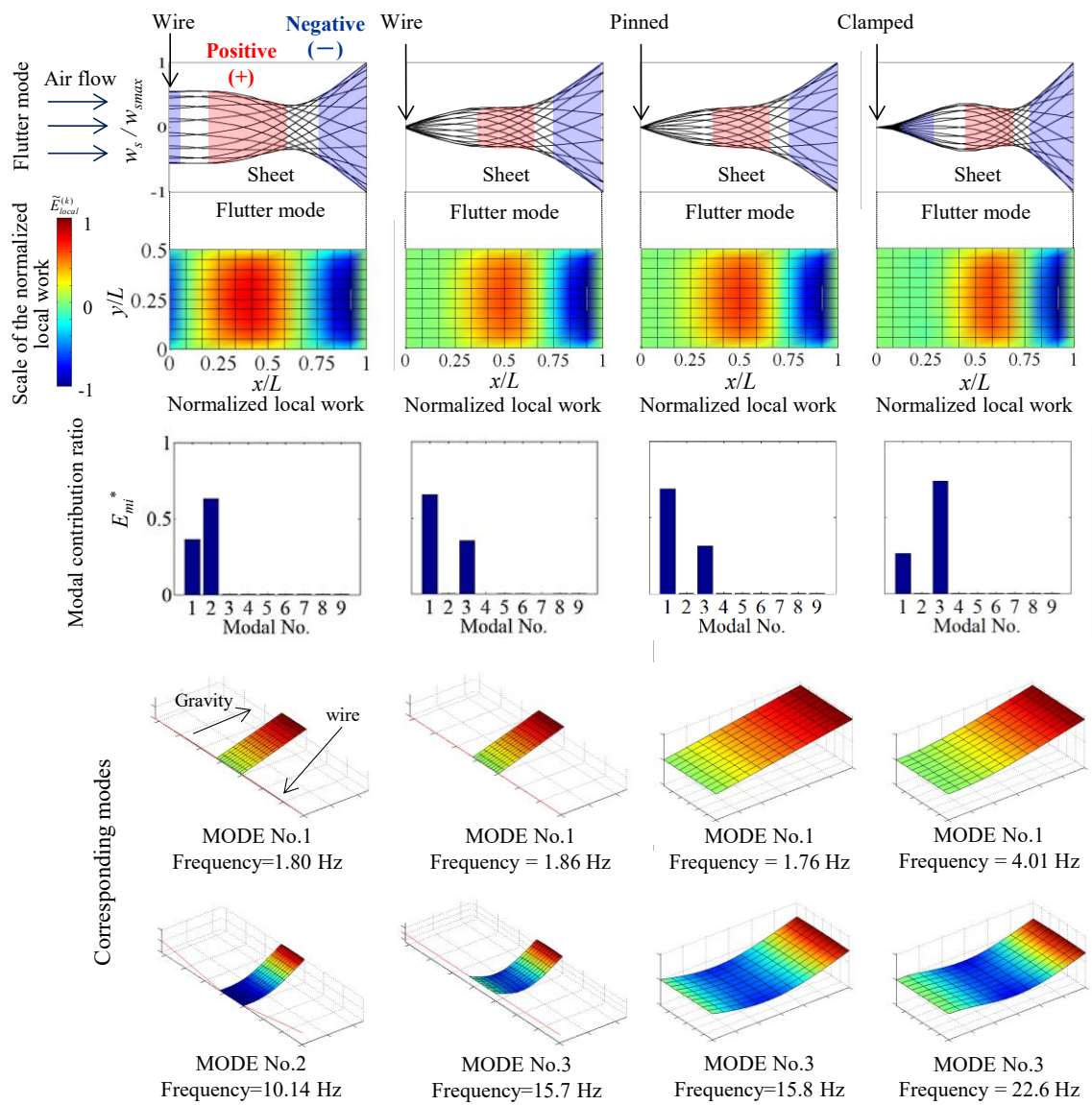


図3.2.16: 各支持条件における流体力による仕事分布

3.3 まとめ

第3章では平板の支持条件の影響に着目し，両側端を支持され上流端が自由な場合および上流端が弾性支持された場合を対象にフラッタ特性を調べた．さらに，支持条件によって流体力による仕事分布がどのように変化するかを明らかにした．本章で得られた主な結果を以下に示す．

- (1) 平板の上流端が固定されていない場合は，上流端の運動が支配的になるため，固定支持された場合と比べて流体力仕事の分布が大きく変化する．上流端が弾性支持された場合は，支持部の等価曲げ剛性が小さく上流端がある程度動く状態では流体力仕事が正の領域が平板の中流領域から上流端付近にかけて広く分布する．上流端が自由になると上流端付近の領域で流体力仕事が正となる．また，支持条件によらず平板の下流端付近では流体力による仕事が負となっており，下流端付近に作用する流体力はフラッタの発生に寄与していない．
- (2) 弾性支持の場合，等価曲げ剛性が大きくなり上流端が変位しなくなるとピン支持の場合のフラッタ流速および振動数に一致する．また，等価曲げ剛性が小さくなるとフラッタ流速は大きく低下する．
- (3) ピン支持の場合（ねじり剛性 0）は，固定支持（ねじり剛性 ∞ ）と比べて少しフラッタ流速が低下するが，その影響は小さい．一方，フラッタ振動数は大きく低下する．つまり，ねじり剛性のフラッタ流速への影響は小さいが，フラッタ振動数に及ぼす影響は大きい．

第 4 章

非線形解析およびリミットサイクル維持機構の考察

第 3 章までは，平板の振幅が微小であると仮定した線形安定性解析によりフラッタ流速や不安定化機構を調べた．しかしながら，フラッタ振幅や振動数には構造系および流体力の非線形性が大きく影響するため，前章までに用いた線形解析モデルを適用することができない．

このため，本章では非線形解析モデルを構築し時間領域で非線形解析を行い，フラッタ発生時の振幅や振動数を調べる．さらに，既往の研究では議論されていないリミットサイクル状態における平板表面上の流体力による仕事分布を求めることで，リミットサイクルの維持機構を考察する．また，CFD を用いた流体構造連成解析を行い，構築した非線形解析モデルおよび実験結果と比較する．

4.1 解析モデル

図 4.1 に解析モデルを示す．平板は上流端が固定支持されており，一様な流体流れを受けている．また，その他の端部は自由である．既往の実験的研究で平板のフラッタモードは 2 次元的事であることが示されているため^[6, 10, 30]，平板は片持ち梁としてモデル化する．平板のコード，スパン，厚さ，密度をそれぞれ L, b, h, ρ_s と表す．ここで， c は平板の変形に沿った曲線座標系を表している．

また，4.3 節で詳述するが，Vortex – lattice 法（以下 VLM と呼ぶ）により平板表面上に作用する流体力を計算するために， N 個の四角形要素で平板を分割する． x 方向の分割数を n_x ， y 方向の分割数を n_y とする．平板の表面には揚力 f_L および抗力 f_D が作用している．流体は非圧縮，非粘性とし，密度を ρ_f とする．

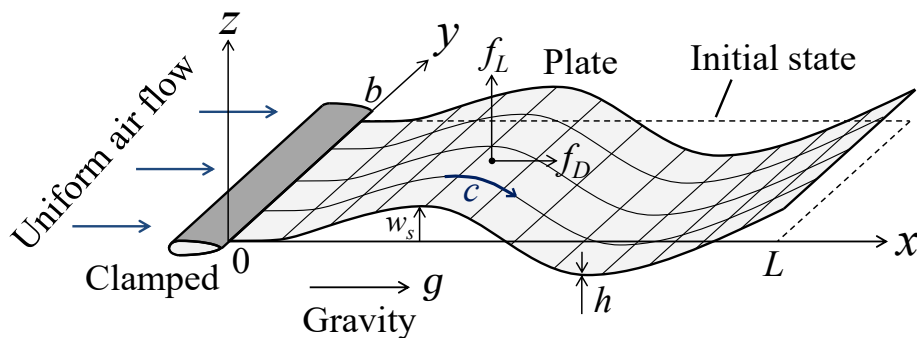


図 4.1: 非線形フラッタ解析における解析モデル

4.2 非線形運動方程式

フラッタ発生時には平板は大変形を呈する．このため，大変形の影響を考慮するために平板の変位，または変位の空間微分に関する 3 次の非線形項まで考慮した非線形梁理論^[31, 54]を用いる．平板の軸方向の伸びがないと仮定し，Hamilton の原理に基づき非線形運動方程式が式(4.1)のように得られる^[31, 54]．また，面外方向変位 w_s と面内方向変位 h_x の関係は式(4.2)で表される．非線形運動方程式の導出過程の詳細は付録 E を参照のこと．

$$\begin{aligned}
 & \rho_s h \ddot{w}_s + \frac{\partial w_s}{\partial c} \int_0^c \rho_s h \left\{ \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right)^2 + \frac{\partial w_s}{\partial c} \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial c} \right\} dc - \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \int_c^L \int_0^c \rho_s h \left\{ \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right)^2 + \frac{\partial w_s}{\partial c} \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial c} \right\} dc dc \\
 & - \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \rho_s h g + \rho_s h g \right\} (L-c) + \rho_s h g \frac{\partial w_s}{\partial c} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right) \\
 & + D \left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \frac{\partial^4 w_s}{\partial c^4} \left(1 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right) + 4 \frac{\partial w_s}{\partial c} \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \frac{\partial^3 w_s}{\partial c^3} + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right)^3 \right\} \\
 & = f_L - \frac{\partial w_s}{\partial c} f_D + \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \int_c^L f_D dc \\
 & - \left(\rho_f U^2 C_f \right) \frac{\partial w_s}{\partial c} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right\} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \left(\rho_f U^2 C_f \right) + \rho_f U^2 C_f \right\} (L-c)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$h_x = -\frac{1}{2} \int_0^c \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 dc \tag{4.2}$$

式(4.1)の左辺は構造系の慣性項，剛性項，減衰項である．構造減衰は Kelvin – Voigt 型の減衰モデルを導入した． α は減衰係数である． D は曲げ剛性であり， $D = Eh^3 / \{12(1-\nu^2)\}$ で表される． E, ν はそれぞれヤング率およびポアソン比である．加えて，軸方向に重力を導入する．

f_L, f_D はそれぞれ非粘性流体力であり，4.3 節で後述する VLM によって求める．ここで，VLM はポテンシャル流れに基づく解析手法であるため，流体の粘性の影響が考慮されていない．このため，流体の粘性の影響を平板表面に作用する流体摩擦力（式(4.1)の右辺第 4 項）として近似的に考慮する^[35]． C_f は流体摩擦係数を表している．第 2 章では微小振動を仮定し安定性を議論したため線形項のみを考慮したが，本章では非線形項まで考慮する．

4.3 非線形渦格子法を用いた流体力の計算

フラッタ発生時の平板の振幅を計算するためには、平板に作用する流体力の非線形性を考慮する必要がある。ここで、前章までに用いた Doublet-point 法^[56, 57]は線形理論であるため、フラッタ発生時の平板の振幅の計算には適用することができない。このため、式(4.1)の右辺に示した平板表面に作用する非粘性流体力 f_L, f_D は、流体力の非線形性を考慮することができる Vortex-lattice 法 (VLM)^[55]を用いて計算する。図 4.2 に VLM の解析モデルを示す。平板は N 個の渦輪要素（束縛渦）に分割されており、それぞれの渦輪要素は 4 つの渦管から構成されている。平板上の渦輪要素は図 4.2 において赤色で示している。 j 番目渦輪要素を構成する 4 つの渦管は全て同じ循環強さ Γ_j を持つとする。また、平板の後縁からは時間ステップごとに渦輪要素を後流に放出する。なお、図 4.2 中では後流中に放出された渦輪要素を青色で示している。ここでは平板の側端からの渦輪要素の放出は考慮しない。ここで、後流に放出された全ての渦輪要素の影響を考慮して計算を行った場合、計算負荷が著しく大きくなる。既往の 2 次元離散渦法を用いた非線形解析において、平板からある程度離れた位置における渦要素がフラッタ発生時の平板の振幅や振動数に及ぼす影響は小さいことが示されている^[31]。そこで、計算負荷の低減のために、後流渦要素のうち x 座標が図 4.2 中に示す L_v を超えた要素に関しては消去する。

図 4.3 に平板表面上の渦輪要素の配置を示す。平板表面上の渦輪要素は束縛渦を表している。渦輪要素の前縁を各要素の上流端から 1/4 に配置する。また、各要素の上流端から 3/4 度かつ幅方向の中の位置を誘起速度のコロケーション点とする。この配置を用いることで、Kutta の条件が近似的に満たされる^[55]。

ここで、電磁気学における電流密度と磁場の関係と同様に、渦管の循環強さと誘起速度の間には Biot-Savart 則が成り立つ^[63]。このため、平板表面上の i 番目の要素のコロケーション点 (x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}) に平板上の j 番目の渦輪要素（束縛渦）の渦管 1 によって誘起される流速 $\mathbf{u}_{ij1} = (u_{ij1}, v_{ij1}, w_{ij1})$ は、Biot – Savart 則に基づき下式のように表される。

$$\mathbf{u}_{ij1} = \left\{ \frac{\Gamma_j}{4\pi |\mathbf{r}_{j1} \times \mathbf{r}_{j2}|^2} \left(\frac{\mathbf{r}_{j0} \cdot \mathbf{r}_{j1}}{|\mathbf{r}_{j1}|} - \frac{\mathbf{r}_{j0} \cdot \mathbf{r}_{j2}}{|\mathbf{r}_{j2}|} \right) \right\} \cdot (\mathbf{r}_{j1} \times \mathbf{r}_{j2}) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{j0} &= (x_{j2} - x_{j1}, y_{j2} - y_{j1}, z_{j2} - z_{j1}), \quad \mathbf{r}_{j1} = (x_{ci} - x_{j1}, y_{ci} - y_{j1}, z_{ci} - z_{j1}), \\ \mathbf{r}_{j2} &= (x_{ci} - x_{j2}, y_{ci} - y_{j2}, z_{ci} - z_{j2}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

式(4.4)中の、 (x_{j1}, y_{j1}, z_{j1}) , (x_{j2}, y_{j2}, z_{j2}) は渦管 1 の端部の座標である。また渦管 2 ~ 4 によって誘起される流速 $\mathbf{u}_{ij2}$, $\mathbf{u}_{ij3}$, $\mathbf{u}_{ij4}$ も渦管 1 の場合と同様に、Biot – Savart 則に基づき計算される。渦管

1～4による誘起速度の和をとることで， j 番目の渦輪要素による i 番目の要素の誘起速度は下式で表される．

$$\mathbf{u}_{ij} = \sum_j^N (\mathbf{u}_{ij1} + \mathbf{u}_{ij2} + \mathbf{u}_{ij3} + \mathbf{u}_{ij4}) \quad (4.5)$$

また，後流に放出された渦輪要素によって平板上に誘起される速度についても考慮する．後流に放出された k 番目の渦輪要素の渦管 ℓ によって平板上の i 番目の要素に誘起される流速に関しても，Biot－Savart 則に基づき以下のように表される．ここで，後流に放出された渦輪要素による誘起速度に関しては，下付添字 w を付けて表記している．

$$\mathbf{u}_{i\ell w} = \sum_j^{N_w} (\mathbf{u}_{ik1w} + \mathbf{u}_{ik2w} + \mathbf{u}_{ik3w} + \mathbf{u}_{ik4w}) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}_{ik\ell w} = \left\{ \frac{\Gamma_{k\ell w}}{4\pi |\mathbf{r}_{k1\ell w} \times \mathbf{r}_{k2\ell w}|^2} \left(\frac{\mathbf{r}_{k0\ell w} \cdot \mathbf{r}_{k1\ell w}}{|\mathbf{r}_{k1\ell w}|} - \frac{\mathbf{r}_{k0\ell w} \cdot \mathbf{r}_{k2\ell w}}{|\mathbf{r}_{k2\ell w}|} \right) \right\} \cdot (\mathbf{r}_{k1\ell w} \times \mathbf{r}_{k2\ell w}) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{k0\ell w} &= (x_{k2\ell w} - x_{k1\ell w}, y_{k2\ell w} - y_{k1\ell w}, z_{k2\ell w} - z_{k1\ell w}), \quad \mathbf{r}_{k1} = (x_{ci} - x_{k1\ell w}, y_{ci} - y_{k1\ell w}, z_{ci} - z_{k1\ell w}), \\ \mathbf{r}_{k2} &= (x_{ci} - x_{k2\ell w}, y_{ci} - y_{k2\ell w}, z_{ci} - z_{k2\ell w}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

式(4.8)中の $(x_{k1\ell w}, y_{k1\ell w}, z_{k1\ell w})$ および $(x_{k2\ell w}, y_{k2\ell w}, z_{k2\ell w})$ は後流に放出された渦輪要素の各渦管の端部座標である．

ここで，流体と平板との間に運動学的条件，つまり平板の法線方向の振動速度と平板上の流速の法線方向成分が一致する条件を課すことで，以下の関係式が得られる．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Nj} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{RHS}_1 \\ \text{RHS}_2 \\ \vdots \\ \text{RHS}_i \\ \vdots \\ \text{RHS}_N \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

式(4.9)中の a_{ij} および RHS_i は下式で与えられる．

$$a_{ij} = \frac{u_{ij}}{\Gamma_j} \sin \alpha_i + \frac{w_{ij}}{\Gamma_j} \cos \alpha_i \quad (4.10)$$

$$\text{RHS}_i = (\dot{h}_{xi} - U - u_{iw}) \sin \alpha_i + (\dot{w}_{si} - w_{iw}) \cos \alpha_i \quad (4.11)$$

式(4.10)，(4.11)中の α_i は i 番目の平板要素が x 軸となす角度である．式(4.9)より，平板表面上の渦輪要素の循環強さ Γ_j が求まる．

流体流れにより生じる平板の i 番目の要素の上下面の圧力差 Δp_i は、非定常ベルヌーイの式を用いて式(4.12)で表される．最終的に、式(4.1)の右辺に示した非粘性流体力 f_L, f_D は式(4.13)を用いて求められる．

$$\Delta p_i = \rho_f \left[\left\{ (U + u_w - \dot{h}_x) \cos \alpha_i + (\dot{w}_s - w_w) \sin \alpha_i \right\} \frac{\Gamma_i - \Gamma_{i-1}}{L_e} + v_w \frac{\Gamma_i - \Gamma_{i-N_x}}{b_e} + \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_i \right] \quad (4.12)$$

$$f_{Li} = \Delta p_i \cos \alpha_i, \quad f_{Di} = \Delta p_i \sin \alpha_i \quad (4.13)$$

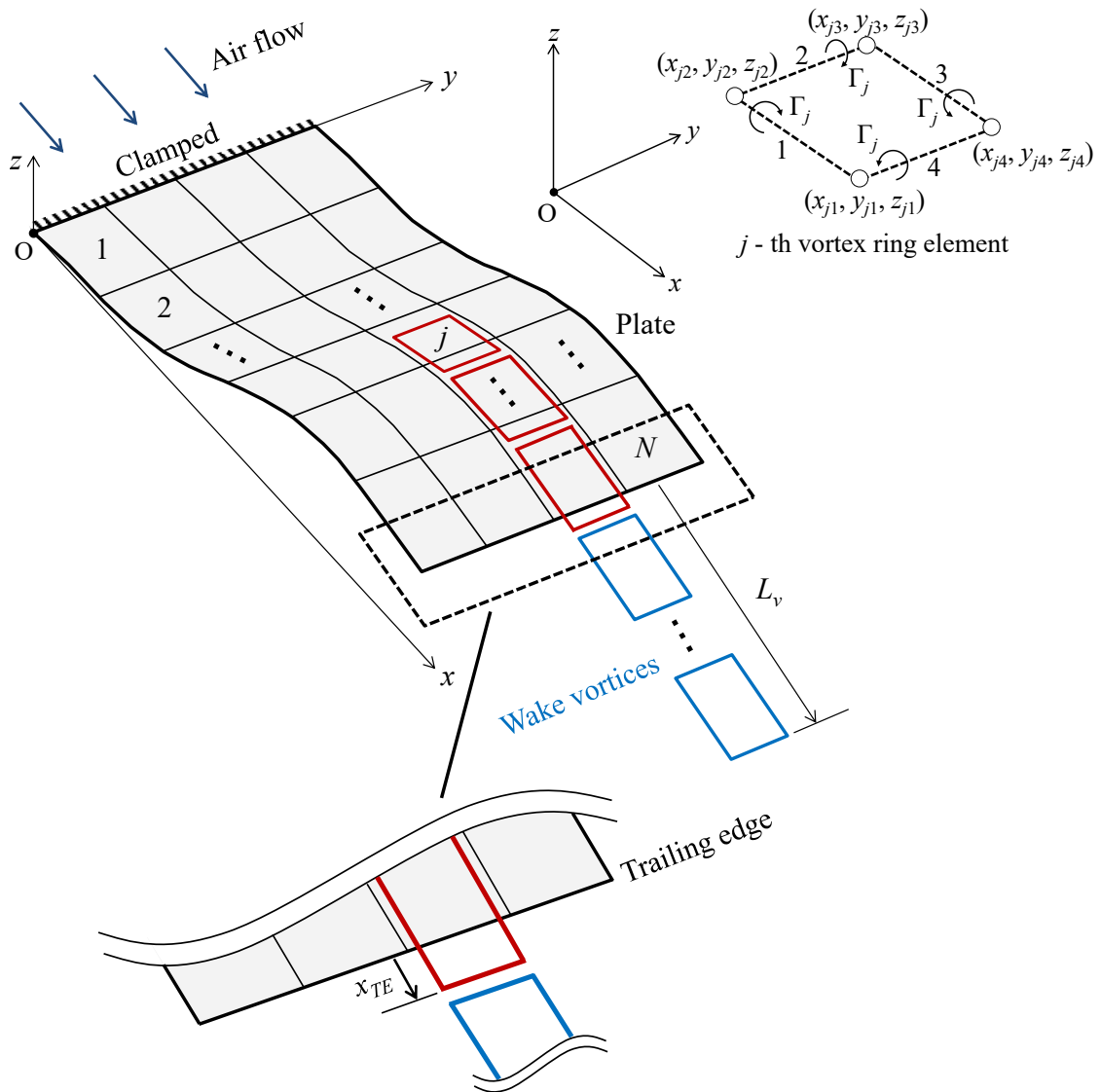


図 4.2: 渦格子法の解析モデル

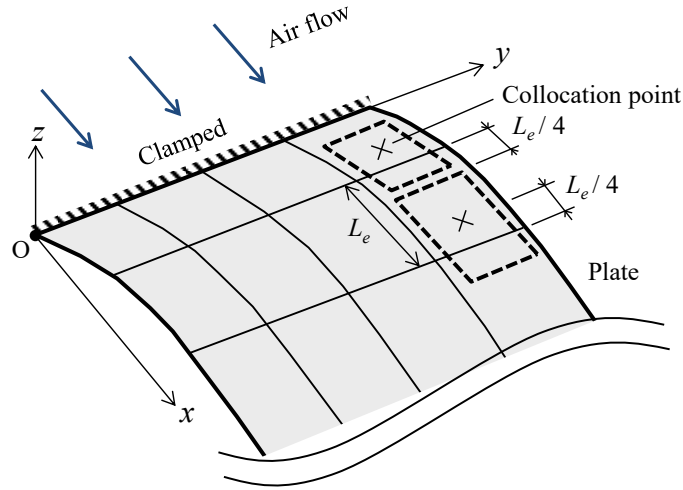


図 4.3: 平板表面上の渦輪要素の配置

4.4 後流に放出された渦輪要素の移流

本節では，後流に放出された渦輪要素の移流法について述べる．平板は初期状態（時刻 $t = 0$ ）ではたわんだ状態で静止している．計算が始まると平板が動き始め，平板後縁から渦輪要素が放出され下流側へ移動していく．ここで，一旦放出された渦輪要素の循環強さは変化しないとする．図 4.4 に渦輪要素の移流の模式図を示す．渦輪要素の各節点に他の放出渦輪要素と平板表面上の渦輪要素によって誘起される速度 $\mathbf{u}_s$ を計算し，移流を行う．誘起速度は Biot – Savart 則に基づいて求める．渦管 1 に着目すると，初期状態では $P: \mathbf{X}_P(x_P^{t_0}, y_P^{t_0}, z_P^{t_0})$, $Q: \mathbf{X}_Q(x_Q^{t_0}, y_Q^{t_0}, z_Q^{t_0})$ に位置していた渦管が Δt 秒後には $P': (\mathbf{x}_Q + \mathbf{u}_{sQ} \cdot \Delta t)$, $Q': (\mathbf{x}_P + \mathbf{u}_{sP} \cdot \Delta t)$ に移動する．

ここで，後流に放出された渦輪要素同士の距離が近づきすぎた場合，極めて大きな誘起速度が生じ，発散の原因となる．そこで，各渦管に渦コアを設け，渦輪要素間の距離が渦コア半径 ε 以下となる場合は下式のように誘起速度を置き換える．

$$\mathbf{u}_s = \frac{\Gamma_s}{4\pi} \int_P^Q \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{\varepsilon^3} \quad (4.14)$$

式(4.14)中の P, Q は渦管の端部の位置を示しており， $d\mathbf{l}$ は線要素を表している．

渦管のコア半径は渦輪要素の伸縮と粘性拡散の影響により変化する．本研究ではコアスプレディング法^[64, 65]を用いてこれらの効果を考慮する．コアスプレディング法による渦コア半径の計算の流れを以下に示す．

1. 初期状態における渦コア半径 ε_0 を設定する．
2. 渦輪要素の 4 つの節点に誘起される速度を計算し，得られた誘起速度を用いて渦輪要素の

移流を行う．このとき，渦管 1 (PQ および P'Q') の長さは l_0 から $l_{\Delta t}$ に変化する．

3. 渦輪要素の伸縮によるコア半径の変化を，変化前後で体積が一定となるように下式を用いて求める．渦管 1 (PQ および P'Q') に着目すると，下式の関係が成り立つ．

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 \left(\frac{l_0}{l_{\Delta t}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

式(4.15)中の l_0 , $l_{\Delta t}$ はそれぞれ伸縮前後の渦管長さ， ε_0 , $\varepsilon_{\Delta t}$ は伸縮前後の渦コア半径である．

4. 時間ステップ Δt 間の粘性拡散による渦コア半径の変化 $\Delta\varepsilon_v$ は，以下のように得られる．

$$\Delta\varepsilon_v = \frac{C_v^2 \nu_f}{2\varepsilon_0} \Delta t \quad (4.16)$$

式(4.16)中の ν_f は動粘度であり， C_v は定数である．ここでは C_v の値に無限長の直線渦糸に関する Navier – Stokes 方程式の厳密解から得られる定数である 2.242 を用いた^[64, 65]．

5. 最終的に渦コア半径は，伸縮および粘性拡散による変化量を足し合わせることで下式のように求められる．

$$\varepsilon_{\Delta t} = \varepsilon_s + \Delta\varepsilon_v \quad (4.17)$$

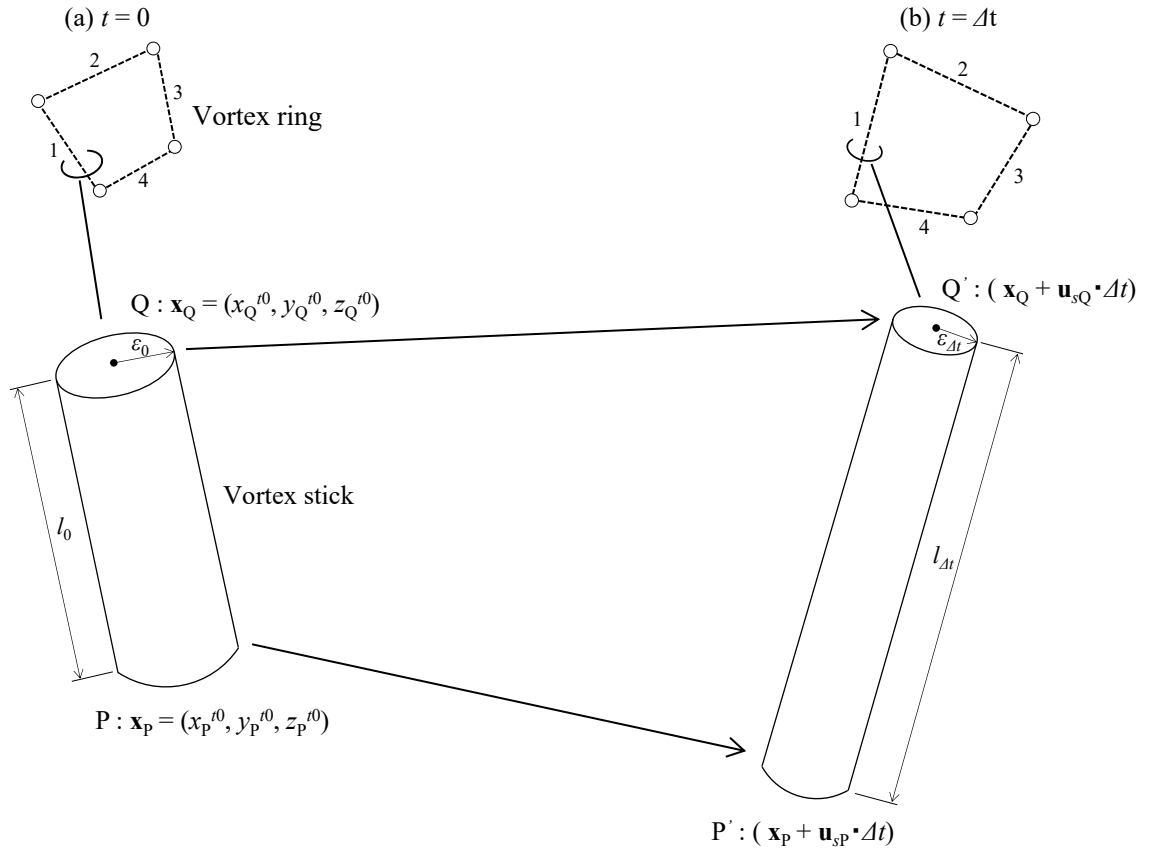


図 4.4: 渦輪要素の移流の模式図

4.5 運動方程式のモード近似

式(4.1)に対して Galerkin 法を適用することで、モード近似を行う．平板の面外方向変位 w_s を下式のように空間と時間の関数に変数分離する．

$$w_s(c, t) = \sum_{m=1}^{N_m} \phi_m(c) q_m(t) \quad (4.18)$$

$$\phi_m(c) = \left(\cosh \frac{\lambda_m c}{L} - \cos \frac{\lambda_m c}{L} \right) - \sigma_m \left(\sinh \frac{\lambda_m c}{L} - \sin \frac{\lambda_m c}{L} \right), \quad \sigma_m = \frac{\cosh \lambda_m + \cos \lambda_m}{\sinh \lambda_m + \sin \lambda_m} \quad (4.19)$$

式(4.18)中の ϕ_m は基底関数、 q_m はモード座標、 N_m は基底関数の打切次数である．ここでは、基底関数として式(4.19)に示す片持ち梁のモード関数を用いた．式(4.18)を式(4.1)に代入し両辺にモード関数 $\phi_\ell(x)$ を乗じ、さらにコード方向 ($c = 0 \sim L$) およびスパン方向 ($y = 0 \sim b$) に積分すると、下式のようにモード座標 q に関する非線形方程式が得られる．

$$\begin{aligned} & M_L b \ddot{q}_\ell + \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} M_{NL} b (q_n q_o \ddot{q}_p + q_n \dot{q}_o \dot{q}_p) \\ & + K_L b q_\ell + \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} (K_{NL} b q_n q_o q_p) + \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} \alpha K_{NL} b (\dot{q}_n q_o q_p + q_n \dot{q}_o q_p + q_n q_o \dot{q}_p) \\ & + \sum_{m=1}^{N_m} G_{L1} b q_\ell - \sum_{m=1}^{N_m} G_{L2} b q_\ell + \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} G_{NL1} b q_n q_o q_p - \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} G_{NL2} b q_n q_o q_p \\ & = f_\ell - \sum_{m=1}^{N_m} F_{fL1} b q_\ell + \sum_{m=1}^{N_m} F_{fL2} b q_\ell - \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} F_{fNL1} b q_n q_o q_p + \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} F_{fNL2} b q_n q_o q_p \end{aligned} \quad (4.20)$$

ここで、式(4.20)中の各項は式(4.21)および(4.22)で表される．式(4.22)の c_{ve} は各要素の前縁から 1/4 の位置における座標である．

$$\begin{aligned}
M_L &= \rho_s h \int_0^L \phi_l^2(c) dc, \quad K_L = D \int_0^L \phi_l(c) \frac{\partial^4 \phi_l(c)}{\partial c^4} dc, \\
K_{NL} &= D \int_0^L \phi_l(c) \left[\frac{\partial^4 \phi_n(c)}{\partial c^4} \frac{\partial \phi_o(c)}{\partial c} \frac{\partial \phi_p(c)}{\partial c} + 4 \frac{\partial \phi_n(c)}{\partial c} \frac{\partial^2 \phi_o(c)}{\partial c^2} \frac{\partial^3 \phi_p(c)}{\partial c^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \phi_n(c)}{\partial c^2} \frac{\partial^2 \phi_o(c)}{\partial c^2} \frac{\partial^2 \phi_p(c)}{\partial c^2} \right] dc, \\
M_{NL} &= \rho_s h \int_0^L \left[\phi_l(c) \left\{ \frac{\partial \phi_n(c)}{\partial c} \left(\int_0^c \frac{\partial \phi_o(c)}{\partial c} \frac{\partial \phi_p(c)}{\partial c} dc \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial^2 \phi_n(c)}{\partial c^2} \left(\int_c^L \int_0^c \frac{\partial \phi_o(c)}{\partial c} \frac{\partial \phi_p(c)}{\partial c} dc dc \right) \right\} \right] dc, \\
G_{L1} &= \rho_s h g \sum_{m=1}^{N_m} \int_0^L \phi_l(c) \frac{\partial \phi_m(c)}{\partial c} dc, \quad G_{L2} = \rho_s h g \sum_{m=1}^{N_m} \int_0^L (L-c) \phi_l(c) \frac{\partial^2 \phi_m(c)}{\partial c^2} dc, \\
G_{NL1} &= \frac{1}{2} \rho_s h g \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} \int_0^L \phi_l(c) \frac{\partial \phi_n(c)}{\partial c} \frac{\partial \phi_o(c)}{\partial c} \frac{\partial \phi_p(c)}{\partial c} dc, \\
G_{NL2} &= \frac{3}{2} \rho_s h g \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} \int_0^L (L-c) \phi_l(c) \frac{\partial \phi_n(c)}{\partial c} \frac{\partial \phi_o(c)}{\partial c} \frac{\partial^2 \phi_p(c)}{\partial c^2} dc, \\
F_{fL1} &= \rho_f U^2 C_f \sum_{m=1}^{N_m} \int_0^L \phi_l(c) \frac{\partial \phi_m(c)}{\partial c} dc, \quad F_{fL2} = \rho_f U^2 C_f \sum_{m=1}^{N_m} \int_0^L (L-c) \phi_l(c) \frac{\partial^2 \phi_m(c)}{\partial c^2} dc, \\
F_{fNL1} &= \frac{1}{2} \rho_f U^2 C_f \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} \int_0^L \phi_l(c) \frac{\partial \phi_n(c)}{\partial c} \frac{\partial \phi_o(c)}{\partial c} \frac{\partial \phi_p(c)}{\partial c} dc, \\
F_{fNL2} &= \frac{3}{2} \rho_f U^2 C_f \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} \int_0^L (L-c) \phi_l(c) \frac{\partial \phi_n(c)}{\partial c} \frac{\partial \phi_o(c)}{\partial c} \frac{\partial^2 \phi_p(c)}{\partial c^2} dc \\
f_\ell &\equiv \sum_{i=1}^N \phi_l(c_{vei}) \left(f_{Li} - \frac{\partial h_z}{\partial c} f_{Di} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial c^2} \int_c^L f_{Di} dc \right) s_{ei}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$f_\ell \equiv \sum_{i=1}^N \phi_l(c_{vei}) \left(f_{Li} - \frac{\partial h_z}{\partial c} f_{Di} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial c^2} \int_c^L f_{Di} dc \right) s_{ei} \tag{4.22}$$

4.6 数値積分スキーム

非線形方程式(4.20)は非線形慣性項を含むため状態方程式表示することができず、振動応答の時刻歴解析で広く使用される Runge Kutta 法などの数値積分法を適用することができない。このため、Houbolt 法^[66, 67]を用いてモード座標の時間微分 $\dot{q}_i^{(k+1)}$, $\ddot{q}_i^{(k+1)}$ を式(4.23)に示すように差分近似する。式(4.23)中の $\lambda_{1i}^{(k+1)}$, $\lambda_{2i}^{(k+1)}$ は前の時間ステップまでの解 $q_i^{(k-2)}$, $q_i^{(k-1)}$, $q_i^{(k)}$ を用いて決定される値である。式(4.23)を式(4.20)に代入することで、 $k+1$ 番目の時間ステップにおける ℓ 次モードのモード座標に関する非線形方程式が得られる。モード近似の次数分 ($\ell = 1 \sim N_m$) の非線形連立方程式を繰り返し計算により数値的に求解する。繰り返し計算には汎用数値計算ソフト MATLAB の fsolve 関数を用いた。

$$\begin{aligned}\dot{q}_i^{(k+1)} &= \frac{1}{\Delta t} \underbrace{\left(-\frac{1}{3}q_i^{(k-2)} + \frac{3}{2}q_i^{(k-1)} - 3q_i^{(k)} + \frac{11}{6}q_i^{(k+1)}\right)}_{\lambda_{1i}^{(k+1)}}, \\ \ddot{q}_i^{(k+1)} &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \underbrace{\left(-q_i^{(k-2)} + 4q_i^{(k-1)} - 5q_i^{(k)} + 2q_i^{(k+1)}\right)}_{\lambda_{2i}^{(k+1)}}\end{aligned}\quad (4.23)$$

4.7 流体力による仕事分布の計算

リミットサイクルの維持機構を考察するために、リミットサイクル状態における平板表面上に作用する流体力による仕事分布を求める。渦格子法により離散化された各要素に作用する流体力によるパワー（仕事率） P_{local} は下式により計算することができる。

$$P_{local} = (f_{Li} s_{ei}) \dot{w}_{si} \quad (4.24)$$

式(4.24)中の f_{Li} および $\dot{w}_{si}$ はそれぞれ i 番目の要素に作用する流体力および i 番目の要素の振動速度を表している。また s_{ei} は各要素の面積である。さらに、 P_{local} を振動1周期 τ に渡って合算することで、1周期当たりの局所的な流体力仕事は下式のように得られる。

$$W_{local} = \int_0^\tau P_{local} dt \quad (4.25)$$

式(4.25)を用いて流体力による仕事分布を求めることで、リミットサイクルの維持機構を考察する。

4.8 支配無次元数および実験パラメータ

フラッタ現象を支配する無次元数を式(4.26)に示す。第2,3章においても用いた無次元数である質量比 μ 、無次元流速 U^* 、無次元振動数 f^* 、アスペクト比 Λ に加え、本章では代表時間 $T_s = \sqrt{\rho_s h L^4 / D}$ を用いて無次元化された無次元時間 t^* を定義する。

$$\begin{aligned}\mu &= \rho_f L / \rho_s h, \quad U^* = UL \sqrt{\rho_s h / D}, \quad f^* = fL \sqrt{\rho_s h / D}, \quad \Lambda = b / L, \\ t^* &= t / \sqrt{\rho_s h L^4 / D}\end{aligned}\quad (4.26)$$

表4.1に平板の物性値と寸法、表4.2に計算パラメータを示す。平板は質量比を変化させるために、2種類のpolyethylene terephthalate（以下、PETと表記する）製の平板と1種類の紙を用いた。アスペクト比は0.5で一定とした。VLMにおける x 方向と y 方向の分割数はそれぞれ $n_x = 71$,

$n_y = 11$ とし、平板のコードで基準化したwake長さ L_v/L は $\mu = 0.35, 0.52$ の場合は2.0, $\mu = 2.0$ の場合は1.5に設定した。モード近似の打切次数は $N_m = 4$ とした。また、時間刻みは各質量比において、振動1周期が約1000分割されるように設定した。これらの値は計算結果が十分に収束した値である。渦輪要素の無次元初期コア半径は計算の安定性を考慮して、0.15 ~ 0.3の範囲内で決定した。減衰係数 α および流体摩擦係数 C_f はパラメータとして変化させることでフラッタ振幅および振動数への影響を調べた。本章では、減衰係数 α は0として計算を行った。また、流体摩擦係数には気流中で静止したPET製の平板の値を用いた^[53]。減衰係数 α および流体摩擦係数 C_f のフラッタ振幅および振動数への影響は付録Fに記載する。

また、図 4.2 において示した渦輪要素と平板の後縁の距離 x_{TE} は無次元流速 U^* と無次元時間刻み Δt^* を用いて下式のように表される。

$$x_{TE} = \lambda U^* \Delta t^* \quad (4.27)$$

λ は任意の定数である。 x_{TE} の影響は 4.11 節において示す。

表 4.1: 平板の物性値および寸法

Material	PET1	PET2	Paper
Mass ratio μ	0.35	0.52	2.0
Aspect ratio Λ	0.5		
Young's modulus [GPa]	2.49	3.2	4.03
Poisson's ratio	0.4		0.3
Density [kg/m ³]	1380		734
Chord [m]	0.12		0.16
Span [m]	0.06		0.08
Thickness [m]	0.3×10^{-3}	0.2×10^{-3}	0.13×10^{-3}

表 4.2: 計算パラメータ

Coefficient of material damping α	0
Coefficient of material damping C_f	0.01
Gravity acceleration g [m/s^2]	9.81
Fluid density ρ_f [kg/m^3]	1.2
Division number in x-direction n_x	71
Division number in x-direction n_y	11
Number of modes in Galerkin decomposition N_m	4
Normalized wake length L_v / L	1.5, 2.0
Normalized initial core radius ε_0 / L	0.15 ~ 0.3
Time step Δt [s]	5.0×10^{-5}
Dimensionless time step Δt^*	1.8×10^{-4} ($\mu = 2.0$)
	3.3×10^{-4} ($\mu = 0.52$)
	4.3×10^{-4} ($\mu = 0.35$)
Coefficient of distance between vortex element and plate λ	0.25 ~ 6.0

4.9 実験装置および測定システム

図 4.5, 4.6 にそれぞれ実験装置の概要およびテストセクションの写真を示す．実験には第 3.2 節で使用したのと同じ縦型回流式風洞を用いた．主な仕様は 3.2.4 節を参照のこと．平板は上流端を 2 枚の支持板でクランプされた状態で，テストセクションの上流側に設置されている．平板は質量比を変化させるために，2 種類の PET と紙を用いた．支持部はフラッタ発生時に変形することがないように厚さ 2 mm のステンレス製（SUS304）の板を使用し，十分に剛に設計している．また，支持部は流れを乱すことがないように翼型に加工している．

流速は，上流側に設置されたノズル断面中央の位置で熱線流速計を用いて測定した値を代表流速とした．流速を変化させながら，平板の変位をレーザ変位により測定した．平板のスペン方向の中央でかつコード方向の中央の位置における変位を測定した．なお，本章ではフラッタが発生する流速をフラッタ発生流速と表記する．また，フラッタ発生時のモードをストロボライトとハイスピードカメラを用いて可視化した．実験パラメータは 4.8 節の表 4.1, 4.2 に示したパラメータに合わせて設定した．

表 4.3 に測定条件を示す．周波数分解能は平板の卓越振動数よりも十分に細かく設定した．最小読み取り値はフラッタ発生時の平板の振幅よりも十分に小さい値である．また，測定可能範囲は，平板の振幅の最大値よりも十分に大きい値に設定した．

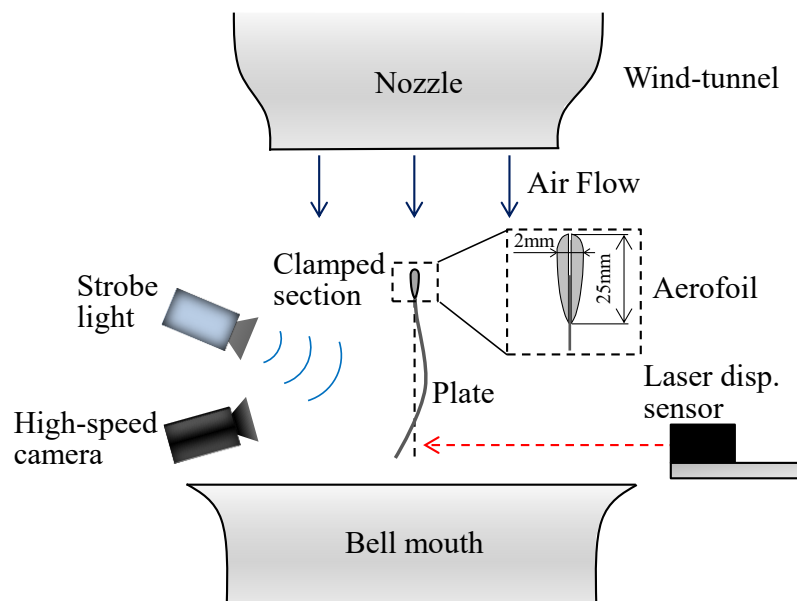


図 4.5: 実験装置の概要および測定システム

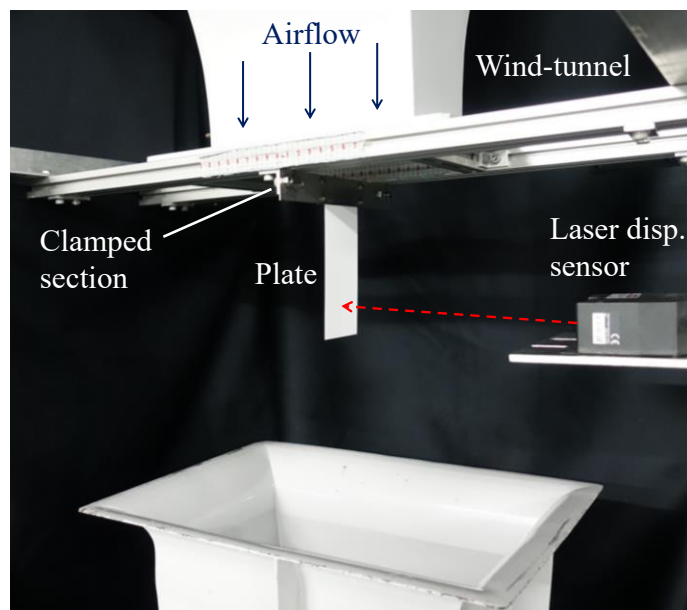


図 4.6: テストセクションの写真

表 4.3: 測定条件

Sampling frequency [Hz]	1000
Temporal Resolution [s]	0.001
Data number	10000
Data number used in FFT analysis	8192
Frequency resolution [Hz]	0.122
Minimum measurable value [mm]	0.0488
Measurable range [mm]	± 100

4.10 実験結果

図 4.7 ~ 4.9 にフラッタ発生時の時刻歴波形およびスペクトル（FFT 解析結果）を示す．図中の(a), (b)はそれぞれ時刻歴波形とスペクトルを表している．これらの結果は，平板のスパン方向の中央でかつコード方向の中央の位置で測定した．図 4.7, 4.8, 4.9 はそれぞれ質量比が 0.35, 0.52, 2.0 の場合の結果である．時刻歴波形より， $\mu = 2.0$ の場合は振幅が時間に対して若干変動するものの，フラッタ発生時の平板の振幅は時間に対してほぼ一定である．また，スペクトルに着目すると，いずれの場合も単一の振動数成分が支配的であり，高調波成分の影響は卓越振動数成分に対して小さい．

図 4.10 ~ 4.12 に流速に対する平板の振動変位の RMS 値およびフラッタ振動数（フラッタ発生時の卓越振動数）の変化を示す．図中の(a), (b)はそれぞれ振動変位の RMS 値とフラッタ振動数を表している．図 4.10, 4.11, 4.12 はそれぞれ質量比が 0.35, 0.52, 2.0 の場合の結果である．図中には流速を低流速側から徐々に上昇させた場合の結果と，フラッタが発生した状態から徐々に流速を下降させた場合の結果を示す．

図 4.10 ~ 4.12 より，流速が増加するとある流速において振動変位が急激に大きくなり，フラッタが発生する．ここで，流速を低流速側から徐々に上昇させた場合と高流速側から徐々に下降させた場合では，フラッタ振幅および振動数共にほとんど差が見られない．つまり，本パラメータにおいては流速の増減に伴うヒステリシスは発生しないことがわかる．

また，フラッタ振動数に着目すると，いずれの質量比においても流速の増加に対してフラッタ振動数は単調に増加する．

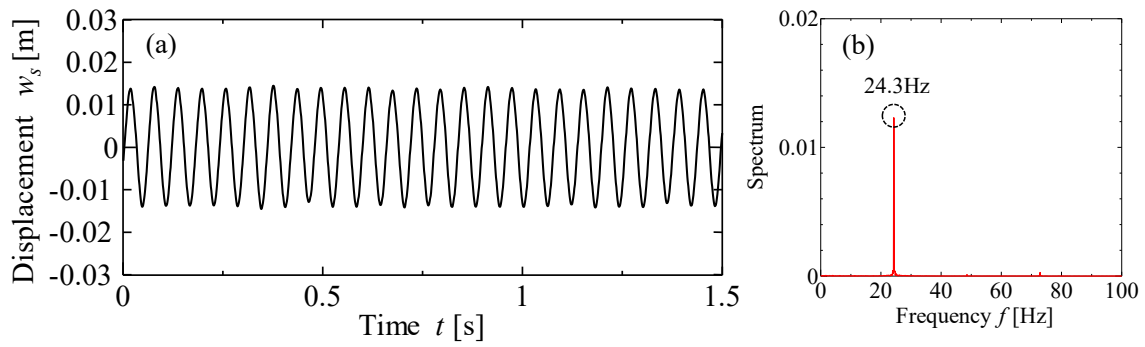


図 4.7: フラッタ発生時の(a) 時刻歴波形および(b) スペクトルの実験結果
($\mu = 0.35$, $U = 13.2$ m/s)

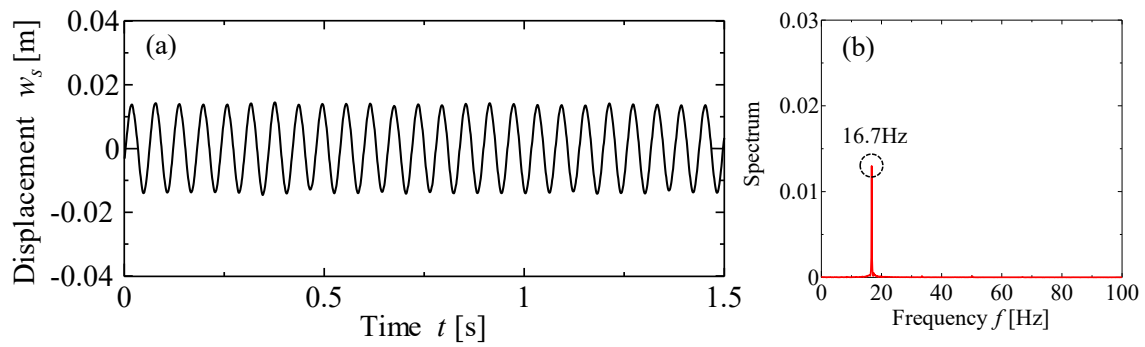


図 4.8: フラッタ発生時の(a) 時刻歴波形および(b) スペクトルの実験結果
($\mu = 0.52$, $U = 8.0$ m/s)

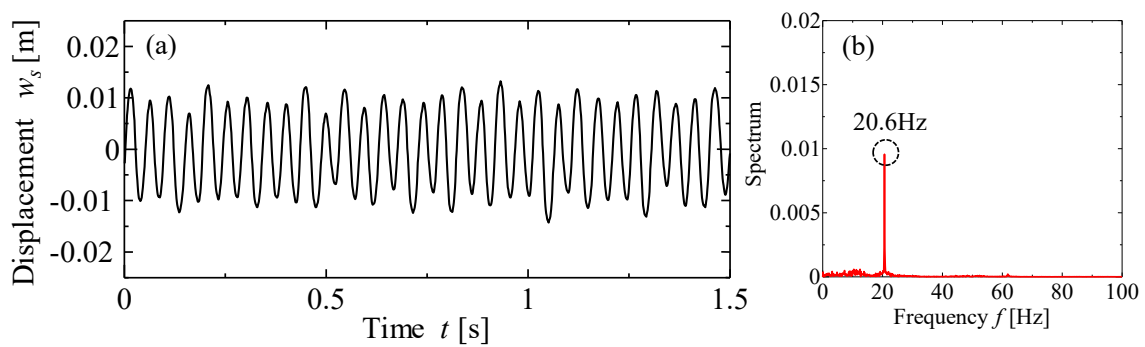


図 4.9: フラッタ発生時の(a) 時刻歴波形および(b) スペクトルの実験結果
($\mu = 2.0$, $U = 7.6$ m/s)

