

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	疎性構造を持つ二次制約付き二次計画問題に対する厳密な求解条件について
Title(English)	On the Exactly Solvable Conditions of Quadratically Constrained Quadratic Program with Sparsity Structures
著者(和文)	東悟大
Author(English)	Godai Azuma
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12327号, 授与年月日:2023年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:山下 真,三好 直人,渡邊 澄夫,中野 張,澄田 範奈,福田 光浩
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12327号, Conferred date:2023/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of Graduate major in	数理・計算科学 数理・計算科学	系 コース	申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	（理学）
学生氏名： Student's Name	東 悟大		指導教員（主）： Academic Supervisor(main)	山下 真 教授	
			指導教員（副）： Academic Supervisor(sub)	福田 光浩 特定准教授	

要旨（和文 2000 字程度）

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters)

<p>本論文では疎性構造を持つ非凸二次制約付き二次計画問題(quadratically constrained quadratic programs: QCQP)に注目し、半正定値計画(semidefinite programming: SDP)緩和によって QCQP の最適値を計算できるために QCQP が満たすべき条件は何かという理論的な解析を行う。</p> <p>QCQP は二次不等式制約で表現される許容領域上で二次関数の最小化を求める非凸の数理最適化問題であり、センサーネットワーク位置同定問題や最大カット問題などの幅広い応用問題を持つ。しかし、その求解は一般に NP 困難なクラスに属するため、SDP 緩和を用いて多項式時間で緩和解を求めるといった方法が幅広く用いられている。与えられた QCQP とその SDP 緩和の最適値は一般には異なるが、特殊な条件下ではそれらの値は一致する。このとき SDP 緩和は狭小であると呼ばれ、緩和解から QCQP の最適解を復元できる。SDP 緩和が rank-1 の最適解を持つこととそれが狭小であることは等価である。この事実に基づいて、最近の研究では全ての二次関数が対角行列で表現される QCQP の SDP 緩和が狭小となる条件(狭小性条件)が提案され、複数の線型不等式系が解を持つかどうかを調べることで狭小性を判定できるようになった。本論文では QCQP の疎性構造に注目し、様々な疎性構造において狭小性条件を明らかにする。</p> <p>本論文は以下の 6 章から構成され、本論文の成果は第 3 章から第 5 章に記述される。</p> <p>第 1 章では、本研究で扱う数理最適化問題とその課題を示す。また、関連する先行研究についても紹介する。</p> <p>第 2 章では、凸最適化の一種である錐線型計画問題とそのサブクラスである SDP の性質について説明し、錐線型計画問題における最近の双対理論の概略をまとめる。その後、本研究の対象である QCQP とその解法の一つである SDP 緩和を紹介し、SDP 緩和が rank-1 の最適解を持つことと SDP 緩和が狭小であることが同値であることを示す。次に QCQP や SDP の非ゼロ要素のパターンに対応する疎性構造を定義する。この疎性構造を辺集合とみなして無向グラフを構成できる。本章の最後では、既存研究における狭小性条件をまとめる。</p> <p>第 3 章では、疎性構造が連結グラフとなるような QCQP に焦点を当て、2 つの狭小性条件を提案する。そのために、はじめに $n \times n$ 対称疎行列に関する補題を示す。補題の 1 つは、疎行列が特殊な疎性構造を持つ場合に、その疎行列のランクが $n - 1$ 以上となる条件である。強双対性のもとで、SDP 緩和が rank-1 の解を持つかどうかは、その双対問題の最適解のランクが $n - 1$ 以上であるかで判定できる。QCQP が疎性構造を持つとき双対問題の最適解もまた同型の疎性構造を持っているため、SDP 緩和の狭小性というのは前述の補題を用いることによって判定することができる。その結果として、本章では 2 つの狭小性条件を得る。1 つ目は疎性構造が木である場合に対する条件であり、1 個の半正定値制約、m 個の不等式制約、および 1 個の等式制約で構成される実行可能系の解の存在を調べることによって、QCQP の狭小性を判定できる。もう一方の条件は疎性構造が二部グラフである場合の条件であり、この場合の狭小性判定に要する系は 1 個の半正定値制約と $m + 1$ 個の不等式制約によって構成される。</p> <p>第 4 章では、第 3 章で証明した連結グラフ下での狭小性条件を非連結である場合に拡張する。この拡張では、QCQP の目的関数へ半負定値行列と正の定数 ϵ で表現される摂動を加えた「ϵ-摂動付 QCQP」の性質を用いる。具体的には、任意の ϵ において ϵ-摂動付 QCQP が狭小な SDP 緩和を持つならば、元の QCQP にも狭小な SDP 緩和が存在するという性質である。本章では、第 3 章の狭小性条件で「疎性構造の連結性」が満たされない場合でも、ϵ-摂動付 QCQP が常に狭小な SDP 緩和を持つような半負定値行列が存在することを証明し、狭小性条件から連結性の仮定を除去する。</p> <p>第 5 章では、QCQP のサブクラスに注目し、それらのクラスにおける結果について議論を深める。まず、1 つの等式制約のみを制約条件として持つ QCQP に対して、より簡易な狭小性条件を与える。この条件はいくつかの行列の半正定値性のみを確認するだけで判定できる。また、森や二部グラフの疎性構造を持たない QCQP の狭小性を調べるため、一般の QCQP を判定が容易な疎性構造の QCQP へ変換する 2 つの手法を提案する。1 つ目の手法は新しい変数を用いて、QCQP を構成する全ての行列を二部グラフ型の疎性構造を持つ行列に分解する方法である。この変換手法により、本論文の狭小性条件が行列要素の符号条件に基づく既存研究の成果をカバーしていること証明する。もう一方の変換手法は同時三重対角化に基づく方法であり、その適切なパラメータ設定を示すことで、QCQP のサブクラスの一つである一般化信頼領域部分問題の狭小性に対する別証明を与える。</p> <p>第 6 章では本論文の成果を総括し、本論文の結びとする。</p>
--

