

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	計算理論と抽象代数
Title(English)	Computation Theory and Abstract Algebra
著者(和文)	湯山孝雄
Author(English)	Takao Yuyama
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12303号, 授与年月日:2023年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:加藤 文元,田口 雄一郎,内藤 聡,落合 理,鈴木 正俊,鹿島 亮
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12303号, Conferred date:2023/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 数学	系 コース	申請学位 (専攻分野)： 博士 Academic Degree Requested Doctor of	(理学)
学生氏名： Student's Name	湯山 孝雄		指導教員 (主)： Academic Supervisor(main)	加藤 文元
			指導教員 (副)： Academic Supervisor(sub)	

要旨 (和文 2000 字程度)

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters)

本研究では、計算論と代数学の関わりについて、3つの事例を取り上げる。それぞれの事例に対応して、本稿は3つの部からなる。

第1部ではラムダ計算の意味論を取り上げる。第1部は鹿島・松田との共同研究である。Barendregt は β 同値規則 (EQ β) なしの単純型付きラムダ計算の体系 $\lambda \rightarrow$ に対する健全な意味論を与えた。しかしながら、彼の与えた意味論は完全性をみたさないことが容易に確かめられる。第1部では、体系 $\lambda \rightarrow$ に対し、Barendregt の意味論を拡張した新たな意味論である「項空間意味論」と、それを制限した「プロパー項空間意味論」を導入する。項空間意味論が完全性をみたすが健全性はみたさないことと、プロパー項空間意味論が健全性と完全性の両方をみたすことを証明する。さらに、プロパー項空間意味論をさらに制限した「(弱)飽和項空間意味論」については、これが完全性をみたすか否かは同様の手法では証明できない、ということを示す反例となるラムダ項を与える。

第2部では有理数体の部分環に対する Hilbert の第10問題を取り上げる。Hilbert の第10問題 (HTP) とは、「与えられた整数係数の多変数多項式=0 という Diophantus 方程式が整数解を持つか否かを判定せよ」という決定問題である。Matiyasevich は Davis, Putnam, Robinson の結果を基に Hilbert の第10問題を否定的に解決した。しかしながら、方程式の解を探索する範囲を整数から有理数に変更した場合の Hilbert の第10問題 HTP ($\mathbb{Q}$) の決定不能性は未解決である。第2部では有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分環 R に対する Hilbert の第10問題 HTP (R) について、計算可能性理論の観点から調べる。「ジェネリックな」部分環 R に対する第10問題 HTP (R) の Turing 次数は HTP ($\mathbb{Q}$) の Turing 次数によって完全に決まることが Miller によって知られている。ここでは逆に、HTP ($\mathbb{Q}$) の Turing 次数がジェネリックな部分環 R に対する HTP (R) の Turing 次数によってほとんど決まってしまう、ということを示す。また、HTP ($\mathbb{Q}$) が決定不能であることの、Banach-Mazur ゲームを用いた特徴付けも与える。

第3部では群の語の問題と G オートマトンを取り上げる。有限生成群 G の語の問題とは、 G のある固定された有限生成系上の文字列で、 G において単位元を表すようなものの全体の集合として定義される。語の問題は定義から形式言語であるので、その計算論的・形式言語理論的な複雑さが自然に考えられる。例えば、Anisimov は有限生成群 G の語の問題が正則言語であることと、 G が有限群であることが同値であることを示し、また Muller と Schupp は (後の Dunwoody の結果と合わせて) 有限生成群 G の語の問題が文脈自由言語であることと、 G が実質的自由群であることが同値であることを示した。群 G に対し「 G オートマトン」とは、通常の有限オートマトンに G の元を保持するレジスターを付加したものである。 G オートマトンは計算の途中でレジスターの値に G の元をかけて更新することができ、入力文字列を読み終わったときに終了状態かつレジスターの値が単位元ならば入力文字列を受理する。Elder, Kambites, Ostheimer は有限生成群 H の語の問題が Z^n オートマトンで認識されることと、 H が階数 n 以下の実質的自由アーベル群であることが同値であることを示した。しかしながら、彼らの証明は幾何学的群論における Gromov の多項式増大度定理に依存しているため、いくぶん間接的であり、初等的とはいえない。第3部では Elder, Kambites, Ostheimer の結果に対する、直接的かつ組合せ論的な新しい証明を与える。

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ (T2R2) にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

(博士課程)
Doctoral Program

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 数学	系 コース	申請学位 (専攻分野)： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	(理学)
学生氏名： Student's Name	湯山 孝雄		指導教員 (主)： Academic Supervisor(main)	加藤 文元	
			指導教員 (副)： Academic Supervisor(sub)		

要旨 (英文 300 語程度)

Thesis Summary (approx.300 English Words)

We study some relations between computation theory and abstract algebra. This paper comprises three parts. Part one is about some semantics of simply-typed lambda calculus. Barendregt provided a sound, but not complete, semantics for the simple type assignment system $\lambda \rightarrow$. Two new semantics that we call term-space semantics and proper term-space semantics are introduced. We show that $\lambda \rightarrow$ is complete but not sound with respect to term-space semantics and is complete and sound with respect to proper term-space semantics. Part two is about Hilbert's tenth problem (HTP) over subrings of the rational numbers $\mathbb{Q}$. In 1970, Matiyasevich proved the undecidability of HTP. Contrastingly, the undecidability of HTP over $\mathbb{Q}$ is still open. Miller proved that, for a generic subring R of $\mathbb{Q}$, the Turing degree of HTP over R determines that of HTP over $\mathbb{Q}$. We show that, conversely, the Turing degree of HTP over R for a generic subring R of $\mathbb{Q}$ almost determines that of HTP over $\mathbb{Q}$. Part three is about word problems for finitely generated groups and G -automata. For a group G , a G -automaton is a finite automaton augmented with a register that contains an element of G . Such an automaton can update the register content by multiplying an element of G and accepts an input word if it can reach a final state and the register content is the identity element of G when the entire input word is read. Elder, Kambites, and Ostheimer showed that if a finitely generated group H has a word problem accepted by a Z^n -automaton, then H is virtually free abelian of rank at most n . However, their proof is somewhat indirect because it depends on Gromov's polynomial growth theorem. We give a new, elementary, and purely combinatorial proof to the theorem.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).