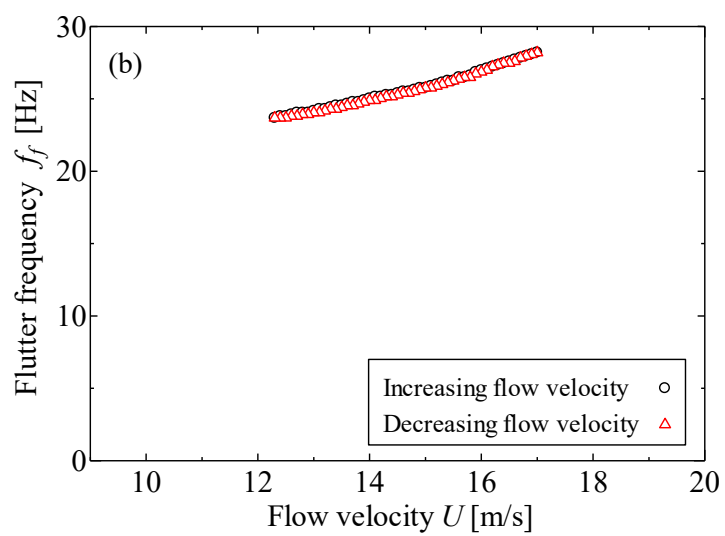
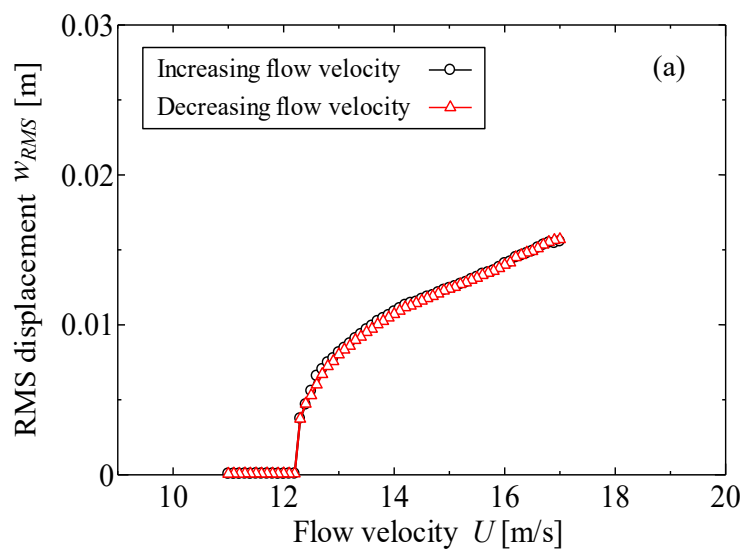


図 4.10: 流速に対する(a) 平板の振動変位の RMS 値と(b) フラッタ振動数の変化 ($\mu = 0.35$)

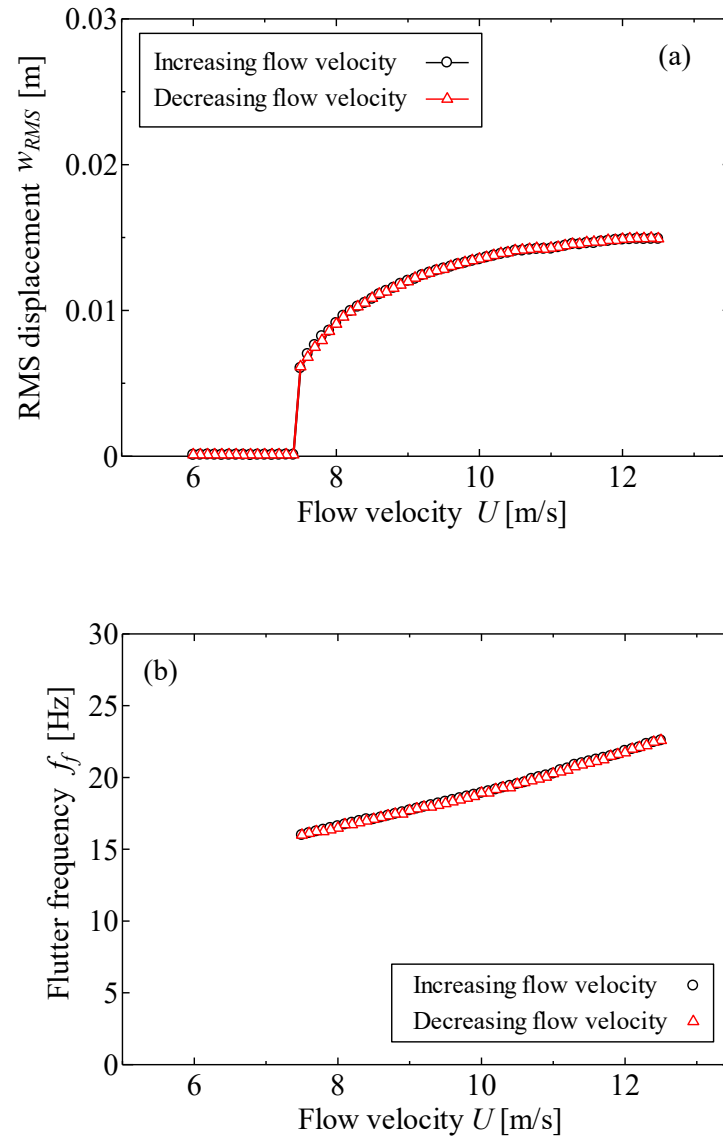


図 4.11: 流速に対する(a) 平板の振動変位の RMS 値と(b) フラッタ振動数の変化 ($\mu = 0.52$)

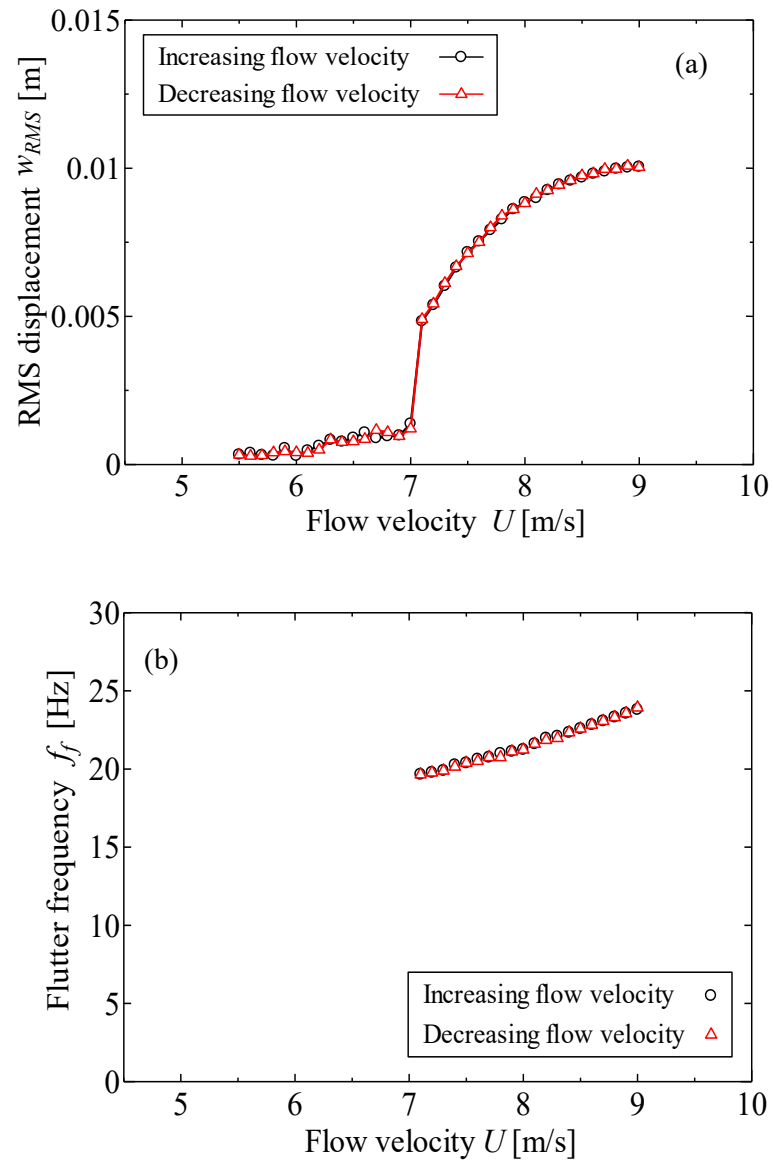


図 4.12: 流速に対する(a) 平板の振動変位の RMS 値と(b) フラッタ振動数の変化 ($\mu = 2.0$)

4.11 流速に対するフラッタ振幅および振動数の変化 (解析結果と実験結果の比較)

図 4.13 ~ 4.15 に平板の下流端における振動変位の時刻歴波形とスペクトルの計算結果を示す。図 4.13, 4.14, 4.15 はそれぞれ質量比 $\mu = 0.35, 0.52, 2.0$ の場合の結果である。これらの計算では初期外乱として微小な変位を与えた後、リミットサイクルに至るまで時間発展計算を行った。具体的には、 $\mu = 0.35, 0.52$ の場合は 2 次モードのモード座標 $q_2 = 1.0 \times 10^{-3}$ 、 $\mu = 2.0$ の場合は 3 次モードのモード座標 $q_3 = 1.0 \times 10^{-3}$ を初期変位として与えた。なお、著しく大きい初期変位を与えた場合は計算が発散するが、発散しない範囲においては初期変位がリミットサイクル状態における振幅に及ぼす影響は見られなかった。ここでは $\alpha = 0, C_f = 0.01$ として計算を行った。図 4.13 ~ 4.15 より、初期外乱を与えると徐々に変位が大きくなり、最終的にはリミットサイクルに入る。また、スペクトルより、図 4.7 ~ 4.9 に示した実験結果と同様に、単一の振動数成分が支配的となっており高調波成分の影響は小さい。

ここで、図 4.16(a), (b) にそれぞれ、初期外乱を大きく与えた場合およびリミットサイクル状態においてインパルス状の外乱を与えた場合の振動変位の時刻歴波形を示す。この結果は質量比 $\mu = 0.52$ 、無次元流速 $U^* = 11.3$ の場合の計算結果である。図 4.16(a) では、初期変位として 2 次モードのモード座標 $q_2 = 1.7 \times 10^{-2}$ (リミットサイクル状態における振幅よりも大きい初期変位) を与えた。また図 4.16(b) においては、 10 N/m^2 の集中荷重を平板のコード方向の中央の位置に無時間時間 $t^* = 0.067$ 間 (振動 1 周期の $1/6$ の時間) だけ与えた。図 4.16(a) より、初期変位を与えた直後は大きな振幅で振動するが、その後すぐに振幅が小さくなり、初期変位よりも小さい振幅でリミットサイクルに入る。また、図 4.16(b) より、外乱が加わると瞬間的に振動変位が大きくなるが、すぐに変位が小さくなり外乱が加わる前の振幅に戻る。つまり、一時的にリミットサイクル状態における振幅よりも大きな振幅で振動してもすぐに振幅は減衰し、リミットサイクルは維持されることがわかる。

図 4.17 ~ 4.19 に図 4.2 において示した渦輪要素と平板後縁間の距離 x_{TE} がフラッタ振幅および振動数に及ぼす影響を示す。図 4.17, 4.18, 4.19 はそれぞれ質量比 $\mu = 0.35, 0.52, 2.0$ の場合の結果である。図中には x_{TE} を変化させた場合の計算結果と実験結果を示している。図 4.17(a) ~ 4.19(a) より、 x_{TE} が大きくなるとフラッタ振幅が小さくなり実験値に近づくことがわかる。しかしながら、 x_{TE} が大きい場合においても計算結果は実験値よりも大きくなる。また、フラッタ振動数に関して、計算では流速の増加と共に振動数が低下しており、実験結果とは逆の傾向となっている。

計算結果と実験結果の差異の原因に関しては、4.14 節において CFD を用いた解析により平板

まわりの流れ場と平板表面上の圧力分布の関係を詳細に調べることで考察する.

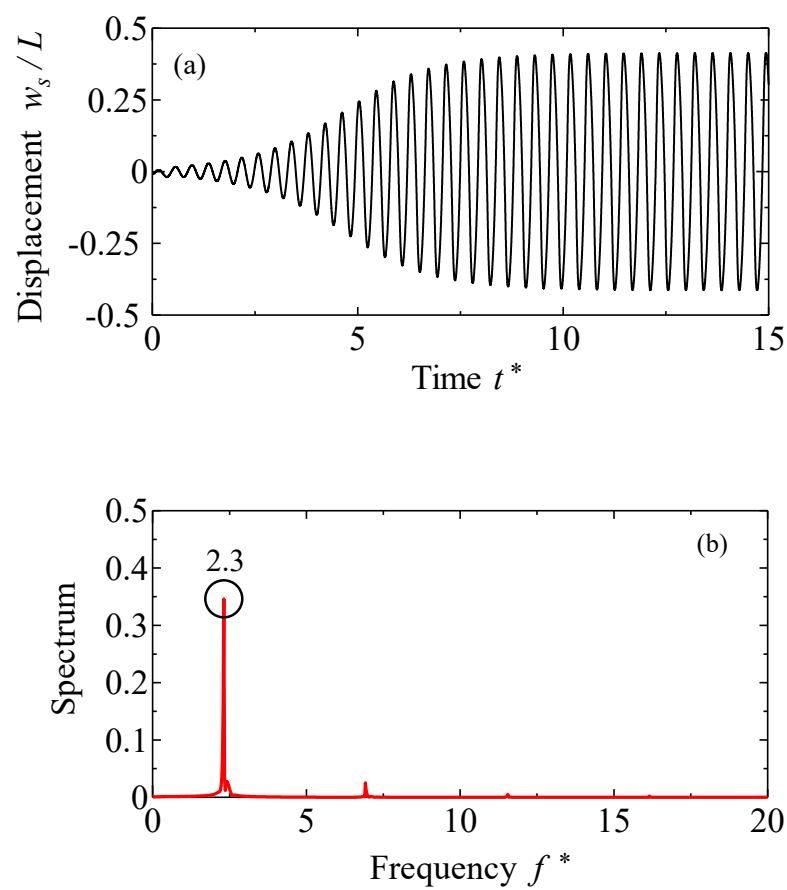


図 4.13: (a) 時刻歴波形および(b) スペクトルの計算結果 ($\mu = 0.35$, $U^* = 13.7$)

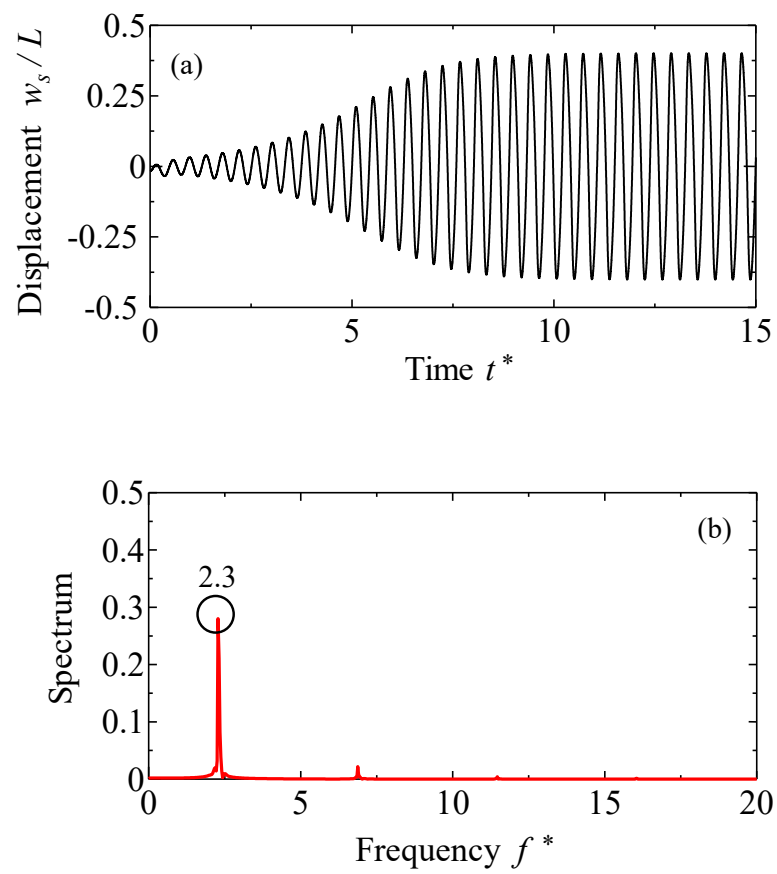


図 4.14: (a) 時刻歴波形および(b) スペクトルの計算結果 ($\mu = 0.52$, $U^* = 11.3$)

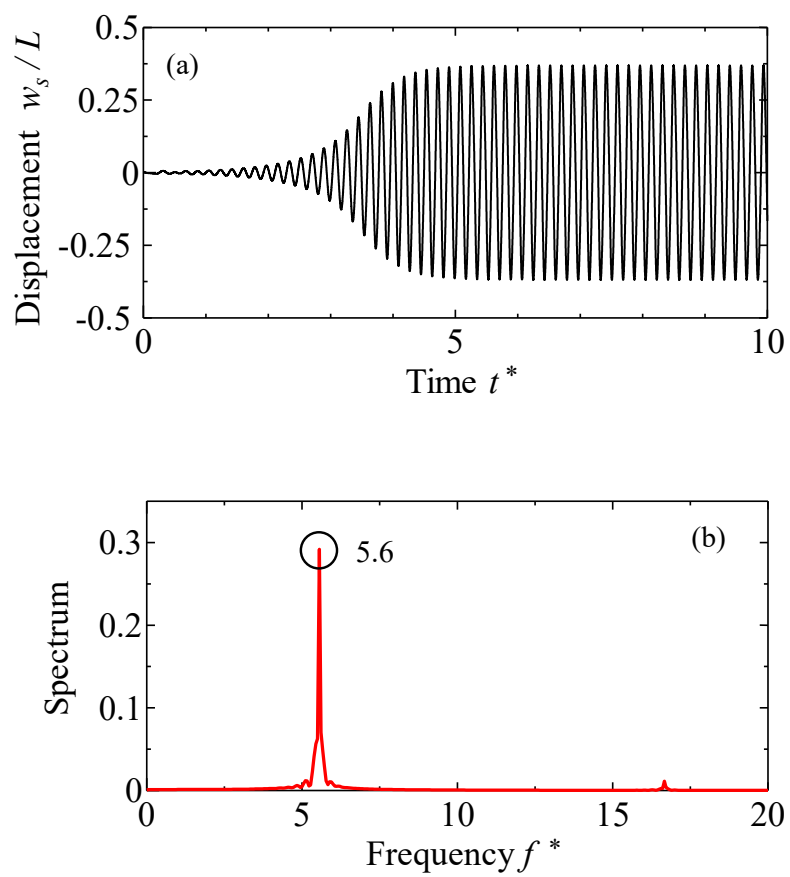


図 4.15: (a) 時刻歴波形および(b) スペクトルの計算結果 ($\mu = 2.0$, $U^* = 12.7$)

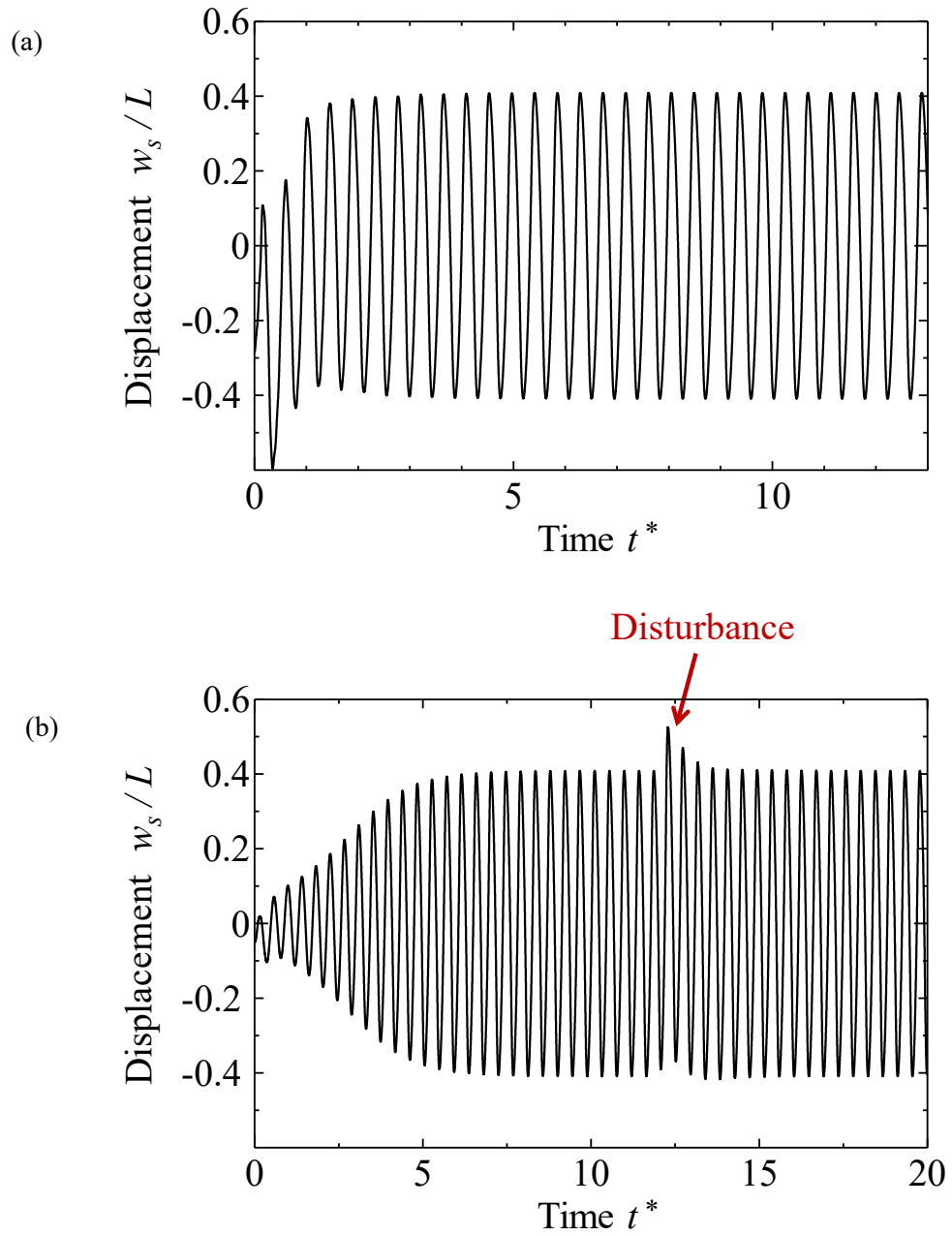


図 4.16: (a)初期変位を大きく与えた場合, (b)インパルス状の外乱を与えた際の時刻歴波形の計算結果 ($\mu = 0.52$, $U^* = 11.3$)

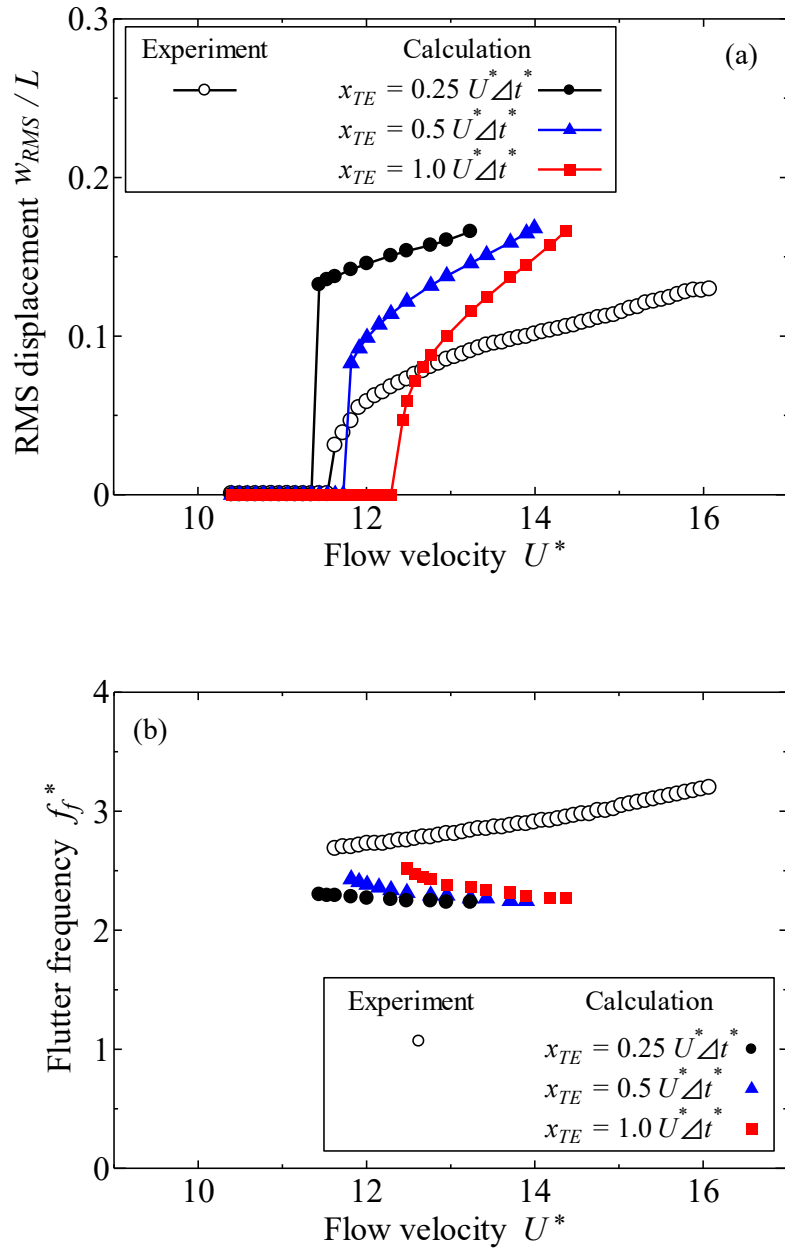


図 4.17: 計算結果と実験結果の比較: (a) フラッタ振幅, (b) フラッタ振動数 ($\mu = 0.35$)

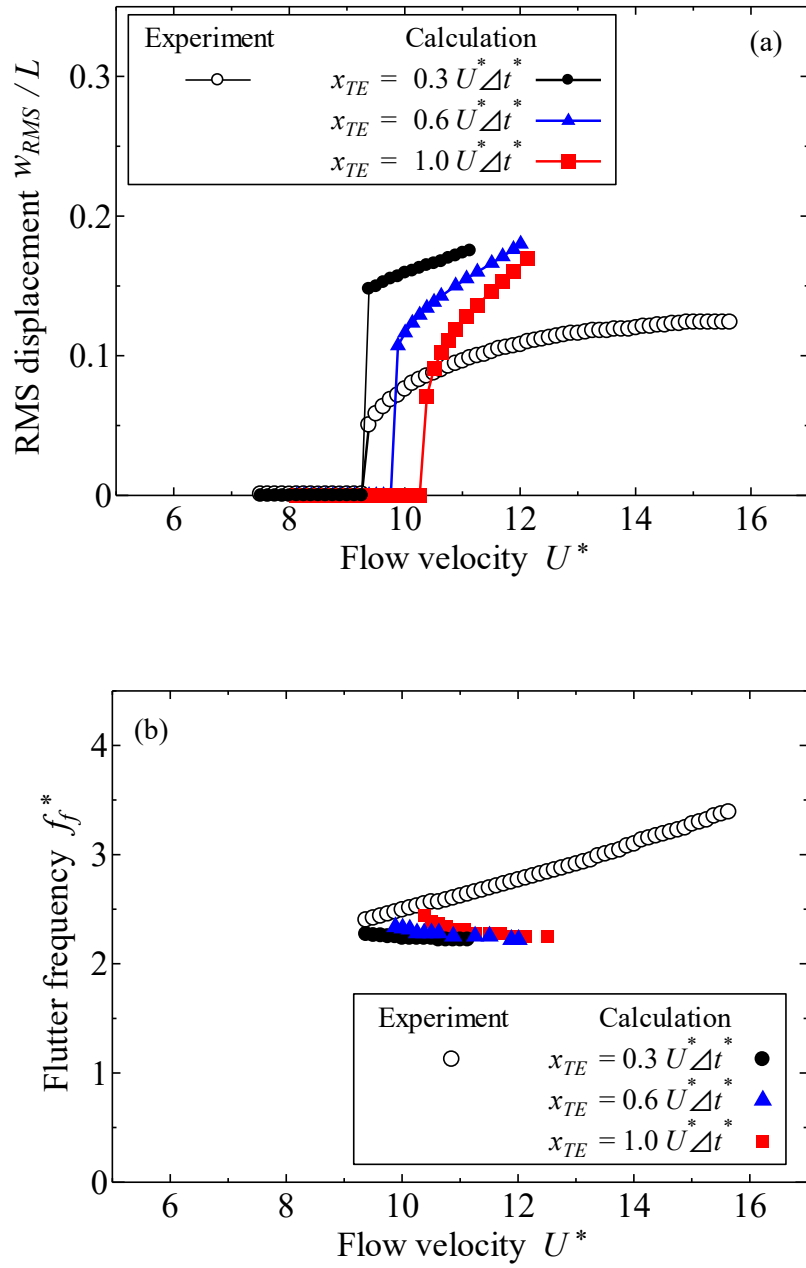


図 4.18: 計算結果と実験結果の比較: (a) フラッタ振幅, (b) フラッタ振動数 ($\mu = 0.52$)

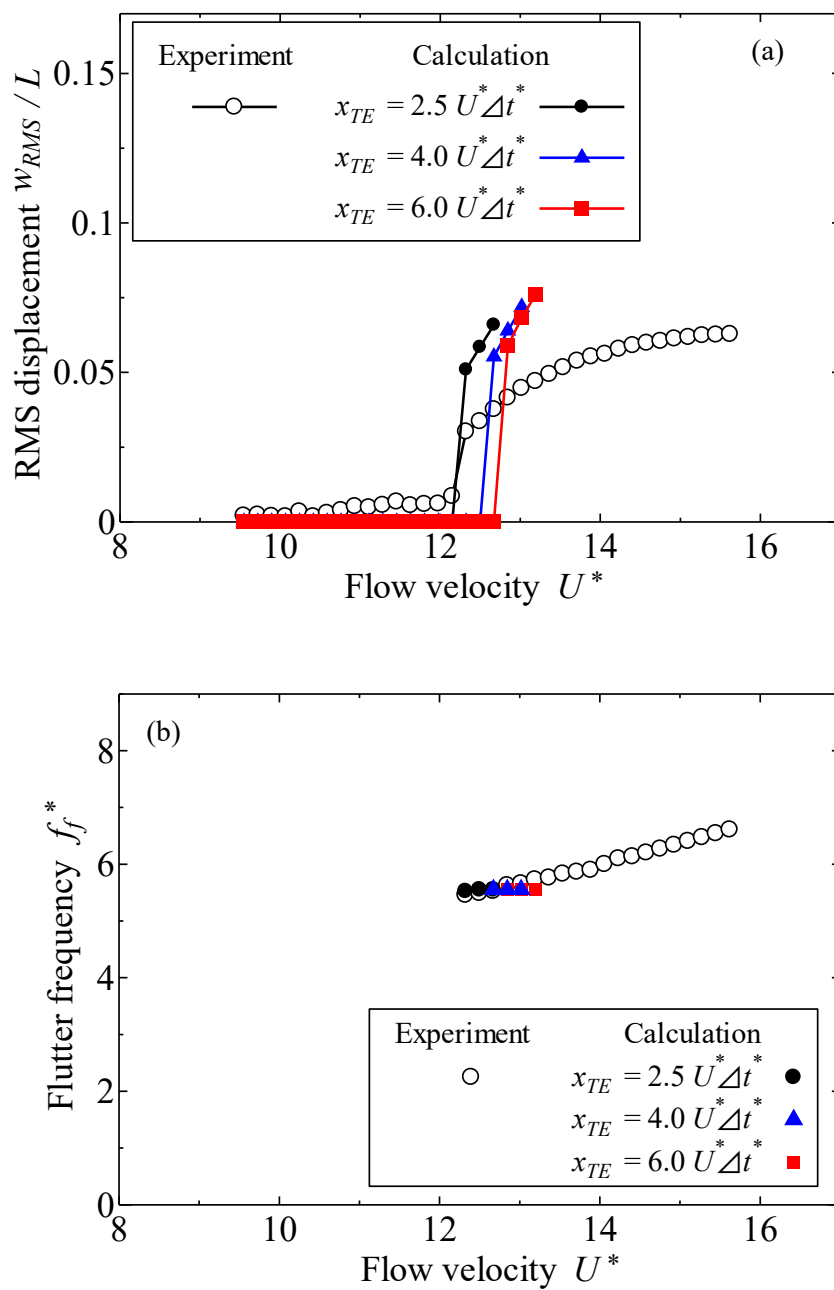


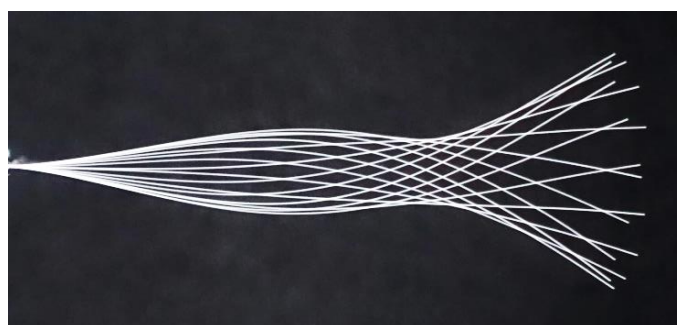
図 4.19: 計算結果と実験結果の比較: (a) フラッタ振幅, (b) フラッタ振動数 ($\mu = 2.0$)

4.12 平板のフラッタモードおよび平板表面上の流体圧力分布

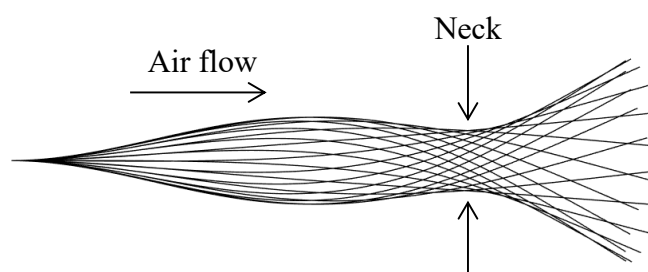
図 4.20, 4.21, 4.22 にそれぞれ質量比 $\mu = 0.35, 0.52, 2.0$ の場合のフラッタモードの実験および計算結果を示す。これらの結果はフラッタ発生流速における結果である。なお、計算において x_{TE} は $\mu = 0.35, 0.52$ の場合は $x_{TE} = 1.0U^*\Delta t^*$ 、 $\mu = 2.0$ の場合は $x_{TE} = 2.0U^*\Delta t^*$ とした。

図 4.20 ~ 4.22 より、計算結果の方が実験結果よりもやや振幅が大きくなっているが、フラッタモードは計算と実験で概ね一致している。質量比によらず、節がない進行波タイプのフラッタモードとなっており、質量比が小さい $\mu = 0.35, 0.52$ の場合は 1 つの括れ、質量比が大きい $\mu = 2.0$ の場合は 2 つの括れが生じている。

図 4.23, 4.24 にそれぞれ質量比 $\mu = 0.35, 2.0$ の場合における平板上下面の圧力差の分布を示す。ここで、質量比 $\mu = 0.35$ と 0.52 の場合では流体圧力の分布がほぼ同様であるため、代表的な結果として $\mu = 0.35$ の場合の結果を示す。流体圧力の大きさは 1 周期における最大値で正規化して平板表面上に色で表示しており、赤色は上向き、青色は下向きの流体力を表している。これらの図はフラッタ発生流速における結果である。図 4.23, 4.24 より、いずれの質量比においても上向きおよび下向きの流体圧力の分布が平板の下流端付近の領域で生じ、平板の振動に伴って表面上を上流側へ伝播していく様子がわかる。

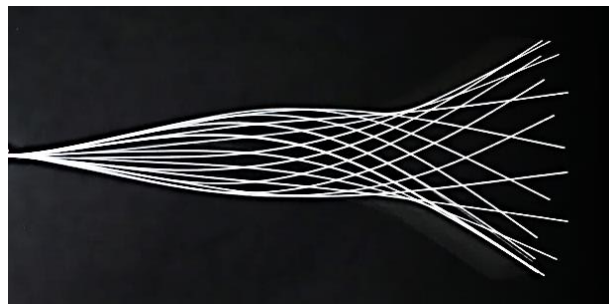


(a) Experiment

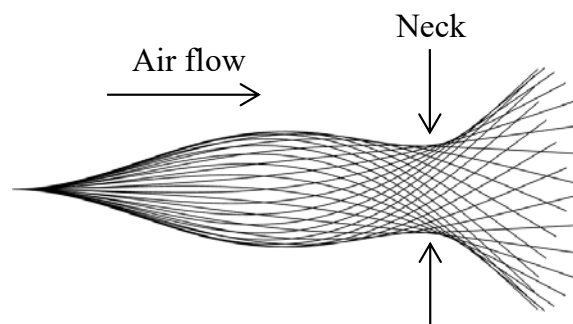


(b) Calculation

図 4.20: フラッタモードの(a) 実験結果および(b) 計算結果の比較 ($\mu = 0.35$)

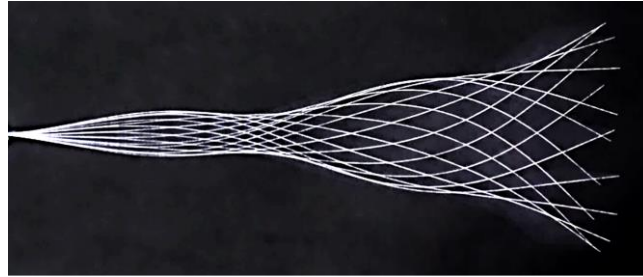


(a) Experiment

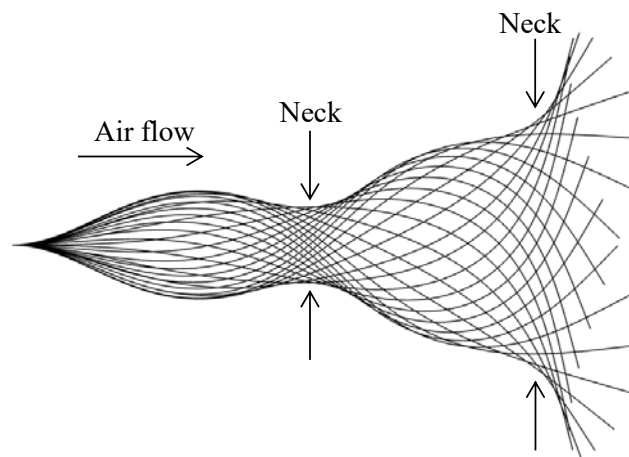


(b) Calculation

図 4.21: フラッタモードの(a) 実験結果および(b) 計算結果の比較 ($\mu = 0.52$)



(a) Experiment



(b) Calculation

図 4.22: フラッタモードの(a) 実験結果および(b) 計算結果の比較 ($\mu = 2.0$)

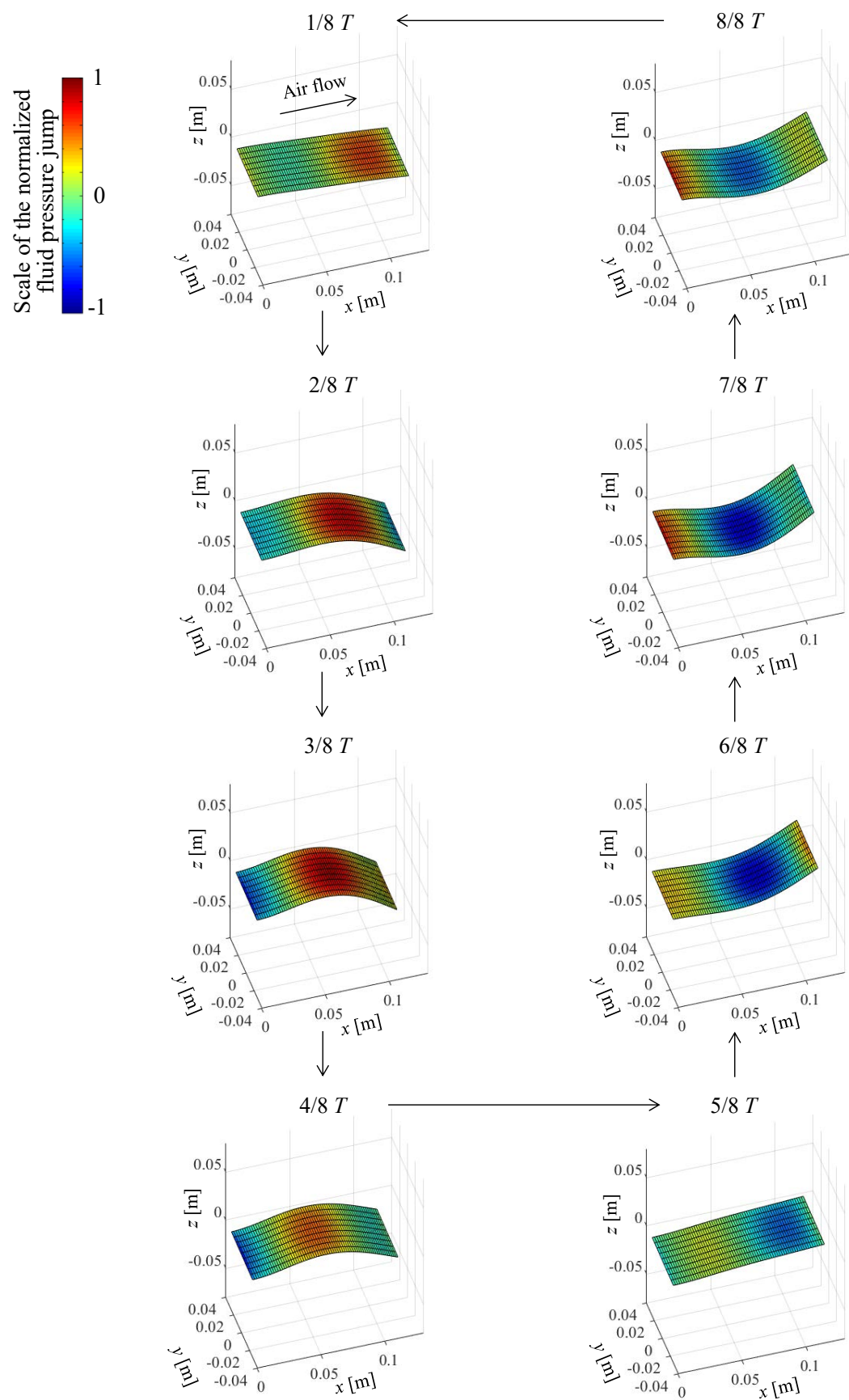


図 4.23: フラッタ発生時の平板上の流体圧力分布 ($\mu = 0.35$)

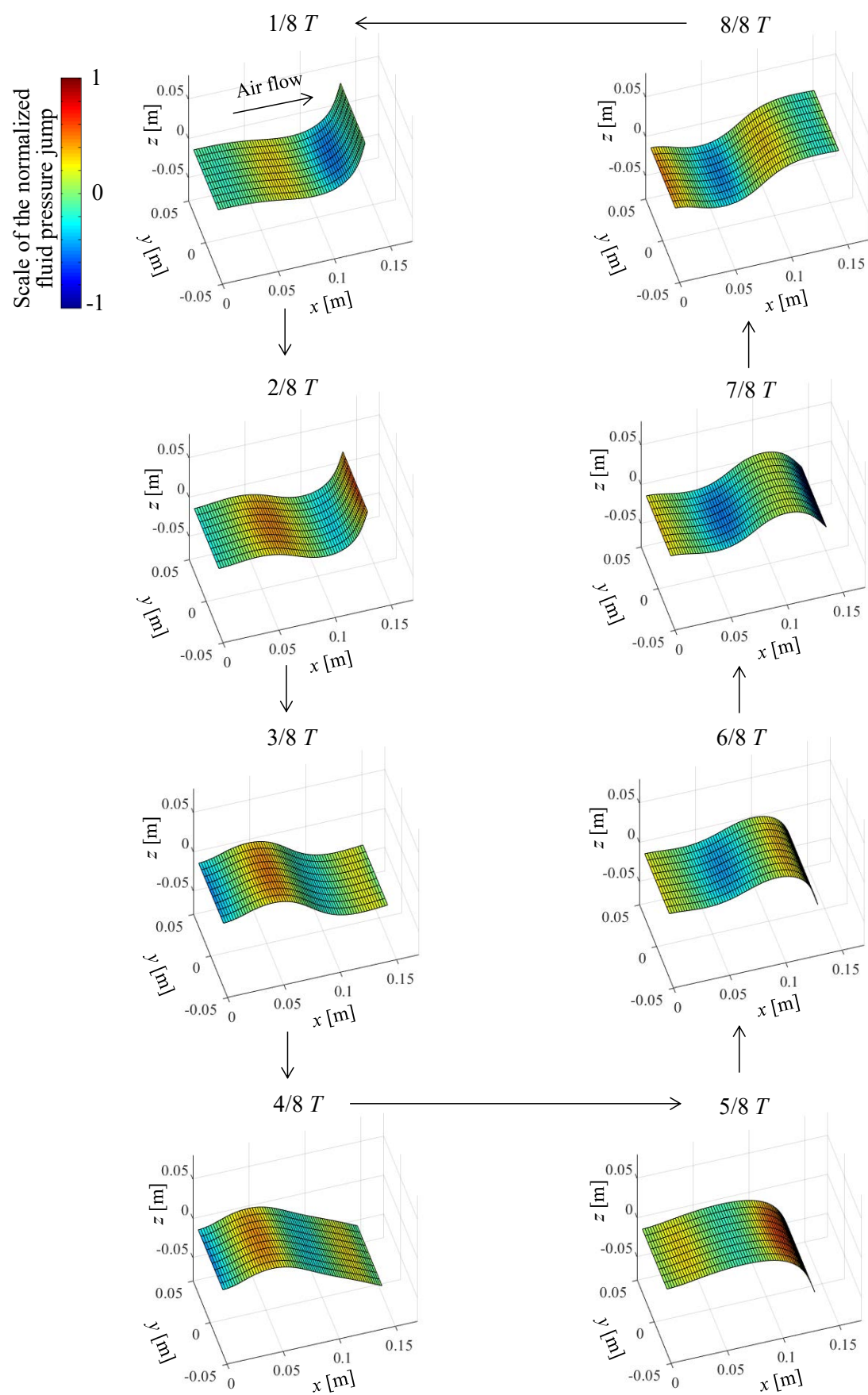


図 4.24: フラッタ発生時の平板上の流体圧力分布 ($\mu = 2.0$)

4.13 リミットサイクル状態における流体力による仕事分布 (計算結果)

リミットサイクルの維持機構を考察するために、リミットサイクル状態における平板表面上の流体力仕事分布を調べる。図 4.25 ~ 4.27 はリミットサイクル状態における平板表面に作用する流体力による 1 周期当たりの仕事の分布を式(4.25)を用いて計算した結果を示している。図 4.25, 4.26, 4.27 はそれぞれ質量比 $\mu = 0.35, 0.52, 2.0$ の場合の結果であり、フラッタ発生流速において計算を行った。ここでは、流体力によって平板になされるに焦点を当てて議論するために、流体摩擦および構造減衰の影響を無視した場合の結果を示す。

図 4.25, 4.26 より、質量比が小さい場合は平板の中流領域において流体力仕事が正となっている。一方、図 4.27 より質量比が大きく波数の多いフラッタモードとなる場合、流体力仕事の分布はより複雑になっており、平板のコード方向の中央の位置から少し上流側と下流側に流体力仕事が正の領域が形成される。また、質量比によらず下流端付近の領域では流体力仕事が負となっている。ここで、本節における解析では構造減衰の影響を無視したが、実体系においては構造減衰によるエネルギー散逸が存在する。つまり、平板の中流付近の領域における正の流体力仕事と、下流端付近における負の流体力仕事および構造減衰による負の仕事がバランスすることでリミットサイクルが維持される。このことから、平板の中流領域におけるエネルギーの流入が阻害されるとリミットサイクルを維持することができなくなる。言い換えると、流体力仕事が正となる平板の中流領域における流体力を制御することで効果的にフラッタを制振することができる。本節で得られた流体力仕事分布に関する結果は、今後フラッタの制御系を設計する際に有用な知見になると考えられる。

ここで、非線形解析と第 2 章に示した線形解析の中立安定点における結果を比較すると、流体力仕事が正の領域と負の領域が一致しており、ほぼ同様な仕事分布となっている。

また、図 4.28(a), (b) に流体力によるパワー（単位時間当たりの仕事）の時刻歴波形を示す。この結果は質量比 $\mu = 0.52$ 、無次元流速 $U^* = 11.3$ における結果である。パワーは、各要素ごとに式(4.24)を用いて計算し、全要素の総和を取ることで求めた。また、図 4.28(b) は図 4.28(a) の無次元時刻 $t^* = 12.8 \sim 13.3$ の範囲を拡大したものである。図 4.28(a) より、パワーの振幅は時間と共に大きくなり、最終的に一定の振幅となる。また、パワーの振幅が一定となった時刻に着目した図 4.28(b) より、パワーの時刻歴波形は高調波成分を含んだ非線形的な波形となる。加えて、パワーは正側と負側で非対称な波形となっている。ここで、図 4.29 に振動 1 周期当たりの流体力による仕事を示す。流体力による仕事は、パワーを振動 1 周期（図 4.14 に示した卓越振動数の逆数）に渡って合算することで求めた。ここで、図 4.29(b) に示す流体力

による仕事は, 図 4.29(b)に示す時刻 ((1): $t^* = 0.19 \sim 0.62$, (2): $t^* = 2.94 \sim 3.37$, (3): $t^* = 4.92 \sim 5.35$, (4): $t^* = 11.96 \sim 12.39$) において計算した結果である. 流体力による仕事は振幅が成長していく過程においては(棒グラフの(1), (2), (3)) 正の仕事が支配的となっているが, パワーの振幅が一定となると(棒グラフの(4)) 仕事は 0 に近くなる. ここで, パワーは高調波成分を含むために, 流体力による仕事は完全に 0 にはなっていないことに注意されたい. つまり, 正のパワーと負のパワーがバランスすることでリミットサイクルに入る.