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note : Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数理・計算科学 数理・計算科学	系 コース	申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	（理学）
学生氏名： Student's Name	東 悟大		指導教員（主）： Academic Supervisor(main)	山下 真 教授	
			指導教員（副）： Academic Supervisor(sub)	福田 光浩 特定准教授	

要旨（英文 300 語程度）

Thesis Summary (approx.300 English Words)

Quadratically constrained quadratic program (QCQP) is a nonconvex optimization problem which minimizes a quadratic function over quadratic inequality constraints. The QCQP has a wide range of applications such as sensor network localization problems, and the max-cut problems. However, its solution is an NP-hard problem in general. One of attractive method to approximately solve QCQPs is by semidefinite programming (SDP) relaxation, whose optimal value gives a lower bound for the optimal value of the corresponding QCQP. The SDP relaxation is called exact when its optimal value coincides with that of the QCQP. In this case, we can recover the optimal solution of the QCQP from its SDP relaxation. Hence these conditions for QCQPs are extensively studied, and a well-known result is that the SDP relaxation is exact if and only if it has a rank-1 solution. Recently, based on the rank of solutions, exactness conditions for QCQPs whose data matrices are all diagonal were proposed.

This thesis studies exactness conditions from the aspect of sparsity structures of QCQPs. Contributions of this thesis are roughly divided into three.

The first contribution is to provide two exactness conditions for QCQPs with two types of the aggregated sparsity patterns: connected forest and connected bipartite. This result is obtained mainly from the rank estimation in the dual problem of the SDP relaxation by using the rank-bound conditions for sparse matrices. Second, the exactness conditions in the first contribution are generalized by employing a perturbation technique to QCQPs. The connectivity condition of the aggregated sparsity pattern is removed. Hence, the exactness conditions can be applied to QCQPs with disconnected forest or disconnected bipartite sparsity patterns. Third, this thesis discusses special classes of QCQPs such as QCQPs with only one equality constraint, QCQPs with all nonnegative off-diagonal elements, and the generalized trust-region subproblem. In particular, alternative proofs for the exactness of the latter two classes are provided by developing two distinct conversion methods for QCQPs.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note: Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).