論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	ベクトル値の平均曲率指定問題
Title(English)	Vectorial prescribed mean curvature problem
著者(和文)	塚本悠暉
Author(English)	Yuki Tsukamoto
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11864号, 授与年月日:2021年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:利根川 吉廣,隠居 良行,柳田 英二,小野寺 有紹,藤川 英華
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11864号, Conferred date:2021/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	審査の要旨
Type(English)	Exam Summary

（博士課程）

論文審査の要旨及び審査員

報告番号	甲第　　号	学位申請者氏名	塚本悠暉

		氏 名	職 名		氏 名	職 名
論文審査 審査員	主査	利根川吉廣	教授	審査員	藤川英華	准教授
	審査員	隠居良行	教授			
		柳田英二	教授			
		小野寺有紹	准教授			

論文審査の要旨（2000 字程度）本論文は“Vectorial prescribed mean curvature problem”と題し，英文全四章からなっている．平均曲率が０となる曲面である，極小曲面の存在を数学的に示す問題はプラトー問題と呼ばれる幾何解析学の中心的な問題である．より一般に任意に与えられた関数がその平均曲率と等しくなる曲面の存在を示す平均曲率指定問題についても多くの研究が行われてきた．一方で，与えられた関数が曲面の法ベクトルに依存する問題の研究は多くないなか，本論文では任意のベクトル場を与えたとき，そのベクトルの法線成分が曲面上の各点でその平均曲率ベクトルと一致する曲面の存在を，３つの異なる設定で示している．

第一章 “Introduction”では３つの異なる平均曲率指定問題についての説明，仮定および主結果がまとめられている．以下の３つの章はこれら主結果の証明となっている．

第二章 “Dirichlet problem in R^n”では，一般次元ユークリッド空間内の有界領域上でディリクレ境界条件を付したベクトル値の平均曲率指定問題が考察されている．関連する先行研究としては，Bergner が与えられるベクトル場が有界かつ単調で，有界領域が凸集合のとき，解の存在を示しており，また Marquardt はベクトル場について同条件下，有界領域が凸集合とは限らない，別の条件に緩めた場合の存在を示している．本論文では，これら先行研究とは異なる条件でディリクレ境界値問題を解いている．その条件とは与えられるベクトル場と境界値関数がソボレフノルムに関して十分小さいという条件であり，ベクトル場について有界性や単調性は必要ないものとなっている．また領域についても条件がないものとなっている点が興味深い．証明の方針は以下である．平均曲率指定問題は準線型楕円型方程式問題であるが，これを非発散型の楕円型線形問題に書き直す．この線形問題の解の存在と一意性を示し，その解のソボレフノルムを境界値と与えられたベクトル場によって評価する．境界値とベクトル場が十分小さいとき，適切な関数空間を定義することでシャウダーの不動点定理の条件を満たすことができ，この不動点が平均曲率指定問題の解となっている．

第三章 “Problem on torus”では，N 次元トーラス上でベクトル値の平均曲率指定問題を考察している．この問題は１次元トーラス上では考えられていたが，一般次元では考えられていない問題であった．本論文では以下の結果を得ている．与えられるベクトル場はトーラスと閉区間の積集合から N+1 次元ユークリッド空間への写像とする．このとき，ベクトル場のソボレフノルムが十分小さく，ベクトル場の第 N＋1 成分は単調性を持ち，またトーラス上での積分値がゼロのとき，この問題の解は存在する．ここで，単調性とソボレフノルムが十分小さいという条件は，この問題を線形化したときの解の存在と一意性を保証している．積分値の条件はトーラス上で楕円型方程式問題の解の存在を保証している．そのため，これらの条件はこの問題に対して自然な仮定となっている．証明の方針は以下である．初めに発散型の楕円型線形問題に書き直す．この問題について，与えられた関数に関する非同時問題はラックス・ミルグラムの定理を使うことで，関数の積分値がゼロのとき，解を持つことが示せる．単調性により，ベクトル場で考えたときも解の存在と一意性が保証され，また解のソボレフノルムを評価する．このとき，発散型のため正則性が第２章のディリクレ境界値問題より悪くなるが，弱位相に関するシャウダーの不動点定理を用いることで，不動点が存在し，この不動点がトーラス上での平均曲率指定問題の解となっている．

第四章 “Allen-Cahn equation”では，アレン・カーン方程式の特異摂動極限を用いて曲面の存在を示す手法を考察している．アレン・カーン方程式に，与えられたベクトル場を移流項として加えた問題の特異摂動を考える．このとき与えられたベクトル場のソボレフノルムと界面エネルギーが一様有界であれば，与えられたベクトル場の列と拡散界面はそれぞれ，あるベクトル場と曲面に弱い意味で収束し，曲面の平均曲率ベクトルは極限ベクトル場の法線成分と一致する．つまりベクトル値の平均曲率指定問題の解となっている．また，この結果を用いることで次を得ている．滑らかなコンパクト多様体上の与えられた関数について，この関数の勾配ベクトルの法線成分と平均曲率ベクトルが一致するような曲面が存在する．証明の方針は以下である．拡散界面の密度が上からも下からも一様有界であることを示す．これより，幾何学的測度論で重要な役割を持つ単調性公式が示せる．これと修正可能集合の収束，アラドの定理を使うことで，拡散界面が収束し，その平均曲率ベクトルは極限ベクトル場の法線成分と一致することが示される．

本論文は幾何解析学の古典的な問題である平均曲率指定問題に対して新しい視点からの３つの問題について考察したものであり，解析方法も独創的な工夫が多々見られ，理学上貢献するところが大きい．よって本論文は博士（理学）の学位論文として十分な価値があると認められる．