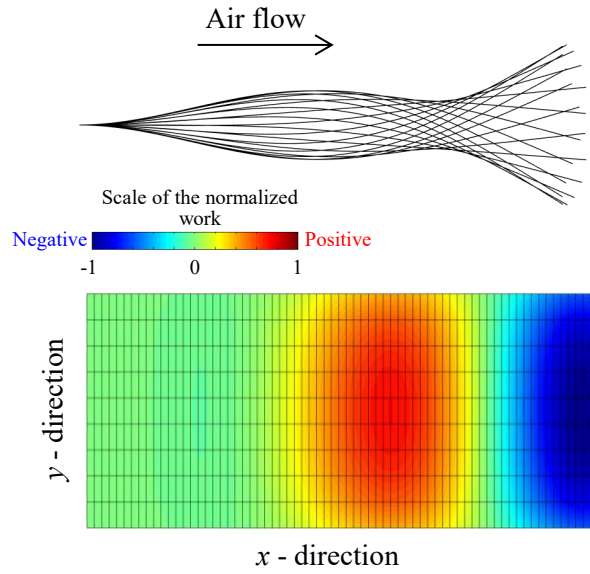


図 4.25: リミットサイクル状態における流体力仕事分布 ($\mu = 0.35$)

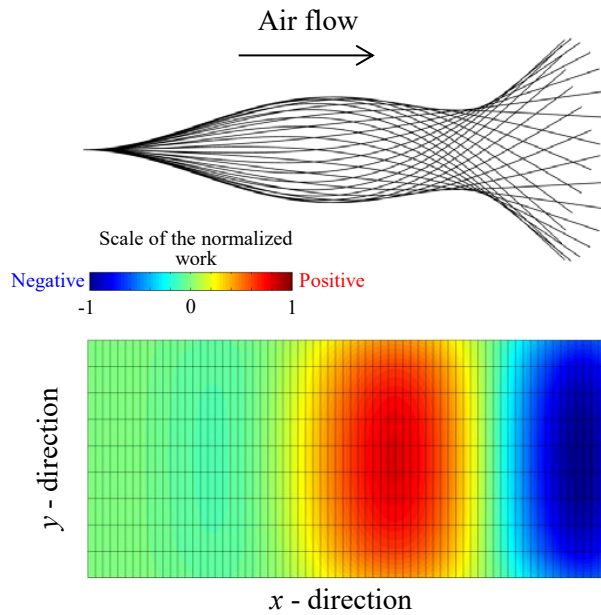


図 4.26: リミットサイクル状態における流体力仕事分布 ($\mu = 0.52$)

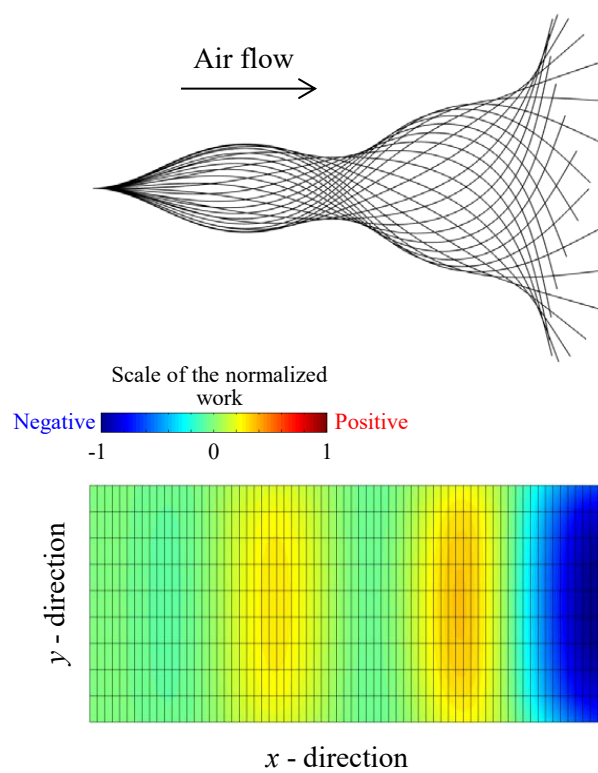


図 4.27: リミットサイクル状態における流体力仕事分布 ($\mu = 2.0$)

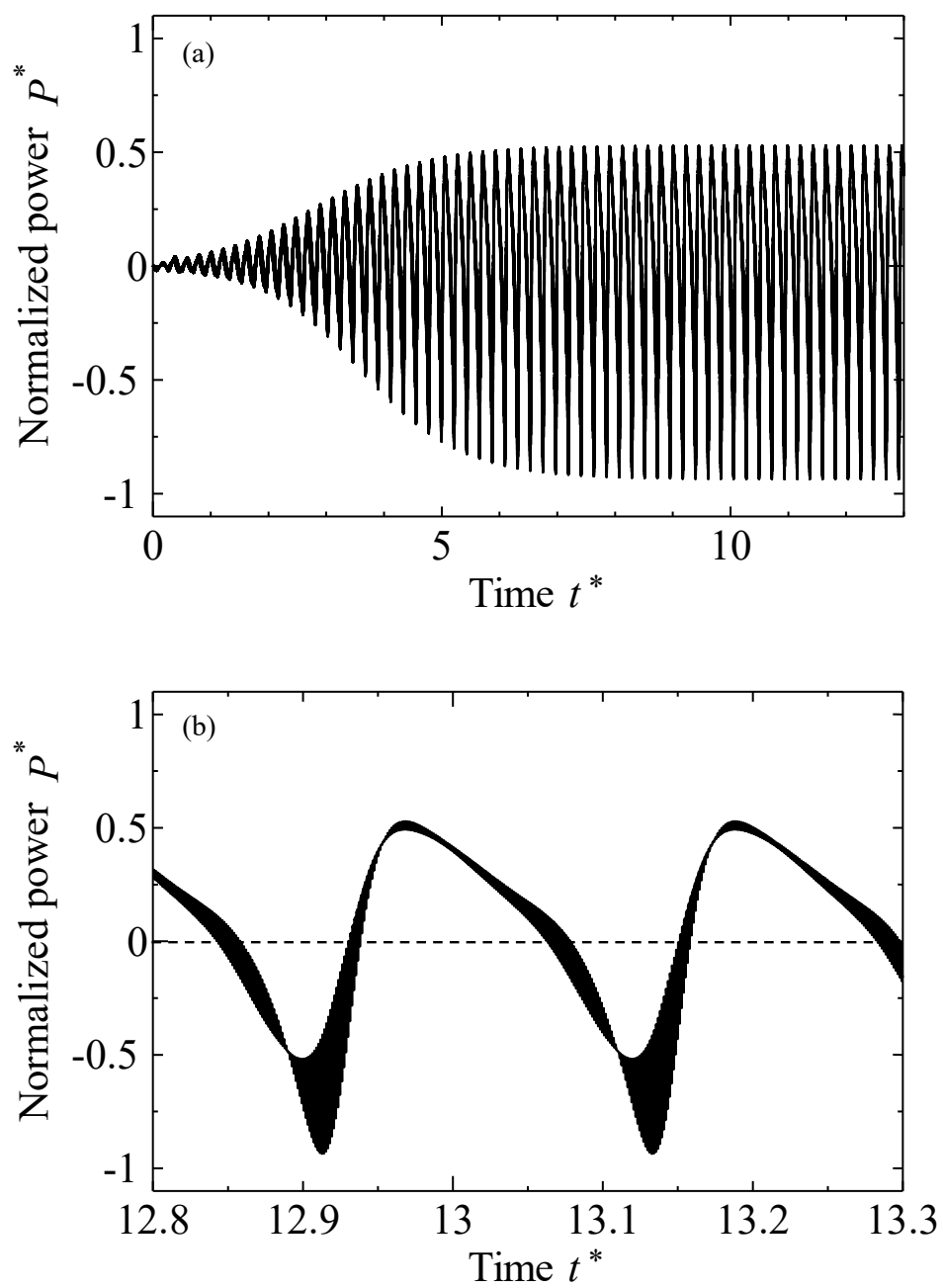


図 4.28: 流体力によるパワーの時刻歴波形

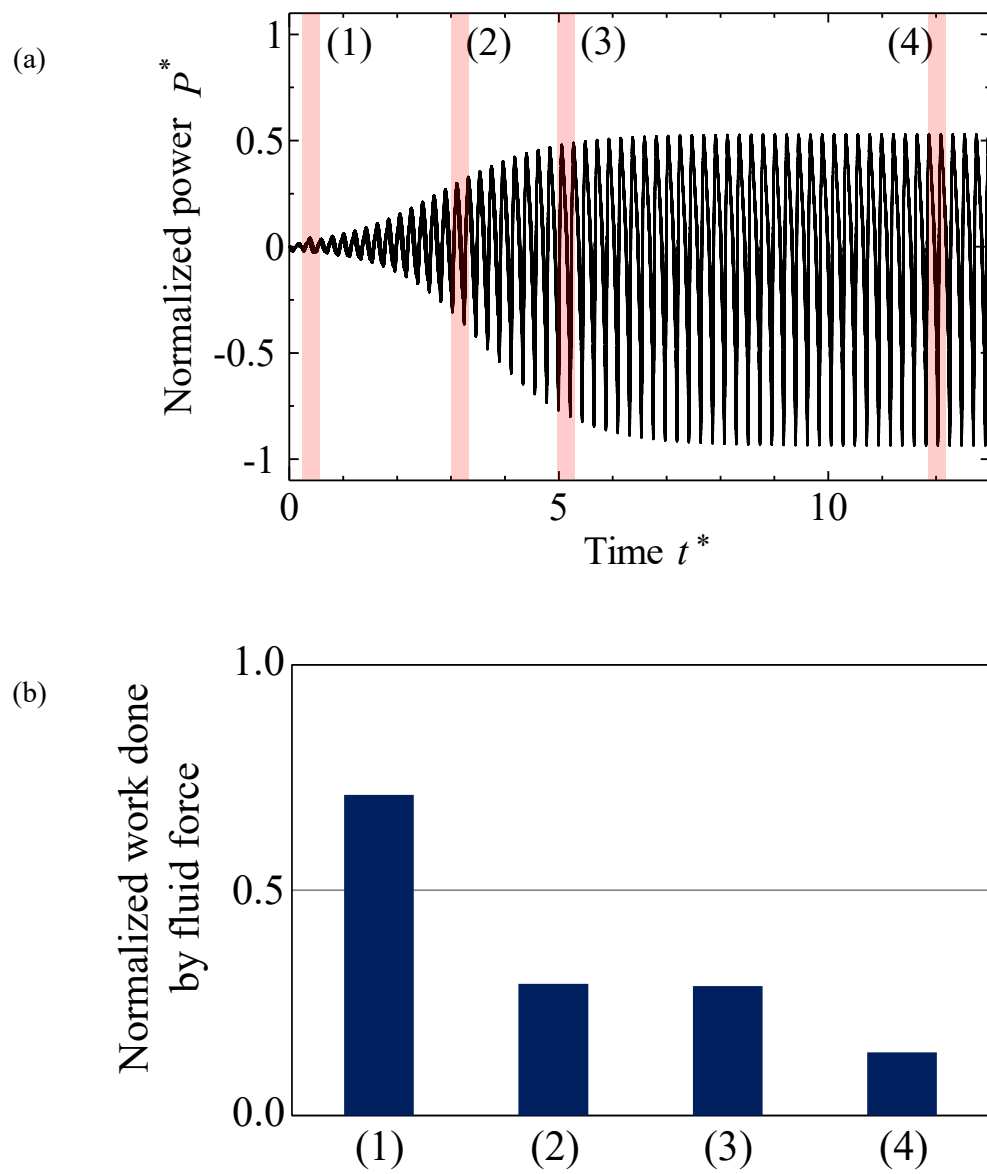


図 4.29: (a) 流体力によるパワーと(b)振動 1 周期当たりの流体力仕事の関係

4.14 CFD を用いた流体構造連成解析

図 4.17～4.19 に示したように，VLM，つまりポテンシャル流れを基礎とする手法を用いた解析結果と実験結果の間には差異が生じる．この差異の原因を考察するために，computational fluid dynamics (CFD) を用いた流体構造連成解析（以下 FSI 解析と呼ぶ）を行った．

計算は汎用数値計算ソフトウェア ANSYS 2020 R1 を用いて行った．流体解析は，ANSYS Fluent 2021 R1 を使用した．流体の支配方程式，つまり連続の式と Navier-Stokes 方程式はそれぞれ式(4.28)，(4.29)のように表される．これらの方程式は，Einstein の総和規約に基づいて表記している．

$$\int_S U_{fs} n_s dS = 0, \quad s = 1, 2, 3 \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_f U_{fr} dV + \int_S \rho_f U_{fs} U_{fr} n_s dS = - \int_S p_s n_s dS + \int_S \mu_f \left(\frac{\partial U_{fr}}{\partial x_s} + \frac{\partial U_{fs}}{\partial x_r} \right) n_s dS, \quad (4.29)$$

$r = 1, 2, 3, \quad s = 1, 2, 3$

式中の U_{fr} は流体の速度， μ_f は流体の粘性係数である． S および V は解析領域の表面積と体積を表している．また， n_j は単位法線ベクトルである．これらの方程式を有限体積法により離散化した．乱流モデルは Shear Stress Transport (SST) を採用した．

図 4.30 に計算領域の全体図を示す．計算領域の寸法は，580 mm × 300 mm × 300 mm である．境界条件は流路，入口を velocity inlet とし，出口を pressure outlet とした．出口圧力は大気圧解放とした．また，inlet と outlet を除く流路壁は滑りなしとした．また，図 4.31 に計算領域の断面図を示す．流体領域は四面体要素を用いて離散化し，平板の近傍に細かいメッシュを配置した．

構造解析には ANSYS Mechanical 2020 R1 を用いた．平板は有限要素法により離散化した．要素は 1 要素 8 節点のソリッド要素を用いた．また，構造減衰は考慮していない．

ここで，ANSYS Fluent と Mechanical をシステムカップリングを介して結合することで，連成計算を行った．なお，流体と構造の連成は双方向とした．図 4.32 に流体構造連成解析のアルゴリズムの概念図を示す^[42]．ANSYS では，時間ステップごとに流体力と平板の変位との間で収束するまで反復を行うことで解を求める手法が用いられている．まず， n 番目の時間ステップの流体力 $\mathbf{F}^n$ を用いることで， $n+1$ 番目の時間ステップにおける平板の変位 $\mathbf{X}^{n+1}$ を求める．その後， $\mathbf{X}^{n+1}$ を用いて $n+1$ 番目の時間ステップにおける流体力 $\mathbf{F}^{n+1}$ を計算する．ここで， $\mathbf{X}^{n+1}$ と $\mathbf{F}^{n+1}$ の間で反復を行い，収束した時点で次の時間ステップの計算に進む．この手順を繰り返すことで，時間発展計算を行った．

また，流体構造連成計算においては平板の運動に合わせて平板まわりの流体メッシュを移動させる必要がある．このため，ANSYS Fluent 内に実装されている Dynamic Mesh 機能を用いて流体メッシュの移動を行った．ここでは拡散方程式に基づいてメッシュを移動させる Diffusion Smoothing を選択した．移動境界問題を扱う場合には，平板の移動に伴う流体格子の移動速度の影響を支配方程式(4.28), (4.29)において考慮する必要がある^[68]．このため，支配方程式は下式のように書き換えられる．

$$\int_S (U_{fs} - W_{ms}) n_s dS = 0, \quad s = 1, 2, 3 \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho_f U_{fr} dV + \int_S \rho_f (U_{fs} - W_{ms}) U_{fr} n_s dS = - \int_S p_s n_s dS + \int_S \mu_f \left(\frac{\partial U_{fr}}{\partial x_s} + \frac{\partial U_{fs}}{\partial x_r} \right) n_s dS, \\ r = 1, 2, 3, \quad s = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.31)$$

式中の W_{ms} は平板と流体の境界における流体格子の速度である．ここで，式(4.30)は流体と平板の界面における運動学的条件，つまり流体の界面に対する平板の相対速度の法線方向成分が 0 になる条件に対応している．

初期外乱として平板表面上に 10 Pa のインパルス状の圧力を与え，その後の平板の振動変位を時間発展計算した．計算条件は表 4.4 に示す．また，平板の物性値は表 4.1 に示す通りである．

表 4.4: FSI 解析における計算パラメータ

Mass ratio μ	0.52 (PET2)	2.0 (Paper)
Working fluid	Air	
CFD method	Finite volume method	
CSD method	Finite element method	
Dimensions of fluid region (length [m] $\times$ width [m] $\times$ height [m])	$0.58 \times 0.3 \times 0.3$	
Turbulence model	Shear stress transport	
Fluid mesh type	Tetra element	
Fluid cells	799951	894996
Flow velocity at inlet U [m/s]	8.5, 8.7, 9.0	7.2, 7.3, 7.4
Dimensionless flow velocity at inlet U^*	10.6, 10.9, 11.3	12.5, 12.7, 12.8
Pressure at outlet [Pa]	0 (atmospheric release)	
Gravity acceleration g (x - axis) [m/s ²]	9.81	
FEM element	Solid element	
FEM element number	1800	3200
Time step Δt [s]	2.0×10^{-4}	
Dimensionless time step Δt^*	1.3×10^{-3}	7.4×10^{-4}

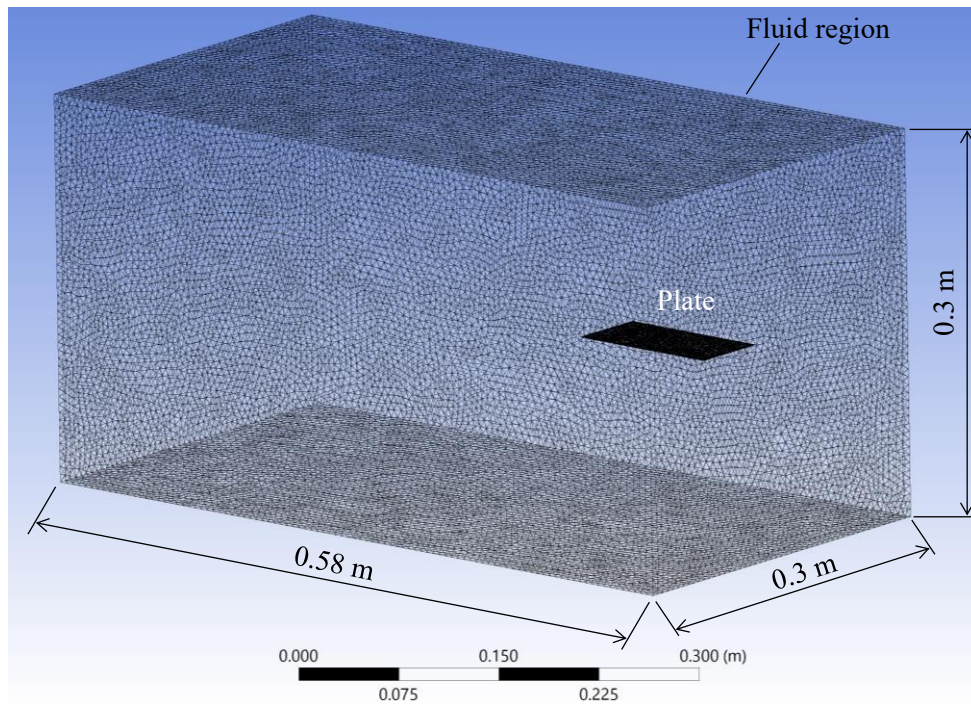


図 4.30: 計算領域の全体図

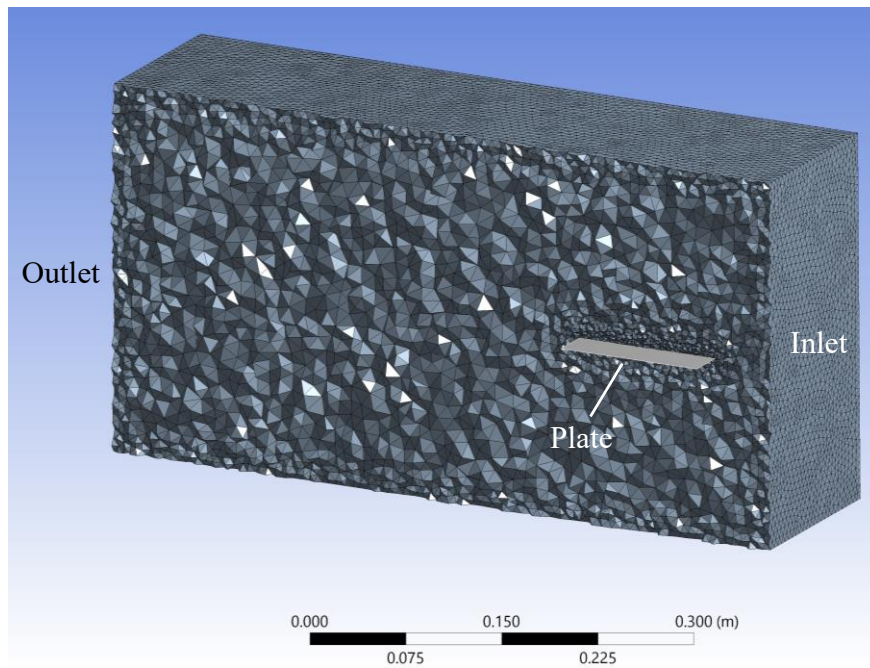


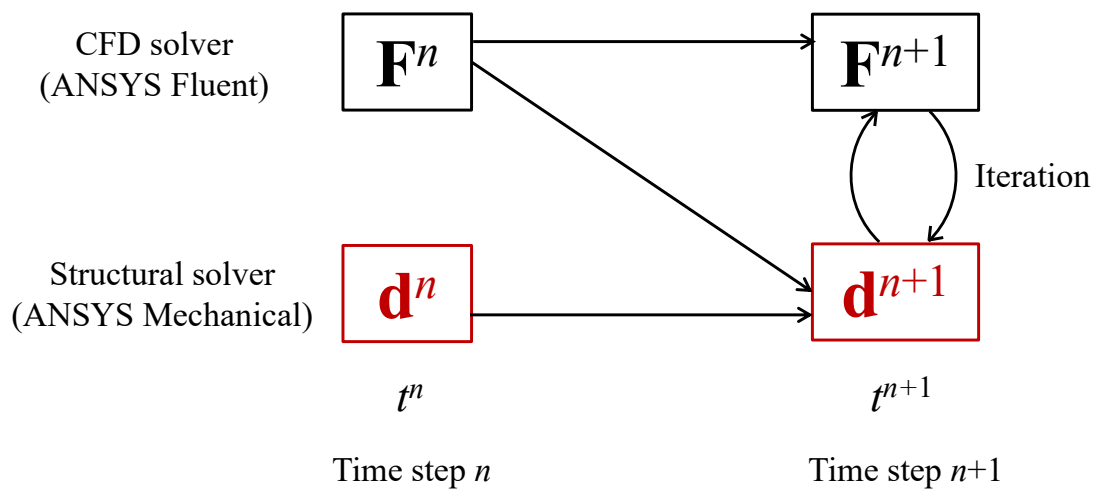
図 4.31: 計算領域の断面図

図 4.33, 4.34 に計算により得られた時刻歴波形とスペクトルを示す．図中の(a), (b)はそれぞれ時刻歴波形とスペクトルを表している．図 4.33, 4.34 はそれぞれ質量比が 0.52, 2.0 の場合の結果である．いずれの場合も，時間と共に振幅が大きくなり，最終的にリミットサイクルに入る．また，スペクトルに着目すると，図 4.8, 4.9 および図 4.14, 4.15 に示した実験結果および渦格子法による計算結果と同様に，単一の振動数成分が卓越している．

図 4.35, 4.36 に FSI 解析により得られたフラッタ振幅と振動数を実験結果および VLM を用いた計算結果と比較した結果を示す．図 4.35, 4.36 はそれぞれ質量比 $\mu = 0.52, 2.0$ における結果である．これらの結果より，FSI 解析の結果はフラッタ振幅，振動数共に実験結果と良く一致している．特にフラッタ振動数に着目すると，図 4.17～4.19 において示した VLM，つまりポテンシャル流れに基づく解析法を用いて計算した結果では流速の増加に対してフラッタ振動数が減少するのに対し，FSI 解析では流速に対してフラッタ振動数が増加する結果が得られておりその傾向は実験結果と一致している．

ここで，VLM を用いた解析と FSI 解析における計算コストを調べるために，同性能の計算機（8 コア 16 スレッド，クロック周波数 5.0 GHz）を用いてそれぞれの手法を用いてリミットサイクルに至るまで計算を行い，その計算時間を比較した．なお計算条件に関しては，VLM を用いた解析と FSI 解析では，計算結果が十分に収束する条件が異なることに注意されたい．時間刻み，分割数，モード近似の次数などの計算パラメータは表 4.2 および 4.4 に示す通りである．計算は質量比 $\mu = 0.52$ ，無次元流速 $U^* = 11.3$ において，無次元時間 $t^* = 10$ まで行った．

その結果, 計算時間は VLM を用いた解析では約 8 時間, FSI 解析では約 720 時間となり, VLM を用いた解析の方が大幅に計算時間が短いことが明らかになった. このことから, VLM を用いた解析は振幅に関して実験値とやや差異が見られるものの, FSI 解析に比べて計算コストが大幅に小さいため, 多くのパラメータにおいて計算を行う上では優位性があると考えられる.



$\mathbf{F}^n$: Fluid force acting on plate surface, $\mathbf{d}^n$: Displacement of plate

図 4.32: 流体構造連成解析のアルゴリズム

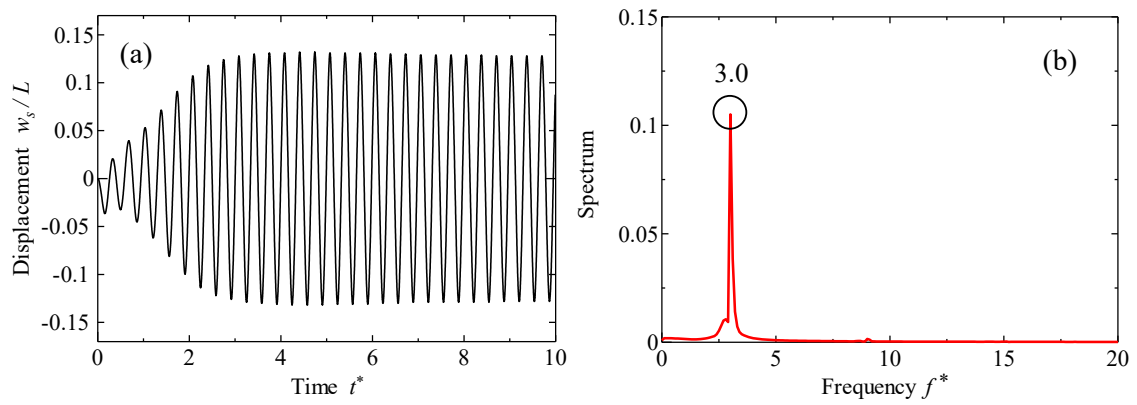


図 4.33: (a) 時刻歴波形および(b) スペクトルの計算結果 ($\mu = 0.52$, $U^* = 11.3$)

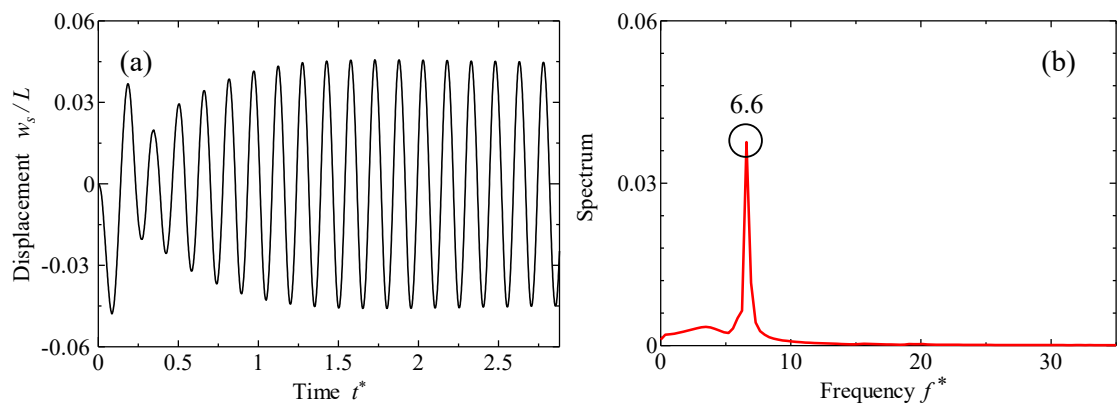


図 4.34: (a) 時刻歴波形および(b) スペクトルの計算結果 ($\mu = 2.0$, $U^* = 12.8$)

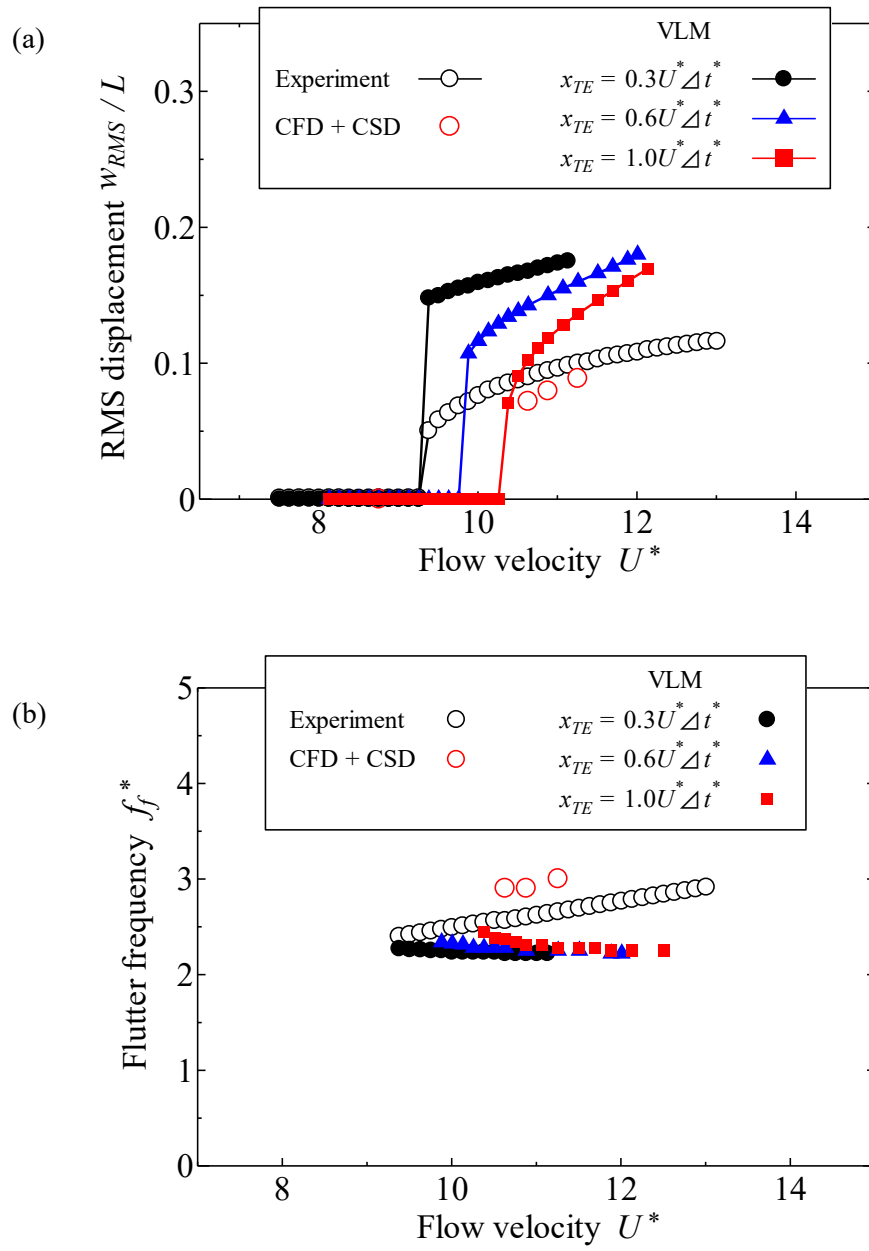


図 4.35: (a) 流速に対する振動変位の RMS および(b) 振動数の変化の計算結果および実験結果との比較 ($\mu = 0.52$)

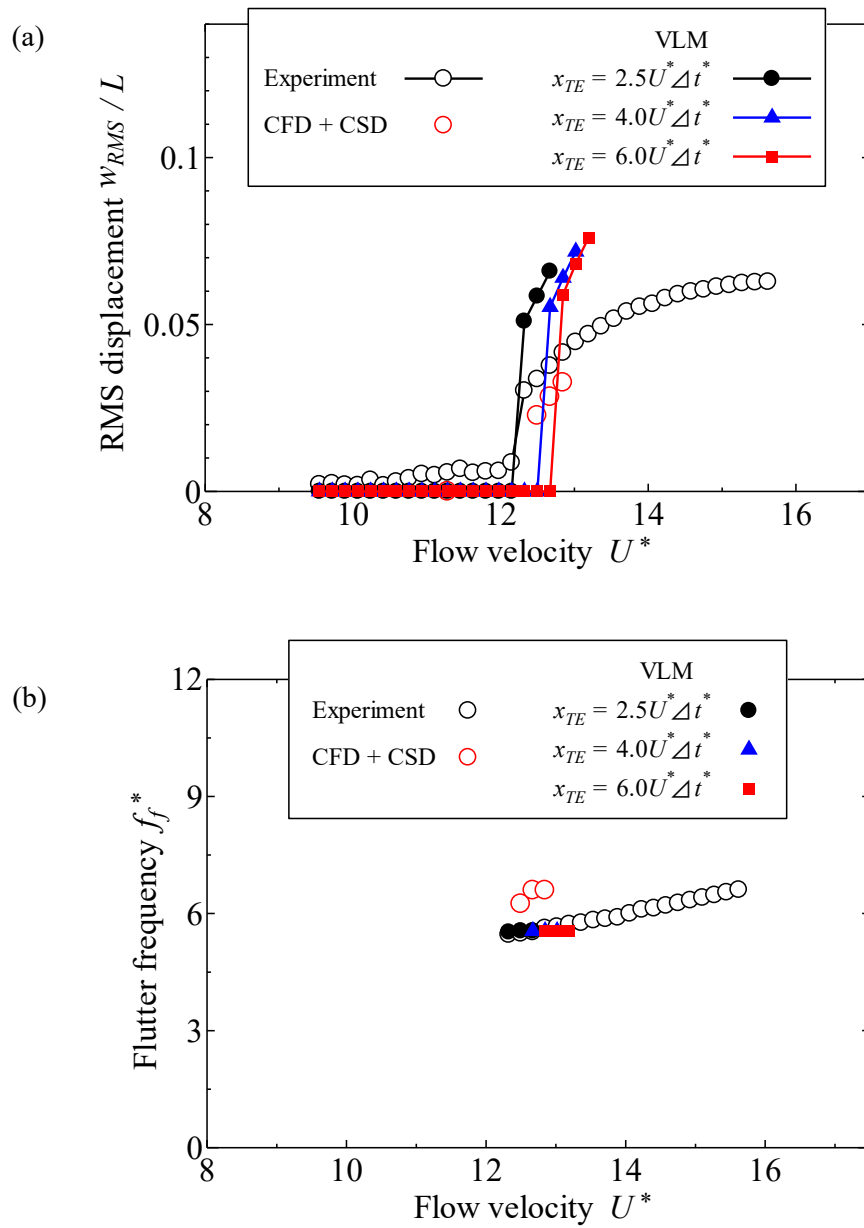


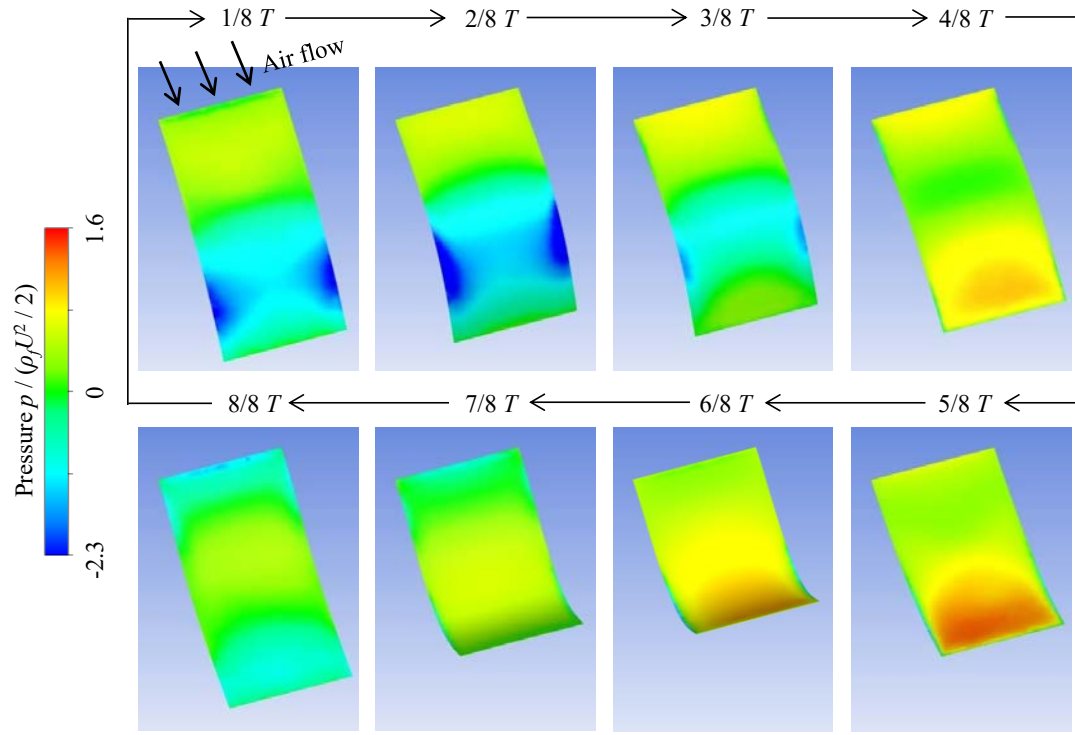
図 4.36: (a) 流速に対する振動変位の RMS および(b) 振動数の変化の計算結果および実験結果との比較 ($\mu = 2.0$)

図 4.37 にフラッタ発生時の平板表面上の圧力分布の FSI 解析結果を示す。図 4.37(a), (b)はそれぞれ質量比 $\mu = 0.52, 2.0$ の場合の結果である。図 4.37 より、図 4.23, 4.24 に示した VLM による計算結果と同様に、圧力分布が下流側から上流側へ伝播している。しかしながら、FSI 解析結果では、平板の側端付近に渦格子法を用いた計算結果では見られない局所的な高圧力領域（図 4.37(a) $1/8T, 2/8T$, 図 4.37(b) $1/8T$ ）が見られる。

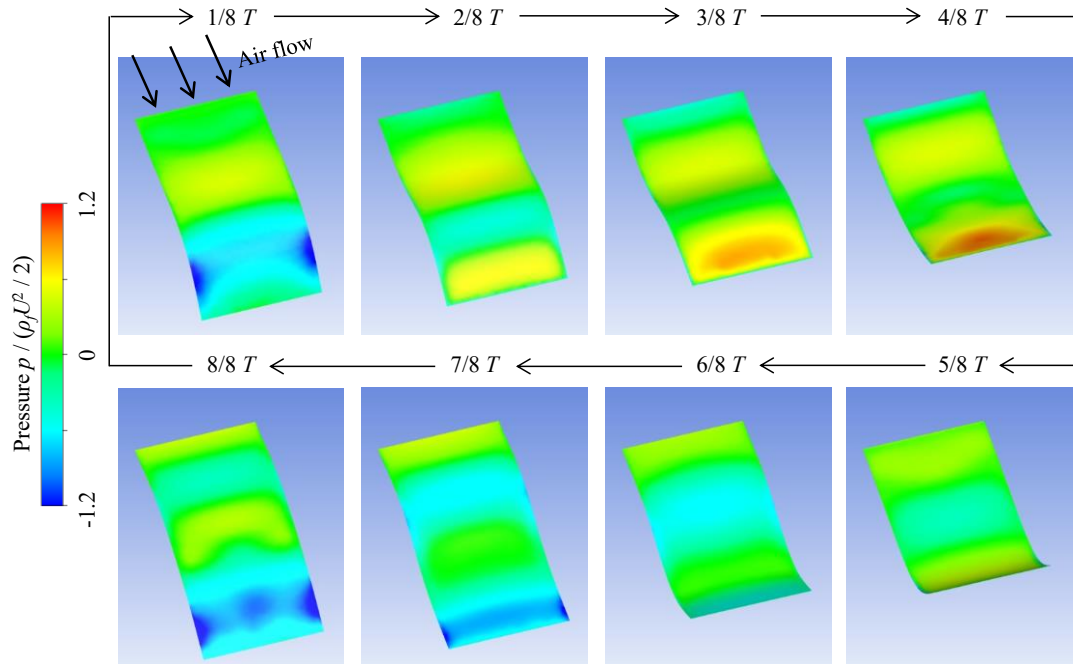
この局所的な高圧力領域発生の原因を考察するために、図 4.38 に平板表面上の圧力分布と流線の関係を示す。また、図 4.39 に平板周りの流速ベクトルを示す。これらの結果は質量比 $\mu = 0.52$ 、無次元流速 $U^* = 11.3$ における結果である。図 4.38 より、平板の赤色の破線で示した平板の側端付近の領域において流線が平板表面から剥がれている。加えて、図 4.39 より、赤色の点線で囲った平板の側端付近の領域において流れの逆流（薄い水色の矢印）が生じている。このことから、平板の側端付近の領域において流れのはく離が生じており、はく離領域において局所的に圧力が高くなっている。

図 4.40 に平板表面上の流体力による仕事分布の FSI 解析結果を示す。この結果は、質量比 $\mu = 0.52$ 、無次元流速 $U^* = 11.3$ における結果である。流体力仕事は平板表面上の各節点において、式(4.25)を用いて計算した。つまり、各節点における面外方向の流体力と振動速度から各時刻におけるパワーを計算し、振動 1 周期分足し合わせることで流体力仕事を求めた。

図 4.40 より、FSI 解析結果においても図 4.25 に示した VLM による計算結果と同様に、平板の中流領域において流体力仕事が正となっており、下流端付近の領域で流体力仕事が負となっている。



(a) $\mu = 0.52$, $U^* = 11.3$



(b) $\mu = 2.0$, $U^* = 12.8$

図 4.37: フラッタ発生時の平板表面上の圧力分布

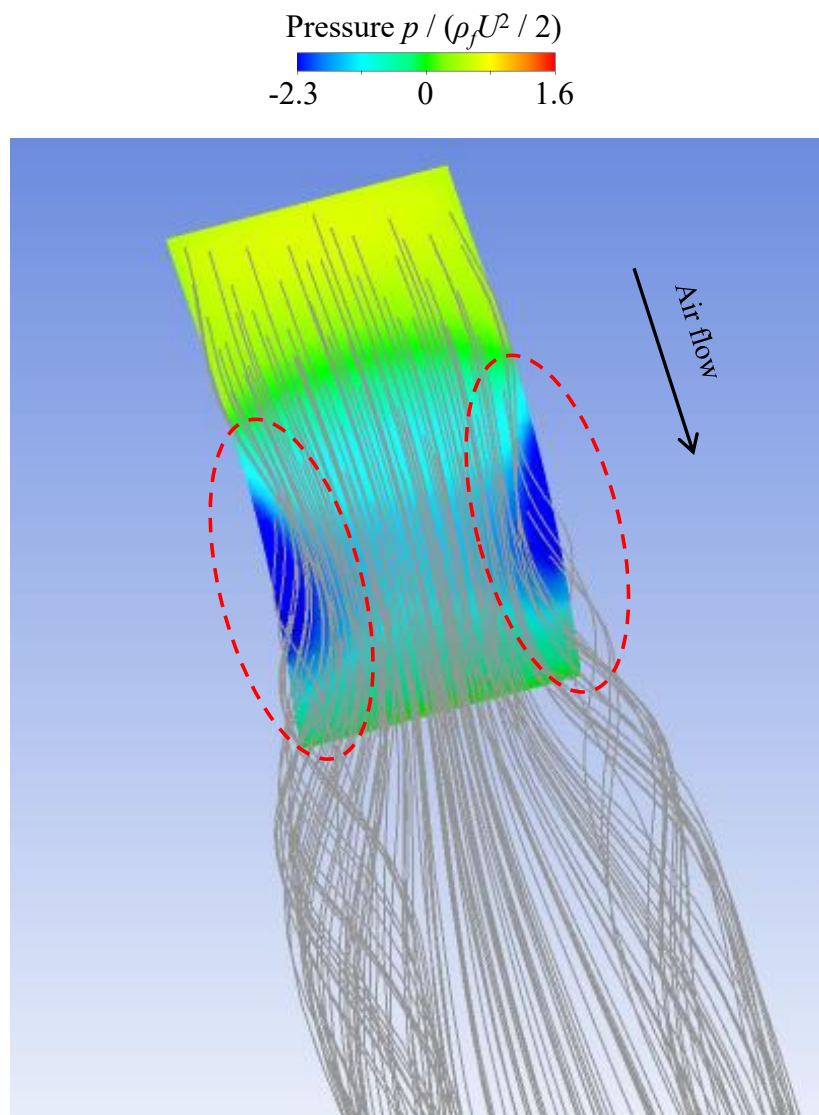


図 4.38: フラッタ発生時の流線と平板表面上の圧力分布の関係

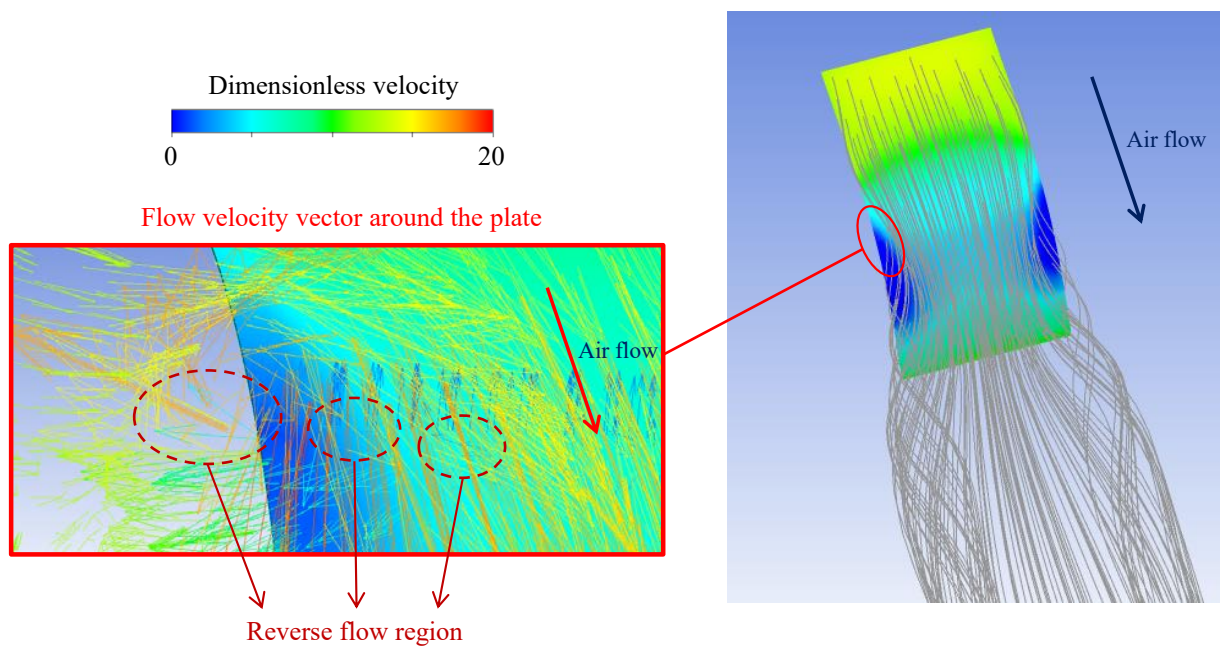


図 4.39: フラッタ発生時の平板周りの流速ベクトル

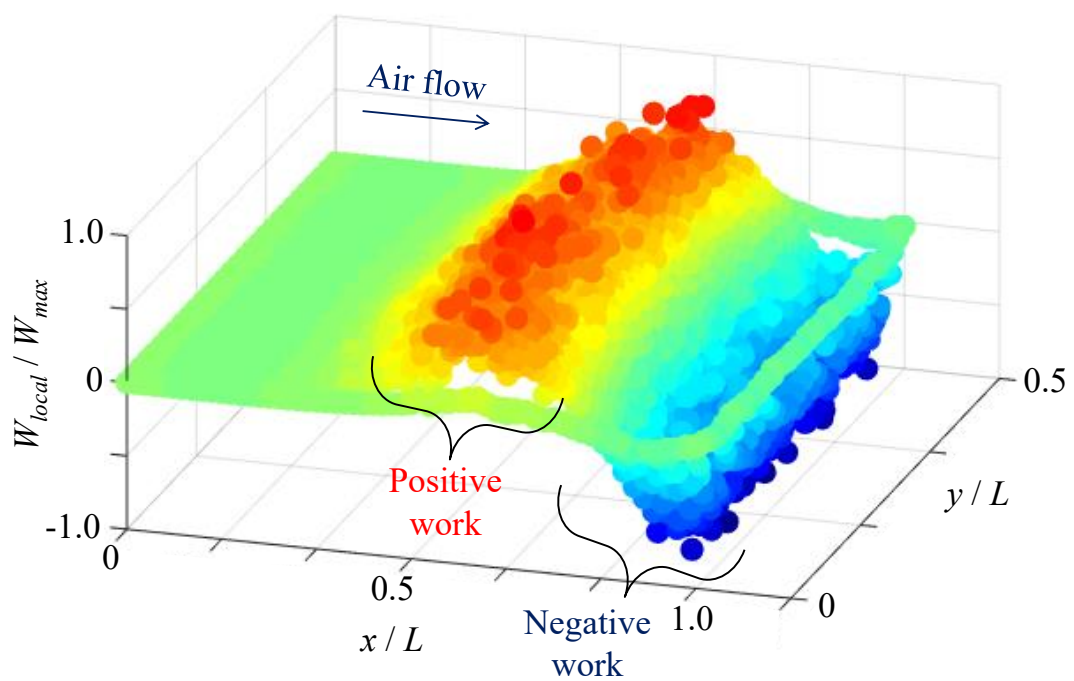
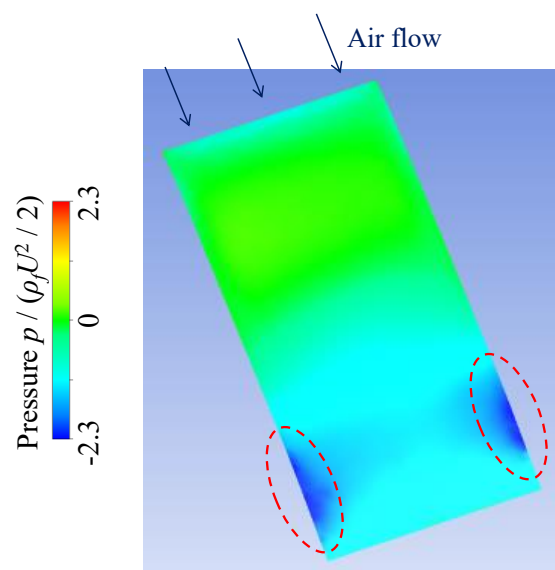


図 4.40: 平板表面上の流体力による仕事分布

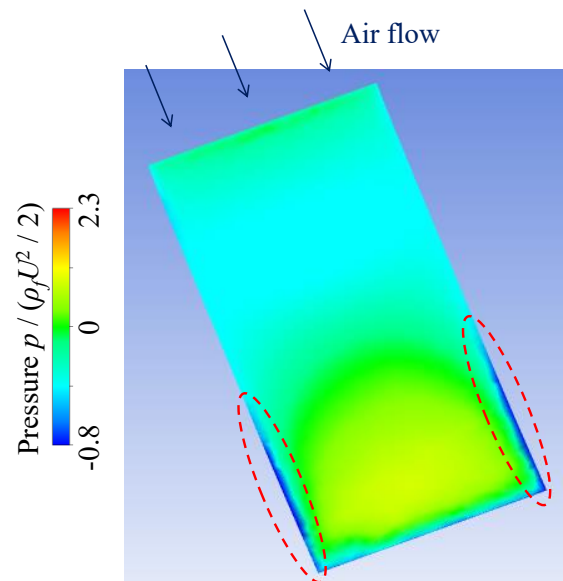
平板の側端付近の領域における流れのはく離の影響をさらに詳細に調べるために、図 4.41 平板表面上の圧力分布とパワーの関係を示す。これらの結果は、図 4.40 と同様に質量比 $\mu = 0.52$ 、無次元流速 $U^* = 11.3$ における計算結果である。図 4.41(a), (b) はそれぞれ平板の表面、裏面の圧力分布を示しており、図 4.41(c) はパワーを示している。パワーは式(4.24)を用いて計算した。

図 4.41(a) より、平板の側端付近における流れのはく離の影響により、側端付近に局所的に圧力の大きい領域が発生している。また図 4.41(b) より、平板の背面では平板の側端付近の領域に局所的に負圧が生じている。つまり、流れのはく離が平板の側端付近の圧力分布に影響を及ぼしている。ここで、図 4.41(c) よりパワーに着目すると、流れのはく離の影響が顕著に現れる平板の側端付近においてパワーが負になっている。このことから、流れのはく離に起因して生じる平板の側端付近の領域における負のパワーがフラッタ特性に影響を及ぼしていると考えられる。図 4.17~4.19 において示したように、VLM を用いた計算結果と実験結果の間に差異が生じる原因は、VLM において流れのはく離の影響が考慮されていないためであると思われる。

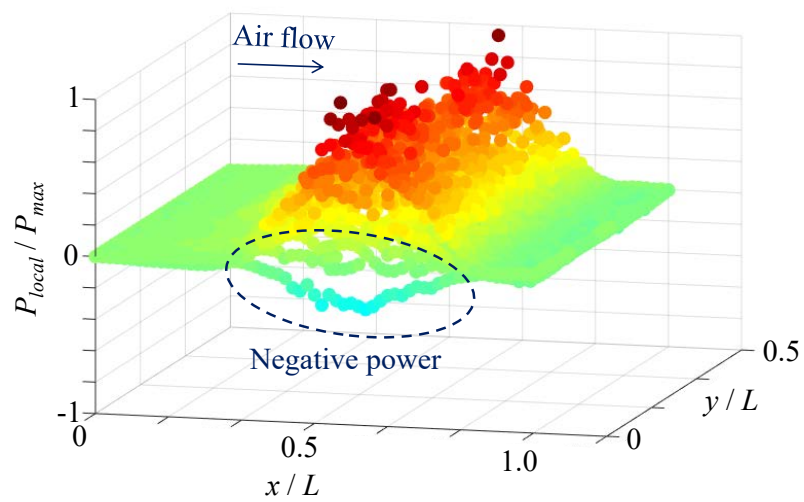
最後に、解析手法の改良法の展望について述べる。図 38 より、平板の側端付近の領域において局所的に流れのはく離が生じていることが明らかになった。この流れのはく離の影響が渦格子法においては考慮されていないために、渦格子法を用いた解析結果と実験結果でフラッタ発生時の振幅に差異が生じたと考えられる。ここで、流れのはく離の影響を考慮した渦格子法が提案されている^[69]。このはく離の影響を考慮したモデルをはく離の影響が顕著に現れる平板の側端付近の領域に対して局所的に適用することで、本研究で提案した手法の利点である計算コストの低さを保ったまま計算精度の向上が見込める。



(a) Pressure (upper surface)



(b) Pressure (lower surface)



(c) Power

図 4.41: 平板表面上の圧力分布とパワーの関係

4.15 まとめ

本章ではポテンシャル流れに基づく解析手法（VLM）を用いた非線形解析を行い，フラッタ発生時の振幅や振動数を計算し，実験結果と比較した．さらにリミットサイクル状態における平板表面上の流体力による仕事分布を求めることで，リミットサイクルの維持機構を考察した．また，CFD を用いた流体構造連成解析を行い，VLM を用いた計算結果および実験結果と比較した．本章で得られた主な結果を以下に示す．

- (1) VLM を用いた解析と FSI 解析において，それぞれの手法で十分に収束する条件で計算を行った場合，VLM を用いた解析の方が大幅に計算コストが小さい．
- (2) 平板の中流付近の領域における正の流体力仕事と，下流端付近における負の流体力仕事および構造減衰による負の仕事がバランスすることでリミットサイクルが維持される．
- (3) ポテンシャル流れに基づく解析手法（VLM）を用いて計算を行った場合，流速の増加に対してフラッタ振動数が低下し，実験結果とは逆の傾向となる．一方，流体の粘性の影響が包含された解析手法である CFD を用いた場合，実験結果と同様に，流速が増加するとフラッタ振動数は大きくなる．
- (4) ポテンシャル流れに基づく解析手法（VLM）を用いた場合，フラッタ振幅の計算結果は実験結果よりも大きくなる．一方，CFD を用いた解析では，VLM では考慮することができない平板の側端付近における流れのはく離の影響が包含されており，VLM よりも実験結果に近い計算結果が得られる．

第 5 章

流速が平板の振動特性に及ぼす影響

第 4 章までは気流中の弾性平板に励起されるフラッタの詳細な特性について述べた。ここで、第 1 章で述べたように、フラッタ流速以下の流速域においても工業用ドライヤーから吹き出される脈動を含む空気流れや、平板近くに設置された絞り部などの近接構造物によって生じるはく離渦などの加振源に起因して振動が発生する場合がある。これらの振動の特性を解明するためには、まず流速に対する振動特性の変化、すなわち平板の固有振動数と減衰比および振幅が流速に対してどのように変化するかを明らかにする必要がある。そこで、第 5 章では流速に対する平板の固有振動数と減衰比および振幅の変化を調べた結果に関して述べる。第 5 章において流速に対する振動特性の変化に関して述べた上で、6 章において気流中で空力的な加振を受ける平板の周波数応答特性について述べる。

上述のように、第 5 章では流速に対する平板の振動特性、すなわち固有振動数と減衰比および振幅の変化を調べるために、平板の上流端に強制変位加振を行った結果を示す。ここで、加振法として変位加振を用いた場合は加振力が流速に依存しないため、加振側の特性は流速によらず変化しない。このため、流速の変化に伴う平板のモーダルパラメータ（固有振動数および減衰比）の変化が応答に及ぼす影響を明らかにすることができる。線形、非線形解析モデルを用いた周波数応答解析および加振実験により、詳細な振動特性を明らかにする。具体的には、フラッタ流速以下の流速域において平板の上流端に強制変位加振を行い周波数応答曲線を求めることで、固有振動数と減衰比および振幅が流速と共にどのように変化するかを調べた結果を示す。さらに、加振時の平板表面上の流体力による仕事分布を求め、励振流体力が作用する領域を明らかにする。

5.1 気流中で強制変位加振を受ける平板の解析モデル

図 5.1 に気流中で強制変位加振を受ける弾性平板の解析モデルを示す。平板は流速 U の一様な気流中で上流端に周期的な変位加振を受けている。平板のコード、スパン、厚さ、密度の定義は前章までと同様である。図中の e_s は弾性変形による変位を表しており、 w_s は強制加振変位 a_{LE} と弾性変形による変位 e_s の総和である。また、 x 方向に重力が作用している。

平板は梁としてモデル化し、平板に作用する流体力は 3 次元ポテンシャル流れに基づく理論を用いて求める。線形解析モデルと非線形解析モデルを構築し、両者を比較する。なお、前章から引き続き Doublet - point 法と Vortex - lattice 法をそれぞれ DPM, VLM と表記する。

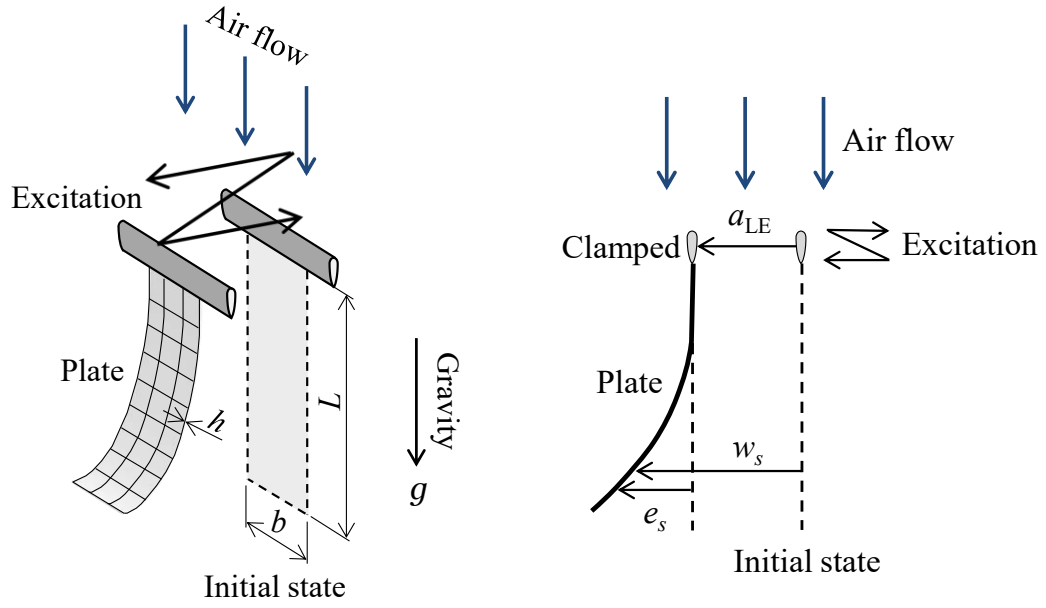


図 5.1: 気流中で強制変位加振を受ける平板の解析モデル

5.2 線形解析モデル

平板の線形運動方程式は下式で与えられる．

$$\rho_s h \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial w_s}{\partial t} + D \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \rho_s h g \frac{\partial w_s}{\partial x} - \rho_s h g (L - x) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \Delta p(x, y, t) \quad (5.1)$$

式(5.1)は，第 2 章の式(2.1)に重力項が付加された形となっている．式中の記号の詳細は記号表を参照のこと．平板の面外方向変位 w_s は加振変位 a_{LE} と弾性変形による変位 e_s の重ね合わせにより下式のように表される．

$$w_s(x, t) = a_{LE}(t) + e_s(x, t) = a_{LE}(t) + \sum_{m=1}^{N_m} \phi_m(x) q_m(t) \quad (5.2)$$

弾性変形による変位 e_s は Galerkin 法により離散化し，モード関数 ϕ_m には片持ち梁のモード関数を用いる．式(5.2)を式(5.1)に代入することで，平板の運動方程式は加振変位 a_{LE} の影響を含んだ形となる．

さらにモードの直交性を利用するために式(5.2)にモード関数 $\phi_l(x)$ を乗じ，コード方向 ($x = 0 \sim L$) およびスパン方向 ($y = 0 \sim b$) に積分すると，下式ようになる．式中の ζ_θ は構造減衰比である．

$$\begin{aligned}
& \rho_s b h \int_0^L \phi_\ell(x) dx \ddot{a}_{LE} + \rho_s b h \int_0^L (\phi_\ell(x))^2 dx \ddot{q}_\ell(t) \\
& + 2\rho_s b h \zeta_\ell \omega_\ell \int_0^L \phi_\ell(x) dx \dot{a}_{LE}(t) + 2\rho_s b h \zeta_\ell \omega_\ell \int_0^L (\phi_\ell(x))^2 dx \dot{q}_\ell(t) + \rho_s b h \omega_\ell^2 \int_0^L (\phi_\ell(x))^2 dx q_\ell(t) \\
& + \rho_s b h g \sum_{m=1}^{N_m} \int_0^L \phi_\ell(x) \frac{\partial \phi_m(x)}{\partial x} dx q_m(t) - \rho_s b h g \sum_{m=1}^{N_m} \int_0^L (L-x) \phi_\ell(x) \frac{\partial^2 \phi_m(x)}{\partial x^2} dx q_m(t) \\
& = \int_0^b \int_0^L \phi_\ell(x) \Delta p(x, y, t) dx dy
\end{aligned} \tag{5.3}$$

ここで、線形解析モデルでは、流体流れによって平板上下面に生じる圧力差 Δp は DPM^[56, 57]を用いて求める。流体力の導出過程に関しては第2章とほぼ同様であるが、流体と平板の界面における運動学的条件に加振変位の影響を考慮する必要がある。このため、加振変位を考慮すると、 i 番目の要素の吹上速度 w_{fi}^* は下式のように表される。

$$w_{fi}^* = \frac{1}{U} \dot{a}_{LE}(t) + \frac{1}{U} \sum_{r=1}^{N_m} \phi_r(x_{ui}, y_{ui}) \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N_m} \frac{\partial}{\partial x} \phi_r(x, y) \Big|_{x=x_{ui}, y=y_{ui}} q_r(t) \tag{5.4}$$

式(5.4)を用いることで、流体圧力 Δp に関しても加振変位の影響を含んだ形で下式のように表される。

$$\begin{aligned}
\Delta p_i(\xi_i, \eta_i, t) &= \frac{1}{2} \rho_f U^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} w_{fi}^* \\
&= \frac{1}{2} \rho_f U^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \left\{ \frac{1}{U} \dot{a}_{LE}(t) + \frac{1}{U} \sum_{r=1}^{N_m} \phi_r(x_{ij}, y_{ij}) \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N_m} \frac{\partial}{\partial x} \phi_r(x, y) \Big|_{x=x_{ij}, y=y_{ij}} q_r(t) \right\}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Galerkin 法によるモード近似を適用した式(5.3)を $\ell = 1 \sim N_m$ まで行列表示すると、以下のようになる。ここで、強制加振変位に関する項 ($\mathbf{M}_E \ddot{a}_{LE}$, $\mathbf{C}_E \dot{a}_{LE}$) は右辺に移項した。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_d \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{K}_g \mathbf{q} = \frac{1}{2} \rho_f U \mathbf{Q}_E \dot{a}_{LE} + \frac{1}{2} \rho_f U^2 \mathbf{Q} \mathbf{q} - \mathbf{M}_E \ddot{a}_{LE} - \mathbf{C}_E \dot{a}_{LE} \tag{5.6}$$

式(5.6)中の $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}_d$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{Q}$ は第2章の式(2.18)～(2.20)および(2.22)に示したものと同様である。 $\mathbf{M}_E$, $\mathbf{C}_E$, $\mathbf{Q}_E$ は強制加振変位に起因する慣性項、減衰項、流体力項であり、下式で与えられる。ここで、厳密には構造減衰比 ζ はモードによって異なる値を取るが、構造減衰の周波数応答への影響を定性的に調べるために、本章ではモードによらず一定の値とした ($\zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_{N_m}$)。

$$\mathbf{M}_E = \begin{bmatrix} \rho_s b h \int_0^L \phi_1(x) dx & \cdots & \rho_s b h \int_0^L \phi_{N_m}(x) dx \end{bmatrix}^T \quad (5.7)$$

$$\mathbf{C}_E = \begin{bmatrix} 2\rho_s b h \zeta_1 \omega_1 \int_0^L \phi_1(x) dx & \cdots & 2\rho_s b h \zeta_{N_m} \omega_{N_m} \int_0^L \phi_{N_m}(x) dx \end{bmatrix}^T \quad (5.8)$$

$$\mathbf{Q}_E = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} s_{ei} \phi_1(\xi_i, \eta_i) & \cdots & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} s_{ei} \phi_{N_m}(\xi_i, \eta_i) \end{bmatrix}^T \quad (5.9)$$

また、重力項 $\mathbf{K}_g$ は下式で与えられる.

$$\mathbf{K}_g = \rho_s b h g \begin{bmatrix} \int_0^L \phi_1(x) \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} dx - \int_0^L (L-x) \phi_1(x) \frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} dx \\ \vdots \\ \int_0^L \phi_{N_m}(x) \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} dx - \int_0^L (L-x) \phi_{N_m}(x) \frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} dx \\ \cdots \quad \int_0^L \phi_1(x) \frac{\partial \phi_{N_m}(x)}{\partial x} dx - \int_0^L (L-x) \phi_1(x) \frac{\partial^2 \phi_{N_m}(x)}{\partial x^2} dx \\ \vdots \\ \cdots \quad \int_0^L \phi_{N_m}(x) \frac{\partial \phi_{N_m}(x)}{\partial x} dx - \int_0^L (L-x) \phi_{N_m}(x) \frac{\partial^2 \phi_{N_m}(x)}{\partial x^2} dx \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

式(5.6)を状態方程式表示すると、以下のようになる. 式中の $\mathbf{x}$ は状態変数ベクトルである.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1} \left(\frac{1}{2} \rho_f U^2 \mathbf{Q} - \mathbf{K} \right) & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_E \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \ddot{a}_{LE} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \left(\frac{1}{2} \rho_f U \mathbf{Q}_E - \mathbf{D}_E \right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \dot{a}_{LE} \quad (5.11)$$

また、出力方程式を以下のように定義する.

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \quad (5.12)$$

式(5.11), (5.12)をラプラス変換すると、以下のようになる.

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = (\mathbf{B}s^2 + \mathbf{C}s)A_{LE}(s) \quad (5.13)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{X}(s) \quad (5.14)$$

式(5.13), (5.14)中の s はラプラス変数を表している.

状態方程式および出力方程式より，加振変位から各モードのモード座標への伝達関数 $\mathbf{G}(s)$ が下式のように得られる．

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{X}(s)}{A_{LE}(s)} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{B}s^2 + \mathbf{C}s) = [G_1(s) \quad \cdots \quad G_{N_m}(s) \quad \dot{G}_1(s) \quad \cdots \quad \dot{G}_{N_m}(s)]^T \quad (5.15)$$

ここで，調和振動を仮定しラプラス変数 s を $i\omega$ に置き換えると，加振変位に対する平板の変位の振幅比は以下の式を用いて求めることができる．

$$\left| \frac{w_s(x_o)}{A_{LE}} \right| = \left| 1 + \sum_{m=1}^{N_m} \phi_m(x_o) G_m(i\omega) \right| \quad (5.16)$$

x_o は変位の観測点の座標を表している．式(5.16)を用いて，流速と加振振動数を変化させて周波数応答解析を行う．

5.3 非線形解析モデル

非線形解析においては，第 4 章で示した非線形フラッタ解析モデルに対して強制変位加振の影響を考慮することで求める．このため，基本的には式中の記号の定義は第 4 章と同様である．式(5.2)を第 4 章の式(4.1)に代入し，両辺にモード関数 $\phi_\ell(c)$ を乗じさらにコード方向およびスパン方向に積分すると，下式のように強制加振変位 a_{LE} の影響が包含された非線形方程式が得られる．ただし，非線形解析モデルにおいては 5.2 節に示した線形解析モデルとは異なり，平板の変形に沿った曲線座標系 c を用いている．

$$\begin{aligned} & M_E \ddot{a}_{LE} + M_L b \ddot{q}_\ell + \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} M_{NL} b(q_n q_o \ddot{q}_p + q_n \dot{q}_o \dot{q}_p) \\ & + K_L b q_\ell + \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} K_{NL} b(q_n q_o q_p) \\ & + \sum_{m=1}^{N_m} G_{L1} b q_\ell - \sum_{m=1}^{N_m} G_{L2} b q_\ell + \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} G_{NL1} b q_n q_o q_p - \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} G_{NL2} b q_n q_o q_p \\ & = f_{E\ell} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$f_{E\ell} \equiv \sum_{i=1}^N \phi_\ell(c_{vei}) \left(f_{ELi} - \frac{\partial w_s}{\partial c} f_{EDi} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \int_c^L f_{EDi} dc \right) s_{ei} \quad (5.18)$$

式(5.17)中の M_E は線形解析モデルにおける式(5.7)と同一である．また， $M_L, M_{NL}, K_L, K_{NL}, G_{L1}$,

G_{L2} , G_{NL1} , G_{NL2} は第 4 章の式(4.21)に示した通りである．ここで，右辺の流体力項においても強制変位加振の影響が含まれているため，第 4 章のフラッタ解析モデルと区別するために， $f_{E\ell}$ と表記している．

強制変位加振を受ける場合，運動学的条件において平板の弾性変形に加えて強制加振変位の影響を考慮する必要がある．このため，強制加振変位の影響を考慮した i 番目の要素における運動学的条件は下式のように表される．

$$\begin{aligned} U \sin \alpha_i + \sum_{j=1}^N (u_{ij} \sin \alpha_i + w_{ij} \cos \alpha_i) + u_{wi} \sin \alpha_i + w_{wi} \cos \alpha_i \\ = \dot{h}_{xi} \sin \alpha_i + (\dot{e}_{si} + \dot{a}_{LE}) \cos \alpha_i \end{aligned} \quad (5.19)$$

式(5.19)をマトリクス表示すると，下式のようになる．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Nj} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{RHS}_{E1} \\ \text{RHS}_{E2} \\ \vdots \\ \text{RHS}_{Ei} \\ \vdots \\ \text{RHS}_{EN} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

式(5.20)中の a_{ij} および RHS_{Ei} は下式で与えられる．ここで，強制加振変位の影響は RHS_E に含まれている．

$$a_{ij} = \frac{u_{ij}}{\Gamma_j} \sin \alpha_i + \frac{w_{ij}}{\Gamma_j} \cos \alpha_i \quad (5.21)$$

$$\text{RHS}_{Ei} = (\dot{h}_{xi} - U - u_{iw}) \sin \alpha_i + (\dot{e}_{si} + \dot{a}_{LE} - w_{iw}) \cos \alpha_i \quad (5.22)$$

流体流れにより生じる平板の i 番目の要素の上下面の圧力差 Δp_i は，第 4 章と同様に式(5.23)に示す非定常ベルヌーイの式を用いて求める．ここで，非定常ベルヌーイの式においても強制加振変位の影響が考慮されていることに注意されたい．

$$\Delta p_{Ei} = \rho_f \left[\left\{ (U + u_w - \dot{h}_x) \cos \alpha_i + (\dot{e}_s + \dot{a}_{LE} - w_w) \sin \alpha_i \right\} \frac{\Gamma_i - \Gamma_{i-1}}{L_e} + v_w \frac{\Gamma_i - \Gamma_{i-N_s}}{b_e} + \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_i \right] \quad (5.23)$$

以上より，式(5.18)中の f_{EL} , f_{ED} は下式で表される．

$$f_{ELi} = \Delta p_{Ei} \cos \alpha_i, \quad f_{EDi} = \Delta p_{Ei} \sin \alpha_i \quad (5.24)$$

計算は第4章と同じく Houbolt 法により式(5.17)のモード座標を差分近似し，時間領域で計算を行う．計算は過渡応答の影響がなくなるまで十分に長い時間行う．加振振動数を変化させて平板の振動変位を計算し，周波数応答曲線を求める．

5.4 計算パラメータ

表 5.1, 5.2 に平板の物性値と寸法を示す．また，表 5.3 に計算パラメータを示す．平板は polyethylene terephthalate（以下，PET と表記する）製とした．モード近似の打切次数は，線形解析，非線形解析共に 4 とした．モードの打切次数は計算結果が十分に収束するまで増加させて計算を行った．ここで，減衰比はパラメータとして変化させて周波数応答への影響を調べた．その結果は 5.8 節に示す．加振振動数は 1.0～12.0 Hz の範囲で変化させた．また，加振振幅を変化させて，周波数応答特性への影響を調べた．平板の下流端付近の位置における変位を計算し，加振変位との振幅比を求めた．VLM における計算条件を表 5.4 にまとめて示す．

表 5.5 に DPM と VLM における分割数を示す．これらの分割数は計算結果が十分に収束するまで増加させて決定した値である．ここで，DPM と VLM では計算結果が十分に収束する分割数が異なることに注意されたい．

表 5.1: 平板の物性値

Material	Young's Modulus E [GPa]	Density ρ_s [kg/m ³]	Poisson's ratio ν
PET	3.2	1380	0.4

表 5.2: 平板の寸法

Chord L [mm]	Span b [mm]	Thickness h [mm]
200	60	0.2

表 5.3: 計算パラメータ

Fluid density ρ_f [kg/m ³]	1.2	Gravity acceleration g [m ² /s]	9.81
Excitation frequency f_e [Hz]	1.0 - 12.0	Structural damping ratio ζ	0, 0.003, 0.01
Observation point of plate displacement (distance from leading edge) x_o [mm]	180	Number of modes in Galerkin decompositions N_m	4
Excitation amplitude $ a_{LE} $ [mm]	0.5, 1.0, 2.0, 4.0		

表 5.4: VLM における計算条件

Normalized wake length L_v / L	1.5
Normalized initial core radius ε_0 / L	0.2
Time step Δt [s]	4.0×10^{-4}
Dimensionless time step Δt^*	9.6×10^{-4}
Coefficient of distance between vortex element and medium λ	0.5

表 5.5: DPM および VLM における分割数

Calculation Method	n_x	n_y
DPM	26	19
VLM	81	11

5.5 加振実験の概要

図 5.2, 5.3 に加振機構の概要とテストセクションの写真を示す。スライダクランク機構を用いた加振装置により、縦型風洞内に設置された平板の上流端に周期的な変位加振を与えた。平板の支持部は流れの乱れの影響を小さくするために翼型に加工した。スライダクランク機構はリニアガイド、ロッド、モータから構成されている。モータに接続されている円盤にロッドが偏心して取り付けられており、円盤の回転運動が並進運動に変換されて平板の上流端に入力される。モータの回転数を変化させることで、加振振動数を変化させた。また、加振振幅を変化させ、周波数応答特性への影響を調べた。

フラッタ流速以下の流速域において、流速および加振振動数を変化させて実験を行った。表 5.6 に測定条件を示す。平板の上流端と下流端付近の変位を 2 台のレーザ変位計により測定し、加振変位に対する平板の変位の振幅比を求めた。さらに、位相平均法を用いて平板の振動モードを測定した。なお、実験パラメータは表 5.1, 5.2 に示した値に合わせて設定した。

表 5.6: 測定条件

Sampling frequency [Hz]	1000
Temporal resolution [s]	0.001
Data number	10000
Data number used in FFT analysis	8192
Frequency resolution [Hz]	0.122
Minimum measurable value of excitation displacement [mm]	0.00488
Minimum measurable value of plate displacement [mm]	0.0488
Measurable range of excitation displacement [mm]	± 10
Measurable range of plate displacement [mm]	± 100

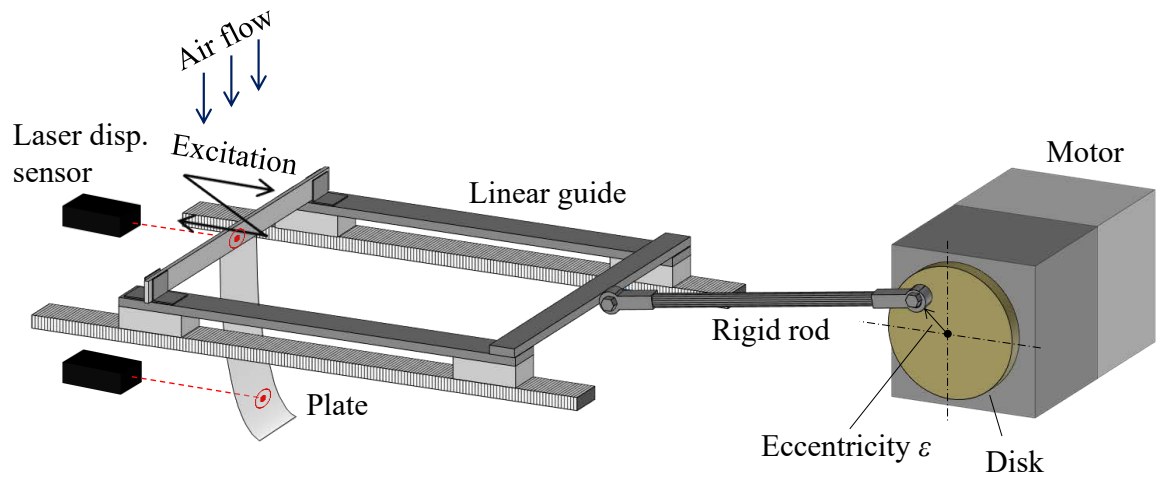


図 5.2: 加振機構の概要

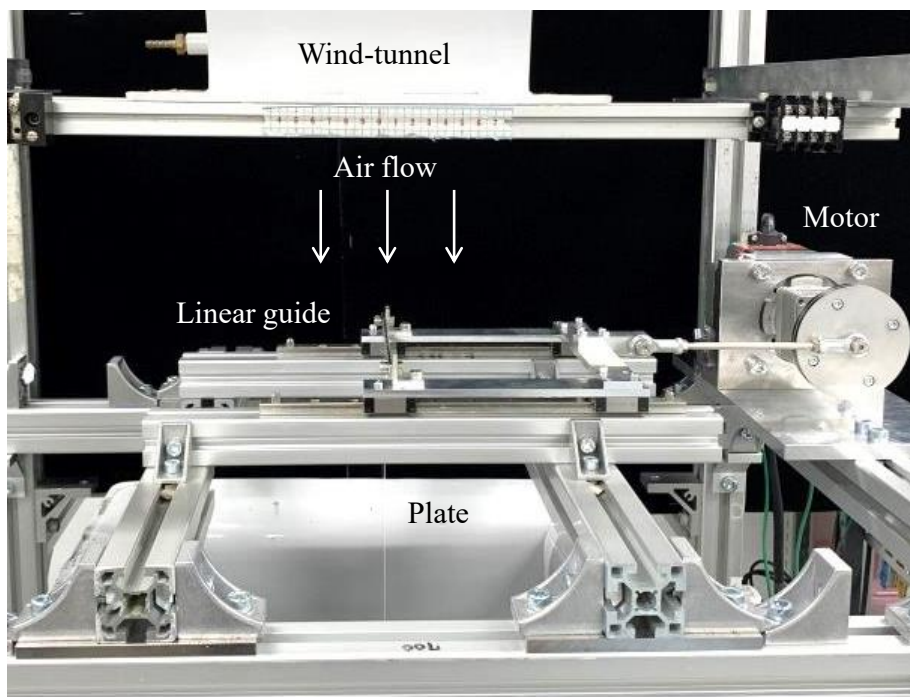


図 5.3: テストセクションの写真

5.6 線形解析と非線形解析結果および実験結果の比較

強制加振の予備解析および実験として、フラッタ解析および実験を行い、フラッタ流速を求めた。その結果、フラッタ流速は線形解析と非線形解析結果および実験結果で概ね良く一致した。詳細は付録 G を参照のこと。これ以降はフラッタ流速以下の流速域において加振実験および解析を行った結果を示す。また、流速はフラッタ流速 U_f で基準化して整理する。

図 5.4～5.6 に線形解析結果を非線形解析結果および実験結果と比較した結果を示す。図 5.4～5.6 はそれぞれフラッタ流速を用いて基準化された無次元流速 $U_N = U/U_f = 0.3, 0.5, 0.9$ の場合の結果である。これらの結果は加振振幅が $a_{LE} = 0.5\text{mm}$ の場合の結果である。ここで、解析においては構造減衰の影響を考慮せずに計算を行った。図中の(a), (b), (c)はそれぞれ線形解析結果、非線形解析結果、実験結果に対応している。

図 5.4～5.6 より、流速が増加するにつれて 2 次共振ピークにおける振幅が 1 次共振ピークにおける振幅よりも大きくなる傾向が線形解析結果、非線形解析結果、実験結果全てにおいて一致している。図 5.4～5.6 (a), (b)より、線形解析結果と非線形解析結果を比較すると、流速によらず振幅は概ね良く一致している。また、解析結果を実験結果と比較すると、流速がフラッタ流速に対して小さい場合 ($U_N = 0.3, 0.5$) は構造減衰の影響を考慮していないために線形、非線形解析結果は実験結果よりも少し大きな振幅をとる。構造減衰の振幅への影響に関しては 5.7 節において述べる。一方、流速がフラッタ流速に近い場合 ($U_N = 0.95$)、振幅は線形解析結果、非線形解析結果、実験結果の全てにおいて概ね良く一致している。

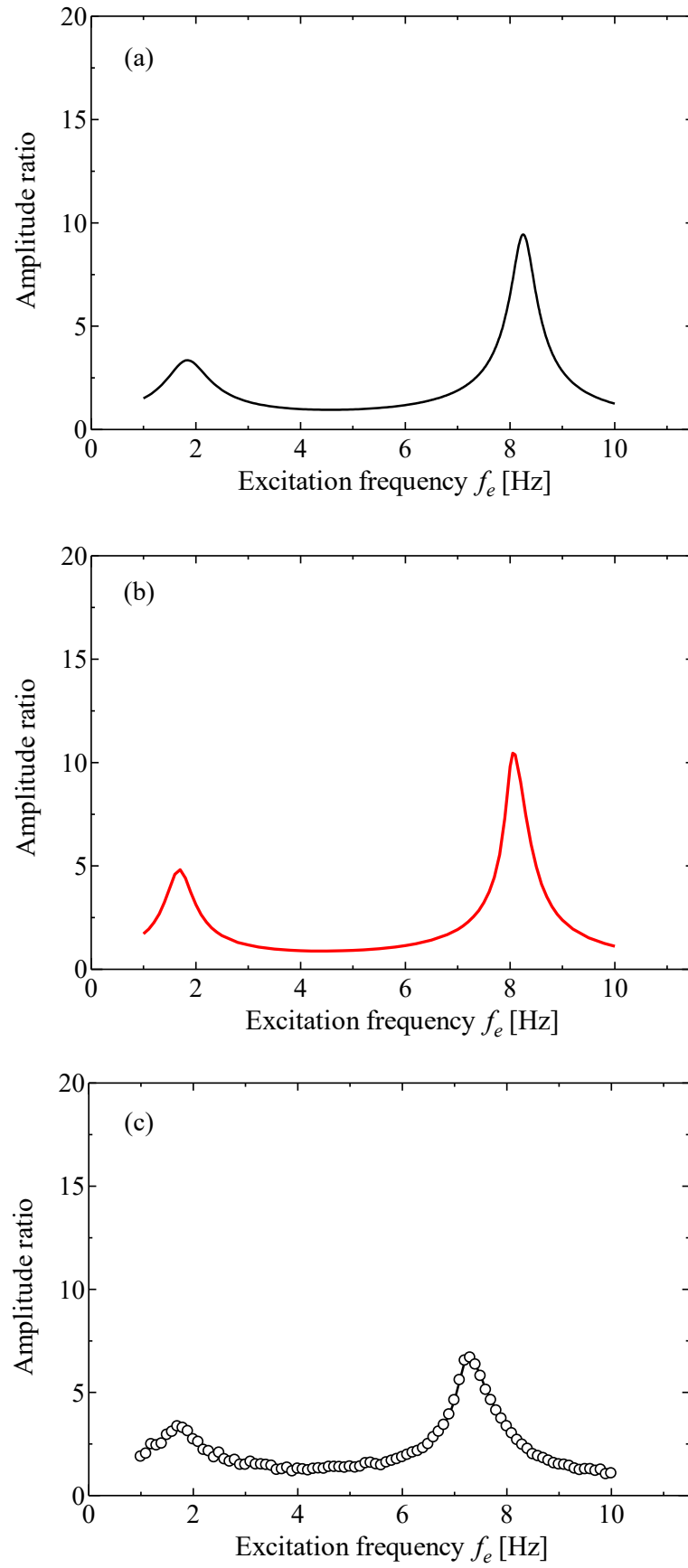


図 5.4: 周波数応答の(a) 線形解析結果, (b) 非線形解析結果, (c) 実験結果 (無次元流速 $U_N = 0.3$)

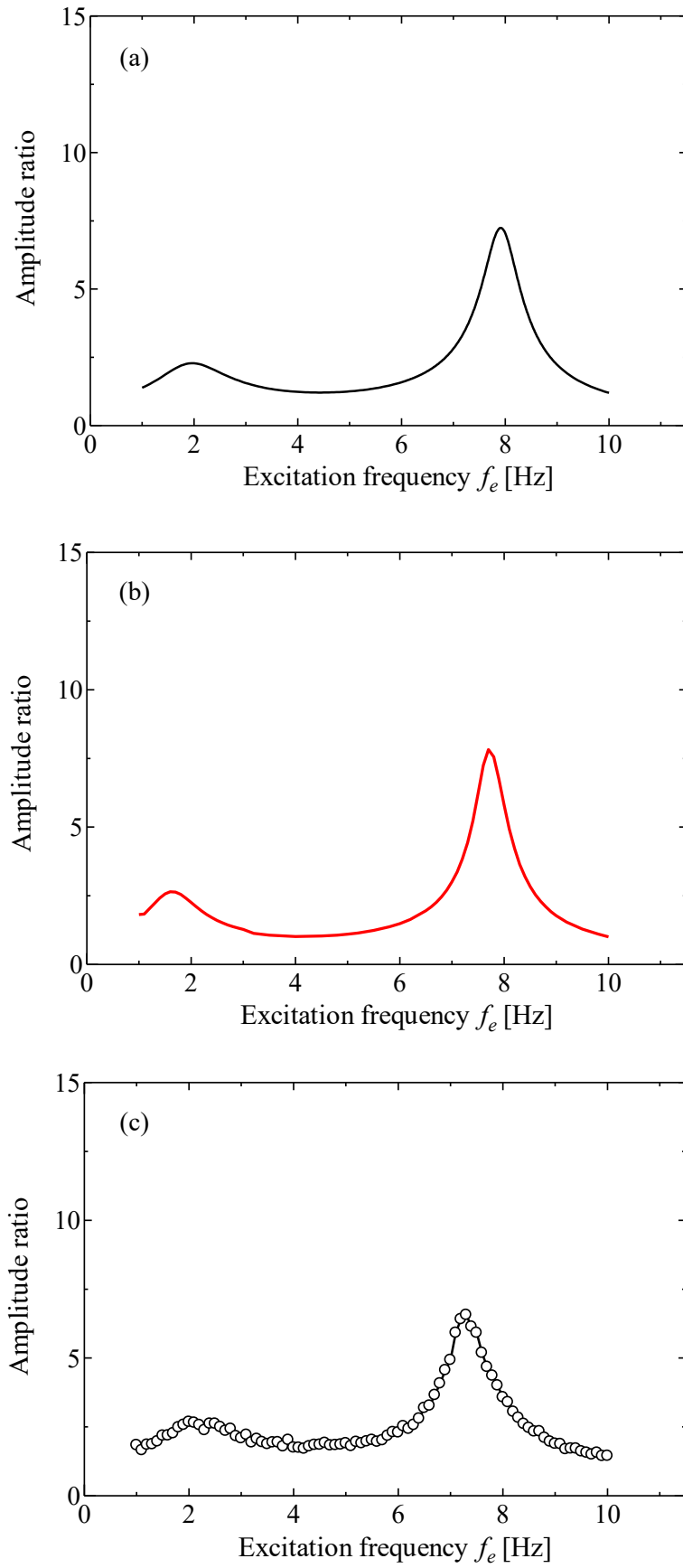


図 5.5: 周波数応答の(a) 線形解析結果, (b) 非線形解析結果, (c) 実験結果 (無次元流速 $U_N = 0.5$)

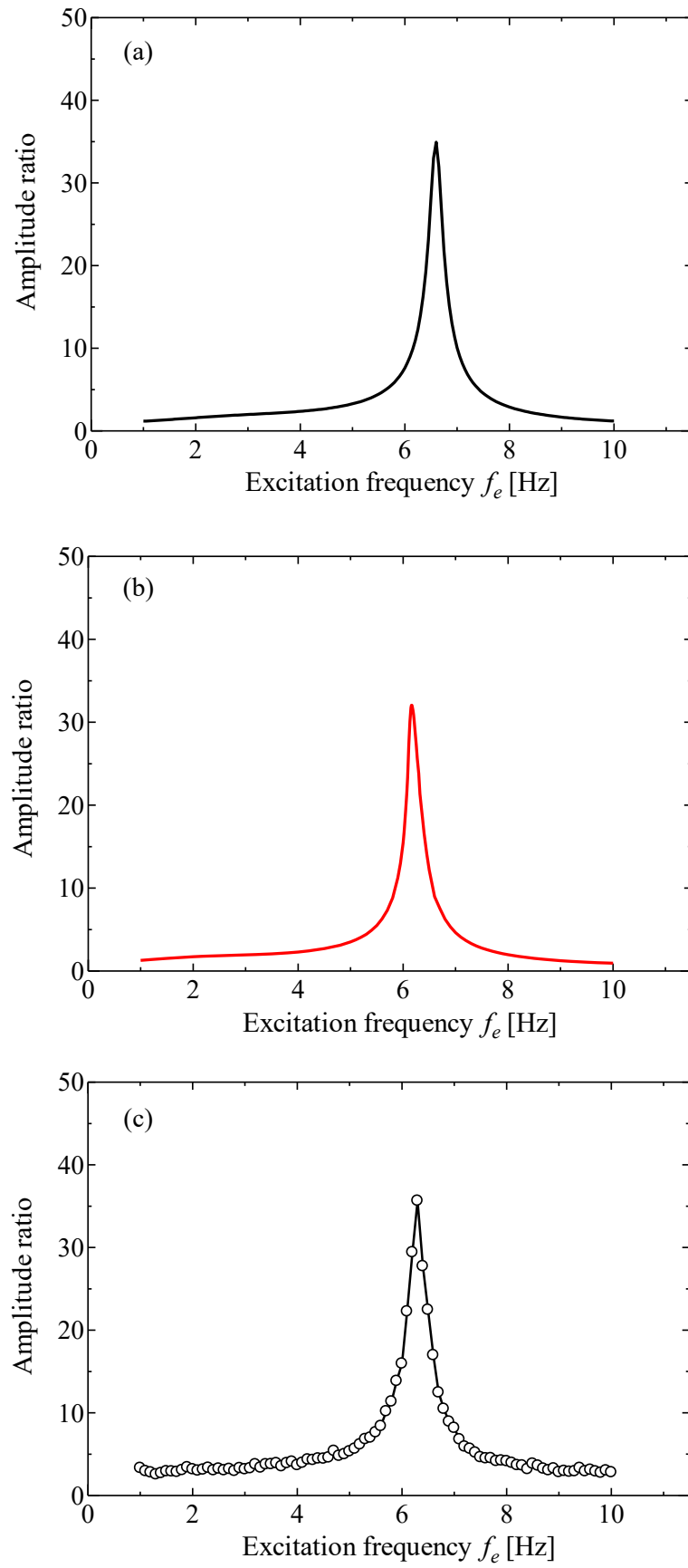


図 5.6: 周波数応答の(a) 線形解析結果, (b) 非線形解析結果, (c) 実験結果 (無次元流速 $U_N = 0.95$)

図5.7, 5.8に加振振幅を変化させた場合の周波数応答の実験結果および解析結果を示す。ここでは、振幅の大きい2次共振ピークの結果に焦点を当てて示す。図5.7, 5.8はそれぞれ無次元流速 $U_N = 0.3, 0.9$ の場合の結果である。なお、線形解析では加振振幅の影響を議論することができないため、ここでは実験結果と非線形解析を示す。解析では構造減衰の影響を考慮していない。また、流体摩擦係数は気流中で静止したPET製の平板の値である $C_f = 0.01$ ^[53]を用いた。

図5.7より、フラッタ流速に対して流速が低い場合 ($U_N = 0.3$) は実験、解析共に加振振幅が大きくなると共振ピークが低振動数側に变化しており、漸軟型の特性を示す。一方、図5.8より、フラッタ流速に近い流速 ($U_N = 0.9$) においては、実験では加振振幅が大きくなると漸硬型の特性を示すのに対し、解析では漸軟型の特性を示しており、実験と解析で傾向が一致しない。ここで、Tangら^[69]は主流の流入角度が周期的に変動する流れの中で支持された平板を対象に、2次元離散渦法（ポテンシャル流れに基づく解析手法）を用いた周波数応答解析を行った。その結果、フラッタ流速に近い流速 ($U_N = 0.9$) では、本解析結果と同様に2次共振ピークが漸軟型の特性を示すことが明らかになった。

フラッタ流速に近い流速における周波数応答特性の差異の原因と思われる因子として、流れのはく離と流体摩擦の影響が考えられる。第4章のCFD解析で示したように、気流中で平板が大振幅で振動すると、平板の側端付近で流れのはく離が生じる。しかしながら、VLMにおいてははく離の影響は考慮されていない。このため、はく離がフラッタ流速に近い流速における周波数応答特性に影響する可能性がある。また、解析において静止時の平板の流体摩擦係数を用いているため、流体摩擦（流体の粘性）の影響が精緻に考慮されていないこともフラッタ流速に近い流速における周波数応答特性の差異の原因の一つであると思われる。このため、より精緻な解析を行うためには流れの粘性やはく離の影響を考慮した解析が必要であると考えられる。

図 5.9 に加振振幅に対する平板の振幅の変化を示す。図中には線形および非線形解析結果と実験結果をあわせて示す。この結果は無次元流速 $U_N = 0.9$ における結果である。図より、加振振幅が比較的小さい 1 mm 程度までは線形および非線形解析結果は実験結果と良く一致する。一方、加振振幅が大きくなると線形および非線形解析結果と実験結果との差異は大きくなる。

以上より、加振振幅が小さい場合 ($a_{LE} = 0.5\text{mm}$)、線形解析結果における振幅は非線形解析結果および実験結果と概ね良く一致することが明らかになった。このため、これ以降は線形解析モデルを用いて流速の変化に伴い固有振動数、減衰比、振幅などの振動特性がどのように変化するかを詳細に調べる

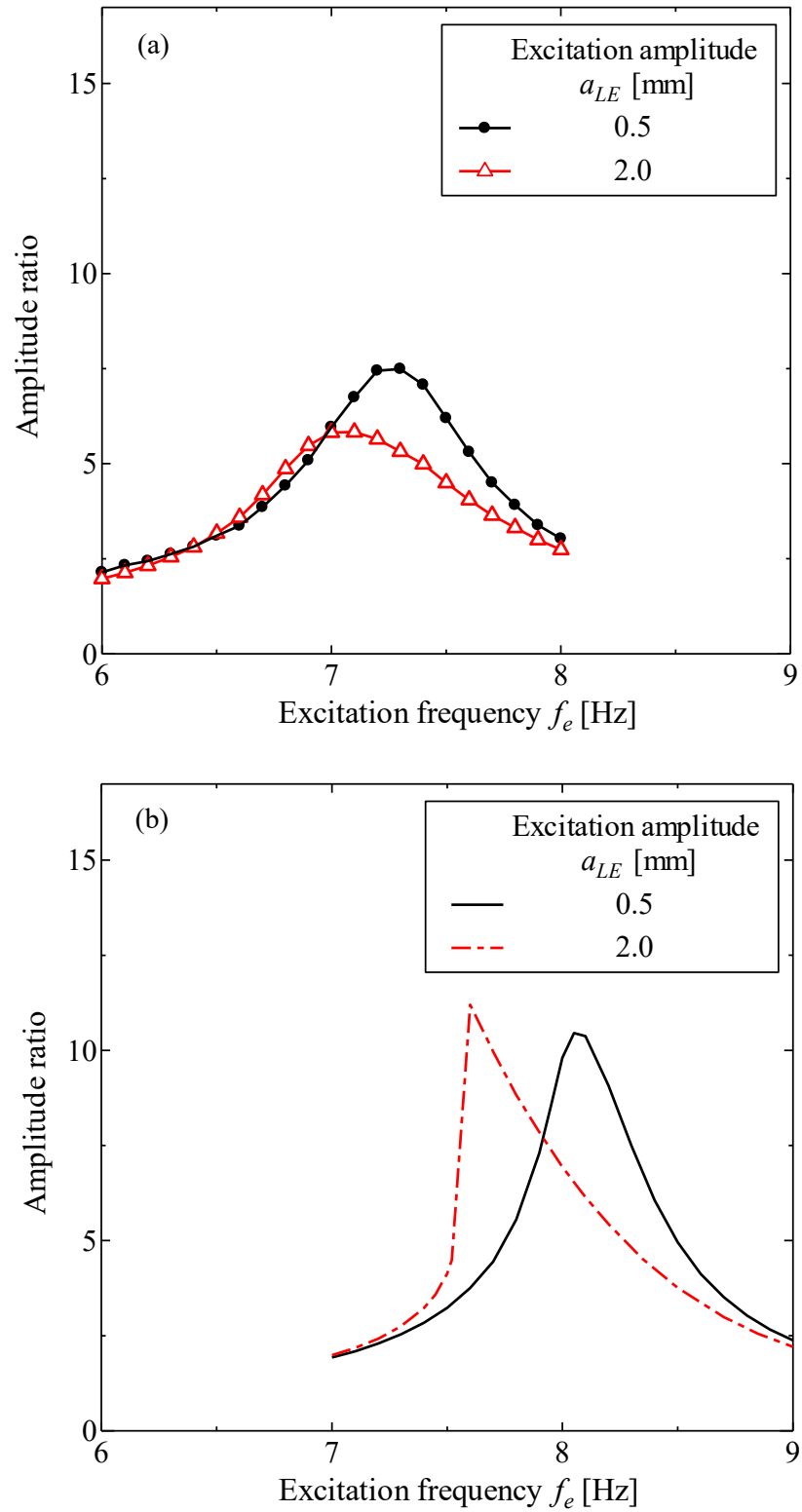


図 5.7: 加振振幅が周波数応答特性に及ぼす影響: (a) 実験結果, (b) 非線形解析結果 ($U_N = 0.3$)

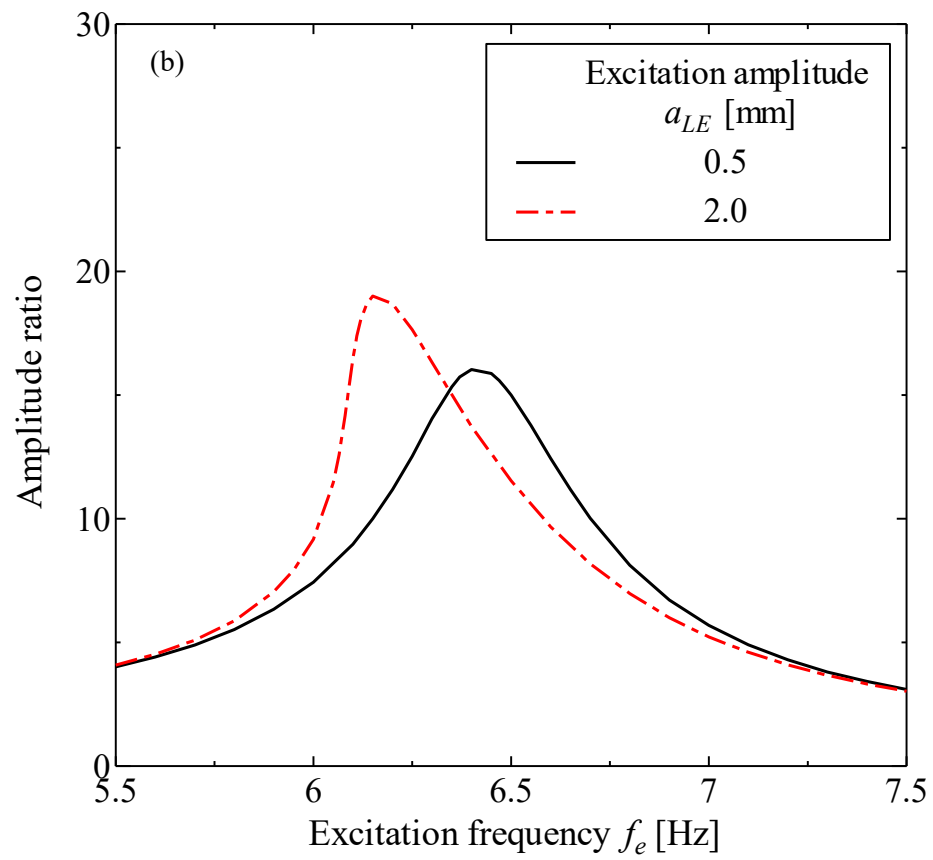
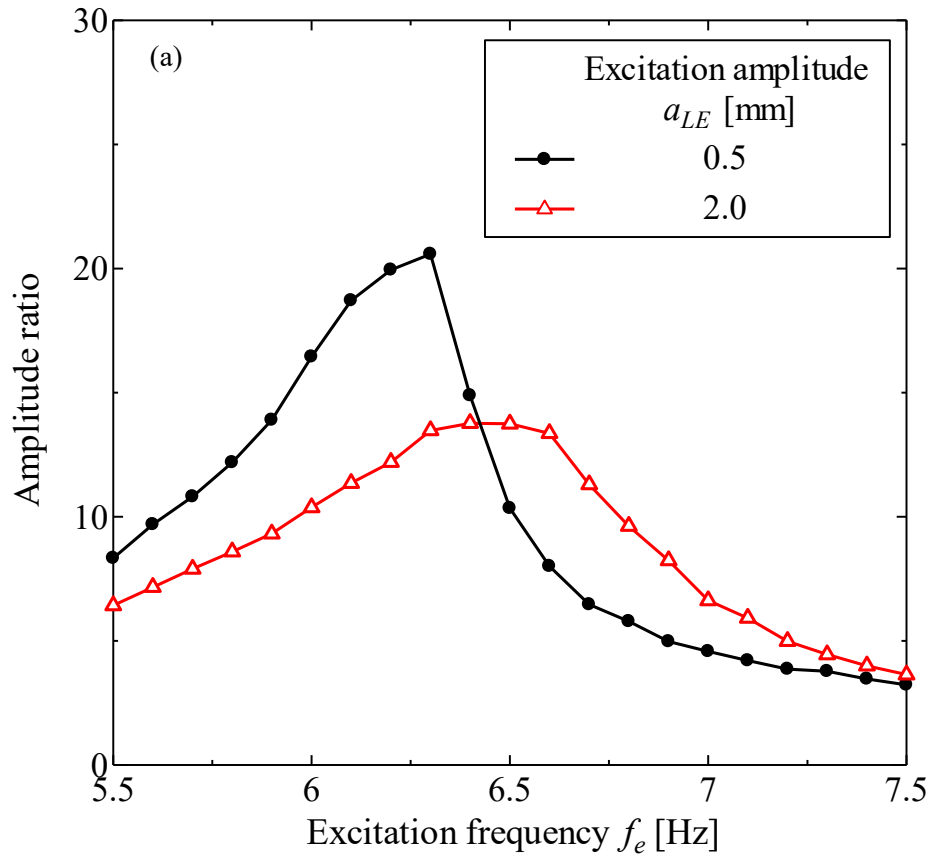


図 5.8: 加振振幅が周波数応答特性に及ぼす影響: (a) 実験結果, (b) 非線形解析結果 ($U_N = 0.9$)

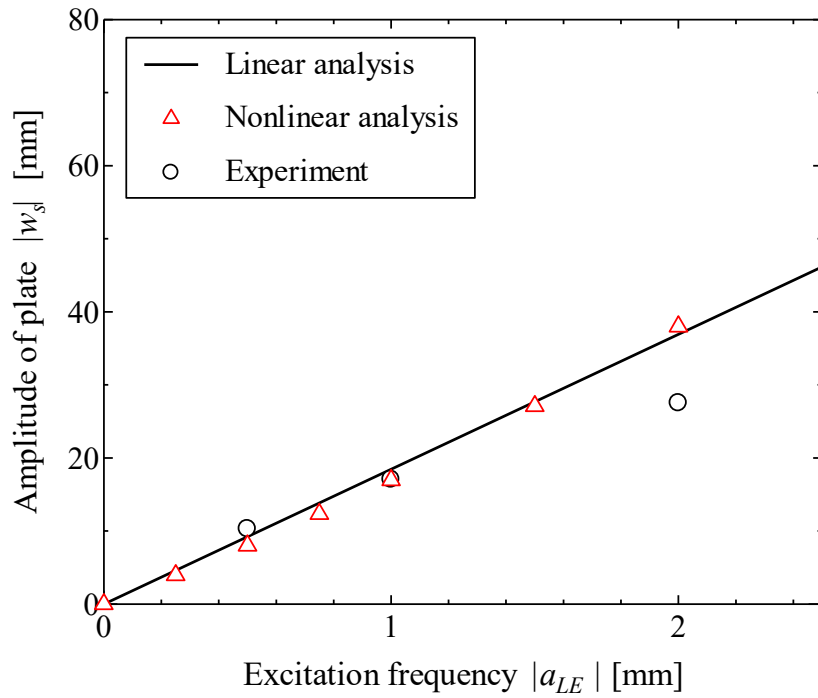
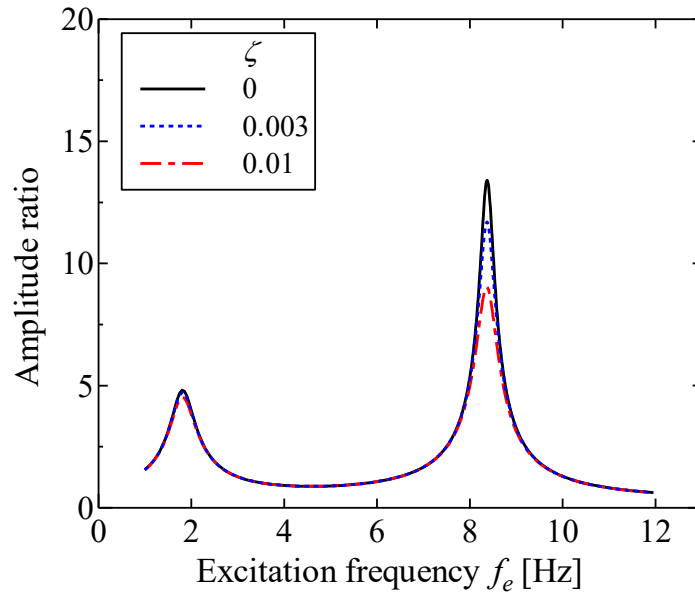


図 5.9: 加振振幅に対する平板の振幅の変化 ($U_N = 0.9$)

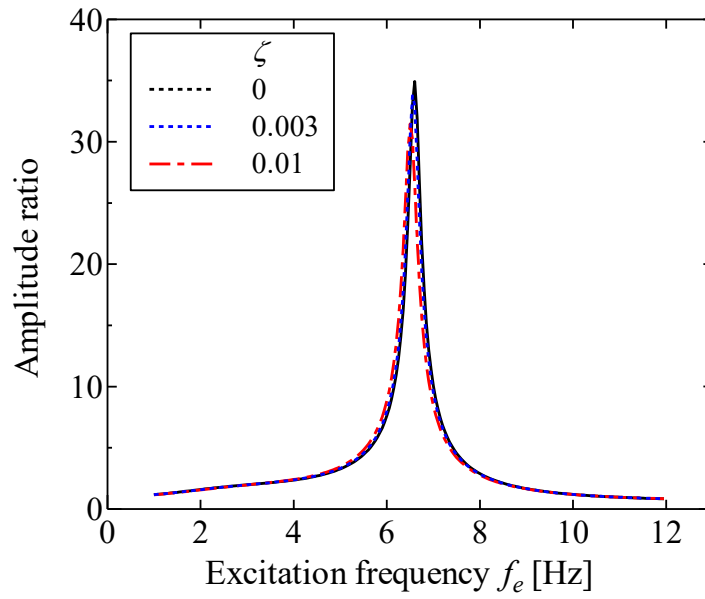
5.7 流速に対する周波数応答特性の変化

構造減衰の周波数応答への影響を調べるために、図 5.10 に構造減衰比を $\zeta = 0, 0.003, 0.01$ と変化させた場合の周波数応答の計算結果を示す。図 5.10(a), (b) はそれぞれ無次元流速 $U_N = 0.2, 0.95$ の場合の結果である。ここで、流速は各減衰比におけるフラッタ流速を用いて基準化した。

図 5.10(b) より、流速がフラッタ流速に近い場合は減衰比が振幅比に及ぼす影響は小さく、加振振動数によらず振幅比はほとんど変化していない。一方、図 5.10(a) より、流速がフラッタ流速に対して小さい場合は特に 2 次共振ピークにおいて減衰比の影響が大きく、減衰比 $\zeta = 0$ と 0.01 の場合を比較すると約 50% 振幅比が減少する。このメカニズムに関しては、5.9 節において流体力仕事を付加質量、付加減衰、付加剛性に起因する成分に分離することで詳細に考察する。



(a) $U_N = U / U_f = 0.2$



(b) $U_N = U / U_f = 0.95$

図 5.10: 流速に対する周波数応答の解析結果（構造減衰比変化）

図 5.11, 5.12 に流速に対する周波数応答を示す．図の横軸は加振振動数，縦軸は振幅比，奥行き軸はフラッタ流速で基準化した流速を表している．図 5.11, 5.12 はそれぞれ実験結果と解析結果である．ここでは構造減衰比 $\zeta = 0, 0.01$ として計算を行った．

図 5.11, 5.12 より，実験結果，解析結果共に 1.0 ～ 12.0 Hz の加振振動数の範囲において 2 つの共振ピークが存在する．1 次共振ピークの振幅は，流速が増加すると単調に減少する．ま

た、2次共振ピークの振幅は流速が増加すると $U_N = 0.5$ 程度までは減少し、さらに高流速になると増加に転じる。ここで、フラッタ流速に近い流速域において、2次共振ピークの振幅は1次共振ピークの振幅に対して著しく大きくなる。ここで、構造減衰の影響に着目すると、図 5.12(a), (b)より、フラッタ流速に対して小さい流速において構造減衰の影響による振幅の減少が見られるが、流速に対する振幅の変化の傾向は構造減衰比によって変化しないことがわかる。

図 5.13 に流速に対する共振振動数の変化を示す。これらは図 5.11, 5.12 における共振ピークの振動数をまとめた結果である。解析では、構造減衰比によって共振振動数はほとんど変化しないため、 $\zeta = 0$ の場合の結果を示す。また、流速が小さい領域では DPM における核関数の計算が発散するため、 $U_N = 0.15$ 以上の流速における結果を示している。実験、解析共に1次共振振動数は流速の増加と共に大きくなっており、2次共振振動数は流速の増加と共に小さくなっている。

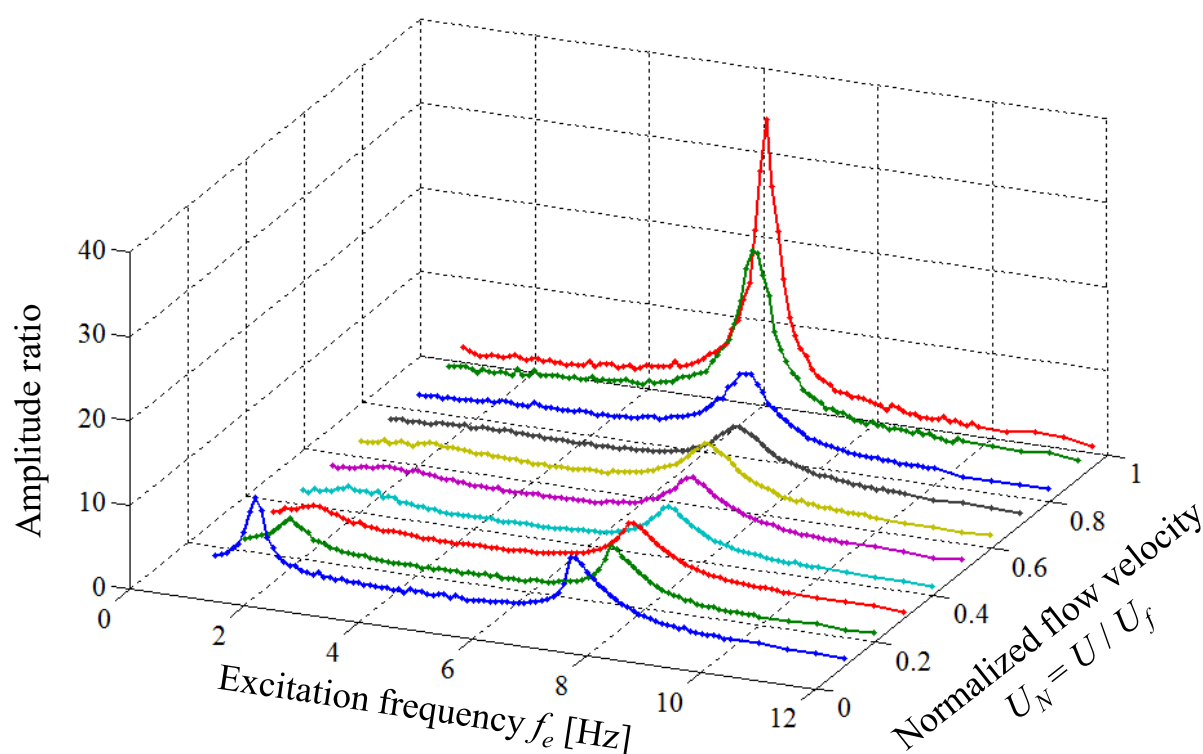


図 5.11: 流速に対する周波数応答（実験結果）

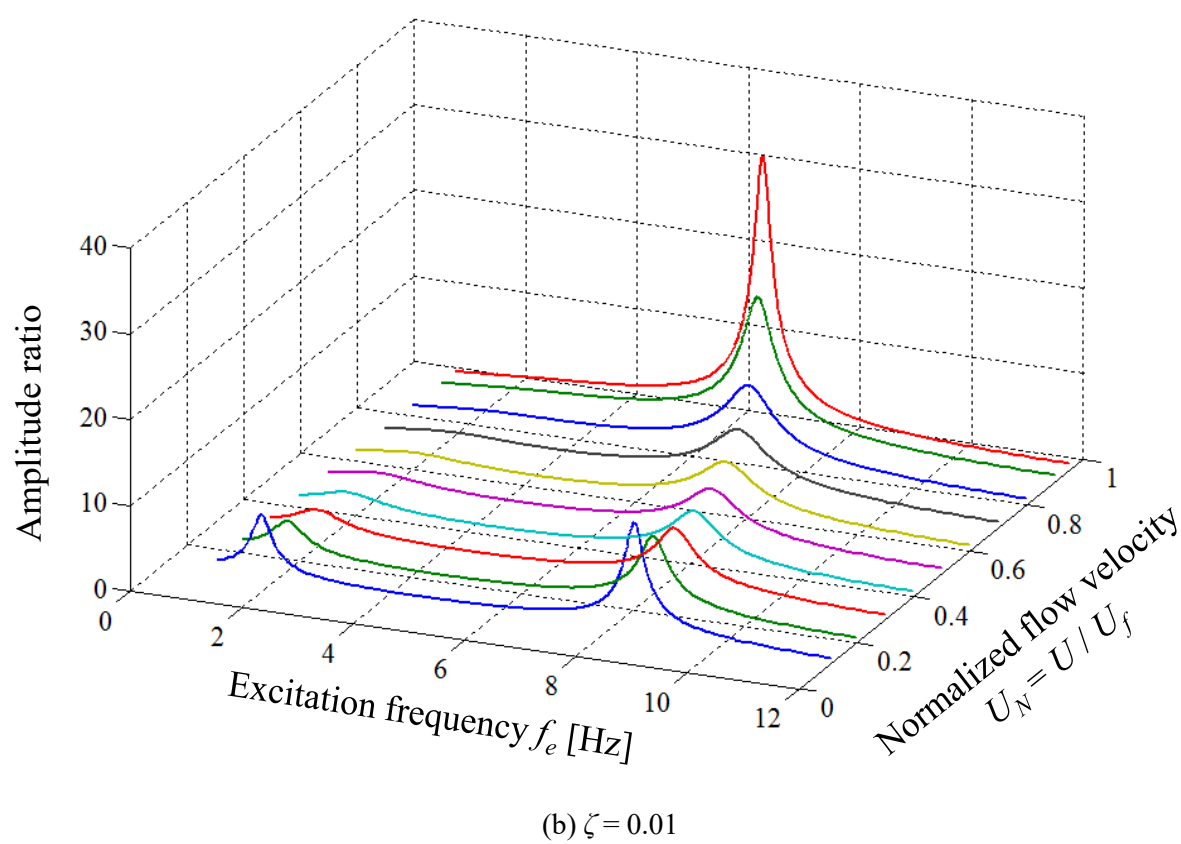
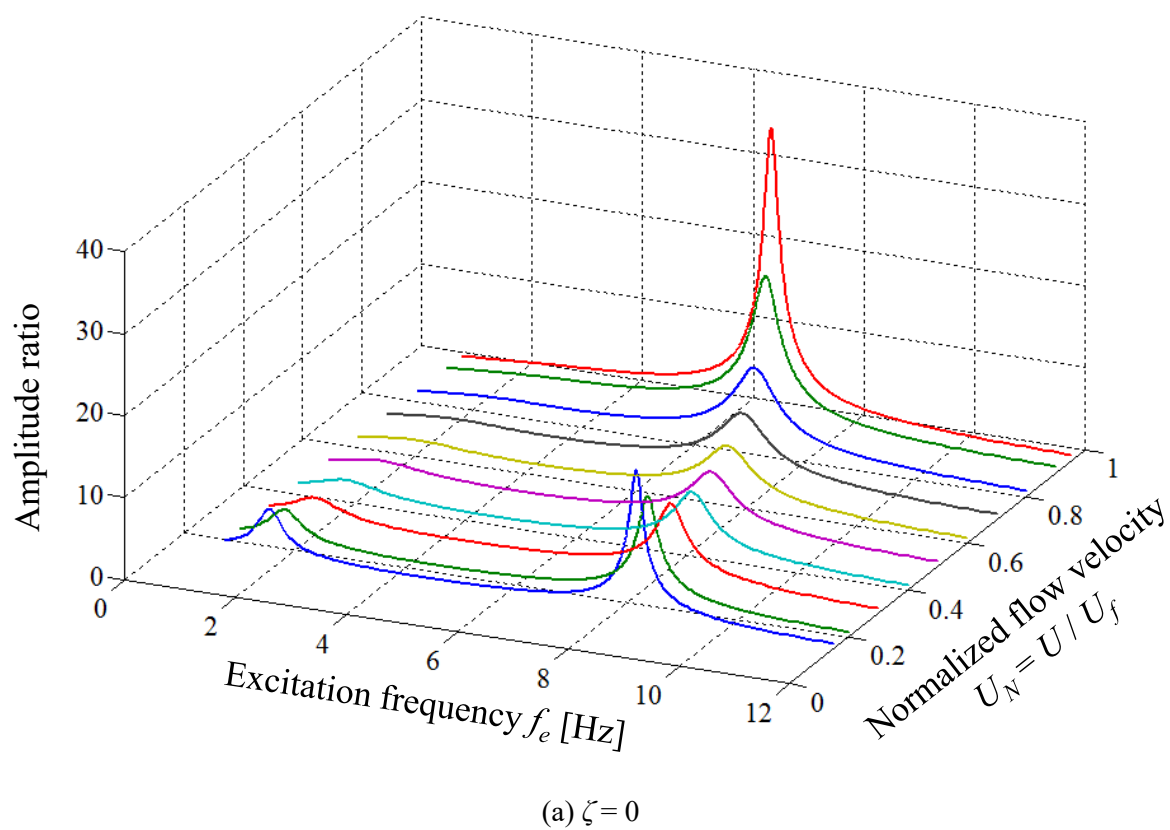


図 5.12: 流速に対する周波数応答 (解析結果)

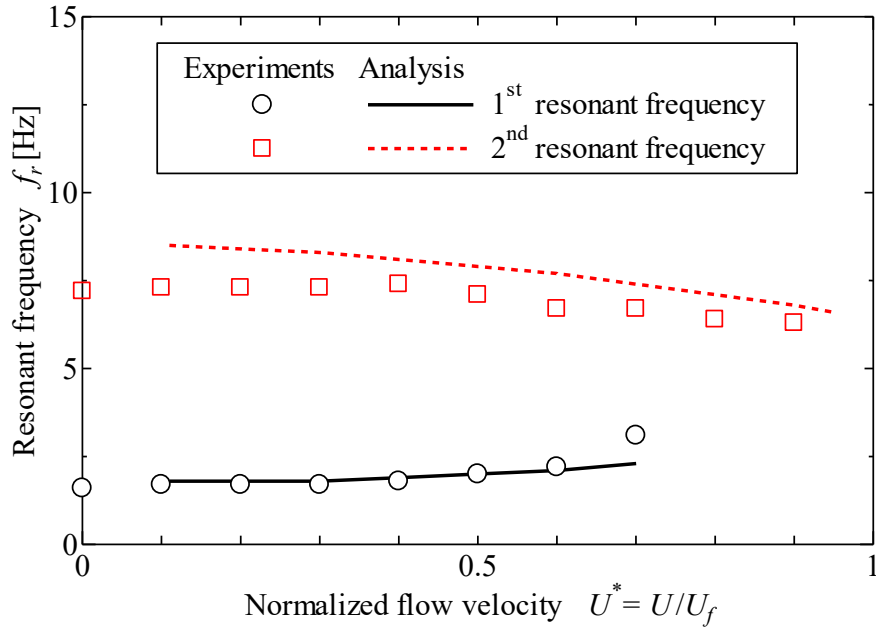


図 5.13: 流速に対する共振振動数の変化

図 5.11, 5.12 に示したように、平板の周波数応答特性は流速によって大きく変化する。この応答の変化には流速の増加に伴う流体付加減衰の変化が大きく影響していると考えられる。そこで、流速に対する減衰比を調べることで流体付加減衰の影響を明らかにする。

減衰比の算出は、実験においてはハーフパワー法を用いて周波数応答曲線から求めた。ここで、実験において算出された減衰比は、構造減衰と流体付加減衰の影響が共に包含された減衰比となる。

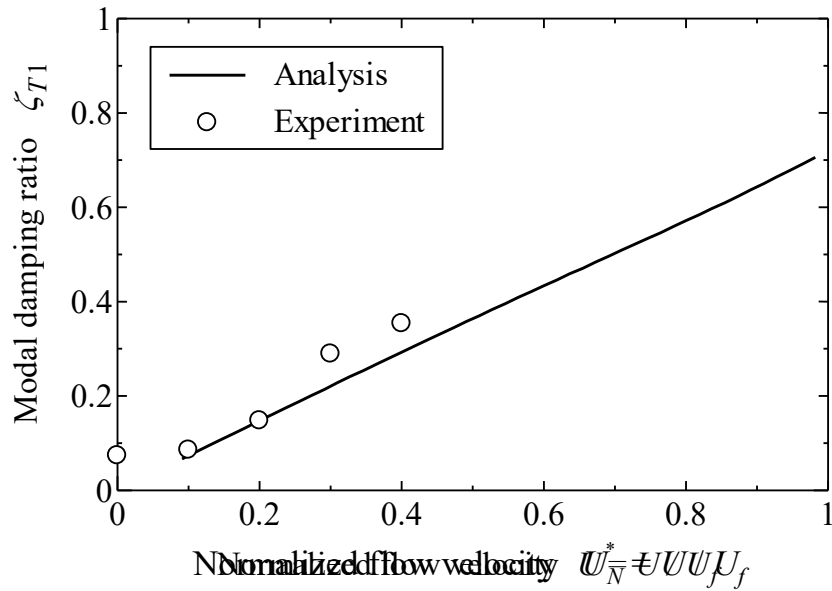
また、解析においては流速を変化させて計算した固有値の実部 Re と虚部 Im を用いて下式を用いて減衰比 ζ_{Tm} を計算した。ここでは、構造減衰比 $\zeta = 0$ として計算した。

$$\zeta_{Tm} = \frac{\text{Re}_{(m)}}{\sqrt{\text{Re}_{(m)}^2 + \text{Im}_{(m)}^2}} \quad (5.25)$$

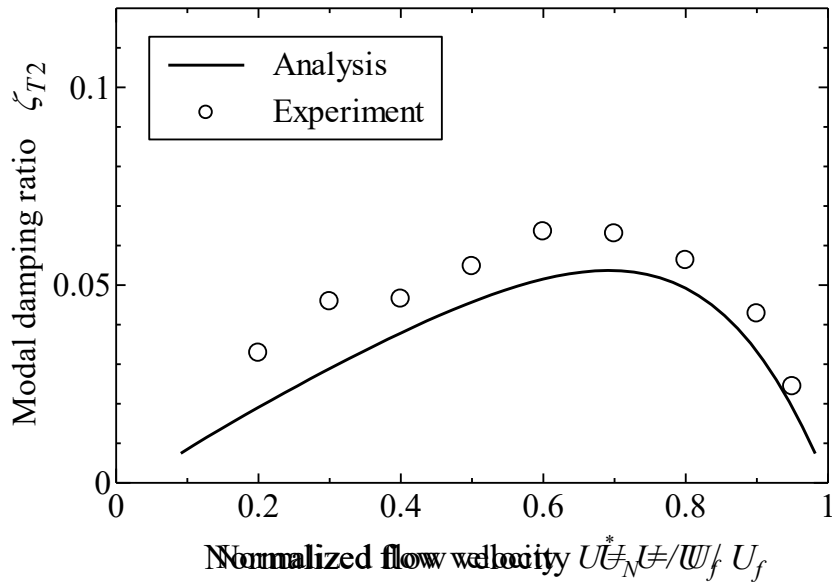
上式の下付添字 m は m 次モードを表している。解析では構造減衰比 $\zeta = 0$ として計算を行ったため、得られた減衰比は、流体付加減衰の影響のみが包含された状態となる。

図 5.14 に流速に対する低次の 2 つのモードの減衰比 ζ_{T1}, ζ_{T2} の変化を示す。解析においては、流速が小さい領域では DPM における核関数の計算が発散するため、 $U_N = 0.15$ 以上の流速における計算結果を示している。図 5.14 より、減衰比は流速によって大きく変化する。ここで、構造減衰は流速によらず一定であるので、減衰比の変化は流体付加減衰に起因するものである。実験結果、解析結果共に 1 次モードの減衰比は流速の増加と共に単調に大きくなってお

り，図 5.11, 5.12 に示したように減衰比の変化により 1 次共振ピークの振幅は流速が増加すると単調に減少する．また，2 次モードの減衰比に関しては，流速が増加すると一旦大きくなり，さらに流速が増加すると小さくなり 0 に近づく．2 次モードに関しても，図 5.11, 5.12 より流速に対する減衰比の変化が周波数応答特性に反映されている．



(a) First mode



(b) Second mode

図 5.14: 流速に対する減衰比の変化

5.8 流速に対する振動モードの変化

図 5.15, 5.16 にそれぞれ 1 次および 2 次共振ピークにおける振動モードを実験と解析で比較した結果を示す。図中の(a1), (b1)は実験結果, (a2), (b2)は解析結果を示している。図中にはフラッタ流速に対して流速が小さい場合とフラッタ流速に近い流速における場合の 2 種類の流速における結果を示す。図 5.15, 5.16 より振動モードは実験と解析で概ね良く一致している。流速がフラッタ流速に対して小さい場合は、流体流れがない場合の定在波タイプのモードに近い振動モードとなる。一方、フラッタ流速に近い流速においては進行波タイプの振動モードに変化する。

図 5.17, 5.18 にそれぞれ 1 次および 2 次共振ピークにおける流速に対する振動モードの変化の解析結果を示す。また、各モードの寄与率を示すために、モード振幅、つまりモード座標 q_m の振幅をあわせて記載する。図 5.17, 5.18 より特に 2 次共振ピークにおいて流速の増加に伴ってモード連成の影響が大きくなっており、1 次モードの振幅が影響するようになることで進行波タイプのモードに変化している。一方、1 次共振ピークにおいては、流速が大きくなるとわずかに 2 次モードが影響するようになるが、その影響は 2 次共振ピークと比較すると小さい。

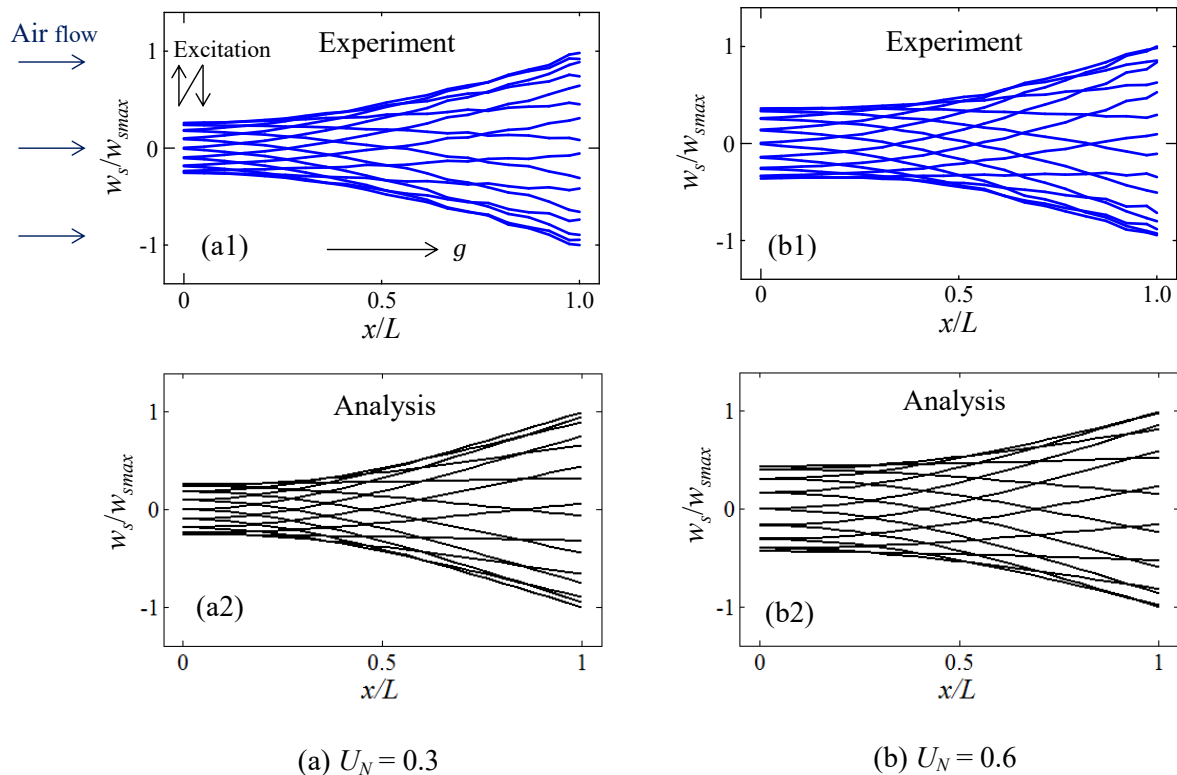


図 5.15: 1 次共振ピークにおける平板の振動モード（実験結果と解析結果の比較）

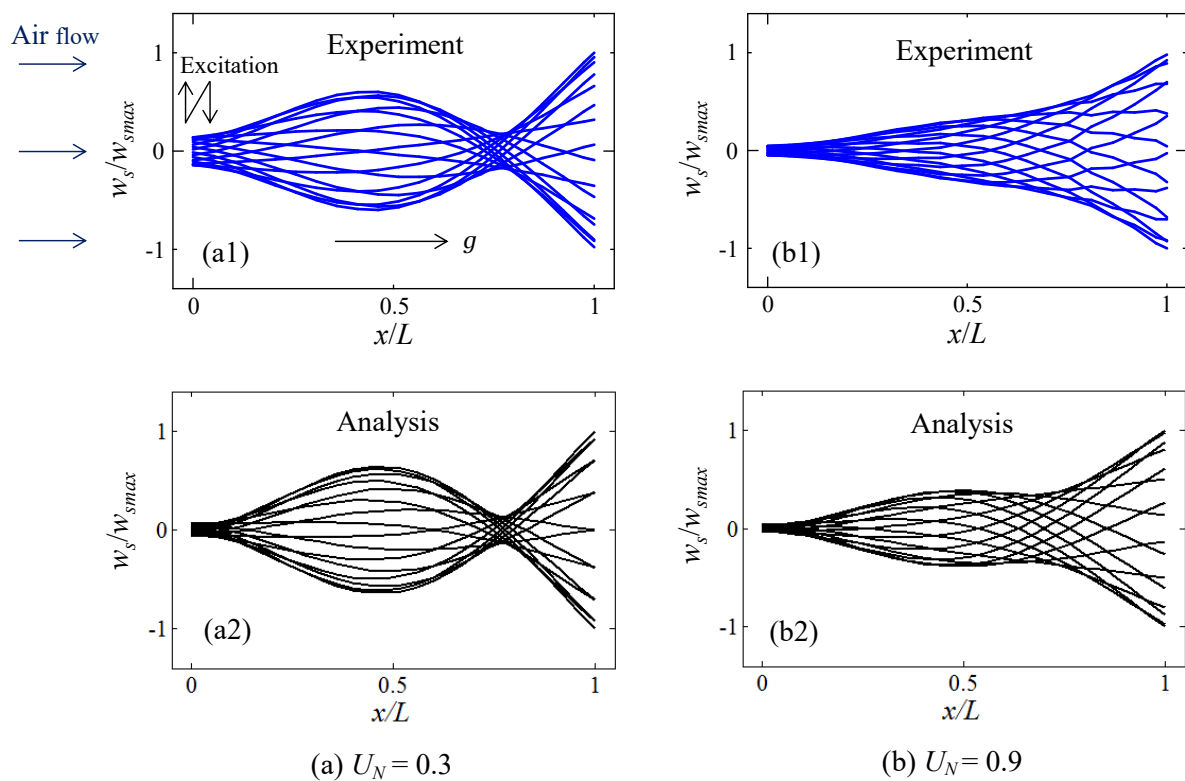


図 5.16: 2 次共振ピークにおける平板の振動モード（実験結果と解析結果の比較）

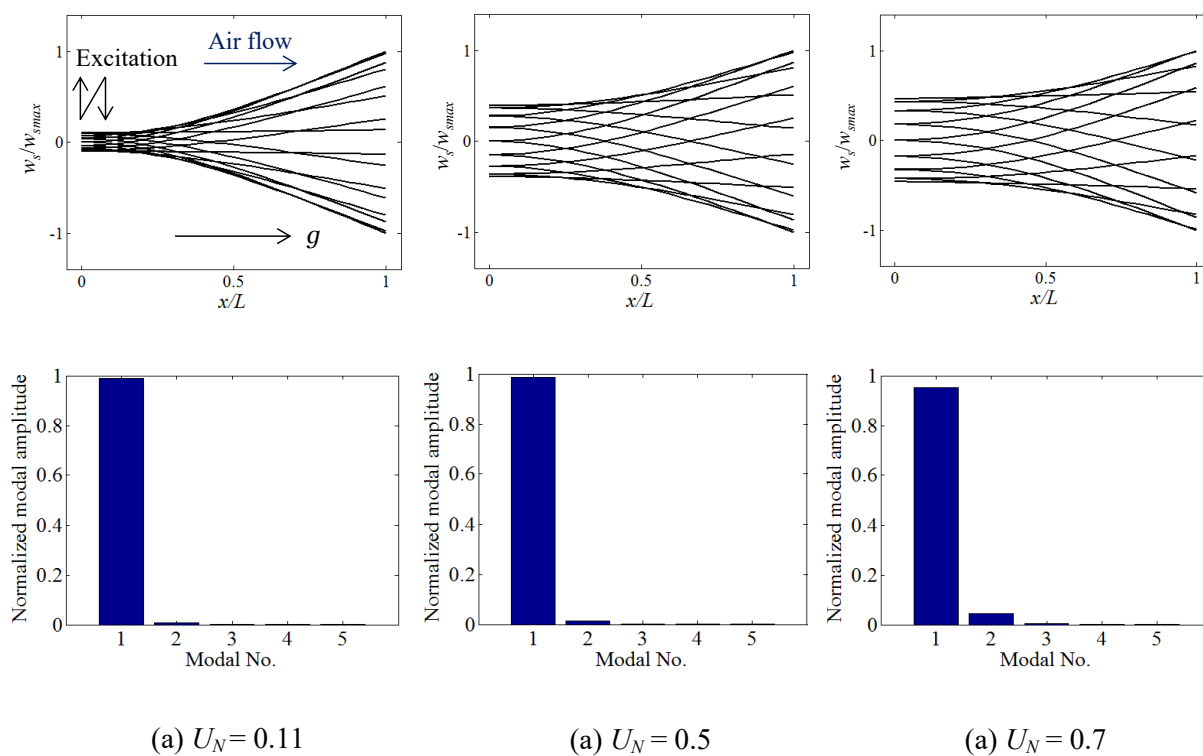


図 5.17: 流速に対する 1 次共振ピークにおける平板の振動モードの変化の解析結果

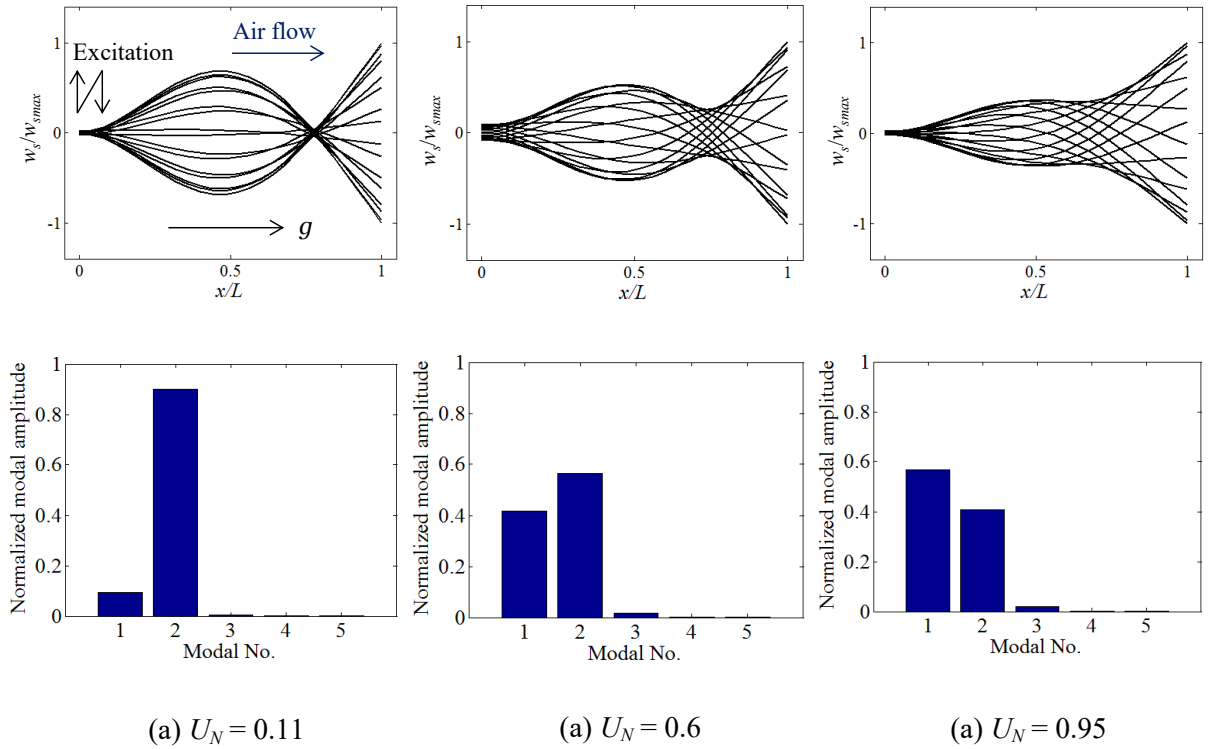


図 5.18: 流速に対する 2 次共振ピークにおける平板の振動モードの変化の解析結果

5.9 強制加振時の平板表面上の流体力仕事（解析結果）

本節では強制加振時の平板表面上の流体力仕事を求めることで、励振流体力が作用する領域を明らかにする．ここでは特に振幅の大きい 2 次共振ピークにおける流体力仕事に焦点を当てて示す．

図 5.19 に流速を変化させた場合の強制加振時の流体力仕事分布を示す．図 5.19 (a), (b) はそれぞれ無次元流速 $U_N = 0.11, 0.95$ における解析結果である．図 5.19 (a) より，流速がフラッタ流速に対して小さい場合は，平板上の中流領域よりもやや上流側と下流端付近で流体力仕事が負となっており，中流領域よりもやや下流側において流体力仕事が正となっている．一方，図 5.19 (b) より，流速がフラッタ流速に近い場合は，図 5.19 (a) において見られた中流領域よりもやや上流側における負の仕事の領域がなくなり，流体力仕事が正の領域が拡大している．つまり，流速の増加により流体力仕事が正の領域，つまり流体力が励振力として作用する領域が広がっている．このため，図 5.11, 5.12 に示したように，流速が増加すると 2 次共振ピークの振幅が増加したと考えられる．

ここで，比較のために図 5.20 に線形安定性解析の中立安定点における流体力仕事分布を示す．図 5.20 における計算では，強制変位加振に起因する項は無視して流体力仕事を計算した．

図 5.20 に示した中立安定点における流体力仕事と，図 5.19(b)に示したフラッタ流速に近い流速において強制加振を行った場合の仕事分布を比較すると，両者は近い分布となっており，どちらも中流領域において流体力仕事が正となっており，下流端付近で仕事が負となっている。

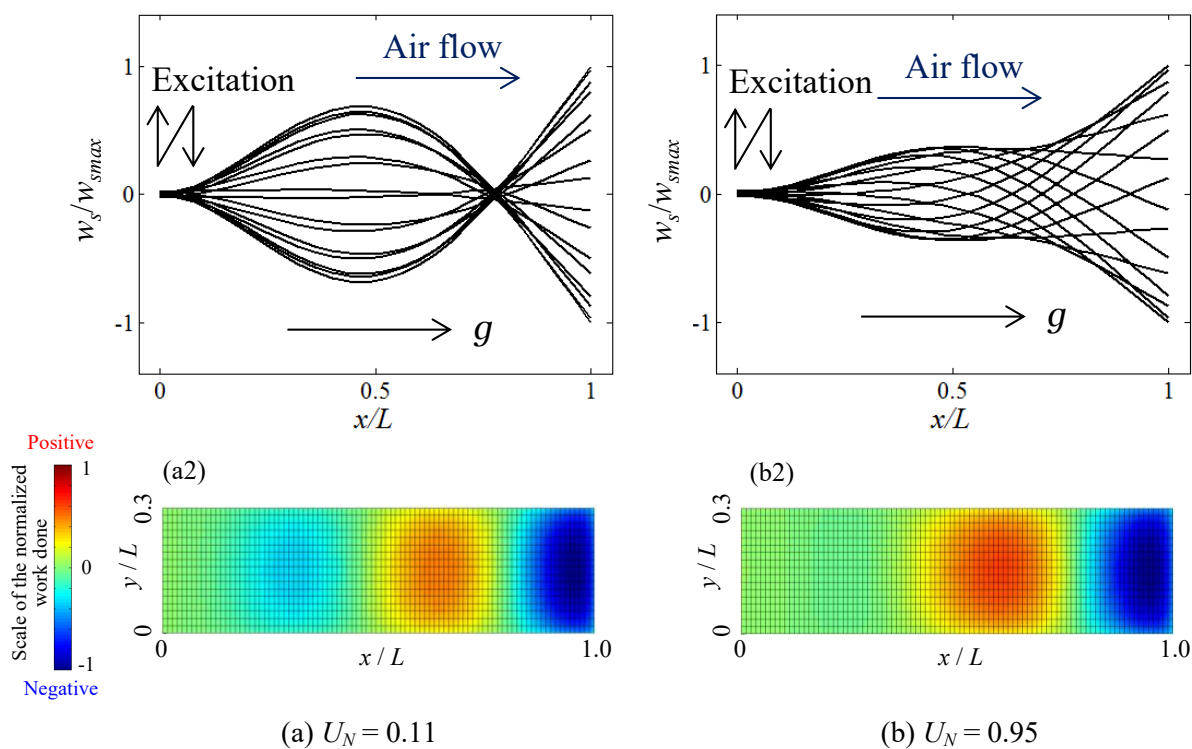


図 5.19: 流速を変化させた場合の流体力仕事分布

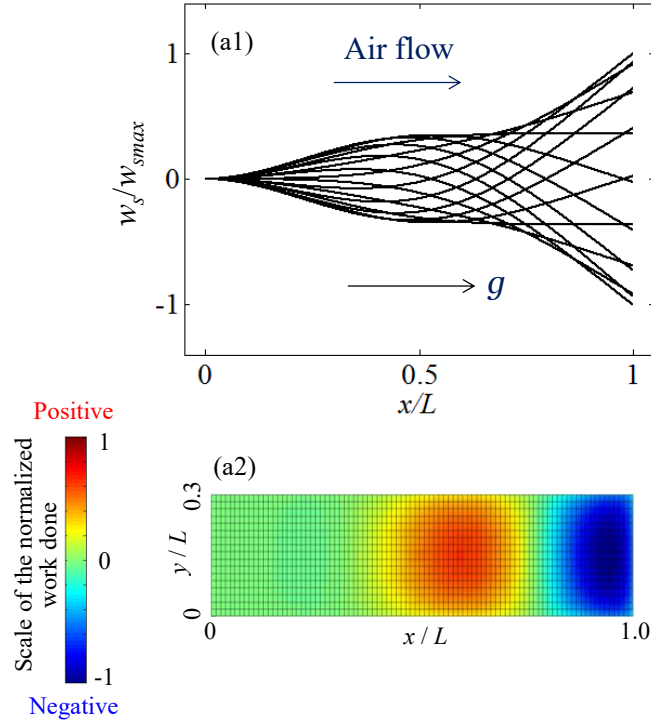


図 5.20: 線形安定性解析の中立安定点における流体力仕事分布

さらに，第 2 章と同様に流体力仕事を付加質量，付加減衰，付加剛性に起因する成分に分離し，どの成分の影響が支配的か調べる．流体力仕事の総和 E_f は下式のように表される．

$$E_f = \underbrace{\int_0^\tau (\dot{\mathbf{a}}_{LE}^T + \dot{\mathbf{q}}^T \Phi^T) \mathbf{Q}_a \mathbf{q} dt}_{E_{fs}} + \underbrace{\int_0^\tau (\dot{\mathbf{a}}_{LE}^T + \dot{\mathbf{q}}^T \Phi^T) \mathbf{Q}_{Ea} \dot{\mathbf{a}}_{LE} dt}_{E_{fe}} \quad (5.26)$$

上式の E_{fs} , E_{fe} はそれぞれ平板の弾性変形により生じる流体力仕事と強制加振変位により生じる流体力仕事である．また，上式中の $\dot{\mathbf{a}}_{LE}$, Φ , $\mathbf{Q}_a$, $\mathbf{Q}_{Ea}$ は下式で与えられる

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi_1, \eta_1) & \cdots & \phi_m(\xi_1, \eta_1) & \cdots & \phi_{N_m}(\xi_1, \eta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\xi_i, \eta_i) & \cdots & \phi_m(\xi_i, \eta_i) & \cdots & \phi_{N_m}(\xi_i, \eta_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\xi_N, \eta_N) & \cdots & \phi_m(\xi_N, \eta_N) & \cdots & \phi_{N_m}(\xi_N, \eta_N) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{Q}_a = \frac{1}{2} \rho_f U^2 \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N c_{1j} s_{e1} \left(\frac{i\omega}{U} \phi_1(x_{uj}, y_{uj}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(x, y) \Big|_{x=x_{uj}, y=y_{uj}} \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N c_{Nj} s_{eN} \left(\frac{i\omega}{U} \phi_1(x_{uj}, y_{uj}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(x, y) \Big|_{x=x_{uj}, y=y_{uj}} \right) \\ \cdots \sum_{j=1}^N c_{1j} s_{e1} \left(\frac{i\omega}{U} \phi_{N_m}(x_{uj}, y_{uj}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_{N_m}(x, y) \Big|_{x=x_{uj}, y=y_{uj}} \right) \\ \vdots \\ \cdots \sum_{j=1}^N c_{Nj} s_{eN} \left(\frac{i\omega}{U} \phi_{N_m}(x_{uj}, y_{uj}) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_{N_m}(x, y) \Big|_{x=x_{uj}, y=y_{uj}} \right) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\mathbf{Q}_{Ea} = \frac{1}{2} \rho_f U \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N c_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^N c_{ij} & \cdots & \sum_{j=1}^N c_{Nj} \end{bmatrix}^T \dot{\mathbf{a}}_{LE} \quad (5.29)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{LE} = \dot{a}_{LE} [1 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T \quad (5.30)$$

ここで、平板の弾性変形により生じる流体力 $\mathbf{Q}_a$ を最小二乗法により下式のように近似する。

$$\mathbf{Q}_a \mathbf{q} \simeq \mathbf{Q}_{a2} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_{a1} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_{a0} \mathbf{q} \quad (5.31)$$

式(5.31)中の第 1, 2, 3 項はそれぞれ流体付加質量, 付加減衰, 付加剛性に対応している。式(5.31)を式(5.26)の E_{fs} に代入すると下式のようなになる。

$$\begin{aligned} E_{fs} &= \int_0^\tau (\dot{\mathbf{a}}_{LE}^T + \dot{\mathbf{q}}^T \Phi^T) \mathbf{Q}_a \mathbf{q} \, dt = \int_0^\tau (\dot{\mathbf{a}}_{LE}^T + \dot{\mathbf{q}}^T \Phi^T) (\mathbf{Q}_{a2} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_{a1} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_{a0} \mathbf{q}) \, dt \\ &= \underbrace{\int_0^\tau (\dot{\mathbf{a}}_{LE}^T + \dot{\mathbf{q}}^T \Phi^T) \mathbf{Q}_{a2} \ddot{\mathbf{q}} \, dt}_{E_{fm}} + \underbrace{\int_0^\tau (\dot{\mathbf{a}}_{LE}^T + \dot{\mathbf{q}}^T \Phi^T) \mathbf{Q}_{a1} \dot{\mathbf{q}} \, dt}_{E_{fc}} + \underbrace{\int_0^\tau (\dot{\mathbf{a}}_{LE}^T + \dot{\mathbf{q}}^T \Phi^T) \mathbf{Q}_{a0} \mathbf{q} \, dt}_{E_{fk}} \end{aligned} \quad (5.32)$$

式(5.32)中の E_{fm}, E_{fc}, E_{fk} はそれぞれ流体付加質量に起因する仕事, 付加減衰に起因する仕事, 付加剛性に起因する仕事, 付加剛性に起因する仕事を表している。ここで、本章の流体力仕事においては第 2 章とは異なり、加振変位の影響が包含されている。流速を変化させてこれらの仕事を計算することで、どの成分が励振に寄与するのか調べる。

また、構造減衰による仕事 E_{sd} は下式で与えられる。構造減衰による仕事と流体力による仕事の大きさを比較する。厳密には減衰比はモードごとに異なるが、ここでは構造減衰による仕事の影響を定性的に調べるために、モードによらず一定の値とした。

$$E_{sd} = \int_0^L \int_0^\tau c_d b \dot{w}_s^2 dt dx = \int_0^L \int_0^\tau 2\rho_s b h \zeta \omega_\ell b \dot{w}_s^2 dt dx \quad (5.33)$$

流体力の近似の精度を検証するために、流速に対する流体力による仕事の変化を示す。図 5.21 の赤線は近似を適用した場合の結果、つまり式(5.32)の E_{fm} , E_{fc} , E_{fk} の総和をとった結果である。また、黒線は近似を適用しない場合の結果であり、式(5.26)の E_{fs} を用いて計算した。図 5.21 により、近似を適用した場合と適用しない場合で流体力仕事にほとんど差異が見られないことから、近似精度は十分であることがわかる。このため、これ以降流体力仕事を付加質量、付加減衰、付加剛性に分解した結果を用いて励振機構を調べる。

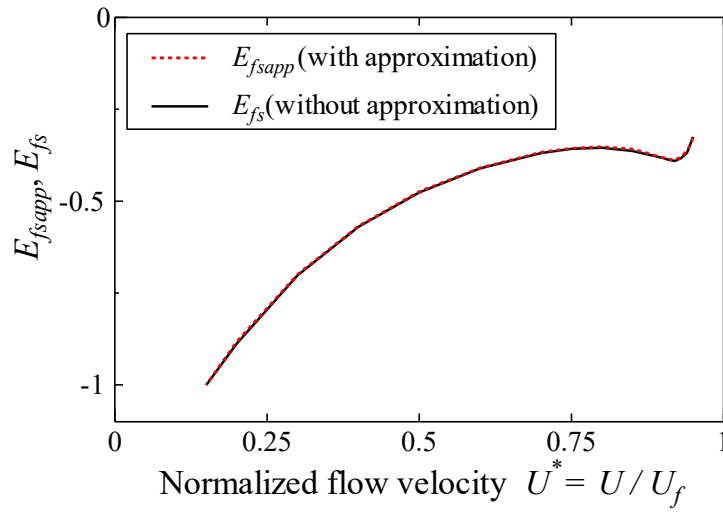


図 5.21: 流体力の近似精度の検証

図 5.22 に平板の弾性変形に起因する流体力仕事を付加質量成分 E_{fm} , 付加減衰成分 E_{fc} , 付加剛性成分 E_{fk} に分解した結果、強制加振変位に起因する流体力仕事 E_{fe} および構造減衰に起因する仕事 E_{sd} を示す。これらの結果は、2 次共振ピークにおける結果である。図 5.22 より、流速がフラッタ流速に対して小さい領域を除いては流体付加剛性に起因する正の仕事と流体付加減衰に起因する負の仕事が支配的となっている。

図 5.23 に各仕事の成分の大きさを比較するために、棒グラフにまとめた結果を示す。図 5.23(a), (b) はそれぞれ無次元流速 $U_N = 0.15, 0.95$ の場合の結果である。図 5.23(a) より、フラッタ流速に対して流速が小さい場合は、流体付加減衰に起因する負の仕事 E_{fc} と構造減衰による負の仕事 E_{sd} が支配的となっている。一方、フラッタ流速に近い流速においては構造減衰による負の仕事は流体付加減衰に起因する負の仕事に対して無視できるほど小さい。このため、図 5.10 に示すように、フラッタ流速に対して小さい流速においては構造減衰が平板の振幅に

及ぼす影響が大きく，フラッタ流速に近い流速においては構造減衰の影響が小さくなる．

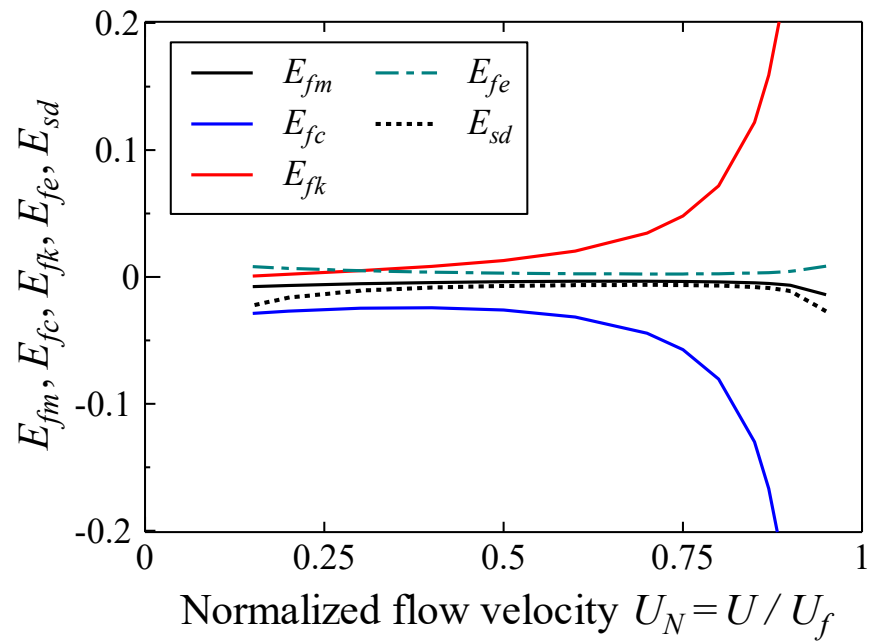
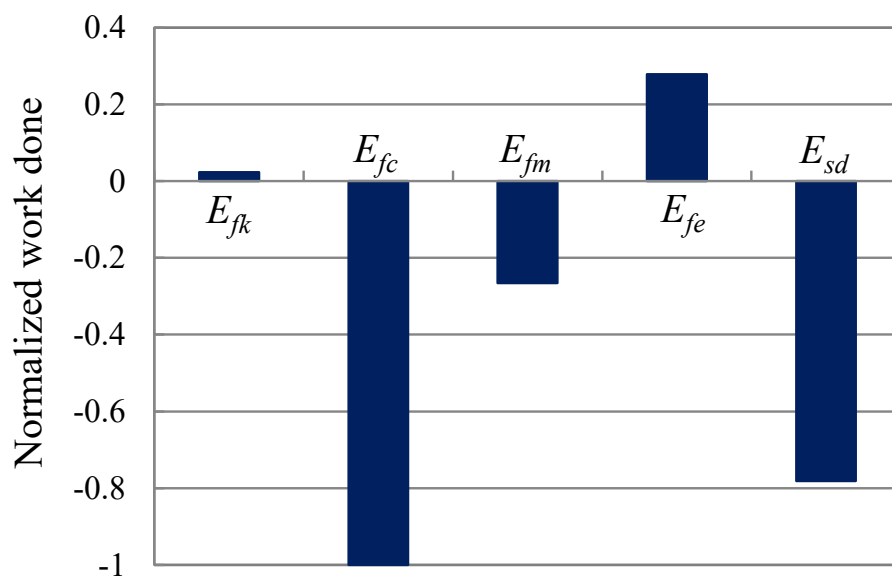
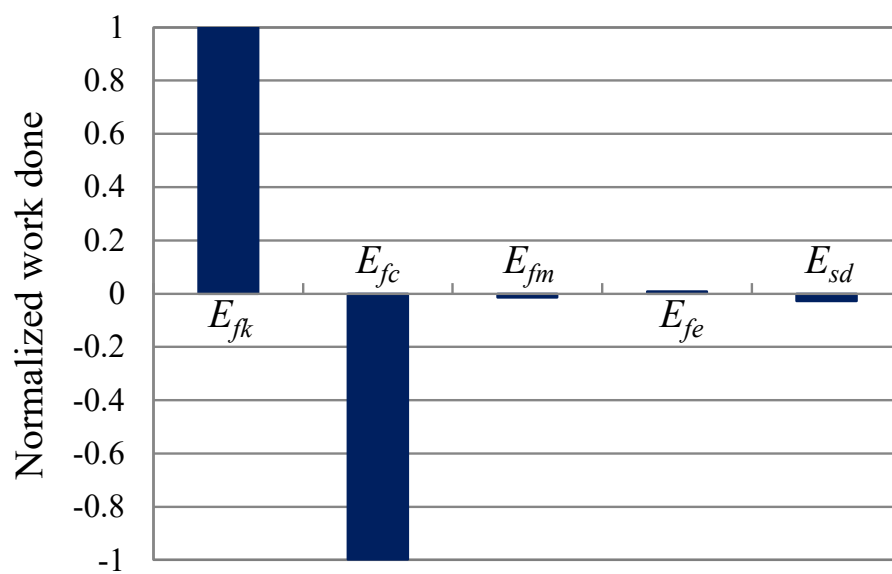


図 5.22: 流速に対する流体力仕事を分解した結果および構造減衰による仕事の変化



(a) $U_N = 0.15$



(b) $U_N = 0.95$

図 5.23: 流体力仕事を分解した結果および構造減衰による仕事の詳細

5.10 まとめ

本章では、流速が平板の固有振動数、減衰比および振幅に及ぼす影響を示した。線形および非線形解析モデルを構築し周波数応答解析と加振実験により、詳細な振動特性を明らかにした。さらに、加振時の平板表面上の流体力による仕事を求め、励振流体力の分布を明らかにした。本章で得られた主な結果を以下に示す。

- (1) 1次共振ピークの振幅は、流速が増加すると単調に減少する。また、2次共振ピークの振幅は流速が増加すると一旦は減少し、その後さらに流速が大きくなると増加する。ここで、フラッタ流速に近い流速域では、2次共振ピークの振幅は1次共振ピークの振幅に対して著しく大きくなる。
- (2) 1次モードの減衰比は、流体付加減衰の影響により流速の増加に伴い、単調に増加する。2次モードの減衰比は、流速が増加すると一旦大きくなり、さらに流速が増加しフラッタ流速に近づくと小さくなり0に近づく。
- (3) 流速が増加すると、1次固有振動数は大きくなり、2次固有振動数は小さくなる。
- (4) 2次共振ピークにおける流体力仕事分布は、フラッタ流速に近い流速では平板の中流領域において流体力仕事が正、下流端付近において仕事が負となっており、上流端を固定支持された平板の中立安定点における流体力仕事分布とほぼ同様の分布となる。また、フラッタ流速に対して小さい流速における仕事分布と比較すると、平板の中流領域における仕事が正の領域が拡大する。
- (5) フラッタ流速に近い流速においては構造減衰による負の仕事は流体付加減衰に起因する負の仕事に対して無視できるほど小さい。一方、フラッタ流速に対して流速が小さい場合は、構造減衰による負の仕事の影響が相対的に大きくなる。このため、フラッタ流速に近い流速では構造減衰が平板の振幅に及ぼす影響が小さく、フラッタ流速に対して小さい流速においては構造減衰が振幅に及ぼす影響が大きくなる。

第 6 章

空力加振を受ける場合の振動特性

第 5 章では、気流中で弾性平板に強制変位加振を行うことで流速が弾性平板の振動特性、つまり固有振動数、減衰比および振幅に及ぼす影響を調べた結果について述べた。ここで、第 1 章で述べたように、弾性平板の製造プロセスでは、工業用ドライヤーから吹き出される脈動を含む空気流れや、平板近くに設置された絞り部などの近接構造物によって生じるはく離渦などが加振源となる場合がある。このため、第 6 章では周期的な空力加振を受ける平板を対象に、振動特性や励振流体力分布を調べた結果について述べる。図 6.1 に示すように、弾性平板の上流側に板を設置し周期的に振動させることで、弾性平板に対して空力加振を行う。これ以降、空力加振を行うための板を加振板と呼ぶ。

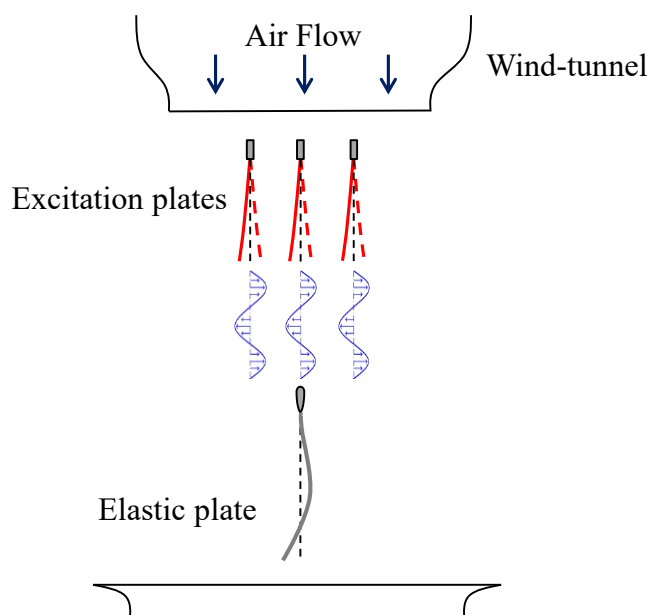


図 6.1: 空力加振の概要

6.1 実験装置および実験方法

図6.2に実験装置の写真と概略図を示す。実験は縦型回流式を用いて行った。風洞のテストセクション部の上流側に空力加振を行うためのアルミ合金製の加振板が設置されており、その下流側に平板が上流端を片持ち固定支持された状態に取り付けられている。縦型風洞により上から下に向かって空気を流し、テストセクションの上流側に設置された加振板を上流端まわりに一定振幅で回転振動させることで加振板の後流を周期的に振動させ、平板に対して

空力加振を行った。

図6.3に空力加振を行うための機構の詳細を示す。機構は主に加振板、加振板を回転振動させるためのアクチュエータ、リンク、シャフトにより構成されている。シャフトと加振板は連結されており、アクチュエータ部のコイルに電圧を印加してシャフトを回転させ、加振板を振動させた。ここで、リンク機構を介して回転を複数のシャフトに伝達させることで、複数枚の加振板を同時に振動させた。また、加振板を振動させた状態でレーザ変位計により変位を測定し、加振板の振動変位は正弦波となっており振幅は時間によって変動が生じないことを確認した。

空力加振実験は加振板後流端の振幅を一定として、第5章と同様に予備実験により測定したフラッタが発生する流速以下の流速域において加振板の振動数（加振振動数）を変化させて行った。また、加振板の最低次の固有振動数は加振振動数よりも十分に高い値である。ここで、測定は過渡応答の影響が無くなるように、加振開始後十分に時間が経過してから行った。本論文では、流速 U をフラッタ流速 U_f で基準化した無次元流速 U_N を用いて結果を整理した。加振板と平板の振動変位をレーザ変位計で同時に計測することで、加振板の振動変位のRMS値に対する平板の振動変位のRMS値の比（振幅比）を求めた。加振板の変位は後流端の位置、平板の変位は振動の節にならない下流端付近の位置で測定した。さらに、2台のレーザ変位計を用いて位相平均法により平板の振動モードを測定した。位相平均法の詳細に関しては、第3章を参照のこと。また、測定条件は第4章の表4.3に示した条件と同様である。実験パラメータを表6.1に示す。

表6.1: 実験パラメータ

Thickness of excitation plate h_a [mm]	1.0
Amplitude of trailing edge of excitation plates a_{TE} [mm]	3.0
Distance among excitation plates H [mm]	10.0
Number of excitation plates N_{ep}	1, 3, 5
Excitation frequency f_e [Hz]	0.1 ~ 20.0
Observation point of plate displacement (distance from leading edge) x_o [mm]	125

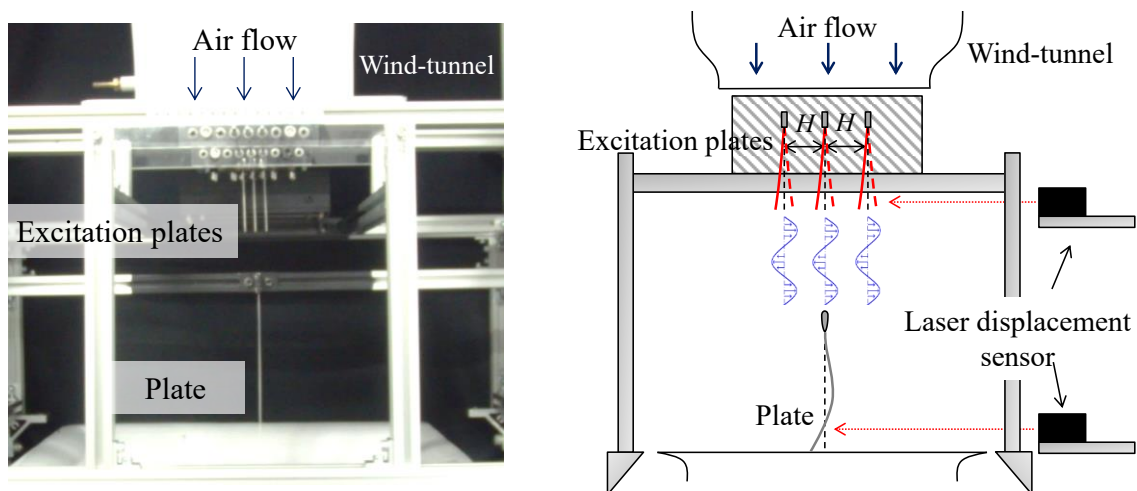


図 6.2: 空力加振を行うための実験装置の概要

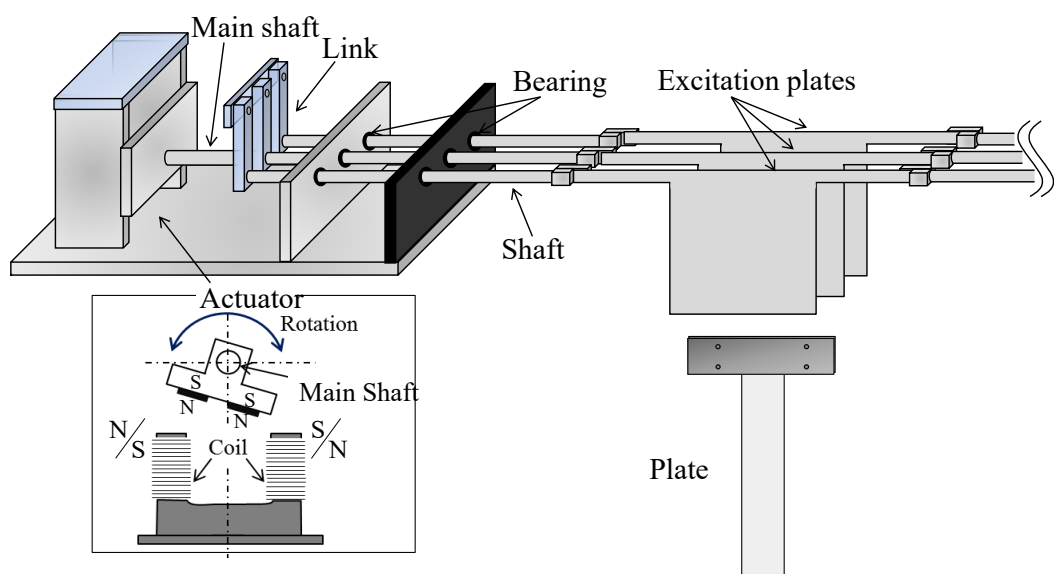


図 6.3: 加振機構の詳細

6.2 周期的な空力加振を受ける平板の解析モデル

図 6.4 に気流中で空力加振を受ける弾性平板の解析モデルを示す．上流端を固定支持された平板の上流側に加振板が設置されている．加振板が一様な気流中で回転振動することで，平板は周期的な空力加振を受ける状態となる．平板と加振板のコードをそれぞれ L , L_a ，スパンを b , b_a として定義する．平板および加振板の分割数はそれぞれ N_1 , N_2 とする．

ここで、平板は有限要素法により離散化する．本章では 2 次元的なモード（曲げモード）が励起される体系を対象に解析を行うが、今後スパン方向に分布を持つ加振力が作用しねじりモードが励起されるような複雑な体系も解析するために、3 次元な変形が解析可能である有限要素法を用いた定式化を行う．また、平板に作用する流体力は加振板の影響を考慮した Küssner の積分方程式^[58]を DPM^[56, 57]により離散化することで求める．

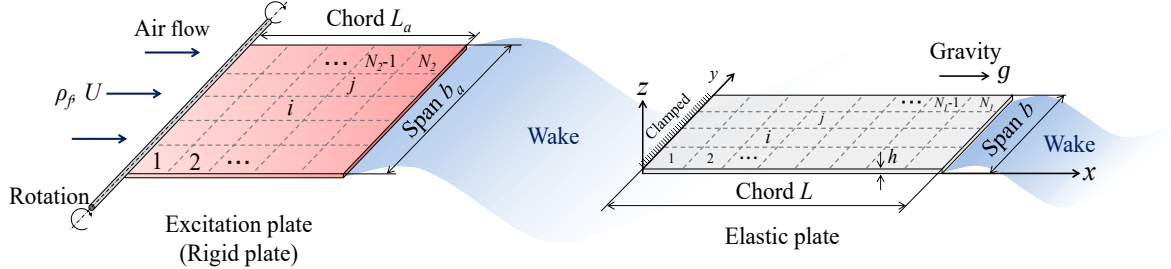


図 6.4: 周期的な空力加振を受ける平板の解析モデル

6.3 加振板による空力加振の影響を考慮した流体力の計算

加振板による周期的な空力加振により平板に作用する強制的な流体力と平板の振動に起因して生じる自励的な流体力を非定常揚力面理論に基づいて求める．

平板表面上に誘起される吹上速度 $w_{f1}^*(x^*, y^*)$ と平板上下面の圧力差 $\Delta p_1^*(\xi^*, \eta^*)$ を結びつける積分方程式は、式(6.1)に示す加振板の振動による影響を考慮した Küssner の積分方程式^[58]で与えられる．式中の $\Delta p_2^*(\xi^*, \eta^*)$ は加振板の上下面に作用する圧力差である．式中の右辺 1 項目は平板の振動により誘起される吹上速度、2 項目は加振板の振動により平板表面上に誘起される吹上速度である．積分範囲 S_1^* , S_2^* はそれぞれ平板と加振板の面積である．ここで (x^*, y^*) , (ξ^*, η^*) は、後述するが、それぞれ平板および加振板の表面に分布した吹上速度と流体力の代表点の配置位置を表す座標系である．また、 $(x_0^*, y_0^*) = (x^* - \xi^*, y^* - \eta^*)$ は吹上速度の代表点と流体力の代表点との距離を表している．

$$w_{f1}^*(x^*, y^*) = \frac{1}{8\pi} \iint_{S_1^*} \Delta p_1^*(\xi^*, \eta^*) \cdot K_{11}(x_0^*, y_0^*) d\xi^* d\eta^* + \frac{1}{8\pi} \iint_{S_2^*} \Delta p_2^*(\xi^*, \eta^*) \cdot K_{12}(x_0^*, y_0^*) d\xi^* d\eta^* \quad (6.1)$$

同様に、加振板上に誘起される吹上速度 $w_{f2}^*(x^*, y^*)$ と加振板上下面の圧力差 $\Delta p_2^*(\xi^*, \eta^*)$ を関係付ける式は式(6.2)で表される．

$$w_{f2}^*(x^*, y^*) = \frac{1}{8\pi} \iint_{S_1} \Delta p_1^*(\xi^*, \eta^*) \cdot K_{21}(x_0^*, y_0^*) d\xi^* d\eta^* + \frac{1}{8\pi} \iint_{S_2} \Delta p_2^*(\xi^*, \eta^*) \cdot K_{22}(x_0^*, y_0^*) d\xi^* d\eta^* \quad (6.2)$$

式(6.1), (6.2)は無次元化された方程式であり, 式中の*は無次元化された変数であることを表している. また, 式(6.1), (6.2)中の K_{11} , K_{12} , K_{21} , K_{22} は核関数であり式(6.3)で与えられる. 核関数は点揚力により誘起される速度場を表している.

$$K_{11}(x_0^*, y_0^*) = K_{12}(x_0^*, y_0^*) = K_{21}(x_0^*, y_0^*) = K_{22}(x_0^*, y_0^*) = e^{-\frac{sb}{U} x_0^*} B(s, r, x_0^*) \quad (6.3)$$

式(6.3)中の記号 r および関数 B は第 2 章の式(2.8), (2.9)と同様である.

ここで, DPM^[56, 57]により式(6.1), (6.2)の積分方程式を離散化する. 離散化された平板表面に作用する流体圧力 Δp_1^* は平板と加振板の吹上げ速度 $\mathbf{w}_{f1}^*$, $\mathbf{w}_{f2}^*$ を用いて以下の式(6.4)で求められる. つまり, 平板表面上の j 番目の要素に作用する流体力 $\Delta p_{1j}^*(\xi_j^*, \eta_j^*)$ は, 平板および加振板の全ての要素上の吹上速度 $\mathbf{w}_{f1}^*$, $\mathbf{w}_{f2}^*$ により定まる.

$$\Delta \mathbf{p}_1^* = \mathbf{C}_{11} \mathbf{w}_{f1}^* + \mathbf{C}_{12} \mathbf{w}_{f2}^* \quad (i, j = 1 \cdots N_1, N_2) \quad (6.4)$$

$$\mathbf{w}_{f1}^* = \{w_{f1}^*(x_i^*, y_i^*)\}, \mathbf{w}_{f2}^* = \{w_{f2}^*(x_i^*, y_i^*)\}, \Delta \mathbf{p}_1^* = \{\Delta p_{1j}^*(\xi_j^*, \eta_j^*)\},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}^{-1}, \mathbf{D}_{mn} = \left[\frac{\Delta_j^*}{8\pi} K_{mn}(x_i^* - \xi_j^*, y_j^* - \eta_j^*) \right] \quad (6.5)$$

式(6.5)中の $\mathbf{w}_{f1}^*$, $\mathbf{w}_{f2}^*$ は運動学的条件より, それぞれ平板および加振板の面外方向変位を用いて求められる. 各要素の圧力 Δp に形状関数を掛けて等価節点外力に変換し, さらに等価節点外力を重ね合わせることで, 有限要素法の全体座標系における流体力ベクトルは下式のように求められる.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_s + \mathbf{Q}_a = \frac{1}{2} \rho_f U^2 b \mathbf{A}_{e11} \mathbf{X}_1 + \frac{1}{2} \rho_f U^2 b \mathbf{A}_{e12} \mathbf{X}_2 \quad (6.6)$$

ここで, 流体力ベクトルは平板の振動に起因して生じる流体力 (自励流体力) と加振板の振動によって平板が受ける流体力 (強制外力) を区別するために, それぞれ $\mathbf{Q}_s$, $\mathbf{Q}_a$ と表記する.

式中の $\mathbf{A}_{e11}$, $\mathbf{A}_{e12}$ は流力弾性行列であり, 複素行列である. $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ はそれぞれ平板と加振板の節点変位ベクトルである.

第 5 章では, 強制変位加振が加振源となっていたが, 本章の体系においては第 5 章とは異なり, 加振板による空力加振に起因する流体力 (式(6.6)の $\mathbf{Q}_a$) が加振源となる. つまり, 加振力が流速によって変化する.

6.4 加振板による空力加振を受ける平板の流体構造連成方程式 および状態方程式

式(6.7)に流体構造連成方程式を示す．式の左辺は有限要素法により離散化された構造系の慣性項および剛性項，右辺は式(6.6)において示した平板に作用する流体力項である．構造減衰は無視した．式(6.7)は，第3章において示した流体構造連成方程式(式(3.1.8)および(3.2.10))に対して，加振板による空力加振に起因して平板に生じる流体力（強制加振力） $\mathbf{Q}_a$ が付加された状態となっている．

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{X}}_1(t) + \mathbf{K} \mathbf{X}_1(t) = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_s(t) + \mathbf{Q}_a(t) \quad (6.7)$$

ここで，式(6.7)に対してモード近似を適用すると，モード座標 $\mathbf{q}$ に関する方程式は，式(6.8)のように求まる．モード近似には6つの曲げモードを含む低次から9つの固有振動モードを用いた．また， ϕ_{21} は既定された運動（弾性変形せずに上流端まわりに回転する運動）から得られる加振板のモード行列であり， $u(t)$ は加振板下流端の変位である．

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{\left(\tilde{\mathbf{K}} - \frac{1}{2} \rho_f U^2 b \tilde{\mathbf{A}}_{e11} \right)}_{\tilde{\mathbf{K}}_f} \mathbf{q}(t) = \frac{1}{2} \rho_f U^2 b \tilde{\mathbf{A}}_{e12} u(t) \quad (6.8)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M}_F \Phi, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{e11} = \Phi^T \mathbf{A}_{e11} \Phi, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{e12} = \Phi^T \mathbf{A}_{e12} \phi_{21} \quad (6.9)$$

状態変数を $\mathbf{r} = [\mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}}]^T$ として，式(6.8)を状態方程式表示すると，式(6.10)のように表される．式(6.10)中の $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ は式(6.11)で与えられる．また，出力方程式は式(6.12)で表される．

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A} \mathbf{r} + \mathbf{B} u \quad (6.10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_f & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \rho_f U^2 b \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{e12} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{r} \quad (6.12)$$

ここで，式(6.10), (6.12)で示した状態方程式と出力方程式をラプラス変換すると，それぞれ下式のようなになる．なお，ラプラス変換を適用されたパラメータを大文字で表記している．

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{R}(s) = \mathbf{B}U(s) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{R}(s) \quad (6.14)$$

式(6.13), (6.14)より，加振板下流端の振動変位から各モードのモード座標への伝達関数行列

$\mathbf{G}_m(s)$ は、式(6.15)のように求まる．さらに、 $\mathbf{G}_m(s)$ に対してモード行列を乗じることで、加振板の振動変位から平板の全節点の振動変位への伝達関数行列 $\mathbf{G}_s(s)$ が式(6.15)のように得られる．ここで、式(6.16)より平板の全節点の振幅と位相が得られるため、平板の振動モードを求めることができる．振動モードは複素固有モードとして得られる．また、ここでは式(6.17)に示すように、実験結果と比較するために観測位置行列 $\mathbf{c}_0$ を用いて実験での観測点に対応する点における伝達関数 G_{s0} を取り出した．取り出した伝達関数 G_{s0} より、加振板の振動数と流速をパラメータとして変化させて加振板と平板の振幅比を計算した．

$$\mathbf{G}_m(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (6.15)$$

$$\mathbf{G}_s(s) = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{G}_m(s) \quad (6.16)$$

$$G_{s0}(s) = \mathbf{c}_0 \mathbf{G}_s(s), \quad \mathbf{c}_0 = [0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0] \quad (6.17)$$

6.5 平板に作用する流体力による仕事分布

励振流体力が作用する領域を調べるために、平板に作用する流体力による振動 1 周期当たりの仕事の分布を計算する．

流体力 $\mathbf{Q}$ により平板になされる局所的な仕事は、式(6.18)に示すように平板の振動に起因して生じる流体力による仕事 $E_{fs(local)}$ と加振板による空力加振に起因して平板が受ける流体力による仕事 $E_{fa(local)}$ の和によって表される．平板の振動に起因して生じる流体力 $\mathbf{Q}_s$ による仕事 E_{fs} と加振板の振動によって平板が受ける流体力 $\mathbf{Q}_a$ による仕事 E_{fa} は、式(6.19)により得られる．式中の $|G_{sk}|$ は平板の各節点の変位振幅を表している．平板の各節点の変位振幅 $|G_{sk}|$ は式(6.16)に示した伝達関数行列から求めることができる．式中の N_k は平板の全節点数である． $|\mathbf{Q}_{sk}|$ は平板の振動に起因して平板の各節点に生じる流体力の振幅、 $|\mathbf{Q}_{sa}|$ は加振板の振動によって平板の各節点に作用する流体力の振幅である．また、 ϕ_{sk} は平板の振動に起因する流体力と平板の変位との位相差、 ϕ_{sa} は加振板の振動によって平板が受ける流体力と平板の変位との位相差を表している．ここで、仕事の分布は平板表面上における最大値を 1 として正規化して求めた．

$$E_f = E_{fs(local)} + E_{fa(local)} \quad (6.18)$$

$$E_{fs(local)} = \pi |G_{sk}| |\mathbf{Q}_{sk}| \sin \phi_{sk}, \quad E_{fa(local)} = \pi |G_{sk}| |\mathbf{Q}_{sa}| \sin \phi_{sa} \quad (6.19)$$

6.6 計算パラメータ

表 6.2 に解析で用いた主なパラメータを示す．また，表 6.3, 6.4 にそれぞれ平板と加振板のパラメータを示す．これらの計算パラメータは実験を行ったパラメータに合わせて設定した．平板の材質は polyethylene terephthalate（以下，PET と表記する）である．加振板の x 方向と y 方向の分割数をそれぞれ $n_{ax} = 15$, $n_{ay} = 43$ ，平板の x 方向と y 方向の分割数を $n_x = 29$, $n_y = 15$ として計算を行った．ここで，分割数は計算結果がほぼ一定値に収束するまで増加させて決定した．

表6.2: 計算パラメータ

Density of fluid (Air) ρ_f [kg/m ³]	1.2
Division number in x -direction (Excitation plate) n_{ax}	15
Division number in y -direction (Excitation plate) n_{ay}	43
Division number in x -direction (Excitation plate) n_x	29
Division number in y -direction (Excitation plate) n_y	15

表6.3: 弾性平板の物性値

Chord L [mm]	Span b [mm]	Thickness h [mm]	Young's modulus E [GPa]	Poisson's ratio ν	Density ρ_s [kg/m ³]
140	20	0.2	3.2	0.4	1380

表6.4: 加振板の寸法

Chord L_a [mm]	Span b_a [mm]
60	60

6.7 空力加振実験結果

図 6.5 に空力加振時の平板周りの流れを可視化した様子を示す．図中の(a)~(c)はそれぞれ加振板が 1, 3, 5 枚の場合の結果である．流れの可視化はスモークワイヤ法により行った．撮影にはハイスピードカメラを用いた．図より，いずれの枚数においても加振板の振動により板の下流側の流れが正弦波状に蛇行している．また，平板表面上において目視で確認できる規模の流れのはく離は見られない．

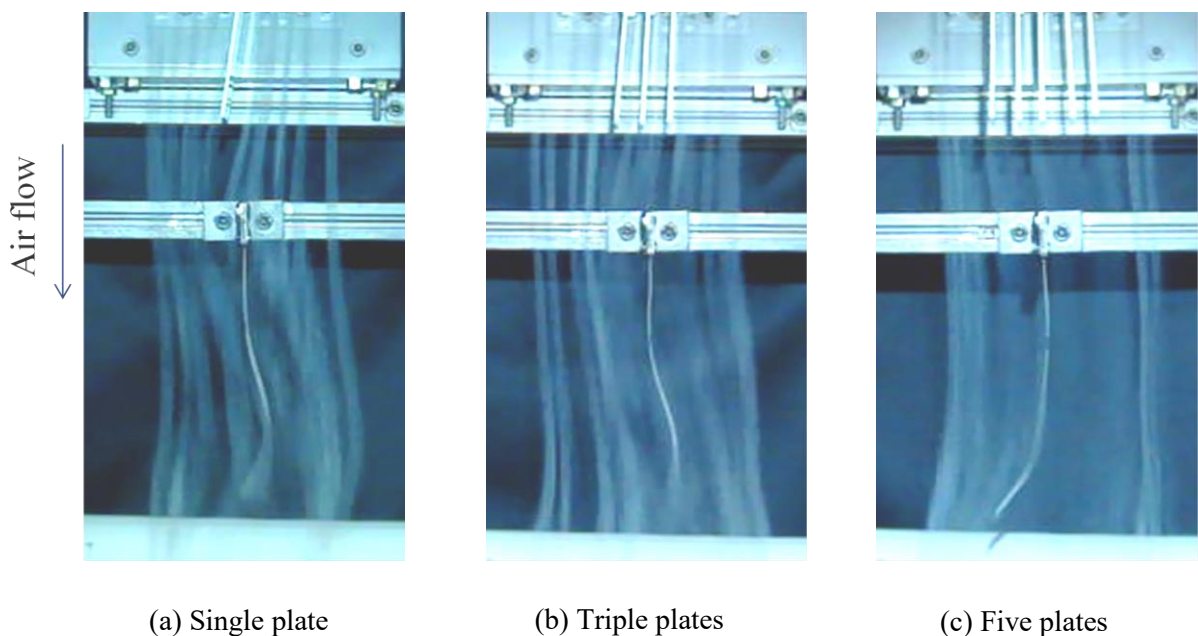


図 6.5: 空力加振時の平板周りの流れの可視化

図 6.6 に，代表的なパラメータ（無次元流速 $U_N = U / U_f = 0.95$ ，加振振動数 $f_e = 13.1\text{Hz}$ ）における加振板と平板の振動変位の時刻歴波形と FFT 解析結果（スペクトル）を示す．これらの結果は，1 枚の加振板を用いて空力加振を行った場合の結果である．図中の黒線と赤線はそれぞれ平板と加振板の振動変位を表している．

図 6.6(a)に示した時刻歴波形より，加振板の振動に同期して平板に振動が発生している．また，平板の振動変位の振幅は時間によって若干の変動が見られる．また，図 6.6(b)より，平板の振動変位のスペクトルは加振振動数成分に対して高調波成分が小さいことがわかる．

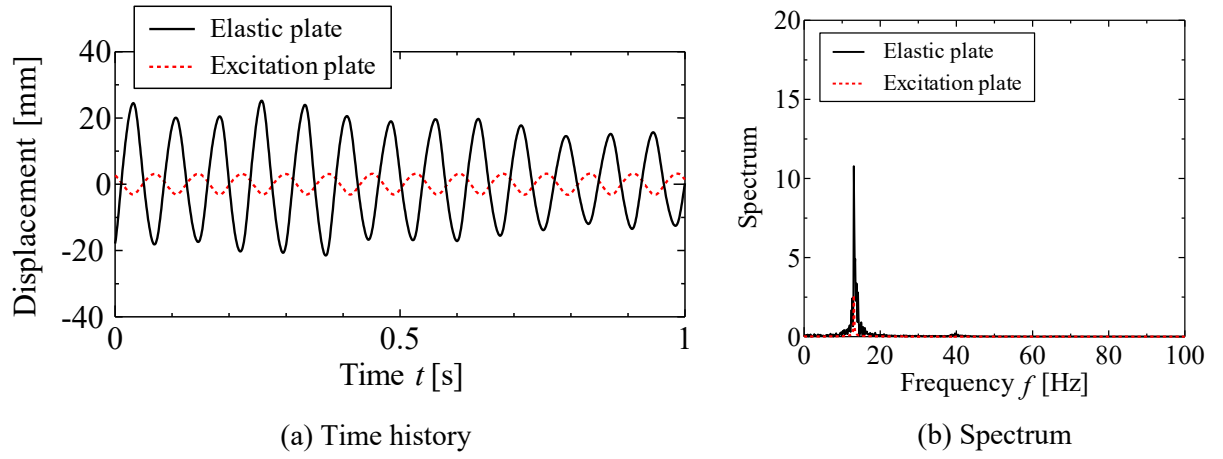


図 6.6: 空力加振時の加振板と平板の振動変位の時刻歴波形およびスペクトル

図 6.7 に加振板の枚数が 1, 3, 5 枚の場合における, 加振振動数 f_e に対する加振板と平板の振幅比 $|G|$ の変化を示す. ここでは代表的な結果として, 無次元流速が $U_N = 0.3, 0.9$ の場合の結果をそれぞれ図 6.7(a), (b) に示す. 加振板の枚数が平板の応答振幅に及ぼす影響に着目すると, 応答振幅のピークの振動数は加振板の枚数によってほとんど変化しないことがわかる. 一方, 振幅比は加振板の枚数が増加するとやや増加する傾向にある. ここで, 後流同士の干渉により, 乱れや流速の変化が生じることが既往の研究で示されている^[70, 71]. このため, 複数枚の加振板の後流同士の干渉により生じる乱れや流速の変化が平板の振幅に影響していると思われる.

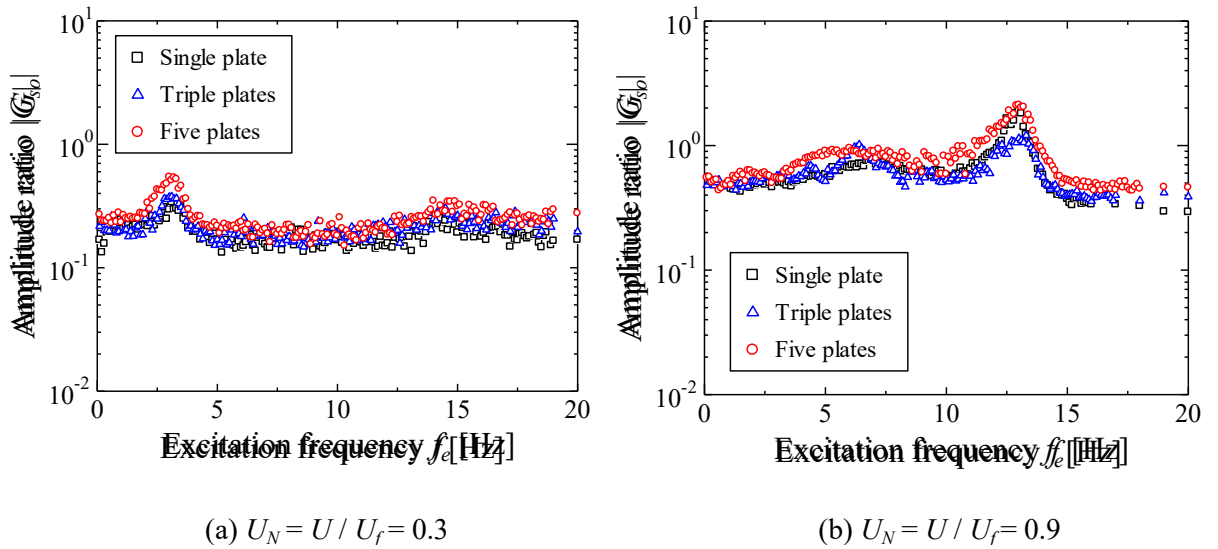


図 6.7: 加振板の枚数が周波数応答に及ぼす影響

6.8 周波数応答解析結果と実験結果の比較および考察

図 6.8 に流速に対する平板の低次の 2 つのモードの固有振動数の変化を示す。解析では、構造減衰比によって共振振動数はほとんど変化しないため、 $\zeta=0$ の場合の結果を示す。また、流速が小さい領域では DPM における核関数の計算が発散するため、 $U_N=0.1$ 以上の流速における結果を示している。ここで、第 5 章では共振ピークにおける振動数を解析と実験で比較したが、本章では実験において周波数応答曲線のピークを明瞭に判別することができない場合があった。このため、流速ごとに打撃試験を行い固有振動数を調べ、解析結果と比較した。解析では、式(6.7)において $\mathbf{Q}_a$ (加振板による空力加振に起因する流体力) を無視して複素固有値解析を行い、固有値の虚部から各流速における固有振動数を求めた。図 6.8 より、実験、解析共に、1 次固有振動数は流速の増加と共に大きくなる。一方、2 次固有振動数は流速の増加と共に小さくなる。この結果は第 5 章において示した結果と傾向が一致している。

流速に対する平板の応答特性の変化を示すために、図 6.9 に横軸に加振振動数 f_e 、奥行き軸にフラッタ流速を用いて基準化を行った無次元流速 $U_N (=U / U_f)$ 、縦軸にそれらのパラメータに対応する加振板と平板の振幅比 $|G|$ をとった結果を示す。図 6.9(a), (b) はそれぞれ実験結果と解析結果を表している。これらの結果は、1 枚の加振板を用いた場合の結果である。

図 6.9 より実験、解析ともに振幅比 $|G|$ は 1.0 ~ 20Hz までの加振振動数の範囲において、2 つの共振ピークが見られる。それぞれのピークは曲げ 1 次モードと 2 次モードに対応している。ここで、図 6.8 に示した結果と同様に、曲げ 1 次モードの共振ピークの振動数は流速の増加と共に高振動数側に变化している。一方、曲げ 2 次モードの共振ピークの振動数は流速の増加とともに低振動数側に变化している。また、振幅比 $|G|$ は流速の増加に伴い大きくなっており、実験、解析いずれにおいてもフラッタ流速に近い高流速域では 1 次共振ピークの振幅に対して 2 次共振ピークの振幅が大きくなる。

第 5 章より、強制変位加振の場合は、流速が大きくなると 1 次共振ピークの振幅は単調に減少し、2 次共振ピークの振幅は流速が大きくなると一旦減少し、その後さらに流速が大きくなると増加に転じることが明らかになった。一方、空力加振の場合は図 6.9 より 1 次、2 次共振ピーク共に流速の増加と共に振幅が大きくなっている。この差異は、空力加振の場合、加振力 (式(6.6)における $\mathbf{Q}_a$) が流速の増加と共に大きくなることに起因すると考えられる。

ここで、平板の応答振幅は実験結果と解析結果で定量的な差異が生じるが、これは実験では加振板の振動による周期的な空力加振に加えて加振板の後流中の乱れによる加振が加わることや解析モデルにおいて主流方向 (図 6.4 中の x 方向) の流速変動を考慮していないことなどが原因であると思われる。また、加振板が複数枚の場合は加振板の後流同士の干渉の影響

が生じると思われる．このため，ポテンシャル流れを基礎とする本解析手法ではこれらの因子の影響を精緻に解析することができないため，流れの乱れや主流方向の流速変動の影響を考慮した解析が必要であると考えられる．

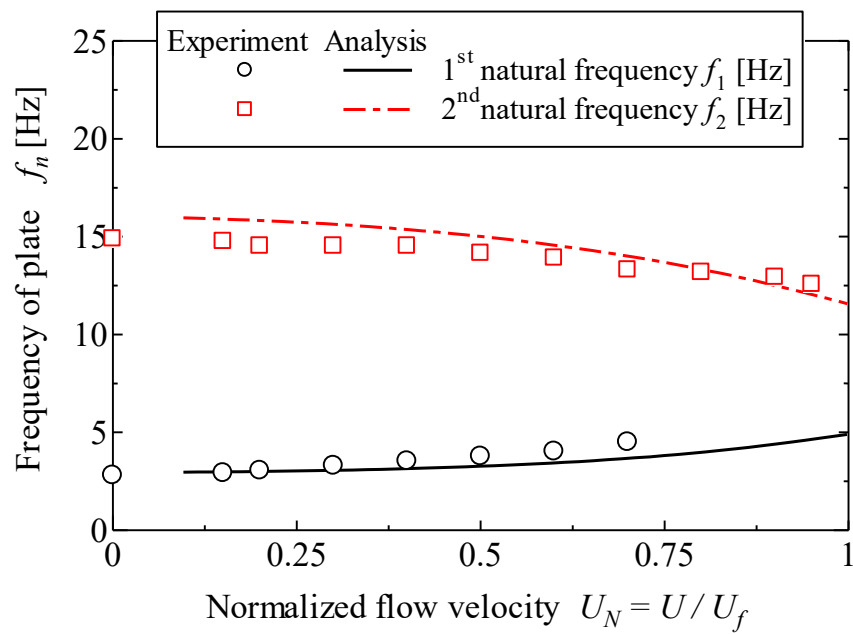
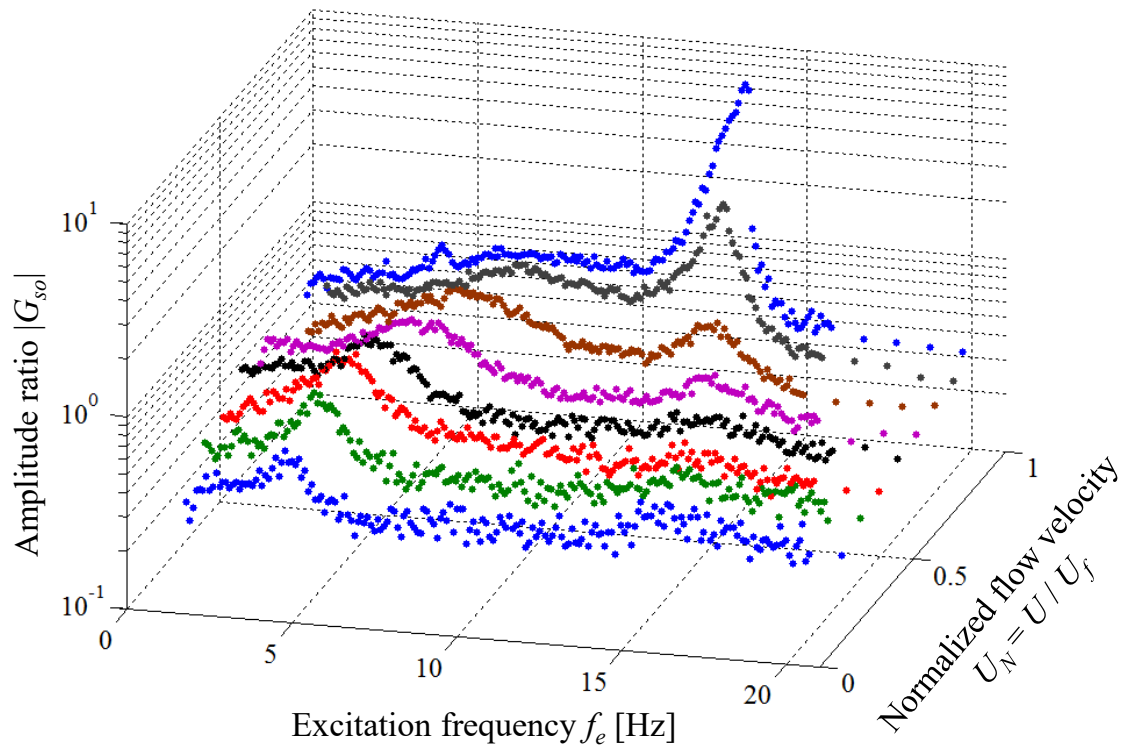
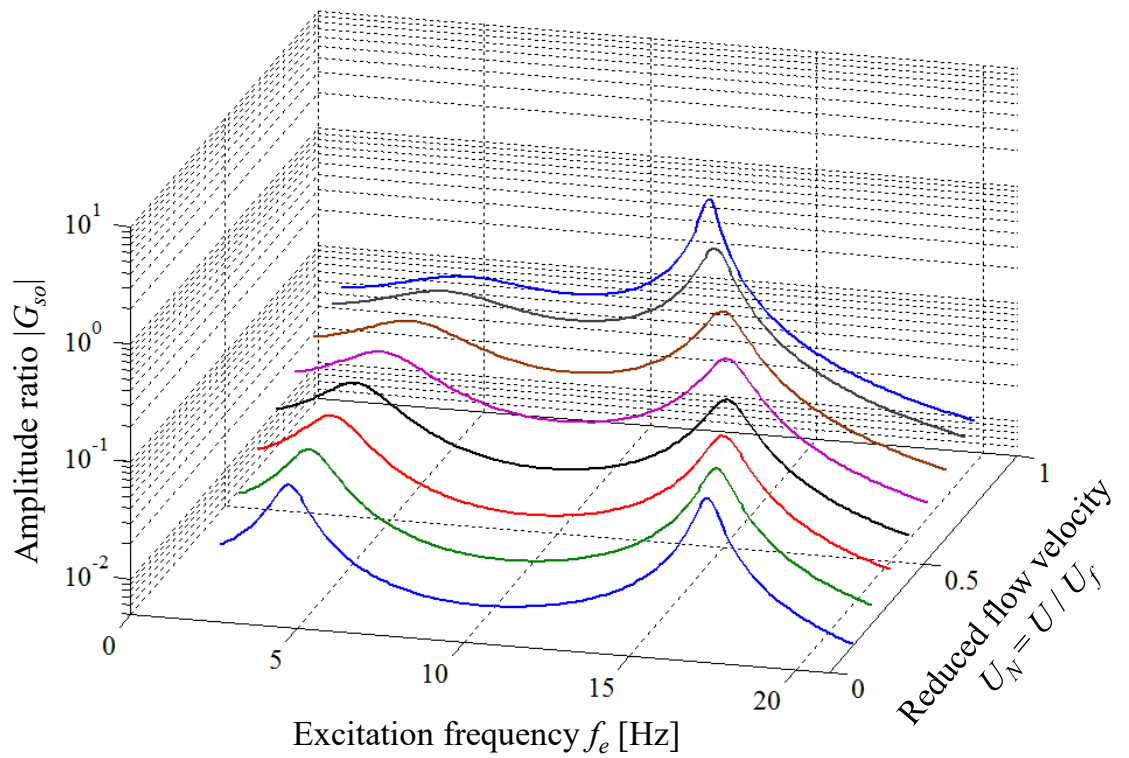


図 6.8: 流速に対する平板の固有振動数の変化



(a) Experiment



(b) Analysis

図 6.9: 流速に対する周波数応答の変化（解析結果と実験結果の比較）

図 6.10, 6.11 に 1 次および 2 次共振ピークにおける平板の振動モードを示す．ここでは，スパン方向の中央の位置における振動モードを示す．図 6.10, 6.11 はそれぞれ無次元流速 $U_N = 0.3$, 0.9 における結果であり，図中には実験結果 ((a1), (b1)) と解析結果 ((a2), (b2)) をあわせて示す．平板の振動変位は 1 周期における最大値で正規化して表示している．ここで，実験では平板の下流端付近における変位が大きいため測定の際にレーザ光が平板から外れる場合があり，振動モードの測定は上流端から 130mm の位置（平板のコード長は 140mm）までの範囲で行った．

図 6.10, 6.11 よりいずれの場合においても，平板の振動モードは実験と解析で概ね良く一致している．図 6.10 より，流速が低い場合，1 次モード，2 次モード共に流れがない場合のモードに近い形状の定在波タイプの振動モードとなっている．一方，図 6.11 より流速が増加すると，振動モードは進行波タイプのモードに変化している．各流速における振動モードは，第 5 章において示した強制変位加振の場合と概ね一致している．

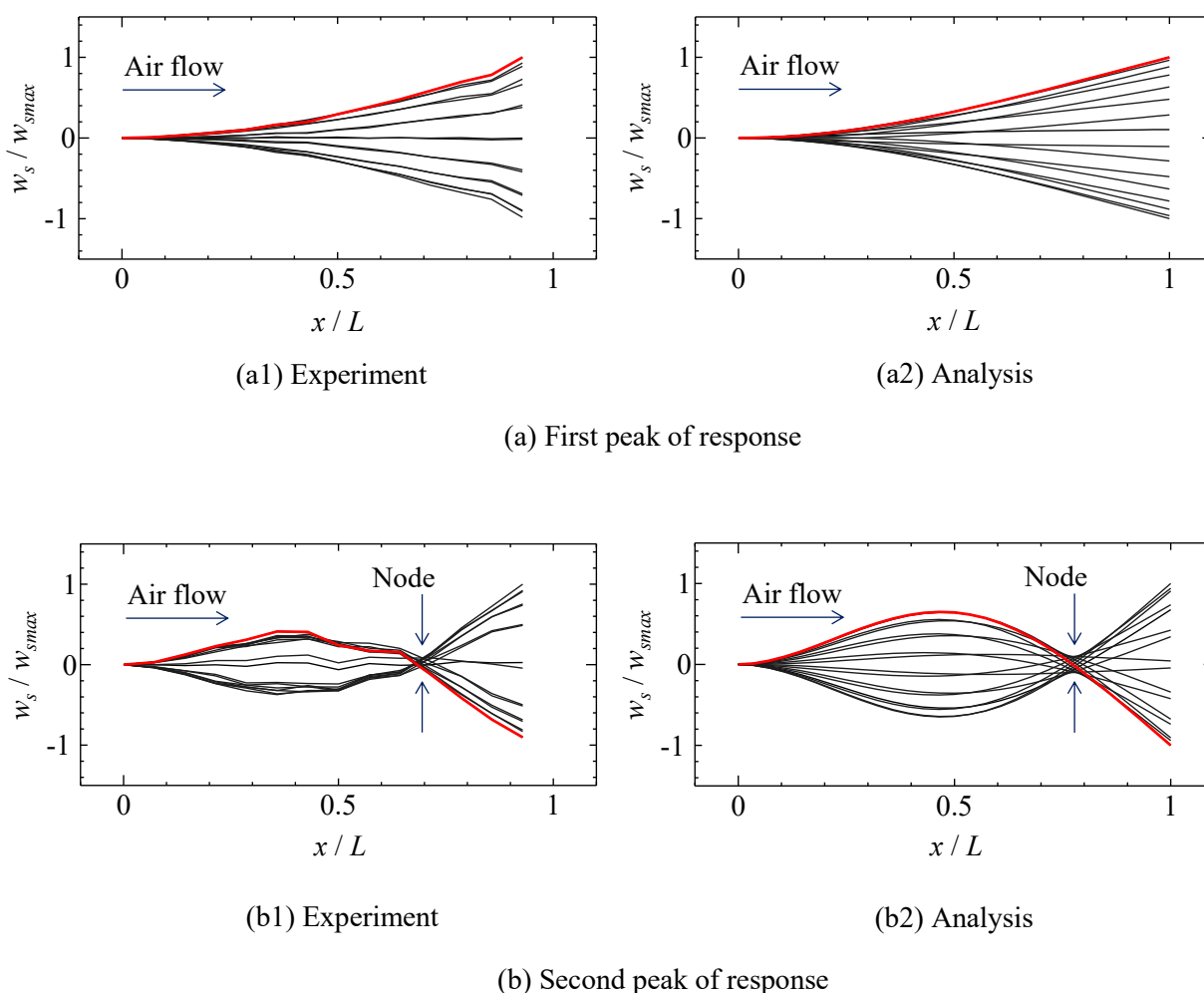
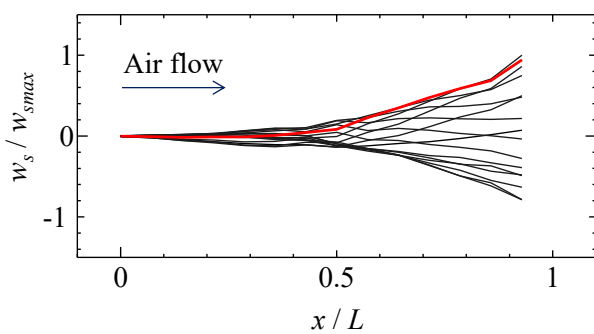
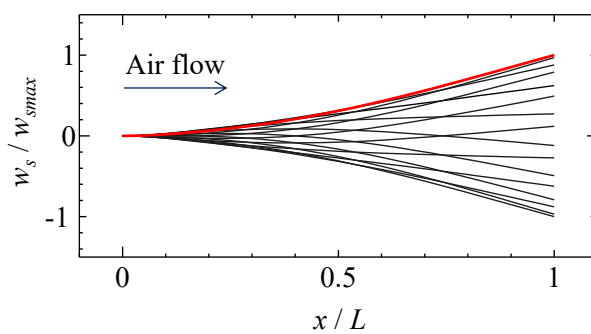


図 6.10: 空力加振時の振動モード（無次元流速 $U_N = 0.3$ ）

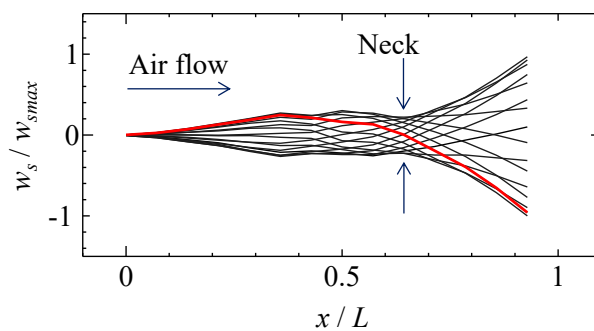


(a1) Experiment

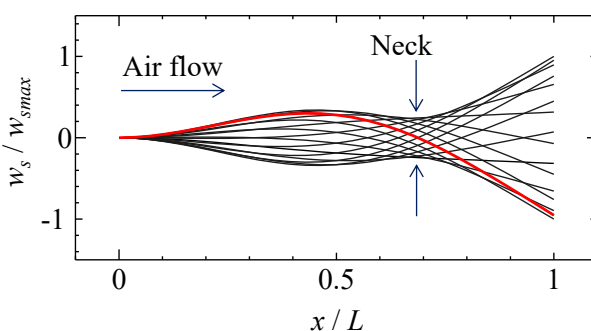


(a2) Analysis

(a) First peak of response



(b1) Experiment



(b2) Analysis

(b) Second peak of response

図 6.11: 空力加振時の振動モード (無次元流速 $U_N = 0.9$)

6.9 空力加振時の平板表面上の流体力による仕事分布 (解析結果)

流体力が励振力として作用する領域を調べるために、図 6.12 に空力加振時の流体力による局所的な仕事分布 ((a3), (b3)) を、加振板による空力加振に起因して平板に生じる流体力による仕事分布 ((a4), (b4)) と、平板の振動に起因して生じる流体力による仕事分布 ((a5), (b5)) に分けて表示した解析結果を示す。図 6.12 ((a3), (b3)) に示す加振板による空力加振に起因して平板に生じる流体力による仕事と平板の振動に起因して生じる流体力による仕事分布の総和は、式(6.18)を用いて計算した。また、図 6.12 ((a4), (b4)) に示す加振板による空力加振に起因して平板に生じる流体力による仕事分布は式(6.19)の $E_{fa(local)}$ を用いて計算した。図 6.12 ((a5), (b5)) に示す平板の振動に起因して生じる流体力による仕事分布は式(6.19)の $E_{fs(local)}$ を用いて求めた。図中の赤色と青色の領域はそれぞれ流体力による仕事が正と負の領域を表している。ここで、流体力による仕事はそれぞれ平板表面上における最大値で正規化して示している。加えて、図中にはスパン方向中央の位置における平板の振動モード ((a1), (b1)) と平板表面上の流体力分布 ((a2), (b2)) の解析結果を併せて示す。これらの結果は無次元流速が $U_N = 0.3, 0.95$ の場合の 2 次共振ピークにおける結果である。

図 6.12 ((a4), (b4)) より、加振板による空力加振に起因して平板に生じる流体力仕事は、平板の上流端付近の領域において正となっている。つまり、空力加振を受ける体系においては、この領域に作用する流体力が振動発生の原因、つまり加振源となっている。また、平板の振動に起因して生じる流体力による仕事に関して、流速がフラッタ流速に対して低い場合 ((a5)) はわずかに仕事が正の領域が見られるが大域的には負の流体力仕事が支配的となっていることから、平板の振動に起因する流体力は主に減衰力として作用している。一方、フラッタ流速に近い場合 ((b5)) においては、第 5 章に示した気流中で強制変位加振を受ける場合と同様に、仕事が正の領域が流速が小さい場合と比べて相対的に大きくなっており、平板の振動に起因する流体力が励振力として作用する領域が拡大している。

つまり、流速の増加と共に加振板の振動に起因して平板に生じる流体力（強制加振力）が大きくなることに加え、平板の振動に起因する流体力が励振力として作用する領域が拡大することで、平板の振幅が大きくなると考えられる。

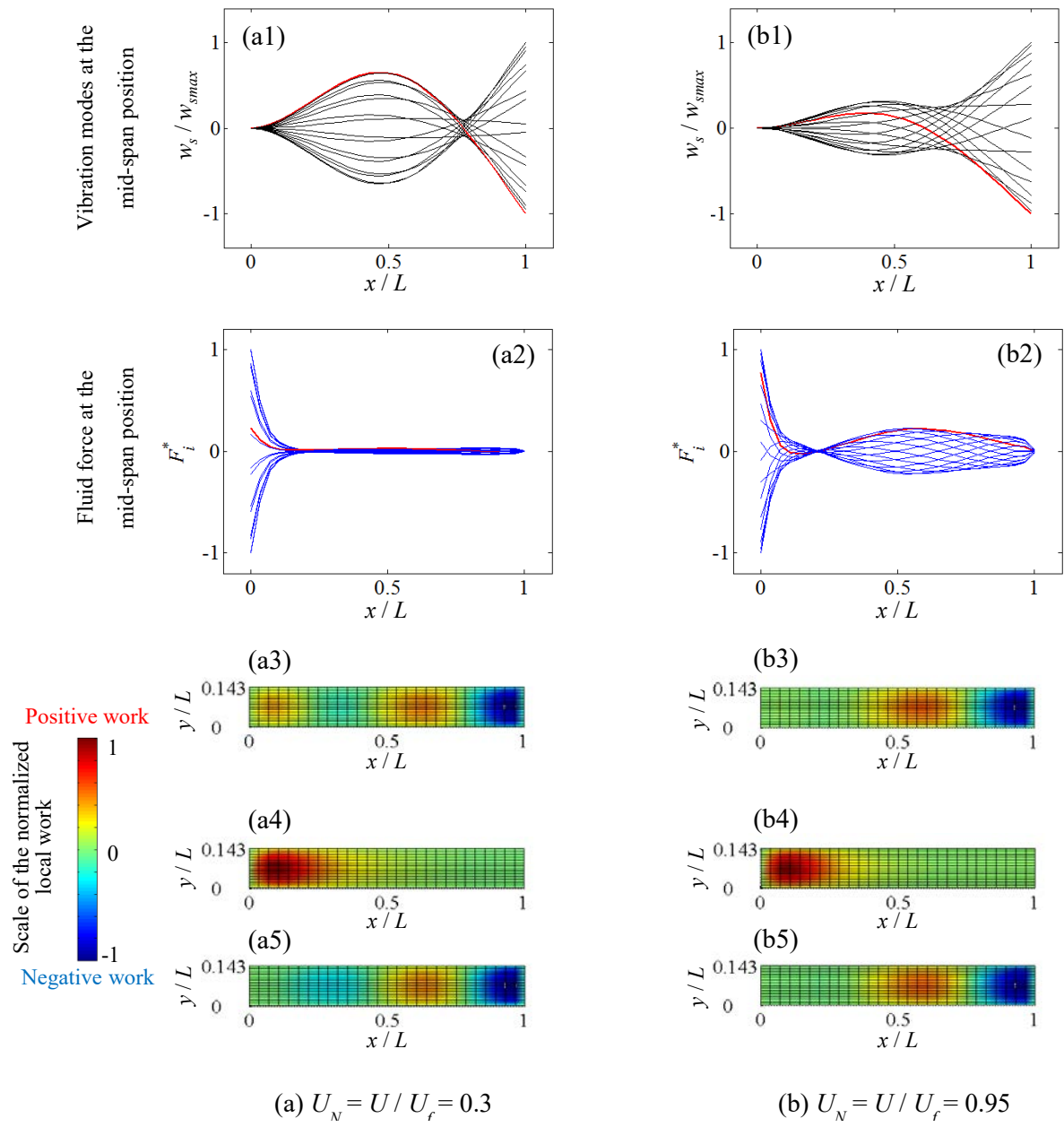


図 6.12: 空力加振時の振動モード，流体力分布，流体力仕事分布

6.10 まとめ

本章では周期的な空力加振を受ける平板を対象に，振動特性や励振流体力が作用する領域を示した．平板の上流側に加振板を設置し周期的に振動させることで，平板に対して空力加振を行った．流速および加振振動数を変化させて，周波数応答特性を調べた．さらに，空力加振時の流体力による局所的な仕事分布を，加振板による空力加振に起因して平板が受ける流体力による仕事分布と，平板の振動に起因して生じる流体力による仕事分布に分けて示した．これにより，空力加振を受ける場合の加振源を明らかにした．本章で得られた主な結果を以下に示す．

- (1) 1次および2次共振ピークにおける振幅は流速が増加すると単調に大きくなる．また，フラッタ流速に近い流速域においては，2次共振ピークの振幅が1次共振ピークの振幅に対して大きくなる．
- (2) 加振板の振動に起因して生じる流体力による仕事は，流速によらず平板の上流端付近の領域で正となっている．つまり，上流端付近の領域に作用する流体力が振動発生の原因，つまり加振源となっている．また，第5章で示したように，流速が増加すると平板の振動に起因する流体力による仕事が正，つまり流体力が励振力として作用する領域が拡大し，平板の振幅が大きくなる．

第 7 章

結論

7.1 総括

本研究では、気流中の弾性平板に発生するフラッタとフラッタ流速以下の流速域において強制加振に起因して発生する振動に関して、詳細な振動特性と励振機構を解析と実験により明らかにした。

フラッタの詳細な発生機構を考察するために、流体力によって平板表面になされる仕事分布を求めることで、励振流体力が作用する領域を示した。さらに、流体力を付加質量、付加減衰、および付加剛性に寄与する成分に分離し、それぞれの成分が流体力仕事に及ぼす影響を調べた。

また、平板の支持条件が不安定化機構に及ぼす影響を明らかにするために、上流端が自由になっている場合および弾性支持された場合を対象に、支持条件がフラッタ特性や流体力仕事の分布に及ぼす影響を示した。

さらに、フラッタ発生後の振幅および振動数が流速と共にどのように変化するかを調べるために非線形解析を行った。リミットサイクル状態において流体力によって平板になされる仕事を求めることで、リミットサイクルの維持機構を考察した。

加えて、フラッタ流速以下の流速域において強制加振を受ける場合について、流速が固有振動数、減衰比および振幅などの振動特性に及ぼす影響を調べた。また、強制加振時の流体力仕事分布を求めることで、励振流体力が作用する領域を示した。

以下に、本研究で得られた知見を総括する。

(1) フラッタの発生機構に関して得られた知見

(1-1) 流体付加剛性に起因する流体力仕事は流速によらず正である。一方、流体付加減衰に起因する流体力仕事は負である。また、流体付加質量に起因する流体力仕事はフラッタの励振に寄与していない。つまり、流体付加剛性に起因するエネルギーの流入量が流体付加減衰に起因するエネルギーの散逸量を上回ったとき、フラッタが発生する。

(1-2) 構造減衰によるエネルギー散逸よりも流体付加減衰によるエネルギー散逸の方が支配的であるため、構造減衰がフラッタ流速および振動数に及ぼす影響は小さい。

(1-3) 質量比が小さい場合、フラッタへの寄与が支配的な低次の 2 つの曲げモードを用いてモ

ード近似を行った方程式に対して、剛性行列の非対角成分による仕事を求めると正となる。つまり、質量比が小さい場合は、流体付加剛性に起因する剛性項の非対角成分の影響による低次の2つの曲げモード間の連成がフラッタ発生の原因である。一方、各モード自身の仕事は流速によらず常に負であり、単一のモードが励起されるフラッタは発生しない。

(2) 平板の支持条件がフラッタ特性と不安定化機構に及ぼす影響に関して得られた知見

- (2.1) 平板の上流端が固定されていない場合は、上流端の運動が支配的になるため、固定支持された場合と比べて流体力仕事の分布が大きく変化する。上流端が弾性支持された場合は、支持部の等価曲げ剛性が小さく上流端がある程度動く状態では流体力仕事が正の領域が平板の中流領域から上流端付近にかけて広く分布する。上流端が自由になると上流端付近の領域で流体力仕事が正となる。また、支持条件によらず平板の下流端付近では流体力による仕事が負となっており、下流端付近に作用する流体力はフラッタの発生に寄与していない。
- (2.2) 上流端が弾性支持されねじり剛性が小さい平板の場合、支持部の等価曲げ剛性が大きくなり上流端が変位しなくなるとピン支持の場合のフラッタ流速および振動数に一致する。また、等価曲げ剛性が小さくなるとフラッタ流速は大きく低下する。
- (2.3) 上流端がピン支持された場合（ねじり剛性が0の場合）は、固定支持の場合（ねじり剛性が ∞ ）と比べて少しフラッタ流速が低下するが、その影響は小さい。一方、フラッタ振動数は大きく低下する。つまり、ねじり剛性のフラッタ流速への影響は小さいが、フラッタ振動数に及ぼす影響は大きい。

(3) 非線形解析およびリミットサイクルの維持機構に関して得られた知見

- (3.1) 平板の中流付近の領域における正の流体力仕事と、下流端付近における負の流体力仕事および構造減衰による負の仕事がバランスすることでリミットサイクルが維持される。
- (3.2) ポテンシャル流れに基づく解析手法（VLM）を用いてフラッタ振幅を計算した場合、臨界流速付近では実験値に近い振幅を取るが、流速が増加すると振幅は実験結果よりも大きくなる。一方、CFDを用いた解析では、VLMでは考慮することができない平板の側端付近における流れのはく離の影響が包含されており、実験結果に近い計算結果が得られる。
- (3.3) VLMを用いた場合流速の増加に対してフラッタ振動数が減少するのに対し、CFDを用いた解析では実験結果と同様に流速に対してフラッタ振動数が増加する傾向が得られる。

(3.4) VLMを用いた解析はCFDを用いた解析に対して大幅に計算時間が短く，多くのパラメータで計算を行う上では優位性がある．

(4) 強制加振を受ける場合の振動特性および励振機構に関して得られた知見

(4.1) フラッタ流速に近い流速域において強制加振を行うと，2次共振ピークにおける振幅が1次共振ピークにおける振幅よりも大きくなる．

(4.2) フラッタ流速に対して小さい流速においては定在波タイプの振動モードが励起され，フラッタ流速に近い流速においては流体力を介して複数のモードが連成することで進行波タイプのモードが励起される．

(4.3) フラッタ流速に近い流速においては構造減衰による負の仕事は流体付加減衰に起因する負の仕事に対して無視できるほど小さい．一方，フラッタ流速に対して流速が小さい場合は，構造減衰による負の仕事の影響が相対的に大きくなる．このため，フラッタ流速に近い流速では構造減衰が平板の振幅に及ぼす影響が小さく，フラッタ流速に対して小さい流速においては構造減衰が振幅に及ぼす影響が大きくなる．

(4.4) 2次共振ピークにおける流体力仕事分布は，フラッタ流速に近い流速では平板の中流領域において流体力仕事が正，下流端付近において仕事が負となる．また，フラッタ流速に対して小さい流速における仕事分布と比較すると，平板の中流領域における仕事が正の領域が拡大する．

(4.5) 加振板による空力加振を受ける場合，加振板の振動に起因して生じる流体力による仕事は平板の上流端付近の領域で正となり，この領域に作用する流体力が加振源となる．

7.2 今後の展望

残された課題と今後の展望を述べる．

- ・ポテンシャル流れを基礎とするVLMを用いてフラッタ発生時の平板の振幅を求めると，実験結果よりも振幅が大きくなることが明らかになった．一方，CFDを用いて計算を行った結果，フラッタ振幅は実験値と近い値となった．ここで，図7.1に示すように，平板の側端付近において流れのはく離が生じ局所的な圧力の上昇が発生しており，フラッタ特性に影響を及ぼす可能性があることが示された．この平板の側端付近の流れのはく離の影響は，平板のアスペクト比によって変化すると考えられる．このため，流れのはく離の影響が考慮されていないVLMが適用可能なアスペクト比の範囲を明確化する必要がある．

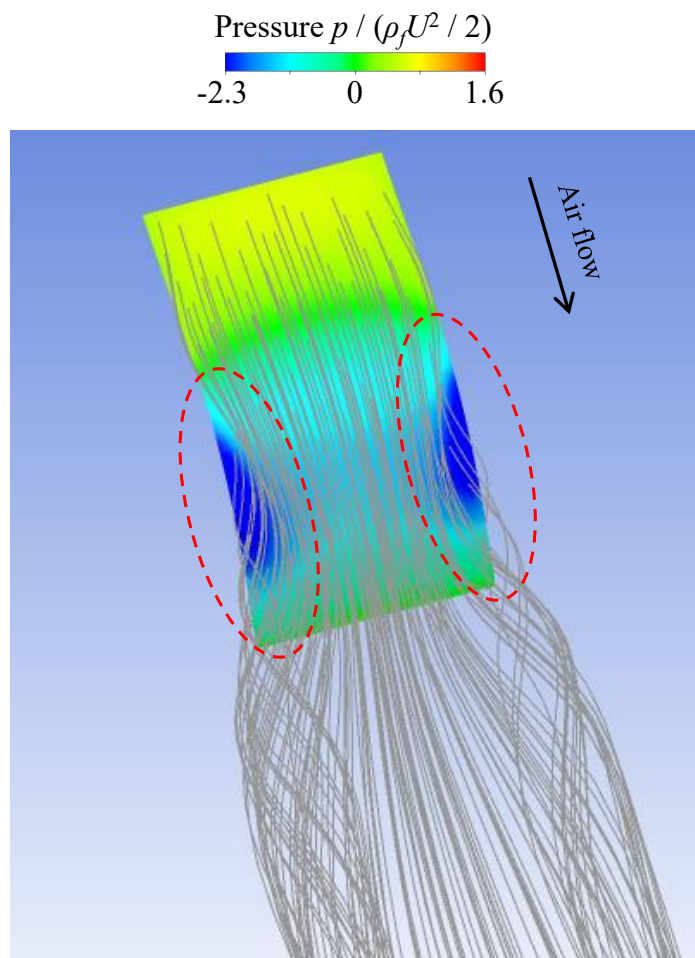


図7.1: フラッタ発生時の流線と平板表面状の圧力分布の関係

- ・流体力により平板の表面になされる仕事分布を求めた結果、平板の中流領域で流体力仕事
が正となることが明らかになった。しかしながら、中流領域で流体力仕事为正となる機構
を解明するには至らなかった。このため、平板の中流領域で流体力仕事为正となる原因を
明らかにする必要がある。
- ・空力加振に関して、本論文では平板に作用する流体力を線形理論を用いて求め解析を行
ったため、実験結果と解析結果で振幅に定量的な差異が生じた。このため、精緻な解析の
ために流体力の非線形性、つまり乱れの影響などを考慮した解析を行う必要がある。
- ・流体力によって平板表面になされる仕事分布の知見を基に、フラッタや強制加振に起因し
た振動を制振する必要がある。具体的には、流体力仕事为正となる領域、つまり励振流体
力が作用する領域に対して集中的に制御を行う。

参考文献

- [1] 赤塚正和, 佐々木将志, 橋本巨, 紙ハンドリングのからくり「輪転印刷機」, 日本機械学会誌, Vol. 108, No. 1044 (2005), pp. 10-13.
- [2] 橋本巨, 柔軟媒体の搬送技術とその展望, 精密工学会誌, Vol. 78, No. 5 (2012), pp. 359-362.
- [3] 橋本巨, 高機能性フィルムの大量生産を可能とするウェブハンドリング技術, 日本機械学会誌, Vol. 117, No. 1151 (2014), pp. 46-50.
- [4] 橋本巨, 梅津信二郎, ロール・ツー・ロールプリンテッドエレクトロニクスにおける基幹技術, 精密工学会誌, Vol. 78, No. 8 (2012), pp. 674-677.
- [5] Mani, G. K., Nimura, Y. and Tsuchiya, K., Advanced artificial electronic skin based pH sensing system for heatstroke detection, ACS SENSORS, Vol. 5 (2020), pp. 911-916.
- [6] Watanabe, Y., Suzuki, S., Sugihara, M. and Sueoka, Y., An experimental study of paper flutter, Journal of Fluids and Structures, Vol. 16, No. 4 (2002), pp. 529-542.
- [7] Huang, L., Flutter of cantilevered plates in axial flow, Journal of Fluids and Structures, Vol. 9, No. 2 (1995), pp. 127-147.
- [8] Yamaguchi, N., Sekiguchi, T., Yokota, K. and Tsujimoto, Y., Flutter limits and behaviors of a flexible thin sheet in high-speed flow – II: Experimental results and predicted behaviors for low mass ratios, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 122, No. 1 (2000), pp. 74-83.
- [9] Lemaitre, C., Hémon, P. and de Langre, E., Instability of a long ribbon hanging in axial air flow, Journal Fluids and Structures, Vo. 20, No. 7 (2005), pp. 913-925.
- [10] Eloy, C., Lagrange, R., Souilliez, C. and Schouveiler, L., Aeroelastic instability of cantilevered flexible plates in uniform flow, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 611 (2008), pp. 97-106.
- [11] Dowell, E. H., Flutter of infinitely long plates and shells. I: Plate, AIAA Journal, Vo. 4, No. 8 (1966), pp. 1370-1377.
- [12] Kornecki, A., Dowell, E. H. and O'Brien, J., On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow, Journal of Sound and Vibration, Vol. 47, No. 2 (1976), pp. 163-178.
- [13] Watanabe, Y., Isogai, K., Suzuki, S. and Sugihara, M., A theoretical study of paper flutter,

- Journal of Fluids and Structures, Vol. 16, No. 4 (2002), pp. 543-560.
- [14] Manela, A. and Howe, M. S., On the stability and sound of an unforced flag, Journal of Sound Vibration, Vol. 321 (2009), pp. 994-1006.
- [15] Theodorsen, T., General theory of aerodynamics instability and the mechanism of flutter, NACA technical report No. 496 (1935).
- [16] Guo, C. Q. and Paidoussis, M. P., Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 67, No. 1 (2000), pp. 171-176.
- [17] 長倉博, 金子成彦, 一次元平行すきま流路内に置かれた片持弾性はりの安定性, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.58, No.546 (1992), pp.352-359.
- [18] 金子成彦, 呉小山, 離散はり要素を用いたすきま流れによって発生するシートフラッタ解析, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.68, No.675 (2002), pp.3314-3321.
- [19] 稲田文夫, 葉山眞治, すき間流励起振動に関する研究 (第 1 報, 一次元テーパすき間の壁面に作用する流体力の評価), Vol. 53, No.488, (1987), pp.933-939.
- [20] Yamaguchi, N., Yokota, K. and Tsujimoto, Y., Flutter limits and behaviors of a flexible thin sheet in high-speed flow – I: Analytical method for prediction of the sheet behavior, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 122, No. 1 (2000), pp. 65-73.
- [21] Howell, R. M., Lucey, A. D., Carpenter, P. W. and Pitman M. W., Interaction between a cantilevered-free flexible plate and ideal flow, Journal of Fluids and Structures, Vol. 25 (2009), pp. 544-566.
- [22] Eloy, C., Souilliez, C. and Schouveiler, L., Flutter of a rectangular plate, Journal of Fluids and Structures, Vol. 23, No. 6 (2007), pp. 904-919.
- [23] Gibbs, C. S., Wang, I., Dowell, E. H., Theory and experiment for flutter of a rectangular plate with a fixed leading edge in three-dimensional axial flow, Journal of Fluids and Structures, Vol. 34 (2012), pp. 68-83.
- [24] 山口信行, 伊藤恵介, 緒方正幸, 柔軟ウェブ基礎形態のフラッタ限界とその挙動に関する研究 (第1 報, フラッタ限界の予測と風洞試験結果), 日本機械学会論文集 B編, Vol.67, No.663 (2001), pp.2738-2745.
- [25] Chang, Y. B. and Moretti, P. M., Flow induced vibration of free edges of thin films,

- Journal of Fluids and Structures, Vol.16 (2002), pp.989-1008.
- [26] Bidkar, R., Raman, A. and Bajaj, A., Aeroelastic stability of wide webs and narrow ribbons in cross flow, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.75 (2008), 041023.
- [27] Vaughan, M. and Raman, R. A., Aeroelastic stability of axially moving webs coupled to incompressible flows, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.77 (2010), 021001.
- [28] 工藤岳, 渡辺昌宏, 原謙介, 薄膜フィルムに発生するすきま流れ励起不安定波動 (分散関係と安定性解析) , 日本機械学会論文集C 編, Vol.76, No.765 (2010), pp.1301-1307.
- [29] Kudou, G., Watanabe, M. and Hara, K., Flow-induced wave generated on a thin film in a narrow gap, Journal of Advanced Mechanical Design, Systems and Manufacturing, Vol.4, No.1 (2010), pp.257-268.
- [30] Tang, D. M., Yamamoto, H., Dowell, E. H., Flutter and limit cycle oscillation of two-dimensional panels in three-dimensional axial flow, Journal of Fluids and Structures, Vol. 17, No. 2 (2003), pp. 225–242.
- [31] Tang, L. and Paidoussis, M. P., On the instability and the post-critical behavior of two-dimensional cantilevered flexible plates in axial flow, Journal of Sound and Vibration, Vol. 305 (2007), pp. 97-115.
- [32] Michelin, S., Llewellyn Smith, S. G. and Glover, B. J., Vortex shedding model of a flapping flag, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 617 (2008), pp. 1-10.
- [33] Alben, S., Simulating the dynamics of flexible bodies and vortex sheets, Journal of Computational Physics, Vol. 228 (2009), pp. 2587-2603.
- [34] Chen, M., Jia, L., Wu, Y., Yin, X. and Ma, Y., Bifurcation and chaos of a flag in an inviscid flow, Journal of Fluids and Structures, Vol. 45 (2014), pp. 124-137.
- [35] Yadykin, Y. V., Tenetov, V. and Levin, D., The flow-induced vibration of a flexible strip hanging vertically in a parallel flow part 1: temporal aeroelastic instability, Journal of Fluids and Structures, Vol. 15 (2001), pp. 1167-1185.
- [36] Eloy, C., Kofman, N. and Schouveiler, L., The origin of hysteresis in the flag instability, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 691 (2012), pp. 583-593.
- [37] Wu, X. and Kaneko, S., Linear and nonlinear analysis of sheet flutter induced by leakage

- flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 20 (2005), pp. 927-948.
- [38] 澤田有弘, 久田俊明, ALE有限要素法による二次元の旗のはためき問題の流体・構造連成解析, *日本機械学会論文集A編*, Vol. 71, No. 701 (2005), pp. 1-8.
- [39] Sawada, T. and Hisada, T., Fluid-structure interaction analysis of the two-dimensional flag-in-wind problem by an interface-tracking ALE finite element method, *Computers & Fluids*, Vol. 36 (2007), pp. 136-146.
- [40] Zhang, J., Childress, S., Libchaber, A., Shelly, M., Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one-dimensional flags in a two-dimensional wind, *Nature*, Vol. 408 (2000), pp. 835-839.
- [41] Huang, W. and Sung, J. H., Three-dimensional simulation of a flapping flag in a uniform flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 653 (2010), pp. 301-336.
- [42] 第3版 有限要素法による流れのシミュレーション, 一般社団法人日本計算工学会編, 丸善 (2007), pp.209-247.
- [43] Paraz, F., Eloy, C. and Schouveiler, L., Experimental study of the response of a flexible plate to a harmonic forcing in a flow, *Comptes Rendus Mecanique*, Vol.342 (2014), pp.532-538.
- [44] Paraz, F., Schouveiler, L. and Eloy, C., Thrust generation by a heaving flexible foil: Resonance, nonlinearities, and optimality, *Physics of Fluids*, Vol.28 (2016), 011903.
- [45] Arellano Castro, R. F., Guillaumot, L., Cros, A. and Eloy, C., Non-linear effects on the resonant frequencies of a cantilevered plate, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.46 (2014), pp. 165-173.
- [46] Michelin, S. and Llewellyn Smith, S. G., Resonance and propulsion performance of a heaving flexible wing, *Physics of Fluids*, Vol.21 (2009), 071902.
- [47] Manela, A. and Howe, M. S., The forced motion of a flag, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.635 (2009), pp.439-454.
- [48] Sandoval Hernandez, E., Llewellyn Smith, S. G. and Cros, A., Resonance of a flexible plate immersed in a von Karman vortex street, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol.34, No.4 (2020), pp.1459-1465.
- [49] Kim, H., Kang, S. and Kim, D., Dynamics of a flag behind a bluff body, *Journal of Fluids*

and Structures, Vol.71 (2017), pp.1-14.

- [50] Sears, W. R., Some aspects of non-stationary airfoil theory and its practical application, *Journal of the Aeronautical Science*, Vol.8, No.3 (1941), pp.104-108.
- [51] 石原国彦, 船川正哉, 周期的ガストを受ける翼に加わる空気力とその振動応答(第1報, 応力の評価解析), *日本機械学会論文集B 編*, Vol.45, No.397 (1979a), pp.1213-1223.
- [52] 石原国彦, 船川正哉, 周期的ガストを受ける翼に加わる空気力とその振動応答(第2報, 実験), *日本機械学会論文集B編*, Vol.45, No.397 (1979b), pp.1224-1233.
- [53] 渡辺昌宏, 長谷川亜紀, 原謙介, Manuel Gonzalez, Javier Cuadrado, 非定常揚力面理論に基づく有限幅矩形シートの三次元フラッタ解析と風洞実験, *日本機械学会論文集*, Vol.82, No.841 (2016), DOI:10.1299/transjsme.16-00170.
- [54] Semler, C., Li, G. X. and Paidoussis M. P., The non-linear equations of motion of pipes conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.165 (1994), pp.577-599.
- [55] Katz, J. and Plotkin, A., *Low-speed aerodynamics*, second ed., Cambridge University Press (2001), New York..
- [56] Ueda, T. and Dowell, E. H., A new solution method for lifting surface in subsonic flow, *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 3 (1982), pp.348-355.
- [57] Ueda, T., Lifting surface calculations in the Laplace domain with application to root loci, *AIAA Journal*, Vol. 25, No.5 (1987), pp.698-704.
- [58] Küssner, H. G., General airfoil theory, NACA Technical Report, No. 979 (1941).
- [59] Taneda, S., Waving motion of flags, *Journal of The Physical Society of Japan*, Vol.24, No.2 (1968), pp.392-401.
- [60] 日本機械学会編, 事例に学ぶ流体関連振動 第3版, 技報堂出版, pp.18-24.
- [61] Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plate and shells*, McGraw-Hill Book Company (1959), pp.44-45.
- [62] 櫻井豊三, 固定梁の軸張力實用計算法, *土木学会誌*, Vol.26, No.5 (1940), pp.573-595.
- [63] 今井功, *流体力学*, 裳華房 (1973), pp. 173-174.
- [64] Shirayama, S., Kuwahara, K. and Mendez, R., A new three-dimensional vortex method, *AIAA Paper*, No.85-1488, pp.14-24 (1985).
- [65] Nakanishi, Y., Kamemoto, K., An examination of a vortex method for predicting unsteady

- separated flows around three-dimensional bodies. In Eds: Tanaka, M., Brebbia, C. A., Shaw, R., Advances in Boundary Elements Methods in Japan and USA, Computational Mechanics Publications, pp.269-283 (1990).
- [66] Houbolt, J. C., A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. Journal of Aeronautical Sciences, Vol.17 (1950), pp.540-550.
- [67] Semler, C., Gentleman, W. C., Paidoussis M. P., Numerical solutions of second order implicit non-linear ordinary differential equations, Journal of Sound and Vibration, Vol.195 (1996), pp.553-574.
- [68] 永田哲志, 流体構造連成に基づく弾性運動翼周りの流れ場とその流体力特性の数値解析に関する研究, 九州工業大学, 博士論文 (2013).
- [69] Kamemoto, K, On attractive features of the vortex method, In Eds: Hafez, M. and Oshima, K., Computational fluid dynamics review 1995, Wiley, 334-353 (1995).
- [70] Tang, L., Paidoussis, M. P., Jiang, J., The dynamics of variants of two-dimensional cantilevered flexible plates in axial flow, Journal of Sound and Vibration, Vol.323 (2009), pp.214-231.
- [71] 田中栄一, 二次元平衡噴流の干渉 (第 1 報, 平行 2 噴流の干渉の実験), 日本機械学会論文集, Vol.35, No.274 (1969), pp.1257-1264.
- [72] 正司秀信, 大橋秀雄, 振動翼列後流の可視化と数値計算, ターボ機械, Vol.9, No.5 (1981), pp.259-265.
- [73] Mangler, K. W., Improper integral in theoretical aerodynamics, RAE Rept. Aero, No.2424 (1951)
- [74] Ehrenstein, U., Marquillie M. and Eloy C., Skin friction on a flapping plate in uniform flow, Philosophical Transactions of the Royal Society A, Vol.372 (2014), 20130345.

付録 A Kussner の積分方程式の導出

非粘性，非圧縮，渦なしの3次元ポテンシャル流れを仮定し，Kussnerの積分方程式^[58]を導出する． x, y, z 方向の流速を (u, v, w) ，圧力を p ，速度ポテンシャルを Φ とすると，各方向の速度成分は以下の式で得られる．

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

また，連続の式は下式で与えられる．

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.2})$$

式(A.1)を式(A.2)に代入することで，連続の式は速度ポテンシャル Φ を用いて下式のように表される．

$$\Delta \Phi = 0 \quad (\text{A.3})$$

また，運動量保存則より，Eulerの運動方程式は下式で得られる．

$$\rho_f \frac{D}{Dt} \nabla \Phi = -\nabla p \quad (\text{A.4})$$

式(A.4)中のLagrange微分およびナブラ演算子は，それぞれ式(A.5), (A.6)で与えられる．

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

ここで，図A.1に示す気流中の薄い平板を考える．平板の上流では一様流速 U ，平板近傍では微小な流速の擾乱があると仮定すると，速度ポテンシャル Φ は下式のように表すことができる．

$$\Phi = Ux + \phi_p(x, y, z, t) \quad (\text{A.7})$$

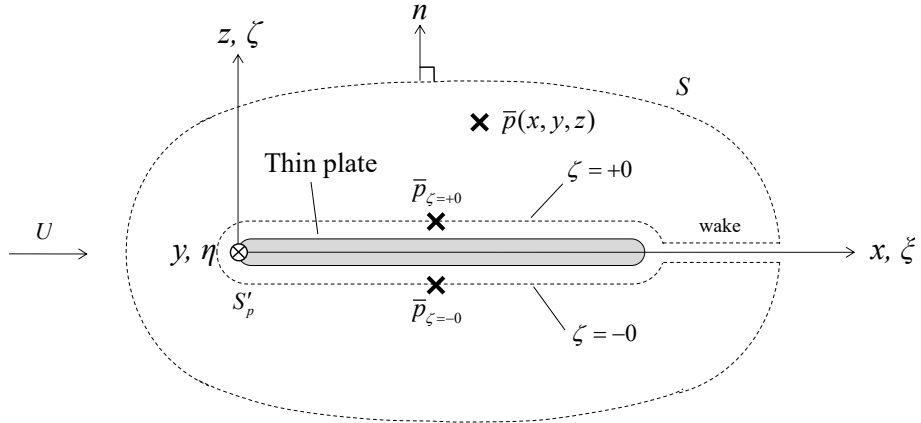


図 A.1: 平板を囲む領域と座標系の定義

式(A.7)中の $\phi_p(x, y, z, t)$ は摂動ポテンシャルである．式(A.7)を式(A.3)に代入すると，下式のようになる．

$$\Delta \phi_p = 0 \quad (\text{A.8})$$

ここで，摂動速度は一様流速 U に対して微小とすると，下式のように近似することができる．

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U + \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \simeq U, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial(Ux)}{\partial y} + \frac{\partial \phi_p}{\partial y} \simeq 0, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial(Ux)}{\partial z} + \frac{\partial \phi_p}{\partial z} \simeq 0 \quad (\text{A.9})$$

よって，Lagrange微分は下式のように書き換えることができる．

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{A.10})$$

また，平板の十分上流における圧力を p_0 とすると，摂動圧力 p_p は下式のように表される．

$$p - p_0 = p_p(x, y, z, t) \quad (\text{A.11})$$

式(A.10), (A.11)を用いて式(A.4)を書き換えると，下式のようになる．

$$\nabla \left[\rho_f \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_p + p_p \right] = 0 \quad (\text{A.12})$$

式(A.12)に対して ∇ を演算すると，以下のようになる．

$$\Delta p_p = 0 \quad (\text{A.13})$$

ここで，調和振動を仮定し，下式のように変数分離を行う．

$$\phi_p(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (\text{A.14})$$

$$p_p(x, y, z, t) = \bar{p}(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (\text{A.15})$$

また、下式が成り立つとき式(A.12)を満たす.

$$\rho_f \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_p + p_p = 0 \quad (\text{A.16})$$

式(A.16)に式(A.14), (A.15)を代入すると、下式が得られる.

$$\bar{p} = -\rho_f \left(i\omega \bar{\phi} + U \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) \quad (\text{A.17})$$

式(A.17)を変形すると、以下のようになる.

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{i\omega}{U} \bar{\phi} = -\frac{\bar{p}}{\rho_f U} \quad (\text{A.18})$$

式(A.18)は $\bar{\phi}$ に関する1階の微分方程式であるので、一般解は下式のように得られる. 式中の C は任意の定数である.

$$\bar{\phi} = -e^{-\frac{i\omega}{U}x} \left\{ -\int \frac{\bar{p}}{\rho_f U} e^{\frac{i\omega}{U}x} dx + C \right\} \quad (\text{A.19})$$

ここで、 λ をダミーインテグラルパラメータとして積分区間を $-\infty \sim x$ にとる. また、境界条件として式(A.20)を用いると、式(A.19)の定数 C は0となる. よって、速度ポテンシャルの複素振幅は式(A.21)で表される.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\phi}(x, y, z) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{\phi}(x, y, z) = -e^{-\frac{i\omega}{U}x} \int_{-\infty}^x \frac{\bar{p}(x, y, z)}{\rho U} \cdot e^{\frac{i\omega}{U}\lambda} d\lambda \quad (\text{A.21})$$

次に、図A.1に示す閉曲面 S で囲まれた領域 V を考える. $\Delta\psi$ を満たす関数 ψ を定義すると、Greenの定理より、体積積分を面積積分に変換する公式が下式のように成立する.

$$\iiint_V \psi \Delta \left(\frac{1}{R} \right) dV = \iint_S \left(\psi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \frac{1}{R} dS \quad (\text{A.22})$$

式(A.22)中の dS , dV はそれぞれ面積素, 体積素を表しており, n は閉曲面 S 上の法線である. 式中の R は領域内の任意の2点 (x, y, z) , (ξ, η, ζ) の間の距離である.

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \quad (\text{A.23})$$

ここで、 Δ を極座標表示に変換し R に対して適用すると、 $R = 0$ を除いては、下式が成立する。

$$\begin{aligned}\Delta \frac{1}{R} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \frac{1}{R} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) \frac{1}{R} = 0\end{aligned}\quad (\text{A.24})$$

よって、式(A.24)より式(A.22)の左辺は $R = 0$ を除いて0であるので、下式のように変形することができる。

$$I = \iiint \psi \Delta \left(\frac{1}{R} \right) dV = \psi_{R=0} \iiint \Delta \left(\frac{1}{R} \right) dV = \psi_{R=0} \iiint \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV \quad (\text{A.25})$$

式(A.25)中の $\nabla \left(\frac{1}{R} \right)$ に対してGaussの発散定理を適用すると、式(A.22)は下式のように書き換えることができる。

$$I = \psi_{R=0} \iiint \nabla \frac{1}{R} \cdot \frac{\nabla R}{|\nabla R|} dS \quad (\text{A.26})$$

ここで、面積素 dS は極座標で以下のように表される。

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\psi \quad (\text{A.27})$$

よって、式(A.26)は下式のように変形される。

$$\begin{aligned}I &= \psi_{R=0} \iiint \nabla \frac{1}{R} \cdot \frac{\nabla R}{|\nabla R|} dS = \psi_{R=0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\frac{1}{R^2} R d\theta \cdot R \sin \theta d\psi \\ &= -4\pi \psi_{R=0}\end{aligned}\quad (\text{A.28})$$

式(A.22), (A.28)より下式が成り立つ。

$$\psi_{R=0} = \psi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint \left(\psi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \frac{1}{R} dS \quad (\text{A.29})$$

式(A.13)より、 $\Delta p = 0$ つまり、 $\Delta \bar{p} = 0$ が成り立つので、式(A.29)において ψ を $\bar{p}$ に置き換えた場合でもGreenの定理を適用することができる。平板が極めて薄いと仮定し、その座標系を $(\xi, \eta, \zeta = 0)$ 、平板の面積を S 、微小面積を dS とすると、以下の関係が成り立つ。

$$\text{平板上面： } \zeta = +0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (\text{A.30})$$

$$\text{平板下面： } \zeta = -0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (\text{A.31})$$

$$dS = d\xi d\eta \quad (\text{A.32})$$

式(A.30), (A.31), (A.32)の関係を考慮して, $\bar{p}$ に式(A.29)を適用すると, 下式が得られる.

$$\bar{p}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_s \left[(\bar{p}_{\zeta=+0} - \bar{p}_{\zeta=-0}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{1}{R} - \left\{ \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=+0} - \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=-0} \right\} \frac{1}{R} \right] d\xi d\eta \quad (\text{A.33})$$

ここで, 平板上 ($\zeta = -0, \zeta = +0$) では圧力の ζ 方向の変化がないとすると, 下式が成り立つ.

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=-0} = \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=+0} = 0 \quad (\text{A.34})$$

また, $-\zeta$ 方向を正として, $\Delta p(\xi, \eta) = \bar{p}_{\zeta=+0} - \bar{p}_{\zeta=-0}$ とおくと, 式(A.33)は下式のように書き換えられる.

$$\bar{p}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_s \Delta p(\xi, \eta) \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \left(\frac{1}{R} \right)_{\zeta=0} \right] d\xi d\eta \quad (\text{A.35})$$

また, 平板上の z 方向の流速 w_f は, 下式のように表すことができる.

$$w_f(x, y, z=0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}(x, y, z) \quad (\text{A.36})$$

式(A.36)に式(A.21)および式(A.35)を代入すると, 下式のようになる.

$$w_f(x, y, z=0) = -e^{\frac{i\omega}{U}x} \int_{-\infty}^x \left\{ \frac{1}{4\pi\rho_f U} \iint_{s_p} \Delta p(\xi, \eta) \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{1}{R} \right]_{\zeta=0} d\xi d\eta \right\} e^{\frac{i\omega}{U}\lambda} d\lambda \quad (\text{A.37})$$

ここで, 式(A.37)中の $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{1}{R} \right]_{\zeta=0}$ に着目すると, 下式のようになる.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{1}{R} \right]_{\zeta=0} = \frac{1}{\left\{ (\lambda - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.38})$$

よって, 式(A.38)を(A.37)に代入し, $\lambda - \xi$ を v と置き換え, 両辺に $1/U$ を掛けると, Kussnerの積分方程式^[58]が下式のように得られる. 式中の K は核関数である.

$$\frac{w_f(x, y, z=0)}{U} = \frac{1}{8\pi} \iint_s \frac{\Delta p(\xi, \eta)}{\rho_f U^2 / 2} K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (\text{A.39})$$

$$K(x-\xi, y-\eta) = e^{-\frac{i\omega}{U}(x-\xi)} \int_{-\infty}^{x-\xi} \frac{e^{\frac{i\omega}{U}v}}{\left\{v^2 + (y-\eta)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} dv \quad (\text{A.40})$$

さらに、代表長さ b 、一様流速 U 、動圧 $\rho_f U^2 / 2$ により無次元化する．無次元化した変数を以下のように定義する．ここで、無次元化されたパラメータは上付添字*を付けて表記している．

$$x^* = x/b, \quad y^* = y/b, \quad \xi^* = \xi/b, \quad \eta^* = \eta/b,$$

$$w_f^* = w_f/U, \quad \Delta p^* = \Delta p/(\rho_f U^2/2), \quad v^* = v/b, \quad (\text{A.41})$$

$$x_0^* = x^* - \xi^*, \quad X^* = x_0^*, \quad y_0^* = y^* - \eta^*, \quad r = |y_0^*| = |y^* - \eta^*|$$

式(A.41)を用いて式(A.39), (A.40)を無次元化すると、下式のようになる．また、無次元振動数を $k = \omega b/U$ とする．

$$w_f^*(x^*, y^*, z^* = 0) = \frac{1}{8\pi} \iint_{S^*} \Delta p^*(\xi^*, \eta^*) K(x_0^*, y_0^*) d\xi^* d\eta^* \quad (\text{A.42})$$

$$K^*(x_0^*, y_0^*) = e^{-ikx_0^*} \int_{-\infty}^{X^*} \frac{e^{ikv^*}}{\left\{v^{*2} + r^2\right\}^{\frac{3}{2}}} dv^* \quad (\text{A.43})$$

$$B(k, r, X^*) = \int_{-\infty}^{X^*} \frac{e^{ikv^*}}{(v^{*2} + r^2)^{3/2}} dv^* \quad (\text{A.44})$$

付録 B 核関数の特異領域の処理

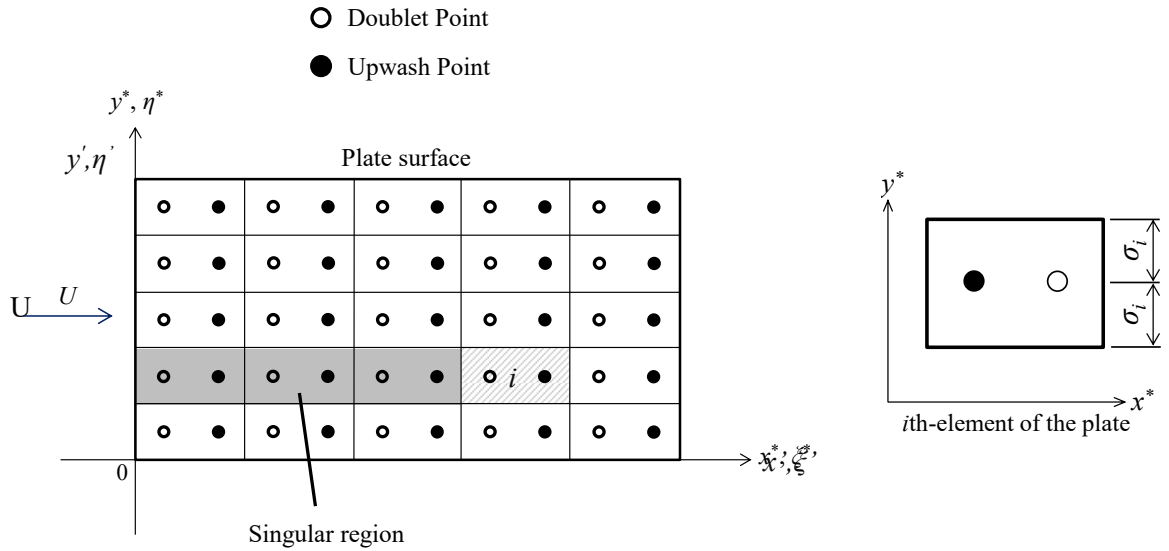
付録Aの式(A.42)に示したKussnerの積分方程式に含まれる核関数 K^* の中の積分関数 B は特異性を有する．式(A.44)に示した B を実部 B_R と虚部 B_I に分けると，式(B.1)のようになる．

$$B = B_R + B_I$$

$$B_R(k, r, X^*) = \int_{-\infty}^{X^*} \frac{\cos kv^*}{(v^{*2} + r^2)^{3/2}} dv^*, \quad (B.1)$$

$$B_I(k, r, X^*) = \int_{-\infty}^{X^*} \frac{\sin kv^*}{(v^{*2} + r^2)^{3/2}} dv^*$$

ここで， $X^* > 0$ の領域で $r = 0$ の場合，つまり図B.1に示すようにアップウォッシュ点がダブルレット点の後流となる領域において，付録Aの式(A.42)の積分は $B_R(k, r, X^*)$ に含まれる r^{-2} の項の特異性により，無限大となってしまう．



図B.1: 核関数の特異領域

このため，特異領域においてはマンガラ積分（有限積分）により積分値を計算する必要がある^[56]．第2章の式(2.11)の離散系の中にこの効果を取り入れるために， $r < \sigma$ かつ $X^* > 0$ において，関数 B_R の平板の幅方向（ y 方向）の積分を考える．マンガラの定義^[72]により B_R の積分は下式のように表される．

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X^*) dy_0 = \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[B_R(k, r, X^*) - \frac{2}{r^2} \right] dy_0 - \frac{4}{\sigma} \quad (B.2)$$

また， B_R は，下式のように X^* が負の場合（ $-|X^*|$ ）と結びつけられる．式中の K_1 は第2種ベッセ

ル関数である.

$$B_R(k, r, X^*) = -B_R(k, r, -|X^*|) + \frac{2k}{r} K_1(kr) \quad (\text{B.3})$$

式(B.3)を式(B.2)に代入し, ベッセル関数に級数展開を用いて項別積分を行うと, 下式のようになる. 式中の γ はオイラー定数である.

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X^*) dy_0^* &= -\int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, -|X^*|) dy_0^* - \frac{4}{\sigma} \\ &\quad + 4k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\sigma/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!(2n+1)} \left\{ \ln \frac{k\sigma}{2} + \gamma - \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \frac{4n+3}{2(2n+1)(n+1)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

よって, $k\sigma$ が微小であれば, 式(B.4)は次式で近似することができる.

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X^*) dy_0^* \simeq \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} -B_R(k, r, -|X^*|) - \frac{2}{\sigma^2} + k^2 \left(\ln \frac{k\sigma}{2} + \gamma - \frac{3}{2} \right) \right\} dy_0^* \quad (\text{B.5})$$

つまり, DPMによる離散化にマングラ積分の効果を取り入れるためには B_R を下式で置き換えればよい.

$$B_R(k, r, X^*) \rightarrow B_R(k, 0, -|X^*|) - \frac{2}{\sigma_i^2} + k^2 \left(\ln \frac{k\sigma_i}{2} + \gamma - \frac{3}{2} \right) \quad (\text{B.6})$$

ここで, 離散系においては式(B.6)の $2/\sigma_i^2$ は過大に評価される. そこで, この項を $\pi^2/6\sigma_i^2$ で置き換える^[56].

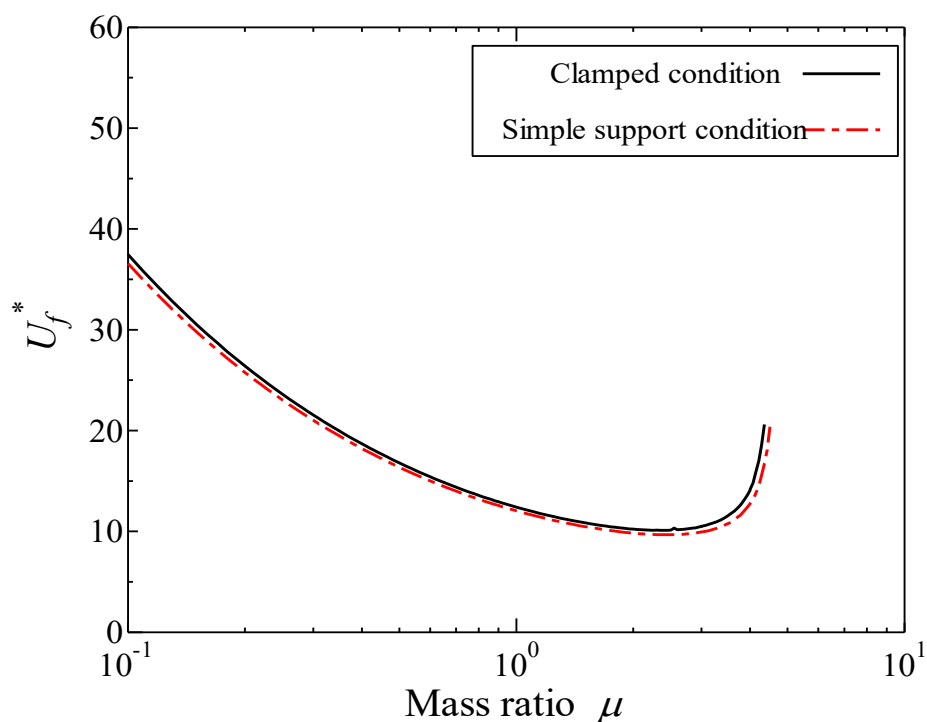
以上より, DPMに離散化された体系においてアップウォッシュ点がダブレット点の後流となる場合には, 下式を用いて B_R を評価する.

$$B_R(k, r, X^*) \rightarrow -B_R(k, 0, -X^*) - \frac{\pi^2}{6\sigma_i^2} + k^2 \left(\ln \frac{k\sigma_i}{2} + \gamma - \frac{3}{2} \right) \quad (\text{B.7})$$

付録 C 平板の両側端を固定支持にした場合と単純支持にした場合のフラッタ流速の比較

平板の支持条件の影響に関して，図C.1に平板の両側端を固定した場合と単純支持した場合の質量比に対するフラッタ流速の変化を示す．図はアスペクト比 $\Lambda = 10$ ，無次元張力 $T^* = 1.0 \times 10^3$ の場合の結果である．

図より単純支持の場合と固定支持の場合ではフラッタ流速にほとんど差異は見られない．このため，本論文では実験において支持を実現しやすく，解析結果の妥当性の検証を行うことが単純支持に比べて容易な固定支持として解析を行った．

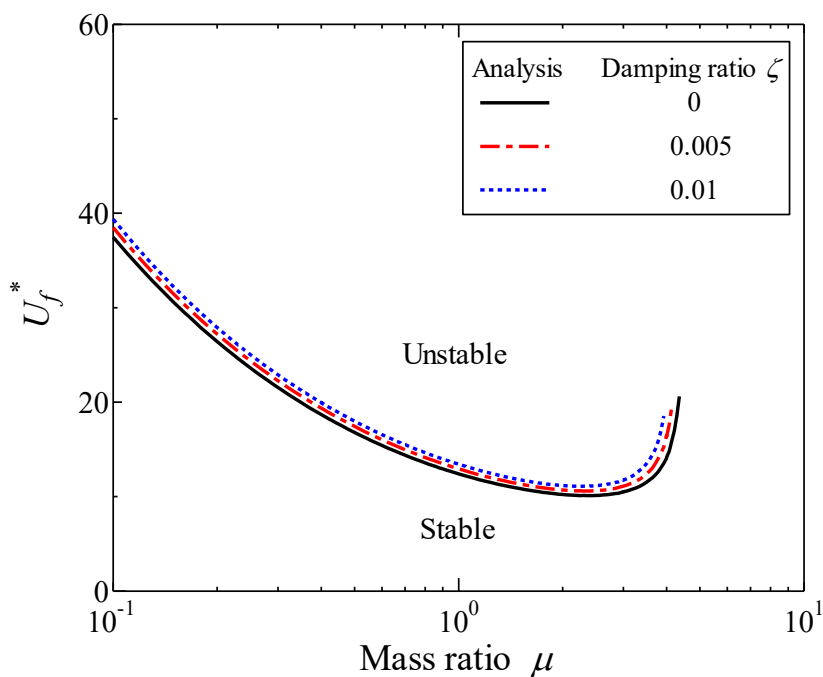


図C.1: 平板の支持条件がフラッタ流速に及ぼす影響（両側端を支持された場合）

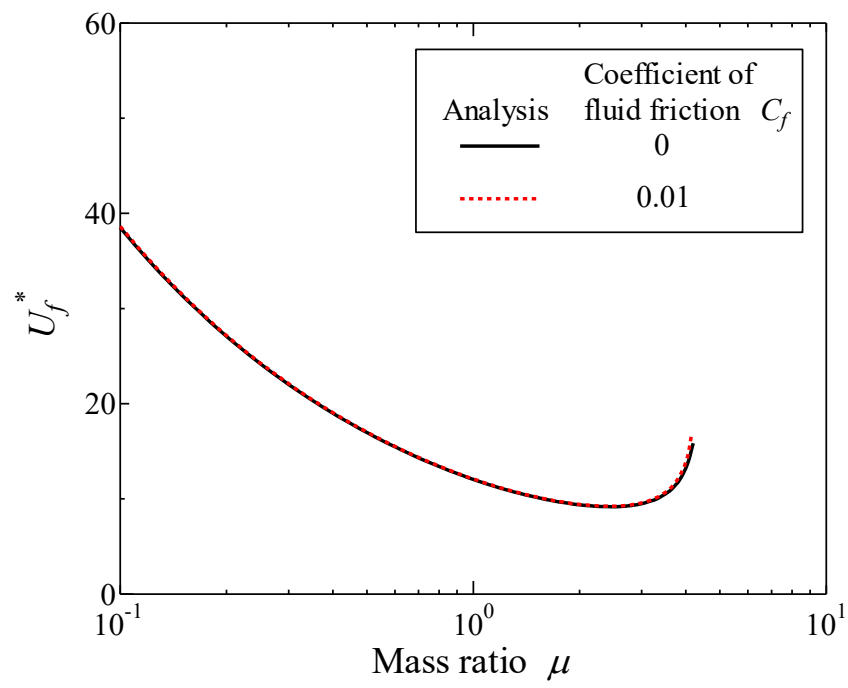
付録 D 構造減衰および流体摩擦のフラッタ流速への影響（平板の両側端を固定支持された場合）

図D.1に減衰比を $\zeta = 0, 0.005, 0.01$ と変化させた場合の質量比に対する無次元フラッタ流速の変化を示す。図はアスペクト比 $\Lambda = 10$ ，無次元張力 $T^* = 1.0 \times 10^3$ の場合の結果である。図D.1より，質量比によらず減衰比の変化に対して，フラッタ流速の変化は小さいことが分かる。

また，図D.2に流体摩擦係数を $C_f = 0, 0.01$ と変化させた場合の質量比に対する無次元フラッタ流速の変化を示す。ここで， $C_f = 0.01$ は気流中で静止したPET製の平板の抗力を実験的に測定することで得られた値である^[53]。図はアスペクト比 $\Lambda = 10$ ，無次元張力 $T^* = 1.0 \times 10^3$ の場合の結果である。図D.2より，質量比によらず流体摩擦がフラッタ流速に及ぼす影響は小さいことがわかる。



図D.1: 減衰比の無次元フラッタ流速への影響



図D.2: 流体摩擦係数の無次元フラッタ流速への影響

付録 E 梁の非線形運動方程式の導出

梁の非線形運動方程式をHamiltonの原理に基づき導出する^[31, 54]。運動方程式を導出するに当たり、以下の仮定をおく。

1. 梁の厚さは長さに対して十分に薄く、Euler-Bernoulli梁として扱うことができる。
2. 梁の変形は大変形だが、ひずみは微小である。
3. 軸伸びがない。

E.1 非延性の条件を用いた面内方向変位の導出

図E.1に変形前と変形後の梁の模式図と座標系を示す。梁の長手方向に x 座標、面外方向に z 座標をとる。また、変形した梁に沿った曲線座標系 c を考える。梁の長さは L 、厚さは h とする。梁は片端($c=0$)が固定されている。梁上の微小要素 P_0Q_0 および PQ を考える。変形前は P_0, Q_0 にあった点が、変形後に P, Q に移動する。ここで、変形前の微小要素の x 方向長さを δx_0 、変形後の微小要素の x 方向と z 方向の投影長さをそれぞれ $\delta x, \delta z$ とする。また、変形前と変形後の微小要素の長さをそれぞれ $\delta c_0, \delta c$ とする。変形前の状態では、微小要素 P_0Q_0 の長さ δc_0 は x 方向長さ δx_0 に等しい。また、変形後の微小要素 PQ の長さ δc は下式で表される。

$$\delta c = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta z)^2} \quad (\text{E.1})$$

仮定3より、軸伸びがない状態を仮定しているので、変形前後で微小要素の長さは変化しない。このため、下式が成り立つ。

$$\delta c - \delta c_0 = 0 \quad (\text{E.2})$$

$$(\delta c)^2 - (\delta c_0)^2 = 0 \quad (\text{E.3})$$

式(E.3)に $\delta c_0 = \delta x_0$ および式(E.1)を代入すると、下式が得られる。

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right)^2 = 1 \quad (\text{E.4})$$

ここで、点 P における x 方向と z 方向の変位 h_x, w_s は下式のように表される。

$$h_x = x - x_0, \quad w_s = z \quad (\text{E.5})$$

式(E.5)を式(E.4)に代入すると、 h_x, w_s の関係式が下式のように得られる。

$$\left(1 + \frac{\partial h_x}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial x_0} \right)^2 = 1 \quad (\text{E.6})$$

また，式(E.2)より，下式が導かれる．

$$\frac{\partial c}{\partial x_0} = 1 \quad (\text{E.7})$$

よって，式(E.7)を用いることで式(E.6)は以下のように書き換えることができる．

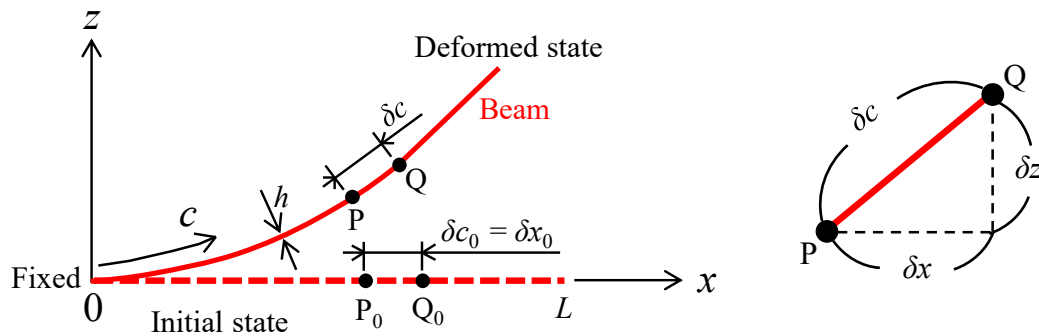
$$\left(1 + \frac{\partial h_x}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c}\right)^2 = 1 \quad (\text{E.8})$$

式(E.8)に関して， $\partial h_x / \partial c$ が微小であると仮定すると，下式のように近似することができる．

$$\frac{\partial h_x}{\partial c} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial c}\right)^2 \quad (\text{E.9})$$

ここで，梁の固定端（ $c = 0$ ）においては $h_x = 0$ となる．よって式(E.9)を $c = 0 \sim c$ の区間で積分すると，任意の位置での面内方向変位 h_x が下式のように得られる．

$$h_x = -\frac{1}{2} \int_0^c \left(\frac{\partial w_s}{\partial c}\right)^2 dc \quad (\text{E.10})$$



図E.1: 変形前と変形後の梁の模式図と座標系

E.2 運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギー

運動エネルギー T_k は，面内および面外方向の変位を考慮して，下式のように表される．

$$T_k = \frac{1}{2} \rho_s h \int_0^L (\dot{h}_x^2 + \dot{w}_s^2) dc \quad (\text{E.11})$$

また，ポテンシャルエネルギー U_p は下式で表される．

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^L D \kappa^2 dc \quad (\text{E.12})$$

式(E.12)中の D , κ はそれぞれ曲げ剛性と曲率である．曲げ剛性 D は下式で与えられる．式中の E , ν はそれぞれ梁のヤング率とポアソン比である．

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{E.13})$$

また，変形時の梁の任意の位置と x 軸とのなす角度を θ とすると，梁の曲率 κ は下式のように表される．

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial c} \quad (\text{E.14})$$

ここで，幾何学的関係より，以下の関係が成り立つ．

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\partial w_s}{\partial x_0} \right) \quad (\text{E.15})$$

逆三角関数の微分の定義より，式(E.15)を x_0 で微分すると，下式のようになる．

$$\kappa = \frac{\partial^2 w_s / \partial x_0^2}{\sqrt{1 - (\partial w_s / \partial x_0)^2}} \quad (\text{E.16})$$

式(E.7)より式(E.16)中の ∂x_0 を ∂c で置き換え，両辺を2乗すると下式のようになる．

$$\kappa^2 = \frac{(\partial^2 w_s / \partial c^2)^2}{1 - (\partial w_s / \partial c)^2} \quad (\text{E.17})$$

ここで， $(\partial w_s / \partial c)^2$ は微小であるとして式(E.17)の分母をテイラー展開し2次以上の高次の微小量を見捨てる， κ^2 は以下のように近似することができる．

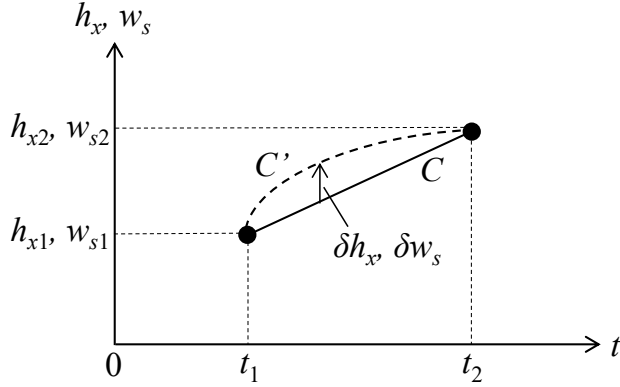
$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right\} \quad (\text{E.18})$$

式(E.12), 式(E.18)より，ポテンシャルエネルギーは下式のように表される．

$$U_p = \frac{1}{2} D \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right\} dc \quad (\text{E.19})$$

E.3 Hamilton の原理に基づく運動方程式の導出

図E.2に示すように、時刻 t_1, t_2 間における面内および面外方向変位 h_x, w_s の軌跡を C とする。
また、軌跡 C から微小な変位 $\delta h_x, \delta w_s$ だけずれた軌跡 C' を考える。ただし、 $t = t_1, t_2$ においては $\delta h_x, \delta w_s = 0$ とする。



図E.2: 時刻 t_1, t_2 間における h_x と h_z の軌跡

運動エネルギー T_k の変分 δT_k は下式で表される。

$$\delta T_k = \rho_s h \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} \dot{h}_x^2 + \frac{1}{2} \dot{w}_s^2 \right) dc = \rho_s h \int_0^L (\dot{h}_x \delta \dot{h}_x + \dot{w}_s \delta \dot{w}_s) dc \quad (E.20)$$

また、ポテンシャルエネルギー U_p の変分 δU_p は、 δw_s が十分に小さいと仮定し2次以上の高次の微小量を見捨てる、下式のようになる。

$$\begin{aligned} \delta U_p &= D \int_0^L \delta \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right)^2 \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right\} dc \\ &\approx D \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial c^2} \right) + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right) \left(\frac{\partial \delta w_s}{\partial c} \right) + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial c^2} \right) \right\} dc \\ &= D \int_0^L \left\{ \frac{\partial^4 w_s}{\partial c^4} + 4 \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right) \left(\frac{\partial^3 w_s}{\partial c^3} \right) + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right)^3 + \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial c^4} \right) \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right\} \delta w_s dc \end{aligned} \quad (E.21)$$

Lagrangianを $L_a = T_k - U_p$ とすると、Hamiltonの原理より下式が成り立つ。

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L_a dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \delta T_k dt}_{H_T} - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \delta U_p dt}_{H_U} \quad (E.22)$$

式(E.22)中の H_T は部分積分を用いると、以下のように変形することができる。

$$H_T = \rho_s h \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\dot{h}_x \delta \dot{h}_x + \dot{w}_s \delta \dot{w}_s) dc dt = -\rho_s h \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{h}_x \delta h_x + \ddot{w}_s \delta w_s) dt dc \quad (E.23)$$

式(E.21), (E.23)を式(E.22)に代入すると, 下式が得られる.

$$\begin{aligned} & \rho_s h \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \ddot{w}_s \delta w_s dc dt + \underbrace{\rho_s h \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \ddot{h}_x \delta h_x dc dt}_{H_{T2}} \\ & + D \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{\partial^4 w_s}{\partial c^4} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right\} + 4 \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right) \left(\frac{\partial^3 w_s}{\partial c^3} \right) + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right)^3 \right\} \delta w_s dc dt \\ & = 0 \end{aligned} \quad (E.24)$$

ここで, 式(E.8)より微小変位 δh_x と δw_s の関係式を導出する. δh_x および δw_s が微小であるとして2次以上の高次の微小量を見捨てる, 式(E.8)の変分は下式のように表される.

$$\frac{\partial \delta h_x}{\partial c} = -\frac{\partial w_s}{\partial c} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right\} \frac{\partial \delta w_s}{\partial c} \quad (E.25)$$

式(E.25)の両辺を $c=0 \sim L$ まで積分し, 梁の固定端 ($c=0$) において変位と傾きが0である ($c=0: w_s=0, \partial w_s / \partial c=0$) ことを考慮すると, δh_x と δw_s の関係式は下式のように表される.

$$\delta h_x = -\left\{ \frac{\partial w_s}{\partial c} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^3 \right\} \delta w_s + \int_0^c \left\{ \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right\} \delta w_s dc \quad (E.26)$$

式(E.24)の H_{T2} に着目すると, 式(E.10), (E.26)を代入し, $(\partial w_s / \partial c)^2, \delta w_s$ を微小量として, 2次以上の高次の微小量を見捨てる, 下式のようになる.

$$\begin{aligned} H_{T2} &= \rho_s h \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right) \right\} dc \right] \delta w_s dc dt \\ &- \rho_s h \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right) \right\} dc \right] \left[\int_0^c \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \delta w_s dc \right] dc dt \end{aligned} \quad (E.27)$$

ここで, 積分公式より下式が成り立つ. 式中の $f(x), g(x)$ は任意の関数である.

$$\int_0^L g(c) \left(\int_0^c f(c) \delta w_s dc \right) dc = \int_0^L \left(\int_c^L g(c) dc \right) f(c) \delta w_s dc \quad (E.28)$$

上式において, $f(c) = \partial^2 w_s / \partial c^2$, $g(c) = \int_0^c \{ (\partial \dot{w}_s / \partial c)^2 + (\partial w_s / \partial c) (\partial \dot{w}_s / \partial c) \} dc$ として積分公式

を式(E.27)に適用すると，下式のようになる．

$$\begin{aligned}
H_{T2} &= \rho_s h \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial c} \right) \right\} dc \right] \delta w_s dc dt \\
&\quad - \rho_s h \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \int_0^c \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial c} \right) \right\} dc dc \right] \delta w_s dc dt
\end{aligned} \tag{E.29}$$

式(E.29)を式(E.24)に代入すると，下式のようになる．

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho_s h \ddot{w}_s + D \left\{ \frac{\partial^4 w_s}{\partial c^4} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right\} + 4 \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right) \left(\frac{\partial^3 w_s}{\partial c^3} \right) + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right)^3 \right\} \right. \\
&\quad \left. - \rho_s h \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \int_0^c \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial c} \right) \right\} dc dc \right. \\
&\quad \left. \rho_s h \frac{\partial w_s}{\partial c} \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial c} \right) \right\} dc \right] \delta w_s dc dt \\
&= 0
\end{aligned} \tag{E.30}$$

上式が恒等的に成り立つためには，下式が成り立つ必要がある．下式が梁の非線形運動方程式である．

$$\begin{aligned}
&\rho_s h \ddot{w}_s - \rho_s h \frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \int_0^c \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial c} \right) \right\} dc dc + \rho_s h \frac{\partial w_s}{\partial c} \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial c} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial c} \right) \right\} dc \\
&\quad + D \left\{ \frac{\partial^4 w_s}{\partial c^4} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right)^2 \right\} + 4 \left(\frac{\partial w_s}{\partial c} \right) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right) \left(\frac{\partial^3 w_s}{\partial c^3} \right) + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial c^2} \right)^3 \right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{E.31}$$

付録 F 減衰係数 α および流体摩擦係数 C_f のフラッタ振幅 および振動数への影響

図 F.1 に減衰係数 α をパラメータとして変化させてフラッタ振幅および振動数を計算した結果を示す。これらの結果は質量比 $\mu = 0.5$ の場合の計算結果であり、流体摩擦係数は $C_f = 0.01$ で一定として計算を行った。図 F.1(a)より減衰係数が大きくなるとフラッタ流速が増加し、またフラッタ振幅が減少する。ここで、図 F.1(b)よりフラッタ振動数に着目すると減衰係数の増加に伴いフラッタ振動数は少し低下するが、変化は小さい。

また、図 F.2 に流体摩擦係数 C_f を変化させてフラッタ振幅および振動数を計算した結果を示す。 $C_f = 0.01$ は気流中で静止した平板の流体摩擦抗力係数を測定することで実験的に得られた値である^[53]。ここで、CFD を用いた数値計算により、静止時の平板よりも振動時の平板の方が C_f 値が大きくなることが示されている^[73]。このため、フラッタ発生時の平板の C_f 値は静止時の流体摩擦係数である $C_f = 0.01$ よりも大きくなると考えられるので、 $C_f = 0.01$ よりも大きい範囲で C_f をパラメータとして変化させ、フラッタ振幅および振動数への影響を調べた。

図 F.2(a)より、フラッタ振幅にあまり変化は見られない。一方、図 F.2(b)よりフラッタ振動数に着目すると、静止時の平板の C_f 値 ($C_f = 0.01$) を用いた場合は流速の増加に対してフラッタ振動数は単調に減少しており、第 4 章の図 4.11 に示した実験結果と逆の傾向になっている。一方、静止時の平板の C_f 値よりも大きい値 ($C_f = 0.1, 0.15$) を用いた場合、実験結果と同様に流速の増加に対してフラッタ振動数が増加している。本研究では、流体摩擦の影響を定性的に調べるために C_f 値を平板の振幅によらず一定として計算を行った。しかしながら、 C_f 値は平板の振幅によって大きく変化する^[73]。このため、より精緻な解析のためには、平板の振幅の影響を考慮した C_f 値を用いる必要であると考えられる。

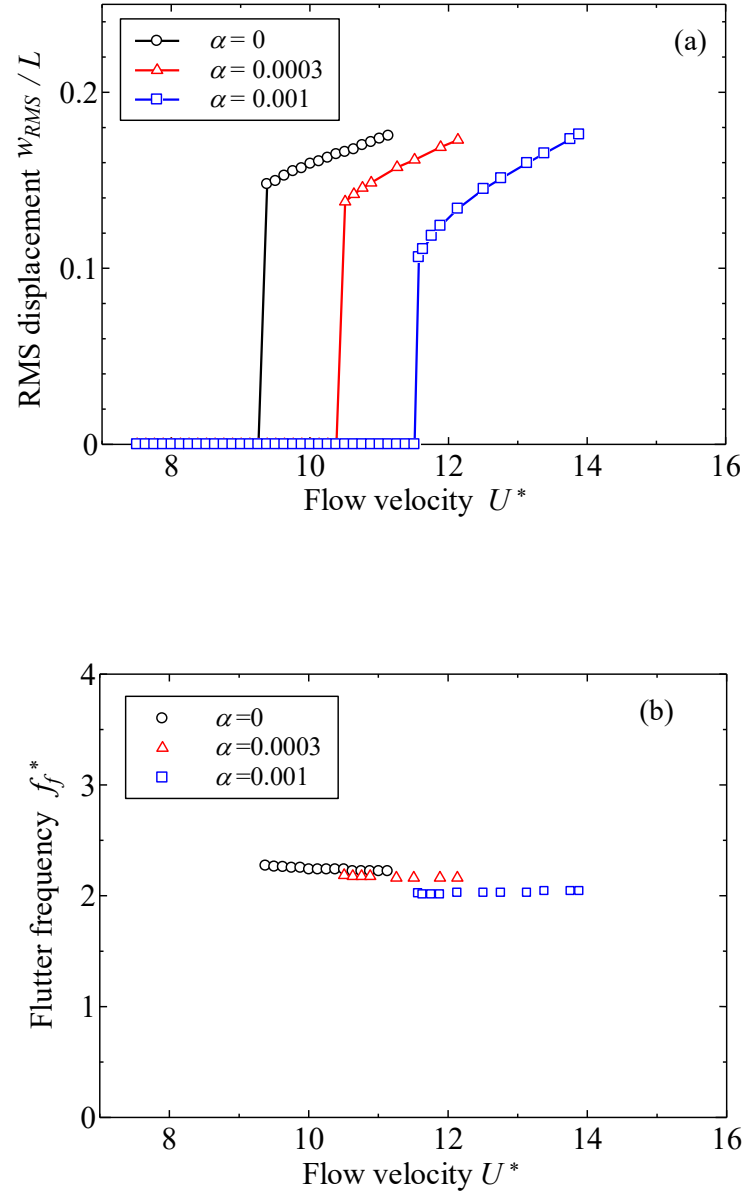


図 F.1: 構造減衰の(a) フラッタ振幅および(b) フラッタ振動数への影響 ($\mu = 0.5$)

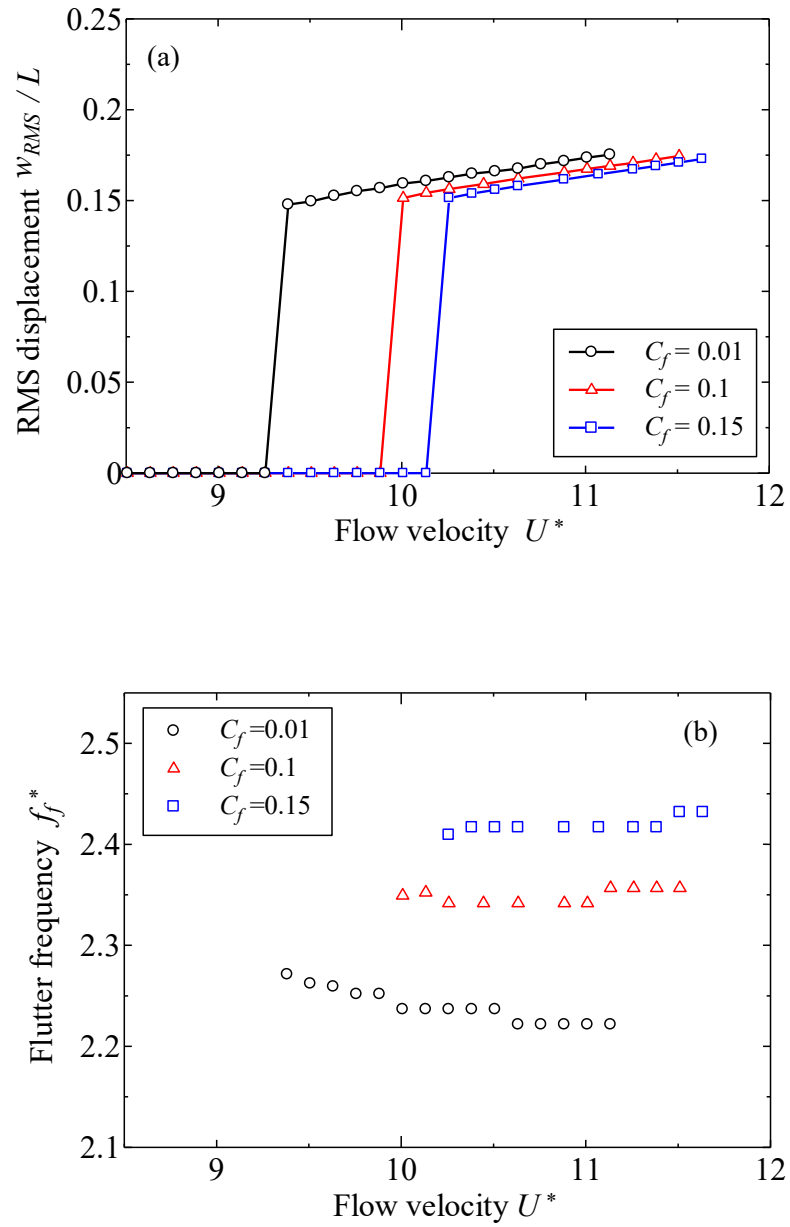


図 F.2: 流体摩擦の(a) フラッタ振幅および(b) フラッタ振動数への影響 ($\mu = 0.5$)

次に、質量比によって構造減衰および流体摩擦がフラッタ振幅および振動数に及ぼす影響がどのように変化するか示す。図 F.3, F.5 に流体摩擦係数 C_f を一定として減衰係数 α を変化させた場合の計算結果を示す。また、図 F.4, F.6 に減衰係数 α を一定として流体摩擦係数 C_f を変化させた計算結果を示す。図 F.3, F.4 は質量比 $\mu = 0.35$ の場合の結果、図 F.5, F.6 は質量比 $\mu = 2.0$ の場合の結果である。

図 F.3 および図 F.5 を比較すると、いずれの場合も減衰係数が大きくなるとフラッタ振幅が小さくなる。またフラッタ流速への影響に着目すると、 $\mu = 0.35$ の場合はフラッタ流速が大きく（約 25%）増加するのに対して、 $\mu = 2.0$ の場合はフラッタ流速の増加が約 6%にとどまっている。つまり、質量比が大きい場合、構造減衰のフラッタ流速への影響が小さくなる。この結果と第 2 章の図 2.9 における結果を比較すると、第 2 章と本章では減衰モデルが異なるものの、質量比が大きくなるほど構造減衰のフラッタ流速への影響が小さくなるという傾向は定性的に一致している。フラッタ振動数に関しては、図 F.3(b), F.5(b) より減衰係数が大きくなると少し減少する。

また、流体摩擦の影響に関して、図 F.4(a) および図 F.6(a) の $C_f = 0.01$ と 0.15 を比較すると、 $\mu = 2.0$ の場合はフラッタ流速が約 20% 増加しており、 $\mu = 0.35$ の場合は約 8.5% 増加している。このことから、質量比が大きい場合に流体摩擦のフラッタ流速への影響が大きくなることがわかる。一方、フラッタ振幅は流体摩擦によってあまり変化しない。フラッタ振動数に関しては、質量比によらず流体摩擦の影響により増加する。

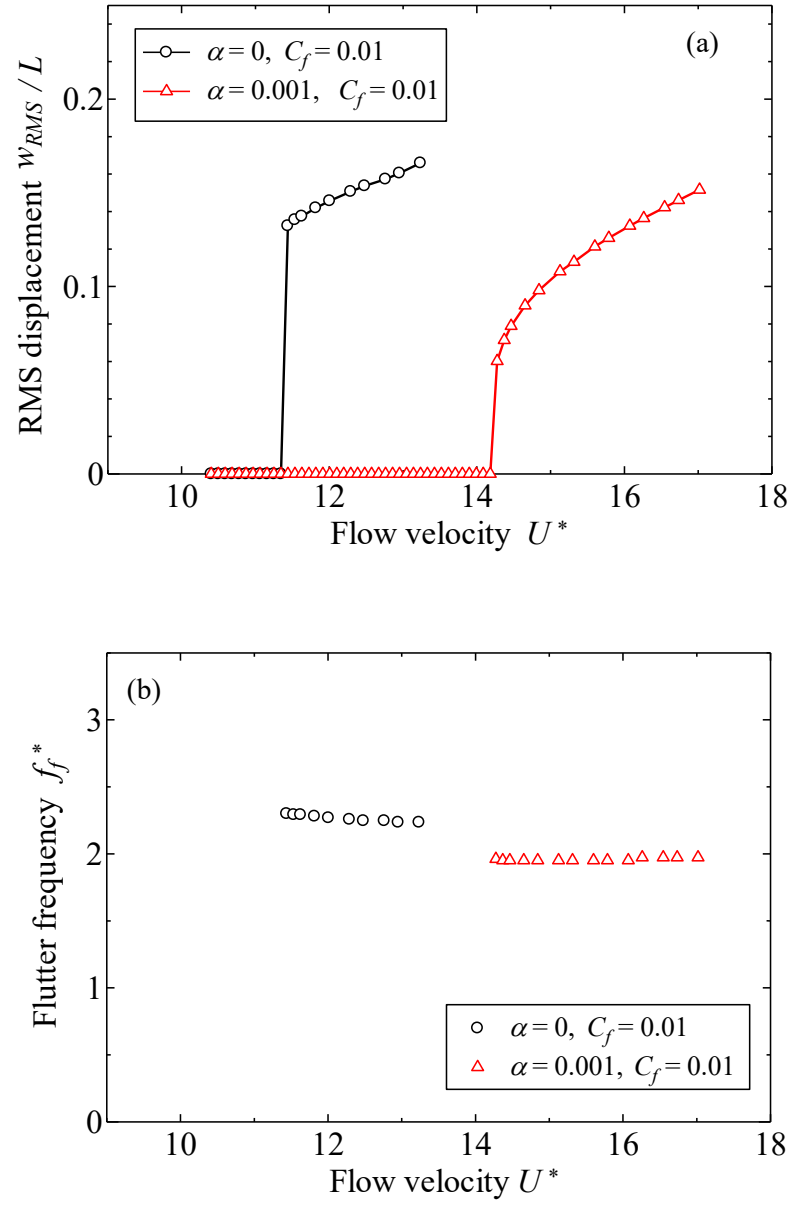


図 F.3: 構造減衰の(a) フラッタ振幅および(b) フラッタ振動数への影響 ($\mu = 0.35$)

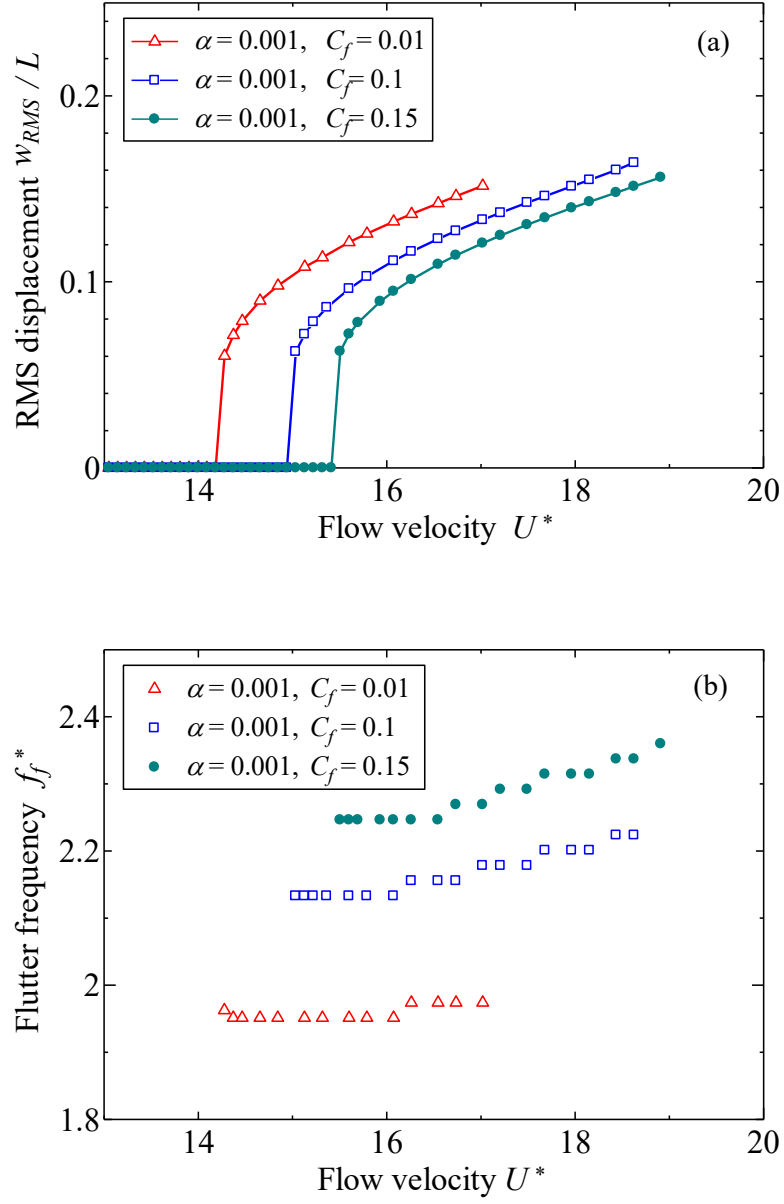


図 F.4: 流体摩擦の(a) フラッタ振幅および(b) フラッタ振動数への影響 ($\mu = 0.35$)

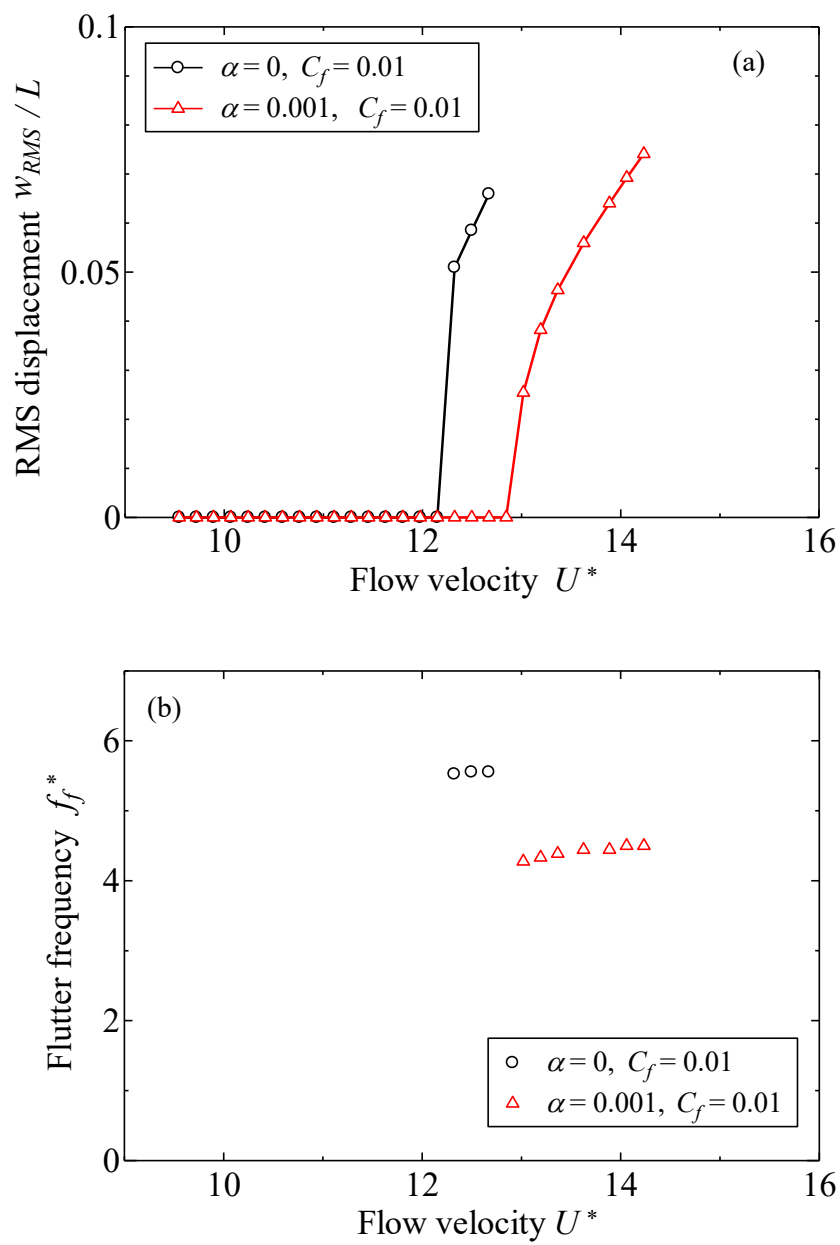


図 F.5: 構造減衰の(a) フラッタ振幅および(b) フラッタ振動数への影響 ($\mu = 2.0$)

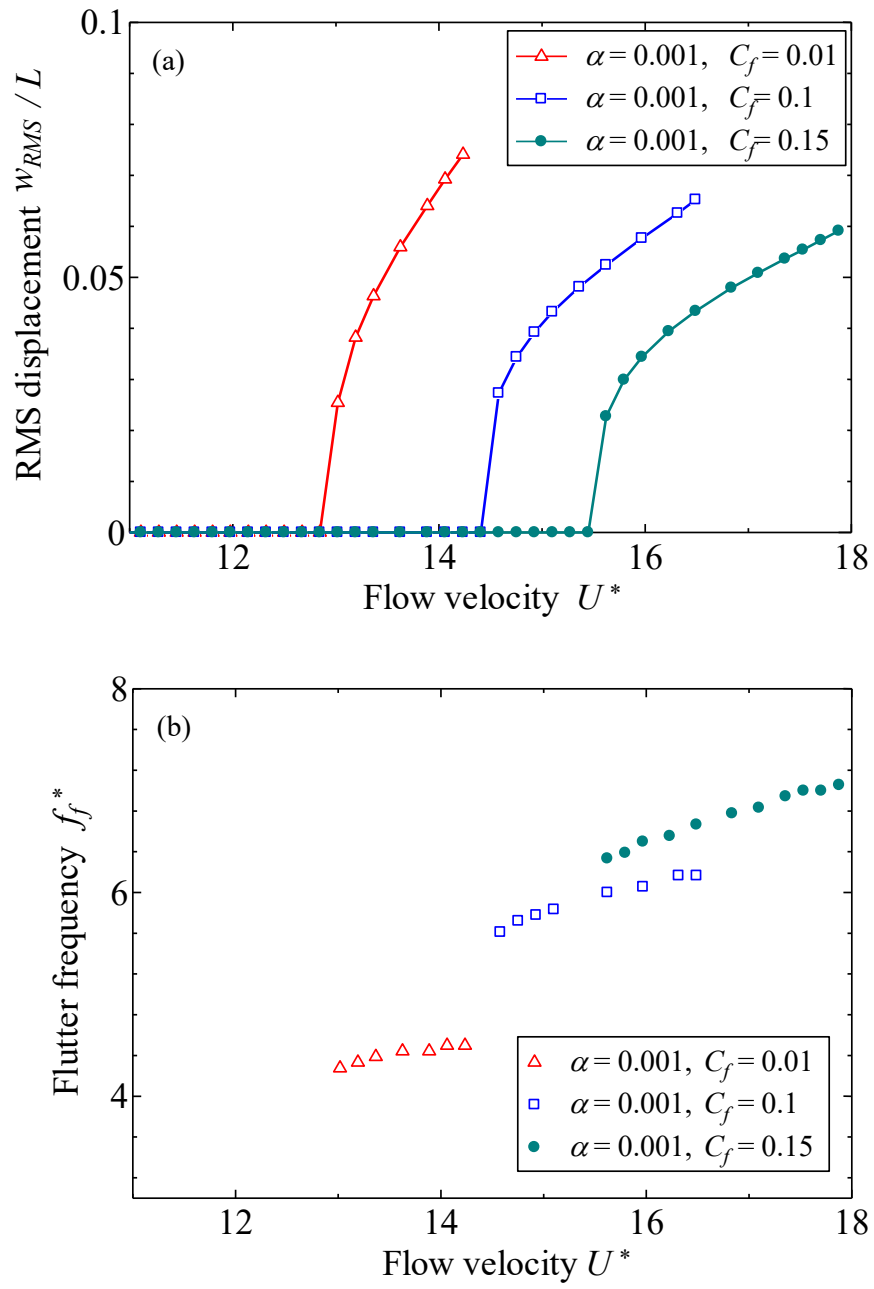


図 F.6: 流体摩擦の(a) フラッタ振幅および(b) フラッタ振動数への影響 ($\mu = 2.0$)

付録 G 線形解析と非線形解析および実験における フラッタ流速の比較

第 5 章における強制変位加振の予備解析および実験として、フラッタ解析および実験を行った。図 G.1 に流速に対する平板の振動変位の RMS 値の実験結果を示す。また、図 G.2 に流速を変化させて計算した固有値の実部の解析結果（線形解析結果）、図 G.3 に非線形解析により求めた流速に対する平板の振動変位の RMS 値の計算結果を示す。線形解析および非線形解析では、それぞれ第 2 章および第 4 章に示したモデルを用いて計算を行った。なお、4 章までと同様に、実験および非線形解析では振動変位が急激に増加しフラッタが発生する直前の流速をフラッタ流速 U_f とした。また、線形解析では固有値の実部が正となる流速をフラッタ流速 U_f とした。

図 G.1 ~ G.3 より、線形解析、非線形解析によって得られたフラッタ流速は実験結果と概ね良く一致している。

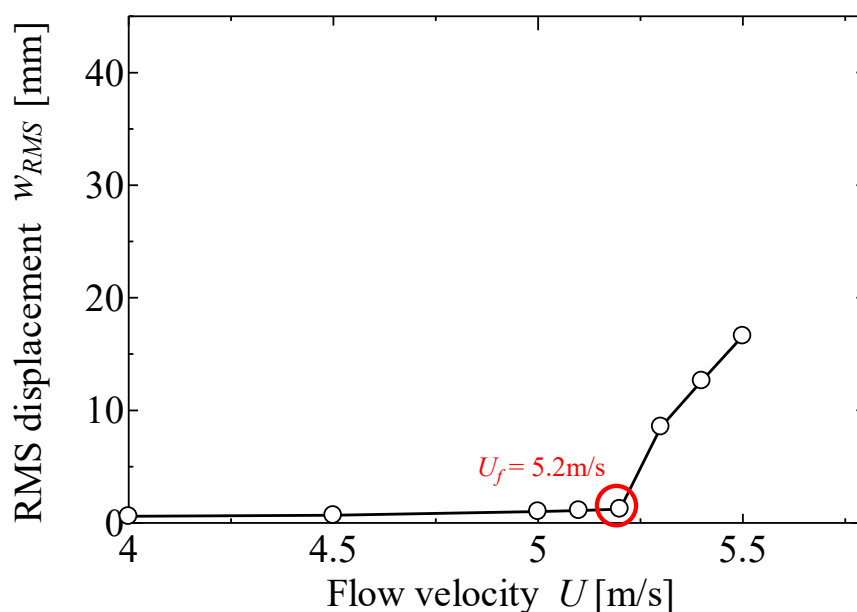


図 G.1: 流速に対する平板の振動変位の RMS 値の変化（実験結果）

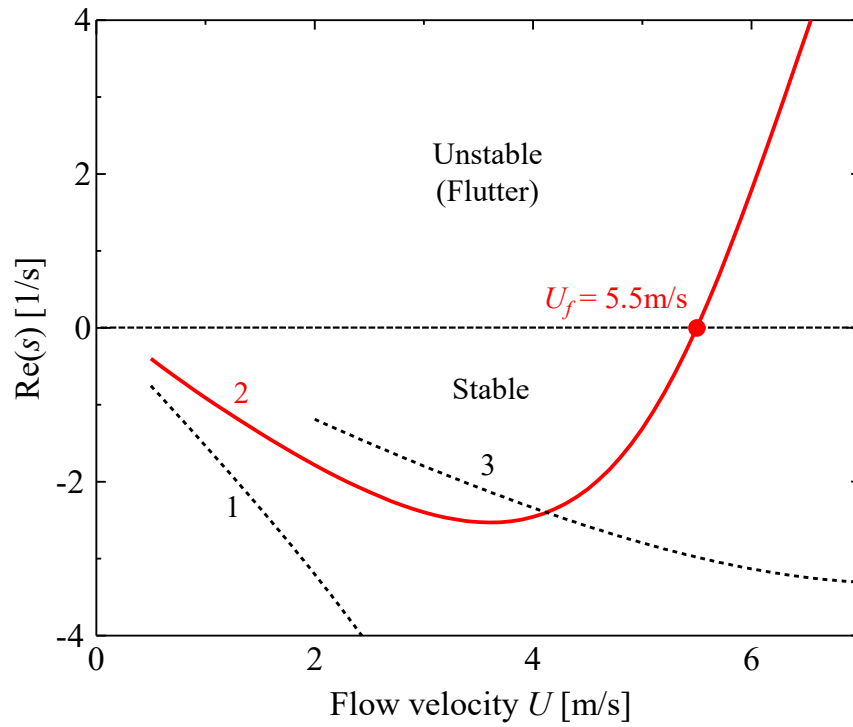


図 G.2: 流速に対する固有値の実部の変化（線形解析結果）

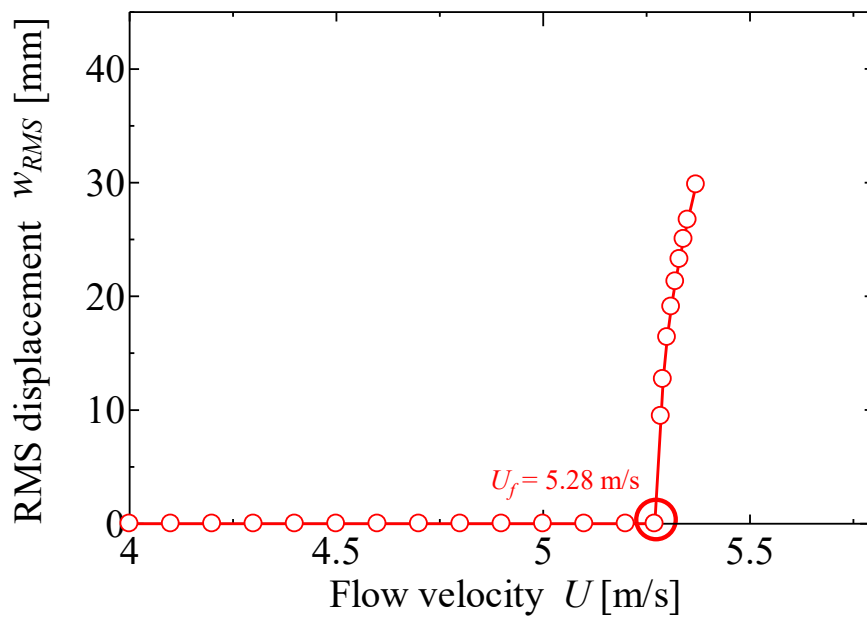


図 G.3: 流速に対する平板の振動変位の RMS 値の変化（非線形解析結果）

謝辞

本論文は青山学院大学 渡辺昌宏教授のご指導の下で実施した研究の成果をまとめたものです。渡辺先生には学部4年生で研究室に配属されてから現在に至るまで終始懇切なご指導を賜り、育てて頂きました。さらに、助手として研究を続ける機会を頂き、また極めて充実した研究環境で思う存分研究に取り組ませて頂きました。渡辺先生に教えて頂いた研究の面白さと難しさは、私にとってかけがえのない財産です。加えて、博士号取得に当たり、様々なご配慮とお骨折りを頂きました。厚く御礼を申し上げます。言葉では尽くせないほど感謝いたしております。

東京工業大学 高原弘樹教授にはお忙しい中本論文の主査をお引き受け頂き、細部に渡るまで丁寧にご指導を頂きました。高原先生の懇切なご指導のおかげで、本論文の完成度を高めることができました。また、折に触れて暖かい励ましのお言葉を頂きました。厚く御礼を申し上げます。また、ご多忙の中本論文の審査をお引き受け頂きました東京工業大学 岩附信行教授、山浦弘教授、中島求教授、中野寛准教授に深く感謝の意を表します。先生方からは様々な視点からご指摘を頂き、多くのことを学ばせて頂きました。審査に関わって頂いた先生方のご指導により、本論文の内容をより充実させることができました。今一度深く御礼を申し上げます。

青山学院大学 武田真和助教は渡辺研究室の同期として、様々な経験を共にして来ました。私の気難しい性格にも関わらず、良き友人で居続けて下さいました。深く感謝いたします。今後も友人として、同僚として、切磋琢磨できればと思います。

富士フイルム株式会社 吉田龍平様には数多くの貴重なご助言を頂きました。また、普段から優しく接して頂きました。心から感謝の意を表します。

横浜国立大学 原謙介准教授には学会、研究会活動において貴重なご指摘、ご助言を頂きました。深く感謝いたします。

本研究の遂行において、渡辺研究室の皆様に大変お世話になりました。第3章の実験では河合伸人君（2017年度修了）、第4章のANSYSを使用した数値計算では林寛君（2019年度修了）、第5章の実験では早坂孝平君（2019年度修了）、杉本賢祐君（2020年度卒）、第6章の実験では加藤大貴君（2016年度卒）に多大なご助力を頂きました。加えて、本論文には掲載できなかった成果ではありますが、その他にも多くの卒業生からご助力を頂きました。研究に関わって下さった方全員に心から御礼申し上げます。伊藤広陽さん（2014年度修了）にはフラッタ解析手法に関して多くの議論をして頂きました。また、暖かい励ましの言葉を頂きました。

渡辺研究室の同期の皆様（石見君，大畑君，金徳君，清水君，武田君，東君，堀内君，水嶋君）には，平素の研究活動を通して大変お世話になり，また皆様との議論から良い刺激を受けました．また，熊倉千紘君（2016年度修了），桐山真君（2014年度卒）には卒業後も大変お世話になりました．本研究は渡辺研の皆様のご助力なしでは成し遂げられませんでした．重ねて深く感謝いたします．

2016年度から参加させて頂いたFIV研究会の関係者の皆様には，主査 金子成彦教授（早稲田大学教授，東京大学名誉教授）をはじめとして，研究会活動や学会活動で大変お世話になりました．FIVに関する基礎知識を学ばせて頂くと同時に，研究内容に関して多くの有益なご助言を頂きました．深く感謝いたします．FIVの研究分野に少しでも貢献することができるように，微力ながら尽力させて頂ければと思います．

青山学院大学 理工学部 機械創造工学科の関係者の皆様には平素から大変お世話になりました．熊野寛之教授には，いつも暖かいお言葉を掛けて頂きました．また，米山聡教授には長期間に渡りストロボスコープをお借りしました．朝原誠先生（現岐阜大学），姜東赫先生（現埼玉大学），富樫憲一先生（現北海道立総合研究機構）は，助手に着任したばかりで右も左も分からなかった私に色々なことを教えて下さりました．その他にも様々な方にお世話になりました．皆様に厚く御礼を申し上げます．

最後に，研究の道に進むことを認めて頂き，いつも応援してくれた家族，いつも笑顔で優しく励ましてくれた妻 志保に心から感謝の意を表します．